



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ SPARSITY-AWARE MOR
ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ**

Διπλωματική Εργασία

Θεόδωρος Μάριος Μάρρας

Επιβλέπων: Γεώργιος Σταμούλης

Βόλος 2019



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ SPARSITY-AWARE MOR
ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ**

Διπλωματική Εργασία

Θεόδωρος Μάριος Μάρρας

Επιβλέπων: Γεώργιος Σταμούλης

Βόλος 2019



UNIVERSITY OF THESSALY

SCHOOL OF ENGINEERING

DEPARTMENT OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING

**IMPLEMENTATION AND ANALYSIS OF SPARSITY-AWARE
MOR ALGORITHMS**

Diploma Thesis

Theodoros Marios Marras

Supervisor: George Stamoulis

Volos 2019

Στην οικογένεια και στους φίλους μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας κ.Γεώργιο Σταμούλη, καθηγητή του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών στο Βόλο, για τη συνεχή καθοδήγησή και τις πολύτιμες συμβουλές του καθόλη τη διάρκεια.

Επίσης θα ήθελα να εκφράσω την ιδιαίτερη εκτίμησή μου στον διδακτορικό φοιτητή του τμήματός μας κ.Χαράλαμπο Αντωνιάδη για τις πολύτιμες υποδείξεις του, που με βοήθησαν να ξεπεράσω ορισμένες δυσκολίες.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, που πίστευε σε μένα όλα αυτά τα χρόνια και έδειξε τη συμπαράστασή της με κάθε τρόπο, αλλά και τους φίλους μου για τα υπέροχα φοιτητικά χρόνια που μου χάρισαν.

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗΣ ΔΕΟΝΤΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

«Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα διπλωματική εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής».

Ο Δηλών

Θεόδωρος Μάριος Μάρρας
05-07-2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πλαίσια της ραγδαίας εξέλιξης της τεχνολογίας και της επιστήμης, η σχεδίαση ενσωματωμένων κυκλωμάτων έχει γίνει δυσκολότερη και πιο πολύπλοκη διαδικασία. Οι τεχνικές υποβιβασμού τάξης μοντέλου παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην επιτάχυνση της προσομοίωσης κυκλωμάτων, η οποία είναι απαραίτητη διαδικασία πριν την σχεδίασή τους. Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιούνται για την μείωση του μεγέθους των παρασιτικών δικτύων, παράγοντας μειωμένα μοντέλα που προσεγγίζουν τις ιδιότητες των αρχικών. Ωστόσο, η απόδοση των παραδοσιακών τεχνικών δεν είναι ικανοποιητική όταν εφαρμόζονται σε δίκτυα με πολλά ports, καθώς οδηγούν σε πυκνά μοντέλα που επιβαρύνουν τις επακόλουθες προσομοιώσεις και χρειάζονται αρκετή μνήμη και χρόνο της CPU. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύονται τεχνικές υποβιβασμού τάξης μοντέλου βασισμένες στη μέθοδο moment matching και κατάλληλες για δίκτυα με πολλά ports, παράγοντας αραιά μοντέλα. Η μέθοδος TurboMOR πραγματοποιεί αποτελεσματική μείωση παθητικών RC δικτύων, αποφεύγοντας πράξεις με πυκνούς πίνακες, διατηρώντας την παθητικότητα και οδηγώντας σε αραιά μοντέλα που τρέχουν αποδοτικά σε τυπικούς προσομοιωτές κυκλωμάτων.

ABSTRACT

In the context of the rapid evolution of technology and science, the design of integrated circuits has become more difficult and more complex process. Model order reduction techniques play a very important role in the acceleration of circuit simulation, which is a necessary process before designing. These techniques are used to reduce the size of the parasitic networks, producing reduced models that approximate the properties of the originals. However, the performance of traditional techniques is not satisfactory when applied to networks with many ports, as they lead to dense models that burden the subsequent simulations and require sufficient memory and CPU time. This diploma thesis analyses model order reduction techniques based on the moment matching method and suitable for networks with many ports, producing sparse models. TurboMOR method performs an effective reduction of passive RC networks, avoiding operations with dense arrays, maintaining passivity and leading to sparse models that run efficiently in conventional circuit simulators.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	vii
ABSTRACT	viii
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	ix
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ	x
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	xi
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ	xii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Περιγραφή του προβλήματος	1
1.2 Σκοπός της εργασίας.....	2
1.3 Διάρθρωση εργασίας.....	2
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ	4
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΜΝΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	7
3.1 Παράδειγμα	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ ΤΑΞΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (MOR)	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: MOMENT MATCHING ΜΕΘΟΔΟΣ	13
5.1 Αλγόριθμος PRIMA	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΤΕΧΝΙΚΕΣ MOMENT MATCHING ΓΙΑ ΔΙΚΤΥΑ ΜΕ ΜΕΓΑΛΟ ΑΡΙΘΜΟ PORTS	17
6.1 Μέθοδος TurboMOR.....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	23
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΕΠΙΛΟΓΟΣ	25
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	26

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 2.1: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών σε μιγαδικό επίπεδο.....	6
Εικόνα 3.1: Παράδειγμα κυκλώματος RC.....	9

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 7.1: Χρόνος προσομοίωσης για τα ROMS που παράχθηκαν από τις δύο μεθόδους.....	24
---	----

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

CPU: Central Processing Unit

MOR: Model Order Reduction

MNA: Modified Nodal Analysis

MGS: Modified Gram-Schmidt

ROM: Reduce Order Model

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Τα ενσωματωμένα κυκλώματα βρίσκονται σχεδόν σε όλες τις ηλεκτρονικές συσκευές της σημερινής εποχής, όπως τους υπολογιστές, τα κινητά τηλέφωνα, τις ψηφιακές κάμερες και πολλά άλλα. Παραδείγματα τέτοιων μικροκυκλωμάτων είναι οι μικροεπεξεργαστές και τα memory chips. Ένα ενσωματωμένο κύκλωμα αποτελείται από μη γραμμικά στοιχεία, όπως τα τρανζίστορ και οι δίοδοι που συνδέονται από ένα πυκνό δίκτυο με μικροσκοπικά καλώδια το οποίο ονομάζεται interconnect δίκτυο. Παράδειγμα interconnect δικτύου είναι το δίκτυο διανομής ενέργειας (power grid) [1]. Οι εξελίξεις στη σχεδίαση ενσωματωμένων κυκλωμάτων έχει οδηγήσει σε chips με μικρότερα μεγέθη χαρακτηριστικών και πυκνή ενσωμάτωση **Error! Reference source not found.** Ένα σημερινό chip μπορεί να αποτελείται από δισεκατομμύρια τρανζίστορ. Οπότε λόγω της πυκνότητας και του μεγέθους των εξαρτημάτων σε ένα chip προκύπτουν interconnect δίκτυα μεγάλης πολυπλοκότητας και πυκνότητας. Γεγονός το οποίο καθιστά την σχεδίαση των δικτύων αυτών πολύ σημαντική, ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις ακεραιότητας ενέργειας και σήματος. Στο πλαίσιο αυτό, της σχεδίασης ενσωματωμένων κυκλωμάτων περιλαμβάνεται το στάδιο επιβεβαίωσης των chips, όπου γίνεται ανάλυση της επίδοσής τους, λαμβάνοντας υπόψη και τις ηλεκτρομαγνητικές επιδράσεις των παρασιτικών interconnect δικτύων. Στο στάδιο αυτό η παρασιτική αντίσταση, χωρητικότητα και επαγωγή αφαιρούνται, παίρνοντας ισοδύναμα RC ή RLC μοντέλα δικτύων. Μετά την εξαγωγή αυτή, το μοντέλο για το παρασιτικό δίκτυο συνδέεται με τα άλλα εξαρτήματα του chip και ακολουθεί μια προσομοίωση σε επίπεδο συστήματος για να επιβεβαιώσει τον σχεδιασμό του. Ωστόσο τα παρασιτικά αυτά δίκτυα μπορεί να είναι πολύ μεγάλα και σύνθετα, αποτελούμενα από εκατομμύρια στοιχεία και κόμβους.

Η απευθείας προσομοίωση των chips δεν αποτελεί και την καλύτερη ιδέα, καθώς μπορεί να απαιτήσει μεγάλη χρήση της μνήμης και χρόνο της CPU. Τέτοιες προσομοιώσεις μπορεί να διαρκέσουν ακόμα και αρκετές μέρες. Συνέπεια των παραπάνω είναι η αυξημένη ζήτηση των μηχανικών σχεδίασης κυκλωμάτων, για μειωμένης τάξης μοντέλα των παρασιτικών δικτύων. Η συμπεριφορά των μοντέλων των παρασιτικών δικτύων οφείλεται κυρίως σε ένα μεγάλο αριθμό πόλων. Είναι όμως δυνατό να προσεγγιστεί η

απόκριση των μοντέλων αυτών με ένα μικρότερο αριθμό πόλων. Μία από τις πιο δημοφιλείς τέτοιες προσεγγίσεις είναι η τεχνική υποβιβασμού τάξης μοντέλου.

Η ηλεκτρική συμπεριφορά των interconnect δικτύων μπορεί να μοντελοποιηθεί μαθηματικά με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, όπου οι άγνωστοι αναφέρονται στις μεταβλητές κατάστασης του δικτύου. Ο αριθμός των μεταβλητών αυτών αποτελεί και την τάξη του δικτύου και συνήθως είναι πολύ μεγάλος λόγω του μεγέθους του. Οι τεχνικές υποβιβασμού τάξης μοντέλου παράγουν μαθηματικά μοντέλα με πολύ μικρότερο αριθμό τέτοιων μεταβλητών, όπου ταυτόχρονα προσεγγίζουν την ηλεκτρική συμπεριφορά των αρχικών δικτύων και διατηρούν κάποιες φυσικές ιδιότητες όπως η παθητικότητα.

1.2 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση των τεχνικών υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR) των interconnect δικτύων. Πιο συγκεκριμένα δίνεται έμφαση σε τεχνικές που χρησιμοποιούν το moment matching και αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τα δίκτυα που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό ports. Ταυτόχρονα διατηρούν σημαντικά χαρακτηριστικά του αρχικού μοντέλου όπως σταθερότητα και παθητικότητα, ενώ επίσης παράγουν μειωμένα μοντέλα αραιής αναπαράστασης που έχει ως αποτέλεσμα την οικονομία σε χρόνο και χώρο. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην TurboMOR, μία από τις αποδοτικότερες μεθόδους υποβιβασμού τάξης μοντέλου για την οποία γίνεται υλοποίηση σε Octave και συγκρίνεται με τη μέθοδο PRIMA.

1.3 Διάρθρωση εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια μαθηματικά μοντέλα, απαραίτητα για την κατανόηση της διαδικασίας των μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου και για τους ψευδοκώδικες των αλγορίθμων PRIMA και TurboMOR.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται σε έναν αποδοτικό τρόπο περιγραφής των κυκλωμάτων, τις MNA εξισώσεις. Αρχικά αναλύεται τρόπος που διαμορφώνονται αυτές οι εξισώσεις και έπειτα ακολουθεί ένα παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις μεθόδους MOR οι οποίες βασίζονται στην προβολή και έπειτα διακρίνονται σε κατηγορίες.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται εκτενής περιγραφή των μεθόδων moment matching και παρουσιάζεται ένας δημοφιλέστατος αλγόριθμος MOR, ο PRIMA μαζί με τον ψευδοκώδικά του.

Στο έκτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι μέθοδοι που είναι κατάλληλοι για κυκλώματα μεγάλου αριθμού ports και παράγουν αραιά ROM. Γίνεται επίσης ανάλυση του αλγορίθμου TurboMOR συμπεριλαμβάνοντας των ψευδοκώδικά του.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την υλοποίηση της μεθόδου TurboMOR σε Octave και συγκρίνεται η επίδοσή του με τον PRIMA.

Το όγδοο και τελευταίο κεφάλαιο αφορά τον επίλογο όπου δίνεται μια ολοκληρωμένη εικόνα του περιεχομένου της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αναφορά στο μαθηματικό υπόβαθρο το οποίο καθίσταται απαραίτητο για την πλήρη κατανόηση, ανάλυση και υλοποίηση των μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR). Συγκεκριμένα παραθέτονται οι ορθοκανονικές βάσεις, η εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς ενός δυναμικού συστήματος, οι πόλοι και τα μηδενικά της τελευταίας και η QR παραγοντοποίηση με Householder reflections.

Ορθοκανονικές Βάσεις Error! Reference source not found.: Μια βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ ενός υποχώρου $V \in R^V$ ονομάζεται ορθογώνια βάση αν τα διανύσματά της είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους:

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = 0, i \neq j$$

Αν τα διανύσματα αυτά είναι επιπλέον μοναδιαία τότε η βάση ονομάζεται ορθοκανονική:

$$\|\vec{e}_i\| = 1$$

Η διαδικασία με την οποία, ξεκινώντας από μία οποιαδήποτε βάση, κατασκευάζεται μια ορθογώνια και στη συνέχεια μια ορθοκανονική είναι η διαδικασία ορθογωνοποίησης Gram-Schmidt: Έστω ο υποχώρος $V \in R^V$ και $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ βάση του. Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{u}_1 \\ \vec{e}_j &= \vec{u}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \text{pr}_{\vec{e}_i} \vec{u}_j, j=2, \dots, k \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι το σύνολο $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ αποτελεί ορθογώνια βάση του V . Εν συνεχεία το σύνολο $s^* = \left\{ \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}, \dots, \frac{\vec{e}_k}{|\vec{e}_k|} \right\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση.

QR παραγοντοποίηση[3]:26 Έστω ένας πίνακας $A \in R^{m \times n}$ ο οποίος έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Προκύπτει ότι μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε:

$$A = QR$$

Ο Q είναι ένας πίνακας διαστάσεων $(m \times n)$ με ορθοκανονικές στήλες και ισχύει $Q^T Q = I$. Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός ($m=n$) τότε ο Q είναι ορθογώνιος ($Q^T Q = Q Q^T = I$). Ο R είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία και διαστάσεων $(n \times n)$.

QR παραγοντοποίηση με τον αλγόριθμο Householder
Error! Reference source not found.: Μια άλλη μέθοδος, πέρα από αυτήν της Gram-Schmidt, για να επιτευχθεί η παραπάνω διαδικασία $A = QR$ είναι μέσω των μετασχηματισμών Householder. Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

- Υπολογίζεται το $\vec{u} = \vec{a}_1 \pm \alpha \vec{e}_1$, όπου \vec{a}_1 η πρώτη στήλη του πίνακα A και $\alpha = \|\vec{a}_1\|_2$ (Το πρόσημο επιλέγεται ως το αντίθετο του πρώτου στοιχείου του \vec{a}_1).
- Θέτοντας $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2}$ υπολογίζεται ο πίνακας $Q_1 = I_m - 2\vec{v}\vec{v}^T$, όπου I_m ο ταυτοτικός πίνακας διαστάσεων $(m \times m)$. Πολλαπλασιάζοντας $Q_1 A$ προκύπτει:

$$Q_1 A = \begin{array}{c|c|c|c} & \alpha & * & \dots & * \\ \hline & 0 & & & \\ \hline & \vdots & & \tilde{A} & \\ \hline & 0 & & & \end{array}$$

- Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία στον πίνακα $\tilde{A} \in R^{(m-1) \times (n-1)}$ προκύπτει ο ορθογώνιος πίνακας $\tilde{Q}_2 \in R^{(m-1) \times (n-1)}$, ο οποίος χρησιμοποιείται για να οριστεί ο Q_2 ως:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} \in R^{m \times n}.$$

- Μετά από $t = \min\{m - 1, n\}$ βήματα προκύπτουν:
 - Ο άνω τριγωνικός πίνακας $R = Q_1 \cdots Q_2 Q_t A$
 - Ο ορθογώνιος πίνακας $Q = Q_1 Q_2^T \cdots Q_t^T$

Συνάρτηση μεταφοράς: Έστω το παρακάτω δυναμικό σύστημα με είσοδο $u(t)$ και έξοδο $y(t)$. Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος ονομάζεται ο λόγος μεταξύ της εξόδου $Y(s)$ και της εισόδου $U(s)$ στο πεδίο της συχνότητας.

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace χωρίς αρχικές συνθήκες προκύπτει:

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς $X(s)$:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Οπότε αντικαθιστώντας:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$= (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

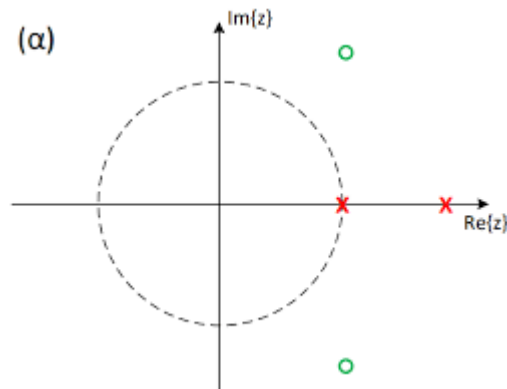
Τελικά προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Πόλοι και Μηδενικά: Σε συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις ο μετασχηματισμός Laplace είναι η ρητή συνάρτηση του s , δηλαδή είναι λόγος των πολυωνύμων του s :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Μηδενικά ονομάζονται οι ρίζες του αριθμητή ($N(s) = 0$) και πόλοι ονομάζονται οι ρίζες του παρονομαστή ($D(s) = 0$). Η εικόνα 2.1 αντιστοιχεί σε ένα διάγραμμα πόλων-μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο, όπου τα μηδενικά συμβολίζονται με ο και οι πόλοι με x.



Εικόνα 2.1: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών σε μιγαδικό επίπεδο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΜΝΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για την προσομοίωση ενός κυκλώματος χρειάζεται να βρεθεί πρώτα ένας κατάλληλος τρόπος περιγραφής του. Η μέθοδος με την οποία διατυπώνονται οι εξισώσεις ενός κυκλώματος εμφανίζεται να είναι ύψιστης σημασίας τόσο για την ανάλυση κυκλωμάτων μέσω υπολογιστή, όσο για τον σχεδιασμό προγραμμάτων για ενσωματωμένα συστήματα. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι, ανάμεσά τους οι Modified nodal analysis (MNA) εξισώσεις. Οι MNA εξισώσεις [5] έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Υπερτερούν σε σχέση με την αρχική προσέγγιση (nodal analysis) καθώς μπορούν να συμπεριλάβουν και στοιχεία εξαρτώμενα από το ρεύμα.
- Παρουσιάζουν αποτελεσματικότητα όσον αφορά τον χρόνο εκκίνησης, την ταχύτητα εκτέλεσης και τις απαιτήσεις χωρητικότητας ενός προγράμματος.
- Χρησιμοποιούν τους κανόνες του Kirchhoff.

Η μορφή τους είναι η εξής:

$$\begin{aligned} C\dot{x}_n &= -Gx_n + Bu_N \\ i_N &= L^T x_n \end{aligned}$$

Και στη Laplace μορφή:

$$\begin{aligned} Gx(s) + sCx(s) &= Bu(s) \\ y(s) &= B^T x(s) \end{aligned}$$

Όπου

- m ο αριθμός των κόμβων και p ο αριθμός των ports.
- $y(s) \in R^p$ και $u(s) \in R^p$ είναι τα ρεύματα και οι τάσεις αντίστοιχα.
- $x(s) \in R^m$.
- $C \in R^{m \times m}$ ο πίνακας πυκνωτών και $G \in R^{m \times m}$ ο πίνακας αγωγιμοτήτων όπου:
 $C = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ και $G = \begin{bmatrix} N & E \\ -E^T & 0 \end{bmatrix}$ όπου Q, H, N οι πίνακες με τις τιμές των πυκνωτών, των επαγωγών και των αντιστάσεων αντίστοιχα, ενώ ο πίνακας E αποτελείται από 0, 1, -1.
- $B \in R^{m \times p}$ αντιστοιχίζει τις πηγές στους κόμβους.

Εξισώσεις τοπολογίας κυκλωμάτων Error! Reference source not found.: Έστω $V = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ το σύνολο των κόμβων και $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ το σύνολο των κλάδων ή

ακμών ενός κυκλώματος. Εάν σε κάθε κλάδο προσαρτηθεί μία φορά αναφοράς, τότε ο ελαττωμένος πίνακας $A \in R^{(n-1) \times m}$ ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{εάν ο κλάδος } j \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{εάν ο κλάδος } j \text{ εισέρχεται στον κόμβο } i \\ 0, & \text{εάν ο κλάδος } j \text{ δεν συνδέεται με τον κόμβο } i \end{cases}$$

Αν $u(t)$ είναι το διάνυσμα των τάσεων των m κλάδων, $U(t)$ το διάνυσμα των δυναμικών των $n-1$ κόμβων και $i(t)$ το διάνυσμα των ρευμάτων των m κλάδων τότε οι εξισώσεις τοπολογίας του κυκλώματος εκφράζονται από τους νόμους τους Kirchhoff:

$$u(t) = A^T U(t),$$

$$Ai(t) = 0$$

Τροποποιημένη ανάλυση Κόμβων (MNA) **Error! Reference source not found.:** Τα m στοιχεία ενός κυκλώματος χωρίζονται σε δύο ομάδες. Στην πρώτη ομάδα G_1 ανήκουν τα στοιχεία που μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$i_k(t) = g_k u_k(t) + C_k \frac{du_k(t)}{dt} + S_k(t)$$

Στην δεύτερη ομάδα G_2 ανήκουν τα στοιχεία τα οποία δεν μπορούν να γραφούν στην παραπάνω μορφή ή επιζητείται το ρεύμα τους κατά την προσομοίωση. Έστω m_1 και m_2 ο αριθμός των στοιχείων της πρώτης και της δεύτερης ομάδας αντίστοιχα, όπου ισχύει $m_1 + m_2 = m$. Χωρίζονται ο ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης και τα διανύσματα $u(t)$, $i(t)$ σε υποπίνακες και υποδιανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο ομάδες:

$$A = [A_1 \ A_2]$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Αναλύοντας τους κόμβους του Kirchhoff προκύπτει:

$$Ai(t) = 0 \Leftrightarrow A_1 i_1(t) + A_2 i_2(t) = 0$$

$$u(t) = A^T U(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(t) = A_1^T u(t) \\ u_2(t) = A_2^T u(t) \end{cases}$$

Οι εξισώσεις των στοιχείων της ομάδας G_1 και της G_2 γράφονται ως εξής:

$$i_1(t) = G u_1(t) + C \frac{du_1(t)}{dt} + S_1(t)$$

$$u_2(t) = R i_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + S_2(t)$$

Κάνοντας αντικαταστάσεις προκύπτει:

$$A_1 G A_1^T u(t) + A_1 G A_1^T \frac{du(t)}{dt} + A_2 i_2(t) = -A_1 S_1(t)$$

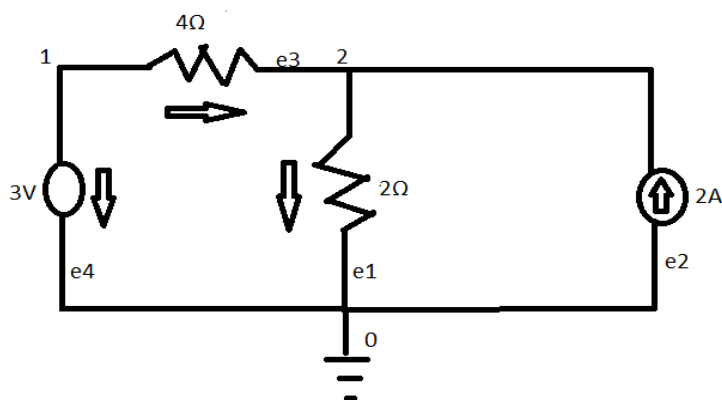
$$A_2^T u(t) - R i_2(t) - L \frac{di_2(t)}{dt} = S_2(t)$$

Ο συνδυασμός των δύο εξισώσεων δίνει το MNA σύστημα:

$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix}$$

3.1 Παράδειγμα

Η διαδικασία με την οποία διαμορφώνονται οι MNA εξισώσεις θα παρουσιαστεί επίσης με ένα παράδειγμα[6]:



Εικόνα 3.1: Παράδειγμα κυκλώματος RC

Έστω το παραπάνω κύκλωμα της εικόνας 3.1, για το οποίο πρέπει να βρεθεί το σύστημα MNA εφόσον επιζητείται το ρεύμα από την αντίσταση του κλάδου e_3 . Στον κλάδο e_1 υπάρχει αντίσταση που ανήκει στην ομάδα $G1$. Οπότε στη θέση (2,2) του πίνακα η τιμή θα είναι $\frac{1}{2}$. Στον κλάδο e_2 υπάρχει πηγή ρεύματος οπότε στη θέση (2,1) του δεξιού μέλους του συστήματος η τιμή θα είναι 2. Στον κλάδο e_3 βρίσκεται η αντίσταση από την οποία ζητείται η τιμή του ρεύματος, οπότε ανήκει στην ομάδα $G2$. Το στοιχείο (1,3) θα έχει τιμή 2. Το (2,3) -1, το (3,1) 1, το (3,2) -1 και το (3,3) -4. Τέλος στον κλάδο e_4 βρίσκεται πηγή τάσης ομάδας $G2$. Οπότε στοιχείο (1,4) θα είναι 1 όπως και το (4,1), και το στοιχείο (4,1) του δεξιού μέλους του συστήματος θα είναι 3. Τελικά προκύπτουν οι MNA εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ ΤΑΞΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (MOR)

Τα μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν τα κυκλώματα τείνουν να γίνονται ολοένα και μεγαλύτερων διαστάσεων λόγω της ανάγκης για ακρίβεια. Το γεγονός αυτό δυσχεραίνει την διαδικασία προσομοίωσης τους όσον αφορά τη υπολογιστική πολυπλοκότητα. Λύση του παραπάνω προβλήματος είναι η χρήση τεχνικών μείωσης της τάξης-μεγέθους των μοντέλων αυτών, δηλαδή η παραγωγή μικρότερων που θα προσεγγίζουν όσο περισσότερο τις ιδιότητες των αρχικών και θα είναι πολύ πιο εύκολο και φθηνό να προσομοιωθούν. Οι τεχνικές αυτές ονομάζονται Model Order reduction μέθοδοι και αναλύονται παρακάτω

Projection based MOR[7]: Όλες οι υπάρχουσες μέθοδοι MOR είναι βασισμένες στην προβολή (projection based MOR): Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$E \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) , y(t) = Cx(t)$$

Στόχος είναι η εύρεση ενός υποχώρου S_1 . Το $x(t)$ προσεγγίζεται από την προβολή του $\hat{x}(t)$ στον υποχώρο S_1 . Έστω μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου S_1 : $V = (u_1, u_2, \dots, u_q)$. Τότε η προσέγγιση $\hat{x}(t)$ στον S_1 μπορεί να γραφτεί ως $\hat{x}(t) = Vz(t)$ οπότε και $x(t) \approx Vz(t)$. Το $z(t)$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Αντικαθιστώντας όπου x το Vz προκύπτει:

$$E \frac{dVz}{dt} = AVz + Bu(t) + e , \hat{y}(t) = CVz$$

Παίρνοντας το σφάλμα $e = 0$ και την προβολή $W^T e = 0$ στον S_2 , όπου οι στήλες του W είναι βάση του S_2 προκύπτει:

$$W^T E \frac{dVz}{dt} = W^T AVz + W^T Bu(t) , \hat{y}(t) = CVz$$

Αντικαθιστώντας $\hat{E} = W^T EV$, $\hat{A} = W^T AV$, $\hat{B} = W^T B$, $\hat{C} = CV$ προκύπτει το μειωμένο μοντέλο:

$$\hat{E} \frac{dz(t)}{dt} = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) , \hat{y}(t) = \hat{C}z(t)$$

Το σύστημα που περιγράφει η τελευταία εξίσωση έχει λιγότερες εξισώσεις και είναι ευκολότερο να λυθεί. Οπότε μειώνεται και ο χρόνος προσομοίωσής του. Όσον αφορά το σφάλμα μεταξύ των δύο συστημάτων, μπορεί να μετρηθεί μεταξύ των $x(t)$, $\hat{x}(t)$ ή μεταξύ

των $y(t)$, $\hat{y}(t)$ ή μεταξύ των συναρτήσεων μεταφοράς τους και πρέπει να είναι μικρότερο μιας ανοχής.

Οι τεχνικές MOR έχουν ως κοινό σκοπό τη συμπεριφορά του μειωμένου μοντέλου που θα παράξουν, η οποία πρέπει να είναι επαρκώς κοντά με αυτήν του αρχικού μοντέλου στα πλαίσια της μέτρησης του σφάλματος. Το σημείο που διαφέρουν οι τεχνικές αυτές, είναι ο υπολογισμός των W και V .

- Reduced basis και POD μέθοδοι: Υπολογίζουν τα W , V από τα στιγμιότυπα του διανύσματος $x(t)$ σε διάφορες χρονικές στιγμές.
- Eigenvalue based MOR μέθοδοι: Τα W , V είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές των πινάκων (A, E) .
- Gramian based MOR μέθοδοι: Υπολογίζουν τα W , V από την ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα των Gramians.
- Moment matching μέθοδοι: Υπολογίζουν τα W , V από τα στιγμιότυπα της συνάρτησης μεταφοράς.

Πολλαπλές προσεγγίσεις των μεθόδων τάξης υποβιβασμού μοντέλου έχουν προταθεί τις τελευταίες δεκαετίες, όπως:

- Οι node elimination μέθοδοι
- Οι Gramian based ή balancing μέθοδοι
- Moment matching μέθοδοι

Σημαντικότερες εμφανίζονται να είναι οι δύο τελευταίες κατηγορίες για τις οποίες θα παρουσιαστούν και κάποιες βασικές διαφορές. Οι Gramian based MOR μέθοδοι είναι κατάλληλες για συστήματα μικρής κλίμακας και παρέχουν συγκεκριμένο όριο σφάλματος. Επίσης διατηρούν την παθητικότητα του αρχικού συστήματος. Όμως δεν είναι υπολογιστικά αποδοτικές. Αυτό γιατί είναι ακριβές σε χώρο και χρόνο λόγω του υπολογισμού των Gramians και των ιδιοτιμών. Αντίθετα οι moment matching μέθοδοι χρησιμεύουν σε μεγάλης κλίμακας συστήματα και είναι υπολογιστικά αποδοτικές. Ωστόσο δεν έχουν συγκεκριμένο όριο σφάλματος. Τελικά εφόσον οι moment matching είναι πιο κλιμακωτές μέθοδοι, προτιμούνται για την μείωση παρασιτικών μοντέλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: MOMENT MATCHING ΜΕΘΟΔΟΣ

Η moment matching [8] ή Krylov subspace ή και Pade approximation μέθοδος φαίνεται να ανταποκρίνεται στις σημερινές απαιτήσεις των μεγάλων παρασιτικών συστημάτων αποτελούμενων από τεράστιο αριθμό στοιχείων, κόμβων και θυρών που χρήζουν μείωσης τάξης-μεγέθους, ώστε να προσομοιωθούν. Παρακάτω περιγράφεται η διαδικασία του moment matching: Έστω το παρακάτω σύστημα (από το κεφάλαιο 3) της Laplace μορφής των MNA εξισώσεων:

$$\begin{aligned}Gx(s) + sCx(s) &= Bu(s) \\ y(s) &= B^T x(s)\end{aligned}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος είναι:

$$H(s) = B^T (G + sC)^{-1} B$$

Στόχος των εν λόγω μεθόδων είναι να προσεγγίσουν το παραπάνω σύστημα με ένα μοντέλο χαμηλότερης τάξης-μεγέθους $n \ll m$:

$$\begin{aligned}G'x'(s) + sC'x'(s) &= B'u(s) \\ y'(s) &= B'^T x'(s)\end{aligned}$$

,όπου $C', G' \in R^{n \times n}$, $x'(s) \in R^n$ και $B' \in R^{n \times p}$. Και συνεπώς με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H'(s) = B'^T (G' + sC')^{-1} B'$$

Θέτοντας $A = -G^{-1}C$ και $R = G^{-1}B$ προκύπτει:

$$H(s) = B^T (I - sA)^{-1} R$$

,όπου $I \in R^{m \times m}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Παρατηρείται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A αναπαριστούν τους πόλους της $H(s)$. Επίσης αναπτύσσοντας της σειρά Taylor της $H(s)$ γύρω από το $s = 0$ προκύπτει:

$$H(s) = M_0 + M_1 s + M_2 s^2 + \dots$$

Οι συντελεστές $M_k \in R^{p \times p}$ ονομάζονται στιγμιότυπα (moments) της $H(s)$ και μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση:

$$\begin{aligned}M_k &= B^T (-G^{-1}C)^k G^{-1} B \\ &= B^T A^k R, \quad k=0,1,2, \dots\end{aligned}$$

Επομένως στόχος είναι να επιτευχθεί ταίριασμα στιγμιοτύπων (moment matching):

$$M_k = M'_k, \quad k=0,1, \dots, 2q-1$$

Στον αλγόριθμο PRIMA η διαδικασία moment matching επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό των πινάκων του αρχικού συστήματος:

$$G' = Q^T G Q, \quad C' = Q^T C Q, \quad B' = Q^T B Q, \quad \text{όπου } Q \in R^{m \times qp}$$

Οι στήλες του Q τέμνουν τον υποχώρο Krylov:

$$K_q(A, R) = \text{span}(R, AR, A^2R, \dots, A^{2q-1}R)$$

Αφού η λύση θα προσεγγιστεί από τον χώρο Krylov θα πρέπει να είναι γνωστή μια βάση του, γεγονός που μας οδηγεί στην ορθοκανονικοποίηση των διανυσμάτων. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται από τον PRIMA και παράγει την ορθοκανονική βάση είναι ο MGS και η διαδικασία ονομάζεται Arnoldi MGS. Σε περίπτωση που ο πίνακας A είναι συμμετρικός, καταλληλότερος εμφανίζεται να είναι ένας άλλος αλγόριθμος ο συμμετρικός Lanczos.

Υλοποίηση μεθόδου Arnoldi MGS:

- 1 Choose a vector u_1 such as $\|u_1\| = 1$ ($u_1 = r_0 / \|r_0\|_2$)
- 2 For $j = 1$ to m
- 3 $w_j = Au_j$
- 4 For $i = 1$ to j
- 5 $h_{ij} = (w_j, u_i)$
- 6 $w_j = w_j - h_{ij}u_i$
- 7 End
- 8 $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$
- 9 If $h_{j+1,j} = 0$ STOP
- 10 $u_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$
- 11 End

Έτσι δημιουργείται ένας πίνακας Q_m μεγέθους $m \times qp$ και ένας άνω Hessenberg πίνακας H_m μεγέθους $(m + 1) \times m$ όπου ισχύουν οι σχέσεις:

$$A Q_m = Q_{m+1} H_m$$

$$Q_m^T Q_m = I$$

Ο πίνακας Q_m έχει ως στήλες ορθοκανονικά διανύσματα και οι ιδιοτιμές του πίνακα H_m είναι προσεγγίσεις των ιδιοτιμών του πίνακα A . Τελικά πραγματοποιείται ταίριασμα 2q στιγμιοτύπων ανάμεσα στο αρχικό και το μειωμένης τάξης μοντέλο.

5.1 Αλγόριθμος PRIMA

Αρκετοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν τις μεθόδους Krylov έχουν αναπτυχθεί για την μείωση του μεγέθους των παρασιτικών δικτύων. Ανάμεσά τους, ένας από τους πιο δημοφιλής αλγορίθμους, ο PRIMA οποίος εγγυάται την παθητικότητα των μειωμένων μοντέλων. Η διαδικασία του αλγορίθμου PRIMA είναι αυτή που περιγράφηκε παραπάνω. Υπενθυμίζεται λοιπόν ότι η μείωση του μεγέθους γίνεται με την εφαρμογή της congruence transformation στους πίνακες του αρχικού συστήματος:

$$G' = Q^T G Q, \quad C' = Q^T C Q, \quad B' = Q^T B Q, \quad \text{όπου } Q \in R^{m \times qp}$$

Ακολουθεί ο ψευδοκώδικας[8] του αλγορίθμου PRIMA:

- 1 $(X_0, T) = qr(R)$; *qr factorization of R*
- 2 If q/N is not an integer
 - set $n = \lfloor \frac{q}{N} \rfloor + 1$
 - else
 - set $= \frac{q}{N}$
- 3 For $k = 1, 2, \dots, n$
 - set $V = C X_{k-1}$
 - solve $G X_k^{(0)} = V$ for $X_k^{(0)}$
 - For $j = 1, 2, \dots, n$
 - $H = X_{k-j}^T X_k^{(j-1)}$
 - $X_k^{(j)} = X_k^{(j-1)} - X_{k-j} H$
 - endfor
 - $(X_k, T) = qr(X_k^{(k)})$; *qr factorization of $X_k^{(k)}$*
 - endfor
- 4 Set $X = [X_0 X_1 \dots X_{k-1}]$ and truncate X so that it has q columns only.
- 5 Compute $G' = X^T G X$, $G' = X^T G X$, $B' = X^T B X$

Το νέο μειωμένο μοντέλο έχει μέγεθος $n = qp$ και είναι παθητικό καθώς διατηρείται η μη αρνητική φύση των πινάκων G και C . Όμως ο πίνακας προβολής Q που δημιουργείται με τη μέθοδο Arnoldi MGS είναι πυκνός. Οπότε σε ένα δίκτυο με πολλές θύρες ο Q γίνεται τεράστιος και ο υπολογισμός και η αποθήκευση του είναι πολύ ακριβή διαδικασία. Οπότε το μειωμένο μοντέλο προκύπτει να είναι πυκνό, μεγάλο και πιο αργό από το αρχικό

μοντέλο. Τελικά ο αλγόριθμος PRIMA μπορεί να γίνει πολύ αναποτελεσματικός όταν εφαρμόζεται σε δίκτυα με πολλά ports. Στόχος λοιπόν είναι η εύρεση μεθόδων που αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τέτοια δικτύα και παράγουν αραιά ROM. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες προσεγγίσεις τέτοιων μεθόδων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΤΕΧΝΙΚΕΣ MOMENT MATCHING ΓΙΑ ΔΙΚΤΥΑ ΜΕ ΜΕΓΑΛΟ ΑΡΙΘΜΟ PORTS

Αρκετοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί για να αντιμετωπίσουν την προκλήση των δικτύων με μεγάλο αριθμό ports και την παραγωγή αραιών μειωμένων μοντέλων, ο καθένας με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του. Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν θα γίνει αναφορά σε τέτοιους αλγόριθμους, θα επισημανθεί για ποιες συνθήκες είναι κατάλληλοι και με ποιον τρόπο γίνεται η μείωση του μεγέθους των παρασιτικών δικτύων στον καθέναν τους.

Χρήση συσχετισμού μεταξύ των ports: Μέθοδοι όπως η SVD MOR, η ESVD MOR, η RECMOR έχουν στόχο να μειώσουν τον αριθμό των ports πριν εφαρμοστεί ο PRIMA. Η ιδέα πάνω στην οποία βασίζονται είναι η εκμετάλλευση των συσχετισμών που εμφανίζονται μεταξύ των ακροδεκτών ενός κυκλώματος. Παρόλα αυτά στα κυκλώματα με μεγάλο αριθμό ports σπάνια εμφανίζεται μεγάλος βαθμός συσχετισμού μεταξύ τους.

Χρήση ομαδοποίησης των εισόδων: Άλλες τεχνικές έχουν υιοθετήσει τη στρατηγική της ομαδοποίησης των εισόδων σε μικρότερα σύνολα έτσι ώστε να γίνεται μείωση του μεγέθους σε κάθε ένα υποσύστημα ξεχωριστά. Με τον τρόπο αυτό τα μειωμένα μοντέλα που παράγονται από τις μεθόδους αυτές, είναι διαγώνιας μορφής και αραιά. Ωστόσο από τη στιγμή που το κάθε υποσύστημα μεταχειρίζεται ξεχωριστά η ιδιότητα της παθητικότητας δεν εγγυάται πάντα.

Μέθοδος SIP: Μια πιο αποτελεσματική προσέγγιση της moment matching τεχνικής είναι η μέθοδος SIP. Η μέθοδος αυτή αντί να κατασκευάσει απευθείας τον πίνακα προβολής χρησιμοποιεί κάποιους χειρισμούς αραιών πινάκων. Έτσι παράγεται το νέο, μειωμένης τάξης, μοντέλο απευθείας από τον πίνακα Schur. Επομένως το ROM που προκύπτει είναι αραιό και διατηρεί την παθητικότητα. Για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος SIP εμφανίζει μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα από τον αλγόριθμο PRIMA σε κυκλώματα με πολλά ports. Παρόλα αυτά μπορεί να πετύχει ταίριασμα μόνο δύο στιγμιότυπων ανα expansion point, οπότε το επίπεδο ακρίβειας δεν είναι τόσο επαρκές σε πρακτικές εφαρμογές.

Μέθοδος SparseRC: Η μέθοδος SparseRC χρησιμοποιεί graph-partitioning τεχνικές σε συνδυασμό με την ιδέα της προηγούμενης μεθόδου SIP. Πιο αναλυτικά το αρχικό σύστημα διαιρείται σε μικρότερα υποσυστήματα στα οποία στη συνέχεια γίνεται μείωση

μεγέθους με μία μέθοδο αντίστοιχη της SIP. Η δομή του ROM που προκύπτει είναι η ίδια με του αρχικού συστήματος και διατηρείται η παθητικότητα. Επίσης το ROM είναι αραιό οπότε όπως και η μέθοδος SIP έτσι και η μέθοδος SparseRC είναι αποδοτικότερη από τον αλγόριθμο PRIMA για κυκλώματα με πολλά ports αλλά παρουσιάζει και αυτή το ίδιο μειονέκτημα.

Οπότε στόχος είναι η εύρεση μιας μεθόδου η οποία θα παράγει ένα μειωμένου μεγέθους μοντέλο, που θα διατηρεί την παθητικότητα και την δομή του αρχικού συστήματος, θα είναι αραιό και θα μπορεί να γίνει ταίριασμα ενός μεγάλου αριθμού στιγμιοτύπων παρέχοντας ακρίβεια. Με άλλα λόγια, μια μέθοδος η οποία θα δίνει λύση στο συνδυασμό των παραπάνω προβλημάτων και θα είναι εξαιρετικά αποδοτική σε κυκλώματα με πολλά ports. Μια τέτοια μέθοδος είναι αλγόριθμος TurboMOR [9] ο οποίος αναλύεται στο υποκεφάλαιο 6.1.

Σύγκριση TurboMOR και προηγούμενων μεθόδων moment matching: Το ROM που προκύπτει από την μέθοδο TurboMOR είναι ίδιου μεγέθους και ακρίβειας με το ROM του αλγορίθμου PRIMA, αλλά με έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο όπου αποφεύγεται η κατασκευή τεράστιων και πυκνών πινάκων προβολής. Παρότι είναι δυνατό τα μοντέλα του PRIMA να αραιωθούν με μια αποσύνθεση των ιδιοτιμών, αυτό θα κοστίσει παραπάνω κύκλους στην CPU. Σε σχέση με τον αλγόριθμο SIP όπου μπορεί να ταίριαξει μόνο 2 στιγμιότυπα ανά expansion point, ο αλγόριθμος TurboMOR μπορεί να πετύχει ταίριασμα μεγάλου αριθμού στιγμιοτύπων με το αρχικό μοντέλο. Άλλο ένα πλεονέκτημα της εν λόγω μεθόδου είναι η διαγώνια μορφή του μειωμένου μοντέλου όπου οδηγεί σε μια αραιή αναπαράσταση. Έτσι πετυχαίνεται ένα μειωμένο αποτύπωμα του ROM στη μνήμη και επιταχύνονται οι επακόλουθες προσομοιώσεις. Τέλος τα παραγόμενα μοντέλα του TurboMOR είναι σταθερά και παθητικά, εφόσον η μόνη congruence transformation που γίνεται είναι αυτή που χρησιμοποιεί και ο αλγόριθμος PRIMA.

6.1 Μέθοδος TurboMOR

Έστω ένα παθητικό δίκτυο αποτελούμενο από αντιστάτες και πυκνώτες (RC κύκλωμα) με m τον αριθμό κόμβων και n τον αριθμό των ports. Χρησιμοποιώντας την MNA μορφοποίηση και κάνοντας αναδιάταξη των κόμβων, έτσι ώστε πρώτοι να είναι οι port και

να ακολουθούν οι internal nodes, το κύκλωμα μπορεί να περιγραφεί στην Laplace μορφή ως εξής:

$$\begin{pmatrix} [G_{11} & * \\ G_{21} & G_{22}] + s [C_{11} & * \\ & C_{22}] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [B_1^T \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Συμβολίζεται με * ο ανάστροφος του συμμετρικού block που βρίσκεται διαγώνια.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο ψευδοκώδικας της μεθόδου TurboMOR:

1. Inputs: $G_{11}, G_{21}, G_{22}, C_{11}, C_{21}, C_{22}, B_1, q, p, m$
2. Output: y
3. For $j = 1, 2, \dots, q$
4. If $j = 1$
5. Compute $K = chol(G_{22})$ //Cholesky factor of matrix G_{22}
6. Compute $G_{11}^{(1)} = G_{11} - G_{21}^T K^{-T} K^{-1} G_{21}$
7. Compute $C_{11}^{(1)} = C_{11} - G_{21}^T K^{-T} K^{-1} C_{21} - C_{21}^T K^{-T} K^{-1} G_{21}$
 $+ G_{21}^T K^{-T} K^{-1} C_{22} K^{-T} K^{-1} G_{21}$
8. Compute $C_{21}^{(1)} = C_{21} - C_{22} K^{-T} K^{-1} G_{21}$
9. Compute $C_{22}^{(1)} = K^{-1} C_{22} K^{-T}$
10. Else if $j = q$
11. $(R^{(j)}, Q^{(j)}) = dgeqrf(C_{21}^{(j-1)})$ // QR factor of $C_{21}^{(j-1)}$ with
Householder
12. $C_{11}^{(j)} = (Q^{(j)})^T C_{22}^{(j-1)} Q^{(j)}$ //no culc $c_{21}^{(j)}$ and $C_{22}^{(j)}$ bcs last iter
13. Else //iterations 2, ... , $q - 1$
14. $(R^{(j)}, Q^{(j)}) = DGEQRF(C_{21}^{(j-1)})$ // QR factor of $C_{21}^{(j-1)}$ with
Householder
15. Compute $\begin{bmatrix} C_{11}^{(j)} \\ C_{21}^{(j)} \end{bmatrix} = (Q^{(j)})^T C_{22}^{(j-1)} Q^{(j)} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$ // $c_{21}^{(j)}$ use for next
iteration
16. Compute $C_{22}^{(j)} = [0 \quad I_{m-jp}] (Q^{(j)})^T C_{22}^{(j-1)} Q^{(j)} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-jp} \end{bmatrix}$ // Use
for next iter
17. Endif

18. Endfor

19. Set a diagonal matrix $G \in R^{qp \times qp}$ of q blocks as:

Put $G_{11}^{(1)}$ to block (1,1) and I_p to block (j, j) for $j = 2, \dots, q$

20. Set a tridiagonal matrix $C \in R^{qp \times qp}$ as:

Put $C_{11}^{(j)}$ to block (j, j) for $j = 1, 2, \dots, q$ (to main diagonal)

Put $R^{(j)}$ to block (j, j-1) for $j = 2, \dots, q$ (to under diagonal)

Put $(R^{(j)})^T$ to block (j-1, j) for $j = 2, \dots, q$ (to upper diagonal)

21. Set $X \in R^{qp \times 1}$ as: $X = [x_1 \ x_1^{(2)} \ \dots \ x_1^{(q)}]$

22. Set $B \in R^{qp \times 1}$ as: $X = [B_1 \ 0 \ \dots \ 0]$

Ακολουθεί ανάλυση και εξήγηση του αλγορίθμου TurboMOR και ταυτόχρονα του ψευδοκώδικα του:

Πρώτη επανάληψη: Αρχικά εφαρμόζεται η διαδικασία congruence transformation με σκοπό την εξάλειψη του G_{21} που περιγράφει τα ζευγάρια αντίστασης μεταξύ των internal και των port κόμβων. Χρησιμοποιείται ο

$$Q^{(1)} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -K^{-T}K^{-1}G_{21} & I_{m-p} \end{bmatrix}$$

Ξεκινώντας γίνεται ο υπολογισμός του Cholesky factor του G_{22} (γραμμή 5). Μετά την congruence transformation λοιπόν τα block των εξισώσεων αλλάζουν.

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} & * \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & * \\ C_{21}^{(1)} & C_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} B_1^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

Εξαλείφεται ο G_{21} και υπολογίζονται οι $G_{11}^{(1)}$, $C_{11}^{(1)}$, $C_{21}^{(1)}$ και $C_{22}^{(1)}$ (γραμμές 6-9). Το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να διασπαστεί σε δύο υποσηστήματα: $\Sigma_1^{(1)}$ τάξης p και $\Sigma_2^{(1)}$ τάξης $m - p$.

$$\Sigma_1^{(1)}: \begin{cases} G_{11}^{(1)} x_1 + s C_{11}^{(1)} x_1 = u_1^{(1)} + B_1 u \\ y = B_1^T x_1 \end{cases}$$
$$\Sigma_2^{(1)}: \begin{cases} G_{22} x_2^{(1)} + s C_{22} x_2^{(1)} = -C_{21}^{(1)} u_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} = -(C_{21}^{(1)})^T x_2^{(1)} \end{cases}$$

Όμως μόνο το υποσύστημα $\Sigma_1^{(1)}$ είναι απευθείας συνδεδεμένο με τα input/output ports, οπότε μπορεί να χαρακτηριστεί ως ROM της τάξης p του αρχικού συστήματος και να ταιριάξει τα δύο πρώτα στιγμιότυπα του τελευταίου. Να σημειωθεί ότι μόνο ο υπολογισμός των $G_{11}^{(1)}$ και $C_{11}^{(1)}$ είναι αρκετός για να γίνει το παραπάνω ταίριασμα και ότι οι υπόλοιποι υπολογισμοί γίνονται για την επόμενη επανάληψη όπου θα γίνει περαιτέρω ταίριασμα. Επίσης ο υπολογισμός των $G_{11}^{(1)}$ και $C_{11}^{(1)}$ περιλαμβάνει πράξεις μεταξύ αραιών πινάκων οπότε γίνεται γρήγορα σε μια γλώσσα όπως το MATLAB.

Δεύτερη έως προ τελευταία επανάληψη: Στις επαναλήψεις αυτές λαμβάνεται υπόψη το υποσύστημα $\Sigma_2^{(j-1)}$ για να επιτευχθεί και άλλο ταίριασμα. Αντί να εφαρμοστεί ο PRIMA χάνοντας αποδοτικότητα, εφαρμόζεται congruence transformation με $Q = K^{-T}$ στο $\Sigma_2^{(j-1)}$. Αρχικά υπολογίζονται οι $(R^{(j)}, Q^{(j)})$ με QR παραγοντοποίηση (Householder reflections) του $C_{21}^{(j-1)}$ (γραμμή 14). Έπειτα χρησιμοποιώντας congruence transformation με το $Q^{(j)}$ το σύστημα εξισώσεων μετατρέπεται σε:

$$\left(\begin{bmatrix} I_p & * \\ 0 & I_{m-2p} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} C_{11}^{(j)} & * \\ C_{21}^{(j)} & C_{22}^{(j)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{(j)} \\ 0 \end{bmatrix} u_2^{(j-1)}$$

$$y_2^{(j-1)} = \begin{bmatrix} R^{(j)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζονται οι $C_{11}^{(j)}$, $C_{21}^{(j)}$ και $C_{22}^{(j)}$ (γραμμές 15, 16). Το σύστημα αυτό μπορεί όπως πριν να εκφραστεί σαν δύο υποσυστήματα $\Sigma_1^{(j)}$ τάξης p και $\Sigma_2^{(j)}$ τάξης $m - jp$.

$$\Sigma_1^{(j)}: \begin{cases} I_p x_1^{(j)} + s C_{11}^{(j)} x_1^{(j)} = u_1^{(j)} - R^{(j)} u_2^{(j-1)} \\ y_2^{(j-1)} = -R^{(j)T} x_1^{(j)} \end{cases}$$

$$\Sigma_2^{(j)}: \begin{cases} I_{m-2p} x_2^{(j)} + s C_{22}^{(j)} x_2^{(j)} = -C_{21}^{(j)} u_2^{(j-1)} \\ y_2^{(j)} = -(C_{21}^{(j)})^T x_2^{(j)} \end{cases}$$

Για τον ίδιο λόγο με την πρώτη επανάληψη, από το σύστημα $\Sigma_1^{(j)}$ παράγεται το ROM όπου πετυχαίνονται δύο επιπλέον ταιριάσματα στιγμιοτύπων. Για την επίτευξη αυτού, ουσιαστικά χρειάζεται μόνο ο υπολογισμός των $R^{(j)}$ και $C_{11}^{(j)}$. Οι υπόλοιποι υπολογισμοί χρειάζονται για την αμέσως επόμενη επανάληψη.

Τελευταία επανάληψη: Υπολογίζονται μόνο οι $R^{(j)}, C_{11}^{(j)}$ (γραμμές 11,12) για να γίνει το τελευταίο ταίρισμα σιγμοτύπων, χωρίς να γίνει επιπλέον αποσύνθεση του $\Sigma_2^{(j-1)}$ συστήματος.

Τελικά μετά από q επαναλήψεις το ROM θα είναι της τάξης pq με την παρακάτω μορφή (γραμμές 19-22) και θα κάνει ταίριασμα $2q$ σιγμοτύπων με το αρχικό μοντέλο.

$$\begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} & & & \\ & I_p & & \\ & & \dots & \\ & & & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1^{(q)} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & * & & \\ -R^{(2)} & C_{11}^{(2)} & \dots & \\ & \dots & \dots & \\ -R^{(q)} & & & C_{11}^{(q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1^{(q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Τέλος αξίζει να αναφερθεί η εφαρμογή του αλγόριθμου TurboMOR με τη χρήση των graph partitioning τεχνικών. Η στρατηγική είναι να χωριστεί το αρχικό δίκτυο σε υποδίκτυα τα οποία επικοινωνούν με ορισμένο σετ κόμβων, οι οποίοι ονομάζονται separator κόμβοι. Αποδεικνύεται ότι η τεχνική αυτή είναι κατάλληλη για πολύ μεγάλα δίκτυα και μειώνει το συνολικό κόστος της διαδικασίας μείωσης του αρχικού μοντέλου, εφόσον ο αλγόριθμος TurboMOR εφαρμόζεται σε υποσυστήματα μικρότερου μεγέθους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν κάποια αποτελέσματα από την υλοποίηση της μεθόδου TurboMOR. Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνονται οι χρόνοι προσομοίωσης των ROM που παράγονται μέσω των μεθόδων PRIMA και TurboMOR. Η επίτευξη των παραπάνω γίνεται μέσω πινάκων, προκειμένου να επισημανθεί η σπουδαιότητα της μεθόδου TurboMOR.

Εκτός λοιπόν από τη θεωρητική ανάλυση των μεθόδων MOR που έγινε στα προηγούμενα κεφάλαια, υλοποιήθηκε και ο αλγόριθμος TurboMOR. Για τις προσομοιώσεις και την παραγωγή αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το GNU Octave, version 4.4.1 σε συσκευή με προδιαγραφές:

- Processor: Intel Core i3-3217U CPU @ 1.80GHz.
- RAM: 4.00 GB.
- System Type: 64-bit operating system
- Windows 10 Pro

Στον πίνακα που ακολουθεί γίνεται σύγκριση του χρόνου προσομοίωσης διάφορων RC δικτύων στην αρχική τους μορφή και μετά την μείωση του μεγέθους τους από τις μεθόδους PRIMA και TurboMOR. Φαίνεται λοιπόν ότι, για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων q (δηλαδή για ταίριασμα στιγμιτύπων $2*q$), οι δύο μέθοδοι μείωσης καταφέρνουν σημαντική πτώση του χρόνου προσομοίωσης. Πιο συγκεκριμένα ο αλγόριθμος TurboMOR γίνεται πολύ πιο αποδοτικός από τον PRIMA όταν αυξάνει ο αριθμός των ports. Επίσης για μικρό αριθμό επαναλήψεων ($q=1$) ο χρόνος προσομοίωσης για τις δύο μεθόδους είναι περίπου ίδιος, αλλά για μεγαλύτερο q ο TurboMOR προσφέρει μικρότερο χρόνο λόγω της αραιότητας των πινάκων.

Πίνακας 7.1: Χρόνος προσομοίωσης για τα ROMS που παράχθηκαν από τις δύο μεθόδους.

Examples	Original sim. time(sec)	q	PRIMA sim. time(sec)	TurboMOR sim. time(sec)
RC with p=22, m=3253	10.307	1	0.0050	0.0016
		2	0.0106	0.0052
		4	0.0252	0.0072
RC with p=66, m=133	0.0144	1	0.0303	0.0023
		2	0.0483	0.0046
RC with p=110, m=867	0.9490	1	0.0367	0.0182
		2	0.0942	0.0149
		4	0.4665	0.0366
		6	0.9737	0.0609

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Το περιεχόμενο της διπλωματικής εργασίας συνοψίζεται στην ανάλυση αποδοτικών τεχνικών υποβιβασμού τάξης μοντέλου για μεγάλα RC δίκτυα με πολλά ports, που έχουν στόχο να μειώσουν το μέγεθος των interconnect δικτύων, ώστε να διευκολύνουν την διαδικασία προσομοίωσης κυκλωμάτων πριν την σχεδίασή τους. Τα δίκτυα αυτά είναι πιθανό να αποτελούνται από εκατομμύρια εξαρτήματα, κόμβους και ports. Οπότε η απευθείας προσομοίωση τους, πολλές φορές είναι ανέφικτη. Οι παραπάνω τεχνικές κατασκευάζουν παθητικά μειωμένα μοντέλα που επιταγχύνουν την προσομοίωση. Όμως οι παραδοσιακές τεχνικές δεν είναι αποδοτικές όταν τα δίκτυα είναι πολύ μεγάλα, καθώς κατά τη διαδικασία μείωσης υπολογίζουν και αποθηκεύουν πυκνούς πίνακες προβολής οι οποίοι είναι υπολογιστικά ακριβοί. Λύση του προβλήματος αποτελούν άλλες τεχνικές, όπως ο TurboMOR, που κατασκευάζουν αραιά μοντέλα, αποφεύγοντας τον υπολογισμό πυκών πινάκων και πετυχαίνοντας μεγάλη ακρίβεια και διατήρηση της παθητικότητας και μειώνοντας σημαντικά τον χρόνο προσομοίωσης των κυκλωμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] S. R. Nassif, "Power grid analysis benchmarks," in Proceedings of the 2008 Asia and South Pacific Design Automation Conference. IEEE Computer Society Press, 2008, pp. 376–381.
- [2] R. Dhiman and R. Chandel, Compact Models and Performance Investigations for Subthreshold Interconnects. Springer, 2015.
- [3] <https://www.csd.uoc.gr/~hy119/Schmidt.pdf>
- [4] <https://rpubs.com/aaronsc32/qr-decomposition-householder>
- [5] Chung-Wen Ho, Ruehli, A., & Brennan, P. (1975). The modified nodal approach to network analysis. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 22(6), 504–509. doi:10.1109/tcs.1975.1084079
- [6] <http://eclass.uth.gr/eclass/modules/document/index.php?course=MHX248&openDir=/54325ceb03v3/5bbf19120R3t>
- [7] https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Projection_based_MOR
- [8] Odabasioglu, Altan, Mustafa Celik, and Lawrence T. Pileggi. "PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm." Proceedings of the 1997 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design. IEEE Computer Society, 1997.
- [9] Oyaro, D., & Triverio, P. (2016). TurboMOR-RC: An Efficient Model Order Reduction Technique for RC Networks with Many Ports. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 35(10), 1695–1706. doi:10.1109/tcad.2016.2531046