



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΕΡΓΑΣΙΩΝ
Εργαστήριο Μηχανικής & Αντοχής των Υλικών

Διπλωματική Εργασία με θέμα:

**«Αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις του προβλήματος
της έλασης»**

Ντορίνα Μαρία Τσάρκα

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

Βόλος, Ιούλιος 2005



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4555/1
Ημερ. Εισ.: 21-07-2005
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2005
ΤΣΑ

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Αράβας
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Γρηγόρης Χαϊδεμενόπουλος
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Πετρόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

© 2005 Ντορίνα Μαρία Τσάρκα

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται ανάλυση της κατεργασίας της ψυχρής και θερμής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου ABAQUS.

Οι αναλυτικές θεωρίες που εξετάζονται είναι η θεωρία του λόφου τριβής που διατυπώθηκε από τον Von Karman (1925) καθώς και η προσέγγιση της ίδιας θεωρίας που εισήγαγαν οι Ford και Bland (1948).

Οι δύο αυτές θεωρίες αποσκοπούν στον υπολογισμό των φορτίων που δημιουργούνται κατά την κατεργασία, δηλαδή της πίεσης που ασκούν τα ράουλα κατά μήκος του τόξου επαφής, καθώς και της δύναμης και της ροπής που ασκεί το κάθε ράουλο στο έλασμα.

Η περίπτωση που εξετάζεται αφορά στην έλαση ελάσματος ενός ελαστικού-τέλεια-πλαστικού και ισότροπου υλικού. Η έλαση θεωρούμε ότι γίνεται χωρίς την επιβολή δυνάμεων στο τεμάχιο και επομένως η τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στην επιφάνεια του ράουλου και του κατεργάσιμου υλικού αποτελεί τον μοναδικό μηχανισμό έλξης του ελάσματος στο διάκενο των ράουλων. Ακόμη η ελαστική παραμόρφωση των ράουλων και όποια αδρανειακά φαινόμενα της κατεργασίας θεωρούνται αμελητέα και δεν λαμβάνονται υπόψη.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία γενική αναφορά στην κατεργασία της έλασης και των εφαρμογών της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται και επιλύονται οι αναλυτικές θεωρίες της ψυχρής έλασης των Von Karman και Ford -Bland για συγκεκριμένες γεωμετρικές και καταστατικές παραμέτρους. Η επίλυση γίνεται με τη γλώσσα προγραμματισμού Fortran και με τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss .

Στο τρίτο κεφάλαιο το πρόβλημα της ψυχρής έλασης προσομοιώνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε περιβάλλον ABAQUS. Τα αποτελέσματα της

ανάλυσης συγκρίνονται με τις αναλυτικές λύσεις και εξετάζεται η ισχύς των παραδοχών της αναλυτικής θεωρίας στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αναλυτική θεώρηση του προβλήματος της θερμής έλασης και λαμβάνει χώρα η επίλυσή της και η παράθεση των αποτελεσμάτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, ακολουθώντας την ίδια λογική, λαμβάνει χώρα η μοντελοποίηση του προβλήματος της θερμής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και γίνεται σύγκριση με τα αναλυτικά αποτελέσματα.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι τα φορτία αλλά και οι παραδοχές της αναλυτικής θεωρίας της ψυχρής έλασης συμφωνούν με τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Στην θερμή έλαση τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζουν απόκλιση στο επίπεδο ανάμεσα στην είσοδο και το ουδέτερο σημείο, παρά το γεγονός ότι το αναλυτικό κριτήριο διαρροής είναι σε ισχύ ενώ το επίπεδο της εξόδου του ελάσματος είναι σε συμφωνία με την προσεγγιστική αναλυτική θεωρία.

Θα ήθελα στο σημείο αυτό να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Καθηγητή κ. Νίκο Αράβα, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Για τη γνώση και τον τρόπο σκέψης που μου μετέφερε τόσο κατά την εκπόνηση της εργασίας όσο και κατά την διδασκαλία των προπτυχιακών μαθημάτων που με έκαναν να αγαπήσω το αντικείμενο της Μηχανικής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κυρίου Χαϊδεμενόπουλο Γρ. και Πετρόπουλο Γ. για τη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ακαδημαϊκής κοινότητας του τμήματός μας για τη γνώση και τις πληροφορίες που μου πρόσφεραν σε ακαδημαϊκά θέματα και όχι μόνο. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στους φίλους και συμφοιτητές μου.

Τέλος ευχαριστώ τους γονείς μου, Μιλτιάδη και Ελβίρα, που με στηρίζουν πάντα με την αγάπη τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Συμβατική Έλαση

1.1 Εισαγωγή.....	5
1.2 Η κατεργασία της έλασης.....	5

Κεφάλαιο 2. Ψυχρή έλαση και αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης

2.1 Εισαγωγή.....	9
2.2 Το πρόβλημα της ψυχρής έλασης.....	9
2.3 Επίλυση του προβλήματος της ψυχρής έλασης από τον Von Karman.....	12
2.3.1 Γεωμετρία της ψυχρής έλασης και διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας.....	12
2.3.2 Υπολογισμός της κατανομής της πίεσης στο ράουλο κατά μήκος του τόξου επαφής.....	15
2.3.4 Υπολογισμός της δύναμης και της ροπής του ράουλου.....	16
2.4 Επίλυση του προβλήματος της ψυχρής έλασης από τους Ford και Bland.....	18
2.4.1 Υπολογισμός της κατανομής της πίεσης στο ράουλο κατά μήκος του τόξου επαφής.....	18
2.4.2 Υπολογισμός της δύναμης και της ροπής του ράουλου.....	20

Κεφάλαιο 3. Επίλυση του προβλήματος της ψυχρής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

3.1 Εισαγωγή.....	22
3.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	22
3.3 Στατική ανάλυση του προβλήματος.....	23
3.4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων.....	25
3.5 Σύγκριση μεθόδων.....	28

Κεφάλαιο 4. Αναλυτική επίλυση του προβλήματος της θερμής έλασης

4.1 Εισαγωγή.....	32
4.2 Γεωμετρία της θερμής έλασης και διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας.....	32
4.3 Υπολογισμός της κατανομής της πίεσης στο ράουλο κατά μήκος του τόξου επαφής.....	36
4.4 Υπολογισμός της δύναμης και της ροπής του ράουλου.....	37

Κεφάλαιο 5. Επίλυση του προβλήματος της θερμής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

5.1 Εισαγωγή.....	39
5.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	39
5.3 Στατική ανάλυση του προβλήματος.....	41
5.4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων.....	42
5.5 Σύγκριση μεθόδων.....	45

Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα.....49

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Κώδικας ABAQUS για το πρόβλημα της ψυχρής έλασης
Κώδικας ABAQUS για το πρόβλημα της θερμής έλασης

1. ΣΥΜΒΑΤΙΚΗ ΕΛΑΣΗ

1.1 Εισαγωγή

Έλαση είναι η κατεργασία μείωσης της διατομής του αντικειμένου που παραμορφώνεται πλαστικά μεταξύ δύο περιστρεφόμενων ράουλων. Η μείωση αυτή της διατομής συνοδεύεται με επιμήκυνση κατά τη διεύθυνση της έλασης και μπορεί επίσης να υπάρξει μία κατά πλάτος αύξηση.

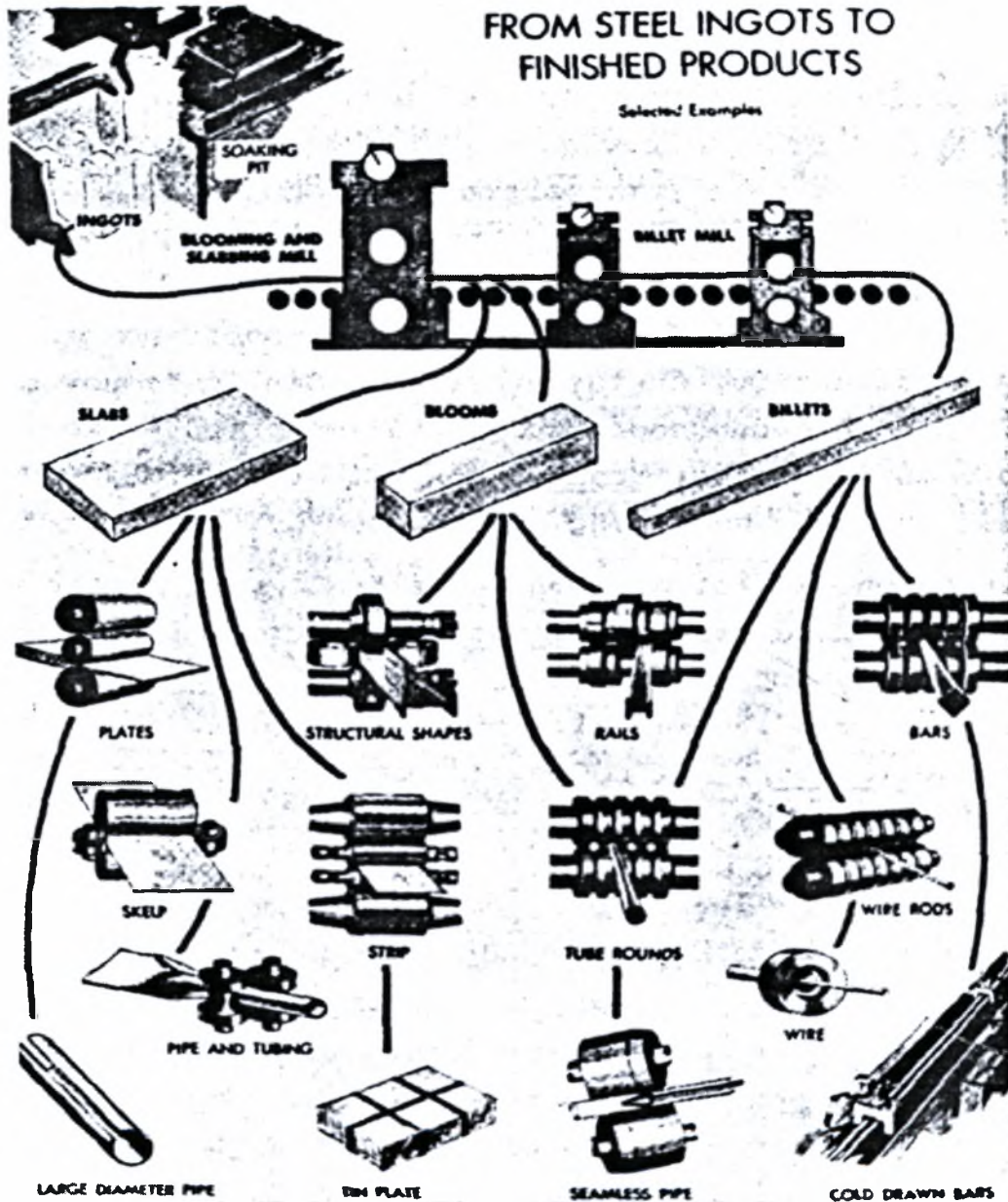
1.1 Η κατεργασία της έλασης

Μεγάλες μειώσεις στην διατομή, όπως για παράδειγμα στην έλαση των μπιγιετών και πλακών, επιτυγχάνονται σε υψηλές θερμοκρασίες. Η κατεργασία αυτή καλείται θερμή έλαση και είναι μία από τις κύριες βιομηχανικές μεθόδους παραγωγής ράβδων ορθογωνικής διατομής.

Η θερμή έλαση εκτελείται συνήθως σε διαδοχικές φάσεις σε μία σειρά ελάστρων. Χυτά τεμάχια (ingots) ελάσσονται είτε σε μορφή μεγάλων ράβδων συνήθως τετραγωνικής διατομής (blooms) με ελάχιστο πάχος μεγαλύτερο από 150mm, είτε σε μορφή μεγάλων πλακών ορθογωνικής διατομής (slabs). Οι ράβδοι (blooms) στη συνέχεια υφίστανται με έλαση μείωση του μεγέθους τους για την παραγωγή μπιγιετών (billets), ενώ από τις μεγάλες πλάκες (slabs) με περαιτέρω έλαση παράγονται λεπτότερα ελάσματα (plates ή strips). Τα προϊόντα αυτά συνιστούν τη πρώτη ύλη για περαιτέρω θερμές ή ψυχρές κατεργασίες διαμορφώσεων (Σχήμα (1.1)).

Το έλαστρο για τη συμβατική έλαση αποτελείται από μεγάλα οριζόντια κυλινδρικά ράουλα που είναι τοποθετημένα το ένα πάνω από το άλλο κατά την κατακόρυφο(Σχήμα (1.2)). Για τις αρχικές μειώσεις της διατομής σε ένα αριθμό 'πάσων (primary roughing ή breakdown passes) συνήθως χρησιμοποιούνται έλαστρα με δύο ράουλα (2-high mill) ή έλαστρα με τρία ράουλα (3-high mill) με διάμετρο ράουλων περίπου 600-1400mm. Κατακόρυφα πλευρικά ράουλα χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο του πλάτους του τεμαχίου κατά τη διάρκεια της

έλασης. Ράουλα ειδικής μορφής χρησιμοποιούνται για την παραγωγή με έλαση διαφόρων διατομών δοκών (στρογγυλή, εξαγωνική, γωνιακή κ.τ.λ.).

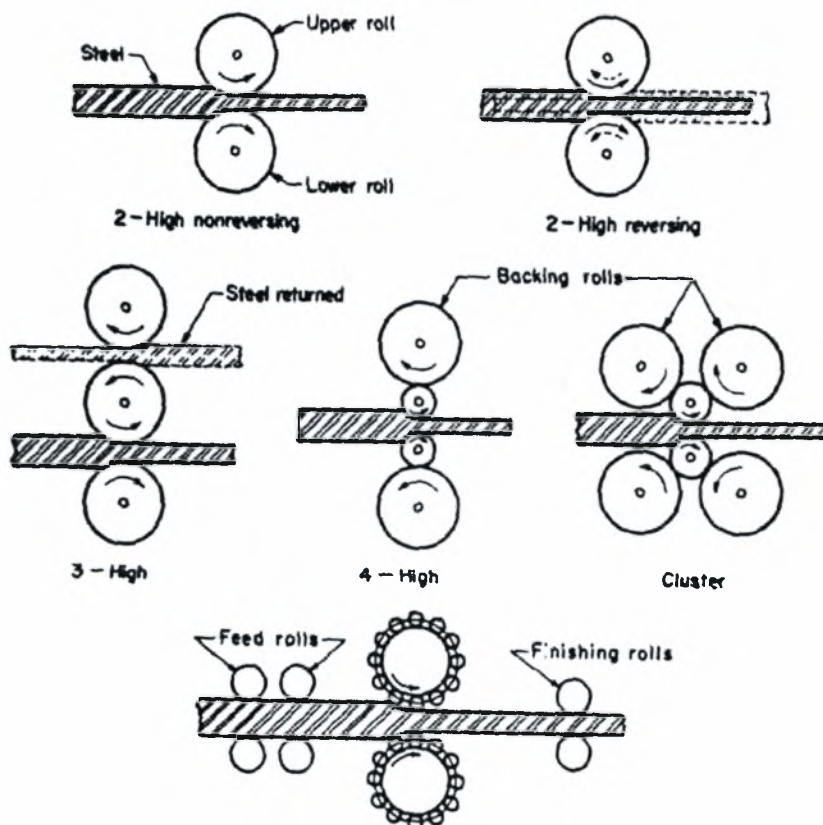


Σχήμα 1.1 Διάγραμμα παραγωγής προϊόντων χάλυβα με έλαση από την πρώτη ύλη (χύτευση) μέχρι τις τελικές φάσεις.

Κατά την έλαση χυτών τεμαχίων (ingots) όπου η μείωση σε πάχος είναι μικρή, η περιοχή πλαστικής παραμόρφωσης περιορίζεται σε μια ζώνη μικρού όγκου. Συνεπώς είναι δυνατόν να κατεργαστούν μεγάλα τεμάχια χρησιμοποιώντας σχετικά

μικρότερα έλαστρα. Για την παραγωγή των χαλύβδινων ελασμάτων τα χυτά τεμάχια έχουν συνήθως βάρος μεγαλύτερο από 0.2MN και τετραγωνική διατομή πλευράς περίπου 600mm. Η έλαση είναι ταχύτερη και πιο οικονομική κατεργασία από την σφυρηλάτηση. Ένας περιοριστικός παράγοντας στην ταχύτητα παραγωγής είναι ο χρόνος που απαιτείται για την μεταφορά του ελασθέντος τεμαχίου πάλι στην είσοδο του ελάστρου, για την περαιτέρω μείωση της διατομής στο επόμενο 'πάσο,. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό αντιμετωπίζεται με τη χρησιμοποίηση ελάστρων με αναστροφή της κίνησης (reversing mills).

Η ελάτωση του χρόνου αυτού έχει σημασία κατά τη θερμή έλαση, επειδή η πτώση της θερμοκρασίας του υλικού είναι μικρή και το υλικό δεν υφίσταται σκλήρυνση λόγω της ψύξης. Η θερμή έλαση βελτιώνει τις μηχανικές



Σχήμα 1.2 Διατάξεις ράουλων σε έλαστρα

ιδιότητες του χυτού μετάλλου, επειδή καθιστά την κρυσταλλική δομή του υλικού περισσότερο ομογενή.

Μεγάλα πλάτη πλακών σε συνδυασμό με μεγάλα φορτία κατά την έλαση μπορεί να προκαλέσουν μεγάλα βέλη κάμψης των ράουλων, με συνέπεια το ύψος της πλάκας μετά την έλαση να μην είναι ομοιόμορφο (η πλάκα είναι παχύτερη στο μέσο από τις άκρες). Αυτό οδήγησε στη χρήση των ελάστρων με τέσσερα ράουλα (4-high mill), στα οποία τα δύο κύρια ράουλα είναι μικρότερης διαμέτρου με συνέπεια την ελάττωση του φορτίου της έλασης, και υποστηρίζονται από βοηθητικά ράουλα (backing rolls) μεγαλύτερης διαμέτρου (Σχήμα (1.2)).

Οι τελικές φάσεις της έλασης για την πρόσδοση της επιθυμητής μορφής πραγματοποιούνται συνήθως εν ψυχρώ (ψυχρή έλαση). Με την ψυχρή έλαση, όπως και με κάθε άλλη κατεργασία διαμόρφωσης του μετάλλου σε θερμοκρασία περιβάλλοντος επιτυγχάνονται βελτιωμένη ποιότητα επιφάνειας, καλή ακρίβεια διαστάσεων και επίσης βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Πλην όμως απαιτούνται μεγαλύτερο φορτίο, ροπή, ενέργεια και ισχύς έλασης για την ίδια ελάττωση του πάχους και ταχύτητα έλασης, σε σχέση με την θερμή έλαση.

Για την ψυχρή έλαση λεπτών ελασμάτων και ελασμάτων πολύ μικρού πάχους (foil) από σκληρά υλικά, όπως για παράδειγμα κράματα αλουμινίου και τιτανίου ή ανοξειδωτοι χάλυβες για την παραγωγή λεπίδων ξυρίσματος, χρησιμοποιούνται έλαστρα με περισσότερα βοηθητικά ράουλα, τα έλαστρα Sendzimir (τύπου Cluster ή planetary).

Μία ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δείχνει ότι η θεωρητική ανάλυση της έλασης σχετίζεται κυρίως με την έλαση ταινίας, πλάκας ή ελάσματος, αλλά οι υπάρχουσες αναλυτικές μέθοδοι είναι προσεγγιστικές.

2. ΨΥΧΡΗ ΕΛΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή

Η θεωρία της έλασης αποσκοπεί στον υπολογισμό του φορτίου και της κατανομής των τάσεων που αναπτύσσονται στα εργαλεία κατά την πλαστική παραμόρφωση του κατεργάσιμου υλικού. Πρώτος ο Von Karman (1925) εισήγαγε κάποιες παραδοχές και διατύπωσε την αναλυτική λύση του προβλήματος της ψυχρής έλασης. Στη συνέχεια, οι Ford και Bland (1948), με επί πλέον προσεγγίσεις διατύπωσαν τη λύση του προβλήματος σε αναλυτική μορφή. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται σε λεπτομέρεια οι δύο αυτές μεθοδολογίες.

2.2 Το πρόβλημα της ψυχρής έλασης

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζεται το πρόβλημα της ψυχρής έλασης κατά το οποίο ένα μεταλλικό έλασμα μειώνεται σε πάχος, περνώντας μέσα από ένα έλαστρο με δύο περιστρεφόμενα κυλινδρικά ράουλα με παράλληλους άξονες. Η μείωση του πάχους συνοδεύεται με επιμήκυνση κατά τη διεύθυνση της έλασης, ενώ μπορεί να υπάρξει και κατά πλάτος αύξηση του τεμαχίου. Στην πράξη, το πλάτος του ελάσματος είναι πολύ μεγαλύτερο συγκριτικά με το πάχος του. Έτσι θεωρούμε ότι η κατεργασία λαμβάνει χώρα υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και συνεπώς το πρόβλημα και οι σχέσεις που το περιγράφουν δίνονται ανά μονάδα πλάτους του ελάσματος. Στην ψυχρή έλαση, η ακτίνα των ράουλων είναι συνήθως τουλάχιστον πέντε φορές μεγαλύτερη του μήκους του τόξου επαφής του κατεργάσιμου υλικού με τα ράουλα.

Έστω h_1 το αρχικό πάχος του ελάσματος που περνώντας μέσα από τα ράουλα του ελάστρου αποκτά τελικό πάχος $h_2 < h_1$.

Ο όγκος του υλικού που περνάει διαμέσου των κατακόρυφων επιπέδων κατά μήκος του τόξου επαφής ανά μονάδα χρόνου πρέπει να είναι ίδιος και έτσι η συνθήκη ασυμπίεστου απαιτεί:

$$h_1 U_1 = h_2 U_2 \quad (2.1)$$

όπου U_1 και U_2 οι ταχύτητες του ελάσματος που αντιστοιχούν στα πάχη h_1 και h_2 .

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η ταχύτητα του ελάσματος αυξάνεται από την είσοδο προς την έξοδο. Στην είσοδο, η περιφερειακή ταχύτητα των ράουλων είναι μεγαλύτερη από τη γραμμική ταχύτητα στην επιφάνεια του ελάσματος και συνεπώς οι δυνάμεις τριβής σπρώχνουν το έλασμα μέσα στο έλαστρο. Στην έξοδο, αντίθετα, το έλασμα κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα και έτσι οι δυνάμεις τριβής αντιτίθενται στην αποχώρηση του ελάσματος από το διάκενο των ράουλων.

Συμπερασματικά, υπάρχει ένα σημείο πάνω στο τόξο επαφής, όπου το έλασμα έχει την ίδια ταχύτητα με την περιφερειακή ταχύτητα των ράουλων, το ουδέτερο σημείο N.

Έστω λοιπόν O το κέντρο του άνω ράουλου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 και α η γωνία του τόξου επαφής AB, που καθορίζεται από την ακτίνα R του ελαστρου και από τη διαφορά $h_1 - h_2$ του πάχους του ελάσματος στην είσοδο και στην έξοδο αντίστοιχα. Έστω ϕ η γωνία ενός σημείου πάνω στο τόξο επαφής, μετρούμενη από το σημείο εξόδου B.

Παίρνουμε τώρα ένα κατακόρυφο κομμάτι ελάσματος κάτω από το τόξο επαφής που καθορίζεται από την γωνιακή συντεταγμένη ϕ . Έστω q η πίεση του ελαστρου στο κομμάτι αυτό και μq η τάση τριβής, όπου μ ένας σταθερός συντελεστής τριβής ανάμεσα στις δύο επιφάνειες. Λαμβάνοντας υπόψη την κατεύθυνση των δυνάμεων τριβής στις δύο πλευρές του ουδέτερου σημείου και ολοκληρώνοντας κατά μήκος του τόξου επαφής, από τη πλευρά της εξόδου προς την είσοδο, προκύπτει η κατακόρυφη δύναμη του ελαστρου ανά μονάδα πλάτους του ελάσματος ως

$$P = R \int_0^{\alpha} q \cos \phi d\phi + \mu R \left(\int_{\phi_n}^{\alpha} q \sin \phi d\phi - \int_0^{\phi_n} q \sin \phi d\phi \right) \quad (2.2)$$

όπου ϕ_n η γωνιακή θέση του ουδέτερου σημείου N. Συνήθως στη ψυχρή έλαση η γωνία επαφής του ελάσματος με το ράουλο είναι μικρότερη από 8° και έτσι η ποσότητα στη παρένθεση μπορεί να αμεληθεί. Επίσης θεωρώντας αποδεκτή τη

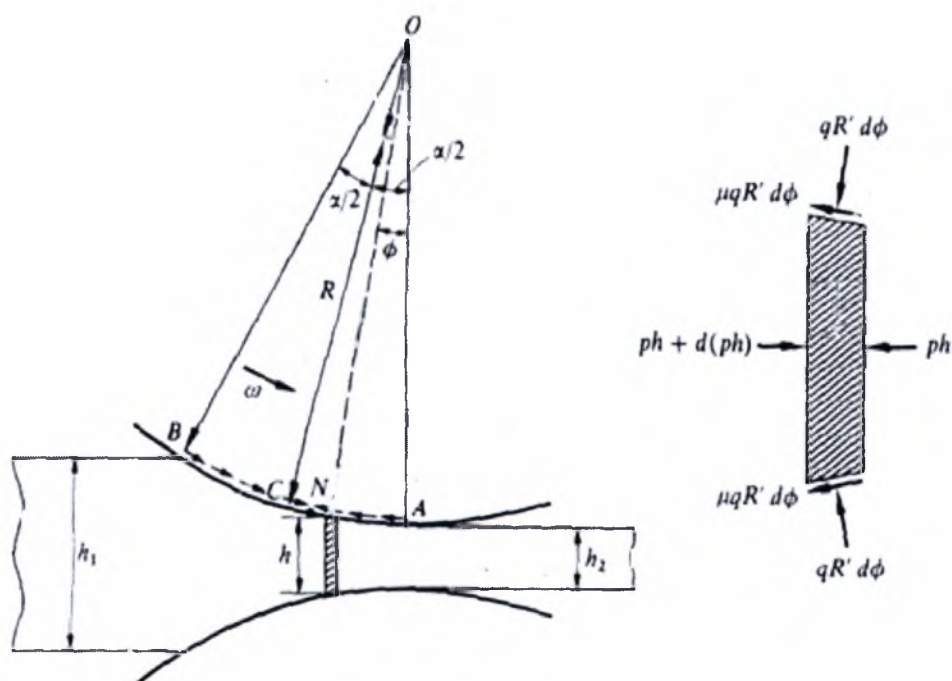
προσέγγιση $\cos \phi \approx 1$ η κατακόρυφη δύναμη του κάθε ράουλου δίνεται από την σχέση

$$P = R \int_0^{\alpha} q \cos \phi d\phi = R \int_0^{\alpha} q d\phi \quad (2.3)$$

Θεωρώντας τα ράουλα απολύτως στερεά και αμελώντας κάθε εκκεντρότητα που συνήθως προκύπτει στην πράξη η ροπή G ανά μονάδα πλάτους, που ασκεί το κάθε ράουλο είναι αποτέλεσμα των ροπών των οριζόντιων συνιστωσών των δυνάμεων που δρουν κατά μήκος του τόξου επαφής και δίνεται από τη σχέση

$$G = \mu R^2 \left(\int_{\phi_n}^{\alpha} q d\phi - \int_0^{\phi_n} q d\phi \right) \quad (2.4)$$

Οι δυνάμεις τριβής στο τόξο επαφής παράγουν μια θετική ροπή κατά την είσοδο του ελάσματος ανάμεσα στα ράουλα και μια αρνητική στην έξοδο του ελάσματος. Ως θετική ορίζεται η ροπή που συνεισφέρει στην κίνηση των ράουλων.

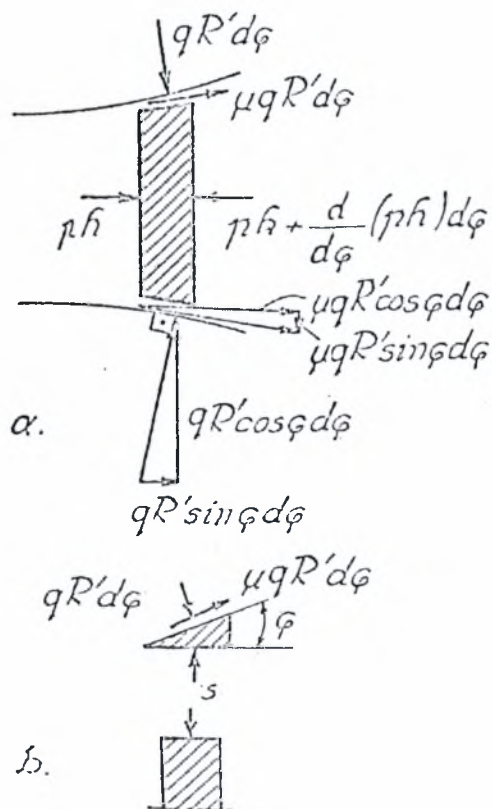


Σχήμα 1.1 Γεωμετρία της ψυχρής έλασης και δυνάμεις που δρουν σε ένα τμήμα του ελάσματος στην πλευρά της εξόδου.

2.3 Επίλυση του Προβλήματος της Ψυχρής Έλασης από τον Von Karman

Η πρώτη αναλυτική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε από τον Von Karman για την κατά προσέγγιση λύση του προβλήματος της ψυχρής έλασης είναι η μέθοδος του 'λόφου τριβής'. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην έλαση, υπάρχει αλλαγή στην σχετική ταχύτητα μεταξύ του ελάσματος και των ράουλων καθώς το έλασμα περνάει μέσα από αυτά. Συνεπώς, οι διατμητικές τάσεις τριβής που αναπτύσσονται κατά μήκος του τόξου επαφής των ράουλων με κατεργάσιμο υλικό αλλάζουν κατεύθυνση κοντά στο ουδέτερο σημείο με αποτέλεσμα το υλικό να κινείται και προς τις δύο κατευθύνσεις σε σχέση με την επιφάνεια των ράουλων και τη δημιουργία 'λόφου τριβής'.

2.3.1 Γεωμετρία της ψυχρής έλασης και διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας



Αναλυτικότερα, για τον υπολογισμό του φορτίου της έλασης και της ροπής που αναπτύσσεται στα ράουλα ο Von Karman υπέθεσε ότι το κομμάτι του ελάσματος που βρίσκεται κάτω από το τόξο επαφής είναι πλήρως πλαστικοποιημένο και η πλαστική του παραμόρφωση θεωρείται ομογενής θλίψη, με τις διατμητικές τάσεις να είναι σημαντικά μικρότερες και να αμελούνται. Έτσι έχουμε ομοιόμορφη κατανομή των ορθών τάσεων πάνω στο πάχος του τεμαχίου και αρχικά επίπεδες διατομές (κάθεται προς το επίπεδο

ήμα 2.2 Δυνάμεις που δρουν σε ένα τμήμα του ελάσματος

παραμόρφωσης) παραμένουν επίπεδες κατά την έλαση.

Επίσης το τόξο επαφής των ράουλων με το έλασμα θεωρείται κυκλικό και ο συντελεστής τριβής σταθερός πάνω στο τόξο επαφής.

Στην πράξη, κατά την διάρκεια της έλασης τα ράουλα του ελαστρου υπόκεινται και αυτά σε κάποια ελαστική παραμόρφωση πάνω στην επιφάνεια επαφής με το κατεργάσιμο υλικό και η κυκλική τους διατομή μεταβάλλεται (roll flatening). Το γεγονός αυτό που στην πράξη πρέπει να λαμβάνεται υπόψη για τον υπολογισμό του φορτίου και της ροπής των ράουλων (σχέση Hitchcock) δεν λαμβάνεται υπόψη στην παρούσα ανάλυση όπου τα ράουλα αντιμετωπίζονται ως απολύτως στερεά σώματα. Έστω λοιπόν μια λεπτή επίπεδη διατομή ελάσματος από το πλαστικοποιημένο τμήμα που ορίζεται από τις γωνίες ϕ και $\phi + d\phi$ κατά μήκος του τόξου επαφής όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2. Η ομοιόμορφη κάθετη συμπίεση που υφίσταται το κομμάτι αυτό του ελάσματος συνοδεύεται από μία οριζόντια δύναμη (οριζόντια ορθή τάση) η οποία γίνεται έντονα θλιπτική όσο πλησιάζουμε το ουδέτερο σημείο και από τις δύο πλευρές. Αν συμβολίσουμε με p την μέση οριζόντια πίεση, η θλιπτική δύναμη ανά μονάδα πλάτους του ελάσματος είναι hp , όπου h το τοπικό πάχος του ελάσματος. Από την ισορροπία των δυνάμεων στην οριζόντια κατεύθυνση (Σχ.2.2) έχουμε

$$ph + 2qR \sin \phi \pm 2\mu qR \cos \phi d\phi - ph - \frac{d}{d\phi}(ph)d\phi = 0$$

η οποία τελικά γράφεται ως

$$\frac{d}{d\phi}(hp) = 2qR(\sin \phi \pm \mu \cos \phi) \quad (2.5)$$

όπου το σύμβολο της πρόσθεσης αναφέρεται σε σημεία στην περιοχή μεταξύ του ουδέτερου επιπέδου και του επιπέδου της εξόδου και της αφαίρεσης στην περιοχή μεταξύ του ουδέτερου επιπέδου και του επιπέδου της εισόδου.

Από την κατακόρυφη ισορροπία του τριγώνου του σχήματος 2.2.b βρίσκουμε την κατακόρυφη ορθή τάση του κομματιού. Η εξίσωση είναι :

$$SRd\phi \cos \phi = qRd\phi \cos \phi \pm \mu qRd\phi \sin \phi \quad (2.6)$$

$$\text{ή} \quad S = q(1 \pm \mu \tan \phi)$$

όπου S η κατακόρυφη ορθή συνιστώσα της τάσης.

Στην ψυχρή έλαση ο συντελεστής τριβής είναι μικρός και έτσι στην παραπάνω σχέση μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση

$$S = q \quad (2.7)$$

Εφόσον το υλικό είναι παντού πλαστικό κατά μήκος του τόξου επαφής και οι κύριες θλιπτικές τάσεις σε κάθε σημείο της διατομής είναι σχεδόν ίσες με p και q σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές, το κριτήριο διαρροής μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$q - p = 2k \quad (2.8)$$

όπου q η πίεση του έλαστρου όπως έχει αναφερθεί και k το όριο διαρροής σε διάτμηση το οποίο μπορεί να ποικίλει κατά μήκος του τόξου επαφής και ισούται με $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ για το κριτήριο Von Mises και $k = \sigma_0 / 2$ για το κριτήριο του Tresca.

Η διαφορική εξίσωση (2.5) και το κριτήριο διαρροής (2.8) αποτελούν την διατύπωση της θεωρίας της έλασης από τον Von Karman.

Η εξίσωση ισορροπίας μπορεί να απλοποιηθεί απαλείφοντας την πίεση p με τη βοήθεια του κριτηρίου διαρροής και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{dh}{d\phi} = 2R \sin \phi$. Έτσι,

λαμβάνοντας υπόψη τη προσέγγιση $\sin \phi = \phi$ και $\cos \phi = 1$ για μικρές γωνίες επαφής και τη γεωμετρική σχέση $h = h_2 + 2R(1 - \cos \phi) \approx h_2 + R\phi^2$ και έπειτα από απλές πράξεις, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$h \frac{d}{d\phi} (q - 2k) \mp 2\mu Rq = 4kR\phi$$

(2.9)

με συνοριακές συνθήκες τις $p = 0$, $q = 2k$ για $\phi = 0$, και $p = 0$, $q = 2k$ για $\phi = \alpha$.

Η γωνία του τόξου επαφής δίνεται από τη γεωμετρική σχέση

$$\alpha = \sqrt{\frac{h_1 - h_2}{R}} = \sqrt{\frac{rh_1}{R}}$$

όπου $r = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$ η ποσοστιαία μείωση του πάχους του ελάσματος.

Είναι χρήσιμο σε αυτό το σημείο να αλλάξουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή ϕ σε ψ , όπου

$$\psi = \tan^{-1} \sqrt{\frac{R}{h_2}} \phi = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{r}{1-r}} \frac{\phi}{\alpha} \right) \quad (2.10)$$

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι $h = h_2 \sec^2 \psi$ η οποία με την βοήθεια της (2.10)

μπορεί να γραφτεί ως $\sqrt{\frac{R}{h_2}} d\phi = \sec^2 \psi d\psi$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2.9) η διαφορική εξίσωση απλοποιείται περαιτέρω ως

$$\frac{dq}{d\psi} \mp 2aq = 4k \tan \psi$$

όπου $a = \mu \sqrt{\frac{R}{h_2}} = \frac{\mu}{\alpha} \sqrt{\frac{r}{1-r}}$ και ορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις συνοριακές

συνθήκες $q = 2k$ για $\psi = 0$ και $\psi = \psi_0$, όπου

$$\psi_0 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{r}{1-r}} = \sin^{-1} \sqrt{r} \quad (2.11)$$

και αντιστοιχεί στο σημείο της εισόδου.

2.3.2 Υπολογισμός της κατανομής της πίεσης στο ράουλο κατά μήκος του τόξου επαφής

Από τη λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία επίλυσης εξισώσεων πρώτης τάξεως προκύπτει η κατανομή της πίεσης του κάθε ράουλου, η οποία σε αδιάστατη μορφή δίνεται από τις σχέσεις

$$\frac{q}{2k} = [1 + f(\psi)] e^{2a\psi} = F_1(\psi) \quad (2.12)$$

$$\frac{q}{2k} = [e^{2a\psi_0} + g(\psi) - g(\psi_0)] e^{-2a\psi} = F_2(\psi)$$

με την πρώτη να αντιστοιχεί στην περιοχή της εξόδου ($0 \leq \psi \leq \psi_n$) και η δεύτερη στην πλευρά της εισόδου ($\psi_n \leq \psi \leq \psi_0$) του ελάσματος στο διάκενο των ράουλων.

Οι συναρτήσεις $f(\psi)$ και $g(\psi)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$f(\psi) = 2 \int_0^{\psi} e^{-2a\psi} \tan \psi d\psi \quad (2.13)$$

$$g(\psi) = 2 \int_0^{\psi} e^{2a\psi} \tan \psi d\psi$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η πίεση των ράουλων συνεχώς αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε το ουδέτερο σημείο $\psi = \psi_n$ και από τις δύο πλευρές, της εισόδου και της εξόδου αντίστοιχα. Το ουδέτερο σημείο ορίζεται από το γεγονός ότι οι τιμή της πίεσης που προκύπτει από τις σχέσεις (2.10) στο σημείο αυτό πρέπει να είναι η ίδια. Έτσι από την εξίσωση των σχέσεων και από το γεγονός ότι η έλαση είναι δυνατή μόνο αν ισχύει $\psi_n > 0$, η ανισότητα

$$e^{2a\psi_0} - 1 > g(\psi_0) \quad (2.14)$$

πρέπει να ικανοποιείται πάντα.

2.3.4 Υπολογισμός της δύναμης και της ροπής του ράουλου

Όταν πλέον είναι γνωστή η κατανομή της πίεσης στο τόξο επαφής των δύο επιφανειών, η αδιάστατη δύναμη και η ροπή του ράουλου υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\frac{P}{2kh_2} = \frac{R}{h_2} \int_0^{\alpha} \left(\frac{q}{2k}\right) d\phi = \sqrt{\frac{R}{h_2}} \int_0^{\tan \psi_0} \left(\frac{q}{2k}\right) d\xi \quad (2.15)$$

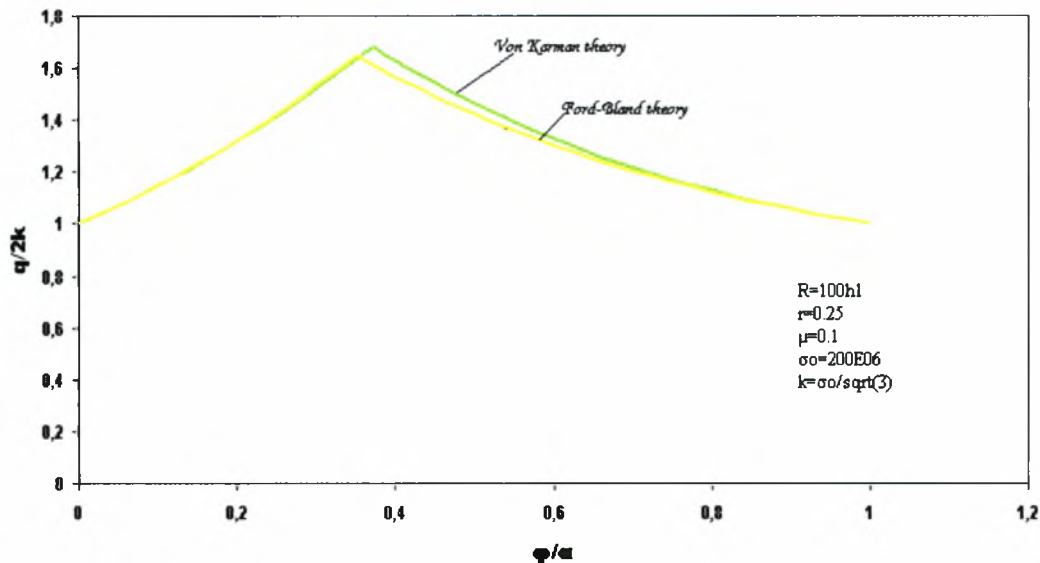
$$\frac{G}{2kRh_2} = \frac{R}{h_2} \int_0^{\alpha} \left(\frac{q}{2k}\right) \phi d\phi = \int_0^{\tan \psi_0} \left(\frac{q}{2k}\right) \xi d\xi$$

όπου $\xi = \sqrt{\frac{R}{h_2}} \phi = \tan \psi$ αποτελεί μια καινούρια χρήσιμη μεταβλητή.

Η αριθμητική επίλυση των σχέσεων αυτών που αποτελούν τη λύση του προβλήματος της ψυχρής έλασης στη παρούσα διπλωματική εργασία έγινε με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Fortran. Για δεδομένες τιμές των γεωμετρικών παραμέτρων του προβλήματος και των ιδιοτήτων του κατεργάσιμου υλικού επιβεβαιώνεται η ισχύς της ανισότητας (2.12) ώστε να είναι δυνατή η έλαση του τεμαχίου. Στη συνέχεια υπολογίζεται η γωνία που αντιστοιχεί στο ουδέτερο σημείο από την εξίσωση

$$F_1(\psi) = F_2(\psi) \Leftrightarrow F_1(\psi) - F_2(\psi) = 0 \quad (2.16)$$

με τη μέθοδο της τέμνουσας και δύο αρχικές εκτιμήσεις του μέτρου της γωνίας. Με τη γνωστή τη γωνία του ουδέτερου σημείου προχωράμε στον υπολογισμό της κατανομής της πίεσης του άνω ράουλου πάνω στο έλασμα και στη συνέχεια στον υπολογισμό της δύναμης και της ροπής, όπως αυτές δίνονται από τις σχέσεις (2.15). Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στις σχέσεις αυτές γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss, χρησιμοποιώντας ενενήντα έξι σημεία ολοκλήρωσης. Στο σχήμα 2.2 φαίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης για την κατανομή της πίεσης κατά μήκος του τόξου επαφής του ράουλου με ένα μη κρατυνόμενο έλασμα με τάση διαρροής $\sigma_0 = 100E06 Pa$ μέτρο ελαστικότητας $E = 200E09 Pa$ και μέτρο Poisson $\nu = 0.3$, το πάχος του οποίου μειώνεται κατά 25%. Η σύγκριση της θεωρητικής κατανομής της πίεσης με κάποια πειραματικά αποτελέσματα έγινε από τους Siebel και Lueg με τη χρήση της πιεζοηλεκτρικής μεθόδου και έδειξε πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Η μόνη διαφορά της πειραματικής κατανομής είναι η έλλειψη αιχμηρότητας γύρω από το ουδέτερο σημείο. Η πιο ομαλή μορφή της καμπύλης οφείλεται στο γεγονός ότι στην πράξη μια ζώνη του υλικού κοντά στο ουδέτερο σημείο δεν πλαστικοποιείται πλήρως κατά την διάρκεια της έλασης.



Σχήμα 2.3 Κατανομή πίεσης πάνω στο ράουλο

2.4 Επίλυση του Προβλήματος της Ψυχρής Έλασης από τους Ford και Bland

Για να αποφευχθεί η αριθμητική ολοκλήρωση που απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων της θεωρίας του Von Karman, οι Ford και Bland με κάποιες επί πλέον παραδοχές απλοποίησαν τη λύση του προβλήματος της ψυχρής έλασης.

2.4.1 Υπολογισμός της κατανομής της πίεσης του ράουλου κατά μήκος του τόξου επαφής

Όπως και προηγουμένως απαλείφουμε με τη βοήθεια του κριτηρίου διαρροής τη πίεση p από την εξίσωση ισορροπίας, η οποία τώρα γράφεται στη μορφή

$$\frac{d}{d\phi} \left\{ 2kh \left(\frac{q}{2k} - 1 \right) \right\} = 2Rq(\phi \pm \mu) \Rightarrow$$

$$kh \frac{d}{d\phi} \left(\frac{q}{2k} \right) + \left(\frac{q}{2k} - 1 \right) \frac{d}{d\phi} (kh) = Rq(\phi \pm \mu) \quad (2.17)$$

Στην ψυχρή έλαση ο ρυθμός εργοσκληύρυνσης είναι χαμηλός και η ποσότητα $d(kh)$ είναι μικρή σε σχέση με τη kh δεδομένου ότι το όριο διαρροής σε διάτμηση k αυξάνεται στη κατεύθυνση που μειώνεται το πάχος του ελάσματος h . Επί πλέον η ποσότητα $(\frac{q}{2k} - 1)$ είναι μικρή σε σχέση με την $d(\frac{q}{2k})$, ακόμα και στην περίπτωση που η έλαση γίνεται με επιβολή μικρών δυνάμεων στο έλασμα. Έτσι η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί ως

$$\frac{d}{d\phi}(\frac{q}{2k}) = \frac{2R}{h}(\phi \pm \mu) \frac{q}{2k} \quad (2.18)$$

όπου $h = h_2 + R\phi^2$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης με συνοριακές συνθήκες τις $\frac{q}{2k} = 1$ για $\phi = 0$ και $\phi = \alpha$ μας δίνει την κατανομή της πίεσης κατά μήκος του τόξου επαφής ως

$$\begin{aligned} \frac{q}{2k} &= \frac{h}{h_2} e^{2a\psi} = G_1(\psi) \\ \frac{q}{2k} &= \frac{h}{h_1} e^{2a(\psi_0 - \psi)} = G_2(\psi) \end{aligned} \quad (2.19)$$

όπου οι $G_1(\psi)$ και $G_2(\psi)$ αναφέρονται στην πλευρά τις εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα και τα a, ψ και ψ_0 είναι ίδια με προηγουμένως.

Η συνθήκη συνέχειας της $\frac{q}{2k}$ στο ουδέτερο σημείο $\phi = \phi_n$ δίνει

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{R}{h_2}}\phi_n\right) = \frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{r} - \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \quad (2.20)$$

από όπου υπολογίζουμε κατευθείαν την γωνία του ουδέτερου σημείου.

Όπως βλέπουμε το ουδέτερο σημείο είναι ανεξάρτητο της κατανομής της τάσεως διαρροής κατά μήκος του τόξου επαφής. Μία οριακή τιμή για το ουδέτερο σημείο είναι όταν αυτό βρίσκεται ακριβώς στην έξοδο και αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής για την οποία είναι δυνατή η κατεργασία της έλασης και δίνεται από την σχέση

$$\mu^* = \sqrt{\frac{h_2}{R}} \ln\left(\frac{1}{1-r}\right) / (2 \sin^{-1} \sqrt{r})$$

Η κατανομή της πίεσης του κάθε ράουλου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3 σε σύγκριση με τη κατανομή που δίνει η θεωρία του Von Karman δείχνει την ακρίβεια της προσέγγισης των Ford και Bland.

	Δύναμη Ράουλου/10E06	Ροπή Ράουλου/10E03	Γωνία ουδέτερου σημείου
<i>Von Karman</i>	7.454507 N	90.836 Nm	1.063°
<i>Ford-Bland</i>	7.335963 N	88.901 Nm	1.033°
<i>Απόκλιση</i>	1.59%	2.13%	2.82%

Πίνακας 2.1 Δύναμη, ροπή και γωνία ουδέτερου σημείου όπως προκύπτουν από τις θεωρίες του Von Karman και των Ford και Bland.

2.4.2 Υπολογισμός της δύναμης και της ροπής του ράουλου

Με γνωστή τη κατανομή της πίεσης μπορούμε και πάλι να υπολογίσουμε την δύναμη και την ροπή του κάθε ράουλου αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για την πίεση q στις εξισώσεις (2.12), όπως και προηγουμένως. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι $h = h_2(1 + \xi^2)$, η δύναμη και η ροπή του κάθε ράουλου δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{P}{P^*} = \sqrt{\frac{r}{1-r}} \left\{ \int_0^{\xi_n} (1 + \xi^2) e^{2a\psi} d\xi + (1-r) e^{2a\psi_0} \int_{\xi_n}^{\xi_0} (1 + \xi^2) e^{-2a\psi} d\xi \right\} \quad (2.21)$$

$$\frac{G}{G^*} = 2\left(\frac{1-r}{r}\right) \left\{ \int_0^{\xi_n} \xi(1 + \xi^2) e^{2a\psi} d\xi + (1-r) e^{2a\psi_0} \int_{\xi_n}^{\xi_0} \xi(1 + \xi^2) e^{-2a\psi} d\xi \right\}$$

όπου $P^* = 2k\sqrt{Rrh_1}$ και $G^* = kRrh_1$ αντιστοιχούν στις τιμές των P και G για ομοιόμορφη κατανομή της κάθετης πίεσης ίσης με $2k$ κατά μήκος του τόξου επαφής. Τα ψ , ξ_n και ξ_0 που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}\psi &= \tan^{-1} \xi \\ \xi_n &= \tan\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{r} - \frac{1}{4a} \ln \frac{1}{1-r}\right) \\ \xi_0 &= \sqrt{\frac{r}{1-r}}\end{aligned}\tag{2.22}$$

Οι διαστατοποιημένες τιμές της ανάλυσης για τη δύναμη και τη ροπή κατά την έλαση του ίδιου υλικού υπό τις ίδιες γεωμετρικές συνθήκες, υπολογίζονται και πάλι με αριθμητική ολοκλήρωση Gauss και δίνονται στον πίνακα 2.1.

3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

3.1 Εισαγωγή

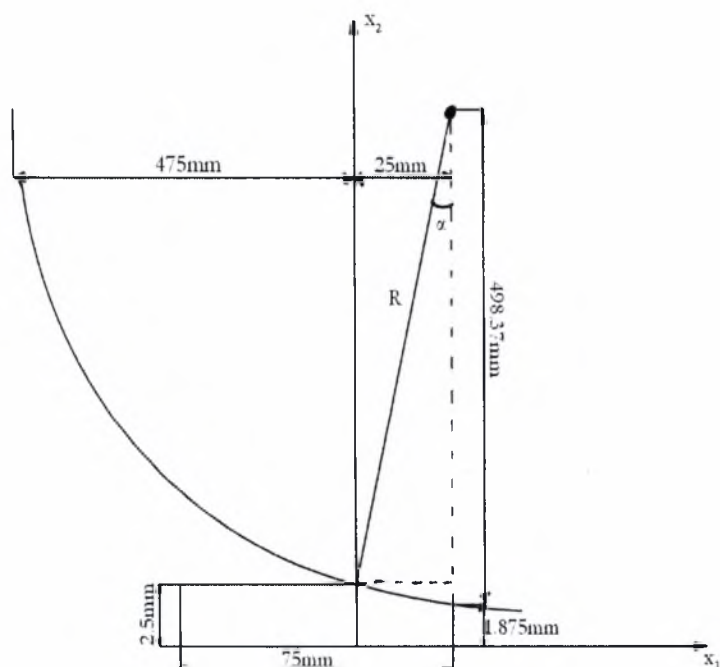
Στη συνέχεια γίνεται ανάλυση του προβλήματος της ψυχρής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων Abaqus.

Η μοντελοποίηση και η ανάλυση του προβλήματος εξετάζονται σε λεπτομέρεια στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

3.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το πρόβλημα της ψυχρής έλασης λαμβάνει χώρα σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, γεγονός που επιτρέπει τη μοντελοποίηση και

ανάλυσή του σε δύο διαστάσεις. Επί πλέον, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, θεωρούμε το άνω ράουλο του ελαστρου και το μισό πάχος του ελάσματος. Η κίνηση του ελάσματος λαμβάνει χώρα κατά την οριζόντια διεύθυνση x και η παραμόρφωση συμβαίνει κατά μήκος της κατακόρυφης διεύθυνσης y . Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο έλασμα αρχικού ύψους $H = 0.0025m$ και



Σχήμα 3.1. Γεωμετρία του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων

μήκους $l = 0.075m$ το πάχος του οποίου μειώνεται σε $h = 0.001875m$ που αντιστοιχεί σε ποσοστιαία μείωση του πάχους 25%. Το κατεργάσιμο υλικό θεωρείται τέλειο πλαστικό με τάση διαρροής $\sigma_0 = 100E06$ και ισότροπο με μέτρο ελαστικότητας $E = 200E09$ και μέτρο Poisson $\nu = 0.3$. Το ράουλο, δεδομένου ότι δε λαμβάνουμε υπόψη κάποια ελαστική παραμόρφωση, θεωρείται απολύτως στερεό και μοντελοποιείται ως απολύτως κυκλική αναλυτική στερεά επιφάνεια με κόμβο αναφοράς το κέντρο του κύκλου γύρω από το οποίο γίνεται η περιστροφή. Η ακτίνα του ράουλου R θεωρούμε ότι είναι εκατό φορές μεγαλύτερη του αρχικού ύψους του ελάσματος. Το κέντρο του τοποθετείται σε απόσταση $R + h$ κατά τη y διεύθυνση και $R \sin \alpha$ κατά τη x , όπου α η γωνία του τόξου επαφής η οποία υπολογίζεται από τη σχέση

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{(H-h)}{R}\right)$$

και παίρνει την τιμή $\alpha = 2.865^\circ$.

Η τριβή ανάμεσα στις δύο επιφάνειες είναι ο μόνος μηχανισμός που ωθεί το έλασμα ανάμεσα στα ράουλα. Έτσι, κατά μήκος του τόξου επαφής του κατεργάσιμου υλικού με το ράουλο θεωρούμε τριβή Coulomb με σταθερό συντελεστή τριβής $\mu = 0.1$.

Η διακριτοποίηση του ελάσματος γίνεται με χρήση των τετρακομβικών στοιχείων CPE4H επίπεδης παραμόρφωσης. Το πλέγμα που προκύπτει αποτελείται από πέντε σειρές, ενώ κάθε σειρά διακριτοποιείται σε εκατό πενήντα τετραγωνικά στοιχεία διαστάσεων $5E-03m \times 5E-03m$. Το τεμάχιο αρχικά τοποθετείται με τέτοιο τρόπο ώστε πέντε στοιχεία του τεμαχίου να είναι σε επαφή με την επιφάνεια του ράουλου και το έλασμα είναι ελεύθερο να κινηθεί κατά την διεύθυνση x .

3.3 Στατική Ανάλυση του Προβλήματος

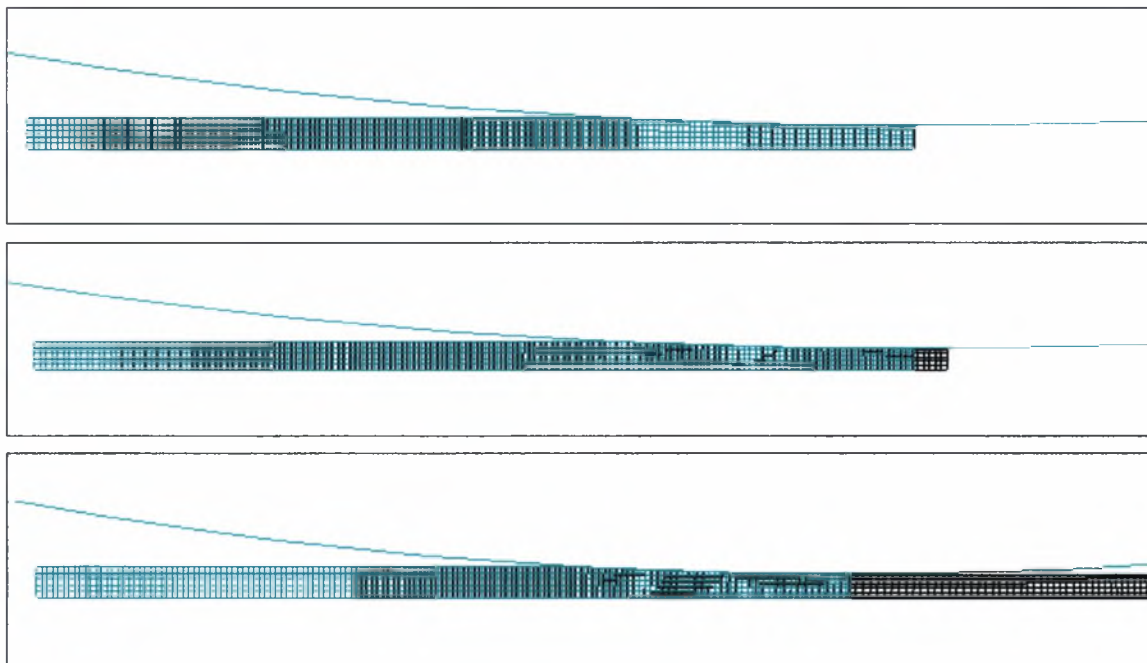
Η έλαση λαμβάνει χώρα σε σχετικά χαμηλές ταχύτητες και επομένως τα αδρανειακά φαινόμενα κατά την κατεργασία μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα και η προσέγγιση του προβλήματος να γίνει με στατική ανάλυση. Η ανάλυση πραγματοποιείται σε τρία βήματα.

Στο πρώτο βήμα αναγκάζουμε το έλασμα να μετατοπιστεί στη διεύθυνση x κατά $5E - 03m$ έτσι ώστε στην πλευρά της εξόδου ένα στοιχείο του ελάσματος να μην είναι πλέον σε επαφή με το ράουλο. Κατά την διάρκεια του βήματος, η οποία ορίζεται ίση με την απόσταση που μετατοπίζουμε το έλασμα ώστε η ταχύτητα της μετατόπισης να είναι $1m/s$, ο βαθμός ελευθερίας που αντιστοιχεί στην περιστροφή του ράουλου είναι περιορισμένος.

Στη συνέχεια, αρχίζουμε να περιστρέφουμε το ράουλο αποδεσμεύοντας τον βαθμό ελευθερίας που αντιστοιχεί στη περιστροφή του. Ταυτόχρονα, αποδεσμεύουμε την κίνηση του ελάσματος κατά την διεύθυνση x , η οποία ήταν περιορισμένη από την συνοριακή συνθήκη του πρώτου βήματος με χρήση της παραμέτρου $OP=NEW$ κατά την επιβολή των νέων συνοριακών συνθηκών. Η αποδέσμευση αυτή του ελάσματος από τις προηγούμενες συνοριακές συνθήκες συμβαίνει σταδιακά, με την επιβολή μιας δύναμης ίσης με τον περιορισμό η οποία αποσβένεται σταδιακά μέχρι να μηδενιστεί. Για τον λόγω αυτό και για καλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων, παρεμβάλουμε ένα ενδιάμεσο βήμα στη διάρκεια του οποίου λαμβάνει χώρα η απόσβεση της παραπάνω δύναμης. Στο τέλος του δεύτερου βήματος 20 στοιχεία του ελάσματος δεν είναι πλέον σε επαφή με το ράουλο.

Στο τρίτο και τελευταίο βήμα λαμβάνει πλέον χώρα το φαινόμενο της έλασης. Η κατεργασία εκτυλίσσεται πλέον σε μόνιμες συνθήκες (steady state). Στο τέλος της ανάλυσης το ράουλο έχει περιστραφεί συνολικά κατά 4.3° και 65 στοιχεία του ελάσματος έχουν μειωθεί σε πάχος.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης, καθώς παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον συγκρινόμενα με την αναλυτική επίλυση του προβλήματος, παρουσιάζονται αναλυτικότερα στην επόμενη παράγραφο.



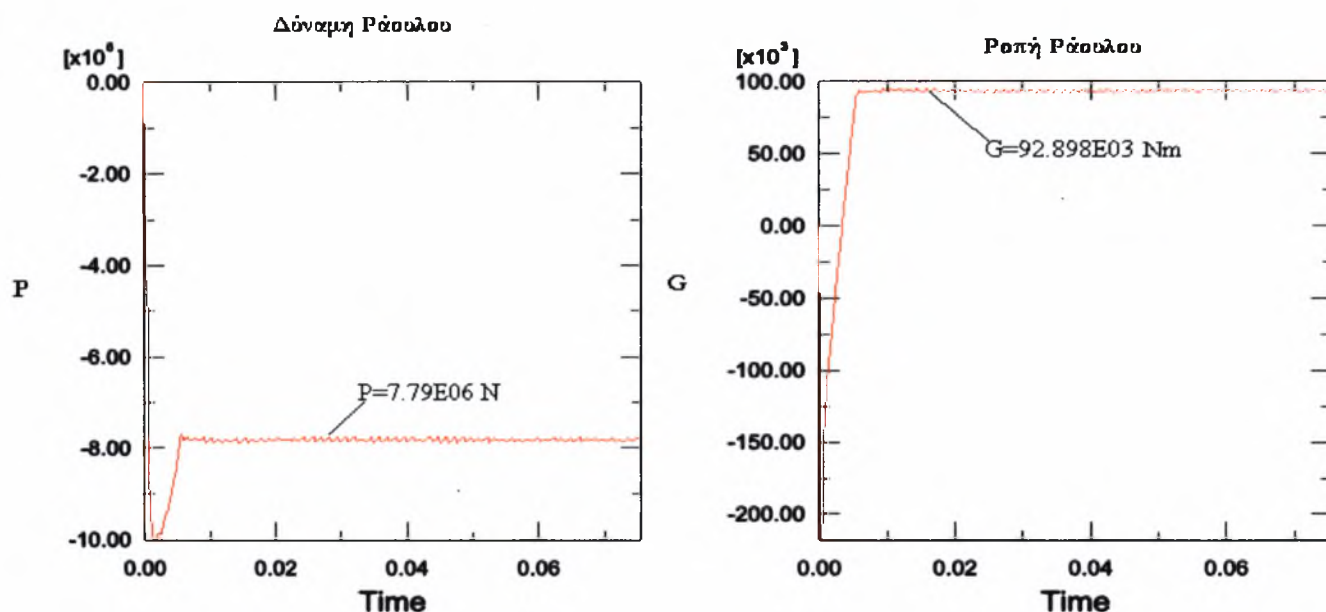
Σχήμα 3.2 Διαδοχική παραμόρφωση του τεμαχίου στο τέλος κάθε βήματος της ανάλυσης



3.4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Σε αυτή τη παράγραφο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος της ψυχρής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, σε σύγκριση με τις αναλυτικές λύσεις, όπως αυτές διατυπώθηκαν από τον Von Karman και τους Ford και Bland και εξετάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο.

Στο τέλος του τρίτου βήματος της στατικής ανάλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, μέρος του αρχικού ελάσματος έχει εξέλθει από το διάκενο των ράουλων, τμήμα του βρίσκεται σε επαφή με τα ράουλα ενώ το υπόλοιπο του ελάσματος διατηρεί το αρχικό του πάχος και παραμένει απαραμόρφωτο.

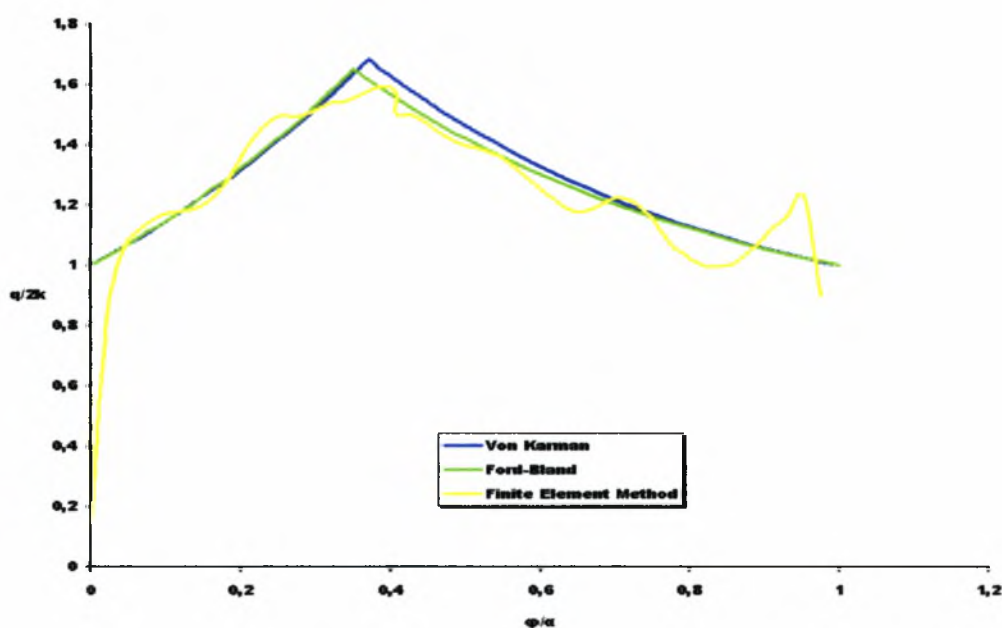


Σχήμα 3.3 Ροπή και δύναμη ράουλου

Στο σημείο αυτό μπορούμε να μετρήσουμε τη δύναμη και τη ροπή που ασκεί το κάθε ράουλο. Στο σχήμα 3.3 δίνονται σχηματικά οι τιμές των παραπάνω ποσοτήτων κατά την διάρκεια των τριών βημάτων της ανάλυσης. Όπως βλέπουμε η διαδοχική κίνηση του τεμαχίου ανάμεσα στα ράουλα κατά την διάρκεια του πρώτου βήματος συνοδεύεται από μια διαδοχικά αυξανόμενη αντίδραση του ράουλου. Στο δεύτερο βήμα το ράουλο αρχίζει να περιστρέφεται και η δύναμη που ασκεί αρχίζει να μειώνεται, για να πάρει μια σταθερή τιμή στο τρίτο βήμα όπου πλέον η κατεργασία εξελίσσεται χωρίς την επιρροή εξωτερικών δυνάμεων. Οι τιμές των φορτίων του ράουλου, που προκύπτουν από το τρίτο βήμα της ανάλυσης και αποτελούν την λύση της στατικής ανάλυσης παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1 και είναι πολύ κοντά στις αναλυτικές τιμές.

Η πίεση που ασκεί το ράουλο μετρείται στους κόμβους που είναι σε επαφή με το ράουλο στο τέλος του τρίτου βήματος και παρουσιάζει και αυτή πολύ καλή προσέγγιση των αναλυτικών λύσεων. Η αδιαστατοποιημένη κατανομή της πίεσης

κατά μήκος του τόξου επαφής του ράουλου με το κατεργάσιμο υλικό δίνεται συναρτήσει της αδιάστατης γωνίας επαφής στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4 Κατανομή της πίεσης του ράουλου κατά μήκος του τόξου επαφής.

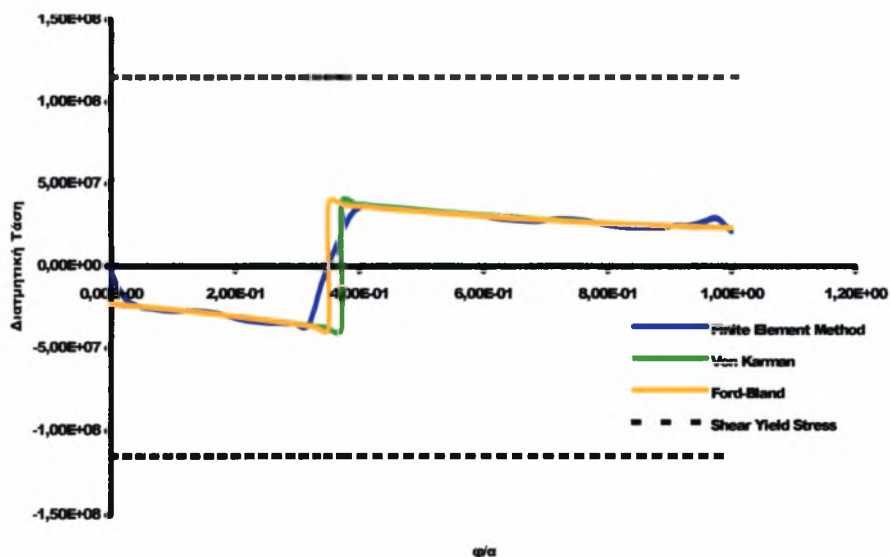
Σύμφωνα με τη θεωρία του λόφου τριβής στο ουδέτερο σημείο η πίεση του ράουλου παίρνει μέγιστη τιμή ενώ οι δυνάμεις τριβής αλλάζουν φορά. Στην ανάλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η γωνία του ουδέτερου σημείου υπολογίζεται από τις συντεταγμένες των κόμβων στους οποίους οι δυνάμεις τριβής αλλάζουν κατεύθυνση ενώ τη μεγαλύτερη πίεση επαφής την δέχονται οι αμέσως επόμενοι κόμβοι (πιν. 3.1).

	Δύναμη Ράουλου/10E06	Ροπή Ράουλου/10E03	Γωνία Ουδέτερου Σημείου
Von Karman	7.454507 N	90.836 Nm	1.063°
Ford-Bland	7.335963 N	88.901 Nm	1.033°
Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	7.79 N	92.898 Nm	1.022°
Απόκλιση από Von Karman	4.3%	2.26%	3.85%
Απόκλιση από Ford-Bland	5.7%	4.3%	1%

Πίνακας 3.1 Ροπή ράουλου, δύναμη ράουλου και γωνία ουδέτερου σημείου

3.5 Σύγκριση μεθόδων

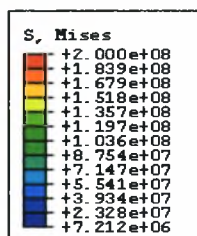
Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμος ένας γενικότερος έλεγχος των παραδοχών που έλαβαν υπόψη οι Von Karman και Ford-Bland ώστε να εξασφαλίσουμε την ισχύ τους στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.5 Κατανομή διατμητικών τάσεων κατά μήκος του τόξου επαφής

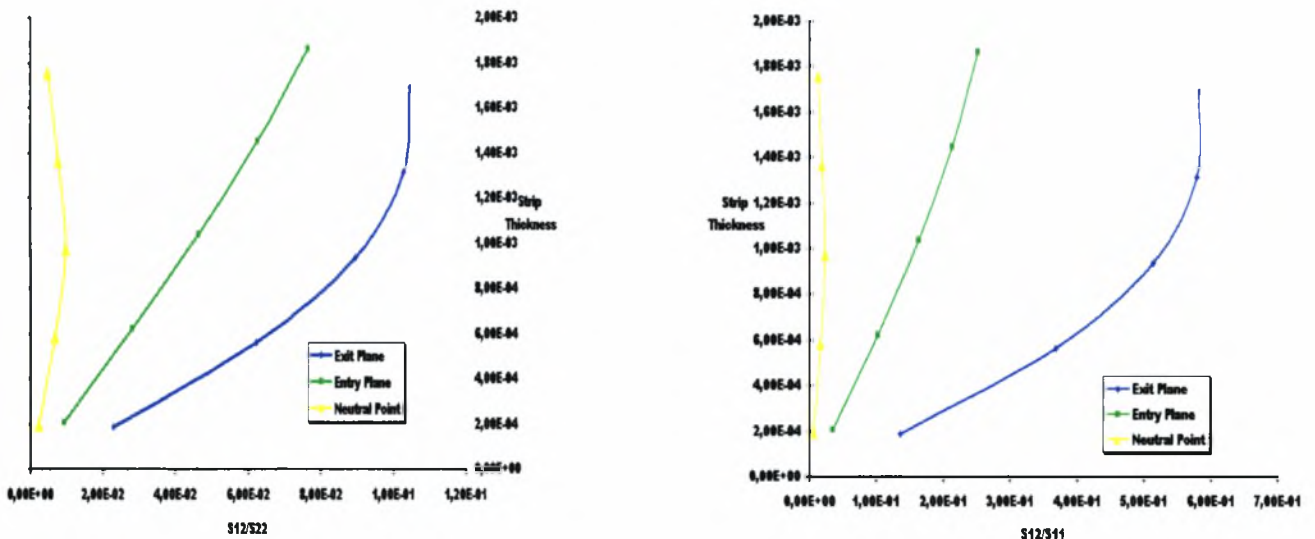
Για τον λόγο αυτό, όταν το φαινόμενο βρίσκεται πλέον σε μόνιμη κατάσταση (steady state), παίρνουμε τρία κατακόρυφα τμήματα πάχους ενός στοιχείου ($0.005m$), τυχαίως διατεταγμένα στο επίπεδο ανάμεσα στην είσοδο και το ουδέτερο σημείο, στην έξοδο και στο ουδέτερο σημείο, καθώς και πάνω στο ουδέτερο επίπεδο ώστε να έχουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα για τις συνθήκες που επικρατούν κατά μήκος του τόξου επαφής.

Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζεται η κατανομή των τάσεων στο τεμάχιο. Όπως βλέπουμε, σε συμφωνία με την παραδοχή της θεωρίας του Von Karman, η περιοχή του ελάσματος που βρίσκεται κάτω από το ράουλο είναι πλήρως πλαστικοποιημένη.



Σχήμα 3.6 Πλαστική ζώνη στην ψυχρή έλαση

Οι εικόνες 3.7-3.8 επιβεβαιώνουν την υπόθεση κατά την οποία οι διατμητικές τάσεις θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με τις ορθές και το φαινόμενο της έλασης αντιμετωπίζεται ως ομογενής θλίψη.



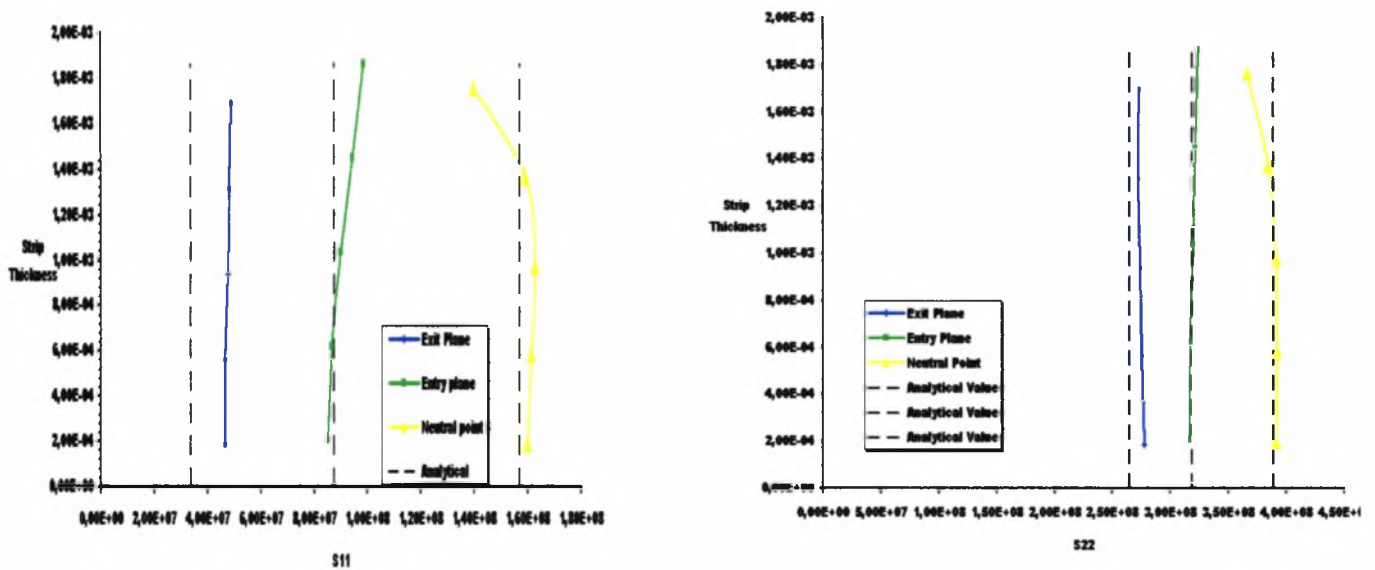
Σχήμα 3.7 Απόλυτο του λόγου των διατμητικών τάσεων προς τις ορθές μετρημένες στα centroid points των στοιχείων που ανήκουν στα κατακόρυφα σετ που βρίσκονται στην πλευρά της εισόδου, της εξόδου και στο ουδέτερο σημείο.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5 οι διατμητικές τάσεις που κατανέμονται κατά μήκος του τόξου επαφής μπορούν να θεωρηθούν μικρότερες (τουλάχιστον μία τάξη μεγέθους) του ορίου διαρροής σε διάτμηση γεγονός που επιτρέπει και εδώ την υπόθεση για επίπεδες διατομές κατά την έλαση.

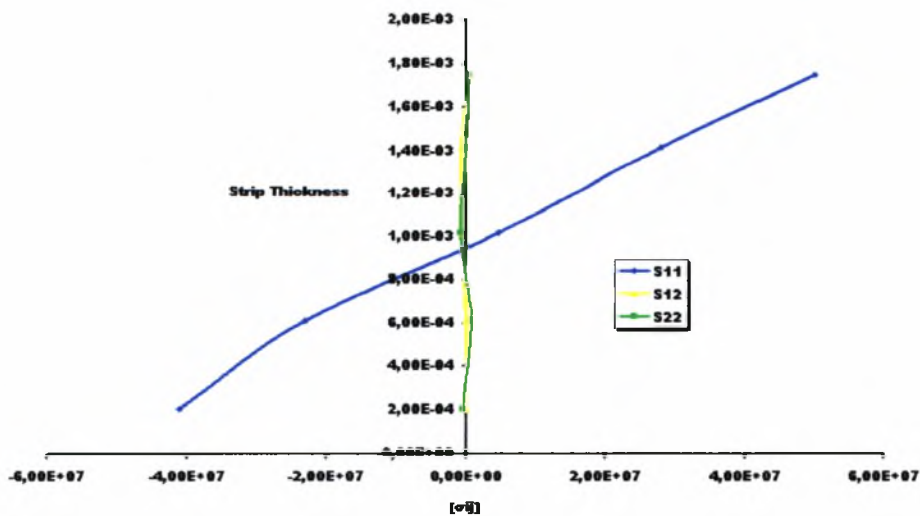
Στο σχήμα 3.7 δίνεται ο λόγος των διατμητικών τάσεων προς τις ορθές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ο οποίος υπολογίστηκε στα κεντροειδή σημεία των στοιχείων του κάθε κατακόρυφου τμήματος όπου έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια και όπως βλέπουμε η υπόθεση των σχεδόν αμελητέων διατμητικών τάσεων ισχύει και στο πάχος του τεμαχίου.

Η οριζόντια πίεση p κατά Von Karman υπολογισμένη από το κριτήριο διαρροής (σχ.(2.8)) καθώς και η κατακόρυφη πίεση q συγκρίνονται με τις ορθές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων σ_{ij} κατά μήκος του τόξου επαφής. Στο σχήμα 3.8 φαίνεται η ομοιόμορφη κατανομή των ορθών τάσεων στο πάχος του ελάσματος.

Τέλος, στο σχήμα 3.9 παρουσιάζονται οι παραμένουσες τάσεις του ελάσματος υπολογισμένες σε τυχαίο τμήμα πάχους ενός στοιχείου του τεμαχίου. Όπως βλέπουμε οι ορθή συνιστώσα της τάσεως σ_{22} , καθώς και η διατμητική συνιστώσα σ_{12} παρουσιάζουν μικρές τιμές σε σχέση με την ορθή συνιστώσα σ_{11} .



Σχήμα 3.8 Κατανομή των ορθών τάσεων σ_{11} και σ_{22} μετρημένες στα centroid points των στοιχείων που ανήκουν στα κατακόρυφα σετ που βρίσκονται στην πλευρά της εισόδου, της εξόδου και στο ουδέτερο σημείο.



Σχήμα 3.9 Παραμένουσες τάσεις στο έλασμα.

4. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΗΣ ΕΛΑΣΗΣ

4.1 Εισαγωγή

Η κατεργασία της θερμής έλασης η οποία λαμβάνει χώρα σε υψηλές θερμοκρασίες, δηλαδή πάνω από τη θερμοκρασία ανακρυσταλλώσεως του υλικού χρησιμοποιείται όταν απαιτούνται μεγάλες μειώσεις στη διατομή του τεμαχίου. Η τεχνολογική της θεωρία και η αναλυτική προσέγγιση του προβλήματος αποτελούν το αντικείμενο μελέτης των επόμενων παραγράφων του παρόντος κεφαλαίου.

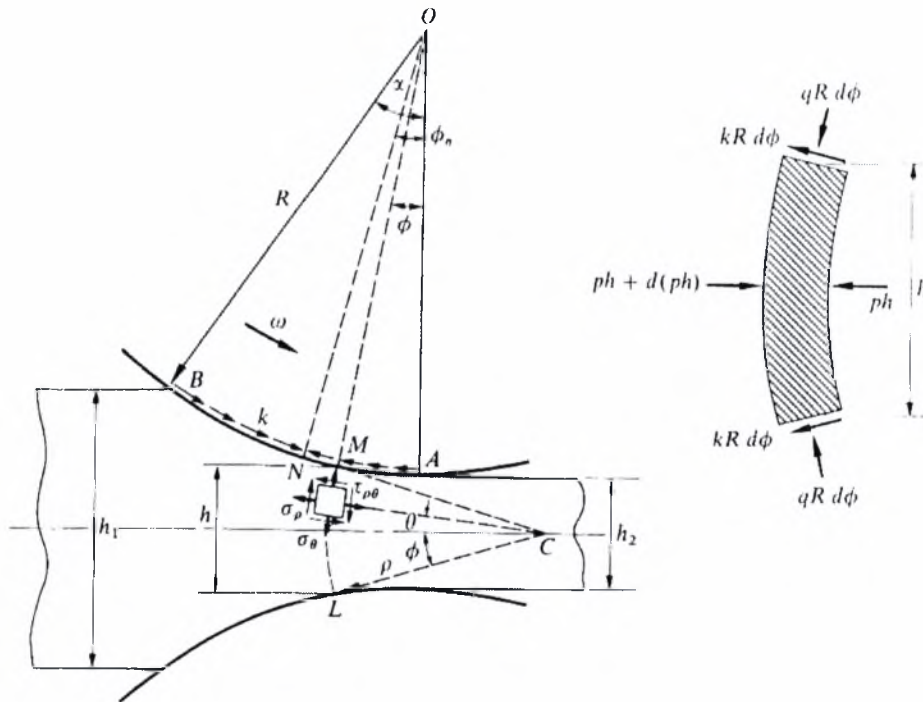
4.2 Θερμή έλαση

Στην θερμή έλαση η θέρμανση του κατεργάσιμου υλικού έχει ως αποτέλεσμα μία σημαντική μείωση στο όριο διαρροής. Η επίδραση της ταχύτητας της έλασης στις υψηλές αυτές θερμοκρασίες είναι αρκετά σημαντική καθώς το όριο διαρροής αυξάνεται με την αύξηση του ρυθμού της παραμόρφωσης. Σε αντίθεση με την κατεργασία της ψυχρής έλασης, στην θερμή έλαση η αντίσταση τριβής είναι τόσο υψηλή που οι επαπτόμενες δυνάμεις αγγίζουν το όριο διαρροής σε διάτμηση σε ολόκληρο το μήκος του τόξου επαφής. Όπως και στην ψυχρή έλαση από την συνθήκη ασυμπίεστου του υλικού συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του ελάσματος συνεχώς αυξάνεται καθώς το έλασμα περνάει από την πλευρά της εισόδου στην πλευρά της εξόδου και μειώνεται σε πάχος. Οι επαπτόμενες στο τόξο επαφής δυνάμεις τείνουν να σπρώξουν το έλασμα στο διάκενο των ράουλων στην πλευρά της εισόδου και αντιτίθενται στην έξοδό του στην πλευρά της εξόδου.

4.3 Γεωμετρία της θερμής έλασης και διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας

Έστω λοιπόν ένα έλασμα αρχικού πάχους h_1 που μειώνεται σε πάχος περνώντας ανάμεσα σε δύο κυλινδρικά ράουλα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 και LM ένα

κυκλικό τόξο, κάθετο στην επιφάνεια των ράουλων, με κέντρο το σημείο C που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του τμήματος του ελάσματος που έχει μειωθεί σε πάχος. Η ακτίνα του τόξου όπως προκύπτει από το σχήμα είναι $\rho = \frac{1}{2} h \operatorname{cosec} \phi$, όπου ϕ είναι η γωνιακή απόσταση των σημείων L και M ως προς την πλευρά της εξόδου.



Σχήμα 4.1 Τάσεις του τεμαχίου στην θερμή έλαση και οι δυνάμεις που δημιουργούνται σε ένα τμήμα του ελάσματος

Ορίζοντας πολικές συντεταγμένες για τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο τόξο LM, εκφράζουμε την συνιστώσα της διατμητικής τάσεως $\tau_{\rho\theta}$ ως ανάλογη ποσότητα της απόστασης του σημείου C πάνω στον άξονα συμμετρίας. Όπως έχει αναφερθεί στην θερμή έλαση οι διατμητικές τάσεις στην επιφάνεια των ράουλων είναι της τάξεως του ορίου διαρροής σε διάτμηση k και επομένως η τάση $\tau_{\rho\theta}$ εκφράζεται ως

$$\tau_{\rho\theta} = k \left(\frac{\sin \theta}{\cos \phi} \right).$$

Το κριτήριο διαρροής υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης μπορεί πλέον να γραφτεί ως

$$\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = 2\sqrt{k^2 - \tau_{\rho\theta}^2} = 2k\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi}} \quad (4.1)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις αντιλαμβανόμαστε ότι για γωνία $\theta = \phi$ που αντιστοιχεί στο τόξο επαφής οι διατμητική τάση $\tau_{\rho\theta}$ γίνεται ίση με το όριο διαρροής k και από το κριτήριο διαρροής προκύπτει η εντατική κατάσταση στο τόξο επαφής να ακολουθεί τη σχέση $\sigma_{\rho} = \sigma_{\theta}$.

Αν p η μέση οριζόντια πίεση στο εγκάρσιο επίπεδο που ενώνει τα σημεία LM, η οριζόντια πίεση που ασκείται κατά μήκος του τόξου LM είναι

$$ph = -2 \int_0^{\phi} \rho \sigma_{\rho} \cos \theta d\theta = -h \int_0^{\phi} \sigma_{\rho} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \phi} \right) d\theta \quad (4.2)$$

Επίσης όπως και στην ψυχρή έλαση θεωρούμε ότι η συνιστώσα σ_{θ} έχει σταθερή τιμή κατά μήκος του τόξου LM που ισούται με την πίεση των ράουλων στα σημεία L και M $-q$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό και αντικαθιστώντας το κριτήριο διαρροής στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε μία απλοποιημένη μορφή του κριτηρίου διαρροής που γράφεται ως

$$q - p = \frac{\pi}{2} k \quad (4.3)$$

Για μικρές τιμές της γωνίας ϕ , η παραπάνω εξίσωση λαμβάνεται από την υπόθεση ότι η κατανομή της τάσεως κατά μήκος του τόξου LM είναι περίπου ίδια με την τάση που δέχεται ένα πλαστικό υλικό όταν συμπιέζεται ανάμεσα σε ένα ζευγάρι σκληρών τυμπάνων, τοποθετημένα σε μεταξύ τους γωνία ίσης με 2ϕ .

Έστω τώρα ένα εγκάρσιο κομμάτι ελάσματος κάθετο στην επιφάνεια των ράουλων του οποίου η θέση προσδιορίζεται από τις γωνιακές συντεταγμένες ϕ και $\phi + d\phi$ μετρημένες από την πλευρά της εξόδου. Η εξίσωση ισορροπίας του κομματιού κατά την οριζόντια διεύθυνση δίνει

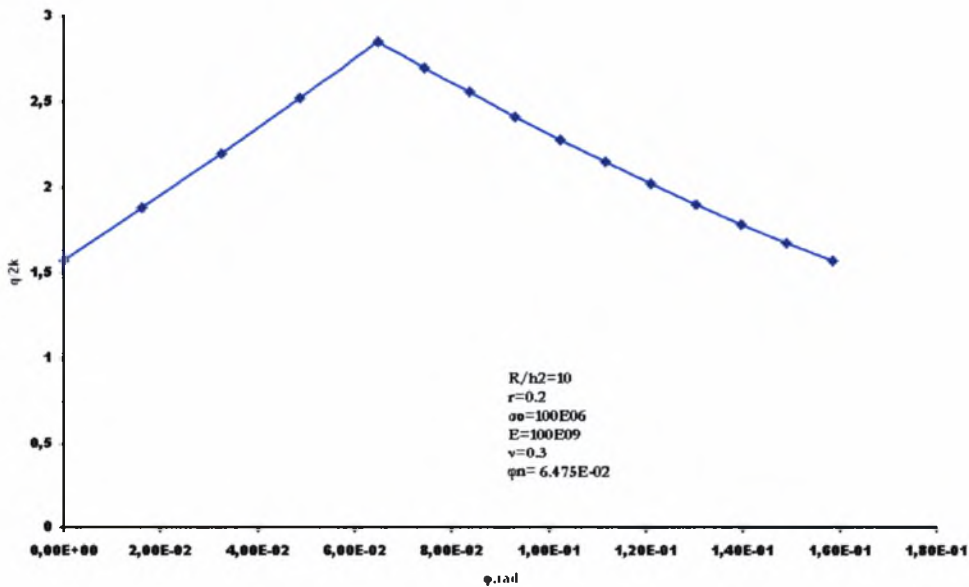
$$\frac{d}{d\phi}(ph) = 2R(q \sin \phi \pm k \cos \phi) \quad (4.4)$$

όπου το πρόσημο της πρόσθεσης αναφέρεται στην πλευρά της εξόδου και της αφαίρεσης στην πλευρά της εισόδου αντίστοιχα και R η ακτίνα του ράουλου όπως προηγουμένως.

Στην θερμή έλαση σε αντίθεση με την ψυχρή το κατεργάσιμο υλικό είναι αρκετά μαλακό ώστε κάθε ελαστική παραμόρφωση των ράουλων να θεωρείται αμελητέα.

Λαμβάνοντας υπόψη την γεωμετρική σχέση $dh = 2R \sin \phi d\phi$ και απαλείφοντας τη πίεση p με τη βοήθεια του κριτηρίου διαρροής, η εξίσωση ισορροπίας μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{dq}{2k} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{dk}{k} + \frac{dh}{h} \right) \pm \frac{R \cos \phi d\phi}{h_2 + 2R(1 - \cos \phi)} \quad (4.5)$$



Σχήμα 4.2 Κατανομή πίεσης στην Θερμή έλαση

και ορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις συνοριακές συνθήκες $p = 0$ και $q = \pi k/2$ στο $\phi = 0$ και $\phi = \alpha$, όπου α η γωνία του τόξου επαφής του ράουλου με το κατεργάσιμο υλικό.

4.4 Υπολογισμός της κατανομής της πίεσης

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά αν υποθέσουμε ότι το όριο διαρροής σε διάτμηση k έχει μια σταθερή μέση τιμή \bar{k} κατά μήκος του τόξου επαφής. Θεωρώντας ακόμη τη γωνία $\phi/2$ (όπου ϕ κυμαίνεται μεταξύ $0 \leq \phi \leq \phi_n$ στην πλευρά της εξόδου που αντιστοιχεί στην εξίσωση ισορροπίας με το σύμβολο της πρόσθεσης και ϕ μεταξύ $\phi_n \leq \phi \leq \alpha$ για την πλευρά της εισόδου αντίστοιχα) αρκετά μικρή και τη ποσότητα $\frac{h_2}{R}$ αμελητέα στην τελική μορφή της λύσης του ολοκληρώματος μπορούμε να εκφράσουμε την αδιάστατη κατανομή της πίεσης του ράουλου συναρτήσει της γωνιακής απόστασης ως

$$\begin{aligned} \frac{q^+}{2k} &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \ln \frac{h}{h_2}\right) + c \sqrt{\frac{R}{h_2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{R}{h_2}} \phi - \frac{1}{2} \phi \\ \frac{q^-}{2k} &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \ln \frac{h}{h_1}\right) + c \sqrt{\frac{R}{h_2}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{R}{h_2}} \alpha - \tan^{-1} \sqrt{\frac{R}{h_2}} \phi\right) - \frac{1}{2} (\alpha - \phi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου q^+ και q^- η πίεση του ράουλου στην πλευρά της εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα και $c = 1 + (h_2/2R)$.

Όπως γνωρίζουμε η πίεση πρέπει να είναι συνεχής στο ουδέτερο σημείο. Εξισώνοντας τις κατανομές της πίεσης στην έξοδο και στην είσοδο αντίστοιχα στο σημείο $\phi = \phi_n$ μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία του ουδέτερου σημείου από την έκφραση

$$\sqrt{\frac{R}{h_2}} \phi_n = \tan \left\{ \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{R}{h_2}} \alpha - \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{h_2}{R}} \left(\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{1-r} + \frac{\alpha}{2} - \phi_n \right) \right\} \quad (4.7)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί επαναληπτικά βάζοντας μια αρχική τιμή (συνήθως $\alpha/2$) για την γωνία του ουδέτερου σημείου στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης. Η γραφική παράσταση της κατανομής της πίεσης του ράουλου κατά μήκος του τόξου

επαφής υπολογισμένη για συγκεκριμένες γεωμετρικές ποσότητες και για γωνία ουδέτερου σημείου ίση με 3.7° φαίνεται στο σχήμα 4.2.

Ροπή Ράουλου	95.7E03 Nm
Δύναμη Ράουλου (Ακριβής Λύση)	4.88 E06 N
Δύναμη Ράουλου (Σχέση (5.11))	4.9 E06 N
Γωνία ουδέτερου σημείου	6.475 E-02 rad

Πίνακας 4.1 Δύναμη, ροπή και γωνία ουδέτερου σημείου για τη θερμή έλαση

4.5 Υπολογισμός δύναμης και ροπής του ράουλου

Η ροπή ανά μονάδα πλάτους του ελάσματος υπολογίζεται από την σχέση () του δευτέρου κεφαλαίου αν αντικαταστήσουμε $\mu q = \bar{k}$

$$G = \bar{k} R^2 \left(\int_{\phi_n}^{\alpha} d\phi - \int_0^{\phi_n} d\phi \right) = \bar{k} R^2 (\alpha - 2\phi_n) \quad (4.8)$$

Σύμφωνα με το πρώτο κεφάλαιο η δύναμη του ράουλου ανά μονάδα πλάτους του ελάσματος μπορεί να γραφεί ως

$$P = R \int_0^{\alpha} q \cos \phi d\phi + R \left(\bar{k} \int_{\phi_n}^{\alpha} \sin \phi d\phi - \bar{k} \int_0^{\phi_n} \sin \phi d\phi \right) \quad (4.9)$$

Η ποσότητα στη παρένθεση δηλώνει την συνεισφορά των εφαιπόμενων στο τόξο επαφής τάσεων στη δύναμη του ράουλου. Ολοκληρώνοντας το πρώτο ολοκλήρωμα

κατά παράγοντες και χρησιμοποιώντας την σχέση $h + 2R \cos \phi = 2cR$ η αδιάστατη πλέον δύναμη του ράουλου μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{P}{2\bar{k}R} = \frac{\pi}{4} \left(\sin \alpha - \int_{h_2}^{h_1} \sin \phi \frac{dh}{h} \right) + \frac{c}{2} \left(\int_{h_n}^{h_1} \frac{dh}{h} - \int_{h_2}^{h_n} dh \right) \quad (4.10)$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες προσεγγίσεις που λάβαμε υπόψη για να καταλήξουμε στην εξίσωση (4.6) η έκφραση για τη δύναμη του ράουλου απλοποιείται περαιτέρω ως

$$\frac{P}{2\bar{k}R} = \frac{\pi}{4} (1+c) \sqrt{\frac{h_2}{R}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{R}{h_2}} \alpha + c \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-r} - \ln \frac{h_n}{h_2} - \frac{\pi}{4} \alpha \right) \quad (4.11)$$

όπου

$$\alpha = \cos^{-1} \left(1 - \frac{rh_1}{2R} \right) \quad \text{και} \quad \frac{h_n}{h_2} = 1 + \frac{2R}{h_2} (1 - \cos \phi_n)$$

Όπως θα δούμε, η τιμή της δύναμης που υπολογίζεται από την σχέση (4.11), δεν διαφέρει από την τιμή της δύναμης που υπολογίστηκε από την ακριβή σχέση πάνω από 1%.

Οι διαστατοποιημένες τιμές της ροπής και της δύναμης του ράουλου παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.

5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΗΣ ΕΛΑΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

5.1 Εισαγωγή

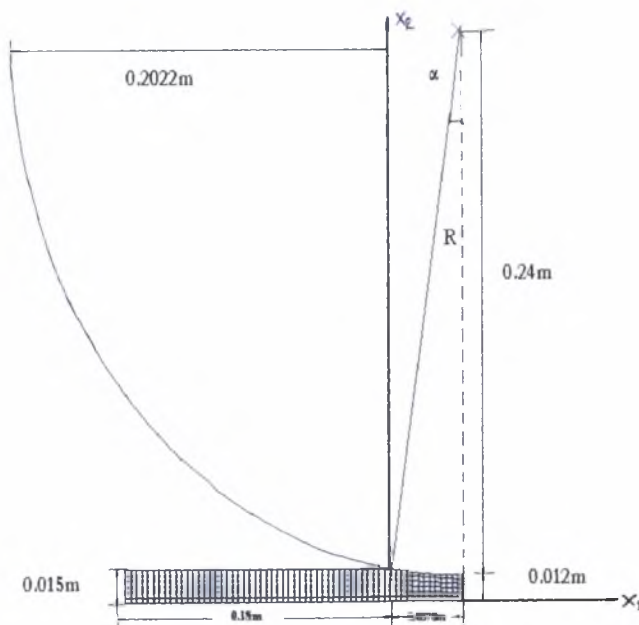
Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται επίλυση του προβλήματος της θερμής έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου ABAQUS.

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται λεπτομερή αναφορά στην μοντελοποίηση και ανάλυση της κατεργασίας της θερμής έλασης καθώς και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις αναλυτικές λύσεις.

5.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Όπως και στην ψυχρή έλαση, θεωρούμε ότι η κατεργασία λαμβάνει χώρα σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και η μοντελοποίηση του προβλήματος γίνεται

σε δύο διαστάσεις. Ακόμη λόγω συμμετρίας του προβλήματος θεωρούμε το άνω ράουλο και το μισό πάχος του ελάσματος. Η κίνηση του ελάσματος λαμβάνει χώρα κατά την οριζόντια διεύθυνση x , ενώ το πάχος του μειώνεται κατά την διεύθυνση y . Σε αντίθεση με την ψυχρή έλαση, στην θερμή κατεργασία όπου το όριο διαρροής του υλικού έχει μειωθεί τα ράουλα δεν έχουν μεγάλες διαστάσεις.



Σχήμα 5.1 Γεωμετρία του μοντέλου των πεπερασμένων στοιχείων

Έστω λοιπόν ένα έλασμα από το ίδιο υλικό με αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην ψυχρή έλαση θερμαίνεται μέχρι το όριο διαρροής του να μειωθεί στο μισό. Το έλασμα έχει αρχικό πάχος $h_1/2 = 0.015m$ και ο λόγος της ακτίνας του ράουλου προς το τελικό πάχος επιλέγεται $R/h_2 = 10$. Η ποσοστιαία μείωση της διατομής είναι $r = (h_1 - h_2)/h_1 = 0.2$ από όπου προκύπτει η ακτίνα του ράουλου $R = 0.24m$ και το τελικό πάχος του ελάσματος $h_2/2 = 0.012m$. Τέλος η γωνία του τόξου επαφής του κατεργάσιμου υλικού με το ράουλο υπολογίζεται από την γεωμετρική σχέση

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{R - (h_1 - h_2)}{R}$$

και είναι ίση με 9.068° .

Το ράουλο μοντελοποιείται και πάλι ως κυκλική, αναλυτική, στερεά επιφάνεια με κόμβο αναφοράς το κέντρο του κύκλου που τοποθετείται στο σημείο $R + h_2$ κατά y και $R \sin \alpha$ κατά x .

Ανάμεσα στις δύο επιφάνειες θεωρούμε τριβή Coulomb. Η τριβή είναι και εδώ ο μόνος μηχανισμός που ωθεί το έλασμα στο διάκενο των ράουλων. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η αναλυτική θεωρία κατά την θερμή έλαση προβλέπει μεγάλες δυνάμεις τριβής σε όλο το τόξο επαφής (sticking friction), της τάξεως του ορίου διαρροής σε διάτμηση. Από το κριτήριο διαρροής του τέταρτου κεφαλαίου (σχέση(4.3)) για οριζόντια πίεση $p > 0$ η πίεση q παίρνει ως μέγιστη τιμή την $q_{\max} = \pi k / 2$. Όμως όπως έχει αναφερθεί, στην θερμή έλαση ισχύει $k \leq \mu q_{\max}$ και αντικαθιστώντας το όριο διαρροής σε διάτμηση k με $k = \mu q$ προκύπτει ότι η υπόθεση για το παραπάνω φαινόμενο ισχύει για τιμές του συντελεστή τριβής που ξεπερνούν την τιμή $2/\pi = 0.637$. Έτσι ο συντελεστής τριβής επιλέγεται να έχει μία οριακή τιμή $\mu = 1$.

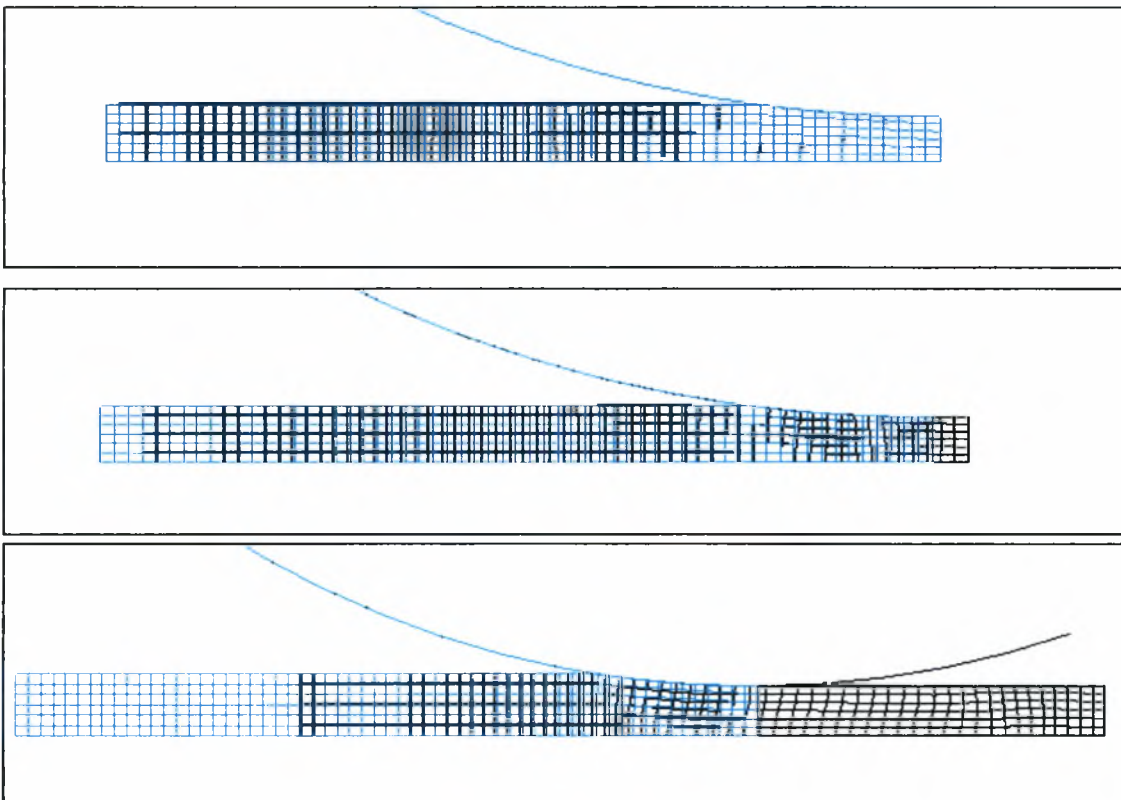
Για την διακριτοποίηση του τεμαχίου χρησιμοποιούμε το ίδιο στοιχείο επίπεδης παραμόρφωσης CPE4H με διαστάσεις $(x, y) = (3E - 03m, 2, 5E - 03m)$ και το πλέγμα που προκύπτει φαίνεται στο σχήμα (5.1).

5.3 Στατική ανάλυση του προβλήματος

Παρά το γεγονός ότι η ταχύτητα της κατεργασίας έχει σημαντική επίδραση στην θερμή έλαση σε αντίθεση με την ψυχρή κατεργασία καθώς το όριο διαρροής του υλικού αυξάνει με την αύξηση του ρυθμού της παραμόρφωσης, στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα δεν παίζει κάποιο ιδιαίτερο ρόλο (αφού το κατεργάσιμο υλικό είναι ελαστικό, τέλεια πλαστικό). Έτσι θεωρούμε ότι η κατεργασία λαμβάνει χώρα σε χαμηλές ταχύτητες ώστε τα αδρανειακά φαινόμενα να μπορούν να αγνοηθούν και η ανάλυση του προβλήματος να γίνει στατικά.

Η στατική ανάλυση του προβλήματος ολοκληρώνεται σε τρία βήματα ακολουθώντας την ίδια περίπου διαδικασία όπως στην ψυχρή έλαση.

Αρχικά το τεμάχιο έχει τοποθετηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε 13 στοιχεία του πλέγματος να βρίσκονται σε επαφή με το ράουλο.



Σχήμα 5.2 Διαδοχική παραμόρφωση του τεμαχίου στο τέλος κάθε βήματος της ανάλυσης

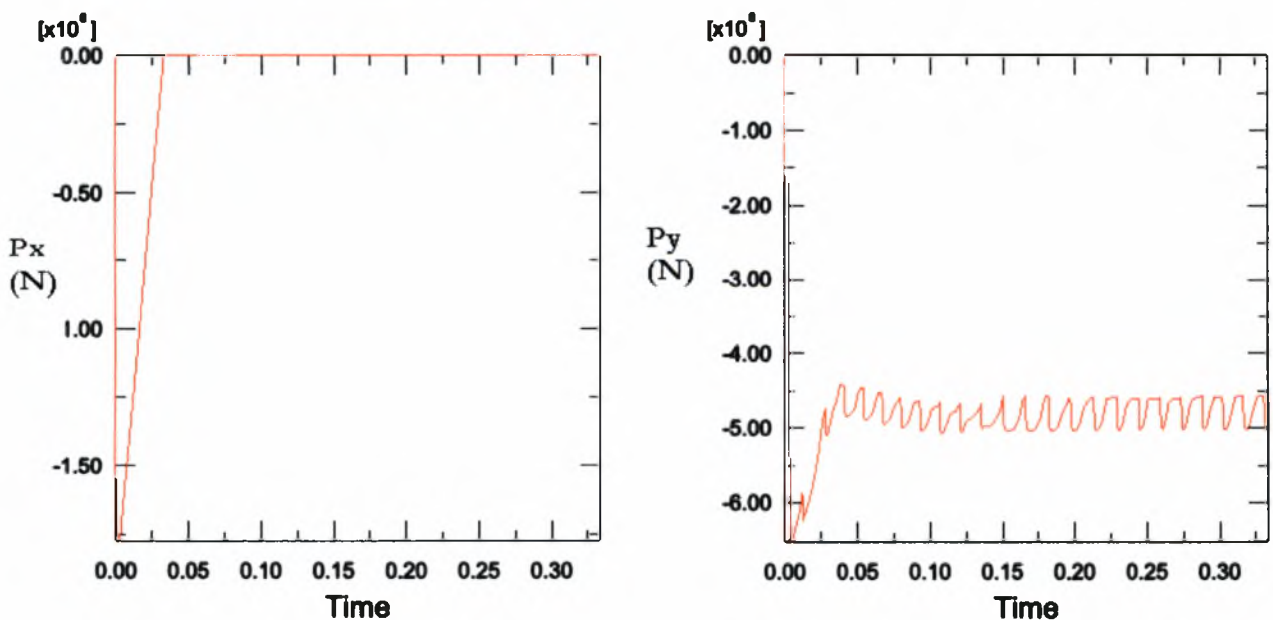
Στο πρώτο βήμα το τεμάχιο αναγκάζεται να μετατοπιστεί στην διεύθυνση κίνησης κατά $3E - 03m$ με ταχύτητα $1m/s$ ώστε ένα στοιχείο του πλέγματος να μην είναι πλέον σε επαφή με την επιφάνεια του ράουλου. Κατά την διάρκεια του πρώτου βήματος τόσο η περιστροφή του ράουλου, όσο και η κατακόρυφη μετακίνηση του κάτω μέρους του ελάσματος είναι περιορισμένα.

Στη συνέχεια αρχίζουμε να περιστρέφουμε το ράουλο και το φαινόμενο της έλασης λαμβάνει χώρα. Όπως και προηγουμένως για καλύτερη ακρίβεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης παρεμβάλλουμε ένα ενδιάμεσο βήμα όπου συμβαίνει η απόσβεση της δύναμης των παλιών περιορισμών.

Στο τρίτο βήμα, η κατεργασία πλέον εκτυλίσσεται σε μόνιμες συνθήκες. Κατά την διάρκεια του βήματος το ράουλο περιστρέφεται κατά 17.2° που αντιστοιχεί σε μήκος διπλάσιο περίπου του μήκους του τόξου επαφής.

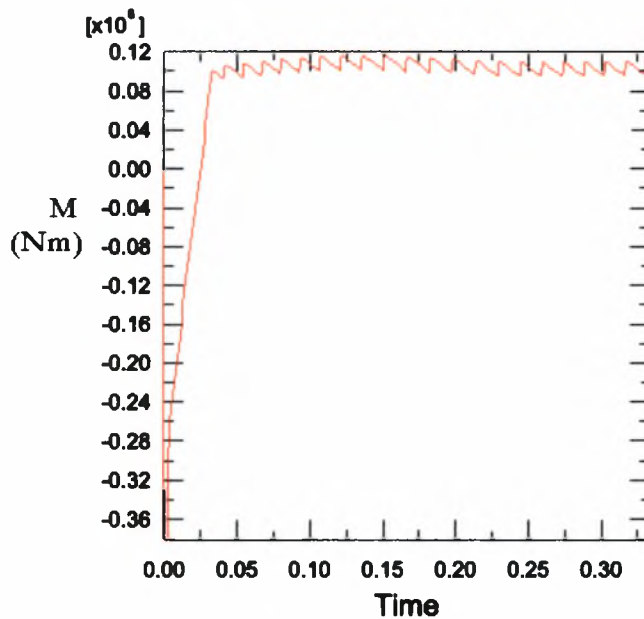
5.4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Στο τέλος της ανάλυσης το ράουλο έχει περιστραφεί συνολικά κατά 18.9° , είκοσι έξι στοιχεία του ελάσματος έχουν μειωθεί σε πάχος ενώ το υπόλοιπο του τεμαχίου είτε διατηρεί το αρχικό του πάχος, είτε βρίσκεται σε επαφή με το ράουλο.



Σχήμα 5.3 Οριζόντια και κατακόρυφη δύναμη του ράουλου κατά την διάρκεια της ανάλυσης

Στο σχήμα (5.3-5.4) παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της δύναμης και της ροπής του ράουλου κατά την διάρκεια της ανάλυσης μετρημένες στον κόμβο αναφοράς του ράουλου. Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης κατά την διάρκεια του

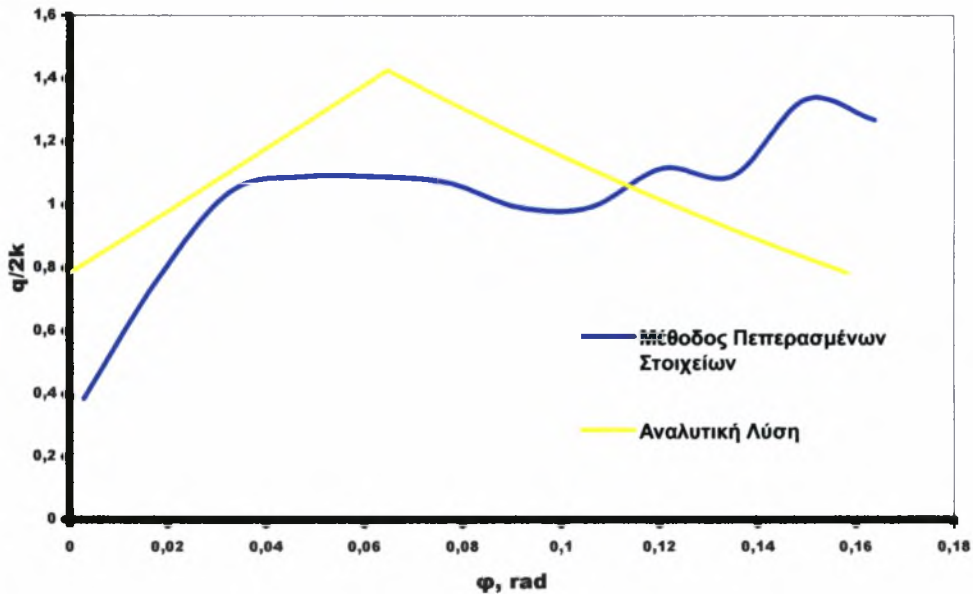


Σχήμα 5.4 Ροπή ράουλου κατά την διάρκεια της ανάλυσης

τρίτου βήματος όπου και επικρατούν μόνιμες συνθήκες είναι μηδενική. Η κατακόρυφη συνιστώσα αρχικά παίρνει μία μέγιστη τιμή στο πρώτο βήμα, η οποία μειώνεται στο δεύτερο όπως και ήταν αναμενόμενο για να πάρει μία σταθερή τιμή κατά το τρίτο βήμα όπου επικρατούν μόνιμες συνθήκες. Παρόμοια συμπεριφορά ακολουθεί και η ροπή του ράουλου. Η δύναμη και η ροπή υπολογίζονται ως μέση τιμή της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής που προκύπτουν από το τρίτο βήμα της ανάλυσης και παρουσιάζονται στον πίνακα 5.1 σε σύγκριση με τις αναλυτικές λύσεις.

Η κατανομή της πίεσης πάνω στο ράουλο υπολογίζεται στους κόμβους που είναι σε επαφή με το ράουλο στο τέλος της ανάλυσης. Στο σχήμα 5.5 παρουσιάζεται η κανονικοποιημένη πίεση του ράουλου σε σύγκριση με την αναλυτική θεωρία συναρτήσει της γωνιακής απόστασης ϕ . Η γωνία του ουδέτερου σημείου

υπολογίζεται από τις συντεταγμένες των κόμβων που οι διατμητικές δυνάμεις αλλάζουν κατεύθυνση και παρουσιάζεται στον πίνακα 5.1.



Σχήμα 5.6 Κατανομή πίεσης στην θερμή έλαση

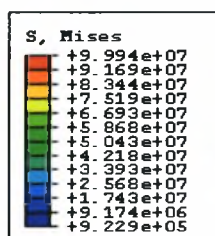
Όπως βλέπουμε η κατανομή της πίεσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζει κάποιες έντονες διακυμάνσεις και διαφορές από την αναλυτική κατανομή. Κατά την είσοδο του ελάσματος στο διάκενο των ράουλων, η κατανομή της πίεσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές από την αναλυτική λύση. Όσο το έλασμα προχωρά προς την γωνία του ουδέτερου σημείου η πίεση μειώνεται και η αναλυτική λύση παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές. Για τιμές της γωνίας επαφής μικρότερες του ουδέτερου σημείου που αντιστοιχούν στην πλευρά της εξόδου του ελάσματος η συμπεριφορά της πίεσης αρχίζει να ακολουθεί την αναλυτική λύση. Γενικότερα για γωνία μικρότερη των 0,11 rad η κατανομή της πίεσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων προσεγγίζει την συμπεριφορά της αναλυτικής λύσης με τη διαφορά ότι ακόμα και στο ουδέτερο σημείο οι τιμές της πίεσης στους κόμβους είναι πολύ μικρότερες.

	Δύναμη Ράουλου/10E06	Ροπή Ράουλου /10E03	Γωνία ουδέτερου σημείου (rad)
Αναλυτική λύση	4.88 N	95.7 Nm	6.475 E-02
Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	4.74 N	104.4 Nm	5.55 E-02
Σφάλμα μεθόδου	2.8%	8.3%	14.2%

Πίνακας 5.1 Δύναμη, ροπή και γωνία ουδέτερου σημείου στην θερμή έλαση

5.4 Σύγκριση των μεθόδων

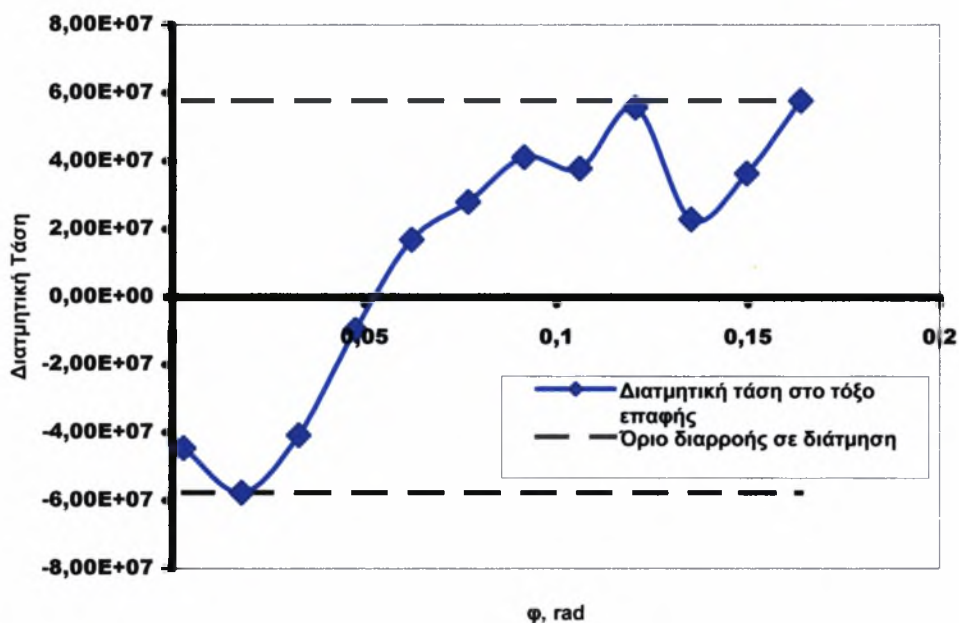
Σύμφωνα με την αναλυτική θεωρία της θερμής έλασης το κυριότερο χαρακτηριστικό της κατεργασίας είναι οι μεγάλες διατμητικές δυνάμεις που επικρατούν σε όλο το μήκος του τόξου επαφής του κατεργάσιμου υλικού με το ράουλο. Έτσι κατά τον



Σχήμα 5.7 Πλαστική ζώνη στην θερμή έλαση

υπολογισμό των φορτίων της έλασης η ποσότητα $\mu\eta$ τίθεται ίση με το όριο διαρροής του υλικού σε διάτμηση k . Κατά την ανάλυση του προβλήματος της έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η πίεση δεν παίρνει τις μεγάλες τιμές της αναλυτικής θεωρίας με αποτέλεσμα και οι διατμητικές τάσεις στο τόξο επαφής να

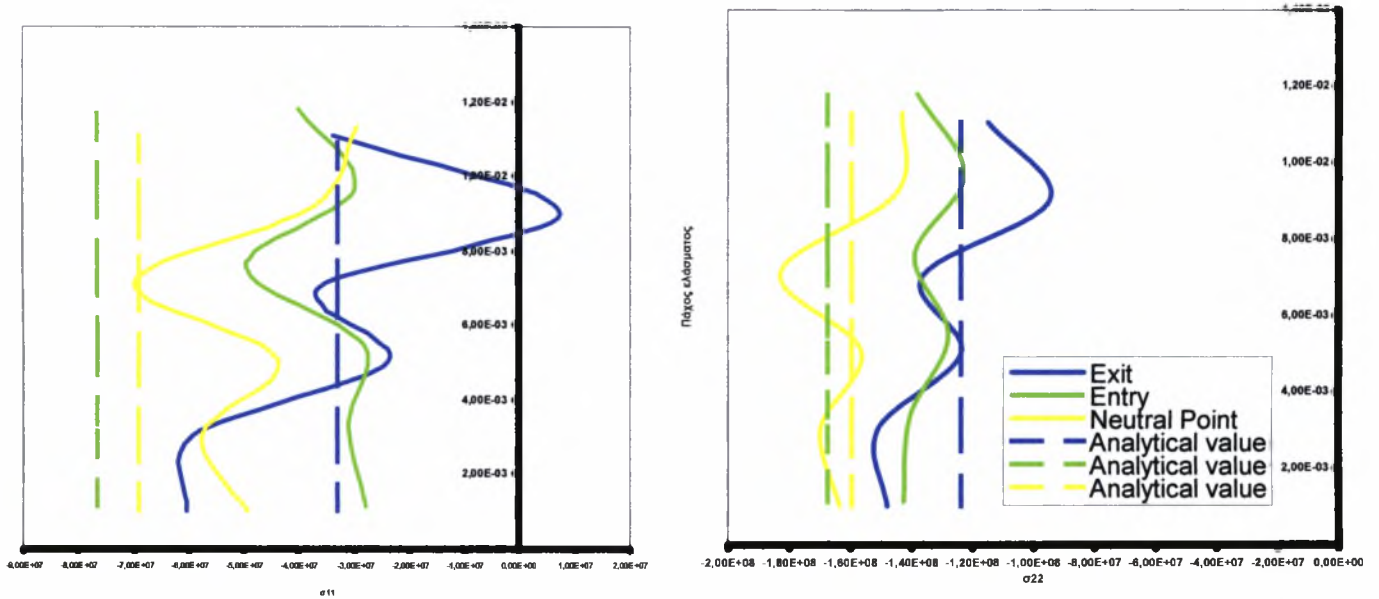
μην παρουσιάζουν ομοιόμορφη κατανομή αυτής της τάξεως παρά να πλησιάζουν τοπικά σε κάποιους κόμβους το όριο διαρροής σε διάτμηση. Το γεγονός αυτό όπως είναι φυσικό επηρεάζει τις τιμές όλων των φορτίων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Στο σχήμα 5.7 γίνεται σύγκριση των διατμητικών τάσεων που επικρατούν στο τόξο επαφής με την τιμή k του υλικού.



Σχήμα 5.7 Κατανομή των διατμητικών τάσεων στο τόξο επαφής

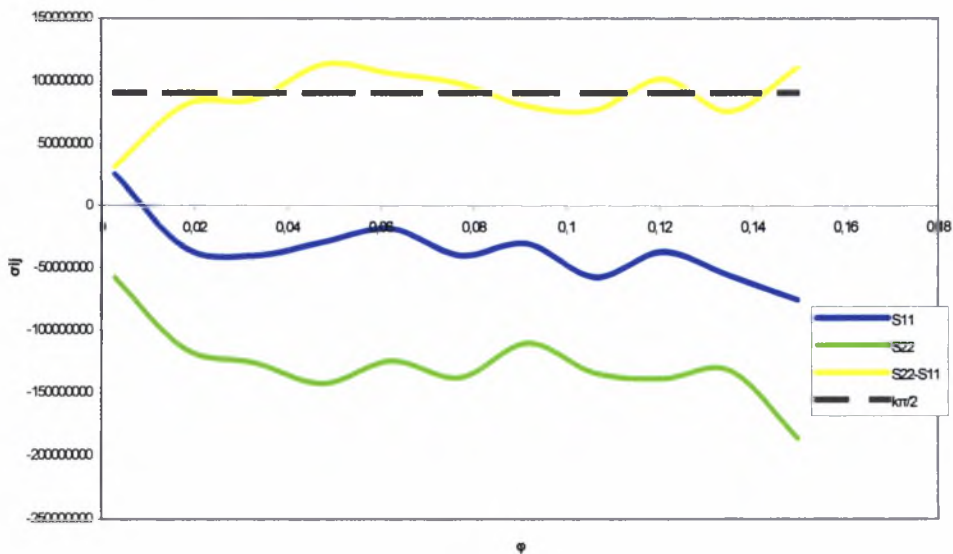
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι κατανομές των τάσεων στο πάχος του ελάσματος, μετρημένες σε τμήματα πάχους ενός στοιχείου που βρίσκονται στην πλευρά της εισόδου, της εξόδου καθώς και στο ουδέτερο σημείο σε σύγκριση με τις αναλυτικές τιμές που υπολογίζονται από το κριτήριο διαρροής του τέταρτου κεφαλαίου.

Όπως βλέπουμε στην περίπτωση της εισόδου, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζει αρκετά διαφορετικές τιμές και για τις δύο ορθές συνιστώσες της τάξεως, ενώ στην έξοδο και στο ουδέτερο σημείο η κατάσταση είναι σαφώς καλύτερη με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων προσεγγίζει την αναλυτική λύση.



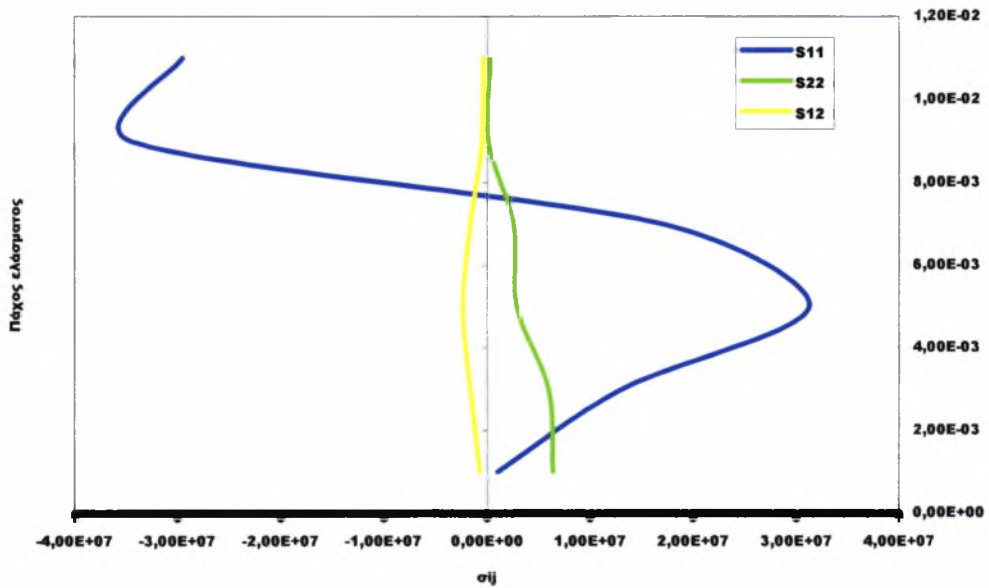
Σχήμα 5.8 Κατανομή τάσεων στο πάχος του ελάσματος στην είσοδο, στην έξοδο και στο ουδέτερο σημείο

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η κατανομή των ορθών τάσεων κατά μήκος του τόξου επαφής και εξετάζεται η ισχύς του κριτηρίου διαρροής. Όπως βλέπουμε το κριτήριο διαρροής προσεγγίζεται πολύ καλά από τα αποτελέσματα της ανάλυσης του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία.



Σχήμα 5.9 Κατανομή ορθών τάσεων κατά μήκος του τόξου επαφής

Τέλος στο σχήμα 5.10 παρουσιάζεται η κατανομή των παραμένουσων τάσεων στο έλασμα.



Σχήμα 5.10 Κατανομή παραμένουσων τάσεων στο έλασμα

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε επίλυση του προβλήματος της κατεργασίας της έλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS. Τα αποτελέσματα της επίλυσης συγκρίθηκαν με κάποιες αναλυτικές θεωρίες και τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την σύγκριση είναι:

- Στη ψυχρή έλαση, η κατανομή της πίεσης πάνω στο ράουλο που προκύπτει από τις δύο αναλυτικές λύσεις παρουσιάζει πολύ καλή συμφωνία με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο οι αναλυτικές κατανομές είναι ιδιαίτερα ομαλές σε σύγκριση με τη κατανομή των πεπερασμένων στοιχείων και δεν προβλέπουν μία απότομη αύξηση στην τιμή της πίεσης κατά την είσοδο του ελάσματος στο διάκενο του ελαστρου. Ακόμη ανάμεσα στις δύο λύσεις παρουσιάζεται ασυμφωνία στις συνοριακές θέσεις της εισόδου και της εξόδου. Η θλιπτική οριζόντια συνιστώσα σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δεν παρουσιάζεται μηδενική κατά την είσοδο και έξοδο του ελάσματος με αποτέλεσμα η πίεση του ράουλου στα σημεία αυτά να είναι να είναι μικρότερη από $2k$.
- Οι τιμές των φορτίων που προκύπτουν από τις αναλυτικές λύσεις είναι πιο συντηρητικές σε σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με την αναλυτική λύση του Von Karman να συμφωνεί περισσότερο όσον αφορά τη δύναμη και τη ροπή του ράουλου ενώ η γωνία του ουδέτερου σημείου υπολογίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια από τους Ford-Bland. Παρόλα αυτά και οι τρεις λύσεις θεωρούν τις διατμητικές δυνάμεις στην είσοδο μεγαλύτερες με αποτέλεσμα το ουδέτερο επίπεδο να βρίσκεται μετατοπισμένο προς την πλευρά της εξόδου.
- Οι διατμητικές τάσεις κατά μήκος του τόξου επαφής που υπολογίζονται από τις τρεις μεθόδους παρουσιάζουν απόλυτη συμφωνία και αποτελούν το ένα τρίτο του ορίου διαρροής σε διάτμηση γεγονός που επιτρέπει την υπόθεση των αναλυτικών λύσεων που θεωρούν την διάτμηση

- αμελητέα.
- Τέλος, οι ορθές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων που προκύπτουν από τις τρεις μεθόδους παρουσιάζονται ομοιόμορφες στο πάχος του ελάσματος σε τυχαίες διατομές στα επίπεδα της εισόδου και του ουδέτερου σημείου και επομένως σε συνδυασμό με την υπόθεση για αμελητέες διατμητικές τάσεις επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι αρχικά επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την έλαση. Κατά την έξοδο του ελάσματος αν και η κατανομή των τάσεων παρουσιάζεται ομοιόμορφη οι αναλυτικές λύσεις προβλέπουν μικρότερες τιμές τάσεων από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων κυρίως για την οριζόντια συνιστώσα, που όπως είδαμε και προηγουμένως η αναλυτική λύση θεωρεί μηδέν στα συνοριακά σημεία της εισόδου και της εξόδου.
 - Στην θερμή έλαση, η κατανομή της πίεσης που προκύπτει από την αναλυτική λύση παρουσιάζει απόκλιση από την κατανομή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Όπως και στην ψυχρή έλαση, κατά την είσοδο του ελάσματος υπάρχει μία απότομη αύξηση της πίεσης που δεν προβλέπεται από την αναλυτική λύση. Εκτός από την μικρή αυτή περιοχή της εισόδου του ελάσματος, η αναλυτική κατανομή παρουσιάζεται να υπερεκτιμά την κατανομή της πίεσης που προκύπτει από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ενώ στο επίπεδο της εξόδου οι δύο κατανομές παρουσιάζουν περίπου την ίδια μορφή, διατηρώντας βέβαια την διαφορά τους, γύρω από το ουδέτερο επίπεδο η απόκλιση γίνεται μεγαλύτερη αφού η καμπύλη των πεπερασμένων στοιχείων δεν παρουσιάζει την ίδια μορφή με την αναλυτική λύση και οι τιμές της πίεσης στο σημείο αυτό δεν φτάνουν το μέγιστο που προβλέπει η αναλυτική θεωρία.
 - Ακόμη, σύμφωνα με την αναλυτική θεωρία η διατμητική τάση σε όλο το μήκος επαφής του ράουλου με το κατεργάσιμο υλικό είναι ίση και σταθερή με το όριο διαρροής σε διάτμηση του υλικού, γεγονός που δεν επιβεβαιώνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Σύμφωνα με την τελευταία η διατμητική τάση κατά μήκος του τόξου επαφής φτάνει την οριακή τιμή του ορίου διαρροής σε κάποιες μικρές περιοχές κατά την είσοδο και την έξοδο του ελάσματος από το διάκενο των ράουλων

και παίρνει τιμές αρκετά μικρότερες όσο πλησιάζουμε το ουδέτερο σημείο και από τις δύο πλευρές.

- Οι τιμή της δύναμης προκύπτει από την ολοκλήρωση της κατανομής της πίεσης κατά μήκος του τόξου επαφής και όπως θα περιμέναμε προκύπτει μικρότερη με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Μεγαλύτερη απόκλιση ωστόσο παρουσιάζει η ροπή του ράουλου λόγω της απόκλισης στην κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά μήκος του τόξου επαφής. Από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η γωνία του ουδέτερου σημείου προκύπτει πλησιέστερα στην πλευρά της εξόδου κατά περίπου 1° (ένα ένατο του τόξου επαφής) με αποτέλεσμα οι διατμητικές τάσεις κατά την είσοδο να είναι μεγαλύτερες και επειδή συμπίπτουν με την φορά της περιστροφής του ράουλου να παράγουν μεγαλύτερη ροπή από αυτήν που προβλέπει η αναλυτική λύση.
- Τέλος, όσον αφορά τη κατανομή των ορθών τάσεων στο πάχος του ελάσματος, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων προβλέπει μεγαλύτερες τάσεις κατά την είσοδο του ελάσματος στο διάκενο των ράουλων από την αναλυτική λύση, ενώ τόσο στο ουδέτερο επίπεδο όσο και κατά την έξοδο του ελάσματος οι ορθές συνιστώσες της τάσεως που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους δεν παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Κώδικας ABAQUS για το πρόβλημα της ψυχρής έλασης
Κώδικας ABAQUS για το πρόβλημα της θερμής έλασης

Cold_Rolling_input_file

*HEADING

Cold Rolling of thick plate: Plane Strain

*PREPRINT,ECHO=YES,CONTACT=YES

*RESTART,WRITE

**

*NODE

** Bar

1, 0.025 , 0.

1001, 0.025 , 0.0025

151, -0.050 , 0.

1151, -0.050 , 0.0025

**

*NGEN,NSET=BOTTOM

1,151,1

*NGEN,NSET=TOP

1001,1151,1

*NFILL,NSET=BAR

BOTTOM, TOP, 5, 200

*NSET,NSET=LEFT,GENERATE

151,1151,200

*NSET,NSET=RIGHT,GENERATE

1, 1001, 200

**

**

*NODE

1001, 0.025, 0.001875

1051, 0. , 0.0025

*NGEN,NSET=ZX2

1001, 1051, 1

*NSET,NSET=ZX1,GENERATE

1, 51, 1

*NFILL

ZX1, ZX2, 5, 200

**

**

*NSET,NSET=NEUTRAL,GEN

1082,1084,1

*NSET,NSET=EX

1067

*NSET,NSET=EN

1111

*ELEMENT,TYPE=CPE4H,ELSET=METAL

1,1,201,202,2

*ELGEN,ELSET=METAL

```

1,5,200,200,150,1,1
**
*ELSET,ELSET=TOP,GEN
801,950,1
*ELSET,ELSET=BACK,GEN
150,950,200
*ELSET,ELSET=EXIT,GEN
72, 872, 200
*ELSET,ELSET=ENTRY,GEN
90,890,200
*ELSET,ELSET=NEUTRAL,GEN
82,882,200
*ELSET,ELSET=ROLLED,GEN
21,821,200
*ELSET,ELSET=ROLLED1,GEN
60,860,200
*SOLID SECTION,ELSET=METAL,MAT=C15
**
*MATERIAL,NAME=C15
*ELASTIC
200E09,0.3
*PLASTIC
200E06,0.
*SURFACE, TYPE=SEGMENTS,NAME=ROLLER
START, 0.525000, 0.501875
CIRCL, -0.328554, 0.14832, 0.025, 0.501875
CIRCL, -0.475000, 0.501875, 0.025, 0.501875
CIRCL, 0. , 1.001875, 0.025, 0.501875
*SURFACE,TYPE=ELEMENT, NAME=SURF1
TOP,S2
**
*NODE
10000, 0.025, 0.501875
*RIGID BODY, REF NODE=10000, ANALYTICAL SURFACE=ROLLER
**
*NSET,NSET=REFNODE
10000
**
*SURFACE INTERACTION,NAME=FRICT
*FRICTION
0.1
*CONTACT PAIR,INTERACTION=FRICT,ADJUST=ZX2
SURF1,ROLLER
**
**
**

```



```

*NSET,NSET=TEST
1, 151
*NSET,NSET=TEST1
1001, 1151
**
**
*STEP,INC=1000,NLGEOM,UNSYMM=YES
*STATIC
0.0005E-1, 0.0005
*BOUNDARY
BOTTOM,2,2
10000,1,2
10000,6,6
LEFT,1,1,0.0005
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT,VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT,VARIABLE=ALL
**
*OUTPUT,HISTORY
*END STEP
**
**
**
**
**
*STEP,INC=1000,NLGEOM,UNSYMM=YES
*STATIC
0.005E-1, 0.005
*BOUNDARY,OP=NEW
BOTTOM,2,2
10000,1,2
10000, 6, 6, 0.005
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT,VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT,VARIABLE=ALL
**
*OUTPUT,HISTORY
*END STEP
**
**
**
**

```

```

**
*STEP,INC=1000,NLGEOM,UNSYMM=YES
*STATIC
0.070E-2, 0.070
*BOUNDARY,OP=NEW
BOTTOM,2,2
10000,1,2
10000, 6, 6, 0.075
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT,VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT,VARIABLE=ALL
**
*OUTPUT,HISTORY
*END STEP

```

Cold_Rolling_Restart_file

```

*HEADING
Thick plate rolling: Plane Strain
*POST OUTPUT,STEP=3
169
*CONTACT PRINT,SLAVE=SURF1,MASTER=ROLLER,NSET=TOP
*OUTPUT,FIELD
**
*OUTPUT,HISTORY
*NODE OUTPUT,NSET=REFNODE
RF1,RM3,RF2
**
**
**Element Print
**
**
*EL PRINT,ELSET=EXIT,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO
S11,S12,S22,COORD
*EL PRINT,ELSET=ENTRY,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO
S11,S12,S22,COORD
*EL PRINT,ELSET=NEUTRAL,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO
S11,S12,S22,COORD

```

```

*EL PRINT,ELSET=ROLLED,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO
S11,S12,S22,COORD
*EL PRINT,ELSET=ROLLED1,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO
S11,S12,S22,COORD
**
**
**Node Print
**
**
*NODE PRINT, NSET=TEST, SUMMARY=NO
U1, COOR1
*NODE PRINT, NSET=TEST1, SUMMARY=NO
U, COORD
*NODE PRINT,NSET=NEUTRAL,SUMMARY=NO
U, COORD
*NODE PRINT,NSET=EX,SUMMARY=NO
U, COORD
*NODE PRINT,NSET=EN,SUMMARY=NO
U, COORD

```

Hot_Rolling_input_file

```

*HEADING
Hot Rolling of thick plate: Plane Strain
*PREPRINT,ECHO=YES,CONTACT=YES
*RESTART,WRITE
**
*NODE
** Bar
1, 0.039, 0.
601, 0.039, 0.015
61, -0.1422, 0.
661, -0.1422, 0.015
**
*NGEN,NSET=BOTTOM
1,61,1
*NGEN,NSET=TOP
601, 661, 1
*NFILL,NSET=BAR
BOTTOM, TOP, 6, 100

```

```

*NSET,NSET=LEFT,GENERATE
61,661,100
*NSET,NSET=RIGHT,GENERATE
1, 601, 100
**
**
*NODE
601, 0.039, 0.012
614, 0., 0.015
*NGEN,NSET=ZX2
601,614,1
*NSET,NSET=ZX1,GENERATE
1, 14,1
*NFILL
ZX1, ZX2, 6, 100
**
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H,ELSET=METAL
1,1,101,102,2
*ELGEN,ELSET=METAL
1,6,100,100,60,1,1
**
*ELSET,ELSET=TOP,GEN
501, 560 ,1
*ELSET,ELSET=BACK,GEN
60, 560, 100
*ELSET,ELSET=SLICE,GEN
42,542,100
*SOLID SECTION,ELSET=METAL,MAT=C15
**
*MATERIAL,NAME=C15
*ELASTIC
200E09,0.3
*PLASTIC
100E06,0.
*SURFACE, TYPE=SEGMENTS,NAME=ROLLER
START, 0.0378, 0.012
CIRCL, -0.2022, 0.252, 0.0378, 0.252
CIRCL, 0.0378, 0.492, 0.0378, 0.252
*SURFACE,TYPE=ELEMENT, NAME=SURF1
TOP,S2
**
*NODE
10000, 0.0378, 0.252
*RIGID BODY, REF NODE=10000, ANALYTICAL SURFACE=ROLLER
**

```

```

*NSET,NSET=REFNODE
10000
**
*SURFACE INTERACTION,NAME=FRICT
*FRICTION,TAUMAX=5.77E07
1
*CONTACT PAIR,INTERACTION=FRICT,ADJUST=ZX2
SURF1,ROLLER
**
**
**
*NSET,NSET=TEST,GENERATE
626, 637, 1
**
*ELSET,ELSET=ARC,GEN
525, 536, 1
*ELSET,ELSET=ENTRY,GEN
27, 527, 100
*ELSET,ELSET=EXIT,GEN
31,531 ,100
*ELSET,ELSET=NEUTRAL,GEN
29, 529, 100
*ELSET,ELSET=RESIDUAL,GEN
20, 520, 100
*STEP,INC=1000,NLGEOM,UNSYMM=YES
*STATIC
0.0003, 0.003
*BOUNDARY
BOTTOM,2,2
10000,1,2
10000,6,6
LEFT,1,1,0.003
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*NODE PRINT, NSET=TEST, SUMMARY=NO
U1, COORD
*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT,VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT,VARIABLE=ALL
**
*OUTPUT,HISTORY
*NODE OUTPUT,NSET=REFNODE
RF1,RF2,RM3
*END STEP
**
**

```

```

**
**
**
*STEP,INC=1000,NLGEOM,UNSYMM=YES
*STATIC
0.0003, 0.03
*BOUNDARY,OP=NEW
BOTTOM,2,2
10000,1,2
10000, 6, 6, 0.03
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*NODE PRINT, NSET=TEST, SUMMARY=NO
U1, COORD
*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT,VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT,VARIABLE=ALL
**
*OUTPUT,HISTORY
*NODE OUTPUT,NSET=REFNODE
RF1,RF2,RM3
*END STEP
**
**
**
**
**
*STEP,INC=1000,NLGEOM,UNSYMM=YES
*STATIC
0.003, 0.3
*BOUNDARY,OP=NEW
BOTTOM,2,2
10000,1,2
10000, 6, 6, 0.330
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*NODE PRINT, NSET=TEST, SUMMARY=NO
U1, COORD
*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=ALL
*ELEMENT OUTPUT,VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT,VARIABLE=ALL
**
*OUTPUT,HISTORY
*NODE OUTPUT,NSET=REFNODE
RF1,RF2,RM3
*END STEP

```


Hot_Rolling_Restart_file

*HEADING

Hot Rolling thick plate: Plane Strain

*POST OUTPUT,STEP=3

254

*CONTACT PRINT,SLAVE=SURF1,MASTER=ROLLER,NSET=TOP

*OUTPUT,FIELD,VARIABLE=PRESELECT

*EL PRINT,ELSET=ENTRY,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO

S11,S22,S12,COORD

*EL PRINT,ELSET=EXIT,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO

S11,S22,S12,COORD

*EL PRINT,ELSET=NEUTRAL,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO

S11,S22,S12,COORD

*EL PRINT,ELSET=RESIDUAL,POSITION=CENTROIDAL,SUMMARY=NO

S11,S22,S12,COORD

Βιβλιογραφία

[1] J. Chakrabarty, *Theory of plasticity*, McGraw-Hill Book Company.

[2] Γ. Λιάνης, *Ανελαστική συμπεριφορά υλικών και φορέων*.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074717

