

ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΣΜΗΣ,
ΕΛΕΓΧΟΣ ΙΣΧΥΟΣ &
ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΑΣΥΡΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΑ

Εκπόνηση Διπλωματικής Εργασίας Από:
ΧΡΥΣΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ - ΠΗΝΕΛΟΠΗ

Επιβλέποντες Καθηγητές:
ΚΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ ΙΟΡΔΑΝΗΣ
ΤΣΟΥΚΑΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων
Οκτώβριος 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5067/1
Ημερ. Εισ.: 18-09-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΗΥΤΔ
2006
ΧΡΥ

ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΣΜΗΣ,
ΕΛΕΓΧΟΣ ΙΣΧΥΟΣ &
ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΑΣΥΡΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΑ

Εκπόνηση Διπλωματικής Εργασίας Από:
ΧΡΥΣΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ - ΠΗΝΕΛΟΠΗ

Επιβλέποντες Καθηγητές:
ΚΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ ΙΟΡΔΑΝΗΣ
ΤΣΟΥΚΑΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων
Οκτώβριος 2006

Διπλωματική Εργασία

Τίτλος: ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΣΜΗΣ,
ΕΛΕΓΧΟΣ ΙΣΧΥΟΣ &
ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΑΣΥΡΜΑΤΑ ΔΙΚΤΥΑ

Εκπόνηση: ΧΡΥΣΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ - ΠΗΝΕΛΟΠΗ

Επίβλεψη: ΚΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ ΙΟΡΔΑΝΗΣ
ΤΣΟΥΚΑΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Τμήμα: Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	x
1 Έλεγχος Ισχύος, Μορφοποίηση Δέσμης Και Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας	1
1.1 Γενικά	1
1.1.1 Έλεγχος Ισχύος	2
1.1.2 Μορφοποίηση Δέσμης	3
1.1.3 Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας	5
1.2 Σχετικές Μελέτες Και Αλγόριθμοι	6
1.2.1 Μορφοποίηση Δέσμης Στην Καθοδική Ζεύξη Με Διαφορετικούς SINR Περιορισμούς	6
1.2.2 Έλεγχος Ισχύος Και Μορφοποίηση Δέσμης Σε Ασύρματα Δίκτυα	10
2 Νέα Αντιμετώπιση	15
2.1 Περιγραφή του προβλήματος	15
2.2 Ανάλυση Προβλήματος	16
2.2.1 Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας	17
2.2.2 Θεωρήματα Βελτιστοποίησης Προβλήματος	18
2.3 Αλγόριθμοι	24
2.3.1 Ισχύς	24
2.3.2 Μορφοποίηση Δέσμης	29
2.3.3 Ισχύς Και Μορφοποίηση Δέσμης	31
3 Προσομοίωση	35
3.1 Γενικά Περί Προσομοίωσης	35
3.2 Δεδομένα Προσομοίωσης	36
3.3 Αποτελέσματα Προσομοίωσης	38
3.3.1 Ισχύς	38
3.3.2 Μορφοποίηση Δέσμης	43
3.3.3 Ισχύς Και Μορφοποίηση Δέσμης	45
3.4 Κώδικας Υλοποίησης Αλγορίθμων	50
3.4.1 Ισχύς	50
3.4.2 Μορφοποίηση Δέσμης	54

4 Μελλοντικές Μελέτες - Επεκτάσεις	57
4.1 Ουρές	57
Βιβλιογραφία	61

Κεφάλαιο 1

Έλεγχος Ισχύος, Μορφοποίηση Δέσμης Και Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας

1.1 Γενικά

Με τη συνεχόμενη αύξηση των ασύρματων δικτύων και την εμφάνιση νέων εφαρμογών που απαιτούν υψηλό εύρος μετάδοσης, κρίνεται αναγκαία η απαίτηση για εξασφάλιση μεγαλύτερου εύρους δεδομένων. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούνται πλήρως οι πόροι του δικτύου ώστε να μεγιστοποιηθεί η ικανοποίηση των χρηστών και να αυξηθεί η απόδοση του δικτύου.

Σκοπός των μελετητών των ασύρματων δικτύων είναι η εύρεση μηχανισμών και αλγορίθμων που αυξάνουν την απόδοση του συστήματος. Η διακαναλική παρεμβολή (CCI - *Cochannel Interference*) και η διασυμβολική παρεμβολή (ISI - *Intersymbol Interference*) είναι από τις κύριες αιτίες που υποβαθμίζουν την απόδοση μιας ασύρματης ζεύξης. Ο έλεγχος ισχύος (*Power Control*) και η μορφοποίηση δέσμης (*Beamforming*) αποτελούν δύο τεχνικές βελτίωσης της απόδοσης των ασύρματων δικτύων, καθώς ελέγχουν τη διακαναλική και τη διασυμβολική παρεμβολή. Επίσης, έχουν γίνει μελέτες για το μετριασμό της παρεμβολής μεταξύ των καναλιών επικοινωνίας οδηγώντας το σηματοθορυβικό λόγο (**SINR** - *Signal to Interference and Noise Ratio*) κάτω από ένα προκαθορισμένο αποδεκτό κατώφλι. Η εύρεση των ισχύων μετάδοσης αυτού του προβλήματος είναι κατάλληλη για την ικανοποίηση απαιτήσεων σε συστήματα υψηλής ποιότητας υπηρεσίας (**QoS** - *Quality of Service*), όπως η κυκλοφορία φωνής. Οι μηχανισμοί ελέγχου ισχύος, πρώτα, σταθεροποιούν τις ισχύεις μετάδοσης και έπειτα ελέγχουν το σηματοθορυβικό

λόγο, SINR. Εάν είναι χαμηλός τότε αυξάνεται η ισχύς, διαφορετικά μειώνεται. Με αυτό τον τρόπο βελτιώνεται η ποιότητα των αδύναμων καναλιών. Στους μηχανισμούς μορφοποίησης δέσμης, οι δέκτες προσαρμόζουν τις δέσμες των κεραιών τους με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν σταθερό κέρδος προς την κατεύθυνση του αντίστοιχου πομπού τους, ενόσω η συνολική ισχύς παρεμβολής ελαχιστοποιείται στην έξοδό τους. Με αποτέλεσμα να λαμβάνεται με μεγαλύτερο κέρδος το σήμα που μας ενδιαφέρει.

Ωστόσο, με την εξάπλωση των ασύρματων μεταδόσεων δεδομένων, πολλά συστήματα είναι πιο ελαστικά, με αποτέλεσμα να λειτουργούν κάτω από μεγάλο εύρος τιμών SINRs. Οι ελαστικές απαιτήσεις λαμβάνονται υπόψιν κατά το μετασχηματισμό του προβλήματος ελέγχου ισχύος σε συναρτήσεις ωφελιμότητας (*utility functions*). Για παράδειγμα, τα δεδομένα και η φωνή ορίζουν διαφορετικές ωφελιμότητες, οι οποίες εν συνεχεία μεταφράζονται σε διαφορετικά επίπεδα ικανοποίησης των χρηστών και εξαρτώνται από το εύρος μετάδοσης και την κατανάλωση ισχύος. Δηλαδή, η απόδοση ενός συστήματος επικοινωνίας, κάποιες φορές, ορίζεται ως η ωφελιμότητα που παρουσιάζει το δίκτυο, δηλαδή το άθροισμα όλων των ωφελιμοτήτων των χρηστών. Η συνάρτηση ωφελιμότητας κάθε χρήστη εξαρτάται από το εύρος μετάδοσης που αντιστοιχεί σε αυτόν. Υπάρχουν μέθοδοι μεγιστοποίησης της συνολικής ωφελιμότητας του δικτύου στις οποίες κάθε χρήστης υπολογίζει το εύρος που του αντιστοιχεί μεγιστοποιώντας τη δική του ωφελιμότητα. Κατά τη θεωρία παιγνίων, όπως γνωρίζουμε, σε ένα μη-συνεργάσιμο περιβάλλον, οι χρήστες που συμπεριφέρονται εγωιστικά, προσαρμόζουν τις ισχύεις τους ξεχωριστά, μεγιστοποιώντας τη δική τους ωφελιμότητα στο δίκτυο. Σε άλλη περίπτωση, εστιάζοντας σε όλο το σύστημα, ο σκοπός είναι η εύρεση των ισχύων εκείνων που μεγιστοποιούν τη συνολική ωφελιμότητα όλου του δικτύου. Στις δύο αυτές βελτιστοποιήσεις, οι λύσεις δεν συμβαδίζουν, δηλαδή ακόμα και αν στην πρώτη περίπτωση το παιχνίδι καταλήξει σε *Nash equilibrium* μπορεί να μην βελτιστοποιείται, τελικά, η συνολική ωφελιμότητα του δικτύου.

1.1.1 Έλεγχος Ισχύος

Ένας από τους σημαντικότερους πόρους σε ένα σύστημα επικοινωνίας είναι η ισχύς μετάδοσης. Όταν χρησιμοποιείται αποτελεσματικά αυξάνεται η χωρητικότητα του συστήματος και η ποιότητα της επικοινωνίας. Ένα μέτρο για την ποιότητα της επικοινωνίας αποτελεί ο λόγος του φέροντος προς την παρεμβολή (*Carrier-to-interference Ratio - CIR*) στο δέκτη. Η κεντρική

ιδέα στους μηχανισμούς ελέγχου ισχύος είναι η μεγιστοποίηση του ελαχίστου CIR σε κάθε κανάλι του συστήματος. Οι μηχανισμοί κεντρικού ελέγχου ισχύος (*Central Power Control - CPC*) απαιτούν έναν κεντρικό ελεγκτή ο οποίος γνωρίζει για όλες τις ζεύξεις στο σύστημα. Για αυτό το λόγο, δεν είναι εύκολη η εφαρμογή τέτοιων μηχανισμών. Ωστόσο, ο CPC βοηθά στο σχεδιασμό κατανεμημένων αλγορίθμων ελέγχου ισχύος, οι οποίοι υλοποιούνται εύκολα.

Επίσης, η σωστή κατανομή ισχύος θεωρείται κρίσιμη στα ασύρματα δίκτυα για την εξασφάλιση μεγαλύτερης διάρκειας ζωής στις κινητές συσκευές αλλά και για την αύξηση της ωφελιμότητας στο φάσμα που είναι περιορισμένο. Ο έλεγχος ισχύος παρέχει έναν έξυπνο τρόπο για την εύρεση των ισχύων μετάδοσης επιτυγχάνοντας έτσι το στόχο της ποιότητας της υπηρεσίας (*Quality of Service - QoS*) που απαιτούν τα ασύρματα κανάλια. Οι συνήθεις μηχανισμοί ελέγχου ισχύος, είτε κατανεμημένων υπολογισμών είτε συγκεντρωτικών, βασίζονται κυρίως στην παρατήρηση του σηματοθορυβικού λόγου, SINR, στο δέκτη ή στα κέρδη όλων των ζεύξεων. Δηλαδή, όποτε αλλάζει κάποια κατάσταση στο κανάλι, όπως αλλαγή κάποιου κέρδους ζεύξης, οι ισχύεις πρέπει να ενημερώνονται. Όμως, σε ασύρματα κανάλια επικοινωνίας όπου η σκίαση μπορεί να αλλάξει μέσα σε λίγα *milliseconds* αυτοί οι μηχανισμοί δεν είναι πρακτικοί, καθώς, επίσης οι συχνές ενημερώσεις ισχύος καταναλώνουν μεγάλο μέρος από την ενέργεια επεξεργασίας σήματος. Για αυτό το λόγο, υπάρχουν και μηχανισμοί όπου η ενημέρωση των ισχύων γίνεται με βάση τις στατιστικές ιδιότητες του SINR και όχι κάθε φορά που αλλάζει η κατάσταση σκίασης στο κανάλι.

1.1.2 Μορφοποίηση Δέσμης

Η φασματική απόδοση των μελλοντικών ασύρματων συστημάτων μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά χρησιμοποιώντας μετάδοση σημάτων από πολλαπλές κεραιές (*multiantennas*), οι οποίες εκμεταλλεύονται τα χωρικά χαρακτηριστικά του καναλιού μετάδοσης. Η χωρική διάσταση, η οποία παρέχεται από τον πίνακα της πολλαπλής κεραιάς, λειτουργεί ως έναν επιπλέον πόρο στο σύστημα, μαζί με τους κλασικούς πόρους της ισχύος και του εύρους ζώνης (*bandwidth*). Έτσι, ανάλογα με τον αριθμό των κεραιών και τη σχετική τους θέση στον χώρο μπορούμε να επιτύχουμε μεγάλα κέρδη απόδοσης. Ωστόσο, αυτά τα κέρδη αυξάνουν το κόστος υλοποίησης καθώς χρειάζονται πολυπλοκότερα συστήματα *hardware* με αποτέλεσμα να κρίνεται απαγορευτική η χρήση τους σε συστήματα που απαιτείται χαμηλό κόστος, όπως κινητά τερματικά με

περιορισμένο μέγεθος και περιορισμένη χωρητικότητα αποθήκευσης ενέργειας. Λόγω αυτού, οι πολλαπλές κεραίες εφαρμόζονται μόνο στους σταθμούς βάσης (*Base Station*), ενώ τα κινητά τηλέφωνα είναι εξοπλισμένα με απλές κεραίες.

Κατά την επεξεργασία των σημάτων στο σταθμό βάσης, δηλαδή στην πολλαπλή κεραία, σχηματίζονται μοτίβα σύμφωνα με την ακτινοβολία του κάθε χρήστη, τα οποία είναι γνωστά ως δέσμες (*beams*). Εάν είναι διαθέσιμες οι πληροφορίες του καναλιού οι δέσμες αυτές προσαρμόζονται έτσι ώστε να ελέγχονται οι διαφορετικοί σηματοδοτητικοί λόγοι - SINRs των χρηστών. Η μορφοποίηση δέσμης (*beamforming*) εφαρμόζεται και στην ανοδική ζεύξη (*uplink*) και στην καθοδική (*downlink*), ωστόσο υπάρχουν μερικές σημαντικές διαφορές:

Στην ανοδική ζεύξη, δεδομένης της κατανομής ισχύος, τα *beamformers*, δηλαδή τα βάρη της κεραίας για όλους τους χρήστες, τα οποία μεγιστοποιούν τα SINRs, υπολογίζονται από την επίλυση ανεξάρτητων προβλημάτων εύρεσης ιδιοτιμών. Στην καθοδική ζεύξη, η εύρεση των *beamformers* είναι πολυπλοκότερη καθώς πρέπει να βελτιστοποιηθούν από κοινού. Σε σενάρια όπου επιτρέπεται η μη ορθογώνια μετάδοση, μια συγκεκριμένη επιλογή του *beamformer* ενός χρήστη επηρεάζει τις επιλογές των υπόλοιπων χρηστών, κάτι που καθιστά το *beamforming* για την καθοδική ζεύξη δυσκολότερο.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η χωρητικότητα σε ένα κυψελοειδές σύστημα περιορίζεται από την διακαναλική παρεμβολή (*CCI - Cochannel Interference*) και από την διασυμβολική παρεμβολή (*ISI - Intersymbol Interference*). Η μεν, πρώτη οφείλεται στο ότι οι χρήστες χρησιμοποιούν το ίδιο κανάλι, ενώ η δε, δεύτερη προκαλείται από τα στοιχεία που καταφθάνουν καθυστερημένα όταν η καθυστέρηση διάδοσης είναι μεγαλύτερη από τη διάρκεια του συμβόλου. Κατά την ανοδική ζεύξη, χρησιμοποιούνται μηχανισμοί προσαρμογής του *beamforming* λήψης ώστε να μειωθούν οι *CCI* και *ISI* και να βελτιωθεί η χωρητικότητα του καναλιού ρυθμίζοντας τις δέσμες (*beams*) έτσι ώστε να αυξηθεί αποτελεσματικά στην έξοδο του *beamformer* το SINR του. Για τη μείωση της *CCI* χρησιμοποιούνται κενά στην κατεύθυνση των παρεμβολών ενώ το κέρδος κατά την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος παραμένει σταθερό. Σε πολυδιαδρομική μετάδοση όπου τα σήματα καταφθάνουν με μεγάλη καθυστέρηση διάδοσης, ο *beamformer* απορρίπτει την *ISI* τοποθετώντας κενά κατά τη κατεύθυνση αυτών των σημάτων, ενώ το επιθυμητό σήμα θεωρείται το σήμα που λαμβάνεται από το βασικό μονοπάτι.

Η μορφοποίηση δέσμης έχει δύο διαφορετικές κατηγορίες, το *beamforming* μετάδοσης (*transmit beamforming* ή *transmit diversity*) και *beamforming* λήψης (*receiver beamforming*). Το *beamforming* λήψης εφαρμόζεται ανεξάρτητα σε κάθε δέκτη χωρίς να επηρεάζεται η απόδοση των υπόλοιπων ζεύξεων ενώ το *beamforming* μετάδοσης σε κάθε πομπό αλλάζει την παρεμβολή στους άλλους πομπούς, με αποτέλεσμα να πρέπει να βελτιστοποιηθεί από κοινού σε όλο το δίκτυο.

1.1.3 Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας

Η απόδοση της επικοινωνίας ενός συστήματος μετρείται επίσης από τη συνάρτηση ωφελιμότητας του δικτύου. Κάθε χρήστης υποτίθεται ότι έχει μια συνάρτηση ωφελιμότητας που εξαρτάται από το εύρος μετάδοσης που του αντιστοιχεί. Το άθροισμα των συναρτήσεων ωφελιμότητας όλων των χρηστών αποτελεί την ωφελιμότητα όλου του δικτύου. Η μεγιστοποίηση της ωφελιμότητας του δικτύου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα πάνω στα οποία έχουν γίνει αρκετές μελέτες.

Έως σήμερα, έχουν σχεδιαστεί αρκετοί αλγόριθμοι οι οποίοι επιλύουν το πρόβλημα της μεγιστοποίησης ωφελιμότητας του δικτύου (*Network Utility Maximization - NUM*) και βρίσκουν εφαρμογή σε κατανεμημένους μηχανισμούς κατανομής εύρων μετάδοσης σε δίκτυα και σε πρωτόκολλα ελέγχου συνωστισμού στο Διαδίκτυο. Ο σημαντικότερος, όμως, περιορισμός, σε τέτοιου είδους προβλήματα, είναι η υπόθεση ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας κάθε χρήστη είναι αυστηρά κοίλη, το οποίο δεν ισχύει σε όλες τις εφαρμογές που χρειάζεται να μεγιστοποιηθεί η ωφελιμότητα.

Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα μεγιστοποίησης ωφελιμότητας είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} & \max \sum_s U_s(x_s) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{s \in S(l)} x_s \leq c_l, \quad \forall l \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

όπου \mathbf{x} είναι οι μεταβλητές. Το (1.1.1), λόγω των υποθέσεων, επιλύεται εύκολα, αλλά δεν εφαρμόζεται, καθώς οι πραγματικές συναρτήσεις ωφελιμότητας, U_s , μπορεί να μην είναι κοίλες, στο πεδίο όπου ορίζονται. Ωστόσο, στις περισσότερες μελέτες γίνεται η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις

είναι κοίλες με αποτέλεσμα να γίνεται χρήση των ιδιοτήτων που παρουσιάζει ένα τέτοιο πρόβλημα. Δηλαδή, ισχύει ότι σε ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης η λύση που βρίσκεται είναι ολικά βέλτιστη καθώς και ότι κατά την ελαχιστοποίηση διαχωρίσιμων αντικειμενικών συναρτήσεων ο αλγόριθμος εφαρμόζεται κατανεμημένα. Με αφορμή τις προηγούμενες ιδιότητες που διευκολύνουν κατά πολύ την επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης ωφελιμότητας γίνεται συνήθως η αυθαίρετη υπόθεση περί κυρτότητας του προβλήματος.

1.2 Σχετικές Μελέτες Και Αλγόριθμοι

1.2.1 Μορφοποίηση Δέσμης Στην Καθοδική Ζεύξη Με Διαφορετικούς SINR Περιορισμούς

Μορφοποίηση Προβλήματος

[15] Υποθέτουμε ότι υπάρχουν K χρήστες που πρέπει να επιτύχουν τους διαφορετικούς στόχους SINRs, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K$ κατά την επικοινωνία τους στην καθοδική ζεύξη. Η συνολική ισχύς που είναι διαθέσιμη στο σταθμό βάσης περιορίζεται από το P_{max} . Όλα τα κατώφλια των SINRs επιτυγχάνονται αν και μόνον αν:

$$\min_{1 \leq i \leq K} \frac{SINR_i^{DL}}{\gamma_i} \geq 1,$$

όπου DL σημειώνουμε την καθοδική ζεύξη και UL την ανοδική ζεύξη. Κάθε SINR εξαρτάται από την επιλογή όλων των *beamformers* και των ισχύων μετάδοσης. Επομένως, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εξασφαλίσουμε την επιτευξιμότητα της λύσης είναι να μεγιστοποιήσουμε το παραπάνω, για όλα τα πιθανά *beamformers* και τις ισχύεις μετάδοσης, δηλαδή το πρόβλημα γίνεται:

$$\max \left(\min_{1 \leq i \leq K} \frac{SINR_i^{DL}}{\gamma_i} \right), \quad \text{με τον περιορισμό της συνολικής ισχύος.}$$

Σχετικές μελέτες έχουν γίνει και παλαιότερα, αλλά στην πιο απλή δομή, δηλαδή με απλές κεραίες. Παρ' όλες τις ομοιότητες με τις πολλαπλές κεραίες στην δεύτερη περίπτωση το πρόβλημα

είναι πιο πολύπλοκο καθώς υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της ισχύος και των *beamformers*. Το παραπάνω πρόβλημα έχει υπολογιστεί για σταθερό *beamforming* στο [22] ενώ το συγκεκριμένο επιλύεται στο [15], από όπου θα αναφέρουμε και τα παρακάτω.

Ανάλυση Περιβάλλοντος

[15] Υποθέτουμε, κατά την καθοδική ζεύξη (downlink), ένα σταθμό βάσης με πολλαπλή κεραία, M στοιχείων ο οποίος στέλνει ανεξάρτητες πληροφορίες $s_i(t)$, $1 \leq i \leq K$ σε K χρήστες, με απλές κεραίες. Στην γενική περίπτωση ισχύει ότι ο αριθμός των στοιχείων της πολλαπλής κεραίας είναι μικρότερος από τον αριθμό των χρηστών, δηλαδή $M < K$, επομένως μόνο M από τις K πληροφορίες χρηστών θα σταλθούν τελικά από το σταθμό βάσης. Η εκπομπή των πληροφοριών γίνεται μέσω μορφοποίησης δέσμης (*beamforming*) στην πολλαπλή κεραία, έτσι, σημειώνουμε με $\mathbf{u}_i \in \mathcal{C}^M$, $1 \leq i \leq M$, τα K διανύσματα μορφοποίησης δέσμης (*beamforming vectors*) που αντιστοιχούν σε κάθε χρήστη, αντίστοιχα. Για διευκόλυνσή μας, ορίζουμε τον $M \times K$ πίνακα $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K]$ που περιέχει όλα τα διανύσματα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης ότι τα διανύσματα έχουν μέτρο μονάδα, δηλαδή $\|\mathbf{u}_i\|_2 = 1$, $\forall i = 1, \dots, K$.

Οι ισχύεις μετάδοσης κατά την καθοδική ζεύξη, είναι $p_i = \mathcal{E}\{|s_i(t)|^2\}$, $1 \leq i \leq K$, όπου $\mathcal{E}\{\cdot\}$ θεωρούμε τη μέση τιμή. Ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_K]$, οπότε η συνολική ισχύς μετάδοσης είναι $\|\mathbf{p}\|_1$. Επίσης ορίζουμε το διάνυσμα ισχύων μετάδοσης των χρηστών, κατά την ανοδική ζεύξη, $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_K]$. Η συνολική τιμή για την καθοδική και ανοδική ζεύξη περιορίζεται από την τιμή P_{max} .

Η εξασθένιση του καναλιού μεταξύ του i -οστού χρήστη και του σταθμού βάσης ορίζουν το *spatial signature* $\mathbf{h}_i \in \mathcal{C}^M$ - συναρτήσεως του χρόνου, ενώ οι *spatial covariance* πίνακες είναι οι: $\mathbf{R}_i = \mathcal{E}\{\mathbf{h}_i(t)\mathbf{h}_i^H(t)\}$, $\forall i = 1, \dots, K$. Υποθέτουμε ότι μεταξύ των καναλιών, καθοδικής και ανοδικής ζεύξης υπάρχει αμοιβαιότητα, δηλαδή και οι δύο ζεύξεις περιγράφονται από τους ίδιους *spatial covariance* πίνακες.

Για την επίλυση του προβλήματος ορίζουμε το μη αρνητικό πίνακα Ψ , σα συνάρτηση του \mathbf{U} :

$$[\Psi(\mathbf{U})]_{ik} = \begin{cases} \mathbf{u}_k^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i, & k \neq i \\ 0, & k = i \end{cases}$$

ο οποίος χαρακτηρίζει τη σύζευξη μεταξύ των καναλιών και τους πίνακες:

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\frac{\gamma_1}{\tilde{\mathbf{u}}_1^H \mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1}, \dots, \frac{\gamma_K}{\tilde{\mathbf{u}}_K^H \mathbf{R}_K \tilde{\mathbf{u}}_K} \right)$$

$$\text{και } \Upsilon(\mathbf{U}, P_{max}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\Psi(\mathbf{U}) & \mathbf{D}\sigma \\ \frac{1}{P_{max}} \mathbf{1}^T \mathbf{D}\Psi(\mathbf{U}) & \frac{1}{P_{max}} \mathbf{1}^T \mathbf{D}\sigma \end{bmatrix}$$

όπου $\tilde{\mathbf{u}}_i$ αποτελεί το σταθεροποιημένο *beamforming* για τον i χρήστη.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και δεδομένου ότι τα SINRs, για την ανοδική και καθοδική ζεύξη αντίστοιχα, εκφράζονται με τους παρακάτω τύπους:

$$SINR_i^{UL}(\mathbf{u}_i, \mathbf{q}) = \frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i}, \quad \forall i, \quad (1.2.1)$$

$$SINR_i^{DL}(\mathbf{U}, \mathbf{p}) = \frac{p_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\sum_{k=1, k \neq i}^K p_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_k + \sigma^2}, \quad \forall i. \quad (1.2.2)$$

αποδεικνύεται ότι στο πρόβλημα:

$$C^{DL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) = \max_{\mathbf{p}} \min_{1 \leq i \leq K} \frac{SINR_i^{DL}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{p})}{\gamma_i}, \quad 1 \leq i \leq K$$

με περιορισμό $\|\mathbf{p}\|_1 \leq P_{max}$

και $\tilde{\mathbf{U}}$ ο σταθεροποιημένος πίνακας *beamforming*, η βέλτιστη λύση είναι η εξής:

$$C^{DL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) = \frac{SINR_i^{DL}(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{p}})}{\gamma_i}$$

με περιορισμό $P_{max} = \|\tilde{\mathbf{p}}\|_1$

$$\Rightarrow C^{DL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) = \frac{1}{\lambda_{max}(\Upsilon(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}))}$$

με $\lambda_{max}(A)$ η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A ενώ το βέλτιστο διάνυσμα ισχύος $\tilde{\mathbf{p}}$ λαμβάνεται από το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Αντίστοιχα, για την ανοδική ζεύξη, αποδεικνύεται ότι για το πρόβλημα

$$C^{UL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) = \max_{\mathbf{q}} \min_{1 \leq i \leq K} \frac{SINR_i^{UL}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{q})}{\gamma_i}, \quad 1 \leq i \leq K$$

με περιορισμό $\|\mathbf{q}\|_1 \leq P_{max}$

λαμβάνουμε τη βέλτιστη λύση:

$$C^{UL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) = \frac{1}{\lambda_{max}(\Lambda(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}))}$$

όπου

$$\Lambda(\mathbf{U}, P_{max}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}\Psi(\mathbf{U}) & \mathbf{D}\sigma \\ \frac{1}{P_{max}} \mathbf{1}^T \mathbf{D}\Psi(\mathbf{U}) & \frac{1}{P_{max}} \mathbf{1}^T \mathbf{D}\sigma \end{bmatrix}.$$

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι για δεδομένα $\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}$ και για ίδιο θόρυβο $\sigma = \sigma^2 \mathbf{1}$ με $\sigma^2 = \sigma_i^2$ για κάθε δέκτη i , η βέλτιστη λύση στην καθοδική ζεύξη και η βέλτιστη λύση στην ανοδική ζεύξη είναι ίσες. Δηλαδή:

$$C^{DL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) = C^{UL}(\tilde{\mathbf{U}}, P_{max}) \quad (1.2.3)$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης, ο αλγόριθμος επικεντρώνεται στην επίλυση του εικονικού προβλήματος ανοδικής ζεύξης, με τους spatial covariance πίνακες $\tilde{\mathbf{R}}_i = \frac{\mathbf{R}_i}{\sigma_i^2}$ και $\sigma_i^2 = 1, \forall i$, το οποίο έχει την ίδια λύση με το πραγματικό πρόβλημα καθοδικής ζεύξης.

Για δεδομένο $[\mathbf{q}_{ext}] = [\mathbf{q}^T, 1]^T$ το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε K υποπροβλήματα:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \arg \max_{\mathbf{u}_i} \frac{\mathbf{u}_i^H \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_{ext}) \mathbf{u}_i}, \text{ s.t. } \|\mathbf{U}_i\|_2 = 1, \forall i \quad (1.2.4)$$

$$\text{όπου } \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_{ext}) = \sum_{k \neq i}^K [\mathbf{q}_{ext}]_k \tilde{\mathbf{R}}_k + \mathbf{I}, \forall i$$

Αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα είναι ο ακόλουθος:

1. $n \leftarrow 0, \mathbf{q}^{(0)} = [0, \dots, 0]^T$

2. $\widetilde{\mathbf{R}}_i \leftarrow \frac{\mathbf{R}_i}{\sigma_i^2}, 1 \leq i \leq K$
3. $\sigma_i \leftarrow 1, 1 \leq i \leq K$
4. **repeat**
5. $n \leftarrow n + 1$
6. $\mathbf{u}_i^{(n)} \leftarrow \mathbf{u}_{max}(\widetilde{\mathbf{R}}_i, \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}^{(n-1)})), 1 \leq i \leq K$
7. $\mathbf{u}_i^{(n)} \leftarrow \frac{\mathbf{u}_i^{(n)}}{\|\mathbf{u}_i^{(n)}\|_2}, 1 \leq i \leq K$
8. solve $\Lambda(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{P}_{max}) [\mathbf{q}^{(n)T}, 1]^T = \lambda_{max}(n) [\mathbf{q}^{(n)T}, 1]^T$
9. $C^{(n)} \leftarrow \frac{1}{\lambda_{max}(n)}$
10. **until** $\lambda_{max}(n-1) - \lambda_{max}(n) < \epsilon$
11. compute the downlink power allocation \mathbf{p}^{opt} , by solving:

$$\Upsilon(\mathbf{U}^{(n)}, \mathbf{P}_{max}) [\mathbf{p}^{(opt)T}, 1]^T = \lambda_{max}(n) [\mathbf{p}^{(opt)T}, 1]^T$$

1.2.2 Έλεγχος Ισχύος Και Μορφοποίηση Δέσμης Σε Ασύρματα Δίκτυα

Ο έλεγχος ισχύος και η μορφοποίηση δέσμης έχουν απασχολήσει ξεχωριστά τους μελετητές των ασύρματων δικτύων, οι οποίοι αναζητούν λύσεις ώστε να αυξήσουν την απόδοση ικανοποιώντας έτσι τους χρήστες του δικτύου. Τελευταία, γίνονται προσπάθειες για από κοινού βελτιστοποίηση των δύο μηχανισμών.

Ανάλυση Περιβάλλοντος

[7],[8] Μελετάμε ένα σύνολο από κανάλια, κατά την ανοδική ζεύξη όπου μόνο οι δέκτες έχουν πολλαπλές κεραίες. Μέσω ενός αλγορίθμου, υπολογίζονται οι ισχύεις μετάδοσης και τα βάρη των *beamforming* διανυσμάτων με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται ένας στόχος-κατώφλι SINR για κάθε ζεύξη, εάν είναι επιτεύξιμος, με την ελάχιστη ισχύ. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται κατανεμημένα σε κάθε κόμβο. Για σταθεροποιημένη κατανομή ισχύος, κάθε σταθμός βάσης μεγιστοποιεί το SINR σύμφωνα με τον *MVDR beamformer* (*Minimum Variance*

Distortionless Response Beamformer). Έπειτα οι ισχύεις αναβαθμίζονται μειώνοντας τη διακαναλική παρεμβολή, CCI. Τέλος, επαναλαμβάνονται τα βήματα έως ότου τα διανύσματα της ισχύος και του *beamforming* βαρών να συγχλίνουν στο από κοινού βέλτιστο σημείο.

Μορφοποίηση Προβλήματος

Έλεγχος Ισχύος ([7],[8]) Έστω ένα σύνολο από M ζεύγη πομπών και δεκτών που χρησιμοποιούν το ίδιο κανάλι επικοινωνίας (FDMA, TDMA ή CDMA). Υποθέτοντας ότι το κέρδος της ζεύξης από τον πομπό i στο δέκτη j είναι G_{ij} , η ισχύς του i -οστού πομπού είναι P_i και ο θερμικός θόρυβος στον i -οστό δέκτη είναι N_i , τότε για μια ισοτροπική κεραία, δηλαδή προς όλες τις κατευθύνσεις μοναδιαίο κέρδος, το SINR είναι ίσο με:

$$\Gamma_i = \frac{G_{ii}P_i}{\sum_{j \neq i}^M G_{ji}P_j + N_i}$$

Η ποιότητα του καναλιού είναι αποδεκτή μόνον εάν το Γ_i είναι πάνω από ένα στόχο-κατώφλι γ_0 , δηλαδή: $\Gamma_i \geq \gamma_0$, $1 \leq i \leq M$ και με τη μορφή πινάκων:

$$[\mathbf{I} - \gamma_0 \mathbf{F}] \mathbf{P} \geq \mathbf{u} \quad (1.2.5)$$

όπου:

$$\mathbf{P} = [P_1 P_2, \dots, P_M]^T, \quad \mathbf{F} = \begin{cases} 0 & \text{εάν } i = j \\ \frac{G_{ji}}{G_{ii}} > 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\mathbf{u} = [u_i]_i, \quad 1 \leq i \leq M \text{ με } u_i = \frac{\gamma_0 N_i}{G_{ii}}.$$

Το κατώφλι γ_0 επιτυγχάνεται μόνο όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα \mathbf{P} για το οποίο ισχύει η ανισότητα (1.2.5).

Έτσι το πρόβλημα ελέγχου ισχύος ορίζεται ως ακολούθως:

$$\min \sum_i P_i$$

$$\text{s.t. } [\mathbf{I} - \gamma_0 \mathbf{F}] \mathbf{P} \geq \mathbf{u}$$

Αποδεικνύεται ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η:

$$\hat{\mathbf{P}} = [\mathbf{I} - \gamma_0 \mathbf{F}]^{-1} \mathbf{u}$$

Έτσι προκύπτει ο κατανεμημένος αλγόριθμος για την εύρεση του διανύσματος ισχύος, όπου λαμβάνει χώρα η παρακάτω επανάληψη:

$$P^{(n+1)} = \frac{\gamma_0}{G_{ii}} \left(\sum_{j \neq i}^M G_{ji} P_j^{(n)} + N_i \right) = \frac{\gamma_0}{G_{ii}} I_i$$

Όπου I_i είναι η παρεμβολή στον i -οστό δέκτη. Επομένως, είναι φανερό ότι κάθε πομπός υπολογίζει σε κάθε επανάληψη την ισχύ που θα μεταδώσει γνωρίζοντας την παρεμβολή σε όλους τους δέκτες και το κέρδος ζεύξης στον δέκτη του. Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω επανάληψη συγκλίνει στο βέλτιστο διάνυσμα ισχύος $\hat{\mathbf{P}}$.

Μορφοποίηση Δέσμης ([7],[8]) Συμβολίζουμε με \mathbf{w}_i το βάρος του *beamforming* διανύσματος του i -οστού δέκτη, με $\mathbf{a}_{ji} = \sum_{l=1}^L \alpha_{ji}^l \mathbf{v}_j(\theta_l)$ το *spatial signature*, με α_{ji}^l την εξασθένιση λόγω της σκίασης στο l -οστό μονοπάτι και με $\mathbf{v}(\theta) = [v^k(\theta)]_k$ την απόκριση της κεραίας, K στοιχείων, του κάθε δέκτη, στην κατεύθυνση θ . Τότε, ο πίνακας συσχέτισης (*correlation matrix*) Φ_i του σήματος στον i -οστό δέκτη είναι:

$$\Phi_i = \sum_{j \neq i} P_j G_{ji} \mathbf{a}_{ji} \mathbf{a}_{ji}^H + N_i \mathbf{I} + P_i G_{ii} \mathbf{a}_{ii} \mathbf{a}_{ii}^H = \Phi_{in} + P_i G_{ii} \mathbf{a}_{ii} \mathbf{a}_{ii}^H$$

με Φ_{in} ο πίνακας συσχέτισης του ανεπιθύμητου σήματος και N_i η ισχύς του θορύβου.

Αποδεικνύεται ότι βέλτιστο διάνυσμα βαρών είναι το ακόλουθο:

$$\hat{\mathbf{w}}_i = \frac{\Phi_{in}^{-1} \mathbf{a}_{ii}}{\mathbf{a}_{ii}^H \Phi_{in}^{-1} \mathbf{a}_{ii}}$$

ενώ το SINR στον i -οστό δέκτη είναι:

$$\Gamma_i = P_i G_{ii} \mathbf{a}_{ii}^H \Phi_{in}^{-1} \mathbf{a}_{ii}.$$

Τέλος, το μέγιστο SINR στον i -οστό δέκτη είναι:

$$\Gamma_i = \frac{P_i G_{ii}}{\sum_{j \neq i} G_{ji} G_{ai}(\hat{\mathbf{w}}_i, \mathbf{a}_{ji}) P_j + N_i \hat{\mathbf{w}}_i^H \hat{\mathbf{w}}_i}$$

με

$$G_{ai}(\mathbf{w}_i, \mathbf{a}_{ji}) = |\mathbf{w}_i^H \mathbf{a}_{ji}|^2.$$

Έλεγχος Ισχύος Και Μορφοποίηση Δέσμης ([7],[8]) Στο από κοινού πρόβλημα, ελέγχου ισχύος και μορφοποίησης δέσμης, ο αντικειμενικός σκοπός είναι η εύρεση του βέλτιστου διανύσματος βαρών και της βέλτιστης κατανομής ισχύων έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το SINR κατώφλι από όλες τις ζεύξεις, ενόσω κάθε πομπός να διατηρεί την ισχύ μετάδοσης του στο ελάχιστο από το απαιτούμενο επίπεδο, με αποτέλεσμα να μειώνεται η παρεμβολή του στους υπόλοιπους χρήστες. Όπως είπαμε προηγουμένως, το SINR στον i -οστό δέκτη είναι:

$$\Gamma_i = \frac{P_i G_{ii}}{\sum_{j \neq i} G_{ji} G_{a_i}(\mathbf{w}_i, \mathbf{a}_{ji}) P_j + N_i \mathbf{w}_i^H \mathbf{w}_i}$$

έτσι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι το ακόλουθο:

$$\min_{\mathbf{w}, \mathbf{P}} \sum_{i=1}^M P_i$$

$$\text{s.t. } \Gamma_i \geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Ο παρακάτω επαναληπτικός υπολογισμός, τελικά, συγκλίνει στο βέλτιστο ζεύγος $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{W}})$:

$$P_i^{(n+1)} = \min_{\mathbf{w}_i} \left\{ \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j G_{ji} G_{a_i}(\mathbf{w}_i, \mathbf{a}_{ji})}{G_{ii}} P_j^{(n)} + \frac{\gamma_i N_i \mathbf{w}_i^H \mathbf{w}_i}{G_{ii}} \right\} \quad (1.2.6)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{w}_i^H \mathbf{a}_{ii} = 1$$

Αλγόριθμος

1. Κάθε δέκτης i υπολογίζει το $\mathbf{w}_i^{(n+1)}$, τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η διακαναλική παρεμβολή με τον περιορισμό να επιτυγχάνει σταθερό κέρδος προς την επιθυμητή κατεύθυνση:

$$\mathbf{w}_i^{(n+1)} = \arg \max_{\mathbf{w}_i} \left\{ \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j G_{ji} G_{a_i}(\mathbf{w}_i, \mathbf{a}_{ji})}{G_{ii}} \tilde{\mathbf{P}}_j + \frac{\gamma_i N_i \mathbf{w}_i^H \mathbf{w}_i}{G_{ii}} \right\}, \quad i = 1, \dots, M$$

$$\text{s.t. } \mathbf{w}_i^H \mathbf{a}_{ii} = 1$$

όπου το $\mathbf{P}^{(n)}$ είναι το διάνυσμα ισχύος στη $(n-1)$ -οστή επανάληψη.

2. Ενημερώνεται το $\mathbf{P}_i^{(n+1)}$ από την:

$$P_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_i G_{ji} G_{a_i}(\mathbf{w}_i^{(n+1)}, \mathbf{a}_{ji})}{G_{ii}} P_j^{(n)} + \frac{\gamma_i N_i (\mathbf{w}_i^{(n+1)})^H \mathbf{w}_i^{(n+1)}}{G_{ii}}$$

Τα παραπάνω βήματα μπορούν να συνδυαστούν σε ένα, όπως είδαμε στην (1.2.6):

$$P_i^{(n+1)} = \min_{\mathbf{w}_i} \left\{ \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_i G_{ji} G_{a_i}(\mathbf{w}_i, \mathbf{a}_{ji})}{G_{ii}} P_j^{(n)} + \frac{\gamma_i N_i \mathbf{w}_i^H \mathbf{w}_i}{G_{ii}} \right\}$$

s.t. $\mathbf{w}_i^H \mathbf{a}_{ii} = 1$

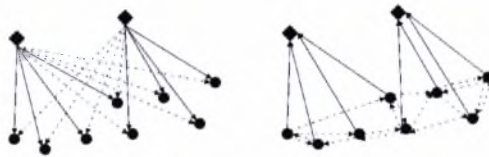
Κεφάλαιο 2

Νέα Αντιμετώπιση

*Ο μεγαλύτερος διαχωρισμός στη βελτιστοποίηση,
δεν είναι μεταξύ γραμμικότητας και μη-γραμμικότητας,
αλλά μεταξύ κυρτότητας και μη-κυρτότητας [18]*

2.1 Περιγραφή του προβλήματος

Αναλογιζόμαστε την περίπτωση της ασύρματης μετάδοσης που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου τα εύρη περιορίζονται από την παρεμβολή μεταξύ των χρηστών, όπως είναι η ασύρματη ζεύξη σε CDMA συστήματα πολλαπλών-κυψελών.



Σχήμα 2.1: Καθοδική και ανοδική ζεύξη με παρεμβολές

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα μόνο κατά την ανοδική ζεύξη, χωρίς να παραλείψουμε όμως και τις αρχές που υπόκεινται στην καθοδική ζεύξη. Έστω ότι έχουμε ένα σταθμό βάσης (ΣΒ) και K χρήστες που προσπαθούν να επικοινωνήσουν με το ΣΒ, ο οποίος είναι εξοπλισμένος με πολλαπλή κεραία M στοιχείων, ενώ οι χρήστες έχουν απλές κεραίες. Ο σκοπός του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι η μεγιστοποίηση της ωφελιμότητας του δικτύου, δηλαδή η μεγιστοποίηση

του βεβαρημένου άθροίσματος των ωφελιμοτήτων όλων των χρηστών.

Σαν ωφελιμότητα U_i ενός χρήστη i , ορίζουμε το εύρος στο οποίο θα μεταδώσει ο χρήστης. Επομένως, το βεβαρημένο άθροισμα των ωφελιμοτήτων είναι ίσο με το βεβαρημένο άθροισμα των εύρων μετάδοσης.

Τέλος, το εύρος μετάδοσης του i -οστού χρήστη, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, αποτελεί συνάρτηση του σηματοθορυβικού λόγου του χρήστη i . Χρησιμοποιούμε τους τύπους (1.2.1), (1.2.2) του $SINR_i$ που ορίστηκαν στο [15] στους οποίους φαίνεται η από κοινού εξάρτηση από το διάνυσμα της ισχύος και του *beamforming*. Δηλαδή το πρόβλημά μας είναι η εύρεση εκείνων των διανυσμάτων ισχύος και *beamforming* τα οποία μεγιστοποιούν την ωφελιμότητα του δικτύου.

2.2 Ανάλυση Προβλήματος

Στη γενική περίπτωση, το εύρος μετάδοσης δίνεται από τον τύπο:

$$C_i = \frac{1}{T} \log(1 + KSINR_i) \quad (2.2.1)$$

όπου T είναι ο χρόνος συμβόλου και K μια σταθερά που εξαρτάται από τη διαμόρφωση και την επιθυμητή πιθανότητα του *bit error*. Λόγω του υψηλού κέρδους διάδοσης, το $KSINR_i$ είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από τη μονάδα άρα αν $1 + KSINR_i \simeq KSINR_i$ τότε προκύπτει ότι: $C_i = \frac{1}{T} \log(KSINR_i)$. Προς διευκολυνσή μας, θεωρούμε ότι $T = 1$ και απορροφούμε το K στον τύπο του $SINR_i$.

Έτσι, καταλήγουμε ότι το εύρος κάθε χρήστη είναι ίσο με:

$$C_i = \log(SINR_i), \quad \forall i. \quad (2.2.2)$$

Τέλος, επαναλαμβάνουμε παρακάτω τους ορισμούς των $SINR_i$:

$$SINR_i^{UL}(\mathbf{u}_i, \mathbf{q}) = \frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i}, \quad \forall i, \quad (2.2.3)$$

$$SINR_i^{DL}(\mathbf{U}, \mathbf{p}) = \frac{p_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\sum_{k=1, k \neq i}^K p_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_k + \sigma^2}, \quad \forall i. \quad (2.2.4)$$

όπου φαίνεται η από κοινού εξάρτησή τους από τα διανύσματα ισχύος και *beamforming*.

2.2.1 Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας

Υποθέτουμε ότι τα βάρη που αντιστοιχούν στις αντίστοιχες συναρτήσεις ωφελιμότητας των χρηστών ορίζουν το διάνυσμα $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_K]$. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης ωφελιμότητας που πρόκειται να επιλύσουμε είναι το ακόλουθο:

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i C_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{q})$$

Σύμφωνα με τους ορισμούς των C_i προκύπτει ότι η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log SINR_i \quad (2.2.5)$$

Επομένως, έχουμε τις παρακάτω αντικειμενικές συναρτήσεις, για την ανοδική και καθοδική ζεύξη, αντίστοιχα:

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log SINR_i^{UL}(\mathbf{u}_i, \mathbf{q}) \Rightarrow$$

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \quad (2.2.6)$$

και

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{p}} S^{DL}(\mathbf{U}, \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{p}} \sum_{i=1}^K w_i \log SINR_i^{DL}(\mathbf{U}, \mathbf{p}) \Rightarrow$$

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{p}} S^{DL}(\mathbf{U}, \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{p}} \sum_{i=1}^K w_i \log \left(\frac{p_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\sum_{k=1, k \neq i}^K p_k \mathbf{u}_k^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \sigma^2} \right) \quad (2.2.7)$$

Παρατηρήσεις

1. Παρατηρούμε ότι κατά την ανοδική ζεύξη η ωφελιμότητα κάθε χρήστη είναι συνάρτηση μόνο του αντίστοιχου διανύσματος *beamforming* κάτι που δεν ισχύει στην καθοδική ζεύξη. Στη δεύτερη περίπτωση, οι ωφελιμότητες των χρηστών περιέχουν όλο τον πίνακα *beamforming* καθιστώντας έτσι αδύνατο τον διαχωρισμό των συναρτήσεων ωφελιμότητας για κάθε χρήστη, ενώ από την εξίσωση (2.2.6) παρατηρούμε ότι το πρόβλημα μπορεί να διαχωριστεί για κάθε χρήστη i . Έτσι θα μελετήσουμε μόνο την ανοδική ζεύξη, αποδεικνύοντας ότι για τον κάθε

χρήστη το πρόβλημα είναι διαχωρίσιμο προς αυτόν, και κάθε υποπρόβλημα με αντικειμενική συνάρτηση $C_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i) = \log \text{SINR}_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i)$ είναι κοίλο.

2. Επομένως θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα που επιλύει ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι από κοινού κοίλο, ως προς τα διανύσματα της ισχύος και του *beamforming*, καθώς επίσης κοίλο ως προς το διάνυσμα της ισχύος και κοίλο ως προς το διάνυσμα του *beamforming*, ξεχωριστά. Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων τροποποιούμε τα διανύσματα ως εξής:

- Ορίζουμε το τροποποιημένο διάνυσμα της ισχύος, $\tilde{\mathbf{q}}$, με στοιχεία: $\tilde{q}_i = \log q_i \Rightarrow q_i = e^{\tilde{q}_i}$
- και το τροποποιημένο διάνυσμα του *beamforming*, $\tilde{\mathbf{t}}$, με στοιχεία: $\tilde{t}_{ij} = \log t_{ij}$ όπου t_{ij} τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{t}_i = [t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iK}]^T \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq M$ με $t_{ij} = \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_i$, άρα $\tilde{t}_{ij} = \log \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_i, \quad \forall i$.

2.2.2 Θεωρήματα Βελτιστοποίησης Προβλήματος

Από Κοινού Κυρτότητα

Θεώρημα 1. Στην ανοδική ζεύξη, το εύρος κάθε χρήστη αποτελεί κοίλη συνάρτηση ως προς τα τροποποιημένα διανύσματα της ισχύος και του *beamforming*.

Απόδειξη Θεωρήματος

Στην ανοδική ζεύξη, το εύρος κάθε χρήστη είναι:

$$C_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i) = \log \text{SINR}_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i) \Rightarrow C_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i) = \log \frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i}$$

Υποθέτουμε ότι: $\|\mathbf{u}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$, οπότε το εύρος, για κάθε χρήστη, γίνεται:

$$C_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i) = \log \frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\sum_{k \neq i}^K \mathbf{u}_i^H q_k \mathbf{R}_k \mathbf{u}_i + \sigma^2 \|\mathbf{u}_i\|^2} \Rightarrow$$

$$C_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}_i) = \log (q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i) - \log \left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_i + \sigma^2 \right), \quad \forall i \quad (2.2.8)$$

Έχοντας ορίσει τα τροποποιημένα διανύσματα της ισχύος $\tilde{\mathbf{q}} = [e^{q_i}]_i$ και του *beamforming* $\tilde{\mathbf{t}}_i = [e^{\mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_i}]_j$, η (2.2.8) γίνεται:

$$C_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i) = \log e^{\tilde{q}_i} e^{\tilde{t}_{ii}} - \log \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k} e^{\tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) \Rightarrow$$

$$C_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i) = (\tilde{q}_i + \tilde{t}_{ii}) - \log \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right), \quad \forall i \quad (2.2.9)$$

Έστω $f_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i) = \tilde{q}_i + \tilde{t}_{ii}$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)$ είναι γραμμική συνάρτηση στα διανύσματα $\tilde{\mathbf{q}}$ και $\tilde{\mathbf{t}}_i$, δηλαδή ότι ισχύει: $f_i(a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y}) = a \cdot f_i(\mathbf{x}) + b \cdot f_i(\mathbf{y})$, για $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{q}}^A, \tilde{\mathbf{t}}_i^A)$, $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{q}}^B, \tilde{\mathbf{t}}_i^B)$ και $a, b \in \mathbf{R}$. Οπότε έχουμε τα εξής:

$$f_i(a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y}) = f_i(a \cdot (\tilde{\mathbf{q}}^A, \tilde{\mathbf{t}}_i^A) + b \cdot (\tilde{\mathbf{q}}^B, \tilde{\mathbf{t}}_i^B))$$

με:

$$\begin{aligned} f_i(a \cdot (\tilde{\mathbf{q}}^A, \tilde{\mathbf{t}}_i^A) + b \cdot (\tilde{\mathbf{q}}^B, \tilde{\mathbf{t}}_i^B)) &= f_i((a \cdot \tilde{\mathbf{q}}^A + b \cdot \tilde{\mathbf{q}}^B), (a \cdot \tilde{\mathbf{t}}_i^A + b \cdot \tilde{\mathbf{t}}_i^B)) = \\ &= a \cdot \tilde{q}_i^A + b \cdot \tilde{q}_i^B + a \cdot \tilde{t}_{ii}^A + b \cdot \tilde{t}_{ii}^B = a \cdot (\tilde{q}_i^A + \tilde{t}_{ii}^A) + b \cdot (\tilde{q}_i^B + \tilde{t}_{ii}^B) = \\ &= a \cdot f_i(\tilde{\mathbf{q}}^A, \tilde{\mathbf{t}}_i^A) + b \cdot f_i(\tilde{\mathbf{q}}^B, \tilde{\mathbf{t}}_i^B) \end{aligned}$$

Άρα:

$$f_i(a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y}) = a \cdot f_i(\mathbf{x}) + b \cdot f_i(\mathbf{y})$$

Έστω $g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i) = \log \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)$. Παίρνουμε την πρώτη παράγωγο της $g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)$ ως προς το $\tilde{\mathbf{q}}$ και $\tilde{\mathbf{t}}_i$, οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)}{\partial \tilde{q}_j} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2}, \quad j \neq i$$

$$\frac{\partial g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)}{\partial \tilde{t}_{ii}} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)}{\partial \tilde{t}_{ij}} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2}, \quad j \neq i$$

Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο της $g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)$, έχουμε:

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_i^2} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_i \vartheta \tilde{t}_{ii}} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ii} \vartheta \tilde{q}_i} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ii}^2} = 0$$

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_i \tilde{q}_i} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_j \vartheta \tilde{t}_{ii}} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij} \vartheta \tilde{q}_i} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij} \tilde{t}_{ii}} = 0$$

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_i \tilde{q}_j} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_i \vartheta \tilde{t}_{ij}} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ii} \vartheta \tilde{q}_j} = \frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_i \tilde{t}_{ij}} = 0$$

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_j^2} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) - e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i, j}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \mathbf{A} > 0$$

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij}^2} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) - e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i, j}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \mathbf{A} > 0$$

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{q}_j \vartheta \tilde{t}_{ij}} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) - e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i, j}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \mathbf{A} > 0$$

και

$$\frac{\vartheta^2 g_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij} \vartheta \tilde{q}_j} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) - e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i, j}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \mathbf{A} > 0$$

Επομένως, ο Hessian πίνακας της $g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)$ γίνεται:

$$\mathbf{G}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_i^2} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_j \partial \tilde{q}_i} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_j \partial t_{ij}} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_j \partial t_{ii}} \\ \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_i^2} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_i \partial t_{ij}} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial \tilde{q}_i \partial t_{ii}} \\ \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ij} \partial \tilde{q}_j} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ij} \partial \tilde{q}_i} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ij}^2} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ij} \partial t_{ii}} \\ \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ii} \partial \tilde{q}_j} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ii} \partial \tilde{q}_i} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ii} \partial t_{ij}} & \frac{\partial^2 g_i}{\partial t_{ii}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εστω ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2K}$, τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{G}_i \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{A} + x_3 \mathbf{A} & 0 & x_1 \mathbf{A} + x_3 \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1^2 \mathbf{A} + x_1 x_3 \mathbf{A} + x_1 x_3 \mathbf{A} + x_3^2 \mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A}(x_1^2 + 2x_1 x_3 + x_3^2) = \mathbf{A}(x_1 + x_3)^2 > 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή ο Hessian πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Αποδείξαμε ότι η συνάρτηση $g_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)$ είναι από κοινού κυρτή στα διανύσματα της ισχύος και του *beamforming*.

Επομένως, η αρχική συνάρτηση του εύρους $C_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{t}}_i)$ είναι από κοινού κοίλη στα διανύσματα της ισχύος και του *beamforming*, καθώς αποτελεί το άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης, και το αρνητικό μιας κυρτής, δηλαδή κοίλης.

Κυρτότητα Στην Ισχύ

Θεώρημα 2. Στην ανοδική ζεύξη, το εύρος κάθε χρήστη με σταθερά τα διανύσματα του *beamforming*, αποτελεί κοίλη συνάρτηση ως προς το τροποποιημένο διάνυσμα της ισχύος.

Απόδειξη Θεωρήματος

Στην ανοδική ζεύξη, έχοντας σταθεροποιήσει τα διανύσματα του *beamforming* \mathbf{u}_i η συνάρτηση (2.2.8)

$$C_i(\mathbf{q}) = \log(q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i) - \log \left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_i + \sigma^2 \right), \quad \forall i$$

αποτελεί το εύρος κάθε χρήστη και εξαρτάται μόνον από το διάνυσμα της ισχύος.

Κάνοντας και πάλι τους ίδιους μετασχηματισμούς στα διανύσματα της ισχύος $\tilde{\mathbf{q}} = [e^{\tilde{q}_i}]_i$ και του *beamforming* $\tilde{\mathbf{t}}_i = [e^{\mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_i}]_j$, παίρνουμε την τροποποιημένη συνάρτηση του εύρος κάθε χρήστη, η οποία είναι:

$$C_i(\tilde{\mathbf{q}}) = \log e^{\tilde{q}_i} e^{\tilde{t}_{ii}} - \log \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k} e^{\tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) \Rightarrow$$

$$C_i(\tilde{\mathbf{q}}) = (\tilde{q}_i + \tilde{t}_{ii}) - \log \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right), \quad \forall i \quad (2.2.10)$$

Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης, ως προς το διάνυσμα της ισχύος, έχουμε:

$$\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_i} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_j} = -\frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2}, \quad j \neq i$$

Έπειτα, παίρνουμε την δεύτερη παράγωγο, ως προς το διάνυσμα της ισχύος και έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_i^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_j \partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_j^2} = -\frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) + e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_j^2} = -\frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i, j}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \mathbf{B} < 0$$

Οπότε ο Hessian πίνακας της (2.2.10) γίνεται:

$$\mathbf{C}_i(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_i^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_j \partial \tilde{q}_i} & \frac{\partial^2 \mathbf{C}_i}{\partial \tilde{q}_j^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Έστω, τώρα, ένα διάνυσμα \mathbf{x} , οπότε έχουμε:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_i \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_i \mathbf{x} = x_2^2 \mathbf{B} < 0$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι ο Hessian πίνακας της $C_i(\tilde{\mathbf{q}})$ είναι αρνητικά ορισμένος. Άρα, η συνάρτηση είναι κοίλη ως προς το τροποποιημένο διάνυσμα της ισχύος.

Κυρτότητα Στο Beamforming

Θεώρημα 3. Στην ανοδική ζεύξη, το εύρος κάθε χρήστη με σταθερό το διάνυσμα της ισχύος, αποτελεί κοίλη συνάρτηση ως προς το τροποποιημένο διάνυσμα του beamforming.

Απόδειξη Θεωρήματος

Στην ανοδική ζεύξη, έχοντας σταθεροποιήσει το διάνυσμα της ισχύος \mathbf{q} η συνάρτηση (2.2.8)

$$C_i(\mathbf{u}_i) = \log(q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i) - \log\left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_i + \sigma^2\right), \quad \forall i$$

αποτελεί το εύρος κάθε χρήστη και εξαρτάται μόνον από τα διανύσματα του beamforming.

Κάνοντας και πάλι τους ίδιους μετασχηματισμούς στα διανύσματα της ισχύος $\tilde{\mathbf{q}} = [e^{q_i}]_i$ και του beamforming $\tilde{\mathbf{t}}_i = [e^{\mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_i}]_j$, παίρνουμε την τροποποιημένη συνάρτηση του εύρος κάθε χρήστη, η οποία είναι:

$$\begin{aligned} C_i(\tilde{\mathbf{t}}_i) &= \log e^{\tilde{q}_i} e^{\tilde{t}_{ii}} - \log\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2\right) \Rightarrow \\ C_i(\tilde{\mathbf{t}}_i) &= (\tilde{q}_i + \tilde{t}_{ii}) - \log\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2\right), \quad \forall i \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης, ως προς το beamforming έχουμε:

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tilde{t}_{ii}} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial C_i}{\partial \tilde{t}_{ij}} = -\frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2}, \quad j \neq i$$

Έπειτα παίρνουμε τη δεύτερη παράγωγο, ως προς το beamforming και έχουμε:

$$\frac{\partial^2 C_i}{\partial \tilde{t}_{ii}^2} = \frac{\partial^2 C_i}{\partial \tilde{t}_{ij} \partial \tilde{t}_{ii}} = \frac{\partial^2 C_i}{\partial \tilde{t}_{ii} \partial \tilde{t}_{ij}} = 0$$

$$\frac{\vartheta^2 \mathbf{C}_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij}^2} = - \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right) + e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}}}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\vartheta^2 \mathbf{C}_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij}^2} = - \frac{e^{\tilde{q}_j + \tilde{t}_{ij}} \left(\sum_{k \neq i, j}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)}{\left(\sum_{k \neq i}^K e^{\tilde{q}_k + \tilde{t}_{ik}} + \sigma^2 \right)^2} = \mathbf{D} < 0$$

Οπότε ο Hessian πίνακας της (2.2.11) γίνεται:

$$\mathbf{C}_i(\tilde{\mathbf{t}}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta^2 \mathbf{C}_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij}^2} & \frac{\vartheta^2 \mathbf{C}_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij} \vartheta \tilde{t}_{ij}} \\ \frac{\vartheta^2 \mathbf{C}_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij} \vartheta \tilde{t}_{ii}} & \frac{\vartheta^2 \mathbf{C}_i}{\vartheta \tilde{t}_{ij}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Έστω, τώρα, ένα διάνυσμα \mathbf{x} , οπότε έχουμε:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_i \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C}_i \mathbf{x} = x_2^2 \mathbf{D} < 0$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι ο Hessian πίνακας της $C_i(\tilde{\mathbf{t}}_i)$ είναι αρνητικά ορισμένος. Άρα, η συνάρτηση είναι κοίλη ως προς το τροποποιημένο διάνυσμα του *beamforming*.

2.3 Αλγόριθμοι

2.3.1 Ισχύς

Έχοντας σταθεροποιήσει το *beamforming*, καλούμαστε να βρούμε το διάνυσμα της ισχύος, εκείνο που μεγιστοποιεί τη συνολική ωφελιμότητα των χρηστών, δηλαδή θέλουμε να επιλύσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\max_{\mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{q}) = \max_{\mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log SINR_i^{UL}(\mathbf{q}) \Rightarrow$$

$$\max_{\mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{q}) = \max_{\mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \quad (2.3.1)$$

Για την εύρεση του βέλτιστου διανύσματος ισχύος, εφαρμόζουμε δύο μεθόδους, τη Gradient Descent μέθοδο και τη Best Response μέθοδο. Και στις δύο περιπτώσεις χρειάζεται ο υπολογισμός του gradient της αντικειμενικής συνάρτησης.

Επομένως, για το gradient της συνάρτησης $S(\mathbf{q})$, ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^K w_i \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \Rightarrow \\
 S(\mathbf{q}) &= \sum_{j \neq i}^K w_j \log \left(\frac{q_j \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j^H \left(\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_j} \right) + w_i \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \\
 \Rightarrow S(\mathbf{q}) &= \sum_{j \neq i}^K \left[w_j \log (q_j \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_j) - w_j \log \left(\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2 \right) \right] + \\
 &\quad + w_i \log (q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i) - w_i \log \left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_i + \sigma^2 \right)
 \end{aligned}$$

Και παίρνουμε τελικά:

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{q}) &= \sum_{j \neq i}^K w_j \log (q_j \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_j \mathbf{u}_j) - \sum_{j \neq i}^K w_j \log \left(\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2 \right) + \\
 &\quad + w_i \log (q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i) - w_i \log \left(\sum_{k \neq i}^K q_k \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_i + \sigma^2 \right)
 \end{aligned}$$

Από ότι βλέπουμε παραπάνω, το q_i περιέχεται μόνο στο δεύτερο και στον τρίτο όρο της συνάρτησης. Έπειτα, παίρνουμε τη μερική παράγωγο της συνάρτησης $S(\mathbf{q})$ ως προς το q_i και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_i} &= w_i \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i} - \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2} \Rightarrow \\
 \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_i} &= \frac{w_i}{q_i} - \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2}
 \end{aligned}$$

Καθώς, το gradient της $S(\mathbf{q})$ είναι $\nabla_{\mathbf{q}}S(\mathbf{q}) = \left[\frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right]_i$, παίρνουμε τελικά το διάνυσμα:

$$\nabla_{\mathbf{q}}S(\mathbf{q}) = \left[\frac{w_i}{q_i} - \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2} \right]_i \quad (2.3.2)$$

Gradient Descent Μέθοδος

Σε κάθε επανάληψη της Gradient Descent μεθόδου, κάθε χρήστης υπολογίζει την δική του ισχύ, σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$\mathbf{q}^{(n+1)} = \mathbf{q}^{(n)} + a \cdot \nabla_{\mathbf{q}}S(\mathbf{q}^{(n)}) \quad (2.3.3)$$

Ο οποίος λόγω της (2.3.2) τελικά γίνεται:

$$q_i^{(n+1)} = q_i^{(n)} + a \cdot \frac{\partial S(\mathbf{q}^{(n)})}{\partial q_i^{(n)}} \Rightarrow$$

$$q_i^{(n+1)} = q_i^{(n)} + a \cdot \left[\frac{w_i}{q_i} - \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2} \right], \quad \forall i \quad (2.3.4)$$

Όπως παρατηρούμε στον τύπο (2.3.4), σε κάθε επανάληψη, ο χρήστης i χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς του, την ισχύ που είχαν όλοι οι χρήστες στην προηγούμενη επανάληψη. Οι πληροφορίες αυτές, θεωρούμε ότι, είναι γνωστές, μέσω ενός κεντρικού κόμβου, που μπορεί να είναι ο σταθμός βάσης. Τέλος, αφού όλοι οι χρήστες υπολογίσουν την ισχύ που τους αναλογεί, ενημερώνουν τον κεντρικό κόμβο για τις νέες τιμές. Να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που ο επαναληπτικός υπολογισμός δίνει ως αποτέλεσμα ισχύ μεγαλύτερη από αυτήν που μπορεί να διαθέσει ο χρήστης τότε του ανατίθεται η μέγιστη ισχύς.

Έπειτα, ο κεντρικός κόμβος, ο οποίος γνωρίζει εξ' αρχής, για τα SINRs κατώφλια γ_i , πάνω από τα οποία οι χρήστες είναι ικανοποιημένοι, υπολογίζει το SINR του καθενός για το συγκεκριμένο διάνυσμα ισχύος. Εάν, υπάρχουν χρήστες που δεν καλύπτονται από τη συγκεκριμένη κατανομή ισχύος, τότε αφαιρείται από το σύστημα αυτός με τη μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ του κατωφλιού

του και του επιτεύξιμου SINR. Δηλαδή ο αντίστοιχος χρήστης ενημερώνεται από τον κεντρικό κόμβο και αποχωρεί. Αφού, αφαιρεθεί, κάποιος χρήστης, εάν αφαιρεθεί, τότε επαναυπολογίζονται οι ισχύεις από τον κάθε χρήστη, αφού παραλάβουν από τον κεντρικό κόμβο τα ανανεωμένα δεδομένα - οι πληροφορίες του χρήστη που αποχώρησε δεν χρησιμοποιούνται πλέον.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδοση του *Gradient Descent* αλγορίθμου εξαρτάται από το βήμα a που παίρνει ως παράμετρο.

Αλγόριθμος Power A

1. Υπολόγισε την ισχύ του χρήστη i σύμφωνα με τον (2.3.4):

$$q_i^{(n+1)} = q_i^{(n)} + a \cdot \left[\frac{w_i}{q_i} - \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2} \right], \quad \forall i$$

$$\text{με } q_i^{(n+1)} = \left[q_i^{(n+1)} \right]_0^{q_i^{\max}}$$

2. Συγκέντρωσε τα q_i και υπολόγισε τα SINRs, σύμφωνα με το:

$$SINR_i = \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right), \quad \forall i$$

3. Βρες το j για το οποίο:

$$j = \arg \max_j (\gamma_j - SINR_j)$$

Εάν $\gamma_j - SINR_j > 0$ διώξε τον χρήστη j από όλα τα δεδομένα και πηγαίνε στο 1, αλλιώς επέστρεψε.

¹όπου $[x]_0^{x_{\max}} = \max\{\min\{x, x_{\max}\}, 0\}$

Best Response Μέθοδος

Στη Best Response μέθοδο, για να βρούμε τον τύπο που υπολογίζει σε κάθε επανάληψη την ισχύ, παίρνουμε $\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}) = 0$, οπότε, από την (2.3.2) έχουμε την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο:

$$\nabla_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \frac{w_i}{q_i} = \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2} \Rightarrow$$

$$q_i^{(n+1)} = \frac{w_i}{\sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i^{(n)} \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k^{(n)} \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2}}, \quad \forall i \quad (2.3.5)$$

Τα βήματα που ακολουθεί ο αλγόριθμος είναι όμοια με τον Gradient Descent αλγόριθμο, με μόνη διαφορά ότι στον υπολογισμό της ισχύος, από τον κάθε χρήστη, γίνεται χρήση του τύπου (2.3.5).

Και πάλι εδώ, υπάρχει ένας κεντρικός κόμβος που ενημερώνει τους χρήστες για τα δεδομένα των υπολοίπων, συγκεντρώνει τις νέες πληροφορίες και αφαιρεί, εάν χρειάζεται, κάποιον χρήστη που δεν ικανοποιείται. Δηλαδή, αφού όλοι οι χρήστες υπολογίσουν την ισχύ που τους αναλογεί, ενημερώνουν τον κεντρικό κόμβο για τις νέες τιμές. Έπειτα, ο κεντρικός κόμβος υπολογίζει το SINR του καθενός για το συγκεκριμένο διάνυσμα ισχύος. Εάν, υπάρχουν χρήστες που δεν καλύπτονται από τη συγκεκριμένη κατανομή ισχύος, τότε αφαιρείται από το σύστημα αυτός με τη μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ του κατωφλιού του και του επιτευξιμού SINR. Αφού, αφαιρεθεί, κάποιος χρήστης, εάν αφαιρεθεί, τότε επαναυπολογίζονται οι ισχύεις από τον κάθε χρήστη, αφού παραλάβουν από τον κεντρικό κόμβο τα ανανεωμένα δεδομένα.

Ο Best Response αλγόριθμος βρίσκει το ολικά βέλτιστο του προβλήματος για οποιοδήποτε αρχικές συνθήκες.

Αλγόριθμος Power B

1. Υπολόγισε την ισχύ του χρήστη i σύμφωνα με τον (2.3.5):

$$q_i^{(n+1)} = \frac{w_i}{\sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i^{(n)} \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k^{(n)} \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2}}, \quad \forall i$$

$$\text{με } q_i^{(n+1)} = \left[q_i^{(n+1)} \right]_0^{q_i^{\max}} \quad 2$$

2. Συγκέντρωσε τα q_i και υπολόγισε τα SINRs, σύμφωνα με το:

$$SINR_i = \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right), \quad \forall i$$

3. Βρες το j για το οποίο:

$$j = \arg \max_j (\gamma_j - SINR_j)$$

Εάν $\gamma_j - SINR_j > 0$ διώξε τον χρήστη j από όλα τα δεδομένα και πηγαίνε στο 1, αλλιώς επέστρεψε.

2.3.2 Μορφοποίηση Δέσμης

Έχοντας σταθεροποιήσει το διάνυσμα της ισχύος, καλούμαστε να βρούμε τον πίνακα *beamforming*, εκείνον που μεγιστοποιεί τη συνολική ωφελιμότητα των χρηστών, δηλαδή θέλουμε να επιλύσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{U}} S^{UL}(\mathbf{U}) &= \max_{\mathbf{U}} \sum_{i=1}^K w_i \log SINR_i^{UL}(\mathbf{u}_i) \quad \Rightarrow \\ \max_{\mathbf{U}} S^{UL}(\mathbf{U}) &= \max_{\mathbf{U}} \sum_{i=1}^K w_i \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Για την εύρεση του βέλτιστου *beamforming* εφαρμόζουμε τη Generalized Eigenvalue³ μέθοδο.

²όπου $[x]_0^{\max} = \max\{\min\{x, x_{\max}\}, 0\}$

³Στη γενική περίπτωση της Generalized Eigenvalue μεθόδου έχουμε το πρόβλημα:

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}$$

το οποίο έχει λύση το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}^* που αντιστοιχεί στη γενικευμένη μέγιστη ιδιοτιμή λ^* των πινάκων \mathbf{A} και \mathbf{B} .

Generalized Eigenvalue Μέθοδος

Το πρόβλημα (2.3.6) έχει ισοδύναμη λύση με το ακόλουθο:

$$\max_{\mathbf{u}_i} SINR_i^{UL}(\mathbf{u}_i) = \max_{\mathbf{u}_i} \frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \Rightarrow$$

το οποίο αποτελεί ένα Generalized Eigenvalue πρόβλημα, στην παρακάτω μορφή:

$$\max_{\mathbf{u}_i} \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^S \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^I \mathbf{u}_i} \quad (2.3.7)$$

$$\text{με } \mathbf{M}_i^S = q_i \mathbf{R}_i \text{ και } \mathbf{M}_i^I = \sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2.3.8)$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος (2.3.7),(2.3.8) είναι ο πίνακας που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{u}_i^* που αντιστοιχούν στις μέγιστες ιδιοτιμές λ_i^* , που υπολογίζονται από το $(\mathbf{u}_i, \lambda_i) = \text{eig}(\mathbf{M}_i^S, \mathbf{M}_i^I)$, με $\lambda_i^* = \max(\lambda_i)$.

Έτσι ο αλγόριθμος έχει ως εξής: Δεδομένου του διανύσματος ισχύος - είναι σταθεροποιημένο, στην προκειμένη περίπτωση - ο κεντρικός κόμβος, που είναι εξοπλισμένος με την πολλαπλή κεραία, υπολογίζει τον *beamforming* πίνακα με την παραπάνω μέθοδο. Έπειτα, υπολογίζει τα SINRs που επιτυγχάνουν οι χρήστες με τα συγκεκριμένα δεδομένα και τα συγκρίνει με τα SINRs κατώφλια που έχουν ορίσει, εξ' αρχής. Εάν υπάρχει κάποιος ανικανοποίητος χρήστης τότε ενημερώνεται και αποχωρεί από το σύστημα. Επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος.

Ο *Generalized Eigenvalue* αλγόριθμος συγκλίνει στον βέλτιστο πίνακα *beamforming*.

Αλγόριθμος Beamforming

1. Υπολόγισε το *beamforming* του χρήστη i σύμφωνα με τα (2.3.7),(2.3.8):

$$\max_{\mathbf{u}_i} \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^S \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^I \mathbf{u}_i}, \quad \forall i$$

$$\text{με } \mathbf{M}_i^S = q_i \mathbf{R}_i \text{ και } \mathbf{M}_i^I = \sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I}$$

2. Υπολόγισε τα SINRs, σύμφωνα με το:

$$SINR_i = \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right), \quad \forall i$$

3. Βρες το j για το οποίο:

$$j = \arg \max_j (\gamma_j - SINR_j)$$

Εάν $\gamma_j - SINR_j > 0$ διώξε τον χρήστη j από όλα τα δεδομένα και πηγαίνε στο 1, αλλιώς επέστρεψε.

2.3.3 Ισχύς Και Μορφοποίηση Δέσμης

Για την από κοινού βελτιστοποίηση του προβλήματος εναλλάσσουμε τους παραπάνω αλγόριθμους. Πρώτα, τρέχουμε τον αλγόριθμο εύρεσης ισχύος, χωρίς όμως, αναγκαστικά, να συγκλίνει στο βέλτιστο, καθώς τον εφαρμόζουμε για ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων. Δηλαδή, βρίσκουμε το διάνυσμα ισχύος με τη Gradient Descent μέθοδο ή τη Best Response μέθοδο για ένα προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων⁴. Έπειτα, βρίσκουμε τον βέλτιστο πίνακα *beamforming* με την Generalized Eigenvalue μέθοδο. Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα έως ότου να συγκλίνει στο βέλτιστο διάνυσμα ισχύος και στον βέλτιστο *beamforming* πίνακα.

Για τα συγκεκριμένα διανύσματα ελέγχουμε εάν καλύπτονται οι χρήστες, δηλαδή, εάν τα επιτεύξιμα SINRs είναι μεγαλύτερα από τα προκαθορισμένα SINRs κατώφλια. Εάν, υπάρχει κάποιος ανικανοποίητος χρήστης, αφαιρείται από το σύστημα και επαναλαμβάνονται τα παραπάνω βήματα.

Αλγόριθμος Power A και Beamforming

1. Υπολόγισε την ισχύ του χρήστη i σύμφωνα με τον (2.3.4):

$$q_i^{(n+1)} = q_i^{(n)} + a \cdot \left[\frac{w_i}{q_i} - \sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2} \right], \quad \forall i$$

⁴υπάρχει περίπτωση να συγκλίνει πριν εκτελεστεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων

$$\text{με } q_i^{(n+1)} = \left[q_i^{(n+1)} \right]_0^{q_i^{\max}}$$

για n προκαθορισμένο ή έως ότου να συγκλίνει.

2. Υπολόγισε το *beamforming* του χρήστη i σύμφωνα με τα (2.3.7),(2.3.8):

$$\max_{\mathbf{u}_i} \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^S \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^I \mathbf{u}_i}, \quad \forall i$$

$$\text{με } \mathbf{M}_i^S = q_i \mathbf{R}_i \quad \text{και} \quad \mathbf{M}_i^I = \sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I}$$

3. Πήγαινε στο 1 και 2 έως ότου να συγκλίνουν.

4. Με τα τελικά q_i από το 1 και τα \mathbf{u}_i από το 2, υπολόγισε τα SINRs, σύμφωνα με το:

$$SINR_i = \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right), \quad \forall i$$

5. Βρες το j για το οποίο:

$$j = \arg \max_j (\gamma_j - SINR_j)$$

Εάν $\gamma_j - SINR_j > 0$ διώξε τον χρήστη j από όλα τα δεδομένα και πηγαίνε στο 1, αλλιώς επέστρεψε.

Αλγόριθμος Power B και Beamforming

1. Υπολόγισε την ισχύ του χρήστη i σύμφωνα με τον (2.3.5):

$$q_i^{(n+1)} = \frac{w_i}{\sum_{j \neq i}^K w_j \frac{q_i^{(n)} \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_j}{\sum_{k \neq j}^K q_k^{(n)} \mathbf{u}_j^H \mathbf{R}_k \mathbf{u}_j + \sigma^2}}, \quad \forall i$$

$$\text{με } q_i^{(n+1)} = \left[q_i^{(n+1)} \right]_0^{q_i^{\max}}$$

για n προκαθορισμένο ή έως ότου να συγκλίνει.

2. Υπολόγισε το *beamforming* του χρήστη i σύμφωνα με τα (2.3.7),(2.3.8):

$$\max_{\mathbf{u}_i} \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^S \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{M}_i^I \mathbf{u}_i}, \quad \forall i$$

$$\text{με } \mathbf{M}_i^S = q_i \mathbf{R}_i \quad \text{και} \quad \mathbf{M}_i^I = \sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I}$$

3. Πήγαινε στο 1 και 2 έως ότου να συγκλίνουν.

4. Με τα τελικά q_i από το 1 και τα \mathbf{u}_i από το 2, υπολόγισε τα SINRs, σύμφωνα με το:

$$SINR_i = \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right), \quad \forall i$$

5. Βρες το j για το οποίο:

$$j = \arg \max_j (\gamma_j - SINR_j)$$

Εάν $\gamma_j - SINR_j > 0$ διώξε τον χρήστη j από όλα τα δεδομένα και πηγαίνε στο 1, αλλιώς επέστρεψε.

Κεφάλαιο 3

Προσομοίωση

3.1 Γενικά Περί Προσομοίωσης

Σύμφωνα με όσα είπαμε στο κεφάλαιο 2 έχουμε δύο μεθόδους για την εύρεση του βέλτιστου διανύσματος ισχύος και μία μέθοδο για την εύρεση του *beamforming* πίνακα.

Στη γενική περίπτωση έχουμε K χρήστες που μεταδίδουν σε μία πολλαπλή κεραία με M στοιχεία.

Υπενθυμίζουμε την αντικειμενική μας συνάρτηση που ορίσαμε στην ενότητα 2.2.1:

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i C_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{q}) \Rightarrow \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log \text{SINR}_i^{UL}(\mathbf{u}_i, \mathbf{q})$$

Άρα:

$$\max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{U}, \mathbf{q}) = \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \quad (3.1.1)$$

Επομένως:

- Το διάνυσμα ισχύος \mathbf{q} έχει διάσταση $K \times 1$, δηλαδή είναι της μορφής:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_K \end{bmatrix}$$

- Οι *spatial covariance* πίνακες έχουν διάσταση $M \times M$ και είναι K στο πλήθος, δηλαδή είναι της μορφής:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} R_{i_{11}} & \cdots & R_{i_{1M}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i_{M1}} & \cdots & R_{i_{MM}} \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, K$$

- Ο *beamforming* πίνακας \mathbf{U} έχει διάσταση $M \times K$ και ορίζεται από τα διανύσματα του *beamforming* \mathbf{u}_i που έχουν διάσταση $M \times 1$, και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_K] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{K1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{K2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1M} & u_{2M} & \cdots & u_{KM} \end{bmatrix}$$

- Το διάνυσμα βαρών \mathbf{w} στην αντικειμενική συνάρτηση έχει διάσταση $K \times 1$, δηλαδή: $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_K]$
- Ο θόρυβος: $\sigma \in \mathbb{R}$

3.2 Δεδομένα Προσομοίωσης

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση των αλγορίθμων, για $K = 5$ χρήστες και $M = 4$ στοιχεία, είναι τα ακόλουθα:

- Τα αρχικά διανύσματα ισχύος \mathbf{q}_A και \mathbf{q}_B :

$$\mathbf{q}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

τα οποία χρησιμοποιούνται κατά την πρώτη επανάληψη των αλγορίθμων, δηλαδή αποτελούν το διάνυσμα $\mathbf{q}^{(0)}$.

- Spatial Covariance Πίνακες - θετικά ορισμένοι:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.3 & 2.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 & 1.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 2.3 \end{bmatrix} & \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} 1.3 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 2.9 & 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 2.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 1.5 & 3.0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_3 &= \begin{bmatrix} 1.9 & 0.5 & 1.0 & 1.2 \\ 0.5 & 2.5 & 0.6 & 0.1 \\ 1.0 & 0.6 & 3.2 & 1.2 \\ 1.0 & 0.3 & 1.5 & 1.6 \end{bmatrix} & \mathbf{R}_4 &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0.6 & 1.1 & 0.3 \\ 0.6 & 1.3 & 0.8 & 0.3 \\ 1.1 & 0.2 & 2.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 3.0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}_5 &= \begin{bmatrix} 2.3 & 0.1 & 1.2 & 0.6 \\ 0.2 & 2.5 & 0.3 & 0.5 \\ 1.6 & 0.2 & 3.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 2.6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

- Οι *beamforming* πίνακες \mathbf{U}_A και \mathbf{U}_B - κανονικοποιούνται κατά την προσομοίωση ώστε οι στήλες να έχουν μέτρο μονάδα:

$$\mathbf{U}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 & 0.4 & 0.3 \\ 2 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0.8 \\ 1 & 0.9 & 1 & 0.1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 3.1 & 3.2 \\ 1 & 3.5 & 2.1 & 1.6 & 0.2 \\ 0.2 & 4 & 7 & 4.1 & 2.5 \\ 1.2 & 5.3 & 0.5 & 5.2 & 9 \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

- Το διάνυσμα βαρών:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2.3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

- Ο θόρυβος: $\sigma = 1$

Επίσης, ορίζουμε τις εξής παραμέτρους:

- Μέγιστη ισχύς για τον κάθε χρήστη:

$$\mathbf{q}_{max} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

- Αποδεκτό κατώφλι SINR για τον κάθε χρήστη:

$$SINR_{thres} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 1 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

- Για την υλοποίηση των αλγορίθμων, ορίζουμε ως μέγιστο αριθμό επαναλήψεων του Gradient Descent τον $LG = 100$ και του Best Response τον $LB = 100$
- Τα μεγέθη του βήματος του Gradient Descent, ορίζουμε ως $\alpha_1 = 0.005$ και $\alpha_2 = 0.01$

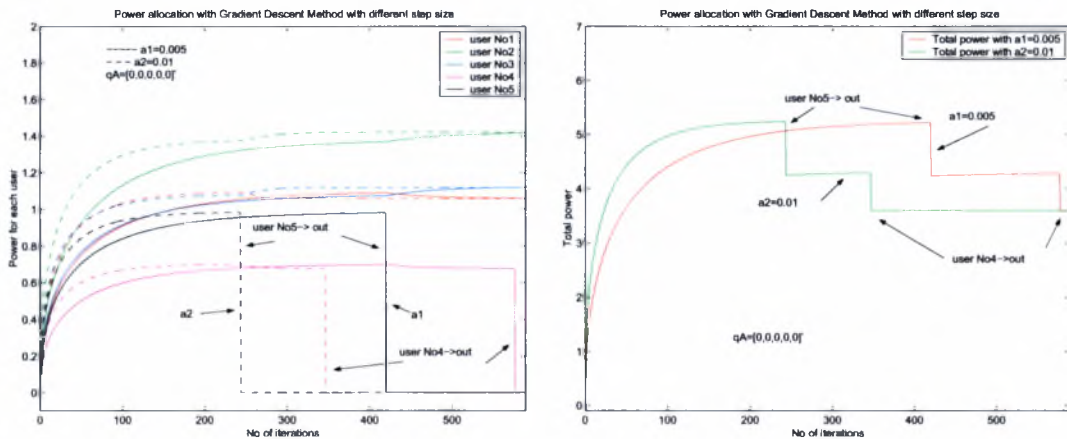
3.3 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

3.3.1 Ισχύς

Gradient Descent Μέθοδος

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Gradient Descent, για την εύρεση του διανύσματος ισχύος, για τους 5 χρήστες στα δεδομένα που ορίσαμε στην ενότητα (3.2), λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα και γραφήματα.

Στο Σχήμα (3.1) βλέπουμε την κατανομή ισχύος για διαφορετικά βήματα, $\alpha_1 = 0.005$ και $\alpha_2 = 0.01$, και αρχική συνθήκη $\mathbf{q}_A = [0, 0, 0, 0, 0]^T$. Αριστερά απεικονίζεται η ισχύς κάθε χρήστη καθώς και δεξιά η συνολική ισχύς του συστήματος, δηλαδή το $\|\mathbf{q}\|_1 = \sum_i^K q_i$.



Σχήμα 3.1: Ισχύς κάθε χρήστη και συνολική ισχύς συστήματος για διαφορετικό βήμα $\alpha_1 = 0.005$ και $\alpha_2 = 0.01$ με τον **Gradient Descent με έλεγχο SINRs**.

Ξεκινώντας από το q_A ο αλγόριθμος συγκλίνει στο:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 1.09 \\ 1.36 \\ 1.07 \\ 0.7 \\ 0.98 \end{bmatrix}$$

και $q_{tot}^* = 5.2$ σε 420 επαναλήψεις με βήμα α_1 ενώ σε 244 επαναλήψεις με βήμα α_2 . Το \mathbf{q}^* αποτελεί το διάνυσμα στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος Gradient Descent χωρίς έλεγχο των SINRs.

Εάν ακολουθηθεί ο έλεγχος ικανοποίησης των SINRs, από το Σχήμα (3.1), παρατηρούμε ότι ο χρήστης No5 αποχωρεί κατά την 579^H , ή 349^H επανάληψη αντίστοιχα για α_1 , α_2 ενώ εν συνεχεία αποχωρεί ο χρήστης No4 αποχωρεί κατά την 583^H , ή 353^H επανάληψη αντίστοιχα.

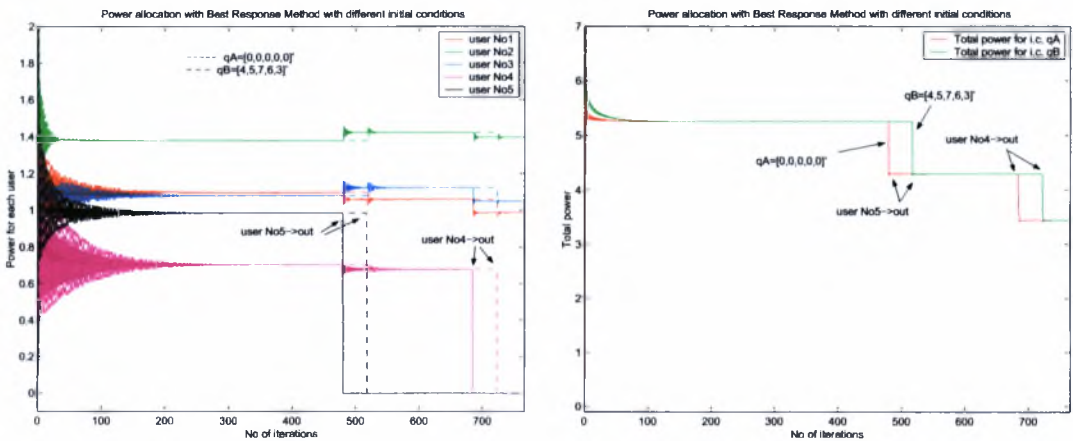
Έτσι το βέλτιστο διάνυσμα στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος και η συνολική ισχύς είναι:

$$\mathbf{q}_{opt} = \begin{bmatrix} 1.06 \\ 1.41 \\ 1.11 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_{tot} = 3.58$$

Best Response Μέθοδος

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Best Response, για τους 5 χρήστες και έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα και γραφήματα.

Στο Σχήμα (3.2) βλέπουμε την κατανομή ισχύος για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, q_A και q_B . Αριστερά απεικονίζεται η ισχύς κάθε χρήστη καθώς και δεξιά η συνολική ισχύς του συστήματος.



Σχήμα 3.2: Ισχύς κάθε χρήστη και συνολική ισχύς συστήματος για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, q_A και q_B με τον **Best Response με έλεγχο SINRs**.

Ξεκινώντας από το q_A και το q_B ο αλγόριθμος συγκλίνει στο:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 1.09 \\ 1.37 \\ 1.08 \\ 0.7 \\ 0.98 \end{bmatrix}$$

και $q_{tot}^* = 5.3$ σε 480 επαναλήψεις από το q_A ενώ σε 518 επαναλήψεις από το q_B . Το \mathbf{q}^* αποτελεί το διάνυσμα στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος Best Response χωρίς έλεγχο των SINRs.

Εάν ακολουθήσει ο έλεγχος ικανοποίησης των SINRs, από το Σχήμα (3.2), παρατηρούμε ότι

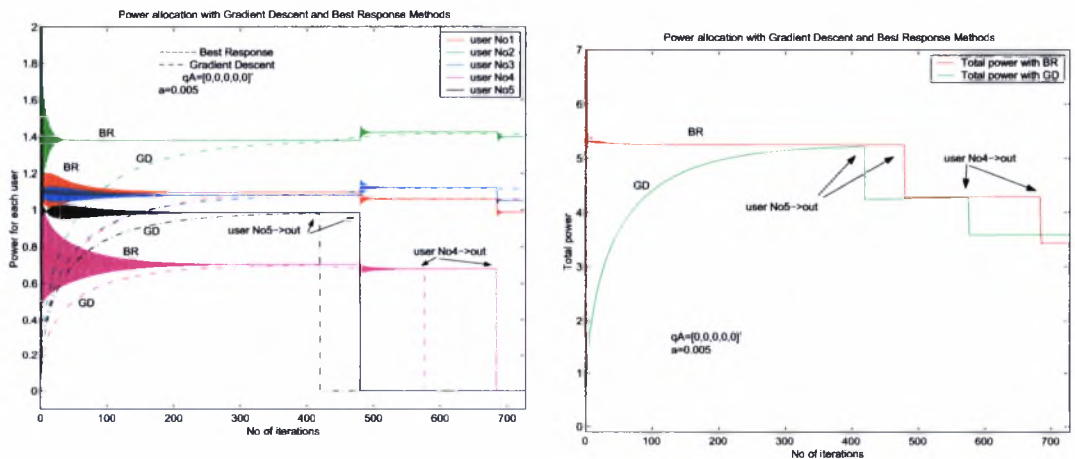
ο χρήστης N_{05} αποχωρεί κατά την 687^H , ή 725^H επανάληψη αντίστοιχα για q_A , q_B ενώ εν συνεχεία αποχωρεί ο χρήστης N_{04} αποχωρεί κατά την 722^H , ή 759^H επανάληψη αντίστοιχα. Έτσι το βέλτιστο διάνυσμα στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος και η συνολική ισχύς είναι:

$$\mathbf{q}_{opt} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1.39 \\ 1.05 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_{tot} = 3.42$$

Σύγκριση Μεθόδων

Παρακάτω παραθέτουμε συγκριτικά γραφήματα για τις δύο μεθόδους εύρεσης ισχύος, Gradient Descent και Best Response. Χρησιμοποιούμε την ίδια αρχική συνθήκη $\mathbf{q}_A = \mathbf{0}^T$ και βήμα $\alpha_1 = 0.005$ για το Gradient.

Στο Σχήμα (3.3) φαίνεται η κατανομή ισχύος της Gradient Descent και της Best Response μεθόδου για κάθε χρήστη καθώς και η συνολική ισχύς.



Σχήμα 3.3: Ισχύς κάθε χρήστη και συνολική ισχύς συστήματος με τον **Gradient Descent** και τον **Best Response** με έλεγχο SINRs.

Παρατηρήσεις

- Το μέγεθος του βήματος που επιλέγεται στον Gradient Descent αλγόριθμο σε συνδυασμό με το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων αποτελεί κρίσιμο σημείο, καθώς ο αλγόριθμος μπορεί να διώξει άλλον χρήστη, ο οποίος δεν ικανοποιείται τη στιγμή που ελέγχεται το SINR του.
- Η σύγκλιση στον Gradient Descent αλγόριθμο εξαρτάται από το μέγεθος του βήματος που επιλέγεται.
- Στον Best Response αλγόριθμο δεν αντιμετωπίζουμε τέτοιου είδους προβλήματα.

3.3.2 Μορφοποίηση Δέσμης

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της Generalized Eigenvalue για την εύρεση του *beamforming* πίνακα, της πολλαπλής κεραίας 4 στοιχείων για τους 5 χρήστες. Ως διανύσμα ισχύος χρησιμοποιούμε το:

$$\mathbf{q}_C = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.4 \\ 1.1 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

ενώ χρησιμοποιούμε τα υπόλοιπα δεδομένα που ορίστηκαν στην ενότητα (3.2):

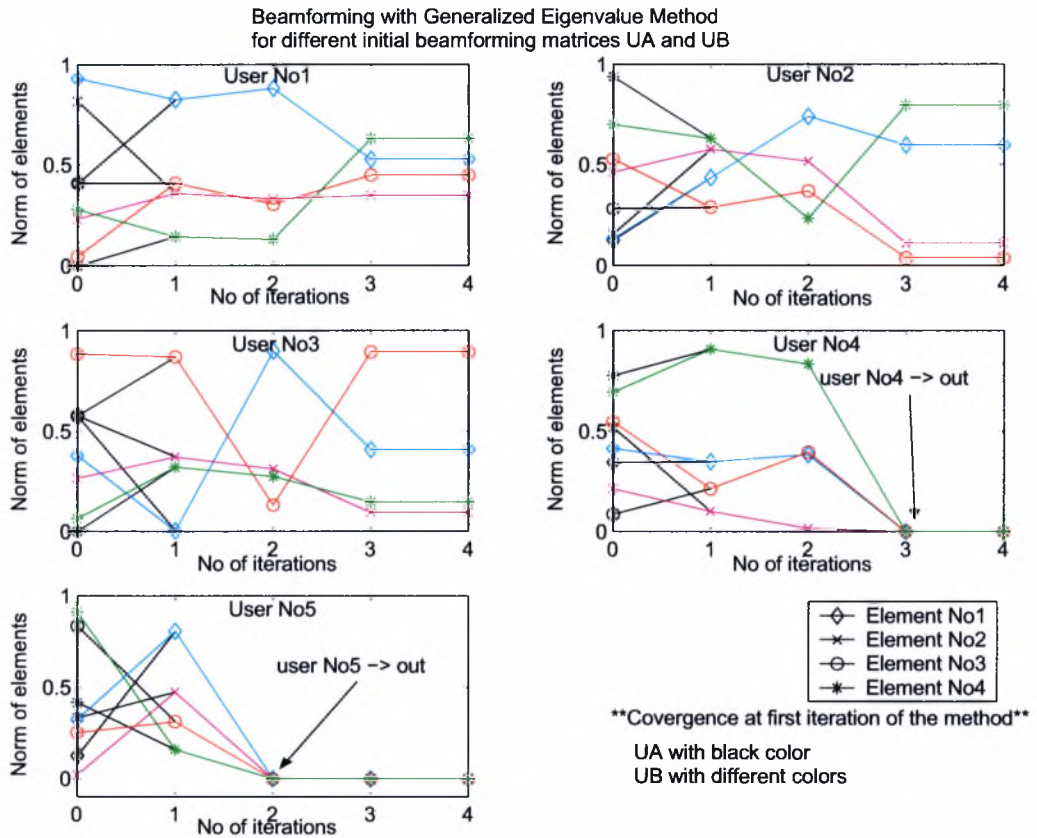
- Πίνακες spatial covariance (3.2.1): $\mathbf{R}_i, \forall i = 1, \dots, 5$
- *Beamforming* πίνακες (3.2.2): $\mathbf{U}_A, \mathbf{U}_B$
- Βάρη αντικειμενικής συνάρτησης (3.2.3): \mathbf{w}
- Μέγιστη ισχύς ανά χρήστη (3.2.4): \mathbf{q}_{max}
- Αποδεκτά κατώφλια SINRs (3.2.5): \mathbf{SINR}_{thres}
- Θόρυβος: $\sigma = 1$

Παρακάτω θα δείξουμε (Σχήμα 3.4) τη σύγκλιση της μεθόδου στον πίνακα εκείνον που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας. Σημειώνουμε ότι σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου ελέγχουμε αν ικανοποιούνται τα SINRs των χρηστών. Εάν δεν ικανοποιείται κάποιος τότε αφαιρείται, άρα μηδενίζεται το αντίστοιχο *beamforming* διάνυσμα. Στην περίπτωση που δεν έχουμε έλεγχο ικανοποίησης των SINRs ο βέλτιστος πίνακας είναι ίσος με τον πίνακα της πρώτης επανάληψης.

Δηλαδή, οι *beamforming* πίνακες χωρίς έλεγχο SINRs και με έλεγχο, είναι αντίστοιχα:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.43 & -0.01 & 0.34 & -0.801 \\ 0.35 & 0.57 & -0.37 & 0.10 & 0.47 \\ -0.40 & -0.28 & 0.87 & 0.21 & -0.31 \\ 0.14 & -0.62 & 0.32 & -0.90 & 0.15 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\mathbf{U}_{opt} = \begin{bmatrix} -0.52 & -0.59 & 0.41 & 0 & 0 \\ -0.34 & -0.11 & -0.09 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0.03 & 0.89 & 0 & 0 \\ -0.63 & 0.79 & 0.14 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

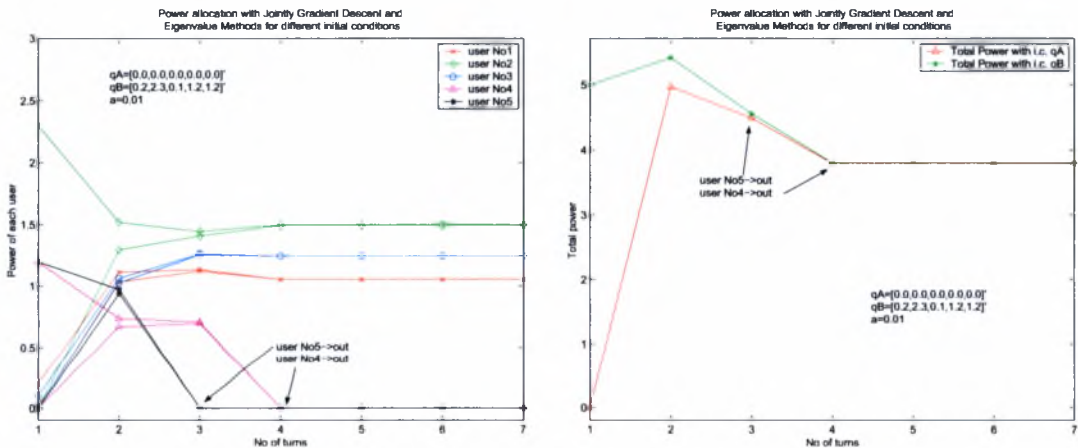


Σχήμα 3.4: *Beamforming* πίνακες με τη **Generalized Eigenvalue μέθοδο με έλεγχο SINRs** για διαφορετικούς αρχικούς *beamforming* πίνακες. Παρουσιάζεται η νόρμα κάθε στοιχείου της κεραίας για τον κάθε χρήστη. Παρατηρούμε ότι για τους αρχικούς πίνακες U_A και U_B η μέθοδος συγκλίνει.

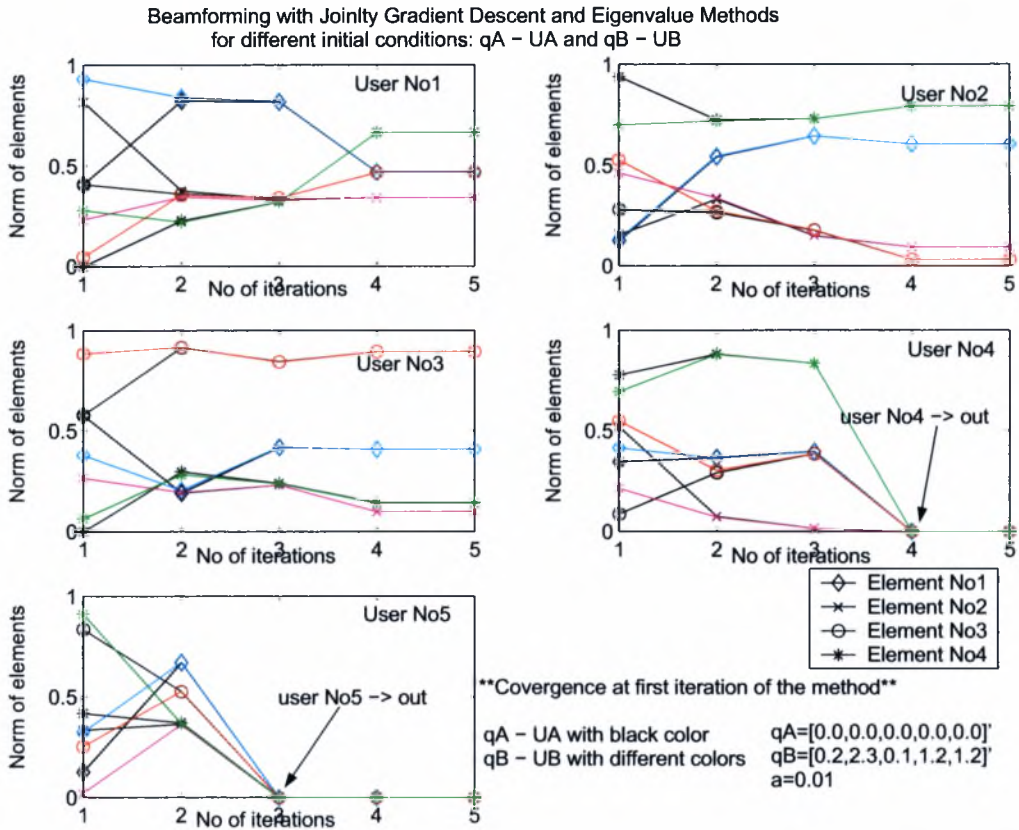
3.3.3 Ισχύς Και Μορφοποίηση Δέσμης

Εφαρμόζουμε από κοινού τους αλγόριθμους εύρεσης ισχύος και του πίνακα *beamforming* στα δεδομένα που ορίστηκαν στην ενότητα (3.2):

- Διανύσματα ισχύος: $\mathbf{q}_A = [0, 0, 0, 0, 0]^T$, $\mathbf{q}_B = [4, 5, 7, 6, 3]^T$ και $\mathbf{q}_C = [1, 1.4, 1.1, 2, 2]^T$
- Πίνακες spatial covariance (3.2.1): $\mathbf{R}_i, \forall i = 1, \dots, 5$
- *Beamforming* πίνακες (3.2.2): $\mathbf{U}_A, \mathbf{U}_B$
- Βάρη αντικειμενικής συνάρτησης (3.2.3): \mathbf{w}
- Μέγιστη ισχύς ανά χρήστη (3.2.4): \mathbf{q}_{max}
- Αποδεκτά κατώφλια SINRs (3.2.5): \mathbf{SINR}_{thres}
- Θόρυβος: $\sigma = 1$



Σχήμα 3.5: Ισχύς κάθε χρήστη και συνολική ισχύς συστήματος για διαφορετικές αρχικές συνθήκες με εναλλαγές του **Gradient Descent** και της **Generalized Eigenvalue**.



Σχήμα 3.6: *Beamforming* πίνακας για διαφορετικές αρχικές συνθήκες με εναλλαγές του **Gradient Descent** και της **Generalized Eigenvalue**. Παρουσιάζεται η νόρμα κάθε στοιχείου της κεραίας για τον κάθε χρήστη.

Ισχύς με τη Gradient Descent Μέθοδο

Εφαρμόζοντας από κοινού τη μέθοδο Gradient Descent, για την εύρεση του διανύσματος ισχύος, και τη μέθοδο Generalized Eigenvalue για την εύρεση του *beamforming* πίνακα, όπως είπαμε στον αλγόριθμο (2.3.3), λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα και γραφήματα.

Ας σημειώσουμε, επίσης ότι ο μέγιστο αριθμός των βημάτων της Gradient Descent μεθόδου είναι $L_G = 100$.

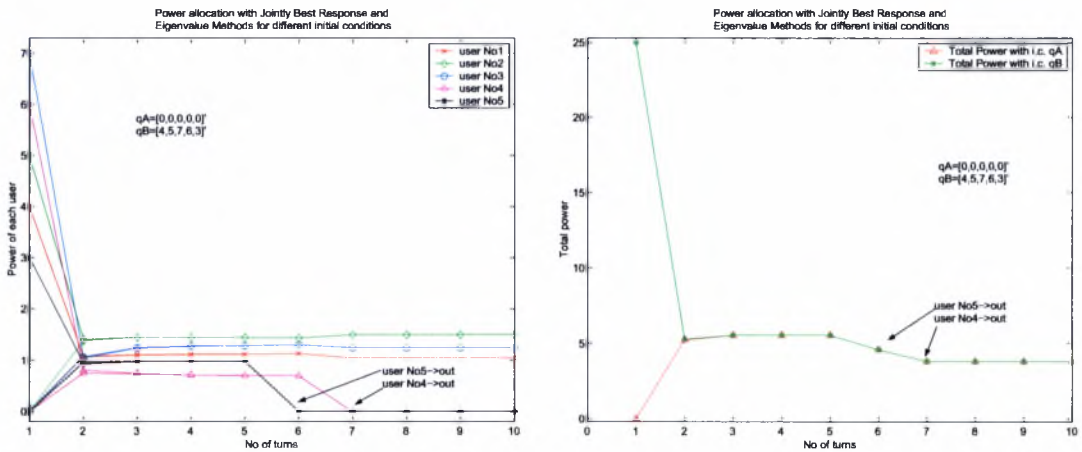
Στο Σχήμα (3.5) απεικονίζεται (αριστερά) η ισχύς κάθε χρήστη για τις δύο αρχικές συνθήκες καθώς και η συνολική ισχύς του συστήματος (δεξιά). Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει

για τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Στο Σχήμα (3.6) απεικονίζεται ο πίνακας *beamforming* που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας.

Το διάνυσμα ισχύος στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος, η συνολική ισχύς και ο πίνακας *beamforming* είναι:

$$\mathbf{q}_{opt} = \begin{bmatrix} 0.81 \\ 1.55 \\ 1.03 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{tot} = 3.39 \quad \text{και} \quad \mathbf{U}_{opt} = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.37 + 0.07 \cdot i & -0.43 & 0 & 0 \\ 0.63 & -0.10 - 0.01 \cdot i & 0.76 & 0 & 0 \\ 0.22 & 0.20 + 0.41 \cdot i & 0.27 & 0 & 0 \\ 0.66 & 0.79 - 0.01 \cdot i & -0.38 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ το βήμα που χρησιμοποιήθηκε είναι: $\alpha_2 = 0.01$.

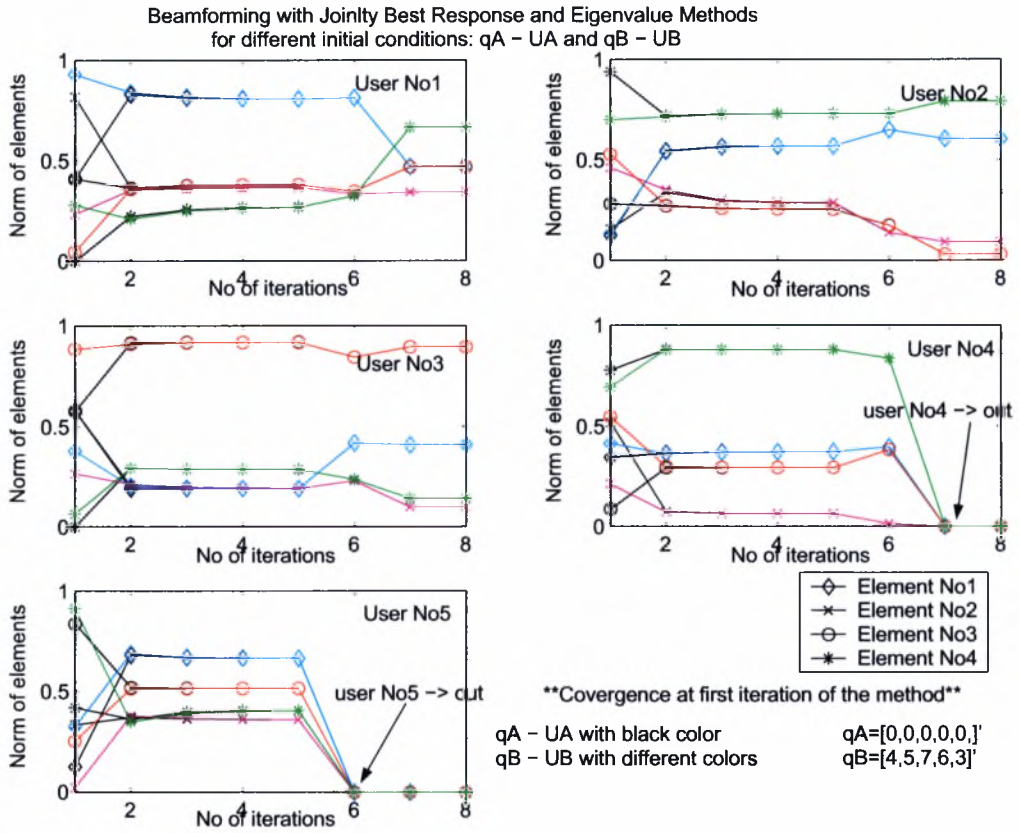


Σχήμα 3.7: Ισχύς κάθε χρήστη και συνολική ισχύς συστήματος για διαφορετικές αρχικές συνθήκες με εναλλαγές του **Best Response** και της **Generalized Eigenvalue**.

Ισχύς με τη Best Response Μέθοδο

Εφαρμόζοντας, από κοινού τη μέθοδο Best Response, για την εύρεση του διανύσματος ισχύος, και τη μέθοδο Generalized Eigenvalue για την εύρεση του *beamforming* πίνακα, όπως είπαμε στον αλγόριθμο (2.3.3), για Αρχικές συνθήκες \mathbf{q}_A , \mathbf{q}_B , λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα και γραφήματα.

Σημειώνουμε, επίσης ότι ο μέγιστος αριθμός των βημάτων της Best Response μεθόδου είναι



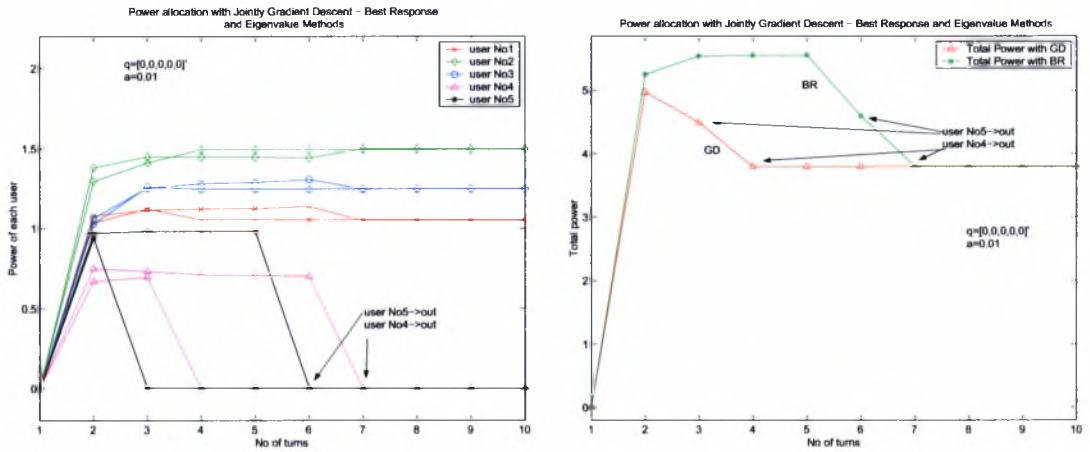
Σχήμα 3.8: *Beamforming* πίνακας για διαφορετικές αρχικές συνθήκες με εναλλαγές του **Best Response** και της **Generalized Eigenvalue**. Παρουσιάζεται η νόρμα κάθε στοιχείου της κεραίας για τον κάθε χρήστη.

$$L_B = 100.$$

Ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ίδιο βέλτιστο διάνυσμα ισχύος και στον πίνακα *beamforming* για τις διαφορετικές αρχικές συνθήκες \mathbf{q}_A , \mathbf{U}_A και \mathbf{q}_B , \mathbf{U}_B .

Στο Σχήμα (3.7) απεικονίζεται (αριστερά) η ισχύς κάθε χρήστη για τις δύο αρχικές συνθήκες καθώς και η συνολική ισχύς του συστήματος (δεξιά). Στο Σχήμα (3.8) απεικονίζεται ο πίνακας *beamforming* που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας.

Το διάνυσμα ισχύος στο οποίο συγκλίνει ο αλγόριθμος, η συνολική ισχύς και ο πίνακας *beamforming* είναι τα ίδια με τα: \mathbf{q}_{opt} , \mathbf{q}_{tot} και \mathbf{U}_{opt} .



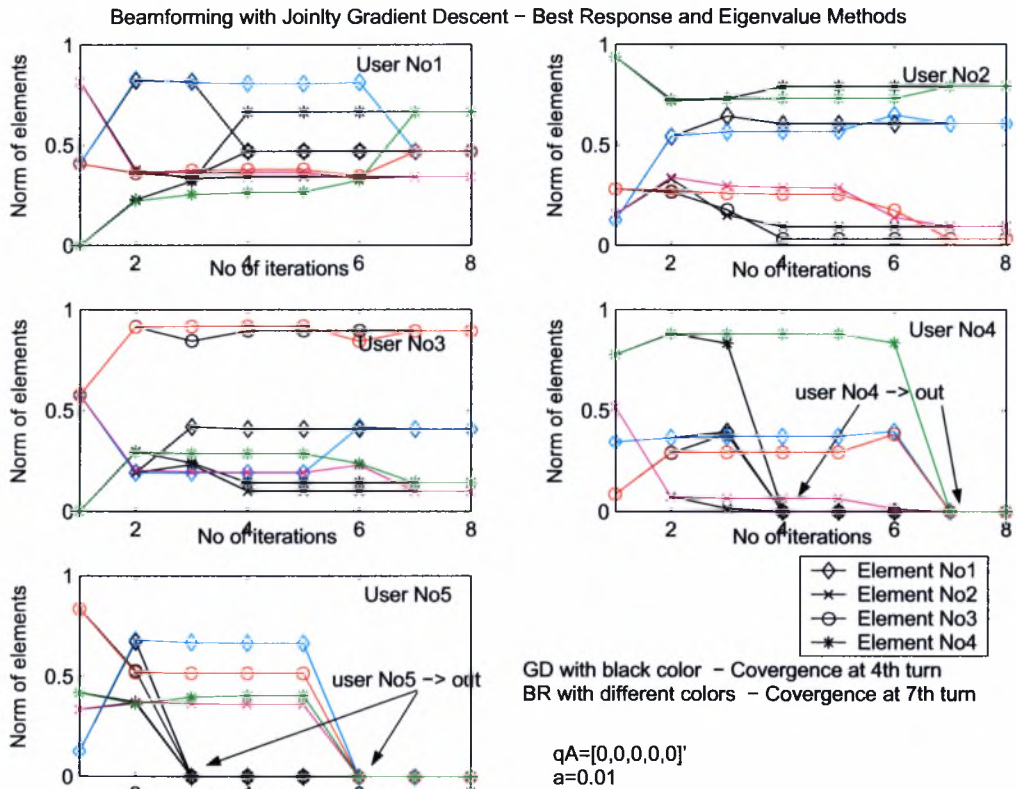
Σχήμα 3.9: Ισχύς κάθε χρήστη και συνολική ισχύς συστήματος με εναλλαγές του **Gradient Descent** και του **Best Response** με τη **Generalized Eigenvalue**.

Σύγκριση Μεθόδων

Παρακάτω παραθέτουμε συγκριτικά γραφήματα για τους δύο συνδιαστικούς αλγορίθμους, Gradient Descent και Best Response με τη Generalized Eigenvalue μέθοδο.

Στο Σχήμα (3.9) φαίνεται η κατανομή ισχύος και η συνολική ισχύς της Gradient Descent και της Best Response μεθόδου για τις αρχικές συνθήκες \mathbf{q}_A , \mathbf{U}_A .

Στο Σχήμα (3.10) φαίνεται ο πίνακας *beamforming* που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση ωφελιμότητας.



Σχήμα 3.10: *Beamforming* πίνακας με εναλλαγές του **Gradient Descent** και του **Best Response** με τη **Generalized Eigenvalue**.

3.4 Κώδικας Υλοποίησης Αλγορίθμων

3.4.1 Ισχύς

Gradient Descent Μέθοδος

Ο κώδικας υλοποίησης του επαναληπτικού υπολογισμού (2.3.4) του διανύσματος ισχύος με τη μέθοδο του Gradient Descent είναι ο ακόλουθος:

```
function MyPowerGradient=LGradientIterations(PowerVector,
MaxPowerVector, BeamformingMatrix, SpatialSignature, Noise,
```



```
WeightVector, LIterations, StepSize)
```

```
q=PowerVector; q_max=MaxPowerVector; U=BeamformingMatrix;
R=SpatialSignature; sigma=Noise; w=WeightVector; L=LIterations;
a=StepSize;
```

```
No=length(q);
```

```
for cnt=1:No
```

```
    U(:,cnt)=U(:,cnt)/norm(U(:,cnt));    %Kanonikopoiisi Beamforming vectors
```

```
    if q(cnt)>q_max(cnt)                    %Meiws i tw n initial power wste na
```

```
                                            %min yperbainei to q_max
```

```
        q(cnt)=q_max(cnt);
```

```
    end
```

```
end
```

```
q_tmp=zeros(No,1);    %Temporary power vector
```

```
q_pre=q;    %Power vector at previous iteration
```

```
P(1,:)=q';    %Matrix me ta power allocation
```

```
toler=ones(No,1)*10(-4);
```

```
iter=1;    %No of iterations
```

```
while iter<=L
```

```
    for i=1:No
```

```

                                                                    %Gradient iteration
q(i)=q_pre(i)+ a*((w(i)/q_pre(i))-SumMinusI(q_pre,U,R,sigma,w,i));
if q(i)>q_max(i)          %Na min kseperna to q_max
    q(i)=q_max(i);
end
end
if (q-q_tmp)<toler      %Anoxi stin akribeia tis sygklisis
    iter=iter+1;
    P(iter,:)=q';
    break;
else
    iter=iter+1;
    P(iter,:)=q';
    q_pre=q;
    q_tmp=q;
end
end

MyPowerGradient=P;

```

Best Response Μέθοδος

Ο κώδικας υλοποίησης του επαναληπτικού υπολογισμού (2.3.5) του διανύσματος ισχύος με τη μέθοδο του Best Response είναι ο ακόλουθος:

```

function MyPowerBR=LBRIterations(PowerVector, MaxPowerVector,
BeamformingMatrix, SpatialSignature, Noise, WeightVector,

```

LIterations)

```
q=PowerVector; q_max=MaxPowerVector; U=BeamformingMatrix;
R=SpatialSignature; sigma=Noise; w=WeightVector; L=LIterations;
```

```
No=length(q);
```

```
for cnt=1:No
```

```
    U(:,cnt)=U(:,cnt)/norm(U(:,cnt));    %Kanonikopoiisi Beamforming vectors
```

```
    if q(cnt)>q_max(cnt)                    %Meiws i tw n initial power wste na
```

```
        %min yperbainei to q_max
```

```
        q(cnt)=q_max(cnt);
```

```
    end
```

```
end
```

```
q_tmp=zeros(No,1);    %Temporary power vector
```

```
q_pre=q;    %Power vector at previous iteration
```

```
P(1,:)=q';    %Matrix me ta power allocation
```

```
toler=ones(No,1)*10(-4);
```

```
iter=1;    %No of iterations
```

```
while iter<=L
```

```
    for i=1:No
```

```
        %Gradient iteration
```

```

q(i)=w(i)/SumMinusI(q_pre,U,R,sigma,w,i);
if q(i)>q_max(i)          %Na min kseperna to q_max
    q(i)=q_max(i);
end
end
if (q-q_tmp)<toler      %Anoxi stin akribeia tis sygklisis
    iter=iter+1;
    P(iter,:)=q';
    break;
else
    iter=iter+1;
    P(iter,:)=q';
    q_pre=q;
    q_tmp=q;
end
end

MyPowerBR=P;

```

3.4.2 Μορφοποίηση Δέσμης

Generalized Eigenvalue Μέθοδος

Ο κώδικας υλοποίησης της Generalized Eigenvalue μεθόδου εύρεσης του βέλτιστου πίνακα *beamforming* (2.3.6) είναι ο ακόλουθος:

```

function Beam=Eigenvalue(PowerVector, BeamformingMatrix,
SpatialSignature, WeightVector, Noise)

```

```

q=PowerVector; U=BeamformingMatrix; R=SpatialSignature;
w=WeightVector; sigma=Noise;

NoU=length(q); NoB=length(U(:,1));

MySum=zeros(NoB,NoB,NoU);

for s=1:NoU
    for m=1:NoU
        MySum(:,:,s)=MySum(:,:,s)+q(m)*R(:,:,m);
    end
    MySum(:,:,s)=MySum(:,:,s)-q(s)*R(:,:,s);
end

for k=1:NoU
    Ms(:,:,k)=q(k)*R(:,:,k);
    Mi(:,:,k)=MySum(:,:,k)+sigma*eye(NoB);
end

for i=1:NoU
    %Eyresi dianysmatos poy antistoixei sti megalyteri idiotimi
    [B,EigVal]=eig(Ms(:,:,i),Mi(:,:,i));
    [MaxEigenValue IndexMaxValue]=max(diag(EigVal));

    %kanonikopoiisi dianysmatos

```

```
MB=(B(:,IndexMaxValue))/(norm(B(:,IndexMaxValue)));
```

```
%Final beamforming vector for user i
```

```
MyBeam(:,i)=conj(MB);
```

```
end
```

```
Beam=MyBeam;
```

Κεφάλαιο 4

Μελλοντικές Μελέτες - Επεκτάσεις

4.1 Ουρές

Back-Pressure Routing, Power Control And Beamforming

Υποκινούμενοι από τα [3],[2] όπου παρουσιάζονται κατανεμημένοι αλγόριθμοι μεγιστοποίησης του *throughput* σε *multihop* CDMA ασύρματα δίκτυα, παραθέτουμε μια πρόταση που θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε αυτή την περίπτωση.

Στις παραπάνω αναφορές, γίνεται λόγος, για μεθόδους που αναζητούν ένα βέλτιστο διάνυσμα ισχύος αφού πρώτα βρεθεί η μέγιστη διαφορά αποθεμάτων σε κάθε ζεύξη, το οποίο συμβολίζουμε με $w_i(t)$ (για λεπτομέρειες βλ. [3] και [2]).

Στη δική μας, περίπτωση, αναζητάμε ένα διάνυσμα ισχύος και έναν *beamforming* πίνακα που να μεγιστοποιεί το *throughput* του δικτύου κατά τη διάρκεια της επικοινωνίας.

Έως τώρα είδαμε μια αντικειμενική συνάρτηση, ανεξάρτητη του χρόνου, η οποία όπως έχουμε πει, είναι η (2.2.6):

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} S^{UL}(\mathbf{U}, \mathbf{q}) &= \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log SINR_i(\mathbf{U}, \mathbf{q}) \\ \Leftrightarrow \max_{\mathbf{U}, \mathbf{q}} \sum_{i=1}^K w_i \log &\left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \end{aligned}$$

Με το $\log SINR_i$ να αποτελεί τη χωρητικότητα της ζεύξης. Μπορούμε να δούμε την παραπάνω συνάρτηση σαν μια συνάρτηση μεγιστοποίησης του *throughput* του συστήματος επικοινωνίας,

ερμηνεύοντας το διάνυσμα των βαρών \mathbf{w} , ως τις ουρές αναμονής στο σύστημα, δηλαδή σε ένα σύστημα όπως αυτό που περιγράφει το Σχήμα (4.1):



Σχήμα 4.1: Σύστημα εξυπηρέτησης K χρηστών από το Σταθμό Βάσης

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα (4.1), τα πακέτα στις ουρές $w_i(t+1)$, $\forall i$, τη χρονική στιγμή $t+1$ είναι ίσα με τα πακέτα στις ουρές της προηγούμενης χρονικής στιγμής $w_i(t)$ συν τα πακέτα $a_i(t)$, που κατέφθασαν κατά τη χρονική στιγμή t μείον τα πακέτα $c_i(t)$, που αναχώρησαν τη χρονική στιγμή t . Δηλαδή:

$$w_i(t+1) = [w_i(t) + a_i(t) - c_i(t)]^+{}^1$$

Σκοπός μας, είναι να μεγιστοποιήσουμε την κυκλοφορία στο σταθμό βάσης, δηλαδή, πρέπει να βρούμε εκείνα τα $c_i(t)$ για τα οποία να μεγιστοποιείται το $\sum_i^K w_i(t)c_i(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t . Άρα:

$$\max_c \sum_i^K w_i(t)c_i(t) \Rightarrow \max_{\mathbf{q}, \mathbf{U}} \sum_i^K w_i(t) \log \text{SINR}_i(\mathbf{q}, \mathbf{U})$$

αφού $c_i(t) = \log \text{SINR}_i(\mathbf{q}, \mathbf{U})$.

$$\Rightarrow \max_{\mathbf{q}, \mathbf{U}} \sum_i^K w_i(t) \log \left(\frac{q_i \mathbf{u}_i^H \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \left(\sum_{k=1, k \neq i}^K q_k \mathbf{R}_k + \sigma^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{u}_i} \right) \quad (4.1.1)$$

Με το SINR_i να αλλάζει στο χρόνο πλέον. Δηλαδή, επιχειρούμε να μεγιστοποιήσουμε το παραπάνω σε κάθε *time slot*.

¹Με $[x]^+ = \max\{x, 0\}$

Επομένως, σε κάθε *time slot* ψάχνουμε το διάνυσμα ισχύος και τον *beamforming* πίνακα που ικανοποιούν την (4.1.1), άρα και μεγιστοποιούν το *throughput*.

Ένας πιθανός αλγόριθμος που θα μπορούσε να εφαρμοστεί είναι ο ακόλουθος (συμβουλευόμενοι τα [3],[2]):

Αλγόριθμος

Σε κάθε *time slot* $t = 1, 2, \dots$ κάθε ζεύξη $l_i = 1, 2, \dots, L$:

1. Υπολογίζει τη διαφορά αποθεμάτων

$$X_i^m(t) = \begin{cases} W_{xmt(l_i)}^m(t) - W_{rcv(l_i)}^m(t), & rcv(l_i) \neq m \\ W_{xmt(l_i)}^m(t), & rcv(l_i) = m \end{cases}$$

για κάθε ροή με προορισμό $m = 1, 2, \dots, N$.

2. Προγραμματίζει μια ροή μετάδοσης $m_i^*(i)$ επιτυγχάνοντας τη μέγιστη διαφορά αποθεμάτων:

$$X_i^{m^*(i)}(t) = X_i(t) := \max_{m=1,2,\dots,N} X_i^m(t)$$

3. Υπολογίζει το διάνυσμα ισχύος και τον *beamforming* πίνακα σύμφωνα με τον αλγόριθμο που ορίσαμε στην υποενότητα (2.3.3).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι σε κάθε *time slot* το σύστημα επιλύει και ένα διαφορετικό πρόβλημα, αφού τα αποθέματα και οι ροές διαφέρουν από στιγμή σε στιγμή, οπότε ο αλγόριθμος δεν φτάνει στο βέλτιστο ζεύγος (\mathbf{q}, \mathbf{U}) της χρονικής στιγμής στην οποία επιλύεται. Μελλοντικός σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος εγγυάται μέγιστο *throughput*.

Βιβλιογραφία

- [1] A. Dua, K. Medepalli and A. J. Paulraj, *Receive antenna selection in MIMO systems using convex optimization*.
- [2] A. Giannoulis, K. Tsoukatos and L. Tassiulas, *Lightweight cross-layer control algorithms for fairness and energy efficiency in CDMA ad-hoc networks*.
- [3] ———, *Maximum Throuput power control in CDMA wireless networks*.
- [4] D. Palomar and M. Chiang, *Alternative decompositions for distributed maximization of network utility: Framework and applications*.
- [5] David Tse and Pramond Viswanath, *Fundamentals of wireless communication*, Cambridge University Press, 2004.
- [6] Edwin K. P. Chong and Stanislaw H. Zak, *An introduction to optimization*, John Wiley and sons, Inc., New York, 2001.
- [7] F. Rashid-Farrokhi, L. Tassiulas and K. J. R. Liu, *Joint optimal power control and beamforming in wireless networks using antenna arrays*, IEEE Trans. on Communications **vol. 46** (1998), 1313–1324.
- [8] ———, *Transmit beamforming and power control for cellular wireless systems*, IEEE Trans. on Communications **vol. 16** (1998), 1437–1450.
- [9] I. Koutsopoulos, K. Tsoukatos and K. Aggelis, *Physical layer techniques and maximum throughput scheduling with antenna arrays*.
- [10] M. Bengtsson and B. Ottersten, *Optimal downlink beamforming using semidefinite optimization*.
- [11] M. Chiang, *Balancing transport and physical layers in wireless multihop networks: Jointly optimal congestion control and power control*, IEEE Jour. on Select. Areas in Communications **vol. 23** (2005), 104–116.
- [12] M. Chiang and J. Bell, *Balancing supply and demand of bandwidth in wireless cellular networks: utility maximization over powers and rates*.
- [13] M. Kobayashi and G. Caire, *An iterative waterfilling algorithm for maximum weighted sum-rate of gaussian MIMO-MAC and MIMO-BC*.

- [14] Maryam Fazel and Mung Chiang, *Network utility maximization with nonconcave utilities using sum-of-squares method*.
- [15] M.Schubert and H. Boche, *Solution of the multiuser downlink beamforming problem with individual SINR constraints*, IEEE Trans. on Vehicular Technology **vol. 53** (2004), 18–28.
- [16] P. Hande, S. Rangan and M. Chiang, *Distributed uplink power control for optimal SIR assignment in cellular networks*, IEEE INFOCOM.
- [17] R. Stridh, M. Bengtsson and B. Ottersten, *System evaluation of optimal downlink beamforming with congestion control in wireless communication*, IEEE Trans. on Wireless Communications.
- [18] R. T. Rockafellar, *Lagrange multipliers and optimality*, SLAM Review **vol. 35** (1993), 183–283.
- [19] S.A. Grandhi, R. Vijayan and D.J. Goodman, *Distributed power control in cellular radio systems*, IEEE Trans. on Communication **vol. 42** (1994), 266–268.
- [20] S.A. Grandhi, R. Vijayan, D.J. Goodman and J. Zander, *Centralized power control in cellular radio systems*, IEEE Trans. on Vehicular Technology **vol. 42** (1993), 466–468.
- [21] Sunil Kandukuri and Stephen Boyd, *Optimal power control in interference-limited fading wireless channels with outage-probability specifications*, IEEE Trans. on Wireless Communication **vol. 1** (2002), 46–55.
- [22] W. Yang and G. Xu, *Optimal downlink power assignment for smart antenna systems*, Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, and Signal **vol. 54** (1998).



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085800