



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

***ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΕΡΓΑΣΙΩΝ  
Εργαστήριο Δυναμικής Συστημάτων***

**Θεόδωρος Χατζηδιαλεκτός**

**ΠΑΘΗΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΠΡΟΣΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΠΛΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ**

**Διπλωματική Εργασία**

**ΒΟΛΟΣ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2004**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3949/1  
Ημερ. Εισ.: 01-10-2004  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2004  
ΧΑΤ

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Πετρόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Κατ' αρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Παπαδημητρίου που ξεκινήσαμε αυτή τη σύντομη συνεργασία για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθειά του σε όλη τη διάρκεια της μελέτης μου, καθώς και για την κατανόησή του σε ορισμένα προσωπικά προβλήματα που μου παρουσιάστηκαν. Ευχαριστώ τον συνάδελφό μου Βαγγέλη Ντότσιο που με βοήθησε να κατανοήσω τη λογική του προγραμματισμού σε περιβάλλον Matlab, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές του σε θεωρητικά θέματα. Ο ίδιος μού παραχώρησε ανιδιοτελώς ένα μέρος του δικού του κώδικα, προκειμένου να τον μελετήσω και να μπορέσω ξεκινήσω την εργασία μου.

Πολλά ευχαριστώ στην παρέα μου στο Πολυτεχνείο, για τις αξέχαστες στιγμές που περάσαμε μαζί. Ο Μάκης, ο Μήτσος, ο Νίκος, ο Μουσταφά και ο Μιχάλης έχουν γράψει ένα μεγάλο κεφάλαιο στο βιβλίο των αναμνήσεών μου. Δεν ξεχνώ τον Θάνο και τον Γιώργο που με έκαναν να αγαπήσω τη φοιτητική ζωή. Ευχαριστώ τον Γιάννη για τις ατελείωτες συζητήσεις μας στο διαδίκτυο και για την στήριξή του το τελευταίο διάστημα, και τον Κωνσταντίνο που την κατάλληλη στιγμή θα μου πει την κατάλληλη κουβέντα.

Ευχαριστώ τον αδερφό μου που ανέχτηκε πολλές δύσκολες καταστάσεις προκειμένου να με βοηθήσει να πάρω το δίπλωμά μου. Ευχαριστώ την μητέρα μου για την ατελείωτη υπομονή της το τελευταίο διάστημα και για την ακλόνητη στήριξή της σε μένα και στον αδερφό μου. Την παρούσα εργασία την αφιερώνω στον πατέρα μου, που εύχομαι σύντομα να κάθεται δίπλα μου και να την ξεφυλλίζουμε μαζί.

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται η δυνατότητα ελέγχου των ταλαντώσεων πρωτεύοντων μηχανικών συστημάτων χρησιμοποιώντας ένα δευτερεύον σύστημα ταλαντωτή μάζας – ελατηρίου – αποσβεστήρα, το οποίο προσαρτάται κατάλληλα στο μηχανικό σύστημα. Η μάζα του δευτερεύοντος συστήματος παθητικού ελέγχου είναι σχετικά μικρή σε σχέση με τη συνολική μάζα του πρωτεύοντος μηχανικού συστήματος.

Στην εργασία μελετώνται πρωτεύοντα μηχανικά μοντέλα. Το πρώτο μοντέλο αποτελείται από έναν απλό ταλαντωτή ενός βαθμού ελευθερίας ο οποίος διεγείρεται στη βάση του. Τα κύρια χαρακτηριστικά του πρωτεύοντος – δευτερεύοντος συστήματος 2 βαθμών ελευθερίας που προκύπτει είναι οι ιδιοσυχνότητες και τα μέτρα απόσβεσης του πρωτεύοντος και του δευτερεύοντος συστήματος, καθώς επίσης και ο λόγος μαζών των δύο συστημάτων.

Το δεύτερο πρωτεύον σύστημα είναι ένα μηχανικό σύστημα πολλών βαθμών ελευθερίας το οποίο αποτελείται από  $n$ -μάζες, ελατήρια και αποσβεστήρες σε σειριακή διάταξη. Τα βασικά χαρακτηριστικά του πρωτεύοντος συστήματος είναι οι ιδιοσυχνότητές του και τα μέτρα απόσβεσης των ιδιομορφών του. Το δευτερεύον σύστημα προσαρτάται πάνω σε μια από τις μάζες του πρωτεύοντος συστήματος. Στα βασικά χαρακτηριστικά του συζευγμένου συστήματος συμπεριλαμβάνεται επίσης η ιδιοσυχνότητα και το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος ταλαντωτή, όπως επίσης και ο λόγος μαζών μεταξύ του δευτερεύοντος συστήματος και της συνολικής μάζας του πρωτεύοντος συστήματος.

Στη συνέχεια αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες περιγράφουν την απόκριση του συζευγμένου συστήματος συναρτήσει των ιδιοσυχνοτήτων, των μέτρων απόσβεσης και του λόγου των μαζών των δύο συστημάτων. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η επιλογή των βέλτιστων παραμέτρων του δευτερεύοντος συστήματος για τις οποίες επιτυγχάνεται ο καλύτερος δυνατός έλεγχος των ταλαντώσεων του πρωτεύοντος συστήματος. Η επιλογή αυτών των παραμέτρων θα προκύψει ύστερα από την μελέτη διαγραμμάτων, τα οποία αναφέρονται στις συναρτήσεις μεταφοράς. Βασικό κριτήριο για την επιλογή των παραμέτρων είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζονται οι καμπύλες οι οποίες περιγράφουν τη μεταβολή του μέγιστου εύρους της συνάρτησης μεταφοράς συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος

συστήματος, και για διάφορες τιμές του μέτρου απόσβεσης της δευτερεύουσας μάζας καθώς και του λόγου μαζών.

Συμπεραίνεται ότι πιο αποτελεσματικός έλεγχος του πρωτεύοντος συστήματος επιτυγχάνεται επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος να είναι κοντά σε μια από τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος. Επίσης, αυξάνοντας το λόγο μαζών και το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των ταλαντώσεων του πρωτεύοντος συστήματος.

Η εργασία παρουσιάζεται σε έξι κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται μια σύντομη περιγραφή των παθητικών και ενεργών συστημάτων ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφεται το συζευγμένο πρωτεύων-δευτερεύων μηχανικό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας, αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης και περιγράφονται εν συντομία οι μέθοδοι ανάλυσης για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται διαγράμματα από την ανάλυση του συστήματος 2 βαθμών ελευθερίας. Από αυτά τα διαγράμματα προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του πρωτεύοντος μηχανικού συστήματος, ενώ αναλύεται ο ρόλος του δευτερεύοντος συστήματος και η επίδρασή του στην απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος. Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφεται το συνολικό πρωτεύων – δευτερεύων σύστημα  $n+1$  βαθμών ελευθερίας, αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης και περιγράφονται σύντομα οι μέθοδοι ανάλυσης για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται διαγράμματα από την ανάλυση του συστήματος των  $n+1$  βαθμών ελευθερίας, για αριθμό μαζών  $n=3$ . Από αυτά τα διαγράμματα θα προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του μοντέλου, ενώ θα αναλυθεί ο ρόλος της δευτερεύουσας μάζας και η επίδρασή της στην απόκριση του κύριου συστήματος. Τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται συνοπτικά στο Κεφάλαιο 6

## Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη	
Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή στα συστήματα ελέγχου κατασκευών.....7
1.1	Γενική περιγραφή συστημάτων ελέγχου.....7
1.2	Τύποι συστημάτων ελέγχου.....8
Κεφάλαιο 2	Ανάλυση δυναμικού μοντέλου δύο βαθμών ελευθερίας.....11
2.1	Περιγραφή του μηχανικού συστήματος.....11
2.2	Εξισώσεις κίνησης του συστήματος.....13
2.3	Μέθοδος επίλυσης..... 15
2.5	Εισαγωγή νέων παραμέτρων στις εξισώσεις.....18
Κεφάλαιο 3	Παραμετρική ανάλυση – αποτελέσματα.....21
3.1	Διαγράμματα ιδιοσυχνοτήτων.....21
3.2	Επιλογή πρώτης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\zeta_s$ .....23
3.2.1	Μετατοπίσεις.....23
3.2.2	Ταχύτητες.....28
3.2.3	Απόλυτες επιταχύνσεις.....32
3.3	Επιλογή δεύτερης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\zeta_p$ .....36
3.3.1	Μετατοπίσεις.....37
3.3.2	Απόλυτες επιταχύνσεις.....42
3.4	Επιλογή τρίτης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\mu$ .....47
3.4.1	Μετατοπίσεις.....48
3.4.2	Απόλυτες επιταχύνσεις.....50
3.5	Συμπεράσματα.....51
Κεφάλαιο 4	Ανάλυση δυναμικού μοντέλου (n+1)-βαθμών ελευθερίας.....53
4.1	Περιγραφή του μηχανικού συστήματος.....53
4.2	Εξισώσεις κίνησης του συστήματος.....55
4.3	Μέθοδος υπολογισμού του πίνακα απόσβεσης.....60
4.4	Μέθοδος επίλυσης.....61
4.5	Εισαγωγή νέων παραμέτρων στις εξισώσεις.....61
Κεφάλαιο 5	Παραμετρική ανάλυση – αποτελέσματα .....63
5.1	Επιλογή ομάδας παραμέτρων.....64
5.1.1	Συναρτήσεις μεταφοράς και διαγράμματα για μετατοπίσεις, ταχύτητες και απόλυτες επιταχύνσεις.....65
5.1.2	Τοπικά μέγιστα στα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς.....71
5.1.3	Συμπεράσματα.....75
Κεφάλαιο 6	Γενικά συμπεράσματα.....76
Βιβλιογραφία.....	78

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

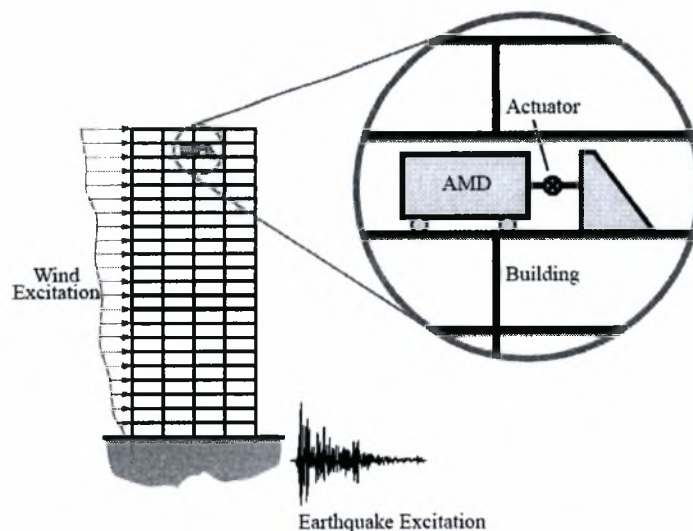
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

### 1.1 Γενική περιγραφή συστημάτων ελέγχου

Η ασφάλεια των μηχανικών κατασκευών είναι χωρίς αμφιβολία μια από τις πρώτες προτεραιότητες των μηχανικών σε ολόκληρο τον κόσμο. Κτίρια, γέφυρες και οδικά δίκτυα είναι μερικά μόνο από τα έργα όπου η ασφάλεια παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς τέτοιου είδους κατασκευές χρησιμοποιούνται καθημερινά από μεγάλο μέρος του πληθυσμού. Η ασφάλεια των παραπάνω κατασκευών υπονομεύεται από πολλούς φυσικούς κινδύνους, όπως είναι οι σεισμοί, οι δυνατοί άνεμοι, τα παλιρροιακά κύματα καθώς και τεχνητές μη ηθελημένες καταπονήσεις όπως η υψηλή κυκλοφορία στα οδικά δίκτυα, συνωστισμός στα κτίρια κτλ.

Σε κάθε περίπτωση, σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής, έχοντας σχεδιάσει την κατασκευή έτσι ώστε να αντέχει σε όλες τις πιθανές διεγέρσεις που θα δεχτεί. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η μείωση της πιθανότητας αστοχίας πραγματοποιείται με μείωση της απόκρισης της κατασκευής, με δεδομένη διέγερση. Παρακάτω περιγράφονται συνοπτικά διάφορες μέθοδοι μείωσης της απόκρισης ενός συστήματος, όταν αυτό δέχεται γνωστή διέγερση.

Το Σχήμα 1.1 μας δείχνει σχηματικά με ποιο τρόπο εφαρμόζεται σε ένα κτίριο ένα σύστημα ελέγχου με το οποίο επιδιώκουμε την μείωση της απόκρισης της συνολικής κατασκευής.



Σχήμα 1.1: Κτίριο με Σύστημα Ελέγχου



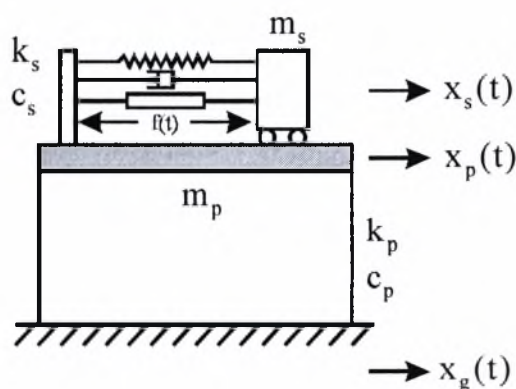
Σε έναν από τους τελευταίους ορόφους του κτιρίου, τοποθετείται ένα δευτερεύων σύστημα (secondary system) που αποτελείται από μια μάζα και έναν μηχανισμό κίνησης (actuator), ενώ το έδαφος δέχεται διέγερση από σεισμό. Ανάλογα με τον τύπο της διέγερσης και τον τύπο του δευτερεύοντος συστήματος, έχουμε και διαφορετική συμπεριφορά του τελευταίου, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η απόκριση όλης της κατασκευής.

## 1.2 Τύποι συστημάτων ελέγχου

### 1.2.1 ΕΝΕΡΓΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (ACTIVE CONTROL SYSTEM)

Το συγκεκριμένο σύστημα αποτελείται από μια μάζα και έναν μηχανισμό κίνησης, ο οποίος μηχανισμός ανάλογα με τη διέγερση που εφαρμόζεται στην κατασκευή, εφαρμόζει με τη σειρά του κατάλληλη δύναμη στη μικρή μάζα, ώστε να καθορίσει τη συμπεριφορά όλης της κατασκευής. Η δύναμη στη μάζα εφαρμόζεται με πολλούς τρόπους, όπως υδραυλικά, πνευματικά, ηλεκτρομαγνητικά ή με ηλεκτροκινητήρα. Το μεγάλο μειονέκτημα του συγκεκριμένου τύπου είναι ότι απαιτείται μεγάλη ενέργεια για τη λειτουργία του δευτερεύοντος συστήματος. Κάτι τέτοιο είναι επισφαλές σε περιπτώσεις σεισμού, όπου είναι πιθανή μια διακοπή ρεύματος.

Στο Σχήμα 1.2 παριστάνεται ένα σύστημα τέτοιου είδους



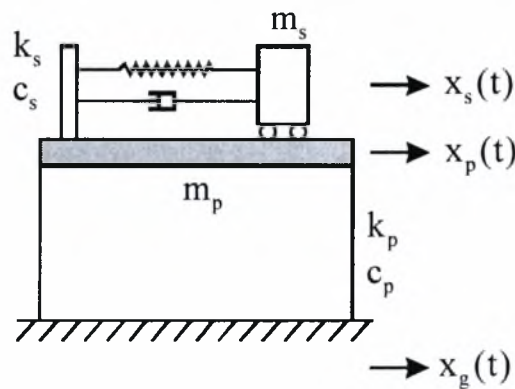
Σχήμα 1.2: Κατασκευή με ενεργό σύστημα ελέγχου

### 1.2.2 ΠΑΘΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (PASSIVE CONTROL SYSTEM)

Η βασική διαφορά ενός παθητικού συστήματος από ένα ενεργό, είναι η απουσία εξωτερικής πηγής ενέργειας, καθώς δεν υπάρχει ο μηχανισμός κίνησης ο οποίος μετακινεί τη δευτερεύουσα μάζα. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, διότι ακόμα και σε

περίπτωση διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος κατά τη διάρκεια του σεισμού, δεν επηρεάζεται η λειτουργία του. Η κίνηση του δευτερεύοντος συστήματος πραγματοποιείται ανάλογα με τη διέγερση που δέχεται η κατασκευή (κτίριο, γέφυρα κτλ).

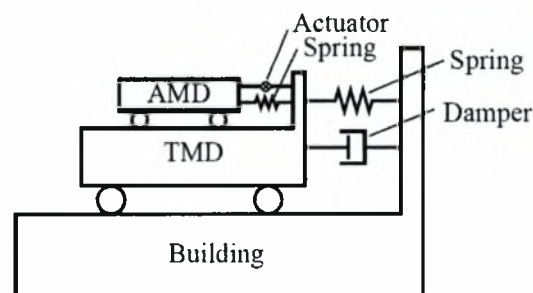
Η διαφορά του με το ενεργό σύστημα είναι η απουσία του μηχανισμού κίνησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Κατασκευή με παθητικό Σύστημα Ελέγχου

### 1.2.3 ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (HYBRID CONTROL SYSTEM)

Τα υβριδικά συστήματα ελέγχου αποτελούν μια συνδυασμένη χρήση ενεργών και παθητικών συστημάτων. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι μπορούν να μετριάσουν τους περιορισμούς που υπάρχουν τόσο στα ενεργά όσο και στα παθητικά συστήματα, προσφέροντας μια πιο βέλτιστη συνολικά λύση. Τα υβριδικά συστήματα συνεχίζουν να αποδίδουν ακόμα και σε περίπτωση διακοπής της ενέργειας που τα τροφοδοτεί, καθώς είναι έτσι σχεδιασμένα ώστε να μπορούν να λειτουργούν ακόμα και με μπαταρίες. Στο Σχήμα 1.4 παρουσιάζεται ένα υβριδικό σύστημα ελέγχου.



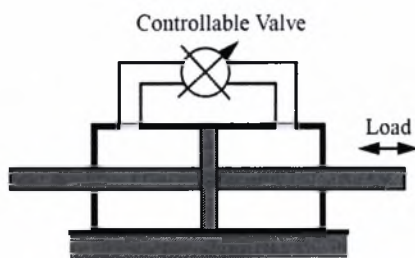
Σχήμα 1.4: Κατασκευή με υβριδικό Σύστημα Ελέγχου

## 1.2.4 ΗΜΙ ΕΝΕΡΓΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (SEMI ACTIVE CONTROL SYSTEM)

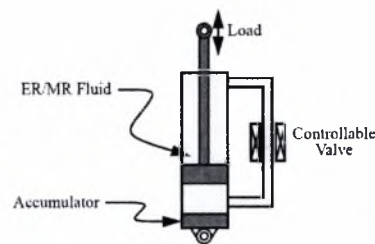
Είναι μια υποκατηγορία ενεργών συστημάτων ελέγχου τα οποία αποδίδουν εξίσου με τα ενεργά συστήματα, χωρίς την απαίτηση μεγάλης ποσότητας ενέργειας. Στα ημι ενεργά συστήματα χρησιμοποιούνται ειδικοί μηχανισμοί κίνησης (actuator) οι οποίοι από κατασκευής απαιτούν ενέργεια ικανή να τροφοδοτηθεί και από μπαταρίες. Διάφοροι τύποι μηχανισμών κίνησης είναι οι εξής

- Αποσβεστήρας με μεταβαλλόμενη ακαμψία (variable-stiffness device)
- Αποσβεστήρας με ελεγχόμενη τριβή (controllable friction device)
- Αποσβεστήρας μεταβαλλόμενου στομίου με υγρό (variable-orifice fluid damper)
- Ελεγχόμενος αποσβεστήρας με υγρό (controllable fluid damper)

Οι δύο τελευταίοι τύποι μηχανισμών κίνησης παρουσιάζονται στα Σχήματα 1.5 και 1.6.



Σχήμα 1.5: Variable-orifice fluid damper



Σχήμα 1.6: Controllable fluid damper

Τα προηγούμενα σχήματα είναι ενδεικτικά και αντιπροσωπεύουν ένα μεγάλο μέρος από τέτοιου είδους μηχανισμούς. Ωστόσο, σήμερα γίνεται μεγάλη έρευνα σε τέτοιου είδους συσκευές, με συνέπεια τη συνεχή τεχνολογική εξέλιξη στον τομέα αυτό.

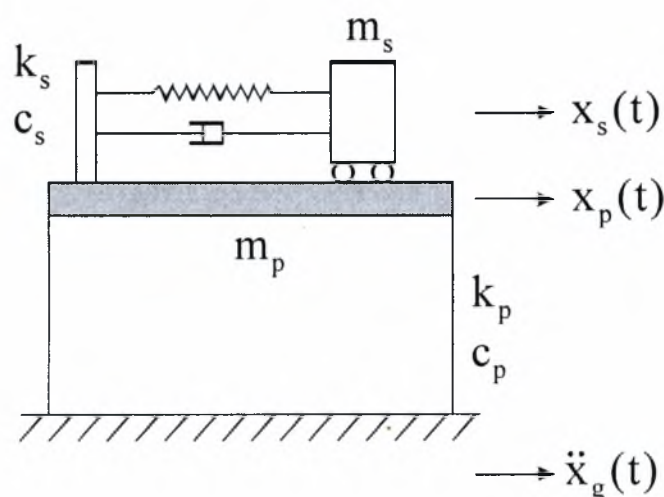
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΥΟ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

#### 2.1 Περιγραφή του Μηχανικού συστήματος

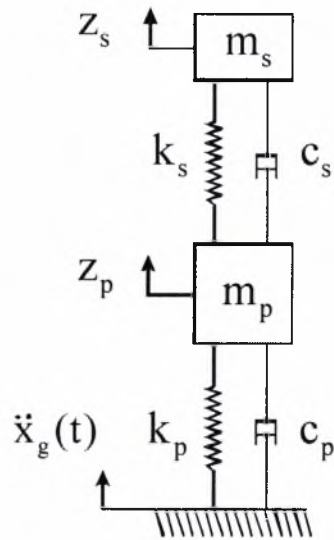
Στο Σχήμα 2.1 παριστάνεται η μορφή του δυναμικού μοντέλου. Το μοντέλο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας και αποτελείται από δύο συστήματα. Το πρωτεύων σύστημα περιλαμβάνει τη μάζα  $m_p$  στερεωμένη στο έδαφος με ελατήριο σταθεράς  $k_p$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_p$ .

Το δευτερεύων σύστημα αποτελείται από τη μάζα  $m_s$ , η οποία συνδέεται με τη μάζα  $m_p$  με ελατήριο σταθεράς  $k_s$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_s$ . Η μάζα του δευτερεύοντος συστήματος είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα του κύριου συστήματος και είναι αυτή που θα παίζει παθητικό ρόλο στον έλεγχο της απόκρισης της κύριας μάζας. Το έδαφος δέχεται διέγερση  $\ddot{x}_g$ .



Σχήμα 2.1: Δυναμικό μοντέλο με παθητικό σύστημα ελέγχου

Το παραπάνω μοντέλο το εξετάζουμε στην εξής απλοποιημένη μορφή



Σχήμα 2.2

Η απόκριση του συστήματος περιγράφεται από τις απόλυτες μετατοπίσεις  $z_p$  και  $z_s$ . Προκειμένου όμως να αποφύγουμε τους όρους βαρύτητας στις εξισώσεις, όλες τις μετατοπίσεις τις μετράμε από τη θέση στατικής ισορροπίας. Έτσι ορίζουμε ως μετατοπίσεις, τις σχετικές μετατοπίσεις των δύο μαζών ως προς το έδαφος.

$$\begin{aligned} x_p &= z_p - x_g \\ x_s &= z_s - x_g \end{aligned} \quad (2.1)$$

Παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο των σχετικών μετατοπίσεων, προκύπτουν οι σχετικές ταχύτητες και οι σχετικές επιταχύνσεις των δύο μαζών.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{z}_p - \dot{x}_g \\ \dot{x}_s &= \dot{z}_s - \dot{x}_g \end{aligned} \quad (2.2)$$

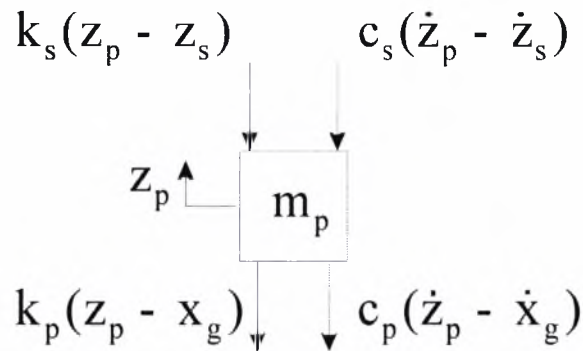
$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \ddot{z}_p - \ddot{x}_g \\ \ddot{x}_s &= \ddot{z}_s - \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (2.3)$$

Άρα όλες οι αποκρίσεις θα εκφράζονται όπως αυτές φαίνονται από έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στο έδαφος. Θεωρούμε ότι το έδαφος δέχεται διέγερση  $\ddot{x}_g$ .

## 2.2 Εξισώσεις κίνησης του συστήματος

Για να δημιουργήσουμε τις εξισώσεις κίνησης, σχεδιάζουμε τα Διαγράμματα Ελεύθερου Σώματος για την καθεμία από τις δυο μάζες.

Για τη μάζα  $m_p$  το Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_p$

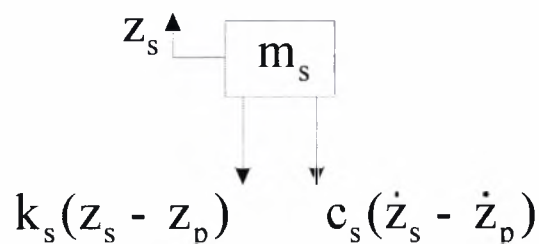
Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει η εξίσωση κίνησης του σώματος  $m_p$

$$m_p \cdot \ddot{z}_p = 0 - k_s \cdot (z_p - z_s) - c_s \cdot (\dot{z}_p - \dot{z}_s) - k_p \cdot (z_p - x_g) - c_p \cdot (\dot{z}_p - \dot{x}_g) \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τις σχετικές μετατοπίσεις, σχετικές ταχύτητες και σχετικές επιταχύνσεις ως προς το έδαφος, η τελική εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_p$  παίρνει τη μορφή

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + (c_p + c_s) \cdot \dot{x}_p + (k_p + k_s) \cdot x_p - c_s \cdot \dot{x}_s - k_s \cdot x_s = -m_p \cdot \ddot{x}_g \quad (2.5)$$

Για τη μάζα  $m_s$ , το Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.4



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_s$

Η εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_s$ , εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα, είναι η εξής

$$m_s \cdot \ddot{z}_s = -k_s \cdot (z_s - z_p) - c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_p) \quad (2.6)$$

Εισάγοντας σχετικές μετατοπίσεις, σχετικές ταχύτητες και σχετικές επιταχύνσεις ως προς το έδαφος, η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$m_s \cdot \ddot{x}_s + c_s \cdot \dot{x}_s + k_s \cdot x_s - c_s \cdot \dot{x}_p - k_s \cdot x_p = -m_s \cdot \ddot{x}_g \quad (2.7)$$

Άρα οι δύο εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν τις σχετικές αποκρίσεις του μοντέλου ως προς την κίνηση του εδάφους είναι

$$\begin{aligned} m_p \cdot \ddot{x}_p + (c_p + c_s) \cdot \dot{x}_p + (k_p + k_s) \cdot x_p - c_s \cdot \dot{x}_s - k_s \cdot x_s &= -m_p \cdot \ddot{x}_g \\ m_s \cdot \ddot{x}_s + c_s \cdot \dot{x}_s + k_s \cdot x_s - c_s \cdot \dot{x}_p - k_s \cdot x_p &= -m_s \cdot \ddot{x}_g \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις του συστήματος σε μητρική μορφή είναι

$$\begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_p + c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_p + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_p \\ m_s \end{pmatrix} \cdot \ddot{x}_g \quad (2.8)$$

αφού έχουμε εισάγει τα διανύσματα της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

όπου

$$M = \begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_p + c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_p + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

είναι τα μητρώα Μάζας, Απόσβεσης και Ακαμψίας.

$\underline{L}$  είναι το διάνυσμα

$$\underline{L} = \underline{M} \cdot \underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.3 Μέθοδος επίλυσης

Η μητρική μορφή του συστήματος, συνοψίζεται στην παρακάτω εξίσωση

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{K} \cdot \underline{x} = -\underline{M} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.12)$$

Το σύστημα (2.12) αποτελεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης το οποίο για να επιλυθεί πρέπει να μετατραπεί σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Η επίλυση του συστήματος για τον προσδιορισμό των αποκρίσεων, όπως μετατοπίσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις των μαζών ή εσωτερικές δυνάμεις στα ελατήρια, γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες μεθόδους. Στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των συναρτήσεων μεταφοράς, οι οποίες προσδιορίζουν το πλάτος της απόκρισης της μόνιμης κατάστασης του συστήματος ως προς το πλάτος της αρμονικής διέγερσης, συναρτήσει της συχνότητας της αρμονικής διέγερσης.

Ένας από τους στόχους των παθητικών συστημάτων ελέγχου είναι η μείωση του μέγιστου πλάτους των συναρτήσεων μεταφοράς, στο διάστημα συχνότητας διέγερσης που μας ενδιαφέρει. Οι συναρτήσεις μεταφοράς υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το λογισμικό MATLAB.

Για να επιτευχθεί η επίλυση στο MATLAB, χρησιμοποιείται η μέθοδος του Χώρου των Καταστάσεων (State Space Method) και είναι κατάλληλη τόσο για συστήματα SISO (single input-single output) όσο και για συστήματα MIMO (multiple input-multiple output).

Το γενικό σύστημα (2.12) των εξισώσεων του συστήματος θα το μετατρέψουμε στο σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης, στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}} &= \underline{A} \cdot \underline{y} + \underline{B} \cdot \underline{u} \\ \underline{z} &= \underline{C} \cdot \underline{y} + \underline{D} \cdot \underline{u} \end{aligned} \quad (2.13)$$



Το διάνυσμα  $\underline{y}$  είναι το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης (state space vector)

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\dot{x}} \end{pmatrix}$$

και περιλαμβάνει τις ελάχιστες δυνατές μεταβλητές που πρέπει να γνωρίζουμε κάθε χρονική στιγμή, ώστε να μπορεί να περιγραφεί η απόκριση του συστήματος για δεδομένη διέγερση τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Το διάνυσμα  $\underline{z}$  είναι το επιθυμητό διάνυσμα εξόδου

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\dot{x}} \\ \underline{\ddot{x}} \end{pmatrix}$$

και περιλαμβάνει τις μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν να υπολογίσουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Το διάνυσμα εξόδου το έχουμε επιλέξει στο συγκεκριμένο πρόβλημα έτσι ώστε να μας δίνει το διάνυσμα των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων των δύο μαζών. Τέλος,  $\underline{u}$  είναι το διάνυσμα διέγερσης, ενώ τα μητρώα A,B,C και D είναι μητρώα που εξαρτώνται από το αρχικό σύστημα δεύτερης τάξης και το διάνυσμα εξόδου  $\underline{z}$ .

Τα μητρώα A,B,C και D υπολογίζονται ως ακολούθως. Με βάση την γενική εξίσωση κίνησης

$$M \cdot \underline{\ddot{x}} + C \cdot \underline{\dot{x}} + K \cdot \underline{x} = -M \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{\ddot{x}}_g \quad (2.12)$$

θα έχουμε

$$\underline{\ddot{x}} = -M^{-1} \cdot C \cdot \underline{\dot{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} - \underline{\Gamma} \cdot \underline{\ddot{x}}_g \quad (2.14)$$

Παραγωγίζοντας το διάνυσμα κατάστασης  $\underline{y}$  προκύπτει

$$\underline{\dot{y}} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\ddot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{x}} \\ -M^{-1} \cdot C \cdot \underline{\dot{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} - \underline{\Gamma} \cdot \underline{\ddot{x}}_g \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

ή

$$\underline{\dot{y}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix} \cdot \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{\Gamma} \end{pmatrix} \cdot \underline{\ddot{x}}_g$$

Στη συνέχεια, παίρνοντας το διάνυσμα εξόδου  $\underline{z} = (\underline{x} \quad \dot{\underline{x}} \quad \ddot{\underline{x}})^T$ , θα έχουμε

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ -M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\underline{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} - \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \end{pmatrix}$$

ή

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ -\underline{\Gamma} \end{pmatrix} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.16)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.15) και (2.16) με τις (2.13), εύκολα προκύπτει ότι οι πίνακες A, B, C, D ορίζονται ως εξής

$$A = \begin{pmatrix} \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

ενώ το διάνυσμα διέγερσης παίρνει τη μορφή  $\underline{u} = \ddot{\underline{x}}_g$ .

Στην παραπάνω ανάλυση, στο διάνυσμα εξόδου  $\underline{z} = (\underline{x} \quad \dot{\underline{x}} \quad \ddot{\underline{x}})^T$  έχουμε τις σχετικές μετατοπίσεις, τις σχετικές ταχύτητες και τις σχετικές επιταχύνσεις ως προς τα αντίστοιχα μεγέθη του εδάφους, το οποίο δέχεται διέγερση. Σε πολλά προβλήματα, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις απόλυτες επιταχύνσεις των μαζών, και όχι τις σχετικές επιταχύνσεις ως προς το έδαφος.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η ανάλυση η οποία μας δίνει απόλυτες επιταχύνσεις στο διάνυσμα εξόδου. Ως απόλυτη επιτάχυνση, ορίζεται η επιτάχυνση

$$\underline{\ddot{z}}_A = \underline{\ddot{x}} + \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.18)$$

Δηλαδή, το διάνυσμα  $\underline{\ddot{z}}_A = (\ddot{z}_p \quad \ddot{z}_s)^T$  περιλαμβάνει τις απόλυτες επιταχύνσεις των δύο μαζών.

Με βάση την εξίσωση κίνησης (2.12), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 M \cdot [\underline{\ddot{x}} + \underline{\Gamma} \cdot \underline{\ddot{x}}_g] + C \cdot \underline{\dot{x}} + K \cdot \underline{x} &= \underline{0} \\
 \text{ή} \\
 M \cdot \underline{\ddot{z}}_A + C \cdot \underline{\dot{x}} + K \cdot \underline{x} &= \underline{0}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Οπότε το διάνυσμα εξόδου θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 \underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\dot{x}} \\ \underline{\ddot{z}}_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\dot{x}} \\ -M^{-1} \cdot C \cdot \underline{\dot{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} \end{pmatrix} \\
 \text{ή} \\
 \underline{z} &= \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix} \cdot \underline{y} + \underline{0} \cdot \underline{\ddot{x}}_g
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή οι πίνακες C και D θα είναι πλέον στη μορφή

$$C = \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix}, \quad D = 0
 \tag{2.21}$$

Συνεπώς, αρκεί να θέσουμε τον πίνακα D ίσο με το μηδέν, ώστε το διάνυσμα εξόδου  $\underline{z}$  να μας δώσει τις απόλυτες επιταχύνσεις των μαζών.

## 2.5 Εισαγωγή νέων παραμέτρων στις εξισώσεις

Χαρακτηριστικό της ανάλυσης που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.4, είναι ότι μας περιορίζει στην επιλογή των ιδιοτήτων του συστήματος. Οι παράμετροι του συστήματος είναι οι σταθερές ελατηρίων  $k_p$  και  $k_s$ , οι αποσβέσεις  $c_p$  και  $c_s$  και οι μάζες  $m_p$  και  $m_s$  του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, θα εισάγουμε νέες παραμέτρους στις εξισώσεις, ώστε να καταλήξουμε σε ένα ισοδύναμο, μαθηματικά, μοντέλο. Οι νέες παράμετροι είναι πιο χρήσιμες στην περιγραφή της απόκρισης του συστήματος. Μεταβάλλοντας αυτές τις νέες

παραμέτρους, έχουμε τη δυνατότητα να ελέγξουμε καλύτερα την απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος και τελικά να μειώσουμε το πλάτος της απόκρισης.

Θεωρούμε ως πρωτεύων σύστημα (primary system) το σύστημα που αποτελείται από τη μάζα  $m_p$ , το ελατήριο με σταθερά  $k_p$ , και τον αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_p$ . Το

πρωτεύων σύστημα, θα έχει ιδιοσυχνότητα ίση με  $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ .

Επίσης, θεωρούμε ως δευτερεύων σύστημα (secondary system) το σύστημα που αποτελείται από τη μάζα  $m_s$  και είναι στερεωμένο στο έδαφος μέσω ελατηρίου σταθεράς  $k_s$  και με αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_s$ . Το δευτερεύων σύστημα θα έχει

ιδιοσυχνότητα  $\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$ . Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραπάνω ιδιοσυχνότητες

είναι διαφορετικές από αυτές που έχει το συνολικό σύστημα στο οποίο συνυπάρχουν και αλληλεπιδρούν και οι δύο μάζες.

Προκειμένου να περιγράψουμε το μοντέλο με τη νέα του μορφή, εισάγουμε τις εξής παραμέτρους

$$\zeta_p = \frac{c_p}{2 \cdot m_p \cdot \omega_p}, \quad \zeta_s = \frac{c_s}{2 \cdot m_s \cdot \omega_s}, \quad \mu = \frac{m_s}{m_p} \quad (2.22)$$

όπου  $\zeta_p$  το μέτρο απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος,  $\zeta_s$  το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος, και  $\mu$  ο λόγος των δύο μαζών. Επίσης οι ποσότητες

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \quad (2.23)$$

εκφράζουν τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος αντίστοιχα, αν αυτές οι μάζες αποτελούσαν από μόνες τους δύο ανεξάρτητα συστήματα, όπως και περιγράφηκε προηγουμένως.

Οι εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_p$  και  $\omega_s$  και των μέτρων απόσβεσης  $\zeta_p$  και  $\zeta_s$  γίνονται

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + (2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p + 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu) \cdot \dot{x}_p - (2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu) \cdot \dot{x}_s + (\omega_p^2 + \mu \cdot \omega_s^2) \cdot x_p - (\mu \cdot \omega_s^2) \cdot x_s &= -\ddot{x}_g \\ \ddot{x}_s + (2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s) \cdot \dot{x}_s - (2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s) \cdot \dot{x}_p + (\omega_s^2) \cdot x_s - (\omega_s^2) \cdot x_p &= -\ddot{x}_g \end{aligned}$$

Προκειμένου να μετατρέψουμε το παραπάνω σύστημα σε μητρική μορφή, εισάγουμε τα εξής διανύσματα της σχέσης (2.9)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

οπότε οι δύο εξισώσεις παρουσιάζονται στην παρακάτω μητρική μορφή

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p + 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu & -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu \\ -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s & 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_p^2 + \mu \cdot \omega_s^2 & -\mu \cdot \omega_s^2 \\ -\omega_s^2 & \omega_s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \ddot{x}_g \quad (2.24)$$

Όπου

Το μητρώο μάζας είναι 
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Το μητρώο απόσβεσης 
$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p + 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu & -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu \\ -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s & 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Το μητρώο ακαμψίας 
$$K = \begin{pmatrix} \omega_p^2 + \mu \cdot \omega_s^2 & -\mu \cdot \omega_s^2 \\ -\omega_s^2 & \omega_s^2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

ενώ το διάνυσμα  $\underline{L}$  γίνεται

$$\underline{L} = M \cdot \underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η εξίσωση (2.24) συνοψίζεται πλέον στη γνωστή εξίσωση (2.12)

$$M \cdot \underline{\ddot{x}} + C \cdot \underline{\dot{x}} + K \cdot \underline{x} = -M \cdot \underline{\Gamma} \cdot \ddot{x}_g \quad (2.12)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η επιρροή των παραμέτρων  $\omega_s$ ,  $\zeta_s$  και  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, στην απόκριση του κύριου (πρωτεύοντος) συστήματος. Η ανάλυση εστιάζει στις συναρτήσεις μεταφοράς για την μετατόπιση, την ταχύτητα και την απόλυτη επιτάχυνση του πρωτεύοντος συστήματος.

Η μετατόπιση είναι πολύ σημαντική παράμετρος μιας κατασκευής, καθώς ανάλογα τις τιμές που θα παίρνει αυτή σε δεδομένη διέγερση, μπορούμε να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα για την ασφάλεια και την σταθερότητα της κατασκευής.

Η επιτάχυνση είναι επίσης σημαντική παράμετρος του πρωτεύοντος συστήματος, ειδικά σε πολύ υψηλές κατασκευές, όπως οι ουρανοξύστες. Ιδιαίτερα στους ψηλούς ορόφους, μια τέτοια επιτάχυνση είναι ιδιαίτερα ενοχλητική για τους ανθρώπους που βρίσκονται μέσα. Τα παθητικά συστήματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για να αποσβέσουν αυτές τις επιταχύνσεις οι οποίες δημιουργούνται από τον άνεμο.

Σκοπός μας είναι να επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους  $\omega_s$ ,  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος έτσι ώστε να πετύχουμε τη μέγιστη δυνατή μείωση στις ταλαντώσεις του πρωτεύοντος συστήματος.

Επιλέγοντας συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος, σχεδιάζονται οι καμπύλες για τις συναρτήσεις μεταφοράς των αποκρίσεων, δηλαδή των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων. Όπως εξηγήθηκε και στην εισαγωγή, οι συναρτήσεις μεταφοράς προσδιορίζουν το πλάτος της απόκρισης του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση ως προς το πλάτος της αρμονικής διέγερσης, συναρτήσει ενός εύρους τιμών για τη συχνότητα διέγερσης.

Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς μπορεί εύκολα να καθοριστεί η συμπεριφορά του κύριου συστήματος, αφού μπορούμε να επιλέξουμε τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, ώστε να έχουμε την επιθυμητή απόκριση.

#### 3.1 Διαγράμματα ιδιοσυχνοτήτων

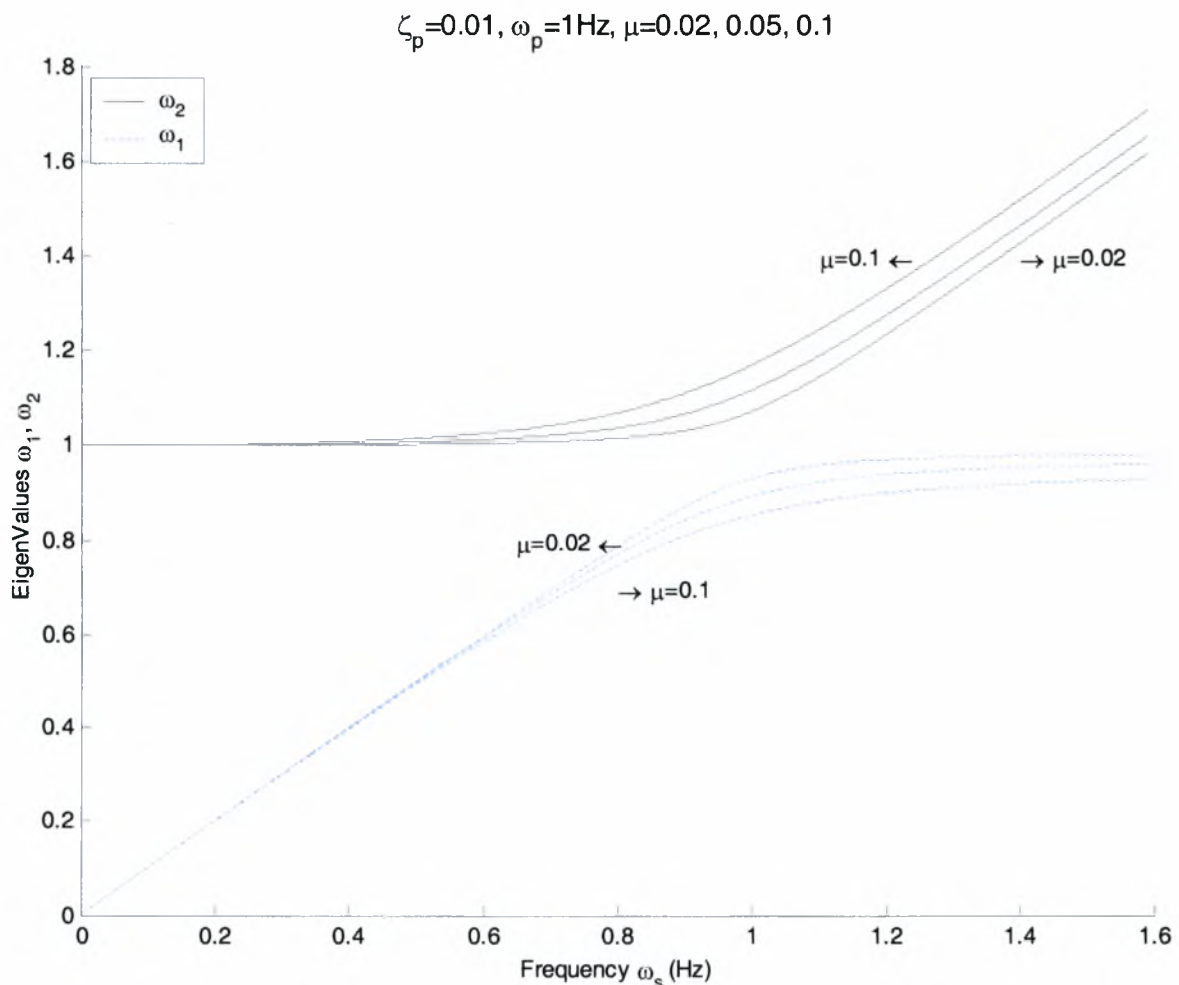
Αρχικά, θα κάνουμε μια ανάλυση των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος  $\omega_1$  και  $\omega_2$  του συστήματος. Να σημειωθεί εδώ ότι αναμένουμε οι συναρτήσεις μεταφοράς να

παρουσιάζουν μέγιστες τιμές για συχνότητες διέγερσης πολύ κοντά στις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  του συστήματος.

Έστω  $\omega_1$  και  $\omega_2$  οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος των δύο μαζών, όταν αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, όπου  $\omega_1$  είναι η ελάχιστη ιδιοσυχνότητα και  $\omega_2$  είναι η μέγιστη.

Οι ιδιοτιμές ενός μηχανικού συστήματος δεν επηρεάζονται από τα μέτρα απόσβεσης  $\zeta_p$  και  $\zeta_s$ , αλλά μόνο από τα μητρώα μάζας και μητρώα ακαμψίας  $M$  και  $K$  αντίστοιχα, δηλαδή τις μάζες και τις σταθερές ελατηρίων του συστήματος.

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται η μεταβολή των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_1$  και  $\omega_2$  συναρτήσει του  $\omega_s$ , για διάφορες τιμές του λόγου μαζών  $\mu$ .



**Σχήμα 3.1: Ιδιοσυχνότητες του συνολικού συστήματος (πρωτεύων και δευτερεύων σύστημα μαζί) συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, για  $\omega_p=1\text{Hz}$**

Παρατηρώντας προσεκτικά το διάγραμμα , σημειώνουμε τα εξής.

- Για τιμές της  $\omega_s$  μακριά από τις τιμές της  $\omega_p=1\text{Hz}$ , οι  $\omega_1$  και  $\omega_2$  προσεγγίζουν τις τιμές των  $\omega_s$  και  $\omega_p$ . Όσο πιο μικρός ο λόγος  $\mu$ , τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση των  $\omega_1$  και  $\omega_2$  στα  $\omega_s$  και  $\omega_p$ .
- Για τιμές της  $\omega_s$  πολύ κοντά στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_p=1\text{Hz}$ , οι τιμές των  $\omega_1$  και  $\omega_2$  αποκλίνουν σημαντικά από τις τιμές των  $\omega_s$  ή  $\omega_p$ . Όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος  $\mu$ , τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση.

### 3.2 Επιλογή πρώτης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\zeta_s$

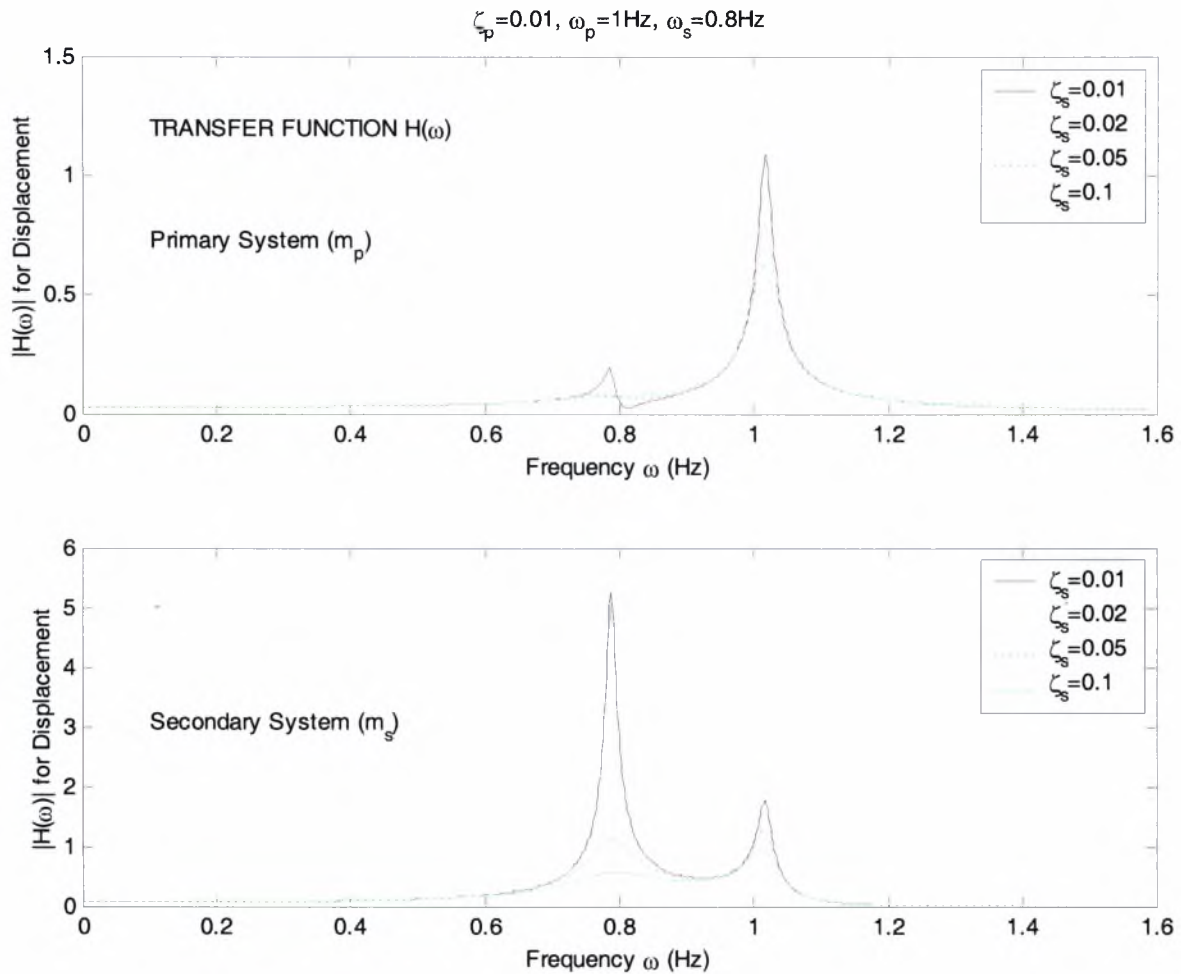
Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, έχουμε επιλέξει τις εξής τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος

- Λόγος μαζών:  $\mu = \frac{m_s}{m_p} = 0.02$ , δηλαδή η μάζα  $m_s$  είναι το 2% της μάζας  $m_p$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_p$ :  $\zeta_p = 0.01$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_s$ :  $\zeta_s = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$
- Ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος  $\omega_p = 1\text{Hz}$  ή  $2\pi \text{ rad/second}$  και  $0 \leq \omega \leq 1.6 \text{ Hz}$  για τη συχνότητα της αρμονικής διέγερσης

#### 3.2.1 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις μετατοπίσεις

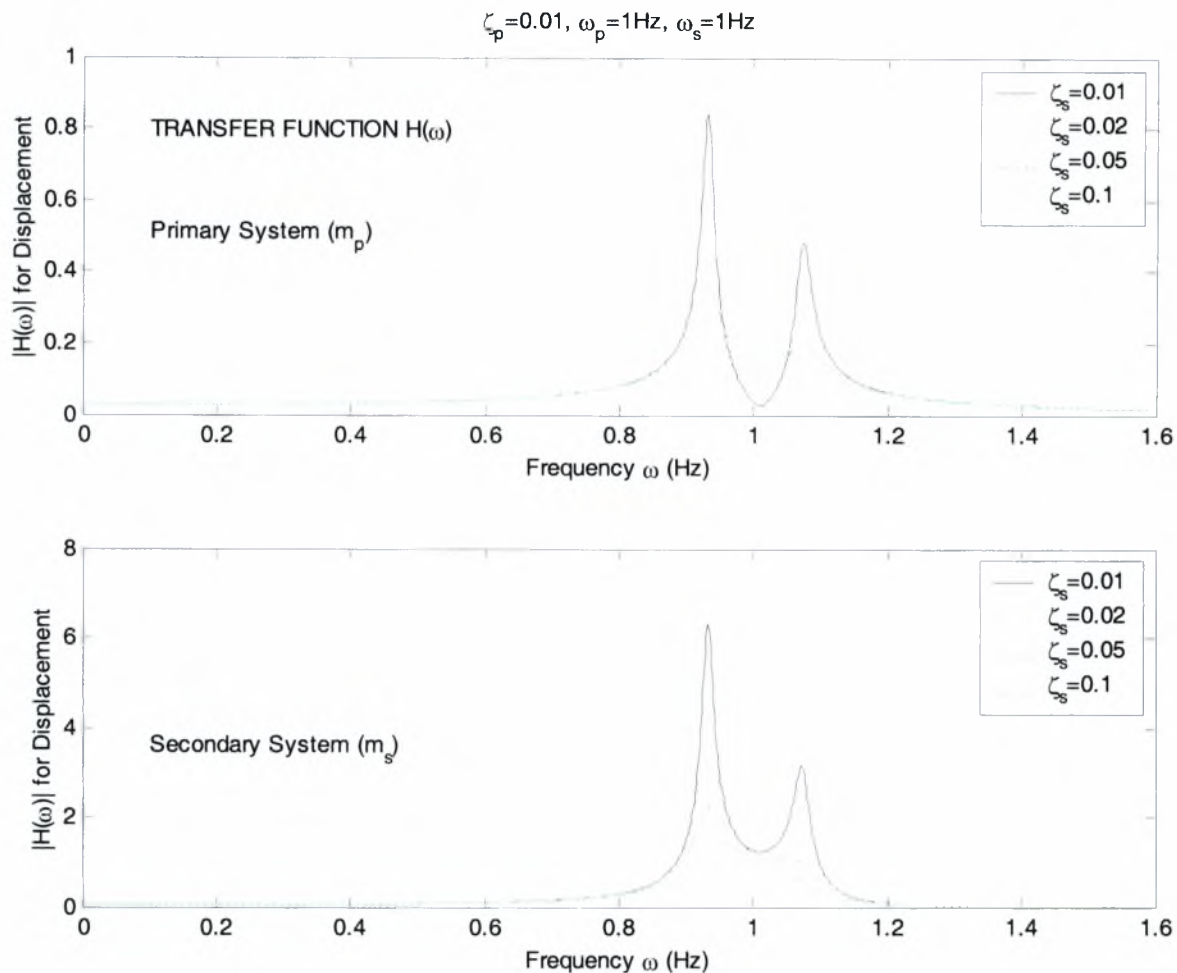
Για  $\omega_s = 0.8\text{Hz}$  και  $\omega_s = 1\text{Hz}$ , παρουσιάζονται οι συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων των μαζών  $m_p$  και  $m_s$ , για συχνότητα διέγερσης  $0 \leq \omega \leq 1.6 \text{ Hz}$ .





**Σχήμα 3.2:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκριση παρουσιάζεται όταν η συχνότητα της διέγερσης  $\omega$  πλησιάζει τις τιμές  $\omega_1 \approx \omega_p$  και  $\omega_2 \approx \omega_s$ . Για το πρωτεύων σύστημα, η μέγιστη απόκριση παρουσιάζεται όταν η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος. Όσον αφορά το δευτερεύων σύστημα, η μέγιστη απόκρισή του παρουσιάζεται αντίστοιχα όταν η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  πλησιάζει την τιμή της ιδιοσυχνότητας αυτού του συστήματος. Επίσης, όσο αυξάνεται το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$ , έχουμε μείωση του μέγιστου του εύρους της απόκρισης στο φάσμα της μετατόπισης του πρωτεύοντος συστήματος.



**Σχήμα 3.3:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

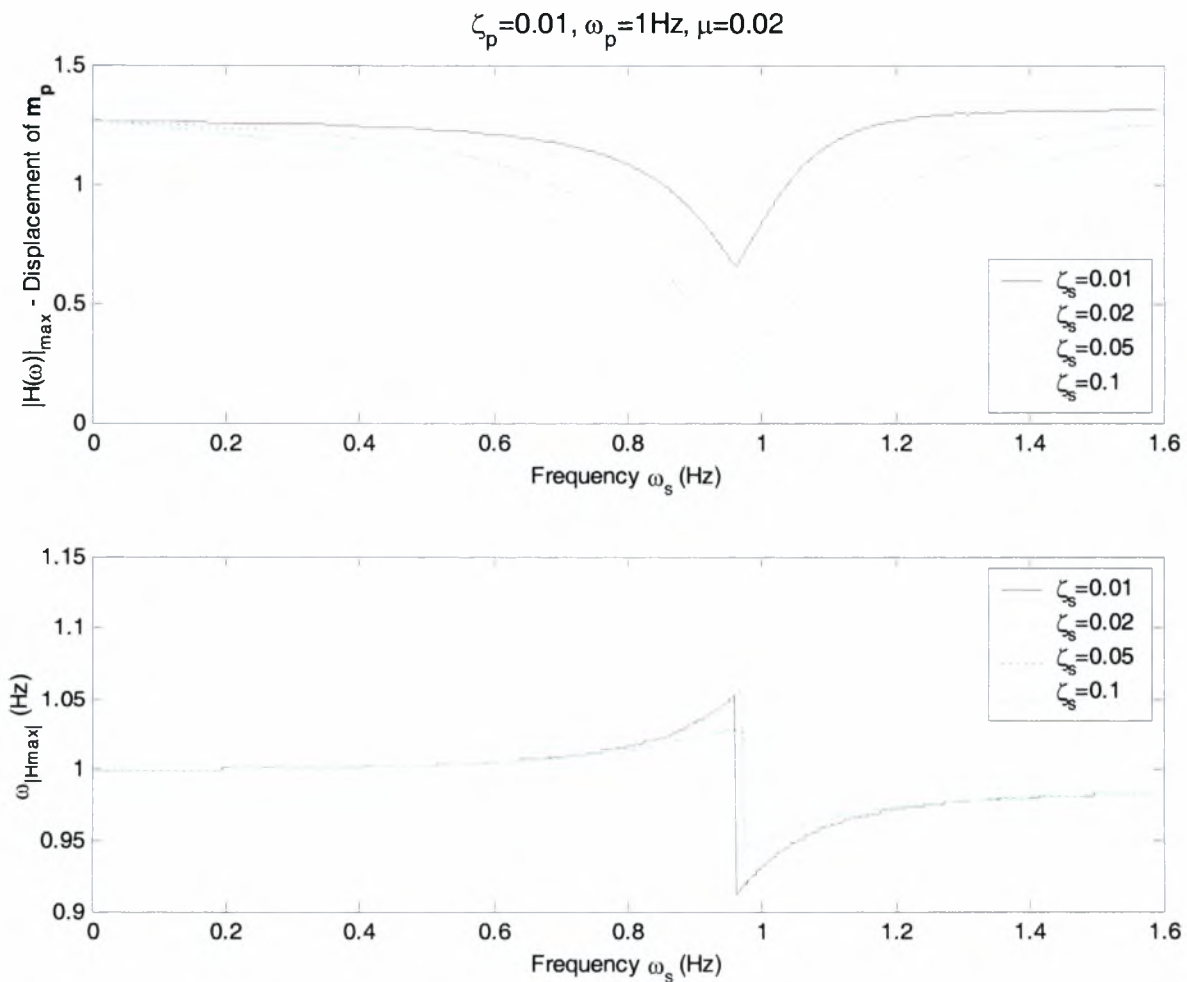
Για την περίπτωση όπου το  $\omega_p$  ισούται με το  $\omega_s$ , βλέπουμε ότι παρουσιάζονται δύο μέγιστα στις ιδιοτιμές  $\omega_1$  και  $\omega_2$  του συνολικού συστήματος οι οποίες είναι μακριά από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_s = \omega_p$ . Το σημαντικό στο σημείο αυτό, είναι ότι παρατηρείται μια πολύ μεγάλη μείωση στο εύρος του φάσματος για την πρωτεύουσα μάζα  $m_p$ , η οποία μείωση είναι μεγαλύτερη από τη μείωση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2 όπου  $\omega_p = 1\text{Hz}$  και  $\omega_s = 0.8\text{Hz}$ .

Με βάση τα παραπάνω, αναμένεται ότι το μέγιστο εύρος της απόκρισης εξαρτάται από την τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, ενώ υπάρχει

κάποια τιμή της  $\omega_s$  για την οποία το μέγιστο εύρος της απόκρισης της πρωτεύουσας μάζας  $m_p$  είναι η ελάχιστη δυνατή.

Στη συνέχεια, καλούμε  $H_{\max}$  το μέγιστο εύρος της συνάρτησης  $|H(\omega)|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  την τιμή της συχνότητας διέγερσης  $\omega$  για την οποία παρουσιάζεται το μέγιστο εύρος. Είναι φανερό ότι και το μέγιστο εύρος  $H_{\max}$  αλλά και η τιμή  $\omega_{|H_{\max}|}$  εξαρτώνται από την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος. Η εξάρτηση αυτή δηλώνεται θεωρώντας ότι οι  $H_{\max}(\omega_s)$  και  $\omega_{|H_{\max}|}(\omega_s)$  είναι συναρτήσεις της  $\omega_s$ .

Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις  $H_{\max}(\omega_s)$  και  $\omega_{|H_{\max}|}(\omega_s)$  για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.

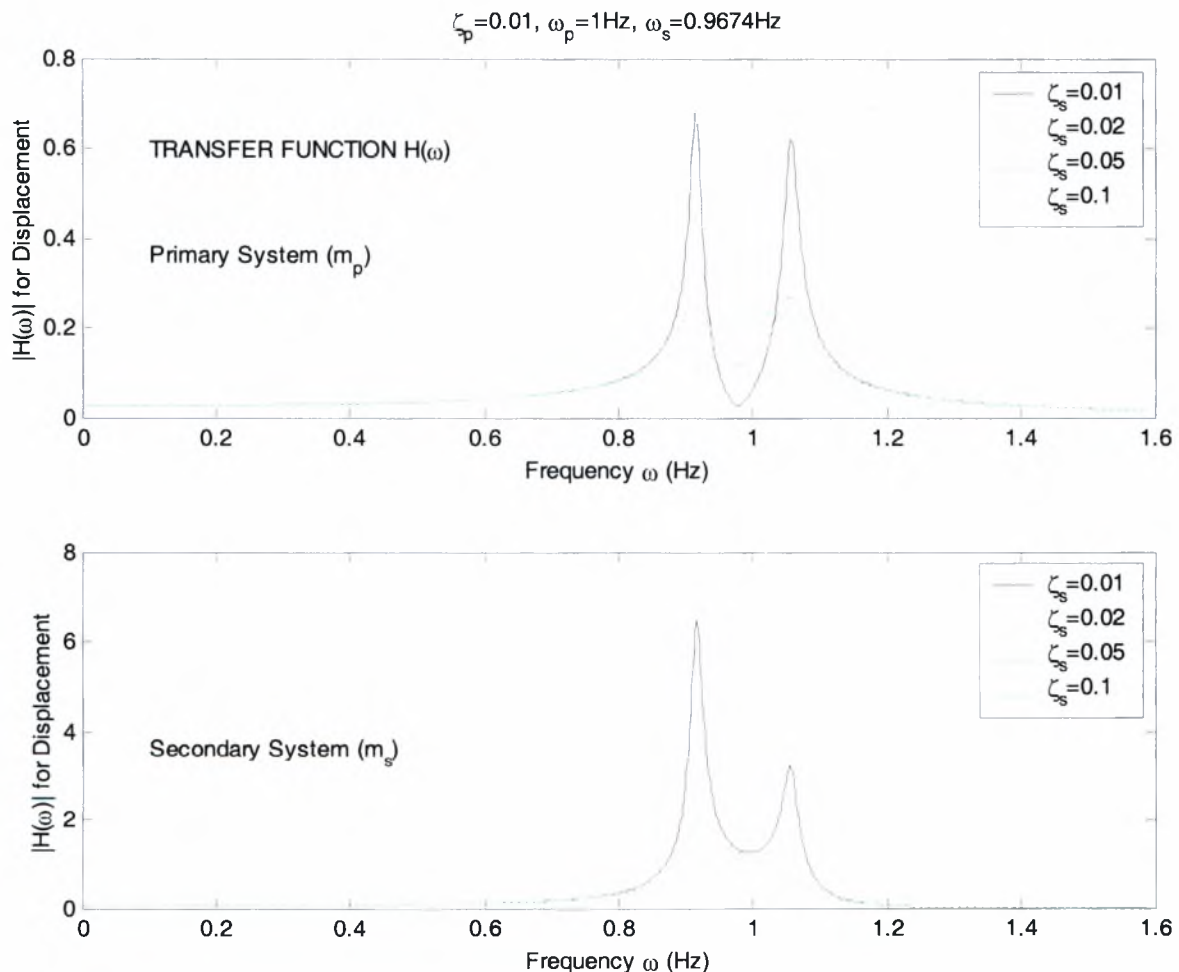


**Σχήμα 3.4:**  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

Οι τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα ελάχιστα του φάσματος της μετατόπισης της μάζας  $m_p$ , είναι

$\zeta_s=0.01$	$\omega_s=0.9597\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.6538$
$\zeta_s=0.02$	$\omega_s=0.9676\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.4466$
$\zeta_s=0.05$	$\omega_s=0.97086\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.2619$
$\zeta_s=0.1$	$\omega_s=0.9724\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.2251$

Στο Σχήμα 3.5 δείχνονται οι συναρτήσεις μεταφοράς για  $\omega_s=0.9674\text{Hz}$ , κοντά στην περιοχή όπου το εύρος της ταλάντωσης είναι ελάχιστο. Η σημαντική μείωση του μεγίστου του εύρους της ταλάντωσης του πρωτεύοντος συστήματος για διάφορα  $\zeta_s$ , είναι προφανής. Το δευτερεύον σύστημα παρουσιάζει μια αύξηση στο εύρος της ταλάντωσης του.



**Σχήμα 3.5:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύον και το δευτερεύον σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.9674\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

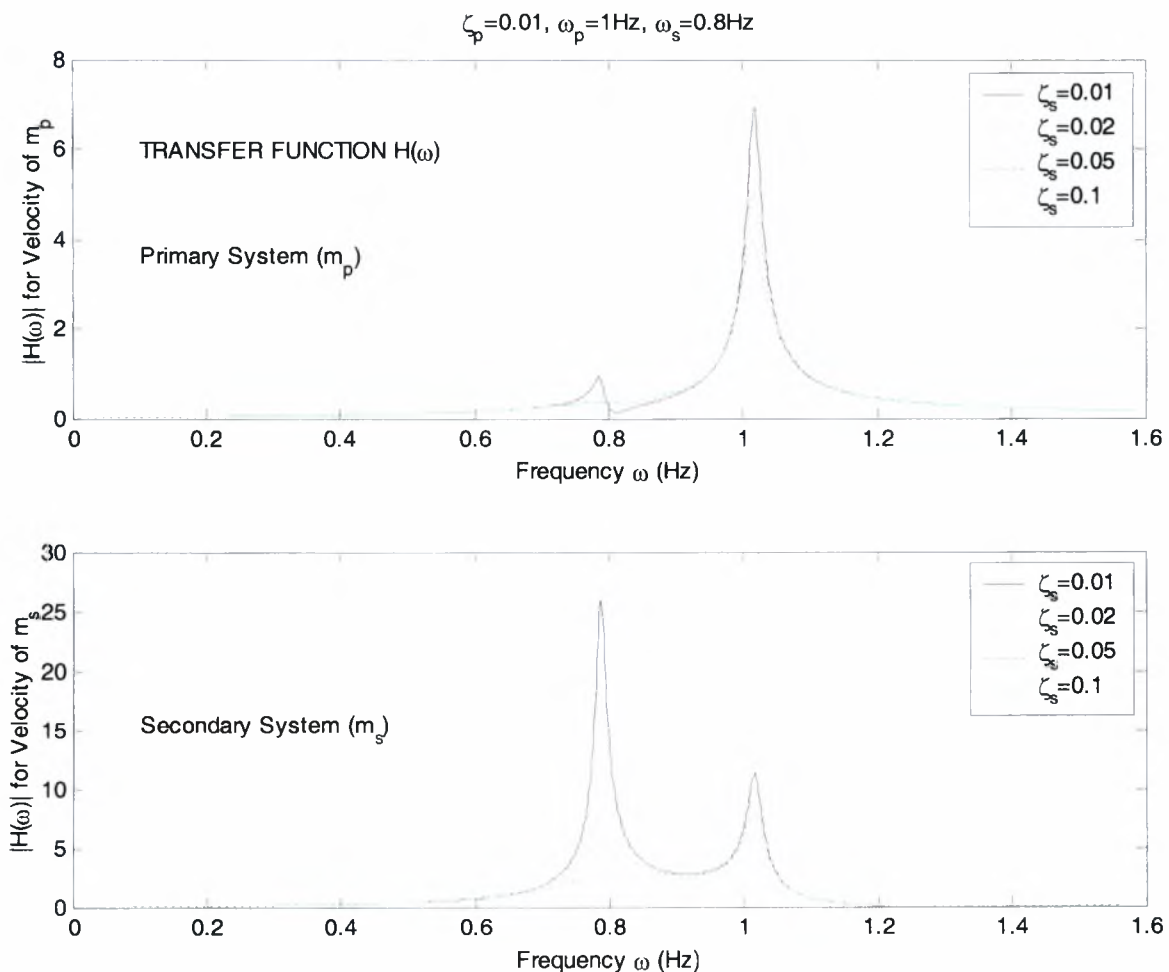
Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι η μέγιστη αποτελεσματικότητα του δευτερεύοντος παθητικού συστήματος για τον έλεγχο του πρωτεύοντος συστήματος, επιτυγχάνεται

όταν η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  του πρωτεύοντος συστήματος.

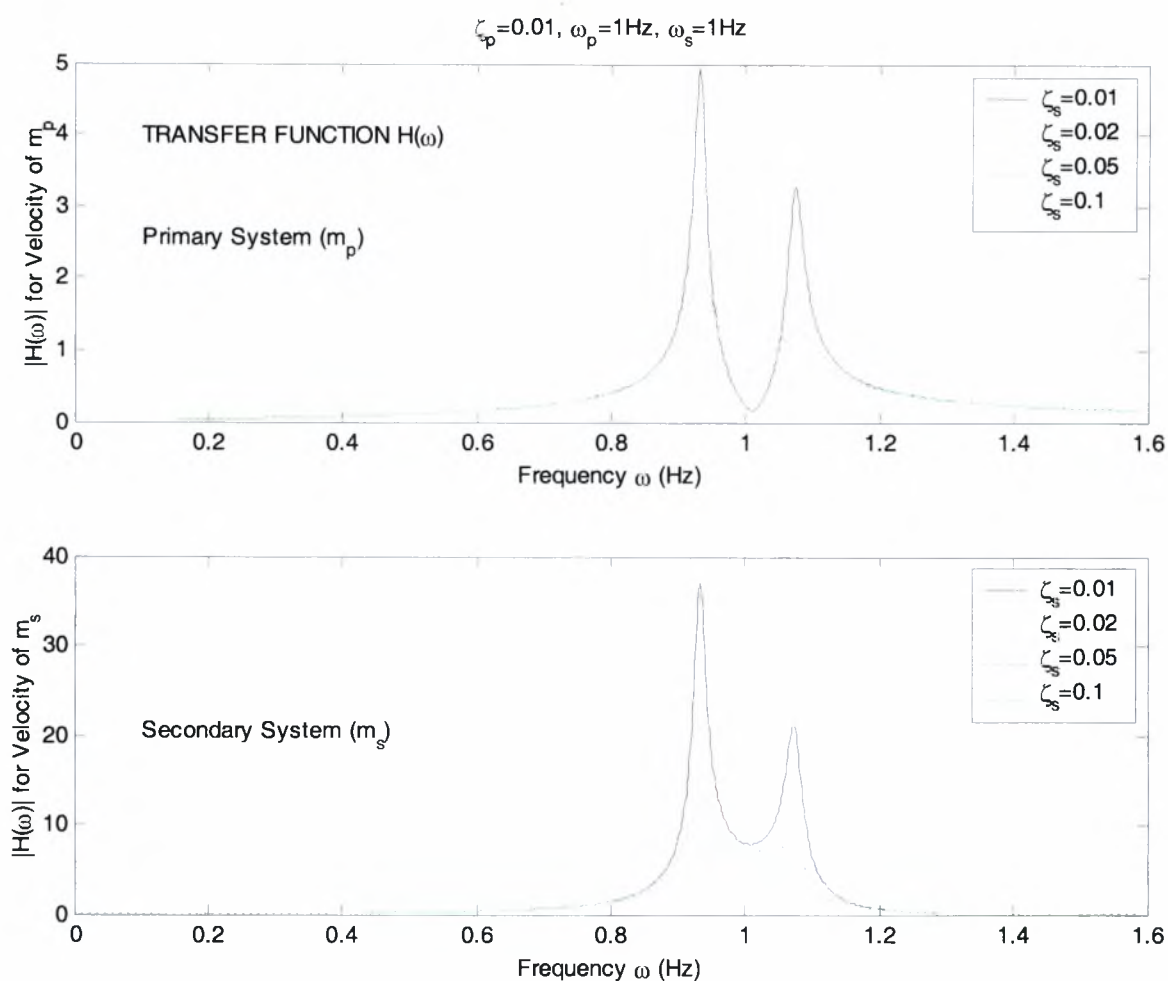
Όσο αυξάνει το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$ , τόσο απομακρύνεται η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  από την  $\omega_p$ , για εκείνες τις τιμές της  $\omega_s$  που έχουμε το ελάχιστο εύρος της απόκρισης.

### 3.2.2 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις ταχύτητες

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με τις μετατοπίσεις των δύο μαζών, και πως αυτές συμπεριφέρονται, καθώς μεταβάλλεται το  $\omega_s$ . Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα που αφορούν τις ταχύτητες των δύο μαζών.



**Σχήμα 3.6:** Συναρτήσεις μεταφοράς των ταχυτήτων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

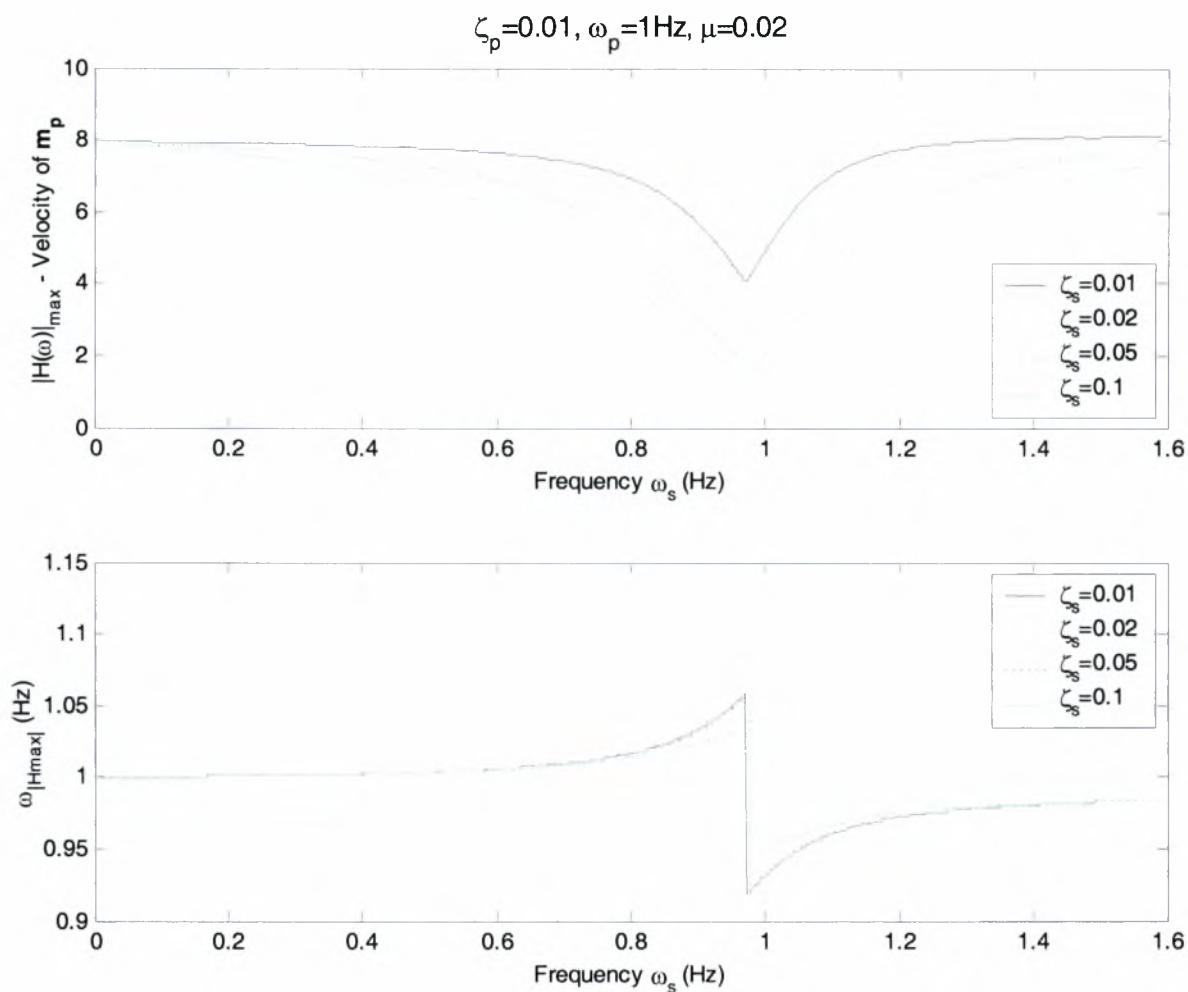


**Σχήμα 3.7:** Συναρτήσεις μεταφοράς των ταχυτήτων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

Εξετάζοντας προσεκτικά το Σχήμα 3.6 και το Σχήμα 3.7, παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά των συναρτήσεων μεταφοράς είναι παρόμοια με τη συμπεριφορά των συναρτήσεων μεταφοράς των μετατοπίσεων που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 3.2.1. Δηλαδή στο Σχήμα 3.6 όπου  $\omega_s=0.8\text{Hz}$  και  $\omega_p=1\text{Hz}$ , όταν η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  πάρει αυτές τις τιμές, οι δύο μάζες παρουσιάζουν το μέγιστο της απόκρισής τους. Αντίθετα, στο Σχήμα 3.7 όπου η  $\omega_s = \omega_p$ , βλέπουμε ότι τα μέγιστα παρουσιάζονται σε διαφορετικές τιμές της συχνότητας της διέγερσης  $\omega$  από τις τιμές των  $\omega_s$  και  $\omega_p$ .

Μεταβάλλοντας την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι για κάποια συγκεκριμένη τιμή της  $\omega_s$ , θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή για το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{\max}$  της ταχύτητας. Το αντίστοιχο

διάγραμμα παρουσιάζεται στη συνέχεια, για διάφορες τιμές του μέτρου απόσβεσης  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.



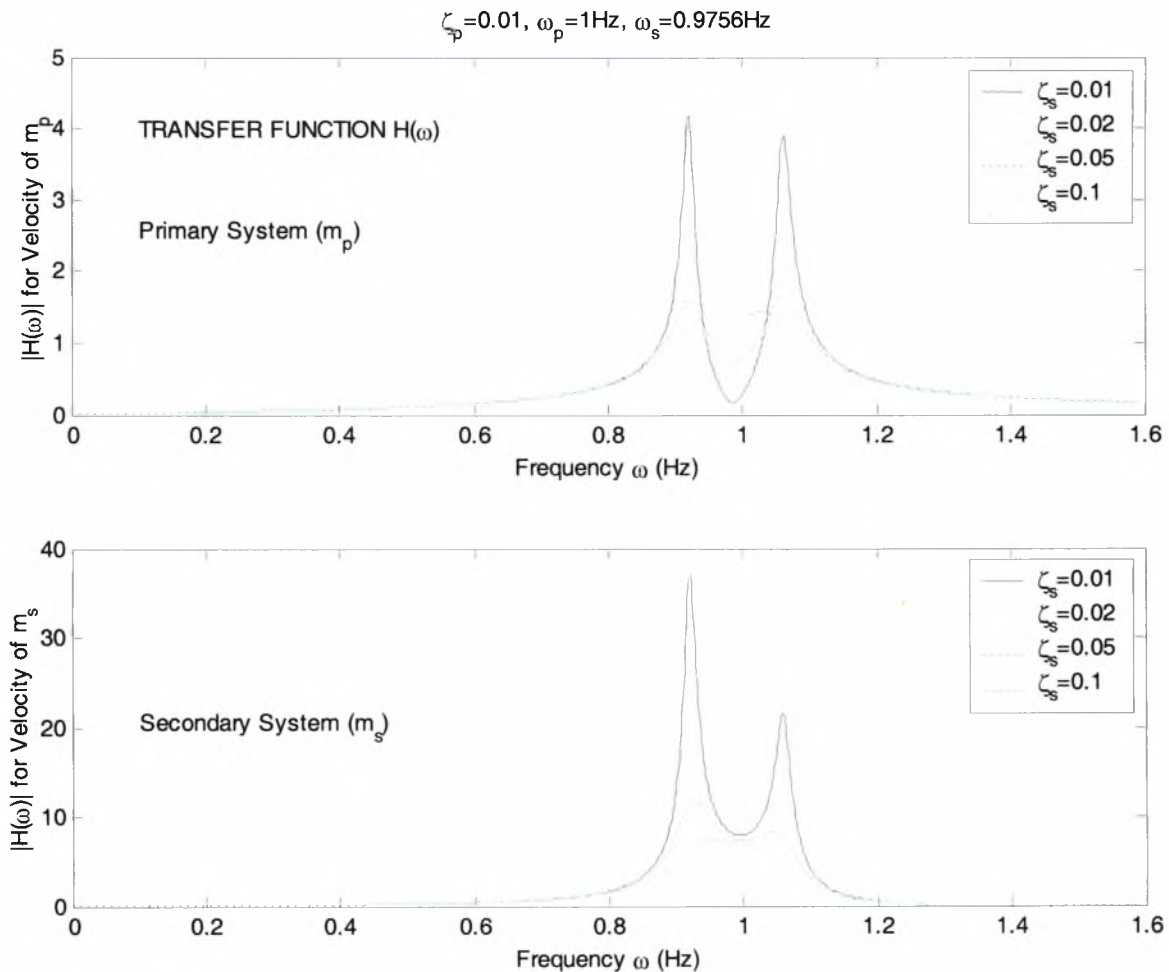
**Σχήμα 3.8:**  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

Οι τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα ελάχιστα του φάσματος της ταχύτητας της μάζας  $m_p$ , είναι

$\zeta_s=0.01$	$\omega_s = 0.9708\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=4.042$
$\zeta_s=0.02$	$\omega_s = 0.9756\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=2.767$
$\zeta_s=0.05$	$\omega_s = 0.9772\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=1.633$
$\zeta_s=0.1$	$\omega_s = 0.9788\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=1.396$



Οι πολύ μικρές μεταβολές του  $\omega_s$  δεν παίζουν δραματικό ρόλο στη μορφή των διαγραμμάτων που δείχνουν τις αποκρίσεις στο πεδίο της συχνότητας. Για αυτό το λόγο, επιλέγουμε μια μέση τιμή για το  $\omega_s$ , και σχεδιάζουμε τα φάσματα των ταχυτήτων των δύο μαζών.



**Σχήμα 3.9:** Συναρτήσεις μεταφοράς των ταχυτήτων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.9756\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

Η τιμή  $\omega_s=0.9756\text{Hz}$  είναι μια τιμή πολύ κοντά σε αυτήν όπου το πλάτος της ταλάντωσης είναι το ελάχιστο, σύμφωνα με το Σχήμα 3.8.

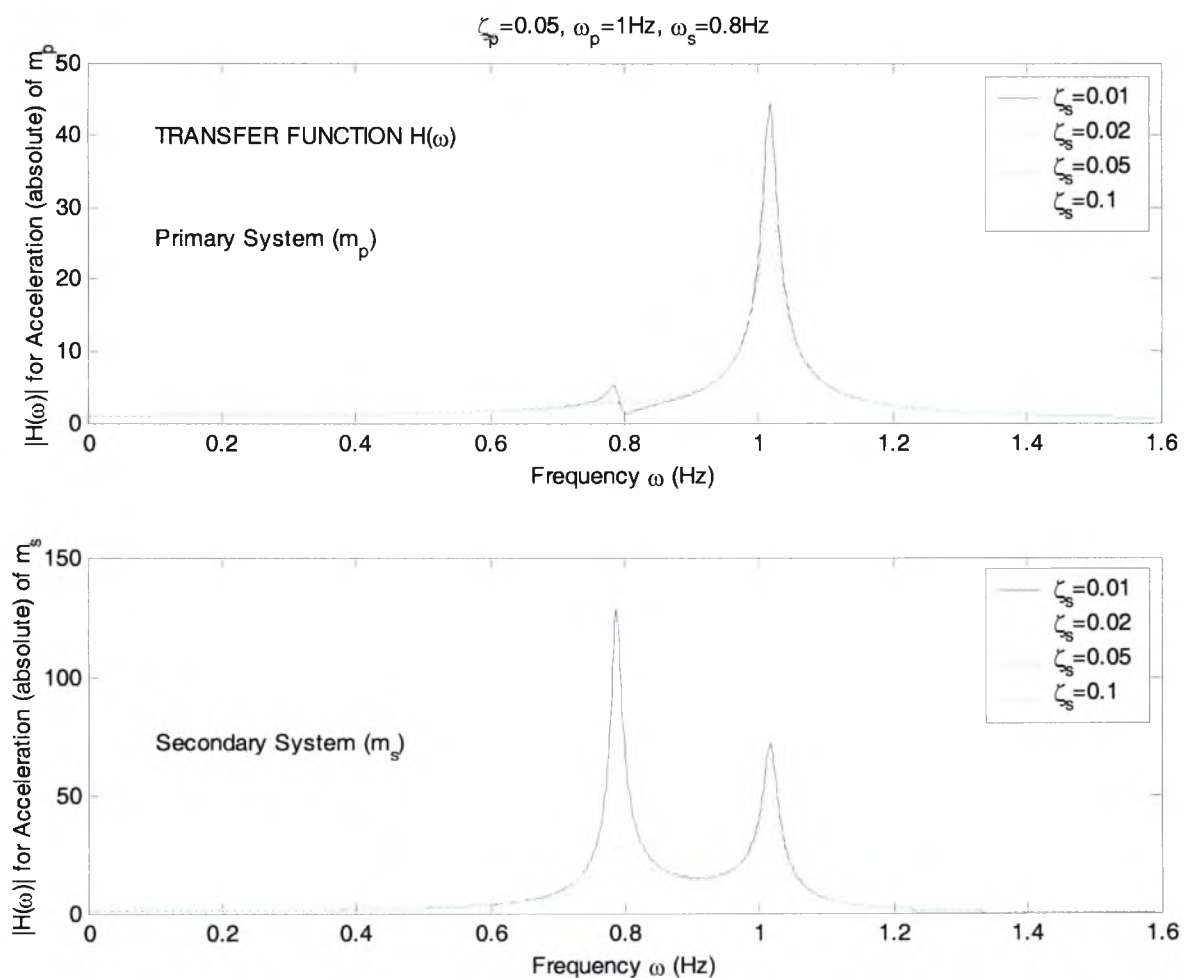
Επίσης, παρατηρείται και εδώ το φαινόμενο οι τιμές των  $\omega_p$  και  $\omega_s$  να αποκλίνουν από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , όπως συμπεράναμε στο Σχήμα 3.1.



Επίσης, αυξάνοντας το  $\zeta_s$ , έχουμε καλύτερη συμπεριφορά του πρωτεύοντος συστήματος, δηλαδή μικρότερες τιμές για τα μέγιστα της  $|H(\omega)|$ , ενώ παράλληλα οι δύο κορυφές γίνονται όλο και πιο δυσδιάκριτες η μια από την άλλη.

### 3.2.3 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις απόλυτες επιταχύνσεις

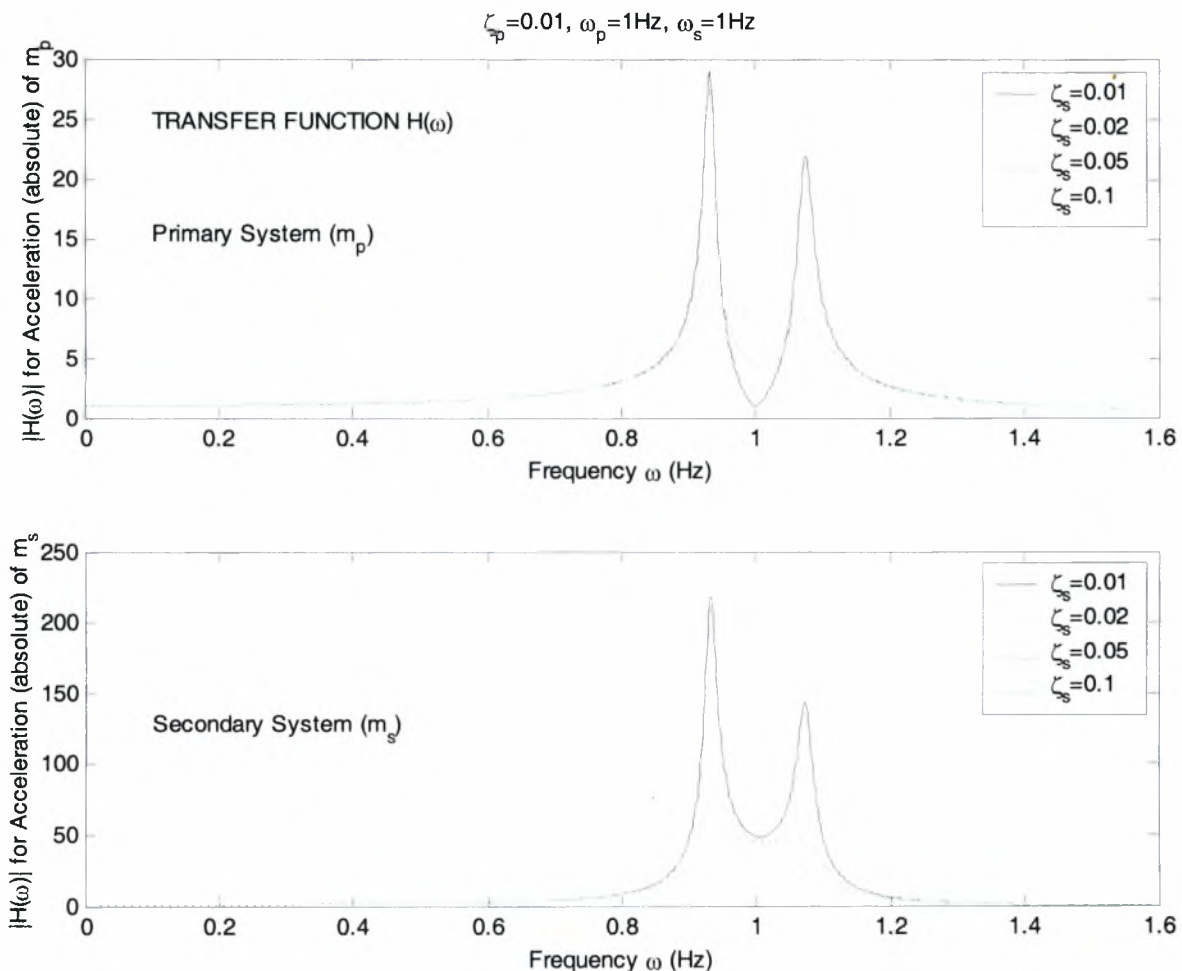
Τα διαγράμματα που αφορούν τις συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, διατηρώντας ίδιες τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος, αλλά μεταβάλλοντας την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.



**Σχήμα 3.10:** Συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

Στο Σχήμα 3.10, δεν παρατηρείται σημαντική διαφορά στη μορφή του σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων. Όσο η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  παίρνει τιμές κοντά στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_s=0.8\text{Hz}$  και  $\omega_p=1\text{Hz}$ , δημιουργείται για το κάθε σύστημα (πρωτεύων και δευτερεύων) ένα μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς. Μελετώντας το Σχήμα 3.1, βλέπουμε ότι για  $\omega_s=0.8\text{Hz}$ , οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων του συνολικού συστήματος είναι κοντά στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_s$  και  $\omega_p$  που επιλέξαμε.

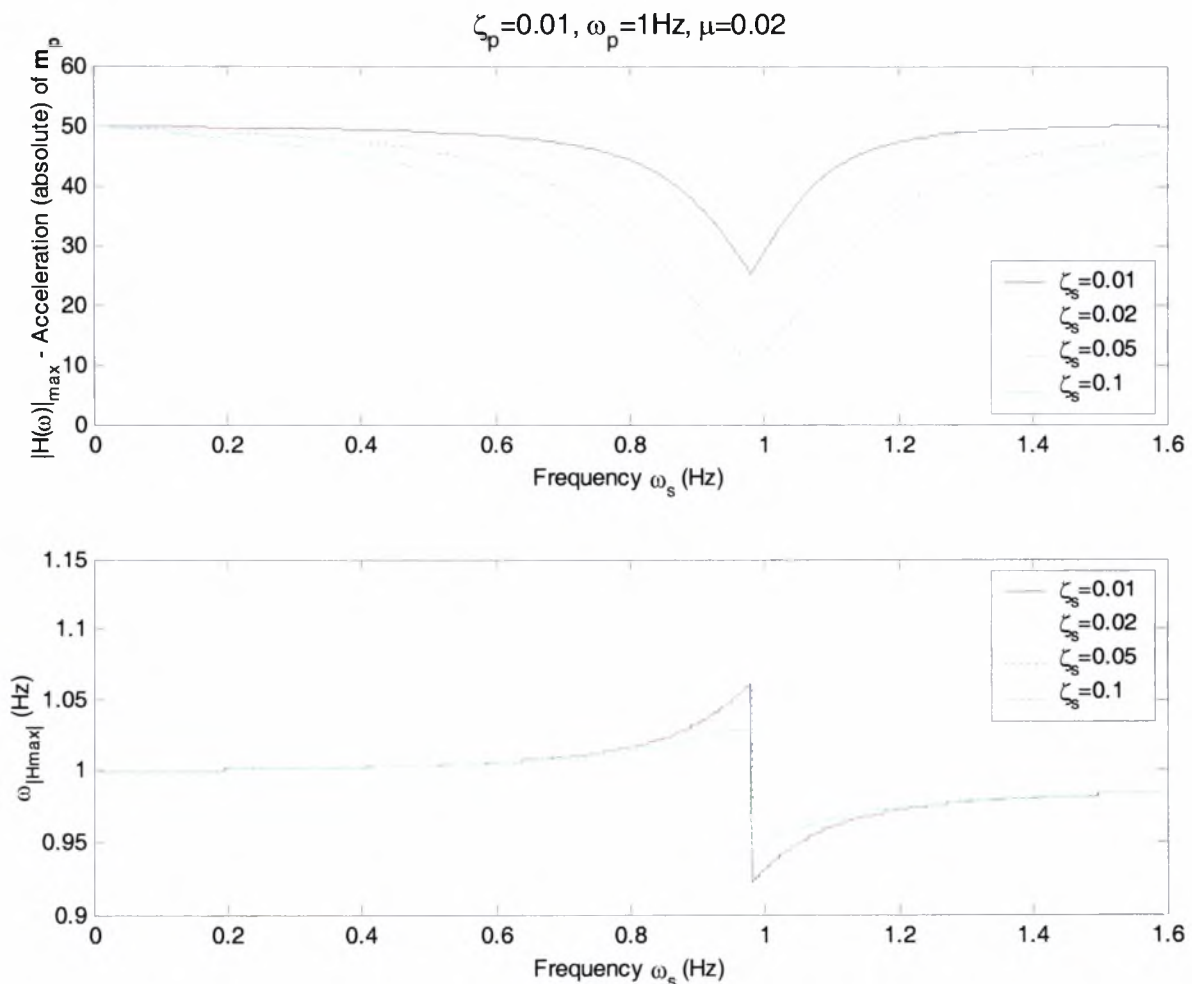
Αυξάνοντας την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$ , και θέτοντάς την ίση με την ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  του πρωτεύοντος συστήματος, σχηματίζουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς της απόλυτης επιτάχυνσης, στο Σχήμα 3.11.



**Σχήμα 3.11:** Συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

Στην παραπάνω περίπτωση όπου  $\omega_p = \omega_s$ , είναι φανερό ότι το πλάτος της απόκρισης του κύριου συστήματος έχει μειωθεί, ενώ οι συχνότητες τις διέγερσης στις οποίες συμβαίνουν τα μέγιστα πλάτη, έχουν απομακρυνθεί από την τιμή  $\omega_p = \omega_s = 1\text{Hz}$ . Όσο το  $\omega$  βρίσκεται μακριά από το  $\omega_p$  και  $\omega_s$  (Σχήμα 3.10), έχουμε ένα εύρος της τάξης του 45, για  $\zeta_s = 0.01$ , ενώ για  $\omega_s = 1\text{Hz}$ , το εύρος της επιτάχυνσης για πρωτεύων σύστημα φτάνει την τιμή 30.

Προκειμένου να εντοπίσουμε κι εδώ την τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος που ελαχιστοποιεί το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς, δημιουργούμε το Σχήμα 3.12. Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε ένα σύνολο τιμών για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$ , και βρίσκοντας τα μέγιστα της συνάρτησης  $|H(\omega)|$  για αυτά τα  $\omega_s$ , σχεδιάζουμε τα  $H_{\max}$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ .

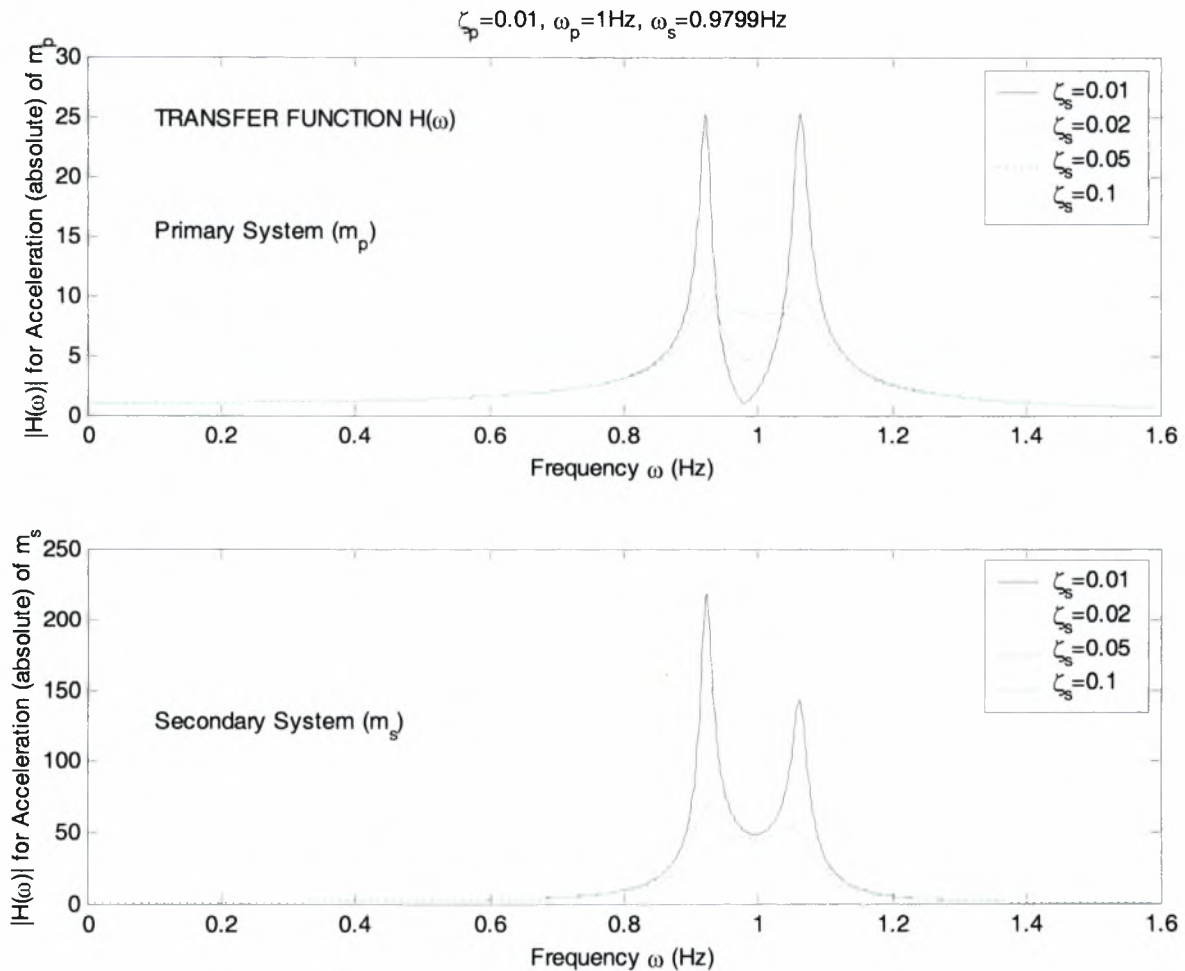


Σχήμα 3.12:  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

Από το MATLAB εξάγουμε τις τιμές  $\omega_s$  για τις οποίες έχουμε ελαχιστοποίηση του μεγίστου  $|H(\omega)|$ .

$\zeta_s=0.01$	$\omega_s=0.9803\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=25.28$
$\zeta_s=0.02$	$\omega_s=0.9819\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=17.31$
$\zeta_s=0.05$	$\omega_s=0.9803\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=10.15$
$\zeta_s=0.1$	$\omega_s=0.9772\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=8.781$

Επιλέγουμε  $\omega_s=0.9799\text{Hz}$ , τιμή πολύ κοντά σε αυτές για τις οποίες ελαχιστοποιείται το  $H_{\max}$  και για αυτή την τιμή παράγουμε το Σχήμα 3.13.



**Σχήμα 3.13:** Συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.9799\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )

Η συμπεριφορά του διαγράμματος είναι η αναμενόμενη, όπως και στα διαγράμματα των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων. Ενδεικτικά παίρνουμε κάποιες τιμές

$$\zeta_s = 0.01 \quad \omega_s = 0.8 \text{ Hz} \quad |H(\omega)|_{\max} = 44.28$$

$$\zeta_s = 0.01 \quad \omega_s = 0.9803 \text{ Hz} \quad |H(\omega)|_{\max} = 25.28$$

δηλαδή έχουμε μείωση του μεγίστου σχεδόν κατά 43%

Αυξάνοντας το μέτρο απόσβεσης

$$\zeta_s = 0.1 \quad \omega_s = 0.8 \text{ Hz} \quad |H(\omega)|_{\max} = 25.18$$

$$\zeta_s = 0.1 \quad \omega_s = 0.9799 \text{ Hz} \quad |H(\omega)|_{\max} = 8.854$$

δηλαδή μείωση σχεδόν κατά 65%

Τώρα που έχει ολοκληρωθεί η παρουσίαση όλων των αποκρίσεων, μπορούμε να βγάλουμε κάποια ασφαλή συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του πρωτεύοντος συστήματος.

Παρατηρείται ότι η χρήση δευτερεύουσας μάζας πετυχαίνει να μειώσει σημαντικά το μέγιστο του εύρους των αποκρίσεων της κύριας μάζας, και μάλιστα αυτή η μείωση μπορεί να είναι από 2 έως 5 φορές, για  $\zeta_s = 0.01$  και  $\zeta_s = 0.1$  αντίστοιχα. Το πιο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι για να επιτευχθεί αυτή η μείωση, είναι απαραίτητο η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος να κινείται κοντά στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  του πρωτεύοντος συστήματος.

Επίσης να σημειώσουμε ότι η απότομη μεταβολή της συχνότητας διέγερσης  $\omega$  ( $\omega_s$ ) στα Σχήματα 3.4, 3.8 και 3.12, οφείλεται στο ότι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης αλλάζει θέση από την περιοχή συντονισμού  $\omega_1$  στην περιοχή συντονισμού  $\omega_2$ .

### 3.3 Επιλογή δεύτερης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\zeta_p$

Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, κρατάμε σταθερές τις εξής παραμέτρους, σε σχέση με το Κεφάλαιο 3.1, ενώ θεωρούμε ότι το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_p$  του πρωτεύοντος συστήματος παίρνει την τιμή 0.05.

Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων είναι οι εξής

- Λόγος μαζών:  $\mu = \frac{m_s}{m_p} = 0.02$ , δηλαδή η μάζα  $m_s$  είναι το 2% της μάζας  $m_p$

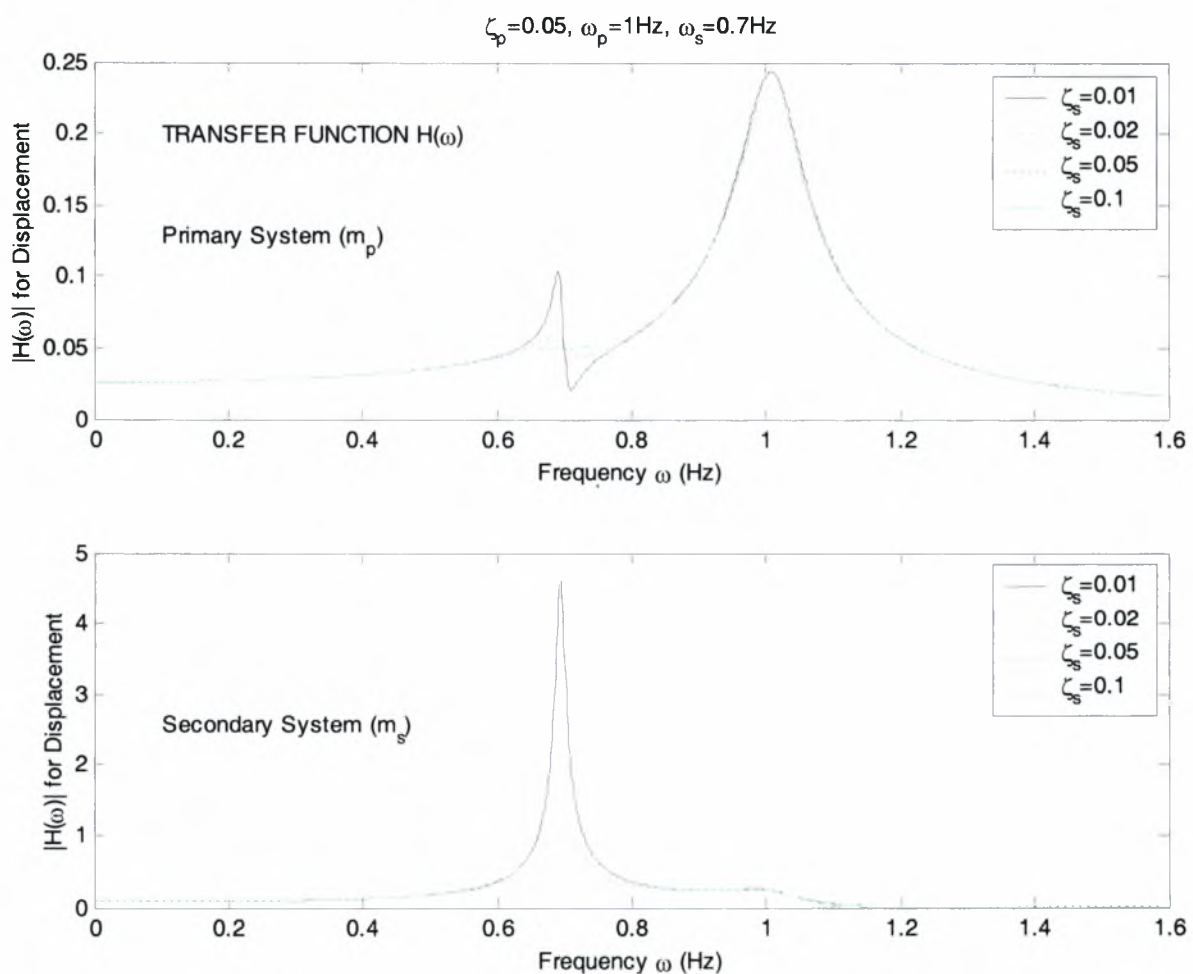


- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_s$  :  $\zeta_s = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$
- Ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος  $\omega_p = 1\text{Hz}$  ή  $2\pi$  rad/second και συχνότητα διέγερσης  $0 \leq \omega \leq 1.6$  Hz

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να δούμε την επιρροή που μπορεί να έχει η μεταβολή μιας βασικής παραμέτρου του πρωτεύοντος συστήματος στις αποκρίσεις του πρωτεύοντος συστήματος

### 3.3.1 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις μετατοπίσεις

Δουλεύοντας με την ίδια μεθοδολογία, μεταβάλλουμε την τιμή της συχνότητας διέγερσης  $\omega$  και παράγουμε τα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος, στο πεδίο της συχνότητας για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$ .

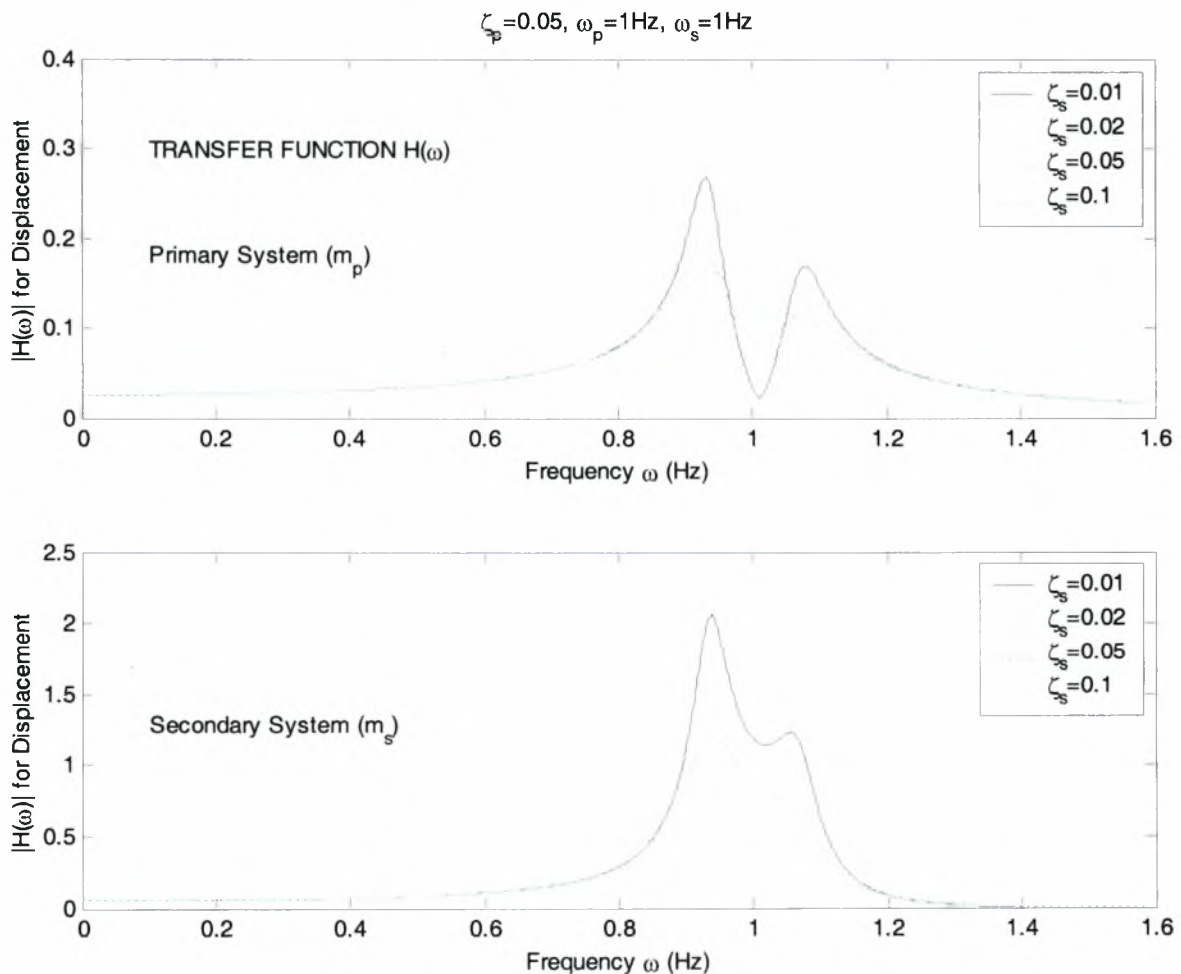


Σχήμα 3.14: Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s = 0.7\text{Hz}$ ,  $\omega_p = 1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p = 0.05$ )



Καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα διέγερσης, βλέπουμε ότι όταν αυτή πάρει δύο συγκεκριμένες τιμές, οι συναρτήσεις μεταφοράς εμφανίζουν μέγιστη τιμή. Η πρώτη αριθμητική τιμή βρίσκεται κοντά στη συχνότητα 0.7Hz, η οποία συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, ενώ η δεύτερη αριθμητική τιμή είναι κοντά του 1Hz, τιμή με την οποία συμπίπτει και η ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  του πρωτεύοντος συστήματος. Μελετώντας καλύτερα το Σχήμα 3.1, βλέπουμε ότι για  $\omega_s=0.7\text{Hz}$ , οι μέγιστη και η ελάχιστη ιδιοσυχνότητα όλου του συστήματος είναι κοντά στις τιμές των  $\omega_s$  και  $\omega_p$ , δηλαδή κοντά στα 0.7Hz και 1Hz.

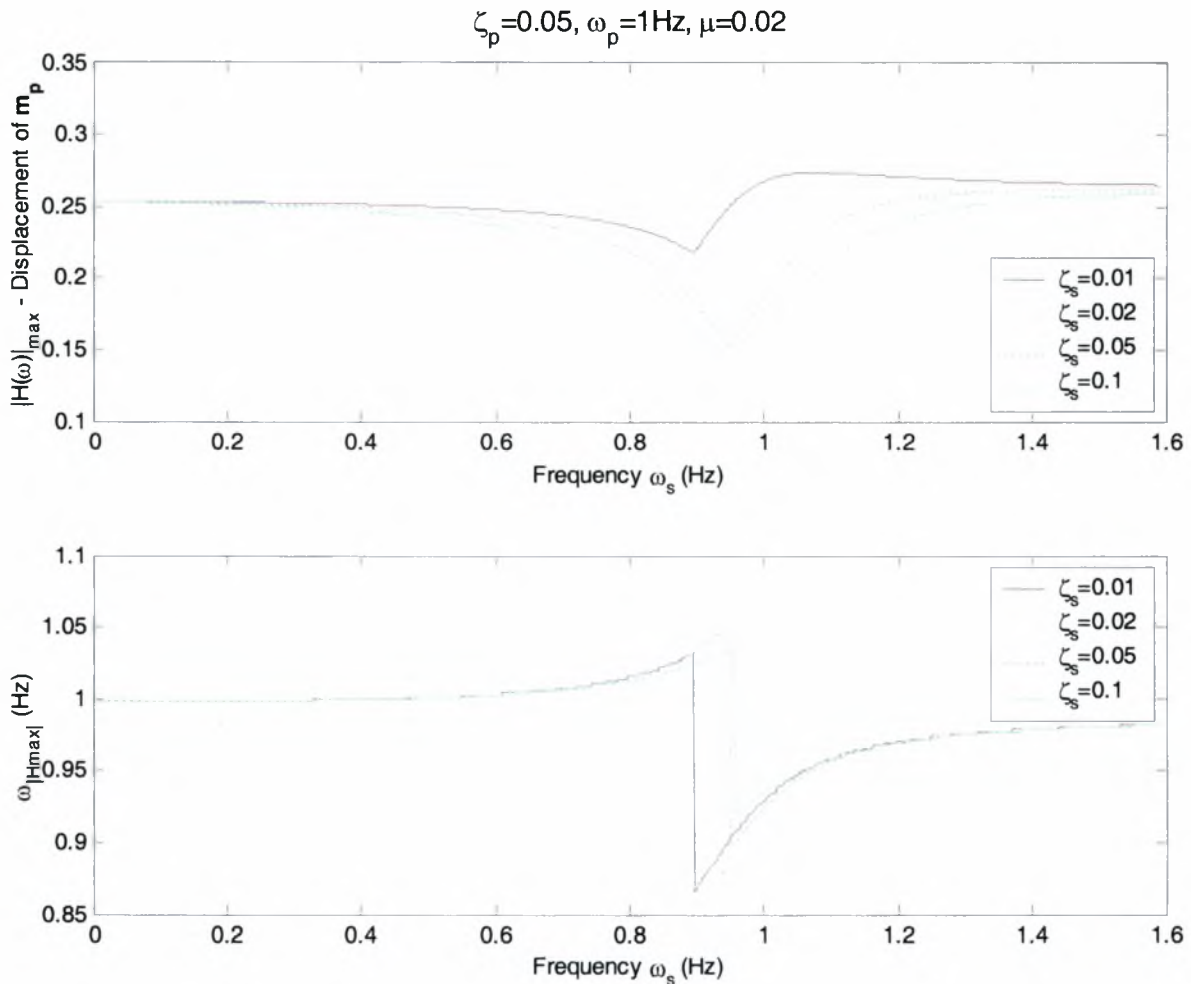
Δουλεύοντας με την ίδια μέθοδο όπως και στο Κεφάλαιο 3.2, αυξάνουμε την τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$ , ώστε αυτή να συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  του πρωτεύοντος συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς παριστάνεται στο Σχήμα 3.15.



**Σχήμα 3.15:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$ )

Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής. Παρόλο που το διάγραμμα αυτό αναφέρεται σε ίσες ιδιοσυχνότητες  $\omega_p$  και  $\omega_s$ , δεν φαίνεται σημαντική μείωση στα μέγιστα της  $|H(\omega)|$ , αντίθετα με ότι συνέβαινε στο Σχήμα 3.3, όπου για  $\omega_p = \omega_s$  παρουσιαζόταν σημαντική ελαχιστοποίηση των μέγιστων του πλάτους.

Από το Σχήμα 3.16, θα προκύψουν οι τιμές του  $\omega_s$  για τις οποίες έχουμε την ελάχιστη δυνατή τιμή του πλάτους της συνάρτησης μεταφοράς  $|H(\omega)|$ .



Σχήμα 3.16:  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

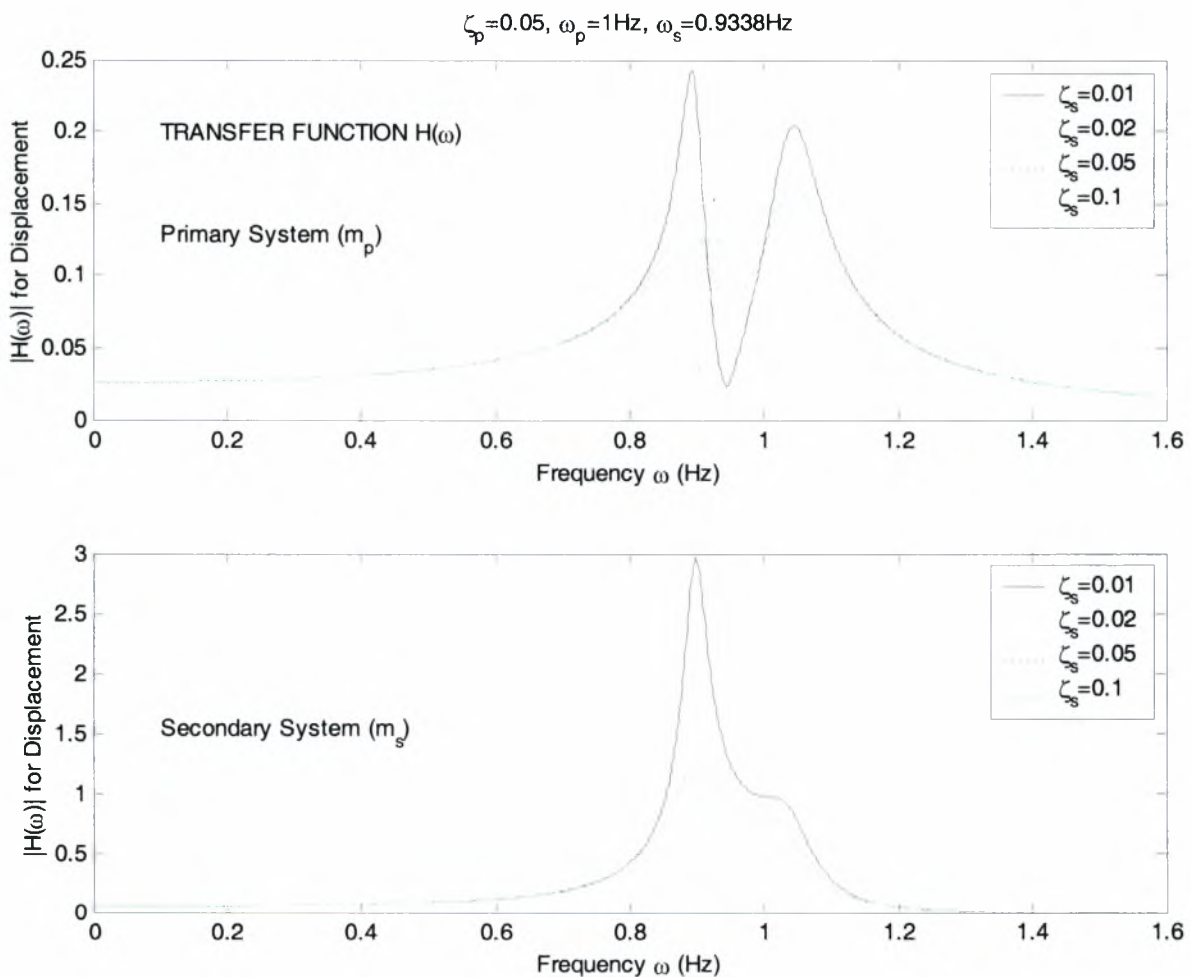
Οι τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα ελάχιστα του φάσματος της ταχύτητας της μάζας  $m_p$ , είναι

$\zeta_s = 0.01$	$\omega_s = 0.896\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max} = 0.218$
$\zeta_s = 0.02$	$\omega_s = 0.931\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max} = 0.1914$
$\zeta_s = 0.05$	$\omega_s = 0.9501\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max} = 0.1516$



$$\zeta_s=0.1 \quad \omega_s = 0.9581\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=0.1375$$

Για ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος ίση με 0.9338Hz, τιμή πολύ κοντά στο σημείο που παρατηρείται η ελάχιστη τιμή για το μέγιστο του πλάτους της συνάρτησης μεταφοράς, σχεδιάζεται στο Σχήμα 3.17 η συνάρτηση μεταφοράς της μετατόπισης του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος.



**Σχήμα 3.17: Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.9338\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$ )**

Συγκρίνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα με τα αντίστοιχα του Σχήματος 3.4, παρατηρούμε τα εξής

Για  $\zeta_p=0.01$  (Σχήμα 3.4)

$$\zeta_s=0.01 \quad \omega_s=0.8\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=1.085$$

$$\zeta_s=0.01 \quad \omega_s=0.9597\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=0.6538$$

$$\zeta_s=0.1 \quad \omega_s=0.9724\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=0.2251$$

Για  $\zeta_p=0.05$  (Σχήμα 3.17)

$$\zeta_s=0.01 \quad \omega_s=0.7\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=0.244$$

$$\zeta_s=0.01 \quad \omega_s=0.896\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=0.218$$

$$\zeta_s=0.1 \quad \omega_s=0.9581\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=0.1375$$

όπου οι ποσότητες  $|H(\omega)|_{\max}$  είναι οι ελάχιστες τιμές των μέγιστων των συναρτήσεων μεταφοράς για τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_s$  που αναγράφονται στη 2<sup>η</sup> στήλη.

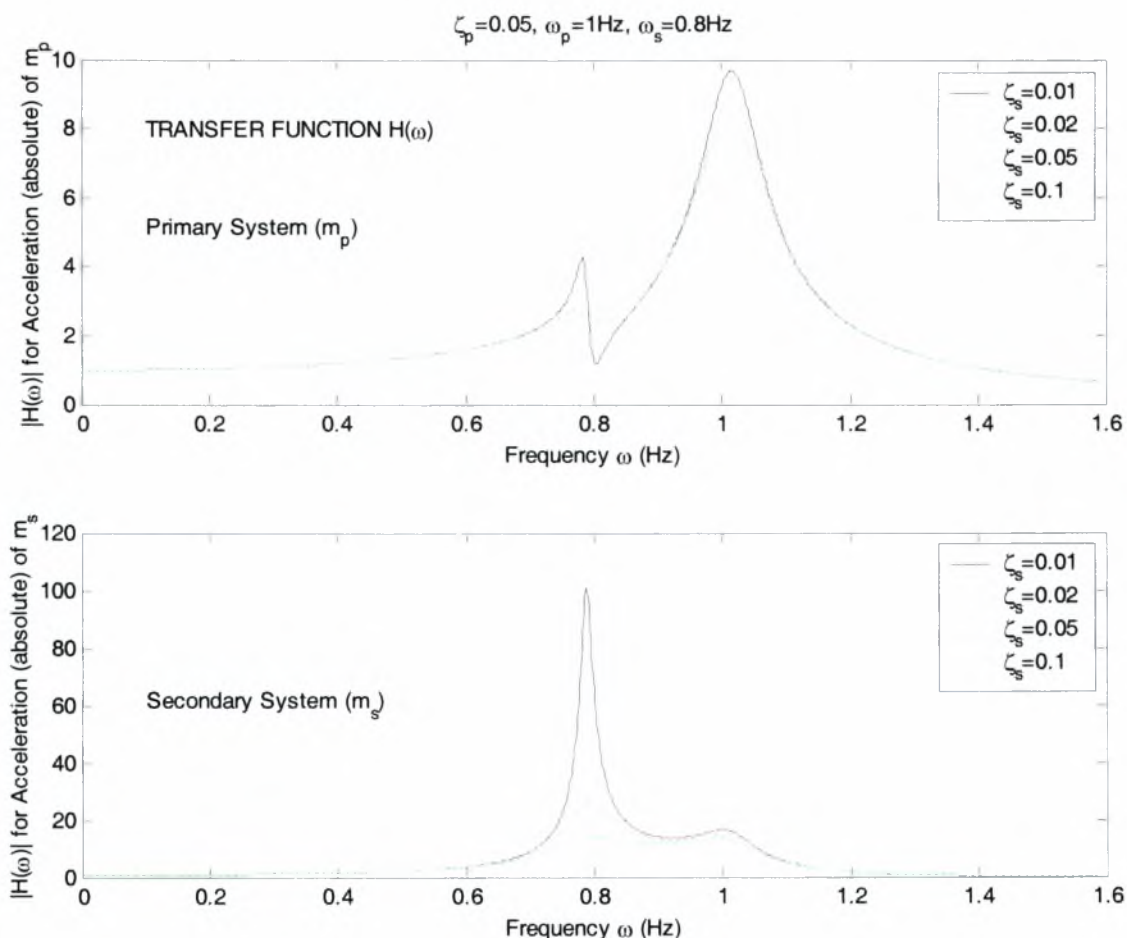
Είναι χαρακτηριστικό ότι για  $\zeta_s=0.01$  και  $\omega_s=0.7\text{Hz}$ , το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς της μετατόπισης είναι 0.244, ενώ για  $\omega_s=0.896\text{Hz}$ , σημείο που θα έπρεπε να έχουμε την ελάχιστη τιμή του εύρους της συνάρτησης μεταφοράς, το μέγιστο βρίσκεται στην τιμή 0.218. Ωστόσο, αυξάνοντας το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$  της δευτερεύουσας μάζας, παρατηρείται σημαντική μείωση του μεγίστου της συνάρτησης μεταφοράς του κύριου συστήματος

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν πενταπλασιάζεται το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_p$  του κύριου συστήματος, δεν παρατηρείται σημαντική μείωση στις τιμές των μέγιστων της  $|H(\omega)|$ , εκτός και αν μεγαλώνει ταυτόχρονα και το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος

Τέλος, όσον αφορά το Σχήμα 3.16, παρατηρούμε ότι όσο μικραίνει το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, τόσο αυξάνει η απόκλιση των  $\omega_p$  και  $\omega_s$ , για μέγιστη αποτελεσματικότητα.

### 3.3.2 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις απόλυτες επιταχύνσεις

Εφαρμόζοντας στο σύστημα αρμονική διέγερση με συχνότητα  $\omega$  από 0 έως 1.6Hz, και για ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  πρωτεύοντος συστήματος ίση με 1Hz, στη συνέχεια παρουσιάζονται οι συναρτήσεις μεταφοράς για την απόλυτη επιτάχυνση, για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα.



**Σχήμα 3.18:** Συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$ )

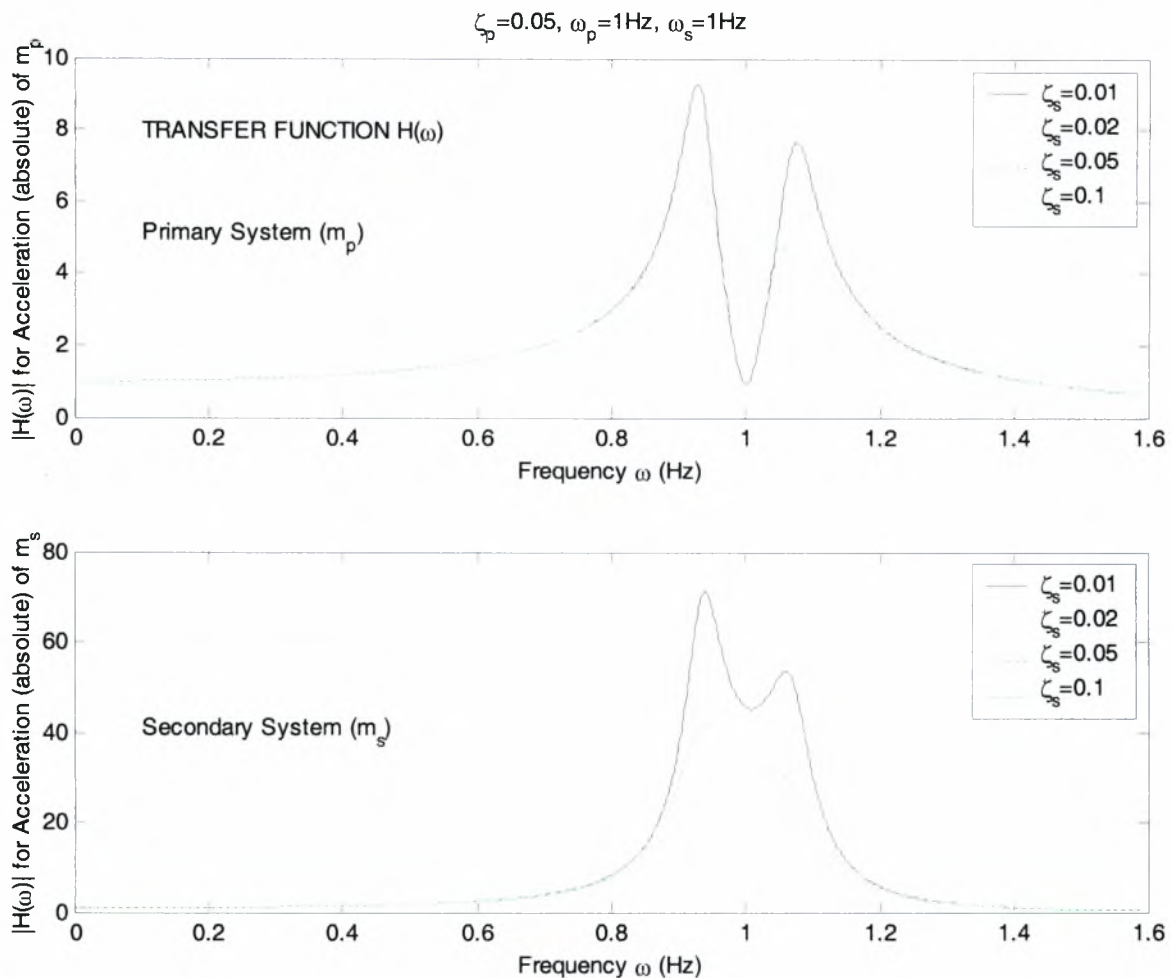
Από το Σχήμα 3.18, εξάγουμε μέσω του MATLAB, τα εξής δεδομένα

Για  $\zeta_p=0.05$  (Σχήμα 3.18)

$$\zeta_s=0.01 \quad \omega_s=0.8\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=9.681$$

$$\zeta_s=0.1 \quad \omega_s=0.8\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=8.324$$

Στη συνέχεια αυξάνουμε την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος



**Σχήμα 3.19:** Συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1\text{Hz}, \omega_p=1\text{Hz}, \zeta_p=0.05$ )

Για  $\zeta_p=0.05$  (Σχήμα 3.19)

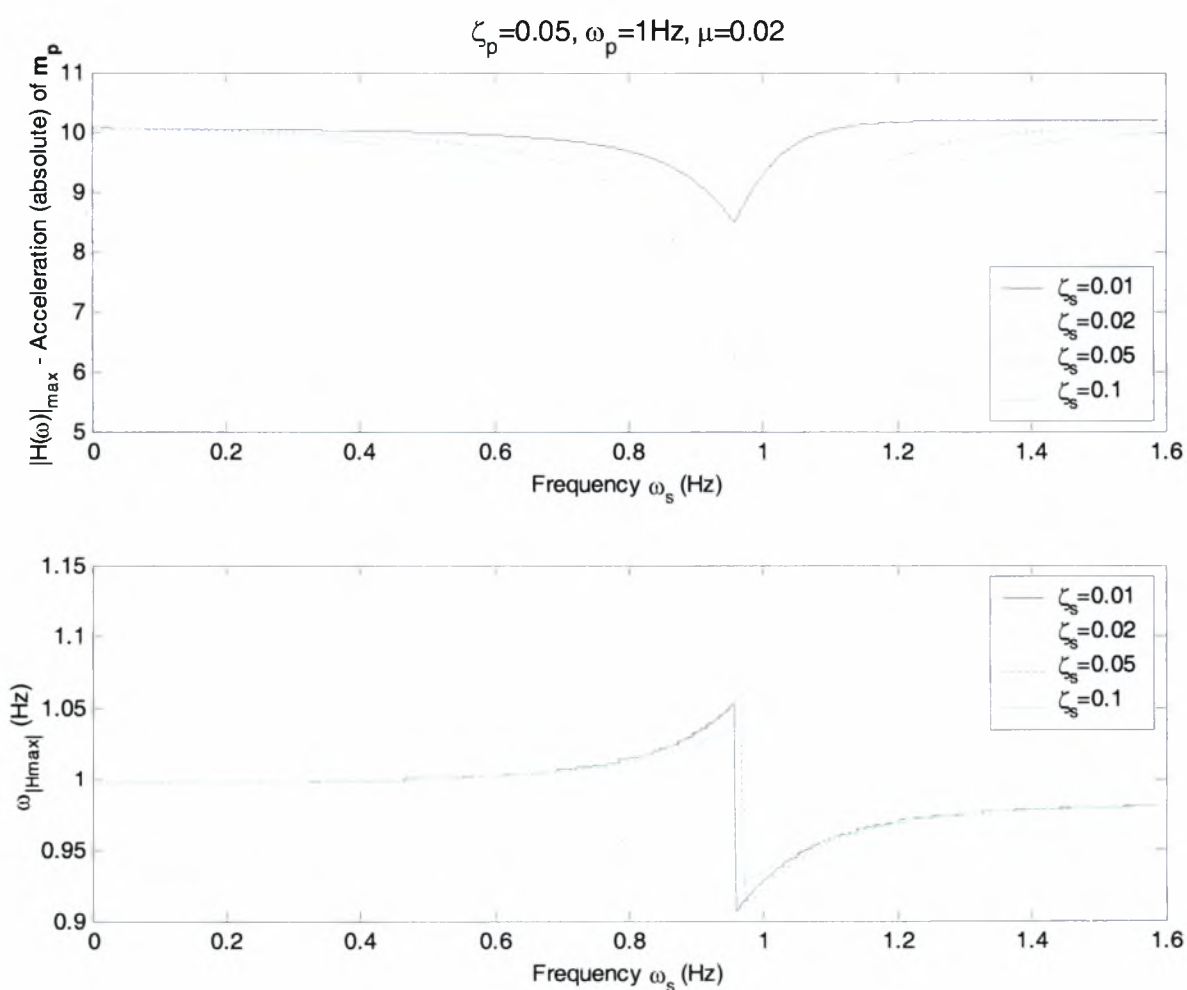
$$\zeta_s=0.01 \quad \omega_s=1\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=9.288$$

$$\zeta_s=0.1 \quad \omega_s=1\text{Hz} \quad |H(\omega)|_{\max}=6.068$$

Η συμπεριφορά των καμπυλών στα Σχήματα 3.18 και 3.19 δεν διαφέρει πολύ από τις αντίστοιχες των μετατοπίσεων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3.3.1. Η μεγάλη τιμή του μέτρου απόσβεσης  $\zeta_p$  επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την συμπεριφορά της κατασκευής, για οποιοδήποτε εύρος τιμών του μέτρου απόσβεσης  $\zeta_s$  της δευτερεύουσας μάζας. Ακόμα και όταν η ιδιοσυχνότητα του κύριου συστήματος ισούται με αυτήν του δευτερεύοντος συστήματος, τα μέγιστα αφήνονται σχεδόν

ανεπηρέαστα, εκτός από την περίπτωση όπου το  $\zeta_s$  παίρνει μεγάλες τιμές, κάτι που φαίνεται να επηρεάζει θετικά και τελικά να μειώνει την απόκριση. Με βάση τις ενδεικτικές τιμές που εξήχθησαν από τα Σχήματα 3.18 και 3.19, για  $\zeta_s=0.01$ , το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς γίνεται 9.681, όταν  $\omega_s=0.8\text{Hz}$ , και 9.288, όταν  $\omega_s=1\text{Hz}$ . Μόνο όταν αυξάνεται το μέτρο απόσβεσης της δευτερεύουσας μάζας, μπορούμε να πετύχουμε μείωση στο πλάτος της απόκρισης.

Με το επόμενο διάγραμμα θα υπολογίσουμε ακριβώς εκείνη την τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  για την οποία θα έχουμε την ελάχιστη απόκριση.



Σχήμα 3.20:  $|H_{max}|$  και  $\omega_{|Hmax|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$ ,

Οι τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα ελάχιστα του φάσματος της απόλυτης επιτάχυνσης της μάζας  $m_p$ , είναι

Για  $\zeta_p=0.05$  (Σχήμα 3.20)

$\zeta_s=0.01$	$\omega_s=0.9565\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=8.487$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=9.643$
$\zeta_s=0.02$	$\omega_s=0.9676\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=7.466$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=9.447$
$\zeta_s=0.05$	$\omega_s=0.9692\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=5.934$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=8.935$
$\zeta_s=0.1$	$\omega_s=0.9676\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=5.388$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=8.333$

Από το Σχήμα 3.12, οι αντίστοιχες τιμές που ελαχιστοποιούν το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς είναι

Για  $\zeta_p=0.01$

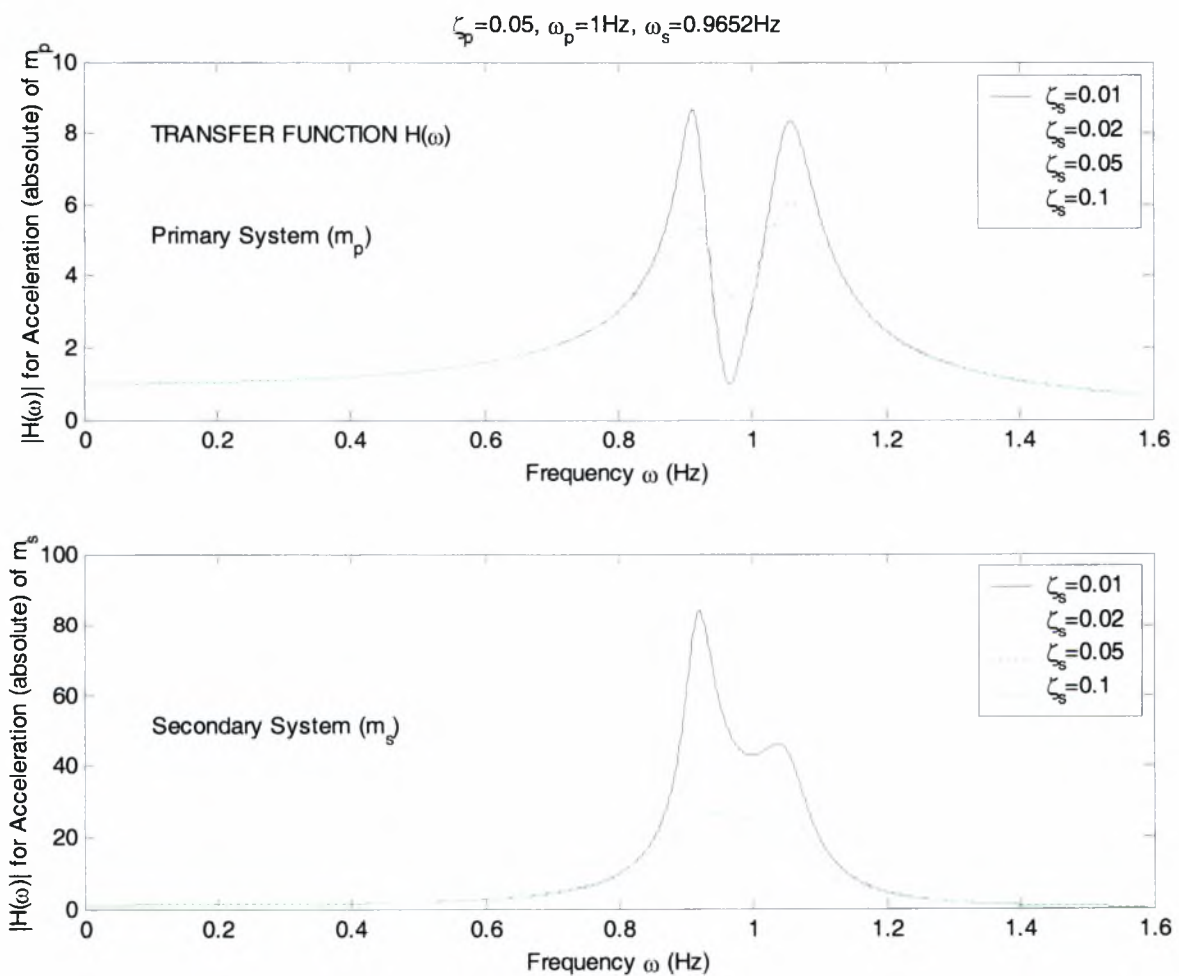
$\zeta_s=0.01$	$\omega_s=0.9803\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=25.28$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=44.28$
$\zeta_s=0.02$	$\omega_s=0.9819\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=17.31$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=40.31$
$\zeta_s=0.05$	$\omega_s=0.9803\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=10.15$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=32.12$
$\zeta_s=0.1$	$\omega_s=0.9772\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=8.781$
	$\omega_s=0.8\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=25.18$

Από τα τελευταία αποτελέσματα, βγαίνουν ορισμένα σαφή συμπεράσματα. Όσο μεγαλώνει το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_p$ , τόσο πιο δύσκολο είναι να έχουμε μείωση στο πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς. Για  $\zeta_p=0.05$  και  $\zeta_s=0.01$ , το πλάτος είναι 9.643 και 8.487, αντίθετα με την περίπτωση του Σχήματος 19, όπου για  $\zeta_p=0.01$  και  $\zeta_s=0.01$ , το πλάτος από 44.28 (στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ), πέφτει στο 25.28, για

$\omega_s=0.9803\text{Hz}$  (ιδιοσυχνότητα στο ελάχιστο του μέγιστου του πλάτους, για διάφορα  $\omega_s$ ).

Παρατηρώντας και άλλα ζευγάρια τιμών, βλέπουμε ότι για μεγάλα μέτρα απόσβεσης  $\zeta_p$  του πρωτεύοντος συστήματος, για να πετύχουμε μείωση στο μέγιστο του πλάτους της απόκρισης, πρέπει να αυξήσουμε το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος, κάτι που δεν ήταν απαραίτητο στην περίπτωση όπου  $\zeta_p=0.01$

Στη συνέχεια, για  $\omega_s=0.9652\text{Hz}$ , δημιουργούμε το διάγραμμα της συνάρτησης μεταφοράς της απόλυτης επιτάχυνσης της πρωτεύουσας μάζας. Η τιμή  $\omega_s=0.9652\text{Hz}$  είναι μια τιμή κοντά στις τιμές της  $\omega_s$  που αντιστοιχούσαν στην ελάχιστη τιμή του μέγιστου της συνάρτησης μεταφοράς, στο Σχήμα 3.20.



**Σχήμα 3.21:** Συναρτήσεις μεταφοράς των απόλυτων επιταχύνσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.9652\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$ )



Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε στο Σχήμα 3.21 ότι όταν το  $\omega_s=0.8\text{Hz}$  (Σχήμα 3.18), το μέγιστο του πλάτους της απόλυτης επιτάχυνσης της μάζας  $m_p$  ήταν περίπου 10, για  $\zeta_s=0.01$ . Αντίθετα, όσο το  $\omega_s$  κινείται προς το 1Hz, και μάλιστα επιλέγοντας  $\omega_s=0.9652\text{Hz}$  (Σχήμα 3.21), η δευτερεύουσα μάζα συντονίζεται με την πρωτεύουσα, απορροφώντας το μεγαλύτερο ποσοστό των ταλαντώσεων, με συνέπεια το μέγιστο της απόλυτης επιτάχυνσης του πρωτεύοντος συστήματος να μειώνεται στο 8.5. Αυτή η μικρή μείωση του πλάτους της απόκρισης, ακόμα και αν επιλέξουμε τιμή  $\omega_s$  τέτοια ώστε μαθηματικά να ελαχιστοποιεί το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς, αποδεικνύει αυτά που αναλύσαμε για τα Σχήματα 3.12 και 3.20, ότι δηλαδή οι μεγάλες τιμές του  $\zeta_p$  απαιτούν μεγάλες τιμές για το  $\zeta_s$ , ώστε να έχουμε βελτίωση στην απόκριση

### 3.4 Επιλογή τρίτης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\mu$

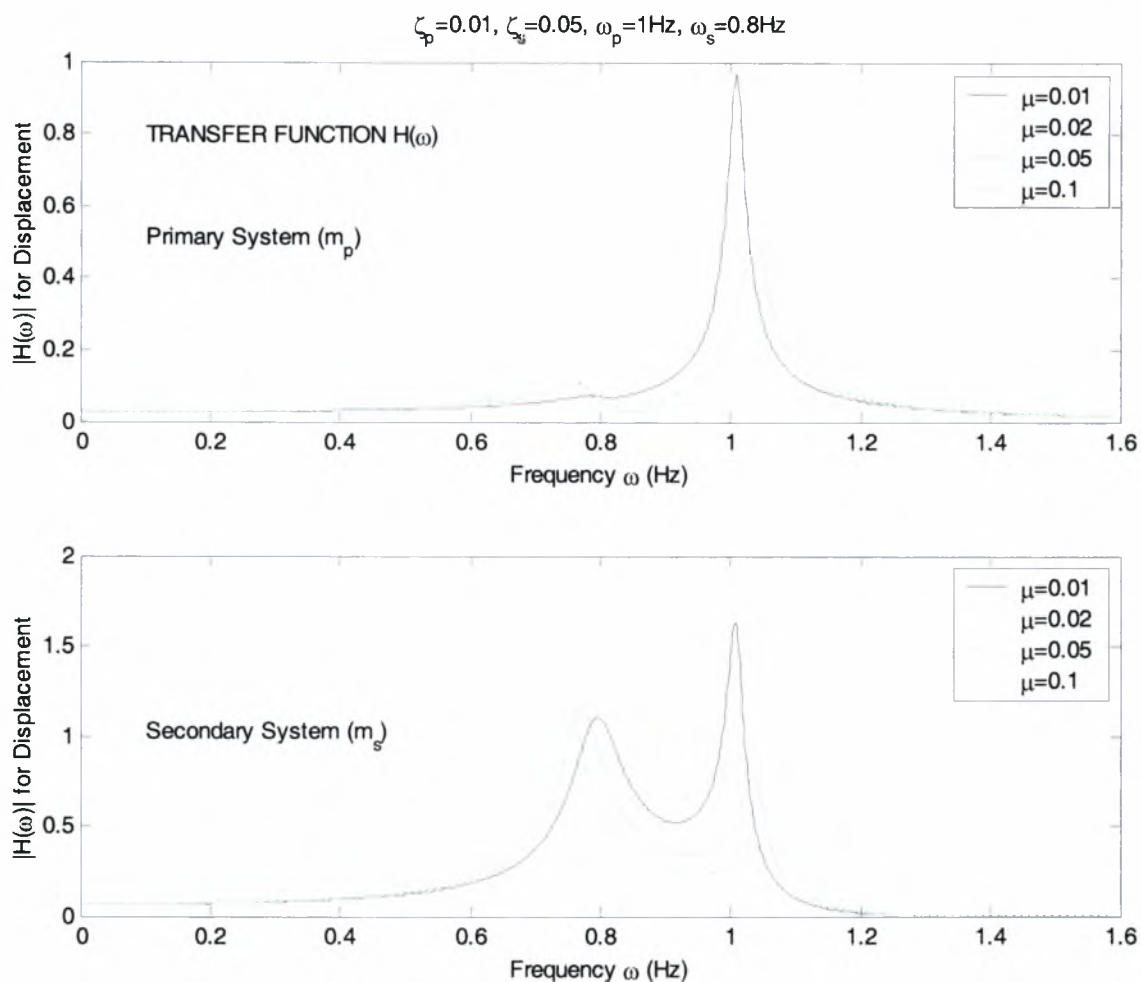
Εκτός από το μέτρο απόσβεσης του κύριου συστήματος, μια ακόμα βασική παράμετρος του μοντέλου είναι ο λόγος μαζών  $\mu = \frac{m_s}{m_p}$ . Σε αυτό το κεφάλαιο κρατώντας σταθερές τις τιμές των μέτρων απόσβεσης του κύριου και του δευτερεύοντος συστήματος, μελετάμε την επιρροή που έχει ο λόγος μαζών στο εύρος της απόκρισης

Οι τιμές των παραμέτρων που επιλέγουμε για να εξάγουμε τα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς, είναι οι εξής

- Λόγος μαζών:  $\mu = \frac{m_s}{m_p} = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_p$ :  $\zeta_p = 0.01$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_s$ :  $\zeta_s = 0.05$
- Ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος  $\omega_p = 1\text{Hz}$  ή  $2\pi \text{ rad/second}$  και  $0 \leq \omega \leq 1.6 \text{ Hz}$  για τη συχνότητα της αρμονικής διέγερσης

### 3.4.1 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις μετατοπίσεις

Επιλέγοντας ως ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος  $\omega_s=0.8\text{Hz}$ , μια τιμή αρκετά μακριά από την ιδιοσυχνότητα του κύριου συστήματος (μάζα  $m_p$ ), προκύπτει το εξής διάγραμμα

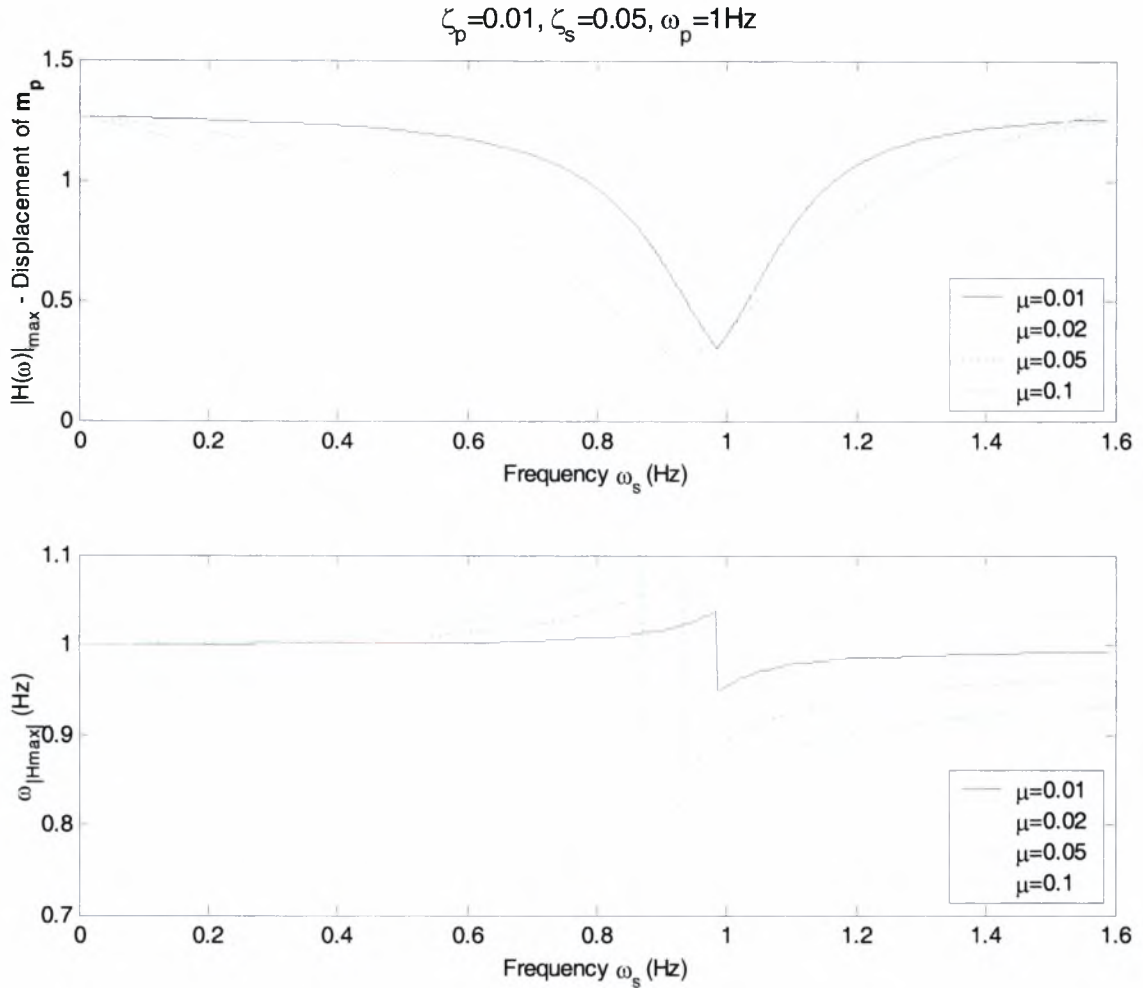


**Σχήμα 3.22:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\mu$ . ( $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ ,  $\zeta_s=0.05$ )

Ένα πρώτο συμπέρασμα που βγαίνει από το Σχήμα 3.22, είναι ότι όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών, δηλαδή όσο μεγαλώνει η μάζα  $m_s$  σε σχέση με την  $m_p$ , η απόκριση της κύριας μάζας μειώνεται. Είναι χαρακτηριστικό ότι για λόγο μαζών 10%, η απόκριση σχεδόν πέφτει στο 1/3 αυτής που αντιστοιχεί σε λόγο μαζών 1%. Επίσης, αν ανατρέξουμε και στο Σχήμα 3.1, παρατηρούμε ότι ο λόγος των μαζών επηρεάζει σημαντικά τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , δηλαδή επηρεάζει την περιοχή συντονισμού. Όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών τόσο αυξάνεται και η συχνότητα της

αρμονικής διέγερσης για την οποία παρατηρείται η μέγιστη τιμή της συνάρτησης μεταφοράς.

Επιλέγοντας εύρος  $0 \leq \omega_s \leq 1.6 \text{ Hz}$  βρίσκουμε τις τιμές των  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα μέγιστα του εύρους της μετατόπισης.



**Σχήμα 3.23:**  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_p$

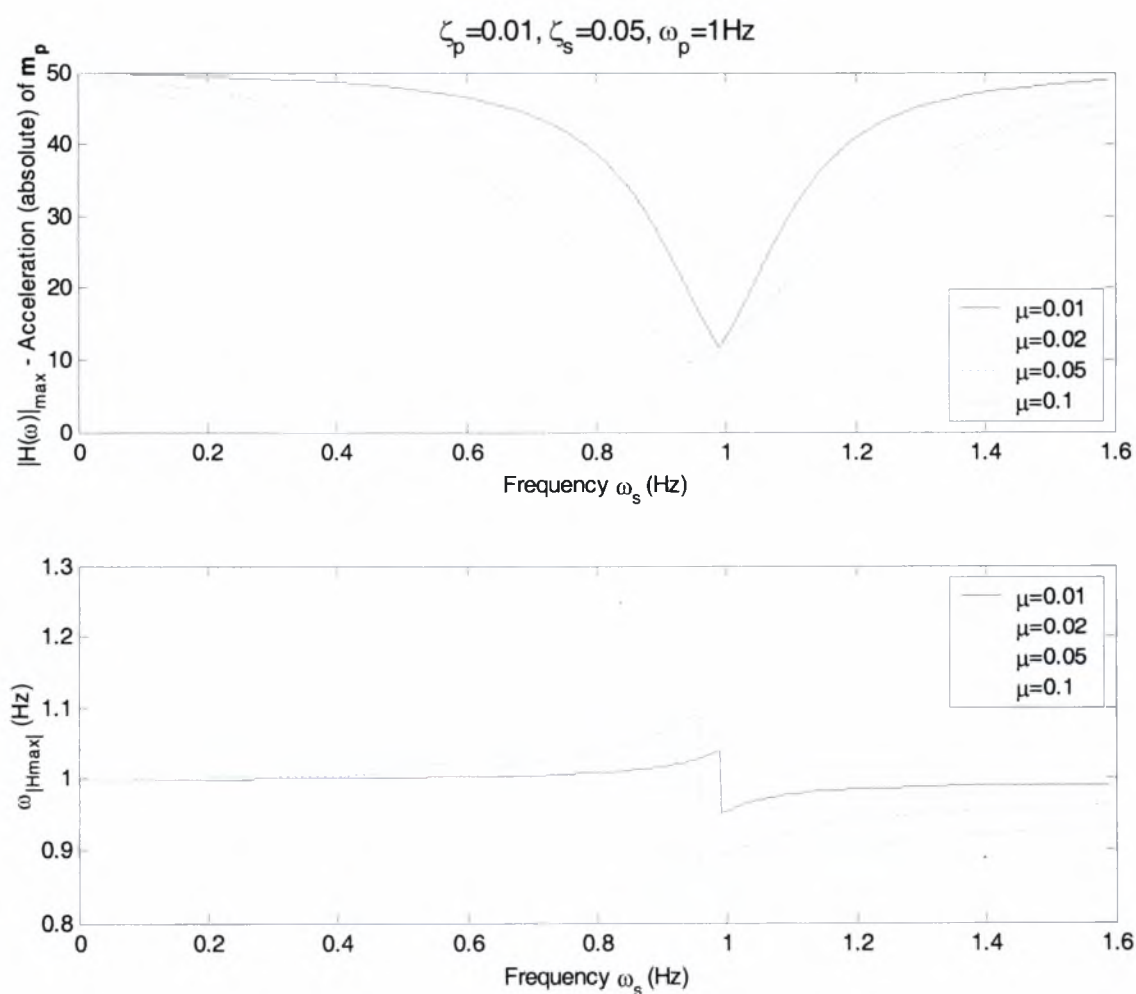
Οι τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα ελάχιστα του φάσματος της μετατόπισης της μάζας  $m_p$ , είναι

$\mu=0.01$	$\omega_s=0.9851\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.3013$
$\mu=0.02$	$\omega_s=0.9708\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.2619$
$\mu=0.05$	$\omega_s=0.9310\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.2403$
$\mu=0.1$	$\omega_s=0.8705\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=0.2387$

Αυξάνοντας τον λόγο των δύο μαζών, παρατηρούμε μια μετατόπιση των διαγραμμάτων προς τα αριστερά, δηλαδή μετατόπιση της περιοχής συντονισμού. Όταν ο λόγος των μαζών παίρνει την τιμή έως και 2%, η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  βρίσκεται κοντά στο 1Hz, δηλαδή κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος. Για μεγαλύτερους λόγους μαζών μεγαλώνει η απόκλιση των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_s$  και  $\omega_p$  για την οποία θα έχουμε την ελάχιστη απόκριση. Αυτή η απόκλιση των  $\omega_s$  και  $\omega_p$  φαινόταν και στο Σχήμα 3.1.

### 3.4.2 Συναρτήσεις μεταφοράς για τις απόλυτες επιταχύνσεις

Επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  να κινείται ανάμεσα σε 0 και 1.6Hz, δημιουργούμε το διάγραμμα που μας δείχνει τις μέγιστες τιμές της συνάρτησης μεταφοράς της απόλυτης επιτάχυνσης.



Σχήμα 3.24:  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

Οι τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  στις οποίες αντιστοιχούν τα ελάχιστα του φάσματος της απόλυτης επιτάχυνσης της μάζας  $m_p$ , είναι

$\mu=0.01$	$\omega_s=0.9883\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=11.84$
$\mu=0.02$	$\omega_s=0.9803\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=10.15$
$\mu=0.05$	$\omega_s=0.9581\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=9.104$
$\mu=0.1$	$\omega_s=0.9230\text{Hz}$	$ H(\omega) _{\max}=8.61$

Η συμπεριφορά του διαγράμματος στο Σχήμα 3.24 δεν διαφέρει και πολύ σε σχέση με το Σχήμα 3.23, όπου παρουσιαζόταν τα μέγιστα των συναρτήσεων μεταφοράς για την μετατόπιση. Για μικρούς λόγους μαζών, έως 2%, η τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  για την οποία έχουμε ελαχιστοποίηση του μεγίστου, βρίσκεται κοντά στο 1Hz. Για μεγαλύτερους λόγους μαζών, η απόκλιση των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_p$  και  $\omega_s$  μεγαλώνει, όταν επιδιώκουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα, δηλαδή δεν αρκεί να επιλέξουμε την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος κοντά στην  $\omega_p$ , ώστε να έχουμε μείωση του εύρους. Σε μεγάλους λόγους μαζών, η τιμή της  $\omega_s$  για την οποία έχουμε βέλτιστη λύση, πρέπει να υπολογιστεί από το Σχήμα 3.24.

### 3.5 Συμπεράσματα

Με βάση την μελέτη που έγινε για το μηχανικό μοντέλο των δύο μαζών, και εξετάζοντας προσεκτικά τη μορφή των διαγραμμάτων βάσει των παραμέτρων που επιλέχθηκαν, προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα.

Η μείωση στο εύρος της απόκρισης της κύριας μάζας μπορεί να επιτευχθεί με τους εξής τρόπους

- Αυξάνοντας το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$  της δευτερεύουσας μάζας (Tuned Mass Damper).
- Αυξάνοντας τον λόγο των μαζών, όταν αυτό είναι τεχνικά εφικτό
- Επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος κοντά στην ιδιοσυχνότητα της κύριας μάζας. Ωστόσο αυτό δεν αρκεί για μεγάλους λόγους

μαζών, καθώς σε τέτοια περίπτωση υπάρχει μεγάλη απόκλιση ανάμεσα στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_s$  και  $\omega_p$

Επίσης, σημειώνουμε κάποια γενικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των καμπυλών

- Όσο αυξάνεται το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_p$  του κύριου συστήματος, η δευτερεύουσα μάζα δεν μπορεί να μειώσει την απόκριση της κύριας, εκτός και αν αυξήσουμε ταυτόχρονα το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος
- Όταν η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  της δευτερεύουσας κινείται μακριά από την  $\omega_p$ , το εύρος της απόκρισης της κύριας μάζας δεν επηρεάζεται σημαντικά
- Όταν η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος κινείται κοντά στην  $\omega_p$ , η απόκρισή της δευτερεύουσας μάζας παίρνει πολλαπλάσιες τιμές από ότι σε άλλη περίπτωση

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

#### 4.1 Περιγραφή του Μηχανικού συστήματος

Στη συνέχεια, θα επεκτείνουμε την ανάλυση του μοντέλου του Κεφαλαίου 2, ορίζοντας ως πρωτεύων σύστημα ένα σύστημα με  $n$ -βαθμούς ελευθερίας. Το δευτερεύων σύστημα αποτελείται από τη μάζα  $m_s$  με ελατήριο  $k_s$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_s$  και είναι ενός βαθμού ελευθερίας.

Το πρωτεύων σύστημα φαίνεται στο Σχήμα 4.1 και περιλαμβάνει  $n$ -μάζες, με την πρώτη στερεωμένη στο έδαφος με ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_1$ . Οι υπόλοιπες μάζες συνδέονται μεταξύ τους με ελατήρια σταθεράς  $k_2, k_3, \dots, k_n$  και αποσβεστήρες με σταθερές  $c_2, c_3, \dots, c_n$ , ενώ το έδαφος δέχεται διέγερση  $\ddot{x}_g$ . Το δευτερεύων σύστημα αποτελείται από τη μάζα  $m_s$  η οποία συνδέεται με μια από τις μάζες του πρωτεύοντος συστήματος με ελατήριο σταθεράς  $k_s$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_s$ . Το δευτερεύων σύστημα είναι αυτό που θα παίξει σημαντικό ρόλο στον έλεγχο της απόκρισης του συστήματος.

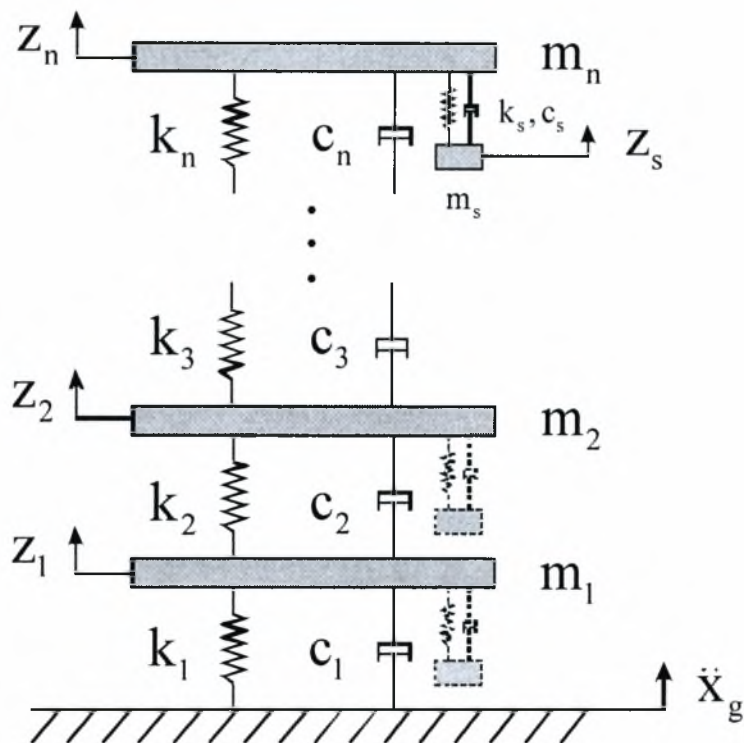
Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, η απόκριση του συνδυασμένου πρωτεύοντος – δευτερεύοντος συστήματος εκφράζεται συναρτήσει των δυναμικών χαρακτηριστικών. Σκοπός είναι να προσδιορισθούν τα χαρακτηριστικά του δευτερεύοντος συστήματος σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του πρωτεύοντος συστήματος, τα οποία επηρεάζουν τον έλεγχο των ταλαντώσεων του κύριου (πρωτεύοντος) συστήματος.

Είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε εξ' αρχής τα δύο συστήματα που αποτελούν συνολικά το μηχανικό μοντέλο. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει εξετάζουμε το δευτερεύων σύστημα σε σχέση πάντα με το πρωτεύων, την απόκριση του οποίου θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Επίσης, όπως και στο μοντέλο των δύο βαθμών ελευθερίας, έτσι κι εδώ η μάζα  $m_s$  επιλέγεται να είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα



του πρωτεύοντος συστήματος. Ως μάζα του κύριου συστήματος θεωρούμε το άθροισμα της μάζας των n-μαζών.

Σχηματικά, το μοντέλο των (n+1) βαθμών ελευθερίας, παριστάνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Μηχανικό μοντέλο (n+1) βαθμών ελευθερίας

Η απόλυτες μετατοπίσεις  $z_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  και  $z_p$  περιγράφουν την απόκριση του μοντέλου του Σχήματος 4.1. Για να μην έχουμε όρους βαρύτητας μέσα στις εξισώσεις κίνησης, όλες οι μετατοπίσεις θα περιγραφούν από τη θέση στατικής ισορροπίας. Ορίζουμε ως μετατοπίσεις, τις σχετικές μετατοπίσεις των δύο μαζών ως προς το έδαφος

$$\begin{aligned} x_i &= z_i - x_g \\ x_s &= z_s - x_g \end{aligned} \quad (4.1)$$

Παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο των σχετικών μετατοπίσεων, προκύπτουν οι σχετικές ταχύτητες και οι σχετικές επιταχύνσεις των μαζών.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{z}_1 - \dot{x}_g \\ \dot{x}_s &= \dot{z}_s - \dot{x}_g\end{aligned}\quad (4.2)$$

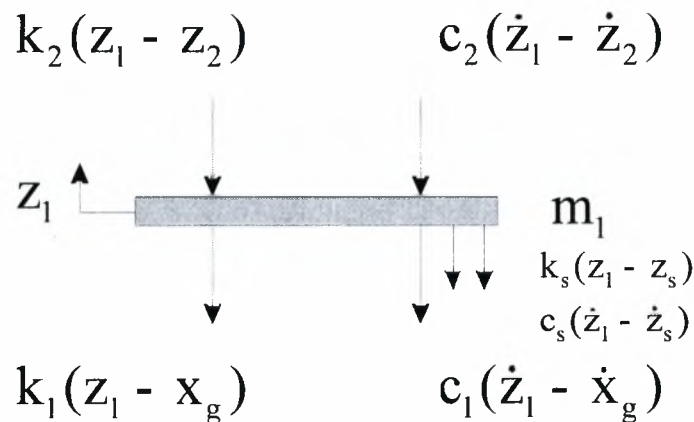
$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \ddot{z}_1 - \ddot{x}_g \\ \ddot{x}_s &= \ddot{z}_s - \ddot{x}_g\end{aligned}\quad (4.3)$$

## 4.2 Εξισώσεις κίνησης του συστήματος

Για να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης του παραπάνω μοντέλου, μελετούμε τα Διαγράμματα Ελεύθερου Σώματος της μάζας  $m_1$  του πρώτου ορόφου καθώς και της μάζας  $m_1$  ενός τυχαίου ορόφου. Και στις δυο περιπτώσεις λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση του δευτερεύοντος συστήματος στον κάθε όροφο.

Σημειώνεται ότι για την περίπτωση όπου επιλέξουμε το δευτερεύων σύστημα να μην προσαρτάται σε μια από τις μάζες του πρωτεύοντος συστήματος, τότε απλώς παραλείπουμε από τις εξισώσεις κίνησης εκείνους τους όρους που περιλαμβάνουν τα  $k_s$  και  $c_s$ .

Το Δ.Ε.Σ. της μάζας  $m_1$  παριστάνεται στο Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_1$

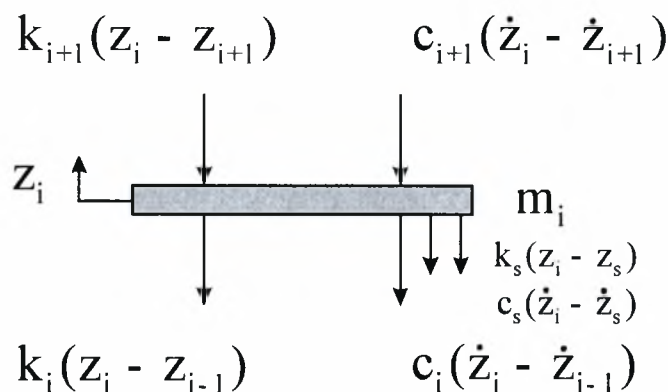
Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει η εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_1$

$$\begin{aligned}m_1 \cdot \ddot{z}_1 &= 0 - k_2 \cdot (z_1 - z_2) - c_2 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_1 \cdot (z_1 - x_g) - c_1 \cdot (\dot{z}_1 - \dot{x}_g) \\ &\quad - k_s \cdot (z_1 - z_s) - c_s \cdot (\dot{z}_1 - \dot{z}_s)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.4) τις σχετικές μετατοπίσεις, σχετικές ταχύτητες και σχετικές επιταχύνσεις, προκύπτει η τελική εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_i$

$$m_i \cdot \ddot{x}_i + (c_i + c_2 + c_s) \cdot \dot{x}_i + (k_i + k_2 + k_s) \cdot x_i - (k_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot \dot{x}_2) - (k_s \cdot x_s + c_s \cdot \dot{x}_s) = -m_i \cdot \ddot{x}_g \quad (4.5)$$

Το Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος φαίνεται στο Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_i$

Η εξίσωση κίνησης από το νόμο του Νεύτωνα εκφρασμένη σε απόλυτες αποκρίσεις, είναι

$$m_i \cdot \ddot{z}_i = 0 - k_{i+1} \cdot (z_i - z_{i+1}) - c_{i+1} \cdot (\dot{z}_i - \dot{z}_{i+1}) - k_i \cdot (z_i - z_{i-1}) - c_i \cdot (\dot{z}_i - \dot{z}_{i-1}) - k_s \cdot (z_i - z_s) - c_s \cdot (\dot{z}_i - \dot{z}_s) \quad (4.6)$$

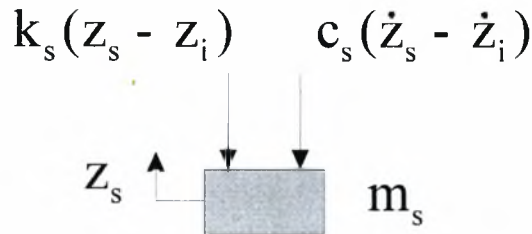
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.6) τις σχετικές μετατοπίσεις, σχετικές ταχύτητες και σχετικές επιταχύνσεις, προκύπτει η τελική εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_i$

$$m_i \cdot \ddot{x}_i + (c_i + c_{i+1} + c_s) \cdot \dot{x}_i + (k_i + k_{i+1} + k_s) \cdot x_i - (k_i \cdot x_{i-1} + c_i \cdot \dot{x}_{i-1}) - (k_{i+1} \cdot x_{i+1} + c_{i+1} \cdot \dot{x}_{i+1}) - (k_s \cdot x_s + c_s \cdot \dot{x}_s) = -m_i \cdot \ddot{x}_g \quad (4.7)$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην μάζα  $m_n$  του τελευταίου ορόφου, απλώς παραλείπουμε τους όρους που περιλαμβάνουν τα  $k_{i+1}$  και  $c_{i+1}$ .

Τέλος, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και την εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_s$  ώστε να περιγράφεται πλήρως το μοντέλο.

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος της δευτερεύουσας μάζας φαίνεται στο Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_s$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Νεύτωνα, η εξίσωση κίνησης εκφρασμένη σε απόλυτες μετατοπίσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις ορίζεται από την σχέση

$$m_s \cdot \ddot{z}_s = 0 - k_s \cdot (z_s - z_i) - c_s \cdot (\dot{z}_s - \dot{z}_i) \quad (4.8)$$

ενώ αν λάβουμε υπόψη τις σχετικές μετατοπίσεις, επιταχύνσεις και ταχύτητες, όπως αυτές ορίστηκαν από τις σχέσεις (4.1), (4.2) και (4.3) προκύπτει ότι

$$m_s \cdot \ddot{x}_s + c_s \cdot \dot{x}_s + k_s \cdot x_s - c_s \cdot \dot{x}_i - k_s \cdot x_i = -m_s \cdot \ddot{x}_g \quad (4.9)$$

Συνεπώς, προκειμένου να περιγραφεί πλήρως το μοντέλο, είναι απαραίτητες οι παρακάτω εξισώσεις κίνησης

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2 + c_s) \cdot \dot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_s) \cdot x_1 - (k_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot \dot{x}_2) - (k_s \cdot x_s + c_s \cdot \dot{x}_s) = -m_1 \cdot \ddot{x}_g$$

$$m_i \cdot \ddot{x}_i + (c_i + c_{i+1} + c_s) \cdot \dot{x}_i + (k_i + k_{i+1} + k_s) \cdot x_i - (k_i \cdot x_{i-1} + c_i \cdot \dot{x}_{i-1}) - (k_{i+1} \cdot x_{i+1} + c_{i+1} \cdot \dot{x}_{i+1}) - (k_s \cdot x_s + c_s \cdot \dot{x}_s) = -m_i \cdot \ddot{x}_g$$

$$m_s \cdot \ddot{x}_s + c_s \cdot \dot{x}_s + k_s \cdot x_s - c_s \cdot \dot{x}_i - k_s \cdot x_i = -m_s \cdot \ddot{x}_g$$

Είναι απαραίτητο να περιγραφεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων σε μητρική μορφή, ώστε να είναι εφικτή η επίλυσή του με το περιβάλλον προγραμματισμού του MATLAB.

Σκοπός μας είναι να φέρουμε το παραπάνω σύστημα στην εξής γενικευμένη μορφή

$$M \cdot \ddot{\underline{x}} + C \cdot \dot{\underline{x}} + K \cdot \underline{x} = -M \cdot \underline{\Gamma} \cdot \ddot{x}_g \quad (4.10)$$

και για το σκοπό αυτό, εισάγουμε τα παρακάτω διανύσματα

$$\ddot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_s \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_s \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Καταγράφοντας τις εξισώσεις κίνησης για τις n-μάζες και για την μάζα  $m_s$ , η οποία προσαρτάται στον ι-όροφο, προκύπτουν τα εξής μητρώα.

Μητρώο μάζας M

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & m_s \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (4.12)$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & & & & & & 0 \\ & m_2 & & & & & & & & & \\ & & m_3 & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & m_{n-1} & & \\ 0 & & & & & & & & & & m_n \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Το μητρώο ακαμψίας  $K$

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{K} & \underline{0} \\ \underline{0}^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & k_s & \dots & -k_s \\ & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & -k_s & & & k_s \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & & & & -k_n & k_n \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

και το μητρώο απόσβεσης  $C$

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{C} & \underline{0} \\ \underline{0} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & c_s & \dots & -c_s \\ & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & -c_s & & & c_s \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Τα μητρώα  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{C}$  και  $\tilde{K}$  είναι ουσιαστικά τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας του πρωτεύοντος συστήματος, χωρίς δηλαδή την επίδραση της μάζας  $m_s$ .

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι σε περίπτωση που τοποθετήσουμε έναν Tuned Mass Damper στον όροφο  $i$  του μοντέλου με τις  $n$ -μάζες, τα μητρώα  $C$  και  $K$  δέχονται την επιρροή των εξής ποσοτήτων

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ii} &= c_s & \hat{K}_{ii} &= k_s \\ \hat{C}_{i,n+1} &= -c_s & \text{και} & \hat{K}_{i,n+1} &= -k_s \\ \hat{C}_{n+1,i} &= -c_s & \hat{K}_{n+1,i} &= -k_s \end{aligned}$$

Τέλος, το διάνυσμα  $\Gamma$  ορίζεται ως

$$\Gamma = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1)^T$$

### 4.3 Μέθοδος υπολογισμού του πίνακα απόσβεσης

Το μητρώο απόσβεσης  $\tilde{C}$  του πρωτεύοντος συστήματος προσδιορίζεται υποθέτοντας ότι το πρωτεύων σύστημα έχει κλασική απόσβεση με συντελεστές  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  και ορίζεται με την εξίσωση

$$\tilde{C} = \tilde{M} \cdot \Phi \cdot Z \cdot \Phi^T \cdot \tilde{M} \quad (4.17)$$

όπου  $\tilde{C}$  το μητρώο απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος,  $\Phi$  ο πίνακας των ιδιομορφών

$$\Phi = (\underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2 \quad \dots \quad \underline{\phi}_n) \quad (4.18)$$

με  $\underline{\phi}_i$  να αποτελεί την  $i$ -ιδιομορφή.

$Z$  είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$Z = \begin{pmatrix} 2 \cdot \zeta_1 \cdot \omega_1 & & & 0 \\ & 2 \cdot \zeta_2 \cdot \omega_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \end{pmatrix}$$

όπου  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  αποτελούν τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας που ορίζεται ως  $\tilde{C}$  είναι διάστασης  $n \times n$  και αφορά μόνο το σύστημα με τις  $n$ -μάζες, δηλαδή το πρωτεύων σύστημα, χωρίς να περιλαμβάνει την επίδραση της δευτερεύουσας μάζας. Ο συνολικός πίνακας απόσβεσης που εκφράζει όλο το σύστημα συνολικά ( $n$ -μάζες και δευτερεύουσα μάζα) είναι διαστάσεων  $(n+1) \times (n+1)$  και περιλαμβάνει και την επίδραση της δευτερεύουσας μάζας στον όροφο που τοποθετείται.



#### 4.4 Μέθοδος επίλυσης

Η εξίσωση (4.10) αποτελεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης το οποίο για να επιλυθεί στο MATLAB πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης..

Η μεθοδολογία επίλυσης σύμφωνα με τη Μέθοδο του Χώρου των Καταστάσεων (State Space Model) έχει ήδη παρουσιαστεί και αναλυθεί στο 2ο κεφάλαιο, ωστόσο να υπενθυμίσουμε ότι σκοπός μας είναι να καταλήξουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}} &= \underline{A} \cdot \underline{y} + \underline{B} \cdot \underline{u} \\ \underline{z} &= \underline{C} \cdot \underline{y} + \underline{D} \cdot \underline{u}\end{aligned}\tag{4.19}$$

όπου οι πίνακες A, B, C, D περιγράφονται ως εξής

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{C} \end{pmatrix}, & \underline{B} &= \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix} \\ \underline{C} &= \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{C} \end{pmatrix}, & \underline{D} &= \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.20}$$

Όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για να υπολογιστούν οι απόλυτες επιταχύνσεις και όχι οι σχετικές, αρκεί να θέσουμε τον πίνακα D ίσο με το μηδέν.

#### 4.5 Εισαγωγή νέων παραμέτρων στις εξισώσεις

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις κίνησης του μοντέλου συναρτήσει των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_i$  και  $\omega_s$  και των μέτρων απόσβεσης  $\zeta_i$  και  $\zeta_s$  των μαζών  $m_i$  και  $m_s$  αντίστοιχα.

Σε τέτοιου είδους προβλήματα, είναι συνήθως προτιμότερο να μελετάμε τη συμπεριφορά του συστήματος, μεταβάλλοντας τη συχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, καθώς αυτή κινείται μέσα σε ένα εύρος τιμών.

Ως πρωτεύων σύστημα, θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από n-μάζες. Το δευτερεύων σύστημα είναι το σύστημα που αποτελείται από τη μάζα  $m_s$  η οποία συνδέεται με ελατήριο σταθεράς  $k_s$  και με απόσβεση  $c_s$ .

Εισάγουμε τις εξής παραμέτρους

Το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος και ο λόγος μαζών ορίζονται ως εξής

$$\zeta_s = \frac{c_s}{2 \cdot m_s \cdot \omega_s}, \mu = \frac{m_s}{\sum m_i} \quad (4.21)$$

Επίσης, η ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος ορίζεται από τη σχέση

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \quad (4.22)$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις, οι εξισώσεις κίνησης του Κεφαλαίου 4.2 θα μετασχηματιστούν και θα περιλαμβάνουν αυτές τις νέες παραμέτρους. Με αυτό τον τρόπο θα έχουμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος, ώστε να δείξουμε την επιρροή της στις αποκρίσεις του πρωτεύοντος συστήματος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την επιρροή των παραμέτρων  $\omega_s$ ,  $\zeta_s$  και  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος στην απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος με τις  $n$ -μάζες. Η μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί είναι παρόμοια με αυτή που παρουσιάστηκε στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Θα δοθεί βάση στις συναρτήσεις μεταφοράς της μετατόπισης, της ταχύτητας και της απόλυτης επιτάχυνσης του πρωτεύοντος συστήματος, και συγκεκριμένα της μάζας του τελευταίου ορόφου. Ο κώδικας που έχει αναπτυχθεί στο MATLAB περιλαμβάνει εξισώσεις για  $n$ -μάζες. Ωστόσο εδώ η μελέτη θα επικεντρωθεί σε ένα πρωτεύων σύστημα 3-μαζών ( $n=3$ ), στο οποίο προσαρτάται ένα δευτερεύων σύστημα με μάζα  $m_s$ .

Τα χαρακτηριστικά του πρωτεύοντος συστήματος επιλέγονται ως εξής:  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  και σταθερές ελατηρίων  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ . Οι τιμές των  $m$  και  $k$  είναι τέτοιες ώστε οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν για το πρωτεύων σύστημα να παίρνουν τις εξής τιμές

- 1)  $\omega_1 = 0.44\text{Hz}$
- 2)  $\omega_2 = 1.22\text{Hz}$
- 3)  $\omega_3 = 1.8\text{Hz}$

Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, θα παραχθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς των αποκρίσεων για την τρίτη μάζα του πρωτεύοντος συστήματος καθώς και για το δευτερεύων σύστημα. Υπενθυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς δείχνουν την μεταβολή του πλάτους της απόκρισης στη μόνιμη κατάσταση σε σχέση με το πλάτος της αρμονικής διέγερσης.

Ωστόσο, σε αυτό το σύστημα με τους  $n+1$  βαθμούς ελευθερίας, έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε τον όροφο στον οποίο θα τοποθετηθεί η δευτερεύουσα μάζα. Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν περιέχονται τρεις καμπύλες. Η πρώτη δείχνει τα αποτελέσματα για τα οποία το δευτερεύων σύστημα τοποθετείται στον πρώτο όροφο, η δεύτερη δείχνει τα αποτελέσματα για τα οποία το δευτερεύων

σύστημα τοποθετήθηκε στον δεύτερο όροφο, ενώ η τρίτη δείχνει τα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν το δευτερεύον σύστημα προσαρτάται στον τελευταίο όροφο.

Στη συνέχεια θα επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τις βασικές παραμέτρους του συνολικού συστήματος, και ακολούθως, θα παρουσιαστούν τα διαγράμματα.

## 5.1 Επιλογή ομάδας παραμέτρων

Για την ανάλυση που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, επιλέγουμε τις εξής παραμέτρους

- $n=3$  μάζες για το πρωτεύον σύστημα
- Λόγος μαζών:  $\mu = \frac{m_s}{\sum m_i} = 0.02$ , δηλαδή η μάζα  $m_s$  είναι το 2% της συνολικής μάζας του πρωτεύοντος συστήματος
- Μέτρα απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος:  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.01$
- Μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος:  $\zeta_s = 0.05$
- Το εύρος της συχνότητας διέγερσης της αρμονικής ταλάντωσης είναι  $0 \leq \omega \leq 2 \text{ Hz}$ , στο οποίο περιλαμβάνονται οι ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό, ότι οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_n^*, \omega_{n+1}^*$  που έχει ολόκληρο το σύστημα των  $n+1$ -μαζών με την μάζα  $m_s$ , είναι διαφορετικές από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  του πρωτεύοντος συστήματος και την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται στη συνέχεια είναι παρόμοια με του Κεφαλαίου 3, και η ανάλυση βασίζεται στις συναρτήσεις μεταφοράς. Για την περίπτωση όπου η τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος δεν είναι κοντά στις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος  $\omega_1, \omega_2$  και  $\omega_3$ , οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_1^*, \omega_2^*$  και  $\omega_3^*$  είναι πολύ κοντά στις  $\omega_1, \omega_2$  και  $\omega_3$  του πρωτεύοντος συστήματος,

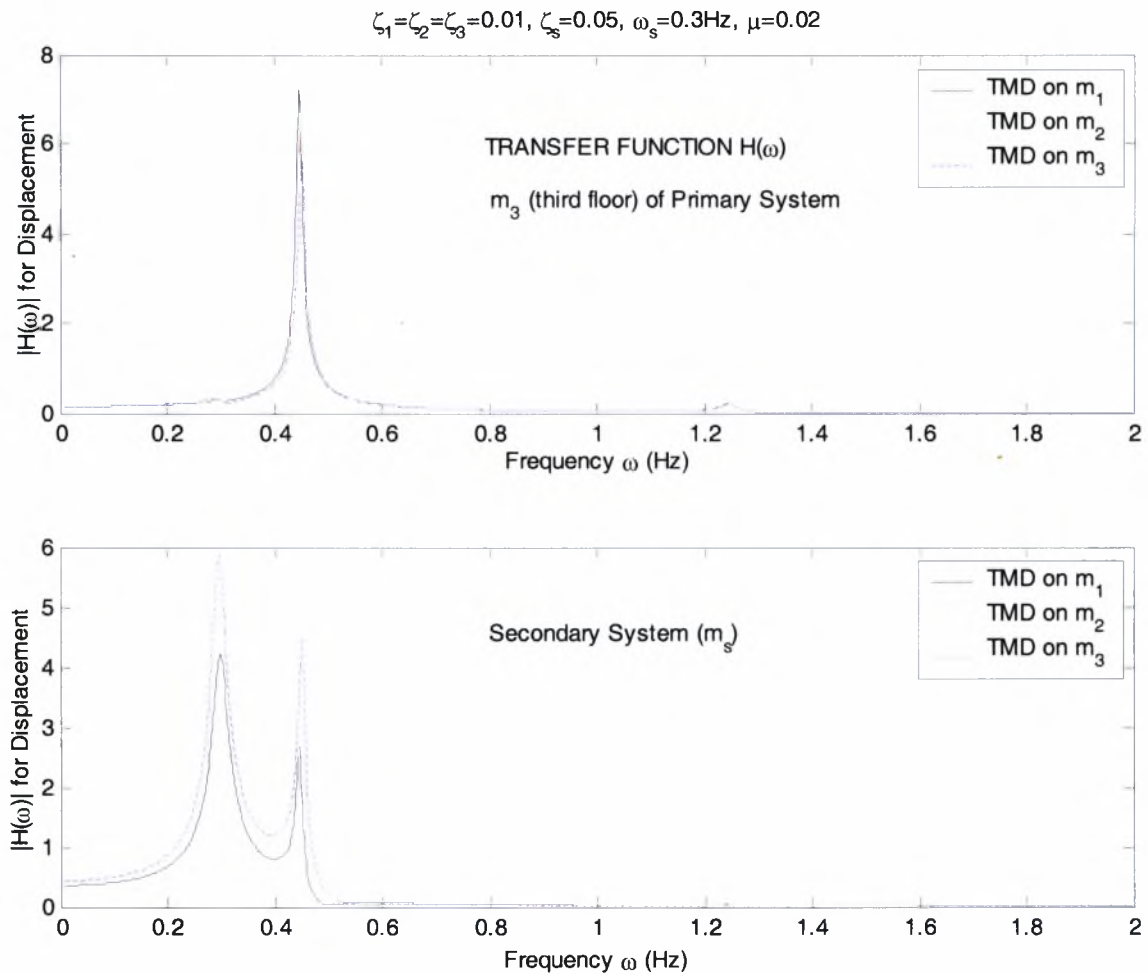
ενώ η τέταρτη ιδιοσυχνότητα  $\omega_s^*$  του συνολικού συστήματος είναι πολύ κοντά στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.

Στην περίπτωση όπου η τιμή της  $\omega_s$  είναι πολύ κοντά σε μία από τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος, έστω στην  $\omega_1$ , τότε οι δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_3^*$  και  $\omega_4^*$  του συνολικού συστήματος είναι πολύ κοντά στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_3$  και  $\omega_4$  του πρωτεύοντος συστήματος, ενώ οι άλλες δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_1^*$  και  $\omega_2^*$  εμφανίζονται εκατέρωθεν της  $\omega_1 = \omega_s$ , η μία μικρότερη της  $\omega_1 = \omega_s$  και η άλλη μεγαλύτερη της  $\omega_1 = \omega_s$ .

Τα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, παριστάνουν το εύρος των αποκρίσεων της μάζας  $m_3$  (τελευταίος όροφος) και της μάζας  $m_s$ , στο πεδίο της συχνότητας. Στο καθένα διάγραμμα, παρουσιάζονται 3 καμπύλες, οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικές θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος πάνω στο πρωτεύον σύστημα. Συγκεκριμένα, το δευτερεύον σύστημα τοποθετείται διαδοχικά στη μάζα  $m_1$ ,  $m_2$  και  $m_3$ ,

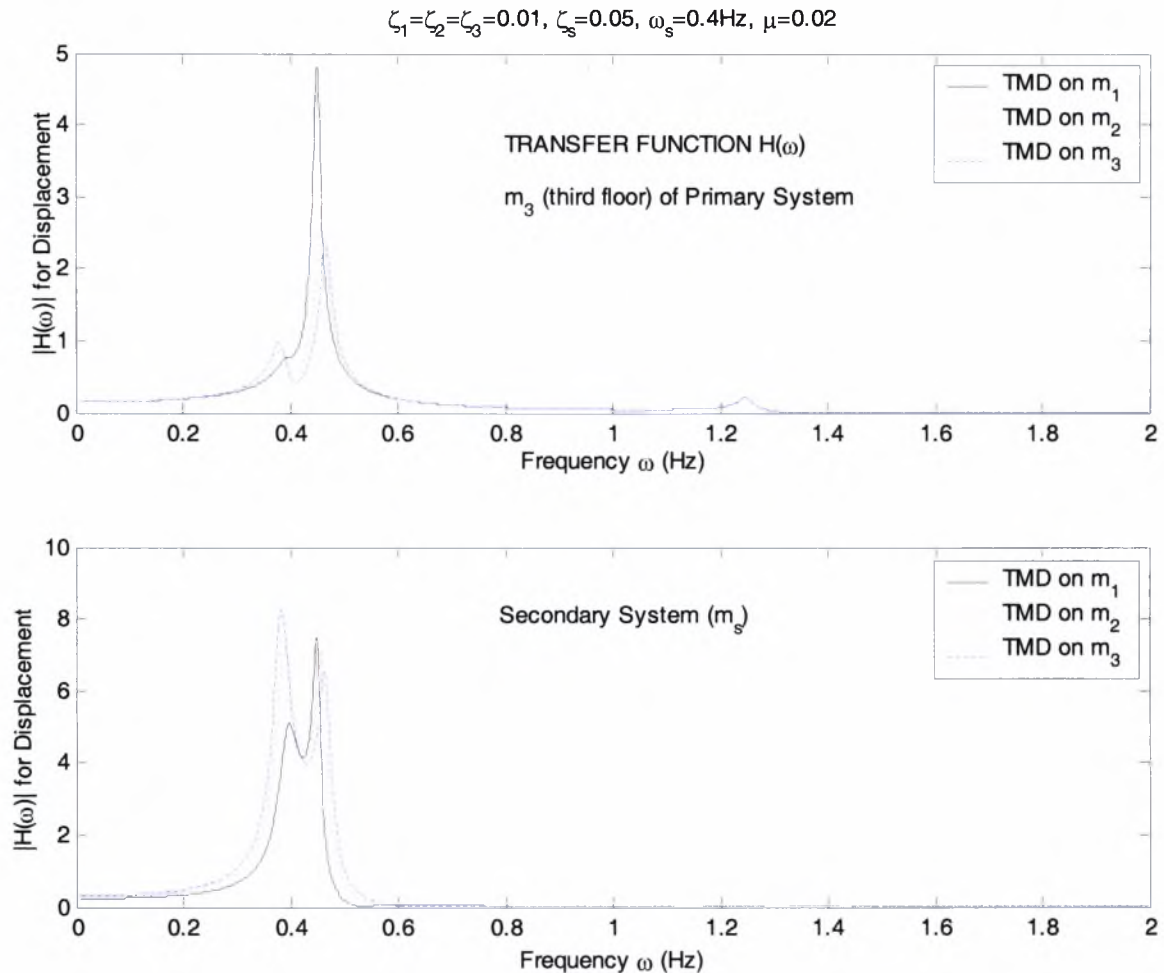
### 5.1.1 Συναρτήσεις μεταφοράς για μετατοπίσεις, ταχύτητες και απόλυτες επιταχύνσεις

Στα Σχήματα 42 και 43 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις μεταφοράς για της αποκρίσεις της μάζας  $m_3$  του πρωτεύοντος συστήματος και για την απόκριση της μάζας  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, για τιμές του  $\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} = 0.3\text{Hz}$  και  $0.4\text{Hz}$ .



**Σχήμα 5.1:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος. ( $\omega_s=0.3\text{Hz}$ ,  $\zeta_1, \zeta_2 = \zeta_3 = 0.01$ ,  $\zeta_s=0.05$ )

Στο Σχήμα 5.1 παρατηρούμε ότι περιοχές συντονισμού στις οποίες εμφανίζονται τοπικά μέγιστα στην απόκριση, παρουσιάζονται όταν η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  βρίσκεται κοντά στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1^*$ ,  $\omega_2^*$ ,  $\omega_3^*$  και  $\omega_4^*$  του συνολικού συστήματος. Επίσης συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο εύρος της απόκρισης εξαρτάται και από τη θέση του δευτερεύοντος συστήματος στο πρωτεύων σύστημα.



**Σχήμα 5.2:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύον και το δευτερεύον σύστημα για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος. ( $\omega_s=0.4\text{Hz}$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.01$ ,  $\zeta_s=0.05$ )

Παρόμοια αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο Σχήμα 5.2, όπου το μέγιστο εύρος της απόκρισης είναι αρκετά μικρότερο από αυτό του Σχήματος 5.1. Επομένως το μέγιστο εύρος της απόκρισης εξαρτάται από την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.

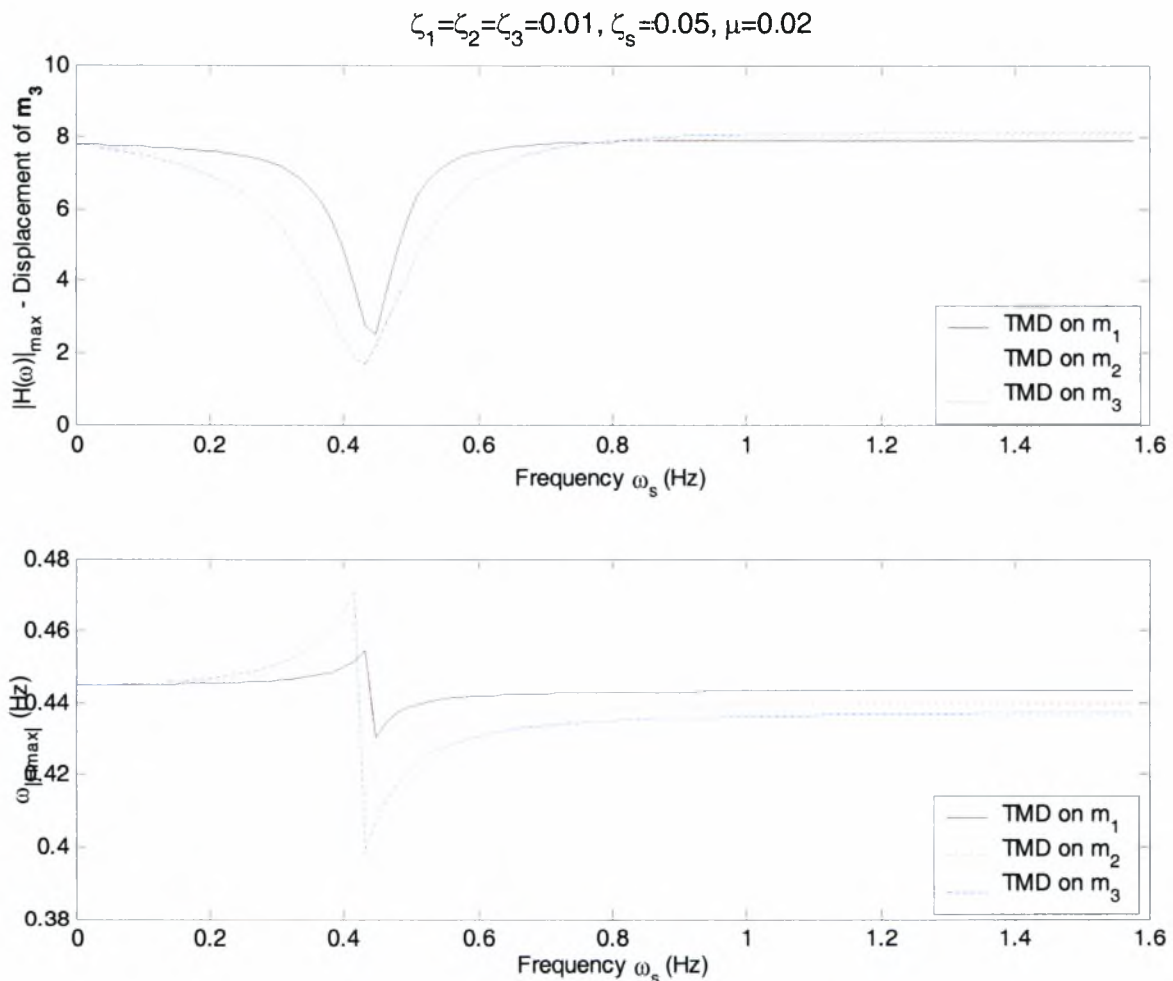
Αντίθετα, το εύρος της μάζας  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος αυξάνεται στο σχήμα 5.2, κάτι το οποίο δεν ανησυχεί αφού δεν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά αυτού του συστήματος.

Προκειμένου να βρούμε την τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  που ελαχιστοποιεί το μέγιστο της απόκρισης, καλούμε  $|H_{\max}|$  το μέγιστο του εύρους της συνάρτησης



μεταφοράς  $|H(\omega)|$ , και  $\omega_{|H_{\max}|}$  την τιμή της συχνότητας της αρμονικής διέγερσης για την οποία παρουσιάζεται αυτό το μέγιστο. Στο Σχήμα 5.1 και 5.2 αποδείχτηκε η εξάρτηση του μέγιστου εύρους  $|H_{\max}|$  και της  $\omega_{|H_{\max}|}$  από την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος.

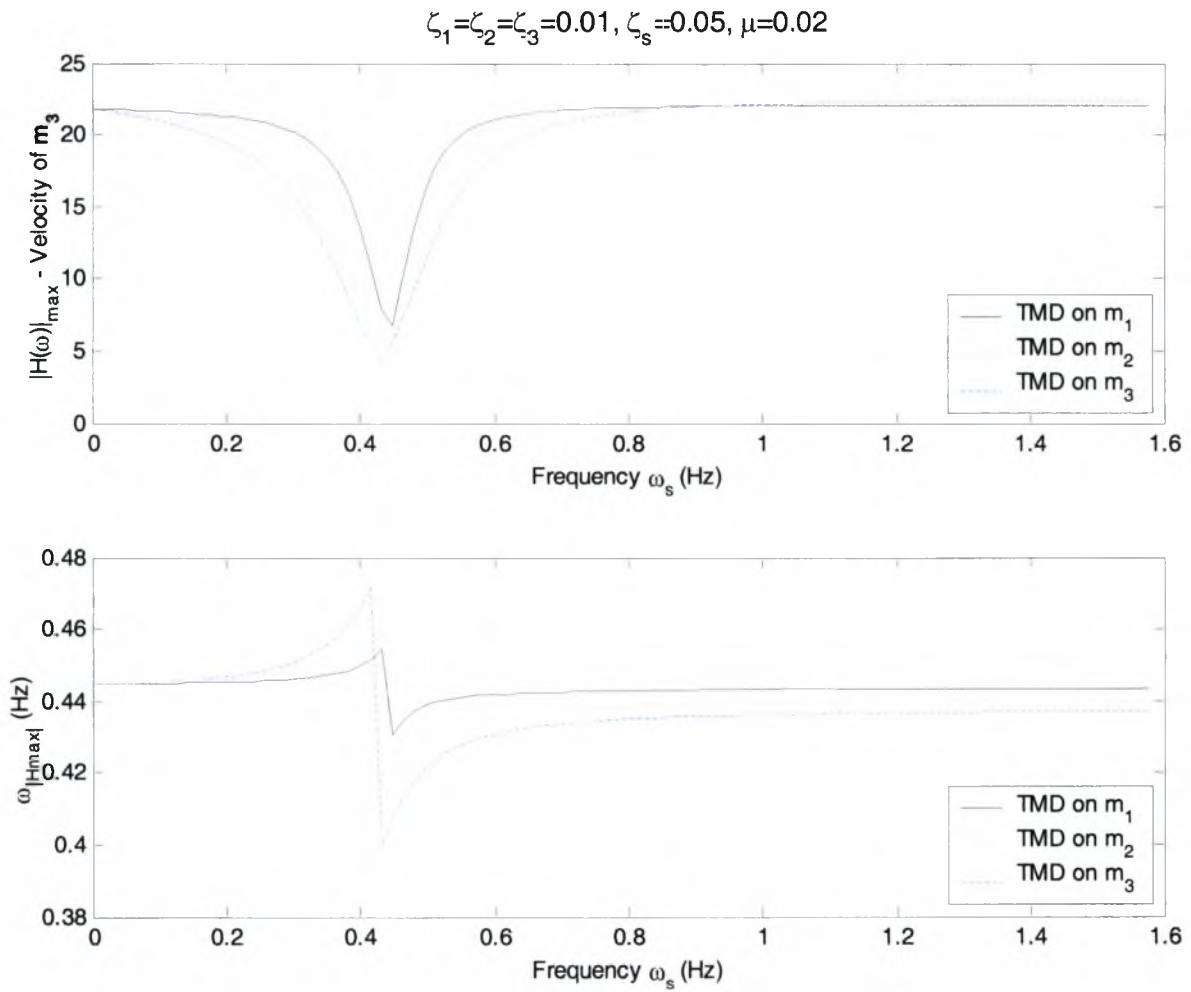
Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις  $H_{\max}(\omega_s)$  και  $\omega_{|H_{\max}|}(\omega_s)$ , για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος πάνω στο πρωτεύων σύστημα.



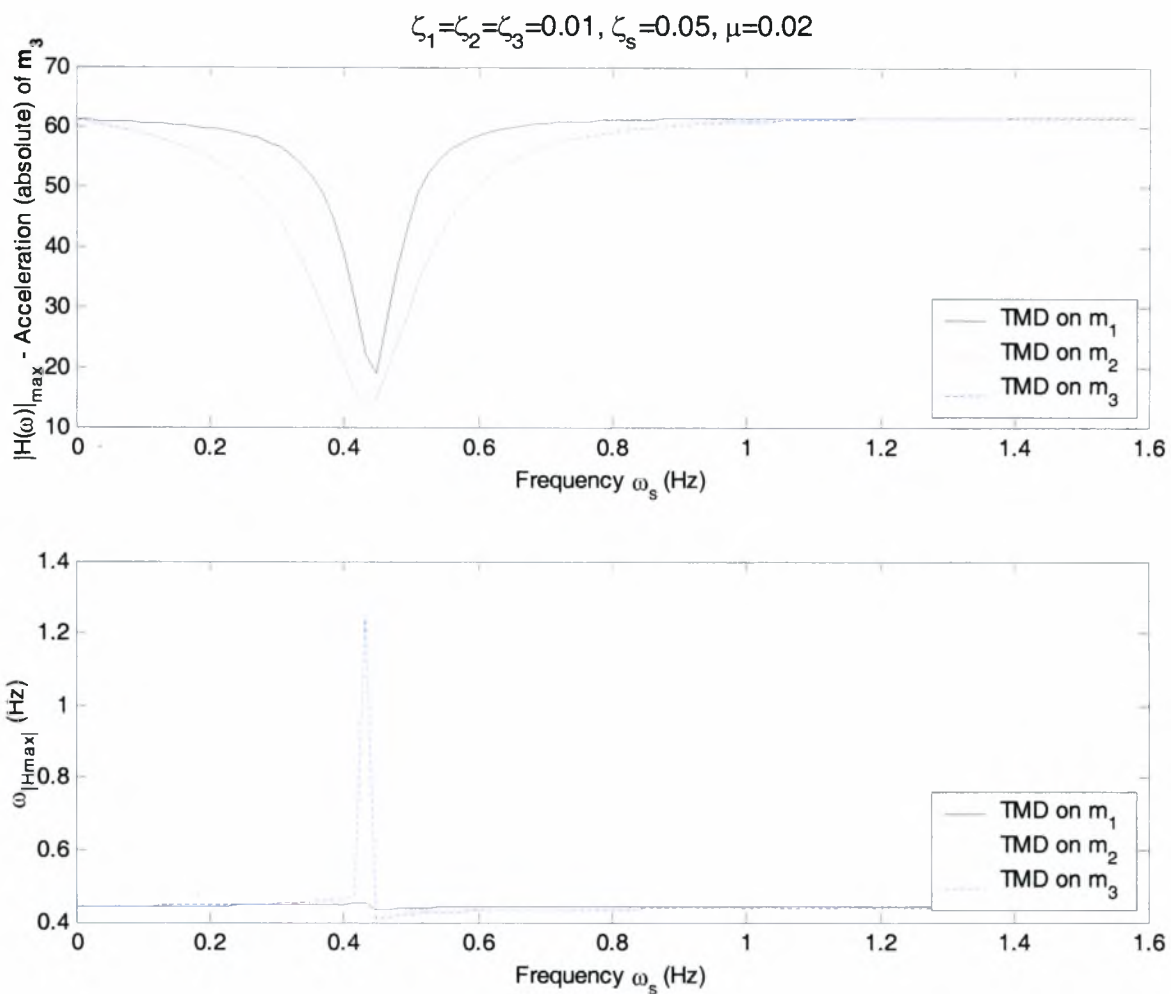
Σχήμα 5.3:  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

Εδώ είναι φανερό ότι για  $\omega_s$  περίπου κοντά στα 0.45Hz, έχουμε την ελάχιστη δυνατή τιμή του εύρους της μετατόπισης. Γνωρίζοντας τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος, διαπιστώνουμε ότι σε εκείνο το σημείο βρίσκεται η πρώτη ιδιοσυχνότητα του συστήματος, η οποία είναι τα 0.44Hz.

Παρόμοια διαγράμματα, που μας δείχνουν την τιμή του μέγιστου της  $|H(\omega)|$  συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, παρουσιάζονται και στα Σχήματα 5.4 και 5.5, για τις ταχύτητες και τις απόλυτες επιταχύνσεις αντίστοιχα.



Σχήμα 5.4:  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$



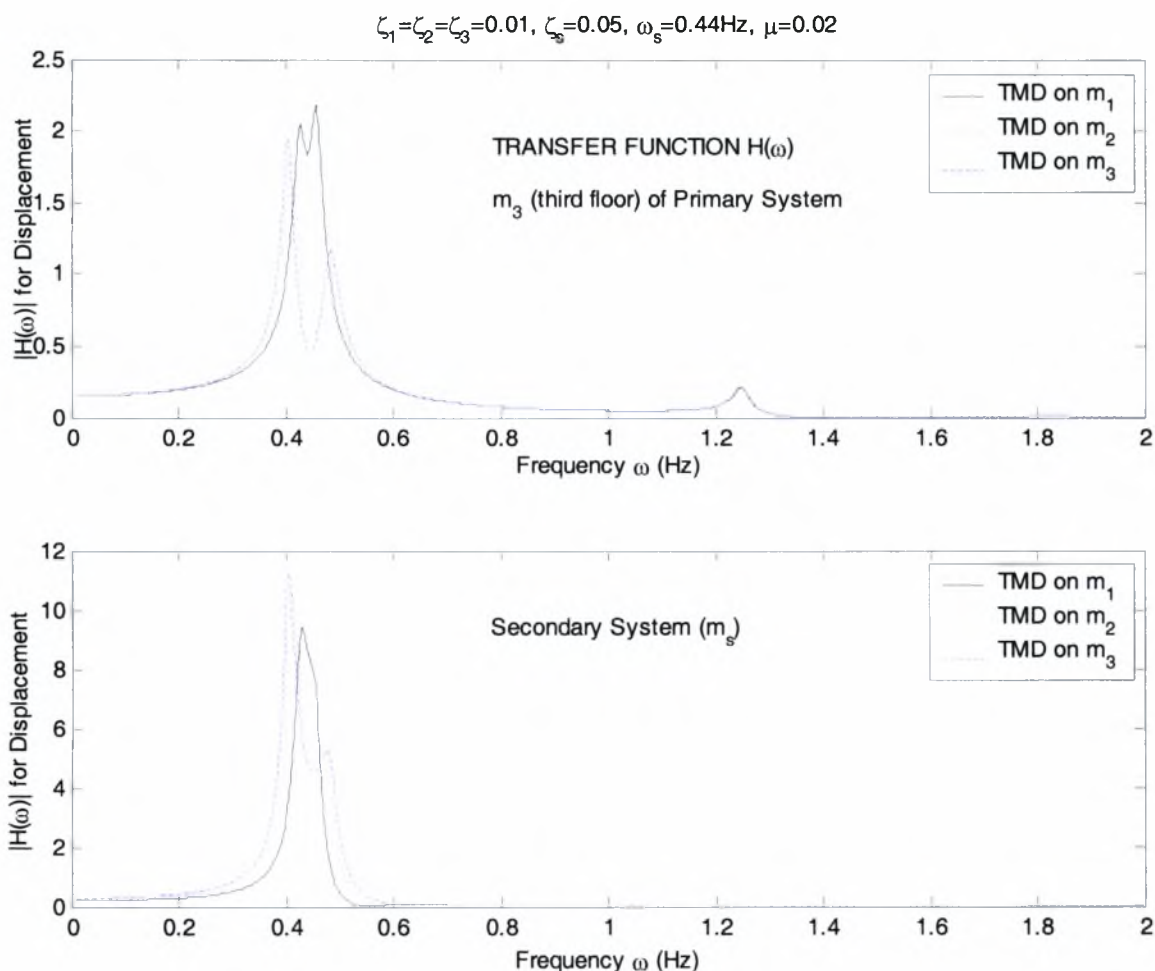
Σχήμα 5.5:  $|H_{\max}|$  και  $\omega_{|H_{\max}|}$  για διάφορες τιμές της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$

Από τα Σχήματα 5.4 και 5.5 φαίνεται ότι η μέγιστη αποτελεσματικότητα του δευτερεύοντος παθητικού συστήματος για τον έλεγχο του πρωτεύοντος συστήματος, πετυχαίνεται όταν η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα  $\omega_1$  του πρωτεύοντος συστήματος. Παράλληλα, όταν το δευτερεύον σύστημα τοποθετείται πάνω στην μάζα  $m_3$  του πρωτεύοντος συστήματος, επιτυγχάνεται καλύτερη απόκριση.

### 5.1.2 Τοπικά μέγιστα στα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς

Στη συνέχεια μελετάται η επίδραση της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος στα τοπικά μέγιστα των διαγραμμάτων των συναρτήσεων μεταφοράς. Αυτά τα μέγιστα εκδηλώνονται στις δύο περιοχές συντονισμού που αντιστοιχούν στη δεύτερη και τρίτη ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος,  $\omega_2=1.22\text{Hz}$  και  $\omega_3=1.8\text{Hz}$ .

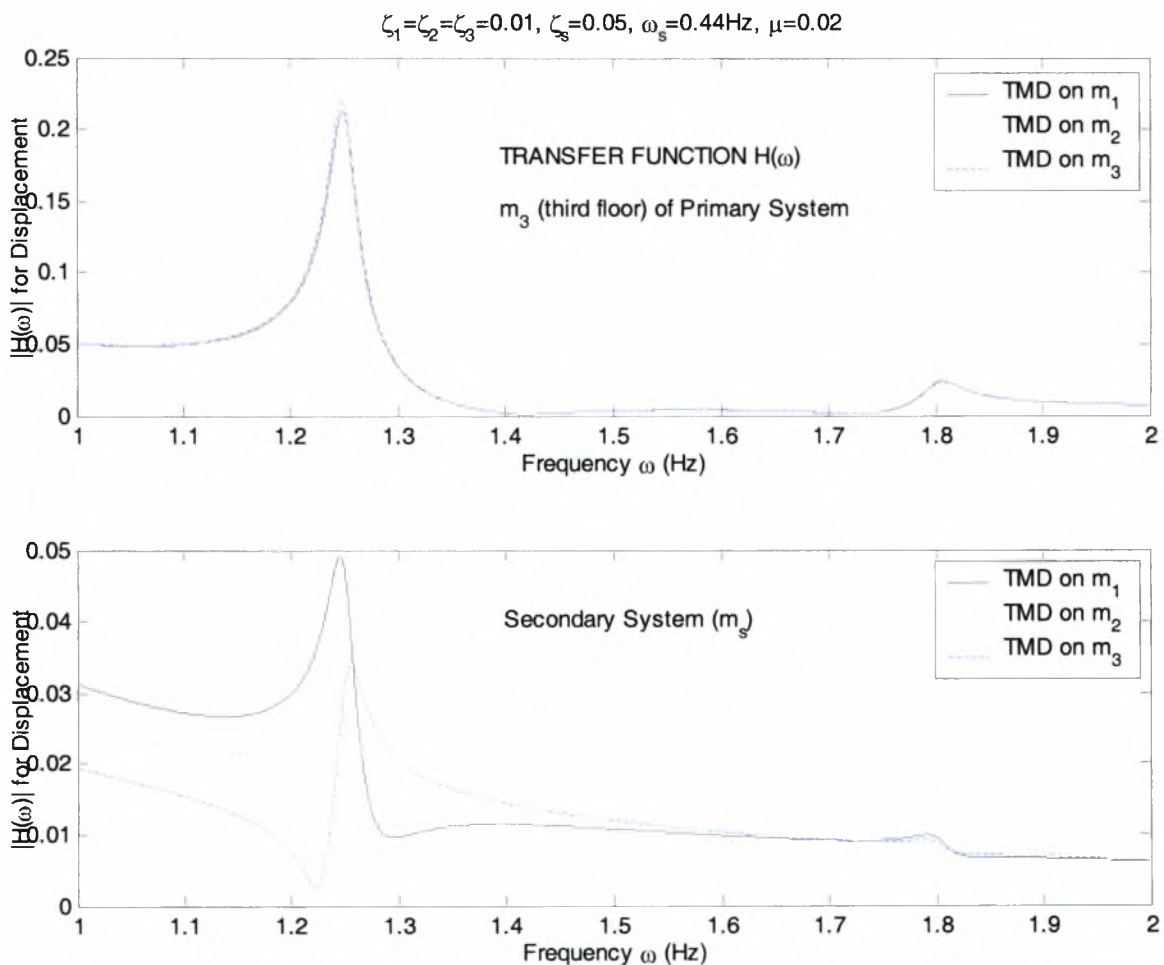
Επιλέγοντας μια τιμή για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος αρκετά μακριά από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_2$  και  $\omega_3$  του πρωτεύοντος συστήματος, δημιουργούμε στο Σχήμα 5.6 τις συναρτήσεις μεταφοράς για διάφορες θέσεις της δευτερεύουσας μάζας πάνω στο κύριο σύστημα.



Σχήμα 5.6: Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος. ( $\omega_s=0.44\text{Hz}$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.01$ ,  $\zeta_s=0.05$ )

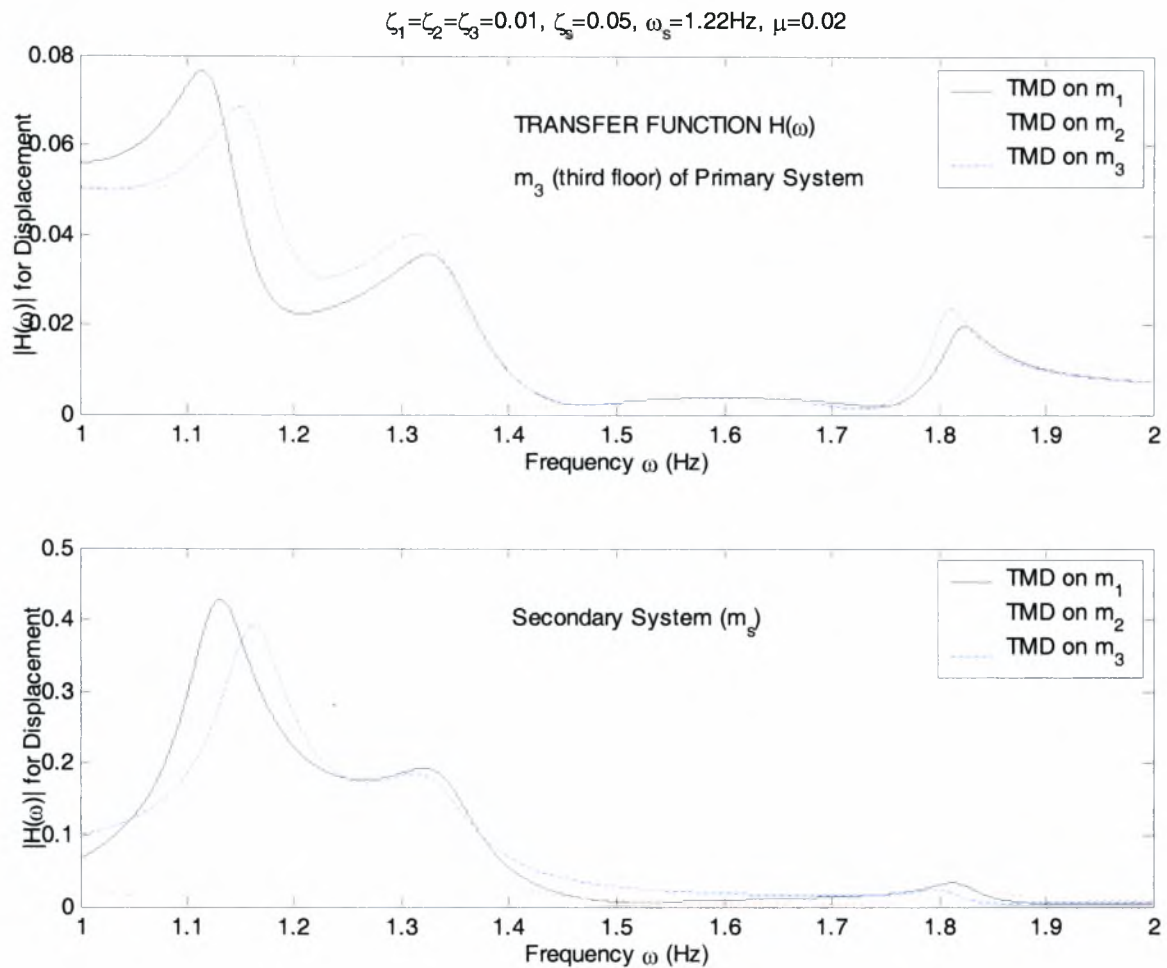
Στο Σχήμα 5.6 φαίνεται ότι για συχνότητα διέγερσης κοντά στο 1.2Hz και 1.8Hz, τείνουν να δημιουργηθούν δύο τοπικά μέγιστα. Προκειμένου να φανεί πιο καθαρά η παρουσία αυτών των τοπικών μεγίστων, εστιάζουμε στην περιοχή 1Hz έως 2Hz, και δημιουργούμε τις συναρτήσεις μεταφοράς του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος για τιμές του  $\omega_s=0.44\text{Hz}$ ,  $\omega_s=1.22\text{Hz}$  και  $\omega_s=1.8\text{Hz}$ . Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1, \omega_2$  και  $\omega_3$  του πρωτεύοντος συστήματος.

Στο Σχήμα 5.7 παριστάνεται η συνάρτηση μεταφοράς της τρίτης μάζας του πρωτεύοντος συστήματος και της μάζας  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος για  $\omega_s=0.44\text{Hz}$ .



Σχήμα 5.7: Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύον και το δευτερεύον σύστημα για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος. ( $\omega_s=0.44\text{Hz}$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.01$ ,  $\zeta_s=0.05$ ) στο διάστημα  $1\text{Hz} < \omega < 2\text{Hz}$

Προκειμένου να αναλυθεί η επίδραση της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, στην περιοχή 1Hz έως 2Hz του Σχήματος 5.7, θέτουμε  $\omega_s=1.22\text{Hz}$ , δηλαδή όσο και η δεύτερη ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος. Το εν λόγω διάγραμμα παριστάνεται στο Σχήμα 5.8.

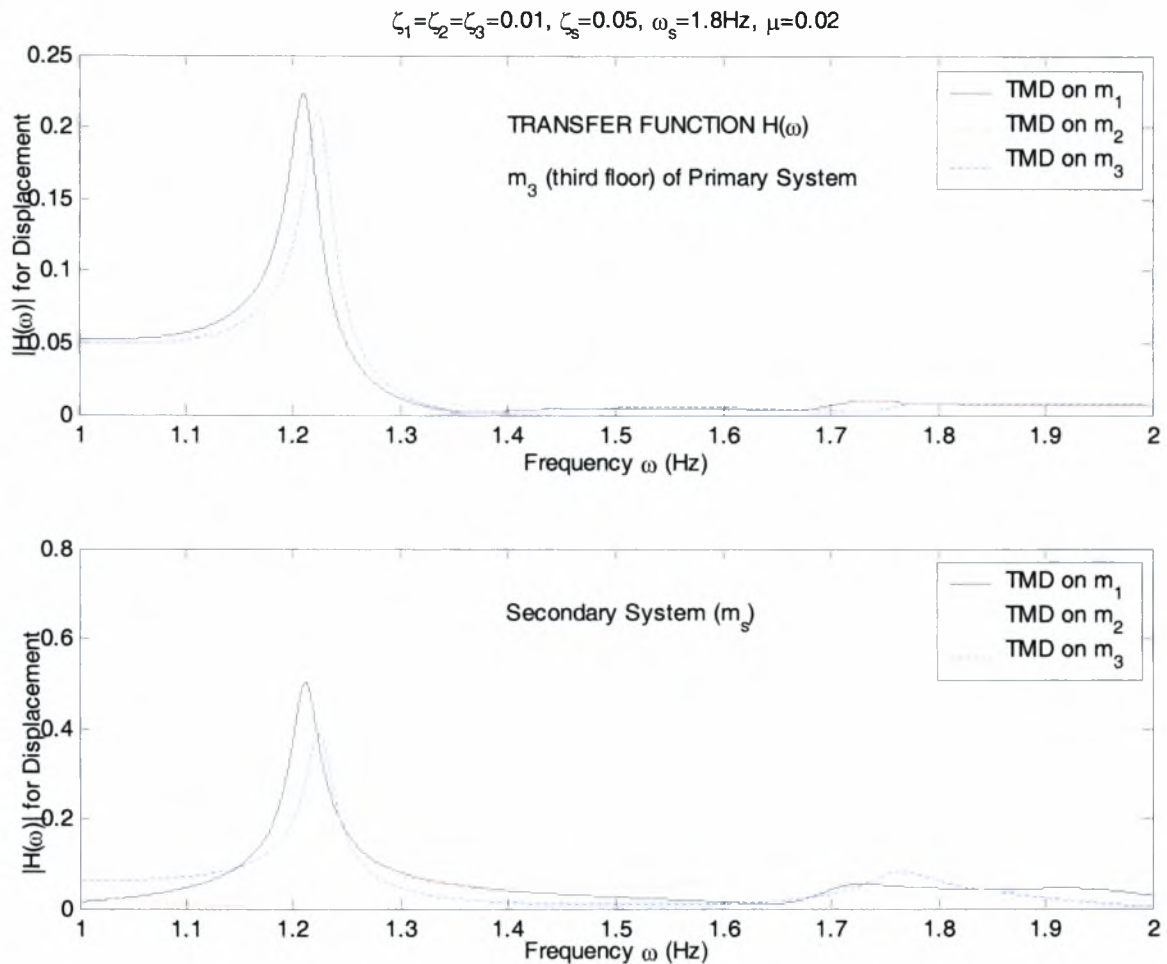


**Σχήμα 5.8:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος. ( $\omega_s=1.22\text{Hz}$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.01$ ,  $\zeta_s=0.05$ ) στο διάστημα  $1\text{Hz} > \omega > 2\text{Hz}$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.7 και 5.8, φαίνεται ότι η επιλογή του  $\omega_s=1.22\text{Hz}$ , κοντά στη δεύτερη ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος, επιτυγχάνει σημαντική μείωση του τοπικού μεγίστου του εύρους της ταλάντωσης στην περιοχή του  $\omega_2$ .



Παρακάτω, στο Σχήμα 5.9 θα θέσουμε την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος ίση με την τρίτη ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος, δηλαδή  $\omega_s = \omega_3 = 1.8\text{Hz}$ . Το αντίστοιχο διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 50.



**Σχήμα 5.9:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες θέσεις του δευτερεύοντος συστήματος. ( $\omega_s = 1.8\text{Hz}$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.01$ ,  $\zeta_s = 0.05$ ) στο διάστημα  $1\text{Hz} > \omega > 2\text{Hz}$

Συγκρίνοντας τα Σχήματα 5.7 και 5.9, φαίνεται ότι επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος ίση με  $1.8\text{Hz}$ , πετυχαίνουμε σημαντική μείωση στο τοπικό μέγιστο στην περιοχή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_3$ .



Παρόμοια αποτελέσματα με τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν αν σχεδιάσουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς των ταχυτήτων και των απόλυτων επιταχύνσεων του πρωτεύοντος και του δευτερεύοντος συστήματος. Επιλέγοντας τιμές για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, κοντά στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  και  $\omega_3$  του πρωτεύοντος συστήματος, παρατηρείται μείωση στα τοπικά μέγιστα των συναρτήσεων μεταφοράς.

Ωστόσο πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι πιο σημαντικό να μειώσουμε το ολικό μέγιστο που δημιουργείται στην περιοχή της πρώτης ιδιοσυχνότητας του πρωτεύοντος συστήματος, καθώς αυτή είναι που δημιουργεί μεγαλύτερη απόκριση σε σχέση με τις περιοχές των άλλων ιδιοσυχνοτήτων. Τα τοπικά μέγιστα που δημιουργούνται στις περιοχές των άλλων ιδιοσυχνοτήτων είναι υποπολλαπλάσια του ολικού μεγίστου που παρατηρείται στην περιοχή συντονισμού της πρώτης ιδιοσυχνότητας.

### 5.1.3 Συμπεράσματα

Μελετώντας προσεκτικά τα διαγράμματα του μηχανικού μοντέλου, τα συμπεράσματα που μπορούμε να βγάλουμε είναι παρόμοια με αυτά του μοντέλου που μελετήθηκε στο 2<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Πιο αναλυτικά

- Όταν η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  της μάζας  $m_s$  (Tuned Mass Damper) κινείται μακριά από τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος, το εύρος της απόκρισης της τρίτης μάζας δεν επηρεάζεται
- Η απόκριση των μαζών του κύριου συστήματος μπορεί να μειωθεί δραματικά, επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  της δευτερεύουσας μάζας κοντά στις ιδιοτιμές του κύριου συστήματος των n-μαζών
- Όταν η ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  της δευτερεύουσας μάζας κινείται κοντά στις ιδιοτιμές του κύριου συστήματος, η απόκριση του δευτερεύοντος συστήματος παίρνει πολλαπλάσιες τιμές από ότι σε άλλη περίπτωση

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε ο παθητικός έλεγχος ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων με παθητικό έλεγχο με προσάρτηση δευτερεύοντος συστήματος. Μέσα από την ανάλυση των μοντέλων αυτών, προέκυψαν σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των πρωτεύοντων συστημάτων.

Μέσα από τη μελέτη του μηχανικού μοντέλου με δύο βαθμούς ελευθερίας, προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

- Η επιλογή της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος παίζει καταλυτικό ρόλο στη συμπεριφορά του συστήματος. Επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος, πετυχαίνουμε δραματική μείωση στο πλάτος της απόκρισης
- Το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος, προκαλεί μείωση του εύρους των ταλαντώσεων του πρωτεύοντος συστήματος
- Όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών, η απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος μειώνεται. Ωστόσο σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος για μέγιστη αποτελεσματικότητα στον έλεγχο ταλαντώσεων, αποκλίνει από την τιμή της ιδιοσυχνότητας του πρωτεύοντος συστήματος
- Όσο αυξάνεται το μέτρο απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος, η δευτερεύουσα μάζα αδυνατεί να ελαχιστοποιήσει τις αποκρίσεις του κύριου συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται ταυτόχρονα αύξηση του μέτρου απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος

Όσον αφορά το σύστημα με τους  $n$ -βαθμούς ελευθερίας, από την ανάλυση προέκυψαν κάποια επιπλέον συμπεράσματα

- Επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος να είναι κοντά σε οποιαδήποτε από τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος,

τότε πετυχαίνουμε δραματική μείωση στο πλάτος της ταλάντωσης του πρωτεύοντος συστήματος

- Για την περίπτωση που το σύστημα περιγράφει ένα κτίριο με  $n$ -ορόφους, καλύτερη απόκριση επιτυγχάνεται στην περίπτωση όπου το δευτερεύον σύστημα τοποθετείται στους τελευταίους ορόφους του πρωτεύοντος συστήματος
- Οι ταλαντώσεις του πρωτεύοντος συστήματος μειώνονται με την αύξηση του λόγου μαζών
- Το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος προκαλεί μείωση του εύρους του πρωτεύοντος συστήματος

## Βιβλιογραφία

1. Σ. Νατσιάβας, 'Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων', Εκδόσεις Ζήτη
2. Ν. Κρικέλης, 'Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο', Εκδόσεις Συμμετρία
3. Adrian Biran & Moshe Breiner, 'MATLAB για Μηχανικούς', Εκδόσεις Τζιόλα
4. MATLAB Help, Version 6.0.0.88, Release 12, September 22, 2000
5. S. J. Dyke, B. F. Spencer, Jr., P. Quast, M. K. Sain, 'Role of Control-Structure Interaction in Protective System Design', Published in the ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121, No. 2, Feb. 1995 pp. 322–338.
6. B.F. Spencer, Jr. and Michael K. Sain, 'Controlling Buildings: A New Frontier in Feedback', Special Issue of the IEEE Control Systems Magazine on Emerging Technology, Vol. 17, No. 6, pp. 19–35, December 1997
7. B.F. Spencer, Jr., J. Suhardjo and M.K. Sain, 'Frequency Domain Optimal Control Strategies for Aseismic Protection', In Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 120, No. 1, pp. 135–159, 1994
8. B.F. Spencer, Jr., T.T. Soong, 'New applications and development of active, semi-active and hybrid control techniques for seismic and non-seismic vibration in the Usa', Proceedings of International Post-SMiRT Conference Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Active Control of Vibration of Structures Cheju, Korea, August 23-25, 1999



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074025

