

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΟΧΛΙΩΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ
ΔΟΚΩΝ-ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΚΩΝ**

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΛΟΓΗΡΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής

Δημήτρης Σοφιανόπουλος

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

2018

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων της πτυχιακής μου εργασίας Καθηγητή κ. Δημήτριο Σοφιανόπουλο, για την πολύτιμη βοήθειά και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης της διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ τους γονείς μου Κωνσταντίνο και Ελένη και τον αδερφό μου Σωτήρη για την αγάπη τους και τη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια που ήταν πάντα δίπλα μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου που ήταν στο πλευρό μου. Αφιερώνω αυτή την εργασία στους γονείς μου και στον αδερφό μου.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη.....	σελ. 4
Εισαγωγή: Σκοπός, αντικείμενο και διάρθρωση της εργασίας.....	σελ. 5
Κεφάλαιο 1 Κοχλιωτοί κόμβοι δοκού-υποστυλώματος με μετωπικές πλάκες	σελ. 6
1.1 Προσομοίωση κόμβου δοκού υποστυλώματος	σελ. 6
1.2 Ανάλυση, ταξινόμηση και προσομοίωση.....	σελ. 10
1.3 Καμπύλη σχεδιασμού ροπής-στροφής	σελ. 11
1.4 Δυνάμεις επαφής	σελ. 14
1.5 Μέθοδος συστατικών μελών	σελ. 14
1.6 Σειρές κοχλιών	σελ. 17
1.7 Παραμορφώσεις, δυνάμεις και δυσκαμψία	σελ. 18
1.8 Η επιρροή της προέντασης κοχλιών	σελ. 21
1.9 Ξεχωριστή ανάλυση κάθε συστατικού μέλους	σελ. 23
1.9.1 Μέλη με υψηλή ολκιμότητα	σελ. 24
1.9.2 Μέλη με περιορισμένη ολκιμότητα	σελ. 27
Κεφάλαιο 2 Θεωρίες πλακών και εφαρμογές της	σελ. 31
2.1 Εισαγωγή στη θεωρία πλακών	σελ. 31
2.2 Τάσεις στη θεωρία πλακών	σελ. 32
2.3 Διατμητικές δυνάμεις	σελ. 35
2.4 Συνοριακές συνθήκες	σελ. 36
2.5 Κάμψη πλακών	σελ. 37
2.6 Ιδιομορφές και παραμορφώσεις ορθογωνικών πλακών	σελ. 38
2.7 Φορτία	σελ. 40
2.8 Εφαρμογή	σελ. 43
Κεφάλαιο 3 Το πρόβλημα κόμβου δοκού-υποστυλώματος	σελ. 44
3.1 Θεωρήσεις	σελ. 44
3.2 Η συμπεριφορά των κοχλιών	σελ. 45
3.3 Ιδιομορφές και παραμόρφωση ορθογωνικής πλάκας	σελ. 46
3.4 Περίπτωση φόρτισης με καταναμημένο φορτίο	σελ. 48

3.5 Περίπτωση φόρτισης με συγκεντρωμένα φορτία	σελ. 49
3.6 Περίπτωση φόρτισης με συγκεντρωμένες ροπές	σελ. 49
3.7 Ελαστική ανάλυση	σελ. 52
3.8 Ανελαστική ανάλυση	σελ. 53
Κεφάλαιο 4 Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμοί	σελ. 55
Κεφάλαιο 5 Συμπεράσματα.....	σελ.64
Βιβλιογραφία	σελ. 65
Παράρτημα Α	σελ. 67
Παράρτημα Β	σελ. 68

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία μελετάται αναλυτικά η συμπεριφορά κοχλιωτού κόμβου δοκού – υποστυλώματος στην ελαστική και ανελαστική περιοχή, με τη βοήθεια των ιδιομορφών των συνδεδεμένων πλακών. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία παχέων πλακών και με την παραπάνω προσέγγιση, οι παραμορφώσεις των πλακών εκφράζονται για κάθε τύπο φόρτισης μελετώντας τη συμπεριφορά της σύνδεσης και στην ελαστική και στην ανελαστική περιοχή. Αυτή η μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί μέχρι την κατάρρευση της σύνδεσης με τις κατάλληλες παραδοχές.

Εισαγωγή: Σκοπός, Αντικείμενο και Διάρθρωση της Εργασίας

Το πρόβλημα συμπεριφοράς κοχλιωτού κόμβου δοκού-υποστυλώματος είναι αρκετά πολύπλοκο. Η πολυπλοκότητα έγκειται στην ύπαρξη μη-γραμμικότητων και εισάγει δυσκολίες τόσο στη σωστή μοντελοποίηση όσο και στη μελέτη του κόμβου. Ειδικότερα η συμπεριφορά της μορφής και των ορίων της επιφάνειας επαφής ανάμεσα στη μετωπική πλάκα της δοκού και του πέλματος του υποστυλώματος και ο καθορισμός της πραγματικής κατανομής των τάσεων είναι ένας από τους πιο ακαθόριστους και απρόβλεπτους παράγοντες σε τέτοιες συνδέσεις. Υπάρχουν αρκετές δημοσιεύσεις σε αυτόν τον τομέα τόσο από θεωρητική όσο και από πειραματική μεριά. Ανάμεσα τους, μεγάλης σημαντικότητας είναι αυτές των Fieling και Huang, Disque, Zoetemeijer, Bowman, Sugimoto-Chen, BJORHONDE, SAIDANI-NETHERCOT, OWENS, CHRISTOPHER, οι οποίες ακολουθούν θεωρητική προσέγγιση και εκείνες των Zoetemeijer, Goverdam, Korvink-Barsom-BJORHONDE, που μελετάνε το πρόβλημα με πειραματικό τρόπο. Ο Ευρωκώδικας 3 [6-7] περιλαμβάνει κατευθυντήριες γραμμές για την ανάλυση και το σχεδιασμό τέτοιων κόμβων, βασισμένες σε πρόσφατες μελέτες, αλλά υπάρχουν ορισμένα ασαφή ζητήματα που εμφανίζονται λόγω έλλειψης γνώσης της πραγματικής τους συμπεριφοράς. Έτσι γίνεται αναφορά στη θεωρία των κανονισμών και των μεθοδολογιών που εφαρμόζονται για τη μελέτη τέτοιας σύνδεσης και ιδιαίτερα στη μέθοδο συστατικών μελών. Σε αυτή την εργασία γίνεται μελέτη της ελαστικής και ανελαστικής συμπεριφοράς κοχλιωτών κόμβων δοκού-υποστυλώματος με ή χωρίς ενισχυτικά στο υποστυλώμα. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία παχέων πλακών και με τη βοήθεια των ιδιομορφών των συνδεόμενων πλακών, οι παραμορφώσεις τους εκφράζονται για κάθε τύπο φόρτισης. Η συμπεριφορά της σύνδεσης μελετάται από την ελαστική έως την ανελαστική περιοχή λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες της επαφής των κοχλιών και ιδιαίτερα τις ροπές που παράγονται από αυτή την επαφή. Όσο για την προαναφερθείσα έλλειψη γνώσεων σχετικά με μορφή και τα σύνορα της επαφής ανάμεσα στην επιφάνεια των δύο πλακών χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα άλλης έρευνας. Ακολουθεί παράδειγμα από το οποίο εξάγονται χρήσιμα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 1

Κογλιωτοί κόμβοι δοκού-υποστυλώματος με μετωπικές πλάκες

1.1 Προσομοίωση κόμβου δοκού υποστυλώματος

Για να συμπεριλάβουμε τις δράσεις ημιάκαμπτου κόμβου στο σχεδιασμό πλαισίων, είναι απαραίτητο να γίνει αναπαράσταση της καμπύλης ροπών-στροφών (Μ-φ) της σύνδεσης με σε μία εύκολη στη χρήση αναλυτική μορφή.

Για την βέλτιστη μοντελοποίηση του κόμβου, πρέπει να ληφθούν υπόψη ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τις ιδιότητες του κόμβου:

- Η ελαστική ανάλυση πρέπει να βασίζεται σε αξιόπιστες γραμμικές σχέσεις ροπής-στροφής της σύνδεσης.
- Η άκαμπτη-πλαστική ανάλυση βασίζεται στην αντοχή έναντι ροπών της σύνδεσης, αρκεί να υπάρχει η επαρκής δυνατότητα στροφής.
- Η ελαστική-πλαστική ανάλυση βασίζεται σε μη γραμμικά μοντέλα που αναφέρονται στη συνολική καμπύλη ροπής-στροφής της σύνδεσης.

Συνεπώς τα κριτήρια κατάταξης είναι:

- Βάση της στροφικής ακαμψίας
- Βάση την αντοχή στην κάμψη
- Βάση τη διαθέσιμη πλαστική στροφή (Faella C. & Piluso V. & Rizzano G. 2000).

Χρησιμοποιούμε την καμπύλη Μ-φ της κάθε σύνδεσης σε αναλυτική μαθηματική μορφή, για να λάβουμε υπόψη μας τις αντιδράσεις του ημι-άκαμπτου κόμβου.

- Αρθρωτές συνδέσεις – μεταφέρουν διατμητικές και απλές δυνάμεις από δοκό σε υποστύλωμα. Παρουσιάζουν ικανότητα περιστροφής χωρίς να αναπτύσσονται σημαντικές ροπές, που μπορεί να επηρεάσουν την αντοχή των υποστυλωμάτων.
- Άκαμπτες συνδέσεις – μεταφέρουν όλες τις ακραίες αντιδράσεις, έτσι ώστε οι παραμορφώσεις να είναι αρκετά μικρές και η επιρροή τους στην κατανομή ροπών να είναι αμελητέα.

- Ημι-άκαμπτες συνδέσεις – προβλέπουν το βαθμό αντιδράσεων μεταξύ των μελών, βασισμένες σε διαγράμματα ροπών-στροφής των κόμβων. στροφή (Faella C. & Piluso V. & Rizzano G. 2000).

Στις κατασκευές συνήθως ο σχεδιασμός πραγματοποιείται θεωρώντας τις συνδέσεις είτε πλήρως άκαμπτες είτε ιδεατά καρφωμένες. Στην πρώτη περίπτωση δεν υπάρχει σχετική περιστροφή μεταξύ των συνδεόμενων μελών, με αποτέλεσμα σε κάθε κόμβο δοκού-υποστυλώματος η κατανομή ροπών προκύπτει από την καμπτική αντοχή των συνδεόμενων μελών. Η δεύτερη περίπτωση παρουσιάζει ότι μπορεί να πραγματοποιηθούν ελεύθερες ακραίες στροφές των μελών, έτσι ώστε οι ακραίες ροπές των δοκών να είναι πάντα μηδέν. Τελικά, σύμφωνα με Fella, Rizzano, Pilluso (2000) οι συνδέσεις, όσο άκαμπτες και να είναι, επιτρέπουν κάποια καμπτική παραμόρφωση ή παρέχουν έως ένα βαθμό στροφική συγκράτηση, ανεξαρτήτως της παραμορφωσιμότητάς τους. Εν τέλει όλοι οι πραγματικοί κόμβοι υποστυλώματος με δοκό έχουν ημι-άκαμπτη συμπεριφορά.

Η καμπύλη M-φ αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά δεδομένα για την ανάλυση των ημι-άκαμπτων πλαισίων. Για να προσομοιωθεί όσο γίνεται καλύτερα η συμπεριφορά του κόμβου, πρέπει να μοντελοποιηθεί ξεχωριστά το panel zone και κάθε σύνδεση.

Επιπλέον, διαφορετικά επίπεδα πολυπλοκότητας αντιστοιχούν σε διαφορετικά μοντέλα, που σχετίζονται με τη συμπεριφορά των στοιχειωδών ελατηρίων, η οποία μπορεί να είναι γραμμική, διγραμμική, πολυγραμμική ή καμπυλόγραμμη.

Υπάρχει μεγάλο εύρος στο τυπολόγιο των κόμβων πράγμα που καθιστά δύσκολο στον ερευνητή να βρει σε βάση δεδομένων κάθε κόμβο που μελετάει.

Πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η διαφορά που υπάρχει ανάμεσα σε δοκίμια και σε πλαίσια κατασκευής, καθώς σε πραγματικές κατασκευές μπορεί να υπάρξουν φορτία λόγω κατασκευαστικών διεγέρσεων, πριν τη μελετημένη φόρτιση.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς κόμβων μπορούν να χωριστούν σε πέντε κατηγορίες:

- Εμπειρικά μοντέλα
- Αναλυτικά μοντέλα
- Μηχανικά μοντέλα

- Μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων
- Πειραματικές δοκιμές

Αναλυτικές και εμπειρικές μέθοδοι συνήθως περιλαμβάνουν απλά αναλυτικά μοντέλα για τον υπολογισμό των αντιδράσεων, προσφέροντας ευκολία στη χρήση, αλλά και μειωμένη αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Από την άλλη μεριά, μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων προσφέρουν πολύ αξιόπιστα αποτελέσματα, ακόμα και σε προσομοιώσεις περίπλοκων ή μη γραμμικών συμπεριφορών κόμβων, αλλά η πρακτική τους χρήση παραμένει περιορισμένη εξαιτίας των πολλών και περίπλοκων υπολογισμών που απαιτεί η διαδικασία για να δώσει αποτελέσματα. Τα μηχανικά μοντέλα σχηματίζονται από το συνδυασμό ελατηρίων και άκαμπτων στοιχείων και τοποθετείται ενδιάμεσα από τις δύο προηγούμενες μεθόδους, και από θέμα ευκολίας στη χρήση αλλά και αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων (Lemonis & Gantes, 2008).

Ένας κόμβος αποτελείται από συστατικά μέλη, από τα οποία όσα είναι ενεργά μέλη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση του κόμβου. Σε συνδυασμό με την καμπύλη ροπών-στροφών και με οδηγίες του Ευρωκώδικα 8 (CEN, 1997), απαιτούνται τα παρακάτω τρία βήματα για να καταλήξουμε στην μέθοδο συστατικών μελών:

- Καταγραφή των ενεργών συστατικών μελών του κόμβου που θα εξεταστούν.
- Εκτίμηση της δύναμης έναντι της μετατόπισης για κάθε συστατικό μέλος.
- Συνδεσμολογία των συστατικών μελών για εκτίμηση της καμπύλης ροπής-στροφής για όλο τον κόμβο.

Η μέθοδος συστατικών στοιχείων χρησιμοποιείται ευρέως στον Ευρωκώδικα 3 (CEN, 1997), καθώς από θεωρητική άποψη μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιοδήποτε τύπο σύνδεσης, αρκεί οι πηγές της αντοχής και των παραμορφώσεων να έχουν αναγνωριστεί και προσομοιωθεί με σαφήνεια. Ως πηγές ορίζονται τα συστατικά μέλη του κόμβου, τα οποία αν μελετηθούν ως προς τις δυνάμεις και τις παραμορφώσεις, μας οδηγούν σε ένα μηχανικό μοντέλο πρόβλεψης του διαγράμματος ροπής-στροφής για τον κόμβο.

Η μέθοδος συστατικών στοιχείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της ολικής περιστροφικής συμπεριφοράς ενός κόμβου δοκού-υποστυλώματος με βάση τις γεωμετρικές και μηχανικές ιδιότητες του κόμβου.

Κοχλιωτές συνδέσεις με μετωπική πλάκα, επιτρέπουν πολλές δομικές λύσεις στις κατασκευές. Η περιστροφική ακαμψία και η αντοχή στην κάμψη, μπορούν να ισορροπηθούν επιλέγοντας τον κατάλληλο αριθμό κοχλιών και τη θέση τους, καθώς και το κατάλληλο πάχος της μετωπικής πλάκας αλλά και τη γεωμετρία της. Επίσης προσδίδει δυσκαμψία στο πάνελ του υποστυλώματος.

Υπάρχουν δύο τύποι συνδέσεων με μετωπικές πλάκες. Ο πρώτος είναι σύνδεση με εκτεταμένη μετωπική πλάκα στην οποία παρουσιάζεται μία ή περισσότερες σειρές από κοχλίες πέρα από τα πέλματα της δοκού. Διακρίνονται σε μονοπλεύρως εκτεταμένες, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε πλαίσια σχεδιασμένα για κάθετα φορτία και σε εκτεταμένα σε δύο πλευρές, όπως είναι πλαίσια σχεδιασμένα για να παραλάβουν κάθετα αλλά και οριζόντια φορτία, όπως ανέμου και σεισμικά.

Ο δεύτερος τύπος συνδέσεων είναι οι ισόπεδες συνδέσεις στις οποίες όλοι οι κοχλίες βρίσκονται εντός πλαισίων των πελμάτων.

Στις εκτεταμένες συνδέσεις, στην περίπτωση που έχουμε μόνο δύο σειρές κοχλιών στην ζώνη έντασης, τότε είναι εφικτό η μετωπική πλάκα να μοντελοποιηθεί ως ένα ισοδύναμο μεταλλικό βραχύ ταυ. Για περισσότερες σειρές, απαιτούνται όλο και πιο πολύπλοκα μοντέλα.

Σχετικά με τη μέθοδο συστατικών στοιχείων, η πρόβλεψη της συμπεριφοράς του κόμβου εμπεριέχει τα εξής οχτώ στοιχεία:

- Κορμός υποστυλώματος σε διάτμηση
- Κορμός υποστυλώματος σε θλίψη
- Πέσμα υποστυλώματος σε κάμψη
- Μετωπική πλάκα σε κάμψη
- Κοχλίες σε εφελκυσμό
- Κορμός υποστυλώματος σε εφελκυσμό
- Πέσμα και κορμός δοκού σε θλίψη
- Κορμός δοκού σε εφελκυσμό

Τα πρώτα έξι στοιχεία καθορίζουν την καμπτική αντοχή και την στρωφική ακαμψία του κόμβου. Τα δύο τελευταία στοιχεία έχουν να κάνουν μόνο με την καμπτική αντοχή του κόμβου.

Στο εφελκόμενο τμήμα του πέλματος είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο κατηγορίες σύνδεσης:

- Μη άκαμπτος εξωτερικός κόμβος
- Μη άκαμπτος εσωτερικός κόμβος

Για κάθε κατηγορία, περισσότεροι από 28000 κόμβοι από χάλυβα Fe360 ακολουθούν τις εξής παραμέτρους σύμφωνα με τον Faella (et al., 1996b; 1997):

- Το υποστύλωμα. (HEA, HEB, HEM Ευρωπαϊκής Κατηγορίας)
- Τη δοκό. (ΙΡΕ κατηγορία)
- Την απόσταση m ανάμεσα στους κοχλίες και τον κορμό της δοκού.
- Την κατηγορία κοχλιών. (8.8, 10.9)
- Το πάχος της μετωπικής πλάκας.

Η θεωρητική προσέγγιση πλαστιμότητας των κοχλιωτών συνδέσεων βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

- Οι τρισδιάστατες αντιδράσεις δεν λαμβάνονται υπόψη, καθώς η ανάλυση γίνεται σε δισδιάστατο μοντέλο.
- Η γεωμετρική μη γραμμικότητα θεωρείται αμελητέα.
- Η επιρροή της διάτμησης στην πλαστική συμπεριφορά του υλικού θεωρείται αμελητέα .
- Οι δυνάμεις επαφής λαμβάνονται στο περίπου.
- Η ρηγμάτωση του υλικού προσομοιώνεται θεωρώντας τις συνθήκες ρηγμάτωσης με τη μέγιστη τάση στα κρίσιμα σημεία ενός βραχέος ταυ στο πέλμα.

1.2 Ανάλυση, ταξινόμηση και προσομοίωση

Για την προσομοίωση των κόμβων αρχικά πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η κατανομή των εντατικών μεγεθών στον κόμβο, καθώς παίζουν ρόλο στις συνολικές παραμορφώσεις της κατασκευής, εκτός από την περίπτωση που οι επιδράσεις είναι

αρκετά μικρές ώστε να θεωρηθούν αμελητέες. Έτσι ο κόμβος μπορεί να προσομοιωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον είναι η απλή προσομοίωση, στην οποία ο κόμβος θεωρείται ότι δε μεταφέρει ροπές κάμψης, δεύτερον η προσομοίωση συνεχών κόμβων όπου μπορεί να θεωρηθεί ότι η συμπεριφορά του κόμβου δεν έχει επίδραση στην ανάλυση και τέλος η προσομοίωση ημι-συνεχών κόμβων απαιτεί την συμμετοχή της συμπεριφοράς του κόμβου στην ανάλυση (EC 1.8).

Έτσι η κατάταξη των κόμβων σύμφωνα και με αυτά που αναφέρθηκαν γίνεται με βάση τον Πίνακα 5.1 του Ευρωκώδικα 3 Μέρος 1.8.

Πίνακας.1: Τύποι προσομοίωσης κόμβου

Μέθοδος ανάλυσης φορέα	Ταξινόμηση κόμβου		
	Ελαστική	Ονομαστικά αρθρωτός	Άκαμπτος
Πλαστική	Ονομαστικά αρθρωτός	Πλήρους αντοχής	Μερικής-αντοχής
Ελαστο-πλαστική	Ονομαστικά αρθρωτός	Άκαμπτος και πλήρους αντοχής	Ημι-άκαμπτος και μερικής-αντοχής Ημι-άκαμπτος και πλήρους αντοχής Άκαμπτος και μερικής-αντοχής
Τύπος προσομοίωσης κόμβου	Απλός	Συνεχής	Ημι-συνεχής

1.3 Καμπύλη σχεδιασμού ροπής-στροφής

Ένας κόμβος είναι δυνατόν να προσομοιωθεί με ένα στρωφικό ελατήριο το οποίο συνδέει τους άξονες των συνδεόμενων μελών, για μονόπλευρη διαμόρφωση του κόμβου δοκού υποστυλώματος. Η ιδιότητες του ελατηρίου μπορούν να εκφραστούν με την καμπύλη ροπής-στροφής ή οποία προκύπτει από την καμπτική ροπή που ασκείται στον κόμβο, και την στροφή που παρουσιάζεται μεταξύ των συνδεόμενων μελών.

Από την καμπύλη ροπής-στροφής καθορίζονται οι εξής δομικές ιδιότητες του κόμβου: η αντοχή σε ροπή, η στρωφική δυσκαμψία και η στρωφική ικανότητα του κόμβου. Πολλές φορές η καμπύλη ροπής-στροφής μπορεί να περιλαμβάνει στρωφές που οφείλονται σε φαινόμενα ολίσθησης των κοχλιών, ή σε κατασκευαστικές ατέλειες ή ακόμη και στην αλληλεπίδραση εδάφους θεμελίωσης στην περίπτωση βάσεων

υποστυλωμάτων. Γι' αυτό σε περιπτώσεις είναι απαραίτητο η συμπλήρωση της καμπύλης ροπής-στροφής με σημαντική αρχική στροφή (αρθρωτή συμπεριφορά).

Για την προσομοίωση πλαισιακών κόμβων, γίνεται θεώρηση στην ελαστική ανάλυση ανάλογα με τη δυσκαμψία που διαθέτει ο κόμβος. Έτσι αν ο κόμβος έχει υψηλή δυσκαμψία θεωρείται άκαμπτος, αν έχει χαμηλή δυσκαμψία θεωρείται αρθρωτός και αν διαθέτει ενδιάμεση δυσκαμψία θεωρείται ημι-άκαμπτος.

Ο Ευρωκώδικας 3 δίνει όρια δυσκαμψίας για την κατάταξη των κόμβων δοκού-υποστυλώματος:

$$\text{Δυσκαμψία άκαμπτων κόμβων} \geq \begin{cases} \frac{8EI_b}{L_b} & \text{αμετάθετα πλαίσια} \\ \frac{25I_b}{L_b} & \text{μεταθετά πλαίσια} \end{cases}$$

$$\text{Δυσκαμψία αρθρωτών κόμβων} \leq \frac{0,5EI_b}{L_b}$$

Στην περίπτωση της πλαστικής ανάλυσης η θεώρηση για προσομοίωση κόμβων σε σχέση με την αντοχή τους είναι η εξής: Πλήρους αντοχής για υψηλή αντοχή, αρθρωτοί για χαμηλή αντοχή και μερικής αντοχής για ενδιάμεση αντοχή.

Πρέπει να ισχύει:

Αντοχή κόμβων πλήρους αντοχής \geq Αντοχή συνδεδεμένων μελών

Αντοχή αρθρωτών κόμβων $\leq 0,25 \times$ Αντοχή συνδεδεμένων μελών

Στην περίπτωση ελαστοπλαστικής ή μη γραμμικής ανάλυσης παρουσιάζονται τρεις κατηγορίες πλαισιακών κόμβων. Η πρώτη κατηγορία είναι οι συνεχείς κόμβοι, που παρουσιάζουν υψηλή αντοχή και δυσκαμψία, οι αρθρωτοί κόμβοι χαμηλής αντοχής και δυσκαμψίας και τέλος οι ημι-συνεχείς με ενδιάμεση αντοχή και δυσκαμψία.

Η δυσκαμψία και η αντοχή των κόμβων βρίσκεται κατά τον Ευρωκώδικα 3 με τη μέθοδο των συστατικών μερών (component method). Πιο συγκεκριμένα, με αυτόν τον τρόπο μελετιούνται κόμβοι δοκού-υποστυλώματος όπου η σύνδεση γίνεται με μετωπική πλάκα, ή με γωνιακά άνω και κάτω πέλματος ή πλήρη συγκόλληση. Με τη

μέθοδο αυτή ο κόμβος θεωρείται ως ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά μικρότερα τμήματα, τα συστατικά μέρη.

Στην εφελκόμενη ζώνη των κοχλιωτών κόμβων, ορισμένα συστατικά μέρη έχουν τη μορφή ισοδύναμων βραχέων ταυ. Σε κόμβους με μετωπική πλάκα βρίσκονται σε κάμψη το πέλμα του υποστυλώματος και η μετωπική πλάκα. Σε κόμβους με γωνιακά άνω και κάτω πέλματος βρίσκονται σε κάμψη το πέλμα του υποστυλώματος και το γωνιακό.

Για να γίνεται σωστή προσομοίωση της συμπεριφοράς ενός κόμβου δοκού υποστυλώματος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η διατμητική παραμόρφωση του κορμού του υποστυλώματος και η στροφή των συνδέσεων. Ο κόμβος πρέπει να είναι ικανός να παραλάβει με ασφάλεια τις καμπτικές ροπές $M_{b1,Ed}$ και $M_{b2,Ed}$, τις αξονικές δυνάμεις $N_{b1,Ed}$ και $N_{b2,Ed}$ και τις διατμητικές τάσεις $V_{b1,Ed}$ και $V_{b2,Ed}$ που ασκούνται στις συνδέσεις από τα μέλη που συμμετέχουν στη σύνδεση.

Η δρώσα διατμητική δύναμη $V_{wp,Ed} = \frac{M_{b1,Ed} - M_{b2,Ed}}{z} - \frac{V_{c1,Ed} - V_{c2,Ed}}{2}$, όπου z ο μοχλοβραχίονας.

Επίσης για την επίτευξη της απαιτούμενης αξιοπιστίας και ακρίβειας, πρέπει ο κορμός του υποστυλώματος και κάθε μία από τις συνδέσεις να προσομοιωθεί ξεχωριστά, λαμβάνοντας υπόψη τα εντατικά μεγέθη των μελών που δρουν στην περιφέρεια του φατώματος του κορμού του υποστυλώματος (EC3 1.8).

Οι πλάκες πέρα από πλευρικά και εγκάρσια φορτία υπόκεινται και σε φόρτιση εντός της πλάκας το οποίο μπορεί να είναι εφελκυστικό ή θλιπτικό. Όταν υπάρχουν μεγάλα θλιπτικά φορτία εντός της πλάκας δημιουργούνται φαινόμενα λυγισμού τα οποία είναι μη γραμμικά φαινόμενα και έχουν να κάνουν με τη δυσανάλογη αύξηση της παραμόρφωσης με τη φόρτιση. Όταν το φορτίο πάρει την κρίσιμη τιμή του, τότε πάει να υπάρχει η ικανότητα αντοχής σε αξονικά φορτία και εμφανίζονται αλλαγές στο παραμορφωμένο σχήμα.

1.4 Δυνάμεις επαφής

Τα μέλη σύνδεσης λαμβάνουν δρώσες εφελκυστικές δυνάμεις, αλλά και πρόσθετες εσωτερικές δυνάμεις λόγω της επαφής διεπιφανειών, οι οποίες πρέπει να ληφθούν με ασφάλεια. (EC3, 3.11).

Αυτές οι δυνάμεις εμφανίζονται συνήθως σε ισοδύναμο βραχύ ταυ σε εφελκυσμό, το οποίο μελετάται αργότερα. Γενικότερα με ισοδύναμο βραχύ ταυ σε εφελκυσμό μπορούν να προσομοιωθούν τα παρακάτω συστατικά μέλη σύμφωνα με EC3, 6.2.4.1:

- Πέλμα υποστυλώματος σε κάμψη.
- Μετωπική πλάκα σε κάμψη.
- Γωνιακό πέλματος σε κάμψη.
- Πλάκα έδρασης σε κάμψη υπό εφελκυσμό.

Οι πιθανοί μηχανισμοί αστοχίας του πέλματος ενός βραχέως ταυ, θεωρούνται αντίστοιχοι με αυτούς που εμφανίζονται στο αντίστοιχο βασικό συστατικό μέλος. Το συνολικό ενεργό μήκος ενός ισοδύναμου βραχέως ταυ, το οποίο δεν αντιστοιχεί σε πραγματικό μήκος αλλά αποτελεί ένα σχηματικό μήκος για το αντίστοιχο μέλος, πρέπει να είναι τέτοιο ώστε η αντοχή σχεδιασμού του πέλματος να είναι ισοδύναμη με του στοιχείου που προσομοιώνει.

Όταν υπάρχει η περίπτωση εμφάνισης δυνάμεων επαφής, τότε η αντοχή σχεδιασμού σε εφελκυσμό του βραχέως ταυ λαμβάνεται από τη μικρότερη τιμή των τριών πιθανών μηχανισμών αστοχίας 1, 2 και 3. Όταν δεν υπάρχει περίπτωση εμφάνισης δυνάμεων επαφής, τότε η τιμή αυτή λαμβάνεται από τη μικρότερη τιμή των δύο πιθανών μηχανισμών αστοχίας 1-2 και 3. (EC3 μηχανισμοί πίνακας 6.2).

1.5 Μέθοδος συστατικών μελών

Στην μέθοδο συστατικών μελών κάθε μέλος προσομοιώνεται με ένα ελατήριο το οποίο μπορεί να συνδέεται με άλλα ελατήρια ή άκαμπτα στοιχεία με σκοπό τη βέλτιστη προσομοίωση των του κόμβου, δηλαδή τον βέλτιστο υπολογισμό της παραμόρφωσης και των μεταφερόμενων δυνάμεων από μέλος σε μέλος όπως συμβαίνει πραγματικά στον κόμβο. Ο κύριος στόχος της διαδικασίας είναι να υπάρχουν τα κατάλληλα δεδομένα για το σχηματισμό της καμπύλης ροπής-στροφής M-φ του κόμβου.

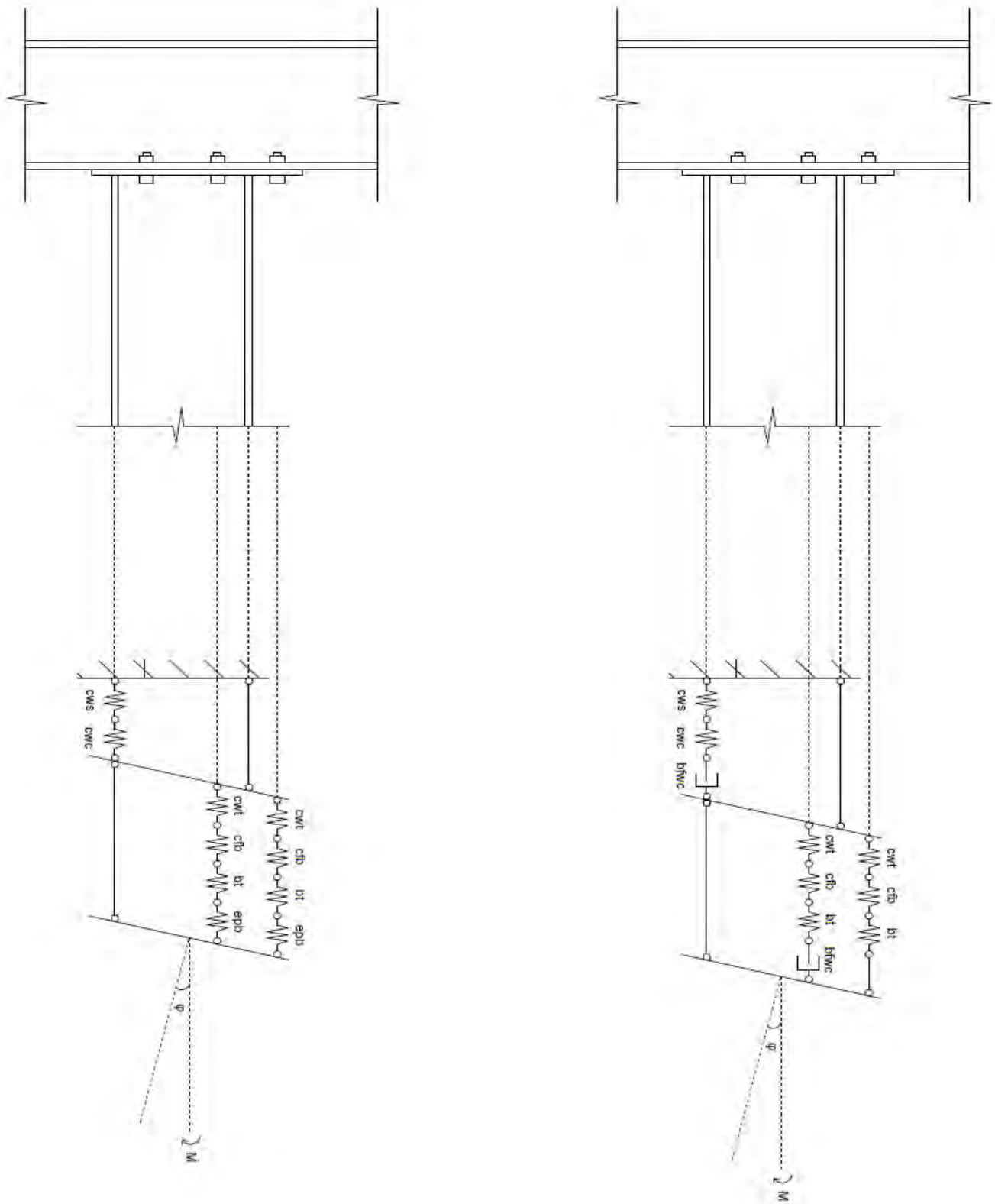
Τα μοντέλα χρησιμοποιούν δύο είδη ελατηρίων για την προσομοίωση: ελατήρια που αντιστοιχούν σε άκαμπτα μέλη, κατά τον Ευρωκώδικα 3, και ελατήρια που

αντιστοιχούν σε μέλη αντοχής και χρησιμοποιούνται μόνο για τον υπολογισμό της αντοχής. Τα ελατήρια της πρώτης κατηγορίας επηρεάζουν την παραμορφωσιμότητα και την αντοχή του κόμβου και χαρακτηρίζονται από μη γραμμική καμπύλη δύναμης – παραμόρφωσης F-δ. Τα ελατήρια της δεύτερης κατηγορίας δεν συμμετέχουν στην παραμορφωσιμότητα του κόμβου, αλλά απλά περιορίζουν την διαθέσιμη αντοχή. Επίσης διαφέρουν στο γεγονός ότι στη δεύτερη κατηγορία δεν υπάρχουν ξεχωριστοί ή μεμονωμένοι κοχλίες στα μέλη που υπόκεινται σε εφελκυσμό, καθώς η εφελκυστική παραμορφωσιμότητα των κοχλίων έχει ενσωματωθεί στα παρακείμενα μέλη, δηλαδή στο πέλμα του υποστυλώματος σε κάμψη, στη μετωπική πλάκα σε κάμψη και στο βραχύ ταυ.

Στο μοντέλο του Ευρωκώδικα 3 τα εφελκυόμενα και τα θλιβόμενα ελατήρια διαχωρίζονται.

Σε ευθυγραμμισμένο μοντέλο όλα τα ελατήρια της πρώτης γραμμής βρίσκονται στην ίδια ευθεία με τον άξονα των κοχλίων.

Σε μη-ευθυγραμμισμένο μοντέλο τα ελατήρια που αντιστοιχούν σε μέλη του πάνελ του υποστυλώματος βρίσκονται στην ίδια ευθεία με τον άξονα των κοχλίων, ενώ τα ελατήρια που αντιστοιχούν σε μέλη της σύνδεσης βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το πέλμα της δοκού ή με την γωνία του οριζόντιου τμήματος.



Σχήμα 1.1: Ανάλυση σε ελατήρια κόμβου δοκού υποστυλώματος σύμφωνα με τη μέθοδο συστατικών μελών.

Οι ονομασίες των μελών που βλέπουμε στο Σχήμα 1.1 αντιστοιχούν με τα μέλη του κόμβου όπως φαίνεται παρακάτω:

cws – πάνελ κορμού υποστυλώματος σε διάτμηση

cwc – κορμός υποστυλώματος σε θλίψη

bfwc – πέλμα και κορμός δοκού σε θλίψη

cwt – κορμός υποστυλώματος σε εφελκυσμό

cfb – πέλμα υποστυλώματος σε κάμψη

bt – κοχλίες σε εφελκυσμό

erpb – μετωπική πλάκα σε κάμψη

bwt – κορμός δοκού σε εφελκυσμό

Οι διατμητικές παραμορφώσεις στα πέλματα της δοκού και του υποστυλώματος θεωρούνται αμελητέες. Κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης λόγω εξωτερικής ροπής M , η γραμμή του άξονα Ox παραμένει ευθύγραμμη καθώς αυτός στρέφεται σε σημείο A κατά γωνία φ .

1.6 Σειρές κοχλιών

Στην προσομοίωση στοιχείου με βραχύ ταυ πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικές δυνάμεις σε κάθε σειρά κοχλιών. Όταν συμβαίνει αυτό πρέπει η δύναμη σε κάθε σειρά κοχλιών να μην υπερβαίνει την αντοχή σχεδιασμού της αντίστοιχης σειράς κοχλιών όταν εξετάζεται μεμονωμένα και η συνολική δύναμη σε κάθε υποομάδα σειρών που αποτελείται από δύο ή περισσότερες διαδοχικές σειρές κοχλιών δεν πρέπει να υπερβαίνει την αντοχή σχεδιασμού της αντίστοιχης υποομάδας. (EC3 1.8)

Μετά τον υπολογισμό της αντοχής σχεδιασμού σε εφελκυσμό ενός βασικού συστατικού μέλους που προσομοιώνεται με βραχύ ταυ, πρέπει να υπολογισθεί η μέγιστη αντοχή σχεδιασμού μιας σειράς κοχλιών λαμβάνοντάς την μεμονωμένη, καθώς και η συνεισφορά κάθε σειράς κοχλιών στη μέγιστη αντοχή σχεδιασμού δύο ή περισσότερων διαδοχικών σειρών μιας ομάδας κοχλιών, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις συγκεκριμένες σειρές.

Κάθε σειρά κοχλιών παρουσιάζει παραμόρφωση Δl λόγω αξονικής δύναμης P_i ίση με

$$\Delta l_i = \frac{P_i \cdot l}{E_b \cdot f_i} \quad (1.1)$$

Όπου E_b το μέτρο ελαστικότητας των κοχλιών και f_i το εμβαδόν του πυρήνα του κοχλία.

Η κεφαλή κάθε κοχλία περιστρέφεται κατά γωνία φ λόγω της περιστροφής της δοκού γύρω από το σημείο A και κατά γωνίες ρ_c και ρ_b λόγω περιστροφής των πελμάτων του υποστρώματος και της μετωπικής πλάκας αντίστοιχα.

1.7 Παραμορφώσεις, δυνάμεις και δυσκαμψία

Τα $\bar{w}(x, y)$ και $w(x, y)$ είναι οι παραμορφώσεις της πλάκας του πέλματος του υποστρώματος και της μετωπικής πλάκας και ισχύουν:

$$\text{Πέλματα υποστρώματος: } \bar{m}_x = -\frac{EJ}{l} \left(6\varphi - 4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \right), \bar{m}_y = \frac{EJ}{l} \left(4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\text{Μετωπική πλάκα: } \bar{m}_x = -\frac{EJ}{l} \left(6\varphi - 4 \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \bar{m}_y = \frac{EJ}{l} \left(4 \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

Όπου J είναι η ροπή αδράνειας της διατομής ίση με $J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{f_i^2}{4\pi}$

Η καμπτική ροπή είναι ίση με $M = K_\varphi \varphi$, K_φ η στρωφική δυσκαμψία του κόμβου.

Αυτός ο τύπος ισχύει για:

$$M < \frac{2M_{j,Rd}}{3}$$

Για άλλες τιμές ο τύπος αλλάζει: (1.4)

$$M = \frac{K_\varphi}{\left(1,5 \frac{M}{M_{j,Rd}}\right)^\xi} \varphi \quad \text{για} \quad \frac{2}{3} M_{j,Rd} < M \leq M_{j,Rd}$$

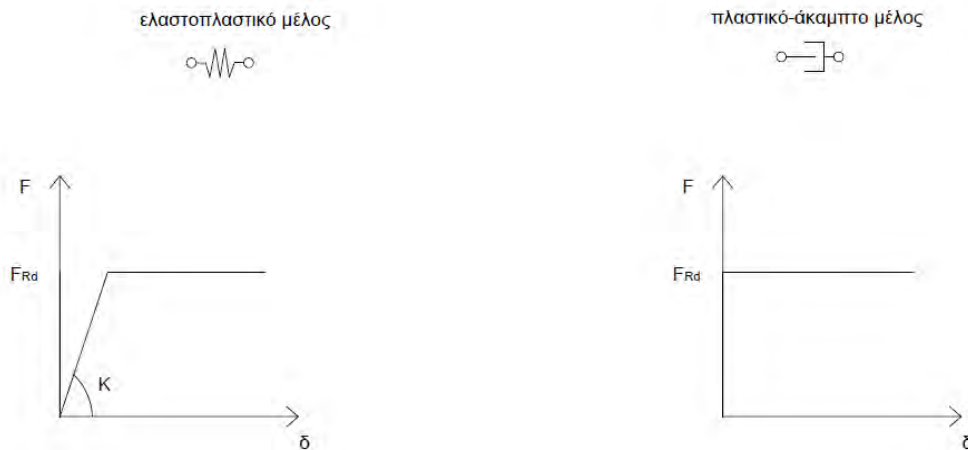
$$M = M_{j,Rd} \quad \text{για} \quad M_{j,Rd}$$

Όπου ξ είναι σταθερά που καθορίζεται από τον τύπο της σύνδεσης και $M_{j,Rd}$ η ροπή σχεδιασμού του κόμβου. (Faella & Piluso & Rizzano, 2000)

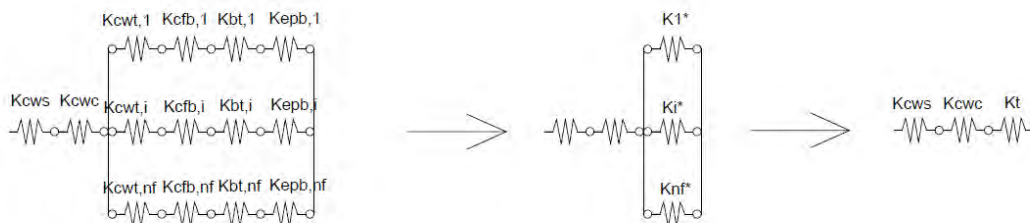
Για τη μέθοδο συστατικών μελών όπου έχουμε υπολογισμούς ξεχωριστά για κάθε μέλος και στη συνέχεια γίνεται επαλληλία για τα χαρακτηριστικά του κόμβου η καμπτική αντοχή του κόμβου δίνεται από τον τύπο:

$$M_{j,Rd} = \sum_{i=1}^{n_b} h_i F_{i,Rd} \quad (1.5)$$

Τα συστατικά μέλη χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, όπως προαναφέρθηκε και διακρίνονται από τα παρακάτω διαγράμματα δύναμης παραμόρφωσης:



Σχήμα 1.2: Διαγράμματα δύναμης-παραμόρφωσης για ελαστικό (αριστερά) και πλαστικό-άκαμπτο (δεξιά) μέλος.



Σχήμα 1.3: Υπολογισμός συνολικής δυσκαμψίας μελών.

Όπου $F_{i,Rd}$ η αντοχή της i σειράς κοχλίων, n_b ο αριθμός των σειρών κοχλίων σε εφελκυσμό, h_i η απόσταση του κέντρου θλίψης από την αντίστοιχη σειρά κοχλίων που θεωρείται ότι βρίσκεται στο μέσο του πάχους του πέλματος που πιέζεται από τη δοκό. Στη διαδικασία υπολογισμού αντοχής κάθε σειράς κοχλίας, η πρώτη σειρά θεωρείται ότι βρίσκεται πιο μακριά από το κέντρο της θλίψης ενώ οι υπόλοιπες σειρές πλησιάζουν σταδιακά στο κέντρο θλίψης. (Faella & Piluso & Rizzano, 2000)

Για κάθε σειρά κοχλίας υπολογίζουμε την παραμορφωσιμότητα ως εξής:

$$\frac{1}{K_i^*} = \frac{1}{K_{cwt,i}} + \frac{1}{K_{cbf,i}} + \frac{1}{K_{epb,i}} + \frac{1}{K_{bt,i}} \quad (1.6)$$

Ο υπολογισμός της συνολικής δυσκαμψίας K_t θεωρώντας άκαμπτη περιστροφή του κορμού της δοκού γύρω από το κέντρο θλίψης γίνεται ως εξής:

$$K_t = \frac{\sum_{i=1}^{n_b} K_i^* h_i}{h_t} \quad (1.7)$$

Όπου h_t ο μογλοβραχίονας ίσος με:

$$h_t = \frac{\sum_{i=1}^{n_b} K_i^* h_i^2}{\sum_{i=1}^{n_b} K_i^* h_i} \quad (1.8)$$

Αρχική στροφική δυσκαμψία κόμβου:

$$K_\varphi = \frac{h_t^2}{\frac{1}{K_{cws}} + \frac{1}{K_{cwc}} + \frac{1}{K_t}} \quad (1.9)$$

Ο υπολογισμός της αντοχής σχεδιασμού σε εφελκυσμό της πρώτης σειράς κοχλιών $F_{t1,Rd}$ γίνεται θεωρούμενο ως ένα από τα πιο αδύναμα μέλη του κόμβου.

$$F_{t1,Rd} = \min \left\{ \frac{V_{cws,Rd}}{\beta}, F_{cwc,Rd}, F_{bfc,Rd}, F_{cfb,Rd(1)}, F_{cwt,Rd(1)}, F_{epb,Rd(1)} \right\} \quad (1.10)$$

Όπου β είναι σταθερά που σχετίζεται με την επιρροή των δράσεων των άκρων των μελών στη διατμητική δύναμη στην περιοχή του πάνελ.

Ο υπολογισμός της αντοχής σχεδιασμού σε εφελκυσμό της δεύτερης σειράς κοχλιών είναι ίσο με το ελάχιστο των παρακάτω:

$$F_{t2,Rd} = \min \left\{ \frac{V_{cws,Rd}}{\beta} - F_{t1,Rd}, F_{cwc,Rd} - F_{t1,Rd}, F_{bfc,Rd} - F_{t1,Rd} \right\} \quad (1.11)$$

Η οποία αντιπροσωπεύει τους περιορισμούς της δράσης που προκύπτει για τις δύο πρώτες σειρές κοχλιών λόγω του κορμού του πάνελ σε διάτμηση, τον κορμό του υποστρώματος σε θλίψη και το πέλμα και τον κορμό της δοκού σε θλίψη.

$$F_{t2,Rd} \leq F_{bwt,Rd(2)} \quad (1.12)$$

Η οποία αντιπροσωπεύει τον περιορισμό λόγω του κορμού της δοκού σε εφελκυσμό.

$$F_{t2,Rd} = \min \{ F_{cbf,Rd(2)}, F_{cbf,Rd(2+1)} - F_{t1,Rd} \} \quad (1.13)$$

Η οποία λαμβάνει υπόψη τους περιορισμούς που δημιουργούνται από το πέλμα του υποστρώματος σε κάμψη θεωρώντας την δεύτερη σειρά κοχλιών και ξεχωριστή $F_{cbf,Rd(2)}$ και σαν συνδυασμό με την πρώτη σειρά $F_{cbf,Rd(2+1)}$.

$$F_{t2,Rd} = \min \{ F_{cwt,Rd(2)}, F_{cwt,Rd(2+1)} - F_{t1,Rd} \} \quad (1.14)$$

Η οποία είναι περιορισμός όμοιος με τον προηγούμενο, με τη διαφορά ότι αναφέρεται στον κορμό υποστρώματος σε εφελκυσμό.

$$F_{t2,Rd} = F_{epb,Rd(2)} \quad (1.15)$$

Που αφορά περιορισμό για τη μετωπική πλάκα σε κάμψη.

Ο υπολογισμός της αντοχής σχεδιασμού σε εφελκυσμό για τις ακόλουθες σειρές κοχλιών λαμβάνεται ως το ελάχιστο των παρακάτω:

$$F_{ti,Rd} = \min \left\{ \frac{V_{cws,Rd}}{\beta} - \sum_{j=1}^{i-1} F_{tj,Rd}, F_{cwc,Rd} - \sum_{j=1}^{i-1} F_{tj,Rd}, F_{bfc,Rd} - \sum_{j=1}^{i-1} F_{tj,Rd} \right\} \quad (1.16)$$

Ο υπολογισμός της ροπής σχεδιασμού $M_{j,Rd}$ του κόμβου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$M_{j,Rd} = \sum_{i=1}^{n_r} h_i F_{ti,Rd} \quad (1.17)$$

Όπου h_i είναι η απόσταση μεταξύ της i -στης σειράς κοχλιών και του κέντρου της θλίψης και n_r ο αριθμός σειρών κοχλιών σε εφελκυσμό. (Faella & Piluso & Rizzano, 2000)

1.8 Η επιρροή της προέντασης κοχλιών

Η προένταση κοχλιών επηρεάζει άμεσα τις κοχλιωτές συνδέσεις με μετωπική πλάκα καθώς αλλάζει η στροφική δυσκαμψία του κόμβου. Πιο συγκεκριμένα η προένταση επηρεάζει τον κόμβο με δύο τρόπους. Πρώτων υπάρχει αύξηση της αξονικής δυσκαμψίας του συστήματος κοχλιών και συνδεόμενων πλακών που περιγράφεται από τη σχέση:

$$K_{bp} = K_b + K_p \quad (1.18)$$

Όπου K_{bp} είναι η αξονική δυσκαμψία του συστήματος κοχλίας-πλάκα, K_b είναι η αξονική δυσκαμψία του κοχλίας και K_p είναι η συνεισφορά στην ένταση λόγω της προέντασης από τις συνδεόμενες πλάκες λόγω σύσφιξης που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{K_p}{K_b} \approx 4.10 + 3.25 \frac{t_p}{d_b} \quad (1.19)$$

Όπου t_p είναι η μέση τιμή του πάχους των συνδεόμενων πλακών, δηλαδή του πέλματος του υποστυλώματος και της μετωπικής πλάκας.

Η δεύτερη επίδραση σχετίζεται με την επιρροή της προέντασης των κοχλιών στην δράση συγκράτησης από τους κοχλίες. Για τη μελέτη αυτής της επιρροής χρησιμοποιείται η σταθερά ψ που παρουσιάζει την αναλογία ανάμεσα ελαστική δυσκαμψία στα πέλματα και την αξονική δυσκαμψία των κοχλιών. Έτσι στην περίπτωση προεντεταμένων κοχλιών η δυσκαμψία του στοιχείου που προσομοιώνεται με ελατήριο για τη μέθοδο συστατικών μελών που αφορά το πέλμα του υποστυλώματος σε κάμψη υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$K_{cfb} = \psi_{cf} E \frac{0.5b_{eff,cf} t_{fc}^3}{m_c^3} \quad (1.20)$$

Ομοίως το στοιχείο ελατήριο που προσομοιώνει τη μετωπική πλάκα σε κάμψη είναι:

$$K_{epb} = \psi_{ep} E \frac{0.5b_{eff,ep} t_{ep}^3}{m_{ep}^3} \quad (1.21)$$

Όπου ψ_{cf} και ψ_{ep} είναι:

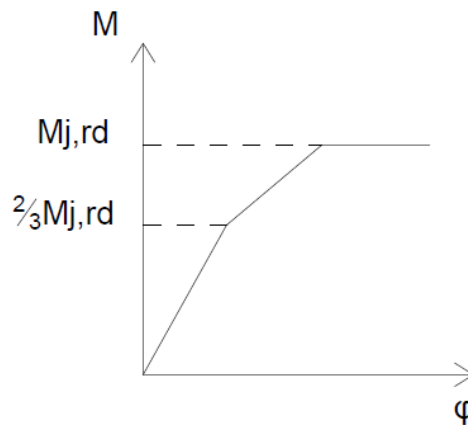
$$\psi_{cf} = 0.57 \left(\frac{t_{fc}}{d_b \sqrt{m_c/d_b}} \right)^{-1.28} \quad (1.22)$$

$$\psi_{ep} = 0.57 \left(\frac{t_{ep}}{d_b \sqrt{m_{ep}/d_b}} \right)^{-1.28} \quad (1.23)$$

Από τα αποτελέσματα αναλύσεων που έχουν πραγματοποιηθεί (βάση δεδομένων SERICON Weinand, 1992, βάση δεδομένων SCDB Kishi και Chen, 1986) έχει βρεθεί ότι τα αποτελέσματα που λαμβάνουν υπόψη την προένταση των κοχλιών είναι ακριβέστερα από εκείνα που την αγνοούν (Faella & Piluso & Rizzano, 2000).

Με τον υπολογισμό της ελαστικής αντοχής και της αρχικής στρωφικής δυσκαμψίας μπορούμε να υπολογίσουμε την καμπύλη ροπών-στρωφών για τον κόμβο. Για λόγους ευκολίας δεν λαμβάνεται υπόψη η επιρροή της σκλήρυνσης στελέχους (strain hardening).

Καταλήγουμε σε μία καμπύλη της ακόλουθης μορφής:



Σχήμα 1.4: Καμπύλη ροπών-στρωφών κόμβου.

Ο πρώτος κλάδος που περιγράφει ροπή $M < \frac{2M_{j,Rd}}{3}$ διαθέτει δυσκαμψία ίση με $K_{\varphi,i} = K_i h_r^2$. Ο δεύτερος κλάδος που περιγράφει ροπές $\frac{2}{3} M_{j,Rd} < M \leq M_{j,Rd}$ χαρακτηρίζεται

από τη σχέση $K_{\varphi,i}/(3 * 1.5^{2.7} - 2) \approx K_{\varphi,i}/7$. Ο τρίτος κλάδος σχετίζεται με την επιρροή της σκλήρυνσης στελέχους και η δυσκαμψία του υπολογίζεται ως $K_{\varphi,i}/(E/E_h)$ όπου E/E_h είναι ο λόγος σκλήρυνσης του υλικού, ο οποίος παίρνει τυπικές τιμές για δομικούς χάλυβες λόγω έλλειψης πειραματικών μετρήσεων.

Ο τέταρτος κλάδος είναι σταθερός και περιγράφει την μέγιστη αντοχή του κάθε μέλους και ισούται με $(f_u/f_y)M_{Rd,j}$.

Για τις κοχλιωτές συνδέσεις υπάρχει απλοποίηση που αφορά την συμπεριφορά των μελών. Δηλαδή η συμπεριφορά των μελών που βασίζονται στις δράσεις των κοχλιών, μπορούν να εκφραστούν από μία μόνο τετραγραμμική σχέση ροπών-στροφών, η οποία είναι όμοια με τη σχέση ροπής-στροφής μέλους ανεξάρτητου από τη δράση των κοχλιών, αλλά χαρακτηρίζεται από αρχική στροφική δυσκαμψία ίση με τη συνολική δυσκαμψία των κοχλιών σε εφελκυσμό:

$$K_{\varphi,t} = K_t h_t^2 \quad (1.24)$$

Η αντοχή σχεδιασμού λαμβάνεται από το μέλος με τη μικρότερη αντοχή στη σειρά κοχλιών. (Faella & Piluso & Rizzano, 2000)

1.9 Ξεχωριστή ανάλυση κάθε συστατικού μέλους

Όπως προαναφέρθηκε, ένας κόμβος δοκού-υποστυλώματος αποτελείται από τα ακόλουθα μέλη:

- 1) Κορμός υποστυλώματος σε διάτμηση
- 2) Μετωπική πλάκα σε κάμψη
- 3) Πέλμα υποστυλώματος σε κάμψη
- 4) Κορμός δοκού σε εφελκυσμό
- 5) Κορμός υποστυλώματος σε θλίψη
- 6) Κορμός υποστυλώματος σε εφελκυσμό
- 7) Πέλματα και κορμός δοκού σε θλίψη
- 8) Κοχλίες σε εφελκυσμό

Καθένα από αυτά τα συστατικά μέρη χαρακτηρίζεται από μία μη-γραμμική καμπύλη δύναμης-παραμόρφωσης.

Για την εφαρμογή της μεθόδου συστατικών μελών στους μεταλλικούς κοχλίες πρέπει να γίνει επιλογή του ενεργού συστατικού μέλους από μία παγκόσμια λίστα συστατικών

μελών, η οποία αποτελείται από 13 συστατικά μέρη στον EC3, υπολογισμός της σχέσης δύναμης-παραμόρφωσης για κάθε συστατικό μέλος και σύνδεση των επιμέρους ενεργών συστατικών μελών για τον υπολογισμό της καμπύλης ροπής-στροφής του κόμβου.

Η μέθοδος συστατικών μελών σχετίζεται με τις καμπύλες δύναμης-παραμόρφωσης για κάθε ξεχωριστό ελατήριο που έχουμε θεωρήσει. Για τον υπολογισμό της αρχικής ακαμψίας του κόμβου, απαιτείται μόνο η γραμμική ακαμψία του κάθε μέλους, ενώ για τον υπολογισμό της πλαστιμότητας απαιτείται η γνώση και των μη γραμμικών σχέσεων δύναμης-παραμόρφωσης κάθε στοιχείου.

1.9.1 Μέλη με υψηλή ολκιμότητα

Αυτά τα μέλη χαρακτηρίζονται από μια καμπύλη δύναμης παραμόρφωσης που αρχικά έχει ευθύγραμμη ελαστική μορφή, αλλά αλλάζει στη συνέχεια σε πλαστική μορφή που επιτρέπει μεγαλύτερες παραμορφώσεις με μεγαλύτερες δυνάμεις. Το στοιχείο μπορεί να λάβει άπειρη παραμόρφωση αφού δεν υπάρχει όριο στη στρεπτική ικανότητα του κόμβου.)

Πάνελ κορμού υποστυλώματος σε διάτμηση

Η αντίδραση σε αυτή την περιοχή δίνεται από τον τύπο $V_{wp,Rd} = \frac{f_{y,wc}A_{wc}}{\sqrt{3}}$, όπου $f_{y,wc}$ είναι η τάση διαρροής κορμού του υποστυλώματος και το A_{wc} είναι το εμβαδόν της περιοχής διάτμησης στο υποστύλωμα. Η παραπάνω εξίσωση δεν λαμβάνει υπόψη τα αξονικά φορτία του υποστυλώματος. Διαφορετικά μπορούμε να λάβουμε το κριτήριο διαρροής του Von Mises σύμφωνα με το οποίο υπολογίζεται μια μειωμένη τιμή της αντίδρασης και λαμβάνει υπόψη τα αξονικά φορτία. Σύμφωνα με τους Simões da Silva, Santiago και Vila Real, 2002 για να ξεπεράσει αυτό το πρόβλημα ο Jaspert που μελέτησε αυτό το πρόβλημα, πολλαπλασίασε τη σχέση με 0.9 οπότε έχουμε:

$$V_{wp,Rd} = \frac{0,9f_{y,wc}A_{wc}}{\sqrt{3}} \quad (1.25)$$

Σύμφωνα με τους Simões da Silva, Santiago και Vila Real, 2002 μελετώντας τους Janss, Jaspert και Shi σημειώνουν ότι η συνεισφορά της διατμητικής παραμόρφωσης του κορμού του υποστυλώματος στη συνολική στρόφη στον κόμβο δίνεται από τον τύπο:

$$\Phi_s = \frac{Q}{GA_{wc}} \quad (1.26)$$

Όπου το Q είναι η διατμητική δύναμη ίση με $2 \sum F_i$, με F_i τη δύναμη σε κάθε σειρά από κοχλίες και i η σειρά κοχλιών. Η αντίστοιχη αξονική δυσκαμψία γίνεται:

$$K_{wp} = \frac{GA_{wc}}{z} = \frac{0.38EA_{wc}}{z} \quad (1.27)$$

Όπου το z δηλώνει το μοχλοβραχίονα ανάμεσα στις περιοχές θλίψης και εφελκυσμού. Η δυσκαμψία του μέλους εξαρτάται από την εφαρμοσμένη διατμητική δύναμη στον κορμό. Δεδομένο αυτού, εσωτερικές δυνάμεις μεταφερόμενες από τα χαμηλότερα και ψηλότερα τμήματα του υποστυλώματος καθώς και από την αριστερή δοκό για εσωτερικούς κόμβους με μη σταθερές ροπές, εμφανίζονται σε εκείνο το σημείο. Γι' αυτό το λόγο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το z με ένα παράγοντα β προς αντιμετώπιση του προβλήματος. Οπότε η σχέση γίνεται:

$$K_{wp} = \frac{GA_{wc}}{\beta z} = \frac{0.38EA_{wc}}{\beta z} \quad (1.28)$$

Μετωπική πλάκα σε κάμψη

Ένας κόμβος δοκού-υποστυλώματος διαθέτει συστατικά μέλη που μπορούν να προσομοιωθούν ως ένα βραχύ ταυ για να μελετηθεί η ζώνη θλίψης του κόμβου. Τα μέλη που συμμετέχουν σε αυτή τη προσομοίωση είναι η μετωπική πλάκα και το πέλμα του υποστυλώματος, που βρίσκονται σε κάμψη. Η συμπεριφορά του βραχέως ταυ περιλαμβάνει ιδιότητες όπως την αυξημένη ακαμψία και δύναμη του πέλματος κοντά στον κορμό, τις κατανεμημένες αντιδράσεις των δυνάμεων των κοχλιών στα πέλματα μέσω της κεφαλής κάθε κοχλία, την κάμψη του κορμού του κοχλία, την προέκταση των κοχλιών, την τρισδιάστατη τάση και τροπή που αναπτύσσεται στο πέλμα, την τρισδιάστατη αντίδραση που προκύπτει από την αλληλεπίδραση πέλματος-κοχλία και τις διατμητικές τάσεις του πέλματος.

Μία τέτοια προσομοίωση γίνεται έτσι ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο συστατικών μελών με στον κόμβο, προκειμένου να καταλήξουμε στην καμπύλη ροπών-στροφών M-φ. Σε αυτή τη μέθοδο υπάρχουν δύο κατηγορίες ελατηρίων για την προσομοίωση. Η πρώτη κατηγορία αφορά άκαμπτα στοιχεία, τα οποία ορίζονται από

τον Ευρωκώδικα 3, και επηρεάζουν την παραμορφωσιμότητα και τη δύναμη του κόμβου και η συμπεριφορά τους καθορίζεται από μια μη-γραμμική καμπύλη F-δ (δύναμη-παραμόρφωση). Η δεύτερη κατηγορία αφορά τα μέλη δυνάμεων, τα οποία χρησιμοποιούνται μόνο για τους υπολογισμούς δυνάμεων, επομένως δεν επηρεάζουν την παραμορφωσιμότητα του κόμβου, απλά περιορίζουν την διαθέσιμη δύναμη.

Ένα μεταλλικό ταυ εμφανίζει τρεις τρόπους αστοχίας.

- 1) Διαρροή της μετωπικής πλάκας χωρίς αστοχία των κοχλιών.
- 2) Διαρροή της μετωπικής πλάκας και ταυτόχρονη αστοχία των κοχλιών.
- 3) Αστοχία των κοχλιών χωρίς διαρροή της μετωπικής πλάκας.

Η αντίστοιχη αξονική δύναμη για κάθε ένα τρόπο αστοχίας δίνεται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}
 1) \quad F_{t,Rd} &= \frac{4M_{pl,Rd}}{m} \\
 2) \quad F_{t,Rd} &= \frac{2M_{pl,Rd} + n \sum B_{t,Rd}}{m+n} \\
 3) \quad F_{t,Rd} &= \sum B_{t,Rd} \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

Όπου το m δηλώνει την απόσταση ανάμεσα στο κέντρο βάρους των κοχλιών και την όψη της συγκόλλησης που συνδέει τον κορμό της δοκού με τη μετωπική πλάκα. Το n είναι η απόσταση από τα ελεύθερα άκρα και το $B_{t,Rd}$ η αντίδραση των κοχλιών σε θλίψη και η $M_{pl,Rd}$ είναι η ελαστική αντίδραση της μετωπικής πλάκας που δίνεται από τον τύπο:

$$M_{pl,Rd} = \frac{l_{eff} t_p^2 f_{y,p}}{4} \quad (1.30)$$

Όπου l_{eff} είναι το πλάτος της μετωπικής πλάκας το οποίο υπόκειται σε κάμψη, το t_p το πάχος και το $f_{y,p}$ η τάση διαρροής της πλάκας.

Η δυσκαμψία βρίσκεται από κλασσική θεωρία δοκών, μετά τον υπολογισμό του ενεργού πλάτους και δίνεται από τον τύπο:

$$K_{b,p} = \frac{0,85 E l_{eff} t_p^3}{m^3} \quad (1.31) \quad (\text{Simões da Silva, Santiago και Vila Real, 2002})$$

Πέλημα υποστυλώματος σε κάμψη

Αυτό το μέλος έχει συμπεριφορά όμοια με τη μετωπική πλάκα σε κάμψη που προσομοιώνεται ως μεταλλικό T. Συνεπώς λαμβάνεται η ίδια πλαστημότητα και ακαμψία, οπότε χρησιμοποιούνται οι ίδιοι τύποι με την μετωπική πλάκα για αυτό το μέλος στις ίδιες κατηγορίες αστοχίας.

$$\begin{aligned}
1) \quad F_{t,Rd} &= \frac{4M_{pl,Rd}}{m} \\
2) \quad F_{t,Rd} &= \frac{2M_{pl,Rd} + n \sum B_{t,Rd}}{m+n} \\
3) \quad F_{t,Rd} &= \sum B_{t,Rd} \quad (1.32)
\end{aligned}$$

$$K_{b,p} = \frac{0,85El_{eff}t_p^3}{m^3} \quad (1.33)$$

Κορμός δοκού σε εφελκυσμό

Για κοχλιωτούς κόμβους με μετωπική πλάκα η αντίδραση στον κορμό της δοκού είναι:

$$F_{t,wb,Rd} = b_{eff,t,wb}t_{wb}f_{y,wb} \quad (1.34)$$

Όπου $b_{eff,t,wb}$ είναι το ενεργό πλάτος και ισούται με το αντίστοιχο ενεργό μήκος του μεταλλικού Τα που προσομοιώνει τη μετωπική πλάκα. Το t_{wb} είναι το πάχος και το $f_{y,wb}$ η τάση διαρροής του κορμού της δοκού. Η ακαμψία αυτού του μέλους λαμβάνεται ως άπειρη $K_{t,wb} = \infty$.

1.9.2 Μέλη με περιορισμένη ολκιμότητα

Σε αυτά τα μέλη η καμπύλη δύναμης – παραμόρφωσης εμφανίζει όριο, μετά το οποίο δεν αυξάνεται η δύναμη όσο αυξάνεται η παραμόρφωση μέχρι να καταλήξουμε στην κατάρρευση.

Κορμός υποστυλώματος σε θλίψη

Αυτό το μέλος παρουσιάζει περιορισμένη πλαστιμότητα με καμπτόμενο κλάδο όταν φτάσει στη μέγιστη ικανότητά του να λάβει φορτίο. Λαμβάνονται δύο ειδών αντοχές: αντοχή λυγισμού και αντοχή στη θλίψη. Η αντοχή λυγισμού αφορά την αλληλεπίδραση ανάμεσα στις τοπικές τάσεις που εμφανίζονται λόγω των διατμητικών τάσεων στην περιοχή της μετωπικής πλάκας και των κάθετων τάσεων λόγω των αξονικών δυνάμεων και της καμπτικής ροπής στο υποστύλωμα αλλά και των οριζόντιων δυνάμεων που μεταφέρονται από τα πέλατα της δοκού. Από το κριτήριο διαρροής του Von Mises η θλιπτική αντοχή είναι:

$$F_{c,wc,Rd} = b_{eff,c,wc}t_{wc}f_{y,wc}\omega k_{c,wc} \quad (1.35)$$

Όπου $b_{eff,c,wc}$ είναι το ενεργό πλάτος του κορμού του υποστυλώματος:

$$b_{eff,c,wc} = t_{fb} + 2\sqrt{2}a + 5(t_{fc} + s) + s_p$$

Όπου a είναι το ενεργό πάχος της συγκόλλησης, $s = r$ για κυλινδρικά τμήματα του υποστυλώματος και s_p η διασπορά στις 45° μέσω της μετωπικής πλάκας.

Το $k_{c,wc}$ υπολογίζει τη κατακόρυφη τάση σ_v :

$$k_{c,wc} = 1.25 - 0.5 \frac{\sigma_v}{f_{y,wc}} \leq 1 \quad (\sigma_v > 0.5 f_{y,wc}) \quad (1.36)$$

Το ω υπολογίζεται τη διατμητική αλληλεπίδραση:

$$\omega = \begin{cases} 1 & 0.0 \leq \beta \leq 0.5 \\ \omega_1 + 2(1 - \beta)(1 - \omega_1) & 0.5 \leq \beta \leq 1.0 \\ \omega_1 + (\beta - 1)(\omega_2 - \omega_1) & 1.0 \leq \beta \leq 2.0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Όπου:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 1.3 \left(\frac{b_{eff,c,wc} t_{wc}}{A_{vc}} \right)^2}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 5.2 \left(\frac{b_{eff,c,wc} t_{wc}}{A_{vc}} \right)^2}}$$

Για την αντίσταση στον λυγισμό χρησιμοποιείται κατά προσέγγιση η σχέση Winter:

$$F_{c,wc,Rd} \leq \rho b_{eff,c,wc} t_{wc} f_{y,wc} \omega k_{c,wc} \quad (1.38)$$

Όπου ρ είναι μειωτικός παράγοντας για λυγισμό πλάκας που δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \begin{cases} 1 & \bar{\lambda} < 0.673 \\ \frac{(\bar{\lambda} - 0.22)}{\bar{\lambda}^2} & \bar{\lambda} > 0.673 \end{cases} \quad (1.39)$$

Όπου $\bar{\lambda}$ είναι η κανονικοποιημένη ευλυγισία πλάκας:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{b_{eff,c,wc} t_{wc} f_{y,wc}}{F_{cr}}} = 0.932 \sqrt{\frac{b_{eff,c,wc} d \times f_{y,wc}}{E t_{wc}^2}} \quad (1.40)$$

Η αρχική παραμόρφωση αυτού του μέλους μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$\Phi_c = \frac{N}{EA_c} \frac{d}{h_c} \quad (1.41)$$

Όπου το N είναι η προκύπτουσα θλιπτική δύναμη ίση με $2 \sum F_i$, με F_i η δύναμη σε κάθε σειρά κοχλίων και i η σειρά κοχλίων. Το A_c είναι το ενεργό εμβαδόν του κορμού σε θλίψη και ισούται με $A_c = t_{wc} b_{eff,c}$. Το d είναι το πάχος του υποστυλώματος και το h_c είναι το πάχος του υποστυλώματος αφού μειωθεί κατά το πάχος των δύο πελμάτων.

Τελικά η αρχική αξονική δυσκαμψία είναι:

$$K_{c,wc} = EA_c \frac{1}{d} = E \frac{0.7 b_{eff,c,wc} t_{wc}}{d} \quad (1.42)$$

Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό της δυσκαμψίας γίνεται μείωση του ενεργού πλάτους πολλαπλασιαζόμενο με 0,7. (Simões da Silva, Santiago και Vila Real, 2002)

Κορμός υποστυλώματος σε εφελκυσμό

Η αντίσταση αυτού του μέλους είναι όμοια με αυτή του κορμού υποστυλώματος σε θλίψη, αλλά όχι σε φαινόμενα αστάθειας. Ο τύπος της δύναμης δίνεται:

$$F_{t,wc,Rd} = b_{eff,t,wc} \times t_{wc} \times f_{y,wc} \times \omega \times k_{t,wc} \quad (1.43)$$

Όπου οι ποσότητες είναι όπως πριν, μόνο που αντικαθιστούμε το c με το t .

Αντίστοιχα με το προηγούμενο η αρχική παραμόρφωση του μέλους είναι:

$$\Phi_w = \frac{T}{EA_t} \frac{d}{h_t} \quad (1.44)$$

Όπου T είναι η εφελκυστική δύναμη που προκύπτει και είναι ίση με $2 \sum F_i$, με F_i η δύναμη σε κάθε σειρά κοχλίων και i η σειρά κοχλίων. Το A_t είναι το ενεργό εμβαδόν του κορμού ίσο με: $A_t = t_{wc} b_{eff,t,wc}$. Το d είναι το πάχος του υποστυλώματος και το h_t είναι η απόσταση της εφελκυστικής δύναμης από το κέντρο της θλίψης, οπότε η αξονική δυσκαμψία είναι:

$$K_{t,wc} = EA_t \frac{1}{d} = E \frac{0.7 b_{eff,t,wc} t_{wc}}{d} \quad (1.45)$$

Πέλμα και κορμός δοκού σε θλίψη

Αυτά τα μέλη, στο σημείο της σύνδεσης, περιορίζουν την αντοχή του κόμβου. Η μέγιστη δύναμη είναι:

$$F_{c,fb,Rd} = \frac{M_{c,Rd}}{z} \quad (1.46)$$

Η αρχική δυσκαμψία λαμβάνεται ως άπειρη.

Συστατικά μέλη με ψαθυρή αστοχία

Αυτά τα μέλη παρουσιάζουν μία ευθύγραμμη καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης με μικρή παραμόρφωση πριν την αστοχία.

Κοχλίες σε εφελκυσμό

Οι κοχλίες παρουσιάζουν ψαθυρή μορφή αστοχίας, με ευθύγραμμη καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης μέχρι την αστοχία. Από δοκιμές σε εφελκυσμό και υπολογισμό της καμπύλης βρέθηκαν ότι η αντοχή και η δυσκαμψία του κάθε κοχλίου είναι αντίστοιχα:

$$F_{t,Rd} = 0.9 f_{ub} A_s \quad (1.47)$$

$$K_{t,b} = \frac{1.6 E A_s}{L_b} \quad (1.48)$$

Όπου το A_s είναι το εμβαδόν της εφελκυσμένης ζώνης του κοιλία, f_{ub} η τάση αστοχίας των κοιλίων και L_b το σύνολο των παχών όλων των συνδεδεμένων πλακών, το πάχος του δακτυλίου και το μισό πάχος του περικοιλίου και της κεφαλής του κοιλία. (Simões da Silva, Santiago και Vila Real, 2002)

Κεφάλαιο 2

Θεωρία πλακών

2.1 Εισαγωγή στη θεωρία πλακών

Οι πλάκες είναι δυσδιάστατα δομικά στοιχεία των οποίων οι διαστάσεις του ενδιάμεσου επιπέδου είναι πολύ μεγαλύτερες από το πάχος τους.

Οι λεπτές πλάκες, λόγω του μικρού τους πάχους, χρησιμοποιούνται συχνά για δυσδιάστατες θεωρίες, ενώ οι παχιές πλάκες για τρισδιάστατες ελαστικές θεωρίες. Οι θεμελιώδεις εξισώσεις για τις λεπτές πλάκες λαμβάνονται από διανυσματική μηχανική ή παραλλαγές της και ενεργειακές αρχές. Στη διανυσματική μηχανική οι εσωτερικές δυνάμεις και οι καμπτικές ροπές που ενεργούν σε ένα διακριτοποιημένο στοιχείο μιας τυπικής πλάκας αθροίζονται έτσι ώστε να βρεθεί η ισορροπία ή οι εξισώσεις κίνησης. Για τις ενεργειακές μεθόδους χρησιμοποιούνται άλλες μέθοδοι για την εύρεση των εξισώσεων όπως η αρχή των ελάχιστων δυνατών ενεργειών ή της συμπληρωματικής ενέργειας.

Η θεωρία Mindlin-Reissner περιλαμβάνει στις εξισώσεις την εγκάρσια διατμητική τάση που θεωρείται σταθερή στο πάχος της πλάκας. Για να γίνει διόρθωση της διαφοράς ανάμεσα της πραγματικής εγκάρσιας διατμητικής δύναμης και εκείνης που είναι αποτέλεσμα κινηματικών εξισώσεων εισάγεται ένας διατμητικός συντελεστής διόρθωσης. Ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από τις γεωμετρικές παραμέτρους της πλάκας καθώς και από τα φορτία που της επιβάλλονται και τις στηρίξεις. Επίσης γίνεται χρήση υψηλόβαθμων πολυωνυμικών εξισώσεων για να είναι εφικτή η εύρεση της παραμόρφωσης και στη διεύθυνση του άξονα z. Με αυτό τον τρόπο βρίσκονται οι παραμορφώσεις της πλάκας (Vrabie & Băetu, 2013).

Στη θεωρία πλακών, αρχικά γίνεται κατάταξη της πλάκας ανάλογα με το πάχος της σε σχέση με το μήκος της. Η γεωμετρία της είναι επίπεδη και το πάχος t θεωρείται πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος L . Οι τρεις κατηγορίες είναι οι εξής:

- $\frac{t}{L} > \frac{1}{3}$ παχιές πλάκες, πραγματοποιείται πλήρης τρισδιάστατη ανάλυση
- $\frac{1}{3} > \frac{t}{L} > \frac{1}{10}$ πλάκες μεσαίου πάχους, πραγματοποιείται ανάλυση παχέων πλακών
- $\frac{t}{L} < \frac{1}{10}$ λεπτές πλάκες, εφαρμόζεται η θεωρία λεπτών πλακών

Σε τέτοιου είδους αναλύσεις, τα φορτία πρέπει να είναι εκτός επιπέδου. Επίσης, στην κάμψη, η τάση δεν είναι ομοιόμορφη σε όλο το πάχος.

Οι πλάκες υπόκεινται σε εγκάρσια φορτία, κυρίως στην ενδιάμεση επιφάνεια, τα οποία συνδυάζονται με καμπτικές και διατμητικές εντάσεις. Επίσης είναι δυνατόν να υπάρχει και ομοιόμορφα κατανεμημένη τάση εντός του επιπέδου, που επιδρά στην μεμβράνη. Η ενδιάμεση επιφάνεια, σχετικά με την κάμψη της πλάκας, δεν υπόκειται σε παραμορφώσεις, αλλά τις προκαλούν τα φορτία εντός της επιφάνειας.

Οι καμπτικές παραμορφώσεις στους τρεις άξονες είναι οι εξής:

- Παραμόρφωση στον άξονα x : $u(x, y, z) = -z\psi_y(x, y)$
- Παραμόρφωση στον άξονα y : $v(x, y, z) = -z\psi_x(x, y)$
- Κάθετη παραμόρφωση: $w = w(x, y)$

Στη συνέχεια για την καλύτερη κατανόηση των σχέσεων χρησιμοποιούνται οι πράξεις σύμφωνα με τον Chennamsetti, 2013.

2.2 Τάσεις στη θεωρία πλακών

Οι τάσεις υπολογίζονται παρακάτω, θεωρώντας ότι οι διατμητικές τάσεις εκτός του επιπέδου είναι αμελητέες.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow \gamma_{xz} = -\psi_y + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow \gamma_{yz} = -\psi_x + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi_x = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Οι μη μηδενικές τάσεις είναι:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.5)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας απειροστού στοιχείου της πλάκας είναι:

$$\sigma_{xx}^* dydz + \tau_{zx}^* dx dy + \tau_{yx}^* dz dx - \sigma_{xx} dydz - \tau_{zx} dx dy - \tau_{yx} dz dx = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_{xx}^* = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right)$$

$$\tau_{zx}^* = \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right)$$

$$\tau_{yx}^* = \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right)$$

Λαμβάνουμε τις εξής εξισώσεις:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{για την κατεύθυνση } x \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \text{για την κατεύθυνση } y \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \quad \text{για την κατεύθυνση } z \quad (2.9)$$

Η καμπυλότητα παρουσιάζει αμοιβαιότητα με την ακτίνα κάμψης, λαμβάνοντας υπόψη το ποσοστό αλλαγής κλίσης. Υπολογίζονται παρακάτω οι ποσότητες:

$$\text{Κλίση} = \text{περιστροφή} = \psi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\text{Καμπυλότητα} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k_{xx} \text{ στο επίπεδο } xz \quad (2.11)$$

$$\text{Καμπυλότητα} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k_{yy} \text{ στο επίπεδο } yz \quad (2.12)$$

$$\text{Περιστροφή πλάκας} = k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.13)$$

Όσο αφορά ένα ευθύγραμμο ελαστικά ισότροπο υλικό οι τάσεις και οι τροπές δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Οι τάσεις μπορούν να ερμηνευτούν και συναρτήσει των καμπυλοτήτων:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Από την εξίσωση ισορροπίας για την κατεύθυνση x , υπολογίζεται η διατμητική τάση τ_{xz} , με χρήση των σχέσεων καμπυλότητας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \left(\frac{Ez}{1-\nu^2} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \left(\frac{Ez}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \quad (2.17) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια γίνεται ολοκλήρωση από το μέσο του πάχους της πλάκας μέχρι την κορυφή:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{xz}}^0 d\tau_{xz} &= \int_0^{h/2} \left(\frac{Ez}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial x} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial x} \int_z^{h/2} z dz \\ -\tau_{xz} &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_z^{h/2} \\ -\tau_{xz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial x} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial x} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (2.18) \end{aligned}$$

Οι ροπές γύρω από τον άξονα y βρίσκονται από:

$$\begin{aligned} dF_{xx} &= \sigma_{xx} dz \\ dM_y &= z dF_{xx} = z \sigma_{xx} dz \\ \sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dM_y &= -\frac{Ez^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \\
M_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο ροπή γύρω από τον άξονα x :

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.20)$$

Και η ροπή συστροφής λόγω διατμητικής τάσης τ_{xy}

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.21)$$

Όπου $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

2.3 Διατμητικές δυνάμεις

Οι εξισώσεις των κάθετων δυνάμεων στην πλάκα είναι:

$$\begin{aligned}
\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy - Q_x dy - Q_y dx &= 0 \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Διατμητικές δυνάμεις διαμήκους όλου του πάχους της πλάκας μπορούν να υπολογισθούν ολοκληρώνοντας τη διατμητική τάση στο πάχος της πλάκας:

$$\begin{aligned}
Q_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \\
Q_y &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} \int_{-h/2}^{+h/2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) dz \\
Q_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Ομοίως και για το Q_x :

$$Q_x = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x} \quad (2.24)$$

Αντικαθιστώντας τα Q_x και Q_y στην εξίσωση κάθετης ισορροπίας καταλήγουμε στην θεμελιώδη εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial y} \right) &= -q \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 w) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla^2 w) &= \frac{q}{D} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\nabla^2 w) &= \frac{q}{D} \\ \nabla^2 (\nabla^2 w) &= \frac{q}{D} \\ \nabla^4 w &= \frac{q}{D} \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{q}{D} \quad (2.25) \end{aligned}$$

2.4 Συνοριακές συνθήκες

Σε ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα έχουμε τη θεμελιώδη εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες. Υπάρχουν τρεις κατηγορίες συνοριακών συνθηκών: απλά εδρασμένες, πακτωμένη και με ελεύθερα άκρα. Πρέπει να ακολουθήσει ο υπολογισμός της κάθετης μετατόπισης και τα παράγωγά του.

- Απλά εδρασμένο

Κάθετη μετατόπιση και ροπή ισούνται με μηδέν. Για το άκρο ισχύει ότι $\chi = \text{σταθερό}$ και $w(x,y) = 0$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.26)$$

Το $w = 0$ συνεπάγει ότι η δεύτερη παράγωγος στην κατεύθυνση της εφαπτομένης σε αυτή τη γραμμή είναι μηδέν, δηλαδή $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Όμοια συμβαίνει και για απλά εδρασμένο με $y = \text{σταθερό}$.

- Πακτωμένο

Η μετατόπιση και η κλίση στις κανονικές κατευθύνσεις εξαφανίζονται. Έτσι ισχύει:

$$x = \text{σταθερό}, w = 0 \text{ και } \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$y = \text{σταθερό}, w = 0 \text{ και } \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

- Ελεύθερο άκρο

Το ελεύθερο άκρο δεν επιβαρύνεται από εξωτερικά φορτία και περιγράφεται από τις φυσικές του συνοριακές συνθήκες. Δεν υπάρχουν καμπτική ροπή και διατμητικές δυνάμεις

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ για } x = \text{σταθερό}$$

$$M_x = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ για } y = \text{σταθερό}$$

Η δύναμη πλέγματος που δρα στην επιφάνεια είναι $Q'_x = -M_{xy} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + M_{xy} \Rightarrow$

$$Q'_x = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Η συνολική διατμητική δύναμη είναι $V_x = Q_x + Q'_x \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\Rightarrow V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (2.27)$$

Για ελεύθερο άκρο έχουμε ότι $V_x = 0$ για x σταθερό και $V_y = 0$ για y σταθερό.

2.5 Κάμψη πλακών

Η θεμελιώδεις εξίσωση για την κάμψη ορθογώνιων πλακών είναι $\nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{q}{D}$

w = κάθετη μετατόπιση = $w(x,y)$

q = εξωτερική φόρτιση = $q(x,y)$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι παράγωγο δύο εξισώσεων, έστω:

$$w = w(x, y) = F(x)G(y)$$

Οι δύο εξισώσεις μπορούν να είναι αλγεβρικές, τριγωνομετρικές, υπερβολικές ή και άλλης μορφής, ή και συνδυασμός εξισώσεων, Η επιλογή τους γίνεται βάση των συνοριακών συνθηκών. Απλά εδρασμένα άκρα έχουν τριγωνομετρικές εξισώσεις που

λύνονται με τη λύση του Navier. Η μετατόπιση της πλάκας μπορεί να γραφτεί ως το σύνολο απειροστών τριγωνομετρικών εξισώσεων.

Στα άκρα $x=0$ και $x=a$ σε απλά εδρασμένη πλάκα η κατακόρυφες μετακινήσεις εξαφανίζονται $w(x=0, y)=0$ και $w(x=a, y)=0$

$$\text{Πιθανή μορφή της λύσης είναι η: } F(x) = \sum_m^\infty F_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.28)$$

με $F_1, F_2, \dots, F_\infty$ είναι συντελεστές

Στα άλλα άκρα δεν υπάρχει κάθετη μετακίνηση:

$$w(x, y=0) = 0, w(x, y=b) = 0$$

$$\text{Η πιθανή λύση της εξίσωσης είναι: } G(y) = \sum_n^\infty G_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.29)$$

Με $G_1, G_2, \dots, G_\infty$ συντελεστές.

2.6 Ιδιομορφές και παραμορφώσεις ορθογωνικών πλακών

Μπορούμε να θεωρήσουμε ισότροπο ομογενές υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και λόγο Poisson μ . Η γενική εξίσωση που περιγράφει τις παραμορφώσεις σε πλάκα είναι:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}, \quad D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2.30), \quad \text{όπου } \nabla \text{ το σύμβολο του Laplace,}$$

$w(x, y)$ οι εγκάρσιες παραμορφώσεις της πλάκας, $p(x, y)$ το εξωτερικό φορτίο και t το πάχος της πλάκας.

Για πλάκα η οποία είναι ελαστικά συγκρατημένη στον άξονα x με k_1 στο $x=0$ και k_2 στο $x=a$, ενώ στον άξονα y πλήρως πακτωμένη στο $y=0$ και ελεύθερη στο $y=b$, οι παραμορφώσεις $w(x, y)$ δίνονται από την εξίσωση :

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (2.31)$$

όπου $X_i(x), Y_j(y)$ είναι ιδιομορφές στις δύο διευθύνσεις και a_{ij} είναι άγνωστες σταθερές που θα προσδιοριστούν. Οι εξισώσεις $X_i(x), Y_j(y)$ ικανοποιούν τις απαιτούμενες συνθήκες, συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Galerkin με σκοπό να προσδιοριστούν τα a_{ij} .

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$w(x, y) = \sum_m^\infty \sum_n^\infty F_m G_n \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.32)$$

Θέτουμε: $a_m = \frac{m\pi}{a}$ και $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ και η σχέση παίρνει τη μορφή:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin a_m x \sin \beta_n y \quad (2.33)$$

Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως μια ημιτονοειδής ή συνημιτονοειδής συνάρτηση χρησιμοποιώντας της σειρές Fourier.

$$f(x) = \sum_m f_m \sin \frac{m\pi x}{a} \Rightarrow f(x) \sin \frac{m'\pi x}{a} = f_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} \quad (2.34)$$

Η σχέση παραγωγίζεται από 0 έως a και καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\int_0^a f(x) \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \frac{f_m a}{2} \quad \text{για } m = m'$$

$$\int_0^a f(x) \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = 0 \quad \text{για } m \neq m'$$

$$f_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (2.35)$$

Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε και την άλλη μεταβλητή:

$$g(y) = \sum_n g_n \sin \frac{n\pi y}{b} \Rightarrow g(y) \sin \frac{n'\pi y}{b} = g_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b}$$

$$g_n = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (2.36)$$

Επίσης:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin a_m x \sin \beta_n y$$

$$\int_{x=0}^{x=a} w(x, y) \sin \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) dx$$

$$= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \int_{x=0}^{x=a} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m'\pi x}{a} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
& \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} w(x,y) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dx dy \\
&= \frac{a}{2} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} w_{mn} \int_{y=0}^{y=b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right) dy \\
w_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} w(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Θεωρώντας φορτίο πάνω στην πλάκα έχουμε ότι για φορτίο:

$$q = q(x, y) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.38)$$

Και έχει λύση:

$$w = w(x, y) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.39)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Με αντικατάσταση καταλήγουμε στον τύπο:

$$w = w(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.40)$$

2.7 Φορτία

Θεωρώντας φορτίο πάνω από την πλάκα:

$$q(x, y) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} q_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (2.38)$$

Η οποία έχει λύση:

$$w(x, y) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (2.39)$$

Η θεμελιώδης εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Διαφοροποιώντας την κάθετη μετατόπιση:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_m \sum_n \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= 2 \sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.41)\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση:

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right] w_{mn} &= \frac{q_{mn}}{D} \\ w_{mn} &= \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (2.42)\end{aligned}$$

Οπότε η λύση της εξίσωσης γίνεται:

$$w(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.43)$$

Ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τον ίδιο τύπο για το φορτίο με τη σταθερά q_{mn} να λαμβάνει τιμή για τη σωστή προσομοίωση του καταναμημένου φορτίου:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.44)$$

Θεωρώντας ότι το ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο είναι σταθερό ίσο με $q(x, y) = q_0$ και επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (2.45)$$

Η κάθετη μετατόπιση μετά από αντικατάσταση των δεδομένων είναι:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.46)$$

Τμηματικό καταναμημένο φορτίο

Σε αυτή την περίπτωση γίνεται χρήση του κέντρου βάρους του καταναμημένου φορτίου για να λάβει τις σωστές τιμές η σταθερά q_{mn} καθώς και οι διαστάσεις του που είναι u επί v .

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_{x_0 - \frac{u}{2}}^{x_0 + \frac{u}{2}} \int_{y_0 - \frac{v}{2}}^{y_0 + \frac{v}{2}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.47)$$

Με επίλυση του ολοκληρώματος:

$$q_{mn} = \frac{16 q_0}{mn \pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right) \quad (2.48)$$

Η παραμόρφωση είναι:

$$w(x, y) = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{S_{mn}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.49)$$

Όπου $S_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right)$

Σημειακό φορτίο

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι το σημειακό φορτίο με συντεταγμένες (x_0, y_0) δρα σε μια απειροελάχιστη επιφάνεια διαστάσεων $u \times v$ έτσι ώστε το αντίστοιχο κατανεμημένο φορτίο να είναι:

$$q_0 = \frac{P}{uv} \quad (2.50)$$

Με αντικατάσταση και απλοποίηση στον προηγούμενο τύπο για τμηματικό κατανεμημένο φορτίο το q_{mn} γίνεται:

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \quad (2.51)$$

Η παραμόρφωση λόγω σημειακού φορτίου είναι:

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_m \sum_n \frac{S'_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.52)$$

Όπου $S'_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$

Στη θεωρία πλακών βγαίνει το συμπέρασμα ότι οι στροφές και οι δυνάμεις που εμφανίζονται σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση, λόγω ενός σημειακού φορτίου, είναι παρόμοια και στη θεωρία Reissner-Mindlin και στην κλασική θεωρία πλακών, καθώς η διατμητική παραμόρφωση εμφανίζεται ως ένας επιπρόσθετος όρος για τη διόρθωση της κλασικής θεωρίας. Η παραμόρφωση που λαμβάνεται από τη θεμελιώδη εξίσωση λόγω ενός ζεύγους σημειακών φορτίων, όπως και προηγουμένως είναι παρόμοια στις δύο θεωρίες, δηλαδή οι στροφές και οι δυνάμεις είχαν την κλασική έκφραση και ένας

επιπρόσθετος όρος εισάγει την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης (Palermo, 2001).

2.8 Εφαρμογή

Για την καλύτερη κατανόηση των εφαρμογών με βάση τη θεωρία πλακών παρατίθεται το παράδειγμα από το Martinez Valle J. M. (2015) « A new refined theory of plates with transverse shear deformation for moderately thick and thick plates ». Σύμφωνα με το παράδειγμα μία απλά στηριζόμενη ισότροπη ορθογωνική πλάκα, υπόκειται σε ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο $q(x,y)$ σε επιφάνεια $z = -h/2$ που δρα στο άνω μέρος της κατεύθυνσης z με τον παρακάτω τύπο:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.53)$$

Η ακόλουθη σχέση είναι μια λύση της μορφής $w(x, y)$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες για μια πλάκα με όλα τα άκρα της απλά στηριγμένα:

$$w(x, y) = c \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.54)$$

Όπου η σταθερά c μπορεί να υπολογισθεί από τον τύπο:

$$\Delta \Delta w = \frac{P}{D} + \frac{6(1 + \mu)(\mu - 2)}{5Eh} \Delta P \quad (2.55)$$

Που με αντικατάσταση βρίσκεται:

$$c = \frac{q_0}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} + \frac{\pi^2 t^2 (2 - \mu)}{10(1 - \mu)} \right] \quad (2.56)$$

Με αντικατάσταση του c στο πεδίο μετατόπισης:

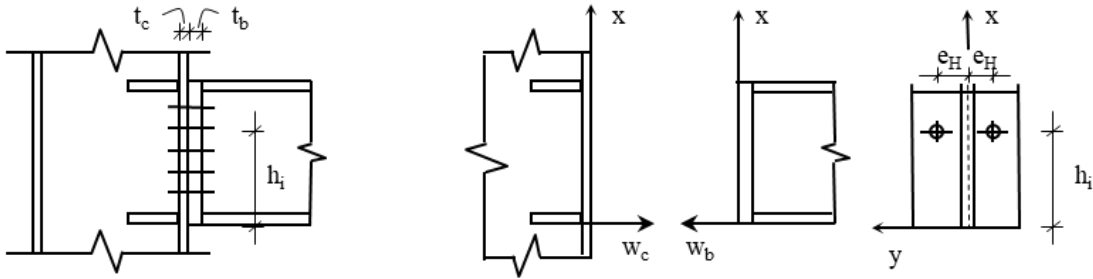
$$w(x, y) = \frac{q_0 \alpha^4}{D\pi^4 \left(1 + \frac{\alpha^2}{b^2} \right)^2} \cdot \left[1 + \frac{\pi^2 t^2 (2 - \mu) \left(1 + \frac{\alpha^2}{b^2} \right)}{10(1 - \mu)\alpha^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2.57)$$

Κεφάλαιο 3

Το πρόβλημα του κόμβου δοκού-υποστυλώματος

3.1 Θεωρήσεις

Θεωρούμε τη σύνδεση δοκού υποστυλώματος του σχήματος 3.1 που αναφέρεται στο ορθογωνικό σύστημα αξόνων Oxy για του υποστύλωμα και Oxw_b για τη δοκό.



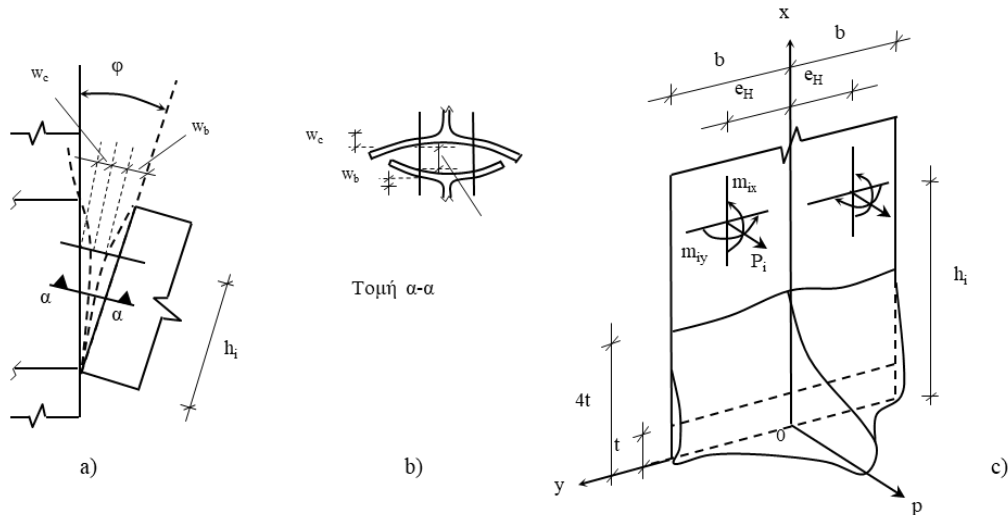
Σχήμα 3.1: Ένας τυπικός κόμβος

Για την σύνδεση, χωρίς βλάβη της γενικότητας του μοντέλου, μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν δύο στήλες κοχλιών, μία σε κάθε μεριά της μετωπικής πλάκας, και k αριθμός σειρών. Το εμβαδό κάθε πυρήνα κοχλία είναι f_i . Το πάχος του κάθε πέλατος του υποστυλώματος είναι t_c και το πάχος τη πλάκας που έχει συγκολληθεί στο άκρο της δοκού είναι t_b . Θεωρούμε ότι το μήκος του κοχλία, χωρίς το μήκος της κεφαλής είναι $l = t_c + t_b$.

Επιπλέον θεωρούμε ότι:

- Α. Μπορούμε να αμελήσουμε τις διατμητικές παραμορφώσεις των κορμών του υποστυλώματος και της δοκού ως πολύ μικρές.
- Β. Κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης που προκαλείται από εξωτερική ροπή M , και λόγω της προηγούμενης θεώρησης, η γραμμή του άξονα Ox παραμένει ευθεία καθώς περιστρέφεται γύρω από το σημείο A κατά γωνία φ (Σχήμα 3.2).
- Γ. Οι παραμορφώσεις των πλακών φαίνονται $a-a$ (Σχήμα 3.2b) όσο υπάρχει πλήρης επαφή με την περιοχή που φαίνεται στο Σχήμα 3.2c, ανάμεσα στο υποστύλωμα και τη δοκό.
- Δ. Εξαιτίας της παραμόρφωσης των πλακών οι συγκεντρωμένες ροπές m_x και m_y φαίνονται να προκαλούνται από τις αντιδράσεις των κεφαλών των κοχλιών (Σχήμα 3.2c).

- Ε. Για $t \geq b/10$ μπορεί να θεωρηθεί ότι $(\rho_x, \rho_y) \ll \varphi$ (Σχήμα 3.3) και έτσι οι προαναφερθείσες ροπές m_x και m_y έχουν αμελητέα επιρροή.



Σχήμα 3.2: Παραμόρφωση και κατανομή τάσεων της σύνδεσης δοκού-υποστύλωματος

3.2 Η συμπεριφορά των κοχλιών

Σύμφωνα με τη θεώρηση Ε είναι φανερό ότι κάθε κοχλίας παραμορφώνεται ως εξής:

- Α. Υπόκειται σε επιμήκυνση Δl που προκαλείται από αξονικό φορτίο P_i . Παίρνουμε τον τύπο:

$$\Delta l_i = \frac{P_i \cdot l}{E_b \cdot f_i} \quad (3.1)$$

Όπου E_b είναι το μέτρο ελαστικότητας των κοχλιών και f_i το εμβαδό του κορμού του κοχλίου.

- Β. Η κεφαλή του κάθε κοχλίου περιστρέφεται κατά γωνία φ που προκαλείται από την περιστροφή της δοκού γύρω από το σημείο Α καθώς και κατά γωνίες ρ_c και ρ_b που προκαλείται από την παραμόρφωση των πέλματων του υποστύλωματος και της μετωπικής πλάκας αντίστοιχα. Δεδομένου ότι $\bar{w}(x, y)$ και $w(x, y)$ είναι οι παραμορφώσεις της πλάκας του πέλματος του υποστύλωματος και της μετωπικής πλάκας της δοκού καταλήγουμε στις σχέσεις:

Πέλματα του υποστύλωματος:

$$\bar{m}_x = -\frac{EJ}{l} \left(6\varphi - 4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.2 a, b)$$

$$\bar{m}_y = \frac{EJ}{l} \left(4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.2 c, d)$$

Μετωπική πλάκα της δοκού:

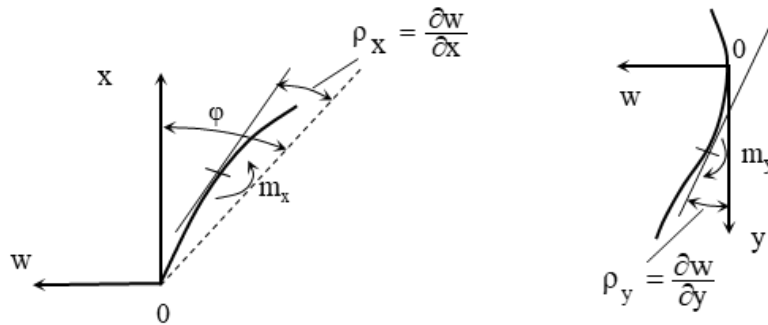
$$m_x = -\frac{EJ}{l} \left(6\varphi - 4 \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)$$

$$m_y = \frac{EJ}{l} \left(4 \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)$$

Όπου J είναι η ροπή αδράνειας της διατομής του κοχλίου.

που δίνεται από τον τύπο: $J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{I_L^2}{4\pi}$ (3.3)

Η επιρροή κάθε όρου στις ροπές m μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια του Σχήματος 3.3.

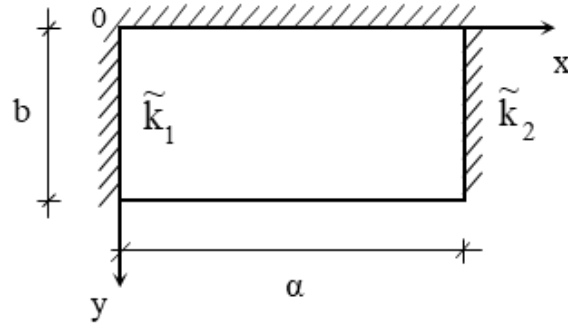


Σχήμα 3.3: Συμβολισμός γωνιών και δρώντων ροπών

3.3 Ιδιομορφές και παραμόρφωση ορθογωνικής πλάκας

Θεωρούμε την παχιά πλάκα του Σχήματος 3.4, φτιαγμένη από ισότροπο ομογενή υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E_p και λόγο Poisson μ . Η θεμελιώδης εξίσωση που περιγράφει τις παραμορφώσεις μιας τέτοιας πλάκας δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση (σύμφωνα με τη θεωρία πλακών του Reissner στο Κεφάλαιο 2):

$$K \cdot \Delta \Delta w(x, y) = p(x, y) - \frac{t^2}{10} \left(\frac{2 - \mu}{1 - \mu} \right) \Delta p(x, y) \quad (3.4)$$



Σχήμα 3.4: Πλάκα και συνοριακές συνθήκες

Όπου Δ είναι το σύμβολο του Laplace, $w(x,y)$ η εγκάρσια μετατόπιση της πλάκας, $p(x,y)$ η εξωτερική φόρτιση, t το πάχος της πλάκας και K σταθερά για την πλάκα που δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{E_p \cdot t^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (3.5)$$

Για την πλάκα του Σχήματος 3.4 που ελαστικά συγκρατείται στη διεύθυνση x με σταθερές \tilde{k}_1 στο $x=0$ και \tilde{k}_2 στο $x=a$, ενώ ταυτόχρονα είναι πλήρως πακτωμένη στο $y=0$ και ελεύθερη στο $y=b$ στη διεύθυνση y , οι παραμορφώσεις $w(x,y)$ μπορούν να αναλυθούν ως εξής:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} X_i(x) \cdot Y_j(y) \quad (3.6)$$

Όπου $X_i(x), Y_j(y)$ είναι οι ιδιομορφές στις δύο διευθύνσεις που δίνονται από τις εξισώσεις (a) και (d) του παραρτήματος Α και a_{ij} είναι άγνωστες σταθερές που θα καθοριστούν.

Οι παραπάνω εξισώσεις $X_i(x), Y_j(y)$ ικανοποιούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις και συνεπώς η μέθοδος του Galerkin μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό των σταθερών a_{ij} :

$$\int_0^a \int_0^b \left[K \Delta \Delta w - p + \frac{t^2(2 - \mu)}{10(1 - \mu)} \Delta p \right] \cdot X_\rho \cdot X_\sigma dx dy \quad (3.7)$$

Όπου $\rho = 1$ έως n και $\sigma = 1$ έως m

Η παραπάνω εξίσωση (7), λόγω της (6) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\int_0^a \int_0^b \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left(Y_j \frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} + X_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial y^4} \right) X_\rho X_\sigma \right] dx dy$$

$$= \frac{1}{K} \int_0^a \int_0^b \left[p(x, y) - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right] X_\rho X_\sigma dx dy \quad (3.8)$$

Όπου $\rho = 1$ έως n και $\sigma = 1$ έως m

Θεωρούμε τα ακόλουθα υπομητρώα:

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \quad [A] = [a_i], \quad s_i = \begin{bmatrix} \left[p - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right] X_i Y_1 \\ \vdots \\ \left[p - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right] X_i Y_n \end{bmatrix}$$

$$[S] = \int_0^a \int_0^b [s_i] dx dy$$

$b_i =$

$$= \begin{bmatrix} (X_i'''' Y_1 + 2X_i'' Y_1'' + X_i Y_1''''') & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (X_i'''' Y_2 + 2X_i'' Y_2'' + X_i Y_2''''') & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (X_i'''' Y_n + 2X_i'' Y_n'' + X_i Y_n''''') \end{bmatrix}$$

$$c_j = \begin{bmatrix} X_j Y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_j Y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_j Y_n \end{bmatrix}, \quad [B] = \int_0^a \int_0^b [b_i] * [c_j] dx dy \quad (3.9)$$

Η εξίσωση (8) γράφεται σε μορφή μητρώου ως εξής: $[B] \cdot [A] = [S]$ και το $[A]$ λαμβάνεται από την εξίσωση:

$$[A] = \frac{1}{K} [B]^{-1} * [S] \quad (3.10)$$

3.4 Περίπτωση φόρτισης με κατανεμημένο φορτίο

Οι τάσεις, όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.2c, μπορούν να περιγραφούν από την ακόλουθη εξίσωση:

$$p = p_0 \cdot \frac{e^{-\frac{10(y)^2}{t_b(b)}} + k}{1+k} \cdot e^{-\frac{(x-0,5t)^2}{5t_b}} \quad (3.11)$$

Η οποία αποτελεί ημιεμπειρική εξίσωση.

3.5 Περίπτωση φόρτισης με συγκεντρωμένα φορτία

Στην περίπτωση ενός συγκεντρωμένου φορτίου P που δρα στο σημείο $x=h, y=e_H$, χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Dirac έχουμε:

$$p(x,y) = P\delta(x-h)\delta(y-e_H) \quad (3.12)$$

και το στοιχείο ρ^{th} του μητρώου s_i καθορίζεται ως εξής:

$$s_i = P \int_0^a \int_0^b \left\{ \delta(x-h)\delta(y-e_H) - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} [\delta''(x-h)\delta(y-e_H) + \delta(x-h)\delta''(y-e_H)] \right\} X_i Y_\rho dx dy$$

Η τελικά:

$$s_i = P \left\{ X_i(h)Y_\rho(e_H) - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} [X_i''(h)Y_\rho(e_H) + X_i(h)Y_\rho''(e_H)] \right\} \quad (3.13)$$

Οι σταθερές a_i που λήφθηκαν από τις εξισώσεις (10) και (13) θα συμβολίζονται για αυτή τη φόρτιση ως a_i^P .

3.6 Περίπτωση φόρτισης με συγκεντρωμένες ροπές

Ο ορισμός των σταθερών s_i που αφορούν την περίπτωση φόρτισης με συγκεντρωμένες ροπές είναι πιο δύσκολος από τις άλλες περιπτώσεις. Στις ακόλουθες εξισώσεις, όλες οι ποσότητες που αντιστοιχούν στα πέλματα των υποστυλωμάτων θα παρουσιάζονται ανωγραμμισμένες. Αν υποθέσει κανείς, ότι στιγμιαία, το μόνο φορτίο που έχει επίδραση από τις συγκεντρωμένες ροπές είναι αυτό που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2). Για τη μετωπική πλάκα της δοκού ισχύει:

$$p(x,y) = \frac{EI}{l} \left(6\varphi - 4 \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \delta'(x-h)\delta(y-e_H) - \frac{EI}{l} \left(4 \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \delta(x-h)\delta'(y-e_H)$$

Η λόγω της εξίσωσης (6) η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{6EJ}{l} \varphi \delta'(x-h)\delta(y-e_H) - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j a_{ij} X_i' Y_j \delta'(x-h)\delta(y-e_H) \\ &\quad - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{X}_i' \bar{Y}_j \delta'(x-h)\delta(y-e_H) \\ &\quad - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j a_{ij} X_i Y_j' \delta(x-h)\delta'(y-e_H) \\ &\quad - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j a_{ij} \bar{X}_i \bar{Y}_j' \delta(x-h)\delta'(y-e_H) \end{aligned}$$

Η τελικά:

$$p(x, y) = \frac{6EJ}{l} \varphi \delta'(x-h) \delta(y-e_H) - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \Phi_{ij} - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j \bar{\alpha}_{ij} \bar{\Phi}_{ij} \quad (3.14a, b)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(x, y) &= \frac{\partial X_i}{\partial x} Y_j \delta'(x-h) \delta(y-e_H) + X_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \delta(x-h) \delta'(y-e_H) \\ \bar{\Phi}_{ij}(x, y) &= \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial x} \bar{Y}_j \delta'(x-h) \delta(y-e_H) + \bar{X}_i \frac{\partial \bar{Y}_j}{\partial y} \delta(x-h) \delta'(y-e_H) \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκεται για την πλάκα του υποστυλώματος:

$$p(x, y) = \frac{6EJ}{l} \varphi \delta'(x-h) \delta(y-e_H) - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \Phi_{ij} - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j \bar{\alpha}_{ij} \bar{\Phi}_{ij} \quad (3.15)$$

Με Φ_{ij} και $\bar{\Phi}_{ij}$ από τις εξισώσεις (3.16) που ακολουθούν. Βρίσκεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \varphi [\delta'''(x-h) \delta(y-e_H) + \delta'(x-h) \delta''(y-e_H)] \\ &\quad - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} \right) - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j \bar{\alpha}_{ij} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} &= \varphi [\delta'''(x-h) \delta(y-e_H) + \delta'(x-h) \delta''(y-e_H)] \\ &\quad - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j \bar{\alpha}_{ij} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial y^2} \right) - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Και τελικά:

$$\begin{aligned} p(x, y) &- \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{6EJ}{l} \varphi \left\{ \delta'(x-h) \delta(y-e_H) \right. \\ &\quad \left. - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} [\delta'''(x-h) \delta(y-e_H) + \delta'(x-h) \delta''(y-e_H)] \right\} \\ &\quad - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \left[\Phi_{ij} - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j \bar{\alpha}_{ij} \left[\bar{\Phi}_{ij} - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}(x, y) &= \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{6EJ}{l} \varphi \left\{ \delta'(x-h)\delta(y-e_H) \right. \\
&\quad \left. - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} [\delta'''(x-h)\delta(y-e_H) + \delta'(x-h)\delta'''(y-e_H)] \right\} \\
&\quad - \frac{4EJ}{l} \sum_i \sum_j \bar{a}_{ij} \left[\bar{\Phi}_{ij} - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_{ij}}{\partial y^2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{2EJ}{l} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \left[\Phi_{ij} - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.17b)
\end{aligned}$$

Επί προσθέτως στις εξισώσεις (9) συμβολίζουμε:

$$s_i = \frac{6EJ}{l} \varphi \begin{bmatrix} -X'_i(h)Y_1(e_H) + \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} [X_i'''(h)Y_1(e_H) + X'_i(h)Y_1'''] \\ \vdots \\ -X'_i(h)Y_n(e_H) + \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} [X_i'''(h)Y_n(e_H) + X'_i(h)Y_n'''] \end{bmatrix} \quad (3.18a)$$

$d_i =$

$$= \frac{2EJ}{l} \begin{bmatrix} \left[\Phi_{i1} - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{i1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{i1}}{\partial y^2} \right) \right] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \left[\Phi_{in} - \frac{t^2(2-\mu)}{10(1-\mu)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{in}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{in}}{\partial y^2} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (3.18b)$$

Και $\bar{a}_i, \bar{A}, \bar{c}_j, \bar{b}_i, \bar{s}_i, \bar{d}_i$ είναι οι ανάλογες εκφράσεις για το υποστύλωμα με τα στοιχεία του δεύτερου ανωγραμμισμένου μέλους. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
A &= [a_i], \quad B = \int_0^a \int_0^b [b_i] * [c_j] dx dy, \quad D = \int_0^a \int_0^b [d_i] * [c_j] dx dy, \\
Z &= \int_0^a \int_0^b [\bar{d}_i] * [c_j] dx dy, \quad S = \int_0^a \int_0^b [s_i] dx dy \quad (3.19a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= [\bar{a}_i], \quad \bar{B} = \int_0^a \int_0^b [\bar{b}_i] * [\bar{c}_j] dx dy, \quad \bar{D} = \int_0^a \int_0^b [\bar{d}_i] * [\bar{c}_j] dx dy, \\
\bar{Z} &= \int_0^a \int_0^b [\bar{d}_i] * [\bar{c}_j] dx dy, \quad \bar{S} = \int_0^a \int_0^b [\bar{s}_i] dx dy \quad (3.19b)
\end{aligned}$$

Έχουμε το παρακάτω σύστημα μητρώων:

$$\text{Για τη δοκό-πλάκα: } (B + 2D) * A + D * \bar{A} = S$$

$$\text{Για το υποστίλωμα πλάκα: } \bar{D} * A + (\bar{B} + 2\bar{D}) * A = \bar{S} \quad (3.20)$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει:

$$\begin{aligned} A &= [(\bar{B} + 2\bar{D})^{-1} * \bar{D} - D^{-1} * (B + 2D)]^{-1} * [(\bar{B} + 2\bar{D})^{-1} * \bar{S} - D^{-1} * S] \\ \bar{A} &= [(B + 2D)^{-1} * D - \bar{D}^{-1} * (\bar{B} + 2\bar{D})]^{-1} * [(B + 2D)^{-1} * S - \bar{D}^{-1} * \bar{S}] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Σύμφωνα με την θεώρηση Δ του κεφαλαίου 3.1 σημειώνουμε ότι η επιρροή των συγκεντρωμένων ροπών εξαρτάται κυρίως από τη γωνία φ.

Οι σταθερές α_{ij} για αυτή την περίπτωση δίνονται από:

$$[a_i^m] = [a_i^\varphi] + [a_i^{m_0}] \quad (3.22a)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} [a_i^\varphi] &= -\varphi [(\bar{B} + 2\bar{D})^{-1} * \bar{D} - D^{-1} * (B + 2D)]^{-1} * D^{-1} * S \\ [a_i^{m_0}] &= [(\bar{B} + 2\bar{D})^{-1} * \bar{D} - D^{-1} * (B + 2D)]^{-1} * (\bar{B} + 2\bar{D})^{-1} * \bar{S} \end{aligned}$$

Και μέσω ανάλογης μεθόδου:

$$[\bar{a}_i^m] = [\bar{a}_i^\varphi] + [\bar{a}_i^{m_0}] \quad (3.22b)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} [\bar{a}_i^\varphi] &= -\varphi [(B + 2D)^{-1} * D - \bar{D}^{-1} * (\bar{B} + 2\bar{D})]^{-1} * \bar{D}^{-1} * \bar{S} \\ [\bar{a}_i^{m_0}] &= [(B + 2D)^{-1} * D - \bar{D}^{-1} * (\bar{B} + 2\bar{D})]^{-1} * (B + 2D)^{-1} * S \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για το m_y υπάρχει μόνο ο όρος $a_i^{m_0}$ επειδή δεν υπάρχει αρχική γωνία παραμόρφωσης φ στη διεύθυνση y.

3.7 Ελαστική ανάλυση

Υποθέτουμε ότι από τους 2k κοχλίες μόνο οι 2λ βρίσκονται σε ένταση και επιπροσθέτως ο κοχλίας i βρίσκεται υπό φορτίο P_i . Για τη δοκό ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} w_b(x, y) &= \sum_{r=1}^{\lambda} \left(\frac{P_r}{K_b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^{Pr} X_i Y_j \right) + \sum_{r=1}^{\lambda} \left(\frac{1}{K_b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^{mxr} X_i Y_j \right) \\ &+ \sum_{r=1}^{\lambda} \left(\frac{1}{K_b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^{myr} X_i Y_j \right) - \frac{p_0}{K_c} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^{p_0} X_i Y_j \quad (3.23) \end{aligned}$$

Και για το υποστύλωμα:

$$\begin{aligned} \bar{w}_c(x, y) = & \sum_{r=1}^{\lambda} \left(\frac{P_r}{K_b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}^{Pr} \bar{X}_i \bar{Y}_j \right) + \sum_{r=1}^{\lambda} \left(\frac{1}{K_b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}^{mxr} \bar{X}_i \bar{Y}_j \right) \\ & + \sum_{r=1}^{\lambda} \left(\frac{1}{K_b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}^{myr} \bar{X}_i \bar{Y}_j \right) - \frac{p_0}{K_c} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{a}_{ij}^{p_0} \bar{X}_i \bar{Y}_j \quad (3.24) \end{aligned}$$

Από το Σχήμα 3.2 και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1) παίρνουμε το παρακάτω σύστημα με $(\lambda+2)$ εξισώσεις για τον καθορισμό των $(\lambda+2)$ αγνώστων $P_1, \dots, P_\lambda, p_0, \varphi$:

$$\begin{aligned} w_b(h_i, e_H) + \frac{l}{E f_i} P_i + \bar{w}_c(h_i, e_H) = h_i \cdot \varphi, \quad \text{για } i = 1 \text{ έως } \lambda \\ \sum_{i=1}^{\lambda} P_i = \int_0^{4t} \int_0^b p dx dy \\ \sum_{i=1}^{\lambda} P_i \cdot h_i + \int_0^{4t} \int_0^b p \cdot x dx dy = M \quad (3.25) \end{aligned}$$

3.8 Ανελαστική ανάλυση

Από την ελαστική ανάλυση μπορούμε να καθορίσουμε τα ακόλουθα:

α. Την καμπύλη (M, φ) .

β. Τις αντιδράσεις $V_b(0, y), V_b(a, y), V_c(0, y), V_c(a, y)$ από την εξίσωση:

$$V(x_0, y) = -D \left(\frac{\partial^3 w(x_0, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x_0, y)}{\partial x \partial y^2} \right)$$

Διαμήκους του ορίου $x = x_0$

γ. Οι τάσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Et}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Και συνεπώς βρίσκονται οι μέγιστες τάσεις:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Από το οποίο μπορούμε να βρούμε την ύπαρξη ή μη διαρροής είτε στα πέλματα υποστρώματος είτε στη μετωπική πλάκα της δοκού. Επίσης μπορούν να σχεδιαστούν καμπύλες για τη μέγιστη τάση σ_{max} για να βρεθούν οι πιθανές περιοχές διαρροής. Αν $\sigma_{max}(x, y) \leq f_y$ δοκιμάζουμε τις τάσεις των κοχλιών. Αν $\sigma_i = P_i/f_i \geq f_y$ και ταυτόχρονα $\sigma_j = P_j/f_j \leq f_y$ για $1 \leq j \leq \lambda$ και $j \neq i$. Τότε λύνουμε πάλι το πρόβλημα με φορτία: $M, P_i = f_i f_y$ και $\lambda+2$ αγνώστους, οι ποσότητες P_j (j από 1 έως λ και $j \neq i$), e, p_0, φ .

Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται μέχρι όλοι οι κοχλίες που πρέπει να θεωρούνται ότι βρίσκονται στην ελαστική περιοχή, να είναι πραγματικά σε αυτήν. Αν όλοι οι λ κοχλίες είναι πλαστικώς καταπονημένα, τότε η σύνδεση έχει αστοχήσει. Περαιτέρω ο τοπικός λυγισμός του πέλματος της δοκού μπορεί να καθοριστεί από το $V_b(0, y)$.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά αποτελέσματα

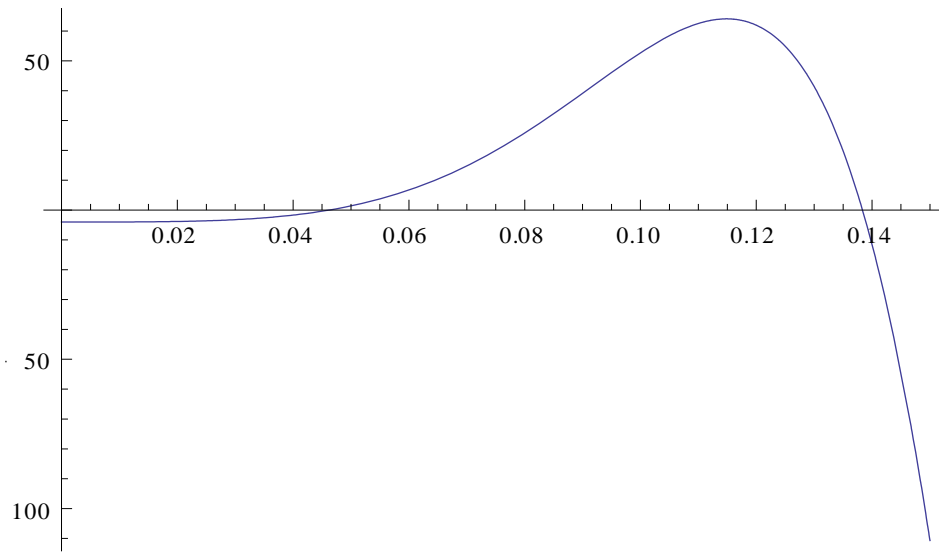
Η ελαστική ανάλυση της παραπάνω διαδικασίας εφαρμόστηκε για τον καθορισμό των παραμορφώσεων και τάσεων που αναπτύσσονται σε σύνδεση με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: διάμετρος κοχλία $d=22\text{mm}$, θέσεις (mm) $h_1=80$, $h_2=150$, $h_3=220$, $h_4=290$, $h_5=360$. Η μετωπική πλάκα έχει πλάτος 200mm , και ύψος 440mm ενώ το πέλμα του υποστυλώματος έχει πλάτος 200mm , και το πάχος του πέλματος της δοκού 16mm . Ο κόμβος υπόκειται σε καμπτική ροπή 2000dNm . Η κλασσική ανάλυση (γραμμική κατανομή των τάσεων) δίνει:

$F_5=1462\text{dN}$, $F_4=1116\text{dN}$, $F_3=770\text{dN}$, $F_2=420\text{dN}$, $F_1=78\text{dN}$ και $p_{max}=114\text{dN/cm}^2$. Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από τα πάχη t_b , t_c και t .

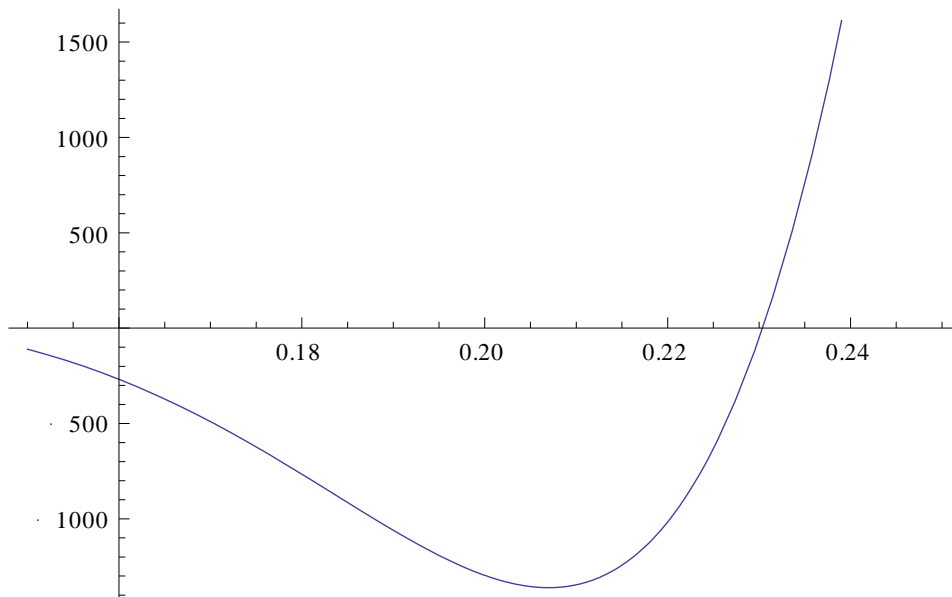
Χρησιμοποιώντας τα προτεινόμενα μοντέλα και δεδομένου ότι $t_b = t_c = 20\text{mm}$, $t=16\text{mm}$ και $k_i=2$ βρίσκουμε: $F_5=2300\text{dN}$, $F_4=464\text{dN}$, $F_3=661\text{dN}$, $F_2=0\text{dN}$, $F_1=0\text{dN}$ και $p_{max}=215\text{dN/cm}^2$. Ενώ για $t_b = t_c = 30\text{mm}$, $t=16\text{mm}$ και $k_i=2$ βρίσκουμε: $F_5=1889\text{dN}$, $F_4=923\text{dN}$, $F_3=702\text{dN}$, $F_2=54\text{dN}$, $F_1=0\text{dN}$ και $p_{max}=224\text{dN/cm}^2$. Υπάρχουν τελείως διαφορετικά αποτελέσματα μέσω ανάλυσης με ένα ρεαλιστικό μαθηματικό μοντέλο. Για το προτεινόμενο μοντέλο σημειώνεται ότι είναι δεκτό όταν χρησιμοποιούνται περισσότερες από 3 ιδιομορφές για κάθε διεύθυνση.

Ακολουθούν τα διαγράμματα που προέκυψαν από την εκτέλεση της διαδικασίας με την εφαρμογή Mathematica του οποίου ο κώδικας παρατίθεται στο παράρτημα Β.

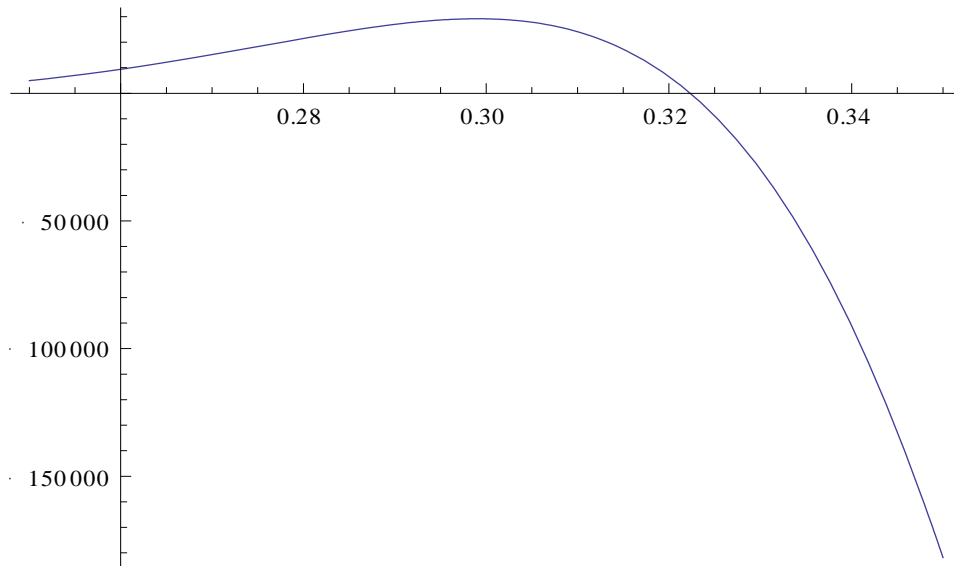
Οι ιδιομορφές στην διεύθυνση x βρέθηκαν:



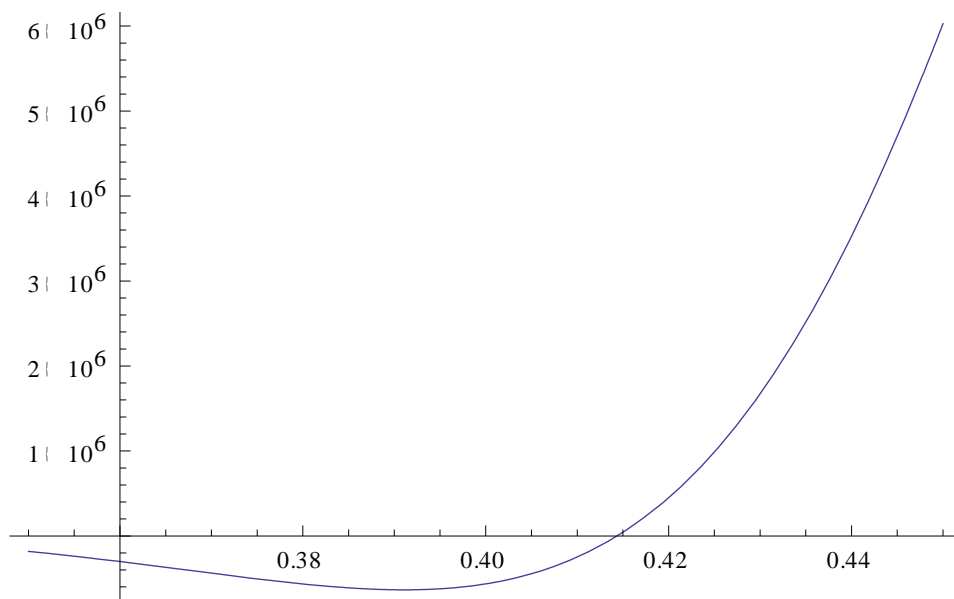
Σχήμα 4.1 Ιδιομορφή διεύθυνσης x με $\lambda = 0.139387$



Σχήμα 4.2 Ιδιομορφή διεύθυνσης x με $\lambda = 0.231706$

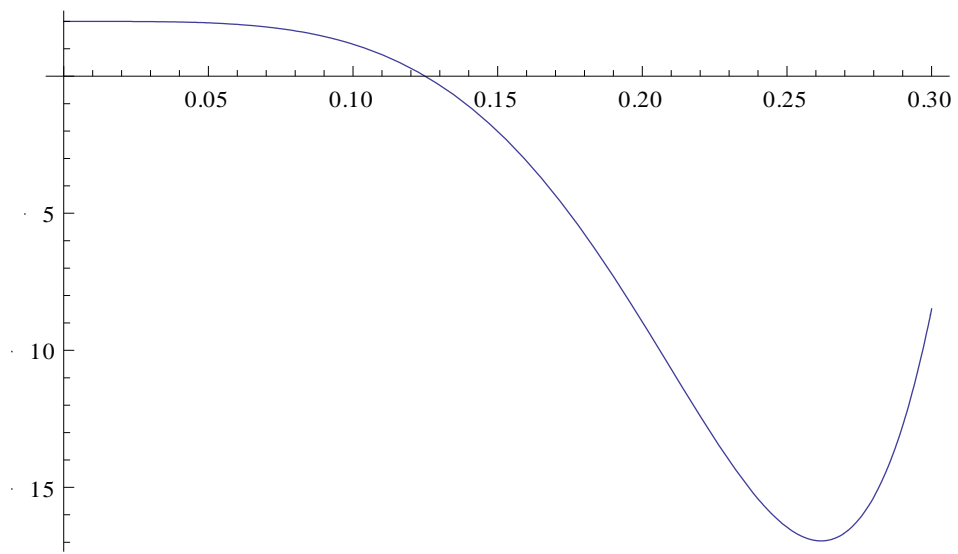


Σχήμα 4.3 Ιδιομορφή διεύθυνσης x με $\lambda = 0.324788$

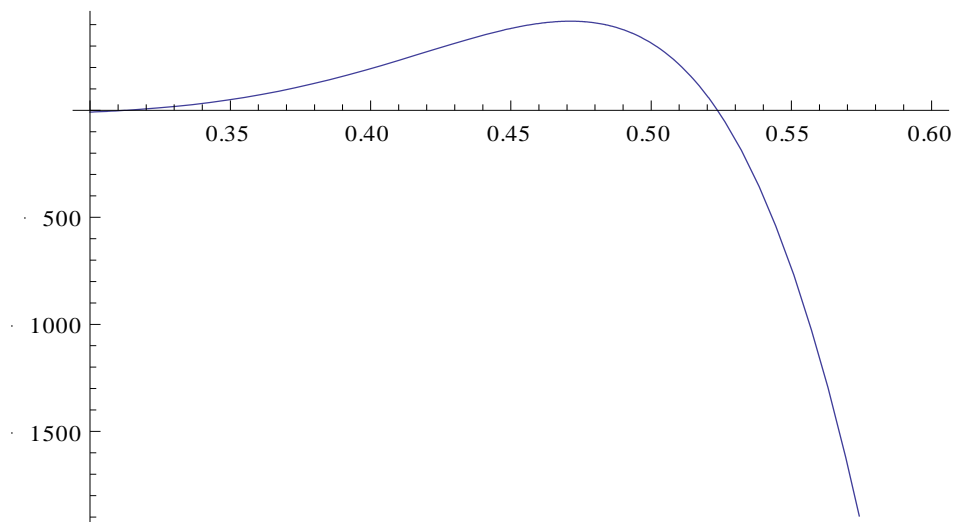


Σχήμα 4.4 Ιδιομορφή διεύθυνσης x με $\lambda = 0.418024$

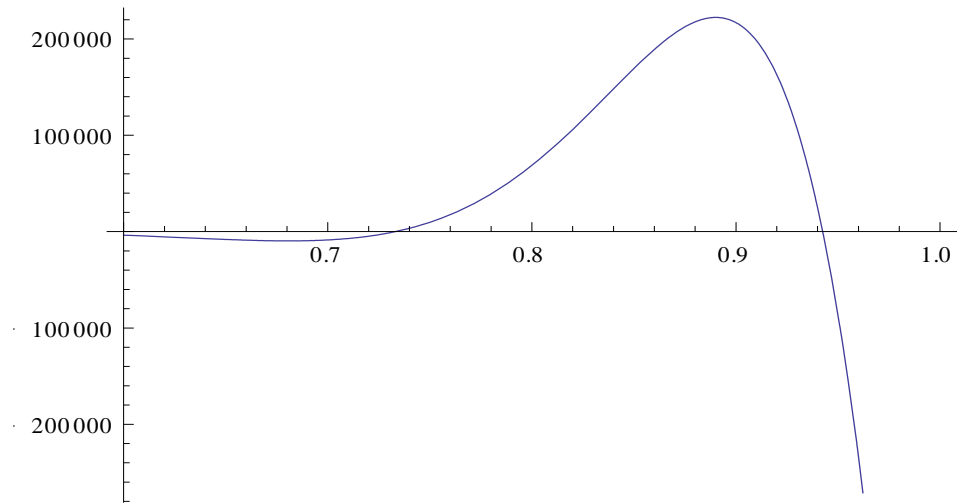
Οι ιδιομορφές στην διεύθυνση y βρέθηκαν:



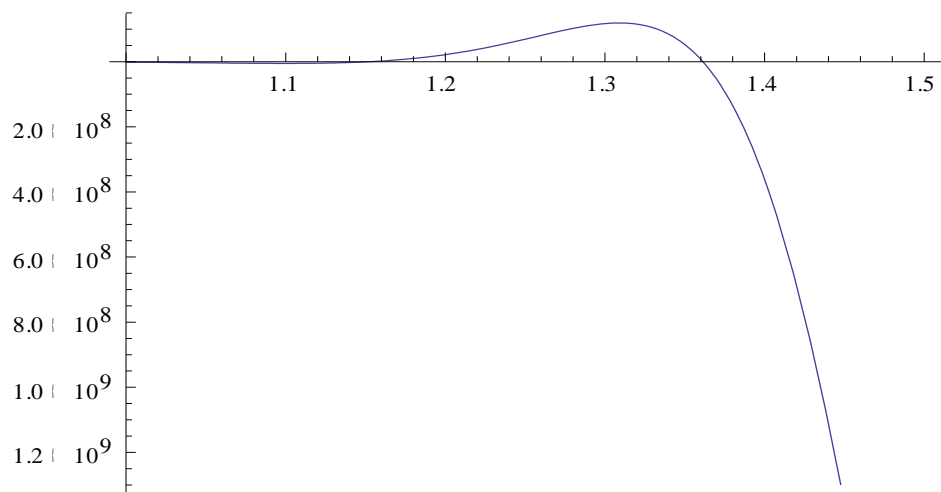
Σχήμα 4.5 Ιδιομορφή διεύθυνσης y με $k = 0.125007$



Σχήμα 4.6 Ιδιομορφή διεύθυνσης y με $k = 0.52365$

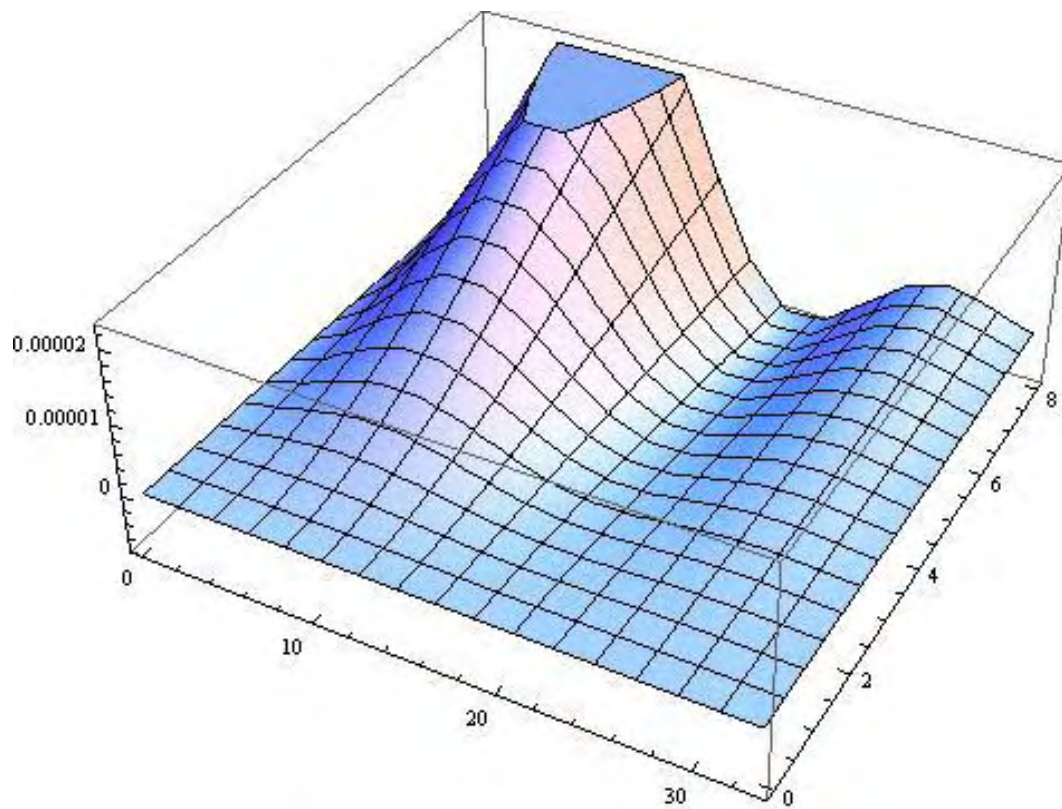


Σχήμα 4.7 Ιδιομορφή διεύθυνσης y με $k = 0.942478$

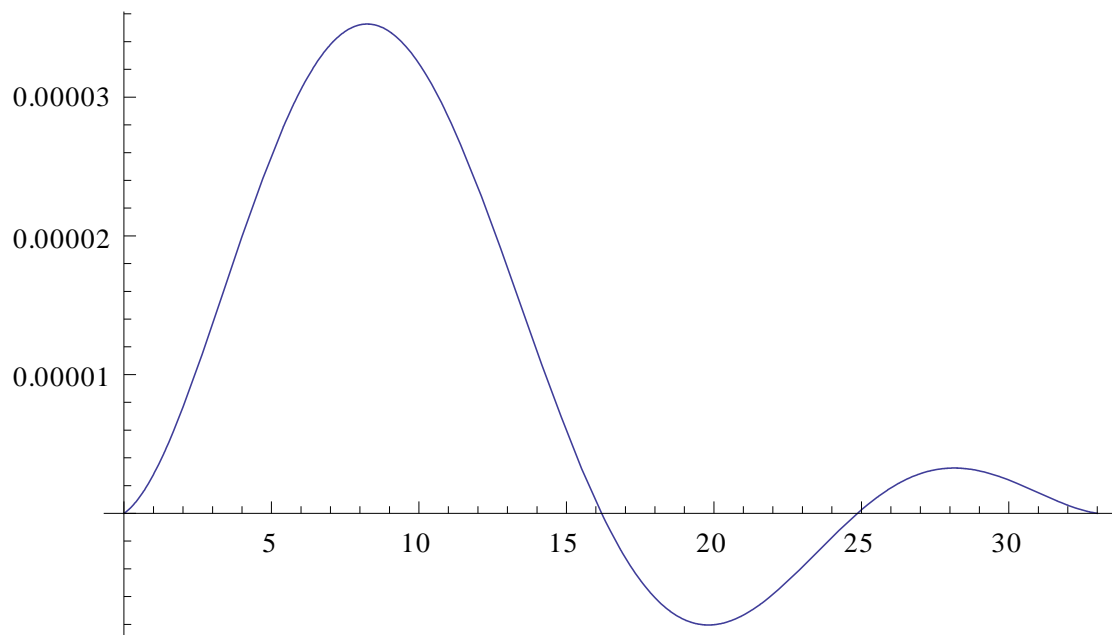


Σχήμα 4.8 Ιδιομορφή διεύθυνσης y με $k = 1.15192$

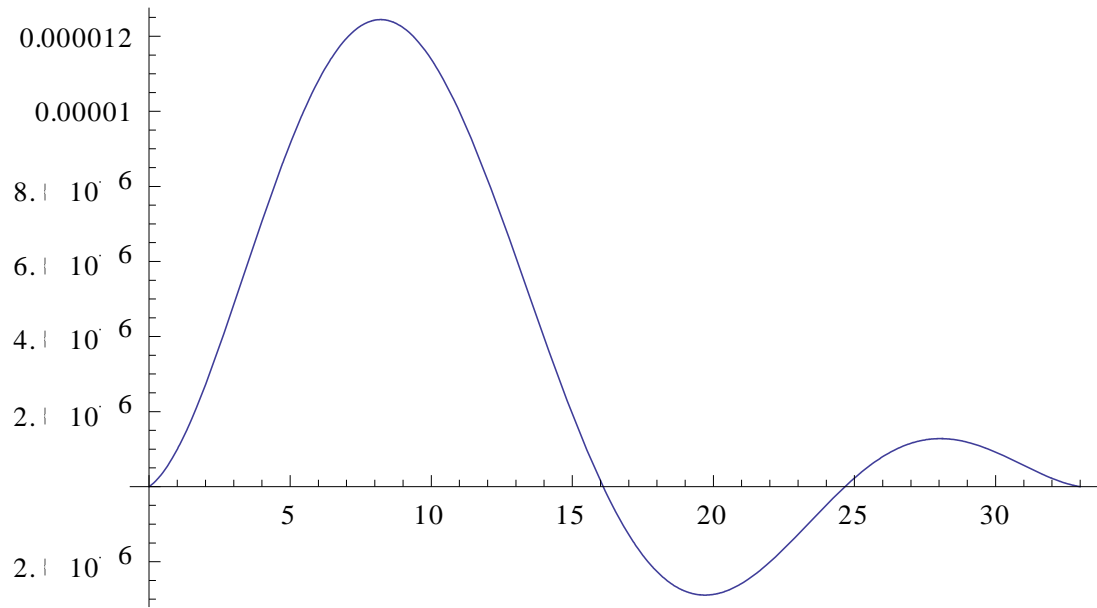
Για επίλυση με τρεις ιδιομορφές βρίσκουμε τις παραμορφώσεις:



Σχήμα 4.9 Παραμορφώσεις για επίλυση με τρεις ιδιομορφές

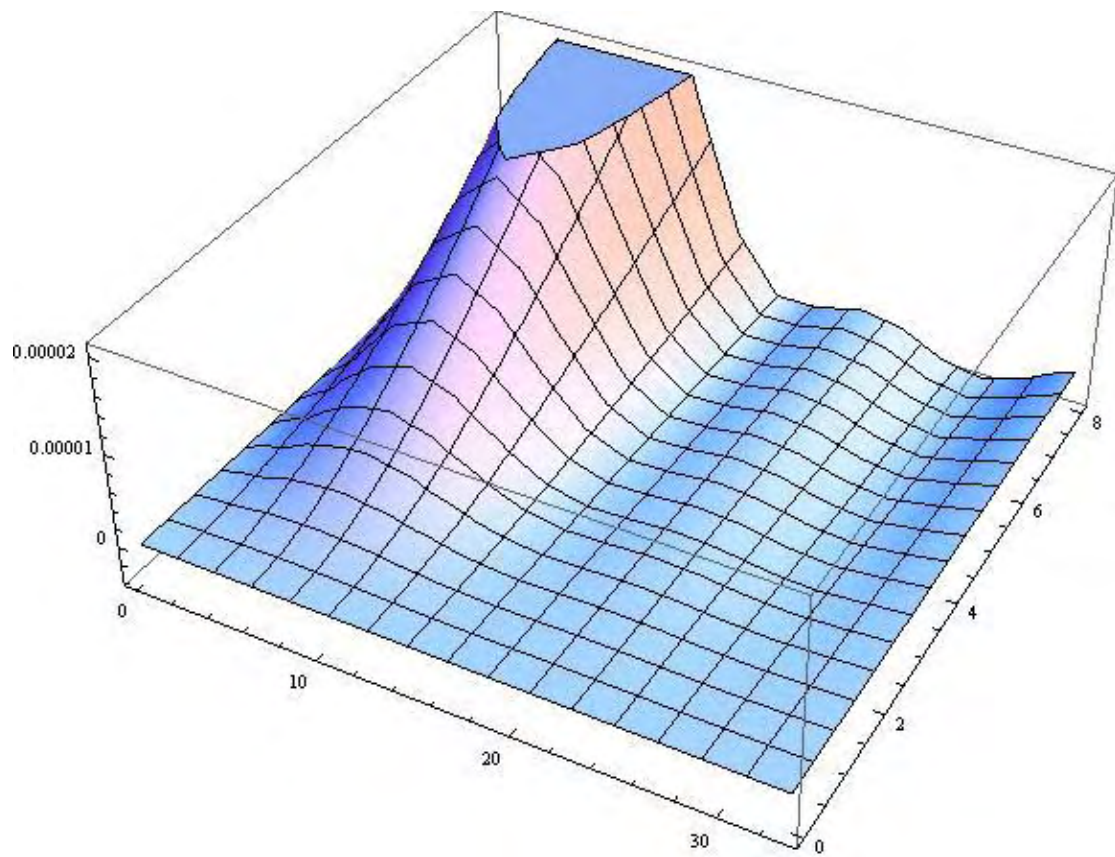


Για $y = 8$

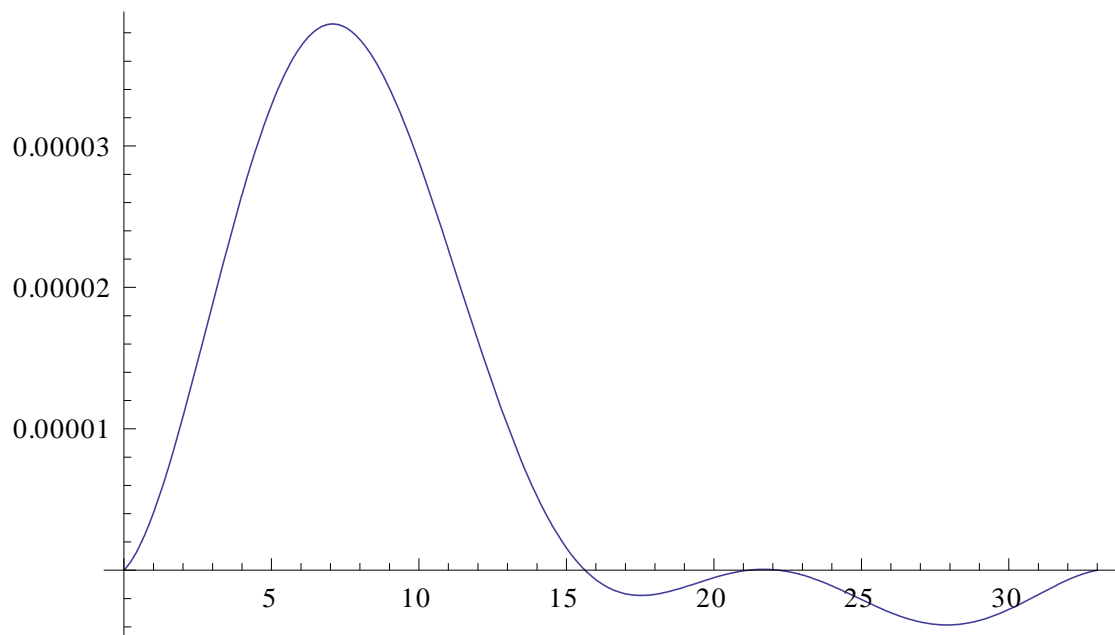


Για $y = 4$

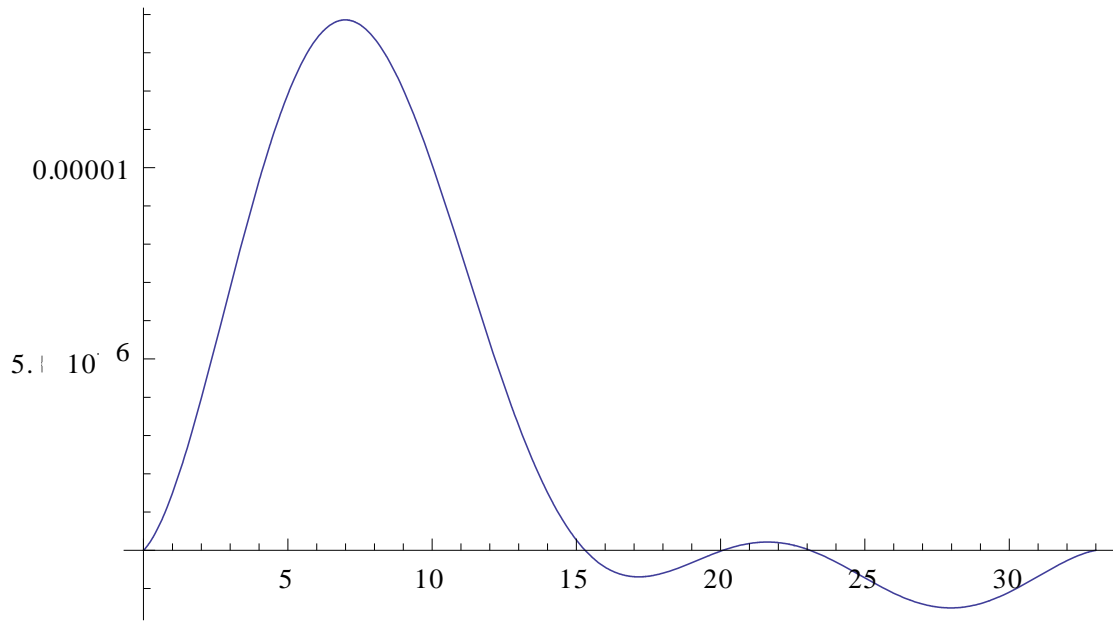
Για επίλυση με τέσσερις ιδιομορφές βρίσκουμε τις παραμορφώσεις:



Σχήμα 4.10 Παραμορφώσεις για επίλυση με τέσσερις ιδιομορφές



Για $y = 8$



Για $\alpha = 4$

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Το προτεινόμενο μοντέλο επίλυσης δίνει αποδεκτές τιμές για περισσότερες από τρεις ιδιομορφές. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων μπορεί να βελτιωθεί με την αύξηση του αριθμού των ιδιομορφών σε κάθε κατεύθυνση. Παρά ταύτα, λόγω της ύπαρξης υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θα πρέπει να εφαρμοστούν παράλληλα και τεχνικές σταθεροποίησης της λύσης. Η κατανομή των γενικευμένων δυνάμεων, παρόλη τη σχετικά μικρή τιμή της επιβαλλόμενης ροπής είναι μη γραμμική. Κατά συνέπεια, τούτο αποτελεί μια αρχική ένδειξη της ορθότητας της προτεινόμενης προσέγγισης, την οποία σκοπεύουμε να τελειοποιήσουμε στο μέλλον, με περισσότερες εφαρμογές και συγκρίσεις.

Τονίζεται με έμφαση, ότι η χρήση του Mathematica απαιτήσε μεγάλο κόπο και υπολογιστικό χώρο και χρόνο, όπως προκύπτει και από τα αρχεία που περιέχονται υπό τύπον Παραρτήματος Β.

Βιβλιογραφία

- Bathe K. J. & Dvorkin E. N. (1985) « Short Communication a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation », International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21, 367-383 (1985).
- Bursi O. & Jaspart J. (1997) « Calibration of a Finite Element Model for Isolated Bolted End-Plate Steel Connections », Department MSM, University of Liège, Belgium.
- Chennamsetti R. (2013) « Theory of Plates », rd_mech@yahoo.co.in
- Cirak F. « Finite Element Formulation for Plates », http://www-g.eng.cam.ac.uk/csml/teaching/4d9/4D9_handout3.pdf
- EN 13031-1:2001
- EN 1993-1-8
- Eurocode 3, 1992
- Faella C. & Piluso V. & Rizzano G. (2000) « Structural steel semirigid connections : theory, design and software », Boca Raton : CRC Press, 2000
- Friedman N. « Numerical methods for PDEs FEM - abstract formulation, the Galerkin method », Technische Universität Braunschweig, https://www.wire.tu-bs.de/lehre/ss14/pde2/PDE2_Tutorial_2_Galerkin_method.pdf
- Lemonis M. & Gantes Ch. (2008) « Mechanical modeling of the nonlinear response of beam-to-column joints », Journal of Constructional Steel Research 65 (2009).
- Martinez Valle J. M. (2015) « A new refined theory of plates with transverse shear deformation for moderately thick and thick plates » Mechanics Department, EPS; Leonardo da Vinci Building, Rabanales Campus, Cordoba University, 14071, Cordoba, Spain.
- Palermo Jr. L. (2001) « Plate analysis using classical or Reissner-Mindlin theories », Faculty of Civil Engineering, State University at Campinas, Brazil.
- Rusten T. (2008), « The Finite Element Method in Solid Mechanics II » Department of Mathematics University of Oslo.

- Simões da Silva L. & Santiago Al. & Vila Real P. (2002) « Post-limit stiffness and ductility of end-plate beam-to-column steel joints », Computers and Structures 80 (2002) 515-531.
- Vrabie M. & Băetu S. (2013) « Comparative Analysis of the Bending Theories for Isotropic Plates. Case Study » Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iași Tomul LIX (LXIII), Fasc. 3, 2013

Παράρτημα Α

Οι ιδιομορφές για μια ελαστικά συγκρατημένη δοκό με ελατήρια \tilde{k}_1 και \tilde{k}_2 είναι:

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x + A_n \cos\lambda_n x + B_n \sinh\lambda_n x - A_n \cosh\lambda_n x \quad (\text{a})$$

Όπου:

$$\begin{aligned} A_n &= (\tilde{k}_2 \sin\lambda_n a - \tilde{k}_1 \sinh\lambda_n a) / (\tilde{k}_2 \cosh\lambda_n a - \tilde{k}_2 \cos\lambda_n a + 2\lambda_n \sinh\lambda_n a) \\ B_n &= (-\tilde{k}_1 \cos\lambda_n a + \tilde{k}_1 \cosh\lambda_n a + 2\lambda_n \sin\lambda_n a) / (\tilde{k}_2 \cosh\lambda_n a - \tilde{k}_2 \cos\lambda_n a + 2\lambda_n \sinh\lambda_n a) \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ λαμβάνονται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned} &(\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \cos\lambda_n a (\tilde{k}_2 \cosh\lambda_n a + 2\lambda_n \sinh\lambda_n a) - \sin\lambda_n a [4\tilde{k}_2 \lambda_n \cosh\lambda_n a + \\ &(-\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 + \tilde{k}_2^2 + 4\lambda_n^2) \sinh\lambda_n a] = \tilde{k}_2 (\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2) \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Οι ιδιομορφές για μία δοκό πακτωμένη στο $y=0$ και ελεύθερη στο $y=b$ δίνονται από:

$$Y_m = \sin k_m y + \Gamma_m \cos k_m y - \sinh k_m y - \Gamma_m \cosh k_m y \quad (\text{d})$$

Όπου:

$$\Gamma_m = -(\sin k_m b + \sinh k_m b) / (\cos k_m b + \cosh k_m b) \quad (\text{e})$$

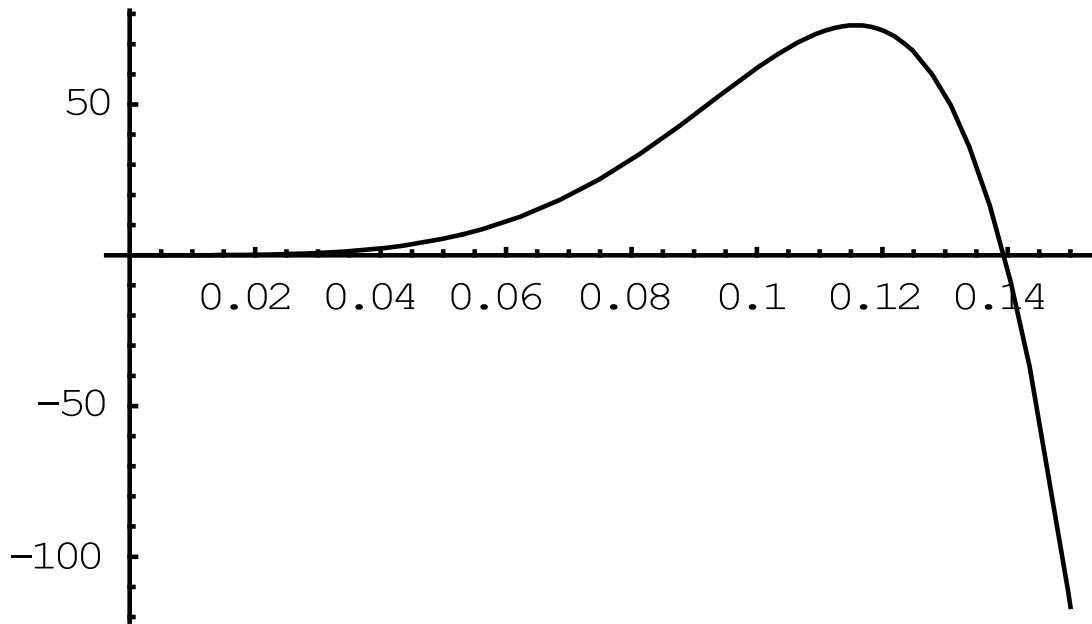
Και k_m από: $\cos kb \cosh kb = -1$

Παράρτημα Β

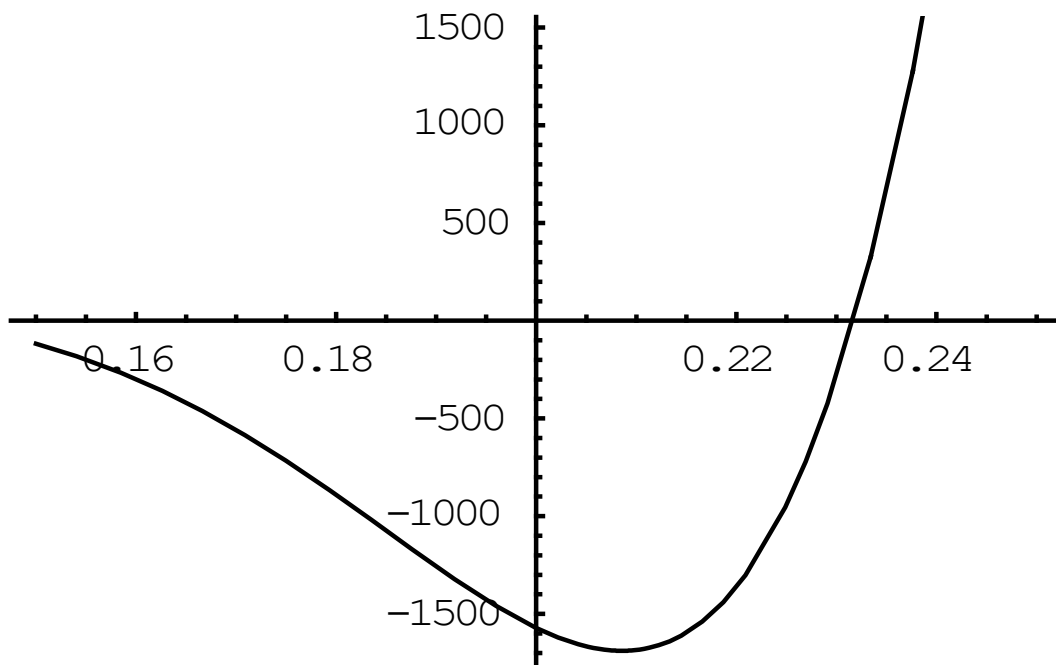
Στο παράρτημα Β που ακολουθεί παρατίθεται ο προγραμματισμός που έγινε στο πρόγραμμα Wolfram Mathematica 7.0 για την εύρεση των αριθμητικών αποτελεσμάτων στα παραδείγματα και των γραφικών παραστάσεων των παραμορφώσεων.

Ιδιομορφές στην διεύθυνση x

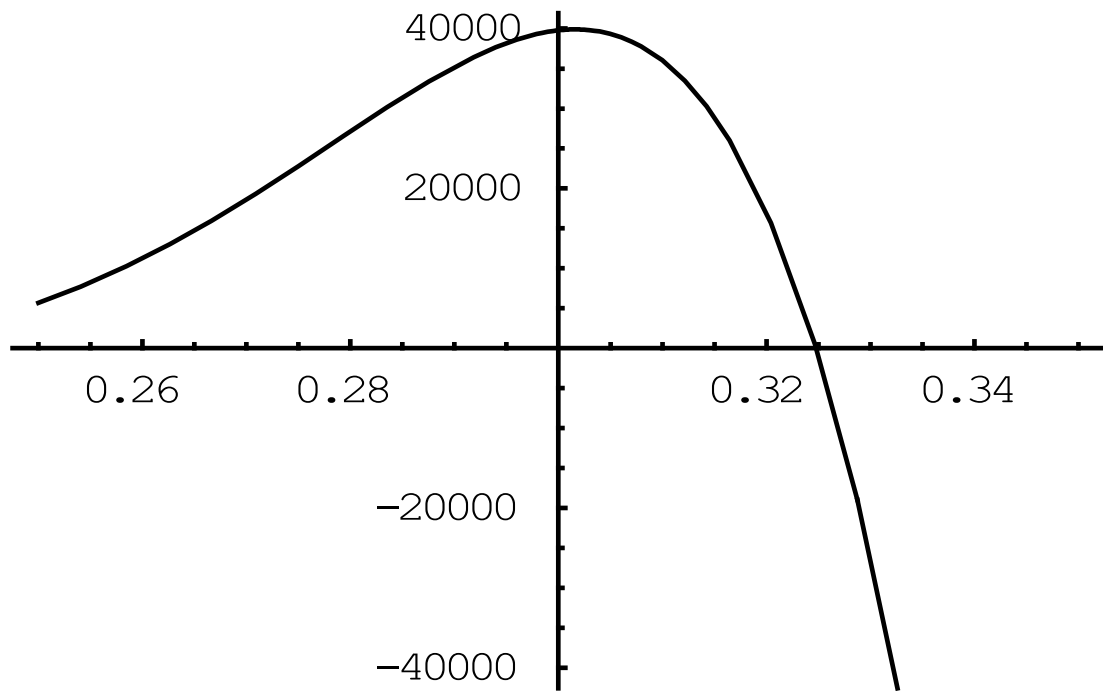
```
ClearAll[An,spr1,spr2,λ,a,x,Fλ]
a=33;
spr1=2;
spr2=2;
Fλ=2*λ2*Sin[λ*a]*Sinh[λ*a]-
spr1*spr2*Cos[λ*a]*Cosh[λ*a]+λ*(spr1+spr2)*Sin[λ*a]*Cosh[
λ*a]
-λ*(spr1+spr2)*Cos[λ*a]*Sinh[λ*a]+spr1*spr2;
Plot[Fλ,{λ,0,0.15}]
FindRoot[Fλ==0,{λ,0.13}]
Plot[Fλ,{λ,0.15,0.25}]
FindRoot[Fλ==0,{λ,0.22}]
Plot[Fλ,{λ,0.25,0.35}]
FindRoot[Fλ==0,{λ,0.309}]
Plot[Fλ,{λ,0.35,0.45}]
FindRoot[Fλ==0,{λ,0.409}]
```



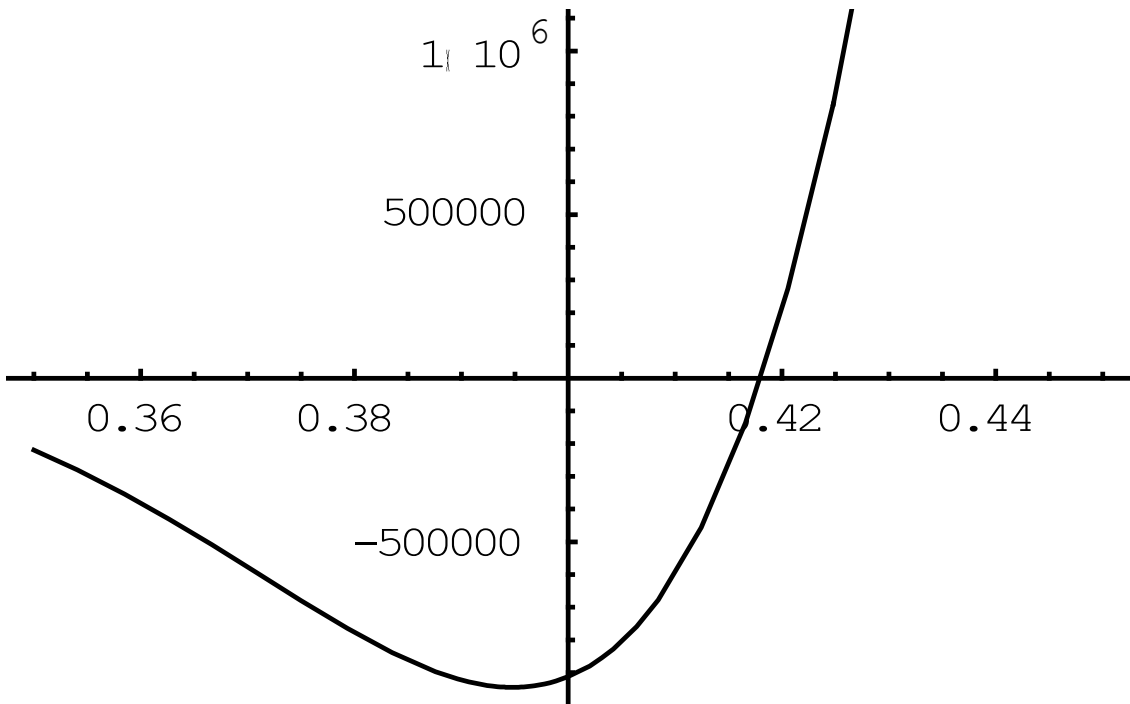
{ $\lambda \rightarrow 0.139387$ }



{ $\lambda \rightarrow 0.231706$ }



$\{\lambda \rightarrow 0.324788\}$



$\{\lambda \rightarrow 0.418024\}$

Ιδιομορφές στη διεύθυνση y

ClearAll[An,k,b,Fk]

b=15;

```
Fk=Cos[k*b]*Cosh[k*b]+1;
```

```
Plot[Fk,{k,0,0.3}]
```

```
FindRoot[Fk==0,{k,0.2}]
```

```
Plot[Fk,{k,0.3,0.6}]
```

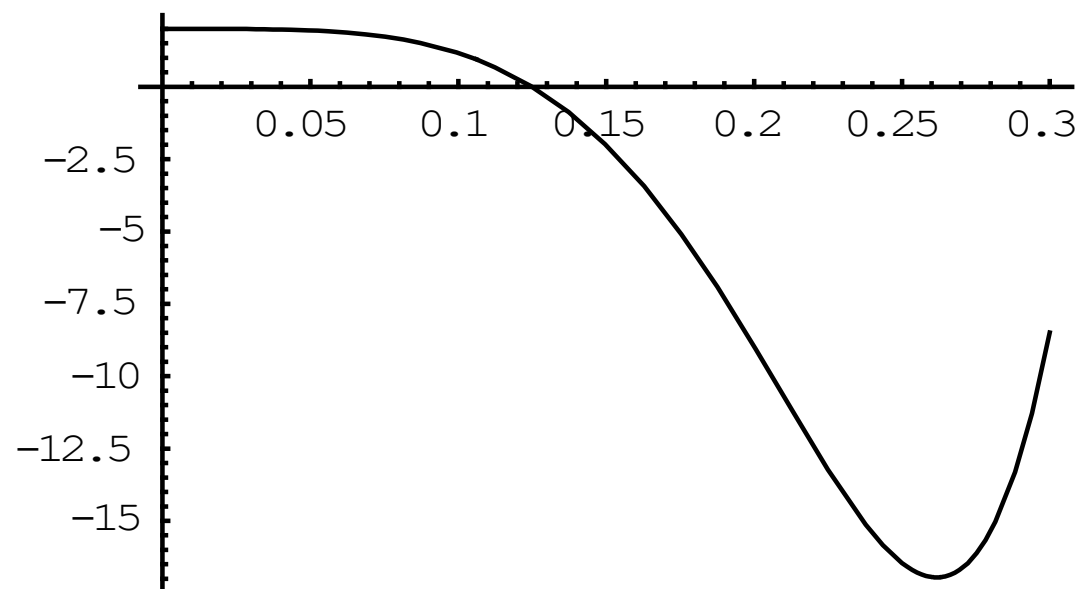
```
FindRoot[Fk==0,{k,0.5}]
```

```
Plot[Fk,{k,0.6,1}]
```

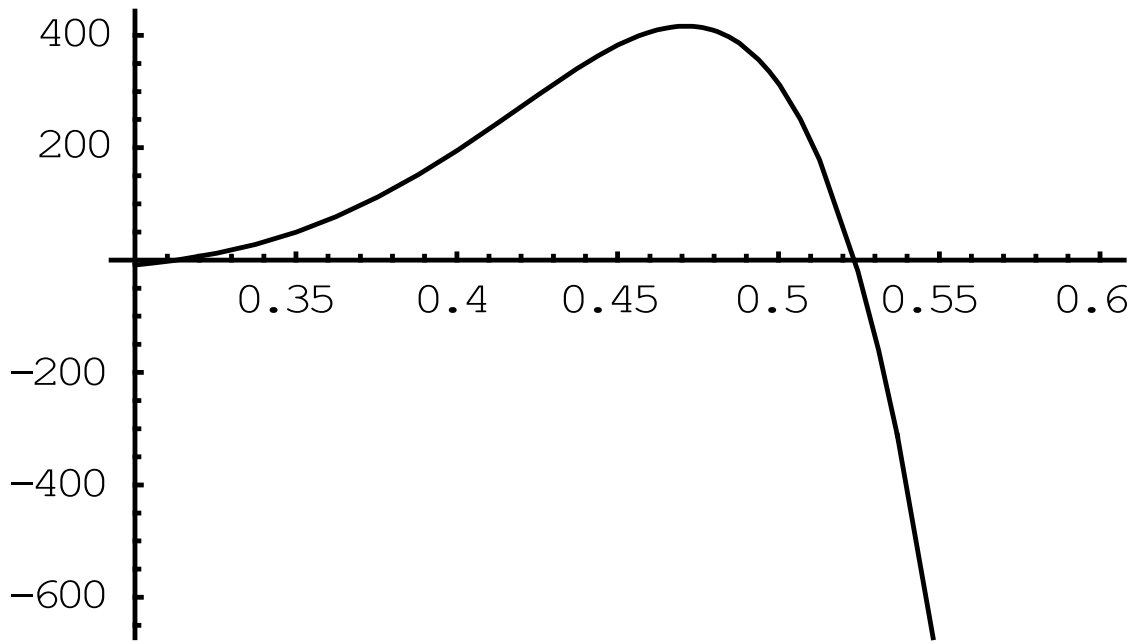
```
FindRoot[Fk==0,{k,0.9}]
```

```
Plot[Fk,{k,1,1.5}]
```

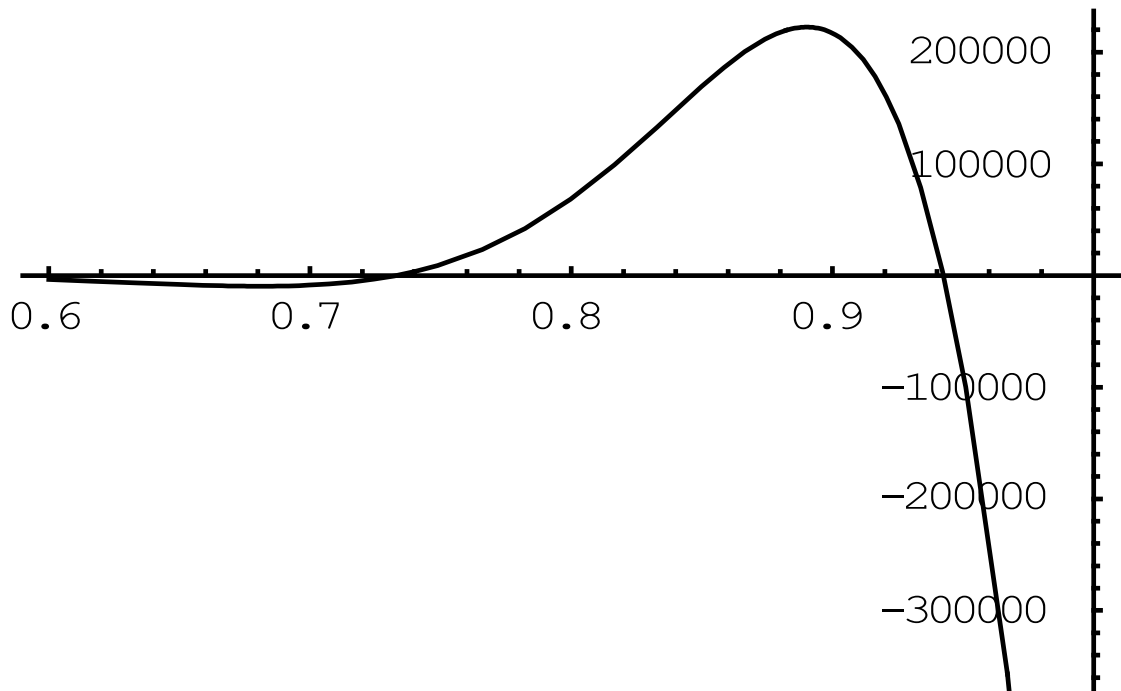
```
FindRoot[Fk==0,{k,1.2}]
```



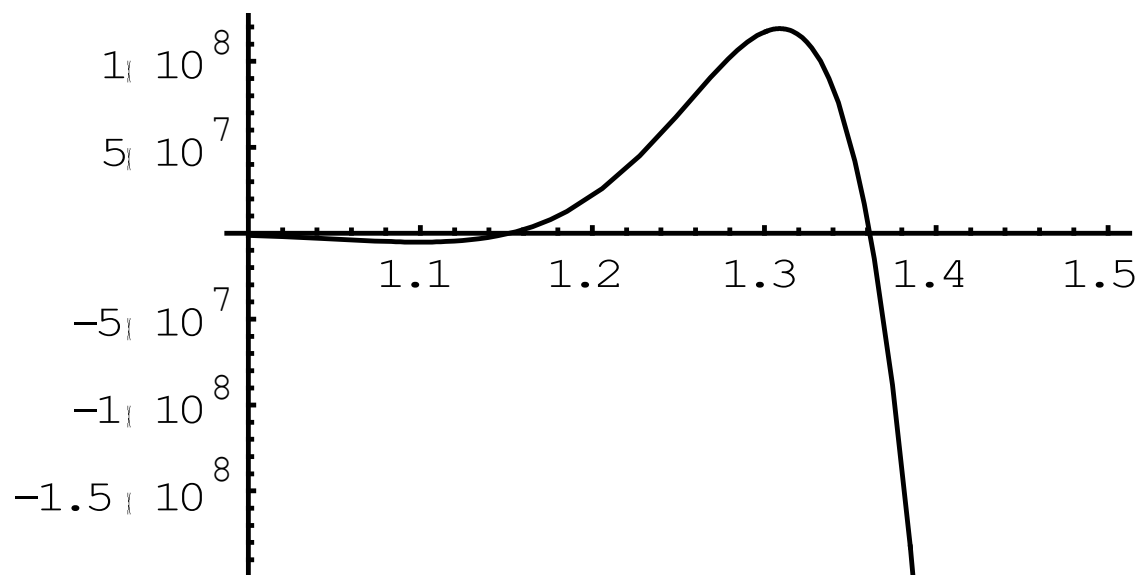
```
{k->0.125007}
```

{k→0.52365}



{k→0.942478}



{k→1.15192}

(αροί) Επίλυση με 3 ιδιομορφές

```
ClearAll[EE,μ,a,bb,bc,tb,tc,db,dc,en,h1,h2,h3,h4,spr1,spr
2,λ1,λ2,λ3,kb1,kb2,kb3,kc1,kc2,kc3,A1,A2,A3,Bb1,Bb2,Bb3,B
c1,Bc2,Bc3,x,y,X10,X20,X30,X12,X22,X32,X14,X24,X34,Yb10,Y
b20,Yb30,Yb12,Yb22,Yb32,Yb14,Yb24,Yb34,Yc10,Yc20,Yc30,Yc1
2,Yc22,Yc32,Yc14,Yc24,Yc34,p11,p12,p13,p14,p15,p16,p17,p1
8,p19,p21,p22,p23,p24,p25,p26,p27,p28,p29,p31,p32,p33,p34
,p35,p36,p37,p38,p39,p41,p42,p43,p44,p45,p46,p47,
```

```
p48,p49,p51,p52,p53,p54,p55,p56,p57,p58,p59,p61,p62,p63,p
64,p65,p66,p67,p68,p69,p71,p72,p73,p74,p75,
```

```
p76,p77,p78,p79,p81,p82,p83,p84,p85,p86,p87,p88,p89,p91,p
92,p93,p94,p95,p96,p97,p98,p99,d,id,p,po,c,coxo,pxx,pyy,F
1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,Sp1,Sp2,Sp3,Sp4,Sp5,Sp6,Sp7,Sp8
,Sp9,SS,W]
```

```
EE=2.1*10^6;
```

```
μ=0.3;
```

```
a=33;
```

```
bb=8;
```

```
bc=15;
```

```
tb=1;
```

```

tc=1.9;
db=(EE*tb^3)/(12*(1-μ^2));
dc=(EE*tc^3)/(12*(1-μ^2));
co=tb
c=3
en=4;
h1=6;
h2=13;
h3=20;
h4=27;
spr1=2;
spr2=2;
λ1=0.139387;
λ2=0.231706;
λ3=0.324788;
kb1=0.234388;
kb2=0.586761;
kb3=0.981845;
kc1=0.125007;
kc2=0.523650;
kc3=0.942478;

A1=(spr1*(Sin[λ1*a]-Sinh[λ1*a]))/(spr1*(Cosh[λ1*a]-
Cos[λ1*a])+2*λ1*Sinh[λ1*a]);
A2=(spr1*(Sin[λ2*a]-Sinh[λ2*a]))/(spr1*(Cosh[λ2*a]-
Cos[λ2*a])+2*λ2*Sinh[λ2*a]);
A3=(spr1*(Sin[λ3*a]-Sinh[λ3*a]))/(spr1*(Cosh[λ3*a]-
Cos[λ3*a])+2*λ3*Sinh[λ3*a]);
Bb1=-
((Sinh[kb1*bb]+Sin[kb1*bb])/(Cos[kb1*bb]+Cosh[kb1*bb]));
Bb2=-
((Sinh[kb2*bb]+Sin[kb2*bb])/(Cos[kb2*bb]+Cosh[kb2*bb]));
Bb3=-
((Sinh[kb3*bb]+Sin[kb3*bb])/(Cos[kb3*bb]+Cosh[kb3*bb]));
Bc1=-
((Sinh[kc1*bc]+Sin[kc1*bc])/(Cos[kc1*bc]+Cosh[kc1*bc]));
Bc2=-
((Sinh[kc2*bc]+Sin[kc2*bc])/(Cos[kc2*bc]+Cosh[kc2*bc]));
Bc3=-
((Sinh[kc3*bc]+Sin[kc3*bc])/(Cos[kc3*bc]+Cosh[kc3*bc]));
X10=Sin[λ1*x]+A1*Cos[λ1*x]-(1+(2*λ1)/spr1*A1)*Sinh[λ1*x]-
A1*Cosh[λ1*x];
X20=Sin[λ2*x]+A2*Cos[λ2*x]-(1+(2*λ2)/spr1*A2)*Sinh[λ2*x]-
A2*Cosh[λ2*x];
X30=Sin[λ3*x]+A3*Cos[λ3*x]-(1+(2*λ3)/spr1*A3)*Sinh[λ3*x]-
A3*Cosh[λ3*x];

X12=D[X10,{x,2}];
X22=D[X20,{x,2}];
X32=D[X30,{x,2}];

```

```

X14=D[X10,{x,4}];
X24=D[X20,{x,4}];
X34=D[X30,{x,4}];

Yb10=Sin[kb1*y]+Bb1*Cos[kb1*y]-Sinh[kb1*y]-
Bb1*Cosh[kb1*y];
Yb20=Sin[kb2*y]+Bb2*Cos[kb2*y]-Sinh[kb2*y]-
Bb2*Cosh[kb2*y];
Yb30=Sin[kb3*y]+Bb3*Cos[kb3*y]-Sinh[kb3*y]-
Bb3*Cosh[kb3*y];

Yb12=D[Yb10,{y,2}];
Yb22=D[Yb20,{y,2}];
Yb32=D[Yb30,{y,2}];

Yb14=D[Yb10,{y,4}];
Yb24=D[Yb20,{y,4}];
Yb34=D[Yb30,{y,4}];

Yc10=Sin[kc1*y]+Bc1*Cos[kc1*y]-Sinh[kc1*y]-
Bc1*Cosh[kc1*y];
Yc20=Sin[kc2*y]+Bc2*Cos[kc2*y]-Sinh[kc2*y]-
Bc2*Cosh[kc2*y];
Yc30=Sin[kc3*y]+Bc3*Cos[kc3*y]-Sinh[kc3*y]-
Bc3*Cosh[kc3*y];

Yc12=D[Yc10,{y,2}];
Yc22=D[Yc20,{y,2}];
Yc32=D[Yc30,{y,2}];

Yc14=D[Yc10,{y,4}];
Yc24=D[Yc20,{y,4}];
Yc34=D[Yc30,{y,4}];

p11=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1
2*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p12=0;
p13=0;
p14=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1
2*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p15=0;
p16=0;
p17=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1
2*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p18=0;

```

```

p19=0;
p21=0;
p22=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb2
2*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p23=0;
p24=0;
p25=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb2
2*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p26=0;
p27=0;
p28=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb2
2*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p29=0;
p31=0;
p32=0;
p33=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb3
2*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p34=0;
p35=0;
p36=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb3
2*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p37=0;
p38=0;
p39=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb3
2*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p41=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1
2*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p42=0;
p43=0;
p44=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1
2*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p45=0;
p46=0;
p47=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1

```

$2*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p48=0;$
 $p49=0;$
 $p51=0;$
 $p52=NIntegrate[(X14*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X12*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p53=0;$
 $p54=0;$
 $p55=NIntegrate[(X24*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p56=0;$
 $p57=0;$
 $p58=NIntegrate[(X34*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X32*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p59=0;$
 $p61=0;$
 $p62=0;$
 $p63=NIntegrate[(X14*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X12*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), \{y, 0, bb\}];$
 $p64=0;$
 $p65=0;$
 $p66=NIntegrate[(X24*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), \{y, 0, bb\}];$
 $p67=0;$
 $p68=0;$
 $p69=NIntegrate[(X34*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X32*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X20), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), \{y, 0, bb\}];$
 $p71=NIntegrate[(X14*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X12*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p72=0;$
 $p73=0;$
 $p74=NIntegrate[(X24*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p75=0;$

```

p76=0;
p77=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb1
2*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p78=0;
p79=0;
p81=0;
p82=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb2
2*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p83=0;
p84=0;
p85=NIntegrate[(X24*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb2
2*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p86=0;
p87=0;
p88=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb2
2*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p89=0;
p91=0;
p92=0;
p93=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb3
2*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p94=0;
p95=0;
p96=NIntegrate[(X24*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb3
2*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p97=0;
p98=0;
p99=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb3
2*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrat
e[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
d={ {p11,p12,p13,p14,p15,p16,p17,p18,p19},
      {p21,p22,p23,p24,p25,p26,p27,p28,p29},
      {p31,p32,p33,p34,p35,p36,p37,p38,p39},
      {p41,p42,p43,p44,p45,p46,p47,p48,p49},
      {p51,p52,p53,p54,p55,p56,p57,p58,p59},
      {p61,p62,p63,p64,p65,p66,p67,p68,p69},
      {p71,p72,p73,p74,p75,p76,p77,p78,p79},
      {p81,p82,p83,p84,p85,p86,p87,p88,p89},

```

```

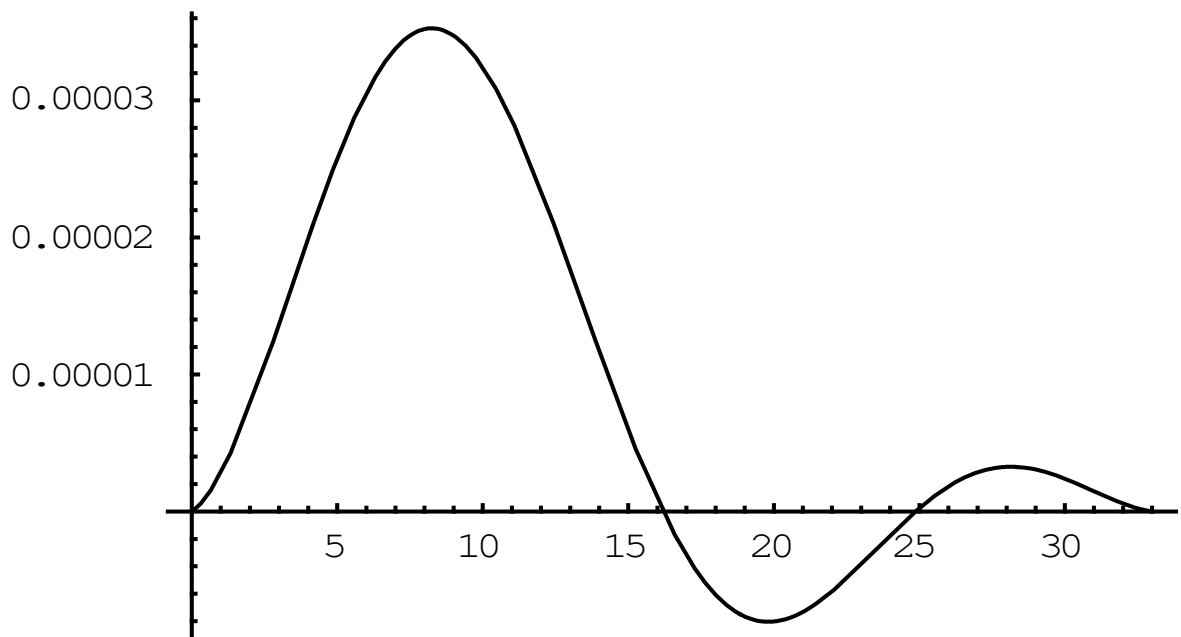
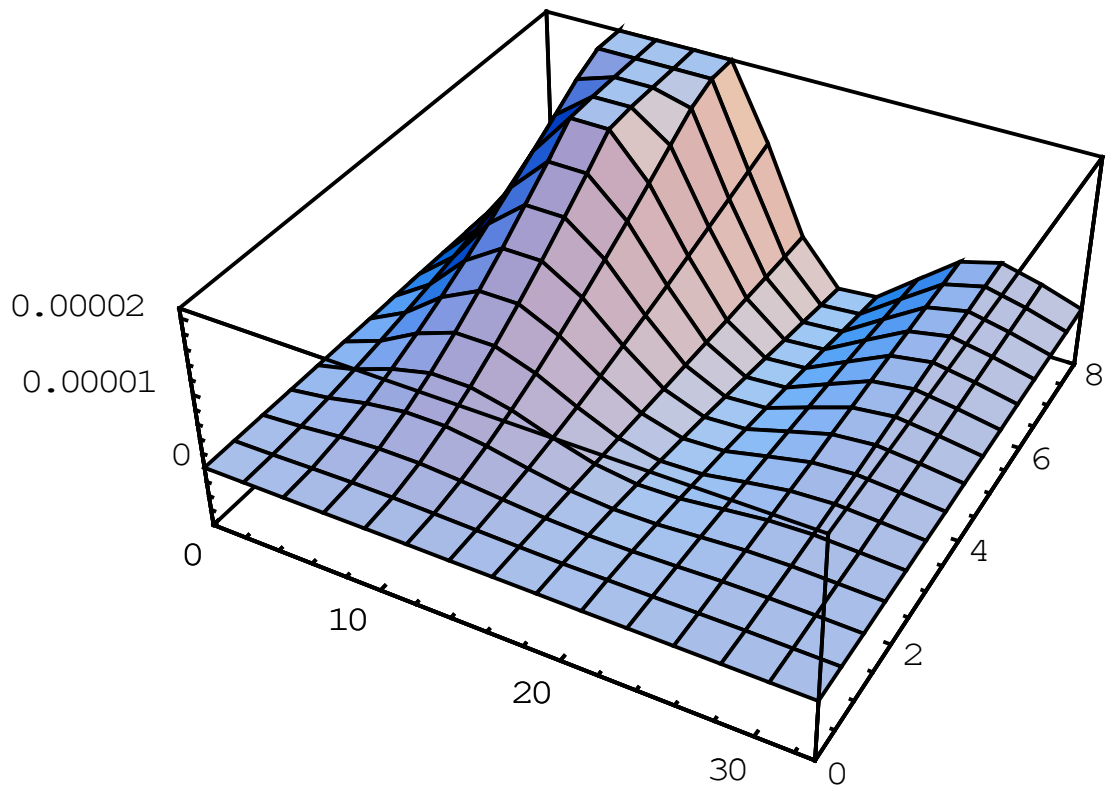
    {p91,p92,p93,p94,p95,p96,p97,p98,p99}}};
id=Inverse[d];
xo=-((c-co)/bb^2)*y^2+(2*(c-co))/bb*y+co;
p=(1-x^2/xo^2);
pxx=D[p,{x,2}];
pyy=D[p,{y,2}];

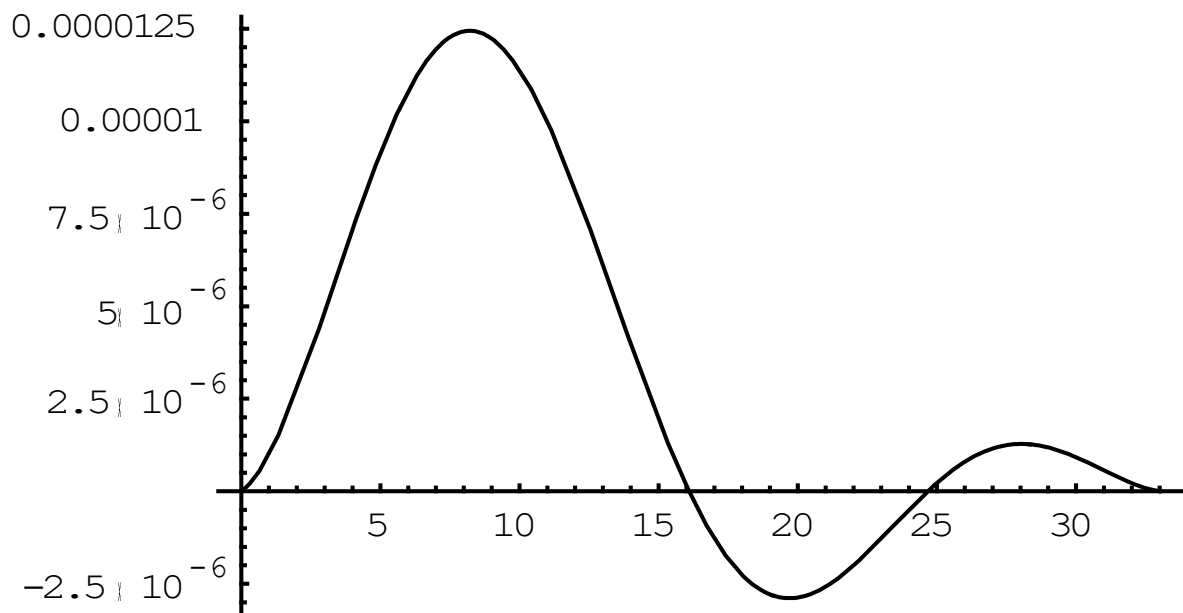
F1=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb10;
Sp1=NIntegrate[Integrate[F1,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F2=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb20;
Sp2=NIntegrate[Integrate[F2,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F3=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb30;
Sp3=NIntegrate[Integrate[F3,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F4=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb10;
Sp4=NIntegrate[Integrate[F4,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F5=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb20;
Sp5=NIntegrate[Integrate[F5,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F6=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb30;
Sp6=NIntegrate[Integrate[F6,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F7=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb10;
Sp7=NIntegrate[Integrate[F7,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F8=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb20;
Sp8=NIntegrate[Integrate[F8,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F9=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb30;
Sp9=NIntegrate[Integrate[F9,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

SS={{Sp1},{Sp2},{Sp3},{Sp4},{Sp5},{Sp6},{Sp7},{Sp8},{Sp9}};
};
ap=id.SS;
a11=ap[[1,1]];
a12=ap[[2,1]];
a13=ap[[3,1]];
a21=ap[[4,1]];
a22=ap[[5,1]];
a23=ap[[6,1]];
a31=ap[[7,1]];
a32=ap[[8,1]];
a33=ap[[9,1]];
W=a11*X10*Yb10+a12*X10*Yb20+a13*X10*Yb30+
  a21*X20*Yb10+a22*X20*Yb20+a23*X20*Yb30+
  a31*X30*Yb10+a32*X30*Yb20+a33*X30*Yb30;
Plot3D[W,{x,0,a},{y,0,bb}]
y=8
Plot[W,{x,0,a}]
y=4
Plot[W,{x,0,a}]

```



(Aijro-4mod) Επίλυση με 4 ιδιομορφές

```
ClearAll[EE,μ,a,bb,bc,tb,tc,db,dc,en,h1,h2,h3,h4,spr1,spr
2,λ1,λ2,λ3,λ4,kb1,kb2,kb3,kb4,kc1,kc2,kc3,kc4,A1,A2,A3,A4
,Bb1,Bb2,Bb3,Bb4,Bc1,Bc2,Bc3,Bc4,x,y,X10,X20,X30,X40,X12,
X22,X32,X42,X14,X24,X34,X44,Yb10,Yb20,Yb30,Yb40,Yb12,Yb22
,Yb32,Yb42,Yb14,Yb24,Yb34,Yb44,Yc10,Yc20,Yc30,Yc40,Yc12,Y
c22,Yc32,Yc42,Yc14,Yc24,Yc34,Yc44,p1p1,p1p2,p1p3,p1p4,p1p
5,p1p6,p1p7,p1p8,p1p9,p1p10,p1p11,p1p12,p1p13,p1p14,p1p15
,p1p16,p2p1,p2p2,p2p3,p2p4,p2p5,p2p6,p2p7,p2p8,p2p9,p2p10
,p2p11,p2p12,p2p13,p2p14,p2p15,p2p16,p3p1,p3p2,p3p3,p3p4,
p3p5,p3p6,p3p7,p3p8,p3p9,p3p10,p3p11,p3p12,p3p13,p3p14,p3
p15,p3p16,p4p1,p4p2,p4p3,p4p4,p4p5,p4p6,p4p7,
```

```
p4p8,p4p9,p4p10,p4p11,p4p12,p4p13,p4p14,p4p15,p4p16,p5p1,
p5p2,p5p3,p5p4,p5p5,p5p6,p5p7,p5p8,p5p9,p5p10,p5p11,p5p12
,p5p13,p5p14,p5p15,p5p16,p6p1,p6p2,p6p3,p6p4,p6p5,p6p6,p6
p7,p6p8,p6p9,p6p10,p6p11,p6p12,p6p13,p6p14,p6p15,p6p16,p7
p1,p7p2,p7p3,p7p4,p7p5,
```

```
p7p6,p7p7,p7p8,p7p9,p7p10,p7p11,p7p12,p7p13,p7p14,p7p15,p
7p16,p8p1,p8p2,p8p3,p8p4,p8p5,p8p6,p8p7,p8p8,p8p9,p8p10,p
8p11,p8p12,p8p13,p8p14,p8p15,p8p16,p9p1,p9p2,p9p3,p9p4,p9
p5,p9p6,p9p7,p9p8,p9p9,p9p10,p9p11,p9p12,p9p13,p9p14,p9p1
5,p9p16,p10p1,p10p2,p10p3,p10p4,p10p5,p10p6,p10p7,p10p8,p
```

```

10p9,p10p10,p10p11,p10p12,p10p13,p10p14,p10p15,p10p16,p11
p1,p11p2,p11p3,p11p4,p11p5,p11p6,p11p7,p11p8,p11p9,p11p10
,p11p11,p11p12,p11p13,p11p14,p11p15,p11p16,p12p1,p12p2,p1
2p3,p12p4,p12p5,p12p6,p12p7,p12p8,p12p9,p12p10,p12p11,p12
p12,p12p13,p12p14,p12p15,p12p16,p13p1,p13p2,p13p3,p13p4,p
13p5,p13p6,p13p7,p13p8,p13p9,p13p10,p13p11,p13p12,p13p13,
p13p14,p13p15,p13p16,p14p1,p14p2,p14p3,p14p4,p14p5,p14p6,
p14p7,p14p8,p14p9,p14p10,p14p11,p14p12,p14p13,p14p14,p14p
15,p14p16,p15p1,p15p2,p15p3,p15p4,p15p5,p15p6,p15p7,p15p8
,p15p9,p15p10,p15p11,p15p12,p15p13,p15p14,p15p15,p15p16,p
16p1,p16p2,p16p3,p16p4,p16p5,p16p6,p16p7,p16p8,p16p9,p16p
10,p16p11,p16p12,p16p13,p16p14,p16p15,p16p16,d,id,p,po,c,
coxo,pxx,pyy,F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12,F13,F
14,F15,F16,Sp1,Sp2,Sp3,Sp4,Sp5,Sp6,Sp7,Sp8,Sp9,Sp10,Sp11,
Sp12,Sp13,Sp14,Sp15,Sp16,SP,a11,a12,a13,a14,a21,a22,a23,a
24,a31,a32,a33,a34,a41,a42,a42,a44,W]
EE=2.1*10^6;
μ=0.3;
a=33;
bb=8;
bc=15;
tb=1;
tc=1.9;
db=(EE*tb^3)/(12*(1-μ^2));
dc=(EE*tc^3)/(12*(1-μ^2));
co=tb
c=3
en=4;
h1=6;
h2=13;
h3=20;
h4=27;
spr1=2;
spr2=2;
λ1=0.139387;
λ2=0.231706;
λ3=0.324788;
λ4=0.418024;
kb1=0.234388;
kb2=0.586761;
kb3=0.981845;
kb4=1.374440;
kc1=0.125007;
kc2=0.523650;
kc3=0.942478;
kc4=1.151920;
A1=(spr1*(Sin[λ1*a]-Sinh[λ1*a]))/(spr1*(Cosh[λ1*a]-
Cos[λ1*a])+2*λ1*Sinh[λ1*a]);
A2=(spr1*(Sin[λ2*a]-Sinh[λ2*a]))/(spr1*(Cosh[λ2*a]-
Cos[λ2*a])+2*λ2*Sinh[λ2*a]);

```

```

A3=(spr1*(Sin[λ3*a]-Sinh[λ3*a]))/(spr1*(Cosh[λ3*a]-
Cos[λ3*a])+2*λ3*Sinh[λ3*a]);
A4=(spr1*(Sin[λ4*a]-Sinh[λ4*a]))/(spr1*(Cosh[λ4*a]-
Cos[λ4*a])+2*λ4*Sinh[λ4*a]);

Bb1=-
((Sinh[kb1*bb]+Sin[kb1*bb])/(Cos[kb1*bb]+Cosh[kb1*bb]));
Bb2=-
((Sinh[kb2*bb]+Sin[kb2*bb])/(Cos[kb2*bb]+Cosh[kb2*bb]));
Bb3=-
((Sinh[kb3*bb]+Sin[kb3*bb])/(Cos[kb3*bb]+Cosh[kb3*bb]));
Bb4=-
((Sinh[kb4*bb]+Sin[kb4*bb])/(Cos[kb4*bb]+Cosh[kb4*bb]));
Bc1=-
((Sinh[kc1*bc]+Sin[kc1*bc])/(Cos[kc1*bc]+Cosh[kc1*bc]));
Bc2=-
((Sinh[kc2*bc]+Sin[kc2*bc])/(Cos[kc2*bc]+Cosh[kc2*bc]));
Bc3=-
((Sinh[kc3*bc]+Sin[kc3*bc])/(Cos[kc3*bc]+Cosh[kc3*bc]));
Bc4=-
((Sinh[kc4*bc]+Sin[kc4*bc])/(Cos[kc4*bc]+Cosh[kc4*bc]));

X10=Sin[λ1*x]+A1*Cos[λ1*x]-(1+(2*λ1)/spr1*A1)*Sinh[λ1*x]-
A1*Cosh[λ1*x];
X20=Sin[λ2*x]+A2*Cos[λ2*x]-(1+(2*λ2)/spr1*A2)*Sinh[λ2*x]-
A2*Cosh[λ2*x];
X30=Sin[λ3*x]+A3*Cos[λ3*x]-(1+(2*λ3)/spr1*A3)*Sinh[λ3*x]-
A3*Cosh[λ3*x];
X40=Sin[λ4*x]+A4*Cos[λ4*x]-(1+(2*λ4)/spr1*A4)*Sinh[λ4*x]-
A4*Cosh[λ4*x];
X12=D[X10,{x,2}];
X22=D[X20,{x,2}];
X32=D[X30,{x,2}];
X42=D[X40,{x,2}];

X14=D[X10,{x,4}];
X24=D[X20,{x,4}];
X34=D[X30,{x,4}];
X44=D[X40,{x,4}];

Yb10=Sin[kb1*y]+Bb1*Cos[kb1*y]-Sinh[kb1*y]-
Bb1*Cosh[kb1*y];
Yb20=Sin[kb2*y]+Bb2*Cos[kb2*y]-Sinh[kb2*y]-
Bb2*Cosh[kb2*y];
Yb30=Sin[kb3*y]+Bb3*Cos[kb3*y]-Sinh[kb3*y]-
Bb3*Cosh[kb3*y];
Yb40=Sin[kb4*y]+Bb4*Cos[kb4*y]-Sinh[kb4*y]-
Bb4*Cosh[kb4*y];

Yb12=D[Yb10,{y,2}];
Yb22=D[Yb20,{y,2}];

```

```

Yb32=D[Yb30,{y,2}];
Yb42=D[Yb40,{y,2}];

Yb14=D[Yb10,{y,4}];
Yb24=D[Yb20,{y,4}];
Yb34=D[Yb30,{y,4}];
Yb44=D[Yb40,{y,4}];

Yc10=Sin[kc1*y]+Bc1*Cos[kc1*y]-Sinh[kc1*y]-
Bc1*Cosh[kc1*y];
Yc20=Sin[kc2*y]+Bc2*Cos[kc2*y]-Sinh[kc2*y]-
Bc2*Cosh[kc2*y];
Yc30=Sin[kc3*y]+Bc3*Cos[kc3*y]-Sinh[kc3*y]-
Bc3*Cosh[kc3*y];
Yc40=Sin[kc4*y]+Bc4*Cos[kc4*y]-Sinh[kc4*y]-
Bc4*Cosh[kc4*y];

Yc12=D[Yc10,{y,2}];
Yc22=D[Yc20,{y,2}];
Yc32=D[Yc30,{y,2}];
Yc42=D[Yc40,{y,2}];

Yc14=D[Yc10,{y,4}];
Yc24=D[Yc20,{y,4}];
Yc34=D[Yc30,{y,4}];
Yc44=D[Yc40,{y,4}];

p1p1=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10)
,{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb
12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegra
te[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p2=0;
p1p3=0;
p1p4=0;
p1p5=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10)
,{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb
12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegra
te[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p6=0;
p1p7=0;
p1p8=0;
p1p9=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10)
,{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb
12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegra
te[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p10=0;
p1p11=0;
p1p12=0;
p1p13=NIntegrate[(X44*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10)
,{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Y

```

```

b12*Yb10), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X40*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), {y, 0, bb}];
p1p14=0;
p1p15=0;
p1p16=0;
p2p1=0;
p2p2=NIntegrate[(X14*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X12*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X10*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), {y, 0, bb}];
p2p3=0;
p2p4=0;
p2p5=0;
p2p6=NIntegrate[(X24*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X22*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X20*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), {y, 0, bb}];
p2p7=0;
p2p8=0;
p2p9=0;
p2p10=NIntegrate[(X34*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X32*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X30*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), {y, 0, bb}];
p2p11=0;
p2p12=0;
p2p13=0;
p2p14=NIntegrate[(X44*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X42*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X40*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), {y, 0, bb}];
p2p15=0;
p2p16=0;
p3p1=0;
p3p2=0;
p3p3=NIntegrate[(X14*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X12*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X10*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p3p4=0;
p3p5=0;
p3p6=0;
p3p7=NIntegrate[(X24*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X22*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X20*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p3p8=0;
p3p9=0;
p3p10=0;
p3p11=NIntegrate[(X34*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X32*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Y

```

```

b32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X30*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p3p12=0;
p3p13=0;
p3p14=0;
p3p15=NIntegrate[(X44*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X42*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X40*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p3p16=0;
p4p1=0;
p4p2=0;
p4p3=0;
p4p4=NIntegrate[(X14*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X12*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X10*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];
p4p5=0;
p4p6=0;
p4p7=0;
p4p8=NIntegrate[(X24*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X22*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X20*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];
p4p9=0;
p4p10=0;
p4p11=0;
p4p12=NIntegrate[(X34*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X32*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X30*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];
p4p13=0;
p4p14=0;
p4p15=0;
p4p16=NIntegrate[(X44*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X42*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X40*X10), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];
p5p1=NIntegrate[(X14*X20), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X12*X20), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X10*X20), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), {y, 0, bb}];
p5p2=0;
p5p3=0;
p5p4=0;
p5p5=NIntegrate[(X24*X20), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X22*X20), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X20*X20), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), {y, 0, bb}];
p5p6=0;
p5p7=0;

```

```

p5p8=0;
p5p9=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p5p10=0;
p5p11=0;
p5p12=0;
p5p13=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p5p14=0;
p5p15=0;
p5p16=0;
p6p1=0;
p6p2=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p3=0;
p6p4=0;
p6p5=0;
p6p6=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p7=0;
p6p8=0;
p6p9=0;
p6p10=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p11=0;
p6p12=0;
p6p13=0;
p6p14=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p15=0;
p6p16=0;
p7p1=0;
p7p2=0;
p7p3=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p4=0;
p7p5=0;

```



```

p7p6=0;
p7p7=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p8=0;
p7p9=0;
p7p10=0;
p7p11=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p12=0;
p7p13=0;
p7p14=0;
p7p15=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p16=0;
p8p1=0;
p8p2=0;
p8p3=0;
p8p4=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p8p5=0;
p8p6=0;
p8p7=0;
p8p8=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p8p9=0;
p8p10=0;
p8p11=0;
p8p12=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p8p13=0;
p8p14=0;
p8p15=0;
p8p16=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p9p1=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb

```

$12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p9p2=0;$
 $p9p3=0;$
 $p9p4=0;$
 $p9p5=NIntegrate[(X24*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p9p6=0;$
 $p9p7=0;$
 $p9p8=0;$
 $p9p9=NIntegrate[(X34*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X32*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p9p10=0;$
 $p9p11=0;$
 $p9p12=0;$
 $p9p13=NIntegrate[(X44*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X42*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X40*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p9p14=0;$
 $p9p15=0;$
 $p9p16=0;$
 $p10p1=0;$
 $p10p2=NIntegrate[(X14*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X12*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p10p3=0;$
 $p10p4=0;$
 $p10p5=0;$
 $p10p6=NIntegrate[(X24*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p10p7=0;$
 $p10p8=0;$
 $p10p9=0;$
 $p10p10=NIntegrate[(X34*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X32*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p10p11=0;$
 $p10p12=0;$
 $p10p13=0;$
 $p10p14=NIntegrate[(X44*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X42*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[($

```

Yb22*Yb20), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X40*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), {y, 0, bb}];
p10p15=0;
p10p16=0;
p11p1=0;
p11p2=0;
p11p3=NIntegrate[(X14*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X12*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X10*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p11p4=0;
p11p5=0;
p11p6=0;
p11p7=NIntegrate[(X24*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X22*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X20*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p11p8=0;
p11p9=0;
p11p10=0;
p11p11=NIntegrate[(X34*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X32*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X30*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p11p12=0;
p11p13=0;
p11p14=0;
p11p15=NIntegrate[(X44*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb30*Yb30), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X42*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb32*Yb30), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X40*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb34*Yb30), {y, 0, bb}];
p11p16=0;
p12p1=0;
p12p2=0;
p12p3=0;
p12p4=NIntegrate[(X14*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X12*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X10*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];
p12p5=0;
p12p6=0;
p12p7=0;
p12p8=NIntegrate[(X24*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X22*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X20*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];
p12p9=0;
p12p10=0;
p12p11=0;
p12p12=NIntegrate[(X34*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), {y, 0, bb}] + 2*NIntegrate[(X32*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), {y, 0, bb}] + NIntegrate[(X30*X30), {x, 0, a}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), {y, 0, bb}];

```

$Yb42*Yb40), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), \{y, 0, bb\}];$
 $p12p13=0;$
 $p12p14=0;$
 $p12p15=0;$
 $p12p16=NIntegrate[(X44*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb40*Yb40), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X42*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb42*Yb40), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X40*X30), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb44*Yb40), \{y, 0, bb\}];$
 $p13p1=NIntegrate[(X14*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X12*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p13p2=0;$
 $p13p3=0;$
 $p13p4=0;$
 $p13p5=NIntegrate[(X24*X34), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p13p6=0;$
 $p13p7=0;$
 $p13p8=0;$
 $p13p9=NIntegrate[(X34*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X32*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X30*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p13p10=0;$
 $p13p11=0;$
 $p13p12=0;$
 $p13p13=NIntegrate[(X44*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb10*Yb10), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X42*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb12*Yb10), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X40*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb14*Yb10), \{y, 0, bb\}];$
 $p13p14=0;$
 $p13p15=0;$
 $p13p16=0;$
 $p14p1=0;$
 $p14p2=NIntegrate[(X14*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X12*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X10*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p14p3=0;$
 $p14p4=0;$
 $p14p5=0;$
 $p14p6=NIntegrate[(X24*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb20*Yb20), \{y, 0, bb\}] + 2*NIntegrate[(X22*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb22*Yb20), \{y, 0, bb\}] + NIntegrate[(X20*X40), \{x, 0, a\}] * NIntegrate[(Yb24*Yb20), \{y, 0, bb\}];$
 $p14p7=0;$
 $p14p8=0;$

```

p14p9=0;
p14p10=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p14p11=0;
p14p12=0;
p14p13=0;
p14p14=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p14p15=0;
p14p16=0;
p15p1=0;
p15p2=0;
p15p3=NIntegrate[(X14*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p4=0;
p15p5=0;
p15p6=0;
p15p7=NIntegrate[(X24*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p8=0;
p15p9=0;
p15p10=0;
p15p11=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p12=0;
p15p13=0;
p15p14=0;
p15p15=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p16=0;
p16p1=0;
p16p2=0;
p16p3=0;
p16p4=NIntegrate[(X14*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p16p5=0;
p16p6=0;

```

```

p16p7=0;
p16p8=NIntegrate[(X24*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p16p9=0;
p16p10=0;
p16p11=0;
p16p12=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p16p13=0;
p16p14=0;
p16p15=0;
p16p16=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];

d={ {p1p1,p1p2,p1p3,p1p4,p1p5,p1p6,p1p7,p1p8,p1p9,p1p10,p1p11,p1p12,p1p13,p1p14,p1p15,p1p16},
{p2p1,p2p2,p2p3,p2p4,p2p5,p2p6,p2p7,p2p8,p2p9,p2p10,p2p11,p2p12,p2p13,p2p14,p2p15,p2p16},
{p3p1,p3p2,p3p3,p3p4,p3p5,p3p6,p3p7,p3p8,p3p9,p3p10,p3p11,p3p12,p3p13,p3p14,p3p15,p3p16},
{p4p1,p4p2,p4p3,p4p4,p4p5,p4p6,p4p7,p4p8,p4p9,p4p10,p4p11,p4p12,p4p13,p4p14,p4p15,p4p16},
{p5p1,p5p2,p5p3,p5p4,p5p5,p5p6,p5p7,p5p8,p5p9,p5p10,p5p11,p5p12,p5p13,p5p14,p5p15,p5p16},
{p6p1,p6p2,p6p3,p6p4,p6p5,p6p6,p6p7,p6p8,p6p9,p6p10,p6p11,p6p12,p6p13,p6p14,p6p15,p6p16},
{p7p1,p7p2,p7p3,p7p4,p7p5,p7p6,p7p7,p7p8,p7p9,p7p10,p7p11,p7p12,p7p13,p7p14,p7p15,p7p16},
{p8p1,p8p2,p8p3,p8p4,p8p5,p8p6,p8p7,p8p8,p8p9,p8p10,p8p11,p8p12,p8p13,p8p14,p8p15,p8p16},
{p9p1,p9p2,p9p3,p9p4,p9p5,p9p6,p9p7,p9p8,p9p9,p9p10,p9p11,p9p12,p9p13,p9p14,p9p15,p9p16},
{p10p1,p10p2,p10p3,p10p4,p10p5,p10p6,p10p7,p10p8,p10p9,p10p10,p10p11,p10p12,p10p13,p10p14,p10p15,p10p16},

```

{p11p1,p11p2,p11p3,p11p4,p11p5,p11p6,p11p7,p11p8,p11p9,p11p10,p11p11,p11p12,p11p13,p11p14,p11p15,p11p16},

{p12p1,p12p2,p12p3,p12p4,p12p5,p12p6,p12p7,p12p8,p12p9,p12p10,p12p11,p12p12,p12p13,p12p14,p12p15,p12p16},

{p13p1,p13p2,p13p3,p13p4,p13p5,p13p6,p13p7,p13p8,p13p9,p13p10,p13p11,p13p12,p13p13,p13p14,p13p15,p13p16},

{p14p1,p14p2,p14p3,p14p4,p14p5,p14p6,p14p7,p14p8,p14p9,p14p10,p14p11,p14p12,p14p13,p14p14,p14p15,p14p16},

{p15p1,p15p2,p15p3,p15p4,p15p5,p15p6,p15p7,p15p8,p15p9,p15p10,p15p11,p15p12,p15p13,p15p14,p15p15,p15p16},

{p16p1,p16p2,p16p3,p16p4,p16p5,p16p6,p16p7,p16p8,p16p9,p16p10,p16p11,p16p12,p16p13,p16p14,p16p15,p16p16}};

id=Inverse[d];

xo=-((c-co)/bb²)*y²+(2*(c-co))/bb*y+co;

p=(1-x²/xo²);

pxx=D[p,{x,2}];

pyy=D[p,{y,2}];

F1=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb10;

Sp1=NIntegrate[Integrate[F1,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F2=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb20;

Sp2=NIntegrate[Integrate[F2,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F3=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb30;

Sp3=NIntegrate[Integrate[F3,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F4=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb40;

Sp4=NIntegrate[Integrate[F4,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F5=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb10;

Sp5=NIntegrate[Integrate[F5,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F6=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb20;

Sp6=NIntegrate[Integrate[F6,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F7=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb30;

Sp7=NIntegrate[Integrate[F7,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F8=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb40;

Sp8=NIntegrate[Integrate[F8,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F9=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb10;

Sp9=NIntegrate[Integrate[F9,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F10=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb20;

Sp10=NIntegrate[Integrate[F10,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F11=1/db*(p-(tb²*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb30;

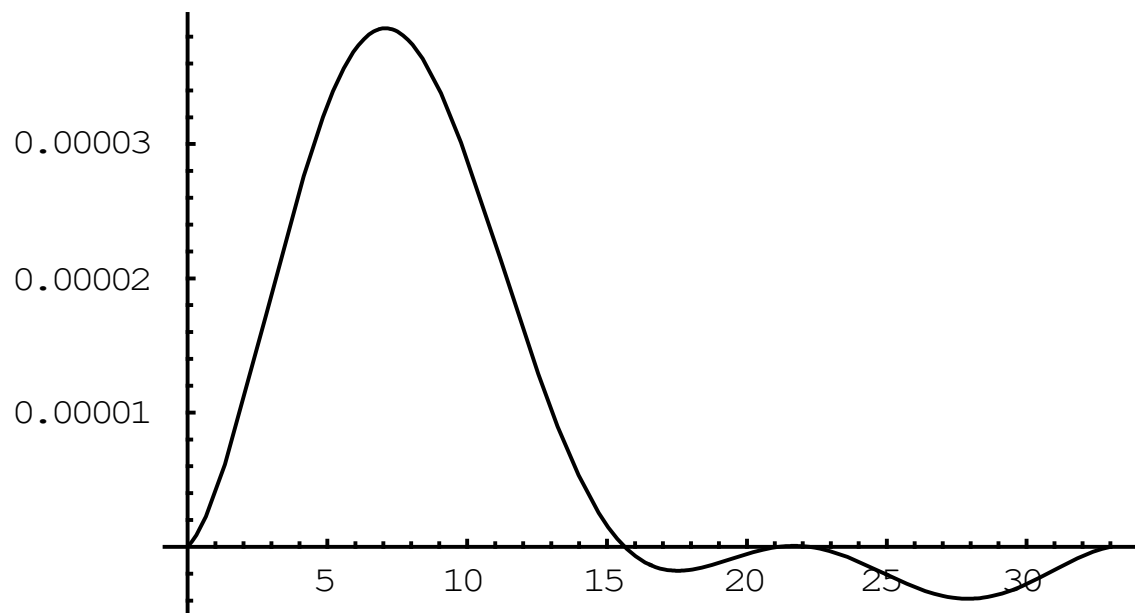
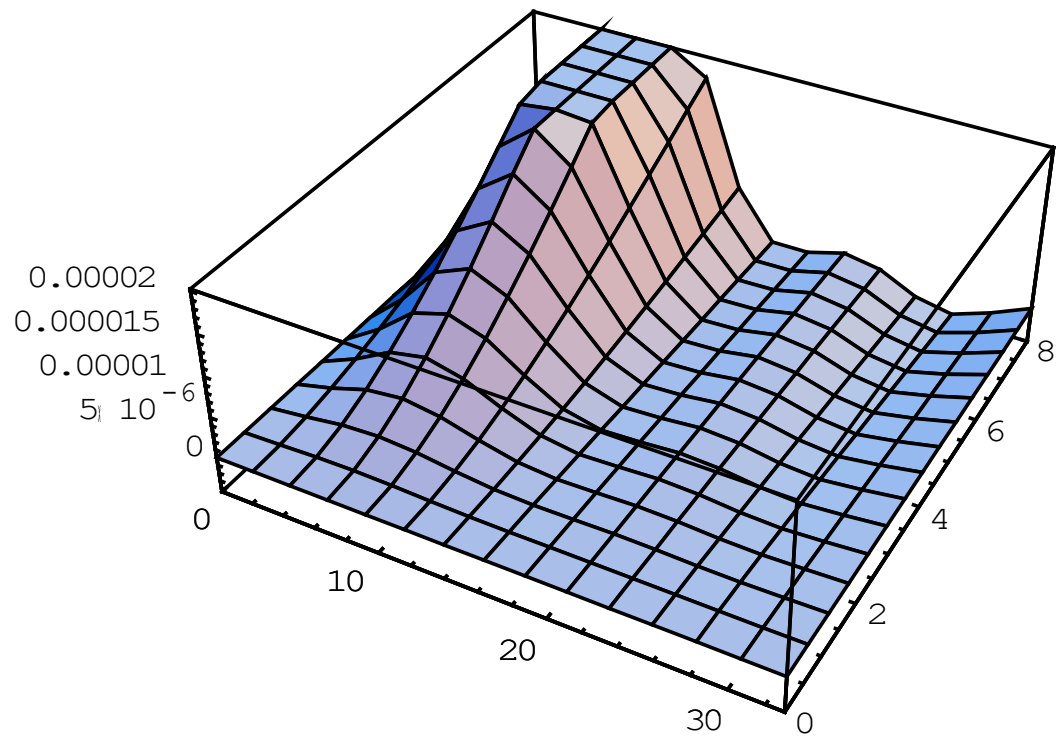
```

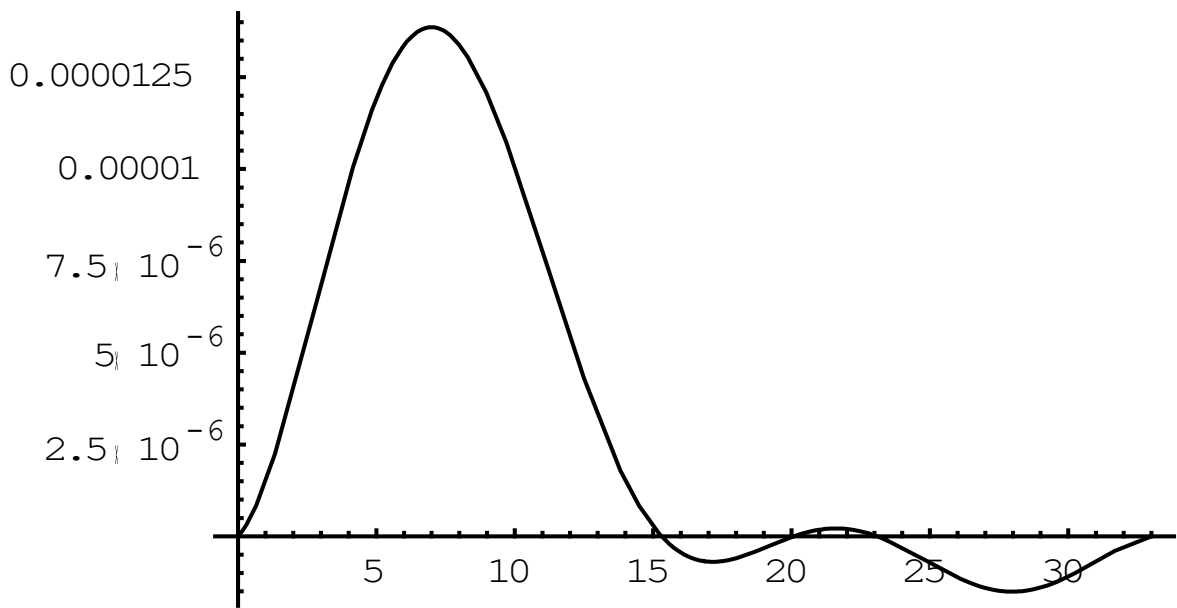
Sp11=NIntegrate[Integrate[F11,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F12=1/db*(p-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb40;
Sp12=NIntegrate[Integrate[F12,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F13=1/db*(p-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb10;
Sp13=NIntegrate[Integrate[F13,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F14=1/db*(p-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb20;
Sp14=NIntegrate[Integrate[F14,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F15=1/db*(p-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb30;
Sp15=NIntegrate[Integrate[F15,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F16=1/db*(p-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb40;
Sp16=NIntegrate[Integrate[F16,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

SP={{Sp1},{Sp2},{Sp3},{Sp4},{Sp5},{Sp6},{Sp7},{Sp8},{Sp9}
,{Sp10},{Sp11},{Sp12},{Sp13},{Sp14},{Sp15},{Sp16}};
ap=id.SP;
a11=ap[[1,1]];
a12=ap[[2,1]];
a13=ap[[3,1]];
a14=ap[[4,1]];
a21=ap[[5,1]];
a22=ap[[6,1]];
a23=ap[[7,1]];
a24=ap[[8,1]];
a31=ap[[9,1]];
a32=ap[[10,1]];
a33=ap[[11,1]];
a34=ap[[12,1]];
a41=ap[[13,1]];
a42=ap[[14,1]];
a43=ap[[15,1]];
a44=ap[[16,1]];
W=a11*X10*Yb10+a12*X10*Yb20+a13*X10*Yb30+a14*X10*Yb40+
a21*X20*Yb10+a22*X20*Yb20+a23*X20*Yb30+a24*X20*Yb40+
a31*X30*Yb10+a32*X30*Yb20+a33*X30*Yb30+a34*X30*Yb40+
a41*X40*Yb10+a42*X40*Yb20+a43*X40*Yb30+a44*X40*Yb40;
Plot3D[W,{x,0,a},{y,0,bb}]
y=8
Plot[W,{x,0,a}]
y=4
Plot[W,{x,0,a}]

```



aijPI-4mod

```
ClearAll[EE, μ, a, bb, bc, tb, tc, db, dc, ε, h1, h2, h3, h4, spr1, spr2,
λ1, λ2, λ3, λ4, kb1, kb2, kb3, kb4, kc1, kc2, kc3, kc4, A1, A2, A3, A4,
Bb1, Bb2, Bb3, Bb4, Bc1, Bc2, Bc3, Bc4, x, y, X10, X20, X30, X40, X12, X
22, X32, X42, X14, X24, X34, X44, Yb10, Yb20, Yb30, Yb40, Yb12, Yb22,
Yb32, Yb42, Yb14, Yb24, Yb34, Yb44, Yc10, Yc20, Yc30, Yc40, Yc12, Yc
22, Yc32, Yc42, Yc14, Yc24, Yc34, Yc44, p1p1, p1p2, p1p3, p1p4, p1p5
, p1p6, p1p7, p1p8, p1p9, p1p10, p1p11, p1p12, p1p13, p1p14, p1p15,
p1p16, p2p1, p2p2, p2p3, p2p4, p2p5, p2p6, p2p7, p2p8, p2p9, p2p10,
p2p11, p2p12, p2p13, p2p14, p2p15, p2p16, p3p1, p3p2, p3p3, p3p4, p
3p5, p3p6, p3p7, p3p8, p3p9, p3p10, p3p11, p3p12, p3p13, p3p14, p3p
15, p3p16, p4p1, p4p2, p4p3, p4p4, p4p5, p4p6, p4p7,
```

```
p4p8, p4p9, p4p10, p4p11, p4p12, p4p13, p4p14, p4p15, p4p16, p5p1,
p5p2, p5p3, p5p4, p5p5, p5p6, p5p7, p5p8, p5p9, p5p10, p5p11, p5p12
, p5p13, p5p14, p5p15, p5p16, p6p1, p6p2, p6p3, p6p4, p6p5, p6p6, p6
p7, p6p8, p6p9, p6p10, p6p11, p6p12, p6p13, p6p14, p6p15, p6p16, p7
p1, p7p2, p7p3, p7p4, p7p5,
```

```
p7p6, p7p7, p7p8, p7p9, p7p10, p7p11, p7p12, p7p13, p7p14, p7p15, p
7p16, p8p1, p8p2, p8p3, p8p4, p8p5, p8p6, p8p7, p8p8, p8p9, p8p10, p
8p11, p8p12, p8p13, p8p14, p8p15, p8p16, p9p1, p9p2, p9p3, p9p4, p9
p5, p9p6, p9p7, p9p8, p9p9, p9p10, p9p11, p9p12, p9p13, p9p14, p9p1
5, p9p16, p10p1, p10p2, p10p3, p10p4, p10p5, p10p6, p10p7, p10p8, p
```

10p9,p10p10,p10p11,p10p12,p10p13,p10p14,p10p15,p10p16,p11
 p1,p11p2,p11p3,p11p4,p11p5,p11p6,p11p7,p11p8,p11p9,p11p10
 ,p11p11,p11p12,p11p13,p11p14,p11p15,p11p16,p12p1,p12p2,p1
 2p3,p12p4,p12p5,p12p6,p12p7,p12p8,p12p9,p12p10,p12p11,p12
 p12,p12p13,p12p14,p12p15,p12p16,p13p1,p13p2,p13p3,p13p4,p
 13p5,p13p6,p13p7,p13p8,p13p9,p13p10,p13p11,p13p12,p13p13,
 p13p14,p13p15,p13p16,p14p1,p14p2,p14p3,p14p4,p14p5,p14p6,
 p14p7,p14p8,p14p9,p14p10,p14p11,p14p12,p14p13,p14p14,p14p
 15,p14p16,p15p1,p15p2,p15p3,p15p4,p15p5,p15p6,p15p7,p15p8
 ,p15p9,p15p10,p15p11,p15p12,p15p13,p15p14,p15p15,p15p16,p
 16p1,p16p2,p16p3,p16p4,p16p5,p16p6,p16p7,p16p8,p16p9,p16p
 10,p16p11,p16p12,p16p13,p16p14,p16p15,p16p16,d,id,p,po,c,
 coxo,pxx,pyy,F1,F2,F3,F4,F5,F6,F7,F8,F9,F10,F11,F12,F13,F
 14,F15,F16,Sp1,Sp2,Sp3,Sp4,Sp5,Sp6,Sp7,Sp8,Sp9,Sp10,Sp11,
 Sp12,Sp13,Sp14,Sp15,Sp16,SP,ap11,ap12,ap13,ap14,ap21,ap22
 ,ap23,ap24,ap31,ap32,ap33,ap34,ap41,ap42,ap42,ap44,WP,X10
 h,X20h,X30h,X40h,X12h,X22h,X32h,X42h,Yb10e,Yb20e,Yb30e,Yb
 40e,Yb12e,Yb22e,Yb32e,Yb42e,SP11,SP12,SP13,SP14,SP15,SP16
 ,SP17,SP18,SP19,SP110,SP111,Sp112,SP113,SP114,SP115,SP116
 ,SH1,ah1,ah111,ah112,ah113,ah114,ah121,ah122,ah123,ah124,
 ah131,ah132,ah133,ah134,ah141,ah142,ah143,ah144,Wh1,SP21,
 SP22,SP23,SP24,SP25,SP26,SP27,SP28,SP29,SP210,SP211,Sp212
 ,SP213,SP214,SP215,SP216,SH2,ah2,ah211,ah212,ah213,ah214,
 ah221,ah222,ah223,ah224,ah231,ah232,ah233,ah234,ah241,ah2
 42,ah243,ah244,Wh2,SP31,SP32,SP33,SP34,SP35,SP36,SP37,SP3
 8,SP39,SP310,SP311,Sp312,SP313,SP314,SP315,SP316,SH3,ah3,
 ah311,ah312,ah313,ah314,ah321,ah322,ah323,ah324,ah331,ah3
 32,ah333,ah334,ah341,ah342,ah343,ah344,Wh3,SP41,SP42,SP43
 ,SP44,SP45,SP46,SP47,SP48,SP49,SP410,SP411,Sp412,SP413,SP
 414,SP415,SP416,SH4,ah4,ah411,ah412,ah413,ah414,ah421,ah4
 22,ah423,ah424,ah431,ah432,ah433,ah434,ah441,ah442,ah443,
 ah444,Wh4]

EE=2.1*10^6;
 μ=0.3;
 a=33;
 bb=8;
 bc=15;
 tb=1;
 tc=1.9;
 db=(EE*tb^3)/(12*(1-μ^2));
 dc=(EE*tc^3)/(12*(1-μ^2));
 co=tb
 c=3
 e=4;
 h1=6;
 h2=13;
 h3=20;
 h4=27;
 spr1=2;
 spr2=2;
 λ1=0.139387;

```

λ2=0.231706;
λ3=0.324788;
λ4=0.418024;
kb1=0.234388;
kb2=0.586761;
kb3=0.981845;
kb4=1.374440;
kc1=0.125007;
kc2=0.523650;
kc3=0.942478;
kc4=1.151920;
A1=(spr1*(Sin[λ1*a]-Sinh[λ1*a]))/(spr1*(Cosh[λ1*a]-
Cos[λ1*a])+2*λ1*Sinh[λ1*a]);
A2=(spr1*(Sin[λ2*a]-Sinh[λ2*a]))/(spr1*(Cosh[λ2*a]-
Cos[λ2*a])+2*λ2*Sinh[λ2*a]);
A3=(spr1*(Sin[λ3*a]-Sinh[λ3*a]))/(spr1*(Cosh[λ3*a]-
Cos[λ3*a])+2*λ3*Sinh[λ3*a]);
A4=(spr1*(Sin[λ4*a]-Sinh[λ4*a]))/(spr1*(Cosh[λ4*a]-
Cos[λ4*a])+2*λ4*Sinh[λ4*a]);

Bb1=-
((Sinh[kb1*bb]+Sin[kb1*bb])/(Cos[kb1*bb]+Cosh[kb1*bb]));
Bb2=-
((Sinh[kb2*bb]+Sin[kb2*bb])/(Cos[kb2*bb]+Cosh[kb2*bb]));
Bb3=-
((Sinh[kb3*bb]+Sin[kb3*bb])/(Cos[kb3*bb]+Cosh[kb3*bb]));
Bb4=-
((Sinh[kb4*bb]+Sin[kb4*bb])/(Cos[kb4*bb]+Cosh[kb4*bb]));
Bc1=-
((Sinh[kc1*bc]+Sin[kc1*bc])/(Cos[kc1*bc]+Cosh[kc1*bc]));
Bc2=-
((Sinh[kc2*bc]+Sin[kc2*bc])/(Cos[kc2*bc]+Cosh[kc2*bc]));
Bc3=-
((Sinh[kc3*bc]+Sin[kc3*bc])/(Cos[kc3*bc]+Cosh[kc3*bc]));
Bc4=-
((Sinh[kc4*bc]+Sin[kc4*bc])/(Cos[kc4*bc]+Cosh[kc4*bc]));

X10=Sin[λ1*x]+A1*Cos[λ1*x]-(1+(2*λ1)/spr1*A1)*Sinh[λ1*x]-
A1*Cosh[λ1*x];
X20=Sin[λ2*x]+A2*Cos[λ2*x]-(1+(2*λ2)/spr1*A2)*Sinh[λ2*x]-
A2*Cosh[λ2*x];
X30=Sin[λ3*x]+A3*Cos[λ3*x]-(1+(2*λ3)/spr1*A3)*Sinh[λ3*x]-
A3*Cosh[λ3*x];
X40=Sin[λ4*x]+A4*Cos[λ4*x]-(1+(2*λ4)/spr1*A4)*Sinh[λ4*x]-
A4*Cosh[λ4*x];
X12=D[X10,{x,2}];
X22=D[X20,{x,2}];
X32=D[X30,{x,2}];
X42=D[X40,{x,2}];

```

```

X14=D[X10,{x,4}];
X24=D[X20,{x,4}];
X34=D[X30,{x,4}];
X44=D[X40,{x,4}];

Yb10=Sin[kb1*y]+Bb1*Cos[kb1*y]-Sinh[kb1*y]-
Bb1*Cosh[kb1*y];
Yb20=Sin[kb2*y]+Bb2*Cos[kb2*y]-Sinh[kb2*y]-
Bb2*Cosh[kb2*y];
Yb30=Sin[kb3*y]+Bb3*Cos[kb3*y]-Sinh[kb3*y]-
Bb3*Cosh[kb3*y];
Yb40=Sin[kb4*y]+Bb4*Cos[kb4*y]-Sinh[kb4*y]-
Bb4*Cosh[kb4*y];

Yb12=D[Yb10,{y,2}];
Yb22=D[Yb20,{y,2}];
Yb32=D[Yb30,{y,2}];
Yb42=D[Yb40,{y,2}];

Yb14=D[Yb10,{y,4}];
Yb24=D[Yb20,{y,4}];
Yb34=D[Yb30,{y,4}];
Yb44=D[Yb40,{y,4}];

Yc10=Sin[kc1*y]+Bc1*Cos[kc1*y]-Sinh[kc1*y]-
Bc1*Cosh[kc1*y];
Yc20=Sin[kc2*y]+Bc2*Cos[kc2*y]-Sinh[kc2*y]-
Bc2*Cosh[kc2*y];
Yc30=Sin[kc3*y]+Bc3*Cos[kc3*y]-Sinh[kc3*y]-
Bc3*Cosh[kc3*y];
Yc40=Sin[kc4*y]+Bc4*Cos[kc4*y]-Sinh[kc4*y]-
Bc4*Cosh[kc4*y];

Yc12=D[Yc10,{y,2}];
Yc22=D[Yc20,{y,2}];
Yc32=D[Yc30,{y,2}];
Yc42=D[Yc40,{y,2}];

Yc14=D[Yc10,{y,4}];
Yc24=D[Yc20,{y,4}];
Yc34=D[Yc30,{y,4}];
Yc44=D[Yc40,{y,4}];

p1p1=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),
{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb
12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegra
te[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p2=0;
p1p3=0;
p1p4=0;

```

```

p1p5=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p6=0;
p1p7=0;
p1p8=0;
p1p9=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p10=0;
p1p11=0;
p1p12=0;
p1p13=NIntegrate[(X44*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p1p14=0;
p1p15=0;
p1p16=0;
p2p1=0;
p2p2=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p2p3=0;
p2p4=0;
p2p5=0;
p2p6=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p2p7=0;
p2p8=0;
p2p9=0;
p2p10=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p2p11=0;
p2p12=0;
p2p13=0;
p2p14=NIntegrate[(X44*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p2p15=0;
p2p16=0;
p3p1=0;
p3p2=0;

```

```

p3p3=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p3p4=0;
p3p5=0;
p3p6=0;
p3p7=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p3p8=0;
p3p9=0;
p3p10=0;
p3p11=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p3p12=0;
p3p13=0;
p3p14=0;
p3p15=NIntegrate[(X44*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p3p16=0;
p4p1=0;
p4p2=0;
p4p3=0;
p4p4=NIntegrate[(X14*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p4p5=0;
p4p6=0;
p4p7=0;
p4p8=NIntegrate[(X24*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p4p9=0;
p4p10=0;
p4p11=0;
p4p12=NIntegrate[(X34*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p4p13=0;
p4p14=0;
p4p15=0;

```

```

p4p16=NIntegrate[(X44*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X10),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p5p1=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p5p2=0;
p5p3=0;
p5p4=0;
p5p5=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p5p6=0;
p5p7=0;
p5p8=0;
p5p9=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p5p10=0;
p5p11=0;
p5p12=0;
p5p13=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p5p14=0;
p5p15=0;
p5p16=0;
p6p1=0;
p6p2=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p3=0;
p6p4=0;
p6p5=0;
p6p6=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p7=0;
p6p8=0;
p6p9=0;
p6p10=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];

```



```

p6p11=0;
p6p12=0;
p6p13=0;
p6p14=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p6p15=0;
p6p16=0;
p7p1=0;
p7p2=0;
p7p3=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p4=0;
p7p5=0;
p7p6=0;
p7p7=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p8=0;
p7p9=0;
p7p10=0;
p7p11=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p12=0;
p7p13=0;
p7p14=0;
p7p15=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p7p16=0;
p8p1=0;
p8p2=0;
p8p3=0;
p8p4=NIntegrate[(X14*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p8p5=0;
p8p6=0;
p8p7=0;
p8p8=NIntegrate[(X24*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];

```

```

p8p9=0;
p8p10=0;
p8p11=0;
p8p12=NIntegrate[(X34*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p8p13=0;
p8p14=0;
p8p15=0;
p8p16=NIntegrate[(X44*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X20),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p9p1=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p9p2=0;
p9p3=0;
p9p4=0;
p9p5=NIntegrate[(X24*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p9p6=0;
p9p7=0;
p9p8=0;
p9p9=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p9p10=0;
p9p11=0;
p9p12=0;
p9p13=NIntegrate[(X44*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p9p14=0;
p9p15=0;
p9p16=0;
p10p1=0;
p10p2=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p10p3=0;
p10p4=0;
p10p5=0;

```

```

p10p6=NIntegrate[(X24*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p10p7=0;
p10p8=0;
p10p9=0;
p10p10=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p10p11=0;
p10p12=0;
p10p13=0;
p10p14=NIntegrate[(X44*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p10p15=0;
p10p16=0;
p11p1=0;
p11p2=0;
p11p3=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p11p4=0;
p11p5=0;
p11p6=0;
p11p7=NIntegrate[(X24*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p11p8=0;
p11p9=0;
p11p10=0;
p11p11=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p11p12=0;
p11p13=0;
p11p14=0;
p11p15=NIntegrate[(X44*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p11p16=0;
p12p1=0;
p12p2=0;
p12p3=0;

```

```

p12p4=NIntegrate[(X14*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p12p5=0;
p12p6=0;
p12p7=0;
p12p8=NIntegrate[(X24*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p12p9=0;
p12p10=0;
p12p11=0;
p12p12=NIntegrate[(X34*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p12p13=0;
p12p14=0;
p12p15=0;
p12p16=NIntegrate[(X44*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X30),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p13p1=NIntegrate[(X14*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p13p2=0;
p13p3=0;
p13p4=0;
p13p5=NIntegrate[(X24*X34),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p13p6=0;
p13p7=0;
p13p8=0;
p13p9=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p13p10=0;
p13p11=0;
p13p12=0;
p13p13=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb10*Yb10),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb12*Yb10),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb14*Yb10),{y,0,bb}];
p13p14=0;

```

```

p13p15=0;
p13p16=0;
p14p1=0;
p14p2=NIntegrate[(X14*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p14p3=0;
p14p4=0;
p14p5=0;
p14p6=NIntegrate[(X24*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p14p7=0;
p14p8=0;
p14p9=0;
p14p10=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p14p11=0;
p14p12=0;
p14p13=0;
p14p14=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb20*Yb20),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb22*Yb20),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb24*Yb20),{y,0,bb}];
p14p15=0;
p14p16=0;
p15p1=0;
p15p2=0;
p15p3=NIntegrate[(X14*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p4=0;
p15p5=0;
p15p6=0;
p15p7=NIntegrate[(X24*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p8=0;
p15p9=0;
p15p10=0;
p15p11=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p12=0;

```

```

p15p13=0;
p15p14=0;
p15p15=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb30*Yb30),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb32*Yb30),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb34*Yb30),{y,0,bb}];
p15p16=0;
p16p1=0;
p16p2=0;
p16p3=0;
p16p4=NIntegrate[(X14*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X12*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X10*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p16p5=0;
p16p6=0;
p16p7=0;
p16p8=NIntegrate[(X24*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X22*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X20*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p16p9=0;
p16p10=0;
p16p11=0;
p16p12=NIntegrate[(X34*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X32*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X30*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];
p16p13=0;
p16p14=0;
p16p15=0;
p16p16=NIntegrate[(X44*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb40*Yb40),{y,0,bb}]+2*NIntegrate[(X42*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb42*Yb40),{y,0,bb}]+NIntegrate[(X40*X40),{x,0,a}]*NIntegrate[(Yb44*Yb40),{y,0,bb}];

d={p1p1,p1p2,p1p3,p1p4,p1p5,p1p6,p1p7,p1p8,p1p9,p1p10,p1p11,p1p12,p1p13,p1p14,p1p15,p1p16},

{p2p1,p2p2,p2p3,p2p4,p2p5,p2p6,p2p7,p2p8,p2p9,p2p10,p2p11,p2p12,p2p13,p2p14,p2p15,p2p16},

{p3p1,p3p2,p3p3,p3p4,p3p5,p3p6,p3p7,p3p8,p3p9,p3p10,p3p11,p3p12,p3p13,p3p14,p3p15,p3p16},

{p4p1,p4p2,p4p3,p4p4,p4p5,p4p6,p4p7,p4p8,p4p9,p4p10,p4p11,p4p12,p4p13,p4p14,p4p15,p4p16},

{p5p1,p5p2,p5p3,p5p4,p5p5,p5p6,p5p7,p5p8,p5p9,p5p10,p5p11,p5p12,p5p13,p5p14,p5p15,p5p16},

```

{p6p1,p6p2,p6p3,p6p4,p6p5,p6p6,p6p7,p6p8,p6p9,p6p10,p6p11,
p6p12,p6p13,p6p14,p6p15,p6p16},

{p7p1,p7p2,p7p3,p7p4,p7p5,p7p6,p7p7,p7p8,p7p9,p7p10,p7p11,
p7p12,p7p13,p7p14,p7p15,p7p16},

{p8p1,p8p2,p8p3,p8p4,p8p5,p8p6,p8p7,p8p8,p8p9,p8p10,p8p11,
p8p12,p8p13,p8p14,p8p15,p8p16},

{p9p1,p9p2,p9p3,p9p4,p9p5,p9p6,p9p7,p9p8,p9p9,p9p10,p9p11,
p9p12,p9p13,p9p14,p9p15,p9p16},

{p10p1,p10p2,p10p3,p10p4,p10p5,p10p6,p10p7,p10p8,p10p9,p10p10,
p10p11,p10p12,p10p13,p10p14,p10p15,p10p16},

{p11p1,p11p2,p11p3,p11p4,p11p5,p11p6,p11p7,p11p8,p11p9,p11p10,
p11p11,p11p12,p11p13,p11p14,p11p15,p11p16},

{p12p1,p12p2,p12p3,p12p4,p12p5,p12p6,p12p7,p12p8,p12p9,p12p10,
p12p11,p12p12,p12p13,p12p14,p12p15,p12p16},

{p13p1,p13p2,p13p3,p13p4,p13p5,p13p6,p13p7,p13p8,p13p9,p13p10,
p13p11,p13p12,p13p13,p13p14,p13p15,p13p16},

{p14p1,p14p2,p14p3,p14p4,p14p5,p14p6,p14p7,p14p8,p14p9,p14p10,
p14p11,p14p12,p14p13,p14p14,p14p15,p14p16},

{p15p1,p15p2,p15p3,p15p4,p15p5,p15p6,p15p7,p15p8,p15p9,p15p10,
p15p11,p15p12,p15p13,p15p14,p15p15,p15p16},

{p16p1,p16p2,p16p3,p16p4,p16p5,p16p6,p16p7,p16p8,p16p9,p16p10,
p16p11,p16p12,p16p13,p16p14,p16p15,p16p16}};

id=Inverse[d];

(*

xo=-((c-co)/bb^2)*y^2+(2*(c-co))/bb*y+co;

p=(1-x^2/xo^2);

pxx=D[p,{x,2}];

pyy=D[p,{y,2}];

F1=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb10;

Sp1=NIntegrate[Integrate[F1,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F2=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb20;

Sp2=NIntegrate[Integrate[F2,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F3=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb30;

Sp3=NIntegrate[Integrate[F3,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F4=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X10*Yb40;

Sp4=NIntegrate[Integrate[F4,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

```

F5=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb10;
Sp5=NIntegrate[Integrate[F5,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F6=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb20;
Sp6=NIntegrate[Integrate[F6,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F7=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb30;
Sp7=NIntegrate[Integrate[F7,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F8=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X20*Yb40;
Sp8=NIntegrate[Integrate[F8,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F9=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb10;
Sp9=NIntegrate[Integrate[F9,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F10=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb20;
Sp10=NIntegrate[Integrate[F10,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F11=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb30;
Sp11=NIntegrate[Integrate[F11,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F12=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X30*Yb40;
Sp12=NIntegrate[Integrate[F12,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

F13=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb10;
Sp13=NIntegrate[Integrate[F13,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F14=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb20;
Sp14=NIntegrate[Integrate[F14,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F15=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb30;
Sp15=NIntegrate[Integrate[F15,{x,0,xo}],{y,0,bb}];
F16=1/db*(p-(tb^2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(pxx+pyy))*X40*Yb40;
Sp16=NIntegrate[Integrate[F16,{x,0,xo}],{y,0,bb}];

SP={{Sp1},{Sp2},{Sp3},{Sp4},{Sp5},{Sp6},{Sp7},{Sp8},{Sp9}
,{Sp10},{Sp11},{Sp12},{Sp13},{Sp14},{Sp15},{Sp16}};
ap=id.SP;
ap11=ap[[1,1]];
ap12=ap[[2,1]];
ap13=ap[[3,1]];
ap14=ap[[4,1]];
ap21=ap[[5,1]];
ap22=ap[[6,1]];
ap23=ap[[7,1]];
ap24=ap[[8,1]];
ap31=ap[[9,1]];
ap32=ap[[10,1]];
ap33=ap[[11,1]];
ap34=ap[[12,1]];
ap41=ap[[13,1]];
ap42=ap[[14,1]];
ap43=ap[[15,1]];
ap44=ap[[16,1]];
WP=ap11*X10*Yb10+ap12*X10*Yb20+ap13*X10*Yb30+ap14*X10*Yb4
0+
ap21*X20*Yb10+ap22*X20*Yb20+ap23*X20*Yb30+ap24*X20*Yb40+

```


ap31*X30*Yb10+ap32*X30*Yb20+ap33*X30*Yb30+ap34*X30*Yb40+
ap41*X40*Yb10+ap42*X40*Yb20+ap33*X40*Yb30+ap44*X40*Yb40;

*)

X10h[x_]=Sin[λ1*x]+A1*Cos[λ1*x]-
(1+(2*λ1)/spr1*A1)*Sinh[λ1*x]-A1*Cosh[λ1*x];
X20h[x_]=Sin[λ2*x]+A2*Cos[λ2*x]-
(1+(2*λ2)/spr1*A2)*Sinh[λ2*x]-A2*Cosh[λ2*x];
X30h[x_]=Sin[λ3*x]+A3*Cos[λ3*x]-
(1+(2*λ3)/spr1*A3)*Sinh[λ3*x]-A3*Cosh[λ3*x];
X40h[x_]=Sin[λ4*x]+A4*Cos[λ4*x]-
(1+(2*λ4)/spr1*A4)*Sinh[λ4*x]-A4*Cosh[λ4*x];
X12h[x_]=D[X10,{x,2}];
X22h[x_]=D[X20,{x,2}];
X32h[x_]=D[X30,{x,2}];
X42h[x_]=D[X40,{x,2}];
Yb10e=Sin[kb1*ε]+Bb1*Cos[kb1*ε]-Sinh[kb1*ε]-
Bb1*Cosh[kb1*ε];
Yb20e=Sin[kb2*ε]+Bb2*Cos[kb2*ε]-Sinh[kb2*ε]-
Bb2*Cosh[kb2*ε];
Yb30e=Sin[kb3*ε]+Bb3*Cos[kb3*ε]-Sinh[kb3*ε]-
Bb3*Cosh[kb3*ε];
Yb40e=Sin[kb4*ε]+Bb4*Cos[kb4*ε]-Sinh[kb4*ε]-
Bb4*Cosh[kb4*ε];
Yb12e[y_]=D[Yb10,{y,2}];
Yb22e[y_]=D[Yb20,{y,2}];
Yb32e[y_]=D[Yb30,{y,2}];
Yb42e[y_]=D[Yb40,{y,2}];

SP11=1/db*(X10h[h1]*Yb10e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h1]*Yb10e+X10h[h1]*Yb12e[ε]));
SP12=1/db*(X10h[h1]*Yb20e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h1]*Yb20e+X10h[h1]*Yb22e[ε]));
SP13=1/db*(X10h[h1]*Yb30e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h1]*Yb30e+X10h[h1]*Yb32e[ε]));
SP14=1/db*(X10h[h1]*Yb40e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h1]*Yb40e+X10h[h1]*Yb42e[ε]));

SP15=1/db*(X20h[h1]*Yb10e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h1]*Yb10e+X20h[h1]*Yb12e[ε]));
SP16=1/db*(X20h[h1]*Yb20e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h1]*Yb20e+X20h[h1]*Yb22e[ε]));
SP17=1/db*(X20h[h1]*Yb30e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h1]*Yb30e+X20h[h1]*Yb32e[ε]));
SP18=1/db*(X20h[h1]*Yb40e-(tb²*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h1]*Yb40e+X20h[h1]*Yb42e[ε]));

```

SP19=1/db*(X30h[h1]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h1]*Yb10e+X30h[h1]*Yb12e[ε]));
SP110=1/db*(X30h[h1]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h1]*Yb20e+X30h[h1]*Yb22e[ε]));
SP111=1/db*(X30h[h1]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h1]*Yb30e+X30h[h1]*Yb32e[ε]));
SP112=1/db*(X30h[h1]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h1]*Yb40e+X40h[h1]*Yb42e[ε]));

SP113=1/db*(X40h[h1]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X42h[h1]*Yb10e+X40h[h1]*Yb12e[ε]));
SP114=1/db*(X40h[h1]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X42h[h1]*Yb20e+X40h[h1]*Yb22e[ε]));
SP115=1/db*(X40h[h1]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X42h[h1]*Yb30e+X40h[h1]*Yb32e[ε]));
SP116=1/db*(X40h[h1]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X42h[h1]*Yb40e+X40h[h1]*Yb42e[ε]));
SH1={{SP11},{SP12},{SP13},{SP14},{SP15},{SP16},{SP17},{SP
18},{SP19},{SP110},{SP111},{SP112},{SP113},{SP114},{SP115
},{SP116}};
ah1=id.SH1;
ah111=ah1[[1,1]];
ah112=ah1[[2,1]];
ah113=ah1[[3,1]];
ah114=ah1[[4,1]];
ah121=ah1[[5,1]];
ah122=ah1[[6,1]];
ah123=ah1[[7,1]];
ah124=ah1[[8,1]];
ah131=ah1[[9,1]];
ah132=ah1[[10,1]];
ah133=ah1[[11,1]];
ah134=ah1[[12,1]];
ah141=ah1[[13,1]];
ah142=ah1[[14,1]];
ah143=ah1[[15,1]];
ah144=ah1[[16,1]];
Wh1[x_]=ah111*X10*Yb10+ah112*X10*Yb20+ah113*X10*Yb30+ah11
4*X10*Yb40+

ah121*X20*Yb10+ah122*X20*Yb20+ah123*X20*Yb30+ah124*X20*Yb
40+

ah131*X30*Yb10+ah132*X30*Yb20+ah133*X30*Yb30+ah134*X30*Yb
40+

ah141*X40*Yb10+ah142*X40*Yb20+ah143*X40*Yb30+ah144*X40*Yb
40;

```

```

SP21=1/db*(X10h[h2]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h2]*Yb10e+X10h[h2]*Yb12e[ε]));
SP22=1/db*(X10h[h2]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h2]*Yb20e+X10h[h2]*Yb22e[ε]));
SP23=1/db*(X10h[h2]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h2]*Yb30e+X10h[h2]*Yb32e[ε]));
SP24=1/db*(X10h[h2]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h2]*Yb40e+X10h[h2]*Yb42e[ε]));

SP25=1/db*(X20h[h2]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h2]*Yb10e+X20h[h2]*Yb12e[ε]));
SP26=1/db*(X20h[h2]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h2]*Yb20e+X20h[h2]*Yb22e[ε]));
SP27=1/db*(X20h[h2]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h2]*Yb30e+X20h[h2]*Yb32e[ε]));
SP28=1/db*(X20h[h2]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h2]*Yb40e+X20h[h2]*Yb42e[ε]));

SP29=1/db*(X30h[h2]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h2]*Yb10e+X30h[h2]*Yb12e[ε]));
SP210=1/db*(X30h[h2]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h2]*Yb20e+X30h[h2]*Yb22e[ε]));
SP211=1/db*(X30h[h2]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h2]*Yb30e+X30h[h2]*Yb32e[ε]));
SP212=1/db*(X30h[h2]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h2]*Yb40e+X40h[h2]*Yb42e[ε]));

SP213=1/db*(X40h[h2]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h2]*Yb10e+X40h[h2]*Yb12e[ε]));
SP214=1/db*(X40h[h2]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h2]*Yb20e+X40h[h2]*Yb22e[ε]));
SP215=1/db*(X40h[h2]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h2]*Yb30e+X40h[h2]*Yb32e[ε]));
SP216=1/db*(X40h[h2]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h2]*Yb40e+X40h[h2]*Yb42e[ε]));
SH2={{SP21},{SP22},{SP23},{SP24},{SP25},{SP26},{SP27},{SP28},{SP29},{SP210},{SP211},{SP212},{SP213},{SP214},{SP215},{SP216}};
ah2=id.SH2;
ah211=ah2[[1,1]];
ah212=ah2[[2,1]];
ah213=ah2[[3,1]];
ah214=ah2[[4,1]];
ah221=ah2[[5,1]];
ah222=ah2[[6,1]];
ah223=ah2[[7,1]];

```

```

ah224=ah2[[8,1]];
ah231=ah2[[9,1]];
ah232=ah2[[10,1]];
ah233=ah2[[11,1]];
ah234=ah2[[12,1]];
ah241=ah2[[13,1]];
ah242=ah2[[14,1]];
ah243=ah2[[15,1]];
ah244=ah2[[16,1]];
Wh2[x_]=ah211*x10*Yb10+ah212*x10*Yb20+ah213*x10*Yb30+ah21
4*x10*Yb40+

```

```

ah221*x20*Yb10+ah222*x20*Yb20+ah223*x20*Yb30+ah224*x20*Yb
40+

```

```

ah231*x30*Yb10+ah232*x30*Yb20+ah233*x30*Yb30+ah234*x30*Yb
40+

```

```

ah241*x40*Yb10+ah242*x40*Yb20+ah233*x40*Yb30+ah244*x40*Yb
40;

```

```

SP31=1/db*(X10h[h3]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h3]*Yb10e+X10h[h3]*Yb12e[ε]));
SP32=1/db*(X10h[h3]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h3]*Yb20e+X10h[h3]*Yb22e[ε]));
SP33=1/db*(X10h[h3]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h3]*Yb30e+X10h[h3]*Yb32e[ε]));
SP34=1/db*(X10h[h3]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X12h[h3]*Yb40e+X10h[h3]*Yb42e[ε]));

```

```

SP35=1/db*(X20h[h3]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h3]*Yb10e+X20h[h3]*Yb12e[ε]));
SP36=1/db*(X20h[h3]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h3]*Yb20e+X20h[h3]*Yb22e[ε]));
SP37=1/db*(X20h[h3]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h3]*Yb30e+X20h[h3]*Yb32e[ε]));
SP38=1/db*(X20h[h3]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X22h[h3]*Yb40e+X20h[h3]*Yb42e[ε]));

```

```

SP39=1/db*(X30h[h3]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h3]*Yb10e+X30h[h3]*Yb12e[ε]));
SP310=1/db*(X30h[h3]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h3]*Yb20e+X30h[h3]*Yb22e[ε]));
SP311=1/db*(X30h[h3]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h3]*Yb30e+X30h[h3]*Yb32e[ε]));
SP312=1/db*(X30h[h3]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-
μ))*(X32h[h3]*Yb40e+X40h[h3]*Yb42e[ε]));

```

```

SP313=1/db*(X40h[h3]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h3]*Yb10e+X40h[h3]*Yb12e[ε]));
SP314=1/db*(X40h[h3]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h3]*Yb20e+X40h[h3]*Yb22e[ε]));
SP315=1/db*(X40h[h3]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h3]*Yb30e+X40h[h3]*Yb32e[ε]));
SP316=1/db*(X40h[h3]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h3]*Yb40e+X40h[h3]*Yb42e[ε]));
SH3={{SP31},{SP32},{SP33},{SP34},{SP35},{SP36},{SP37},{SP38},{SP39},{SP310},{SP311},{SP312},{SP313},{SP314},{SP315},{SP316}};
ah3=id.SH3;
ah311=ah3[[1,1]];
ah312=ah3[[2,1]];
ah313=ah3[[3,1]];
ah314=ah3[[4,1]];
ah321=ah3[[5,1]];
ah322=ah3[[6,1]];
ah323=ah3[[7,1]];
ah324=ah3[[8,1]];
ah331=ah3[[9,1]];
ah332=ah3[[10,1]];
ah333=ah3[[11,1]];
ah334=ah3[[12,1]];
ah341=ah3[[13,1]];
ah342=ah3[[14,1]];
ah343=ah3[[15,1]];
ah344=ah3[[16,1]];
Wh3[x_]=ah311*X10*Yb10+ah312*X10*Yb20+ah313*X10*Yb30+ah314*X10*Yb40+
ah321*X20*Yb10+ah322*X20*Yb20+ah323*X20*Yb30+ah324*X20*Yb40+
ah331*X30*Yb10+ah332*X30*Yb20+ah333*X30*Yb30+ah334*X30*Yb40+
ah341*X40*Yb10+ah342*X40*Yb20+ah343*X40*Yb30+ah344*X40*Yb40;

SP41=1/db*(X10h[h4]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h4]*Yb10e+X10h[h4]*Yb12e[ε]));
SP42=1/db*(X10h[h4]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h4]*Yb20e+X10h[h4]*Yb22e[ε]));
SP43=1/db*(X10h[h4]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h4]*Yb30e+X10h[h4]*Yb32e[ε]));

```

```

SP44=1/db*(X10h[h4]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X12h[h4]*Yb40e+X10h[h4]*Yb42e[ε]));

SP45=1/db*(X20h[h4]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h4]*Yb10e+X20h[h4]*Yb12e[ε]));
SP46=1/db*(X20h[h4]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h4]*Yb20e+X20h[h4]*Yb22e[ε]));
SP47=1/db*(X20h[h4]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h4]*Yb30e+X20h[h4]*Yb32e[ε]));
SP48=1/db*(X20h[h4]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X22h[h4]*Yb40e+X20h[h4]*Yb42e[ε]));

SP49=1/db*(X30h[h4]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h4]*Yb10e+X30h[h4]*Yb12e[ε]));
SP410=1/db*(X30h[h4]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h4]*Yb20e+X30h[h4]*Yb22e[ε]));
SP411=1/db*(X30h[h4]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h4]*Yb30e+X30h[h4]*Yb32e[ε]));
SP412=1/db*(X30h[h4]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X32h[h4]*Yb40e+X40h[h4]*Yb42e[ε]));

SP413=1/db*(X40h[h4]*Yb10e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h4]*Yb10e+X40h[h4]*Yb12e[ε]));
SP414=1/db*(X40h[h4]*Yb20e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h4]*Yb20e+X40h[h4]*Yb22e[ε]));
SP415=1/db*(X40h[h4]*Yb30e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h4]*Yb30e+X40h[h4]*Yb32e[ε]));
SP416=1/db*(X40h[h4]*Yb40e-(tb2*(2-μ))/(10*(1-μ))*(X42h[h4]*Yb40e+X40h[h4]*Yb42e[ε]));
SH4={ {SP41}, {SP42}, {SP43}, {SP44}, {SP45}, {SP46}, {SP47}, {SP48}, {SP49}, {SP410}, {SP411}, {SP412}, {SP413}, {SP414}, {SP415}, {SP416} };
ah4=id.SH4;
ah411=ah4[[1,1]];
ah412=ah4[[2,1]];
ah413=ah4[[3,1]];
ah414=ah4[[4,1]];
ah421=ah4[[5,1]];
ah422=ah4[[6,1]];
ah423=ah4[[7,1]];
ah424=ah4[[8,1]];
ah431=ah4[[9,1]];
ah432=ah4[[10,1]];
ah433=ah4[[11,1]];
ah434=ah4[[12,1]];
ah441=ah4[[13,1]];
ah442=ah4[[14,1]];
ah443=a41[[15,1]];
ah444=ah4[[16,1]];

```

```
Wh4[x_]=ah411*X10*Yb10+ah412*X10*Yb20+ah413*X10*Yb30+ah414*X10*Yb40+
```

```
ah421*X20*Yb10+ah422*X20*Yb20+ah423*X20*Yb30+ah424*X20*Yb40+
```

```
ah431*X30*Yb10+ah432*X30*Yb20+ah433*X30*Yb30+ah434*X30*Yb40+
```

```
ah441*X40*Yb10+ah442*X40*Yb20+ah443*X40*Yb30+ah444*X40*Yb40;
```

```
y=8
```

```
aaa=Plot[Wh1[x],{x,0,a}]
```

```
bbb=Plot[Wh2[x],{x,0,a}]
```

```
ccc=Plot[Wh3[x],{x,0,a}]
```

```
ddd=Plot[Wh4[x],{x,0,a}]
```

```
Show[aaa,bbb,ccc,ddd]
```

