

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



Βέλτιστος Χρονοπρογραμματισμός  
Αδειών Ιπτάμενου Προσωπικού Μέσω της  
Μεθοδολογίας Δημιουργίας Στηλών

---

*Αλεξάνδρα Μαυριδοπούλου*

*Επιβλέπων Καθηγητής: Γεώργιος Κοζανίδης*

Βόλος 2019



ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ  
ΑΔΕΙΩΝ ΙΠΤΑΜΕΝΟΥ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΜΕΣΩ  
ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ  
ΣΤΗΛΩΝ

Διπλωματική Εργασία της Μαυριδοπούλου Αλεξάνδρας

Επιβλέπων καθηγητής: Γεώργιος Κοζανίδης

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

1<sup>ο</sup> Μέλος:

Γεώργιος Κοζανίδης,  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

2<sup>ο</sup> Μέλος:

Δημήτριος Παντελής,  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

3<sup>ο</sup> Μέλος:

Γεώργιος Λυμπερόπουλος,  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας



# Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Καθηγητή κ.Γεώργιο Κοζανίδη, για την υποστήριξη και καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κ.Παντελή και κ.Λυμπερόπουλο για το χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη της εργασίας μου και για τις χρήσιμες υποδείξεις τους. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου, την αδερφή μου και τους φίλους μου για τη στήριξη που μου πρόσφεραν κατά τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων και συνεχίζουν να μου προσφέρουν καθημερινά.

Αλεξάνδρα Μαυριδοπούλου



# Περίληψη

Ο κλάδος των αερομεταφορών έχει εξελιχθεί ραγδαία με την πάροδο του χρόνου και αποτελεί ένα από τα αποδοτικότερα και γρηγορότερα μέσα μεταφοράς της σύγχρονης εποχής. Προκειμένου να επιλύονται αποτελεσματικά προβλήματα που καλείται να αντιμετωπίσει ο συγκεκριμένος κλάδος και να εξασφαλίζεται η σωστή οργάνωση και λειτουργία του, υιοθετούνται κατάλληλες μέθοδοι και μοντέλα βελτιστοποίησης που αναπτύσσονται στα πλαίσια της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η επίλυση ενός ζητήματος που κάθε αεροπορική εταιρία καλείται να αντιμετωπίσει, του ζητήματος ανάθεσης αδειών του ιπτάμενου προσωπικού της, μέσω της επιλογής και εφαρμογής κατάλληλης μεθοδολογίας.

Κατά τη διαδικασία ανάθεσης αδειών υπάρχουν κάποιοι βασικοί παράγοντες οι οποίοι διαμορφώνουν τη μεθοδολογία που ακολουθείται για την επίλυση του προβλήματος. Ο πρώτος παράγοντας είναι οι προσωπικές προτιμήσεις των μελών του ιπτάμενου προσωπικού σχετικά με τις ημέρες άδειάς τους, τις οποίες καλούν να δηλώσουν στην αεροπορική εταιρία συμπληρώνοντας κατάλληλη φόρμα. Ο δεύτερος και εξίσου σημαντικός είναι το κόστος με το οποίο επιβαρύνονται οι αεροπορικές εταιρίες για κάθε ιπτάμενο μέλος το οποίο δεν εξαντλεί το συνολικό αριθμό ημερών που δικαιούται.

Συνυπολογίζοντας τους παράγοντες αυτούς, επιλέγουμε το συνδυασμό των μεθόδων Column Generation και Branch and Price για τη διαμόρφωση κατάλληλου μοντέλου βελτιστοποίησης με σκοπό την επίλυση του προβλήματος. Μέσω της πραγματοποίησης πληθώρας πειραματικών δοκιμών, καταλήγουμε σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε και παραθέτουμε κάποιες προτάσεις οι οποίες μπορούν να τεθούν ως μελλοντικοί στόχοι για την πιο ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος.





# Abstract

During the past few decades the airline industry has evolved rapidly, becoming one of today's fastest and most efficient current means of transport. In order to tackle many of the challenges they are faced with and manage to remain productive as well as functional, airlines are turning to advanced optimization methods and techniques, which are developed within the frameworks of operation research.

One of the most common issues that airlines have to deal with is the resolution of the problem of Vacation Management System, which is also the subject of the present study.

Application of the right approach towards this problem, includes taking into consideration factors, such as the personal preferences of the flight crew regarding the leave dates they are entitled to, as well as the extra cost with which airlines are charged for every member of the crew, who does not exceed the total number of the entitled leave days.

Taking the above mentioned parameters into consideration, the methods of Column Generation and Branch and price are combined into forming a suitable optimization model aiming to solve this problem. A series of trial tests is conducted, leading to the extraction of conclusions regarding the efficiency of the chosen methodology. Finally, improvements of the code that is developed are proposed, so that a more complete approach of this problem may be followed.

# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος σχημάτων</b>	<b>x</b>
<b>Κατάλογος πινάκων</b>	<b>xii</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Κίνητρο . . . . .	1
1.2 Σκοπός . . . . .	1
1.3 Δομή . . . . .	2
<b>2 Αεροπορικές εταιρίες</b>	<b>3</b>
2.1 Ιστορική αναδρομή των εναέριων μεταφορών . . . . .	3
2.2 Εξέλιξη του κλάδου . . . . .	3
2.3 Εφαρμογή της επιχειρησιακής έρευνας στο χώρο των αερομεταφορών . . . . .	4
2.3.1 Αδειοδότηση ιπτάμενου προσωπικού . . . . .	5
<b>3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση</b>	<b>7</b>
3.1 Column Generation . . . . .	7
3.2 Branch and Bound . . . . .	8
3.3 Branch and Price . . . . .	9
<b>4 Διαδικασία Ανάθεσης Αδειών Ιπτάμενου Προσωπικού Σύμφωνα Με Τις Προτιμήσεις Των Ιδίων</b>	<b>11</b>
4.1 Ανάλυση του προβλήματος . . . . .	11
4.2 Κατασκευή του κώδικα . . . . .	13
<b>5 Διαδικασία Ανάθεσης Ημερών Που Υπολείπονται Για Εξάντληση Άδειας Ιπτάμενου Προσωπικού</b>	<b>16</b>
5.1 Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος . . . . .	16
5.2 Κατασκευή του κώδικα . . . . .	18
5.2.1 Θεωρητικό υπόβαθρο για την επίλυση του προβλήματος . . . . .	18
5.2.2 Μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος . . . . .	19
5.2.2.1 Επίλυση του master problem . . . . .	19
5.2.2.2 Επίλυση του column generation sub-problem . . . . .	20
5.2.2.3 Ακεραιοποίηση λύσης . . . . .	22
5.2.2.4 Διαγραφή των μεταβλητών απόφασης που δε χρησιμοποιούνται . . . . .	23

<b>6</b>	<b>Ανάλυση Αποτελεσμάτων</b>	<b>25</b>
6.1	Παράθεση Παραδείγματος . . . . .	25
6.1.1	Είσοδος δεδομένων . . . . .	25
6.1.2	Διαδικασία επίλυσης . . . . .	26
6.1.3	Ανάλυση Και Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Παραδείγματος . . . .	32
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα και Μελλοντικοί Στόχοι</b>	<b>34</b>
7.1	Συμπεράσματα . . . . .	34
7.2	Μελλοντικοί στόχοι . . . . .	35
	<b>Παράρτημα</b>	<b>38</b>

# Κατάλογος σχημάτων

2.1	Αερομεταφορές-Αριθμός επιβατών [15]	4
2.2	Βήματα επίλυσης ζητημάτων αεροπορικών εταιριών [2]	5
2.3	Διαδικασία ανάθεσης αδειών ιπτάμενου προσωπικού	6
3.1	Διαγραμματική απεικόνιση με τη μορφή δέντρου της μεθόδου B&B[4]	8
3.2	Διαγραμματική απεικόνιση μεθόδου Branch and Price	10
4.1	Παράδειγμα φόρμας στην οποία συμπληρώνει τις προτιμήσεις του το ιπτάμενο προσωπικό[7]	12
4.2	Διαδικασία ανάθεσης αδειών σύμφωνα με Strict priority	12
4.3	Διαδικασία ανάθεσης αδειών σύμφωνα με Fair priority	13
4.4	Διαγραμματική απεικόνιση ανάθεσης αιτημάτων άδειας του ιπτάμενου προσωπικού αεροπορικής εταιρίας	15
5.1	Διαγραμματική απεικόνιση δεύτερου σκέλους του προβλήματος με βάση τη Branch and Price και το Column Generation	19
5.2	Αναζήτηση μικρότερου μειωμένου κόστους εβδομάδας	21
5.3	Σύγκριση δύο κόμβων για την εύρεση του βέλτιστου “μονοπατιο”[12]	22
5.4	Προσθήκη νέων κόμβων στο δίκτυο λόγω της απαγόρευσης ορισμένων μονοπατιών[12]	23
5.5	Σχηματική απεικόνιση της διαδικασίας της ακεραιοποίησης	24
6.1	Είσοδος δεδομένων στον κώδικα για το παρόν παράδειγμα	26
6.2	Αρχική μορφή του χαλαρωμένου master προβλήματος του παραδείγματος	26
6.3	Σχηματική απεικόνιση διαδικασίας επίλυσης του column generation sub-problem για το παράδειγμα	27
6.4	Μορφή master προβλήματος μετά την πρώτη επίλυση του column generation sub-problem	28
6.5	Σχηματική απεικόνιση της αντιστοίχισης των αδειών στους δύο ιπταμένους	28
6.6	Αντιστοίχιση μεταβλητής απόφασης $X_8$ στον CrewMember1	29
6.7	Μορφή master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών απόφασης που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember1	30
6.8	Μορφή master προβλήματος μετά την επανάληψη επίλυσής του	30
6.9	Τελική μορφή master προβλήματος μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας επίλυσής του	31
6.10	Αντιστοιχία εβδομάδων στα προγράμματα άδειας για τους δύο ιπτάμενους	32
1	Αρχική μορφή του χαλαρωμένου master προβλήματος	40

2	<i>Μορφή του master προβλήματος μετά την πρώτη επίλυση του column generation sub-problem . . . . .</i>	41
3	<i>Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember3 . . . . .</i>	42
4	<i>Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember4 . . . . .</i>	43
5	<i>Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember5 . . . . .</i>	44
6	<i>Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember1 . . . . .</i>	45
7	<i>Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember2- Τελική μορφή master προβλήματος μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας επίλυσης . . . . .</i>	46

# Κατάλογος πινάκων

6.1	Αποτελέσματα βέλτιστης λύσης master προβλήματος . . . . .	27
6.2	Αποτελέσματα βέλτιστης λύσης μετά την πρώτη επίλυση του column generation sub-problem . . . . .	29
6.3	Αποτελέσματα βέλτιστης λύσης μετά τη διαγραφή των μεταβλητών απόφασης του πρώτου ιπτάμενου . . . . .	31
6.4	Τελικά αποτελέσματα επίλυσης του παραδείγματος . . . . .	32
6.5	Μεταβολή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την επίλυση του προβλήματος . . . . .	32
1	Τελικά αποτελέσματα επίλυσης προβλήματος . . . . .	39

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Κίνητρο

Η αποτελεσματική λειτουργία μίας αεροπορικής εταιρίας βασίζεται στο σωστό προγραμματισμό και την οργάνωσή της. Η χρήση της επιχειρησιακής έρευνας έχει συμβάλει καθοριστικά τις τελευταίες δεκαετίες στην αντιμετώπιση των πολύπλοκων ζητημάτων διαχείρισης και διοίκησης στον κλάδο των εναέριων μεταφορών. Οι αεροπορικές εταιρίες στρέφονται σε προηγμένες μεθόδους βελτιστοποίησης, προκειμένου να αναπτύξουν κατάλληλα συστήματα υποστήριξης αποφάσεων που αφορούν στον πληρέστερο έλεγχο και στη διαχείριση διαδικασιών ούτως ώστε να αποκτήσουν σημαντικό ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι των ανταγωνιστών τους..

Η υπηρεσία που παρέχεται μέσω των αεροπορικών εταιριών είναι η εναέρια μεταφορά επιβατών ή φορτίων από το ένα μέρος στο άλλο. Επομένως, η επιτυχής λειτουργία τους εξαρτάται από τη συνδρομή των παραγόντων της συνέπειας, της συχνότητας των πτήσεων, της υψηλής ποιότητας της παρεχόμενης υπηρεσίας καθώς και της τιμολογιακής πολιτικής που ακολουθούν. Σύμφωνα με τα παραπάνω κριτήρια, η τήρηση των καθορισμένων ωρών αναχωρήσεων και αφίξεων, η πρόταξη της ασφάλειας, οι ικανοποιητικές υπηρεσίες κατά τη διάρκεια των πτήσεων από το ιπτάμενο προσωπικό και η προσφορά εισιτηρίων σε προσιτές τιμές καθιστούν μια αεροπορική εταιρία πετυχημένη και ελκυστική για το καταναλωτικό κοινό.

Προκειμένου λοιπόν, να διασφαλίσουν ότι οι υπηρεσίες τους θα είναι υψηλής ποιότητας αλλά με το ελάχιστο δυνατό κόστος τόσο για τις ίδιες όσο και για τους πελάτες τους, οι αεροπορικές εταιρίες έχουν δαπανήσει σημαντικά κεφάλαια στον κλάδο της επιχειρησιακής έρευνας για την εύρεση αποδοτικών τρόπων οργάνωσης με σκοπό την πετυχημένη και κερδοφόρα παρουσία και λειτουργία τους στον ανταγωνιστικό χώρο των εναέριων μεταφορών.

### 1.2 Σκοπός

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καταβάλλεται προσπάθεια επίλυσης ενός σημαντικού λειτουργικού ζητήματος που αντιμετωπίζουν οι αεροπορικές εταιρίες σήμερα και είναι το ζήτημα ανάθεσης αδειών στο ιπτάμενο προσωπικό τους. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου ότι πολλές εταιρίες δίνουν τη δυνατότητα στα μέλη τους να συμπλη-

ρώνουν ειδικές φόρμες με τις προσωπικές τους προτιμήσεις για τις ημέρες αδειών που δικαιούνται, εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο ελέγχονται τα αιτήματα αυτά βάσει της πολιτικής που εφαρμόζουν οι αεροπορικές εταιρίες και την ανάθεση αυτών που θεωρούνται εφικτά.

Ακολούθως, λόγω του κόστους με το οποίο επιβαρύνονται οι αεροπορικές εταιρίες για κάθε ιπτάμενο ο οποίος δεν εξαντλεί το συνολικό αριθμό των ημερών που δικαιούται, αναλαμβάνουμε να κατασκευάσουμε κατάλληλο μοντέλο βελτιστοποίησης, το οποίο θα αναθέτει τις ημέρες που υπολοίπονται σε κάθε ιπτάμενο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μη παραβιάζονται και πάλι οι κανόνες που καθιστούν μία άδεια εφικτή. Μέσω της μελέτης της σχετικής βιβλιογραφίας σχετικά με τις διαφορετικές μεθόδους και μοντέλα βελτιστοποίησης που έχουν αναπτυχθεί με την πάροδο του χρόνου από τον κλάδο της Επιχειρησιακής Έρευνας, επιλέγουμε το συνδυασμό των μεθόδων Column Generation και Branch and Price βάσει των οποίων αναλύεται αναλύεται η διαδικασία επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος.

### 1.3 Δομή

Αρχικά στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγική αναφορά σχετικά με τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του κλάδου των εναέριων μεταφορών, την εξέλιξή του με την πάροδο του χρόνου και την εφαρμογή χρήσιμων μεθόδων και μοντέλων βελτιστοποίησης της Επιχειρησιακής Έρευνας για την επίλυση ζητημάτων που προκύπτουν σε αυτόν.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 3 πραγματοποιείται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση σε ορισμένες βασικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, όπως αυτό που αναλαμβάνουμε να επιλύσουμε στην παρούσα διπλωματική, προκειμένου να γίνει πιο κατανοητή η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε. Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 4 γίνεται αναλυτική περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για την κατασκευή κατάλληλου κώδικα για την ορθή ανάθεση των αδειών που ζητούνται από το ιπτάμενο προσωπικό ενώ στο Κεφάλαιο 5 αναλύεται η κατασκευή του κατάλληλου μοντέλου βελτιστοποίησης και διατύπωσής του σε μορφή κώδικα για την βέλτιστη ανάθεση των ημερών που υπολοίπονται της συνολικής άδειας για κάθε μέλος του προσωπικού.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 αναλύονται τα αποτελέσματα της μεθόδου που εφαρμόσαμε για την επίλυση του προβλήματος με τη μορφή παραδείγματος ενώ στο Κεφάλαιο 7 παρατίθενται τα συνολικά συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν από την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και οι μελλοντικοί στόχοι που θέτονται και τη βελτίωσή της.



# Κεφάλαιο 2

## Αεροπορικές εταιρίες

### 2.1 Ιστορική αναδρομή των εναέριων μεταφορών

Η πορεία εξέλιξης του κλάδου των αερομεταφορών διακρίνεται σε δύο βασικές χρονικές περιόδους.

Η πρώτη περίοδος εκκινά από το 1903 και διαρκεί μέχρι τη δεκαετία του 70', και χαρακτηρίζεται ως μία περίοδος τεχνολογικών επιτευγμάτων τα οποία συνέβαλαν καθοριστικά στη διαμόρφωση του κλάδου, με σημαντικότερο αυτό της πραγματοποίησης της πρώτης πτήσης σκάφους βαρύτερου από τον αέρα από τους αδερφούς Ράιτ.[9] Η δεύτερη περίοδος εντοπίζεται στα δεύτερα μισά της δεκαετίας του 70' και σημαντικότερο γεγονός που σημειώνεται κατά τη διάρκειά της αποτελεί η απελευθέρωση της αγοράς των εναέριων μεταφορών μεταφορών στις ΗΠΑ η οποία μέχρι τότε τελούσε σε καθεστώς κρατικού μονοπωλίου. Η αλλαγή αυτή συνέβαλε σημαντικά στη ραγδαία εξέλιξη του κλάδου παγκοσμίως, με την είσοδο μεγάλου αριθμού νεοεισερχόμενων αεροπορικών εταιριών στην αγορά οι οποίες προσέφεραν τις υπηρεσίες τους σε προσιτές τιμές για το αγοραστικό κοινό ούτως ώστε να μπορούν να παραμείνουν στην αγορά ανταγωνιστικές.[10]

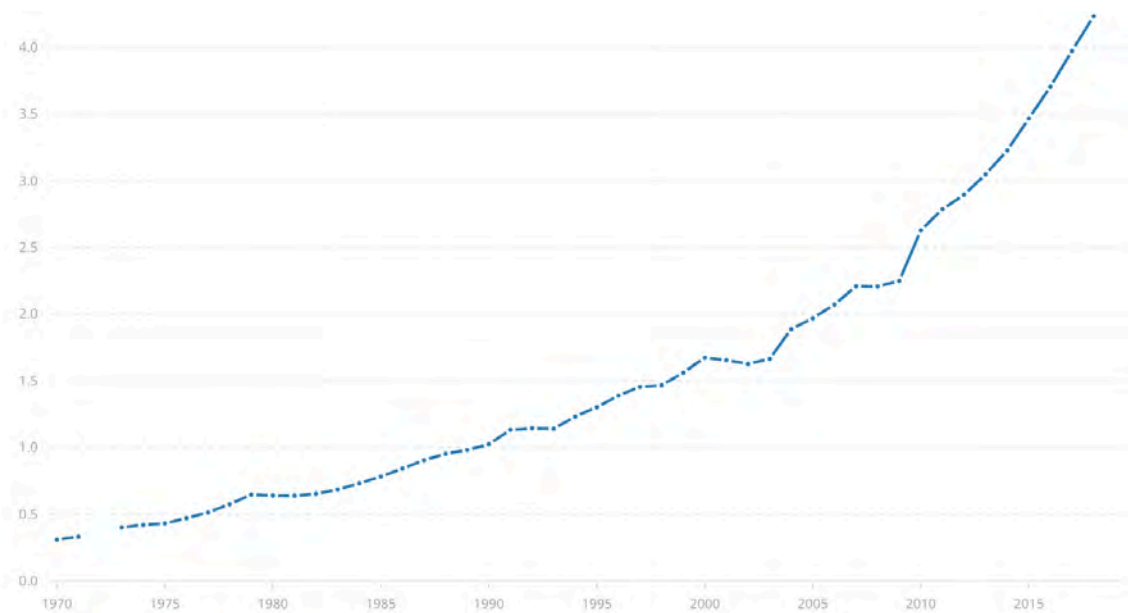
Οι δύο αυτές χρονικές περιόδους συνέβαλαν στην διαμόρφωση της σύγχρονης πραγματικότητας του κλάδου. Η νέα πραγματικότητα χαρακτηρίζεται από την παρουσία ενός δικτύου εκτεινόμενου σε ολόκληρο τον πλανήτη όπου βοηθά σημαντικά στην τόνωση της ανθρώπινης επικοινωνίας μέσω της εκμηδένισης των αποστάσεων.

### 2.2 Εξέλιξη του κλάδου

Σήμερα οι εναέριες μεταφορές αποτελούν το πλέον γρήγορο και αποδοτικό μέσο μεταφοράς για μεγάλες αποστάσεις. Η αξιοπιστία, η ασφάλεια και η ταχύτητα που έχουν εξασφαλίσει μέσω των υπηρεσιών τους δίνουν στον άνθρωπο τη δυνατότητα καλύτερης και αναβαθμισμένης ποιότητας ζωής. Η πρόθεσή τους να προσφέρουν τις υπηρεσίες τους σε προσιτές για τους καταναλωτές τιμές τις καθιστά προσβάσιμες σε διευρυνόμενο κύκλο καταναλωτών.

Η βιομηχανία των αερομεταφορών περιλαμβάνει εναέριο στόλο με περισσότερα από 18.000 αεροσκάφη, τα οποία δραστηριοποιούνται σε πάνω από σε 10.000 αεροδρόμια. Ο ετήσιος τζίρος της συγκεκριμένης βιομηχανίας ανέρχεται στα 260 δισεκατομμύρια δολάρια. Σύμφωνα με στατιστικά δεδομένα της τελευταίας χρονιάς, περίπου 4,2 δισεκα-

τομύρια επιβάτες επέλεξαν ως μέσο μεταφοράς το αεροπλάνο ενώ 221 χιλιάδες τόνοι φορτίου μεταφέρθηκαν εναερίως.



Σχήμα 2.1: Αερομεταφορές-Αριθμός επιβατών [15]

## 2.3 Εφαρμογή της επιχειρησιακής έρευνας στο χώρο των αερομεταφορών

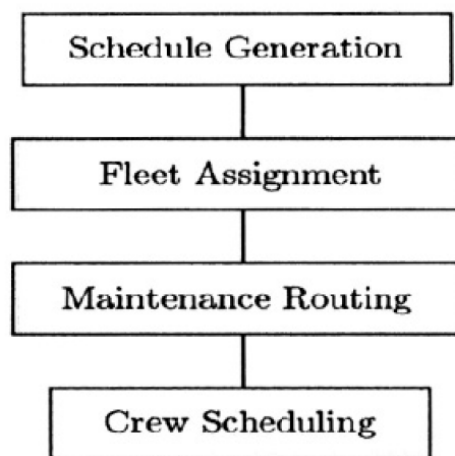
Μερικές μόνο από τις προκλήσεις που καλείται να αντιμετωπίσει μία αεροπορική εταιρία είναι ο τεράστιος ανταγωνισμός, οι υψηλές απαιτήσεις των καταναλωτών καθώς και η πολυπλοκότητα ζητημάτων διαχείρισης και οργάνωσης της εταιρίας. Το τμήμα διαχείρισης αναλαμβάνει να βρει τον κατάλληλο τρόπο ώστε να προσπερνάει τέτοιες προκλήσεις και να εξασφαλίζει την αποτελεσματική λειτουργία των δραστηριοποιούμενων εταιριών, καθιστώντας την παρουσία τους ανταγωνιστική σε σχέση με την υπόλοιπη αγορά.

Ο κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας, μέσω κατάλληλων αλγορίθμων, τεχνικών βελτιστοποίησης και συστημάτων υποστήριξης αποφάσεων τα οποία τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό, επιλύει ικανοποιητικά τέτοια πολύπλοκα και απαιτητικά προβλήματα σε πραγματικό χρόνο, λαμβάνοντας πάντα υπ' όψιν το διεθνές νομικό πλαίσιο που διέπει τη διεθνή αεροπλοΐα και την εκάστοτε αεροπορική εταιρία. Μερικά μόνο από τα ζητήματα που προκύπτουν κατά τη λειτουργία μιας αεροπορικής εταιρίας και τα μοντέλα βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται ως σημαντικό εργαλείο για την επίλυσή τους είναι τα παρακάτω:

- *Κατασκευή προγράμματος πτήσεων*: Καθορισμός της συχνότητας και της ακριβούς ώρας αναχώρησης και αφίξεως των πτήσεων που θα πραγματοποιηθούν προκειμένου να υπάρχει σωστός συντονισμός του και παράλληλα να ικανοποιούνται οι ανάγκες των επιβατών

- *Ανάθεση αεροσκαφών σε πτήσεις:* Επιλογή κατάλληλου τύπου αεροσκάφους για τις ανάγκες κάθε πτήσης ώστε να εξασφαλίζεται το ελάχιστο δυνατό κόστος για την αεροπορική εταιρία
- *Ανάθεση πτήσεων σε κάθε αεροσκάφος:* Καθορισμός των πτήσεων που θα πραγματοποιήσει κάθε αεροσκάφος που ανήκει στο στόλο της αεροπορικής εταιρίας με τέτοιο τρόπο ώστε το αεροσκάφος να επισκέπτεται τους σταθμούς συντήρησής του, σύμφωνα με τη συχνότητα που καθορίζουν αντίστοιχοι κανόνες της διεθνούς αεροπλοΐας
- *Ανάθεση πληρώματος για κάθε πτήση:* Προγραμματισμός των πτήσεων που θα πραγματοποιήσει κάθε μέλος του ιπτάμενου προσωπικού της αεροπορικής εταιρίας. Για τη βελτιστοποίηση του συγκεκριμένου ζητήματος οφείλει να λαμβάνεται υπ' όψιν το αντίστοιχο νομοθετικό πλαίσιο και τις καθορισμένες συνθήκες εργασίας του ιπτάμενου προσωπικού, κριτήρια τα οποία ορίζουν ποιες αναθέσεις καθίστανται εφικτές. Η ανάθεση των αδειοδοτήσεων του προσωπικού με την οποία ασχολείται η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αποτελεί εξειδικευμένο πρόβλημα της συγκεκριμένης υποκατηγορίας. [2]

Ένας τρόπος επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων που καλείται να αντιμετωπίσει κάθε αεροπορική εταιρία είναι η μεταχείριση του αποτελέσματος ενός ζητήματος ως δεδομένο για την επίλυση του επόμενου με βάση τη σειρά που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2: Βήματα επίλυσης ζητημάτων αεροπορικών εταιριών [2]

### 2.3.1 Αδειοδότηση ιπτάμενου προσωπικού

Ένα πρόβλημα που καλούνται να επιλύσουν οι αεροπορικές εταιρίες παράλληλα με αυτό του καθορισμού του πληρώματος για την πραγματοποίηση κάθε πτήσης είναι αυτό του προγραμματισμού της αδειοδότησής του ή αλλιώς Vacation Management System(VMS)

Οι περισσότερες αεροπορικές εταιρίες προκειμένου να προγραμματίσουν τις αδειοδοτήσεις των μελών του προσωπικού τους, καλούν αρχικά τους εργαζομένους τους να

συμπληρώσουν μία καθορισμένη φόρμα με τις προσωπικές τους προτιμήσεις για τις ημερομηνίες εκκίνησης και λήξης των αδειών τους καθώς και τη διάρκεια τους. Η μορφή της φόρμας αυτής διαμορφώνεται κάθε φορά με συγκεκριμένο τρόπο, λαμβάνοντας διάφορες παραμέτρους υπ' όψιν, όπως το αν η διάρκεια της κάθε άδειας είναι προκαθορισμένη από την αεροπορική εταιρία ή όχι.

Για την επίλυση του προβλήματος στη συγκεκριμένη διπλωματική οι κανόνες που πρέπει να τηρούνται προκειμένου να ανατεθεί σε ένα μέλος του προσωπικού μία άδεια που έχει ζητήσει είναι οι εξής:

- **Entitlement:** Κάθε εργαζόμενος έχει έναν καθορισμένο αριθμό ημερών που δικαιούται ως ημέρες άδειας και ο αριθμός αυτός δεν πρέπει να ξεπερνάται.
- **Limitlines:** Για κάθε ημέρα του χρόνου υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός εργαζομένων που μπορούν να λείπουν σε άδεια, χωρίς να επηρεάζεται η πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων της αεροπορικής εταιρίας. Προκειμένου να ανατεθεί σε έναν εργαζόμενο η άδεια που έχει ζητήσει πρέπει πρώτα να ελεγχθεί ότι κατά τις μέρες που θα λείπει δεν υπερβένεται αυτός ο αριθμός.
- **Overlapping:** Ένα αίτημα για άδεια ενός εργαζομένου θεωρείται εφικτό όταν για τις συγκεκριμένες ημερομηνίες έναρξης και λήξης της άδειας δεν έχει ανατεθεί κάποια άλλη άδεια στον εργαζόμενο.
- **Separation:** Κάθε άδεια που έχει ζητηθεί από τον εργαζόμενο πρέπει να απέχει έναν συγκεκριμένο, καθορισμένο από την αεροπορική εταιρία, αριθμό ημερών, από την προηγούμενη και την επόμενη άδεια που του έχει ανατεθεί προκειμένου να θεωρηθεί εφικτή.

Αφού ελεγχθεί οι προτιμήσεις του ιπτάμενου προσωπικού είναι εφικτές και ανατεθούν όσες από αυτές τηρούν τους παραπάνω κανόνες, ορισμένες αεροπορικές εταιρίες χρησιμοποιούν συγκεκριμένο μοντέλο βελτιστοποίησης για την ανάθεση όσων ημερών υπολογίζονται ώστε να φτάσει ο κάθε ιπτάμενος το σύνολο ημερών άδειας που δικαιούται. Αυτή η τακτική ορισμένων αεροπορικών εταιριών ακολουθείται για την επίλυση του προβλήματος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.



Σχήμα 2.3: Διαδικασία ανάθεσης αδειών ιπτάμενου προσωπικού

# Κεφάλαιο 3

## Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Ο κλάδος της επιχειρησιακής έρευνας χρησιμοποιείται για την επίλυση πολλών ζητημάτων που προκύπτουν κατά τη λειτουργία μίας αεροπορικής εταιρίας. Πολλά μάλιστα από αυτά τα ζητήματα έχουν συμβάλει στην περαιτέρω ανάπτυξη του κλάδου, μέσω της κατασκευής νέων μοντέλων και αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής χρησιμοποιούνται η προσέγγιση της μεθοδολογίας δημιουργίας στηλών (Column Generation), η μέθοδος Branch and Bound καθώς και μία μέθοδος που αποτελεί συνδυασμό αυτών, η μέθοδος Branch and Price.

### 3.1 Column Generation

Η μεθοδολογία δημιουργίας στηλών (Column Generation) χρησιμοποιείται για την επίλυση μεγάλης κλίμακας προβλημάτων γραμμικού και πιο συγκεκριμένα ακεραίου προγραμματισμού. Καταφεύγουμε σε αυτή τη μεθοδολογία για την επίλυση προβλημάτων όταν τα προβλήματα αυτά είναι τόσο μεγάλα με αποτέλεσμα να μη μπορούν να εξεταστούν κατά την επίλυσή τους όλες οι μεταβλητές απόφασης. [6]

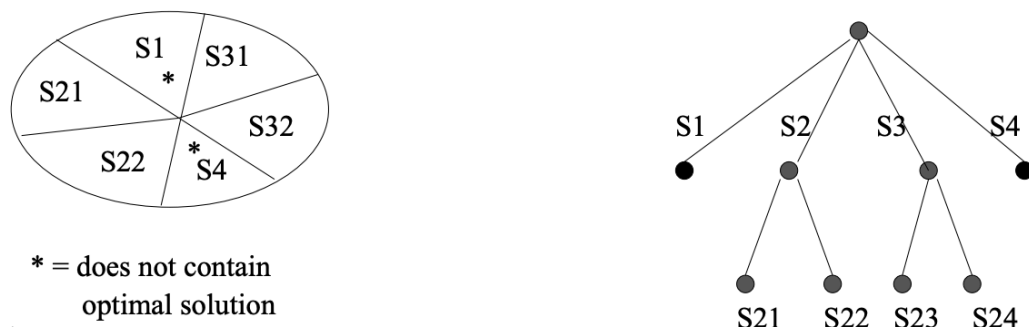
Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη μέθοδο του Column Generation, αρχικά επιλύεται τμήμα του γενικού προβλήματος, στο οποίο έχει συμπεριληφθεί ένας μικρός, διαχειρίσιμος αριθμός των μεταβλητών του αρχικού προβλήματος. Το μικρότερο αυτό πρόβλημα επιλύεται και αναλύονται τα αποτελέσματα της μερικής λύσης του, προκειμένου να αποφασιστεί ποιες θα είναι οι νέες μεταβλητές που θα προστεθούν στο πρόβλημα. Αφού πραγματοποιηθεί η προσθήκη της νέας ή νέων μεταβλητών η διαδικασία επίλυσης του μερικού προβλήματος επαναλαμβάνεται. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου η λύση του αρχικού προβλήματος είναι ικανοποιητική.

Η μέθοδος του Column Generation βασίζεται στο ότι κατά την επίλυση ενός προβλήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex, δεν απαιτείται η ταυτόχρονη πρόσβαση σε όλες τις μεταβλητές του προβλήματος. Αντίθετα, η επίλυση του προβλήματος αφορά από την επιλογή μία βάσης, ενός δηλαδή αρχικού υποσυνόλου μεταβλητών, και η πρόσβαση σε περαιτέρω μεταβλητές αποφασίζεται με χρήση της έννοιας του μειωμένου κόστους. [11]

### 3.2 Branch and Bound

Η Branch and Bound αποτελεί μία θεμελιώδη μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται για την επίλυση διακεκριμένων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Όταν το πρόβλημα προς επίλυση είναι πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού, η επίλυση του με τη μέθοδο B&B προϋποθέτει αρχικά τη χαλάρωσή του, δηλαδή την αγνόηση του περιορισμού της ακεραιότητας για τη βέλτιστη λύση.

Η μέθοδος αυτή διακρίνει το σύνολο των επιτρεπτών λύσεων για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σε μικρότερα υποσύνολα. Κατόπιν, διαφορετικοί κανόνες χρησιμοποιούνται για να προσδιορισθούν τα υποσύνολα εντός των οποίων είναι περισσότερο πιθανό να περιέχεται η βέλτιστη λύση και για να προσδιορισθούν τα υποσύνολα που δε χρειάζεται να διερευνηθούν περαιτέρω διότι δεν περιέχουν πιθανώς τη βέλτιστη λύση[14]. Τα υποσύνολα αυτά απεικονίζονται με τη μορφή κόμβων και διακλαδώσεων σε διάγραμμα δέντρου όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1, αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές του προβλήματος και οδηγούν σε διαφορετικές εφικτές και μη εφικτές λύσεις για το πρόβλημα που εξετάζεται. Η διαδικασία τερματίζεται όταν έχουν διερευνηθεί όλες οι διακλαδώσεις του δέντρου.[13]



Σχήμα 3.1: Διαγραμματική απεικόνιση με τη μορφή δέντρου της μεθόδου B&B[4]

Οι τρεις σημαντικότεροι παράγοντες που συμβάλλουν στη βέλτιστη χρήση του αλγορίθμου της μεθόδου B&B είναι οι εξής:

- *Η στρατηγική αναζήτησης:* Η σειρά με την οποία επιλέγουμε να διερευνήσουμε τα υποσύνολα του δέντρου
- *Η στρατηγική διακλάδωσης:* Ο τρόπος διαχωρισμού του πεδίου τιμών του αρχικού προβλήματος ώστε να παράγονται νέα υποπροβλήματα τα οποία απεικονίζονται στο δέντρο
- *Οι κανόνες διακλάδωσης:* Κανόνες που αποτρέπουν την διερεύνηση υποσυνόλων, στα οποία δεν εμπεριέχεται η βέλτιστη λύση του προβλήματος.

### 3.3 Branch and Price

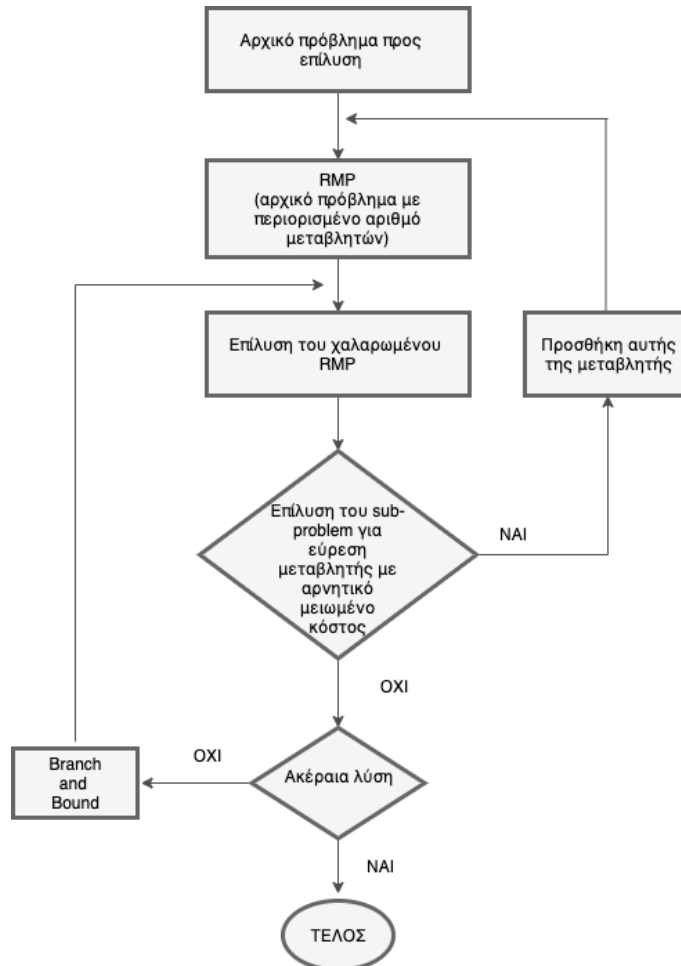
Η Branch and Price είναι μία μέθοδος που υιοθετείται για την επίλυση ενός προβλήματος το οποίο περιλαμβάνει τεράστιο αριθμό μεταβλητών και αποτελεί ένα συνδυασμό των μεθόδων Column Generation και Branch and Bound. Δεδομένου ότι το πλήθος των μεταβλητών δυσχεραίνει την υπολογιστική διαδικασία επίλυσης του προβλήματος και οι περισσότερες από αυτές έχουν μηδενική τιμή στη βέλτιστη λύση αυτού, η μέθοδος αυτή στοχεύει στην επίλυση του αρχικού προβλήματος συμπεριλαμβάνοντας όμως μόνο μια υποστοιχία των μεταβλητών αυτών.

Αρχικά επιλύεται η χαλαρωμένη έκδοση του προβλήματος προς επίλυση. Με τον όρο χαλαρωμένη, εννοείται η αφαίρεση του περιορισμού ακεραιότητας του προβλήματος. Στη συνέχεια, επιδιώκεται η επίλυση ενός προβλήματος, μικρότερου από το αρχικό πρόβλημα, χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο αριθμό μεταβλητών.[5] Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται Restricted Master Problem (RMP) και αποτελεί το ένα από τα δύο προβλήματα που επιλύονται κατά τη διαδικασία του Branch and Price. Το δεύτερο πρόβλημα που επιλύεται είναι το sub-problem, ή αλλιώς column generation sub-problem ή pricing problem, με την επίλυση του οποίου λαμβάνεται η δυική λύση του αρχικού προβλήματος. Στη συνέχεια, με βάση τη δυική τιμή που αντιστοιχεί σε κάθε περιορισμό του προβλήματος και αντιπροσωπεύει ένα μειωμένο κόστος που θα συμβάλει στη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης του RMP (θεωρώντας ότι το αρχικό πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης), αποφασίζεται εάν θα προστεθούν καινούργιες στήλες, δηλαδή εάν θα προστεθούν καινούργιες μεταβλητές στη βάση του RMP.[3]

Πιο αναλυτικά, η διαδικασία που ακολουθείται σύμφωνα με την προσέγγιση του Branch and Price για την επίλυση ενός προβλήματος είναι η εξής:

- Αρχικά επιλύεται το RMP, στο οποίο εξετάζεται μία συγκεκριμένη υποστοιχία μεταβλητών του αρχικού προβλήματος που επιθυμούμε να επιλύσουμε.
- Στη συνέχεια, η δυική λύση του RMP δίνει τις δυικές τιμές που αντιστοιχούν σε κάθε περιορισμό του προβλήματος. Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για την επίλυση του sub-problem και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυτού αντιστοιχεί σε ένα μειωμένο κόστος.
- Εάν αυτό το μειωμένο κόστος έχει αρνητική τιμή, τότε σημαίνει ότι υπάρχει κάποια μεταβλητή η οποία εάν προστεθεί στο RMP, θα συμβάλει αυτό το μειωμένο κόστος στην αντικειμενική συνάρτηση του RMP. Στην περίπτωση επομένως αρνητικού μειωμένου κόστους, η μεταβλητή που αντιστοιχεί σε αυτό προστίθεται στο RMP και αυτό επιλύεται εκ νέου.
- Η επανάληψη της επίλυσης του RMP με την προσθήκη της νέας μεταβλητής οδηγεί σε νέες δυαδικές τιμές για κάθε περιορισμό του προβλήματος και επομένως σε επανάληψη της επίλυσης του sub-problem για την αναζήτηση νέου αρνητικού μειωμένου κόστους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου η λύση του sub-problem να μην είναι αρνητική, να υπάρχουν δηλαδή άλλες μεταβλητές οι οποίες αν προστεθούν στο RMP θα μειώσουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησής του.

- Εάν η διαδικασία ολοκληρωθεί διότι δεν υπάρχουν άλλες μεταβλητές με αρνητικό μειωμένο κόστος που μπορούν να προστεθούν στο RMP και η βέλτιστη λύση δεν είναι ακέραια, τότε χρησιμοποιούμε τη λογική της μεθόδου Branch and Bound για να παραχθεί μία ακέραια βέλτιστη λύση.



Σχήμα 3.2: Διαγραμματική απεικόνιση μεθόδου Branch and Price



## **Κεφάλαιο 4**

# **Διαδικασία Ανάθεσης Αδειών Ιπτάμενου Προσωπικού Σύμφωνα Με Τις Προτιμήσεις Των Ιδίων**

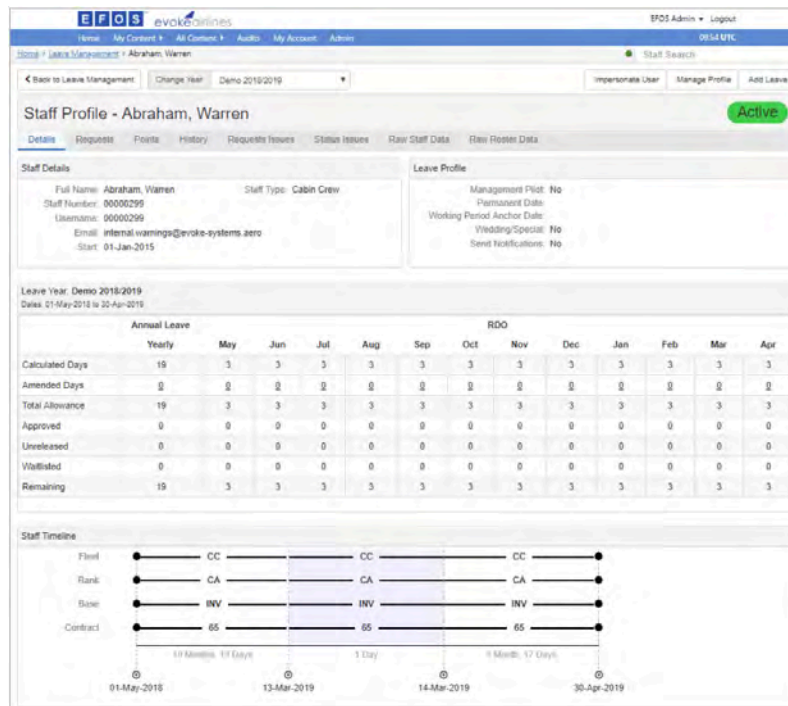
Το ένα από τα δύο σκέλη κώδικα που κατασκευάστηκαν προκειμένου να πραγματοποιηθεί η αδειοδότηση του ιπτάμενου προσωπικού για την παρούσα διπλωματική εργασία είναι το σκέλος που αφορά τον έλεγχο και την ανάθεση αδειών με βάση τις προσωπικές προτιμήσεις που έχουν συμπληρώσει οι εργαζόμενοι.

Η διαδικασία κατασκευής αυτού του σκέλους του κώδικα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους κανόνες που τίθενται από τις αεροπορικές εταιρίες σχετικά με το ποιες προτιμήσεις θεωρούνται εφικτές και μπορούν να ανατεθούν στους εργαζομένους, περιγράφεται εκτενώς στο παρόν κεφάλαιο.

### **4.1 Ανάλυση του προβλήματος**

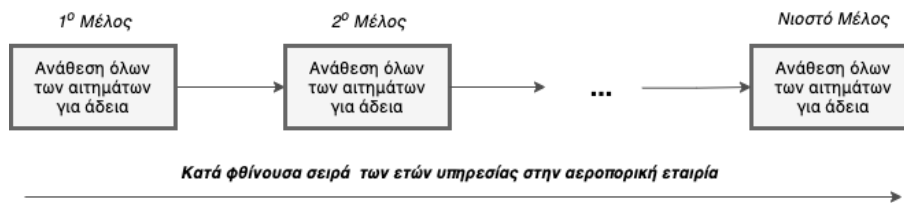
Ένα από τα πολλά ζητήματα που καλείται να αντιμετωπίσει μία αεροπορική εταιρία είναι η ανάθεση αδειών του ιπτάμενου προσωπικού της (VMS). Προκειμένου η ανάθεση των αδειών να ικανοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερους εργαζομένους, οι αεροπορικές εταιρίες καλούν το προσωπικό τους να συμπληρώσει μία ειδικά διαμορφωμένη φόρμα ώστε να διατυπώσουν τις προτιμήσεις του σχετικά με την έναρξη, λήξη και διάρκεια των αδειών του.

Αφού συλλεχθούν οι συμπληρωμένες φόρμες όλων των εργαζομένων ξεκινά η διαδικασία ελέγχου της εφικτότητας της κάθε προτίμησης. Η εφικτότητα των προτιμήσεων για την παρούσα διπλωματική εργασία κρίνεται βάσει των κανόνων που αναφέρθηκαν διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2.3.1.[1]



Σχήμα 4.1: Παράδειγμα φόρμας στην οποία συμπληρώνει τις προτιμήσεις του το ιπτάμενο προσωπικό[7]

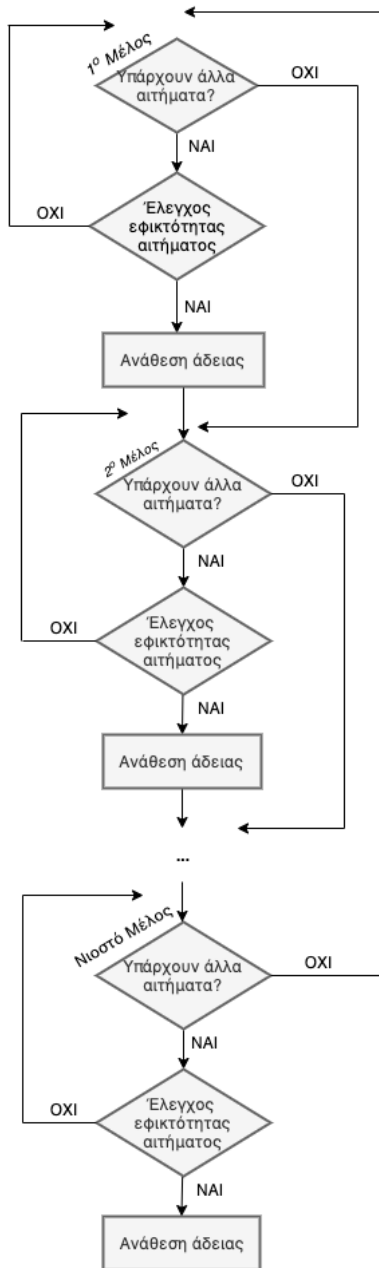
Κατόπιν, ακολουθεί η ανάθεση των εφικτών αδειών στο ιπτάμενο προσωπικό. Αν και στην πλειοψηφία των αεροπορικών εταιριών προτεραιότητα κατά την ανάθεση των αδειών δίνεται στα μέλη με τα περισσότερα χρόνια υπηρεσίας στην εταιρία (Seniority rule) η σειρά με την οποία δίνονται οι άδειες διαφέρει ανάλογα με την πολιτική που ακολουθεί κάθε εταιρία. Ορισμένες αεροπορικές εταιρίες ακολουθούν τον κανόνα της αυστηρής προτεραιότητας (Strict priority), σύμφωνα με την οποία η ανάθεση ξεκινά με το μέλος του προσωπικού το οποίο έχει τα περισσότερα χρόνια προϋπηρεσίας στην εταιρία. Ανατίθενται σε αυτό όσα από τα αιτήματά του για άδεια ελέγχθηκαν και κρίθηκαν εφικτά και αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία ανάθεσης για αυτό το μέλος συνεχίζεται για το μέλος με τα αμέσως λιγότερα χρόνια προϋπηρεσίας.



Σχήμα 4.2: Διαδικασία ανάθεσης αδειών σύμφωνα με Strict priority

Άλλες αεροπορικές εταιρίες ακολουθούν τον κανόνα της δίκαιης προτεραιότητας (Fair priority), σύμφωνα με τον οποίο αν και η διαδικασία ανάθεσης ξεκινά πάλι με το μέλος του προσωπικού με τα περισσότερα χρόνια εργασίας στην εταιρία, αφού ανατεθεί σε αυτό η πρώτη από τις άδειες που επιθυμεί να πάρει και είναι εφικτή, η διαδικασία συνεχίζεται για όλα τα μέλη του ιπτάμενου προσωπικού ώστε να ανατεθεί σε όλα μία άδεια που έχουν ζητήσει. Η διαδικασία τότε συνεχίζεται, ξεκινώντας και πάλι από το “γηραιό-

τερο” μέλος της εταιρίας και ακολουθεί την ίδια σειρά έως ότου ανατεθούν όλες οι άδειες που έχουν ζητηθεί από τα μέλη και τηρούν τους κανόνες εφικτότητας.



Σχήμα 4.3: Διαδικασία ανάθεσης αδειών σύμφωνα με Fair priority

Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας δίκαιης προτεραιότητας (Fair priority).

## 4.2 Κατασκευή του κώδικα

Ο κώδικας ο οποίος κατασκευάστηκε για την αναπαράσταση και την επίλυση του προβλήματος της παρούσας διπλωματικής, γράφτηκε με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού

C. Η C είναι μία γλώσσα υψηλού επιπέδου που χρησιμοποιείται σε ποικίλες εφαρμογές και παράγει αποδοτικά και γρήγορα εκτελέσιμα προβλήματα. [8]

Η κατασκευή του κατάλληλου κώδικα για την επίλυση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε λαμβάνοντας υπ' όψιν τους παρακάτω κανόνες που ελέγχουν την εφικτότητα ενός αιτήματος για άδεια βάσει της πολιτικής που ακολουθείται από την κάθε αεροπορική εταιρία, οι οποίοι αναλύθηκαν πιο διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2.3.1.

- **Entitlement**
- **Limitlines**
- **Overlapping**
- **Separation**

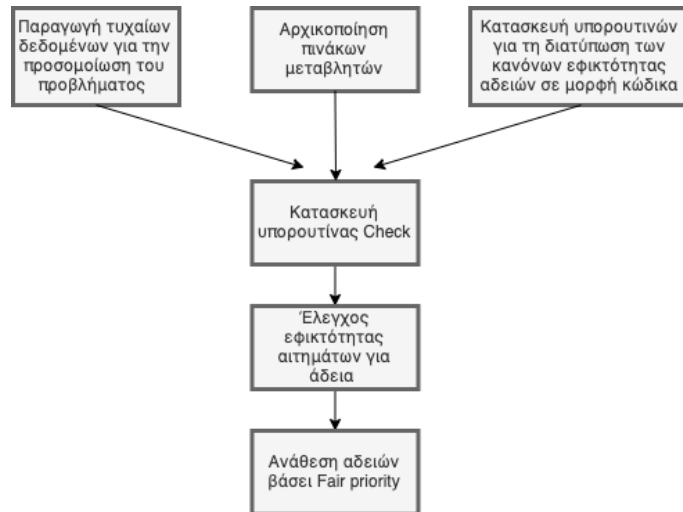
Εξίσου σημαντικός παράγοντας για τη σωστή ανάθεση των αδειών στα μέλη του ιπτάμενου προσωπικού είναι και η σειρά προτεραιότητας η οποία ακολουθείται μεταξύ των εργαζομένων και στην προκειμένη διπλωματική εργασία είναι η δίκαιη προτεραιότητα (Fair priority).

Κατά την έναρξη λειτουργίας του κώδικα, αρχικοποιούνται οι πίνακες μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν κατά την εκτέλεσή του ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα. Συμπληρωματικά, προκειμένου να προσομοιωθεί η τυχαιότητα των πραγματικών δεδομένων που συλλέγονται από τις ειδικές φόρμες που καλείται να συμπληρώσει το ιπτάμενο προσωπικό και εξαρτώνται από τις εκάστοτε προτιμήσεις του, στον κώδικα χρησιμοποιείται γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Η συνάρτηση που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι η *srand*.

Κατόπιν, τα δεδομένα τα οποία παράγονται και αντιπροσωπεύουν τα αιτήματα αδειών του ιπτάμενου προσωπικού, ελέγχονται ως προς την εφικτότητά τους από τους κανόνες που αναφέρθηκαν. Οι κανόνες αυτοί διατυπώνονται στον κώδικα με την κατασκευή τεσσάρων ξεχωριστών υπορουτινών, μία υπορουτίνα για κάθε κανόνα ο οποίος πρέπει να ελεγχθεί.

Ακολούθως, κατασκευάζουμε μία ακόμη υπορουτίνα, την Check, η οποία συνδέει όλα τα παραπάνω στοιχεία και τις υπορουτίνες του κώδικα προκειμένου να πραγματοποιηθεί κατ'επανάληψη για όλα τα μέλη του προσωπικού ο έλεγχος των αιτημάτων τους. Η κατασκευή της συγκεκριμένης υπορουτίνας πραγματοποιήθηκε λαμβάνοντας υπ' όψιν και προσαρμόζοντας με κατάλληλο τρόπο τη λογική της δίκαιης προτεραιότητας ώστε τόσο ο έλεγχος των αιτημάτων όσο και η ανάθεση των εφικτών αδειών να πραγματοποιούνται με τη σειρά που υποδεικνύεται από τη συγκεκριμένη λογική.

Το πρώτο σκέλος του προβλήματος ολοκληρώνεται με την ανάθεση των εφικτών αιτημάτων άδειας στα μέλη του ιπτάμενου προσωπικού τα οποία τα έχουν ζητήσει.



Σχήμα 4.4: Διαγραμματική απεικόνιση ανάθεσης αιτημάτων άδειας του ιπτάμενου προσωπικού αεροπορικής εταιρίας

## Κεφάλαιο 5

# Διαδικασία Ανάθεσης Ημερών Που Υπολείπονται Για Εξάντληση Άδειας Ιπτάμενου Προσωπικού

Σύμφωνα με την πολιτική που ακολουθείται από πολλές αεροπορικές εταιρίες, για κάθε μέλος του ιπτάμενου προσωπικού το οποίο δεν εξαντλεί τον προβλεπόμενο αριθμό των ημερών άδειας που δικαιούται η εταιρία επιβαρύνεται με ένα κόστος.

Σκοπός του δεύτερου σκέλους του προβλήματος, αφού ολοκληρωθεί το πρώτο σκέλος κατά το οποίο ανατίθενται στο προσωπικό τα αιτήματα για άδεια τα οποία είναι εφικτά, είναι η ανάθεση των υπόλοιπων ημερών που δικαιούται το κάθε μέλος, εάν αυτές δεν έχουν καλυφθεί μέσω των αιτημάτων του. Η ανάθεση αυτών των ημερών γίνεται με τυχαίο τρόπο και μόνος περιορισμός είναι το σύνολο των ημερών άδειας για κάθε εργαζόμενο να περιλαμβάνει τις ημέρες άδειας που είχαν ζητηθεί από τον ίδιο, είχαν ελεγχθεί και είχαν ανατεθεί σε αυτόν από το πρώτο σκέλος του προβλήματος.

### 5.1 Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος

Προκειμένου να κατανοηθεί καλύτερα το πρόβλημα που καλείται να επιλυθεί μέσω της παρούσας διπλωματικής, ακολουθεί η μαθηματική μοντελοποίηση αυτού.

#### *Σύνολα:*

**W** : Αριθμός εβδομάδων που εξετάζονται στο πρόβλημα και μπορούν να ανατεθούν άδειες

**N** : Αριθμός ιπτάμενων για τους οποίους επιλύεται το πρόβλημα ώστε να ανατεθούν σε αυτούς άδειες

#### *Παράμετροι:*

**c** : Σταθερό κόστος το οποίο επιβάλλεται για κάθε ιπτάμενο του οποίου δεν εξαντλούνται οι ημέρες άδειας που δικαιούται μετά τη βελτιστοποίηση του προβλήματος

$L_i$  : Αριθμός ιπταμένων που έχουν τη δυνατότητα να έχουν πάρει άδεια κάθε εβδομάδα  $i$  του χρονικού διαστήματος που εξετάζεται

**Μεταβλητές απόφασης:**

$X_j$  : Δυαδική μεταβλητή η οποία παίρνει την τιμή 1 όταν το πρόγραμμα ημερών άδειας, το οποίο διαμορφώνεται ανάλογα με τις εβδομάδες στις οποίες εμφανίζεται η συγκεκριμένη μεταβλητή, ανατίθεται σε έναν ιπτάμενο, ενώ παίρνει την τιμή 0 όταν το συγκεκριμένο πρόγραμμα δεν είναι το βέλτιστο

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σημειογραφία μορφοποιείται το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\text{Min} \sum_j c * X_j \quad (5.1)$$

$$\text{s.t.} \sum_j X_j = 1, \quad \forall f \in N \quad (5.2)$$

$$\sum_j X_j \geq 0, \quad \forall w \in W \quad (5.3)$$

$$\sum_j X_j \leq L_i, \quad \forall w \in W \quad (5.4)$$

$$X_j \text{ binary}, \quad X_j \in Z \quad (5.5)$$

Στην εξίσωση (5.1) διατυπώνεται η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, το οποίο είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης και στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των μεταβλητών απόφασης  $X_j$  οι οποίες περιλαμβάνουν αριθμό ημερών άδειας μικρότερο από το συνολικό αριθμό ημερών που δικαιούται κάθε ιπτάμενος. Κάθε δυαδική μεταβλητή  $X_j$ , η οποία δεν εξαντλεί το συνολικό αριθμό ημερών άδειας και γίνεται ίση με την τιμή 1, πολλαπλασιάζεται στην αντικειμενική συνάρτηση με ένα σταθερό κόστος  $c$  το οποίο επιβαρύνεται η αεροπορική εταιρία και στην παρούσα διπλωματική αποφασίστηκε να είναι ίσο με 1000 μονάδες. Επομένως η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος μπορεί να γραφεί και ως:

$$\text{Min} \sum_j 1000 * X_j \quad (5.6)$$

Ακολουθώς, το σύνολο των εξισώσεων (5.2) οι οποίες είναι στον αριθμό ίσες με τον αριθμό των ιπταμένων για τους οποίους επιλύεται το πρόβλημα, εκφράζει το σύνολο των διαφορετικών προγραμμάτων αδειοδοτήσεως που παράγονται από το μοντέλο βελτιστοποίησης για κάθε ιπτάμενο. Η ισότητα με τη μονάδα χρησιμοποιείται διότι αφού παραχθούν αυτά τα διαφορετικά προγράμματα το μοντέλο βελτιστοποίησης υποχρεώνει τη μεταβλητή απόφασης  $X_j$  η οποία αντιστοιχεί στο βέλτιστο πρόγραμμα αδειοδοτήσεως να γίνει ίση με 1 ενώ όλες οι υπόλοιπες μηδενίζονται, και ως αποτέλεσμα αποκλείονται τα προγράμματα που εκείνες αντιπροσωπεύουν.

Το σύνολο των εξισώσεων (5.3) οι οποίες ισούνται με τον αριθμό των εβδομάδων για τις οποίες επιλύεται το πρόβλημα, εκφράζει το σύνολο των εβδομάδων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε πρόγραμμα. Πιο συγκεκριμένα, αν παραδείγματος χάριν ένα πρόγραμμα, το οποίο στη μορφοποίηση συμβολίζεται ως δυαδική  $X_n$ , περιλαμβάνει για έναν ιπτάμενο ως εβδομάδες άδειας την πρώτη, τρίτη και πέμπτη εβδομάδα, σύμφωνα με την εξίσωση (5.3) η  $X_n$  θα εμφανίζεται στην πρώτη, τρίτη και τέταρτη εξίσωση από το συνολικό αριθμό εξισώσεων που αντιστοιχούν στον περιορισμό (5.3).

Τέλος, το σύνολο των εξισώσεων (5.4) οι οποίες όπως και στον περιορισμό (5.3) είναι ίσες με τον αριθμό εβδομάδων του προβλήματος, εκφράζουν τον περιορισμό του κανόνα των Limitlines. Ο συνολικός δηλαδή αριθμός των προγραμμάτων που παράγονται κατά τη βελτιστοποίηση του προβλήματος και οι δυαδικές μεταβλητές που τις αντιπροσωπεύουν στη μορφοποίηση γίνονται ίσες με 1 δε μπορούν να ξεπερνάνε το συνολικό αριθμό εργαζομένων που μπορούν να βρίσκονται σε άδεια κάθε εβδομάδα,  $L_i$ .

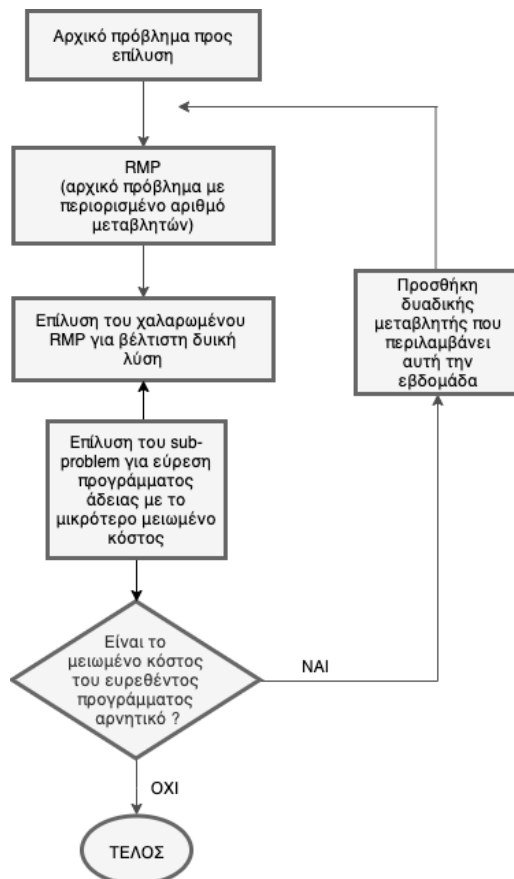
## 5.2 Κατασκευή του κώδικα

Το δεύτερο σκέλος του κώδικα γράφεται όπως και το πρώτο με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού C. Χρησιμοποιούνται επίσης εντολές για την διατύπωση του μοντέλου βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα, οι οποίες παρέχονται από το λογισμικό βελτιστοποίησης IBM ILOG CPLEX 12.5.1.

### 5.2.1 Θεωρητικό υπόβαθρο για την επίλυση του προβλήματος

Το θεωρητικό υπόβαθρο, στο οποίο βασίζεται η κατασκευή κατάλληλου κώδικα με σκοπό την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης των ημερών που υπολείπονται για την εξάντληση των συνολικών ημερών άδειας κάθε μέλους του ιπτάμενου προσωπικού, είναι η θεωρία του Branch and Price και του Column generation, οι οποίες αναλύθηκαν διεξοδικά στο Κεφάλαιο 3.3. Η διαγραμματική απεικόνιση του σχήματος 5.1 περιγράφει την προσαρμογή των συγκεκριμένων θεωριών στο παρόν πρόβλημα που αναλαμβάνουμε να επιλύσουμε στην παρούσα διπλωματική.





Σχήμα 5.1: Διαγραμματική απεικόνιση δεύτερου σκέλους του προβλήματος με βάση τη Branch and Price και το Column Generation

## 5.2.2 Μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την επίλυση του προβλήματος απαρτίζεται από τα εξής στάδια:

- Επίλυση του αρχικού (master) προβλήματος
- Επίλυση του column generation sub-problem
- Ακεραιοποίηση των λύσεων του sub-problem
- Διαγραφή μεταβλητών προβλήματος που καταλήγουν να μη χρησιμοποιούνται λόγω της ακεραιοποίησης

### 5.2.2.1 Επίλυση του master problem

Ακολουθεί η χαλάρωση του πλέον διατυπωμένου προβλήματος, η αφαίρεση δηλαδή του περιορισμού ακεραιότητας για τη μεταβλητή  $X_j$ . Μετά τη χαλάρωση, η μεταβλητή απόφασης  $X_j$  μπορεί να λάβει οποιαδήποτε πραγματική τιμή η οποία ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$  και όχι την ακέραια τιμή 0 ή 1 όπως διατυπώνεται στην αρχή της μορφοποίησης του προβλήματος. Επομένως μετά τη χαλάρωση του προβλήματος, η μορφοποίηση του νέου master προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$\text{Min} \sum_j 1000 * X_j \quad (5.7)$$

$$\text{s.t.} \sum_j X_j = 1, \quad \forall f \in N \quad (5.8)$$

$$\sum_j X_j \geq 0, \quad \forall w \in W \quad (5.9)$$

$$\sum_j X_j \leq L_i, \quad \forall w \in W \quad (5.10)$$

$$X_j \geq 0 \quad (5.11)$$

Στη συνέχεια επιλύεται το master πρόβλημα ώστε να χρησιμοποιηθεί η δυική βέλτιστη λύση του στην επίλυση του sub-problem μέσω του Column generation.

### 5.2.2.2 Επίλυση του column generation sub-problem

Η δυική λύση, η οποία λαμβάνεται από την επίλυση του χαλαρωμένου master προβλήματος χρησιμοποιείται στην επίλυση του column generation sub-problem.

Η δυική λύση αποτελείται από ένα σύνολο πραγματικών αριθμών, οι οποίοι ισούνται με τον αριθμό των περιορισμών του μορφοποιημένου προβλήματος που περιγράφονται από τις εξισώσεις (5.8) έως (5.10), δηλαδή για κάθε περιορισμό αντιστοιχεί και μία πραγματική τιμή από το σύνολο των πραγματικών τιμών της δυικής λύσης.

Σκοπός του column generation sub-problem είναι η σύγκριση των μειωμένων κοστών κάθε εβδομάδας προκειμένου να δημιουργηθούν νέοι συνδυασμοί εβδομάδων οι οποίοι διαμορφώνουν εφικτά προγράμματα αδειών και να προστεθούν στο master πρόβλημα με τη μορφή νέων μεταβλητών απόφασης  $X_n$ . Το μειωμένο κόστος κάθε εβδομάδας υπολογίζεται μέσω του αθροίσματος των δυικών τιμών των περιορισμών (5.9) και (5.10) οι οποίες αντιστοιχούν σε αυτή την εβδομάδα και της δυικής τιμής που αντιστοιχεί στον περιορισμό (5.8) για τον κάθε ιπτάμενο. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική σχέση που χρησιμοποιείται είναι η εξής:

$$RC_i = M - \text{dual}(N + i) - \text{dual}(N + W + i) \quad (5.12)$$

όπου:

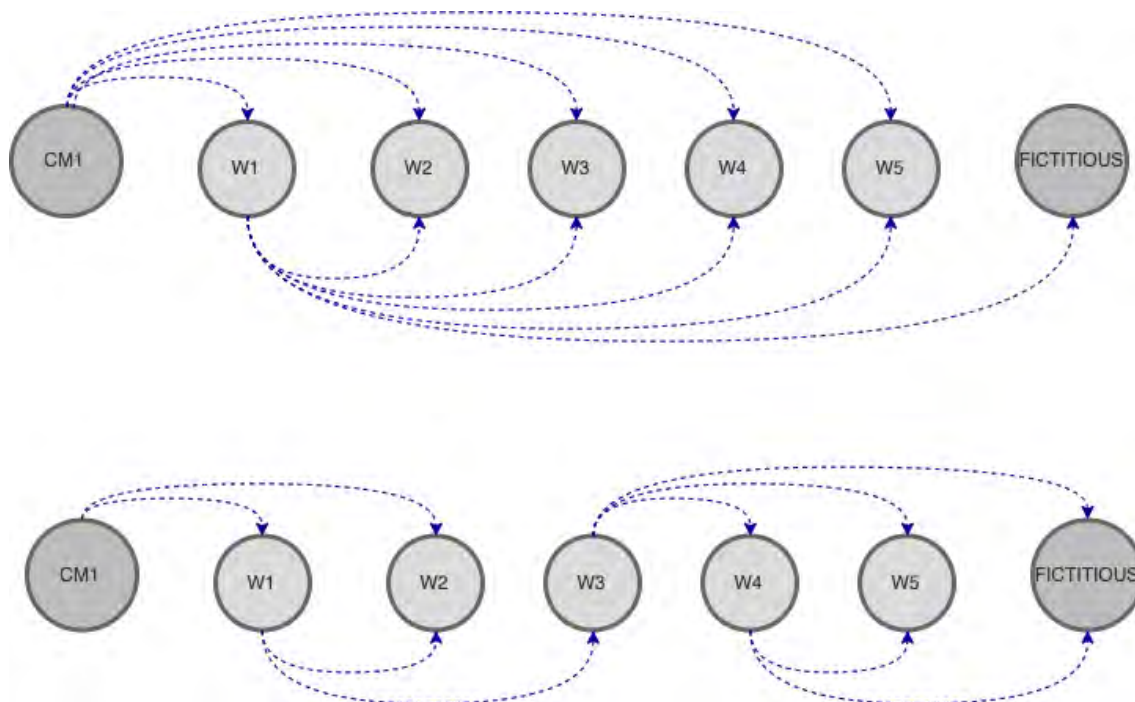
$M$  : Ένας πολύ μεγάλος αριθμός που χρησιμοποιείται για την αρχικοποίηση του μειωμένου κόστους κάθε ιπτάμενου

$\text{dual}$  : Διάνυσμα το οποίο περιέχει τις δυαδικές τιμές της βέλτιστης λύσης του master προβλήματος για κάθε περιορισμό του

$N$  : Αριθμός ιπταμένων για τους οποίους επιλύεται το πρόβλημα

$W$  : Αριθμός εβδομάδων για τις οποίες επιλύεται το πρόβλημα

Η λογική που χρησιμοποιείται για την επίλυση του column generation problem εξηγείται με μεγαλύτερη σαφήνεια μέσω του σχήματος 5.2.



Σχήμα 5.2: Αναζήτηση μικρότερου μειωμένου κόστους εβδομάδας

Ο πρώτος κόμβος που παριστάνεται στο παραπάνω σχήμα είναι ουσιαστικά ο μηδενικός κόμβος που αντιστοιχεί σε κάθε ιπτάμενο και κατά την επίλυση αρχικοποιείται με μία πολύ μεγάλη τιμή. Στην παρούσα διπλωματική η τιμή αυτή ισούται με  $10^6$ . Οι επόμενοι πέντε κόμβοι αντιστοιχούν στις εβδομάδες για τις οποίες επιλύεται το πρόβλημα (για τη σχηματική αναπαράσταση θεωρούμε ότι το σύνολο των εβδομάδων είναι πέντε). Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί ένα μειωμένο κόστος το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση (5.12). Ο τελευταίος κόμβος, ο οποίος ονομάζεται Fictitious διότι είναι ένας πλασματικός κόμβος, αποθηκεύεται μετά από τη σύγκριση των μειωμένων κοστών που δημιουργούν οι διαφορετικοί συνδυασμοί των εβδομάδων, αυτό που έχει την πιο αρνητική τιμή.

Η εύρεση του βέλτιστου προγράμματος άδειας για κάθε ιπτάμενο γίνεται μέσω του σκαναρίσματος του δικτύου που δημιουργείται μεταξύ των εβδομάδων όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.2, με τοπολογική σειρά προκειμένου, μέσω των επαναλαμβανόμενων συγκρίσεων των μειωμένων κοστών που προκύπτουν από κάθε “μονοπάτι” του δικτύου, να βρεθεί αυτό με το μικρότερο μειωμένο κόστος.

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθοδολογίας επίλυσης του column generation subproblem χρησιμοποιείται ένα αριθμητικό παράδειγμα, όπως αυτό αναλύεται στο [12], και παριστάνεται σχηματικά στο σχήμα 5.3. Για κάθε κόμβο του προβλήματος υπάρχουν οι μεταβλητές:

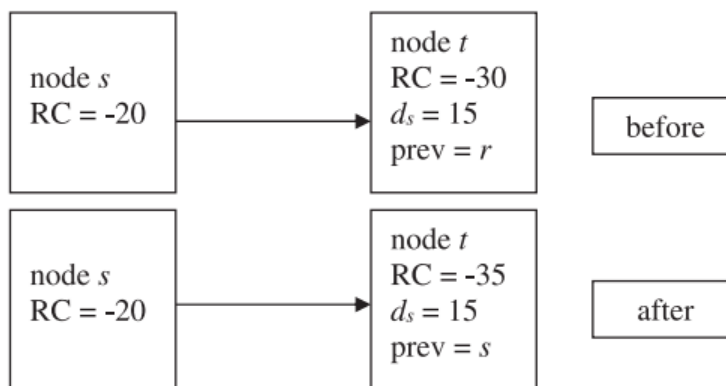
$RC$  : το μειωμένο κόστος του συγκεκριμένου κόμβου-εβδομάδας

$d_s$  : η δυική τιμή που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη εβδομάδα

$prev$  : μία μεταβλητή η οποία αποθηκεύει τον αριθμό του τελευταίου κόμβου του “μονοπατιού” από τον οποίο καταλήγουμε σε αυτόν που εξετάζουμε

οι οποίες ανανεώνονται κάθε φορά που βρίσκεται ένα καλύτερο “μονοπάτι”. Έστω ότι η μετακίνηση από τον κόμβο  $s$  στον κόμβο  $t$  είναι εφικτή, βάσει των κανόνων που ελέγχουν

την εφικτότητα ανάθεσης αδειών, και εξετάζεται το αν θα συμπεριληφθεί και ο κόμβος  $t$  στο συγκεκριμένο “μονοπάτι”. Υποθέτουμε ότι η δυική τιμή της βέλτιστης λύσης που αντιστοιχεί στον κόμβο  $t$  ισούται με 15 και το μειωμένο κόστος του βέλτιστου “μονοπατιού” που καταλήγει στον κόμβο  $s$  ισούται με -20, ενώ το μειωμένο κόστος του βέλτιστου μονοπατιού που καταλήγει στον κόμβο  $t$  ισούται με -30. Επομένως, επεκτείνοντας το “μονοπάτι” από τον κόμβο  $s$  στον κόμβο  $t$  δημιουργείται ένα νέο, καλύτερο “μονοπάτι” με μειωμένο κόστος -35. Ως αποτέλεσμα, το μειωμένο κόστος του βέλτιστου “μονοπατιού” ανανεώνεται και γίνεται ίσο με -35 ενώ ανανεώνεται και η μεταβλητή  $prev$  του κόμβου  $t$  καθώς πλέον το βέλτιστο “μονοπάτι” που καταλήγει σε αυτόν τον κόμβο, καταλήγει από τον κόμβο  $s$ . Η μεταβλητή  $prev$  χρησιμοποιείται για την αποθήκευση της διαδρομής που ακολουθείται από το βέλτιστο “μονοπάτι”.



Σχήμα 5.3: Σύγκριση δύο κόμβων για την εύρεση του βέλτιστου “μονοπατιού”[12]

Αφού βρεθεί ένα βέλτιστο “μονοπάτι” κατά την επίλυση του column generation sub-problem, μέσω της μεταβλητής  $prev$  βρίσκουμε τις εβδομάδες τις οποίες συμπεριλαμβάνει και προσθέτουμε μία νέα μεταβλητή  $X_j$ , η οποία αντιστοιχεί σε αυτό το βέλτιστο πρόγραμμα, στο master πρόβλημα σε όσους περιορισμούς αντιστοιχούν σε αυτές τις εβδομάδες.

Η διαδικασία επίλυσης του column generation sub-problem τερματίζεται όταν δεν μπορεί να βρεθεί κανένα μειωμένο κόστος κατά τον συνδυασμό των εβδομάδων το οποίο είναι αρνητικό.

### 5.2.2.3 Ακεραιοποίηση λύσης

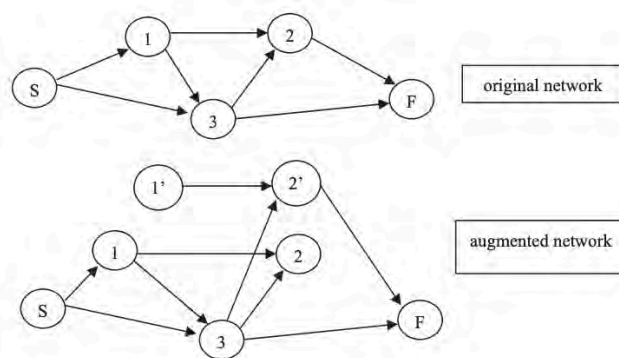
Όταν η βέλτιστη λύση που προκύπτει για το χαλαρωμένο master πρόβλημα δεν είναι ακέραια αλλά αντίθετα αποτελείται από μία σειρά μεταβλητών απόφασης οι οποίες έχουν πραγματικές τιμές, ακολουθείται στον κώδικα μία διαδικασία για την ακεραιοποίησή της.

Πιο συγκεκριμένα, αφού βρεθεί η βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου master προβλήματος, σκανάρονται όλες οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος ώστε να ελεγχθεί εάν κάποια από αυτές έχει πραγματική και όχι ακέραια τιμή και αν ναι, να αποθηκευτεί αυτή που έχει τη μεγαλύτερη πραγματική τιμή.

Ακολουθώντας, διασταυρώνουμε σε ποιον ιπτάμενο αντιστοιχεί η συγκεκριμένη μεταβλητή απόφασης και βρίσκουμε και τις υπόλοιπες μεταβλητές απόφασης που έχουν δημιουργηθεί για το συγκεκριμένο ιπτάμενο. Βασισμένοι στη μεθοδολογία του Branch and

Bound, η οποία αναλύθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο 3.2, δίνουμε στη μεταβλητή απόφασης με τη μεγαλύτερη πραγματική τιμή που βρήκαμε, την τιμή 1 και επομένως λόγω του περιορισμού (5.8) του μοντέλου μορφοποίησης που αναλύεται στο Κεφάλαιο 5.2.2.1 οι υπόλοιπες μεταβλητές απόφασης γίνονται ίσες με το 0.

Ένα σχηματικό παράδειγμα της δημιουργίας νέων δυνατοτήτων στο πρόβλημα κατά τη διαδικασία ακεραιοποίησης των μεταβλητών απόφασης της βέλτιστης λύσης του προβλήματος και της συνεπακόλουθης διαγραφής όσων από αυτές δε συμμετέχουν πλέον στη βέλτιστη λύση του προβλήματος καθώς είναι ίσες με το 0, παρουσιάζεται στο [Kozanidis]. Στο παράδειγμα αυτό, αναπαρίσταται σχηματικά η δημιουργία ενός νέου "μονοπατιού", του 1'-2, λόγω της απαγόρευσης του "μονοπατιού" S-1-2-F.



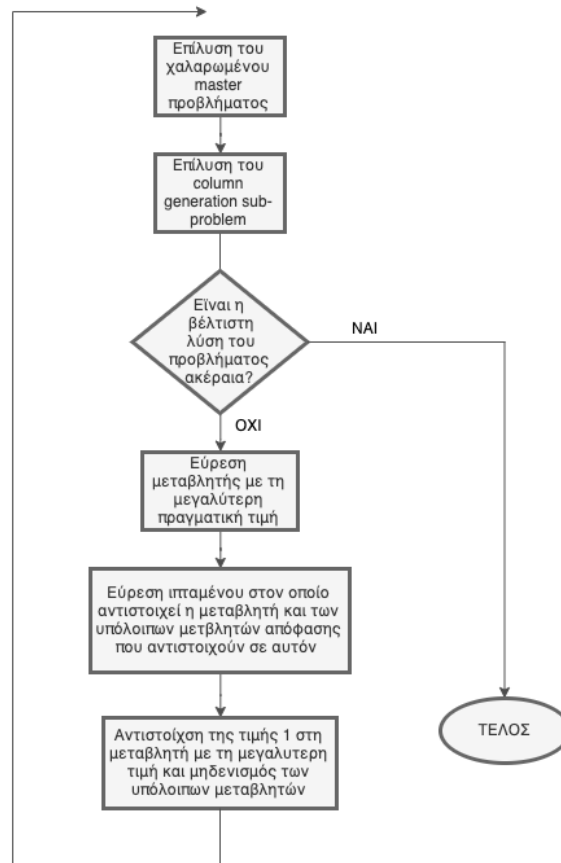
Σχήμα 5.4: Προσθήκη νέων κόμβων στο δίκτυο λόγω της απαγόρευσης ορισμένων μονοπατιών[12]

#### 5.2.2.4 Διαγραφή των μεταβλητών απόφασης που δε χρησιμοποιούνται

Επειδή εκτός από τη μεταβλητή που μετά τη διαδικασία της ακεραιοποίησης γίνεται ίση με το 1, οι υπόλοιπες μεταβλητές απόφασης είναι πλέον ίσες με το 0 και δε χρησιμοποιούνται στο master πρόβλημα, αναλαμβάνουμε να τις διαγράψουμε από αυτό. Μετά τη διαγραφή τους, επιλύουμε ξανά το master πρόβλημα καθώς έχει αλλάξει η μορφή του πρώτου και επομένως η δυική βέλτιστη λύση του καθώς και τα μειωμένα κόστη που θα προκύψουν από αυτήν θα είναι διαφορετικά.

Στη συνέχεια επιλύεται ξανά το column generation sub-problem για την ακεραιοποίηση των μεταβλητών απόφασης που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους ιπταμένους. Η διαδικασία συνεχίζεται με την εύρεση της επόμενης νέας μεταβλητής απόφασης με τη μεγαλύτερη πραγματική τιμή και την εφαρμογή της υπόλοιπης μεθοδολογίας που μόλις αναλύθηκε για την ακεραιοποίησή της και τη διαγραφή των υπόλοιπων μεταβλητών απόφασης που αφορούν τον ίδιο ιπτάμενο.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται τόσες φορές ώστε όλες οι μεταβλητές απόφασης της βέλτιστης λύσης του master προβλήματος να είναι ακέραιες, αγνοώντας κάθε φορά τους ιπταμένους για τους οποίους έχει πραγματοποιηθεί η διαδικασία της ακεραιοποίησης.



Σχήμα 5.5: Σχηματική απεικόνιση της διαδικασίας της ακεραιοποίησης

# Κεφάλαιο 6

## Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Προκειμένου να γίνει κατανοητή από τον αναγνώστη η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος της ανάθεσης αδειών σε ένα σύνολο ιπταμένων, η οποία περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς και τα αποτελέσματα που παίρνουμε, θα παρουσιάσουμε παρακάτω ένα μικρό παράδειγμα ενός τέτοιου προβλήματος καθώς και όλη την προσέγγιση μέχρι την επίλυσή του.

### 6.1 Παράθεση Παραδείγματος

#### 6.1.1 Είσοδος δεδομένων

Η επιλογή των δεδομένων εισόδου στο παράδειγμα που τίθεται στο παρόν κεφάλαιο έγινε με σκοπό η μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος να γίνει όσο το δυνατόν πιο σαφής στον αναγνώστη.

Για αυτό το λόγο, επιλέγουμε να αναλύσουμε την απλούστερη εκδοχή του προβλήματος με δεδομένα εισόδου τα εξής:

**N** = 2 *αριθμός ιπταμένων*

**W** = 10 *αριθμός εβδομάδων*

**T** = 70 *αριθμός ημερών*

**Limitline** = 1 *αριθμός ιπταμένων που μπορούν να παίρνουν την ίδια εβδομάδα άδεια*

**Entitlement** = 5 *αριθμός εβδομάδων που δικαιούνται να πάρουν άδεια οι ιπτάμενοι*

Στην εκδοχή αυτή δε συμπεριλαμβάνεται το πρώτο σκέλος του προβλήματος, δηλαδή θεωρούμε ότι δεν έχει ανατεθεί κανένα από τα προσωπικά αιτήματα για άδεια που έχουν ζητήσει οι ιπτάμενοι.

Επίσης, στα πλαίσια της απλούστευσης του προβλήματος δε λαμβάνεται υπ' όψιν ως παράμετρος ο κανόνας του Separation, ο οποίος αναλύεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 2.3.1 και αφορά το διαχωρισμό δύο διαφορετικών αδειών με έναν συγκεκριμένο αριθμό εβδομάδων.

```

#define N 2 // number of crew members
#define T 70 // number of days in leave year
#define W 10 // number of weeks in leave year
#define MaxBids 0 // maximum number of bids a crew member can ask for
#define Separation 0 // number of weeks that separate two bids

```

Σχήμα 6.1: Είσοδος δεδομένων στον κώδικα για το παρόν παράδειγμα

## 6.1.2 Διαδικασία επίλυσης

### Χαλάρωση του master προβλήματος

Κατά την εκκίνηση της διαδικασίας, πραγματοποιείται η χαλάρωση του master προβλήματος, η αφαίρεση δηλαδή του περιορισμού της ακεραιότητας των μεταβλητών απόφασης  $X_j$ .

Όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα, το οποίο αποτελεί προϊόν του κώδικα που κατασκευάστηκε, οι περιορισμοί Week1-Week10 και οι Limitline1-Limitline10 οι οποίοι αντιστοιχούν στους περιορισμούς (5.9) και (5.10) αντίστοιχα του Κεφαλαίου 5.2.2.1, αρχικά δεν περιέχουν καμία μεταβλητή απόφασης γιατί δεν έχει ανατεθεί καμία άδεια στους ιπτάμενους στην αρχή του προβλήματος.

Επίσης, παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης του κόστους είναι ίση με 2000 καθώς ακόμα δεν έχει ξεκινήσει η διαδικασία βελτιστοποίησης του προβλήματος και λόγω του περιορισμού (5.8) οι μεταβλητές  $X_1$  και  $X_2$  είναι ίσες με 1.

```

Minimize
  obj: 1000 x1 + 1000 x2
Subject To
  CrewMember1: x1 = 1
  CrewMember2: x2 = 1
  Week1: >= 0
  Week2: >= 0
  Week3: >= 0
  Week4: >= 0
  Week5: >= 0
  Week6: >= 0
  Week7: >= 0
  Week8: >= 0
  Week9: >= 0
  Week10: >= 0
  Limitline1: <= 1
  Limitline2: <= 1
  Limitline3: <= 1
  Limitline4: <= 1
  Limitline5: <= 1
  Limitline6: <= 1
  Limitline7: <= 1
  Limitline8: <= 1
  Limitline9: <= 1
  Limitline10: <= 1

```

Σχήμα 6.2: Αρχική μορφή του χαλαρωμένου master προβλήματος του παραδείγματος

Τα αποτελέσματα της βέλτιστης λύσης μέχρι αυτό το σημείο παρατίθενται στον παρακάτω Πίνακα 6.1.



Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα βέλτιστης λύσης master προβλήματος

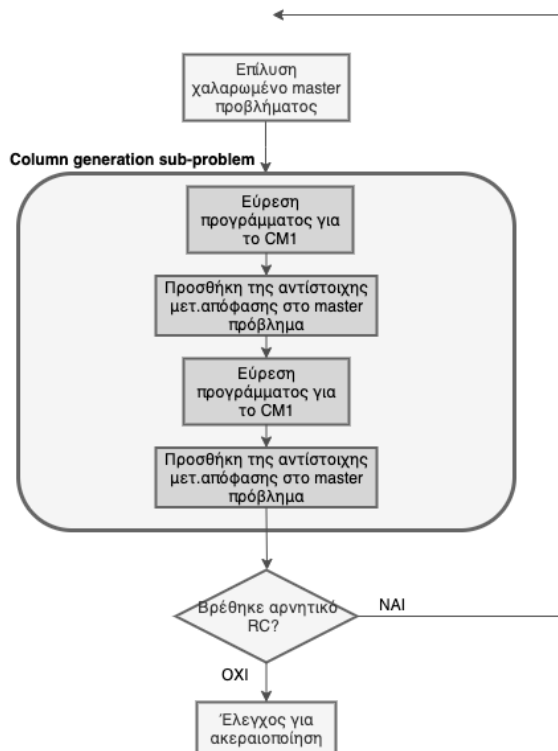
	Τιμή στη βέλτιστη λύση
$X_1$	1
$X_2$	1
Αντικ.Συνάρτηση $z$	2000

### Επίλυση του column generation sub-problem

Αφού πραγματοποιηθεί η χαλάρωση του master προβλήματος, ξεκινά η επίλυση του column generation sub-problem. Αφού επιλυθεί το χαλαρωμένο master πρόβλημα και πάρουμε τη δυική βέλτιστη λύση του, ξεκινά η διαδικασία σύγκρισης των μειωμένων κοστών των δέκα εβδομάδων του προβλήματος για την εύρεση του μικρότερου μειωμένου κόστους που μπορεί να προκύψει από το συνδυασμό τους και επομένως ενός “καλύτερου μονοπατιού” που μπορεί να ακολουθηθεί για την ανάθεση των αδειών, όπως περιγράφεται αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 5.2.2.1.

Η διαδικασία αρχικά πραγματοποιείται για τον πρώτο ιπτάμενο, παράγεται κάποιο πρόγραμμα άδειας μέσω του column generation sub-problem, προστίθεται με τη μορφή μεταβλητής απόφασης  $X_j$  στο master πρόβλημα και στη συνέχεια η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τον δεύτερο ιπτάμενο.

Ακολούθως, επιλύεται ξανά το master πρόβλημα καθώς νέες μεταβλητές απόφασης έχουν προστεθεί σε αυτό και επομένως η δυική βέλτιστη λύση του έχει αλλάξει. Η συνολική διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου δε βρεθεί κανένα αρνητικό μειωμένο κόστος κατά την επίλυση του column generation sub-problem. Η μεθοδολογία αναπαρίσταται σχηματικά για καλύτερη κατανόηση από τον αναγνώστη στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 6.3: Σχηματική απεικόνιση διαδικασίας επίλυσης του column generation sub-problem για το παράδειγμα

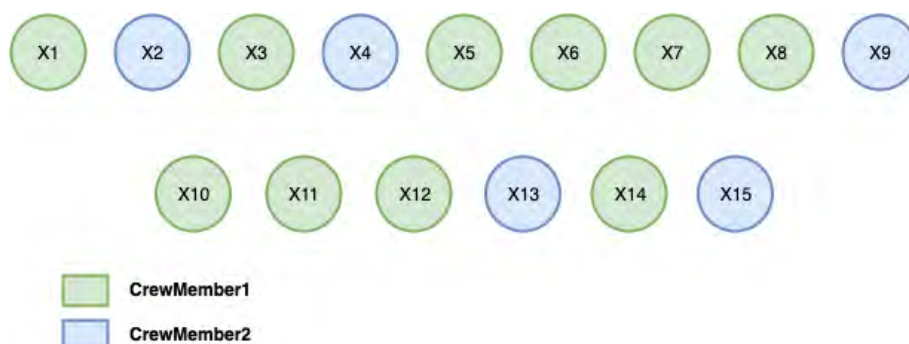
Στο παράδειγμα που επιλύεται, το master πρόβλημα μετά την επίλυση του column generation sub-problem και τον τερματισμό του λόγω μη εύρεσης κάποιου αρνητικού κόστους, παίρνει τη μορφή που παρατίθεται παρακάτω.

```

Minimize
  obj: 1000 x1 + 1000 x2
Subject To
  CrewMember1: x1 + x3 + x5 + x6 + x7 + x8 + x10 + x11 + x12 + x14 = 1
  CrewMember2: x2 + x4 + x9 + x13 + x15 = 1
  Week1: x3 + x4 + x5 + x7 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 >= 0
  Week2: x3 + x4 + x5 + x6 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 >= 0
  Week3: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x10 + x11 + x12 + x13 >= 0
  Week4: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 >= 0
  Week5: x3 + x4 + x6 + x7 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 >= 0
  Week6: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 >= 0
  Week7: x8 + x11 + x12 + x13 >= 0
  Week8: x8 + x11 + x14 + x15 >= 0
  Week9: x8 + x14 + x15 >= 0
  Week10: x14 + x15 >= 0
  Limitline1: x3 + x4 + x5 + x7 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 <= 1
  Limitline2: x3 + x4 + x5 + x6 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 <= 1
  Limitline3: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x10 + x11 + x12 + x13 <= 1
  Limitline4: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 <= 1
  Limitline5: x3 + x4 + x6 + x7 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 <= 1
  Limitline6: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 <= 1
  Limitline7: x8 + x11 + x12 + x13 <= 1
  Limitline8: x8 + x11 + x14 + x15 <= 1
  Limitline9: x8 + x14 + x15 <= 1
  Limitline10: x14 + x15 <= 1
    
```

Σχήμα 6.4: Μορφή master προβλήματος μετά την πρώτη επίλυση του column generation sub-problem

Όπως φαίνεται από τα δεδομένα του Σχήματος 6.4, μετά την επίλυση του column generation sub-problem έως τη στιγμή που δε βρίσκεται κάποιο αρνητικό μειωμένο κόστος, έχουν παραχθεί κάποια προγράμματα άδειας για τους δύο ιπτάμενους του προβλήματος. Τα προγράμματα που ανήκουν στον κάθε ιπτάμενο φαίνονται από τους πρώτους δύο περιορισμούς της μορφοποίησης, CrewMember1 και CrewMember2, οι οποίοι είναι αντίστοιχοι του περιορισμού (5.8) της μορφοποίησης που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 5.2.2.1.



Σχήμα 6.5: Σχηματική απεικόνιση της αντιστοίχισης των αδειών στους δύο ιπτάμενους

Μετά την ολοκλήρωση επίλυσης του column generation sub-problem για πρώτη φορά η βέλτιστη λύση που έχει βρεθεί για το χαλαρωμένο master πρόβλημα παρατίθεται στον Πίνακα 6.2.

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα βέλτιστης λύσης μετά την πρώτη επίλυση του column generation sub-problem

	Τιμή στη βέλτιστη λύση
$X_1$	0
$X_2$	0.166667
$X_3$	0
$X_4$	0.333333
$X_5$	0
$X_6$	0
$X_7$	0.166667
$X_8$	0.5
$X_9$	0
$X_{10}$	0
$X_{11}$	0.166667
$X_{12}$	0
$X_{13}$	0.333333
$X_{14}$	0.166667
$X_{15}$	0.166667
Αντικ.Συνάρτηση z	166.666667

### Ακεραιοποίηση της λύσης

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 6.2 η βέλτιστη λύση που προέκυψε από τη λύση του column generation sub-problem δεν είναι ακέραια. Επομένως ακολουθεί η διαδικασία ακεραιοποίησής της.

Αρχικά, αναζητούμε ποια είναι η μεταβλητή με τη μεγαλύτερη δεκαδική λύση, η οποία βλέποντας τον Πίνακα 6.2 συμπεραίνουμε ότι είναι η μεταβλητή απόφασης  $X_8$  με τιμή 0.5. Στη συνέχεια, αναζητούμε σε ποιον ιπτάμενο ανήκει η συγκεκριμένη μεταβλητή απόφασης. Ο ιπτάμενος αυτός είναι ο CrewMember1.

```

Minimize
  obj: 1000 x1 + 1000 x2
Subject To
  CrewMember1: x1 + x3 + x5 + x6 + x7 + x8 + x10 + x11 + x12 + x14 = 1
  CrewMember2: x2 + x4 + x9 + x13 + x15 = 1
  Week1: x3 + x4 + x5 + x7 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 >= 0
  Week2: x3 + x4 + x5 + x6 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 >= 0
    
```

Σχήμα 6.6: Αντιστοίχιση μεταβλητής απόφασης  $X_8$  στον CrewMember1

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία που ακολουθείται κατά την ακεραιοποίηση είναι η διαγραφή όλων των υπόλοιπων μεταβλητών απόφασης που αντιστοιχούν στα διαφορετικά προγράμματα άδειας που παράχθηκαν για το CrewMember1. Οι μεταβλητές απόφασης επομένως που θα διαγραφούν είναι οι  $X_1, X_3, X_5, X_6, X_7, X_{10}, X_{11}, X_{12}$  και  $X_{14}$ . Τη διαδικασία διαγραφής του αναλαμβάνει στον κώδικα συγκεκριμένη υπορουτίνα και η μορφή του προβλήματος καταλήγει να είναι αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.7.

```

Minimize
  obj: 1000 x1
Subject To
  CrewMember1: x3 = 1
  CrewMember2: x1 + x2 + x4 + x5 + x6 = 1
  Week1: x2 + x4 + x6 >= 0
  Week2: x2 + x4 + x5 + x6 >= 0
  Week3: x2 + x5 >= 0
  Week4: x2 + x3 + x4 >= 0
  Week5: x2 + x4 + x5 >= 0
  Week6: x3 + x4 + x5 >= 0
  Week7: x3 + x5 >= 0
  Week8: x3 + x6 >= 0
  Week9: x3 + x6 >= 0
  Week10: x6 >= 0
  Limitline1: x2 + x4 + x6 <= 1
  Limitline2: x2 + x4 + x5 + x6 <= 1
  Limitline3: x2 + x5 <= 1
  Limitline4: x2 + x3 + x4 <= 1
  Limitline5: x2 + x4 + x5 <= 1
  Limitline6: x3 + x4 + x5 <= 1
  Limitline7: x3 + x5 <= 1
  Limitline8: x3 + x6 <= 1
  Limitline9: x3 + x6 <= 1
  Limitline10: x6 <= 1

```

Σχήμα 6.7: Μορφή master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών απόφασης που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember1

Όπως φαίνεται και από τη μορφοποίηση μετά την πρώτη ακεραιοποίηση, στον πρώτο ιπτάμενο αντιστοιχεί πλέον μόνο μία μεταβλητή απόφασης, η  $X_3$ , η οποία αποτελεί το τελικό βέλτιστο πρόγραμμα άδειας που βρέθηκε για εκείνον.

Στη συνέχεια, το master πρόβλημα επιλύεται ξανά διότι λόγω των αλλαγών που έλαβαν χώρα με την ακεραιοποίηση της μεταβλητής  $X_8$  ( $X_3$  πλέον στο καινούργιο master πρόβλημα) η τιμή της βέλτιστης δυικής μεταβλητής έχει αλλάξει, άρα μπορούν να δημιουργηθούν καινούργια προγράμματα για τον δεύτερο ιπτάμενο, τα οποία ίσως να οδηγήσουν σε αρνητικό μειωμένο κόστος, δηλαδή σε καινούργια βέλτιστη τιμή.

```

Minimize
  obj: 1000 x1
Subject To
  CrewMember1: x3 = 1
  CrewMember2: x1 + x2 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 = 1
  Week1: x2 + x4 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 >= 0
  Week2: x2 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 >= 0
  Week3: x2 + x5 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 >= 0
  Week4: x2 + x3 + x4 >= 0
  Week5: x2 + x4 + x5 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 >= 0
  Week6: x3 + x4 + x5 + x7 >= 0
  Week7: x3 + x5 + x8 >= 0
  Week8: x3 + x6 + x10 >= 0
  Week9: x3 + x6 + x9 >= 0
  Week10: x6 + x11 >= 0
  Limitline1: x2 + x4 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 <= 1
  Limitline2: x2 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 <= 1
  Limitline3: x2 + x5 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 <= 1
  Limitline4: x2 + x3 + x4 <= 1
  Limitline5: x2 + x4 + x5 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 <= 1
  Limitline6: x3 + x4 + x5 + x7 <= 1
  Limitline7: x3 + x5 + x8 <= 1
  Limitline8: x3 + x6 + x10 <= 1
  Limitline9: x3 + x6 + x9 <= 1
  Limitline10: x6 + x11 <= 1

```

Σχήμα 6.8: Μορφή master προβλήματος μετά την επανάληψη επίλυσής του

Παρατηρώντας το Σχήμα 6.8, συμπεραίνουμε ότι η επανάληψη της επίλυσης του master

προβλήματος και η νέα βέλτιστη δυική λύση του οδηγούν στη δημιουργία των μεταβλητών απόφασης  $X_7, X_8, X_9, X_{10}$  και  $X_{11}$ , δηλαδή στη δημιουργία πέντε νέων προγραμμάτων άδειας για τον δεύτερο ιπτάμενο.

Ο Πίνακας 6.3 αντιστοιχεί στις τιμές των μεταβλητών απόφασης και της αντικειμενικής συνάρτησης του master προβλήματος σε αυτό το στάδιο επίλυσής του.

Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα βέλτιστης λύσης μετά τη διαγραφή των μεταβλητών απόφασης του πρώτου ιπτάμενου

	Τιμή στη βέλτιστη λύση
$X_1$	0
$X_2$	0
$X_3$	1
$X_4$	0
$X_5$	0
$X_6$	0
$X_7$	0
$X_8$	0
$X_9$	0
$X_{10}$	0
$X_{11}$	1
Αντικ.Συνάρτηση z	0

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι στη βέλτιστη λύση δεν υπάρχει κάποια μη ακέραια μεταβλητή απόφασης, επομένως το κομμάτι της ακεραιοποίησης κατά το οποίο σκανάρονται οι μεταβλητές απόφασης προκειμένου να βρεθεί η μεγαλύτερη δεκαδική και να ακεραιοποιηθεί δεν πραγματοποιείται για τον συγκεκριμένο ιπτάμενο.

Το επόμενο και τελευταίο στάδιο για την ολοκλήρωση της επίλυσης του προβλήματος είναι η διαγραφή των υπόλοιπων μεταβλητών απόφασης που αντιστοιχούν στον δεύτερο ιπτάμενο,  $X_7, X_8, X_9$  και  $X_{10}$  οι οποίες ισούνται με 0.

Μετά τη διαγραφή αυτών των μεταβλητών απόφασης, η τελική μορφοποίηση του master προβλήματος είναι η μορφοποίηση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.9.

```

Minimize
  obj:
Subject To
  CrewMember1: x1 = 1
  CrewMember2: x2 = 1
  Week1: x2 >= 0
  Week2: x2 >= 0
  Week3: x2 >= 0
  Week4: x1 >= 0
  Week5: x2 >= 0
  Week6: x1 >= 0
  Week7: x1 >= 0
  Week8: x1 >= 0
  Week9: x1 >= 0
  Week10: x2 >= 0
  Limitline1: x2 <= 1
  Limitline2: x2 <= 1
  Limitline3: x2 <= 1
  Limitline4: x1 <= 1
  Limitline5: x2 <= 1
  Limitline6: x1 <= 1
  Limitline7: x1 <= 1
  Limitline8: x1 <= 1
  Limitline9: x1 <= 1
  Limitline10: x2 <= 1
    
```

Σχήμα 6.9: Τελική μορφή master προβλήματος μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας επίλυσής του

### 6.1.3 Ανάλυση Και Σχολιασμός Αποτελεσμάτων Παραδείγματος

Η ολοκλήρωση της επίλυσης του παρόντος παραδείγματος δίνει τα αποτελέσματα που παρατίθενται στον Πίνακα 6.4.

Πίνακας 6.4: Τελικά αποτελέσματα επίλυσης του παραδείγματος

	Τιμή στη βέλτιστη λύση
$X_1$	1
$X_2$	1
Αντικ.Συνάρτηση z	0

```

Minimize
obj:
Subject To
CrewMember1: x1 = 1
CrewMember2: x2 = 1
Week1: x2 >= 0
Week2: x2 >= 0
Week3: x2 >= 0
Week4: x1 >= 0
Week5: x2 >= 0
Week6: x1 >= 0
Week7: x1 >= 0
Week8: x1 >= 0
Week9: x1 >= 0
Week10: x2 >= 0
Limitline1: x2 <= 1
Limitline2: x2 <= 1
Limitline3: x2 <= 1
Limitline4: x1 <= 1
Limitline5: x2 <= 1
Limitline6: x1 <= 1
Limitline7: x1 <= 1
Limitline8: x1 <= 1
Limitline9: x1 <= 1
Limitline10: x2 <= 1
    
```

Σχήμα 6.10: Αντιστοιχία εβδομάδων στα προγράμματα άδειας για τους δύο ιπτάμενους

Από τους περιορισμούς της τελικής μορφοποίησης του master προβλήματος στους οποίους παρουσιάζονται οι δύο μεταβλητές απόφασης, διαμορφώνονται τα δύο βέλτιστα προγράμματα άδειας των δύο ιπταμένων.

Στον **πρώτο ιπτάμενο** δίνονται οι εβδομάδες: 4,6,7,8,9

Στον **δεύτερο ιπτάμενο** δίνονται οι εβδομάδες: 1,2,3,5,10

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι και στους δύο ιπτάμενους δίνονται προγράμματα άδειας που περιλαμβάνουν αριθμό εβδομάδων ίσο με το συνολικό αριθμό εβδομάδων που δικαιούνται (Entitlement).

Πίνακας 6.5: Μεταβολή της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την επίλυση του προβλήματος

Στάδιο επίλυσης	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
Χαράριση master προβλήματος	2000
Επίλυση column generation sub-problem	1000
Επανάληψη επίλυσης column generation problem	500
Επανάληψη επίλυσης column generation problem	400
Επανάληψη επίλυσης column generation problem	166.666667
Ακεραιοποίηση λύσης column generation sub-problem	1000
Επανάληψη επίλυσης column generation problem	0
<b>Ολοκλήρωση επίλυσης</b>	<b>0</b>

Συμπερασματικά, ο Πίνακας 6.5 επιβεβαιώνει την αποδοτικότητα της μεθοδολογίας που εφαρμόστηκε για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται από την τιμή 2000 στην τιμή 0.

Η μείωση αυτή επιτυγχάνεται διότι μέσω της συγκεκριμένης μεθοδολογίας επετεύχθη η ανάθεση προγραμμάτων άδειας τα οποία συμπεριλαμβάνουν 5 εβδομάδες, ίσος με τον αριθμό εβδομάδων που δικαιούνται συνολικά ως άδεια οι δύο ιπτάμενοι .

Επομένως, εφόσον εξαντλήθηκε ο συνολικός αριθμός ημερών που δικαιούνται οι ιπτάμενοι, η αεροπορική εταιρία δεν επιβαρύνεται με κάποιο επιπλέον κόστος, κάτι που φαίνεται και από την αντικειμενική συνάρτηση η οποία είναι ίση με 0.

# Κεφάλαιο 7

## Συμπεράσματα και Μελλοντικοί Στόχοι

### 7.1 Συμπεράσματα

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η επίλυση του ζητήματος ανάθεσης αδειών στο ιπτάμενο προσωπικό των αεροπορικών εταιριών. Πιο συγκεκριμένα, η ανάθεση των ημερών άδειας που δικαιούται το κάθε μέλος του ιπτάμενου προσωπικού έπρεπε να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να μην παραβιάζονται οι κανόνες που καθιστούν μία άδεια εφικτή βάσει της πολιτικής που ακολουθεί κάθε αεροπορική εταιρία. Ταυτόχρονα έπρεπε να ελαχιστοποιείται το κόστος με το οποίο επιβαρύνεται η εταιρία για κάθε ιπτάμενο στον οποίο ο αριθμός των ημερών άδειας μετά την επίλυση του προβλήματος είναι μικρότερος του συνολικού αριθμού ημερών που δικαιούται.

Τα συνολικά συμπεράσματα που εξήχθησαν μετά την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας είναι ποικίλα.

Αρχικά, επιβεβαιώθηκε ότι η κατασκευή κώδικα για τον έλεγχο των αιτημάτων του ιπτάμενου προσωπικού, βάσει συγκεκριμένων κανόνων που ορίζονται από την πολιτική των αεροπορικών εταιριών, και η ανάθεση όσων από αυτά κρίνονται ορθά είναι εφικτή.

Συμπληρωματικά, όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα του παραδείγματος που παρατέθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο αλλά και από πληθώρα πειραματικών δοκιμών που πραγματοποιήσαμε μετά την ολοκλήρωση κατασκευής του κατάλληλου μοντέλου βελτιστοποίησης σε μορφή κώδικα, η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε για την επίλυση του προβλήματος της ανάθεσης αδειών του ιπτάμενου προσωπικού αποδείχθηκε ιδιαίτερα αποτελεσματική. Ο συνδιασμός των μεθόδων Column Generation και Branch and Price κρίθηκε ιδιαίτερα αποδοτικός, καθώς στην πλειοψηφία των δοκιμών που έγιναν κατάφερε να ελαχιστοποιήσει και σε πολλές περιπτώσεις να μηδενίσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επετεύχθη δηλαδή για τις περισσότερες από τις δοκιμές, ο βέλτιστος συνδιασμός των εβδομάδων του συνολικού χρονικού διαστήματος που κάθε φορά μελετούνταν, και η δημιουργία προγραμμάτων άδειας, τα οποία περιλάμβαναν αριθμό εβδομάδων ίσο με το συνολικό αριθμό εβδομάδων που δικαιούταν ο κάθε ιπτάμενος. Ως αποτέλεσμα, επετεύχθη η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους με το οποίο επιβαρύνεται μία αεροπορική εταιρία για το σύνολο των ιπταμένων που δεν εξαντλούν τις συνολικές ημέρες άδειας που δικαιούνται.



## 7.2 Μελλοντικοί στόχοι

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, εξετάστηκε ενδελεχώς το ζήτημα ανάθεσης αδειών του ιπτάμενου προσωπικού αεροπορικής εταιρίας. Συγκεκριμένα, εξετάστηκαν σε βάθος οι δύο διαδικασίες που πραγματοποιούνται προκειμένου να επιλυθεί ολοκληρωμένα το συγκεκριμένο ζήτημα. Η πρώτη διαδικασία είναι ο έλεγχος και η ανάθεση των προσωπικών αιτημάτων του ιπτάμενου προσωπικού για συγκεκριμένες ημέρες άδειας. Η δεύτερη διαδικασία είναι η ανάθεση των υπολοιπόμενων ημερών για εξάντληση του συνολικού αριθμού ημερών άδειας που δικαιούται κάθε μέλος του προσωπικού με βέλτιστο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος επιβάρυνσης της αεροπορικής εταιρίας.

Κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, οι δύο αυτές διαδικασίες μελετήθηκαν και επιλύθηκαν ξεχωριστά η μία από την άλλη. Αρχικά κατασκευάστηκε κατάλληλος κώδικας για τον έλεγχο και την ανάθεση των εφικτών αιτημάτων του ιπτάμενου προσωπικού και στη συνέχεια μελετήθηκε η κατασκευή κατάλληλου μοντέλου βελτιστοποίησης το οποίο χωρίς να λαμβάνει υπ' όψιν τις προσωπικές προτιμήσεις κάθε ιπταμένου, αναλαμβάνει να συνδιάσει κατάλληλα εβδομάδες από το συνολικό χρονικό διάστημα που μελετάται προκειμένου να παράξει βέλτιστα προγράμματα άδειας για κάθε ιπτάμενο.

Ως μελλοντικός στόχος τίθεται η βελτίωση του παρόντος κώδικα για το συνδιασμό των δύο αυτών σκελών επίλυσης του προβλήματος. Προτείνεται δηλαδή, ο κώδικας που κατασκευάστηκε να τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε, αρχικά να ελέγχονται οι προσωπικές προτιμήσεις των ιπταμένων και να αναθέτονται σε αυτούς όσες κρίνονται εφικτές βάσει του ελέγχου που πραγματοποιείται ενώ στη συνέχεια το μοντέλο βελτιστοποίησης που κατασκευάστηκε να αναλαμβάνει την ανάθεση κατάλληλων προγραμμάτων άδειας στους ιπταμένους οι οποίοι δεν έχουν εξαντλήσει το συνολικό αριθμό ημερών άδειας που δικαιούνται, εάν αυτοί υπάρχουν. Τα προγράμματα αυτά πρέπει να συμπεριλαμβάνουν ωστόσο όσα από τα προσωπικά αιτήματα ανατέθηκαν σε αυτούς κατά την πραγματοποίηση του πρώτου σκέλους του προβλήματος.

# Βιβλιογραφία

- [1] AIMS Airline Software. *Crew Management*. URL: <http://www.aims.aero/crew-management.html%7B%5C%7Dleave> (visited on 10/01/2019).
- [2] Cynthia Barnhart, Peter Belobaba, and Amedeo R. Odoni. “Applications of operations research in the air transport industry”. In: *Transportation Science* (2003). ISSN: 00411655. DOI: 10.1287/trsc.37.4.368.23276.
- [3] Cynthia Barnhart et al. “Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs”. In: *Operations Research* (1998). ISSN: 0030364X. DOI: 10.1287/opre.46.3.316.
- [4] Jens Clausen. “Branch and bound algorithms-principles and examples”. In: *Department of Computer Science, University of ...* (1999). DOI: 10.1.1.5.7475.
- [5] Guy Desaulniers, Jacques Desrosiers, and Marius M. Solomon. *Column generation*. 2005. ISBN: 0387254854. DOI: 10.1007/b135457.
- [6] Jacques Desrosiers and Marco E. Lübbecke. “A primer in column generation”. In: *Column Generation*. 2005. ISBN: 0387254854. DOI: 10.1007/0-387-25486-2\_1.
- [7] Evoke-Aviation Software Solutions. *EFOS Leave Management | Airline Leave Management | Evoke Systems*. URL: <https://www.evoke-systems.aero/product/efos-leave-management/> (visited on 10/01/2019).
- [8] Nikolaos D. George S. Tselikis. *C: From Theory to Practice - George S. Tselikis, Nikolaos D. Tselikas - Βιβλία Google*. URL: [https://books.google.gr/books?id=iZ%7B%5C\\_%7DNBQAAQBAJ%7B%5C%7Dpg=PA1%7B%5C%7Ddq=advantages+of+c+language%7B%5C%7Dhl=e1%7B%5C%7Dsa=X%7B%5C%7Dved=0ahUKEwjivvnPioD1AhWpyKYKHV80BwAQ6AEIMjAB%7B%5C%7Dv=onepage%7B%5C%7Dq=advantages%20of%20c%20language%7B%5C%7Df=false](https://books.google.gr/books?id=iZ%7B%5C_%7DNBQAAQBAJ%7B%5C%7Dpg=PA1%7B%5C%7Ddq=advantages+of+c+language%7B%5C%7Dhl=e1%7B%5C%7Dsa=X%7B%5C%7Dved=0ahUKEwjivvnPioD1AhWpyKYKHV80BwAQ6AEIMjAB%7B%5C%7Dv=onepage%7B%5C%7Dq=advantages%20of%20c%20language%7B%5C%7Df=false) (visited on 10/03/2019).
- [9] Charles Harvard Gibbs-Smith. *Aviation : an historical survey from its origins to the end of the Second World War*. Science Museum, 2003, p. 304. ISBN: 1900747529.
- [10] James Pinckney Harrison. *Mastering the sky : a history of aviation from ancient times to the present*. Sarpedon, 2000, p. 351. ISBN: 9781885119681.
- [11] IBM Knowledge Center. *What is column generation?* URL: [https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P%7B%5C\\_%7D12.5.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/UsrMan/topics/discr%7B%5C\\_%7Doptim/eg%7B%5C\\_%7Dcol%7B%5C\\_%7Dgen/02%7B%5C\\_%7Dcol%7B%5C\\_%7Dgen%7B%5C\\_%7Ddefn.html](https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P%7B%5C_%7D12.5.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/UsrMan/topics/discr%7B%5C_%7Doptim/eg%7B%5C_%7Dcol%7B%5C_%7Dgen/02%7B%5C_%7Dcol%7B%5C_%7Dgen%7B%5C_%7Ddefn.html) (visited on 09/30/2019).

- [12] George Kozanidis. “Branch and price for covering shipments in a logistic distribution network with a fleet of aircraft”. In: *Optimization Methods and Software* (2018). ISSN: 10294937. DOI: 10.1080/10556788.2017.1281923.
- [13] David R. Morrison et al. “Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning”. In: *Discrete Optimization* (2016). ISSN: 15725286. DOI: 10.1016/j.disopt.2016.01.005.
- [14] XH Sun, Q Deng, and J Ni. “Grid and Cooperative Computing. Part 2: Revised Papers of the Second International Workshop, GCC 2003, Shanghai, China, December 7-10, 2003”. In: (2004). URL: <https://www.google.com/books?hl=en%7B%5C%7Dlr=%7B%5C%7Did=Fj3YLh5efTYC%7B%5C%7Doi=fnd%7B%5C%7Dpg=PA1%7B%5C%7Ddq=Grid+and+Cooperative+Computing+part+2%7B%5C%7Dots=sUbio7jqpg%7B%5C%7Dsig=-p0ShFI999HRFoaJrZKe%7B%5C%7DqL1c5I>.
- [15] The World Bank Data. *Air transport, passengers carried* | Data. URL: <https://data.worldbank.org/indicator/IS.AIR.PSGR> (visited on 10/13/2019).

# **Παράρτημα**

# A Υπολογιστικό Παράδειγμα

Στο Παράρτημα A επιλύεται το ίδιο πρόβλημα με δεδομένα εισόδου τα εξής:

**N = 5** αριθμός ιπταμένων

**W = 20** αριθμός εβδομάδων

**T = 140** αριθμός ημερών

**Limitline = 4** αριθμός ιπταμένων που μπορούν να παίρνουν την ίδια εβδομάδα άδεια

**Entitlement = 7** αριθμός εβδομάδων που δικαιούνται να πάρουν άδεια οι ιπτάμενοι

Η επίλυση του προβλήματος με τα συγκεκριμένα δεδομένα εισόδου δίνει τα αποτελέσματα που παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1: Τελικά αποτελέσματα επίλυσης προβλήματος

	Τιμή στη βέλτιστη λύση
$X_1$	1
$X_2$	1
$X_3$	1
$X_4$	1
$X_5$	1
Αντικ.Συνάρτηση z	0

Οι εβδομάδες που αντιστοιχούν σε καθένα από τους ιπτάμενους σύμφωνα με τα βέλτιστα προγράμματα που παράχθηκαν κατά την επίλυση του προβλήματος είναι τα εξής:

**CrewMember1:** 4, 5, 7, 8, 9, 10

**CrewMember2:** 1, 2, 3, 7, 8, 9

**CrewMember3:** 1, 2, 3, 4, 5, 6

**CrewMember4:** 1, 2, 3, 4, 5, 6

**CrewMember5:** 1, 2, 3, 4, 5, 6

Στη συνέχεια παρατίθενται τα αποτελέσματα που δίνονται από τον κώδικα σε κάθε στάδιο της διαδικασίας επίλυσης.

---

```

Minimize
  obj: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4 + 1000 x5
Subject To
  CrewMember1: x1 = 1
  CrewMember2: x2 = 1
  CrewMember3: x3 = 1
  CrewMember4: x4 = 1
  CrewMember5: x5 = 1
  Week1: >= 0
  Week2: >= 0
  Week3: >= 0
  Week4: >= 0
  Week5: >= 0
  Week6: >= 0
  Week7: >= 0
  Week8: >= 0
  Week9: >= 0
  Week10: >= 0
  Week11: >= 0
  Week12: >= 0
  Week13: >= 0
  Week14: >= 0
  Week15: >= 0
  Week16: >= 0
  Week17: >= 0
  Week18: >= 0
  Week19: >= 0
  Week20: >= 0
  Limitline1: <= 4
  Limitline2: <= 4
  Limitline3: <= 4
  Limitline4: <= 4
  Limitline5: <= 4
  Limitline6: <= 4
  Limitline7: <= 4
  Limitline8: <= 4
  Limitline9: <= 4
  Limitline10: <= 4
  Limitline11: <= 4
  Limitline12: <= 4
  Limitline13: <= 4
  Limitline14: <= 4
  Limitline15: <= 4
  Limitline16: <= 4
  Limitline17: <= 4
  Limitline18: <= 4
  Limitline19: <= 4
  Limitline20: <= 4

```

*Σχήμα 1: Αρχική μορφή του χαλαρωμένου master προβλήματος*

---

```

Minimize
  obj: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4 + 1000 x5
Subject To
CrewMember1: x1 + x6 + x11 + x12 + x13 + x14 + x16 + x17 + x18 + x20 + x22 = 1
CrewMember2: x2 + x7 + x19 = 1
CrewMember3: x3 + x8 + x21 + x23 = 1
CrewMember4: x4 + x9 = 1
CrewMember5: x5 + x10 + x15 = 1
Week1: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x13 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20
      + x21 >= 0
Week2: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x22
      + x23 >= 0
Week3: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20
      + x21 + x22 + x23 >= 0
Week4: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x17 + x20 + x21
      >= 0
Week5: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x22 + x23
      >= 0
Week6: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x15 + x16 + x17 + x20 + x21 + x22
      + x23 >= 0
Week7: x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22
      + x23 >= 0
Week8: x14 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22 + x23 >= 0
Week9: x14 + x18 + x19 >= 0
Week10: x14 >= 0
Week11: >= 0
Week12: >= 0
Week13: >= 0
Week14: >= 0
Week15: >= 0
Week16: >= 0
Week17: >= 0
Week18: >= 0
Week19: >= 0
Week20: >= 0
Limitline1: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x13 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20
      + x21 <= 4
Limitline2: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x22
      + x23 <= 4
Limitline3: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20
      + x21 + x22 + x23 <= 4
Limitline4: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x17 + x20 + x21
      <= 4
Limitline5: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x22 + x23
      <= 4
Limitline6: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x15 + x16 + x17 + x20 + x21 + x22
      + x23 <= 4
Limitline7: x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22
      + x23 <= 4
Limitline8: x14 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22 + x23 <= 4
Limitline9: x14 + x18 + x19 <= 4
Limitline10: x14 <= 4
Limitline11: <= 4
Limitline12: <= 4
Limitline13: <= 4
Limitline14: <= 4
Limitline15: <= 4
Limitline16: <= 4
Limitline17: <= 4
Limitline18: <= 4
Limitline19: <= 4
Limitline20: <= 4

```

*Σχήμα 2: Μορφή του master προβλήματος μετά την πρώτη επίλυση του column generation sub-problem*

```

Minimize
obj: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4
Subject To
CrewMember1: x1 + x5 + x10 + x11 + x12 + x13 + x15 + x16 + x17 + x19 + x20 = 1
CrewMember2: x2 + x6 + x18 = 1
CrewMember3: x7 = 1
CrewMember4: x3 + x8 = 1
CrewMember5: x4 + x9 + x14 = 1
Week1: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19
      >= 0
Week2: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x20
      >= 0
Week3: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19
      + x20 >= 0
Week4: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x16 + x19 >= 0
Week5: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x20 >= 0
Week6: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x11 + x12 + x14 + x15 + x16 + x19 + x20 >= 0
Week7: x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 >= 0
Week8: x13 + x17 + x18 + x19 + x20 >= 0
Week9: x13 + x17 + x18 >= 0
Week10: x13 >= 0
Week11: >= 0
Week12: >= 0
Week13: >= 0
Week14: >= 0
Week15: >= 0
Week16: >= 0
Week17: >= 0
Week18: >= 0
Week19: >= 0
Week20: >= 0
Limitline1: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19
      <= 4
Limitline2: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x20
      <= 4
Limitline3: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19
      + x20 <= 4
Limitline4: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x16 + x19 <= 4
Limitline5: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x20 <= 4
Limitline6: x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x11 + x12 + x14 + x15 + x16 + x19 + x20 <= 4
Limitline7: x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 <= 4
Limitline8: x13 + x17 + x18 + x19 + x20 <= 4
Limitline9: x13 + x17 + x18 <= 4
Limitline10: x13 <= 4
Limitline11: <= 4
Limitline12: <= 4
Limitline13: <= 4
Limitline14: <= 4
Limitline15: <= 4
Limitline16: <= 4
Limitline17: <= 4
Limitline18: <= 4
Limitline19: <= 4
Limitline20: <= 4

```

Σχήμα 3: Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember3



```

Minimize
obj: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3
Subject To
CrewMember1: x1 + x4 + x9 + x10 + x11 + x12 + x14 + x15 + x16 + x18 + x19 = 1
CrewMember2: x2 + x5 + x17 = 1
CrewMember3: x6 = 1
CrewMember4: x7 = 1
CrewMember5: x3 + x8 + x13 = 1
Week1: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x11 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18
    >= 0
Week2: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x19
    >= 0
Week3: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18
    + x19 >= 0
Week4: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x15 + x18 >= 0
Week5: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x19 >= 0
Week6: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x10 + x11 + x13 + x14 + x15 + x18 + x19 >= 0
Week7: x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 >= 0
Week8: x12 + x16 + x17 + x18 + x19 >= 0
Week9: x12 + x16 + x17 >= 0
Week10: x12 >= 0
Week11: >= 0
Week12: >= 0
Week13: >= 0
Week14: >= 0
Week15: >= 0
Week16: >= 0
Week17: >= 0
Week18: >= 0
Week19: >= 0
Week20: >= 0
Limitline1: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x11 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18
    <= 4
Limitline2: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x19
    <= 4
Limitline3: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18
    + x19 <= 4
Limitline4: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x15 + x18 <= 4
Limitline5: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x19 <= 4
Limitline6: x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x10 + x11 + x13 + x14 + x15 + x18 + x19 <= 4
Limitline7: x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 <= 4
Limitline8: x12 + x16 + x17 + x18 + x19 <= 4
Limitline9: x12 + x16 + x17 <= 4
Limitline10: x12 <= 4
Limitline11: <= 4
Limitline12: <= 4
Limitline13: <= 4
Limitline14: <= 4
Limitline15: <= 4
Limitline16: <= 4
Limitline17: <= 4
Limitline18: <= 4
Limitline19: <= 4
Limitline20: <= 4

```

Σχήμα 4: Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember4

---

```

Minimize
  obj: 1000 x1 + 1000 x2
Subject To
  CrewMember1: x1 + x3 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x16 + x17 = 1
  CrewMember2: x2 + x4 + x15 = 1
  CrewMember3: x5 = 1
  CrewMember4: x6 = 1
  CrewMember5: x7 = 1
  Week1: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 >= 0
  Week2: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x12 + x13 + x14 + x15 + x17 >= 0
  Week3: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16
    + x17 >= 0
  Week4: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x13 + x16 >= 0
  Week5: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x17 >= 0
  Week6: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x9 + x10 + x12 + x13 + x16 + x17 >= 0
  Week7: x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 >= 0
  Week8: x11 + x14 + x15 + x16 + x17 >= 0
  Week9: x11 + x14 + x15 >= 0
  Week10: x11 >= 0
  Week11: >= 0
  Week12: >= 0
  Week13: >= 0
  Week14: >= 0
  Week15: >= 0
  Week16: >= 0
  Week17: >= 0
  Week18: >= 0
  Week19: >= 0
  Week20: >= 0
  Limitline1: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 <= 4
  Limitline2: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x12 + x13 + x14 + x15 + x17 <= 4
  Limitline3: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16
    + x17 <= 4
  Limitline4: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x13 + x16 <= 4
  Limitline5: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x17 <= 4
  Limitline6: x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x9 + x10 + x12 + x13 + x16 + x17 <= 4
  Limitline7: x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 <= 4
  Limitline8: x11 + x14 + x15 + x16 + x17 <= 4
  Limitline9: x11 + x14 + x15 <= 4
  Limitline10: x11 <= 4
  Limitline11: <= 4
  Limitline12: <= 4
  Limitline13: <= 4
  Limitline14: <= 4
  Limitline15: <= 4
  Limitline16: <= 4
  Limitline17: <= 4
  Limitline18: <= 4
  Limitline19: <= 4
  Limitline20: <= 4

```

Σχήμα 5: Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember5

---

```

Minimize
  obj: 1000 x1
Subject To
  CrewMember1: x6 = 1
  CrewMember2: x1 + x2 + x7 = 1
  CrewMember3: x3 = 1
  CrewMember4: x4 = 1
  CrewMember5: x5 = 1
  Week1: x2 + x3 + x4 + x5 + x7 >= 0
  Week2: x2 + x3 + x4 + x5 + x7 >= 0
  Week3: x2 + x3 + x4 + x5 + x7 >= 0
  Week4: x2 + x3 + x4 + x5 + x6 >= 0
  Week5: x2 + x3 + x4 + x5 + x6 >= 0
  Week6: x2 + x3 + x4 + x5 >= 0
  Week7: x6 + x7 >= 0
  Week8: x6 + x7 >= 0
  Week9: x6 + x7 >= 0
  Week10: x6 >= 0
  Week11: >= 0
  Week12: >= 0
  Week13: >= 0
  Week14: >= 0
  Week15: >= 0
  Week16: >= 0
  Week17: >= 0
  Week18: >= 0
  Week19: >= 0
  Week20: >= 0
  Limitline1: x2 + x3 + x4 + x5 + x7 <= 4
  Limitline2: x2 + x3 + x4 + x5 + x7 <= 4
  Limitline3: x2 + x3 + x4 + x5 + x7 <= 4
  Limitline4: x2 + x3 + x4 + x5 + x6 <= 4
  Limitline5: x2 + x3 + x4 + x5 + x6 <= 4
  Limitline6: x2 + x3 + x4 + x5 <= 4
  Limitline7: x6 + x7 <= 4
  Limitline8: x6 + x7 <= 4
  Limitline9: x6 + x7 <= 4
  Limitline10: x6 <= 4
  Limitline11: <= 4
  Limitline12: <= 4
  Limitline13: <= 4
  Limitline14: <= 4
  Limitline15: <= 4
  Limitline16: <= 4
  Limitline17: <= 4
  Limitline18: <= 4
  Limitline19: <= 4
  Limitline20: <= 4

```

Σχήμα 6: Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember1

---

```

Minimize
  obj:
Subject To
  CrewMember1:  x4 = 1
  CrewMember2:  x5 = 1
  CrewMember3:  x1 = 1
  CrewMember4:  x2 = 1
  CrewMember5:  x3 = 1
  Week1:  x1 + x2 + x3 + x5 >= 0
  Week2:  x1 + x2 + x3 + x5 >= 0
  Week3:  x1 + x2 + x3 + x5 >= 0
  Week4:  x1 + x2 + x3 + x4 >= 0
  Week5:  x1 + x2 + x3 + x4 >= 0
  Week6:  x1 + x2 + x3 >= 0
  Week7:  x4 + x5 >= 0
  Week8:  x4 + x5 >= 0
  Week9:  x4 + x5 >= 0
  Week10: x4 >= 0
  Week11: >= 0
  Week12: >= 0
  Week13: >= 0
  Week14: >= 0
  Week15: >= 0
  Week16: >= 0
  Week17: >= 0
  Week18: >= 0
  Week19: >= 0
  Week20: >= 0
  Limitline1: x1 + x2 + x3 + x5 <= 4
  Limitline2: x1 + x2 + x3 + x5 <= 4
  Limitline3: x1 + x2 + x3 + x5 <= 4
  Limitline4: x1 + x2 + x3 + x4 <= 4
  Limitline5: x1 + x2 + x3 + x4 <= 4
  Limitline6: x1 + x2 + x3 <= 4
  Limitline7: x4 + x5 <= 4
  Limitline8: x4 + x5 <= 4
  Limitline9: x4 + x5 <= 4
  Limitline10: x4 <= 4
  Limitline11: <= 4
  Limitline12: <= 4
  Limitline13: <= 4
  Limitline14: <= 4
  Limitline15: <= 4
  Limitline16: <= 4
  Limitline17: <= 4
  Limitline18: <= 4
  Limitline19: <= 4
  Limitline20: <= 4

```

Σχήμα 7: Μορφή του master προβλήματος μετά τη διαγραφή των μεταβλητών που δε χρησιμοποιούνται για το CrewMember2- Τελική μορφή master προβλήματος μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας επίλυσης