



Διατμηματικό Διδρυματικό  
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών  
Σπουδών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας -  
Διεθνές Πανεπιστήμιο της Ελλάδος

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΟ ΤΥΠΟΥ COURNOT ΜΕΤΑΞΥ  
ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

(COMPLEXITY IN A COURNOT TYPE GAME BETWEEN PUBLIC  
ENTERPRISES)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Μανθογιάννη Α. Αργυρίου

Επιβλέπων :

Σαραφόπουλος Γεώργιος καθηγητής στο Οικονομικό Τμήμα Δ.Π.Θ.

Μέλη της τριμελούς επιτροπής:

Καρακασίδης Θεόδωρος Καθηγητής Π.Θ.

Ζαχείλας Λουκάς αναπληρωτής Καθηγητής Π.Θ.

Ευχαριστίες σε όλους τους καθηγητές μου του μεταπτυχιακού και ειδική σημείωση στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γ. Σαραφόπουλο καθώς και στην κα. Κονταξή-Ζαχείλα που με έπεισε να μπω σε αυτή την διαδικασία στην ηλικία μου , απόφαση για την οποία δεν μετάνιωσα ποτέ.

# ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΟ ΤΥΠΟΥ COURNOT ΜΕΤΑΞΥ ΔΗΜΟΣΙΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

## (COMPLEXITY IN A COURNOT TYPE GAME BETWEEN PUBLIC ENTERPRISES)

### Περίληψη

Το περιβάλλον στο οποίο ζει ο άνθρωπος είναι απολύτως ανταγωνιστικό. Αυτό σημαίνει ότι οι επιλογές μας έρχονται συχνά σε αντίθεση με τις επιλογές κάποιου άλλου ή κινούνται παράλληλα με τα συμφέροντα κάποιου άλλου. Η παρούσα εργασία προσπαθεί να καταγράψει κάποια εργαλεία που μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος ώστε να μπορέσει να διεκδικήσει το καλύτερο αποτέλεσμα σε ένα τέτοιο ανταγωνιστικό ή και συνεργατικό περιβάλλον.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση σε ένα τεράστιο όσο και επίκαιρο επιστημονικό πεδίο που είναι η Θεωρία Παιγνίων. Εκτός της καταγραφής της ορολογίας που χρησιμοποιείται, γίνεται και μια απόπειρα περιγραφής της διεξαγωγής παιγνίων ενός ή και περισσοτέρων γύρων μεταξύ δύο παικτών. Το τέλος του κεφαλαίου αναφέρεται στις προϋποθέσεις που απαιτούνται ώστε ένα δυοπώλιο τύπου Cournot να καταλήξει να γίνει απολύτως συνεργατικό.

Το Κεφάλαιο 2 αναφέρεται σε δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που μεταξύ άλλων, χρησιμοποιούνται για κατασκευή μηχανισμών επιλογής στρατηγικής σε οικονομικά υποδείγματα ολιγοπωλίου. Διερευνούμε τις συνθήκες που αυτά οδηγούν σε σημεία ισορροπίας ή σε καταστάσεις αιτιοκρατικού χάους. Γίνεται αναφορά στα σύγχρονα εργαλεία που διερευνούν αυτόν τον στόχο μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές.

Το Κεφάλαιο 3 αξιοποιεί τα αναφερθέντα εργαλεία στη διερεύνηση ενός μοντέλου τύπου Cournot σε μια δυοπωλιακή αγορά σε συνθήκες περιορισμένης ορθολογικότητας. Χρησιμοποιούμε ένα γραμμικό μοντέλο ζήτησης του προϊόντος που παράγουν και διερευνούμε υπό ποιες συνθήκες το σημείο ισορροπίας οδηγεί την αγορά σε απορρύθμιση μέσω διαδοχικών διακλαδώσεων.

### Abstract

The environment in which man lives is comprehensively competitive. This means that our choices often conflict with someone else's choices or run parallel to someone else's interests. This paper attempts to document some tools that one can use in order to claim the best result in such a competitive or collaborative environment.

In Chapter 1, a bibliographic review is made of a wide and particularly current scientific field which is Game Theory. In addition to recording the terminology used, an attempt is made to describe the conduct of games of one or more rounds between two players. The end of the chapter refers to the conditions required for a Cournot-type duopoly to end up becoming fully cooperative.

Chapter 2 refers to discrete-time dynamic systems that, among other things, are used to construct strategy selection mechanisms in economic oligopoly models. We investigate the conditions that lead to equilibrium points or situations of causal chaos. Reference is made to

Chapter 3 utilizes the tools mentioned in investigating a Cournot-type model in a two-storey market under conditions of bounded rationality. We use a linear model of the product demand they produce and investigate under what conditions the equilibrium point leads the market to deregulation through successive bifurcation.

# Περιεχόμενα

## Κεφάλαιο 1 Στοιχεία Θεωρίας Παιγνίων

- 1.1. Ιστορική αναδρομή. (σελ. 6)
- 1.2. Μια γνωριμία (σελ.7)
- 1.3. Ισορροπία Nash (Nash equilibrium) (σελ.11)
- 1.4. Κριτήριο Pareto (σελ.12)
- 1.5. Αμιγείς στρατηγικές-Μεικτές στρατηγικές (σελ.13)
  - 1.5.1. Το δίλλημα των φυλακισμένων με μεικτές στρατηγικές. (σελ.13)
- 1.6. Στρατηγικές minimax και maximin (σελ.16)
  - 1.6.1. Παιγνια σταθερού αθροίσματος (σελ.21)
- 1.7. Δυναμικά παίγνια (σελ.22)
- 1.8. Επαναλαμβανόμενα παίγνια (σελ.27)
- 1.9. Δυοπώλιο (σελ.31)

## Κεφάλαιο 2 Δυναμικά Συστήματα διακριτού Χρόνου

- 2.0. Εισαγωγή (σελ.34)
- 2.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών (σελ.35)
- 2.2. Εξισώσεις διαφορών (σελ.38)
  - 2.2.1. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών (σελ.39)
  - 2.2.2. Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών (σελ.51)
- 2.3. Η Λογιστική εξίσωση (σελ.52)
  - 2.3.1. Διάγραμμα διακλάδωσης (δικρανισμού) (bifurcation diagram) (σελ.57)
  - 2.3.2. Αριθμοί –εκθέτες Lyapunov (σελ.58)
- 2.4. Γραμμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών (σελ.59)
  - 2.4.1. Η λύση του ομογενούς (σελ.59)
  - 2.4.2. Η λύση του μη ομογενούς (σελ.63)
- 2.5. Διαγράμματα φάσης (σελ.65)
- 2.6. Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών (σελ.67)

## Κεφάλαιο 3 Πολυπλοκότητα σε ένα παίγνιο τύπου Cournot

- 3.1.Εισαγωγή (σελ.70)
- 3.2.Το μοντέλο ανταγωνισμού δυο δημόσιων επιχειρήσεων (σελ.72)
- 3.3.Το δυναμικό παίγνιο (σελ.73)
- 3.4.Εφαρμογή στο μοντέλο (σελ.76)
- 3.5. Φάσμα εκθετών Lyapunov (σελ.81)
- 3.6. η έννοια του αμετάβλητου συνόλου (σελ. 83)

Βιβλιογραφία-πηγές. (σελ.85)

# Κεφάλαιο 1

## Στοιχεία Θεωρίας Παιγνίων

### Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μια γενική προσέγγιση της Θεωρίας Παιγνίων. Αρχίζουμε με τις γενικές έννοιες και μορφές διεξαγωγής ενός παιγνίου και αναλύουμε με παραδείγματα τον ορισμό της ισορροπίας Nash. Αναφερόμαστε στο διαχωρισμό των παιγνίων σε παίγνια ταυτόχρονων κινήσεων και σε παίγνια διαδοχικών κινήσεων. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά σε επαναλαμβανόμενα παίγνια και το κεφάλαιο κλείνει με αναφορά στα δυοπώλια και ειδικά στο δυοπώλιο Cournot ως επαναλαμβανόμενο παίγνιο. Η βιβλιογραφία και οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν στο κεφ.1 αντιστοιχούν στις αναφορές 17, 11, 8, 2, 16, 32, 36, 24, 21, 20, 28, 10, 15, 3, 14.

### 1.1. Ιστορική αναδρομή.

Η «Θεωρία παιγνίων» είναι ένας από τους πολλούς κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών και γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη μετά το Β Παγκόσμιο Πόλεμο, όταν τα «πράγματα» σταμάτησαν να είναι «απλοϊκά» και η ανάγκη για τη λήψη πιο εμπειριστατωμένων και σύνθετων αποφάσεων έκανε δυναμικά την εμφάνισή της. Παράλληλα η ανάπτυξη του Μαθηματικού Προγραμματισμού, της στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων, της Επιχειρησιακής Έρευνας και της Πολυκριτήριας Ανάλυσης χρησιμοποιήθηκαν σε πιο εφαρμοσμένες επιστήμες όπως οι Οικονομικές και οι Πολιτικές. Και όπως ο χρόνος περνούσε και οι μελέτες αυξάνονταν και τελειοποιούνταν άρχισαν οι παραπάνω τομείς να έχουν εφαρμογή στη διοίκηση επιχειρήσεων, στα δίκτυα εφοδιασμού, στις μεταφορές και επικοινωνίες καθώς και στην χημική βιομηχανία-φαρμακολογία, στην πληροφορική, στην «στρατηγική», κ.α.

Μερικές αναφορές και θεωρητικές ιδέες της θεωρίας παιγνίων μπορούν να εντοπιστούν στον 18ο αιώνα, αλλά η μεγάλη εξέλιξη ξεκίνησε τη δεκαετία του 1920 με το έργο του μαθηματικού Emile Borel (1871–1956) και του John von Neumann (1903–1957). Ο Emile Borel ασχολήθηκε συστηματικά πρώτος με παιχνίδια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος (όπου δηλαδή η πληρωμή του ενός είναι η ζημία του άλλου παίκτη και επομένως δεν υπάρχει περιθώριο συνεργασίας μεταξύ τους) και σε αυτόν κυρίως οφείλουμε την ιδέα της χρήσης “μεικτών στρατηγικών” καθώς και την ιδέα της αναζήτησης “κοινού επιπέδου ασφάλειας” των δύο παικτών ως έννοια λύσης τέτοιων παιχνιδιών. Ο Borel δεν κατάφερε να στοιχειοθετήσει ότι υπάρχει τέτοια λύση όμως ο John Von Neumann (1928) απέδειξε την ύπαρξη της λύσης μέσω του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer. Το θεώρημα αυτό ονομάστηκε Θεώρημα Minimax.

Αποφασιστικό βήμα για την ανάπτυξη της θεωρίας ήταν η δημοσίευση το 1944 του βιβλίου *Theory of games and economic behavior* των Von Neumann και Oskar Morgenstern. Ο μεταπτυχιακός φοιτητής του Von Neumann, ο John Nash (1950) εισηγήθηκε μία γενίκευση του Θεωρήματος Minimax που έμελλε να τον κάνει διάσημο λόγω της αναπάντεχα

επιτυχημένης εφαρμοσιμότητας που συνάντησε στις επιστήμες εκτός των μαθηματικών (κυρίως στα οικονομικά). Στη δεκαετία του 1950 τα θεωρητικά μοντέλα παιγνίων άρχισαν να χρησιμοποιούνται στην οικονομική θεωρία και την πολιτική επιστήμη, και οι ψυχολόγοι άρχισαν να μελετούν ανθρώπινες συμπεριφορές σε πειραματικά παίγνια. Στη δεκαετία του 1970 η θεωρία παιγνίων χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ως εργαλείο στην εξελικτική βιολογία. Στη συνέχεια, κυριαρχούν οι θεωρητικές μέθοδοι των παιγνίων στην μικροοικονομική θεωρία και να χρησιμοποιούνται επίσης σε πολλούς άλλους τομείς της οικονομίας και σε ένα ευρύ φάσμα άλλων κοινωνικών και συμπεριφορικών επιστημών. Το βραβείο Νόμπελ του 1994 στα Οικονομικά απονεμήθηκε στους θεωρητικούς του παιχνιδιού John C. Harsanyi, John F. Nash και Reinhard Selten. Σήμερα η Θεωρία παιγνίων είναι μέρος της διδασκαλίας πάρα πολλών προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών και η εφαρμογές της εξακολουθούν με αύξοντα ρυθμό να απασχολούν την επιστημονική κοινότητα αλλά και να αποτελούν αποφασιστικό εργαλείο Οικονομικών αποφάσεων.

## 1.2. Μια γνωριμία

Η αλληλεξάρτηση μεταξύ των ανθρώπων είναι αντικείμενο της θεωρίας παιγνίων. Για την ακρίβεια η θεωρία παιγνίων μελετά συστηματικά την **αλληλεπίδραση** (interaction) μεταξύ των ατόμων μιας **ομάδας** (group) που υποθέτει ότι είναι **ορθολογικοί** (rationality) και ασκεί καθένας τους μια συγκεκριμένη **στρατηγική** (strategic). Οι συμμετέχοντες σε ένα παίγνιο λέγονται **παίκτες** (players) και οι **ανταμοιβές** τους (payoffs), όσον αφορά το παίγνιο, καθορίζονται από τις **ενέργειές** τους (actions). Για να καθοριστεί πλήρως, ένα παιχνίδι πρέπει να είναι γνωστά τα εξής:

A. Οι παίκτες (players) του παιχνιδιού,

B. Οι ενέργειες (actions) που είναι διαθέσιμες σε κάθε παίκτη σε κάθε σημείο λήψης αποφάσεων

Γ. Οι αποδόσεις (payoff) για κάθε αποτέλεσμα και

Δ. Οι διαθέσιμες πληροφορίες (information) (Ο Eric Rasmusen αναφέρεται σε αυτά τα τέσσερα "ουσιώδη στοιχεία" από το ακρωνύμιο "PARI").

Η Θεωρία Παιγνίων προσπαθεί να αντιμετωπίσει με μαθηματικές μεθόδους **μοντέλα σύγκρουσης και συνεργασίας**.

Όσον αφορά τον χρόνο των κινήσεων των παικτών υπάρχουν δυο είδη. Τα **παίγνια διαδοχικών κινήσεων** – πρώτος κάνει την κίνησή του και ο δεύτερος αποκρίνεται έχοντας εναρμονίσει τη στρατηγική του στην κίνηση του πρώτου- και τα **παίγνια ταυτόχρονων κινήσεων** όπου οι παίκτες εκτός του αντικειμενικού τους στόχου είναι υποχρεωμένοι να λάβουν υπόψη και την πιθανή κίνηση του αντιπάλου. (Turocy & Stengel, 2001).

Ένα παίγνιο λέγεται παίγνιο **τέλειας πληροφόρησης**, εάν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις κινήσεις που έχουν ήδη γίνει από τους άλλους παίκτες. Συνήθως τα παίγνια διαδοχικών κινήσεων είναι παίγνια τέλειας πληροφόρησης. Στα παίγνια ταυτόχρονων κινήσεων (στατικά) οι παίκτες δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουν τι θα παίξει ο αντίπαλος και τα λέμε **ατελούς πληροφόρησης**, αλλά υπάρχουν και παίγνια διαδοχικών κινήσεων που είναι ατελούς πληροφόρησης. Όταν σε ένα παίγνιο όλοι οι παίκτες γνωρίζουν όλα τα χαρακτηριστικά του παιχνιδιού δηλαδή αποδόσεις, πληροφορίες που αφορούν την ιδιαιτερότητα του παιχνιδιού,

τότε αυτό το παίγνιο λέγεται **πλήρους πληροφόρησης** και το αντίθετο λέγεται **ελλιπούς πληροφόρησης**.

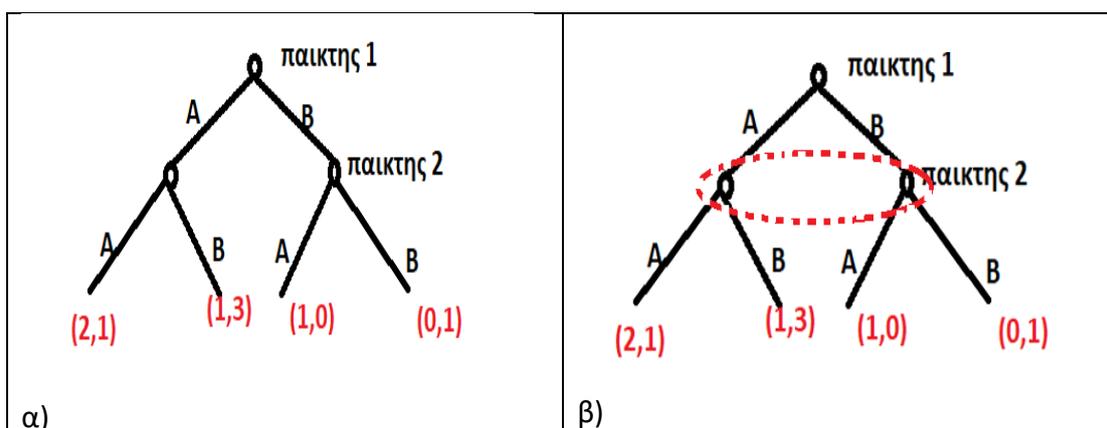
Τα παίγνια μπορεί να παρουσιαστούν με δυο τρόπους.

Είτε την **κανονική** (στρατηγική) μέσω ενός πίνακα πληρωμών (ανταμοιβών) (Payoffmatrix), είτε την **εκτεταμένη** (αναλυτική). (Extensive game )

|                     |   | Στρατηγική παίκτη 2 |       |
|---------------------|---|---------------------|-------|
|                     |   | A                   | B     |
| Στρατηγική παίκτη 1 | A | (2,1)               | (1,0) |
|                     | B | (1,3)               | (0,1) |

Πίνακας 1.2.1 : κανονική μορφή σε παίγνιο δυο παικτών

Η κανονική παρουσίαση του παιγνίου είναι ο πίνακας που στο σώμα του περιέχει διατεταγμένα ζεύγη στα οποία –όσον αφορά παίγνια δύο παικτών-ο πρώτος αριθμός είναι η απολαβή του παίκτη 1 και ο δεύτερος η απολαβή του παίκτη 2. Άρα είναι εμφανές το αποτέλεσμα που θα έχει η επιλογή κάθε παίκτη. Συνήθως χρησιμοποιείται όταν το παιχνίδι διεξάγεται με ταυτόχρονες κινήσεις ή όταν ο κάθε παίκτης δεν γνωρίζει τι κίνηση θα κάνει ο αντίπαλός του.



Σχήμα 1.2.1: εκτεταμένη μορφή.

Η εκτεταμένη παρουσίαση του παιγνίου είναι σε μορφή δένδρου και δείχνει τη σειρά με την οποία οι παίκτες πραγματοποιούν κινήσεις και τις πληροφορίες που έχει κάθε παίκτης σε κάθε σημείο λήψης αποφάσεων. Στο παράδειγμα αν ο παίκτης 1 επιλέξει A και ακολούθως ο παίκτης 2 επίσης A τότε οι απολαβές για τους δύο παίκτες είναι 2 για τον παίκτη 1 και 1 για τον παίκτη 2. Στο σχήμα α το παίγνιο δεν είναι ακριβώς το ίδιο με το παίγνιο της κανονικής μορφής του παραπάνω πίνακα 1.2.1. Με αυτή την παράσταση υπονοείται ότι ο παίκτης 2 γνωρίζει ποια κίνηση έχει κάνει ήδη ο παίκτης 1 και ακολούθως κάνει τη δική του, δηλαδή αφορά παίγνιο διαδοχικών κινήσεων τέλει και τέλει πληροφόρησης. Στο σχήμα β η οβάλ διακεκομμένη γραμμή υπονοεί ότι ο παίκτης 2 δεν γνωρίζει τι έπαιξε ο παίκτης 1 άρα ταυτίζεται με την κανονική παρουσίαση στον πίνακα και αφορά παίγνια ατελούς πληροφόρησης.

Η παρουσίαση της εκτεταμένης μορφής ενός παιγνίου περιλαμβάνει τις εξής πληροφορίες.

- α) Τον αριθμό των παικτών
- β) Ποιος επιλέγει ενέργεια και πότε
- γ) Τις διαθέσιμες ενέργειες κάθε παίκτη κάθε χρονική στιγμή
- δ) Την πληροφόρηση που διαθέτει κάθε παίκτης κάθε χρονική στιγμή
- ε) Τις αποδόσεις των επιλογών των παικτών για κάθε επιλογή τους.

Όταν όλα τα κελιά ενός πίνακα του παιχνιδιού έχουν μηδενικό άθροισμα αποδόσεων έχουμε ένα παίγνιο **μηδενικού αθροίσματος** (zero-sumgame) .

|                     |   | Στρατηγική παίκτη 2 |        |
|---------------------|---|---------------------|--------|
|                     |   | A                   | B      |
| Στρατηγική παίκτη 1 | A | (-1,1)              | (0,0)  |
|                     | B | (0,0)               | (1,-1) |

Πίνακας 1.2.2. Πίνακας απολαβών του παιχνιδιού

Στην αντίθετη περίπτωση το παίγνιο είναι **μη μηδενικού αθροίσματος** (non zero sum game).

**Στρατηγική** είναι το σύνολο των αποφάσεων που καθορίζονται από τις εφικτές επιλογές των «αντίπαλων» παικτών. Εδώ πρέπει να κάνουμε τον εξής διαχωρισμό. Αν πρόκειται για παίγνιο ταυτόχρονων κινήσεων δηλαδή ατελούς πληροφόρησης η στρατηγική κάθε παίκτη είναι το σύνολο όλων των δυνατών επιλογών, ενώ αν πρόκειται για παίγνιο διαδοχικών κινήσεων τότε η στρατηγική κάθε παίκτη αποτελείται από ένα πλήρες σχέδιο δράσης ανάλογα με τις αποφάσεις του αντιπάλου. Ως εκ τούτου η στρατηγική κάθε παίκτη είναι πολύ συγκεκριμένη και ακριβής. Υπάρχουν δυο είδη στρατηγικών. Οι **αμιγείς στρατηγικές** όταν ο παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις διαθέσιμες επιλογές του που πιστεύει ότι είναι η καλύτερη και οι **μικτές στρατηγικές** όταν ο παίκτης χρησιμοποιεί ένα συνδυασμό επιλογών γιατί δεν μπορεί να ξέρει ποια είναι η καλύτερη (αβεβαιότητα).

**Ορθολογικός** είναι ο παίκτης που επιλέγει πάντα την ενέργεια που θα του φέρει το καλύτερο αποτέλεσμα με δεδομένο το τι περιμένει να πράξουν οι αντίπαλοι που και αυτοί θεωρείται ότι είναι ορθολογικοί.

Η στρατηγική αλληλεπίδραση μπορεί να περιλαμβάνει πολλούς παίκτες και πολλές στρατηγικές, αλλά εδώ θα εξετάσουμε μόνο παιχνίδια δύο ατόμων με έναν πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών.

|                     |   | Στρατηγική παίκτη 2 |       |
|---------------------|---|---------------------|-------|
|                     |   | A                   | B     |
| Στρατηγική παίκτη 1 | A | (1,2)               | (0,1) |
|                     | B | (2,1)               | (1,0) |

Πίνακας 1.2.3.: Πίνακας απολαβών του παιχνιδιού

Με τη βοήθεια του παραδείγματος του πίνακα 1.2.3. θα κάνουμε μια αρχική προσπάθεια για να κατανοήσουμε την έννοια της επίλυσης ενός παιχνιδιού. Ας υποθέσουμε ότι δύο άτομα παίζουν ένα απλό παιχνίδι. Το άτομο A έχει μόνο δύο στρατηγικές διαθέσιμες και το άτομο B έχει επίσης δύο στρατηγικές.

Για κάθε ζεύγος πληρωμών στον Πίνακα 1.2.3. υπάρχει αντίστοιχη ανταμοιβή σε κάθε παίκτη. Η πρώτη καταχώρηση σε κάθε ζεύγος αντιπροσωπεύει την απόδοση στον παίκτη 1 και η δεύτερη καταχώρηση δίνει την απόδοση στον παίκτη 2. Για παράδειγμα, εάν και οι δύο παίκτες υιοθετήσουν τις αντίστοιχες πρώτες στρατηγικές τους, ο συνδυασμός πληρωμής θα είναι (1, 2). Ομοίως, εάν ο παίκτης 1 υιοθετήσει τη στρατηγική A και ο 2 υιοθετήσει τη στρατηγική B, τότε ο συνδυασμός αποδόσεων θα είναι (0, 1).

Ας δούμε τώρα ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αυτού του είδους παιχνιδιού. Αυτό το παιχνίδι, φυσικά, έχει μια πολύ απλή λύση. Από την άποψη του παίκτη 1, είναι πάντα καλύτερο να υιοθετήσει τη στρατηγική B, καθώς οι αποδόσεις του από αυτήν την επιλογή (2 ή 1) είναι πάντα μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες αποδόσεις (1 ή 0) από τη στρατηγική A. Ομοίως, είναι πάντα καλύτερο για τον 2 να υιοθετήσει τη στρατηγική του A, καθώς οι αποδόσεις του από αυτήν την επιλογή (2 ή 1) είναι πάντα μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες αποδόσεις (1 ή 0) από τη στρατηγική B. Θα περιμέναμε, επομένως, ότι η στρατηγική για τον παίκτη 1 είναι η στρατηγική B και ότι για τον 2 είναι η στρατηγική A, και έτσι, ο συνδυασμός αποπληρωμής ισορροπίας εδώ θα ήταν (2, 1).

Έχουμε λοιπόν μια **κυρίαρχη στρατηγική**, δηλαδή, μια βέλτιστη επιλογή στρατηγικής για κάθε παίκτη, ανεξάρτητα από το τι κάνει ο άλλος παίκτης. Οποιαδήποτε άλλη στρατηγική λέγεται **κυριαρχούμενη**.

Ως εκ τούτου, εδώ αυτές οι επιλογές στρατηγικής, δηλαδή, η στρατηγική B για τον 1 και η στρατηγική A για τον 2 κυριαρχούν στις εναλλακτικές επιλογές, και έχουμε μια ισορροπία στις κυρίαρχες στρατηγικές.

Σε αυτό το παράδειγμα, θα περιμέναμε, ως εκ τούτου, ένα αποτέλεσμα ισορροπίας όπου ο 1 παίζει τη στρατηγική B, και ο 2 παίζει τη στρατηγική του A.

Το παιχνίδι είναι μάλλον εύκολο να διεξαχθεί και να εξηγηθεί αν έχουμε μια **κυρίαρχη στρατηγική** για κάθε παίκτη, κάτι που, ωστόσο, μπορεί να μην ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, το παιχνίδι που δίνεται στον Πίνακα 1.2.4. δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.

|                     |   | Στρατηγική παίκτη 2 |       |
|---------------------|---|---------------------|-------|
|                     |   | A                   | B     |
| Στρατηγική παίκτη 1 | A | (2,1)               | (0,0) |
|                     | B | (0,0)               | (1,2) |

Πίνακας 1.2.4.:

Εδώ, όταν ο παίκτης 2 υιοθετεί τη στρατηγική A, ο παίκτης 1 παίρνει μια απόδοση 2 (από τη στρατηγική A) ή 0 (από τη στρατηγική B) και όταν ο 2 επιλέγει τη στρατηγική B, η απόδοση στον 1 είναι 0 (από τη στρατηγική 1) ή 1 (από στρατηγική 2).

Έτσι, εδώ όταν ο 2 υιοθετεί τη στρατηγική A, ο 1 θα παίζει επίσης τη στρατηγική του A. Από την άλλη πλευρά, όταν ο 2 παίζει τη στρατηγική του B, ο 1 θα άλλαζε τη στρατηγική του από A σε B. Έτσι, η βέλτιστη επιλογή του A εξαρτάται από το τι πιστεύει ότι θα κάνει ο B. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική για το A σε αυτήν την περίπτωση. Ούτε η B έχει κυρίαρχη στρατηγική εδώ.

Γιατί, όπως βλέπουμε στον πίνακα πληρωμών, όταν ο 1 επιλέγει τη στρατηγική A, ο 2 θα επιλέξει τη στρατηγική του A και όταν ο 1 επιλέγει τη στρατηγική B, ο 2 θα αλλάξει από τη στρατηγική του A στη στρατηγική B. Δηλαδή, ο 2 δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική εδώ. Η βέλτιστη επιλογή του εξαρτάται από το τι πιστεύει ότι θα κάνει ο παίκτης 1.

### 1.3. Ισορροπία Nash (Nash equilibrium)

Όταν προσπαθούμε να κατανοήσουμε ποια είναι η τελική έκβαση ενός παιγνίου που παίζεται από ορθολογικούς παίκτες, ίσως απλά να χρειάζεται να απαιτήσουμε η επιλογή του παίκτη 1 να είναι η βέλτιστη για τις (βέλτιστες) επιλογές του 2. Φυσικά, αυτό που είναι βέλτιστο για τον παίκτη 2 θα εξαρτηθεί και πάλι από την επιλογή του παίκτη 1. Το πρόβλημα αυτό απασχόλησε τον Αμερικάνο μαθηματικό John Nash (1928-2015) που δημιούργησε την έννοια της ισορροπίας για παιχνίδια μη-μηδενικού αθροίσματος, ισορροπία που πήρε το όνομά του ως ισορροπία Nash.

Μια **ισορροπία Nash**, που ονομάζεται επίσης **στρατηγική ισορροπία**, είναι ένας κατάλογος στρατηγικών-ένας για κάθε παίκτη- ο οποίος έχει την ιδιότητα ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί μονομερώς να αλλάξει τη στρατηγική του και να πάρει μια καλύτερη ανταμοιβή.

Χαρακτηριστική περίπτωση που εξηγεί τη λογική της ισορροπίας Nash είναι το παίγνιο «δίλλημα του φυλακισμένου».

|                           |          | Στρατηγική φυλακισμένου 2 |                |
|---------------------------|----------|---------------------------|----------------|
|                           |          | ομολογία                  | άρνηση         |
| Στρατηγική φυλακισμένου 1 | ομολογία | <b>(-3,-3)</b>            | <b>(0,-6)</b>  |
|                           | άρνηση   | <b>(-6,0)</b>             | <b>(-1,-1)</b> |

Πίνακας 1.3.1.: αποδόσεις (πληρωμές) στο «δίλλημα του φυλακισμένου»

Οι δυο φυλακισμένοι είναι κατηγορούμενοι για μια κοινή τους ποινική υπόθεση. Τα ζεύγη στον πίνακα 1.3.1. αντιπροσωπεύουν τις ποινές που θα έχουν ανάλογα με τη στάση που θα κρατήσουν κατά τη διάρκεια της ανάκρισης. Δηλαδή αν ανεξαρτήτως ο ένας από τον άλλο επιμείνουν στην άρνηση της κατηγορίας θα έχουν ποινή από ένα χρόνο έκαστος για κάποια από τις κατηγορίες που έχει αποδειχθεί ήδη, ενώ αν ομολογήσουν και οι δύο θα έχουν ποινή από 3 χρόνια καθένας.

Ο φυλακισμένος 1 που είναι ορθολογικός παίκτης θα επιλέξει «ομολογία» γιατί αν επιλέξει «άρνηση», τότε υπάρχει ο φόβος ότι ο φυλακισμένος 2 θα επιλέξει «ομολογία» με συνέπεια ο 1 να φυλακιστεί 6 χρόνια και ο 2 να αφεθεί ελεύθερος. Ομοίως ο φυλακισμένος 2 θα επιλέξει κι αυτός «ομολογία» γιατί αν επιλέξει «άρνηση» τότε διατρέχει τον κίνδυνο ο φυλακισμένος 1 να επιλέξει «ομολογία» και έτσι να έχει ποινή 6 χρόνια, ενώ ο 1 να αφεθεί ελεύθερος. Το ζεύγος («ομολογία», «ομολογία») είναι κατάσταση ισορροπίας Nash γιατί κανείς από τους δύο αν άλλαζε την απόφασή του δεν θα βρισκόταν σε καλύτερη θέση. **Ένας γρήγορος τρόπος να βρίσκει κανείς τη λύση είναι να σημειώνει το μέγιστο κάθε γραμμής για τον B και το μέγιστο κάθε στήλης για τον A.**

Είναι εμφανές βέβαια ότι αυτή τους η επιλογή δεν είναι η καλύτερη (χρήσιμη) που θα μπορούσαν να πάρουν. Δηλαδή η θέση ισορροπίας Nash δεν είναι απαραίτητα και η πιο «χρήσιμη» για τους δύο παίκτες.

Η κεντρική ιδέα της ισορροπίας Nash είναι πολύ γενική. Μια ισορροπία Nash συνιστά μια στρατηγική κάθε παίκτη ότι ο αυτός δεν μπορεί να βελτιώσει μονομερώς τη θέση του, με δεδομένο ότι οι άλλοι παίκτες ακολουθούν τη ίδια τακτική. Υπό την προϋπόθεση λοιπόν ότι οι άλλοι παίκτες είναι επίσης ορθολογικοί, είναι λογικό κάθε παίκτη να περιμένει από τους αντιπάλους του να ακολουθήσουν τη ίδια στρατηγική.

Το παίγνιο τελείωσε και κανείς δεν μετανιώνει για την επιλογή του. **JohnNash**

## 1.4. Κριτήριο Pareto

Είχαμε αναφέρει παραπάνω ότι η θέση ισορροπίας Nash δεν είναι απαραίτητα και η πιο «χρήσιμη» για τους δύο παίκτες.

Το **κριτήριο Pareto** είναι εκείνο κατά το οποίο, μία μεταβολή στην επιλογή βελτιώνει τη θέση κάποιου χωρίς όμως παράλληλα να χειροτερεύει τη θέση κάποιου άλλου. Με λίγα λόγια το κατά Pareto κριτήριο μας βεβαιώνει ότι έχουμε βελτίωση της κοινωνικής ευημερίας στο σύνολό της αφού έχουμε την καλυτέρευση ενός ατόμου ή μιας ομάδας ατόμων χωρίς να χειροτερεύει η θέση κανενός άλλου. (Wikipedia). **Για την ακρίβεια συγκρίνοντας μεταξύ τους δυο αποτελέσματα ενός παιγνίου κατά Pareto βέλτιστο είναι εκείνο που είναι καλύτερο και για τους δυο παίκτες.**

**Παράδειγμα 1.** Ας υποθέσουμε τα ζεύγη πληρωμών (10,15) , (10,12) των παικτών Α και Β. Ο Α έχει ανταμοιβή 10 οποιoδήποτε και αν επιλέξει όμως για τον Β ή ανταμοιβή 15 είναι καλύτερη , οπότε το ζεύγος (10,15) έχει την καλύτερη ανταμοιβή και για τους δυο παίκτες, δηλαδή ικανοποιεί το κριτήριο Pareto.

**Παράδειγμα 2.** «δίλλημα του φυλακισμένου».

|                           |          | Στρατηγική φυλακισμένου 2 |         |
|---------------------------|----------|---------------------------|---------|
|                           |          | ομολογία                  | άρνηση  |
| Στρατηγική φυλακισμένου 1 | ομολογία | (-3,-3)                   | (0,-6)  |
|                           | άρνηση   | (-6,0)                    | (-1,-1) |

Πίνακας 1.4.1.πίνακας απολαβών του παιγνίου

Στην περίπτωση (Άρνηση, Άρνηση) έχουμε κατά Pareto βέλτιστα αποτελέσματα όταν τα συγκρίνουμε με το (Ομολογία, Ομολογία). Παραδόξως σε αυτό το παίγνιο η επιλογή (Ομολογία, Ομολογία) είναι επιλογή ισορροπίας Nash . Δηλαδή εδώ το κριτήριο Pareto διαφωνεί με το κριτήριο ισορροπίας Nash.

**Παράδειγμα 3.** Το παίγνιο του αλτρουιστή

|                     |            | Στρατηγική παίκτη 2 |          |
|---------------------|------------|---------------------|----------|
|                     |            | Συνεργασία          | Αντίθεση |
| Στρατηγική Παίκτη 1 | Συνεργασία | (9,9)               | (0,7)    |
|                     | Αντίθεση   | (7,0)               | (2, 2)   |

Πίνακας 1.4.2.πίνακας απολαβών του παιγνίου

Στο παράδειγμα αυτό ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα «έπαθλο» που θα ενδιέφερε και τους δύο παίκτες. Οι επιλογές τους είναι συνεργασία ή αντίθεση. Ο παίκτης 1 αν επιλέξει «συνεργασία» τότε ο παίκτης 2 έχει συμφέρον να επιλέξει επίσης «συνεργασία» ώστε να έχει και αυτός τις ίδιες απολαβές με τον παίκτη 1, διαφορετικά θα πάρει 7 και ο παίκτης 1 θα πάρει 0. Γνωρίζοντας όμως αυτό ο παίκτης 1 θα μπορούσε να επιλέξει «αντίθεση» οπότε ο παίκτης 2 αν επέλεγε «συνεργασία» δεν θα έπαιρνε τίποτα, ενώ αν επέλεγε «αντίθεση» τότε θα έχαναν και οι δύο γιατί οι απολαβές θα ήταν (2,2). Επομένως είναι μονόδρομος να επιλέξουν και οι δυο παίκτες (συνεργασία-συνεργασία) ώστε να έχουν το μέγιστο όφελος.

Εδώ η επιλογή (Συνεργασία, Συνεργασία) είναι κατά Pareto βέλτιστη, αλλά συγχρόνως είναι και επιλογή ισορροπίας Nash.

## 1.5. Αμιγείς στρατηγικές-Μικτές στρατηγικές

Λέμε ότι όταν κάθε παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις δυνατές στρατηγικές του με πιθανότητα ίση με τη μονάδα τότε οι παίκτες επιλέγουν να δράσουν με **αμιγείς στρατηγικές**.

Αντιθέτως όταν οι παίκτες δρουν με συνδυασμό στρατηγικών οι οποίες επιλέγονται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας λέμε ότι εφαρμόζουν **μικτές στρατηγικές**.

**Ορισμός.** Μια θέση σε ένα στατικό, πεπερασμένο, επαναλαμβανόμενο και μη συνεργατικό παίγνιο, είναι μια θέση ισορροπίας Nash με μικτές στρατηγικές αν ο κάθε παίκτης έχει επιλέξει την άριστη συχνότητα ή πιθανότητα με την οποία χρησιμοποιεί τις στρατηγικές του, έχοντας παράλληλα εκλάβει ως δεδομένες τις αντίστοιχες επιλογές όλων των άλλων. Στα παίγνια αυτά υπάρχει πάντα **τουλάχιστον μία** ισορροπία Nash με μικτές στρατηγικές. Στην ουσία ο Nash ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει στατικό παίγνιο που δεν έχει λύση.

### 1.5.1. Το δίλλημα των φυλακισμένων με μικτές στρατηγικές.

Στον πίνακα () που ακολουθεί παρουσιάζεται το πρόβλημα «δίλλημα του φυλακισμένου» που αναφέρθηκε παραπάνω το οποίο θα προσπαθήσουμε να λύσουμε με μικτές στρατηγικές. Με  $p$  συμβολίζουμε την πιθανότητα ο φυλακισμένος 1 να επιλέξει (ομολογία) και  $1-p$  την πιθανότητα να επιλέξει (άρνησης). Αντίστοιχα με  $q$  πιθανότητα ο φυλακισμένος 2 να επιλέξει (ομολογία) και  $1-q$  την πιθανότητα να επιλέξει (άρνηση).

Ισχύει φυσικά  $0 \leq p, q \leq 1$ .

|                           |                  | Στρατηγική φυλακισμένου 2 |                 |
|---------------------------|------------------|---------------------------|-----------------|
|                           |                  | Ομολογία ( $q$ )          | Άρνηση( $1-q$ ) |
| Στρατηγική φυλακισμένου 1 | Ομολογία ( $p$ ) | (-3,-3)                   | (0,-6)          |
|                           | Άρνηση ( $1-p$ ) | (-6,0)                    | (-1,-1)         |

Πίνακας 1.5.1: Πίνακας απολαβών του παιγνίου

Εδώ γνωρίζουμε ότι υπάρχει ισορροπία Nash με αμιγείς στρατηγικές αλλά ας δούμε αν τα συμπεράσματα είναι ίδια με μικτές.

Η συνάρτηση ωφέλειας  $V$  του παίκτη 1 τότε είναι :

$$V(1) = -3pq + (0)p(1 - q) + (-6)(1 - p)q + (-1)(1 - p)(1 - q) \Rightarrow$$

$$V(1) = -3pq - 6q + 6pq - 1 + p + q - pq = 2pq + p - 5q - 1$$

$$= (2q + 1)p + (-5q - 1) = m_1p + c_1$$

Όπου  $m_1 = 2q + 1$  και  $c_1 = -5q - 1$  (1)

Αντίστοιχα η συνάρτηση ωφέλειας για τον 2 είναι:

$$V(2) = -3qp - 6(1 - q)p + 0q(1 - p) - 1(1 - q)(1 - p) \Rightarrow$$

$$V(2) = -3qp - 6p + 6pq - 1 + q + p - qp = (2p + 1)q + (-5p - 1) = m_2q + c_2$$

Όπου  $m_2 = 4p + 1$  και  $c_2 = -5p - 1$  (2)

Από την (1) προφανώς  $m_1 > 0$  πάντα. Συνεπώς μέγιστο στην  $V(1)$  έχουμε για  $p=1$ .

Από την (2) προφανώς  $m_2 > 0$  πάντα. Συνεπώς μέγιστο στην  $V(2)$  έχουμε για  $q=1$ .

Αυτό σημαίνει ότι με πιθανότητα 1 οι δυο φυλακισμένοι θα επιλέξουν ομολογία και οι συναρτήσεις ωφέλειας θα έχουν την ίδια τιμή -3 για καθένα. Δηλαδή ακριβώς το ίδιο συμπέρασμα όπως αν το παίγνιο επιλυόταν με αμιγείς στρατηγικές.

Αντιθέτως αν εξετάσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική που να οδηγεί σε ισορροπία Nash και στο οποίο θα μπορούσε να βρεθεί ισορροπία με μικτές στρατηγικές με δεδομένο ότι όλα τα πεπερασμένα παίγνια έχουν μια ισορροπία Nash με μικτές στρατηγικές. Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιήσω είναι γνωστό ως «μάχη των φύλων (battleofsexes)». Ένα ζευγάρι θέλει να βρει πως θα περάσουν μαζί ένα απόγευμα Σαββάτου. Ο άντρας θέλει να πάει στο γήπεδο και η γυναίκα θέλει να πάνε σινεμά, όμως πάνω από όλα θέλουν ότι κάνουν, να το κάνουν μαζί. Στον πίνακα απολαβών που ακολουθεί οι αποδόσεις συμβολίζουν τον βαθμό ικανοποίησης των δύο παικτών.

|                  |              | Στρατηγική γυναίκας |             |
|------------------|--------------|---------------------|-------------|
|                  |              | Γήπεδο (q)          | Σινεμά(1-q) |
| Στρατηγική άντρα | Γήπεδο (p)   | (2,1)               | (0,0)       |
|                  | Σινεμά (1-p) | (0,0)               | (1,2)       |

Πίνακας 1.5.2. Πίνακας απολαβών του παιγνίου

Στην αρχή ελέγχοντας για την ύπαρξη λύσης ισορροπίας παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash, επομένως θα προσπαθήσουμε να βρούμε την λύση με μικτές στρατηγικές. Η συνάρτηση ωφέλειας  $V$  του Άντρα είναι :

$$V(A) = 2pq + (0)p(1 - q) + 0(1 - p)q + (1 - p)(1 - q) \Rightarrow$$

$$V(A) = 2pq + 1 - p - q + pq = 3pq - p - q + 1 = (3q - 1)p + (-q + 1) = m_1p + c_1$$

Όπου  $m_1 = 3q - 1$  και  $c_1 = -q + 1$  (1)

Αντίστοιχα η συνάρτηση ωφέλειας για τη Γυναίκα είναι:

$$V(\Gamma) = qp + 0(1 - q)p + 0q(1 - p) + 2(1 - q)(1 - p) \Rightarrow$$

$$V(\Gamma) = qp + 2 - 2q - 2p + 2qp$$

$$= 3qp - 2q - 2p + 2 = (3p - 2)q + (-2p + 2) = m_2q + c_2$$

Όπου  $m_2 = 3p - 2$  και  $c_2 = -2p + 2$  (2)

Για τον Άντρα:

$$m_1 > 0 \Rightarrow 3q - 1 > 0 \Rightarrow q > \frac{1}{3} \text{ Ομοίως}$$

$$m_1 = 0 \Rightarrow 3q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \text{ και}$$

$$m_1 < 0 \Rightarrow 3q - 1 < 0 \Rightarrow q < \frac{1}{3}$$

Οπότε το σχέδιο άριστης απόκρισης για τον Άντρα είναι

Γήπεδο αν  $q > \frac{1}{3}$  γιατί η  $V(A)$  έχει μέγιστο για  $p=1$

Μείγμα Γήπεδο-Σινεμά αν  $q = \frac{1}{3}$  αφού τότε για κάθε  $p$  η ωφέλεια είναι  $V(A) = -q + 1 = \frac{2}{3}$

Σινεμά αν  $q < \frac{1}{3}$  γιατί η  $V(A)$  έχει μέγιστο για  $p=0$ .

Για τη γυναίκα:

$$m_2 > 0 \Rightarrow 3p - 2 > 0 \Rightarrow p > \frac{2}{3} \text{ Ομοίως}$$

$$m_2 = 0 \Rightarrow 3p - 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3} \text{ και}$$

$$m_2 < 0 \Rightarrow 3p - 2 < 0 \Rightarrow p < \frac{2}{3}$$

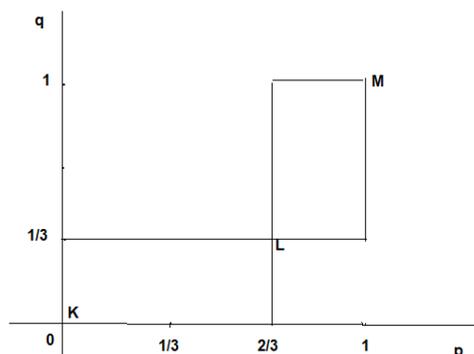
Οπότε το σχέδιο άριστης απόκρισης για τη Γυναίκα είναι :

Σινεμά αν  $p > \frac{2}{3}$  γιατί η  $V(G)$  έχει μέγιστο για  $q=1$

Μείγμα Γήπεδο-Σινεμά αν  $p = \frac{2}{3}$  αφού τότε για κάθε  $q$  η ωφέλεια είναι  $V(G) = -2p + 2 = \frac{2}{3}$

Γήπεδο αν  $p < \frac{2}{3}$  γιατί η  $V(G)$  έχει μέγιστο για  $q=0$ .

Ακολουθως μια γραφική απεικόνιση των παραπάνω είναι:



Σχήμα 1.5.1.

Στο σημείο  $K(p,q)=(0,0)$  και οι δύο ακολουθούν την επιλογή Σινεμά με αποτέλεσμα η Γυναίκα να έχει μεγαλύτερο βαθμό ικανοποίησης. Είναι θέση ισορροπίας Nash με αμιγείς στρατηγικές.

Στο σημείο  $M(p,q)=(1,1)$  και οι δύο ακολουθούν την επιλογή Γήπεδο με αποτέλεσμα ο Άντρας να έχει μεγαλύτερο βαθμό ικανοποίησης. Και εδώ έχουμε επίσης τη δεύτερη θέση ισορροπίας Nash με αμιγείς στρατηγικές.

Στο σημείο  $L(p,q)=(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  ο άντρας ακολουθεί τη στρατηγική «Γήπεδο» 2 στις 3 φορές και η γυναίκα 1 στις 3 φορές. Με αυτή τη στρατηγική η συνάρτηση ωφέλειας έχει την ίδια τιμή  $V(A) = V(\Gamma) = \frac{2}{3}$  και κανένας δεν έχει δικαίωμα να μετανιώσει. Συνεπώς είναι μια Τρίτη θέση ισορροπίας Nash αλλά με μικτές στρατηγικές.

## 1.6. Στρατηγικές minimax και maximin

Οι πρώτες προσπάθειες επίλυσης παιγνίων κυρίως μηδενικού αθροίσματος έγιναν από τον Von Neumann (1928) και καταγράφηκαν στο κλασικό βιβλίο Theory of Games and Economic Behavior, (1944-Neumann-Morgestern) που αναφέρεται ως αφετηρία της διάδοσης της θεωρίας παιγνίων. Στην ουσία ο Von Neumann προσπαθώντας να δώσει λύση σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος θεώρησε ότι ο κάθε παίκτης θα ενεργήσει σκεπτόμενος ότι η απάντηση του αντιπάλου του θα είναι τόσο σωστή ώστε να έχει το μικρότερο προσδοκώμενο όφελος και τελικά θα επιλέξει την καλύτερη από τις μικρότερες προσδοκίες του (maximin). Διατύπωσε και απέδειξε το θεώρημα «Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων, το άθροισμα των αποδόσεων maximin είναι ίσο με μηδέν» που είναι γνωστό ως Θεώρημα Von Neumann και δικαιολογεί με αυτό την παραπάνω σκέψη του.

Το περιβάλλον στο οποίο θα αναφερθούμε είναι απολύτως **ανταγωνιστικό** δηλαδή οι δυο παίκτες έχουν αντιδιαμετρικά συμφέροντα και οι κινήσεις γίνονται ταυτόχρονα (**στατικό παίγνιο**). Ας υποθέσουμε ότι ο κάθε παίκτης δεν έχει εμπειρία ή γνώση για το πώς σε κάθε ενέργειά του θα δράσει ο αντίπαλος του. Είναι προετοιμασμένος επομένως να λάβει υπόψη του ότι ο αντίπαλος θα δράσει με τον χειρότερο για τα συμφέροντα του τρόπο. Αυτή η διαδικασία για την επιλογή μιας δράσης ονομάζεται maximinimization (μεγιστοποίηση).

Μερικά χρόνια αργότερα (1951-1953) ο Nash μορφοποίησε αυτή την μέθοδο καταλήγοντας σε αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως ισορροπία Nash. Δηλαδή ανά δύο παίκτες παίζουν με τον ίδιο ορθό τρόπο ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος τότε το τέλος του παιγνίου οδηγεί σε ισορροπία Nash είτε με αμιγείς είτε με μικτές στρατηγικές. Κάνοντας την προσπάθεια να κατανοήσουμε την μέθοδο maximinimization ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πίνακα πληρωμών σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος όπου οι αριθμοί στο σώμα του πίνακα δείχνουν τις ανταμοιβές (κέρδη) του παίκτη 1 και υπονοούν τις τιμές που χάνει ο παίκτης 2.

|                      |   | Στρατηγικές παίκτη 2 |   |    |
|----------------------|---|----------------------|---|----|
|                      |   | A                    | B | Γ  |
| Στρατηγικές παίκτη 1 | A | -1                   | 5 | -2 |
|                      | B | 4                    | 3 | 3  |
|                      | Γ | 3                    | 8 | -1 |
|                      |   |                      |   |    |

Πίνακας 1.6.1. απολαβές του παίκτη 1

Δηλαδή αν ο παίκτης 1 επιλέξει τη στρατηγική Β και ο παίκτης 2 τη στρατηγική Γ ,τότε ο Α κερδίζει 3 και ο Γ χάνει 3. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τη στρατηγική που πρέπει να εφαρμόσουν οι δύο παίκτες ώστε να μην μετανιώσουν για την επιλογή τους μετά το τέλος του παιχνιδιού. (ισορροπία Nash). Στον πίνακα που ακολουθεί εφαρμόζουμε το τέχνασμα *minimax-maximin* σύμφωνα με την οποία βρίσκουμε την μεγαλύτερη από τις μικρότερες επιλογές για τον παίκτη 1 και την μικρότερη από τις μεγαλύτερες επιλογές για τον παίκτη 2. Αυτό είναι τυπικό γιατί οι τιμές του πίνακα είναι τα κέρδη του παίκτη 1. Συνεπώς στη γραμμή «μέγιστο στηλών» οι αριθμοί 4, 8, 3 υπονοούν για τον παίκτη 2 ότι χάνει αυτά τα ποσά άρα η επιλογή του θα πρέπει να είναι 3 ώστε να έχει το μικρότερο χάσιμο. Αντιθέτως στη στήλη «ελάχιστο γραμμών» οι αριθμοί -2, 3, -1 είναι κέρδη για τον παίκτη 1 οπότε θα επιλέξει το μεγαλύτερο.

|                      |                | Στρατηγικές παίκτη 2 |   |    | Ελάχιστο γραμμών |
|----------------------|----------------|----------------------|---|----|------------------|
|                      |                | A                    | B | Γ  |                  |
| Στρατηγικές παίκτη 1 | A              | 1                    | 5 | -2 | -2               |
|                      | B              | 4                    | 3 | 3  | 3*               |
|                      | Γ              | 3                    | 8 | -1 | -1               |
|                      | Μέγιστο στηλών | 4                    | 8 | 3* | V=3              |

**Πίνακας 1.6.2.** Στην γραμμή «μέγιστο στηλών» το χρωματισμένο κελί είναι το *minimax* ενώ στη στήλη «ελάχιστο γραμμών» το χρωματισμένο κελί είναι το *maximin*.

Στον πίνακα παρατηρούμε ότι η μικρότερη από τις μεγαλύτερες τιμές των στηλών είναι ίδια με την μεγαλύτερη από τις μικρότερες τιμές των γραμμών. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ισορροπία κατά Nash με αμιγείς στρατηγικές που σημαίνει ότι επιλέγοντας ο παίκτης 1 τη στρατηγική Β και ο παίκτης 2 τη στρατηγική Γ κανένας από τους δύο δεν θα αλλάξει άποψη στο τέλος. Το σημείο (1B, 2Γ) στο οποίο εμφανίζεται η παραπάνω ισορροπία λέγεται **σαγματικό σημείο** (saddle point). Η τιμή V=3 λέγεται τιμή του παιχνιδιού και επιτυγχάνεται στο ζεύγος (B,Γ) που σημαίνει ότι ο παίκτης 1 κερδίζει 3 και ο παίκτης 2 χάνει 3.

**Για να υπάρχει ισορροπία Nash με αμιγείς στρατηγικές πρέπει οι τιμές *minimax* και *maximin* να ταυτίζονται.**

**Όταν οι τιμές *minimax* και *maximin* δεν ταυτίζονται.**

|                      |                | Στρατηγικές παίκτη 2 |   |    | Ελάχιστο γραμμών |
|----------------------|----------------|----------------------|---|----|------------------|
|                      |                | A                    | B | Γ  |                  |
| Στρατηγικές παίκτη 1 | A              | 1                    | 5 | -2 | -2               |
|                      | B              | 4                    | 2 | 3  | 2*               |
|                      | Γ              | 3                    | 8 | -1 | -1               |
|                      | Μέγιστο στηλών | 4                    | 8 | 3* |                  |

**Πίνακας 1.6.3.** απολαβές του παίκτη 1

Στον πίνακα 1.6.3. έχουμε ελαφρώς διαφοροποιημένο το προηγούμενο παράδειγμα και είναι εμφανέστατο ότι δεν υπάρχει ταύτιση μεταξύ *minimax* και *maximin* και συνεπώς δεν υπάρχει ισορροπία Nash με αμιγείς στρατηγικές. Μια λύση για το πρόβλημα θα μπορούσε

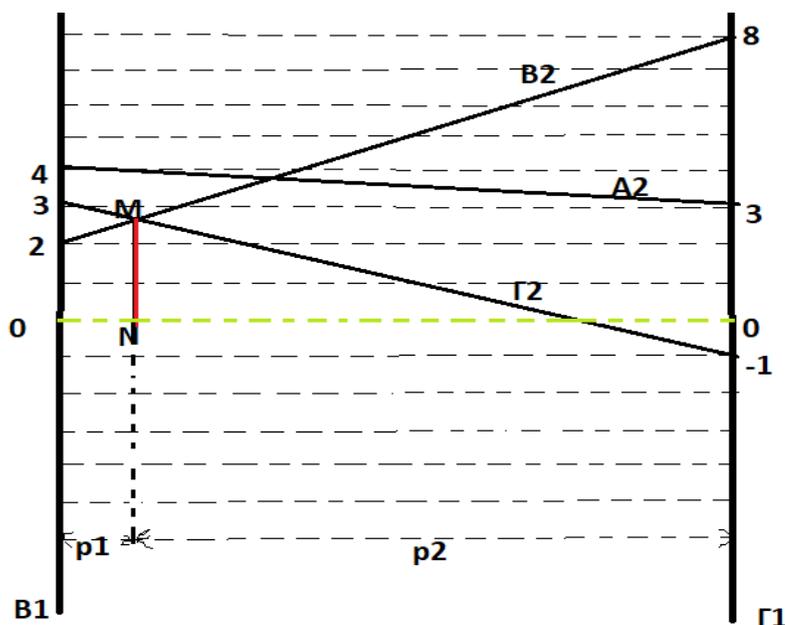
να δοθεί με μεικτές στρατηγικές αλλά με δεδομένο ότι για τον παίκτη 1 υπάρχουν 3 στρατηγικές και για τον παίκτη 2 επίσης 3, γίνεται είναι ασύμφορο από πλευράς υπολογισμών. Φυσικά όταν δεν υπάρχει διαφορετική διέξοδος είμαστε υποχρεωμένοι να θέσουμε πιθανότητες  $p_A, p_B, p_G$  με  $p_A + p_B + p_G = 1$  για τις στρατηγικές του παίκτη 1 και  $q_A, q_B, q_G$  με  $q_A + q_B + q_G = 1$  για τις στρατηγικές του παίκτη 2 και να επιλύσουμε το σύστημα χρησιμοποιώντας τουλάχιστον άλλες 4 εξισώσεις που θα προκύπτουν από τις συνθήκες ισορροπίας.

Παρατηρώντας όμως τον πίνακα αντιλαμβανόμαστε ότι ο παίκτης 1 δεν θα ακολουθούσε ποτέ την στρατηγική A σε σχέση με την στρατηγική Γ γιατί σε κάθε απάντηση του παίκτη 2 θα είχε μικρότερες απολαβές. Λέμε σ αυτή την περίπτωση ότι η στρατηγική A είναι **υποδεέστερη** της Γ (**αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική**) ή ότι η Γ είναι **κυρίαρχη στρατηγική** σε σχέση με την A. Αν λοιπόν από τις επιλογές του παίκτη 1 αφαιρέσουμε τη στρατηγική A τότε προκύπτει ο πίνακας 1.6.4. .

|                      |                | Στρατηγικές παίκτη 2 |    |    | Ελάχιστο γραμμών |
|----------------------|----------------|----------------------|----|----|------------------|
|                      |                | A2                   | B2 | Γ2 |                  |
| Στρατηγικές παίκτη 1 | B1             | 4                    | 2  | 3  | 2*               |
|                      | Γ1             | 3                    | 8  | -1 | -1               |
|                      | Μέγιστο στηλών | 4                    | 8  | 3* |                  |
|                      |                |                      |    |    |                  |

Πίνακας 1.6.4.απολαβές του παίκτη 1

Το παίγνιο έχει εξελιχθεί σε ένα 2x3 παίγνιο και η λύση μπορεί να δοθεί γραφικά με τον ακόλουθο τρόπο. Παίρνω 2 κατακόρυφες ευθείες με ίσες κλίμακες που απέχουν μεταξύ τους μια μονάδα και τις ονομάζω B1, Γ1 αντίστοιχα. Ακολουθώντας ενώνω τα ζεύγη (4,3), (2,8) και (3,-1) με ευθύγραμμα τμήματα και δημιουργείται το σχήμα 1.6.1.



Σχήμα 1.6.1.

Το ευθύγραμμο τμήμα MN αντιπροσωπεύει το προσδοκώμενο κέρδος του παίκτη 1 (αντίστοιχα την προσδοκώμενη ζημιά του παίκτη 2) εφόσον ο παίκτης 1 επιλέγει τη στρατηγική B1 με πιθανότητα  $p_1 = p$  και τη στρατηγική Γ1 με πιθανότητα  $p_2 = 1 - p$ . Ο

παίκτης 2 είναι φανερό ότι θα επιλέξει μόνο τις στρατηγικές B2 και Γ2 γιατί αλλιώς ο παίκτης 1 θα μπορούσε να προσδοκά σε μεγαλύτερο κέρδος από το MN. Ο παίκτης 1 ακολουθεί maximin μικτή στρατηγική, ενώ ο παίκτης 2 minimax μικτή στρατηγική. Δηλαδή ο παίκτης 1 επιλέγει το μέγιστο από τα ελάχιστα προσδοκώμενα κέρδη και ο παίκτης 2 την ελάχιστη από τις μέγιστες προσδοκώμενες ζημιές. Το σημείο M που επιλέγει ο παίκτης 1 είναι το ψηλότερο από το χαμηλότερο τεθλασμένο τμήμα. Το παίγνιο έτσι απλοποιείται στον παρακάτω πίνακα 1.6.5.

|                      |                | Στρατηγικές παίκτη 2 |        |          | Ελάχιστο γραμμών |
|----------------------|----------------|----------------------|--------|----------|------------------|
|                      |                | A2                   | B2 (q) | Γ2 (1-q) |                  |
| Στρατηγικές παίκτη 1 | A1             |                      |        |          |                  |
|                      | B1 (p)         |                      | 2      | 3        |                  |
|                      | Γ1 (1-p)       |                      | 8      | -1       |                  |
|                      | Μέγιστο στηλών |                      |        |          |                  |

Πίνακας 1.6.5. απολαβές του παίκτη 1

Για την άριστη μικτή στρατηγική του παίκτη 1 θα ισχύουν διαδοχικά

$V(1,B2)=V(1,\Gamma2) \Rightarrow 2p + 8(1-p) = 3p - (1-p) \Rightarrow p = \frac{9}{10}$ . Ο παίκτης 1 θα έχει μέγιστο προσδοκώμενο κέρδος  $V = 2 \cdot \frac{9}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} = \frac{26}{10} = 2,6$  και θα το πετύχει αυτό όταν ακολουθεί με συνέπεια 9 φορές στις 10 τη στρατηγική B1 και 1 φορά στις 10 τη στρατηγική Γ1.

Αν αντίστοιχα  $q_1 = q, q_2 = 1 - q$  είναι οι πιθανότητες με τις οποίες ο παίκτης 2 επιλέγει τις στρατηγικές B2, Γ2 αντίστοιχα τότε:

$V(2,B1)=V(2,\Gamma1) \Rightarrow 2q + 3(1-q) = 8q - (1-q) \Rightarrow q = \frac{4}{10}$ . Ο παίκτης 2 θα έχει ελάχιστη προσδοκώμενη ζημία  $V = 2 \cdot \frac{4}{10} + 3 \cdot \frac{6}{10} = \frac{26}{10} = 2,6$  και θα το πετύχει αυτό όταν ακολουθεί με συνέπεια 4 φορές στις 10 τη στρατηγική B2 και 6 φορές στις 10 τη στρατηγική Γ2.

Πιο μαθηματικά αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

Η συνάρτηση ωφέλειας για τον παίκτη 1 έστω  $V(1)$  ανεξαρτήτως τι θα επιλέξει ο παίκτης 2 θα είναι:

$$V(1) = 2pq + 8(1-p)q + 3p(1-q) - 1(1-p)(1-q) = (-10q+4)p + 9q - 1.$$

Αν  $-10q+4 > 0 \Rightarrow q < 0.4$  τότε η  $V(1)$  είναι αύξουσα με μέγιστο για  $p=1$

Αν  $-10q+4 = 0 \Rightarrow q = 0.4$

Αν  $-10q+4 < 0 \Rightarrow q > 0.4$  τότε η  $V(1)$  είναι φθίνουσα με μέγιστο για  $p=0$ .

Οπότε το σχέδιο άριστης απόκρισης για τον παίκτη 1 είναι :

S1 (B1) αν  $q < 0.4$  γιατί η  $V(1)$  έχει μέγιστο για  $p=1$ . Δηλαδή ο παίκτης 1 παίζει B1 όταν αντιλαμβάνεται ότι ο παίκτης 2 παίζει B2 λιγότερες από 4 φορές στις 10. Η ωφέλεια σε αυτή την περίπτωση είναι  $V(1) = (-10q+4)p + 9q - 1 > 2.6$

Αν  $q=0.4$  για κάθε  $p$  η ωφέλεια είναι  $V(1) = 9q - 1 = 2.6$

S1 (Γ1) αν  $q > 0.4$  γιατί η  $V(1)$  έχει μέγιστο για  $p=0$ . Δηλαδή ο παίκτης 1 παίζει Γ1 όταν αντιλαμβάνεται ότι ο παίκτης 2 παίζει Β2 περισσότερες από 4 φορές στις 10. Η ωφέλεια σε αυτή την περίπτωση είναι  $V(1) = 9q - 1 > 2.6$

Η συνάρτηση ωφέλειας για τον παίκτη 2 έστω  $V(2)$  ανεξαρτήτως τι θα επιλέξει ο παίκτης 1 θα είναι:  $V(2) = -2pq - 8(1-p)q - 3p(1-q) + 1(1-p)(1-q) = (10p-9)q - 4p + 1$ .

Αν  $10p-9 > 0 \Rightarrow p > 0.9$  τότε η  $V(2)$  είναι αύξουσα με ελάχιστο για  $q=0$

Αν  $10p-9 = 0 \Rightarrow p = 0.9$

Αν  $10p-9 < 0 \Rightarrow p < 0.9$  τότε η  $V(2)$  είναι φθίνουσα με ελάχιστο για  $q=0$ .

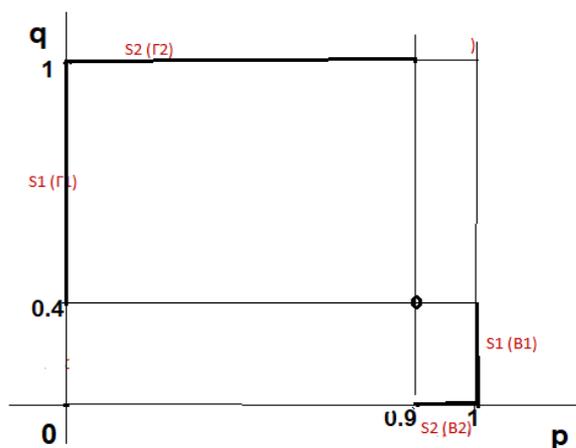
Οπότε το σχέδιο άριστης απόκρισης για τον παίκτη 2 είναι :

S2 (B2) αν  $p > 0.9$  γιατί η  $V(2)$  έχει ελάχιστο για  $q=0$ . Δηλαδή ο παίκτης 2 παίζει Β2 όταν αντιλαμβάνεται ότι ο παίκτης 1 παίζει περισσότερες από 9 στις 10 φορές Β1. Η ωφέλεια σε αυτή την περίπτωση είναι:  $V(2) = -4p + 1 < -2.6$

Αν  $p=0.9$  για κάθε  $q$  η ωφέλεια είναι  $V(2) = -4p + 1 = -2.6$

S2 (Γ2) αν  $p < 0.9$  γιατί η  $V(2)$  έχει ελάχιστο για  $q=1$ . Ο παίκτης 2 παίζει Γ2 όταν αντιλαμβάνεται ότι ο παίκτης 1 παίζει λιγότερες από 9 στις 10 φορές Β1. Η ωφέλεια σε αυτή την περίπτωση είναι:  $V(2) = (10p - 9)q - 4p + 1 < -2.6$

Συνεπώς ο παίκτης 2 βρίσκεται στην καλύτερη θέση όταν ο αντίπαλος παίκτης 1 παίζει ακριβώς 9 στις 10 φορές Β1 γιατί τότε η ζημία του είναι πιο κοντά στο 0.



Σχήμα 1.6.2.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο σχήμα 1.6.2. στο οποίο φαίνεται καθαρά η θέση ισορροπίας του παιγνίου που είναι και ισορροπία Nash , δηλαδή η καλύτερη στρατηγική για τον παίκτη 1 είναι να παίζει 9 στις 10 φορές Β1 και για τον παίκτη 2 να παίζει 4 στις 10 φορές Β2.

Συμπερασματικά ο 1 δεν πρέπει να επιλέξει τη στρατηγική Α1 ποτέ, αλλά 9 στις 10 φορές την Β1 και μια φορά στις 10 την Γ1 με προσδοκώμενο κέρδος 2,6, ενώ ο 2 δεν πρέπει να επιλέξει την Α2 , αλλά να επιλέξει 4 στις 10 φορές την Β2 και 6 στις 10 φορές την Γ2, με προσδοκώμενη ζημία 2,6. Αυτό που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι στο αποτέλεσμα αυτό θα φτάσουν οι δυο παίκτες όταν το παιχνίδι παιχθεί πάρα πολλές φορές και οι παίκτες ακολουθήσουν με συνέπεια την υπολογισμένη στρατηγική. Αυτές οι θέσεις είναι θέσεις ισορροπίας Nash με μικτές στρατηγικές.

Όσον αφορά τους δυο παραπάνω αναφερόμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος με μικτές στρατηγικές μπορούμε να προσθέσουμε ένα σχόλιο που αναφέρεται στο παράδειγμα «δίλλημα του φυλακισμένου» αλλά θα μπορούσε να γενικευτεί και σε πολλά άλλα παραδείγματα που έχουν σαγματικά σημεία.

Ας πάρουμε λοιπόν ξανά τον πίνακα

|                           |              | Στρατηγική φυλακισμένου 2 |             |
|---------------------------|--------------|---------------------------|-------------|
|                           |              | Ομολογία (q)              | Άρνηση(1-q) |
| Στρατηγική φυλακισμένου 1 | Ομολογία (p) | (-3,-3)                   | (0,-6)      |
|                           | Άρνηση (1-p) | (-6,0)                    | (-1,-1)     |

Πίνακας 1.6.6.

Έστω οι  $V(1, \text{ομολογία}2)$ ,  $V(1, \text{αρνηση}2)$  οι συναρτήσεις ωφέλειας του παίκτη 1 όταν ο παίκτης 2 επιλέξει ομολογία και αντίστοιχα όταν επιλέξει άρνηση. Τότε διαδοχικά θα έχουμε  $V(1, \text{ομολογία}2) = V(1, \text{αρνηση}2) \Rightarrow -3p - 6(1 - p) = 0p - 1(1 - p) \Rightarrow$

$$-3p + 6p - p = -1 + 6 \Rightarrow 2p = 5 \Rightarrow p = 2,5.$$

Προφανώς άτοπο γιατί  $p > 1$ . Αυτό συμβαίνει γιατί το πρόβλημα έχει σαγματικό σημείο δηλαδή υπάρχει ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές. Είναι λοιπόν ενδεδειγμένο πάντα να ελέγχουμε από την αρχή την ύπαρξη λύσης ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές και μετά να καταφεύγουμε στις μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις ωφέλειας. Εκτός αν προτιμούμε να εργαζόμαστε με τον εκτεταμένο μαθηματικό τρόπο, που δίνει πάντα αποτέλεσμα.

### 1.6.1. Παίγνια σταθερού αθροίσματος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πίνακα απολαβών για τον παίκτη A, όπου το παίγνιο είναι το πώς θα μοιραστεί ένα κομμάτι αγοράς αξίας 100 σε δυο παίκτες. Στις γραμμές είναι οι στρατηγικές που μπορεί να ακολουθήσει ο παίκτης A και στις στήλες οι αντίστοιχες του B. Το παίγνιο παίζεται ταυτόχρονα. Η λύση θα είναι ο συνδυασμός των στρατηγικών που θα μεγιστοποιήσει τις απολαβές των δυο παικτών. Με δεδομένο ότι το άθροισμα των απολαβών είναι σταθερό σημαίνει ότι αύξηση των απολαβών του παίκτη A σημαίνει μείωση στις απολαβές του B. Δηλαδή αν ο A επιλέξει τη στρατηγική A1 κερδίζει 30 μονάδες και αν συγχρόνως ο B επιλέξει B1 θα κερδίσει 70 μονάδες. Σκοπός του παιγνίου είναι ο A να κερδίσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μερίδιο με δεδομένο ότι ο B θα προσπαθήσει να τον εμποδίσει και αντίστροφα.

|                      |                | Στρατηγικές παίκτη 2 |    |    | Ελάχιστο γραμμών |
|----------------------|----------------|----------------------|----|----|------------------|
|                      |                | A2                   | B2 | Γ2 |                  |
| Στρατηγικές παίκτη 1 | A1             | 30                   | 25 | 70 | 25               |
|                      | B1             | 20                   | 60 | 20 | 20               |
|                      | Γ1             | 40                   | 40 | 45 | 40*              |
|                      | Μέγιστο στηλών | 40*                  | 60 | 70 | 40               |

Πίνακας 1.6.7. απολαβές του παίκτη 1

Δεν πρέπει να παραβλέπουμε ότι και οι δυο παίκτες είναι ορθολογικοί, οι στρατηγικές είναι αμιγείς και υπάρχει τέλεια πληροφόρηση.

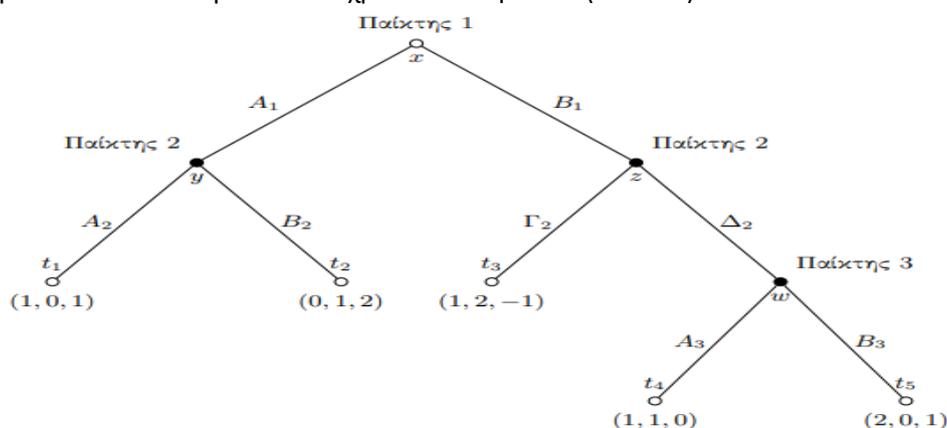
Η τεχνική που χρησιμοποιούμε είναι minimax-maximin, δηλαδή σημειώνουμε στη γραμμή «μέγιστα στηλών» το μέγιστο κάθε στήλης και κρατάμε το ελάχιστο από αυτά (minimax) και αντίστοιχα σημειώνουμε το ελάχιστο κάθε γραμμής στην στήλη «ελάχιστα γραμμών» και κρατάμε το μέγιστο από αυτά (maximin). Με αυτή την τελική επιλογή (Γ1, Α2) κανείς από τους δύο παίκτες δεν θα μετανιώσει συνεπώς έχουμε ισορροπία Nash και το επιλεγμένο ζευγάρι είναι **σαγματικό σημείο (saddle point)**. Η τιμή 40 λέγεται αξία του παιχνιδιού. Η στρατηγική του 1 είναι να επιλέξει το μέγιστο δυνατόν κέρδος για τον εαυτό του και του 2 να ελαχιστοποιήσει τις απολαβές του παίκτη 1. Συνεπώς ο 1 με δεδομένο ότι ο 2 αντιστέκεται στην στρατηγική του είναι υποχρεωμένος να κινηθεί στη στρατηγική **maximin** δηλαδή να επιλέξει τη στρατηγική που του δίνει το μέγιστο από τα ελάχιστα προσδοκώμενα κέρδη, ενώ ο 2 που είναι επίσης ορθολογικός να κάνει ακριβώς το αντίθετο (**minimax**).

Τα παραπάνω συμπεράσματα στηρίχθηκαν στο γεγονός ότι δουλέψαμε με τον πίνακα απολαβών του παίκτη 1. Αν σκεφτόμαστε με βάση τον πίνακα απολαβών του 2 παίκτη τότε οι στρατηγικές γίνονται ονομαστικά ανάποδες αλλά η ισορροπία (Γ1, Α2) δεν αλλάζει. Αυτό φυσικά γίνεται γιατί τα συμφέροντα είναι συμπληρωματικά. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι τη σημερινή εποχή τέτοιου είδους παίγνια όπως και παίγνια μηδενικού αθροίσματος μπορούν να αντιμετωπισθούν με αλγοριθμικές μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού (Barron- Game Theory 2006)

## 1.7. παίγνια διαδοχικών κινήσεων (δυναμικά παίγνια)

Τα παίγνια «ενός γύρου» που αναφέραμε στις προηγούμενες ενότητες στα οποία οι παίκτες ενεργούν ταυτόχρονα λέγονται και **στατικά** παίγνια. Όταν ένα παίγνιο στο οποίο οι παίκτες ενεργούν διαδοχικά λέγεται **διαδοχικών κινήσεων**. Δηλαδή σε ένα παίγνιο διαδοχικών κινήσεων ο παίκτης 1 παίζει πρώτος και ο παίκτης 2 αφού εξετάσει τι έχει ήδη παίξει ο παίκτης 1 κάνει την κίνησή του (παίγνιο τέλει πληροφόρησης). Φυσικά ο παίκτης 1 πριν κινηθεί θα εξετάσει όλες τις δυνατές απαντήσεις του παίκτη 2 και αναλόγως θα κάνει την κίνησή του.

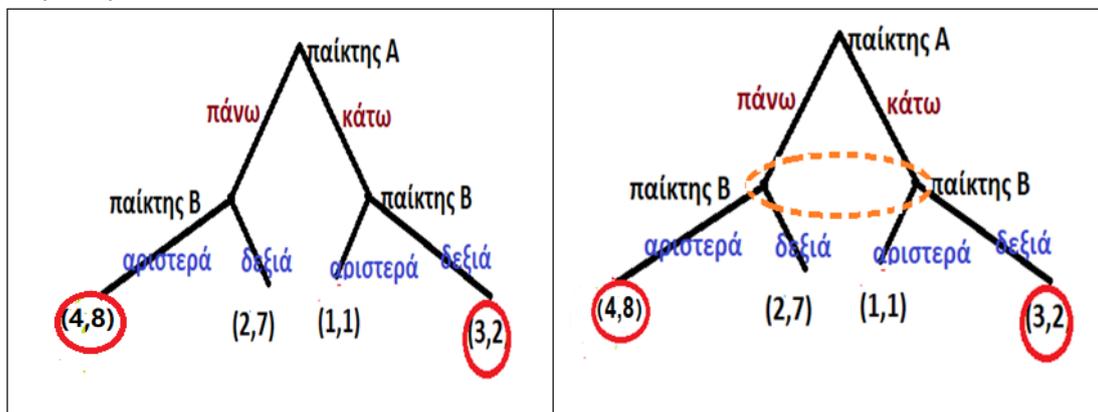
Θα μπορούσε να υπάρχει και παίγνιο διαδοχικών κινήσεων στο οποίο ο παίκτης 2 να μην γνωρίζει την κίνηση του παίκτη 1 (παίγνιο ατελούς πληροφόρησης) αλλά αυτό δεν θα διέφερε από ένα παίγνιο ταυτόχρονων κινήσεων (στατικό).



Σχήμα 1.7.1. Δένδρο αποφάσεων παιχνιδιού. (αντιγραφή από το βιβλίο «δυναμικά παίγνια» Σταματόπουλος Γεώργιος)

Ένα δένδρο αποφάσεων παιχνιδιού είναι ένα σύνολο **κόμβων** και **ακμών**. Οι κόμβοι είναι είτε κόμβοι **αποφάσεων** (x,y,z,w) είτε **τερματικοί** ( $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ ). Οι ακμές είναι οι διάφορες

κινήσεις (στρατηγικές) που έχει το δικαίωμα να κάνει κάθε παίκτης. Στους τερματικούς κόμβους υπάρχουν οι αποδόσεις κάθε διαδρομής, διαδοχικά για τον κάθε παίκτη. Στο παραπάνω σχήμα 1.7.1. όταν είμαστε στον τερματικό κόμβο  $t_4$  γνωρίζουμε ότι ο παίκτης 1 έχει επιλέξει  $B_1$  και έχει πάρει απόδοση 1, κατόπιν ο παίκτης 2 έχει επιλέξει  $\Delta_2$  με απόδοση 1 επίσης και ο παίκτης 3 επέλεξε  $A_3$  με απόδοση 0. Σε ένα δέντρο αποφάσεων παιγνίου διαδοχικών κινήσεων μπορούμε να διακρίνουμε εύκολα τις στρατηγικές που έχει διαθέσιμες κάθε παίκτης και που αυτές ταυτίζονται με τις επιλογές που έχει κάθε φορά που είναι η σειρά του να παίξει. Στο σχήμα() παρατηρούμε ότι ο παίκτης 1 έχει 2 επιλογές τις  $A_1, B_1$ , ο παίκτης 2 έχει 4 επιλογές, τις  $A_2, B_2$  αν ο παίκτης 1 παίξει  $A_1$  και τις  $\Gamma_2, \Delta_2$  αν ο παίκτης 1 παίξει  $B_1$ , ενώ ο παίκτης 3 έχει 2 επιλογές τις  $A_3, B_3$ . Στο ίδιο σχήμα αξίζει να σημειώσουμε ότι ο παίκτης 1 έχει ένα σύνολο πληροφορίας (κόμβος  $x$ ), ο παίκτης 2 έχει δύο σύνολα πληροφορίας (κόμβοι  $y, z$ ) γιατί όταν έρθει η σειρά του να παίξει θα γνωρίζει τι έχει παίξει ήδη ο παίκτης 1 και ο παίκτης 3 ένα σύνολο πληροφορίας (κόμβος  $\omega$ ). Αυτό που περιγράψαμε είναι παίγνιο τέλει και πλήρους πληροφόρησης (αφού είναι γνωστές και οι αποδόσεις κάθε παίκτη) αλλά αν ο παίκτης 2 δεν γνώριζε τι έπαιξε ο παίκτης 1 τότε οι κόμβοι  $y, z$  θα ανήκαν στο ίδιο σύνολο πληροφορίας και το παίγνιο θα ήταν ατελούς πληροφόρησης.



Σχήμα 1.7.2. Αριστερά παίγνιο τέλει πληροφόρησης και δεξιά παίγνιο ατελούς πληροφόρησης, όπου η οβάλ διακεκομμένη γραμμή υπονοεί ότι ο παίκτης B δεν γνωρίζει την κίνηση του παίκτη A.

Η έννοια της ισορροπίας που θα εξετάσουμε θα είναι επίσης η ισορροπία Nash και θα κάνουμε σε μερικά σημεία σύγκριση με την ισορροπία κατά Pareto. Θα εξετάσουμε μερικά παίγνια διαδοχικών κινήσεων τέλει πληροφόρησης μεταξύ δυο παικτών A και B

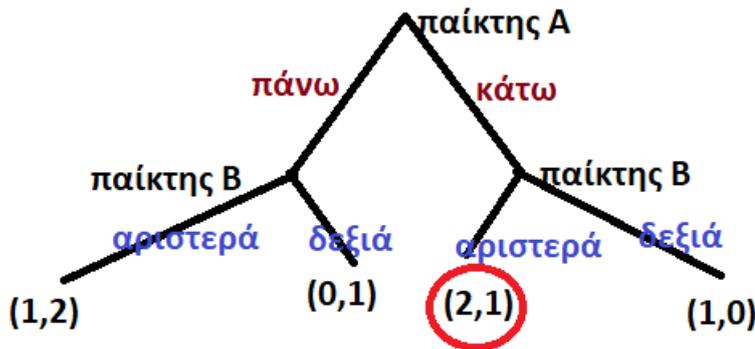
### Παράδειγμα 1

|         | B Αριστερά | B. Δεξιά |
|---------|------------|----------|
| A. Πάνω | 1,2        | 0,1      |
| A. Κάτω | 2,1        | 1,0      |

Πίνακας 1.7.1. ανταμοιβών του παίγνιου

Πως παίζεται: Ο παίκτης A επιλέγει Πάνω ή Κάτω και ο παίκτης B **απαντά** Αριστερά ή Δεξιά. Σε κάθε ζευγάρι ο πρώτος αριθμός αφορά την απόδοση του παίκτη A.

Από τον πίνακα αποδόσεων είναι σε κάθε περίπτωση καλύτερο για τον A να επιλέξει κάτω. Υπό αυτή την προϋπόθεση ο B που επιλέγει μετά, θα επιλέξει αριστερά.



Σχήμα 1.7.3.

Συνεπώς η λύση εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι είναι (Κάτω , Αριστερά) . Εδώ εύκολα διαβάζεται το παίγνιο από κάτω προς τα επάνω . Δηλαδή ο παίκτης Β θα παίξει οποσδήποτε αριστερά ανεξαρτήτως τι θα επιλέξει ο Α. Αυτό ο Α το καταλαβαίνει και επιλέγει κάτω. Συνεπώς έχουμε κυρίαρχη στρατηγική για τον κάθε παίκτη.

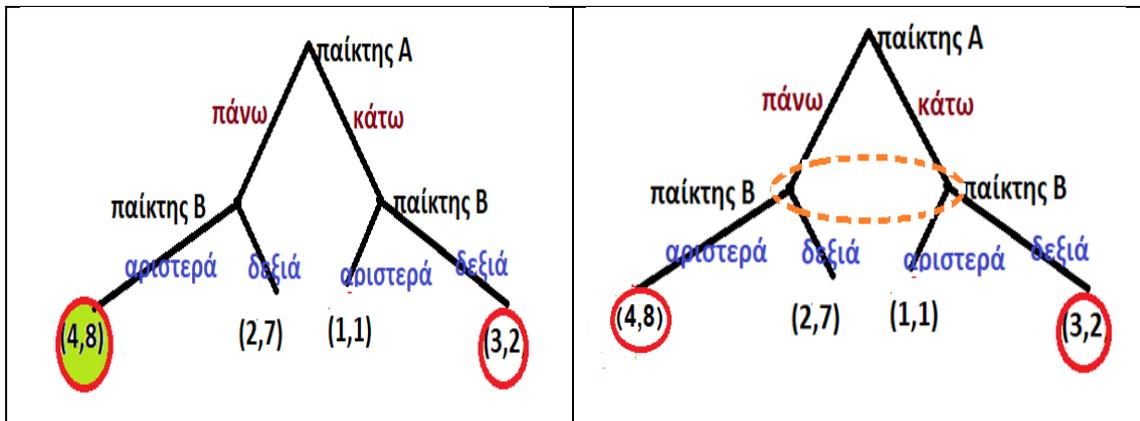
Αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, οπότε ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα στο οποίο δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές όταν το παίγνιο εξετάζεται ως στατικό.

### Παράδειγμα 2

|         | B Αριστερά | B. Δεξιά |
|---------|------------|----------|
| A. Πάνω | 4, 8       | 2, 7     |
| A. Κάτω | 1, 1       | 3, 2     |

Πίνακας 1.7.2. ανταμοιβών του παίγνιου

Αντιμετωπίζοντας το παίγνιο ως στατικό δηλαδή ταυτόχρονων κινήσεων ή απλά με διαδοχικές κινήσεις χωρίς να ξέρει ο κάθε παίκτης τι έπαιξε ο αντίπαλός του –το ίδιο είναι – παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική αλλά υπάρχουν δυο σημεία ισορροπίας Nash. Δηλαδή αν ο Α επιλέξει Πάνω ο Β θα επιλέξει Αριστερά και αν ο Α επιλέξει Κάτω ο Β θα επιλέξει Δεξιά. Με δεδομένο όμως ότι το παίγνιο δεν είναι στατικό δηλαδή ο Β γνωρίζει τι έκανε ο Α , τότε ο Α θα κάνει την καλύτερη κίνησή του που είναι Πάνω και ο Β θα απαντήσει Αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο (Πάνω , Αριστερά) έχει το καλύτερο αποτέλεσμα και για τους δύο κατά Pareto και φυσικά αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική.



**Σχήμα 1.7.4.** στο αριστερό σχήμα παρατηρούμε την κυρίαρχη στρατηγική που καταλήγει στην πράσινη απόδοση (4,8) σε παίγνιο τέλει πληροφόρησης, ενώ δεξιά όπου το παίγνιο είναι ατελούς πληροφόρησης παρατηρούμε ότι υπάρχουν απλά δυο σημεία ισορροπίας.

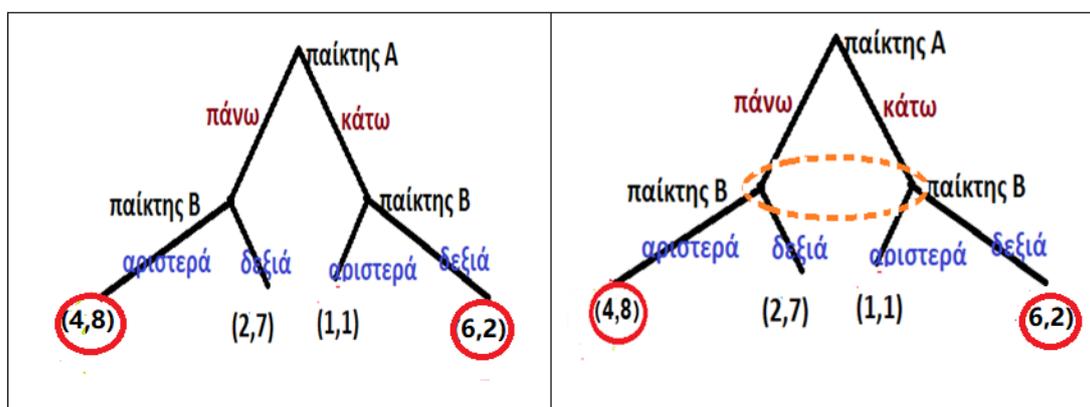
### Παράδειγμα 3

Το παίγνιο γίνεται λίγο πιο δύσκολο.

|         | B Αριστερά | B. Δεξιά |
|---------|------------|----------|
| A. Πάνω | 4, 8       | 2, 7     |
| A. Κάτω | 1, 1       | 6, 2     |

**Πίνακας 1.7.3.** ανταμοιβών του παιγνίου.

Αν εξετάσουμε το παίγνιο ως ταυτόχρονων κινήσεων (στατικό) δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική, υπάρχουν δυο σημεία ισορροπίας Nash, δηλαδή αν ο A επιλέξει Πάνω ο B θα επιλέξει Αριστερά και αν ο A επιλέξει Κάτω ο B θα επιλέξει Δεξιά.



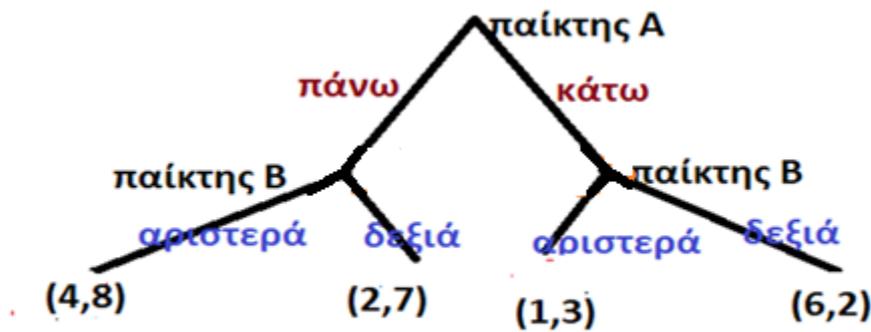
**Σχήμα 1.7.5.** Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο σημεία ισορροπίας Nash είτε το παίγνιο είναι τέλει (αριστερά) είτε ατελούς (δεξιά) πληροφόρησης.

Εξετάζοντας όμως το παίγνιο ως παίγνιο διαδοχικών κινήσεων ο A δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο τι του συμφέρει να κάνει. Αν επιλέξει πάνω με κέρδος 4, ο B θα επιλέξει αριστερά με κέρδος 8, ενώ αν ο A επιλέξει κάτω με κέρδος 6, ο B θα επιλέξει δεξιά με κέρδος 2. Σ αυτή την περίπτωση όμως δεν έχουμε ισορροπία κατά Pareto, δηλαδή ο B δεν βρίσκεται στην καλύτερη κατάσταση που θα μπορούσε. Με δεδομένο όμως ότι ο A παίζει πρώτος στη θέση (κάτω, δεξιά) το παίγνιο τελειώνει με τον A ευχαριστημένο και τον B δυσαρεστημένο.

### Παράδειγμα 4

|         | B Αριστερά | B. Δεξιά |
|---------|------------|----------|
| A. Πάνω | 4, 8       | 2, 7     |
| A. Κάτω | 1, 3       | 6, 2     |

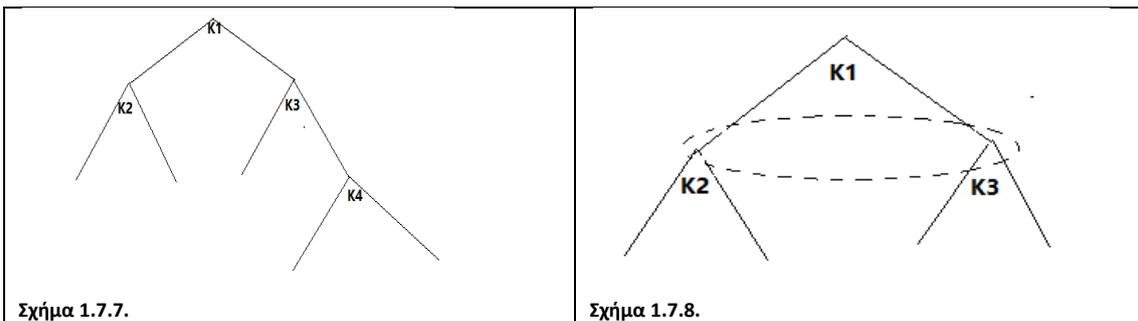
**Πίνακας 1.7.4.** ανταμοιβών του παιγνίου



Σχήμα 1.7.6.

Εδώ τα πράγματα μπερδεύτηκαν πολύ. Ο Α θα είχε συμφέρον να κινηθεί κάτω που υπάρχει η ανταμοιβή 6 αλλά τότε ο Β απαντάει με αριστερά και το παίγνιο λήγει με ήττα του Α. Δεν υπάρχει ισορροπία Nash .

Πολλές φορές όπως έγινε αντιληπτό από τα παραπάνω παραδείγματα τα παίγνια διαδοχικών κινήσεων δεν είναι εύκολο να αναλυθούν και να βρεθεί η λύση τους, όμως είναι πιο εύκολο να αναλυθούν από το τέλος προς την αρχή. Αυτή η επαγωγική διαδικασία της εξέτασης του παιγνίου από το τέλος προς την αρχή λέγεται ανάλυση κατά **υποπαίγνιο**.



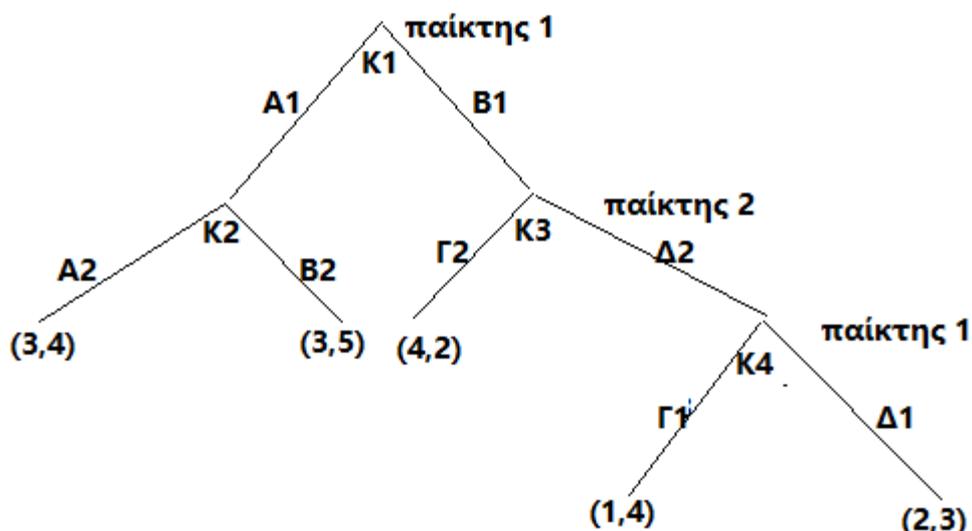
Σχήμα 1.7.7.

Σχήμα 1.7.8.

Το παίγνιο (αν εξετάσω το δέντρο ως παίγνιο) στο σχήμα 1.7.7. έχει 4 υποπαίγνια. Το υποπαίγνιο που ξεκινά από τον κόμβο K4 , αυτό που ξεκινά από τον κόμβο K3, αυτό που ξεκινά από τον κόμβο K2 και ολόκληρο το παίγνιο που είναι υποπαίγνιο του εαυτού του. Αντιθέτως το παίγνιο του σχήματος 1.7.8. έχει ως μοναδικό υποπαίγνιο τον εαυτό του γιατί τα υποπαίγνια στους κόμβους K2 και K3 δεν μπορούν να θεωρηθούν ως τέτοια αφού ανήκουν στο ίδιο σύνολο πληροφορίας.

Μια ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο παρουσιασμένο σε εκτεταμένη μορφή ονομάζεται τέλεια κατά υποπαίγνιο αν ο περιορισμός της στο υποπαίγνιο είναι ισορροπία Nash. Δηλαδή οι τέλειες κατά υποπαίγνιο ισορροπίες Nash είναι στοιχεία του συνόλου των ισορροπιών Nash του παιγνίου , ενώ μια ισορροπία Nash του παιγνίου δεν είναι υποχρεωτικά και τέλεια κατά κάθε υποπαίγνιο ισορροπία. Με το παρακάτω παράδειγμα εξηγήουμε την διαδικασία της προς τα πίσω επαγωγής ανά υποπαίγνιο για να επιλύσουμε ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή.

## Παράδειγμα 5



Σχήμα 1.7.9.

Ας αρχίσουμε να εξετάζουμε το παίγνιο του σχήματος 1.7.9. από τον κόμβο K4. Ο παίκτης 1 θα επιλέξει την κίνηση  $\Delta 1$  γιατί έχει απόδοση 2 έναντι της  $\Gamma 1$  που έχει απόδοση 1. Αν πάμε ένα βήμα πίσω στον κόμβο K3 ο παίκτης 2 ανάμεσα στις επιλογές  $\Gamma 2$  και  $\Delta 2$  θα επιλέξει  $\Delta 2$  αφού αυτή η κίνηση οδηγεί σε καλύτερες αποδόσεις για αυτόν. Αν μεταφερθούμε στον κόμβο K2 ο παίκτης 2 ομοίως θα επιλέξει την κίνηση  $B 2$  που οδηγεί σε απόδοση 5 έναντι της απόδοσης 4 που εξασφαλίζει η επιλογή  $A 2$ . Πηγαίνοντας πίσω τώρα στον αρχικό κόμβο K1, ο παίκτης 1 γνωρίζει ότι η επιλογή  $B 1$  οδηγεί σε απόδοση 2, ενώ η επιλογή  $A 1$  οδηγεί σε απόδοση 3 και ως εκ τούτου επιλέγει  $A 1$ . Η λύση του παιγνίου λοιπόν που οδηγεί σε ισορροπία Nash είναι η ακόλουθη. Ο παίκτης 1 επιλέγει  $A 1$  και ο παίκτης 2 απαντά με  $B 2$ .

## 1.8. Επαναλαμβανόμενα παίγνια

Έστω το γνωστό παίγνιο με τη ρίψη νομίσματος, το οποίο οι παίκτες αποφασίζουν να παίξουν παραπάνω από μια φορά. Ένα τέτοιο παίγνιο στο οποίο κάθε γύρος επαναλαμβάνεται λέγεται **επαναλαμβανόμενο παίγνιο**. Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια είναι υποκατηγορία των παιγνίων διαδοχικών κινήσεων (των δυναμικών παιγνίων). Αυτό που εξετάζουμε εδώ είναι η δυνατότητα οι παίκτες να αλλάζουν τον τρόπο με τον οποίο ενήργησαν στον προηγούμενο γύρο και να ελέγξουμε αν υπάρχουν στρατηγικές στις οποίες οι παίκτες καταλήγουν και δεν έχουν κανένα συμφέρον πλέον να αλλάξουν. Τα επαναλαμβανόμενα παίγνια μπορεί να τελειώνουν σε προκαθορισμένο αριθμό γύρων ή να συνεχίζονται με άπειρο αριθμό επαναλήψεων. Η πιο συνηθισμένη μορφή παρουσίασης ενός επαναλαμβανόμενου παιγνίου είναι η εκτεταμένη δηλαδή με δένδροδιάγραμμα. Αυτά με τα οποία θα ασχοληθούμε εδώ είναι παίγνια στα οποία οι αποδόσεις στο τέλος του κάθε γύρου δεν αλλάζουν και οι παίκτες γνωρίζουν ποια ήταν η έκβαση του παιγνίου στον προηγούμενο γύρο. Στα επαναλαμβανόμενα παίγνια υπάρχει ένας νεωτερισμός σε σχέση με τα στατικά. Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα συνεργασίας των παικτών σε κάποιο στάδιο της εξέλιξης του παιγνίου η οποία συνήθως συνοδεύεται με μια ρήτρα αθέτησης της συμφωνίας. Ο παίκτης που αποφασίζει να αθετήσει τη συμφωνία επιβαρύνεται με μια ποινή την οποία έχει υποχρέωση να συνυπολογίσει στα πιθανά κέρδη που προσδοκάει από την διαφοροποίηση. Φυσικά κάθε παίκτης πρέπει να είναι προετοιμασμένος για το τι θα μπορούσε να αποφασίσει ο αντίπαλος στον επόμενο γύρο αναφορικά με τη συμφωνία και

αυτό βέβαια κάνει αυτού του είδους επαναλαμβανόμενα παίγνια πιο πολύπλοκα σε σχέση με τα στατικά.

Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσω είναι γενικός και ίδιος στα βιβλία και του Γ. Σταματόπουλου (Θεωρία Παιγνίων 2015) και του Κ. Μηλολιδάκη (Θεωρία παιγνίων 2009) αλλά και στη ξενόγλωσση βιβλιογραφία. Για λόγους απλούστευσης θα περιοριστώ σε παίγνια που παίζονται από 2 παίκτες.

Έστω ένα στατικό παίγνιο  $\Gamma$  που παίζεται από 2 παίκτες, σε  $T$  χρονικές περιόδους, Το  $T$  μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

$X_i, i = 1,2$  είναι το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη  $i$ .

$u_i, i = 1,2$  είναι η συνάρτηση ωφέλειας του παίκτη  $i$ .

$t, t=1,2,\dots,T$  είναι μια χρονική περίοδος μέσα στην οποία λαμβάνει χώρα μια επανάληψη του παιγνίου (στάδιο, ή γύρος).

$x^t$ , είναι το διάνυσμα  $x^t = (x_1^t, x_2^t)$  που περιγράφει τις ενέργειες των παικτών 1 και 2 στην χρονική περίοδο  $t$ . Συνεπώς η συνάρτηση ωφέλειας του παίκτη 1 στη χρονική περίοδο  $t$  είναι  $u_1^t = u_1(x^t) = u_1(x_1^t, x_2^t)$  και αντίστοιχα η συνάρτηση ωφέλειας του παίκτη 2 στη χρονική περίοδο  $t$  είναι  $u_2^t = u_2(x^t) = u_2(x_1^t, x_2^t)$ .

**m- ιστορία** είναι το σύνολο των ενεργειών των παικτών από τη χρονική περίοδο  $t=1$  έως τη χρονική περίοδο  $t=m$ .

$h^m = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^m)$ , είναι το διάνυσμα μιας  $m$ - ιστορίας.

$H^m$ , είναι το σύνολο όλων των  $m$  – ιστοριών.

Όταν  $m=T$  τότε η ιστορία λέγεται **τερματική**. Κάθε  $m$  – ιστορία είναι υποακολουθία της τερματικής ιστορίας. Όταν το  $T$  είναι άπειρο τότε το διάνυσμα της τερματικής ιστορίας συμβολίζεται με  $h^\infty = (x^1, x^2, x^3, \dots)$ .

$\delta$  : είναι ο συντελεστής προεξόφλησης ενός παίκτη. Δηλαδή. Ένας παίκτης που συμμετέχει σε ένα επαναλαμβανόμενο παίγνιο αποκομίζει μια απόδοση σε κάθε στάδιο (γύρο) του παιγνίου, οπότε όταν στο παίγνιο παichτούν  $n$  γύροι έχει δημιουργήσει μια ακολουθία αποδόσεων. Το άθροισμα όλων αυτών των αποδόσεων είναι η προεξοφλητική αξία του παιγνίου σε σταθερές τιμές. Όμως πολλές φορές στην πράξη ένας παίκτης δεν εκτιμά την αξία μιας μονάδας απόδοσης σήμερα με την αξία που θα έχει αυτή η μονάδα αύριο. Θεωρούμε λοιπόν ότι η αξία μιας μονάδας «αύριο» αντιστοιχεί στην αξία  $\delta$  μονάδων «σήμερα» με  $0 < \delta < 1$ . Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα ομόλογο που σε ένα χρόνο από σήμερα θα αξίζει 100 ευρώ όταν το επιτόκιο είναι 10%. Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι αν το πουλούσαμε σήμερα θα έπρεπε να πάρουμε  $\frac{100}{1+0,1} = 90,90$  ευρώ. Ο συντελεστής προεξόφλησης είναι  $\delta = \frac{1}{1+0,1} = 0,91$  περίπου. Προφανώς όσο πιο μακριά από το 1 και όσο πιο κοντά στο 0 είναι το  $\delta$ , τόσο πιο απωθητικό είναι για κάποιον να αγοράσει αυτό το ομόλογο σήμερα στην τιμή των 100 ευρώ.

$G^T(\delta)$ : είναι το επαναλαμβανόμενο παίγνιο που τερματίζεται μετά από  $T$  στάδια, κάθε στάδιο του οποίου είναι το  $\Gamma$ .

$G^\infty(\delta)$ : είναι το επαναλαμβανόμενο παίγνιο που δεν τερματίζεται, κάθε στάδιο του οποίου είναι το  $\Gamma$ .

Υποθέτοντας ότι το  $\delta$  είναι σταθερό σε κάθε στάδιο και ίδιο για κάθε παίκτη, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις που αποτιμούν τις ιστορίες  $\mathbf{h}^T$  και  $\mathbf{h}^\infty$  αντίστοιχα.

$$V_i = \sum_{t=1}^T \delta^{t-1} u_i(\mathbf{x}^t), \quad i = 1, 2 \quad (1) \text{ και}$$

$$V_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(\mathbf{x}^t), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Αν ορίσουμε ένα αριθμό  $c$  τέτοιο ώστε η ακολουθία αποδόσεων  $(u_i^1, u_i^2, u_i^3, \dots)$ ,  $i=1,2,3,\dots$  του κάθε παίκτη να μην διαφέρει από την  $(c, c, c, \dots)$  στη λογική δηλαδή ο κάθε παίκτης να είναι αδιάφορος για το ποια από τις δύο ισχύει, τότε ο τύπος (2) δίνει

$$V_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} c, \quad i = 1, 2 \Rightarrow V_i = \frac{c}{1-\delta} \Rightarrow (1-\delta)V_i = c \quad (3)$$

Ο όρος  $c = (1-\delta)V_i$  είναι ο προεξοφλημένος μέσος της ακολουθίας αποδόσεων  $(u_i^1, u_i^2, u_i^3, \dots)$ .

$s_i^t: \mathbf{H}^{t-1} \rightarrow \mathbf{X}_i$  είναι η ακολουθία συναρτήσεων του συνόλου των  $t-1$  ιστοριών του επαναλαμβανόμενου παιγνίου στο σύνολο των στρατηγικών του παίκτη  $i$ . Δηλαδή το  $s_i^t(h_1^{t-1})$  προσδιορίζει την στρατηγική του παίκτη 1 ως συνάρτηση της  $h^{t-1}$  ιστορίας. Με απλά λόγια ο παίκτης επιλέγει την στρατηγική που θα ακολουθήσει λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των προηγούμενων ενεργειών και των δυο.

Θα χρησιμοποιήσω για παράδειγμα το «δίλημμα των φυλακισμένων» σε 3 επαναλήψεις για να γίνουν κατανοητοί οι συμβολισμοί.

|                           |          | Στρατηγική φυλακισμένου 2 |         |
|---------------------------|----------|---------------------------|---------|
|                           |          | ομολογία                  | άρνηση  |
| Στρατηγική φυλακισμένου 1 | ομολογία | (-3,-3)                   | (0,-6)  |
|                           | άρνηση   | (-6,0)                    | (-1,-1) |

Πίνακας 1.8.1.

Εφόσον οι επαναλήψεις θα είναι 3 τότε  $T=3$ .

Μια 1-ιστορία είναι για παράδειγμα το ζεύγος  $\mathbf{h}^1 = (\text{ομολογία}(O), \text{άρνηση}(A))$ .

Οι ωφέλειες των παικτών θα είναι αντίστοιχα  $u_1(O, A) = 0$  και  $u_2(O, A) = -6$

Το σύνολο  $\mathbf{H}^1 = \{(O, O), (O, A), (A, O), (A, A)\}$ , όλων των  $\mathbf{h}^1$  ιστοριών.

Μια 2-ιστορία θα αποτελείται από ένα ζεύγος της 1-ιστορίας και ένα ζεύγος του δεύτερου γύρου. Για παράδειγμα  $\mathbf{h}^2 = ((O, A), (A, A))$ . Οι ωφέλειες τώρα των παικτών θα είναι:

$$V_1 = u_1(O, A) + \delta u_1(A, A) = 0 + \delta(-1) \quad \text{και} \quad V_2 = u_2(O, A) + \delta u_2(A, A) = -6 + \delta(-1)$$

Το σύνολο:

$$\mathbf{H}^2 = \{((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{O})), ((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{A})), ((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{A}, \mathbf{O})), ((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{A}, \mathbf{A})), \dots, ((\mathbf{A}, \mathbf{A}), (\mathbf{A}, \mathbf{A}))\}$$

που έχει ως στοιχεία όλα τα  $\mathbf{h}^2$  θα είναι ουσιαστικά το καρτεσιανό γινόμενο  $\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1$  και θα περιέχει 16 στοιχεία.

Ομοίως για την 3-ιστορία έστω  $\mathbf{h}^3 = ((\mathbf{O}, \mathbf{A}), (\mathbf{A}, \mathbf{A}), (\mathbf{O}, \mathbf{O}))$  και το σύνολο που θα την περιγράφει θα είναι το  $\mathbf{H}^3 = \mathbf{H}^2 \times \mathbf{H}^1$  και θα περιέχει 64 στοιχεία, το όφελος δε αντίστοιχα θα είναι :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{O}, \mathbf{A}) + \delta \mathbf{u}_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}) + \delta^2 \mathbf{u}_1(\mathbf{O}, \mathbf{O}) = \mathbf{0} + \delta(-1) + \delta^2(-3) \text{ και}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{O}, \mathbf{A}) + \delta \mathbf{u}_2(\mathbf{A}, \mathbf{A}) + \delta^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{O}, \mathbf{O}) = -6 + \delta(-1) + \delta^2(-3)$$

Ας δούμε τώρα πως θα συμβολίζαμε τις στρατηγικές κάθε παίκτη ως συνάρτηση της έκβασης του παιγνίου σε κάθε γύρο. Θα το δείξω για τον παίκτη 1 και ομοίως θα γίνεται για τον παίκτη 2 .

Γύρος 1

Ο παίκτης 1 επιλέγει  $\mathbf{O}$  άρα  $s_1^1(h^0) = \mathbf{O}$

Γύρος 2

Ο παίκτης 1 επιλέγει  $\mathbf{O}$  αν το αποτέλεσμα του γύρου 1 είναι  $(\mathbf{O}, \mathbf{O})$  ειδάλλως επιλέγει  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Άρα } s_1^2(h^1) = \begin{cases} \mathbf{O}, & \text{αν } h^1 = (\mathbf{O}, \mathbf{O}) \\ \mathbf{A}, & \text{αν } h^1 \neq (\mathbf{O}, \mathbf{O}) \end{cases}$$

Γύρος 3

Ο παίκτης 1 επιλέγει  $\mathbf{O}$  αν το αποτέλεσμα των δύο πρώτων γύρων είναι  $((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{O}))$ , ειδάλλως επιλέγει  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Άρα } s_1^3(h^2) = \begin{cases} \mathbf{O}, & \text{αν } h^2 = ((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{O})) \\ \mathbf{A}, & \text{αν } h^2 \neq ((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{O})) \end{cases}$$

Ας σκεφτούμε αυτό το παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή και ας εξετάσουμε από πίσω προς τα εμπρός τη συμπεριφορά των παικτών. Θα κάνουμε την ανάλυση για τις τρεις επαναλήψεις που το αρχίσαμε αλλά όπως θα διαπιστώσουμε δεν θα άλλαζε τίποτα αν βρισκόμαστε σε οποιοδήποτε χρονική περίοδο  $t > 3$ . Οι παίκτες που είναι ορθολογικοί όταν καλούνται να πάρουν αποφάσεις για το τι θα κάνουν στην τρίτη επανάληψη προφανώς θα ενεργήσουν προς την κατεύθυνση της μοναδικής ισορροπίας Nash που έχει το παίγνιο αν ήταν στατικό γιατί αυτό δεν θα ήταν προς βλάβη των συμφερόντων τους. Δηλαδή θα αδιαφορήσουν για το τι έγινε στο παρελθόν και προφανώς για το τι θα γίνει στο μέλλον. Το ίδιο θα συμβεί όταν εξετάσουμε το παίγνιο στο δεύτερο γύρο και ομοίως στον πρώτο. Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο εξετάζοντας τα υποπαίγνια επαγωγικά, ότι και  $T$  επαναλήψεις να είχαμε ότι η μοναδική ισορροπία Nash θα επαναλαμβάνεται σε κάθε γύρο. Συνεπώς εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η οποιαδήποτε  $t$ -ιστορία που οδηγεί σε ισορροπία το συγκεκριμένο παίγνιο είναι η  $\mathbf{h}^t = ((\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{O}), (\mathbf{O}, \mathbf{O}) \dots, (\mathbf{O}, \mathbf{O}))$ . Η δε ωφέλεια των παικτών θα είναι η  $\mathbf{V}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{O}, \mathbf{O}) + \delta \mathbf{u}_i(\mathbf{O}, \mathbf{O}) + \delta^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{O}, \mathbf{O}) + \dots + \delta^{t-1} \mathbf{u}_i(\mathbf{O}, \mathbf{O})$ .

Τι θα μπορούσε όμως να διαφοροποιηθεί αν το παίγνιο δεν τελείωνε ποτέ, δηλαδή διεξαγόταν σε άπειρες (θεωρητικά) επαναλήψεις;

Κύριο χαρακτηριστικό του προβλήματος εδώ είναι ότι δεν υπάρχει τελευταίος γύρος ώστε να το αναλύσουμε με επαγωγή προς τα πίσω. Συνεπώς υπάρχει θέμα αθέτησης της συνεργασίας σε οποιοδήποτε στάδιο αν ο παίκτης διαγνώσει ότι η τιμωρία υστερεί έναντι του προσδοκώμενου κέρδους. Αυτό βέβαια θα είναι συνάρτηση της προεξόφλησης  $\delta$ . Θα δούμε λοιπόν το πρόβλημα «δίλημμα του φυλακισμένου» σε άπειρους γύρους πως θα μπορούσε να εξελιχθεί.

Γύρος 1

Ο  $i$ ,  $i=1,2$  παίκτης επιλέγει Ο (ομολογία)

Γύρος  $t>1$

Αν το αποτέλεσμα των προηγούμενων γύρων είναι (Ο,Ο) ο 1 παίκτης επιλέγει πάλι Ο, διαφορετικά επιλέγει Α.

Αυτό βέβαια είναι μια δυνητική απειλή που λέγεται **στρατηγική πυροδότησης** που εφαρμόζεται όταν ο  $i$  παίκτης αντιληφθεί παραβίαση της συμφωνίας. Εδώ πρέπει να επαναλάβουμε ότι οι παίκτες ενεργούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, οπότε δεν έχει σημασία ποιος θα παραβιάσει τη συμφωνία πρώτος αλλά η τιμωρία του παραβάτη θα διαρκέσει για πάντα.

- Ας δούμε την περίπτωση που ο παίκτης 1 παρατηρεί μετά το τέλος κάποιου γύρου ότι το αποτέλεσμα είναι (Ο,Ο) και δεν έχει κανένα λόγο να αλλάξει τη στρατηγική του στο διηνεκές. Τότε η μέση προ εξοφλημένη απόδοσή του θα είναι από τον τύπο (3)  $V_1 = \frac{-3}{1-\delta}$
- Από την άλλη αν κάποιος παίκτης στο τέλος κάποιου γύρου παρατηρήσει ότι το αποτέλεσμα δεν είναι (Ο,Ο) στον επόμενο γύρο θα πραγματοποιήσει την απειλή του. Χωρίς να αλλάζει η ουσία υποθέτω ότι ο παίκτης 1 επιλέγει να αλλάξει τη στρατηγική σε κάποιο γύρο και να παίξει Α (άρνηση) και θα έχει ως ανταμοιβή -6 ενώ ο παίκτης 2 θα έχει ανταμοιβή 0 γιατί σε αυτό το γύρο ο παίκτης 2 θα επιλέξει Ο (ομολογία). Τότε ο παίκτης 2 στον επόμενο γύρο θα επιλέξει να παίξει και αυτός Α και από εκεί και μετά το παίγνιο θα συνεχίσει έτσι παίζοντας και οι δύο Α, δηλαδή θα συνεχιστεί με (Α,Α) στο διηνεκές. Η προεξοφλημένη μέση απόδοση του παίκτη 1 θα είναι :

$$V_2 = (-6 + \delta(-1) + \delta^2(-1) + \delta^3(-1) + \dots) = -(6 + \frac{\delta}{1-\delta})$$

Θα συνέφερε λοιπόν στον παίκτη 1 να αλλάξει στρατηγική, δηλαδή σε κάποιο σημείο του παιγνίου να επιλέξει Α ως απάντηση στις προηγούμενες καταστάσεις (Ο,Ο) αν συνέβαινε:

$$-(6 + \frac{\delta}{1-\delta}) \geq \frac{-3}{1-\delta} \Rightarrow (6 + \frac{\delta}{1-\delta}) \leq \frac{3}{1-\delta} \Rightarrow \delta \geq \frac{3}{5}$$

Υπό την προϋπόθεση  $\delta \geq \frac{3}{5}$  το τμήμα του παιγνίου (υποπαιγνιο) από τη στιγμή της πυροδότησης και μετά συνιστά ισορροπία κατά Nash. Όμως ακριβώς για τους ίδιους λόγους και η πρώτη περίπτωση στην οποία οι παίκτες πειθαρχημένα παίζουν (Ο,Ο) πάντα, συνιστά ισορροπία Nash

Όπως είδαμε στις 2 περιπτώσεις του «απείρω» επαναλαμβανόμενου παιγνίου που αναφέρθηκε παραπάνω, παρουσιάζονται ισορροπίες Nash και βέβαια θα μπορούσε κανείς

να αναφέρει και πάρα πολλούς άλλους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να εξελιχθεί το παίγνιο και όλοι να οδηγούν υπό κατάλληλες συνθήκες σε ισορροπία Nash. Το πρόβλημα που υπάρχει και είναι σχεδόν αδύνατον να προβλεφθεί η λύση του, είναι ότι δεν μπορεί να υπολογιστεί ποιο είναι το πιο πιθανό σενάριο. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί να υποστηριχθεί από το «Δημώδες Θεώρημα» που η διατύπωση του από τον Βαρουφάκη (Θεωρία Παιγνίων 2007) είναι:

«Κάθε (ατομικά ορθολογικός) συνδυασμός αποδόσεων ωφέλειας κάθε στατικού παιγνίου που επαναλαμβάνεται ένα απροσδιόριστο αριθμό γύρων είναι ισορροπία Nash, ακόμη κι όταν η στατική του έκδοση χαρακτηρίζεται από μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική κάθε παίκτη» (Luce&Raiffa(1957) και Shubik (1959).

## 1.9. Διοπώλιο

Το διοπώλιο είναι μια μορφή αγοράς που αποτελείται από δυο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις με το ίδιο αντικείμενο, ανάμεσα στο μονοπώλιο και τον τέλει ανταγωνισμό.

Όταν στην αγορά υπάρχουν μόνον δυο επιχειρήσεις με το ίδιο αντικείμενο τότε:

1. οι επιχειρήσεις αποφασίζουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη την ποσότητα που θα παράγουν. Σε αυτή την περίπτωση το συνολικό προϊόν του διοπωλίου υπερβαίνει το συνολικό προϊόν του μονοπωλίου αλλά υστερεί έναντι του τέλει ανταγωνισμού. (Μοντέλο Cournot)
2. οι επιχειρήσεις αποφασίζουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη για την τιμή. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή είναι μεγαλύτερη από την τιμή του τέλει ανταγωνισμού αλλά υστερεί έναντι της τιμής του μονοπωλίου. (Μοντέλο Bertrand)
3. η μια επιχείρηση ηγείται στην αγορά και θέτει τους όρους και η άλλη ακολουθεί. (Μοντέλο Stackelberg)

Θα ασχοληθούμε στα πλαίσια ενός επαναλαμβανόμενου παίγνιου με μια εφαρμογή σε διοπώλιο Cournot. Υποθέτουμε ότι μια αγορά διαθέτει δυο επιχειρήσεις τις 1 και 2 που παράγουν το ίδιο προϊόν και ανταγωνίζονται στην αγορά μέσω της προσφερόμενης ποσότητας (μοντέλο Cournot). Δηλαδή προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους επιλέγοντας την κατάλληλη ποσότητα παραγωγής. Έστω η αγορά έχει γραμμική καμπύλη ζήτησης  $P=a-bQ$  και οι επιχειρήσεις παράγουν αντίστοιχα ποσότητες  $q_1, q_2$  με  $Q=q_1 + q_2$ . Έστω επίσης ότι έχουν το ίδιο οριακό κόστος  $c$ , οπότε το κόστος παραγωγής αντίστοιχα είναι  $C_1 = cq_1$  και  $C_2 = cq_2$ .

Αντίστοιχα τα κέρδη τους θα είναι  $\Pi_1 = (P - c)q_1$  και  $\Pi_2 = (P - c)q_2$ . Οπότε αντικαθιστώντας το  $P=a-bQ=a-b(q_1 + q_2)$  παίρνουμε για κάθε μία:

$$\Pi_i = aq_i - bq_1q_i - bq_2q_i - cq_i, \quad i = 1,2.$$

Προφανώς θα έχουμε μεγιστοποίηση κερδών όταν οι μερικές παράγωγοι των κερδών ως προς τις ποσότητες θα μηδενίζονται. Δηλαδή.

$$\begin{cases} \frac{d\Pi_1}{dq_1} = 0 \\ \frac{d\Pi_2}{dq_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2} \\ q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2} \end{cases} \text{ από όπου παίρνουμε επιλύοντας:}$$

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b} = q_c$$

Όταν αντικαταστήσω τις παραπάνω τιμές βρίσκω την τιμή ισορροπίας Cournot:

$$P_c = \frac{a+2c}{3}$$

Και τα κέρδη ισορροπίας Cournot για κάθε επιχείρηση :

$$\Pi_{ic} = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Βέβαια μια συνεννόηση μεταξύ των δύο επιχειρήσεων θα οδηγούσε στην παραγωγή ίσων ποσοτήτων που θα ήταν ίσες με το μισό της μονοπωλιακής ποσότητας παραγωγής  $q_m$  για κάθε μία από αυτές και που θα έφερνε και περισσότερα κέρδη. Όμως αυτή η συνεννόηση δεν θα μπορούσε να γίνει σε ένα στατικό παίγνιο ενός γύρου, γιατί οι επιχειρήσεις θα επέλεγαν στρατηγική παραγωγής  $q_c$  που θα ήταν και ισορροπία Nash.

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι οι επιχειρήσεις έρχονται σε μια συνεννόηση- συνεργασία να μοιραστούν τα κέρδη σαν η αγορά να ήταν μονοπωλιακή. Δηλαδή να παίζουν  $(\frac{q_m}{2}, \frac{q_m}{2})$  όπου  $q_m$  η μονοπωλιακή ποσότητα, που θα τους εξασφάλιζε κέρδη  $\Pi_{im} = (P_m - c) \frac{q_m}{2}$  σε κάθε επιχείρηση. Για να υπολογίσουμε ποια θα είναι η τιμή  $P_m$  του μονοπωλίου αρκεί να αντικαταστήσουμε  $P_m = a - bq_m$  οπότε  $\Pi_{im} = (a - bq_m - c) \frac{q_m}{2}$ , να παραγωγίσουμε ως προς  $q_m$  και να ζητήσουμε την παράγωγο να είναι 0. Διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{d\Pi_m}{dq_m} = -\frac{bq_m}{2} + \frac{a - bq_m - c}{2} = 0 \Rightarrow 2bq_m = a - c \Rightarrow q_m = \frac{a-c}{2b}$$

Οπότε  $P_m = a - b \frac{a-c}{2b} = \frac{2a-a+c}{2} = \frac{a+c}{2}$  και το μέγιστο κέρδος της αγοράς για την επιχείρηση ίση συνθήκες μονοπωλίου θα είναι:

$$\Pi_{im} = \left( \frac{a+c}{2} - c \right) \frac{a-c}{4b} = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι μια επιχείρηση παράγει ποσότητα  $\frac{a-c}{3b} = q_c$  δηλαδή την ποσότητα ισορροπίας Cournot και η άλλη επιλέγει να παράγει την μισή ποσότητα του μονοπωλίου δηλαδή  $q_{m2} = \frac{a-c}{4b}$  τότε αντίστοιχα η τιμή της αγοράς διαμορφώνεται σε  $p_{12} = a - b \left( \frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{4b} \right) = \dots = \frac{5a+7c}{12b}$ , τότε η πρώτη θα έχει κέρδη:  $\Pi_1 = (p_{12} - c)q_c = \frac{5(a-c)^2}{36b}$  και η δεύτερη:  $\Pi_2 = (p_{12} - c)q_{m2} = \frac{5(a-c)^2}{48b}$

Αν διατάξουμε τα κέρδη σε κάθε επιλογή τότε έχουμε:

$$\frac{5(a-c)^2}{36b} > \frac{(a-c)^2}{8b} > \frac{(a-c)^2}{9b} > \frac{5(a-c)^2}{48b}$$

Έστω Α η στρατηγική η ι επιχείρηση να παράγει σε επίπεδο Cournot και Β η στρατηγική να παράγει ποσότητα μισή του μονοπωλίου. Τότε ο πίνακας πληρωμών του στατικού παιγνίου θα είναι

|                          |   | Στρατηγική επιχείρησης 2                       |  |
|--------------------------|---|--|--|
|                          |   | A  | B  |
| Στρατηγική επιχείρησης 1 | A | $(\frac{(a-c)^2}{9b}, \frac{(a-c)^2}{9b})$     | $(\frac{5(a-c)^2}{36b}, \frac{5(a-c)^2}{48b})$ |
|                          | B | $(\frac{5(a-c)^2}{48b}, \frac{5(a-c)^2}{36b})$ | $(\frac{(a-c)^2}{8b}, \frac{(a-c)^2}{8b})$     |

Πίνακας 1.9.1. Με το πράσινο είναι η στρατηγική ισορροπίας Nash του στατικού παίγνιου.

Προφανώς η στρατηγική (B,B) θα ήταν ισορροπία κατά Pareto στην οποία οι επιχειρήσεις θα είχαν μέγιστα κέρδη και φυσικά θα ήταν στρατηγική καρτέλ.

Με δεδομένο όμως ότι το παίγνιο είναι στατικό, η στρατηγική που θα ακολουθούσαν θα ήταν (A,A) αφού σε παίγνιο ενός γύρου δεν θα είχαν καλύτερη λύση χωρίς συνεργασία.

Αν όμως εξετάσουμε το παίγνιο ως επαναλαμβανόμενο με «απείρους» γύρους τότε θα μπορούσαμε να δούμε αν κάποια επιχείρηση θα είχε όφελος να αλλάξει στρατηγική. Έστω λοιπόν ότι το παίγνιο ξεκινά με (A,A) και κάποια χρονική στιγμή κάποια επιχείρηση επιλέγει να διαφοροποιηθεί. Τότε η άλλη επιχείρηση στον επόμενο γύρο θα διαφοροποιηθεί κι αυτή. Υποθέτοντας ότι την πρωτοβουλία αυτή παίρνει η επιχείρηση 1 τότε η ιστορία θα εξελισσόταν ως:

(A,A), (A,A),...(B,A), (B,B),(B,B),...

Η ωφέλεια της επιχείρησης 1 από αυτή την ακολουθία από τη στιγμή που διαφοροποιήθηκε θα ήταν  $V_1 = \frac{5(a-c)^2}{48b} + \delta \frac{(a-c)^2}{8b} + \delta^2 \frac{(a-c)^2}{8b} + \delta^3 \frac{(a-c)^2}{8b} + \dots =$   
 $= \frac{5(a-c)^2}{48b} + \delta \frac{(a-c)^2}{8b} (1 + \delta^2 + \delta^3 + \dots) = \frac{5(a-c)^2}{48b} + \frac{(a-c)^2}{8b} \frac{\delta}{1-\delta}$

Αν δεν υπήρχε ποτέ διαφοροποίηση από κάποια επιχείρηση τότε η ιστορία θα εξελισσόταν ως: (A,A), (A,A),...(A,A), (A,A),... στο διηνεκές.

Η ωφέλεια της επιχείρησης 1 από αυτή την ακολουθία θα ήταν

$$V_2 = \frac{(a-c)^2}{9b} + \delta \frac{(a-c)^2}{9b} + \delta^2 \frac{(a-c)^2}{9b} + \delta^3 \frac{(a-c)^2}{9b} + \dots = \frac{(a-c)^2}{9b} \frac{1}{1-\delta}$$

Θέλω να εξετάσω ποιος πρέπει να είναι ο συντελεστής προεξόφλησης ώστε να συμφέρει την επιχείρηση 1 να διαφοροποιηθεί. Παίρνω  $V_1 > V_2$  και έχω διαδοχικά:  $\frac{5(a-c)^2}{48b} + \frac{(a-c)^2}{8b} \frac{\delta}{1-\delta} > \frac{(a-c)^2}{9b} \frac{1}{1-\delta} \Rightarrow \frac{5}{48} + \frac{\delta}{8(1-\delta)} > \frac{1}{9(1-\delta)} \Rightarrow \delta > \frac{1}{3}$ . Συνεπώς όταν ο συντελεστής προεξόφλησης είναι  $\delta > \frac{1}{3}$  τότε η επιχείρηση 1 έχει συμφέρον να αλλάξει στρατηγική κάτι στο οποίο θα συνέφερε και την επιχείρηση 2 και η ισορροπία Pareto θα εξελισσόταν σε ισορροπία Nash. Αν  $\delta < \frac{1}{3}$  τότε καμιά επιχείρηση δεν θα είχε συμφέρον να αλλάξει στρατηγική.

# Κεφάλαιο 2

## Δυναμικά Συστήματα διακριτού Χρόνου

### Περίληψη

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά και αναλυτική παρουσίαση των δυναμικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Εξετάζεται σε κάθε μορφή η εύρεση και ο χαρακτηρισμός των σημείων στα οποία το σύστημα ισορροπεί, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα μεταβαίνει σε αιτιοκρατικό χάος. Γίνεται χρήση γραφημάτων εκεί που χρειάζεται ώστε να γίνει αντιληπτή η αναλυτική παρουσίαση, όπως και σε περιπτώσεις που η αναλυτική παρουσίαση είναι ανεπαρκής. Ξεκινάμε με την αρχική έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών, τόσο όσο, να μπορεί να γίνει μια σύνδεση με τις εξισώσεις διαφορών και τη σύγκλιση. Ακολουθεί διαδοχικά παρουσίαση εξισώσεων διαφορών είτε γραμμικών, είτε μη-γραμμικών και ακολουθεί με την ίδια σειρά η παρουσίαση συστημάτων εξισώσεων διαφορών. Η βιβλιογραφία και οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν στο κεφ.2 αντιστοιχούν στις αναφορές 30, 35, 27, 18, 33, 1, 19, 15, 3, 13, 14, 10, 6, 9, 29.

### 2.0. Εισαγωγή

**Δυναμικό σύστημα** είναι κάθε σύστημα που μεταβάλλεται με το χρόνο  $t$ . Τα δυναμικά συστήματα περιγράφουν μεταβλητές καταστάσεις με μαθηματικές εξισώσεις τις οποίες μπορούμε συνήθως να αναπαραστήσουμε με γεωμετρικά σχήματα στον κατάλληλο χώρο. Τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν ταλαντώσεις, μεταβολές οικονομικών μεγεθών, την μεταβολή της πανίδας σε ένα κλειστό οικοσύστημα και οτιδήποτε άλλο που έχει μεταβολές στην πάροδο του χρόνου θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως δυναμικό σύστημα. Όταν αναφερόμαστε στις χρονικές στιγμές  $t, t+1, t+2, \dots$  τότε το δυναμικό σύστημα λέμε ότι είναι διακριτού χρόνου. Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα, όπως τα μηχανικά, εξελίσσονται σε συνεχή χρόνο και περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ενώ τα συστήματα που εξελίσσονται σε διακριτό χρόνο όπως τα οικονομικού χαρακτήρα περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών. Λόγω της πιο εύκολης αντίληψης στο ανθρώπινο μυαλό πολλά προβλήματα συνεχούς χρόνου υπόκεινται σε διακριτοποίηση.

Την αρχή στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων έκανε ο Isaac Newton, (1643-1727) που εξήγησε ότι τα φυσικά φαινόμενα υπακούουν σε αναλλοίωτους νόμους, που είναι δυνατόν να διατυπωθούν μαθηματικά. Πολύ αργότερα ο Henri Poincare (1854-1912) συνέχισε και στην έρευνά του για το πρόβλημα των τριών σωμάτων. Ο Poincare έγινε το πρώτο άτομο που ανακάλυψε ένα χαοτικό ντετερμινιστικό σύστημα που έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας χάους στις εργασίες του "Νέες Μέθοδοι της Ουράνιας Μηχανικής" (1892-1899) και "Διαλέξεις για την Ουράνια Μηχανική" (1905-1910). Ο Aleksandr Lyapunov (1857-1918) ανέπτυξε πολλές σημαντικές προσεγγιστικές μεθόδους που καθιστούν εφικτό να προσδιοριστούν η ευστάθεια των συνόλων συνήθων διαφορικών εξισώσεων και δημιούργησε τη σύγχρονη θεωρία ευστάθειας ενός δυναμικού συστήματος.

Ο Ουκρανός Oleksandr Mykolaiovych Sharkovsky (1936-) ανέπτυξε το ομώνυμο Θεώρημα (Θεώρημα του Sharkovsky) για τις περιόδους των διακριτών δυναμικών συστημάτων το 1964. Μία από τις συνέπειες του θεωρήματος είναι ότι αν ένα διακριτό δυναμικό σύστημα έχει στον πραγματικό άξονα περιοδικό σημείο περιόδου 3, τότε θα πρέπει να έχει περιοδικά σημεία για κάθε τιμή της περιόδου. Παράλληλα ένα πλήθος ερευνητών ασχολήθηκε με τα δυναμικά συστήματα πάνω στις μελέτες των παραπάνω αναφερομένων.

Η τάση στις φυσικές επιστήμες, να προβλεφθεί και να προσδιοριστεί η εξέλιξη φυσικών φαινομένων με μαθηματική βεβαιότητα ονομάστηκε **αιτιοκρατία** (determinism) και αποτελεί τη φιλοσοφική βάση της επιτυχίας της Κλασικής Μηχανικής. Με βάση αυτό, αντιμετωπίστηκαν με επιτυχία προβλήματα της Ουράνιας Μηχανικής κατά τον 19ο αιώνα (Poincaré), όπως η περιγραφή της κίνησης των ουρανίων σωμάτων του ηλιακού μας συστήματος. Αν και, σύμφωνα με την αιτιοκρατική άποψη, η αρχική κατάσταση ενός συστήματος καθορίζει κάθε επόμενη, στην πράξη είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Όμως μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες (όπως αυτές που οφείλονται σε σφάλματα στρογγυλοποίησης) αποδίδουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα για τα δυναμικά συστήματα, καθιστώντας τη μακροπρόθεσμη πρόβλεψη αδύνατη σε γενικές γραμμές, παρ' όλο που αυτά τα συστήματα είναι αιτιοκρατικά. Συνεπώς, η ντετερμινιστική φύση αυτών των συστημάτων δεν τα κάνει οπωσδήποτε προβλέψιμα. Αυτή η συμπεριφορά είναι γνωστή ως ντετερμινιστικό χάος, ή απλά χάος. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί μεταξύ των άλλων η πρόγνωση των καιρικών συνθηκών. Το κεντρικό πρόβλημα είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των πάσης φύσεως συστημάτων με ποιοτικές, δηλαδή γεωμετρικές, μεθόδους που δεν χρειάζονται τον εκ των προτέρων υπολογισμό των λύσεων, από κοινού με πιθανοθεωρητικές μεθόδους.

## 2.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ένα **διακριτό δυναμικό σύστημα** είναι μια ακολουθία αριθμών  $y_t$  που ορίζεται αναδρομικά. Δηλαδή υπάρχει ένας κανόνας σύμφωνα με τον οποίο κάθε όρος (αριθμός) της ακολουθίας σχετίζεται με τους προηγούμενους στην ακολουθία.

Γενικά ονομάζουμε **ακολουθία** στοιχείων ενός συνόλου  $M$  κάθε μονοσήμαντη αντιστοίχιση του συνόλου των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N}$  στο  $M$ . Δηλαδή ακολουθία είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών της μορφής  $(n, y_n)$  με  $n \in \mathbb{N}$  και  $y_n \in M$ .

Στο εξής θα αναφερόμαστε σε ακολουθίες πραγματικών αριθμών δηλαδή  $M \equiv \mathbb{R}$ .

Μια ακολουθία  $y_n$  ονομάζεται **μηδενική** αν για κάθε αριθμό  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένας αριθμός  $\xi$  που εξαρτάται από το  $\varepsilon$  τέτοιος ώστε  $|y_n| < \varepsilon$  για κάθε  $n > \xi$ .

Λέμε ότι η ακολουθία  $y_n$  είναι **συγκλίνουσα**, δηλαδή συγκλίνει σε ένα αριθμό  $\lambda$ , αν η ακολουθία  $x_n = y_n - \lambda$  είναι μηδενική.

Μια ακολουθία  $y_n$  λέγεται **μονότονη** αν είναι **αύξουσα** ( $y_{n+1} \geq y_n$ ) ή **φθίνουσα** ( $y_{n+1} \leq y_n$ ) για κάθε  $n > n_0 \in \mathbb{N}$

Μια ακολουθία  $y_n$  λέγεται **φραγμένη** αν υπάρχουν δυο αριθμοί  $\kappa, \lambda$  ώστε  $\kappa \leq y_n \leq \lambda$ .

**Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.**

Η παραπάνω πρόταση δεν είναι χρήσιμη σε όλες τις περιπτώσεις, απλούστατα γιατί μια ακολουθία μπορεί να μην είναι μονότονη εντούτοις όμως να συγκλίνει. Όμως γενικά είναι εύχρηστη στις ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά.

Μια ακολουθία  $y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ονομάζεται **αναδρομική ακολουθία πρώτης τάξης**, όταν οι όροι της ορίζονται με τη βοήθεια μιας αναδρομικής σχέσης της μορφής  $y_{n+1} = f(y_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και τον πρώτο της όρο.

Δηλαδή έχει τη μορφή  $\begin{cases} y_0 = a \\ y_{n+1} = f(y_n) \end{cases}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Μια ακολουθία  $y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ονομάζεται **αναδρομική ακολουθία δεύτερης τάξης**, όταν οι όροι της ορίζονται με τη βοήθεια μιας αναδρομικής σχέσης της μορφής  $y_{n+2} = f(y_n, y_{n+1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και τους δύο πρώτους όρους της.

Δηλαδή έχει τη μορφή  $\begin{cases} y_0 = a, y_1 = b \\ y_{n+2} = f(y_n, y_{n+1}) \end{cases}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . κ.ο.κ.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα αναδρομικών ακολουθιών ως προς τη σύγκλιση με δεδομένο ότι δεν είναι πάντα εφικτό να βρει κανείς τον γενικό τύπο της ακολουθίας.

### Παράδειγμα 2.1.1.

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία  $y_n$ :  $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n} \end{cases}$

- Υπολογίζω μερικούς διαδοχικούς όρους:  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = \sqrt{1 + y_1} = \sqrt{2}$ ,  $y_3 = \sqrt{1 + y_2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ , ... Ισχύει  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$ . Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η ακολουθία είναι αύξουσα. Αποδεικνύω με τέλεια επαγωγή ότι  $y_{n+1} > y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , συνεπώς είναι πράγματι αύξουσα.
- Αφού είναι αύξουσα, τότε έχει κάτω φράγμα το  $y_1 = 1$ . Κάνω το τέχνασμα  $y_{n+1} = y_n = x$  και από τον αναδρομικό τύπο παίρνω  $x = \sqrt{1 + x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ ,

$$x > 1 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Μετά δείχνω πολύ εύκολα με τέλεια επαγωγή ότι  $y_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Άρα  $1 < y_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Δηλαδή η ακολουθία είναι φραγμένη.

- Ως μονότονη και φραγμένη είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Θα ισχύει λοιπόν  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lambda$  και παίρνοντας τα όρια στα δυο μέλη του αναδρομικού τύπου παίρνω  $\lambda = \sqrt{1 + \lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

### Παράδειγμα 2.1.2

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία  $y_n$ :  $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_{n+1}y_n = 4y_n - 3y_{n+1} \end{cases}$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- Διαιρούμε τα δυο μέλη του αναδρομικού τύπου με  $y_{n+1}y_n \neq 0$  και παίρνουμε  $1 = \frac{4}{y_{n+1}} - \frac{3}{y_n}$  και μετά παίρνουμε  $x_n = \frac{1}{y_n}$  οπότε έχουμε  $1 = 4x_{n+1} - 3x_n$  με  $x_1 = 2$ .

Δηλαδή έχω την ακολουθία  $x_n$ :  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{3x_n}{4} \end{cases}$

- Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αυτή είναι φθίνουσα, άρα έχει πάνω φράγμα το 2 και εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι  $1 < x_n \leq 2$  δηλαδή και φραγμένη.
- Ως μονότονη και φραγμένη η  $x_n$  θα συγκλίνει και εύκολα προκύπτει όπως και στο παράδειγμα 1 ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

- Με δεδομένο ότι  $1 < x_n \leq 2 \Rightarrow 1 < \frac{1}{y_n} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y_n < 1$ . Φραγμένη.
- Επίσης αφού  $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow y_{n+1} \geq y_n$ . Αύξουσα.
- Επομένως η  $y_n$  ως μονότονη και φραγμένη θα συγκλίνει επίσης.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1$$

Οι ακολουθίες στα παραπάνω παραδείγματα ορίζονταν από μη γραμμικούς αναδρομικούς τύπους. Αν ήταν εύκολο να υπολογίσουμε τον γενικό τους τύπο θα μπορούσαμε να βρούμε πιο εύκολα το όριο στο  $\infty$ . Ας δούμε σε ακολουθίες που ο αναδρομικός τους τύπος είναι γραμμικός, πως η εύρεση του γενικού τύπου είναι εφικτή και τι συμπεράσματα θα μπορούσαν να βγουν για το όριο.

### Παράδειγμα 2.1.3.

Να βρεθεί ο γενικός τύπος και να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$y_n: \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{n+1} = \lambda y_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

- Είναι προφανές ότι πρόκειται για τάξης 1.
- Αν γράψουμε διαδοχικά τον τύπο για  $\eta=1,2,3,\dots,\eta-1$ , παίρνουμε:

$$y_2 = \lambda y_1$$

$$y_3 = \lambda y_2$$

$$y_4 = \lambda y_3$$

.

.

.

$$y_n = \lambda y_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη παίρνουμε  $y_n = \lambda^{n-1} y_1$ . Δηλαδή είναι γεωμετρική πρόοδος. Ανεξαρτήτως ποιος είναι ο πρώτος όρος  $y_1$  το όριο είναι απλό.

Αν  $|\lambda| < 1$  η ακολουθία είναι μηδενική.

Αν  $|\lambda| > 1$  η ακολουθία απειρίζεται.

Αν  $\lambda=1$  είναι σταθερή και ίση με τον πρώτο όρο

Αν  $\lambda=-1$  είναι εναλλασσόμενη με τιμές  $\pm y_1$ .

### Παράδειγμα 2.1.4.

Να βρεθεί ο γενικός τύπος και να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$y_n: \begin{cases} y_1 = y_2 = 1 \\ y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}. \text{ (ακολουθία Fibonacci)}$$

- Εδώ η ακολουθία ορίζεται με αναδρομικό τύπο τάξης 2.

- Δεν θα ήταν άσχημη ιδέα να υποθέσουμε ότι η γενική λύση είναι άθροισμα δυο όρων γεωμετρικής προόδου. Δηλαδή  $y_n = \alpha\lambda^{\eta-1} + \beta\kappa^{\eta-1}$ .
- Για  $\eta=1$  έχω  $y_1 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 1$

Για  $\eta=2$  έχω  $y_2 = \alpha\lambda + \beta\kappa \Rightarrow \alpha\lambda + \beta\kappa = 1$

Για  $\eta=3$  έχω  $y_3 = \alpha\lambda^2 + \beta\kappa^2 \Rightarrow \alpha\lambda^2 + \beta\kappa^2 = 2$

Για  $\eta=4$  έχω  $y_4 = \alpha\lambda^3 + \beta\kappa^3 \Rightarrow \alpha\lambda^3 + \beta\kappa^3 = 3$

Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με 4 αγνώστους του οποίου η αλγεβρική λύση δίνει :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \kappa = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{ Οπότε :}$$

$$y_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{\eta-1} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{\eta-1} \Rightarrow$$

$$y_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{\eta} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{\eta}$$

Με δεδομένο ότι  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$  και  $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$  είναι φανερό ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty$ .

**Σημ.** Ο αριθμός  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  συμβολίζεται με  $\phi$  και είναι γνωστός ως **χρυσός λόγος** ή **αριθμός του Φειδία**.

Αν λοιπόν  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  τότε εύκολα  $\frac{1}{\phi} = \phi^{-1} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , οπότε  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{-n}$ .

Ο αριθμός  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  προκύπτει ως η θετική ρίζα της εξίσωσης  $x^2 - x - 1 = 0$ ,

## 2.2. Εξισώσεις διαφορών

Για μια ακολουθία  $y_n$  κάθε εξίσωση της μορφής  $f(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}, n) = 0$  λέγεται **εξίσωση διαφορών τάξης κ**. Αν στην εξίσωση δεν περιέχεται αυτοτελώς το  $n$ , τότε η εξίσωση λέγεται **αυτόνομη**. Αν η εξίσωση δεν περιέχει άλλες πράξεις πλην της πρόσθεσης μεταξύ των όρων  $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots$ , λέγεται **γραμμική**.

Π.χ. η  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - 3y_n + \eta^2$  είναι εξίσωση διαφορών τάξης 2, γραμμική, μη αυτόνομη, ενώ η εξίσωση  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - 3y_n$  είναι εξίσωση διαφορών τάξης 2, γραμμική, αυτόνομη. Η εξίσωση  $y_{n+2} = 2y_{n+1}y_n$  είναι τάξης 2, μη γραμμική, αυτόνομη, όπως και η  $y_{n+2} = y_n^3 y_{n+1}$ .

Θα ασχοληθούμε με αυτόνομες εξισώσεις διαφορών στις οποίες την ανεξάρτητη μεταβλητή  $n$  θα την συμβολίζουμε με  $t$  ώστε να ασχοληθούμε κυρίως με προβλήματα που εξαρτώνται από το χρόνο - άρα με δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου - και θα κάνουμε ένα διαχωρισμό μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε τη λύση στις γραμμικές αλλά κυρίως να μελετήσουμε ποιοτικά το που καταλήγει αυτή «στο τέλος του χρόνου». Αυτό θα το επεκτείνουμε μετά και στις μη γραμμικές οι οποίες δεν είναι εύκολο να επιλυθούν πάντα. Θα συνεχίσουμε με συστήματα δυο ή περισσότερων εξισώσεων διαφορών.

### 2.2.1. Γραμμικές εξισώσεις διαφορών .

Οι γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές γενικά μπορούν να επιλυθούν με υπολογιστικές μεθόδους. Ας δώσουμε για αρχή μερικούς ορισμούς .

**Τιμή (σημείο) ισορροπίας** της εξίσωσης  $y_{t+1} = f(y_t)$  για  $t \in \mathbb{N}$  και  $f$  πραγματική συνάρτηση είναι ο αριθμός  $y^*$  που είναι λύση της εξίσωσης  $y^* = f(y^*)$ . Ομοίως για την εξίσωση  $y_{t+2} = f(y_t, y_{t+1})$  βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας παίρνοντας  $y_{t+2} = y_{t+1} = y_t = y^*$ . κ.ο.κ.

Π.χ. η εξίσωση  $y_{t+2} + \alpha y_{t+1} + \beta y_t = \gamma$  έχει σημείο ισορροπίας το  $y^* = \frac{\gamma}{1+\alpha+\beta}$ ,

αρκεί  $1 + \alpha + \beta \neq 0$ .

Αν  $y_0$  μια αρχική τιμή της ακολουθίας που δημιουργεί η εξίσωση  $y_{t+1} = f(y_t)$  για τις διάφορες διαδοχικές τιμές του  $t$ , τότε αυτή θα αποτελείται κατά τα γνωστά από τις διαδοχικές τιμές :

$$\begin{aligned} y_0 & \\ y_1 &= f(y_0) \\ y_2 &= f(y_1) = f(f(y_0)) = f^{(2)}(y_0) \\ y_3 &= f(y_2) = f(f(f(y_0))) = f^{(3)}(y_0) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ y_t &= f\left(f\left(\dots f(y_0)\right)\right) = f^{(t)}(y_0) \end{aligned}$$

Η ακολουθία  $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_t$  λέγεται **τροχιά** του  $y_0$ .

Όπως είδαμε στα παραδείγματα 2.1.3 και 2.1.4 των αναδρομικών ακολουθιών που προηγήθηκαν οι λύσεις μιας εξίσωσης διαφορών είναι άθροισμα εκθετικών όρων που έχουν συντελεστές που προσδιορίζονται από τους αρχικούς όρους.

Ας δούμε μια αυτόνομη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές για αρχή.

$$y_{t+k} + a_{k-1}y_{t+k-1} + a_{k-2}y_{t+k-2} + \dots + a_0y_t = 0 \quad (\text{ομογενής})$$

Για να βρούμε τους εκθετικούς όρους που θα είναι λύσεις της, λύνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση  $\rho^k + a_{k-1}\rho^{k-1} + a_{k-2}\rho^{k-2} + \dots + a_0 = 0$ . Αυτή ως  $k$ -βαθμού πολυωνυμική θα έχει ακριβώς  $k$  ρίζες  $\lambda_k, \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \dots, \lambda_1$ .

- Αν είναι διακριτές μεταξύ τους τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών θα είναι της μορφής :

$$y_t = c_1(\lambda_1)^t + c_2(\lambda_2)^t + c_3(\lambda_3)^t + \dots + c_k(\lambda_k)^t \quad (\text{λόγω του θεωρήματος της υπέρθεσης}).$$

Οι αριθμοί  $c_1, c_2, \dots, c_k$  είναι συντελεστές που υπολογίζονται από τους αρχικούς όρους.

- Αν κάποια από τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης, έστω η  $\lambda_i$  έχει αριθμητική πολλαπλότητα  $n$ , τότε μια ειδική λύση που αντιστοιχεί σ' αυτήν θα έχει τη μορφή  $(c_i + c_{i+1}t + c_{i+2}t^2 + \dots + c_{i+n}t^n)(\lambda_i)^t$ .

- Αν κάποια από τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης, έστω η  $\lambda_i$  είναι μιγαδική τότε θα υπάρχει και η συζυγής της. Αν λοιπόν  $\lambda_i = u + vi$  τότε η ειδική λύση που αντιστοιχεί σε αυτήν και στη συζυγή της θα έχει τη μορφή  $u^t (c_i \cos(tv) + c_{i+1} \sin(tv))$ .

Για την μη ομογενή αντίστοιχη, δηλαδή για τη εξίσωση

$$y_{t+k} + a_{k-1}y_{t+k-1} + a_{k-2}y_{t+k-2} + \dots + a_0y_t = \beta$$

Η γενική λύση θα είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς  $y_t^o$  και της μερικής λύσης  $y_t^\mu$  που θα προκύπτει ανάλογα με τη μορφή του  $\beta$ . Δηλαδή  $y_t = y_t^o + y_t^\mu$ . Την μερική λύση  $y_t^\mu$  μπορούμε να την μαντεύουμε με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα και τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών.

| Αν $\beta =$                                 | Τότε $y_t^\mu =$  |
|--|---|
| Πολυωνυμική ακολουθία $P_\eta$ βαθμού $\eta$ | $A_\eta t^\eta + A_{\eta-1} t^{\eta-1} + \dots + A_0$<br>(αν το 0 είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης παίρνουμε το $t(A_\eta t^\eta + A_{\eta-1} t^{\eta-1} + \dots + A_0)$ , αν το 0 είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής, τότε παίρνουμε το $t^2(A_\eta t^\eta + A_{\eta-1} t^{\eta-1} + \dots + A_0)$ , κ.ο.κ.) |
| $a \cos(t\theta) + b \sin(t\theta)$          | $A \cos(t\theta) + B \sin(t\theta)$<br>(αν θιαπλή φανταστική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε παίρνουμε $t(A \cos(t\theta) + B \sin(t\theta))$ , αν θιδιπλή φανταστική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε παίρνουμε $t^2(A \cos(t\theta) + B \sin(t\theta))$ κ.ο.κ.)  |
| $a\lambda^t$                                 | $A\lambda^t$<br>(αν $\lambda$ απλή ρίζα της χαρακτηριστικής τότε παίρνουμε $A\lambda^t$ , αν $\lambda$ διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής τότε παίρνουμε $A t^2 \lambda^t$ κ.ο.κ.)  |
| Άθροισμα όρων των παραπάνω περιπτώσεων       | Άθροισμα μερικών λύσεων για κάθε όρο ξεχωριστά.   |
| Γινόμενο όρων των παραπάνω περιπτώσεων       | Γινόμενο μερικών λύσεων για κάθε όρο.   |

### Παράδειγμα 2.2.1.1.

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:  $y_{t+2} - 9y_t = 3^t + 2t - 1$

#### Λύση

- Στην αρχή θα λύσουμε την ομογενή  $y_{t+2} - 9y_t = 0$  και γι' αυτό παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση  $\rho^2 - 9 = 0$  που έχει ρίζες  $\rho = \pm 3$ .

Άρα  $y_t^o = c_1 3^t + c_2 (-3)^t$

- Για την μερική λύση  $y_t^\mu$  θα βρούμε διαδοχικά τις μερικές λύσεις  $y_t^{\mu 1}$  και  $y_t^{\mu 2}$  των εξισώσεων  $y_{t+2} - 9y_t = 3^t$  και  $y_{t+2} - 9y_t = 2t - 1$  αντίστοιχα.

Για την  $y_{t+2} - 9y_t = 3^t$  παίρνω ως μερική λύση την  $y_t^{\mu 1} = At3^t$  γιατί το 3 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής. Αντικαθιστώ στην  $y_{t+2} - 9y_t = 3^t$  και έχω :  $A(t+2)3^{t+2} - 9At3^t = 3^t \Rightarrow 9At3^t + 18A3^t - 9At3^t = 3^t \Rightarrow 18A3^t = 3^t \Rightarrow A = \frac{1}{18}$ . Οπότε  $y_t^{\mu 1} = \frac{1}{18}t3^t$ .

Για την  $y_{t+2} - 9y_t = 2t - 1$  παίρνω ως μερική λύση την  $y_t^{\mu 2} = Bt + \Gamma$ . Αντικαθιστώ στην  $y_{t+2} - 9y_t = 2t - 1$  και έχω :  $B(t+2) + \Gamma - 9(Bt + \Gamma) = 2t - 1 \Rightarrow -8Bt + 2B - 8\Gamma = 2t - 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}, \Gamma = \frac{1}{16}$ . Άρα  $y_t^{\mu 2} = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{16}$ .

Οπότε μερική λύση η  $y_t^{\mu} = y_t^{\mu 1} + y_t^{\mu 2} = \frac{1}{18}t3^t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}$

- Γενική λύση της εξίσωσης η  $y_t = y_t^o + y_t^{\mu} = c_1 3^t + c_2 (-3)^t + \frac{1}{18}t3^t - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}$

### Παράδειγμα 2.2.1.2

Να βρεθεί η μορφή της μερικής λύσης της εξίσωσης:  $y_{t+2} + 9y_t = 2t \cos(3t)$  χωρίς να υπολογιστούν οι συντελεστές.

### Λύση

- Στην αρχή θα λύσουμε την ομογενή  $y_{t+2} + 9y_t = 0$  και γι' αυτό παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση  $\rho^2 + 9 = 0$  που έχει ρίζες  $\rho = \pm 3i$ .

Άρα  $y_t^o = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$

- Για την μερική λύση  $y_t^{\mu}$  επειδή το δεύτερο μέλος της εξίσωσης διαφορών είναι γινόμενο δύο όρων, ενός πολυωνυμικού του 2 και ενός τριγωνομετρικού του  $\cos(3t)$  παίρνουμε  $y_t^{\mu} = [(At + B) \cos(3t) + (\Gamma t + \Delta) \sin(3t)]t$ . Οι συντελεστές στους τριγωνομετρικούς όρους είναι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί. Πολλαπλασιάσαμε την αγκύλη με  $t$  γιατί το  $3i$  είναι ρίζα της χαρακτηριστικής.

### Παράδειγμα 2.2.1.3

Κάποιος καταθέτει στην τράπεζα κεφάλαιο  $y_o$  με ετήσιο επιτόκιο  $\varepsilon\%$ . Να γραφεί η σχέση που δίνει πως διαμορφώνεται η κατάθεσή του στο τέλος του  $t$  έτους σε σχέση με τα χρήματα που υπάρχουν στο λογαριασμό του το προηγούμενο έτος και να βρεθεί το συνολικό ποσό που θα εισπράξει αν αποφασίσει να αποσύρει τα χρήματά του μετά τέτη.

### Λύση

Αν  $y_{t+1}$  είναι τα χρήματα στο τέλος του τέτους αυτά έχουν δημιουργηθεί από το μηχανισμό  $y_t + \text{Τόκος}(\frac{\varepsilon}{100}y_t)$ . Δηλαδή  $y_{t+1} = y_t + \frac{\varepsilon}{100}y_t \Rightarrow y_{t+1} = (1 + \frac{\varepsilon}{100})y_t \Rightarrow$

$$y_{t+1} - (1 + \frac{\varepsilon}{100})y_t = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω είναι  $\lambda - (1 + \frac{\varepsilon}{100}) = 0 \Rightarrow \lambda = (1 + \frac{\varepsilon}{100})$ .

Συνεπώς  $y_t = c \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^t$ . Για  $t=0$  προκύπτει  $c=y_o$ . Οπότε  $y_t = y_o \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^t$ .

Ας κρατήσουμε μια παρατήρηση εδώ. Το σημείο ισορροπίας της εξίσωσης είναι  $y^*=0$  και το  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \infty$  για κάθε τροχιά  $y_o$  αφού  $1 + \frac{\varepsilon}{100} > 1$ .

### Παράδειγμα 2.2.1.4

Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης :  $2y_{t+1} - y_t = 6$

## Λύση

- Η εξίσωση γράφεται  $y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 3$
- Για την ομογενή  $y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 0$  η χαρακτηριστική εξίσωση  $\lambda - \frac{1}{2} = 0$  δίνει  $\lambda = \frac{1}{2}$ .  
Άρα  $y_t^o = c_1(\frac{1}{2})^t$
- Παίρνω  $y_t^H = A$  και αντικαθιστώ στην αρχική οπότε :  $2A - A = 6 \Rightarrow A = 6$
- Γενική λύση  $y_t = c_1(\frac{1}{2})^t + 6$
- Αν το  $y_0$  είναι γνωστό τότε για  $t=0$  παίρνουμε  $y_0 = c_1 + 6 \Rightarrow c_1 = y_0 - 6$ .

Συνεπώς για την τροχιά  $y_0$  παίρνουμε τη συγκεκριμένη λύση  $y_t = (y_0 - 6)(\frac{1}{2})^t + 6$ .

Ας κρατήσουμε μια άλλη παρατήρηση εδώ. Το σημείο ισορροπίας της εξίσωσης είναι  $y^*=6$  και το  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = 6$  για κάθε τροχιά  $y_0$  αφού  $\frac{1}{2} < 1$ . Δηλαδή σε αυτή την εξίσωση η λύση συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας.

Γενικά το σημείο ισορροπίας άλλοτε τραβά επάνω του μακροχρόνια τις τιμές της ακολουθίας (**ολικός ελκυστής** ή αλλιώς **ευσταθές σημείο**) και άλλοτε τις απωθεί (**ολικός απωθητής**). Όμως αυτό δεν είναι καθολικό. Υπάρχει περίπτωση να έλκει κάποιες τροχιές (ελκυστής ή αλλιώς **ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο**) κάποιες άλλες να τις απωθεί (απωθητής) και κάποιες άλλες να έχουν μια περιοδική συμπεριφορά σε σχέση με τη θέση του. Αν το σημείο ισορροπίας δεν είναι ευσταθές τότε λέγεται **ασταθές**.

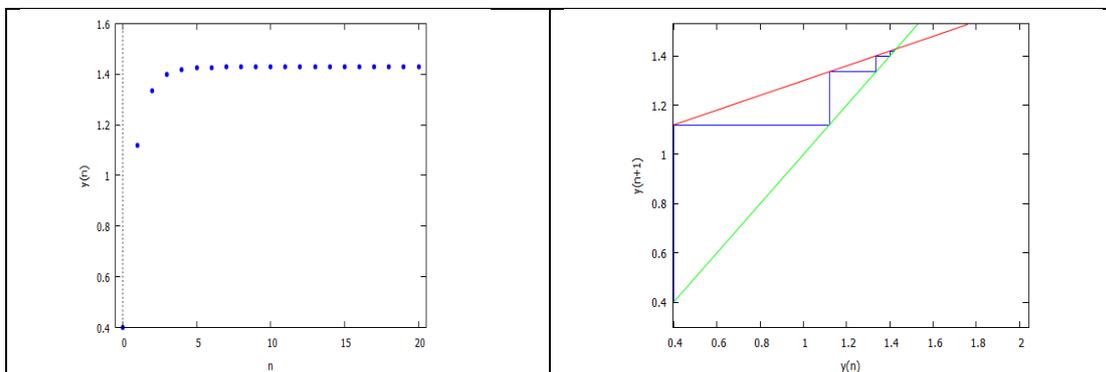
### Παράδειγμα 2.2.1.5

Να μελετηθεί η σχέση σημείου ισορροπίας – σύγκλισης στην γραμμική εξίσωση 1<sup>ης</sup> τάξης  $y_{t+1} = Ay_t + B$ ,  $A \neq 1$ .

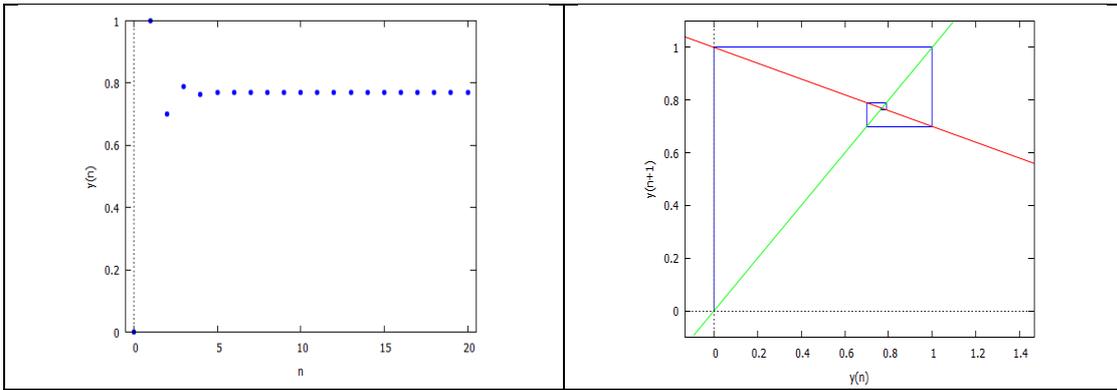
## Λύση

- Για το σημείο ισορροπίας:  $y^* = Ay^* + B \Rightarrow y^* = \frac{B}{1-A}$
- Η γενική λύση είναι  $y_t = (y_0 - \frac{B}{1-A})(A)^t + \frac{B}{1-A}$
- Εδώ πλέον έχουμε την εμπειρία από τις γεωμετρικές ακολουθίες και μπορούμε να βγάλουμε εύκολα συμπεράσματα.

Αν  $|A| < 1$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \frac{B}{1-A} = y^*$ . Δηλαδή για κάθε τροχιά του  $y_0$  οι τιμές της ακολουθίας συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας. Το σημείο ισορροπίας είναι ολικός ελκυστής δηλαδή ευσταθές σημείο.

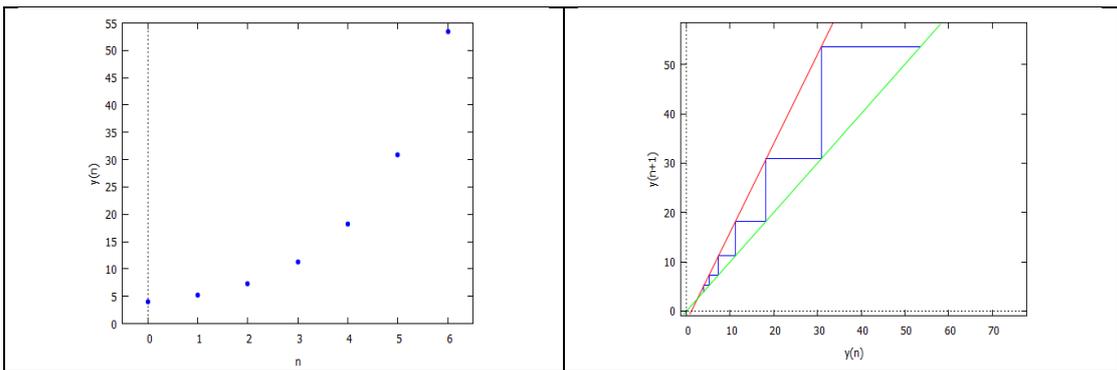


**Εικόνα 2.2.1:** η εξίσωση  $y_{t+1} = 0.3y_t + 1$  με αρχική  $y_0 = 0.4$ . Αριστερά το διάγραμμα της  $y_t$  με 20 σημεία. Παρατηρούμε ότι η τροχιά προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας μονοτονικά. Στην προκειμένη περίπτωση η τροχιά είναι αύξουσα γιατί η αρχική είναι μικροτερη του σημείου ισορροπίας. Δεξιά το διάγραμμα δείχνει την προσέγγιση στο σημείο ισορροπίας (ελκυστής) με μορφή σκάλας. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν  $0 < A < 1$ .

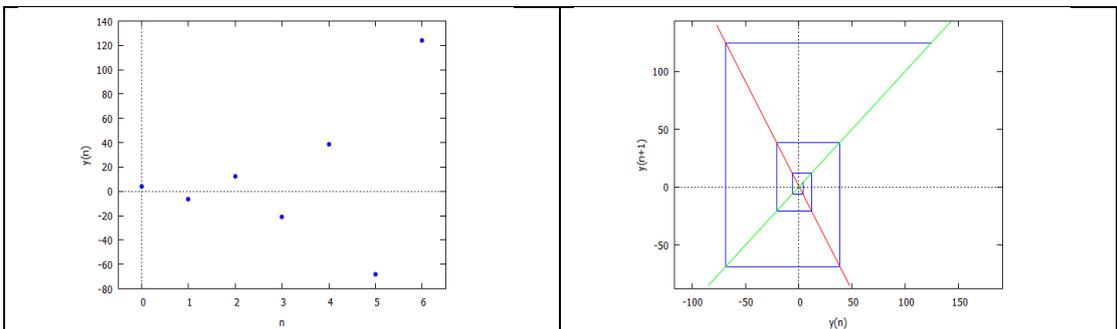


**Εικόνα 2.2.2:** η εξίσωση  $y_{t+1} = -0.3y_t + 1$  με αρχική  $y_0 = 0$ . Αριστερά το διάγραμμα της  $y_t$  με 20 σημεία. Παρατηρούμε ότι η τροχιά προσεγγίζει το σημείο ισορροπίας με ταλάντωση. Δεξιά το διάγραμμα δείχνει την προσέγγιση στο σημείο ισορροπίας με μορφή αράχνης. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν  $-1 < A < 0$ .

Αν  $|A| > 1$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \infty$ . Το σημείο ισορροπίας είναι απωθητής δηλαδή ασταθές σημείο. Εδώ πρέπει να προσέξουμε την περίπτωση να ισχύει  $y_0 = \frac{B}{1-A}$ , οπότε απλώς όλες οι τροχιές είναι σταθερές πάνω στην ευθεία  $y = \frac{B}{1-A}$  στην οποία βρίσκεται φυσικά και το σημείο ισορροπίας.

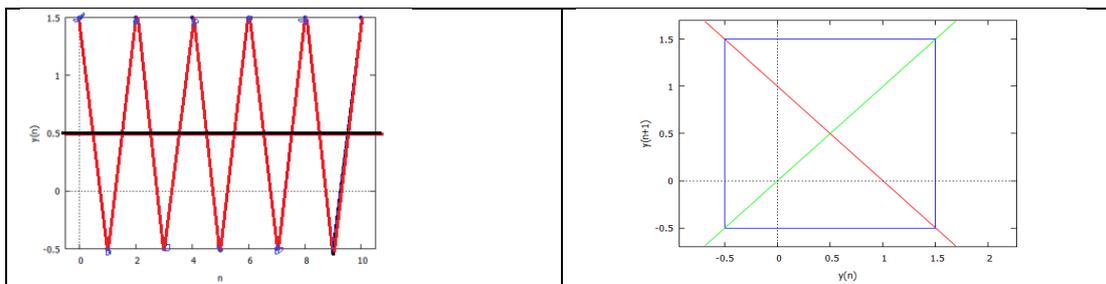


**Εικόνα 2.2.3 :** η εξίσωση  $y_{t+1} = 1.8y_t - 2$  με αρχική  $y_0 = 4$ . Αριστερά το διάγραμμα της  $y_t$  με 6 σημεία. Παρατηρούμε ότι η τροχιά απομακρύνεται στο άπειρο μονοτονικά. Δεξιά το διάγραμμα δείχνει την απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας σε μορφή σκάλας. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν  $A > 1$ .



**Εικόνα 2.2.4:** η εξίσωση  $y_{t+1} = -1.8y_t - 2$  με αρχική  $y_0 = 4$ . Αριστερά το διάγραμμα της  $y_t$  με 7 σημεία. Παρατηρούμε ότι η τροχιά απομακρύνεται στο άπειρο με ταλάντωση. Δεξιά το διάγραμμα δείχνει την απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας σε μορφή αράχνης. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν  $A < -1$ .

Αν  $A = -1$  τότε για άρτια  $t$  παίρνουμε  $y_t = y_0$  ενώ για περιττά  $t$  παίρνουμε  $y_t = y_0 + \frac{2B}{1-A}$ . Δηλαδή έχουμε περιοδικές (πριονωτές) τροχιές συμμετρικά πάνω κάτω από το σημείο ισορροπίας.



**Εικόνα 2.2.5:** η εξίσωση  $y_{t+1} = -1y_t + 1$  με αρχική  $y_0 = 1.5$ . Αριστερά το διάγραμμα της  $y_t$  με 11 σημεία. Στο 0.5 είναι το σημείο ισορροπίας. Δεξιά το διάγραμμα δείχνει την περιοδικότητα.

Γενικά όσον αφορά την εξίσωση  $y_{t+1} = Ay_t + B$ ,  $A \neq 1$  με  $y^*$  σημείο ισορροπίας (f.p.).

Αν  $A > 1$  το f.p. είναι απωθητής σε μορφή σκάλας.

Αν  $A < -1$  το f.p. είναι απωθητής σε μορφή αράχνης.

Αν  $0 < A < 1$  το f.p. είναι ελκυστής σε μορφή σκάλας.

Αν  $-1 < A < 0$  το f.p. είναι ελκυστής σε μορφή αράχνης.

Αν  $A = -1$  έχουμε περιοδικές (πριονωτές) τροχιές συμμετρικά πάνω κάτω από το f.p. (Ουδέτερο σημείο ισορροπίας).

**Παράδειγμα 2.2.1.6.**

Έστω το μοντέλο :

$$\begin{cases} C(t) = a + bY(t) \\ E(t) = C(t) + I + G \\ \Delta Y(t + 1) = \lambda(E(t) - Y(t)), \quad a, b, \lambda > 0 \end{cases} \quad (1)$$

που αναφέρεται στο «An Introduction to Economic Dynamics» R. Stones, κεφ. 3. Το μοντέλο στηρίζεται στις υποθέσεις:

- 1) ότι η καταναλωτική δαπάνη  $C(t)$  στην περίοδο  $t$  σχετίζεται γραμμικά με το εισόδημα  $Y(t)$  της ίδιας περιόδου.
- 2) ότι οι επενδυτικές δαπάνες  $I$  και οι δημόσιες δαπάνες  $G$  είναι εξωγενείς και σταθερές.
- 3) Οι συνολικές δαπάνες  $E(t)$  στην χρονική στιγμή  $t$ , ορίζονται ως το άθροισμα όλων των δαπανών σε χρονική περίοδο  $t$ .
- 4) το εισόδημα προσαρμόζεται κατά ένα ποσοστό  $\lambda$  της πλεονάζουσας ζήτησης, όπου η πλεονάζουσα ζήτηση είναι  $E(t) - Y(t)$ . Αυτό που ενδιαφέρει είναι η εξέλιξη του εισοδήματος την επόμενη χρονική στιγμή δοθείσης της τωρινής κατάστασης.

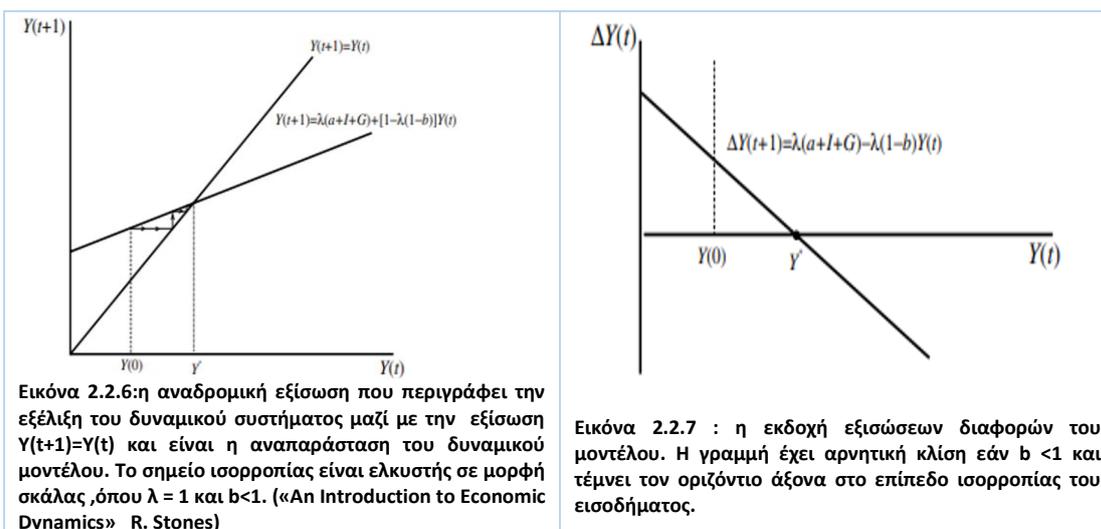
Κάνοντας τις αντικαταστάσεις διαδοχικά της πρώτης εξίσωσης στην δεύτερη και της δεύτερης στην τρίτη παίρνω την εξίσωση διαφορών (2)

$$\begin{aligned} \Delta Y(t + 1) &= \lambda(a + I + G) - \lambda(1 - b)Y(t) \Rightarrow \\ Y(t + 1) - Y(t) &= \lambda(a + I + G) - \lambda(1 - b)Y(t) \Rightarrow \\ Y(t + 1) &= \lambda(a + I + G) + (1 - \lambda + \lambda b)Y(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία όταν  $\Delta Y(t+1)=0$ . Αυτό δίνει σημείο ισορροπίας το

$$Y^* = \frac{a + I + G}{1 - b} \quad (3)$$

Το ίδιο σημείο ισορροπίας  $Y^*$  παίρνουμε από την εξίσωση (2) απλά για  $Y(t+1)=Y(t)=Y^*$ . Η δυναμική αυτού του μοντέλου σε τρεις διαφορετικές παραλλαγές, οι οποίες απεικονίζονται στα παρακάτω γραφήματα.



Εικόνα 2.2.6: η αναδρομική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος μαζί με την εξίσωση  $Y(t+1)=Y(t)$  και είναι η αναπαράσταση του δυναμικού μοντέλου. Το σημείο ισορροπίας είναι ελκυστής σε μορφή σκάλας, όπου  $\lambda = 1$  και  $b < 1$ . («An Introduction to Economic Dynamics» R. Stones)

Εικόνα 2.2.7 : η εκδοχή εξισώσεων διαφορών του μοντέλου. Η γραμμή έχει αρνητική κλίση εάν  $b < 1$  και τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο επίπεδο ισορροπίας του εισοδήματος.

Ας αναλύσουμε αυτό το μοντέλο με αρχικές συνθήκες μικρότερες και μεγαλύτερες του σημείου ισορροπίας. Τις τιμές των παραμέτρων από το βιβλίο «An Introduction to Economic Dynamics» R. Stones.

$$C_t = 110 + 0.75Y_t$$

$$E_t = C_t + I + G$$

$$I = 200$$

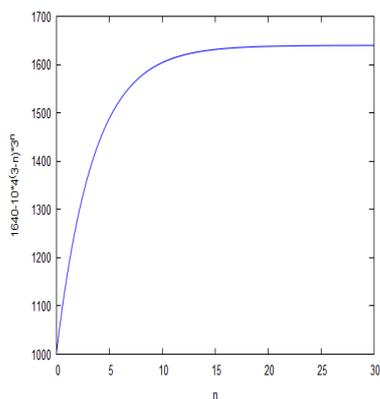
$$G = 100$$

$$\Delta Y_{t+1} = E_t - Y_t$$

Όπου η καταναλωτική δαπάνη  $C_t$  σχετίζεται με το εισόδημα  $Y_t$  στην ίδια περίοδο  $t$ . Οι συνολικές δαπάνες  $E_t$  στο χρόνο  $t$  είναι ίσες με  $E_t = 410 + 0.75Y_t$ .

Οι επενδυτικές δαπάνες  $I$  και οι δημόσιες δαπάνες  $G$  αντιμετωπίζονται ως εξωγενείς σταθερές. Συνεπώς από την εξίσωση  $\Delta Y_{t+1} = E_t - Y_t$ , προσθέτοντας  $Y_t$  στα δυο μέλη παίρνουμε την αναδρομική εξίσωση  $Y_{t+1} = 410 + 0.75Y_t$ . Η ανάλυση με το MAXIMA και θα χρησιμοποιήσω αρχικές συνθήκες όπως προτείνονται από το συγγραφέα. Με δεδομένο ότι το σημείο ισορροπίας  $Y^*=1640$  (παίρνω  $Y_t = Y_{t+1} = Y^*$ ), θα πάρω ως αρχικές συνθήκες  $Y(0)$  δυο μικρότερες 1000 και 1600 και δυο μεγαλύτερες 1700 και 2500 από το 1640. Θα πειραματιστώ και με τιμή  $Y(0)=1640$ . Τα συμπεράσματα θα αναλυθούν στο τέλος.

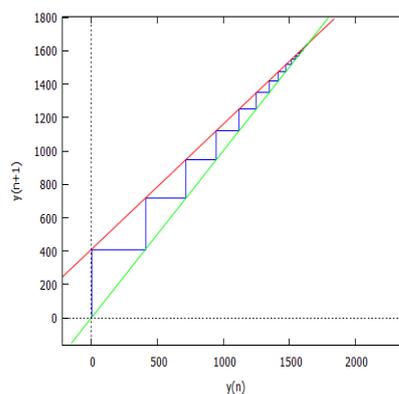
Για αρχική συνθήκη  $Y(0) = 1000$ .



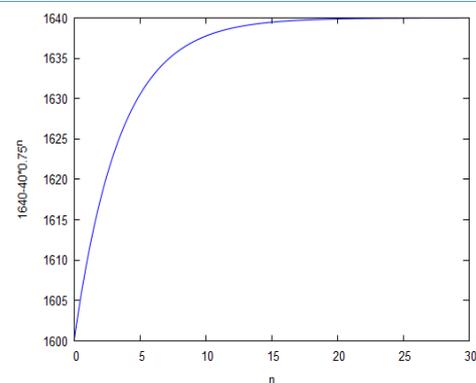
**Εικόνα 2.2.8.** Το εισόδημα ξεκινά από 1000 αυξάνεται σταδιακά και σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στην γραμμή 1640 .

Η τιμή του εισοδήματος σε 20 χρόνια θα είναι 1637,97

Για αρχική συνθήκη  $Y(0) = 1600$ .



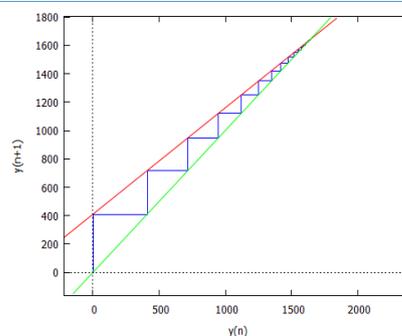
**Εικόνα 2.2.9.** Η κόκκινη γραμμή είναι η εξίσωση  $y=410+0.75x$  ( $y=y(t+1)$ ,  $x=y(t)$ ) και η πράσινη γραμμή είναι η  $y=x$ . Το σημείο στο οποίο τέμνονται είναι το  $f.p.$  Ελκυστής σε μορφή σκάλας. Αναμενόμενο γιατί  $0 < A = 0.75 < 1$ .



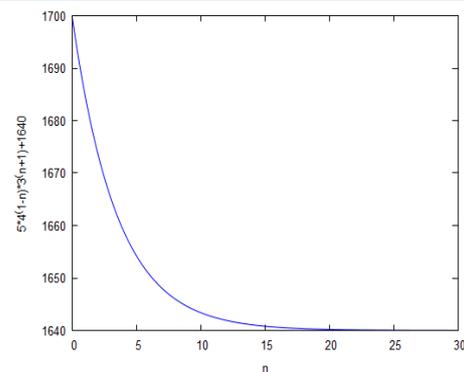
**Εικόνα 2.2.10.** Το εισόδημα ξεκινά από 1600 αυξάνεται σταδιακά και σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στην γραμμή 1640 .

Η τιμή του εισοδήματος σε 20 χρόνια θα είναι 1639,87 . Κάνοντας τη σύγκριση μεταξύ των δυο αρχικών συνθηκών παρατηρούμε ότι πιο γρήγορα πλησιάζει στο  $f.p.$  το σύστημα που ξεκινά από την πιο κοντινή αρχική.

Για αρχική συνθήκη  $Y(0) = 1700$ .



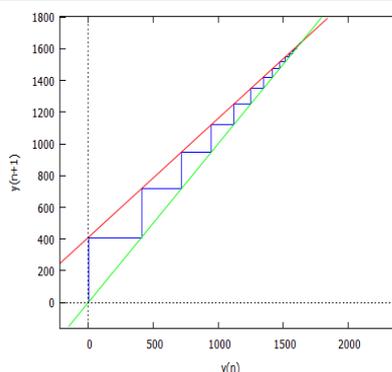
**Εικόνα 2.2.11.** Η κόκκινη γραμμή είναι η εξίσωση  $y=410+0.75x$  ( $y=y(t+1)$ ,  $x=y(t)$ ) και η πράσινη γραμμή είναι η  $y=x$ . Το σημείο στο οποίο τέμνονται είναι το  $f.p.$  Ελκυστής σε μορφή σκάλας. Αναμενόμενο γιατί  $0 < A = 0.75 < 1$ .



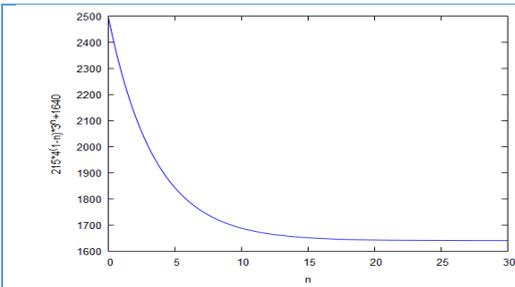
**Εικόνα 2.2.12.** Το εισόδημα ξεκινά από 1700 μειώνεται σταδιακά και σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στην γραμμή 1640 .

Η τιμή του εισοδήματος σε 20 χρόνια θα είναι 1640,19

Για αρχική συνθήκη  $Y(0) = 2500$ .



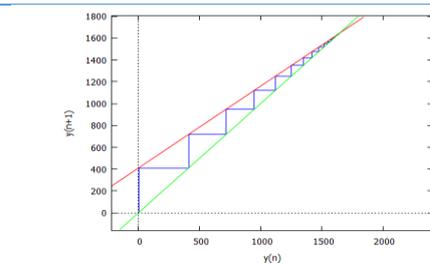
**Εικόνα 2.2.13.** Η κόκκινη γραμμή είναι η εξίσωση  $y=410+0.75x$  ( $y=y(t+1)$ ,  $x=y(t)$ ) και η πράσινη γραμμή είναι η  $y=x$ . Το σημείο στο οποίο τέμνονται είναι το  $f.p.$



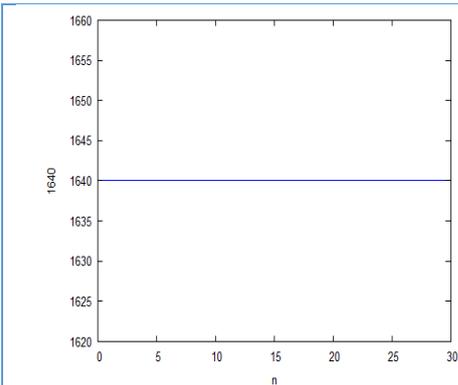
**Εικόνα 2.2.14.** Το εισόδημα ξεκινά από 2500 μειώνεται σταδιακά και σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στην γραμμή 1640 .

Η τιμή του εισοδήματος σε 20 χρόνια θα είναι 1642,72. Σε όλα το ίδιο συμβαίνει.

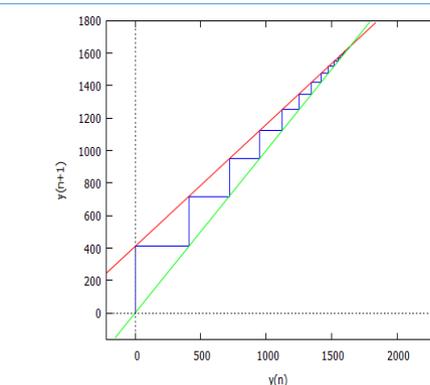
Για αρχική συνθήκη  $Y(0)=1640$



**Εικόνα 2.2.15.** Η κόκκινη γραμμή είναι η εξίσωση  $y=410+0.75x$  ( $y=y(t+1)$ ,  $x=y(t)$ ) και η πράσινη γραμμή είναι η  $y=x$ . Το σημείο στο οποίο τέμνονται είναι το  $fp$ .



**Εικόνα 2.2.16.** Το εισόδημα ξεκινά από 1640 και μένει σταθερό .



**Εικόνα 2.2.17.** Η κόκκινη γραμμή είναι η εξίσωση  $y=410+0.75x$  ( $y=y(t+1)$ ,  $x=y(t)$ ) και η πράσινη γραμμή είναι η  $y=x$ . Το σημείο στο οποίο τέμνονται είναι το  $fp$ .

Η τιμή του εισοδήματος θα είναι 1640 και σε 20 και σε 120 χρόνια.

Παρατηρώ ότι το σημείο ισορροπίας **δεν** επηρεάζεται από τις αρχικές συνθήκες, απλά αυτό που επηρεάζεται είναι ο τρόπος που προσεγγίζουμε σε αυτό υπό την έννοια της ταχύτητας και της κατεύθυνσης. (χαρακτηριστικό των αυτόνομων εξισώσεων). Και η μορφή του φυσικά δεν αλλάζει . Είναι ελκυστής σε μορφή σκάλας , φυσιολογικό γιατί συμβαδίζει με την θεωρία ( $0 < 0.75 < 1$ ). Παρατηρούμε ότι όσο πιο απομακρυσμένη είναι η αρχική τιμή από το σημείο ισορροπίας τόσο πιο αργά προσεγγίζεται το σημείο ισορροπίας.

Θα πειραματιστώ λιγάκι παραπάνω με το μοντέλο αλλάζοντας κατ' αρχήν τις τιμές στα I, G με αμετάβλητη την κύρια εξίσωση κατά τα άλλα.

$$C_t = 110 + 0.75Y_t$$

$$E_t = C_t + I + G$$

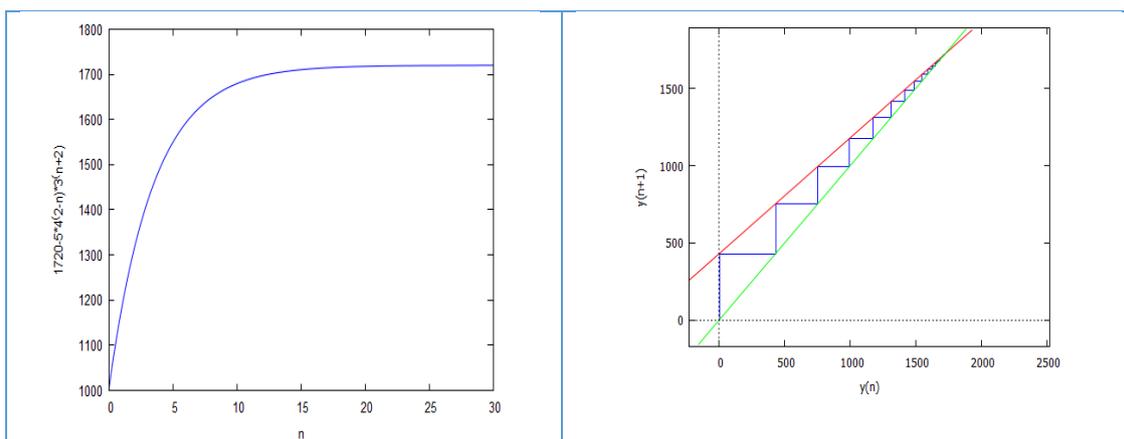
$$I = 220$$

$$G = 100$$

$$\Delta Y_{t+1} = E_t - Y_t$$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι  $Y_{t+1} = 430 + 0.75Y_t$ . Καταρχήν να παρατηρήσω ότι δεν έχει σημασία αν θα αυξήσω τις κυβερνητικές δαπάνες ή τις επενδύσεις ,δηλαδή αν αντί για  $I=220$  έβαζα  $G=120$  και άφηνα  $I=200$ , στην μορφή της εξίσωσης δεν θα άλλαζε τίποτα ,

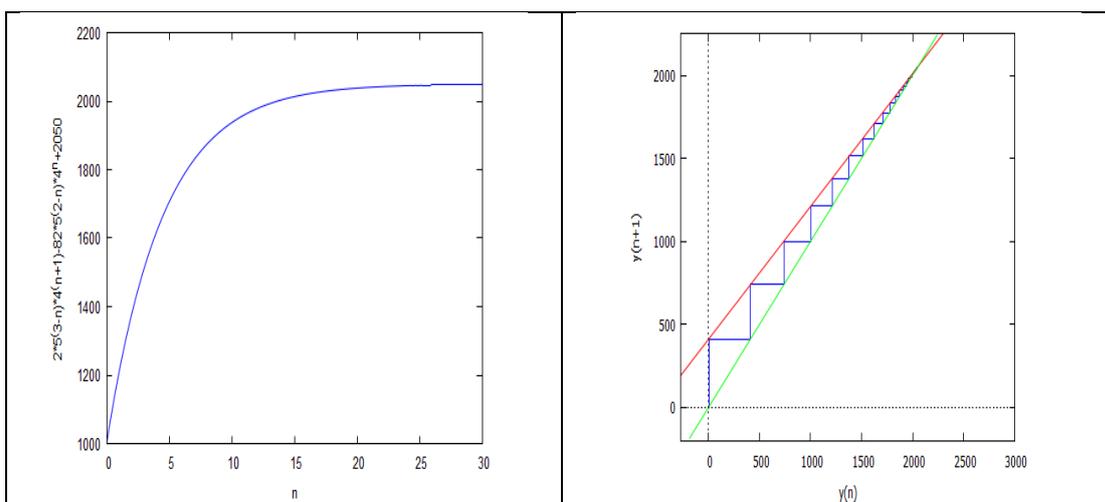
συνεπώς ούτε και στη λύση της. Το σημείο ισορροπίας μετατίθεται στο 1720 και θα είναι πάλι ελκυστής σε μορφή σκάλας . (χρησιμοποίησα αρχική τιμή 1000)



Είτε λοιπόν ανεβάσω κατά ένα ποσό τις κυβερνητικές δαπάνες είτε τις επενδύσεις το σημείο ισορροπίας αυξάνεται με τον ίδιο τρόπο. Και φυσικά εφόσον κρατώ αμετάβλητο το  $\beta=0.75$  δεν αλλάζει και η μορφή του.

Όπως προτρέπει και ο Shone θα ξαναλύσω το πρόβλημα για  $\beta=0.8, \beta=1.1$  και  $\beta=1$ .

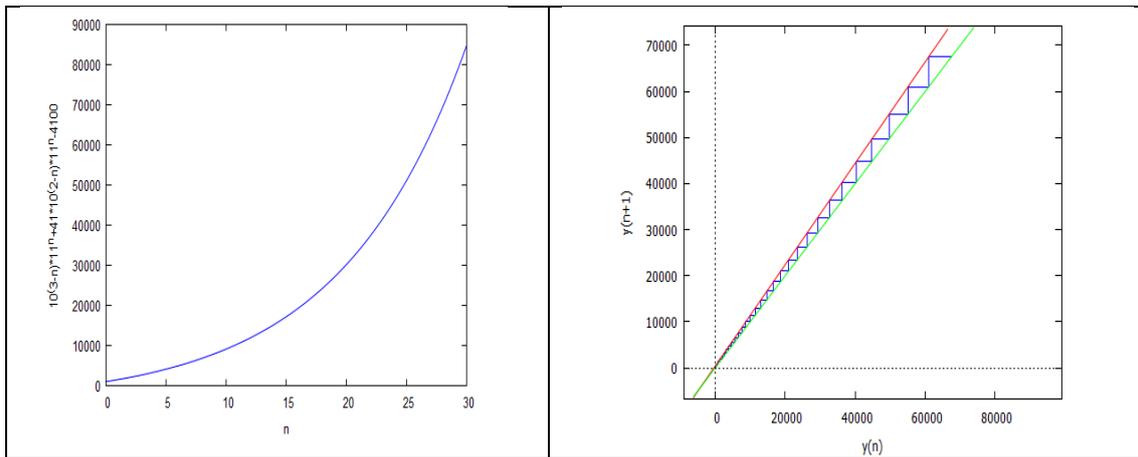
Για  $\beta=0.8$ . Η εξίσωση που προκύπτει είναι  $Y_{t+1} = 410 + 0.8Y_t$



Το σημείο ισορροπίας μετατοπίστηκε στο 2050 αλλά η μορφή του δεν άλλαξε (ελκυστής – σκάλα).

Για  $\beta=1.1$

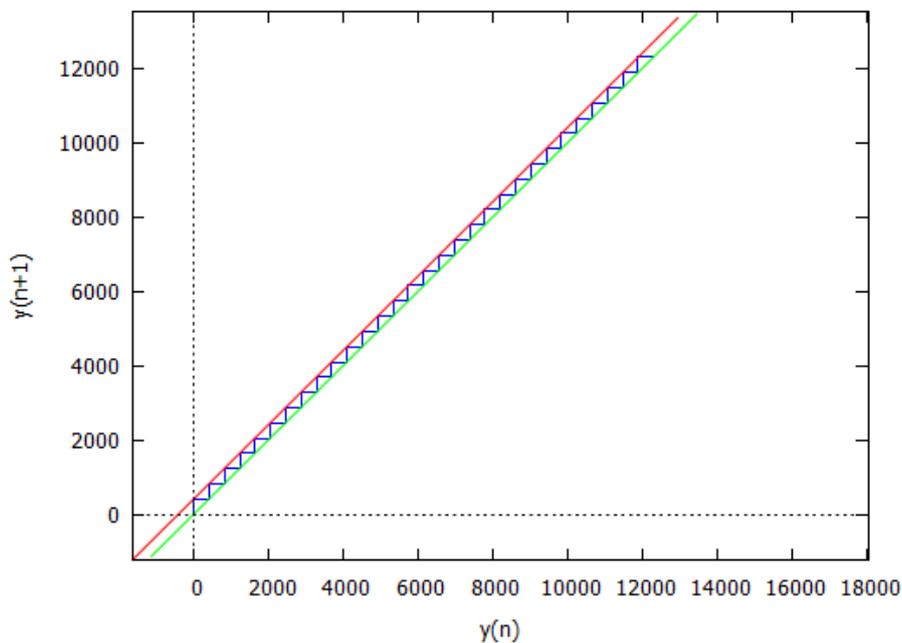
Η εξίσωση που προκύπτει είναι  $Y_{t+1} = 410 + 1.1Y_t$



Σε αυτή την περίπτωση το σημείο ισορροπίας του εισοδήματος είναι  $-4100$  δηλαδή αρνητικό και είναι απωθητής με μορφή σκάλας. Από την αρχική τιμή του  $Y(0) = 1000$  το εισόδημα αυξάνεται γρήγορα και θεωρητικά απειρίζεται. Οι συνολικές δαπάνες  $C_t = 110 + 1.1Y_t$  υπερβαίνουν πάντα το εισόδημα, με αποτέλεσμα να ασκείται πίεση στο εισόδημα. Μια τέτοια κατάσταση στην οικονομία δεν μπορεί να αντέξει για πάντα οπότε είναι βέβαιο ότι στην πραγματικότητα θα γίνουν διορθωτικές κινήσεις.

Για  $\beta=1$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι  $Y_{t+1} = 110 + Y_t$



Προφανώς δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας (ο παρονομαστής μηδενίζεται) οι γραμμές του εισοδήματος  $Y_t = 410t + 1000$  ( $Y(0)=1000$ ) και η διχοτόμος κινούνται παράλληλα και έχουν επομένως σταθερή απόσταση μεταξύ τους. Εν προκειμένω οι δαπάνες είναι σταθερά παραπάνω από το εισόδημα κατά  $110$ , όπως φαίνεται από την αρχική εξίσωση του συστήματος.

Η οικονομική θεωρία υποστηρίζει ότι το  $\beta < 1$ , στις περισσότερες περιπτώσεις, κατάσταση η οποία συμβαδίζει με παγκόσμια σταθερότητα, με δεδομένο ότι υπάρχει θετικό σημείο

ισορροπίας που είναι ελκυστής. Επίσης είναι φανερό ότι όσο πιο μακριά από τη μονάδα βρίσκεται το  $\beta$ , τόσο πιο κοντά στην αρχική τιμή είναι το σημείο ισορροπίας.

Ενδιαφέρον θα είχε αν στο αρχικό (γενικό) μοντέλο είχαμε χρησιμοποιήσει διάφορες τιμές της αναλογίας  $\lambda$ . (εδώ πήραμε  $\lambda=1$ ).

## 2.2.2. Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Έστω  $f$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και η εξίσωση διαφορών  $y_{t+1} = f(y_t)$ . Έστω  $y^*$  το σημείο ισορροπίας. Τότε διαδοχικά μπορούμε να πάρουμε :

$$y_{t+1} - y^* = f(y_t) - y^* \Rightarrow y_{t+1} - y^* = f(y_t) - f(y^*) \Rightarrow$$

$$y_{t+1} - y^* = \frac{f(y_t) - f(y^*)}{y_t - y^*} (y_t - y^*)$$

Παίρνοντας προσεγγιστικά ότι  $\frac{f(y_t) - f(y^*)}{y_t - y^*} = f'(y^*)$  η παραπάνω γίνεται:

$$y_{t+1} - y^* = f'(y^*) (y_t - y^*)$$

Αν λάβουμε  $y_t - y^* = Y_t$  τότε έχουμε από την προηγούμενη

$$Y_{t+1} = f'(y^*) Y_t \Rightarrow Y_t = [f'(y^*)]^t Y_0.$$

Εδώ κατά τα γνωστά έχουμε :

Αν  $|f'(y^*)| < 1$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (y_t - y^*) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = y^*$  που σημαίνει ότι το  $y^*$  είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο.

Αν  $|f'(y^*)| > 1$  τότε  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (y_t - y^*) = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \infty$  που σημαίνει ότι το  $y^*$  είναι ασταθές σημείο.

Ειδικότερα από το παράδειγμα 2.2.1.5. παίρνουμε.

Αν  $0 < f'(y^*) < 1$  το f.p. είναι ελκυστής σε μορφή σκάλας (μονοτονικά).

Αν  $-1 < f'(y^*) < 0$  το f.p. είναι ελκυστής σε μορφή αράχνης (με ταλάντωση).

### Παράδειγμα 2.2.2.1.

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών  $y_{t+1} = -y_t^2 + 2$  και να μελετηθούν ως προς την ευστάθεια.

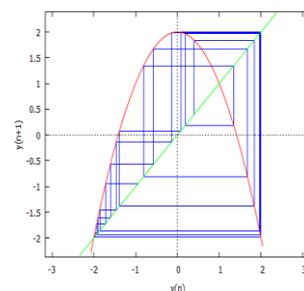
#### Λύση

Λύνουμε την εξίσωση  $y^* = -y^{*2} + 2 \Rightarrow y^* = -2, y^* = 1$ . Τα σημεία ισορροπίας.

Παίρνω  $f(y) = -y^2 + 2$  που έχει παράγωγο  $f'(y) = -2y$ .

Επειδή  $f'(-2) = 4 > 1$  το  $y^* = -2$  είναι απωθητής (ασταθές σημείο ισορροπίας) σε μορφή σκάλας όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Επειδή  $f'(1) = -2 < -1$  το  $y^* = 1$  είναι απωθητής (ασταθές σημείο ισορροπίας) σε μορφή αράχνης όπως φαίνεται και στο σχήμα ( $y_0 = 0.4$ ).

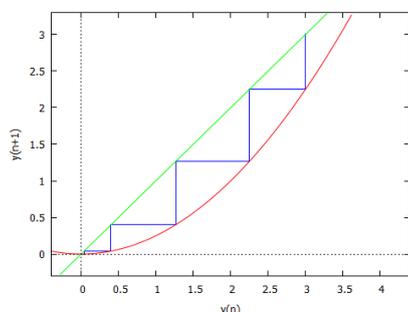


### Παράδειγμα 2.2.2.2

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών  $y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t^2$  και να μελετηθούν ως προς την ευστάθεια.

#### Λύση

Λύνουμε την εξίσωση  $y^* = \frac{1}{4}y^{*2} \Rightarrow y^* = 0, y^* = 4$ . Τα σημεία ισορροπίας.



Παίρνω  $f(y) = \frac{1}{4}y^2$  που έχει παράγωγο  $f'(y) = \frac{1}{2}y$ .

Επειδή  $f'(4) = 2 > 1$  το  $y^* = 4$  είναι απωθητής (ασταθές σημείο ισορροπίας) σε μορφή σκάλας όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Επειδή  $f'(0) = 0 < 1$  το  $y^* = 0$  είναι ελκυστής (ευσταθές σημείο ισορροπίας) σε μορφή σκάλας όπως φαίνεται και στο σχήμα ( $y_0 = 3$ ).

### 2.3. Η Λογιστική εξίσωση

Ίσως το πιο γνωστό σύστημα που χρησιμοποιείται από την αρχή της δεκαετίας του 70 από τον May και άλλους για την μοντελοποίηση ενός είδους είναι η λογιστική απεικόνιση. Η αρχική ιδέα ήταν σε εργασίες βιολόγων ψαριών και εντομολόγους που ερευνούσαν τις διακυμάνσεις των πληθυσμών αυτών των ειδών. Η λογιστική απεικόνιση στην αρχική μορφή της δίνεται από τον τύπο  $y_{t+1} = ay_t(b - y_t)$  όπου  $b$  είναι μια σταθερά την οποία θεωρητικά δεν μπορεί να υπερβεί ο πληθυσμός  $y_t$  και  $a$  αντιπροσωπεύει τον ρυθμό αναπαραγωγής. Αυτό που θέλουμε είναι να μελετήσουμε τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης και να τα μελετήσουμε ως προς την ευστάθεια.

Λύνουμε την εξίσωση  $y^* = ay^*(b - y^*) \Rightarrow y^* = 0$  ή  $y^* = \frac{ab-1}{a}$ , τα σημεία ισορροπίας.

Παίρνω  $f(y) = ay(b - y)$  που έχει παράγωγο  $f'(y) = ab - 2ay$ .

Επειδή  $|f'(0)| = |\alpha\beta|$  και  $|f'(\frac{ab-1}{a})| = |2 - \alpha\beta|$  συμπεράσματα για τα σημεία ισορροπίας δεν είναι εύκολο να βγουν χωρίς διερεύνηση των τιμών των  $\alpha, \beta$ .

Στην πράξη αυτού του είδους τα μοντέλα συνήθως είναι πληθυσμιακά που εξηγούν την εξέλιξη από τη γενιά  $t$  στη γενιά  $t+1$  και ερμηνεύοντας το  $y_t$  ως ποσοστό ενός αριθμού τον οποίο ο πληθυσμός  $y$  δεν μπορεί να ξεπεράσει, άρα  $0 < y_t < 1$ , θα πάρουμε ότι  $\beta = 1$ . Οπότε πλέον έχουμε  $f(y) = ay(1 - y)$  που έχει παράγωγο  $f'(y) = a - 2ay$ .

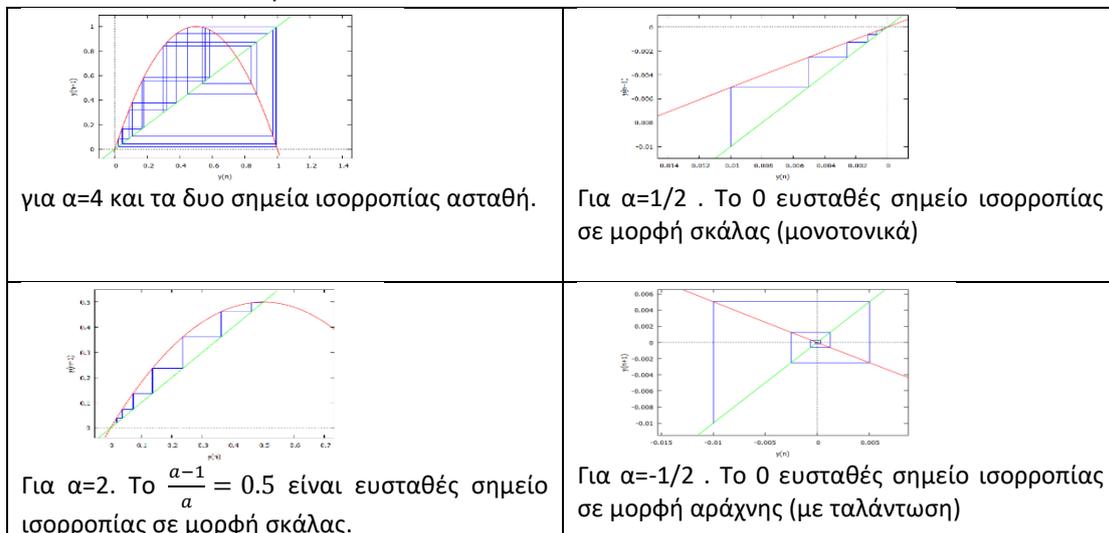
$$|f'(0)| = |\alpha| \text{ και } |f'(\frac{a-1}{a})| = |2 - \alpha|$$

και τα σημεία ισορροπίας είναι  $y^* = 0$  ή  $y^* = \frac{a-1}{a}$

- Αν  $\begin{cases} |\alpha| < 1 \\ |2 - \alpha| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \alpha < 1 \\ 1 < \alpha < 3 \end{cases}$  αδύνατον. Δεν υπάρχει τιμή του  $\alpha$  ώστε και τα δύο σημεία ισορροπίας να είναι ευσταθή (ελκυστές).
- Αν  $\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |2 - \alpha| > 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha > 3 \text{ ή } \alpha < -1$ .

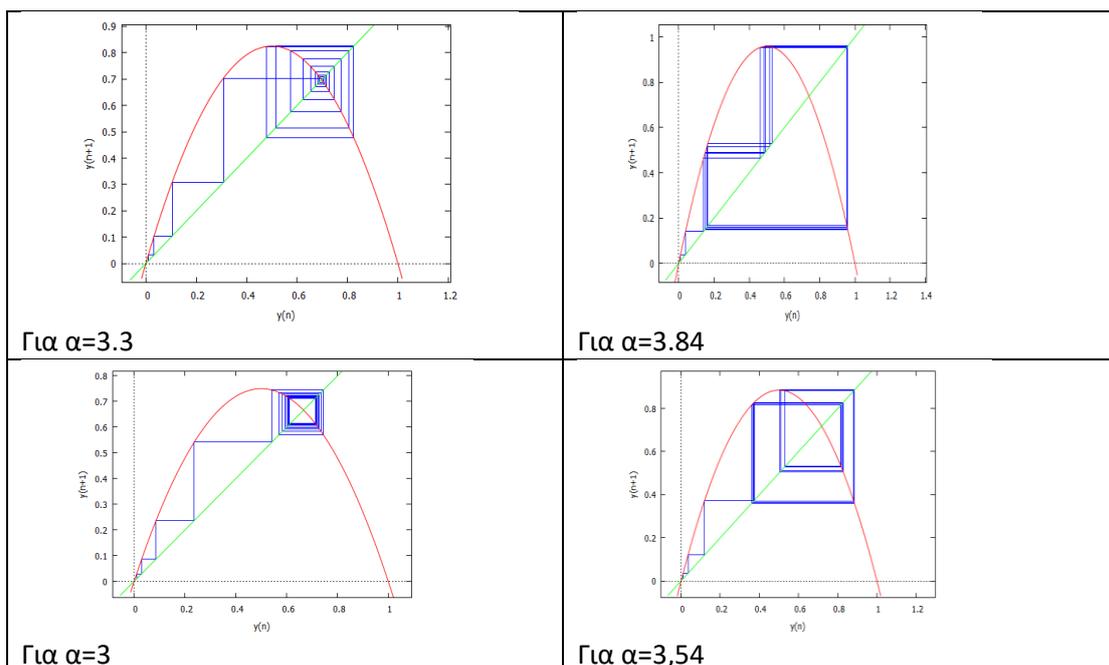
Για  $a > 3$  ή  $a < -1$  και τα δυο σημεία ισορροπίας είναι ασταθή (απωθητές). Στην εικόνα 2.3.1. με  $a=4$ .

- Αν  $\begin{cases} |\alpha| < 1 \\ |2 - \alpha| > 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha < 1$ . Το 0 είναι ελκυστής και το  $\frac{a-1}{a}$  είναι απωθητής. Στην εικόνα 2.3.1 με  $\alpha=1/2$  και  $\alpha=-1/2$ .
- Αν  $\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |2 - \alpha| < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < \alpha < 3$ . Το 0 είναι απωθητής και το  $\frac{a-1}{a}$  είναι ελκυστής. Στην εικόνα 2.3.1 με  $\alpha=2$ .



Εικόνα 2.3.1.: Χαρακτηρισμός των σημείων ισορροπίας για διάφορες τιμές του  $\alpha$  στην λογιστική εξίσωση  $y_{t+1} = ay_t(1 - y_t)$

Αν θεωρήσω τη συνάρτηση  $f(y) = ay(1 - y)$  που έχει παράγωγο  $f'(y) = a(1 - 2y)$  για θετικές τιμές του  $\alpha$  έχει μέγιστο για  $y = \frac{1}{2}$  με τιμή  $y_{t+1} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$ . Για τα πληθυσμιακά μοντέλα όπως υποθέσαμε, το  $0 < y_t < 1$ , άρα  $\frac{a}{4} < 1 \Rightarrow a < 4$ . Συνεπώς για  $a \geq 4$  δεν θα είχε απολύτως κανένα ενδιαφέρον και με δεδομένο ότι έχουμε διερευνήσει τα σημεία ισορροπίας για κάθε  $a \in (0,3)$  θα είχε ενδιαφέρον να ασχοληθούμε λίγο παραπάνω για τιμές  $a \in [3,4)$ .



Εικόνα 2.3.2.: Ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζεται το σημείο ισορροπίας για τιμές του  $\alpha$  στο διάστημα  $(3,4)$

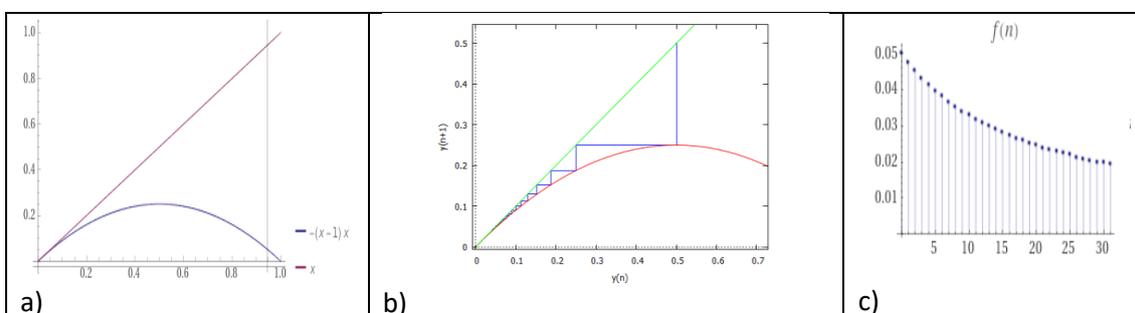
Με  $a > 0$  ας κάνουμε μια ανασκόπηση πρώτα των συμπερασμάτων.

Αν  $0 < a < 1$ , το  $y_1^* = 0$  δίνει  $f'(0) = a < 1$  και είναι ελκυστής (ευσταθής) δηλαδή οποιαδήποτε τροχιά  $y_0$  που αντιστοιχεί σε αρχική συνθήκη  $y_0$  κοντά στο 0 πλησιάζει στο  $y_1^* = 0$ , ενώ το  $y_2^* = \frac{a-1}{a}$  δίνει  $f'(\frac{a-1}{a}) = 2 - a > 1$  και δεν εμφανίζεται καθόλου.

Αν  $1 < a < 3$ , το  $y_1^* = 0$  δίνει  $f'(0) = a > 1$  και είναι ασταθής, δηλαδή οποιαδήποτε τροχιά  $y_0$  που αντιστοιχεί σε αρχική συνθήκη  $y_0$  κοντά στο 0 απομακρύνεται από αυτό, ενώ το  $y_2^* = \frac{a-1}{a}$  δίνει  $|f'(\frac{a-1}{a})| = |2 - a| < 1$  και είναι ελκυστής οπότε οποιαδήποτε αρχική συνθήκη  $y_0 \in (0,1)$  πλησιάζει ασυμπτωτικά στο  $y_2^* = \frac{a-1}{a}$ .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ποια είναι η συμπεριφορά στις δυο κρίσιμες τιμές  $a = \alpha_c^{(1)} = 1$  και  $a = \alpha_c^{(2)} = 3$ .

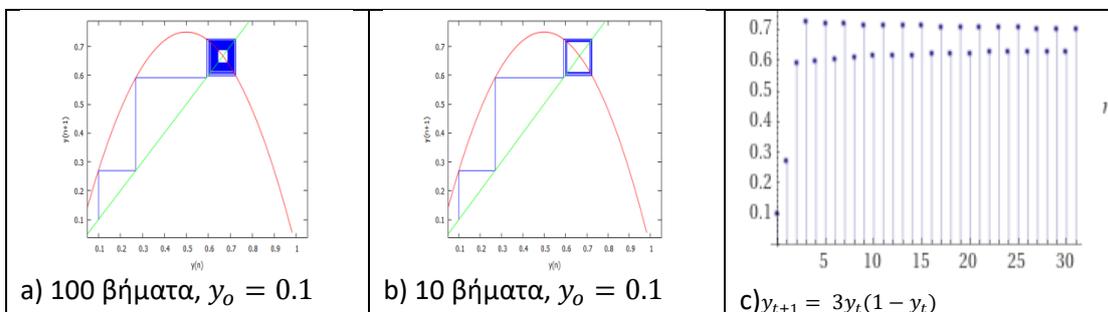
Για  $a = \alpha_c^{(1)} = 1$ . Τότε τα σημεία ισορροπίας θα είναι  $y_1^* = y_2^* = 0$ . Έστω η αρχική συνθήκη  $y_0 \in (0,1)$ .



**Εικόνα 2.3.3:** Στο α) είναι η  $f(y)$  και η  $y=x$ . Εφάπτονται στο 0. Στο β) οι ίδιες γραμμές, (η πράσινη είναι η  $y=x$ ) και βλέπουμε πως το διπλό σημείο ισορροπίας  $y_1^* = y_2^* = 0$  είναι ευσταθές σε μορφή σκάλας (μονοτονικά). Στο γ) είναι η τροχιά για 30 βήματα με αρχική  $y_0 = 0.05$ .

Συνεπώς το «διπλό» σημείο ισορροπίας για  $a=1$  που εμφανίζεται είναι ευσταθές και αυτή η τιμή της παραμέτρου  $a$  οριοθετεί μια αλλαγή ποιοτικής κατάστασης για τα σημεία ισορροπίας. Για  $a=1$  έχουμε **καταστροφή** στη λογική ότι είναι το μεταίχμιο μεταξύ δυο καταστάσεων.

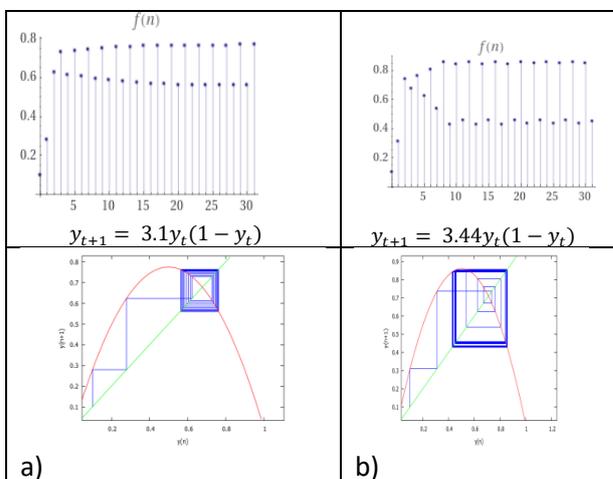
Για  $a = \alpha_c^{(2)} = 3$ . Τότε τα σημεία ισορροπίας θα είναι  $y_1^* = 0$ ,  $y_2^* = \frac{2}{3}$ . Έστω η αρχική συνθήκη  $y_0 \in (0,1)$ . Το πρόβλημα είναι ότι  $|f'(0)| = 0$  και  $|f'(\frac{2}{3})| = 0$ . Για αυτό ας δούμε αυτή την κατάσταση πως τη δείχνουν τα γραφήματα.



**Εικόνα 2.3.4:** Στο α) είναι η  $f(y)$  και η  $y=x$ . Το  $y_2^* = \frac{2}{3}$  είναι το σημείο ισορροπίας σε 100 βήματα που φαίνεται να είναι ελκυστής αλλά η ταλάντωση δεν καταλήγει ποτέ επάνω του και στο β) οι ίδιες γραμμές, (η πράσινη είναι η  $y=x$ ) όμοια αλλά σε 10 βήματα. Στο γ) είναι η τροχιά για 30 βήματα με αρχική  $y_0 = 0.1$  βλέπουμε η τροχιά να πλησιάζει ασυμπτωτικά με ταλάντωση το σημείο ισορροπίας. Σε κάθε περίπτωση το  $y_1^* = 0$  είναι ασταθής. Στα σχήματα α) και β) οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου είναι ίδιες.

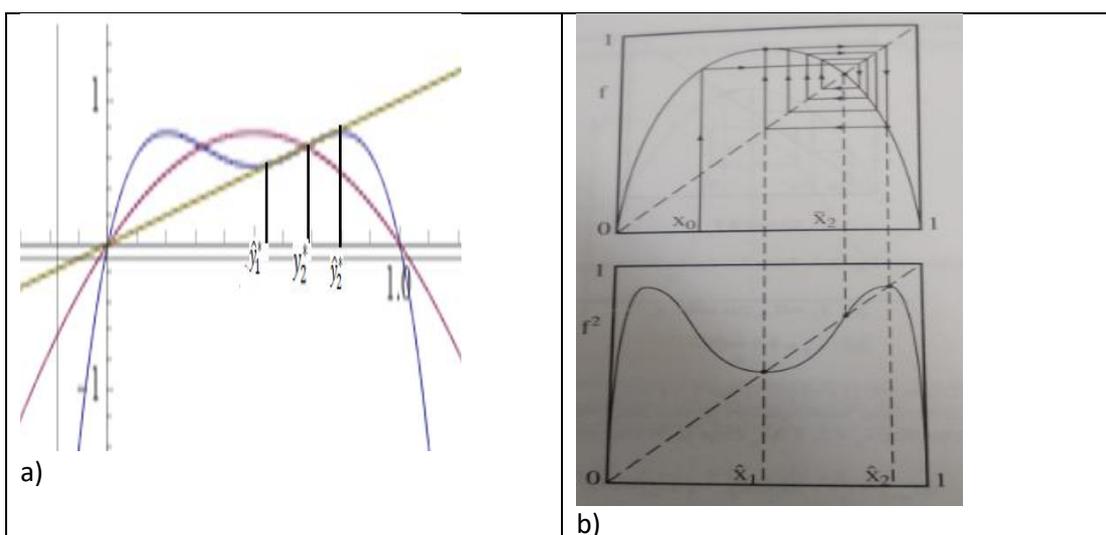
Πρέπει να θυμηθούμε ότι για  $a > 3$  και τα δύο σημεία είναι απωθητές (ασταθή) ενώ για  $1 < a < 3$  είχαμε ένα ευσταθές και ένα ασταθές, άρα για  $a = 3$  έχουμε επίσης ποιοτική αλλαγή των σημείων ισορροπίας.

Ας κάνουμε και μια μικρή αναφορά για το τι ακριβώς συμβαίνει με τα σημεία ισορροπίας όταν  $a \in (3, 4)$ .



Εικόνα 2.3.4:

Τι γίνεται στην Εικόνα 2.3.4 στις περιπτώσεις a), b); Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές (απωθητές) με ίδιο τρόπο. Ειδικά στην περίπτωση του  $y_2^* = \frac{a-1}{a}$  έχουμε στην περίπτωση της τροχιάς να έχουμε ένα διχασμό σε δυο σχεδόν παράλληλες γραμμές με ταλάντωση, στο δε διάγραμμα φάσης απομάκρυνση από το  $y_2^* = \frac{a-1}{a}$  από μέσα προς τα έξω και σχεδόν σταθεροποίηση σε μια ορθογώνια τροχιά με μορφή αράχνης. Τα ορθογώνια που δημιουργούνται έχουν διαφορετικές διαστάσεις αλλά οι διαστάσεις σταθεροποιούνται σε κάθε μια περίπτωση. Αυτό μας κάνει να σκεφτούμε ότι η τροχιά πλέον έχει δυο καινούρια σημεία ισορροπίας. Δηλαδή από το σημείο ισορροπίας  $y_2^* = \frac{a-1}{a}$  προκύπτουν δυο άλλα σημεία ισορροπίας ας πούμε  $\hat{y}_1^*$ ,  $\hat{y}_2^*$  που είναι ευσταθή αλλά με διπλάσια περίοδο.



Εικόνα 2.3.5: a) Η μπλε γραμμή είναι η  $f^{(2)}(y) = f(f(y))$ , η κόκκινη είναι η  $f(y) = ay(1 - y)$  και η λαδί είναι η  $y=x$  για  $a=3.1$ . b) Εικόνα από το «δυναμικά συστήματα και χάος-Αν. Μπουντής εκδ. Παπασωτηρίου»

Στην εικόνα 2.3.5b) είναι φανερό από τη φορά που έχουν τα βέλη ότι η τροχιά απομακρύνεται από το  $y_2^*$ , όμως δεν πηγαίνει οπουδήποτε. Καταλήγει έστω και ασυμπτωτικά σε συγκεκριμένα σημεία που είναι η τομή της  $y=x$  με την  $f^{(2)}(y)$ . Δηλαδή τα  $\hat{y}_1^*$ ,  $\hat{y}_2^*$  όπως τα ονομάσαμε, αποτελούν ευσταθή σημεία ισορροπίας της  $f^{(2)}(y)$ . Η αποσταθεροποίηση του  $y_2^*$  έχει δημιουργήσει μια νέα τροχιά περιόδου 2 για την οποία ισχύει :

$$[ \hat{y}_1^* = f^{(2)}(\hat{y}_1^*) \text{ και } \hat{y}_2^* = f^{(2)}(\hat{y}_2^*) ] \quad \text{ή} \quad [ \hat{y}_1^* = f(\hat{y}_2^*) \text{ και } \hat{y}_2^* = f(\hat{y}_1^*) ]$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **διπλασιασμός περιόδου** (period bifurcation).

Ομοίως από κάποια τιμή του  $\alpha$  έστω  $\alpha_1$  και μετά, έχουμε διπλασιασμό του διπλασιασμού, δηλαδή τροχιά περιόδου 4, μετά μια μεγαλύτερη τιμή της  $\alpha_1$  έστω  $\alpha_2$  που έχουμε τροχιά περιόδου 8, κ.ο.κ.

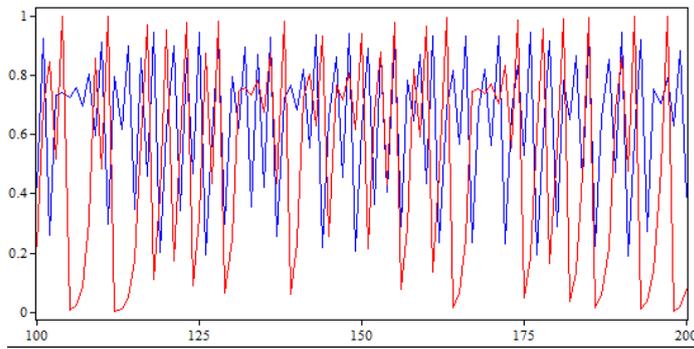
Αποδεικνύεται ότι για  $3 < \alpha < 3.4495\dots$  το σημείο ισορροπίας  $y_2^*$  που είναι ασταθές, διακλαδίζεται σε δυο σημεία  $\hat{y}_1^*$ ,  $\hat{y}_2^*$  που είναι ευσταθή. Η τροχιά δηλαδή μεταπηδά εναλλάξ μεταξύ δυο σημείων που αποτελούν ένα ελκτικό κύκλο περιόδου 2.

Για  $3.4495\dots < \alpha < 3.56\dots$  το σημείο περιόδου 2 διακλαδίζεται άλλη μια φορά δημιουργώντας ένα σημείο περιόδου 4. Δηλαδή για μια μη μηδενική αρχική τιμή  $y_0$ , η ακολουθία σταδιακά θα ταλαντεύεται μεταξύ τεσσάρων διαφορετικών σημείων, που αποτελούν ένα σημείο περιόδου 4 και των οποίων οι ακριβείς τιμές εξαρτώνται από την τιμή του  $\alpha$ .

Αυτό επαναλαμβάνεται συνεχώς με διαδοχική αύξηση της περιόδου σύμφωνα με τον τύπο  $2^n$  μέχρι ένα τελικό αριθμό  $\alpha=3.56994\dots$  που η βιβλιογραφία αναφέρει ως **τελικό σημείο συσσωρεύσεως** ή **χαστικός αριθμός**. Εκεί η περίοδος έχει πια γίνει τόσο μεγάλη ώστε ο πληθυσμός θα φαίνεται ότι μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο, δηλαδή δεν πλησιάζει κάποιο σημείο αλλά ούτε και απειρίζεται. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι υπάρχει ένα νέο είδος κίνησης, γνωστό σαν **χαστική κίνηση**, κατά την οποίαν η λύση «φαίνεται» να γυρίζει άσκοπα χωρίς καμία τάξη. Με άλλα λόγια η λύση της λογιστικής εξίσωσης γίνεται **χαστική**. Για να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά ενός συστήματος χαστική πρέπει να συντρέχουν οι τρεις παρακάτω ιδιότητες.

1. Πρέπει να παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες. (ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες σημαίνει ότι δυο σημεία σε ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να ακολουθήσουν ριζικά διαφορετικές τροχιές στο φασικό χώρο, ακόμη κι αν η διαφορά στις τιμές των αρχικών συνθηκών είναι εξαιρετικά μικρή.)
2. Πρέπει να είναι τοπολογικά μεταβατικό.
3. Το σύνολο των περιοδικών τροχιών του να είναι πυκνό. (Η πυκνότητα των περιοδικών τροχιών σημαίνει ότι κάθε σημείο στο χώρο προσεγγίζεται αυθαίρετα στενά από περιοδικές τροχιές).

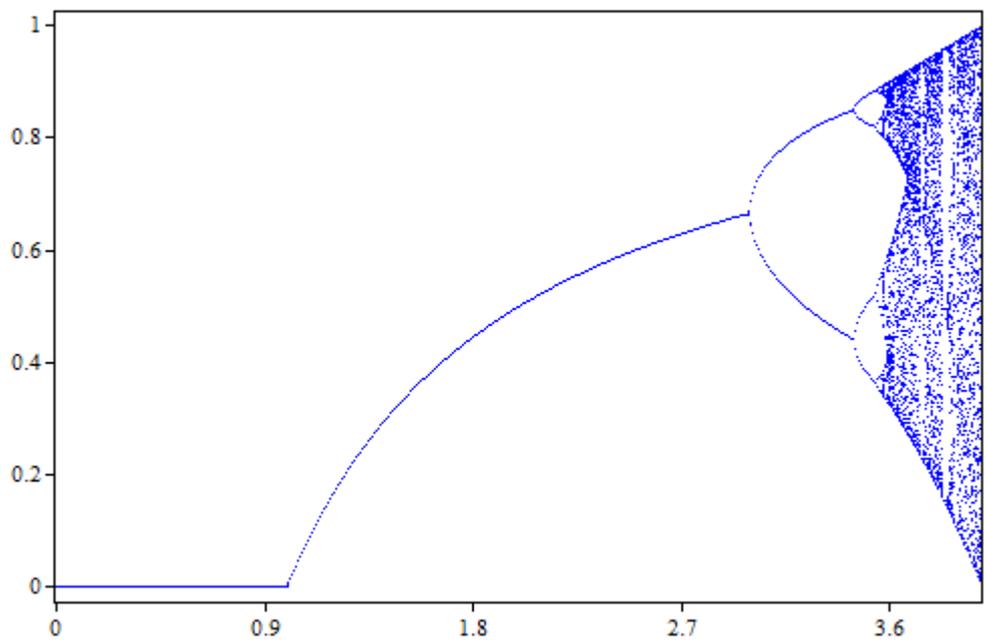
Στα πλαίσια ενός γενικού μετρικού χώρου η μεταβατικότητα και τα πυκνά σημεία υπονοούν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. (J. Banks 1992).



Εικόνα 2.3.6. Για  $\alpha=3.8$  και αρχικές συνθήκες 0.1 και 0.01 το διάγραμμα δύο τροχιών της λογιστικής εξίσωσης καταδεικνύει αυτό που εννοούμε ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Οι τροχιές είναι διαφορετικές.

### 2.3.1. Διάγραμμα διακλάδωσης (δικρανισμού) (bifurcation diagram)

Το διάγραμμα διακλάδωσης είναι ένα διάγραμμα που δείχνει τον τρόπο που για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου του δυναμικού συστήματος έχουμε διπλασιασμό της περιόδου. Όπως εξηγήσαμε παραπάνω από 1 ευσταθές σημείο ισορροπίας δημιουργούνται 2 ευσταθή σημεία ισορροπίας που το καθένα από αυτά έχει την διπλάσια περίοδο, από τα 2 δημιουργούνται 4 κ.ο.κ. Στην ουσία στο διάγραμμα διακλάδωσης απεικονίζονται τα σημεία ισορροπίας ως συνάρτηση της παραμέτρου.



Εικόνα 2.3.7: διάγραμμα διακλάδωσης ή διάγραμμα τροχιών.

Στην εικόνα 2.3.7. στον οριζόντιο άξονα υπάρχουν οι τιμές του  $\alpha$  και στον κατακόρυφο οι τιμές των σημείων ισορροπίας. Στο  $\alpha_1 = 3$  ακριβώς αρχίζει η τιμή ισορροπίας  $y_2^* = \frac{2}{3}$  να διακλαδώνεται μετά στο επόμενο  $\alpha_2 = 3.4496 \dots$  ξανά και συνεχίζει στα επόμενα  $\alpha_i$ ,  $i=1,2,3,\dots$  διπλασιασμούς. Απλά να παρατηρήσουμε επιπλέον ότι υπάρχουν κάποια «παράθυρα» τάξης μέσα στη χαοτική περιοχή για  $3.56994 \dots < \alpha < 4$ . Αν  $\alpha_i$  οι τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  στις οποίες γίνεται διπλασιασμός τότε ο αριθμός  $\delta = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$  συγκλίνει στο  $4.6692 \dots$  και εμφανίζεται και σε άλλες εξισώσεις διαφορών, αποτελεί δε, μια παγκόσμια σταθερά, γνωστή ως **αριθμός του Feigenbaum**.

### 2.3.2. Αριθμοί –εκθέτες Lyapunov

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο διαφορετικές τροχιές  $x_t = f^{(t)}(x_0)$ ,  $y_t = f^{(t)}(y_0)$  του ίδιου δυναμικού συστήματος  $x_{t+1} = f(x_t)$  που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες  $x_0, y_0$  με  $y_0 = x_0 + h$ , τότε όπως το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο οι τροχιές είτε θα συγκλίνουν σε ένα σημείο είτε θα απομακρύνονται συνεχώς. Ένα μέτρο του ρυθμού της σύγκλισης ή απόκλισης αποτελούν οι εκθέτες Lyapunov. Ας το δούμε λεπτομερώς. Έστω  $d_t$  η απόσταση των τροχιών την ίδια στιγμή  $t$ . Δηλαδή  $d_t = |y_t - x_t| \Rightarrow d_t = |f^{(t)}(y_0) - f^{(t)}(x_0)| = |f^{(t)}(x_0 + h) - f^{(t)}(x_0)| \Rightarrow$

$$\frac{d_t}{h} = \frac{|f^{(t)}(x_0+h) - f^{(t)}(x_0)|}{h} \quad (2.1)$$

Η εξίσωση (2.1) θα μπορούσε να περιγράψει τη σχετική απόσταση μεταξύ των δύο τροχιών και δεν θα ήταν κακή ιδέα να υποθέσουμε ότι αυτή μεταβάλλεται εκθετικά με το χρόνο. Οπότε θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση (2.1) ως:

$$\frac{d_t}{h} = \frac{|f^{(t)}(x_0+h) - f^{(t)}(x_0)|}{h} = e^{\lambda t} \quad (2.2)$$

Από την οποία παίρνουμε διαδοχικά για  $h \rightarrow 0$

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{|f^{(t)}(x_0+h) - f^{(t)}(x_0)|}{h} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{d^{(t)}f(x)}{d(x)} \right|_{x=x_0} \quad (2.3)$$

Χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της  $t$ -τάξεως παραγώγου δηλαδή

$$\frac{d^{(t)}f(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(t)}(x_0 + h) - f^{(t)}(x_0)}{h}$$

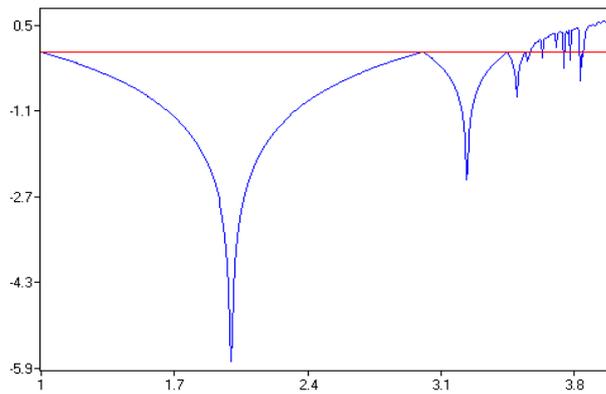
Η σταθερά  $\lambda$  που υπολογίσαμε με τον τύπο (2.3) είναι ο εκθέτης Lyapunov.

Τώρα αν  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_t\}$  αναλυτικά η τροχιά  $f^{(t)}(x_0)$  τότε η παραπάνω σχέση (2.3) μπορεί να γραφεί:  $\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_0} \cdot \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_1} \cdot \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_2} \cdot \dots \cdot \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_t} \right| \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{1}{t} \left( \ln \left| \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_0} \right| + \ln \left| \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_1} \right| + \ln \left| \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_2} \right| + \dots + \ln \left| \frac{df(x)}{d(x)} \Big|_{x=x_t} \right| \right) \quad (2.4)$$

Από τη σχέση (2.4) είναι φανερό ότι ο εκθέτης Lyapunov στην περίπτωση των δυναμικών συστημάτων διακριτού χρόνου ισούται με τη μέση τιμή των φυσικών λογαρίθμων της απόλυτης τιμής των παραγώγων σε καθένα από τα σημεία της τροχιάς  $x_t = f^{(t)}(x_0)$ .

Αποδεικνύεται ότι εάν κάποιος εκθέτης Lyapunov είναι θετικός το σύστημα χαρακτηρίζεται ως χαοτικό. Δηλαδή ένα δυναμικό σύστημα που εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά θα έχει τουλάχιστον ένα θετικό εκθέτη Lyapunov. Όσο μεγαλύτερος είναι ένας θετικός εκθέτης Lyapunov, τόσο μεγαλύτερη δυσκολία παρουσιάζεται στην προβλεπτική ικανότητα του συστήματος δηλαδή η προβλεπτική ικανότητα γίνεται μικρότερη.



**Εικόνα 2.3.8.** Διάγραμμα μέγιστων εκθετών Lyapunov (μπλε) για την λογιστική εξίσωση, στο οποίο φαίνεται το σημείο πάνω από το οποίο εμφανίζεται η χαοτική συμπεριφορά.

Παρατηρούμε στην εικόνα 2.3.7. ότι για πρώτη φορά εισέρχεται σε χαοτική κατάσταση περίπου στο  $\alpha=3.57$  και ότι από εκεί και μετά για ορισμένες τιμές της παραμέτρου υπάρχουν πολύ μικρά διαλείμματα στο χάος .

## 2.4. Γραμμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών

Έστω η γραμμική εξίσωση διαφορών

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = f(t)$$

Αν θέσουμε  $x_{t+1} = y_t$ , τότε  $x_{t+2} = y_{t+1}$ , τότε έχουμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών.

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = -bx_t - ay_t + f(t) \end{cases} (1)$$

Δηλαδή κάθε γραμμική εξίσωση διαφορών 2<sup>ης</sup> τάξης μπορεί να μετατραπεί σε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων διαφορών 1<sup>ης</sup> τάξης. Ομοίως κάθε γραμμική 3<sup>ης</sup> τάξης μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης κ.ο.κ.

Κάθε γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων μπορεί να γραφεί σε μορφή εξίσωσης πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad t=0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Ομοίως βέβαια και για συστήματα με περισσότερες εξισώσεις.

Το σημείο ισορροπίας το βρίσκουμε αν πάρουμε  $x_{t+1} = x_t = x^*$  και  $y_{t+1} = y_t = y^*$

Η εξίσωση (2) τότε γράφεται:  $\bar{X}^* = A\bar{X}^* + \bar{B} \Leftrightarrow (I - A)\bar{X}^* = \bar{B} \Leftrightarrow \bar{X}^* = (I - A)^{-1}\bar{B}$ ,

Όπου  $\bar{X}^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ ,  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$  και  $\bar{B} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ . Όταν το σύστημα είναι ομογενές δηλαδή  $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , τότε  $x^* = y^* = 0$ .

### 2.4.1. Η λύση του ομογενούς

Έστω το ομογενές  $\bar{X}_{t+1} = A\bar{X}_t$  τότε διαδοχικά έχουμε :

$$\bar{X}_1 = A\bar{X}_0$$

$$\bar{X}_2 = A\bar{X}_1 = AA\bar{X}_0 = A^2\bar{X}_0$$

$$\bar{X}_3 = A\bar{X}_2 = AA^2\bar{X}_0 = A^3\bar{X}_0$$

$$\bar{X}_t = A^t \bar{X}_0$$

Το διάνυσμα  $\bar{X}_0$  είναι το διάνυσμα αρχικών τιμών και ο πίνακας  $A^t = SD^t S^{-1}$ , όπου  $S$  ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  και  $D$  ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του  $A$  στην διαγώνιο.

#### Παράδειγμα 2.4.1.1

Να λυθεί το σύστημα  $\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$  με  $\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

#### Λύση

Επειδή  $\bar{X}_t = A^t \bar{X}_0$  και  $A^t = \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix}$ , τότε  $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 2^t \\ 4 * 3^t \end{bmatrix}$ .

Άρα  $x_t = 3 * 2^t$  και  $y_t = 4 * 3^t$ .

#### Παράδειγμα 2.4.1.2

Να λυθεί το σύστημα  $\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$  με  $\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

#### Λύση

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  είναι  $\lambda_1 = 2$  και  $\lambda_2 = 3$  και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι  $u_1 = (1, -1)$  και  $u_2 = (1, -2)$ . Οπότε  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix}$ .

Άρα  $A^t = SD^t S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * 2^t - 3^t & 2^t - 3^t \\ -2 * 2^t + 2 * 3^t & -2^t + 2 * 3^t \end{bmatrix}$ .

Συνεπώς  $\bar{X}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * 2^t - 3^t & 2^t - 3^t \\ -2 * 2^t + 2 * 3^t & -2^t + 2 * 3^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 * 2^t - 7 * 3^t \\ -10 * 2^t + 14 * 3^t \end{bmatrix}$ .

Οπότε  $x_t = 10 * 2^t - 7 * 3^t$  και  $y_t = -10 * 2^t + 14 * 3^t$ .

Παρατηρούμε ότι καθώς το  $t$  τείνει στο  $\infty$  και οι λύσεις του συστήματος τείνουν στο  $\infty$ .

**Προφανώς αν για τις ιδιοτιμές ισχύει  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  οι λύσεις  $x_t$  και  $y_t$  τείνουν στο σημείο ισορροπίας  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .**

#### Παράδειγμα 2.4.1.3

Να λυθεί το σύστημα  $\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$  με  $\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$

#### Λύση

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  είναι  $\lambda_1 = 1 + 2i$  και  $\lambda_2 = 1 - 2i$  και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι  $u_1 = (i, 1)$  και  $u_2 = (-i, 1)$ .

$$\text{Οπότε } D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{bmatrix} (1+2i)^t & 0 \\ 0 & (1-2i)^t \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ο πίνακας } S \text{ που διαγωνοποιεί τον } A \text{ είναι ο } S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ με αντίστροφο } S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Θα ισχύει λοιπόν } A^t = SD^tS^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2i)^t & 0 \\ 0 & (1-2i)^t \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+2i)^t + (1-2i)^t & i(1+2i)^t - i(1-2i)^t \\ -i(1+2i)^t + i(1-2i)^t & (1+2i)^t + (1-2i)^t \end{bmatrix}$$

$$\text{Παίρνουμε } (1+2i)^t = \sqrt{5}^t (\cos(t\varphi) + i\sin(t\varphi))$$

$$\text{και } (1-2i)^t = \sqrt{5}^t (\cos(t\varphi) - i\sin(t\varphi)) \text{ όπου } \varphi \text{ γνωστή γωνία με } \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ και } \sin(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ο πίνακας } A^t \text{ γίνεται } A^t = \sqrt{5}^t \begin{bmatrix} \cos(t\varphi) & -\sin(t\varphi) \\ \sin(t\varphi) & \cos(t\varphi) \end{bmatrix}, t = 0,1,2,3, \dots$$

$$\text{Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι } \bar{X}_t = A^t \bar{X}_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \sqrt{5}^t \begin{bmatrix} \cos(t\varphi) & -\sin(t\varphi) \\ \sin(t\varphi) & \cos(t\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο πίνακας  $\begin{bmatrix} \cos(t\varphi) & -\sin(t\varphi) \\ \sin(t\varphi) & \cos(t\varphi) \end{bmatrix}$  περιστρέφει το διάνυσμα  $\bar{X}_0$  κατά τη θετική φορά κατά γωνία  $t\varphi$ , οι λύσεις του συστήματος για κάθε  $t = 0,1,2,3, \dots$  θα είναι σημεία μιας σπείρας κέντρου  $(0,0)$  που είναι και το σημείο ισορροπίας του συστήματος.

Είναι φανερό ότι στο παράδειγμα αυτό επειδή  $|\lambda_i| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1$  αυτή η σπείρα που δημιουργείται από τα σημεία της τροχιάς της σπείρας θα εξελίσσεται προς τα έξω και ως εκ τούτου το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  θα είναι ασταθές (απωθητής).

**Στην περίπτωση μιγαδικών ιδιοτιμών γενικά οι τροχιές τέτοιων δυναμικών συστημάτων είναι σπείρες με φορά προς το σημείο ισορροπίας (ελκυστές) όταν  $|\lambda_i| < 1$  και φορά απομακρυνόμενη από το σημείο ισορροπίας (απωθητές) όταν  $|\lambda_i| > 1$ .**

#### Παράδειγμα 2.4.1.4

$$\text{Να λυθεί το σύστημα } \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \text{ με } \bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, t = 0,1,2,3, \dots$$

#### Λύση

Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  έχει μια διπλή ιδιοτιμή την  $\lambda=2$  αλλά δυστυχώς ένα μόνον ιδιοδιάνυσμα και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να διαγωνοποιηθεί. Συνεπώς ο πίνακας  $A^t$  δεν είναι εύκολο να βρεθεί, τουλάχιστον μεθοδευμένα όπως στα παραπάνω παραδείγματα. Η έτοιμη λύση λοιπόν  $\bar{X}_t = A^t \bar{X}_0$  δεν είναι εφικτή.

Παίρνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν από το σύστημα.

$$x_{t+1} = 2x_t + y_t \quad (1)$$

$$y_{t+1} = 2y_t \quad (2)$$

$$\text{Από την (1) έχουμε: } x_{t+2} = 2x_{t+1} + y_{t+1} \Rightarrow x_{t+2} = 2x_{t+1} + 2y_t \Rightarrow$$

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} + 2(x_{t+1} - 2x_t) \Rightarrow x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 0 \quad (3)$$

Η (3) είναι γραμμική 2ης τάξης που η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα το 2.

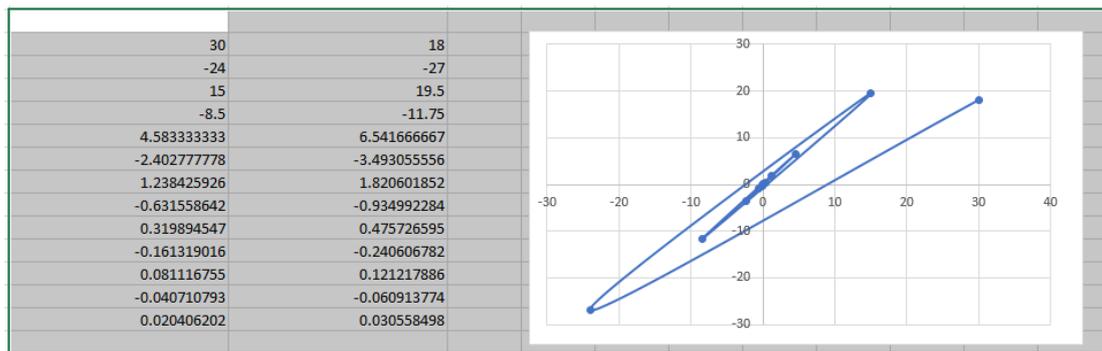
Άρα  $x_t = (c_1 + c_2 t)2^t$ . Για  $t=t+1$  παίρνουμε  $x_{t+1} = (c_1 + c_2 t + c_2)2^{t+1}$  και με αντικατάσταση αυτών στην (1) μπορούμε να βρούμε και το  $y_t$ .

Είναι λοιπόν  $y_t = (c_1 + c_2 t + c_2)2^{t+1} - 2(c_1 + c_2 t)2^t = (2c_1 + 2c_2 t + 2c_2 - 2c_1 - 2c_2 t)2^t = 2c_2 2^t$

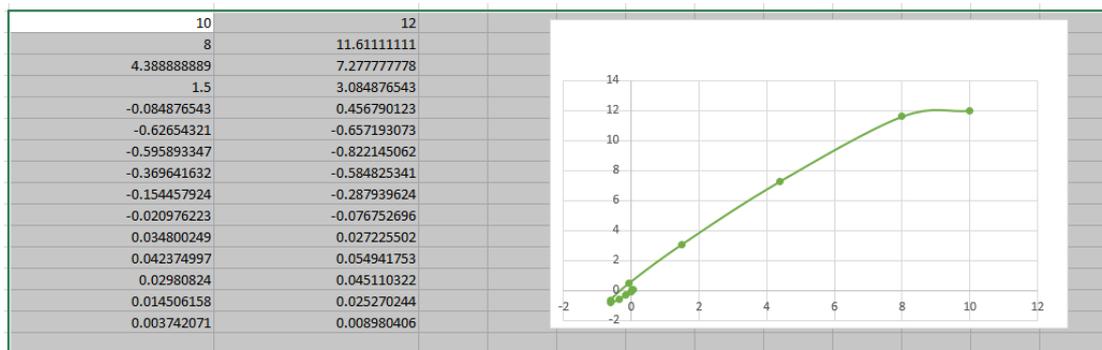
Άρα  $x_t = (c_1 + c_2 t)2^t$  και  $y_t = 2c_2 2^t$

Επειδή  $x_0 = 3$  και  $y_0 = 4$  έχουμε  $c_1 = 3$  και  $c_2 = 2$ .

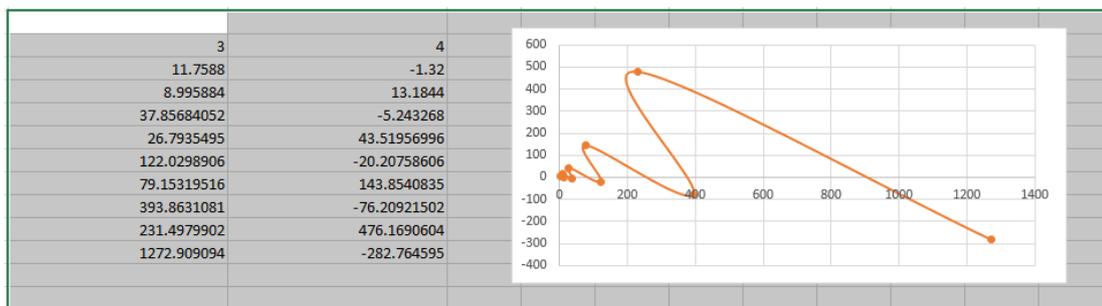
Τελικά  $x_t = (3 + 2t)2^t$  και  $y_t = 4 \cdot 2^t$ . Από τη φύση των λύσεων προφανώς το σημείο ισορροπίας είναι επίσης ασταθές.



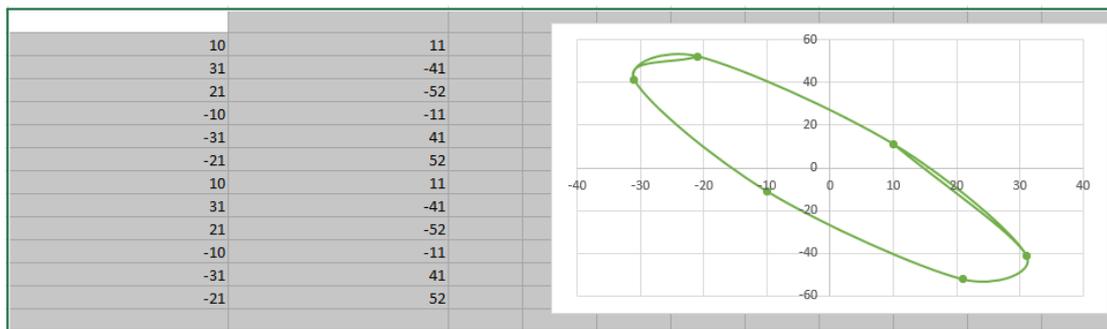
**Εικόνα 2.4.1.1:** γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών με αρχικές τιμές 30 και 18 για τα  $x$ , αντίστοιχα με πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$  με  $|\lambda| < 1$ . Έχει σχεδιαστεί στο EXCEL και το σημείο ισορροπίας (0,0) είναι ευσταθές (ελκυστής).



**Εικόνα 2.4.1.2:** γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών με αρχικές τιμές 10 και 12 για τα  $x$ ,  $y$  αντίστοιχα και μιγαδικές ιδιοτιμές  $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}i$  με μέτρο  $|\lambda| = \frac{13}{36} < 1$ . Έχει σχεδιαστεί στο EXCEL και το σημείο ισορροπίας (0,0) είναι ευσταθές (ελκυστής).



**Εικόνα 2.4.1.3:** γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών με αρχικές τιμές 3 και 4 για τα  $x$ ,  $y$  αντίστοιχα με πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 1.02$ ,  $\lambda_2 = 1.07$  με  $|\lambda| > 1$ . Έχει σχεδιαστεί στο EXCEL και το σημείο ισορροπίας (0,0) είναι ασταθές (απωθητής).



**Εικόνα 2.4.1.4:** γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών με αρχικές τιμές 10 και 11 για τα  $x$ ,  $y$  αντίστοιχα με μιγαδικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  με  $|\lambda|=1$ . Έχει σχεδιαστεί στο EXCEL και η τροχιά είναι ελλειπτική με κέντρο το σημείο ισορροπίας (0,0).

Συνοψίζοντας όσον αφορά την ποιοτική μελέτη του σημείου ισορροπίας.

Για τα ομογενή δυναμικά γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων διαφορών.

- Αν οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  είναι πραγματικές και διακριτές μεταξύ τους τότε : αν  $|\lambda_i| < 1$  τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (ελκυστής).
- Αν υπάρχει διπλή ιδιοτιμή  $\lambda$  με  $|\lambda| < 1$  το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (ελκυστής).
- Αν οι ιδιοτιμές είναι συζυγείς μιγαδικές με μέτρο  $|\lambda| < 1$  επίσης το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (ελκυστής). Στην περίπτωση που  $|\lambda| = 1$  τότε η τροχιά της λύσης είναι ελλειπτική με κέντρο το σημείο ισορροπίας, δηλαδή έχουμε αστάθεια.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και στην περίπτωση περισσότερων εξισώσεων , αλλά και στην περίπτωση που το σύστημα είναι μη ομογενές.

**Σημείωση:** Τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  τις βρίσκουμε είτε επιλύοντας την εξίσωση  $\det(A - \lambda I) = 0$ , όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας, είτε επιλύοντας την εξίσωση  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$  όπου  $T$  το ίχνος ( $\text{tr}A$ ) και  $D$  η ορίζουσα ( $\det A$ ) του πίνακα  $A$ .

## 2.4.2. Η λύση του μη ομογενούς

Έστω το μη ομογενές  $\bar{X}_{t+1} = A\bar{X}_t + \bar{B}$  και έστω  $\bar{X}^*$  το σημείο ισορροπίας για το οποίο ισχύει  $\bar{X}^* = A\bar{X}^* + \bar{B}$ . Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις παίρνουμε:

$$\bar{X}_{t+1} - \bar{X}^* = A(\bar{X}_t - \bar{X}^*)$$

Οπότε θέτοντας  $\bar{Y}_{t+1} = \bar{X}_{t+1} - \bar{X}^*$  και  $\bar{Y}_t = \bar{X}_t - \bar{X}^*$

το σύστημα γίνεται ομογενές  $\bar{Y}_{t+1} = A\bar{Y}_t$  και λύνεται κατά τα γνωστά.

### Παράδειγμα 2.4.2.1

Να λυθεί το σύστημα  $\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  με  $\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

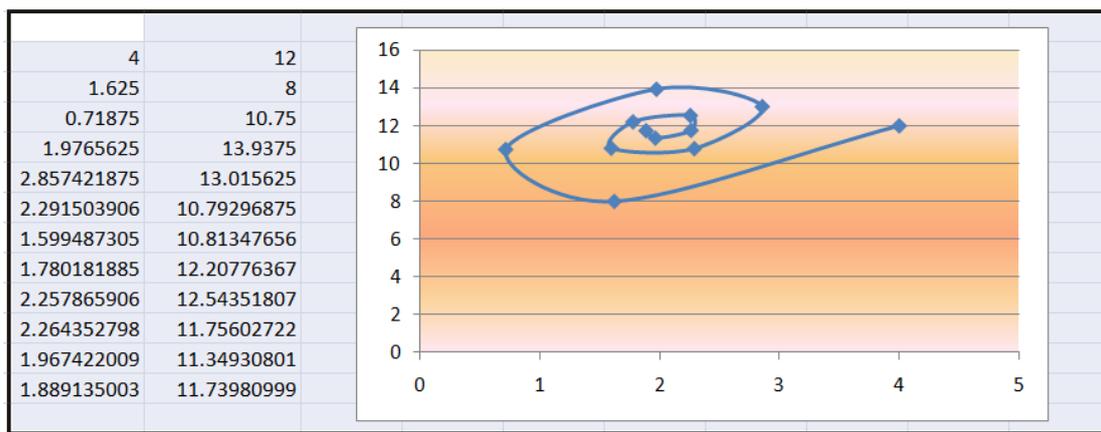
**Λύση**

Το σημείο ισορροπίας το βρίσκουμε από την  $\bar{X}^* = (I - A)^{-1}\bar{B} \Rightarrow \bar{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{X}^* = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -2 \end{bmatrix}$ .

Αντικαθιστώντας  $\bar{Y}_{t+1} = \bar{X}_{t+1} - \bar{X}^*$  και  $\bar{Y}_t = \bar{X}_t - \bar{X}^*$  παίρνουμε το ομογενές  $\bar{Y}_{t+1} = A\bar{Y}_t$  με αρχική συνθήκη  $\bar{Y}_0 = \bar{X}_0 - \bar{X}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 6 \end{bmatrix}$ . Οπότε  $\bar{Y}_t = A^t \bar{Y}_0$  που έχει λύση  $\bar{Y}_t = \begin{bmatrix} 10 * 2^t - 7 * 3^t \\ -10 * 2^t + 14 * 3^t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_t - 0,5 \\ y_t + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 * 2^t - 7 * 3^t \\ -10 * 2^t + 14 * 3^t \end{bmatrix}$ .

Άρα  $x_t = 10 * 2^t - 7 * 3^t + 0,5$  και  $y_t = -10 * 2^t + 14 * 3^t - 2$ .

Το ίδιο λοιπόν και στα μη ομογενή. Αν για τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$  ισχύει  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  οι λύσεις  $x_t$  και  $y_t$  τείνουν στο σημείο ισορροπίας  $(x^*, y^*)$



Εικόνα 2.4.2.1: γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών με αρχικές τιμές 4 και 12 για τα  $x, y$  αντίστοιχα, μη ομογενές. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

### Παράδειγμα 2.4.2.2. (δυοπώλιο Cournot)

(από το «Γραμμ. Άλγεβρα, Βελτιστοποίηση και Δυναμική Ανάλυση, των Γ. Σαραφόπουλου, Ν. Μυλωνά 2015 εκδ. Τζιόλα)

Στο δυοπώλιο Cournot υπάρχουν δυο επιχειρήσεις που παράγουν το ίδιο προϊόν που πωλείται στην αγορά. Ας είναι  $q_1, q_2$  οι ποσότητες που παράγει κάθε επιχείρηση και έστω οι ανάγκες της αγοράς για το προϊόν είναι ίση με  $q = q_1 + q_2$ . Έστω επίσης ότι η τιμή  $p$  ανά μονάδα προϊόντος εξαρτάται από τις συνολικές ανάγκες της αγοράς για το προϊόν και διαμορφώνεται ως  $p(q) = \alpha - \beta q = \alpha - \beta(q_1 + q_2)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ . Το κόστος παραγωγής είναι ανάλογο της ποσότητας παραγωγής δηλαδή  $C(q_i) = \lambda q_i, i = 1, 2$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω οι συναρτήσεις κέρδους κάθε επιχείρησης είναι :

$$\Pi_1(q_1, q_2) = [\alpha - \beta(q_1 + q_2)]q_1 - \lambda q_1$$

$$\Pi_2(q_1, q_2) = [\alpha - \beta(q_1 + q_2)]q_2 - \lambda q_2$$

Επειδή  $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \alpha - 2\beta q_1 - \beta q_2 - \lambda$  και  $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -2\beta < 0$ , έχουμε μεγιστοποίηση κερδών για τη πρώτη επιχείρηση όταν  $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow q_1 = -\frac{q_2}{2} + \frac{\alpha - \lambda}{2\beta}$  και με όμοιο τρόπο η δεύτερη επιχείρηση έχει μέγιστα κέρδη όταν  $q_2 = -\frac{q_1}{2} + \frac{\alpha - \lambda}{2\beta}$ . Οι δυο παραπάνω εξισώσεις

αποτελούν το σύστημα  $\begin{cases} 2q_1 + q_2 = \frac{\alpha-\lambda}{\beta} \\ q_1 + 2q_2 = \frac{\alpha-\lambda}{\beta} \end{cases}$  που έχει λύση τις ποσότητες ισορροπίας κατά Cournot-Nash  $q_1^* = q_2^* = \frac{\alpha-\lambda}{3\beta}$ . (Προφανώς  $\alpha > \lambda$ ).

Το παραπάνω είναι ένα στατικό παίγνιο με αμιγείς στρατηγικές και με ένα σημείο ισορροπίας το  $q_1^* = q_2^* = \frac{\alpha-\lambda}{3\beta}$ .

Ας προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε το παραπάνω παίγνιο σε δυναμικό βάζοντας το σενάριο ότι οι επιχειρήσεις κάθε χρονική στιγμή  $t, t=0, 1, 2, 3, \dots$  καθορίζουν τη στρατηγική τους έχοντας την προσδοκία ότι ο ανταγωνιστής τους δεν θα αλλάξει τη στρατηγική που είχε στην προηγούμενη χρονική περίοδο. Έτσι η στρατηγική παραγωγής για την πρώτη επιχείρηση γίνεται :

$$q_1(t+1) = -\frac{q_2(t)}{2} + \frac{\alpha-\lambda}{2\beta}$$

Και με τον ίδιο τρόπο για την δεύτερη επιχείρηση  $q_2(t+1) = -\frac{q_1(t)}{2} + \frac{\alpha-\lambda}{2\beta}$

Οι δυο προηγούμενες εξισώσεις πλέον αποτελούν ένα σύστημα δυο εξισώσεων διαφορών που σε μορφή εξίσωσης πινάκων γράφεται:

$$Q_{t+1} = A Q_t + B$$

Όπου  $Q_t = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$ ,  $Q_{t+1} = \begin{bmatrix} q_1(t+1) \\ q_2(t+1) \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-\lambda}{2\beta} \\ \frac{\alpha-\lambda}{2\beta} \end{bmatrix}$

Βρίσκουμε το σημείο ισορροπίας κατά τα γνωστά

$$Q^* = (I - A)^{-1} B \Rightarrow Q^* = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} B$$

Εξάλλου ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 0.5$  και  $\lambda_2 = -0.5$  με  $|\lambda_i| < 1$ , άρα το σημείο ισορροπίας  $Q^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix}$  είναι ευσταθές (ελκυστής).

## 2.5. Διαγράμματα φάσης

Θα εξηγήσουμε τι είναι τα διαγράμματα φάσης και πως τα φτιάχνουμε για τα δυναμικά συστήματα γραμμικών εξισώσεων διαφορών χρησιμοποιώντας παράδειγμα.

Θα εξετάσουμε ένα σημαντικό ζήτημα πολιτικής, που έχει συζητηθεί στη βιβλιογραφία, δηλαδή το εσωτερικό και εξωτερικό ισοζύγιο (ισορροπία). Έχοντας δημιουργήσει ένα μακροοικονομικό μοντέλο, επιβάλλεται στη συνέχεια μια πολιτική σταθερού στόχου σε αυτό. Επιλέγονται δύο σταθεροί στόχοι: το επίπεδο του πραγματικού εισοδήματος και το υπόλοιπο στο ισοζύγιο πληρωμών. [Το ισοζύγιο εξωτερικών πληρωμών ή απλούστερα ισοζύγιο πληρωμών αφορά τον ειδικό λογαριασμό στον οποίο καταγράφονται το ύψος και η εξελικτική πορεία όλων των οικονομικών συναλλαγών που διατηρεί μια χώρα με άλλες χώρες του κόσμου. Σε αυτό το ισοζύγιο καταγράφεται η εισροή και εκροή κεφαλαίων (εισπράξεις και πληρωμών σε συνάλλαγμα) από προς την εν λόγω χώρα κατά τη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου (συνήθως ενός έτους). Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται και ως δείκτης της ζήτησης και προσφοράς του νομίσματος της εν λόγω χώρας. Το ισοζύγιο πληρωμών έχει ιδιαίτερη σημασία για την οικονομία μιας χώρας καθώς κάθε μια συναλλαγή που αυτό περιλαμβάνει επηρεάζει τη διαμόρφωση μεγεθών όπως του εθνικού εισοδήματος και της εθνικής δαπάνης ενώ παράλληλα απεικονίζει τη διεθνή οικονομική θέση της συγκεκριμένης χώρας.(Wikipedia)]. Το πραγματικό

εισόδημα θεωρείται ότι έχει οριστεί στο πλήρες επίπεδο απασχόλησης, (Shone 1989, κεφάλαιο 11 και Mundell 1962) που δηλώνει την κατάσταση του εσωτερικού ισοζυγίου (Το εσωτερικό ισοζύγιο μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως κατάλληλος συνδυασμός εισοδήματος-πληθωρισμού). Το εξωτερικό ισοζύγιο αντιπροσωπεύει μηδενικό υπόλοιπο στο συνδυασμένο λογαριασμό τρεχουσών συναλλαγών και κεφαλαίου του ισοζυγίου πληρωμών.

Μετά την ανάλυση του Tinbergen (1956), υπάρχουν δύο απαραίτητα μέσα πολιτικής για την επίτευξη των δύο στόχων πολιτικής. Πρόκειται για **κρατικές δαπάνες**, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την επίτευξη εσωτερικής ισορροπίας και το **επιτόκιο**, το οποίο χρησιμοποιείται για την επίτευξη εξωτερικής ισορροπίας (επηρεάζοντας ρητά τις καθαρές ροές κεφαλαίων).

Υποθέτοντας ότι η μεταβολή πολιτικής είναι ανάλογη με τη διαφορά μεταξύ του σημερινού επιπέδου και του επιπέδου για την επίτευξη του στόχου της, παίρνουμε τις εξισώσεις.

$$\Delta g_{t+1} = g_{t+1} - g_t = k_1(g_t - g_t^*), \quad k_1 < 0.$$

$$\Delta r_{t+1} = r_{t+1} - r_t = k_2(r_t - r_t^*), \quad k_2 < 0. \quad (1)$$

Όπου  $g_t$  είναι οι κρατικές δαπάνες και  $g_t^*$  είναι ο στόχος των κρατικών δαπανών για την ισορροπία στην περίοδο  $t$ , ενώ  $r_t$  είναι το επιτόκιο και  $r_t^*$  το επιτόκιο ισορροπίας (στόχος) στην περίοδο  $t$ .

### Παράδειγμα 2.5.1.

Οι ακόλουθες εξισώσεις (Shone 1989) ενός μακροοικονομικού μοντέλου συσχετίζουν τα  $g_t$  και  $r_t$ .

$$\text{IB (εσωτερικό ισοζύγιο): } r_t = -3.925 + 0.5g_t$$

$$\text{XB (εξωτερικό ισοζύγιο): } r_t = 7.958 + 0.186g_t$$

Στην περίπτωση IB ορίζουμε το  $g_t^*$  να είναι ίσο με  $g_t^* = 7.85 + 2r_t$  και στην περίπτωση του XB ορίζουμε το  $r_t^*$  να είναι ίσο με  $r_t^* = 7.958 + 0.186g_t$ . Τότε οι εξισώσεις (1) γίνονται.

$$\Delta g_{t+1} = g_{t+1} - g_t = k_1(g_t - 7.85 - 2r_t), \quad k_1 < 0.$$

$$\Delta r_{t+1} = r_{t+1} - r_t = k_2(r_t - 7.958 - 0.186g_t), \quad k_2 < 0. \quad (2)$$

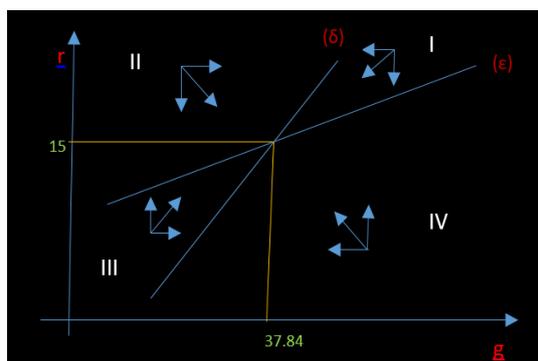
Παίρνοντας  $\Delta g_{t+1} = \Delta r_{t+1} = 0$ , οι δύο γραμμές

$$(\delta) \quad g_t - 7.85 - 2r_t = 0 \quad \text{και}$$

$$(\epsilon) \quad r_t - 7.958 - 0.186g_t = 0$$

τέμνονται στο σημείο ισορροπίας  $(g^*, r^*) = (37.84, 15)$ . Οι  $(\delta)$  και  $(\epsilon)$  τεμνόμενες στο σημείο ισορροπίας χωρίζουν το επίπεδο σε 4 χωρία. Για κάθε σημείο του χωρίου I ισχύει  $\Delta g_{t+1} < 0$  και  $\Delta r_{t+1} < 0$ , δηλαδή όπως φαίνεται στο σχήμα της **εικόνας 2.4.1.1**.

η  $g_t$  μειώνεται και η  $r_t$  επίσης μειώνεται η δε συνισταμένη των δύο βελών δείχνει προς το σημείο ισορροπίας. Την ίδια τεχνική ακολουθώ και στα χωρία II, III, IV. Κάτω από αυτή τη λογική διαπιστώνουμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Το γεωμετρικό σχήμα που δημιουργείται λέγεται **διάγραμμα φάσης**. Το χωρίο III χαρακτηρίσε την



οικονομία του Ηνωμένου Βασιλείου στη δεκαετία του 1960.

**Εικόνα 2.4.1.1:** στο διάγραμμα φάσης οι ευθείες (δ) και (ε) τέμνονται στο σημείο ισορροπίας και από τη φορά που έχουν τα βέλη-συνιστώσες είναι ευσταθές σημείο (ελκυστής).

## 2.6. Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα εξισώσεων διαφορών

Έστω το σύστημα : 
$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \quad (1).$$
 Αν μια τουλάχιστον από τις δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι μη γραμμική τότε το σύστημα λέγεται μη γραμμικό.

Η λύση του δεν είναι πάντα εφικτή, αλλά θα μπορούσαμε να ελέγξουμε αν έχει σημεία ισορροπίας και να ελέγξουμε ποιοτικά τι είδους ισορροπία υπάρχει.

Τα σημεία ισορροπίας θα τα βρούμε επιλύοντας το σύστημα: 
$$\begin{cases} x^* = f(x^*, y^*) \\ y^* = g(x^*, y^*) \end{cases} \quad (2).$$

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει σημείο ισορροπίας το  $(x^*, y^*)$ . Ποιοτική διερεύνηση του σημείου ισορροπίας είναι δυνατή στη γειτονιά του  $(x^*, y^*)$ , αρκεί οι  $f$  και  $g$  να είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες. Υπό αυτές τις συνθήκες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πολυώνυμο Taylor πρώτου βαθμού κάνοντας γραμμικοποίηση λαμβάνοντας υπόψη ότι οι υπόλοιποι παράγοντες μεγαλύτερου βαθμού καταγράφουν πολύ μικρές αποκλίσεις από το μηδέν.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_t} (x_t - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_t} (y_t - y^*) \\ y_{t+1} &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_t} (x_t - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_t} (y_t - y^*) \end{aligned}$$

Έχοντας ως δεδομένο ότι  $x^* = f(x^*, y^*)$  και  $y^* = g(x^*, y^*)$  και αφού κάνουμε τις αντικαταστάσεις  $\alpha_1 = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_t}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_t}$ ,  $\beta_1 = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_t}$ ,  $\beta_2 = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_t}$ , οι παραπάνω γίνονται 
$$\begin{cases} x_{t+1} - x^* = \alpha_1(x_t - x^*) + \beta_1(y_t - y^*) \\ y_{t+1} - y^* = \alpha_2(x_t - x^*) + \beta_2(y_t - y^*) \end{cases}$$
 και σε μορφή εξίσωσης πινάκων γράφεται:

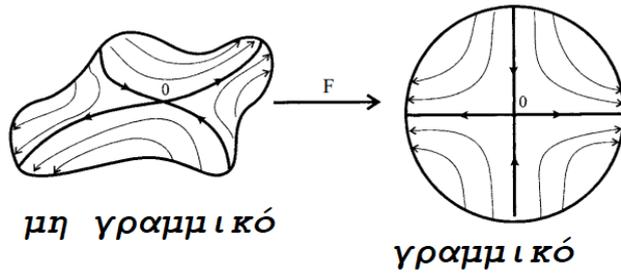
$$\bar{u}_{t+1} = A\bar{u}_t \quad (1)$$

Με  $\bar{u}_{t+1} = \begin{bmatrix} x_{t+1} - x^* \\ y_{t+1} - y^* \end{bmatrix}$ ,  $\bar{u}_t = \begin{bmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ . Ο πίνακας  $A$  συμβολίζεται και με  $J$

και είναι Ιακωβιανός. Δηλαδή  $A = J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_t} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_t} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_t} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_t} \end{bmatrix}$ .

Έτσι προσεγγιστικά η ποιοτική μελέτη των σημείων ισορροπίας είναι εφικτή από την εξίσωση (1) όπως ακριβώς και στα γραμμικά συστήματα. Ειδικά αν τα  $\lambda_1, \lambda_2$  έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται υπερβολικό (hyperbolic fixed point).

Η δομή της τροχιάς ενός δυναμικού συστήματος σε μια γειτονιά ενός σημείου υπερβολικής ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τη δομή της τροχιάς του γραμμικοποιημένου δυναμικού συστήματος. ( Θεώρημα Hartman Grobman).



### Παράδειγμα 2.6.1.

Σε συνέχεια του παραδείγματος 2.3.2.2 ας κάνουμε μια αλλαγή στη στρατηγική της πρώτης επιχείρησης θεωρώντας ότι η δεύτερη επιχείρηση συνεχίζει την στρατηγική της χωρίς να κάνει καμιά αλλαγή. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η πρώτη επιχείρηση θεωρεί ότι η σχετική μεταβολή της παραγόμενης ποσότητας μεταξύ δυο διαδοχικών χρονικών στιγμών ισούται με το οριακό κέρδος και η δεύτερη επιχείρηση συνεχίζει με τον προηγούμενο τρόπο επιλογής της παραγόμενης ποσότητας. Έχουμε:

$$\frac{q_1(t+1)-q_1(t)}{q_1(t)} = \frac{\partial \Pi_1(q_1(t), q_2(t))}{\partial q_1(t)} \quad (1)$$

$$q_2(t+1) = -\frac{q_1(t)}{2} + \frac{\alpha-\lambda}{2\beta} \quad (2)$$

Από την (1) διαδοχικά παίρνουμε  $\frac{q_1(t+1)-q_1(t)}{q_1(t)} = \alpha - 2\beta q_1(t) - \beta q_2(t) - \lambda$

$$\Rightarrow q_1(t+1) - q_1(t) = [\alpha - 2\beta q_1(t) - \beta q_2(t) - \lambda]q_1(t) \Rightarrow$$

$$q_1(t+1) = q_1(t)[1 + \alpha - 2\beta q_1(t) - \beta q_2(t) - \lambda]$$

Πρώτα θα βρούμε το σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t)[1 + \alpha - 2\beta q_1(t) - \beta q_2(t) - \lambda] \\ q_2(t+1) = -\frac{q_1(t)}{2} + \frac{\alpha-\lambda}{2\beta} \end{cases} \quad \text{αφού θέσουμε } q_1^* = q_1(t+1) =$$

$q_1(t)$  και  $q_2^* = q_2(t+1) = q_2(t)$  και έχουμε :

$$\begin{cases} q_1^* = q_1^*[1 + \alpha - 2\beta q_1^* - \beta q_2^* - \lambda] \\ q_2^* = -\frac{q_1^*}{2} + \frac{\alpha-\lambda}{2\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^* = \frac{\alpha-\lambda}{3\beta} \\ q_2^* = \frac{\alpha-\lambda'}{3\beta} \end{cases} \quad q_1^*, q_2^* > 0.$$

Επίσης θέτω  $f(q_1(t), q_2(t)) = q_1(t)[1 + \alpha - 2\beta q_1(t) - \beta q_2(t) - \lambda]$

και  $g(q_1(t), q_2(t)) = -\frac{q_1(t)}{2} + \frac{\alpha-\lambda}{2\beta}$  οπότε παίρνω τον Ιακωβιανό:

$$J(q_1(t), q_2(t)) = \begin{bmatrix} f_{q_1} & f_{q_2} \\ g_{q_1} & g_{q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha - \lambda - 4\beta q_1 - \beta q_2 & -\beta q_1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \text{ που στο σημείο ισορροπίας γίνεται } J(q_1^*, q_2^*) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha - \lambda - 4\beta \frac{\alpha-\lambda}{3\beta} - \beta \frac{\alpha-\lambda}{3\beta} & -\beta \frac{\alpha-\lambda}{3\beta} \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-2\lambda-2\alpha}{3} & \frac{\lambda-\alpha}{3} \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το ίχνος  $T = \frac{3-2\lambda-2\alpha}{3}$  και η ορίζουσα  $D = \frac{\lambda-\alpha}{6}$ . Για να βρούμε τις ιδιοτιμές λύνουμε την εξίσωση  $\rho^2 - T\rho + D = 0$  (3). Επειδή υποθέσαμε ότι  $\alpha > \lambda$  ώστε οι ποσότητες  $q_1, q_2 > 0$  (παρ. 2.3.2.2), τότε  $D = \frac{\lambda-\alpha}{6} < 0$ , η εξίσωση (3) έχει πραγματικές ετερόσημες ρίζες δηλαδή οι ιδιοτιμές του J είναι ετερόσημοι πραγματικοί αριθμοί.

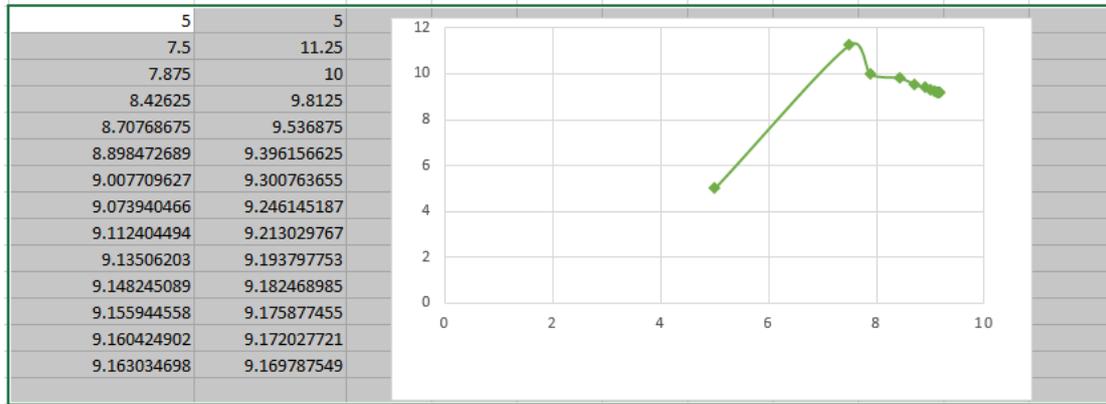
Αν  $\rho_1 < 0$  και  $\rho_2 > 0$  οι ρίζες της (3), για να είναι το σημείο ισορροπίας ευσταθές πρέπει :

$-1 < \rho_1 < 0$  και  $0 < \rho_2 < 1$ , οπότε με πρόσθεση έχουμε:  $-1 < \rho_1 + \rho_2 < 1 \Rightarrow -1 < T < 1 \Rightarrow$

$$-1 < \frac{3-2\lambda-2\alpha}{3} < 1 \Rightarrow 0 < \lambda + \alpha < 3.$$

Συνεπώς για να υπάρχει ισορροπία στο δυοπώλιο αυτό πρέπει να ισχύουν  $\lambda + \alpha <$

$$3, \alpha > \lambda > 0 \text{ με τιμές } q_1^* = q_2^* = \frac{\alpha - \lambda}{3\beta} \text{ και τιμή του παίγνιου } \Pi = \frac{(\alpha - \lambda)^2}{9\beta}$$



Εικόνα 2.6.1.:Το μη γραμμικό σύστημα του παραδείγματος με  $\alpha=1.6, \lambda=0.5, \beta=0.04$ .

# Κεφάλαιο 3

## Πολυπλοκότητα σε ένα παίγνιο τύπου Cournot

### Περίληψη

Διερευνούμε ένα μοντέλο σε δυοπωλιακή αγορά δύο επιχειρήσεων κοινής ωφέλειας σε συνθήκες πλήρους πληροφόρησης. Εξετάζουμε υπό ποιες προϋποθέσεις η ισορροπία Nash του στατικού υποδείγματος είναι ευσταθής ισορροπία του δυναμικού συστήματος και διερευνούμε την επίδραση της παραμέτρου της ταχύτητας προσαρμογής στη δυναμική του υποδείγματος. Αναδεικνύεται έτσι η χαστική συμπεριφορά εκτός του πεδίου ευστάθειας. Στο αποτέλεσμα οδηγούμαστε με ένα συνδυασμό αναλυτικών και προσεγγιστικών μεθόδων οι οποίες έρχονται σε πλήρη συναλήθευση. Η ιδέα του μοντέλου ήταν από την εργασία 24 (Wen-na Li, A.A. Elsadany, Wei Zhou, Yan-lan Zhu «Global Analysis, Multi-stability and Synchronization in a Competition Model of Public Enterprises with Consumer Surplus Check for updates» 2020) και σε πολύ μεγάλο βαθμό υποστηρίχθηκε από την μεθοδολογία της εργασίας 23 ( Georges Sarafopoulos «On the dynamics of a duopoly game with differentiated goods» (2014). Εκτός των παραπάνω αναφερθέντων χρησιμοποιήθηκαν και σημεία από τις πηγές 30, 35, 27, 18, 33, 1, 19, 15, 3, 13, 14, 10, 10, 6, 9, 12.

### 3.1. Εισαγωγή

Σημαντικό ρόλο στη μοντελοποίηση οικονομικών φαινομένων παίζουν οι προσδοκίες ενός παραγωγού, ο οποίος μπορεί να επιλέξει τον τρόπο πραγματοποίησης τους με πολλές διαθέσιμες τεχνικές ώστε να προσαρμόσει τα αποτελέσματα της παραγωγής του. Στις διάφορες δομές αγοράς συμπεριλαμβάνεται το ολιγοπώλιο σε μια θέση ανάμεσα στο μονοπώλιο και στον τέλει ανταγωνισμό. Θεωρητικός εισηγητής της έννοιας του ολιγοπωλίου υπήρξε ο Cournot (Antoine Augustin Cournot, 1801-1877) και το θέμα εξελίχθηκε έστω και με διαφορετικές υποθέσεις από τους Bertrand (Joseph Louis Francois Bertrand 1822 – 1900, Paris), Edgeworth (Francis Ysidro Edgeworth 1845 – 1926), Chamberlin (Edward Hastings Chamberlin, 1899-1967), Sweezy ( Paul Marlor Sweezy , 1910 – 2004), κ.α.

Το **μοντέλο Cournot** είναι ένα μοντέλο της οικονομικής επιστήμης που χρησιμοποιείται για να περιγράψει μια δομή στην οποία οι εταιρείες ανταγωνίζονται για την ποσότητα της παραγωγής που θα παράγουν, που το αποφασίζουν ανεξάρτητα η μία από την άλλη και ταυτόχρονα. Τα βασικά χαρακτηριστικά του είναι τα εξής.

- Υπάρχουν περισσότερες από μία εταιρείες που δεν συνεργάζονται και όλες παράγουν ένα ομοιογενές προϊόν.
- Η απόφαση παραγωγής κάθε εταιρείας επηρεάζει την τιμή του προϊόντος.
- Ο αριθμός των επιχειρήσεων είναι σταθερός.
- Οι εταιρείες ανταγωνίζονται σε ποσότητες και επιλέγουν ταυτόχρονα ποσότητες.
- Οι εταιρείες είναι οικονομικά ορθολογικές και ενεργούν στρατηγικά, δηλαδή επιδιώκουν να μεγιστοποιήσουν το κέρδος λαμβάνοντας υπόψη τις αποφάσεις των ανταγωνιστών τους.

Όλες οι εταιρείες που συμμετέχουν γνωρίζουν το συνολικό αριθμό εταιρειών στην αγορά, και λαμβάνουν την παραγωγή των άλλων όπως δίνεται. Κανονικά το κόστους καθεμιάς

αντιμετωπίζεται ως κοινή γνώση και μπορεί να είναι το ίδιο ή διαφορετικό μεταξύ των επιχειρήσεων. Η αγοραία τιμή καθορίζεται σε επίπεδο τέτοιο ώστε η ζήτηση να ισούται με τη συνολική ποσότητα που παράγεται από όλες τις εταιρείες. Κάθε εταιρεία λαμβάνει ως δεδομένη την ποσότητα που καθορίζουν οι ανταγωνιστές της, αξιολογεί την υπολειπόμενη ζήτηση και, στη συνέχεια, συμπεριφέρεται ως μονοπώλιο .

Μερικοί συγγραφείς μελέτησαν δυοπώλια με ομοιογενείς προσδοκίες και βρήκαν μια ποικιλία πολύπλοκων δυναμικών στα παιχνίδια τους, όπως εμφάνιση παράξενων ελκυστών (Agiza, 1999, Agiza et al. 2002, Agliari et al. 2005, , Bischi 2006, Kopel 2001 , Puu, 1998) και κάποιιοι έχουν εξετάσει τα παίγνια ολιγοπωλίου με εταιρική κοινωνική ευθύνη (CSR). Οι Ghosh και Mitra συνέκριναν τα αποτελέσματα ισορροπίας τόσο του Cournot όσο και του Bertrand με την παραγωγή διαφοροποιημένων προϊόντων, στα οποία οι εταιρείες προσπαθούν να κάνουν το καλύτερο δυνατό για να μεγιστοποιήσουν τον σταθμισμένο μέσο όρο τόσο των δικών τους κερδών όσο και της κοινωνικής πρόνοιας.

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη δυναμική ενός μοντέλου δυοπωλίου με γραμμική συνάρτηση ζήτησης, παρότι στην πραγματική ζωή, η ζήτηση προϊόντων είναι συνήθως μη γραμμική και δείχνουμε ότι η αποσταθεροποίηση του σταθερού σημείου μπορεί να συμβεί μέσω μιας διακλάδωσης flip και επιπλέον ότι ένας καταρράκτης των διακλαδώσεων flip μπορεί να οδηγήσει σε περιοδικούς κύκλους και ντετερμινιστικό χάος. Είναι παραλλαγή της εργασίας με τίτλο «Global Analysis, Multi-stability and Synchronization in a Competition Model of Public Enterprises with Consumer Surplus» των Wen-na Li, A.A. Elsadany, Wei Zhou, Yan-lan Zhu (Δεκέμβριος 2020).

Δύο επιχειρήσεις δημόσιου συμφέροντος εμπλέκονται σε ένα δυναμικό παίγνιο βασισμένο στο παραδοσιακό δυοπώλιο Cournot. Έχουν φυσικά στόχο να βελτιστοποιήσουν τα κέρδη τους λαμβάνοντας υπόψη και την κοινωνική ευημερία. Κάθε εταιρεία θα αποφασίσει πόσο πιο κερδοφόρα παραγωγή θα παράγει υποθέτοντας ότι η παραγωγή του αντιπάλου της δεν θα αλλάξει και θα παραμείνει σταθερή. Η στρατηγική των εταιριών σύμφωνα με το παραπάνω σκεπτικό προσαρμόζεται κάθε φορά και έτσι το παίγνιο δεν θα είναι στατικό. Εξάλλου το στατικό μοντέλο διερευνά συνήθως την ισορροπία Nash σε παίκτες που δεν θέλουν να αλλάξουν τις στρατηγικές τους επειδή δεν μπορούν να πάρουν οφέλη από την απόκλιση της ισορροπίας Nash. Το μοντέλο ανταγωνισμού δημιουργείται από διακριτές εξισώσεις διαφορών λαμβάνοντας υπόψη ότι οι αλλαγές γίνονται αντιληπτές σε διακριτά χρονικά διαστήματα και όχι στο συνεχή χρόνο. Ο οικονομικός χρόνος είναι συνήθως μη-συνεχής (διακριτός) γιατί οι αποφάσεις στην οικονομία δεν είναι δυνατόν να αναθεωρούνται συνεχώς. Στην παράγραφο 3.2 γίνεται η παρουσίαση του μοντέλου ανταγωνισμού, στην 3.3 τίθεται το μοντέλο σε μορφή δυναμικού παίγνιου και γίνεται η θεωρητική διερεύνησή του όσο αφορά τα σημεία ισορροπίας της αγοράς , στην 3.4 υπάρχει μια ενδεικτική αριθμητική εφαρμογή του με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων εκτός των παραμέτρων ταχύτητας προσαρμογής. Στην παράγραφο 3.6. γίνεται επιβεβαίωση της ντετερμινιστικής χασοτικής συμπεριφοράς μέσω φάσματος εκθετών Lyapunov για κάποιες τιμές των παραμέτρων ταχύτητας προσαρμογής. Τέλος στην παράγραφο 3.6. το μοντέλο εξετάζεται ως αναλλοίωτη πολλαπλή πάνω στους άξονες, δηλαδή σαν οι επιχειρήσεις να είχαν μονοπωλιακό χαρακτήρα.

### 3.2. Το μοντέλο ανταγωνισμού δυο δημόσιων επιχειρήσεων

Θεωρούμε δύο δημόσιες επιχειρήσεις που τις ονομάζουμε επιχείρηση 1 και επιχείρηση 2 στην αγορά, οι οποίες παράγουν ομοιογενή προϊόντα. Για απλότητα, θεωρούμε ότι κάθε επιχείρηση να έχει το ίδιο οριακό κόστος, που το συμβολίζουμε με  $c > 0$  (σταθερά). Η τιμή  $p$  του προϊόντος εξαρτάται από τη συνολική προσφορά  $Q$  του κλάδου σύμφωνα με την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης, που είναι:

$$\text{Συνάρτηση ζήτησης: } p = f(Q) = a - bQ$$

$b > 0$ : είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής.

$Q = q_1 + q_2$  : συνολική ποσότητα προσφοράς, όπου  $q_1, q_2$  οι ποσότητες παραγωγής των δύο επιχειρήσεων αντίστοιχα.

$a > 0$ : αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τιμή που «σηκώνει» η αγορά  $a > c > 0$ .

$$\text{Συναρτήσεις κέρδους: } \Pi_1 = (a - bQ - c)q_1 \text{ και } \Pi_2 = (a - bQ - c)q_2$$

**SW**: κοινωνική πρόνοια (social welfare). Στις πραγματικές οικονομικές δραστηριότητες, πολλές επιχειρήσεις ενδιαφέρονται τόσο τη μεγιστοποίηση των κερδών όσο και την εταιρική κοινωνική ευθύνη (Corporate Social Responsibility CSR). Εδώ ερμηνεύουμε τη CSR ως κοινωνική πρόνοια (SW). Η SW αναφέρεται στο άθροισμα του πλεονάσματος των καταναλωτών (CS) και στα έσοδα των δύο επιχειρήσεων.

**CS**: Το καταναλωτικό πλεόνασμα (Consumer surplus) μετράει το επιπλέον κέρδος (όφελος) που ο καταναλωτής πιστεύει ότι κερδίζει σε σχέση με αυτά που πλήρωσε. Αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ της προθυμίας όλων των καταναλωτών να πληρώσουν για ένα συγκεκριμένο αριθμό προϊόντων και την πραγματική συνολική τιμή που πληρώθηκε. Κάτω από αυτές τις εξηγήσεις θα ισχύει:

$$SW = CS + \Pi_1 + \Pi_2 \text{ όπου}$$

$$CS = \int_0^Q f(\bar{Q})d\bar{Q} - pQ = \int_0^Q (a - b\bar{Q})d\bar{Q} - (a - bQ)Q = \frac{1}{2}bQ^2$$

$$\text{Οπότε : } SW = \frac{1}{2}bQ^2 + \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2}bQ^2 + (a - bQ - c)q_1 + (a - bQ - c)q_2 \Rightarrow$$

$$SW = -\frac{1}{2}bQ^2 + (a - c)Q \quad (3.2.1)$$

Επειδή αναφερόμαστε σε δυο δημόσιες επιχειρήσεις, που θέλουν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους αλλά επίσης λαμβάνουν υπόψη την εταιρική κοινωνική ευθύνη (CSR), τότε μια αντικειμενική συνάρτηση για τις επιχειρήσεις θα μπορούσε να εκφραστεί ως:

$$O_i = (1 - w)SW + w\Pi_i, \quad i=1, 2 \text{ όπου } w \text{ μια παράμετρος που δείχνει το βάρος που αξιολογούν οι επιχειρήσεις στο εταιρικό κέρδος } \Pi_i. \text{ Θα ισχύει φυσικά } 0 \leq w \leq 1.$$

$$\text{Άρα : } O_i = (1 - w) \left( -\frac{1}{2}bQ^2 + (a - c)Q \right) + w(a - bQ - c)q_i, \quad i=1, 2$$

Παραγωγίζοντας την  $O_i$  ως προς  $q_i$ , αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\frac{\partial O_1}{\partial q_1} = -(1 + w)bq_1 - bq_2 + (a - c) \text{ και } \frac{\partial O_1}{\partial q_2} = -bq_1 - (1 + w)bq_2 + (a - c) \quad (3.2.2.)$$

### 3.3. Το δυναμικό παίγνιο

Σε συνθήκες ανταγωνισμού οι επιχειρήσεις, προκειμένου να καθορίσουν την παραγωγή τους για την επόμενη περίοδο, είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουν τις πληροφορίες της αγοράς. Εάν η επιχείρηση έχει όλες τις πληροφορίες που αφορούν την αγορά, τότε η επιχείρηση θα λάβει τη βέλτιστη απόφαση για να προσδιορίσει την παραγωγή στην επόμενη περίοδο. Δηλαδή, η επιχείρηση επιθυμεί να γνωρίζει τις πληροφορίες που αφορούν τις μεταβολές της αγοράς και τις πληροφορίες απόφασης του ανταγωνιστή της. Ωστόσο, στην πραγματικότητα είναι αδύνατο για τις επιχειρήσεις να γνωρίζουν όλες αυτές τις πληροφορίες. Επιπλέον, υπάρχει πρόσθετο κόστος για την συλλογή πληροφοριών, το οποίο ίσως να μειώσει τα κέρδη τους. Επομένως, θεωρούμε κυρίως ότι η κάθε επιχείρηση μπορεί να καθορίσει την παραγωγή της επόμενης περιόδου μέσω μιας εκτίμησης του οριακού στόχου, δοκιμάζοντας και εκτιμώντας το σφάλμα. Αυτό είναι ευκολότερο να γίνει. Έτσι η παραγωγή στην  $t+1$  περίοδο καθορίζεται σύμφωνα με τον οριακό στόχο  $\frac{\partial O_i}{\partial q_i}$  στην  $t$  περίοδο. Αν  $\frac{\partial O_i}{\partial q_i} > 0$  η επιχείρηση μπορεί να αυξήσει την παραγωγή, ενώ αν  $\frac{\partial O_i}{\partial q_i} < 0$  θα πρέπει να την μειώσει. Επομένως, ο μηχανισμός δυναμικής ρύθμισης παραγωγής που περιγράφει το επαναλαμβανόμενο παιχνίδι μεταξύ αυτών των δύο επιχειρήσεων μπορεί να εκφραστεί ως:

$$q_i(t+1) = q_i(t) + \varphi_i(q_i) \frac{\partial O_i}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.1)$$

$\varphi_i(q_i)$  μια συνάρτηση που εξαρτάται από το  $q_i$  και περιγράφει ένα εύρος της παραγωγής της επιχείρησης ανάλογα με τον οριακό στόχο που έχει θέσει.

Έστω λοιπόν  $\varphi_i(q_i) = v_i q_i$ ,  $v_i > 0$  με  $v_i$  να είναι οι παράμετροι ταχύτητας προσαρμογής της παραγωγής κάθε επιχείρησης. Με την εξίσωση (3.3.1) οι δύο επιχειρήσεις δεν είναι υποχρεωμένες να έχουν πλήρεις πληροφορίες για την αλλαγή της συμπεριφοράς της αγοράς. Χρειάζεται μόνο να συμπεράνουν πώς η αγορά θα αντιδράσει σε μικρές αλλαγές στην παραγωγή που βασίζονται στην εκτίμηση του  $\frac{\partial O_i}{\partial q_i}$ . Αυτή η εκτίμηση μπορεί να ληφθεί με σύντομο πειραματισμό. Επειδή οι αποφάσεις παραγωγής δεν μπορούν να αλλάξουν κάθε στιγμή, το διακριτό μοντέλο των δυο εξισώσεων διαφορών που ακολουθεί είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα.

Αναλυτικά για τις δυο επιχειρήσεις με βάση τις εξισώσεις (3.3.1) και (3.2.2) έχουμε:

$$q_1(t+1) = q_1(t) + v_1 q_1(t) [-(1+w)bq_1(t) - bq_2(t) + (a-c)] \quad (3.3.2)$$

$$q_2(t+1) = q_2(t) + v_2 q_2(t) [-(1+w)bq_2(t) - bq_1(t) + (a-c)] \quad (3.3.3)$$

Για να βρούμε το σημείο ισορροπίας θέτουμε:

$q_1^* = q_1(t+1) = q_1(t)$  και αντίστοιχα  $q_2^* = q_2(t+1) = q_2(t)$  οπότε οι (3.3.2), (3.3.3) γίνονται:

$$v_1 q_1^* [-(1+w)bq_1^* - bq_2^* + (a-c)] = 0 \quad (3.3.4)$$

$$v_2 q_2^* [-(1+w)bq_2^* - bq_1^* + (a-c)] = 0 \quad (3.3.5)$$

Για την λύση του συστήματος των (3.3.4) και (3.3.5) παίρνουμε τα ισοδύναμα συστήματα :

$$\Sigma_1: \begin{cases} q_1^* = 0 \\ q_2^* = 0 \end{cases}, \quad \Sigma_2: \begin{cases} q_1^* = 0 \\ -(1+w)bq_2^* - bq_1^* + (a-c) = 0 \end{cases},$$

$$\Sigma_3: \begin{cases} -(1+w)bq_1^* - bq_2^* + (a-c) = 0 \\ q_2^* = 0 \end{cases},$$

$$\Sigma_4: \begin{cases} -(1+w)bq_1^* - bq_2^* + (a-c) = 0 \\ -(1+w)bq_2^* - bq_1^* + (a-c) = 0 \end{cases}$$

Τα σημεία ισορροπίας αντίστοιχα από κάθε σύστημα είναι :

$$E_1(0,0), \quad E_2\left(0, \frac{a-c}{b(1+w)}\right), \quad E_3\left(\frac{a-c}{b(1+w)}, 0\right), \quad E_4\left(\frac{a-c}{b(2+w)}, \frac{a-c}{b(2+w)}\right)$$

Από τις (3.3.2) και (3.3.3) ονομάζουμε :

$$f_1(q_1, q_2) = q_1(1 + v_1[-(1+w)bq_1 - bq_2 + (a-c)]) \quad \text{και}$$

$$f_2(q_1, q_2) = q_2(1 + v_2[-(1+w)bq_2 - bq_1 + (a-c)]) \quad \text{και έχουμε :}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = 1 - 2v_1(1+w)bq_1 - v_1bq_2 + v_1(a-c), \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = -bv_1q_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = -bv_2q_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = 1 - 2v_2(1+w)bq_2 - v_2bq_1 + v_2(a-c)$$

Θα υπολογίσουμε τον Ιακωβιανό σε κάθε σημείο ισορροπίας , ώστε να κάνουμε ποιοτικό προσδιορισμό σε καθένα από αυτά.

$$J(q_1^*, q_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

- Για το  $E_1(0,0)$  παίρνουμε  $J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 + v_1(a-c) & 0 \\ 0 & 1 + v_2(a-c) \end{bmatrix}$ .

Οι ιδιοτιμές είναι  $\lambda_1 = 1 + v_1(a-c) > 1$  και  $\lambda_2 = 1 + v_2(a-c) > 1$ . Συνεπώς το  $E_1(0,0)$  είναι ασταθές.

- Για το  $E_2\left(0, \frac{a-c}{b(1+w)}\right)$  παίρνουμε  $J\left(0, \frac{a-c}{b(1+w)}\right) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{v_1(a-c)}{1+w} & 0 \\ -\frac{v_2(a-c)}{1+w} & 1 - v_2(a-c) \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές είναι  $\lambda_1 = 1 + \frac{v_1(a-c)}{1+w} > 1$  και  $\lambda_2 = 1 - v_2(a-c)$ . Συνεπώς το  $E_2\left(0, \frac{a-c}{b(1+w)}\right)$  είναι ασταθές.

- Για το  $E_3\left(\frac{a-c}{b(1+w)}, 0\right)$  παίρνουμε  $J\left(\frac{a-c}{b(1+w)}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 - v_1(a-c) & -\frac{v_1(a-c)}{1+w} \\ 0 & 1 + \frac{v_2(a-c)}{1+w} \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές είναι  $\lambda_1 = 1 + \frac{v_2(a-c)}{1+w} > 1$  και  $\lambda_2 = 1 - v_1(a-c)$ . Συνεπώς το  $E_3\left(\frac{a-c}{b(1+w)}, 0\right)$  είναι ασταθές.

Με δεδομένο ότι στα  $E_1, E_2, E_3$  έχουμε σίγουρη αστάθεια θα διερευνήσουμε υπό ποιες συνθήκες στο  $E_4$  έχουμε κατά Nash ευσταθή ισορροπία. Αλλά ας εξηγήσουμε πρώτα με οικονομικούς όρους τι σημαίνουν οι αστάθειες στα σημεία  $E_1, E_2, E_3$ . Στο σημείο  $E_1$  δεν υπάρχει αγορά, ενώ στα  $E_2, E_3$  η αγορά εξελίσσεται σε μονοπώλιο αφού η μια από τις δύο επιχειρήσεις έχει μηδενική παραγωγή.

- Για το  $E_4 \left( \frac{a-c}{b(2+w)}, \frac{a-c}{b(2+w)} \right)$  λοιπόν παίρνουμε :

$$J(q_1^*, q_2^*) = \begin{bmatrix} 1 - (a-c)v_1 \frac{(1+w)}{w+2} & -\frac{v_1(a-c)}{2+w} \\ -\frac{v_2(a-c)}{2+w} & 1 - (a-c)v_2 \frac{(1+w)}{w+2} \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές μπορούν να βρεθούν από την εξίσωση  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$  όπου  $T$  το ίχνος του  $J(q_1^*, q_2^*)$  και  $D$  η ορίζουσα του.

Βρίσκουμε ότι :

$$T = 2 - (v_1 + v_2)(a-c) \frac{w+1}{w+2}$$

$$D = 1 - (v_1 + v_2)(a-c) \frac{w+1}{w+2} + \frac{wv_1v_2(a-c)^2}{w+2}$$

Η ισορροπία κατά Nash είναι τοπικά ευσταθής αν ισχύουν και οι τρεις ακόλουθες συνθήκες (Gandolfo, 2010)

$$|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} i. & 1 - D > 0 \\ ii. & 1 - T + D > 0 \\ iii. & 1 + T + D > 0 \end{cases} \quad (3.3.5.)$$

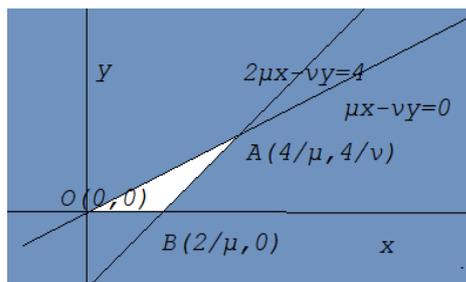
Η συνθήκη *ii.*  $1 - T + D > 0$  εύκολα ισχύει αφού  $1 - T + D = \frac{wv_1v_2(a-c)^2}{w+2} > 0$ .

Όμως  $1 - D = \frac{a-c}{w+2} [(w+1)(v_1 + v_2) - wv_1v_2(a-c)]$  (3.3.6) και

$$1 + T + D = 4 - \frac{a-c}{w+2} [2(w+1)(v_1 + v_2) - wv_1v_2(a-c)]. \quad (3.3.7).$$

Ονομάζω  $\mu = \frac{(a-c)(w+1)}{w+2}$ ,  $\nu = \frac{w(a-c)^2}{w+2}$ ,  $x = v_1 + v_2$ ,  $y = v_1v_2$  και οι συνθήκες *i.*, *iii.* με την βοήθεια των (3.3.6), (3.3.7) γίνονται:

$$\begin{cases} \mu x - \nu y > 0 \\ 2\mu x - \nu y < 4 \end{cases} \quad (3.3.8). \text{ Ισχύει φυσικά } x > 0, y > 0, \mu > 0, \nu > 0.$$



**Εικόνα 3.3.1.** Το τρίγωνο OAB περιέχει όλα τα σημεία  $(x,y)=(v_1 + v_2, v_1v_2)$  για τα οποία οι συνθήκες *i.*, *iii.* ισχύουν .

Το σύστημα (3.3.8) επαληθεύεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του τριγώνου OAB στην εικόνα 3.3.1. Δηλαδή το δυοπώλιο που μελετάμε θα έχει ευσταθές σημείο ισορροπίας κατά Nash το  $E_4 \left( \frac{a-c}{b(2+w)}, \frac{a-c}{b(2+w)} \right)$ , αρκεί το ζεύγος  $(v_1 + v_2, v_1 v_2)$  να είναι τοποθετημένο μέσα στο OAB όπου  $O(0,0)$ ,  $A\left(\frac{4}{\mu}, \frac{4}{\nu}\right)$  και  $B\left(\frac{2}{\mu}, 0\right)$ .

Από την άλλη, η χαρακτηριστική εξίσωση  $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = T^2 - 4D = \frac{(a-c)^2}{(w+2)^2} [(v_1 - v_2)^2 (w+1)^2 + 4v_1 v_2] > 0$ . Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές του  $J(q_1^*, q_2^*)$  είναι και οι δύο πραγματικές πάντα.

Η ερώτηση που επανέρχεται είναι «πότε χάνεται η ευστάθεια σε ένα δυναμικό μη γραμμικό σύστημα με πραγματικές ιδιοτιμές»; Αυτό συμβαίνει στις συνοριακές καμπύλες λόγω διακλάδωσης flip.

### 3.4. Εφαρμογή στο μοντέλο.

Θέτουμε  $a - c = 2$ ,  $b = 0.8$  και  $w = 0.9$ . Η διερεύνηση θα γίνει για τα  $v_1, v_2$  που είναι οι παράμετροι ταχύτητας προσαρμογής της παραγωγής κάθε επιχείρησης.

Η Ιακωβιανή γίνεται  $J(q_1^*, q_2^*) = \begin{bmatrix} 1 - 1.31v_1 & -0.69v_1 \\ -0.69v_2 & 1 - 1.31v_2 \end{bmatrix}$

Με  $T = 2 - 1.31v_1 - 1.31v_2 = 2 - 1.31(v_1 + v_2)$  και

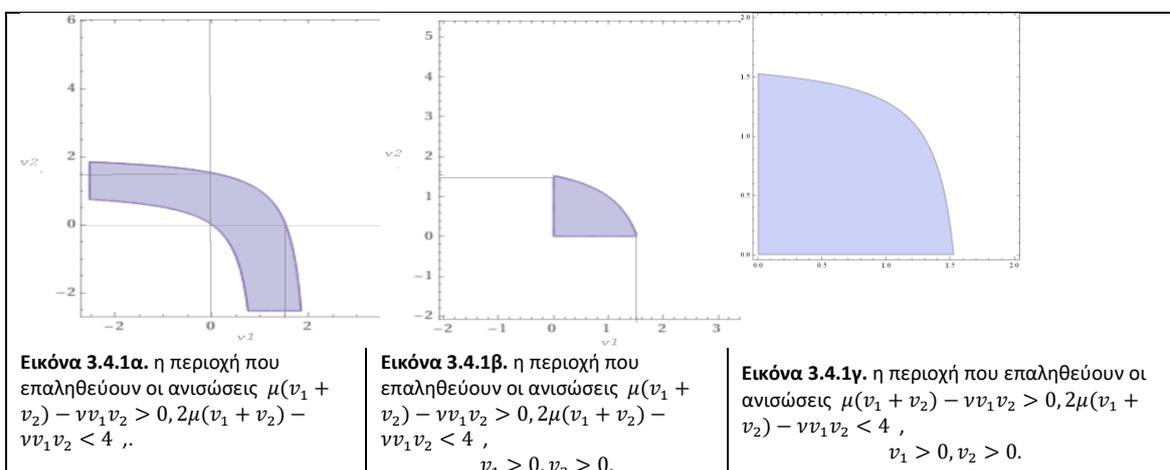
$D = 1 - 1.31(v_1 + v_2) + 1.55v_1 v_2$  όπου  $E_4(q_1^*, q_2^*) = E_4(0.862, 0.862)$

Από τις συνθήκες (3.3.5) παίρνουμε

- $1 - D > 0 \Rightarrow 1.31(v_1 + v_2) - 1.55v_1 v_2 > 0$  (3.4.1)
- $1 - T + D > 0 \Rightarrow 1 - (2 - 1.31(v_1 + v_2)) + (1 - 1.31(v_1 + v_2) + 1.55v_1 v_2) > 0 \Rightarrow 1.55v_1 v_2 > 0$  (3.4.2)
- $1 + T + D > 0 \Rightarrow 1 + (2 - 1.31(v_1 + v_2)) + (1 - 1.31(v_1 + v_2) + 1.55v_1 v_2) > 0 \Rightarrow 4 - 2.62(v_1 + v_2) + 1.55v_1 v_2 > 0$  (3.4.3)

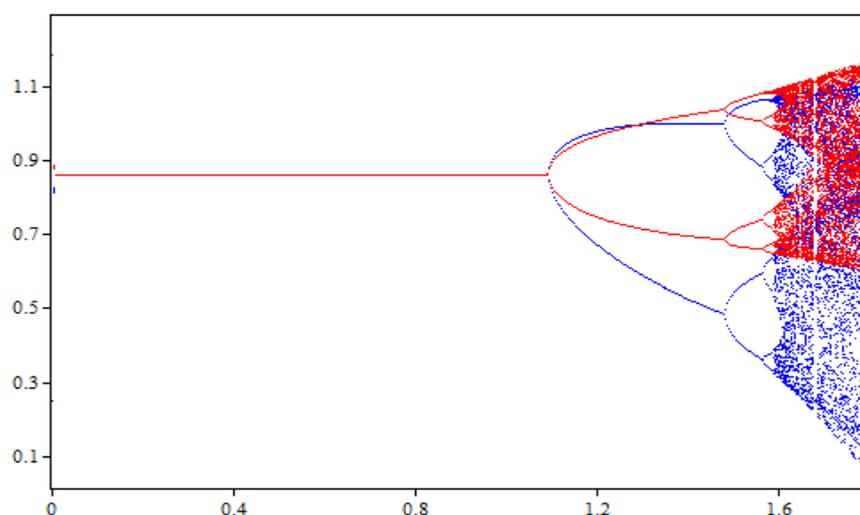
Επειδή η (3.4.2) ισχύει μένει να ισχύουν οι (3.4.1) και (3.4.3) έτσι πρέπει το ζεύγος  $(v_1 + v_2, v_1 v_2)$  να είναι τοποθετημένο μέσα στο OAB όπου  $O(0,0)$ ,  $A(3.052, 3.22)$  και  $B(1.526, 0)$ .

#### Πεδίο ευστάθειας για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων



Τα διακριτά συστήματα όπως έχουμε ήδη αναφέρει παρουσιάζουν συνήθως διακλαδώσεις καθώς μεταβάλλεται μία ή και περισσότερες παράμετροι. Οι αναλυτικές μέθοδοι σ αυτές τις περιπτώσεις γίνονται δύσχρηστες και εξαντλητικές, οπότε αναγκαστικά καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους και σε γραφικές αναπαραστάσεις για να κατανοήσουμε την συμπεριφορά κάθε συστήματος.

### Διάγραμμα διχαλώσεων (διακλαδώσεων-δικρανισμών) (bifurcation diagram)

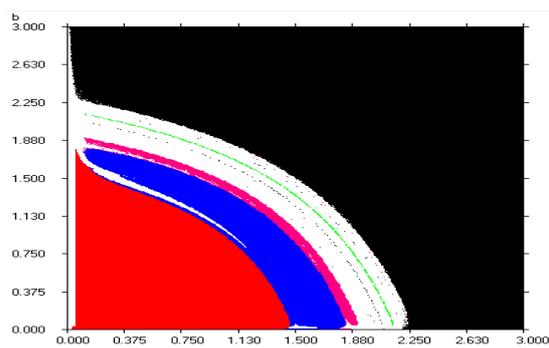


Εικόνα 3.4.2. Διάγραμμα διακλάδωσης ή διχάλωσης (bifurcation diagram) κρατώντας το  $v_2 = 0.9$ . Στον οριζόντιο άξονα είναι το  $v_1$  και στον κατακόρυφο τα  $q_1$  (μπλε) και  $q_2$  (κόκκινο)

Στην περίπτωση αυτή η δυναμική συμπεριφορά περνάει από τη σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας σε ένα περιοδικό κύκλο περιόδου 2. Δηλαδή συγκλίνει σε μια ταλάντωση μεταξύ 2 τιμών. Μετά σε ταλάντωση 4 σημείων στην οποία καθένα από τα δύο σημεία διακλαδώνεται σε άλλα δύο και μετά σε 8 και ούτω καθεξής μέχρι να εμφανιστεί χαοτική συμπεριφορά.

Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε περαιτέρω τη σταθερότητα του σημείου ισορροπίας  $E_4$ , σχετικά με τους παραμέτρους  $v_1$  και  $v_2$  που είναι οι παράμετροι ρύθμισης της ταχύτητας προσαρμογής, χρησιμοποιώντας διδιάστατο διάγραμμα διακλάδωσης (2-D). Διαφορετικά χρώματα στην εικόνα 3.4.3 αντιπροσωπεύουν διαφορετικές περιόδους και έχουν συγκεκριμένη ερμηνεία. Για παράδειγμα, η κόκκινη περιοχή αντιπροσωπεύει τη σταθερή περιοχή του σημείου ισορροπίας Nash. το μπλε, το άσπρο κ.τ.λ. αντιπροσωπεύουν περιοχές διαδοχικών διπλασιασμών των περιόδων μέχρι να φτάσουμε στην σκούρα περιοχή που οι διπλασιασμοί πλέον είναι δυσδιάκριτοι και λέμε ότι είμαστε στην περιοχή χάους.

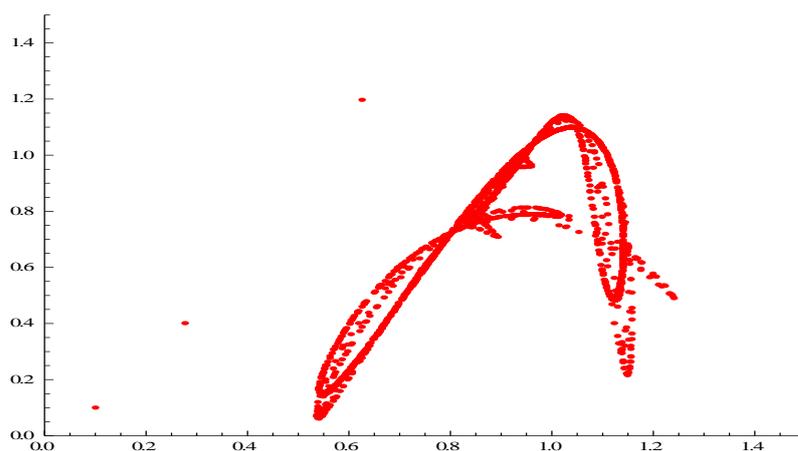
## δισδιάστατο διάγραμμα διακλάδωσης (2-D).



**Εικόνα 3.4.3.** Στον οριζόντιο άξονα  $a=v_1$  στον κατακόρυφο  $b=v_2$ . Είναι διάγραμμα διακλάδωσης 2-D στο οποίο το κόκκινο αντιστοιχεί στην περιοχή ισορροπίας Nash και τα υπόλοιπα χρώματα διαδοχικά αντιπροσωπεύουν περιοχές περιόδου 2, 4, 8, κ.τ.λ. μέχρι να εισέλθει σε χαοτική κατάσταση στην σκοτεινή περιοχή στην οποία έχουμε περίοδο μεγαλύτερη του 50.

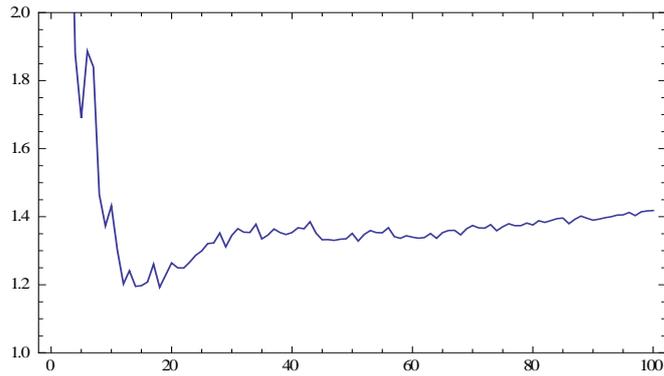
Στα αναλυτικά σχήματα των εικόνων 3.4.1α, 3.4.1β και 3.4.1γ παρατηρούμε ότι η περιοχή ευσταθούς ισορροπίας του δυναμικού συστήματος δεν είναι πολύ διαφορετική από την αντίστοιχη στην εικόνα 3.4.3 (κόκκινη) που έχει δημιουργηθεί με προσεγγιστικές μεθόδους μέσω του E&FChaos.

## Παράξενος ελκυστής



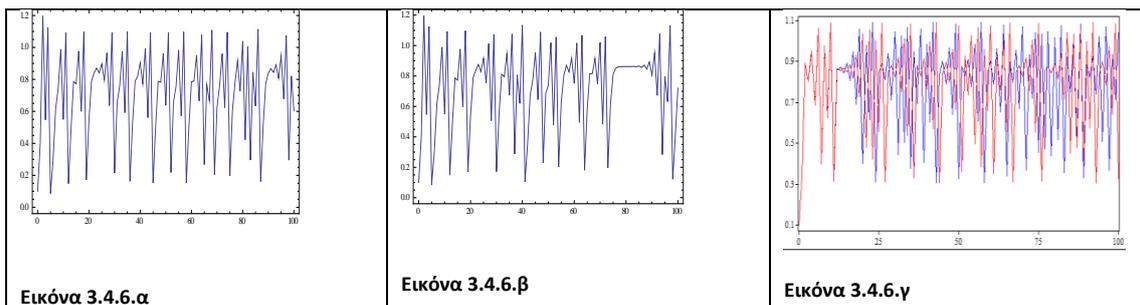
**Εικόνα 3.4.4.** παράξενος ελκυστής (strange attractor) για  $v_1=1, v_2=1.7$  με αρχική συνθήκη (0.1,0.1) μετά από 2000 επαναλήψεις της απεικόνισης

Ένας ελκυστής ονομάζεται **παράξενος** (strange attractor) εάν εμφανίζει δομή φράκταλ και συμβαίνει συχνά όταν η δυναμική του συστήματος είναι χαοτική χωρίς αυτό να είναι πάντα απαραίτητο. Εάν ένας παράξενος ελκυστής είναι χαοτικός, εμφανίζει ευαισθησία στην εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή δυο οποιαδήποτε αυθαίρετα διαφορετικά αρχικά σημεία, μετά από ένα οποιονδήποτε αριθμό επαναλήψεων, θα οδηγήσει σε σημεία που είναι αυθαίρετα μακριά (υπόκεινται στα όρια του ελκυστήρα), και μετά από ένα άλλο αριθμό επαναλήψεων οδηγούν σε σημεία που βρίσκονται αυθαίρετα κοντά μεταξύ τους χωρίς όμως ποτέ να απομακρύνονται από τον ελκυστή. Ο όρος **παράξενος (περίεργος) ελκυστής** επινοήθηκε από τον David Ruelle και τον Floris Takens για να περιγράψουν τον ελκυστήρα που προέκυψε από μια σειρά διακλαδώσεων ενός συστήματος που περιγράφει τη ροή του υγρού.



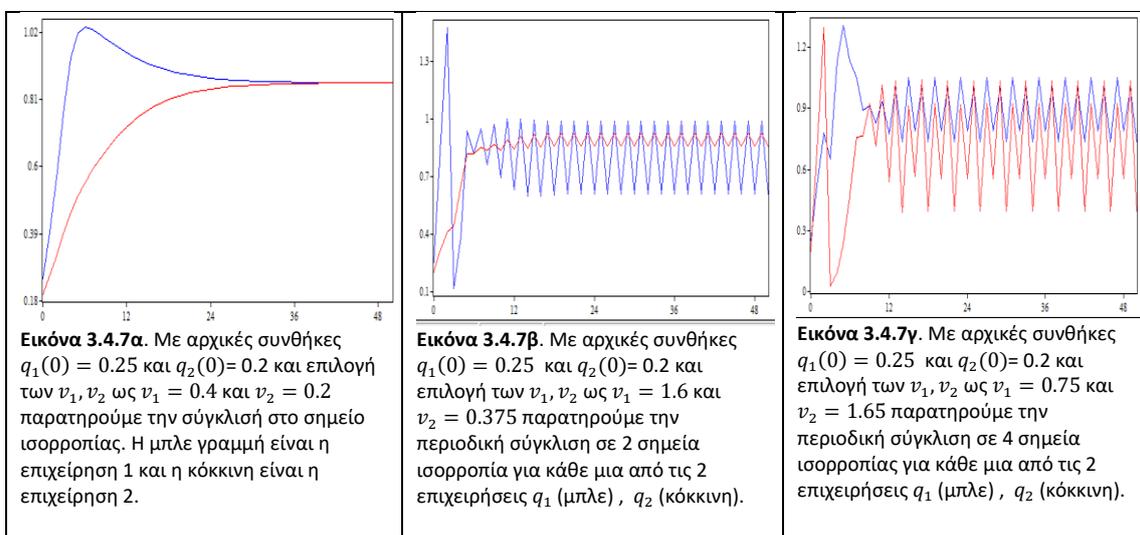
**Εικόνα 3.4.5.** Αριθμοί LYAPUNOV της προηγούμενης τροχιάς. Θυμίζω (κεφ.2 ) αριθμοί Lyapunov με τιμή μεγαλύτερη του 1 είναι χαρακτηριστικό χαστικής τροχιάς.

### Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.



Στις εικόνες 3.4.6 είναι χρονοσειρές του  $q_1$  μετά από 100 επαναλήψεις με αρχικές συνθήκες  $(0.1, 0.1)$  στο 3.4.6.α και  $(0.1001, 0.1)$  στο 3.4.6.β.

Με βάση τις παραπάνω εικόνες μπορούμε να επιλέξουμε τιμές για τις παραμέτρους  $v_1$  και  $v_2$  έτσι ώστε να διαπιστώσουμε αν πράγματι έχουμε ισορροπία ή μπαίνουμε σε περιοχές διακλαδώσεων.



**Εικόνα 3.4.7α.** Με αρχικές συνθήκες  $q_1(0) = 0.25$  και  $q_2(0) = 0.2$  και επιλογή των  $v_1, v_2$  ως  $v_1 = 0.4$  και  $v_2 = 0.2$  παρατηρούμε την σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας. Η μπλε γραμμή είναι η επιχείρηση 1 και η κόκκινη είναι η επιχείρηση 2.

**Εικόνα 3.4.7β.** Με αρχικές συνθήκες  $q_1(0) = 0.25$  και  $q_2(0) = 0.2$  και επιλογή των  $v_1, v_2$  ως  $v_1 = 1.6$  και  $v_2 = 0.375$  παρατηρούμε την περιοδική σύγκλιση σε 2 σημεία ισορροπία για κάθε μια από τις 2 επιχειρήσεις  $q_1$  (μπλε),  $q_2$  (κόκκινη).

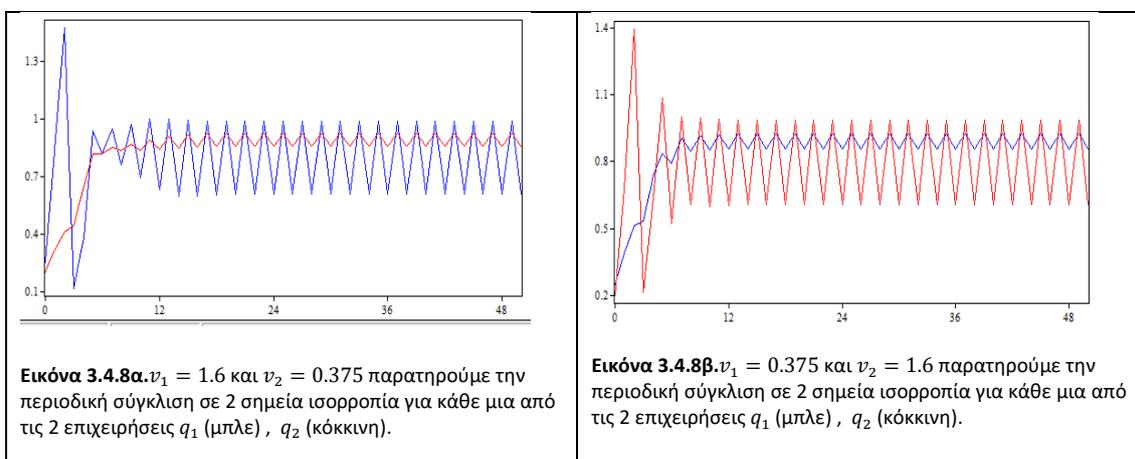
**Εικόνα 3.4.7γ.** Με αρχικές συνθήκες  $q_1(0) = 0.25$  και  $q_2(0) = 0.2$  και επιλογή των  $v_1, v_2$  ως  $v_1 = 0.75$  και  $v_2 = 1.65$  παρατηρούμε την περιοδική σύγκλιση σε 4 σημεία ισορροπίας για κάθε μια από τις 2 επιχειρήσεις  $q_1$  (μπλε),  $q_2$  (κόκκινη).

Όσον αφορά την εικόνα **3.4.7 α** για  $v_1 = 0.4$  και  $v_2 = 0.2$  από τις ανισώσεις (3.3.8) με  $a - c = 2$ ,  $b = 0.8$  και  $w = 0.9$  παίρνουμε  $3.8 \cdot 0.6 - 3.6 \cdot 0.08 = 1.1992 > 0$  και  $7.6 \cdot 0.6 - 3.6 \cdot 0.08 = 4.272 < 11.6$  δηλαδή στην ουσία επαληθεύονται οι (3.4.1) και (3.4.2).

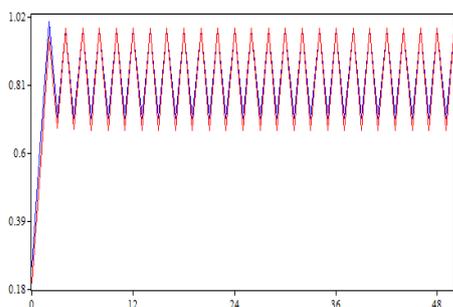
Για την εικόνα **3.4.7β** για  $v_1 = 1.6$  και  $v_2 = 0.375$  από τις ανισώσεις (3.3.8) με  $a - c = 2$ ,  $b = 0.8$  και  $w = 0.9$  παίρνουμε  $3.8 \cdot 1.975 - 3.6 \cdot 0.6 = 5.345 > 0$  και  $7.6 \cdot 1.975 - 3.6 \cdot 0.6 = 12.85 < 11.6$  (άτοπο) δηλαδή στην ουσία δεν επαληθεύεται η (3.4.2).

Για την εικόνα **3.4.7γ** για  $v_1 = 0.75$  και  $v_2 = 1.65$  από τις ανισώσεις (3.3.8) με  $a - c = 2$ ,  $b = 0.8$  και  $w = 0.9$  παίρνουμε  $3.8 \cdot 2.4 - 3.6 \cdot 1.2375 = 4.665 > 0$  και  $7.6 \cdot 2.4 - 3.6 \cdot 1.2375 = 13.785 < 11.6$  (άτοπο) δηλαδή δεν επαληθεύεται η (3.4.2).

Η επιλογή της ταχύτητας προσαρμογής παίζει σημαντικό ρόλο στις τιμές των σημείων ισορροπίας στην περίπτωση διακλάδωσης όπως παρατηρούμε στις εικόνες 3.4.8 κρατώντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες.



Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα οφείλω να σημειώσω μια σκέψη. Η επιχείρηση που με ασφάλεια επιλέγει να χρησιμοποιήσει ταχύτητα προσαρμογής μέσα στο χωρίο που στο 2-D διάγραμμα διακλάδωσης είναι χωρίο ισορροπίας (κόκκινο), στις διαδοχικές χρονικές στιγμές έχει μικρότερες αποκλίσεις από το σημείο ισορροπίας σε σχέση με την επιχείρηση που επέλεξε να φύγει με μεγαλύτερες ταχύτητες αφού αυτή πλέον προκαλεί την διακλάδωση με αποτέλεσμα να έχει μεγαλύτερες αποκλίσεις από τη μια χρονική στιγμή στην επόμενη. Η ερώτηση που προκύπτει είναι πως μπορεί να γνωρίζει μια επιχείρηση τι θα κάνει η «αντίπαλος» και πως θα μπορούσε με μια σχετική ασφάλεια να περιορίσει το ρίσκο; Το ερώτημα γίνεται πιο εμφαντικό αν και οι δύο εταιρίες στηριζόμενες στο διάγραμμα της Εικόνας 3.4.9 επέλεξαν για παράδειγμα ως  $v_1 = 1$  και  $v_2 = 1.130$  που εμφανώς για κάθε μια ξεχωριστά είναι μέσα στην περιοχή της ισορροπίας Nash (κόκκινη). Θα είχαν το ανεπιθύμητο αποτέλεσμα των δύο σημείων ισορροπίας λόγω του διπλασιασμού της περιόδου.



**Εικόνα 3.4.9.** Με  $v_1 = 1$  και  $v_2 = 1.130$  οι επιχειρήσεις παρότι επέλεξαν ταχύτητες προσαρμογής μέσα στα όρια της περιοχής ισορροπίας εντούτοις δεν απέφυγαν την αστάθεια του διπλασιασμού της περιόδου.

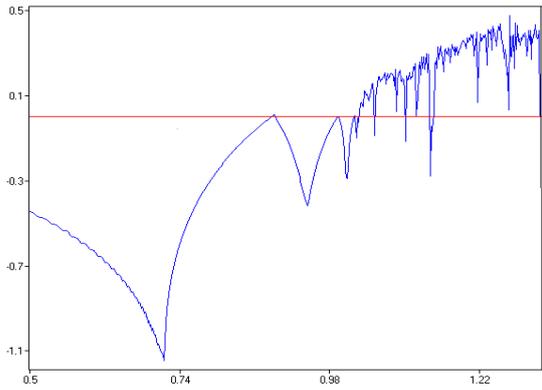
Εδώ πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι οι δυο επιχειρήσεις είναι ορθολογικές και έχουν πλήρη πληροφόρηση για όλα εκτός από την πολιτική που θα ακολουθήσει η ανταγωνίστρια όσον αφορά την ταχύτητα προσαρμογής για την επόμενη χρονική περίοδο. Το επιχειρηματικό παίγνιο είναι σαφώς επαναλαμβανόμενο αλλά θα μπορούσε να καταλήγει σε ισορροπία δηλαδή σε μια κατάσταση που καμιά από τις δυο δεν θα μετανιώσει για την επιλογή της με αμιγείς στρατηγικές; Από τα διαγράμματα της εικόνας 3.4.7 και της εικόνας 3.4.8 παρατηρούμε ότι με επιλογή μικρών  $v_i$  έχουμε αργή προσαρμογή στην οποιαδήποτε ισορροπία και από την άλλη στο διάγραμμα της εικόνας 3.4.9 η επιλογή μεγαλύτερων  $v_i$  οδηγεί πολύ γρήγορα στην οποιοδήποτε είδους ισορροπία. Συνεπώς χρειαζόμαστε αφενός επιλογή των  $v_i$  που να οδηγεί σε ισορροπία κατά Nash και αφετέρου η επιλογή αυτή να είναι εκείνη που θα οδηγεί στην ισορροπία αρκετά γρήγορα.

### 3.5. Φάσμα εκθετών Lyapunov

Οι εκθέτες Lyapunov όπως αναφέραμε στο κεφ.2 είναι ένα μέτρο του βαθμού της χαοτικής κίνησης μιας τροχιάς και χαρακτηρίζουν τον μέσο όρο της εκθετικής απόκλισης των γειτονικών τροχιών της από αυτή.

Οι Hénon και Heiles (1964), Zaslavski και Chirikov (1972), Froeschle και Scheidecker (1973), και Ford (1975) –αρχικά αυτοί αλλά ακολούθησαν κι άλλοι- μελέτησαν τη σύνδεση μεταξύ της απόκλισης γειτονικών τροχιών και χαοτικής συμπεριφοράς. Η σύνδεση μεταξύ εκθετών Lyapunov και εκθετικής απόκλισης δόθηκε πρώτα από τον Benettin (1976) και από τον Pesin(1977). Η θεωρία των εκθετών Lyapunov(1907) εφαρμόστηκε για να χαρακτηρίσει χαοτικές τροχιές από τον Oseledec (1968), ενώ η διαδικασία για τον υπολογισμό των εκθετών Lyapunov αναπτύχθηκε από τους Benettin et al.(1980).

Ένα δυναμικό σύστημα  $n$  διαστάσεων έχει  $n$  εκθέτες Lyapunov, που περιγράφουν την δράση της δυναμικής του. Μελετώντας το φάσμα των εκθετών Lyapunov έχουμε ένα χρήσιμο εργαλείο ώστε να αποφανθούμε αν ένα δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Προφανώς όταν ένα δυναμικό σύστημα παρουσιάζει έστω και ένα θετικό εκθέτη Lyapunov τότε χαρακτηρίζεται ως χαοτικό.



**Εικόνα 3.5.1.** Φάσμα εκθετών Lyapunov για το σύστημα των εξισώσεων (3.3.2), (3.3.3) στο οποίο φαίνεται ότι όταν  $v_i > 1$  εισέρχεται σε αστάθεια και γίνεται χαοτικό (με ελάχιστα διαλλείματα).

Η εικόνα 3.5.1 επαληθεύει επίσης την ύπαρξη ισορροπίας για το σύστημα των εξισώσεων (3.3.2), (3.3.3) για τιμές των  $v_i < 1$ . Για  $v_i > 1$  μέσω διπλασιασμών της περιόδου εισέρχεται σε χαοτική συμπεριφορά.

Για  $a - c = 2$ ,  $b = 0.8$  και  $w = 0.9$  και κρατώντας το  $v_2 = 0.9$  στην εικόνα 3.4.2 (bifurcation diagram) επαληθεύονται όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα όσον αφορά την ευστάθεια του συστήματος. Όταν το  $v_1$  παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 1 αρχίζουν οι διπλασιασμοί της περιόδου μέχρι που το σύστημα μπαίνει σε χαοτική κατάσταση. Ο υπολογισμός έγινε με το E&F Chaos και αφορά το σύστημα των εξισώσεων (3.3.2), (3.3.3).

### 3.6. Η έννοια του αμετάβλητου συνόλου

Το αναλλοίωτο σύνολο είναι μια σημαντική ιδιότητα του συστήματος των (3.3.2) και (3.3.3). Ένα σύνολο  $\Omega$  ονομάζεται **αμετάβλητο σύνολο** του συστήματος μόνο όταν η κατάσταση του συστήματος ανήκει κάποια στιγμή στο σύνολο  $\Omega$  και η μετέπειτα κατάστασή του εξακολουθεί να ανήκει στο σύνολο  $\Omega$ .

Λόγω του ότι  $T(q_1, 0) = (q_1', 0)$  και  $T(0, q_2) = (0, q_2')$ , οι δύο άξονες συντεταγμένων είναι αμετάβλητες στο σύστημα. Δηλαδή, η τροχιά οποιουδήποτε σημείου στον θετικό άξονα πρόκειται να επανέλθει στον θετικό άξονα. Ο καθένας από τους δύο θετικούς άξονες συντεταγμένων ονομάζεται αμετάβλητο σύνολο του δυναμικού συστήματος των εξισώσεων (3.3.2) και (3.3.3). Η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος των (3.3.2) και (3.3.3) στους θετικούς άξονες μπορεί να εντοπιστεί με μια σχέση  $q_i(t + 1) = f_i(q_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ .

Έχουμε λοιπόν τις εξισώσεις που μελετάμε

$$q_1(t + 1) = q_1(t) + v_1 q_1(t) [-(1 + w) b q_1(t) - b q_2(t) + (a - c)] \quad (3.3.2)$$

$$q_2(t + 1) = q_2(t) + v_2 q_2(t) [-(1 + w) b q_2(t) - b q_1(t) + (a - c)] \quad (3.3.3)$$

Η εξίσωση (3.3.2) για  $q_2(t) = 0$  γίνεται :

$$q_1(t + 1) = q_1(t) + v_1 q_1(t) [-(1 + w) b q_1(t) + (a - c)] \Rightarrow$$

$$q_1(t + 1) = q_1(t) [1 + v_1 [-(1 + w) b q_1(t) + (a - c)]] \Rightarrow$$

$$q_1(t + 1) = q_1(t) [1 - v_1 (1 + w) b q_1(t) + v_1 (a - c)] \Rightarrow$$

$$q_1(t + 1) = q_1(t) [1 + v_1 (a - c) - v_1 (1 + w) b q_1(t)] \Rightarrow$$

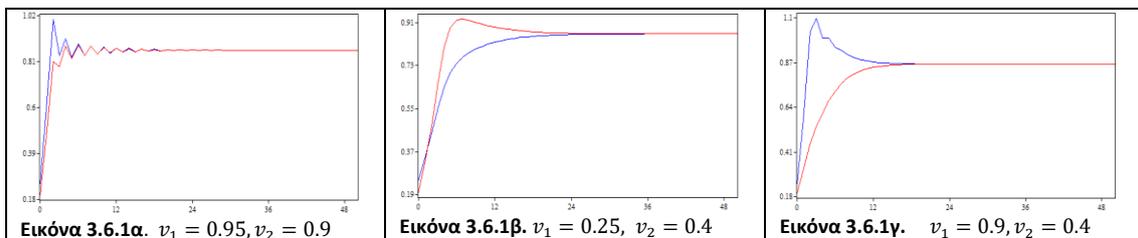
$$q_1(t+1) = q_1(t)[1 + v_1(a-c)] \left[ 1 - \frac{(1+w)bv_1}{1+v_1(a-c)} q_1(t) \right] \quad (3.6.1)$$

$$\text{Κάνουμε το μετασχηματισμό: } x(t) = \frac{(1+w)bv_1}{1+v_1(a-c)} q_1(t) \Rightarrow q_1(t) = \frac{1+v_1(a-c)}{(1+w)bv_1} x(t) \quad (3.6.2)$$

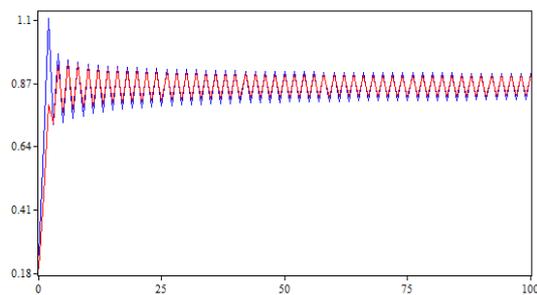
$$\text{και } r=1+v_1(a-c) \quad (3.6.3)$$

$$\text{Οπότε η (3.6.1) λόγω των (3.6.2) και (3.6.3) γίνεται } x(t+1) = rx(t)[1-x(t)] \quad (16)$$

που είναι η γνωστή λογιστική εξίσωση η οποία αναλύθηκε στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο και της οποίας το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές για  $r \in (0,3)$  και για  $r \geq 3$  η εξίσωση οδηγεί σε αστάθεια μέσω των διπλασιασμών της περιόδου. Με τις ήδη χρησιμοποιημένες αντικαταστάσεις  $a-c=2$ ,  $b=0.8$  και  $w=0.9$  έχουμε ισορροπία για  $r < 3 \Rightarrow 1+2v_1 < 3 \Rightarrow v_1 < 1$ . Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήγουμε από την εξίσωση (3.3.2) για το  $v_2$ . Κάτω από αυτή τη λογική η επιλογή  $v_1 < 1$  και  $v_2 < 1$  οδηγεί το παίγνιο σε ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές. Κρατώντας τις αρχικές συνθήκες αυτές που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως, δηλαδή  $q_1(0) = 0.25$  και  $q_2(0) = 0.2$ , όσο πιο κοντά στο 1 γίνεται η επιλογή των  $v_i$ , τόσο πιο γρήγορα το σύστημα καταλήγει στην ισορροπία.



Τα διαγράμματα επαληθεύουν τους παραπάνω ισχυρισμούς. Παρατηρούμε ότι στην Εικόνα 3.6.1β το σύστημα έρχεται σε ισορροπία αρκετά αργά και αυτό οφείλετε στην επιλογή μικρών ταχυτήτων  $v_i$ , αντιθέτως στην Εικόνα 3.6.1α που η επιλογή των  $v_i$  είναι κοντά στο 1 το σύστημα έρχεται σε ισορροπία αρκετά νωρίς. Ας σημειώσουμε επίσης ότι η επιχείρηση που επιλέγει μεγαλύτερη ταχύτητα προσαρμογής έρχεται στην ισορροπία από πλεονεκτικότερη θέση, δηλαδή από μεγαλύτερες τιμές.



Εικόνα 3.6.2.  $v_1 = 1.1, v_2 = 0.9$

Η επιλογή της μιας εκ των δύο να ξεπεράσει το 1 όσον αφορά την ταχύτητα προσαρμογής, συμπαρασύρει και την δεύτερη σε ταλάντωση όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.6.2. Συνεπώς το παίγνιο έχει ισορροπία, με δεδομένο ότι οι επιχειρήσεις είναι ορθολογικές όταν επιλέξουν ταχύτητες κάτω από το 1.

## Συμπεράσματα

Ένα δυναμικό παίγνιο μεταξύ δυο επιχειρήσεων βασισμένο στο θεωρητικό μοντέλο δυοπωλίου Cournot μοντελοποιήθηκε με δυο εξισώσεις διαφορών με σκοπό να διερευνήσουμε την ισορροπία του. Μελετήσαμε τις τιμές των παραμέτρων στις οποίες το σύστημα έχει ευσταθή ισορροπία και τις τιμές πάνω από τις οποίες το σύστημα οδηγείται σε διπλασιασμό των σημείων ισορροπίας διαδοχικά μέχρι να παρουσιάσει χαοτική συμπεριφορά. Αυτό που είναι φανερό από τα διαγράμματα είναι ότι οι επιχειρήσεις πρέπει να είναι πειθαρχημένες όσον αφορά την επιλογή των παραμέτρων ταχύτητας που αναφέραμε. Αρκεί η μια από τις δύο να ξεφύγει πάνω από την τιμή 1 ώστε παρασύρει και την άλλη σε αστάθεια.

|              |           | επιχείρηση 2 |           |
|--------------|-----------|--------------|-----------|
|              |           | $v_2 > 1$    | $v_2 < 1$ |
| επιχείρηση 1 | $v_1 > 1$ | Αστάθεια     | Αστάθεια  |
|              | $v_1 < 1$ | Αστάθεια     | Ευστάθεια |

Όπως είναι μάλλον αναμενόμενο η ταχύτητα προσαρμογής όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο πιο γρήγορα επέρχεται ισορροπία στην αγορά και μάλιστα η επιχείρηση που επιλέγει μεγαλύτερη ταχύτητα έρχεται στην ισορροπία από πλεονεκτικότερη θέση. Στην ουσία οι δυο επιχειρήσεις ορθολογικά θα πειθαρχήσουν στο συγκεκριμένο τρόπο λειτουργίας που δεν διαταράσσει το σύστημα και έτσι αυτό θα μετατραπεί ουσιαστικά σε μονοπωλιακή αγορά, γεγονός που δεν είναι καθόλου περίεργο ή ασυνήθιστο. Τα αποτελέσματα είτε με αναλυτικές, είτε με αριθμητικές μεθόδους συμφωνούν απολύτως. Προφανώς θα είχε ενδιαφέρον να διαφοροποιηθούν οι αρχικές θέσεις των παραμέτρων των επιχειρήσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική εφαρμογή στο μοντέλο. αλλά αυτό δεν θα άλλαζε τη μεθοδολογία διερεύνησης.

## Πηγές-βιβλιογραφία

1. Αρβανιτογεώργος, Ανδρέας «Γεωμετρία πολλαπλοτήτων»(2015)
2. Βαρουφάκης Γιάννης «Θεωρία παιγνίων» (2007)
3. Βολιώτης Δ. – Γεωργιάδης Λάζαρος ( Διπλωματική εργασία) «Καθολικά Παίγνια και εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά» (2016)
4. Βουγιατζής –Μελετλίδου «Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα». (2015)
5. Γιακουμής Άγγελος Ε. «Έλεγχος της δυναμικής συμπεριφοράς μη-γραμμικών κυκλωμάτων με μικροϋπολογιστές και εκπαιδευτικές εφαρμογές του» Διδακτορική Διατριβή (2019)
6. Ζαχειλάς Λουκάς «διαλέξεις στην Οικονομική Δυναμική»
7. Μαρκέλλος Παναγιώτης – Ιωάννης «Αριθμητική μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μοντέλων Kaldor της μακροοικονομίας» Διδακτορική διατριβή (2010)
8. Μηλολιδάκης Κωνσταντίνος «Θεωρία Παιγνίων –μαθηματικά μοντέλα σύγκρουσης και συνεργασίας» (2009).
9. Μπουντής Αναστάσιος «Δυναμικά συστήματα και χάος». (1995)
10. Σαραφόπουλος Γ.- Μυλωνάς Ν. «Γραμμική Άλγεβρα, Βελτιστοποίηση και Δυναμική Ανάλυση» (2017)
11. Σταματόπουλος, Γεώργιος «Θεωρία παιγνίων-Δυναμικά παίγνια» (2015)
12. Σουρλάς Δημήτριος «Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του maple» (2010)
13. Στοφόρος Χρυσόστομος - Σεργεντάνη Ηλέκτρα (Διπλωματική εργασία) «ο ρόλος της θεωρίας παιγνίων στην στρατηγική των επιχειρήσεων -παίγνιο διαπραγμάτευσης σε εταιρικό περιβάλλον» (2016)
14. Σφακιανάκης Μιχάλης- Κλιάφας Κωνσταντίνος (Διπλωματική εργασία) «Θεωρία Παιγνίων: Ταξινόμηση – Στρατηγική – Χειραγώγηση» (2016)
15. Τσαπικούνη Αγγελική – Κουσουλάς Νικόλαος στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών «Οι Εκθέτες Lyapunov και ο αριθμητικός υπολογισμός τους» Διπλωματική (2010)
16. Ρουμανιάς Κώστας «Δυναμικά παίγνια» (2018)
17. Ψαριανός Ι. «Θεωρία παιγνίων» (2016)
18. Antman S.S. - Marsden J.E. - Sirovich L.- Wiggins S. «Interdisciplinary Applied Mathematics» (2005)
19. Bardenand D.- Thomas C.. «An Introduction to Differential Manifolds» (2003)
20. Barron E.N. - «Game Theory» ( 2006)
21. Hamidou Tembine - Eitan Altman - Rachid El Azouzi - and Yezekael Hayel « Multiple Access Game in Ad-hoc Network» (2007)
22. Hasselblatt Boris – Katok Anatole. «A First Course in dynamics with a Panorama of Recent Developments» (2003)
23. Hoy M. – Livernois J.-C. McKenna-R. Rees- Stengos T. «Mathematics for Economics» (2011)
24. Gibbons Robert «An Introduction to Applicable Game Theory» (1997)
25. Keshri Ritesh Kumar «New Approach to Modified Schur-Cohn Criterion for Stability Analysis of a Discrete time System». (2006)

26. Li Wen-na, Elsadany A.A., Wei Zhou, Yan-lan Zhu. «Global Analysis, Multi-stability and Synchronization in a Competition Model of Public Enterprises with Consumer Surplus Check for updates» (2020).
27. Lynch Stephen «Dynamical Systems with Applications using Mathematica» (2007)
28. Mc Cain Roger A. « Game Theory» (2019)
29. Marray J.D. «Mathematical Biology» (2002)
30. Mareno A. - English L. Q. «Flip and Neimark–Sacker Bifurcations in a Coupled Logistic Map System» ( 2020)
31. May R. M., « Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics», (1976)
32. Osborne Martin J. «An Introduction to Game Theory» (2010)
33. Pecora *Louis M.*- Carroll Thomas L. «Synchronization of chaotic systems» (2015)
34. Sarafopoulos Georges «On the dynamics of a duopoly game with differentiated goods» (2014)
35. Sohel Rana S. M. - Kulsum Umme «Bifurcation Analysis and Chaos Control in a Discrete-Time Predator-Prey System of Leslie Type with Simplified Holling Type IV Functional Response» (2017).
36. Turocy Theodore L. - Von Stengel Bernhard « Game Theory» (2001)