

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Διπλωματική Εργασία με Θέμα:

‘ποιοτική ανάλυση της δυναμικής απόκρισης απλών διακεκριμένων συστημάτων με χρήση των απεικονίσεων Poincaré ’

ομάδα μελέτης:

Παντούσα Δάφνη
Γεωργιάδη-Στεφανίδη Κυριακή

επιβλέπων καθηγητής:

Σοφιανόπουλος Δημήτρης
δρ. πολιτικός μηχανικός

εξεταστική επιτροπή:

Μυστακίδης Ευριπίδης
Ντακούλας Παναγιώτης

βόλος 2003



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 2522/1

Ημερ. Εισ.: 12-03-2004

Δωρεά:

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ

2003

ΠΑΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000072563

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	i
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
Δυναμικά συστήματα, συμπεριφορά και χαρακτηριστικά	
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Θεωρητικό υπόβαθρο.....	1
1.2.1 Δυναμικά συστήματα.....	1
1.2.2 Συμπεριφορά σταθερής κατάστασης-οριακά σύνολα....	5
1.2.3 Απεικονίσεις Poincaré.....	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	13
Αυτόνομα διανυσματικά πεδία και περιοδικές τροχιές	
Ποιοτική ανάλυση μέσω απεικονίσεων Poincaré	
2.1 Γενικά.....	13
2.2 Περιγραφή των βημάτων ανάλυσης.....	15
2.2.1 Εύρεση σημείων ισορροπίας και σημείων διακλάδωσης.....	15
2.2.2 Τοπική ευστάθεια σημείων ισορροπίας.....	15
2.2.3 Μελέτη της καθολικής δυναμικής συμπεριφοράς.....	15
2.3 Δυναμική ανάλυση του μοντέλου Ziegler.....	16
2.3.1 Γενικά-δρόμοι ισορροπίας.....	16
2.3.2 Γραμμικοποίηση-τοπική ευστάθεια τετριμμένων ισορροπιών.....	21
2.3.3 Μελέτη της καθολικής δυναμικής συμπεριφοράς.....	31
2.3.4 Ευρήματα-συμπεράσματα	79
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	81
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	84

Εισαγωγή

Στη παρούσα Διπλωματική Εργασία, με βάση τις σπουδαιότερες αρχές της θεωρίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, παρατίθεται μια συστηματική μέθοδος – διαδικασία για τη ποιοτική ανάλυση της δυναμικής συμπεριφοράς απλών διακεκριμένων συστημάτων (με μικρό αριθμό βαθμών ελευθερίας) υπό φορτίο βήματος άπειρης διάρκειας, που συχνότατα χρησιμοποιούνται ως προσομοιώματα κατασκευών της καθημερινής πράξης, και μέσω αυτής της διαδικασίας δίδεται η δυνατότητα αναγνώρισης και κατάταξης της καθολικής δυναμικής συμπεριφοράς των σχετικών διανυσματικών πεδίων.

Δίδοντας έμφαση σε περιπτώσεις – περιοχές της φόρτισης, όπου υφίστανται μόνο ασταθείς τετριμμένοι σχηματισμοί στατικής ισορροπίας, η εργασία επικεντρώνεται στην εύρεση περιοδικών και χαοτικών τροχιών μέσω απεικονίσεων Poincarè, σε συνδυασμό με τη διαπίστωση οριακών κύκλων και πιθανής ευαίσθητης εξάρτησης σε αρχικές συνθήκες.

Η όλη ανάλυση εφαρμόζεται στη συνέχεια στο διβάθμιο προσομοίωμα ανεστραμμένου εκκρεμούς του Ziegler, υπό μη συντηρητικό μερικά εφαπτομενικό φορτίο μέσω ειδικού λογισμικού, τα δε αποτελέσματα της όλης ποιοτικής προσέγγισης βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με αυτά της σχετικής βιβλιογραφίας. Τούτο καθόσον η ύπαρξη πολλαπλών διακλαδούμενων περιοδικών τροχιών, για τιμές του φορτίου πάνω από κάποια κρίσιμη τιμή (σε συνδυασμό και με άλλους παράγοντες, όπως π.χ. η απόσβεση και η δυσκαμψία των ελατηρίων) έχειδειχθεί ότι οδηγεί από απόκριση

ευσταθών οριακών κύκλων σε χαοτικής μορφής κίνηση, φαινόμενα τα οποία αποτελούν ευρήματα και του παρόντος πονήματος.

Ο επιβλέπων και οι συντάκτριες της παρούσας ευχαριστούν θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Μηχανικής του Γενικού Τμήματος του ΕΜΠ (και Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων του Πανεπιστημίου του Illinois at Urbana Champaign) κο Αλέξανδρο Βακάκη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του και την εν γένει βοήθεια του στην ολοκλήρωση της παρούσας.

Κεφάλαιο 1 : Δυναμικά συστήματα, συμπεριφορά και χαρακτηριστικά

1.1. Εισαγωγή

Τα μη γραμμικά συστήματα διαδραμάτιζαν από παλιά σημαντικό ρόλο στη μελέτη των φυσικών φαινομένων, την τελευταία δε εικοσιπενταετία το ενδιαφέρον για την διερεύνηση και ανάλυση τέτοιων συστημάτων έχει ανανεωθεί και ιδιαίτερα ενταθεί. Ο βασικός λόγος για το γεγονός αυτό είναι η πρόσφατα αναπτυχθείσα δυνατότητα χρήσης φθηνών και ταυτόχρονα ισχυρών ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα, για τα οποία η γνώση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων επιτρέπουν την εύρεση λύσης κλειστού τύπου, ελάχιστα μη γραμμικά συστήματα διαθέτουν τέτοιου τύπου λύση, οπότε οι αριθμητικές προσομοιώσεις παίζουν κρίσιμο ρόλο στη διαδικασία εξερεύνησης και ανάλυσης μη γραμμικών φαινομένων.

Το αυξημένο ενδιαφέρον για τα μη γραμμικά φαινόμενα οφείλεται επίσης στην ανακάλυψη του χάους. Ένα από τα βασικά δόγματα της επιστήμης είναι το ότι τα λεγόμενα deterministic συστήματα είναι προβλέψιμα: αν είναι δηλαδή δεδομένες τόσο οι αρχικές συνθήκες όσο και οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα σύστημα, η συμπεριφορά του μπορεί να προβλεφθεί για κάθε χρονική στιγμή ¹. Η ανακάλυψη όμως των χαοτικών συστημάτων κατέστησε ανενεργό το δόγμα αυτό, καθόσον απλά ένα τέτοιο σύστημα χαρακτηρίζεται από τυχαία (random) συμπεριφορά, που επίσης μπορεί να λεχθεί και ως περίεργη (strange).

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η συνοπτική αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο βασίζεται η κυρίως ανάλυση της παρούσας εργασίας, το αντικείμενο της οποίας περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1.

1.2. Θεωρητικό υπόβαθρο^[5,11,15]

1.2.1. Δυναμικά συστήματα

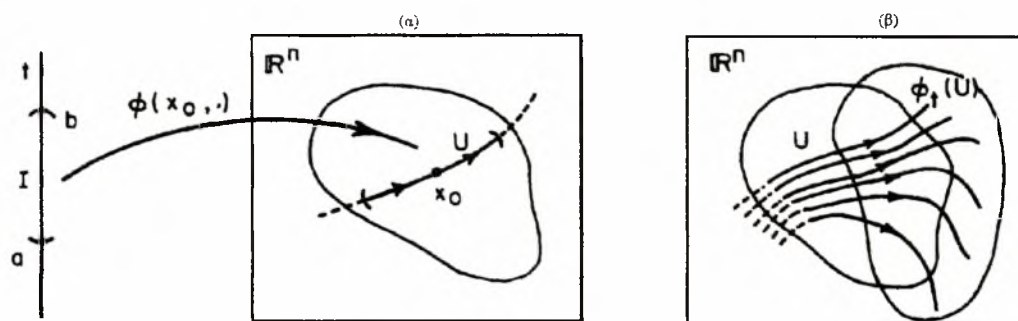
Στην υποπαράγραφο αυτή θα οριστούν τρία είδη δυναμικών συστημάτων και θα παρατεθούν χρήσιμες ιδιότητες και χαρακτηριστικά από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, που αφορούν την έρευνα των συστημάτων αυτών.

A. Αυτόνομα Δυναμικά Συστήματα

Ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα τάξης n ορίζεται από τη λεγόμενη εξίσωση κατάστασης (state equation):

$$\dot{x} = f(x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

όπου $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ είναι η κατάσταση (state) τη χρονική στιγμή t και $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται διανυσματικό πεδίο (vector field). Καθόσον αυτό δεν εξαρτάται από το χρόνο, η αρχή μέτρησης του χρόνου μπορεί πάντοτε να ληφθεί ως $t_0 = 0$. Η λύση της εξίσωσης (1) με αρχική συνθήκη x_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$ καλείται τροχιά (trajectory) ή καμπύλη λύσης (solution curve) και συμβολίζεται ως $\Phi_t(x_0)$. Η απεικόνιση $\Phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η λεγόμενη ροή (flow) του συστήματος, όπως επεξηγηματικά φαίνεται στο Σχήμα 1. Το δυναμικό σύστημα (1) είναι γραμμικό, αν η $f(x)$ είναι γραμμική.



Σχήμα 1. Τροχιά (καμπύλη λύσης) (α) και ροή (β) ενός διανυσματικού πεδίου στο \mathbb{R}^n .

B. Μη Αυτόνομα Δυναμικά Συστήματα

Ένα n τάξης μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα ορίζεται από την εξίσωση κατάστασης που ακολουθεί, η οποία μεταβάλλεται χρονικά

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Το διανυσματικό πεδίο f εξαρτάται από το χρόνο, οπότε – σε αντίθεση με τα αυτόνομα συστήματα – η αρχή μέτρησης του χρόνου δεν δύναται αυθαίρετα να τεθεί στο μηδέν. Η λύση της εξίσωσης (2), που διέρχεται από το x_0 τη χρονική στιγμή t_0 είναι η $\Phi_t(x_0, t_0)$. Το σύστημα είναι γραμμικό αν η f είναι γραμμική ως προς x .

Αν υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε $f(x, t) = f(x, t + T)$ για κάθε x και κάθε t , το σύστημα καλείται *χρονικά περιοδικό (time-periodic)* με περίοδο T , η μικρότερη δε τέτοια T ονομάζεται *ελάχιστη περίοδος (minimal period)*. Ένα n

τάξης χρονικά περιοδικό μη αυτόνομο σύστημα μπορεί πάντοτε να μετασχηματιστεί σε $(n+1)$ τάξης αυτόνομο σύστημα, με την προσθήκη μιας επιπλέον κατάστασης (μεταβλητής) $\theta := 2\pi t / T$. Το αυτόνομο αυτό σύστημα είναι της μορφής :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta T / 2\pi) & x(0) &= x_0 \\ \dot{\theta} &= 2\pi/T & \theta(0) &= 2\pi t_0 / T \end{aligned} \quad (3)$$

Καθόσον η f είναι χρονικά περιοδική με περίοδο T , το νέο σύστημα (3) είναι περιοδικό ως προς θ με περίοδο 2π . Κατά συνέπεια, τα επίπεδα $\theta = 0$ και $\theta = 2\pi$ είναι αναγνωρίσιμα και ο χώρος των καταστάσεων (state space) μετασχηματίζεται από τον Ευκλείδειο χώρο R^{n+1} στον κυλινδρικό χώρο $R^n \times S$, όπου $S := (0, 2\pi)$ ο κύκλος. Η λύση στον εν λόγω νέο χώρο δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_t(x_0, t_0) \\ \frac{2\pi t}{T} \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (4)$$

όπου η συνάρτηση *modulo* περιορίζει το $\theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($u \bmod v$ δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης u/v , π.χ. $5 \bmod 3 = 2$). Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό αυτό, αποτελέσματα που ισχύουν για αυτόνομα συστήματα μπορούν να εφαρμοστούν και για μη αυτόνομα χρονικά περιοδικά.

Ένα μη αυτόνομο μη χρονικά περιοδικό σύστημα μπορεί επίσης να μετατραπεί σε αυτόνομο με χρήση της (3) για οποιοδήποτε $T > 0$. Όμως, αναγκαστικά η λύση θα είναι πλέον μη φραγμένη (unbounded), αφού $\theta \rightarrow \infty$ όταν $t \rightarrow \infty$. Πολλά συνεπώς αποτελέσματα από την θεωρία των αυτόνομων συστημάτων περί ασυμπτωτικής συμπεριφοράς δεν θα ισχύουν.

Γ. Χρήσιμες ιδιότητες των δυναμικών συστημάτων (διανυσματικών πεδίων)

Υπάρχουν αρκετές χρήσιμες σταθερές ιδιότητες που αφορούν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσεων των διανυσματικών πεδίων. Ακριβείς ορισμοί, αποδείξεις και εφαρμογές των σχετικών θεωρημάτων μπορεί κανείς να βρει σε οποιοδήποτε βιβλίο περί διαφορικών εξισώσεων^[6].

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας υποθέτουμε ότι για κάθε πεπερασμένο t , η Φ_t είναι ένας διαφορομορφισμός. Μια συνάρτηση f είναι διαφορομορφισμός (diffeomorphism) αν υπάρχει η f^{-1} και επίσης αμφότερες οι Df και Df^{-1} υπάρχουν και είναι συνεχείς. Πρόκειται για μη περιοριστική

υπόθεση, η οποία ισχύει για διανυσματικά πεδία που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά φυσικών (πραγματικών) συστημάτων ή προσομοιωμάτων τους και έχει τις ακόλουθες συνέπειες:

$$i) \quad \Phi_t(x) = \Phi_t(y) \quad \text{όταν και μόνο όταν} \quad x = y, \text{ δηλαδή οι τροχιές}$$

αυτόνομων συστημάτων ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο από την αρχική τους συνθήκη.

$$ii) \quad \Phi_t(x, t_0) = \Phi_t(y, t_0) \quad \text{όταν και μόνο όταν} \quad x = y. \text{ Τούτο}$$

σημαίνει ότι δεδομένης της αρχής του χρόνου, η τροχιά ενός μη αυτόνομου συστήματος καθορίζεται μοναδικά από την αρχική κατάσταση. Όμως, αν $t_0 \neq t_1$, είναι πιθανό να ισχύει ότι $\Phi_t(x, t_0) = \Phi_t(y, t_1)$ με $x \neq y$ που υποδηλώνει ότι, σε αντίθεση με τα αυτόνομα συστήματα, τροχιές μη αυτόνομων συστημάτων μπορεί να τέμνονται.

$$iii) \quad \text{Η παράγωγος της τροχιάς ως προς την αρχική συνθήκη υπάρχει}$$

και είναι ομαλή, με αποτέλεσμα για δεδομένα t και t_0 η $\Phi_t(x_0, t_0)$ να είναι συνεχής ως προς την αρχική αυτή συνθήκη (για τον ακριβή ορισμό της τροχιακής παραγώγου ισχύει ότι $L_t f \equiv \nabla f \bullet \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \dot{x}_n$ για την γενική περίπτωση όπου $f: R^{n+1} \rightarrow R^n, f(x, t)$).

Δ. Χρονικά διακεκριμένα δυναμικά συστήματα

Κάθε απεικόνιση $f: R^n \rightarrow R^n$ ορίζει ένα χρονικά διακεκριμένο δυναμικό σύστημα, μέσω της εξίσωσης κατάστασης που ακολουθεί:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Με αρχική συνθήκη x_0 , επαναλαμβανόμενες εφαρμογές της απεικόνισης f οδηγούν στη δημιουργία μιας αλληλουχίας σημείων $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, που αποτελούν την τροχιά (orbit) του χρονικά διακεκριμένου συστήματος.

Η μελέτη των χαρακτηριστικών και της ευστάθειας απεικονίσεων θα απασχολήσει στη συνέχεια το περιεχόμενο του παρόντος πονήματος για δύο βασικούς λόγους. Ο πρώτος είναι η συστηματική δημιουργία και μελέτη των απεικονίσεων Poincaré, που αποτελεί το κύριο αντικείμενο της εργασίας, καθόσον μέσω αυτού δίνεται η δυνατότητα μείωσης της διάστασης του προβλήματος, και η μελέτη της ροής ενός διανυσματικού πεδίου (χρονικά συνεχούς) αντικαθίσταται με

την μελέτη και ανάλυση της δομής της σχετικής απεικόνισης (χρονικά διακεκριμένης και χαμηλότερης διάστασης). Ο δεύτερος λόγος είναι το γεγονός δυνατότητας αντιστοίχισης μεταξύ ροών και απεικονίσεων, που έχει σαν συνέπεια την εύκολη σύλληψη και γραφική παρουσίαση - επιβεβαίωση ύπαρξης σπουδαίων ποιοτικών χαρακτηριστικών των υπό εξέταση διανυσματικών πεδίων, χωρίς την ανάγκη επίλυσης των συνηθέστατα έντονα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη ροή- κίνηση.

1.2.2. Συμπεριφορά σταθερής κατάστασης - οριακά σύνολα (Steady-state behavior - limit sets)

Στην παρούσα υποπαράγραφο παρατίθεται μια κατάταξη των δυναμικών συστημάτων σύμφωνα με τις λύσεις σταθεράς κατάστασης (steady-state solutions) και τα οριακά τους σύνολα (limit sets). Κατ' αρχήν, ως σταθερή κατάσταση θεωρείται η ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $t \rightarrow \infty$ και απαιτείται κάθε μια από αυτές να είναι φραγμένη. Η διαφορά μεταξύ της λύσης και της σταθερής της κατάστασης ονομάζεται παροδική (transient). Ένα σημείο y αποτελεί οριακό σημείο του x αν, για κάθε γειτονιά U του y , η $\Phi_t(x)$ εισέρχεται επαναλαμβανόμενα στο U καθώς $t \rightarrow \infty$. Το σύνολο όλων των οριακών σημείων του x είναι το λεγόμενο οριακό σύνολο $L(x)$ του x . Τα οριακά σύνολα είναι κλειστά και αμετάβλητα υπό την Φ_t , δηλαδή για κάθε $x \in L$ και για κάθε t , $\Phi_t(x) \in L$. Ένα οριακό σύνολο L θεωρείται *ελκτικό (attracting)* αν υφίσταται μια ανοιχτή γειτονιά U του L τέτοια ώστε $L(x) = L$ για όλα τα $x \in U$. Η *λεκάνη έλξης (basin of attraction)* $B(L)$ ενός ελκτικού συνόλου L ορίζεται ως η ένωση όλων αυτών των γειτονιών U . Κάθε τροχιά που ξεκινά μέσα στο $B(L)$ τείνει προς το L για $t \rightarrow \infty$.

Για ένα τυπικό μη γραμμικό σύστημα μπορεί να υπάρξουν διάφορα οριακά σύνολα, το καθένα με διαφορετική λεκάνη έλξης, στο ποια δε από αυτές η κίνηση θα καταλήξει εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Σημειωτέον ότι τα ελκτικά οριακά σύνολα έχουν μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς μη ελκτικά οριακά σύνολα δεν εμφανίζονται ούτε σε φυσικά (πραγματικά) συστήματα ούτε σε προσομοιώματα.

Υπάρχουν βασικά τέσσερα είδη συμπεριφοράς σταθερής κατάστασης στα δυναμικά συστήματα, στα οποία αναφερόμαστε σε ότι ακολουθεί:

A. Σημεία ισορροπίας (equilibrium, fixed points)

Ένα σημείο ισορροπίας x_{eq} ενός αυτόνομου συστήματος (ένα μη αυτόνομο σύστημα τυπικά στερείται σημείων ισορροπίας καθώς το διανυσματικό πεδίο μεταβάλλεται χρονικά) είναι μια σταθερή λύση της εξίσωσης (1), $\Phi_t(x_{eq}) = x_{eq}$ για όλα τα t . Σε ένα σημείο ισορροπίας το διανυσματικό πεδίο μηδενίζεται, δηλαδή αν $f(\bar{x}) = 0$, τούτο σημαίνει ότι το \bar{x} είναι σημείο ισορροπίας. Το οριακό σύνολο ενός σημείου ισορροπίας είναι το ίδιο το σημείο.

B. Περιοδικές λύσεις (periodic solutions)

Η $\Phi_t(x^*, t_0)$ είναι μια περιοδική λύση, εφόσον ισχύει ότι:

$$\Phi_t(x^*, t_0) = \Phi_{t+T'}(x^*, t_0) \quad (6)$$

για όλους τους χρόνους t και για κάποια ελάχιστη περίοδο $T' > 0$.

Μια περιοδική λύση διαθέτει ένα μετασχηματισμό Fourier, ο οποίος αποτελείται από ένα θεμελιώδες στοιχείο για $f = 1/T'$ και ομοιόμορφα κατανεμημένες αρμονικές (evenly spaced harmonics) για k/T' , $k = 2, 3, \dots$ με εύρος μερικών από αυτές πιθανά ίσο με μηδέν.

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον σε αυτόνομα συστήματα, μια απομονωμένη (isolated) περιοδική λύση (μια περιοδική λύση θεωρείται απομονωμένη αν υπάρχει μια γειτονιά της όπου δεν υπάρχουν άλλες περιοδικές λύσεις), είναι ο λεγόμενος οριακός κύκλος (limit cycle), που αποτελεί μια σταθερού εύρους ταλάντωση και δεν μπορεί να εμφανιστεί σε γραμμικά συστήματα.

Το οριακό σύνολο που αντιστοιχεί σε έναν οριακό κύκλο είναι η κλειστή καμπύλη που προκύπτει μέσω της $\Phi_t(x^*)$ για μια περίοδο και αποτελεί ένα διαφορομορφικό αντίγραφο του κύκλου.

Γ. Σχεδόν περιοδικές λύσεις (quasi-periodic solutions)

Μια τέτοιου είδους λύση δύναται να γραφεί ως το άθροισμα περιοδικών μορφών:

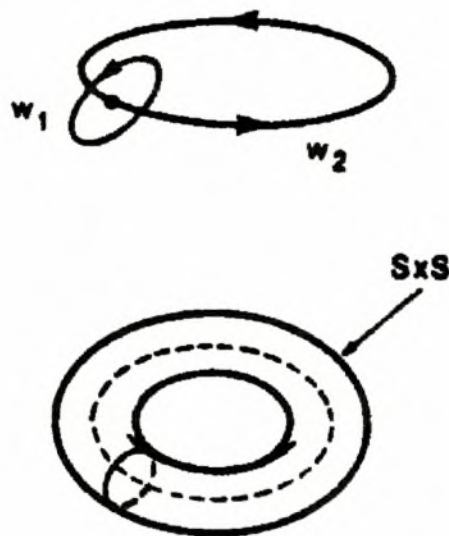
$$x(t) = \sum_i h_i(t) \quad (7)$$

όπου κάθε συνάρτηση h_i διαθέτει μια ελάχιστη περίοδο T_i και συχνότητα $f_i = 1/T_i$.

Επιπρόσθετα, υφίσταται ένα πεπερασμένο σύνολο βασικών συχνοτήτων (base frequencies) $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_p\}$ με τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

i) Είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή δεν υπάρχει ένα μη μηδενικό σύνολο ακεραίων $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ τέτοιο ώστε $k_1 \bar{f}_1 + k_2 \bar{f}_2 + \dots + k_p \bar{f}_p = 0$.

ii) Δημιουργεί ένα πεπερασμένο ολοκληρωτικό σύνολο για τις f_i δηλαδή ισχύει για κάθε i : $f_i = k_1 \bar{f}_1 + k_2 \bar{f}_2 + \dots + k_p \bar{f}_p$ για κάποιους ακέραιους αριθμούς $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$. Διευκρινιστικά, μια σχεδόν περιοδική κυματομορφή (waveform) : $t, x(t)$ είναι το άθροισμα περιοδικών κυματομορφών, η συχνότητα κάθε μιας των οποίων είναι μία από το αποτέλεσμα αθροισμάτων ή διαφορών κάποιων βασικών συχνοτήτων. Σημειωτέον ότι οι βασικές συχνότητες δεν είναι μοναδικά ορισμένες, σε αντίθεση με το πλήθος τους p . Μια σχεδόν περιοδική λύση με p βασικές συχνότητες καλείται p -περιοδική. Για $p=2$, η σχετική τροχιά βρίσκεται μέσα σε ένα διαφορομορφικό αντίγραφο του 2-τόρου $S \times S$, σύμφωνα με το Σχήμα 2, όπου κάθε S αναπαριστά μία από τις βασικές συχνότητες. Ο εν λόγω τόρος είναι το οριακό σύνολο της εν λόγω σχεδόν περιοδικής συμπεριφοράς. Γενικότερα, το οριακό σύνολο μιας p -περιοδικής τροχιάς είναι ένα διαφορομορφικό αντίγραφο ενός p -τόρου.



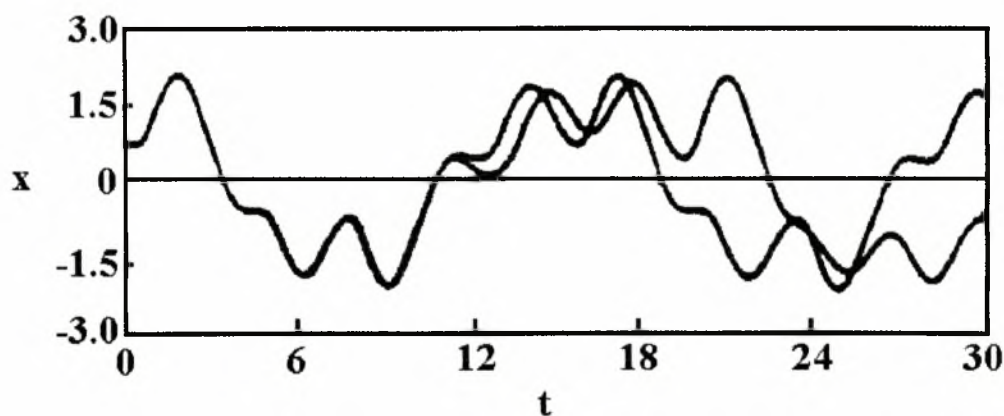
Σχήμα 2. Δύο-περιοδική συμπεριφορά ευρισκόμενη επί ενός 2-τόρου $S \times S$. Κάθε S αναπαριστά ένα περιοδικό συστατικό.

4. Χάος^[9]

Δεν υπάρχει κάποιος γενικά αποδεκτός ορισμός του χάους. Από μια πρακτική οπτική γωνία πάντως, σαν χάος μπορεί να ορισθεί ως τίποτα από τα παραπάνω Α, Β, Γ, δηλαδή ως φραγμένη συμπεριφορά σταθερής κατάστασης η οποία δεν είναι ούτε σημείο ισορροπίας, ούτε περιοδική, ούτε σχεδόν περιοδική. Καθόσον περαιτέρω αναφορά στο θέμα βρίσκεται εκτός των σκοπών της παρούσας εργασίας, θα αναφερθούν μόνο δύο σπουδαιότερες χαρακτηριστικές ιδιότητες των χαοτικών συστημάτων.

i) Το οριακό σύνολο μιας χαοτικής συμπεριφοράς δεν είναι ένα απλό γεωμετρικό αντικείμενο, όπως ένας κύκλος ή ένας τόρος, αλλά σχετίζεται με περίπλοκα υπεργεωμετρικά σύνολα cantor ή fractals.

ii) Τα χαοτικά συστήματα έχουν *ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες* (*sensitive dependence on initial conditions*), μια ιδιότητα που ποιοτικά τουλάχιστον καθιστά την αναγνώριση τους ευκολότερα προσεγγίσιμη. Συγκεκριμένα, αν δοθούν δύο αρχικές συνθήκες οι οποίες βρίσκονται αυθαίρετα κοντά η μία με την άλλη, οι τροχιές που ξεκινούν από τα σημεία αυτά αποκλίνουν (με ρυθμό που εξαρτάται από το εκάστοτε σύστημα) μέχρι, για όλους τους πρακτικούς σκοπούς, να πάψει να υπάρχει ο παραμικρός συσχετισμός μεταξύ τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα δύο τέτοιων τροχιών φαίνεται στο Σχήμα 3, που αναφέρεται σε ένα τρίτης τάξης αυτόνομο σύστημα.



Σχήμα 3. Δύο τροχιές σχεδιασμένες συναρτήσει του χρόνου t , που εμφανίζουν ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες (σε ένα τρίτης τάξης αυτόνομο σύστημα).

Στην πράξη, η αρχική κατάσταση ενός συστήματος δεν μπορεί ποτέ να καθοριστεί επακριβώς, παρά μόνο με κάποια ανοχή $\varepsilon > 0$. Αν δύο αρχικές συνθήκες x_0 και

\hat{x}_0 είναι γειτονικές εντός της ανοχής αυτής, δεν είναι ευδιάκριτες (φαίνονται ως μία). Παρά ταύτα, μετά την πάροδο πεπερασμένου χρόνου t , οι $\Phi_t(x_0)$ και $\Phi_t(\hat{x}_0)$ θα αποκλίνουν και τελικά θα αποσυσχετισθούν. Συνεπώς, ανεξάρτητα από το πόσο ακριβώς είναι γνωστή η αρχική συνθήκη, η απόκριση σε μεγάλο χρόνο (long term) του χαοτικού συστήματος δεν μπορεί ποτέ να προβλεφθεί.

1.2.3. Απεικονίσεις Poincaré

A. Γενικές επισημάνσεις

Μία κλασσική τεχνική για την ανάλυση δυναμικών συστημάτων οφείλεται στον Poincaré^[12]. Αντικαθιστά τη ροή ενός χρονικά συνεχούς διανυσματικού συστήματος (διανυσματικού πεδίου) με μία απεικόνιση, που καλείται απεικόνιση Poincaré. Η τεχνική αυτή προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα στη μελέτη αυτόνομων (αλλά και μη αυτόνομων) διανυσματικών πεδίων, συμπεριλαμβανομένων και των ακολούθων:

i) Μείωση διαστάσεων: Η δημιουργία μιας απεικόνισης Poincaré σχετίζεται με την απαλοιφή τουλάχιστον μιας από τις μεταβλητές του προβλήματος, με αποτέλεσμα να χρειάζεται πλέον η μελέτη ενός συστήματος μικρότερης διάστασης (τάξης).

ii) Καθολική δυναμική συμπεριφορά: Σε προβλήματα χαμηλών διαστάσεων (≤ 4) οι απεικονίσεις Poincaré, υπολογιζόμενες αριθμητικά, προσφέρουν μια εντυπωσιακή και συγχρόνως άκρως κατατοπιστική επίδειξη της καθολικής δυναμικής συμπεριφοράς ενός συστήματος.

iii) Καθαρότητα αντίληψης (conceptual clarity): Πολλές ιδιότητες ενός διανυσματικού πεδίου πολλές φορές είναι εξαιρετικά δυσχερές να γίνουν αντιληπτές, ενώ μέσω των απεικονίσεων Poincaré γίνονται άμεσα αναγνωρίσιμες. Ενδεικτικά αναφέρεται η έννοια της τροχιακής ευστάθειας μιας περιοδικής λύσης ενός διανυσματικού πεδίου. Με όρους απεικόνισης Poincaré, το πρόβλημα αυτό ανάγεται στο πρόβλημα προσδιορισμού της ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας της απεικόνισης, που επιτυγχάνεται εύκολα με τη μελέτη των ιδιοτιμών της γραμμικοποιημένης απεικόνισης περί το εν λόγω σημείο ισορροπίας.

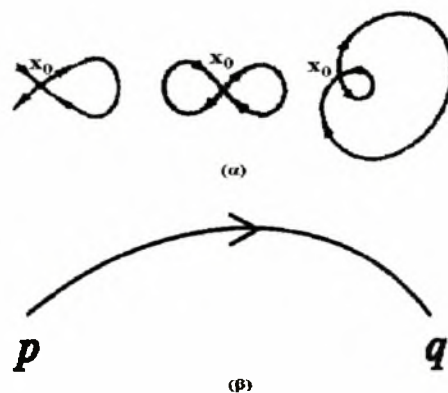
Θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο αν υπήρχε η δυνατότητα εύρεσης μεθόδων για τη δημιουργία απεικονίσεων Poincaré για οποιοδήποτε είδος διανυσματικού πεδίου. Δυστυχώς, δεν υπάρχουν γενικές μέθοδοι, αφού η δημιουργία

απεικόνισης Poincaré απαιτεί κάποια γνώση της γεωμετρικής δομής του χώρου φάσης, οπότε απαιτείται ιδιαίτερος χειρισμός ανάλογα με το υπό εξέταση πρόβλημα. Πάντως, για τρεις περιπτώσεις, οι οποίες εμφανίζονται συχνά και εκ των οποίων η πρώτη αποτελεί το κυρίως αντικείμενο της παρούσας εργασίας (Κεφάλαια 3 και 4), η δημιουργία ενός συγκεκριμένου τύπου απεικόνισης Poincaré μπορεί με την ευρεία έννοια του όρου να λεχθεί ως κανονική διαδικασία. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις είναι:

1. Μελέτη της δομής των τροχιών κοντά σε μία περιοδική τροχιά ενός αυτόνομου διανυσματικού πεδίου.
2. Όπου ο χώρος φάσης είναι περιοδικός, συνήθως σε περιπτώσεις περιοδικά εξαναγκασμένων ταλαντωτών (μη αυτόνομα συστήματα) και
3. Μελέτη της δομής των τροχιών κοντά σε μία ομοκλινική ή ετεροκλινική τροχιά^[2,4,10]. Εξ ορισμού ένα σημείο ισορροπίας x_0 του διανυσματικού πεδίου (1), $f(x_0) = 0$, είναι υπερβολικό αν όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου $Df(x_0)$ του γραμμικοποιημένου συστήματος έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος, είναι δε και ένα στοιχειώδες σημείο σέλας (saddle point) αν επιπρόσθετα ισχύει ότι $Df(x) \Big|_{x=x_0} < 0$. Αν p, q είναι δύο υπερβολικά σημεία ισορροπίας του διανυσματικού πεδίου (1) τότε:

- Μια τροχιά $S_p : x = x(t)$ του (1) καλείται *ομοκλινική* ως προς το p αν $x(t) \rightarrow p$ όταν $t \rightarrow \pm\infty$.
- Μια τροχιά $S_{pq} : x = x(t)$ του (1) καλείται *ετεροκλινική* ως προς p, q αν $x(t) \rightarrow p$ για $t \rightarrow -\infty$ και $x(t) \rightarrow q$ για $t \rightarrow +\infty$.

Γεωμετρική αναπαράσταση τέτοιων τροχιών φαίνεται στο Σχήμα 4(α,β) που ακολουθεί.



Σχήμα 4. Ομοκλινικές (α) και ετεροκλινικές (β) τροχιές.

B. Απεικόνιση Poincaré στη γειτονιά μιας περιοδικής τροχιάς

Θεωρούμε ένα αυτόνομο διανυσματικό πεδίο, που χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση

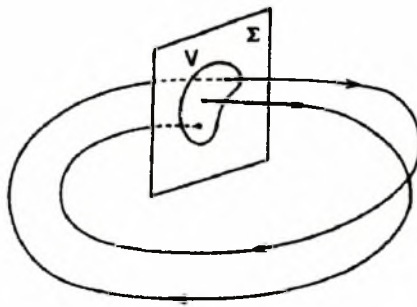
$$\dot{x} = f(x) \quad x \in R^n \quad (8)$$

όπου $f: U \rightarrow R^n$ είναι C^r (C^r : συνεχής και με συνεχείς παραγώγους μέχρι την τάξη r) σε κάποιο ανοιχτό σύνολο $U \subset R^n$. Έστω $\Phi(t, \cdot)$ η ροή που παράγεται από τη (8) και ας υποθεθεί ότι αυτή έχει μία περιοδική λύση με περίοδο T , την $\Phi(t, x_0)$, όπου $x_0 \in R^n$ οποιοδήποτε σημείο από το οποίο διέρχεται αυτή η περιοδική λύση, δηλαδή $\Phi(t+T, x_0) = \Phi(t, x_0)$. Έστω επίσης Σ μια επιφάνεια διάστασης $n-1$ εγκάρσια στο διανυσματικό πεδίο στο σημείο x_0 (με την έννοια μη εφαπτόμενη), την οποία ονομάζουμε *διατομή του διανυσματικού πεδίου*. Εφόσον η $f(x)$ είναι C^r , αποδεικνύεται ότι και η $\Phi(t, x)$ είναι επίσης C^r , οπότε μπορεί κανείς να βρει ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \Sigma$ τέτοιο ώστε *τροχιές που ξεκινούν από το V επιστρέφουν στο Σ σε χρόνο περίπου ίσο με T* . **Η απεικόνιση που συσχετίζει σημεία του V με τα σημεία πρώτης επιστροφής στο Σ είναι η απεικόνιση Poincaré P :**

$$P: V \rightarrow \Sigma, \quad x \mapsto \Phi(\tau(x), x) \quad (9)$$

όπου $\tau(x)$ είναι ο χρόνος της πρώτης επιστροφής του σημείου x στο Σ . Σημειωτέον ότι εκ κατασκευής $\tau(x_0) = T$ και $P(x_0) = x_0$.

Κατά συνέπεια, *ένα σημείο ισορροπίας της P αντιστοιχεί σε μια περιοδική τροχιά του (8) και ένα σημείο της P περιόδου k (δηλαδή ένα σημείο $x \in V$ τέτοιο ώστε $P^k(x) = x$, με την προϋπόθεση ότι $P^i(x) \in V, i = 1, \dots, k$) αντιστοιχεί σε μια περιοδική τροχιά του (8) η οποία πριν κλείσει διαπερνά το Σ k φορές, σύμφωνα με το Σχήμα 5.*



Σχήμα 5. Γραφική αναπαράσταση απεικόνισης Poincaré στη γειτονιά περιοδικής λύσης

Ο παραπάνω ορισμός είναι ο καθιερωμένος από τη γενική θεωρία των δυναμικών συστημάτων, αλλά συχνά αποδεικνύεται μη πρακτικός γιατί απαιτεί προχωρημένη γνώση της θέσης της περιοδικής τροχιάς. Συνήθως επιλέγεται ένα υπερ-επίπεδο $n-1$ διαστάσεων της μορφής:

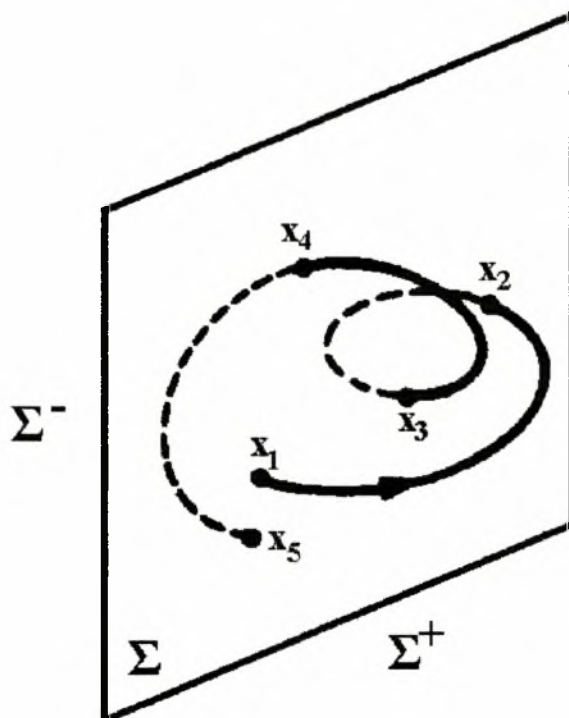
$$\Sigma := \{x : h^T(x - x_\Sigma) = 0\} \quad (10)$$

όπου h ένα διάνυσμα κάθετο στο Σ και x_Σ κάποιο σημείο του Σ . Το εν λόγω υπερ-επίπεδο διαιρεί το χώρο φάσης σε δύο περιοχές

$$\Sigma^+ := \{x : h^T(x - x_\Sigma) > 0\} \quad \text{και} \quad (11\alpha)$$

$$\Sigma^- := \{x : h^T(x - x_\Sigma) < 0\} \quad (11\beta)$$

Αν έχει γίνει κατάλληλη επιλογή του Σ , η τροχιά επανειλημμένα διαπερνά το Σ , από το Σ^- προς το Σ^+ και ξανά προς το Σ^- κ.ο.κ. Η σειρά τομών από το Σ^- προς το Σ^+ ορίζουν μία απεικόνιση, όπως άλλωστε και η σειρά τομών από το Σ^+ προς το Σ^- . Οι εν λόγω απεικονίσεις καλούνται μονόπλευρες (one-sided) απεικονίσεις Poincaré, καθόσον οι τομές που ενδιαφέρουν προέρχονται από τη μία πλευρά του Σ . Το σύνολο των σημείων τομής, ανεξάρτητα της διεύθυνσης, ορίζει μία αμφίπλευρη (two-sided) απεικόνιση Poincaré, όπως φαίνεται καθαρά στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6. Μονόπλευρη $\{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ $\Sigma^- - \Sigma^+$ και αμφίπλευρη $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ απεικόνιση Poincaré

Κεφάλαιο 2 : Αυτόνομα διανυσματικά πεδία και περιοδικές τροχιές

Ποιοτική ανάλυση μέσω απεικονίσεων Poincaré.

2.1. Γενικά

Θεωρούμε ένα τέλειο (διακλαδικό) διακεκριμένο αυτόνομο σύστημα n βαθμών ελευθερίας, το οποίο αποτελεί προσομοίωμα ενός συνεχούς (απειροβάθμιου) φυσικού συστήματος, που προέκυψε μετά από συστηματική διακριτοποίηση, όπως κατά κόρον συμβαίνει σε εφαρμογές αντισεισμικής μηχανικής, δυναμικής ευστάθειας κ.λ.π. Τέτοιου είδους συστήματα αποτελούνται από n συγκεντρωμένες μάζες, κατάλληλα κατανεμημένες τοπικά, συνδεόμενες με αβαρείς, μηδενικής αδράνειας ράβδους, καθόσον δε προσομοιάζουν φυσικά συστήματα, διαθέτουν n μηχανισμούς απορρόφησης ενέργειας (ιξώδους απόσβεσης) και n -γενικά μη γραμμικά- ελατήρια με δυσκαμψία k_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Αναφερόμενοι στην πιο γενική περίπτωση, κατά την οποία το εν λόγω σύστημα υπόκειται σε μη συντηρητική φόρτιση λ , που σχετίζεται με μία παράμετρο μη συντηρητικότητας η , οι εξισώσεις κίνησης αυτού, σε όρους γενικευμένων μετατοπίσεων q_i και γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_i (= dq_i/dt)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) δίνονται από τις εξισώσεις του Lagrange ως ακολούθως^[8,14]:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

όπου η τελεία υποδηλώνει παραγωγή ως προς t . Οι εξισώσεις πεδίου (12) περιέχουν τις ακόλουθες συναρτησιακές ενεργειακές ποσότητες:

$K = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$: είναι η θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή (quadratic form) της κινητικής ενέργειας του συστήματος, με διαγώνια στοιχεία συναρτήσεις των συγκεντρωμένων μαζών $[a_{ij} = a_j(m_i), i = j, i = 1, 2, \dots, n]$ και με μη διαγώνια στοιχεία συναρτήσεις των m_i, q_i $[a_{ij} = a_{ij}(m_i, q_i), i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n]$.

$F = \frac{1}{2} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$: είναι η γενικά μη αρνητικά ορισμένη τετραγωνική μορφή της συνολικής απώλειας ενέργειας (energy dissipation), όπου c_{ij} είναι συντελεστές ιξώδους απόσβεσης, πιθανά συναρτήσεις των q_i .

$U = U(q_i, k_i)$: είναι η θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης (elastic strain energy), μη γραμμική συνάρτηση των q_i .

$Q = \lambda \overline{Q}_i(q_i, \eta)$: είναι γενικευμένες μη συντηρητικές (non-potential) δυνάμεις, μη γραμμικές συναρτήσεις των q_i, η .

Έχειδειχθεί^[7,8] ότι για μια συγκεκριμένη τιμή $\eta = \eta_c$ οι εξωτερικές δυνάμεις καθίστανται συντηρητικές, ενώ για $\eta < \eta_0$, όπου η_0 το όριο μεταξύ αστάθειας τύπου πτερυγισμού (flutter) και τύπου απόκλισης (divergence), δεν υπάρχουν γειτονικές θέσεις ισορροπίας. Οι n σχέσεις $V_i = U_i - \lambda \overline{Q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), που ορίζουν την επιφάνεια ισορροπίας, όπου βρίσκονται οι ευσταθείς, ασταθείς και κρίσιμες καταστάσεις του συστήματος, είναι γενικά μη γραμμικές αναλυτικές συναρτήσεις των συντεταγμένων q_i και της παραμέτρου η , καθώς και γραμμικές συναρτήσεις της μεταβλητής φόρτισης λ .

Επιλύοντας το σύστημα των n μη γραμμικών εξισώσεων

$$V_i(a_i, k_i, \eta, \lambda) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

υπολογίζονται όλα τα σημεία ισορροπίας, ενώ εφαρμόζοντας τη διαδικασία που περιγράφεται στη σχετική βιβλιογραφία, βρίσκονται όλα τα διακριτά (distinct) σημεία διακλάδωσης, τόσο αυτά που βρίσκονται πάνω στην τετριμμένη θέση ισορροπίας (όπου $q_i = 0$), τα $\lambda_{(n)}^c$, καθώς και τα πιθανώς υφιστάμενα δευτερεύοντα σημεία διακλάδωσης (όπου $q_i \neq 0$), τα $\lambda_{(n)}^s$, που συνήθως αποτελούν τοπικά ελάχιστα φυσικά μη αποδεκτών συμπληρωματικών δρόμων ισορροπίας^[13].

Από την οπτική γωνία της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων, οι εξισώσεις (12), οι οποίες σχετίζονται με τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$q_i(0) = 0, \dot{q}_i(0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

αντικαθιστώντας $y_i = q_i$, $y_{n+1} = dq_i/dt$ γράφονται υπό μορφή μητρώων διανυσμάτων ως:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}; k; c; m; \lambda; \eta;) , \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{2n} , \quad c, k \in \mathbf{R}^n , \quad \eta, \lambda \in \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{y}}(t=0) = 0 \quad (15)$$

όπου λ και η είναι οι κύριες παράμετροι ελέγχου.

Η εξίσωση (15) είναι ένα αυτόνομο μη γραμμικό διανυσματικό πεδίο $2n$ διαστάσεων, η μελέτη των χαρακτηριστικών του οποίου δύναται να πραγματοποιηθεί

με βάση την όλη θεωρητική ανάλυση του προηγούμενου Κεφαλαίου της παρούσας εργασίας. Στο παρόν Κεφάλαιο επικεντρώνεται η όλη μελέτη στην ποιοτική ανάλυση τυχόν περιοδικών ή άλλων (σταθερής κατάστασης) λύσεων του (15) σε περιοχές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν μόνο ασταθείς θέσεις τετριμμένης ισορροπίας, που λειτουργούν απωθητικά για τις τροχιές. Δίνεται δε ιδιαίτερη έμφαση στην χρήση απεικονίσεων Poincaré, λόγω των πλεονεκτημάτων που η εφαρμογή τους διαθέτει, όπως αυτά έχουν ήδη αναφερθεί.

2.2. Περιγραφή των βημάτων ανάλυσης

Η ποιοτική προσέγγιση της παρούσας εργασίας ακολουθεί τα εξής γενικά βήματα:

2.2.1. Εύρεση σημείων ισορροπίας (δρόμων) και σημείων διακλάδωσης

Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση μαθηματικού λογισμικού (*Mathematica*)^[1], οι ενσωματωμένες ρουτίνες του οποίου εφαρμόζονται στις σχετικές εξισώσεις, όπως αυτές εκτέθηκαν ανωτέρω. Στη συνέχεια αναγνωρίζονται (εφ' όσον υφίστανται) περιοχές της παραμέτρου του φορτίου λ όπου υφίστανται μόνο τετριμμένες λύσεις.

2.2.2. Τοπική ευστάθεια σημείων ισορροπίας

Γραμμικοποιείται το διανυσματικό πεδίο (15) με χρήση συμβολικών μαθηματικών και υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του σχετικού μητρώου περί τις άνω τετριμμένες θέσεις ισορροπίας, με χρήση του *Mathematica*. Αναγνωρίζονται εν συνεχεία πιθανές περιοχές τετριμμένων ισορροπιών που είναι τοπικά ασταθείς.

2.2.3. Μελέτη της καθολικής δυναμικής συμπεριφοράς^[3] (global dynamics)

- Απ' ευθείας επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων κίνησης με μικρό βήμα ολοκλήρωσης και με χρήση μεθόδου μικρού σφάλματος, για μεγάλο χρόνο.

- Γραφική αναπαραγωγή των χρονικών σειρών $(\tau, q_i(\tau))$ και των πορτραίτων επιπέδων φάσης $[q_i(\tau), \dot{q}_i(\tau)]$ με μικρές διαφοροποιήσεις των αρχικών συνθηκών. Παρ' όλο που το σύστημα είναι τέλειο και αρχικά σε ηρεμία, εισάγεται μια μικρή αρχική ταχύτητα $\dot{q}_i(0) = O(\varepsilon) = h, \varepsilon \leq 0.005$ ώστε να μπορεί να εκκινήσει η αριθμητική επίλυση. Η τιμή του h διαφοροποιείται

κατά τι και επαναλαμβάνεται η επίλυση, με σκοπό τη διαπίστωση ύπαρξης τυχόν οριακών κύκλων (περιοδικών τροχιών ανεξάρτητων των αρχικών συνθηκών) ή ευαίσθητης εξάρτησης στις αρχικές συνθήκες (που υποδηλώνουν χαοτική συμπεριφορά).

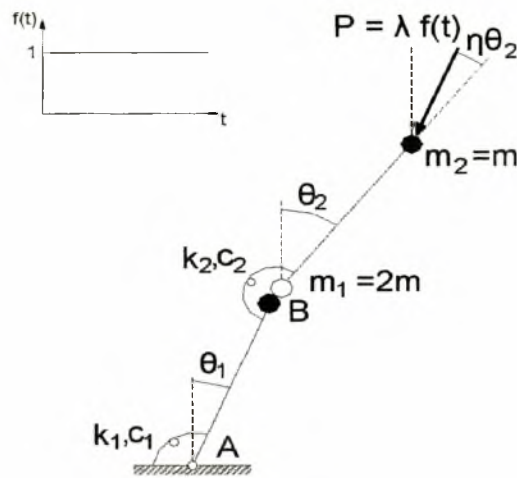
- Συστηματική κατασκευή απεικονίσεων Poincaré, γραφική αναπαραγωγή τους και ποιοτική ερμηνεία της μορφής τους σε σχέση με το αναλυόμενο διανυσματικό πεδίο και τα ευρήματα της αριθμητικής επίλυσης.
- Μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας της απεικόνισης και ποιοτική αντιστοίχιση τους με την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων του συστήματος.
- Περαιτέρω εφαρμογές υφιστάμενου λογισμικού για δυναμικά συστήματα προς δημιουργία τρισδιάστατων γραφικών απεικονίσεων των τροχιών (visualization).

Όλα τα ανωτέρω εφαρμόζονται στη συνέχεια για ένα αυτόνομο μη συντηρητικό διβάθμιο σύστημα με απόσβεση, για το οποίο υπάρχει μεγάλος αριθμός ευρημάτων. Πρόκειται για το μοντέλο ανεστραμμένου εκκρεμούς δύο βαθμών ελευθερίας του Ziegler, το οποίο υπόκειται σε μερικά εφαπτομενική (partial follower) δύναμη λ στην κορυφή του, που σχετίζεται με μια παράμετρο μη συντηρητικότητας η .

2.3. Δυναμική ανάλυση του μοντέλου του Ziegler

2.3.1. Γενικά – δρόμοι ισορροπίας

Θεωρούμε το διβάθμιο κλασσικό προσομοίωμα του Ziegler, που φαίνεται στο *Σχήμα 7*, για το οποίο υπάρχει στη βιβλιογραφία μια πληθώρα αποτελεσμάτων, που προέρχεται από εντελώς διαφορετικές επιστημονικές προσεγγίσεις^[7,8,13,14]. Ενδεικτικά, για το εν λόγω αυτόνομο, τέλειο, μη συντηρητικό σύστημα έχουν αναφερθεί διακλαδώσεις συνδιάστασης 2 βασισμένες σε ανάλυση κανονικών μορφών (normal forms), τοπικές μη γραμμικές διαταραχές και εκθέτες Lyapunov για την εύρεση κριτηρίων που αφορούν χαοτικές κινήσεις, κριτήρια για δυναμικού τύπου αστάθεια (περυγισμό) πριν την αστάθεια τύπου απόκλισης (στατικού), μη εφαρμοσιμότητα του κινηματικού κριτηρίου δυναμικής ευστάθειας, σειρές δυναμικών διακλαδώσεων, αναγνώριση πιθανών χαοτικής μορφής κινήσεων, κ.λ.π. Πρόσφατα δε μελετήθηκε η ύπαρξη και οι διακλαδώσεις περιοδικών τροχιών με χρήση μη λείων χρονικών μετασχηματισμών^[13].



Σχήμα 7. Προσομοίωμα του Ziegler δύο βαθμών ελευθερίας χωρίς αρχικές ατέλειες, υπό μερικά εφαπτομενικό φορτίο αιφνίδια επιβαλλόμενο, άπειρης διάρκειας, στην κορυφή του.

Για το σύστημα αυτό οι εξισώσεις κίνησης του Lagrange γράφονται υπό αδιάστατη μορφή ως ακολούθως:

$$(1+m)\ddot{\theta}_1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (c_1 + c_2)\dot{\theta}_1 - c_2\dot{\theta}_2 + (1+k)\theta_1 - \theta_2 - \lambda \sin[\theta_1 + (\eta-1)\theta_2] = 0 \quad (16\alpha)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + c_2\dot{\theta}_2 - c_2\dot{\theta}_1 + \theta_2 - \theta_1 - \lambda \sin \eta\theta_2 = 0 \quad (16\beta)$$

όπου $\lambda = Pl/k_2$, $k = k_1/k_2$, $m = m_1/m_2$ (συνήθως=2), $\tau = t \sqrt{\frac{k_1}{m_2 l^2}}$ (αδιάστατος

χρόνος) και η τελεία υποδηλώνει παραγωγή ως προς τ .

Οι εξισώσεις (16α,β), καθόσον πρόκειται για σύστημα χωρίς αρχικές ατέλειες, το οποίο πριν την επιβολή φορτίου βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, υπόκεινται στις ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \quad (17)$$

Απαλείφοντας τους αδρανειακούς παράγοντες από τις εξισώσεις κίνησης, οι αντίστοιχες μη γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας του μοντέλου είναι:

$$V_1 = (1+k)\theta_1 - \theta_2 - \lambda \sin[\theta_1 + (\eta-1)\theta_2] = 0 \quad (18\alpha)$$

$$V_2 = -\theta_1 + \theta_2 - \lambda \sin \eta\theta_2 = 0 \quad (18\beta)$$

από την αριθμητική επίλυση των οποίων σε συνδυασμό με τεχνικές που βρίσκονται στη βιβλιογραφία, μπορεί κανείς να υπολογίσει όλους τους δρόμους ισορροπίας $[\theta_i, \lambda]$ ($i = 1, 2$) καθώς και όλα τα σχετικά κρίσιμα σημεία, ενώ είναι προφανές

ότι η τετριμμένη λύση ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) αποτελεί για κάθε λ δρόμο ισορροπίας του συστήματος.

Έχει αποδειχθεί^[7,8] ότι η περιοχή για την οποία το σύστημα παρουσιάζει ένα μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας που συνδέει το πρώτο (ευσταθές) σημείο διακλάδωσης λ_{c1} με το δεύτερο (ασταθές) λ_{c2} οριοθετείται από την περιοχή:

$$\eta_0 < \eta < 0.50 \quad (19)$$

όπου η_0 το λεγόμενο διπλό κρίσιμο σημείο, που ισούται με $\eta_0 = \frac{4k}{(k+2)^2}$ και

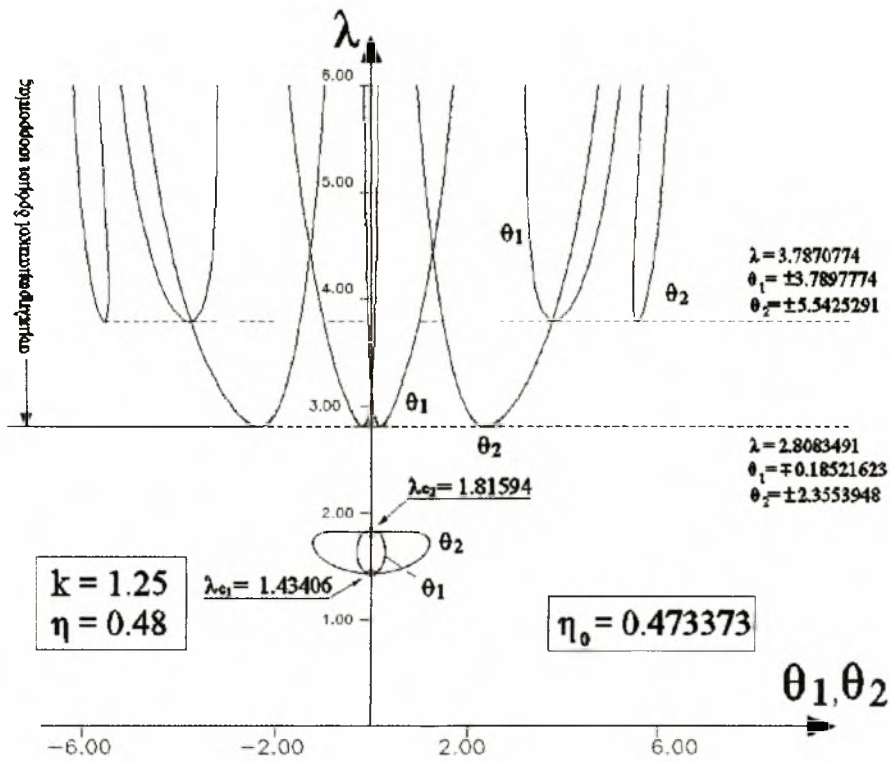
αντιστοιχεί σε φορτίο $\lambda_0^c = \frac{k+2}{2}$, ενώ τα ως άνω σημεία διακλάδωσης ισούνται με

$$\lambda_{c1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (k+2) \pm \sqrt{(k+2)^2 - \frac{4k}{\eta}} \right\} \quad (20)$$

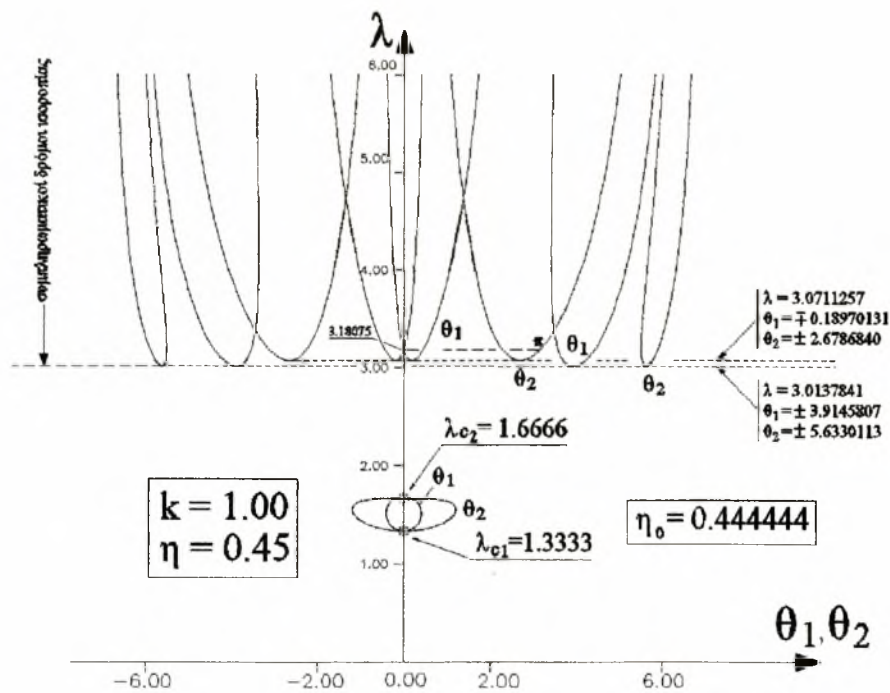
Για $\eta > 0.50$ το σύστημα συμπεριφέρεται ως συντηρητικό και οι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας καθίστανται ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Χαρακτηριστικά παρατίθενται οι κύριοι και μερικοί από τους (φυσικά μη αποδεκτούς) συμπληρωματικούς σχηματισμούς ισορροπίας του υπό ανάλυση προσομοιώματος για τρεις περιπτώσεις κοινού μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας (τιμές του η εντός της περιοχής (19)), που φαίνονται στα Σχήματα 8-10, και μιας περίπτωσης όπου $\eta > 0.50$, απεικονιζόμενης στο Σχήμα 11.

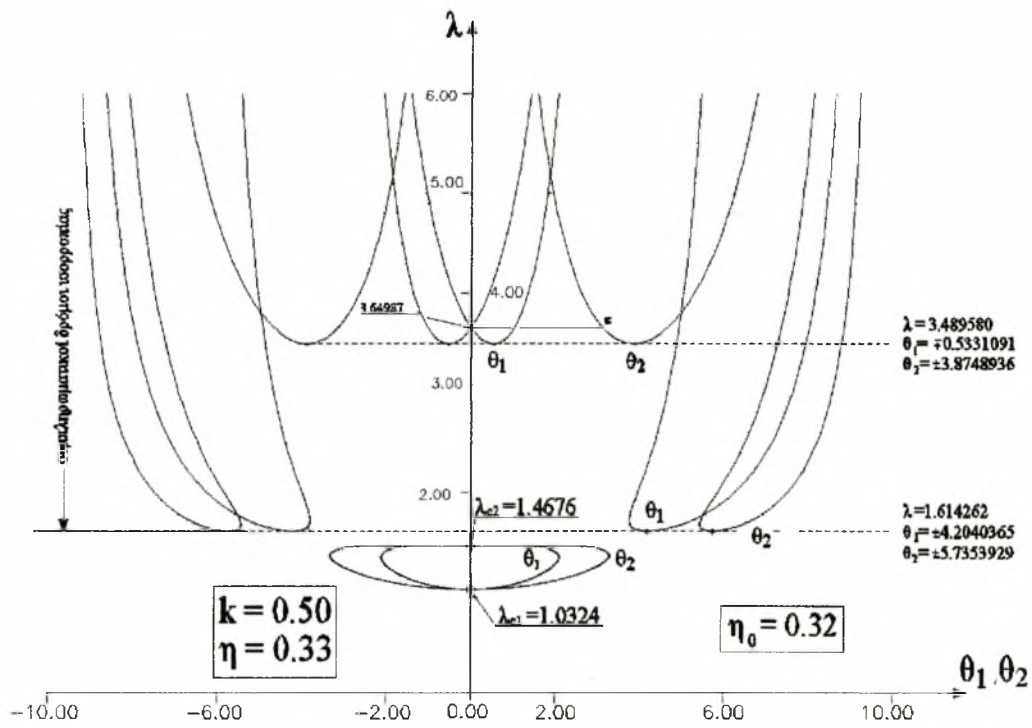
Από την ποιοτική παρατήρηση των δρόμων ισορροπίας για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις, φαίνεται καθαρά ότι υπάρχουν δύο ευρείες περιοχές ύπαρξης μόνο της τετριμμένης θέσης ισορροπίας, που αντιστοιχούν σε $0 \leq \lambda < \lambda_{c1}$ η πρώτη και $\lambda_{c2} < \lambda \leq \lambda_{\min}^{comp}$, όπου λ_{\min}^{comp} η μικρότερη τιμή της παραμέτρου φορτίου που αντιστοιχεί σε δευτερεύουσα διακλάδωση. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στην εν λόγω δεύτερη περιοχή, για την οποία θα εφαρμοστεί η κατά βήμα προσέγγιση που περιγράφηκε προηγούμενα.



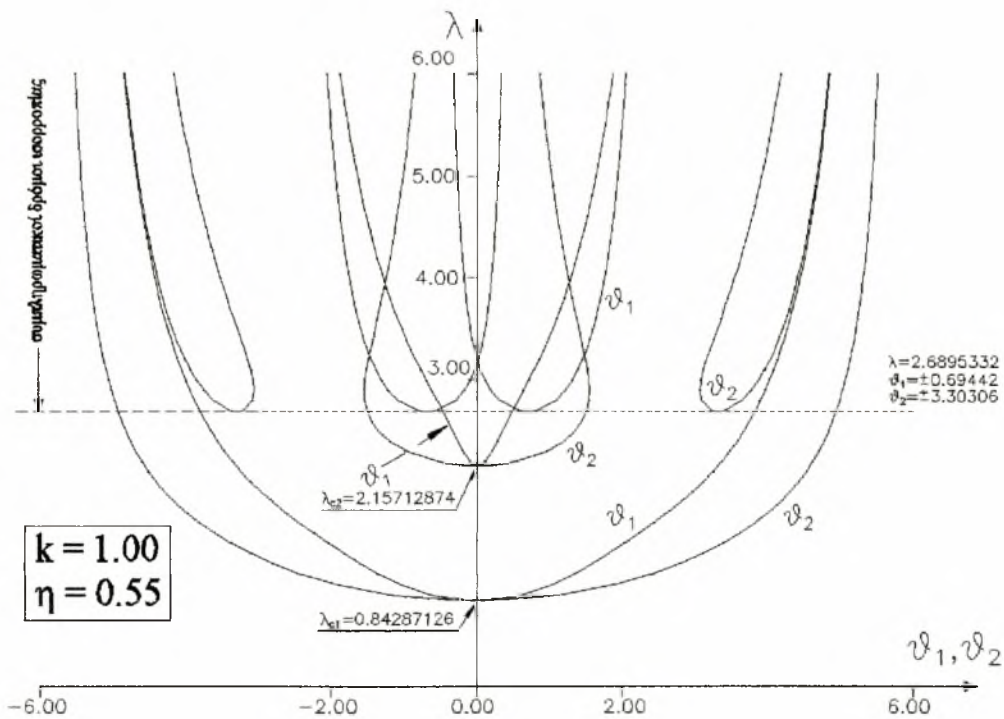
Σχήμα 8. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας $[\theta_i, \lambda]$, $i=1,2$ του μοντέλου του Ziegler για $k=1.25$ και $\eta=0.48$.



Σχήμα 9. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας $[\theta_i, \lambda]$, $i=1,2$ του μοντέλου του Ziegler για $k=1.00$ και $\eta=0.45$.



Σχήμα 10. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας $[\theta_i, \lambda]$, $i=1,2$ του μοντέλου του Ziegler για $k=0.50$ και $\eta=0.33$.



Σχήμα 11. Κύριοι και συμπληρωματικοί δρόμοι ισορροπίας $[\theta_i, \lambda]$, $i=1,2$ του μοντέλου του Ziegler για $k=1.00$ και $\eta=0.55$.

2.3.2. Γραμμικοποίηση – Τοπική ευστάθεια τετριμμένων
ισορροπιών

Ακολουθώντας την κλασσική διαδικασία γραμμικοποίησης, το σύστημα των εξισώσεων (16α,β), μετά την αντικατάσταση $\dot{\theta}_1 = \dot{\phi}_1, \dot{\theta}_2 = \dot{\phi}_2$ και επίλυση ως προς $\dot{\phi}_1 (= \dot{\theta}_1)$ και $\dot{\phi}_2 (= \dot{\theta}_2)$ μετασχηματίζεται στο ακόλουθο αυτόνομο μη γραμμικό διανυσματικό πεδίο διάστασης (τάξης) τέσσερα:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\theta}_1, [= f_1(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)] \quad (20\alpha)$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\theta}_2, [= f_2(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)] \quad (20\beta)$$

$$\dot{\phi}_1 = (A - B \cos(\theta_1 - \theta_2)) / [1 + m - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)], [= f_3(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)] \quad (20\gamma)$$

$$\dot{\phi}_2 = [(1 + m)B - A \cos(\theta_1 - \theta_2)] / [1 + m - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)], [= f_4(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)] \quad (20\delta)$$

όπου:

$$A = -\sin(\theta_1 - \theta_2)\phi_2^2 - (c_1 + c_2)\phi_1 + c_2\phi_2 - (1 + k)\theta_1 + \theta_2 + \lambda \sin[\theta_1 + (n - 1)\theta_2] \quad (21\alpha)$$

$$B = \sin(\theta_1 - \theta_2)\phi_1^2 + c_2\phi_1 - c_2\phi_2 + \theta_1 - \theta_2 + \lambda \sin n\theta_2 \quad (21\beta)$$

Στη συνέχεια, για τη μελέτη της τοπικής ευστάθειας στη γειτονιά οποιoδήποτε σημείου ισορροπίας το διανυσματικό πεδίο (20) γραμμικοποιείται. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω συμβολικού υπολογισμού των σχετικών παραγώγων, με χρήση του *Mathematica*. Ο σχετικός γενικός κώδικας (ο οποίος υπολογίζει και τις ιδιοτιμές για οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας) επισυνάπτεται στο τέλος της παρούσας εργασίας (Παράρτημα Α).

Έπεται ο υπολογισμός των ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος περί τις τετριμμένες θέσεις ισορροπίας για $\lambda > \lambda_{c_2}$ κατά περίπτωση, δηλαδή συγκεκριμένα για τις ακόλουθες περιοχές τιμών του αδιάστατου φορτίου:

$$k = 1.25, \eta = 0.48 \quad (\text{Σχήμα 8}) \quad : \quad 1.81592 \leq \lambda \leq 2.8083491 \quad (\eta_0 = 0.473373) \quad : \text{Π1}$$

$$k = 1.00, \eta = 0.45 \quad (\text{Σχήμα 9}) \quad : \quad 1.66666 \leq \lambda \leq 3.0137841 \quad (\eta_0 = \frac{4}{9}) \quad : \text{Π2}$$

$$k = 0.50, \eta = 0.33 \quad (\text{Σχήμα 10}) \quad : \quad 1.4676 \leq \lambda \leq 1.614262 \quad (\eta_0 = 0.32) \quad : \text{Π3}$$

Για τις ανωτέρω περιοχές επιλέγονται για το σύστημα οι ακόλουθες τιμές συντελεστών απόσβεσης (χωρίς απώλεια οποιασδήποτε γενικότητας):

$$\text{Π1} : c_1 = 0.02, c_2 = 0.10 \quad , \quad \text{Π2} : c_1 = 0.04, c_2 = 0.10 \quad , \quad \text{Π3} : c_1 = 0.02, c_2 = 0.10$$

ενώ ο συντελεστής μάζας επιλέγεται παντού ίσος με: $m = 2$.

Ακολουθούν οι Πίνακες με τις τιμές των ιδιοτιμών, που υπολογίστηκαν ως άνω.

Περίπτωση 1 ($k=1.25, \eta=0.48, c_1=0.02, c_2=0.10, m=2$)

λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
λ_{c_2} (1.81594)	-0.167349	± 0.953473	0.0247012	0
1.82	-0.167616	± 0.955177	0.0126162	± 0.0155125
1.84	-0.169028	± 0.938689	0.0140282	± 0.0487838
1.86	-0.170623	± 0.921751	0.015623	± 0.0698674
1.88	-0.172435	± 0.904324	0.0174351	± 0.0882346
1.90	-0.174507	± 0.886367	0.0195075	± 0.105535
1.92	-0.176895	± 0.86783	0.0218949	± 0.122441
1.94	-0.179668	± 0.843663	0.0246677	± 0.139319
1.96	-0.182917	± 0.828810	0.0279173	± 0.155406
1.98	-0.186764	± 0.808213	0.0317641	± 0.173871
2.00	-0.191367	± 0.786823	0.0363669	± 0.191844
2.02	-0.196936	± 0.764604	0.0419362	± 0.210410
2.04	-0.203748	± 0.741568	0.0487476	± 0.229601
2.06	-0.212148	± 0.717807	0.057148	± 0.249351
2.08	-0.222536	± 0.693569	0.0675361	± 0.269435
2.10	-0.235282	± 0.669331	0.080282	± 0.289393
2.12	-0.250559	± 0.645816	0.095559	± 0.308517
2.14	-0.268155	± 0.623853	0.113155	± 0.325987
2.16	-0.287445	± 0.604084	0.132445	± 0.341173
2.18	-0.307619	± 0.586740	0.152619	± 0.353847
2.20	-0.327968	± 0.571682	0.172968	± 0.364158
2.22	-0.348015	± 0.558573	0.193015	± 0.372445
2.24	-0.367499	± 0.547045	0.212499	± 0.379082
2.26	-0.386306	± 0.536772	0.231306	± 0.384397
2.28	-0.404408	± 0.527489	0.249408	± 0.388659
2.30	-0.421818	± 0.518990	0.266818	± 0.392074
2.32	-0.438574	± 0.511118	0.283574	± 0.394804
2.34	-0.454719	± 0.503752	0.299719	± 0.396970

λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
2.36	-0.470298	± 0.497696	0.315298	± 0.398608
2.38	-0.485355	± 0.490178	0.330355	± 0.399974
2.40	-0.499931	± 0.483840	0.344931	± 0.400945
2.42	-0.514062	± 0.477735	0.359062	± 0.401628
2.44	-0.527784	± 0.471825	0.372784	± 0.402063
2.46	-0.541125	± 0.466079	0.386125	± 0.402280
2.48	-0.554113	± 0.460472	0.399113	± 0.402304
2.50	-0.566773	± 0.454982	0.411773	± 0.402158
2.52	-0.579127	± 0.449591	0.424127	± 0.401859
2.54	-0.591195	± 0.444284	0.436195	± 0.401422
2.56	-0.602995	± 0.439048	0.447995	± 0.400860
2.58	-0.614542	± 0.433871	0.459542	± 0.400184
2.60	-0.625853	± 0.428743	0.470853	± 0.399404
2.62	-0.636939	± 0.423654	0.481939	± 0.398528
2.64	-0.647815	± 0.418598	0.492815	± 0.397563
2.66	-0.658490	± 0.413566	0.503490	± 0.396515
2.68	-0.668975	± 0.408553	0.513975	± 0.395390
2.70	-0.679281	± 0.403552	0.524281	± 0.394193
2.72	-0.689414	± 0.398558	0.534414	± 0.392928
2.74	-0.699385	± 0.393566	0.544385	± 0.391598
2.76	-0.709199	± 0.388571	0.554199	± 0.390208
2.78	-0.718864	± 0.383569	0.563864	± 0.388759
2.80	-0.728287	± 0.378555	0.573387	± 0.387256
2.8083491	-0.732322	± 0.376458	0.577322	± 0.386612

Περίπτωση 2 ($k=1.00, \eta=0.45, c_1=0.04, c_2=0.10, m=2$)

λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
λ_{c2} (1.666666)	-0,169162	$\pm 1,03098$	0,0183107	0
1.68	-0,169821	$\pm 1,02121$	0,00982065	$\pm 0,0295631$
1.70	-0,170896	$\pm 1,00628$	0,0108956	$\pm 0,0502088$
1.72	-0,172087	$\pm 0,9912$	0,0120874	$\pm 0,0666339$
1.74	-0,173414	$\pm 0,975395$	0,0134142	$\pm 0,081589$
1.76	-0,174898	$\pm 0,959381$	0,0148978	$\pm 0,0959151$
1.78	-0,176565	$\pm 0,942946$	0,016565	$\pm 0,110008$
1.80	-0,178449	$\pm 0,926058$	0,0184488	$\pm 0,124097$
1.82	-0,18059	$\pm 0,90868$	0,02059	$\pm 0,138339$
1.84	-0,18304	$\pm 0,89077$	0,0230401	$\pm 0,152851$
1.86	-0,185864	$\pm 0,872285$	0,0258645	$\pm 0,167729$
1.88	-0,189146	$\pm 0,85318$	0,0291465	$\pm 0,183057$
1.90	-0,192994	$\pm 0,83341$	0,032994	$\pm 0,198906$
1.92	-0,197547	$\pm 0,812936$	0,0375467	$\pm 0,215335$
1.94	-0,202985	$\pm 0,791738$	0,0429854	$\pm 0,232381$
1.96	-0,209541	$\pm 0,769831$	0,0495407	$\pm 0,250042$
1.98	-0,217496	$\pm 0,747299$	0,0574963	$\pm 0,268244$
2.00	-0,227173	$\pm 0,72434$	0,0671735	$\pm 0,286796$
2.02	-0,238876	$\pm 0,701323$	0,0788761	$\pm 0,305334$
2.04	-0,252779	$\pm 0,678805$	0,092779	$\pm 0,32331$
2.06	-0,26879	$\pm 0,657453$	0,10879	$\pm 0,340058$
2.08	-0,286495	$\pm 0,637856$	0,126495	$\pm 0,354994$
2.10	-0,305267	$\pm 0,620333$	0,145267	$\pm 0,367801$
2.12	-0,324476	$\pm 0,60489$	0,164476	$\pm 0,378477$
2.14	-0,343635	$\pm 0,591322$	0,183635	$\pm 0,387229$
2.16	-0,362437	$\pm 0,579336$	0,202437	$\pm 0,39435$
2.18	-0,380715	$\pm 0,568643$	0,220715	$\pm 0,40013$
2.20	-0,398399	$\pm 0,558994$	0,238399	$\pm 0,404822$

λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
2.22	-0,415471	± 0,550185	0,255471	± 0,40863
2.24	-0,431946	± 0,542055	0,271946	± 0,411714
2.26	-0,447852	± 0,534477	0,287852	± 0,414204
2.28	-0,463223	± 0,527351	0,303223	± 0,416198
2.30	-0,478096	± 0,5206	0,318096	± 0,417774
2.32	-0,492505	± 0,514162	0,332505	± 0,418997
2.34	-0,506484	± 0,507985	0,346484	± 0,419916
2.36	-0,520064	± 0,502029	0,360064	± 0,420571
2.38	-0,533273	± 0,49626	0,373273	± 0,420997
2.40	-0,546136	± 0,490652	0,386136	± 0,421221
2.42	-0,558677	± 0,48518	0,398677	± 0,421265
2.44	-0,570917	± 0,479825	0,410917	± 0,42115
2.46	-0,582875	± 0,47457	0,422875	± 0,420891
2.48	-0,594568	± 0,469402	0,434568	± 0,420502
2.50	-0,606012	± 0,464307	0,446012	± 0,419995
2.52	-0,617222	± 0,459276	0,457222	± 0,419381
2.54	-0,62821	± 0,454298	0,46821	± 0,418667
2.56	-0,638989	± 0,449366	0,478989	± 0,417862
2.58	-0,64957	± 0,444471	0,48957	± 0,416973
2.60	-0,659963	± 0,439607	0,499963	± 0,416005
2.62	-0,670178	± 0,434769	0,510178	± 0,414964
2.64	-0,680222	± 0,42995	0,520222	± 0,413854
2.66	-0,690104	± 0,425145	0,530104	± 0,41268
2.68	-0,699831	± 0,420351	0,539831	± 0,411444
2.70	-0,709411	± 0,415562	0,549411	± 0,410151
2.72	-0,718849	± 0,410774	0,558849	± 0,408803
2.74	-0,728151	± 0,405984	0,568151	± 0,407403
2.76	-0,737324	± 0,401188	0,577324	± 0,405952
2.78	-0,746371	± 0,396382	0,586371	± 0,404454
2.80	-0,755299	± 0,391563	0,595299	± 0,402911

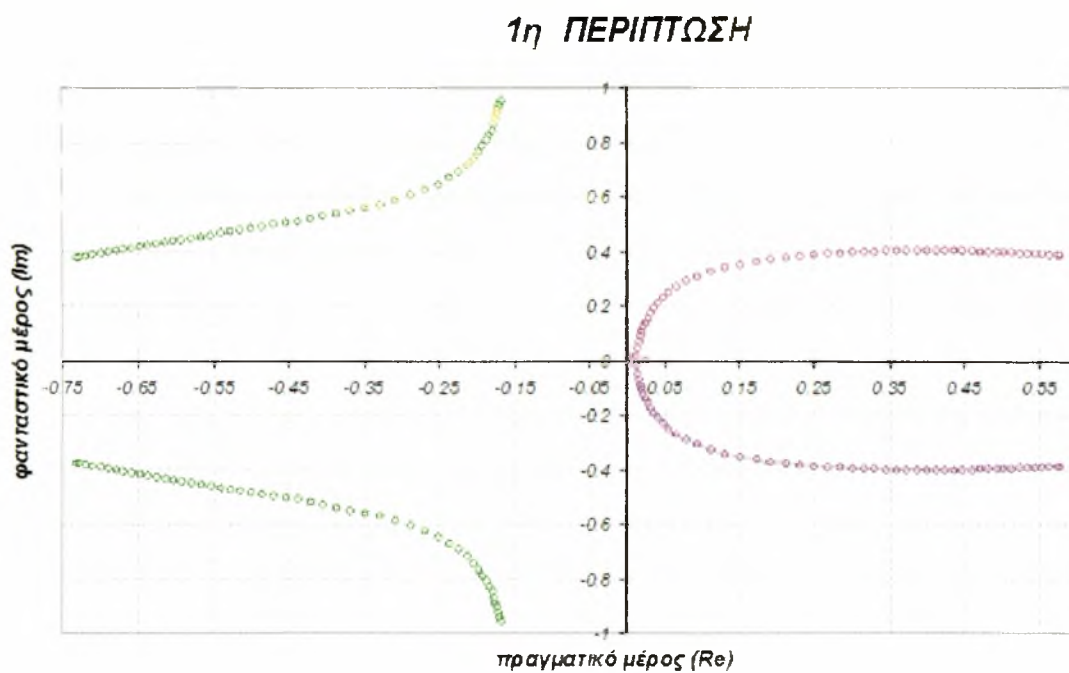
λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
2.82	-0,764112	$\pm 0,386728$	0,604112	$\pm 0,401322$
2.84	-0,772814	$\pm 0,381874$	0,612814	$\pm 0,399692$
2.86	-0,781408	$\pm 0,376997$	0,621408	$\pm 0,39802$
2.88	-0,789899	$\pm 0,372095$	0,629899	$\pm 0,396308$
2.90	-0,798291	$\pm 0,367164$	0,638291	$\pm 0,394557$
2.92	-0,806587	$\pm 0,362201$	0,646587	$\pm 0,392768$
2.94	-0,814789	$\pm 0,357203$	0,654789	$\pm 0,390943$
2.96	-0,822902	$\pm 0,352166$	0,662902	$\pm 0,389081$
2.98	-0,830927	$\pm 0,347089$	0,670927	$\pm 0,387184$
3.00	-0,838868	$\pm 0,341966$	0,678868	$\pm 0,385252$
3.0137841	-0,844293	$\pm 0,338408$	0,684293	$\pm 0,383901$

Περίπτωση 3 ($k=0.50, \eta=0.33, c_1=0.02, c_2=0.10, m=2$)

λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
λ_{c2} (1.4676)	-0.162009	± 1.13022	0.0140062 0	0 0
1.47	-0.162077	± 1.12875	0.00707663	± 0.00912943
1.475	-0.162220	± 1.12570	0.00721989	± 0.0191265
1.48	-0.162366	± 1.12263	0.00736597	± 0.0256448
1.485	-0.162515	± 1.11956	0.00751495	± 0.0309677
1.49	-0.162667	± 1.11647	0.0076669	± 0.0356372
1.495	-0.162822	± 1.11336	0.00782189	± 0.0398855
1.50	-0.162980	± 1.11025	0.00798002	± 0.0438370
1.505	-0.163141	± 1.10712	0.00814136	± 0.0475675
1.51	-0.163306	± 1.10398	0.00830600	± 0.0511272
1.515	-0.163474	± 1.10083	0.00847403	± 0.0545511
1.52	-0.163646	± 1.09766	0.00864555	± 0.0578649
1.525	-0.163821	± 1.09448	0.00882065	± 0.0610880
1.53	-0.163999	± 1.09128	0.00899943	± 0.0642355
1.535	-0.164182	± 1.08808	0.00918200	± 0.0673195
1.54	-0.164368	± 1.08485	0.00936846	± 0.0709498
1.545	-0.164549	± 1.08162	0.00955893	± 0.0733345
1.55	-0.164754	± 1.07836	0.00975352	± 0.0762802
1.555	-0.164952	± 1.07510	0.00995234	± 0.0791927
1.56	-0.165156	± 1.07182	0.0101555	± 0.0820768
1.565	-0.165363	± 1.06852	0.0103632	± 0.0849368
1.57	-0.165576	± 1.06521	0.0105756	± 0.0877764
1.575	-0.165793	± 1.06188	0.0107927	± 0.0905988
1.58	-0.166015	± 1.05854	0.0110147	± 0.0934069
1.585	-0.166242	± 1.05518	0.0112418	± 0.0962032
1.59	-0.166474	± 1.05181	0.0114741	± 0.0989901
1.595	-0.166712	± 1.04841	0.0117118	± 0.1017700
1.60	-0.166955	± 1.04501	0.0119550	± 0.1045440

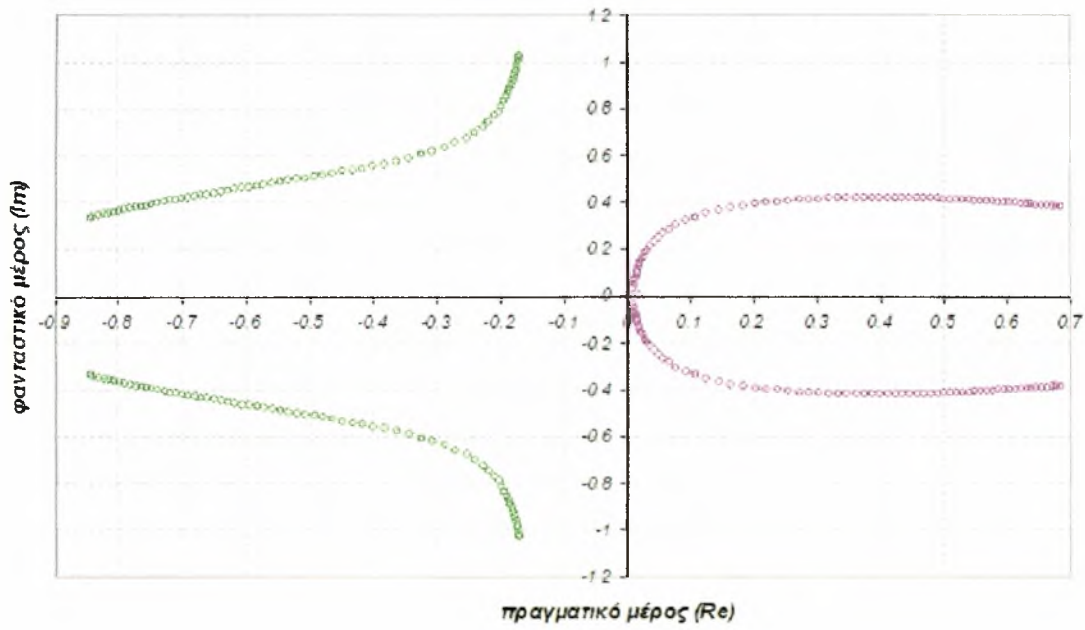
λ	1 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών		2 ^ο ζεύγος ιδιοτιμών	
	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)	Πραγματικό μέρος (Re)	Φανταστικό μέρος (Im)
1.605	-0.167204	± 1.04158	0.0122040	± 0.107314
1.61	-0.167459	± 1.03814	0.0124590	± 0.110082
1.614262	-0.167681	± 1.03519	0.0126811	± 0.112441

Για εποπτικούς λόγους σχεδιάζονται τα διαγράμματα μεταβολής των τιμών των ιδιοτιμών για τις Περιπτώσεις 1, 2, και 3, που αναπαρίστανται γραφικά στα Σχήματα 12, 13 και 14 αντίστοιχα.



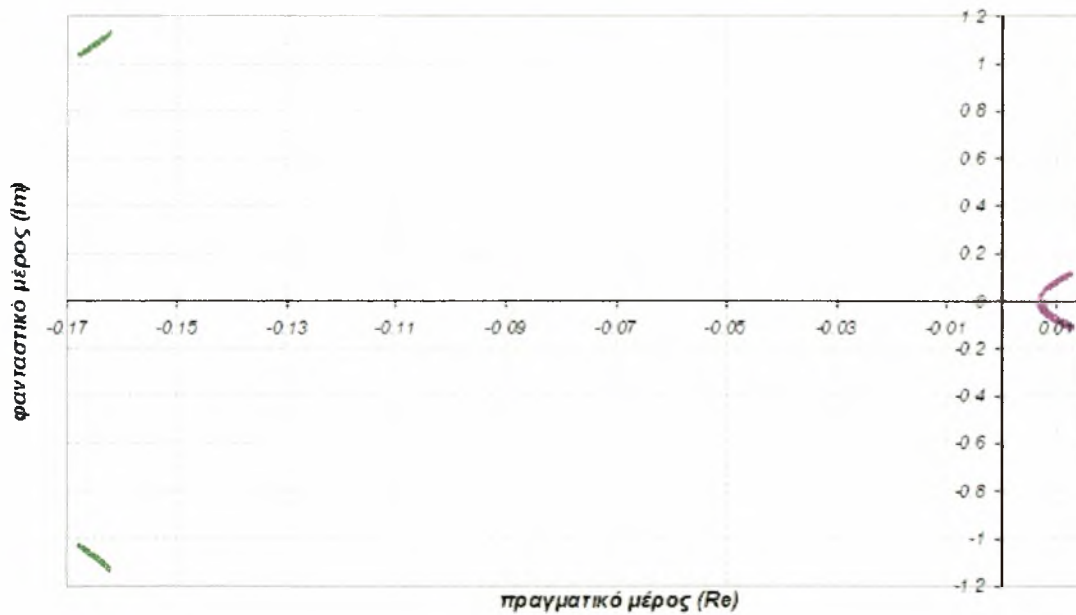
Σχήμα 12. Μεταβολή των ιδιοτιμών της Περίπτωσης 1.

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ



Σχήμα 13. Μεταβολή των ιδιοτιμών της Περίπτωσης 2.

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ



Σχήμα 14. Μεταβολή των ιδιοτιμών της Περίπτωσης 3.

Από τα ανωτέρω ευρήματα, όσον αφορά τη τοπική ευστάθεια των τετριμμένων σημείων ισορροπίας για τις περιοχές φορτίου των Π1, Π2 και Π3, είναι προφανές ότι πρόκειται για υπερβολικά ασυμπτωτικά ασταθείς σχηματισμούς, καθόσον έχουν έστω και μια ιδιοτιμή με θετικό πραγματικό μέρος. Τέτοιου είδους σημεία ισορροπίας καλούνται *πηγές (sources)* και λειτουργούν απωθητικά για την κίνηση. Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη δυναμική απόκριση αποκλείεται να σχετίζεται με σημειακό έλκτη, χρήζει δε περαιτέρω ποιοτικής ανάλυσης, σύμφωνα με τα όσα μέχρι στιγμής έχουν εκτεθεί.

2.3.3. Μελέτη της καθολικής δυναμικής συμπεριφοράς

Η μελέτη αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση του προγράμματος δυναμικής ανάλυσης *Dynamics Solver* (Παράρτημα Β), το οποίο μπορεί να επιλύσει δυναμικά συστήματα όπως αυτό που μελετάμε.

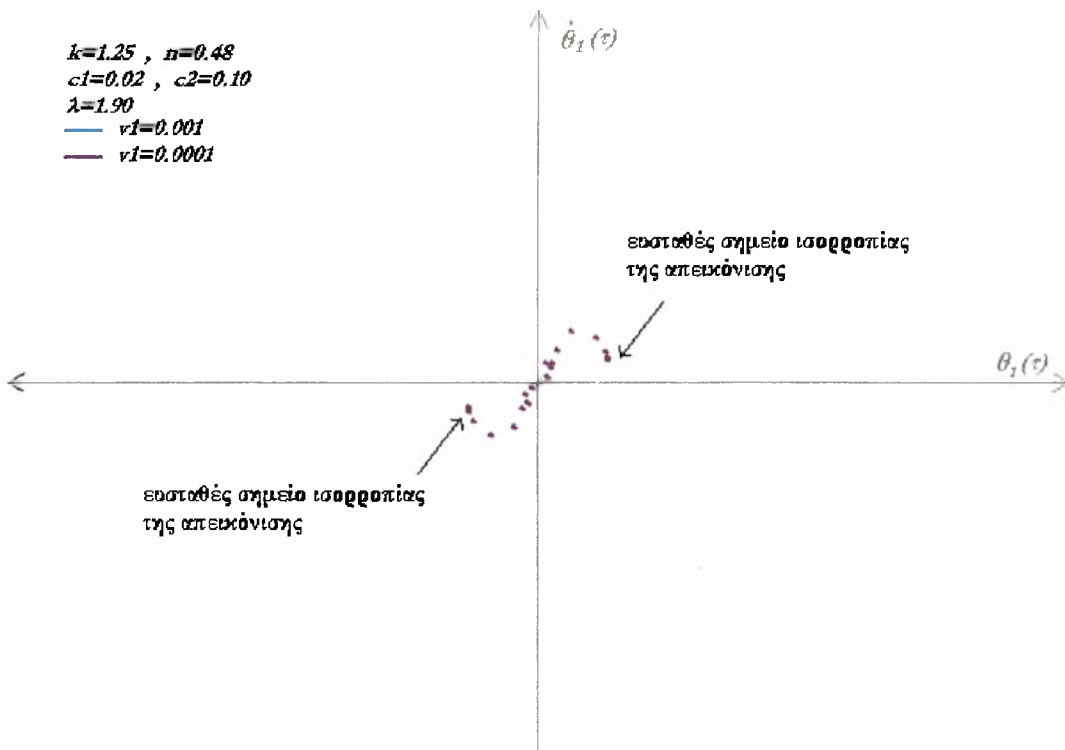
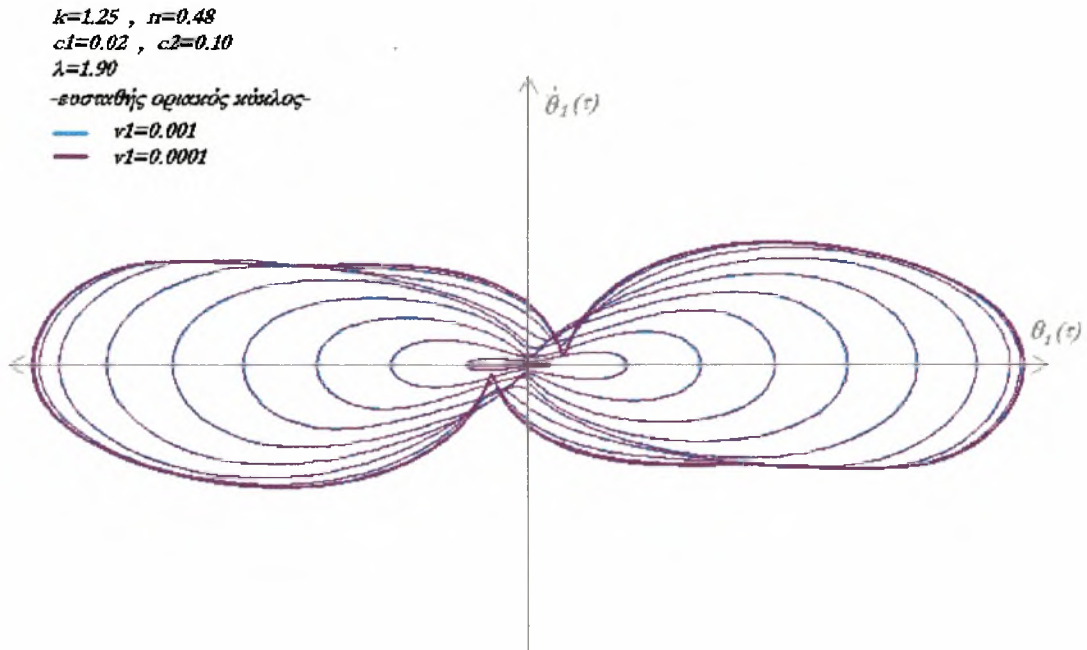
Εξετάστηκαν χωριστά οι τρεις προαναφερθείσες περιπτώσεις Π1, Π2 και Π3, μεταβάλλοντας την τιμή του αδιάστατου φορτίου λ . Μέσω του *Dynamics Solver* πήραμε τα επίπεδα φάσεως (phase planes) $\theta_1 - \dot{\theta}_1$ και $\theta_2 - \dot{\theta}_2$ καθώς επίσης και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré θέτοντας σαν αρχική συνθήκη μια πολύ μικρή τιμή για το $\dot{\theta}_1$. Ακολούθως, δημιουργήσαμε τα διαγράμματα $\theta_1 - \tau$.

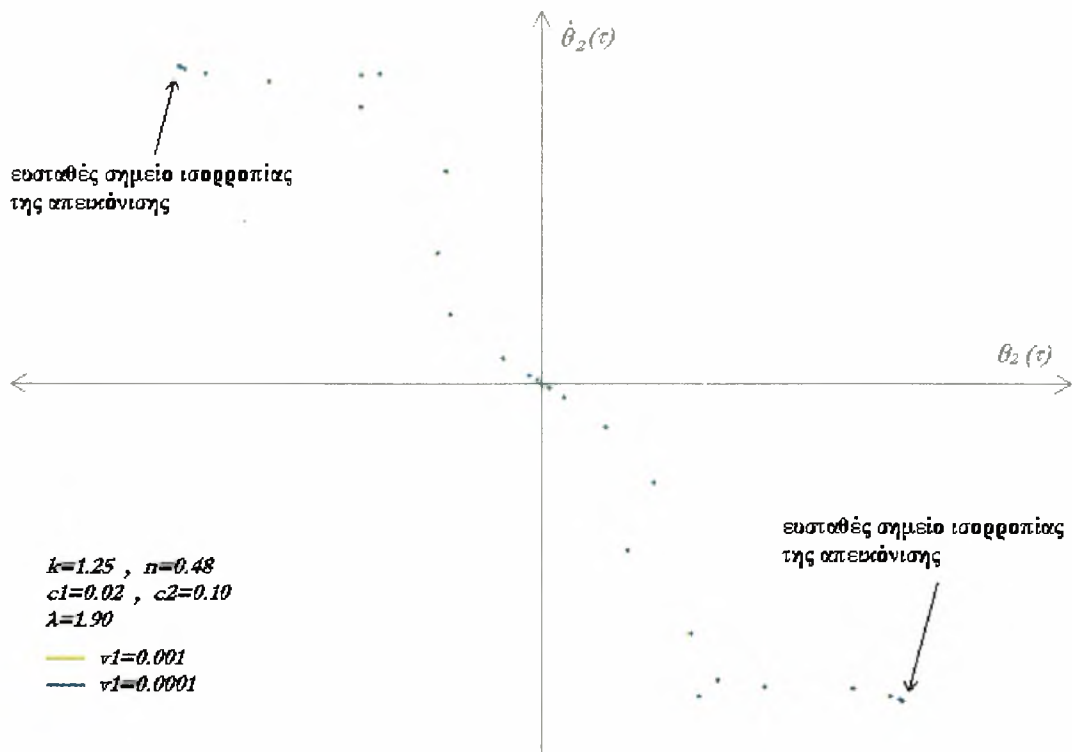
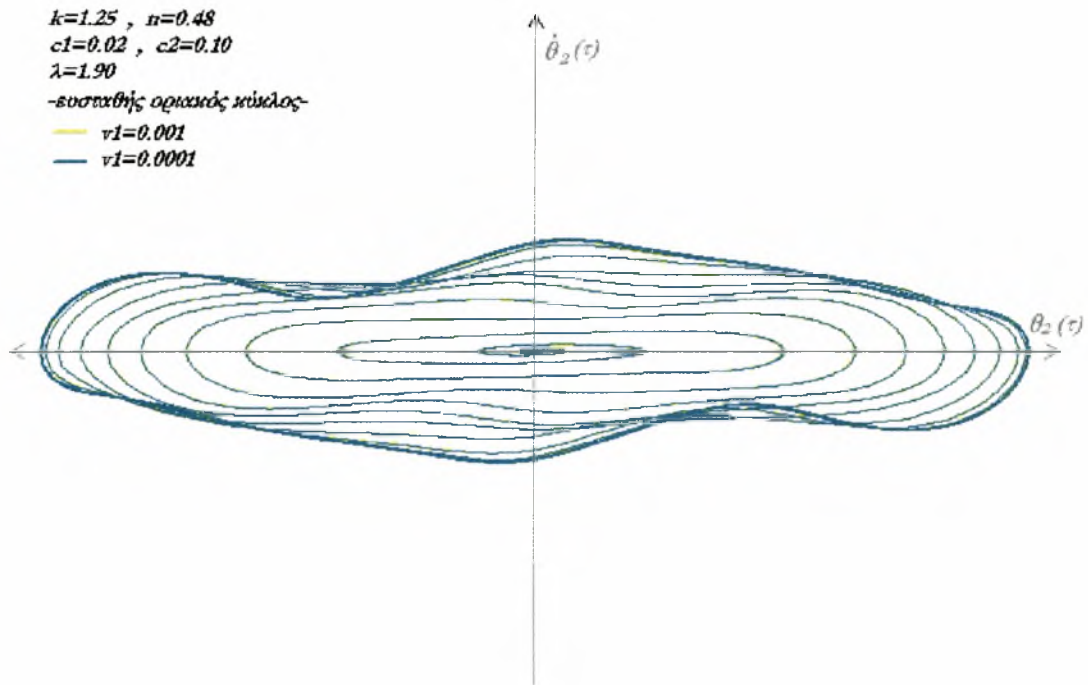
Στη συνέχεια, στις περιπτώσεις που έχουμε περιοδική λύση και στα μεν επίπεδα φάσεως εμφανίζονται ευσταθείς οριακοί κύκλοι, στις δε απεικονίσεις Poincaré εμφανίζονται ευσταθή σημεία ισορροπίας, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία με διαφορετική αρχική συνθήκη. Έτσι, παρατηρούμε πως η περίοδος δεν μεταβάλλεται ενώ ταυτόχρονα ο κάθε νέος οριακός κύκλος συμπίπτει με τον αντίστοιχο αρχικό. Το ίδιο συμβαίνει και με τα ευσταθή σημεία ισορροπίας των απεικονίσεων. Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν πως η περίοδος δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και μέσω των διαγραμμάτων $\theta_1 - \tau$.

Όταν όμως εμφανίζονται χαοτικές τροχιές, ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της γωνίας θ_1 με το χρόνο τ για διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα αυτά, για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, ποιοτική επαλήθευση του χάους.

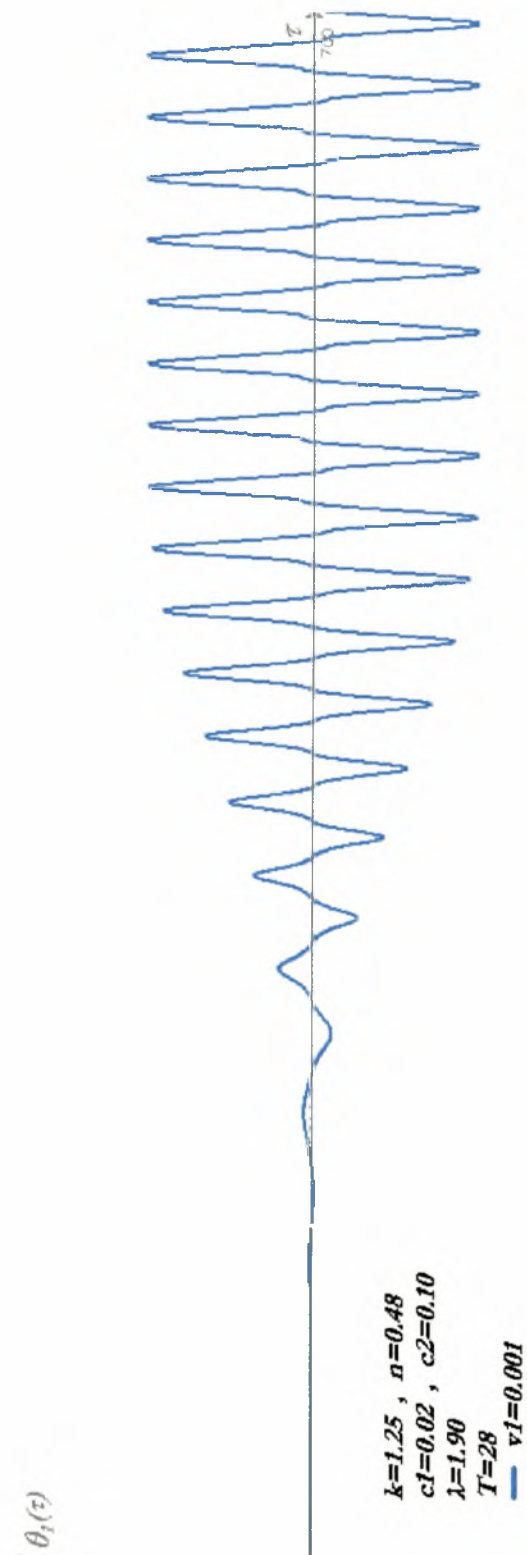
Πιο συγκεκριμένα, για την πρώτη περίπτωση (Π1) που η περιοχή τιμών του αδιάστατου φορτίου λ είναι: $1.81592 \leq \lambda \leq 2.8083491$ η μελέτη μας εφαρμόστηκε στις εξής αντιπροσωπευτικές τιμές του: 1.90, 2.10, 2.30, 2.50 και 2.70.

- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.90$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\theta_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:





Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$

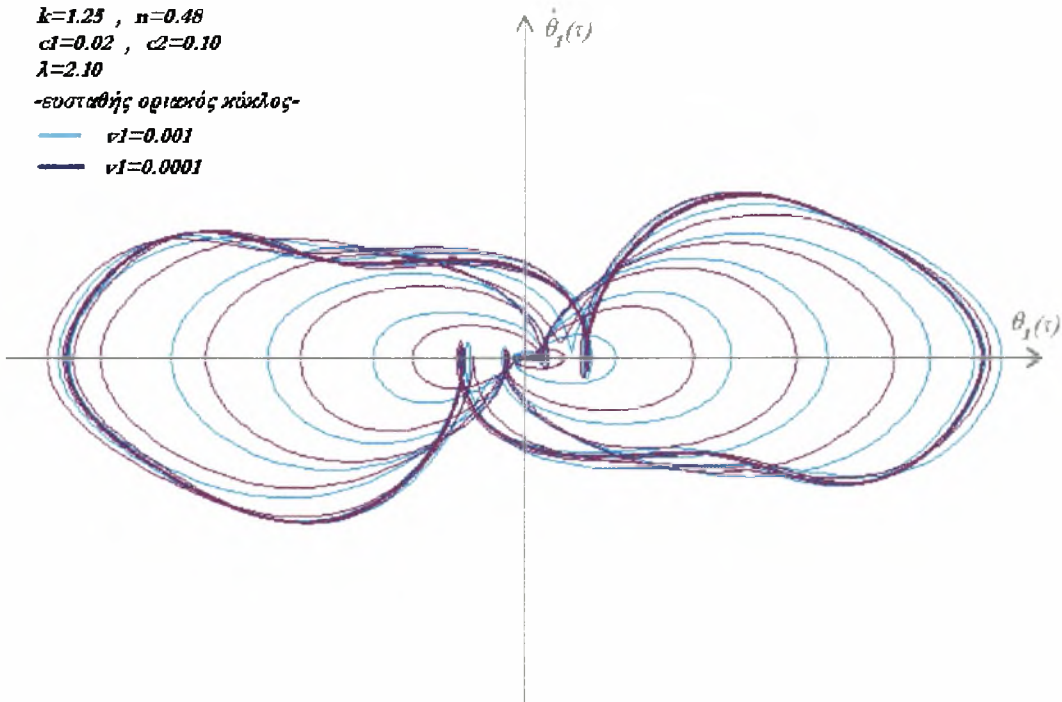


- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.10$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\theta_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.10$

-ευσταθής οριζικός κύκλος-

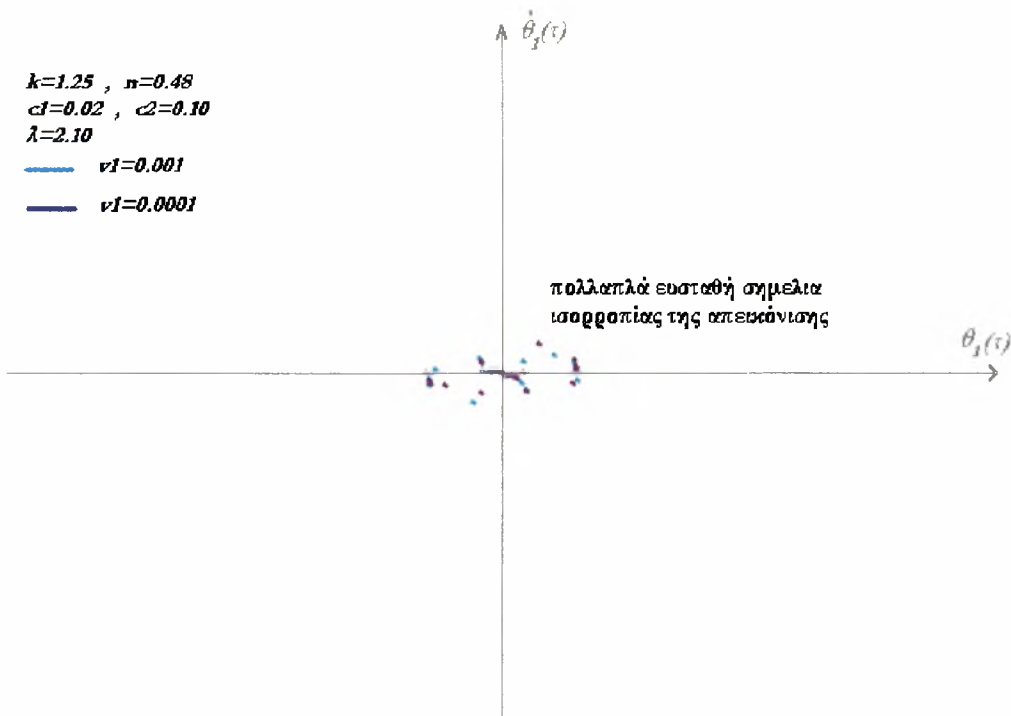
— $\nu1=0.001$
 — $\nu1=0.0001$



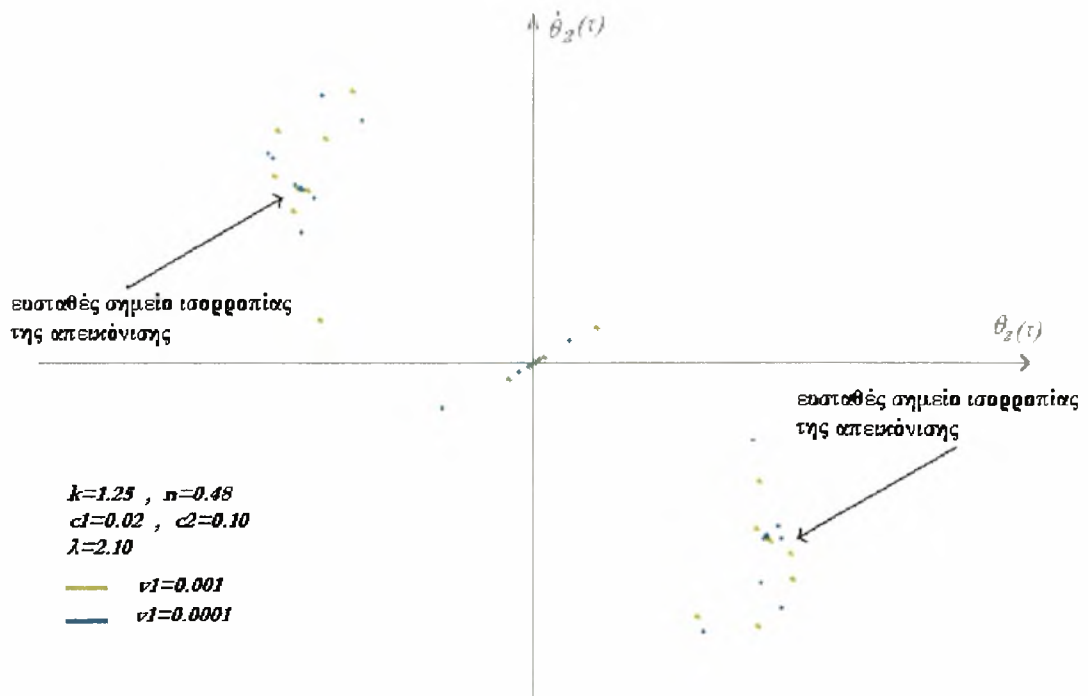
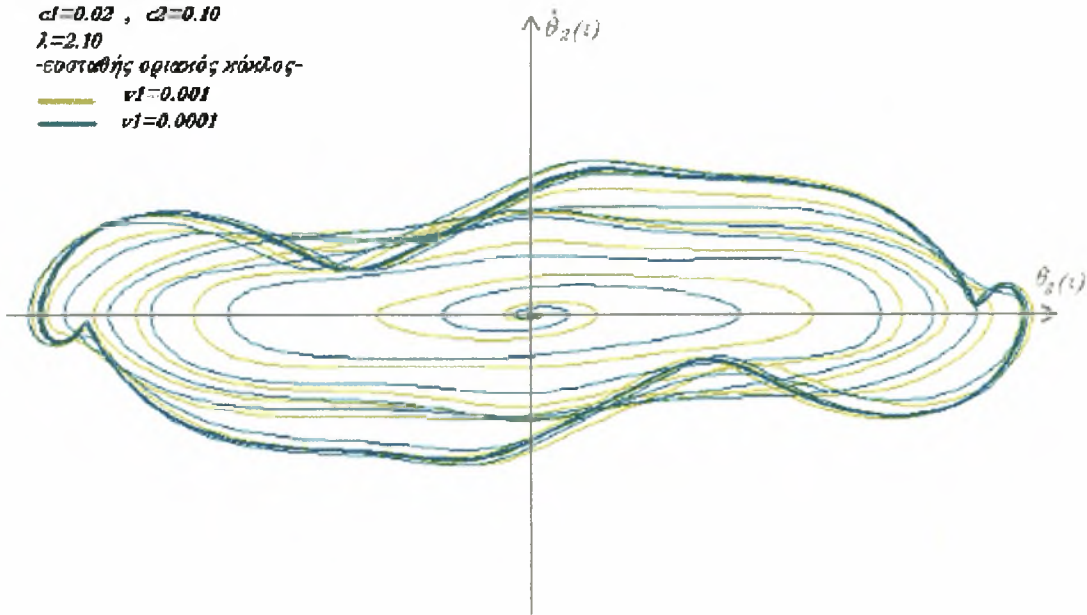
$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.10$

— $\nu1=0.001$
 — $\nu1=0.0001$

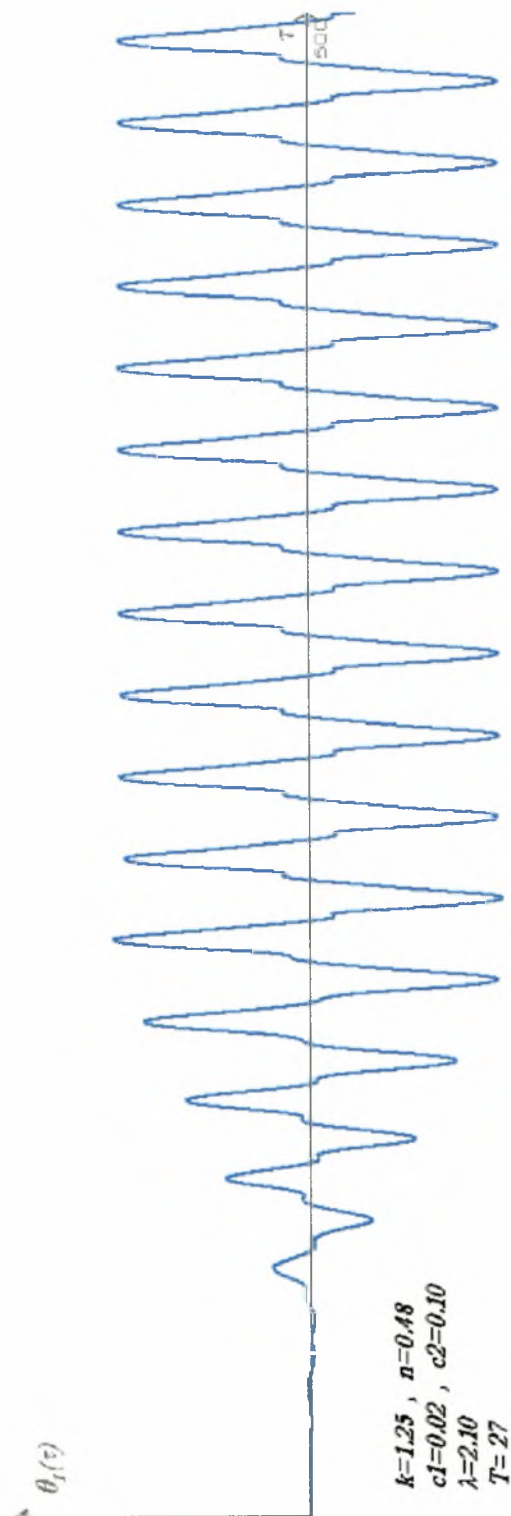
πολλαπλά ευσταθή σημεία
 ισορροπίας της απεικόνισης



$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.10$
 -ευσταθής οριατός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$

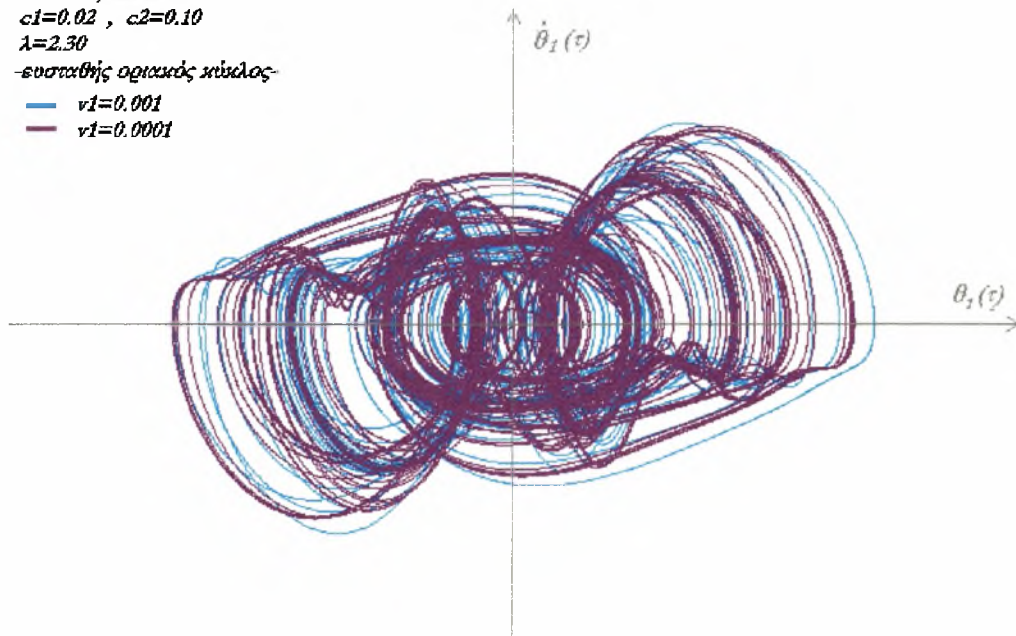


Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1^* = 0.001$

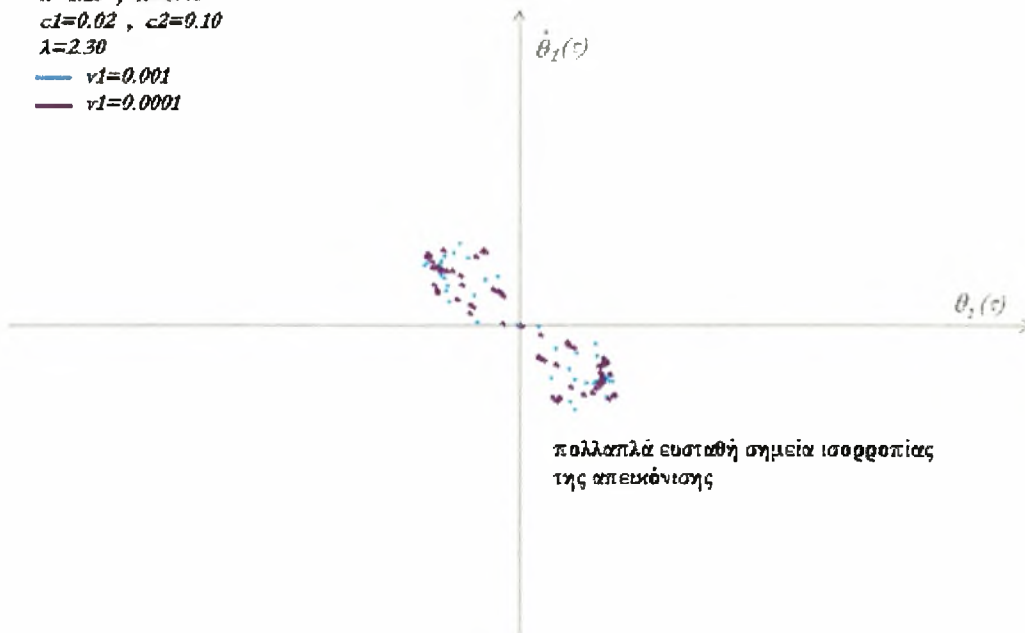


♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.30$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.30$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



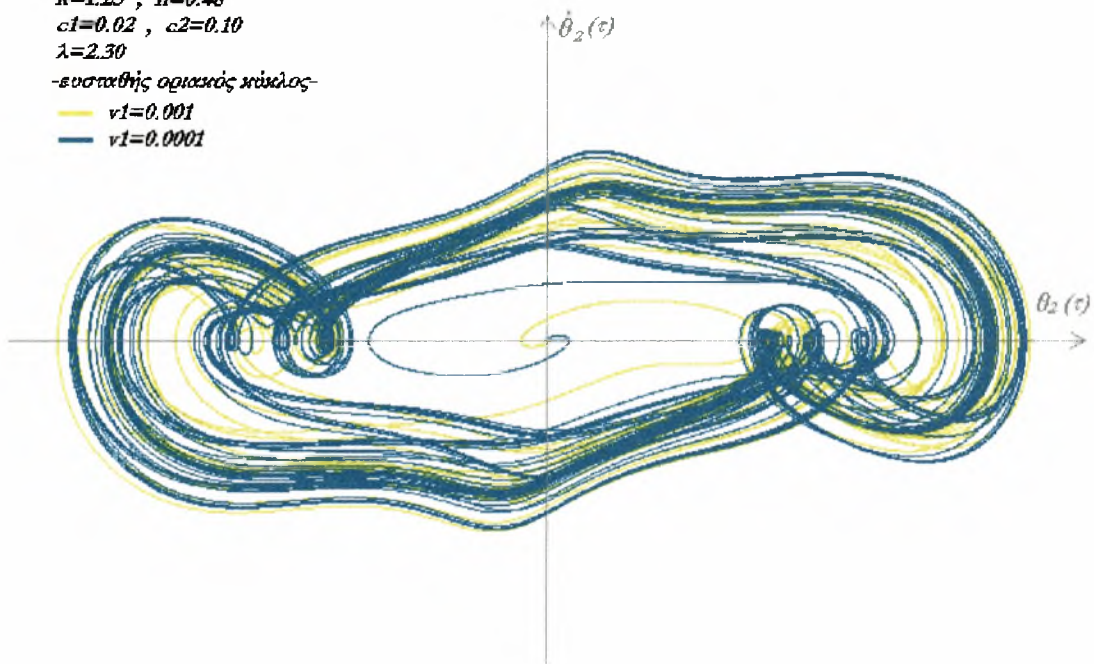
$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.30$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.30$

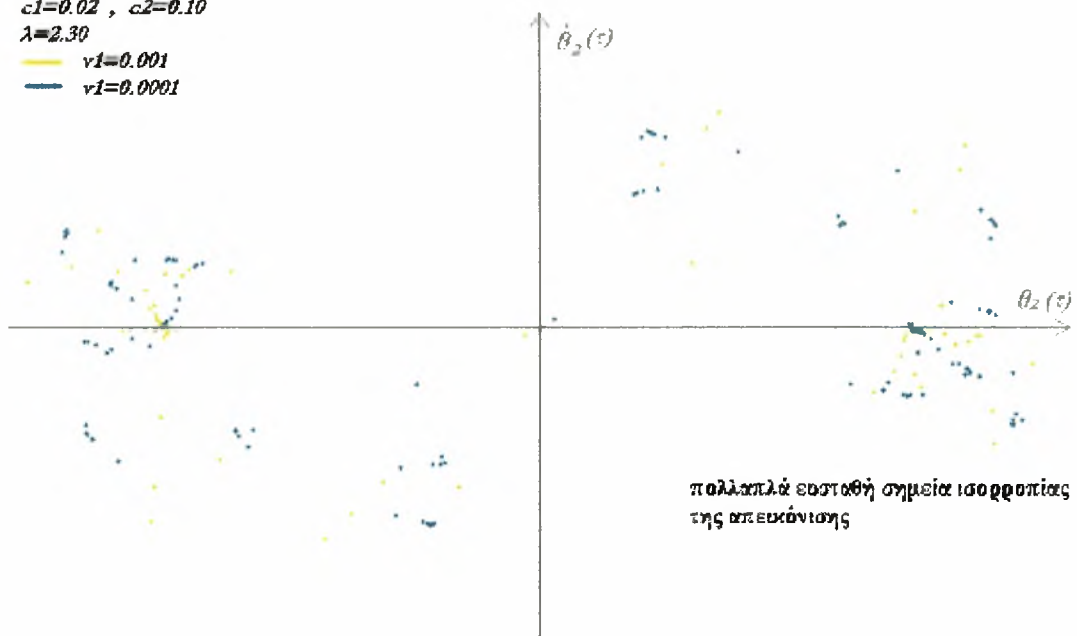
-ευσταθής οριακός κύκλος-

— $v1=0.001$
— $v1=0.0001$

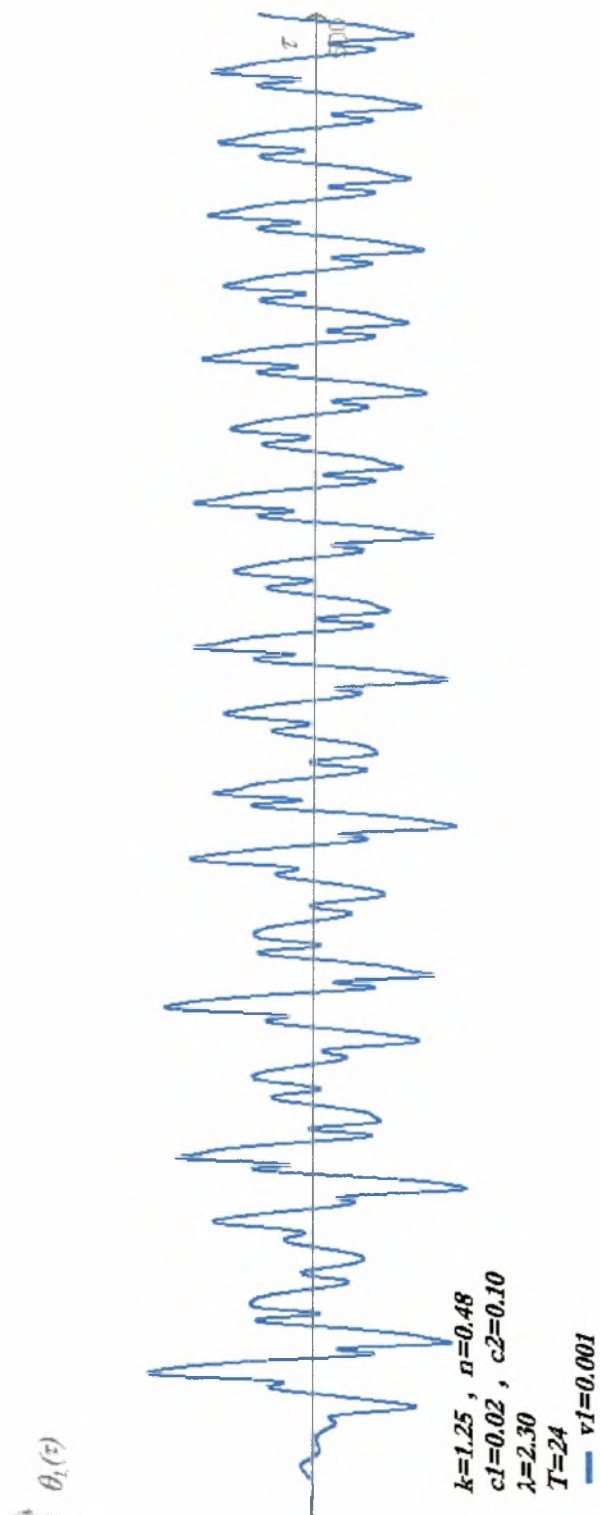


$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.30$

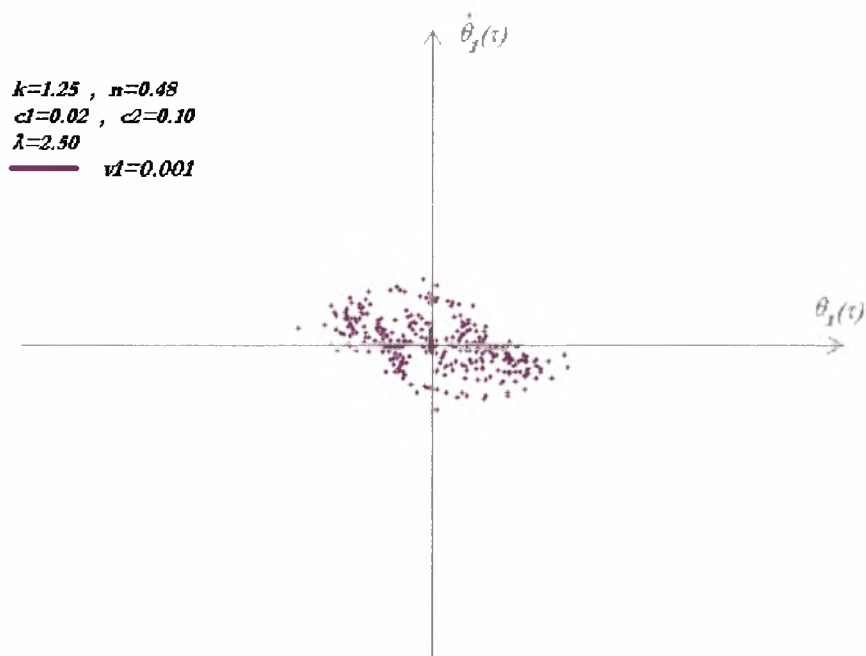
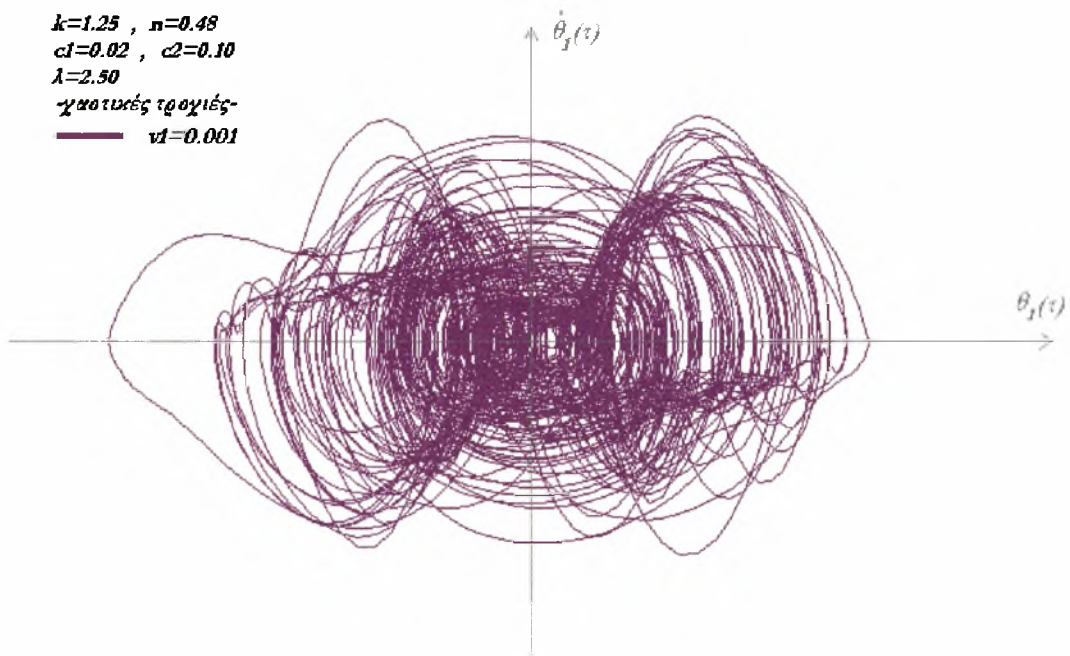
— $v1=0.001$
— $v1=0.0001$



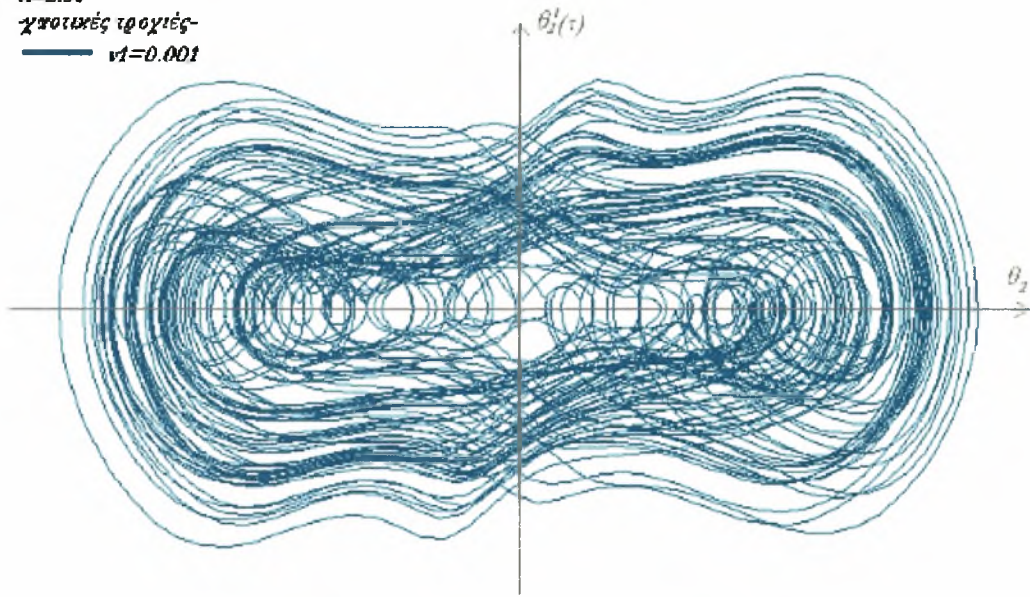
Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$



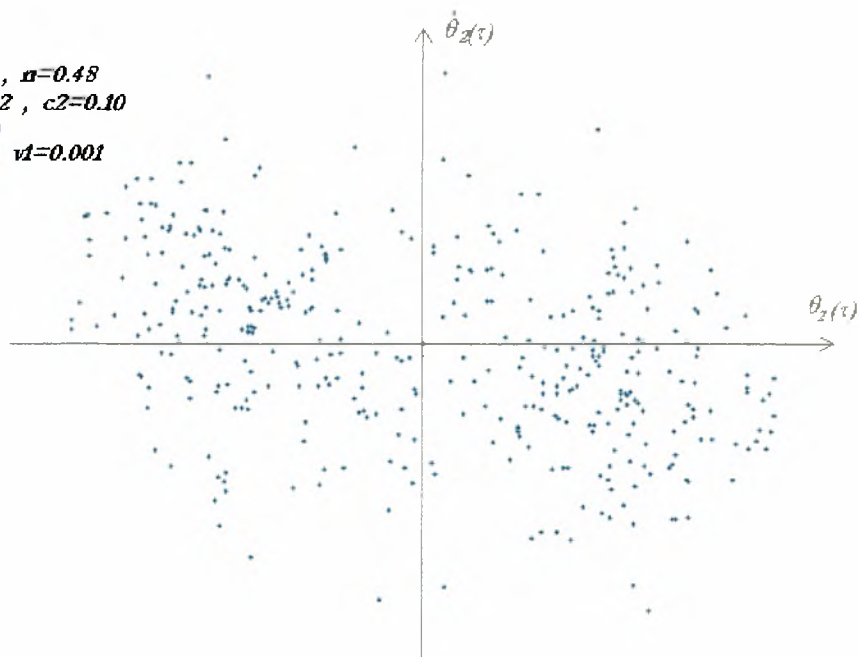
- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.50$ και αρχική συνθήκη $\dot{\theta}_1=0.001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:



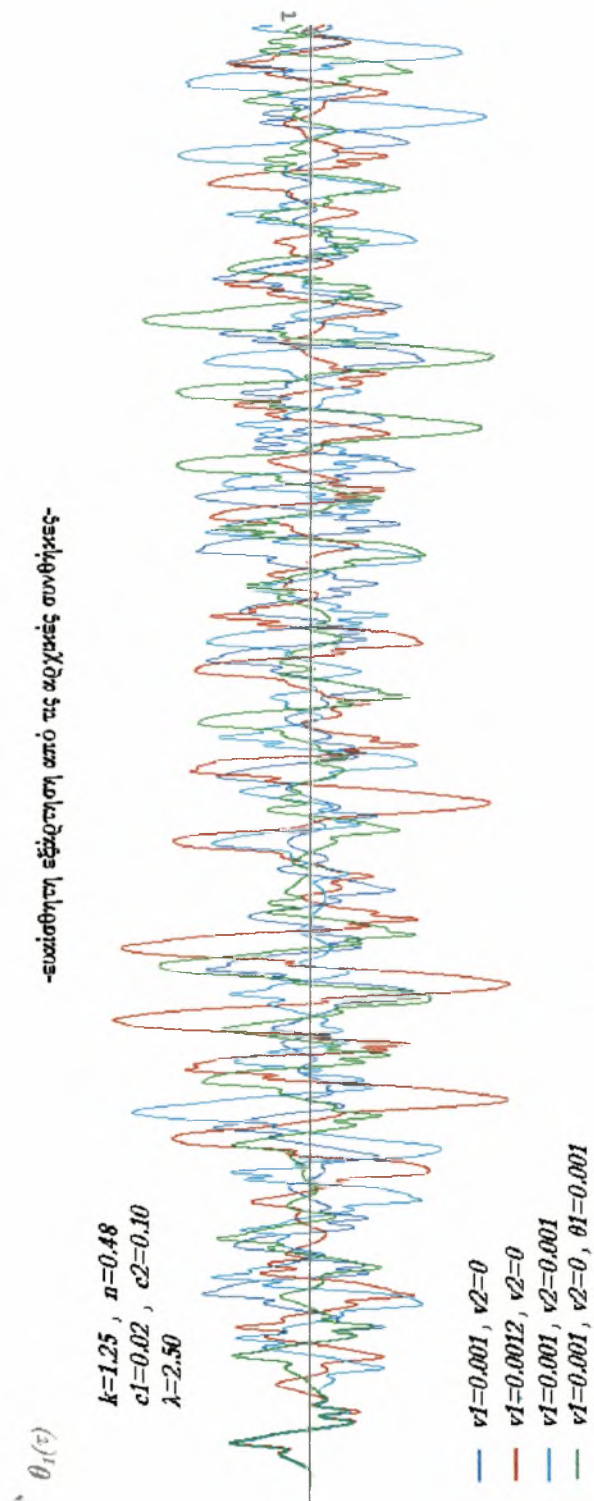
$k=1.25$, $\pi=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.50$
 χροϊκός τροχός-
 — $\nu1=0.001$



$k=1.25$, $\sigma=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.50$
 — $\nu1=0.001$

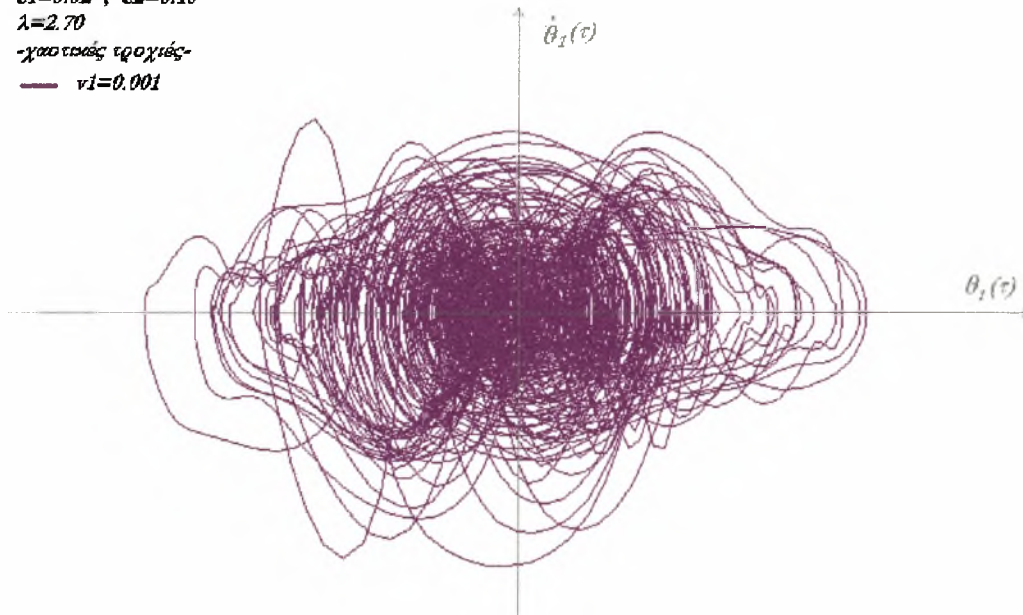


Εφόσον η συμπεριφορά είναι χαοτική εξετάζουμε περισσότερες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$.

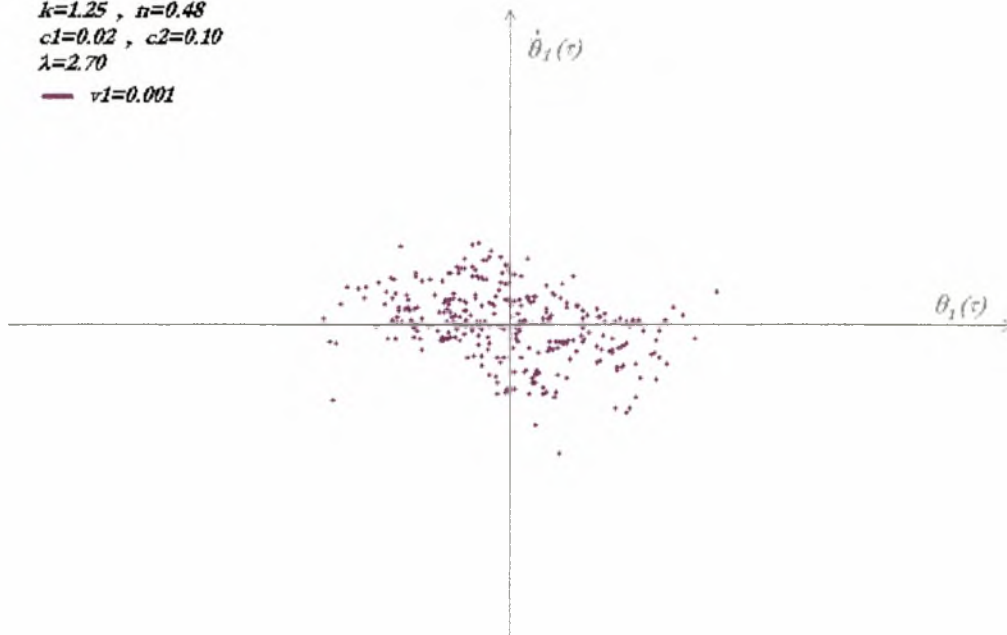


- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.70$ και αρχική συνθήκη $\dot{\theta}_1=0.001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

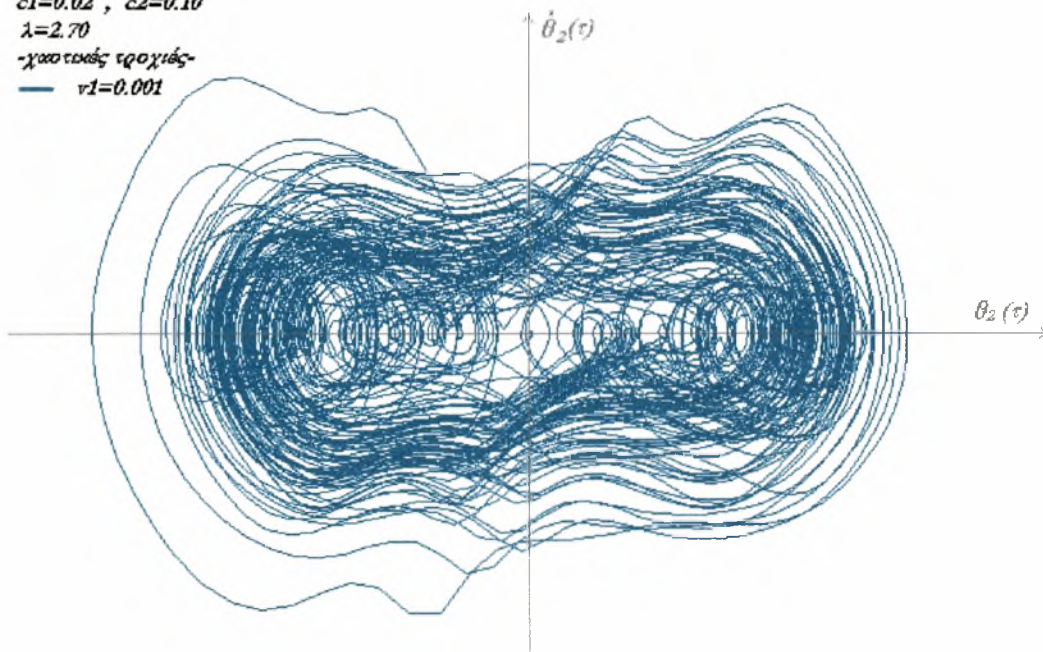
$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.70$
 -χαστακιάς τροχιές-
 — $v1=0.001$



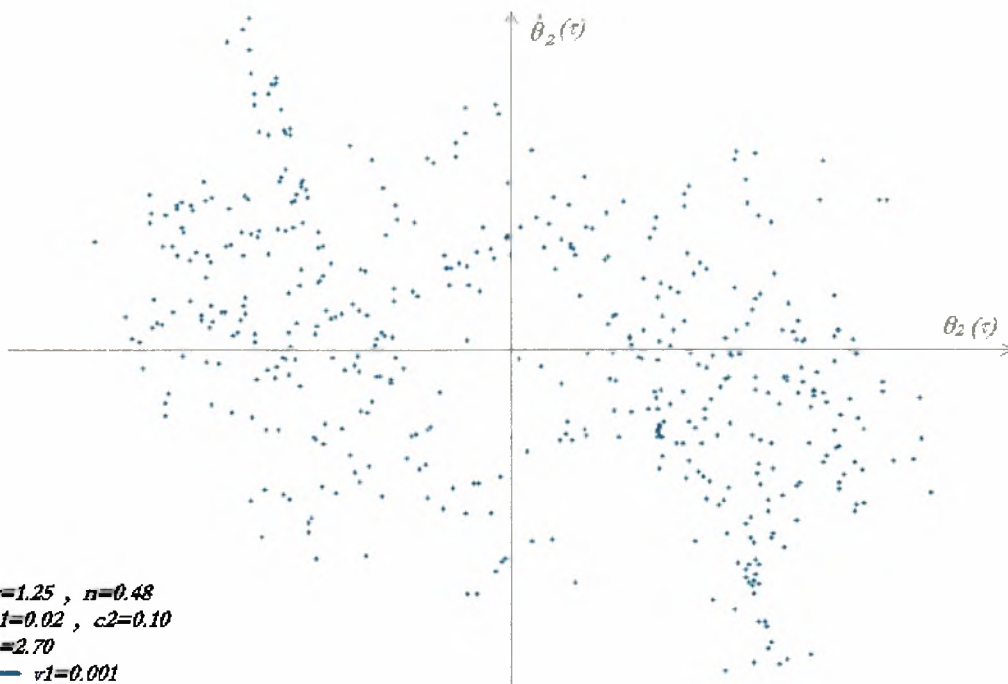
$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.70$
 — $v1=0.001$



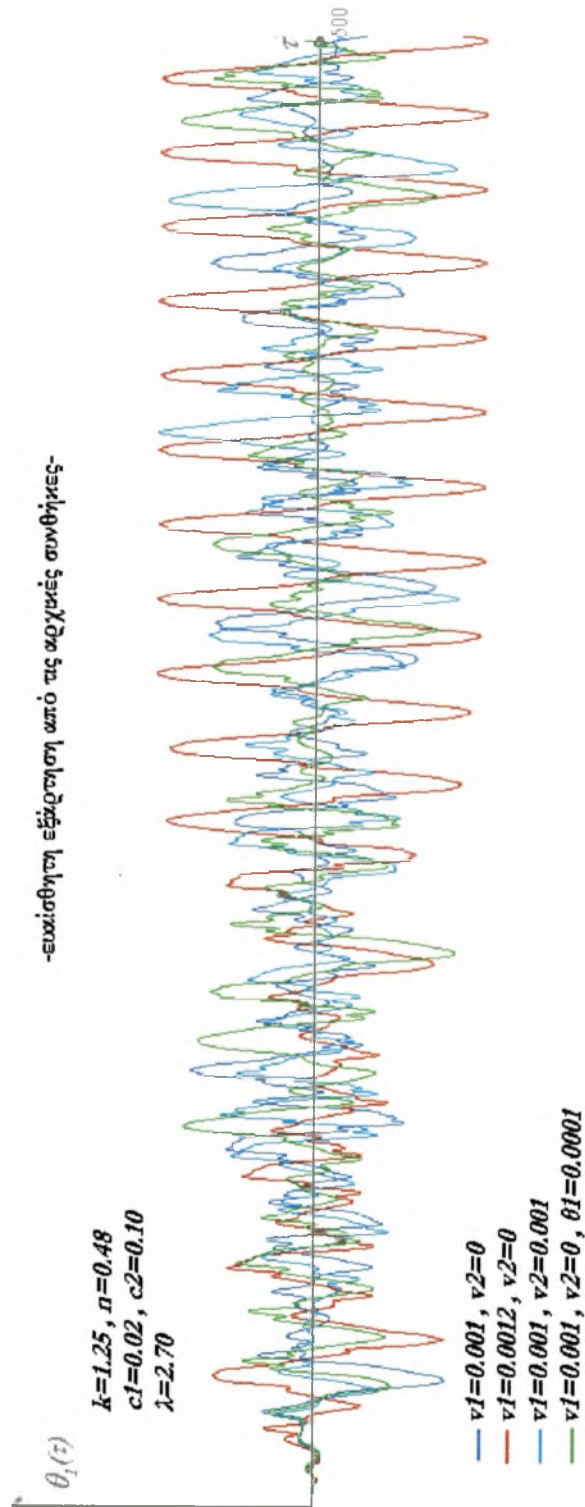
$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.70$
-χωριστές τροχιές-
— $v1=0.001$



$k=1.25$, $n=0.48$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.70$
— $v1=0.001$

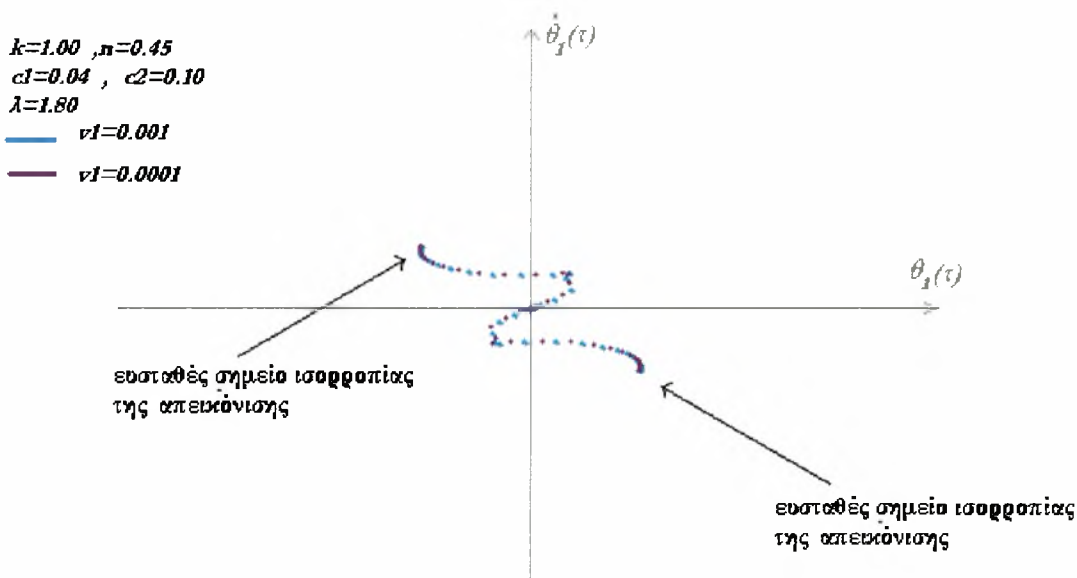
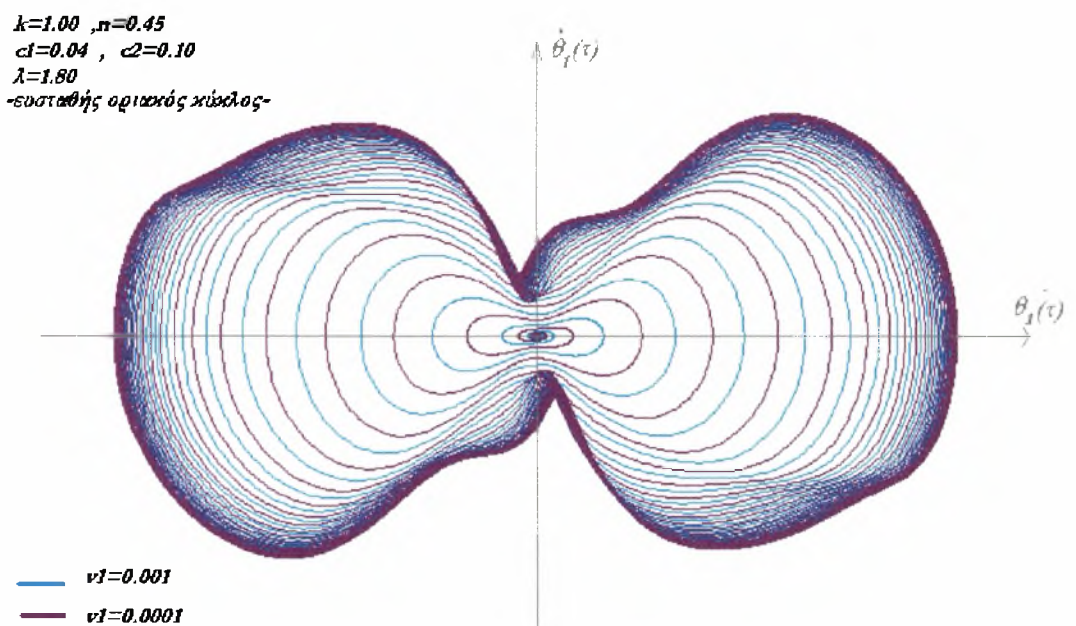


Εφόσον η συμπεριφορά είναι χαοτική εξετάζουμε περισσότερες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$.

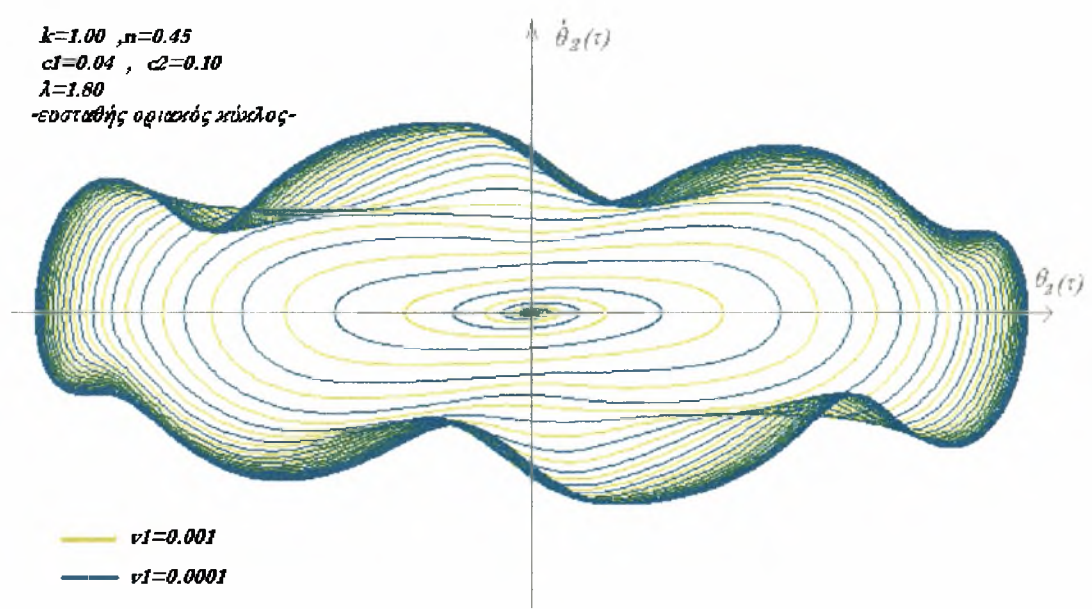


Για τη δεύτερη περίπτωση (Π2) που η περιοχή τιμών του αδιάστατου φορτίου λ είναι: $1.666666 \leq \lambda \leq 3.0137841$ η μελέτη μας εφαρμόζεται στις ακόλουθες τιμές του: 1.80, 2.00, 2.20, 2.40, 2.60 και 2.80.

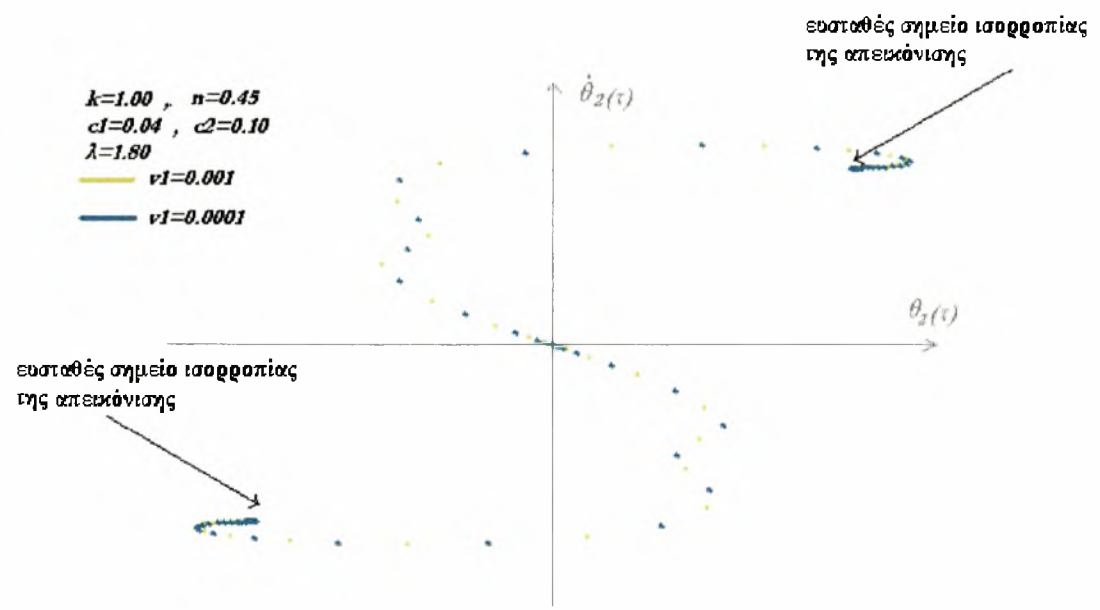
- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.80$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:



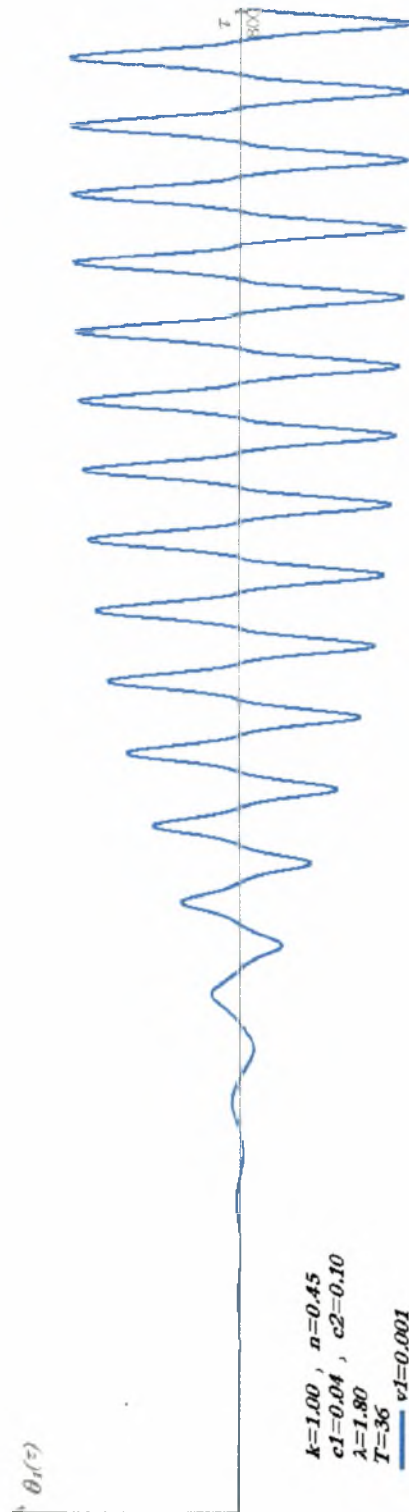
$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.80$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-



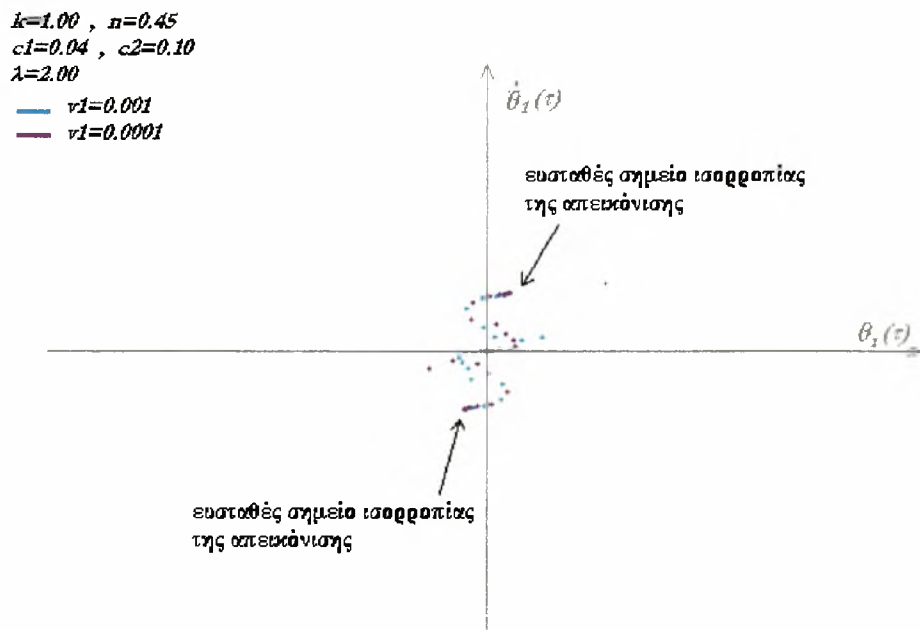
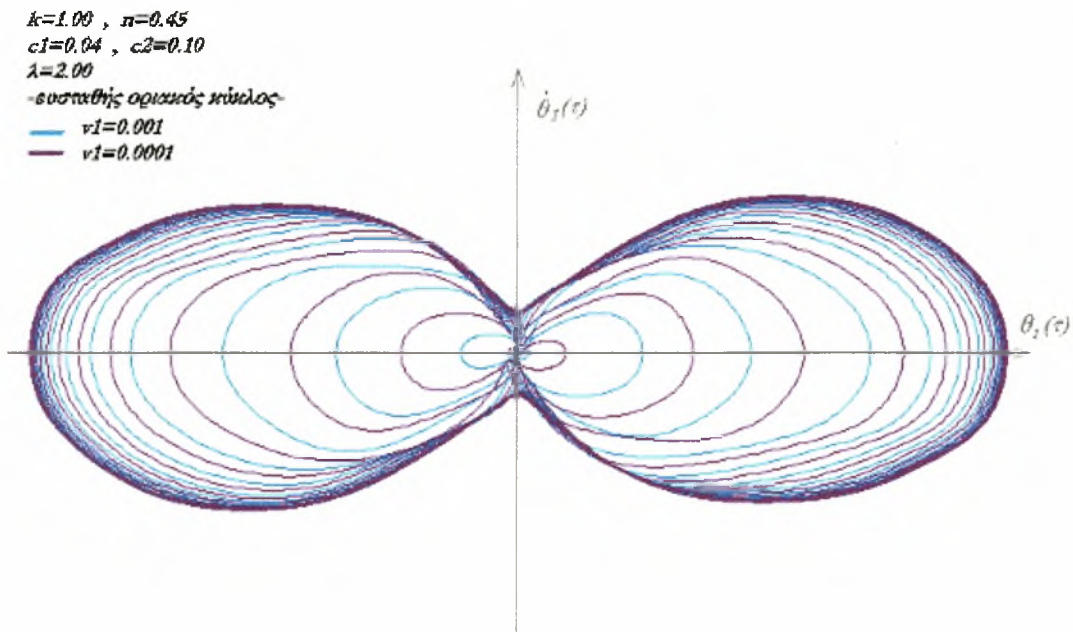
$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.80$
 $\nu1=0.001$
 $\nu1=0.0001$



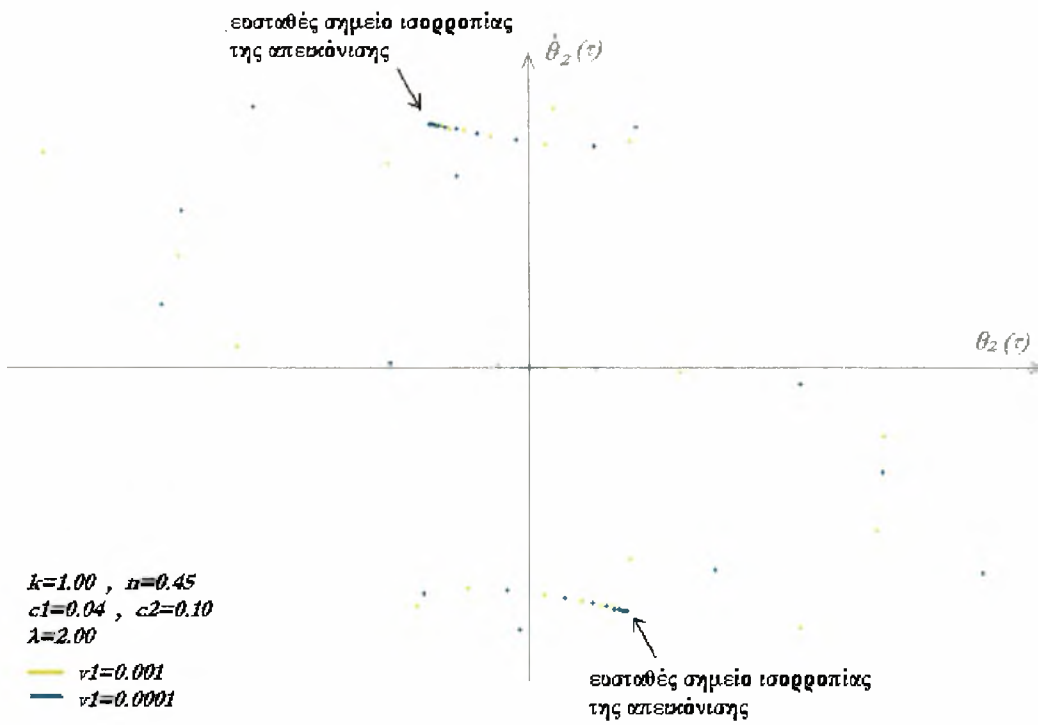
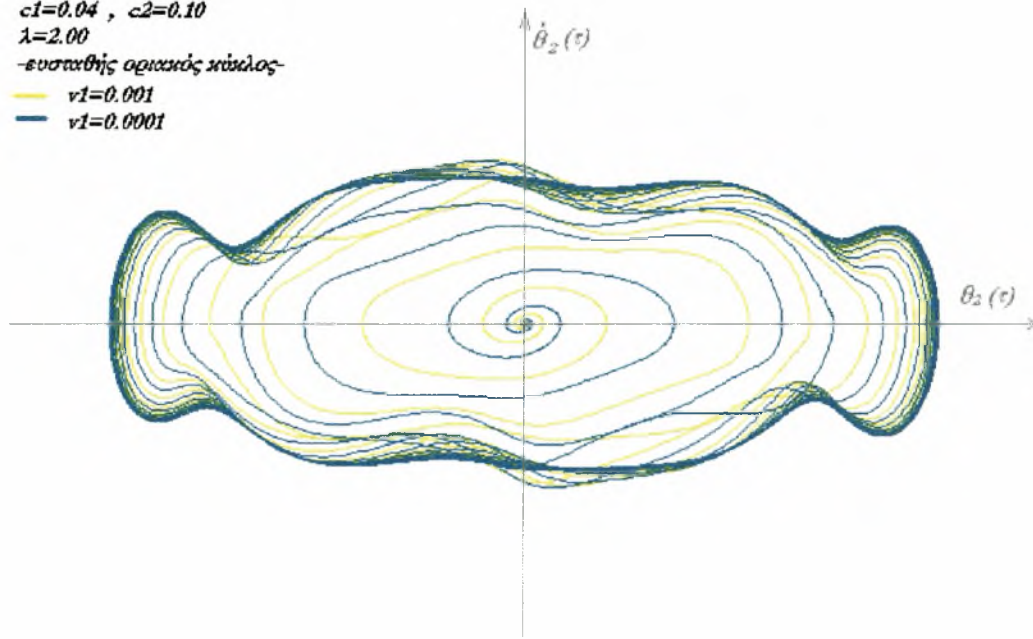
Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1^* = 0.001$



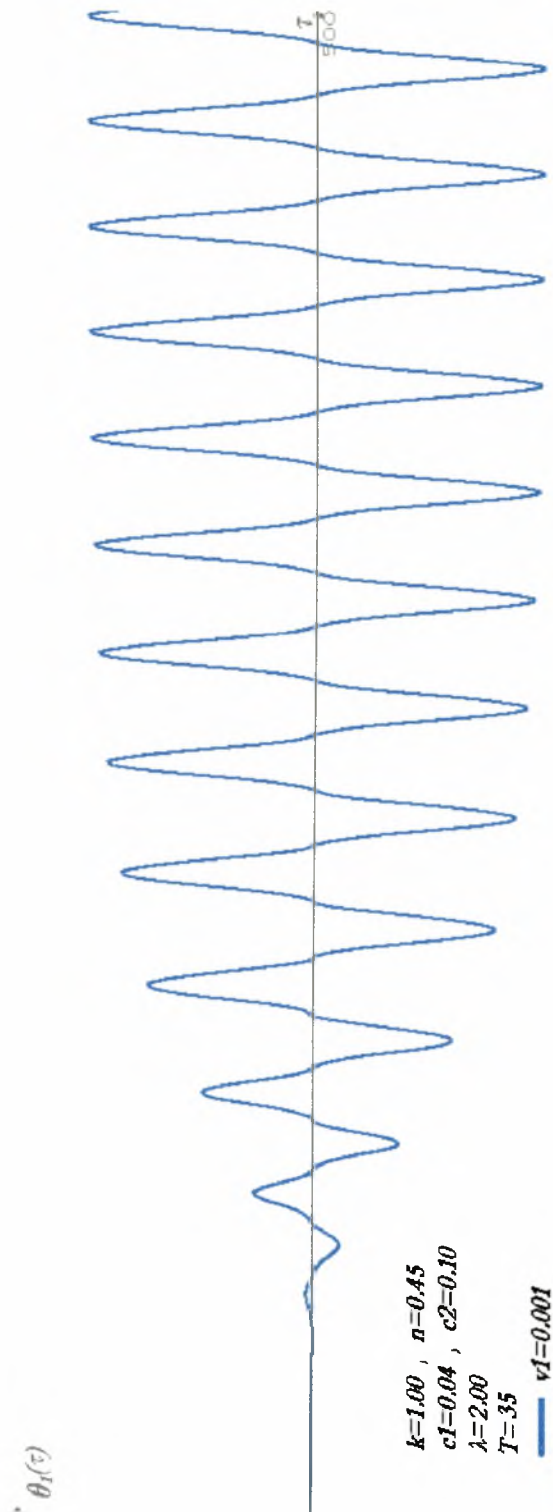
- ✦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.00$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:



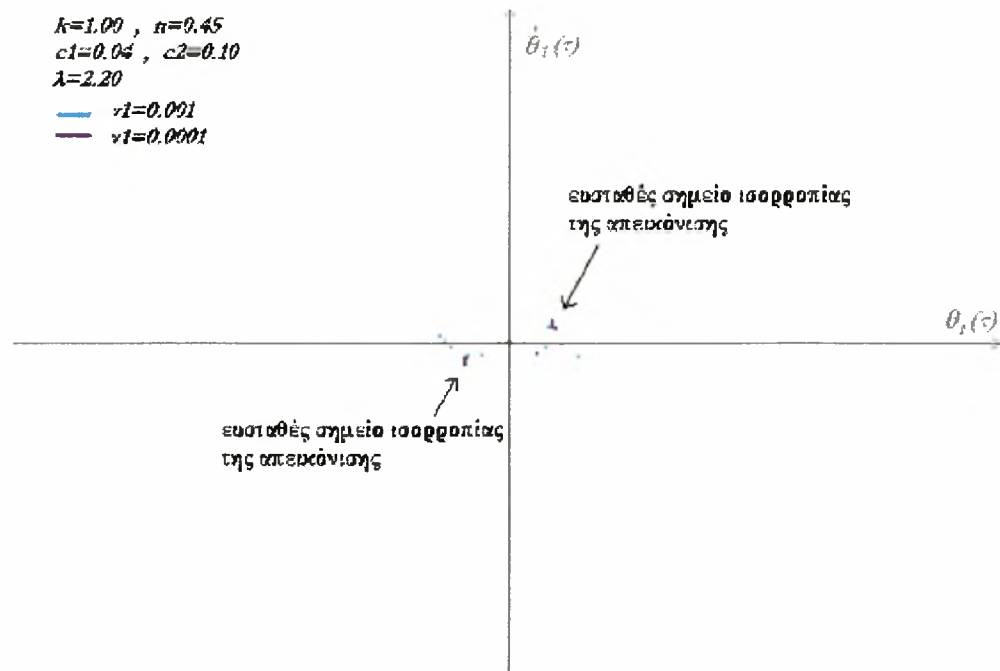
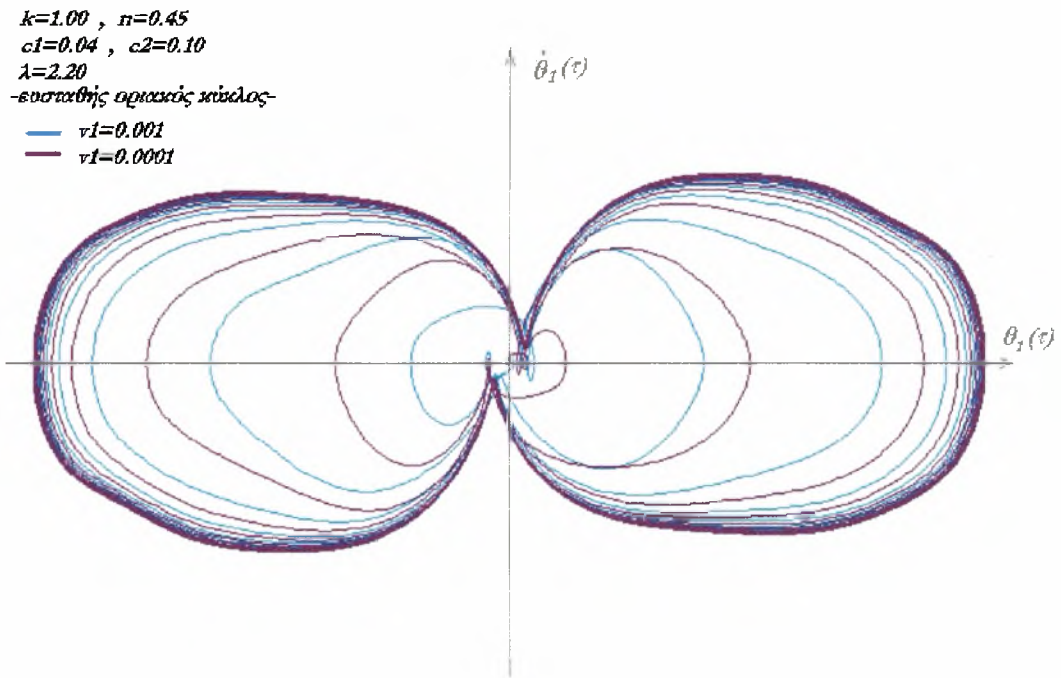
$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.00$
 -ευσταθής οριζικός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



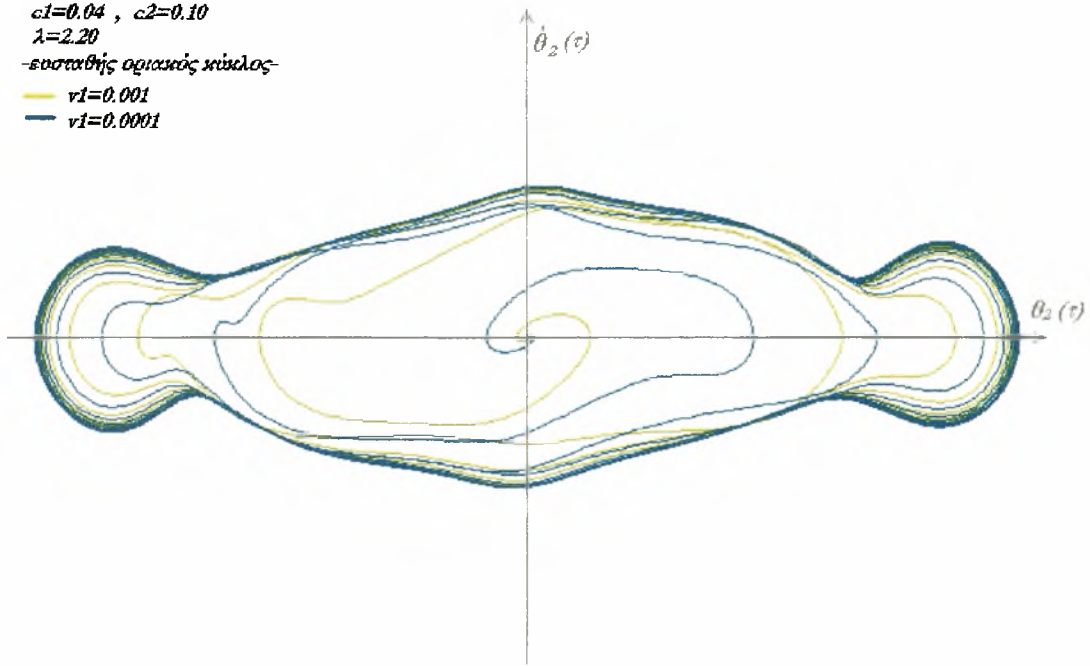
Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1^* = 0.001$



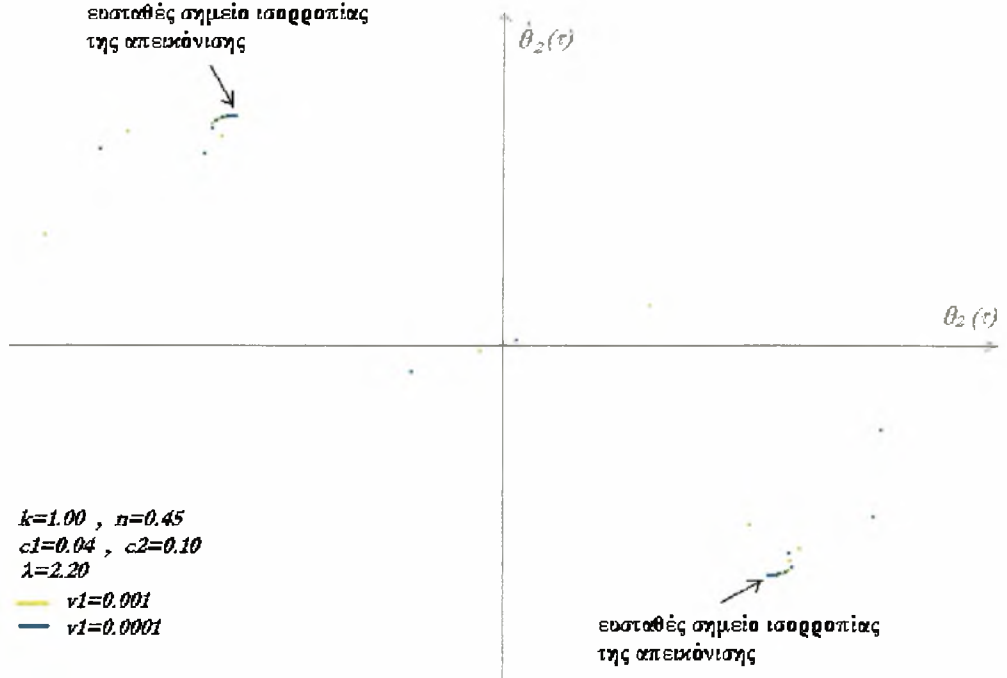
- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.20$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:



$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.20$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



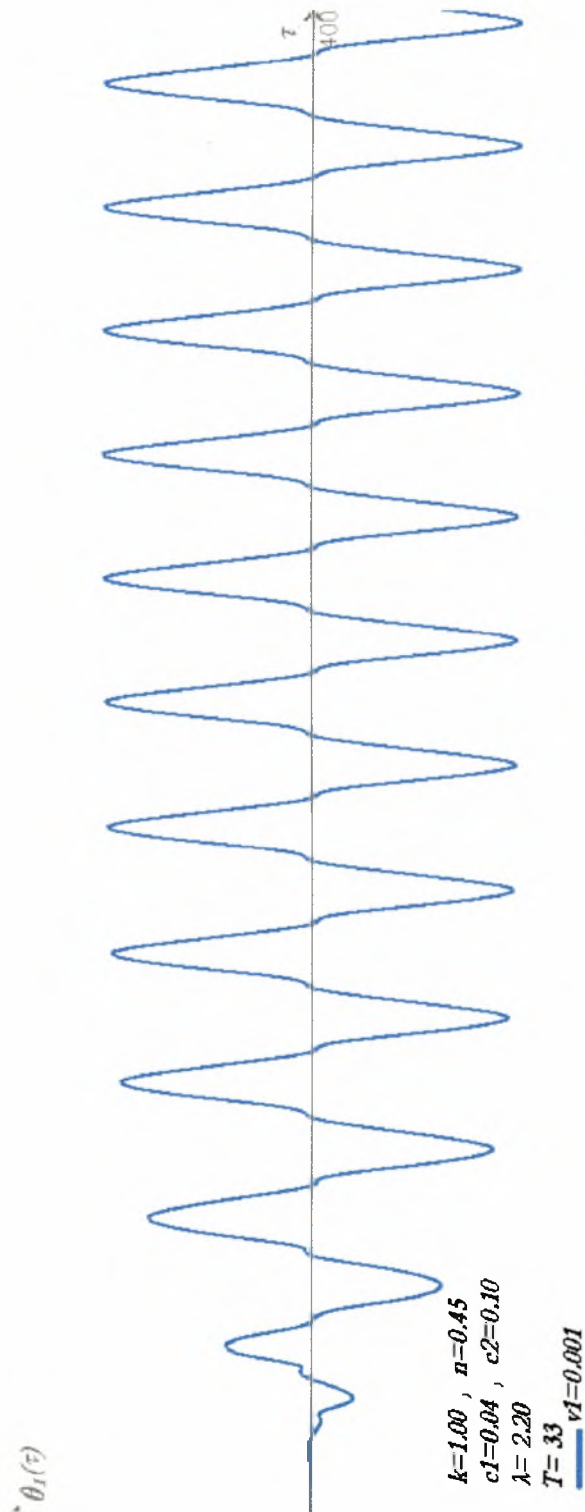
ευσταθές σημείο ισορροπίας της απεικόνισης



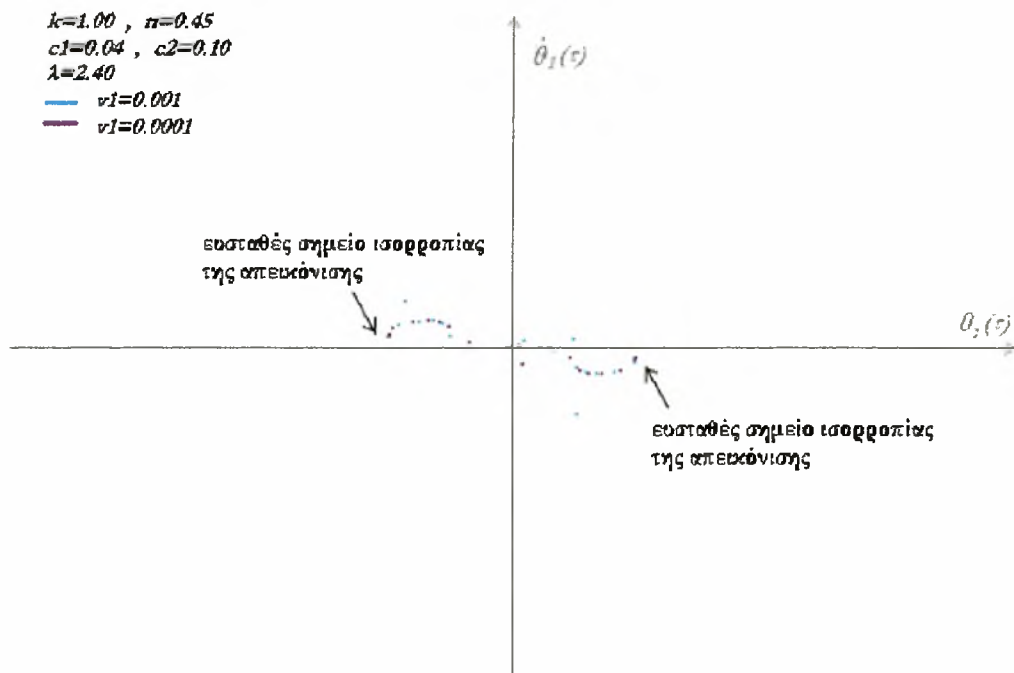
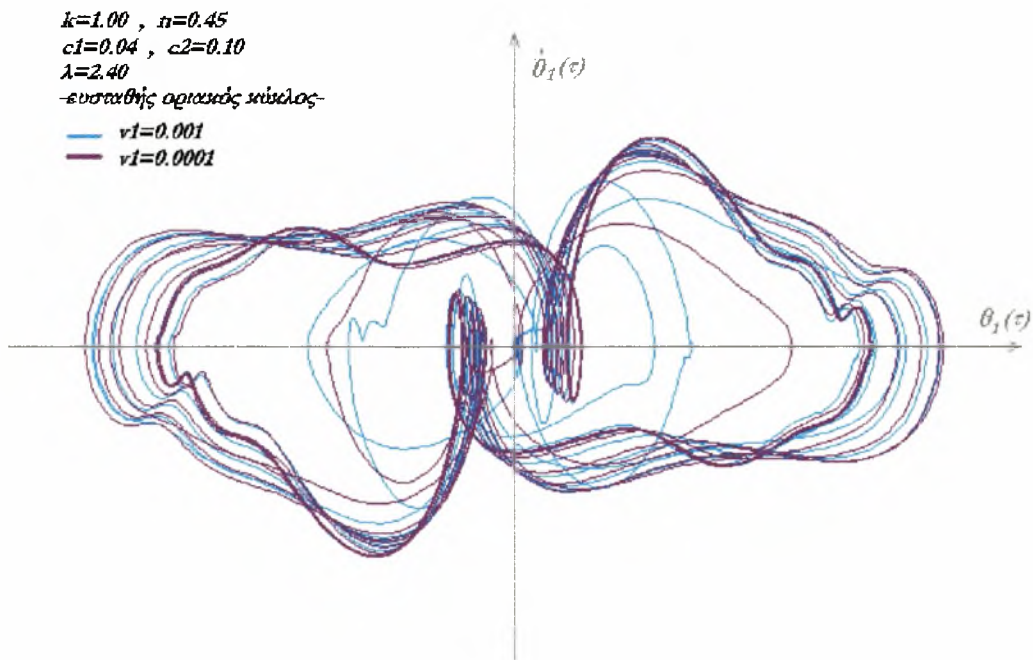
$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.20$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$

ευσταθές σημείο ισορροπίας της απεικόνισης

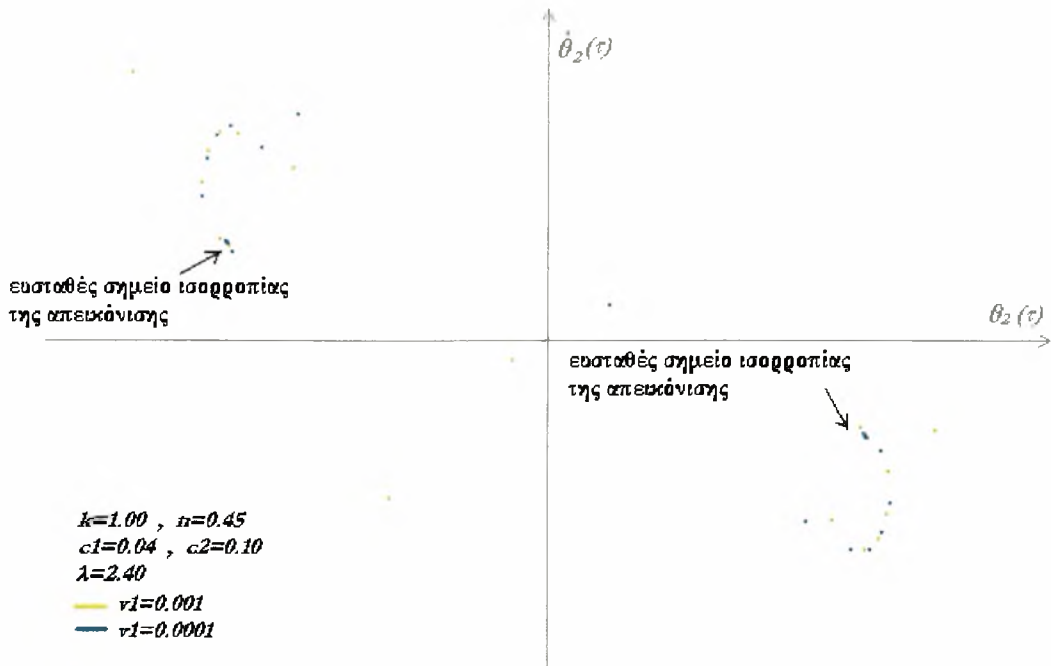
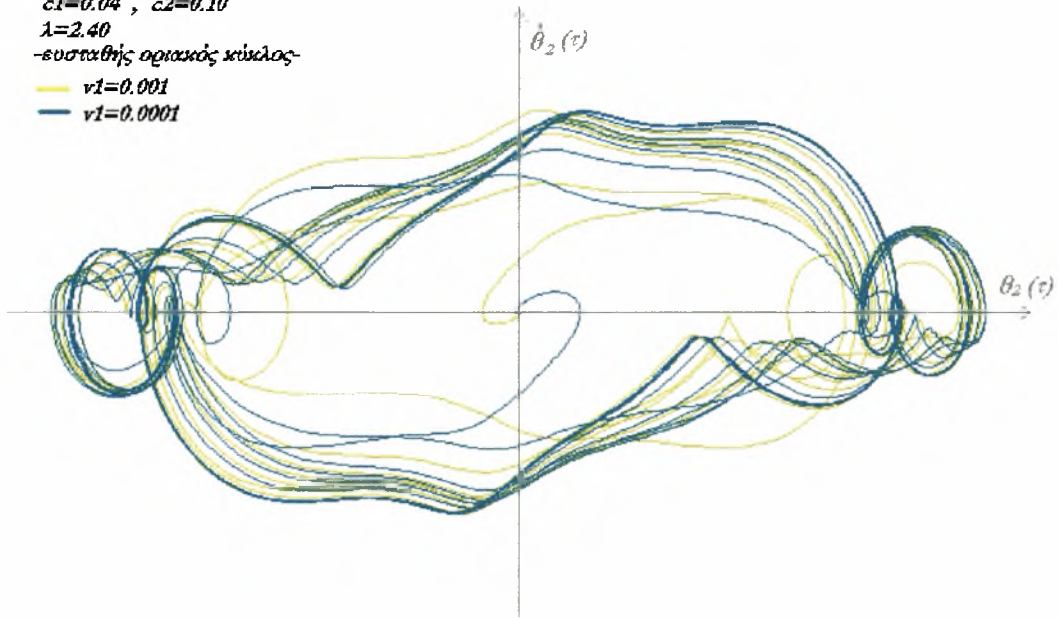
Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$



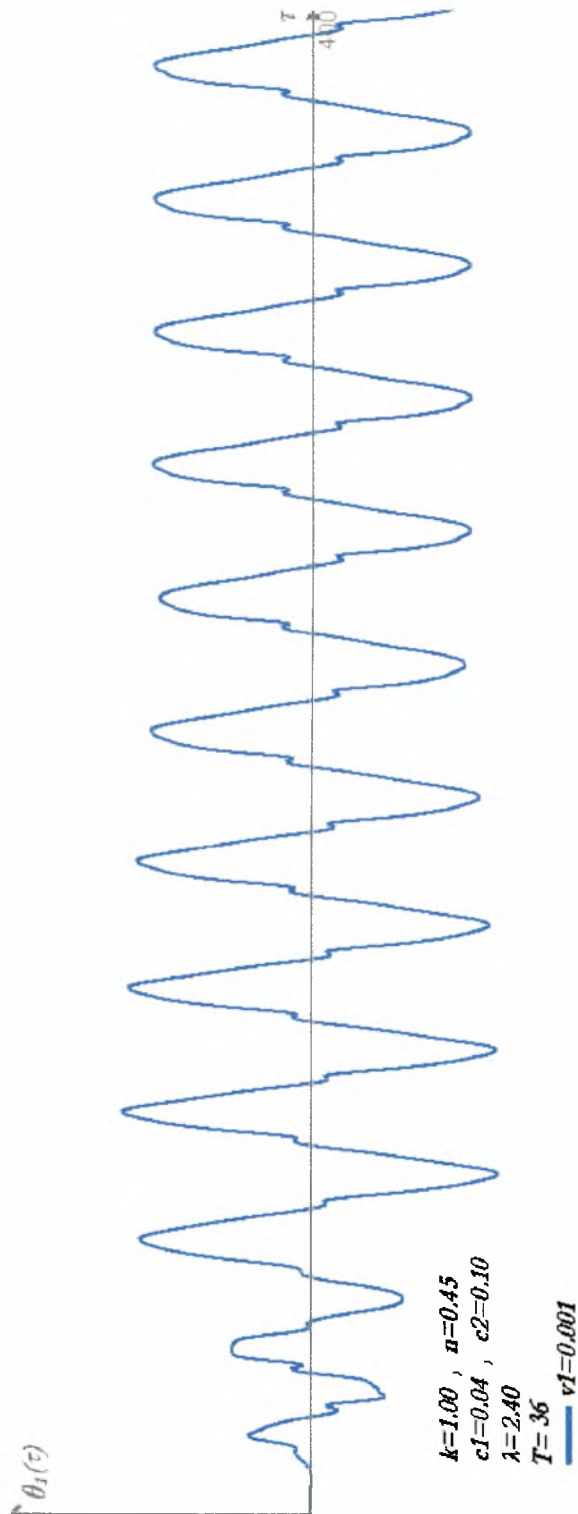
♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.40$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\theta_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:



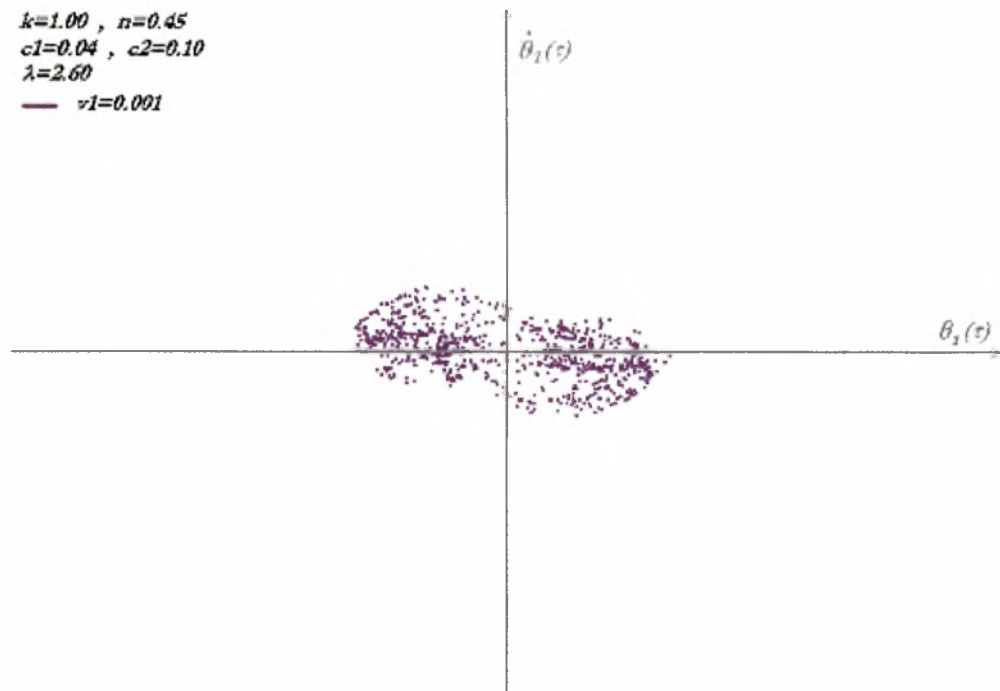
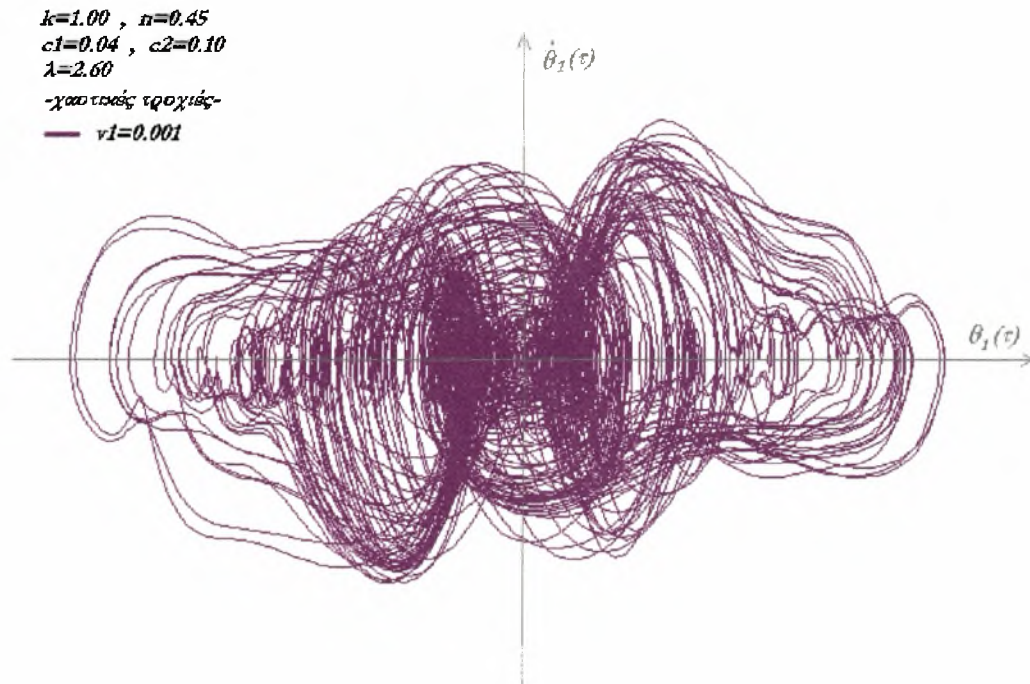
$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.40$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



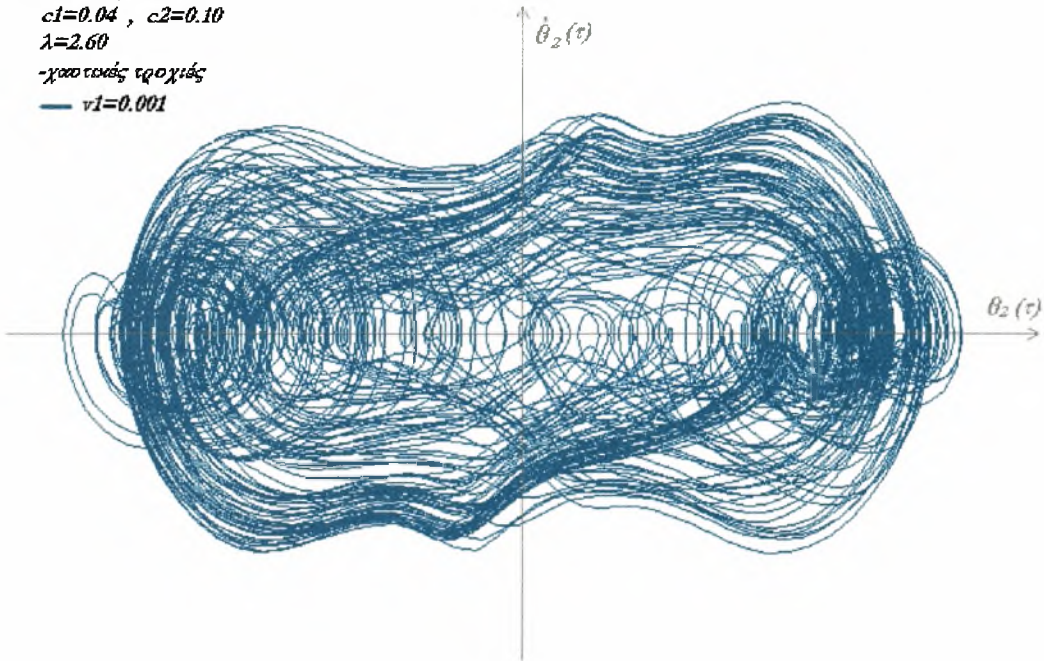
Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$



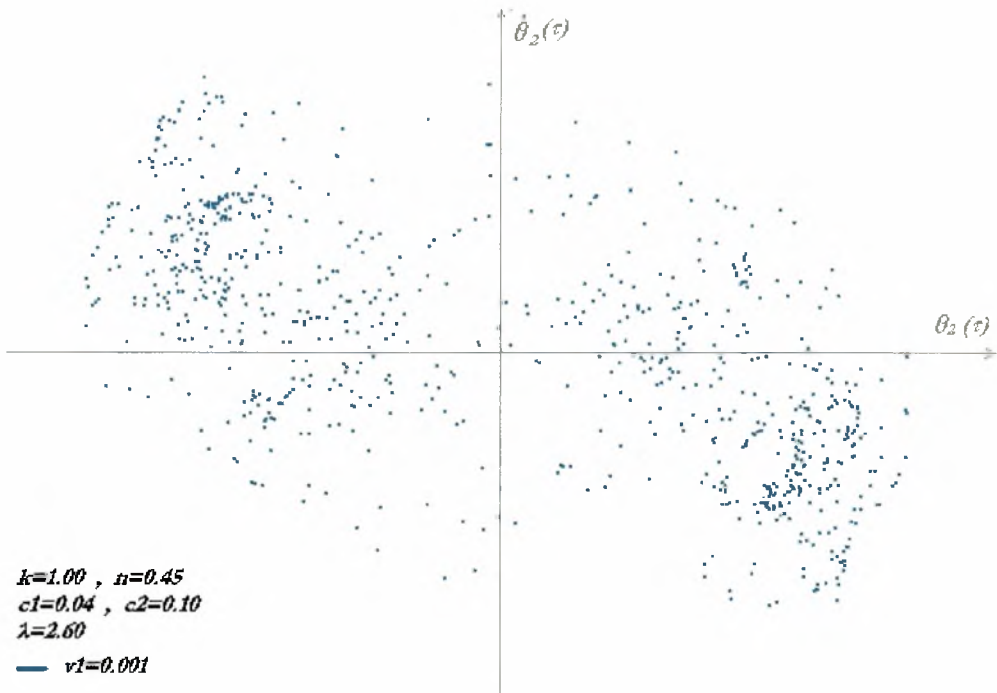
- ✦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.60$ και αρχική συνθήκη $\dot{\theta}_1=0.001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:



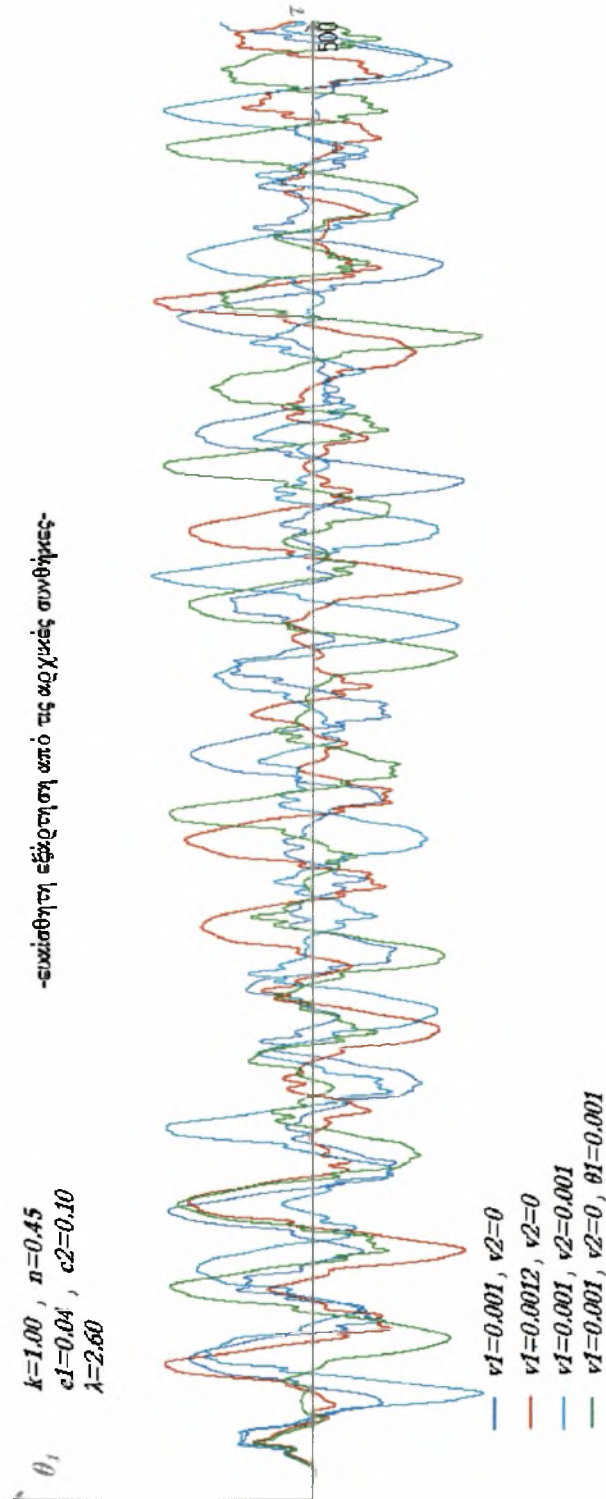
$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.60$
-χαστωστές τροχιές
— $\nu t=0.001$



$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.60$
— $\nu t=0.001$

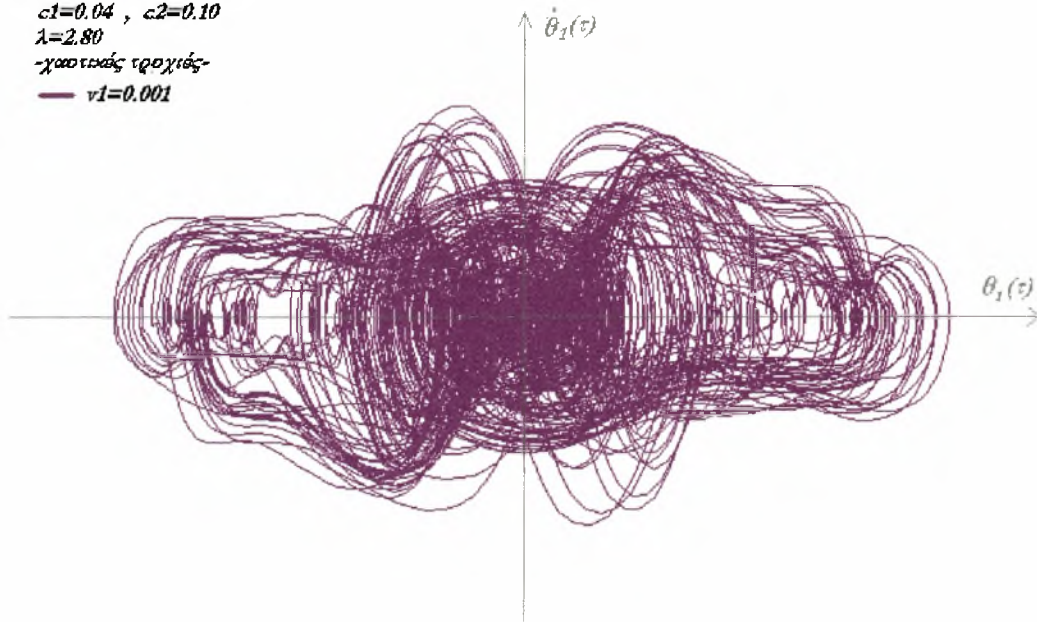


Εφόσον η συμπεριφορά είναι χαστική εξετάζουμε περισσότερες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$.

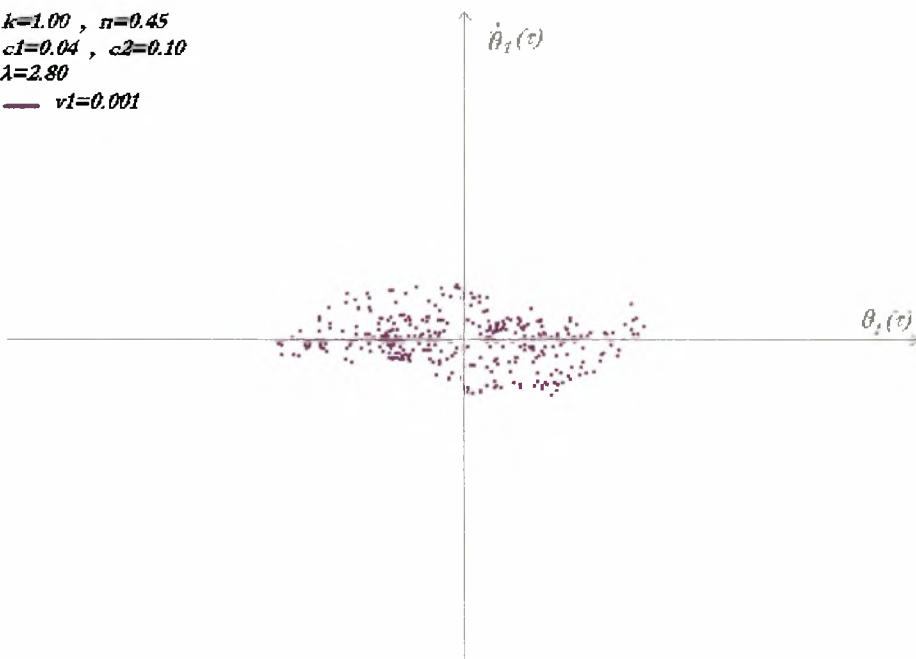


- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=2.80$ και αρχική συνθήκη $\dot{\theta}_1=0.001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

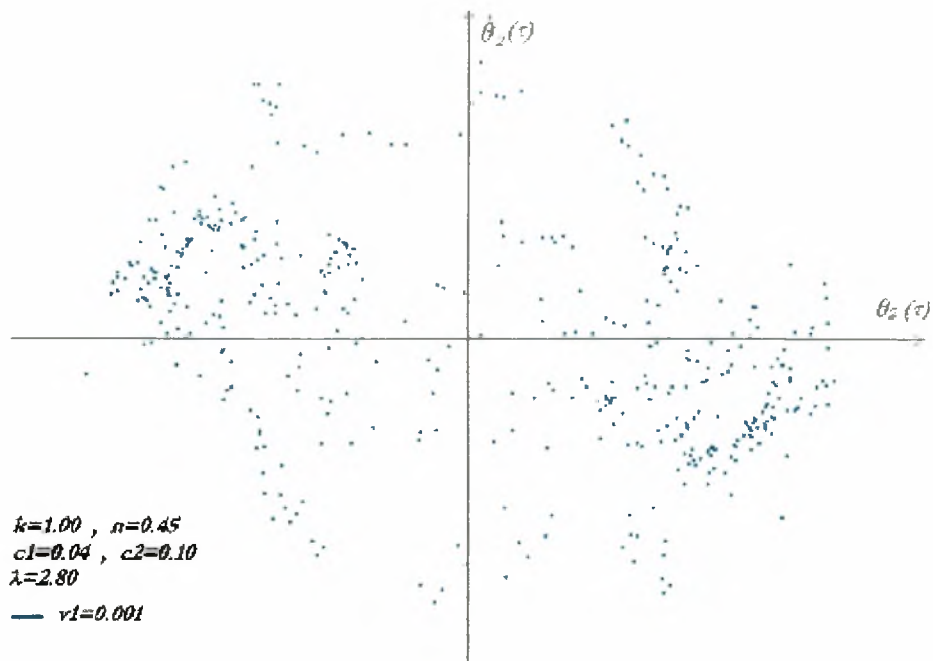
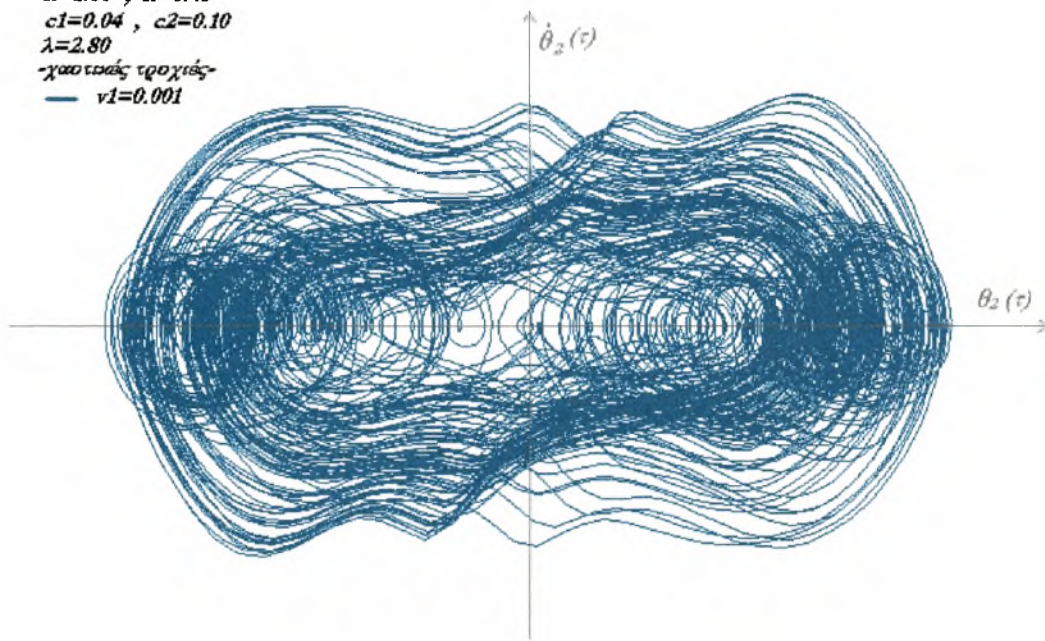
$k=1.00$, $\pi=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.80$
 -χασματώδης τροχιάς-
 — $v1=0.001$



$k=1.00$, $\pi=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.80$
 — $v1=0.001$

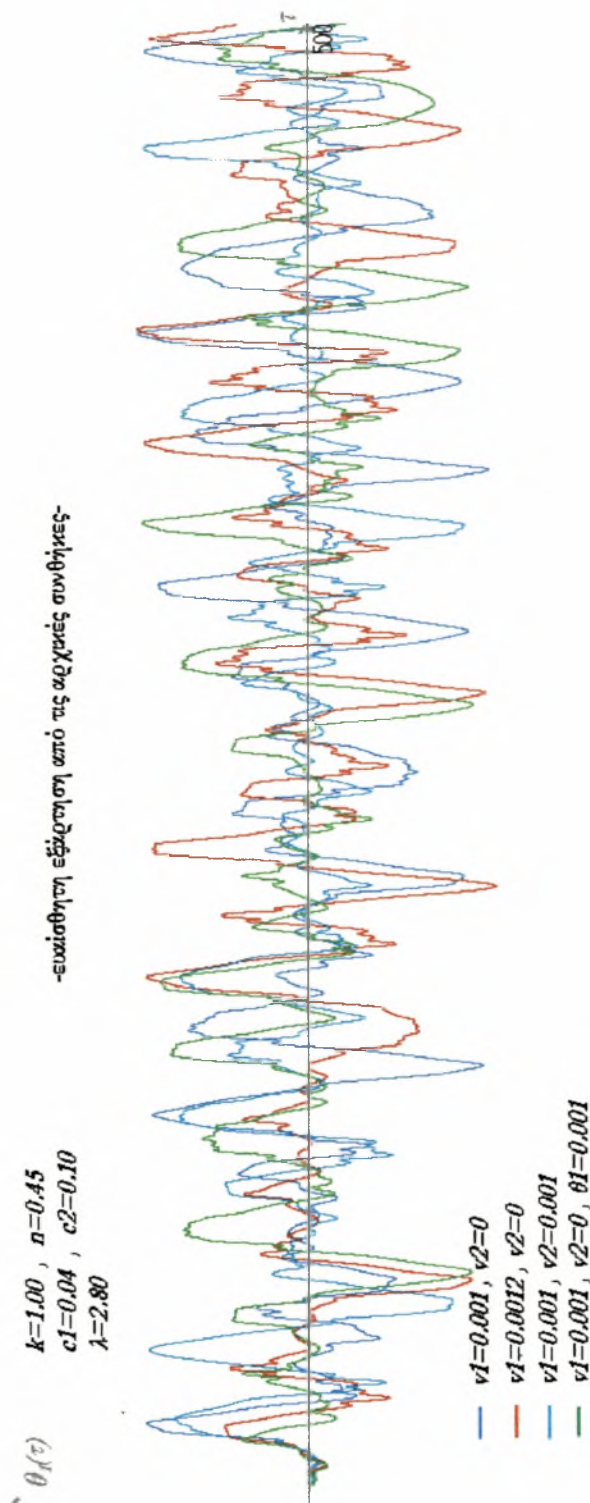


$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.80$
 -χωτιστάς τρωχιάς-
 — $\nu1=0.001$



$k=1.00$, $n=0.45$
 $c1=0.04$, $c2=0.10$
 $\lambda=2.80$
 — $\nu1=0.001$

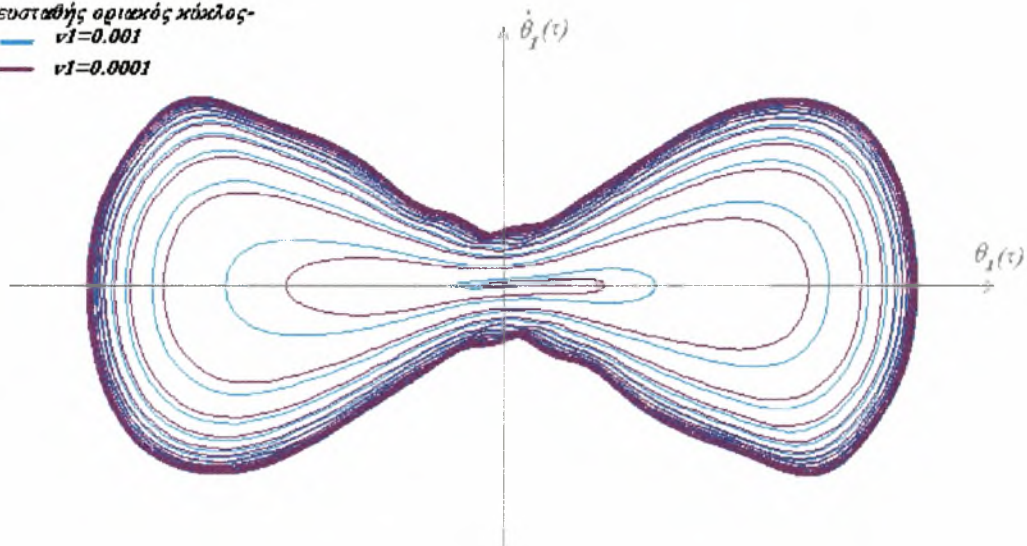
Εφόσον η συμπεριφορά είναι χαοτική εξετάζουμε περισσότερες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$.



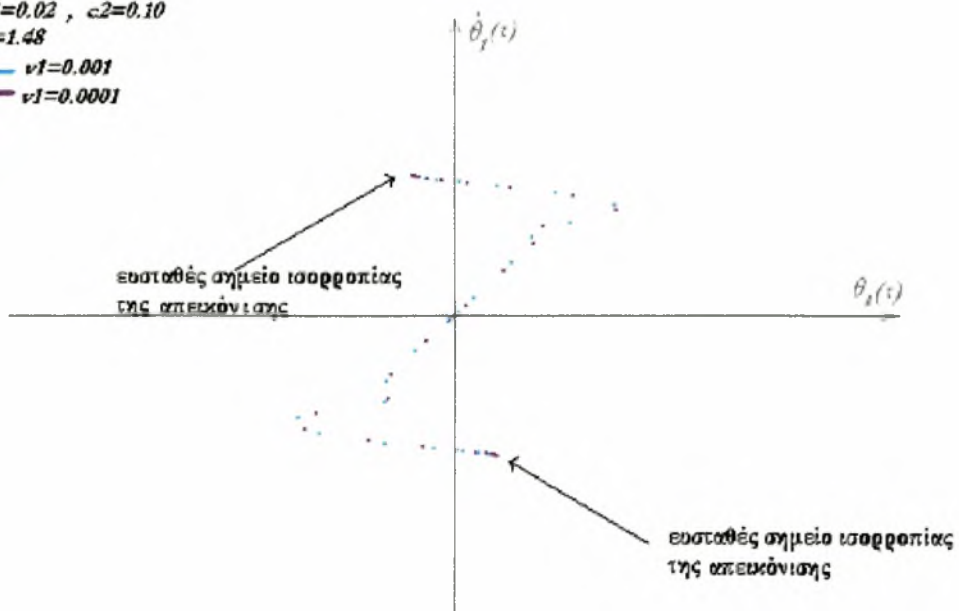
Για την τρίτη περίπτωση (Π3) που η περιοχή τιμών του αδιάστατου φορτίου λ είναι: $1.4676 \leq \lambda \leq 1.614262$ η μελέτη μας εφαρμόζεται στις ακόλουθες τιμές του: 1.48, 1.51, 1.54, 1.57 και 1.60.

- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.48$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\theta_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

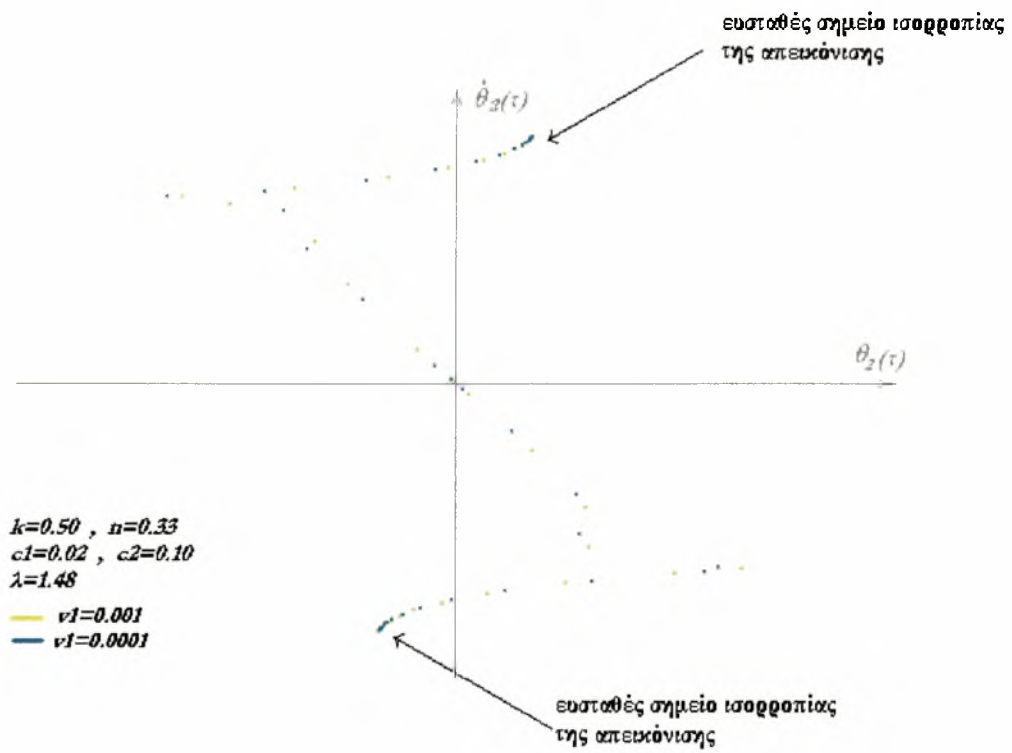
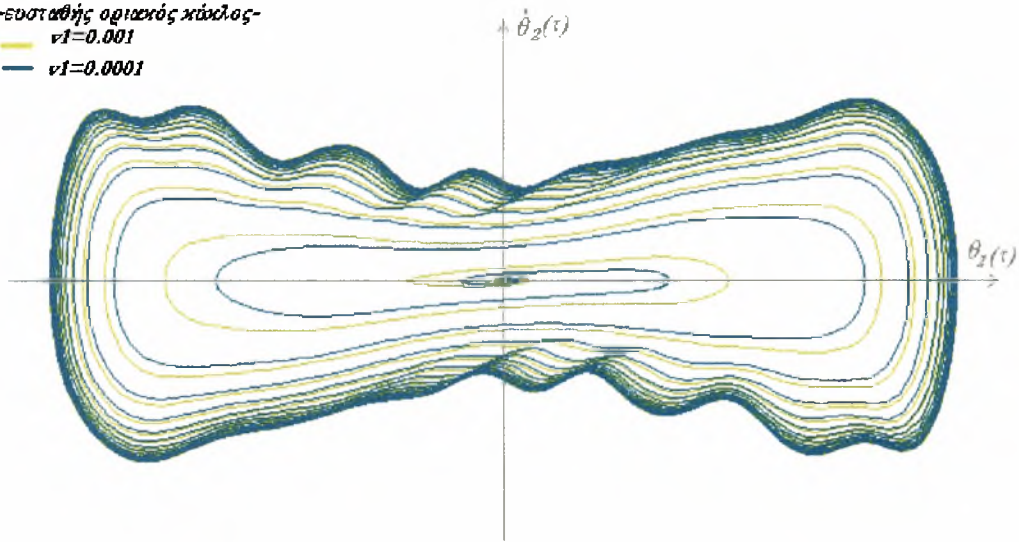
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.48$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



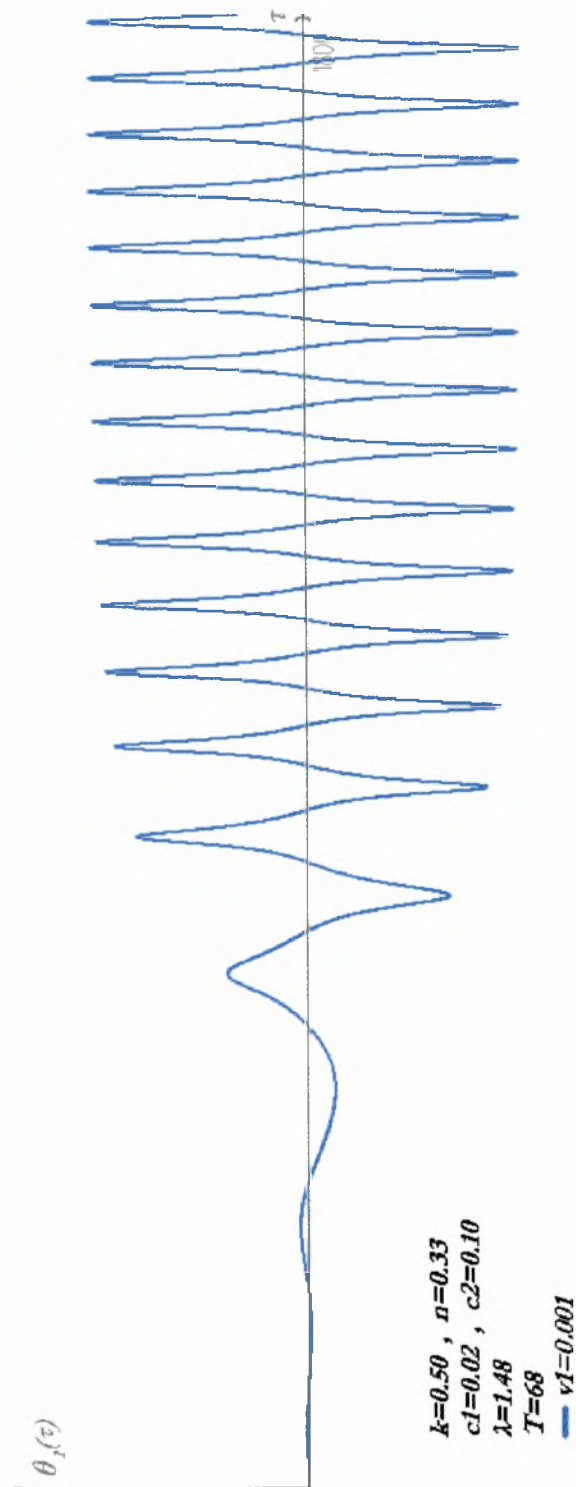
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.48$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.48$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $\nu1=0.001$
 — $\nu1=0.0001$

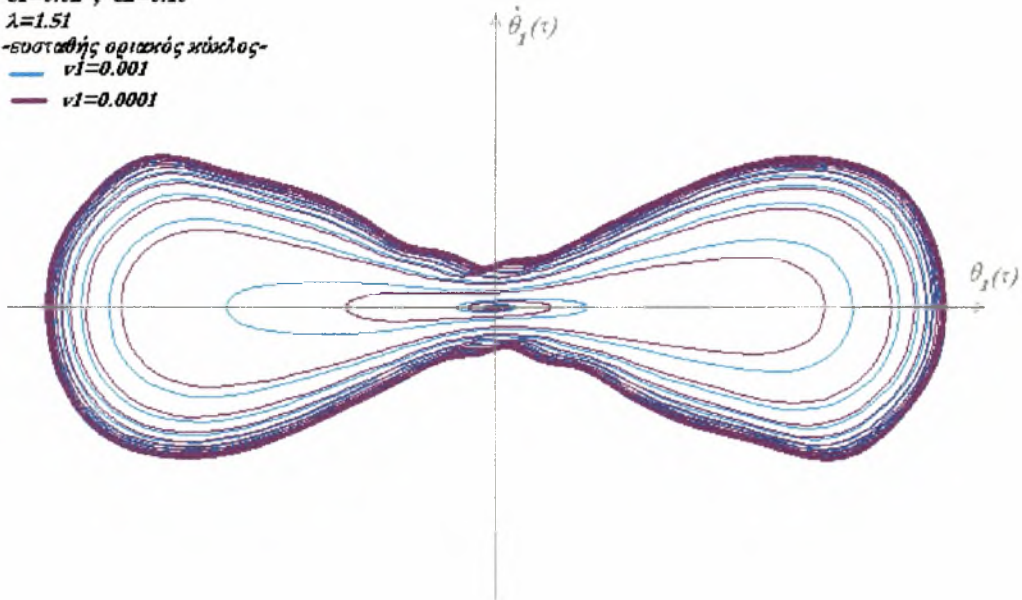


Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1^* = 0.001$

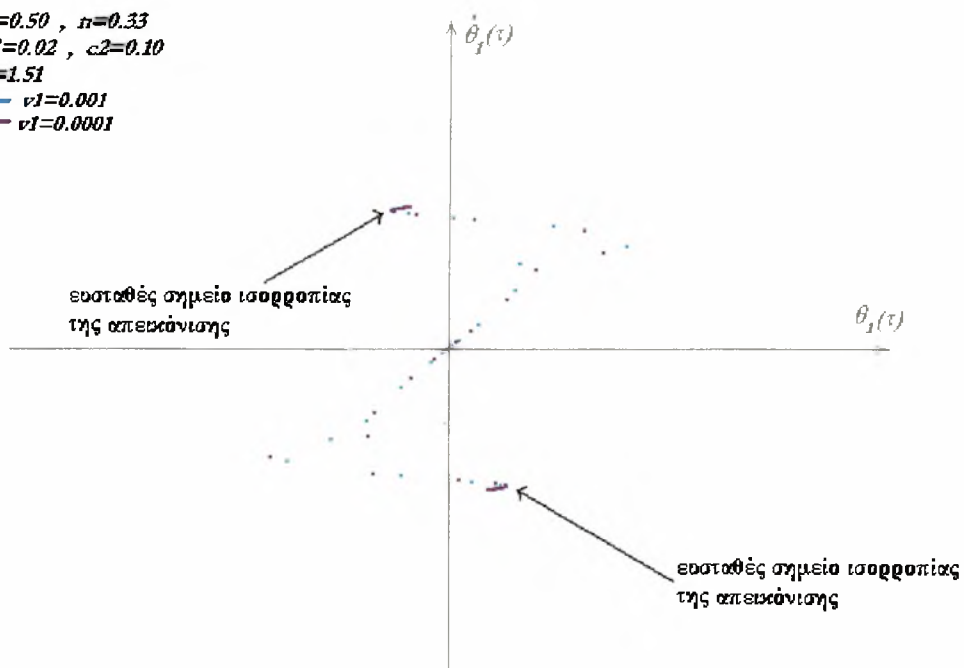


✦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.51$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

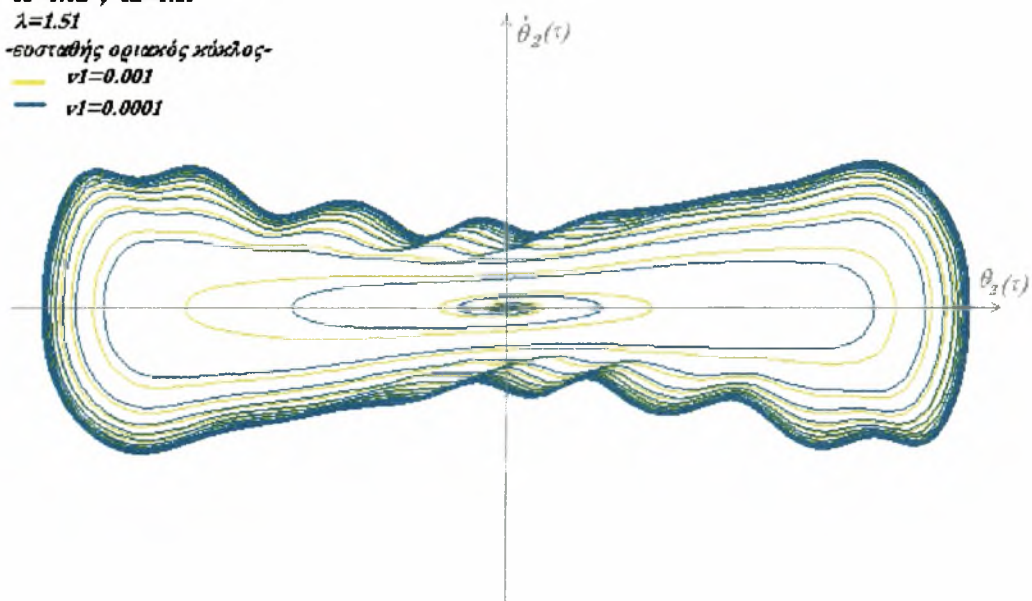
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.51$
 -ευσταθής οριζικός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



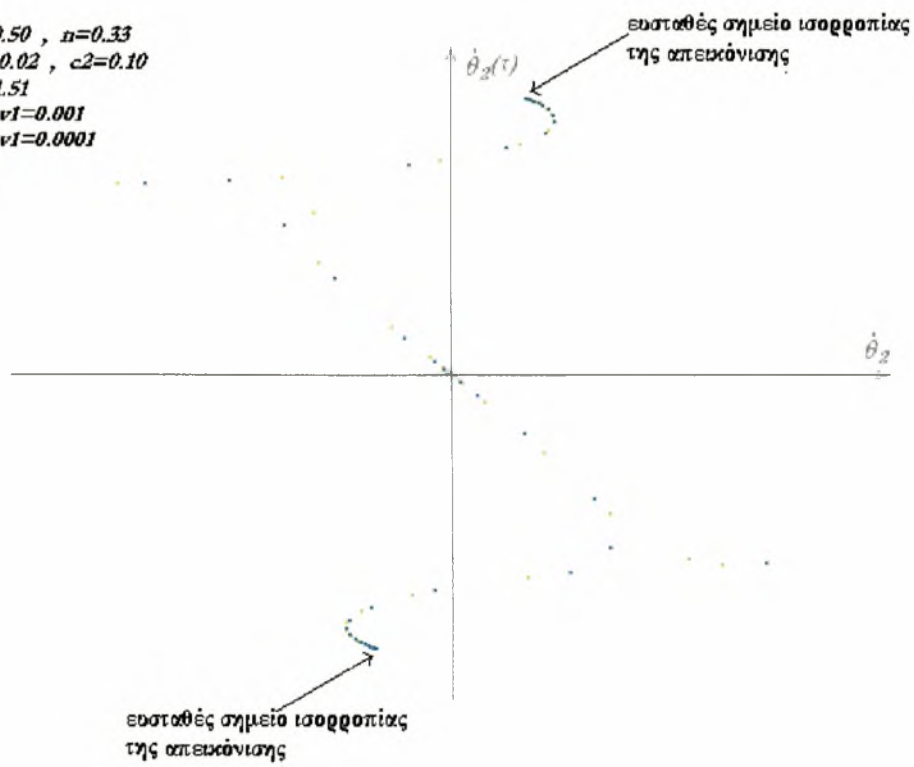
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.51$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



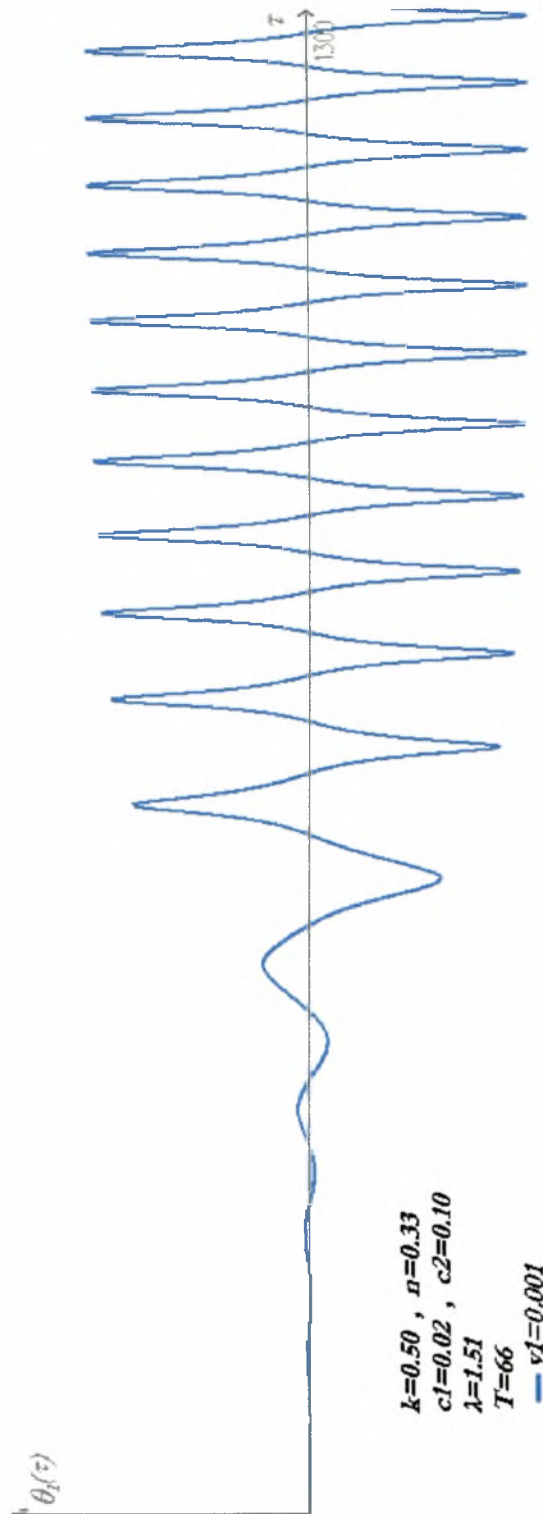
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.51$
 -ευσταθής οριζικός κύκλος-
— $\nu1=0.001$
— $\nu1=0.0001$



$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.51$
— $\nu1=0.001$
— $\nu1=0.0001$

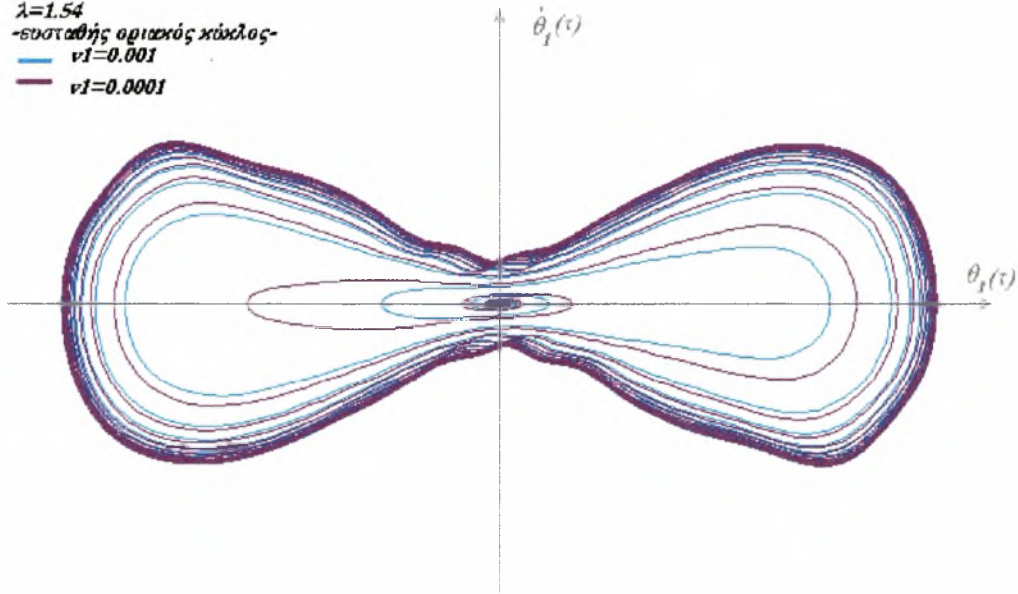


Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$

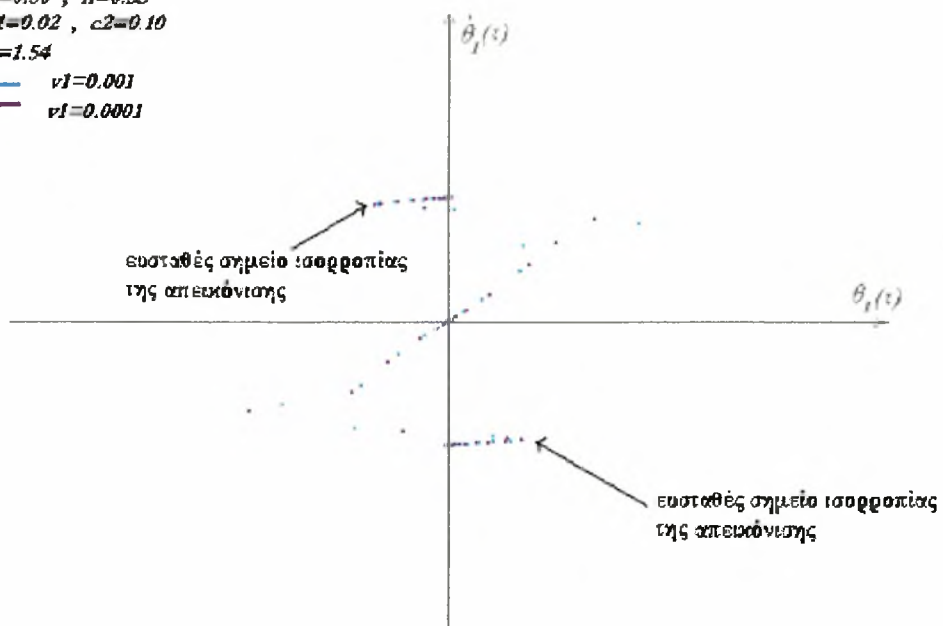


- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.54$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

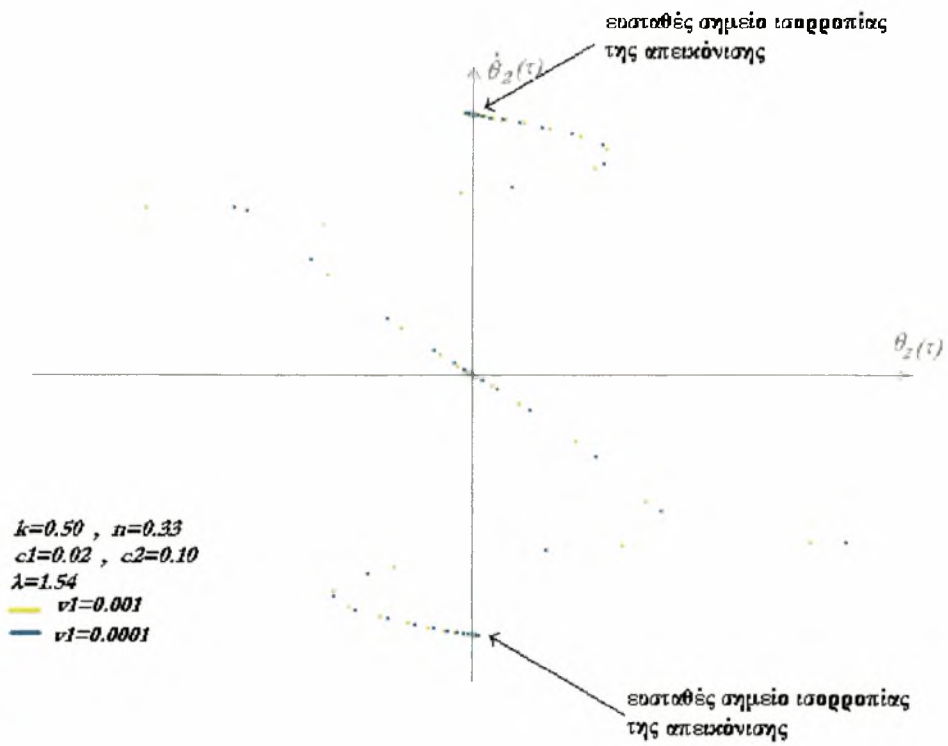
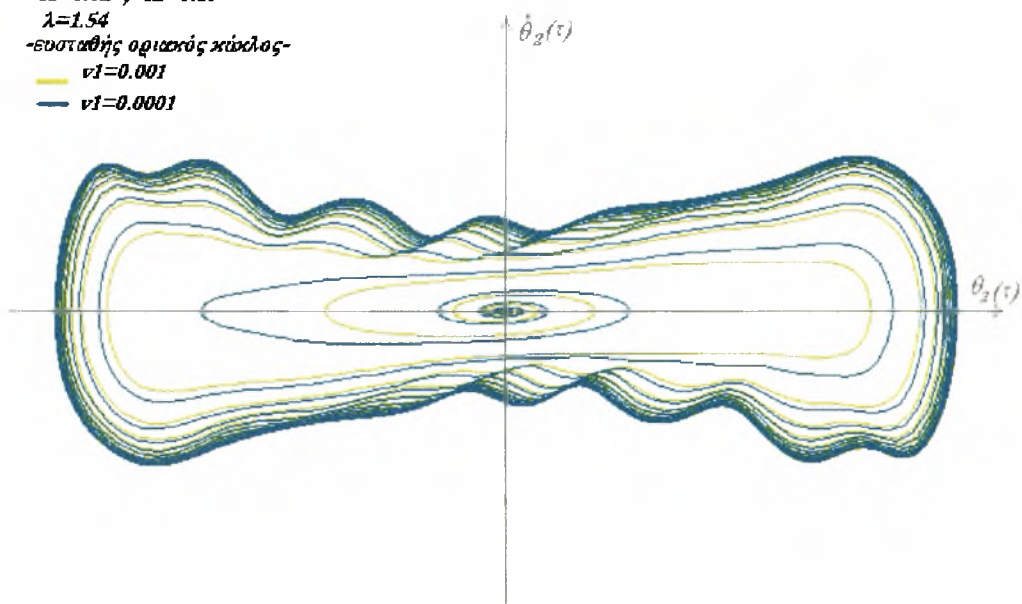
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.54$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.54$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$

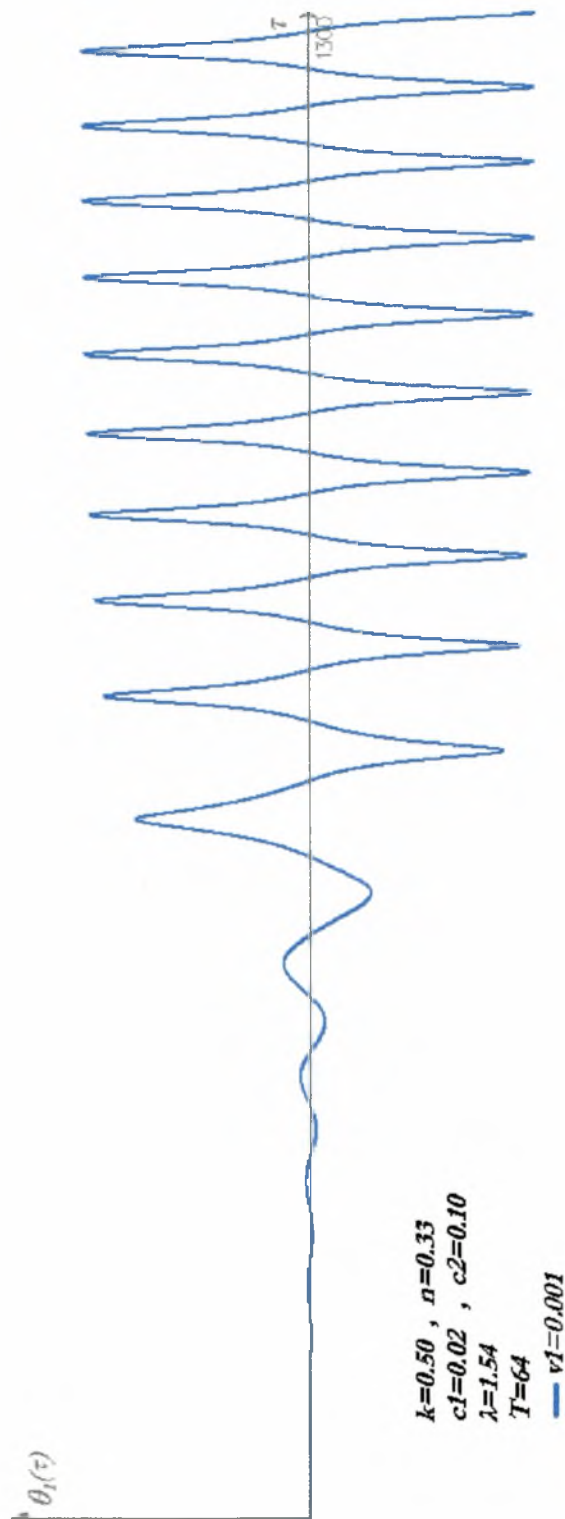


$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.54$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



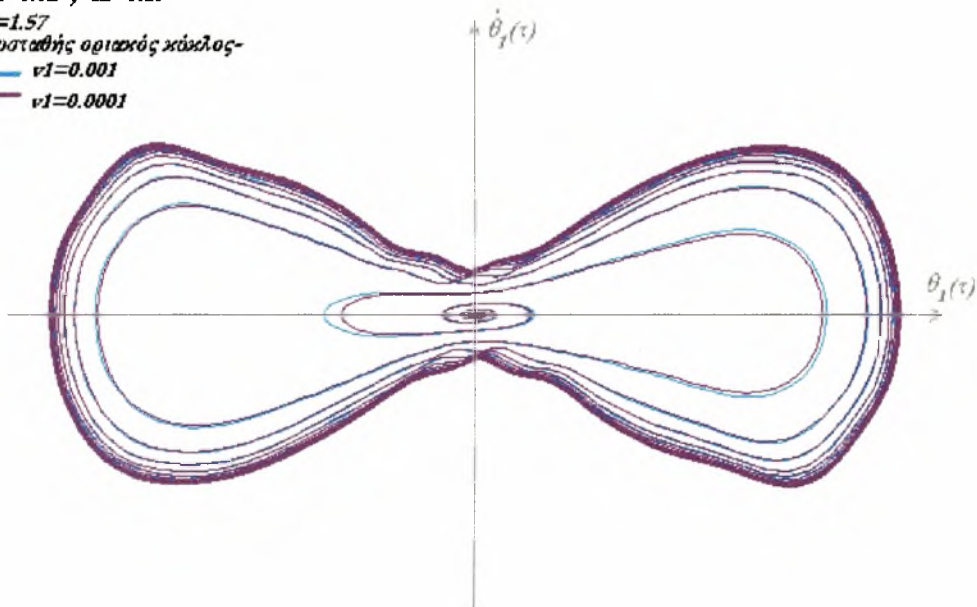
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.54$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$

Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$

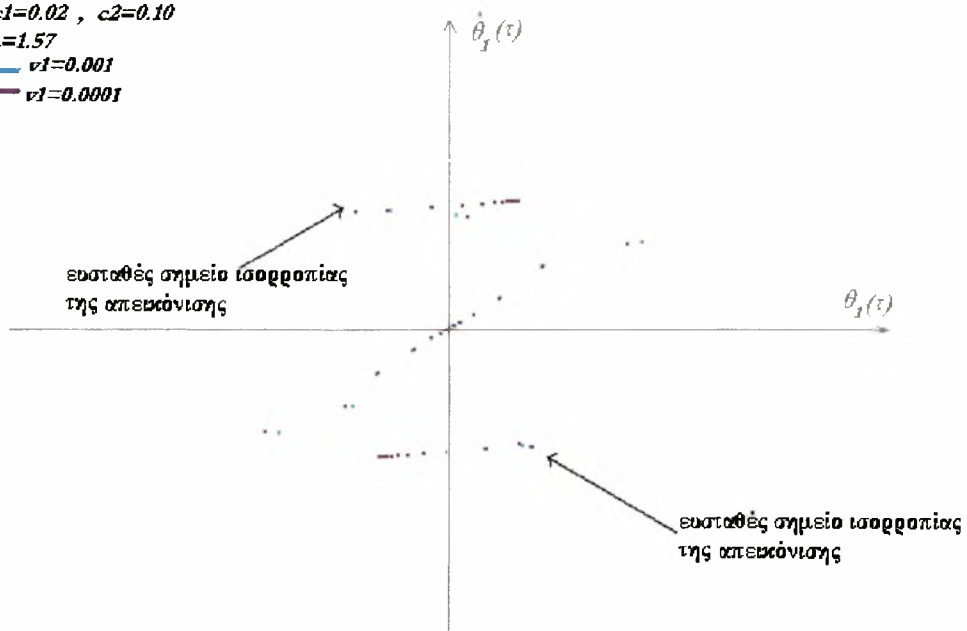


✦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.57$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

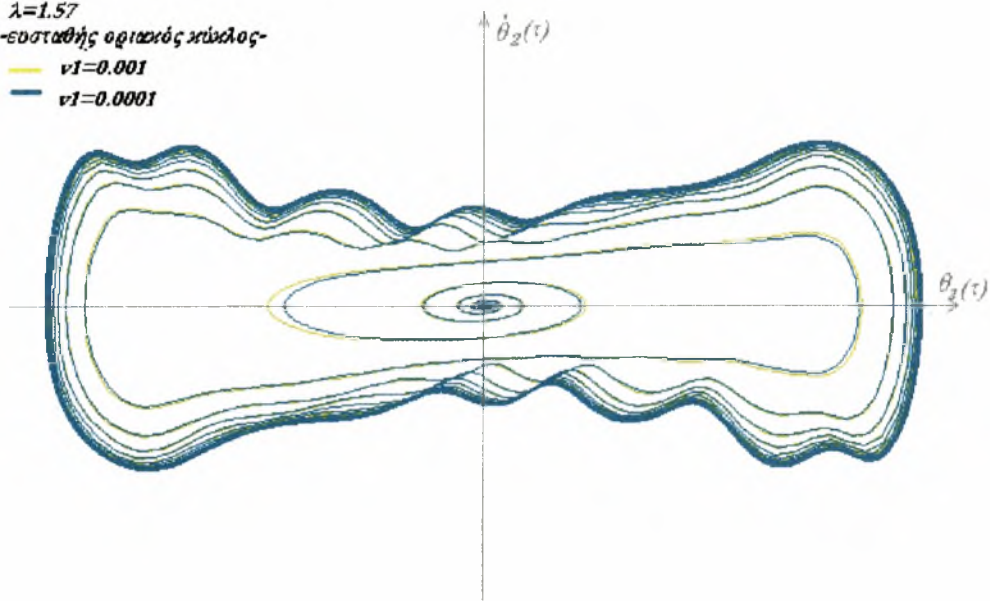
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.57$
 -ευσταθής οριζικός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



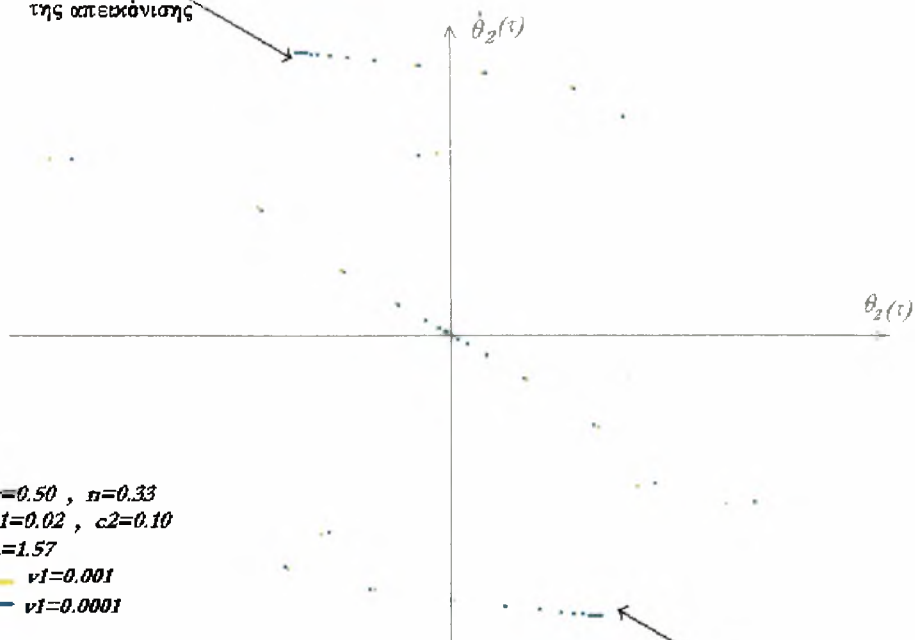
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.57$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.57$
 -ευσταθής οριαντός κίνησης-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



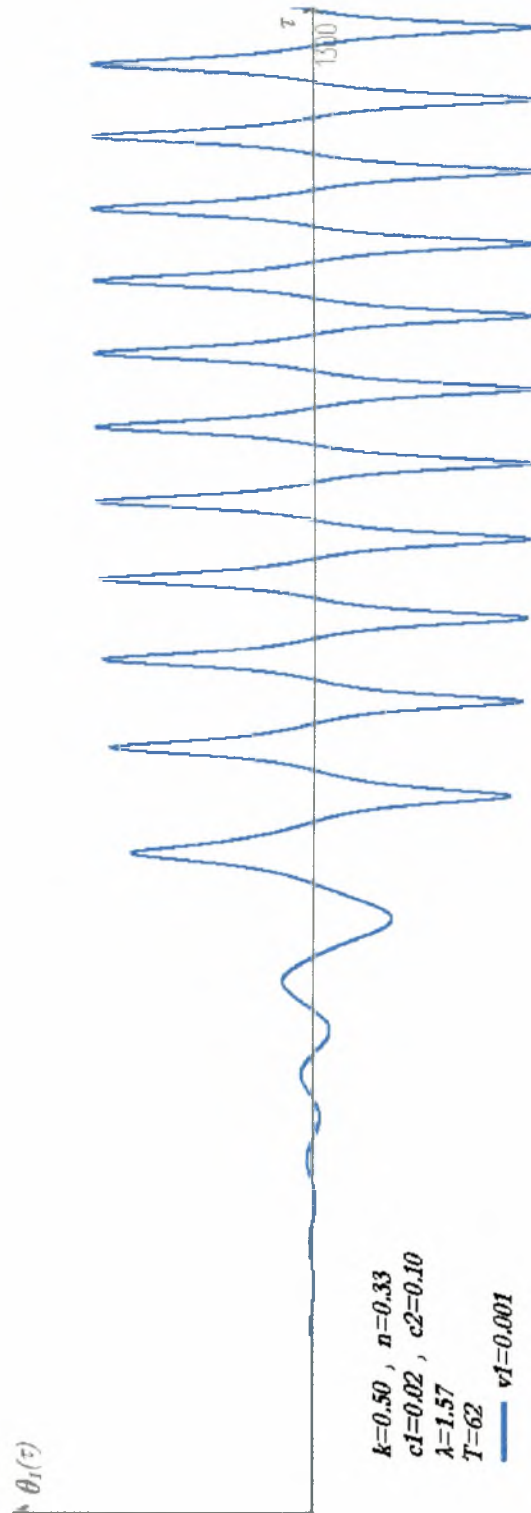
ευσταθές σημείο ισορροπίας
 της απεικόνισης



$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.57$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$

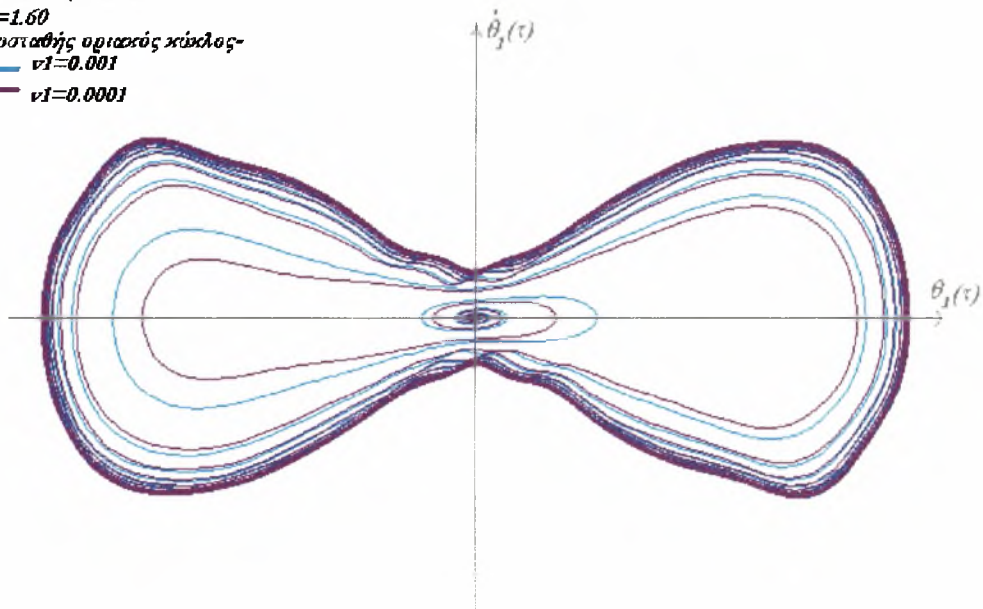
ευσταθές σημείο ισορροπίας
 της απεικόνισης

Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$

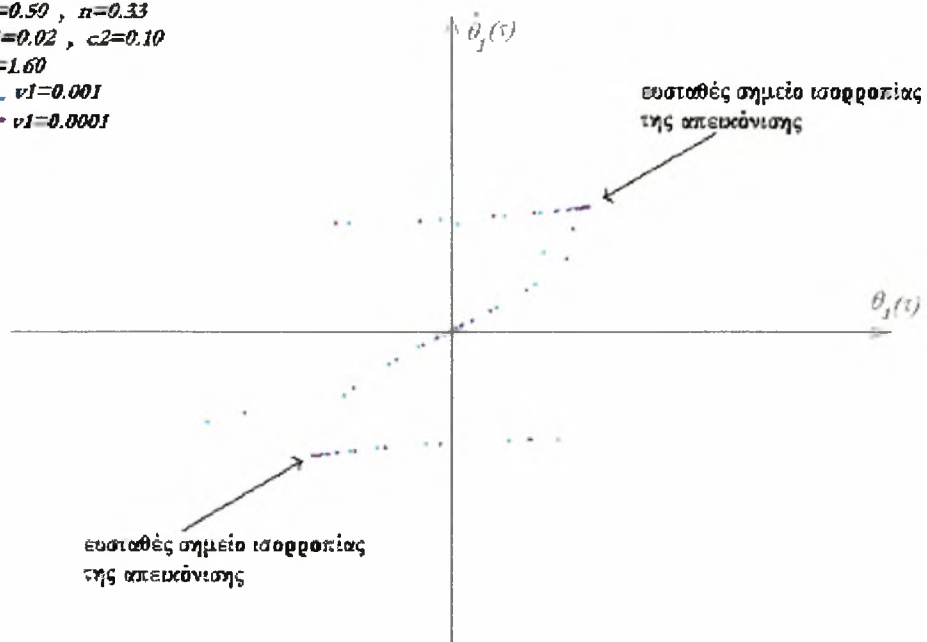


- ♦ Για την τιμή του φορτίου $\lambda=1.60$ και αρχικές συνθήκες $\dot{\theta}_1=0.001$ και $\dot{\theta}_1=0.0001$ παίρνουμε τα παρακάτω επίπεδα φάσεως και τις αντίστοιχες απεικονίσεις Poincaré:

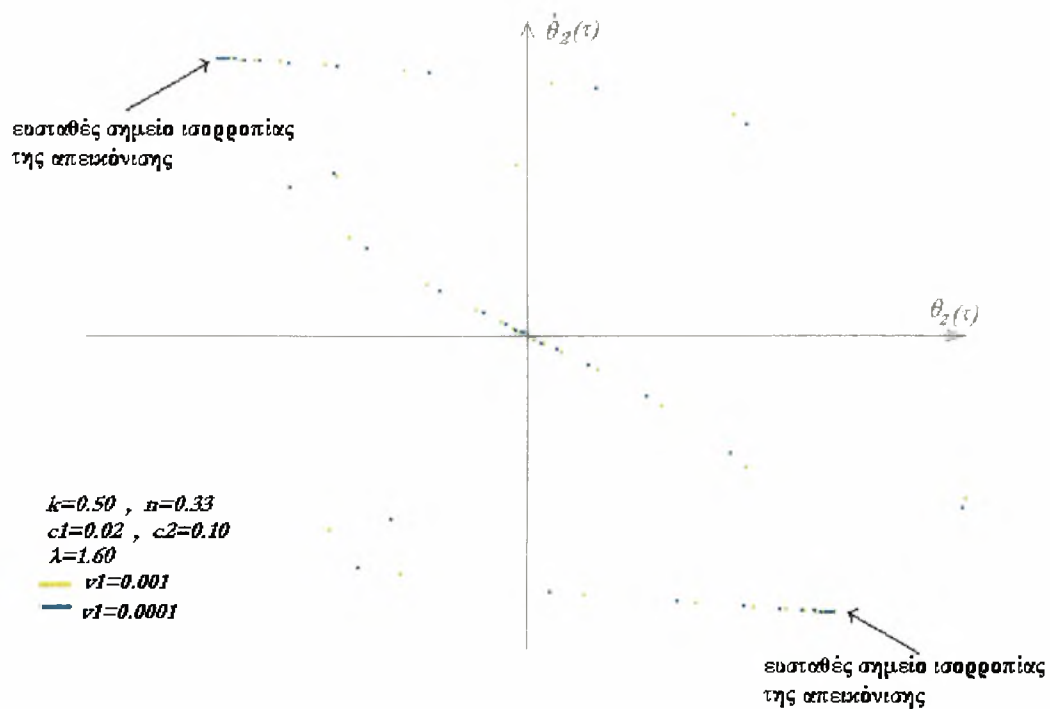
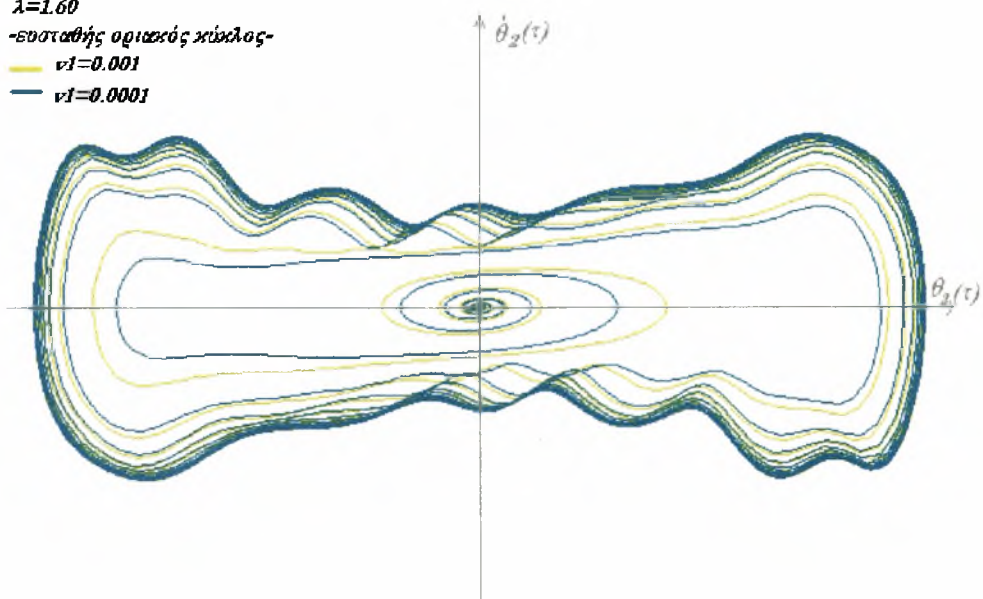
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.60$
 -ευσταθής ορθοκός κύκλος-
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



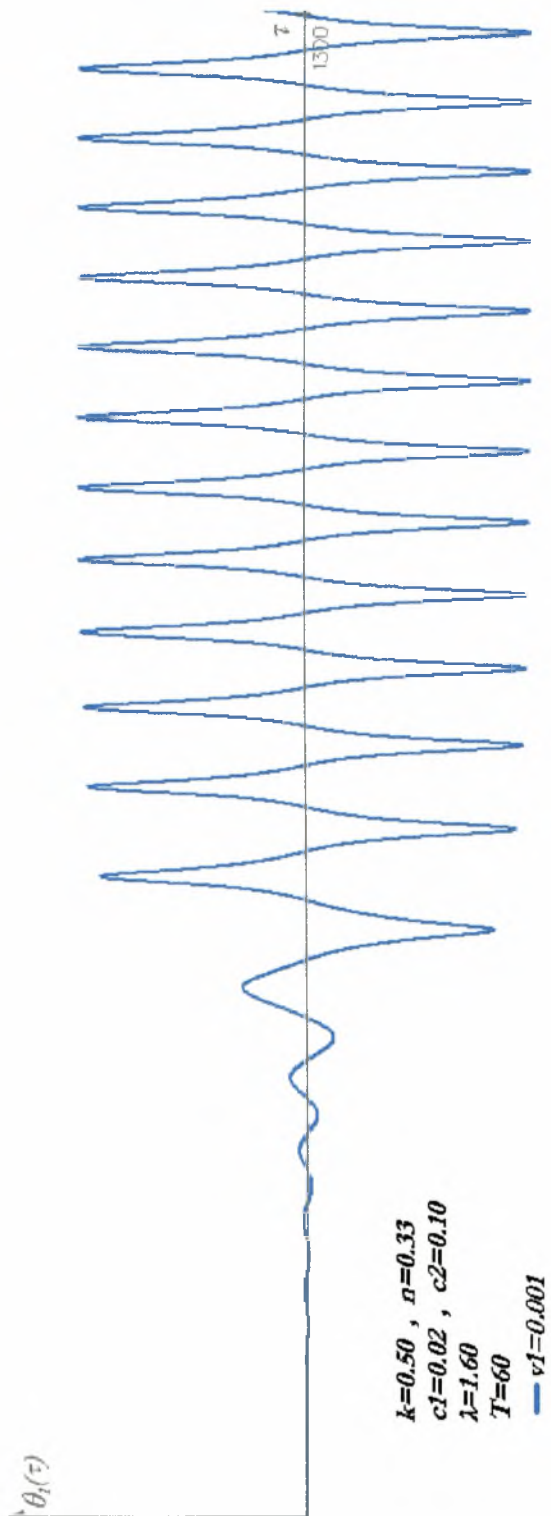
$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.60$
 — $v1=0.001$
 — $v1=0.0001$



$k=0.50$, $n=0.33$
 $c1=0.02$, $c2=0.10$
 $\lambda=1.60$
 -ευσταθής οριακός κύκλος-
 — $\nu1=0.001$
 — $\nu1=0.0001$



Για το διάγραμμα $\theta_1 - \tau$ θεωρούμε αρχική συνθήκη $\theta_1 = 0.001$



2.3.4. Ευρήματα - συμπεράσματα

Από την προηγηθείσα ανάλυση προκύπτουν τα ακόλουθα ευρήματα, τα οποία βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με αντίστοιχα της σχετικής διεθνούς βιβλιογραφίας^[8, 13, 14]:

- Για τις περιοχές ύπαρξης μόνο τετριμμένων ασταθών σημείων ισορροπίας του σχετικού διανυσματικού πεδίου των περιοχών φόρτισης των Περιπτώσεων I, II και III, η καθολική δυναμική του εξεταζόμενου συστήματος σχετίζεται με ιδιάζοντα φαινόμενα, τα οποία συστηματικά ανακαλύπτονται μέσω της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, για το συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων που επελέγησαν (δυσκαμψίες ελατηρίων και απόσβεση) σε όλες τις περιπτώσεις η δυναμική απόκριση του μοντέλου σχετίζεται με ευσταθείς οριακούς κύκλους (απομονωμένες περιοδικές τροχιές) κατ' αρχή. Τούτο διαπιστώνεται άμεσα τόσο από τη μορφή των σχετικών πορτραίτων επιπέδου φάσης όσο και από την ύπαρξη ευσταθών σημείων ισορροπίας των απεικονίσεων Poincarè, η δε περίοδος της κίνησης είναι γενικά μεγάλη. Αυξανόμενου του φορτίου (που αποτελεί τη κύρια παράμετρο ελέγχου του δυναμικού συστήματος) για τις Περιπτώσεις I και II η κίνηση καθίσταται περίπλοκη, αναγνωρίζεται δε ως χαοτική, καθόσον υφίσταται εμφανέστατη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες (όπως διαπιστώνεται άμεσα από τα διαγράμματα των χρονικών σειρών), οι δε απεικονίσεις Poincarè δεν εμφανίζουν σημεία ισορροπίας αλλά έντονη τυχηματικότητα. Στη Περίπτωση III οι οριακοί κύκλοι αποτελούν το μοναδικό είδος δυναμικής συμπεριφοράς που αναγνωρίζεται, πιθανότατα όμως για άλλες τιμές της απόσβεσης να εμφανιστούν και φαινόμενα χαοτικής συμπεριφοράς.

- Από τη ποιοτική εικόνα των διαγραμμάτων χρονικών σειρών διαπιστώνεται η ύπαρξη βίαιου (violent) ή ήπιου (mild) χάους, σύμφωνα με την

ορολογία του διακεκριμένου Ρώσου ερευνητού V. Bolotin^[14], ενώ τα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν ανωτέρω αναφέρονται σε περιοχές ύπαρξης γειτονικών ισορροπιών και για σχετικά μεγάλες τιμές του φορτίου, πριν την ύπαρξη συμπληρωματικών σχηματισμών.

- Παρόμοια φαινόμενα, μέσω διαφορετικού τύπου ανάλυσης, οφειλόμενα κατά πάσα πιθανότητα σε πολλαπλές διακλαδούμενες περιοδικές τροχιές πέραν μιας κρίσιμης τιμής του φορτίου αναφέρθηκαν πρόσφατα στη διεθνή βιβλιογραφία^[7, 8, 13, 14], γεγονός που επιβεβαιώνει την αξιοπιστία και την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου ποιοτικής προσέγγισης.

- Ποσοτικές αναλύσεις των ανωτέρω φαινομένων, βασιζόμενες σε ακριβείς ή προσεγγιστικές μεθόδους της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων εκφεύγουν των σκοπών του παρόντος πονήματος.

Παράρτημα Α : Mathematica Notebook για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος σε ένα σημείο ισορροπίας

```

ClearAll[θ1, θ2, φ1, φ2, m, k, η, λ, f1, f2, f3, f4, A, B, a11, a12,
  a13, a14, a21, a22, a23, a24, a31, a32, a33, a34, a41, a42, a43, a44, L]
(*Εισαγωγή παραμέτρων προσομοιώματος*)
(*λ=1.80;
  η=0.45;
  c1=0.04;
  c2=0.10;
  k=1;
  m=2;*)
(*Οι εξισώσεις κίνησης του Ziegler τίθενται σε μορφή
  διανυσματικού πεδίου τεσσάρων διαστάσεων*)
f1[θ1, θ2, φ1, φ2] = φ1
f2[θ1, θ2, φ1, φ2] = φ2
A = -Sin[θ1 - θ2] φ22 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - (1 + k) θ1 + θ2 +
  λ Sin[θ1 + (η - 1) θ2]
B = Sin[θ1 - θ2] φ12 + c2 φ1 - c2 φ2 + θ1 - θ2 + λ Sin[η θ2]
f3[θ1, θ2, φ1, φ2] =  $\frac{A - B \text{Cos}[\theta_1 - \theta_2]}{(1 + m) - \text{Cos}[\theta_1 - \theta_2]^2}$ 
f4[θ1, θ2, φ1, φ2] =  $\frac{(1 + m) B - A \text{Cos}[\theta_1 - \theta_2]}{(1 + m) - \text{Cos}[\theta_1 - \theta_2]^2}$ 
(* Υπολογισμός μερικών παραγώγων - ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ *)
a11 = ∂θ1 f1[θ1, θ2, φ1, φ2]
a12 = ∂θ2 f1[θ1, θ2, φ1, φ2]
a13 = ∂φ1 f1[θ1, θ2, φ1, φ2]
a14 = ∂φ2 f1[θ1, θ2, φ1, φ2]
a21 = ∂θ1 f2[θ1, θ2, φ1, φ2]
a22 = ∂θ2 f2[θ1, θ2, φ1, φ2]
a23 = ∂φ1 f2[θ1, θ2, φ1, φ2]
a24 = ∂φ2 f2[θ1, θ2, φ1, φ2]
a31 = ∂θ1 f3[θ1, θ2, φ1, φ2]
a32 = ∂θ2 f3[θ1, θ2, φ1, φ2]
a33 = ∂φ1 f3[θ1, θ2, φ1, φ2]
a34 = ∂φ2 f3[θ1, θ2, φ1, φ2]
a41 = ∂θ1 f4[θ1, θ2, φ1, φ2]
a42 = ∂θ2 f4[θ1, θ2, φ1, φ2]
a43 = ∂φ1 f4[θ1, θ2, φ1, φ2]
a44 = ∂φ2 f4[θ1, θ2, φ1, φ2]
(*Υπολογισμός του πίνακα του γραμμικοποιημένου συστήματος
  στη θέση ισορροπίας*)
(*θ1=0;
  θ2=0;
  φ1=0;
  φ2=0;
  L={{a11,a12,a13,a14},{a21,a22,a23,a24},{a31,a32,a33,a34},
    {a41,a42,a43,a44}}*)
(*Εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα*)
(*Eigenvalues[L]*)

```

Παράρτημα Α : Mathematica Notebook για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος σε ένα σημείο ισορροπίας

```

φ1
φ2
- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]
θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]
-----
1
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
(- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] -
Cos[θ1 - θ2] (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]) + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2])
-----
1
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
((1 + m) (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]) -
Cos[θ1 - θ2] (- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))
0
0
1
0
0
0
0
0
1
-----
1
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
(-1 - k - φ22 Cos[θ1 - θ2] - Cos[θ1 - θ2] (1 + φ12 Cos[θ1 - θ2]) + λ Cos[θ1 + (-1 + η) θ2] +
Sin[θ1 - θ2] (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2])) -
-----
1
(1 + m - Cos[θ1 - θ2]2)2
(2 Cos[θ1 - θ2] Sin[θ1 - θ2]
(- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] -
Cos[θ1 - θ2] (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 - φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]) + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))
-----
1
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
(1 + φ22 Cos[θ1 - θ2] - Cos[θ1 - θ2] (-1 - φ12 Cos[θ1 - θ2] + η λ Cos[η θ2]) + (-1 + η) λ Cos[θ1 + (-1 + η) θ2] -
Sin[θ1 - θ2] (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2])) +
-----
1
(1 + m - Cos[θ1 - θ2]2)2
(2 Cos[θ1 - θ2] Sin[θ1 - θ2]
(- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] -
Cos[θ1 - θ2] (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]) + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))
-c1 - c2 - Cos[θ1 - θ2] (c2 + 2 φ1 Sin[θ1 - θ2])
-----
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
c2 + c2 Cos[θ1 - θ2] - 2 φ2 Sin[θ1 - θ2]
-----
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
-----
1
(1 + m - Cos[θ1 - θ2]2)2
(2 Cos[θ1 - θ2] Sin[θ1 - θ2]
((1 + m) (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]) -
Cos[θ1 - θ2] (- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))) +
-----
1
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
((1 + m) (1 + φ12 Cos[θ1 - θ2]) - Cos[θ1 - θ2] (-1 - k - φ22 Cos[θ1 - θ2] + λ Cos[θ1 + (-1 + η) θ2]) +
Sin[θ1 - θ2] (- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))
-----
1
(1 + m - Cos[θ1 - θ2]2)2
(2 Cos[θ1 - θ2] Sin[θ1 - θ2]
((1 + m) (θ1 - θ2 + c2 φ1 - c2 φ2 + φ12 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[η θ2]) -
Cos[θ1 - θ2] (- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))) +
-----
1
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
((1 + m) (-1 - φ12 Cos[θ1 - θ2] + η λ Cos[η θ2]) -
Cos[θ1 - θ2] (1 + φ22 Cos[θ1 - θ2] + (-1 + η) λ Cos[θ1 + (-1 + η) θ2]) -
Sin[θ1 - θ2] (- (1 + k) θ1 + θ2 - (c1 + c2) φ1 + c2 φ2 - φ22 Sin[θ1 - θ2] + λ Sin[θ1 + (-1 + η) θ2]))
- (-c1 - c2) Cos[θ1 - θ2] + (1 + m) (c2 + 2 φ1 Sin[θ1 - θ2])
-----
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2
-c2 (1 + m) - Cos[θ1 - θ2] (c2 - 2 φ2 Sin[θ1 - θ2])
-----
1 + m - Cos[θ1 - θ2]2

```

Παράρτημα Β : Το πρόγραμμα Dynamics Solver

Το Dynamics Solver είναι ένα ελεύθερης κυκλοφορίας πρόγραμμα (FreeWare), που λύνει αριθμητικά τόσο προβλήματα αρχικών συνθηκών όσο και προβλήματα συνοριακών συνθηκών για συνεχή και διακριτά δυναμικά συστήματα όπως :

- μια απλή διαφορική εξίσωση τυχαίας τάξης,
- συστήματα κανονικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού,
- μια μεγάλη τάξη συναρτησιακών διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων,
- διακριτά δυναμικά συστήματα σε μορφή επαναλαμβανόμενων απεικονίσεων.

Το πρόγραμμα είναι ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη διαφορικών εξισώσεων, συνεχών και διακριτών μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, ντετερμινιστικού χάους κ.λ.π. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να σχεδιάσει επίπεδα φάσεως (με τη δυνατότητα επιλογής πεδίου κατεύθυνσης), απεικονίσεις Poincaré, λεκάνες έλξης, ιστογράμματα, διαγράμματα διακλαδώσεων κ.λ.π. Έχουμε τη δυνατότητα να βλέπουμε τα αποτελέσματα (προοπτικά ή όχι) από οποιαδήποτε οπτική γωνία. Επίσης, το πρόγραμμα διαθέτει για τη διαδικασία επίλυσης ένα μεγάλο αριθμό μεθόδων ολοκλήρωσης.

Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε το Dynamics Solver για την επίλυση ενός συστήματος τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, επιλέγουμε τη μέθοδο ολοκλήρωσης *Runge-Kutta-Fehlberg* και τα αποτελέσματα εμφανίζονται με την μορφή επιπέδων φάσεως και απεικονίσεων Poincaré.

Το πρόγραμμα είναι πλήρως συμβατό με τα Windows XP, διαθέτει πολύ κατατοπιστικό Manual, είναι εύχρηστο, ταχύτατο και αναβαθμίζεται κατά τακτά χρονικά διαστήματα. Για περισσότερες πληροφορίες κανείς μπορεί να αποτανθεί στη σχετική ιστοσελίδα, που φαίνεται στη βιβλιογραφική αναφορά [3].

Βιβλιογραφία

1. Bahder, T.B., *Mathematica for Scientists and Engineers*, Addison-Wesley, N.Y., 1995.
2. Chen, C-N., Tzeng, S., Existence and Multiplicity Results for Homoclinic Orbits of Hamiltonian Systems, *Electronic Journal of Differential Equation*, Vol. 1997 (1997), 1-19.
3. Dynamics Solver, Freeware for Numerical Integration of Dynamical Systems, Juan M. Aguirregabiria 1992-2003, Department of Theoretical Physics, The University of the Basque Country, Bilbao, Spain: <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>.
4. Feng, B., Hu, R., A Survey on Homoclinic and Heteroclinic Orbits, *Applied Mathematics E-Notes*, 3 (2003), 16-37.
5. Guckenheimer, J., Holmes, P.J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, N.Y., 1983.
6. Hirsch, M.W., Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, N.Y., 1974.
7. Kounadis, A.N., Criteria for Occurrence of Flutter Instability Before Buckling in Non-conservative Dissipative Systems, *AIAA Journal*, 35(3) (1997), 509-518.
8. Kounadis, A.N., Sophianopoulos, D.S., On a Series of Dynamic Bifurcations in Nonconservative Dissipative Systems for Various Levels of a Follower Load, in *Solid Mechanics, Scientific Meetings of the Serbian Academy of Sciences and Arts*, Vol. LXXVII, Department of Technical Sciences, Book 3, Belgrade 1997, pp. 107-117.
9. Moon, F.C., *Chaotic Vibration*, Wiley & Sons, N.Y., 1988.
10. Nayfeh, A.H., Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley, N.Y., 1979.

11. Parker, T.S., Chua, L.O., Chaos: A Tutorial for Engineers, Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 8 (1987), 982-1008.
12. Poincaré, H., Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, 3 vols., Gauthier-Villars, Paris, 1899.
13. Sophianopoulos, D.S., Kounadis, A.N., Vakakis, A.F., Complex Dynamics of Perfect Discrete Systems Under Partial Follower Forces, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 37, No. 7 (2002), 1121-1138.
14. Sophianopoulos, D.S., New Phenomena Associated with the Nonlinear Dynamics and Stability of Autonomous Damped Systems Under Various Types of Loading, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 9, No. 4 (2000), 397-416.
15. Wiggins, St., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, N.Y., 1990.

