



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ
ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΚΟ ΚΩΝΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΥΛΙΚΟ**

ΧΙΝΗ ΣΩΤΗΡΙΑ

υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

2019

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων): Δρ. Γραμμένος Θεοφάνης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής: Δρ. Μυστακίδης Ευριπίδης, Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής: Δρ. Τζάρος Κωνσταντίνος, Διδάσκων, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Γραμμένο Θεοφάνη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του, καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, Καθηγητή κ. Μυστακίδη Ευριπίδη και κ. Τζάρο Κωνσταντίνο. Τέλος, οφείλω ευχαριστίες συνολικά στον Δομοστατικό Τομέα του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΚΟ ΚΩΝΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΥΛΙΚΟ

Χίνη Σωτηρία

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2019

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γραμμένος Θεοφάνης, Επίκουρος Καθηγητής

Περίληψη

Η μετάδοση θερμότητας έχει εισαχθεί τα τελευταία χρόνια στην περιοχή μελέτης πολιτικού μηχανικού. Συνήθης τρόπος μελέτης της μετάδοσης θερμότητας σε κωνικό κέλυφος αποτελούν οι αριθμητικές μέθοδοι λόγω της ευκολίας χρήσης τους. Ωστόσο, σε αυτή τη διπλωματική εργασία πραγματοποιείται αναλυτική μελέτη της μετάδοσης θερμότητας σε ανισοτροπικό κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό. Η χρήση των σύνθετων υλικών έχει γίνει δημοφιλής, επειδή αυτά αποτελούν ιδιαίτερη κατηγορία δομικών υλικών, που προσδίδουν στον φορέα βελτιωμένες ιδιότητες, όπως η καλή συμπεριφορά σε υψηλές θερμοκρασίες.

Αρχικά, απαραίτητη κρίνεται η εισαγωγή και η κατανόηση της επιστήμης της μετάδοσης θερμότητας και των σύνθετων υλικών. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται η αναλυτική επίλυση του προβλήματος μετάδοσης θερμότητας σε ανισοτροπικό κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Ο κώνος που μελετάται είναι πλήρης κυκλικός και περιτυλιγμένος με τις ίνες του σύνθετου υλικού. Η αναλυτική λύση, στην οποία καταλήγει η διπλωματική, προκύπτει σε γενική μορφή αλλά και για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Τέλος, η αποτύπωση της λύσης και της συμπεριφοράς του κωνικού κελύφους παρουσιάζεται σε διαγράμματα και ελέγχεται με τα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	4
1. Εισαγωγή.....	7
2. Στοιχεία μετάδοσης θερμότητας.....	9
2.1 Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας.....	10
2.2 Πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής – Αρχή διατήρησης της ενέργειας.....	11
2.3 Αγωγή.....	12
2.4 Συναγωγή.....	19
2.5 Ακτινοβολία.....	22
2.6 Μετάδοση θερμότητας με συνδυασμό των τριών μηχανισμών μετάδοσης.....	26
3 Σύνθετα υλικά – Μια εισαγωγή.....	27
3.1 Ιστορική αναδρομή.....	27
3.2 Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα σύνθετων υλικών.....	30
3.3 Ταξινόμηση σύνθετων υλικών.....	32
3.4 Ίνες.....	36
4 Μετάδοση θερμότητας σε ανισοτροπικό κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό.....	49
4.1 Αγωγή θερμότητας σε σύνθετα υλικά.....	50
4.2 Κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος.....	54
4.3 Αναλυτική επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης.....	61
4.3.1 Κανονική μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης.....	61
4.3.2 Εύρεση ομογενούς λύσης με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών.....	67
4.4 Εύρεση μιας μερικής λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης.....	74
4.5 Γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης.....	77
5 Παρουσίαση ειδικών περιπτώσεων.....	80
5.1 Προσαρμογή διαφορικής εξίσωσης και επίλυση.....	80
5.2 Θερμοκρασιακή κατανομή σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό για ειδικές περιπτώσεις	87

6	Αποτελέσματα και σχολιασμός	91
6.1	Εφαρμογή σε κατασκευές πολιτικού μηχανικού	91
6.2	Γραφική απεικόνιση γενικής λύσης και επαλήθευση με χρήση αριθμητικής μεθόδου ...	94
7	Συμπεράσματα.....	102
8	Σύνοψη Διπλωματικής Εργασίας	104
9	Βιβλιογραφία.....	106

1. Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, η μετάδοση θερμότητας απασχολεί τον τομέα των πολιτικών μηχανικών. Γεγονός ορόσημο αποτελεί η πτώση των Δίδυμων Πύργων το 2001, που παρακίνησε πολλούς πολιτικούς μηχανικούς να διεισδύσουν σε αυτή την επιστήμη, κυρίως στην πυροπροστασία των κατασκευών (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ.[1]). Ωστόσο, το ενδιαφέρον της επιστήμης δε βρίσκεται μόνο εκεί, καθώς πληθώρα κατασκευών και εφαρμογών χρήζουν μελέτης ως προς τη θερμική συμπεριφορά τους. Επιπλέον, πρόσφατη είναι και η εξάπλωση των σύνθετων υλικών ως δομικά υλικά κατασκευών. Οι μοναδικές τους ιδιότητες σε συνδυασμό με τη μεγάλη αντοχή τους και τη μικρή πυκνότητά τους, τα καθιστούν ιδανικά για κατασκευές και φορείς που έχουν ως σκοπό τη βελτίωση της απόκρισής τους με ταυτόχρονη διατήρηση του ίδιου βάρους τους.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η αναλυτική μελέτη και η εύρεση αναλυτικής λύσης του προβλήματος μόνιμης μετάδοσης θερμότητας σε ανισοτροπικό κωνικό κελύφος, το οποίο αποτελείται από σύνθετο υλικό. Δεδομένου της πολυπλοκότητας του σχήματος του κελύφους αλλά και της κατάστρωσης της διαφορικής εξίσωσης, πραγματοποιούνται ορισμένες παραδοχές και λαμβάνονται συνοριακές συνθήκες που συμβάλλουν στην εύρεση μιας αξιόπιστης γενικής αναλυτικής λύσης.

1.1.Οργάνωση διπλωματικής εργασίας

Στο 2^ο κεφάλαιο, γίνεται μια γενική εισαγωγή στη θεωρία της μετάδοσης θερμότητας και τους τρεις μηχανισμούς με τους οποίους αυτή πραγματοποιείται.

Στο 3^ο κεφάλαιο, αναφέρονται γενικές πληροφορίες για τα σύνθετα υλικά. Παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή, οι κατηγορίες των σύνθετων υλικών και τα υλικά από τα οποία συντίθενται.

Στο 4^ο κεφάλαιο, πραγματοποιείται η αναλυτική επίλυση του προβλήματος μετάδοσης θερμότητας, που αναλύεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία. Η επίλυση βασίζεται στο επιστημονικό άρθρο *On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells* από τους M. Norouzi και H. Rahmani (2015) [2]. Αρχικά, προσαρμόζεται η επίλυση για σύνθετα υλικά, λόγω της ανισοτροπίας και της γωνίας της ίνας τους. Στη συνέχεια, καταστρώνεται η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα και γράφεται σε κανονική μορφή. Ακολουθεί η εύρεση της ομογενούς λύσης με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, καθώς και μιας μερικής λύσης, το άθροισμα των οποίων θα δώσει τη γενική λύση.

Στο 5^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τρεις ειδικές λύσεις και η αναλυτική επίλυση για αυτές. Μελετάται το πρόβλημα με γωνία ίνας μηδενική, ορθή και με ισοτροπικό σύνθετο υλικό.

Στο 6^ο κεφάλαιο, γίνεται αρχικά αναφορά στις κατασκευές σιλό, ως χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής του προβλήματος που επιλύθηκε για πολιτικούς μηχανικούς. Επίσης, παρουσιάζονται διαγράμματα που προκύπτουν από την αναλυτική λύση, σχολιάζονται και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα αριθμητικής μεθόδου.

Στο 7^ο κεφάλαιο, αναφέρονται τα συμπεράσματα αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Στο 8^ο κεφάλαιο, γίνεται η σύνοψη της διπλωματικής εργασίας και αναφέρονται πιθανά αντικείμενα περαιτέρω έρευνας.

Τέλος, στο 9^ο κεφάλαιο αναφέρεται η βιβλιογραφία στην οποία βασίστηκε η διπλωματική εργασία.

2. Στοιχεία μετάδοσης θερμότητας

Στην επιστημονική περιοχή της μετάδοσης θερμότητας μελετάται η μεταφορά ενέργειας μεταξύ υλικών σωμάτων ως αποτέλεσμα της διαφοράς θερμοκρασίας, καθώς επίσης ο τρόπος και ο ρυθμός με τον οποίο αυτή πραγματοποιείται υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Το γεγονός ότι ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας αποτελεί τον σκοπό μελέτης της μετάδοσης θερμότητας αποτελεί την ειδοποιό διαφορά της από τη θερμοδυναμική, καθώς και έναν από τους βασικούς λόγους που ενδιαφέρει ιδιαίτερα τους μηχανικούς. Η τελευταία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη συστημάτων που βρίσκονται σε ισορροπία (εδώ αγνοούμε τη θερμοδυναμική που μελετά φαινόμενα μη ισορροπίας) και την ποσότητα θερμότητας που χρειάζονται για να μεταπηδήσουν από ένα ισοζύγιο σε άλλο χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η χρονική διάρκεια αυτής της διαδικασίας. Οι μηχανισμοί μετάδοσης θερμότητας είναι τρεις: αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία. Συνοπτικά, οι τρεις αυτοί μηχανισμοί έχουν ως εξής [3]:

Αγωγή (Conduction): ο μηχανισμός μετάδοσης θερμότητας από τα πιο ενεργητικά μόρια στα λιγότερο ενεργητικά του ίδιου σώματος, καθώς αυτά εμφανίζουν μεταξύ τους διαφορά θερμοκρασίας. Πραγματοποιείται τόσο σε στερεά, όσο και σε υγρά και αέρια.

Συναγωγή (Convection): ο μηχανισμός μετάδοσης θερμότητας ανάμεσα σε ένα στερεό μέσο και σε γειτονικό υγρό ή αέριο που βρίσκεται σε κίνηση.

Ακτινοβολία (Radiation): ο μηχανισμός μετάδοσης θερμότητας που εκπέμπεται από ένα υλικό μέσο με μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ή, ισοδύναμα, φωτονίων) ως αποτέλεσμα των μεταβολών των ηλεκτρονικών διαμορφώσεων των ατόμων και των μορίων. Σε αντίθεση με τους προηγούμενους δύο μηχανισμούς, η ακτινοβολία διαδίδεται ακόμα και όταν υπάρχει απόλυτο κενό ανάμεσα στα σώματα και αποτελεί τον πιο γρήγορο τρόπο μετάδοσης θερμότητας.

Ως θερμότητα ορίζεται η μορφή ενέργειας που μπορεί να μεταφερθεί από ένα σύστημα σε άλλο ως αποτέλεσμα της διαφοράς θερμοκρασίας. Διεθνής μονάδα μέτρησης της ενέργειας είναι το Joule (J). Μία άλλη διαδεδομένη μονάδα μέτρησης της θερμότητας είναι η θερμίδα (cal , calorie) με $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$ και ορισμός της οποίας είναι η απαιτούμενη ενέργεια για την αύξηση της θερμοκρασίας 1gr νερού στους 15°C κατά 1°C .

Η θεωρία της μετάδοσης θερμότητας βασίζεται στους δύο θεμελιώδεις νόμους της θερμοδυναμικής, που συνοψίζονται ως εξής:

1^{ος} νόμος : Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα είναι ίσος με τον ρυθμό αύξησης της ενέργειας σε αυτό το σύστημα.

2^{ος} νόμος : Η μετάδοση θερμότητας συμβαίνει προς την κατεύθυνση μείωσης της θερμοκρασίας.

2.1 Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας

Προκειμένου να περιγραφεί ένα φυσικό φαινόμενο, όπως η μετάδοση θερμότητας, μετατρέπεται σε μαθηματικό πρόβλημα (μαθηματικό μοντέλο) με χρήση εξισώσεων και μεταβλητών, οι οποίες περιγράφουν τα μεγέθη που εμπλέκονται σε αυτό. Αφού προσδιοριστούν αυτές οι μεταβλητές, είναι απαραίτητο να γίνουν ορισμένες εύλογες παραδοχές και προσεγγίσεις, που θα απλουστεύσουν το πρόβλημα. Αυτές σε συνδυασμό με τη φύση του προβλήματος και τον σκοπό της μοντελοποίησης, επηρεάζουν κάθε φορά το αν η λύση θα είναι περίπλοκη και ακριβής ή απλή και πιο γενική.

Σημαντικό ρόλο παίζουν επίσης και οι φυσικοί νόμοι που κυριαρχούν στο φαινόμενο μετάδοσης θερμότητας που μελετάται. Σειρά έχει η κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης για την οποία επιλέγεται η κατάλληλη τεχνική επίλυσης σε συνδυασμό με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες που θα οδηγήσουν στην επιθυμητή λύση του προβλήματος.

2.2 Πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής – Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Η ενέργεια, όπως είναι γνωστό, δεν μπορεί να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί παρά μόνο να μεταβάλει μορφή.

Το ισοζύγιο ενέργειας για κάθε σύστημα και διεργασία εκφράζει ότι η καθαρή μεταβολή της συνολικής ενέργειας είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ της ολικής ενέργειας που εισέρχεται στο σύστημα (E_{in}) και της ολικής ενέργειας που εξέρχεται (E_{out}) από αυτό [3].

Επομένως, με μορφή μαθηματικής εξίσωσης, ισχύει :

$$E_{in} - E_{out} = \Delta E_{\text{συστήματος}}, \quad (2.2.1)$$

όπου το αριστερό μέλος εκφράζει την καθαρή μεταφορά ενέργειας μέσω θερμότητας, έργου ή ροής μάζας, ενώ το δεξιό μέλος τη συνολική μεταβολή της ενέργειας του συστήματος συνολικά.

Σε ένα στάσιμο, απλό κλειστό σύστημα, στο οποίο δηλαδή απουσιάζουν ηλεκτρισμός, μαγνητισμός, κίνηση, βαρύτητα και επιφανειακές τάσεις, η μεταβολή της συνολικής ενέργειας θα ισούται με τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας U του συστήματος:

$$\Delta E_{\text{συστήματος}} = \Delta U_{\text{συστήματος}} = mc\Delta T, \quad (2.2.2)$$

όπου m η συνολική μάζα του συστήματος, c η ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο και ΔT η διαφορά θερμοκρασίας του συστήματος.

Αντίστοιχα εκφράζεται και το ισοζύγιο θερμότητας, αφού αποτελεί και αυτή μια μορφή ενέργειας.

Σε περιπτώσεις που το σύστημα παράγει θερμότητα εκτός από τη μεταφορά της, το ισοζύγιο θερμότητας παίρνει τη μορφή :

$$Q_{in} - Q_{out} + \Delta E_{\text{παραγ}} = \Delta E_{\text{θερμική,συστήματος}}, \quad (2.2.3)$$

όπου ο όρος $Q_{in} - Q_{out}$ αποτυπώνει την καθαρή μεταφορά θερμότητας, ο όρος $\Delta E_{\text{παραγ}}$ την παραγωγή θερμότητας και τέλος ο όρος $\Delta E_{\text{θερμική, συστήματος}}$ τη μεταβολή της θερμικής ενέργειας του συστήματος.

Όταν σε ένα στάσιμο κλειστό σύστημα διεξάγονται φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας χωρίς παραγωγή έργου, το ισοζύγιο ενέργειας συνοψίζεται στη σχέση:

$$Q = mc\Delta T \quad (J) \quad (2.24)$$

2.3 Αγωγή

Είναι γνωστό ότι τα μόρια αποθηκεύουν στο εσωτερικό τους ενέργεια με διάφορες μορφές, το άθροισμα των οποίων ονομάζεται εσωτερική ενέργεια. Σε μικροσκοπικό επίπεδο, η θερμότητα μετατρέπεται στην κινητική ενέργεια, μεταφοράς και περιστροφής, και την ενέργεια ταλάντωσης των σωματιδίων (μορίων, ατόμων και ιόντων), που αποθηκεύεται στο υλικό μέσο και μεταφέρεται με την τυχαία κίνηση των σωματιδίων.

Με την αγωγή η ενέργεια αυτή μεταφέρεται όταν τα πιο ενεργητικά σωματίδια του υλικού μέσου συγκρούονται με γειτονικά λιγότερο ενεργητικά μόρια, τα οποία παρουσιάζουν διαφορά θερμοκρασίας.

Η αγωγή στα στερεά σώματα οφείλεται στον συνδυασμό ταλαντώσεων του κρυσταλλικού πλέγματος λόγω των δονήσεων των ατόμων ή των μορίων στο πλέγμα και στη μεταφορά ενέργειας από τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Λόγω της πυκνής διάταξης των ατόμων ή μορίων τους αλλά και της κίνησης των ηλεκτρονίων, τα στερεά σώματα αποτελούν καλύτερους αγωγούς της θερμότητας από τα υπόλοιπα μέσα. Αντίστοιχα, σε υγρά και αέρια η αγωγή της θερμότητας οφείλεται στις κρούσεις

και στη διάχυση μεταξύ των ατόμων ή μορίων κατά την τυχαία τους κίνηση (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ., π.χ., [4],[5]).

Ο ρυθμός αγωγής θερμότητας ενός επίπεδου μέσου σχετίζεται με τη γεωμετρία, το πάχος, το υλικό καθώς και τη διαφορά θερμοκρασίας στις δύο συνοριακές πλευρές του.

Η αγωγή θερμότητας σε ένα μέσο γενικά εξαρτάται από τις τρεις μεταβλητές του χώρου όσο και από τον χρόνο. Ταυτόχρονα και η θερμοκρασία μεταβάλλεται με τη θέση και τον χρόνο, δηλαδή μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση $T = T(x, y, z, t)$, π.χ. σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η αγωγή θερμότητας διακρίνεται σε μόνιμη ή σταθεροποιημένη και σε μη μόνιμη ή μη σταθεροποιημένη ή μεταβατική. Μόνιμη αγωγή θερμότητας ορίζεται αυτή κατά την οποία η θερμοκρασία παραμένει σταθερή με τον χρόνο σε όλα τα σημεία του μέσου. Αντιθέτως, στη μη μόνιμη αγωγή θερμότητας η θερμοκρασία μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου.

Χαρακτηρίζεται μονοδιάστατη η αγωγή της θερμότητας όταν θεωρείται σημαντική μόνο ως προς μία κατεύθυνση, αντίστοιχα διδιάστατη ως προς δύο και τριδιάστατη ως προς τρεις.

Οι κατευθύνσεις στις οποίες πραγματοποιείται η αγωγή και κατ' επέκταση η θέση ενός σημείου του μέσου μπορούν να εκφραστούν, για παράδειγμα, σε ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) , κυλινδρικές συντεταγμένες (r,φ,z) , ή σφαιρικές συντεταγμένες (r,φ,θ) .

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη της αγωγής θερμότητας κατέχει ο νόμος του Fourier, ο οποίος ανακαλύφθηκε πειραματικά και στη βάση του νόμου ψύξης του Νεύτωνα, ενώ στη διαφορική μορφή του εκφράζεται μέσω της εξής μαθηματικής σχέσης για μονοδιάστατη αγωγή [6] :

$$\dot{Q}_{αγωγής} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.3.1)$$

Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει θεωρώντας αγωγή θερμότητας σε έναν επίπεδο τοίχο πεπερασμένου πάχους $\Delta x = L$ και με A την επιφάνεια μεταφοράς θερμότητας, κάθετη στη διεύθυνση

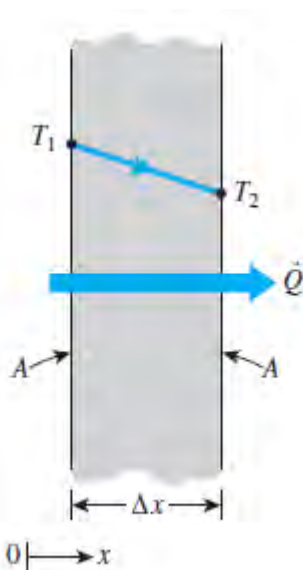
της μεταφοράς. Ο τοίχος έχει διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δύο πλευρών του $\Delta T = T_2 - T_1$.

Καταδεικνύεται με πειράματα ότι ο ρυθμός αγωγής της θερμότητας είναι ανάλογος της επιφάνειας μεταφοράς και της διαφοράς θερμοκρασίας αλλά αντιστρόφως ανάλογος του πάχους του τοίχου.

$$\text{Ρυθμός αγωγής θερμότητα} \propto \frac{(\text{Επιφάνεια})(\text{Διαφορά θερμοκρασίας})}{(\text{Πάχος})}$$

ή αλλιώς

$$\dot{Q}_{\text{αγωγής}} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2.3.2)$$

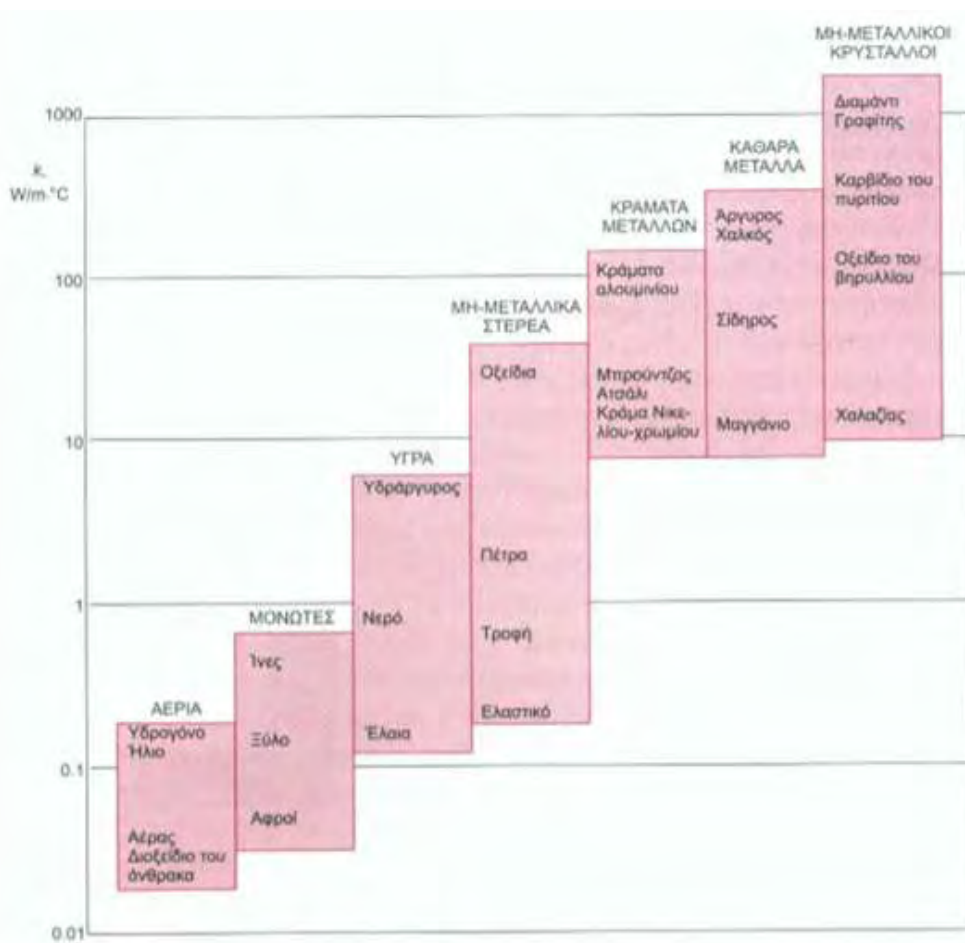


Εικόνα 1 Αγωγή θερμότητας σε επίπεδο τοίχο πάχους Δx και εμβαδού A (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

Η ποσότητα θερμότητας που μεταδίδεται συμβολίζεται με Q , και με $\dot{Q}_{\text{αγωγής}}$ ο ρυθμός αγωγής της θερμότητας, δηλαδή η ποσότητα θερμότητας που άγεται ανά μονάδα χρόνου ($J/s = W$). Επιπλέον, ορίζεται ως ροή θερμότητας ή πυκνότητα θερμικής ροής ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση μεταφοράς

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad (2.3.3)$$

Ο συντελεστής k εκφράζει τη θερμική αγωγιμότητα ενός υλικού, η οποία ορίζεται ως ο ρυθμός μεταφοράς της θερμότητας ανά μονάδα πάχους του υλικού ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα διαφοράς θερμοκρασίας. Η αγωγιμότητα αποτελεί μέτρο της ικανότητας του υλικού να άγει τη θερμότητα. Σύμφωνα με αυτόν τον συντελεστή ένα υλικό χαρακτηρίζεται καλός ή κακός αγωγός της θερμότητας, αν η τιμή του k είναι μεγάλη ή μικρή αντίστοιχα. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι καλοί αγωγοί ηλεκτρισμού αποτελούν και καλούς αγωγούς θερμότητας.



Εικόνα 2 Θερμική αγωγιμότητα υλικών σε θερμοκρασία δωματίου (Παπασιώπη, n.d. [7])

Ο όρος $\frac{dT}{dx}$ ονομάζεται θερμοκρασιακή βαθμίδα και είναι η κλίση της καμπύλης της θερμοκρασίας σε διάγραμμα $T-x$ στη θέση x . Όπως προαναφέρθηκε, η θερμότητα άγεται προς την κατεύθυνση μείωσης της θερμοκρασίας, άρα η θερμοκρασιακή βαθμίδα γίνεται αρνητική για μείωση της θερμοκρασίας προς τα θετικά του άξονα x . Έτσι προκύπτει το αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση

Fourier, προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι ο ρυθμός αγωγής της θερμότητας έχει πάντα θετικό πρόσημο για αυτή τη φορά ροής της θερμότητας.

Η γενική σχέση του νόμου του Fourier για το τριδιάστατο θερμοκρασιακό πεδίο $T(x,y,z)$ λαμβάνει την εξής μορφή σε καρτεσιανές συντεταγμένες :

$$\vec{Q}_n = -kA\nabla T = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right), \quad (2.3.4)$$

όπου \vec{n} : το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση \vec{Q}_n και $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης του \mathbb{R}^3 .

Ένα ακόμα σημαντικό μέγεθος για την αγωγή θερμότητας είναι η θερμική διαχυτότητα ενός υλικού που ορίζεται ως ο λόγος της αγόμενης θερμότητας ως προς την αποθηκευμένη θερμότητα σε αυτό [3].

$$\alpha = \frac{k}{\rho \times c_p} \quad (2.3.5)$$

Η θερμική διαχυτότητα εκφράζει το πόσο γρήγορα διαχέεται η θερμότητα μέσω ενός υλικού. Το γινόμενο $\rho \times c_p$, όπου ρ η πυκνότητα του υλικού, αποδίδει τη θερμοχωρητικότητα του υλικού, την ικανότητά του δηλαδή να αποθηκεύει θερμότητα. Ο όρος c_p από μόνος του, όμως, αποδίδει την ειδική θερμότητα του υλικού, δηλαδή την ενέργεια που απαιτείται για να αυξηθεί η θερμοκρασία μίας μονάδας μάζας της ουσίας κατά έναν βαθμό, με την πίεση να διατηρείται σταθερή [8].

Όσο καλύτερος αγωγός της θερμότητας είναι ένα υλικό ή όσο πιο δύσκολα αποθηκεύει θερμότητα, τόσο μεγαλύτερη τιμή θα λαμβάνει η θερμική διαχυτότητά του, γεγονός που συνεπάγεται ότι η θερμότητα διαδίδεται γρήγορα μέσα στο μέσο. Αντιθέτως στην περίπτωση που ένα υλικό έχει μικρή τιμή θερμικής διαχυτότητας, τότε η θερμότητα απορροφάται σε μεγάλο βαθμό από το ίδιο το υλικό με αποτέλεσμα να αυξάνεται η θερμοκρασία του αλλά λιγότερο μέρος της θερμότητας να μεταφέρεται περαιτέρω. Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται η θερμική διαχυτότητα για ορισμένα υλικά.

Υλικό	$\alpha, \text{m}^2/\text{s}$
Άργυρος	$149 * 10^{-6}$
Χρυσός	$127 * 10^{-6}$
Χαλκός	$113 * 10^{-6}$
Αλουμίνιο	$97.5 * 10^{-6}$
Σίδηρος	$22.8 * 10^{-6}$
Υδράργυρος	$4.7 * 10^{-6}$
Μάρμαρο	$1.2 * 10^{-6}$
Πάγος	$1.2 * 10^{-6}$
Σκυρόδεμα	$0.75 * 10^{-6}$
Πλίνθος	$0.52 * 10^{-6}$
Βαρύ έδαφος(ξηρό)	$0.52 * 10^{-6}$
Γυαλί	$0.34 * 10^{-6}$
Υαλοβάμβακας	$0.23 * 10^{-6}$
Νερό	$0.14 * 10^{-6}$
Βοδινό κρέας	$0.14 * 10^{-6}$
Ξύλο δρυός	$0.13 * 10^{-6}$

Πίνακας 2.1 Τιμή θερμικής διαχυτότητας υλικών σε θερμοκρασία δωματίου (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

Σε πρακτικές εφαρμογές μετάδοσης θερμότητας είναι πιθανό να μετατραπεί κάποια μορφή ενέργειας, π.χ. ηλεκτρική, πυρηνική ή χημική ενέργεια, σε θερμότητα εντός του ίδιου του υλικού μέσου. Ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας εκφράζεται ανά μονάδα όγκου του μέσου και συμβολίζεται με $\dot{\epsilon}_{\text{παραγ}}$ (W/m^3). Ο συνολικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας στον μέσο όγκο V λαμβάνεται από την ολοκλήρωση :

$$\dot{E}_{\text{παραγ}} = \int_V \dot{e}_{\text{παραγ}} dV \quad (W) \quad (2.3.6)$$

Συμπερασματικά, αν η παραγωγή θερμότητας είναι ομοιόμορφη σε όλον τον όγκο του υλικού μέσου, θα ισχύει :

$$\dot{E}_{\text{παραγ}} = \dot{e}_{\text{παραγ}} V \quad (2.3.7)$$

με σταθερό ρυθμό παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα του όγκου.

Για πολυδιάστατη αγωγή θερμότητας, το ισοζύγιο της σε στοιχείο διαστάσεων Δx , Δy , Δz περιγράφεται από την παρακάτω σχέση [3]:

$$\begin{bmatrix} \text{ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{στη} \\ \text{θέση } (x, y, z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{στη θέση} \\ (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ρυθμός παραγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{εντός του στοιχείου} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ρυθμός μεταβολής} \\ \text{του ενεργειακού} \\ \text{περιεχομένου} \\ \text{του στοιχείου} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{\text{παραγ,στοιχ}} = \frac{\Delta E_{\text{στοιχ}}}{\Delta t} \quad (2.3.8)$$

Με τη μάζα του στοιχείου να υπολογίζεται από τον τύπο $m = \rho V$, όπου ρ η πυκνότητα, και τον όγκο του να είναι $V_{\text{στοιχ}} = \Delta x \Delta y \Delta z$, η μεταβολή του ενεργειακού περιεχομένου του στοιχείου θα ισούται με:

$$\Delta E_{\text{στοιχ}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc\Delta T = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (2.3.9)$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές ως τώρα σχέσεις και λαμβάνοντας τα όρια για Δx , Δy , Δz , $\Delta t \rightarrow 0$, προκύπτει η γενική διαφορική εξίσωση για τριδιάστατη αγωγή θερμότητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{\text{στοιχ}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.3.10)$$

όπου $\dot{e}_{\sigma\tau\omicron\chi}$ είναι ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας εντός του στοιχείου.

Στην περίπτωση που η θερμική αγωγιμότητα διατηρείται σταθερή, η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση Fourier-Biot:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\sigma\tau\omicron\chi}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.11a)$$

Επίσης, για μόνιμη ροή θερμότητας η εξίσωση απλοποιείται περαιτέρω στην εξίσωση Poisson:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\sigma\tau\omicron\chi}}{k} = 0 \quad (2.3.12)$$

Αν η αγωγή θερμότητας είναι μεταβατική χωρίς, όμως, να παράγεται θερμότητα στο στοιχείο όγκου, λαμβάνεται η εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.13)$$

Για μόνιμη αγωγή χωρίς παραγωγή θερμότητας ο γενικός τύπος λαμβάνει τη μορφή της τριδιάστατης εξίσωσης Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3.14)$$

Η γενική εξίσωση αγωγής είναι επίσης δυνατό να εκφραστεί σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες, αντίστοιχα, ως ακολούθως:

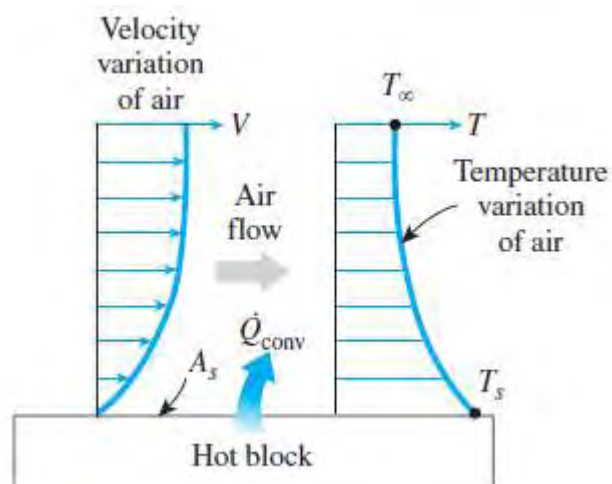
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{\sigma\tau\omicron\chi} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.15)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{e}_{\sigma\tau\omicron\chi} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.16)$$

2.4 Συναγωγή

Συναγωγή ονομάζεται ο τρόπος μετάδοσης θερμότητας ανάμεσα σε μία στερεή επιφάνεια και ένα ρευστό που βρίσκεται σε επαφή με αυτή. Αποτελεί συνδυασμό της μεταφοράς θερμότητας μέσω της κίνησης των σωματιδίων του ρευστού και της αγωγής. Η γρήγορη κίνηση του ρευστού θα έχει ως αποτέλεσμα μεγάλη μεταφορά θερμότητας με συναγωγή, ενώ η ακινησία του σηματοδοτεί μεταφορά θερμότητας μόνο με τον μηχανισμό της αγωγής [3].

Η συναγωγή διαχωρίζεται σε εξαναγκασμένη και φυσική (ή ελεύθερη). Στην πρώτη περίπτωση το ρευστό ρέει με τη βοήθεια κάποιου εξωτερικού μέσου, όπως π.χ. ο αέρας, ένας ανεμιστήρας ή μια αντλία. Αντιθέτως, στη φυσική συναγωγή η κίνηση του ρευστού προκαλείται από τις ανυψωτικές δυνάμεις, οι οποίες δημιουργούνται από τη διαφορά της πυκνότητας λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας στο ρευστό.



Εικόνα 3 Μηχανισμός συναγωγής από θερμή επιφάνεια στον αέρα και προφίλ ταχύτητας της θερμοκρασίας (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας εκφράζεται από τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα [9]:

$$\dot{Q}_{συναγ} = hA(T_s - T_\infty) \quad (W), \quad (2.4.1)$$

όπου h είναι ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή (W/m^2K), A το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που συμμετέχει στη συναγωγή, T_s η θερμοκρασία στην επιφάνεια αυτή και T_∞ η θερμοκρασία του ρευστού σε μεγάλη απόσταση από την επιφάνεια.

Ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή h δεν αποτελεί κάποια ιδιότητα του ρευστού, αλλά προσδιορίζεται πειραματικά. Εξαρτάται από όλες τις παραμέτρους που επηρεάζουν τη συναγωγή της θερμότητας, όπως η γεωμετρία της επιφάνειας, η φύση της κίνησης, η ταχύτητα, καθώς επίσης και οι ιδιότητες του ρευστού.

Κάποιες αντιπροσωπευτικές τιμές του συντελεστή h παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Είδος συναγωγής	$h, W/m^2K$
Ελεύθερη συναγωγή αερίων	2-25
Ελεύθερη συναγωγή υγρών	10-1000
Εξαναγκασμένη συναγωγή αερίων	25-250
Εξαναγκασμένη συναγωγή υγρών	50-20.000
Βρασμός και συμπύκνωση	2500-100.000

Πίνακας 2.2 Τυπικές τιμές συντελεστή συναγωγής υλικών (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

2.5 Ακτινοβολία

Ακτινοβολία είναι η ενέργεια που εκπέμπεται από την ύλη με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ή φωτονίων) ως αποτέλεσμα αλλαγών στη διάταξη των ατόμων ή των μορίων της [3]. Σε αντίθεση με την αγωγή και τη συναγωγή, αυτός ο τρόπος μετάδοσης θερμότητας δεν απαιτεί παρουσία υλικού μέσου, δηλαδή μπορεί να λάβει χώρα και στο κενό. Επίσης, αποτελεί τον πιο γρήγορο μηχανισμό, αφού συμβαίνει με την ταχύτητα του φωτός και δεν υπάρχει απόσβεση όταν παρεμβάλλεται κενό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του τρόπου μετάδοσης είναι η μετάδοση θερμότητας από τον ήλιο μέσα στο διάστημα.

Η ακτινοβολία είναι ογκομετρικό φαινόμενο, καθώς όλα τα σώματα, στερεά, υγρά και αέρια, εκπέμπουν και απορροφούν σε διαφορετικό βαθμό. Ωστόσο, θεωρείται επιφανειακό φαινόμενο για τα στερεά, που είναι αδιαφανή σε θερμική ακτινοβολία, όπως, για παράδειγμα, τα μέταλλα, το ξύλο και τα πετρώματα. Σε αυτά η ακτινοβολία που εκπέμπεται από το εσωτερικό τους δε φτάνει στην επιφάνειά τους, ενώ η ακτινοβολία που δέχονται απορροφάται από την επιφάνεια.

Ο ρυθμός ακτινοβολίας έχει βρεθεί πως είναι ανάλογος της επιφάνειας A_s του σώματος που ακτινοβολεί και της τέταρτης δύναμης της απόλυτης θερμοκρασίας της, T_s , σε Kelvin,

Ο μέγιστος ρυθμός ακτινοβολίας, που μπορεί να υπάρξει, εκπέμπεται από μία ιδανική επιφάνεια, αυτήν του μέλανος σώματος. Το ιδεατό αυτό σώμα έχει την ιδιαιτερότητα ότι απορροφά όλη την ακτινοβολία που δέχεται και εκπέμπει τη λεγόμενη ακτινοβολία μέλανος σώματος, η οποία δίνεται από την εξίσωση Stefan-Boltzmann [10]:

$$\dot{Q}_{\text{εκπεμπ,max}} = \sigma A_s T_s^4 \quad (W) \quad (2.5.1)$$

Το σ είναι μια παγκόσμια σταθερά γνωστή ως σταθερά Stefan-Boltzmann που έχει τιμή $\sigma = 5,67 \times 10^8 \frac{W}{m^2 K^4}$.

Ο λόγος της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από μία επιφάνεια ως προς την ακτινοβολία που εκπέμπει το μέλαν σώμα σε ίδια θερμοκρασία αποκαλείται συντελεστής εκπομπής ε , λαμβάνει τιμές μεταξύ 0 και 1 και ορίζεται ως:

$$\dot{Q}_{εκπεμπ} = \varepsilon \sigma A_s T_s^4 \quad (2.5.2)$$

Αποτελεί χαρακτηριστικό της επιφάνειας που εκπέμπει ακτινοβολία και εξαρτάται συνήθως από τη θερμοκρασία της επιφάνειας, τη γωνία της ακτινοβολίας και το μήκος κύματος της ακτινοβολίας.

Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζονται οι τιμές του συντελεστή εκπομπής για ορισμένα υλικά.

Υλικό	Συντελεστής εκπομπής
Αλουμινόχαρτο	0,07
Ανοδιωμένο αλουμίνιο	0,82
Στιλβωμένος χαλκός	0,03
Στιλβωμένος χρυσός	0,03
Στιλβωμένος άργυρος	0,02
Στιλβωμένος ανοξειδωτος χάλυβας	0,17
Μαύρη βαφή	0,98
Άσπρη βαφή	0,90
Άσπρο χαρτί	0,92-0,97
Άσφαλτος	0,85-0,93
Καλώς εψημένη οπτόπλινθος	0,93-0,96
Ανθρώπινο δέρμα	0,95
Ξύλο	0,82-0,92
Χώμα	0,93-0,96
Νερό	0,96
Βλάστηση	0,92-0,96

Πίνακας 2.3 Τιμές συντελεστή εκπομπής υλικών στους 300K (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

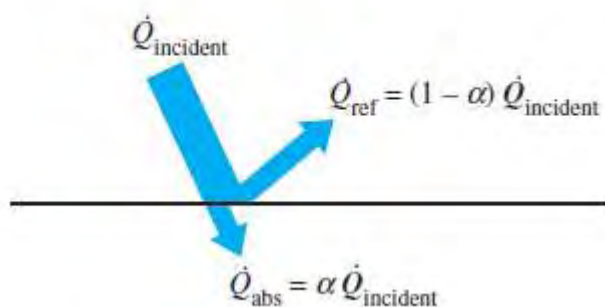
Σημαντική ιδιότητα μίας επιφάνειας όσον αφορά την ακτινοβολία αποτελεί, επίσης, η ικανότητα απορρόφησής της ή αλλιώς απορροφητικότητα α . Πρόκειται για το ποσοστό της προσπίπτουσας

ακτινοβολίας στην επιφάνεια το οποίο απορροφάται από αυτή. Λαμβάνει τιμές από 0 έως 1 και εξαρτάται από τους ίδιους παράγοντες με τον συντελεστή εκπομπής. Όπως προαναφέρθηκε, το μέλαν σώμα απορροφά όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει σε αυτό και επομένως έχει $\alpha=1$.

Σύμφωνα με τον νόμο του Kirchhoff για την ακτινοβολία, η ικανότητα εκπομπής είναι ίση με την ικανότητα απορρόφησης για ίδια θερμοκρασία και ίδιο μήκος κύματος. Ο ρυθμός με τον οποίο μια επιφάνεια απορροφά ακτινοβολία δίνεται από τη σχέση [10]:

$$\dot{Q}_{\text{απορροφούμενο}} = \alpha \dot{Q}_{\text{προσπίπτον}} \quad (W) \quad (2.5.3)$$

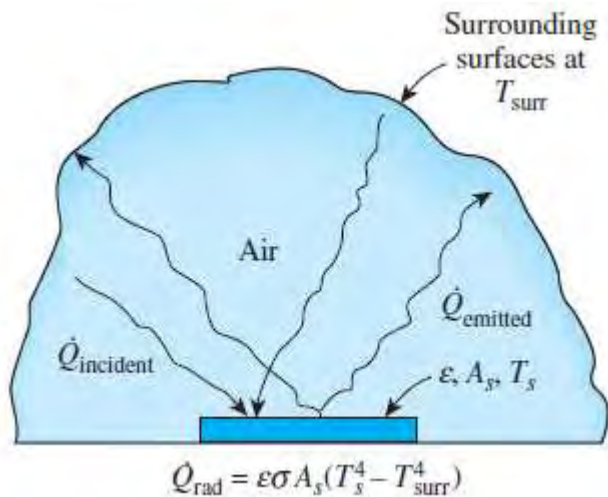
Για αδιαφανείς επιφάνειες, το ποσοστό ενέργειας που προσπίπτει σε αυτές δεν απορροφάται αλλά αντανακλάται πίσω (βλ. Εικόνα 4):



Εικόνα 4 Απορρόφηση ακτινοβολίας από αδιαφανή επιφάνεια απορροφητικότητας α (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

Έστω μια επιφάνεια με συντελεστή εκπομπής ϵ και εμβαδόν A_s που περιβάλλεται από μια πολύ μεγαλύτερη επιφάνεια, ή επιφάνεια μέλανος σώματος, θερμοκρασίας $T_{\text{περιβάλλονσα}}$, και μεταξύ τους υπάρχει αέριο, το οποίο δεν παρεμβαίνει στη ροή της ακτινοβολίας. Τότε ο ρυθμός της ακτινοβολίας ανάμεσα στις δύο επιφάνειες περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{Q}_{\text{ακτιν}} = \epsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{\text{περιβάλλονσα}}^4) \quad (2.5.4)$$



Εικόνα 5 Μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία ανάμεσα σε δύο επιφάνειες, η μία εκ των οποίων περιβάλλει την άλλη (Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, 2015)

2.6 Μετάδοση θερμότητας με συνδυασμό των τριών μηχανισμών μετάδοσης

Σε περιπτώσεις που ένα σώμα δέχεται θερμότητα με αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία ταυτόχρονα, ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών μεταφοράς θερμότητας:

$$\dot{Q}_{\text{συνολικό}} = \dot{Q}_{\text{αγωγής}} + \dot{Q}_{\text{συναγ}} + \dot{Q}_{\text{ακτιν}}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{\text{συνολικό}} = -kA\nabla T + hA(T_s - T_{\infty}) + \varepsilon\sigma A_s(T_s^4 - T_{\text{περιβάλλοντα}}^4) \quad (2.6.1)$$

Ωστόσο, εάν η μετάδοση θερμότητας δεν είναι μόνο προς το σώμα, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η ποσότητα θερμότητας που εισέρχεται και εξέρχεται από αυτό, καθώς επίσης με ποιον μηχανισμό μεταδίδεται η καθεμία. Έτσι, στο ισοζύγιο θερμότητας, το οποίο θα περιγράφει τη συνολική μετάδοση θερμότητας στο σώμα, η θερμότητα που εισέρχεται σε αυτό θα ανήκει στον όρο Q_{in} .

Αντίστοιχα η θερμότητα που εξέρχεται από το σώμα προς το περιβάλλον θα ανήκει στον όρο Q_{out} και θα έχει αρνητικό πρόσημο.

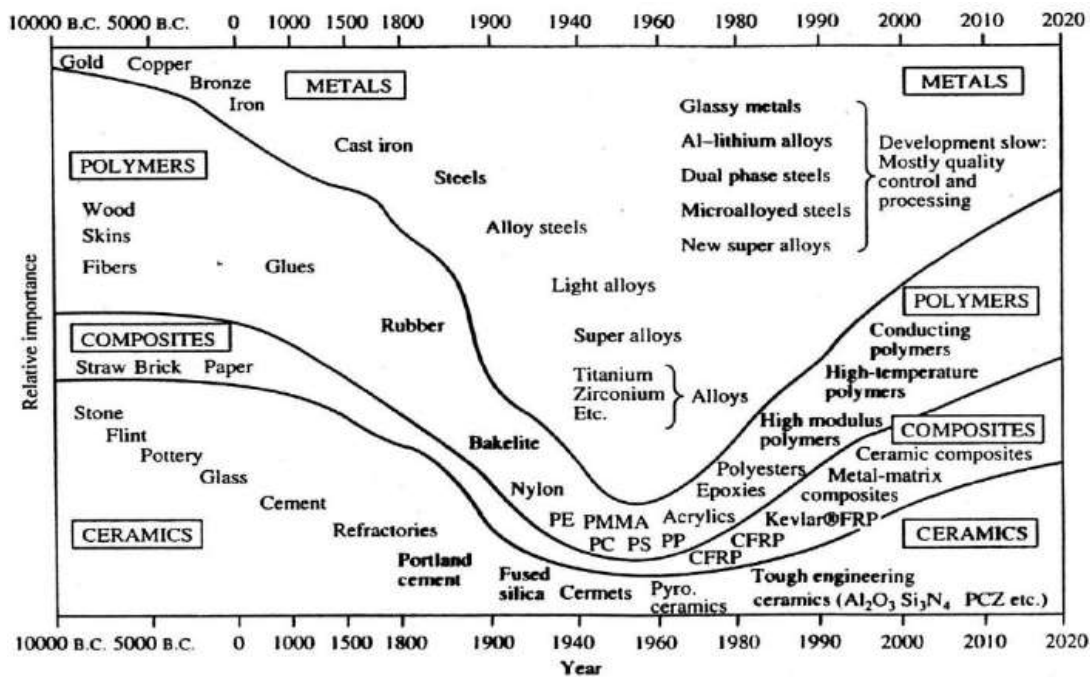
3 Σύνθετα υλικά – Μια εισαγωγή

Ως σύνθετα αναγνωρίζονται τα υλικά, τα οποία μακροσκοπικά συντίθενται από δύο ή περισσότερα φυσικώς ευδιάκριτα και μηχανικά διαχωριζόμενα υλικά. Το ένα συστατικό μέρος λειτουργεί ως ενίσχυση του δεύτερου και προσδίδει στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες, κυρίως μηχανικές, ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό χαρακτηρίζεται ως μήτρα, έχει χαμηλότερη πυκνότητα και ο ρόλος του είναι να προστατεύει την ενίσχυση, να εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της, καθώς επίσης να διατηρεί τη συνοχή [9].

Ο σκοπός και η δυσκολία των σύνθετων υλικών είναι ο συνδυασμός των διάφορων επιμέρους φάσεων έτσι ώστε να παραχθεί το πιο αποδοτικό σύνθετο υλικό, με ιδιότητες διαφορετικές από αυτές που έχουν τα αρχικά υλικά. Οι ιδιότητες του τελικού πολυφασικού συστήματος καθορίζονται από τις ιδιότητες της ενίσχυσης και της μήτρας, το ποσοστό των δύο φάσεων, τη γεωμετρία της ενίσχυσης και τον τρόπο κατασκευής του.

3.1 Ιστορική αναδρομή

Παρά το γεγονός ότι πολλά σύνθετα υλικά υπάρχουν στη φύση και έχουν παραχθεί από τον άνθρωπο εδώ και αιώνες, η τεχνολογία των σύνθετων υλικών με τη σύγχρονη έννοια έχει αναπτυχθεί και διαδοθεί κυρίως μετά τις αρχές του 1960 λόγω της παραγωγής ινών βορίου και άνθρακα.



Εικόνα 6 Ιστορία των υλικών (Α. Παϊπέτης, Ν.Μ Μπάρκουλα, n.d[11])

Το πιο αρχαίο σύνθετο υλικό υψηλής απόδοσης μπορεί να θεωρηθεί το ίδιο το ανθρώπινο σώμα με τα οστά να παίζουν τον ρόλο της μήτρας και τους μύες να αποτελούν την ενίσχυση [12].

Αρχικά, ο άνθρωπος χρησιμοποίησε υλικά που μπορούσε να βρει στη φύση, όπως ξύλο, πέτρα, πηλό και οστά. Στη συνέχεια ανακάλυψε πως αυτά τα υλικά είχαν συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες βελτιώνονταν όταν λειτουργούσαν σε συνδυασμό με άλλα συστατικά.

Για παράδειγμα, στην αρχαία Αίγυπτο το 5000 π.Χ. εφαρμόστηκε η τεχνική ενίσχυσης των πλίνθων με πλέγμα άχρου για την κατασκευή κτισμάτων. Παρατηρήθηκε ότι οι ίνες από άχρο ή άλλα φυτά βελτιώναν την ποιότητα των πλίνθων, καθώς απορροφούσαν την υγρασία από το εσωτερικό τους και μείωναν τις τάσεις συστολής που αναπτύσσονταν κατά την ξήρανση του πηλού. Επίσης, το 4000 π.Χ. εμφανίζεται ο πάπυρος, μια μορφή γραφικής ύλης από σύνθετα υλικά από το συνώνυμο φυτό.

Ένα άλλο σύνθετο υλικό με ηλικία πάνω από 6000 χρόνια είναι οι πλάκες από πολύστρωτες βέργες ξύλου, οι οποίες παρουσιάζουν μεγαλύτερη αντοχή σε ξηρασία και έναντι στρέβλωσης λόγω της απορρόφησης της υγρασίας.

Στην Μεσοποταμία του 1000 π.Χ. εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικώματος των πλίνθων και των πλακιδίων για προστασία από επιφανειακές φθορές, ενώ κατά τους ρωμαϊκούς χρόνους η οδοποιία βασίστηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεράμων.

Αξιοσημείωτο είναι, επίσης, ότι το οπλισμένο σκυρόδεμα, το πλέον διαδεδομένο σύνθετο δομικό υλικό για τις σύγχρονες κατασκευές, αποτελεί μετεξέλιξη της τεχνικής ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, μια πρακτική που αποσκοπούσε στην ενίσχυση των ευαίσθητων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς [13].

Η έρευνα πάνω σε καινοτόμα σύνθετα υλικά ξεκινάει τη δεκαετία του 1920 με την εκμετάλλευση φυσικών υλικών, όπως ρητίνες, ίνες πίσσας και ξύλου. Σημείο σταθμό αποτελεί η εφεύρεση του πρώτου σύνθετου υλικού με πολυμερική μήτρα. Πρόκειται για συνδυασμό ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεΐδη, γνωστό αργότερα ως βακελίτης προς τιμή του Βέλγου χημικού Leo Baekeland, που τον ανέπτυξε το 1907.

Τη δεκαετία του 1960 με την χρήση ινών υάλου υψηλής αντοχής και ινών βορίου μεγάλης δυσκαμψίας, τα σύνθετα υλικά γνωρίζουν ραγδαία ανάπτυξη. Σημαντικό ρόλο σε αυτό παίζει και η έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μεγαλύτερη απόδοση και ταυτόχρονη μείωση του βάρους αεροσκαφών και διαστημοπλοίων.

Το 1964 γίνονται εμπορικά διαθέσιμες οι πρώτες ίνες άνθρακα, οι οποίες ακόμα και σήμερα χρησιμοποιούνται ευρέως ως ενίσχυση στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Σειρά έχουν το 1971 οι ίνες αραμιδίων (αρωματικών πολυαμιδίων), που μπορούν να βρεθούν στα σύγχρονα ελαστικά αυτοκινήτου, αλλά και στις αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές [14].

Σε πρώτο στάδιο η χρήση των σύνθετων υλικών περιορίστηκε στην αεροναυπηγική, τη χημική βιομηχανία και τη ναυπηγική, λόγω του κόστους και των περιορισμένων πειραματικών

αποτελεσμάτων. Σήμερα, όμως, η χρήση τους εξαπλώνεται και σε εφαρμογές πολιτικού μηχανικού, που απαιτούν χαμηλό ίδιο βάρος, υψηλές τάσεις και μη διαβρωτικές δομικές ικανότητες.

Στην Ελβετία το 1984, η επισκευή και η ενίσχυση των δομικών στοιχείων των κατασκευών επιτεύχθηκε με επικόλληση σε αυτά στρώσεων ινοπλισμένων πολυμερών από ανθρακονήματα.

Τα τελευταία τριάντα χρόνια χώρες με δυσμενείς κλιματολογικές συνθήκες ή/και υψηλή σεισμική επικινδυνότητα (όπως είναι, π.χ. οι Η.Π.Α, ο Καναδάς, η Ιαπωνία, η Αυστραλία, και η Ελβετία) επωφελούνται των βελτιωμένων ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών σε πολλές εφαρμογές.

Όσον αφορά την Ελλάδα, οι πρώτες εφαρμογές σύνθετων υλικών πραγματοποιούνται το 1990.

Ωστόσο, δεν γίνονται ευρέως διαδεδομένα παρά μόνο μετά το 1999 με τον σεισμό της Πάρνηθας. Οι κατασκευές αρχίζουν να ενισχύονται με μανδύες και ελάσματα ή περιτύλιξη των μελών τους με ταινίες από σύνθετα υλικά [15].

Τα τελευταία σαράντα χρόνια η τεχνολογία των ενισχυτικών ινών εξελίσσεται συνεχώς.

Χαρακτηριστική σύγκριση αποτελεί αυτή της ειδικής αντοχής (λόγος αντοχής προς πυκνότητα) και της ειδικής δυσκαμψίας (λόγος δυσκαμψίας προς πυκνότητα) ινών γυαλιού, άνθρακα, αραμιδίων και βορίου με την ειδική αντοχή και δυσκαμψία του αλουμινίου, καθώς οι πρώτες ξεπερνούν 10-14 φορές τις τελευταίες.

3.2 Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα σύνθετων υλικών

Το μικρό βάρος των σύνθετων υλικών, που μειώνει κατ' επέκταση το βάρος της κατασκευής, η υψηλή ακαμψία και αντοχή τους, η εξαιρετική αντίσταση σε διάβρωση, η καλή συμπεριφορά σε κόπωση, κρούση και διάδοση ρωγμών, η αντίστασή τους σε φθορά, η θερμική και ακουστική μόνωση που παρέχουν, η θερμική τους αγωγιμότητα, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής

τους και το μικρό κόστος συντήρησής τους τα καθιστούν ιδανικά δομικά υλικά για πληθώρα κατασκευαστικών εφαρμογών.

Κάθε σύνθετο υλικό παρασκευάζεται έτσι ώστε να παρέχει κάποιες από αυτές τις ιδιότητες ανάλογα με τις ανάγκες της κατασκευής. Είναι προφανές πως δεν μπορούν να συνυπάρξουν όλα αυτά τα πλεονεκτήματα, έτσι επιλέγεται κάθε φορά ο συνδυασμός υλικών που θα φέρει τα βασικά επιθυμητά αποτελέσματα.

Τα μειονεκτήματα που προκύπτουν, όπως τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανική φθορά, η ευαίσθητη συμπεριφορά σε δυσμενείς συνθήκες (θαλάσσιο περιβάλλον, υψηλή θερμοκρασία, χημικό περιβάλλον κλπ.) και το υψηλό αρχικό κόστος, αντιμετωπίζονται με τη συνεχή τεχνολογική ανάπτυξη, την παραγωγή βελτιωμένων ινών και ρητινών και την εξέλιξη των μεθόδων παραγωγής [16].



Εικόνα 7 Σύγκριση ιδιοτήτων σύνθετου υλικού με τις ιδιότητες της ενίσχυσης και της μήτρας(A. Παϊπέτης, Ν.Μ Μπάρκουλα, n.d)

3.3 Ταξινόμηση σύνθετων υλικών

Τα σύνθετα υλικά διαχωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες με βάση τη μορφή της ενίσχυσης [17]:

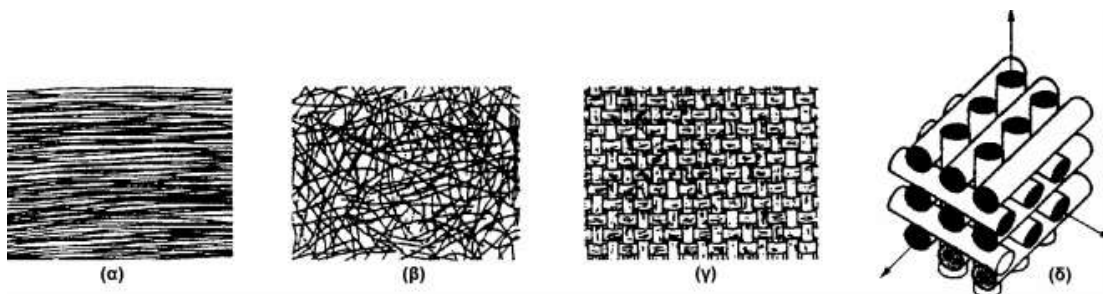
- Ινώδη σύνθετα (fibrous composites): η ενίσχυση έχει μορφή ινών εμποτισμένων στο υλικό της μήτρας
- Στρωματικά σύνθετα (laminated composites): με επάλληλες στρώσεις υλικών
- Κοκκώδη σύνθετα (particulate composites): με ενίσχυση σωματιδίων διασκορπισμένων στο υλικό της μήτρας

Τα ινώδη σύνθετα κατηγοριοποιούνται με βάση τον προσανατολισμό των ινών μέσα στη μήτρα σε:

- Μονοδιευθυντικά σύνθετα: όταν οι ίνες έχουν την ίδια κατεύθυνση
- Πολυδιευθυντικά σύνθετα: όταν οι ίνες έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Τα πολυδιευθυντικά σύνθετα χωρίζονται με τη σειρά τους σε:

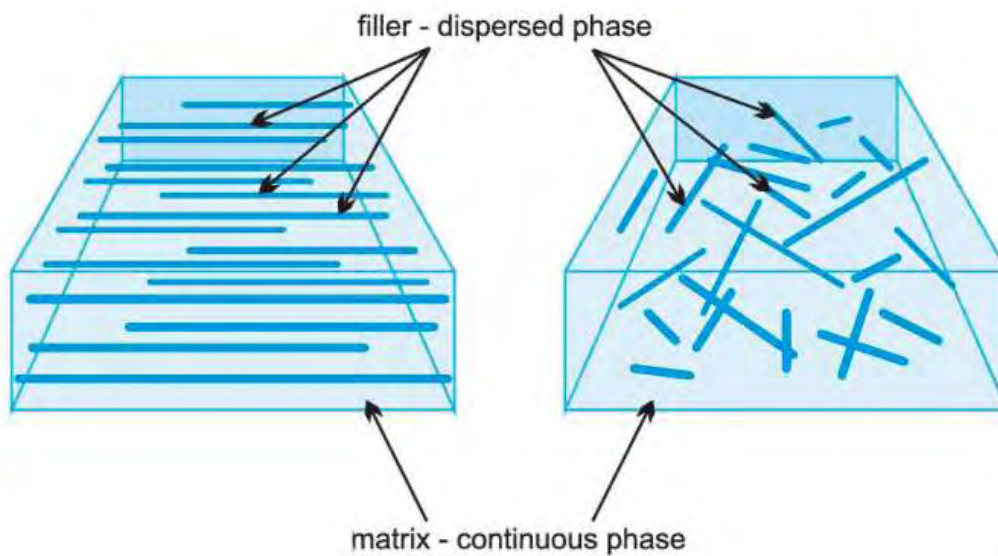
- Σύνθετα με ίνες τυχαίου προσανατολισμού
- Σύνθετα με ίνες σε πλέξη
- Σύνθετα με ίνες σε τρισσορθογώνια ύφανση



Εικόνα 8 Τύποι διάταξης των ινών (α) μονοδιευθυντικές ίνες, (β) ίνες τυχαίου προσανατολισμού, (γ) ίνες σε πλέξη, (δ) ίνες σε τρισσορθογώνια ύφανση (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

Ένα άλλο κριτήριο που συχνά χρησιμοποιείται για την κατηγοριοποίηση των ινωδών σύνθετων είναι το μήκος της ίνας ως προς τη διάμετρό της. Σύμφωνα με αυτό διακρίνονται στις εξής κατηγορίες:

- Συνεχείς ίνες (continuous fibers): για $l/d \geq 100$
- Ασυνεχείς ίνες (discontinuous fibers): για $l/d < 100$
- Νηματίδια ή τριχίτες (whiskers): πρόκειται για λεπτούς μονοκρυστάλλους κεραμικού υλικού με $d < 1\mu m$ και $l \cong 100\mu m$



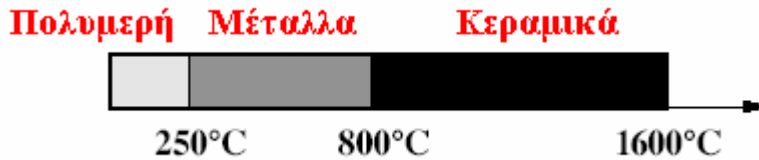
Εικόνα 9 Σύνθετα υλικά με συνεχείς και ασυνεχείς ίνες (Α. Παϊπέτης, Ν.Μ Μπάρκουλα, n.d)

Τα κοκκώδη σύνθετα χωρίζονται σε:

- Ισοτροπικά
- Κεραμομεταλλικά

Τα στρωματικά σύνθετα μπορούν να διαχωριστούν σε:

- Στρωματικά με πολυμερική μήτρα: με δύο υποκατηγορίες, των θερμοπλαστικών μητρών και των θερμοσκληρυνόμενων
- Στρωματικά με μεταλλική μήτρα



Εικόνα 10 Θερμοκρασιακά όρια χρήσης των υλικών (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

Διαδεδομένος διαχωρισμός των σύνθετων υλικών γίνεται επίσης με βάση το υλικό της μήτρας. Έτσι υπάρχουν [18]:

- Σύνθετα με πολυμερική ή οργανική μήτρα: Αποτελούν την πολυπληθέστερη κατηγορία των σύνθετων υλικών. Το πρώτο από αυτά ήταν ο βακελίτης και ακόμα και σήμερα αναπτύσσονται νέα σύνθετα με πολυμερές υλικό για μήτρα, λόγω της ευρείας τους εφαρμογής. Τα πιο συνηθισμένα σύγχρονα σύνθετα χρησιμοποιούν ως πολυμερική μήτρα εποξειδικές ρητίνες ή πολυεστέρα. Αυτή η κατηγορία διαιρείται περαιτέρω, σύμφωνα με τη φύση της μήτρας, σε θερμοπλαστικές και θερμοσκληρυνόμενες. Οι θερμοπλαστικές είναι κατ' ουσίαν από πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες, που διασυνδέονται με ασθενείς δυνάμεις van der Waals, οι οποίες λύνονται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Με αυτόν τον τρόπο το υλικό μετατρέπεται σε πιο μαλακό σε υψηλές θερμοκρασίες. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι οι μήτρες πολυαιθυλενίου και πολυστυρενίου. Όταν, όμως, υπάρχει απαίτηση καλύτερων μηχανικών ιδιοτήτων, επιλέγονται θερμοσκληρυνόμενες μήτρες. Το υλικό τους, τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή, σχηματίζονται από τριδιάστατα πλέγματα με πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Η συμπεριφορά τους στην αύξηση της θερμοκρασίας είναι διαφορετική από τα θερμοπλαστικά, διότι αυξάνονται οι διαμοριακοί δεσμοί, καθιστώντας το υλικό σκληρότερο και ψαθυρότερο. Συχνά χρησιμοποιούνται πολυεστερικές, εποξειδικές και φαινολικές ρητίνες. Αν και οι μήτρες αυτού του τύπου είναι διαδεδομένες σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης λόγω του χαμηλού κόστους, της υψηλής

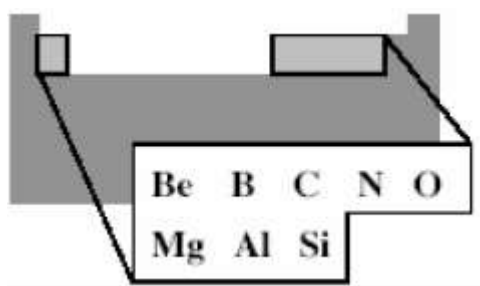
αντοχής και της ευκολίας παραγωγής τους, δεν αντέχουν σε υψηλές θερμοκρασίες (< 300°C).

- Σύνθετα με μεταλλική μήτρα: Με χρήση μετάλλων, όπως αλουμίνιο, νικέλιο και τιτάνιο, οι μεταλλικές μήτρες θεωρούνται απαραίτητες για εφαρμογές που συμπεριλαμβάνουν υψηλές θερμοκρασίες. Οι οργανικές μήτρες έχουν πολύ χαμηλή μέγιστη θερμοκρασία, ενώ οι ανθρακούχες οξειδώνονται σε θερμοκρασία μεγαλύτερη των 500°C. Παρουσιάζουν μια πληθώρα πλεονεκτημάτων, έναντι κυρίως των κεραμικών. Εμφανίζουν μεγαλύτερη ολκιμότητα και καλύτερες μηχανικές ιδιότητες, ενώ ταυτόχρονα βελτιώνουν την ακαμψία, το μέτρο ελαστικότητας και τις μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου σε καταπονήσεις ασκούμενες σε διαφορετική διεύθυνση από αυτή των ινών. Μειώνουν την ευαισθησία του σύνθετου στην παρουσία διαλυτών, και βελτιώνουν τη θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητά του για ειδικές εφαρμογές. Επιπλέον, τα τεμάχια του σύνθετου συνδέονται ευκολότερα με συγκόλληση ή κόλληση. Παρά τα θετικά της μεταλλικής μήτρας, υπάρχουν και μειονεκτήματα. Δημιουργούνται εύθραυστες μεσομεταλλικές ενώσεις στη διεπιφάνεια μετάλλου-ίνας, που οδηγούν σε μικρορωγμάτωση και θραύση των ινών. Έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα και αυξάνουν το ίδιο βάρος της συνολικής κατασκευής, ενώ υπάρχει και το ενδεχόμενο της διάλυσης των ινών μέσα στη μήτρα λόγω θερμότητας. Επίσης, το σύνθετο υλικό παρουσιάζει ασυνέχεια στην καμπύλη εφελκυσμού στο σημείο διαρροής της μήτρας. Τέλος, η διαδικασία παραγωγής του σύνθετου υλικού καθίσταται σημαντικά πιο πολύπλοκη.
- Σύνθετα με κεραμική μήτρα: Γενικότερα, τα κεραμικά υλικά χαρακτηρίζονται από τη σκληρή και δύστηκτη τους φύση, μεγάλη στιβαρότητα, μεγάλη αντοχή σε διάβρωση και χημική προσβολή. Στα σύνθετα υλικά με κεραμική μήτρα, η ενίσχυση αποβλέπει στην αύξηση της μηχανικής αντοχής, αλλά και της αντοχής σε θερμοκρασιακές μεταβολές του υλικού. Το κύριο μειονέκτημα που εμφανίζει μια κεραμική μήτρα είναι ότι δεν υπάρχει καλή συνάφεια ανάμεσα σε αυτήν και τις συνήθεις ενισχυτικές ίνες, εξαιτίας της μεγάλης

διαφοράς μεταξύ των συντελεστών γραμμικής διαστολής των υλικών αυτών. Σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιούνται μήτρες από άνθρακα. Επίσης, στην κατηγορία αυτή ανήκει και το τσιμέντο, με οπλισμό χάλυβα, ινών αμιάντου και γυαλιού, αλλά και ο γύψος με ενίσχυση ινών γυαλιού και αμιάντου.

3.4 Ίνες

Η επιλογή του υλικού των ενισχυτικών ινών γίνεται έτσι ώστε το σύνθετο υλικό που θα προκύψει, να έχει υψηλό μέτρο ελαστικότητας (E), υψηλή τάση θραύσης σε εφελκυσμό (UTS), μεγάλη ακαμψία (stiffness), χαμηλή δυσθραυστότητα (toughness) και μικρή πυκνότητα (ρ). Τα περισσότερα ενισχυτικά υλικά βρίσκονται στη 2^η και 3^η περίοδο του Περιοδικού Πίνακα.



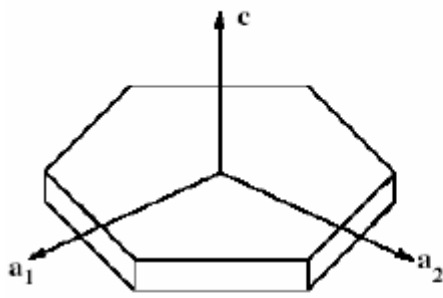
Εικόνα 11 Στοιχεία περιοδικού πίνακα που χρησιμοποιούνται για ενισχυτικά υλικά (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

Στα καινοτόμα σύνθετα υλικά οι ίνες άνθρακα, γυαλιού και αραμιδίων συνδυάζονται με πολυμερείς μήτρες, ενώ οι κεραμικές ίνες με κεραμικές και μεταλλικές μήτρες [18].

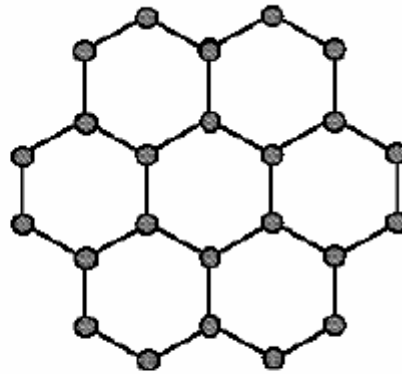
- Ίνες άνθρακα (carbon fibers) : Για την παραγωγή ανθρακονημάτων χρησιμοποιούνται ως πρώτες ύλες κυρίως δύο υλικά, το πολυμερές PAN (πολυακρυλονιτρίλιο) και η πίσσα από πετρέλαιο ή κάρβουνο. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά μια μεγάλη ποικιλία

υλικών, όπως ρητίνη φανικού οξέος, διάφορα πολυμερή, συνθετικό μετάξι και υδρογονάνθρακες. Η παραγωγή ινών γραφίτη από PAN πραγματοποιείται σε τρία στάδια. Αρχικά, οι ίνες PAN οξειδώνονται στον αέρα και σε χαμηλή θερμοκρασία (100-200°C), ενώ ταυτόχρονα εφαρμόζονται τάσεις ώστε να ευθυγραμμιστούν οι αλυσίδες του πολυμερούς. Ακολουθεί πυρόλυση υπό τάση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα και σε θερμοκρασία 1100-1500°C. Οι ίνες που παράγονται σε αυτό το στάδιο ονομάζονται ίνες άνθρακα υψηλής αντοχής (high strength carbon fibers) και παρουσιάζουν αντοχή έως και 3000 MPa. Τέλος, η θέρμανση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα συνεχίζεται σε υψηλές θερμοκρασίες (2500-3000°C). Στο στάδιο αυτό πραγματοποιείται γραφιτίαση, καθώς και ανακρυστάλλωση, που έχει ως αποτέλεσμα τον ισχυρό προσανατολισμό των κρυσταλλιτών. Οι παραγόμενες ίνες σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες άνθρακα υψηλού μέτρου ελαστικότητας (high module carbon fibers) με μέτρο ελαστικότητας περίπου 400 MPa και διάμετρο περίπου 10 μm. Οι ίνες γραφίτη αποτελούν την επικρατέστερη μορφή ενισχυτικών ινών, διότι προσφέρουν εξαιρετικά υψηλή αντοχή και μέτρο ελαστικότητας, παρασκευάζοντας υψηλών αποδόσεων σύνθετα υλικά πολυμερικής μήτρας. Έχουν την ικανότητα να διατηρούν την αντοχή τους σε υψηλές θερμοκρασίες και το μέτρο ελαστικότητάς τους σε εφελκυσμό, ενώ δεν επηρεάζονται από την υγρασία. Είναι ιδανικές σε περιπτώσεις που απαιτείται η βέλτιστη μηχανική συμπεριφορά σε συνδυασμό με τη μείωση του συνολικού βάρους, η διατήρηση της θερμικής διαστολής του υλικού σε χαμηλό επίπεδο ή η συμβατότητα δύο συνενωμένων διαφορετικών υλικών ως προς τη διαστολή τους. Η αιτία για αυτή την υπεροχή των ανθρακονημάτων είναι η φύση του άνθρακα ως στοιχείο και οι ενδοατομικοί δεσμοί που σχηματίζονται ανάμεσα στα άτομά του. Ο γραφίτης, συγκεκριμένα, σχηματίζεται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες, των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παραγωγής τους. Ο ισχυρός προσανατολισμός των κρυσταλλιτών παράλληλα στον διαμήκη άξονα των ινών άνθρακα οδηγεί σε υψηλή στιβαρότητα και αντοχή σε θραύση, καθώς επίσης

σε χαμηλό συντελεστή γραμμικής θερμικής διαστολής κατά τη διεύθυνση αυτή.



Κρύσταλλος γραφίτη

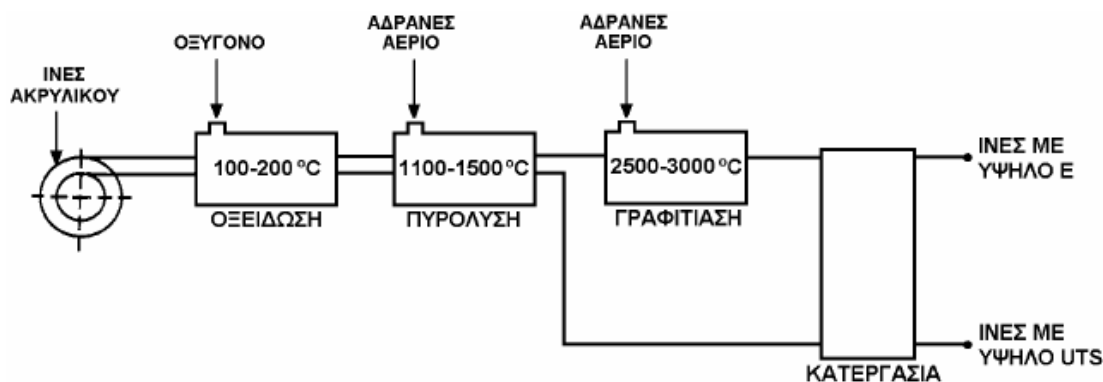


Διάταξη ατόμων C στον κρύσταλλο γραφίτη

Εικόνα 12 Δομή γραφίτη(<http://courseware.mech.ntua.gr>)



Εικόνα 13 Ίνες άνθρακα (<https://www.gurit.com/> [19])



Εικόνα 14 Παραγωγή ενισχυτικών ινών άνθρακα (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	180-230	350-420
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2500-3400	1900-2300
% περιεκτικότητα άνθρακα	95-98	99
Πυκνότητα (g/cm ³)	1,8	1,9
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	2000	2500

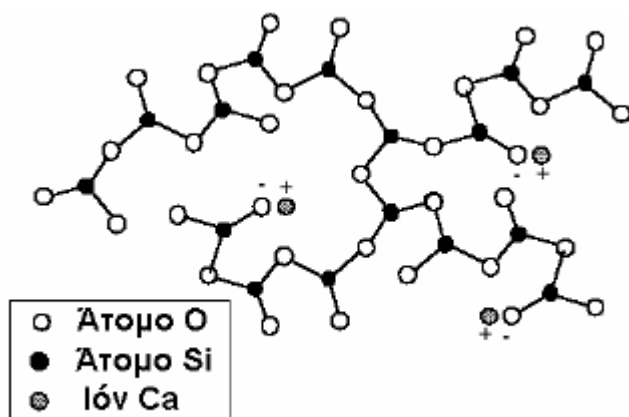
Πίνακας 3.1 Χαρακτηριστικά ινών άνθρακα (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

- Ίνες γυαλιού (glass fibers): Με βάση το πυρίτιο και οξείδια στοιχείων όπως το ασβέστιο, το βόριο, το νάτριο και το αλουμίνιο, τα υαλονήματα χρησιμοποιήθηκαν στα σύνθετα υλικά πρώτης γενιάς και η χρήση τους συνεχίζεται έως σήμερα σε σύνθετα πολυμερικής μήτρας. Σε αυτό συμβάλλει το γεγονός ότι θεωρούνται τα πιο οικονομικά ενισχυτικά υλικά. Οι ίνες γυαλιού χωρίζονται στις κατηγορίες, E, C και S, ανάλογα με τη σύστασή τους. Η ίνα που χρησιμοποιείται συνήθως είναι η E-glass (E= electrical για τον ηλεκτρισμό) λόγω των καλών ηλεκτρικών ιδιοτήτων, της αντοχής και της δυσκαμψίας της, αλλά και της καλής συμπεριφοράς σε αλλαγές στις καιρικές συνθήκες. Μειονέκτημά της αποτελεί η μέτρια αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια. Σε άλλες εφαρμογές προτιμάται η ίνα C-glass (C= corrosion για τη διάβρωση), επειδή παρουσιάζει καλύτερη αντίσταση προς τη χημική διάβρωση και τις μηχανικές ιδιότητες από την ίνα E-glass. Ωστόσο, αποτελεί πιο ακριβό τύπο υαλονήματος από το E-glass, αλλά και με λιγότερη αντοχή. Οι ίνες S-glass (S= stiffness

για την αντοχή) είναι κι αυτές ακριβότερες από τις E-glass, αλλά προσφέρουν υψηλότερη δυσκαμψία και θερμική αντοχή. Για μεγάλα ποσοστά πυριτίου SiO_2 (> 99.5%), οι ίνες παρουσιάζουν βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες, αλλά και μεγιστοποίηση της θερμοκρασίας χρήσης του υλικού. Γενικότερα, στα πλεονεκτήματα των υαλονημάτων συγκαταλέγεται το χαμηλό κόστος και η υψηλή αντοχή, ενώ στα μειονεκτήματα το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και η μικρή αντοχή τους έναντι φθοράς εκτριβής. Η παραγωγή των ινών γυαλιού πραγματοποιείται με εκβολή τήγματος γυαλιού διαμέσου μήτρας με διάτρητο πυθμένα. Στο αρχικό στάδιο της διαδικασίας η πρώτη ύλη τοποθετείται σε δεξαμενή, όπου τήκεται. Το τήγμα, που προκύπτει, τροφοδοτείται σε σειρά κυλινδρικών δοχείων με διάτρητο πυθμένα (διάμετρος οπών 1-2 mm) και ρέει μέσα από τις οπές λόγω βαρύτητας. Έτσι, παράγονται ίνες γυαλιού, οι οποίες συγκεντρώνονται σε ένα σύνολο και υπόκεινται σε διαδικασία μηχανικού τανυσμού μέχρι να αποκτήσουν την επιθυμητή διάμετρο (1-1.5 μm). Αφού ψεκαστούν ελαφρά με νερό για να ψυχθούν, οι ίνες διέρχονται από ιμάντα και εφαρμόζεται σε αυτές προστατευτικό λιπαντικό συνδετικό υλικό ή ειδικά κολλοειδή πρόσθετα, τα οποία δρουν ως προστατευτικές επικαλύψεις και βελτιώνουν την πρόσφυση ινών – μήτρας. Τέλος, οι ίνες περιτυλίσσονται ανά δέσμες, συνήθως των 204 νημάτων, γύρω από κυλινδρικό τύμπανο, το οποίο περιστρέφεται με υψηλή ταχύτητα. Πριν από οποιαδήποτε διαδικασία, οι δέσμες υαλονημάτων υποβάλλονται σε ξήρανση.



Εικόνα 15 Ίνες γυαλιού (Α. Παϊπέτης, Ν.Μ Μπάρκουλα, n.d)



Εικόνα 16 Δομή γυαλιού (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΤΥΠΟΣ			
	E	C	S	SiO ₂ καθαρή
Χημική σύσταση (%)				
SiO ₂	54	60	65	>99,5
Al ₂ O ₃	16	25	25	-
B ₂ O ₃	8	-	-	-
CaO	17	9	-	-
MgO	5	6	10	-
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	75	80	84	72
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2100-3400	2500-4400	2800-4800	3500-8800
Πυκνότητα (g/cm ³)	2,54	2,50	2,48	2,20
Θερμοκρασία τήξης (°C)	900-1200	1400-1600	1400-1600	1720
Μέγιστη θερμοκρασία γρήσης (°C)	550	650	650	750

Πίνακας 3.2 Χαρακτηριστικά ινών γυαλιού (<http://courseware.mech.ntua.gr>)



Εικόνα 17 Παραγωγή ενισχυτικών ινών γυαλιού(<http://courseware.mech.ntua.gr>)

- Ίνες πολυμερούς (polymer fibers) : Δημοφιλέστερες σε αυτή την κατηγορία είναι οι ίνες από Nylon, πολυαιθυλένιο και Kevlar. Οι ίνες Nylon και πολυεστέρα προκύπτουν με τη διαδικασία της φυγοκεντρικής περιδίνησης του τήγματος, σε αντίθεση με τις ακρυλικές και κυτταρινικές ίνες που είναι προϊόν φυγοκεντρικής περιδίνησης διαλύματος σε συνδυασμό με τεχνικές καθίζησης του ιζήματος. Η ευρεία χρήση των πολυμερικών ινών δεν οφείλεται τόσο στις μηχανικές ιδιότητές τους, αφού η αντοχή τους δεν ξεπερνά τα 10 MPa και το μέτρο ελαστικότητάς τους τα 1000 Pa, αλλά στο χαμηλό κόστος τους. Οι πρώτες υψηλής απόδοσης οργανικές ίνες αραμιδίων παρασκευάστηκαν τα τελευταία χρόνια από την DuPont υπό την εμπορική ονομασία Kevlar. Η υψηλή ελαστικότητα και αντοχή αυτών των ινών αποτελεί απόρροια της βελτιωμένης ευθυγράμμισης των μοριακών αλυσίδων. Χρησιμοποιούνται ως ενίσχυση σε εφαρμογές με απαιτήσεις χαμηλού βάρους, υψηλής αντοχής, στιβαρότητας και αντοχής σε κόπωση. Όμως, το κόστος τους αποτελεί έναν περιοριστικό παράγοντα, όντας

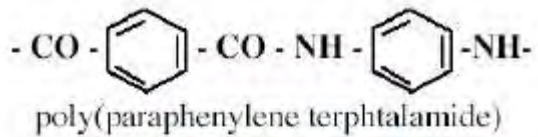
σχεδόν το διπλάσιο από αυτό των ανθρακονημάτων.



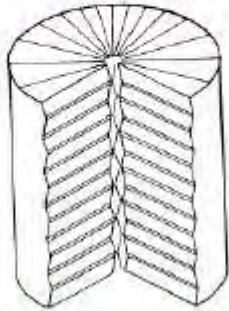
Εικόνα 18 Ίνες πολυμερούς (<https://www.gurit.com/>)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	Kevlar 29	Kevlar 49
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	60	130
Αντογή σε εφελκυσμό (MPa)	2700	3600
Επιμήκυνση θραύσης (%)	4.5	2
Πυκνότητα (g/cm ³)	1.45	1.45
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	200	200
Θερμοκρασία αστογίας (°C)	400	425

Πίνακας 3.3 Χαρακτηριστικές ιδιότητες των ινών Kevlar (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

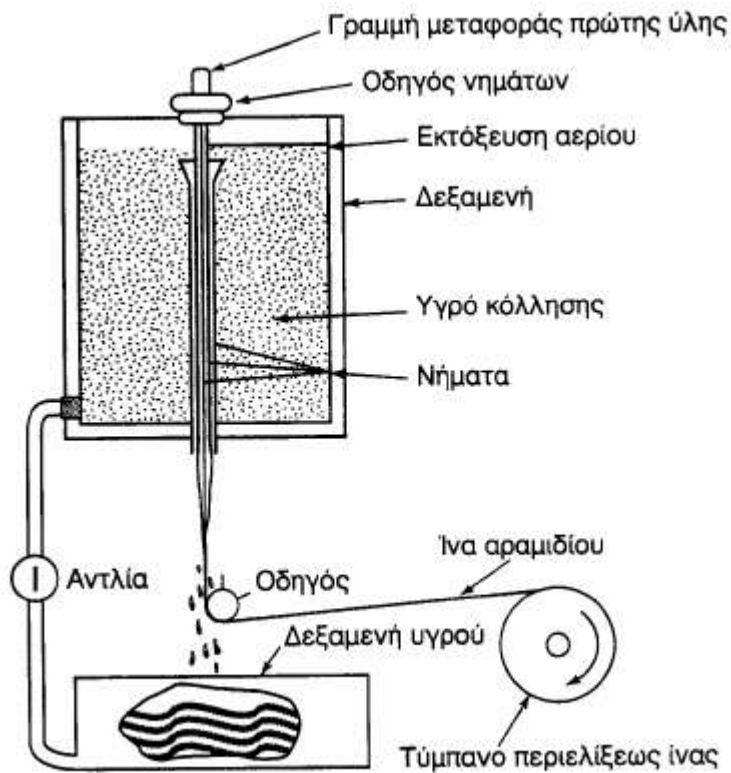


Τύπος αραμιδίου



Δομή ίνας Kevlar

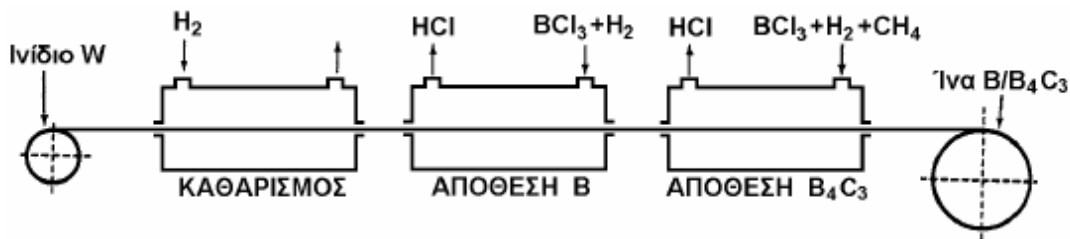
Εικόνα 19 Δομή ίνας Kevlar (<http://courseware.mech.ntua.gr>)



Εικόνα 20 Παραγωγή ενισχυτικών ινών αραμιδίων (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

- Μεταλλικές ίνες: Μέταλλα, όπως το βόριο (B), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W), εμφανίζουν υψηλή ειδική ακαμψία, δηλαδή ακαμψία σε σχέση με το ειδικό βάρος τους, γεγονός που τα καθιστά άριστα υλικά ενίσχυσης για σύνθετα υλικά. Ωστόσο, η διαδικασία παρασκευής μεταλλικών ινών έχει μεγάλο κόστος και γι' αυτό τον λόγο δεν είναι διαδεδομένες. Το βόριο έχει τις καλύτερες προδιαγραφές για υλικό ενισχυτικής ίνας, αλλά είναι εκ φύσεως συμπαγές και εύθραυστο, με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η παρασκευή ινών με μηχανικό τρόπο. Ως εκ τούτου, αναπτύχθηκαν δύο άλλες τεχνικές κατασκευής ινών βορίου: η αναγωγή από αλογονίδιο βορίου και η απόθεση με τεχνική CVD. Με την πρώτη μέθοδο, αλογονίδιο βορίου, συνήθως BCl_3 , ανάγεται από υδρογόνο σε κλειστό θάλαμο υψηλής θερμοκρασίας ($1100^\circ C$) και αποτίθεται σε πολύ λεπτό νήμα βολφραμίου, διαμέτρου 10-15 μm . Με αυτόν τον τρόπο παράγονται ίνες διαμέτρου μεταξύ 100÷200 μm με εξαιρετική δυσκαμψία και μηχανική αντοχή. Με τη δεύτερη τεχνική που αναφέρθηκε πραγματοποιείται χημική εναπόθεση ατμών (CVD) σε βόριο, που έχει αποτεθεί σε νήμα άνθρακα ή βολφραμίου. Πρόκειται για οικονομικότερη μέθοδο, όμως οι ίνες βορίου που προκύπτουν παρουσιάζουν μειωμένη μηχανική αντοχή. Γενικά, οι ίνες βορίου χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, με το μέτρο ελαστικότητάς τους να κυμαίνεται στις τιμές $E=300\div 420$ GPa και η μέγιστη αντοχή εφελκυσμού $UTS=3000\div 3700$ MPa. Οι ιδιότητές τους δεν επηρεάζονται από τη θερμοκρασία μέχρι τους $500^\circ C$. Σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες από αυτή, συνιστάται η χρήση προστατευτικού επιστρώματος καρβιδίου του πυριτίου (ίνες Borsic) ή νιτριδίου του βορίου, τα οποία συμβάλλουν στην αποτροπή της αντίδρασης του υλικού ενίσχυσης με αυτό της μήτρας. Με άλλα λόγια, σε υψηλές θερμοκρασίες και ειδικά όταν η μήτρα είναι μεταλλική, από τιτάνιο ή αλουμίνιο, ενοείται η διάχυση στη διεπιφάνεια ίνας-μήτρας και οι αντιδράσεις σε στερεά κατάσταση, οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν στον σχηματισμό εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων και κατ'

επέκταση αστοχία του σύνθετου υλικού.



Εικόνα 21 Παραγωγή ινών βορίου με αναγωγή αλογονιδίου του βορίου (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

- Κεραμικές ίνες: Αποτελούν εξαιρετική ενίσχυση για εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών και παρουσιάζουν μεγάλη αντοχή, στιβαρότητα και θερμική ευστάθεια. Οι πλέον διαδεδομένες κεραμικές ίνες είναι οι ίνες καρβιδίου του πυριτίου (SiC) και αλουμίνας (Al_2O_3). Άλλες επιλογές, που χρησιμοποιούνται σπανιότερα, αποτελούν οι ίνες από Si_3N_4 , BeO , B_4C και ZrO_2 . Το καρβίδιο του πυριτίου χρησιμοποιείται με τη μορφή ινών, που χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, αλλά και φυλλιδίων, με κατώτερες μηχανικές ιδιότητες των ινών. Οι ίνες του καρβιδίου του πυριτίου παράγονται με χημική εναπόθεση ατμών (CVD) χλωριούχου σιλανίου σε ίνες άνθρακα, από πολυμερικές ίνες (Nicalon), καθώς και από τριχίτες SiC από φλοιό ρυζιού. Οι αναφερθείσες μέθοδοι, όπως όλες οι μέθοδοι παραγωγής μεταλλικών ινών, είναι σχετικά δαπανηρές. Παρά το γεγονός ότι η αντοχή των ινών από καρβίδιο του πυριτίου διατηρείται σταθερή ως τους $1400^\circ C$, η μέγιστη επιτρεπόμενη θερμοκρασία χρήσης τους είναι $900^\circ C$, λόγω της σημαντικής δραστικότητάς τους σε μεγαλύτερες θερμοκρασίες. Από αλουμίνα προκύπτουν μονοκρυσταλλικές ενισχυτικές ίνες διαμέτρου $250 \mu m$ με εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες, τις οποίες διατηρούν έως τους $800^\circ C$, λόγω των ισχυρών χημικών δεσμών τους. Μειονέκτημά τους αποτελεί η ευαισθησία τους έναντι επιφανειακής φθοράς, η

οποία καταλήγει σε αστοχία.

Μέθοδος	CVD	Nicalon	Τριχίτες
Ιδιότητα			
Πυκνότητα, ρ (g/cm ³)	3.3	2.6	-
Αντοχή, UTS (MPa)	3500	2000	7000
Μέτρο ελαστικότητας, E (GPa)	430	180	480
Διάμετρος ίνας, d (μm)	140	15	<1

Πίνακας 3.4 Συγκριτικός πίνακας ιδιοτήτων ινών SiC (μέσες τιμές) (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

- Τριχίτες (whiskers): Πρόκειται για νηματικούς μονοκρυστάλλους, οι οποίοι προκύπτουν από αποσύνθεση άλατος μετάλλου σε αναγωγική ατμόσφαιρα υπό αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης. Η διάμετρός τους φτάνει το 1 μm και το μήκος τους μερικά εκατοστά, ενώ οι μηχανικές ιδιότητές τους είναι αυτές ενός τέλει κρυστάλλου. Η εξωτερική τους επιφάνεια είναι λεία και δεν εμφανίζουν ζώνες συγκέντρωσης τάσεων. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενοι τριχίτες παράγονται από αλουμίνα, γραφίτη, καρβίδιο του πυριτίου, βηρυλλία και νιτρίδιο του πυριτίου. Σε βιομηχανική κλίμακα δεν είναι εύκολο να παραχθούν τριχίτες, εξαιτίας της αδυναμίας πλήρους και ακριβούς ελέγχου των συνθηκών παρασκευής τους.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	SiC _{INA}	SiC _{ΤΡΙΧΙΤΗΣ}	Al ₂ O ₃ INA	Al ₂ O ₃ ΤΡΙΧΙΤΗΣ
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	480	840	500	755
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2300	21000	2000	19500
Πυκνότητα (g/cm ³)	3,2	3,2	4,0	4,0
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	900	1600	800	1300

Πίνακας 3.5 Συγκριτικός πίνακας ιδιοτήτων και τριχιτών από SiC και Al₂O₃ (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

- Ίνες φυσικών ορυκτών: Ορυκτά, που στη φυσική τους κατάσταση βρίσκονται σε ινώδη ή φυλλώδη μορφή, μπορούν να αποτελέσουν οικονομικό υλικό για ενισχυτικές ίνες, περιορισμένων, όμως, δυνατοτήτων. Ο λόγος κυρίως γίνεται για τον αμιάντο και τη μαρμαρυγία (mica). Ο αμιάντος σχηματίζει στοιχειώδη κρυσταλλικά ινίδια με διάμετρο περίπου 20 nm, τα οποία στη συνέχεια συνθέτουν τις ίνες αμιάντου διαμέτρου 10 μm και

μήκους αρκετών εκατοστών. Η αντοχή τους δεν αλλάζει μέχρι τους 500°C, όμως μετά από αυτή τη θερμοκρασία μειώνεται ραγδαία. Το μέτρο ελαστικότητας αυτών των ινών παίρνει τιμές της τάξης των 160 MPa, και η μηχανική αντοχή τους φτάνει τα 5500 GPa. Οι ίνες αμιάντου χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές, όπως το αμιαντοτσιμέντο και οι ασφαλτόπλακες, επειδή η τιμή τους είναι αρκετά προσιτή. Οι μαρμαρυγίες ανήκουν στην κατηγορία των φυλλοπυριτικών ορυκτών και έχουν μια πολυεπίπεδη ή φολιδωτή υφή. Σχηματίζουν, επομένως, τέλειο σχισμό και διαχωρίζονται με ευκολία από το πέτρωμα ως φυλλίδια, τα οποία χρησιμοποιούνται για ενίσχυση σύνθετου υλικού. Τα τέλεια φυλλίδια παρουσιάζουν τη μέγιστη εφελκυστική αντοχή του ύψους των 2500 MPa, σε αντίθεση με τα συνήθη φυλλίδια, που εξαιτίας των ατελειών στις άκρες τους, έχουν αντοχή περίπου 700÷900 MPa. Η τιμή του μέτρου ελαστικότητας των μαρμαρυγιών κυμαίνεται στα 220 GPa και η πυκνότητά τους στα 2,8 g/cm³.

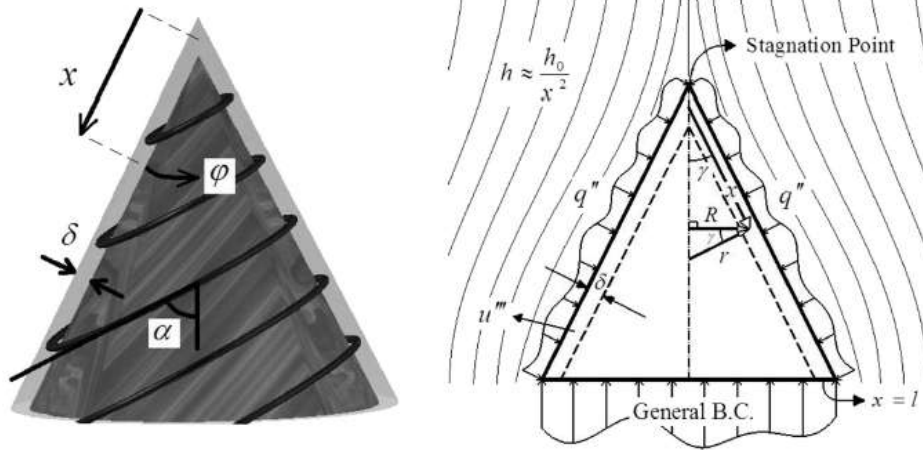
Ίνα	T _{max} (°C)
Spectra	150
Kevlar	250
Glass	800
SiC	1000
Alumina	1370
Carbon	2000*

* Παρουσία οξυγόνου: T_{max}=500 °C

Πίνακας 3.6 Σύγκριση θερμικής ευστάθειας ινών (<http://courseware.mech.ntua.gr>)

4 Μετάδοση θερμότητας σε ανισοτροπικό κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η διαδικασία κατάστροφης και αναλυτικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Πρόκειται για τη μελέτη της μετάδοσης θερμότητας με αγωγή σε ένα κωνικό κέλυφος, το οποίο περιτυλίσσεται από σύνθετο υλικό. Σε αυτό το σημείο σημειώνεται πως η εργασία έχει βασιστεί στο άρθρο *On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells* των M. Norouzi και H. Rahmani, που δημοσιεύτηκε στο *International Journal of Thermal Sciences* (2015). Οι δυσκολίες που προκύπτουν κατά τη διαδικασία της επίλυσης αποδίδονται κυρίως στην ανισοτροπική συμπεριφορά του υλικού, την ιδιαίτερη γεωμετρία του στερεού σώματος που μελετάται και την περίπλοκη μορφή της διαφορικής εξίσωσης. Επίσης, σημαντικό είναι να σημειωθεί πως η ακριβής αναλυτική λύση βρίσκεται για μόνιμη αγωγή θερμότητας. Το κωνικό κέλυφος θεωρείται ότι είναι πλήρης ορθός κυκλικός κώνος, ενώ οι ίνες του σύνθετου υλικού περιστρέφονται γύρω του υπό αυθαίρετη γωνία. Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 22, το σύστημα συντεταγμένων περιλαμβάνει τις ανεξάρτητες διευθύνσεις x και φ . Προκειμένου το πρόβλημα να καλύπτει μία πληθώρα συνθηκών, που μπορούν να προκύψουν όσον αφορά τις συνθήκες θερμότητας σε πραγματικές κατασκευές, εφαρμόζεται μια γενική γραμμική συνοριακή συνθήκη στη βάση του κωνικού κελύφους. Τέλος, η αναλυτική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται με χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών, όμως, λόγω της ύπαρξης μερικού διαφορικού δεύτερης τάξης της θερμοκρασίας T ως προς x και φ , η εξίσωση γράφεται σε κανονική μορφή μέσω ενός καινοτόμου μετασχηματισμού.



Εικόνα 22 Κατεύθυνση ιών, σύστημα συντεταγμένων και συνοριακές συνθήκες σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

4.1 Αγωγή θερμότητας σε σύνθετα υλικά

Όπως προαναφέρθηκε στη σελ. 16, η μετάδοση θερμότητας με αγωγή εκφράζεται από τον νόμο του Fourier:

$$\vec{Q}_n = -kA \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Σε ανισοτροπικά υλικά, στα οποία οι ιδιότητες διαφοροποιούνται σε κάθε κατεύθυνση, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας δεν είναι μία σταθερή τιμή, αλλά λαμβάνει τη μορφή τανυστή 2^{ης} τάξης. Η απλούστερη υποκατηγορία των ανισοτροπικών υλικών είναι τα ορθοτροπικά υλικά, τα οποία παρουσιάζουν διαφορετικές ιδιότητες κατά μήκος τριών αμοιβαία κάθετων αξόνων συμμετρίας, όπως οι άξονες ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Για ορθοτροπικά υλικά, ο νόμος του Fourier λαμβάνει τη μορφή μητρώων:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

όπου ως q συμβολίζεται η ροή θερμότητας, ως k_{ij} ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας και ως T η θερμοκρασία.

Στη μελέτη προβλημάτων μετάδοσης θερμότητας σε σύνθετα υλικά, συχνά χρησιμοποιούνται δύο συστήματα συντεταγμένων: ένα αξονικό ή αλλιώς τοπικό (x_1, x_2, x_3) και ένα εξωαξονικό ή καθολικό (x, y, z) [20]. Το καθολικό σύστημα ταυτίζεται με το ορθό σύστημα συντεταγμένων, σε αντίθεση με το αξονικό που καθορίζεται από την κατεύθυνση των ινών του σύνθετου υλικού. Πιο αναλυτικά, η συνιστώσα x_1 είναι παράλληλη στην διεύθυνση της ίνας, η x_2 κάθετη σε αυτή, άρα και στη συνιστώσα x_1 , και τέλος, η x_3 συνιστώσα κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν οι δύο προηγούμενες. Είναι προφανές πως από τη στιγμή που η ίνα αλλάζει συνεχώς διεύθυνση, μεταβάλλεται συγχρόνως και ο τοπικός άξονας x_1 . Ο τελευταίος λαμβάνεται, επομένως, ξεχωριστά κάθε φορά ανάλογα με το σημείο στο οποίο αναφερόμαστε. Η σύνδεση μεταξύ τοπικού και καθολικού συστήματος γίνεται μέσω της γωνίας απόκλισης α (βλ. Εικόνα 22). Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, πρόκειται για τη γωνία μεταξύ της εφαπτομένης στον κώνο κατά την κατεύθυνση x και της εφαπτομένης στην κατεύθυνση της ίνας. Συνεπώς, για τη μεταφορά από το τοπικό στο καθολικό σύστημα, εφαρμόζεται στροφή κατά τη γωνία απόκλισης.

Στη θερμοδυναμική, όταν λαμβάνουν χώρα μη αντιστρέψιμες διαδικασίες, η ροή μιας ποσότητας εκφράζεται συναρτήσει θερμοδυναμικών δυνάμεων και φαινομενολογικών συντελεστών. Ο Onsager έχει αποδείξει μέσω σχέσεων αμοιβαιότητας πως οι φαινομενολογικοί συντελεστές είναι συμμετρικά μητρώα [21]. Ένας τέτοιος συντελεστής είναι ο τανυστής της θερμικής αγωγιμότητας και συμπερασματικά, λόγω των σχέσεων αμοιβαιότητας Onsager, είναι συμμετρικός ($k_{ij}=k_{ji}$).

Επομένως, αντί για εννέα ανεξάρτητες συνιστώσες, έχει έξι. Στη συνέχεια, γίνεται διαγωνιοποίηση

αυτού του πίνακα, κατά την οποία χρησιμοποιείται το ορθογώνιο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , στο οποίο το υλικό παρουσιάζει ορθοτροπική συμπεριφορά [22].

Από μαθηματικής άποψης, αν υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός A σε μορφή μητρώου 3×3 , η συνθήκη για συμμετρία του τανυστή θερμικής αγωγιμότητας προς αυτόν, δηλ. το αναλλοίωτο των ιδιοτήτων του υλικού ως προς τη θερμική αγωγιμότητά του, είναι $k = A^T k A = A^{-1} k A$, όπου $A^{-1} = A^T$, λόγω της ορθογωνιότητας του μητρώου.

Επειδή το ορθοτροπικό υλικό έχει στις τρεις διαστάσεις τρία ορθογώνια επίπεδα συμμετρίας ως προς ανάκλαση, επιλέγεται ένα ορθοτροπικό σύστημα συντεταγμένων, έστω $(1,2,3)$, τέτοιο ώστε οι άξονες να συμπίπτουν με τις καθέτους στα τρία επίπεδα συμμετρίας. Έτσι, τα μητρώα μετασχηματισμού είναι:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν το μητρώο k είναι αναλλοίωτο ως προς την ανάκλαση σε δύο ορθογώνια επίπεδα, τότε είναι αναλλοίωτο και ως προς την ανάκλαση στο τρίτο επίπεδο.

Έστω A_3 η ανάκλαση ως προς τα επίπεδα 1 και 2. Συνεπάγεται:

$$k = A_3^T k A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & -k_{23} \\ -k_{31} & -k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow k_{13} = k_{23} = k_{31} = k_{32} = 0$$

Έστω A_2 η ανάκλαση ως προς τα επίπεδα 1 και 3:

$$k = A_2^T k A = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow k_{21} = k_{12} = 0$$

Άρα, $k = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$, δηλαδή ο τανυστής της θερμικής αγωγιμότητας σε ορθοτροπικά υλικά

είναι διαγώνιος.

Επίσης, γίνεται η παραδοχή πως η ίνα του σύνθετου υλικού έχει σχεδόν ίδια συμπεριφορά στους άξονες x_2, x_3 , που είναι κάθετοι στο μήκος της, και συνεπώς, οι συνιστώσες του τανυστή θερμικής αγωγιμότητας σε αυτές τις κατευθύνσεις έχουν την ίδια τιμή. Άρα, προκύπτει ο εξής τανυστής θερμικής αγωγιμότητας:

$$[k]_{\text{τοπικό}} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{\text{τοπικό}}, k_{ij} = 0, i \neq j \quad (4.1.2)$$

Διατυπώνοντας, ακολούθως, τον νόμο του Fourier στο τοπικό σύστημα του σύνθετου υλικού λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}_{\text{τοπικό}} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{\text{τοπικό}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix}_{\text{τοπικό}} \quad (4.1.3)$$

Ο αντίστοιχος πίνακας για το καθολικό σύστημα, $[\bar{k}]$, λαμβάνεται ύστερα από τη στροφή του τανυστή θερμικής αγωγιμότητας κατά γωνία α . Ο μετασχηματισμός που ακολουθείται είναι ο εξής:

$$[\bar{k}] = [R(\alpha)][k]_{\text{τοπικό}}[R(-\alpha)], \quad (4.1.4)$$

όπου $[R(\alpha)]$ είναι το μητρώο περιστροφής :

$$[R(\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_l & -n_l & 0 \\ n_l & m_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, m_l = \cos\alpha, n_l = \sin\alpha \quad (4.1.5)$$

και $[R(-\alpha)]$ το αντίστροφο μητρώο του $[R(\alpha)]$:

$$[R(a)]^{-1} = [R(-a)] = \begin{bmatrix} \cos(-a) & -\sin(-a) & 0 \\ \sin(-a) & \cos(-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_l & n_l & 0 \\ -n_l & m_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

Έπειτα από πράξεις, οι συνιστώσες του τανυστή $[\bar{k}]$ παίρνουν τις τιμές:

$$\bar{k}_{11} = m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \quad (4.1.7\alpha)$$

$$\bar{k}_{22} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \quad (4.1.7\beta)$$

$$\bar{k}_{33} = k_{22} \quad (4.1.7\gamma)$$

$$\bar{k}_{12} = \bar{k}_{21} = m_l n_l (k_{11} - k_{22}) \quad (4.1.7\delta)$$

$$\bar{k}_{13} = \bar{k}_{31} = 0 \quad (4.1.7\epsilon)$$

$$\bar{k}_{23} = \bar{k}_{32} = 0 \quad (4.1.7\sigma\tau)$$

4.2 Κατάστρωση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος

Το σύστημα συντεταγμένων στο παρόν πρόβλημα φαίνεται στην Εικόνα 22. Η πρώτη συνιστώσα x ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ευθείας που ενώνει την κορυφή του κώνου με τη βάση, ενώ η δεύτερη συνιστώσα φ με την κατεύθυνση της εφαπτομένης στην παράπλευρη επιφάνεια του κώνου, παράλληλα στο επίπεδο της βάσης. Επίσης, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ως γωνία α ορίζεται η γωνία απόκλισης μεταξύ της εφαπτομένης στην κατεύθυνση της ίνας και της εφαπτομένης στην κατεύθυνση x . Στο εξής θα αναφέρεται και ως γωνία της ίνας και οι τιμές που λαμβάνει είναι αυθαίρετες.

Ο νόμος του Fourier στις συντεταγμένες $x - \varphi$ για ορθοτροπικό υλικό εκφράζεται με την εξής μορφή:

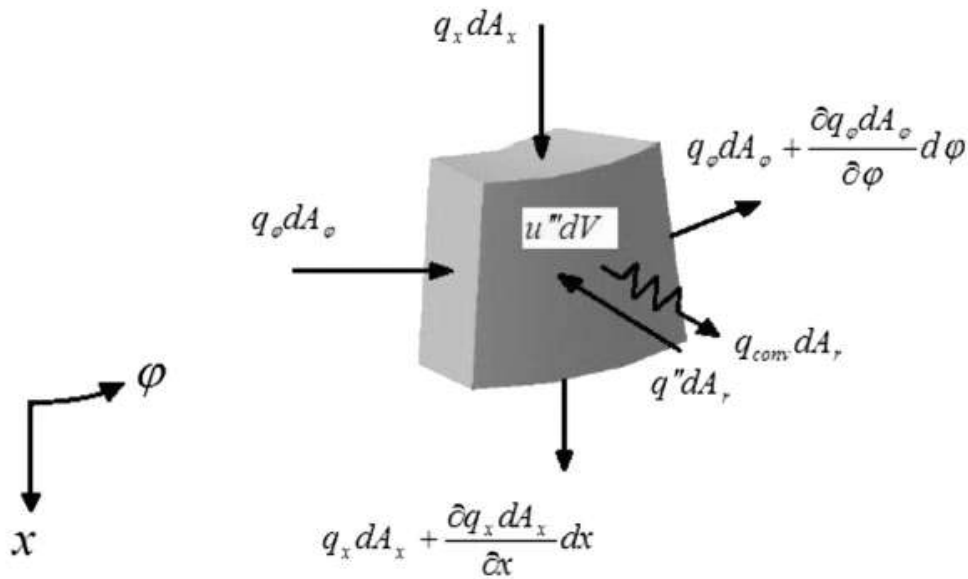
$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_\varphi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{12} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{R\partial\varphi} \end{Bmatrix} \quad (4.2.1)$$

$$\Rightarrow q_x = -\bar{k}_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{k}_{12} \frac{\partial T}{R\partial\varphi} \quad (4.2.2\alpha)$$

$$\text{και } q_\varphi = -\bar{k}_{12} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{k}_{22} \frac{\partial T}{R\partial\varphi} \quad (4.2.2\beta)$$

όπου q είναι η ροή της θερμότητας με συνιστώσες σε κάθε κατεύθυνση, \bar{k}_{ij} ο συμμετρικός τανυστής του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας στο καθολικό σύστημα, T η θερμοκρασία και R η ακτίνα του δακτυλίου της κατακόρυφης διατομής του κώνου (Εικόνα 22). Η ακτίνα R συνδέεται με τη συνιστώσα x με τη σχέση: $R = x \sin \gamma$, όπου γ είναι η μισή γωνία της κορυφής, όπως παρουσιάζεται και στην Εικόνα 22.

Το κωνικό κέλυφος θεωρείται αρκετά λεπτό, έτσι ώστε να αμεληθεί η κατανομή της θερμοκρασίας κατά την κατεύθυνση του πάχους του.



Εικόνα 23 Σκιαγράφημα των διάφορων τύπων ροής θερμότητας σε απειροστό στοιχείο του κωνικού κελύφους (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

Θεωρώντας στη συνέχεια ένα απειροστό στοιχείο του κωνικού κελύφους, το οποίο απεικονίζεται στην Εικόνα 23, εκφράζεται σε αυτό το ισοζύγιο θερμότητας για αγωγή, όπως μελετήθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, χωρίς να περιλαμβάνεται μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία:

$$\begin{bmatrix} \text{ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{στη} \\ \text{θέση } (x, y, z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ρυθμός αγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{στη θέση} \\ (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ρυθμός παραγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{μέσα στο στοιχείο} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ρυθμός μεταβολής} \\ \text{του ενεργειακού} \\ \text{περιεχομένου} \\ \text{του στοιχείου} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial q_x dA_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_\phi dA_\phi}{\partial \phi} d\phi - q_{\text{συναγ}} dA_r + u''' dV + q'' dA_r = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (4.2.3)$$

Αναλύοντας τη θερμότητα που υπάρχει στο απειροστό στοιχείο, εκτός από τη ροή θερμότητας με αγωγή, q , όπως αναλύθηκε προηγουμένως σε συνιστώσες, υπάρχει ένας συνδυασμός μίας γενικής εξωτερικής ροής θερμότητας q'' καθώς και συναγωγής $q_{\text{συναγ}}$ από το ίδιο το σώμα. Αυτή η υπόθεση είναι πολύ γενική και γίνεται προκειμένου να καλυφθεί μια πληθώρα θερμοκρασιακών συνθηκών που δυνατόν να ισχύουν σε πραγματικές εφαρμογές. Η παραγωγή θερμότητας μέσα στο στοιχείο παριστάνεται μέσω του ρυθμού της ανά μονάδα όγκου, u''' . Παρατηρείται πως οι ροές των q'' και

u''' δρουν όμοια με τρόπο που σχετίζεται με το μικρό πάχος του κελύφους. Συνεπώς, αυτοί οι όροι μπορούν να εκφραστούν μαζί ως εξής:

$$u''' dV + q'' dA_r = u''' \delta dA_r + q'' dA_r = (u''' \delta + q'') dA_r \quad (4.2.4)$$

Η μετάδοση θερμότητας με συναγωγή, όπως προαναφέρθηκε, συνοψίζεται στην εξίσωση (*):

$$q_{\text{συναγ}} = h(T - T_{\infty}) \quad (4.2.5)$$

Ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή, h , δεν έχει πάντα μια σταθερή τιμή και εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, οι οποίοι κυρίως αφορούν τη γεωμετρία του σώματος και την κίνηση του γειτονικού ρευστού. Στην παρούσα περίπτωση, σημαντικό ρόλο παίζει το κωνικό σχήμα του κελύφους και η θέση κάθε σημείου από την κορυφή του κώνου, η οποία θεωρείται ότι αποτελεί σημείο ανακοπής της ροής θερμότητας. Η υπόθεση αυτή γίνεται για λόγους διευκόλυνσης χειρισμού του προβλήματος, επειδή το σημείο της κορυφής παρουσιάζει ανωμαλία στη συμπεριφορά του.

Ειδικότερα για τη ροή θερμότητας με συναγωγή, η τιμή του συντελεστή συναγωγής στην κορυφή είναι πολύ υψηλή και θεωρητικά άπειρη ($h \rightarrow \infty$), αφού η θερμοκρασιακή βαθμίδα στην επιφάνεια στη θέση $x = 0$ είναι άπειρη. Αντιθέτως, όσο αυξάνεται η απόσταση από την κορυφή, η τιμή αυτή μειώνεται σημαντικά. Η σχέση που επιλέγεται για τον υπολογισμό του συντελεστή συναγωγής, προκειμένου να περιγραφεί η παραπάνω συμπεριφορά, είναι [23]:

$$h = \frac{h_0}{x^2}, \quad (4.2.6)$$

όπου $h_0 \in \mathbb{R}$.

Επίσης, στο δεξιό μέλος του ισοζυγίου εκφράζεται ο ρυθμός μεταβολής του ενεργειακού περιεχομένου του στοιχείου ως προς τον χρόνο. Όμως, λαμβάνοντας υπόψη την αρχική υπόθεση μόνιμης μετάδοσης θερμότητας, η παράγωγος ως προς τη μεταβλητή του χρόνου μηδενίζεται

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right).$$

Οι όγκοι και οι επιφάνειες που χρησιμοποιούνται ορίζονται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$dA_x = \delta R d\varphi, \text{ η απειροστή επιφάνεια του στοιχείου κάθετη στην κατεύθυνση } x \quad (4.2.7\alpha)$$

$$dA_\varphi = \delta dx, \text{ η απειροστή επιφάνεια του στοιχείου κάθετη στην κατεύθυνση } \varphi \quad (4.2.7\beta)$$

$$dA_r = dx R d\varphi, \text{ η απειροστή επιφάνεια κάθετη στην επιφάνεια του στοιχείου} \quad (4.2.7\gamma)$$

$$dV = \delta R dx d\varphi, \text{ ο απειροστός όγκος του στοιχείου,} \quad (4.2.7\delta)$$

όπου δ το πάχος του κωνικού κελύφους (βλ. Εικόνα 22).

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις στο ισοζύγιο θερμότητας, προκύπτει, μετά από πράξεις και απλοποιήσεις, η εξίσωση για την αγωγή θερμότητας στο κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό:

$$-\frac{\partial q_x dA_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_\varphi dA_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi - q_{\text{συνναγ}} dA_r + u''' dV + q'' dA_r = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial q_x \delta R d\varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial q_\varphi \delta dx}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{h_0}{x^2} (T - T_\infty) dx R d\varphi + u''' \delta R dx d\varphi + q'' dx R d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial q_x \delta x \sin \gamma d\varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial q_\varphi \delta dx}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{h_0}{x^2} (T - T_\infty) x \sin \gamma dx d\varphi + u''' \delta x \sin \gamma dx d\varphi +$$

$$q'' x \sin \gamma dx d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial q_x \delta x \sin \gamma d\varphi}{\partial x} dx - q_x \delta \sin \gamma d\varphi dx - \frac{\partial q_\varphi \delta dx}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{h_0}{x} (T - T_\infty) \sin \gamma dx d\varphi +$$

$$u''' \delta x \sin \gamma dx d\varphi + q'' x \sin \gamma dx d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \left(-\bar{k}_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{k}_{12} \frac{\partial T}{x \sin \gamma \partial \varphi} \right) \delta x \sin \gamma d\varphi}{\partial x} dx - \left(-\bar{k}_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{k}_{12} \frac{\partial T}{R \partial \varphi} \right) \delta \sin \gamma d\varphi dx -$$

$$\frac{\partial \left(-\bar{k}_{12} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{k}_{22} \frac{\partial T}{x \sin \gamma \partial \varphi} \right) \delta dx}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{h_0}{x} (T - T_\infty) \sin \gamma dx d\varphi + u''' \delta x \sin \gamma dx d\varphi + q'' x \sin \gamma dx d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial(-\bar{k}_{11}\frac{\partial T}{\partial x}-\bar{k}_{12}x\frac{\partial T}{\sin\gamma\partial\varphi})}{\partial x} + \bar{k}_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + \bar{k}_{12}\frac{\partial T}{x\sin\gamma\partial\varphi} - \frac{\partial(-\bar{k}_{12}\frac{\partial T}{\partial x}-\bar{k}_{22}x\frac{\partial T}{\sin\gamma\partial\varphi})}{\sin\gamma\partial\varphi} - \frac{h_0}{\delta x}(T - T_\infty) + u'''x + \frac{q''x}{\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11}x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial\varphi} - \frac{\bar{k}_{12}}{x\sin\gamma}\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \bar{k}_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + \bar{k}_{12}\frac{\partial T}{x\sin\gamma\partial\varphi} + \frac{\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial\varphi} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} - \frac{h_0}{\delta x}(T - T_\infty) + u'''x + \frac{q''x}{\delta} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11}x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial\varphi} + \bar{k}_{11}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{h_0}{\delta x}(T - T_\infty) = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta}x \quad (4.2.8)$$

Για την περαιτέρω απλοποίηση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, ορίζεται τροποποιημένη συνάρτηση της θερμοκρασίας ως εξής:

$$\theta(x, \varphi) = T(x, \varphi) - T_\infty \quad (4.2.9\alpha)$$

Αντικαθιστώντας, επομένως, τη συνάρτηση της θερμοκρασίας με

$$T(x, \varphi) = \theta(x, \varphi) + T_\infty \quad (4.2.9\beta)$$

η εξίσωση λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\Rightarrow \bar{k}_{11}x\frac{\partial^2(\theta(x,\varphi)-T_\infty)}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\frac{\partial^2(\theta(x,\varphi)-T_\infty)}{\partial\varphi^2} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\frac{\partial^2(\theta(x,\varphi)-T_\infty)}{\partial x\partial\varphi} + \bar{k}_{11}\frac{\partial(\theta(x,\varphi)-T_\infty)}{\partial x} - \frac{h_0}{\delta x}\theta(x, \varphi) = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta}x$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11}x\frac{\partial^2\theta(x,\varphi)}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\frac{\partial^2\theta(x,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\frac{\partial^2\theta(x,\varphi)}{\partial x\partial\varphi} + \bar{k}_{11}\frac{\partial\theta(x,\varphi)}{\partial x} - \frac{h_0}{\delta x}\theta(x, \varphi) = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta}x$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11}x\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\varphi} + \bar{k}_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{h_0}{\delta x}\theta = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta}x \quad (4.2.10)$$

Προηγουμένως ορίστηκε ο τανυστής θερμικής αγωγιμότητας στο καθολικό σύστημα με τη βοήθεια της γωνίας α , η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τη μεταβλητή x . Συνεπώς, οι συνιστώσες \bar{k}_{11} , \bar{k}_{12} και \bar{k}_{22} δεν είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής x . Άρα, η διαφορική εξίσωση έχει μη

σταθερούς συντελεστές και η επίλυσή της συμπεριλαμβάνει την εύρεση της ομογενούς λύσης και μιας μερικής λύσης. Η τελευταία εξαρτάται από το μη ομογενή όρο της εξίσωσης και τον ορισμό των συναρτήσεων u''' και q'' . Γίνεται η υπόθεση πως ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα όγκου u''' λαμβάνει μια σταθερή τιμή. Αντιθέτως, η εξωτερική ροή θερμότητας q'' , λόγω του γενικού ορισμού της, ορίζεται διαφορετικά σε κάθε εφαρμογή. Για το λόγο αυτό εξετάζεται μια γενική συνάρτηση :

$$q'' = \frac{\overline{q''}}{x^n}, n = 0,1,2 \quad (4.2.11)$$

Τέτοιας μορφής κατανομή της ροής θερμότητας, χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου η τιμή της είναι πολύ υψηλή στην κορυφή του κώνου και μειώνεται σημαντικά καθώς η απόσταση από την κορυφή αυξάνεται (όπως είναι π.χ. η περίπτωση σε αεροναυπηγικές εφαρμογές). Αυτή η συμπεριφορά είναι παρόμοια με την ροή θερμότητας με συναγωγή που προηγήθηκε. Ωστόσο, όταν ο εκθέτης της μεταβλητής x είναι ίσος με μηδέν ($n = 0$), η συνάρτηση q'' λαμβάνει μια σταθερή τιμή ($q'' = \overline{q''}$), γεγονός που μεταφράζεται ως ομοιόμορφη κατανομή θερμότητας σε όλη την επιφάνεια του κώνου.

Συχνά, σε εφαρμογές, εφαρμόζεται για τη ροή της θερμότητας q'' κατανομή της μορφής:

$$q'' = \begin{cases} \overline{q''} \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0, & \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Θεωρείται σε αυτή την περίπτωση πως η ροή της θερμότητας εξαρτάται από τη γωνία φ ημιτονικά. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφεται ροή θερμότητας, που συνήθως συμβαίνει με ακτινοβολία, στη μία μόνο πλευρά του κώνου.

Τέλος, στην επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης, είναι απαραίτητη η χρήση συνοριακών συνθηκών. Θεωρείται μία γενική γραμμική συνοριακή συνθήκη τύπου Robin στη βάση του κωνικού

κελύφους, που αποτελεί γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης της θερμοκρασίας $\theta(x, \varphi)$ και της παραγώγου της:

$$\sigma\theta(l, \varphi) + \omega \frac{\partial\theta(l, \varphi)}{\partial x} = f(\varphi), \quad (4.2.13)$$

όπου $f(\varphi)$ είναι αυθαίρετη συνάρτηση της γωνίας φ , οι συντελεστές σ και ω είναι αυθαίρετοι και σταθεροί, ίδιων διαστάσεων με τους συντελεστές της θερμικής συναγωγής και αγωγιμότητας αντίστοιχα, και l είναι η παράμετρος για τη x συνιστώσα στη βάση του κώνου.

4.3 Αναλυτική επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

Η εξίσωση (4.2.10) της μετάδοσης θερμότητας που προέκυψε χαρακτηρίζεται ως δεύτερης τάξης, γραμμική και μη ομογενής μερική διαφορική εξίσωση δύο μεταβλητών με μεταβλητούς συντελεστές. Η μέθοδος που θα ακολουθηθεί για την επίλυσή της είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών, εφόσον, όμως, προηγουμένως η εξίσωση πάρει κανονική μορφή.

4.3.1 Κανονική μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης

Η μερική διαφορική εξίσωση, που διαμορφώθηκε στην προηγούμενη ενότητα για την αγωγή θερμότητας σε κωνικό κέλυφος, δεν βρίσκεται στη ζητούμενη κανονική μορφή προκειμένου να βρεθεί η γενική λύση της με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Επομένως, εισάγονται νέες μεταβλητές $\xi = \xi(x, \varphi)$ και $\eta = \eta(x, \varphi)$ για τις ανάγκες του μετασχηματισμού της διαφορικής εξίσωσης.

Η σχέση τους με την τροποποιημένη συνάρτηση της θερμοκρασίας είναι: $\theta = \theta(\xi, \eta)$.

Για να γίνει η αντικατάσταση των μεταβλητών στην εξίσωση, υπολογίζονται τα μερικά διαφορικά:

$$\bullet \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.3.1\alpha)$$

$$\bullet \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \quad (4.3.1\beta)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (4.3.1\gamma)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \quad (4.3.1\delta)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \varphi} \quad (4.3.1\epsilon)$$

Στη συνέχεια, γίνεται η αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση (4.2.10) και έχουμε:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \bar{k}_{11} x \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ & 2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \varphi^2} \left. \right] + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \varphi} \right] + \bar{k}_{11} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] - \frac{h_0}{\delta} \theta = - \frac{u''' \delta + q''}{\delta} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \theta_{\xi\xi} \left[\bar{k}_{11} x \xi_x^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \xi_\varphi^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \xi_\varphi \xi_x \right] + \theta_{\xi\eta} \left[2\bar{k}_{11} x \eta_x \xi_x + 2 \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_\varphi \xi_\varphi + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} (\eta_\varphi \xi_x + \right. \\ & \left. \xi_\varphi \eta_x) \right] + \theta_{\eta\eta} \left[\bar{k}_{11} x \eta_x^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_\varphi^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \eta_\varphi \eta_x \right] + \theta_\xi \left[\bar{k}_{11} x \xi_{xx} + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \xi_{\varphi\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \xi_{x\varphi} + \bar{k}_{11} \xi_x \right] + \\ & \theta_\eta \left[\bar{k}_{11} x \eta_{xx} + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_{\varphi\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \eta_{x\varphi} + \bar{k}_{11} \eta_x \right] + \theta \left(- \frac{h_0}{\delta x(\xi, \eta)} \right) = - \frac{u''' \delta + q''}{\delta} x(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + B^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} + C^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + D^* \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + E^* \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + F^* \theta = G^* \quad (4.3.2)$$

Οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης στην κανονική μορφή είναι οι εξής:

$$A^* = \bar{k}_{11} x \xi_x^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \xi_\varphi^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \xi_\varphi \xi_x \quad (4.3.3\alpha)$$

$$B^* = 2\bar{k}_{11} x \eta_x \xi_x + 2 \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_\varphi \xi_\varphi + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} (\eta_\varphi \xi_x + \xi_\varphi \eta_x) \quad (4.3.3\beta)$$

$$C^* = \bar{k}_{11}x\eta_x^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_\varphi^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \eta_\varphi \eta_x \quad (4.3.3\gamma)$$

$$D^* = \bar{k}_{11}x\xi_{xx} + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \xi_{\varphi\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \xi_{x\varphi} + \bar{k}_{11}\xi_x \quad (4.3.3\delta)$$

$$E^* = \bar{k}_{11}x\eta_{xx} + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_{\varphi\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \eta_{x\varphi} + \bar{k}_{11}\eta_x \quad (4.3.3\epsilon)$$

$$F^* = -\frac{h_0}{\delta x(\xi, \eta)} \quad (4.3.3\sigma)$$

$$G^* = -\frac{u'''\delta + q''}{\delta} x(\xi, \eta) \quad (4.3.3\zeta)$$

Ωστόσο, για να εφαρμοστεί η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών, θα πρέπει να απαλειφθεί ο όρος

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta}$. Η παραδοχή που γίνεται για να ισχύει αυτό, είναι ο συντελεστής αυτής της μεικτής μερικής

παραγώγου B^* , να μηδενιστεί:

$$B^* = 2\bar{k}_{11}x\eta_x\xi_x + 2\frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_\varphi \xi_\varphi + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} (\eta_\varphi \xi_x + \xi_\varphi \eta_x) = 0 \quad (4.3.1.4)$$

Επομένως, πρέπει να οριστούν οι μεταβλητές ξ, η με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν αυτόν τον

περιορισμό αλλά και τη διαφορική εξίσωση χωρίς περαιτέρω πολυπλοκότητα. Αρχικά, γίνεται η

υπόθεση πως η μεταβλητή η ταυτίζεται με τη γωνιακή συνιστώσα φ : $\eta = \varphi$, με σκοπό τη

διευκόλυνση όσον αφορά τη συνοριακή συνθήκη που εφαρμόζεται σε αυτή την κατεύθυνση. Έτσι,

επειδή η μεταβλητή φ , άρα και η η , είναι ανεξάρτητη της x , η συνθήκη $B^* = 0$ απλοποιείται ως

εξής:

$$2\frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \eta_\varphi \xi_\varphi + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \eta_\varphi \xi_x = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \xi_\varphi + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \xi_x = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\bar{k}_{22}}{\bar{k}_{12} \sin \gamma} \xi_\varphi = x\xi_x \quad (4.3.1.5)$$

Λύνοντας την τελευταία σχέση, η οποία αποτελεί μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς $\xi(x, \varphi)$, με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, λαμβάνεται ο ορισμός της μεταβλητής ξ .

Θεωρείται ότι αυτή προκύπτει από δύο συναρτήσεις, που εξαρτώνται η καθεμία από τις μεταβλητές x και φ :

$$\xi(x, \varphi) = X(x)\Phi(\varphi) \quad (4.3.1.6)$$

Οι μερικές παράγωγοι για κάθε μεταβλητή είναι $\xi_\varphi = \Phi'X$ και $\xi_x = X'\Phi$. Θέτοντας $\beta =$

$$-\frac{\bar{k}_{12} \sin \gamma}{k_{22}}, \text{ ισχύει:}$$

$$\frac{1}{\beta} \xi_\varphi = x \xi_x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \Phi'X = xX'\Phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \frac{\Phi'}{\Phi} = x \frac{X'}{X} = \kappa \quad (4.3.1.7)$$

Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης εξαρτώνται το καθένα από μία σταθερά και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, εξισώνονται με μια σταθερά κ . Στη συνέχεια εξετάζεται κάθε μέλος ξεχωριστά:

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \kappa\beta$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\Phi}{\Phi} = \int \kappa\beta d\varphi$$

$$\Rightarrow \ln \Phi = \kappa\beta\varphi + c_1$$

$$\Rightarrow \Phi = c_1 e^{\kappa\beta\varphi} \quad (4.3.1.8)$$

$$\frac{X'}{X} = \kappa x$$

$$\Rightarrow \int \frac{dX}{X} = \int \kappa x dx$$

$$\Rightarrow \ln X = \ln x^\kappa + c_2$$

$$\Rightarrow X = c_2 x^\kappa \quad (4.3.1.9)$$

Οι συντελεστές c_1 , c_2 και κ είναι αυθαίρετες σταθερές, οπότε γίνεται η υποτίθεται χωρίς βλάβη της γενικότητας πως είναι ίσοι με τη μονάδα ($c_1 = c_2 = \kappa = 1$). Συνεπώς, ισχύει για τη μεταβλητή $\xi(x, \varphi)$:

$$\xi(x, \varphi) = x e^{\beta \varphi} \quad (4.3.1.10)$$

Συνοψίζοντας τις υποθέσεις που έχουν γίνει μέχρι στιγμής, οι συντελεστές της μερικής διαφορικής εξίσωσης στην κανονική της μορφή τροποποιούνται στην παρακάτω απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} A^* &= \bar{k}_{11} x \xi_x^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \xi_\varphi^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \xi_\varphi \xi_x \\ &= \bar{k}_{11} x (e^{\beta \varphi})^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} (\beta x e^{\beta \varphi})^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} e^{\beta \varphi} \beta x e^{\beta \varphi} \\ &= \bar{k}_{11} x e^{2\beta \varphi} + \frac{\bar{k}_{22}}{\sin^2 \gamma} x \beta^2 e^{2\beta \varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} e^{2\beta \varphi} \beta x \\ &= x e^{\beta \varphi} \left(\bar{k}_{11} e^{\beta \varphi} + \frac{\bar{k}_{22}}{\sin^2 \gamma} \beta^2 e^{\beta \varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \beta e^{\beta \varphi} \right) \\ &= \xi e^{\beta \varphi} \left(\bar{k}_{11} + \frac{\bar{k}_{22}}{\sin^2 \gamma} \beta^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin \gamma} \beta \right) \\ &= \xi e^{\beta \varphi} \left[\bar{k}_{11} + \bar{k}_{22} \left(-\frac{\bar{k}_{12}}{\bar{k}_{22}} \right)^2 + 2\bar{k}_{12} \left(-\frac{\bar{k}_{12}}{\bar{k}_{22}} \right) \right] \\ &= \xi e^{\beta \varphi} \left(\frac{\bar{k}_{11} \bar{k}_{22} - \bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.1.11a)$$

$$\begin{aligned}
C^* &= \bar{k}_{11}x\eta_x^2 + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\eta_\varphi^2 + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\eta_\varphi\eta_x \\
&= \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma} = \frac{\bar{k}_{22}}{\xi\sin^2\gamma}e^{\beta\varphi} = \frac{\bar{k}_{22}}{\xi\sin^2\gamma}e^{\beta\eta}
\end{aligned} \tag{4.3.1.11\beta}$$

$$\begin{aligned}
D^* &= \bar{k}_{11}x\xi_{xx} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\xi_{\varphi\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\xi_{x\varphi} + \bar{k}_{11}\xi_x \\
&= \frac{\bar{k}_{22}}{\sin^2\gamma}\beta^2e^{\beta\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\beta e^{\beta\varphi} + \bar{k}_{11}e^{\beta\varphi} \\
&= \bar{k}_{22}\left(-\frac{\bar{k}_{12}}{\bar{k}_{22}}\right)^2e^{\beta\eta} + 2\bar{k}_{12}\left(-\frac{\bar{k}_{12}}{\bar{k}_{22}}\right)e^{\beta\eta} + \bar{k}_{11}e^{\beta\eta} \\
&= e^{\beta\eta}\left(\frac{\bar{k}_{11}\bar{k}_{22}-\bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.1.11\gamma}$$

$$E^* = \bar{k}_{11}x\eta_{xx} + \frac{\bar{k}_{22}}{x\sin^2\gamma}\eta_{\varphi\varphi} + \frac{2\bar{k}_{12}}{\sin\gamma}\eta_{x\varphi} + \bar{k}_{11}\eta_x = 0 \tag{4.3.1.11\delta}$$

$$F^* = -\frac{h_0}{\delta x(\xi,\eta)} = -\frac{h_0}{\delta\xi}e^{\beta\eta} \tag{4.3.1.11\epsilon}$$

$$G^* = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta}x(\xi,\eta) = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta}\xi e^{-\beta\eta} \tag{4.3.1.11\sigma\tau}$$

Αντικαθιστώντας τους τροποποιημένους συντελεστές στη διαφορική εξίσωση, προκύπτει η εξής κανονική μορφή της:

$$\xi e^{\beta\eta} \left(\frac{\bar{k}_{11}\bar{k}_{22}-\bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{\xi \sin^2 \gamma} e^{\beta\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + e^{\beta\eta} \left(\frac{\bar{k}_{11}\bar{k}_{22}-\bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{h_0}{\delta \xi} e^{\beta\eta} \theta = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta} \xi e^{-\beta\eta}$$

$$\Rightarrow \xi \left(\frac{\bar{k}_{11}\bar{k}_{22}-\bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{\xi \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\bar{k}_{11}\bar{k}_{22}-\bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{h_0}{\delta \xi} \theta = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta} \xi e^{-2\beta\eta} \quad (4.3.1.12)$$

Για λόγους συντομίας ορίζονται οι συντελεστές

$$a = \frac{\bar{k}_{11}\bar{k}_{22}-\bar{k}_{12}^2}{\bar{k}_{22}} \quad (4.3.1.13\alpha)$$

$$b = \frac{\bar{k}_{22}}{\sin^2 \gamma} \quad (4.3.1.13\beta)$$

$$\text{και } c = -\frac{h_0}{\delta} \quad (4.3.1.13\gamma)$$

και η εξίσωση γίνεται :

$$a\xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{b}{\xi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{c}{\xi} \theta = -\frac{u'''\delta+q''}{\delta} \xi e^{-2\beta\eta} \quad (4.3.1.14)$$

4.3.2 Εύρεση ομογενούς λύσης με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών

Όπως προαναφέρθηκε, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης προϋποθέτει την εύρεση της ομογενούς λύσης, για την οποία θα εφαρμοστεί η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών, και μιας μερικής λύσης, η οποία θα προστεθεί στην ομογενή λύση.

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της διαφορικής είναι :

$$a\xi \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial \xi^2} + \frac{b}{\xi} \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \theta_h}{\partial \xi} + \frac{c}{\xi} \theta_h = 0 \quad (4.3.2.1)$$

Θεωρείται πως η συνάρτηση της θερμοκρασίας θ_h προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της συνάρτησης $F(\xi)$ επί τη συνάρτηση $G(\eta)$, οι οποίες εξαρτώνται από τις μεταβλητές ξ και η , αντίστοιχα:

$$\theta_h(\xi, \eta) = F(\xi)G(\eta) \quad (4.3.2.2)$$

Αρχικά υπολογίζονται τα μερικά διαφορικά που συμμετέχουν στη διαφορική εξίσωση:

$$\bullet \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial \xi} = F'G \quad (4.3.2.3\alpha)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial \xi^2} = F''G \quad (4.3.2.3\beta)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial \eta^2} = G''F \quad (4.3.2.3\gamma)$$

και στη συνέχεια γίνεται η αντικατάστασή τους σε αυτήν, καθώς και οι απαιτούμενες πράξεις :

$$a\xi F''G + \frac{b}{\xi} G''F + aF'G + \frac{c}{\xi} FG = 0$$

$$\Rightarrow a\xi^2 F''G + bG''F + a\xi F'G + cFG = 0$$

$$\Rightarrow G(a\xi^2 F'' + a\xi F' + cF) = -bG''F$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \xi^2 \frac{F''}{F} + \frac{a}{b} \xi \frac{F'}{F} + \frac{c}{b} = -\frac{G''}{G} = \lambda_n^2 \quad (4.3.2.4)$$

Διαχωρίζοντας τα μέλη της εξίσωσης έτσι ώστε να εξαρτάται το καθένα από μία μόνο σταθερά, ισχύει πως ο μόνος τρόπος για να είναι μεταξύ τους ίσα, είναι να εξισώνονται με μια σταθερά διαχωρισμού λ_n^2 . Η σταθερά διαχωρισμού δεν επιλέγεται τυχαία, αλλά για διευκόλυνση είναι το τετράγωνο της ιδιοτιμής της εξίσωσης μετάδοσης θερμότητας, η οποία θα χρησιμοποιηθεί αργότερα στην εφαρμογή της αρμονικής συνοριακής συνθήκης στην κατεύθυνση η . Αναλύοντας ξεχωριστά την εξίσωση κάθε μέλους με αυτήν τη σταθερά προκύπτουν δύο ανεξάρτητες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\bullet \Rightarrow \frac{a}{b} \xi^2 \frac{F''}{F} + \frac{a}{b} \xi \frac{F'}{F} + \frac{c}{b} = \lambda_n^2$$

$$\Rightarrow a\xi^2 F'' + a\xi F' + cF - \lambda_n^2 bF = 0$$

$$\Rightarrow \xi^2 F'' + \xi F' + \frac{c-\lambda_n^2 b}{a} F = 0 \quad (4.3.2.5\alpha)$$

$$\bullet -\frac{G''}{G} = \lambda_n^2$$

$$\Rightarrow G'' + \lambda_n^2 G = 0 \quad (4.3.2.5\beta)$$

Για την επίλυση της πρώτης συνήθους διαφορικής εξίσωσης, η οποία ανήκει στην κατηγορία των εξισώσεων Euler, είναι αναγκαίο αυτή να γραφεί, αρχικά, στην κανονική της μορφή:

$$F'' + \frac{1}{\xi} F' + \frac{c-\lambda_n^2 b}{a} \frac{1}{\xi} F = 0 \quad (4.3.2.6)$$

Παρατηρείται σε αυτό το σημείο ότι το $\xi = 0$ αποτελεί το μοναδικό ανώμαλο σημείο της εξίσωσης, διότι έγινε η διαίρεση με αυτό. Στη συνέχεια υποτίθεται πως η μεταβλητή ξ παίρνει θετικές τιμές, οπότε είναι δυνατό να εισαχθεί μια νέα ανεξάρτητη μεταβλητή t , για την οποία θα ισχύει:

$$\xi = e^t \quad (4.3.2.7\alpha)$$

$$\text{ή ισοδύναμα } t = \ln \xi \quad (4.3.2.7\beta)$$

$$\text{και } \frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{\xi} = e^{-t} \quad (4.3.2.8)$$

Έστω συνάρτηση

$$g(t) = F(\xi) = F(e^t) \quad (4.3.2.9)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας για την παραγωγήιση θα ισχύει:

$$\bullet \frac{dF}{d\xi} = \frac{dg}{dt} \frac{dt}{d\xi} = e^{-t} \frac{dg}{dt} \quad (4.3.2.10\alpha)$$

$$\bullet \frac{d^2F}{d\xi^2} = \frac{d\left(e^{-t} \frac{dg}{dt}\right)}{dt} \frac{dt}{d\xi} = \left(-e^{-t} \frac{dg}{dt} + e^{-t} \frac{d^2g}{dt^2}\right) e^{-t} = -e^{-2t} \frac{dg}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2g}{dt^2} = e^{-2t} \left(\frac{d^2g}{dt^2} - \frac{dg}{dt}\right) = e^{-2t} \left(\frac{d}{dt} - 1\right) \frac{dg}{dt} \quad (4.3.2.10\beta)$$

Αντικαθιστώντας τα διαφορικά στην εξίσωση, έχουμε:

$$\Rightarrow e^{-2t} \left(\frac{d}{dt} - 1\right) \frac{dg}{dt} + e^{-t} e^{-t} \frac{dg}{dt} + \frac{c - \lambda_n^2 b}{a} e^{-2t} g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2g}{dt^2} - \frac{dg}{dt} + \frac{dg}{dt} + \frac{c - \lambda_n^2 b}{a} g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2g}{dt^2} + \frac{c - \lambda_n^2 b}{a} g = 0 \quad (4.3.2.11)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ομογενής, γραμμική, συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Επομένως, πρέπει να υπολογιστούν οι ρίζες, λ , της χαρακτηριστικής εξίσωσής της, η οποία προκύπτει κάνοντας την υπόθεση ότι $g = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 + \frac{c - \lambda_n^2 b}{a} = 0 \quad (4.3.2.12)$$

$$\text{Ισχύει ότι: } \lambda = \pm \sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}} \quad (4.3.2.13)$$

με τον περιορισμό η υπέρριζη ποσότητα να είναι θετική. Σε κάθε ρίζα αντιστοιχεί μία λύση της συνάρτησης g και η γενική λύση της g λαμβάνεται από τον γραμμικό συνδυασμό τους:

$$g = c_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}} \ln \xi} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}} \ln \xi} = c_1 e^{\ln \xi \sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} + c_2 e^{\ln \xi^{-\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}}} \quad (4.3.2.14)$$

Ισχύει ότι $g(t) = F(\xi)$, άρα προκύπτει με αντικατάσταση η μορφή της συνάρτησης $F(\xi)$:

$$F = C \xi^{\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} + D \xi^{-\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} = C (x e^{\beta \varphi})^{\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} + D (x e^{\beta \varphi})^{-\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}}$$

$$= Cx^{\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} e^{+\beta\varphi\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} + Dx^{-\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} e^{-\beta\varphi\sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}} \quad (4.3.2.15)$$

$$\text{Έστω } \alpha_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}}. \quad (4.3.2.16)$$

Τότε έχουμε:

$$F = Cx^{\alpha_\lambda} e^{\alpha_\lambda \beta \varphi} + Dx^{-\alpha_\lambda} e^{-\alpha_\lambda \beta \varphi}, \quad (4.3.2.17)$$

όπου C, D σταθεροί συντελεστές.

Λαμβάνοντας υπόψη το κωνικό σχήμα του κελύφους που μελετάται, παρατηρείται πως η κορυφή του κώνου αποτελεί ιδιαίζουσα περίπτωση για τη γενική μορφή της συνάρτησης F . Αυτό συμβαίνει επειδή στο σημείο $x = 0$, ο όρος $x^{-\alpha_\lambda}$ δεν γίνεται να υπολογιστεί. Επομένως, προκειμένου να αποφευχθεί η ανάλυση της περίπλοκης συμπεριφοράς στην κορυφή, θεωρείται πως ο συντελεστής D μηδενίζεται και, εντέλει, η μορφή της συνάρτησης F έχει ως εξής:

$$F = Cx^{\alpha_\lambda} e^{\alpha_\lambda \beta \varphi} \quad (4.3.2.18)$$

Η δεύτερη συνήθης διαφορική εξίσωση λύνεται απλούστερα με τη χρήση του χαρακτηριστικού πολωνύμου της, θέτοντας προηγουμένως $G(\eta) = e^{\rho\eta}$. Επομένως,

$$G'' + \lambda_n^2 G = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 e^{\rho\eta} + \lambda_n^2 e^{\rho\eta} = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 + \lambda_n^2 = 0 \quad (4.3.2.19)$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου είναι τώρα:

$$\rho = \pm i\lambda_n \quad (4.3.2.20)$$

Η γενική μορφή της συνάρτησης G θα αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των λύσεων που αντιστοιχούν στις ρίζες ρ , δηλαδή

$$G(\eta) = c_1 e^{i\lambda_n \eta} + c_2 e^{-i\lambda_n \eta} \quad (4.3.2.21)$$

Με χρήση των εξισώσεων Euler και της ιδιότητας $\eta = \varphi$, η γενική λύση τροποποιείται στη μορφή:

$$G(\eta) = a_n \cos \lambda_n \varphi + b_n \sin \lambda_n \varphi \quad (4.3.2.22)$$

Επειδή η εύρεση της γενικής λύσης και ο υπολογισμός των συντελεστών γίνονται συναρτήσει των ιδιοτιμών λ_n , οι συντελεστές a_n, b_n θα αποτελούν ακολουθία του n και θα λαμβάνουν διαφορετική τιμή για κάθε τιμή του.

Τελικά, επιστρέφοντας στη συνάρτηση της θερμοκρασίας ως γινόμενο των F και G , προκύπτει η ομογενής λύση :

$$\theta_h(\xi, \eta) = F(\xi)G(\eta)$$

$$\Rightarrow \theta_h = C x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} (a_n \cos \lambda_n \varphi + b_n \sin \lambda_n \varphi)$$

$$= C a_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + C b_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi$$

$$= A_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + B_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi \quad (4.3.2.23)$$

Εφόσον οι συντελεστές είναι ακολουθίες του n , η ομογενής λύση μπορεί να πάρει μορφή δυναμοσειράς:

$$\theta_h(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + B_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi) \quad (4.3.2.24)$$

Οι ιδιοτιμές λ_n λαμβάνονται εφαρμόζοντας αρμονικές συνοριακές συνθήκες στη δεύτερη συνήθη διαφορική εξίσωση που προέκυψε από τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών: $G'' + \lambda_n^2 G = 0$. Για τον σκοπό αυτό, διαχωρίζεται το τμήμα της ομογενούς λύσης που εξαρτάται από τη μεταβλητή φ :

$$U(\varphi) = A_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + B_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi \quad (4.3.2.25)$$

Οι αρμονικές συνοριακές συνθήκες εξασφαλίζουν τη συνέχεια στην κατανομή της θερμοκρασίας στη διεύθυνση της γωνίας για τις γωνίες $\varphi = 0$ και $\varphi = 2\pi$, όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$U(0) = U(2\pi) \quad (4.3.2.26\alpha)$$

$$U'(0) = U'(2\pi) \quad (4.3.2.26\beta)$$

Μετά από πράξεις, οι συνοριακές συνθήκες οδηγούν στο ομογενές αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές A_n, B_n :

$$\begin{cases} U(0) = U(2\pi) \\ U'(0) = U'(2\pi) \end{cases} = \begin{cases} A_n(e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - 1) + B_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n = 0 \\ A_n(\alpha\lambda\beta e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - \lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n - \alpha\lambda\beta) + B_n(\alpha\lambda\beta e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n + \lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - \lambda_n) = 0 \end{cases} \quad (4.3.2.27)$$

Προϋπόθεση για να υπάρχουν μη-τετριμμένες λύσεις για τα A_n, B_n , αποτελεί ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του συστήματος:

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - 1 & e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n \\ \alpha\lambda\beta e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - \lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n - \alpha\lambda\beta & \alpha\lambda\beta e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n + \lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - \lambda_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - 1)(\alpha\lambda\beta e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n + \lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - \lambda_n) - (e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n)(\alpha\lambda\beta e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n - \lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \sin 2\pi\lambda_n - \alpha\lambda\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n e^{4\pi\alpha\lambda\beta} (\cos^2 2\pi\lambda_n + \sin^2 2\pi\lambda_n) - 2\lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n + \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n e^{4\pi\alpha\lambda\beta} - 2\lambda_n e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n + \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow 2e^{2\pi\alpha\lambda\beta} \cos 2\pi\lambda_n = e^{4\pi\alpha\lambda\beta} + 1$$

$$\Rightarrow \cos 2\pi\lambda_n = \frac{e^{2\pi\alpha\lambda\beta} + e^{-2\pi\alpha\lambda\beta}}{2} = \cosh(2\pi\alpha\lambda\beta)$$

(4.3.2.28)

Αξιοποιώντας την ιδιότητα: $\cosh(2\pi\alpha\lambda\beta) = \cos 2\pi\lambda_n$, η εξίσωση λύνεται ως εξής και προκύπτουν οι ιδιοτιμές:

$$2\pi\lambda_n = \pm i2\pi\alpha\lambda\beta + 2\pi n$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \pm i\alpha\lambda\beta + n \quad (4.3.2.29)$$

Αντικαθιστώντας την ποσότητα $\alpha\lambda$ όπως έχει οριστεί εξαρχής, λαμβάνουμε

$$\lambda_n = \pm i\beta \sqrt{\frac{\lambda_n^2 b - c}{a}} + n$$

$$\Rightarrow \lambda_n^2(a + \beta^2 b) + \lambda_n(-2an) + (an^2 - \beta^2 c) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{a \pm iP_n}{a + \beta^2 b} n, \quad (4.3.2.30)$$

όπου έχει οριστεί για συντομία η παράμετρος

$$P_n = \frac{\beta}{n} \sqrt{ban^2 - (a + \beta^2 b)c} \quad (4.3.2.31)$$

4.4 Εύρεση μιας μερικής λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης

Η μερική λύση, όπως προαναφέρθηκε, εξαρτάται από τον μη ομογενή όρο της διαφορικής εξίσωσης, καθώς και από τον ορισμό της εξωτερικής ροής θερμότητας q'' και του ρυθμού παραγωγής θερμότητας u''' . Έχει γίνει η υπόθεση πως ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας u''' έχει σταθερή τιμή,

ενώ η ροή θερμότητας q'' ορίζεται με τη συνάρτηση (4.2.11) για $n = 0,1,2$. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η εύρεση της μερικής λύσης με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών στην περίπτωση $q'' = \bar{q}''$ με $n = 0$.

Αρχικά, τροποποιείται η εξίσωση (4.3.1.12) αντικαθιστώντας τη μεταβλητή ξ με τον ορισμό της $\xi(x, \varphi) = xe^{\beta\varphi}$:

$$\begin{aligned}
 a\xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{b}{\xi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{c}{\xi} \theta &= -\frac{u'''\delta + \bar{q}''}{\delta} \xi e^{-2\beta\eta} \\
 \Rightarrow axe^{\beta\varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{b}{xe^{\beta\varphi}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{c}{xe^{\beta\varphi}} \theta &= -\frac{u'''\delta + \bar{q}''}{\delta} xe^{\beta\varphi} e^{-2\beta\eta} \\
 \Rightarrow axe^{\beta\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{b}{xe^{\beta\eta}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{c}{xe^{\beta\eta}} \theta &= -\frac{u'''\delta + \bar{q}''}{\delta} xe^{\beta\eta} e^{-2\beta\eta} \\
 \Rightarrow axe^{\beta\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{b}{x} e^{-\beta\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{c}{x} e^{-\beta\eta} \theta &= -\frac{u'''\delta + \bar{q}''}{\delta} xe^{-\beta\eta} \\
 \Rightarrow ax^2 e^{\beta\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + be^{-\beta\eta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + ax \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + ce^{-\beta\eta} \theta &= -\frac{u'''\delta + \bar{q}''}{\delta} x^2 e^{-\beta\eta} \tag{4.4.1}
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, γίνεται η υπόθεση πως η μερική λύση που αναζητείται είναι της μορφής:

$$\theta_p = Lx^2, \tag{4.4.2}$$

όπου ο συντελεστής L θα βρεθεί μέσω της αντικατάστασης της μερικής λύσης στην εξίσωση.

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η αντικατάσταση, υπολογίζεται η μερική λύση συναρτήσει της μεταβλητής ξ , καθώς και οι μερικές παράγωγοί της που συμμετέχουν στην εξίσωση:

- $\theta_p = L\xi^2 e^{2\beta\eta} \tag{4.4.3\alpha}$

- $\frac{\partial \theta_p}{\partial \xi} = 2L\xi e^{-2\beta\eta} \tag{4.4.3\beta}$

- $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = 2Le^{-2\beta\eta}$ (4.4.3γ)

- $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 4L\xi^2\beta^2e^{-2\beta\eta}$ (4.4.3δ)

Επομένως, η εξίσωση λαμβάνει την παρακάτω μορφή και προκύπτει ο συντελεστής L :

$$ax^2e^{\beta\eta}2Le^{-2\beta\eta} + be^{-\beta\eta}4L\xi^2\beta^2e^{-2\beta\eta} + ax2L\xi e^{-2\beta\eta} + ce^{-\beta\eta}L\xi^2e^{2\beta\eta} = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta}x^2e^{-\beta\eta}$$

$$\Rightarrow ax^2e^{\beta\eta}2Le^{-2\beta\eta} + be^{-\beta\eta}4L(xe^{\beta\eta})^2\beta^2e^{-2\beta\eta} + ax2Lxe^{\beta\eta}e^{-2\beta\eta} + ce^{-\beta\eta}L(xe^{\beta\eta})^2e^{2\beta\eta} = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta}x^2e^{-\beta\eta}$$

$$\Rightarrow 2Lax^2e^{-\beta\eta} + 4Lb\beta^2x^2e^{-\beta\eta} + 2Lax^2e^{-\beta\eta} + Lcx^2e^{-\beta\eta} = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta}x^2e^{-\beta\eta}$$

$$\Rightarrow 2Lax^2 + 4Lb\beta^2x^2 + 2Lax^2 + Lcx^2 = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta}x^2$$

$$\Rightarrow 2La + 4Lb\beta^2 + 2La + Lc = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta}$$

$$\Rightarrow L(4a + 4b\beta^2 + c) = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta}$$

$$\Rightarrow L = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta(4a+4b\beta^2+c)} \quad (4.4.4)$$

Έτσι, η μερική λύση που προκύπτει για σταθερή ροή θερμότητας $q'' = \bar{q}''$, $n = 0$, είναι η εξής:

$$\theta_p = -\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta(4a+4b\beta^2+c)}x^2 \quad (4.4.5\alpha)$$

Ομοίως υπολογίζονται και οι μερικές λύσεις που προκύπτουν για τις υπόλοιπες συναρτήσεις του q'' :

- Για $q'' = \frac{\bar{q}''}{x}$, $n = 1$: $\theta_p = -\frac{u'''}{4a+4b\beta^2+c}x^2 - \frac{\bar{q}''}{\delta(a+b\beta^2+c)}x$ (4.4.5β)

- Για $q'' = \frac{\bar{q}''}{x^2}$, $n = 2$: $\theta_p = -\frac{u'''}{4a+4b\beta^2+c}x^2 - \frac{\bar{q}''}{\delta c}$ (4.4.5γ)

4.5 Γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

Η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης για την κατανομή της θερμοκρασίας θ , προκύπτει ως το άθροισμα της ομογενούς και της μερικής λύσης: $\theta(x, \varphi) = \theta_h + \theta_p$.

- Για $q'' = \overline{q''}$

$$\theta(x, \varphi) = -\frac{u''' \delta + \overline{q''}}{\delta(4a+4b\beta^2+c)} x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + B_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi) \quad (4.5.1\alpha)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x}$

$$\theta(x, \varphi) = -\frac{u'''}{4a+4b\beta^2+c} x^2 - \frac{\overline{q''}}{\delta(a+b\beta^2+c)} x + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + B_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi) \quad (4.5.1\beta)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x^2}$

$$\theta(x, \varphi) = -\frac{u'''}{4a+4b\beta^2+c} x^2 - \frac{\overline{q''}}{\delta c} + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \cos \lambda_n \varphi + B_n x^{\alpha\lambda} e^{\alpha\lambda\beta\varphi} \sin \lambda_n \varphi) \quad (4.5.1\gamma)$$

Οι συντελεστές A_n και B_n της ομογενούς λύσης δεν έχουν βρεθεί μέχρι στιγμής. Για τον σκοπό αυτό εφαρμόζεται η γενική γραμμική συνοριακή συνθήκη στη βάση του κώνου $x = l$, που προαναφέρθηκε (4.2.13):

$$\sigma\theta(l, \varphi) + \omega \frac{\partial\theta(l, \varphi)}{\partial x} = f(\varphi)$$

Με αντικατάσταση στη γενική λύση προκύπτουν οι εξισώσεις:

- Για $q'' = \overline{q''}$

$$-\frac{u'''\delta+\bar{q}''}{\delta(4a+4b\beta^2+c)}l(\sigma l+2\omega)+\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma l^{\alpha\lambda}+\omega\alpha_{\lambda}l^{\alpha\lambda-1})(A_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\cos\lambda_n\varphi+B_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\sin\lambda_n\varphi)=f(\varphi)$$

(4.5.2α)

- Για $q'' = \frac{\bar{q}''}{x}$

$$-\frac{u'''}{4a+4b\beta^2+c}l(\sigma l+2\omega)-\frac{\bar{q}''}{\delta(a+b\beta^2+c)}(\sigma l+2\omega)+\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma l^{\alpha\lambda}+\omega\alpha_{\lambda}l^{\alpha\lambda-1})(A_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\cos\lambda_n\varphi+B_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\sin\lambda_n\varphi)=f(\varphi)$$

(4.5.2β)

- Για $q'' = \frac{\bar{q}''}{x^2}$

$$-\frac{u'''}{4a+4b\beta^2+c}l(\sigma l+2\omega)-\sigma\frac{\bar{q}''}{\delta c}+\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma l^{\alpha\lambda}+\omega\alpha_{\lambda}l^{\alpha\lambda-1})(A_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\cos\lambda_n\varphi+B_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\sin\lambda_n\varphi)=f(\varphi)$$

(4.5.2γ)

Για απλοποίηση, οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως μία, επειδή έχουν κοινή τη σειρά, με διαφορετική συνάρτηση $F(\varphi)$ στο δεξιό μέλος για κάθε περίπτωση:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma l^{\alpha\lambda}+\omega\alpha_{\lambda}l^{\alpha\lambda-1})(A_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\cos\lambda_n\varphi+B_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\sin\lambda_n\varphi)=F(\varphi)$$

(4.5.3)

Προκειμένου να υπολογιστούν οι συντελεστές A_n και B_n χρησιμοποιείται μια καινοτόμος αναλυτική μέθοδος, με την οποία το άθροισμα της εξίσωσης μετατρέπεται σε σειρά Fourier. Είναι προφανές πως οι συντελεστές της σειράς Fourier θα εξαρτώνται από τους ζητούμενους συντελεστές.

Επομένως, εξισώνοντας το περιεχόμενο του αθροίσματος με τη σειρά Fourier, προκύπτει η σχέση:

$$(\sigma l^{\alpha\lambda}+\omega\alpha_{\lambda}l^{\alpha\lambda-1})(A_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\cos\lambda_n\varphi+B_n e^{\alpha\lambda\beta\varphi}\sin\lambda_n\varphi)=a'_0(A_n, B_n, \dots)+\sum_{m=1}^{\infty}((a'_m(A_n, B_n, \dots))\cos m\varphi+(b'_m(A_n, B_n, \dots))\sin m\varphi)$$

(4.5.4)

Επιπλέον, η συνάρτηση $F(\varphi)$ γράφεται σε μορφή σειράς Fourier:

$$F(\varphi) = a_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m'' \cos m\varphi + b_m'' \sin m\varphi) \quad (4.5.5)$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση, ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_0'(A_n, B_n, \dots) + \sum_{m=1}^{\infty} ((a_m'(A_n, B_n, \dots)) \cos m\varphi + (b_m'(A_n, B_n, \dots)) \sin m\varphi)] = a_0'' + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m'' \cos m\varphi + b_m'' \sin m\varphi) \quad (4.5.6)$$

Εισάγοντας τους όρους για $m = 1, 2, \dots, i$, η εξίσωση γράφεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_0'(A_n, B_n, \dots) + (a_1'(A_n, B_n, \dots) \cos \varphi + b_1'(A_n, B_n, \dots) \sin \varphi) + \dots + (a_i'(A_n, B_n, \dots) \cos i\varphi + b_i'(A_n, B_n, \dots) \sin i\varphi)] = a_0'' + a_1'' \cos \varphi + b_1'' \sin \varphi + \dots + a_i'' \cos i\varphi + b_i'' \sin i\varphi \quad (4.5.7)$$

Για τις τιμές $n = 1, 2, \dots, i - 1$, η προηγούμενη σχέση μετατρέπεται σε αλγεβρικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων, με εξίσωση των συντελεστών κάθε όρου :

$$\begin{cases} a_0'(A_0, B_0, \dots) + a_0'(A_1, B_1, \dots) + \dots + a_0'(A_{i-1}, B_{i-1}, \dots) = a_0'' \\ a_1'(A_0, B_0, \dots) + a_1'(A_1, B_1, \dots) + \dots + a_1'(A_{i-1}, B_{i-1}, \dots) = a_1'' \\ b_1'(A_0, B_0, \dots) + b_1'(A_1, B_1, \dots) + \dots + b_1'(A_{i-1}, B_{i-1}, \dots) = b_1'' \\ \vdots \\ a_{i-1}'(A_0, B_0, \dots) + a_{i-1}'(A_1, B_1, \dots) + \dots + a_{i-1}'(A_{i-1}, B_{i-1}, \dots) = a_{i-1}'' \\ b_{i-1}'(A_0, B_0, \dots) + b_{i-1}'(A_1, B_1, \dots) + \dots + b_{i-1}'(A_{i-1}, B_{i-1}, \dots) = b_{i-1}'' \\ a_i'(A_0, B_0, \dots) + a_i'(A_1, B_1, \dots) + \dots + a_i'(A_{i-1}, B_{i-1}, \dots) = a_i'' \end{cases} \quad (4.5.8)$$

Το σύστημα εξισώσεων περιέχει $2i$ εξισώσεις, από τις οποίες λαμβάνονται $2i$ άγνωστοι συντελεστές $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_{i-1}, B_{i-1}$. Εισάγοντας αυτούς τους συντελεστές σε κάθε εξίσωση γενικής λύσης $\theta(x, \varphi)$ και στη συνέχεια, επιστρέφοντας στην αρχική συνάρτηση της θερμοκρασίας, μέσω του τύπου $\theta(x, \varphi) = T(x, \varphi) - T_{\infty}$, προκύπτει η θερμοκρασιακή κατανομή στο κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό με τυχαία γωνία ινών υπό τη γενική συνοριακή συνθήκη που έχουμε στη βάση του.

5 Παρουσίαση ειδικών περιπτώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η αγωγή θερμότητας σε κωνικό κέλυφος για τρεις ειδικές περιπτώσεις. Στις πρώτες δύο περιπτώσεις η γωνία της ίνας λαμβάνει συγκεκριμένες τιμές, ενώ ως τώρα ήταν αυθαίρετη. Στην τρίτη περίπτωση μελετάται η αγωγή σε κωνικό κέλυφος από ισοτροπικό σύνθετο υλικό. Αναλυτικότερα, οι ειδικές περιπτώσεις είναι ως εξής:

- Περίπτωση 1^η : μελέτη αγωγής θερμότητας σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό, του οποίου οι ίνες έχουν μηδενική γωνία ($\alpha = 0^\circ$)
- Περίπτωση 2^η : μελέτη αγωγής θερμότητας σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό με κάθετες ίνες στην κατεύθυνση x ($\alpha = 90^\circ$)
- Περίπτωση 3^η : μελέτη αγωγής θερμότητας σε κωνικό κέλυφος από ισοτροπικό σύνθετο υλικό.

5.1 Προσαρμογή διαφορικής εξίσωσης και επίλυση

Για όλες τις ειδικές περιπτώσεις, που αναλύονται σε αυτό το κεφάλαιο, η διαφορική εξίσωση βρίσκεται ήδη σε κανονική μορφή και δεν χρειάζεται η διαδικασία τροποποίησης που εφαρμόστηκε προηγουμένως. Αυτό συμβαίνει επειδή η συνιστώσα \bar{k}_{12} μηδενίζεται σε κάθε περίπτωση και, επομένως, δεν εμφανίζεται η παράγωγος $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta}$. Ανατρέχοντας στο κεφάλαιο 4.1, από τον τανυστή θερμικής αγωγιμότητας έχει βρεθεί πως $\bar{k}_{12} = m_l n_l (k_{11} - k_{22})$, όπου $m_l = \cos \alpha$, $n_l = \sin \alpha$. Για γωνία ίνας $\alpha = 0^\circ$, μηδενίζεται το ημίτονο, ενώ για $\alpha = 90^\circ$ το συνημίτονο, και κατά συνέπεια το \bar{k}_{12} . Επίσης, για την τρίτη περίπτωση, αυτήν του ισοτροπικού υλικού, ο συντελεστής θερμικής

αγωγιμότητας λαμβάνει μία συγκεκριμένη τιμή ή διαφορετικά ο τανυστής του θα είναι διαγώνιος με τις διαγώνιες συνιστώσες να είναι ίσες ($\bar{k}_{11} = \bar{k}_{22} = k$).

Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση (4.2.10) γράφεται στη μορφή:

$$\bar{k}_{11}x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \bar{k}_{11} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{h_0}{\delta x} \theta = -\frac{u''' \delta + q''}{\delta} x \quad (5.1.1)$$

Η τελευταία αποτελεί μη ομογενή γραμμική μερική διαφορική εξίσωση, οπότε για τη γενική λύση της είναι απαραίτητη η εύρεση της ομογενούς λύσης και μιας μερικής λύσης, και ακολούθως η άθροισή τους.

Για την ομογενή λύση χρησιμοποιείται, όπως και προηγουμένως, η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση που επιλύεται είναι η:

$$\bar{k}_{11}x \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial \varphi^2} + \bar{k}_{11} \frac{\partial \theta_h}{\partial x} - \frac{h_0}{\delta x} \theta_h = 0 \quad (5.1.2)$$

Θεωρείται πως η συνάρτηση της θερμοκρασίας προκύπτει ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, οι οποίες εξαρτώνται από τις μεταβλητές x και φ η καθεμία, αντίστοιχα:

$$\theta_h(x, \varphi) = F(x)G(\varphi) \quad (5.1.3)$$

Με αντικατάσταση αυτού του ορισμού της συνάρτησης της θερμοκρασίας στην ομογενή διαφορική εξίσωση, ισχύει:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11}x F'' G + \frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} F G'' + \bar{k}_{11} F' G - \frac{h_0}{\delta x} F G &= 0 \\ \Rightarrow G(\bar{k}_{11}x F'' + \bar{k}_{11} F' - \frac{h_0}{\delta x} F) &= -\frac{\bar{k}_{22}}{x \sin^2 \gamma} F G'' \\ \Rightarrow \bar{k}_{11}x^2 \frac{F''}{F} + \bar{k}_{11}x \frac{F'}{F} - \frac{h_0}{\delta} &= -\frac{\bar{k}_{22}}{\sin^2 \gamma} \frac{G''}{G} \\ \Rightarrow \frac{\bar{k}_{11} \sin^2 \gamma}{\bar{k}_{22}} x^2 \frac{F''}{F} + \frac{\bar{k}_{11} \sin^2 \gamma}{\bar{k}_{22}} x \frac{F'}{F} - \frac{h_0 \sin^2 \gamma}{\delta \bar{k}_{22}} &= -\frac{G''}{G} = \lambda_n^2 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Τα δύο μέλη της εξίσωσης, εξαρτημένα από διαφορετικές μεταβλητές, εξισώνονται με τη σταθερά λ_n^2 . Έτσι, προκύπτουν δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς $F(x)$ και $G(\varphi)$ αντίστοιχα.

Η συνήθης διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $F(x)$ είναι :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{k}_{11} \sin^2 \gamma}{\bar{k}_{22}} x^2 \frac{F''}{F} + \frac{\bar{k}_{11} \sin^2 \gamma}{\bar{k}_{22}} x \frac{F'}{F} - \frac{h_0 \sin^2 \gamma}{\delta \bar{k}_{22}} &= \lambda_n^2 \\ \Rightarrow x^2 F'' + x F' - \left(\frac{h_0 \sin^2 \gamma}{\delta \bar{k}_{22}} + \lambda_n^2 \right) \frac{\bar{k}_{22}}{\bar{k}_{11} \sin^2 \gamma} F &= 0 \\ \Rightarrow F'' + \frac{1}{x} F' - \frac{v_n^2}{x^2} F &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

όπου για συντομία έχει τεθεί

$$v_n = \sqrt{\frac{h_0 \sin^2 \gamma + \bar{k}_{22} \delta \lambda_n^2}{\bar{k}_{11} \delta \sin^2 \gamma}} \quad (5.1.6)$$

Γίνεται εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής t μέσω της σχέσης $x = e^t$ ή ισοδύναμα $t = \ln x$ και με

παράγωγο $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$. Θεωρείται ότι υπάρχει συνάρτηση $g(t)$ ίση με τη συνάρτηση $F(x)$:

$$F(x) = F(e^t) = g(t) \quad (5.1.8)$$

Στη συνέχεια, με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσης, η συνήθης διαφορική εξίσωση τροποποιείται:

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{-2t} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dg}{dt} + \frac{1}{e^t} e^{-t} \frac{dg}{dt} - \frac{v_n^2}{e^{2t}} g &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 g}{dt^2} - v_n^2 g &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Με τη χρήση της χαρακτηριστικής εξίσωσης, προκύπτει η λύση για τη συνάρτηση $g(t)$ και με αντικατάσταση της μεταβλητής t , η λύση για τη συνάρτηση $F(x)$:

$$g(t) = e^{\pm v_n t} = x^{\pm v_n}$$
$$\Rightarrow F(x) = C_1 x^{v_n}, \quad (5.1.10)$$

όπου C_1 σταθερά.

Όπως και σε προηγούμενη εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας, δεν λαμβάνεται υπόψη ο όρος x^{-v_n} , προκειμένου να μη μελετηθεί η συμπεριφορά στην κορυφή του κώνου.

Ομοίως, η συνήθης διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $G(\varphi)$ είναι:

$$-\frac{G''}{G} = \lambda_n^2$$
$$\Rightarrow G'' + \lambda_n^2 G = 0 \quad (5.1.11)$$

Με τη συνάρτηση G να είναι της μορφής $G = e^{\rho\varphi}$, προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση και οι ρίζες της:

$$\rho^2 + \lambda_n^2 = 0$$
$$\Rightarrow \rho = \pm i\lambda_n \quad (5.1.12)$$

Συνεπάγεται ότι $G = e^{\pm i\lambda_n\varphi}$ ή, με χρήση των εξισώσεων Euler,:

$$G(\varphi) = a_n \cos(\lambda_n\varphi) + b_n \sin(\lambda_n\varphi), \quad (5.1.13)$$

όπου οι συντελεστές a_n, b_n είναι ακολουθίες του n .

Υπολογίζεται κατόπιν η ομογενής λύση:

$$\theta_h(x, \varphi) = F(x)G(\varphi)$$

$$\Rightarrow \theta_h(x, \varphi) = C_1 x^{v_n} (a_n \cos(\lambda_n \varphi) + b_n \sin(\lambda_n \varphi))$$

$$\Rightarrow \theta_h(x, \varphi) = A_n x^{v_n} \cos(\lambda_n \varphi) + B_n x^{v_n} \sin(\lambda_n \varphi)$$

$$\Rightarrow \theta_h(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(\lambda_n \varphi) + B_n x^{v_n} \sin(\lambda_n \varphi)] \quad (5.1.14)$$

Όμοια με το κεφάλαιο 4.3.2 , το λ_n είναι ιδιοτιμή και ορίζεται με εφαρμογή της αρμονικής συνθήκης συνέχειας για το μέρος της ομογενούς λύσης $U(\varphi)$, που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία και τη ροή θερμότητας κατά τη φ διεύθυνση της συνάρτησης θ :

$$U(\varphi) = A_n \cos \lambda_n \varphi + B_n \sin \lambda_n \varphi$$

$$U(0) = U(2\pi)$$

$$U'(0) = U'(2\pi)$$

Η αρμονική συνθήκη καταλήγει σε σύστημα δύο αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές A_n, B_n , του οποίου η ορίζουσα των συντελεστών μηδενίζεται έτσι ώστε να υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις:

$$\begin{cases} A_n (\cos(2\lambda_n \pi) - 1) + B_n \sin(2\lambda_n \pi) = 0 \\ A_n \lambda_n \sin(2\lambda_n \pi) + B_n \lambda_n (1 - \cos(2\lambda_n \pi)) = 0 \end{cases} \quad (5.1.15)$$

$$\begin{vmatrix} \cos(2\lambda_n \pi) - 1 & \sin(2\lambda_n \pi) \\ \lambda_n \sin(2\lambda_n \pi) & \lambda_n (1 - \cos(2\lambda_n \pi)) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda_n [\cos(2\lambda_n \pi) - 1]^2 - \lambda_n \sin^2(2\lambda_n \pi) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n (2 - 2 \cos(2\lambda_n \pi)) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n = 0$$

$$\text{ή } 2 - 2 \cos(2\lambda_n \pi) = 0 \Rightarrow \cos(2\lambda_n \pi) = 1 \Rightarrow \lambda_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα, οι τιμές που λαμβάνει η ιδιοτιμή λ_n είναι:

$$\lambda_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.16)$$

Η ομογενής λύση γράφεται στη μορφή:

$$\theta_n(x, \varphi) = A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)], \quad (5.1.17)$$

όπου οι συντελεστές A_n, B_n είναι άγνωστες συναρτήσεις του n .

Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών υπολογίζονται οι μερικές λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης (5.1.1) για σταθερή παραγωγή θερμότητας u''' και για κάθε μια συνάρτηση της ροής θερμότητας q'' :

- Για $q'' = \overline{q''}, n = 0 : \theta_p = -\frac{u''' \delta + \overline{q''}}{4k_{11} \delta - h_0} x^2$ (5.1.8α)

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x}, n = 1 : \theta_p = -\frac{u''' \delta}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{k_{11} \delta - h_0} x$ (5.1.18β)

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x^2}, n = 2 : \theta_p = -\frac{u''' \delta}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{h_0}$ (5.1.18γ)

Με την ίδια μεθοδολογία που εφαρμόστηκε και προηγουμένως, η γενική λύση προκύπτει ως άθροισμα της ομογενούς και της μερικής λύσης:

- Για $q'' = \overline{q''}, n = 0$

$$\theta = -\frac{u''' \delta + \overline{q''}}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.1.19α)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x}, n = 1$

$$\theta = -\frac{u''' \delta}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{k_{11} \delta - h_0} x + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.1.19β)$$

- Για $q'' = \frac{\bar{q}''}{x^2}$, $n = 2$

$$\theta = -\frac{u''' \delta}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 - \frac{\bar{q}''}{h_0} + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.1.19\gamma)$$

Επίσης, εφαρμόζεται η ίδια γενική συνοριακή συνθήκη στη βάση του κώνου και καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$A_0(\sigma l^{v_0} + \omega v_0 l^{v_0-1}) \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma l^{v_n} + \omega v_n l^{v_n-1}) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = F(\varphi) \quad (5.1.20)$$

Σημειώνεται πως η συνάρτηση $F(\varphi)$ εξαρτάται από την κατανομή της ροής θερμότητας q'' και τη μερική λύση που εφαρμόζεται, αντίστοιχα.

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης αποτελεί σειρά Fourier, της οποίας οι άγνωστοι συντελεστές A_0 , A_n , B_n υπολογίζονται μέσω του αναπτύγματος Fourier της συνάρτησης $F(\varphi)$. Οι τελευταίοι βρίσκονται μέσω των εξισώσεων:

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi \quad (5.1.21\alpha)$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \quad (5.1.21\beta)$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \quad (5.1.21\gamma)$$

Εξισώνοντας τους ομοιοβάθμιους συντελεστές των σειρών Fourier που εμφανίζονται στα δύο μέλη της εξίσωσης, ορίζονται οι άγνωστοι συντελεστές:

$$A_0 = \frac{a'_0}{\sigma l^{v_0} + \omega v_0 l^{v_0-1}} \quad (5.1.22\alpha)$$

$$A_n = \frac{\alpha'_n}{\sigma l^{v_n} + \omega v_n l^{v_n-1}} \quad (5.1.22\beta)$$

$$B_n = \frac{b'_n}{\sigma l^{v_n} + \omega v_n l^{v_n-1}} \quad (5.1.22\gamma)$$

Καταλήγοντας, με αντικατάσταση των συντελεστών, που βρέθηκαν, στη γενική λύση, λαμβάνεται η θερμοκρασιακή κατανομή.

5.2 Θερμοκρασιακή κατανομή σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό για ειδικές περιπτώσεις

Στην πρώτη περίπτωση, όπου η γωνία των ινών είναι $\alpha = 0^\circ$, η κατανομή της θερμοκρασίας (

$T(x, \varphi) = \theta(x, \varphi) - T_\infty$) για κάθε ορισμό του q'' είναι:

- Για $q'' = \overline{q''}$, $n = 0$

$$T(x, \varphi) = T_\infty - \frac{u''' \delta + \overline{q''}}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.2.1\alpha)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x}$, $n = 1$

$$T(x, \varphi) = T_\infty - \frac{u''' \delta}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{k_{11} \delta - h_0} x + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.2.1\beta)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x^2}$, $n = 2$

$$T(x, \varphi) = T_\infty - \frac{u''' \delta}{4k_{11} \delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{h_0} + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)], \quad (5.2.1\gamma)$$

$$\text{όπου } v_n|_{0^\circ} = \sqrt{\frac{h_0 \sin^2 \gamma + k_{22} \delta n^2}{k_{11} \delta \sin^2 \gamma}} \quad (5.2.2)$$

Αλλαγή επιδέχονται μόνο οι συνιστώσες $\overline{k_{11}}$, $\overline{k_{22}}$ του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, όπως προκύπτει από τον ορισμό τους για τη συγκεκριμένη γωνία:

$$\overline{k_{11}} = m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{11}} = \cos^2 \alpha k_{11} + \sin^2 \alpha k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{11}} = \cos^2 0 k_{11} + \sin^2 0 k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{11}} = k_{11} \quad (5.2.3\alpha)$$

$$\overline{k_{22}} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{22}} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{22}} = \sin^2 \alpha k_{11} + \cos^2 \alpha k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{22}} = \sin^2 0 k_{11} + \cos^2 0 k_{22}$$

$$\Rightarrow \overline{k_{22}} = k_{22} \quad (5.2.3\beta)$$

Στη δεύτερη περίπτωση η κατανομή της θερμοκρασίας για κάθε ορισμό του q'' περιγράφεται από τις εξισώσεις:

- Για $q'' = \overline{q''}$, $n = 0$

$$T(x, \varphi) = T_\infty - \frac{u''' \delta + \overline{q''}}{4k_{22}\delta - h_0} x^2 + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.2.4\alpha)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x}$, $n = 1$

$$T(x, \varphi) = T_{\infty} - \frac{u''' \delta}{4k_{22}\delta - h_0} x^2 - \frac{\bar{q}''}{k_{22}\delta - h_0} x + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.2.4\beta)$$

- Για $q'' = \frac{\bar{q}''}{x^2}$, $n = 2$

$$T(x, \varphi) = T_{\infty} - \frac{u''' \delta}{4k_{22}\delta - h_0} x^2 - \frac{\bar{q}''}{h_0} + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)], \quad (5.2.4\gamma)$$

$$\text{όπου } v_n|_{90^\circ} = \sqrt{\frac{h_0 \sin^2 \gamma + k_{11} \delta n^2}{k_{22} \delta \sin^2 \gamma}} \quad (5.2.5)$$

Όμοια με την πρώτη περίπτωση οι συνιστώσες \bar{k}_{11} και \bar{k}_{22} τροποποιούνται:

$$\bar{k}_{11} = m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11} = \cos^2 \alpha k_{11} + \sin^2 \alpha k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11} = \cos^2 90 k_{11} + \sin^2 90 k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{11} = k_{22} \quad (5.2.6\alpha)$$

$$\bar{k}_{22} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{22} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{22} = \sin^2 \alpha k_{11} + \cos^2 \alpha k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{22} = \sin^2 90 k_{11} + \cos^2 90 k_{22}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_{22} = k_{11} \quad (5.2.6\beta)$$

Τέλος, στην τρίτη περίπτωση του κωνικού κελύφους από ισοτροπικό υλικό, οι συνιστώσες του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας είναι ίσες $\overline{k_{11}} = \overline{k_{22}} = k$, και επομένως, προκύπτουν οι εξής κατανομές της θερμοκρασίας:

- Για $q'' = \overline{q''}$, $n = 0$

$$T(x, \varphi) = T_{\infty} - \frac{u''' \delta + \overline{q''}}{4k\delta - h_0} x^2 + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.2.7\alpha)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x}$, $n = 1$

$$T(x, \varphi) = T_{\infty} - \frac{u''' \delta}{4k\delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{k\delta - h_0} x + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)] \quad (5.2.7\beta)$$

- Για $q'' = \frac{\overline{q''}}{x^2}$, $n = 2$

$$T(x, \varphi) = T_{\infty} - \frac{u''' \delta}{4k\delta - h_0} x^2 - \frac{\overline{q''}}{h_0} + A_0 x^{v_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n x^{v_n} \cos(n\varphi) + B_n x^{v_n} \sin(n\varphi)], \quad (5.2.7\gamma)$$

$$\text{όπου } v_n |_{\text{ισοτροπικό}} = \sqrt{\frac{h_0 \sin^2 \gamma + k\delta n^2}{k\delta \sin^2 \gamma}} \quad (5.2.8)$$

Σε όλες τις παραπάνω κατανομές οι συντελεστές A_0, A_n, B_n λαμβάνονται από τις εξισώσεις (5.1.22).

6 Αποτελέσματα και σχολιασμός

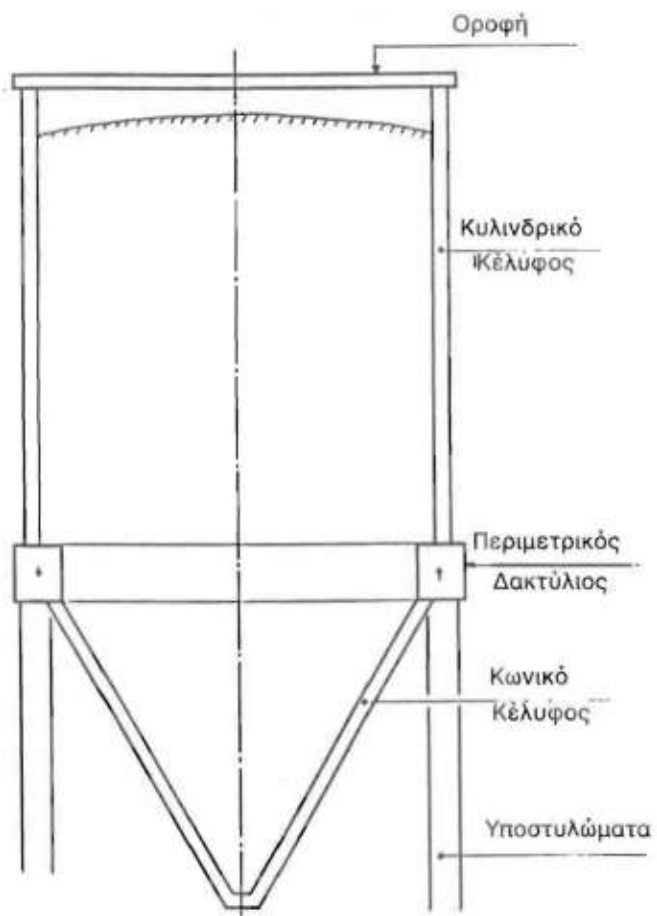
Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρεται το σιλό ως παράδειγμα εφαρμογής της ανάλυσης, που προηγήθηκε, για πολιτικούς μηχανικούς. Στη συνέχεια, έπονται γραφικές απεικονίσεις της γενικής λύσης του προβλήματος μετάδοσης θερμότητας, και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

6.1 Εφαρμογή σε κατασκευές πολιτικού μηχανικού

Στο πεδίο εφαρμογών του πολιτικού μηχανικού κωνικά κελύφη συναντώνται συχνά σε κορυφές κατασκευών ως στέγη. Ωστόσο, πιο ενδιαφέρον και κατάλληλο παράδειγμα προς μελέτη για μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό αποτελούν οι κατασκευές σιλό με κωνικό πυθμένα ή οροφή. Πρόκειται για κατασκευές που στοχεύουν στην τροφοδοσία (φόρτωση, εκφόρτωση) και την αποθήκευση πρώτων υλών σε στερεή ή ακόμα και σε ρευστή μορφή. Τα σιλό χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση σπόρων, κονιορτοποιημένου άνθρακα, τσιμέντου, αιθάλης, άμμου, λιπασμάτων και διάφορων τεχνικών, χημικών, οικοδομικών προϊόντων ή προϊόντων διατροφής σε τεμαχισμένη μορφή ή σε μορφή σκόνης. Ο έλεγχος της θερμοκρασίας των σιλό, καθώς και η διατήρησή της σε συγκεκριμένα επίπεδα ανάλογα κάθε φορά με το προϊόν που αποθηκεύεται, είναι ύψιστης σημασίας, εξαιτίας της ανάγκης για συντήρηση του περιεχομένου. Για τον σκοπό αυτό, εγκαθίστανται συστήματα εξαερισμού και ελέγχου και εφεδρικά συστήματα ελέγχου της θερμοκρασίας [24].



Εικόνα 24 Κατασκευή σιλό με κωνική οροφή (<https://conicalroofs.weebly.com> [25])



Εικόνα 25 Διατομή κυλινδρικού σιλό (Σ.Αγγελίδης, 1994 [26])

Υλικά κατασκευής των σιλό συνήθως είναι μέταλλα, όπως ανοξείδωτος χάλυβας και κράματα αλουμινίου, σκυρόδεμα και οπλισμένο σκυρόδεμα. Η ενίσχυσή τους με σύνθετα υλικά στοχεύει στην αύξηση της φέρουσας ικανότητας, στη συμπλήρωση του ήδη υπάρχοντος οπλισμού, στη βελτίωση της σεισμικής απόκρισης και της ευστάθειάς τους υπό την επιρροή υψηλών θερμοκρασιών, με ταυτόχρονη διατήρηση του ίδιου βάρους της κατασκευής σε χαμηλά επίπεδα. Τα σύνθετα υλικά που χρησιμοποιούνται σε τέτοιου είδους εφαρμογές αποτελούνται από πολυμερικές μήτρες και ενισχυτικές ίνες άνθρακα ή γυαλιού, λόγω των ιδιοτήτων τους αλλά και της ευκολίας μορφοποίησής τους ακολουθώντας τη γεωμετρία του κωνικού κελύφους. Οι ίνες άνθρακα προσδίδουν περισσότερη ευστάθεια συγκριτικά με τις ίνες γυαλιού και παρασκευάζονται με πρώτη ύλη το πολυακρυλονιτρίλιο (PAN) ή διάφορες οργανικές ρητίνες, υλικά τα οποία οφείλουν να είναι άφλεκτα και ανθεκτικά σε θερμοκρασίες έως 2000°C. Όσον αφορά τις πολυμερικές μήτρες, που βρίσκουν εφαρμογή σε αυτό το πεδίο, παρασκευάζονται από ρητίνες, και ιδιαίτερα εποξειδικές. Ανάλογα με τον σκοπό της χρήσης τους, είναι πιθανό να επιλεγούν θερμοσκληρυνόμενα και θερμοπλαστικά πολυμερή. Τα τελευταία παρουσιάζουν ελαττωματική συμπεριφορά με την αύξηση της θερμοκρασίας, όμως, ο συνδυασμός τους με τις συγκεκριμένες ενισχυτικές ίνες βελτιώνει τις ιδιότητές τους επαρκώς.



Εικόνα 26 Κατασκευή σιλό με κωνικό πυθμένα (<https://karanasios.eu/silo> [27])

6.2 Γραφική απεικόνιση γενικής λύσης και επαλήθευση με χρήση αριθμητικής μεθόδου

Οι γραφικές απεικονίσεις ανήκουν στο άρθρο *On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells* από τους M. Norouzi και H. Rahmani, που δημοσιεύτηκε στο *International Journal of Thermal Sciences* (2015). Πραγματοποιούνται για τρεις τύπους του σύνθετου υλικού από μήτρα και ίνες άνθρακα ή carbon-carbon, το οποίο αντέχει σε εξαιρετικά υψηλές θερμοκρασίες και αποτελεί ιδανικό υλικό για τέτοιου είδους εφαρμογές. Οι τιμές των ιδιοτήτων του πρώτου τύπου του υλικού, carbon-carbon 1, παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1, ενώ οι τρεις τύποι carbon-carbon στον Πίνακα 6.2. Επιπλέον, η γενική λύση που απεικονίζεται προκύπτει με την κατανομή της ροής

θερμότητας $q'' = \frac{\overline{q''}}{x^2}$, προκειμένου να περιγραφεί επαρκώς η ανάπτυξη εξαιρετικά υψηλής θερμοκρασίας στην κορυφή του κώνου. Οι συνοριακές συνθήκες που λαμβάνονται υπόψη εμφανίζονται στον Πίνακα 6.4, ενώ οι γεωμετρικές ιδιότητες του κωνικού κελύφους στον Πίνακα 6.3. Επιπλέον, παρατηρήθηκε πως η αναλυτική λύση συγκλίνει γρήγορα και χρειάζονται μόνο οι δέκα πρώτοι όροι της σειράς για τον υπολογισμό της. Οι M. Norouzi και H. Rahmani επαληθεύουν την αναλυτική λύση με τα αποτελέσματα που βρέθηκαν από τη μέθοδο Liebmann με χρήση δεύτερης τάξης πεπερασμένων διαφορών. Για μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών εφαρμόζεται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, που οδηγεί σε μη γραμμικό σύστημα, το οποίο λύνεται με την επαναληπτική μέθοδο Liebmann [28].

Ιδιότητα	Μονάδα μέτρησης	Carbon-carbon
k_{11}	W/mK	20-150
k_{22}	W/mK	1.3-8.3
Πυκνότητα	g/cm ³	1.3-2.5
Θερμική διαστολή	1/K	-2*10 ⁻⁶ -2*10 ⁻⁶
Αντοχή σε θερμική εναλλαγή	W/mm	150-170

Πίνακας 6.1 Ιδιότητες σύνθετου υλικού Carbon-carbon (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015 [29])

Υλικό	k_{11} (w/mK)	k_{22} (W/mK)
carbon-carbon 1	20	1.3
carbon-carbon 2	60	3.9
carbon-carbon 3	100	6.5

Πίνακας 6.2 Οι τρεις τύποι του σύνθετου υλικού carbon-carbon (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015 [29])

Κεκλιμένο ύψος(l)	1 m
Πάχος (δ)	0.01 m
Μισή γωνία της κορυφής του κώνου (γ)	20°

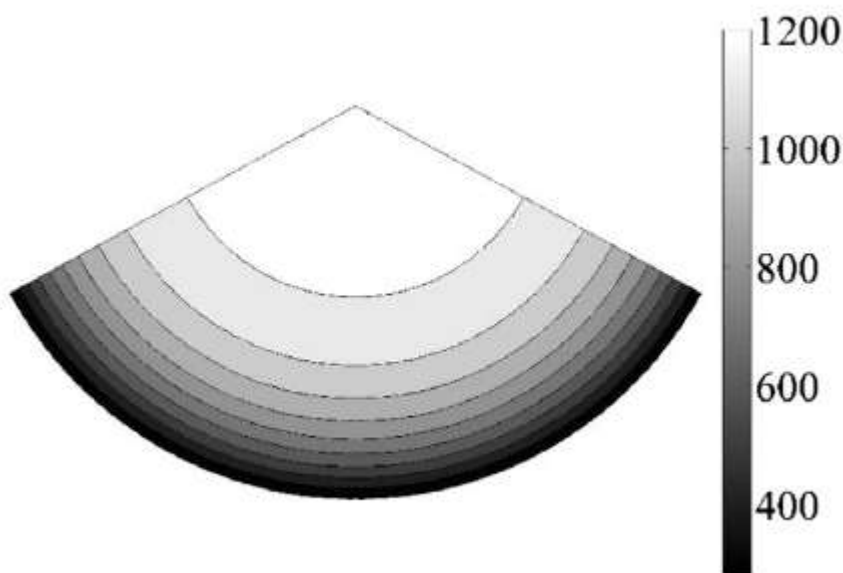
Πίνακας 6.3 Γεωμετρικές ιδιότητες κωνικού κελύφους (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

Θερμοκρασία περιβάλλοντος (T_{∞})	230 K
Ροή θερμότητας (\bar{q}'')	4000 W/m ²
Παραγωγή θερμότητας (u''')	0 W/m ³
Συντελεστής συναγωγής (h_0)	4 W/m ² K
f (Γενική συνοριακή συνθήκη)	50 K
σ (Γενική συνοριακή συνθήκη)	1
ω (Γενική συνοριακή συνθήκη)	0

Πίνακας 6.4 Συνοριακή συνθήκη (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

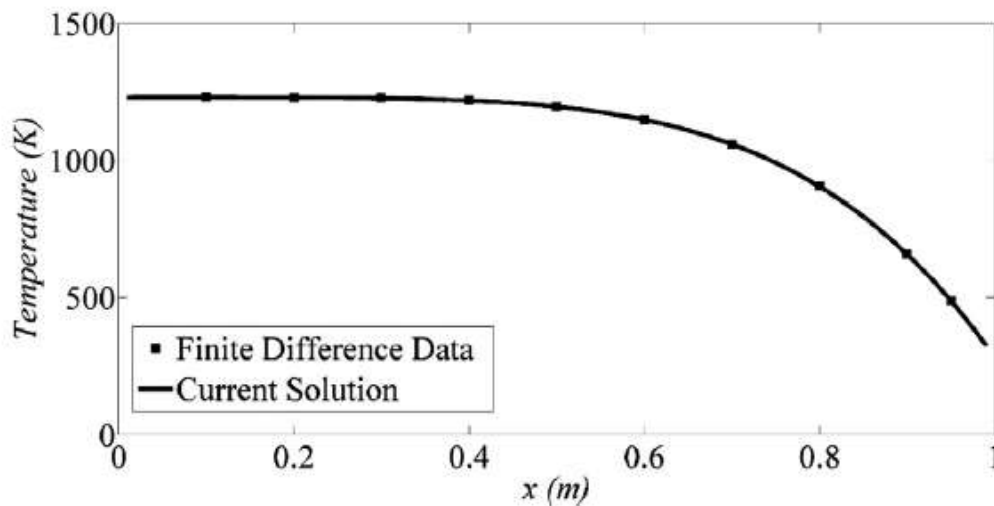
Στο Σχήμα 6.1 παρουσιάζεται η κατανομή της θερμοκρασίας κατά x και φ σε ισοϋψείς καμπύλες στο ανάπτυγμα κωνικού κελύφους από Carbon-carbon 1 για γωνία ίνας $\alpha = 22^\circ$, όπως προκύπτει από την αναλυτική λύση. Παρατηρείται πως η θερμοκρασία διαβαθμίζεται μόνο συναρτήσει της μεταβλητής x , ενώ παραμένει σταθερή με τη μεταβολή της γωνίας φ . Επιπλέον, από το διάγραμμα συμπεραίνεται πως η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας παρατηρείται στην κορυφή του κωνικού κελύφους. Τα συμπεράσματα αυτά είναι αναμενόμενα, λόγω του ορισμού της κατανομής της ροής θερμότητας q'' , που είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x και τείνει στο άπειρο στην κορυφή για $x = 0$, αλλά και λόγω της συνοριακής συνθήκης που περιγράφεται στον Πίνακα 6.4, σύμφωνα

με την οποία η θερμοκρασία στη βάση του κώνου είναι σταθερή για οποιαδήποτε γωνία. Ακόμα, αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει μία περιοχή κοντά στην κορυφή του κώνου με την ίδια μέγιστη θερμοκρασία της κορυφής.



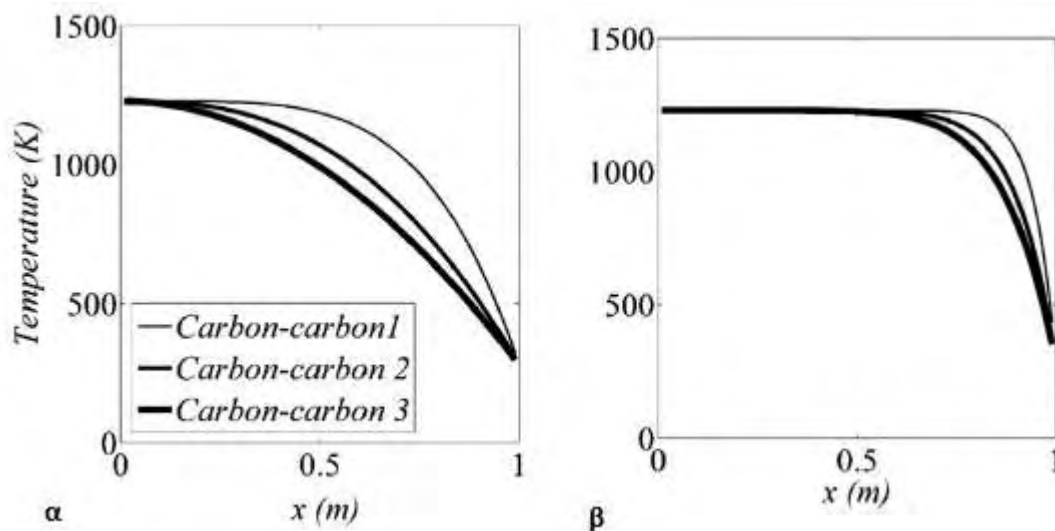
Σχήμα 6.1 Διαβάθμιση θερμοκρασίας ($^{\circ}\text{K}$) κατά x και φ διεύθυνση σε ανάπτυγμα του κωνικού κελύφους από σύνθετο υλικό Carbon-carbon 1 και με γωνία ίνας $\alpha = 22^{\circ}$ (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

Στο διάγραμμα του Σχήματος 6.2 φαίνεται η κατανομή θερμοκρασίας του προηγούμενου κωνικού κελύφους ως προς x . Απορρέουν τα ίδια συμπεράσματα ως προς τη θερμική συμπεριφορά του, αφού για μικρές τιμές του x η θερμοκρασία λαμβάνει τη μέγιστη τιμή και είναι σταθερή για κάποιο μήκος, ενώ όσο αυξάνεται η απόσταση από την κορυφή προς τη βάση του κώνου η θερμοκρασία μειώνεται. Το ενδιαφέρον του διαγράμματος του Σχήματος 6.1, όμως, βρίσκεται στην επαλήθευσή του με το αντίστοιχο διάγραμμα που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση. Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα από την αναλυτική λύση και τη λύση με πεπερασμένες διαφορές ταυτίζονται εξ ολοκλήρου. Επομένως, η αναλυτική λύση που βρέθηκε θεωρείται ακριβής και αποδοτική.



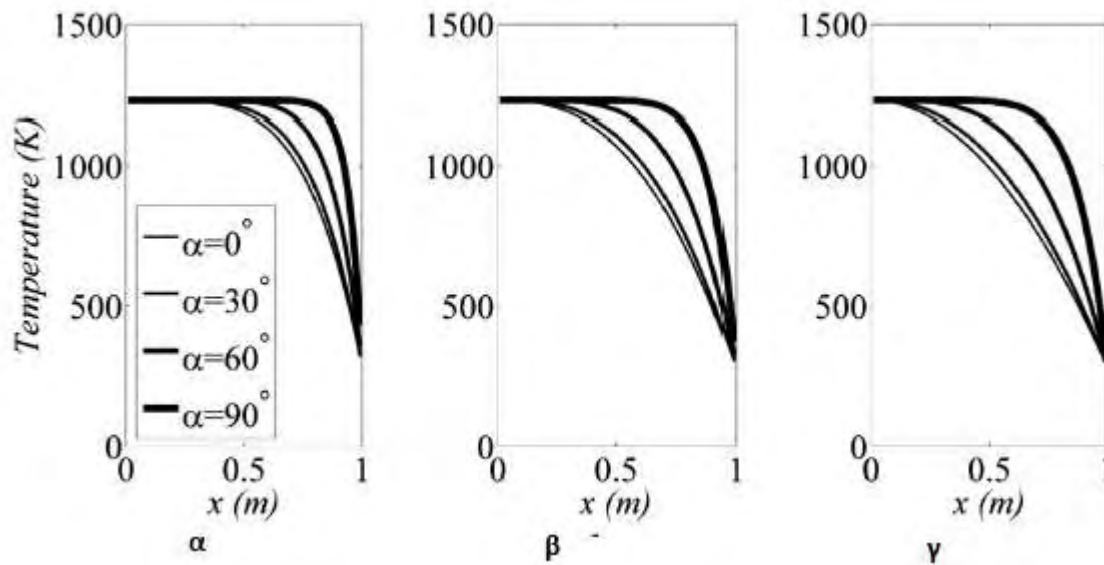
Σχήμα 6.2 Κατανομή θερμοκρασίας στο κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό Carbon-carbon 1 και με γωνία ίνας $\alpha = 22^\circ$ συναρτήσει της απόστασης x από την κορυφή (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.3 η θερμοκρασιακή κατανομή σε κωνικό κέλυφος συναρτήσει του μήκους x για τους τρεις τύπους του σύνθετου υλικού carbon-carbon για δύο γωνίες ίνας, α : $\alpha = 0^\circ$ και β : $\alpha = 90^\circ$. Τα διαγράμματα απεικονίζουν τη σύγκριση των τιμών της θερμοκρασίας που λαμβάνει το κωνικό κέλυφος αλλάζοντας το υλικό, αλλά και τη γωνία με την οποία περιτυλίγεται η ίνα γύρω από αυτό. Παρατηρούμε, λοιπόν, πως οι τιμές της θερμοκρασίας για υλικό carbon-carbon 1 είναι οι μεγαλύτερες, ενώ του carbon-carbon 3 οι μικρότερες. Ανατρέχοντας στον Πίνακα 6.2, όπου αναγράφονται οι τιμές των συντελεστών θερμικής αγωγιμότητας των υλικών, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι η αύξηση του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας οδηγεί σε μείωση της θερμοκρασίας, το οποίο είναι λογικό, αφού το υλικό έτσι μεταδίδει τη θερμότητα ευκολότερα. Επίσης, σύμφωνα με το διάγραμμα, η θερμοκρασία μειώνεται καθ' ύψος του κωνικού κελύφους με εξαίρεση την κορυφή του και την περιοχή κοντά σε αυτή. Εκεί, η τιμή της θερμοκρασίας παραμένει σταθερή. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα 6.3α και 6.3β, διαπιστώνουμε πως με την αύξηση της γωνίας της ίνας α , αυτή η περιοχή επεκτείνεται. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι για γωνία $\alpha = 0^\circ$, η περιοχή γύρω από την κορυφή του κώνου με σταθερή θερμοκρασία έχει μήκος 0.1 m, ενώ στην περίπτωση της γωνίας $\alpha = 90^\circ$ είναι 0.6 m.



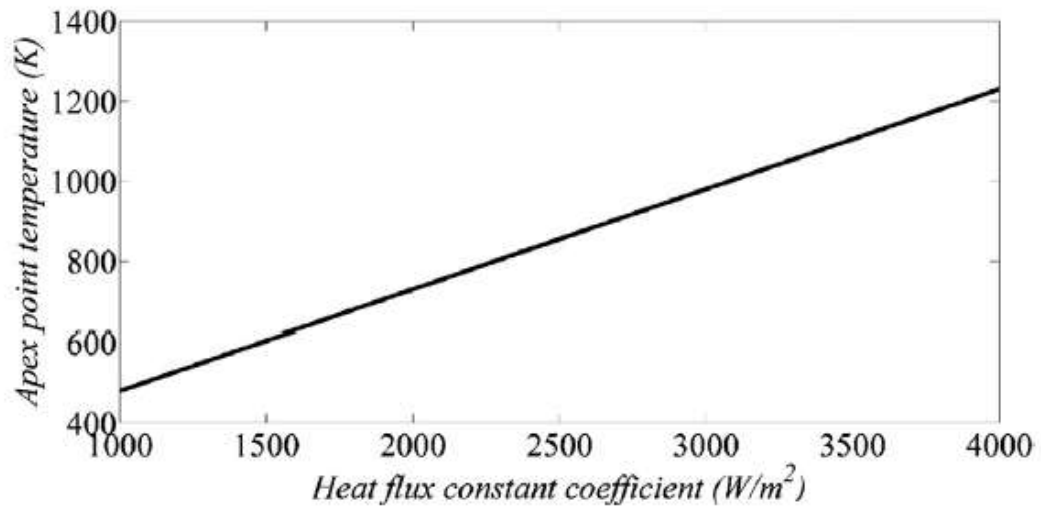
Σχήμα 6.3 Κατανομή θερμοκρασίας στο κωνικό κέλυφος από τους τρεις τύπους σύνθετου υλικού carbon-carbon 1 για δύο διαφορετικές γωνίες ίνας (α : $\alpha = 0^\circ$, β : $\alpha = 90^\circ$) (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

Στο Σχήμα 6.4 περιλαμβάνεται η κατανομή της θερμοκρασίας στο κωνικό κέλυφος συναρτήσει του μήκους x για τέσσερις διαφορετικές γωνίες ίνας και για τους τρεις τύπους carbon-carbon, που αναφέρθηκαν (α : carbon-carbon 1, β : carbon-carbon 2, γ : carbon-carbon 3). Είναι προφανές πως όσο αυξάνεται η γωνία της ίνας, τόσο υψηλότερες θερμοκρασίες προκύπτουν στο κωνικό κέλυφος, με εξαίρεση πάντα την κορυφή. Αυτό συμβαίνει, επειδή ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας μειώνεται στην κατεύθυνση x με την αύξηση της γωνίας της ίνας. Επίσης, παρατηρείται πως στο υλικό carbon-carbon 3, που εμφανίζει τις μεγαλύτερες τιμές θερμικής αγωγιμότητας, η διαφορά ανάμεσα στις κατανομές της θερμοκρασίας για κάθε γωνία είναι πιο εμφανής.



Σχήμα 6.4 Κατανομή θερμοκρασίας στο κωνικό κέλυφος για τέσσερις διαφορετικές γωνίες ίνας και για τους τρεις τύπους carbon-carbon (α: carbon-carbon 1, β: carbon-carbon 2, γ: carbon-carbon 3) (M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

Τέλος, αξίζει να μελετηθεί η μεταβολή της τιμής της θερμοκρασίας στην κορυφή του κώνου με τη σταθερά της ροής θερμότητας \bar{q}'' , που απεικονίζεται στο διάγραμμα του Σχήματος 6.5. Η γραφική παράσταση δείχνει ότι υπάρχει γραμμική σχέση ανάμεσα σε αυτά τα μεγέθη. Με μεγαλύτερη ροή θερμότητας, η κατανομή της οποίας ορίστηκε προηγουμένως, αυξάνεται η μέγιστη τιμή που παρουσιάζεται στο κωνικό κέλυφος. Έτσι, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης είναι δυνατό να προβλεφθεί το όριο της θερμοκρασίας στην οποία μπορεί να φτάσει το κωνικό κέλυφος, γεγονός που παίζει σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό των κατασκευών.



Σχήμα 6.5 Μεταβολή της θερμοκρασίας στην κορυφή του κωνικού κελυφους σε σχέση με τη σταθερά της ροής θερμότητας \bar{q}''

(M. Norouzi, H. Rahmani, 2015)

7 Συμπεράσματα

Από την αναλυτική μελέτη που πραγματοποιήθηκε σε αυτή τη διπλωματική, εξάγονται ορισμένα σημαντικά συμπεράσματα για τη μετάδοση θερμότητας σε κωνικό κέλυφος από σύνθετο υλικό. Με την επίλυση της εξίσωσης (4.2.8) που προκύπτει από το θερμικό ισοζύγιο σε απειροστό στοιχείο του κώνου, λαμβάνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (4.5.1). Έχουν ληφθεί υπόψη οι πιο γενικές συνθήκες και παραδοχές, προκειμένου να έχει ισχύ σε πληθώρα εφαρμογών.

Η γενική λύση μπορεί να διαφοροποιηθεί για κάθε ορισμό της ροής θερμότητας, αλλά σε κάθε περίπτωση υπάρχει δυναμοσειρά, της οποίας οι συντελεστές πρέπει να βρεθούν για κάθε εφαρμογή.

Για τη ροή θερμότητας που ορίστηκε σε αυτήν την εργασία, η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας παρατηρείται στην κορυφή του κώνου, σημείο που εξ αρχής θεωρήθηκε ανώμαλο και έγιναν παραδοχές ώστε να μη μελετηθεί. Η θερμοκρασία σε αυτό το σημείο λαμβάνει πολύ υψηλή τιμή (θεωρητικά είναι άπειρη) και αυξάνεται γραμμικά με τη σταθερά της ροής θερμότητας. Όπως φάνηκε και από τα διαγράμματα που ακολούθησαν, την ίδια μέγιστη τιμή λαμβάνει και η περιοχή κοντά στην κορυφή του κώνου. Το μήκος αυτής της περιοχής μεταβάλλεται με τη γωνία της ίνας. Όσον αφορά τον υπόλοιπο κώνο, η θερμοκρασία σε αυτόν μειώνεται όσο κατευθυνόμαστε προς τη βάση του. Επίσης, με αυτόν τον ορισμό της ροής θερμότητας, η κατανομή της θερμοκρασίας είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x . Παρατηρώντας τα διαγράμματα κατανομής της θερμοκρασίας, για ίδια γωνία ίνας, αλλά για διαφορετικά σύνθετα υλικά, αυτά με υψηλότερο συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας παρουσιάζουν χαμηλότερες τιμές θερμοκρασίας. Επιπλέον, η θερμοκρασία αυξάνεται με υψηλότερη γωνία ίνας.

Η ακρίβεια της γενικής λύσης επιβεβαιώθηκε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, τα οποία ήταν σε πλήρη συμφωνία.

Συμπερασματικά, σε εφαρμογές πολιτικού μηχανικού που η θερμότητα αποτελεί σημαντικό παράγοντα, η ενίσχυση με σύνθετα υλικά προτείνεται. Το σύνθετο υλικό επιλέγεται με βάση τις ιδιότητές του ως προς τη θερμική συμπεριφορά του, την αντοχή του, όπως και άλλους σημαντικούς παράγοντες, π.χ. το κόστος του. Ανάλογα με τη θερμική αγωγιμότητα του σύνθετου υλικού και τη γωνία που τοποθετούνται οι ίνες του, η θερμοκρασία του φορέα μπορεί να προβλεφθεί χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση και να μεταβληθεί στα επίπεδα που ενδείκνυνται για το επιθυμητό αποτέλεσμα, αλλάζοντας κάθε φορά ορισμένες παραμέτρους του προβλήματος.

8 Σύνοψη Διπλωματικής Εργασίας

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετήθηκε η αναλυτική λύση του προβλήματος μόνιμης μετάδοσης θερμότητας με αγωγή σε κωνικό κέλυφος, στο οποίο τυλίγονται ενισχυτικές ίνες υπό γωνία α . Η λύση που προέκυψε είναι γενική και καλύπτει αρκετές συνθήκες θερμότητας.

Αρχικά, ορίστηκε τοπικό και καθολικό σύστημα συντεταγμένων για το κωνικό κέλυφος και τροποποιήθηκε ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας με την παραδοχή ότι το σύνθετο υλικό είναι ορθοτροπικό.

Στη συνέχεια για την κατάστροψη της μερικής διαφορικής εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα αναλύθηκε το ισοζύγιο θερμότητας σε απειροστό στοιχείου του κωνικού κελύφους. Ελήφθη υπόψη η μετάδοση θερμότητας με αγωγή και συναγωγή, η παραγωγή θερμότητας από το ίδιο το σώμα, που θεωρήθηκε σταθερή, και μια γενική ροή θερμότητας q'' . Η τελευταία ορίστηκε με γενική συνάρτηση, προκειμένου η λύση να βρίσκει εφαρμογή σε διάφορες συνθήκες. Για τον ίδιο λόγο, στη βάση του κώνου εφαρμόζεται μια γενικής μορφής συνοριακή συνθήκη.

Ακολούθως, για τις ανάγκες εύρεσης της αντίστοιχης ομογενούς λύσης, η εξίσωση γράφτηκε στην κανονική της μορφή με καινοτόμο διαδικασία. Η ομογενής λύση βρέθηκε με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Ακολούθως προέκυψαν ιδιοτιμές, που λαμβάνονται εφαρμόζοντας μια αρμονική συνοριακή συνθήκη κατά τη διεύθυνση φ εξασφαλίζοντας τη συνέχεια της ροής της θερμότητας στο κωνικό κέλυφος.

Επιπλέον, με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών υπολογίστηκε μια μερική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης ροής θερμότητας q'' .

Έτσι, η γενική λύση του προβλήματος αποτελεί άθροισμα της ομογενούς και της μερικής λύσης και

τροποποιείται για κάθε συνάρτηση q'' . Οι άγνωστοι συντελεστές της γενικής λύσης υπολογίζονται με χρήση σειρών Fourier.

Επιπροσθέτως, αναλύονται τρεις ειδικές περιπτώσεις για γωνία ίνας $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ και για ισοτροπικό υλικό.

Κλείνοντας, αναφέρονται οι κατασκευές σιλό ως εφαρμογή του προβλήματος που μελετήθηκε για το πεδίο του πολιτικού μηχανικού, παρατίθενται γραφικές απεικονίσεις της αναλυτικής λύσης, καθώς επίσης η σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά από την αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

Τονίζεται τέλος πως η επίλυση βασίζεται στο άρθρο *On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells* από τους M. Norouzi και H. Rahmani (2015), ενώ δεν πραγματοποιήθηκε εξαγωγή διαγραμμάτων και έλεγχος της λύσης με αριθμητική μέθοδο.

Ως αντικείμενο περαιτέρω έρευνας, θα μπορούσε, για παράδειγμα, να εξεταστούν:

- η αναλυτική λύση του προβλήματος με ταυτόχρονη επίδραση ακτινοβολίας
- η εύρεση αναλυτικής λύσης με ημιτονοειδή συνάρτηση της ροής θερμότητας $\overline{q''}$
- η ειδίκευση της λύσης και των συνοριακών συνθηκών για κατασκευές πολιτικού μηχανικού
- η αναλυτική λύση του προβλήματος για μη μόνιμη αγωγή θερμότητας στο κωνικό κέλυφος
- η αναλυτική μελέτη της μετάδοσης θερμότητας σε κώλουρο κώνο με εφαρμογή συνοριακών συνθηκών στο κάτω και πάνω μέρος του.

9 Βιβλιογραφία

- [1] Α.Κ Παπαδοπούλου-Μαθιοπούλου, Κ. Παπαϊωάννου, *Πυροπροστασία μεταλλικών κατασκευών. Δυνατότητες βελτίωσης του πυροπροστατευτικού σχεδιασμού*. Ανακτήθηκε από 5^ο Εθνικό Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών (n.d)
- [2] M.Norouzi, H. Rahmani, *On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells*. International Journal of Thermal Sciences 94 (2015) 110-125
- [3] Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, *Heat and mass transfer: fundamentals and applications*. 5th ed. McGraw-Hill Education, 2015, κυκλοφορεί στα ελληνικά με τίτλο *Μεταφορά μάζας και θερμότητας* από τις Εκδόσεις Τζιόλα, 2012
- [4] Bergman, T.L., Lavine, A.S., Incropera, F.P., Dewitt, D.P., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John. Wiley & Sons, Inc, 2011
- [5] C.L. Tien, G. Chen, *Challenges in microscale conductive and radiative heat transfer*. Journal of Heat Transfer 116 (1994) 799-807
- [6] Fourier J.B.J., *The analytical theory of heat*. Cambridge University Press, 2009
- [7] Παπασιώπη, Ν. *Μεταφορά Θερμότητας και Μάζας*. Ανακτήθηκε από Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Φαινόμενα Μεταφοράς II (n.d)
- [8] J.P. Holman, *Heat Transfer*, 10th ed. McGraw-Hill Education, 2009
- [9] M. Kaviany, *Principles of convective heat transfer*, 2th ed. Springer, 2001
- [10] J.R. Howell, Menguc M. Pinar, and R. Siegel, *Thermal radiation heat transfer*. 6th ed. CRC Press, 2016
- [11] Α. Παϊπέτης, Ν.Μ. Μπάρκουλα, *Σύνθετα υλικά: Χαρακτηρισμός και ιδιότητες*. Σημειώσεις μαθήματος. Εκδόσεις Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 2015
- [12] J.C. Halpin, *Primer on composite materials analysis*, 2th ed. CRC Press, 1992
- [13] Σ.Η. Δρίτσος, *Τα σύνθετα υλικά στις κατασκευές*. Ανακτήθηκε από 15^ο Συνέδριο Σκυροδέματος, 2006
- [14] Α. Ηλιόπουλος, *Μηχανουργικές κατεργασίες σε σύνθετα υλικά*. Μελέτη επίδρασης στις μηχανικές ιδιότητες αυτών. Τ.Ε.Ι Δυτικής Ελλάδας, 2015
- [15] Ι. Γκοτσοπούλου, Α. Κρεμαστιώτη, *Σύνθετα υλικά σε νέες κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα*. Α.Τ.Ε.Ι Πειραιά, 2008
- [16] Σύνθετα υλικά: http://courseware.mech.ntua.gr/ml00001/mathimata/C1_Syntheta_ilika.pdf (Δ. Μανωλάκος, Εκπαιδευτικό Υλικό για το μάθημα Εφαρμογές Προηγμένων Υλικών/ Ε.Μ.Π.)
- [17] Ενίσχυση κατασκευών με σύνθετα υλικά: https://docplayer.gr/2557489-Kefalaio-6-enishysi-kataskeyon-me-syntheta-ylika.html#show_full_text
- [18] D. Hull, T. W. Clyne, *An introduction to composite materials*, 2nd ed. Cambridge University, 1996

- [19] Guide to composites: <https://www.gurit.com/>
- [20] C.T. Herakovich, *Mechanics of fibrous composites*. Wiley, 1998
- [21] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*. 2nd ed. Oxford University Press, 1959
- [22] A.R. Hadjefandiari, *On the symmetric character of the thermal conductivity tensor*. University at Buffalo, 2013
- [23] W.M. Kays, M.E. Crawford, *Convective heat and mass transfer*. 3rd ed. McGraw-Hill, 1993
- [24] Bulk storage: <http://www.fao.org/3/t0522e/T0522E0d.htm>
- [25] Buckling of thin conical shell roofs with edge ring boundary conditions:
<https://conicalroofs.weebly.com>
- [26] Σ. Αγγελίδης, *Δεξαμενές-σιλό*, 1^η έκτακτη έκδοση, Τεχνικά χρονικά, (1994) 114-120
- [27] <https://karanasios.eu/silo>
- [28] S.C. Chapra, R.P. Canale, *Numerical methods for engineers*, 6th ed. McGraw-Hill, 2009
- [29] T. Windhorst, G. Blount, *Carbon-carbon composites: a summary of recent developments and applications*. *Materials & Design* 18 (1997) 11-15