

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ**

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ: ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ**

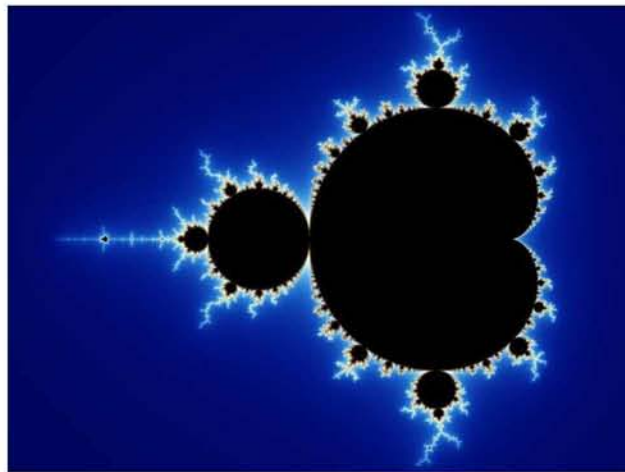
*Διπλωματική εργασία*

**ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΤΟΥ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ ΚΑΙ  
ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΕΡΙΟΥ, ΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ  
ΚΑΙ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΘΕΣΗΣ ΣΕ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ  
ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ**

του

**ΕΡΜΑΡΙΟΠΟΥΛΟΥ ΝΙΚΟΥ**

**Επιβλέπων καθηγητής: Δρ. Λυκούργος Μαγκαφάς**



**Βόλος 2019**



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ABSTRACT .....</b>	<b>5</b>
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....</b>	<b>6</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>7</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....</b>	<b>12</b>
1.1 Χρονοσειρές .....	12
1.1.1 Ορισμός.....	12
1.1.2 Χαρακτηριστικά .....	12
1.2 Γραμμική ανάλυση χρονοσειρών .....	13
1.2.1 Γραμμικά μοντέλα.....	15
1.2.2 Μεθοδολογία Box-Jenkins .....	17
1.2.3 Αξιολόγηση μοντέλου σε πρόβλεψη.....	23
1.3 Μη γραμμικά μοντέλα ARCH/GARCH .....	25
1.4 Θεωρία πολυπλοκότητας (complexity theory).....	26
1.5 Θεωρία του Χάους .....	28
1.5.1 Παράξενοι ελκυστές.....	29
1.6 Ανάλυση χαοτικών χρονοσειρών .....	29
1.6.1 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων .....	30
1.6.2 Διάσταση συσχέτισης (Correlation dimension) .....	35
1.6.3 Εκθέτες Lyapunov .....	37
1.7 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts) .....	38

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Δεδομένα και αποτελέσματα.....</b>	<b>40</b>
2.1. Ανάλυση Crude Oil.....	42
2.1.1 Στατιστική στοιχεία CrudeOil .....	42
2.1.2 Χαοτική ανάλυση CrudeOil .....	45
2.2 Ανάλυση Natural Gas .....	50
2.2.1 Στατιστική στοιχεία NaturalGas .....	50
2.2.2 Χαοτική ανάλυση NaturalGas .....	53
2.3. Συγκριτική μελέτη του Crude Oil και Natural Gas .....	58
2.3.1. Χαοτική ανάλυση στον λόγο CrudeOil-Naturalgas.....	60
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Συμπεράσματα .....</b>	<b>64</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.</b>

## **ABSTRACT**

The aim of this paper is to evaluate the existence of chaos in the WTI Crude Oil and Natural Gas indices and their predictability in order to take positions in financial products and specifically in Future Contracts. In particular, this study explores the time series of oil and gas for more than 20 years to date (20-1-2019). The analysis was carried out using the theory of chaos, since the theory of Effective Market Hypothesis (EMH) does not seem to be able to describe the markets. The time series analysis has shown that both obey the chaos theory so we can make forecasts at one week's depth. The results of the forecasts have shown that the forecast for the oil index is very good (error <1% over a long period of forecasting) while gas breaks down in two parts, one of the summer season (from April to September) where the prediction is accurate and (October to February), where the forecast gives up to 20% deviations. The above results indicate that for oil we can place positions in options with great safety, as opposed to natural gas options in the winter period. Finally, a chaotic study of the WTI Crude Oil / Natural Gas ratio was made and showed that this time series is also chaotic.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η αποτίμηση της ύπαρξης χάους στους δείκτες του WTI Crude Oil και Natural Gas και η πρόβλεψή τους, προκειμένου να λάβουμε θέσεις σε χρηματοοικονομικά προϊόντα και συγκεκριμένα σε Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης. Ειδικότερα, στην εργασία αυτή γίνεται μελέτη της χρονοσειράς του πετρελαίου και του φυσικού αερίου για χρονικό διάστημα πέραν των 20 ετών και μέχρι σήμερα (20-1-2019). Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με χρήση της θεωρίας του χάους μιας και η θεωρία της αποτελεσματικής αγοράς δεν φαίνεται να είναι ικανή να περιγράψει τις αγορές. Η επεξεργασία των χρονοσειρών έδειξε ότι και οι δύο υπακούουν στη θεωρία του χάους με αποτέλεσμα να μπορούμε να κάνουμε προβλέψεις σε βάθος μιας εβδομάδας. Ειδικότερα, Τα αποτελέσματα των προβλέψεων έδειξαν ότι η πρόβλεψη του δείκτη του πετρελαίου είναι πάραπολύ καλή (σφάλμα <1% για μεγάλο χρονικό διάστημα πρόβλεψης) ενώ του φυσικού αερίου διασπάται σε δύο μέρη της θερινής περιόδου (από Απρίλιο έως και Σεπτέμβριο) που η πρόβλεψη είναι ακριβής ενώ την περίοδο (από Οκτώβριο έως και Φεβρουάριο) η πρόβλεψη δίνει αποκλίσεις μέχρι 20%. Τα παραπάνω αποτελέσματα δηλώνουν ότι για το πετρέλαιο μπορούμε να παίρνουμε θέσεις σε ορτίον με πολύ μεγάλη ασφάλεια σε αντίθεση με τα ορτίονστου φυσικού αερίου που αφορούν τη χειμερινή περίοδο. Τέλος πραγματοποιήθηκε χαοτική μελέτη του λόγου Πετρελαίου/Φυσικό αέριο και βρέθηκε ότι αυτή η χρονοσειρά είναι χαοτική.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυνατότητα πρόβλεψης της τιμής ενός προϊόντος είναι κάτι που ο άνθρωπος επιζητούσε από τη στιγμή που άρχισε να συναλλάσσεται. Γνωρίζοντας την μελλοντική αξία ενός προϊόντος τα κράτη, οι εταιρείες και οι πολίτες μεμονωμένα μπορούν να κάνουν ακριβέστερους προϋπολογισμούς, στρατηγικούς σχεδιασμούς, να αυξήσουν τον πλούτο τους αλλά και να διαχειριστούν καλύτερα την περιουσία τους.

Η πρόβλεψη όμως οικονομικών αγαθών είναι εξαιρετικά δύσκολη. Αυτό συμβαίνει γιατί οι αγορές, στις οποίες συναλλασσόμαστε, είναι περίπλοκα δυναμικά συστήματα με μεγάλη μεταβλητότητα και μεγάλα ποσοστά θορύβου. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε σήμερα για την ανάλυση και κατ' επέκταση την πρόβλεψη των αγορών είναι γραμμικά και μη-γραμμικά δυναμικά μοντέλα σε συνδυασμό πολλές φορές με στατιστική ανάλυση. Ο βασικός μας στόχος είναι να παρατηρήσουμε τις παρελθούσες τιμές μιας χρονοσειράς και να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο που περιγράφει την εγγενή δομή της, με τελικό αποτέλεσμα την πρόβλεψη των μελλοντικών της τιμών. Υπάρχουν πολλά ήδη χρονοσειρών (π.χ. ημερήσια μέση θερμοκρασία, τιμές μια μετοχής, μέσος αριθμός ηλιακών κηλίδων ανά μήνα κ.ά.) αλλά εμείς θα ασχοληθούμε με τις χρονοσειρές οικονομικών αγαθών.

Η ανάπτυξη της ανάλυσης χρονοσειρών ξεκίνησε με τις δουλειές των Yule (1927) και Walker (1931) οι οποίοι ήταν οι πρώτοι που εφάρμοσαν αυτοπαλίνδρομα μοντέλα σε δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα εφάρμοσαν κινητούς μέσους όρους (MA) για την απαλοιφή περιοδικών διακυμάνσεων, όπως εποχικότητα. Οι Box και Jenkins (1976) παρουσίασαν το μοντέλο ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) το οποίο προκάλεσε μεγάλο ενθουσιασμό στην επιστημονική κοινότητα. Κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις το μοντέλο κάνει ιδανικές προβλέψεις με την έννοια ότι τα κατάλοιπα του μοντέλου δεν περιέχουν πληροφορία η οποία είναι ικανή να βοηθήσει περαιτέρω στην πρόβλεψη, άρα τα κατάλοιπα είναι λευκός θόρυβος.

Τα γραμμικά μοντέλα είναι εύκολα και κατανοητά, έχουν αναπτυχθεί πλήρως, χρησιμοποιούνται αρκετά χρόνια και έχουν ικανοποιητικές εφαρμογές σε πολλά πεδία. Έχουν όμως μια βασική προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιούν. Η χρονοσειρά στην οποία εφαρμόζονται πρέπει να είναι στάσιμη. Γι αυτό το λόγο αδυνατούν να περιγράψουν χρονοσειρές με έντονες μεταβολές και μεγάλη ασυμμετρία ως προς την κατανομή των

δεδομένων. Ως αποτέλεσμα έχουν μεγάλες αποκλίσεις σε προβλέψεις οικονομικών χρονοσειρών. (Κουγιουμτζής 2018)

Η Θεωρία Αποτελεσματικής Αγοράς (Efficient Market Hypothesis-EMH) που αναπτύχθηκε από τον Fama (1960) υπέθετε ότι ο μόνος τρόπος για να αποσταθεροποιηθεί μια αγορά είναι να δεχθεί ένα εξωγενές σοκ, όπως κάποιος πόλεμος, πολιτικές αποφάσεις, νέες τεχνολογίες κλπ. Αν αυτό δεν συνέβαινε τότε οι αγορές ακολουθούσαν το μοντέλο του τυχαίου περιπάτου (randomwalk), δηλαδή ήταν αδύνατη η πρόβλεψη τους. Μια βασική υπόθεση της EMH είναι ότι οι επενδυτές είναι ορθολογικοί και γνωρίζουν κάθε πληροφορία που είναι διαθέσιμη. Κάτι που έχει αποδειχθεί ότι πρακτικά δεν ισχύει. Οι άνθρωποι, ειδικά όταν δρουν σε μεγάλες ομάδες και αναπτύσσουν συμπεριφορές αγέλης, τείνουν να αντιδρούν υπερβολικά και μη ορθολογικά, δεν έχουν όλοι ίση πληροφόρηση και δεν αντιλαμβάνονται όλοι οι άνθρωποι μια πληροφορία με τον ίδιο τρόπο.

Πολλές θεωρίες έχουν δημοσιευτεί αναφέροντας ότι οι αγορές συμπεριφέρονται ως περίπλοκα δυναμικά μη-γραμμικά συστήματα. Ένα χαρακτηριστικό των δυναμικών συστημάτων είναι ότι μπορούν να δημιουργήσουν μεγάλες μεταβολές μόνα τους χωρίς να επηρεαστούν από κάποιο εξωτερικό παράγοντα και ότι παρουσιάζουν φαινομενική τυχαιότητα στην εξέλιξη τους ενώ στην πραγματικότητα οι νόμοι της εξέλιξης τους είναι καλά ορισμένοι. Αυτό θα μπορούσε να εξηγήσει τις συμπεριφορές των αγορών σε περιόδους μεγάλης μεταβλητότητας.

Θεμελιωτής των δυναμικών συστημάτων και της έννοιας του αιτιοκρατικού χάους ήταν Poincaré ο οποίος στα τέλη του 19ου αιώνα συντέλεσε στη γέννηση ενός νέου επιστημονικού κλάδου, αυτού της επιστήμης των δυναμικών συστημάτων και χάους. Με τις εργασίες του "Νέες Μέθοδοι της Ουράνιας Μηχανικής" (1892-1899) και "Διαλέξεις για την Ουράνια Μηχανική" (1905-1910) έδωσε μια ποιοτική λύση στο πρόβλημα των τριών σωμάτων. Μέσα στις εργασίες του περιλαμβάνεται και το θεμελιώδες θεώρημα του Poincaré, το οποίο ορίζει ότι ορισμένα συστήματα, μετά από ένα αρκετά μεγάλο αλλά πεπερασμένο χρονικό διάστημα επιστρέφουν σε μια κατάσταση πολύ κοντά στην αρχική τους (Alligood et al. 2000). Στη συνέχεια ο Aleksandr Lyapunov, ο Edward Lorenz, ο Stephen Smale, ο Mitchell Feigenbaum και άλλοι ερευνητές με τις εργασίες τους βοήθησαν πολύ στο να κατανοήσουμε ακόμα περισσότερο τα δυναμικά συστήματα. Η εφεύρεση των υπολογιστών τη δεκαετία του '50 ήταν καταλυτική στην ιστορία της δυναμικής. Οι υπολογιστές μας επέτρεψαν να αναπτύξουμε μια πιο καθαρή εικόνα για τα μη



γραμμικά συστήματα καθώς η υπολογιστική τους ισχύ (έστω και μικρή εκείνη την εποχή) μας έδωσε τη δυνατότητα να πειραματιστούμε με τις εξισώσεις κάτι που πριν ήταν αδύνατο. Με την εξάπλωση των υπολογιστών τα δυναμικά συστήματα άρχισαν να εφαρμόζονται σε πολλά πεδία τόσο στις θετικές όσο και στις κοινωνικές επιστήμες και να δίνουν εντυπωσιακά αποτελέσματα. Στα μέσα της δεκαετίας του '90 ο Eugene Stanley έδωσε το όνομα Οικονομική Φυσική (EconoPhysics) για να περιγράψει τον μεγάλο αριθμό άρθρων που είχαν δημοσιευθεί από φυσικούς για τα προβλήματα των αγορών. Ήδη από το 1980 η εξέλιξη των δυναμικών συστημάτων είχε δείξει στους επιστήμονες ότι η αδυναμία πρόβλεψης σε μια χρονοσειρά δεν σήμαινε απαραίτητα στοχαστική διαδικασία. Συγκεκριμένα η θεωρία του χάους μας έχει δείξει ότι ακόμα και χρονοσειρές που δεν μπορούν να προβλεφθούν μπορούν να δημιουργηθούν από ντετερμινιστικά μη-γραμμικά συστήματα (Stanley and Mantegna 2000). Αυτές οι ιδιότητες είναι που έχουν εγείρει το ενδιαφέρον των επιστημόνων να εφαρμόσουν χαστικά μοντέλα για να προσπαθήσουν να περιγράψουν και να προβλέψουν τις αγορές.

Γνωρίζοντας τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η δυνατότητα πρόβλεψης ενός προϊόντος, μας δίνει δύναμη που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε με διάφορους τρόπους και η εξέλιξη της τεχνολογίας μπορεί να μας βοηθήσει να το πετύχουμε. Γι' αυτό το λόγο ο σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι να διερευνήσει την συσχέτιση δύο εκ των βασικών προϊόντων ενέργειας, του πετρελαίου και του φυσικού αερίου και την πιθανή δυνατότητα πρόβλεψης τους με σκοπό την τοποθέτηση θέσης σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ).

Το πετρέλαιο είναι ένα υγρό που βρίσκεται μέσα στη Γη και αποτελείται από υδρογονάνθρακες, οργανικές ενώσεις και μικρές ποσότητες μετάλλου. Δημιουργήθηκε μέσω της θέρμανσης και της συμπίεσης οργανικών υλικών για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το πετρέλαιο είναι το πιο σημαντικό προϊόν ενέργειας αυτή τη στιγμή καθώς, με συγκεκριμένη επεξεργασία, χρησιμοποιείται ευρύτατα για την παραγωγή καυσίμων, πλαστικών, λιπασμάτων, φυτοφαρμάκων, λιπαντικών για βιομηχανίες κ.ά.

Το φυσικό αέριο είναι ένα αέριο μείγμα κορεσμένων υδρογονανθράκων με μικρό αριθμό ατόμων άνθρακα. Βρίσκεται σε υπόγεια κοιτάσματα μαζί ή κοντά σε πετρέλαιο. Ο τρόπος δημιουργίας τους είναι παρόμοιος με αυτόν του πετρελαίου. Θεωρείται οικολογικό καύσιμο, χρησιμοποιείται για θέρμανση, παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, παραγωγή υδρογόνου, καύσιμο σε οικολογικά οχήματα κ.ά. Το 2017 το φυσικό αέριο αποτέλεσε το 29%

της συνολικής κατανάλωσης ενέργειας των Η.Π.Α. (σύμφωνα με την σελίδα διαχείρισης ενέργειας της Αμερικής eia.gov).

Λόγω της χρήσης των δύο αγαθών αλλά και του τρόπου εξόρυξης τους καταλαβαίνουμε ότι τα δύο προϊόντα είναι μερικώς υποκατάστατα από την πλευρά της κατανάλωσης (η αύξηση της τιμής του ενός οδηγεί στην αύξηση της ζήτησης του άλλου) και συμπληρωματικά από την πλευρά της παραγωγής (αύξηση της παραγωγής του ενός οδηγεί σε μείωση της ζήτησης του άλλου). Ωστόσο υπάρχει μια ασύμμετρη σχέση μεταξύ των δύο αγαθών που οφείλεται κυρίως στο μέγεθος της κάθε αγοράς. Η τιμή του πετρελαίου καθορίζεται στην παγκόσμια αγορά ενώ η τιμή του φυσικού αερίου καθορίζεται από τις τοπικές αγορές. Ως εκ τούτου μια μεταβολή στην τιμή του πετρελαίου μπορεί να προκαλέσει μεταβολές στην τιμή του φυσικού αερίου χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μπορεί να συμβεί και το αντίθετο. (Ντούνα 2016)

Αφού ολοκληρώσουμε τις αναλύσεις πάμε να εκμεταλλευτούμε τα αποτελέσματα παίρνοντας θέση στο χρηματιστήριο και συγκεκριμένα σε Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ). Το ΣΜΕ είναι ένα συμβόλαιο που υποχρεώνει την αγοραπωλησία ενός περιουσιακού στοιχείου μεταξύ ενός πωλητή και ενός αγοραστή σε προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή και σε προκαθορισμένη τιμή. Λόγω ότι η αξία του ΣΜΕ εξαρτάται από την αξία του περιουσιακού στοιχείου (underlying asset) λέμε ότι τα ΣΜΕ είναι Παράγωγο Προϊόν (derivative asset). Τα ΣΜΕ δημιουργήθηκαν με σκοπό την προστασία του επενδυτή από τη μεταβλητότητα των τιμών ενός προϊόντος στο μέλλον. Χρησιμοποιούνται όμως και ευρύτατα κερδοσκοπικά, ως χρηματικό στοίχημα πάνω στην εξέλιξη τιμών ή επιτοκίων (Bessembinder 1991). Η πρώτη φορά στην ιστορία που αναφέρθηκε η χρήση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης ήταν όταν ο Θαλής ο Μιλήσιος, στα "Πολιτικά του Αριστοτέλη" προέβλεψε την αύξηση της σοδειάς του επόμενου έτους και αποφάσισε την αγορά των δικαιωμάτων χρήσης των ελαιοτριβείων. Η πρώτη οργανωμένη διαπραγμάτευση παράγωγων προϊόντων έγινε στο χρηματιστήριο του Άμστερνταμ το 1688 όταν ξεκίνησε η διαπραγμάτευση των πρώτων δικαιωμάτων προαίρεσης πάνω στο βολβό της τουλίπας. Μετά από αρκετά χρόνια, το 1973 στο Σικάγο, λειτούργησε το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων από το Chicago Board of Trades και το Chicago Mercantile Exchange. Στη συνέχεια ακολούθησαν τα χρηματιστήρια του Τόκιο, της Νέας Υόρκης, του Μόντρεαλ κ.ά. Από τα τέλη της δεκαετίας του 1990 η αγορά παραγώγων γιγαντώθηκε σε όλο τον κόσμο. Έτσι από το 1999 ιδρύθηκε από το ελληνικό χρηματιστήριο η πρώτη οργανωμένη αγορά παραγώγων στην Ελλάδα, το Χρηματιστήριο

Παραγωγών Αθηνών και η διαπραγμάτευση των πρώτων προϊόντων ξεκίνησε τον Αύγουστο του ίδιου έτους (Αλεξιάκης 2005)

Τέλος, κλείνοντας την εισαγωγή θα ήθελα να τονίσω τον σκοπό αυτής της εργασίας. Όπως είδαμε παραπάνω, πάνω από έναν αιώνα κάνουμε ανάλυση χρονοσειρών. Αρχικά με γραμμικά μοντέλα, τα οποία ήταν λογικό να μην μπορούν να μας δώσουν λύσεις σε περίπλοκα οικονομικά ζητήματα όπως η πρόβλεψη των αγορών, και στη συνέχεια με πλήθος μη γραμμικών μοντέλων τα οποία είναι υπό ανάπτυξη αλλά με ενθαρρυντικά αποτελέσματα μέχρι στιγμής. Σίγουρα όμως δεν έχουμε μια σίγουρη εικόνα για το αν και σε τι βαθμό μπορούμε να προβλέψουμε κάποια αγορά. Σκοπός αυτής της εργασίας λοιπόν είναι η ανάλυση των δεικτών του πετρελαίου και του φυσικού αερίου και η προσπάθεια πρόβλεψης των μελλοντικών τους τιμών με τη χρήση χαοτικού συστήματος για την ανάδειξη της δυνατότητας (ή μη) πρόβλεψης των δύο αυτών δεικτών ενέργειας και σε πιο βαθμό είναι αυτό εφικτό με τα δεδομένα που διαθέτουμε αυτή τη στιγμή. Το φυσικό αέριο έχει μια ιδιαιτερότητα καθώς φαίνεται οι τιμές του να ακολουθούν μια περιοδικότητα με υψηλότερες τιμές τους χειμερινούς μήνες και χαμηλότερες το καλοκαίρι. Στόχος μας ήταν η προσπάθεια πρόβλεψης των τιμών του φυσικού αερίου την χειμερινή περίοδο καθώς αρκετές έρευνες έχουν δείξει την δυνατότητα πρόβλεψης στην εαρινή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στο πρώτο κεφάλαιο θα κάνουμε μια γενική ανασκόπηση των θεωριών που έχουν αναπτυχθεί για τη μελέτη των χρονοσειρών και των αγορών. Την ανάλυση χρονοσειρών με χρήση γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων, την θεωρία αποτελεσματικής αγοράς, τη θεωρία πολυπλοκότητας και τη θεωρία του χάους.

### 1.1 Χρονοσειρές

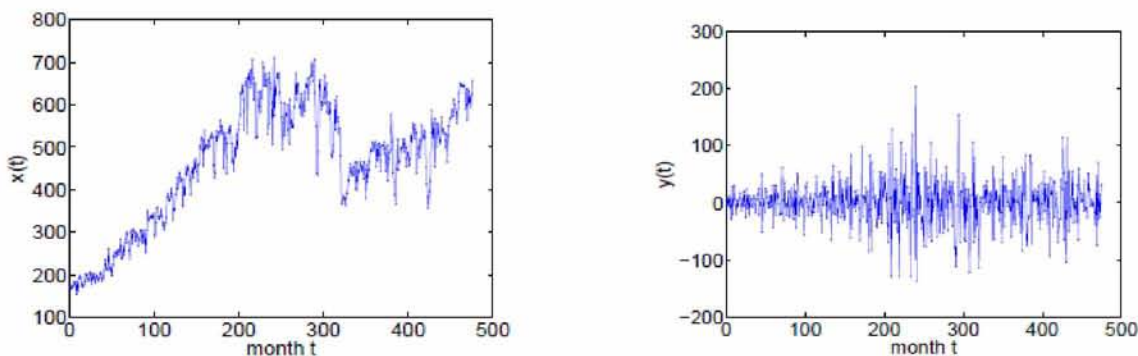
#### 1.1.1 Ορισμός

Ως χρονοσειρά ορίζουμε μια σειρά δεδομένων που συλλέγονται σε τακτά χρονικά διαστήματα. Στόχος μας με την ανάλυση χρονοσειρών είναι να εκτιμήσουμε το σύστημα που τις παράγει και να κάνουμε προβλέψεις στις μελλοντικές τιμές τους.

#### 1.1.2 Χαρακτηριστικά

Τα βασικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών είναι (Κουγιουμτζής 2011) :

1. **Η στασιμότητα ή μη στασιμότητα.** Στάσιμη χρονοσειρά, όπως βλέπουμε στην εικόνα 1.1, σημαίνει ότι οι διακυμάνσεις των τιμών της δεν διαφοροποιούνται με τον χρόνο. Μια μη-στάσιμη χρονοσειρά έχει τάσεις, δηλαδή αλλαγές στη μέση τιμή της σε σχέση με το χρόνο. Μια μη στάσιμη χρονοσειρά μπορεί να παρουσιάζει περιοδικότητα δηλαδή μια επαναλαμβανόμενη αλλαγή τάσης ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Όταν τα διαστήματα αυτά σχετίζονται με φυσικές εποχές τότε λέμε ότι η χρονοσειρά παρουσιάζει εποχικότητα.



Εικόνα 1.1: Αριστερά βλέπουμε μια χρονοσειρά με τάση ενώ δεξιά μια στάσιμη χρονοσειρά.(Κουγιουμτζής 2014)

**2. Αιτιοκρατία και στοχαστικότητα.** Όλες οι χρονοσειρές από πραγματικά μεγέθη και ιδιαίτερα οι οικονομικές χρονοσειρές που μελετάμε περιέχουν θόρυβο, άρα είναι στοχαστικές. Στόχος μας είναι να μειώσουμε ή να απαλείψουμε τον θόρυβο για να εντοπίσουμε το αιτιοκρατικό μέρος του συστήματος που παράγει την χρονοσειρά. Όταν αυτό δεν μπορεί να συμβεί τότε θεωρούμε ότι το σύστημα είναι στοχαστικό και περιοριζόμαστε στην στατιστική περιγραφή του. Αν όμως μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύστημα που μελετάμε διέπεται από κανόνες, άρα είναι αιτιοκρατικό, με κάποιες στοχαστικές διαταραχές (θόρυβος) που όμως δεν κυριαρχούν στην εξέλιξη του, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα μοντέλα για την ανίχνευση περιόδων, αν το σύστημα είναι περιοδικό, ή μοντέλα ανάλυσης μη-γραμμικών συστημάτων αν είναι χαοτικό.

**3. Γραμμικότητα και μη γραμμικότητα.** Γραμμικότητα σημαίνει πως αν εκφράσουμε το σύστημα αναλυτικά όλοι οι όροι θα είναι γραμμικοί ως προς τις μεταβλητές του συστήματος. Εναλλακτικά το σύστημα είναι μη γραμμικό. Ένα μη γραμμικό σύστημα μπορεί να είναι και αιτιοκρατικό και στοχαστικό, το ίδιο συμβαίνει και στα γραμμικά συστήματα. Όμως ένα γραμμικό σύστημα που διέπεται από συγκεκριμένους κανόνες (αιτιοκρατικό) δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς η λύση του είναι απλή και μπορούμε εύκολα να την εντοπίσουμε στην απουσία θορύβου. Από την άλλη μεριά, είναι δύσκολο να εντοπίσουμε μη γραμμικότητα σε ένα στοχαστικό σύστημα αφού ο θόρυβος στο σύστημα δεν επιτρέπει τον εντοπισμό πολύπλοκων μη γραμμικών σχέσεων. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να έχουμε ορίσει μια συγκεκριμένη μη γραμμική μορφή που θέλουμε να διερευνήσουμε. Έτσι λοιπόν, τα δύο είδη συστημάτων που υποθέτουμε για στάσιμες χρονοσειρές είναι το γραμμικό στοχαστικό σύστημα και το μη γραμμικό δυναμικό, πιθανώς χαοτικό, σύστημα.

## **1.2 Γραμμική ανάλυση χρονοσειρών**

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να προσέξουμε είναι αν η χρονοσειρά μας είναι λευκός θόρυβος, δηλαδή στοχαστική διαδικασία, άρα δεν έχουμε καμία δυνατότητα πρόβλεψης. Λευκός θόρυβος είναι μια στάσιμη χρονοσειρά της οποίας τα στοιχεία τα θεωρούμε ως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με ίδια κατανομή (independent and identically distributed, iid). Την κατανομή μιας iid χρονοσειράς την συμβολίζουμε ως  $WN(0, \sigma^2)$ , δηλαδή μέση τιμή 0 και διασπορά  $\sigma^2$ . Αν επιπλέον τα στοιχεία της χρονοσειράς λευκού θορύβου ακολουθούν κανονική

(Γκαουσιανή) κατανομή, τότε η χρονοσειρά λέγεται Γκαουσιανός λευκός θόρυβος (Gaussianwhitenoise). Αν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη τότε λέμε ότι είναι τυχαίος περίπατος (RandomWalk). Στον τυχαίο περίπατο το κάθε στοιχείο της χρονοσειράς ορίζεται από το προηγούμενο με την πρόσθεση μιας τυχαίας τιμής. Δηλαδή

$$x_t = x_{t-1} + e_t, \text{ όπου } e_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (1.1)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε αν η χρονοσειρά έχει τάση ή περιοδικότητα και αν έχει κάνουμε απαλοιφή διότι η τάση και η περιοδικότητα είναι συναρτήσεις του χρόνου και δεν περιέχουν πληροφορία για την δυναμική του συστήματος. Γενικά μια χρονοσειρά μπορούμε να την χωρίσουμε σε τρεις συνιστώσες ως εξής

$$x_t = \mu_t + s_t + y_t \quad (1.2)$$

όπου  $\mu_t$  είναι η συνιστώσα της τάσης,  $s_t$  η συνιστώσα της περιοδικότητας για κάποια περίοδο  $d$  ( $s_{t+d} = s_t$ ) και  $y_t$  είναι η χρονοσειρά των καταλοίπων που μένουν αν αφαιρέσουμε από την χρονοσειρά μας την τάση και την περιοδικότητα. Αν η τάση μπορεί να περιγραφεί ως συνάρτηση του χρόνου τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από πολυώνυμο και να την εξαλείψουμε. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι προσαρμογής της τάσης, όπως η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (είναι και η πιο συνηθισμένη), μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης, χρήση κινητών μέσων κ.ά. Αν όχι τότε λέμε ότι η τάση είναι στοχαστική και για να την απαλείψουμε παίρνουμε τις πρώτες διαφορές της χρονοσειράς.

$$y_t = x_t - x_{t-1} \quad (1.3)$$

Τέλος, για να εξαλείψουμε την περιοδικότητα συνήθως χρησιμοποιούμε ένα φίλτρο κινούμενου μέσου (MA) ή απλά προσπαθούμε να την εξηγήσουμε μέσα από το μοντέλο που προσαρμόζουμε στη χρονοσειρά. Η κινητός μέσος όρος μας δείχνει την μέση τιμή της

χρονοσειράς για κάποια χρονική περίοδο που έχουμε επιλέξει. Υπολογίζεται για την περίοδο που έχουμε επιλέξει ως,

$$MA_{(n)} = \frac{X_{t+1} + X_{t+2} + \dots + X_{t+n}}{n} \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Γραμμικά μοντέλα

Αφού εξαλείψουμε από την χρονοσειρά την τάση και την περιοδικότητα τότε, στην στάσιμη πλέον χρονοσειρά θα χρησιμοποιήσουμε ένα γραμμικό μοντέλο για την εκτίμηση των μελλοντικών της τιμών, σύμφωνα με τον (Κουγιουμτζή 2014). Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα είναι τα αυτοπαλινδρομούμενα, δηλαδή το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο (AR), το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο κινητού μέσου (ARMA) και μικτό ολοκληρωμένο μοντέλο (ARIMA). Τα αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα είναι μοντέλα γραμμικής παλινδρόμησης όπου θεωρούμε ως εξαρτημένη μεταβλητή την τυχαία μεταβλητή της χρονοσειράς σε μια χρονική στιγμή  $t$ ,  $x_t$ , και ως ανεξάρτητες μεταβλητές θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή της χρονοσειράς σε προηγούμενους χρόνους. Ο αριθμός των υστερήσεων που συμπεριλαμβάνουμε λέγεται η τάξη (order) του μοντέλου. Τα μοντέλα AR είναι τα πιο απλά και ένα μοντέλο τάξης ( $p$ ) συμβολίζεται ως AR( $p$ ) και ορίζεται ως

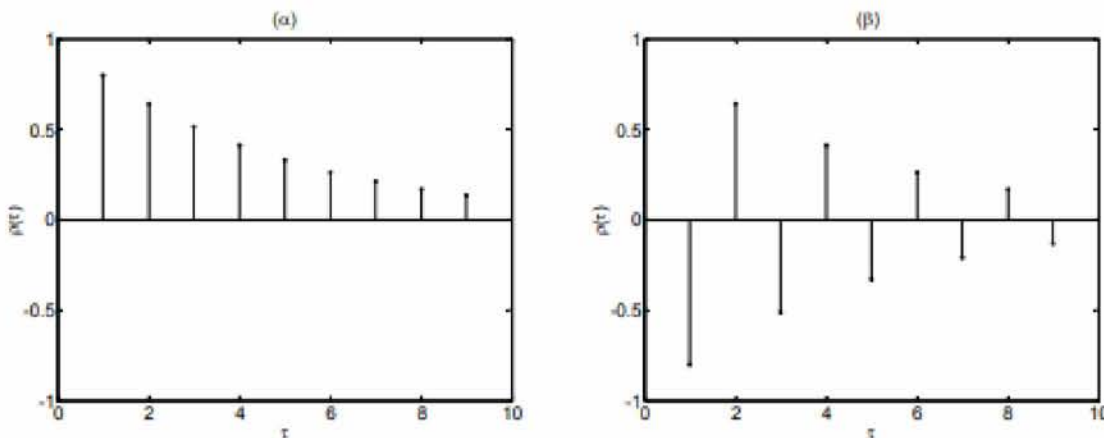
$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} \dots + \varphi_p x_{t-p} + z_t \quad (1.5)$$

όπου  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p$  ( $-1 < \varphi < 1$ ) είναι οι παράμετροι του μοντέλου που εκτιμώνται από το διάγραμμα αυτοσυσχέτισης (Εικόνα 1.2) και  $z_t$  η χρονοσειρά των σφαλμάτων (ή υπολοίπων) με μέση τιμή 0 και διασπορά  $\sigma_z^2$ . Οι συντελεστές του AR( $p$ ) μοντέλου καθώς και η διασπορά του λευκού θορύβου ( $z_t$ ) εκτιμώνται από την χρονοσειρά και οι εκτιμήσεις τους χρησιμοποιούνται για να προβλέψουμε τη χρονοσειρά τις επόμενες χρονικές στιγμές. Σύμφωνα με το AR( $p$ ) η μεταβλητή της χρονοσειράς τη χρονική στιγμή  $t$  κατά ένα μέρος εξηγείται από το γραμμικό συνδυασμό των  $p$  τελευταίων τιμών της χρονοσειράς  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$ . Το υπόλοιπο μέρος που δεν μπορούμε να εξηγήσουμε από τις προηγούμενες τιμές της χρονοσειράς είναι στοχαστικό και οφείλεται σε εξωγενείς επιδράσεις τη χρονική στιγμή  $t$ , που συνοψίζονται στην τυχαία μεταβλητή  $z_t$ . Στα

χρηματοοικονομικά  $z_t$  αναφέρεται ως το σοκ της χρονοσειράς. Σε μερικές περιπτώσεις θεωρούμε πως εξωγενείς παράγοντες σε προηγούμενους χρόνους μπορούν να επηρεάζουν τη μεταβλητή της χρονοσειράς τη χρονική στιγμή  $t$ . Το αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο  $AR(p)$  είναι σε άμεση σχέση με την αυτοσυσχέτιση. Ως αυτοσυσχέτιση ορίζουμε τη συσχέτιση μιας τιμής με μια παρελθούσα τιμή ως συνάρτηση μιας χρονικής υστέρησης και ο τύπος που την περιγράφει είναι ο εξής :

$$\rho_{x_t, x_{t-p}} = \frac{\text{Cov}(x_t, x_{t-p})}{\sqrt{\text{Var}(x_t)}\sqrt{\text{Var}(x_{t-p})}} \quad (1.6)$$

Με  $-1 \leq \rho \leq 1$ ,  $\rho \neq 0$ . Όπου  $p$  μια αυθαίρετη χρονική μετακίνηση (υστέρηση) είτε μπροστά είτε πίσω.



Εικόνα 1.2: (α) Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης με θετικό  $\rho$  (β) Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης με αρνητικό  $\rho$  (Κουγιουμτζής 2014)

Η ανάλυση της αυτοσυσχέτισης μας βοηθάει στη εύρεση επαναλαμβανόμενων μοτίβων, όπως η παρουσία περιοδικότητας, που καλύπτεται από θόρυβο. Μικρή αυτοσυσχέτιση βραχείας κλίμακας σημαίνει αδυναμία πρόβλεψης με μοντέλο  $AR$  και άρα περιμένουμε τα  $AR$  μοντέλα να μην έχουν προβλεπτική ικανότητα σε χρονοσειρές μεταβολών χρηματοοικονομικών δεικτών που δεν έχουν σημαντικές συσχετίσεις.



Αν στο μοντέλο ARπροσθέσουμε και το μέρος του κινούμενου μέσου (MovingAverage, MA) έχουμε το γενικό γραμμικό μοντέλο για την πρόβλεψη στάσιμης χρονοσειράς είναι το αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινούμενου μέσου (AutoRegressive Moving Average, ARMA) που δίνεται ως

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} \dots + \varphi_p x_{t-p} + z_t - \theta_1 z_{t-1} - \dots - \theta_q \theta_{t-q} \quad (1,7)$$

όπου ( $\varphi$ ) είναι οι παράμετροι του AR μέρους και ( $\theta$ ) οι παράμετροι του MAμέρους. ( $X$ ) είναι οι τιμές της πραγματικής χρονοσειράς και ( $z$ ) είναι η σειρά των άγνωστων τυχαίων σφαλμάτων τα οποία θεωρούμε ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή

Το αυτοπαλινδρομούμενο μέρος (AR) είναι τάξης  $p$  και το μέρος του κινούμενου μέσου (MA) είναι τάξης  $q$  και το μοντέλο συμβολίζεται ARMA( $p,q$ ).

Όταν η στάσιμη χρονοσειρά των διαφορών προσδιορίζεται από ένα μοντέλο ARMA( $p,q$ ) τότε η μη-στάσιμη χρονοσειρά του δείκτη προσδιορίζεται από το ολοκληρωμένο αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινούμενου μέσου (autoregressive integrated moving average model, ARIMA) (Κουγιουμτζής 2014)

## **1.2.2 Μεθοδολογία Box-Jenkins**

### ARMAModel

Η μεθοδολογία Box-Jenkinsείναι μία μέθοδος προσδιορισμού, προσαρμογής, ελέγχου και χρήση ολοκληρωμένου αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου κινούμενου μέσου (ARIMA) σε μια χρονοσειρά.(Box and Jenkins 2015). Αυτή η μέθοδος είναι κατάλληλη για μεσαίο προς μεγάλο μήκος (50 παρατηρήσεις και άνω) και η πιο διαδεδομένη από την παρουσίαση της το 1976 και μετά.

Το πρώτο βήμα της μεθοδολογίας Box-Jenkinsείναι ο έλεγχος στασιμότητας της χρονοσειράς μας και η μετατροπή της σε στάσιμη (εφόσον δεν είναι) με τη χρήση των πρώτων διαφορών. Από την εξίσωση (1.7) είδαμε τη μορφή του μοντέλου ARMA για στάσιμες χρονοσειρές. Οι Box-Jenkinsχρησιμοποίησαν ένα συντελεστή υστέρησης  $B$  για να απλοποιήσουν αυτό το μοντέλο. Ο συντελεστής αυτός αλλάζει την χρονική περίοδο τσε  $t-1$ .

Δηλαδή  $BX_t = X_{t-1}$  και  $B^2X_t = X_{t-2}$ . Έτσι χρησιμοποιώντας αυτόν τον τελεστή η εξίσωση (1.7) γράφεται :

$$(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p)X_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)z_t \quad (1.8)$$

Αυτό μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο γράφοντας

$$\varphi_p(B)X_t = \theta_q(B)z_t \quad (1.9)$$

Όπου

$$\varphi_p(B) = (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p) \quad (1.10)$$

και

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \quad (1.11)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι οι συντελεστές  $\varphi_p(B)$  και  $\theta_q(B)$  είναι πολυώνυμα στο  $B$  τάξης  $p$  και  $q$  αντίστοιχα. Ένα από τα πλεονεκτήματα του να γράφουμε τα μοντέλα με αυτόν τον τρόπο είναι ότι μπορούμε να δούμε ευκολότερα την ισότητα μεταξύ τους. (Box and Jenkins 2015)

### ARIMA Model

Για μη στάσιμες χρονοσειρές χρησιμοποιούμε το μοντέλο ARIMA (p,d,q) όπου παίρνουμε τις πρώτες διαφορές της χρονοσειράς :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}. \quad (1.12)$$

Η με την χρήση του τελεστή υστέρησης μπορεί να γραφεί:

$$\Delta X_t = (1-B)X_t \quad (1.13)$$

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να πετύχουμε την στασιμότητα. Ο αριθμός των διαφορών που θα χρησιμοποιήσουμε για να πετύχουμε την στασιμότητα είναι το  $d$ .

Αν για παράδειγμα η σειρά που θα προκύψει είναι στάσιμη με την χρήση των πρώτων διαφορών ( $d=1$ ) τότε το υπόδειγμα που προσαρμόζεται είναι ARIMA( $p,1,q$ ) (Μαρκόπουλος et al 2015)

Όταν η χρονοσειρά έχει εποχιακές διακυμάνσεις τότε οι Box-Jenkins προτείνουν το εξής γενικό μοντέλο :

$$\varphi_p(B)\Phi_p(B)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t \quad (1,14)$$

Όπου

d: είναι η τάξη των διαφορών

s: Ο αριθμός των περιόδων στο χρόνο

D: Η τάξη των διαφορών εποχικότητας

Q: Ο αριθμός των εποχικών όρων κινούμενου μέσου

Σύμφωνα με τους Box-Jenkins η μέγιστη τιμή των d,D,p,q,P,Q είναι δύο και έτσι η έκφραση της παραπάνω σχέση είναι συνήθως απλή. [17]

### Μερική αυτοσυσχέτιση

Για να εκτιμήσουμε την τάξη p του ARμέρους θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση μερική αυτοσυσχέτισης. Παραπάνω μιλήσαμε για την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης η οποία μας δίνει την συσχέτιση μεταξύ διαφορετικών υστερήσεων στην χρονοσειρά (π.χ.  $X_{t-3}$  με  $X_{t-1}$ ). Η μερική αυτοσυσχέτιση υπολογίζει το ίδιο, αφαιρώντας όμως την επίδραση των ενδιάμεσων υστερήσεων (π.χ. το  $X_{t-2}$ ). Δηλαδή υπολογίζει την καθαρή συσχέτιση του  $X_{t-3}$  με το  $X_{t-1}$  έχοντας αφαιρέσει την επίδραση που έχεις στις δύο αυτές τιμές το  $X_{t-2}$ . Γνωρίζοντας τα παραπάνω ως τάξη του αυτοπαλινδρομούμενου μοντέλου (AR) παίρνουμε την τελευταία υστέρηση για την οποία η μερική αυτοσυσχέτιση είναι στατιστικά σημαντική.

Για παράδειγμα :

<u>Υστέρηση</u>	<u>Μερική αυτοσυσχέτιση</u>
1	0,45
2	0,19
3	0,68
4	0,04
5	0,03
6	0,04

Ως τάξη  $p$  του ARμέρους θα επιλέξουμε το 3 καθώς η μερική αυτοσυσχέτιση μετά την τρίτη υστέρηση είναι σχετικά μικρή.

### Στάδια μεθοδολογίας Box-Jenkins

Η μεθοδολογία Box-Jenkins αναφέρεται στην επαναληπτική εφαρμογή των τριών ακόλουθων βημάτων :

#### 1) Ταυτοποίηση (Identification).

Σε αυτό το βήμα χρησιμοποιούμε διάφορα δεδομένα (όπως αυτοσυσχέτιση, μερική αυτοσυσχέτιση, διάφορα γραφήματα των δεδομένων κ.ά.) για να προσδιορίσουμε τις τιμές  $p, d, q$  για να επιλέξουμε το κατάλληλο μοντέλο ARIMA.

Πιο συγκεκριμένα, προσδιορίζουμε τον αριθμό των διαφορών που απαιτούνται για τη μετατροπή της χρονοσειράς σε στάσιμη. Στη συνέχεια εξετάζουμε την αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς για να ελέγξουμε την στασιμότητα της. Αν οι αυτοσυσχετίσεις συγκλίνουν με υψηλό ρυθμό προς το μηδέν, τότε πολύ πιθανό η σειρά να είναι στάσιμη, αν συγκλίνουν με χαμηλό ρυθμό τότε είναι πιθανό η σειρά να μην είναι στάσιμη. Σε αυτή την περίπτωση γίνεται χρήση των διαφορών ώστε να μετατραπεί η σειρά σε στάσιμη. Τέλος γίνεται ο καθορισμός των  $p$  και  $q$  για να προσδιοριστεί η τάξη του μοντέλου ARIMA με βάση τις απλές και μερικές αυτοσυσχετίσεις. (Μαρκόπουλος et al. 2015)

#### 2) Εκτίμηση (Estimation)

Εδώ γίνεται η εκτίμηση των  $(\phi)$  και  $(\theta)$  με τεχνικές back-testing, μέγιστης πιθανοφάνειας κλπ

#### 3) Διαγνωστικός έλεγχος (Diagnostic Checking)

Τέλος, με τον διαγνωστικό έλεγχο, ελέγχουμε αν το μοντέλου που εκτιμήθηκε είναι ικανοποιητικό.

Το μοντέλο πρέπει να ελεγχθεί για την καταλληλότητα του με βάση τέσσερις άξονες οι οποίοι είναι :

- Η σημαντικότητα των συντελεστών του υποδείγματος
- Η σταθερότητα των συντελεστών υποδείγματος
- Οι ιδιότητες των καταλοίπων
- Η προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος

Στη συνέχεια ελέγχουμε την καταλληλότητα του μοντέλου με τη διαδικασία backtesting. Δηλαδή προσαρμόζουμε το μοντέλο σε ένα τμήμα της χρονοσειράς μας και προβλέπουμε, τις ήδη γνωστές σε εμάς, μελλοντικές τιμές. Πολλές φορές όμως τα δεδομένα που έχουμε δεν επαρκούν για αυτή τη διαδικασία. Ένα ακόμα κριτήριο για να κρίνουμε αν το μοντέλο είναι ικανοποιητικό είναι η συμπεριφορά της χρονοσειράς των καταλοίπων, η οποία θα πρέπει να συμπεριφέρεται ως λευκός θόρυβος. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δεν πρέπει να υπάρχει αυτοσυσχέτιση μεταξύ των καταλοίπων. (Μαρκόπουλος et al. 2015)

Για τον έλεγχο της χρονοσειράς των καταλοίπων στη μεθοδολογία Box-Jenkins ακολουθείται η στατιστική Q των Ljung-Box, με βάση την οποία γίνεται ο έλεγχος της σημαντικότητας ηπλήθους συντελεστών αυτοσυσχέτισης

Η στατιστική Q των Ljung-Box δίνεται από τον τύπο :

$$Q_{LB} = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \quad (1.15)$$

Όπου:

h: Ο αριθμός των υστερήσεων που ελέγχονται

n: το μέγεθος του δείγματος

$\hat{\rho}_s$ : η αυτοσυσχέτιση του δείγματος για υστέρηση k

Η στατιστική ακολουθεί κατανομή  $X^2$  με  $h-p$ -βαθμούς ελευθερίας. Οι υποθέσεις που ελέγχονται σε σχέση με τη στατιστική  $Q$  είναι :

$$H_0: Q_{LB} > X_h^2 \quad (1.16)$$

$$H_1: Q_{LB} < X_h^2 \quad (1.17)$$

Η μηδενική υπόθεση ( $H_0$ ) θα απορρίπτεται εφόσον η τιμή της στατιστικής  $Q$  είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή της κατανομής  $X_h^2$ , για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$  (συνήθως  $\alpha=0,05$ ). Αντίστοιχα θα απορρίπτεται η υπόθεση  $H_1$  αν η τιμή της στατιστικής  $Q$  είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή της κατανομής  $X_h^2$ , για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ . (Μαρκόπουλος et al. 2015)

### Κριτήρια πληροφορίας

Ένας άλλος τρόπος να προσδιορίσουμε την τάξη ( $p$ ) ενός AR μοντέλου (Κουγιουμτζής 2014) είναι τα κριτήρια πληροφορίας. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στην πιθανοφάνεια των δεδομένων με βάση αυτό το μοντέλο. Ως δείκτης πιθανοφάνειας μπορεί να θεωρηθεί η διασπορά των υπολοίπων  $S_z^2$ , από την προσαρμογή του AR( $p$ ) μοντέλου. Το πιο γνωστό κριτήριο είναι το κριτήριο πληροφορίας του Akaike (Akaike information criterion, AIC) που ορίζεται ως :

$$AIC(p) = \ln \left( S_z^2 + \frac{2p}{n} \right) \quad (1.18)$$

Όπου:

$S_z^2$ : Η διασπορά των υπολοίπων

$n$ : Το μήκος της χρονοσειράς

$p$ : Η τάξη του τμήματος AR

Είναι ξεκάθαρο ότι όσο αυξάνεται η τάξη  $p$  του μοντέλου AR τα κατάλοιπα (residual) της προσαρμογής γίνονται μικρότερα, το  $S_z^2$  μικραίνει, και για πολύ μεγάλες τάξεις το μοντέλο AR προσαρμόζεται σε διακυμάνσεις που δεν αντικατοπτρίζουν τις πραγματικές συσχετίσεις αλλά το λευκό θόρυβο, οπότε λέμε ότι το έχουμε κάνει overfitting μοντέλο. Για αυτό στην (1.18) υπάρχει ο δεύτερος όρος, που λέγεται και συνάρτηση ποινής (penalty function), ο οποίος δρα αρνητικά και αυξάνει την τιμή της συνάρτησης AIC όταν η τάξη του μοντέλου αυξάνει.

Υπολογίζουμε το AIC για μεγάλο αριθμό τάξεων μοντέλου και παίρνουμε εκείνη την τάξη που δίνει τη μικρότερη τιμή του κριτηρίου AIC. Αφού έχει γίνει η επιλογή της τάξης του μοντέλου AR, εκτιμούμε τις παραμέτρους του AR(p). Οι δύο πιο συνηθισμένοι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (ordinary least squares) και η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method)

Τέλος, για την προσαρμογή του μοντέλου στη χρονοσειρά, όπως είδαμε και παραπάνω, πρέπει να κάνουμε τον διαγνωστικό έλεγχο για την επάρκεια του μοντέλου. Αυτό γίνεται ελέγχοντας τα κατάλοιπα της προσαρμογής, δηλαδή οι διαφορές πραγματικών και εκτιμωμένων τιμών που αποτελούν εκτίμηση του  $z_t$ , αν είναι λευκός θόρυβος. Αν τα κατάλοιπα δεν είναι λευκός θόρυβος τότε υπάρχουν συσχετίσεις στη χρονοσειρά που δεν έχει συμπεριλάβει το μοντέλο και άρα θεωρείται ανεπαρκές (Κουγιουμτζής 2014).

### 1.2.3 Αξιολόγηση μοντέλου σε πρόβλεψη

Η αξιολόγηση της επίδοσης πρόβλεψης ενός μοντέλου (Κουγιουμτζή 2014) δεν μπορεί να βασίζεται σε μια μόνο πρόβλεψη. Γι αυτό πρέπει να υπολογίσουμε κάποιο μέτρο που συγκεντρώνει τα σφάλματα πρόβλεψης για έναν ικανοποιητικό αριθμό προβλέψεων. Υπάρχουν διάφοροι σύνθετοι τρόποι αξιολόγησης, όπως η τεχνική αντεπικύρωσης (crossvalidation). Μια απλή, όμως, μέθοδος που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι να χωρίσουμε τη χρονοσειρά μήκους  $N$ , σε δύο σύνολα, στο σύνολο εκμάθησης (trainingset)  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  στο οποίο εκτιμούμε τις παραμέτρους του μοντέλου και στο σύνολο επικύρωσης (validationset)  $(x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots, x_N)$  στο οποίο κάνουμε τις προβλέψεις  $(x_{N_1}(T), x_{N_1+1}(T), \dots, x_{N-T}(T))$  και υπολογίζουμε το σφάλμα πρόβλεψης.

$$\begin{aligned}
 e_{N_1}(T) &= x_{N_1+T} - x_{N_1}(T) \\
 &\vdots \\
 e_{N-T}(T) &= x_N - x_{N-T}(T) \quad (1,19)
 \end{aligned}$$

Υπάρχουν διάφορα στατιστικά μέτρα που συγκεντρώνουν τα σφάλματα πρόβλεψης, ένα από αυτά είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error, mse) και δίνεται από τον τύπο :

$$mse(T) = \frac{1}{N-N_1-T+1} \sum_{j=N_1}^{N-T} e_j(T)^2 = \frac{1}{N-N_1-T+1} \sum_{j=N_1}^{N-T} (X_{j+T} - X_j(T))^2 \quad (1.20)$$

Όπου:

N: Το μήκος της χρονοσειράς

T: Το βήμα

e: Το σφάλμα πρόβλεψης

Συχνά χρησιμοποιείται η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (root mean square error, rmse)

$$rmse(T) = \sqrt{\frac{1}{N-N_1-T+1} \sum_{j=N_1}^{N-T} e_j(T)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-N_1-T+1} \sum_{j=N_1}^{N-T} (X_{j+T} - X_j(T))^2} \quad (1.21)$$

Ένα χρήσιμο μέτρο σφάλματος πρόβλεψης όταν θέλουμε να συγκρίνουμε μοντέλα πρόβλεψης σε διαφορετικές χρονοσειρές είναι η κανονικοποίηση του rmse (normalized root mean square error, nrmse) διαιρώντας το rmse με τη δειγματική τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων της χρονοσειράς (ή πιο σωστά των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται στο σχηματισμό των σφαλμάτων)

$$nrmse(T) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-N_1-T+1} \sum_{j=N_1}^{N-T} (X_{j+T} - X_j(T))^2}}{\sqrt{\frac{1}{N-N_1-T+1} \sum_{j=N_1}^{N-T} (X_{j+T} - \bar{x})^2}} \quad (1.22)$$



Όπου  $\bar{x}$  είναι η δειγματική μέση τιμή των  $\chi_{N_1+T}, \chi_{N_1+1+T}, \dots, \chi_N$ . Τιμές του  $\text{nmse}$  κοντά στο 0 δηλώνουν πολύ καλή πρόβλεψη ενώ τιμές του  $\text{nmse}$  κοντά στο 1 δηλώνουν ότι η πρόβλεψη είναι τόσο καλή όσο αν προβλέπαμε με τη μέση τιμή. [15]

### 1.3 Μη γραμμικά μοντέλα ARCH/GARCH

Το μοντέλο ARCH (AutoRegressive Conditionally Heteroskedasticity) είναι ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας. Εισήχθη από τον Engle (1982) και πρακτικά θεωρεί τη διακύμανση του τρέχοντος σφάλματος ως συνάρτηση των διακυμάνσεων των όρων του σφάλματος των προηγούμενων χρονικών περιόδων. Πιο συγκεκριμένα το μοντέλο ARCH προσαρμόζει ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο AR στη διακύμανση του σφάλματος. Αν υποθέτει αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινητού μέσου για τη διακύμανση του σφάλματος τότε το μοντέλο καλείται γενικευμένο αυτοπαλινδρομούμενο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα (generalized autoregressive conditionally heteroscedastic-GARCH) σύμφωνα με τον Bollerslev (1986) που επέκτεινε τη δουλειά του Engle (1982)

Το μοντέλο ARCH δημιουργήθηκε για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την μέση τιμή της απόδοσης (π.χ. ενός προϊόντος) με σκοπό να προβλέψουμε τις μελλοντικές του αποδόσεις. Ο πρόδρομος του ARCH ήταν ένα μοντέλο που χρησιμοποιούσε την κινητή τυπική απόκλιση η οποία υπέθετε ότι η διακύμανση της αυριανής απόδοσης θα είναι ένας ισοσταθμικός μέσος όρος των καταλοίπων των τελευταίων 22 ημερών. Η προσέγγιση αυτή όμως ήταν αναξιόπιστη αφού η λογική έλεγε ότι οι πιο πρόσφατες παρατηρήσεις θα έπρεπε να φέρουν υψηλότερο ποσοστό στάθμισης. Το ARCH αντιμετωπίζει αυτές τις σταθμίσεις ως παραμέτρους που πρέπει να εκτιμηθούν και μέσω της διαδικασίας της παλινδρόμησης τις εκτιμάει. (Μαρινάκος 2008)

Το GARCH πρακτικά εφαρμόζει μοντέλο ARMA (αντί για AR που χρησιμοποιεί το ARCH) στα ιστορικά τετράγωνα των καταλοίπων, τα οποία φέρουν φθίνουσες σταθμίσεις που συγκλίνουν στο μηδέν αλλά δεν γίνονται μηδέν. Ο τύπος που μας δίνει το μοντέλο GARCH είναι :

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{a_0 + \sum_{j=1}^q a_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p h_{t-j}} \quad (1,23)$$

Όπου :

$v_t$ : σταθερά στάθμισης

$a_j \varepsilon_{t-j}^2$ : Το ΜΑμέρος

$h_{t-j}$  : Το ΑRμέρος

Υπάρχουν αρκετοί μετασχηματισμοί των μοντέλων ARCH και GARCH όπως το ARCH-M(q) και EGARCH(p,q) στους οποίους δεν θα επεκταθούμε.

#### 1.4 Θεωρία πολυπλοκότητας (complexity theory)

Ένα πολύπλοκο σύστημα είναι ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά στοιχεία τα οποία μπορούν να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Τα πολύπλοκα αυτά συστήματα είναι δύσκολο να μοντελοποιηθούν λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μερών τους. Τα μέρη του συστήματος δρουν αυτόνομα αλλά παράλληλα μαζί με αυτό και δεν μπορούν να απομακρυνθούν πράγμα που κάνει τη μελέτη του ακόμα πιο δύσκολη. Γι αυτό λέμε ότι η πολυπλοκότητα είναι μια κατάσταση μεταξύ τάξης και χάους. Παράδειγμα πολύπλοκων συστημάτων είναι οι πόλεις, οικοσυστήματα, τα κύτταρα ακόμα και το ίδιο το σύμπαν.

Σύμφωνα με τον Lucas (2004) η πολυπλοκότητα μπορεί να χωριστεί σε :

**Στατική πολυπλοκότητα (Static complexity)** : Είναι ο πιο απλός τύπος πολυπλοκότητας και το βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι το σύστημα που εξετάζεται δεν αλλάζει με το χρόνο.

**Δυναμική πολυπλοκότητα (Dynamic complexity)**: Σε αυτόν τον τύπο το σύστημα αλλάζει στο πέρασμα του χρόνου

**Εξελισσόμενη πολυπλοκότητα (Evolving complexity)**: Σε αυτή την περίπτωση, εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου σε διαφορετικά συστήματα.

**Αυτο-οργανωμένη πολυπλοκότητα (Self-Organized complexity):** Είναι ίσως ο πιο ενδιαφέρον τύπος πολυπλοκότητας. Το βασικό χαρακτηριστικό του είναι ότι το σύστημα εξελίσσεται μαζί με το περιβάλλον του σε τέτοιο βαθμό που πλέον δεν μπορεί να περιγραφεί έξω από αυτό. (Kourtidou 2012)

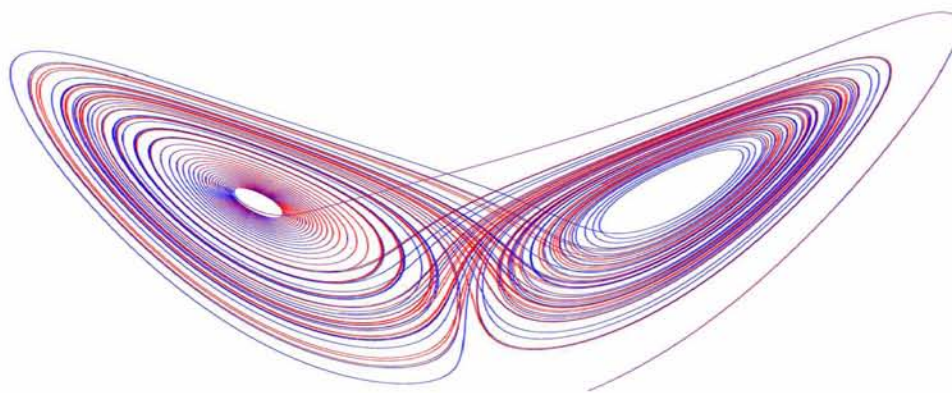
Η θεωρία πολυπλοκότητας ασχολείται με πολύπλοκα συστήματα που επηρεάζουν τις ζωές μας καθημερινά και σε πολλούς τομείς όπως τα οικονομικά, την βιολογία, την φυσική, την κοινωνιολογία, χημεία, μετεωρολογία κ.ά. Πρακτικά, τα περισσότερα συστήματα που συναντάμε στη ζωή μας είναι πολύπλοκα. Η θεωρία της πολυπλοκότητας μπόρεσε να εφαρμοστεί ευρύτατα σε όλες αυτές τις επιστήμες με την βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών, καθώς οι μη γραμμικές εξισώσεις που είναι βασικά στοιχεία της πολυπλοκότητας μπορούν να λυθούν μόνο με ισχυρή υπολογιστική δύναμη. Έτσι ο μετεωρολόγος Lorenz (1961) κατάφερε να παρατηρήσει τυχαία ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των πολύπλοκων συστημάτων, την ευαισθησία στην αλλαγή των αρχικών συνθηκών. Συγκεκριμένα ο Lorenz με την χρήση του υπολογιστή του εργαζόταν στη πρόβλεψη του καιρού. Μια αμελητέα στρογγυλοποίηση μερικών δεκαδικών ψηφίων στα νούμερα που χρησιμοποιούσε είχε ως συνέπεια την πλήρη αλλαγή του τελικού αποτελέσματος. Αυτό είναι γνωστό ως "το φαινόμενο της πεταλούδας" όπου θεωρείται ότι μια πεταλούδα που κουνάει τα φτερά της στην Κίνα μπορεί να προκαλέσει τυφώνα στις ΗΠΑ.

Στα οικονομικά η θεωρία πολυπλοκότητας αντιμετωπίζει μια χρηματοοικονομική αγορά ως ένα δυναμικό σύστημα. Η φιλοσοφία τέτοιων δυναμικών συστημάτων είναι ότι έχουν μια εγγενή δομή η οποία αλλάζει με τον χρόνο καθώς αλληλεπιδράει με το περιβάλλον και εξελίσσεται από αυτό. Όλα αυτά τα χρόνια οι αγορές αντιμετωπίζονταν ως ένα μη γραμμικό σύστημα καθώς οι οικονομολόγοι αφαιρούσαν την πολυπλοκότητα από τα μοντέλα με τη δικαιολογία ότι η τιμές των μετοχών προσαρμόζονται σχεδόν ακαριαία για να αποτυπώσουν κάθε νέα πληροφορία. Τα παραπάνω βασίζονταν στη Θεωρία Αποτελεσματικής Αγοράς (Efficient Market Hypothesis) κατά την οποία οι αγορές χαρακτηρίζονται από τάξη και ορθολογισμό, στην πραγματικότητα όμως δεν συμβαίνει αυτό. Κάθε χρόνο παρατηρούμε χρηματοοικονομικές φούσκες οι οποίες δημιουργούνται από μη ορθολογικές κινήσεις επενδυτών. Αυτό συμβαίνει γιατί η πληροφόρηση δεν είναι κοινή για όλους και ο κάθε επενδυτής αντιλαμβάνεται διαφορετικά την πληροφορία που δέχεται. Αυτό μας αποδεικνύει ότι

οι αγορές δεν είναι αποτελεσματικές άρα πρέπει να στραφούμε σε άλλο μοντέλα αν θέλουμε να τις κατανοήσουμε και εν τέλει να τις προβλέψουμε. (Kourtidou 2012)

### 1.5 Θεωρία του Χάους

Η Θεωρία του Χάους είναι ένας τομέας των μαθηματικών που έχεις όμως εφαρμογή σε πολλούς κλάδους επιστημών όπως η φυσική, η βιολογία, η μηχανολογία και φυσικά τα οικονομικά όπου και θα αναφερθούμε. Πατέρας της θεωρίας του Χάους θεωρείται ο Jules Henri Poincare όπου το 1889 του απονεμήθηκε το βραβείο για τη λύση του προβλήματος των τριών σωμάτων από τον βασιλιά της Σουηδίας OscarII. Ο Poincare έλυσε τον γρίφο χρησιμοποιώντας για πρώτη φορά μια γεωμετρική μέθοδο (τοπολογική όπως την αποκαλούμε σήμερα) και έλυσε το πρόβλημα ποιοτικά και όχι ποσοτικά. Η Θεωρία του Χάους τάραξε τα θεμέλια της κλασικής φυσικής η οποία θεωρούσε έως τότε ότι τα πάντα στη φύση μπορούν να απλοποιηθούν. Το 1961 ο μετεωρολόγος Edward Lorenz παρατήρησε πειραματικά το πως οι μικρές αλλαγές στις αρχικές συνθήκες προκαλούν μεγάλη αλλαγή στο τελικό αποτέλεσμα, ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των χαοτικών συστημάτων. Ο Lorenz τυπώνοντας από τον υπολογιστή του αλλαγές στην θερμοκρασία παρατήρησε έναν παράξενο ελκυστή όπως βλέπουμε στην Εικόνα 1.3.



Εικόνα 1.3 Χαοτικός ελκυστής του Lorenz ([https://www.researchgate.net/figure/Lorenz-attractor\\_fig1\\_309729952](https://www.researchgate.net/figure/Lorenz-attractor_fig1_309729952))

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων είναι η ντετερμινιστικότητα τους. Μπορεί εκ πρώτης όψεως η συμπεριφορά τους να μοιάζει τυχαία, παρ όλα αυτά διέπεται από συγκεκριμένους κανόνες κάτι που μας δίνει τη δυνατότητα για τη βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη της

εξέλιξης τους. Η δυνατότητα πρόβλεψης είναι πολύ σημαντική στα οικονομικά και συγκεκριμένα στις χρηματοοικονομικές αγορές και είναι κάτι που ακόμα δεν το έχουμε πετύχει. Γι αυτό το λόγο πολλοί επιστήμονες, μαθηματικοί, φυσικοί, μηχανολόγοι κλπ, έσπευσαν να εφαρμόσουν τη θεωρία του χάους στα οικονομικά που φαινόταν να δυσκολεύονταν να λύσουν βασικά προβλήματα με την κλασική οικονομική θεωρία. Μέχρι στιγμής τα δείγματα είναι ενθαρρυντικά και φαίνεται να εντοπίζονται χαοτικές συμπεριφορές σε διάφορες αγορές, όπως για παράδειγμα, η μελέτη των (Serletis, Gogas 1999) εντοπίζει χαοτική συμπεριφορά στην αγορά φυσικού αερίου στη Βόρεια Αμερική. Ακόμα όμως δεν έχουμε καταφέρει να προβλέψουμε με βεβαιότητα και συστηματικά κάποια αγορά.

### ***1.5.1 Παράξενοι ελκυστές***

Στα απλά γραμμικά συστήματα λέμε ότι ένα σύστημα έλκεται από ένα σημείο όταν για κάποιες αρχικές συνθήκες το σύστημα οδηγείται σε ένα σταθερό σημείο όπου και ισορροπεί. Το σημείο αυτό ονομάζεται ελκυστής. Οι παράξενοι ελκυστές δεν είναι σημεία αλλά γεωμετρικό σχήμα που έχει φρακταλική μορφή (που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης). Το δυναμικό σύστημα που βρίσκεται μέσα στον παράξενο ελκυστή έχει φαινομενικά τυχαία τροχιά αλλά είναι φραγμένο, δηλαδή δεν μπορεί να φύγει πέρα από τα όρια του ελκυστή. Έτσι λέμε ότι είναι τοπικά ασταθές αλλά γενικά σταθερό. Για παράδειγμα όταν δύο σημεία του συστήματος βρίσκονται σε κοντινές τροχιές (μέσα στον παράξενο ελκυστή) μετά από ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του συστήματος θα βρίσκονται σε τελείως διαφορετικές θέσεις, μέσα όμως στον ελκυστή, και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα μπορούν να πλησιάσουν και πάλι οι τροχιές τους.

### ***1.6 Ανάλυση χαοτικών χρονοσειρών***

Θεωρητικά είναι εφικτό να προβλέψουμε τη χαοτική φύση μιας χρονοσειράς αν τηρούνται ορισμένες υποθέσεις που αφορούν τόσο εγγενής ιδιότητες του υπό μελέτη συστήματος όσο και ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά τις χρονοσειράς. Στην πράξη όμως τα πράγματα δεν είναι ιδανικά και πολλές φορές είναι δύσκολο να αποφανθούμε αν μια χρονοσειρά

είναι χαοτική ή όχι. Ένα από τα προβλήματα, για παράδειγμα, είναι ο περιορισμένος αριθμός των δεδομένων που έχουμε για μια χρονοσειρά.

Τα χαρακτηριστικά που χρειαζόμαστε για να επιβεβαιώσουμε την χαοτική συμπεριφορά μιας χρονοσειράς και στη συνέχεια να την προβλέψουμε είναι. (Συριόπουλος και Λεοντίσης 2000) :

**1) Το σύστημα θα πρέπει να έχει μικρό αριθμό μεταβλητών.** Αν ο αριθμός των μεταβλητών που θα συγκλίνει το σύστημα είναι μεγάλος τότε είναι πιθανόν το σύστημα να παρουσιάσει πολύπλοκη συμπεριφορά και πρακτικά τυχαία. Οπότε το σύστημα πρέπει να έχει το μικρότερο δυνατό αριθμό συντελεστών για καλύτερα αποτελέσματα

**2) Μεγάλο μήκος παρατηρήσεων.** Η θεωρία του χάους επιβάλλει άπειρο αριθμό παρατηρήσεων αλλά και με αρκετές χιλιάδες μπορούμε να πάρουμε καλές προσεγγίσεις.

**3) Μεγάλη ακρίβεια στις παρατηρήσεις.** Ακριβείς μετρήσεις με όλα τα δεκαδικά ψηφία

**4) Έλλειψη θορύβου.** Μόνο υπό έλλειψη θορύβου μπορεί να φανεί καθαρά η δυναμική της χρονοσειράς

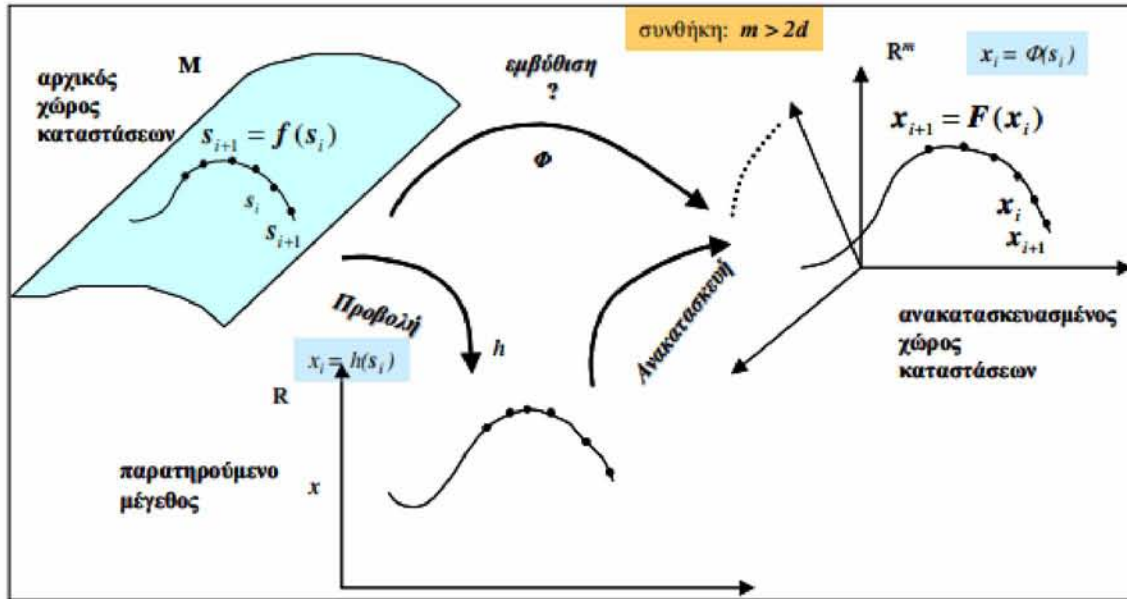
**5) Στασιμότητα.** Η χρονοσειρά δεν πρέπει να παρουσιάζει μακροχρόνιες τάσεις (αν και αυτό δεν έχει ξεκαθαριστεί ακόμα).

### ***1.6.1 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων***

Για να γνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά του συστήματος θα πρέπει να γνωρίζουμε την συνάρτηση  $f^t$  που το περιγράφει, τη διάσταση του χώρου φάσεων  $d$  στο οποίο βρίσκονται οι τροχιές που παράγει το σύστημα καθώς και την συνάρτηση παρατήρησης  $h$ . Δεν είναι όμως δυνατό να γνωρίζουμε αυτές τις πληροφορίες έχοντας ως στοιχεία μόνο τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Δεν μπορούμε δηλαδή να γυρίσουμε από το σύνολο  $\{R\}$  που βρίσκεται η χρονοσειρά μας στο  $R^d$  για να παρατηρήσουμε τον χώρο των φάσεων.

Γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του **Takens** που μας επιτρέπει κάτω από κάποιες συνθήκες να κατασκευάσουμε έναν νέο χώρο φάσεων, διάστασης  $m$ , στον οποίο οι ανακατασκευασμένες τροχιές  $\{x_i\} \in R^m$  από την χρονοσειρά  $\{x_i\}$ , δηλαδή ο παράξενος ελκυστής, διατηρεί τις τοπολογικές ιδιότητες του αρχικού παράξενου ελκυστή και το

ανακατασκευασμένο δυναμικό σύστημα έχει τα ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με το αρχικό σύστημα. Πετυχαίνουμε δηλαδή εμπύθιση του αρχικού ελκυστή στον ανακατασκευασμένο ελκυστή όπως φαίνεται παρακάτω



Εικόνα 1.4 Ανακατασκευή του χώρου των

φάσεων. (<http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/ChaosSimulation/ChaosSimulationNotes.pdf>) (Κουγιουμτζής 2008)

Το θεώρημα του Takens έχει την συνθήκη ότι  $m \geq 2D + 1$ , όπως βλέπουμε στην εικόνα 1.4, για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων, όπου  $D$  είναι η φρακταλική διάσταση του ελκυστή. Η διάσταση  $m$  του ανακατασκευασμένου χώρου των φάσεων πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να "ξεδιπλώνεται" πλήρως και να μην παρουσιάζει αυτο-τομές (intersections) γιατί αλλιώς δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό ελκυστή. Το θεώρημα του Takens αναφέρεται σε χρονοσειρές με άπειρο μήκος και χωρίς θόρυβο κάτι που δεν συναντάμε στην πράξη. Γι' αυτό τα αποτελέσματα της ανακατασκευής μπορούν να θεωρηθούν μόνο προσεγγιστικά. (Κουγιουμτζής 2008)

Η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων γίνεται απλώς με την δημιουργία νέων σημείων από τις παρατηρήσεις που έχουμε στον χώρο των φάσεων που θέλουμε να κατασκευάσουμε. Η πιο απλή και συνήθης μέθοδος ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων είναι η **μέθοδος των υστερήσεων (method of delays)**.

Οι παράμετροι της ανακατασκευής είναι (Κουγιουμτζής 2008) :

**1) Η διάσταση εμφύθισης (embedding dimension)  $m$**  που ορίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που γίνονται συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος.

**2) Η υστέρηση (Delay)  $\tau$**  που ορίζει το χρονικό βήμα υστέρησης για την επιλογή των  $m$  συνιστωσών του ανακατασκευασμένου διανύσματος.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πληροφορία που διοχετεύεται από τη χρονοσειρά στο κάθε ανακατασκευασμένο διάνυσμα, καλύπτει το χρονικό παράθυρο

$$\tau_w = (m-1)\tau \quad (1.24)$$

Για να επιτύχουμε σωστή ανακατασκευή του παράξενου ελκυστή, θα πρέπει το παράθυρο αυτό να μην είναι ούτε πολύ μικρό, αλλιώς δε θα χρησιμοποιηθεί αρκετή πληροφορία, αλλά ούτε και πολύ μεγάλο, καθώς θα υπάρχει περιττή πληροφορία που θα περιπλέξει την ανακατασκευή και θα προσθέσει θόρυβο. Εάν είχαμε άπειρα δεδομένα και χωρίς θόρυβο δεν θα είχαμε και κανένα περιορισμό για την υστέρηση ( $\tau$ ) και τη διάσταση εμφύθισης ( $m$ ). Τα δεδομένα μας όμως είναι περιορισμένα και με θόρυβο και αυτό μας αναγκάζει να περιορίσουμε το  $\tau$  και το  $m$  σε όσο το δυνατόν μικρές τιμές για να πετύχουμε την καλύτερη δυνατή ανακατασκευή, αλλά όχι τόσο μικρές ώστε να γίνει κακή ανακατασκευή. (Συριόπουλος Λεοντίσης 2000, Κουγιουμτζής 2008)

Για τις παραπάνω παραμέτρους ( $\tau$ ) και ( $m$ ) υπάρχουν οι εξής περιορισμοί (σύμφωνα με Συριόπουλος Λεοντίσης 2000, Κουγιουμτζής 2008):

### Για το $\tau$

- 1) Δεν πρέπει να είναι πολύ μικρό. Αν ο χρόνος δειγματοληψίας είναι πολύ μικρός δημιουργείται πλεονασμός πληροφορίας και το διάγραμμα που θα σχηματιστεί θα μοιάζει με ευθεία.
- 2) Δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλο. Αν είναι πολύ μεγάλο τότε τα δεδομένα θα είναι ασυσχέτιστα και δεν θα διαφαίνεται κάποια ισχυρή δομή, πράγμα που θα τα κάνει να φαίνονται τυχαία.



Δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά που βρίσκονται τα όρια του μικρού και μεγάλου ( $\tau$ ) παρ' όλα αυτά συνηθίζουμε να επιλέγουμε την μικρότερη τιμή του ( $\tau$ ) για την οποία οι συνιστώσες του  $x_i$  είναι ασυσχέτιστες. (Κουγιουμτζής 2008)

Αυτό το πετυχαίνουμε :

1) Με την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ο λόγος της αυτοσυνδιακύμανσης προς την διακύμανση. Για ένα σύνολο παρατηρήσεων  $x_i$ ,  $i=1$  και μια χρονική υστέρηση  $\tau$  ο τύπος της αυτοσυσχέτισης είναι:

$$r(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} ((x_{i+\tau} - \bar{x})(x_i - \bar{x}))}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.25)$$

$$\text{όπου } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Η συνάρτηση παίρνει μια τιμή κάθε φορά που δέχεται την χρονική υστέρηση. Το διάγραμμα που παίρνουμε έχει στο οριζόντιο άξονα την χρονική υστέρηση ( $\tau$ ) και στον κατακόρυφο την τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης  $r(\tau)$  που παίρνει τιμές στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Όπου μηδενίζεται για πρώτη φορά η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $r(\tau)$  είναι η χρονική περίοδος που θα διαλέξουμε για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων. Γιατί αυτό που θέλουμε είναι τα δεδομένα μας να είναι ασυσχέτιστα, δηλαδή ( $r(\tau)=0$ ). (Συριόπουλος και Λεοντίσης 2000). Αν δεν φθίνει γρήγορα προς το μηδέν τότε επιλέγεται από την σχέση  $r(\tau)=1/e$ .

2) Με την συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας (mutual information). Η συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας  $I(X, Y)$  μετράει την γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δύο μεταβλητών  $X$  και  $Y$  και δίνεται ως (Κουγιουμτζής 2008)

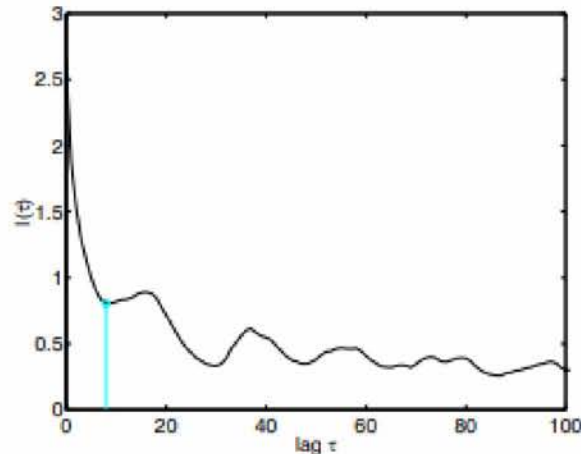
$$I(X, Y) = \sum_{x,y} p_{x,y}(x, y) \log \frac{p_{xy}(x,y)}{p_x(x)p_y(y)} \quad (1.26)$$

όπου

$p_x(x)$  : είναι η πιθανότητα του  $X=\chi$

$p_{xy}(x,y)$ : είναι η κοινή πιθανότητα  $X=\chi$  και  $Y=y$

Για χρονοσειρές η αμοιβαία πληροφορία δίνεται ως  $I(\tau) = I(x_i, x_{i-\tau})$  και αφορά τις μεταβλητές  $x_i$  και  $x_{i-\tau}$ . Η τιμή που παίρνουμε ως  $\tau$  είναι το πρώτο ελάχιστο της  $I(\tau)$ , όπως στην φωτογραφία από κάτω. (Κουγιουμτζής 2008)



Εικόνα 1.5 Παράδειγμα επιλογής  $\tau$  από διάγραμμα αμοιβαίας πληροφορίας  
(<http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/ChaosSimulation/ChaosSimulationNotes.pdf>)

## Για το m

### Μέθοδος ψευδών κοντινών γειτόνων

Το θεώρημα του Takens μας δίνει την ικανή συνθήκη  $m \geq 2d+1$  για την αποφυγή αυτοτομών στην κατασκευή του ελκυστή. Η διάσταση  $d$  δεν είναι γνωστή σε πραγματικά δεδομένα και αυτό που θέλουμε να πετύχουμε είναι η διάσταση  $m$  του ανακατασκευασμένου χώρου να είναι λίγο μεγαλύτερη ή ίση με αυτή του πραγματικού χώρου για να μην έχουμε λανθασμένες ενδείξεις. Σε μικρές διαστάσεις εμβύθισης η δυναμική του συστήματος απεικονίζεται σε λίγους άξονες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα πολλά σημεία της χρονοσειράς να προβάλλονται σε γειτονικές θέσεις στον ανακατασκευασμένο χώρο φάσεων χωρίς αυτό, όμως, να είναι η πραγματικότητα. (Συριόπουλος και Λεοντίσης 2000, Κουγιουμτζής 2008). Μια μέθοδο που χρησιμοποιούμε για την εύρεση του  $m$  είναι η μέθοδος των ψευδών κοντινών

γειτόνων (FalseNearestNeighbors, FNN). Σύμφωνα με αυτή αν δύο σημεία  $x_i^m$  και  $x_j^m$  για κάποια διάσταση εμβύθισης  $m$ , τότε είτε είναι πραγματικά γειτονικά σημεία και βρίσκονται κοντά λόγω της δυναμικής του συστήματος ή είναι ψευδή γειτονικά σημεία και βρίσκονται κοντά λόγω αυτο-τομής του ελκυστή. Για να αποφανθούμε τι πραγματικά συμβαίνει αυξάνουμε κατά 1 την διάσταση εμβύθισης, στο διάνυσμα  $x_i^m$  προστίθεται η συνιστώσα  $x_{i-m\tau}$  για να δώσει το  $x_i^{m+1}$  και εξετάζουμε την απόσταση των  $x_i^{m+1}$  και  $x_j^{m+1}$ . Αν η απόσταση μεγάλωσε δραματικά τότε τα σημεία  $x_i^m$  και  $x_j^m$  είναι ψευδείς γείτονες και άρα το  $m$  δεν είναι αρκετά μεγάλο (για να υπολογίσουμε αν η απόσταση είναι στατιστικά σημαντική χρησιμοποιούμε μια σταθερά για τον λόγο των αποστάσεων). Κάνουμε την ίδια διαδικασία για κάθε σημείο  $x_i^m$  και βρίσκουμε το κοντινότερο του σημείο  $x_j^m$  για να δούμε αν είναι ψευδή γειτονικό σημείο. Αν βρούμε σημαντικό αριθμό ψευδών γειτόνων αυξάνουμε τη διάσταση εμβύθισης κατά 1. Κάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να βρούμε την διάσταση  $m'$  για την οποία η πρόσθεση μιας ακόμα συνιστώσας δεν δίνει ψευδή σημεία. (Κουγιουμτζής 2008)

Ένα από τα προβλήματα αυτής της μεθόδου είναι ότι έχει εξάρτηση από το  $(\tau)$  καθώς θα πρέπει να κάνουμε ανακατασκευή του χώρου των φάσεων για κάθε  $(m)$ . Επιπλέον η μέθοδος FNN είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη θορύβου κάτι που είναι αναπόφευκτο στα πραγματικά δεδομένα.

### **1.6.2 Διάσταση συσχέτισης (Correlation dimension)**

Όπως είδαμε και παραπάνω ένας παράξενος ελκυστής είναι σημαντική ένδειξη για την ύπαρξη χάους. Για να μπορέσουμε να επαληθεύσουμε την ύπαρξη χάους πρέπει να προσδιορίσουμε την φρακταλική διάσταση του ελκυστή. Η φρακταλική διάσταση είναι συνεπής με τη συνήθη έννοια της διάστασης μόνο που μπορεί να πάρει και μη-ακέραιο αριθμό. Συνεπώς ο ελάχιστος αριθμός εξισώσεων που μπορεί να περιγράψει το σύστημα είναι ο αμέσως επόμενος ακέραιος της φρακταλικής διάστασης.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για τον προσδιορισμό της φρακταλικής διάστασης, αυτός όμως που χρησιμοποιείται ευρύτατα είναι η διάσταση συσχέτισης (Correlation dimension) λόγω της απλότητας στον υπολογισμό της. Μια μεγάλη τιμή για τη διάσταση συσχέτισης σημαίνει υψηλός βαθμός πολυπλοκότητας και μικρή αυτο-ομοιότητα. Για να υπολογίσουμε την διάσταση

συσχέτισης χρησιμοποιούμε την μέθοδο των Grassberger-Procaccia (1983) οι οποίοι χρησιμοποίησαν το ολοκλήρωμα συσχέτισης (correlation integral)  $C(r)$  που μας δίνει την πιθανότητα δύο τυχαία επιλεγμένα σημεία στον ανακατασκευασμένο χώρο φάσεων να απέχουν απόσταση μικρότερη από  $r$ . (Συριόπουλος και Λεοντίσης 2000, Κουγιουμτζής 2008, Kourtidou 2012). Αν  $N$  είναι το σύνολο των σημείων στον ανακατασκευασμένο χώρο φάσεων τότε το ολοκλήρωμα συσχέτισης θα ισούται με :

$$C_N(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N \theta(r - |x_i - x_j|) \quad (1.27)$$

Όπου,

$\Theta$ : η συνάρτηση Heaviside με  $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0 \\ 1 & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$

Και,  $|x_i - x_j|$  : η απόσταση μεταξύ δύο σημείων  $(x_i, x_j)$

Η διάσταση συσχέτισης για  $N \rightarrow \infty$  και  $r \rightarrow 0$  δίνεται από την σχέση

$$v = \frac{d \log C(r)}{d \log r} \quad (1.28)$$

Όταν η χρονοσειρά μας έχει πεπερασμένο μήκος (όπως γίνεται στα πραγματικά δεδομένα) τα παραπάνω όρια δεν ικανοποιούνται. Περιμένουμε λοιπόν το γράφημα του  $\log C(r)$  με  $\log r$  να σχηματίζει ευθεία γραμμή (δηλαδή να έχει σταθερή κλίση) για κάποιο διάστημα σχετικά μικρών τιμών του  $r$ , που το ονομάζουμε περιοχή κλιμάκωσης του  $r$  (scaling region). Εναλλακτικά, θα πρέπει για την περιοχή κλιμάκωσης του  $r$ , το γράφημα της παραγώγου που δίνεται στην (1,28) να σταθεροποιείται σε μια οριζόντια γραμμή στο ύψος της τιμής  $v$  και έτσι μπορούμε ποιοτικά να βρούμε το  $v$  από το γράφημα. (Κουγιουμτζής 2008)

### 1.6.3 Εκθέτες Lyapunov

Όπως έχουμε αναφέρει πολλές φορές παραπάνω ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των χαοτικών συστημάτων είναι η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες σημαίνει θετική εντροπία (Λεοντίσης και Συριόπουλος 2000). Η εντροπία είναι το μέτρο της αταξίας και στα χαοτικά δυναμικά συστήματα μας δείχνει την ταχύτητα με την οποία οι τροχιές δύο κοντινών σημείων αποκλίνουν ή συγκλίνουν με το πέρασμα του χρόνου. Μια συνηθισμένη μέθοδος για την ποσοτικοποίηση αυτής της ευαισθησίας και άρα της ένδειξης χάους είναι οι εκθέτες Lyapunov (Lyapunov exponents). Έστω και ένας θετικός εκθέτης Lyapunov μας δείχνει την ύπαρξη χάους, ενώ αρνητικοί εκθέτες υποδεικνύουν ότι το αιτιοκρατικό δυναμικό σύστημα που εξετάζουμε δεν είναι χαοτικό. Αν οι εκθέτες είναι μηδέν ή κοντά στο μηδέν τότε υποδηλώνουν την ύπαρξη θορυβώδους χάους. Για συστήματα απώλειας ενέργειας το άθροισμα των εκθετών Lyapunov είναι πάντα αρνητικό.

Υπάρχει μεγάλο φάσμα εκθετών Lyapunov, όμως ο πιο συνηθισμένος και ο πιο σημαντικός είναι ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov ( $\lambda_1$ ) (maximum Lyapunov exponent) ο οποίος, αν είναι θετικός, μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το σύστημα χαοτικό καθώς και να μετρήσουμε και τον βαθμό πολυπλοκότητας του συστήματος.

Για να υπολογίσουμε τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov  $\lambda_1$  όταν ο ελκυστής του συστήματος αποτελείται από το σύνολο των ανακατασκευασμένων σημείων ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα (σύμφωνα με Κουγιουμτζής 2008) :

- 1) Ξεκινάμε με ένα σημείο αναφοράς  $x_i$  του ανακατασκευασμένου ελκυστή και βρίσκουμε το κοντινότερο σημείο  $x_i'$  του ελκυστή, έστω σε απόσταση  $\delta_{0,i}$ .
- 2) Υπολογίζουμε την απόσταση των δύο τροχιών που ξεκινούν ύστερα από χρόνο  $t$ , δηλαδή την απόσταση  $\delta_{t,i}$  των σημείων  $x_{i+t}$  και  $x_{i+t}'$ .
- 3) Ορίζουμε ένα νέο σημείο αναφοράς  $x_{i+t}$  και επαναλαμβάνουμε τα δύο πρώτα βήματα.
- 4) Κάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τα σημεία αναφοράς να καλύψουν τα υπόλοιπα σημεία.

5) Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov εκτιμάται από το μέσο όρο της εκθετικής απόκλισης  $\delta_{t,i}$  από  $\delta_{0,i}$  όλων των σημείων αναφοράς  $x_i$  από τον τύπο:

$$\lambda_1 = \frac{1}{Nt} \sum_{j=1}^N \log \frac{\delta_{t,j}}{\delta_{0,j}} \quad (1.29)$$

Ένα από τα προβλήματα αυτής της μεθόδου είναι ότι η εκτίμηση του  $\lambda_1$  επηρεάζεται από τον θόρυβο και το μήκος της χρονοσειράς. Δηλαδή όσο περισσότερος θόρυβος ή μικρότερο το μήκος της χρονοσειράς, τόσο χειρότερες εκτιμήσεις για το  $\lambda_1$ .

### ***1.7 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)***

Αφού είδαμε με μια γρήγορη ματιά πως γίνεται η ανάλυση των γραμμικών και μη γραμμικών χρονοσειρών σειρά έχουν τα χρηματιστηριακά προϊόντα που θα χρησιμοποιήσουμε για να εκμεταλλευτούμε την ανάλυση μας.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να πάρει κανείς κάποια θέση στο χρηματιστήριο. Ένας από αυτούς τους τρόπους είναι η συναλλαγή με παράγωγα προϊόντα. Τα παράγωγα είναι συμβόλαια η αξία των οποίων εξαρτάται από ένα υποκείμενο προϊόν (underlying asset) βασικότερο αυτών. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι, ένας αγοραστής και ένας πωλητής. Από τη μία ο αγοραστής θεωρεί ότι η αξία του υποκείμενου προϊόντος θα ανέβει (οπότε αγοράζει για να βγάλει κέρδος από την αύξηση αυτή) και από την άλλη ο πωλητής θεωρεί ότι η μελλοντική αξία του υποκείμενου προϊόντος θα πέσει οπότε πουλάει. Γενικά, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές και ομόλογα μέχρι αγροτικά προϊόντα και μέταλλα. (Αλεξιάκης 2005)

Υπάρχουν πολλοί τύποι παραγώγων όπως τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts), τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts), τα Δικαιώματα Προαίρεσης (Options), τα Συμβόλαια επί διαφοράς (Contracts For Difference) κ.ά. Εμείς όμως θα ασχοληθούμε με τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ).

Συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης είναι μια συμφωνία για αγορά ή πώληση ενός συγκεκριμένου αγαθού ή περιουσιακού στοιχείου μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, σε μια συγκεκριμένη τιμή και σε συγκεκριμένη ποσότητα σε συγκεκριμένο χρόνο στο μέλλον. Τα ΣΜΕ συναλλάσσονται καθημερινά σε κάποιο οργανωμένο χρηματιστήριο όπως π.χ. στο Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών και κατά συνέπεια είναι τυποποιημένα για την ποιότητα και την ποσότητα για να διευκολύνουν το εμπόριο σε μια ανταλλαγή εμπορικών τίτλων. Επιπλέον υπάρχει εγγύηση του χρηματιστηρίου για την εκπλήρωση των συμβολαίων. Οι δύο αντισυμβαλλόμενοι έχουν την υποχρέωση να καταθέσουν ένα ποσό με μορφή εγγύησης στο marginaccount. Ο λογαριασμός αυτός ανοίγεται από την Χρηματιστηριακή εταιρεία και το ποσό που περιέχει είναι εγγύηση της συναλλαγής. Το ύψος της εγγύησης χωρίζεται σε δύο μέρη το Maintenance Margin και το Variation Margin. Το πρώτο αποτελεί το ελάχιστο ποσό χρημάτων που πρέπει να βρίσκεται ανά πάσα στιγμή στο λογαριασμό εγγύησης, ενώ το δεύτερο αποτελεί την ασφάλεια μέχρι κάποιος να πέσει στο Maintenance margin. Αν ο λογαριασμός margin πέσει κάτω από το επίπεδο του Maintenance τότε η Χρηματιστηριακή εταιρεία επικοινωνεί με τον αντισυμβαλλόμενο και τον παροτρύνει να προσθέσει επιπλέον χρήματα για να επανέλθει το ποσό πάνω από το Maintenance margin. Αν αυτό δεν συμβεί η θέση κλείνει αυτόματα. Αν η θέση κλήση λόγω έλλειψης margin τότε αυτό ονομάζεται "margin call". Η θέση που έχει πάρει ένας από τους δύο αντισυμβαλλόμενους μπορεί να κλείσει επίσης πριν την λήξη του συμβολαίου παίρνοντας μια ακριβώς αντίθετη θέση από αυτή που είχε ανοίξει. (Αλεξάκης 2005). Επίσης τα ΣΜΕ μπορούν να πωληθούν σε άλλον επενδυτή πριν από τη λήξη τους αν κάποιος το επιθυμεί.

Ένας άλλος συνηθισμένος λόγος χρησιμοποίησης των ΣΜΕ είναι η αντιστάθμιση κινδύνου. Ένας επενδυτής που έχει αγοράσει ή έχει πουλήσει ένα προϊόν και ανησυχεί για αυτή του την επιλογή καθώς θεωρεί ότι δεν ήταν η βέλτιστη και η κατεύθυνση της τιμής του προϊόντος μπορεί να αλλάξει από αυτή που υπολόγισε, παίρνει μια αντίθετη θέση αγοράζοντας ή πουλώντας (ανάλογα τη θέση έχει πάρει εξ αρχής) ένα ΣΜΕ με υποκείμενο προϊόν αυτό που διαπραγματεύτηκε εξ αρχής. Με αυτή την κίνηση μειώνει την έκθεση του στον κίνδυνο, μειώνει όμως και το μέγεθος του πιθανού κέρδους που θα μπορούσε να έχει. Δηλαδή μια τέλεια αντιστάθμιση θα μας έδινε μηδενική ζημιά αλλά και μηδενικό κέρδος. Ο λόγος αντιστάθμισης που ελαχιστοποιεί τη διακύμανση της θέσης αντιστάθμισης  $h^*$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο [13] :

$$h^* = \rho(\sigma_S / \sigma_F) \quad (1.30)$$

όπου

$\Delta S$ : μεταβολή άμεσης τιμής σε περίοδο ισοδύναμη με την περίοδο αντιστάθμισης

$\Delta F$ : μεταβολή προθεσμιακής τιμής σε περίοδο ισοδύναμη με την περίοδο αντιστάθμισης

$\sigma S$ : τυπική απόκλιση  $\Delta S$

$\sigma F$ : τυπική απόκλιση  $\Delta F$

$\rho$  : ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ  $\Delta S$  και  $\Delta F$

Επίσης ο βέλτιστος αριθμός συμβολαίων που απαιτούνται για την αντιστάθμιση δίνεται από τον τύπο (John Hull 2015):

$$N^* = h \cdot NA / QF \quad (1.31)$$

Όπου

NA: Το μέγεθος της θέσης που θέλουμε να αντισταθμίσουμε σε μονάδες

QF: Το μέγεθος ενός ΣΜΕ σε μονάδες

Κλείνοντας το κεφάλαιο θα ήθελα να τονίσω ότι στην εργασία ασχοληθήκαμε με τις χαστικές χρονοσειρές και στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως η χαστική ανάλυση εφαρμόζεται σε πραγματικά δεδομένα και συγκεκριμένα στις χρονοσειρές του Crude Oil και Natural Gas.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Δεδομένα και αποτελέσματα

Για την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των δεικτών του φυσικού αερίου (Natural Gas) σε εβδομαδιαία δεδομένα από 5-Ιανουαρίου-1997 έως 20-Ιανουαρίου-2019 και οι τιμές του αργού πετρελαίου WTI (Crude Oil West Texas Intermediate) σε εβδομαδιαία δεδομένα για τις ίδιες ημερομηνίες (01/05/1997-01/20/2019) ( η ημερομηνία αναγράφεται σε μορφή mm-dd-yyyy).

Στην αρχή έγινε στατιστική ανάλυση για κάθε ένα αγαθό ξεχωριστά και έλεγχος για να διαπιστωθεί αν ισχύει η Θεωρία της Αποτελεσματικής Αγοράς (EMH), δηλαδή αν οι αποδόσεις των αγαθών συμπεριφέρονται ως λευκός θόρυβος και συνεπώς δεν μας δίνουν την δυνατότητα πρόβλεψης. Πιο συγκεκριμένα σχηματίστηκαν τα διαγράμματα των τιμών σε σχέση με το χρόνο του φυσικού αερίου και του αργού πετρελαίου, υπολογίστηκαν οι αποδόσεις για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, δημιουργήθηκαν τα ιστογράμματα των αποδόσεων και υπολογίστηκαν οι τιμές λοξότητας (skewness), κυρτότητας (kurtosis), κανονικής κατανομής (standard deviation), μέσου (mean) και του τεστ Jarque-Bera. Έπειτα έγινε συγκριτική μελέτη των δύο προϊόντων, τοποθετήθηκαν οι τιμές τους στο ίδιο γράφημα για να παρατηρηθούν τυχόν συσχετίσεις και υπολογίστηκε ο λόγος του αργού πετρελαίου προς το φυσικό αέριο.

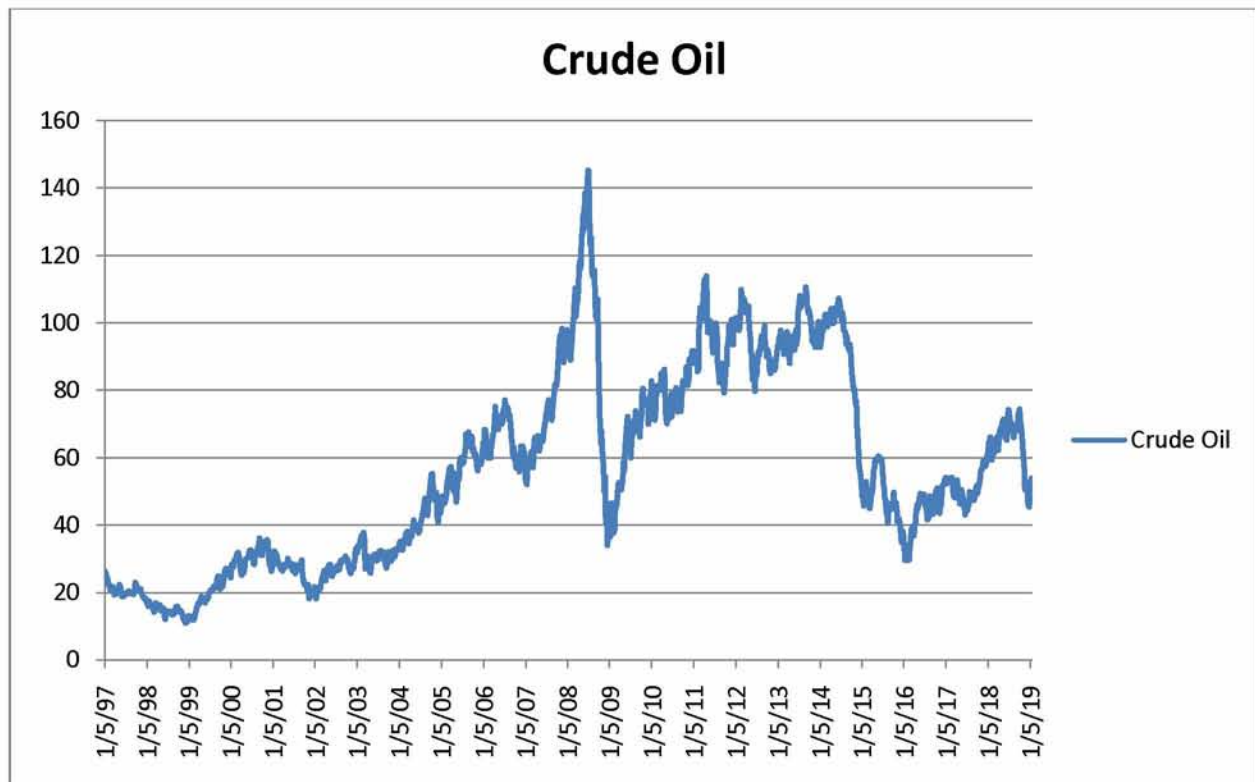
Τέλος, έγινε η χαοτική ανάλυση των δύο αγαθών. Υπολογίστηκε η τιμή υστέρησης με την μέθοδο της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας (AverageMutualInformation), με τη μέθοδο των λανθασμένων κοντινότερων γειτόνων (FalseNearestNeighbors) έγινε η εκτίμηση της διάστασης εμφύθισης (EmbeddingDimension) του ανακατασκευασμένου ελκυστήκαι επαληθεύτηκε με την διάσταση συσχέτισης (CorrelationDimension) από όπου υπολογίστηκε και η φρακταλική διάσταση (FractalDimension). Η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος επαληθεύτηκε με τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη Lyapunov (maximum Lyapunov Exponent).

## 2.1. Ανάλυση Crude Oil

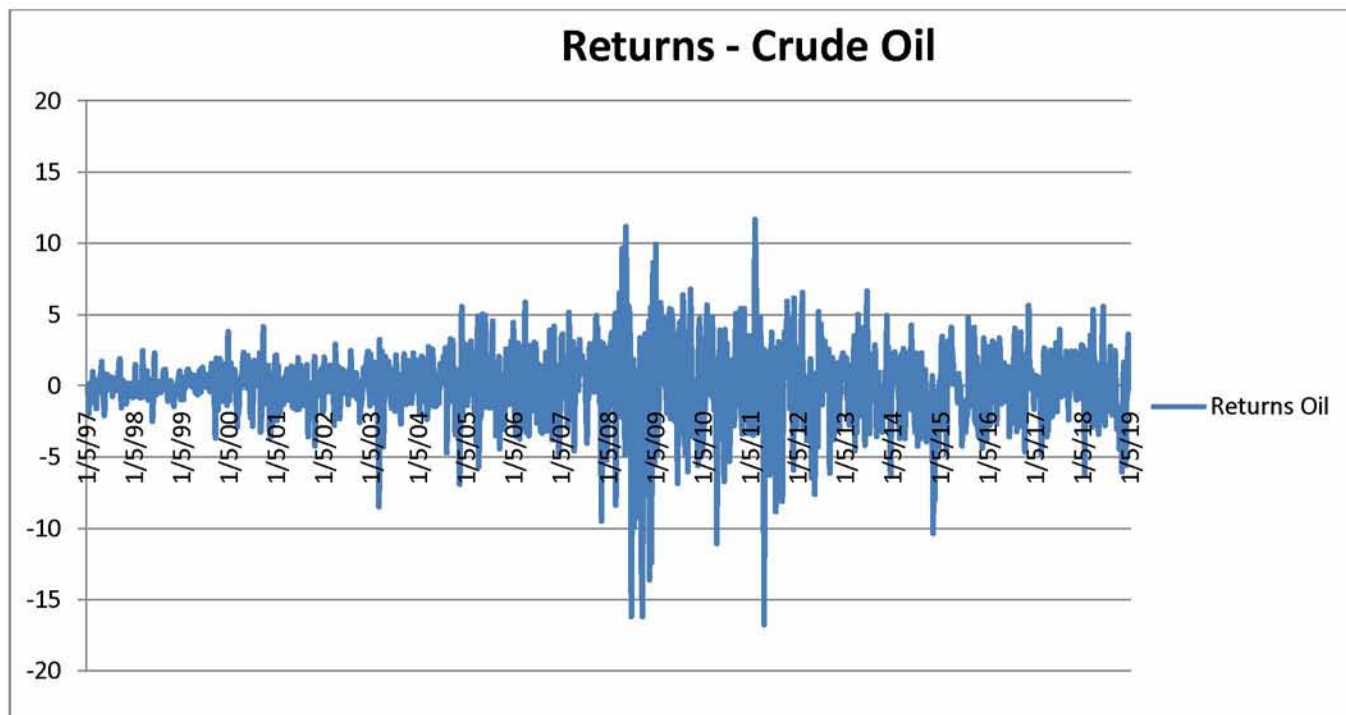
Παρακάτω παραθέτονται τα στατιστικά στοιχεία και η χαοτική ανάλυση του αργού πετρελαίου

### 2.1.1 Στατιστική στοιχεία Crude Oil

Η ανάλυση του πετρελαίου έγινε από 5-Ιανουαρίου-1997 έως 20-Ιανουαρίου-2019 σε εβδομαδιαία δεδομένα. Στις εικόνες 2.1 και 2.2 φαίνονται τα διαγράμματα τιμών-χρόνου και αποδόσεων-χρόνου για την συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Το διάγραμμα των αποδόσεων δημιουργήθηκε παίρνοντας τις πρώτες διαφορές( $\chi_2-\chi_1$ ) των τιμών των αποδόσεων του πετρελαίου.

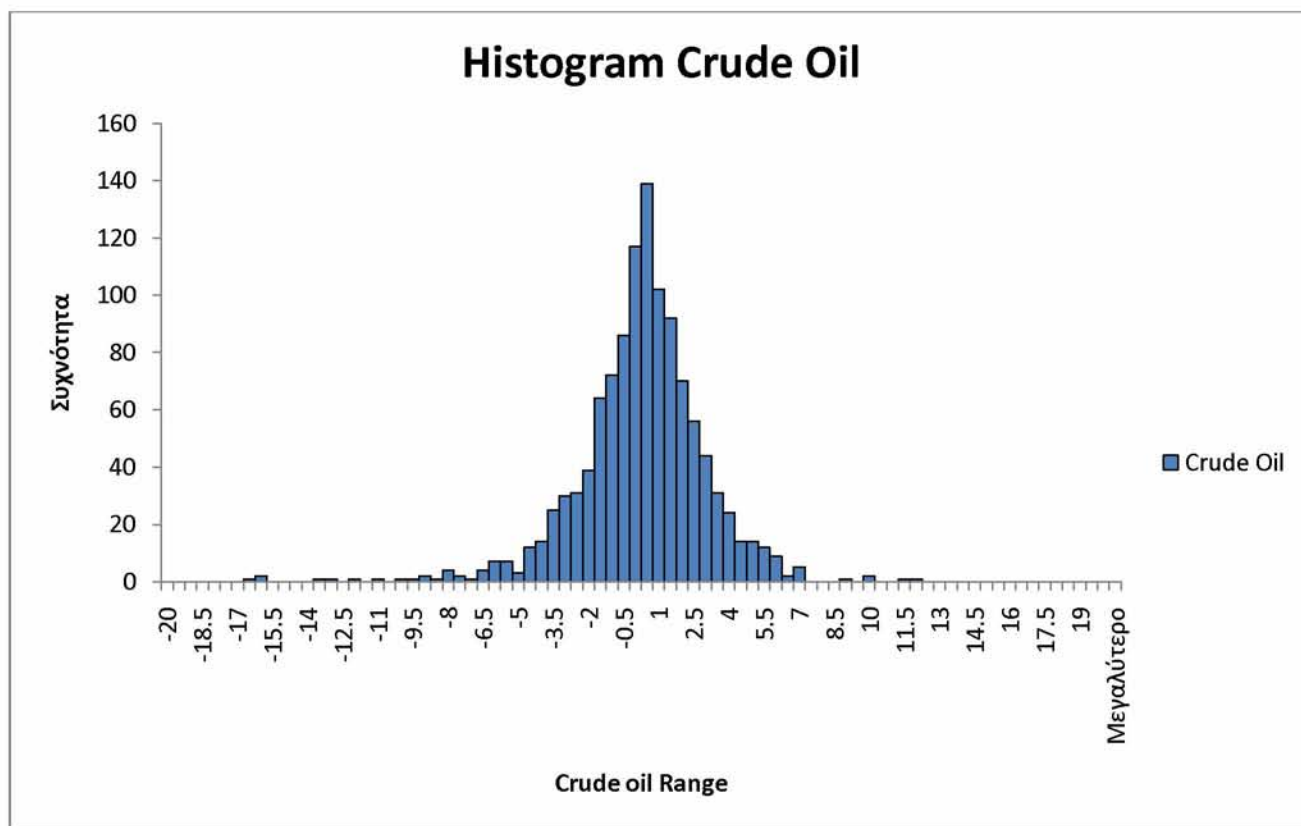


Εικόνα 2.1. Γράφημα τιμών-χρόνου του αργού πετρελαίου σε εβδομαδιαία δεδομένα



Εικόνα 2.2. Γράφημα αποδόσεων-χρόνου του αργού πετρελαίου σε εβδομαδιαία δεδομένα

Στην συνέχεια ελέγχθηκαν οι αποδόσεις για την περίπτωση να ακολουθούν την Θεωρία Αποτελεσματικής Αγοράς. Όπως βλέπουμε με μια πρώτη ματιά στο γράφημα των αποδόσεων παρατηρούνται ακραίες μεταβολές. Επίσης ελέγχθηκε η κατανομή που σχηματίζουν οι αποδόσεις των τιμών για να φανεί αν ακολουθούν την κανονική κατανομή. Για να είναι πιο ξεκάθαρο το αποτέλεσμα χρειάζεται να υπολογίσουμε επίσης την λοξότητα και την κυρτότητα της καμπύλης καθώς και το test Jarque-Bera που θα μας δώσει την κανονικότητα της κατανομής. Η μηδενική υπόθεση σημαίνει ότι η αγορά είναι αποτελεσματική. Έτσι η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης θα σήμαινε ότι η αγορά δεν είναι αποτελεσματική, επομένως δεν ακολουθεί το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου και υπάρχουν περιθώρια κέρδους. Για να μπορέσουμε να απορρίψουμε την θεωρία αποτελεσματικής αγοράς πρέπει η τιμή της λοξότητας (Skewness) να είναι διάφορη του μηδενός ( $\neq 0$ ) η τιμή της κυρτότητας (Kurtosis) διάφορη του τρία ( $\neq 3$ ) το Jarque-Bera test διάφορο του μηδενός ( $\neq 0$ ) ενώ η τιμή του p να είναι μηδέν για να υπάρχει στατιστική σημαντικότητα στο test. Στον πίνακα 2.1 παραθέτονται τα αποτελέσματα.



Εικόνα 2.3. Ιστόγραμμα αποδόσεων αργού πετρελαίου

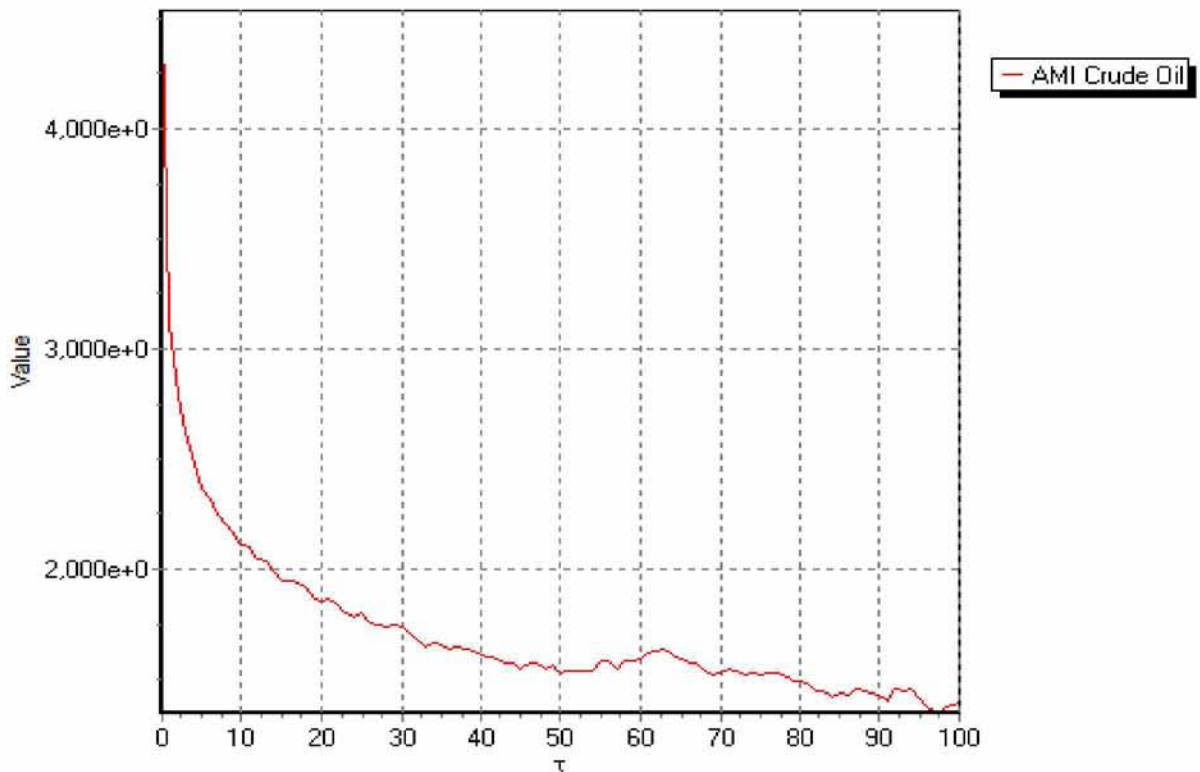
Πίνακας 2.1. Στατιστικά στοιχεία της κατανομής των αποδόσεων του πετρελαίου

	<b>Oil</b>	<b>Sample Size</b>
<b>Skewness</b>	0.393945387	1151
<b>Kurtosis</b>	-0.814469553	
<b>Stand.Dev</b>	29.17809881	
<b>Mean</b>	56.14208514	
<b>Jarque-Bera</b>	61.58485572	
<b>P-Values</b>	$4.23 \cdot 10^{-14}$	
<b>NullHypothesis</b>	<b>Rejected</b>	

Από τα στοιχεία του πίνακα 2.1 βλέπουμε πως η καμπύλη είναι ασύμμετρη προς τα δεξιά ( $skewness > 0$ ) και ελαφρώς πλατύκυρτη ( $kurtosis < 3$ ). Το test Jarque-Bera είναι  $\neq 0$  και η τιμή του Ρσχεδόν μηδέν κάτι που υποδεικνύει την στατιστική σημαντικότητα του τεστ και άρα τη δυνατότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Το ιστόγραμμα των τιμών του πετρελαίου μας δείχνει ότι, αν και πλησιάζει, δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή.

## 2.1.2 Χαοτική ανάλυση CrudeOil

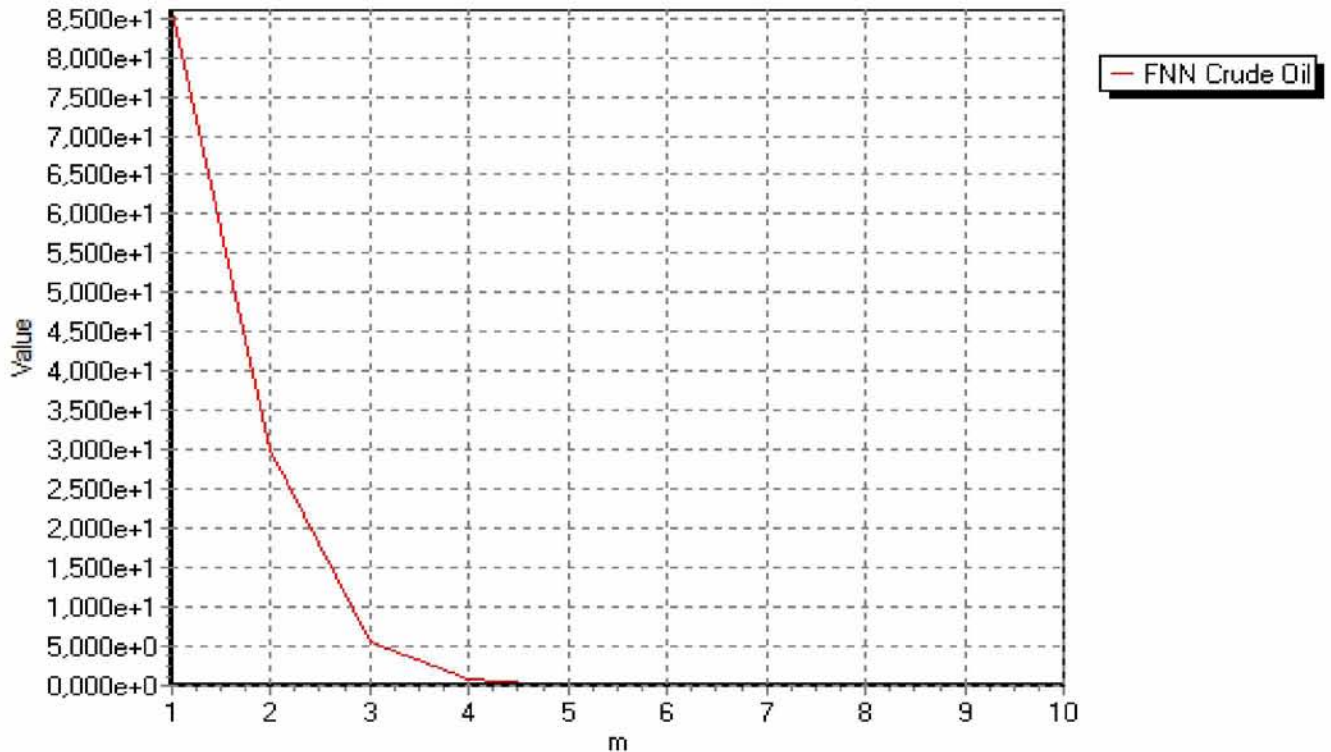
Στην χαοτική ανάλυση του πετρελαίου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας (AverageMutualInformation) για τον υπολογισμό της χρονικής υστέρησης ( $\tau$ ) που δίνεται από το πρώτο ελάχιστο του παρακάτω σχήματος 2.4



Εικόνα 2.4. Διάγραμμα Μέσης Αμοιβαίας Πληροφορίας για το αργό πετρέλαιο

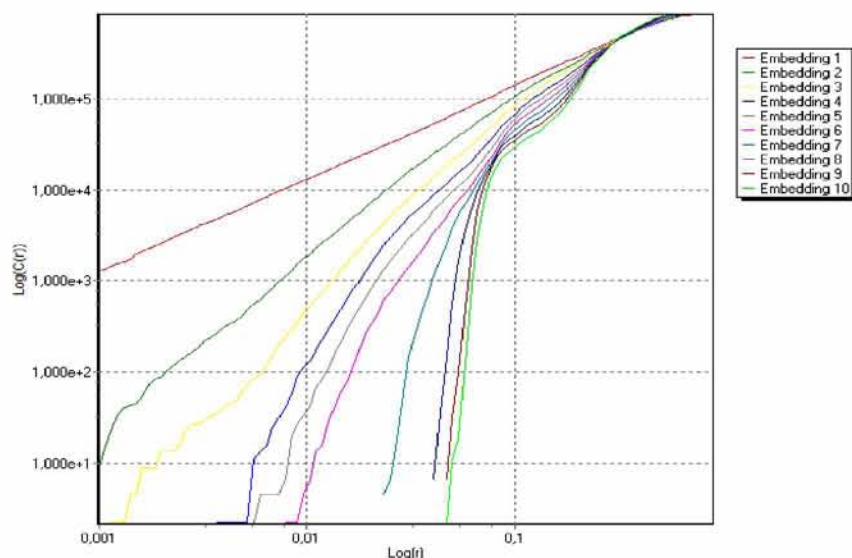
Σύμφωνα με το πρόγραμμα επίλυσης το πρώτο ελάχιστο στο παραπάνω διάγραμμα βρίσκεται στην τιμή 20. Επομένως το ( $\tau$ ) του πετρελαίου για την συγκεκριμένη χρονική περίοδο που μελετάμε είναι 20.

Για υστέρηση  $\tau=20$  βρίσκουμε τον αριθμό των Λανθασμένων Κοντινών Γειτόνων (FalseNearestNeighbors). Από την εικόνα 2.5 βλέπουμε ότι για  $m=5$  μηδενίζεται ο αριθμός των ψευδών γειτόνων οπότε αυτή είναι και η διάσταση εμπύθισης που θα επιλέξουμε για τον ανακατασκευασμένο ελκυστή.



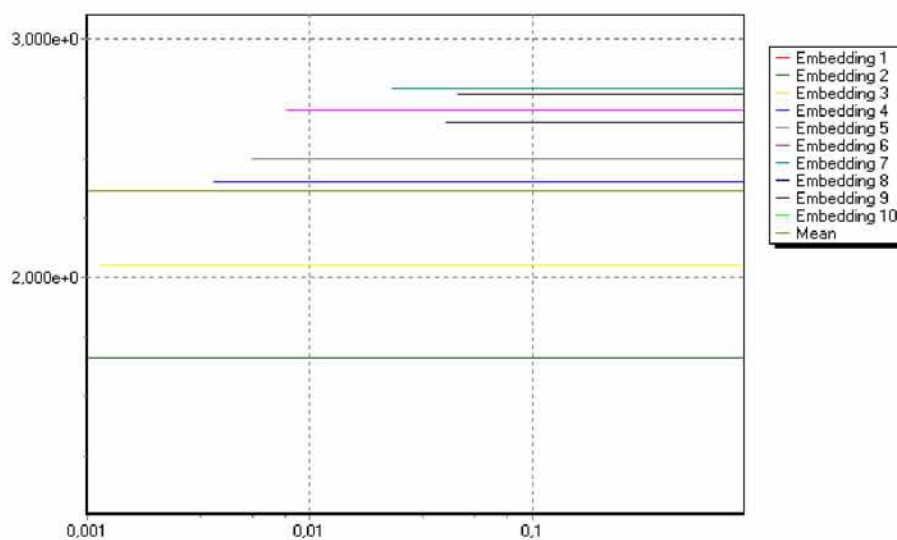
Εικόνα 2.5. Διάγραμμα Λανθασμένων Κοντινών Γειτόνων για το αργό πετρέλαιο

Θα χρησιμοποιήσουμε και την μέθοδο της Διάστασης Συσχέτισης (CorrelationDimension) για να επαληθεύσουμε την διάσταση εμπύθισης ( $m$ ) και να βρούμε την φρακταλική διάσταση. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην εικόνα 2.8.



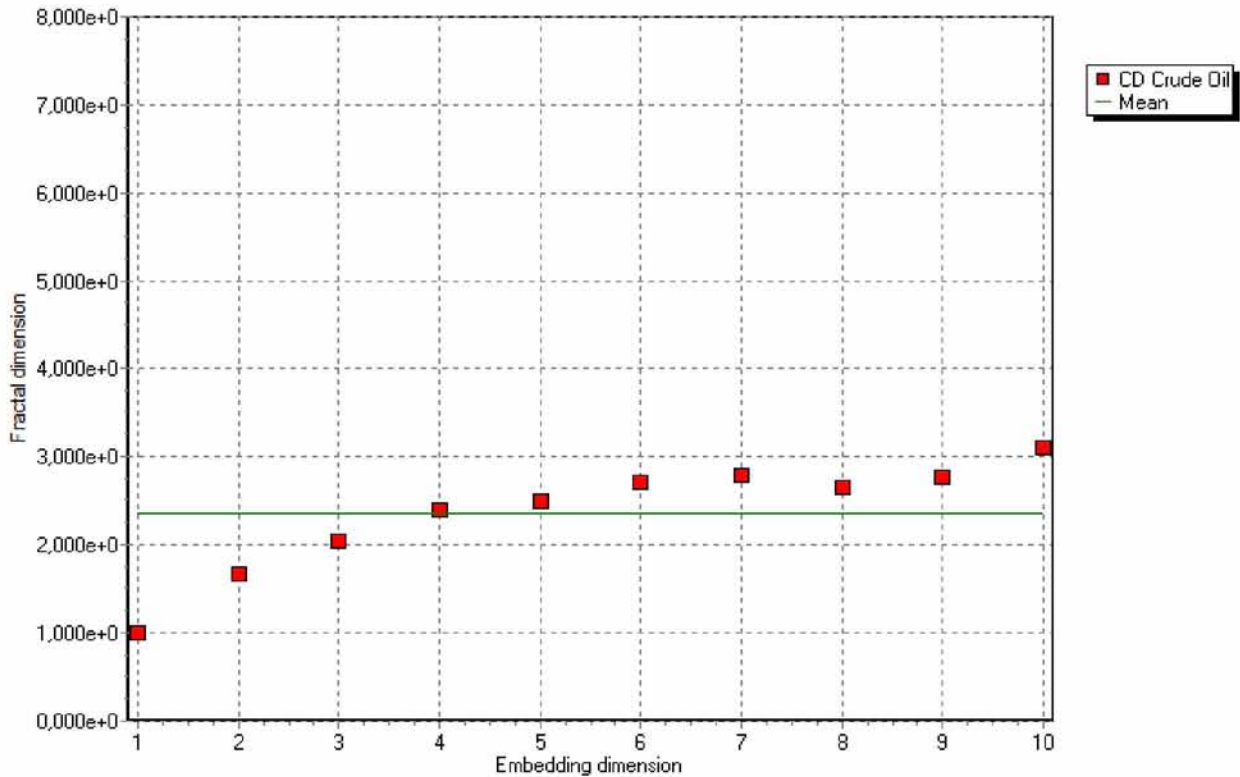
Εικόνα 2.6. Αριθμός σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση στον μετασχηματισμένο ελκυστή

Οι καμπύλες στην Εικόνα 2.6 δείχνουν πως αυξάνεται ο αριθμός των σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση μετά τον μετασχηματισμό. Είναι λογικό πως όσο μικρότερη είναι η διάσταση τόσο λιγότερα σημεία του παράξενου ελκυστή συμπεριλαμβάνει. Βλέποντας τις καμπύλες να ενώνονται καταλαβαίνουμε ότι πλέον έχουν συμπεριληφθεί όλα τα σημεία του ελκυστή στον καινούριο χώρο φάσεων.



Εικόνα 2.7. Οι κλίσεις των καμπυλών των σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση του μετασχηματισμένου ελκυστή

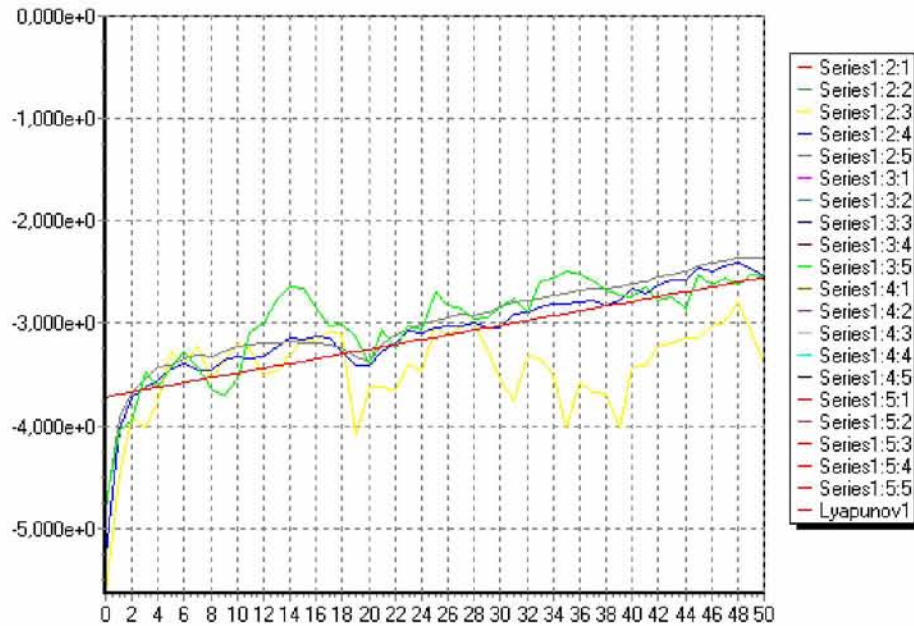
Στην εικόνα 2.7 Βλέπουμε τις κλίσεις των ευθειών των καμπυλών της εικόνα 2.8



Εικόνα 2.8. Διάγραμμα διάστασης συσχέτισης για το αργό πετρέλαιο

Στην εικόνα 2.8. του διαγράμματος της διάστασης συσχέτισης επαληθεύουμε ότι η τιμή της διάστασης εμφύθισης είναι  $m=5$  καθώς η καμπύλη βλέπουμε να οριζοντιώνεται σε αυτή την τιμή. Φέρνοντας μια κάθετη στον κατακόρυφο άξονα βλέπουμε ότι η φρακταλική διάσταση είναι γύρω στο 2,5 (που είναι σοβαρή ένδειξη χάους), οπότε επιλέγουμε την αμέσως επόμενη ακέραια (το 3) για τον μετασχηματισμό.





Εικόνα 2.9. Μέγιστος Εκθέτης Lyapunov

Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov μας δείχνει αν στο σύστημα μας υπάρχει χάος. Όπως είδαμε και στην θεωρία θετικός εκθέτης Lyapunov σημαίνει ότι το σύστημα μας διέπεται από χάος.

Το πρόγραμμα ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκε υπολόγισε την τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov  $MaxL = 2,33223994134807 > 0$

Παίρνοντας την σχέση  $1/MaxL$  μπορούμε να βρούμε τον ορίζοντα πρόβλεψης που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι  $\frac{1}{MaxL} = \frac{1}{2,33223994134807} = 0,428$ .

Καθώς το βήμα μας είναι η μια εβδομάδα θα κάνουμε πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά δηλαδή για 5 μέρες όπου είναι η χρηματιστηριακή εβδομάδα

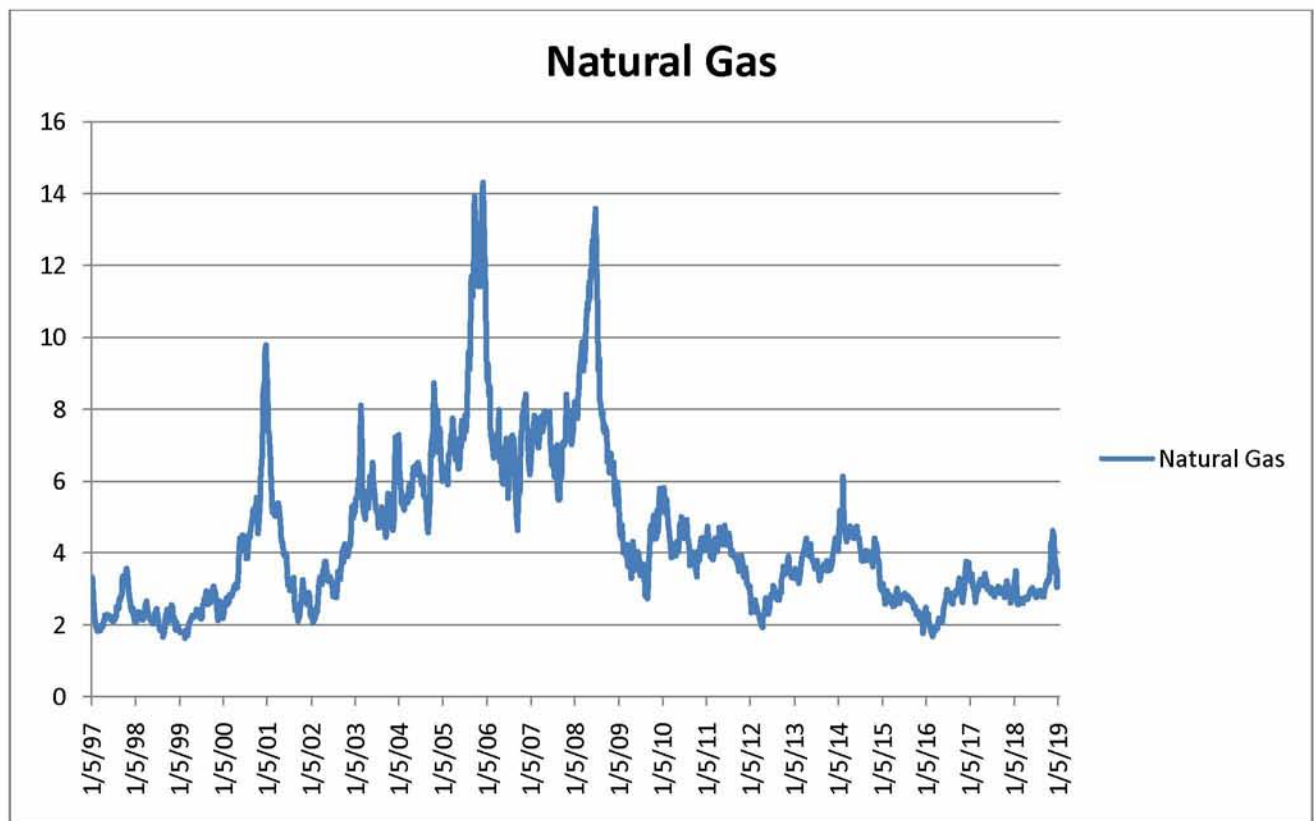
Τέλος για το πετρέλαιο βρήκαμε διάσταση εμφύθισης  $(m)=5$ , υστέρηση  $(\tau)=20$ , fractal dimension  $=2,5$  και  $MaxL \sim 2,33$ . Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά και μας δίνει μια καλή ένδειξη ύπαρξης χάους στην χρονοσειρά

## 2.2 Ανάλυση Natural Gas

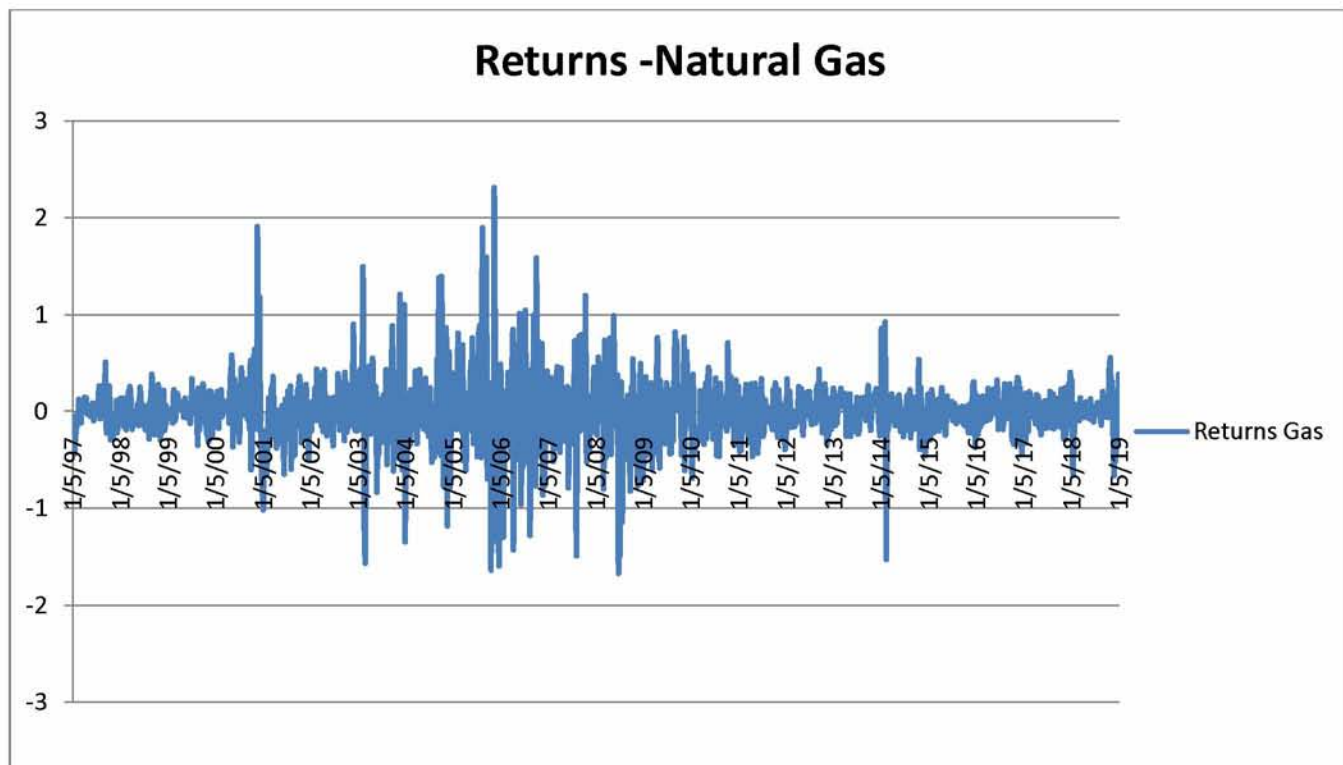
Παρακάτω παραθέτονται τα στατιστικά στοιχεία και η χαοτική ανάλυση του φυσικού αερίου

### 2.2.1 Στατιστική στοιχεία Natural Gas

Η ανάλυση του φυσικού αερίου έγινε για την ίδια περίοδο, από 5-Ιανουαρίου-1997 έως 20-Ιανουαρίου-2019 σε εβδομαδιαία δεδομένα. Στην εικόνα 2.10 και 2.11 αντίστοιχα φαίνονται τα διαγράμματα τιμών-χρόνου και αποδόσεων-χρόνου. Το διάγραμμα των αποδόσεων δημιουργήθηκε παίρνοντας τις πρώτες διαφορές( $\chi_2-\chi_1$ ) των τιμών των αποδόσεων του φυσικού αερίου.

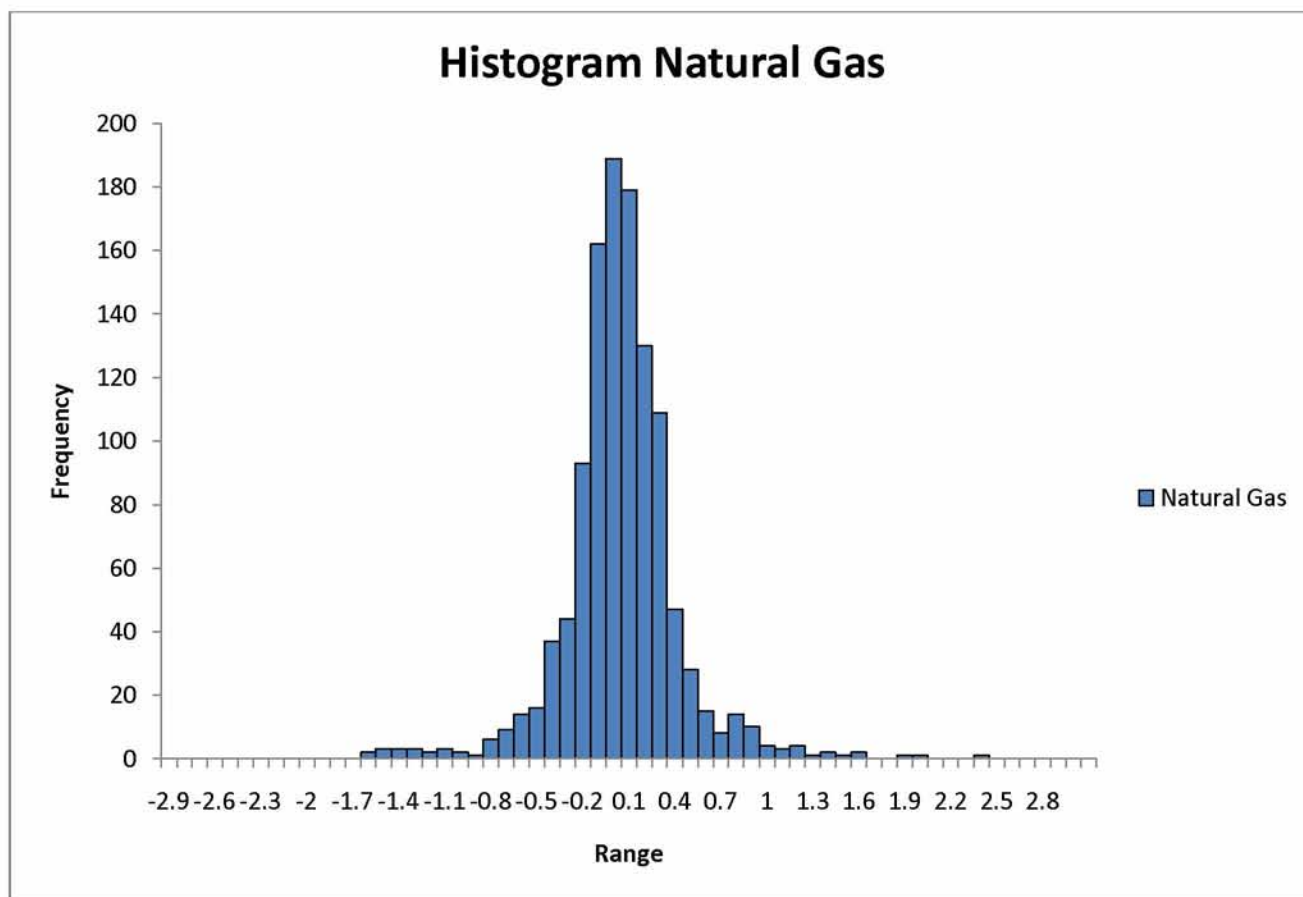


Εικόνα 2.10. Γράφημα τιμών-χρόνου του φυσικού αερίου σε εβδομαδιαία δεδομένα



Εικόνα 2.11. Γράφημα αποδόσεων-χρόνου του φυσικού αερίου σε εβδομαδιαία δεδομένα

Όπως και στην περίπτωση του πετρελαίου έτσι και εδώ έγινε έλεγχος της Θεωρίας Αποτελεσματικής Αγοράς. Στην εικόνα 2.11, στο γράφημα των αποδόσεων του φυσικού αερίου βλέπουμε ακραίες μεταβολές όπως ακριβώς και στις αποδόσεις του πετρελαίου. Στην συνέχεια δημιουργήθηκε η καμπύλη κατανομής, υπολογίστηκαν τα στατιστικά στοιχεία (λοξότητα, κυρτότητα, μέσος, τυπική απόκλιση) και έγινε το τεστ Jarque-Bera για να επαληθεύσουμε τις υποψίες της μη τήρησης του υποδείγματος του τυχαίου περιπάτου (randomwalk) στις τιμές του φυσικού αερίου. Ακολουθώντας την ίδια λογική, η μηδενική υπόθεση σημαίνει ότι η αγορά είναι αποτελεσματική και η απόρριψη της σημαίνει ότι η αγορά δεν είναι αποτελεσματική και υπάρχουν περιθώρια κέρδους. Και στην περίπτωση του φυσικού αερίου βλέπουμε ότι η λοξότητα είναι διάφορη του μηδενός η κυρτότητα διάφορη του 3 το Jarque-Bera είναι διάφορο του μηδενός ενώ οι τιμές  $R$  είναι σχεδόν μηδέν οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε στατιστικά σημαντικό το τεστ.



Εικόνα 2.12. Ιστογράμμο αποδόσεων φυσικού αερίου

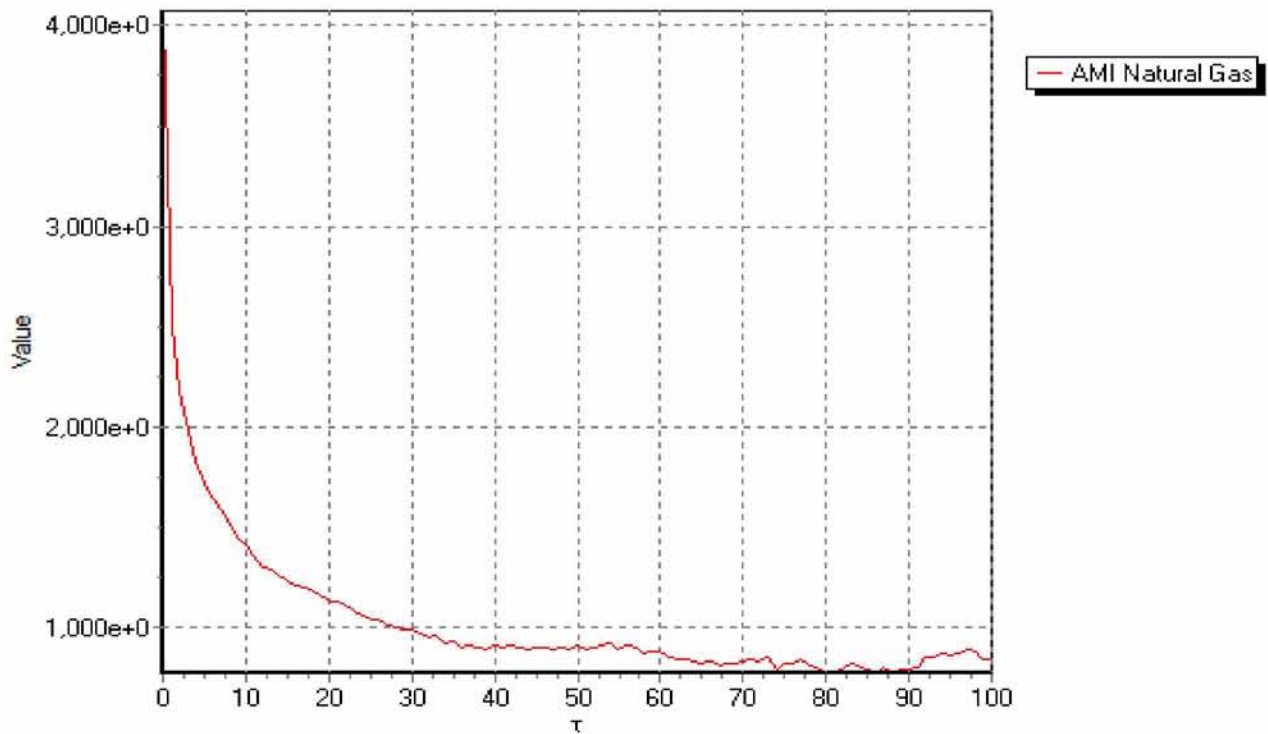
Πίνακας 2.2. Στατιστικά στοιχεία της κατανομής των αποδόσεων του φυσικού αερίου

	<b>Oil</b>	<b>Sample Size</b>
<b>Skewness</b>	1.522187662	1151
<b>Kurtosis</b>	2.686513542	
<b>Stand.Dev</b>	2.243716996	
<b>Mean</b>	4.407152042	
<b>Jarque-Bera</b>	790.6207551	
<b>P-Values</b>	$2.0839 \cdot 10^{-172}$	
<b>NullHypothesis</b>	<b>Rejected</b>	

Και η εικόνα 2.12 του ιστογράμματος του φυσικού αερίου μας δείχνει ότι δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν και η κυρτότητα (kurtosis) είναι κοντά στο 3 που υποδηλώνει κανονική κατανομή, η λοξότητα (skewness) είναι θετική και υποδηλώνει δεξιά ασυμμετρία. Το Jarque-Bera test είναι διάφορο του μηδέν και με τιμή  $P < 0.05$  μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.

## 2.2.2 Χαοτική ανάλυση NaturalGas

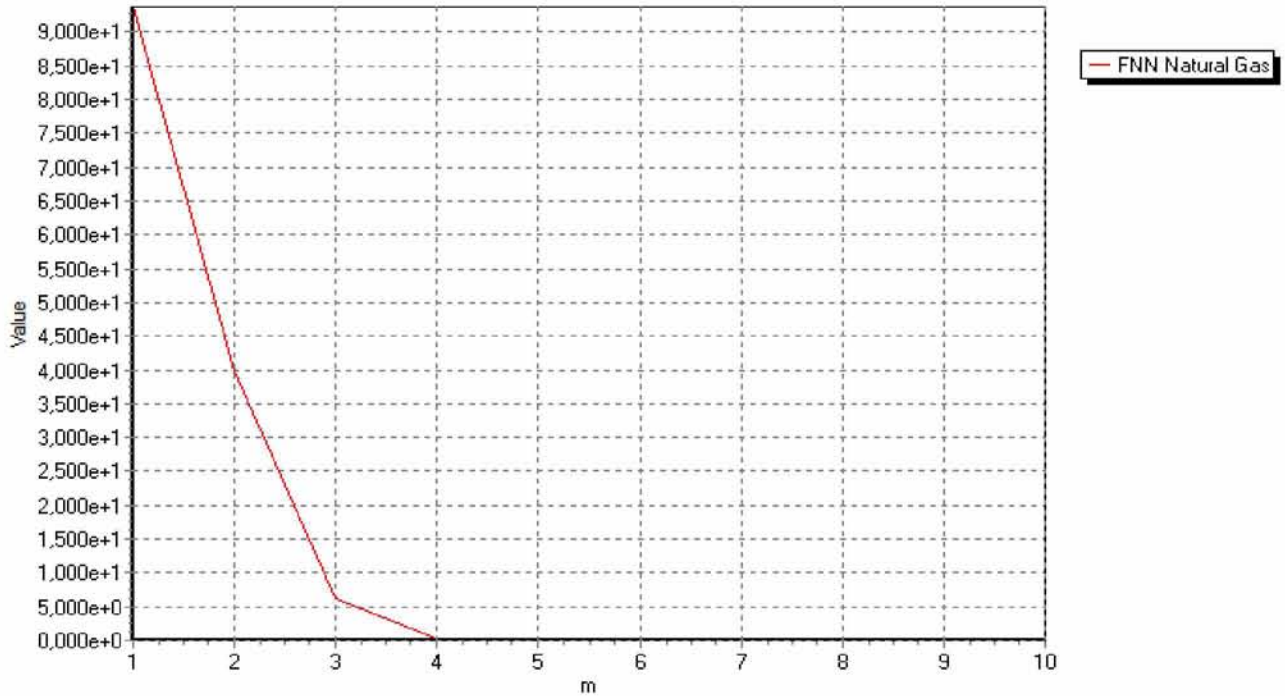
Για τη χαοτική ανάλυση του φυσικού αερίου χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες μέθοδοι με αυτές της ανάλυσης του αργού πετρελαίου. Έτσι για τον υπολογισμό της χρονικής υστέρησης χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας (Average Mutual Information).



Εικόνα 2.13. Διάγραμμα Μέσης Αμοιβαίας Πληροφορίας για το φυσικό αέριο

Σύμφωνα με το πρόγραμμα επίλυσης το πρώτο ελάχιστο στο παραπάνω διάγραμμα βρίσκεται στην τιμή 32. Επομένως το ( $\tau$ ) του φυσικού αερίου για την συγκεκριμένη χρονική περίοδο που μελετάται είναι 32.

Για υστέρηση  $\tau=32$  βρίσκουμε τον αριθμό των Λανθασμένων Κοντινών Γειτόνων (FalseNearestNeighbors).



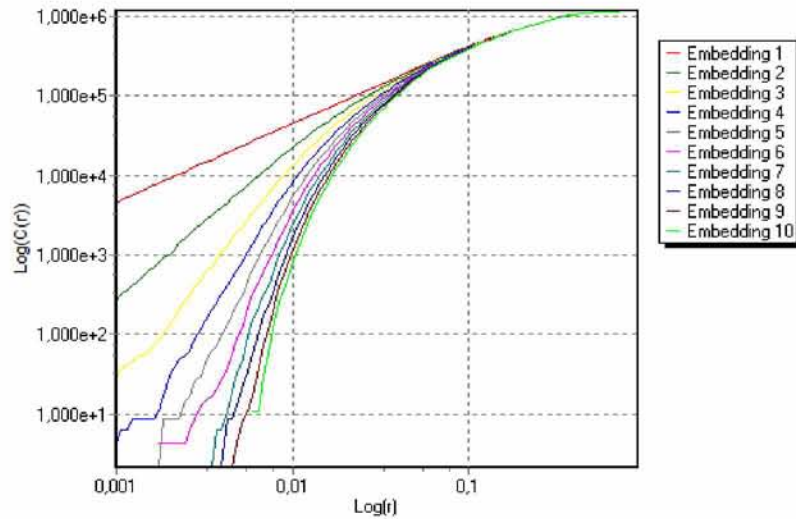
Εικόνα 2.14. Διάγραμμα Λανθασμένων Κοντινών Γειτόνων για το φυσικό αέριο

Πίνακας 2.3. Τιμές διάστασης εμφύθισης από την μέθοδο των Ψευδών Κοντινών Γειτόνων

Results	Embedding									
Series	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	93,7424	39,9518	6,2575	0,2406	0	0	0	0	0	0

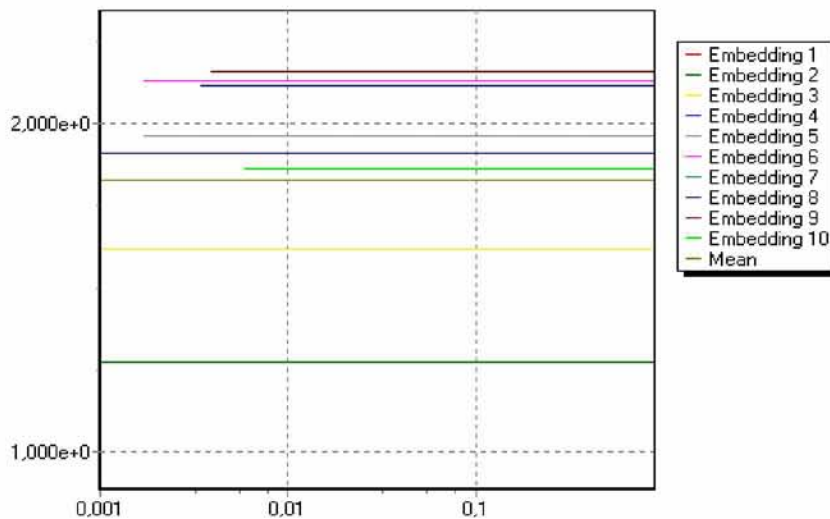
Με τη χρήση της εικόνας 2.14 και την βοήθεια του πίνακα 2.3 γίνεται ξεκάθαρο ότι θα επιλέξουμε  $m=5$ . Η διάσταση εμφύθισης τυχαίνει να είναι ίδια με αυτή του πετρελαίου

Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ, την μέθοδο της Διάστασης Συσχέτισης (Correlation Dimension) για να επαληθεύσουμε την διάσταση εμφύθισης ( $m$ ) και να βρούμε την φρακταλική διάσταση.

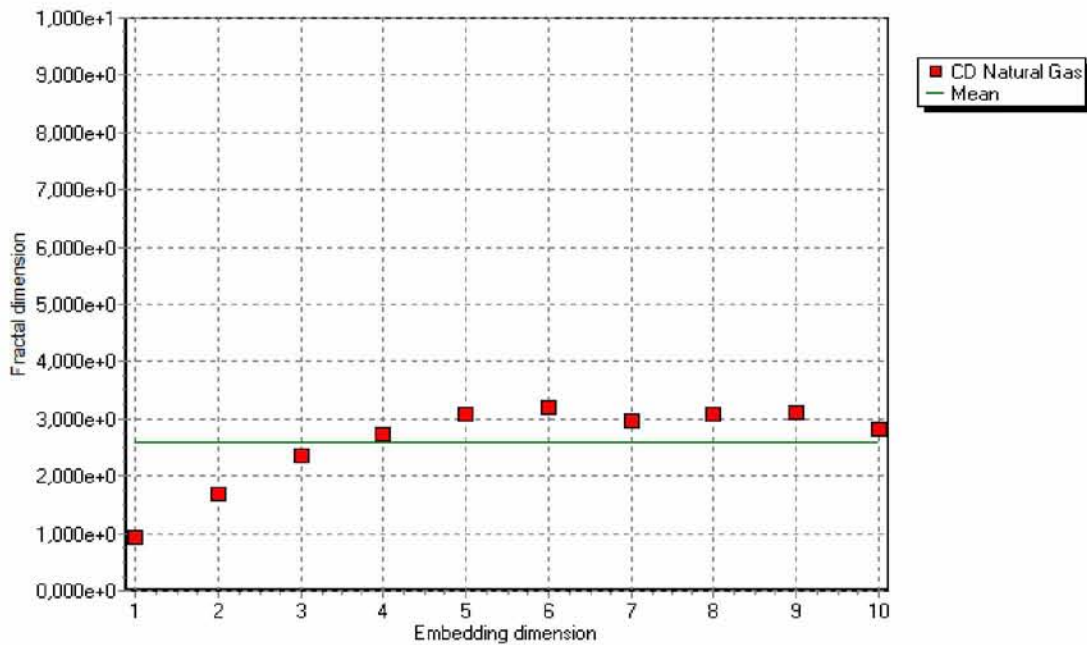


Εικόνα 2.15. Αριθμός σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση στον μετασχηματισμένο ελκυστή

Οι καμπύλες στην εικόνα 2.15 δείχνουν πώς αυξάνεται ο αριθμός των σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση μετά τον μετασχηματισμό. Είναι λογικό πως όσο μικρότερη είναι η διάσταση τόσο λιγότερα σημεία του παράξενου ελκυστή συμπεριλαμβάνει. Βλέποντας τις καμπύλες να ενώνονται καταλαβαίνουμε ότι πλέον έχουν συμπεριληφθεί όλα τα σημεία του ελκυστή στον καινούριο χώρο φάσεων.

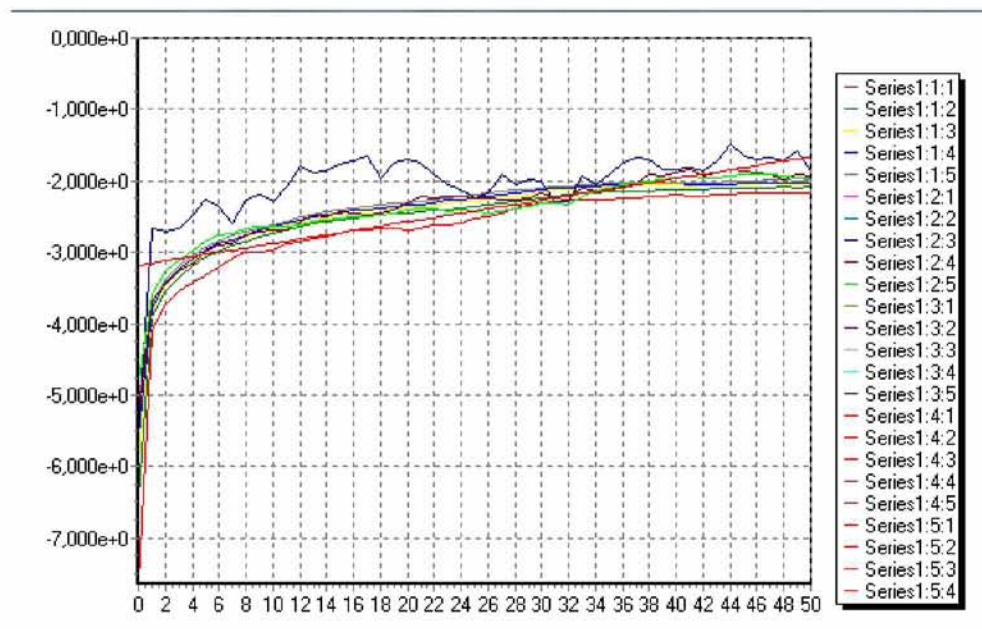


Εικόνα 2.16. Οι κλίσεις των καμπυλών των σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση του μετασχηματισμένου ελκυστή



Εικόνα 2.17. Διάγραμμα διάστασης συσχέτισης για το φυσικό αέριο

Βλέπουμε από το διάγραμμα συσχέτισης στην εικόνα 2.17 ότι η καμπύλη αρχίζει να οριζοντιώνεται για  $m=5$ . Με μια ευθεία γραμμή κάθετα στον οριζόντιο άξονα βρίσκουμε φρακταλική διάσταση 3,15. Και στην περίπτωση του φυσικού αερίου βλέπουμε ότι έχουμε δεκαδικό αριθμό στην φρακταλική διάσταση κάτι που ενισχύει την ένδειξη χάους στο σύστημα μας.



Εικόνα 2.18. Μέγιστος εκθέτης Lyapunov



Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov μας δείχνει αν στο σύστημα μας υπάρχει ένδειξη χάους. Όπως είδαμε και στην θεωρία θετικός εκθέτης Lyapunov σημαίνει ότι το σύστημα μας διέπεται από χάος.

Το πρόγραμμα ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκε υπολόγισε την τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov  $\text{MaxL} = 3,0331546218812 > 0$

Παίρνοντας την σχέση  $1/\text{maxL}$  μπορούμε να βρούμε τον ορίζοντα πρόβλεψης που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι  $\frac{1}{\text{MaxL}} = \frac{1}{3,0331546218812} = 0.3297$ .

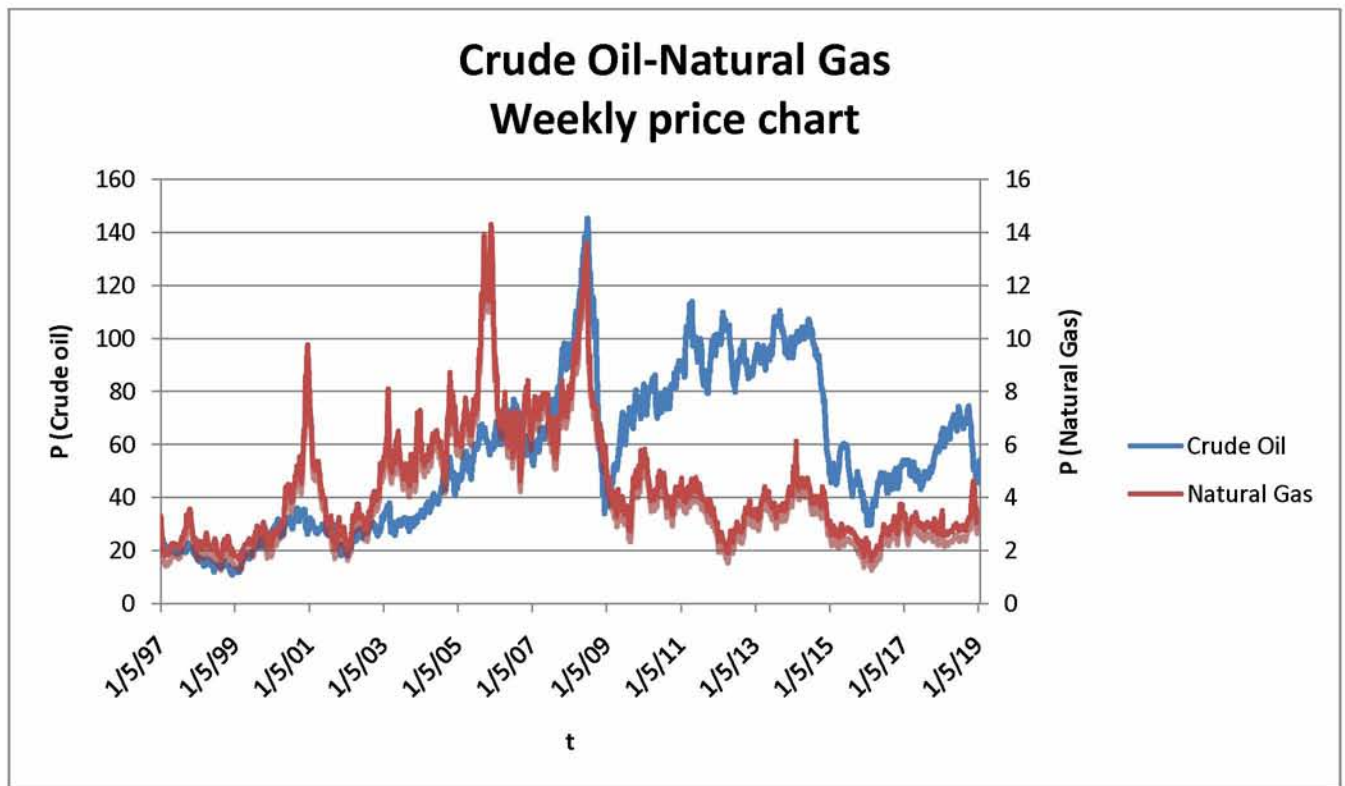
Καθώς το βήμα μας είναι η εβδομάδα θα κάνουμε και εδώ πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά δηλαδή για 5 μέρες όπου είναι η χρηματιστηριακή εβδομάδα.

Επαληθεύουμε και εδώ τις ενδείξεις ύπαρξης χάους στο σύστημα καθώς ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov είναι θετικός.

Συνοπτικά για το φυσικό αέριο βρήκαμε διάσταση εμπύθισης  $(m) = 5$ , υστέρηση  $(\tau) = 32$ , φρακταλική διάσταση  $= 3,15$  ενώ ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov είναι  $\sim 3,033 > 0$ . Τα συνολικά αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά και είναι ισχυρές ενδείξεις ύπαρξης χάους στη χρονοσειρά του φυσικού αερίου

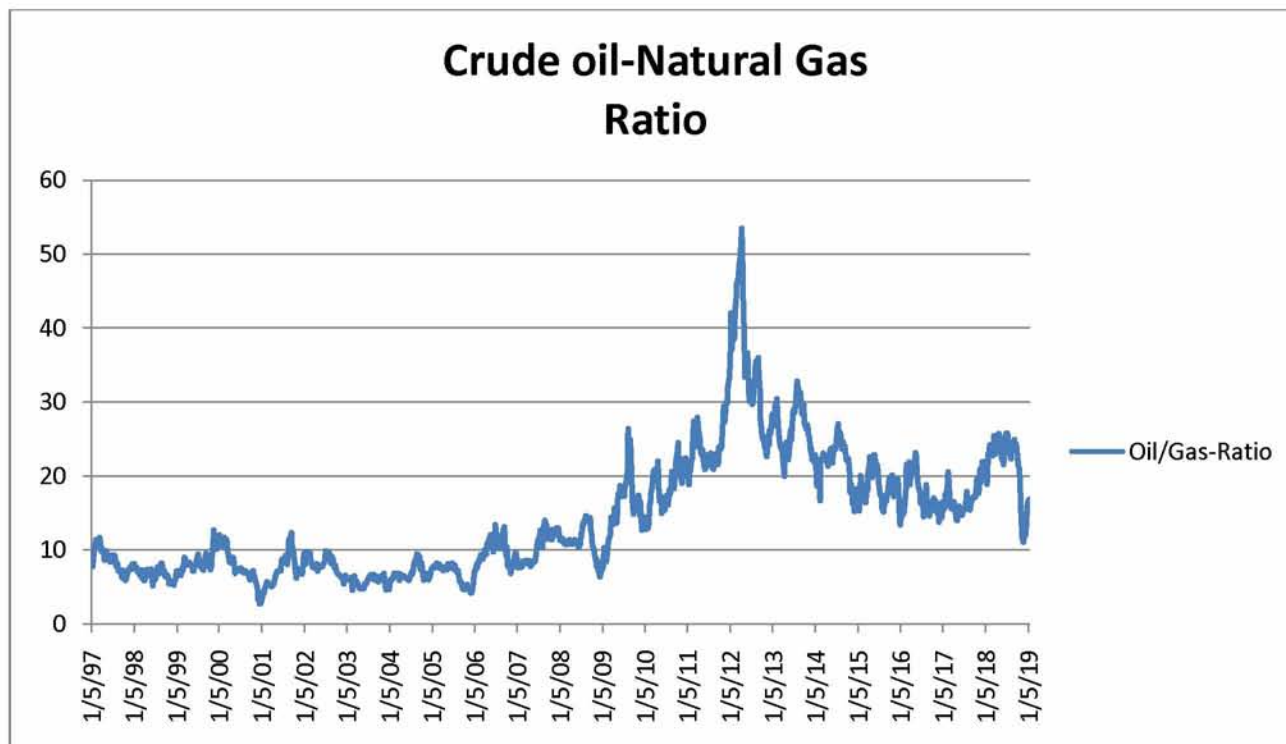
### 2.3. Συγκριτική μελέτη του CrudeOil και NaturalGas

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συγκριτική μελέτη μεταξύ του πετρελαίου και του φυσικού αερίου. Για μια πρώτη άποψη πιθανής συσχέτισης των τιμών μεταξύ των δύο αγαθών τοποθετήθηκαν τα διαγράμματα σε ένα ενιαίο γράφημα στην εικόνα 2.19.



Εικόνα 2.19.Γράφημα τιμών-χρόνου αργού πετρελαίου και φυσικού αερίου

Στην εικόνα 2.19 βλέπουμε τις παρατηρήσεις και από τα δύο προϊόντα. Η κλίμακα των τιμών του φυσικού αερίου φαίνεται στον δεξιό άξονα ενώ η κλίμακα των τιμών του πετρελαίου στον αριστερό. Με μια πρώτη εικόνα δεν παρατηρείται κάποια σοβαρή συσχέτιση στις διακυμάνσεις των τιμών των δύο προϊόντων.

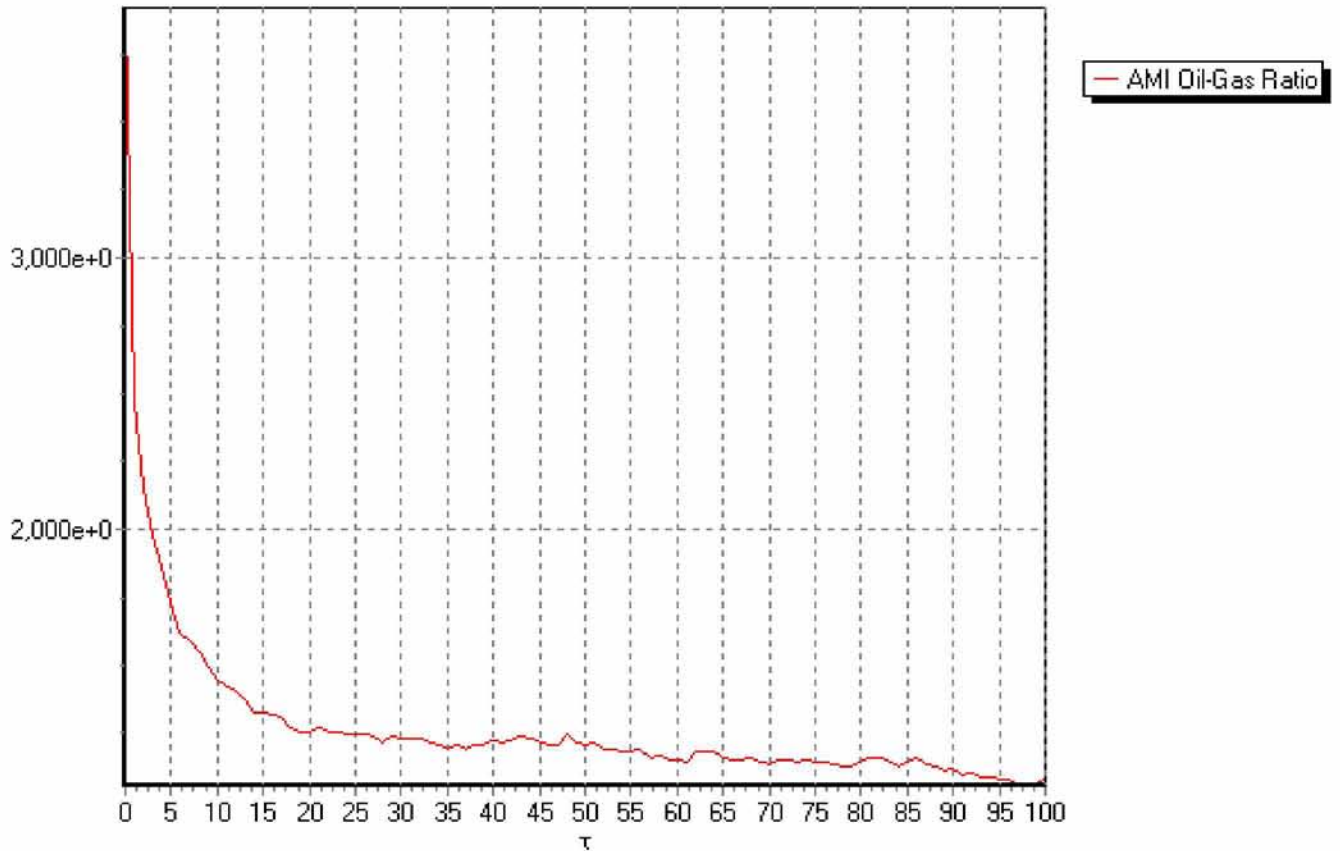


Εικόνα 2.20. Ο λόγος των τιμών πετρελαίου-φυσικού αερίου

Τέλος υπολογίσθηκε ο λόγος των τιμών πετρελαίου φυσικού αερίου για την πιθανή εμφάνιση κάποιου μοτίβου που θα μας επέτρεπε την μελλοντική πρόβλεψη των τιμών. Παρατηρείται ότι ο λόγος κινείται σε ένα κανάλι μέχρι την διάσπαση του και τις ακραίες μεταβολές την περίοδο 2009-2014. Έπειτα ισορροπεί πάλι σε ένα διαφορετικό κανάλι κάτι που δείχνει ότι η δυναμική μεταξύ των δύο προϊόντων έχει αλλάξει. Η συμπεριφορά αυτή είναι αρκετά σημαντική καθώς αν η τιμή του λόγου βρίσκεται στο πάνω ή στο κάτω άκρο του καναλιού, σε περίπτωση μιας ακραίας μεταβολής ενός εκ των δύο προϊόντων θα μπορούσαμε να προβλέψουμε την πορεία του άλλου.

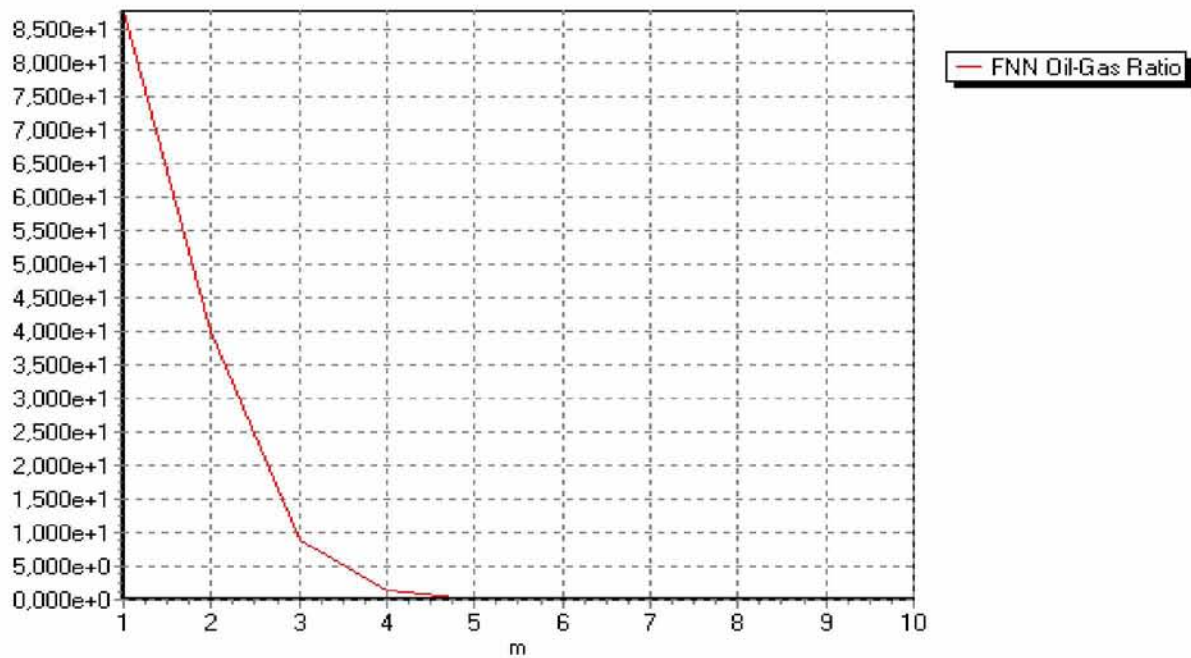
### 2.3.1. Χαοτική ανάλυση στον λόγο CrudeOil-Naturalgas

Η χαοτική ανάλυση στην χρονοσειρά του λόγου CrudeOil/NaturalGas μας έδωσε και αυτή ισχυρή ένδειξη χάους.



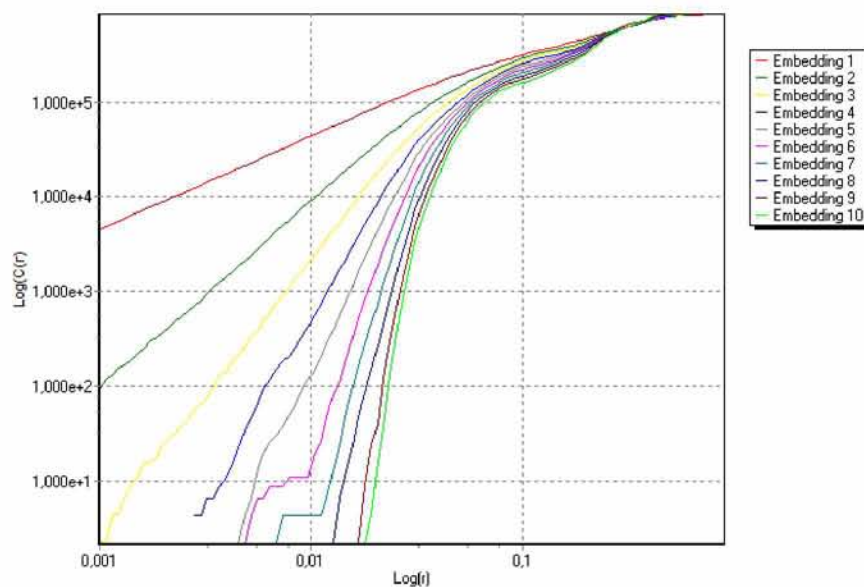
Εικόνα 2.21. Διάγραμμα Μέσης Αμοιβαίας Πληροφορίας για τον λόγο πετρέλαιο προς φυσικό αέριο

Η μέθοδος της μέσης αμοιβαίας πληροφορία μας έδωσε υστέρηση  $\tau=20$

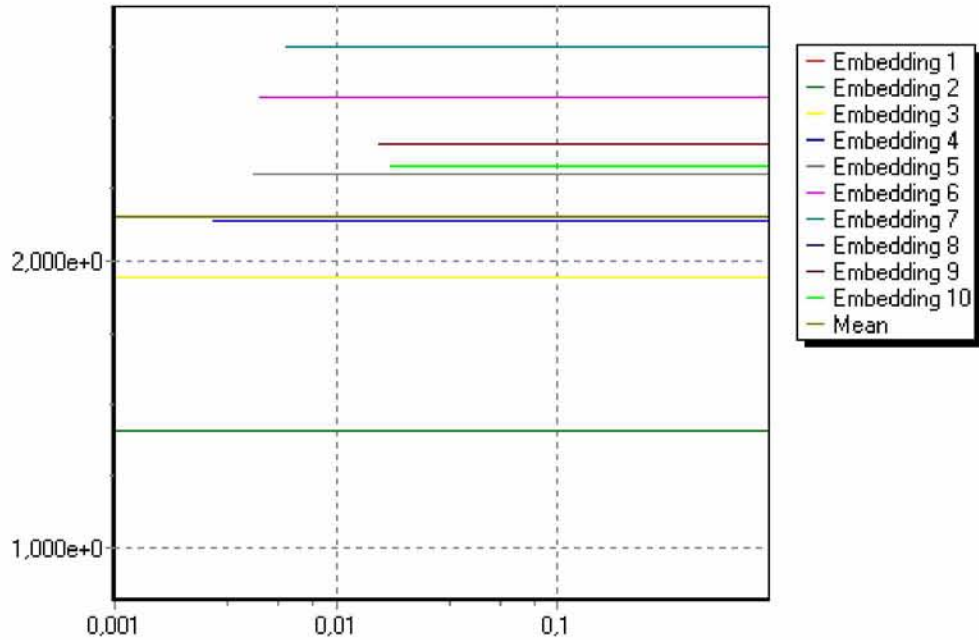


Εικόνα 2.22. Διάγραμμα Λανθασμένων Κοντινών Γειτόνων για τον λόγο πετρέλαιο προς φυσικό αέριο

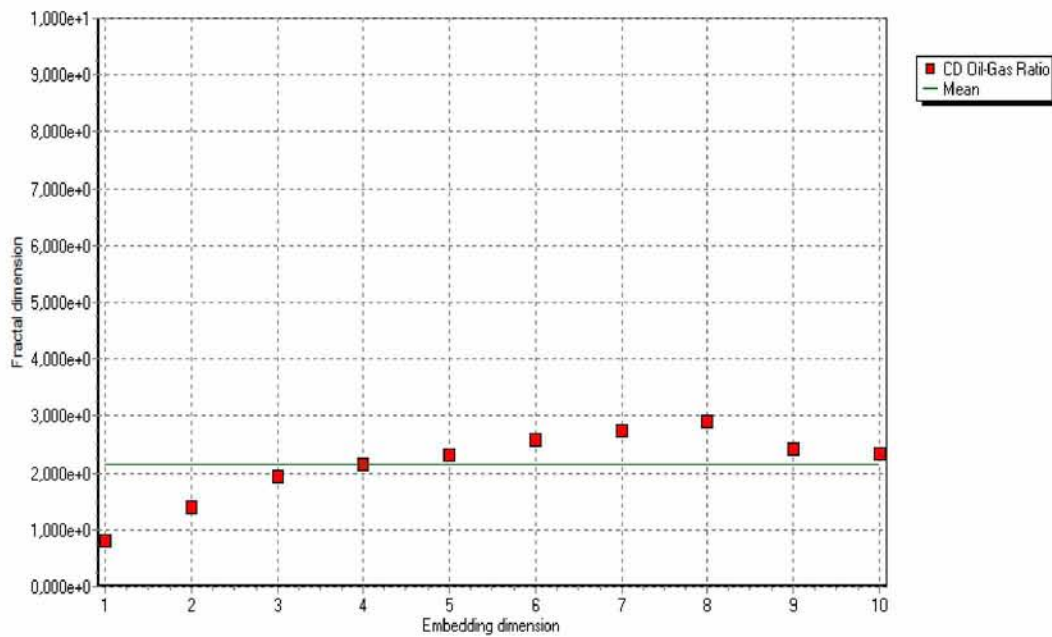
Από την Εικόνα 2.22 βρίσκουμε το σημείο για το οποίο μηδενίζεται ο αριθμός των ψευδών κοντινών γειτόνων για να βρούμε την διάσταση εμπύθισης του συστήματος. Η διάσταση εμπύθισης είναι και εδώ  $(m) = 5$ , όσο την είχαμε υπολογίσει και για τις χρονοσειρές του αργού πετρελαίου και φυσικού αερίου.



Εικόνα 2.23. Αριθμός σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση στον μετασχηματισμένο ελκυστή

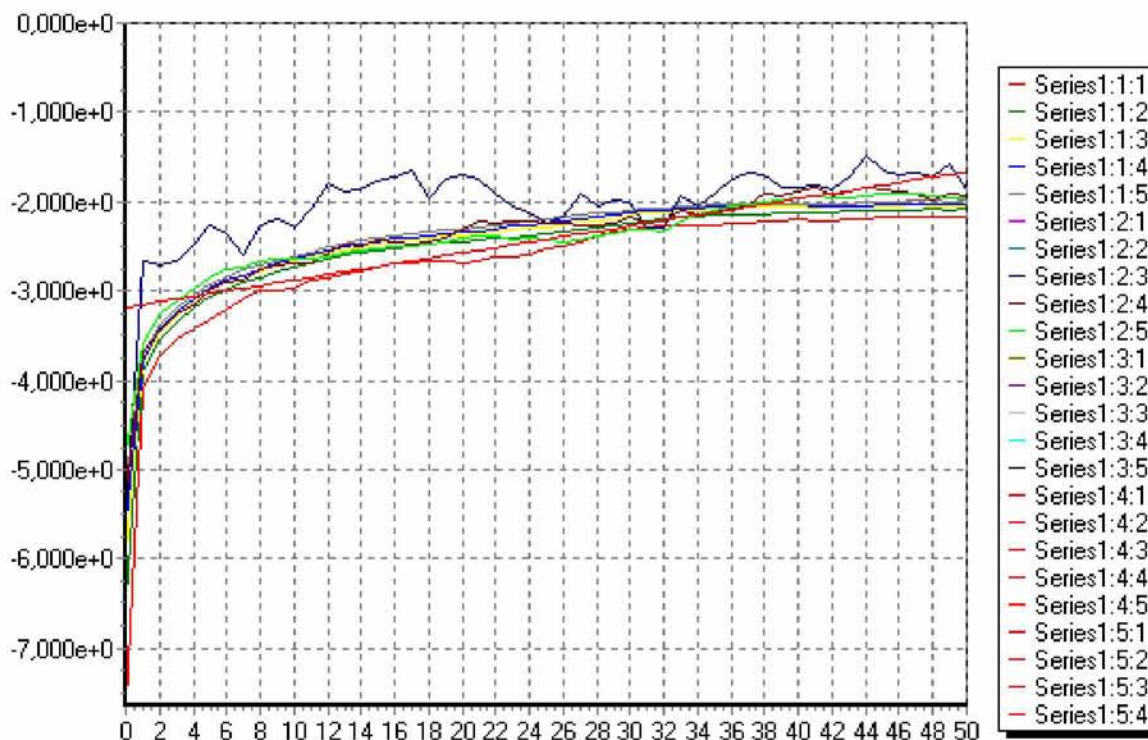


Εικόνα 2.24. Οι κλίσεις των καμπυλών των σημείων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε διάσταση του μετασχηματισμένου ελκυστή



Εικόνα 2.25. Διάγραμμα διάστασης συσχέτισης για τον λόγο πετρελαίου προς φυσικό αέριο

Από την διάσταση συσχέτισης επαληθεύουμε ότι η διάσταση εμπύθισης του ελκυστή είναι  $m=5$  και βλέπουμε ότι η φρακταλική διάσταση  $= 3,2$ .



Εικόνα 2.26. Μέγιστος εκθέτης Lyapunov

Και σε αυτή την περίπτωση ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov είναι θετικός κάτι που ενισχύει την ύπαρξη χάους και υπολογίστηκε από το πρόγραμμα επίλυσης :

Maximum Lyapunov Exponent
1,918972176644

Βλέπουμε ότι και στην περίπτωση του λόγου των δύο χρονοσειρών οι ενδείξεις χάους είναι ισχυρές. Η fractal dimension=3,2, ο LyapunovMax ~1,918 ενώ η embedding dimension=5 και η υστέρηση  $\tau=20$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν οι χρονοσειρές του WTI Crude Oil και Natural Gas με βήμα δειγματοληψίας τη μια εβδομάδα. Από την ανάλυση στα δύο προϊόντα συμπεραίνουμε ότι αυτά δεν ακολουθούν τη Θεωρία της Αποτελεσματικής Αγοράς, δηλαδή οι αποδόσεις των τιμών δεν είναι λευκός θόρυβος και τα ιστογράμματά τους δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή, για την περίοδο από 5-Ιανουαρίου-1997 έως 20-Ιανουαρίου-2019. Αντίθετα, η χρονοσειρά των δύο παραπάνω χρονοσειρών μας έδειξε ισχυρές ενδείξεις ύπαρξης χάους τόσο στην χρονοσειρά του πετρελαίου όσο και στην χρονοσειρά του φυσικού αερίου. Σημειώνεται ότι η φρακταλική διάσταση για το πετρέλαιο βρέθηκε ότι είναι  $fr. dim. = 2,55$  ενώ για το φυσικό αέριο  $fr. dim. = 3,1$  (δεκαδικός αριθμός) όπου και στις δύο περιπτώσεις υποδηλώνει ισχυρή ένδειξη χάους. Πιο συγκεκριμένα η AMI (Average Mutual Information) για το πετρέλαιο που μας δίνει την υστέρηση έχει τιμή 20, ενώ για το φυσικό αέριο 32, τιμές αρκετά χαμηλότερες του 100 άρα και σοβαρή ένδειξη χάους. Η διάσταση εμφύθισης (embedding dimension) είναι 5 και στα δύο προϊόντα (δηλαδή ο αριθμός των παραμέτρων που επηρεάζουν την τιμή τους) ενώ ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov είναι 2,33 ( $>0$ ) για το πετρέλαιο και 3,03 ( $>0$ ) για το φυσικό αέριο ενισχύοντας την ένδειξη ύπαρξης χάους στις χρονοσειρές.

Με βάση τα παραπάνω έγινε η πρόβλεψη για το WTI Crude Oil και το Natural Gas χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των σταθμισμένων τοπικών μέσων (local weighted averages) στο πρόγραμμα επίλυσης με επαναληπτική (iterative) αντιμετώπιση, για την 27-Ιανουαρίου 2019 και πήραμε τα εξής αποτελέσματα :

### Για το πετρέλαιο

Η τιμή του πετρελαίου στις 20-1-2019 έκλεισε στα 53,69\$ και **προβλέφθηκε** ότι την επόμενη εβδομάδα θα είναι 55,49\$. Η **πραγματική** τιμή στις 27-1-2019 έκλεισε στα 55,26\$, δηλαδή με σφάλμα πρόβλεψης  $<1\%$ .

Η πρόβλεψη για την τιμή του πετρελαίου ήταν πάρα πολύ καλή και θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει μια θέση ανάλογη με το ρίσκο που θα θέλαμε να αναλάβουμε. Ειδικότερα θα μπορούσαμε α) να αγοράσουμε τον δείκτη του πετρελαίου αν θέλαμε να λάβουμε μεγάλο ρίσκο



αλλά και μεγάλα κέρδη, β) να πουλήσουμε ένα ρυθμισμένο επίπεδο 50-51\$ το οποίο θα άξιζε εκείνη την στιγμή περίπου 200\$.

### Για το φυσικό αέριο

Η τιμή του φυσικού αερίου στις 20-1-2019 έκλεισε στα 3,178\$ και **προβλέφθηκε** ότι την επόμενη εβδομάδα θα είναι 3,17\$. Η **πραγματική** τιμή στις 27-1-2019 έκλεισε στα 2,734\$ με σφάλμα πρόβλεψης 16%.

Η πρόβλεψη για το φυσικό αέριο δεν ήταν καλή γιατί δεν καταφέραμε να πιάσουμε την καθοδική τάση. Παρ' όλα αυτά μια θέση short σε επίπεδο π.χ. 3,3\$ θα μπορούσε να έχει μια απόδοση κοντά στα 300\$

Η συγκριτική ανάλυση των δύο προϊόντων έδειξε ότι αν και δεν έχουν κάποια σοβαρή συσχέτιση που μπορεί να φανεί με την πρώτη ματιά παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον το διάγραμμα του λόγου Crude Oil/Natural Gas. Η τιμή του λόγου για τα έτη 1997 έως 2009 παρουσιάζει μια σταθερότητα καθώς η τιμή μπορεί να βρεθεί σε ένα κανάλι μεταξύ των τιμών 5 και 15. Μετά το 2009 η δυναμική του λόγου αλλάζει και υπάρχουν ακραίες μεταβολές. Πιθανό σενάριο για την αλλαγή αυτή να ήταν η ανακάλυψη μιας τεχνικής εξόρυξης σχιστολιθικού πετρελαίου στην Αμερική που μετέβαλε τους όρους παραγωγής του crude oil. Στη συνέχεια βλέπουμε ότι στα μέσα του 2014 μέχρι σήμερα ο λόγος να έχει σταθεροποιηθεί μεταξύ των τιμών 15 και 25. Μένει να δούμε αν αυτό θα αλλάξει πάλι στα επόμενα χρόνια με την χρήση διαφορετικών πηγών ενέργειας στην αγορά. Επίσης, το διάγραμμα του λόγου φαίνεται να διέπεται από χάος κάτι που πιθανόν μας δίνει την δυνατότητα πρόβλεψης. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι μπορούμε σε ακραίες μεταβολές ενός εκ των δύο προϊόντων να προβλέψουμε το σημείο καμπής του.

Τέλος, η σταθερότητα που παρουσιάζει ο λόγος είναι λογική. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή τα δύο προϊόντα είναι μερικώς υποκατάστατα από την πλευρά της κατανάλωσης και συμπληρωματικά από την πλευρά της παραγωγής. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν η τιμή του φυσικού αερίου ανέβει πολύ ενώ του πετρελαίου μείνει στάσιμη, όσοι χρησιμοποιούσαν φυσικό αέριο για θέρμανση θα στραφούν στο πετρέλαιο κάτι που θα οδηγήσει σε μείωση της ζήτησης στο φυσικό αέριο μέχρι να επέλθει πάλι μια ισορροπία.

Συνεπώς, οι χρονοσειρές των δύο αγαθών φαίνεται να είναι χαοτικές, όπως και αυτή του λόγου τους. Επίσης, στην χρονοσειρά του πετρελαίου έχουμε δυνατότητα βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης αν και χρειάζονται περαιτέρω αναλύσεις για να μετρήσουμε το ποσοστό των έγκυρων προβλέψεων. Ο λόγος των δύο προϊόντων φαίνεται πως για μεγάλα διαστήματα ακολουθεί ένα κανάλι πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους.

Συνολικά είδαμε ότι υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις χάους στις χρονοσειρές του πετρελαίου και του φυσικού αερίου. Στη χρονοσειρά του πετρελαίου φαίνεται να μπορούμε να επιτύχουμε πρόβλεψη καλύτερη από αυτή του μέσου όρο, χωρίς να συμβαίνει όμως το ίδιο και για το φυσικό αέριο καθώς τους χειμερινούς μήνες υπάρχει αρκετές έντονες διακυμάνσεις. Επιπλέον η χρονοσειρά του λόγου των δύο προϊόντων φαίνεται να διέπεται από χάος κάτι που πιθανόν να σημαίνει ότι και αυτή θα μπορούσε να προβλεφτεί καλύτερα από το μέσο όρο βοηθώντας μας να επαληθεύσουμε μια πρόβλεψη στο πετρέλαιο και πιθανώς να υπολογίσουμε μια κίνηση στο φυσικό αέριο.

Θα είχε ενδιαφέρον η περαιτέρω μελέτη στις χρονοσειρές των προϊόντων ενέργειας για να ερευνηθεί πως αυτές επηρεάζονται και από άλλες χρονοσειρές. Όπως για παράδειγμα πως επηρεάζεται η χρονοσειρά του φυσικού αερίου από τον καιρό ιδιαίτερα την χειμερινή περίοδο ή πως θα επηρεαστεί το πετρέλαιο από την αύξηση χρήσης ηλεκτρικής ενέργειας και άλλων ανανεώσιμων πηγών για την κίνηση των οχημάτων και τι επιδράσεις θα έχει αυτό στην δυναμική του λόγου μεταξύ του φυσικού αερίου και του πετρελαίου.

Επιπλέον ενδιαφέρον θα παρουσίαζε από την πλευρά της πρακτικής μελέτης η χρήση χαοτικών μοντέλων και η προσπάθεια πρόβλεψης σε άλλους δείκτες, όπως για παράδειγμα δεικτών μετοχών ή δεικτών νομισμάτων για έλεγχο ένδειξης χάους αλλά και εντοπισμό πιθανών αλληλεπιδράσεων μεταξύ αγορών. Από θεωρητικής μελέτης υπάρχει πολύ μεγάλο εύρος εξέλιξης των μοντέλων και θεωριών πρόβλεψης για προσπάθεια μείωσης του θορύβου και η δυνατότητα καλύτερων προβλέψεων.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### **Ξενογλώσση**

- Alligood, K. T., Sauer, T. D. & Yorke, J. A. (2000). Chaos, an Introduction to Dynamical Systems, Springer
- Bessembinder, H. (1991). Forward contracts and firm value: Investment, incentive and contracting effects. *Journal of Financial and quantitative Analysis*, 26(4), 519-532.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Box, G. E., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons..
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987-1007.
- Fama, E. F. (1960). Efficient market hypothesis (Doctoral dissertation, PhD Thesis, Ph. D. dissertation, University of Chicago Graduate School of Business).
- John Hull, 10th Edition (2015). *Options, Futures and other Derivatives*
- Kourtidou E., February 2012, Thesis. Dynamic analysis of the FTSE20, FTSE 40 and FTSE80 returns series of the Athens Stock Exchange market. University of Macedonia, Thessaloniki

- Procaccia, G. P. (1983). Characterization of strange attractors. Phys. Rev. Lett, 50, 346-349.
- Serletis A., Gogas P. The North American natural gas liquids markets are chaotic. January 1999. Energy Economics Education Foundation, Inc.
- Stanley, H. E., & Mantegna, R. N. (2000). An introduction to econophysics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Walker, G. T. (1931). On periodicity in series of related terms. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 131(818), 518-532.
- Yule, G. U. (1927). VII. On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 226(636-646), 267-298.

## **Ελληνόγλωσση**

- Αλεξιάκης Δ.Π.(Δεκέμβριος 2005).Τα παράγωγα προϊόντα και η ελληνική χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων. Εκδότης Ελλην
- [Κουγιουμτζής Δ.\(2008\), Προσομοίωση Χαοτικών Συστημάτων, Μη γραμμική ανάλυση, σελ 8-9](#)

- [Κουγιουμτζής Δ. \(2014\).Σημειώσεις. Υπολογιστικές Μέθοδοι Οικονομικής Φυσικής.Κεφάλαιο 4, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης](#)
- Κουγιουμτζής Δ. (2011).Σημειώσεις. Ανάλυση Δεδομένων, Κεφάλαιο 6, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, σελ 115-127.
- [Κουγιουμτζής Δ. \(2018\). Σημειώσεις. Χρονοσειρές, Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης](#)
- [Μαρινάκος Γ. Διπλωματικήεργασία. ΈλεγχοςστοCapitalAssetPricingModel. ΜοντέλαGARCH. ΠανεπιστήμιοΠατρών2008](#)
- [Μαρκόπουλος Α.Κ., Ντέντης Ι., Παρασκευόπουλος Ν. Διπλωματική εργασία. Η χρήση της μεθοδολογίας Box-Jenkins στην ανάλυση χρονοσειρών. Τ.Ε.Ι Δυτικής Ελλάδας, Πάτρα, Φεβρουάριος 2015](#)
- Ντούνα Α., Διπλωματική εργασία. Διερεύνηση της σχέσης μεταξύ τιμής φυσικού αερίου και πετρελαίου στις Η.Π.Α. Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Αύγουστος 2016
- Συριόπουλος Κώστας, Λεοντίσης Αλέξανδρος (2000). Χάος: Ανάλυσηκαιπρόβλεψηχρονοσειρών. Εκδόσεις Ανικούλα Θεσσαλονίκη

**Διαδικτυακές αναφορές :**

[23] [https://www.eia.gov/energyexplained/index.php?page=natural\\_gas\\_use](https://www.eia.gov/energyexplained/index.php?page=natural_gas_use)

[24]<https://oilprice.com/Energy/Crude-Oil/What-Is-Crude-Oil-A-Detailed-Explanation-On-This-Essential-Fossil-Fuel.html>