

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΖΑΝΙΔΗΣ**

**ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΘΕΣΕΙΣ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΗΣ
ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΠΡΟΛΗΠΤΙΚΗΣ
ΠΛΕΥΡΙΚΗΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΤΑΓΑΡΑΣ

**ΒΟΛΟΣ
ΙΟΥΝΙΟΣ 1997**



40. ΣΥΓΓ. 42 / Π. Α



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 2178/1

Ημερ. Εισ.: 12-09-1997

Δωρεά:

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ

1997

ΚΟΖ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

| | |
|--|-----|
| Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 Σημασία και ρόλος των αποθεμάτων για μια επιχείρηση | 2 |
| 1.2 Εξέλιξη της θεωρίας των αποθεμάτων | 5 |
| 1.3 Συνεργασία σε δίκτυα διαχείρισης αποθεμάτων | 6 |
| 1.4 Σκοπός και δομή της παρούσας εργασίας | 8 |
| Κεφάλαιο 2: Περιγραφή του προβλήματος | 10 |
| 2.1 Περιγραφή και λειτουργία του συστήματος | 11 |
| 2.2 Συνάρτηση κόστους | 18 |
| Κεφάλαιο 3: Προσομοιωτικό πρότυπο | 23 |
| 3.1 Υποστήριξη επιχειρηματικών αποφάσεων μέσω της προσομοίωσης | 24 |
| 3.2 Δημιουργία προσομοιωτικού μοντέλου του προβλήματος | 25 |
| 3.3 Δομή και λειτουργία προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή | 26 |
| Κεφάλαιο 4: Αριθμητικά παραδείγματα και αποτελέσματα | 37 |
| 4.1 Παράμετροι αριθμητικών παραδειγμάτων | 38 |
| 4.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων | 44 |
| 4.3 Σύγκριση και σχολιασμός αποτελεσμάτων | 57 |
| 4.4 Στατιστική ανάλυση και ακρίβεια αποτελεσμάτων | 68 |
| Κεφάλαιο 5: Συγκρίσεις με άλλα συστήματα | 78 |
| 5.1 Γενικά | 79 |
| 5.2 Σύστημα δύο ανεξάρτητων θέσεων | 80 |
| 5.3 Σύστημα δύο συνεργαζόμενων θέσεων με αμελητέο χρόνο πλευρικής μεταφοράς | 94 |
| 5.4 Συνολική σύγκριση του κόστους ανάμεσα στα τρία συστήματα | 98 |
| Κεφάλαιο 6: Συμπεράσματα | 102 |
| 6.1 Τελικά συμπεράσματα | 103 |
| 6.2 Δυνατότητες επέκτασης της μελέτης | 105 |
| Παράρτημα: Πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή | |
| Βιβλιογραφία | |

Κεφάλαιο 1 :

Εισαγωγή

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και ιδιαίτερα:

- Τους γονείς μου για την απεριόριστη συμπαράστασή τους χωρίς την οποία δε θα είχα φτάσει ποτέ ως εδώ.
- Όλους τους διδάσκοντες του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, καθώς και τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γιώργο Ταγαρά για την υπομονή του και την ανεκτίμητη βοήθειά του στην επίβλεψη της εργασίας.
- Τους στενούς μου φίλους Άλκη Μπέτση και Κώστα Κυρίμη για την πολύτιμη συνεισφορά τους στην μορφοποίηση των πινάκων και των διαγραμμάτων.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000055874

**Αφιερώνεται
στους γονείς μου**

1.1 Σημασία και ρόλος των αποθεμάτων για μια επιχείρηση

Η διαχείριση των αποθεμάτων αποτελεί μια από τις πιο σπουδαίες λειτουργίες μιας επιχείρησης (ή ενός οργανισμού). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι το υψηλό κόστος των αποθεμάτων και της διατήρησής τους, που αποτελεί συχνά ένα σημαντικό ποσοστό του κύκλου εργασιών. Επομένως όταν αυτή η διαχείριση είναι βέλτιστη, μπορούν να προκύψουν σημαντικά οφέλη για την επιχείρηση.

Όταν λέμε αποθέματα, εννοούμε ένα σύνολο αγαθών τα οποία βρίσκονται κάπου αποθηκευμένα και περιμένουν να χρησιμοποιηθούν. Έχει μεγάλη σημασία να έχουμε στο μυαλό μας τον όρο αποθέματα με την ευρεία και όχι με τη στενή του έννοια. Έτσι ως αποθέματα μπορούν να θεωρηθούν τόσο οι πρώτες ύλες που διατηρεί κάποιο εργοστάσιο για να τις χρησιμοποιήσει αργότερα, όσο και οι εφεδρείες αίματος που διατηρεί ένα νοσοκομείο για την αντιμετώπιση έκτακτων περιστατικών.

Μερικά άλλα παραδείγματα αποθεμάτων είναι τα αποθέματα εμπορευμάτων που διατηρεί κάποια εμπορική επιχείρηση, τα αποθέματα ημιέτοιμων προ'όντων που διατηρεί κάποια παραγωγική μονάδα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά στάδια της παραγωγικής διαδικασίας, τα αποθέματα μετρητών που διατηρεί μια τράπεζα, τα αποθέματα καυσίμων που διατηρεί ένα πρατήριο υγρών καυσίμων ή ακόμα και τα αποθέματα σε ανθρώπινο δυναμικό που διατηρούνται από κάποιο οργανισμό.

Τα οφέλη που προκύπτουν από τη διαχείριση αυτών των αποθεμάτων είναι πολλά. Με τη διατήρηση αποθεμάτων π.χ. μια παραγωγική μονάδα

αποκτά κάποιο βαθμό αυτονομίας ως προς την πηγή από την οποία τροφοδοτείται με πρώτες ύλες, καθώς η θέση και η λειτουργία αυτής της παραγωγικής μονάδας μπορεί να καθοριστεί ανεξάρτητα από την πηγή αυτή. Κατά όμοιο τρόπο με τη διατήρηση κάποιων ημιέτοιμων προ'ιόντων ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φάσεις μιας παραγωγικής διαδικασίας, η δεύτερη φάση καθίσταται ως ένα βαθμό ανεξάρτητη από την πρώτη με αποτέλεσμα να μη διακόπτεται η παραγωγική διαδικασία όταν υπάρξει κάποιο πρόβλημα (π.χ. βλάβη μιας μηχανής).

Επίσης πολλές φορές με τη διατήρηση αποθεμάτων επιτυγχάνεται η εξομάλυνση της χρονικής διαφοράς που υπάρχει ανάμεσα στην παραγωγή και στη ζήτηση ενός προ'ιόντος. Έτσι οι καπνοβιομηχανίες, παρόλο που ο καπνός καλλιεργείται μια συγκεκριμένη εποχή του χρόνου, διατηρούν αποθέματα καπνού όλο το χρόνο καθώς η ζήτησή του κατανέμεται καθ' όλη τη διάρκεια του έτους.

Ένας άλλος λόγος που χρησιμοποιούμε αποθέματα είναι για να κάνουμε χρήση των εκπτώσεων που μας παρέχονται όταν αυξάνεται η ποσότητα παραγγελίας ενός προ'ιόντος ή κατ' αντιστοιχία για να μειώσουμε το κόστος παραγωγής μιας παρτίδας προ'ιόντων, κάτι που συχνά συμβαίνει όταν αυξάνουμε το μέγεθος αυτής της παρτίδας έστω κι αν δεν υπάρχει άμεση ζήτηση στα προ'ιόντα αυτά.

Παράλληλα με τη διατήρηση αποθεμάτων γίνεται δυνατή η ικανοποίηση έκτακτων ζητήσεων και η αποφυγή του κόστους έλλειψης, ένα πρόβλημα που είναι ιδιαίτερα έντονο σε συστήματα στα οποία η ζήτηση δεν είναι καθοριστικό αλλά στοχαστικό μέγεθος.

Εκτός από τα οφέλη που αναφέρθηκαν και είναι οικονομικής φύσεως, η διατήρηση των αποθεμάτων μπορεί να έχει και οφέλη άλλης φύσεως. Έτσι γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το κοινωνικό κόστος που θα προέκυπτε από την έλλειψη αίματος σε ένα νοσοκομείο είναι πολύ μεγαλύτερο από το κόστος που απαιτείται για τη διατήρησή του .

Αυτοί είναι μόνο μερικοί από τους λόγους για τους οποίους διατηρούμε αποθέματα. Υπάρχουν και άλλοι που θα μπορούσε να αναφέρει κανείς σε σχέση με την κάθε περίπτωση. Όλοι αυτοί οι λόγοι έχουν οδηγήσει τις επιχειρήσεις τα τελευταία χρόνια να ρίξουν μεγάλο βάρος στην ανάπτυξη μοντέρνων συστημάτων διαχείρισης αποθεμάτων για τα οποία πολλές φορές απαιτούνται υψηλά κεφάλαια. Μια ώθηση προς αυτή την κατεύθυνση αποτέλεσε και η ανάγκη για βελτίωση των υπηρεσιών που παρέχει μια επιχείρηση έτσι ώστε να είναι καλύτερη και γρηγορότερη η εξυπηρέτηση των πελατών οι οποίοι βέβαια επιβαρύνονται με το αντίστοιχο κόστος.

Εκείνο που θα πρέπει να τονιστεί είναι ότι επειδή όπως είναι φυσικό η δημιουργία και η διατήρηση ενός συστήματος αποθεμάτων συνοδεύεται από κάποιο κόστος, διατηρούμε αποθέματα μόνο όταν η ωφέλεια που έχουμε από αυτά είναι μεγαλύτερη από το κόστος που απαιτείται για να τα εξασφαλίσουμε .

1.2 Εξέλιξη της θεωρίας των αποθεμάτων

Η μεγάλη σημασία που έχει για τη σωστή λειτουργία μιας επιχείρησης ο έλεγχος των αποθεμάτων της, οδήγησε από πολύ νωρίς τους επιστήμονες να ασχοληθούν εκτενώς με την περιοχή αυτή της Διοικητικής Επιστήμης. Οι πρώτες προσπάθειες έγιναν στην αρχή του αιώνα μας με τη χρήση κάποιων πολύ απλών μοντέλων με λίγες παραμέτρους.

Το 1915 ο F. W. Harris διατύπωσε τον τύπο της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας, ο οποίος αναπτύχθηκε και από τον R. H. Wilson το 1918. Έτσι έγινε μια πρώτη προσέγγιση στα δύο θεμελιώδη ερωτήματα που απασχολούν τον υπεύθυνο διαχείρισης αποθεμάτων:

- α) ποια ποσότητα θα πρέπει να παραγγελθεί
- β) πότε θα πρέπει να γίνει αυτή η παραγγελία.

Αργότερα αυτά τα μοντέλα επεκτάθηκαν ώστε να συμπεριλάβουν περισσότερες παραμέτρους, αλλά εξακολουθούσαν να αγνοούν την αβεβαιότητα και τη στοχαστικότητα. Τα στοχαστικά μοντέλα αναπτύχθηκαν μετά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, έτσι ώστε να μελετηθούν οι επιδράσεις που προκύπτουν όταν κάποιο μέγεθος (π.χ. η ζήτηση) είναι στοχαστικό.

Γύρω στο 1970 έγινε ένα πολύ σημαντικό βήμα στη θεωρία των αποθεμάτων με τη χρήση της τεχνικής MRP (Materials Requirements Planning). Λίγα χρόνια αργότερα μια νέα φιλοσοφία παραγωγής έφερε επανάσταση στη θεωρία των αποθεμάτων. Πρόκειται για την JIT (Just In Time) η οποία πρωτοεφαρμόστηκε από ιαπωνικές εταιρείες και γρήγορα έγινε πολύ δημοφιλής.

Οι προσπάθειες αυτές συνεχίζονται μέχρι και σήμερα με πολύ έντονους ρυθμούς σε σημείο που έχουν διαμορφωθεί τόσα πολλά μαθηματικά πρότυπα για τον προγραμματισμό και τον έλεγχο των αποθεμάτων, ώστε η περιοχή αυτή θεωρείται από τις πλέον μελετημένες περιοχές της Διοικητικής Επιστήμης.

1.3 Συνεργασία σε δίκτυα διαχείρισης αποθεμάτων

Μία τεχνική που χρησιμοποιείται ευρύτατα από τους διευθυντές των τμημάτων διαχείρισης αποθεμάτων σε οργανωμένα δίκτυα εξυπηρέτησης της ζήτησης είναι και η συνεργασία μεταξύ των ανεξάρτητων θέσεων των δικτύων αυτών. Πιο συγκεκριμένα ένα αποτελεσματικό μέσο για τη βελτίωση της ποιότητας παροχής υπηρεσιών και τη μείωση του συνολικού κόστους ενός τέτοιου συστήματος είναι και η μεταφορά αποθέματος ανάμεσα στις θέσεις ικανοποίησης της ζήτησης του συστήματος αυτού.

Πολλές φορές κατά τη διάρκεια λειτουργίας ενός τέτοιου συστήματος κάποια θέση αντιμετωπίζει πλεόνασμα σε προϊόντα, ενώ κάποια άλλη αντιμετωπίζει έλλειψη. Στις περιπτώσεις αυτές η συνεργασία των θέσεων αυτών αποδεικνύεται ευεργετική, καθώς μ' αυτόν τον τρόπο αντιμετωπίζονται έκτακτες καταστάσεις που προκύπτουν από τη στοχαστικότητα της ζήτησης.

Η λύση αυτή που επιλέγεται παρουσιάζει πολλαπλές ωφέλειες καθώς συνήθως το κόστος πλευρικής μεταφοράς είναι μικρότερο τόσο από το κόστος έλλειψης όσο και από το κόστος έκτακτης παραγγελίας από την

κεντρική αποθήκη, ενώ παράλληλα ο χρόνος που απαιτείται για την πλευρική μεταφορά είναι μικρότερος από το χρόνο που απαιτείται για την άφιξη μιας παραγγελίας από την κεντρική αποθήκη. Έτσι με την πλευρική μεταφορά επιτυγχάνεται τόσο η μείωση του συνολικού κόστους του συστήματος, όσο και η βελτίωση του επιπέδου εξυπηρέτησης των πελατών.

Οι λόγοι αυτοί ώθησαν τους επιστήμονες να ασχοληθούν εκτενώς με την περιοχή αυτή της θεωρίας των αποθεμάτων η οποία γρήγορα απέκτησε μεγάλη δημοτικότητα. Έτσι αυτή τη στιγμή υπάρχει μια αρκετά μεγάλη λίστα με εργασίες γύρω από αυτό το θέμα. Οι εργασίες αυτές ξεκίνησαν με τη μελέτη συστημάτων με δύο θέσεις ικανοποίησης της ζήτησης. Αυτό είναι φυσικό καθώς το πρόβλημα των δύο θέσεων και απλούστερο είναι αλλά και θεμελιώδες για να βασιστεί πάνω του η μελέτη συστημάτων με περισσότερες θέσεις. Αργότερα αυτά τα προβλήματα επεκτάθηκαν ώστε να συμπεριλάβουν περισσότερες θέσεις και να προσεγγίσουν έτσι καλύτερα την πραγματικότητα, καθώς τα προβλήματα που συναντάμε στην πράξη έχουν πολλαπλές θέσεις.

Οι Gross (1963), Jonsson και Silver (1987) και Diks και de Kok (1994) ασχολήθηκαν με μοντέλα στα οποία η πλευρική μεταφορά συνέβαινε πριν την εκδήλωση της ζήτησης. Ο τύπος αυτός της μεταφοράς ονομάζεται προληπτική μεταφορά (preventive transshipment) επειδή κατά ένα τρόπο το σύστημα αντιδρά χωρίς να γνωρίζει το ύψος της ζήτησης που θα εκδηλωθεί και βασιζόμενο στα στοιχεία που έχει προσπαθεί να επιλέξει τις κινήσεις του κάνοντας κάποιες προβλέψεις. Με τη συμπεριφορά συστημάτων στα οποία εφαρμόζεται προληπτική συνεργασία ασχολήθηκε ακόμη ο Das (1975) και

μάλιστα στην περίπτωση αυτή ήταν δυνατή η πλευρική μεταφορά στο μέσον της χρονικής περιόδου.

Με τη μελέτη συστημάτων στα οποία η πλευρική μεταφορά λαμβάνει χώρα μετά την εκδήλωση της ζήτησης ασχολήθηκαν οι Krishnan και Rao (1965), Tagaras (1989) και Tagaras και Cohen (1992). Ο τύπος αυτός της πλευρικής μεταφοράς ονομάζεται επείγουσα (emergency transshipment) επειδή αποφασίζεται όταν η ζήτηση είναι πλέον γνωστή. Οι Archibald, Sassen και Thomas (1997) επέκτειναν αυτά τα μοντέλα επιτρέποντας την πλευρική μεταφορά σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή της περιόδου.

Μεταξύ άλλων οι Hoadley και Heyman (1977), Dada (1992), Cohen, Kleindorfer και Lee (1986), Lee (1987), Axsater (1990) και Sherbrooke (1992) μελέτησαν συστήματα στα οποία μετακινούνται επιδιορθώσιμα προΐοντα τα οποία μπορεί να υποτεθεί ότι ακολουθούν την κατανομή Poisson.

Τέλος άλλες σημαντικές εργασίες που αναφέρονται στη μελέτη της συμπεριφοράς συστημάτων με πολλαπλές θέσεις οφείλονται στους Karmarkar και Patel (1977), στον Karmarkar (1979) και στον Robinson (1985).

1.4 Σκοπός και δομή της παρούσας εργασίας

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων με δύο θέσεις ικανοποίησης της

ζήτησης στο οποίο εφαρμόζεται προληπτική συνεργασία ανάμεσα στις δύο αυτές θέσεις.

Πιο συγκεκριμένα στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή του προβλήματος το οποίο εξετάζεται και η παρουσίαση των μεταβλητών αυτού του προβλήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο με βάση τα παραπάνω στοιχεία γίνεται η δημιουργία και η παρουσίαση του προσομοιωτικού προτύπου το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από το προσομοιωτικό πρότυπο για το σύστημα, ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη περιγραφή του αντίστοιχου συστήματος χωρίς συνεργασία και του αντίστοιχου συστήματος με επείγουσα συνεργασία καθώς και συγκρίσεις με αποτελέσματα που υπάρχουν γι' αυτά τα συστήματα από προηγούμενες εργασίες. Τέλος στο έκτο κεφάλαιο καταγράφονται τα συμπεράσματα που εξάγονται από την ανάλυση αυτών των στοιχείων, ενώ επίσης προτείνονται μερικές κατευθύνσεις προς τις οποίες είναι σκόπιμο να κινηθεί η μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2 :

Περιγραφή του προβλήματος

2.1 Περιγραφή και λειτουργία του συστήματος

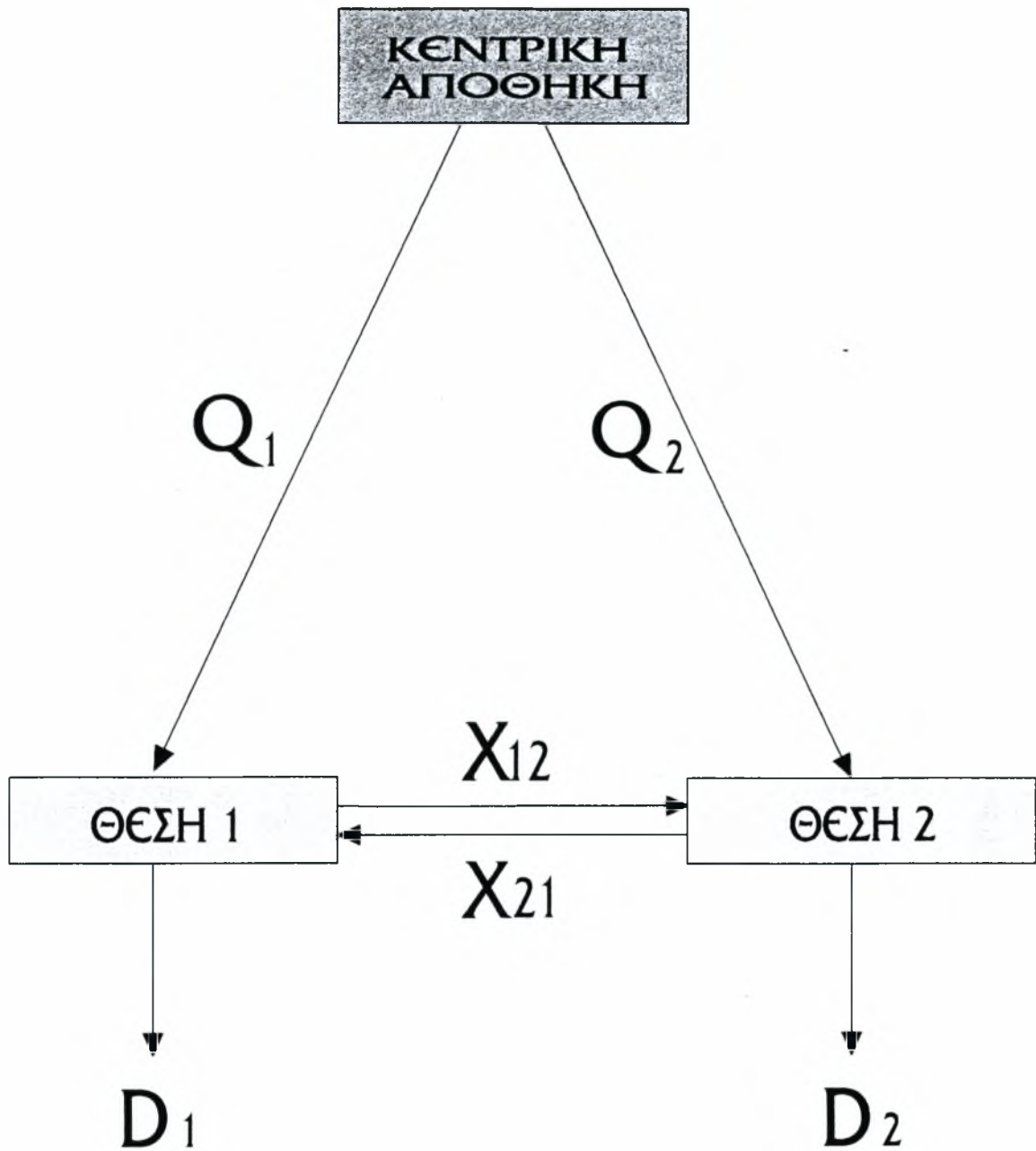
Θεωρούμε ένα στοχαστικό μοντέλο ενός συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων που αποτελείται από μία κεντρική αποθήκη και δύο θέσεις (π.χ. τοπικές αποθήκες, σημεία πώλησης) στις οποίες εκδηλώνεται η τυχαία ζήτηση από τους πελάτες. Η κεντρική αποθήκη τροφοδοτεί τις δύο θέσεις και έχει πρακτικά απεριόριστη δυναμικότητα. Στο σχήμα 1 φαίνεται η δομή του συστήματος ελέγχου των αποθεμάτων καθώς και η ροή των προΐόντων.

Καθεμία από τις δύο θέσεις αντιμετωπίζει εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τη ζήτηση στην άλλη θέση και θεωρείται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή. Σημειώνεται εδώ ότι η ζήτηση σε μια θέση θα μπορούσε να ακολουθεί οποιαδήποτε άλλη στατιστική κατανομή.

Και στις δύο θέσεις i ($i=1,2$) εφαρμόζεται περιοδική επιθεώρηση για τον έλεγχο της στάθμης του αποθέματος. Συγκεκριμένα στην αρχή κάθε περιόδου δίνεται μία παραγγελία Q_i ($i=1,2$) προς την κεντρική αποθήκη ώστε με την προσθήκη αυτής της παραγγελίας το συνολικό απόθεμα (διαθέσιμο + υπό παραγγελία) στη συγκεκριμένη θέση να φτάσει στο ύψος S_i ($i=1,2$) που αποτελεί και το μέγιστο απόθεμα. Ο χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας αυτής ισούται με L_i ($i=1,2$) περιόδους όπου το L_i είναι ακέραιος θετικός αριθμός.

Παράλληλα για τη βελτίωση της απόδοσης του συστήματος και τον περιορισμό πιθανών ελλείψεων υπάρχει η δυνατότητα πλευρικής μεταφοράς αποθέματος μεταξύ των δύο θέσεων. Ο χρόνος που απαιτείται για την πλευρική μετακίνηση είναι περίπου ίσος αλλά λίγο μικρότερος από μία

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ



Σχήμα 1: Δομή του συστήματος και ροή των προϊόντων

χρονική περίοδο. Οι ποσότητες μετακίνησης αποφασίζονται στην αρχή κάθε περιόδου, λαμβάνοντας υπόψη μόνο το διαθέσιμο απόθεμα κάθε θέσης, καθώς τα υπό παραγγελία αποθέματα δεν πρόκειται να αφιχθούν πριν από την επόμενη περίοδο και συνεπώς δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αντιμετώπιση της ζήτησης της τρέχουσας περιόδου. Συνοπτικά λοιπόν η αλληλουχία των γεγονότων σε κάθε περίοδο είναι η ακόλουθη:

1. Στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου σε κάθε θέση φτάνει μία παραγγελία από την κεντρική αποθήκη που είχε γίνει L_i περιόδους πριν.
2. Στη συνέχεια με βάση το διαθέσιμο απόθεμα κάθε θέσης εξετάζεται εάν θα πρέπει να πραγματοποιηθεί πλευρική μετακίνηση. Συγκεκριμένα πλευρική διακίνηση θα αποφασιστεί μόνο εάν το διαθέσιμο απόθεμα της μιας θέσης είναι πάνω από ορισμένο απόθεμα ασφαλείας της και ταυτόχρονα το διαθέσιμο απόθεμα της άλλης θέσης είναι κάτω από το απόθεμα ασφαλείας της οπότε είναι πιθανό να παρουσιαστεί έλλειψη στο τέλος της περιόδου. Στην περίπτωση αυτή το απόθεμα που θα διακινηθεί ισούται με τη μικρότερη ποσότητα μεταξύ του πλεονάσματος που έχει η μία θέση και της έλλειψης που έχει η άλλη ως προς τα αντίστοιχα αποθέματα ασφαλείας.
3. Έπειτα γνωρίζοντας τις πλευρικές μετακινήσεις και το συνολικό απόθεμα (διαθέσιμο + υπό παραγγελία) για κάθε θέση δίνονται οι παραγγελίες προς την κεντρική αποθήκη έτσι ώστε το συνολικό ύψος του αποθέματος να φτάσει στο S_i .
4. Κατά τη διάρκεια της περιόδου εκδηλώνεται η ζήτηση και ικανοποιείται κατ' αρχήν από το υπάρχον απόθεμα.

5. Λίγο πριν από το τέλος της περιόδου πραγματοποιείται η άφιξη των πλευρικών διακινήσεων που είχαν αποφασιστεί στην αρχή της περιόδου και χρησιμοποιούνται, εφόσον χρειαστεί, για την κάλυψη της ζήτησης που δεν έγινε δυνατόν να ικανοποιηθεί από το διαθέσιμο απόθεμα της θέσης.

6. Στο τέλος της περιόδου καταγράφονται τα τελικά αποθέματα, ή οι ελλείψεις, στην περίπτωση που το άθροισμα του διαθέσιμου αποθέματος της αρχής της περιόδου και της ποσότητας που τυχόν μετακινήθηκε πλευρικά από την άλλη θέση δεν ήταν αρκετό για την ικανοποίηση όλης της ζήτησης. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, η ποσότητα που δεν ικανοποιείται μεταφέρεται και ικανοποιείται στην επόμενη χρονική περίοδο (καθυστερημένη ικανοποίηση της ζήτησης).

Η λειτουργία των δύο θέσεων καθορίζεται και συγκεκριμενοποιείται από δύο παραμέτρους:

α) S_i ($i=1,2$): μέγιστο απόθεμα το οποίο καθορίζει το ύψος της παραγγελίας προς την κεντρική αποθήκη.

β) r_i ($i=1,2$): στάθμη αποθέματος ασφαλείας, που καθορίζει την πραγματοποίηση και τις ποσότητες των πλευρικών μετακινήσεων.

Η λειτουργία του συστήματος διευκρινίζεται παρακάτω με ένα αριθμητικό παράδειγμα όπου παρουσιάζονται οι παραγγελίες και οι διακινήσεις αποθεμάτων για 5 περιόδους.

Θεωρούμε ένα σύστημα όμοιο με αυτό που περιγράφηκε παραπάνω για το οποίο ισχύουν:

$L_1=L_2=1$, $S_1 = 240$, $S_2=220$, $r_1=120$ και $r_2=100$. Έστω επίσης ότι στο τέλος κάποιας χρονικής περιόδου το διαθέσιμο απόθεμα της πρώτης θέσης

είναι 25 και της δεύτερης 10. Ο τρόπος που παίρνονται οι αποφάσεις για τις παραγγελίες και τις πλευρικές μετακινήσεις στις επόμενες πέντε περιόδους φαίνεται αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα. Σημειώνεται ότι στον πίνακα αυτό χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

D_i : τυχαία ζήτηση στη θέση i κατά τη διάρκεια μιας περιόδου

Q_i : ποσότητα παραγγελίας της θέσης i προς την κεντρική αποθήκη

OH_i : ύψος αποθέματος που διαθέτει η θέση i

IP_i : συνολικό απόθεμα (διαθέσιμο + υπό παραγγελία) στη θέση i

X_{ij} : ποσότητα που διακινείται πλευρικά από τη θέση i στη θέση j

σε κάποια περίοδο

| t | OH_1 | OH_2 | X_{12} | X_{21} | IP_1 | IP_2 | Q_1 | Q_2 | D_1 | D_2 |
|---|--------|--------|----------|----------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | | | | | | | 100 | 75 | | |
| 1 | 125 | 85 | 5 | 0 | 120 | 90 | 120 | 130 | 115 | 72 |
| 2 | 125 | 148 | 0 | 0 | 125 | 148 | 115 | 72 | 97 | 110 |
| 3 | 143 | 110 | 0 | 0 | 143 | 110 | 97 | 110 | 130 | 85 |
| 4 | 110 | 135 | 0 | 10 | 120 | 125 | 120 | 95 | 82 | 96 |
| 5 | 158 | 124 | 0 | 0 | 158 | 124 | 82 | 96 | 98 | 92 |

Τυπική εξέλιξη ζητήσεων, αποθεμάτων και πλευρικών μετακινήσεων

Βλέπουμε ότι στην αρχή της πρώτης περιόδου η πρώτη θέση με την προσθήκη της παραγγελίας που έγινε στην προηγούμενη περίοδο έχει διαθέσιμο απόθεμα $25 + 100 = 125$, ενώ η δεύτερη $10 + 75 = 85$. Αυτό

σημαίνει ότι το απόθεμα της δεύτερης θέσης βρίσκεται κάτω από το απόθεμα ασφαλείας της. Επειδή η πρώτη θέση έχει πλεόνασμα πάνω από το απόθεμα ασφαλείας της, αποφασίζεται πλευρική μετακίνηση, το ύψος της οποίας καθορίζεται από τη μικρότερη των δύο αυτών ποσοτήτων, δηλαδή της έλλειψης που έχει η δεύτερη θέση ως προς το απόθεμα ασφαλείας της (15) και του αντίστοιχου πλεονάσματος που έχει η πρώτη θέση (5). Αυτή η ποσότητα όπως φαίνεται και από τον πίνακα ισούται με 5. Στη συνέχεια η κάθε θέση δίνει την παραγγελία της προς την κεντρική αποθήκη με βάση το συνολικό της απόθεμα. Έτσι η πρώτη θέση επειδή διαθέτει 120 μονάδες αποθέματος ($125 - 5$ που θα μεταφερθούν πλευρικά) παραγγέλνει 120 μονάδες ώστε το συνολικό ύψος του αποθέματός της να φτάσει το μέγιστο απόθεμά της ($120 + 120 = 240$). Με την ίδια λογική η δεύτερη θέση παραγγέλνει 130 μονάδες αποθέματος ($220 - 90 = 130$).

Στο τέλος της περιόδου γίνεται η εκδήλωση των δύο ζητήσεων και η ικανοποίησή τους από το υπάρχον απόθεμα. Κατόπιν πραγματοποιείται η άφιξη των πλευρικών διακινήσεων για να καλυφθούν τυχόν ελλείψεις που έχουν παρουσιαστεί. Παρατηρούμε ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου το απόθεμα που υπήρχε στις δύο θέσεις πριν την άφιξη των πλευρικών διακινήσεων ήταν αρκετό για την ικανοποίηση των δύο ζητήσεων και επομένως η πλευρική διακίνηση που πραγματοποιείται δε χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό. Το μόνο που απομένει μετά είναι η καταγραφή του τελικού αποθέματος κάθε θέσης ή της έλλειψης που παρουσιάστηκε και μεταφέρεται σε επόμενη περίοδο.

Στην προκειμένη περίπτωση οι δύο θέσεις στο τέλος της πρώτης περιόδου δεν αντιμετωπίζουν έλλειψη αλλά έχουν διαθέσιμο απόθεμα $120 - 115 = 5$ και $90 - 72 = 18$ αντίστοιχα.

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζεται η λειτουργία του συστήματος και στις επόμενες περιόδους και οι αντίστοιχες τιμές των διάφορων μεγεθών παρουσιάζονται στον παραπάνω πίνακα.

Εκτός από τον κανόνα συνεργασίας που περιγράφηκε παραπάνω και διευκρινίστηκε στα πλαίσια του παραδείγματος, υπάρχουν και αρκετοί άλλοι που έχουν εξεταστεί σε άλλα συστήματα και παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον. Ο κανόνας συνεργασίας που εφαρμόζεται ανάμεσα στις θέσεις ενός συστήματος παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδοση του συστήματος, καθώς επηρεάζει την όλη λειτουργία του.

Μεταξύ άλλων μερικοί κανόνες συνεργασίας που χρησιμοποιούνται συχνά είναι και οι ακόλουθοι :

α) συνεργασία με στόχο την ίση κατανομή του αποθέματος ανάμεσα στις θέσεις ενός συστήματος

Όταν οι θέσεις ικανοποίησης της ζήτησης ενός συστήματος έχουν ίδια στοιχεία κόστους και η ζήτηση ακολουθεί την ίδια στατιστική κατανομή με ίση τη μέση τιμή και τη μεταβλητότητα σ' αυτές τις θέσεις, τότε πολλές φορές γίνεται τέτοια πλευρική διακίνηση αποθέματος ώστε το συνολικό διαθέσιμο να κατανεμηθεί εξίσου σ' όλες τις θέσεις. Η σημαντική διαφορά αυτού του κανόνα με αυτόν που έχουμε στο παρόν σύστημα είναι ότι γίνεται πλευρική μεταφορά κάθε φορά που το απόθεμα μεταξύ των θέσεων του συστήματος διαφέρει, ανεξάρτητα από το ύψος που έχει. Έτσι, για να υλοποιηθεί

πλευρική μεταφορά δεν είναι αναγκαία προ'υπόθεση η θέση με το πλεόνασμα να έχει απόθεμα πάνω από το απόθεμα ασφαλείας της, ούτε η θέση με το έλλειμα να έχει απόθεμα κάτω από το δικό της απόθεμα ασφαλείας. Αρκεί οι δύο θέσεις να έχουν διαφορετικό ύψος αποθέματος.

β) συνεργασία με βάση την εξισορρόπηση του κινδύνου

Στην περίπτωση αυτή με βάση τα χαρακτηριστικά μεγέθη της στατιστικής κατανομής της ζήτησης σε κάθε θέση, οι πλευρικές διακινήσεις επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε περίοδο η πιθανότητα να παρουσιαστεί έλλειψη σε μία θέση να είναι η ίδια για όλες τις θέσεις. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση οι πλευρικές μετακινήσεις δε στηρίζονται σε κάποιο απόθεμα ασφαλείας, αλλά αποφασίζονται με τέτοιον τρόπο ώστε να κατανεμηθεί εξίσου ο κίνδυνος που παρουσιάζει το σύστημα να μην μπορεί να ανταποκριθεί στην εξωτερική ζήτηση, σε όλες τις θέσεις του.

2.2 Συνάρτηση κόστους

Κάθε θέση χαρακτηρίζεται από τα αντίστοιχα στοιχεία κόστους για τη διατήρηση αποθέματος, την έλλειψη αποθέματος και την παραγγελία κάθε μονάδας αποθέματος, ενώ το σύστημα επιβαρύνεται και με το κόστος για την πλευρική μετακίνηση των μονάδων αποθέματος. Αυτά τα στοιχεία κόστους θεωρούνται εκ των προτέρων γνωστά και σταθερά.

Το ζητούμενο του όλου προβλήματος είναι να βρεθεί εκείνος ο συνδυασμός των παραμέτρων (r_1, S_1, r_2, S_2) που εξασφαλίζει το μικρότερο μέσο συνολικό κόστος του συστήματος ανά περίοδο.

Το συνολικό αυτό κόστος αποτελείται από τα εξής τέσσερα επιμέρους στοιχεία κόστους:

- κόστος παραγγελίας αποθέματος από την κεντρική αποθήκη
- κόστος διατήρησης αποθέματος
- κόστος έλλειψης αποθέματος
- κόστος μετακίνησης αποθέματος μεταξύ των δύο θέσεων

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη που περιγράφουν το σύστημα και είναι απαραίτητα για τη διαμόρφωση της συνάρτησης κόστους είναι τα εξής:

D_i : τυχαία ζήτηση στη θέση i κατά τη διάρκεια μιας περιόδου

μ_i : μέση τιμή της τυχαίας ζήτησης στη θέση i

σ_i : τυπική απόκλιση της τυχαίας ζήτησης στη θέση i

Q_i : ποσότητα παραγγελίας της θέσης i προς την κεντρική αποθήκη

L_i : χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας της θέσης i από την κεντρική αποθήκη

OH_i : ύψος αποθέματος που διατηρεί η θέση i στο τέλος μιας χρονικής περιόδου (On Hand inventory)

BO_i : ποσότητα ζήτησης που δεν ικανοποιήθηκε από τη θέση i στο τέλος μιας περιόδου (Back Order position)

IP_i : συνολικό απόθεμα (διαθέσιμο + υπό παραγγελία) στη θέση i (Inventory Position)

X_{ij} : ποσότητα που διακινείται πλευρικά από τη θέση i στη θέση j σε κάποια περίοδο

c_i : κόστος παραγγελίας μιας μονάδας αποθέματος από την κεντρική αποθήκη προς τη θέση i

ch_i : κόστος διατήρησης μιας μονάδας αποθέματος στη θέση i ανά περίοδο

cp_i : κόστος έλλειψης μιας μονάδας αποθέματος στη θέση i ανά περίοδο

c_{ij} : κόστος μεταφοράς μιας μονάδας από τη θέση i στη θέση j

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό και με την υπόθεση ότι το σύστημά μας έχει φτάσει σε σταθερή κατάσταση, η μέση τιμή του συνολικού κόστους του συστήματος ανά περίοδο, $E(C)$, δίνεται από τη σχέση:

$$E(C) = \sum_{i=1}^2 \{ c_i * E(Q_i) + ch_i * E(OH_i) + cp_i * E(BO_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 c_{ij} * E(X_{ij}) \}$$

όπου $E(Q_i)$, $E(OH_i)$, $E(BO_i)$ και $E(X_{ij})$ είναι οι μέσες τιμές των παραγγελιών από την κεντρική αποθήκη, του τελικού αποθέματος, του αποθέματος που λείπει σε κάθε θέση στο τέλος της περιόδου και του αποθέματος που μεταφέρεται από τη μία θέση στην άλλη ανά περίοδο.

Σε κάθε περίοδο η παραγγελία που δίνει η θέση i προς την κεντρική αποθήκη ισούται με

$$Q_i = D_i + X_{ij} - X_{ji} \quad (i, j = 1, 2 \text{ και } i \neq j),$$

όπου D_i είναι η ζήτηση της προηγούμενης περιόδου και X_{ij} , X_{ji} είναι οι πλευρικές μετακινήσεις της τρέχουσας περιόδου. Έτσι το συνολικό ύψος των παραγγελιών και για τις δύο θέσεις είναι

$$Q_1 + Q_2 = D_1 + D_2$$

που κατά μέσο όρο είναι σταθερό και ισούται με

$$\mu_1 + \mu_2 .$$

Όταν $c_1 = c_2$, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση μας, επειδή όλη η ζήτηση ικανοποιείται, το συνολικό κόστος παραγγελιών είναι σταθερό και ανεξάρτητο του αποθέματος που διατηρεί η κάθε θέση. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να παραληφθεί, οπότε η συνάρτηση κόστους παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$E(C) = \sum_{i=1}^2 \{ c h_i * E(OH_i) + c p_i * E(BO_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 c_{ij} * E(X_{ij}) \}$$

Όπως φαίνεται λοιπόν από την παραπάνω εξίσωση για να υπολογιστεί το μέσο κόστος του συστήματος για οποιονδήποτε συνδυασμό (r_1, S_1, r_2, S_2) θα πρέπει να προσδιοριστούν οι μέσες τιμές των μεγεθών OH_i , BO_i και X_{ij} και μετά αυτές να πολλαπλασιαστούν με τα αντίστοιχα στοιχεία κόστους για να προκύψει το συνολικό κόστος του συστήματος. Επειδή όμως οι όροι $E(OH_i)$, $E(BO_i)$ και $E(X_{ij})$ παρουσιάζουν μεγάλη πολυπλοκότητα και δεν είναι δυνατό να υπολογιστούν με απλή μαθηματική ανάλυση, η εκτίμησή τους θα γίνει με προσομοίωση σε H/Y.

Συγκεκριμένα, με βάση τα διαθέσιμα στοιχεία, δημιουργούμε ένα προσομοιωτικό πρότυπο το οποίο να προσομοιώνει τη λειτουργία του συστήματος. Για να έχει αυτή η προσομοίωση μεγάλη ακρίβεια πρέπει να γίνει επανειλημμένα και για ένα μεγάλο αριθμό χρονικών περιόδων. Έτσι το πρότυπο αυτό μεταφράζεται σε γλώσσα ηλεκτρονικού υπολογιστή, ο οποίος μπορεί να εκτελέσει αυτήν την εργασία με μεγάλη ταχύτητα και ακρίβεια. Με τη βοήθεια αυτής της διαδικασίας εξάγονται αποτελέσματα, από τη στατιστική

ανάλυση των οποίων προκύπτουν συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του μοντέλου .

Στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφεται η δημιουργία και η δομή αυτού του προσομοιωτικού προτύπου καθώς και του αντίστοιχου προγράμματος του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Κεφάλαιο 3:

Προσομοιωτικό πρότυπο

3.1 Υποστήριξη επιχειρηματικών αποφάσεων μέσω της προσομοίωσης

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι τόσο πολύπλοκο που δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις καταφεύγουμε στην προσομοίωση, η οποία είναι μία τεχνική για τη μέτρηση της απόδοσης σύνθετων προβλημάτων που χαρακτηρίζονται από στοχαστικότητα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η προσομοίωση δεν αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο για την αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος, αλλά παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας αντιπροσωπευτικών παρατηρήσεων της συμπεριφοράς αυτού του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι με την προσομοίωση εκτελούμε πειράματα σε ένα πρότυπο που αναπαριστά το πρόβλημα, ώστε να πάρουμε έναν ικανοποιητικό αριθμό δειγμάτων για τα στοιχεία που μας απασχολούν. Έπειτα, από τη στατιστική ανάλυση των δειγμάτων αυτών μπορούμε να βγάλουμε σημαντικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του πραγματικού προβλήματος που μας απασχολεί.

Έχοντας στην παρούσα φάση καθορίσει το πρόβλημα και τις μεταβλητές που σχετίζονται με αυτό, τα επόμενα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η δημιουργία του μαθηματικού μοντέλου προσομοίωσης που θα περιγράψει ικανοποιητικά το πρόβλημα, η μετάφραση αυτού του μοντέλου υπό τη μορφή προγράμματος σε μία κατάλληλη γλώσσα ηλεκτρονικού υπολογιστή, η εκτέλεση αυτού του προγράμματος για ένα σημαντικό αριθμό διαφορετικών περιπτώσεων (με διαφορετικό συνδυασμό μεταβλητών η καθεμία) επί ένα μεγάλο αριθμό χρονικών περιόδων, η

καταγραφή και η ανάλυση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων και η εξαγωγή συμπερασμάτων από αυτά τα αποτελέσματα.

3.2 Δημιουργία προσομοιωτικού μοντέλου του προβλήματος

Το προσομοιωτικό μοντέλο που θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να περιλαμβάνει όλες εκείνες τις λογικές και μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του προβλήματος. Κατά τη φάση της δημιουργίας του υπάρχουν δύο παράγοντες που παίζουν ανταγωνιστικό ρόλο και συγκρούονται μεταξύ τους. Από τη μία μεριά το προσομοιωτικό μοντέλο πρέπει να είναι όσο το δυνατόν απλούστερο ώστε να είναι ευκολότερη και η χρήση του και η μετάφρασή του σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή, ενώ από την άλλη μεριά το μοντέλο αυτό θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο σύνθετο για να περιγράφεται ικανοποιητικά το πρόβλημα και να μην παραλείπονται κάποια στοιχεία του.

Το προσομοιωτικό πρότυπο που θα κατασκευάσουμε θα πρέπει επίσης να περιλαμβάνει όλα εκείνα τα μεγέθη του προβλήματος που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι αρχικά γίνεται η ακριβής αναπαράσταση της δομής του συστήματος και των τμημάτων από τα οποία αποτελείται. Έπειτα για κάθε θέση δίνονται τα μεγέθη που τη χαρακτηρίζουν, δηλαδή η μέση τιμή και η μεταβλητότητα της ζήτησης, ο χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας από την κεντρική αποθήκη, ο χρόνος επιθεώρησης και τα στοιχεία κόστους της θέσης αυτής ανά μονάδα αποθέματος. Κατόπιν

καθορίζονται όλες εκείνες οι σχέσεις που συνδέουν τα μέρη του συστήματος και όλοι εκείνοι οι κανόνες που ρυθμίζουν τη σωστή λειτουργία του συστήματος. Οι κανόνες αυτοί αφορούν τη συνεργασία των θέσεων, τον τρόπο μεταβολής και διακίνησης του αποθέματος, τον τρόπο επιλογής του μέγιστου αποθέματος και του αποθέματος ασφαλείας κάθε θέσης κτλ. Τέλος καθορίζεται ο χρόνος λειτουργίας του συστήματος και ο τρόπος που υπολογίζονται τα μεγέθη από τα οποία θα προκύψει το συνολικό κόστος λειτουργίας του που αποτελεί και το κριτήριο για την αξιολόγηση της απόδοσής του. Τέτοια μεγέθη είναι το μέσο διαθέσιμο απόθεμα, η μέση έλλειψη κάθε θέσης ανά περίοδο κ.ά.

3.3 Δομή και λειτουργία προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή

Για να γίνει δυνατή η βελτιστοποίηση του προβλήματος που μελετάμε θα πρέπει να γίνουν επανειλημμένα πειράματα στο πρότυπο. Για το σκοπό αυτό συντάσσεται κατάλληλο πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή αφού με αυτόν τον τρόπο μειώνεται δραστικά ο χρόνος που θα απαιτείτο για τη διαδικασία αυτή με το χέρι κι έτσι ικανοποιούνται πιο εύκολα οι ανάγκες της προσομοίωσης.

Δύο σημαντικοί παράγοντες που θα πρέπει να καθοριστούν κατά τη διαδικασία αυτή είναι ο αριθμός των επαναλήψεων της προσομοιωτικής διαδικασίας και ο χρονικός ορίζοντας κάθε προσομοίωσης, δηλαδή ο αριθμός των χρονικών περιόδων κάθε επανάληψης. Επειδή τα αποτελέσματα από την

προσομοιωτική διαδικασία λαμβάνονται υπό τη μορφή μέσων τιμών και διαστημάτων εμπιστοσύνης για τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος, η ακρίβεια και η αξιοπιστία τους, όπως είναι φυσικό, εξαρτώνται άμεσα από τους δύο αυτούς παράγοντες. Συγκεκριμένα όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός των προσομοιωτικών επαναλήψεων και όσο πιο μεγάλο είναι το εύρος των χρονικών περιόδων, τόσο πιο στενά είναι αυτά τα όρια εμπιστοσύνης. Αυτό είναι πολύ σημαντικό και για έναν επιπλέον λόγο. Ο λόγος αυτός είναι ότι η συνάρτηση του κόστους, που αποτελεί και το κριτήριο για τη βελτιστοποίηση του συστήματος, στην περιοχή του βέλτιστου είναι αρκετά επίπεδη, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν αρκετές λύσεις με παραπλήσιο κόστος κι έτσι είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί ποια είναι η πραγματικά βέλτιστη.

Από την άλλη μεριά όμως, όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός των προσομοιωτικών επαναλήψεων και η διάρκεια της κάθε επανάληψης τόσο πιο πολύ αυξάνονται οι υπολογιστικές απαιτήσεις σε χρόνο, ο οποίος βέβαια είναι περιορισμένος. Έτσι θα πρέπει να επιλεγεί ένας συνδυασμός προσομοιωτικών επαναλήψεων και χρονικών περιόδων (διάρκειας) για κάθε επανάληψη που να εξασφαλίζει ικανοποιητική ακρίβεια από τη μια και όχι πολύ μεγάλο χρόνο για την εκτέλεση των πειραμάτων από την άλλη.

Η επιλογή αυτή δεν είναι εύκολη. Έπειτα από δοκιμές για διάφορους συνδυασμούς αλλά και από την εξέταση ανάλογων μελετών και εργασιών, βρέθηκε ότι ο συνδυασμός 500 προσομοιωτικών επαναλήψεων με 1500 χρονικές περιόδους ανά προσομοιωτική επανάληψη, δίνει ικανοποιητική ακρίβεια χωρίς υπερβολικά υψηλές απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο.

Το πρόγραμμα της προσομοίωσης γράφτηκε στη γλώσσα FORTRAN 77 η οποία πληρεί τις προϋποθέσεις που απαιτούνται για τη σύνταξή του. Αποτελείται από τέσσερα κυρίως μέρη τα οποία είναι τα εξής :

- Κυρίως πρόγραμμα

Στο κυρίως πρόγραμμα γίνεται αρχικά ο καθορισμός της κατηγορίας στην οποία θα ανήκει η κάθε μεταβλητή που θα χρησιμοποιηθεί από το πρόγραμμα. Έτσι δηλώνεται για παράδειγμα ποιες μεταβλητές θα είναι αριθμοί πραγματικοί, απλής ή διπλής ακρίβειας, ακέραιοι κτλ. Στη συνέχεια παρατίθενται οι εντολές εισόδου για τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος δηλαδή τα διάφορα στοιχεία κόστους, τους χρόνους ικανοποίησης της παραγγελίας για τις δύο θέσεις, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ζήτησης κάθε θέσης και το συνδυασμό (r_1, S_1, r_2, S_2) από τον οποίο θα αρχίσει η αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Τέλος δίνονται τιμές σε κάποιες σημαντικές μεταβλητές όπως το βήμα με το οποίο το πρόγραμμα μεταβαίνει από τη μία λύση στην άλλη, η επιθυμητή ακρίβεια ή ο μέγιστος αριθμός των συνδυασμών (r_1, S_1, r_2, S_2) που μπορούν να ελεγχθούν προτού σταματήσει το πρόγραμμα.

- Υπορουτίνα Hooke

Η υπορουτίνα αυτή κάνει τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Hooke, που έχει χρησιμοποιηθεί αρκετές φορές σε παρόμοιες εργασίες. Πρόκειται για τεχνική αναζήτησης που παρουσιάζεται σε δημοσίευση των Hooke και Jeeves (1961). Συγκεκριμένα ξεκινώντας από έναν αρχικό συνδυασμό (r_1, S_1, r_2, S_2) και αλλάζοντας κάθε φορά χωριστά μία

από τις τέσσερις αυτές μεταβλητές, κινείται προς την κατεύθυνση όπου μειώνεται το συνολικό κόστος του συστήματος.

- Υπορουτίνα FCN

Η υπορουτίνα αυτή χρησιμοποιείται από την υπορουτίνα Hooke για την εύρεση του συνολικού κόστους για κάθε συνδυασμό (r_1, S_1, r_2, S_2) . Συγκεκριμένα η υπορουτίνα αυτή εκτελεί την προσομοίωση για κάθε συνδυασμό (r_1, S_1, r_2, S_2) χωριστά και για τον αριθμό των επαναλήψεων και των χρονικών περιόδων που έχει αποφασιστεί. Με τη βοήθεια αυτής της υπορουτίνας υπολογίζονται οι μέσες τιμές και τα διαστήματα εμπιστοσύνης των μεγεθών που μας απασχολούν για κάθε τέτοιο συνδυασμό. Φυσικά το σημαντικότερο μέγεθος που υπολογίζεται είναι το κόστος που χρησιμεύει στη διαδικασία της βελτιστοποίησης.

- Υπορουτίνα-συνάρτηση RAND

Η υπορουτίνα αυτή χρησιμεύει για την παραγωγή τυχαίων αριθμών, οι οποίοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο διάστημα $(0, 1)$. Στη συνέχεια ανά δύο αυτοί οι τυχαίοι αριθμοί u_1, u_2 μετατρέπονται σε τυχαίες μεταβλητές x, y της ανηγμένης κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1, σύμφωνα με τη μέθοδο των Box και Muller (1958) από τους τύπους:

$$x = \cos(2\pi u_1) \cdot (-2 \log u_2)^{1/2} \text{ και}$$

$$y = \sin(2\pi u_1) \cdot (-2 \log u_2)^{1/2}$$

Έτσι γνωρίζοντας τις στατιστικές παραμέτρους (μέση τιμή και τυπική απόκλιση) των ζητήσεων μπορούμε να πάρουμε τυχαίες τιμές των ζητήσεων αυτών που χρησιμεύουν στην προσομοίωση από τις σχέσεις:

$$D_1 = \mu_1 + x^* \sigma_1 \text{ και}$$

$$D_2 = \mu_2 + y^* \sigma_2.$$

Η διαδικασία λειτουργίας του προγράμματος ξεκινάει με την εισαγωγή των τιμών των δεδομένων του προβλήματος και ενός αρχικού συνδυασμού (r_1, S_1, r_2, S_2) . Στη συνέχεια το πρόγραμμα μέσω της βοήθειας της υπορουτίνας FCN υπολογίζει το συνολικό μέσο κόστος λειτουργίας του συστήματος για το συνδυασμό αυτό. Κατόπιν το πρόγραμμα αλλάζει χωριστά μία-μία τις τέσσερις αυτές μεταβλητές τόσο όσο είναι το βήμα και κρατάει εκείνες τις τιμές που έχουν ως αποτέλεσμα τη μείωση του συνολικού κόστους του συστήματος.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι το βήμα είναι 4. Αφού η υπορουτίνα FCN υπολογίσει αρχικά το κόστος του συστήματος για τον αρχικό συνδυασμό (r_1, S_1, r_2, S_2) , στη συνέχεια θα αυξήσει κατά 4 την τιμή του r_1 διατηρώντας τις άλλες τρεις μεταβλητές σταθερές. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας νέος συνδυασμός (r_1, S_1, r_2, S_2) για τον οποίο θα υπολογιστεί το νέο κόστος που προκύπτει για το σύστημα. Κατόπιν το πρόγραμμα θα μειώσει το αρχικό r_1 κατά 4 και θα υπολογίσει και πάλι το νέο κόστος του συστήματος. Το πρόγραμμα συγκρίνει ανά δύο τους συνδυασμούς αυτούς και κρατάει την τιμή του r_1 που δίνει το μικρότερο κόστος για το σύστημα. Έπειτα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, το πρόγραμμα συνεχίζει με την αλλαγή κάθε μιας από τις 4 μεταβλητές χωριστά, επανέρχεται πάλι στην πρώτη κ.ο.κ. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται όμοια και όταν το πρόγραμμα φτάσει στην περιοχή της βέλτιστης λύσης τότε μειώνει το βήμα για να εξετάσει όλες τις πιθανές λύσεις. Η αναζήτηση της βέλτιστης λύσης σταματάει όταν ο αριθμός των συνδυασμών

που ελέγχονται φτάσει τους 200 ή όταν το κόστος δύο διαδοχικών λύσεων διαφέρει κατά λιγότερο από 0,05.

Η υπορουτίνα FCN είναι ο πυρήνας του προγράμματος. Η υπορουτίνα αυτή όπως είπαμε προσομοιώνει τη λειτουργία κάθε συνδυασμού (r_1, S_1, r_2, S_2) που θα της δοθεί για σταθερό αριθμό (500) προσομοιωτικών επαναλήψεων και χρονικών περιόδων (1500) κάθε φορά. Σημειώνεται ότι κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης υπάρχει σε κάθε προσομοιωτική επανάληψη ένας μεταβατικός αριθμός χρονικών περιόδων που χρησιμεύουν για να έρθει το σύστημα σε σταθερή κατάσταση και παραλείπονται.

Η λειτουργία του συστήματος σε κάθε περίοδο ξεκινάει με τον υπολογισμό των ζητήσεων των θέσεων. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με τον τρόπο που αναπτύχθηκε παραπάνω, με τη βοήθεια της υπορουτίνας-συνάρτησης RAND κάθε φορά.

Κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης το πρόγραμμα συμπεριφέρεται σαν να λειτουργούσε το σύστημα στην πραγματικότητα. Έτσι έχουμε την υλοποίηση όλων των πραγματικών ενεργειών όπως ο έλεγχος της στάθμης του αποθέματος, οι παραγγελίες προς την κεντρική αποθήκη, οι πλευρικές μεταφορές, η εκδήλωση και η ικανοποίηση των ζητήσεων και τελικά ο υπολογισμός του τελικού διαθέσιμου αποθέματος και των ελλείψεων κάθε θέσης.

Η υπορουτίνα FCN στο τέλος κάθε προσομοιωτικής επανάληψης υπολογίζει τη μέση τιμή του αποθέματος που διατηρείται σε κάθε θέση, του αποθέματος που λείπει από κάθε θέση και του αποθέματος που διακινείται πλευρικά για τις 1500 χρονικές περιόδους της προσομοίωσης. Στη συνέχεια

γίνεται ο υπολογισμός του μέσου κόστους για τη συγκεκριμένη προσομοίωση που προκύπτει ως γινόμενο αυτών των μέσων τιμών με τα αντίστοιχα στοιχεία κόστους. Μ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα στατιστικό δείγμα για κάθε ένα από τα παραπάνω μεγέθη. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό επειδή το πρόγραμμα επαναλαμβάνει αυτή τη διαδικασία 500 φορές, τελικά συγκεντρώνονται 500 τέτοια δείγματα. Κατόπιν μπορούμε να υπολογίσουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης των παραπάνω μεγεθών σύμφωνα με τη θεωρία της στατιστικής.

Παραδείγματος χάρη για το κόστος του συστήματος έχουμε:

Η συνολική μέση τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$E(C) = \sum_{i=1}^{500} \{ E(C)_i \} / 500$$

$$= [E(C)_1 + E(C)_2 + \dots + E(C)_{500}] / 500$$

όπου $E(C)_i$ είναι η μέση τιμή του κόστους που παίρνουμε από την i προσομοιωτική επανάληψη.

Η μεταβλητότητα της μέσης τιμής δίνεται από τον τύπο:

$$s = \left[\sum_{i=1}^{500} \{ E(C)_i - E(C) \}^2 / (499) \right]^{1/2}$$

Τα 95% όρια εμπιστοσύνης υπολογίζονται από τις σχέσεις:

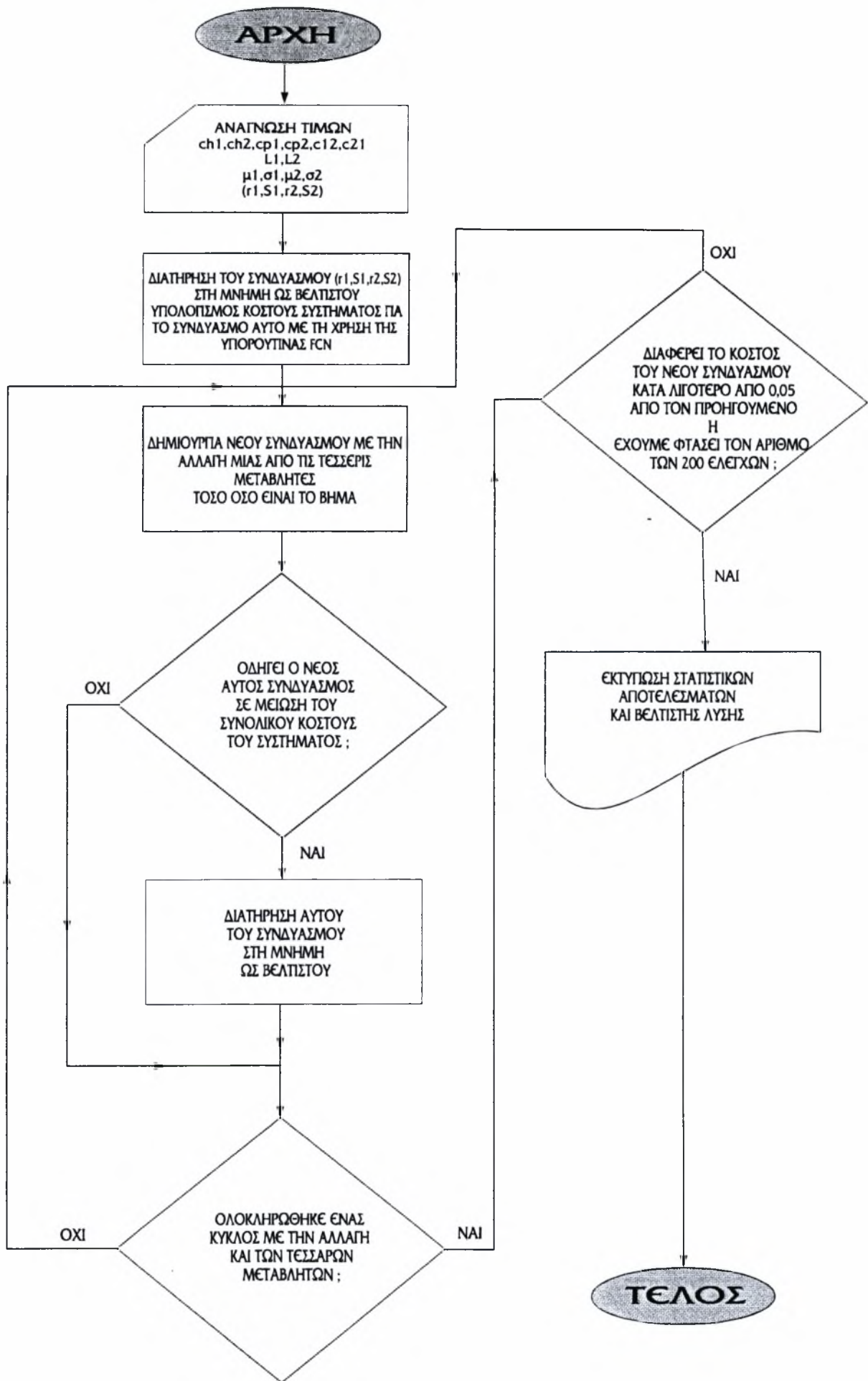
$$\text{Άνω όριο} = E(C) + 1,96 * \frac{s}{\sqrt{n}} = E(C) + 1,96 * \frac{s}{\sqrt{500}}$$

$$\text{Κάτω όριο} = E(C) - 1,96 * \frac{s}{\sqrt{n}} = E(C) - 1,96 * \frac{s}{\sqrt{500}}$$

Μ' αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται η μέση τιμή του κόστους κάθε προβλήματος και τα όρια εντός των οποίων αυτή η τιμή βρίσκεται με πιθανότητα 95%.

Με την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω για το κόστος υπολογίζουμε και τα διαστήματα εμπιστοσύνης των άλλων μεγεθών.

Όλα αυτά τα στοιχεία καταγράφονται και αποθηκεύονται σε κατάλληλα διαμορφωμένα αρχεία. Στο σχήμα 2 φαίνεται το λογικό διάγραμμα του προγράμματος, ενώ στα σχήματα 3 και 4 φαίνεται η μορφή με την οποία γίνεται η εισαγωγή και η αποθήκευση των δεδομένων αντίστοιχα.



Σχήμα 2: Λογικό διάγραμμα του προγράμματος

Δώσε τα στοιχεία κόστους $ch_1, ch_2, cp_1, cp_2, c_{12}, c_{21}$

1,1,8,8,3,3

Δώσε τους χρόνους L_1, L_2

3,3

Δώσε τα στοιχεία των στατιστικών κατανομών: $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$

100,30,500,150

Δώσε τον αρχικό συνδυασμό r_1, S_1, r_2, S_2

120,480,600,2350

Σχήμα 3: Τρόπος εισαγωγής των δεδομένων του προβλήματος

Παρακάτω δίνονται οι παράμετροι του προβλήματος:

Μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης ανά περίοδο: $ch1 = 1.00$ $ch2 = 1.00$

Μοναδιαίο κόστος έλλειψης ανά περίοδο: $cp1 = 8.00$ $cp2 = 8.00$

Μοναδιαίο κόστος πλευρικής μεταφοράς: $c12 = 3.00$ $c21 = 3.00$

Χρόνος ικανοποίησης παραγγελιών: $L1 = 3$ περίοδοι $L2 = 3$ περίοδοι

Ζήτηση ανά περίοδο στη θέση 1: Μέση τιμή = 100.0 Τυπ. απόκλ. = 30.0

Ζήτηση ανά περίοδο στη θέση 2: Μέση τιμή = 500.0 Τυπ. απόκλ. = 150.0

Σχήμα 4: Τρόπος αποθήκευσης των δεδομένων του προβλήματος

Κεφάλαιο 4 :

**Αριθμητικά παραδείγματα και
αποτελέσματα**



4.1 Παράμετροι αριθμητικών παραδειγμάτων

Για την καλύτερη κατανόηση και λεπτομερέστερη ανάλυση του συστήματος αποθεμάτων που εξετάζεται στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε ένας μεγάλος αριθμός παραδειγμάτων (120), με διάφορους συνδυασμούς παραμέτρων, έτσι ώστε να μπορούν να εξεταστούν όσο το δυνατόν περισσότεροι παράγοντες που επιδρούν στην απόδοση του συστήματος.

Όσον αφορά τη ζήτηση των δύο θέσεων επιλέχτηκαν τρεις μέσες τιμές (100,500,1000), ενώ για κάθε μία από αυτές τις τιμές υπήρχαν είτε η επιλογή μικρής τυπικής απόκλισης (20,100 και 200 αντίστοιχα), είτε η επιλογή μεγαλύτερης τυπικής απόκλισης (30,150 και 300) έτσι ώστε το πηλίκο $c_v = \sigma/\mu$ (συντελεστής διασποράς) να είναι είτε 0,2 είτε 0,3. Έτσι ελέγχθηκαν συνολικά δέκα συνδυασμοί για τις παραμέτρους των ζητήσεων στις δύο θέσεις του συστήματος.

Επίσης όπως είναι σαφές η πλευρική μεταφορά καθίσταται σκόπιμη μόνο όταν ο χρόνος που απαιτείται για την πραγματοποίησή της είναι μικρότερος από το χρόνο που απαιτείται για την ικανοποίηση μιας παραγγελίας από την κεντρική αποθήκη. Έτσι αποφασίστηκε να γίνει έλεγχος για τρεις τιμές του χρόνου ικανοποίησης κανονικής παραγγελίας L_i (1,3 και 10 περίοδοι). Σημειώνεται ότι ακόμη και στην περίπτωση που ο χρόνος αυτός ισούται με μία περίοδο είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο χρόνο της πλευρικής διακίνησης καθώς εκείνος είναι πάντα λίγο μικρότερος από μία περίοδο. Αυτό σημαίνει ότι η πλευρική μετακίνηση αποφασίζεται στην αρχή

μιας περιόδου και υλοποιείται στο τέλος της, ενώ η άφιξη μιας παραγγελίας από την κεντρική αποθήκη γίνεται πάντα σε διαφορετική περίοδο από αυτήν κατά την οποία δόθηκε η εντολή αυτής της παραγγελίας.

Τέλος όσον αφορά τα στοιχεία κόστους, το μοναδιαίο κόστος διατήρησης ανά περίοδο διατηρήθηκε σε όλα τα παραδείγματα ίσο με 1 και για τις δύο θέσεις, ενώ χρησιμοποιήθηκαν τέσσερις συνδυασμοί για τα άλλα δύο στοιχεία κόστους δηλαδή το κόστος έλλειψης και το κόστος πλευρικής μεταφοράς. Συγκεκριμένα επιλέχθηκε να εξεταστούν οι εξής συνδυασμοί:

i) $cp_1 = cp_2 = 8$ και $c_{12} = c_{21} = 1$

ii) $cp_1 = cp_2 = 8$ και $c_{12} = c_{21} = 3$

iii) $cp_1 = cp_2 = 50$ και $c_{12} = c_{21} = 20$

iv) $cp_1 = cp_2 = 50$ και $c_{12} = c_{21} = 40$

Μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε για το πηλίκο c_{ij}/cp_i τις τιμές 0,125-0,375-0,4 και 0,8 αντίστοιχα, ενώ διατηρείται πάντα η συνθήκη $c_{ij} < cp_i$ που είναι αναγκαία ώστε να είναι συμφέρουσα η πλευρική διακίνηση αποθέματος. Επίσης ο λόγος του κόστους διατήρησης ch_i προς το κόστος έλλειψης cp_i εξετάζεται σε δύο επίπεδα, $1/8 = 0,125$ και $1/50 = 0,02$.

Βέβαια κάθε ένα από τα τρία παραπάνω στοιχεία κόστους ήταν σε όλα τα προβλήματα ίδιο και για τις δύο θέσεις, ώστε να είναι σχετικά απλή η εξαγωγή των συμπερασμάτων και να μην υπάρχουν αμφιβολίες σχετικά με τα αίτια που προκαλούν την κάθε επίδραση. Το πρόγραμμα προσομοίωσης όμως έχει την ευελιξία να χρησιμοποιηθεί και για την εξέταση περιπτώσεων με διαφορετικά στοιχεία κόστους ή χρόνους L_i για τις δύο θέσεις ικανοποίησης της ζήτησης.

Μ' αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκαν 120 προβλήματα (10 συνδυασμοί ζητήσεων x 3 συνδυασμοί χρόνων ικανοποίησης παραγγελίας x 4 συνδυασμοί στοιχείων κόστους). Οι παράμετροι αυτών των 120 προβλημάτων παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 1.

Βέβαια όπως έχει προαναφερθεί για να αρχίσει η διαδικασία εκτέλεσης ενός προβλήματος είναι απαραίτητος και ένας συνδυασμός (r_1, S_1, r_2, S_2) από τον οποίο ξεκινά η αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του προγράμματος και τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος εξαρτάται κατά μεγάλο βαθμό από το πόσο κοντά στη βέλτιστη λύση είναι αυτός ο συνδυασμός. Για την επιλογή αυτού του συνδυασμού χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από προηγούμενες εργασίες και έγιναν κάποιες αρχικές εκτιμήσεις.

Συγκεκριμένα η επιλογή αυτών των συνδυασμών έγινε με βάση το γεγονός ότι το σύστημα που εξετάζουμε παρουσιάζει μεγαλύτερη ευελιξία από το αντίστοιχο σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις και μικρότερη από το αντίστοιχο σύστημα με επείγουσα συνεργασία. Αυτό σημαίνει ότι οι βέλτιστες τιμές του μέγιστου αποθέματος των δύο θέσεων θα πρέπει λογικά να βρίσκονται ανάμεσα στις βέλτιστες τιμές του μέγιστου αποθέματος των δύο θέσεων αυτών των δύο συστημάτων.

Επίσης ένα άλλο στοιχείο που χρησιμοποιήθηκε είναι το γεγονός ότι, όπως θα εξηγηθεί και παρακάτω, το μέγιστο απόθεμα προορίζεται για την κάλυψη της ζήτησης στη διάρκεια $L+1$ περιόδων, ενώ το απόθεμα ασφαλείας προορίζεται για την κάλυψη της ζήτησης στη διάρκεια μιας περιόδου. Γνωρίζοντας λοιπόν τη στατιστική κατανομή που ακολουθεί η ζήτηση για

κάθε ένα από τα δύο παραπάνω χρονικά διαστήματα, μπορούμε να προβλέψουμε σε ποια επίπεδα θα πρέπει να κυμαίνονται το μέγιστο απόθεμα και το απόθεμα ασφαλείας κάθε θέσης.

Για την εκτέλεση των 120 προβλημάτων χρησιμοποιήθηκε ένας υπολογιστής 80486 σε συχνότητα 66 MHz . Ο υπολογιστής αυτός χρειάστηκε μία με δύο ώρες για την ολοκλήρωση της ανάλυσης ενός προβλήματος, χρόνος φυσικά που κυμαινόταν αρκετά από πρόβλημα σε πρόβλημα.

| A/A | μ_1 | σ_1 | μ_2 | σ_2 | $L_1=L_2$ | $ch_1=ch_2$ | $c_{12}=c_{21}$ | $cp_1=cp_2$ |
|-----|---------|------------|---------|------------|-----------|-------------|-----------------|-------------|
| 1 | 100 | 20 | 100 | 20 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 2 | 100 | 20 | 500 | 100 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 3 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 4 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 5 | 100 | 30 | 100 | 30 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 6 | 100 | 30 | 500 | 150 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 7 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 8 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 9 | 100 | 20 | 100 | 30 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 10 | 100 | 30 | 500 | 100 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 11 | 100 | 20 | 100 | 20 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 12 | 100 | 20 | 500 | 100 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 13 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 14 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 15 | 100 | 30 | 100 | 30 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 16 | 100 | 30 | 500 | 150 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 17 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 18 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 19 | 100 | 20 | 100 | 30 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 20 | 100 | 30 | 500 | 100 | 3 | 1 | 1 | 8 |
| 21 | 100 | 20 | 100 | 20 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 22 | 100 | 20 | 500 | 100 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 23 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 24 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 25 | 100 | 30 | 100 | 30 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 26 | 100 | 30 | 500 | 150 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 27 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 28 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 29 | 100 | 20 | 100 | 30 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 30 | 100 | 30 | 500 | 100 | 10 | 1 | 1 | 8 |
| 31 | 100 | 20 | 100 | 20 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 32 | 100 | 20 | 500 | 100 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 33 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 34 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 35 | 100 | 30 | 100 | 30 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 36 | 100 | 30 | 500 | 150 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 37 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 38 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 39 | 100 | 20 | 100 | 30 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 40 | 100 | 30 | 500 | 100 | 1 | 1 | 3 | 8 |
| 41 | 100 | 20 | 100 | 20 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 42 | 100 | 20 | 500 | 100 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 43 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 44 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 45 | 100 | 30 | 100 | 30 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 46 | 100 | 30 | 500 | 150 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 47 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 48 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 49 | 100 | 20 | 100 | 30 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 50 | 100 | 30 | 500 | 100 | 3 | 1 | 3 | 8 |
| 51 | 100 | 20 | 100 | 20 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 52 | 100 | 20 | 500 | 100 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 53 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 54 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 55 | 100 | 30 | 100 | 30 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 56 | 100 | 30 | 500 | 150 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 57 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 58 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 59 | 100 | 20 | 100 | 30 | 10 | 1 | 3 | 8 |
| 60 | 100 | 30 | 500 | 100 | 10 | 1 | 3 | 8 |

Πίνακας 1: Δεδομένα αριθμητικών παραδειγμάτων

| A/A | μ_1 | σ_1 | μ_2 | σ_2 | $L_1=L_2$ | $ch_1=ch_2$ | $c_{12}=c_{21}$ | $cp_1=cp_2$ |
|-----|---------|------------|---------|------------|-----------|-------------|-----------------|-------------|
| 61 | 100 | 20 | 100 | 20 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 62 | 100 | 20 | 500 | 100 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 63 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 64 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 65 | 100 | 30 | 100 | 30 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 66 | 100 | 30 | 500 | 150 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 67 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 68 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 69 | 100 | 20 | 100 | 30 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 70 | 100 | 30 | 500 | 100 | 1 | 1 | 20 | 50 |
| 71 | 100 | 20 | 100 | 20 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 72 | 100 | 20 | 500 | 100 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 73 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 74 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 75 | 100 | 30 | 100 | 30 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 76 | 100 | 30 | 500 | 150 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 77 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 78 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 79 | 100 | 20 | 100 | 30 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 80 | 100 | 30 | 500 | 100 | 3 | 1 | 20 | 50 |
| 81 | 100 | 20 | 100 | 20 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 82 | 100 | 20 | 500 | 100 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 83 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 84 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 85 | 100 | 30 | 100 | 30 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 86 | 100 | 30 | 500 | 150 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 87 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 88 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 89 | 100 | 20 | 100 | 30 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 90 | 100 | 30 | 500 | 100 | 10 | 1 | 20 | 50 |
| 91 | 100 | 20 | 100 | 20 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 92 | 100 | 20 | 500 | 100 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 93 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 94 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 95 | 100 | 30 | 100 | 30 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 96 | 100 | 30 | 500 | 150 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 97 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 98 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 99 | 100 | 20 | 100 | 30 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 100 | 100 | 30 | 500 | 100 | 1 | 1 | 40 | 50 |
| 101 | 100 | 20 | 100 | 20 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 102 | 100 | 20 | 500 | 100 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 103 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 104 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 105 | 100 | 30 | 100 | 30 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 106 | 100 | 30 | 500 | 150 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 107 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 108 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 109 | 100 | 20 | 100 | 30 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 110 | 100 | 30 | 500 | 100 | 3 | 1 | 40 | 50 |
| 111 | 100 | 20 | 100 | 20 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 112 | 100 | 20 | 500 | 100 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 113 | 100 | 20 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 114 | 500 | 100 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 115 | 100 | 30 | 100 | 30 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 116 | 100 | 30 | 500 | 150 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 117 | 100 | 30 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 118 | 500 | 150 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 119 | 100 | 20 | 100 | 30 | 10 | 1 | 40 | 50 |
| 120 | 100 | 30 | 500 | 100 | 10 | 1 | 40 | 50 |

Πίνακας 1: Δεδομένα αριθμητικών παραδειγμάτων

4.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Οι σπουδαιότερες πληροφορίες που παίρνουμε από τη διαδικασία της προσομοίωσης και την εκτέλεση του προγράμματος είναι ο συνδυασμός (r_1, S_1, r_2, S_2) που δίνει το ελάχιστο κόστος του συστήματος για κάθε περίπτωση και βέβαια η τιμή αυτού του κόστους. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται παρακάτω στον πίνακα 2.

Ο πίνακας 3 περιέχει τις μέσες τιμές του τελικού αποθέματος, του αποθέματος που διακινείται πλευρικά και των ελλείψεων αποθέματος.

Από τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το σύστημα αλλά και από την αντίστοιχη θεωρία του συστήματος με σταθερό χρόνο επιθεώρησης, γίνεται σαφές ότι ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην πραγματοποίηση μιας παραγγελίας προς την κεντρική αποθήκη και στην άφιξη της επόμενης παραγγελίας ισούται με το άθροισμα του χρόνου επιθεώρησης (που στην περίπτωσή μας είναι 1 χρονική περίοδος) και του εκάστοτε χρόνου ικανοποίησης της παραγγελίας L . Επομένως η ποσότητα που παραγγέλνουμε και το συνολικό απόθεμα (διαθέσιμο + υπό παραγγελία) που υπάρχει όταν παραγγέλνουμε, ή με άλλα λόγια το μέγιστο απόθεμα, προορίζεται για την ικανοποίηση της ζήτησης στη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος $L+1$.

Επειδή η ζήτηση μιας περιόδου ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , τότε σύμφωνα με τη θεωρία της στατιστικής η ζήτηση στη διάρκεια $L+1$ περιόδων θα ακολουθεί κανονική κατανομή επίσης, με μέση τιμή $\mu_{L+1} = \mu*(L+1)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{L+1} = \sigma*(L+1)^{1/2}$. Το ίδιο θα

| A/A | S ₁ | S ₂ | r ₁ | r ₂ | E (C) |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| 1 | 232 | 232 | 117 | 117 | 91,29 |
| 2 | 233 | 1166 | 116 | 585 | 281,16 |
| 3 | 234 | 2337 | 116 | 1179 | 522,00 |
| 4 | 1162 | 2322 | 584 | 1172 | 689,33 |
| 5 | 248 | 248 | 126 | 126 | 136,93 |
| 6 | 250 | 1249 | 124 | 627 | 421,70 |
| 7 | 251 | 2508 | 123 | 1258 | 782,93 |
| 8 | 1242 | 2482 | 626 | 1257 | 1.033,89 |
| 9 | 232 | 248 | 117 | 126 | 114,39 |
| 10 | 249 | 1163 | 125 | 586 | 301,88 |
| 11 | 442 | 441 | 117 | 117 | 118,85 |
| 12 | 445 | 2225 | 116 | 580 | 381,89 |
| 13 | 446 | 4466 | 116 | 1163 | 721,67 |
| 14 | 2211 | 4426 | 583 | 1165 | 907,88 |
| 15 | 462 | 462 | 125 | 125 | 178,23 |
| 16 | 467 | 2338 | 124 | 624 | 572,75 |
| 17 | 468 | 4700 | 124 | 1243 | 1.082,38 |
| 18 | 2313 | 4641 | 625 | 1244 | 1.361,63 |
| 19 | 441 | 464 | 117 | 125 | 149,55 |
| 20 | 466 | 2220 | 124 | 582 | 404,55 |
| 21 | 1164 | 1163 | 116 | 116 | 179,52 |
| 22 | 1165 | 5863 | 116 | 573 | 606,47 |
| 23 | 1166 | 11762 | 116 | 1141 | 1.168,29 |
| 24 | 5827 | 11655 | 579 | 1156 | 1.391,88 |
| 25 | 1196 | 1194 | 124 | 124 | 269,17 |
| 26 | 1203 | 6041 | 123 | 612 | 909,51 |
| 27 | 1211 | 12131 | 122 | 1214 | 1.752,11 |
| 28 | 5985 | 11918 | 620 | 1233 | 2.087,34 |
| 29 | 1176 | 1185 | 115 | 126 | 227,28 |
| 30 | 1202 | 5845 | 124 | 579 | 632,75 |
| 31 | 234 | 234 | 104 | 104 | 95,37 |
| 32 | 234 | 1170 | 106 | 512 | 287,68 |
| 33 | 234 | 2343 | 107 | 1030 | 528,96 |
| 34 | 1169 | 2338 | 529 | 1032 | 716,32 |
| 35 | 251 | 251 | 106 | 106 | 143,04 |
| 36 | 251 | 1256 | 108 | 506 | 431,51 |
| 37 | 252 | 2514 | 110 | 1031 | 793,36 |
| 38 | 1254 | 2509 | 538 | 1043 | 1.074,36 |
| 39 | 234 | 251 | 105 | 105 | 119,28 |
| 40 | 251 | 1170 | 109 | 514 | 311,06 |
| 41 | 443 | 444 | 110 | 110 | 125,96 |
| 42 | 445 | 2230 | 111 | 540 | 392,66 |
| 43 | 445 | 4473 | 111 | 1070 | 732,95 |
| 44 | 2216 | 4443 | 553 | 1086 | 954,20 |
| 45 | 465 | 465 | 114 | 114 | 188,89 |
| 46 | 467 | 2345 | 117 | 562 | 588,90 |
| 47 | 468 | 4709 | 116 | 1099 | 1.099,30 |
| 48 | 2325 | 4664 | 579 | 1129 | 1.431,12 |
| 49 | 443 | 466 | 110 | 113 | 158,03 |
| 50 | 466 | 2227 | 116 | 541 | 419,88 |
| 51 | 1164 | 1166 | 113 | 112 | 186,64 |
| 52 | 1167 | 5867 | 113 | 551 | 616,94 |
| 53 | 1166 | 11767 | 114 | 1100 | 1.179,15 |
| 54 | 5823 | 11679 | 584 | 1111 | 1.437,62 |
| 55 | 1197 | 1197 | 118 | 118 | 279,85 |
| 56 | 1196 | 6055 | 120 | 574 | 925,20 |
| 57 | 1201 | 12149 | 120 | 1149 | 1.768,39 |
| 58 | 5993 | 12009 | 585 | 1167 | 2.156,03 |
| 59 | 1164 | 1201 | 112 | 116 | 235,61 |
| 60 | 1198 | 5855 | 120 | 555 | 647,85 |

Πίνακας 2: Βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης και αναμενόμενη τιμή του κόστους για κάθε παράδειγμα

| A/A | S ₁ | S ₂ | r ₁ | r ₂ | E (C) |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| 61 | 258 | 258 | 103 | 104 | 137,15 |
| 62 | 258 | 1291 | 105 | 509 | 412,03 |
| 63 | 258 | 2582 | 108 | 1047 | 755,91 |
| 64 | 1292 | 2580 | 521 | 1038 | 1.029,15 |
| 65 | 287 | 287 | 105 | 106 | 205,72 |
| 66 | 288 | 1436 | 107 | 512 | 618,00 |
| 67 | 288 | 2872 | 108 | 996 | 1.133,69 |
| 68 | 1437 | 2871 | 531 | 1055 | 1.543,63 |
| 69 | 258 | 287 | 104 | 106 | 171,48 |
| 70 | 287 | 1291 | 107 | 512 | 446,18 |
| 71 | 478 | 479 | 109 | 109 | 188,50 |
| 72 | 480 | 2401 | 112 | 531 | 573,58 |
| 73 | 480 | 4813 | 113 | 1069 | 1.059,31 |
| 74 | 2394 | 4789 | 552 | 1074 | 1.418,94 |
| 75 | 517 | 518 | 114 | 113 | 282,69 |
| 76 | 520 | 2601 | 118 | 546 | 860,28 |
| 77 | 521 | 5216 | 119 | 1094 | 1.588,78 |
| 78 | 2591 | 5184 | 576 | 1112 | 2.128,22 |
| 79 | 478 | 518 | 110 | 112 | 235,98 |
| 80 | 519 | 2398 | 117 | 533 | 618,35 |
| 81 | 1215 | 1214 | 115 | 115 | 281,21 |
| 82 | 1224 | 6127 | 117 | 562 | 900,38 |
| 83 | 1228 | 12304 | 117 | 1117 | 1.702,75 |
| 84 | 6085 | 12175 | 583 | 1140 | 2.145,08 |
| 85 | 1273 | 1272 | 123 | 123 | 421,75 |
| 86 | 1286 | 6441 | 126 | 592 | 1.350,30 |
| 87 | 1292 | 12958 | 126 | 1186 | 2.553,74 |
| 88 | 6378 | 12765 | 625 | 1211 | 3.217,12 |
| 89 | 1215 | 1274 | 116 | 122 | 353,73 |
| 90 | 1281 | 6110 | 126 | 566 | 954,01 |
| 91 | 258 | 258 | 85 | 83 | 137,38 |
| 92 | 258 | 1291 | 84 | 380 | 412,47 |
| 93 | 258 | 2582 | 87 | 778 | 756,34 |
| 94 | 1292 | 2581 | 411 | 788 | 1.030,76 |
| 95 | 287 | 287 | 74 | 73 | 206,07 |
| 96 | 288 | 1437 | 81 | 319 | 618,66 |
| 97 | 288 | 2872 | 81 | 614 | 1.134,44 |
| 98 | 1438 | 2874 | 328 | 635 | 1.546,05 |
| 99 | 258 | 287 | 85 | 70 | 171,77 |
| 100 | 288 | 1291 | 78 | 383 | 446,77 |
| 101 | 481 | 482 | 95 | 94 | 193,13 |
| 102 | 482 | 2410 | 98 | 433 | 582,13 |
| 103 | 481 | 4823 | 98 | 810 | 1.069,29 |
| 104 | 2407 | 4818 | 480 | 914 | 1.450,54 |
| 105 | 522 | 522 | 92 | 92 | 289,64 |
| 106 | 522 | 2615 | 97 | 400 | 873,10 |
| 107 | 523 | 5235 | 99 | 799 | 1.603,64 |
| 108 | 2610 | 5226 | 470 | 870 | 2.175,61 |
| 109 | 481 | 523 | 96 | 89 | 241,57 |
| 110 | 522 | 2409 | 96 | 447 | 629,70 |
| 111 | 1223 | 1222 | 105 | 105 | 287,51 |
| 112 | 1228 | 6146 | 109 | 505 | 926,39 |
| 113 | 1230 | 12325 | 111 | 1006 | 1.730,63 |
| 114 | 6119 | 12240 | 536 | 1033 | 2.251,79 |
| 115 | 1284 | 1283 | 108 | 108 | 446,15 |
| 116 | 1292 | 6469 | 114 | 507 | 1.389,34 |
| 117 | 1296 | 12988 | 116 | 1006 | 2.595,54 |
| 118 | 6429 | 12859 | 555 | 1048 | 3.377,21 |
| 119 | 1223 | 1284 | 107 | 106 | 373,15 |
| 120 | 1289 | 6135 | 113 | 509 | 990,52 |

Πίνακας 2: Βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης και αναμενόμενη τιμή του κόστους για κάθε παράδειγμα

| A/A | E(OH ₁) | E(OH ₂) | E(X ₁₂) | E(X ₂₁) | E(BO ₁) | E(BO ₂) |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1 | 33,33 | 33,41 | 1,57 | 1,57 | 1,34 | 1,34 |
| 2 | 32,79 | 175,10 | 3,18 | 1,67 | 1,31 | 7,25 |
| 3 | 33,01 | 354,78 | 3,81 | 1,55 | 1,29 | 14,81 |
| 4 | 164,94 | 340,16 | 12,12 | 8,60 | 6,50 | 13,94 |
| 5 | 49,99 | 50,10 | 2,40 | 2,40 | 2,00 | 2,00 |
| 6 | 49,54 | 262,71 | 4,81 | 2,44 | 1,93 | 10,85 |
| 7 | 49,64 | 534,25 | 5,52 | 2,22 | 1,96 | 21,96 |
| 8 | 246,67 | 509,10 | 18,10 | 13,05 | 9,81 | 21,06 |
| 9 | 32,94 | 50,54 | 2,10 | 1,72 | 1,33 | 2,06 |
| 10 | 49,19 | 172,31 | 4,37 | 2,64 | 1,94 | 7,23 |
| 11 | 43,50 | 43,16 | 2,07 | 2,00 | 1,74 | 1,77 |
| 12 | 43,90 | 238,55 | 3,45 | 2,53 | 1,68 | 10,00 |
| 13 | 44,30 | 491,68 | 3,71 | 2,58 | 1,71 | 20,72 |
| 14 | 214,44 | 451,10 | 13,81 | 12,16 | 8,46 | 18,59 |
| 15 | 64,67 | 64,84 | 3,03 | 3,05 | 2,66 | 2,67 |
| 16 | 65,33 | 358,26 | 5,23 | 3,83 | 2,58 | 14,94 |
| 17 | 65,97 | 737,86 | 5,47 | 3,95 | 2,58 | 31,06 |
| 18 | 320,37 | 676,41 | 20,30 | 18,59 | 12,70 | 28,04 |
| 19 | 42,69 | 66,91 | 2,39 | 2,39 | 1,71 | 2,69 |
| 20 | 65,09 | 233,79 | 4,85 | 3,72 | 2,54 | 9,60 |
| 21 | 66,40 | 66,28 | 1,86 | 1,85 | 2,69 | 2,70 |
| 22 | 67,30 | 381,84 | 2,74 | 2,71 | 2,82 | 16,16 |
| 23 | 68,62 | 800,56 | 2,81 | 2,80 | 2,87 | 33,82 |
| 24 | 331,42 | 686,83 | 12,37 | 11,55 | 13,51 | 28,95 |
| 25 | 99,43 | 99,05 | 2,80 | 2,77 | 4,06 | 4,08 |
| 26 | 102,92 | 572,37 | 4,28 | 3,88 | 4,28 | 24,00 |
| 27 | 107,65 | 1.195,75 | 4,58 | 3,84 | 4,37 | 50,67 |
| 28 | 495,41 | 1.046,44 | 18,35 | 17,53 | 20,21 | 43,49 |
| 29 | 69,81 | 68,48 | 2,68 | 1,82 | 2,63 | 4,18 |
| 30 | 101,65 | 366,91 | 4,17 | 3,75 | 4,15 | 15,38 |
| 31 | 35,34 | 35,43 | 0,50 | 0,50 | 1,35 | 1,35 |
| 32 | 34,92 | 178,09 | 1,11 | 0,68 | 1,36 | 7,30 |
| 33 | 34,77 | 359,03 | 1,34 | 0,76 | 1,36 | 14,74 |
| 34 | 175,05 | 353,40 | 3,90 | 3,29 | 6,70 | 14,09 |
| 35 | 53,00 | 53,13 | 0,75 | 0,74 | 2,03 | 2,03 |
| 36 | 52,57 | 267,90 | 1,40 | 0,96 | 2,04 | 10,96 |
| 37 | 53,09 | 538,06 | 1,89 | 1,03 | 1,97 | 22,21 |
| 38 | 262,95 | 532,05 | 5,64 | 4,54 | 10,14 | 20,96 |
| 39 | 35,26 | 53,22 | 0,64 | 0,58 | 1,33 | 2,06 |
| 40 | 52,53 | 177,94 | 1,47 | 1,01 | 2,01 | 7,13 |
| 41 | 44,88 | 45,56 | 1,49 | 1,57 | 1,66 | 1,63 |
| 42 | 45,13 | 242,05 | 2,60 | 2,11 | 1,63 | 9,79 |
| 43 | 45,23 | 496,40 | 2,67 | 2,21 | 1,65 | 20,44 |
| 44 | 222,16 | 464,34 | 10,25 | 9,63 | 8,11 | 17,90 |
| 45 | 67,50 | 67,70 | 2,25 | 2,26 | 2,51 | 2,51 |
| 46 | 67,38 | 362,84 | 3,91 | 3,24 | 2,44 | 14,71 |
| 47 | 68,17 | 744,18 | 3,99 | 3,23 | 2,47 | 30,69 |
| 48 | 333,68 | 696,34 | 15,42 | 14,33 | 12,15 | 26,83 |
| 49 | 44,53 | 68,91 | 1,80 | 1,77 | 1,64 | 2,60 |
| 50 | 66,94 | 238,61 | 3,57 | 3,08 | 2,45 | 9,35 |
| 51 | 67,39 | 68,02 | 1,65 | 1,76 | 2,53 | 2,59 |
| 52 | 68,83 | 385,73 | 2,55 | 2,49 | 2,67 | 15,74 |
| 53 | 69,25 | 804,44 | 2,60 | 2,67 | 2,72 | 33,49 |
| 54 | 334,73 | 711,72 | 10,98 | 10,97 | 12,75 | 27,81 |
| 55 | 100,87 | 101,28 | 2,54 | 2,57 | 3,91 | 3,89 |
| 56 | 101,45 | 580,18 | 3,69 | 3,67 | 3,98 | 23,63 |
| 57 | 104,47 | 1.206,16 | 3,96 | 3,92 | 4,13 | 50,13 |
| 58 | 505,03 | 1.063,23 | 16,74 | 16,19 | 18,13 | 41,99 |
| 59 | 66,93 | 105,02 | 1,94 | 2,01 | 2,51 | 3,97 |
| 60 | 101,35 | 372,66 | 3,67 | 3,64 | 3,95 | 15,03 |

Πίνακας 3: Μέσες τιμές τελικού αποθέματος OH_i, πλευρικά μετακινούμενης ποσότητας X_{ij} και ελλείψεων αποθέματος BO_i στο τέλος της περιόδου

| A/A | E(OH ₁) | E(OH ₂) | E(X ₁₂) | E(X ₂₁) | E(BO ₁) | E(BO ₂) |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 61 | 58,19 | 58,27 | 0,02 | 0,02 | 0,20 | 0,20 |
| 62 | 58,16 | 292,38 | 0,06 | 0,02 | 0,20 | 1,00 |
| 63 | 58,10 | 584,78 | 0,12 | 0,04 | 0,20 | 2,00 |
| 64 | 292,82 | 582,80 | 0,20 | 0,10 | 0,96 | 1,99 |
| 65 | 87,27 | 87,40 | 0,03 | 0,03 | 0,30 | 0,30 |
| 66 | 87,24 | 438,05 | 0,08 | 0,04 | 0,30 | 1,51 |
| 67 | 88,21 | 876,10 | 0,09 | 0,03 | 0,28 | 3,05 |
| 68 | 438,22 | 875,10 | 0,28 | 0,15 | 1,46 | 2,98 |
| 69 | 58,18 | 87,41 | 0,03 | 0,02 | 0,20 | 0,30 |
| 70 | 87,24 | 292,38 | 0,07 | 0,03 | 0,30 | 0,99 |
| 71 | 78,25 | 79,33 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,22 |
| 72 | 79,65 | 403,60 | 0,50 | 0,32 | 0,22 | 1,26 |
| 73 | 79,48 | 817,91 | 0,62 | 0,38 | 0,23 | 2,61 |
| 74 | 393,83 | 794,09 | 1,69 | 1,30 | 1,09 | 2,34 |
| 75 | 117,38 | 118,47 | 0,32 | 0,34 | 0,34 | 0,34 |
| 76 | 119,46 | 604,84 | 0,76 | 0,48 | 0,33 | 1,90 |
| 77 | 120,15 | 1.223,37 | 0,92 | 0,53 | 0,34 | 3,99 |
| 78 | 590,56 | 1.191,61 | 2,54 | 1,91 | 1,65 | 3,49 |
| 79 | 78,12 | 118,65 | 0,28 | 0,25 | 0,22 | 0,34 |
| 80 | 118,66 | 400,63 | 0,65 | 0,44 | 0,33 | 1,22 |
| 81 | 115,05 | 114,83 | 0,54 | 0,54 | 0,30 | 0,30 |
| 82 | 121,65 | 633,75 | 0,93 | 0,69 | 0,32 | 1,83 |
| 83 | 125,25 | 1.315,80 | 0,98 | 0,69 | 0,34 | 4,22 |
| 84 | 579,78 | 1.188,73 | 3,82 | 3,25 | 1,46 | 3,24 |
| 85 | 173,09 | 173,13 | 0,81 | 0,81 | 0,43 | 0,43 |
| 86 | 182,57 | 950,82 | 1,39 | 1,03 | 0,47 | 2,90 |
| 87 | 187,71 | 1.973,48 | 1,50 | 1,05 | 0,52 | 6,32 |
| 88 | 670,06 | 1.785,09 | 5,72 | 4,87 | 2,17 | 4,83 |
| 89 | 114,56 | 175,67 | 0,67 | 0,62 | 0,29 | 0,46 |
| 90 | 178,27 | 616,99 | 1,32 | 1,03 | 0,45 | 1,78 |
| 91 | 58,20 | 58,28 | 0,00 | 0,00 | 0,21 | 0,21 |
| 92 | 58,20 | 292,38 | 0,00 | 0,00 | 0,21 | 1,03 |
| 93 | 58,20 | 584,76 | 0,00 | 0,00 | 0,21 | 2,06 |
| 94 | 292,96 | 583,78 | 0,00 | 0,00 | 1,00 | 2,08 |
| 95 | 87,29 | 87,41 | 0,00 | 0,00 | 0,31 | 0,31 |
| 96 | 88,27 | 439,03 | 0,00 | 0,00 | 0,29 | 1,53 |
| 97 | 88,27 | 876,10 | 0,00 | 0,00 | 0,29 | 3,11 |
| 98 | 439,41 | 878,06 | 0,00 | 0,00 | 1,50 | 3,07 |
| 99 | 58,20 | 87,41 | 0,00 | 0,00 | 0,21 | 0,31 |
| 100 | 88,27 | 292,38 | 0,00 | 0,00 | 0,29 | 1,03 |
| 101 | 81,26 | 82,38 | 0,05 | 0,06 | 0,25 | 0,25 |
| 102 | 82,15 | 412,22 | 0,10 | 0,08 | 0,24 | 1,37 |
| 103 | 81,25 | 827,38 | 0,08 | 0,09 | 0,25 | 2,82 |
| 104 | 407,95 | 822,36 | 0,40 | 0,33 | 1,24 | 2,58 |
| 105 | 122,33 | 122,61 | 0,09 | 0,08 | 0,38 | 0,38 |
| 106 | 122,25 | 618,25 | 0,15 | 0,13 | 0,37 | 2,05 |
| 107 | 123,15 | 1.241,53 | 0,21 | 0,15 | 0,37 | 4,13 |
| 108 | 611,37 | 1.232,43 | 0,60 | 0,49 | 1,87 | 3,89 |
| 109 | 81,23 | 123,60 | 0,07 | 0,07 | 0,25 | 0,38 |
| 110 | 122,23 | 411,23 | 0,15 | 0,12 | 0,37 | 1,34 |
| 111 | 123,04 | 122,80 | 0,30 | 0,29 | 0,28 | 0,28 |
| 112 | 128,47 | 651,82 | 0,60 | 0,43 | 0,30 | 1,84 |
| 113 | 128,35 | 1.335,55 | 0,67 | 0,49 | 0,31 | 4,10 |
| 114 | 615,98 | 1.251,84 | 2,23 | 1,83 | 1,39 | 3,05 |
| 115 | 184,07 | 184,11 | 0,45 | 0,45 | 0,42 | 0,42 |
| 116 | 189,74 | 977,49 | 0,89 | 0,65 | 0,44 | 2,77 |
| 117 | 193,34 | 2.003,82 | 1,00 | 0,72 | 0,46 | 6,14 |
| 118 | 923,45 | 1.876,37 | 3,35 | 2,75 | 2,08 | 4,60 |
| 119 | 122,66 | 185,53 | 0,39 | 0,35 | 0,27 | 0,44 |
| 120 | 187,20 | 640,93 | 0,80 | 0,61 | 0,42 | 1,69 |

Πίνακας 3: Μέσες τιμές τελικού αποθέματος OH_i, πλευρικά μετακινούμενης ποσότητας X_{ij} και ελλείψεων αποθέματος BO_i στο τέλος της περιόδου

ίσχυε σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα της Στατιστικής οποιαδήποτε άλλη στατιστική κατανομή κι αν ακολουθούσε η ζήτηση, για μεγάλο όμως χρόνο ικανοποίησης της παραγγελίας. Επομένως το μέγιστο απόθεμα ασφαλείας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$S = \mu_{L+1} + k_S \cdot \sigma_{L+1} = \mu^*(L+1) + k_S \cdot \sigma^* \sqrt{L+1}$$

όπου k_S είναι ο συντελεστής ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος. Συγκεκριμένα ο συντελεστής αυτός εκφράζει κατά πόσες τυπικές αποκλίσεις είναι προσαυξημένο το μέγιστο απόθεμα ως προς τη μέση τιμή της ζήτησης στη διάρκεια των $L+1$ περιόδων. Από το συντελεστή αυτόν μπορούμε να βρούμε ποια είναι η πιθανότητα η ζήτηση στη διάρκεια των $L+1$ περιόδων να είναι μικρότερη από το μέγιστο απόθεμα. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} P(D_{L+1} < S) &= P(D_{L+1} < \mu^*(L+1) + k_S \cdot \sigma^* \sqrt{L+1}) \\ &= P(D_{L+1} - \mu^*(L+1) < k_S \cdot \sigma^* \sqrt{L+1}) \\ &= P\left(\frac{D_{L+1} - \mu^*(L+1)}{\sigma^* \sqrt{L+1}} < k_S\right) = \Phi(k_S) \end{aligned}$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική πιθανότητα της κανονικής κατανομής.

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε τους συντελεστές ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές ασφαλείας για το απόθεμα ασφαλείας.

Το απόθεμα ασφαλείας διατηρείται για να απορροφά ένα μέρος από τη διακύμανση της ζήτησης κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Κατ' αντιστοιχία λοιπόν με το μέγιστο απόθεμα δίνεται από τον τύπο:

$$r = \mu + k_r \cdot \sigma$$

όπου k_r είναι ο συντελεστής ασφαλείας του αποθέματος ασφαλείας, ο οποίος εκφράζει κατά πόσες τυπικές αποκλίσεις είναι μεγαλύτερο το απόθεμα ασφαλείας σε σχέση με τη μέση τιμή της ζήτησης μιας περιόδου.

Από το συντελεστή αυτό μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα η ζήτηση μιας περιόδου να είναι μικρότερη από το απόθεμα ασφαλείας. Ακολουθώντας μία παρόμοια πορεία με αυτήν που ακολουθήσαμε για τους συντελεστές ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος έχουμε:

$$\begin{aligned} P(D_i < r) &= P(D_i < \mu + k_r \cdot \sigma) \\ &= P(D_i - \mu < k_r \cdot \sigma) = P\left(\frac{D_i - \mu}{\sigma} < k_r\right) \\ &= \Phi(k_r) \end{aligned}$$

Ο πίνακας 4 περιέχει τους συντελεστές ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος και του αποθέματος ασφαλείας για κάθε ένα από τα 120 παραδείγματα.

Ο πίνακας 5 περιέχει ένα άλλο σημαντικό στοιχείο του συστήματος που είναι ο βαθμός εξυπηρέτησης καθενός από τα 120 παραδείγματα. Ο βαθμός εξυπηρέτησης όπως προκύπτει και από την ονομασία του είναι ένα μέτρο για να αξιολογήσουμε το επίπεδο εξυπηρέτησης που παρέχει το σύστημα στους

| A/A | k _{S1} | k _{S2} | k _{r1} | k _{r2} |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 1,13 | 1,13 | 0,85 | 0,85 |
| 2 | 1,17 | 1,17 | 0,80 | 0,85 |
| 3 | 1,20 | 1,19 | 0,80 | 0,89 |
| 4 | 1,14 | 1,14 | 0,84 | 0,86 |
| 5 | 1,13 | 1,13 | 0,87 | 0,87 |
| 6 | 1,18 | 1,17 | 0,80 | 0,85 |
| 7 | 1,20 | 1,20 | 0,77 | 0,86 |
| 8 | 1,14 | 1,14 | 0,84 | 0,86 |
| 9 | 1,13 | 1,13 | 0,85 | 0,87 |
| 10 | 1,15 | 1,15 | 0,83 | 0,86 |
| 11 | 1,05 | 1,02 | 0,85 | 0,85 |
| 12 | 1,12 | 1,12 | 0,80 | 0,80 |
| 13 | 1,15 | 1,16 | 0,80 | 0,81 |
| 14 | 1,05 | 1,06 | 0,83 | 0,82 |
| 15 | 1,03 | 1,03 | 0,83 | 0,83 |
| 16 | 1,12 | 1,13 | 0,80 | 0,83 |
| 17 | 1,13 | 1,17 | 0,80 | 0,81 |
| 18 | 1,04 | 1,07 | 0,83 | 0,81 |
| 19 | 1,02 | 1,07 | 0,85 | 0,83 |
| 20 | 1,10 | 1,10 | 0,80 | 0,82 |
| 21 | 0,96 | 0,95 | 0,80 | 0,80 |
| 22 | 0,98 | 1,09 | 0,80 | 0,73 |
| 23 | 0,99 | 1,15 | 0,80 | 0,70 |
| 24 | 0,98 | 0,99 | 0,79 | 0,78 |
| 25 | 0,96 | 0,94 | 0,80 | 0,80 |
| 26 | 1,03 | 1,09 | 0,77 | 0,75 |
| 27 | 1,11 | 1,14 | 0,73 | 0,71 |
| 28 | 0,97 | 0,99 | 0,80 | 0,78 |
| 29 | 1,14 | 0,85 | 0,75 | 0,87 |
| 30 | 1,02 | 1,04 | 0,80 | 0,79 |
| 31 | 1,20 | 1,20 | 0,20 | 0,20 |
| 32 | 1,20 | 1,20 | 0,30 | 0,12 |
| 33 | 1,20 | 1,21 | 0,35 | 0,15 |
| 34 | 1,19 | 1,19 | 0,29 | 0,16 |
| 35 | 1,20 | 1,20 | 0,20 | 0,20 |
| 36 | 1,20 | 1,20 | 0,27 | 0,04 |
| 37 | 1,22 | 1,21 | 0,33 | 0,10 |
| 38 | 1,20 | 1,20 | 0,25 | 0,14 |
| 39 | 1,20 | 1,20 | 0,25 | 0,17 |
| 40 | 1,20 | 1,20 | 0,30 | 0,14 |
| 41 | 1,07 | 1,10 | 0,50 | 0,50 |
| 42 | 1,12 | 1,15 | 0,55 | 0,40 |
| 43 | 1,12 | 1,18 | 0,55 | 0,35 |
| 44 | 1,08 | 1,10 | 0,53 | 0,43 |
| 45 | 1,08 | 1,08 | 0,47 | 0,47 |
| 46 | 1,12 | 1,15 | 0,57 | 0,41 |
| 47 | 1,13 | 1,18 | 0,53 | 0,33 |
| 48 | 1,08 | 1,10 | 0,53 | 0,43 |
| 49 | 1,07 | 1,10 | 0,50 | 0,43 |
| 50 | 1,10 | 1,13 | 0,53 | 0,41 |
| 51 | 0,96 | 0,99 | 0,65 | 0,60 |
| 52 | 1,01 | 1,10 | 0,65 | 0,51 |
| 53 | 0,99 | 1,16 | 0,70 | 0,50 |
| 54 | 0,97 | 1,02 | 0,64 | 0,55 |
| 55 | 0,97 | 0,97 | 0,60 | 0,60 |
| 56 | 0,96 | 1,11 | 0,67 | 0,49 |
| 57 | 1,01 | 1,15 | 0,67 | 0,50 |
| 58 | 0,99 | 1,01 | 0,63 | 0,58 |
| 59 | 0,96 | 1,01 | 0,60 | 0,53 |
| 60 | 0,98 | 1,07 | 0,67 | 0,55 |

Πίνακας 4: Συντελεστές ασφαλείας μέγιστου αποθέματος και αποθέματος ασφαλείας κάθε θέσης

| A/A | k _{s1} | k _{s2} | k _{r1} | k _{r2} |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 61 | 2,05 | 2,05 | 0,15 | 0,20 |
| 62 | 2,05 | 2,06 | 0,25 | 0,09 |
| 63 | 2,05 | 2,06 | 0,40 | 0,23 |
| 64 | 2,06 | 2,05 | 0,21 | 0,19 |
| 65 | 2,05 | 2,05 | 0,17 | 0,20 |
| 66 | 2,07 | 2,05 | 0,23 | 0,08 |
| 67 | 2,07 | 2,05 | 0,27 | -0,01 |
| 68 | 2,06 | 2,05 | 0,21 | 0,18 |
| 69 | 2,05 | 2,05 | 0,20 | 0,20 |
| 70 | 2,05 | 2,06 | 0,23 | 0,12 |
| 71 | 1,95 | 1,97 | 0,45 | 0,45 |
| 72 | 2,00 | 2,00 | 0,60 | 0,31 |
| 73 | 2,00 | 2,03 | 0,65 | 0,34 |
| 74 | 1,97 | 1,97 | 0,52 | 0,37 |
| 75 | 1,95 | 1,97 | 0,47 | 0,43 |
| 76 | 2,00 | 2,00 | 0,60 | 0,31 |
| 77 | 2,02 | 2,03 | 0,63 | 0,31 |
| 78 | 1,97 | 1,97 | 0,51 | 0,37 |
| 79 | 1,95 | 1,97 | 0,50 | 0,40 |
| 80 | 1,98 | 1,99 | 0,57 | 0,33 |
| 81 | 1,73 | 1,72 | 0,75 | 0,75 |
| 82 | 1,87 | 1,89 | 0,85 | 0,62 |
| 83 | 1,93 | 1,96 | 0,85 | 0,58 |
| 84 | 1,76 | 1,77 | 0,83 | 0,70 |
| 85 | 1,74 | 1,73 | 0,77 | 0,77 |
| 86 | 1,87 | 1,89 | 0,87 | 0,61 |
| 87 | 1,93 | 1,96 | 0,87 | 0,62 |
| 88 | 1,76 | 1,77 | 0,83 | 0,70 |
| 89 | 1,73 | 1,75 | 0,80 | 0,73 |
| 90 | 1,82 | 1,84 | 0,87 | 0,66 |
| 91 | 2,05 | 2,05 | -0,75 | -0,85 |
| 92 | 2,05 | 2,06 | -0,80 | -1,20 |
| 93 | 2,05 | 2,06 | -0,65 | -1,11 |
| 94 | 2,06 | 2,05 | -0,89 | -1,06 |
| 95 | 2,05 | 2,05 | -0,87 | -0,90 |
| 96 | 2,07 | 2,06 | -0,63 | -1,20 |
| 97 | 2,07 | 2,05 | -0,63 | -1,29 |
| 98 | 2,06 | 2,06 | -1,15 | -1,22 |
| 99 | 2,05 | 2,05 | -0,75 | -1,00 |
| 100 | 2,07 | 2,06 | -0,73 | -1,17 |
| 101 | 2,02 | 2,05 | -0,25 | -0,30 |
| 102 | 2,05 | 2,05 | -0,10 | -0,67 |
| 103 | 2,02 | 2,06 | -0,10 | -0,95 |
| 104 | 2,03 | 2,04 | -0,20 | -0,43 |
| 105 | 2,03 | 2,03 | -0,27 | -0,27 |
| 106 | 2,03 | 2,04 | -0,10 | -0,67 |
| 107 | 2,05 | 2,06 | -0,03 | -0,67 |
| 108 | 2,03 | 2,04 | -0,20 | -0,43 |
| 109 | 2,02 | 2,05 | -0,20 | -0,37 |
| 110 | 2,03 | 2,04 | -0,13 | -0,53 |
| 111 | 1,85 | 1,84 | 0,25 | 0,25 |
| 112 | 1,93 | 1,95 | 0,45 | 0,05 |
| 113 | 1,96 | 2,00 | 0,55 | 0,03 |
| 114 | 1,87 | 1,87 | 0,36 | 0,16 |
| 115 | 1,85 | 1,84 | 0,27 | 0,27 |
| 116 | 1,93 | 1,95 | 0,47 | 0,05 |
| 117 | 1,97 | 2,00 | 0,53 | 0,02 |
| 118 | 1,87 | 1,87 | 0,37 | 0,16 |
| 119 | 1,85 | 1,85 | 0,35 | 0,20 |
| 120 | 1,90 | 1,91 | 0,43 | 0,09 |

Πίνακας 4: Συντελεστές ασφαλείας μέγιστου αποθέματος και αποθέματος ασφαλείας κάθε θέσης

| A/A | BE ₁ | BE ₂ | BE |
|-----|-----------------|-----------------|--------|
| 1 | 98,66% | 98,66% | 98,66% |
| 2 | 98,69% | 98,55% | 98,57% |
| 3 | 98,71% | 98,52% | 98,54% |
| 4 | 98,70% | 98,61% | 98,64% |
| 5 | 98,00% | 98,00% | 98,00% |
| 6 | 98,07% | 97,83% | 97,87% |
| 7 | 98,04% | 97,80% | 97,83% |
| 8 | 98,04% | 97,89% | 97,94% |
| 9 | 98,67% | 97,94% | 98,31% |
| 10 | 98,06% | 98,55% | 98,47% |
| 11 | 98,26% | 98,23% | 98,25% |
| 12 | 98,32% | 98,00% | 98,05% |
| 13 | 98,29% | 97,93% | 97,96% |
| 14 | 98,31% | 98,14% | 98,20% |
| 15 | 97,34% | 97,33% | 97,34% |
| 16 | 97,42% | 97,01% | 97,08% |
| 17 | 97,42% | 96,89% | 96,94% |
| 18 | 97,46% | 97,20% | 97,28% |
| 19 | 98,29% | 97,31% | 97,80% |
| 20 | 97,46% | 98,08% | 97,98% |
| 21 | 97,31% | 97,30% | 97,31% |
| 22 | 97,18% | 96,77% | 96,84% |
| 23 | 97,13% | 96,62% | 96,66% |
| 24 | 97,30% | 97,11% | 97,17% |
| 25 | 95,94% | 95,92% | 95,93% |
| 26 | 95,74% | 95,20% | 95,29% |
| 27 | 95,63% | 94,93% | 95,00% |
| 28 | 95,96% | 95,65% | 95,75% |
| 29 | 97,37% | 95,82% | 96,60% |
| 30 | 95,85% | 96,92% | 96,75% |
| 31 | 98,65% | 98,65% | 98,65% |
| 32 | 98,64% | 98,54% | 98,56% |
| 33 | 98,64% | 98,53% | 98,54% |
| 34 | 98,66% | 98,59% | 98,61% |
| 35 | 97,97% | 97,97% | 97,97% |
| 36 | 97,96% | 97,81% | 97,83% |
| 37 | 98,03% | 97,78% | 97,80% |
| 38 | 97,97% | 97,90% | 97,93% |
| 39 | 98,67% | 97,94% | 98,31% |
| 40 | 97,99% | 98,57% | 98,48% |
| 41 | 98,34% | 98,37% | 98,36% |
| 42 | 98,37% | 98,04% | 98,10% |
| 43 | 98,35% | 97,96% | 97,99% |
| 44 | 98,38% | 98,21% | 98,27% |
| 45 | 97,49% | 97,49% | 97,49% |
| 46 | 97,56% | 97,06% | 97,14% |
| 47 | 97,53% | 96,93% | 96,99% |
| 48 | 97,57% | 97,32% | 97,40% |
| 49 | 98,36% | 97,40% | 97,88% |
| 50 | 97,55% | 98,13% | 98,03% |
| 51 | 97,47% | 97,41% | 97,44% |
| 52 | 97,33% | 96,85% | 96,93% |
| 53 | 97,28% | 96,65% | 96,71% |
| 54 | 97,45% | 97,21% | 97,29% |
| 55 | 96,09% | 96,11% | 96,10% |
| 56 | 96,02% | 95,27% | 95,40% |
| 57 | 95,87% | 94,99% | 95,07% |
| 58 | 96,17% | 95,80% | 95,93% |
| 59 | 97,49% | 96,03% | 96,76% |
| 60 | 96,05% | 96,99% | 96,84% |

Πίνακας 5: Βαθμοί εξυπηρέτησης των δύο θέσεων και του συστήματος συνολικά

| A/A | BE ₁ | BE ₂ | BE |
|-----|-----------------|-----------------|--------|
| 61 | 99,80% | 99,80% | 99,80% |
| 62 | 99,80% | 99,80% | 99,80% |
| 63 | 99,80% | 99,80% | 99,80% |
| 64 | 99,81% | 99,80% | 99,80% |
| 65 | 99,70% | 99,70% | 99,70% |
| 66 | 99,70% | 99,70% | 99,70% |
| 67 | 99,72% | 99,70% | 99,70% |
| 68 | 99,71% | 99,70% | 99,70% |
| 69 | 99,80% | 99,70% | 99,75% |
| 70 | 99,70% | 99,80% | 99,79% |
| 71 | 99,77% | 99,78% | 99,78% |
| 72 | 99,78% | 99,75% | 99,75% |
| 73 | 99,77% | 99,74% | 99,74% |
| 74 | 99,78% | 99,77% | 99,77% |
| 75 | 99,66% | 99,66% | 99,66% |
| 76 | 99,67% | 99,62% | 99,63% |
| 77 | 99,66% | 99,60% | 99,61% |
| 78 | 99,67% | 99,65% | 99,66% |
| 79 | 99,78% | 99,66% | 99,72% |
| 80 | 99,67% | 99,76% | 99,74% |
| 81 | 99,70% | 99,70% | 99,70% |
| 82 | 99,68% | 99,61% | 99,63% |
| 83 | 99,66% | 99,58% | 99,59% |
| 84 | 99,71% | 99,68% | 99,69% |
| 85 | 99,57% | 99,57% | 99,57% |
| 86 | 99,53% | 99,42% | 99,44% |
| 87 | 99,48% | 99,37% | 99,38% |
| 88 | 99,57% | 99,52% | 99,53% |
| 89 | 99,71% | 99,54% | 99,63% |
| 90 | 99,55% | 99,64% | 99,63% |
| 91 | 99,79% | 99,79% | 99,79% |
| 92 | 99,79% | 99,79% | 99,79% |
| 93 | 99,79% | 99,79% | 99,79% |
| 94 | 99,80% | 99,79% | 99,79% |
| 95 | 99,69% | 99,69% | 99,69% |
| 96 | 99,71% | 99,69% | 99,70% |
| 97 | 99,71% | 99,69% | 99,69% |
| 98 | 99,70% | 99,69% | 99,70% |
| 99 | 99,79% | 99,69% | 99,74% |
| 100 | 99,71% | 99,79% | 99,78% |
| 101 | 99,75% | 99,75% | 99,75% |
| 102 | 99,76% | 99,73% | 99,73% |
| 103 | 99,75% | 99,72% | 99,72% |
| 104 | 99,75% | 99,74% | 99,75% |
| 105 | 99,62% | 99,62% | 99,62% |
| 106 | 99,63% | 99,59% | 99,60% |
| 107 | 99,63% | 99,59% | 99,59% |
| 108 | 99,63% | 99,61% | 99,62% |
| 109 | 99,75% | 99,62% | 99,69% |
| 110 | 99,63% | 99,73% | 99,72% |
| 111 | 99,72% | 99,72% | 99,72% |
| 112 | 99,70% | 99,63% | 99,64% |
| 113 | 99,69% | 99,59% | 99,60% |
| 114 | 99,72% | 99,70% | 99,70% |
| 115 | 99,58% | 99,58% | 99,58% |
| 116 | 99,56% | 99,45% | 99,47% |
| 117 | 99,54% | 99,39% | 99,40% |
| 118 | 99,58% | 99,54% | 99,55% |
| 119 | 99,73% | 99,56% | 99,65% |
| 120 | 99,58% | 99,66% | 99,65% |

Πίνακας 5: Βαθμοί εξυπηρέτησης των δύο θέσεων και του συστήματος συνολικά

πελάτες του. Συγκεκριμένα ο βαθμός εξυπηρέτησης δίνεται από τη σχέση $BE = 1 - (\Sigma_{BO}/\Sigma_D)$ όπου Σ_{BO} είναι η συνολική ζήτηση που δεν ικανοποιείται άμεσα και μεταφέρεται σε επόμενη περίοδο, ενώ Σ_D είναι η συνολική ζήτηση που αντιμετωπίζει το σύστημα. Όπως φαίνεται καθαρά από τον παραπάνω τύπο, καθώς αυξάνονται οι ελλείψεις του συστήματος, μειώνεται και ο βαθμός εξυπηρέτησής του.

Στις δύο πρώτες στήλες του πίνακα 5 παρουσιάζονται οι βαθμοί εξυπηρέτησης κάθε θέσης του συστήματος χωριστά που υπολογίζονται από τη σχέση, $BE_i = 1 - E(BO_i)/\mu_i$ ενώ στην τελευταία στήλη του πίνακα φαίνεται ο βαθμός εξυπηρέτησης του συνολικού συστήματος για κάθε παράδειγμα που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$BE = 1 - [\sum_{i=1}^2 E(BO_i) / \sum_{i=1}^2 (\mu_i)]$$

Τέλος στον πίνακα 6 φαίνεται το ποσοστό με το οποίο συμμετέχει το κάθε ένα από τα τρία στοιχεία κόστους στο συνολικό κόστος του συστήματος για κάθε παράδειγμα.

| A/A | Κόστος διατήρησης αποθέματος | Κόστος πλευρικής μεταφοράς | Κόστος έλλειψης αποθέματος | A/A | Κόστος διατήρησης αποθέματος | Κόστος πλευρικής μεταφοράς | Κόστος έλλειψης αποθέματος |
|-----|------------------------------|----------------------------|----------------------------|-----|------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | 73,11% | 3,44% | 23,49% | 61 | 84,91% | 0,58% | 14,58% |
| 2 | 73,94% | 1,72% | 24,36% | 62 | 85,08% | 0,39% | 14,56% |
| 3 | 74,29% | 1,03% | 24,67% | 63 | 85,05% | 0,42% | 14,55% |
| 4 | 73,27% | 3,01% | 23,72% | 64 | 85,08% | 0,58% | 14,33% |
| 5 | 73,10% | 3,51% | 23,37% | 65 | 84,91% | 0,58% | 14,58% |
| 6 | 74,05% | 1,72% | 24,24% | 66 | 85,00% | 0,39% | 14,64% |
| 7 | 74,58% | 0,99% | 24,44% | 67 | 85,06% | 0,21% | 14,69% |
| 8 | 73,10% | 3,01% | 23,89% | 68 | 85,08% | 0,56% | 14,38% |
| 9 | 72,98% | 3,34% | 23,71% | 69 | 84,90% | 0,58% | 14,58% |
| 10 | 73,37% | 2,32% | 24,30% | 70 | 85,08% | 0,45% | 14,46% |
| 11 | 72,92% | 3,42% | 23,63% | 71 | 83,60% | 4,56% | 11,94% |
| 12 | 73,96% | 1,57% | 24,47% | 72 | 84,25% | 2,86% | 12,90% |
| 13 | 74,27% | 0,87% | 24,86% | 73 | 84,71% | 1,89% | 13,40% |
| 14 | 73,31% | 2,86% | 23,84% | 74 | 83,72% | 4,21% | 12,09% |
| 15 | 72,66% | 3,41% | 23,92% | 75 | 83,43% | 4,67% | 12,03% |
| 16 | 73,96% | 1,58% | 24,47% | 76 | 84,19% | 2,88% | 12,96% |
| 17 | 74,27% | 0,87% | 24,86% | 77 | 84,56% | 1,83% | 13,63% |
| 18 | 73,20% | 2,86% | 23,94% | 78 | 83,74% | 4,18% | 12,08% |
| 19 | 73,29% | 3,20% | 23,54% | 79 | 83,38% | 4,49% | 11,87% |
| 20 | 73,88% | 2,12% | 24,01% | 80 | 83,98% | 3,53% | 12,53% |
| 21 | 73,91% | 2,07% | 24,02% | 81 | 81,75% | 7,68% | 10,67% |
| 22 | 74,06% | 0,90% | 25,04% | 82 | 83,90% | 3,60% | 12,49% |
| 23 | 74,40% | 0,48% | 25,12% | 83 | 84,63% | 1,96% | 13,39% |
| 24 | 73,87% | 1,72% | 24,40% | 84 | 82,44% | 6,59% | 10,96% |
| 25 | 73,74% | 2,07% | 24,19% | 85 | 82,09% | 7,68% | 10,20% |
| 26 | 74,25% | 0,90% | 24,86% | 86 | 83,94% | 3,58% | 12,48% |
| 27 | 74,39% | 0,48% | 25,13% | 87 | 84,63% | 2,00% | 13,39% |
| 28 | 73,87% | 1,72% | 24,41% | 88 | 82,53% | 6,58% | 10,88% |
| 29 | 74,05% | 1,98% | 23,97% | 89 | 82,05% | 7,29% | 10,60% |
| 30 | 74,05% | 1,25% | 24,69% | 90 | 83,36% | 4,93% | 11,69% |
| 31 | 74,21% | 3,15% | 22,65% | 91 | 84,79% | 0,00% | 15,29% |
| 32 | 74,04% | 1,87% | 24,08% | 92 | 85,00% | 0,00% | 15,03% |
| 33 | 74,45% | 1,19% | 24,35% | 93 | 85,01% | 0,00% | 15,01% |
| 34 | 73,77% | 3,01% | 23,22% | 94 | 85,06% | 0,00% | 14,94% |
| 35 | 74,20% | 3,13% | 22,71% | 95 | 84,78% | 0,00% | 15,04% |
| 36 | 74,27% | 1,64% | 24,10% | 96 | 85,23% | 0,00% | 14,71% |
| 37 | 74,51% | 1,10% | 24,38% | 97 | 85,01% | 0,00% | 14,99% |
| 38 | 74,00% | 2,84% | 23,16% | 98 | 85,22% | 0,00% | 14,78% |
| 39 | 74,18% | 3,07% | 22,74% | 99 | 84,77% | 0,00% | 15,14% |
| 40 | 74,09% | 2,39% | 23,51% | 100 | 85,20% | 0,00% | 14,77% |
| 41 | 71,80% | 7,29% | 20,90% | 101 | 84,73% | 2,28% | 12,94% |
| 42 | 73,14% | 3,60% | 23,27% | 102 | 84,92% | 1,24% | 13,83% |
| 43 | 73,90% | 2,00% | 24,11% | 103 | 84,98% | 0,64% | 14,36% |
| 44 | 71,95% | 6,25% | 21,81% | 104 | 84,82% | 2,01% | 13,17% |
| 45 | 71,58% | 7,16% | 21,26% | 105 | 84,57% | 2,35% | 13,12% |
| 46 | 73,05% | 3,64% | 23,30% | 106 | 84,81% | 1,28% | 13,86% |
| 47 | 73,90% | 1,97% | 24,13% | 107 | 85,10% | 0,90% | 14,03% |
| 48 | 71,97% | 6,24% | 21,79% | 108 | 84,75% | 2,00% | 13,24% |
| 49 | 71,78% | 6,78% | 21,46% | 109 | 84,79% | 2,32% | 13,04% |
| 50 | 72,77% | 4,75% | 22,48% | 110 | 84,72% | 1,72% | 13,58% |
| 51 | 72,55% | 5,48% | 21,95% | 111 | 82,63% | 7,93% | 9,41% |
| 52 | 73,68% | 2,45% | 23,87% | 112 | 84,01% | 4,45% | 11,55% |
| 53 | 74,09% | 1,34% | 24,57% | 113 | 84,59% | 2,68% | 12,74% |
| 54 | 72,79% | 4,58% | 22,63% | 114 | 82,92% | 7,21% | 9,86% |
| 55 | 72,24% | 5,48% | 22,30% | 115 | 82,52% | 8,07% | 9,41% |
| 56 | 73,67% | 2,45% | 23,87% | 116 | 84,01% | 4,43% | 11,55% |
| 57 | 74,11% | 1,34% | 24,55% | 117 | 84,64% | 2,65% | 12,71% |
| 58 | 72,74% | 4,58% | 22,68% | 118 | 82,90% | 7,22% | 9,89% |
| 59 | 72,98% | 5,03% | 22,00% | 119 | 82,59% | 7,93% | 9,51% |
| 60 | 73,17% | 3,39% | 23,44% | 120 | 83,61% | 5,69% | 10,65% |

Πίνακας 6: Ποσοστά κατανομή του κόστους στα τρία επιμέρους στοιχεία του

4.3 Σύγκριση και σχολιασμός αποτελεσμάτων

I) Βέλτιστες λύσεις και μέσο κόστος

Από την προσεκτική μελέτη του πίνακα 2 μπορούν να εξαχθούν αρκετά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του συστήματος, άλλα περισσότερο και άλλα λιγότερο προφανή.

Πρώτα απ' όλα βλέπουμε ότι όταν αυξάνεται η τυπική απόκλιση της ζήτησης μιας θέσης, τότε αυξάνεται και το μέγιστο απόθεμα που διατηρεί αυτή η θέση και το συνολικό κόστος του συστήματος. Μάλιστα όπως φαίνεται από τη σύγκριση ενός πλήθους παραδειγμάτων (όπως τα παραδείγματα 1-5, 2-6 ή 3-7) μία αύξηση κατά 50% στις τυπικές αποκλίσεις των ζητήσεων των δύο θέσεων επιφέρει αύξηση κατά 50% στο συνολικό κόστος του συστήματος. Κατά όμοιο τρόπο κάθε φορά που τα χαρακτηριστικά των ζητήσεων των δύο θέσεων αλλάζουν από $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 20, 100, 20)$ σε $(100, 20, 100, 30)$ όπως π.χ. στα παραδείγματα 1-9, 11-19, 21-29 κτλ. παρατηρείται μία αύξηση στο κόστος κατά 25%, ενώ όταν έχουμε μετάβαση από $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 30, 500, 100)$ σε $(100, 30, 500, 150)$ όπως π.χ. στα παραδείγματα 10-6, 20-16, 30-26 κτλ. η αύξηση αυτή είναι γύρω στο 40%. Η συμπεριφορά αυτή είναι απολύτως φυσιολογική επειδή με την αύξηση της τυπικής απόκλισης αυξάνεται η αβεβαιότητα (επομένως και το κόστος) του συστήματος το οποίο αντιδρά διατηρώντας μεγαλύτερο απόθεμα σε κάθε θέση, αντίδραση που παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα λόγω του χαμηλού κόστους διατήρησης του αποθέματος.

Εκτός από το κόστος του συστήματος και το μέγιστο απόθεμα, η μεταβολή της τυπικής απόκλισης φαίνεται σε κάποιες περιπτώσεις να επηρεάζει και το απόθεμα ασφαλείας. Έτσι στην ομάδα των πρώτων 30 παραδειγμάτων παρατηρείται και μία αντίστοιχη τάση αύξησης του αποθέματος ασφαλείας, πράγμα που συμβαίνει επειδή το κόστος πλευρικής διακίνησης είναι ίσο με το κόστος διατήρησης και πολύ μικρότερο από το κόστος έλλειψης, κάτι που κάνει τη συνεργασία εξίσου προσιτή με τη διατήρηση υψηλού αποθέματος για την αντιμετώπιση έκτακτων αναγκών. Σημειώνεται εδώ ότι η αύξηση του αποθέματος ασφαλείας διευκολύνει την πλευρική μεταφορά, αφού όσο μικρότερο ποσοστό του μέγιστου αποθέματος αποτελεί το απόθεμα ασφαλείας τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα συνεργασίας των δύο θέσεων επειδή είναι πιο σπάνιο να βρεθεί μία θέση σε κατάσταση ανάγκης. Η συμπεριφορά αυτή είναι λιγότερη έντονη στα παραδείγματα 31-60 όπου το κόστος πλευρικής διακίνησης είναι 3 και ανύπαρκτη στα παραδείγματα 61-120 όπου το κόστος αυτό είναι 20, δηλαδή εξαιρετικά υψηλό.

Επίσης όπως προκύπτει από τη μελέτη των αποτελεσμάτων, ένα άλλο γεγονός που προκαλεί αύξηση στο συνολικό κόστος του συστήματος είναι και η αύξηση του χρόνου ικανοποίησης των παραγγελιών. Μία μεταβολή του χρόνου ικανοποίησης των παραγγελιών από μία σε τρεις περιόδους επιφέρει αύξηση στο συνολικό κόστος γύρω στο 30-40%. Στην περίπτωση που το L αυξηθεί από τη μία στις δέκα περιόδους τότε σε πολλές περιπτώσεις το κόστος υπερδιπλασιάζεται. Αυτό είναι λίγο ως πολύ αναμενόμενο καθώς μ' αυτόν τον τρόπο το σύστημα καλείται να πάρει αποφάσεις που αφορούν

μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα και εμπεριέχουν επομένως μεγαλύτερο κίνδυνο. Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η παρέμβαση στους χρόνους παραγγελίας ενός συστήματος είναι σαφώς πιο εφικτή από την παρέμβαση στην τυπική απόκλιση της ζήτησης (η οποία άλλωστε οφείλεται σε εξωτερικούς παράγοντες) και επομένως καλό θα είναι όπου αυτό είναι δυνατό να γίνεται προσπάθεια για την ελάττωση αυτού του χρόνου.

Μία άλλη πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι καθώς αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών L_i , αυξάνεται το απόθεμα ασφαλείας κάθε θέσης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι στην περίπτωση μεγάλου L_i γίνεται πιο καθοριστικός ο ρόλος της πλευρικής συνεργασίας επειδή παρουσιάζει μεγάλη ταχύτητα σε σχέση με την άφιξη μιας παραγγελίας από την κεντρική αποθήκη. Η συμπεριφορά αυτή δεν παρατηρείται μόνο στα 30 πρώτα παραδείγματα στα οποία το κόστος πλευρικής διακίνησης είναι ίσο με το κόστος διατήρησης του αποθέματος και επομένως το σύστημα επιλέγει εναλλακτικά τη διατήρηση υψηλού αποθέματος.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων που παίρνουμε για τα διάφορα παραδείγματα οδηγεί επίσης στο συμπέρασμα ότι η αύξηση στο κόστος πλευρικής μεταφοράς και η αύξηση στο κόστος έλλειψης διατηρώντας σταθερό το κόστος διατήρησης αποθέματος έχουν σημαντική επίδραση στις μεταβλητές απόφασης του συστήματος. Συγκεκριμένα όταν αυξάνεται το κόστος πλευρικής διακίνησης παρατηρείται μείωση στο απόθεμα ασφαλείας κάθε θέσης. Μ' αυτόν τον τρόπο φυσικά επιλέγεται δυσκολότερα η πλευρική συνεργασία (που άλλωστε έχει γίνει λιγότερο ελκυστική). Από την άλλη μεριά, αύξηση του κόστους έλλειψης σε σχέση με το κόστος διατήρησης,

συνεπάγεται αύξηση του μέγιστου αποθέματος που διατηρεί μία θέση διότι είναι πιο οικονομικό να διατηρεί μεγαλύτερο απόθεμα έτσι ώστε να ελαττώσει τη συχνότητα των ελλείψεων.

Τέλος εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξέταση της απόδοσης που έχει το σύστημα όταν μεταβαίνει από μία συμμετρική σε μία μη συμμετρική μορφή. Θεωρούμε το παράδειγμα 1. Επειδή και οι δύο θέσεις έχουν ακριβώς τις ίδιες τιμές σε όλες τις παραμέτρους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το συνολικό κόστος μπορεί να κατανεμηθεί εξίσου στις δύο θέσεις. Έτσι κάθε θέση επιβαρύνεται με κόστος $91,29 / 2 = 45,645$. Με την ίδια ακριβώς λογική κάθε μία από τις δύο θέσεις του παραδείγματος 5 επιβαρύνεται με κόστος $136,93/2 = 68,465$. Το παράδειγμα 9 αποτελείται από δύο θέσεις από τις οποίες η πρώτη είναι ίδια με καθεμιά από τις θέσεις του παραδείγματος 1 και η άλλη είναι ίδια με καθεμιά από τις θέσεις του παραδείγματος 5. Το συνολικό κόστος για το παράδειγμα 9 είναι 114,39 ενώ αν προσθέσουμε το κόστος κάθε θέσης χωριστά έχουμε $45,645 + 68,465 = 114,11$. Η διαφορά ανάμεσα σε αυτές τις δύο τιμές είναι μόλις 0,24%. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και σε άλλα αντίστοιχα παραδείγματα και συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ύπαρξη ή όχι συμμετρίας ως προς την τυπική απόκλιση της ζήτησης έχει αμελητέα επίδραση στο κόστος του συστήματος.

Σχετικά με τη μέση τιμή των ζητήσεων των δύο θέσεων θα πρέπει να σημειώσουμε και μία άλλη συμπεριφορά η οποία παρόλο που δεν παρατηρείται σε όλα ανεξαιρέτως τα αντίστοιχα παραδείγματα, φαίνεται να επικρατεί στη συντριπτική πλειοψηφία τους. Συγκεκριμένα βλέπουμε ότι όταν ο συντελεστής διασποράς σ/μ είναι ο ίδιος και στις δύο θέσεις, η βέλτιστη

τιμή του μέγιστου αποθέματος της θέσης με μέση τιμή 1000 είναι χαμηλότερη όταν η θέση αυτή συνεργάζεται με τη θέση με μέση τιμή 500 παρά όταν συνεργάζεται με τη θέση με μέση τιμή 100. Αυτό φαίνεται στα παραδείγματα 3-4, 7-8, 13-14, 17-18 και σε πολλά αντίστοιχά τους. Για να εξηγήσουμε το φαινόμενο αυτό θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι όταν η πρώτη θέση έχει μέση τιμή 100, τότε η δεύτερη θέση νιώθει λιγότερο ασφαλής λόγω της διαφοράς ανάμεσα στις δύο μέσες τιμές που έχει ως συνέπεια η δεύτερη θέση να μη μπορεί να βασιστεί αρκετά στην πρώτη για την αντιμετώπιση έκτακτων αναγκών μέσω της πλευρική μεταφοράς.

II) Μέσες τιμές των $E(OH_i)$, $E(X_{ij})$ και $E(BO_i)$

Από τον πίνακα 3 βγαίνουν κάποια πολύ χρήσιμα συμπεράσματα, μερικά από τα οποία επιβεβαιώνουν και τα στοιχεία για τη συμπεριφορά του συστήματος που βγήκαν από τον πίνακα 2.

Φαίνεται καθαρά για παράδειγμα ότι όταν αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας μιας θέσης τότε αυξάνονται και η μέση τιμή του αποθέματος που διατηρεί αυτή η θέση και η μέση τιμή του αποθέματος που δεν ικανοποιείται και η μέση τιμή του αποθέματος που μετακινείται πλευρικά, ως συνέπεια της μεγαλύτερης δυσκολίας που έχει το σύστημα να αντιδράσει σε εξωτερικές μεταβολές. Η συμπεριφορά αυτή δεν παρατηρείται για τις μονάδες που μεταφέρονται πλευρικά στα 30 πρώτα παραδείγματα, όπου το κόστος διατήρησης είναι ίσο με το κόστος πλευρικής μεταφοράς και το σύστημα επιλέγει εναλλακτικά είτε τη διατήρηση μεγαλύτερου αποθέματος, είτε την πραγματοποίηση πλευρικών συνεργασιών. Έτσι παρατηρούμε ότι σ'

αυτά τα παραδείγματα, αύξηση του χρόνου ικανοποίησης των παραγγελιών από μία σε τρεις περιόδους επιφέρει στην πλειοψηφία των περιπτώσεων αύξηση των $E(X_{12})$ και $E(X_{21})$, όμως όταν ο χρόνος αυτός ανεβαίνει από τις τρεις στις δέκα περιόδους τότε τα μεγέθη αυτά ελαττώνονται επειδή προφανώς είναι πιο συμφέρον για το σύστημα να διατηρεί αισθητά υψηλότερο απόθεμα.

Επίσης όπως ήταν αναμενόμενο, αύξηση στο κόστος πλευρικής μεταφοράς προκαλεί μείωση στο μέσο απόθεμα που διακινείται μεταξύ των θέσεων και παράλληλη αύξηση στο μέσο απόθεμα που διατηρείται, επειδή το αντίστοιχο κόστος παραμένει σταθερό. Το γεγονός αυτό δε φαίνεται να έχει σημαντική επίδραση στο μέσο απόθεμα που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από κάθε θέση στο τέλος μιας περιόδου.

Μια άλλη παρατήρηση η οποία δεν προκαλεί έκπληξη, είναι ότι όταν αυξάνεται η τυπική απόκλιση των ζητήσεων των δύο θέσεων, αυξάνονται οι μέσες τιμές του αποθέματος που διατηρείται, του αποθέματος που λείπει και του αποθέματος που διακινείται πλευρικά, ως συνέπεια της μεγαλύτερης αβεβαιότητας που επιβαρύνει το σύστημα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η διαφορά στα κυρίαρχα μεγέθη του συστήματος που προκύπτει όταν αλλάζουν οι χαρακτηριστικές τιμές της ζήτησης σε μία από τις δύο θέσεις. Βλέπουμε από τη σύγκριση διαφόρων παραδειγμάτων όπως για παράδειγμα τα 1,2 και 3 ή τα 5,6 και 7 ότι όταν αυξάνεται η μέση τιμή της ζήτησης της δεύτερης θέσης χωρίς να μεταβάλλεται ο συντελεστής διασποράς σ/μ , τότε υπάρχει μια τάση να αυξάνεται η μέση τιμή του αποθέματος που μεταφέρεται από την πρώτη θέση

στη δεύτερη. Αυτό συμβαίνει επειδή η απόλυτη τιμή του αποθέματος που ζητάει η δεύτερη θέση όταν έρθει σε κατάσταση ανάγκης είναι μεγαλύτερη από ότι πριν.

Η αύξηση στην τυπική απόκλιση της δεύτερης θέσης διατηρουμένων σταθερών όλων των άλλων μεγεθών έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη πιθανότητα να έρθει αυτή η θέση σε κατάσταση ανάγκης, κάτι που επιφέρει αύξηση και των τριών μέσων τιμών $E(X_{12})$, $E(OH_2)$ και $E(BO_2)$. Παράλληλα όμως παρατηρείται και μία αύξηση στο μέσο απόθεμα με το οποίο η θέση αυτή τροφοδοτεί την άλλη θέση.

Η εξέταση των στοιχείων που αφορούν τη θέση με μέση τιμή 1000 επιβεβαιώνει την υπόθεση που κάναμε παρατηρώντας τον πίνακα με τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών απόφασης των παραδειγμάτων. Έτσι φαίνεται καθαρά ότι η θέση αυτή διατηρεί κατά μέσο όρο λιγότερο απόθεμα και παρουσιάζει κατά μέσο όρο λιγότερες ελλείψεις όταν συνεργάζεται με τη θέση με μέση τιμή 500, παρά όταν συνεργάζεται με τη θέση με μέση τιμή 100. Κατά όμοιο τρόπο η θέση με μέση τιμή 500 εμφανίζει μικρότερες τιμές για τα $E(OH)$ και $E(BO)$ όταν συνεργάζεται με τη θέση με μέση τιμή 1000 παρά όταν συνεργάζεται με τη θέση με μέση τιμή 100. Έχει λοιπόν σημασία όταν συνεργάζονται δύο θέσεις, με διαφορετικές μέσες τιμές της ζήτησης το πόσο μεγάλη είναι η διαφορά ανάμεσα σ' αυτές τις μέσες τιμές, γιατί η θέση με τη μεγάλη ζήτηση προσαρμόζει τη συμπεριφορά της με βάση τη μέση τιμή της ζήτησης στην άλλη θέση.

III) Συντελεστές ασφαλείας

Στον πίνακα 4 φαίνεται μια σαφής τάση μείωσης του k_s , καθώς αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών. Αυτό συμβαίνει επειδή με την αύξηση του L η πλευρική συνεργασία παίζει σπουδαιότερο ρόλο για την εξομάλυνση εξωτερικών διαταράξεων κι έτσι δεν είναι απαραίτητο να παραγγέλνεται και να διατηρείται τόσο υψηλό απόθεμα σε σχέση με την αντίστοιχη κατανομή της ζήτησης. Η αντίδραση αυτή βέβαια δε λύνει εξ' ολοκλήρου το πρόβλημα με αποτέλεσμα να αυξάνεται η πιθανότητα να μην έχουμε άμεση ικανοποίηση της ζήτησης.

Δραστική επίδραση στους συντελεστές ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος φαίνεται να έχει το κόστος έλλειψης το οποίο όταν αυξάνεται, προκαλεί αύξηση και στα k_s . Αυτό συμβαίνει γιατί με τη διατήρηση υψηλότερου αποθέματος μειώνεται η πιθανότητα έλλειψης η οποία επιβαρύνει σημαντικά το κόστος του συστήματος.

Η μεταβολή του κόστους πλευρικής μεταφοράς δε φαίνεται να έχει σημαντική επίδραση, ενώ όπως προκύπτει από την εξέταση της συντριπτικής πλειοψηφίας των παραδειγμάτων το σύστημα τείνει να διατηρεί τους ίδιους συντελεστές ασφαλείας μέγιστου αποθέματος και στις δύο θέσεις ανεξάρτητα από τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ζήτησής τους, πράγμα που μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι οι δύο θέσεις έχουν μεταξύ τους τα ίδια στοιχεία κόστους σε όλα τα παραδείγματα.

Ενώ η μεταβολή στην τυπική απόκλιση μιας θέσης δε φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά τους συντελεστές ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος, αντίθετα παρατηρούμε ότι αν ξεκινώντας από ένα σύστημα με όμοιες θέσεις

αυξήσουμε τη μέση τιμή της δεύτερης θέσης, διατηρώντας το συντελεστή διασποράς σ/μ ίδιο και για τις δύο θέσεις, αυξάνονται παράλληλα σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις οι αντίστοιχοι συντελεστές ασφαλείας του μέγιστου αποθέματος. Μ' αυτόν τον τρόπο η κάθε θέση τείνει να γίνει πιο αυτόνομη διατηρώντας υψηλότερο απόθεμα επειδή όπως έχουμε ήδη εξηγήσει νιώθει μεγαλύτερη ανασφάλεια.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα 4, όταν αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών τότε παρατηρείται μία αντίστοιχη αύξηση στους συντελεστές ασφαλείας του αποθέματος ασφαλείας, επειδή γίνεται ελκυστική η πλευρική συνεργασία η πραγματοποίηση της οποίας γίνεται πιο εύκολα όταν το απόθεμα ασφαλείας είναι υψηλό. Εξαίρεση αποτελούν τα τριάντα πρώτα παραδείγματα όπου το κόστος διατήρησης είναι ίσο με το κόστος πλευρικής μεταφοράς και επομένως η συνεργασία δεν έχει τόσο πρωταγωνιστικό ρόλο.

Για παραπλήσιους λόγους τα k_f μειώνονται όταν αυξάνεται το κόστος της συνεργασίας δηλαδή όταν η συνεργασία γίνεται πιο ασύμφορη.

IV) Βαθμοί εξυπηρέτησης

Όπως είπαμε ο βαθμός εξυπηρέτησης του συστήματος είναι αντιστρόφως ανάλογος των ελλείψεων που παρατηρούνται σε κάθε θέση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε και από τον πίνακα 5 η αύξηση στο κόστος έλλειψης να συνοδεύεται και από αντίστοιχη αύξηση του βαθμού εξυπηρέτησης καθώς σε αυτήν την περίπτωση το

σύστημα προσανατολίζεται προς την ελαχιστοποίηση της συχνότητας των ελλείψεων.

Επίσης ο βαθμός εξυπηρέτησης του συστήματος μειώνεται καθώς αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών, επειδή με αυτόν τον τρόπο όπως έχουμε ήδη εξηγήσει μειώνεται η ικανότητα του συστήματος να αντιμετωπίσει εξωτερικές μεταβολές και αυξάνεται η συχνότητα των ελλείψεων.

Για ευνόητους λόγους ο βαθμός εξυπηρέτησης του συστήματος μειώνεται και όταν αυξάνεται η τυπική απόκλιση της ζήτησης σε μία έστω από τις δύο θέσεις, λόγω της μεγαλύτερης αβεβαιότητας που προστίθεται στο σύστημα που έχει ως συνέπεια την αύξηση της πιθανότητας με την οποία παρουσιάζονται ελλείψεις στις δύο θέσεις.

Από τον πίνακα 5 επιβεβαιώνεται για μία ακόμα φορά ότι η διαφοροποίηση της ζήτησης της δεύτερης θέσης ως προς την πρώτη δυσχεραίνει τη λειτουργία του συστήματος. Για παράδειγμα καθώς περνάμε διαδοχικά από τα παραδείγματα 1-2-3 ή 5-6-7 μειώνεται ο συνολικός βαθμός εξυπηρέτησης του συστήματος.

Τέλος όλοι οι βαθμοί εξυπηρέτησης του συστήματος κυμαίνονται από 95% (παράδειγμα 27) έως 99,8% (παράδειγμα 61).

V) Κατανομή του κόστους

Όσον αφορά τον πίνακα 6 βλέπουμε ότι το κόστος διατήρησης του αποθέματος αποτελεί σε κάθε περίπτωση το κυρίαρχο στοιχείο κόστους καθώς κυμαίνεται σε όλα τα παραδείγματα από 71,58% μέχρι 85,23%.

Συγκρίνοντας τα παραδείγματα 1-60 με τα παραδείγματα 61-120 παρατηρούμε μία σημαντική αύξηση του ποσοστού του κόστους αυτού καθώς αυξάνονται αισθητά τα άλλα δύο στοιχεία κόστους, δηλαδή το κόστος έλλειψης και το κόστος πλευρικής διακίνησης και μία ανάλογη μείωση του ποσοστού του κόστους έλλειψης. Από την άλλη μεριά το ποσοστό που οφείλεται στο κόστος πλευρικής μετακίνησης στα ίδια παραδείγματα δεν παρουσιάζει ομοιόμορφη συμπεριφορά καθώς για άλλες τιμές του χρόνου ικανοποίησης των παραγγελιών αυξάνεται, ενώ για άλλες μειώνεται.

Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι το ποσοστό του συνολικού κόστους που οφείλεται στο κόστος διατήρησης του αποθέματος και στο κόστος έλλειψης παρουσιάζουν μία σταθερότητα σε αντίθεση με το αντίστοιχο ποσοστό του κόστους πλευρικής διακίνησης που εμφανίζει μεγάλες διακυμάνσεις ακόμα και σε παραδείγματα στα οποία τα τρία στοιχεία κόστους και ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών παραμένουν σταθερά σαν απόλυτη τιμή.

Τέλος αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στα παραδείγματα 61-120 καθώς αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών, αυξάνεται το ποσοστό συμμετοχής του κόστους πλευρικής διακίνησης στο συνολικό κόστος, ενώ παράλληλα μειώνεται το αντίστοιχο ποσοστό για το κόστος έλλειψης.

4.4 Στατιστική ανάλυση και ακρίβεια αποτελεσμάτων

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο τα αποτελέσματα που παίρνουμε από την εκτέλεση των 120 παραδειγμάτων λαμβάνονται υπό τη μορφή διαστημάτων εμπιστοσύνης. Οι πίνακες 7,8,9 και 10 περιέχουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης του κόστους, του τελικού αποθέματος, του αποθέματος που διακινείται πλευρικά και των ελλείψεων αποθέματος αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτών, τα όρια αυτά είναι ικανοποιητικά στενά. Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε όμως ότι ειδικά όσον αφορά το κόστος η συνάρτησή του σε σχέση με τις μεταβλητές (r,S) κάθε θέσης στην περιοχή της βέλτιστης λύσης είναι πολύ επίπεδη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα παρόλο που τα όρια εμπιστοσύνης είναι στενά, να υπάρχουν εντός των ορίων αυτών κι άλλες λύσεις και να μην είμαστε σε θέση να πούμε με βεβαιότητα ποια ακριβώς είναι η βέλτιστη. Για να λυνόταν αυτό το πρόβλημα θα έπρεπε να εκτελεστεί κάθε παράδειγμα για ένα πολύ μεγαλύτερο αριθμό προσομοιωτικών επαναλήψεων επειδή όπως φαίνεται και από τις σχέσεις για τα όρια εμπιστοσύνης, τα όρια αυτά στενεύουν καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει.

Αυτό όμως είναι αδύνατο επειδή απαιτεί τεράστιο υπολογιστικό χρόνο, ο οποίος βέβαια είναι περιορισμένος. Παρόλα αυτά υπάρχει ένας λόγος για τον οποίον το παραπάνω πρόβλημα ελάχιστα έως καθόλου επηρεάζει τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας. Ο λόγος αυτός είναι ότι τα όρια εμπιστοσύνης που παίρνουμε είναι πολύ ικανοποιητικά αν συλλογιστούμε ότι το σύστημα που εξετάζουμε είναι μία απλούστευση της πραγματικότητας με

| Α/Α | Ε(€) | | | Α/Α | Ε(€) | | |
|-----|-----------|-----------|----------|-----|-----------|-----------|----------|
| | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 91,14 | 91,29 | 91,44 | 61 | 136,82 | 137,15 | 137,48 |
| 2 | 280,61 | 281,16 | 281,71 | 62 | 410,81 | 412,03 | 413,25 |
| 3 | 520,91 | 522,00 | 523,09 | 63 | 753,47 | 755,91 | 758,35 |
| 4 | 688,18 | 689,33 | 690,48 | 64 | 1.026,49 | 1.029,15 | 1.031,81 |
| 5 | 136,71 | 136,93 | 137,15 | 65 | 205,21 | 205,72 | 206,23 |
| 6 | 420,89 | 421,70 | 422,51 | 66 | 616,15 | 618,00 | 619,85 |
| 7 | 781,31 | 782,93 | 784,55 | 67 | 1.130,00 | 1.133,69 | 1.137,38 |
| 8 | 1.032,15 | 1.033,89 | 1.035,63 | 68 | 1.539,65 | 1.543,63 | 1.547,61 |
| 9 | 114,20 | 114,39 | 114,58 | 69 | 171,05 | 171,48 | 171,91 |
| 10 | 301,33 | 301,88 | 302,43 | 70 | 444,93 | 446,18 | 447,43 |
| 11 | 118,59 | 118,85 | 119,11 | 71 | 187,99 | 188,50 | 189,01 |
| 12 | 380,86 | 381,89 | 382,92 | 72 | 571,57 | 573,58 | 575,59 |
| 13 | 719,60 | 721,67 | 723,74 | 73 | 1.055,21 | 1.059,31 | 1.063,41 |
| 14 | 905,79 | 907,88 | 909,97 | 74 | 1.414,84 | 1.418,94 | 1.423,04 |
| 15 | 177,84 | 178,23 | 178,62 | 75 | 281,92 | 282,69 | 283,46 |
| 16 | 571,22 | 572,75 | 574,28 | 76 | 857,26 | 860,28 | 863,30 |
| 17 | 1.079,28 | 1.082,38 | 1.085,48 | 77 | 1.582,58 | 1.588,78 | 1.594,98 |
| 18 | 1.358,48 | 1.361,63 | 1.364,78 | 78 | 2.122,08 | 2.128,22 | 2.134,36 |
| 19 | 149,22 | 149,55 | 149,88 | 79 | 235,33 | 235,98 | 236,63 |
| 20 | 403,53 | 404,55 | 405,57 | 80 | 616,37 | 618,35 | 620,33 |
| 21 | 178,78 | 179,52 | 180,26 | 81 | 279,95 | 281,21 | 282,47 |
| 22 | 603,55 | 606,47 | 609,39 | 82 | 894,84 | 900,38 | 905,92 |
| 23 | 1.162,41 | 1.168,29 | 1.174,17 | 83 | 1.691,33 | 1.702,75 | 1.714,17 |
| 24 | 1.385,89 | 1.391,88 | 1.397,87 | 84 | 2.134,31 | 2.145,08 | 2.155,85 |
| 25 | 268,05 | 269,17 | 270,29 | 85 | 419,91 | 421,75 | 423,59 |
| 26 | 905,15 | 909,51 | 913,87 | 86 | 1.342,01 | 1.360,30 | 1.358,59 |
| 27 | 1.743,29 | 1.752,11 | 1.760,93 | 87 | 2.536,63 | 2.553,74 | 2.570,85 |
| 28 | 2.078,33 | 2.087,34 | 2.096,35 | 88 | 3.201,03 | 3.217,12 | 3.233,21 |
| 29 | 226,33 | 227,28 | 228,23 | 89 | 352,07 | 353,73 | 355,39 |
| 30 | 629,84 | 632,75 | 635,66 | 90 | 948,60 | 954,01 | 959,42 |
| 31 | 95,22 | 95,37 | 95,52 | 91 | 137,03 | 137,38 | 137,73 |
| 32 | 287,13 | 287,68 | 288,23 | 92 | 411,22 | 412,47 | 413,72 |
| 33 | 527,87 | 528,96 | 530,05 | 93 | 753,87 | 756,34 | 758,81 |
| 34 | 715,13 | 716,32 | 717,51 | 94 | 1.028,04 | 1.030,76 | 1.033,48 |
| 35 | 142,81 | 143,04 | 143,27 | 95 | 205,55 | 206,07 | 206,59 |
| 36 | 430,68 | 431,51 | 432,34 | 96 | 616,79 | 618,66 | 620,53 |
| 37 | 791,72 | 793,36 | 795,00 | 97 | 1.130,72 | 1.134,44 | 1.138,16 |
| 38 | 1.072,57 | 1.074,36 | 1.076,15 | 98 | 1.541,99 | 1.546,05 | 1.550,11 |
| 39 | 119,09 | 119,28 | 119,47 | 99 | 171,33 | 171,77 | 172,21 |
| 40 | 310,50 | 311,06 | 311,62 | 100 | 445,50 | 446,77 | 448,04 |
| 41 | 125,70 | 125,96 | 126,22 | 101 | 192,55 | 193,13 | 193,71 |
| 42 | 391,66 | 392,66 | 393,66 | 102 | 579,96 | 582,13 | 584,30 |
| 43 | 730,91 | 732,95 | 734,99 | 103 | 1.064,96 | 1.069,29 | 1.073,62 |
| 44 | 952,14 | 954,20 | 956,26 | 104 | 1.445,94 | 1.450,54 | 1.455,14 |
| 45 | 188,50 | 188,89 | 189,28 | 105 | 288,77 | 289,64 | 290,51 |
| 46 | 587,39 | 588,90 | 590,41 | 106 | 869,85 | 873,10 | 876,35 |
| 47 | 1.096,24 | 1.099,30 | 1.102,36 | 107 | 1.597,20 | 1.603,64 | 1.610,08 |
| 48 | 1.428,03 | 1.431,12 | 1.434,21 | 108 | 2.168,70 | 2.175,61 | 2.182,52 |
| 49 | 157,70 | 158,03 | 158,36 | 109 | 240,83 | 241,57 | 242,31 |
| 50 | 418,88 | 419,88 | 420,88 | 110 | 627,50 | 629,70 | 631,90 |
| 51 | 185,93 | 186,64 | 187,35 | 111 | 296,32 | 297,51 | 298,70 |
| 52 | 614,08 | 616,94 | 619,80 | 112 | 921,00 | 926,39 | 931,78 |
| 53 | 1.173,31 | 1.179,15 | 1.184,99 | 113 | 1.719,36 | 1.730,63 | 1.741,90 |
| 54 | 1.431,82 | 1.437,62 | 1.443,42 | 114 | 2.241,44 | 2.251,79 | 2.262,14 |
| 55 | 278,77 | 279,85 | 280,93 | 115 | 444,35 | 446,15 | 447,95 |
| 56 | 920,90 | 925,20 | 929,50 | 116 | 1.381,26 | 1.389,34 | 1.397,42 |
| 57 | 1.759,65 | 1.768,39 | 1.777,13 | 117 | 2.578,67 | 2.595,54 | 2.612,41 |
| 58 | 2.147,32 | 2.156,03 | 2.164,74 | 118 | 3.361,68 | 3.377,21 | 3.392,74 |
| 59 | 234,70 | 235,61 | 236,52 | 119 | 371,55 | 373,15 | 374,75 |
| 60 | 644,99 | 647,85 | 650,71 | 120 | 985,30 | 990,52 | 995,74 |

Πίνακας 7: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης του κόστους για κάθε παράδειγμα

| A/A | E(OH ₁) | | | A/A | E(OH ₁) | | |
|-----|----------------------|-----------|----------|-----|----------------------|-----------|----------|
| | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 33,25 | 33,33 | 33,41 | 61 | 58,10 | 58,19 | 58,28 |
| 2 | 32,71 | 32,79 | 32,87 | 62 | 58,07 | 58,16 | 58,25 |
| 3 | 32,93 | 33,01 | 33,09 | 63 | 58,01 | 58,10 | 58,19 |
| 4 | 164,56 | 164,94 | 165,32 | 64 | 292,37 | 292,82 | 293,27 |
| 5 | 49,88 | 49,99 | 50,10 | 65 | 87,13 | 87,27 | 87,41 |
| 6 | 49,43 | 49,54 | 49,65 | 66 | 87,11 | 87,24 | 87,37 |
| 7 | 49,53 | 49,64 | 49,75 | 67 | 88,08 | 88,21 | 88,34 |
| 8 | 246,11 | 246,67 | 247,23 | 68 | 437,54 | 438,22 | 438,90 |
| 9 | 32,87 | 32,94 | 33,01 | 69 | 58,09 | 58,18 | 58,27 |
| 10 | 49,08 | 49,19 | 49,30 | 70 | 87,10 | 87,24 | 87,38 |
| 11 | 43,36 | 43,50 | 43,64 | 71 | 78,08 | 78,25 | 78,42 |
| 12 | 43,76 | 43,90 | 44,04 | 72 | 79,48 | 79,65 | 79,82 |
| 13 | 44,16 | 44,30 | 44,44 | 73 | 79,31 | 79,48 | 79,65 |
| 14 | 213,74 | 214,44 | 215,14 | 74 | 392,96 | 393,83 | 394,70 |
| 15 | 64,45 | 64,67 | 64,89 | 75 | 117,12 | 117,38 | 117,64 |
| 16 | 65,12 | 65,33 | 65,54 | 76 | 119,20 | 119,46 | 119,72 |
| 17 | 65,76 | 65,97 | 66,18 | 77 | 119,89 | 120,15 | 120,41 |
| 18 | 319,33 | 320,37 | 321,41 | 78 | 589,25 | 590,56 | 591,87 |
| 19 | 42,55 | 42,69 | 42,83 | 79 | 77,95 | 78,12 | 78,29 |
| 20 | 64,87 | 65,09 | 65,31 | 80 | 118,40 | 118,66 | 118,92 |
| 21 | 66,04 | 66,40 | 66,76 | 81 | 114,61 | 115,05 | 115,49 |
| 22 | 66,97 | 67,30 | 67,63 | 82 | 121,20 | 121,65 | 122,10 |
| 23 | 68,29 | 68,62 | 68,95 | 83 | 124,80 | 125,25 | 125,70 |
| 24 | 329,68 | 331,42 | 333,16 | 84 | 577,56 | 579,76 | 581,96 |
| 25 | 98,88 | 99,43 | 99,98 | 85 | 172,43 | 173,08 | 173,75 |
| 26 | 102,41 | 102,92 | 103,43 | 86 | 181,90 | 182,57 | 183,24 |
| 27 | 107,12 | 107,65 | 108,18 | 87 | 187,03 | 187,71 | 188,39 |
| 28 | 492,81 | 495,41 | 498,01 | 88 | 866,77 | 870,06 | 873,35 |
| 29 | 69,43 | 69,81 | 70,19 | 89 | 114,12 | 114,56 | 115,00 |
| 30 | 101,13 | 101,65 | 102,17 | 90 | 177,61 | 178,27 | 178,93 |
| 31 | 35,26 | 35,34 | 35,42 | 91 | 58,11 | 58,20 | 58,29 |
| 32 | 34,84 | 34,92 | 35,00 | 92 | 58,11 | 58,20 | 58,29 |
| 33 | 34,69 | 34,77 | 34,85 | 93 | 58,11 | 58,20 | 58,29 |
| 34 | 174,65 | 175,05 | 175,45 | 94 | 292,51 | 292,96 | 293,41 |
| 35 | 52,88 | 53,00 | 53,12 | 95 | 87,15 | 87,29 | 87,43 |
| 36 | 52,45 | 52,57 | 52,69 | 96 | 88,13 | 88,27 | 88,41 |
| 37 | 52,97 | 53,09 | 53,21 | 97 | 88,13 | 88,27 | 88,41 |
| 38 | 262,35 | 262,95 | 263,55 | 98 | 438,74 | 439,41 | 440,08 |
| 39 | 35,18 | 35,26 | 35,34 | 99 | 58,11 | 58,20 | 58,29 |
| 40 | 52,41 | 52,53 | 52,65 | 100 | 88,13 | 88,27 | 88,41 |
| 41 | 44,74 | 44,88 | 45,02 | 101 | 81,08 | 81,26 | 81,44 |
| 42 | 44,99 | 45,13 | 45,27 | 102 | 81,97 | 82,15 | 82,33 |
| 43 | 45,08 | 45,23 | 45,38 | 103 | 81,07 | 81,25 | 81,43 |
| 44 | 221,43 | 222,16 | 222,89 | 104 | 407,06 | 407,95 | 408,84 |
| 45 | 67,28 | 67,50 | 67,72 | 105 | 122,06 | 122,33 | 122,60 |
| 46 | 67,16 | 67,38 | 67,60 | 106 | 121,98 | 122,25 | 122,52 |
| 47 | 67,96 | 68,17 | 68,38 | 107 | 122,88 | 123,15 | 123,42 |
| 48 | 332,60 | 333,68 | 334,76 | 108 | 610,04 | 611,37 | 612,70 |
| 49 | 44,39 | 44,53 | 44,67 | 109 | 81,05 | 81,23 | 81,41 |
| 50 | 66,73 | 66,94 | 67,15 | 110 | 121,97 | 122,23 | 122,49 |
| 51 | 67,03 | 67,39 | 67,75 | 111 | 122,58 | 123,04 | 123,50 |
| 52 | 68,49 | 68,83 | 69,17 | 112 | 126,01 | 126,47 | 126,93 |
| 53 | 68,91 | 69,25 | 69,59 | 113 | 127,89 | 128,35 | 128,81 |
| 54 | 332,98 | 334,73 | 336,48 | 114 | 613,10 | 615,39 | 617,68 |
| 55 | 100,32 | 100,87 | 101,42 | 115 | 183,38 | 184,07 | 184,76 |
| 56 | 100,94 | 101,45 | 101,96 | 116 | 189,06 | 189,74 | 190,42 |
| 57 | 103,96 | 104,47 | 104,98 | 117 | 192,65 | 193,34 | 194,03 |
| 58 | 502,38 | 505,03 | 507,68 | 118 | 920,01 | 923,45 | 926,89 |
| 59 | 66,57 | 66,93 | 67,29 | 119 | 122,20 | 122,66 | 123,12 |
| 60 | 100,84 | 101,35 | 101,86 | 120 | 186,51 | 187,20 | 187,89 |

Πίνακας 8: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης του τελικού αποθέματος OH₁ κάθε θέσης

| | | E(OH ₂) | | | | E(OH ₂) | |
|-----|-----------|---------------------|----------|-----|-----------|---------------------|----------|
| A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 33,34 | 33,41 | 33,48 | 61 | 58,18 | 58,27 | 58,36 |
| 2 | 174,69 | 175,10 | 175,51 | 62 | 291,92 | 292,38 | 292,84 |
| 3 | 353,96 | 354,78 | 355,60 | 63 | 583,87 | 584,78 | 585,69 |
| 4 | 339,37 | 340,16 | 340,95 | 64 | 581,90 | 582,80 | 583,70 |
| 5 | 49,99 | 50,10 | 50,21 | 65 | 87,26 | 87,40 | 87,54 |
| 6 | 262,11 | 262,71 | 263,31 | 66 | 437,37 | 438,05 | 438,73 |
| 7 | 533,03 | 534,25 | 535,47 | 67 | 874,74 | 876,10 | 877,46 |
| 8 | 507,92 | 509,10 | 510,28 | 68 | 873,73 | 875,10 | 876,47 |
| 9 | 50,42 | 50,54 | 50,66 | 69 | 87,28 | 87,41 | 87,54 |
| 10 | 171,91 | 172,31 | 172,71 | 70 | 291,93 | 292,38 | 292,83 |
| 11 | 43,02 | 43,16 | 43,30 | 71 | 79,15 | 79,33 | 79,51 |
| 12 | 237,77 | 238,55 | 239,33 | 72 | 402,71 | 403,60 | 404,49 |
| 13 | 490,08 | 491,68 | 493,28 | 73 | 816,11 | 817,91 | 819,71 |
| 14 | 449,62 | 451,10 | 452,58 | 74 | 792,32 | 794,09 | 795,86 |
| 15 | 64,63 | 64,84 | 65,05 | 75 | 118,20 | 118,47 | 118,74 |
| 16 | 357,09 | 358,26 | 359,43 | 76 | 603,50 | 604,84 | 606,18 |
| 17 | 735,45 | 737,86 | 740,27 | 77 | 1.220,68 | 1.223,37 | 1.226,06 |
| 18 | 674,18 | 676,41 | 678,64 | 78 | 1.188,95 | 1.191,61 | 1.194,27 |
| 19 | 66,69 | 66,91 | 67,13 | 79 | 118,38 | 118,65 | 118,92 |
| 20 | 233,03 | 233,79 | 234,55 | 80 | 399,74 | 400,63 | 401,52 |
| 21 | 65,92 | 66,28 | 66,64 | 81 | 114,38 | 114,83 | 115,28 |
| 22 | 379,74 | 381,84 | 383,94 | 82 | 631,38 | 633,75 | 636,12 |
| 23 | 796,26 | 800,58 | 804,86 | 83 | 1.311,00 | 1.315,80 | 1.320,60 |
| 24 | 692,92 | 696,83 | 700,74 | 84 | 1.184,15 | 1.188,73 | 1.193,31 |
| 25 | 98,50 | 99,05 | 99,60 | 85 | 172,46 | 173,13 | 173,80 |
| 26 | 569,24 | 572,37 | 575,50 | 86 | 947,27 | 950,82 | 954,37 |
| 27 | 1.189,32 | 1.195,75 | 1.202,18 | 87 | 1.966,29 | 1.973,48 | 1.980,67 |
| 28 | 1.040,58 | 1.046,44 | 1.052,30 | 88 | 1.778,23 | 1.785,09 | 1.791,95 |
| 29 | 97,93 | 98,48 | 99,03 | 89 | 174,99 | 175,67 | 176,35 |
| 30 | 364,87 | 368,91 | 368,95 | 90 | 614,66 | 618,99 | 619,32 |
| 31 | 35,35 | 35,43 | 35,51 | 91 | 58,19 | 58,28 | 58,37 |
| 32 | 177,69 | 178,09 | 178,49 | 92 | 291,93 | 292,38 | 292,83 |
| 33 | 358,21 | 359,03 | 359,85 | 93 | 583,85 | 584,76 | 585,67 |
| 34 | 352,59 | 353,40 | 354,21 | 94 | 582,87 | 583,78 | 584,69 |
| 35 | 53,01 | 53,13 | 53,25 | 95 | 87,27 | 87,41 | 87,55 |
| 36 | 267,29 | 267,90 | 268,51 | 96 | 438,35 | 439,03 | 439,71 |
| 37 | 536,83 | 538,06 | 539,29 | 97 | 874,74 | 876,10 | 877,46 |
| 38 | 530,83 | 532,05 | 533,27 | 98 | 876,70 | 878,06 | 879,42 |
| 39 | 53,10 | 53,22 | 53,34 | 99 | 87,27 | 87,41 | 87,55 |
| 40 | 177,53 | 177,94 | 178,35 | 100 | 291,93 | 292,38 | 292,83 |
| 41 | 45,42 | 45,56 | 45,70 | 101 | 82,20 | 82,38 | 82,56 |
| 42 | 241,25 | 242,05 | 242,85 | 102 | 411,32 | 412,22 | 413,12 |
| 43 | 494,78 | 496,40 | 498,02 | 103 | 825,58 | 827,38 | 829,18 |
| 44 | 462,81 | 464,34 | 465,87 | 104 | 820,56 | 822,36 | 824,16 |
| 45 | 67,48 | 67,70 | 67,92 | 105 | 122,35 | 122,61 | 122,87 |
| 46 | 361,65 | 362,84 | 364,03 | 106 | 616,90 | 618,25 | 619,60 |
| 47 | 741,75 | 744,18 | 746,61 | 107 | 1.238,83 | 1.241,53 | 1.244,23 |
| 48 | 694,05 | 696,34 | 698,63 | 108 | 1.229,73 | 1.232,43 | 1.235,13 |
| 49 | 68,69 | 68,91 | 69,13 | 109 | 123,33 | 123,60 | 123,87 |
| 50 | 237,83 | 238,61 | 239,39 | 110 | 410,33 | 411,23 | 412,13 |
| 51 | 67,64 | 68,02 | 68,40 | 111 | 122,34 | 122,80 | 123,26 |
| 52 | 383,62 | 386,73 | 387,84 | 112 | 649,44 | 651,82 | 654,20 |
| 53 | 800,12 | 804,44 | 808,76 | 113 | 1.330,73 | 1.335,55 | 1.340,37 |
| 54 | 707,74 | 711,72 | 715,70 | 114 | 1.247,17 | 1.251,84 | 1.256,51 |
| 55 | 100,72 | 101,28 | 101,84 | 115 | 183,42 | 184,11 | 184,80 |
| 56 | 577,01 | 580,18 | 583,35 | 116 | 973,91 | 977,49 | 981,07 |
| 57 | 1.199,69 | 1.206,16 | 1.212,63 | 117 | 1.996,40 | 2.003,62 | 2.010,84 |
| 58 | 1.057,29 | 1.063,23 | 1.069,17 | 118 | 1.869,37 | 1.876,37 | 1.883,37 |
| 59 | 104,43 | 105,02 | 105,61 | 119 | 184,84 | 185,53 | 186,22 |
| 60 | 370,60 | 372,66 | 374,72 | 120 | 638,56 | 640,93 | 643,30 |

Πίνακας 8: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης του τελικού αποθέματος OH_i κάθε θέσης

| E(X ₁₂) | | | | E(X ₁₂) | | | |
|----------------------|-----------|-----------|----------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 1,56 | 1,57 | 1,58 | 61 | 0,02 | 0,02 | 0,02 |
| 2 | 3,16 | 3,18 | 3,20 | 62 | 0,06 | 0,06 | 0,06 |
| 3 | 3,78 | 3,81 | 3,84 | 63 | 0,11 | 0,12 | 0,13 |
| 4 | 12,05 | 12,12 | 12,19 | 64 | 0,19 | 0,20 | 0,21 |
| 5 | 2,39 | 2,40 | 2,41 | 65 | 0,03 | 0,03 | 0,03 |
| 6 | 4,78 | 4,81 | 4,84 | 66 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 7 | 5,49 | 5,52 | 5,55 | 67 | 0,08 | 0,09 | 0,10 |
| 8 | 18,00 | 18,10 | 18,20 | 68 | 0,26 | 0,28 | 0,30 |
| 9 | 2,09 | 2,10 | 2,11 | 69 | 0,03 | 0,03 | 0,03 |
| 10 | 4,34 | 4,37 | 4,40 | 70 | 0,07 | 0,07 | 0,07 |
| 11 | 2,05 | 2,07 | 2,09 | 71 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| 12 | 3,42 | 3,45 | 3,48 | 72 | 0,48 | 0,50 | 0,52 |
| 13 | 3,68 | 3,71 | 3,74 | 73 | 0,60 | 0,62 | 0,64 |
| 14 | 13,71 | 13,81 | 13,91 | 74 | 1,65 | 1,69 | 1,73 |
| 15 | 3,01 | 3,03 | 3,05 | 75 | 0,32 | 0,32 | 0,32 |
| 16 | 5,19 | 5,23 | 5,27 | 76 | 0,75 | 0,76 | 0,77 |
| 17 | 5,42 | 5,47 | 5,52 | 77 | 0,90 | 0,92 | 0,94 |
| 18 | 20,14 | 20,30 | 20,46 | 78 | 2,48 | 2,54 | 2,60 |
| 19 | 2,37 | 2,39 | 2,41 | 79 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| 20 | 4,81 | 4,85 | 4,89 | 80 | 0,63 | 0,65 | 0,67 |
| 21 | 1,84 | 1,88 | 1,88 | 81 | 0,52 | 0,54 | 0,56 |
| 22 | 2,70 | 2,74 | 2,78 | 82 | 0,90 | 0,93 | 0,96 |
| 23 | 2,77 | 2,81 | 2,85 | 83 | 0,96 | 0,98 | 1,00 |
| 24 | 12,23 | 12,37 | 12,51 | 84 | 3,73 | 3,82 | 3,91 |
| 25 | 2,77 | 2,80 | 2,83 | 85 | 0,79 | 0,81 | 0,83 |
| 26 | 4,23 | 4,28 | 4,33 | 86 | 1,36 | 1,39 | 1,42 |
| 27 | 4,53 | 4,58 | 4,63 | 87 | 1,47 | 1,50 | 1,53 |
| 28 | 18,14 | 18,35 | 18,56 | 88 | 5,59 | 5,72 | 5,85 |
| 29 | 2,65 | 2,68 | 2,71 | 89 | 0,65 | 0,67 | 0,69 |
| 30 | 4,13 | 4,17 | 4,21 | 90 | 1,29 | 1,32 | 1,35 |
| 31 | 0,49 | 0,50 | 0,51 | 91 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 32 | 1,09 | 1,11 | 1,13 | 92 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 33 | 1,32 | 1,34 | 1,36 | 93 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 34 | 3,86 | 3,90 | 3,94 | 94 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 35 | 0,74 | 0,75 | 0,76 | 95 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 36 | 1,38 | 1,40 | 1,42 | 96 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 37 | 1,87 | 1,89 | 1,91 | 97 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 38 | 5,58 | 5,64 | 5,70 | 98 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 39 | 0,63 | 0,64 | 0,65 | 99 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 40 | 1,45 | 1,47 | 1,49 | 100 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 41 | 1,47 | 1,49 | 1,51 | 101 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |
| 42 | 2,57 | 2,60 | 2,63 | 102 | 0,09 | 0,10 | 0,11 |
| 43 | 2,64 | 2,67 | 2,70 | 103 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 44 | 10,16 | 10,25 | 10,34 | 104 | 0,38 | 0,40 | 0,42 |
| 45 | 2,23 | 2,25 | 2,27 | 105 | 0,09 | 0,09 | 0,09 |
| 46 | 3,87 | 3,91 | 3,95 | 106 | 0,14 | 0,15 | 0,16 |
| 47 | 3,95 | 3,99 | 4,03 | 107 | 0,20 | 0,21 | 0,22 |
| 48 | 15,28 | 15,42 | 15,56 | 108 | 0,57 | 0,60 | 0,63 |
| 49 | 1,78 | 1,80 | 1,82 | 109 | 0,07 | 0,07 | 0,07 |
| 50 | 3,54 | 3,57 | 3,60 | 110 | 0,14 | 0,15 | 0,16 |
| 51 | 1,63 | 1,65 | 1,67 | 111 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 52 | 2,51 | 2,55 | 2,59 | 112 | 0,58 | 0,60 | 0,62 |
| 53 | 2,56 | 2,60 | 2,64 | 113 | 0,65 | 0,67 | 0,69 |
| 54 | 10,85 | 10,98 | 11,11 | 114 | 2,16 | 2,23 | 2,30 |
| 55 | 2,51 | 2,54 | 2,57 | 115 | 0,43 | 0,45 | 0,47 |
| 56 | 3,64 | 3,69 | 3,74 | 116 | 0,86 | 0,89 | 0,92 |
| 57 | 3,91 | 3,96 | 4,01 | 117 | 0,97 | 1,00 | 1,03 |
| 58 | 16,54 | 16,74 | 16,94 | 118 | 3,25 | 3,35 | 3,45 |
| 59 | 1,91 | 1,94 | 1,97 | 119 | 0,38 | 0,39 | 0,40 |
| 60 | 3,62 | 3,67 | 3,72 | 120 | 0,77 | 0,80 | 0,83 |

Πίνακας 9: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης των πλευρικά μετακινούμενων ποσοτήτων X_{ij}

| E(X ₂₁) | | | | E(X ₂₁) | | | |
|----------------------|-----------|-----------|----------|----------------------|-----------|-----------|----------|
| A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 1,56 | 1,57 | 1,58 | 61 | 0,02 | 0,02 | 0,02 |
| 2 | 1,65 | 1,67 | 1,69 | 62 | 0,02 | 0,02 | 0,02 |
| 3 | 1,54 | 1,55 | 1,56 | 63 | 0,04 | 0,04 | 0,04 |
| 4 | 8,54 | 8,60 | 8,66 | 64 | 0,10 | 0,10 | 0,10 |
| 5 | 2,38 | 2,40 | 2,42 | 65 | 0,03 | 0,03 | 0,03 |
| 6 | 2,42 | 2,44 | 2,46 | 66 | 0,04 | 0,04 | 0,04 |
| 7 | 2,21 | 2,22 | 2,23 | 67 | 0,02 | 0,03 | 0,04 |
| 8 | 12,97 | 13,05 | 13,13 | 68 | 0,15 | 0,15 | 0,15 |
| 9 | 1,71 | 1,72 | 1,73 | 69 | 0,02 | 0,02 | 0,02 |
| 10 | 2,62 | 2,64 | 2,66 | 70 | 0,02 | 0,03 | 0,04 |
| 11 | 1,99 | 2,00 | 2,01 | 71 | 0,21 | 0,22 | 0,23 |
| 12 | 2,51 | 2,53 | 2,55 | 72 | 0,31 | 0,32 | 0,33 |
| 13 | 2,56 | 2,58 | 2,60 | 73 | 0,38 | 0,38 | 0,38 |
| 14 | 12,07 | 12,16 | 12,25 | 74 | 1,28 | 1,30 | 1,32 |
| 15 | 3,03 | 3,05 | 3,07 | 75 | 0,33 | 0,34 | 0,35 |
| 16 | 3,80 | 3,83 | 3,86 | 76 | 0,47 | 0,48 | 0,49 |
| 17 | 3,92 | 3,95 | 3,98 | 77 | 0,51 | 0,53 | 0,55 |
| 18 | 18,45 | 18,59 | 18,73 | 78 | 1,87 | 1,91 | 1,95 |
| 19 | 2,37 | 2,39 | 2,41 | 79 | 0,24 | 0,25 | 0,26 |
| 20 | 3,70 | 3,72 | 3,74 | 80 | 0,43 | 0,44 | 0,45 |
| 21 | 1,84 | 1,85 | 1,86 | 81 | 0,53 | 0,54 | 0,55 |
| 22 | 2,68 | 2,71 | 2,74 | 82 | 0,68 | 0,69 | 0,70 |
| 23 | 2,77 | 2,80 | 2,83 | 83 | 0,68 | 0,69 | 0,70 |
| 24 | 11,43 | 11,55 | 11,67 | 84 | 3,18 | 3,25 | 3,32 |
| 25 | 2,74 | 2,77 | 2,80 | 85 | 0,80 | 0,81 | 0,82 |
| 26 | 3,84 | 3,88 | 3,92 | 86 | 1,01 | 1,03 | 1,05 |
| 27 | 3,80 | 3,84 | 3,88 | 87 | 1,03 | 1,05 | 1,07 |
| 28 | 17,35 | 17,53 | 17,71 | 88 | 4,77 | 4,87 | 4,97 |
| 29 | 1,80 | 1,82 | 1,84 | 89 | 0,61 | 0,62 | 0,63 |
| 30 | 3,71 | 3,75 | 3,79 | 90 | 1,01 | 1,03 | 1,05 |
| 31 | 0,50 | 0,50 | 0,50 | 91 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 32 | 0,67 | 0,68 | 0,69 | 92 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 33 | 0,75 | 0,76 | 0,77 | 93 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 34 | 3,25 | 3,29 | 3,33 | 94 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 35 | 0,73 | 0,74 | 0,75 | 95 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 36 | 0,95 | 0,96 | 0,97 | 96 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 37 | 1,02 | 1,03 | 1,04 | 97 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 38 | 4,49 | 4,54 | 4,59 | 98 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 39 | 0,57 | 0,58 | 0,59 | 99 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 40 | 1,00 | 1,01 | 1,02 | 100 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 41 | 1,56 | 1,57 | 1,58 | 101 | 0,06 | 0,06 | 0,06 |
| 42 | 2,09 | 2,11 | 2,13 | 102 | 0,08 | 0,08 | 0,08 |
| 43 | 2,19 | 2,21 | 2,23 | 103 | 0,09 | 0,09 | 0,09 |
| 44 | 9,55 | 9,63 | 9,71 | 104 | 0,32 | 0,33 | 0,34 |
| 45 | 2,24 | 2,26 | 2,28 | 105 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 46 | 3,21 | 3,24 | 3,27 | 106 | 0,13 | 0,13 | 0,13 |
| 47 | 3,20 | 3,23 | 3,26 | 107 | 0,14 | 0,15 | 0,16 |
| 48 | 14,21 | 14,33 | 14,45 | 108 | 0,47 | 0,49 | 0,51 |
| 49 | 1,75 | 1,77 | 1,79 | 109 | 0,07 | 0,07 | 0,07 |
| 50 | 3,06 | 3,08 | 3,10 | 110 | 0,12 | 0,12 | 0,12 |
| 51 | 1,74 | 1,76 | 1,78 | 111 | 0,28 | 0,29 | 0,30 |
| 52 | 2,46 | 2,49 | 2,52 | 112 | 0,41 | 0,43 | 0,45 |
| 53 | 2,64 | 2,67 | 2,70 | 113 | 0,48 | 0,49 | 0,50 |
| 54 | 10,85 | 10,97 | 11,09 | 114 | 1,78 | 1,83 | 1,88 |
| 55 | 2,55 | 2,57 | 2,59 | 115 | 0,44 | 0,45 | 0,46 |
| 56 | 3,83 | 3,87 | 3,91 | 116 | 0,63 | 0,65 | 0,67 |
| 57 | 3,87 | 3,92 | 3,97 | 117 | 0,70 | 0,72 | 0,74 |
| 58 | 16,01 | 16,19 | 16,37 | 118 | 2,68 | 2,75 | 2,82 |
| 59 | 1,99 | 2,01 | 2,03 | 119 | 0,34 | 0,35 | 0,36 |
| 60 | 3,60 | 3,64 | 3,68 | 120 | 0,59 | 0,61 | 0,63 |

Πίνακας 9: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης των πλευρικά μετακινούμενων ποσοτήτων X_{ij}

| | | E(BO ₁) | | | | E(BO ₁) | |
|-----|-----------|----------------------|----------|-----|-----------|----------------------|----------|
| A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 1,33 | 1,34 | 1,35 | 61 | 0,20 | 0,20 | 0,20 |
| 2 | 1,30 | 1,31 | 1,32 | 62 | 0,19 | 0,20 | 0,21 |
| 3 | 1,28 | 1,29 | 1,30 | 63 | 0,20 | 0,20 | 0,20 |
| 4 | 6,43 | 6,50 | 6,57 | 64 | 0,94 | 0,96 | 0,98 |
| 5 | 1,98 | 2,00 | 2,02 | 65 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 6 | 1,91 | 1,93 | 1,95 | 66 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 7 | 1,94 | 1,96 | 1,98 | 67 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| 8 | 9,70 | 9,81 | 9,92 | 68 | 1,42 | 1,46 | 1,50 |
| 9 | 1,32 | 1,33 | 1,34 | 69 | 0,20 | 0,20 | 0,20 |
| 10 | 1,92 | 1,94 | 1,96 | 70 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 11 | 1,71 | 1,74 | 1,77 | 71 | 0,23 | 0,23 | 0,23 |
| 12 | 1,66 | 1,68 | 1,70 | 72 | 0,22 | 0,22 | 0,22 |
| 13 | 1,69 | 1,71 | 1,73 | 73 | 0,22 | 0,23 | 0,24 |
| 14 | 8,35 | 8,46 | 8,57 | 74 | 1,06 | 1,09 | 1,12 |
| 15 | 2,62 | 2,66 | 2,70 | 75 | 0,33 | 0,34 | 0,35 |
| 16 | 2,55 | 2,58 | 2,61 | 76 | 0,32 | 0,33 | 0,34 |
| 17 | 2,55 | 2,58 | 2,61 | 77 | 0,33 | 0,34 | 0,35 |
| 18 | 12,52 | 12,70 | 12,88 | 78 | 1,60 | 1,65 | 1,70 |
| 19 | 1,69 | 1,71 | 1,73 | 79 | 0,21 | 0,22 | 0,23 |
| 20 | 2,51 | 2,54 | 2,57 | 80 | 0,32 | 0,33 | 0,34 |
| 21 | 2,62 | 2,69 | 2,76 | 81 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 22 | 2,75 | 2,82 | 2,89 | 82 | 0,30 | 0,32 | 0,34 |
| 23 | 2,80 | 2,87 | 2,94 | 83 | 0,32 | 0,34 | 0,36 |
| 24 | 13,20 | 13,51 | 13,82 | 84 | 1,39 | 1,46 | 1,53 |
| 25 | 3,96 | 4,06 | 4,16 | 85 | 0,41 | 0,43 | 0,45 |
| 26 | 4,17 | 4,26 | 4,35 | 86 | 0,44 | 0,47 | 0,50 |
| 27 | 4,27 | 4,37 | 4,47 | 87 | 0,50 | 0,52 | 0,54 |
| 28 | 19,74 | 20,21 | 20,68 | 88 | 2,06 | 2,17 | 2,28 |
| 29 | 2,57 | 2,63 | 2,69 | 89 | 0,27 | 0,29 | 0,31 |
| 30 | 4,05 | 4,15 | 4,25 | 90 | 0,42 | 0,45 | 0,48 |
| 31 | 1,33 | 1,35 | 1,37 | 91 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| 32 | 1,34 | 1,36 | 1,38 | 92 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| 33 | 1,34 | 1,36 | 1,38 | 93 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| 34 | 6,63 | 6,70 | 6,77 | 94 | 0,97 | 1,00 | 1,03 |
| 35 | 2,01 | 2,03 | 2,05 | 95 | 0,30 | 0,31 | 0,32 |
| 36 | 2,02 | 2,04 | 2,06 | 96 | 0,28 | 0,29 | 0,30 |
| 37 | 1,95 | 1,97 | 1,99 | 97 | 0,28 | 0,29 | 0,30 |
| 38 | 10,03 | 10,14 | 10,25 | 98 | 1,46 | 1,50 | 1,54 |
| 39 | 1,31 | 1,33 | 1,35 | 99 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| 40 | 1,98 | 2,01 | 2,04 | 100 | 0,28 | 0,29 | 0,30 |
| 41 | 1,64 | 1,66 | 1,68 | 101 | 0,24 | 0,25 | 0,26 |
| 42 | 1,61 | 1,63 | 1,65 | 102 | 0,23 | 0,24 | 0,25 |
| 43 | 1,63 | 1,65 | 1,67 | 103 | 0,24 | 0,25 | 0,26 |
| 44 | 8,01 | 8,11 | 8,21 | 104 | 1,20 | 1,24 | 1,28 |
| 45 | 2,47 | 2,51 | 2,55 | 105 | 0,37 | 0,38 | 0,39 |
| 46 | 2,41 | 2,44 | 2,47 | 106 | 0,36 | 0,37 | 0,38 |
| 47 | 2,44 | 2,47 | 2,50 | 107 | 0,36 | 0,37 | 0,38 |
| 48 | 11,99 | 12,15 | 12,31 | 108 | 1,81 | 1,87 | 1,93 |
| 49 | 1,62 | 1,64 | 1,66 | 109 | 0,24 | 0,25 | 0,26 |
| 50 | 2,42 | 2,45 | 2,48 | 110 | 0,35 | 0,37 | 0,39 |
| 51 | 2,47 | 2,53 | 2,59 | 111 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| 52 | 2,61 | 2,67 | 2,73 | 112 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 53 | 2,66 | 2,72 | 2,78 | 113 | 0,30 | 0,31 | 0,32 |
| 54 | 12,45 | 12,75 | 13,05 | 114 | 1,33 | 1,39 | 1,45 |
| 55 | 3,82 | 3,91 | 4,00 | 115 | 0,41 | 0,42 | 0,43 |
| 56 | 3,88 | 3,98 | 4,08 | 116 | 0,42 | 0,44 | 0,46 |
| 57 | 4,03 | 4,13 | 4,23 | 117 | 0,44 | 0,46 | 0,48 |
| 58 | 18,69 | 19,13 | 19,57 | 118 | 2,00 | 2,08 | 2,16 |
| 59 | 2,46 | 2,51 | 2,56 | 119 | 0,26 | 0,27 | 0,28 |
| 60 | 3,86 | 3,95 | 4,04 | 120 | 0,40 | 0,42 | 0,44 |

Πίνακας 10: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης των ελλείψεων αποθέματος BO₁

| | | E(BO ₂) | | | | E(BO ₂) | |
|-----|-----------|---------------------|----------|-----|-----------|---------------------|----------|
| A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο | A/A | Κάτω όριο | Μέση τιμή | Άνω όριο |
| 1 | 1,33 | 1,34 | 1,35 | 61 | 0,20 | 0,20 | 0,20 |
| 2 | 7,17 | 7,25 | 7,33 | 62 | 0,98 | 1,00 | 1,02 |
| 3 | 14,64 | 14,81 | 14,98 | 63 | 1,95 | 2,00 | 2,05 |
| 4 | 13,79 | 13,94 | 14,09 | 64 | 1,94 | 1,99 | 2,04 |
| 5 | 1,97 | 2,00 | 2,03 | 65 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 6 | 10,73 | 10,85 | 10,97 | 66 | 1,47 | 1,51 | 1,55 |
| 7 | 21,72 | 21,96 | 22,20 | 67 | 2,97 | 3,05 | 3,13 |
| 8 | 20,83 | 21,06 | 21,29 | 68 | 2,91 | 2,98 | 3,05 |
| 9 | 2,04 | 2,06 | 2,08 | 69 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 10 | 7,15 | 7,23 | 7,31 | 70 | 0,96 | 0,99 | 1,02 |
| 11 | 1,74 | 1,77 | 1,80 | 71 | 0,22 | 0,22 | 0,22 |
| 12 | 9,85 | 10,00 | 10,15 | 72 | 1,22 | 1,26 | 1,30 |
| 13 | 20,42 | 20,72 | 21,02 | 73 | 2,53 | 2,61 | 2,69 |
| 14 | 18,32 | 18,59 | 18,86 | 74 | 2,28 | 2,34 | 2,40 |
| 15 | 2,64 | 2,67 | 2,70 | 75 | 0,33 | 0,34 | 0,35 |
| 16 | 14,72 | 14,94 | 15,16 | 76 | 1,84 | 1,90 | 1,96 |
| 17 | 30,60 | 31,06 | 31,52 | 77 | 3,87 | 3,99 | 4,11 |
| 18 | 27,64 | 28,04 | 28,44 | 78 | 3,39 | 3,49 | 3,59 |
| 19 | 2,65 | 2,69 | 2,73 | 79 | 0,33 | 0,34 | 0,35 |
| 20 | 9,46 | 9,60 | 9,74 | 80 | 1,19 | 1,22 | 1,25 |
| 21 | 2,63 | 2,70 | 2,77 | 81 | 0,29 | 0,30 | 0,31 |
| 22 | 15,75 | 16,16 | 16,57 | 82 | 1,82 | 1,93 | 2,04 |
| 23 | 32,98 | 33,82 | 34,66 | 83 | 3,98 | 4,22 | 4,46 |
| 24 | 28,22 | 28,95 | 29,68 | 84 | 3,07 | 3,24 | 3,41 |
| 25 | 3,98 | 4,08 | 4,18 | 85 | 0,41 | 0,43 | 0,45 |
| 26 | 23,39 | 24,00 | 24,61 | 86 | 2,74 | 2,90 | 3,06 |
| 27 | 49,40 | 50,67 | 51,94 | 87 | 5,97 | 6,32 | 6,67 |
| 28 | 42,40 | 43,49 | 44,58 | 88 | 4,57 | 4,83 | 5,09 |
| 29 | 4,08 | 4,18 | 4,28 | 89 | 0,44 | 0,46 | 0,48 |
| 30 | 14,99 | 15,38 | 15,77 | 90 | 1,68 | 1,78 | 1,88 |
| 31 | 1,33 | 1,35 | 1,37 | 91 | 0,21 | 0,21 | 0,21 |
| 32 | 7,22 | 7,30 | 7,38 | 92 | 1,00 | 1,03 | 1,06 |
| 33 | 14,57 | 14,74 | 14,91 | 93 | 2,01 | 2,06 | 2,11 |
| 34 | 13,93 | 14,09 | 14,25 | 94 | 2,03 | 2,08 | 2,13 |
| 35 | 2,01 | 2,03 | 2,05 | 95 | 0,30 | 0,31 | 0,32 |
| 36 | 10,84 | 10,96 | 11,08 | 96 | 1,49 | 1,53 | 1,57 |
| 37 | 21,96 | 22,21 | 22,46 | 97 | 3,03 | 3,11 | 3,19 |
| 38 | 20,73 | 20,96 | 21,19 | 98 | 2,99 | 3,07 | 3,15 |
| 39 | 2,04 | 2,06 | 2,08 | 99 | 0,30 | 0,31 | 0,32 |
| 40 | 7,05 | 7,13 | 7,21 | 100 | 1,00 | 1,03 | 1,06 |
| 41 | 1,61 | 1,63 | 1,65 | 101 | 0,25 | 0,25 | 0,25 |
| 42 | 9,65 | 9,79 | 9,93 | 102 | 1,33 | 1,37 | 1,41 |
| 43 | 20,14 | 20,44 | 20,74 | 103 | 2,73 | 2,82 | 2,91 |
| 44 | 17,64 | 17,90 | 18,16 | 104 | 2,50 | 2,58 | 2,66 |
| 45 | 2,48 | 2,51 | 2,54 | 105 | 0,37 | 0,38 | 0,39 |
| 46 | 14,49 | 14,71 | 14,93 | 106 | 1,98 | 2,05 | 2,12 |
| 47 | 30,24 | 30,69 | 31,14 | 107 | 4,00 | 4,13 | 4,26 |
| 48 | 26,45 | 26,83 | 27,21 | 108 | 3,78 | 3,89 | 4,00 |
| 49 | 2,57 | 2,60 | 2,63 | 109 | 0,37 | 0,38 | 0,39 |
| 50 | 9,21 | 9,35 | 9,49 | 110 | 1,30 | 1,34 | 1,38 |
| 51 | 2,53 | 2,59 | 2,65 | 111 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| 52 | 15,35 | 15,74 | 16,13 | 112 | 1,74 | 1,84 | 1,94 |
| 53 | 32,65 | 33,49 | 34,33 | 113 | 3,87 | 4,10 | 4,33 |
| 54 | 27,21 | 27,91 | 28,61 | 114 | 2,91 | 3,05 | 3,19 |
| 55 | 3,80 | 3,89 | 3,98 | 115 | 0,40 | 0,42 | 0,44 |
| 56 | 23,04 | 23,63 | 24,22 | 116 | 2,63 | 2,77 | 2,91 |
| 57 | 48,87 | 50,13 | 51,39 | 117 | 5,80 | 6,14 | 6,48 |
| 58 | 40,95 | 41,99 | 43,03 | 118 | 4,39 | 4,60 | 4,81 |
| 59 | 3,87 | 3,97 | 4,07 | 119 | 0,42 | 0,44 | 0,46 |
| 60 | 14,65 | 15,03 | 15,41 | 120 | 1,60 | 1,69 | 1,78 |

Πίνακας 10: 95% διαστήματα εμπιστοσύνης των ελλείψεων αποθέματος BO_i

αρκετές παραδοχές. Έτσι θα ήταν παράδοξο να μας απασχολούσαν διαφορές στο κόστος της τάξης του 0,2% τη στιγμή που υπάρχουν πολλοί άλλοι παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν το κόστος σε μεγαλύτερο ποσοστό και εμείς τους έχουμε αγνοήσει. Εξάλλου οι πιθανές βέλτιστες λύσεις διαφέρουν μεταξύ τους κατά πολύ λίγο και ο τρόπος με τον οποίον συμπεριφέρεται το σύστημα γίνεται ούτως ή άλλως φανερός.

Παρατηρούμε στον πίνακα 7, όπου έχουμε τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης του κόστους, ότι τα στενότερα όρια εμφανίζονται για κάθε ομάδα παραδειγμάτων με κοινά όλα τα άλλα στοιχεία, όταν οι δύο θέσεις έχουν μικρή μέση τιμή για την εξωτερική ζήτηση, όπως στα παραδείγματα 1-5-9,11-15-19,21-25-29 και ούτω καθ' εξής.

Αντίθετα όταν η μέση τιμή της ζήτησης της δεύτερης θέσης αυξάνεται τότε βλέπουμε ότι τα όρια εντός των οποίων βρίσκεται η μέση τιμή με πιθανότητα 95% διευρύνονται. Έχουμε επομένως μία ακόμη ένδειξη ότι καθώς μεγαλώνουν οι διαφορές ανάμεσα στις δύο ζητήσεις, μεγαλώνει και η στοχαστικότητα του προβλήματος.

Από την άλλη μεριά η μεταβολή της τυπικής απόκλισης της ζήτησης των θέσεων δε φαίνεται να έχει αξιόλογη επίδραση στο εύρος των διαστημάτων εμπιστοσύνης του κόστους. Έτσι βλέπουμε για παράδειγμα ότι τα όρια εμπιστοσύνης του κόστους είναι πάνω κάτω τα ίδια είτε οι δύο θέσεις έχουν $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 20, 100, 20)$ είτε έχουν $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 30, 100, 30)$.

Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα όρια εμπιστοσύνης του κόστους απέχουν στην καλύτερη περίπτωση κατά περισσότερο από 0,15% από τη

μέση τιμή του κόστους (παράδειγμα 31), ενώ στη χειρότερη περίπτωση δεν διαφέρουν περισσότερο από 0,7% (παράδειγμα 83).

Όσον αφορά τα διαστήματα εμπιστοσύνης των άλλων μεγεθών, τα όρια του μέσου αποθέματος που διατηρούν οι δύο θέσεις είναι αισθητά στενότερα από τα όρια του αποθέματος που διακινείται πλευρικά και του αποθέματος που δεν ικανοποιείται αμέσως.

Κεφάλαιο 5 :
Συγκρίσεις με άλλα
συστήματα

5.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία από άλλες εργασίες για να μπορέσουμε να σχηματίσουμε σαφέστερη εικόνα για τη συμπεριφορά του συστήματος που εξετάζεται στην παρούσα εργασία.

Συγκεκριμένα θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που πήραμε για το παρόν σύστημα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί για δύο άλλα συστήματα που παρουσιάζουν κάποια κοινά στοιχεία με το σύστημα που διερευνούμε.

Τα δύο αυτά συστήματα είναι τα εξής:

- α) το σύστημα με δύο ανεξάρτητες θέσεις οι οποίες δε συνεργάζονται
- β) το σύστημα με δύο θέσεις στο οποίο εφαρμόζεται επείγουσα πλευρική συνεργασία, η οποία πραγματοποιείται σε αμελητέο χρόνο

Στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζονται συνοπτικά τα χαρακτηριστικά στοιχεία καθενός από τα παραπάνω συστήματα και ο τρόπος λειτουργίας του. Ύστερα γίνεται η σύγκριση διαφόρων μεγεθών, όπως οι τιμές για το βέλτιστο απόθεμα S , για το βέλτιστο κόστος ή για το βαθμό εξυπηρέτησης που υπάρχουν για τα συστήματα αυτά με τις αντίστοιχες τιμές που πήραμε για το παρόν πρόβλημα από τη διαδικασία της προσομοίωσης. Οι συγκρίσεις αυτές μας παρέχουν σημαντική βοήθεια στην προσπάθεια για καλύτερη κατανόηση του προβλήματος που εξετάζουμε.

5.2 Σύστημα δύο ανεξάρτητων θέσεων

Το σύστημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί λιγότερο σύνθετο επειδή δεν ανήκει στα συστήματα με συνεργασία. Αποτελεί βέβαια τη βάση πάνω στην οποία στηρίχθηκε η θεωρία για τα συστήματα που εφαρμόζουν συνεργασία. Παρόλα αυτά όμως διατηρεί τα βασικά του στοιχεία ίδια με του συστήματός μας, όπως για παράδειγμα ίδια πολιτική για την ανανέωση του αποθέματος από την κεντρική αποθήκη.

Θεωρούμε ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων που αποτελείται από μία κεντρική αποθήκη και δύο θέσεις στις οποίες εκδηλώνεται η ζήτηση. Η κεντρική αποθήκη τροφοδοτεί τις δύο θέσεις με απόθεμα και έχει πρακτικά απεριόριστη δυναμικότητα.

Καθεμία από τις δύο θέσεις αντιμετωπίζει εξωτερική ζήτηση που είναι ανεξάρτητη από τη ζήτηση στην άλλη θέση και ακολουθεί κάποια στατιστική κατανομή. Κάθε θέση εφαρμόζει περιοδική επιθεώρηση για την παραγγελία καινούργιου αποθέματος. Συγκεκριμένα στην αρχή κάθε περιόδου κάθε θέση παραγγέλνει από την κεντρική αποθήκη τόσο όσο χρειάζεται για να ανέβει το συνολικό της απόθεμα (διαθέσιμο + υπό παραγγελία) στο ύψος S . Η άφιξη αυτής της παραγγελίας γίνεται έπειτα από χρόνο L περιόδων (στην αρχή της αντίστοιχης περιόδου) όπου το L λέγεται χρόνος ικανοποίησης της παραγγελίας και είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

Κατά τη διάρκεια της περιόδου γίνεται η εκδήλωση της ζήτησης σε κάθε θέση. Έτσι μετά από την ικανοποίησή της το τελικό απόθεμα σε κάθε θέση είναι είτε θετικό οπότε το σύστημα επιβαρύνεται με το αντίστοιχο κόστος

διατήρησης ch ανά μονάδα αποθέματος, είτε αρνητικό οπότε έχουμε κάποια έλλειψη αποθέματος με αντίστοιχο κόστος έλλειψης cp ανά μονάδα. Η αντίστοιχη ζήτηση δε χάνεται, αλλά ικανοποιείται στην επόμενη περίοδο (με καθυστέρηση).

Το θετικό τελικό απόθεμα σε μία θέση ονομάζεται διαθέσιμο και συμβολίζεται με OH , ενώ το αρνητικό ονομάζεται έλλειψη και συμβολίζεται με BO . Υποθέτοντας ότι η στατιστική κατανομή της ζήτησης είναι σταθερή και ανεξάρτητη μεταξύ των περιόδων, το αναμενόμενο κόστος του συστήματος ανά περίοδο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E(C) = ch * E(OH) + cp * E(BO) \quad \text{όπου:}$$

$E(OH)$: αναμενόμενη τιμή του διαθέσιμου αποθέματος στο τέλος της περιόδου

$E(BO)$: αναμενόμενη τιμή της έλλειψης στο τέλος μιας περιόδου

Για ένα δεδομένο επίπεδο μέγιστου αποθέματος S οι τιμές των $E(OH)$ και $E(BO)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$E(OH) = \int_{y=0}^S (S-y) f(y) dy$$

$$E(BO) = \int_{y=S}^{\infty} (y-S) f(y) dy$$

όπου y και $f(y)$ είναι η ζήτηση κατά τη διάρκεια των $L+1$ περιόδων και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Αν η ζήτηση κατά τη διάρκεια μιας περιόδου έχει μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ , τότε η ζήτηση στη διάρκεια των $L+1$ περιόδων είναι μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu_{L+1} = \mu * (L+1)$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{L+1} = \sigma * (L+1)^{1/2}$.

Για να βελτιστοποιήσουμε την απόδοση αυτού του συστήματος με κριτήριο πάντα το κόστος, είναι αρκετό να βρούμε το επίπεδο του μέγιστου αποθέματος που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο $E(C)$.

Με άλλα λόγια η μεταβλητή απόφασης του προβλήματος είναι το S . Αποδεικνύεται ότι το βέλτιστο S ικανοποιεί τη σχέση $F(S) = cp / (ch + cp)$ όπου $F(\cdot)$ είναι η συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας της ζήτησης κατά τη διάρκεια των $L+1$ περιόδων.

Το μέγιστο απόθεμα S μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$S = \mu_{L+1} + k * \sigma_{L+1} = \mu * (L+1) + k * \sigma * \sqrt{L+1}$$

όπου k είναι ο συντελεστής ασφαλείας που αναφέρεται στο S . Καθώς το μ , το σ και το L είναι γνωστά, το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του k που επομένως αντικαθιστά το S ως μεταβλητή απόφασης.

Στην περίπτωση μας υποτίθεται ότι η ζήτηση μιας περιόδου ακολουθεί την κανονική κατανομή. Έτσι σύμφωνα με τη θεωρία της στατιστικής η ζήτηση στη διάρκεια των $L+1$ περιόδων ακολουθεί την κανονική κατανομή και η συνθήκη βελτιστοποίησης γράφεται ως συνάρτηση του k :

$$\Phi(k) = cp / (ch + cp) .$$

Από την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να υπολογίσουμε χωριστά για κάθε θέση τη βέλτιστη τιμή του μέγιστου αποθέματος S , τις αναμενόμενες τιμές του διαθέσιμου αποθέματος και της έλλειψης από τις τελικές σχέσεις:

$$E(OH) = \sigma (L+1)^{1/2} [k \Phi(k) + \varphi(k)] \quad \text{και}$$

$$E(BO) = \sigma (L+1)^{1/2} [\varphi(k) - k(1-\Phi(k))]$$

και την αντίστοιχη τιμή του αναμενόμενου κόστους $E(C)$. Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον πίνακα 11. Για κάθε συνδυασμό L, ch και cr υπάρχουν έξι διαφορετικά ζεύγη μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης. Επίσης έχουμε 3 διαφορετικά επίπεδα για το χρόνο ικανοποίησης των παραγγελιών και δύο συνδυασμούς ch και cr και επομένως έχουμε συνολικά τον υπολογισμό των τιμών αυτών για τριανταέξι διαφορετικές θέσεις όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα. Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος ενός συστήματος δύο θέσεων δεν έχουμε παρά να αθροίσουμε το κόστος των αντίστοιχων θέσεων επειδή όπως είπαμε αυτές οι θέσεις λειτουργούν ανεξάρτητα.

Οι ποσότητες $E(OH)$ και $E(BO)$ είναι ανάλογες της τυπικής απόκλισης και της τιμής $(L+1)^{1/2}$. Έτσι όπως φαίνεται από τον πίνακα 11 μία ποσοστιαία αύξηση σε κάποιο από τα δύο παραπάνω μεγέθη έχει ως συνέπεια την αύξηση του κόστους κατά το ίδιο ποσοστό. Επίσης στον ίδιο πίνακα βλέπουμε καθαρά ότι η αύξηση του κόστους έλλειψης από 8 σε 50 έχει ως συνέπεια τη διατήρηση αισθητά υψηλότερου αποθέματος από τη θέση έτσι ώστε να περιοριστεί η συχνότητα των ελλείψεων.

| A/A | μ | σ | L | ch | cp | S | E(OH) | E(BO) | E(C) |
|-----|-------|----------|----|----|----|-------|----------|-------|----------|
| 1 | 100 | 20 | 1 | 1 | 8 | 234 | 36,03 | 1,52 | 48,22 |
| 2 | 100 | 30 | 1 | 1 | 8 | 252 | 54,05 | 2,28 | 72,34 |
| 3 | 500 | 100 | 1 | 1 | 8 | 1172 | 180,15 | 7,62 | 241,11 |
| 4 | 500 | 150 | 1 | 1 | 8 | 1259 | 270,23 | 11,43 | 361,67 |
| 5 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 8 | 2345 | 360,30 | 15,24 | 482,22 |
| 6 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 8 | 2518 | 540,46 | 22,86 | 723,33 |
| 7 | 100 | 20 | 3 | 1 | 8 | 449 | 50,95 | 2,16 | 68,19 |
| 8 | 100 | 30 | 3 | 1 | 8 | 473 | 76,43 | 3,23 | 102,29 |
| 9 | 500 | 100 | 3 | 1 | 8 | 2244 | 254,77 | 10,78 | 340,98 |
| 10 | 500 | 150 | 3 | 1 | 8 | 2366 | 382,16 | 16,16 | 511,47 |
| 11 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 8 | 4488 | 509,55 | 21,55 | 681,96 |
| 12 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 8 | 4732 | 764,33 | 32,33 | 1.022,95 |
| 13 | 100 | 20 | 10 | 1 | 8 | 1181 | 84,50 | 3,57 | 113,09 |
| 14 | 100 | 30 | 10 | 1 | 8 | 1221 | 126,75 | 5,36 | 169,64 |
| 15 | 500 | 100 | 10 | 1 | 8 | 5905 | 422,50 | 17,87 | 565,46 |
| 16 | 500 | 150 | 10 | 1 | 8 | 6107 | 633,75 | 26,80 | 848,19 |
| 17 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 8 | 11809 | 845,00 | 35,74 | 1.130,92 |
| 18 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 8 | 12214 | 1.267,50 | 53,60 | 1.696,37 |
| 19 | 100 | 20 | 1 | 1 | 50 | 258 | 58,47 | 0,20 | 68,68 |
| 20 | 100 | 30 | 1 | 1 | 50 | 287 | 87,70 | 0,31 | 103,01 |
| 21 | 500 | 100 | 1 | 1 | 50 | 1291 | 292,35 | 1,02 | 343,38 |
| 22 | 500 | 150 | 1 | 1 | 50 | 1437 | 438,52 | 1,53 | 515,07 |
| 23 | 1000 | 200 | 1 | 1 | 50 | 2583 | 584,70 | 2,04 | 686,77 |
| 24 | 1000 | 300 | 1 | 1 | 50 | 2874 | 877,05 | 3,06 | 1.030,16 |
| 25 | 100 | 20 | 3 | 1 | 50 | 482 | 82,69 | 0,29 | 97,12 |
| 26 | 100 | 30 | 3 | 1 | 50 | 524 | 124,03 | 0,43 | 145,68 |
| 27 | 500 | 100 | 3 | 1 | 50 | 2412 | 413,44 | 1,44 | 485,61 |
| 28 | 500 | 150 | 3 | 1 | 50 | 2618 | 620,16 | 2,16 | 728,42 |
| 29 | 1000 | 200 | 3 | 1 | 50 | 4824 | 826,89 | 2,89 | 971,24 |
| 30 | 1000 | 300 | 3 | 1 | 50 | 5236 | 1.240,33 | 4,33 | 1.456,86 |
| 31 | 100 | 20 | 10 | 1 | 50 | 1237 | 137,12 | 0,48 | 161,06 |
| 32 | 100 | 30 | 10 | 1 | 50 | 1305 | 205,68 | 0,72 | 241,59 |
| 33 | 500 | 100 | 10 | 1 | 50 | 6183 | 685,62 | 2,39 | 805,31 |
| 34 | 500 | 150 | 10 | 1 | 50 | 6525 | 1.028,43 | 3,59 | 1.207,96 |
| 35 | 1000 | 200 | 10 | 1 | 50 | 12366 | 1.371,24 | 4,79 | 1.610,62 |
| 36 | 1000 | 300 | 10 | 1 | 50 | 13050 | 2.056,85 | 7,18 | 2.415,92 |

Πίνακας 11: Χαρακτηριστικά στοιχεία μιας ανεξάρτητης θέσης που ακολουθεί πολιτική περιοδικής επιθεώρησης

Στον πίνακα 12 έχουμε τη σύγκριση του κόστους των παραδειγμάτων του συστήματος με προληπτική συνεργασία με τα αντίστοιχα παραδείγματα για το σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις. Οι συγκρίσεις για κάθε συνδυασμό $ch-cr$ γίνονται και για τις δύο τιμές που μπορεί να πάρει το c_{ij} στο σύστημα με συνεργασία.

Από τον πίνακα αυτόν φαίνεται ότι σε γενικές γραμμές το σύστημα με προληπτική συνεργασία πλεονεκτεί σημαντικά έναντι του συστήματος χωρίς συνεργασία. Στην καλύτερη περίπτωση μάλιστα (παραδείγμα 25) η μείωση στο συνολικό κόστος φτάνει το 20,66%. Το πλεονέκτημα αυτό γίνεται σημαντικότερο καθώς αυξάνεται η τιμή του χρόνου ικανοποίησης των παραγγελιών, επειδή όπως έχουμε πει η πλευρική συνεργασία παίζει πρωταγωνιστικότερο ρόλο. Από την άλλη μεριά όμως όταν αυξηθεί σημαντικά το κόστος πλευρικής μεταφοράς, το σύστημα που εφαρμόζει συνεργασία δεν διατηρεί το πλεονέκτημά του αυτό. Έτσι παρατηρούμε ότι όταν το κόστος αυτό πάρει τη μέγιστη τιμή του και ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών είναι μικρός όπως στα παραδείγματα 91-110, τα δύο συστήματα παρουσιάζουν πάνω κάτω το ίδιο κόστος και μάλιστα σε πολλά παραδείγματα το σύστημα χωρίς συνεργασία εμφανίζει χαμηλότερο κόστος. Για τους ίδιους λόγους τα δύο συστήματα παρουσιάζονται ισοδύναμα όσον αφορά την τιμή του κόστους στα παραδείγματα 61-70 όπου $c_{ij} = 20$ και $L = 1$, ενώ όταν το L αυξηθεί στις τρεις χρονικές περιόδους, τότε το σύστημα με συνεργασία αποκτά ένα μικρό προβάδισμα.

Όσον αφορά την ομοιομορφία των δύο θέσεων παρατηρούμε ότι η μεταβολή της τυπικής απόκλισης των ζητήσεων των δύο θέσεων ελάχιστα

| | Κόστος συστήματος με προληπτική συνεργασία | Κόστος συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις | Ποσοπαία μείωση χάρη στη συνεργασία |
|-----|---|--|---|
| A/A | E(C) | E(C) | %ΔE(C) |
| 1 | 91,29 | 96,44 | 5,34% |
| 2 | 281,16 | 289,33 | 2,82% |
| 3 | 522,00 | 530,44 | 1,59% |
| 4 | 689,33 | 723,33 | 4,70% |
| 5 | 136,93 | 144,68 | 5,36% |
| 6 | 421,70 | 434,01 | 2,84% |
| 7 | 782,93 | 795,67 | 1,60% |
| 8 | 1.033,89 | 1.085,00 | 4,71% |
| 9 | 114,39 | 120,56 | 5,12% |
| 10 | 301,88 | 313,45 | 3,69% |
| 11 | 118,85 | 136,38 | 12,85% |
| 12 | 381,89 | 409,17 | 6,67% |
| 13 | 721,67 | 750,15 | 3,80% |
| 14 | 907,88 | 1.022,94 | 11,25% |
| 15 | 178,23 | 204,58 | 12,88% |
| 16 | 572,75 | 613,76 | 6,68% |
| 17 | 1.082,38 | 1.125,24 | 3,81% |
| 18 | 1.361,63 | 1.534,42 | 11,26% |
| 19 | 149,55 | 170,48 | 12,28% |
| 20 | 404,55 | 443,27 | 8,74% |
| 21 | 179,52 | 226,18 | 20,63% |
| 22 | 606,47 | 678,55 | 10,62% |
| 23 | 1.168,29 | 1.244,01 | 6,09% |
| 24 | 1.391,88 | 1.696,38 | 17,95% |
| 25 | 269,17 | 339,28 | 20,66% |
| 26 | 909,51 | 1.017,83 | 10,64% |
| 27 | 1.752,11 | 1.866,01 | 6,10% |
| 28 | 2.087,34 | 2.544,56 | 17,97% |
| 29 | 227,28 | 282,73 | 19,61% |
| 30 | 632,75 | 735,10 | 13,92% |
| 31 | 95,37 | 96,44 | 1,11% |
| 32 | 287,68 | 289,33 | 0,57% |
| 33 | 528,96 | 530,44 | 0,28% |
| 34 | 716,32 | 723,33 | 0,97% |
| 35 | 143,04 | 144,68 | 1,13% |
| 36 | 431,51 | 434,01 | 0,58% |
| 37 | 793,36 | 795,67 | 0,29% |
| 38 | 1.074,36 | 1.085,00 | 0,98% |
| 39 | 119,28 | 120,56 | 1,06% |
| 40 | 311,06 | 313,45 | 0,76% |
| 41 | 125,96 | 136,38 | 7,64% |
| 42 | 392,66 | 409,17 | 4,03% |
| 43 | 732,95 | 750,15 | 2,29% |
| 44 | 954,20 | 1.022,94 | 6,72% |
| 45 | 188,89 | 204,58 | 7,67% |
| 46 | 588,90 | 613,76 | 4,05% |
| 47 | 1.099,30 | 1.125,24 | 2,31% |
| 48 | 1.431,12 | 1.534,42 | 6,73% |
| 49 | 158,03 | 170,48 | 7,30% |
| 50 | 419,88 | 443,27 | 5,28% |
| 51 | 186,64 | 226,18 | 17,48% |
| 52 | 616,94 | 678,55 | 9,08% |
| 53 | 1.179,15 | 1.244,01 | 5,21% |
| 54 | 1.437,62 | 1.696,38 | 15,25% |
| 55 | 279,85 | 339,28 | 17,52% |
| 56 | 925,20 | 1.017,83 | 9,10% |
| 57 | 1.768,39 | 1.866,01 | 5,23% |
| 58 | 2.156,03 | 2.544,56 | 15,27% |
| 59 | 235,61 | 282,73 | 16,67% |
| 60 | 647,85 | 735,10 | 11,87% |

Πίνακας 12: Σύγκριση του κόστους μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις

| | Κόστος συστήματος με προληπτική συνεργασία | Κόστος συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις | Ποσοπαία μείωση χάρη στη συνεργασία |
|-----|---|--|---|
| A/A | E(C) | E(C) | %ΔE(C) |
| 61 | 137,15 | 137,36 | 0,15% |
| 62 | 412,03 | 412,06 | 0,01% |
| 63 | 755,91 | 755,45 | -0,06% |
| 64 | 1.029,15 | 1.030,15 | 0,10% |
| 65 | 205,72 | 206,02 | 0,15% |
| 66 | 618,00 | 618,08 | 0,01% |
| 67 | 1.133,69 | 1.133,17 | -0,05% |
| 68 | 1.543,63 | 1.545,23 | 0,10% |
| 69 | 171,48 | 171,69 | 0,12% |
| 70 | 446,18 | 446,39 | 0,05% |
| 71 | 188,50 | 194,24 | 2,96% |
| 72 | 573,58 | 582,73 | 1,57% |
| 73 | 1.059,31 | 1.068,36 | 0,85% |
| 74 | 1.418,94 | 1.456,85 | 2,60% |
| 75 | 282,69 | 291,36 | 2,98% |
| 76 | 860,28 | 874,10 | 1,58% |
| 77 | 1.588,78 | 1.602,54 | 0,86% |
| 78 | 2.128,22 | 2.185,28 | 2,61% |
| 79 | 235,98 | 242,80 | 2,81% |
| 80 | 618,35 | 631,29 | 2,05% |
| 81 | 281,21 | 322,12 | 12,70% |
| 82 | 900,38 | 966,37 | 8,83% |
| 83 | 1.702,75 | 1.771,68 | 3,89% |
| 84 | 2.145,08 | 2.415,93 | 11,21% |
| 85 | 421,75 | 483,18 | 12,71% |
| 86 | 1.350,30 | 1.449,55 | 6,85% |
| 87 | 2.553,74 | 2.657,51 | 3,90% |
| 88 | 3.217,12 | 3.623,88 | 11,22% |
| 89 | 353,73 | 402,65 | 12,15% |
| 90 | 954,01 | 1.046,90 | 9,57% |
| 91 | 137,38 | 137,36 | -0,01% |
| 92 | 412,47 | 412,06 | -0,10% |
| 93 | 756,34 | 755,45 | -0,12% |
| 94 | 1.030,76 | 1.030,15 | -0,06% |
| 95 | 206,07 | 206,02 | -0,02% |
| 96 | 618,66 | 618,08 | -0,09% |
| 97 | 1.134,44 | 1.133,17 | -0,11% |
| 98 | 1.546,05 | 1.545,23 | -0,05% |
| 99 | 171,77 | 171,69 | -0,05% |
| 100 | 446,77 | 446,39 | -0,09% |
| 101 | 193,13 | 194,24 | 0,57% |
| 102 | 582,13 | 582,73 | 0,10% |
| 103 | 1.069,29 | 1.068,36 | -0,09% |
| 104 | 1.450,54 | 1.456,85 | 0,43% |
| 105 | 289,64 | 291,36 | 0,59% |
| 106 | 873,10 | 874,10 | 0,11% |
| 107 | 1.603,64 | 1.602,54 | -0,07% |
| 108 | 2.175,61 | 2.185,28 | 0,44% |
| 109 | 241,57 | 242,80 | 0,51% |
| 110 | 629,70 | 631,29 | 0,25% |
| 111 | 297,51 | 322,12 | 7,54% |
| 112 | 926,39 | 966,37 | 4,19% |
| 113 | 1.730,63 | 1.771,68 | 2,32% |
| 114 | 2.251,79 | 2.415,93 | 6,79% |
| 115 | 446,15 | 483,18 | 7,66% |
| 116 | 1.389,34 | 1.449,55 | 4,16% |
| 117 | 2.595,54 | 2.657,51 | 2,33% |
| 118 | 3.377,21 | 3.623,88 | 6,81% |
| 119 | 373,15 | 402,65 | 7,33% |
| 120 | 990,52 | 1.046,90 | 5,38% |

Πίνακας 12: Σύγκριση του κόστους μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις

επηρεάζει τη μείωση στο κόστος που έχει το σύστημα με συνεργασία έναντι του συστήματος χωρίς συνεργασία. Καθώς όμως διαφοροποιείται η μέση τιμή της ζήτησης της δεύτερης θέσης ως προς την πρώτη, το ποσοστό αυτής της μείωσης ελαττώνεται που σημαίνει ότι η συνεργασία δίνει μικρότερο πλεονέκτημα στο σύστημα όταν αυξάνεται η διαφορά στις μέσες τιμές της ζήτησης των δύο θέσεων.

Στον πίνακα 13 γίνεται η σύγκριση του μέγιστου αποθέματος που επιλέγει μια θέση όταν ανήκει στο σύστημα με συνεργασία με το μέγιστο απόθεμα που επιλέγει όταν ανήκει στο σύστημα χωρίς συνεργασία. Σε όλα τα παραδείγματα (εκτός ελαχίστων εξαιρέσεων) υπάρχει μία σαφής τάση να διατηρείται μικρότερο μέγιστο απόθεμα στις θέσεις του συστήματος που εφαρμόζει συνεργασία.

Για μία ακόμη φορά φαίνεται καθαρά ότι η μεγαλύτερη ποσοστιαία μείωση του κόστους διατηρουμένων των άλλων στοιχείων σταθερών παρατηρείται όταν το πηλίκο μ_2/μ_1 παίρνει τιμές κοντά στη μονάδα, ενώ καθώς αυτό το πηλίκο απομακρύνεται από τη μονάδα, η ποσοστιαία μείωση του μέγιστου αποθέματος ελαττώνεται. Αντίθετα όμως με ό,τι συνέβαινε πριν, καθώς αυξάνεται η τυπική απόκλιση της ζήτησης μιας θέσης, η ποσοστιαία μείωση στο μέγιστο απόθεμα αυξάνεται επειδή υπάρχει εκτός από τη διατήρηση υψηλότερου αποθέματος και η δυνατότητα της πλευρικής συνεργασίας για την αντιμετώπιση της μεγαλύτερης αβεβαιότητας που προστίθεται.

Η αύξηση του χρόνου ικανοποίησης των παραγγελιών επιφέρει όπως είναι αναμενόμενο μεγαλύτερη μείωση στο μέγιστο απόθεμα που διατηρεί μία

| | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις | Ποσοπαία μείωση χάρη στη συνεργασία | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις | Ποσοπαία μείωση χάρη στη συνεργασία |
|-----|--|-------------------------------------|---|--|-------------------------------------|---|
| A/A | S ₁ | S ₁ | %ΔS ₁ | S ₂ | S ₂ | %ΔS ₂ |
| 1 | 232 | 234 | 0,85% | 232 | 234 | 0,85% |
| 2 | 233 | 234 | 0,43% | 1166 | 1172 | 0,51% |
| 3 | 234 | 234 | 0,00% | 2337 | 2345 | 0,34% |
| 4 | 1162 | 1172 | 0,85% | 2322 | 2345 | 0,98% |
| 5 | 248 | 252 | 1,59% | 248 | 252 | 1,59% |
| 6 | 250 | 252 | 0,79% | 1249 | 1259 | 0,79% |
| 7 | 251 | 252 | 0,40% | 2508 | 2518 | 0,40% |
| 8 | 1242 | 1259 | 1,35% | 2482 | 2518 | 1,43% |
| 9 | 232 | 234 | 0,85% | 248 | 252 | 1,59% |
| 10 | 249 | 252 | 1,19% | 1163 | 1172 | 0,77% |
| 11 | 442 | 449 | 1,56% | 441 | 449 | 1,78% |
| 12 | 445 | 449 | 0,89% | 2225 | 2244 | 0,85% |
| 13 | 446 | 449 | 0,67% | 4466 | 4488 | 0,49% |
| 14 | 2211 | 2244 | 1,47% | 4426 | 4488 | 1,38% |
| 15 | 462 | 473 | 2,33% | 462 | 473 | 2,33% |
| 16 | 467 | 473 | 1,27% | 2338 | 2366 | 1,18% |
| 17 | 468 | 473 | 1,06% | 4700 | 4732 | 0,68% |
| 18 | 2313 | 2366 | 2,24% | 4641 | 4732 | 1,92% |
| 19 | 441 | 449 | 1,78% | 464 | 473 | 1,90% |
| 20 | 466 | 473 | 1,48% | 2220 | 2244 | 1,07% |
| 21 | 1164 | 1181 | 1,44% | 1163 | 1181 | 1,52% |
| 22 | 1165 | 1181 | 1,35% | 5863 | 5905 | 0,71% |
| 23 | 1166 | 1181 | 1,27% | 11762 | 11809 | 0,40% |
| 24 | 5827 | 5905 | 1,32% | 11655 | 11809 | 1,30% |
| 25 | 1196 | 1221 | 2,05% | 1194 | 1221 | 2,21% |
| 26 | 1203 | 1221 | 1,47% | 6041 | 6107 | 1,08% |
| 27 | 1211 | 1221 | 0,82% | 12131 | 12214 | 0,68% |
| 28 | 5985 | 6107 | 2,00% | 11988 | 12214 | 1,85% |
| 29 | 1176 | 1181 | 0,42% | 1185 | 1221 | 2,95% |
| 30 | 1202 | 1221 | 1,56% | 5845 | 5905 | 1,02% |
| 31 | 234 | 234 | 0,00% | 234 | 234 | 0,00% |
| 32 | 234 | 234 | 0,00% | 1170 | 1172 | 0,17% |
| 33 | 234 | 234 | 0,00% | 2343 | 2345 | 0,09% |
| 34 | 1169 | 1172 | 0,26% | 2338 | 2345 | 0,30% |
| 35 | 251 | 252 | 0,40% | 251 | 252 | 0,40% |
| 36 | 251 | 252 | 0,40% | 1256 | 1259 | 0,24% |
| 37 | 252 | 252 | 0,00% | 2514 | 2518 | 0,16% |
| 38 | 1254 | 1259 | 0,40% | 2509 | 2518 | 0,36% |
| 39 | 234 | 234 | 0,00% | 251 | 252 | 0,40% |
| 40 | 251 | 252 | 0,40% | 1170 | 1172 | 0,17% |
| 41 | 443 | 449 | 1,34% | 444 | 449 | 1,11% |
| 42 | 445 | 449 | 0,89% | 2230 | 2244 | 0,62% |
| 43 | 445 | 449 | 0,89% | 4473 | 4488 | 0,33% |
| 44 | 2216 | 2244 | 1,25% | 4443 | 4488 | 1,00% |
| 45 | 465 | 473 | 1,69% | 465 | 473 | 1,69% |
| 46 | 467 | 473 | 1,27% | 2345 | 2366 | 0,89% |
| 47 | 468 | 473 | 1,06% | 4709 | 4732 | 0,49% |
| 48 | 2325 | 2366 | 1,73% | 4664 | 4732 | 1,44% |
| 49 | 443 | 449 | 1,34% | 466 | 473 | 1,48% |
| 50 | 466 | 473 | 1,48% | 2227 | 2244 | 0,76% |
| 51 | 1164 | 1181 | 1,44% | 1166 | 1181 | 1,27% |
| 52 | 1167 | 1181 | 1,19% | 5867 | 5905 | 0,64% |
| 53 | 1166 | 1181 | 1,27% | 11767 | 11809 | 0,36% |
| 54 | 5823 | 5905 | 1,39% | 11679 | 11809 | 1,10% |
| 55 | 1197 | 1221 | 1,97% | 1197 | 1221 | 1,97% |
| 56 | 1196 | 1221 | 2,05% | 6055 | 6107 | 0,85% |
| 57 | 1201 | 1221 | 1,64% | 12149 | 12214 | 0,53% |
| 58 | 5993 | 6107 | 1,87% | 12009 | 12214 | 1,68% |
| 59 | 1164 | 1181 | 1,44% | 1201 | 1221 | 1,64% |
| 60 | 1198 | 1221 | 1,88% | 5855 | 5905 | 0,85% |

Πίνακας 13: Σύγκριση του μέγιστου αποθέματος μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις

| | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις | Ποσοστιαία μείωση χάρη στη συνεργασία | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις | Ποσοστιαία μείωση χάρη στη συνεργασία |
|-----|----------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| A/A | S ₁ | S ₁ | %ΔS ₁ | S ₂ | S ₂ | %ΔS ₂ |
| 61 | 258 | 258 | 0,00% | 258 | 258 | 0,00% |
| 62 | 258 | 258 | 0,00% | 1291 | 1291 | 0,00% |
| 63 | 258 | 258 | 0,00% | 2582 | 2583 | 0,04% |
| 64 | 1292 | 1291 | -0,08% | 2580 | 2583 | 0,12% |
| 65 | 287 | 287 | 0,00% | 287 | 287 | 0,00% |
| 66 | 288 | 287 | -0,35% | 1436 | 1437 | 0,07% |
| 67 | 288 | 287 | -0,35% | 2872 | 2874 | 0,07% |
| 68 | 1437 | 1437 | 0,00% | 2871 | 2874 | 0,10% |
| 69 | 258 | 258 | 0,00% | 287 | 287 | 0,00% |
| 70 | 287 | 287 | 0,00% | 1291 | 1291 | 0,00% |
| 71 | 478 | 482 | 0,83% | 479 | 482 | 0,62% |
| 72 | 480 | 482 | 0,41% | 2401 | 2412 | 0,46% |
| 73 | 480 | 482 | 0,41% | 4813 | 4824 | 0,23% |
| 74 | 2394 | 2412 | 0,75% | 4789 | 4824 | 0,73% |
| 75 | 517 | 524 | 1,34% | 518 | 524 | 1,15% |
| 76 | 520 | 524 | 0,76% | 2601 | 2618 | 0,65% |
| 77 | 521 | 524 | 0,57% | 5216 | 5236 | 0,38% |
| 78 | 2591 | 2618 | 1,03% | 5184 | 5236 | 0,99% |
| 79 | 478 | 482 | 0,83% | 518 | 524 | 1,15% |
| 80 | 519 | 524 | 0,95% | 2398 | 2412 | 0,58% |
| 81 | 1215 | 1237 | 1,78% | 1214 | 1237 | 1,86% |
| 82 | 1224 | 1237 | 1,05% | 6127 | 6183 | 0,91% |
| 83 | 1228 | 1237 | 0,73% | 12304 | 12366 | 0,50% |
| 84 | 6085 | 6183 | 1,58% | 12175 | 12366 | 1,54% |
| 85 | 1273 | 1305 | 2,45% | 1272 | 1305 | 2,53% |
| 86 | 1286 | 1305 | 1,46% | 6441 | 6525 | 1,29% |
| 87 | 1292 | 1305 | 1,00% | 12956 | 13050 | 0,72% |
| 88 | 6378 | 6525 | 2,25% | 12765 | 13050 | 2,18% |
| 89 | 1215 | 1237 | 1,78% | 1274 | 1305 | 2,38% |
| 90 | 1281 | 1305 | 1,84% | 6110 | 6183 | 1,18% |
| 91 | 258 | 258 | 0,00% | 258 | 258 | 0,00% |
| 92 | 258 | 258 | 0,00% | 1291 | 1291 | 0,00% |
| 93 | 258 | 258 | 0,00% | 2582 | 2583 | 0,04% |
| 94 | 1292 | 1291 | -0,08% | 2581 | 2583 | 0,08% |
| 95 | 287 | 287 | 0,00% | 287 | 287 | 0,00% |
| 96 | 288 | 287 | -0,35% | 1437 | 1437 | 0,00% |
| 97 | 288 | 287 | -0,35% | 2872 | 2874 | 0,07% |
| 98 | 1438 | 1437 | -0,07% | 2874 | 2874 | 0,00% |
| 99 | 258 | 258 | 0,00% | 287 | 287 | 0,00% |
| 100 | 288 | 287 | -0,35% | 1291 | 1291 | 0,00% |
| 101 | 481 | 482 | 0,21% | 482 | 482 | 0,00% |
| 102 | 482 | 482 | 0,00% | 2410 | 2412 | 0,08% |
| 103 | 481 | 482 | 0,21% | 4823 | 4824 | 0,02% |
| 104 | 2407 | 2412 | 0,21% | 4818 | 4824 | 0,12% |
| 105 | 522 | 524 | 0,38% | 522 | 524 | 0,38% |
| 106 | 522 | 524 | 0,38% | 2615 | 2618 | 0,11% |
| 107 | 523 | 524 | 0,19% | 5235 | 5236 | 0,02% |
| 108 | 2610 | 2618 | 0,31% | 5226 | 5236 | 0,19% |
| 109 | 481 | 482 | 0,21% | 523 | 524 | 0,19% |
| 110 | 522 | 524 | 0,38% | 2409 | 2412 | 0,12% |
| 111 | 1223 | 1237 | 1,13% | 1222 | 1237 | 1,21% |
| 112 | 1228 | 1237 | 0,73% | 6146 | 6183 | 0,60% |
| 113 | 1230 | 1237 | 0,57% | 12325 | 12366 | 0,33% |
| 114 | 6119 | 6183 | 1,04% | 12240 | 12366 | 1,02% |
| 115 | 1284 | 1305 | 1,61% | 1283 | 1305 | 1,69% |
| 116 | 1292 | 1305 | 1,00% | 6469 | 6525 | 0,86% |
| 117 | 1296 | 1305 | 0,69% | 12988 | 13050 | 0,48% |
| 118 | 6429 | 6525 | 1,47% | 12859 | 13050 | 1,46% |
| 119 | 1223 | 1237 | 1,13% | 1284 | 1305 | 1,61% |
| 120 | 1289 | 1305 | 1,23% | 6135 | 6183 | 0,78% |

Πίνακας 13: Σύγκριση του μέγιστου αποθέματος μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις

θέση, ενώ αντίθετα όταν αυξάνει το κόστος έλλειψης μία θέση δεν μπορεί να ριψοκινδυνεύσει βασιζόμενη στην πλευρική συνεργασία τη μείωση του μέγιστου αποθέματος, επειδή το κόστος έλλειψης είναι υψηλό. Για αυτό και παρατηρούμε ότι στα παραδείγματα που το κόστος έλλειψης παίρνει μεγάλες τιμές και ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών μικρές, η διαφορά στο μέγιστο απόθεμα που διατηρεί μία θέση σε κάθε ένα από τα δύο συστήματα είναι αμελητέα και μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις το σύστημα χωρίς συνεργασία διατηρεί χαμηλότερο μέγιστο απόθεμα.

Τέλος στον πίνακα 14 έχουμε τη σύγκριση για το βαθμό εξυπηρέτησης των δύο συστημάτων. Βλέπουμε ότι το σύστημα με συνεργασία υπερτερεί στον τομέα αυτό, καθώς στη συντριπτική πλειοψηφία των παραδειγμάτων παρουσιάζει μεγαλύτερο βαθμό εξυπηρέτησης.

Η αύξηση αυτή στο βαθμό εξυπηρέτησης μεγαλώνει καθώς αυξάνεται ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών, οπότε όπως έχουμε πει η πλευρική συνεργασία αποκτά περισσότερες δυνατότητες.

Ακόμη η βελτίωση του βαθμού εξυπηρέτησης γίνεται μικρότερη καθώς το πηλίκιο μ_2/μ_1 αυξάνεται από 1 σε 5 και τελικά σε 10. Όταν αυξάνεται η τυπική απόκλιση τα αποτελέσματα του συστήματος με συνεργασία είναι καλύτερα. Έτσι για παράδειγμα στο πρόβλημα 1 όπου $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 20, 100, 20)$ η αύξηση του βαθμού εξυπηρέτησης είναι 0,18%, στο πρόβλημα 9 όπου $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 20, 100, 30)$ είναι 0,21% και στο πρόβλημα 9 όπου $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2) = (100, 30, 100, 30)$ είναι 0,28%.

| | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις | Αύξηση χάρη στη συνεργασία |
|-----|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| A/A | BE | BE | ΔBE |
| 1 | 98,66% | 98,48% | 0,18% |
| 2 | 98,57% | 98,48% | 0,09% |
| 3 | 98,54% | 98,48% | 0,06% |
| 4 | 98,64% | 98,48% | 0,16% |
| 5 | 98,00% | 97,72% | 0,28% |
| 6 | 97,87% | 97,71% | 0,16% |
| 7 | 97,83% | 97,71% | 0,12% |
| 8 | 97,94% | 97,71% | 0,23% |
| 9 | 98,31% | 98,10% | 0,21% |
| 10 | 98,47% | 98,35% | 0,12% |
| 11 | 98,25% | 97,84% | 0,41% |
| 12 | 98,05% | 97,84% | 0,21% |
| 13 | 97,96% | 97,84% | 0,12% |
| 14 | 98,20% | 97,84% | 0,36% |
| 15 | 97,34% | 96,77% | 0,57% |
| 16 | 97,08% | 96,77% | 0,31% |
| 17 | 96,94% | 96,77% | 0,17% |
| 18 | 97,28% | 96,77% | 0,51% |
| 19 | 97,80% | 97,30% | 0,50% |
| 20 | 97,98% | 97,66% | 0,32% |
| 21 | 97,31% | 96,43% | 0,87% |
| 22 | 96,84% | 96,43% | 0,41% |
| 23 | 96,66% | 96,43% | 0,23% |
| 24 | 97,17% | 96,43% | 0,74% |
| 25 | 95,93% | 94,64% | 1,29% |
| 26 | 95,29% | 94,64% | 0,65% |
| 27 | 95,00% | 94,64% | 0,36% |
| 28 | 95,75% | 94,64% | 1,11% |
| 29 | 96,60% | 95,53% | 1,06% |
| 30 | 96,75% | 96,13% | 0,61% |
| 31 | 98,65% | 98,48% | 0,17% |
| 32 | 98,56% | 98,48% | 0,08% |
| 33 | 98,54% | 98,48% | 0,06% |
| 34 | 98,61% | 98,48% | 0,13% |
| 35 | 97,97% | 97,72% | 0,25% |
| 36 | 97,83% | 97,71% | 0,12% |
| 37 | 97,80% | 97,71% | 0,09% |
| 38 | 97,93% | 97,71% | 0,22% |
| 39 | 98,31% | 98,10% | 0,21% |
| 40 | 98,48% | 98,35% | 0,13% |
| 41 | 98,36% | 97,84% | 0,51% |
| 42 | 98,10% | 97,84% | 0,26% |
| 43 | 97,99% | 97,84% | 0,15% |
| 44 | 98,27% | 97,84% | 0,43% |
| 45 | 97,49% | 96,77% | 0,72% |
| 46 | 97,14% | 96,77% | 0,37% |
| 47 | 96,99% | 96,77% | 0,22% |
| 48 | 97,40% | 96,77% | 0,63% |
| 49 | 97,88% | 97,30% | 0,58% |
| 50 | 98,03% | 97,66% | 0,37% |
| 51 | 97,44% | 96,43% | 1,01% |
| 52 | 96,93% | 96,43% | 0,50% |
| 53 | 96,71% | 96,43% | 0,28% |
| 54 | 97,29% | 96,43% | 0,86% |
| 55 | 96,10% | 94,64% | 1,46% |
| 56 | 95,40% | 94,64% | 0,76% |
| 57 | 95,07% | 94,64% | 0,43% |
| 58 | 95,93% | 94,64% | 1,29% |
| 59 | 96,76% | 95,53% | 1,23% |
| 60 | 96,84% | 96,13% | 0,71% |

Πίνακας 14: Σύγκριση βαθμών εξυπηρέτησης μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις

| | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις | Αύξηση χάρη στη συνεργασία |
|-----|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| A/A | BE | BE | ΔBE |
| 61 | 99,80% | 99,80% | 0,00% |
| 62 | 99,80% | 99,80% | 0,00% |
| 63 | 99,80% | 99,80% | 0,00% |
| 64 | 99,80% | 99,80% | 0,00% |
| 65 | 99,70% | 99,69% | 0,01% |
| 66 | 99,70% | 99,69% | 0,01% |
| 67 | 99,70% | 99,69% | 0,01% |
| 68 | 99,70% | 99,69% | 0,01% |
| 69 | 99,75% | 99,74% | 0,01% |
| 70 | 99,79% | 99,78% | 0,00% |
| 71 | 99,78% | 99,71% | 0,07% |
| 72 | 99,75% | 99,71% | 0,04% |
| 73 | 99,74% | 99,71% | 0,03% |
| 74 | 99,77% | 99,71% | 0,06% |
| 75 | 99,66% | 99,57% | 0,09% |
| 76 | 99,63% | 99,57% | 0,06% |
| 77 | 99,61% | 99,57% | 0,04% |
| 78 | 99,66% | 99,57% | 0,09% |
| 79 | 99,72% | 99,64% | 0,08% |
| 80 | 99,74% | 99,69% | 0,05% |
| 81 | 99,70% | 99,52% | 0,18% |
| 82 | 99,63% | 99,52% | 0,11% |
| 83 | 99,59% | 99,52% | 0,07% |
| 84 | 99,69% | 99,52% | 0,17% |
| 85 | 99,57% | 99,28% | 0,29% |
| 86 | 99,44% | 99,28% | 0,16% |
| 87 | 99,38% | 99,28% | 0,10% |
| 88 | 99,53% | 99,28% | 0,25% |
| 89 | 99,63% | 99,40% | 0,22% |
| 90 | 99,63% | 99,48% | 0,15% |
| 91 | 99,79% | 99,80% | -0,01% |
| 92 | 99,79% | 99,80% | -0,01% |
| 93 | 99,79% | 99,80% | -0,01% |
| 94 | 99,79% | 99,80% | -0,01% |
| 95 | 99,69% | 99,69% | 0,00% |
| 96 | 99,70% | 99,69% | 0,01% |
| 97 | 99,69% | 99,69% | 0,00% |
| 98 | 99,70% | 99,69% | 0,01% |
| 99 | 99,74% | 99,74% | 0,00% |
| 100 | 99,78% | 99,78% | 0,00% |
| 101 | 99,75% | 99,71% | 0,04% |
| 102 | 99,73% | 99,71% | 0,02% |
| 103 | 99,72% | 99,71% | 0,01% |
| 104 | 99,75% | 99,71% | 0,04% |
| 105 | 99,62% | 99,57% | 0,05% |
| 106 | 99,60% | 99,57% | 0,03% |
| 107 | 99,59% | 99,57% | 0,02% |
| 108 | 99,62% | 99,57% | 0,05% |
| 109 | 99,69% | 99,64% | 0,05% |
| 110 | 99,72% | 99,69% | 0,02% |
| 111 | 99,72% | 99,52% | 0,20% |
| 112 | 99,64% | 99,52% | 0,12% |
| 113 | 99,60% | 99,52% | 0,08% |
| 114 | 99,70% | 99,52% | 0,18% |
| 115 | 99,58% | 99,28% | 0,30% |
| 116 | 99,47% | 99,28% | 0,19% |
| 117 | 99,40% | 99,28% | 0,12% |
| 118 | 99,55% | 99,28% | 0,27% |
| 119 | 99,65% | 99,40% | 0,24% |
| 120 | 99,65% | 99,48% | 0,17% |

Πίνακας 14: Σύγκριση βαθμών εξυπηρέτησης μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις

5.3 Σύστημα δύο συνεργαζόμενων θέσεων με αμελητέο χρόνο πλευρικής μεταφοράς

Το σύστημα αυτό έχει την ίδια βασική δομή και τα ίδια χαρακτηριστικά με το πρόβλημα το οποίο μελετάμε. Έτσι έχουμε και πάλι ένα σύστημα που αποτελείται από μία κεντρική αποθήκη και δύο θέσεις στις οποίες εκδηλώνεται η ζήτηση, οι οποίες εφαρμόζουν πολιτική περιοδικής επιθεώρησης για την αναπλήρωση του αποθέματός τους με χρόνο επιθεώρησης μία περίοδο.

Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα η συνεργασία συμβαίνει μετά την εκδήλωση της ζήτησης σε ακαριαίο χρόνο. Συγκεκριμένα αμέσως αφού εκδηλωθεί η ζήτηση στις δύο θέσεις και πριν ολοκληρωθεί η διαδικασία ικανοποίησής της, εάν το απόθεμα μιας θέσης δεν επαρκεί για την κάλυψη όλου του αποθέματος που ζητείται και ταυτόχρονα η άλλη θέση διαθέτει απόθεμα μεγαλύτερο από τη ζήτησή της, τότε είναι δυνατόν να μεταφερθεί απόθεμα μεταξύ των δύο θέσεων για να αντιμετωπιστούν άμεσες καταστάσεις έλλειψης.

Καταλαβαίνουμε βέβαια ότι σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει η περίπτωση άσκοπης μεταφοράς αποθέματος, αφού κάθε φορά μετακινείται μόνο το απόθεμα που θα χρησιμοποιηθεί άμεσα. Έτσι λογικά το σύστημα αυτό θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από μικρότερο αναμενόμενο κόστος ανά περίοδο.

Το γεγονός αυτό είναι κάτι που επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα όπως φαίνεται και από τους παρακάτω πίνακες που παρουσιάζουν τη σύγκριση ανάμεσα στα δύο συστήματα.

Συγκεκριμένα από τον πίνακα 15 όπου έχουμε τη σύγκριση του κόστους των δύο συστημάτων βλέπουμε ότι σε όλες ανεξαιρέτως τις περιπτώσεις το σύστημα με επείγουσα συνεργασία παρουσιάζει χαμηλότερη τιμή για το μέσο κόστος. Μάλιστα η αύξηση στο κόστος εξαιτίας του μη αμελητέου χρόνου πλευρικής μεταφοράς ξεκινάει από 2,64% και φτάνει μέχρι και 27,64%.

Τα δύο συστήματα παρουσιάζουν τις μικρότερες διαφορές στο κόστος όταν ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών είναι μεγάλος και όταν το πηλίκιο μ_2/μ_1 απέχει περισσότερο από τη μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή του πηλίκου αυτού μειώνει την αποτελεσματικότητα του συστήματος με επείγουσα συνεργασία (όπως ακριβώς και με το σύστημα με προληπτική συνεργασία) και μάλιστα σε μεγαλύτερο βαθμό.

Επίσης όταν από ένα πρόβλημα με κοινό το συντελεστή διασποράς σ/μ για τις δύο θέσεις, μεταβούμε σε άλλο πρόβλημα στο οποίο ο συντελεστής αυτός είναι πάλι κοινός για τις δύο θέσεις αλλάζοντας μόνο τις τυπικές αποκλίσεις των δύο θέσεων, η ποσοστιαία διαφορά του κόστους ανάμεσα στα δύο συστήματα είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Ο πίνακας 16 παρουσιάζει τη σύγκριση ανάμεσα στο μέγιστο απόθεμα που επιλέγουν οι θέσεις ενός συστήματος με προληπτική συνεργασία και σ' αυτό που επιλέγουν οι θέσεις ενός συστήματος με επείγουσα συνεργασία. Η μεγαλύτερη ευελιξία που έχει η επείγουσα συνεργασία έχει ως αποτέλεσμα το αντίστοιχο σύστημα να διατηρεί σχεδόν σ' όλες τις περιπτώσεις μικρότερο

| | Προληπτική συνεργασία | Επείγουσα συνεργασία | Ποσοπαία αύξηση |
|-----|--------------------------|-------------------------|--------------------|
| A/A | E(C) | E(C) | %ΔE(C) |
| 1 | 91,29 | 71,53 | 27,62% |
| 2 | 281,16 | 250,77 | 12,12% |
| 3 | 522,00 | 489,72 | 6,59% |
| 4 | 689,33 | 560,55 | 22,97% |
| 5 | 136,93 | 107,28 | 27,64% |
| 6 | 421,70 | 376,13 | 12,12% |
| 7 | 782,93 | 734,52 | 6,59% |
| 8 | 1.033,89 | 840,75 | 22,97% |
| 9 | 114,39 | 91,01 | 25,69% |
| 10 | 301,88 | 258,77 | 16,66% |
| 11 | 118,85 | 100,02 | 18,83% |
| 12 | 381,89 | 353,05 | 8,17% |
| 13 | 721,67 | 691,04 | 4,43% |
| 14 | 907,88 | 785,63 | 15,56% |
| 15 | 178,23 | 150,00 | 18,82% |
| 16 | 572,75 | 529,51 | 8,17% |
| 17 | 1.082,38 | 1.036,44 | 4,43% |
| 18 | 1.361,63 | 1.178,26 | 15,56% |
| 19 | 149,55 | 127,33 | 17,45% |
| 20 | 404,55 | 363,60 | 11,26% |
| 21 | 179,52 | 163,21 | 9,99% |
| 22 | 606,47 | 580,09 | 4,55% |
| 23 | 1.168,29 | 1.138,29 | 2,64% |
| 24 | 1.391,88 | 1.283,87 | 8,41% |
| 25 | 269,17 | 244,73 | 9,99% |
| 26 | 909,51 | 869,96 | 4,55% |
| 27 | 1.752,11 | 1.707,10 | 2,64% |
| 28 | 2.087,34 | 1.925,41 | 8,41% |
| 29 | 227,28 | 207,67 | 9,44% |
| 30 | 632,75 | 596,09 | 6,15% |
| 31 | 95,37 | 77,67 | 22,79% |
| 32 | 287,68 | 259,74 | 10,76% |
| 33 | 528,96 | 498,98 | 6,01% |
| 34 | 716,32 | 600,12 | 19,36% |
| 35 | 143,04 | 116,49 | 22,79% |
| 36 | 431,51 | 389,57 | 10,77% |
| 37 | 793,36 | 748,40 | 6,01% |
| 38 | 1.074,36 | 900,09 | 19,36% |
| 39 | 119,28 | 98,17 | 21,50% |
| 40 | 311,06 | 271,74 | 14,47% |
| 41 | 125,96 | 106,68 | 18,07% |
| 42 | 392,66 | 362,78 | 8,24% |
| 43 | 732,95 | 701,09 | 4,54% |
| 44 | 954,20 | 828,40 | 15,19% |
| 45 | 188,89 | 159,99 | 18,06% |
| 46 | 588,90 | 544,11 | 8,23% |
| 47 | 1.099,30 | 1.051,50 | 4,55% |
| 48 | 1.431,12 | 1.242,42 | 15,19% |
| 49 | 158,03 | 135,07 | 17,00% |
| 50 | 419,88 | 377,65 | 11,18% |
| 51 | 186,64 | 169,51 | 10,11% |
| 52 | 616,94 | 589,30 | 4,69% |
| 53 | 1.179,15 | 1.147,81 | 2,73% |
| 54 | 1.437,62 | 1.324,49 | 8,54% |
| 55 | 279,85 | 254,19 | 10,09% |
| 56 | 925,20 | 883,81 | 4,68% |
| 57 | 1.768,39 | 1.721,39 | 2,73% |
| 58 | 2.156,03 | 1.986,35 | 8,54% |
| 59 | 235,61 | 215,08 | 9,55% |
| 60 | 647,85 | 609,45 | 6,30% |

Πίνακας 15: Σύγκριση του κόστους μεταξύ του συστήματος με προληπτική και του συστήματος με επείγουσα συνεργασία

| | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με επείγουσα συνεργασία | Ποσοπαία αύξηση | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με επείγουσα συνεργασία | Ποσοπαία αύξηση |
|-----|----------------------------------|---------------------------------|------------------|----------------------------------|---------------------------------|------------------|
| A/A | S ₁ | S ₁ | %ΔS ₁ | S ₂ | S ₂ | %ΔS ₂ |
| 1 | 232 | 226 | 2,65% | 232 | 225 | 3,11% |
| 2 | 233 | 230 | 1,30% | 1166 | 1149 | 1,48% |
| 3 | 234 | 231 | 1,30% | 2337 | 2319 | 0,78% |
| 4 | 1162 | 1129 | 2,92% | 2322 | 2267 | 2,43% |
| 5 | 248 | 239 | 3,77% | 248 | 237 | 4,64% |
| 6 | 250 | 247 | 1,21% | 1249 | 1221 | 2,29% |
| 7 | 251 | 249 | 0,80% | 2508 | 2475 | 1,33% |
| 8 | 1242 | 1192 | 4,19% | 2482 | 2400 | 3,42% |
| 9 | 232 | 231 | 0,43% | 248 | 233 | 6,44% |
| 10 | 249 | 240 | 3,75% | 1163 | 1144 | 1,66% |
| 11 | 442 | 435 | 1,61% | 441 | 435 | 1,38% |
| 12 | 445 | 440 | 1,14% | 2225 | 2212 | 0,59% |
| 13 | 446 | 441 | 1,13% | 4466 | 4451 | 0,34% |
| 14 | 2211 | 2189 | 1,01% | 4426 | 4369 | 1,30% |
| 15 | 462 | 451 | 2,44% | 462 | 455 | 1,54% |
| 16 | 467 | 463 | 0,86% | 2338 | 2315 | 0,99% |
| 17 | 468 | 469 | -0,21% | 4700 | 4673 | 0,58% |
| 18 | 2313 | 2268 | 1,98% | 4641 | 4566 | 1,64% |
| 19 | 441 | 445 | -0,90% | 464 | 445 | 4,27% |
| 20 | 466 | 460 | 1,30% | 2220 | 2199 | 0,95% |
| 21 | 1164 | 1158 | 0,52% | 1163 | 1158 | 0,43% |
| 22 | 1165 | 1158 | 0,60% | 5863 | 5856 | 0,12% |
| 23 | 1166 | 1165 | 0,09% | 11762 | 11750 | 0,10% |
| 24 | 5827 | 5803 | 0,41% | 11655 | 11611 | 0,38% |
| 25 | 1196 | 1188 | 0,67% | 1194 | 1186 | 0,67% |
| 26 | 1203 | 1202 | 0,08% | 6041 | 6020 | 0,35% |
| 27 | 1211 | 1206 | 0,41% | 12131 | 12116 | 0,12% |
| 28 | 5985 | 5936 | 0,83% | 11988 | 11934 | 0,45% |
| 29 | 1176 | 1173 | 0,26% | 1185 | 1175 | 0,85% |
| 30 | 1202 | 1195 | 0,59% | 5845 | 5830 | 0,26% |
| 31 | 234 | 227 | 3,08% | 234 | 227 | 3,08% |
| 32 | 234 | 231 | 1,30% | 1170 | 1153 | 1,47% |
| 33 | 234 | 231 | 1,30% | 2343 | 2324 | 0,82% |
| 34 | 1169 | 1139 | 2,63% | 2338 | 2280 | 2,54% |
| 35 | 251 | 241 | 4,15% | 251 | 240 | 4,58% |
| 36 | 251 | 246 | 2,03% | 1256 | 1230 | 2,11% |
| 37 | 252 | 247 | 2,02% | 2514 | 2486 | 1,13% |
| 38 | 1254 | 1207 | 3,89% | 2509 | 2421 | 3,63% |
| 39 | 234 | 228 | 2,63% | 251 | 240 | 4,58% |
| 40 | 251 | 243 | 3,29% | 1170 | 1149 | 1,83% |
| 41 | 443 | 437 | 1,37% | 444 | 437 | 1,60% |
| 42 | 445 | 443 | 0,45% | 2230 | 2215 | 0,68% |
| 43 | 445 | 445 | 0,00% | 4473 | 4455 | 0,40% |
| 44 | 2216 | 2191 | 1,14% | 4443 | 4389 | 1,23% |
| 45 | 465 | 456 | 1,97% | 465 | 456 | 1,97% |
| 46 | 467 | 465 | 0,43% | 2345 | 2319 | 1,12% |
| 47 | 468 | 466 | 0,43% | 4709 | 4683 | 0,56% |
| 48 | 2325 | 2285 | 1,75% | 4664 | 4585 | 1,72% |
| 49 | 443 | 438 | 1,14% | 466 | 456 | 2,19% |
| 50 | 466 | 463 | 0,65% | 2227 | 2203 | 1,09% |
| 51 | 1164 | 1159 | 0,43% | 1166 | 1160 | 0,52% |
| 52 | 1167 | 1167 | 0,00% | 5867 | 5853 | 0,24% |
| 53 | 1166 | 1172 | -0,51% | 11767 | 11748 | 0,16% |
| 54 | 5823 | 5801 | 0,38% | 11679 | 11634 | 0,39% |
| 55 | 1197 | 1190 | 0,59% | 1197 | 1189 | 0,67% |
| 56 | 1196 | 1205 | -0,75% | 6055 | 6025 | 0,50% |
| 57 | 1201 | 1207 | -0,50% | 12149 | 12123 | 0,21% |
| 58 | 5993 | 5952 | 0,69% | 12009 | 11950 | 0,49% |
| 59 | 1164 | 1158 | 0,52% | 1201 | 1194 | 0,59% |
| 60 | 1198 | 1201 | -0,25% | 5855 | 5831 | 0,41% |

Πίνακας 16: Σύγκριση του μέγιστου αποθέματος μεταξύ του συστήματος με προληπτική συνεργασία και του συστήματος με επείγουσα συνεργασία

μέγιστο απόθεμα. Η διαφορά αυτή μειώνεται καθώς ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών αυξάνεται, ενώ σε γενικές γραμμές καθώς αυξάνεται το πηλίκιο μ_2/μ_1 και διατηρούνται όλα τα άλλα μεγέθη σταθερά, η ποσοστιαία διαφορά του μέγιστου αποθέματος που διατηρεί η δεύτερη θέση μειώνεται ανάμεσα στα δύο συστήματα.

Τέλος στον πίνακα 17 έχουμε τη σύγκριση των βαθμών εξυπηρέτησης για τα δύο συστήματα. Το σύστημα με επείγουσα συνεργασία εμφανίζει σε όλα ανεξαιρέτως τα παραδείγματα υψηλότερους βαθμούς εξυπηρέτησης. Η αύξηση αυτή κυμαίνεται από 0,04% στη χειρότερη μέχρι 0,83% στην καλύτερη περίπτωση. Οι μικρότερες διαφορές ανάμεσα στους βαθμούς εξυπηρέτησης των δύο συστημάτων παρουσιάζονται σε παραδείγματα στα οποία υπάρχει μεγάλη διαφορά στις μέσες τιμές των ζητήσεων των δύο θέσεων.

5.4 Συνολική σύγκριση του κόστους ανάμεσα στα τρία συστήματα

Για να γίνουν αντιληπτές οι διαφορές ανάμεσα στα τρία συστήματα μπορεί να γίνει μία συνολική σύγκριση των επιπέδων του κόστους που παρουσιάζει το καθένα από αυτά. Συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας ως κοινή βάση το κόστος του συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις μπορεί να υπολογιστεί η ποσοστιαία μείωση στο κόστος που επιτυγχάνεται με τη χρήση καθενός από τα άλλα δύο συστήματα. Μ' αυτόν τον τρόπο γίνεται πιο σαφής η αποτελεσματικότητα που έχει κάθε ένας από τους δύο τρόπους

| | Σύστημα με προληπτική συνεργασία | Σύστημα με επείγουσα συνεργασία | Αύξηση χάρη στην επείγουσα συνεργασία |
|-----|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| A/A | ΒΕ | ΒΕ | ΔΒΕ |
| 1 | 98,66% | 99,00% | 0,34% |
| 2 | 98,57% | 98,80% | 0,23% |
| 3 | 98,54% | 98,60% | 0,06% |
| 4 | 98,64% | 98,90% | 0,26% |
| 5 | 98,00% | 98,50% | 0,50% |
| 6 | 97,87% | 98,10% | 0,23% |
| 7 | 97,83% | 97,90% | 0,07% |
| 8 | 97,94% | 98,40% | 0,46% |
| 9 | 98,31% | 98,70% | 0,40% |
| 10 | 98,47% | 98,70% | 0,23% |
| 11 | 98,25% | 98,50% | 0,25% |
| 12 | 98,05% | 98,20% | 0,15% |
| 13 | 97,96% | 98,00% | 0,04% |
| 14 | 98,20% | 98,50% | 0,30% |
| 15 | 97,34% | 97,80% | 0,46% |
| 16 | 97,08% | 97,30% | 0,22% |
| 17 | 96,94% | 97,10% | 0,16% |
| 18 | 97,28% | 97,70% | 0,42% |
| 19 | 97,80% | 98,20% | 0,40% |
| 20 | 97,98% | 98,20% | 0,22% |
| 21 | 97,31% | 97,50% | 0,20% |
| 22 | 96,84% | 97,00% | 0,16% |
| 23 | 96,66% | 96,80% | 0,14% |
| 24 | 97,17% | 97,40% | 0,23% |
| 25 | 95,93% | 96,30% | 0,37% |
| 26 | 95,29% | 95,50% | 0,21% |
| 27 | 95,00% | 95,20% | 0,20% |
| 28 | 95,75% | 96,10% | 0,35% |
| 29 | 96,60% | 96,90% | 0,31% |
| 30 | 96,75% | 97,00% | 0,25% |
| 31 | 98,65% | 99,20% | 0,55% |
| 32 | 98,56% | 98,80% | 0,24% |
| 33 | 98,54% | 98,70% | 0,16% |
| 34 | 98,61% | 99,10% | 0,49% |
| 35 | 97,97% | 98,80% | 0,83% |
| 36 | 97,83% | 98,30% | 0,47% |
| 37 | 97,80% | 98,00% | 0,20% |
| 38 | 97,93% | 98,60% | 0,67% |
| 39 | 98,31% | 98,90% | 0,60% |
| 40 | 98,48% | 98,90% | 0,42% |
| 41 | 98,36% | 98,70% | 0,34% |
| 42 | 98,10% | 98,30% | 0,20% |
| 43 | 97,99% | 98,10% | 0,11% |
| 44 | 98,27% | 98,60% | 0,33% |
| 45 | 97,49% | 98,10% | 0,61% |
| 46 | 97,14% | 97,40% | 0,26% |
| 47 | 96,99% | 97,20% | 0,21% |
| 48 | 97,40% | 97,90% | 0,50% |
| 49 | 97,88% | 98,40% | 0,52% |
| 50 | 98,03% | 98,30% | 0,27% |
| 51 | 97,44% | 97,70% | 0,26% |
| 52 | 96,93% | 97,10% | 0,17% |
| 53 | 96,71% | 96,80% | 0,09% |
| 54 | 97,29% | 97,60% | 0,31% |
| 55 | 96,10% | 96,60% | 0,50% |
| 56 | 95,40% | 95,70% | 0,30% |
| 57 | 95,07% | 95,20% | 0,13% |
| 58 | 95,93% | 96,30% | 0,37% |
| 59 | 96,76% | 97,10% | 0,34% |
| 60 | 96,84% | 97,10% | 0,26% |

Πίνακας 17: Σύγκριση βαθμών εξυπηρέτησης μεταξύ του συστήματος με προληπτική και του συστήματος με επείγουσα συνεργασία

συνεργασίας σε σχέση με την έλλειψη συνεργασίας. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στον πίνακα 18. Βέβαια η σύγκριση γίνεται μόνο για τα 60 παραδείγματα για τα οποία υπάρχουν στοιχεία και για τα τρία συστήματα. Για κάθε παράδειγμα, η ποσοστιαία μείωση στο κόστος υπολογίζεται σαν το πηλίκο της διαφοράς ανάμεσα στο κόστος του συστήματος χωρίς συνεργασία και του καθενός συστήματος με συνεργασία, προς το κόστος του συστήματος χωρίς συνεργασία. Έτσι στο πρώτο παράδειγμα η ποσοστιαία μείωση στο κόστος για το σύστημα με προληπτική συνεργασία είναι $(96,38 - 91,29) / 96,38 = 5,28\%$, ενώ για το σύστημα με επείγουσα συνεργασία είναι $(96,38 - 71,53) / 96,38 = 25,78\%$.

Όπως φαίνεται από την παρατήρηση αυτού του πίνακα, με την εφαρμογή της επείγουσας συνεργασίας, για την οποία ο χρόνος της πλευρικής συνεργασίας L_i είναι αμελητέος, έχουμε πολύ πιο δραστική μείωση στο κόστος από ότι με την εφαρμογή του τρόπου συνεργασίας με προληπτική συνεργασία, στον οποίον ο χρόνος L_i που απαιτείται για την πλευρική συνεργασία ισούται με μία χρονική περίοδο.

Επομένως αν και η εφαρμογή ενός κανόνα συνεργασίας με $L_i = 1$ σε ένα σύστημα ανεξάρτητων θέσεων επιφέρει κάποια σημαντική μείωση στο κόστος, εντούτοις η μείωση αυτή είναι μικρή όταν συγκριθεί με την αντίστοιχη μείωση που επιτυγχάνεται με την εφαρμογή ενός κανόνα συνεργασίας για τον οποίον $L_i = 0$. Αυτό το στοιχείο θα πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη από τους υπεύθυνους, έτσι ώστε να λαμβάνεται η βέλτιστη απόφαση σε συνδυασμό με τα υπάρχοντα κάθε φορά στοιχεία κατά την εφαρμογή τρόπων συνεργασίας σε τέτοια συστήματα.

| A/A | Κόστος συστήματος με ανεξάρτητες θέσεις | Κόστος συστήματος με προληπτική συνεργασία | Ποσοστιαία μείωση | Κόστος συστήματος με επείγουσα συνεργασία | Ποσοστιαία μείωση |
|-----|---|--|-------------------|---|-------------------|
| 1 | 96,38 | 91,29 | 5,28% | 71,53 | 25,78% |
| 2 | 289,30 | 281,16 | 2,81% | 250,77 | 13,32% |
| 3 | 530,41 | 522,00 | 1,59% | 489,72 | 7,67% |
| 4 | 723,33 | 689,33 | 4,70% | 560,55 | 22,50% |
| 5 | 144,58 | 136,93 | 5,29% | 107,28 | 25,80% |
| 6 | 433,96 | 421,70 | 2,83% | 376,13 | 13,33% |
| 7 | 795,63 | 782,93 | 1,60% | 734,52 | 7,68% |
| 8 | 1.085,01 | 1.033,89 | 4,71% | 840,75 | 22,51% |
| 9 | 120,48 | 114,39 | 5,05% | 91,01 | 24,46% |
| 10 | 313,40 | 301,88 | 3,68% | 258,77 | 17,43% |
| 11 | 136,46 | 118,85 | 12,90% | 100,02 | 26,70% |
| 12 | 409,24 | 381,89 | 6,68% | 353,05 | 13,73% |
| 13 | 750,18 | 721,67 | 3,80% | 691,04 | 7,88% |
| 14 | 1.022,96 | 907,88 | 11,25% | 785,63 | 23,20% |
| 15 | 204,54 | 178,23 | 12,86% | 150,00 | 26,66% |
| 16 | 613,71 | 572,75 | 6,67% | 529,51 | 13,72% |
| 17 | 1.125,24 | 1.082,38 | 3,81% | 1.036,44 | 7,89% |
| 18 | 1.534,41 | 1.361,63 | 11,26% | 1.178,26 | 23,21% |
| 19 | 170,50 | 149,55 | 12,29% | 127,33 | 25,32% |
| 20 | 443,28 | 404,55 | 8,74% | 363,60 | 17,98% |
| 21 | 226,12 | 179,52 | 20,61% | 163,21 | 27,82% |
| 22 | 678,52 | 606,47 | 10,62% | 580,09 | 14,51% |
| 23 | 1.243,98 | 1.168,29 | 6,08% | 1.138,29 | 8,50% |
| 24 | 1.696,38 | 1.391,88 | 17,95% | 1.283,87 | 24,32% |
| 25 | 339,26 | 269,17 | 20,66% | 244,73 | 27,86% |
| 26 | 1.017,78 | 909,51 | 10,64% | 869,96 | 14,52% |
| 27 | 1.865,93 | 1.752,11 | 6,10% | 1.707,10 | 8,51% |
| 28 | 2.544,45 | 2.087,34 | 17,96% | 1.925,41 | 24,33% |
| 29 | 282,69 | 227,28 | 19,60% | 207,87 | 26,54% |
| 30 | 735,09 | 632,75 | 13,92% | 596,09 | 18,91% |
| 31 | 96,38 | 95,37 | 1,05% | 77,67 | 19,41% |
| 32 | 289,30 | 287,68 | 0,56% | 259,74 | 10,22% |
| 33 | 530,41 | 528,96 | 0,27% | 498,98 | 5,93% |
| 34 | 723,33 | 716,32 | 0,97% | 600,12 | 17,03% |
| 35 | 144,58 | 143,04 | 1,07% | 116,49 | 19,43% |
| 36 | 433,96 | 431,51 | 0,56% | 389,57 | 10,23% |
| 37 | 795,63 | 793,36 | 0,29% | 748,40 | 5,94% |
| 38 | 1.085,01 | 1.074,36 | 0,98% | 900,09 | 17,04% |
| 39 | 120,48 | 119,28 | 1,00% | 98,17 | 18,52% |
| 40 | 313,40 | 311,06 | 0,75% | 271,74 | 13,29% |
| 41 | 136,46 | 125,96 | 7,69% | 106,68 | 21,82% |
| 42 | 409,24 | 392,66 | 4,05% | 362,78 | 11,35% |
| 43 | 750,18 | 732,95 | 2,30% | 701,09 | 6,54% |
| 44 | 1.022,96 | 954,20 | 6,72% | 828,40 | 19,02% |
| 45 | 204,54 | 188,89 | 7,65% | 159,99 | 21,78% |
| 46 | 613,71 | 588,90 | 4,04% | 544,11 | 11,34% |
| 47 | 1.125,24 | 1.099,30 | 2,31% | 1.051,50 | 6,55% |
| 48 | 1.534,41 | 1.431,12 | 6,73% | 1.242,42 | 19,03% |
| 49 | 170,50 | 158,03 | 7,31% | 135,07 | 20,78% |
| 50 | 443,28 | 419,88 | 5,28% | 377,65 | 14,81% |
| 51 | 226,12 | 186,64 | 17,46% | 169,51 | 25,04% |
| 52 | 678,52 | 616,94 | 9,08% | 589,30 | 13,15% |
| 53 | 1.243,98 | 1.179,15 | 5,21% | 1.147,81 | 7,73% |
| 54 | 1.696,38 | 1.437,62 | 15,25% | 1.324,49 | 21,92% |
| 55 | 339,26 | 279,85 | 17,51% | 254,19 | 25,08% |
| 56 | 1.017,78 | 925,20 | 9,10% | 883,81 | 13,16% |
| 57 | 1.865,93 | 1.768,39 | 5,23% | 1.721,39 | 7,75% |
| 58 | 2.544,45 | 2.156,03 | 15,27% | 1.986,35 | 21,93% |
| 59 | 282,69 | 235,81 | 16,65% | 215,08 | 23,92% |
| 60 | 735,09 | 647,85 | 11,87% | 609,45 | 17,09% |

Πίνακας 18: Συνολική σύγκριση του κόστους μεταξύ των τριών συστημάτων

Κεφάλαιο 6 :

Συμπεράσματα

6.1 Τελικά συμπεράσματα

Αξιολογώντας τα αποτελέσματα που πήραμε για το σύστημα που εξετάζουμε, τα οποία παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, διαμορφώνουμε μία σαφή άποψη για τη συμπεριφορά του. Μπορούμε επομένως με βάση αυτά τα στοιχεία να διατυπώσουμε κάποια γενικά συμπεράσματα που αφορούν την εφαρμογή της προληπτικής συνεργασίας σε ένα τέτοιο σύστημα. Τα συμπεράσματα αυτά είναι τα εξής:

α) Η συνάρτηση του κόστους του συστήματος που εξετάστηκε στην περιοχή των βέλτιστων τιμών για τα r, S είναι πολύ επίπεδη με αποτέλεσμα να υπάρχουν σε κάποιες περιπτώσεις περιοχές τιμών στις οποίες μεταβάλλεται κάποια από αυτές τις τέσσερις μεταβλητές χωρίς να μεταβάλλεται σημαντικά το κόστος.

β) Ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα του συγκεκριμένου τρόπου συνεργασίας είναι και το γεγονός ότι το σύστημα οδηγείται μερικές φορές σε άσκοπες πλευρικές μετακινήσεις. Έτσι, όπως αναφέραμε, όταν το κόστος πλευρικής μεταφοράς γίνει υψηλό, τότε οι άσκοπες αυτές μετακινήσεις επιβαρύνουν αισθητά το σύστημα με αποτέλεσμα η συνεργασία να χάνει την αποτελεσματικότητά της.

γ) Η μεταβλητότητα της ζήτησης μιας θέσης επιδρά σημαντικά στο μέσο κόστος του συστήματος. Όμως η αποτελεσματικότητα της συνεργασίας είναι σχεδόν ανεξάρτητη από το μέγεθος της μεταβλητότητας της ζήτησης.

δ) Το σύστημα με προληπτική συνεργασία πλεονεκτεί σημαντικά έναντι του συστήματος χωρίς συνεργασία επειδή παράλληλα με μειωμένη τιμή για

το μέσο κόστος παρουσιάζει και μεγαλύτερη τιμή για το βαθμό εξυπηρέτησης.

ε) Το σύστημα με προληπτική συνεργασία επιλέγει μικρότερες τιμές για το μέγιστο απόθεμα των δύο θέσεων από ότι το σύστημα χωρίς συνεργασία. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη διαχείριση μικρότερου συνολικού αποθέματος από το σύστημα που εφαρμόζει αυτόν τον τρόπο συνεργασίας, κάτι που ασφαλώς είναι προτιμότερο.

στ) Αντίθετα με ότι συμβαίνει με τη μεταβλητότητα των ζητήσεων των δύο θέσεων, ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών, η ανομοιότητα των ζητήσεων των δύο θέσεων όσον αφορά στη μέση τους τιμή και το κόστος πλευρικής μεταφοράς επηρεάζουν όχι μόνο το συνολικό κόστος του συστήματος αλλά και την αποτελεσματικότητα της συνεργασίας. Έτσι το πλεονέκτημα από την εφαρμογή αυτού του τύπου συνεργασίας σε σχέση με την έλλειψη συνεργασίας ελαχιστοποιείται όταν ο χρόνος ικανοποίησης των παραγγελιών είναι μικρός, όταν οι δύο θέσεις διαφέρουν ως προς τη μέση τιμή της ζήτησής τους και όταν το κόστος πλευρικής μεταφοράς είναι μεγάλο.

ζ) Από τη σύγκριση αυτού του τύπου της συνεργασίας με την επείγουσα συνεργασία προκύπτει ότι η μεγάλη ευελιξία και ταχύτητα που διακρίνει την επείγουσα συνεργασία της δίνει ένα σημαντικό πλεονέκτημα σε σχέση με την προληπτική. Το πλεονέκτημα αυτό περιορίζεται για μεγάλες τιμές του L και για μεγάλες διαφορές στις μέσες τιμές των ζητήσεων των δύο θέσεων.

η) Σημαντικό ρόλο στην εφαρμογή ενός κανόνα συνεργασίας σε ένα σύστημα με ανεξάρτητες θέσεις παίζει ο χρόνος που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί αυτή η πλευρική συνεργασία. Θα πρέπει να γίνεται

προσπάθεια ώστε αυτός ο χρόνος να είναι αμελητέος, επειδή σε αυτήν την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι πολύ πιο ευεργετικά από ότι όταν αυτός ο χρόνος ισούται με μία χρονική περίοδο.

6.2 Δυνατότητες επέκτασης της μελέτης

Το σύστημα που εξετάστηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μία από τις πολλές μορφές με τις οποίες μπορεί να παρουσιαστεί το πρόβλημα που αφορά στην εφαρμογή προληπτικής συνεργασίας σε ένα σύνθετο σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων. Υπάρχουν επομένως και άλλες παραλλαγές που χρειάζονται διερεύνηση επειδή παρουσιάζουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Πρώτα από όλα θα ήταν χρήσιμη η εξέταση της συμπεριφοράς ενός συστήματος με περισσότερες θέσεις (π.χ. τρεις) στο οποίο εφαρμόζεται προληπτική συνεργασία. Βέβαια είναι προφανές ότι σε αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα γίνεται πιο πολύπλοκο λόγω των περισσότερων εναλλακτικών δυνατοτήτων που εισάγονται.

Επίσης πρόσθετη διερεύνηση χρειάζεται ο τρόπος με τον οποίον αντιδρά το παραπάνω σύστημα όταν οι δύο θέσεις του διαφοροποιούνται όσον αφορά τα στοιχεία κόστους και το χρόνο ικανοποίησης των παραγγελιών.

Τέλος μεγάλο ενδιαφέρον θα είχε και η εξέταση κάποιων άλλων παραλλαγών του προβλήματος όπως η περίπτωση κατά την οποία έχουμε

απώλεια πωλήσεων όταν η ζήτηση δεν μπορεί να ικανοποιηθεί άμεσα από το διαθέσιμο απόθεμα.

Συμπερασματικά, με την παρούσα εργασία έγινε μία αρχική προσέγγιση του συστήματος με προληπτική συνεργασία και τα αποτελέσματα που προέκυψαν μπορούν να δώσουν χρήσιμες πληροφορίες σε όποιον ασχοληθεί μελλοντικά με τη μελέτη περισσότερο πολύπλοκων συστημάτων διαχείρισης αποθεμάτων με συνεργαζόμενες θέσεις.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

PROGRAM DIPLOMA

```

REAL  RK(4),m1,w1,m2,w2,c12,c21,
+  ch1,ch2,cp1,cp2,TC,EPS(4),Q(4),QQ(4),W(4),ALPHA,
+  BETA,QD,EPSY,r1,S1,r2,S2

INTEGER L1,L2,OUT,MAXK,NKAT,N

COMMON ch1,ch2,cp1,cp2,c12,c21,
+  L1,L2,m1,w1,m2,w2,OUT

OPEN(UNIT=7,FILE='EXAM80',STATUS='NEW')

OUT=6
WRITE(6,10)
10  FORMAT(/'Enter costs ch1 ch2 cp1 cp2 c12 c21')
    READ(5,*) ch1,ch2,cp1,cp2,c12,c21
15  WRITE(6,20)
20  FORMAT('Enter leadtimes L1 L2 ',)$
    READ(5,*) L1,L2
    WRITE(6,30)
30  FORMAT('Enter parameters of demand distributions: m1 w1 m2 w2')
    READ(5,*) m1,w1,m2,w2
    WRITE(6,35)
35  FORMAT('Enter r1 S1 r2 S2 below.')
    READ(5,*) r1,S1,r2,S2
    RK(1)=r1
    RK(2)=S1
    RK(3)=r2
    RK(4)=S2
    WRITE(7,40)
40  FORMAT(/' Following are the problem parameters.')
    WRITE(7,60) ch1,ch2
60  FORMAT(' Unit holding costs per period: ch1=',F7.2,4X,'ch2=',F7.2)
    WRITE(7,70) cp1,cp2
70  FORMAT('Unit shortage costs per period: cp1=',F7.2,4X,'cp2=',F7.2)
    WRITE(7,80) c12,c21
80  FORMAT(' Unit transshipment costs: c12=',F7.2,4X,'c21=',F7.2)
    WRITE(7,90) L1,L2
90  FORMAT('Lead times: L1=',I2,' periods, L2=',I2,' periods.')
    WRITE(7,100) m1,w1
100  FORMAT('Demand per period at location 1: Mean=',F7.1,4X,
+  'Std. dev.=',F7.1)
    WRITE(7,110) m2,w2
110  FORMAT('Demand per period at location 2: Mean=',F7.1,4X,
+  'Std. dev.=',F7.1)
ALPHA=1.0
BETA=0.5
EPSY=0.05
MAXK=200
NKAT=2
EPS(1)=4.0
EPS(2)=4.0
EPS(3)=4.0
EPS(4)=4.0
N=4

```

```

CALL HOOKE(RK, EPS, N, MAXK, NKAT, EPSY, ALPHA, BETA, QD, Q, QQ, W)
r1=RK(1)
S1=RK(2)
r2=RK(3)
S2=RK(4)
TC=QD
WRITE(7,1500) r1,S1,r2,S2,TC
1500 FORMAT(/,'The optimal solution by simulation is:',/,
+         'r1=',F8.2,4X,'S1=',F8.2,4X,'r2=',F8.2,4X,'S2=',F8.2,
+         4X,'TC=',F8.2)
STOP
END

SUBROUTINE HOOKE(RK, EPS, N, MAXK, NKAT, EPSY, ALPHA, BETA, QD, Q, QQ, W)

REAL  ch1, ch2, cp1, cp2,
+     c12, c21, m1, w1, m2, w2, RK(N), EPS(N),
+     Q(N), QQ(N), W(N), EPSY, ALPHA, BETA, QD, TSRK, SUM, WBEST, BO
INTEGER N, L1, L2, OUT, MAXK, NKAT, KFLAG, KK1, I, KAT, KCOUNT
COMMON ch1, ch2, cp1, cp2, c12, c21,
+     L1, L2, m1, w1, m2, w2, OUT

KFLAG=0
DO 601 I=1, N
    Q(I)=RK(I)
    W(I)=0.0D0
601 CONTINUE
KAT=0
KK1=0
70 KCOUNT=0
WBEST=W(N)
CALL FCN(N, RK, SUM)
KK1=KK1+1
BO=SUM
IF(KK1.EQ.1) QD=SUM
IF(KK1.EQ.1) GO TO 201
IF(BO.GT.QD) KFLAG=1
IF(BO.LT.QD) QD=BO

201 DO 55 I=1, N
    QQ(I)=RK(I)
    TSRK=RK(I)
    RK(I)=RK(I)+EPS(I)
    CALL FCN(N, RK, SUM)
    KK1=KK1+1
    W(I)=SUM
    IF(W(I).LT.QD) GO TO 58
    RK(I)=RK(I)-2.0D0*EPS(I)
    CALL FCN(N, RK, SUM)
    KK1=KK1+1
    W(I)=SUM
    IF(W(I).LT.QD) GO TO 58
    RK(I)=TSRK
    IF(I.EQ.1) GO TO 513
    W(I)=W(I-1)
    GO TO 613
513    W(I)=BO
613    CONTINUE
    KCOUNT=KCOUNT+1

```

```

          GO TO 55
58      QD=W(I)
          QQ(I)=RK(I)
55 CONTINUE

      IF(KK1.GT.MAXK) GO TO 94
      IF(KAT.GE.NKAT) GO TO 94
      IF(ABS(W(N)-WBEST).LE.EPSY) GO TO 94

      IF(KCOUNT.GE.N) GO TO 28
      DO 26 I=1,N
          RK(I)=RK(I)+ALPHA*(RK(I)-Q(I))
26 CONTINUE
      DO 25 I=1,N
          Q(I)=QQ(I)
25 CONTINUE
      GO TO 70

28 KAT=KAT+1
      IF(KFLAG.EQ.1) GO TO 202
      GO TO 204
202 KFLAG=0
      DO 203 I=1,N
          RK(I)=Q(I)
203 CONTINUE
204 DO 80 I=1,N
          EPS(I)=EPS(I)*BETA
80 CONTINUE
      GO TO 70
94 RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE FCN(NN,X,TC)

```

```

REAL r1,r2,S1,S2,X(NN),TC,
+   cp1,cp2,c12,c21,ch1,ch2,
+   m1,w1,m2,w2,
+   X12,X21,OH1,OH2,BO1,BO2,
+   Q1(2100),Q2(2100),
+   IPIPE1,IPIPE2,AVAIL1,AVAIL2,
+   D1,D2,u1,u2,NS1,NS2,
+   AX12,AX21,AOH1,AOH2,ABO1,ABO2,
+   EX12(500),EX21(500),EOH1(500),EOH2(500),EBO1(500),
+   EBO2(500),EC(500),SOH1,SOH2,SBO1,SBO2,
+   SX12,SX21,UPOH1,UPOH2,UPBO1,UPBO2,
+   UPX12,UPX21,UPEC,SEC,AEC

```

```

INTEGER t,i,L1,L2,seed1,seed2,OUT,maxim,max,
+   nrun,j,trunc,NN,n

```

```

COMMON ch1,ch2,cp1,cp2,c12,c21,
+   L1,L2,m1,w1,m2,w2,OUT

```

```

n=500
r1=X(1)

```

```
S1=X(2)
r2=X(3)
S2=X(4)
```

```
seed1=748932582
seed2=1980520317
```

```
IF(L1.GT.L2) THEN
    trunc=10.0*L1
    max=L1
ELSE
    trunc=10.0*L2
    max=L2
ENDIF
```

```
maxim=1500+trunc
nrun=1500
```

```
DO 10000 j=1,n
```

```
Q1(1)=0.0
Q2(1)=0.0
```

```
DO 800 i=2,max+1
    Q1(i)=m1
```

```
800 CONTINUE
```

```
DO 900 i=2,max+1
    Q2(i)=m2
```

```
900 CONTINUE
```

```
EX12(j)=0.0
EX21(j)=0.0
EOH1(j)=0.0
EOH2(j)=0.0
EBO1(j)=0.0
EBO2(j)=0.0
```

```
IPIPE1 =L1*m1
IPIPE2 =L2*m2
X12=0.0
X21=0.0
D1=m1
D2=m2
```

```
DO 1000 t=max+1,maxim
```

```
DD1=D1
DD2=D2
```

```

u1=RAND(seed1)
u2=RAND(seed2)
D1=COS(6.28318531*u1) * SQRT(-2.0*LOG(u2))
D2=SIN(6.28318531*u1) * SQRT(-2.0*LOG(u2))
D1=m1+D1*w1
D2=m2+D2*w2
IF (D1.LT.0.0) D1=1.0
IF (D2.LT.0.0) D2=1.0

IF ((D1-INT(D1)).LT.0.5) THEN
    D1=INT(D1)
ELSE
    D1=INT(D1)+1
ENDIF

IF ((D2-INT(D2)).LT.0.5) THEN
    D2=INT(D2)
ELSE
    D2=INT(D2)+1
ENDIF

NS1=S1-IPIPE1
NS2=S2-IPIPE2

IF(L1.GT.L2) THEN
    Q2(max+1-L2)=0.0
ELSE
    Q1(max+1-L1)=0.0
ENDIF

AVAIL1=NS1+Q1(t-L1)
AVAIL2=NS2+Q2(t-L2)

IF ((AVAIL1.LE.r1).AND.(AVAIL2.LE.r2)) THEN
    X12=0.0
    X21=0.0
ELSEIF((AVAIL1.GT.r1).AND.(AVAIL2.GT.r2)) THEN
    X12=0.0
    X21=0.0
ELSEIF((AVAIL1.LT.r1).AND.(AVAIL2.GT.r2)) THEN
    X12=0.0
    IF((AVAIL2-r2).LT.(r1-AVAIL1)) THEN
        X21=AVAIL2-r2
    ELSE
        X21=r1-AVAIL1
    ENDIF
ELSEIF((AVAIL2.LT.r2).AND.(AVAIL1.GT.r1)) THEN
    X21=0.0
    IF((AVAIL1-r1).LT.(r2-AVAIL2)) THEN
        X12=AVAIL1-r1
    ELSE
        X12=r2-AVAIL2
    ENDIF
ELSE
    X12=0.0
    X21=0.0
ENDIF

```

Q1 (t) =DD1+X12-X21
Q2 (t) =DD2+X21-X12

AVAIL1=AVAIL1-X12+X21
AVAIL2=AVAIL2-X21+X12
IPIPE1=IPIPE1-Q1 (t-L1) +D1+X12-X21
IPIPE2=IPIPE2-Q2 (t-L2) +D2+X21-X12

NS1=AVAIL1-D1
IF (NS1.LT.0.0) THEN
 OH1=0.0
 BO1=-NS1
ELSE
 OH1=NS1
 BO1=0.0

ENDIF
NS2=AVAIL2-D2
IF (NS2.LT.0.0) THEN
 OH2=0.0
 BO2=-NS2
ELSE
 OH2=NS2
 BO2=0.0
ENDIF

IF (t.GT.trunc) THEN

EX12 (j) =EX12 (j) +X12
EX21 (j) =EX21 (j) +X21
EOH1 (j) =EOH1 (j) +OH1
EOH2 (j) =EOH2 (j) +OH2
EBO1 (j) =EBO1 (j) +BO1
EBO2 (j) =EBO2 (j) +BO2
ENDIF

1000 CONTINUE

EX12 (j) =EX12 (j) /nrun
EX21 (j) =EX21 (j) /nrun
EOH1 (j) =EOH1 (j) /nrun
EOH2 (j) =EOH2 (j) /nrun
EBO1 (j) =EBO1 (j) /nrun
EBO2 (j) =EBO2 (j) /nrun

EC (j) = c12*EX12 (j) + c21*EX21 (j) +
+ ch1*EOH1 (j) + ch2*EOH2 (j) + cp1*EBO1 (j) + cp2*EBO2 (j)

10000 CONTINUE

AX12=0.0
AX21=0.0
AOH1=0.0
AOH2=0.0
ABO1=0.0
ABO2=0.0
AEC=0.0

```
DO 20000 j=1,n
    AX12=AX12+EX12(j)
    AX21=AX21+EX21(j)
    AOH1=AOH1+EOH1(j)
    AOH2=AOH2+EOH2(j)
    ABO1=ABO1+EBO1(j)
    ABO2=ABO2+EBO2(j)
    AEC=AEC+EC(j)
```

20000 CONTINUE

```
AX12=AX12/n
AX21=AX21/n
AOH1=AOH1/n
AOH2=AOH2/n
ABO1=ABO1/n
ABO2=ABO2/n
AEC=AEC/n
```

```
SOH1=0.0
SOH2=0.0
SBO1=0.0
SBO2=0.0
SX12=0.0
SX21=0.0
SEC=0.0
```

```
DO 15000 j=1,n
    SOH1=SOH1+EOH1(j)*EOH1(j)+AOH1*AOH1-2*EOH1(j)*AOH1
    SOH2=SOH2+EOH2(j)*EOH2(j)+AOH2*AOH2-2*EOH2(j)*AOH2
    SBO1=SBO1+EBO1(j)*EBO1(j)+ABO1*ABO1-2*EBO1(j)*ABO1
    SBO2=SBO2+EBO2(j)*EBO2(j)+ABO2*ABO2-2*EBO2(j)*ABO2
    SX12=SX12+EX12(j)*EX12(j)+AX12*AX12-2*EX12(j)*AX12
    SX21=SX21+EX21(j)*EX21(j)+AX21*AX21-2*EX21(j)*AX21
    SEC=SEC+EC(j)*EC(j)+AEC*AEC-2*EC(j)*AEC
```

15000 CONTINUE

```
SOH1=SOH1/(n-1)
SOH1=SQRT(SOH1)
SOH2=SOH2/(n-1)
SOH2=SQRT(SOH2)
SBO1=SBO1/(n-1)
SBO1=SQRT(SBO1)
SBO2=SBO2/(n-1)
SBO2=SQRT(SBO2)
SX12=SX12/(n-1)
SX12=SQRT(SX12)
SX21=SX21/(n-1)
SX21=SQRT(SX21)
SEC=SEC/(n-1)
SEC=SQRT(SEC)
```

```
UPOH1=0.0
UPOH2=0.0
UPBO1=0.0
UPBO2=0.0
UPX12=0.0
UPX21=0.0
UPEC=0.0
```



```

      UPOH1=AOH1+1.96*(SOH1/SQRT(n))
      UPOH2=AOH2+1.96*(SOH2/SQRT(n))
      UPBO1=ABO1+1.96*(SBO1/SQRT(n))
      UPBO2=ABO2+1.96*(SBO2/SQRT(n))
      UPX12=AX12+1.96*(SX12/SQRT(n))
      UPX21=AX21+1.96*(SX21/SQRT(n))
      UPEC=AEC+1.96*(SEC/SQRT(n))

      WRITE(7,1960) AX12,AX21,AOH1,AOH2,ABO1,ABO2,AEC
1960  FORMAT(/,1X,7F8.2)

      WRITE(7,1970) UPX12,UPX21,UPOH1,UPOH2,UPBO1,UPBO2,UPEC
1970  FORMAT(/,1X,7F8.2)

      TC=0.0
      TC= c12*AX12 + c21*AX21 +
+      ch1*AOH1 + ch2*AOH2 + cp1*ABO1 + cp2*ABO2

      WRITE(7,1980) r1,S1,r2,S2,TC
1980  FORMAT('r1=',F8.2,4X,'S1=',F8.2,4X,'r2=',F8.2,4X,
+          'S2=',F8.2,4X,'TC=',F8.2)

      RETURN
      END

      FUNCTION RAND(IX)
      INTEGER A,P,IX,B15,B16,XHI,XALO,LEFTLO,FHI,K
      DATA  A/16807/, B15/32768/, B16/65536/, P/2147483647/

      XHI=IX/B16
      XALO=(IX-XHI*B16)*A
      LEFTLO=XALO/B16
      FHI=XHI*A+LEFTLO
      K=FHI/B15
      IX=((XALO-LEFTLO*B16)-P)+(FHI-K*B15)*B16 + K
      IF (IX.LT.0) IX=IX+P
      RAND=FLOAT(IX)*4.656612875E-10
      RETURN
      END

```

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Archibald, T. W., Sassen, S. A. E., and Thomas, L.C.,
"An Optimal Policy for a Two Depot Inventory
Problem with Stock Transfer," *Management Science*,
43 (1997) , 173-183.
- Axsater, S., "Modelling Emergency Lateral Transshipments in
Inventory Systems," *Management Science*, 36 (1990),
1329-1338.
- Box, G. E. P. and Muller, M. E., " A note on the generation of
random normal deviates, " *Annals of Mathematical
Statistics*, 29 (1958), 610-611.
- Cohen, M. A., Kleindorfer, P. R., and Lee, H. L., "Optimal
Stocking Policies for Low Usage Items in Multi-echelon
Inventory Systems," *Naval Research Logistics Quarterly*,
33 (1986), 17-38.
- Dada, M., "A Two-Echelon Inventory System with Priority
Shipments," *Management Science*, 38 (1992), 1140-1153.
- Das, C., "Supply and Redistribution Rules for Two-Location
Inventory Systems: One Period Analysis," *Management
Science*, 21 (1975), 765-776.
- Diks, E. B., and De Kok, A. G., "Controlling a Divergent 2-echelon
Network with Transshipments using the Consistent
Appropriate Share Rationing Policy," *Working Paper*,
Eindhoven University of Technology (1994).
- Gross, D., "Centralized Inventory Control in Multilocation Supply
Systems," in *Multistage Inventory Models and Techniques*,

H. E. Scarf, D. M. Gilford and M.W. Shelly (Eds), Stanford, CA, 1963, 47-84.

Hoadley, B. and D. P. Heyman , "A Two-Echelon Inventory Model with Purchases, Dispositions, Shipments, Returns and Transshipments," *Naval Research Logistics Quarterly*, 24 (1977), 1-19.

Hooke, R. and Jeeves, T. A., "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems," *Journal of the Association for Computing Machinery*, 8 (1961), 212-229.

Jonsson, H., and Silver, E. A., "Analysis of A Two-Echelon Inventory Control System with Complete Redistribution," *Management Science*, 33 (1987), 215-227.

Karmarkar, U. S., "Convex/Stochastic Programming and Multilocation Inventory Problems," *Naval Research Logistics Quarterly*, 26 (1979), 1-19.

——— and N. R. Patel, "The One-Period, N-Location Distribution Problem," *Naval Research Logistics Quarterly*, 24 (1977), 559-575.

Krishnan, K. S. and V. R. K. Rao, "Inventory Control in N Warehouses," *Journal of Industrial Engineering*, 16 (1965), 212-215.

Lee, H. L., "A Multi-Echelon Inventory Model for Repairable Items with Emergency Lateral Transshipments," *Management Science*, 33 (1987), 1302-1316.

Robinson, L. W., "Optimal and Approximate Policies in Multiperiod Multilocation Inventory Models with Transshipment," *Operations Research*, 38, 2 (1990), 278-295.

Sherbrooke, C. C., "Multiechelon Inventory Systems with Lateral Supply," *Naval Research Logistics*, 39 (1992), 29-40.

Tagaras, G., "Effects of Pooling on the Optimization and Service Levels of Two-Location Inventory Systems," *IIE Transactions*, 21, 3 (1989), 250-257.

Tagaras, G. and Cohen, M. A., "Pooling in Two-Location Inventory Systems with Non-Negligible Replenishment Lead Times" *Management Science*, 38, 8 (1992) 1067-1083.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Τηλ.: 74.760-61

741233-5

