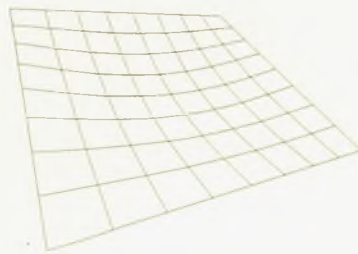


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΝΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ
ΤΕΤΡΑΕΡΕΙΣΤΩΝ, ΤΡΙΕΡΕΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΙΣΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

ΠΙΠΕΡΙΔΗΣ ΑΒΡΑΑΜ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΜΑΚΑΡΙΟΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ ΔΡ ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ

Βόλος 2000



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

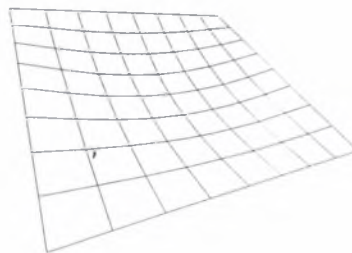
Αριθ. Εισ.: 2174/1
Ημερ. Εισ.:
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ
2000
ΠΠ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΝΤΑΞΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ
ΤΕΤΡΑΕΡΕΙΣΤΩΝ, ΤΡΙΕΡΕΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΙΣΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

ΠΙΠΕΡΙΔΗΣ ΑΒΡΑΑΜ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΜΑΚΑΡΙΟΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ ΔΡ ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ

Βόλος 2000



*αφιερώνεται στους
γονείς μου*

Σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας είναι η σύνταξη νέων πινάκων, κατανομής ομοιόμορφου φορτίου, τετραερείστων, τριερείστων και διερείστων πλακών αντίστοιχων των γνωστών πινάκων *Markus*. Οι νέοι αυτοί πίνακες, υψηλής ακρίβειας, χρησιμοποιούνται για την κατανομή του φορτίου σε δύο 'λωρίδες' πλάκας κάθετα διασταυρούμενες ώστε να εφαρμοστεί απρόσκοπτα η ελαστική μέθοδος των λωρίδων μέσα στα πλαίσια των προσεγγιστικών μεθόδων ανάλυσης των πλακών

Η ανάλυση των πλακών με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας (εξίσωση βυθίσεων $w_{(x,y)}$ κ.τ.λ.) με κλειστή λύση είναι δυνατή σε πολύ λίγες περιπτώσεις μεμονωμένων πλακών. Στις συνεχείς πλάκες, καθώς και στη μεγάλη ποικιλία των πλακών που απαντώνται στην πράξη η ανάλυση είναι δυνατή μόνο με χρήση προσεγγιστικών μεθόδων, διαφόρου βαθμού ακριβείας ανάλογα με τις εκάστοτε παραδοχές.

Η ακριβέστερη των προσεγγιστικών μεθόδων είναι η μέθοδος των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων η οποία όμως, τουλάχιστον για τα οικοδομικά έργα που δεν απαιτείται και η υψηλότερη υπολογιστική ακρίβεια στην ανάλυση των πλακών, δεν είναι οικονομικά συμφέρουσα για διάφορους λόγους (π.χ. επίπονη προσομοίωση, κατανάλωση υπέρογκου χρόνου, μεγάλος αριθμός κόμβων, προβληματική μαθηματική σύνδεση των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων με τα γραμμικά στο ίδιο μοντέλο, φορτία που μεταβιβάζονται στις δοκούς).

Οι νέοι πίνακες κατανομής ομοιόμορφου φορτίου που συντάχθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι απαλλαγμένοι από τις εσφαλμένες παραδοχές που έκανε ο *Markus* στους ομώνυμους πίνακες, ενώ η σύνταξή τους στηρίχθηκε στην απ' ευθείας ισότητα των «πραγματικών» ροπών που αναπτύσσονται στην πλάκα με τις αντίστοιχες ροπές που προκύπτουν από τη θεώρηση των δύο κεντρικά διασταυρούμενων λωρίδων. Έτσι επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή ακρίβεια στις ροπές χρησιμοποιώντας ζεύγος κεντρικών λωρίδων. Ανάλογα ισχύουν στις βυθίσεις των πλακών.

Οι «πραγματικές» ροπές των πλακών καθώς και οι «ακριβείς» βυθίσεις υπολογίσθηκαν με τη μέθοδο των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων,

διενεργώντας πυκνή και επαρκή διακριτοποίηση, και χρησιμοποιώντας το γενικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων – *SAP2000 v7.12* –.

Έγιναν επίσης επαρκή αριθμητικά παραδείγματα σε συνεχείς πλάκες, διερευνήθηκαν τα όρια ισχύος της μεθόδου των ‘λωρίδων’ και διαπιστώθηκε ότι οι νέοι πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ασφάλεια στην συντριπτική πλειοψηφία των πλακών με πολύ εύχρηστο και εποπτικό τρόπο, συμβάλλοντας στην αύξηση της στατικής διαίσθησης του μηχανικού.

Έτσι στο πρώτο κεφάλαιο της ανά χείρας διπλωματικής εργασίας παρουσιάζεται σε γενικές γραμμές η θεωρία της ελαστικότητας και η περιληπτική ανάπτυξη των διαφόρων προσεγγιστικών μεθόδων ανάλυσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται λεπτομερώς η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία, καθώς και οι νέοι πίνακες, ύστερα από την παραμετρική επεξεργασία χιλίων επτακοσίων εβδομήκοντα έξι (1776) μαθηματικών προσομοιωμάτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια επέκτασης της μεθόδου των λωρίδων στις συνεχείς πλάκες και επιχειρείται κατάλληλη οριοθέτηση αυτής. Διαπιστώθηκε ότι, μέσα στο πλαίσιο των συνήθων παραδοχών που γίνονται στην ανάλυση των πλακών στα κοινά οικοδομικά έργα, οι νέοι πίνακες δίδουν υψηλής ακρίβειας αποτελέσματα και κατά συνέπεια οικονομικά και ασφαλή, χωρίς να απαιτείται η χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης οι νέοι πίνακες μπορούν εύκολα να προγραμματισθούν και να εισαχθούν στα προγράμματα *H/Y* για την αυτόματη μελέτη των κατασκευών.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. *Μακάριο Τριαντάφυλλο*, Δρ Πολιτικό Μηχανικό, για την καθοδήγησή του σε όλα τα στάδια εκπόνησης της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Βόλος, Οκτώβριος 2000

Α. Α. Πιπερίδης

Κεφάλαιο 1

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΛΑΚΩΝ

1.1 Γενικά περί πλακών	7
1.2 Είδη πλακών και μέθοδοι ανάλυσης.....	8
1.3 Η παραμόρφωση και η ένταση της πλάκας σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας	9
1.4 Προσεγγιστικές μέθοδοι ανάλυσης.....	13
1.5 Αμφιέριστες μεμονωμένες πλάκες (μέθοδος λωρίδων)	14
1.6 Αμφιέριστες συνεχείς πλάκες (μέθοδος λωρίδων).....	15
1.7 Τετραέριστες μεμονωμένες πλάκες (μέθοδος <i>Markus</i>)	16
Βιβλιογραφία	19

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΤΑΞΗ ΝΕΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

2.1 Εισαγωγή	20
2.2 Θέση του προβλήματος.....	20
2.3 Αντιμετώπιση του προβλήματος.....	21
2.3.1 Α' Τρόπος: Αναλυτική παρουσίαση της μοντελοποίησης πλάκας, με χρήση εσχάρας δοκών	22
2.3.2 Β' Τρόπος: Αναλυτική παρουσίαση της σύνταξης πινάκων κατανομής ομοιόμορφου φορτίου. Μεθοδολογία	23
2.4 Μεθοδολογία.....	23

2.5	Ανάλυση	23
2.5.1	Διερεύνηση του βαθμού διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων	23
2.5.1.1	Παράδειγμα 1 ^ο (πλάκα τύπου 1)	24
2.5.1.2	Παράδειγμα 2 ^ο (πλάκα τύπου 2)	25
2.5.2	Τρόπος υπολογισμού και σύνταξης των νέων πινάκων.....	27
2.6	Τετραέρειςτες μεμονωμένες πλάκες.....	29
	<i>Πίνακας 1</i>	30
	<i>Πίνακας 2</i>	31
	<i>Πίνακας 3</i>	32
	<i>Πίνακας 4</i>	33
	<i>Πίνακας 5</i>	34
	<i>Πίνακας 6</i>	35
2.7	Τριέρειςτες ορθογωνικές πλάκες.....	36
2.7.1	Παράδειγμα 1 ^ο (πλάκα τύπου 1)	36
2.7.2	Παράδειγμα 2 ^ο (πλάκα τύπου 2)	38
	<i>Πίνακας 7</i>	41
	<i>Πίνακας 8</i>	42
	<i>Πίνακας 9</i>	43
	<i>Πίνακας 10</i>	44
	<i>Πίνακας 11</i>	45
	<i>Πίνακας 12</i>	46
2.8	Διέρειςτες ορθογωνικές πλάκες.....	47
	<i>Πίνακας 13</i>	48
	Βιβλιογραφία	49

Κεφάλαιο 3

ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΛΩΡΙΔΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.1	Γενικά	50
	Παράδειγμα 1.....	51
	Παράδειγμα 2.....	57
	Παράδειγμα 3.....	62
	Παράδειγμα 4.....	65
	Παράδειγμα 5.....	68
	Παράδειγμα 6.....	71
	Παράδειγμα 7.....	75
	Παράδειγμα 8.....	80
3.2	Γενικά συμπεράσματα	85

Κεφάλαιο 1

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΛΑΚΩΝ

1.1 Γενικά περί πλακών

Πλάκα ονομάζεται ο επίπεδος επιφανειακός φορέας ο οποίος φέρει φορτία κάθετα στην επιφάνειά του. Η μία από τις τρεις διαστάσεις του φορέα –το πάχος της h_f – θεωρείται πολύ μικρότερο των άλλων δύο πλευρών της l_x, l_y . Αποτελούν μία από τις συνηθέστερες μορφές δομικών στοιχείων και η λειτουργία τους είναι διπλή. Πρώτον, εξυπηρετούν λειτουργικές ανάγκες αφού χρησιμοποιούνται ως επιφανειακοί βατοί φορείς σε οικοδομές, γέφυρες, στέγαση. Δεύτερον, μεταφέρουν με ασφάλεια τα κατακόρυφα φορτία στο έδαφος.

Τα φορτία μεταφέρονται μέσω της καμπτικής και διατμητικής λειτουργίας των πλακών στα στηρίγματά τους. Η διατμητική λειτουργία των πλακών είναι πολύ μικρότερη της σύγχρονης καμπτικής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η κρίσιμη καταπόνηση να είναι αυτή της κάμψης, για συνηθισμένες τιμές ομοιόμορφου φορτίου. Σε περιπτώσεις ύπαρξης μεγάλων συγκεντρωμένων φορτίων δημιουργείται η ανάγκη εξέτασης της πλάκας σε διάτμηση ή και σε διάτρηση. Σε περίπτωση που η πλάκα δεν αντέχει έναντι διάτμησης, αυξάνουμε το πάχος της πλάκας.

Τα φορτία των πλακών χωρίζονται στις ακόλουθες ομάδες :

α. Μόνιμα φορτία

Ίδιο βάρος, πρόσθετα μόνιμα φορτία (επικαλύψεις, μονώσεις), τοιχοποιίες με απευθείας έδραση επί των πλακών, ωθήσεις γαιών, πίεση υγρών σταθερής στάθμης, συστολή ξήρανσης του σκυροδέματος. Κατά το σχεδιασμό των πλακών οι τιμές των υπόψη φορτίων –βάσει του Ελληνικού Κανονισμού Σκυροδέματος– πολλαπλασιάζονται με το συντελεστή 1.35.

β. Μεταβλητά φορτία

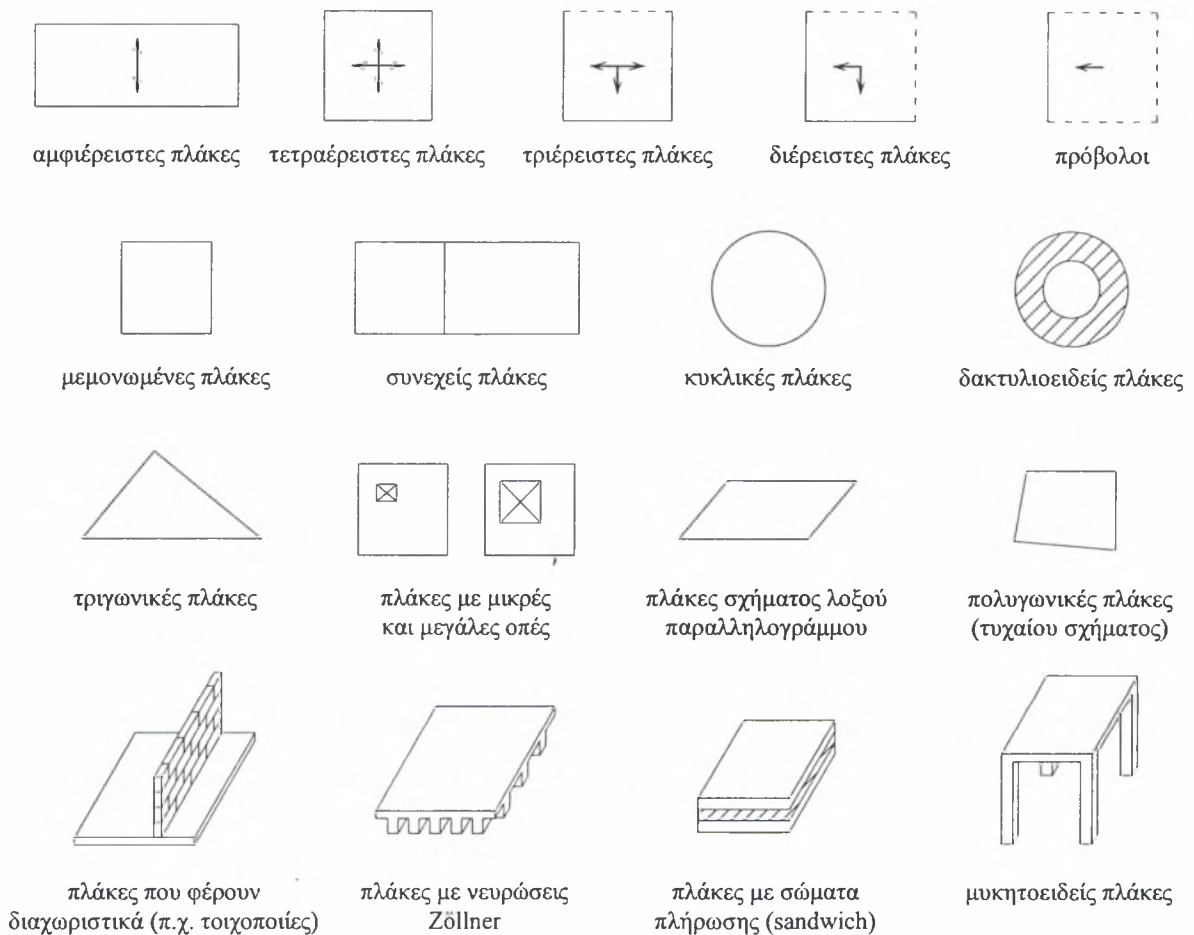
Όλα τα ωφέλιμα φορτία λειτουργίας, άνεμος, χιόνι, διαφορές θερμοκρασίας και λοιποί καταναγκασμοί. Κατά τον σχεδιασμό των πλακών, δε λαμβάνονται όλα τα μεταβλητά φορτία με τη χαρακτηριστική τους τιμή αλλά μόνο το σημαντικότερο εξ' αυτών. Τα υπόλοιπα λαμβάνονται καταλλήλως μειωμένα –βάσει του Ελληνικού Κανονισμού Σκυροδέματος–. Οι τιμές των φορτίων πολλαπλασιάζονται με το συντελεστή 1.50, ενώ η τοποθέτησή τους γίνεται με βάση τη δυσμενέστερη θέση ως προς το εντατικό μέγεθος που εξετάζουμε.

γ. Τυχηματικά φορτία

Στην ομάδα αυτή ανήκουν οι τυχόν εκρήξεις, κρούσεις, σεισμικές δράσεις, ανεμοστρόβιλοι, κατολισθήσεις

1.2 Είδη πλακών και μέθοδοι ανάλυσης

Οι πλάκες διακρίνονται με βάση το σχήμα τους και τη στατική λειτουργία τους ως εξής:



Σγ. 1.1: Είδη πλακών

Η όπλιση πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να αντιμετωπίζεται επιτυχώς η στατική λειτουργία της πλάκας.

Οι πλάκες από οπλισμένο σκυρόδεμα αναμένεται να ρηγματωθούν ακόμα και κάτω από τα φορτία λειτουργίας. Ο Ελληνικός Κανονισμός Σκυροδέματος επιβάλλει την ελαστική ανάλυση των πλακών, με αρηγμάτωτες διατομές και με θεώρηση γραμμικού νόμου τάσεων–παραμορφώσεων–φορτίων διατομής. Επιτρέπεται η περιορισμένη ανακατανομή, μέχρι 25%, με κατάλληλη όμως διόρθωση των ροπών ανοιγμάτων ώστε να ικανοποιούνται πάντοτε οι συνθήκες ισορροπίας. Οι μέθοδοι πλαστικής ανάλυσης εφαρμόζονται, κατά τον Ελληνικό Κανονισμό, μόνο για έλεγχο της επάρκειας των κατασκευών με σκοπό την εύρεση της οριακής αντοχής αυτών.

Τα προαναφερθέντα αφορούν τις πλάκες από οπλισμένο σκυρόδεμα. Οι μεταλλικές πλάκες έχουν διαφορετική συμπεριφορά. Σε αυτές χρησιμοποιούνται διαφορετικές μέθοδοι ανάλυσης. Επίσης οι μεταλλικές πλάκες καταπονούνται έντονα και από τις θερμοκρασιακές μεταβολές.

1.3 Η παραμόρφωση και η ένταση της πλάκας σύμφωνα με τη θεωρία της ελαστικότητας

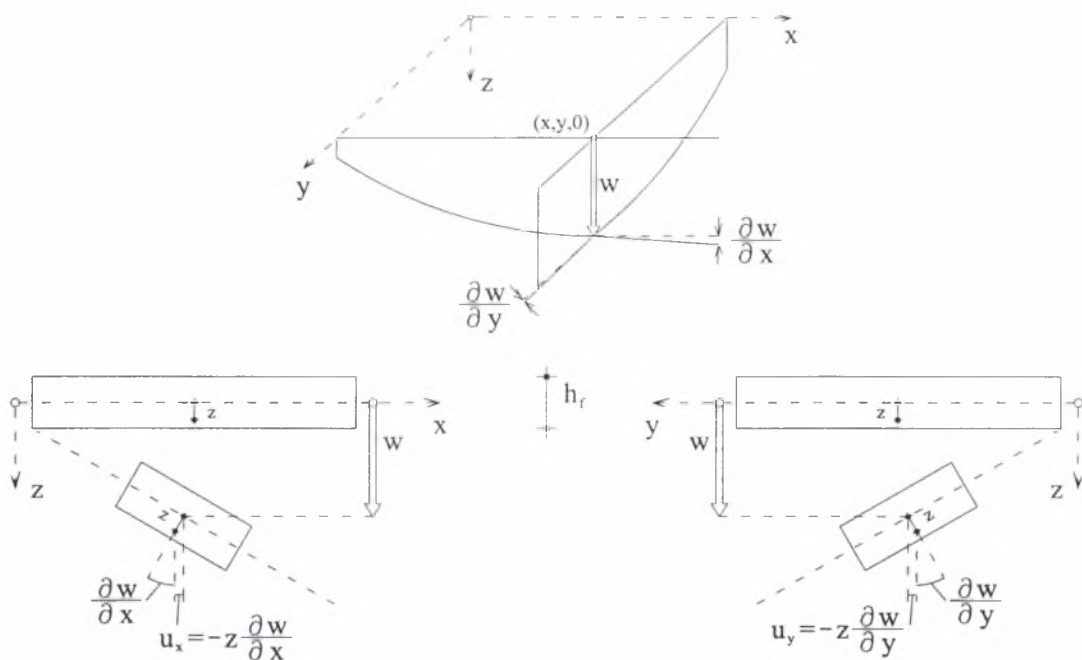
Θεωρούμε στα επόμενα μία πλάκα πάχους h_f και διαστάσεων l_x, l_y [1]. Για λόγους σύμβασης θεωρούμε τον θετικό ημιάξονα z να έχει φορά προς το έδαφος. Η επιφάνεια βυθίσεων –ελαστική επιφάνεια της πλάκας– είναι μία διπαραμετρική συνάρτηση w των x και y . Η συνάρτηση $w_{(x,y)}$ είναι άγνωστη στην αρχή της ανάλυσης, αλλά από τη στιγμή που θα προσδιοριστεί αναλυτικά, είναι εύκολο στη συνέχεια να προσδιορισθούν οι παραμορφώσεις ε_{ij} , οι μετακινήσεις $u_x, u_y, u_z = w_{(x,y)}$ και οι εντάσεις αυτής, δηλαδή m_x, m_y οι ροπές κάμψης, m_{xy} οι ροπές συστροφής, q_x, q_y οι τέμνουσες σε κάθε σημείο της πλάκας με βάση τη θεωρία ελαστικότητας, δηλαδή την τρισδιάστατη παραμόρφωση και την τρισδιάστατη εντατική κατάσταση. Για το λόγο αυτό πρέπει να βρούμε τις σχέσεις εκείνες που συνδέουν την άγνωστη συνάρτηση βυθίσεων $w_{(x,y)}$ με τις παραμορφώσεις, τις μετατοπίσεις και την ένταση της πλάκας. Επισημαίνεται ότι λόγω του πάχους της πλάκας ισχύει η παραδοχή επιπεδότητας των διατομών του *Bernoulli*.

Πράγματι, παρακολουθώντας το σχήμα που ακολουθεί (Σχ. 1.2), καταλήγουμε γεωμετρικά στις ακόλουθες σχέσεις που δίνουν τις μετακινήσεις $u_x, u_y, u_z = w_{(x,y)}$ του σημείου $(x, y, 0)$ της μέσης επιφάνειας της πλάκας συναρτήσει της άγνωστης συνάρτησης των βυθίσεων $w_{(x,y)}$:

$$u_x = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w_{(x,y)} \quad (1.1)$$

Αλλά οι παραμορφώσεις ε_{ij} συνδέονται με τις μετακινήσεις u_x, u_y, u_z με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$



Σχ. 1.2: Η παραμόρφωση και οι μετατοπίσεις της πλάκας

Ορίζεται ως δείκτης δυσκαμψίας της πλάκας το μέγεθος:

$$K = \frac{E \cdot h_f^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (1.3)$$

Κατά συνέπεια αντικαθιστώντας τις τιμές των παραπάνω παραμορφώσεων στις εξισώσεις του ταυστή των τάσεων:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2 \cdot G}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \left((1 - \nu) \cdot \varepsilon_x + \nu \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) & \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{2 \cdot G}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \left((1 - \nu) \cdot \varepsilon_y + \nu \cdot (\varepsilon_z + \varepsilon_x) \right) & \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \frac{2 \cdot G}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot \left((1 - \nu) \cdot \varepsilon_z + \nu \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right) & \tau_{zy} &= G \cdot \gamma_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

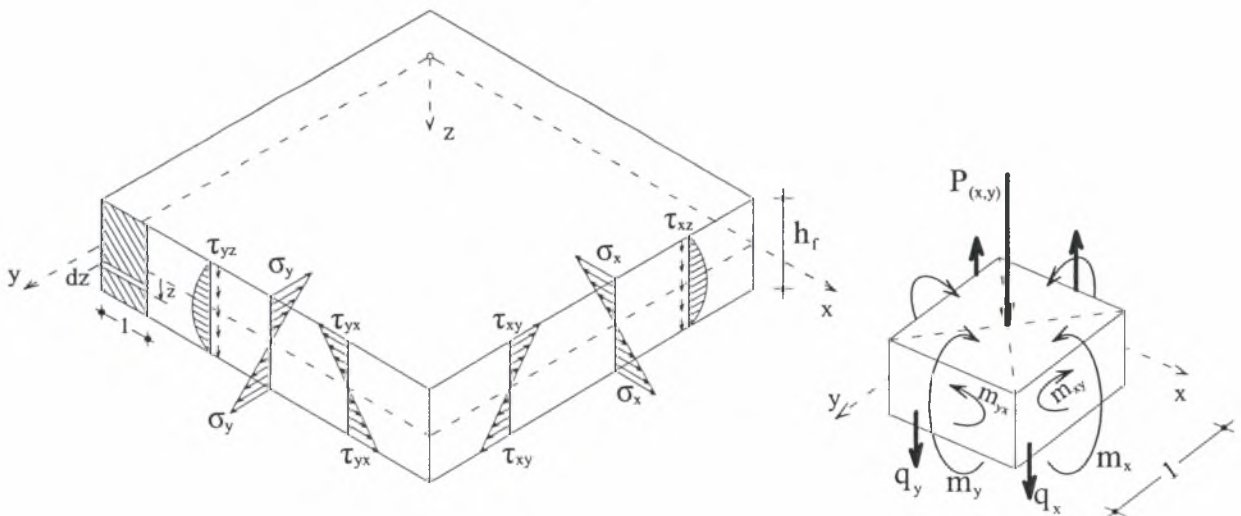
και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varepsilon_z = 0$ και επιπλέον αγνοώντας τις αμελητέες ποσότητες ν^3, ν^4 κ.τ.λ. που εμφανίζονται, προκύπτουν οι κάτωθι τιμές των τάσεων:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) = -\frac{12 \cdot K}{h_f^3} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot z \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) = -\frac{12 \cdot K}{h_f^3} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot z \\
\tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} = -\frac{12 \cdot K}{h_f^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z \\
\tau_{zx} &= -\frac{3 \cdot K}{2 \cdot h_f} \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h_f^2} \right) \\
\tau_{zy} &= -\frac{3 \cdot K}{2 \cdot h_f} \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \cdot \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{h_f^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η πλάκα φορτίζεται με το συνεχές φορτίο $p_{(x,y)}$ τότε αποδεικνύεται ότι η διαφορική εξίσωση των βυθίσεων της πλάκας ικανοποιείται πάντοτε από την ακόλουθη ισότητα:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_{(x,y)}}{K} \tag{1.6}$$

Πράγματι η σύνθεση των τάσεων $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ της πλάκας δίδει ροπές και τέμνουσες. Λαμβάνοντας μία μοναδιαία λωρίδα πλάκας, λαμβάνουμε το στοιχειώδες εμβαδό $1 \cdot dz$ το οποίο απέχει μεταβλητή απόσταση z από το μέσο επίπεδο της πλάκας (Σχ. 1.3). Έτσι αν πολλαπλασιάσουμε τις τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ με τη μεταβλητή απόσταση z και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε στο πάχος h_f της πλάκας λαμβάνουμε τις ροπές $m_x, m_y, m_{xy} = m_{yx}$:



Σχ. 1.3: Σύνθεση των τάσεων και φορτία διατομής

Έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \int_{h_f} \sigma_x \cdot z \cdot dz \\ m_y &= \int_{h_f} \sigma_y \cdot z \cdot dz \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} m_{xy} &= m_{yx} = \int_{h_f} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Οι ροπές m_x , m_y ονομάζονται ροπές κάμψης ενώ οι $m_{xy} = m_{yx}$ ονομάζονται ροπές συστροφής.

Αν τώρα ολοκληρώσουμε στο πάχος h_f της πλάκας τις διατμητικές τάσεις τ_{xz} , τ_{yz} λαμβάνουμε τις τέμνουσες:

$$q_x = \int_{h_f} \tau_{xz} \cdot dz \quad , \quad q_y = \int_{h_f} \tau_{yz} \cdot dz \quad (1.8)$$

Στη συνέχεια μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις τάσεις με τις αναλυτικές εκφράσεις των, οπότε και προκύπτουν οι τελικές εξισώσεις που δίνουν τις ροπές και τις τέμνουσες κατευθείαν από τη συνάρτηση $w_{(x,y)}$ των βυθίσεων:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & q_x &= -K \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ m_y &= -K \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) & q_y &= -K \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \\ m_{xy} &= m_{yx} = -(1-\nu) \cdot K \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ισχύει $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_{(x,y)} = 0$ (η εξίσωση παριστάνει την ισορροπία των δυνάμεων κατά $y-y$ διατυπωμένη όχι σε απειροστό στοιχείο $dx \cdot dy$, αλλά, σε ένα συγκεκριμένο υλικό σημείο της πλάκας με συντεταγμένες x και y). Επομένως, αν αντικαταστήσουμε στην τελευταία αυτή σχέση τις προηγούμενες εκφράσεις των q_x , q_y τότε προκύπτει άμεσα η σχέση (1.6) δηλαδή

$\nabla^4 w = \frac{P_{(x,y)}}{K}$. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να ευρεθεί η μορφή της συνάρτησης

$w_{(x,y)}$, ενώ για τον προσδιορισμό και των συντελεστών απαιτείται η λήψη των συνοριακών συνθηκών (στηρίξεις και φόρτιση). Επισημαίνεται ότι, ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει και διαφορετική εξίσωση της ελαστικής επιφάνειας $w_{(x,y)}$, ενώ η μαθηματική επεξεργασία του προβλήματος είναι γενικά δυσχερής και οδηγεί σε κλειστές λύσεις σε πολύ μικρό αριθμό πλακών σε σχέση με αυτές που εμφανίζονται στην πράξη.

1.4 Προσεγγιστικές μέθοδοι ανάλυσης

Η ανάλυση των πλακών στη γενική περίπτωση, με τη θεωρία της ελαστικότητας, όπως καταλαβαίνουμε από τα παραπάνω, είναι ιδιαίτερα δυσχερής από μαθηματικής πλευράς, ακόμα και για απλές μεμονωμένες πλάκες. Αν συνυπολογίσουμε σ' αυτό και τη μεγάλη ποικιλία των πλακών που εμφανίζεται στις κατασκευές (Σχ. 1.1), τότε καταλαβαίνουμε ότι η αντιμετώπιση αυτών με βάση τις εξισώσεις 1.5, 1.6 και 1.9 είναι αδύνατη. Δημιουργείται έτσι η αναγκαιότητα προσφυγής σε προσεγγιστικές μεθόδους ανάλυσης. Για τον υπολογισμό των μεμονωμένων αλλά και συνεχών πλακών, έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι ανάλυσης οι οποίες κινούνται μέσα στα όρια της ελαστικότητας, διαφόρου βαθμού ακριβείας, ανάλογα με τις παραδοχές της κάθε μίας. Οι σημαντικότερες είναι οι εξής [1]:

α. Η μέθοδος των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων (*F.E.M.*). Η γνωστή αριθμητική μέθοδος γενικής εφαρμογής κατάλληλη για ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η ακρίβειά της αυξάνει κατά κανόνα με την πυκνωση των κόμβων κατά τη διακριτοποίηση. Χρειάζονται επαναληπτικές επιλύσεις για να ευρεθεί ένας αποδεκτός βαθμός διακριτοποίησης. Όταν επιτευχθεί, δύο συνεχόμενες επιλύσεις με διαφορετικό βαθμό διακριτοποίησης να διαφέρουν λιγότερο από την απόκλιση που έχει εξαρχής τεθεί τότε μπορούμε να κάνουμε αποδεκτό το βαθμό διακριτοποίησης.

β. Μέθοδοι με βάση τη θεωρία ελαστικότητας. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $w_{(x,y)}$ της ελαστικής επιφάνειας των πλακών οι *Timoshenko*[2], *Bittner*[3], *Girkmann*[4], και θέτοντας κάποιες κατάλληλες παραδοχές, ανέπτυξαν ακριβείς μαθηματικά μεθόδους, πάντοτε μέσα στα πλαίσια της ελαστικότητας, οι οποίες όμως είναι επίπονες και γι' αυτό για την πράξη ακατάλληλες. Σημαντική συμβολή επίσης στην έρευνα των πλακών είχαν ο *Rusch*[5] ο οποίος συνέταξε πίνακες για ειδικές πλάκες καταστρωμάτων γεφυρών, καθώς και ο *Pucher*[6] ο οποίος συνέταξε τις γνωστές επιφάνειες επιρροής ελαστικών πλακών.

γ. Η θαμιστική μέθοδος *Cross* για τις πλάκες [7] με χρήση των συντελεστών μεταβίβασης γ κατά *Bittner*[8] στη βελτιωμένη μορφή της από τον *Brunner*[9],[10].

δ. Η μέθοδος των πεσσοειδών φορτίσεων [11]. Διακρίνεται για την απλότητα και τη συντομία της και εφαρμόζεται σε πολλές περιπτώσεις συνεχών τετραέρειστων πλακών στην πράξη. Χρησιμοποιεί τις ακριβείς επιλύσεις κατά *Czerny*[14] των μεμονωμένων ορθογωνικών πλακών. Η εφαρμογή της όμως δίνει καλά αποτελέσματα κάτω από τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Οι πλάκες πρέπει να έχουν κοινό πάχος
- Ο λόγος των φορτίων (μονίμων G και ωφέλιμων Q) μεταξύ των γειτονικών πλακών πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ 0.80 και 1.25
- Το μικρότερο άνοιγμα κάθε στατικής τομής και στις δύο διευθύνσεις πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 0.75 του μεγίστου ανοίγματος της εξεταζόμενης τομής

Όσο απομακρυνόμαστε από τις παραπάνω προϋποθέσεις τόσο τα αποτελέσματα αποκλίνουν από τις «ακριβείς» τιμές.

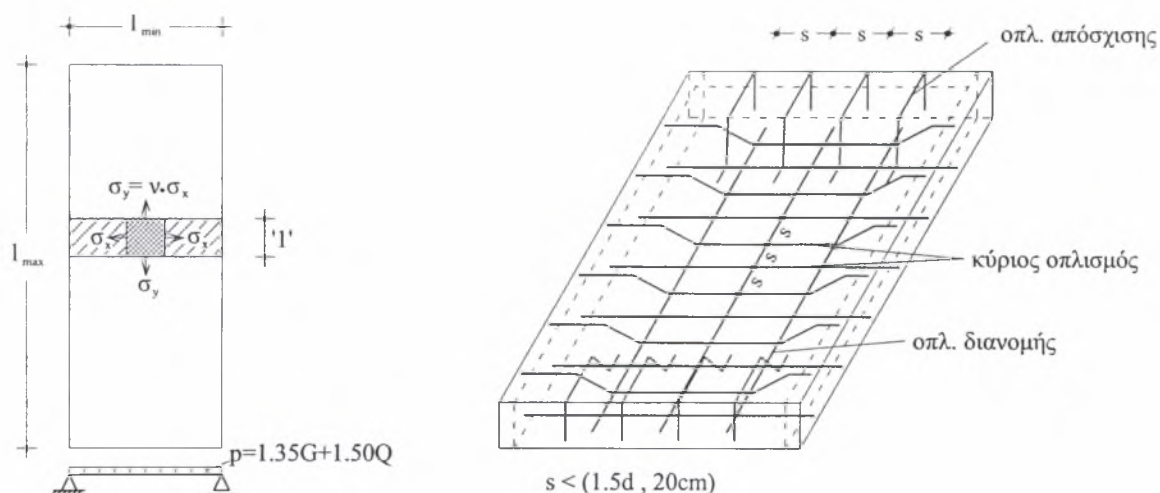


ε. Η προσεγγιστική μέθοδος *Pieper-Martens*[12]. Πρόκειται για περαιτέρω απλοποιητική παραλλαγή της προηγούμενης μεθόδου των πεσσοειδών φορτίσεων. Ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις της προηγούμενης μεθόδου και επιπλέον συνίσταται να εφαρμόζεται στις περιπτώσεις εκείνες που το μόνιμο φορτίο G είναι μεγαλύτερο από το κινητό φορτίο Q , γεγονός που συνήθως απαντάται στα κοινά οικοδομικά έργα.

στ. Η μέθοδος των λωρίδων [13]. Η προσεγγιστική αυτή μέθοδος στην περίπτωση των τετραέρειστων πλακών εφαρμόζεται υποχρεωτικά με τους πίνακες *Markus*. Παλαιότερα εφαρμοζόταν στην πράξη κυρίως για την εποπτικότητα που διαθέτει αλλά και λόγω ελλείψεως ακριβέστερων μεθόδων. Εμφανίζει όμως σε πολλές περιπτώσεις σημαντικές αποκλίσεις από την πραγματική λειτουργία των τετραέρειστων πλακών, οι οποίες δεν είναι πάντοτε υπέρ της ασφαλείας. Η μέθοδος δύναται να είναι επίκαιρη για την περιβολή ακραίων ροπών σε ειδικές περιπτώσεις πλακών, ενώ συνδυάζεται σε πολλές περιπτώσεις με τη μέθοδο πεσσοειδών φορτίσεων.

1.5 Αμφιέριστες μεμονωμένες πλάκες (μέθοδος λωρίδων)

Στις ορθογωνικές πλάκες, με περιμετρικές στηρίξεις σε ολόκληρη την περίμετρο και με λόγο πλευρών $l_{\max}/l_{\min} > 2$, κατά την παραμόρφωση αναπτύσσεται κυρίως απλή καμπυλότητα, κατά την έννοια του μήκους της μικρότερης πλευράς, για δράση ομοιόμορφου φορτίου. Κατά τη διεύθυνση της μεγαλύτερης πλευράς δεν αναπτύσσεται καμπυλότητα. Αυτός ο τύπος παραμόρφωσης μας επιτρέπει να λάβουμε μία λωρίδα μοναδιαίου πλάτους, προσανατολισμένη κατά μήκος της μικρότερης πλευράς και τοποθετημένη στη μεσαία περιοχή της πλάκας. Τη μοναδιαία αυτή λωρίδα μπορούμε προσεγγιστικά να τη θεωρήσουμε ως αμφιέριστη δοκό με εγκάρσια διατομή $1 \cdot h_f$ και ανάλογα να υπολογίσουμε τη ροπή στο άνοιγμα της πλάκας. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό της μέγιστης ροπής σχεδιασμού της πλάκας, πρέπει αυτή να φορτιστεί με το δυσμενή συνδυασμό $1.35G + 1.50Q$. Είναι προφανές, ότι από τη μέγιστη ροπή σχεδιασμού υπολογίζεται ο απαιτούμενος κύριος οπλισμός της πλάκας και ο οποίος διατάσσεται παράλληλα με τη μικρότερη πλευρά της πλάκας. Οι ράβδοι οπλισμού τοποθετούνται εναλλάξ, η μία ίσια και η άλλη κεκκαμένη, όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Η μέγιστη απόσταση μεταξύ των ράβδων δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $1.5d$ και από $20cm$, ταυτόχρονα (d το στατικό ύψος της πλάκας). Η κάμψη των ράβδων οπλισμού πρέπει να γίνεται με γνώμονα, η αντοχή της πλάκας σε κάμψη, να περιβάλλει πάντοτε την περιβάλλουσα των ροπών κάμψης σχεδιασμού.



Σγ. 1.4: Όπλιση της πλάκας έναντι κάμψεως

Σημειώνεται ότι η λωρίδα της πλάκας, καθώς βρίσκεται περιορισμένη κατά τη διεύθυνση l_{max} εξαιτίας της υπόλοιπης μάζας του φορέα, τελεί υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης (δηλ. $\epsilon_y = 0$, $\sigma_y = \nu \cdot \sigma_x$). Με άλλα λόγια, κατά τη δευτερεύουσα διεύθυνση της αμφιέριστης πλάκας, δηλαδή κατά το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς, αναπτύσσεται κάποια ροπή, σαφώς μικρότερη από αυτήν της κύριας διεύθυνσης, εξαιτίας της εγκάρσιας έντασης σ_y της πλάκας λόγω παρεμπόδισης της παραμόρφωσης (φαινόμενο *Poisson* με συντελεστή $\nu = 0.15$ για το οπλισμένο σκυρόδεμα και $\nu = 0.30$ για μεταλλική κατασκευή). Έτσι προκύπτει η ανάγκη τοποθέτησης εγκάρσιου οπλισμού (γνωστότερου ως οπλισμού διάνομής) ο οποίος καθορίζεται, από τον Ελληνικό Κανονισμό Σκυροδέματος, ως το 20% του κύριου οπλισμού και όχι λιγότερου από $\varnothing 8/25$.

Επίσης, καθώς πλησιάζουμε στις στηρίξεις των μικρών πλευρών, επειδή η αμφιέριστη πλάκα αρχίζει να εμφανίζει διπλή καμπυλότητα, απαιτείται η τοποθέτηση εγκάρσιου οπλισμού στηρίξεως (γνωστότερου ως οπλισμού απόσχισης) και ο οποίος τοποθετείται κάθετα στη μικρή πλευρά και μάλιστα στην άνω ίνα της πλάκας. Ο ελάχιστος οπλισμός απόσχισης καθορίζεται στο 25% του κύριου οπλισμού του ανοίγματος, η δε μέγιστη απόσταση μεταξύ των ράβδων δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $1.5d$ και από $20cm$, ταυτόχρονα.

1.6 Αμφιέριστες συνεχείς πλάκες (μέθοδος λωρίδων)

Στην περίπτωση αυτή έχουμε στατική συνεργασία δύο ή περισσότερων αμφιέριστων πλακών. Και εδώ κατά την παραμόρφωση αναπτύσσεται κυρίως απλή καμπυλότητα, κατά την έννοια του μήκους των μικρότερων πλευρών, για δράση ομοιόμορφου φορτίου. Κατά τη διεύθυνση των μεγαλύτερων πλευρών δεν

αναπτύσσεται καμπυλότητα. Αυτή η παραμόρφωση μας επιτρέπει να λάβουμε μία λωρίδα μοναδιαίου πλάτους, προσανατολισμού κατά μήκος των μικρότερων πλευρών και τοποθετημένη στη μεσαία περιοχή της πλάκας. Τη μοναδιαία αυτή λωρίδα μπορούμε προσεγγιστικά να την εξετάσουμε ως συνεχή δοκό με εγκάρσια διατομή $1 \cdot h_f$ και έτσι να υπολογίσουμε τη ροπή στα ανοίγματα των πλακών. Για τον υπολογισμό των ροπών σχεδιασμού της πλάκας πρέπει να διενεργηθούν στην πλάκα οι απαιτούμενες εναλλακτές φορτίσεις, χρησιμοποιώντας το δυσμενές $(1.35G + 1.50Q)$ και το ευμενές (G) φορτίο σχεδιασμού, κατάλληλα.

Είναι προφανές, ότι από τις ροπές σχεδιασμού αυτές μπορεί να εξαχθεί ο απαιτούμενος κύριος οπλισμός των πλακών οπλισμένου σκυροδέματος και ο οποίος θα τοποθετηθεί παράλληλα προς τις μικρότερες πλευρές της πλάκας. Οι ράβδοι του οπλισμού τοποθετούνται εναλλάξ, η μία ίσια και η άλλη κεκκαμένη. Η δε μέγιστη απόσταση μεταξύ των ράβδων δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $1.5d$ και από $20cm$, ταυτόχρονα. Η κάμψη των ράβδων οπλισμού πρέπει να γίνεται με γνώμονα, η αντοχή της πλάκας σε κάμψη να περιβάλλει πάντοτε την περιβάλλουσα των ροπών κάμψης σχεδιασμού.

1.7 Τετραέριστες μεμονωμένες πλάκες (μέθοδος *Markus*)

Στις ορθογωνικές πλάκες, με στηρίξεις σε ολόκληρη την περίμετρο και με λόγο των πλευρών $l_{\max}/l_{\min} \leq 2$, αναπτύσσεται έντονη διπλή καμπυλότητα, για δράση ομοιόμορφου φορτίου. Όπως ήδη επισημάνθηκε οι πλάκες αυτές μελετήθηκαν πλήρως με τη θεωρία ελαστικότητας με κλειστές μαθηματικές λύσεις από τον *Czerny*[14] το 1955 και συντάχθηκαν οι ομώνυμοι πίνακες για λόγο $\nu = 0$.

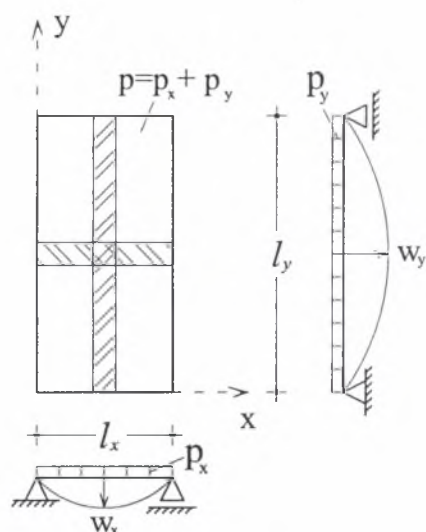
Όμως από το 1932 είχε αναπτυχθεί από τον *Markus* η προσεγγιστική ομώνυμη μέθοδος η οποία αν και υστερεί σε θέμα ακρίβειας σε σχέση με τους αντίστοιχους πίνακες *Czerny*, υπερτερεί ως προς αυτούς σε θέμα εποπτείας και αποτελεί τη βάση για την προσεγγιστική επέκταση της μεθόδου των λωρίδων στις συνεχείς τετραέριστες πλάκες.

Όπως είδαμε στις αμφιέριστες πλάκες, λόγω της απλής καμπυλότητας που εμφανίζεται στον παραμορφωμένο φορέα, θεωρούμε ότι το σύνολο του φορτίου P ενεργεί επί της λωρίδας που είναι παράλληλη προς τη μικρότερη πλευρά. Στις τετραέριστες πλάκες, ο *Markus* θεώρησε ένα μοντέλο που αποτελείται από **ένα ζεύγος κεντρικών και κάθετα διασταυρούμενων λωρίδων**.

Έκανε στη συνέχεια την παραδοχή ότι ένα ποσοστό p_x του φορτίου ενεργεί στη λωρίδα $x-x$, ενώ το υπόλοιπο φορτίο p_y ενεργεί στη λωρίδα $y-y$. Έτσι διατυπώθηκε η πρώτη εξίσωση $p = p_x + p_y$. Επειδή όμως τα επιμέρους φορτία p_x, p_y είναι άγνωστα, έπρεπε να ευρεθεί μία ακόμα εξίσωση.

Αυτή προέκυψε από την εξίσωση των βυθίσεων των δύο διασταυρούμενων λωρίδων $w_x = w_y$ (όπου w_x η βύθιση της λωρίδας $x-x$ και w_y η βύθιση της λωρίδας $y-y$).

Ο υπολογισμός της μέγιστης βύθισης της κάθε λωρίδας, γίνεται με οποιοδήποτε αναγνωρισμένο τρόπο της στατικής των γραμμικών φορέων –π.χ. τη μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου ή αν διαθέτουμε κάποιο έτοιμο τύπο από τα γνωστά βοηθήματα (*Beton Kalender*)–:



Στην περίπτωση της αμφιεπίστου δοκού, γνωρίζουμε ότι η μέγιστη βύθιση w ισούται με

$$w = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

$x-x$ η μέγιστη βύθιση είναι $w_x = \frac{5 \cdot p_x \cdot l_x^4}{384 \cdot E \cdot I}$

και κατά τη λωρίδα $y-y$ είναι

$$w_y = \frac{5 \cdot p_y \cdot l_y^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Αναλόγως πράττουμε και στις περιπτώσεις μονόπακτης και αμφίπακτης δοκού.

Σχ. 1.5: Βυθίσεις των λωρίδων

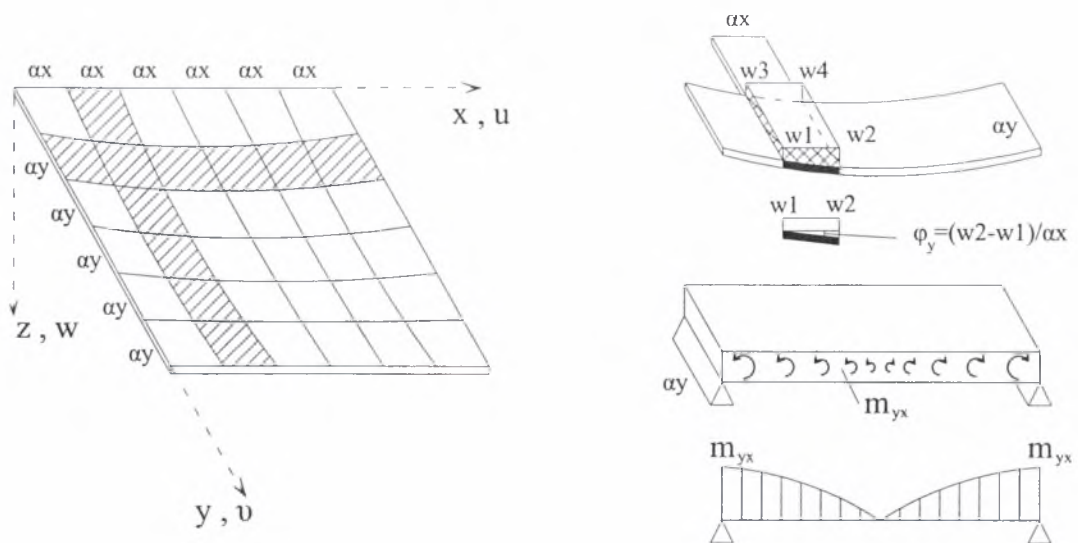
Εξισώνοντας τις βυθίσεις, έχουμε τη δεύτερη εξίσωση που χρειάζεται για τον υπολογισμό των φορτίων p_x και p_y . Σχηματίζουμε έτσι το σύστημα:

$$w_x = w_y \quad \Rightarrow \quad p_x \cdot l_x^4 = p_y \cdot l_y^4 \quad (\alpha)$$

$$p_x + p_y = p \quad (\beta)$$

Επιλύοντας το σύστημα των δύο ανωτέρω εξισώσεων υπολογίζουμε τα φορτία p_x, p_y και από εκεί τα ποσοστά τους επί του συνολικού κατανεμημένου φορτίου. Με αυτόν τον τρόπο συντάχθηκαν οι πίνακες *Markus*.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημανθεί ότι οι πίνακες *Markus* δίδουν τιμές ροπών υπερεκτιμημένες σε σχέση με τις ακριβείς τιμές που δίνει η θεωρία της ελαστικότητας. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το ζεύγος των διασταυρούμενων λωρίδων κάμπτονται ελεύθερα. Στην πραγματικότητα όμως, επειδή εμφανίζεται συνεχής επιφανειακός φορέας με διπλή καμπυλότητα, δηλαδή πολλές διασταυρούμενες λωρίδες, αναπτύσσεται στρεπτική παρεμπόδιση των εγκάρσιων λωρίδων. Η στρεπτική αυτή παρεμπόδιση αναπτύσσει τις ροπές συστροφής m_{xy} .



Σχ. 1.6: Ροπές συστροφής

Η ροπή συστροφής m_{yx} μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ροπή στρέψης επί της διατομής w_1w_2 , της λωρίδας $y - y$, με πλάτος ax . Στο Σχ. 1.6 παρατηρούμε ότι αναπτύσσεται μεταβλητή στροφή $\phi_y = (w_2 - w_1)/ax$ της λωρίδας $x - x$ κατά τη διεύθυνση του άξονα x . Η στροφή ϕ_y εξαρτάται από τη διαφορά βύθισης στα άκρα της κάθε y -λωρίδας. Εξαιτίας της ύπαρξης της στροφής ϕ_y αναπτύσσεται και αντίστοιχος ροπή συστροφής m_{xy} . Στη μεσαία λωρίδα παρατηρούμε ότι η σχετική βύθιση μηδενίζεται και κατά συνέπεια μηδενίζεται και η ροπή συστροφής. Όπως παρατηρούμε από τη φορά των ροπών συστροφής καταλαβαίνουμε ποιοτικά ότι τείνουν να μειώσουν τις ελαστικές βυθίσεις της πλάκας και κατά συνέπεια μειώνονται και οι ροπές κάμψης των ανοιγμάτων. Οι ροπές συστροφής έχουν μεγαλύτερη επιρροή στην περίπτωση που η πλάκα στηρίζεται με συνθήκες απλής έδρασης. Στην περίπτωση που η πλάκα στηρίζεται με συνθήκες πάκτωσης τότε οι ροπές συστροφής είναι μικρότερες (αφού στην περιοχή της πάκτωσης οι σχετικές βυθίσεις των λωρίδων είναι μηδενικές) και κατά συνέπεια οι ροπές κάμψης της πλάκας πάνω από τα στηρίγματα δεν επηρεάζονται από τις ροπές συστροφής.

Ο *Markus* προσπάθησε κατά προσέγγιση να εκφράσει τη μείωση των τιμών των ροπών των ανοιγμάτων δια μέσω κάποιων μειωτικών συντελεστών v_x, v_y με τους οποίους πολλαπλασιάζονται αντίστοιχα οι τιμές $\max M_x$ και $\max M_y$:

$$v_x = 1 - \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \cdot \frac{\max M_x}{(p \cdot l_x^2 / 8)}, \quad v_y = 1 - \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^2 \cdot \frac{\max M_y}{(p \cdot l_y^2 / 8)} \quad (1.10)$$

Έτσι οι τελικές τιμές των ροπών των ανοιγμάτων κατά *Markus* είναι

$$M_{\text{τελ},x} = v_x \cdot (\max M_x), \quad M_{\text{τελ},y} = v_y \cdot (\max M_y) \quad (1.11)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. ΜΑΚΑΡΙΟΣ, Τ.: “Εισαγωγή στη θεωρία των επιφανειακών φορέων (ΔΙΣΚΟΙ-ΠΛΑΚΕΣ-ΠΤΥΧΩΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ) ΚΛΑΣΣΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ. ”. Βόλος, 2000
- [2]. TIMOSHENKO, S.: “*Theory of plates and shells*”, McGraw Hill Book comp. New York and London, 1959
- [3]. BITTNER, E.: “*Platten und Behälter*”, Springer-Verlag. Wien-New York, 1965
- [4]. GIRKMANN, K.: “*Flachentragwerke*”, Springer-Verlag. Wien, 1959
- [5]. RUSCH, H.: “*Fahrbahnplatten von Strassenbrücken*”, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, dep. 106,6, Wilhelm Ernst & Sohn. Berlin, 1965
- [6]. PUCHER, A.: “*Einflussfelder elastischer Platten*”, Springer-Verlag. Wien-New York, 1964
- [7]. SIESS, Ch. P. – NEWMARK, N.: “*Moments in throw-way concrete floor slabs*”, University of Illinois, Bulletin No 43. USA, 1950
- [8]. BITTNER, E.: “*Momententafeln und Einflussflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*”, Springer. Wien, 1938
- [9]. BRUNNER, W.: “*Momentenausgleichsverfahren zur Berechnung durchlaufender Platten für gleichmassig verteilte Belastung (Επαναληπτική συγκλίνουσα μέθοδος υπολογισμού ροπών σε συνεχείς πλάκες με ομοιόμορφη φόρτιση)*”, Schweizerische Bauzeitung 73, dep.50. 1955
- [10]. HAHN, J.: “*Durchlauftrager, Rahmen und Platten*”, 11., neubearbeitete und erweiterte Auflage 1971, Copyright by Werner-Verlag. Dusseldorf, 1974. (Δια την Ελληνικήν γλώσσα εκδ. Γκιούρδα Μ. “Πλάκες, Πλαίσια, Συνεχείς Δοκοί και Θεμελιώσεις επί Ελαστικού Εδάφους”)
- [11]. ΠΕΝΕΛΗΣ, Γ. και συνεργάτες: “*Κατασκευές από Οπλισμένο Σκυρόδεμα*”, Πανεπιστημιακές παραδόσεις, Έκδοση Υπηρ. Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ. Θεσσαλονίκη, 1995
- [12]. PIEPER, K. – MARTENS, P.: “*Durchlaufende vierseitig gestutzte Platten im Hochbau*”, B.u.ST. 61, dep. 6, 1966
- [13]. ΣΙΜΟΠΟΥΛΟΣ, Α.: “*Κατασκευαί επί απλού και ωπλισμένου σκυροδέματος*”, Τόμος III. Αθήνα, 1955
- [14]. CZERNY, F: “*Tafeln für gleichmassig vollbelastete Rechteckplatten (πίνακες ορθογωνικών πλακών με ομοιόμορφο καθολική φόρτιση)*”, Bautechnik Archiv, dep. 11, Wilhelm Ernst & Sohn. Berlin, 1955

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΤΑΞΗ ΝΕΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

2.1 Εισαγωγή

Όπως ήδη επισημάνθηκε, (§1.7) ο *Markus* κατά τη μελέτη του θεώρησε δύο κεντρικά διασταυρούμενες λωρίδες. Υπολογίζοντας και εξισώνοντας τις κοινές βυθίσεις των (κοινή βύθιση των δύο λωρίδων), συνέταξε τους ομώνυμους πίνακες. Εν τούτοις, εργαζόμενος κατ' αυτόν τον τρόπο, κατέληξε σε αποτελέσματα τα οποία αποκλίνουν από τις «ακριβείς» τιμές όσον αφορά τις ροπές που δίνει η θεωρία της ελαστικότητας. Για να προσεγγίσει τις ακριβείς τιμές εισήγαγε τους μειωτικούς συντελεστές ν_x, ν_y επί των ροπών (εξ. 1.10), (εξ. 1.11). Οι αποκλίσεις οφείλονται στο γεγονός ότι οι λωρίδες αυτές, θεωρούνται από τον *Markus*, κάμπτονται ελεύθερα, δηλαδή αγνοείται η «στρεπτική αντίδραση» των εγκάρσιων λωρίδων. Με τη μέθοδο *Markus* έχουν σημειωθεί αποκλίσεις στις τιμές των ροπών μέχρι 64%. Εκτός από αυτό, ο *Markus* αγνόησε και τον λόγο *Poisson*, ενώ οι πίνακές του είναι για λόγους πλευρών $l_{\max}/l_{\min} \leq 1.66$ και κατά συνέπεια δεν είναι επαρκείς σύμφωνα με τις νεότερες αντιλήψεις όπου η λειτουργία των τετραερείστων πλακών εμφανίζεται για λόγους πλευρών μέχρι 2 ($l_{\max}/l_{\min} \leq 2.00$).

2.2 Θέση του προβλήματος

Δημιουργείται πλέον η ανάγκη τροποποίησης των πινάκων κατανομής φορτίων (*Markus*) και σύνταξης νέων συμπληρωματικών με τους οποίους να επιτυγχάνεται η άρση των μειονεκτημάτων, των κλασικών πινάκων *Markus*, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Τόσο οι νέοι όσο και οι τροποποιημένοι πίνακες πρέπει να ικανοποιούν τα ακόλουθα:

- Ορθογωνικές τετραερείστες πλάκες με λόγο πλευρών $l_{\max}/l_{\min} \leq 2.00$
- Ορθογωνικές τριερείστες πλάκες με λόγο πλευρών $0.25 \leq l_y/l_x \leq 1.50$
- Ορθογωνικές διερείστες πλάκες με λόγο πλευρών $1.00 \leq l_{\max}/l_{\min} \leq 2.20$

- Μεγάλη ακρίβεια στις τιμές των μεγίστων ροπών κάμψης των παραπάνω πλακών
- Μεγάλη ακρίβεια στις τιμές των βυθίσεων
- Συνυπολογισμός του φαινομένου *Poisson*
- Διατήρηση της εποπτικότητας της μεθόδου των λωρίδων

2.3 Αντιμετώπιση του προβλήματος

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (*F.E.M.*) με επαρκή πύκνωση των κόμβων και με συνυπολογισμό του φαινομένου *Poisson* (για το οπλισμένο σκυρόδεμα $\nu = 0.15$). Τα αποτελέσματα από την υπόψη μέθοδο θεωρήθηκαν ως ακριβή. Όμως για τον υπολογισμό των πλακών στα κοινά οικοδομικά έργα η χρήση των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων δεν ενδείκνυται για διάφορους λόγους:

1. Στο ίδιο μαθηματικό προσομοίωμα αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα γραμμικά και επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία.
2. Στις πλάκες από οπλισμένο σκυρόδεμα (οι οποίες αναμένεται να ρηγματωθούν) ο Ελληνικός Κανονισμός Σκυροδέματος επιβάλλει την μεταφορά από τις πλάκες στις δοκούς να γίνεται με βάση τις επιφάνειες πλακών που προκύπτουν από τις γραμμές διαρροής και όχι από τα αποτελέσματα της ελαστικής στατικής ανάλυσης των πλακών τα οποία είναι και κατά της ασφαλείας.
3. Η «ακριβής» ανάλυση των πλακών στα κοινά οικοδομικά έργα, με τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία συνήθως δεν προσφέρεται για τον καθημερινό υπολογισμό πλακών επειδή το κόστος είναι δυσανάλογο με τις αμοιβές.
4. Η συντριπτική πλειοψηφία του λογισμικού των εμπορικών προγραμμάτων στατικής ανάλυσης χρησιμοποιεί στην ανάλυση πλακών τις προσεγγιστικές μεθόδους και όχι τα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία.
5. Οι πολιτικοί μηχανικοί που δε διαθέτουν πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων έχουν ως μοναδική διέξοδο την καταφυγή σε προσεγγιστικές μεθόδους με χρήση γραμμικών στοιχείων.

Δημιουργείται έτσι η ανάγκη ανάπτυξης προσεγγιστικών μεθόδων. Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος προτείνονται οι ακόλουθοι δύο τρόποι με τους οποίους αποφεύγεται η επίπονη χρήση των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων:

- A' Τρόπος:** Μοντελοποίηση της πλάκας με γραμμικά στοιχεία –στοιχεία δοκού- με τρόπο ώστε να επιτευχθεί προσομοίωση της πλάκας με εσχάρα δοκών.
- B' Τρόπος:** Σύνταξη νέων πινάκων κατανομής ομοιόμορφου φορτίου, αντίστοιχων των πινάκων *Markus*, με τους οποίους να επιτυγχάνεται η άρση των μειονεκτημάτων της μεθόδου *Markus* που αναφέρθηκαν στην §2.2.

2.3.1 Α' Τρόπος: Αναλυτική παρουσίαση της μοντελοποίησης πλάκας, με χρήση εσχάρας δοκών

Η μοντελοποίηση της πλάκας μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία. Θεωρώντας, δηλαδή, το φορέα ως εσχάρα δοκών-λωρίδων με κατάλληλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία ανταποκρίνονται στο πλάτος b και το πάχος d της αντίστοιχης πλακολωρίδας [1]:

- εμβαδόν ολίσθησης της διατομής :
$$F' = \frac{5}{6} b \cdot d \quad (2.1)$$

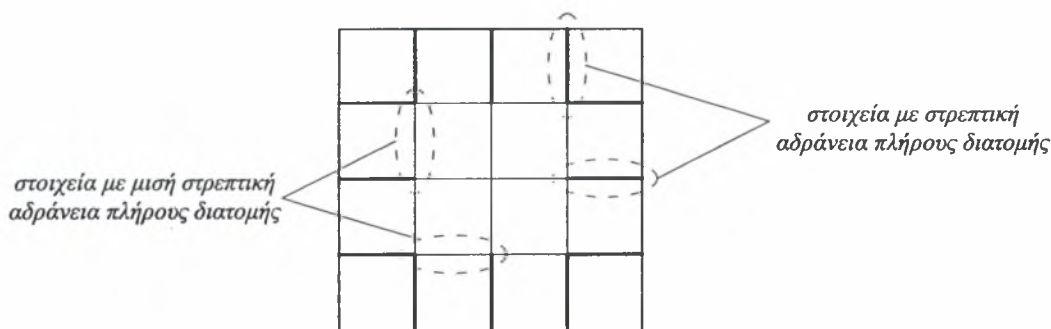
- καμπτική ροπή αδράνειας :
$$J = \frac{b \cdot d^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.2)$$

- στρεπτική αδράνεια :
$$J_d = \frac{b \cdot d^3}{3} \quad (\text{για } b \gg d) \quad (2.3)$$

Η τιμή της στρεπτικής αδράνειας που παρέχεται από τον ανωτέρω τύπο (εξ. 2.3) ανταποκρίνεται στην κατανομή των διατμητικών τάσεων λόγω στρέψης της αυτοτελούς (μη συνεργαζόμενης με τις γειτονικές) διατομής της πλακολωρίδας (διαστάσεων $b \cdot d$) και είναι αρκετά μεγαλύτερη από την πραγματική στρεπτική αδράνεια του συνεχούς φυσικού μοντέλου. Για το λόγο αυτό η στρεπτική αδράνεια αντί να παρέχεται από την εξ. 2.3 συνήθως μειώνεται στο μισό [2], δηλαδή υπολογίζεται από τον τύπο:

$$J_d = \frac{b \cdot d^3}{6} \quad (\text{για } b \gg d) \quad (2.4)$$

Ακόμα έχει προταθεί [3], στο πρώτο και το τελευταίο γραμμικό στοιχείο κάθε πλακολωρίδας της εσχάρας η στρεπτική αδράνεια να λαμβάνεται ίση με αυτήν της πλήρους διατομής (εξ. 2.3), ενώ στα υπόλοιπα ενδιάμεσα γραμμικά στοιχεία των πλακολωρίδων η στρεπτική αδράνεια λαμβάνεται ίση με τη μισή της πλήρους διατομής (εξ. 2.4):



Σχ. 2.1: Προσομοίωση της πλάκας με εσχάρα δοκών

Το ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο της πλάκας μπορεί να κατανεμηθεί στις δοκούς της εσχάρας σύμφωνα με το γνωστό τρόπο τραπεζοειδούς κατανομής του φορτίου κάθε ορθογωνικού φατνώματος στις δοκούς που το περιβάλλουν (οπότε προκύπτει ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο σε κάθε δοκό της εσχάρας) είτε με μοναχικά επικόμβια φορτία που προκύπτουν από την επιφάνεια επιρροής κάθε κόμβου (δηλαδή το συνολικό φορτίο κάθε ορθογωνικού φατνώματος μοιράζεται ισοδύναμα στους 4 κόμβους της εσχάρας που περικλείουν το φάτνωμα). Επαρκής μπορεί να θεωρηθεί ένας κάρναβος 7×7 , του οποίου η απόκλιση είναι της τάξης του 3% για τις βυθίσεις και τις ροπές, σε σχέση με τις αντίστοιχες ακριβείς τιμές της θεωρίας της ελαστικότητας (πίνακες *Czerny*), ενώ για αύξηση της πυκνότητάς του τα αποτελέσματα δε βελτιώνονται αλλά αρχίζουν να αποκλίνουν ελαφρά (απόκλιση μέχρι 7.5%).

2.3.2 Β' Τρόπος: Αναλυτική παρουσίαση της σύνταξης νέων πινάκων κατανομής ομοιόμορφου φορτίου. Μεθοδολογία

Για τη σύνταξη των νέων πινάκων χρησιμοποιήθηκαν τετράκομβρα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία, υψηλής πυκνωσης (μήκος πλευράς πεπερασμένου στοιχείου ≈ 0.025 της αντίστοιχης πλευράς της πλάκας). Διενεργήθηκαν 950 στατικές αναλύσεις ορθογωνικών τετραέρειστων πλακών με το πρόγραμμα στατικής ανάλυσης – *SAP2000 v7.12* –. Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης συντάχθηκαν οι υπόψη πίνακες, όπως λεπτομερέστερα αναπτύσσεται παρακάτω.

2.4 Μεθοδολογία

Για τη σύνταξη των πινάκων έγινε μία διερεύνηση των παραγόντων που έπρεπε να ληφθούν υπόψη:

- Βαθμός διακριτοποίησης του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων
- Εξετάστηκαν όλες οι πλάκες διαστάσεων από $20m \times 10m$ έως $20m \times 40m$
- Λήφθηκε λόγος *Poisson* $\nu = 0.15$

Και τελικά έγινε επεξεργασία των αποτελεσμάτων για τη σύνταξη των πινάκων.

2.5 Ανάλυση

2.5.1 Διερεύνηση του βαθμού διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων

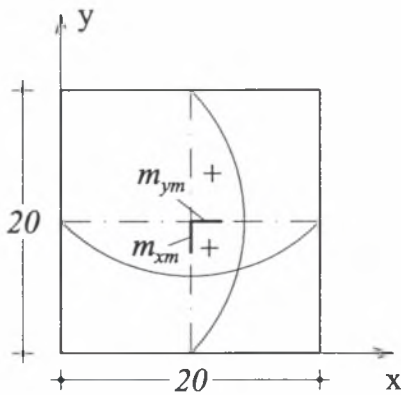
Κρίθηκε απαραίτητο να γίνει αρχικά μία διερεύνηση του είδους και της πυκνότητας των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιούνταν κατά τη μοντελοποίηση. Ο έλεγχος έγινε με κριτήριο τις ακριβείς τιμές που δίνει η θεωρία ελαστικότητας με χρήση της κλειστής μαθηματικής ανάλυσης που έκανε ο *Czerny*[4]. Για να υπάρχει δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων οι αναλύσεις αυτές έγιναν για λόγο *Poisson* $\nu = 0$. Η διερεύνηση έγινε για τετραγωνικές τετραέρειστες πλάκες ($l_y/l_x = 1.00$) και ορθογωνικές τετραέρειστες με λόγο $l_y/l_x = 2.00$ για όλες τις συνθήκες στήριξης. Προτιμήθηκαν πλάκες με μεγάλες διαστάσεις ($20m \times 20m$) και

μεγάλο κατανεμημένο φορτίο (100 KN/m^2), ώστε να δίδεται η δυνατότητα να γίνει αρκετά μεγάλη πύκνωση καννάβου και τα αποτελέσματα να είναι αρκετά ακριβή. Το πάχος των πλακών επιλέχθηκε αυθαίρετα στα 25 cm χωρίς να βλέπεται η γενικότητα. Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά δύο αριθμητικά παραδείγματα.

2.5.1.1 Παράδειγμα 1^ο (πλάκα τύπου I)

Στην πλάκα του σχήματος υπολογίστηκε η ροπή από τους πίνακες Czerny:

για λόγο $l_y/l_x = 1.00$, φορτίο $p = 100 \text{ KN/m}^2$, μέτρο ελαστικότητας $E = 29 \text{ GPa}$, διαστάσεις $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ και πάχος πλάκας $h_f = 25 \text{ cm}$ έχουμε:



$$m_{xm} = m_{ym} = \frac{p \cdot l_x^2}{27.2} = 1470.59 \text{ KNm}$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot 0.0487 = 1.71961 \text{ m}$$

Σχ. 2.2: Ροπές ανοίγματος της πλάκας

Σημειώνεται ότι αν και τα αποτελέσματα φαίνονται πολύ μεγάλα, εν τούτοις είναι λογικά για τη γεωμετρία της πλάκας και το μέγεθος του φορτίου. Τα αποτελέσματα αυτά ενδείκνυνται για την παραμετρική ανάλυση της πλάκας και μόνο.

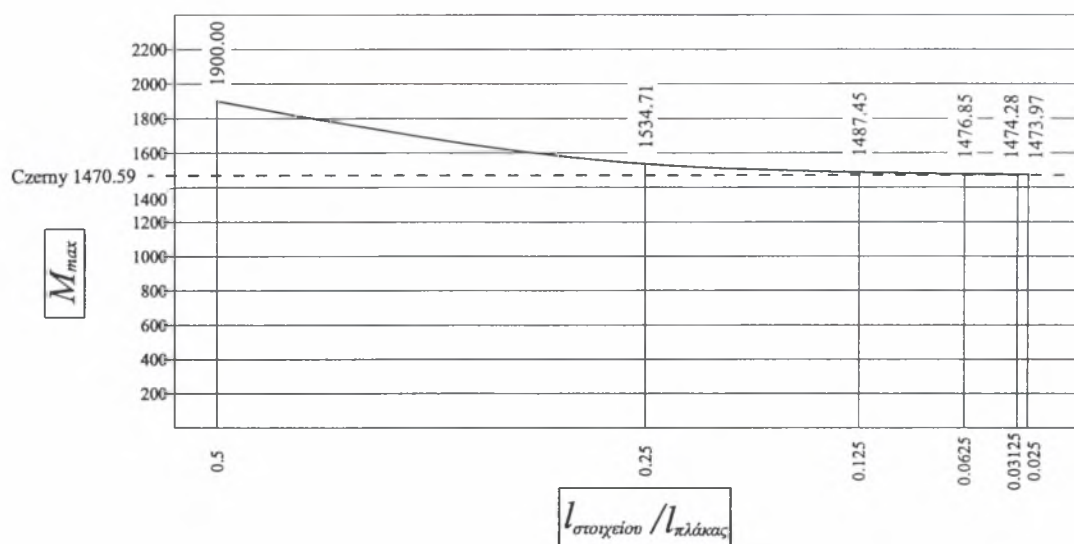
Διακριτοποιώντας στη συνέχεια την πλάκα με 4, 16, 64, 256, 1024 και 1600 τετραγωνικά τετράκομβα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία λαμβάνουμε τις αντίστοιχες ροπές και βυθίσεις στο κέντρο της πλάκας –όπου εμφανίζονται και οι μέγιστες τιμές αυτών–:

Πίνακας 2.1

Τιμές ροπής ανοίγματος και βύθισης, για αυξανόμενη πύκνωση καννάβου, πλάκας με περιμετρική έδραση

αριθμός πεπερασμένων στοιχείων	αριθμός στοιχείων ανά πλευρά	λόγος μήκους πλευράς στοιχείου προς πλευρά πλάκας $l_{\text{στοιχείου}}/l_{\text{πλάκας}}$	ροπή ανοίγματος (απόκλιση %)	μέγιστη βύθιση (απόκλιση %)
4	2	0.50000	1900.00 (+29.19)	1.58897 (+7.59)
16	4	0.25000	1534.71 (+4.36)	1.70786 (+0.68)
64	8	0.12500	1487.45 (+1.15)	1.71869 (+0.05)
256	16	0.06250	1476.85 (+0.43)	1.72070 (+0.06)
1024	32	0.03125	1474.28 (+0.25)	1.72116 (+0.09)
1600	40	0.02500	1473.97 (+0.23)	1.72122 (+0.09)

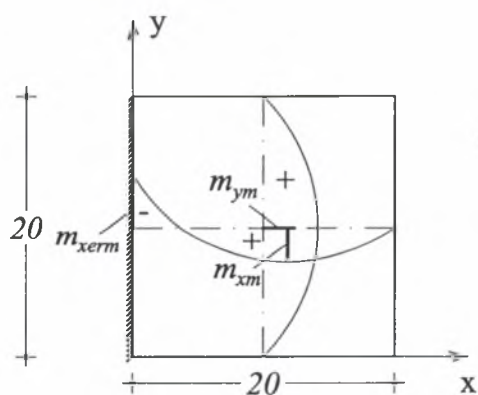
Παρατηρούμε ότι η απόκλιση που εμφανίζεται από την τιμή του Czerny, για διακριτοποίηση με 1600 στοιχεία πλευράς $0.5m \times 0.5m$, είναι της τάξεως του 0.23% για τη ροπή, ενώ για τη βύθιση 0.09%. Οι αποκλίσεις αυτές είναι σαφώς ικανοποιητικές. Όπως μπορεί να φανεί και στο διάγραμμα, όσο πυκνότερος είναι ο κάνναβος των πεπερασμένων στοιχείων, τόσο και η απόκλιση από τις ακριβείς τιμές ελαττώνεται:



Σχ. 2.3: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών ανοίγματος, ανάλογα με την πυκνωση του κάνναβου των πεπερασμένων στοιχείων

2.5.1.2 Παράδειγμα 2^ο (πλάκα τύπου 2)

Εργαζόμενοι ομοίως με την περίπτωση της περιμετρικής έδρασης έχουμε:



$$m_{xm} = \frac{p \cdot l_x^2}{31.4} = 1273.89 \text{ KNm}$$

$$m_{xerm} = -\frac{p \cdot l_x^2}{11.9} = -3361.35 \text{ KNm}$$

$$m_{ym} = \frac{p \cdot l_x^2}{41.2} = 970.87 \text{ KNm}$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot 0.0334 = 1.17937 \text{ m}$$

Σχ. 2.4: Ροπές ανοίγματος και πακτώσεως της πλάκας

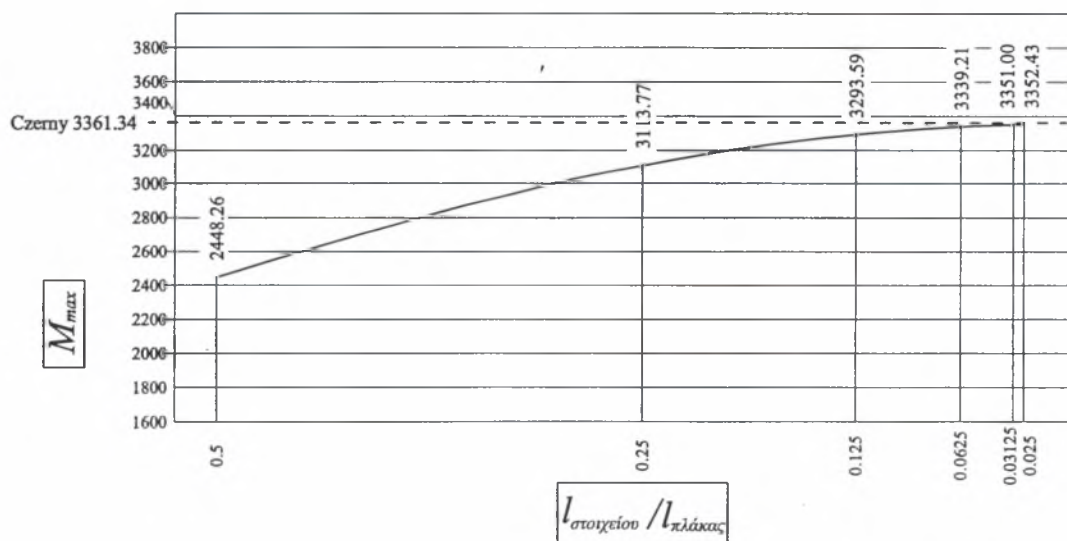
Κατ' αναλογία τα αποτελέσματα από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, έχουν ως εξής:

Πίνακας 2.2

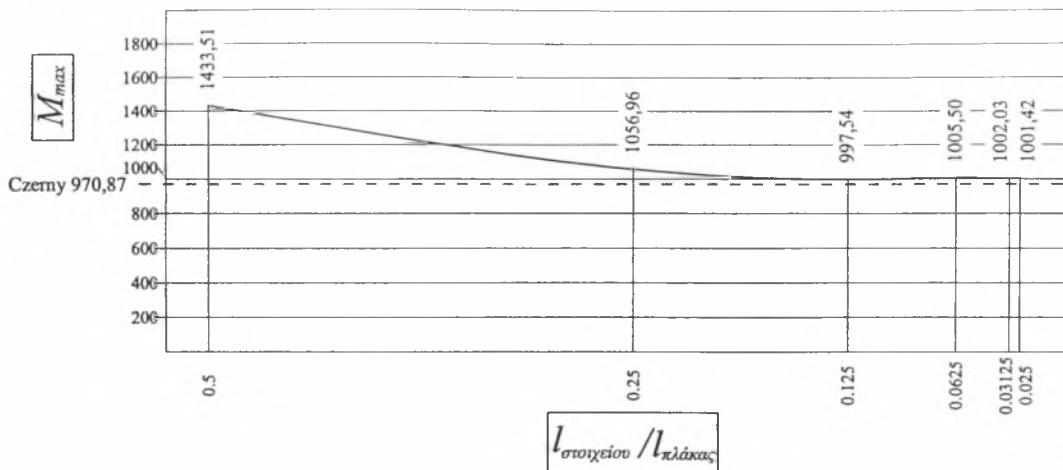
Τιμές ροπής ανοίγματος, στήριξης και βύθισης, για αυξανόμενη πυκνωση καννάβου, πλάκας με πάκτωση στη μία πλευρά

αριθμός πεπερασμένων στοιχείων	αριθμός στοιχείων ανά πλευρά	λόγος μήκους πλευράς στοιχείου προς πλευρά πλάκας $l_{\text{στοιχείου}}/l_{\text{πλάκας}}$	ροπή πάκτωσης x (απ. %)	ροπή ανοίγματος y (απ. %)	μέγιστη βύθιση (απ. %)
4	2	0.50000	2448.26 (-27.16)	1433.51 (+47.65)	1.21505 (+3.03)
16	4	0.25000	3113.77 (-7.36)	1056.96 (+8.87)	1.21991 (+3.44)
64	8	0.12500	3293.59 (-2.02)	997.54 (+2.75)	1.19379 (+1.22)
256	16	0.06250	3339.21 (-0.66)	1005.50 (+3.56)	1.21307 (+2.86)
1024	32	0.03125	3351.00 (-0.31)	1002.03 (+3.21)	1.21111 (+2.69)
1600	40	0.02500	3352.43 (-0.27)	1001.42 (+3.15)	1.21029 (+2.62)

Παρατηρούμε ότι η απόκλιση που εμφανίζεται από την τιμή του Czerny, για διακριτοποίηση με 1600 στοιχεία πλευράς $0.5m \times 0.5m$, είναι της τάξεως του 0.27% για τη ροπή στην πάκτωση και 3.15% για τη ροπή του ανοίγματος. Για τη βύθιση 2.62%. Όπως μπορεί να φανεί και στα διαγράμματα, όσο πυκνότερος είναι ο κάνναβος των πεπερασμένων στοιχείων, τόσο και η απόκλιση από τις ακριβείς τιμές ελαττώνεται:



Σχ. 2.5: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών πάκτωσης, ανάλογα με την πυκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων

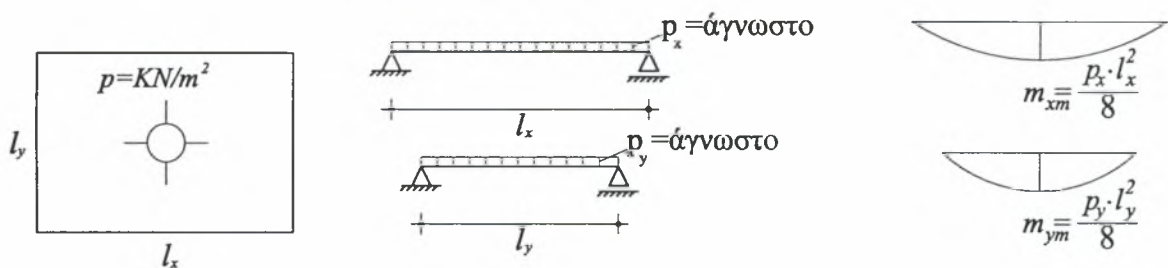


Σχ. 2.6: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών ανοίγματος, ανάλογα με την πύκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων

2.5.2 Τρόπος υπολογισμού και σύνταξης των νέων πινάκων

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι διαφορετική από αυτήν που ο *Markus* πρότεινε. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι τα προς επεξεργασία αποτελέσματα προέρχονται από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Από την επίλυση των 900 πλάκων προέκυψαν οι μέγιστες τιμές των ροπών κάμψης και των βυθίσεων.

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τη μέθοδο των λωρίδων δηλαδή:



Σχ. 2.7: Φορτία και ροπές κάμψης επί των λωρίδων της πλάκας

εξισώθηκε η μέγιστη ροπή που προκύπτει από την μέθοδο των λωρίδων –η οποία είναι συνάρτηση του άγνωστου φορτίου p_x ή p_y – με την αντίστοιχη τιμή της ροπής που υπολογίστηκε με τη χρήση των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων και προέκυψε απευθείας το άγνωστο φορτίο p_x ή p_y αντίστοιχα και εν συνεχεία οι συντελεστές κατανομής. Ειδικότερα:

Έστω m_{xm} , m_{ym} οι μέγιστες ροπές κάμψης του ανοίγματος κατά x και y αντίστοιχα και f_m η μέγιστη βύθιση. Από τη στατική γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ροπή κάμψης για την αμφίεριστη είναι $p \cdot l^2 / 8$. Εργαζόμενοι αντίστροφα και με γνωστό το μήκος της λωρίδας υπολογίζουμε το φορτίο p . Κατά αντίστοιχο τρόπο υπολογίστηκε ο συντελεστής για τη βύθιση, με τη διαφορά ότι η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έγινε με βάση τα χαρακτηριστικά της πλάκας –γεωμετρία, φόρτιση και υλικό-.

Τα παραπάνω αφορούν τις πλάκες με περιμετρική έδραση. Όσον αφορά τους υπόλοιπους τύπους πλακών με πάκτωση σε κάποιες από τις πλευρές ή με περιμετρική πάκτωση η διαδικασία διαφοροποιείται ελάχιστα. Ο λόγος που συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι ότι το φορτίο, που λαμβάνεται με αντίστροφη διαδικασία, από τη ροπή στην πάκτωση είναι μεγαλύτερο από αυτό που δίδει η αντίστοιχη ροπή ανοίγματος.

Παράδειγμα

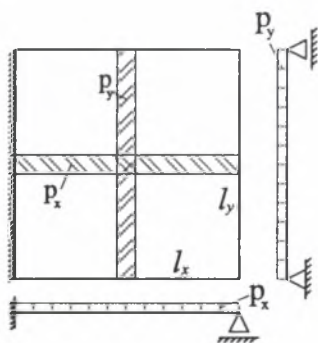
Για μία τετραεπίστη πλάκα διαστάσεων $20m \times 20m$ ($l_y/l_x = 1.00$), με πάκτωση στη μία πλευρά, ομοιόμορφο φορτίο $p = 100 \text{ KN/m}^2$, μέτρο ελαστικότητας $E = 29 \text{ GPa}$, $h_f = 25 \text{ cm}$, $\nu = 0.15$ λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία:

$$m_{xerm} = 3352.51 \text{ KNm}$$

$$m_{xm} = 1509.91 \text{ KNm}$$

$$m_{ym} = 1204.46 \text{ KNm}$$

Επιλύοντας ως δοκούς τις δύο λωρίδες $x - x$, $y - y$ παίρνουμε για το φορτίο:



$$\left. \begin{aligned} & \text{κατά } x \\ & P_{xerm} = \frac{8 \cdot m_{xerm}}{l_x^2} = 67.05 \text{ KN/m} \\ & P_{xm} = \frac{128}{9} \cdot \frac{m_{xm}}{l_x^2} = 53.69 \text{ KN/m} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{και κατά } y \quad P_{ym} = \frac{8 \cdot m_{ym}}{l_y^2} = 24.09 \text{ KN/m}$$

Σχ. 2.8: Φορτία επί πλακολωρίδων

Όπου:

P_{xerm} το φορτίο που δίνει ροπή στην πάκτωση της μονόπακτης δοκού ίση με τη μέγιστη ροπή πακτώσεως, κατά x , από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία στον επιφανειακό φορέα

P_{xm} το φορτίο που δίνει ροπή στο άνοιγμα της μονόπακτης δοκού ίση με τη μέγιστη ροπή ανοίγματος, στη διεύθυνση της P_{xerm} από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία στον επιφανειακό φορέα

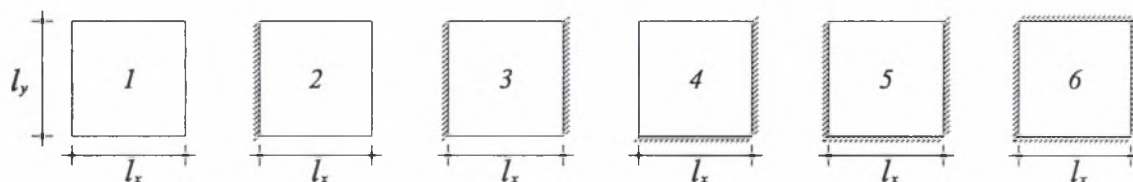
P_{ym} το φορτίο που δίνει ροπή στο άνοιγμα της αρθρωτής δοκού ίση με τη μέγιστη ροπή ανοίγματος, κατά y , από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία στον επιφανειακό φορέα

Από τα δύο φορτία που λαμβάνουμε (κατά x) προτιμούμε το μεγαλύτερο για να βρισκόμαστε προς την πλευρά της ασφαλείας. Όπως φάνηκε στη συνέχεια από την ανάλυση, η ροπή της πάκτωσης δίδει πάντα μεγαλύτερο φορτίο από τη ροπή του ανοίγματος.

Επομένως αν και η απόκλιση της ροπής του ανοίγματος από την ακριβή τιμή της θεωρίας της ελαστικότητας είναι της τάξης του 6% –σε σύγκριση με τις «ακριβείς» τιμές της θεωρίας ελαστικότητας–, ακόμα και για διακριτοποίηση με 1600 πεπερασμένα στοιχεία, αυτό δεν επηρεάζει τα τελικά αποτελέσματα (αυτός είναι ο λόγος που η ροπή ανοίγματος κατά x δεν παρουσιάζεται στον *πιν.* 2.2).

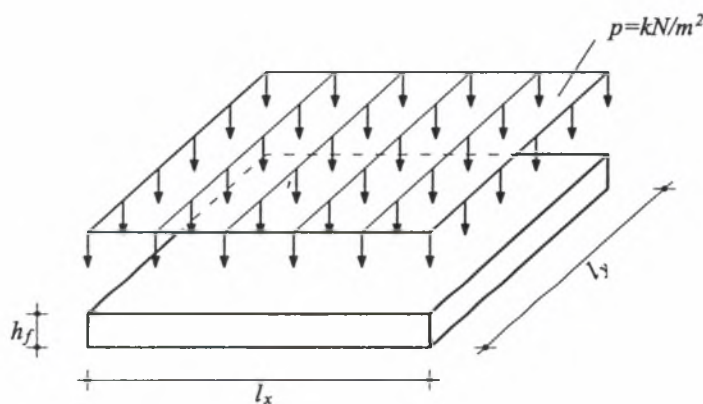
2.6 Τετραέρειστες ορθογωνικές πλάκες

Στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας συντάχθηκαν νέοι πίνακες κατανομής ομοιόμορφου φορτίου –ανάλογοι των πινάκων *Markus*– στις ορθογωνικές τετραέρειστες πλάκες ώστε να επιτυγχάνεται ο υπολογισμός των ροπών κάμψης και των βυθίσεων των υπόψη πλακών, για λόγους πλευρών $0.50 \leq l_y/l_x \leq 1.99$, με ακρίβεια ίση με αυτήν που προέρχεται από τη χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων με πολύ πυκνή διακριτοποίηση και με συντελεστή *Poisson* $\nu = 0.15$ (δηλαδή το συντελεστή του οπλισμένου σκυροδέματος). Ακόμα παρατίθενται συντελεστές για την εύρεση της μέγιστης βύθισης της πλάκας. Οι τύποι πλακών που διερευνήθηκαν είναι οι 6 γνωστοί τύποι στήριξης αυτών:



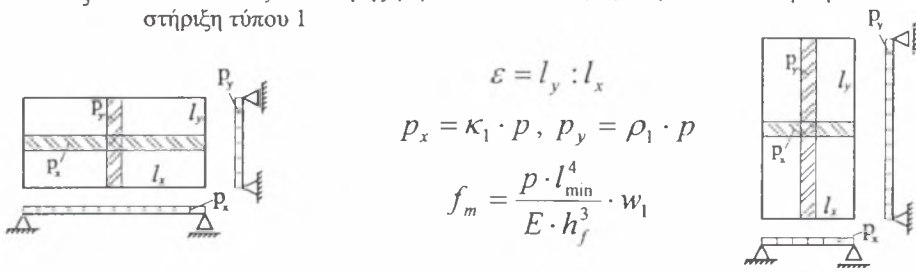
Σχ. 2.9: Τύποι στήριξης ορθογωνικών τετραέρειστων πλακών

Οι πίνακες δουλεύουν κατ' αντιστοιχία με τους πίνακες *Markus* και για ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο στην επιφάνεια:



Σχ. 2.10: Γεωμετρία της πλάκας και συνθήκες φόρτισης

Πίνακας 1 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων τετραρέιιστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 1



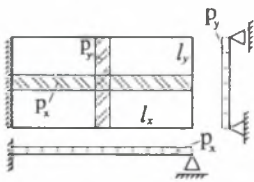
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_1 \cdot p, \quad p_y = \rho_1 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_1$$

$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_1	ρ_1	w_1	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_1	ρ_1	w_1	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_1	ρ_1	w_1
0,50	0,0637	0,7933	0,11869	1,00	0,3390	0,3390	0,04765	1,50	0,6165	0,1384	0,09055
51	0673	7824	11694	01	3452	3328	04860	51	6210	1361	09126
52	0710	7709	11509	02	3514	3266	04953	52	6254	1338	09196
53	0749	7603	11339	03	3576	3206	05048	53	6297	1316	09264
54	0790	7503	11182	04	3640	3148	05145	54	6339	1294	09330
0,55	0,0831	0,7398	0,11015	1,05	0,3702	0,3091	0,05240	1,55	0,6380	0,1273	0,09395
56	0873	7288	10840	06	3764	3034	05334	56	6425	1252	09467
57	0915	7174	10657	07	3824	2978	05427	57	6470	1232	09537
58	0959	7067	10487	08	3886	2923	05521	58	6515	1212	09608
59	1006	6965	10328	09	3948	2870	05617	59	6556	1192	09673
0,60	0,1052	0,6860	0,10162	1,10	0,4009	0,2818	0,05711	1,60	0,6597	0,1172	0,09739
61	1099	6752	09990	11	4070	2766	05804	61	6638	1153	09804
62	1146	6641	09813	12	4129	2716	05895	62	6678	1136	09867
63	1195	6539	09647	13	4190	2666	05988	63	6717	1117	09928
64	1246	6436	09490	14	4251	2618	06082	64	6755	1098	09989
0,65	0,1298	0,6333	0,09328	1,15	0,4311	0,2571	0,06174	1,65	0,6792	0,1081	0,10048
66	1349	6228	09163	16	4369	2524	06265	66	6833	1063	10113
67	1400	6122	08994	17	4427	2478	06355	67	6873	1047	10177
68	1454	6021	08835	18	4486	2433	06446	68	6913	1031	10239
69	1509	5924	08684	19	4546	2389	06537	69	6951	1014	10300
0,70	0,1564	0,5825	0,08529	1,20	0,4604	0,2346	0,06628	1,70	0,6989	0,0998	0,10359
71	1619	5725	08373	21	4666	2305	06715	71	7025	0982	10417
72	1674	5625	08214	22	4723	2264	06803	72	7061	0967	10474
73	1730	5529	08064	23	4778	2223	06888	73	7095	0952	10530
74	1789	5436	07920	24	4832	2182	06973	74	7130	0937	10578
0,75	0,1847	0,5343	0,07774	1,25	0,4888	0,2143	0,07062	1,75	0,7163	0,0923	0,10638
76	1905	5249	07628	26	4945	2105	07147	76	7200	0909	10697
77	1963	5155	07480	27	5002	2068	07236	77	7236	0894	10754
78	2022	5064	07339	28	5059	2031	07324	78	7271	0881	10810
79	2083	4977	07205	29	5115	1995	07411	79	7306	0867	10865
0,80	0,2143	0,4888	0,07062	1,30	0,5169	0,1960	0,07496	1,80	0,7339	0,0854	0,10918
81	2204	4802	06933	31	5223	1925	07579	81	7372	0842	10971
82	2263	4715	06797	32	5275	1892	07661	82	7404	0829	11022
83	2325	4630	06666	33	5327	1858	07741	83	7436	0816	11072
84	2387	4549	06541	34	5377	1825	07820	84	7466	0804	11121
0,85	0,2449	0,4467	0,06416	1,35	0,5427	0,1793	0,07897	1,85	0,7496	0,0792	0,11169
86	2511	4386	06290	36	5475	1762	07982	86	7529	0781	11221
87	2572	4306	06165	37	5535	1732	08066	87	7561	0769	11273
88	2634	4228	06045	38	5587	1702	08148	88	7593	0758	11323
89	2698	4152	05930	39	5638	1672	08228	89	7623	0746	11372
0,90	0,2761	0,4077	0,05815	1,40	0,5688	0,1643	0,08307	1,90	0,7653	0,0736	0,11420
91	2944	4003	05700	41	5738	1615	08384	91	7682	0725	11467
92	2885	3929	05586	42	5786	1587	08460	92	7711	0715	11513
93	2948	3857	05476	43	5833	1560	08534	93	7737	0704	11554
94	3012	3788	05370	44	5880	1533	08607	94	7766	0694	11601
0,95	0,3076	0,3719	0,05265	1,45	0,5925	0,1507	0,08679	1,95	0,7793	0,0684	0,11644
96	3138	3650	05161	46	5975	1482	08757	96	7822	0675	11691
97	3200	3583	05057	47	6024	1456	08834	97	7851	0665	11737
98	3263	3517	04957	48	6072	1432	08909	98	7879	0655	11782
99	3327	3453	04861	49	6119	1408	08983	99	7906	0646	11826
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_1	ρ_1	w_1	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_1	ρ_1	w_1	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_1	ρ_1	w_1

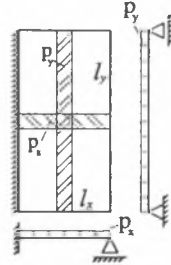
Πίνακας 2 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων τετραερείστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 2



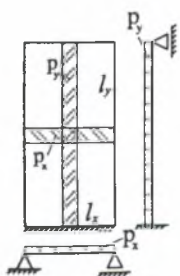
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_2 \cdot p, \quad p_y = \rho_2 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_2$$



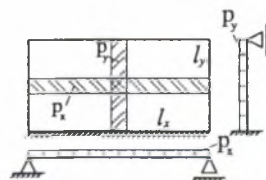
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_2	ρ_2	w_2	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_2	ρ_2	w_2	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_2	ρ_2	w_2
0,50	0,2422	0,7362	0,10967	1,00	0,6705	0,2409	0,03351	1,50	0,8879	0,0851	0,05137
51	2511	7230	10756	01	6770	2352	03399	51	8904	0838	05160
52	2599	7093	10537	02	6832	2297	03447	52	8929	0825	05182
53	2691	6963	10332	03	6896	2243	03495	53	8952	0813	05203
54	2786	6839	10140	04	6960	2191	03544	54	8975	0800	05224
0,55	0,2880	0,6711	0,09940	1,05	0,7022	0,2140	0,03591	1,55	0,8996	0,0787	0,05244
56	2972	6580	09733	06	7081	2090	03638	56	9022	0776	05267
57	3063	6446	09520	07	7136	2041	03683	57	9046	0765	05289
58	3157	6318	09320	08	7197	1993	03723	58	9071	0754	05312
59	3254	6196	09131	09	7256	1947	03774	59	9092	0742	05332
0,60	0,3350	0,6071	0,08937	1,10	0,7313	0,1902	0,03818	1,60	0,9113	0,0732	0,05352
61	3444	5945	08739	11	7368	1858	03862	61	9134	0722	05371
62	3535	5817	08421	12	7421	1815	03904	62	9154	0712	05390
63	3630	5695	08348	13	7475	1773	03947	63	9173	0701	05408
64	3727	5577	08167	14	7529	1733	03990	64	9191	0691	05425
0,65	0,3823	0,5459	0,07984	1,15	0,7581	0,1693	0,04031	1,65	0,9208	0,0683	0,05442
66	3916	5340	07799	16	7631	1654	04072	66	9229	0674	05461
67	4007	5219	07613	17	7680	1617	04111	67	9249	0664	05480
68	4101	5106	07436	18	7729	1580	04151	68	9268	0655	05498
69	4197	4996	07267	19	7778	1544	04191	69	9286	0647	05515
0,70	0,4290	0,4885	0,07098	1,20	0,7826	0,1509	0,04230	1,70	0,9303	0,0639	0,05532
71	4382	4775	06927	21	7858	1475	04263	71	9320	0631	05548
72	4471	4665	06758	22	7902	1442	04299	72	9336	0622	05563
73	4562	4559	06596	23	7945	1411	04334	73	9351	0613	05578
74	4656	4457	06441	24	7986	1380	04369	74	9365	0607	05592
0,75	0,4746	0,4356	0,06279	1,25	0,8025	0,1351	0,04402	1,75	0,9379	0,0599	0,05606
76	4835	4255	06132	26	8063	1322	04439	76	9396	0592	05622
77	4920	4156	05979	27	8116	1295	04476	77	9412	0584	05638
78	5008	4060	05832	28	8158	1268	04511	78	9427	0577	05653
79	5097	3968	05692	29	8199	1242	04545	79	9442	0570	05667
0,80	0,5184	0,3876	0,05553	1,30	0,8239	0,1217	0,04579	1,80	0,9456	0,0564	0,05681
81	5269	3786	05415	31	8277	1193	04611	81	9469	0557	05694
82	5351	3697	05278	32	8313	1170	04642	82	9482	0550	05707
83	5434	3610	05147	33	8349	1147	04672	83	9494	0543	05720
84	5519	3527	05021	34	8382	1125	04701	84	9506	0538	05732
0,85	0,5602	0,3445	0,04897	1,35	0,8415	0,1104	0,04730	1,85	0,9517	0,0532	0,05743
86	5681	3363	04774	36	8453	1084	04762	86	9530	0525	05756
87	5759	3284	04621	37	8489	1064	04793	87	9543	0518	05769
88	5838	3206	04536	38	8525	1044	04823	88	9555	0513	05782
89	5917	3132	04425	39	8558	1025	04852	89	9567	0508	05794
0,90	0,5995	0,3058	0,04315	1,40	0,8591	0,1008	0,04881	1,90	0,9578	0,0502	0,05806
91	6070	2986	04206	41	8622	0990	04908	91	9588	0496	05817
92	6142	2915	04100	42	8652	0972	04935	92	9599	0490	05828
93	6216	2846	03997	43	8681	0956	04960	93	9607	0484	05837
94	6291	2779	03899	44	8708	0940	04985	94	9618	0481	05848
0,95	0,6363	0,2714	0,03802	1,45	0,8735	0,0924	0,05009	1,95	0,9626	0,0475	0,05857
96	6433	2650	03706	46	8766	0908	05036	96	9637	0470	05869
97	6500	2587	03613	47	8796	0893	05062	97	9647	0464	05879
98	6569	2526	03522	48	8825	0879	05088	98	9657	0460	05890
99	6638	2467	03436	49	8852	0865	05113	99	9666	0456	05900
$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_2	κ_2	w_2	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_2	κ_2	w_2	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_2	κ_2	w_2



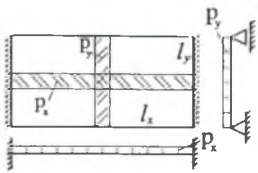
$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$p_x = \kappa_2 \cdot p, \quad p_y = \rho_2 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_2$$



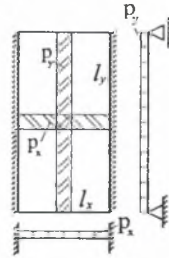
Πίνακας 3 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων τετραερίστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 3



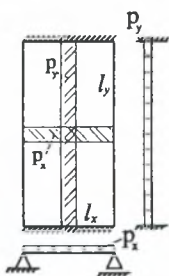
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_3 \cdot p, \quad p_y = \rho_3 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_3$$



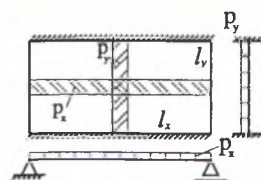
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_3	ρ_3	w_3	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_3	ρ_3	w_3	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_3	ρ_3	w_3
0,50	0,3561	0,6683	0,09909	1,00	0,8376	0,1611	0,02251	1,50	0,9847	0,0589	0,02902
51	3685	6526	09663	01	8430	1566	02273	51	9858	0581	02916
52	3805	6366	09410	02	8482	1522	02294	52	9869	0574	02922
53	3931	6213	09172	03	8534	1480	02315	53	9879	0566	02927
54	4060	6067	08947	04	8587	1440	02336	54	9888	0558	02932
0,55	0,4186	0,5918	0,08717	1,05	0,8637	0,1402	0,02357	1,55	0,9897	0,0549	0,02937
56	4309	5767	08483	06	8684	1365	02376	56	9909	0542	02943
57	4429	5615	08246	07	8730	1331	02395	57	9919	0536	02949
58	4552	5470	08022	08	8775	1297	02414	58	9930	0530	02955
59	4679	5331	07810	09	8821	1265	02433	59	9939	0521	02959
0,60	0,4802	0,5191	0,07596	1,10	0,8865	0,1234	0,02452	1,60	0,9947	0,0514	0,02964
61	4921	5051	07380	11	8906	1204	02469	61	9955	0508	02969
62	5037	4912	07164	12	8946	1176	02486	62	9962	0502	02973
63	5156	4778	06960	13	8985	1149	02503	63	9969	0496	02977
64	5277	4649	06766	14	9026	1122	02520	64	9975	0489	02980
0,65	0,5394	0,4521	0,06571	1,15	0,9064	0,1097	0,02536	1,65	0,9981	0,0482	0,02984
66	5507	4395	06378	16	9100	1073	02552	66	9988	0477	02988
67	5617	4269	06186	17	9134	1050	02567	67	9996	0471	02993
68	5728	4149	06003	18	9168	1027	02582	68	10002	0466	02997
69	5842	4033	05829	19	9203	1005	02597	69	10009	0459	03000
0,70	0,5951	0,3918	0,05657	1,20	0,9236	0,0984	0,02611	1,70	1,0014	0,0453	0,03004
71	6057	3805	05486	21	9255	0968	02631	71	10019	0449	03007
72	6158	3694	05318	22	9284	0948	02644	72	10024	0444	03010
73	6262	3588	05158	23	9312	0928	02656	73	10028	0439	03013
74	6366	3485	05005	24	9338	0911	02668	74	10032	0433	03016
0,75	0,6467	0,3384	0,04855	1,25	0,9362	0,0894	0,02679	1,75	1,0035	0,0427	0,03018
76	6564	3285	04706	26	9393	0877	02693	76	10040	0423	03021
77	6657	3188	04561	27	9422	0859	02706	77	10045	0419	03024
78	6751	3095	04422	28	9450	0843	02718	78	10049	0414	03027
79	6846	3005	04289	29	9476	0829	02730	79	10053	0409	03030
0,80	0,6938	0,2917	0,04159	1,30	0,9500	0,0814	0,02741	1,80	1,0056	0,0403	0,03032
81	7025	2831	04032	31	9523	0799	02752	81	10059	0400	03035
82	7109	2747	03907	32	9545	0783	02762	82	10062	0396	03037
83	7194	2667	03787	33	9565	0771	02771	83	10064	0391	03039
84	7280	2589	03674	34	9584	0759	02781	84	10066	0386	03040
0,85	0,7362	0,2513	0,03562	1,35	0,9601	0,0745	0,02789	1,85	1,0068	0,0382	0,03042
86	7441	2439	03453	36	9624	0732	02800	86	10071	0378	03044
87	7516	2367	03346	37	9646	0720	02810	87	10074	0375	03047
88	7592	2297	03245	38	9666	0709	02819	88	10076	0371	03048
89	7668	2230	03147	39	9685	0698	02828	89	10078	0366	03050
0,90	0,7742	0,2164	0,03052	1,40	0,9702	0,0686	0,02837	1,90	1,0080	0,0362	0,03052
91	7812	2101	02959	41	9719	0674	02845	91	10082	0359	03053
92	7878	2039	02869	42	9734	0665	02853	92	10083	0355	03055
93	7946	1980	02782	43	9749	0655	02860	93	10083	0350	03056
94	8014	1922	02699	44	9762	0645	02867	94	10085	0348	03057
0,95	0,8079	0,1866	0,02619	1,45	0,9775	0,0635	0,02873	1,95	1,0085	0,0343	0,03058
96	8140	1812	02540	46	9791	0624	02881	96	10087	0341	03060
97	8199	1759	02463	47	9806	0616	02889	97	10088	0338	03061
98	8259	1708	02390	48	9821	0608	02896	98	10089	0334	03063
99	8319	1659	02319	49	9834	0599	02903	99	10090	0330	03064
$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_3	κ_3	w_3	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_3	κ_3	w_3	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_3	κ_3	w_3



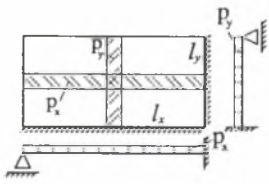
$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$p_x = \kappa_3 \cdot p, \quad p_y = \rho_3 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_3$$



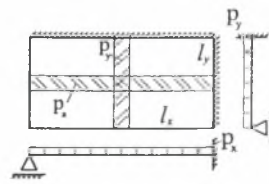
Πίνακας 4 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων τετραρέιςτων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 4



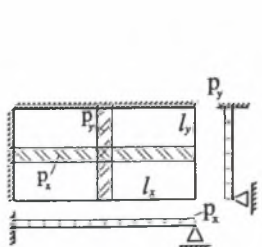
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_4 \cdot p, \quad p_y = \rho_4 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_4$$



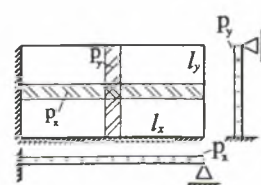
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_4	ρ_4	w_4	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_4	ρ_4	w_4	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_4	ρ_4	w_4
0,50	0,1618	0,9461	0,05704	1,00	0,5551	0,5551	0,02583	1,50	0,8306	0,2831	0,04673
51	1686	9408	05668	01	5626	5476	02636	51	8343	2796	04704
52	1753	9352	05619	02	5699	5402	02688	52	8380	2761	04735
53	1819	9294	05561	03	5770	5329	02739	53	8414	2728	04765
54	1885	9234	05494	04	5845	5257	02788	54	8448	2694	04794
0,55	0,1958	0,9172	0,05437	1,05	0,5918	0,5185	0,02839	1,55	0,8480	0,2661	0,04822
56	2030	9107	05385	06	5989	5115	02891	56	8511	2629	04849
57	2101	9041	05325	07	6058	5045	02941	57	8540	2597	04875
58	2171	8972	05257	08	6127	4976	02990	58	8573	2566	04902
59	2247	8902	05186	09	6198	4909	03038	59	8604	2536	04925
0,60	0,2324	0,8830	0,05131	1,10	0,6267	0,4842	0,03088	1,60	0,8622	0,2505	0,04953
61	2399	8756	05069	11	6333	4776	03138	61	8667	2476	04980
62	2473	8681	05001	12	6398	4710	03186	62	8697	2446	05006
63	2550	8605	04928	13	6464	4646	03233	63	8725	2418	05032
64	2630	8527	04864	14	6531	4583	03280	64	8753	2389	05056
0,65	0,2710	0,8448	0,04801	1,15	0,6595	0,4520	0,03329	1,65	0,8779	0,2361	0,05080
66	2787	8368	04733	16	6651	4459	03376	66	8804	2334	05103
67	2864	8287	04661	17	6717	4398	03422	67	8829	2307	05125
68	2948	8205	04588	18	6781	4338	03467	68	8855	2281	05146
69	3030	8122	04525	19	6842	4279	03512	69	8883	2254	05168
0,70	0,3111	0,8038	0,04458	1,20	0,6902	0,4221	0,03558	1,70	0,8909	0,2229	0,05191
71	3190	7954	04388	21	6945	4141	03596	71	8934	2203	05214
72	3274	7869	04315	22	7006	4085	03643	72	8958	2179	05237
73	3358	7784	04248	23	7065	4030	03688	73	8982	2154	05258
74	3441	7698	04183	24	7122	3976	03733	74	9004	2130	05279
0,75	0,3522	0,7612	0,04115	1,25	0,7180	0,3930	0,03776	1,75	0,9025	0,2106	0,05299
76	3604	7526	04044	26	7231	3870	03818	76	9046	2083	05318
77	3690	7440	03973	27	7282	3818	03859	77	9066	2060	05336
78	3775	7354	03910	28	7331	3767	03898	78	9088	2037	05354
79	3857	7268	03844	29	7380	3717	03937	79	9111	2015	05373
0,80	0,3930	0,7180	0,03776	1,30	0,7436	0,3667	0,03974	1,80	0,9132	0,1993	0,05393
81	4023	7097	03708	31	7490	3619	04014	81	9153	1972	05412
82	4108	7011	03643	32	7542	3571	04056	82	9172	1950	05431
83	4192	6926	03580	33	7592	3524	04096	83	9191	1929	05449
84	4273	6841	03516	34	7641	3478	04135	84	9209	1909	05466
0,85	0,4354	0,6756	0,03451	1,35	0,7687	0,3432	0,04173	1,85	0,9227	0,1888	0,05483
86	4439	6672	03385	36	7732	3387	04210	86	9243	1868	05499
87	4523	6588	03325	37	7775	3343	04245	87	9260	1849	05514
88	4604	6505	03265	38	7817	3300	04280	88	9279	1829	05529
89	4682	6422	03203	39	7862	3257	04313	89	9297	1810	05546
0,90	0,4765	0,6339	0,03141	1,40	0,7909	0,3215	0,04347	1,90	0,9314	0,1792	0,05563
91	4848	6257	03082	41	7954	3174	04384	91	9331	1773	05579
92	4928	6176	03025	42	7998	3133	04420	92	9346	1755	05594
93	5006	6095	02967	43	8039	3093	04454	93	9360	1737	05607
94	5084	6015	02909	44	8080	3054	04488	94	9376	1719	05623
0,95	0,5165	0,5936	0,02851	1,45	0,8119	0,3015	0,04521	1,95	0,9390	0,1702	0,05637
96	5244	5857	02797	46	8156	2977	04541	96	9403	1684	05651
97	5311	5780	02743	47	8192	2940	04583	97	9417	1668	05663
98	5396	5702	02689	48	8227	2903	04613	98	9432	1651	05676
99	5473	5626	02636	49	8267	2867	04642	99	9447	1634	05690
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_4	ρ_4	w_4	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_4	ρ_4	w_4	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_4	ρ_4	w_4



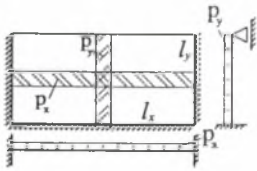
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_4 \cdot p, \quad p_y = \rho_4 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_4$$



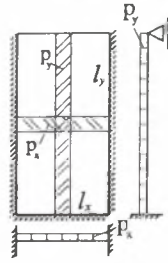
Πίνακας 5 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων τετραερείστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 5



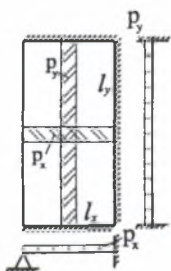
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_5 \cdot p, p_y = \rho_5 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_5$$



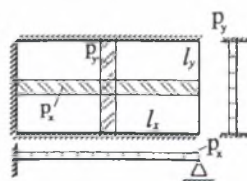
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_5	ρ_5	w_5	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_5	ρ_5	w_5	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_5	ρ_5	w_5
0,50	0,2421	0,9151	0,05435	1,00	0,7348	0,4399	0,01882	1,50	0,9534	0,2025	0,02771
51	2521	9073	05377	01	7423	4325	01910	51	9557	1998	02782
52	2620	8992	05311	02	7495	4252	01937	52	9578	1971	02792
53	2716	8909	05234	03	7564	4180	01964	53	9598	1945	02802
54	2812	8822	05150	04	7632	4110	01989	54	9617	1920	02811
0,55	0,2919	0,8734	0,05073	1,05	0,7703	0,4042	0,02014	1,55	0,9635	0,1895	0,02819
56	3024	8643	05003	06	7770	3973	02040	56	9651	1871	02827
57	3126	8549	04925	07	7835	3906	02065	57	9667	1847	02835
58	3226	8454	04840	08	7896	3841	02090	58	9683	1823	02843
59	3334	8357	04750	09	7959	3778	02113	59	9698	1800	02849
0,60	0,3443	0,8258	0,04677	1,10	0,8022	0,3715	0,02136	1,60	0,9715	0,1778	0,02856
61	3550	8158	04599	11	8082	3654	02160	61	9732	1755	02865
62	3654	8057	04515	12	8140	3594	02183	62	9747	1734	02872
63	3760	7954	04426	13	8194	3535	02205	63	9761	1712	02879
64	3873	7851	04344	14	8252	3477	02226	64	9775	1691	02886
0,65	0,3983	0,7746	0,04266	1,15	0,8308	0,3421	0,02248	1,65	0,9787	0,1671	0,02893
66	4089	7641	04184	16	8361	3366	02269	66	9799	1650	02899
67	4193	7536	04099	17	8411	3312	02290	67	9810	1630	02905
68	4306	7430	04011	18	8460	3258	02309	68	9820	1611	02910
69	4417	7324	03935	19	8512	3207	02328	69	9833	1592	02915
0,70	0,4524	0,7217	0,03856	1,20	0,8561	0,3156	0,02349	1,70	0,9846	0,1573	0,02921
71	4629	7111	03774	21	8589	3097	02371	71	9857	1554	02927
72	4736	7005	03691	22	8639	3049	02390	72	9868	1536	02933
73	4847	6899	03611	23	8687	3001	02410	73	9878	1518	02939
74	4954	6794	03536	24	8733	2954	02428	74	9887	1501	02944
0,75	0,5058	0,6689	0,03459	1,25	0,8776	0,2908	0,02447	1,75	0,9896	0,1484	0,02948
76	5159	6584	03380	26	8817	2864	02464	76	9904	1467	02953
77	5268	6480	03301	27	8856	2820	02480	77	9911	1450	02957
78	5373	6377	03229	28	8892	2777	02496	78	9919	1434	02961
79	5476	6275	03157	29	8927	2735	02511	79	9929	1417	02965
0,80	0,5574	0,6174	0,03084	1,30	0,8960	0,2693	0,02525	1,80	0,9937	0,1402	0,02970
81	5674	6073	03011	31	9003	2653	02540	81	9945	1386	02975
82	5777	5974	02940	32	9042	2613	02556	82	9952	1371	02979
83	5877	5876	02872	33	9078	2575	02572	83	9959	1356	02983
84	5972	5778	02805	34	9113	2537	02587	84	9965	1341	02986
0,85	0,6065	0,5682	0,02737	1,35	0,9145	0,2500	0,02601	1,85	0,9971	0,1326	0,02990
86	6163	5587	02670	36	9176	2463	02615	86	9976	1312	02993
87	6258	5494	02607	37	9205	2428	02628	87	9980	1298	02996
88	6351	5401	02545	38	9233	2393	02637	88	9987	1284	02999
89	6439	5310	02483	39	9259	2359	02652	89	9993	1270	03002
0,90	0,6527	0,5221	0,02421	1,40	0,9289	0,2325	0,02663	1,90	0,9999	0,1257	0,03006
91	6619	5132	02361	41	9319	2292	02675	91	10004	1244	03009
92	6707	5045	01111	42	9348	2260	02688	92	10008	1231	03012
93	6791	4960	02248	43	9376	2229	02701	93	10011	1218	03014
94	6872	4875	02192	44	9402	2198	02712	94	10016	1205	03018
0,95	0,6956	0,4792	0,02136	1,45	0,9426	0,2167	0,02724	1,95	1,0020	0,1193	0,03020
96	7039	4711	02074	46	9449	2138	02734	96	10023	1181	03022
97	7119	4631	02032	47	9470	2109	02744	97	10027	1169	03025
98	7196	4552	01981	48	9490	2080	02754	98	10031	1157	03027
99	7269	4475	01931	49	9509	2052	02763	99	10035	1145	03029
$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_5	κ_5	w_5	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_5	κ_5	w_5	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_5	κ_5	w_5



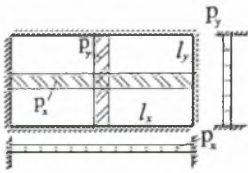
$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$p_x = \kappa_5 \cdot p, p_y = \rho_5 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_5$$



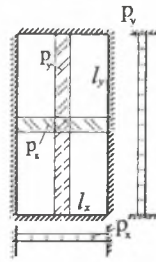
Πίνακας 6 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων τετραέρειστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 6



$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_6 \cdot p, p_y = \rho_6 \cdot p$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_6$$

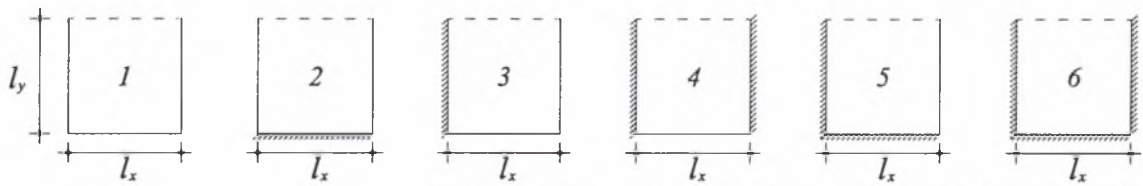


$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_6	ρ_6	w_6	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_6	ρ_6	w_6	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_6	ρ_6	w_6
0,50	0,1702	0,9927	0,02976	1,00	0,6157	0,6157	0,01487	1,50	0,9069	0,3029	0,02586
51	1770	9898	02958	01	6241	6070	01516	51	9100	2990	02599
52	1838	9867	02935	02	6324	5985	01545	52	9130	2951	02612
53	1910	9833	02917	03	6408	5901	01579	53	9158	2913	02624
54	1987	9795	02904	04	6493	5817	01604	54	9185	2876	02635
0,55	0,2064	0,9755	0,02886	1,05	0,6576	0,5735	0,01633	1,55	0,9211	0,2839	0,02646
56	2139	9710	02863	06	6656	5653	01661	56	9242	2803	02659
57	2213	9664	02836	07	6733	5572	01688	57	9272	2768	02672
58	2293	9614	02813	08	6812	5492	01716	58	9300	2733	02684
59	2376	9561	02793	09	6892	5413	01744	59	9327	2699	02695
0,60	0,2460	0,9507	0,02770	1,10	0,6969	0,5336	0,01772	1,60	0,9353	0,2665	0,02706
61	2541	9448	02742	11	7043	5259	01798	61	9377	2632	02717
62	2622	9388	02711	12	7114	5183	01824	62	9399	2600	02727
63	2707	9325	02684	13	7187	5108	01851	63	9421	2568	02736
64	2797	9259	02659	14	7261	5034	01877	64	9441	2537	02745
0,65	0,2886	0,9191	0,02632	1,15	0,7332	0,4962	0,01903	1,65	0,9461	0,2506	0,02754
66	2973	9121	02601	16	7400	4890	01928	66	9484	2476	02764
67	3060	9049	02567	17	7466	4819	01952	67	9507	2447	02770
68	3150	8975	02536	18	7533	4750	01977	68	9529	2417	02784
69	3245	8898	02508	19	7600	4681	02002	69	9549	2389	02793
0,70	0,3338	0,8821	0,02477	1,20	0,7665	0,4614	0,02026	1,70	0,9568	0,2361	0,02802
71	3431	8741	02444	21	7720	4537	02057	71	9586	2333	02810
72	3520	8660	02409	22	7780	4471	02080	72	9603	2306	02818
73	3614	8577	02376	23	7837	4407	02102	73	9619	2279	02825
74	3712	8493	02345	24	7892	4344	02123	74	9634	2253	02832
0,75	0,3809	0,8408	0,02312	1,25	0,7956	0,4286	0,02142	1,75	0,9648	0,2227	0,02839
76	3903	8321	02277	26	8008	4220	02166	76	9666	2202	02847
77	3996	8234	02241	27	8068	4160	02189	77	9683	2177	02855
78	4092	8146	02207	28	8126	4101	02211	78	9699	2152	02862
79	4192	8057	02175	29	8182	4042	02232	79	9714	2128	02869
0,80	0,4286	0,7956	0,02142	1,30	0,8236	0,3985	0,02253	1,80	0,9728	0,2104	0,02876
81	4385	7877	02107	31	8286	3929	02273	81	9742	2081	02882
82	4479	7786	02071	32	8335	3874	02292	82	9754	2058	02888
83	4575	7695	02036	33	8381	3819	02310	83	9765	2035	02894
84	4675	7603	02004	34	8426	3766	02327	84	9776	2013	02899
0,85	0,4773	0,7511	0,01970	1,35	0,8468	0,3713	0,02344	1,85	0,9787	0,1991	0,02905
86	4868	7419	01936	36	8519	3662	02364	86	9800	1970	02911
87	4960	7327	01901	37	8568	3611	02383	87	9812	1949	02917
88	5056	7235	01867	38	8614	3561	02401	88	9824	1928	02922
89	5154	7143	01835	39	8659	3513	02419	89	9835	1907	02928
0,90	0,5249	0,7051	0,01802	1,40	0,8702	0,3465	0,02436	1,90	0,9845	0,1887	0,02933
91	5342	6960	01769	41	8742	3417	02452	91	9854	1867	02938
92	5433	6869	01735	42	8780	3371	02468	92	9863	1848	02942
93	5525	6778	01703	43	8817	3326	02483	93	9871	1829	02947
94	5620	6687	01672	44	8852	3281	02497	94	9879	1810	02951
0,95	0,5713	0,6597	0,01640	1,45	0,8885	0,3237	0,02511	1,95	0,9886	0,1791	0,02955
96	5802	6508	01609	46	8925	3194	02527	96	9895	1773	02959
97	5889	6419	01577	47	8964	3152	02543	97	9904	1755	02964
98	5978	6331	01546	48	9000	3110	02558	98	9912	1737	02968
99	6068	6243	01516	49	9035	3069	02572	99	9920	1719	02972
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_6	ρ_6	w_6	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_6	ρ_6	w_6	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_6	ρ_6	w_6

2.7 Τριερείστες ορθογωνικές πλάκες

Οι τριερείστες ορθογωνικές πλάκες, συναντώνται συχνά στην πράξη με τη μορφή μπαλκονιών ή και πλατύσκαλων. Αν και ο Czerny παρουσιάζει πίνακες για την επίλυσή τους [5], αυτοί δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε συνεχείς φορείς τριερείστων πλακών.

Επίσης στην περίπτωση των συνεχών τριερείστων πλακών για να εφαρμοστεί η μέθοδος των λωρίδων προϋποτίθεται ότι θα πρέπει να προηγηθεί η κατανομή των φορτίων των τριερείστων πλακών. Για να καλυφθεί το κενό αυτό προχωρήσαμε στη σύνταξη πινάκων κατανομής ομοιόμορφου φορτίου τριερείστων πλακών για λόγους πλευρών $0.25 \leq l_y/l_x \leq 1.50$. Οι τύποι των τριερείστων πλακών είναι οι εξής:



Σχ. 2.11: Τύποι στήριξης ορθογωνικών τριερείστων πλακών

Όπως μπορεί να φανεί, αν και κατά την x -διεύθυνση ορίζεται στατικό σύστημα, κατά την y -διεύθυνση το στατικό σύστημα δεν ορίζεται πάντα (τύποι 1, 3, 4). Ακόμα και αν ορίζεται στατικό σύστημα εμφανίζεται θετική ροπή στο άνοιγμα. Προτείνονται λοιπόν κάποιοι συντελεστές οι οποίοι, σε συνεργασία με τη γεωμετρία της πλάκας και τη φόρτίσή της, δίνουν τη μέγιστη ροπή στο άνοιγμα.

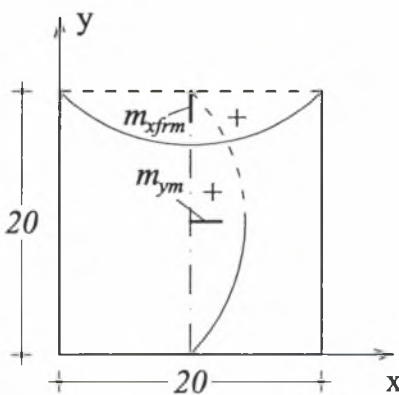
Και στην περίπτωση αυτή έγινε μία διερεύνηση της πύκνωσης του καννάβου με ανάλογο τρόπο που έγινε στις ορθογωνικές τετραερείστες πλάκες. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα.

2.7.1 Παράδειγμα 1^ο (πλάκα τύπου 1)

Στην πλάκα του σχήματος υπολογίσθηκε η ροπή από τους πίνακες Czerny:

για λόγο $l_y/l_x = 1.00$, φορτίο $p = 100 \text{ KN/m}^2$, μέτρο ελαστικότητας

$E = 29 \text{ GPa}$, διαστάσεις $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ και πάχος πλάκας $h_f = 25 \text{ cm}$ έχουμε:



$$m_{xfrm} = \frac{p \cdot l_y^2}{9.77} = 4094.17 \text{ KNm}$$

$$m_{ym} = \frac{p \cdot l_x^2}{41.67} = 959.92 \text{ KNm}$$

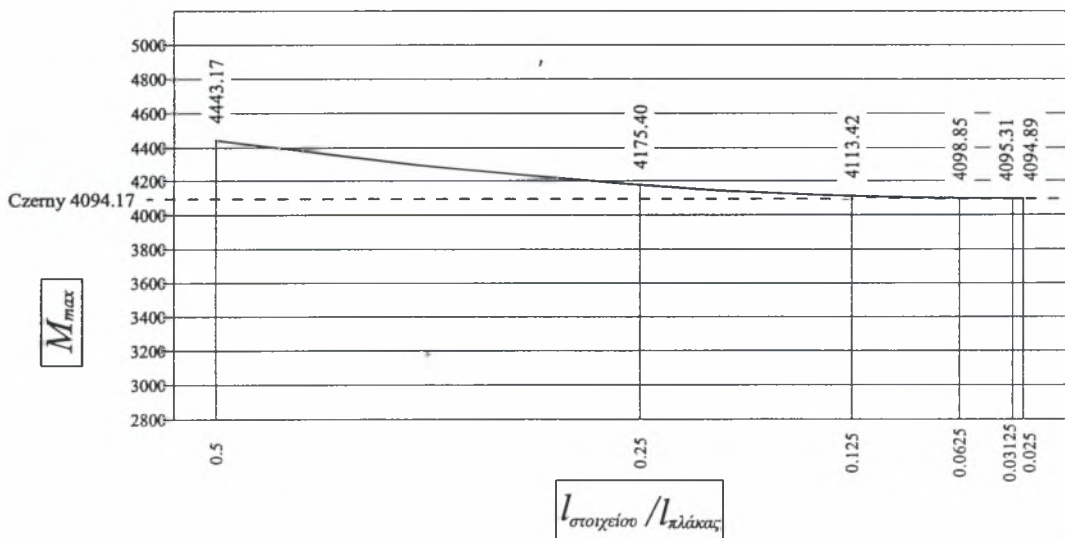
Σχ. 2.12: Ροπές ανοίγματος της πλάκας

Πίνακας 2.9

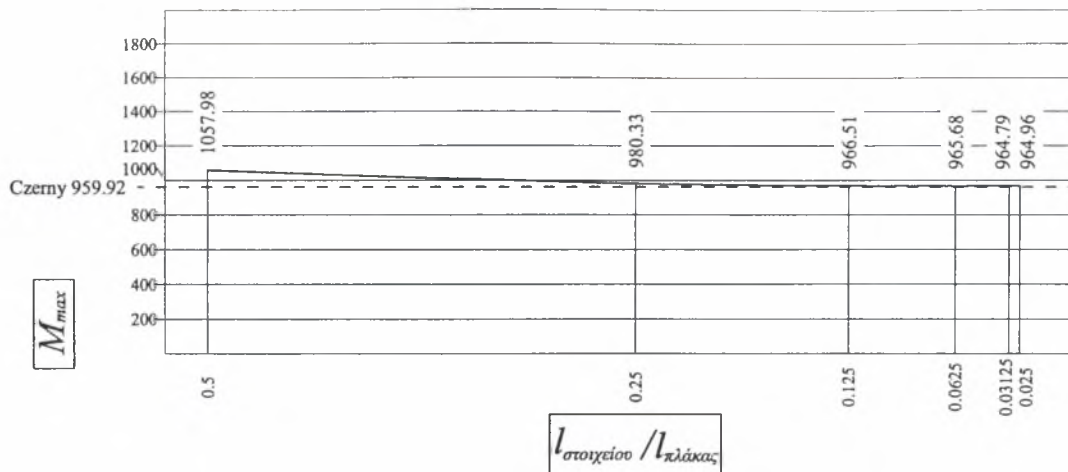
Τιμές ροπής ανοίγματος και βύθισης, για αυξανόμενη πυκνωση καννάβου, τριέρειστης πλάκας με στήριξη τύπου I

αριθμός πεπερασμένων στοιχείων	αριθμός στοιχείων ανά πλευρά	λόγος μήκους πλευράς στοιχείου προς πλευρά πλάκας $l_{\text{στοιχείου}}/l_{\text{πλάκας}}$	ροπή ανοίγματος ελ. άκρου x (απ. %)	ροπή ανοίγματος y (απ. %)	βύθιση
4	2	0.50000	4443.17 (+8.52)	1057.98 (+10.22)	3,91213
16	4	0.25000	4175.40 (+1.98)	980.33 (+2.13)	4,39561
64	8	0.12500	4113.42 (+0.47)	966.51 (+0.69)	4,50809
256	16	0.06250	4098.85 (+0.11)	965.68 (+0.60)	4,53570
1024	32	0.03125	4095.31 (+0.03)	964.79 (+0.51)	4,54257
1600	40	0.02500	4094.89 (+0.02)	964.96 (+0.53)	4,54340
<i>Czerny</i>	–	–	4094.17	959.92	–

Οι τιμές που εξάγονται από την ανάλυση με τετράκομβρα ορθογωνικά επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία διαστάσεων $0.5m \times 0.5m$ έχουν απόκλιση της τάξεως του 0.02% (πρακτικά μηδενική απόκλιση) για τη ροπή του x -ανοίγματος και 0.53% για τη ροπή του y -ανοίγματος. Ο *Czerny* δεν παρέχει συντελεστές της μέγιστης βύθισης για τις τριέρειστες. Όπως μπορεί να φανεί και στα διαγράμματα, όσο πυκνότερος είναι ο κάνναβος των πεπερασμένων στοιχείων, τόσο και η απόκλιση από τις ακριβείς τιμές ελαττώνεται:



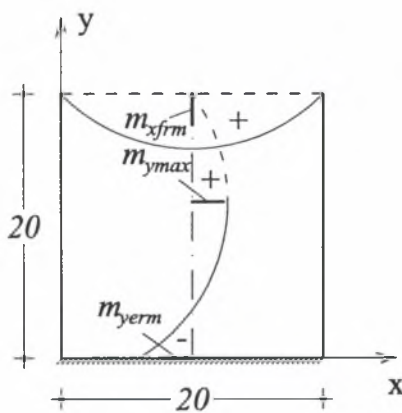
Σχ. 2.13: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών ανοίγματος, κατά τη διεύθυνση x , ανάλογα με την πυκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων



Σχ. 2.14: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών ανοίγματος, κατά τη διεύθυνση y , ανάλογα με την πύκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων

2.7.2 Παράδειγμα 2^ο (πλάκα τύπου 2)

Εργαζόμενοι ομοίως με την περίπτωση της περιμετρικής έδρασης έχουμε:



$$m_{xfrm} = \frac{p \cdot l_x^2}{11.37} = 3518.03 \text{ KNm}$$

$$m_{yerm} = -\frac{p \cdot l_x^2}{8.51} = -4700.35 \text{ KNm}$$

$$m_{ymax} = \frac{p \cdot l_x^2}{54.48} = 734.21 \text{ KNm}$$

Σχ. 2.15: Ροπές ανοίγματος και πακτώσεως της πλάκας

Όσον αφορά τη γεωμετρία και τη φόρτιση της πλάκας είναι ίδιες με προηγούμενως, δηλαδή:

- λόγος πλευρών $l_y / l_x = 1.00$,
- φορτίο $p = 100 \text{ KN/m}^2$,
- μέτρο ελαστικότητας $E = 29 \text{ GPa}$,
- διαστάσεις $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ και
- πάχος πλάκας $h_f = 25 \text{ cm}$

Όπως προαναφέρθηκε (§2.5.2), οι συντελεστές κατανομής υπολογίστηκαν με βάση το φορτίο που δίνει ίση ροπή στην πάκτωση (που είναι και το μεγαλύτερο) της αντίστοιχης πλακολωρίδας και άρα αυτό είναι που μας ενδιαφέρει. Στην περίπτωση

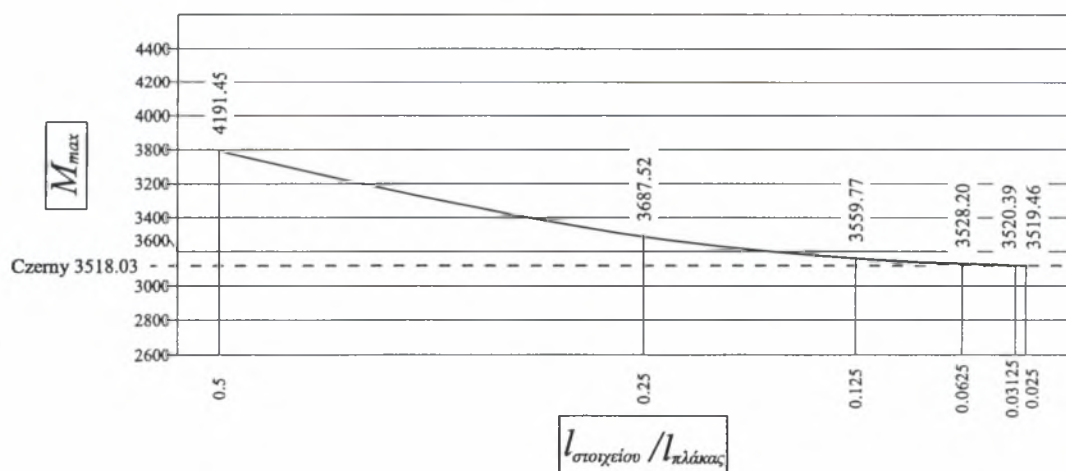
των τριερείστων πλακών το στατικό σύστημα κάθετα στο ελεύθερο άκρο, όπου αυτό ορίζεται, είναι πρόβολος. Οι συντελεστές κατανομής στην υπόψη διεύθυνση εξάχθηκαν από ανάστροφη διαδικασία, θεωρώντας στατικά συστήματα πρόβλους και υπολογίζοντας το φορτίο που δίνει ροπή πακτώσεως στην πλακολωρίδα ίση με τη μέγιστη του επιφανειακού φορέα από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

Πίνακας 2.10

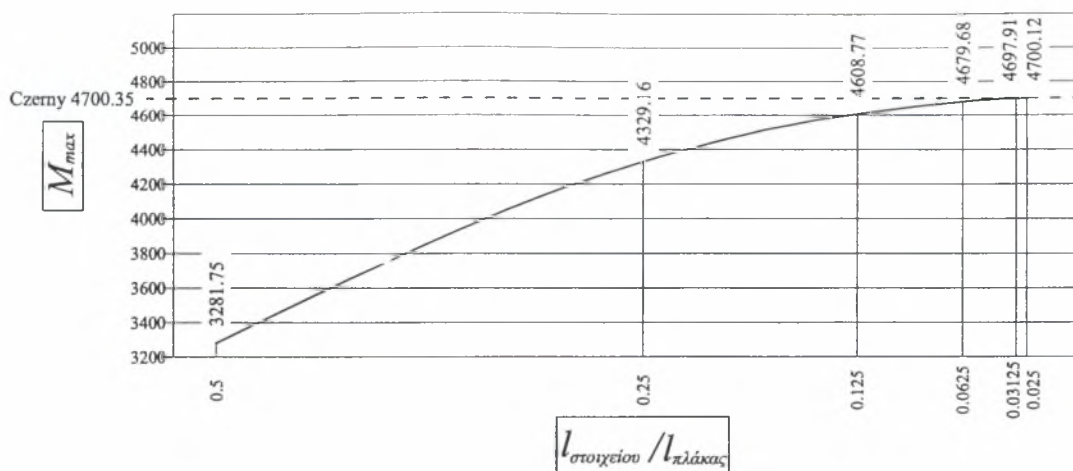
Τιμές ροπής ανοίγματος, στήριξης και βύθισης, για αυξανόμενη πύκνωση καννάβου, τριερείστης πλάκας με στήριξη τύπου 2

αριθμός πεπερασμένων στοιχείων	αριθμός στοιχείων ανά πλευρά	λόγος μήκους πλευράς στοιχείου προς πλευρά πλάκας $l_{\text{στοιχείου}} / l_{\text{πλάκας}}$	ροπή ανοίγματος ελ. άκρου x (απ. %)	ροπή πάκτωσης y (απ. %)	βύθιση
4	2	0.50000	4191.45 (+19.14)	3281.75 (-30.18)	3.65866
16	4	0.25000	3687.52 (+4.82)	4329.16 (-7.90)	3.89588
64	8	0.12500	3559.77 (+1.19)	4608.77 (-1.95)	3.92116
256	16	0.06250	3528.20 (+0.29)	4679.68 (-0.44)	3.92508
1024	32	0.03125	3520.39 (+0.07)	4697.91 (-0.05)	3.92591
1600	40	0.02500	3519.46 (+0.04)	4700.12 (0.00)	3.92600
<i>Czerny</i>	—	—	<i>3518.03</i>	<i>4700.35</i>	—

Όπως μπορεί να φανεί και στα παρακάτω διαγράμματα ανάλογα με την πύκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων, οι αποκλίσεις των τιμών των ροπών κάμψης ελαττώνονται τείνοντας προς την ακριβή τιμή της θεωρίας της ελαστικότητας.



Σχ. 2.16: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών ανοίγματος, κατά τη διεύθυνση x , ανάλογα με την πύκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων

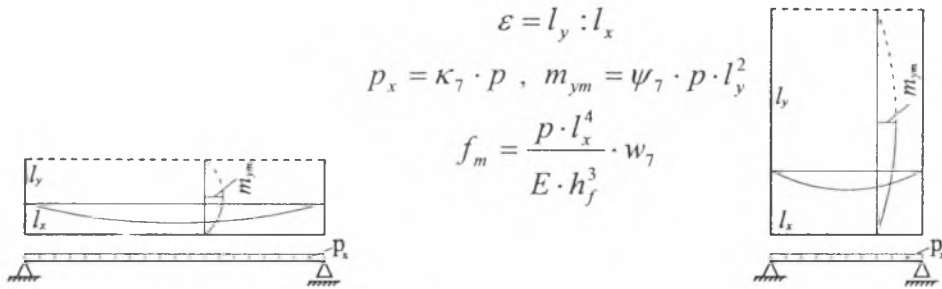


Σχ. 2.17: Διάγραμμα σύγκρισης μεγίστων ροπών πακτώσεως, κατά τη διεύθυνση y , ανάλογα με την πύκνωση του καννάβου των πεπερασμένων στοιχείων

Η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι αρκετά μεγάλη. Οι τιμές ταυτίζονται πρακτικά με τις ακριβείς τιμές της θεωρίας ελαστικότητας. Αν και δεν υπάρχει μέτρο σύγκρισης για τις βυθίσεις, για πυκνότερη διακριτοποίηση, οι τιμές τείνουν να σταθεροποιηθούν σε μία οριακή τιμή. Δεδομένης της ακρίβειας των αποτελεσμάτων οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως και για αυτήν την περίπτωση βρισκόμαστε πολύ κοντά στην πραγματικότητα.

Για τη σύνταξη των πινάκων χρειάστηκε να διενεργηθούν 756 στατικές αναλύσεις τριερείστων πλακών για διάφορους τύπους στήριξης και γεωμετρίας. Η λειτουργία των πινάκων είναι αντίστοιχη με αυτή των πινάκων για τις τετραερείστες. Οι συνθήκες φόρτισης είναι ίδιες (Σχ. 2.10).

Πίνακας 7 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων και ροπών τριέρειστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 1

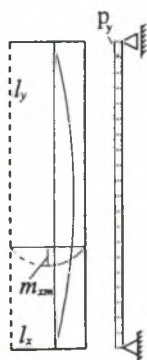


$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_7 \cdot p, \quad m_{ym} = \psi_7 \cdot p \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_7$$

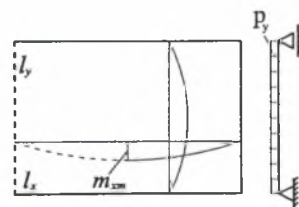
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_7	ψ_7	w_7	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_7	ψ_7	w_7	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_7	ψ_7	w_7
0,25	0,1407	0,1195	0,02424	67	6340	599	10069	09	9002	270	14118
26	1516	1184	02599	68	6435	586	10213	1,10	0,9039	0,0266	0,14174
27	1626	1169	02778	69	6528	575	10355	11	9075	261	14229
28	1740	1157	02960	0,70	0,6619	0,0564	0,10494	12	9109	257	14282
29	1855	1150	03144	71	6709	553	10631	13	9144	253	14333
0,30	0,1973	0,1139	0,03332	72	6797	542	10765	14	9177	249	14384
31	2093	1126	03521	73	6883	531	10896	1,15	0,9209	0,0245	0,14433
32	2214	1110	03713	74	6968	520	11025	16	9240	241	14481
33	2337	1094	03906	0,75	0,7050	0,0510	0,11151	17	9271	237	14527
34	2461	1083	04101	76	7132	500	11275	18	9301	233	14573
0,35	0,2586	0,1070	0,04297	77	7211	490	11396	19	9330	229	14617
36	2712	1055	04494	78	7289	481	11514	1,20	0,9359	0,0226	0,14660
37	2838	1038	04691	79	7365	471	11630	21	9390	222	14685
38	2965	1020	04889	0,80	0,7440	0,0462	0,11744	22	9417	218	14725
39	3093	1007	05087	81	7513	453	11855	23	9443	215	14765
0,40	0,3220	0,0993	0,05285	82	7584	444	11964	24	9468	212	14804
41	3348	0977	05483	83	7654	436	12070	1,25	0,9493	0,0208	0,14842
42	3476	0961	05681	84	7723	427	12174	26	9518	205	14879
43	3603	0943	05877	0,85	0,7790	0,0419	0,12276	27	9541	202	14915
44	3730	0927	06073	86	7855	411	12375	28	9564	199	14950
0,45	0,3856	0,0913	0,06268	87	7919	403	12472	29	9587	196	14984
46	3982	0897	06462	88	7982	396	12567	1,30	0,9609	0,0193	0,15017
47	4107	0882	06654	89	8043	388	12660	31	9630	190	15049
48	4232	0865	06845	0,90	0,8102	0,0381	0,12751	32	9651	187	15081
49	4355	0848	07035	91	8160	374	12839	33	9671	185	15111
0,50	0,4477	0,0833	0,07222	92	8217	367	12926	34	9690	182	15190
51	4598	0819	07408	93	8273	360	13010	1,35	0,9710	0,0179	0,15170
52	4718	0804	07592	94	8327	353	13093	36	9728	177	15198
53	4837	0789	07774	0,95	0,8380	0,0347	0,13174	37	9747	174	15226
54	4954	0773	07953	96	8432	341	13252	38	9764	172	15253
0,55	0,5070	0,0758	0,08131	97	8483	334	13329	39	9781	169	15279
56	5185	0744	08306	98	8532	328	13404	1,40	0,9798	0,0167	0,15304
57	5298	0730	08479	99	8580	322	13477	41	9815	165	15329
58	5409	0716	08649	1,00	0,8627	0,0317	0,13549	42	9831	163	15353
59	5519	0702	08817	01	8673	311	13619	43	9846	160	15377
0,60	0,5628	0,0688	0,08983	02	8718	306	13687	44	9861	158	15400
61	5735	0674	09146	03	8762	300	13753	1,45	0,9876	0,0159	0,15422
62	5840	0661	09306	04	8804	295	13818	46	9890	154	15444
63	5943	0648	09464	1,05	0,8846	0,0290	0,13881	47	9904	152	15465
64	6045	0636	09619	06	8886	285	13943	48	9918	150	15485
0,65	0,6145	0,0623	0,09772	07	8926	280	14003	49	9931	148	15505
66	6243	0611	9921	08	8965	275	14061	1,50	0,9944	0,0146	0,15525
$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_7	ψ_7	w_7	$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_7	ψ_7	w_7	$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_7	ψ_7	w_7



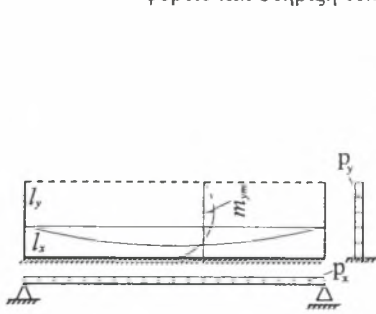
$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$p_y = \kappa_7 \cdot p, \quad m_{xm} = \psi_7 \cdot p \cdot l_x^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_7$$



Πίνακας 8 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων και ροπών τριέριστην πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 2

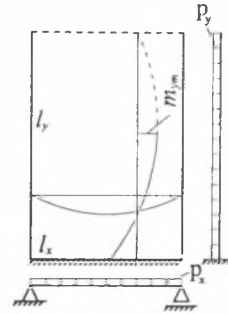


$$\varepsilon = l_y : l_x$$

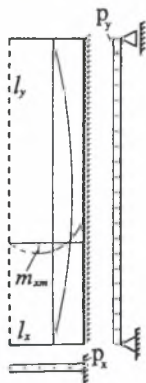
$$p_x = \kappa_8 \cdot p, p_y = \rho_8 \cdot p$$

$$m_{ym} = \psi_8 \cdot p \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_8$$



$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_8	ρ_8	ψ_8	w_8	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_8	ρ_8	ψ_8	w_8	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_8	ρ_8	ψ_8	w_8
0,25	0,0388	0,9134	0,0130	0,00485	67	4274	4362	0327	06927	09	8051	2015	0220	12673
26	0422	9029	0128	00555	68	4392	4277	0327	07107	1,10	0,8109	0,1982	0,0217	0,12761
27	0458	8919	0134	00631	69	4509	4194	0327	07286	11	8166	1950	0214	12848
28	0496	8807	0138	00714	70	0,4626	0,4113	0,0326	0,07463	12	8222	1918	0212	12933
29	0538	8690	0138	00801	71	4741	4033	0324	07638	13	8276	1887	0209	13016
0,30	0,0581	0,8572	0,0143	0,00895	72	4855	3956	0322	07812	14	8330	1857	0206	13097
31	0627	8450	0149	00995	73	4967	3879	0321	07984	1,15	0,8382	0,1827	0,0203	0,13176
32	0677	8327	0152	01100	74	5079	3805	0320	08154	16	8433	1798	0201	13253
33	0728	8202	0156	01211	0,75	0,5189	0,3732	0,0318	0,08322	17	8482	1770	0198	13329
34	0785	8076	0164	01328	76	5298	3660	0316	08488	18	8531	1742	0195	13403
0,35	0,0843	0,7949	0,0169	0,01450	77	5406	3590	0314	08652	19	8578	1715	0193	13475
36	0906	7821	0172	01577	78	5512	3522	0312	08813	1,20	0,8625	0,1688	0,0190	0,13545
37	0973	7693	0183	01710	79	5617	3455	0310	08973	21	8678	1658	0188	13604
38	1044	7565	0190	01847	0,80	0,5720	0,3390	0,0307	0,09130	22	8721	1632	0185	13671
39	1119	7436	0196	01989	81	5822	3326	0305	09285	23	8764	1608	0183	13736
0,40	0,1199	0,7308	0,0205	0,02135	82	5923	3263	0302	09438	24	8806	1583	0180	13800
41	1283	7181	0215	02286	83	6022	3202	0299	09589	1,25	0,8847	0,1559	0,0178	0,13862
42	1373	7054	0223	02440	84	6119	3142	0296	09737	26	8888	1536	0175	13923
43	1467	6928	0229	02599	0,85	0,6215	0,3084	0,0294	0,09882	27	8926	1513	0173	13982
44	1567	6803	0241	02761	86	6309	3006	0291	10026	28	8965	1491	0171	14040
0,45	0,1672	0,6679	0,0250	0,02926	87	6402	2971	0288	10167	29	9002	1469	0169	14096
46	1780	6557	0258	03095	88	6493	2916	0285	10305	1,30	0,9038	0,1447	0,0166	0,14151
47	1890	6435	0264	03266	89	6582	2863	0281	10441	31	9074	1426	0164	14205
48	2002	6315	0271	03439	0,90	0,6670	0,2811	0,0279	0,10575	32	9108	1406	0162	14257
49	2116	6197	0279	03616	91	6757	2760	0276	10706	33	9141	1385	0160	14308
0,50	0,2231	0,6080	0,0286	0,03794	92	6841	2710	0273	10835	34	9174	1366	0158	14358
51	2347	5965	0291	03974	93	6925	2661	0269	10961	1,35	0,9206	0,1346	0,0156	0,14407
52	2465	5851	0294	04155	94	7006	2614	0266	11085	36	9238	1327	0154	14454
53	2584	5739	0300	04353	0,95	0,7086	0,2567	0,0263	0,11207	37	9268	1309	0152	14500
54	2703	5629	0306	04522	96	7165	2522	0260	11327	38	9298	1291	0150	14545
0,55	0,2824	0,5521	0,0310	0,04707	97	7242	2477	0257	11444	39	9327	1273	0148	14589
56	2945	5414	0312	04893	98	7317	2434	0254	11558	1,40	0,9355	0,1255	0,0146	0,14632
57	3066	5309	0314	05079	99	7391	2391	0251	11671	41	9383	1238	0144	14674
58	3188	5206	0318	05265	1,00	0,7463	0,2350	0,0248	0,11781	42	9409	1221	0142	14715
59	3309	5105	0321	05452	01	7534	2309	0244	11888	43	9435	1205	0140	14754
0,60	0,3431	0,5006	0,0323	0,05638	02	7604	2270	0241	11994	44	9461	1188	0138	14793
61	3553	4909	0324	05825	03	7672	2231	0238	12110	1,45	0,9486	0,1172	0,0137	0,14831
62	3674	4813	0325	06010	04	7738	2193	0235	12199	46	9510	1157	0135	14867
63	3795	4719	0326	06196	1,05	0,7804	0,2156	0,0232	0,12298	47	9534	1142	0133	14903
64	3916	4627	0327	06380	06	7867	2119	0229	12394	48	9557	1127	0131	14938
0,65	0,4036	0,4537	0,0328	0,06563	07	7930	2084	0226	12489	49	9579	1112	0130	14972
66	4156	4449	0327	06746	08	7991	2049	0223	12582	1,50	0,9601	0,1098	0,0128	0,15005
$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_8	κ_8	ψ_8	w_8	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_8	κ_8	ψ_8	w_8	$\varepsilon=l_x : l_y$	ρ_8	κ_8	ψ_8	w_8

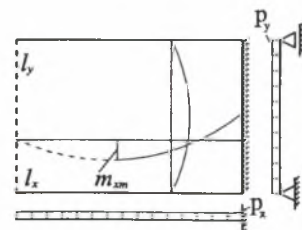


$$\varepsilon = l_x : l_y$$

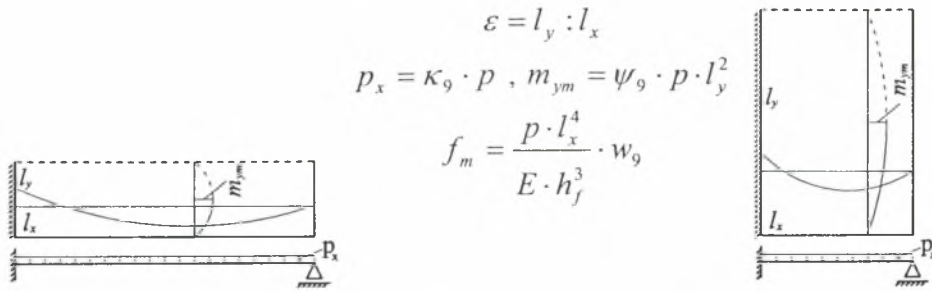
$$p_x = \kappa_8 \cdot p, p_y = \rho_8 \cdot p$$

$$m_{ym} = \psi_8 \cdot p \cdot l_x^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_8$$



Πίνακας 9 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων και ροπών τριέρειστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 3

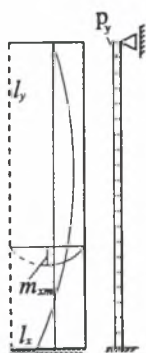


$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_9 \cdot p, m_{ym} = \psi_9 \cdot p \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_9$$

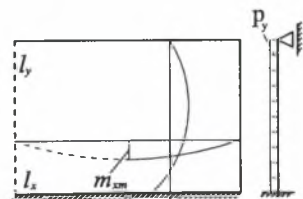
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_9	ψ_9	w_9	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_9	ψ_9	w_9	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_9	ψ_9	w_9
0,25	0,5596	0,1140	0,01934	67	1,0067	0,446	0,5650	09	1,0597	0,187	0,6585
26	6044	1123	0,2054	68	0115	0,436	0,5695	1,10	1,0596	0,0184	0,06592
27	6257	1102	0,2174	69	0032	0,426	0,5739	11	0,588	0,180	0,6599
28	6502	1081	0,2294	0,70	1,0240	0,0416	0,05781	12	0,603	0,177	0,6606
29	6564	1067	0,2414	71	0159	0,406	0,5822	13	0,584	0,174	0,6612
0,30	0,6732	0,1051	0,02533	72	0190	0,397	0,5861	14	0,601	0,171	0,6618
31	6977	1031	0,2652	73	0267	0,388	0,5898	1,15	1,0606	0,0168	0,06624
32	6985	1010	0,2769	74	0202	0,379	0,5934	16	0,586	0,166	0,6630
33	7260	0987	0,2886	0,75	1,0359	0,0371	0,05969	17	0,608	0,163	0,6635
34	7395	0970	0,3001	76	0299	0,363	0,6003	18	0,593	0,160	0,6640
0,35	0,7369	0,0952	0,03114	77	0275	0,355	0,6035	19	0,600	0,157	0,6644
36	7705	0932	0,3226	78	0377	0,347	0,6066	1,20	1,0610	0,0155	0,06649
37	7766	0912	0,3337	79	0329	0,339	0,6095	21	0,561	0,152	0,6627
38	7870	0891	0,3445	0,80	1,0441	0,0332	0,06124	22	0,514	0,150	0,6631
39	8084	0870	0,3552	81	0400	0,325	0,6151	23	0,472	0,147	0,6635
0,40	0,8098	0,0852	0,03656	82	0355	0,318	0,6177	24	0,529	0,145	0,6639
41	8292	0834	0,3758	83	0455	0,311	0,6202	1,25	1,0617	0,0143	0,06642
42	8411	0815	0,3858	84	0422	0,304	0,6227	26	0,564	0,141	0,6645
43	8346	0796	0,3956	0,85	1,0496	0,0298	0,06250	27	0,521	0,138	0,6648
44	8639	0777	0,4052	86	0473	0,292	0,6272	28	0,481	0,136	0,6651
0,45	0,8697	0,0757	0,04146	87	0441	0,285	0,6293	29	0,524	0,134	0,6682
46	8752	0740	0,4238	88	0508	0,280	0,6314	1,30	1,0615	0,0132	0,06656
47	8931	0724	0,4327	89	0490	0,274	0,6333	31	0,565	0,130	0,6659
48	8857	0707	0,4414	0,90	1,0530	0,0268	0,06352	32	0,524	0,128	0,6661
49	9076	0690	0,4499	91	0523	0,263	0,6370	33	0,486	0,126	0,6663
0,50	0,9180	0,0673	0,04581	92	0502	0,258	0,6387	34	0,517	0,124	0,6665
51	9102	0656	0,4662	93	0542	0,253	0,6403	1,35	1,0611	0,0123	0,06667
52	9341	0640	0,4739	94	0536	0,248	0,6419	36	0,564	0,121	0,6669
53	9297	0625	0,4815	0,95	1,0548	0,0243	0,06434	37	0,525	0,119	0,6670
54	9411	0611	0,4888	96	0556	0,238	0,6448	38	0,489	0,117	0,6672
0,55	0,9560	0,0596	0,04959	97	0546	0,234	0,6462	39	0,509	0,116	0,6673
56	9414	0582	0,5028	98	0561	0,229	0,6475	1,40	1,0606	0,0114	0,06675
57	9656	0568	0,5094	99	0567	0,225	0,6487	41	0,561	0,112	0,6676
58	9643	0554	0,5159	1,00	1,0555	0,0220	0,06499	42	0,524	0,111	0,6677
59	9660	0540	0,5221	01	0575	0,216	0,6511	43	0,489	0,109	0,6678
0,60	0,9854	0,0527	0,05282	02	0575	0,212	0,6522	44	0,501	0,108	0,6679
61	9729	0515	0,5340	03	0570	0,208	0,6532	1,45	1,0601	0,0106	0,06680
62	9893	0503	0,5396	04	0586	0,205	0,6542	46	0,557	0,105	0,6681
63	9912	0491	0,5451	1,05	1,0578	0,0201	0,06551	47	0,521	0,104	0,6682
64	9841	0479	0,5503	06	0585	0,197	0,6560	48	0,488	0,102	0,6683
0,65	1,0076	0,0468	0,05554	07	0593	0,194	0,6569	49	0,494	0,101	0,6684
66	0,9973	0,457	0,5603	08	0571	0,190	0,6577	1,50	1,0595	0,0099	0,06684
$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_9	ψ_9	w_9	$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_9	ψ_9	w_9	$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_9	ψ_9	w_9



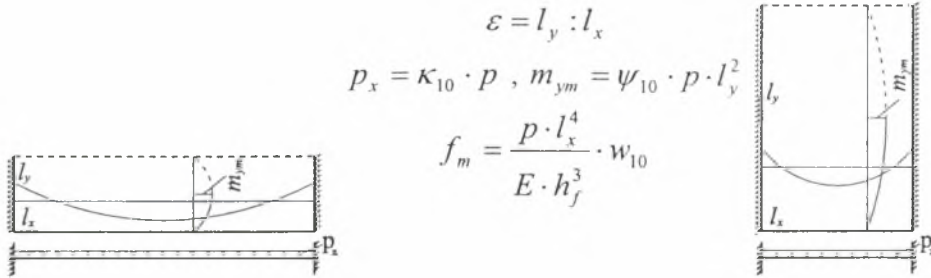
$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$p_y = \kappa_9 \cdot p, m_{xm} = \psi_9 \cdot p \cdot l_x^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_9$$



Πίνακας 10 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων και ροπών τριέρειστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 4

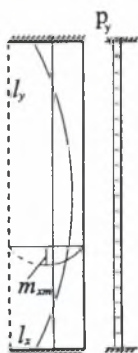


$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$p_x = \kappa_{10} \cdot p, m_{ym} = \psi_{10} \cdot p \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_{10}$$

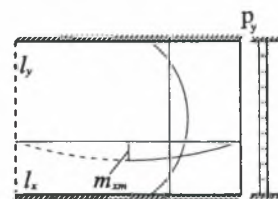
$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_{10}	ψ_{10}	w_{10}	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_{10}	ψ_{10}	w_{10}	$\varepsilon=l_y : l_x$	κ_{10}	ψ_{10}	w_{10}
0,25	0,7863	0,1056	0,01513	67	0872	0340	03162	09	0667	0137	03250
26	8023	1032	01590	68	0923	0331	03172	1,10	1,0664	0,0135	0,03249
27	8161	1005	01665	69	0832	0323	03181	11	0641	0132	03248
28	8439	0977	01738	0,70	1,0975	0,0315	0,03189	12	0653	0130	03247
29	8489	0956	01810	71	0889	0307	03197	13	0632	0128	03246
0,30	0,8623	0,0934	0,01880	72	0845	0300	03204	14	0635	0126	03245
31	8906	0911	01948	73	0928	0293	03210	1,15	1,0636	0,0124	0,03244
32	8886	0887	02014	74	0858	0286	03216	16	0608	0121	03242
33	9144	0861	02077	0,75	1,0953	0,0279	0,03222	17	0624	0119	03241
34	9286	0836	02139	76	0891	0272	03227	18	0607	0117	03240
0,35	0,9224	0,0815	0,02198	77	0829	0266	03232	19	0606	0115	03239
36	9549	0794	02256	78	0907	0260	03236	1,20	1,0611	0,0113	0,03238
37	9598	0773	02311	79	0858	0254	03239	21	0560	0112	03236
38	9626	0751	02364	0,80	1,0912	0,0248	0,03243	22	0514	0110	03235
39	9863	0730	02415	81	0872	0242	03246	23	0502	0108	03234
0,40	0,9855	0,0709	0,02464	82	0826	0237	03248	24	0515	0106	03233
41	9988	0688	02510	83	0872	0232	03251	1,25	1,0594	0,0105	0,03232
42	1,0110	0670	02555	84	0840	0227	03253	26	0540	0103	03231
43	9966	0652	02598	0,85	1,0861	0,0222	0,03254	27	0495	0101	03230
44	1,0258	0634	02639	86	0840	0217	03256	28	0490	0100	03229
0,45	1,0307	0,0616	0,02678	87	0808	0212	03257	29	0493	0098	03228
46	0266	0599	02715	88	0828	0208	03258	1,30	1,0575	0,0097	0,03227
47	0460	0582	02750	89	0811	0203	03259	31	0522	0095	03226
48	0356	0565	02784	0,90	1,0806	0,0199	0,03260	32	0481	0094	03225
49	0508	0549	02815	91	0801	0195	03260	33	0478	0093	03224
0,50	1,0614	0,0534	0,02846	92	0781	0191	03261	34	0475	0091	03223
51	0420	0520	02874	93	0780	0187	03261	1,35	1,0558	0,0090	0,03223
52	0683	0506	02901	94	0776	0183	03261	36	0506	0089	03222
53	0621	0492	02927	0,95	1,0752	0,0179	0,03261	37	0469	0087	03221
54	0650	0479	02951	96	0759	0176	03260	38	0466	0086	03220
0,55	1,0809	0,0466	0,02974	97	0750	0172	03260	39	0464	0085	03219
56	0634	0453	02996	98	0732	0169	03259	1,40	1,0543	0,0084	0,03219
57	0809	0441	03016	99	0739	0166	03259	41	0493	0082	03218
58	0788	0429	03035	1,00	1,0723	0,0163	0,03258	42	0458	0081	03217
59	0711	0418	03053	01	0717	0159	03258	43	0456	0080	03216
0,60	1,0920	0,0407	0,03070	02	0717	0156	03257	44	0454	0079	03216
61	0776	0396	03086	03	0687	0153	03256	1,45	1,0532	0,0078	0,03215
62	0865	0386	03101	04	0702	0151	03255	46	0482	0077	03214
63	0882	0376	03115	1,05	1,0693	0,0148	0,03254	47	0448	0076	03214
64	0766	0367	03128	06	0678	0145	03253	48	0447	0075	03213
0,65	1,0969	0,0357	0,03140	07	0684	0142	03252	49	0445	0074	03213
66	0855	0348	03151	08	0658	0140	03251	1,50	1,0522	0,0073	0,03212
$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_{10}	ψ_{10}	w_{10}	$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_{10}	ψ_{10}	w_{10}	$\varepsilon=l_x : l_y$	κ_{10}	ψ_{10}	w_{10}



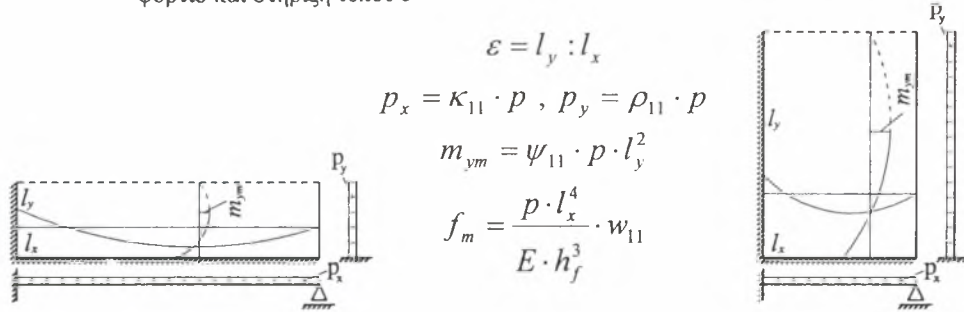
$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$p_y = \kappa_{10} \cdot p, m_{xm} = \psi_{10} \cdot p \cdot l_x^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_{10}$$



Πίνακας 11 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων και ροπών τριέρειστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 5



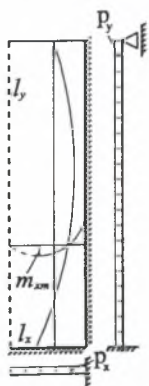
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$P_x = \kappa_{11} \cdot P, P_y = \rho_{11} \cdot P$$

$$m_{ym} = \psi_{11} \cdot P \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{P \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_{11}$$

$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{11}	ρ_{11}	ψ_{11}	w_{11}	$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{11}	ρ_{11}	ψ_{11}	w_{11}	$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{11}	ρ_{11}	ψ_{11}	w_{11}
0,25	0,2222	0,8882	0,0136	0,00462	67	8803	3304	0,283	0,4526	09	0,430	1,354	0,154	0,6341
26	2370	8745	0,134	0,0526	68	8798	3224	0,281	0,4604	1,10	1,0453	0,1330	0,0151	0,06359
27	2559	8602	0,142	0,0594	69	8901	3146	0,278	0,4680	11	0,460	1,307	0,149	0,6375
28	2729	8455	0,148	0,0667	0,70	0,9078	0,3071	0,0275	0,04754	12	0,451	1,284	0,146	0,6392
29	2901	8304	0,150	0,0744	71	8968	2997	0,272	0,4825	13	0,476	1,262	0,144	0,6407
0,30	0,3104	0,8149	0,0156	0,00825	72	9199	2926	0,269	0,4895	14	0,482	1,241	0,142	0,6422
31	3248	7992	0,165	0,0910	73	9215	2857	0,265	0,4962	1,15	1,0481	0,1220	0,0140	0,06436
32	3456	7832	0,171	0,0998	74	9233	2790	0,262	0,5028	16	0,500	1,199	0,138	0,6449
33	3669	7671	0,173	0,1090	0,75	0,9445	0,2726	0,0259	0,05092	17	0,499	1,179	0,136	0,6462
34	3803	7509	0,186	0,1185	76	9348	2663	0,256	0,5153	18	0,503	1,159	0,133	0,6475
0,35	0,4021	0,7346	0,0195	0,01283	77	9511	2602	0,252	0,5213	19	0,519	1,140	0,131	0,6486
36	4220	7183	0,201	0,1383	78	9549	2542	0,249	0,5271	1,20	1,0510	0,1122	0,0129	0,06498
37	4362	7021	0,210	0,1486	79	9488	2485	0,245	0,5327	21	0,451	1,098	0,128	0,6483
38	4618	6859	0,221	0,1590	0,80	0,9734	0,2429	0,0242	0,05382	22	0,394	1,081	0,126	0,6494
39	4750	6700	0,229	0,1697	81	9651	2375	0,239	0,5434	23	0,354	1,063	0,124	0,6504
0,40	0,4911	0,6542	0,0236	0,01805	82	9751	2323	0,235	0,5485	24	0,478	1,047	0,122	0,6513
41	5175	6386	0,243	0,1914	83	9813	2272	0,232	0,5534	1,25	1,0550	0,1030	0,0120	0,06522
42	5256	6233	0,253	0,2024	84	9745	2222	0,228	0,5581	26	0,485	1,014	0,118	0,6531
43	5518	6081	0,260	0,2134	0,85	0,9958	0,2174	0,0225	0,05627	27	0,432	0,998	0,117	0,6539
44	5692	5932	0,265	0,2245	86	9890	2128	0,221	0,5672	28	0,385	0,983	0,115	0,6547
0,45	0,5736	0,5785	0,0269	0,02356	87	9932	2083	0,218	0,5714	29	0,493	0,968	0,113	0,6554
46	6064	5641	0,276	0,2467	88	1,0017	2039	0,215	0,5755	1,30	1,0571	0,0953	0,0112	0,06562
47	6172	5499	0,282	0,2578	89	9962	1996	0,211	0,5795	31	0,510	0,939	0,110	0,6568
48	6328	5361	0,286	0,2688	0,90	1,0128	0,1955	0,0208	0,05834	32	0,460	0,925	0,109	0,6575
49	6553	5226	0,288	0,2798	91	0,076	1,915	0,205	0,5870	33	0,416	0,911	0,107	0,6581
0,50	0,6614	0,5093	0,0290	0,02907	92	0,066	1,876	0,202	0,5906	34	0,502	0,898	0,106	0,6587
51	6853	4964	0,294	0,3015	93	0,172	1,838	0,199	0,5940	1,35	1,0584	0,0885	0,0104	0,06593
52	6994	4838	0,297	0,3121	94	0,131	1,801	0,195	0,5973	36	0,527	0,872	0,103	0,6598
53	7027	4715	0,298	0,3227	0,95	1,0254	0,1765	0,0192	0,06005	37	0,480	0,859	0,101	0,6603
54	7308	4595	0,298	0,3331	96	0,218	1,730	0,189	0,6036	38	0,438	0,847	0,100	0,6608
0,55	0,7392	0,4478	0,0298	0,03434	97	0,179	1,696	0,186	0,6065	39	0,505	0,835	0,098	0,6612
56	7527	4364	0,300	0,3535	98	0,289	1,663	0,183	0,6094	1,40	1,0592	0,0823	0,0097	0,06617
57	7708	4253	0,300	0,3635	99	0,260	1,631	0,180	0,6121	41	0,538	0,812	0,096	0,6621
58	7672	4145	0,300	0,3733	1,00	1,0345	0,1600	0,0177	0,06147	42	0,494	0,800	0,094	0,6625
59	7949	4041	0,298	0,3829	01	0,325	1,570	0,175	0,6172	43	0,454	0,789	0,093	0,6629
0,60	0,8061	0,3939	0,0297	0,03923	02	0,296	1,540	0,172	0,6197	44	0,505	0,778	0,092	0,6632
61	8085	3840	0,296	0,4015	03	0,374	1,511	0,169	0,6220	1,45	1,0595	0,0768	0,0091	0,06636
62	8309	3744	0,295	0,4106	04	0,358	1,483	0,166	0,6242	46	0,545	0,757	0,089	0,6639
63	8287	3651	0,293	0,4194	1,05	1,0410	0,1456	0,0164	0,06264	47	0,503	0,747	0,088	0,6642
64	8477	3560	0,291	0,4280	06	0,404	1,430	0,161	0,6284	48	0,465	0,737	0,087	0,6645
0,65	0,8620	0,3472	0,0288	0,04364	07	0,385	1,404	0,159	0,6304	49	0,503	0,727	0,086	0,6648
66	8533	3387	0,285	0,4446	08	0,435	1,379	0,156	0,6323	1,50	1,0596	0,0718	0,0085	0,06650

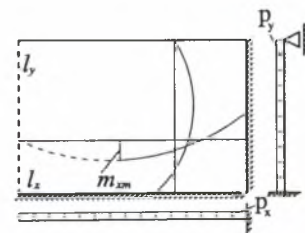


$$\varepsilon = l_x : l_y$$

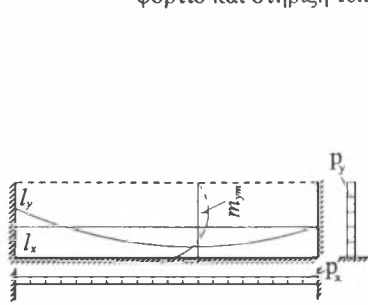
$$P_x = \kappa_{11} \cdot P, P_y = \rho_{11} \cdot P$$

$$m_{xm} = \psi_{11} \cdot P \cdot l_x^2$$

$$f_m = \frac{P \cdot l_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_{11}$$



Πίνακας 12 Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμού βυθίσεων και ροπών τριέρειστων πλακών με ομοιόμορφο φορτίο και στήριξη τύπου 6

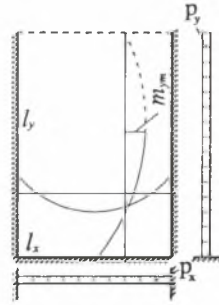


$$\varepsilon = l_y : l_x$$

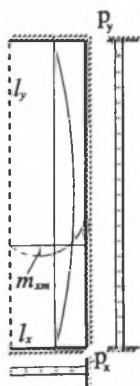
$$P_x = \kappa_{12} \cdot P, P_y = \rho_{12} \cdot P$$

$$m_{ym} = \psi_{12} \cdot P \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{P \cdot l_x^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_{12}$$



$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{12}	ρ_{12}	ψ_{12}	w_{12}	$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{12}	ρ_{12}	ψ_{12}	w_{12}	$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{12}	ρ_{12}	ψ_{12}	w_{12}
0,25	0,3299	0,8554	0,0089	0,00435	67	0,274	2,450	0,231	0,2822	09	1,0716	0,953	0,111	0,3240
26	3509	8375	0102	00491	68	0,257	2,383	0,227	0,2849	1,10	1,0698	0,0936	0,0109	0,03241
27	3778	8190	0114	00551	69	0,258	2,319	0,224	0,2874	11	0,706	0,919	0,107	0,3241
28	4019	7999	0118	00612	70	1,0454	0,2257	0,0221	0,02899	12	0,699	0,903	0,106	0,3242
29	4254	7805	0131	00677	71	0,318	2,197	0,217	0,2922	13	0,687	0,887	0,104	0,3242
0,30	0,4534	0,7608	0,0146	0,00743	72	0,471	2,139	0,213	0,2944	14	0,694	0,872	0,102	0,3242
31	4730	7408	0158	00812	73	0,482	2,084	0,210	0,2965	1,15	1,0679	0,0857	0,0100	0,03243
32	5003	7208	0166	00882	74	0,391	2,031	0,206	0,2984	16	0,678	0,842	0,099	0,3243
33	5290	7007	0179	00953	75	1,0626	0,1979	0,0203	0,03003	17	0,678	0,828	0,097	0,3243
34	5448	6808	0194	01025	76	0,512	1,929	0,199	0,3020	18	0,654	0,814	0,096	0,3242
0,35	0,5729	0,6609	0,0204	0,01098	77	0,589	1,882	0,196	0,3037	19	0,668	0,800	0,094	0,3242
36	5992	6413	0212	01171	78	0,629	1,835	0,193	0,3052	1,20	1,0660	0,0787	0,0093	0,03242
37	6141	6220	0218	01244	79	0,536	1,791	0,189	0,3067	21	0,600	0,772	0,092	0,3242
38	6470	6029	0229	01317	80	1,0730	0,1748	0,0186	0,03081	22	0,545	0,759	0,090	0,3241
39	6631	5843	0238	01390	81	0,637	1,706	0,183	0,3094	23	0,496	0,747	0,089	0,3241
0,40	0,6781	0,5660	0,0244	0,01462	82	0,649	1,666	0,180	0,3106	24	0,577	0,735	0,087	0,3240
41	7121	5482	0248	01533	83	0,717	1,627	0,176	0,3117	1,25	1,0646	0,0724	0,0086	0,03240
42	7206	5308	0252	01603	84	0,642	1,590	0,173	0,3128	26	0,582	0,712	0,085	0,3239
43	7477	5139	0258	01672	85	1,0782	0,1554	0,0170	0,03138	27	0,531	0,701	0,083	0,3238
44	7687	4975	0262	01740	86	0,711	1,519	0,167	0,3147	28	0,493	0,690	0,082	0,3240
0,45	0,7718	0,4816	0,0265	0,01806	87	0,668	1,485	0,164	0,3156	29	0,552	0,680	0,081	0,3237
46	8060	4662	0267	01871	88	0,762	1,452	0,161	0,3164	1,30	1,0625	0,0669	0,0080	0,03236
47	8176	4513	0267	01934	89	0,704	1,420	0,158	0,3171	31	0,565	0,659	0,078	0,3235
48	8277	4369	0269	01995	90	1,0799	0,1389	0,0155	0,03179	32	0,516	0,649	0,077	0,3235
49	8546	4230	0271	02055	91	0,748	1,360	0,152	0,3185	33	0,490	0,640	0,076	0,3234
0,50	0,8597	0,4096	0,0271	0,02113	92	0,694	1,331	0,150	0,3191	34	0,528	0,630	0,075	0,3233
51	8795	3966	0270	02169	93	0,776	1,303	0,147	0,3196	1,35	1,0605	0,0621	0,0074	0,03232
52	8951	3842	0269	02223	94	0,734	1,276	0,145	0,3202	36	0,547	0,612	0,073	0,3231
53	8874	3722	0267	02275	95	1,0792	0,1250	0,0142	0,03206	37	0,501	0,603	0,072	0,3231
54	9209	3606	0267	02326	96	0,758	1,224	0,139	0,3211	38	0,483	0,594	0,071	0,3230
0,55	0,9290	0,3495	0,0266	0,02375	97	0,718	1,199	0,137	0,3214	39	0,507	0,586	0,070	0,3229
56	9338	3388	0264	02421	98	0,768	1,175	0,135	0,3218	1,40	1,0586	0,0577	0,0069	0,03228
57	9543	3285	0261	02466	99	0,741	1,152	0,132	0,3221	41	0,531	0,569	0,068	0,3227
58	9476	3186	0259	02509	1,00	1,0768	0,1130	0,0130	0,03224	42	0,486	0,561	0,067	0,3227
59	9696	3091	0255	02551	01	0,751	1,108	0,128	0,3227	43	0,476	0,553	0,066	0,3226
0,60	0,9813	0,2999	0,0253	0,02590	02	0,723	1,086	0,125	0,3229	44	0,488	0,546	0,065	0,3225
61	9718	2911	0251	02628	03	0,748	1,066	0,123	0,3232	1,45	1,0569	0,0538	0,0064	0,03224
62	9974	2827	0248	02664	04	0,734	1,045	0,121	0,3233	46	0,516	0,531	0,063	0,3224
63	9930	2745	0244	02699	1,05	1,0736	0,1026	0,0119	0,03235	47	0,473	0,524	0,062	0,3223
64	1,0035	2667	0241	02732	06	0,732	1,007	0,117	0,3237	48	0,467	0,517	0,062	0,3222
0,65	1,0192	0,2592	0,0238	0,02763	07	0,715	0,988	0,115	0,3238	49	0,472	0,510	0,061	0,3221
66	0,0037	2520	0234	02793	08	0,719	0,970	0,113	0,3239	1,50	1,0555	0,0503	0,0060	0,03221
$\varepsilon = l_x : l_y$	ρ_{12}	κ_{12}	ψ_{12}	w_{12}	$\varepsilon = l_x : l_y$	ρ_{12}	κ_{12}	ψ_{12}	w_{12}	$\varepsilon = l_x : l_y$	ρ_{12}	κ_{12}	ψ_{12}	w_{12}

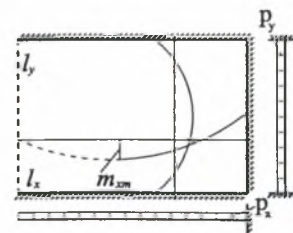


$$\varepsilon = l_x : l_y$$

$$P_x = \kappa_{12} \cdot P, P_y = \rho_{12} \cdot P$$

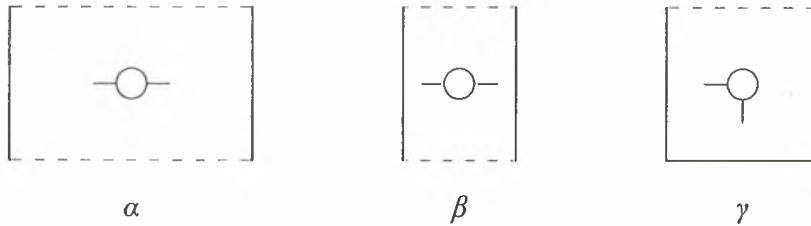
$$m_{xm} = \psi_{12} \cdot P \cdot l_x^2$$

$$f_m = \frac{P \cdot l_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w_{12}$$



2.8 Διέρειστες ορθογωνικές πλάκες

Οι διέρειστες ορθογωνικές πλάκες αποτελούν πλάκες με στήριξη σε δύο πλευρές. Οι τύποι των διερείστων που συναντώνται είναι οι εξής:



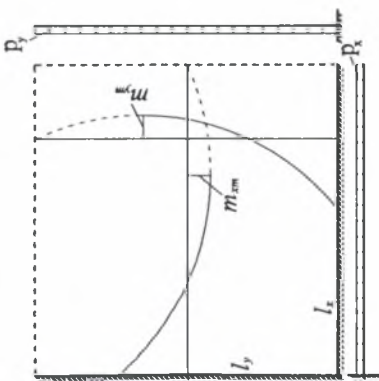
Σχ. 2.18: Τύποι στήριξης διερείστων πλακών

Για τις πλάκες με στηρίξεις στις απέναντι πλευρές (α, β) ο υπολογισμός μπορεί να γίνει με ακρίβεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των λωρίδων. Για τον υπολογισμό των πλακών με **στηρίξεις σε συνέχεια** όπως στο σχήμα (γ) συντάχθηκε πίνακας που δίνει και σε αυτή την περίπτωση συντελεστές κατανομής φορτίου στις δύο διευθύνσεις. Λόγω της επιφανειακής λειτουργίας του φορέα εμφανίζονται θετικές ροπές στο άνοιγμα. Προτείνονται συντελεστές, για τον υπολογισμό των ροπών αυτών και συντελεστές εύρεσης της μέγιστης βύθισης, ομοίως με τους πίνακες των τριερείστων. Αντίστοιχοι πίνακες για διέρειστες δεν υπάρχουν ώστε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Οι προηγούμενες αποκλίσεις, που εμφανίζονται στις τετραέρειστες και στις τριέρειστες πλάκες, μας είναι πολύτιμος οδηγός εδώ.

Αναλύθηκαν 120 πλάκες για διάφορους λόγους πλευρών από $20m \times 20m$ έως $20m \times 43.8m$ με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία $0.5m \times 0.5m$, φόρτιση $p = 100 \text{ KN/m}^2$ (Σχ. 2.10), μέτρο ελαστικότητας 29 GPa και λόγο *Poisson* $\nu = 0.15$.

Συντελεστές κατανομής φορτίου και υπολογισμοί βυθίσων και ροπών διέρειστων πλακών και στηρίξη σε συνεχείς πλευρές

$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{13}	ρ_{13}	χ_{13}	ψ_{13}	W_{13}	$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{13}	ρ_{13}	χ_{13}	ψ_{13}	W_{13}	$\varepsilon = l_y : l_x$	κ_{13}	ρ_{13}	χ_{13}	ψ_{13}	W_{13}
1,00	0,6073	0,6073	0,0367	0,0367	0,46264	1,40	0,7834	0,3852	0,0313	0,0284	0,81078	1,80	0,8774	0,2579	0,0197	0,0186	1,06743
01	6042	6014	0368	0367	47189	41	7801	3813	0310	0281	81845	81	8788	2555	0194	0184	07254
02	6143	5954	0368	0366	48113	42	7776	3773	0307	0279	82606	82	8802	2530	0191	0182	07759
03	6207	5896	0369	0365	49038	43	7779	3734	0304	0276	83361	83	8813	2506	0188	0180	08258
04	6183	5837	0369	0363	49961	44	7910	3696	0301	0273	84110	84	8820	2483	0186	0178	08752
1,05	0,6366	0,5779	0,0369	0,0362	0,50883	1,45	0,7997	0,3658	0,0298	0,0271	0,84853	1,85	0,8844	0,2459	0,0183	0,0176	1,09241
06	6343	5721	0369	0361	34812	46	7970	3621	0295	0268	85589	86	8864	2436	0180	0015	09722
07	6414	5664	0369	0360	52723	47	7950	3584	0292	0265	86318	87	8883	2413	0177	0172	10198
08	6493	5608	0369	0358	53641	48	7932	3547	0289	0263	87041	88	8898	2391	0175	0171	10668
09	6475	5551	0368	0357	54557	49	8049	3511	0286	0260	87757	89	8908	2368	0172	0169	11133
1,10	0,6634	0,5495	0,0367	0,0355	0,55470	1,50	0,8146	0,3475	0,0283	0,0257	0,88468	1,90	0,8915	0,2346	0,0169	0,0167	1,11593
11	6621	5440	0367	0354	56381	51	8125	3440	0280	0255	89171	91	8933	2325	0166	0165	12046
12	6660	5385	0366	0352	57289	52	8109	3405	0276	0252	89868	92	8956	2303	0164	0163	12494
13	6755	5331	0365	0350	58194	53	8094	3370	0273	0250	90558	93	8975	2282	0161	0161	12936
14	6746	5277	0364	0348	58685	54	8174	3336	0270	0247	91242	94	8989	2261	0158	0160	13374
1,15	0,6880	0,5223	0,0363	0,0346	0,59996	1,55	0,8280	0,3302	0,0267	0,0244	0,91920	1,95	0,8998	0,2240	0,0156	0,0158	1,13806
16	6877	5170	0362	0344	60891	56	8265	3269	0263	0242	92590	96	8995	2219	0153	0156	14232
17	6883	5117	0361	0342	61783	57	8254	3236	0260	0239	93254	97	9022	2199	0150	0155	14653
18	6996	5065	0359	0339	62672	58	8331	3212	0256	0235	94650	98	9045	2179	0148	0153	15069
19	6995	5014	0358	0337	63556	59	8286	3171	0254	0234	94562	99	9062	2159	0145	0151	15479
1,20	0,7103	0,4962	0,0357	0,0335	0,64436	1,60	0,8401	0,3140	0,0252	0,0232	0,95207	2,00	0,9074	0,2140	0,0142	0,0150	1,15886
21	6953	4700	0353	0333	65396	61	8392	3108	0249	0229	95845	01	9073	2120	0140	0148	16286
22	6967	4651	0351	0331	66268	62	8386	3077	0246	0227	96475	02	9082	2101	0138	0147	16681
23	7104	4603	0350	0328	67135	63	8380	3047	0244	0224	97100	03	9108	2082	0136	0145	17071
24	7189	4554	0348	0326	67999	64	8385	3017	0241	0222	97718	04	9129	2064	0134	0144	17457
1,25	0,7239	0,4507	0,0346	0,0323	0,68858	1,65	0,8510	0,2987	0,0238	0,0219	0,98331	2,05	0,9144	0,2045	0,0133	0,0142	1,17838
26	7193	4460	0345	0320	69710	66	8506	2957	0235	0217	98936	06	9145	2027	0131	0141	18213
27	7156	4413	0343	0318	70557	67	8506	2928	0233	0215	99534	07	9142	2009	0129	0139	18584
28	7300	4367	0341	0316	71400	68	8504	2899	0230	0212	1,00126	08	9166	1991	0127	0138	18950
29	7396	4321	0339	0313	72238	69	8500	2871	0227	0210	1,00712	09	9189	1974	0125	0136	19311
1,30	0,7456	0,4276	0,0337	0,0311	0,73071	1,70	0,8607	0,2843	0,0224	0,0208	1,01293	2,10	0,9207	0,1957	0,0124	0,0135	1,19669
31	7431	4232	0335	0308	73897	71	8610	2815	0222	0206	01865	11	9211	1939	0122	0133	20021
32	7380	4188	0333	0306	74718	72	8614	2787	0219	0204	02432	12	9209	1922	0120	0132	20368
33	7477	4144	0330	0303	75534	73	8617	2760	0216	0201	02992	13	9218	1906	0118	0131	20711
34	7585	4101	0328	0300	76344	74	8616	2733	0213	0199	03547	14	9245	1889	0116	0129	21049
1,35	0,7653	0,4058	0,0326	0,0297	0,77149	1,75	0,8695	0,2707	0,0211	0,0197	1,04095	2,15	0,9265	0,1873	0,0115	0,0128	1,21384
36	7616	4016	0323	0295	77946	76	8704	2681	0208	0195	04637	16	9271	1857	0113	0127	21714
37	7586	3974	0321	0292	78737	77	8713	2655	0205	0193	05172	17	9271	1841	0111	0125	22039
38	7636	3933	0318	0289	79523	78	8720	2630	0202	0191	05701	18	9270	1825	0109	0124	22360
39	7756	3893	0315	0287	80304	79	8723	2604	0199	0188	06225	19	9295	1809	0108	0123	22678



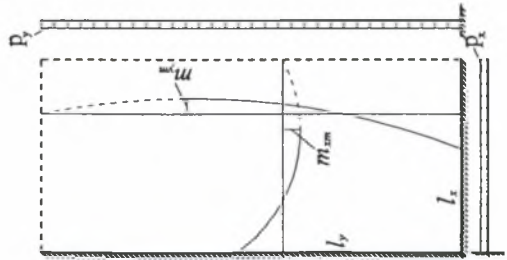
$$\varepsilon = l_y : l_x$$

$$P_x = \kappa_{13} \cdot P, P_y = \rho_{13} \cdot P$$

$$m_{x\max} = \chi_{13} \cdot p \cdot l_x^2$$

$$m_{y\max} = \psi_{13} \cdot p \cdot l_y^2$$

$$f_m = \frac{p \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h^3} \cdot W_{13}$$



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. MacLEOD, J.A.: *“Analytical modeling of Structural Systems”*, Ellis Horwood. 1990
- [2]. ΝΙΤΣΙΩΤΑΣ, Γ.Μ.: *“Ελαστοστατική”*, τόμος II. Θεσσαλονίκη, 1978
- [3]. ΔΟΥΔΟΥΜΗΣ, Ι.Ν. - ΚΟΥΜΟΥΡΑΣ, Δ.Β.: *“Προσομοίωση της καμπτικής λειτουργίας των ορθογωνικών τετραερείστων πλακών με μοντέλα εσχάρας διασταυρούμενων πλακολωρίδων”*, 12^ο ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ, τόμος II, σελ.55-66. Λεμεσός, 1996
- [4]. CZERNY, F: *“Taflen fur gleichmassig vollbelastete Rechteckplatten (πίνακες ορθογωνικών πλακών με ομοιόμορφο καθολική φόρτιση)”*, Bautechnik Archiv, dep. 11, Wilhelm Ernst & Sohn. Berlin, 1955
- [5]. CZERNY, F: *“Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatten (πίνακες τριερείστων ορθογωνικών πλακών)”*, Stahlbau und Baustatik pp. 20-241, Springer-Verlag. Wien-New York, 1955

Κεφάλαιο 3

ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΛΩΡΙΔΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

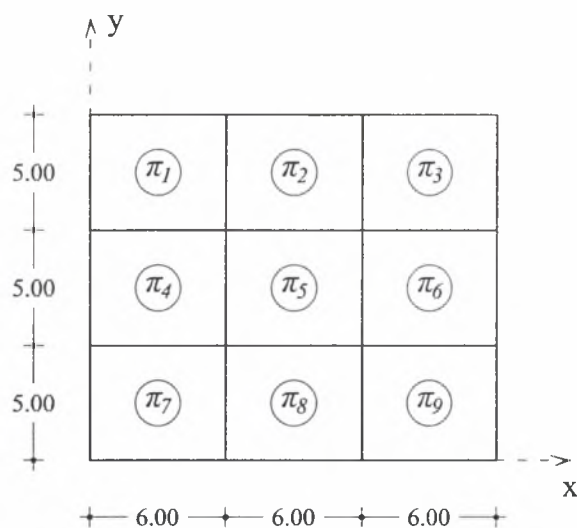
3.1 Γενικά

Η ακρίβεια που έχουν οι εκτεθέντες πίνακες, όπως φάνηκε από τη διερεύνηση για την πύκνωση του καννάβου (§2.5.1.1, §2.5.1.2, §2.7.1, §2.7.2), είναι υψηλή. Οι πίνακες συντάχθηκαν για μεμονωμένες πλάκες. Στη συνέχεια κρίνεται αναγκαίο να εξακριβωθεί η οριοθέτηση της μεθόδου των 'λωρίδων' κατά την ελαστική ανάλυση σε συνεχείς πλάκες. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφορα κατάλληλα παραδείγματα και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Από έναν μεγάλο σχετικά αριθμό παραδειγμάτων παρουσιάζονται ενδεικτικά οκτώ παραδείγματα.

Ο κάνναβος που χρησιμοποιήθηκε για τις μοντελοποιήσεις είναι ορθογωνικός και χρησιμοποιήθηκαν ορθογωνικά **επιφανειακά** πεπερασμένα στοιχεία, διαστάσεων $0.5m \times 0.5m$, $E = 29GPa$ και λόγου *Poisson* $\nu = 0.15$.

Παράδειγμα 1

Στο παράδειγμα αυτό συγκρίνονται οι ακραίες τιμές των ροπών στις συνεχείς πλάκες κατοικίας του σχήματος, εφαρμόζοντας την ελαστική μέθοδο των λωρίδων και τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Όλες οι πλάκες έχουν κοινό πάχος.



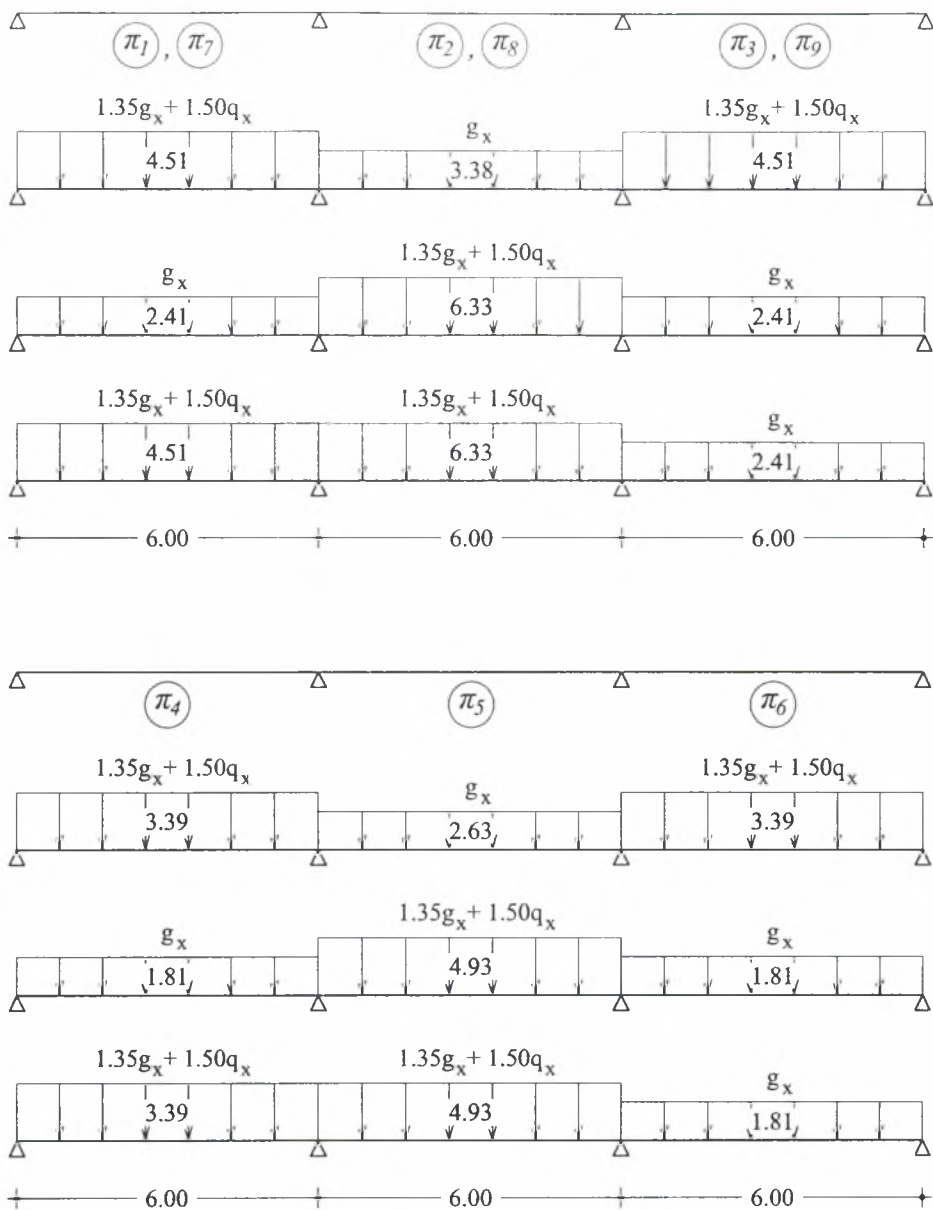
Σχ. 3.1.1: Γεωμετρία και αρίθμηση των πλακών

Πίνακας 3.1.1

Κατανομές μόνιμων και κινητών φορτίων στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

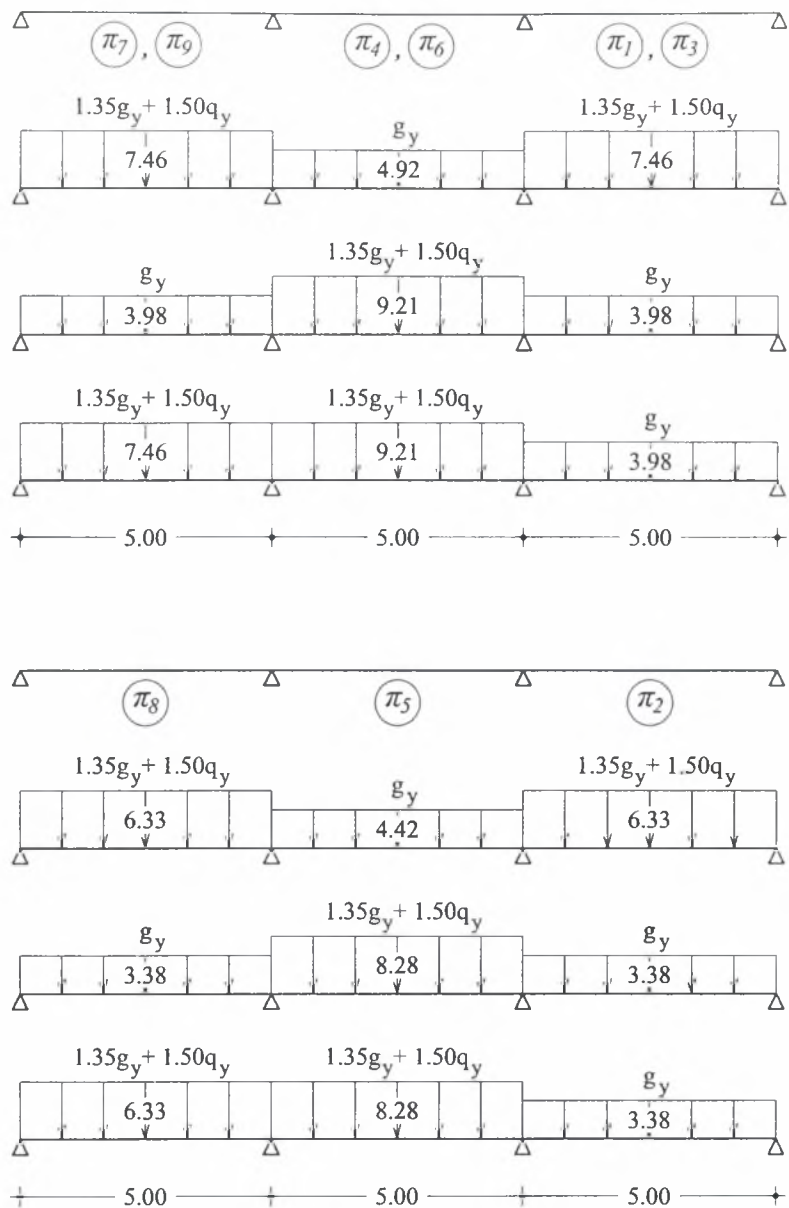
πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π1, π3, π7, π9	4	5.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.83	0.4192	0.6926	2.41 3.98	0.84 1.39
π2, π8	5	5.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.83	0.5877	0.5876	3.38 3.38	1.18 1.18
π4, π6	5	5.75 2.00	$l_x:l_y =$ 1.20	0.3156	0.8561	1.81 4.92	0.63 1.71
π5	6	5.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.83	0.4575	0.7695	2.63 4.42	0.92 1.54

Όλες οι πλάκες έχουν λόγο πλευρών $l_{\max}/l_{\min} = 1.20$. Από τον έλεγχο των βελών κάμψης και τις επικαλύψεις που ορίζει ο Ελληνικός Κανονισμός Σκυροδέματος θέτουμε κοινό πάχος πλακών $h_f = 17\text{cm}$. Από τον υπολογισμό των φορτίων των πλακών και την κατανομή τους στις δύο διευθύνσεις προκύπτουν οι τιμές που παρουσιάζονται στον πιν. 3.1.1. Εργαζόμενοι με τη μέθοδο των λωρίδων, σχηματίζοντας τις στατικές τομές, έχουμε την περιβάλλουσα των ροπών κατά τις δύο διευθύνσεις. Παρακάτω παρατίθενται οι εναλλακτές φορτίσεις στις δύο διευθύνσεις.



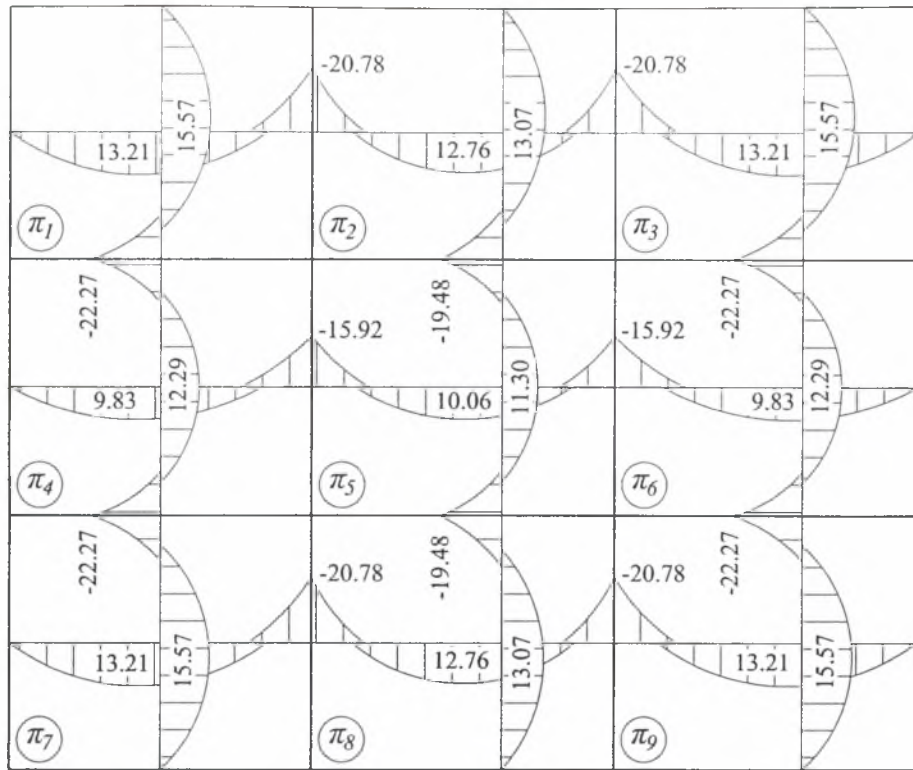
Σχ. 3.1.2: Στατικές τομές και εναλλακτές φορτίσεις κατά τη διεύθυνση x για επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων

Οι πλάκες $\pi_1, \pi_3, \pi_7, \pi_9$ είναι ίδιας γεωμετρίας, τύπου στήριξης και φέρουν τα ίδια μόνιμα και κινητά φορτία. Επομένως οι συντελεστές κατανομής των φορτίων κατά τις δύο διευθύνσεις είναι ίδιοι και άρα είναι ίδια και τα γραμμικά φορτία των αντίστοιχων πλακολωρίδων. Ανάλογα ισχύουν για τις πλάκες π_2, π_8 και π_4, π_6 όπως μπορεί να φανεί και στον ανωτέρω πίνακα (πιν. 3.1.1). Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται τα φορτία των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση y :



Σχ. 3.1.3: Στατικές τομές και εναλλακτές φορτίσεις κατά τη διεύθυνση y για επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων

Διενεργώντας τις στατικές επιλύσεις για τις παραπάνω εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων υπολογίζουμε τις μέγιστες τιμές των ροπών κάμψης για τα ανοίγματα και τις στηρίξεις και κατασκευάζουμε το διάγραμμα ροπών επί του συνολικού φορέα:



Σχ. 3.1.4: Ροπές στις δύο διευθύνσεις από επίλυση με νέους πίνακες

Στη συνέχεια γίνεται ανάλυση με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία διαστάσεων 0.5×0.5 , $E = 29GPa$, $h_f = 17cm$ και λόγο Poisson $\nu = 0.15$. Οι ακραίες τιμές υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τις πεσοειδείς φορτίσεις και για τους ακόλουθους συνδυασμούς φορτίσεων.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1.175G + 0.75Q = 8.26 \text{ KN/m}^2 & \left\| \begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_{\text{δυσμενές}} = 10.76 \text{ KN/m}^2 \\ p_1 - p_2 &= p_{\text{ευμενές}} = 5.75 \text{ KN/m}^2 \end{aligned} \right. \\
 p_2 &= 0.175G + 0.75Q = 2.50 \text{ KN/m}^2
 \end{aligned}$$

1η φόρτιση

p_1+p_2	G	p_1+p_2
G	p_1+p_2	G
p_1+p_2	G	p_1+p_2

2η φόρτιση

G	p_1+p_2	G
p_1+p_2	G	p_1+p_2
G	p_1+p_2	G

3η φόρτιση

p_1+p_2	p_1+p_2	G
G	G	p_1+p_2
p_1+p_2	p_1+p_2	G

4η φόρτιση

p_1+p_2	G	p_1+p_2
p_1+p_2	G	p_1+p_2
G	p_1+p_2	G

5η φόρτιση

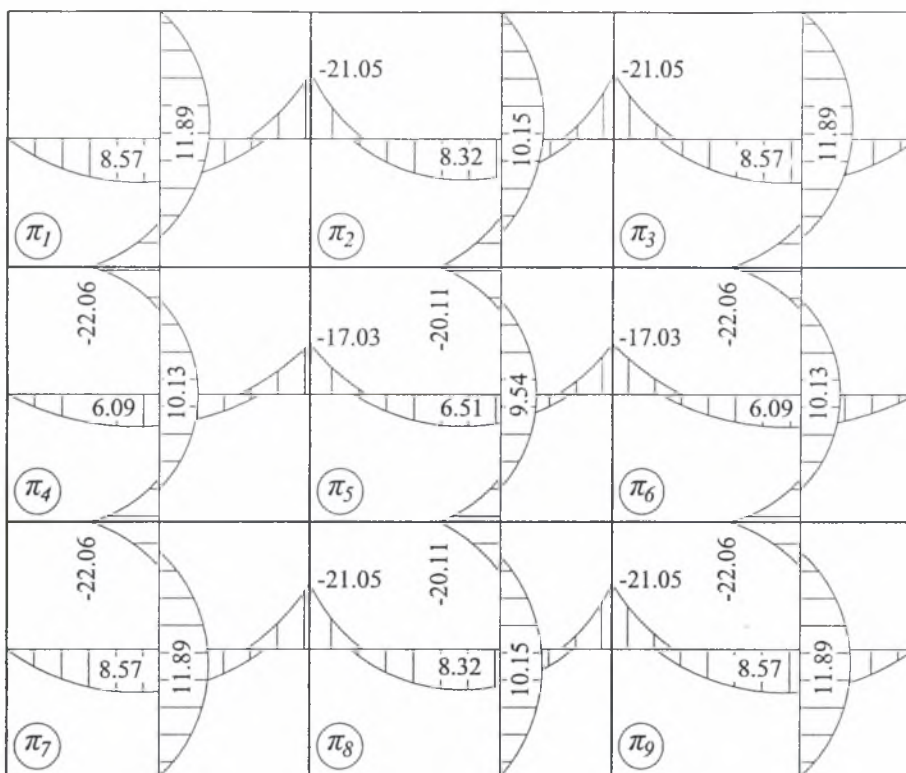
G	G	p_1+p_2
p_1+p_2	p_1+p_2	G
G	G	p_1+p_2

6η φόρτιση

G	p_1+p_2	G
G	p_1+p_2	G
p_1+p_2	G	p_1+p_2

Σχ. 3.1.5: Πεσοειδείς φορτίσεις στο συνολικό φορέα

Για τις εναλλακτές φορτίσεις του Σχ. 3.1.5 παίρνουμε τις ακραίες τιμές των ροπών:



Σχ. 3.1.6: Ροπές στις δύο διευθύνσεις από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Παρατηρούμε πως οι ροπές δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές. Οι ροπές των στηρίξεων και με τις δύο μεθόδους πρακτικά συμπίπτουν. Όσον αφορά τις ροπές των ανοιγμάτων, κατά τη μέθοδο των λωρίδων είναι, σε όλες τις πλάκες, μεγαλύτερες των ροπών από πεπερασμένα στοιχεία. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως τα αποτελέσματα, μέσα στα όρια της θεωρίας της ελαστικότητας, όσον αφορά τις ροπές κάμψης, είναι ικανοποιητικά.

Στη συνέχεια θα ελεγχθούν οι μέγιστες βυθίσεις των πλακών στα ανοίγματα. Φορτίζουμε τις πλάκες με καθολική φόρτιση για φορτία λειτουργίας όπως φαίνεται στο σχήμα:

8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2
8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2
8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2

Σχ. 3.1.7: Φόρτιση με φορτία λειτουργίας για την εύρεση των μέγιστων βυθίσεων

Λαμβάνοντας τις τιμές των βυθίσεων από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, για καθολική φόρτιση με φορτία λειτουργίας, τις συγκρίνουμε με τις τιμές που εξάγονται μέσω των συντελεστών w από τους νέους πίνακες:

Πίνακας 3.1.2

Σύγκριση των βυθίσεων για **φορτία λειτουργίας** για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

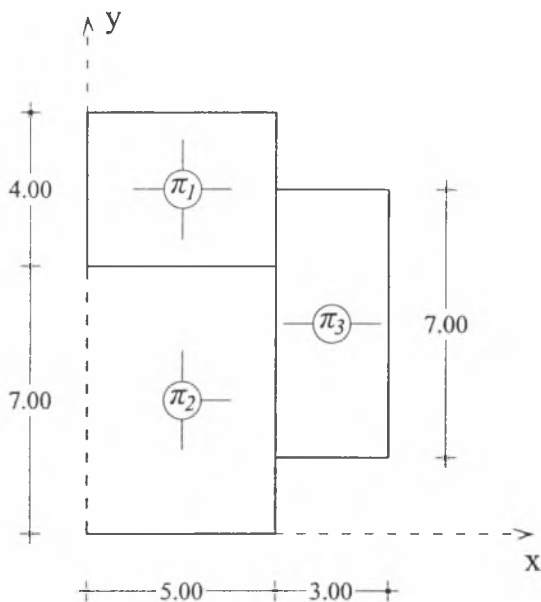
πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1, π3, π7, π9	0.03580	0.00122	0.00126
π2, π8	0.02870	0.00098	0.00097
π4, π6	0.02349	0.00080	0.00072
π5	0.02036	0.00069	0.00068

Συμπεράσματα:

1. Στις συνεχείς τετραέρειςτες πλάκες με ίσα ανοίγματα για κάθε στατική τομή, ίδιο πάχος πλακών και ίδια φορτία παρουσιάζεται, κατά τις εναλλακτές φορτίσεις, ταύτιση στις ροπές των στηριγμάτων και περιβολή στις ροπές των ανοιγμάτων σε κάθε περίπτωση
2. Οι τιμές των βυθίσεων που υπολογίζουμε βάσει των συντελεστών πρακτικά συμπίπτουν με τις τιμές που λαμβάνονται από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

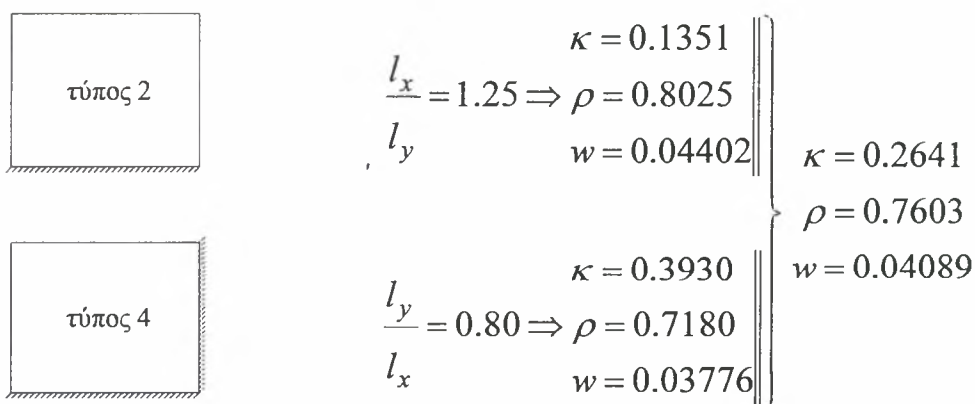
Παράδειγμα 2

Στο επόμενο παράδειγμα επιλύθηκαν οι κάτωθι πλάκες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των λωρίδων και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα με αυτά από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Όλες οι πλάκες έχουν κοινό πάχος.



Σχ. 3.2.1: Γεωμετρία και αρίθμηση των πλακών

Όπως φαίνεται, η πλάκα π_2 είναι τριέριστη τύπου 5 ενώ η πλάκα π_3 λειτουργεί κυρίως κατά μία διεύθυνση. Η πλάκα π_1 είναι τεταέριστη με τύπο ενδιάμεσο των τύπων 2 και 4. Στην περίπτωση της π_1 λαμβάνουμε μέσες τιμές συντελεστών μεταξύ των τύπων 2 και 4.



Σχ. 3.2.2: Θεώρηση διπλού τύπου στήριξης για την π_1

Στην τριέριστη πλάκα π_2 , αν και είναι εν μέρει συνδεδεμένη με την π_3 , δεν τίθεται παρόμοιο πρόβλημα. Η πλευρά που βρίσκεται έναντι του ελεύθερου άκρου στην π_2 είναι κατά το μεγαλύτερο μέρος της πακτωμένη και λαμβάνουμε τους συντελεστές κατανομής φορτίου στις δύο διευθύνσεις καθώς και το συντελεστή εύρεσης της μέγιστης ροπής ανοίγματος κατά x για τριέριστη πλάκα τύπου 5. Για

την αμφιέριστη κατανέμουμε το φορτίο κατά μήκος της μικρότερης πλευράς για λωρίδα πλάτους 1m:

Πίνακας 3.2.1

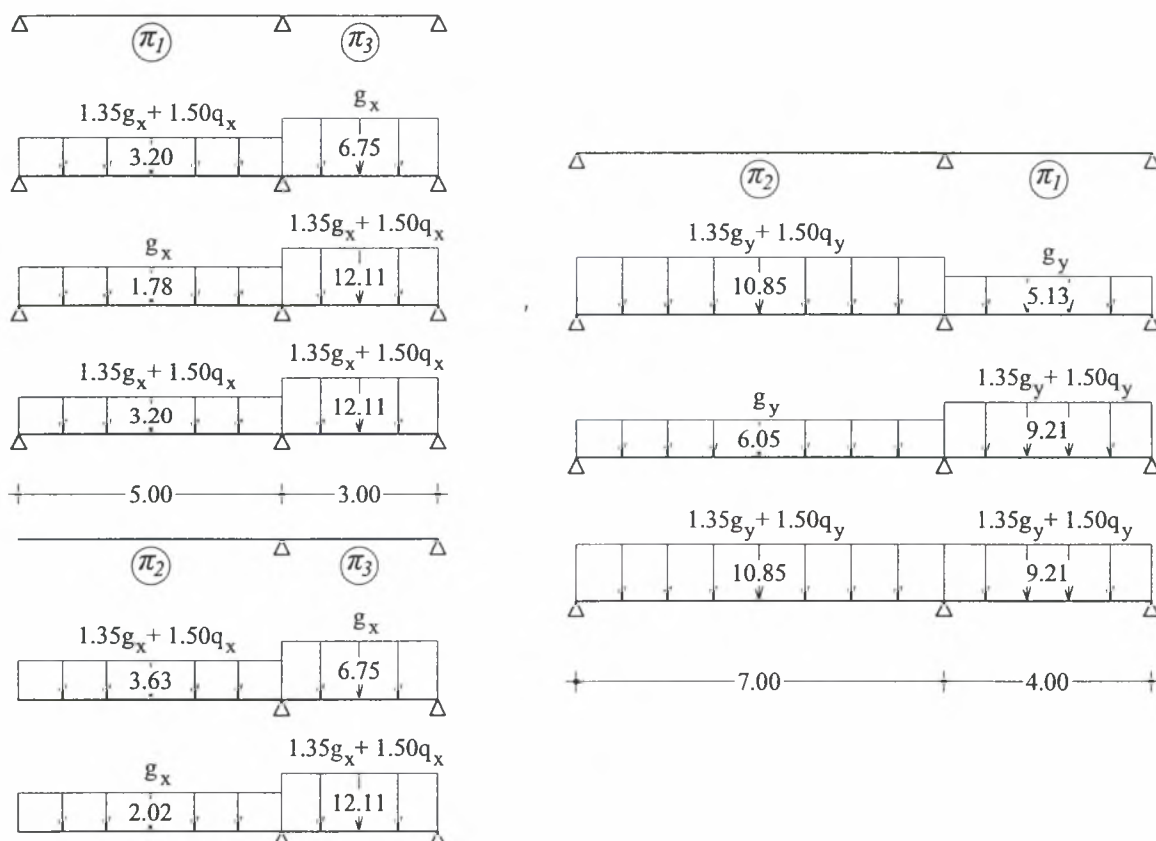
Κατανομές μόνιμων, κινητών φορτίων στις δύο διευθύνσεις και συντελεστές εύρεσης ροπής ανοίγματος για την τριέριστη

πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π_1	2-4	6.75 2.00	$l_y \cdot l_x =$ 0.80	0.2641	0.7603	1.78 5.13	0.53 1.52
π_2	5	6.75 2.00	$l_x \cdot l_y =$ 0.71	0.4253	0.7708	2.02 6.05	0.60 1.79
π_3	—	6.75 2.00	$l_y \cdot l_x =$ 2.33	1	—	6.75 2.00	— —

Τη ροπή του ανοίγματος κατά x την υπολογίζουμε σύμφωνα με το συντελεστή που δίδεται στον πίν. 11, δηλαδή:

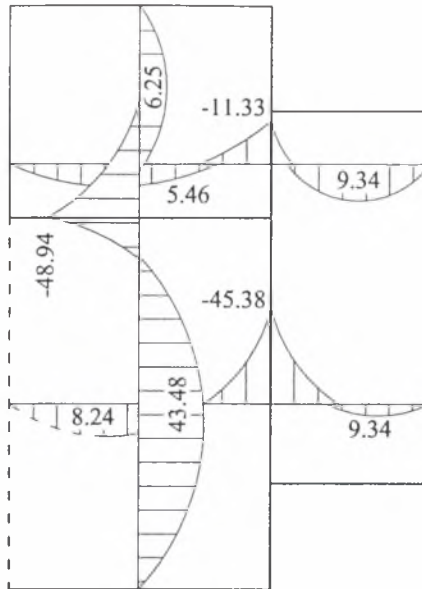
$$m_{xm2} = \psi_2 \cdot p_2 \cdot l_{x2}^2 = 0.0272 \cdot (1.35G + 1.50Q) \cdot 5^2 = 8.24 \text{KNm}$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τις στατικές τομές και εφαρμόζουμε εναλλακτές φορτίσεις κατά το σχήμα:



Σχ. 3.2.3: Στατικές τομές και εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων

Από επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων λαμβάνουμε το παρακάτω διάγραμμα μέγιστων ροπών κάμψης για το συνολικό φορέα:



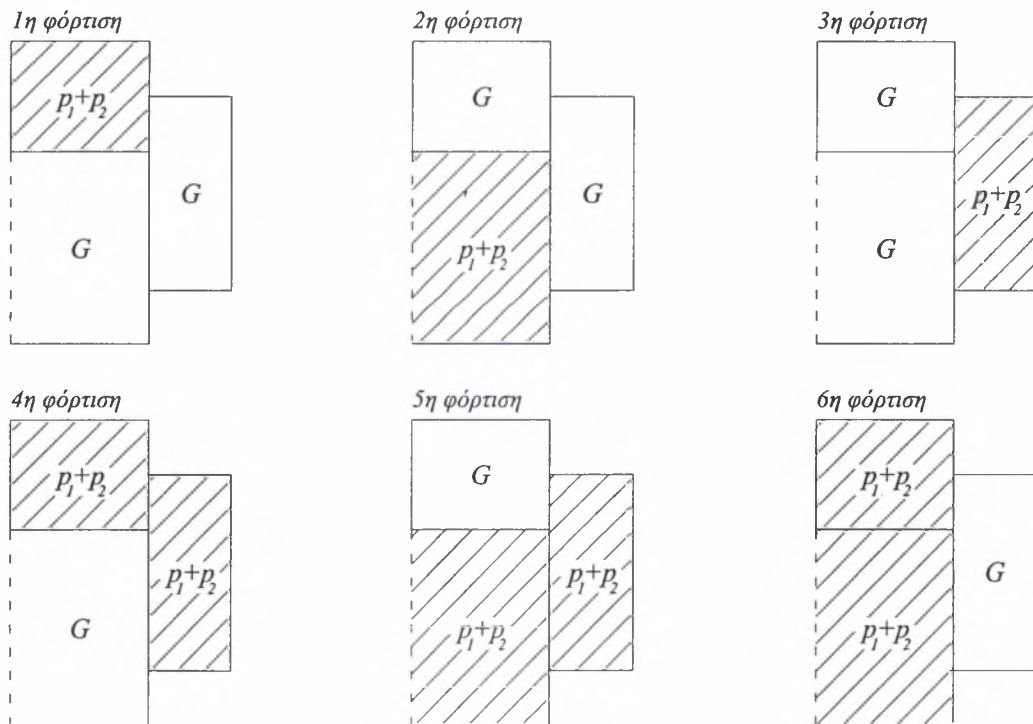
Σχ. 3.2.4: Μέγιστες ροπές κάμψης από επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων

Εφαρμόζουμε πεσσοειδείς φορτίσεις στο συνολικό φορέα για φορτία:

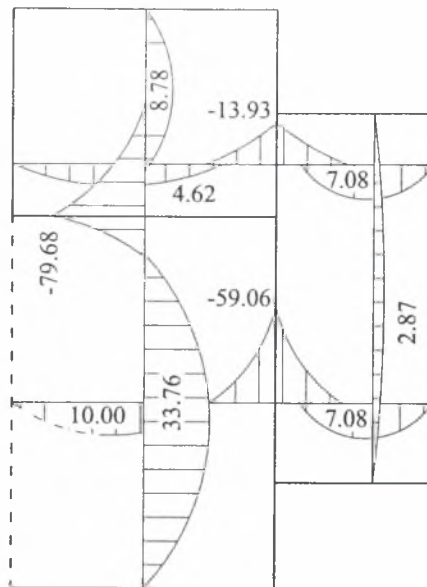
$$p_1 = 1.175G + 0.75Q = 9.43 \text{ KN/m}^2 \quad \left\| \quad p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 12.11 \text{ KN/m}^2\right.$$

$$p_2 = 0.175G + 0.75Q = 2.68 \text{ KN/m}^2 \quad \left\| \quad p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 6.75 \text{ KN/m}^2\right.$$

Συνεχίζοντας έχουμε κατά το ακόλουθο σχήμα για τις πεσσοειδείς φορτίσεις στο συνολικό φορέα:

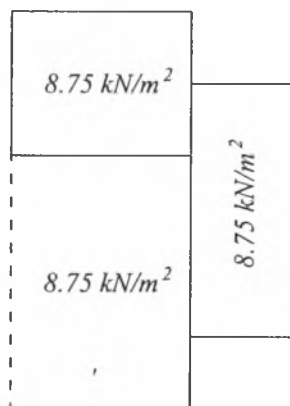


Σχ. 3.2.5: Πεσσοειδείς φορτίσεις επί του συνολικού φορέα



Σχ. 3.2.6: Διάγραμμα ροπών επί του συνολικού φορέα από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Όσον αφορά τις βυθίσεις, επιβάλλουμε στο φορέα φορτία λειτουργίας και συγκρίνουμε τις τιμές που υπολογίζονται μέσω των συντελεστών w και την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.



Σχ. 3.2.7: Καθολική φόρτιση με φορτία λειτουργίας

Πίνακας 3.2.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

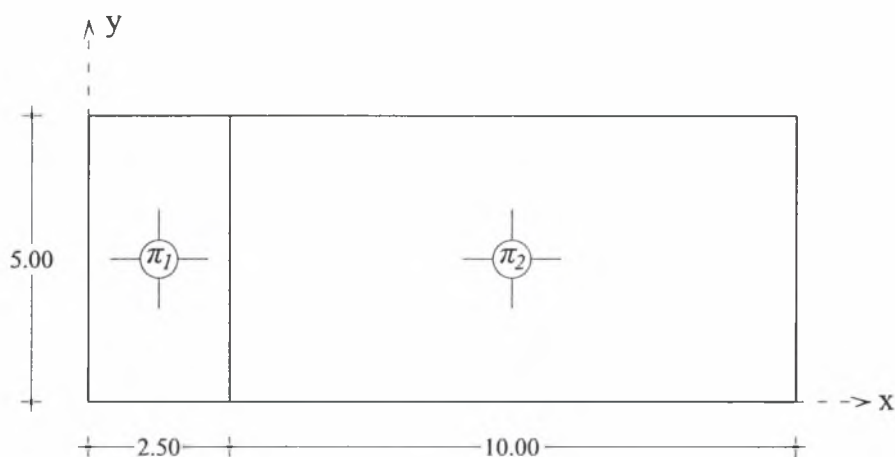
πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1	0.04089	0.000341	0.000191
π2	0.04825	0.003774	0.004520
π3	—	0.000176	0.000124

Συμπεράσματα:

1. Στις περιπτώσεις πλακών με άνισα ανοίγματα και με αλληλεπίδραση τριερείστων, τετραερείστων και «αμφιερείστων» συνεχών πλακών οι ροπές βρίσκονται πολύ κοντά για ανάλυση και με τις δύο μεθόδους.
2. Οι βυθίσεις παρουσιάζουν ανεκτές αποκλίσεις.

Παράδειγμα 3

Για τις πλάκες του σχήματος συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα για επίλυση με τη μέθοδο λωρίδων και ανάλυση με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία. Οι πλάκες έχουν κοινό πάχος. Σημειώνεται ότι το παράδειγμα αυτό αποτελεί εξ' ορισμού ένα πεδίο που βρίσκεται εκτός των ορίων της μεθόδου των λωρίδων με χρήση των παραδοσιακών πινάκων *Markus*. Αυτό συμβαίνει διότι το στατικό σύστημα λωρίδας $x-x$ αποκλίνει σημαντικά από την πραγματική λειτουργία του επιφανειακού φορέα. Το παράδειγμα αυτό είναι χρήσιμο για να μας δείξει τα όρια της μεθόδου των λωρίδων με τους νέους πίνακες που συντάχθηκαν εδώ.



Σχ. 3.3.1: Γεωμετρία και αρίθμηση πλακών

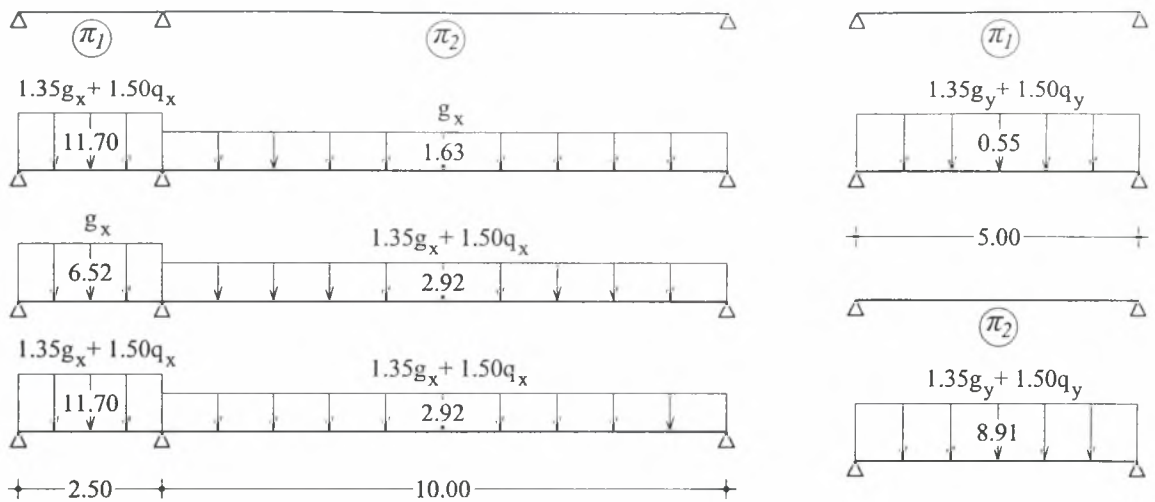
Οι πλάκες είναι τετραέρειςτες τύπου 2 και έχουν και οι δύο λόγο πλευρών $l_{\max}/l_{\min} = 2.00$. Το πάχος των πλακών επιλέγεται στα 2cm , σύμφωνα με τον Ελληνικό Κανονισμό Σκυροδέματος. Για την επίλυση των παραπάνω πλακών με τη μέθοδο των λωρίδων και λαμβάνοντας τους συντελεστές κατανομής φορτίου σύμφωνα με τους νέους πίνακες έχουμε:

Πίνακας 3.3.1

Συντελεστές κατανομής φορτίου στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

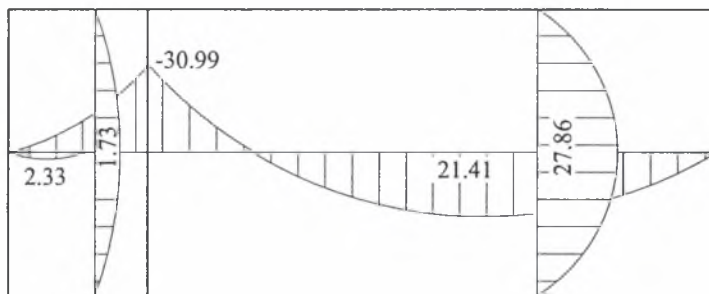
πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π1	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 2.00	0.9666	0.0456	6.52 0.31	1.93 0.09
π2	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.50	0.2422	0.7362	1.63 4.97	0.48 1.47

Με γνωστά πλέον τα φορτία που κατανέμονται στις πλάκες, σχηματίζουμε τα στατικά τους συστήματα κατά τις δύο διευθύνσεις (x, y) και εφαρμόζουμε τις εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων όπως μπορεί να φανεί στο παρακάτω σχήμα:



Σχ. 3.3.2: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων

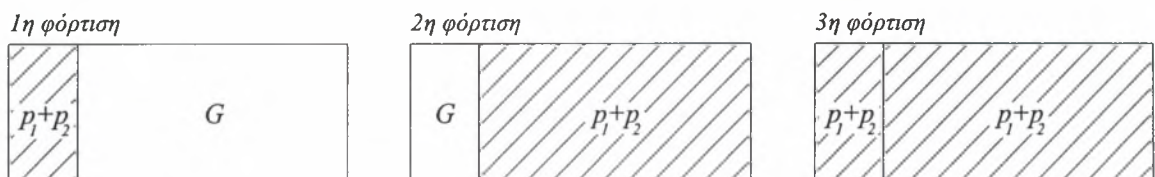
Έχουμε επομένως για το συνολικό διάγραμμα ροπών:



Σχ. 3.3.3: Διάγραμμα ροπών επί του συνολικού φορέα για επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων

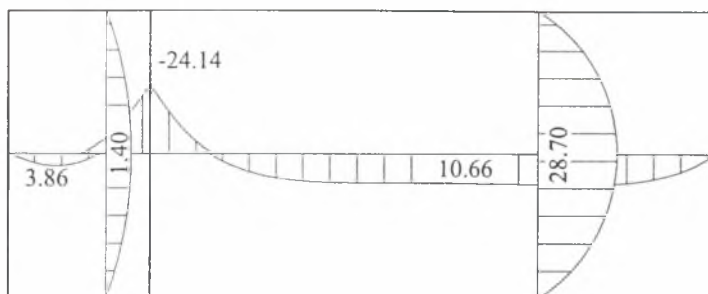
Η ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία έγινε χρησιμοποιώντας πεσοειδείς φορτίσεις, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1.175G + 0.75Q = 9.43 \text{ KN/m}^2 & \left| \right. & p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 12.11 \text{ KN/m}^2 \\
 p_2 &= 0.175G + 0.75Q = 2.68 \text{ KN/m}^2 & \left| \right. & p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 6.75 \text{ KN/m}^2
 \end{aligned}$$



Σχ. 3.3.4: Πεσοειδείς φορτίσεις στο συνολικό φορέα

Αναλύοντας με πεπερασμένα στοιχεία λαμβάνουμε το κάτωθι διάγραμμα ροπών για το συνολικό φορέα:



Σχ. 3.3.5: Ροπές κάμψης για το συνολικό φορέα από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Όσον αφορά στη σύγκριση των βυθίσεων επιβάλλουμε στο φορέα φορτία λειτουργίας κατά το Σχ. 3.3.6 και συγκρίνουμε τις τιμές με αυτές που υπολογίζονται από τους συντελεστές w των αντίστοιχων πινάκων:

8.75 kN/m^2	8.75 kN/m^2
-----------------------	-----------------------

Σχ. 3.3.6: Φόρτιση του φορέα με φορτία λειτουργίας

Πίνακας 3.3.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1	0.05900	-0.0000750	+0.0000718
π2	0.10967	-0.0022332	-0.0022800

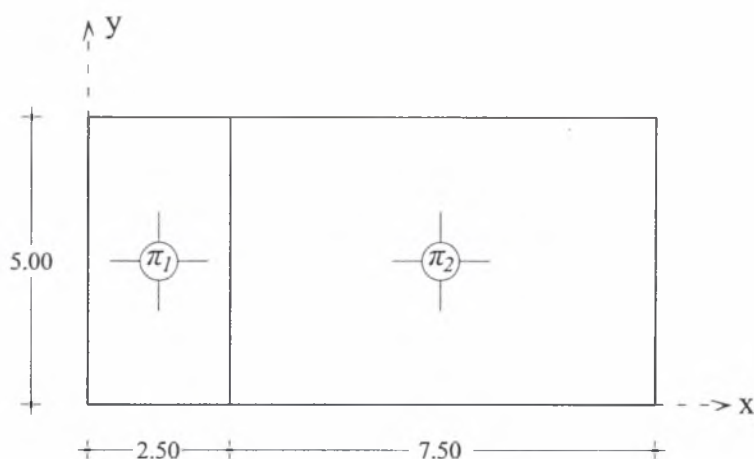
Συμπεράσματα:

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λόγος $l_{\max}/l_{\min} = 4$ στη $x-x$ στατική τομή παρατηρούμε τα κάτωθι:

1. Οι αποκλίσεις στις ροπές σε σχέση με τις «ακριβείς» τιμές της ανάλυσης (με πεπερασμένα στοιχεία) είναι σαφώς μικρότερες των αναμενόμενων και προς την πλευρά της ασφαλείας γενικά. Οι αποκλίσεις αυτές οφείλονται στη μεγάλη διαφορά των μηκών των ανοιγμάτων κατά τη x -διεύθυνση.
2. Κατά τον έλεγχο των βυθίσεων παρατηρούμε ότι οι βυθίσεις της μικρότερης πλάκας έχουν σημαντικές αποκλίσεις και το μοντέλο των λωρίδων δεν ενδείκνυται ως καταλληλότερο για τον υπολογισμό των βυθίσεων.

Παράδειγμα 4

Για τον κάτωθι φορέα, που αποτελεί παραλλαγή του φορέα του παραδείγματος 3 (η πλάκα π_2 από $l_x = 10m$ γίνεται $l_y = 7.5m$), έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων για επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.



Σχ. 3.4.1: Γεωμετρία και αρίθμηση πλακών

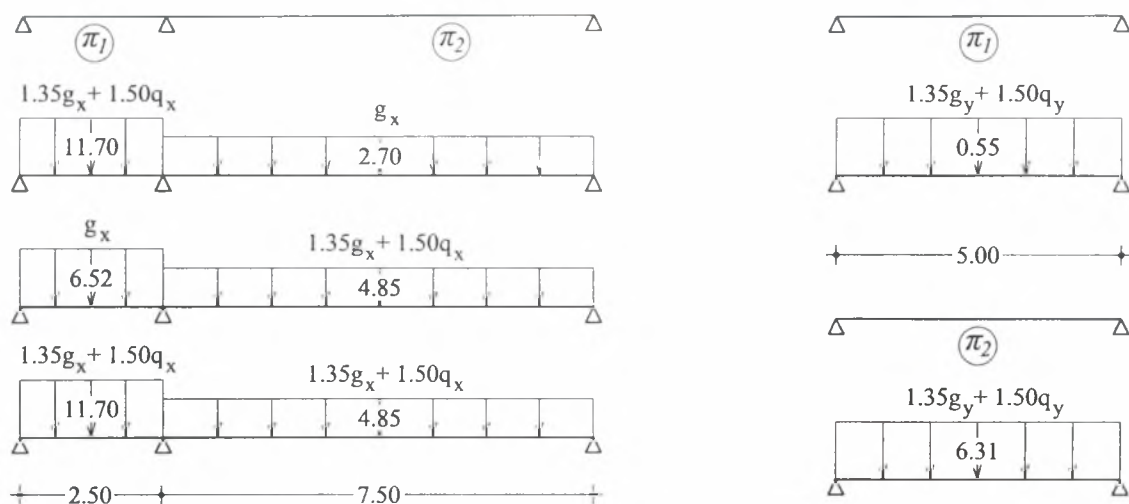
Εργαζόμενοι ανάλογα με το παράδειγμα 3 και κρατώντας σταθερό το πάχος των πλακών στα $21cm$ κατανέμουμε τα φορτία (μόνιμα και κινητά) στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3.4.1

Συντελεστές κατανομής φορτίου στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

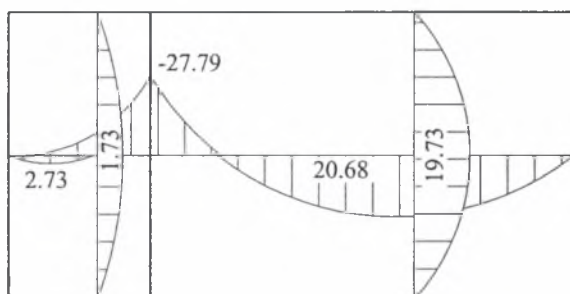
πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π_1	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 2.00	0.9666	0.0456	6.52 0.31	1.93 0.09
π_2	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.67	0.4007	0.5219	2.70 3.52	0.80 1.04

Από επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων λαμβάνουμε τις ακραίες τιμές των ροπών κάμψης (Σχ. 3.4.3), για το συνολικό φορέα, σχηματίζοντας τα στατικά συστήματα και εφαρμόζοντας εναλλακτές φορτίσεις (Σχ. 3.4.2):



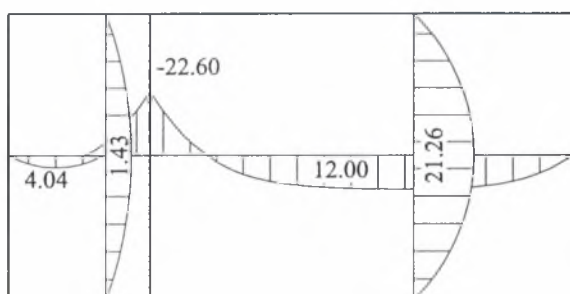
Σχ. 3.4.2: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων

Για το διάγραμμα ροπών επί του συνολικού φορέα:



Σχ. 3.4.3: Ροπές κάμψης για το συνολικό φορέα από επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων

Από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, εργαζόμενοι ομοίως με το παράδειγμα 3 (Σχ. 3.3.4), παίρνουμε τις παρακάτω τιμές για τις μέγιστες ροπές κάμψης επί του συνολικού φορέα:



Σχ. 3.4.4: Ροπές κάμψης για το συνολικό φορέα από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Επιβάλλοντας στο φορέα τα φορτία λειτουργίας, ομοίως με το Σχ. 3.3.6, λαμβάνουμε τις μέγιστες βυθίσεις των πλακών:

Πίνακας 3.4.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1	0.05900	-0.0000750	+0.0000669
π2	0.07613	-0.0015500	-0.0016500

Συμπεράσματα:

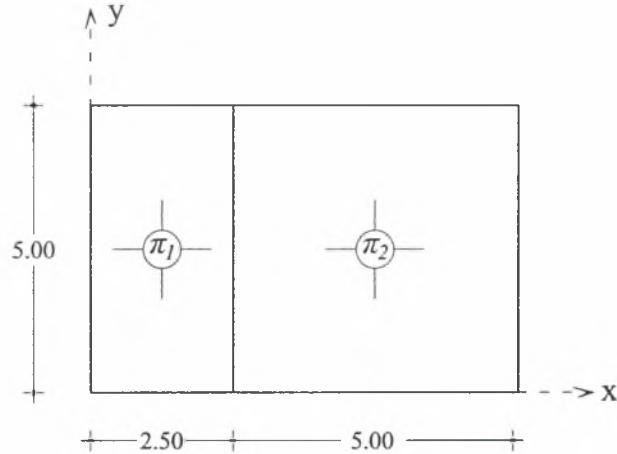
Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο λόγος $l_{\max}/l_{\min} = 3$ στη $x-x$ στατική τομή παρατηρούμε τα κάτωθι:

1. Οι αποκλίσεις στις ροπές σε σχέση με τις «ακριβείς» τιμές της ανάλυσης (με πεπερασμένα στοιχεία) είναι σαφώς μικρότερες των αναμενόμενων και προς την πλευρά της ασφαλείας γενικά. Οι αποκλίσεις αυτές οφείλονται στη μεγάλη διαφορά των μηκών των ανοιγμάτων κατά τη x -διεύθυνση. Οι τιμές των ροπών από την επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων τείνουν στις τιμές της ανάλυσης με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία για μείωση του λόγου l_{\max}/l_{\min} των μηκών των ανοιγμάτων.
2. Κατά τον έλεγχο των βυθίσεων, παρατηρούμε ότι αυτές της μικρότερης πλάκας έχουν σημαντικές αποκλίσεις και το μοντέλο των λωρίδων δεν ενδείκνυται ως καταλληλότερο για τον υπολογισμό των βυθίσεων.

Σε μία προσπάθεια να επιτευχθεί σύγκλιση για τα δύο διαγράμματα ροπών (Σχ. 3.4.3, Σχ. 3.4.4), παραλλάσσουμε το φορέα σύμφωνα με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5

Για τον κάτωθι φορέα, που αποτελεί παραλλαγή του παραδείγματος 4 (η πλάκα π_2 από $l_x = 7.5m$ γίνεται $l_x = 5m$), έγινε επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων και ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα από τις δύο επιλύσεις.



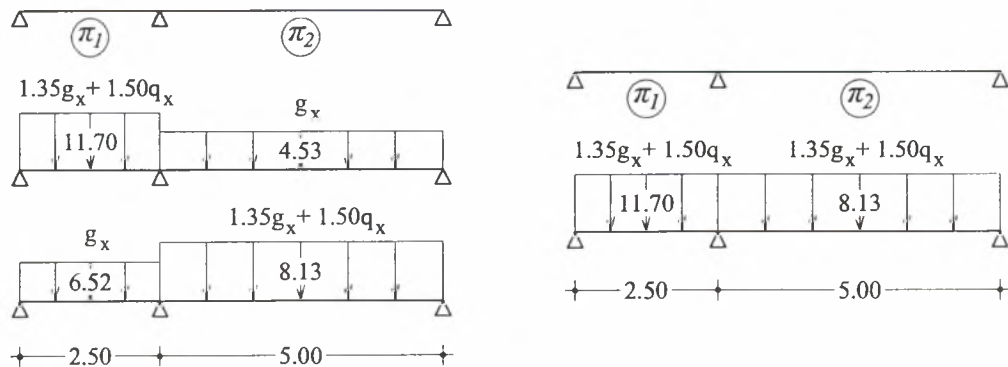
Σγ. 3.5.1: Γεωμετρία και αρίθμηση πλακών

Πίνακας 3.5.1

Συντελεστές κατανομής φορτίου στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π_1	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 2.00	0.9666	0.0456	6.52 0.31	1.93 0.09
π_2	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 1.00	0.6705	0.2409	4.53 1.63	1.34 0.48

Σχηματίζουμε τα στατικά συστήματα των πλακών κατά τις δύο διευθύνσεις και εφαρμόζουμε εναλλακτές φορτίσεις κατά τα παρακάτω σχήματα:

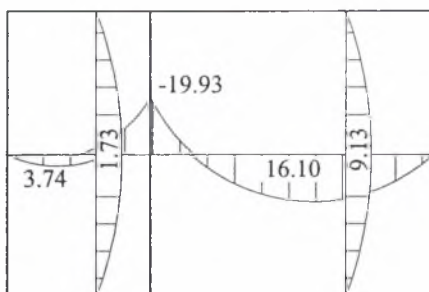


Σγ. 3.5.2: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση x



Σχ. 3.5.3: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση x

Επιλύοντας με τη μέθοδο των λωρίδων έχουμε:

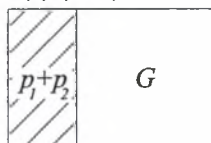


Σχ. 3.5.4: Ροπές κάμψης για το συνολικό φορέα από επίλυση με μέθοδο λωρίδων

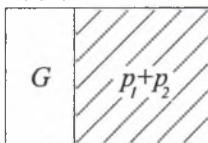
Εφαρμόζουμε στη συνέχεια πεσσοειδείς φορτίσεις κατά το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1.175G + 0.75Q = 9.43 \text{ KN/m}^2 & \left\| \begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_{\text{δυσμενές}} = 12.11 \text{ KN/m}^2 \\ p_1 - p_2 &= p_{\text{ευμενές}} = 6.75 \text{ KN/m}^2 \end{aligned} \right. \\
 p_2 &= 0.175G + 0.75Q = 2.68 \text{ KN/m}^2
 \end{aligned}$$

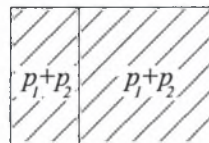
1η φόρτιση



2η φόρτιση

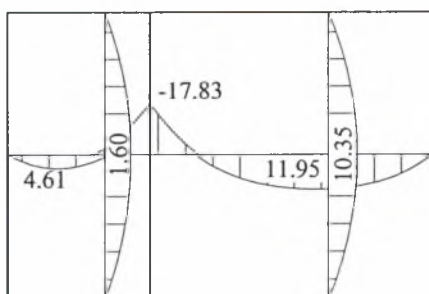


3η φόρτιση



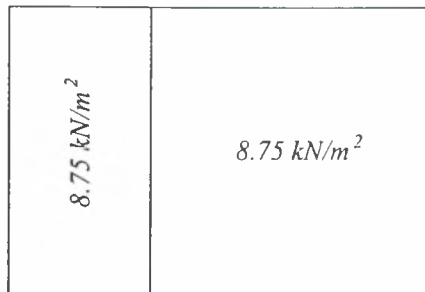
Σχ. 3.5.5: Πεσσοειδείς φορτίσεις στο συνολικό φορέα.

Για επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχουμε για το συνολικό φορέα:



Σχ. 3.5.6: Ροπές κάμψης για το συνολικό φορέα από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Για τον υπολογισμό των βυθίσεων επιβάλλουμε καθολική φόρτιση με φορτία λειτουργίας:



Σχ. 3.5.7: Φόρτιση του φορέα με φορτία λειτουργίας

Πίνακας 3.5.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

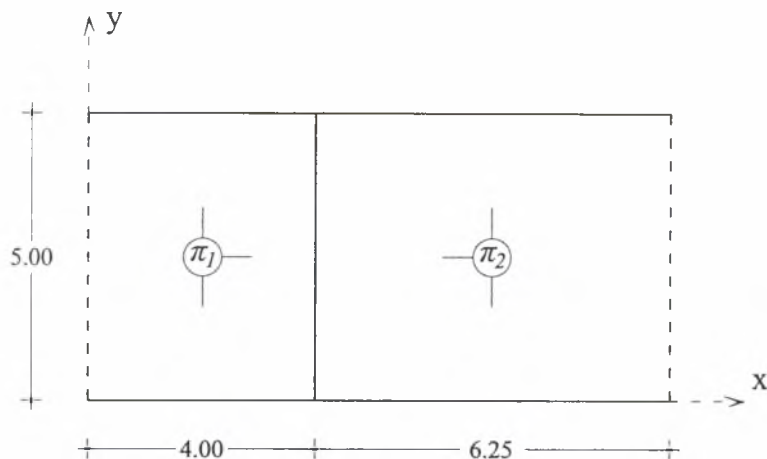
πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l_{\min}^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1	0.05900	0.0000750	0.0000176
π2	0.03351	0.0006823	0.0007537

Συμπεράσματα:

1. Για λόγους πλευρών $l_{\max}/l_{\min} = 2$ η απόκλιση των αποτελεσμάτων που δίνουν οι δύο μέθοδοι είναι μικρή γενικά και προς την πλευρά της ασφαλείας.
2. Το μοντέλο της μεθόδου των λωρίδων κρίνεται κατάλληλο.
3. Οι αποκλίσεις των βυθίσεων έχουν μειωθεί σημαντικά συγκρίνοντάς τις (τις αποκλίσεις) με τα παραδείγματα 3 και 4.

Παράδειγμα 6

Για τις τριέρειστες πλάκες του κάτωθι σχήματος έγινε σύγκριση των μεγίστων ροπών κάμψης, για τα ανοίγματα και τις στηρίξεις, από την επίλυση τους νέους πίνακες και την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.



Σχ. 3.6.1: Γεωμετρία και αρίθμηση πλακών

Επιλέγουμε κοινό πάχος για τις πλάκες $h_f = 21\text{cm}$. Κατανέμουμε τα φορτία (μόνιμα και κινητά) στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες όπως φαίνεται παρακάτω:

Πίνακας 3.6.1

Συντελεστές κατανομής φορτίου στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

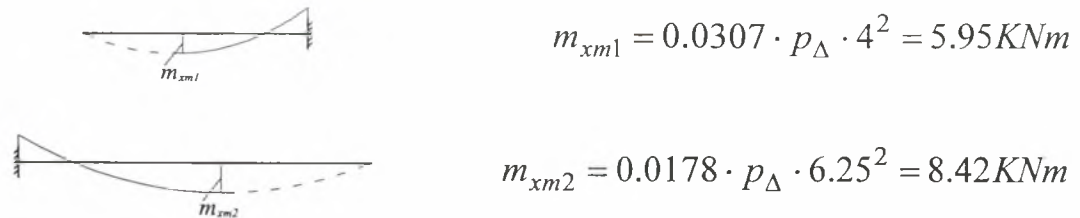
πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π1	2	6.75 2.00	$l_x:l_y =$ 0.80	0.3390	0.5720	2.29 3.86	0.68 1.14
π2	2	6.75 2.00	$l_x:l_y =$ 1.25	0.1559	0.8847	1.05 5.97	0.31 1.77

Ακόμα, λόγω του ότι εμφανίζεται ροπή στο άνοιγμα, αν και το στατικό σύστημα λαμβάνεται σαν πρόβολος, παρατίθενται συντελεστές εύρεσης αυτής της ροπής:

$$\left. \begin{array}{l} \pi 1 \quad \psi_1 = 0.0307 \\ \pi 2 \quad \psi_2 = 0.0178 \end{array} \right\} m_{xm} = \psi \cdot p \cdot l_x^2$$

Όπου p το δυσμενές $-1.35G + 1.50Q$ – επιφανειακό κατανεμημένο φορτίο κάθε πλάκας.

Επιλύοντας βρίσκουμε για τη ροπή στο άνοιγμα:

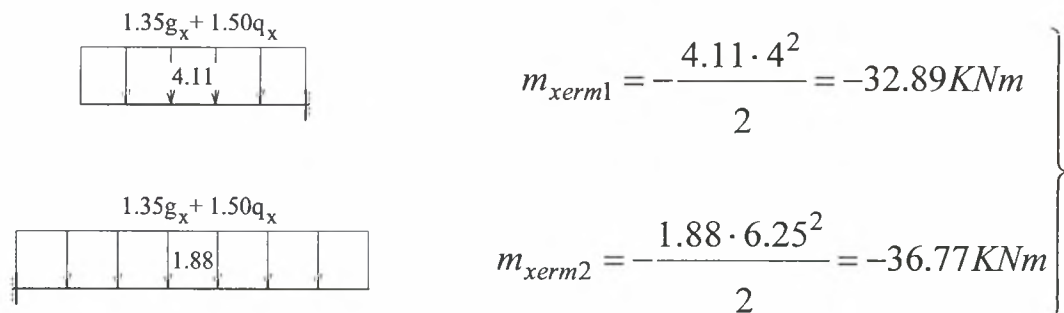


$$m_{xm1} = 0.0307 \cdot p_{\Delta} \cdot 4^2 = 5.95 \text{ KNm}$$

$$m_{xm2} = 0.0178 \cdot p_{\Delta} \cdot 6.25^2 = 8.42 \text{ KNm}$$

Σχ. 3.6.2: Ροπή ανοίγματος κατά τη διεύθυνση x

Για την κατά x -διεύθυνση δεν ορίζεται στατικό σύστημα για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των λωρίδων. Λαμβάνουμε τα στατικά συστήματα σαν προβόλους και για τη ροπή στη στήριξη θα λάβουμε τον αριθμητικό μέσο όρο των τιμών που εξάγονται από τις επιλύσεις, θεωρώντας τις πλάκες μεμονωμένες:



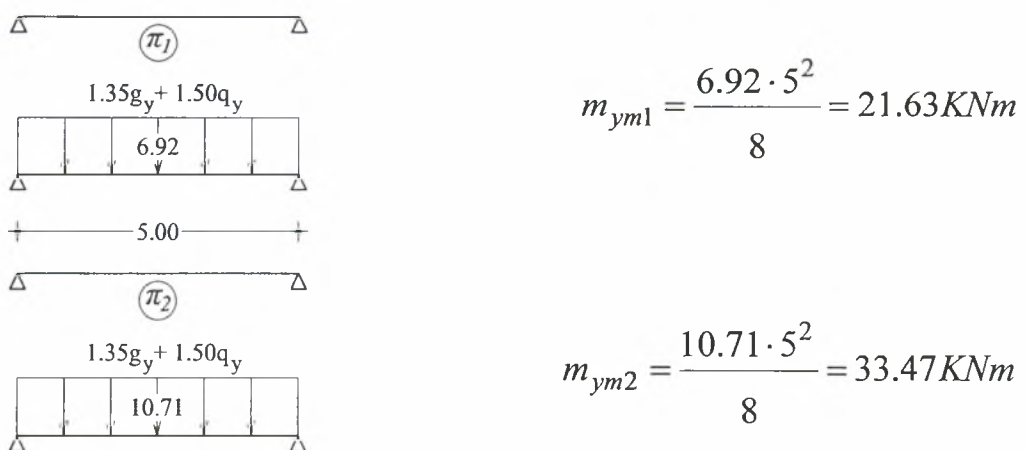
$$m_{xerm1} = -\frac{4.11 \cdot 4^2}{2} = -32.89 \text{ KNm}$$

$$m_{xerm2} = -\frac{1.88 \cdot 6.25^2}{2} = -36.77 \text{ KNm}$$

Σχ. 3.6.3: Εύρεση ροπών στηρίξεως κατά x λόγω δυσμενούς φόρτισης

$$m_{xerm} = \frac{m_{xerm1} + m_{xerm2}}{2} = -34.83 \text{ KNm}$$

Για την εύρεση των ροπών κατά y λαμβάνουμε τα στατικά συστήματα των πλακών ως αμφιέριστες δοκούς. Φορτίζουμε με το δυσμενές φορτίο στην υπόψη διεύθυνση:

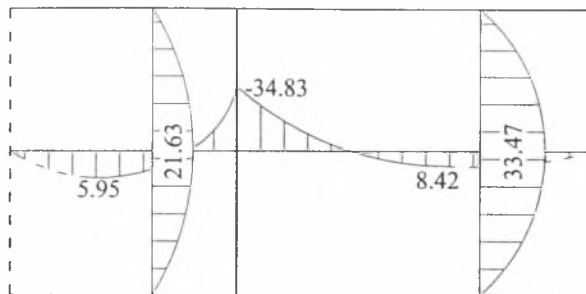


$$m_{ym1} = \frac{6.92 \cdot 5^2}{8} = 21.63 \text{ KNm}$$

$$m_{ym2} = \frac{10.71 \cdot 5^2}{8} = 33.47 \text{ KNm}$$

Σχ. 3.6.4: Εύρεση ροπών ανοιγμάτων κατά y λόγω δυσμενούς φόρτισης

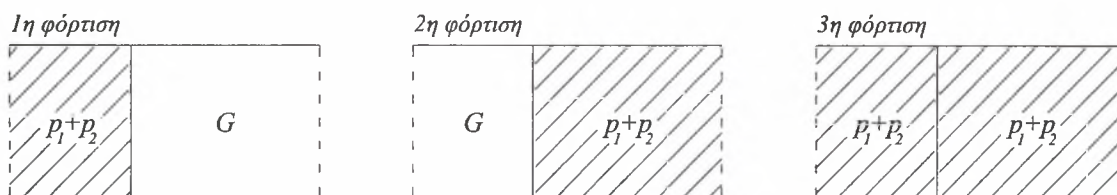
Διαμορφώνουμε το διάγραμμα ροπών κάμψης για το συνολικό φορέα:



Σχ. 3.6.5: Διάγραμμα ροπών κάμψης από επίλυση με τους νέους πίνακες

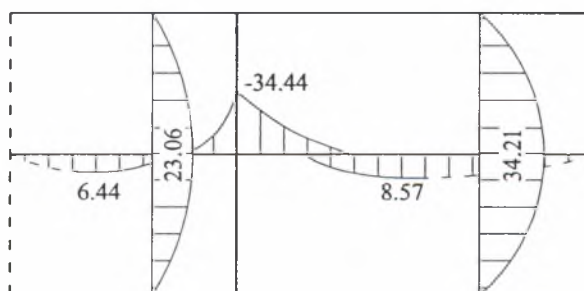
Για την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία διενεργήθηκαν πεσσοειδείς φορτίσεις σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1.175G + 0.75Q = 9.43 \text{ KN/m}^2 & \left\| \right. & p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 12.11 \text{ KN/m}^2 \\
 p_2 &= 0.175G + 0.75Q = 2.68 \text{ KN/m}^2 & \left\| \right. & p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 6.75 \text{ KN/m}^2
 \end{aligned}$$



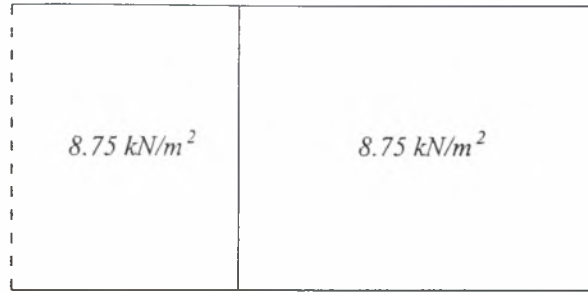
Σχ. 3.6.6: Πεσσοειδείς φορτίσεις επί του συνολικού φορέα

Σχηματίζουμε το διάγραμμα ροπών κάμψης του συνολικού φορέα



Σχ. 3.6.7: Διάγραμμα ροπών κάμψης από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Όπως φαίνεται από τα δύο διαγράμματα (Σχ. 3.6.5 και 3.6.7) οι τιμές των μέγιστων ροπών κάμψης είναι πολύ κοντά. Υπολογίζουμε τις βυθίσεις σύμφωνα με τους συντελεστές w των πινάκων και τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιβάλλοντας στο φορέα φορτία λειτουργίας κατά το ακόλουθο σχήμα:



Σχ. 3.6.8: Φορτία λειτουργίας προς εύρεση των βυθίσεων

Πίνακας 3.6.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot I_y^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1	0.09130	0.00186	0.00183
π2	0.13862	0.00282	0.00282

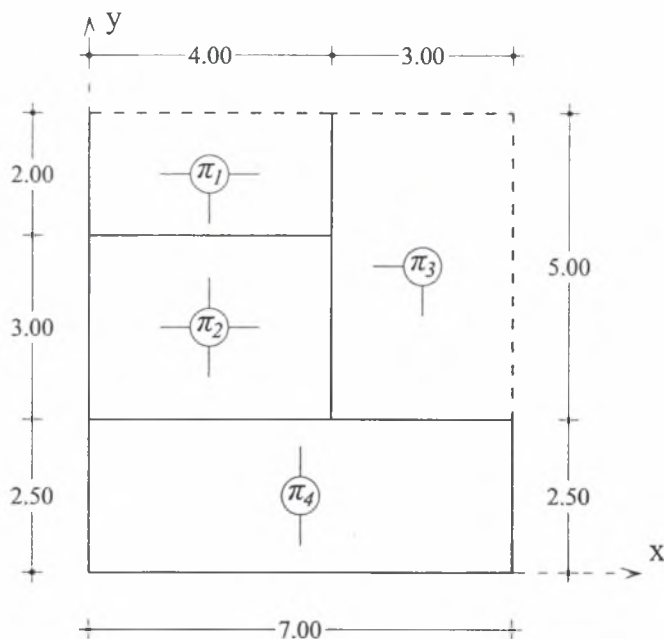
Οι τιμές των βυθίσεων σχεδόν ταυτίζονται για τις δύο μεθόδους εύρεσης αυτών.

Συμπεράσματα:

Γενικά, όταν το μικρότερο άνοιγμα δεν υπολείπεται του 0.50 του μεγαλύτερου (για κάθε στατική τομή) τότε η μέθοδος των λωρίδων δίνει αποτελέσματα με ανεκτές αποκλίσεις τόσο στις ροπές, όσο και στις βυθίσεις.

Παράδειγμα 7

Για τις πλάκες του σχήματος συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα από την επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων με αυτά της ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία. Επιλέχθηκε κοινό πάχος πλακών.



Σχ. 3.7.1: Γεωμετρία και αρίθμηση πλακών

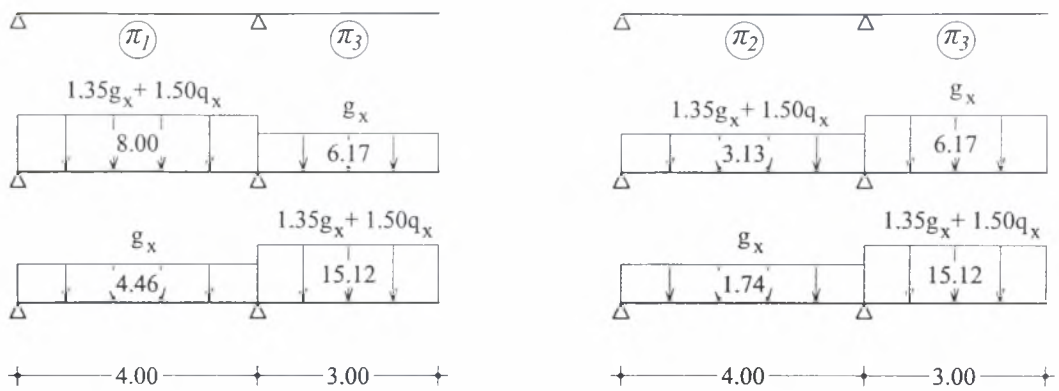
Επιλέγεται κοινό πάχος πλακών, ίσο με $21cm$. Κατανέμεται το φορτίο στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες:

Πίνακας 3.7.1

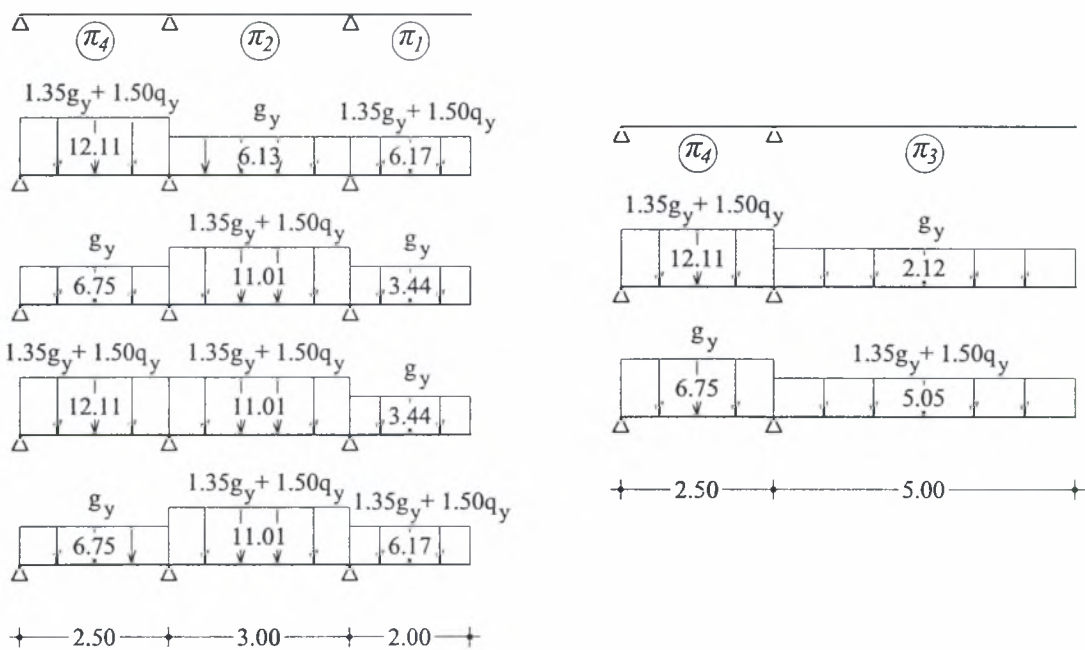
Κατανομές μόνιμων και κινητών φορτίων στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
π_1	5	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.50	0.6614	0.5093	4.46 3.44	1.32 1.02
π_2	5	6.75 2.00	$l_x:l_y =$ 1.33	0.2575	0.9078	1.74 6.13	0.52 1.82
π_3	1	7.25 5.00	$l_y:l_x =$ 1.67	0.8506	0.2928	6.17 2.12	4.53 1.46
π_4	–	6.75 2.00	$l_{max}:l_{min} =$ 2.80	–	1	– 6.75	– 2.00

Λαμβάνονται πλακολωρίδες πλάτους ενός μέτρου και εφαρμόζονται εναλλακτές φορτίσεις, σύμφωνα με τα φορτία του πιν. 3.7.1, κατά τα ακόλουθα σχήματα:

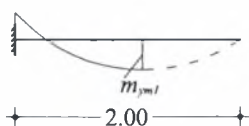


Σχ. 3.7.2: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση x



Σχ. 3.7.3: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση y

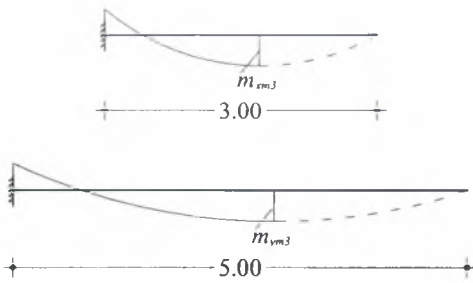
Τα στατικά συστήματα για τις πλάκες $\pi 1$ και $\pi 3$ κατά y και $x - y$ αντίστοιχα είναι πρόβολοι. Εν τούτοις, λόγω της επιφανειακής λειτουργίας των φορέων, εμφανίζονται θετικές ροπές στα ανοίγματα οι οποίες υπολογίζονται μέσω των συντελεστών χ και ψ που εμφανίζονται στους αντίστοιχους πίνακες. Για τις ροπές αυτές έχουμε:



$$\psi_1 = 0.0290$$

$$m_{ym1} = \psi_1 \cdot p_1 \cdot l_{y1}^2 = 1.41 \text{KNm}$$

Σχ. 3.7.4: Ροπή ανοίγματος $\pi 1$ κατά y



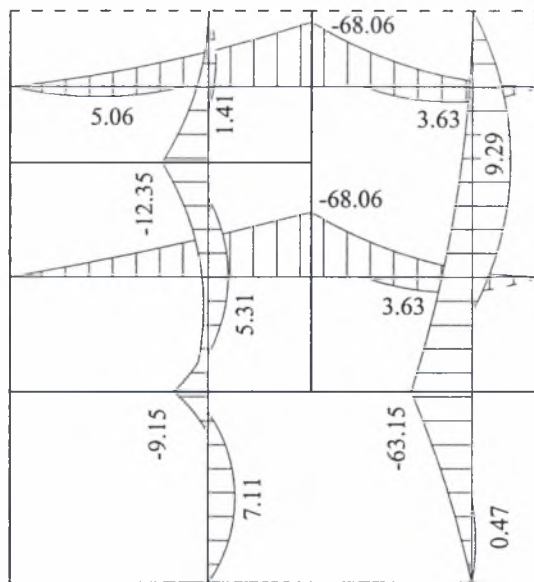
$$\chi_3 = 0.0233$$

$$m_{xm3} = \chi_3 \cdot p_3 \cdot l_{x3}^2 = 3.63 \text{ KNm}$$

$$\psi_3 = 0.0215$$

$$m_{ym3} = \psi_3 \cdot p_3 \cdot l_{y3}^2 = 9.29 \text{ KNm}$$

Σχ. 3.7.5: Ροπές ανοίγματος $\pi 3$ κατά τις δύο διευθύνσεις

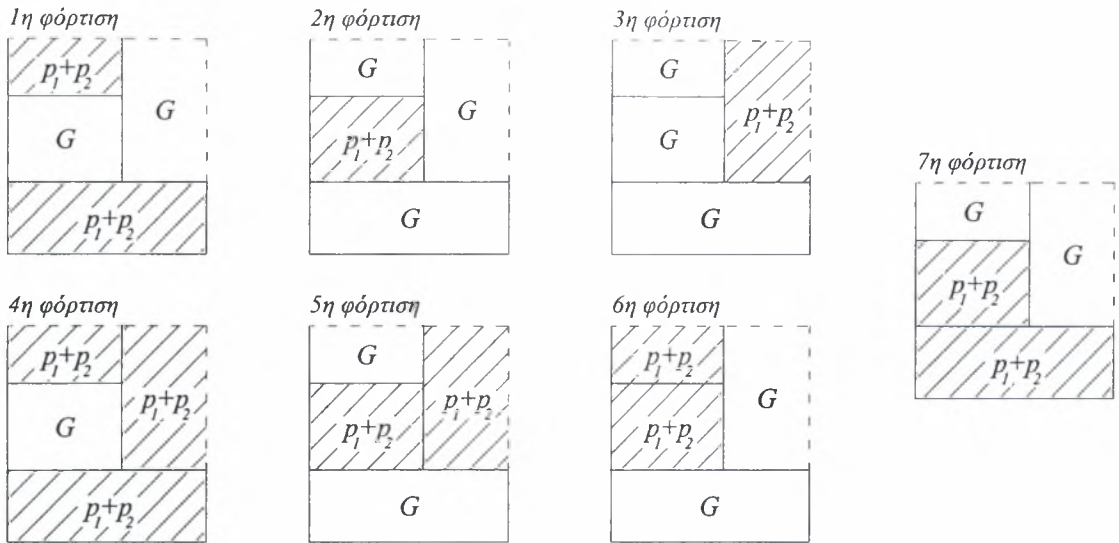


Σχ. 3.7.6: Διάγραμμα ροπών επί του συνολικού φορέα από επίλυση με μέθοδο λωρίδων

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια πεσσοειδείς φορτίσεις επί του φορέα. Οι πλάκες $\pi 1$, $\pi 2$, $\pi 4$ φέρουν τα ίδια μόνιμα και κινητά φορτία. Η πλάκα $\pi 3$ αντιμετωπίζεται ως πρόβολος και φέρει μεγαλύτερα μόνιμα και κινητά φορτία

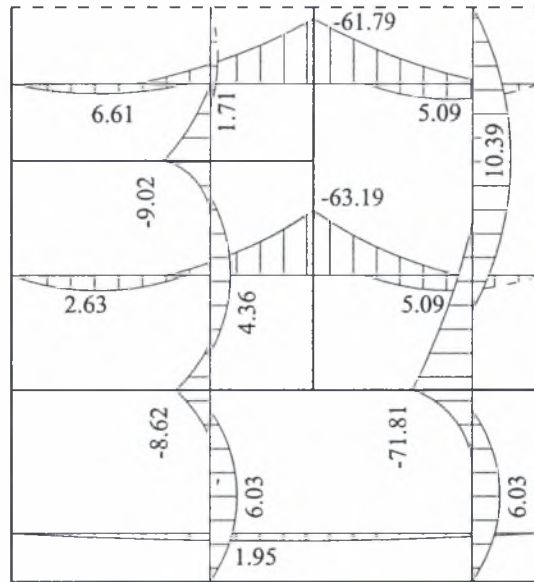
$$\begin{array}{c} \pi 1 \quad \pi 2 \quad \pi 4 \\ p_1 = 1.175G + 0.75Q = 9.43 \text{ KN/m}^2 \\ p_2 = 0.175G + 0.75Q = 2.68 \text{ KN/m}^2 \end{array} \left\| \begin{array}{l} p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 12.11 \text{ KN/m}^2 \\ p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 6.75 \text{ KN/m}^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \pi 3 \\ p_1 = 1.175G + 0.75Q = 12.27 \text{ KN/m}^2 \\ p_2 = 0.175G + 0.75Q = 5.02 \text{ KN/m}^2 \end{array} \left\| \begin{array}{l} p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 17.29 \text{ KN/m}^2 \\ p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 7.25 \text{ KN/m}^2 \end{array} \right.$$



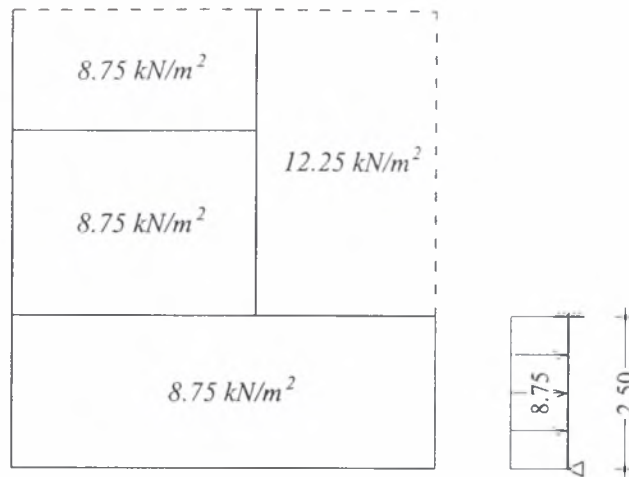
Σχ. 3.7.7: Πεσσοειδείς φορτίσεις επί του συνολικού φορέα

Λαμβάνουμε τα αποτελέσματα από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία:



Σχ. 3.7.8: Μέγιστες τιμές ροπών κάμψης επί του συνολικού φορέα για ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Όσον αφορά τις βυθίσεις, η σύγκριση έγινε για φόρτιση του φορέα με φορτία λειτουργίας ($G + Q$). Η βύθιση της πλάκας π4 υπολογίστηκε για μονόπακτη πλακολωρίδα πλάτους 1m:



Σχ. 3.7.9: Φορτία λειτουργίας και θεώρηση μονόπακτης πλακολωρίδας για την $\pi 4$

Πίνακας 3.7.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

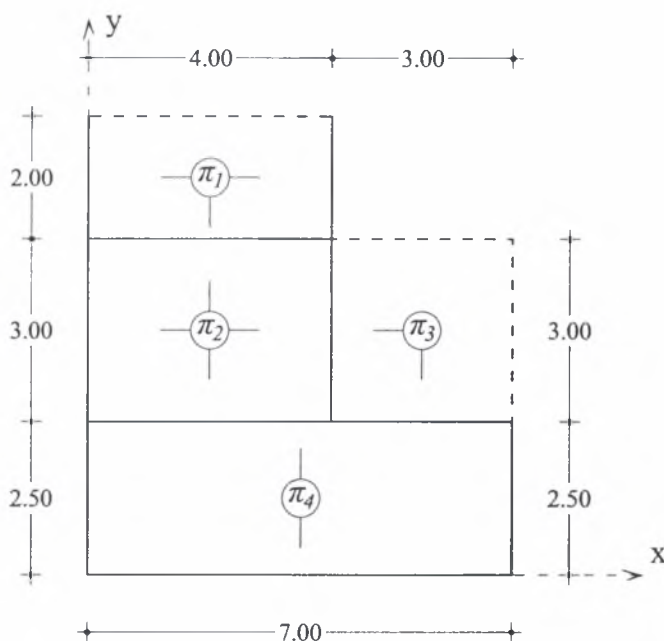
πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
$\pi 1$	0.02907	0.000240	0.000046
$\pi 2$	0.02572	0.000068	0.000066
$\pi 3$	0.99534	0.003677	0.005090
$\pi 4$	–	0.000083	0.000088

Συμπεράσματα:

1. Λαμβάνοντας υπόψη την ανισότητα των ανοιγμάτων των πλακών του παραδείγματος και την αλληλεπίδραση διερείστων, τριερείστων, τετραερείστων και «αμφιερείστων» συνεχών πλακών οι ροπές βρίσκονται πολύ κοντά και με τις δύο μεθόδους.
2. Οι βυθίσεις παρουσιάζουν αποκλίσεις, γενικά. Το μοντέλο της μεθόδου των λωρίδων κρίνεται ακατάλληλο.

Παράδειγμα 8

Για τον κάτωθι φορέα που αποτελεί παραλλαγή του φορέα του παραδείγματος 7 (η πλάκα $\pi 3$ από $l_y = 5m$ γίνεται $l_y = 3m$), έγινε επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων και ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και συγκρίθηκαν οι τιμές των μεγίστων ροπών κάμψης και των βυθίσεων.



Σχ. 3.8.1: Γεωμετρία και αρίθμηση πλακών

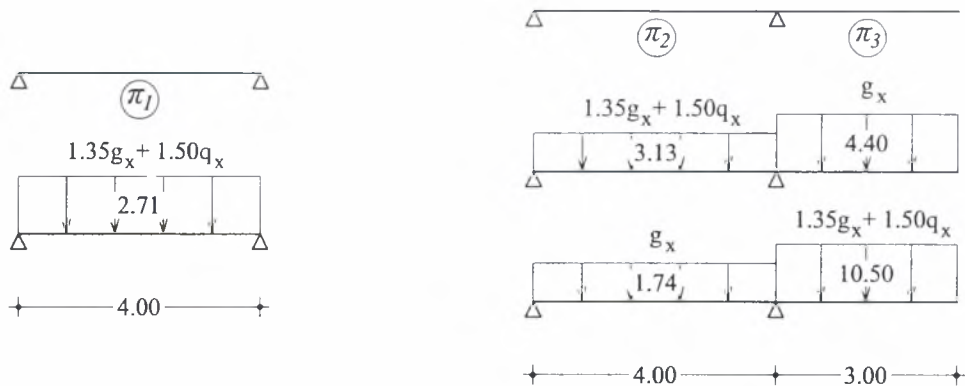
Πίνακας 3.8.1

Κατανομές μόνιμων και κινητών φορτίων στις δύο διευθύνσεις σύμφωνα με τους νέους πίνακες

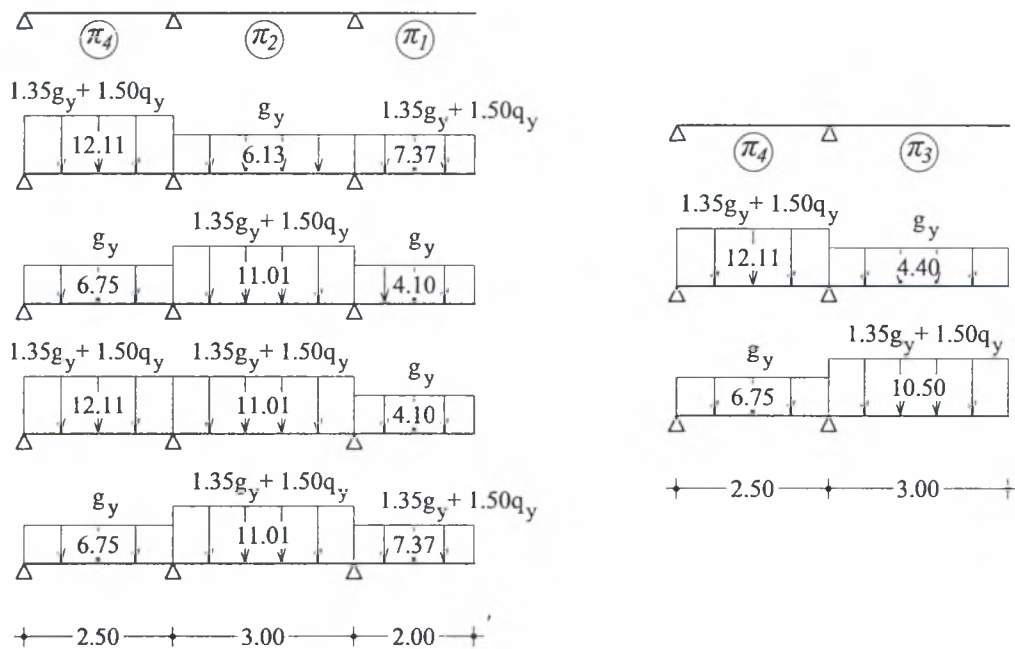
Πλάκες	τύπος	G Q	λόγος πλευρών	κ	ρ	$g_x = \kappa \cdot G$ $g_y = \rho \cdot G$	$q_x = \kappa \cdot Q$ $q_y = \rho \cdot Q$
$\pi 1$	2	6.75 2.00	$l_y:l_x =$ 0.50	0.2231	0.6080	1.51 4.10	0.45 1.22
$\pi 2$	5	6.75 2.00	$l_x:l_y =$ 1.33	0.2575	0.9078	1.74 6.13	0.52 1.82
$\pi 3$	1	7.25 5.00	$l_y:l_x =$ 1.00	0.6073	0.6073	4.40 4.40	3.04 3.04
$\pi 4$	–	6.75 2.00	$l_{max}:l_{min} =$ 2.80	–	1	– 6.75	– 2.00

Εφαρμόζουμε μέθοδο των λωρίδων και τοποθετούμε στο συνολικό φορέα τις μέγιστες τιμές των ροπών κάμψης. Οι θετικές ροπές που εμφανίζονται στα ανοίγματα των πλακών $\pi 1, \pi 3$, υπολογίζονται βάσει των συντελεστών χ και ψ που παρατίθενται στους $\pi \text{IV. } 8$ και $\pi \text{IV. } 13$ αντίστοιχα.

Λαμβάνουμε πλακολωρίδες πλάτους ενός μέτρου και εφαρμόζουμε εναλλακτές φορτίσεις.

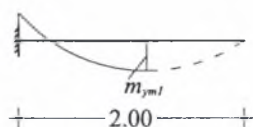


Σχ. 3.8.2: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση x



Σχ. 3.8.3: Εναλλακτές φορτίσεις επί των πλακολωρίδων κατά τη διεύθυνση y

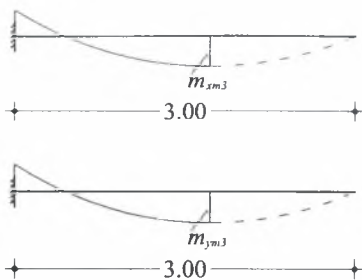
Η ροπή του ανοίγματος της πλάκας $\pi 1$ υπολογίζεται για τριέρειστη πλάκα τύπου 2 μέσω του συντελεστή ψ του αντίστοιχου πίνακα:



$$\psi_1 = 0.0286$$

$$m_{ym1} = \psi_1 \cdot p_1 \cdot l_{y1}^2 = 1.39 \text{ KNm}$$

Σχ. 3.8.4: Ροπή ανοίγματος $\pi 1$ κατά y



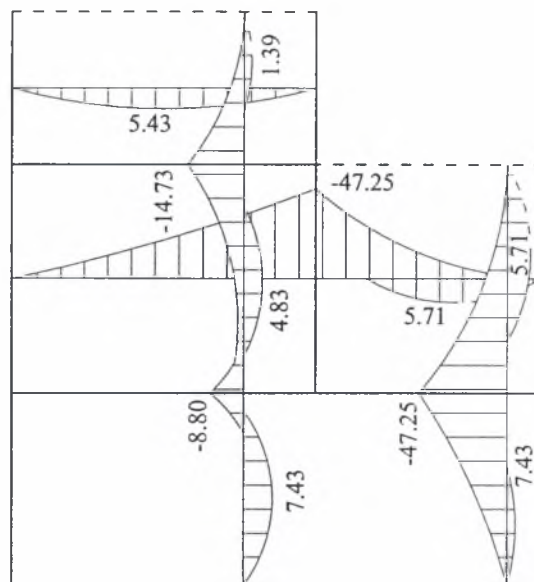
$$\chi_3 = 0.0367$$

$$m_{xm3} = \chi_3 \cdot p_3 \cdot l_{x3}^2 = 5.71 \text{ KNm}$$

$$\psi_3 = 0.0367$$

$$m_{ym3} = \psi_3 \cdot p_3 \cdot l_{y3}^2 = 5.71 \text{ KNm}$$

Σχ. 3.8.5: Ροπές ανοίγματος π_3 κατά τις δύο διευθύνσεις

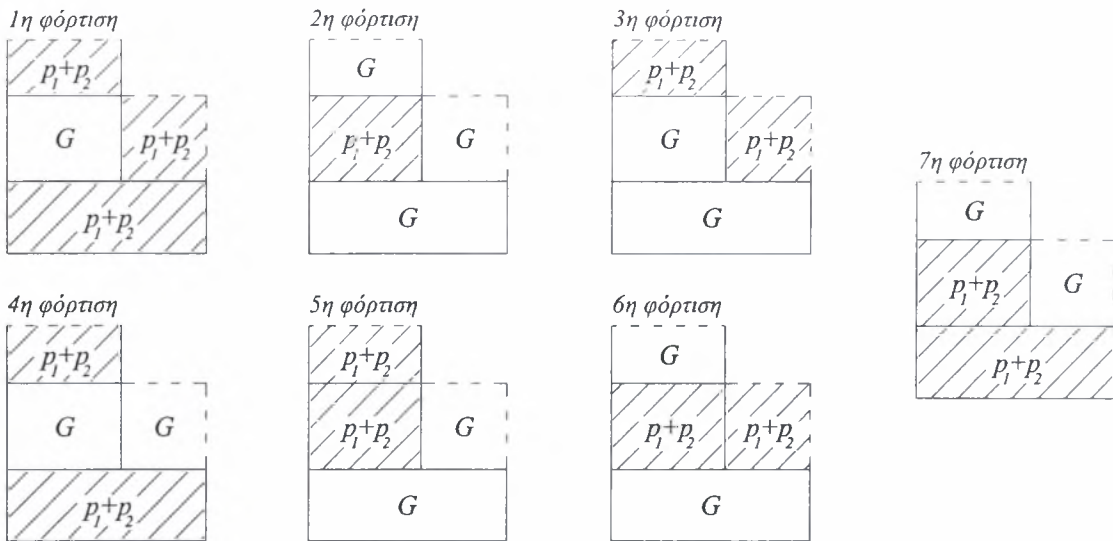


Σχ. 3.8.6: Διάγραμμα ροπών επί του συνολικού φορέα από επίλυση με μέθοδο λωρίδων

Για την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία εφαρμόζουμε πεσσοειδείς φορτίσεις κατ' αντιστοιχία με το παράδειγμα 7 (Σχ. 3.7.7):

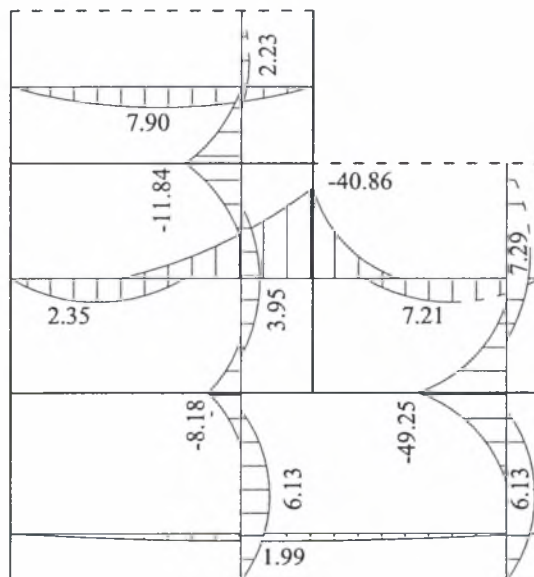
$$\begin{array}{l} \pi 1 \quad \pi 2 \quad \pi 4 \\ p_1 = 1.175G + 0.75Q = 9.43 \text{ KN/m}^2 \\ p_2 = 0.175G + 0.75Q = 2.68 \text{ KN/m}^2 \end{array} \left\| \begin{array}{l} p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 12.11 \text{ KN/m}^2 \\ p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 6.75 \text{ KN/m}^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \pi 3 \\ p_1 = 1.175G + 0.75Q = 12.27 \text{ KN/m}^2 \\ p_2 = 0.175G + 0.75Q = 5.02 \text{ KN/m}^2 \end{array} \left\| \begin{array}{l} p_1 + p_2 = p_{\text{δυσμενές}} = 17.29 \text{ KN/m}^2 \\ p_1 - p_2 = p_{\text{ευμενές}} = 7.25 \text{ KN/m}^2 \end{array} \right.$$



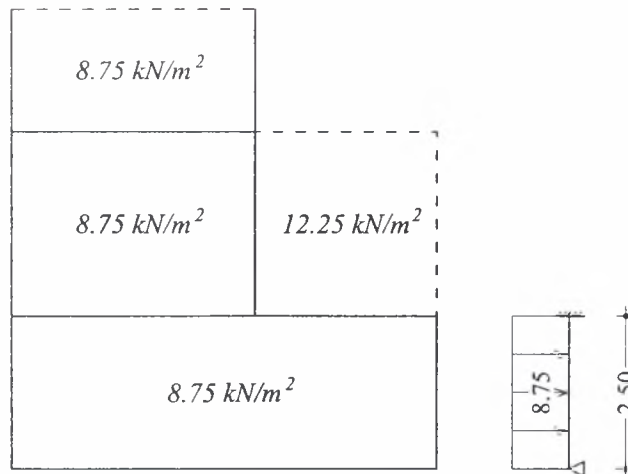
Σχ. 3.8.7: Πεσοσειδείς φορτίσεις επί του συνολικού φορέα

Λαμβάνουμε τα αποτελέσματα από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία και σχηματίζουμε την περιβάλλουσα των ροών κάμψης:



Σχ. 3.8.8: Μέγιστες τιμές ροών κάμψης επί του συνολικού φορέα για ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Όπως μπορεί να φανεί από τα Σχ. 3.8.6 και Σχ. 3.8.8 οι τιμές των ροών κάμψης είναι πολύ κοντά. Υπολογίζουμε τις τιμές των βυθίσεων επιβάλλοντας στο φορέα φορτία λειτουργίας. Η τιμή της βύθισης για την πλάκα π4 υπολογίστηκε για μονόπακτη πλακολωρίδα πλάτους 1m :



Σχ. 3.8.9: Φορτία λειτουργίας και θεώρηση μονόπακτης πλακολωρίδας για την π4

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις βυθίσεις των πλακών με χρήση των συντελεστών w των αντίστοιχων πινάκων και συγκρίνουμε με τις βυθίσεις που εξάγονται από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία για φόρτιση με τα φορτία λειτουργίας. Για τη βύθιση της πλάκας π4 εργαζόμαστε ομοίως με το παράδειγμα 7 (Σχ. 3.7.9).

Πίνακας 3.8.2

Σύγκριση των βυθίσεων για φορτία λειτουργίας για αποτελέσματα από νέους πίνακες και ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

πλάκες	συντελεστής βύθισης w	$f_m = \frac{(G + Q) \cdot l^4}{E \cdot h_f^3} \cdot w$	πεπερασμένα στοιχεία
π1	0.03794	0.000316	0.000411
π2	0.02572	0.000068	0.000027
π3	0.46264	0.001709	0.002210
π4	—	0.000083	0.000094

Συμπεράσματα:

1. Σε αυτή την περίπτωση οι ροπές των στηρίξεων, για επίλυση με τη μέθοδο των λωρίδων περιβάλλουν γενικά τις ροπές για ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Οι ροπές των ανοιγμάτων παρουσιάζουν ανεκτές αποκλίσεις.
2. Όσον αφορά τις βυθίσεις το μοντέλο της μεθόδου των λωρίδων κρίνεται ακατάλληλο.

3.2 Γενικά Συμπεράσματα

Βάσει των ανωτέρω προκύπτουν τα κάτωθι:

- Με την εφαρμογή της μεθόδου των λωρίδων με τους νέους πίνακες, δύναται να υπολογιστούν τιμές ροπών και βυθίσεων, συγκλίνουσες στις «ακριβείς» τιμές της θεωρίας της ελαστικότητας, που οδηγούν σε αξιόπιστη επίλυση συνεχών και μεμονωμένων πλακών όταν το μικρότερο άνοιγμα δεν υπολείπεται του 0.50 του μεγαλύτερου ανοίγματος, στην ίδια στατική τομή, σε κάθε διεύθυνση.
- Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή το μικρότερο άνοιγμα υπολείπεται του 0.50 του μεγαλύτερου ανοίγματος, στην ίδια στατική τομή, σε κάθε διεύθυνση, τα εξαγόμενα αποτελέσματα με τη μέθοδο των λωρίδων, είναι αποδεκτά και σαφώς προς την πλευρά της ασφαλείας, όταν πρόκειται για τις τιμές των ροπών. Όσον αφορά στον υπολογισμό των βυθίσεων, δεν ενδείκνυται το μοντέλο της μεθόδου των λωρίδων, λόγω των σχετικά μεγάλων αποκλίσεων.

Εν κατακλείδι, διαπιστώνεται ότι, οι νέοι πίνακες κατανομής ομοιόμορφου φορτίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ασφάλεια και εποπτικό τρόπο στην επίλυση της συντριπτικής πλειοψηφίας των πλακών, μέσα στα όρια της ελαστικής ανάλυσής τους όπως αυτή ορίζεται από τον Ελληνικό Κανονισμό Οπλισμένου Σκυροδέματος.

ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ

ΤΙΤΛΟΣ

Λ Η Ξ Η

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΔΑΝΕΙΖΜΕΝΟΥ

14/10/02

1306

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Τηλ.: ~~74760-61~~

74233-5

