ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

ONLINE ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΓΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΧΡΟΝΟ

υπό

ΕΥΑΓΓΕΛΙΑΣ ΧΡΥΣΟΧΟΟΥ

Διπλωματούχου Μαθηματικού

Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ., 2003

M.Sc., Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας,

Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ., 2006

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διδακτορικού Διπλώματος

2015

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) – Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: Ηράκλειτος ΙΙ . Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Αθανάσιος Ζηλιασκόπουλος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τέταρτος Εξεταστής	Δρ. Νικόλαος Τσάντας Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πάτρας
Πέμπτος Εξεταστής	Δρ. Δημήτρης Παντελής Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Έκτος Εξεταστής	Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Έβδομος Εξεταστής	Δρ. Στράτος Παπαδημητρίου Καθηγητής, Τμήμα Ναυτιλιακών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Πειραιά

Ευχαριστίες

Ο πρωτεύον στόχος της εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής που συνάγει με την ετυμολογία της, όπως αυτή αποδίδονταν στην αρχαία Ελλάδα, δηλαδή της εκούσιας χρονοτριβής πραγματεύτηκε με την στοχευμένη και πολύτιμη καθοδήγηση του επιβλέποντα καθηγητού μου κ. Αθανασίου Ζηλιασκόπουλου. Δίχως τη δική του ανεκτίμητη επιστημονική αρωγή και τις προοδευτικές προτάσεις διεύρυνσης του ερευνητικού πεδίου η εργασία αυτή δεν θα είχε υλοποιηθεί. Έτσι πάνω από όλα του οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για όσα μου παρείχε με καλοσύνη, ευγένεια και γενναιοδωρία.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και στα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής παρακολούθησης για τις πολύτιμες συμβουλές που μου παρείχαν σε κάθε μου προβληματισμό. Ευχαριστώ επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης για την τη τιμή που μου έκαναν να αποδεχτούν να συμμετάσχουν στην κρίση του διδακτορικού μου . Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον καθηγητή μου , από τις προπτυχιακές και μεταπτυχιακές σπουδές μου, κ. Νικόλαο Τσάντα από το τμήμα των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών που δέχτηκε να συμμετάσχει. Ίσως εκείνος να μην το θυμάται αλλά ήταν κάτι που του είχα υποσχεθεί όταν του ζητούσα πριν χρόνια συστατική επιστολή για την αίτηση που κατέθεσα για την χρηματοδότηση της διατριβής στα πλαίσια του προγράμματος υποτροφιών του Ηράκλειτου ΙΙ. Ιδιαίτερη μνεία θα ήθελα να κάνω στο πρόγραμμα «Ηράκλειτος ΙΙ– Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας» για την οικονομική στήριξη που μου προσέφερε . Η βοήθεια του προγράμματος ήταν ουσιαστική και καθοριστική για την πορεία του ερευνητικού έργου. Δίχως αυτή ίσως να μην γνώριζα τους καθηγητές Michel Gendreau από το τμήμα Μαθηματικών και Μηχανικών Παραγωγής του πολυτεχνείο του Μόντρεαλ του Καναδά και Luca Bertazzi από το τμήμα Οικονομικών Επιστημών και Διοίκησης του πανεπιστημίου της Μπρέσιας στην Ιταλία το 2014 στο διεθνές συνέδριο του EURO INFORMS στη Ρώμη. Ούτε θα ήταν εφικτό να παρακολουθήσω τις εξελίξεις των σχετιζομένων με τη δρομολόγηση στόλου μαθηματικών προτύπων από τον καθηγητή Roberto Baldacci από το τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Η/Υ του πανεπιστημίου της Μπολόνιας σε εκπαιδευτική ημερίδα του VEROLOG. Και σίγουρα δεν θα είχα καταφέρει να φτάσω στο TRB τον Ιανουάριου του 2015 για να παρουσιάσω τα αποτελέσματα της εργασίας μου και να γνωρίσω τον φίλο και συνεργάτη του καθηγητού μου καθηγητή Hani Mahmassani. Θα ήταν παράληψη μου να μην ευχαριστήσω θερμά το φίλο και συνάδελφο Βαγγέλη Μίντση που μου άνοιξε ένα παράθυρο προς τη γνώση παρέχοντας μου πρόσβαση σε επιστημονικά συγγράμματα που δυστυχώς λόγω των συνθηκών τα Ελληνικά πανεπιστήμια δεν έχουν την δυνατότητα να παρέχουν στους νέους στις μέρες μας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το φίλο και συνάδελφο Θανάση Λόι για την πολύτιμη βοήθειά του στο πρώτα μου βήματα στο προγραμματισμό .

Το πόνημα της μετατροπής ενός ερευνητικού έργου χρόνων σε ένα επιστημονικό σύγγραμμα ήταν μια δύσκολή αποστολή, η οποία δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί δίχως την ψυχολογική υποστήριξη της οικογενείας μου. Έτσι οφείλω να ευχαριστήσω αυτούς που με υπομονή και εμπιστοσύνη στάθηκαν στο πλευρό μου. Ιδιαίτερα ευγνωμονώ ,το σύντροφο και σύζυγό μου για την πολύχρονη υπομονετική του στάση στις δικές μου ανάγκες για απομόνωση και μελέτη. Πάνω απ’ όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου Κλεοπάτρα και Χρήστο, για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος ελπίζω η λέξη διατριβή να φαντάζει κάτι σημαντικό στα μάτια των παιδιών μου που για την εκπόνησή της, τους στέρησα χρόνο πολύτιμο από την καθημερινότητά μας.

Αφιερώνω αυτή την διατριβή στις κόρες μου Παυλίνα και Κλεοπάτρα και στον πατέρα τους Θοδωρή.

Ευαγγελία Χρυσοχόου

"Every accomplishment starts

with the decision to try"

Gail Devers

(τρείς φορές Ολυμπιονίκης

στο δρόμο μετ εμποδίων)

ONLINE ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΓΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΧΡΟΝΟ

ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΧΡΥΣΟΧΟΟΥ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2015

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Αθανάσιος Ζηλιασκόπουλος, Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται το γενικό πρόβλημα δρομολόγησης στόλου, γνωστό στην ξένη βιβλιογραφία ως "**Vehicle Routing Problem**". Νοείται ως ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα των εφαρμοζομένων μαθηματικών της σύγχρονης εποχής και ίσως το δημοφιλέστερο πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας στον τομέα των μεταφορών. Ορίζεται ως το πρόβλημα του σχεδιασμού διαδρομών ελάχιστου κόστους ενός στόλου οχημάτων από ένα κεντρικό σημείο σε ένα δίκτυο πελατών, ικανοποιώντας ταυτόχρονα κάποιους συστημικούς περιορισμούς. Το φάσμα των εφαρμογών του εκτείνεται από τη διαχείριση στόλων διανομής προϊόντων έως τη σχολική μετακίνηση, αλλά και τη συλλογή απορριμμάτων.

Η μελέτη του προβλήματος της δρομολόγησης σε συνθήκες αβεβαιότητας (πχ. μεταβαλλόμενη ζήτηση), καθώς και η ανάλυση και ενσωμάτωση της στοχαστικότητας στην ανάπτυξη μαθηματικών προτύπων (μοντέλων) και αλγορίθμων, τέθηκαν πρωταρχικοί στόχοι της έρευνας που εκπονήθηκε. Όταν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύεται υπό συνθήκες αβεβαιότητας, το ζητούμενο είναι η διαμόρφωση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το κόστος των αποφάσεων αλλά και το κόστος των εφικτών μέτρων αναπροσαρμογής των αρχικών επιλογών. Με γνώμονα την εύρωστη αξιολόγηση των επιλογών που προκύπτουν στο μοντέλο βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας, καθοριστικό ρόλο λαμβάνει η σαφής διατύπωση (μαθηματική τεκμηρίωση) των δυνατών μελλοντικών αποφάσεων – προοπτικών, αλλά και η διαδικασία ενσωμάτωσής τους στις εκ των προτέρων επιλογές.

Οι μεθοδολογικοί πυλώνες διερεύνησης του προβλήματος της δρομολόγησης σε συνθήκες αβεβαιότητας, ήταν αρχικά η προσέγγιση του στοχαστικού προγραμματισμού και η "online" βελτιστοποίηση. Ο μεν στοχαστικός προγραμματισμός προάγεται ως επέκταση του γραμμικού προγραμματισμού, όπου κάποιες από τις παραμέτρους του μοντέλου θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές. Η δε "online" βελτιστοποίηση θεωρείται επέκταση του δυναμικού προγραμματισμού, οπού οι πληροφορίες του συστήματος που μελετάται εμφανίζονται

στιγμιαία και σταδιακά στη διάρκεια εξέλιξής του. Οι δύο μεθοδολογικές προσεγγίσεις παρουσιάζονται αναλυτικά και γίνεται μια συγκριτική αξιολόγησή τους. Στόχος της αξιολόγησης αυτής τέθηκε η αναγνώριση των κοινών στοιχείων τους, αλλά και η τελική επιλογή του μεθοδολογικού πλαισίου της συνέχισης του ερευνητικού έργου.

Το πρώτο μέρος της εργασίας επικεντρώνεται στους ακριβείς αλγορίθμους επίλυσης του γενικού προβλήματος της δρομολόγησης στόλου. Εκτενής παρουσίαση των εναλλακτικών μορφοποιήσεών τους γίνεται αλλά με ιδιαίτερη αναφορά στους έγκυρους περιορισμούς που έχουν προταθεί ως μοχλοί ενδυνάμωσης. Συνάμα παρατίθενται συνοπτικά οι ευρετικοί και μεθευριτικοί αλγόριθμοι που έχουν προταθεί, δίνοντας μια πιο σφαιρική παρουσίαση των επιστημονικών ευρημάτων .

Εστιάζοντας στις εμπορευματικές μεταφορές, το πρόβλημα δρομολόγησης νοείται περισσότερο ως πρόβλημα διανομής, όπου στόχος είναι η εύρωστη μεταφορά προϊόντων εκπληρώνοντας τη ζήτηση και ελαχιστοποιώντας το κόστος μετακίνησης. Όταν η ζήτηση των προϊόντων είναι μεταβαλλόμενη, το πρόβλημα της διαμόρφωσης πλάνων διανομής μετατρέπεται από ντετερμινιστικό σε στοχαστικό. Η στοχαστικότητα της ζήτησης συσχετίζεται άμεσα με το ρυθμό απορρόφησης των προϊόντων, τις δυνατότητες διατήρησης αποθεμάτων, αλλά και τη μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στη στοχαστικότητα της ζήτησης σε συνάφεια με τους παράγοντες που την επηρεάζουν (δηλ. χωρητικότητα αποθηκών, ρυθμός απορρόφησης προϊόντων), εξετάζεται στο διδακτορικό η συνδυαστική διαχείριση της διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών γνωστή στην ξένη βιβλιογραφία ως “**Inventory Routing Problem**”, η οποία αποτελεί επέκταση του κλασσικού προβλήματος δρομολόγησης.

Ο προσανατολισμός της έρευνας προς την κατεύθυνση αυτή οφείλεται αφενός στις τάσεις των μεγάλων επιχειρηματικών μοντέλων, όπου ανακύπτει η ανάγκη ανάπτυξης αντίστοιχων μαθηματικών προτύπων που να αναπαριστούν και μετέπειτα επιλύουν το πρόβλημα. Αφετέρου η στοχαστικότητα της ζήτησης σε προβλήματα δρομολόγησης παρουσιάζει ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον σε μεγάλα συνδυαστικά προβλήματα, όπου προκύπτουν σύνθετες ανελίξεις με έντονες αλληλεπιδράσεις.

Το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών έρχεται να δώσει λύση σε σύνθετα συστήματα διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας – logistics. Τα τελευταία χρόνια κερδίζει ολοένα και περισσότερη αποδοχή το επιχειρηματικό μοντέλο διαχείρισης «Vendor Managed Inventory», όπου ο κεντρικός προμηθευτής, που πολλές φορές αποτελεί και τον κατασκευαστή, διαχειρίζεται τη διαδικασία τροφοδοσίας και ελέγχου των αποθηκών των προμηθευτών του. Ο κεντρικός προμηθευτής λοιπόν λαμβάνει αποφάσεις για την ποσότητα προϊόντων, τη συχνότητα διανομής αλλά και τη διαδικασία προμήθειας των σημείων πώλησης προϊόντων. Οπότε το πρόβλημα αναγάγεται σε συνδυαστικό πρόβλημα διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών. Ουσιαστικά το πρόβλημα στοχεύει στην επίλυση του βέλτιστου σχεδιασμού επαναλαμβανόμενων πλάνων δρομολόγησης για ένα σύνολο αποθηκών σε ένα βραχυπρόθεσμο χρονικό ορίζοντα. Στόχος του βέλτιστου σχεδιασμού η ενσωμάτωση των μακροπρόθεσμων στόχων στις βραχυπρόθεσμες αποφάσεις των επαναλαμβανόμενων διανομών.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας γίνεται εκτενής αναφορά των επιστημονικών συγγραμμάτων της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού των αποθηκών, επικεντρώνοντας και πάλι το ενδιαφέρον σε ακριβείς μεθόδους επίλυσης του προβλήματος, δίχως να παραβλεφθούν και τα σημαντικά ευρήματα που αναπτύχθηκαν στο πεδίο των ευρετικών αλγορίθμων.

Με αφορμή την αναθεώρηση βασικής υπόθεσης των έως τώρα προτεινόμενων μαθηματικών προτύπων αναδείχτηκε η δυναμική μιας νέας πολιτικής, των προληπτικών διανομών όταν το μοντέλο εξετάζεται σε συνθήκες βεβαιότητας. Η πολιτική αυτή βασίζεται στη διαπίστωση ότι στο πλαίσιο του ντετερμινιστικού μοντέλου η ζήτηση των αποθηκών είναι γνωστή για το σύνολο του χρονικού ορίζοντα. Άρα η πληροφορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξ αρχής και να εξεταστούν πλάνα διανομής που εξυπηρετούν αθροιστικά την παρούσα αλλά και μεταγενέστερη ζήτηση. Η πολιτική τεκμηριώνεται μαθηματικά με την πρόταση δύο έγκυρων περιορισμών.

Με γνώμονα την προοπτική επίλυσης του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών σε συνθήκες αβεβαιότητας και στόχο τη δημιουργία ενός ευέλικτου συστήματος αποφάσεων, η διαδικασία της μεταφόρτωσης εισάγεται ως διορθωτική πολιτική ενός μοντέλου στοχαστικού προγραμματισμού. Αναπτύχθηκε ένα καινοτόμο μοντέλο δύο σταδίων στοχαστικού προγραμματισμού δρομολόγησης στόλου σε συνθήκες αβεβαιότητας. Η επίλυσή του επιτεύχθηκε εφαρμόζοντας τη μεθοδολογική προσέγγιση της αποσύνθεσης «L – Shaped». Το προτεινόμενο στοχαστικό μοντέλο αξιολογήθηκε επιλύοντας κατάλληλες τροποποιήσεις πρότυπων προβλημάτων (Archetti et al.) .

Συμπερασματικά, η απόφαση της πλαισίωσης του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού των αποθηκών σε συνθήκες αβεβαιότητας υπό το πρίσμα του στοχαστικού προγραμματισμού των μοντέλων δύο σταδίων, μας έδωσε τη δυνατότητα να οριοθετήσουμε την αλληλεπίδραση του κόστους της μεταφόρτωσης σε συνάφεια με το κόστος των προληπτικών διανομών και *την* αύξηση των επιπέδων διατήρησης των αποθεματικών.

Συνοψίζοντας, η διατριβή χωρίστηκε σε δύο διακριτά μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται αναφορά των μεθοδολογικών προσεγγίσεων σε συνάφεια με το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου και ιδιαίτερα σε συνθήκες αβεβαιότητας. Στο δεύτερο εστιάζεται η έρευνα στη συνδυαστική διαχείριση της *διανομής* προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών σε συνθήκες αβεβαιότητας.

Λέξεις Κλειδιά: Πρόβλημα δρομολόγησης στόλου σε συνθήκες αβεβαιότητας, Συνδυαστική διαχείριση διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών, στοχαστικός προγραμματισμός, μοντέλο δύο σταδίων, μοντέλο προσφυγής, μέθοδος αποσύνθεσης L – Shaped.

Abstract

This thesis investigates the general truck dispatching problem known as the **“Vehicle Routing Problem**” (VRP). It is one of the most frequently studied problems in the field of applied mathematics and perhaps the most renowned problem of operational research in the transport sector. It is defined as the determination of the least cost distribution plans of a fleet of vehicles to a network of customers, while concurrently ensuring indicative systematic constraints. Applications range from fleet management and product distribution to bus school routing and waste collection.

The primary goals of this study are to analyze the VRP under uncertainty (e.g. demand variation) and embed stochasticity in the development of the corresponding mathematical models and algorithms. When an optimization problem is solved under uncertainty the goal is to determine the policies that minimize the cost of initial decisions and the cost of feasible recourse actions. Taking into account the necessity of robust assessments of revealed choices in the optimization model under uncertainty, it is crucial to clearly formulate (mathematical modeling) all possible future decisions – outcomes and to incorporate their effect into a priori decisions.

The initial methodological pillars that are settled for the investigation of the VRP under uncertainty in this study are stochastic programming and on line optimization. Stochastic programming is an extension of linear programming, where parameters of the model are considered to be random variables. On line optimization on the other hand is considered as an extension of dynamic programming, where information regarding the system is gradually and instantly revealed. These two methodologies are investigated extensively. A comparison analysis is performed. The objective of the comparison is the recognition of common elements. Additionally the methodological framework for further research is also proposed.

The first part of the research thesis focused on investigating exact algorithms for the VRP. Extended literature review is performed focusing on alternative model formulation. The contribution of valid inequalities to strengthen formulation is highlighted. However, a concrete presentation of alternative heuristics and meta – heuristics is given also, in order to integrate to a more holistic illustration of scientific findings.

With focus to freight transportation, the VRP can be seen as a distribution problem. The aim is to identify a route plan for delivering products fulfilling demand and minimizing transportation cost. When the demand of products varies the problem of determining route plans from deterministic becomes stochastic. Stochastic demand is directly related to product absorption rate, level of inventory control as well as their correlation. Concentrating interest to stochasticity of demand in coherent to factors affected (capacity of inventories, product absorption rate) the dissertation is studying the collaboration of transportation management and inventory control, known as “Inventory routing problem”.

Thesis orientation to this direction is due to business models trends of logistic companies especially large ones, where there is a need for development of such models. On the other hand stochastic demand of VRP is much more interesting in large scale combinatoric problems, where composite processes with intense correlations arised.

Inventory routing problem constitutes the solution of a joint system of managing supply chain and logistic. In recent years the "Vendor managed inventory" business model is gaining even more acceptance, where the distribution manager in many cases the manufacturer; controls the inventories and solves the routing problem for all customers jointly. The central supplier, known as vendor is making decisions for the quantities of delivered products, frequencies of deliveries and the distribution plan. Therefore the problem is becoming a joint problem of inventory control and transportation management. Essentially the problem aims to solve a repeated VRP for a network of inventories for a short term planning horizon. Overall aim is to include long term goals into short term decisions of repeated distribution plans.

In the second part of this thesis an extended review of the relevant literature of inventory routing problem is performed. While attention is given again to the exact approaches significant finding in the area of heuristics are also covered.

Excluding the basic assumption of all previous proposed models it was proved that a new policy called proactive deliveries was powerful in the framework of deterministic modeling. The policy is based on the concept of a deterministic model, where demand of the whole planning horizon is known from the beginning. Policies are formulated mathematically based on the introduction of two valid inequalities that are discussed in detail.

Aiming to solve the inventory routing problem under uncertainty and securing flexibility, a recourse action of the transshipment was proposed in the framework of two stage stochastic programming model. An innovative model was developed of two stage recourse action for the stochastic inventory routing problem. An L – Shaped decomposition method was adopted to solve the problem exactly. The proposed model was tested using a modification of known benchmark instances (Arhetti et al).

Conclusively, the decision of formulating the inventory routing problem under uncertainty in the framework of stochastic programming of two stage recourse action model gave us the opportunities to clearly state the tradeoff between transshipment cost in combination with proactive distribution plans and increased inventory levels.

In a nutshell, this thesis is structured in two parts: The first part is referred to methodological approaches in the context to the general vehicle routing problem; and the second part is focused on the inventory routing problem under uncertainty.

Keywords: Stochastic Vehicle Routing Problem, Inventory routing problem, stochastic programming, two stage recourse models, L – Shaped decomposition method.

Πίνακας Περιεχομένων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα του σχεδιασμού πλάνων διανομής θεωρείται ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Αποτελεί την γενίκευση του φημισμένου προβλήματος του πλανόδιου πωλητή που ορίστηκε από τον Ιρλανδό μαθηματικό William Rowan Hamilton και τον βρετανό ομόλογό του Thomas Kirkman to 1800. Η γενική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή δόθηκε από τον Cerl Menger το 1939 και στην συνέχεια προωθήθηκε από τους Hassiel Whitney, Merrill Flood από το πανεπιστήμιο του Princeton. Το 1954 οι George Dantzig, Ray Fulkerson, and Selmer Johnson δημοσιεύουν μια μέθοδο επίλυσης του πλανόδιου πωλητή την μέθοδο των τεμνόμενων επιπέδων “cutting plane” όπου και παρουσιάζουν την λύση για ένα πρόβλημα 49 πόλεων. Κάτι που ήταν εντυπωσιακό για την εποχή εκείνη. Το πρόβλημα γενικεύεται στο λεγόμενο κλασσικό πρόβλημα δρομολόγησης στόλου οχημάτων τέσσερα χρόνια αργότερα από τους George Dantzig & John Ramser, όπου ασχολούνται με τον σχεδιασμό πλάνων διανομής καυσίμου σε ένα δίκτυο πελατών που εξυπηρετούνται από ένα στόλο φορτηγών οχημάτων.

Το ερευνητικό πεδίο της εργασίας αποτελεί ένα πολύ δύσκολο και συνάμα ελκυστικό πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας με πολλές εφαρμογές στο τομέα των μεταφορών και της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας και των logistics. Ο κυριότερος λόγος που επιλέχτηκε η ειδίκευση αυτή ήταν μια έντονη ροπή προς την μαθηματική τεκμηρίωση προβλημάτων βελτιστοποίησης στο χώρο της έρευνας των μεταφορών στο εργασιακό γίγνεσθαι .

Η πρόταση που κατατέθηκε όρισε το πλαίσιο αλλά και στοιχειοθέτησε τον βασικότερο στόχο, αυτόν της μελέτης της στοχαστικότητας στο πρόβλημα της δρομολόγησης. Οι δύο βασικοί πυλώνες για την διερεύνηση τέθηκαν. Αυτοί ήταν, ο στοχαστικός προγραμματισμός και η online βελτιστοποίηση. Όμως σε αρκετά αρχικό στάδιο διαφάνηκε ότι η μεθοδολογική προσέγγιση της online βελτιστοποίησης δεν ήταν αυτή που θα μπορούσε να καλύψει τις ερευνητικές αναζητήσεις του ερευνητή. Αυτό γιατί, το μεθοδολογικό αυτό πλαίσιο αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο αξιολόγησης ευρετικών αλγορίθμων που παράγουν λύσεις βάση πληροφοριών που εισάγονται στο σύστημα σταδιακά κατά την διάρκεια εξέλιξής του. Όμως ο τρόπος με το οποίο μπορεί κανείς να προσεγγίσει ένα πρόβλημα πηγάζει από την παιδεία και το φιλοσοφικό του υπόβαθρο. Όντας μαθηματικός το σημαντικότερο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε ήταν η μελέτη των ορίων των προϋποθέσεων που θέτει η στοχαστικότητα στο πρόβλημα. Έτσι η διαδρομή του ερευνητικού μονοπατιού του στοχαστικού προγραμματισμού έμοιαζε να επιφυλάσσει μεγαλύτερες προοπτικές δημιουργικής και παραγωγικής μελέτης.

Στο πρώτο στάδιο λοιπόν της εκπόνησης της εργασίας η έρευνα εστιάστηκε στο κλασσικό πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου και κυρίως στο να μελετηθούν τα μαθηματικά μοντέλα και οι μέθοδοι επίλυσής τους. Για το λόγο αυτό και καταθέτονται στο επόμενο κεφάλαιο τα ευρήματα αυτά.

Στο δεύτερο μέρος της έρευνας και πάντα με γνώμονα την διερεύνηση της στοχαστικότητας στο πρόβλημα, η διατριβή εστίασε στην ειδική περίπτωση του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών μια ελεύθερη μετάφραση του αγγλικού όρου «Inventory Routing

Problem». Εφεξής άρχισε να ξεκαθαρίζει το τοπίο και η ανασκόπηση των ερευνητικών συγγραμμάτων έμοιαζε με παζλ που σιγά – σιγά δημιουργούσε μια εικόνα. Μια εικόνα που παρουσίαζε την εξελικτική πορεία, τις συνδέσεις αλλά και τις αλληλεπιδράσεις των ερευνητικών εργασιών.

Το πιο κρίσιμο σημείο για την εξελικτική πορεία δεδομένου των στόχων της εργασίας αυτής, ήταν η επίλυση του προβλήματος με ακριβή αλγόριθμο που προτάθηκε από στην εργασία της Arhetti στα πλαίσια της σύμπραξης της ομάδας των ερευνητών της Brescia με τον καθηγητή Laporte του πανεπιστημίου του Montreal μόλις το 2007. Η μελέτη της εργασίας των Arhetti et al [11] αλλά και εκείνη του μεταγενέστερου Coelho [49] διδακτορικού φοιτητή του καθηγητή Laporte έθεσαν την βάση για την πραγμάτωση της υπέρβασης που απαιτεί μια διατριβή .

Δύο καινοτομίες έχει να επιδείξει η εργασία αυτή. Η πρώτη αφορά την αναθεώρηση βασικής προϋπόθεσης που έχει τεθεί στο καθορισμό του πλαισίου του προβλήματος και η άλλη την επίλυση του στοχαστικού μοντέλου ορίζοντας την διαδικασία της μεταφόρτωσης ως διορθωτική ενέργεια δευτέρου σταδίου.

Σχετικά με την πρώτη καινοτομία θα πρέπει να τονισθεί ότι σε όλες τις προγενέστερες προσεγγίσεις επίλυσης του προβλήματος στο πεδίο του χρόνου όπου γίνεται χρήση της αναδρομικής σχέσης, υποθέτουν ότι η ποσότητα που θα πρέπει να μεταφερθεί σε μια αποθήκη σε κάποια χρονική στιγμή ορίζεται από την ζήτηση αυτής της χρονικής στιγμής και μόνο αυτής, παρόλο που η ζήτηση όλων των χρονικών στιγμών είναι εκ των προτέρων γνωστή. Αυτό κατά τη γνώμη του ερευνητή δεν απαιτείται. Έτσι, τροποποιώντας τις προϋποθέσεις του μοντέλου και ορίζοντας δύο νέους έγκυρους περιορισμούς, επιτεύχθηκε περεταίρω βελτίωση του συνολικού κόστους διανομής. Θέλοντας να δοθεί μια ονομασία στη προσέγγιση αυτή ο όρος των προληπτικών διανομών θεωρείται πλήρως αντιπροσωπευτικός.

Σχετικά με τη δεύτερη καινοτομία της εργασίας η πλαισίωση του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείριση διανομής και εφοδιασμού αποθηκών υπό το πρίσμα του στοχαστικού προγραμματισμού είναι κάτι, που δεν έχει βρεθεί στην βιβλιογραφία. Η ενσωμάτωση της διαδικασία της μεταφόρτωσης προτάθηκε πολύ πρόσφατα από τον Coelho [49] στην δική του διατριβή, παρόλα αυτά ορίζοντας την στο πλαίσιο του στοχαστικού προγραμματισμού και των διορθωτικών ενεργειών, η διαδικασία της αξιολόγησης των πλάνων διαφοροποιείται εντελώς. Με το στοχαστικό μοντέλο δύο σταδίων παρέχεται η δυνατότητα επαναπροσδιορισμού των αρχικών αποφάσεων, λαμβάνοντας υπόψη τις προοπτικές που δημιουργούν αλλά συνάμα και τις επιπτώσεις που έχουν.

1.1 Οργάνωση Διατριβής

Η δομή της διατριβής ορίστηκε με τρόπο που να δίνει στον αναγνώστη βαθμιαία την δυνατότητα να ολοκληρώσει το παζλ της ερευνητικής εργασίας που εκπονήθηκε. Έτσι στην συνέχεια της εισαγωγής παρουσιάζεται το γενικό πλαίσιο της βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας, και μια σύντομη αναφορά στην ανασκόπηση του γενικού προβλήματος της δρομολόγησης στόλου οχημάτων αλλά και του ειδικού της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού των αποθηκών.

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται αναλυτική βιβλιογραφική ανασκόπηση όπου, στο τμήμα της ανασκόπησης του γενικού προβλήματος δρομολόγησης στόλου οχημάτων παρουσιάζονται αναλυτικά οι τέσσερις τρόποι μαθηματικής διατύπωσής του και συνοπτικά τα σημαντικά ευρήματα που έχουν κατατεθεί στο πεδίο των ευρετικών μεθόδων. Στην συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά και με την δομή ενός χάρτη της εξελικτικής πορείας, η βιβλιογραφική ανασκόπηση του ειδικού προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού των αποθηκών.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται αναλυτικά τα τέσσερα πιο βασικά μοντέλα που έχουν προταθεί για το ειδικό πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών στο πεδίων των ακριβών μεθόδων.

Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το μεθοδολογικό πλαίσιο του στοχαστικού προγραμματισμού των διορθωτικών ενεργειών δύο σταδίων. Η μέθοδος αποσύνθεσης L – Shaped, η οποία αποτελεί τροποποίηση του Benders αλλά και άλλες ακριβείς προσεγγίσεις όπως αυτή της μεθόδου κλάδου και φραγής και των τεμνόμενων επιπέδων αναλύονται.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η μοντελοποίηση του ντετερμινιστικού μοντέλου της πολιτικής των προληπτικών διανομών . Έπειτα αναλύεται το στοχαστικό μοντέλο αλλά και το ντετερμινιστικά ισοδύναμό του. Στο κεφάλαιο 6 αναλύονται τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας. Η πειραματική διαδικασία δομήθηκε με γνώμονα αρχικά την τεκμηρίωση των ιδεών του ερευνητή αλλά και την διερεύνηση των προοπτικών που δημιουργούνται.

Τέλος στο κεφάλαιο 7 γίνεται μια σύντομη αναφορά των στοιχείων που κατατέθηκαν. Παρουσιάζονται τα συμπεράσματα γενικά και ειδικά για κάθε σημείο που έχει να επιδείξει ερευνητικό ενδιαφέρον, αλλά και κατατίθενται στόχοι και προοπτικές που θα ήθελε να θέσει το πόνημα αυτό.

1.2 Βελτιστοποίηση σε συνθήκες αβεβαιότητας

Σε ένα μεγάλο φάσμα προβλημάτων διαχείρισης περιορισμένων πόρων, πολλές από τις αποφάσεις απαιτείται να λαμβάνονται σε συνθήκες αβεβαιότητας. Τέτοιου είδους προβλήματα είναι η οργάνωση και διοίκηση της παραγωγικής διαδικασίας, ο χρονοπρογραμματισμός των δράσεων, η διαχείριση των στόλων διανομής προϊόντων, η χωροθέτηση των εγκαταστάσεων και των δραστηριοτήτων, η διαχείριση του χαρτοφυλακίου κ.α. Οι συνθήκες αβεβαιότητας προσδιορίζονται είτε από την μεταβαλλόμενη ζήτηση σε αγαθά ή υπηρεσίες, είτε με μη εγγυημένες αποδόσεις επενδυτικών σχημάτων, είτε από τους μεταβαλλόμενους χρόνους διαδρομής, είτε από τις ασταθείς διάρκειες ολοκλήρωσης των εργασιών.

Η σημαντικότερη δυσκολία στα προβλήματα βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας προσδιορίζεται στην ποσοτικοποίηση του χώρου πιθανοτήτων. Ο χώρος των πιθανοτήτων είτε διακριτός, είτε συνεχής, με τη σειρά του οδηγεί σε προβλήματα βελτιστοποίηση υψηλής πολυπλοκότητας. Η πολυπλοκότητα αυτή ενισχύεται ακόμη περισσότερο όταν ορίζονται ακέραιες μεταβλητές απόφασης για μεγάλο χρονικό ορίζοντα ή και πολλαπλές αποφάσεις πολλών σταδίων .

Οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις που έχουν προταθεί για την βελτιστοποίηση σε συνθήκες αβεβαιότητας διαφοροποιούνται ακολουθώντας κάποια φιλοσοφία ως προς τη μορφοποίηση της αβεβαιότητας, παραδείγματος χάρη η ελαχιστοποίηση των προσδοκιών, η ελαχιστοποίηση της απόκλισης από τους προσδοκώμενους στόχους , η ελαχιστοποίηση του μέγιστου κόστους αλλά και η βελτιστοποίηση υπό το πρίσμα της χαλάρωση των περιορισμών.

Στην παρούσα διατριβή, οι δυο βασικοί πυλώνες που διερευνήθηκαν στο πλαίσιο αυτό ήταν ο στοχαστικός προγραμματισμός και η online βελτιστοποίηση. Ο μεν στοχαστικός προγραμματισμός προάγεται ως επέκταση του γραμμικού προγραμματισμού, όπου κάποιες από τις παραμέτρους του μοντέλου θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές. Η δε online βελτιστοποίηση θεωρείται επέκταση του δυναμικού προγραμματισμού, όπου οι πληροφορίες του συστήματος που μελετάται εμφανίζονται στιγμιαία και σταδιακά στην διάρκεια εξέλιξής του.

1.2.1 Στοχαστικός Προγραμματισμός

Ο στοχαστικός προγραμματισμός έχει χωριστεί στις ακόλουθες κατηγορίες:

- Μοντέλα προσφυγής (*Recourse Models*)
- Εύρωστος στοχαστικός προγραμματισμός (*Robust stochastic programs)*
- Πιθανοτικός προγραμματισμός (*Probabilistic programming or chance constraint*)

1.2.1.1 Μοντέλα Προσφυγής

Η πρώτη κατηγορία, αυτή των μοντέλων προσφυγής (Recourse Models), ακολουθεί την λογική των μοντέλων δύο σταδίων ή αλλιώς δύο φάσεων (two – stages). Ο χώρος των μεταβλητών απόφασης διαχωρίζεται σε δύο μέρη, στις αποφάσεις που λαμβάνονται πριν οι τυχαίες παράμετροι γνωστοποιηθούν, οι λεγόμενες μεταβλητές απόφασης πρώτης φάσης, αλλά και στις αποφάσεις που μπορούν να παρθούν μετά την αποκάλυψη των άγνωστων παραμέτρων. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται μεταβλητές απόφασης δεύτερης φάσης. Ορίζονται με τέτοιο τρόπο που να αντιπροσωπεύουν τις διορθωτικές – βελτιωτικές πολιτικές που μπορεί να λάβει ο αποφασίζων. Πολλές φορές οι μεταβλητές απόφασης της δεύτερης φάσης αντιπροσωπεύουν τις αποφάσεις που μπορούν να παρθούν σε επίπεδο επιχειρησιακού σχεδιασμού. Κυρίως άγονται από την πραγματοποίηση των αποφάσεων πρώτης φάσης αλλά και την πραγματοποίηση των τυχαίων παραμέτρων. Το κόστος των αποφάσεων του δεύτερου σταδίου εμπεριέχει τυχαιότητα, η οποία εισάγεται ως συνιστώσα στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος της πρώτης φάσης.

Ένα γενικευμένο πλαίσιο μορφοποίησης των μοντέλων προσφυγής είναι το ακόλουθο (Birge &Louveaux 1997[30], Kall & Wallace 1994 [83]):

$$\begin{aligned} &\min \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathrm{E}_{\omega\in\Omega}[\mathrm{Q}(\mathrm{x},\omega)] \\ &\mathrm{s.t.}\ \mathrm{Ax=b}, \\ &\mathrm{x} \in \mathrm{X} \end{aligned} \tag{1.1}$$

υπό την προϋπόθεση

$$\begin{aligned} &\mathrm{Q}(\mathrm{x},\omega) = \min f(\omega)^T y \\ &\mathrm{s.t.}\ \mathrm{T}(\omega)\mathrm{x} + \mathrm{W}\,\mathrm{y}(\omega) = \mathrm{h}(\omega), \\ &\mathrm{y} \in \Upsilon \end{aligned} \tag{1.2}$$

Όπου $X \in \Re^{n_1}$ και $Y \in \Re^{n_2}$ αποτελούν πολύεδρα σύνολα, ω τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο χώρο των πιθανοτήτων (Ω,F,P) με $\Omega \subseteq \Re^k$, και $f{:}\,\Omega \to \Re^{n_1}, h{:}\,\Omega \to \Re^{m_2}, D{:}\,\Omega \to \Re^{m_2 x n_2}, T{:}\,\Omega \to \Re^{m_2 x\, n_1}$.Το πρώτο πρόβλημα αποτελεί την πρώτη φάση και η μεταβλητή απόφασης x θα πρέπει να παρθεί πριν γνωστοποιηθούν οι παράμετροι που βρίσκονται σε συνθήκες αβεβαιότητας. Το δεύτερο πρόβλημα αποτελεί την διαδικασία των διορθωτικών ενεργειών δεύτερης φάσης και η μεταβλητή απόφασης y εξαρτάται από την μεταβλητή απόφασής x αλλά και από την αποκάλυψη των τυχαίων παραμέτρων ω. Η αντικειμενική συνάρτηση αποτελείται από δύο συνιστώσες, η μία αφορά το κόστος των αποφάσεων της πρώτης φάσης και η άλλη το αναμενόμενο κόστος των διορθωτικών κινήσεων που υλοποιούνται στην δεύτερη φάση. Υποθέτοντας ότι οι τυχαίες παράμετροι μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια διακριτών κατανομών το πρόβλημα μετατρέπεται στο ντετερμινιστικά ισοδύναμό του. Εκείνο με την σειρά του αποτελεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μεγάλου βαθμού όπου όμως έχουν αναπτυχθεί τεχνικές επίλυσής του. Τεχνικές αποσυνθέσεις (Van Slyke & Wets 1969 [114], Birge & Louveaux 1988 [29]) έχουν χρησιμοποιηθεί αποδοτικά στο πλαίσιο των ιδιοτήτων της κυρτότητας του κόστους των διορθωτικών κινήσεων $Q(\cdot)$.

Μια ειδική κατηγορία μοντέλων στοχαστικού προγραμματισμού είναι αυτή του ακέραιου στοχαστικού προγραμματισμού. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα προβλήματα όπου το σύνολο Y των μεταβλητών απόφασης δεύτερης φάσης ανήκουν στο σύνολο των ακέραιων αριθμών. Ακριβείς προσεγγίσεις επίλυσης των προβλημάτων αυτών έχουν προταθεί ως επεκτάσεις μεθόδων αποσύνθεσης (Laporte & Louveaux 1993 [90], Carøe & Tind 1998[42]) και δυικής χαλάρωσης κατά Lagrange , αλγεβρικής απαρίθμησης, κυρτότητας , και μεθόδων αποσύνθεσης κλάδου και φραγής [108] .

Μια ακόμη ειδική κατηγορία είναι εκείνη των μη γραμμικών στοχαστικών προγραμμάτων όπου οι συναρτήσεις που ορίζονται στο πρόβλημα ανήκουν στο πεδίο των συνεχών κατανομών.[18]

1.2.1.2 Εύρωστος στοχαστικός προγραμματισμός

Το μεθοδολογικό πλαίσιο του εύρωστου στοχαστικού προγραμματισμού προτάθηκε για τα προβλήματα βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας όπου δεν υπήρχε κάποιο πιθανοτικό μοντέλο που να την αναπαριστά αποδοτικά. Έτσι στο πρόβλημα το τυχαίο διάνυσμα ορίζεται σε ένα κλειστό σύνολο τιμών. Στόχος της προσέγγισης η λύση που προτείνεται να είναι εφικτή και βέλτιστη για την χείριστη περίπτωση των τυχαίων δεδομένων. Πρεσβευτές της μεθοδολογικής προσέγγισης οι Bertsimas & Sim [24] αλλά και οι Ben – Tal & Nemirovski El – Chaoui [21].

1.2.1.3 Πιθανοτικός προγραμματισμός

Στην κατηγορία αυτή των μοντέλων στοχαστικού προγραμματισμού ανήκουν τα λεγόμενα μοντέλα πιθανοτικών περιορισμών, η φιλοσοφία των οποίων έγκειται στην αξιοπιστία του συστήματος των αποφάσεων. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την φιλοσοφία των μοντέλων προσφυγής, που στοχεύουν στην ευελιξία του συστήματος απόφασης ποσοτικοποιώντας τις προοπτικές που πηγάζουν από την πραγματοποίηση των μεταβλητών πρώτης φάσης αλλά και την αποκάλυψη των τυχαίων παραμέτρων. Αντιθέτως στα πιθανοτικά μοντέλα η αξιοπιστία εκφράζεται ως ελάχιστη απαίτηση για την πιθανότητα εκπλήρωσης των περιορισμών του μοντέλου.

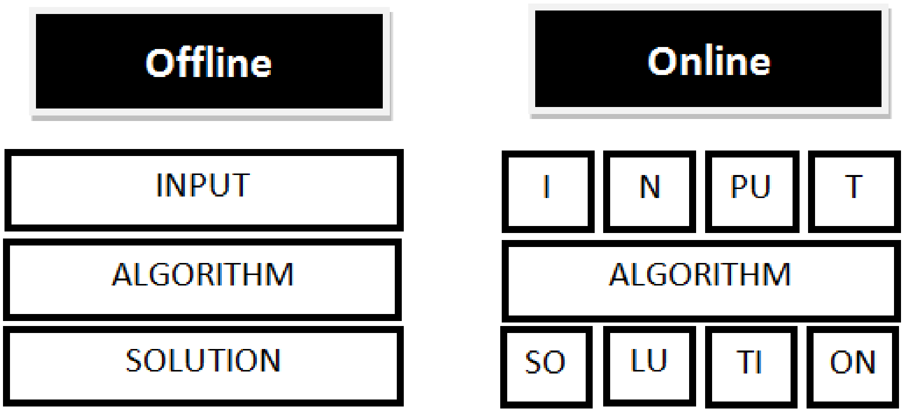
Η γενική μορφή ενός μοντέλου πιθανοτικού προγραμματισμού δίνεται παρακάτω και αποδίδεται στους [104]:

$$\begin{gathered} max c^t x \\ s.t.\ Prob\{Ax \geq b\} \geq p \\ x \geq 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Όπου $p \in (0,1)$, η πιθανότητα το σύνολο των εφικτών λύσεων να ορίζεται με πιθανότητα p. Η προσέγγιση του πιθανοτικού προγραμματισμού είναι ένα αρκετά νέο πεδίο έρευνας με αρκετά περιθώρια ανάπτυξης και εφαρμογές σε νέες ειδικεύσεις της επιστήμης της στατιστικής και των εφαρμοσμένων μαθηματικών όπως την μηχανική μάθηση και την τεχνίτη νοημοσύνη (Machine Learning / Artificial Intelligence) .

1.2.2 Online Βελτιστοποίηση

Ο δεύτερος μεθοδολογικός πυλώνας που τέθηκε προς διερεύνηση στα πλαίσια της διατριβής ήταν αυτός την online βελτιστοποίησης. Η προσέγγιση αυτή ασχολείται με συστήματα λήψης αποφάσεων σε ένα περιβάλλον όπου οι πληροφορίες που περιγράφουν την διαδικασία αποκαλύπτονται σταδιακά στο πεδίο του χρόνου και κατά τη διάρκειά εξέλιξής της.



Σχήμα 1-1: Αναπαράσταση διαφοροποίησης online VS offline επίλυση.

Η φύση των online προβλημάτων είναι τέτοια ώστε δεν έχει νόημα η αναφορά αλγορίθμου που βρίσκει τη βέλτιστη λύση παρά μόνο για αλγόριθμο που προσεγγίζει για κάθε ακολουθία πληροφοριών (εισόδων – δεδομένων) την απόδοση του offline αλγορίθμου , δηλαδή του αλγορίθμου που γνωρίζει εξ’ αρχής το σύνολο της πληροφορίας. Τα online προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να βρεθούν σε ένα μεγάλο φάσμα προβλημάτων της ευρύτερης περιοχής της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας και των logistics.

Η μεθοδολογική προσέγγιση επίλυσης των συνδυαστικών online προβλημάτων είναι αυτή των αλγορίθμων επαναλαμβανόμενης βελτιστοποίησης (reoptimization algorithm). Κάθε φορά που η κατάσταση του συστήματος αλλάζει ή νέες πληροφορίες διατίθενται, επανεξετάζονται όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες. Τότε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος επιλύεται ώστε να καθοριστούν οι απαιτούμενες αναδραστικές αποφάσεις που επιφέρουν οι αλλαγές. Όταν το στιγμιότυπο επιλύεται συνήθως δημιουργούνται καλές λύσεις για κάποια αντικειμενική συνάρτηση η οποία παραμένει η ίδια για όλη τη διάρκεια και με αυτή που αποτιμάται στο πέρας της διαδικασίας. Παρόλα αυτά, δεν είναι ξεκάθαρο αν η διαδικασία του ελέγχου του συστήματος θα επιφέρει καλές επιδόσεις σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Η επαναλαμβανόμενη βελτιστοποίηση συνήθως υλοποιείται κάνοντας χρήση ευρετικών αλγορίθμων και όχι βάσει ενός μαθηματικού μοντέλου όπου υπάρχει σαφής διατύπωση των πιθανών επιλογών. Αυτό γίνεται επειδή η χρήση των μαθηματικών μοντέλων πολλές φορές απαιτεί υπολογιστική διάρκεια απαγορευτική για φαινόμενα που εξελίσσονται σε πραγματικό χρόνο. Παρόλα αυτά, η ευρετική προσέγγιση δεν παρέχει την δυνατότητα διερεύνησης των προοπτικών που χάνονται. Σε αντίθετη περίπτωση ο καθορισμός και η χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης παρέχει την ευελιξία της ανάλυσης της ευαισθησία των τιμών που μπορούν να επιφέρουν οι αποφάσεις σε ένα σύστημα σε πραγματικό χρόνο. Σε αρκετά πρόσφατη διδακτορική διατριβή του Naturwissenschaften [99] υποδεικνύεται ότι η χρήση μεθόδων επίλυσης μεικτού γραμμικού προγραμματισμού βελτιώνουν τις online επιδόσεις. Επίσης παρέχεται η δυνατότητα της μελέτης των επιπτώσεων των αποφάσεων και η αναπροσαρμογή του μαθηματικού μοντέλου. Η πιο συνήθης πρακτική αξιολόγησης on line αλγορίθμων είναι αυτή της ανάλυσης της ανταγωνιστικότητας, όμως στο προαναφερθέν διδακτορικό προτάθηκε και μια νέα προσέγγιση που βασίζεται σε πιθανότητες.

1.3 Το γενικό πρόβλημα δρομολόγησης στόλου (Vehicle Routing Problem)

Η διερεύνηση των εναλλακτικών μεθοδολογικών προσεγγίσεων επίλυσης του προβλήματος της δρομολόγησης στόλου οχημάτων αποτελεί έναν από τους πρωταρχικούς ερευνητικούς στόχους της διατριβής αυτής. Κρίνεται σκόπιμο λοιπόν πριν η έρευνα εστιαστεί στην συνδυαστική διαχείριση διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών, να παρουσιαστούν κάποια πολύ σημαντικά ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης. Οι αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης (Combinatorial Optimization) στους οποίους ανήκει και το πρόβλημα της δρομολόγησης κατηγοριοποιούνται σε ακριβείς, ευρετικούς και μεθευριτικούς ή μεταευρετικούς. Και οι τρεις μεγάλες κατηγορίες έχουν απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα. Διαφοροποιούνται στο τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη λύση, στην αριστότητα της λύσης τους (τεκμηριωμένη βέλτιστη λύσης ή όχι) και στη χρονική απόκρισή τους.

Η δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης με ακριβείς μεθόδους είναι κοινώς αποδεκτό από τους ακαδημαϊκούς του χώρου ότι εξαρτάται από την μαθηματική τεκμηρίωση των προβλημάτων. Οι έγκυροι περιορισμοί αποτελούν σαφώς το κλειδί για την ενδυνάμωση των μεθόδων και αυτοί συσχετίζονται άμεσα από την μορφοποίησης του μοντέλου του προβλήματος.

Το 2009 σηματοδοτήθηκε μισός αιώνας έρευνας για το κλασσικό πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου οχημάτων. Ο καθηγητής Laporte [89] του πανεπιστημίου του Μόντρεαλ, Καναδά δημοσιεύει το άρθρο ***“Fifty years of vehicle routing”*** στο έγκριτο επιστημονικό περιοδικό Transportation Science όπου παρουσιάζει τις σημαντικότερες προσεγγίσεις στο φάσμα των ακριβών αλλά και των προσεγγιστικών αλγορίθμων.

Το πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου εισάγεται από τους Dantzig & Ramser το 1959 με την ονομασία ***“The Track Dispatching Problem”.*** Ορίζεται ως το πρόβλημα του σχεδιασμού διαδρομών ελαχίστου κόστους ενός στόλου οχημάτων από ένα κεντρικό σημείο ικανοποιώντας κάποιους συστημικούς περιορισμούς. Το φάσμα των εφαρμογών του εκτείνεται από την διαχείριση στόλου διανομής έως την σχολική μετακίνηση και την συλλογή απορριμμάτων κα. Οι τροποποιήσεις του επίσης πάρα πολλές, οι οποίες διαμορφώνονται από την πληθώρα των διαφορετικών συνθηκών – προτεραιοτήτων του εκάστοτε συστήματος διαχείρισης.

Το κλασσικό πρόβλημα βέλτιστης δρομολόγησης στόλου οχημάτων (Vehicle Routing Problem) ορίζεται σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, A)$ όπου $V = \{0,1, \dots, n\}$ το πλήθος των n+1 κορυφών του γραφήματος και $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ το σύνολο των ακμών του, που αντιπροσωπεύει τις δυνατές συνδέσεις μεταξύ των σημείων. Η κορυφή 0 συνήθως αναπαριστά το σημείο εκκίνησης των δρομολογίων, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές τα σημεία που πρέπει να επισκεφτούν τα οχήματα. Ο στόλος θεωρείται ομοιογενής και αποτελείται από m οχήματα χωρητικότητας Q. Το μέγεθος του στόλου είναι είτε εκ των προτέρων γνωστό είτε μεταβλητή απόφασης του προβλήματος. Η ζήτηση του κάθε πελάτη i εκφράζεται από την παράμετρο q_i . Το κόστος της μετακίνησης από μια κορυφή σε μια άλλη εκφράζεται από το c_{ij} που ορίζεται στο σύνολο των ακμών του γραφήματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις ισχύει ο κανόνας του τριγώνου (triangle inequality) για τις τιμές του κόστος των ακμών. Ο αντικειμενικός στόχος του προβλήματος είναι να σχεδιαστούν m στο πλήθος δρομολόγια τα οποία ξεκινούν και καταλήγουν στην κορυφή 0, επισκέπτονται μια φορά κάθε πελάτη , δεν παραβιάζεται η χωρητικότητα του οχήματος και σε κάποιες περιπτώσεις το συνολικό μήκος της διαδρομής του εκάστοτε οχήματος δεν ξεπερνάει ένα ανώτατο όριο L. Στην περίπτωση που ο πίνακας του κόστους μετακίνησης είναι συμμετρικός δηλαδή $c_{ij} = c_{ji}\ \forall\ (i, j) \in A$ είναι προτιμότερο να εργαστεί κανείς στο υποσύνολο του $A \supset E = \{(i, j): i, j \in V, i < j\}$. Το πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου ουσιαστικά γενικεύει το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (Travel Salesman Problem, TSP) , αλλά είναι πολύ πιο δύσκολο να λυθεί στην πράξη. Ενώ πρόσφατα έχουν λυθεί προβλήματα TSP εκατοντάδων και χιλιάδων κορυφών (δίκτυο με 33.810 σημεία) (Applegate et al.,2007) [9] με ακριβείς μεθόδους (exact methods), ο πιο καλός ακριβής αλγόριθμος δρομολόγησης στόλου επιλύει δίκτυα που προσεγγίζουν τις 135 κορυφές (Fukasawa et al. 2006 [74], Baltazzi Christofides and Mingozzi, 2008 [15]) .

Περίπου μετά από 10 χρόνια από την δημοσίευση των Dantzig & Ramser εμφανίζεται ο πρώτος ακριβής αλγόριθμος του Χριστοφίδη. Ο πρώτος αλγόριθμος κλάδου και φραγής δημοσιεύεται το 1969 στο περιοδικό "Operational Research Quarters" στο άρθρο *"**An algorithm for the vehicle dispatching problem**"*. Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση συνοπτικά δίνεται από της εξής αλληλουχία βημάτων: Το γράφημα αρχικά επεκτείνεται, προθέτοντας m – 1 τεχνητούς κεντρικούς σταθμούς διανομής, και θέτονται άπειρα κόστη μεταφοράς μεταξύ των σταθμών, ώστε να απαγορεύονται έμμεσα τέτοιου είδους κινήσεις. Ένα σύμπλεγμα (m – TSP) m στο πλήθος προβλημάτων πλανόδιου πωλητή επιλύεται στο εκτενές γράφημα δημιουργώντας κλάδους όπως στην δημοσίευση των Little et al.(1963) [95] με την διαφοροποίηση ότι υπολογίζεται ένα φράγμα βάση του ελάχιστου δέντρου ζεύξης και όχι χαλαρώνοντας το πρόβλημα της ανάθεσης. Οι συστημικοί[1] (systematic) περιορισμοί του προβλήματος εισέρχονται στην διαδικασία με απλούς κανόνες εμβάθυνσης. (fathoming rules).

Μετέπειτα οι Laporte, Mercure, and Nobert [91] ενδυνάμωσαν την μοντελοποίηση βασισμένοι σε τροποποιήσεις που πρότειναν οι Carpaneto & Toth [43] . Η αποδοτικότητα των μεθόδων κλάδου και φραγής ενδυναμώθηκε με την προσθήκη δύο αυστηρών κάτω φραγμάτων, το ένα βασισμένο στο κεντρικό δέντρο ζεύξης βαθμού k (k –degree centre tree, k-DCT) και το άλλο βασισμένο στην ιδέα των q δρομολογίων (q-routes). Οι Christofides, Mingozzi & Toth,[46] με την προσθήκη των δύο κάτω φραγμάτων μπόρεσαν να λύσουν προβλήματα με $10 \leq n \leq 25$.

Τέσσερις εναλλακτικοί τρόποι μορφοποίησης των μοντέλου ακέραιου μεικτού προγραμματισμού έχουν προταθεί για την μοντελοποίηση του κλασσικού προβλήματος δρομολόγησης στόλου οχημάτων. Ο πρώτος βασίζεται στην μορφοποίηση βάση της τροχιάς (ροής) των οχημάτων (***Vehicle Flow formulation***) με δύο υπό - περιπτώσεις των δύο και τριών δεικτών (2 or 3 indexed VFF). Ο δεύτερος βασίζεται στη μορφοποίηση βάση τροχιάς (ροής) των προϊόντων (***Commodity Flow formulation***) και ο τρίτος βάση της διαμέρισης των συνόλων (***Set Partitioning formulation***). Τέλος ο τέταρτος που έχει προταθεί πολύ πρόσφατα βασίζεται στην χωρητικότητα (***Capacity Index formulation***).

Στο επόμενο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης παρουσιάζονται αναλυτικά τα μαθηματικά μοντέλα των τεσσάρων εναλλακτικών μεθόδων

[1] Ο όρος συστημικός δημιουργήθηκε στα αγγλικά από ανάγκη, καθότι ο όρος συστηματικός (systematic) ταυτιζόταν αρχικά με το συστημικός. Αλλά ο συστηματικός «αυτός που ανήκει στο σύστημα» στην πορεία του έγινε το προϊόν του συστήματος. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη για ένα όρο που να αναφέρεται αποκλειστικά σε κάτι που ανήκει στο σύστημα, είναι μέρος του συστήματος.

μορφοποιήσεων του προβλήματος δίνοντας έμφαση ταυτόχρονα και στην δυναμική των έγκυρων περιορισμών που έχουν προταθεί.

1.4 Συνδυαστική διαχείριση διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών (Inventory Routing Problem)

Η οικογένεια των προβλημάτων διαχείρισης της διανομής προϊόντων σε συνδυασμό με τον εφοδιασμό των αποθηκών τους(ή και διαχείρισης αποθεματικού), γνωστό στην ξένη βιβλιογραφία ως «Inventory Routing Problem» είναι αρκετά μεγάλη, και οι προσεγγίσεις για την επίλυσής τους ακόμη μεγαλύτερες. Θέλοντας να αποσαφηνιστεί ο όρος I R P θα πρέπει να εντοπιστούν τα βασικά κοινά χαρακτηριστικά των διάφορων προσεγγίσεων που έχουν μελετηθεί. Όλα αυτά τα προβλήματα ασχολούνται με την διαδικασία μεταφοράς – διανομής προϊόντων σε ένα ή περισσότερα σημεία πώλησης συνήθως μέσω φορτηγών περιορισμένης χωρητικότητας. Στόχος της βέλτιστης διανομής είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς, και έτσι το κόστος αυτό χρησιμοποιείται στην αντικειμενική συνάρτηση ενός τέτοιου προβλήματος. Το χαρακτηριστικό αυτό του προβλήματος εξηγεί και το λόγο για τον όποιο νοείται πρόβλημα δρομολόγησης στόλου οχημάτων (Routing). Από την άλλη αυτό που το διαφοροποιεί από τα συνηθισμένα προβλήματα δρομολόγησης είναι ότι λαμβάνει υπόψη του και την διαχείριση της διαδικασίας του εφοδιασμού των αποθηκών το οποίο εξηγεί και τον όρο “Inventory”. Ο διαχειριστής του συστήματος θα πρέπει διασφαλίσει ότι δεν αφήνει κανένα σημείο πώλησης χωρίς προμήθειες σε κανένα χρονικό διάστημα. Ο παράγοντας του χρόνου υπεισέρχεται στο σύστημα αποφάσεων του προβλήματος, και πρέπει να συνεκτιμηθεί ο ρυθμός κατανάλωσης των προϊόντων σε συνάφεια με την χωρητικότητα των αποθηκών στα σημεία πώλησης. Η πολυπλοκότητα της δρομολόγησης επηρεάζεται από την χωρητικότητα των αποθηκών, το κόστος αποθήκευσης και τον ρυθμό κατανάλωσης των προϊόντων. Έτσι το κόστος αποθήκευσης θα πρέπει και αυτό να συνυπολογιστεί στην αντικειμενική συνάρτηση ενός τέτοιου προβλήματος. Ένας αρκετά συνεκτικός και συνάμα αποδοτικός ορισμός του προβλήματος είναι αυτό που του αποδίδουν οι Campbell et al.[41]. Το συνδυαστικό πρόβλημα διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών νοείται ως επαναλαμβανόμενο πρόβλημα διανομής ενός προϊόντος από ένα κεντρικό σημείο εφοδιασμού σε ένα σύνολο αποθηκών οριζόμενο σε ένα χρονικό ορίζοντα μήκους Τ ή και μη πεπερασμένο.

Πέρα από τα δύο αυτά βασικά χαρακτηριστικά υπάρχει μια πληθώρα άλλων που μπορούν να μεταβάλουν σημαντικά τις συνθήκες του προβλήματος και άρα και τα μαθηματικά μοντέλα αναπαράστασης – τεκμηρίωσής τους .Τέτοιου είδους χαρακτηριστικά είναι:

- Η χρονική περίοδος διαχείρισης του συστήματος η οποία μπορεί να είναι πεπερασμένη ή μη πεπερασμένη.
- Το κόστος της αποθήκευσης που μπορεί να συνυπολογίζεται αλλά και όχι.
- Το κόστος αποθήκευσης το οποίο μπορεί να ορίζεται για τα σημεία πώλησης ή τις περιφερειακές αποθήκες αλλά και για την κεντρική αποθήκη του διανομέα.
- Οι αρχικές τιμές της ποσότητας προϊόντων των αποθηκών που μπορεί να είναι προκαθορισμένες ,είτε να προσδιοριστούν από το μοντέλο βελτιστοποίησης.
- Η παραγωγή αλλά και ο ρυθμός πώλησης των προϊόντων που μπορεί να είναι προκαθορισμένα αλλά και μεταβαλλόμενα ορίζοντας τις αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες.
- Η παραγωγή αλλά και η κατανάλωση των προϊόντων η οποία μπορεί να προσδιορίζεται για προκαθορισμένα τακτά διαστήματα ή σε συνεχή χρόνο.

- Επίσης οι τιμές τους θα μπορούσαν να είναι σταθερές αλλά και μεταβαλλόμενες στο πεδίο του χρόνου.
- Τέλος η βέλτιστη πολιτική διανομής μπορεί να είναι οποιαδήποτε πολιτική προκύψει αλλά και μεταξύ προκαθορισμένων πλάνων διανομής.

Οι αποφάσεις που θα πρέπει να παρθούν σε ένα τέτοιο σύστημα διαχείρισης είναι οι ακόλουθες τρεις :

- Πότε να γίνει η διανομή σε κάθε πελάτη;
- Πόση ποσότητα προϊόντων θα πρέπει να διανεμηθεί σε κάθε πελάτη κάθε φορά που εξυπηρετείται;
- Πώς να υλοποιηθεί το πλάνο δρομολόγησης έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς των προϊόντων;

Το συνολικό κόστος περιέχει οπωσδήποτε το κόστος της μεταφοράς και στις περισσότερες περιπτώσεις και το κόστος αποθήκευσης των προϊόντων . Από τις πρώτες μελέτες που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα διαπιστώθηκε ότι σε ένα τέτοιο σύνθετο σύστημα αποφάσεων είναι πολύ σημαντικό να αναλυθεί αρχικά η συσχέτιση του κόστους της αποθήκευσης των προϊόντων σε συνάφεια με τη χωρητικότητα των αποθηκών και του κόστους της διανομής. Η αλληλεπίδραση του ρυθμού κατανάλωσης των προϊόντων σε συνάφεια με την χωρητικότητα των αποθηκών και των πλάνων διανομής είναι κάτι που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σε συνεχές αλλά και σε διακριτό χρόνο.

Συνοπτικά στην βασική έκδοση του προβλήματος (ή η πιο διαδεδομένη) η πολιτική διανομής που θα προκύψει θα πρέπει να διασφαλίζει ότι δεν θα μείνει κανένας πελάτης χωρίς διαθέσιμα προϊόντα, κατά την διάρκεια της διανομής οι ποσότητες που μεταφέρονται δεν θα ξεπερνάνε την χωρητικότητα των οχημάτων αλλά και οι ποσότητες που παραδίνονται στους πελάτες δεν θα ξεπερνάνε την χωρητικότητα των αποθηκών τους. Τέλος ο στόχος της πολιτικής της διανομής αυτής είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς αλλά και αποθήκευσης των προϊόντων στο σύνολο των αποθηκών για όλο το διάστημα μελέτης του προβλήματος.

Κεφάλαιο 2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα ευρήματα της βιβλιογραφία σε συνάφεια με το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου (VRP) αλλά και την ειδική περίπτωση της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών(IRP). Στο πρώτο μέρος της ανασκόπησης (Υποκεφάλαιο 2.1) παρουσιάζονται τα εναλλακτικά μαθηματικά μοντέλα επιχειρησιακής έρευνας (μεικτού ακέραιου προγραμματισμού) που έχουν προταθεί. Έπειτα παρατίθεται μια συνοπτική περιγραφή της εξελικτικής πορείας των ευρετικών αλγορίθμων που έχουν προταθεί για την επίλυση του προβλήματος.

Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου (Υποκεφάλαιο 2.2) περιγράφονται αναλυτικά τα ευρήματα της βιβλιογραφίας για το ειδικό πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης . Υιοθετείται η λογική της παρουσίασής τους με την δομή ενός χάρτη πορείας. Μιας λογικής που στόχο της έχει να δείξει την εξελικτική διαδικασία των μεθοδολογικών προσεγγίσεων στην ερευνητική περιοχή της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών. Το υπόλοιπο κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής. Στο Υποκεφάλαιο 2.2.1 παρουσιάζονται οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις της πρώτης περιόδου όπου το IRP προάγεται ως επέκταση του κλασσικού VRP. Στο Υποκεφάλαιο 2.2.2 παρουσιάζονται τα ευρήματα της δεύτερης περιόδου όπου γίνεται η αναγνώριση των δύο κατευθύνσεων που έχει υιοθετήσει η έρευνα. Στην φάση αυτή αναγνωρίζονται και πιστοποιούνται οι αδυναμίες τους και αναδεικνύεται η αναγκαιότητα μιας τρίτης προσέγγισης. Στο Υποκεφάλαιο 2.2.3

αναφέρονται τα ευρήματα της τρίτης περιόδου που έχει να αναδείξει δύο πράγματα τον πρώτο ακριβή αλγόριθμο επίλυσης αυτόν των Arhetti et al. αλλά και την τεκμηρίωση των στοχαστικών προτύπων του προβλήματος. Στο Υποκεφάλαιο 2.2.4 απαριθμούνται και σχολιάζονται οι μέθοδοι της προσεγγιστικής επίλυσης του IRP (ευρετικές & μεθευτερικές διαδικασίες). Έπειτα στο Υποκεφάλαιο 2.2.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανασκόπησης για τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν για την επίλυση του προβλήματος σε συνθήκες αβεβαιότητας. Στο Υποκεφάλαιο 2.2.6 αναφέρονται πολύ πρόσφατες δημοσιεύσεις, νέες εξελίξεις και επεκτάσεις στο χώρο.

Τέλος στο Υποκεφάλαιο 2.3 αναφέρονται συμπερασματικά τα ευρήματα της βιβλιογραφίας και παρατίθενται οι κυριότερες κατευθύνσεις που ακολουθήθηκαν για την περαιτέρω μελέτη που υλοποιήθηκε.

2.1 Το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης

Η διατριβή εστιάζει στις μεθοδολογικές προσεγγίσεις του μεικτού ακέραιου προγραμματισμού και στις ακριβείς διαδικασίες επίλυσης. Κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν αυτές οι προσεγγίσεις που έχουν προταθεί αναλυτικά.

2.1.1 Μορφοποίηση μοντέλων κλασσικού προβλήματος δρομολόγησης στόλου οχημάτων

Τέσσερις εναλλακτικοί τρόποι μορφοποίησης των μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού έχουν προταθεί για την μοντελοποίησης του κλασσικού προβλήματος δρομολόγησης στόλου οχημάτων. Ο πρώτος βασίζεται στην μορφοποίηση βάση της τροχιάς (ροής) των οχημάτων (***Vehicle Flow Formulation***) με δύο υπό - περιπτώσεις των δύο και τριών δεικτών (2 indexed – 3 indexed VFF). Ο δεύτερος βασίζεται στη μορφοποίηση βάση της τροχιάς (ροής) των προϊόντων (***Commodity Flow Formulation***) και ο τρίτος βάση της διαμέρισης των συνόλων (***Set Partitioning Formulation***). Τέλος ο τέταρτος που έχει προταθεί πολύ πρόσφατα βασίζεται στην χωρητικότητα (***Capacity Index Formulation***).

1. *Μορφοποίηση βάση της τροχιάς του οχήματος (Vehicle Flow Formulation)*

Στη μορφοποίηση του προβλήματος της δρομολόγησης βάση της τροχιάς των οχημάτων οι μεταβλητές του προβλήματος εκφράζουν την κίνηση του οχήματος από το ένα σημείο στο άλλο, δίχως να καταγράφονται οι ποσότητες που διανέμονται σε κάθε σημείο. Δυο διαφορετικές μορφοποιήσεις έχουν προταθεί εκείνη που οι μεταβλητές καθορίζονται από την αρχή και το τέλος της ακμής του γράφου (2 – indexed vehicle flow formulation) και εκείνη που ταυτόχρονα αναφέρεται και το όχημα εξυπηρέτησης (3 - indexed vehicle flow formulation).

2 – Index Formulation Flow

Η μορφοποίηση των δύο δεικτών βάση της τροχιάς (ροής) των οχημάτων αποδίδεται στην δουλειά των Laporte & Nobert [93] και Laporte, Nobert & Desrochers [92] επεκτείνοντας εκείνη που είχαν προτείνει οι Dantzig Fulkerson & Johnson [64].

Συμβολίζεται με x_{ij} η μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των φορών που ένα όχημα διέρχεται από το i στο j και παίρνει την τιμή 0,1,2.Το γραμμικό μοντέλο έχει την ακόλουθη μορφή :

VF1

$$min \sum_{(i,j)\epsilon E} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (2.1)$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} x_{oj} = 2m \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} = 2 \quad \forall k \in V\backslash\{0\} \qquad (2.3)$$

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - r(s), S \subseteq V\{0\} \qquad (2.4)$$

$$x_{0j} = 0{,}1{,}2 \quad \forall j \in V\backslash\{0\} \qquad (2.5)$$

$$x_{ij} = 0{,}1 \quad \forall i, j \in V\backslash\{0\} \qquad (2.6)$$

Όπου το $r(s)$ εκφράζει το κατώτερο όριο στο πλήθος των οχημάτων που απαιτούνται για να εξυπηρετηθούν όλες οι κορυφές του υποσύνολου S. Ο περιορισμός (2.2)((2.1) εξασφαλίζει ότι θα δημιουργηθούν ακριβώς m δρομολόγια, τα οποία θα ξεκινάνε και θα καταλήγουν στην κορυφή 0 που αναπαριστά το κεντρικό σημείο διανομής. Ο περιορισμός (2.3) εξασφαλίζει την ροή του στο δίκτυο, δηλαδή θα πρέπει το πλήθος των φορών που τα οχήματα εισέρχονται σε μία κορυφή να ισούται με εκείνο των εξερχόμενων. Ο περιορισμός(2.4) διασφαλίζει την περίπτωση να μην υπάρχουν κυκλικές διαδρομές στο δίκτυο ο γνωστός στην ξένη βιβλιογραφία “General Subtour Elimination Constraint” Η τιμή του r(S) συνήθως αντικαθίσταται με το ακέραιο μέρος του πηλίκου $\left\lceil\frac{q(S)}{C}\right\rceil$ όπου το $q(S)=\sum_{i\epsilon S}d_i$ εκφράζει της συνολική ζήτηση των σημείων που εξυπηρετεί, ενώ C την χωρητικότητα του οχήματος. Το πλήθος των περιορισμών αποκλεισμού των κυκλικών διαδρομών αυτού του τύπου αυξάνεται εκθετικά (πλήθος 2^n) καθώς αυξάνει το πλήθος των κορυφών στο γράφημα. Εναλλακτικά οι Miller –Tucker – Zemlin [97] προτείνουν τους κάτωθι περιορισμούς (2.7) που αυξάνουν πολυωνυμικά σε σχέση με το μέγεθος του γραφήματος (πλήθος n^2 -3n+2).

$$u_i - u_j + Cx_{ij} \leq C - d_j \; \forall i,j \in V\backslash\{0\}, i \neq j,$$

$$\text{έτσι ώστε} \tag{2.7}$$

$$d_i + d_j \leq C$$

$$d_i \leq u_i \leq C \quad \forall i \in V\backslash\{0\}$$

Η βοηθητική μεταβλητή u_i ,εκφράζει την ποσότητα του προϊόντος που βρίσκεται στο όχημα μέχρι να επισκεφτεί το σημείο i και είναι τιμή μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

3 – Index Formulation Flow

Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στους Golden, Magnanti, Nguyen [77] . Συμβολίζεται με x_{ij}^k η δυική μεταβλητή απόφασης η οποία παίρνει την τιμή 1 όταν το όχημα k μεταβαίνει από την κορυφή i στη j και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση. Η y_i^k τη δυική μεταβλητή απόφασης να παίρνει την τιμή 1 όταν η κορυφή i εξυπηρετείται από το όχημα k και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση. Το μοντέλο διαμορφώνεται ως εξής :

FF2

$$min \sum_{(i,j)\epsilon E} c_{ij} \sum_{k=1}^{m} x_{ij}^{k} \quad (2.8)$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς

$$\sum_{\{i,j\}\in d(h)} x_{ij}^{k} = 2y_h^k \ \forall h \in V_c, k = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

$$\sum_{\{i,j\}\in d(S)} x_{ij}^{k} \geq 2y_h^k \ \forall S \subset \wp, h \in S, k = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_i^k = 1 \ \forall i \in V_c \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_0^k = m \ \forall i \in V_c \quad (2.12)$$

$$\sum_{i\in V_c} d_i y_i^k \leq Q \ \forall i \in V_c \quad (2.13)$$

$$y_i^k \in \{0,1\} \ \ \forall i \in V \quad (2.14)$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0,1\} \ \ \forall i,j \in E \setminus \{(0,j): j \in V_c\} \quad (2.15)$$

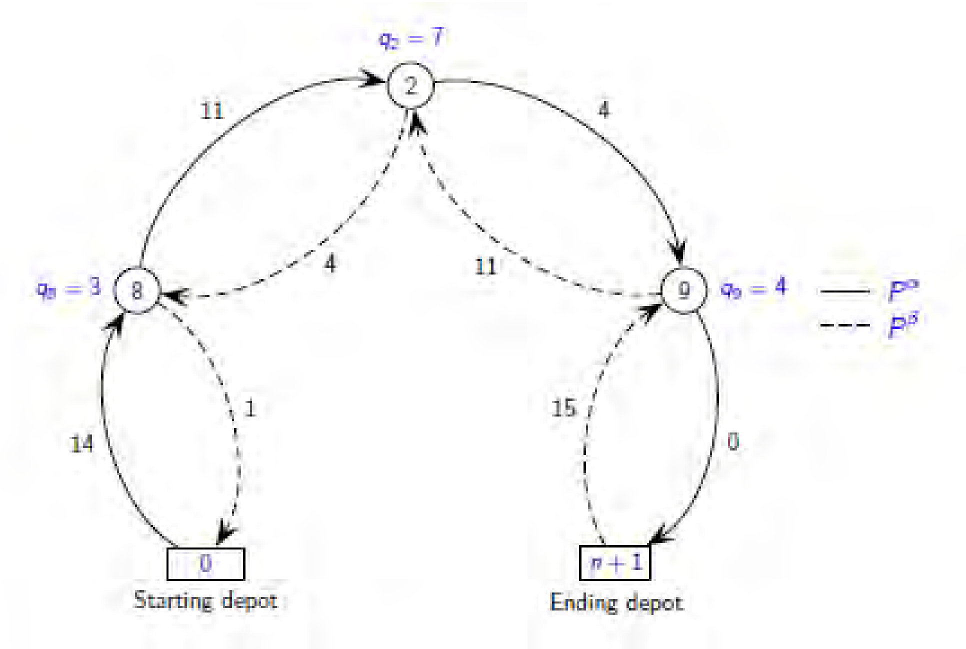
$$x_{0j}^{k} \in \{0,1,2\} \ \ \forall j \in \{(0,j): j \in V_c\} \quad (2.16)$$

Το σύνολο **d(S)** αποτελεί το σύνολο των τομών (cuts) που ορίζεται από το σύνολο του S έτσι ώστε $d(S) \coloneqq \{(i,j) \in E: i \in S, j \notin S \; or \; j \in S, i \notin S\}$. Αντίστοιχα το σύνολο **d(h)** αποτελεί το σύνολο των τομών που ορίζονται από τον κόμβο h, έτσι ώστε $d(h) \coloneqq \{(i,j) \in E: i = h, j \neq h \; or \; j = h, i \neq h\}$.

Ο περιορισμός (2.9) εξασφαλίζει την ροή του στο δίκτυο, δηλαδή όταν το όχημα εξυπηρετεί έναν κόμβο αυτός θα πρέπει να συνδέεται με άλλους δύο. Ο περιορισμός(2.10) διασφαλίζει την περίπτωση να μην υπάρχουν κυκλικές διαδρομές στο δίκτυο "GSEC".Ο περιορισμός (2.11)εκφράζει το γεγονός ότι ένας κόμβος εξυπηρετείται από ένα και μόνο όχημα, ενώ ο περιορισμός (2.12) ότι από την αφετηρία ξεκινούν ακριβώς τόσα οχήματα όσα το πλήθος των διαθέσιμων οχημάτων. Ο περιορισμός (2.13) διασφαλίζει τον περιορισμό της χωρητικότητας των οχημάτων. Και τέλος οι περιορισμοί (2.14) - (2.16) διασφαλίζουν τις ακέραιες τιμές των μεταβλητών απόφασης.

2. ***Μορφοποίηση βάση της ροής των προϊόντων (Commodity Flow Formulation)***

Στην μορφοποίηση αυτή του προβλήματος η μεταβλητή απόφασης y_{ij} καθορίζει το ύψος του αποθέματος που διατηρεί το όχημα στην ακμή (i,j). Η πρώτη του εμφάνιση γίνεται το 1979 στην δημοσίευση των Gavish & Graves [76] η οποία και είναι γνωστή ως «*one – commodity flow formulation*» χωρίς να παραθέσουν κάποια αποτελέσματα σχετικά με τις αποδόσεις του. Μετέπειτα οι Baltacci, Mingozzi & Catjicostantinou [14] επεκτείνουν τις εργασίες των προγενέστερων στην λεγόμενη «*two – commodity flow formulation*» . Για το μοντέλο αυτό απαιτείται η επέκταση του γραφήματος, προσθέτοντας ακόμη μια κορυφή, (n+1) η οποία είναι αντίγραφο της κορυφής 0. Στο Σχήμα 2-1 δίνεται ένα παράδειγμα του εκτεταμένου γράφου προσθέτοντας την επιπλέον (n+1) κορυφή.



Σχήμα 2-1 : Αναπαράσταση δικτύου μορφοποίησης Two Commodity Flow.

Δηλαδή $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$όπου $\bar{V} = V \cup \{n+1\}$ και $\bar{E} = E \cup \{(i, n+1): i \in V\}$. Ένα δρομολόγιο ορίζεται ως ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από 0 στο n+1. Η δυαδική μεταβλητή x_{ij} παίρνει την τιμή 1, αν και μόνο αν, η ακμή (i,j) χρησιμοποιηθεί στο δρομολόγιο, ενώ η μεταβλητή $y_{ji} = Q - y_{ij}$ εκφράζει τον ελεύθερο χώρο που απομένει στο όχημα στην ακμή (i,j)όταν $x_{ij} = 1$.

$$min \sum_{(i,j)\epsilon \bar{E}} c_{ij}\, x_{ij} \tag{2.17}$$

CF

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n}(y_{ji} - y_{ij}) = 2d_i \ \forall i \in V \setminus\{0\} \tag{2.18}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{0\}} y_{0j} = \sum_{i\in V\setminus\{0\}} d_i \tag{2.19}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{0\}} y_{j0} = mQ - \sum_{i\in V\setminus\{0\}} d_i \tag{2.20}$$

$$\sum_{j\in V\setminus\{0\}} y_{n+1j} = mQ \tag{2.21}$$

$$y_{ij} + y_{ji} = Qx_{ij} \tag{2.22}$$

$$\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} = 2\,, \quad \forall k \in V\setminus\{0\} \tag{2.23}$$

$$y_{ij} \geq 0, y_{ji} \geq 0 \ \forall (i,j) \in \bar{E} \tag{2.24}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in \bar{E} \tag{2.25}$$

Οι περιορισμοί (2.18) - (2.21) διασφαλίζουν την συνέπεια στην ροή των προϊόντων στο όχημα. Ο περιορισμός (2.22) διασφαλίζει την εφικτότητα των μεταβλητών y_{ij}, y_{ji} ενώ ο (2.23) τη διατήρηση της ροής του δικτύου. Το μοντέλο αυτό λύνεται με αλγόριθμο κλάδου και αποκοπής προσθέτοντας έγκυρους περιορισμούς για την μεταβλητή x_{ij}. Κατάφερε να λύσει προβλήματα από 16 έως 35 κορυφές ενώ η αποδοτικότητα του ήταν πολύ υψηλή για δίκτυα μεταξύ 30 και 60 κορυφών και 3 με 5 οχημάτων.

3. Μορφοποίηση διαμέρισης του συνόλου (Set Partitioning Formulation)

Η πρώτη προσέγγιση αυτής της κλάσης των μοντέλων θεωρείται αυτή των Balinski & Quandt [16]. Έστω ότι συμβολίζουμε με r το δρομολόγιο και με α_{ir}τη δυική παράμετρο που εκφράζει αν η κορυφή i ανήκει στο δρομολόγιο r. Έστω c_r^* το βέλτιστο κόστος του δρομολογίου r και έστω η δυαδική μεταβλητή y_r να ισούται με 1 όταν το δρομολόγιο r χρησιμοποιείται στην βέλτιστη λύση. Τότε το πρόβλημα μπορεί να τεκμηριωθεί μαθηματικά σύμφωνα με το ακόλουθο μοντέλο.

P1
$$min \sum_r c_r^* \, y_r \tag{2.26}$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς

$$\sum_r a_{ir} \, y_r = 1 \; \forall i \in V \setminus \{0\} \tag{2.27}$$

$$\sum_r y_r = m \tag{2.28}$$

$$y_r = 0{,}1 \; \forall \; r \tag{2.29}$$

Ο περιορισμός (2.27) ουσιαστικά αποτελεί τον περιορισμό της διαμέρισης. Εκφράζει το γεγονός ότι κάθε κορυφή ανήκει σε ακριβώς ένα δρομολόγιο. Ενώ ο περιορισμός (2.28) εκφράζει το γεγονός ότι θα πρέπει να κατασκευαστούν ακριβώς m δρομολόγια. Είναι συμπληρωματικός άλλα χρησιμοποιείται από τους περισσότερους ερευνητές της προσέγγισης αυτής.

Η απευθείας εφαρμογή αυτής της μορφοποίησης του προβλήματος θεωρείται μη πρακτική λόγω του μεγάλου πλήθους των πιθανών δρομολογίων, αλλά και της δυσκολίας υπολογισμού της τιμής του c_r^*. Για την επίλυσή χρησιμοποιείται η Dantzig – Wolf μέθοδος αποσύνθεσης ή αλλιώς column generation . Οι δύο πιο γνωστές προσεγγίσεις την μοντελοποίησης αυτής είναι των Fukasawa et al.[74]και του Baldacci et al [15].

Το μοντέλο των Fukasawa et al. 2006

Συνδυάζει το μοντέλο διαμέρισης με εκείνο της τροχιάς (ροής) του οχήματος. Έστω α_{ij}^r να παίρνει την τιμή 1 όταν η ακμή (i, j) εμφανίζεται στο q-route (r, y_r, c_r^*) όπως ορίζεται από τα παραπάνω μοντέλο (SP1) και x_{ij} η μεταβλητή από την μορφοποίηση του (VF1) .

P2

$$\min \sum_r c_r^* \, y_r \tag{2.30}$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς

$$\sum_r a_{ir} y_r - x_{ij} = 0 \;\; \forall i \in E \tag{2.31}$$

$$\sum_r y_r = m \tag{2.32}$$

$$y_r = 0,1 \; \forall \; r \tag{2.33}$$

$$\sum_{i<k} x_{ik} + \sum_{j>k} x_{kj} = 2 \quad \forall k \in V\backslash\{0\} \tag{2.34}$$

$$x_{0j} = 0,1,2 \quad \forall j \in V\backslash\{0\} \tag{2.35}$$

$$x_{ij} = 0,1 \qquad \forall i,j \in V\backslash\{0\} \tag{2.36}$$

Έτσι το μοντέλο του Fukasawa et al .2006 διαμορφώνεται

VF - SP2

$$min \sum_{r} \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} \, a_{ij}^{r} \, y_r \tag{2.37}$$

$$\sum_{r} (\sum_{i<k} a_{ik}^{r} y_r + \sum_{j>k} a_{jk}^{r} y_r) = 2 \quad \forall k \in V\backslash\{0\} \tag{2.38}$$

$$\sum_{r} \sum_{\substack{i\in S, j\notin S \; or \\ i\notin S, j\in S}} a_{ij}^{r} \, y_r \geq 2r(S) \;\; \forall i \in E \tag{2.39}$$

$$\sum_{r} a_{ij}^{r} y_r \leq 1 \tag{2.40}$$

$$y_r = 0{,}1 \ \forall \ r \tag{2.41}$$

Η δεύτερη προσέγγιση των Baldacci, Christofides, and Mingozzi (2008) [15] δουλεύει με το μοντέλο του SP επαυξημένο με κάποιους περιορισμούς που είναι έγκυροι στη μορφοποίηση VF.

Ορίζεται το R σύνολο δείκτης όλων των εφικτών διαδρομών και $R_i \subset R$ το σύνολο δείκτης των δρομολογίων που εξυπηρετούν το πελάτη $i \in V$. Ορίζεται επίσης ο διάδικος σταθερός όρος – συντελεστής (α_{ir}) να παίρνει τη τιμή 1 όταν το $i \in V'$ ανήκει στο δρομολόγιο R και την τιμή 0 σε διαφορετική περίπτωση. Κάθε r έχει ένα συσχετιζόμενο κόστος c_r, ενώ ορίζεται η δυαδική μεταβλητή απόφασης y_r να παίρνει την τιμή 1 αν και μόνο αν το δρομολόγιο $r \in R$ ανήκει στην βέλτιστη λύση και 0 διαφορετικά. Το μοντέλο SP διαμορφώνεται ως εξής:

SP

$$min \sum_{r \in R} c_r \, y_r \tag{2.42}$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$\sum_{r \in R} \alpha_{ir} \, y_r = 1 \ \ \forall i \in V \tag{2.43}$$

$$\sum_{r\in R} y_r = m \tag{2.44}$$

$$\sum_{r\in R(S)} y_r \geq k(S)\ \forall S \in \ell \tag{2.45}$$

$$\sum_{r\in R} a^t(R_r) y_r \geq b^+\ \forall t \in \mathrm{F} \tag{2.46}$$

$$\sum_{r\in C} y_r \leq 1 \forall C \in \mathfrak{J} \tag{2.47}$$

$$y_r \in \{0,1\}\ \forall r \in R \tag{2.48}$$

Όπου $x_{i,j} = \sum_{r\in R} n_{ij}^r\, y_r\ \ \forall\{i,j\} \in E$ θεωρώντας ότι όταν το r είναι δρομολόγιο που επισκέπτεται έναν και μόνο σημείο h η τιμή του $n_{0h}^r = 2$, $n_{ij}^r = 0$ ενώ όταν το r είναι δρομολόγιο που επισκέπτεται περισσότερα σημεία τότε $n_{ij}^r = 1\ \ \forall\{i,j\} \in E(R_r)$ και $n_{ij}^r = 0 \quad \forall\{i,j\} \in E \backslash E(R_r)$. Το σύνολό $R(S) = \{r \in R \colon R_r \cap S \neq \emptyset, \rho(S) = \sum_{\{i,j\}\in\delta(S)} n_{ij}^r$. Ενώ $\alpha^t(R) = \sum_{\{i,j\}\in E(R_r)} a_{ij}^t n_{ij}^r$. Τέλος C ανήκει στο σύνολο των περιορισμών τύπου «κλίκας» (clique inequality) .

4. ***Μορφοποίηση συσχετιζόμενη με την χωρητικότητα (Capacity Index Formulation)***

Μια εξίσου πολύ πρόσφατη μορφοποίηση του προβλήματος είναι αυτή των Pessoa Poggi & Uchoa [102] (2007) που συσχετίζεται με την χωρητικότητα, η «***Capacity Index Formulation***» .Η μορφοποίηση αυτή βασίζεται στην επέκταση της μορφοποίησης του ασύμμετρου προβλήματος της δρομολόγησης (ACVRP) . Για την μορφοποίηση του προβλήματος απαιτείται η επέκταση του γραφήματος σε πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $G_D = (V, A)$ όπου d_a , $\alpha \epsilon A$ είναι το κόστος της ακμής α. Ορίζονται τα υποσύνολα $S \subseteq V$με $\delta^-(S) = \{(i,j) \in A: i \in V\setminus S, j \in S\}$, $\delta^+(S) = \{(i,j) \in A: i \in S, j \in V\setminus S\}$. Η δυαδική μεταβλητή x_a^q εκφράζει ότι η ακμή α=(i,j) ανήκει στο δρομολόγιο και η συνολική ζήτηση του j και των μεταγενεστέρων του στο δρομολόγιο είναι ακριβώς q. Στην περίπτωση που η ακμή α χρησιμοποιείται για να επιστρέψει το όχημα η τιμή του q =0. Το μοντέλο μορφοποιείται με τους ακόλουθους περιορισμούς.

CIF

$$min \sum_{a \in A} d_a \sum_{q=0}^{Q} x_a^q \tag{2.49}$$

$$\sum_{a \in \delta^-(i)} \sum_{q=1}^{Q} x_a^q = 1 \forall i \in V_c \tag{2.50}$$

$$\sum_{a \in \delta^+(i)} \sum_{q=1}^{Q} x_a^q = 1 \forall i \in V_c \tag{2.51}$$

$$\sum_{a \in \delta^-(i)} x_a^q - \sum_{a \in \delta^+(i)} x_a^{q-q_i} = 0 \tag{2.52}$$

$$x_a^q = 0 \ \forall a \in (i, 0) \tag{2.53}$$

$$x_a^q \in \{0,1\} \ \forall a A \tag{2.54}$$

2.1.2 Ευρετικοί – Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι

Θέλοντας να δοθεί μια ολοκληρωμένη εικόνα σχετικά με τις μεθόδους που έχουν προταθεί για την επίλυση του προβλήματος της δρομολόγησης θα ήταν παράλειψη να μην παρουσιαστούν και οι προσεγγιστικές ή αλλιώς ευρετικές μεθόδοι επίλυσης. Οι ευρετικοί αλγόριθμοι είναι κατά βάση προσεγγιστικοί αλγόριθμοι. Περιορίζονται στην σάρωση «περιοχών λύσεων» ικανοποιητικής ποιότητας. Διαχωρίζονται σε δύο τμήματα στο κατασκευαστικό και στο βελτιωτικό (τοπικής αναζήτησης). Στο κατασκευαστικό κομμάτι παράγουν μια αρχική λύση, που στη συνέχεια στο βελτιωτικό χρησιμοποιώντας εναλλακτικές τεχνικές ανταλλαγής (γνωστοί ως τελεστές) τμημάτων μεταξύ των λύσεων δημιουργούν νέα βελτιωμένα αποτελέσματα. Παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον από μόνες τους επειδή μπορούν πολύ γρήγορα να παράγουν καλές λύσεις αλλά και επειδή αποτελούν συστατικά μεθευριτικών αλγορίθμων. Τα πιο διαδεδομένα κριτήρια αξιολόγησης των λύσεων είναι:

- η απόκλιση από την βέλτιστη
- η ευκολία απόκτησής της
- η λογική πάνω στην οποία στηρίζεται και
- οι κανόνες του ευρετικού αλγορίθμου

Όταν είναι εφικτό, τα αποτελέσματά τους συγκρίνονται με αυτά που παράγονται με έναν ακριβή αλγόριθμο.

Οι Braysy & Gendreau [35], [36] παρουσίασαν μια ενδελεχή έρευνα σχετικά με τους αλγορίθμους που έχουν προταθεί τα τελευταία χρόνια για το πρόβλημα της δρομολόγησης. Συγκεκριμένα ανέλυσαν τις μεθόδους επίλυσης με ευρετικούς αλγορίθμους και μεθευριτικούς , ενώ πρότειναν και συγκεκριμένα μέτρα για τη συγκριτική αξιολόγηση των επιδόσεων των εναλλακτικών μεθόδων. Περιέγραψαν βασικά χαρακτηριστικά των μεθόδων αυτών ενώ ανέλυσαν και τα αποτελέσματα τους στα πολύ γνωστά προβλήματα του Solomon.

2.1.2.1 Κατασκευαστικοί Αλγόριθμοι

Στην κατηγορία των κατασκευαστικών αλγορίθμων κατατάσσονται οι αλγόριθμοι απληστίας (Greedy algorithms) οι οποίοι χαρακτηρίζονται ως μυωπικοί, δηλαδή βλέπουν μόνο λίγα βήματα μπροστά. Επίσης οι προσεγγιστικοί κατατάσσονται στους κατασκευαστικούς οι οποίοι προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας επιπλέον πληροφορία που καθορίζεται από τον σχεδιαστή του. Η διαδρομή που κατασκευάζουν προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ενός κριτηρίου, το οποίο μπορούν να το κάνουν για κάθε όχημα διαδοχικά είτε παράλληλα.

Μια πολύ γνωστή κατασκευαστική μέθοδος είναι αύτη του κοντινότερου γείτονα (NN – Nearest Neighbor). Το κριτήριο της δρομολόγησης είναι η ελαχιστοποίηση του χρόνου διαδρομής ή της απόστασης μεταξύ του υπό εξέταση σημείου παραλαβής και του προηγούμενου. Κριτήριο αποδοχής κάθε λύσης είναι να ικανοποιούνται τα χρονικά παράθυρα αφετηρίας και προορισμού και να μην υπερβαίνει η ζήτηση της κάθε διαδρομής τη χωρητικότητα του οχήματος. Η διαδρομή ολοκληρώνεται όταν δεν μπορεί να εισαχθεί επιπλέον φορτίο στο όχημα είτε λόγω χωρητικότητας είτε λόγω χρονικών περιορισμών .

Μια άλλη πολύ γνωστή προσέγγιση είναι αυτή όπου το πρόβλημα δρομολόγησης επιλύνεται και στη συνέχεια ομαδοποιείται ή το αντίστροφο (Route First – Cluster Second) . Στο πρώτο βήμα κατασκευάζεται μια πολύ μεγάλη διαδρομή χωρίς περιορισμούς χωρητικότητας λύνοντας το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή (TSP) και στην συνέχεια αυτή διαχωρίζεται σε άλλες μικρότερες, ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί της χωρητικότητας και της χρονικής διάρκειας. Σε γενικές γραμμές η προσέγγιση αυτή δεν μπορεί να μπει σε διαδικασία σύγκρισης με άλλες ευρετικές επειδή κυρίως εξαρτάται από την μέθοδο του TSP που χρησιμοποιεί.

Ο πιο γνωστός κατασκευαστικός ευρετικός αλγόριθμος είναι αυτός των Clarke & Wright Savings. Η διαδικασία του μοιάζει αντίστροφη της Route First – Cluster Second. Ξεκινάει με την υπόθεση ότι κάθε σημείο εξυπηρετείται από ένα όχημα. Στην συνέχεια, όταν μπορεί να προκύψει κάποιο όφελος σε σχέση με την διανυθείσα απόσταση, οι δύο διαδρομές ενοποιούνται. Καθώς η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς κάποια δρομολόγια ακυρώνονται ενώ κάποια άλλα πυκνώνουν έως ότου δεν είναι πια δυνατή η συγχώνευση δρομολογίων. Η διαδικασία μπορεί να γίνει είτε διαδοχικά είτε παράλληλα σε όλες τις διαδρομές.

Αντίστοιχα γνωστός κατασκευαστικός αλγόριθμος είναι αυτός που προτείνει ο Solomon (Insertion). Κάθε διαδρομή ξεκινάει από κάποιο κεντρικό σημείο και οι υπόλοιποι εισάγονται σε αυτή, στο βαθμό που αυτό είναι εφικτό. Το αρχικό σημείο που επιλέγεται είναι είτε το πιο απομακρυσμένο είτε εκείνο που έχει το νωρίτερο χρονικό παράθυρο. Η εισαγωγή του νέου σημείου γίνεται ανάμεσα σε υφιστάμενα σημεία του δρομολογίου. Το κριτήριο εισαγωγής ενός σημείου σε κάποιο δρομολόγιο σχετίζεται με το κατά πόσο συμφέρει αυτό να εξυπηρετηθεί από το συγκεκριμένο όχημα έναντι των υπολοίπων. Τρείς εναλλακτικές προτείνονται που διαφοροποιούνται στις μεταβλητές καθορισμού της σκοπιμότητας για την εισαγωγή ενός νέου σημείου στο δρομολόγιο. Στην πρώτη περίπτωση εξετάζεται πόσο σημαντική είναι η απόσταση του νέου σημείου από την αφετηρία σε σχέση με την προστιθέμενη απόσταση και τον προστιθέμενο χρόνο στο δρομολόγιο. Στην δεύτερη περίπτωση στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της συνολικής απόστασης και του συνολικού χρόνου ενώ σε μια τρίτη παραλλαγή δίνεται έμφαση στην εξυπηρέτηση προκαθορισμένων σημείων.

Τέλος μια επίσης γνωστή μέθοδος είναι εκείνη του SWEEP (αλγόριθμος σάρωσης) που έχει την φιλοσοφία του C.F.R.S.(Cluster First – Route Second). Αρχικά ομαδοποιούνται τα σημεία χωρίζοντας τα σε περιοχές ανάλογα με την γωνία που σχηματίζουν από το κέντρο βάρους του προβλήματος. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο I1 του Solomon για να δομηθούν τα δρομολόγια.

2.1.2.2 Βελτιωτικοί Αλγόριθμοι

Στους βελτιωτικούς αλγορίθμους ανήκουν οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης οι οποίοι ξεκινούν από μια αρχικά εφικτή λύση την οποία βελτιώνουν με κάποια μέθοδο αναζήτησης στη γειτονιά της λύσης. Είναι αλγόριθμοι που δουλεύουν γρήγορα και αποτελεσματικά. Για να σχεδιαστεί ένας τέτοιος αλγόριθμος απαιτείται να καθοριστούν τα ακόλουθα ζητήματα:

- πως δημιουργείται μια αρχικά εφικτή λύση
- ποιούς μηχανισμούς διαφοροποίησης θα χρησιμοποιήσει
- ποιό είναι το κριτήριο αποδοχής των λύσεων και τέλος
- ποιό είναι το κριτήριο τερματισμού της διαδικασίας βελτίωσης

Ο μηχανισμός διαφοροποίησης της λύσης δημιουργεί τις γειτονικές λύσεις αλλάζοντας κάποια χαρακτηριστικά ή συνδυάζοντας χαρακτηριστικά της αρχικής λύσης. Στην ουσία αυτό που κάνει είναι να ελέγχει την επίπτωση της αλλαγής θέσεων στα δρομολόγια στην αντικειμενική του συνάρτηση. Αν η ανταλλαγή είναι συμφέρουσα τότε αντικαθιστά την αρχική λύση. Για το κριτήριο αποδοχής της λύσης δύο είναι οι πιο γνωστές προσεγγίσεις για το πρόβλημα της δρομολόγησης, η αποδοχή της πρώτης ικανής (First – Accepted) και η αποδοχή της καλύτερης δυνατής (Best – Accepted). Η πρώτη επιλέγει την πρώτη γειτονική λύση που ικανοποιεί το κριτήριο αποδοχής ενώ η δεύτερη εξετάζει όλους τους γείτονες που ικανοποιούν τα κριτήρια και επιλέγει τον καλύτερο.

Οι βελτιωτικοί αλγόριθμοι, επειδή κατατάσσονται σε αυτούς της τοπικής αναζήτησης έχουν μυωπική συμπεριφορά και εγκλωβίζονται σε τοπικά ελάχιστα. Γι αυτό και η ποιότητα της λύσης τους εξαρτάται κατά πολύ από την αρχική λύση. Οι πιο διαδεδομένες προσεγγίσεις βελτιωτικών αλγορίθμων είναι αυτές της ανταλλαγής άκρων (εσωτερικές είτε εξωτερικές ανταλλαγές). Οι γειτονίες ανταλλαγής για ένα δρομολόγιο είναι το σύνολο των δρομολογίων που μπορούν να προκύψουν αντικαθιστώντας κ στο πλήθος άκρα της με κάποια άλλα. Ο χρόνος που απαιτείται για την παραγωγή του κ – βέλτιστου είναι $O(n^k)$. Ο 2 – opt για παράδειγμα προσπαθεί να βελτιώσει μια διαδρομή αντικαθιστώντας 2 από τα άκρα του με 2 άλλα άκρα. Έτσι ο 2 – opt, ή ο 3 – opt αφαιρεί 2 ή 3 αντίστοιχα συνδέσεις και προσπαθεί να βρει άλλες δυνατές συνδέσεις που είναι καλύτερες. Ένας άλλος γνωστός αλγόριθμος ο Or – opt όπου ανατοποθετούνται 2 διαδοχικά σημεία σε άλλη θέση χωρίς να αλλάζει η κατεύθυνση της διαδρομής. Τέλος, πολύ βασικοί τελεστές ανταλλαγής είναι οι ακόλουθοι τρεις.

Relocate: Η ανατοποθέτηση επιτυγχάνεται όταν γίνεται μεταφορά ενός σημείου από το ένα δρομολόγιο σε άλλο χωρίς να γίνεται αλλαγή στον προσανατολισμό τους.

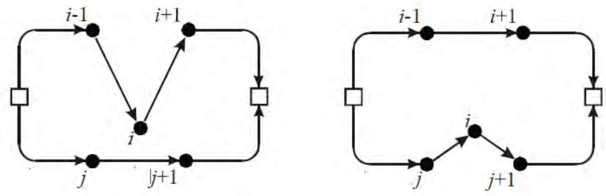


Figure 5. Relocate operator. The edges (*i*-1, *i*), (*i*, *i*+1) and (*j*, *j*+1) are replaced by (*i*-1, *i*+1), (*j*, *i*) and (*i*, *j*+1), i.e., customer *i* from the origin route is placed into the destination route.

Σχήμα 2-2[2]: Σχηματική απεικόνιση του τελεστή Relocate

Exchange: Ανταλλάσσονται 2 σημεία μεταξύ δύο διαδρομών χωρίς να αλλάζει ο προσανατολισμός της λύσης.

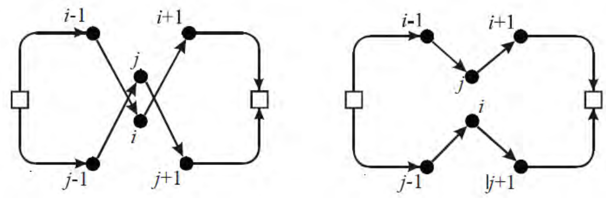


Figure 6. The exchange operator. The edges (*i*-1, *i*), (*i*, *i*+1), (*j*-1, *j*) and (*j*, *j*+1) are replaced by (*i*-1, *j*), (*j*, *i*+1), (*j*-1, *i*) and (*i*, *j*+1), i.e., two customers from different routes are simultaneously placed into the other routes.

Σχήμα 2-3[3]: Σχηματική απεικόνιση του τελεστή Exchange

[2] *Πηγή : Braysy and Gendreau (2005)*
[3] *Πηγή : Braysy and Gendreau (2005)*

Cross: Η διασταύρωση ανταλλάσει ζεύγη διαδοχικών σημείων χωρίς και πάλι να αλλάξει η κατεύθυνση των δρομολογίων.

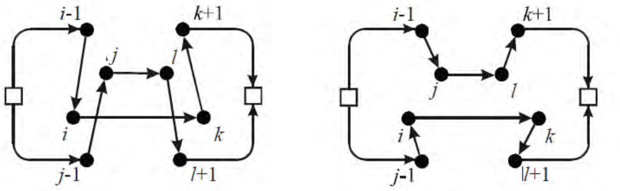


Figure 7. CROSS-exchange. Segments (i, k) on the upper route and (j, l) on the lower route are simultaneously reinserted into the lower and upper routes, respectively. This is performed by replacing edges (i-1, i), (k, k+1), (j-1, j) and (l, l+1) by edges (i-1, j), (l, k+1), (j-1, i) and (k, l+1). Note that the orientation of both routes is preserved.

Σχήμα 2-4[4]: Σχηματική απεικόνιση του τελεστή CROSS – Exchange

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα προσέγγιση είναι εκείνη των Gendreau et al. (1992) οι οποίοι προτείνουν ένα πολύ ευφυή τελεστή προσθήκης σημείων, το Generalized Insertion Procedure (GENI). Η σημαντική διαφοροποίηση του τελεστή αυτού σε σχέση με τους υπόλοιπους που έχουν προταθεί, είναι ότι επιτρέπει την προσθήκη ενός σημείου σε μία διαδρομή χωρίς απαραίτητα να είναι συνεχόμενα τα σημεία ανάμεσα στα οποία τοποθετείται.

Στην ουσία λαμβάνει υπόψη του δύο διαφορετικούς τύπους προσθήκης σημείων. Στον πρώτο τύπο μπορεί να εισαχθεί ένα σημείο ανάμεσα σε δύο μη διαδοχικά και αυτό να επηρεάσει και την φορά των επόμενων σημείων όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

[4] *Πηγή : Braysy and Gendreau (2005)*

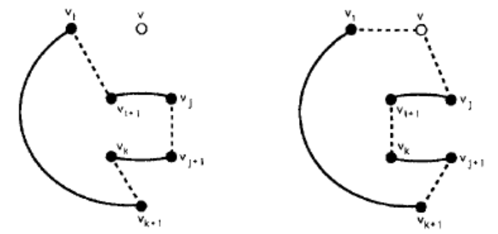


Figure 1. Type I insertion of vertex v between v_i and v_j.

Σχήμα 2-5[5]: Σχηματική απεικόνιση του τελεστή GENI type I

Στην περίπτωση του δεύτερου τύπου μπορεί να εισαχθεί ένα σημείο ανάμεσα σε δύο μη διαδοχικά και να αλλάξει και η σειρά και η φορά των σημείων που ακολουθούν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

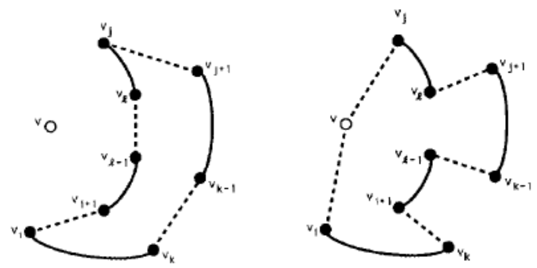


Figure 2. Type II insertion of vertex v between v_i and v_j.

Σχήμα 2-6[6]: Σχηματική απεικόνιση του τελεστή GENI type II

2.1.2.3 Μεθευρετικοί Αλγόριθμοι

Σύμφωνα με τους Braysy and Gendreau [35],[36] οι μεθευριτικοί αλγόριθμοι είναι γενικές διαδικασίες επίλυσης οι οποίες εξετάζουν το υποσύνολο των λύσεων,

[5] *Πηγή : Πηγή : Gendreau et al. (1992)*
[6] *Πηγή : Πηγή : Gendreau et al. (1992)*

ώστε να βρουν καλές λύσεις χρησιμοποιώντας συνδυασμό τεχνικών από τους κατασκευαστικούς και βελτιωτικούς αλγορίθμους.

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι είναι λογικές διαδικασίες χρήσης των τελεστών εξερεύνησης γειτονιάς που καθορίζουν συγκεκριμένες μεθόδους βελτιστοποίησης. Βασικό μέρος της λειτουργίας των μεθευριτικών αλγορίθμων είναι σαφώς οι ευριστικοί τελεστές που παρουσιάστηκαν παραπάνω, αλλά ο κάθε αλγόριθμος εκτελεί ειδικές επιλογές όσον αφορά στην κίνηση στη γειτονιά των αποτελεσμάτων. Πρώτοι το 1994 χρησιμοποίησαν μεθευριτικό αλγόριθμο οι Garcia et al.(1994) οι οποίοι συνδύασαν τον I1 insertion του Solomon ώστε να δημιουργήσουν την αρχική λύση και τους τελεστή 2opt και Or –opt για το βελτιωτικό κομμάτι.

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι συνδέονται άμεσα με την αδυναμία να βρεθεί λύση σε προβλήματα που ανήκουν στην κλάση NP-Complete ,NP-Hard με αναλυτικές ακριβείς μεθόδους. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτοί οι αλγόριθμοι δε μπορούν να δώσουν εγγυήσεις σε σχέση με την απόσταση από τη βέλτιστη λύση. Είναι αδύνατο να είναι γνωστό εάν υπάρχει μια καλύτερη λύση από αυτή που έχει εντοπιστεί ως το σημείο εκτέλεσης, για αυτό πολλές φορές ως κριτήριο τερματισμού αυτών των αλγορίθμων τίθενται χρονικά όρια ή όρια επανάληψης.

Σε αυτή την κατηγορία βρίσκονται οι Γενετικοί Αλγορίθμους(Genetic Algorithm G.A), οι Τυχαιοποιημένης Βελτιστοποίησης (Random optimization R.O), οι Προσομοιωμένης Ανόπτησης (Simulated Annealing - SA) , της αναζήτησης Ταμπού (Tabu Search) καθώς και πληθώρα άλλων αλγορίθμων.

Παράλληλα, πολύ σημαντικό ρόλο στην επιτυχία των αλγορίθμων αυτών παίζει η τυχαιότητα κατά την αναζήτηση λύσεων. Αυτή η ιδιότητα των αλγορίθμων ουσιαστικά δίνει την δυνατότητα πιο διευρυμένης αναζήτησης στο χώρο των εφικτών λύσεων και αποφυγής εγκλωβισμού σε κάποιο τοπικό ακρότατο, γεγονός το οποίο πρέπει να αποφεύγεται.

Οι γενετικοί αλγόριθμοι, όπως γίνεται κατανοητό κι από την ονομασία τους, εμπνεύστηκαν από την βιολογική μεταφορά πληροφορίας από γενιά σε γενιά. Η βασική ιδέα του αλγόριθμου αυτού βρίσκεται στην εξέλιξη της πληροφορίας με τρόπο που να επιβιώσει την καλύτερη.

Μια ακόμα πολύ διαδεδομένη μεθευριτική μέθοδος είναι η Tabu Search η οποία αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία τοπική έρευνας, η οποία εξερευνεί λύσεις συγγενικές με την αρχική έως ότου βρεθεί η επιθυμητή. Η ανάγκη να μειωθεί η πολυπλοκότητα της έρευνας ώθησε τους ερευνητές να ορίσουν κριτήρια που περιορίζουν των αριθμό των περιπτώσεων που πρέπει να εξεταστούν, όπως η μεταξύ τους απόσταση, η γωνία που σχηματίζουν με το κέντρο βάρους μίας διαδρομής κα.

Το τελευταίο διάστημα έχουν προταθεί αρκετοί αλγόριθμοι ALNS (Adaptive Large Scale Neighborhood Search) που αποτελούν επεκτάσεις της διαδεδομένης LNS – heuristic του Shaw. Η διαφορά από την απλή αναζήτηση γειτονιάς είναι ότι επιτρέπει να γίνει χρήση πολλαπλών μεθόδων καταστροφής και επισκευής των δρομολογίων κατά την διάρκεια της διαδικασίας αναζήτησης. Σε κάθε επανάληψη η μέθοδος αφαιρεί (destroy ή αλλιώς remove) ένα κομμάτι από την λύση και έπειτα το επανατοποθετεί (repair ή αλλιώς insert) με διαφορετικό τρόπο με στόχο να βρει μια καλύτερη λύση. Η λύση αύτη γίνεται δεκτή σύμφωνα με κάποιο κριτήριο, συνήθως αυτό της προσομοιωμένης ανόπτησης. Η προσαρμοστικότητα της μεθόδου πηγάζει από το γεγονός ότι η επιλογή των μεθόδων αφαίρεσης και τοποθέτησης των σημείων στην καινούργια λύση επιλέγεται σύμφωνα με κάποιο μηχανισμό πιθανοτήτων. Σε κάθε επανάληψη η πιθανότητα να επιλεγεί μια μέθοδος, εξαρτάται από το πόσο καλά αποτελέσματα επέδειξε στο παρελθόν της.

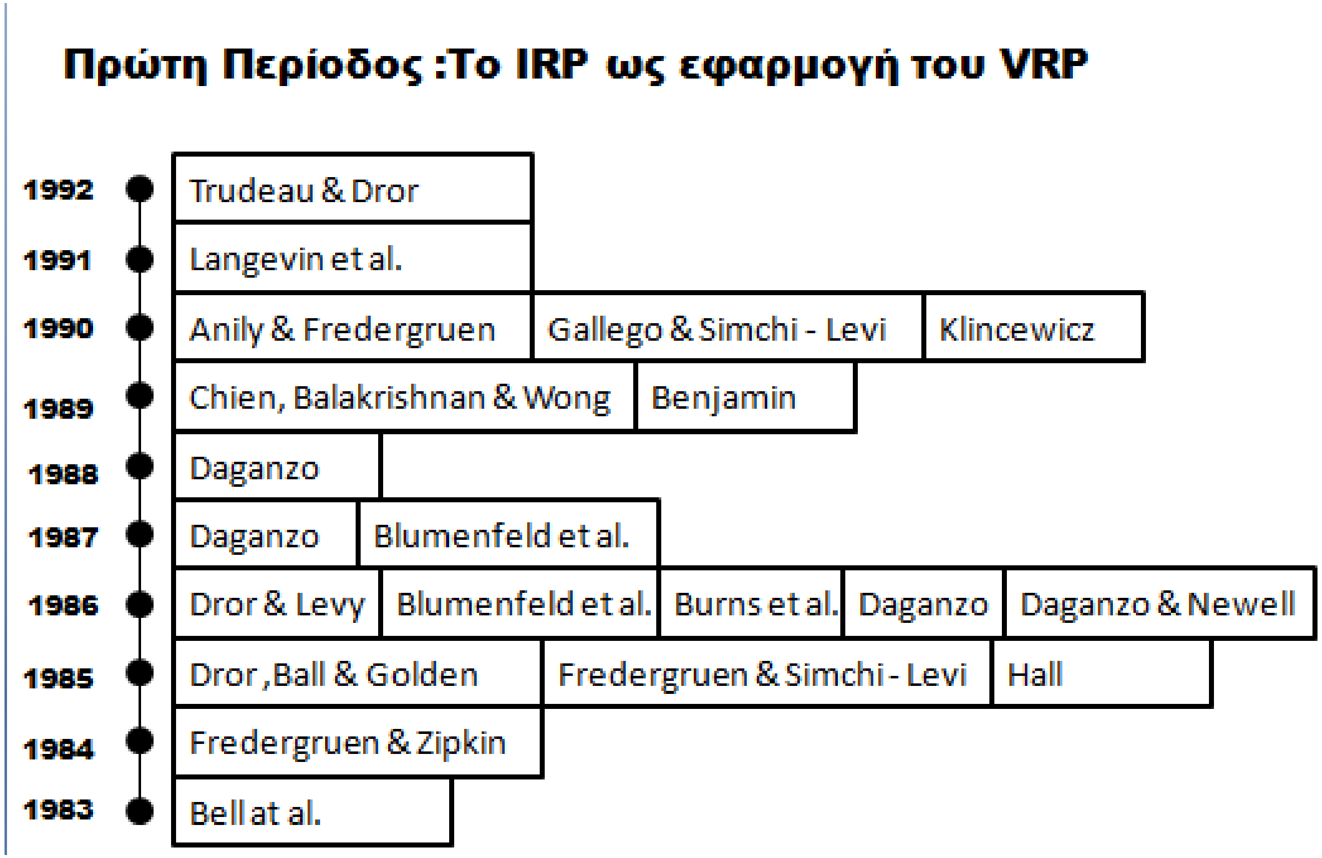
2.2 Το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής και εφοδιασμού

Η ανασκόπηση για το ειδικό πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών δομήθηκε με την οπτική δημιουργίας ενός χάρτη πορείας. Τα κεντρικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα ακόλουθα. Πώς ξεκίνησε το πρόβλημα; Πού βρίσκεται σήμερα και τι μεσολάβησε για να φτάσει στην κατάσταση αυτή; Τέλος με γνώμονα τον ρυθμό εξέλιξη και την φάση στην οποία βρίσκεται η πορεία μπορούν να προβλεφθούν οι τάσεις για περαιτέρω ανάπτυξη και εξέλιξης; Τα ευρήματα χωρίστηκαν σε τρεις περιόδους που κάθε μία από αυτές είχε κάτι σημαντικό να επιδείξει αλλά και επηρεάστηκε από την προηγούμενη. Στην συνέχεια παρατίθενται τα ευρήματα της πρώτης, δεύτερης και τρίτης περιόδου. Έπειτα σε παράλληλο επίπεδο γίνεται μια κάθετη τμηματοποίηση αναλύοντας τα ευρήματα στο φάσμα των ακριβών (τρίτη περίοδο) και ευρετικών προσεγγίσεων αλλά και στο φάσμα των στοχαστικών διαδικασιών. Ενώ τέλος γίνεται ξεχωριστή αναφορά στα πιο πρόσφατα δημοσιεύματα που μπορούν να δώσουν στοιχεία σχετικά με τις αναδυόμενες τάσεις της έρευνας ακαδημαϊκής αλλά και βιομηχανικής.

2.2.1 Πρώτη περίοδος : Το IRP ως εφαρμογή του κλασσικού VRP

Οι Bell et al.[20] εξετάζουν για πρώτη φορά το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείριση αποθηκών και δρομολόγησης για λογαριασμό την εταιρείας παραγωγής καυσίμων “Air Product”. Ο αντικειμενικός στόχος της διαχείρισης είναι η μεγιστοποίηση των κερδών από την διανομή των καυσίμων. Λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστικότητα της ζήτησης εξετάζουν ένα διάστημα τιμών που κυμαίνεται η ζήτηση και έτσι καθορίζουν ένα άνω και κάτω φράγμα για τις ποσότητες που θα διανείμουν ανά πελάτη και ανά περίοδο. Ορίζουν ένα μοντέλου ανάθεσης ακέραιου προγραμματισμού που στοχεύει να καθορίσει τις ποσότητες διανομής, και την ανάθεση των πελατών, των οχημάτων και τις ώρες αναχώρησης στα δρομολόγια.

Οι Federgruen και Zipkin [70], αξιοποιώντας τις ιδέες του προβλήματος της κλασσικής δρομολόγησης των Fisher και Jaikumar [73] προσεγγίζουν αρχικά το IRP ως πρόβλημα μιας ημέρας. Θεωρούν ότι έχουν περιορισμένη χωρητικότητα αποθηκών και στοχαστική απορρόφηση προϊόντων και άρα ζήτηση για μεταφορά. Χρησιμοποιούν ένα μη γραμμικό μοντέλο ακέραιου προγραμματισμού και η αντικειμενική συνάρτηση συμπεριλαμβάνει το κόστος της μεταφοράς της αποθήκευσης και της αδυναμίας πλήρους εφοδιασμού της ζήτησης των πελατών (πέναλτι) . Επειδή οι πελάτες δεν επιλέγεται να εξυπηρετηθούν σε κάθε πλάνο διανομής όρισαν στο μοντέλο τους ένα πλασματικό (dummy) δρομολόγιο όπου αναθέτονται οι πελάτες αυτοί. Η βασική ιδέα τους ήταν ότι δημιουργείται μια αρχική εφικτή λύση και στην συνέχεια επαναληπτικά η λύση βελτιώνεται μεταθέτοντας πελάτες μεταξύ δρομολογίων. Η αξιολόγηση βέβαια των μεταθέσεων αυτών είναι πιο περίπλοκη από ότι στο κλασσικό πρόβλημα VRP αφού συνυπολογίζονται και οι επιπτώσεις στην συνιστώσα του κόστους αποθήκευσης. Για κάθε αλλαγή που γίνεται στην ανάθεση του πελάτη στο δρομολόγιο, στην συνέχεια απαιτείται ο επαναπροσδιορισμός των τιμών των αποθηκών και οι διαδρομές των δρομολογίων.



Σχήμα 2-7: Η πρώτη περίοδος : Εφαρμογή του κλασσικού προβλήματος δρομολόγησης

Οι Dror, Ball and Golden [67] αντιμετώπισαν το πρόβλημα θέτοντας τις ακόλουθες δύο απλουστεύσεις (1) την πολιτική του Order – Up – to level στην οποία όταν ένας πελάτης εξυπηρετείται λαμβάνοντας την ποσότητα εκείνη που γεμίζει πλήρως την αποθήκη του, (2) οι πελάτες εξυπηρετούνται μόνο μια φορά κατά την διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Χώριζαν το σύνολο των πελατών σε δυο υποσύνολα σε εκείνους που θα πρέπει να εξυπηρετηθούν και σε εκείνους που θα μπορούν να εξυπηρετηθούν. Το πρόβλημα λυνόταν σε δυο φάσεις. Για τους μεν πρώτους που θα πρέπει να εξυπηρετηθούν υπολόγιζαν το κόστος να τους εξυπηρετήσουν το νωρίτερο δυνατό. Για τους δε πελάτες που μπορούν να εξυπηρετηθούν υπολογίζουν την διαφορά στο κόστος για την περίπτωση που θα εξυπηρετηθούν ή όχι. Στην συνέχεια ανάλογα με τα κόστη που προκύπτουν αναθέτουν τους πελάτες στις χρονικές περιόδους και στην επόμενη φάση επιλύουν το πρόβλημα της δρομολόγησης για την κάθε περίοδο ξεχωριστά. Επίσης εξέτασαν δυο εναλλακτικές, την επίλυση των VRP για κάθε χρονική περίοδο που προέκυπτε, αλλά και εναλλακτικά την ανάθεση των πελατών στις χρονικές περιόδους αλλά και στα οχήματα με αποτέλεσμα τελικά την επίλυση ενός TSP για κάθε όχημα της κάθε χρονικής περιόδου. Στο άρθρο τους οι Dror και Levy [66]υιοθέτησαν την προγενέστερη ευρετική μέθοδο διανομής για να λύσουν το εβδομαδιαίο πρόβλημα. Η βραχυπρόθεσμη λύση που προτείνουν βασίζεται στην ανάθεση πελατών στις λεγόμενες βέλτιστες περιόδους εφοδιασμού. Πρότειναν έναν ευρετικό αλγόριθμο ανταλλαγής κορυφών για την επίλυση του εβδομαδιαίου IRP, όπου δημιουργούν μια αρχική λύση δρομολόγησης κρατώντας διαθέσιμό χώρο στο όχημα αλλά και στις αποθήκες. Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουν ότι βελτιώνεται η λύση σε σχέση με την αρχική τους προσέγγιση στο Dror, Ball and Golden [67] . Η ομάδα αυτή θέτει τις βάσεις για την ανάπτυξη του πρώτο αλγόριθμου σύγκρισης για το IRP ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ένας βελτιωτικός αλγόριθμος.

Οι Chien, Balakrishnan, and Wong [44] εξακολουθούν να προσεγγίζουν το πρόβλημα ως ημερήσιες διανομές, όμως εισαγάγουν την έννοια της αναδρομικής σχέσης στα επίπεδα τιμών των αποθηκών τους. Μεταφέροντας πληροφορία από τη μια μέρα στην άλλη η προσέγγιση προσομοιώνει ένα σύστημα αποφάσεων χρονικού ορίζοντα πολλών ημερών. Υποθέτοντας ότι η μέγιστη ποσότητα κατανάλωσης κάθε πελάτη είναι γνώστη, μπορεί να υπολογιστούν τα έσοδα ανά προϊόν άλλα και το πέναλτι κόστος στην περίπτωσης αδυναμίας εκπλήρωσης της ζήτησης. Η ευρετική τους διαδικασία προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό ημερήσιο κέρδος. Μόλις βρεθεί η λύση για μια μέρα, στην συνέχεια τα αποτελέσματά της χρησιμοποιούνται για να τροποποιηθούν τα δυνητικά έσοδα της επόμενης μέρας. Ζήτηση που δεν μπόρεσε να εκπληρωθεί την μια μέρα μετατίθεται στην επόμενη και αυτό αντανακλάται σε αυξημένα έσοδα την επόμενη. Χρησιμοποιώντας ένα ακέραιο μοντέλο γίνεται η ανάθεση των αποθηκών στους πελάτες , των πελατών στα οχήματα και στην συνέχεια στα δρομολόγια. Και αυτοί χρησιμοποιούν μέθοδο Lagrange για την επίλυση του ακέραιου μοντέλου.

Από την άλλη οι Anily και Federgruen [8] το 1990 πρότειναν τον πρώτο αλγόριθμο ομαδοποίησης για προβλήματα IRP. Αντικειμενικός στόχος της προσέγγισης είναι να ελαχιστοποιηθεί μακροπρόθεσμα το κόστος της μεταφοράς και αποθήκευσης δημιουργώντας μοτίβα δρομολογίων μέσω της διαμέρισης της περιοχής και της δημιουργίας ομάδων πελατών και σταθερών δρομολογίων εξυπηρέτησης. Ένας πελάτης μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από μια περιοχές όμως το ποσοστό της ζήτησης του είναι μονοσήμαντα ορισμένο ανά περιοχή. Όταν ένας πελάτης πρόκειται να εξυπηρετηθεί κάποια χρονική περίοδο, όλοι οι πελάτες της περιοχή εξυπηρετούνται. Για να αξιολογούν την αποδοτικότητα των προεπιλεγμένων δρομολογίων έχουν ορίσει ένα κάτω φράγμα για μακροπρόθεσμο μέσο κόστος του. Όταν αυτό δεν ικανοποιείται συστηματικά το δρομολόγιο θεωρείται ότι χρειάζεται επανασχεδιασμό.

Οι Gallego & Simchi – Levi [75] την ίδια περίοδο, ακολουθώντας την λογική αυτή, εξετάζουν την αποδοτικότητα των απευθείας συνδέσεων σε μακροχρόνια βάση. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι απευθείας συνδέσεις στο 94% των περιπτώσεων είναι πιο αποδοτικές σε σχέση με τις υπόλοιπες στρατηγικές, όταν η ελάχιστη ποσότητα παραγγελίας είναι τουλάχιστον το 71% της χωρητικότητας του οχήματος διανομής. Αυτό αποδεικνύει, ότι οι απευθείας συνδέσεις δεν ενδείκνυνται, όταν πολλοί πελάτες επιθυμούν μικρές ποσότητες, και πιστοποιεί την σημαντικότητα των σύνθετων πολιτικών διανομής.

Περίπου μια δεκαπενταετία από την πρώτη δημοσίευση των Bell et al.[20] , οι Baita et al. [13] μέλη της ομάδα επιχειρησιακής έρευνας του πανεπιστημίου της Τεργέστης δημοσιεύουν την πρώτη βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης. Εκεί χρησιμοποιούν τον όρο “Dynamic Routing & Inventory” για να αναφερθούν στην κλάση των προβλημάτων αυτών όπου εξετάζονται ταυτόχρονα η δρομολόγηση και οι αποφάσεις της διαχείρισης των αποθηκών σε δυναμικό περιβάλλον. Έτσι για πρώτη φορά κατηγοριοποιούν τις έως τότε προσεγγίσεις σε δύο κλάσεις. Στην κλάση των προβλημάτων όπου οι μεταβλητές απόφασης αντιπροσωπεύουν συχνότητα εξυπηρέτησης μεταξύ αποστολών, προσεγγίσεις δηλαδή ανεπτυγμένες στο πεδίο των συχνοτήτων .Ενώ η δεύτερη κλάση αφορά τις προσεγγίσεις ανεπτυγμένες στο πεδίο του χρόνου όπου αφορά μοντέλα σε διακριτό χρόνο με στόχο τον προσδιορισμό των ποσοτήτων των αποστολών και των πλάνων δρομολόγησης σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα.

Στην πρώτη κλάση κατηγοριοποιούνται οι προσεγγίσεις της ομάδας των ερευνητών του πανεπιστημίου του Berkley στην οποία πρωτοστατεί ο καθηγητής Daganzo [62].

Οι προσεγγίσεις στο πεδίο των συχνοτήτων κατηγοριοποιούνται στην συσωρευτική προσέγγιση "Aggregate approaches" και στις πολιτικές σταθερής τμηματοποίησης "Fixed – Partition Policies".

Η συσωρευτική προσέγγιση είναι ιεραρχική μέθοδος. Στηρίζεται σε αναλυτικά οικονομετρικά μοντέλα με στόχο τον εντοπισμό ποιοτικών χαρακτηριστικών χρήσιμων στον καθορισμό βέλτιστων πρακτικών. Ακολουθούν την ανάλυση δύο φάσεων, όπου αρχικά καθορίζονται οι συχνότητες των αποστολών και μετέπειτα τα δρομολόγια. Στην περίπτωση που στην δρομολόγηση συμμετέχουν περισσότεροι πελάτες, η δεύτερη φάση τμηματοποιείται και πάλι. Ακολουθείται η μέθοδο 'Cluster First – Route Second' ,όταν ένα όχημα πρέπει να εξυπηρετήσει ένα σύνολο πελατών. Ενώ αντίθετα, η μέθοδος 'Route First – Cluster Second', όταν κάθε όχημα μεταβαίνει σε ένα ή λίγους πελάτες. Κύριος στόχος της προσέγγισης είναι η ανάλυση του κόστους των εναλλακτικών πολιτικών εξυπηρέτησης. Αποτέλεσε την βάση για την διατύπωση της έννοιας της οικονομικής ποσότητας παραγγελίας "Economic Quantity Order" (EOQ) και την ανάπτυξη του μοντέλου αυτού αλλά και των επεκτάσεών του.

Στην κατηγορία αυτή συγκαταλέγονται οι εργασίες των Blumenfeld et al.[32] ,[31], Burns et al. [37], Daganzo & Newell [59],[60], [61] Daganzo [62],[56],[57], Klincewicz [86] Campbell [41] , Popken [103], Hall [78] , Benjamin [22] και Ernst & Pyke [42]. Εκτενής βιβλιογραφία της εποχής εκείνης για τα συσωρευτικά μοντέλα θεωρήθηκε η εργασία των Langevin et al. [87].

Η προσέγγιση των πολιτικών σταθερής τμηματοποίησης FPP επιλύει το πρόβλημα δημιουργώντας εκ των προτέρων ομάδες πελατών ανά περιοχή. Θεωρείται η προσέγγιση στην οποία εισάγεται η έννοια της ομαδοποίησης. Αν θεωρηθεί Φ το πλάνο των FPP υποόμάδων, ορίζεται ως βέλτιστο όταν λαμβάνοντας υπόψη του την χωρητικότητα των οχημάτων, ορίζει περιοχές οι οποίες ελαχιστοποιούν το μέσο κόστος της αποθήκευσης και της μεταφοράς συνολικά. Ο εντοπισμός της βέλτιστης πολιτικής Φ αποτελεί πρόβλημα υψηλής υπολογιστικής πολυπλοκότητας (NP hard) αφού εσωκλείει τον εντοπισμό των Hamiltonial μονοπατιών. Παρόλα αυτά με κάποιος παραδοχές, μετατρέπεται σε πρόβλημα συνδυασμού της EOQ των υπό - περιοχών με πρόβλημα ελάχιστου μονοπατιού TSP μεταξύ αυτών. Εργασίες που συγκαταλέγονται στην προσέγγιση αυτή είναι εκείνες των Anili & Federgruen [8] , Bramel & Simchi – Levi [34] , Federgruen & Simchi – Levi [71].

Η δεύτερη προσέγγιση που αναπτύσσεται στο πεδίο του χρόνου διαφοροποιείται από την πρώτη κυρίως επειδή συσχετίζει το επίπεδο των αποθηκών από την μια χρονική στιγμή στην άλλη. Δηλαδή εισαγάγει την αναδρομική σχέση στους περιορισμούς που διέπουν το πρόβλημα. Σημαντική δημοσίευση της προσέγγισης αυτής είναι εκείνη των Federgruen και Zipkin [70]. Χρησιμοποιώντας ένα μη γραμμικό μοντέλο μεικτού προγραμματισμού λύνουν το πρόβλημα κάνοντας χρήση της “Bender Decomposition” μεθόδου. Ανάλογο πρόβλημα επιλύουν οι Federgruen et al.[72], όπου εξετάζουν δυο επίπεδα ποιότητας. Στην περίπτωση αυτή τα κόστη συσχετίζονται με τα διαφορετικά επίπεδα ποιότητας αλλά όχι οι περιορισμοί. Προτείνεται η επίλυση του προβλήματος με ακριβή αλλά και ευρετική μέθοδο για ένα σύνολο 75 πελατών. Σειρά δημοσιεύσεων της προσέγγισης αυτής ακολουθούν με τους Dror, Ball , Levy, Trudeau [66],[67], [68], [113]. Σε κάθε κύκλο διανομής εξυπηρετούνται μόνο εκείνοι οι πελάτες, που το επίπεδο των αποθηκών τους φτάνει μια προκαθορισμένη τιμή, που ορίζει το επίπεδο ασφαλείας της. Ένα προϊόν πρέπει να διανεμηθεί από μια κεντρική αποθήκη σε ένα πλήθος πελατών . Λαμβάνοντας υπόψη τους, στόλο ιδίων οχημάτων προκαθορισμένης χωρητικότητας, πρότειναν ευρετικές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος. Τα μοντέλα που ανέπτυξαν δομούνται ως μοντέλα μεγιστοποίησης της επιχειρησιακής αποδοτικότητας. Η προσέγγιση των μοντέλων, που αναπτύχθηκαν στο πεδίο του χρόνου είναι προφανές ότι είναι καταλληλότερη στην περίπτωση που οι συνθήκες διαφέρουν σημαντικά με την πάροδο του χρόνου. Ωστόσο η ευελιξία που παρέχεται με την προσέγγιση αυτή ισοσκελίζεται από την ανάγκη υπολογισμού διαφορετικής λύσης για κάθε χρονικό διάστημα.

2.2.2 Δεύτερη περίοδος : Το IRP στο φάσμα του πεδίου των διακριτών συχνοτήτων

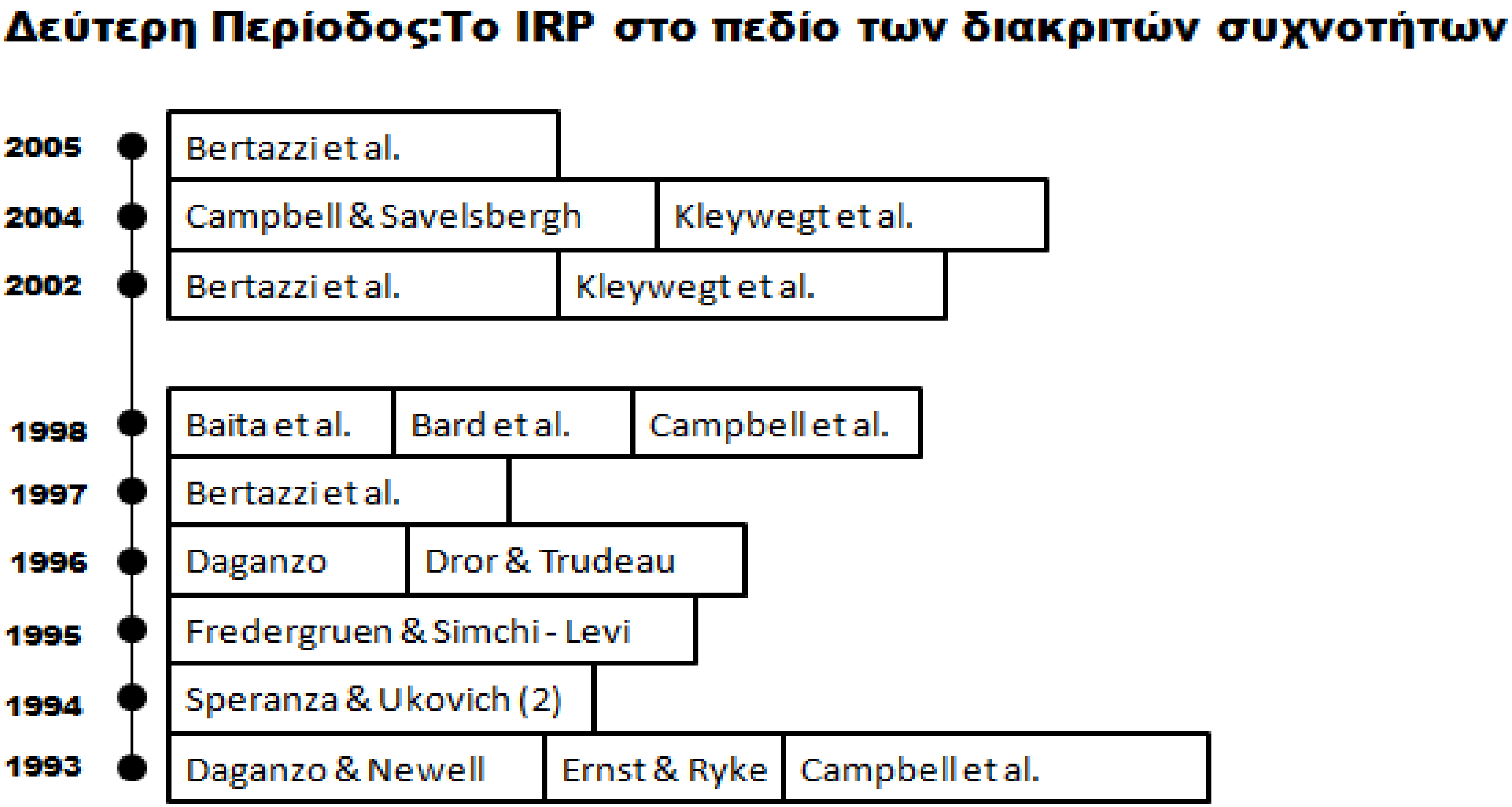
Η ομάδα των μελετητών του πανεπιστημίου της Τεργέστης, που διεξήγαγε αυτή την βιβλιογραφική έρευνα και θέλησε να γεφυρώσει τις δύο προσεγγίσεις, διαπίστωσε ότι ένα σημαντικό μειονέκτημα των προσεγγίσεων που βασίζονται στο EOQ μοντέλο είναι το γεγονός ότι προκύπτουν τιμές συχνοτήτων όχι ακέραιες . Πολύ νωρίς ο Hall [78] πρότεινε την επιλογή του κοντινότερου ακέραιου αριθμό. Όμως οι Speranza & Ukovich [112],[112] μέλη της ομάδας αυτής, στην μελέτη τους διαπιστώνουν με ένα απλό παράδειγμα, ότι η παραδοχή αυτή αυξάνει το συνολικό κόστος περίπου 20%. Διατυπώνουν λοιπόν μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση, εκείνη όπου το σύνολο των εφικτών συχνοτήτων μπορούν να ανήκουν μόνο στο σύνολο των διακριτών αριθμών, δηλαδή στην περίπτωση που οι αποστολές μπορούν να εκτελούνται κάθε Τ βήματα στη βάση ενός χρονικού ορίζοντα . Η προσέγγιση της συχνότητας των αποστολών σε διακριτό χρόνο προτάθηκε από Speranza & Ukovich

[111] για διαφορετικά προϊόντα από ένα σημεία σε άλλο (one-to-one) χρησιμοποιώντας φορτηγά δεδομένης χωρητικότητας.

Στην εργασία τους αυτή εξετάζουν μια επέκταση του κλασσικού προβλήματος όπου εισαγάγουν την συνιστώσα των πολλών διαφορετικών προϊόντων που μπορεί να απαιτείται να διανείμουν. Ο απώτερος στόχος της εργασίας αυτής ήταν η διερεύνηση της βέλτιστης πολιτικής αποστολών. Δηλαδή, ο εντοπισμός των κανόνων που διέπουν το σύστημα των αποφάσεων και καθορίζουν το πότε πρέπει να γίνονται οι αποστολές και ποιές ποσότητες πρέπει να σταλούν για ένα σενάριο πολλών περιόδων. Ανέπτυξαν ένα μεικτό ακέραιο γραμμικό μοντέλο για να κάνουν ανάθεση των προϊόντων στις συχνότητες, το οποίο παρουσίασε ικανοποιητική υπολογιστική απόδοση για την εποχή.

Διερευνώντας εναλλακτικές στρατηγικές αποστολών, συμπέραναν ότι, όταν επιτρέπουν την αποστολή των προϊόντων να διαμερίζεται σε διαφορετικές συχνότητες αποστολών τα συχνότερα δρομολόγια τείνουν να γεμίζουν συστηματικά. Το οποίο είναι μια απόδειξη για την δυναμική που παρουσιάζει η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας – logistics.

Οι Bertazzi et al.[8] επεκτείνονται την δουλειά των Speranza & Ukovich [111] εξετάζουν πολλούς τελικούς προορισμούς (one-to-many). Η ιδέα της τμηματοποίησης των αποστολών, όταν είναι εφικτό, σε δρομολόγια διαφορετικών συχνοτήτων αποδεικνύουν ότι η προσέγγιση αυτή προσδίδει ευελιξία στην δημιουργία των δρομολογίων και αισθητή μείωση στο μεταφορικό κόστος. Φυσικά η ευελιξία προσδίδει στο σύστημα υπολογιστική πολυπλοκότητα και για τον λόγο αυτό θέτονται προϋποθέσεις στον μοντέλο που προτείνουν. Για λόγους απλούστευσης, τα περισσότερα μοντέλα που αφορούν περισσότερα προϊόντα, υποθέτουν ότι κάθε πελάτης ζητάει ένα είδος προϊόντος.



Σχήμα 2-8: Η δεύτερη περίοδος : Το IRP στο πεδίο των διακριτών συχνοτήτων

Σχετικά με την τμηματοποίηση των αποστολών εισάγεται ένας νέος περιορισμός στο μοντέλο, που να εξασφαλίζει την συνολική ποσότητα της ζήτησης των πελατών. Στην εργασία αυτή οι Bertazzi et al.[8] προτείνουν ένα σύνολο από ευρετικές διαδικασίες αποσύνθεσης του προβλήματος. Σε πρώτη φάση αρχικοποιούν την λύση από τις απευθείας συνδέσεις, στην συνέχεια, εφαρμόζοντας έναν αλγόριθμο τοπικής αναζήτησης, βελτιώνουν την λύση. Στην δεύτερη φάση, για τους πελάτες που επισκέπτονται με την ίδια συχνότητα, εξετάζεται η προοπτική της ενοποίησης των δρομολογίων τους. Στην συνέχεια εξετάζεται η δυνατότητα επιπλέον μείωσης του κόστους, τροποποιώντας τις συχνότητες . Τέλος οι πελάτες με την ίδια συχνότητα επανεξετάζονται και τα δρομολόγια επαναπροσδιορίζονται.

Η πολιτική του **“Order – Up – to Level”** επανεξετάζεται από τους Bertazzi et al. [25], μετά την πρώτη εμφάνιση της στους Dror, Ball and Golden [67], για την γενίκευση του χρονικού ορίζοντα και των διαφορετικών προϊόντων. Ένας κεντρικός διανομέας τροφοδοτεί ένα σύνολο πελατών, για ένα πλήθος προϊόντων. Το πλήθος των διαθέσιμων προϊόντων στον κεντρικό διαχειριστή θεωρείται γνωστό εκ των προτέρων ενώ μπορεί να μεταβάλλεται κατά την διάρκεια του χρόνου. Η πολιτική του **“Order – Up – to Level”** εξασφαλίζει ότι, όταν ένας πελάτης εξυπηρετηθεί, η ποσότητα που θα του παραδοθεί είναι τόση όση απαιτείται για να γεμίσει πλήρως η αποθήκη του. Στο μοντέλο τους εσωκλείεται το κόστος της αποθήκευσης στις αποθήκες των πελατών, αλλά και του κεντρικού διανομέα και έτσι η αντικειμενική συνάρτηση τροποποιείται καταλλήλως. Οι Bertazzi et al. [25] προτείνουν μια ευρετική διαδικασία δύο φάσεων, όπου στην πρώτη φάση ένας κατασκευαστικός ευρετικός αλγόριθμος εισάγει τους πελάτες με την ίδια χρονική απαίτηση στο ίδιο δρομολόγιο, λαμβάνοντας υπόψη το ελάχιστο συνολικό κόστος. Έτσι ο πελάτης με το χαμηλότερο συνολικό κόστος εισέρχεται πρώτα. Στο επόμενο βήμα, η ευρετική διαδικασία μεταθέτει τους πελάτες στα δρομολόγια εάν αυτό βελτιώνει το κόστος των πλάνων συνολικά. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται ανά προϊόν και ανά όχημα. Η διαδικασία για μεγαλύτερο πλήθος προϊόντων αντιμετωπίζεται με την μετατροπή της κορυφής από μια υπέρ – κορυφή (hyper-nodes), που περιέχει ένα σύνολο κορυφών, μια για κάθε προϊόν του πελάτη. Έτσι, το συνολικό δίκτυο που αναπαριστά το πρόβλημα έχει συνδεδεμένες τις κορυφές διαφορετικών πελατών και κοινού προϊόντος, ενώ οι κορυφές που αντιπροσωπεύουν τον ίδιο πελάτη και διαφορετικά προϊόντα είναι ασύνδετες.

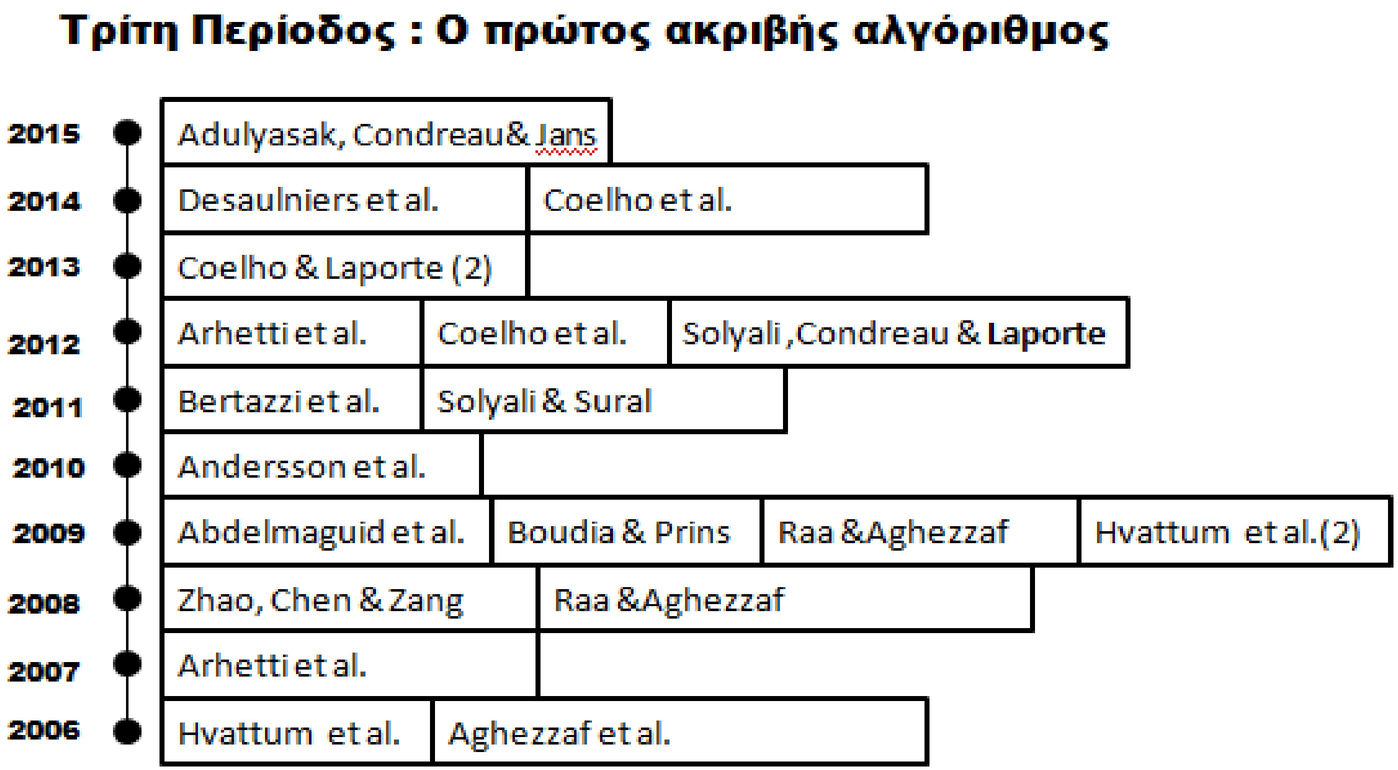
Οι Betrazzi et al. [28] επεκτείνονται στο “Production Routing Problem”, προσθέτοντας τον παράγοντα απόφασης της παραγωγής των προϊόντων – σε ένα διευρυμένο σύστημα διαχείρισης VMI. Δυο εναλλακτικές πολιτικές αξιολογούνται, η “Order –Up – to Level” και η “Fill – Fill – Dump ” πολιτική. Η διαφοροποίηση της μιας από την άλλη είναι, ότι στην δεύτερη επιτρέπεται η ποσότητα που μεταφέρεται στον τελευταίο πελάτη στο δρομολόγιο, να ορίζεται ως η ελάχιστη τιμή μεταξύ της ποσότητας του υπολοίπου της χωρητικότητας του οχήματος και της ποσότητας που απαιτείται για να γεμίσει πλήρως η αποθήκη. Προτείνουν δυο διαφορετικές ευρετικές διαδικασίες αποσύνθεσης του προβλήματος. Και στις δύο επιλύουν πρώτα το υπό - πρόβλημα της διανομής και έπειτα της παραγωγής. Το πρόβλημα της διανομής επιλύεται εφαρμόζοντας ένα κατασκευαστικό αλγόριθμο όπου σε κάθε επανάληψη ένας πελάτης εισέρχεται στην λύση και για κάθε πελάτη χτίζεται ένα δίκτυο έτσι ώστε να αναπαρίσταται η αύξηση στα κόστη από την εισαγωγή των πελατών. Στην συνέχεια λύνοντας ένα ελάχιστο μονοπάτι για το δίκτυο εντοπίζεται σε πιο σημείο η εισαγωγή παράγει την ελάχιστη αύξηση. Η λύση στην συνέχεια βελτιώνεται προσπαθώντας να γίνει συντονισμός των δύο υπό – προβλημάτων. Σημαντικά συμπεράσματα της εργασίας αυτής ήταν αρχικά, η συστηματική μείωση του μέσου κόστους της πολιτικής "Fill – Fill – Dump " έναντι της "Order –Up – to Level" . Μετέπειτα επιβεβαιώνεται η υπεροχή του επιχειρηματικού μοντέλου VMI σε σχέση με το RMI, όπου δεν γίνεται συντονισμός των αποφάσεων και ο κάθε πελάτης αποφασίζει ανεξάρτητα την πολιτική του εφοδιασμού.

Στην βιβλιογραφική ανασκόπηση των Baita et al. [13] η προσέγγιση της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής των Speranza & Ukovich [111] παρουσιάζεται ως ξεχωριστής υποκατηγορίας της προσέγγισης των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στο πεδίο των συχνοτήτων. Την αναφέρουν ως την προσέγγιση των αποφάσεων στο πεδίο των διακριτών συχνοτήτων, και αποτελεί εφαλτήριο των μετέπειτα μεθόδων που ανέπτυξε η ομάδα του πανεπιστημίου της Τεργέστης και της Μπρέσιας. Έτσι ξεκινάει ένα νέο κεφάλαιο στην μοντελοποίηση των προβλημάτων IRP. Ο λόγος για τον οποίο θεωρήθηκε σημαντική για την εποχή εκείνη η ανασκόπηση των Baita et al.[13] είναι ακριβώς γιατί θέλησε να γεφυρώσουν τα ευρήματα των δύο προσεγγίσεων, αλλά και να ανοίξει το δρόμο των δικών τους προσεγγίσεων στο πεδίο των διακριτών συχνοτήτων που κατά τη γνώμη του ερευνητή συνδυάζει τις καλές πρακτικές των δυο προσεγγίσεων .

2.2.3 Τρίτη περίοδος : Ο πρώτος ακριβής αλγόριθμος IRP

Το 2007 στην εργασία των Arhetti et al.[11] προτάθηκε ο πρώτος ακριβής αλγόριθμος επίλυσης της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής. Ο αλγόριθμος αυτός ακολουθούσε την μέθοδο κλάδου και αποκοπής (Branch & Cut) όπου οι περιορισμοί της διασφάλισης των μη κυκλικών διαδρομών (Sub Tour Elimination Constrains) προστίθενται δυναμικά στην διαδικασία καθώς βρίσκεται ότι παραβιάζονται. Για τον εντοπισμό και την δημιουργία των περιορισμών χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο διαχωρισμού των Padberg – Rinaldi [100].Επιλύεται για την πολιτική δρομολόγησης OU και ML και την περίπτωση της διανομής κάνοντας χρήση ενός οχήματος. Επίσης, στα πλαίσια της εργασίας αυτής, προτάθηκαν νέοι έγκυροι περιορισμοί (valid inequalities) οι οποίοι ενδυνάμωσαν την μαθηματική τεκμηρίωση του προβλήματος και βοήθησαν στην πιο άμεση σύγκλιση της μεθόδου στην βέλτιστη λύση. Ο αλγοριθμός τους μπόρεσε να λύσει το πρόβλημα ενός δικτύου πελατών έως και 50 πελάτες για τρεις χρονικές περιόδους και έως και 30 πελάτες για έξι χρονικές περιόδους. Στην εργασία αυτή συμμετέχει ο καθηγητής Laporte, ένας από τους πιο διακεκριμένους επιστήμονες στο πρόβλημα της δρομολόγησης στην σύγχρονη εποχή. Με την συνεργασία αυτή των πανεπιστημίων του Μόντρεαλ και της Μπρέσιας σηματοδοτήθηκε μια νέα εποχή για την επίλυση των προβλημάτων της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και δρομολόγησης με ακριβείς μεθόδους.

Οι Solyali & Sural [109] βελτιώνουν περαιτέρω την προσέγγιση των Arhetti et al [11] χρησιμοποιώντας αυστηρή ή αλλιώς ισχυρή μορφοποίηση (Strong Formulation) του μοντέλου, όπου ο εφοδιασμός των πελατών τεκμηριώνεται με ένα δίκτυο ελάχιστων μονοπατιών, αλλά και με την χρήση μιας ευρετικής διαδικασίας για την επίτευξη του υπολογισμού του αρχικού άνω ορίου στην διαδικασία του κλάδου και αποκοπής. Με την προσέγγιση αυτή, χρησιμοποιώντας την πολιτική OU, έλυσαν το πρόβλημα για ένα δίκτυο 15 πελατών για χρονικό διάστημα 12 περιόδων, 25 πελατών για διάστημα 9 περιόδων και 60 πελατών για χρονικό ορίζοντα 3 περιόδων.



Σχήμα 2-9: Τρίτη περίοδος: Ο πρώτος ακριβής αλγόριθμος

Μετά από την σημαντικότατη για την εξέλιξη των ακριβών μεθόδων εργασία των Arhetti et al.[11] ο καθηγητής Laporte αναθέτει σε δύο διδακτορικούς φοιτητές του, την περαιτέρω έρευνα της συνδυαστικής διαχείρισης του εφοδιασμού και διανομής, στου Coelho και Adulyazak. Ο μεν Coelho εξετάζει έννοιες όπως η ευελιξία και η συνέπεια για την επίλυση του IRP.Η ιδέα της μεταφόρτωσης εισάγεται για πρώτη φορά στο IRP αλλά και άλλα χαρακτηριστικά συνέπειας του συστήματος διαχείρισης VMI. O δε Adulyazak [3] εξετάζει την επέκταση του IRP,το PRP, συμπεριλαμβάνοντας και το ζήτημα της παραγωγής στην συνδυαστική διαχείριση εφοδιασμού και διανομής.

Οι Coelho & Laporte [52] επεκτείνουν την μέθοδο των Arhetti et al. [11] χρησιμοποιώντας στόλο οχημάτων για την επίλυση του προβλήματος αυξάνοντας έτσι την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Προτείνουν ένα ενοποιημένο πλαίσιο μαθηματικής τεκμηρίωσης του προβλήματος που μπορεί να δώσει απαντήσεις στις επεκτάσεις του κλασσικού προβλήματος, για ομογενή αλλά και ετερογενή στόλο οχημάτων αλλά και για έξι προκαθορισμένα χαρακτηριστικά συνέπειας του συστήματος διαχείρισης. Συνοπτικά τα έξι χαρακτηριστικά που έχουν συμπεριλάβει είναι :

1. *Συνέπεια στην ποσότητα διανομής*. Ο πελάτης είναι σε θέση να ορίσει ένα διάστημα τιμών για τις επιθυμητές ποσότητας διανομής.
2. *Ποσοστό φόρτωσης των οχημάτων* . Ένα όχημα επιτρέπεται να δρομολογηθεί όταν το ποσοστό της χρησιμότητας του υπερβαίνει κάποιο προκαθορισμένο κατώτερο όριο.

3. *Η πολιτική του "Order – Up – to level"* στην οποία όταν ένας πελάτης εξυπηρετείται, η ποσότητα που λαμβάνει είναι τέτοια, που η αποθήκη φτάνει το όριο της αποθηκευτικής της ικανότητας.
4. *Συνέπεια σχετιζόμενη με τον οδηγό*. Αυτό εξασφαλίζει την ανάθεση του κάθε πελάτη σε έναν οδηγό για το σύνολο του ορίζοντα διανομής.
5. *Χαλάρωση* του προηγούμενου χαρακτηριστικού, στην οποία κάποιοι πελάτες μπορούν να εξυπηρετηθούν και από περισσότερους οδηγούς.
6. *Διαστήματα προσπελασιμότητας,* όπου ορίζεται ένα ελάχιστο διάστημα ανάμεσα σε συνεχόμενες διανομές.

Για την περίπτωση του ενός οχήματος επιλύουν ένα δίκτυο 200 πελατών και έως και 6 χρονικές περιόδους. Βέλτιστες λύσεις προέκυψαν και για περιπτώσεις δικτύου 45 πελατών, σε χρονικό ορίζοντα τριών περιόδων και στόλο τριών διαφορετικών οχημάτων. Επίσης οι Coelho & Laporte [51] επέκτειναν τον μοντέλο τους λαμβάνοντας υπόψη τους και την περίπτωση που έχουμε και διαφορετικά προϊόντα. Στην περίπτωση αυτή οι αποθήκες αλλά και τα οχήματα διανομής έχουν την δυνατότητα να μεταφέρουν ταυτόχρονα διαφορετικά προϊόντα. Η διάσταση του προβλήματος που μπόρεσαν να λύσουν με την ακριβή αύτη διαδικασία είναι για πέντε διαφορετικά προϊόντα, 5 διαφορετικά οχήματα, χρονικό ορίζοντα τριών περιόδων και δίκτυο 30 πελατών.

Ο Coelho [49] ,στο διδακτορικό του εισαγάγει την έννοια της μεταφόρτωσης στο πλαίσιο του γενικευμένου προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών. Η προσέγγισης αυτή δίνει την δυνατότητα σε ένα διαχειριστή να επιλέξει να μετακινήσει, μεγάλες ποσότητες προϊόντων σε αποθήκες πελατών του με χαμηλό κόστος αποθήκευσης, που συνάμα είναι σε μικρή απόσταση από ένα δίκτυο αποθηκών υψηλού κόστους αποθήκευσης.

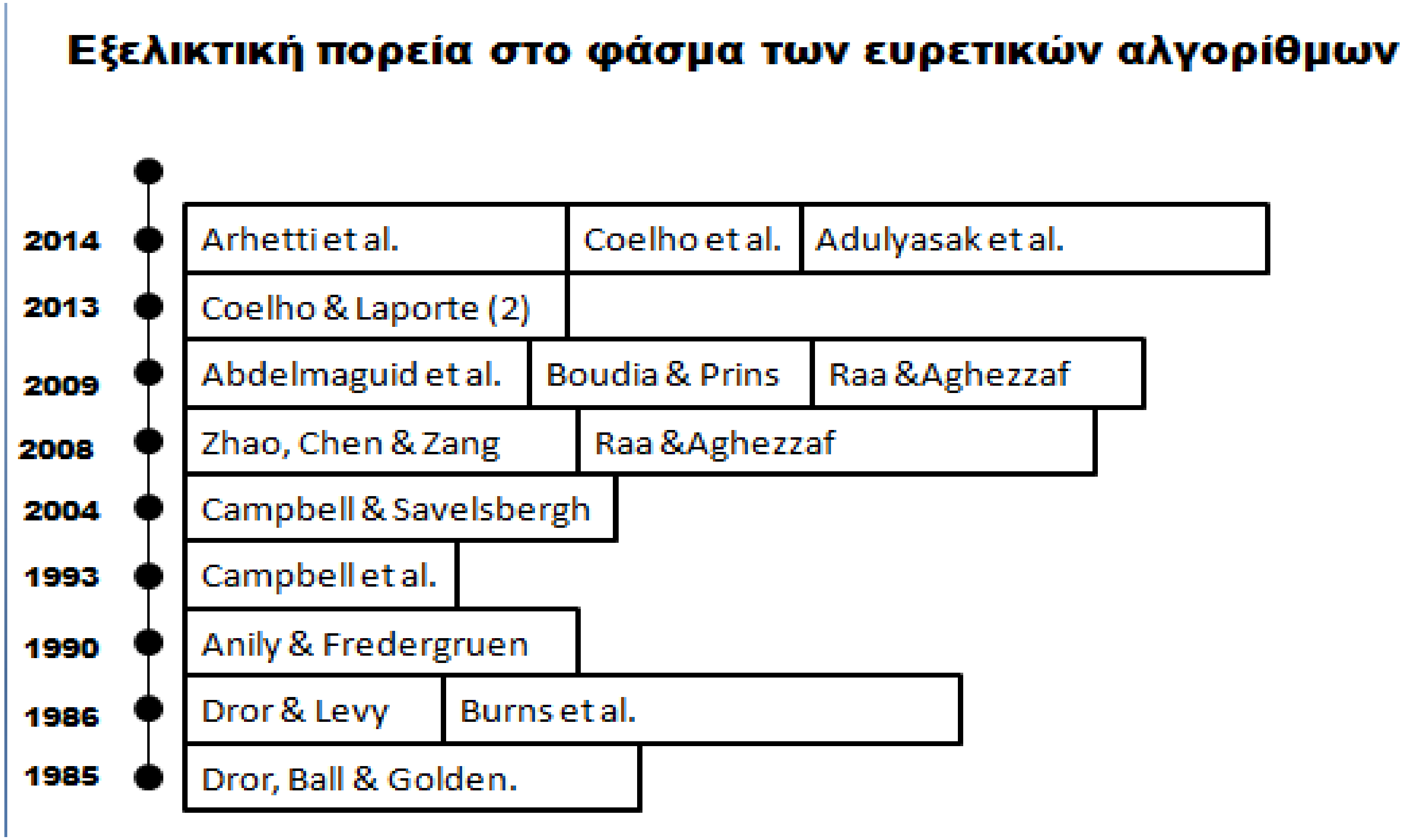
Σε πολύ πρόσφατη δημοσίευση των G. Desaulniers, J. G. Rakke, L. C. Coelho [65] εξετάζεται η μέθοδος της Κλάδου – Τιμής – Αποκοπής (Branch – Price – Cut) για την ακριβή επίλυση του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής. Στον αλγόριθμο αυτό ενσωματώνονται παλιοί αλλά και νέοι έγκυροι περιορισμοί, υιοθετούνται οι γνωστοί περιορισμοί χωρητικότητας αλλά και ad-hoc labeling αλγόριθμος για την επίλυση του υπό – προβλήματος στην διαδικασία του Column Generation. Στον προτεινόμενο αλγόριθμο ενσωματώνεται η διαδικασία του Column Generation στο πλαίσιο του κλάδου και αποκοπής. Στην φάση του “Column Generation” ορίζεται ένα υπό – πρόβλημα για κάθε περίοδο, στο οποίο επιτυγχάνεται η δημιουργία μεμονωμένων διαδρομών μαζί με τις αντίστοιχες ποσότητες προϊόντων που πρέπει να μεταφέρουν σε κάθε πελάτη. Στην συνέχεια κάθε υπό – πρόβλημα αντιστοιχεί σε ένα στοιχειώδες πρόβλημα εύρεσης συντομότερης διαδρομής λαμβάνοντας υπόψη και τους περιορισμούς των αγαθών συνδυαστικά με τη γραμμική χαλάρωση του προβλήματος του σακιδίου. Στο σημείο αυτό για να επιλυθεί χρησιμοποιείται ο ad hoc labeling αλγόριθμος για το split-delivery πρόβλημα δρομολόγησης .

Μια πολλά υποσχόμενη συνδυαστική διαδικασία που στην πειραματική διαδικασία έδειξε πολύ καλύτερη χρονική απόκριση από την προγενέστερη μέθοδο B&C των Coelho & Laporte.[52].

2.2.4 Προσεγγιστική επίλυση της συνδυαστικής διαχείρισης - ευρετικές και μεθευρετικές διαδικασίες

Οι περισσότερες εργασίες που ασχολήθηκαν αρχικά με το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης του εφοδιασμού και διανομής εφαρμόζουν προσεγγιστικές – ευρετικές μεθόδους για την επίλυση του προβλήματος. Οι ευρετικές μέθοδοι εξετάζουν το χώρο των εφικτών λύσεων του προβλήματος, χρησιμοποιώντας κατασκευαστικές διαδικασίες συνδυαστικά με διαδικασίες βελτίωσης των λύσεων. Βασισμένες σε ευνοϊκούς εμπειρικούς κανόνες σχεδιάζονται για να βρίσκουν καλές προσεγγιστικές λύσεις σε δύσκολά συνδυαστικά προβλήματα που διαφορετικά δύσκολα επιλύονται με ακριβείς αλγορίθμους βελτιστοποίησης Για να πετύχουν τον στόχο της προσέγγισης καλών λύσεων, προσπαθούν να αποσυνθέσουν το πρόβλημα σε επιμέρους υπό – προβλήματα, όπου η λύση του ενός χρησιμοποιείται για την επίλυση του άλλου. Το πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι συνήθως βρίσκουν γρήγορα καλές λύσεις. Το μειονέκτημα είναι ότι η ποιότητα της λύσης που προσφέρουν είναι γενικά άγνωστη σε σχέση με την βέλτιστη λύση. Οι πρώτες γενιές των ευρετικών μεθόδων βασίζονται στον κανόνα της άπληστης αναζήτησης, όπου επιβάλλει την πραγματοποίηση βελτιώσεων της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς προχωρά η αναζήτηση στο χώρο των εφικτών λύσεων. Η αναζήτηση ολοκληρώνεται όταν δεν είναι δυνατές περεταίρω βελτιώσεις αλλά πολλές φορές η λύση εγκλωβίζεται σε κάποιο τοπικό ελάχιστο.

Παραδείγματα ευρετικών προσεγγίσεων είναι η διαδικασία της συγκριτικής αξιολόγησης που χρησιμοποίησαν οι Droll, Ball & Golden[67], της ανταλλαγής των Droll & Levy [66], της αξιολόγησης των αλληλεπιδράσεων των Burns et al.[37] , της ομαδοποίησης των Anily & Federgruen [8]αλλά και αυτή των δύο φάσεων των Campbell et al. [38].Την δεκαετία του 1980 μια νέα γενιά προσεγγιστικών μεθόδων, οι μεθευριτικές διαδικασίες, επιχειρεί να βελτιώσει την ποιότητα των προγενέστερων ευρετικών λύσεων χρησιμοποιώντας μεθόδους, που βοηθούν την διαδικασία να απεγκλωβιστεί από τα τοπικά ελάχιστα, με στόχο την αναζήτηση νέων βελτιώσεων της αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 2-10: Εξελικτική πορεία προσεγγιστικών αλγορίθμων

Οι πιο πρόσφατες προσεγγιστικές λύσεις χρησιμοποιούν μεθευριτικές διαδικασίες, οι οποίες σύμφωνα με τους Brayly& Gendreau [36] είναι γενικές διαδικασίες επίλυσης οι οποίες εξετάζουν υποσύνολο των λύσεων ώστε να βρουν καλές λύσεις χρησιμοποιώντας συνδυασμό τεχνικών από τους κατασκευαστικούς και βελτιωτικούς αλγορίθμους, αλλά και χρησιμοποιώντας την γνώσης που έχουν αποκτήσει από την εξερεύνηση της περιοχής των λύσεων. Πραγματοποιούν μια ενδελεχή αξιολόγηση του συνόλου των λύσεων, χρησιμοποιώντας διαδικασίες τοπικής αναζήτησης, σε συνδυασμό με στρατηγικές αποφυγής των τοπικών ελάχιστων. Μια πολύ καινούργια προσέγγιση, η οποία θεωρείται πολλά υποσχόμενη από πολλούς ερευνητές, είναι η υβριδική χρήση συνδυασμού ευρετικών διαδικασιών και προγραμμάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται “math – heuristic ” την οποία προτείνουν οι Maniezzo, Stutzle and Vob [96] το 2013. Πρόσφατες εργασίες προσεγγιστικής επίλυσης του προβλήματος είναι , η αναζήτηση μεταβαλλόμενης γειτονίας (Variable Neighborhood search) των Zhao,Chen and Zang [115] , η τυχαιοποιημένα προσαρτημένη άπληστη αναζήτηση (Greedy Randomized Adaptive Search) των Campbell & Savelsbergh [39] ,η γενετική διαδικασία (Genetic search) των Abdelmaquid & Dessouky [1] , η μεμετική διαδικασία (Memetic search)των Boudia & Prins [33] , η αναζήτηση με απαγορευμένες κινήσεις (Tabu search) των Arhetti et al.[5] αλλά και η προσαρτημένη αναζήτηση μεγάλης γειτονιάς (Adaptive Large Scale Neighborhood Search, ALNS) των Coelho Cordreau & Laporte[50].

2.2.5 Συνδυαστική διαχείριση εφοδιασμού και διανομής σε συνθήκες αβεβαιότητας

Στην περίπτωση της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής σε συνθήκες αβεβαιότητας ο κεντρικός διαχειριστής των πλάνων διανομής έχει να αντιμετωπίσει και την μεταβλητότητα της ζήτησης των πελατών του. Προφανώς η πραγματική διάσταση του προβλήματος του IRP είναι στοχαστική, παρόλα αυτά οι πρώτες προσεγγίσεις επίλυσής του υποθέτουν ντετερμινιστική γνώση τη ζήτησης. Αυτομάτως η μεταβλητότητα της ζήτησης εισαγάγει στο πρόβλημα και την πιθανότητα καταστάσεων όπου οι αποθήκες παρουσιάζουν έλλειμμα σε κάποια χρονική στιγμή . Στις περιπτώσεις αυτές ο διαχειριστής θα πρέπει να προβεί σε διορθωτικές κινήσεις, συνήθως έξτρα διανομές, επιβαρύνοντας το συνολικό μεταφορικό κόστος του προβλήματος. Για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων ένα πέναλτι κόστος προστίθεται στο πρόβλημα, όποτε ένας πελάτης μένει από απόθεμα το οποίο συνήθως εισέρχεται στο μοντέλο ως αναλογία της ποσότητας του ελλείμματος. Ο παράγοντας της ζήτησης των πελατών σε αυτή τη κατηγορία των προβλημάτων εκφράζεται με την χρήση τυχαίων μεταβλητών όπου ο διαχειριστής γνωρίζει την κατανομή τους ή οι τιμές της ζήτησης ανήκουν σε ένα συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) διάστημα τιμών. Αντικειμενικός στόχος της στοχαστικής συνδυαστικής διαχείρισης παραμένει ο ίδιος με αυτόν της ντετερμινιστικής, αλλά εκφράζεται έτσι ώστε να συμπεριλάβει και το έξτρα κόστος εκπλήρωσης της επιπλέον ζήτησης. Οι μεθοδολογικές προσεγγίσεις που έχουν προταθεί κατηγοριοποιούνται σε εκείνες που αφορούν το πρόβλημα, οριζόμενο σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα, όπου η προσέγγιση των κυλιόμενων πλάνων δρομολόγησης (Framework of Rolling Horizon) έχουν προταθεί. Για την περίπτωση του μη πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα, οι μαρκοβιανές διαδικασίες (Marcov

Process) σε συνδυασμό με αρχές δυναμικού προγραμματισμού, αποτελούν την επικρατέστερη προσέγγιση. Μια άλλη πολλά υποσχόμενη ακριβής προσέγγιση είναι αυτή της εύρωστης βελτιστοποίησης (Robust Optimization). Τέλος, η προσέγγιση του συνδυασμού της στοχαστικότητα των καταστάσεων σε συνάφεια με την δυναμικότητα των πληροφοριών (Stochastic – Dynamic IRP) με στόχο την ανάδειξη πολιτικών επίλυσης τέτοιων προβλημάτων έχει προταθεί πρόσφατα. Από τις πρώτες κιόλας εργασίες σχετικά με την συνδυαστική διαχείριση αναγνωρίστηκε η αναγκαιότητα να συμπεριληφθεί η τυχαιότητα της ζήτησης στο μοντέλο.

Σχήμα 2-11: Εξελικτική πορεία των στοχαστικών μεθόδων

Το 1998 οι Campbell et al.[38] διατυπώνουν την ακόλουθη διαπίστωση σχετικά με τη φύση του προβλήματος: Τα προβλήματα της συνδυαστικής διαχείρισης του εφοδιασμού και της διανομής αποτελούν πρόβλημα βελτιστοποίησης μακροπρόθεσμου χαρακτήρα. Όσες προσεγγίσεις έχουν προταθεί εστιάζουν στην επίλυση του προβλήματος σε βραχυπρόθεσμο χαρακτήρα, δηλαδή χρονικό ορίζοντα μίας περιόδου ή πεπερασμένου πλήθους περιόδων. Θέλοντας όμως να εξαχθούν συμπεράσματα σε μακροπρόθεσμό επίπεδο τα δύο βασικά ζητήματα που πρέπει να επιλυθούν σε όλες τις προσεγγίσεις είναι 1) πως πρέπει να διατυπωθούν οι μακροπρόθεσμες επιπτώσεις των βραχυπρόθεσμων αποφάσεων και 2) ποιοί πελάτες να συμπεριληφθούν στον προγραμματισμό της βραχυπρόθεσμης περιόδου. Το κλειδί λοιπόν στην λύση ενός τέτοιου προβλήματος είναι η σωστή προβολή του μακροπρόθεσμου στόχου στον σχεδιασμό ενός βραχυπρόθεσμού πλάνου. Η απόφαση σχετικά με την συχνότητα και την ποσότητα των διανομών καθοδηγούνται από την υπόθεση ότι μια καλή λύση είναι αυτή που 1) προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τις ποσότητες που πρέπει να διανεμηθούν στους πελάτες και 2) αλλά και να δημιουργεί δρομολόγια με γεμάτα οχήματα διανομής. Στην εργασία τους βασίζονται στην διαπίστωση ότι η επανάληψη των προγραμμάτων αποτελεί καλή πρακτική και τα προγράμματα αυτά μπορούν και αποσυντίθενται . Για πρώτη φορά χρησιμοποιούνται μαρκοβιανές διαδικασίες για την μαθηματική διατύπωση της στοχαστικής διαδικασίας των αποφάσεων συνδυαστικής διαχείρισης για να ορίσουν το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής σε συνθήκες αβεβαιότητας. Το μοντέλο τους αυτό θεωρείται πολύ βασικό για την εξέλιξη του προβλήματος σε συνθήκες αβεβαιότητας.

Οι Bard et al [17] την ίδια περίπου περίοδο (1998) εστιάζουν στην περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα και στοχεύουν στον καθορισμό της ετήσιας πολιτικής της διανομής. Προτείνουν μια διαδικασία αποσύνθεσης, βασισμένη σε ένα πλαίσιο κυλιόμενου ορίζοντα, όπου το πρόβλημα της δρομολόγησης επιλύεται επαναληπτικά κάθε δύο εβδομάδες. Πιο συγκεκριμένα, για ένα χρονικό ορίζοντα δύο εβδομάδων αρχικά η μέθοδος εντοπίζει το σύνολο των πελατών που θα πρέπει να εξυπηρετηθούν. Στην συνέχεια, με στόχο την εξισορρόπηση της ημερήσιας ζήτησης και των εργάσιμων ημερών γίνονται οι κατάλληλες προσαρμογές και στην συνέχεια επιλύεται το πρόβλημα της δρομολόγησης μόνο για την πρώτη εβδομάδα. Έπειτα γίνεται μια μετατόπιση του χρονικού ορίζοντα των δύο εβδομάδων και επιλύεται και πάλι το πρώτο κομμάτι του εντοπισμού των πελατών . Το όλο σύστημα δοκιμάστηκε σε δεδομένα που δημιουργήθηκαν από το πραγματικό πρόβλημα της διανομής υγρού προπανίου. Επεκτείνοντας την εργασία αυτή οι Jaillet et al.[82] το 2002 ανέλυσαν περεταίρω τις αιτίες για τις οποίες επιλέγεται ένας πελάτης να εξυπηρετηθεί κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μέσα στο πλαίσιο αυτό των κυλιόμενων πλάνων διανομής. Η συνεισφορά της εργασίας αυτής έγκειται στο γεγονός, ότι δίνει την δυνατότητα να προσδιορίσει το πρόβλημα της διαχείρισης σε ετήσια βάση, χρησιμοποιώντας την ιδέα της κυλιόμενης περιόδου δύο εβδομάδων και χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές τιμές για το κόστος της διανομής.

Επεκτείνοντας την προσέγγιση των Campbell et al [40] οι Kleywegt, Nori and Savelsbergh [84] το 2002 εξετάζουν την περίπτωση των απευθείας διανομών και προτείνουν μια προσεγγιστική μέθοδο για τον εντοπισμό καλών λύσεων σε ανταγωνιστικό χρόνο .Αποσυνθέτουν το πρόβλημα και ορίζουν την μαρκοβιανή διαδικασία του εκάστοτε πελάτη ξεχωριστά. Η εκτίμηση των πιθανοτήτων εξυπηρέτησης των πελατών σε δεδομένη κατάσταση επιτυγχάνεται μέσω προσομοίωσης, ενώ χρησιμοποιούν ένα αλγόριθμο απληστίας για την επιλογή των ενεργειών των καταστάσεων.

Δύο χρόνια αργότερα επεκτείνουν την μορφοποίηση ώστε να συμπεριλάβουν περισσότερους του ενός πελάτες ανά δρομολόγιο στην μαρκοβιανή διαδικασία [85]. Η προτεινόμενη λύση χρησιμοποιεί διαδικασίες βελτιστοποίησης και αποσύνθεσης για να προσεγγίσει την συνάρτηση αξίας. Ειδικότερα το πρόβλημα αποσυντίθεται σε ένα σύνολο υπό – προβλημάτων, το κάθε ένα σχεδιασμένο ώστε να έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες: 1) παρέχει μια επαρκή αναπαράσταση του συνολικού προβλήματος και 2) και είναι σχετικά εύκολο να λυθεί. Επιπρόσθετα, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται έτσι ώστε να συνδυάζει τις λύσεις των υπό – προβλημάτων, με τέτοιο τρόπο ώστε η αξία μια δοθείσας κατάστασης της διαδικασία να προσεγγίζεται από την βέλτιστη τιμή του προβλήματος βελτιστοποίησης. Στην πειραματική διαδικασία, διαπιστώθηκε η δυναμική της προσέγγισης αυτής να κατασκευάζει σχεδόν βέλτιστες πολιτικές, σε προβλήματα μικρής διάστασης και καλύτερες από αυτές που έχουν βρεθεί στην βιβλιογραφία, για μεγαλύτερης διάστασης προβλήματα.

Ο Adelman [2] το 2004 εισαγάγει μια νέα προσέγγιση επίλυσης της στοχαστικής συνδυαστικής διαχείρισης. Το μελλοντικό κόστος των αποφάσεων προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας τη βέλτιστη δυική τιμή ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού. Προτείνει δύο εναλλακτικά γραμμικά μοντέλα. Μορφοποιούν την διαδικασία ελέγχου ως μαρκοβιανή διαδικασία. Χρησιμοποιεί μια διαδικασία ανάθεσης κόστους και προσεγγίζει τις τιμές με ένα αλγόριθμο “column generation” ο οποίος δημιουργεί δυναμικά τα δρομολόγια .

Στην εργασία των Hvattum, Løkketangen & Laporte [80] προτείνεται η προσεγγιστική επίλυση της μαρκοβιανής διαδικασίας παρουσιάζοντας τα πιθανά σενάρια με μορφή δέντρου αποφάσεων. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής εν συγκρίσει με προηγούμενες προσεγγίσεις είναι η ευελιξία και προσαρμοστικότητα της. Μπορεί να μορφοποιήσει και τις τρεις προσεγγίσεις των Adelman[2] , Kleywegt et al.[84], Kleywegt et al[85].Το δέντρο των εναλλακτικών πιθανών σεναρίων παρουσιάζει όλες τις μελλοντικές δυνατές εξελίξεις του προβλήματος. Η προσέγγιση αυτή βασίστηκε σε προγενέστερη εργασία τους, που ασχολείται με το γενικότερο στοχαστικό πρόβλημα δρομολόγησης, που για πρώτη φορά, αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία ο στοχαστικός προγραμματισμός .

Μια διαφορετική προσέγγιση για την επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας, η οποία κερδίζει ολοένα και περισσότερο έδαφος, είναι αυτή της εύρωστης ή σθεναρής βελτιστοποίησης (Robust Optimization). Η προσέγγιση αυτή είναι κατάλληλη στην περίπτωση που δεν είναι γνωστή η κατανομή των τυχαίων παραμέτρων του προβλήματος, αλλά εκτιμάται ότι η τιμές τους ανήκουν σε ένα συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) πεδίο τιμών.

Ο Aghezzaf [4] εξετάζει το στοχαστικό πρόβλημα όπου η τυχαία ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή και οι χρόνοι διαδρομής εκτιμώνται ότι έχουν σταθερή μέση τιμή και φραγμένη τυπική απόκλιση. Χρησιμοποιεί την προσέγγιση της εύρωστης βελτιστοποίησης για να καθορίζει το πλάνο διανομών μέσω ενός μοντέλου μη γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού, το οποίο είναι εφικτό για όλες τις πιθανές τιμές των τυχαίων παραμέτρων. Χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo βελτίωσε τις κρίσιμες παραμέτρους των πλάνων διανομής (κύκλος ανεφοδιασμού, τιμή ασφάλειας για το επίπεδο του αποθεματικού).

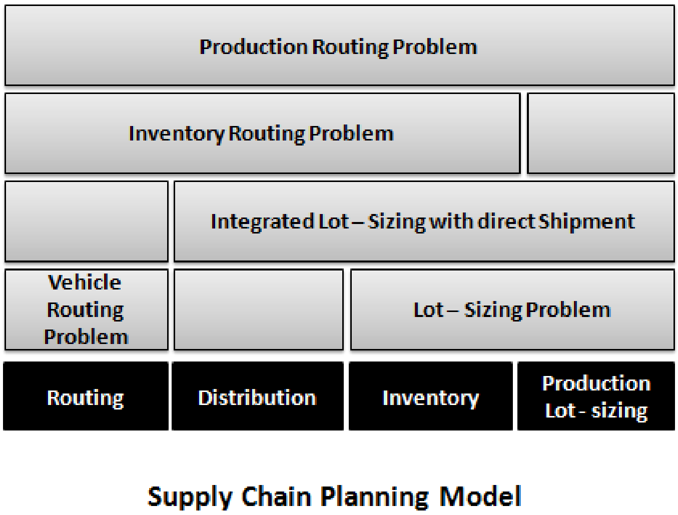
Οι Solyali,Sural και Laporte [110] 2012 ακολούθησαν την προσέγγιση της εύρωστης βελτιστοποίησης και πρότειναν ένα ακριβή αλγόριθμο για την στοχαστική συνδυαστική διαχείριση του εφοδιασμού και της διανομής. Το μοντέλο εκτιμάται ότι είναι αρκετά κρίσιμο για την στοχαστική επίλυση και για αυτό το λόγο θα παρουσιαστεί αναλυτικά σε επόμενη παράγραφο.

Τέλος τη προσέγγιση της δυναμικής και στοχαστικής συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού & διανομής (Dynamic Stochastic IRP) υιοθετούν πολύ πρόσφατα σε εργασίες τους οι Bertazzi et al[26] Coelho Cordeau & Laporte [54], με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους αποθήκευσης μεταφοράς αλλά και ανεπάρκειας των προϊόντων. Η φύση του προβλήματος της δυναμικής και στοχαστικής διαχείρισης βασίζεται στην υπόθεση ότι η ζήτηση των πελατών γνωστοποιείται τμηματικά - δυναμικά στο πεδίο του χρόνου πχ. στο τέλος κάθε περιόδου. Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος αποτελεί τον εντοπισμό των πολιτικών επίλυσης και όχι τον υπολογισμό κάποιας τιμής. (Berbeglia, Cordeau,Laporte, 2010) . Στην εργασία των Bertazzi et al.[26] προτείνεται μια ευρετική κυλιόμενη διαδικασία, που χρησιμοποιεί μια μέθοδο δειγματοληψίας για να παράγει σενάρια ζήτησης για την χρονική στιγμή αναφοράς, ενώ χρησιμοποιεί μέσες τιμές για την μελλοντική ζήτηση. Ο αποφάσεις λαμβάνονται επιλύοντας ένα μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού, με την μέθοδο του κλάδου και αποκοπής, υπό την πολιτική εφοδιασμού του OU . Οι Coelho Cordeau & Laporte [54] διαφοροποιούνται προτείνοντας την χρήση των ιστορικών στοιχείων της ζήτησης και εξετάζουν και περιπτώσεις όπου τα δεδομένα παρουσιάζουν είτε περιοδικότητα είτε τάση. Η μεθευριτική διαδικασία της προσαρμοστικής αναζήτησης μεγάλης γειτονίας ALNS χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων έως και 200 πελατών και χρονικό ορίζοντα 20 στιγμών.

2.2.6 Νέες εξελίξεις – Πρόσφατές δημοσιεύσεις

Μια από τις πιο πρόσφατες ανασκοπήσεις του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής και εφοδιασμού παρουσιάζουν οι Coelho et al. [48] . Η ανασκόπηση αυτή, στοχεύει να παρουσιάσει την εξέλιξη των μεθοδολογικών προσεγγίσεων αλλά και των μοντέλων και αλγορίθμων που αναπτυχθήκαν. Διαφέρει σημαντικά από εκείνη που κατέθεσαν νωρίτερα οι Andersson et al.[7], η οποία με την σειρά της έχει να επιδείξει τις εξελίξεις του προβλήματος αλλά από πλευράς βιομηχανικής έρευνας και επιχειρηματικών πολιτικών.

Πολύ πρόσφατα, δημοσιεύουν και οι Adulyazak, Condreau & Jan [3] αντίστοιχη βιβλιογραφική ανασκόπηση, για το Production – Routing Problem που επεκτείνει το Inventory λαμβάνοντας υπόψη και το ζήτημα του σχεδιασμού της παραγωγικής διαδικασία. Το παρακάτω σχήμα αποδίδει εύρωστα τα συνδυαστικά προβλήματα που προκύπτουν στην διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας και των logistics.



Σχήμα 2-12:Τα συνδυαστικά προβλήματα της διαχείρισης των logistics

Άλλη μια πολύ πρόσφατη δημοσίευση των Arhetti et al[12] αναφέρεται στην παρουσίαση των εναλλακτικών μορφοποιήσεων των προβλημάτων της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού.

Τέλος, οι Christiansen et al.[45] εστιάζουν την δική τους ανασκόπηση στις εξελίξεις που σχετίζονται κυρίως για τις θαλάσσιες μεταφορές, δρομολόγησης και χρονοπρογραμματισμού των πλοίων, στην οποία αναφέρονται και στο IRP των θαλάσσιων μεταφορών. Μια πολύ εύστοχη διαπίστωση των Andersson et al. [7] ήταν ότι υπάρχει ένα χάσμα ανάμεσα σε βιομηχανική και ακαδημαϊκή έρευνα. Τα προβλήματα της συνδυαστικής διαχείρισης για τις θαλασσιές μεταφορές βασίζονται σε βιομηχανική έρευνα, ενώ άρθρα που παρουσιάζουν κυρίως μοντέλα εστιάζουν σε οδικές μεταφορές εσωκλείοντας το κλασσικό πρόβλημα VRP. Στα logistics των θαλάσσιων μεταφορών, ο ρυθμός κατανάλωσης και παραγωγής των προϊόντων και η διαχείριση των αποθηκών συνδυάζεται με το πρόβλημα της διανομής πολύ πρόσφατα στις εργασίες των Gronhaug et al. , Engineer et al. Uggen, Fodstad, and Norstebo. [65] Παρόλα αυτά, ακολουθώντας τις πιο πρόσφατες δημοσιεύσεις διαπιστώνεται ότι υπάρχει μεγάλο πεδίο ανάπτυξης των μεθοδολογιών, λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες την βιομηχανικής έρευνας

Το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής και εφοδιασμού για τις θαλάσσιες μεταφορές εξετάζουν οι Rakke et al [107]. Το πρόβλημα που εξετάζουν αναφέρεται σε μια από τις μεγαλύτερες εταιρείες παραγωγής φυσικού αερίου. Η εταιρεία είναι υπεύθυνη για την διαχείριση των αποθηκών φυσικού αερίου των εργαστηρίων υγροποίησής του και των λιμένων εκφόρτωσής του, έχοντας περιορισμό στο πλήθος των διαθεσίμων προβλητών. Είναι υπεύθυνη επίσης για την δρομολόγηση και τον χρονοπρογραμματισμό των δρομολογίων του διαθέσιμου ετερογενούς στόλου πλοίων. Θα πρέπει να εκπληρώσει ένα σύνολο συμβολαίων μακροχρόνιων πελατών της σε όλο τον κόσμο. Ο στόχος του διαχειριστή είναι να δημιουργήσει ένα μακροπρόθεσμα ελάχιστου κόστους πρόγραμμα διανομής, το οποίο σέβεται τα μακροχρόνια συμβόλαια, ενώ μεγιστοποιεί τα έσοδα από τη πώληση του φυσικού αερίου στην ελεύθερη αγορά. Παρουσιάζουν μια νέα μορφοποίηση του προβλήματος, η οποία επιλύεται χρησιμοποιώντας ένα καινοτόμο σύστημα αποσύνθεσης που βασίζεται σε μοτίβα διανομής. Για την επίλυση της προσέγγισης αυτής ανέπτυξαν ένα αλγόριθμο κλάδου – αξίας – αποκοπής (Branch – Price – Cut).

Ένα μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού για το πρόβλημα των θαλάσσιων μεταφορών μικρών αποστάσεων παρουσιάζουν οι Agra, Christiansen & Delgando [5] για την διανομή πετρελαίου καύσης (μαζούτ) στο Πράσινο Ακρωτήριο της δυτικής Αφρικής. Συνδυάζουν μεταβλητές οριζόμενες σε διακριτό χρόνο για τα χρονικά παράθυρα εξυπηρέτησης αλλά και μεταβλητές σε συνεχή χρόνο για να ορίσουν την ημερήσια διακύμανση του ρυθμού κατανάλωσης. Εξετάζουν διάφορες πολιτικές βελτίωσης της μαθηματικής διατύπωσης ορίζοντας εγκύρους περιορισμούς, πιο σφιχτά όρια αλλά και πιο εκτενή μορφοποίηση. Τα πειράματά του έδειξαν ότι η μέθοδος μπορεί να δώσει βέλτιστη λύση σε εύλογο χρονικό διάστημα.

Εξετάζοντας την συνδυαστική διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής βενζίνης, οι Li et al.[94] ορίζουν ως αντικειμενική συνάρτηση την ελαχιστοποίηση της μέγιστης διάρκειας διαδρομής των δρομολογίων. Παρουσιάζουν έναν ευρετικό αλγόριθμο αναζήτησης Tabu, ενώ χρησιμοποιούν την μέθοδο της χαλάρωσης «Lagrange» για τον προσδιορισμό του κάτω φράγματος των προβλημάτων. Η εργασία αυτή εξετάζει μια από τις ειδικές περιπτώσεις του γενικού IRP όπου συμπεριλαμβάνουν επιχειρησιακούς περιορισμούς όπως ο σχετικός κανονισμός για την ώρα πραγματοποίησης των διανομών.

Οι Papageorgiou et al.[101] σε πολύ πρόσφατη δημοσίευσή τους ορίζουν τα πρώτα πρότυπα προβλήματα συνδυαστικής διαχείρισης θαλασσίων μεταφορών θέτοντας ένα σημείο αναφοράς για τα προβλήματα αυτά. Παρουσιάζουν μια αναλυτική περιγραφή της κλάσης των προβλημάτων της συνδυαστικής διαχείρισης για τον τομέα των θαλάσσιων μεταφορών. Ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού τεκμηριώνει μαθηματικά το πρόβλημα, το οποίο επιδέχεται τροποποιήσεις ώστε να συμπεριληφθούν και ειδικές συνθήκες - περιορισμοί του προβλήματος. Θέτοντας τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους δίνουν μεγάλες προοπτικές για συγκριτική αξιολόγηση των πρόσφατων σχετικών μοντέλων.

Τα πιο πρόσφατα άρθρα που βρέθηκαν στην βιβλιογραφία και αφορούν εφαρμογές εκτός των θαλασσίων μεταφορών είναι η εργασία των Coelho & Laporte [47] που αφορά την διανομή ευπαθών προϊόντων, όπου στην μοντελοποίηση λαμβάνουν υπόψη τους την ημερομηνία λήξης των προϊόντων. Τροποποιούνε καταλλήλως το γενικό μοντέλο κάδου και αποκοπής, που έχουν προτείνει στην προγενέστερη δημοσίευσης τους Coelho & Laporte.[47] Στην δημοσίευση αυτή επιλύεται το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης ευπαθών προϊόντων για πρώτη φορά με ακριβή αλγόριθμο καθορίζοντας το βέλτιστο πλάνο διανομής.

Σε αντίθεση οι Akzen et al.[6] εφαρμόζουν έναν πολύ ισχυρό μεθευριτικό αλγόριθμο προσαρμοστικής μεγάλης γειτονιάς αναζήτησης (ALNS) για συνδυαστική διαχείριση των αποθηκών και την συλλογή υγρής βιομάζας από ένα δίκτυο εστιατορίων, ξενοδοχείων κ.α. με στόχο την μετατροπή τους σε βίο – καύσιμο . Ανέπτυξαν ένα μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση ορίστηκε έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί το κόστος μεταφοράς αποθήκευσης, και αγοράς της βιομάζας αλλά και τα λειτουργικά κόστη των οχημάτων. Η μεθευριτική μέθοδός τους μπόρεσε να λύσει προβλήματα μέχρι και ενός δικτύου 100 πελατών σε λιγότερο από μια ώρα.

Η επέκταση του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής όπου συνυπολογίζεται και η παράμετρος της παραγωγής, εμφανίζεται αρχικά στην βιβλιογραφία με τους Blumenfeld et al. [32] οι οποίοι ανέλυσαν την αλληλεπίδραση μεταξύ του κόστους της μεταφοράς, της αποθήκευσης αλλά και της παραγωγής προϊόντων σε ένα δίκτυο εμπορευματικών μεταφορών. Μεταγενέστερα ασχολήθηκαν με το λεγόμενο "Production – Routing Problem" οι Chandra ,Chandra & Fisher , Herer and Roundy,Fumero & Vercellis Bertazi, Paletta, and Speranza. [48].

Πολύ πρόσφατα οι Arhetti et al.[10] αναλύουν τις πολιτικές διανομής OU και ML για το PRP και αναπτύσσουν ένα μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού και επιλύουν το πρόβλημα προτείνοντας μια ευρετική διαδικασία. Αποσυνθέτουν το πρόβλημα σε δύο υπό προβλήματα, το ένα αφορά την παραγωγή και το άλλο την διανομή. Το υπό - πρόβλημα που αφορά την παραγωγή λύνεται με ακριβή διαδικασία, βρίσκοντας τις βέλτιστες τιμές, ενώ το υπό - πρόβλημα που αφορά την διανομή επιλύεται εφαρμόζοντας την ευρετική διαδικασία όπου σε κάθε βήμα ένας πελάτης εισέρχεται στην λύση. Στην συνέχεια για κάθε πελάτη ένα μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού λύνεται. Η διαδικασία αυτή, που το μοντέλο του μεικτού ακέραιου προγραμματισμού υπεισέρχεται μέσα στην ευρετική διαδικασία, δημοφιλής προσέγγισης της τελευταίας δεκαετίας λέγεται υβριδική αλλά και mathheuristic . Όταν το γραμμικό μοντέλο σχεδιαστεί σωστά, μπορεί να αποδώσει υψηλού επιπέδου λύσεις σε ανταγωνιστικό χρόνο. Επεκτείνοντας την δουλειά αυτή οι Adulyazak, Cordeau & Jans [3] επιλύουν με την μέθοδο κλάδου και αποκοπής την περίπτωση των πολλαπλών οχημάτων.

2.3 Συμπεράσματα

Το κεφάλαιο αυτό της διατριβής, δομήθηκε στοχεύοντας στο να δώσει στο αναγνώστη όσο το δυνατόν πιο διευρυμένη εικόνα σχετικά με τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις, αλλά και μαθηματικές τεκμηριώσεις του γενικού προβλήματος της δρομολόγησης. Εστιάζοντας περισσότερο στην επίλυση του προβλήματος της δρομολόγησης με ακριβείς μεθόδους, παρουσιαστήκαν οι εναλλακτικές διατυπώσεις του προβλήματος. Στη συνέχεια μη παραλείποντας την εκτενή και εγκεκριμένη προσέγγιση των ευρετικών διαδικασιών, παρουσιαστήκαν και τα ευρήματα της βιβλιογραφίας που ακλουθούν την προσέγγιση αυτή.

Στην συνέχεια δομήθηκε μια αναλυτική βιβλιογραφική ανασκόπηση για το προβλήματα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών, ακολουθώντας την εξελικτικής τους πορεία. Η ανασκόπηση εκπονήθηκε με την οπτική του χάρτη πορείας, τμηματοποιώντας τα ευρήματα σε πρώτη φάση σε τρεις περιόδους. Οι περίοδοι ορίστηκαν με την λογική ότι σε κάθε μια, υπήρχε κομβική δημοσίευση που σηματοδότησε και την εξέλιξη του επιστημονικού πεδίου. Έπειτα, έγινε ιδιαίτερη μνεία για τις μεθόδους που εξελίχτηκαν στο φάσμα των ευρετικών μεθόδων, αλλά και των μεθόδων που έχουν προταθεί σε συνθήκες αβεβαιότητας. Τέλος, μια παράγραφος αφιερώθηκε σε αρκετά πρόσφατες δημοσιεύσεις, που δείχνουν την τάση να συγκεραστεί η βιομηχανική έρευνα που υλοποιείται για το πρόβλημα στο φάσμα των θαλασσίων μεταφορών με αυτή που έχει ταυτοποιηθεί με το πρόβλημα τα τελευταία 30 χρόνια.

Κεφάλαιο 3 Μαθηματικά μοντέλα IRP

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τέσσερα από τα πιο σημαντικά μοντέλα που έχουν προταθεί για το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών. Τα μοντέλα αυτά έχουν αναπτυχθεί στο φάσμα των ακριβών προσεγγίσεων. Οι στόχοι της ανάλυσης αυτής είναι να γίνει σαφές στον αναγνώστη πως διατυπώνονται οι διάφορες προϋποθέσεις του προβλήματος και πως επηρέασε το ένα μοντέλο το άλλο.

3.1 Το μοντέλο των Arhetti et al. (2007)

Ο πρώτος ακριβής αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών είναι αυτός που προτάθηκε από τους Arhetti et al. [11] το 2007. Αποτελεί κρίσιμο σημείο για την ανάπτυξη των μοντέλων μεικτού ακέραιου προγραμματισμού IRP και για τον λόγο αυτό θεωρείται σημαντικό να αναλυθεί και να παρουσιαστεί στην διατριβή αναλυτικά.

Το πρόβλημα που αναλύουν αναφέρεται σε δίκτυο logistics στο οποίο γίνεται διανομή ενός προϊόντος από έναν κεντρικό διανομέα (συμβολίζεται με την τιμή 0) σε ένα πλήθος πελατών M={1,2,…,ν} για ένα χρονικό ορίζοντα H. Σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή $t \in T = \{1, \dots, H\}$ η ποσότητα που είναι διαθέσιμη στην αποθήκη του κεντρικού διανομέα συμβολίζεται με r_{0t} ενώ αντίστοιχα r_{st} η ποσότητα που καταναλώνεται σε κάθε σημείο πώλησης $s \in M$.Το αρχικό αποθεματικό της κεντρικής αποθήκης δίνεται και συμβολίζεται με B_0. Κάθε πελάτης s ∈ M ορίζει μια μέγιστη τιμή U_s για το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης του σε κάθε χρονική στιγμή, και το αρχικό αποθεματικό του είναι εκ των προτέρων γνωστό και ίσο με $I_{s0} \leq U_s$. Όταν επισκέπτεται κάποια χρονική στιγμή t η αποθήκη κάποιου πελάτη, η ποσότητα του προϊόντος που θα του διανεμηθεί είναι τέτοια ώστε το αποθεματικό της αποθήκης του να φτάσει την μέγιστη επιτρεπτή τιμή U_s (ντετερμινιστική πολιτική OU level) . Πιο συγκεκριμένα, συμβολίζοντας με I_{st}το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης του πελάτη s τη χρονική στιγμή t η τιμή x_{st} είναι είτε ίση με $U_s - I_{st}$ σε περίπτωση που ο πελάτης εξυπηρετηθεί την χρονική στιγμή t, είτε μηδέν σε αντίθετη περίπτωση. Το κόστος αποθήκευσης ορίζεται και στην κεντρική αποθήκη του διανομέα και αλλά και στις περιφερειακές αποθήκες των πελατών του. Συμβολίζετε με h_0 το κόστος αποθήκευσης για την κεντρική αποθήκη και B_t το ύψος του αποθεματικού της για κάθε χρονική στιγμή t.Το συνολικό κόστος αποθήκευσης των προϊόντων για όλη την χρονική περίοδο δίνεται από τη σχέση $\sum_{t \in T'} h_0 B_t$ όπου $T' = T \cup \{H+1\}$. Η χρονική στιγμή $H+1$ συμπεριλαμβάνεται στους υπολογισμούς του κόστους της αποθήκευσης έτσι ώστε να συμπεριληφθούν και οι συνέπειες της διανομής και της χρονικής στιγμής H. Συμβολίζεται με h_s το κόστος αποθήκευσης για τις αποθήκες των πελατών και I_{st} το ύψος του αποθεματικού τους για κάθε χρονική στιγμή t, όποτε το συνολικό κόστος αποθήκευσης των προϊόντων για όλη την χρονική περίοδο για την αποθήκη s δίνεται από τη σχέση $\sum_{t \in T'} h_s I_{st}$, όπου $T' = T \cup \{H+1\}$. Το ύψος του αποθεματικού στο τέλος του χρονικού ορίζοντα μπορεί να είναι διαφορετικό από το αρχικό επίπεδο του και για τον λόγο αυτό το πρόβλημα δεν είναι περιοδικό. Οι διανομές εκτελούνται από ένα όχημα χωρητικότητας C και μπορούν να πραγματοποιούν έως μια διανομή για κάθε χρονική στιγμή. Το δρομολόγιο της κάθε χρονικής στιγμής επισκέπτεται το σύνολο των πελατών που επιλέγεται να εξυπηρετηθούν την στιγμή αυτή. Το μεταφορικό κόστος υποθέτουμε ότι είναι συμμετρικό για το σύνολο του δικτύου δηλαδή ότι $c_{ij} = c_{ji}, i, j \in M' = M \cup \{0\}$. Συνεπώς ορίζοντας με y_{ij}^t την δυαδική μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή 1 όταν ο πελάτης j εξυπηρετείται αμέσως μετά τον I την χρονική στιγμή t, και την τιμή 0 σε κάθε άλλη περίπτωση. Έτσι το συνολικό κόστος διανομής του προβλήματος εκφράζεται από την σχέση $\sum_{i\in M'} \sum_{\substack{j\in M' \\ j<i}} \sum_{t\in T} c_{ij} y_{ij}^t$.

Στο VMI – OU σύστημα της συνδυαστικής διαχείρισης των αποθηκών από τον κεντρικό διανομέα, υπό την πολιτική εξυπηρέτησης “Order up to level”, το ζητούμενο είναι να καθοριστούν οι ποσότητες που μεταφέρονται στις αποθήκες των πελατών κάθε χρονική στιγμή και τα δρομολόγια εκείνα που θα επισκέπτονται τους πελάτες την χρονική στιγμή που καθορίζεται ότι πρέπει να εξυπηρετηθούν, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος διανομής και αποθήκευσης, όπως ορίζεται από την ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση :

$$\min \sum_{t\epsilon T'} h_0 B_\tau + \sum_{s\epsilon M} \sum_{t\epsilon T'} h_s I_{st} + \sum_{t\epsilon T} \sum_{i\epsilon M} \sum_{\substack{j\epsilon M \\ j<i}} c_{ij} y_{ij}^t \qquad 3.1$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

1. **Καθορισμός αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα.**

   Το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα τη χρονική στιγμή t ισούται με το ύψος του αποθεματικού την προηγούμενη χρονική στιγμή συν την ποσότητα που του διατίθεται την προηγούμενη χρονική στιγμή μείον την συνολική ποσότητα που αποστέλλει στους πελάτες που θα εξυπηρετηθούν την προηγούμενη χρονική στιγμή. Δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{B}_t = \mathrm{B}_{\mathrm{t-1}} + \mathrm{r}_{\mathrm{0t-1}} - \sum_{\mathrm{i \in V'}} \mathrm{x}_{\mathrm{st-1}} \ \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T'} \qquad 3.2$$

Όπου $r_{00} = 0, x_{s0} = 0, s \in M$.

2. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα.**

Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$ το αποθεματικό της αποθήκης είναι ικανοποιητικό, ώστε να ανταπεξέλθει στην ζήτηση του συνόλου των απαιτήσεων των πελατών που θα εξυπηρετηθούν τη χρονική στιγμή τ.

$$B_t \geq \sum_{s \in M} x_{st} \ , t \in T \qquad 3.3$$

3. **Καθορισμός αποθεματικού των αποθηκών του συνόλου των πελατών.**

Το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης του εκάστοτε πελάτη, τη χρονική στιγμή t ισούται με το ύψος του αποθεματικού την προηγούμενη χρονική στιγμή συν την ποσότητα που του διανέμεται την προηγούμενη χρονική στιγμή μείον την ποσότητα που καταναλώνεται την προηγούμενη χρονική στιγμή. Δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{I}_{st} = \mathrm{I}_{\mathrm{st-1}} + \mathrm{x}_{\mathrm{st-1}} - \mathrm{r}_{\mathrm{st-1}}\ \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T}', \mathrm{s} \in \mathrm{M} \qquad 3.4$$

Όπου $r_{s0} = 0, x_{s0} = 0, s \in M$.

4. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού των αποθηκών των πελατών**

   Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$ το αποθεματικό της αποθήκης κάθε πελάτη $\mathrm{s} \in \mathrm{M}$ είναι μη αρνητικά ορισμένο.

$$I_{st} \geq 0\ , t \in T', s \in M \qquad 3.5$$

5. **Περιορισμοί εξασφάλισης της ποσότητας διανομής σύμφωνα με την πολιτική "Order – Up – to level"**

Οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν ότι η ποσότητα που θα διανεμηθεί σε έναν πελάτη s την χρονική στιγμή t είναι είτε $U_s - I_{st}$ σε περίπτωση που ο πελάτης εξυπηρετηθεί την χρονική στιγμή t, είτε μηδέν σε αντίθετη περίπτωση. Για να εκφραστεί αυτό απαιτείται η χρήση μιας δυαδικής μεταβλητήςz_{st} που ισούται με 1 όταν ο πελάτης s εξυπηρετείται την χρονική στιγμή t και μηδέν διαφορετικά. Τότε οι παρακάτω ανισότητες εκφράζουν το ζητούμενο.

$$x_{\mathrm{st}} \geq \mathrm{U_s z_{st}} - \mathrm{I_{st}}\ , \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T}, \forall \mathrm{s} \in \mathrm{M} \qquad 3.6$$

$$x_{\mathrm{st}} \leq \mathrm{U_s} - \mathrm{I_{st}}\ , \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T}, \forall \mathrm{s} \in \mathrm{M} \qquad 3.7$$

$$x_{st} \leq U_s z_{st} , \forall t \in T, \forall s \in M \qquad 3.8$$

6. Περιορισμοί χωρητικότητας οχήματος διανομής

Οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν ότι οι ποσότητες που θα διανεμηθούν τη χρονική στιγμή t δεν θα ξεπερνάνε την χωρητικότητα του οχήματος διανομής.

$$\sum_{s \in M} x_{st} \leq C, t \in T \qquad 3.9$$

7. Περιορισμοί που αφορούν την δρομολόγηση

Οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν ότι σε κάθε χρονική στιγμή ένα εφικτό δρομολόγιο καθορίζεται έτσι ώστε να εξυπηρετήσει τους πελάτες που θα εξυπηρετηθούν την χρονική στιγμή t.

1.1.1.1. Έστω και αν ένας πελάτης εξυπηρετηθεί τη χρονική στιγμή t το δρομολόγιο θα πρέπει να επισπευτεί την κεντρική αποθήκη. Αν υποθέσουμε ότι η δυαδική μεταβλητή z_{0t} είναι 1 όταν η κεντρική αποθήκη ανήκει στο δρομολόγιο της χρονικής στιγμής t, τότε:

$$\sum_{s \in M} x_{st} \leq C z_{0t}, t \in T \qquad 3.10$$

1.1.1.2. Αν γίνεται διανομή τη χρονική στιγμή t (δηλαδή το $z_{it} = 1$ για κάποια $i \in M'$) τότε θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη ότι το άθροισμα των εισροών και εκροών ισούται με 2 ενώ σε αντίθετη περίπτωση με 0.

$$\sum_{\substack{j\in M'\\ j<i}} y_{ij}^{t} + \sum_{\substack{j\in M'\\ j>i}} y_{ji}^{t} = 2z_{it} \quad \forall t \in T\,, \forall i \in M' \qquad 3.11$$

1.1.1.3. Διασφάλιση μη κυκλική διαδρομής.

$$\sum_{\mathrm{i}\in\mathfrak{I}} \sum_{\substack{\mathrm{j}\in\mathfrak{I},\\ \mathrm{j}<i}} \mathrm{y}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{t}} \leq \sum_{\mathrm{i}\in\mathfrak{I}} \mathrm{z}_{\mathrm{it}} - \mathrm{z}_{\mathrm{kt}}, \qquad \mathfrak{I} \subseteq \mathrm{M}, \mathrm{t} \in \mathrm{T}, \qquad 3.12$$

για κάποια $\mathrm{k} \in \mathfrak{I}$

8. Περιορισμοί εξασφάλισης των ακέραιων τιμών των μεταβλητών απόφασης και των ορίων του

$$x_{st} \geq 0 \quad \forall s \in M, t \in T \qquad 3.13$$

$$y_{ij}^{t} \in \{0,1\}\ \forall i, j \in M: i > j, t \in T \qquad 3.14$$

$$y_{i0}^{t} \in \{0,1,2\}\ \forall i \in M, t \in T \qquad 3.15$$

$$z_{it} \in \{0,1\}\ \forall i \in M, t \in T \qquad 3.16$$

Έγκυροι περιορισμοί για το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής και του εφοδιασμού των αποθηκών

VI – 1: Ο περιορισμός αυτός εκφράζει ότι αν το δρομολόγιο της χρονικής στιγμής t επισκεφτεί την αποθήκη s το αποθεματικό της αποθήκης θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν και σε περίπτωση που επιλέγεται να μην την επισκεφτεί το αποθεματικό της είναι μεγαλύτερο από την κατανάλωση τη χρονική στιγμή t.

$$I_{st} \geq (1 - z_{st}) r_{st} \qquad 3.17$$

VI – 2: Ο περιορισμός αυτός αποτελεί επέκταση του προηγούμενου για το διάστημα που το αποθεματικό καλύπτει την κατανάλωση του πελάτη. Δηλαδή εκφράζει ότι, όσο η ποσότητα του αποθεματικού είναι μεγαλύτερη από την συνολική ζήτηση που προκύπτει για την χρονική στιγμή μέχρι t-k το δρομολόγιο δεν περνάει από τον πελάτη s, διαφορετικά είναι θετικά ορισμένη.

$$I_{st-k} \geq \left(\sum_{j=0}^{k} r_{st-j}\right)\left(1 - \sum_{j=0}^{k} z_{st-j}\right) \qquad 3.18$$

$$s \in M, t \in T, k = 0,1,\dots,t-1$$

VI – 3: Ο περιορισμός αυτός εκφράζει το γεγονός ότι αν ο πελάτης εξυπηρετήθηκε τελευταία φορά πριν από την t την χρονική στιγμή t-k δηλαδή $z_{st-k} = 1$ και $z_{sp} = 1 \; για \; t - k + 1 \leq p < t$ τότε $I_{st} = U_s - \sum_{j=t-k}^{t-1} r_{sj}$λόγω του περιορισμού (4). Αλλιώς, αν έχει εξυπηρετηθεί και άλλη φορά $I_{st} > U_s - \sum_{j=t-k}^{t-1} r_{sj}$.

$$I_{st} \geq U_s z_{st-k} - \sum_{j=t-k}^{t-1} r_{sj}, \qquad 3.19$$

$$s \in M, t \in T, k = 1,2,\dots,t-1$$

VI – 4: Ο κεντρικός διανομέας θα πρέπει να στείλει τουλάχιστον $\sum_{j=1}^{t-1} r_{sj} - I_{s0}$ μέχρι την χρονική στιγμή t για να μην μείνει από αποθεματικό. Και επειδή η μέγιστη ποσότητα αποθήκευσης είναι U_s θα πρέπει τουλάχιστον $\left(\sum_{j=1}^{t-1} r_{sj} - I_{s0}\right)/U_s$ φορές να επισκεφτεί τον πελάτη s.

$$\sum_{j=1}^{t} z_{sj} \geq \left\lceil \frac{\sum_{j=t-k}^{t-1} r_{sj} - I_{s0}}{U_s} \right\rceil \qquad 3.20$$

$$s \in M, t \in T$$

VI – 5: Βασισμένη στον έγκυρο περιορισμό των Bertazzi, Paletta, and Speranza 2002 [25] αποδεικνύεται ότι η συνολική ποσότητα που θα διανέμει ο διαχειριστής μέχρι τη χρονική στιγμή t δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή της χωρητικότητας του οχήματος επί το t. Οι Bertazzi, Paletta, and Speranza έδειξαν ότι αν ένας πελάτης s εξυπηρετηθεί τη χρονική στιγμή t τότε η συνολική ποσότητα που θα διανεμηθεί σε αυτόν δίνεται από την σχέση $U_s - I_{s0} + \sum_{j=1}^{t-1} r_{sj}$.

$$\sum_{s \in M} \left(U_s - I_{s0} + \sum_{j=1}^{t-1} r_{sj} \right) \leq tC, t \in T \qquad 3.21$$

VI – 6: Αν ένας οποιοδήποτε πελάτης s εξυπηρετηθεί την χρονική στιγμή t η κεντρική αποθήκη θα πρέπει και αυτή να ανήκει στο δρομολόγιο.

$$z_{st} \leq z_{0t} \; s \in M, t \in T \qquad 3.22$$

VI – 7: Αν στη διαδρομή η επόμενη στάση ενός πελάτη i είναι η κεντρική αποθήκη τότε η τιμή του $y_{i0}^t = 1$ ή 2 τότε η τιμή $z_{it} = 1$.Ενώ αν στη διαδρομή η επόμενη στάση ενός πελάτη i είναι ένας άλλος πελάτη J δηλαδή $y_{ij}^t = 1$ τότε η τιμή $z_{it} = 1$.

$$y_{i0}^t \leq 2z_{it} \; i \in M, t \in T \qquad 3.23$$

$$y_{ij}^t \leq z_{it} \; i \in M, t \in T \qquad 3.24$$

3.2 Το Μοντέλο Solyali & Sural (2011)

Οι Solyaly & Sural [109]λίγα χρόνια αργότερα μετασχηματίζουν καταλλήλως το μοντέλο των Arhetti et al. χρησιμοποιώντας ισχυρή μορφή (***Strong Formulation***) για τις μεταβλητές απόφασης των ποσοτήτων ανεφοδιασμού και μια ελκυστική για την υπολογιστική πολυπλοκότητα μορφοποίηση των μεταβλητών απόφασης της διανομής. Με τον όρο ισχυρή μορφοποίησης (***Strong Formulation***) εκφράζουν το γραμμικό μοντέλο που προσφέρει όρια τα οποία δεν είναι χειρότερα από εκείνα του αρχικού μοντέλου, αλλά είναι σημαντικά καλύτερο για πολλά παραδείγματα στην πειραματική φάση της αξιολόγησης της υπολογιστικής διαδικασίας. Βασισμένοι στην νέα ισχυρή μορφοποίηση ανέπτυξαν ένα αλγόριθμο κλάδου και αποκοπής αλλά και μια εκ των προτέρων ευρετική διαδικασία εύρεσης των δρομολογίων.

Με την τροποποίηση των μεταβλητών απόφασης έτσι ώστε οι μεταβλητές απόφασης δυο δεικτών (two – indexed) να χρησιμοποιούνται για τις αποφάσεις της δρομολόγησης και ένα δίκτυο βέλτιστων μονοπατιών να χρησιμοποιείται για τις μεταβλητές ανεφοδιασμού. Η απόφαση αυτή πηγάζει από το γεγονός ότι το πρόβλημα του ανεφοδιασμού ενός πελάτη μπορεί να θεωρηθεί σαν πρόβλημα ελάχιστου μονοπατιού και να λυθεί σε $O(H^2)$ υπολογιστικό χρόνο.

Επιπλέον μεταβλητές απόφασης που όρισαν είναι η συνολική ζήτηση του πελάτη από την περίοδο $k \in T$ έως την περίοδο $t \in T$ δηλαδή $R_{ikt} = \sum_{j=k}^{t} r_{ij}$ και b_{ikt} η ποσότητα που διανέμεται στον πελάτη i την χρονική στιγμή t$\in T'$όταν ο τελευταίος ανεφοδιασμός του έγινε την χρονική στιγμή k ($b_{ikt} = U_i - I_{i1} + R_{ikt-1}$) για k > 0. Η τιμή του b_{ikt} της ποσότητας ανεφοδιασμού δεν ορίζεται για τις χρονικές στιγμές 0 και H+1 αλλά για λόγους διευκόλυνσης χρησιμοποιούνται στους συμβολισμούς. Η τιμή $\mu(i,k)$ εκφράζει την τελευταία χρονική στιγμή που ένας πελάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί, ώστε να αποφύγει την έλλειψη αποθεματικού, όταν ο προηγούμενος ανεφοδιασμός πραγματοποιήθηκε την χρονική στιγμή k, δηλαδή $\mu(i,k) = \max_{k<t\leq H+1}\{t: b_{ikt} \leq U_i\}$. Αντίστοιχα η τιμή εκφράζει την νωρίτερα χρονική στιγμή έναρξης, για την οποία ο πελάτης δεν αντιμετωπίζει έλλειμμα στην ζήτηση, μέχρι τον ανεφοδιασμό της χρονικής στιγμής t, δηλαδή $\pi(i,k) = \min_{0<k\leq t}\{k: b_{ikt} \leq U_i\}$. Συμβολίζοντας με w_{i0t} την δυική μεταβλητή απόφασης, η οποία να παίρνει την τιμή 1 όταν ο πελάτης I εφοδιάζεται για πρώτη φορά στην περίοδο μέχρι την χρονική

στιγμή t $(1 \leq t \leq H)$. Αντίστοιχα με w_{ikt} την δυική μεταβλητή απόφασης να παίρνει την τιμή 1 όταν ο πελάτης I εφοδιάζεται στην χρονική στιγμή t $(1 \leq t \leq H)$ όταν ο τελευταίος ανεφοδιασμός της έγινε στην χρονική στιγμή k $(\pi(i,t) \leq k < t, k \neq 0)$. Τέλος, έστω η δυική μεταβλητή απόφασης w_{ikH+1} παίρνει την τιμή 1, όταν ο τελευταίος ανεφοδιασμός του πελάτη συνέβη την χρονική στιγμή k $(\pi(i,H+1) \leq k < H+1)$, χωρίς να έχει εφοδιαστεί σε προγενέστερη χρονική στιγμή. Η ισχυρή μορφοποίηση που προτάθηκε δίνεται από το παρακάτω μοντέλο.

SF:
$$\min \sum_{t \epsilon T'} \mathrm{h_0 B_\tau} + \sum_{s \epsilon M} \sum_{t \epsilon T'} \mathrm{h_s I_{st}} + \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon M} \sum_{\substack{j \epsilon M \\ j<i}} \mathrm{c_{ij} y_{ij}^t} \qquad 3.25$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$\sum_{\substack{j \in M' \\ j<i}} y_{ij}^t + \sum_{\substack{j \in M' \\ j>i}} y_{ji}^t = 2z_{it} \quad \forall t \in T, \forall i \in M' \qquad 3.26$$

$$\sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{\substack{j \in \mathfrak{I}, \\ j<i}} \mathrm{y_{ij}^t} \leq \sum_{i \in \mathfrak{I}} \mathrm{z_{it}} - \mathrm{z_{kt}}, \qquad \mathfrak{I} \subseteq \mathrm{M}, \mathrm{t} \in \mathrm{T},$$

για κάποια $k \in \mathfrak{I}$ 3.27

$$z_{st} \leq z_{0t} \; s \in M, t \in T \qquad 3.28$$

$$y_{ij}^{t} \leq z_{it} \; i \in M, t \in T \qquad 3.29$$

$$y_{ij}^{t} \in \{0,1\} \; \forall i, j \in M: i > j, t \in T \qquad 3.30$$

$$y_{i0}^{t} \in \{0,1,2\} \; \forall i \in M, t \in T \qquad 3.31$$

$$z_{it} \in \{0,1\} \; \forall i \in M, t \in T \qquad 3.32$$

$$I_{st} \geq 0 \; s \in M, t \in T \qquad 3.33$$

Και οι περιορισμοί

$$I_{0,t+1} = I_{0,t} + r_{0t} - \sum_{i \in M} \sum_{k=\pi(i,t)}^{t-1} b_{ikt} w_{ikt} \;, t \in T \qquad 3.34$$

$$I_{0,t} \geq \sum_{i \in M} \sum_{k=\pi(i,t)}^{t-1} b_{ikt} w_{ikt} \ , t \in T \tag{3.35}$$

$$I_{i,t+1} = I_{i,t} + \sum_{k=\pi(i,t)}^{t-1} b_{ikt} w_{ikt} - r_{it}, i \in M, t \in T \tag{3.36}$$

$$\sum_{k=1}^{\mu(i,0)} w_{i0k} = 1 \ , i \in M \tag{3.37}$$

$$\sum_{k=t+1}^{\mu(i,t)} w_{ikt} - \sum_{k=\pi(i,t)}^{t-1} w_{itk} = 0 \, , i \in M, t \in T \tag{3.38}$$

$$\sum_{k=\pi(i,H+1)}^{H} w_{ik,H+1} = 1 \ , i \in M \tag{3.39}$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{k=\pi(i,t)}^{t-1} b_{ikt} w_{ikt} \leq C z_{ot}, t \in T \tag{3.40}$$

$$\sum_{k=\pi(i,t)}^{t-1} w_{ikt} = z_{it}, i \in M, t \in T \tag{3.41}$$

$$w_{ikt} \in \{0,1\}, i \in M, \pi(i,j) \le k < t, t \in T' \qquad 3.42$$

Οι περιορισμοί (34) – (36) καθορίζουν το ύψος του αποθεματικού των αποθηκών και αντιστοιχούν με τους (2) – (4) των Arhetti et al.[11] Οι Solyaly & Sural [109] χρησιμοποιούν τους περιορισμούς αυτούς για να μεταφέρουν την πληροφορία του αποθεματικού στην αντικειμενική συνάρτηση αφού οι ποσότητες εφοδιασμού καθορίζονται από με την μεταβλητή w . Οι περιορισμοί (37) – (40) ορίζουν το δίκτυο του ελάχιστου μονοπατιού της πολιτικής OU για το σύνολο των πελατών $i \in M$. Το υποψήφιο δίκτυο του κάθε πελάτη αναπαριστάται από ένα σύνολο κορυφών $t \in T' \cup \{0\}$. Η σύνδεση από μια κορυφή k σε μια κορυφή t ($t \neq H+1$) περιέχει την πληροφορία της ποσότητα b_{ikt} που διανέμεται στον πελάτη I την χρονική στιγμή t, ενώ ο τελευταίος ανεφοδιασμός του έγινε την χρονική στιγμή k, όταν το $k \neq 0$, διαφορετικά αν k=0 ο πρώτος εφοδιασμός πραγματοποιείται την χρονική στιγμή t. Η Η σύνδεση των κορυφών k και H+1εκφράζει το γεγονός ότι ο τελευταίος εφοδιασμός του πελάτη i την k χρονική στιγμή , μέχρι το πέρας του χρονικού ορίζοντα. Ο περιορισμός (40) εκφράζει ότι η συνολική ποσότητα που θα διανεμηθεί στους πελάτες δεν μπορεί να ξεπεράσει την χωρητικότητα του οχήματος. Ο περιορισμός (41) εξασφαλίζει ότι αν ένας πελάτης ανεφοδιαστεί την χρονική στιγμή t είτε έχει εφοδιαστεί πριν το t την χρονική στιγμή k, όταν το $k \neq 0$, είτε για πρώτη φορά όταν το k=0. Τέλος ο περιορισμός (42) εξασφαλίζει την δυαδική μεταβλητή απόφασης w_{ikt}.

3.3 Το μοντέλο των Coelho & Laporte (2013)

“Model and Valid Inequalities for the multi – vehicle IRP”

Το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης και εφοδιασμού για στόλο οχημάτων επιλύθηκε με ακριβή αλγόριθμο Branch & Cut πολύ πρόσφατα από τους Coelho & Laporte [51]. Αποτελεί επέκταση της εργασίας των Arhetti et al. σε πολλαπλά οχήματα, και θεωρείται σημαντική και για αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά.

Η αναπαράσταση του προβλήματος γίνεται από ένα γράφημα G=(V,A) όπου V = {0,…,n} το σύνολο των κορυφών και $A = \{(i,j): i,j \in V, i \neq j\}$ το σύνολο των ακμών. Η κορυφή 0 αναπαριστά την κεντρική αποθήκη του διανομέα ενώ το σύνολο $V' = V \backslash \{0\}$ τις αποθήκες των n πελατών. Κόστος αποθήκευσης ορίζεται για το σύνολο των αποθηκών και συμβολίζεται με h_i για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε αποθήκη $i \in V$. Το μήκος του χρονικού ορίζοντα είναι p και σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T = \{1,2,\dots,p\}$ η ποσότητα r^t διατίθεται στον κεντρικό διανομέα. Υποθέτουμε ότι ο κεντρικός διανομέας έχει επαρκές αποθεματικό για να καλύψει την ζήτηση όλων των πελατών για όλες τις χρονικές στιγμές και δεν επιτρέπεται να βρεθεί με αρνητικό αποθεματικό. Ουσιαστικά η ζήτηση που θα παρουσιαστεί μια χρονική στιγμή θα πρέπει να καλυφθεί εξολοκλήρου και δεν επιτρέπεται να μετατεθεί την επόμενη χρονική στιγμή. Από την άλλη, στην αρχή του χρονικού ορίζοντα, ο διαχειριστής του συστήματος αποφάσεων γνωρίζει το ύψος του αποθεματικού όλων των αποθηκών και λαμβάνει την πληροφορία της ζήτησης για κάθε πελάτη και για κάθε χρονική στιγμή. Μια βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι η ποσότητα του προϊόντος r^tπου διατίθεται στον κεντρικό διανομέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για να καλύψει την ζήτηση της ίδιας χρονικής στιγμής, και η ποσότητα q_i^t που λαμβάνει ο πελάτης i την χρονική στιγμή t μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καλύψει τη ζήτηση της ίδια περιόδου μόνο. Ένα σύνολο $K = \{1, \dots, K\}$ φορτηγών είναι διαθέσιμα για την εκπλήρωση των διανομών. Συμβολίζεται με Q_k η χωρητικότητα του οχήματος k. Κάθε όχημα μπορεί να εκτελέσει ένα δρομολόγιο ανά χρονική στιγμή, από τον κεντρικό διανομέα σε ένα σύνολο πελατών. Το κόστος διανομής c_{ij}σχετίζεται με την κάθε σύνδεση (i,j) . Αντικειμενικός στόχος του προβλήματος η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους εκπληρώνοντας εξολοκλήρου την ζήτηση όλων των πελατών για όλο τον χρονικό ορίζοντα. Υποθέτοντας ότι το κόστος μετακίνησης είναι συμμετρικός εργάζονται σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, έτσι ώστε να μειωθούν οι απαιτήσεις σε σχέση με το πλήθος των μεταβλητών. Άρα το μοντέλο δουλεύει με την μη κατευθυνόμενη μεταβλητή x_{ij}^{kt} και ισούται με το πλήθος των φορών που η ακμή (i,j) με i<j χρησιμοποιείται στο δρομολόγιο του φορτηγού k τη χρονική στιγμή t. Επίσης ορίζεται η δυαδική μεταβλητή y_i^{kt} που ισούται με 1 όταν η αποθήκη i ανατίθεται στο k φορτηγό τη χρονική στιγμή t. Το ύψος του αποθεματικού στο τέλος της χρονικής στιγμής t της αποθήκης i συμβολίζεται με I_i^t. Συμβολίζεται επίσης με q_i^{kt}η ποσότητα προϊόντος που παραδίδεται στην αποθήκη I την χρονική στιγμή t από το φορτηγό k. Υποθέτοντας ότι οι ποσότητες που διανέμονται καθορίζονται από την πολιτική διανομής ML, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζεται από την παρακάτω σχέση.

$$\min \sum_{i \epsilon V} \sum_{t \epsilon T} h_i I_i^t + \sum_{k \in K} \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon V} \sum_{\substack{j \epsilon V \\ j > i}} c_{ij} x_{ij}^{kt} \qquad 3.43$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

1. **Καθορισμός αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα.**

Η τιμή του αποθεματικού της κεντρικής αποθήκης ισούται με την τιμή της την προηγούμενη χρονική στιγμή συν την ποσότητα προϊόντων που της διέθεσαν την χρονική στιγμή t μείον την συνολική ποσότητα που μετέφερε την χρονική στιγμή t με όλα τα διαθέσιμα φορτηγά.

$$I_0^t = I_0^{t-1} + r^t - \sum_{k \in K} \sum_{i \in V'} q_i^{kt} \quad \forall t \in T \qquad 3.44$$

2. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα.**

   Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T$ το αποθεματικό της αποθήκης είναι ικανοποιητικό ώστε να ανταπεξέλθει στην ζήτηση του συνόλου των απαιτήσεων των πελατών που θα εξυπηρετηθούν τη χρονική στιγμή t, και δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

$$I_0^t \geq 0 \, , \forall t \in T \qquad 3.45$$

3. **Καθορισμός αποθεματικού των αποθηκών του συνόλου των πελατών.**

   Το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης του εκάστοτε πελάτη τη χρονική στιγμή t ισούται με το ύψος του αποθεματικού την προηγούμενη χρονική στιγμή συν την ποσότητα που του διανέμεται την χρονική στιγμή t από το σύνολο του στόλου των φορτηγών μείον την ποσότητα που καταναλώνεται την χρονική στιγμή t . Δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$I_i^t = I_i^{t-1} + \sum_{k \in K} q_i^{kt} - d_i^t \; \forall t \in T, \forall i \in V' \qquad 3.46$$

4. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού των αποθηκών των πελατών**

   Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T$ το αποθεματικό της αποθήκης κάθε πελάτη $i \in V$ είναι μη αρνητικά ορισμένο.

$$I_i^t \geq 0, t \in T, i \in V \qquad 3.47$$

5. **Διασφάλισης της μέγιστης ποσότητας του αποθεματικού**

   Το ύψος του αποθεματικού κάθε αποθήκης δεν μπορεί να ξεπεράσει την χωρητικότητα της αποθήκης.

$$I_i^t \leq C_i, t \in T, i \in V \qquad 3.48$$

6. **Καθορισμός της ποσότητας διανομής σύμφωνα με την ML πολιτική.**

   Η συνολική ποσότητα που θα μεταφερθεί σε ένα πελάτη τη χρονική στιγμή t από όλα τα οχήματα δεν μπορεί να ξεπεράσει την χωρητικότητά της μείον το αποθεματικό της την προηγούμενη χρονική στιγμή.

$$\sum_{k \in K} \mathrm{q}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{kt}} \leq C_i - I_i^{t-1}, t \in T, i \in V \qquad 3.49$$

7. Περιορισμός που καθορίζει την ποσότητα που μεταφέρεται σε μια αποθήκη όταν αυτή εξυπηρετείται από το όχημα k την χρονική στιγμή t.

$$\mathrm{q}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{kt}} \leq C_i y_i^{kt}, t \in T, i \in V', k \in K \qquad 3.50$$

8. Διασφάλιση της χωρητικότητας του οχήματος διανομής.

$$\sum_{i \in V\prime} \mathrm{q}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{kt}} \leq Q_k y_0^{kt}, t \in T, k \in K \qquad 3.51$$

9. **Περιορισμός δρομολόγησης** Η συνθήκη εκφράζει ότι αν μία αποθήκη εξυπηρετηθεί τη χρονική περίοδο t το άθροισμα των εισροών και εκροών ισούται με 2 ενώ σε αντίθετη περίπτωση με 0

$$\sum_{\substack{j \in V \\ i<j}} x_{ij}^{kt} + \sum_{\substack{j \in V \\ j<i}} x_{ji}^{kt} = 2y_i^{kt} \quad \forall t \in T, \forall i \in V, k \in K \tag{3.52}$$

10. Διασφάλιση μη κυκλικής διαδρομής.

$$\sum_{i \in \mathfrak{I}} \sum_{\substack{j \in \mathfrak{I}, \\ j<i}} x_{ij}^{kt} \leq \sum_{i \in \mathfrak{I}} y^{kt}{}_i - y_m^{kt}, \qquad S \subseteq V', t \in T, k \in K \tag{3.53}$$

$$\text{για κάποια } m \in S$$

11. Περιορισμοί εξασφάλισης των ακεραίων τιμών των μεταβλητών απόφασης και των ορίων του

$$q_i^{kt} \geq 0 \quad \forall i \in V, t \in T, k \in K \tag{3.54}$$

$$x_{ij}^{kt} \in \{0,1\} \; \forall i, j \in M: i > j, t \in T, k \in K \tag{3.55}$$

$$x_{i0}^{t} \in \{0,1,2\} \; \forall i \in V, t \in T, k \in K \tag{3.56}$$

$$y_i^{kt} \in \{0,1\} \; \forall i \in V, t \in T, k \in K \tag{3.57}$$

Οι Coelho & Laporte [51] τροποποιούν τους έγκυρους περιορισμούς των Arhetti et al. [11] ώστε να ανταποκρίνονται στις ανάγκες του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης εφοδιασμού και διανομής με πολλαπλά οχήματα. Στην ουσία τροποποιούν τους περιορισμούς (3.17) ,(3.18) , (3.20) και (3.22)-(3.24) που ισχύουν για την πολιτική διαχείρισης ML. Έτσι κατά αντιστοιχία οι περιορισμοί (3.17) και (3.18) τροποποιούνται :

$$I_i^t \geq \left(1 - y_i^{kt}\right) d_i^t \qquad 3.58$$

$$I_i^{t-k} \geq \left(\sum_{j=0}^{k} d_i^{t-j}\right)\left(1 - \sum_{j=0}^{k} y_i^{t-j}\right) \qquad 3.59$$

$$i \in V, t \in T, k = 0,1, \dots, t-1$$

Ο περιορισμός 3. 20 τροποποιείται ακολούθως:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j=1}^{t} y_i^{kj} \geq \left\lceil \frac{\sum_{j=t-k}^{t-1} d_i^{kj} - I_i^0}{C_i} \right\rceil \qquad 3.60$$

$$i \in V, t \in T$$

Αντίστοιχα οι έγκυροι περιορισμοί (3.22)-(3.24) τροποποιούνται ακολούθως:

$$y_i^{kt} \leq y_0^{kt} \; i \in V, t \in T, k \in K \qquad 3.61$$

$$x_{i0}^{kt} \leq 2 y_i^{kt} \; i \in M, t \in T, k \in K \qquad 3.62$$

$$x_{ij}^{t} \leq \; y_i^{kt} \;\; i \in M, t \in T, , k \in K \qquad 3.63$$

3.4 Το Μοντέλο των Coelho, Condreau, and Laporte (2012)

“ IRP with transshipment”

Οι Coelho, Condreau, and Laporte [50] εισαγάγουν την ιδέα της μεταφόρτωσης στην συνδυαστική διαχείριση εφοδιασμού και διανομής. Ακολουθώντας την πολιτική αυτή, η ζήτηση των πελατών μπορεί να εκπληρωθεί είτε με διανομή από τον κεντρικό διαχειριστή, είτε με απευθείας διανομή από έναν άλλο πελάτη μέσω ενός μεσάζοντα.

Η αναπαράσταση του προβλήματος γίνεται από ένα γράφημα G=(V,A) όπου V = {0,…,n} το σύνολο των κορυφών και $A = \{(i,j): i,j \in V, i \neq j\}$ το σύνολο των ακμών. Η κορυφή 0 αναπαριστά την κεντρική αποθήκη του διανομέα ενώ το σύνολο $V' = V \backslash \{0\}$ τις αποθήκες των n πελατών. Κόστος αποθήκευσης ορίζεται για το σύνολο των αποθηκών και συμβολίζεται με h_i για κάθε χρονική στιγμή και για κάθε αποθήκη $i \in V$. Το μήκος του χρονικού ορίζοντα είναι p και σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T = \{1,2,\dots,p\}$ η ποσότητα r^t διατίθεται στον κεντρικό διανομέα. Υποθέτουμε ότι ο κεντρικός διανομέας έχει επαρκές αποθεματικό για να καλύψει την ζήτηση όλων των πελατών για όλες τις χρονικές στιγμές και δεν επιτρέπεται να βρεθεί με αρνητικό αποθεματικό. Ουσιαστικά η ζήτηση που θα παρουσιαστεί μια χρονική στιγμή θα πρέπει να καλυφθεί εξολοκλήρου και δεν επιτρέπεται να μετατεθεί την επόμενη χρονική στιγμή. Από την άλλη στην αρχή του χρονικού ορίζοντα ο διαχειριστής του συστήματος αποφάσεων γνωρίζει το ύψος του αποθεματικού όλων των αποθηκών και λαμβάνει την πληροφορία της ζήτησης για κάθε πελάτη και για κάθε χρονική στιγμή. Μια βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι η ποσότητα του προϊόντος r^tπου διατίθεται στον κεντρικό διανομέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για να καλύψει την ζήτηση της ίδιας χρονικής στιγμής, και η ποσότητα q_i^t που λαμβάνει ο πελάτης i την χρονική στιγμή t μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καλύψει τη ζήτηση της ίδια περιόδου μόνο. Ένα φορτηγό χωρητικότητας Q εκτελεί τις διανομές. Υποθέτουμε ότι πραγματοποιείται μια διανομή κάθε χρονική στιγμή από τον κεντρικό διανομέα σε ένα υποσύνολο πελατών.   Το κόστος διανομής c_{ij}σχετίζεται με την κάθε σύνδεση (i,j) . Η μεταφόρτωση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δεύτερη φάση μέσα στην χρονική στιγμή t, είτε από τον κεντρικό διανομέα είτε από ένα υποσύνολο του συνόλου των πελατών $S \subseteq V'$. Η διαδικασία της μεταφόρτωσης μπορεί να είναι επικερδής όταν εμφανιστεί έξτρα ζήτηση από ένα πελάτη και μπορεί να τον εφοδιάσει είτε η κεντρική αποθήκη, είτε ένας άλλος πελάτης. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί αναθέτοντας μια υπεργολαβία σε εξωτερικό συνεργάτη (εταιρεία διανομής), η οποία θα εκτελεί τις μεταφορτώσεις. Οι διανομές αυτές αποτελούν απευθείας συνδέσεις και το κόστος διανομής συσχετίζεται με την ποσότητα των προϊόντων που μεταφέρονται από το $i \xrightarrow{b_{ij}} j$. Υπάρχει δυνατότητα σε μια χρονική στιγμή ένας πελάτης να εφοδιαστεί και από το δρομολόγιο του κεντρικού διανομέα σε πρώτη φάση αλλά και μετέπειτα από τον εξωτερικό συνεργάτη με απευθείας διανομή από άλλο τρίτο σημείο. Ο κεντρικός διανομέα εκτελεί διανομές υπό την πολιτική του OU ML ,ενώ η μεταφόρτωση ορίζεται με την πολιτική ML. Υποθέτουμε επίσης ότι το αποθεματικό των πελατών δεν μπορεί να πάρει τιμές μικτότερες του μηδενός και αλλά οι ποσότητες που έχει στην κατοχή του μπορεί να ξεπεράσουν την χωρητικότητα της αποθήκης. Επίσης, μια ακόμη υπόθεση είναι ότι οι παραδόσεις γίνονται στην χρονική στιγμή που εκδηλώνεται η ζήτηση. Αντικειμενικός στόχος του μοντέλου διαχείρισης είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους αποθήκευσης και μεταφοράς των προϊόντων. Τα πλάνο εφοδιασμού καθορίζεται από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Το ύψος του αποθεματικού στο τέλος της κάθε χρονικής στιγμής δεν μπορεί να ξεπεράσει την χωρητικότητα της αποθήκης.
- Οι αποθήκες δεν επιτρέπεται να μείνουν χωρίς αποθεματικό.
- Οι πολιτικές OU και ML ανεφοδιασμού χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της ποσότητας διανομής ανά χρονική στιγμή.
- Το φορτηγό διανομής του κεντρικού διαχειριστή μπορεί να εκτελέσει ένα δρομολόγιο κάθε χρονική στιγμή που θα ξεκινάει και θα καταλήγει στην κεντρική αποθήκη.
- Και τέλος η χωρητικότητα του οχήματος δεν μπορεί να παραβιαστεί.

Το μοντέλο διαχείρισης καθορίζει:

Ποιός πελάτης θα ανεφοδιαστεί κάθε χρονική περίοδο

Ποιά δρομολόγια θα πραγματοποιηθούν κάθε χρονική στιγμή

Ποιές ποσότητες θα μεταφερθούν από τον έναν πελάτη στον άλλον χρησιμοποιώντας την διαδικασία της μεταφόρτωσης.

Έτσι το μοντέλο καθορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\min \sum_{i \epsilon V} \sum_{t \epsilon T} h_i I_i^t + \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon V} \sum_{\substack{j \epsilon V \\ j>i}} c_{ij} x_{ij}^t \quad + \sum_{i \in R \cup \{0\}} \sum_{j \in V'} \sum_{t \in T} b_{ij} w_{ij}^t \qquad 3.1$$

Η w_{ij}^t αποτελεί μεταβλητή απόφασης και εκφράζει την ποσότητα προϊόντος που θα μεταφερθεί από το $i \xrightarrow{b_{ij}} j$, με την διαδικασία της μεταφόρτωσης.

1. Καθορισμός αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα.

Η τιμή του αποθεματικού της κεντρικής αποθήκης ισούται με την τιμή της την προηγούμενη χρονική στιγμή συν την ποσότητα προϊόντων που της διέθεσαν την χρονική στιγμή t μείον την συνολική ποσότητα που μετέφερε την χρονική στιγμή t και μέσω του δικού της φορτηγού αλλά και μέσω του εξωτερικού συνεργάτη διανομής .

$$I_0^t = I_0^{t-1} + r^t - \sum_{i \in V'} q_i^t - \sum_{i \in V'} w_{0i}^t \ \forall t \in T \qquad 3.2$$

2. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού της αποθήκης του κεντρικού διανομέα.**

   Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T$ το αποθεματικό της αποθήκης είναι ικανοποιητικό ώστε να ανταπεξέλθει στην ζήτηση του συνόλου των απαιτήσεων των πελατών που θα εξυπηρετηθούν τη χρονική στιγμή t, και δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

$$I_0^t \geq 0 \, , \forall t \in T \qquad 3.3$$

3. **Καθορισμός αποθεματικού των αποθηκών του συνόλου των πελατών.**

   Το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης του εκάστοτε πελάτη τη χρονική στιγμή t ισούται με το ύψος του αποθεματικού την προηγούμενη χρονική στιγμή συν την ποσότητα που του διανέμεται την χρονική στιγμή t (από τον κεντρικό διανομέα αλλά και από εξωτερικό συνεργάτη) μείον την ποσότητα που καταναλώνεται την χρονική στιγμή t αλλά και στέλνει σε άλλο πελάτη με τη διαδικασία της μεταφόρτωσης. Δηλαδή δίνεται από την σχέση:

$$I_i^t = I_i^{t-1} + \sum_{k \in K} q_i^{kt} + \sum_{j \in R \cup \{0\}} w_{ji}^t - \sum_{j \in V'} w_{ij}^t - d_i^t \; \forall t \in T, \forall i \in V' \quad 3.4$$

4. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού των αποθηκών των πελατών**

Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T$ το αποθεματικό της αποθήκης κάθε πελάτη $i \in V$ είναι μη αρνητικά ορισμένο.

$$I_i^t \geq 0, t \in T, i \in V \quad 3.5$$

5. **Εξασφάλιση μη – μηδενικού αποθεματικού των αποθηκών των πελατών**

Ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι σε κάθε χρονική στιγμή $t \in T$ το αποθεματικό της αποθήκης κάθε πελάτη $i \in V$ είναι μη αρνητικά ορισμένο.

$$I_i^t \geq 0, t \in T, i \in V \quad 3.6$$

6. **Διασφάλισης της μέγιστης ποσότητας του αποθεματικού**

Το ύψος του αποθεματικού κάθε αποθήκης δεν μπορεί να ξεπεράσει την χωρητικότητα της αποθήκης.

$$I_i^t \leq C_i \, , t \in T, i \in V \qquad 3.7$$

7. Περιορισμοί εξασφάλισης της ποσότητας διανομής σύμφωνα με την πολιτική "Order – Up – to level"

Οι περιορισμοί αυτοί εξασφαλίζουν ότι η ποσότητα που θα διανεμηθεί σε έναν πελάτη i την χρονική στιγμή t είναι είτε $C_i - I_i^{t-1}$ σε περίπτωση που ο πελάτης εξυπηρετηθεί την χρονική στιγμή t, είτε μηδέν σε αντίθετη περίπτωση. Τότε οι παρακάτω ανισότητες εκφράζουν το ζητούμενο.

$$q_i^t \geq C_i \sum_{j \in V'} x_{ij}^t - I_i^{t-1} \, , \forall t \in T, \forall i \in V' \qquad 3.8$$

$$q_i^t \leq C_i - I_i^{t-1} \, , \forall t \in T, \forall i \in V' \qquad 3.9$$

$$q_i^t \leq C_i \sum_{j \in V'} x_{ij}^t \, , \forall t \in T, \forall i \in V' \qquad 3.10$$

8. Διασφάλιση της χωρητικότητας του οχήματος διανομής.

$$\sum_{i \in V'} x_i^t \leq Q \text{ , } t \in T \tag{3.11}$$

9. **Περιορισμοί που αφορούν την δρομολόγηση**

   a)Εξασφάλιση της ροής του δικτύου

   b) Ένα όχημα εξυπηρετεί το δρομολόγιο

   c) Διασφάλιση μη κυκλικών διαδρομών

$$\sum_{j \in V'} x_{ij}^t = \sum_{j \in V'} x_{ji}^t \quad \forall t \in T \text{ , } \forall i \in V' \tag{3.12}$$

$$\sum_{i \in V'} x_{i0}^t \leq 1 \ \forall t \in T \tag{3.13}$$

$$u_i^t - u_j^t + Q x_{ij}^t \leq Q - q_j^t \ i, j \in V', t \in T \tag{3.14}$$

$$q_i^t \leq u_i^t \leq Q \tag{3.15}$$

10. **Περιορισμοί εξασφάλισης των ακεραίων τιμών των μεταβλητών απόφασης και των ορίων του**

$$q_i^t, u_i^t, w_{ij}^t \geq 0 \quad \forall i \in V, t \in T \tag{3.16}$$

$$x_{ij}^t \in \{0,1\} \ \forall i, j \in V, t \in T \tag{3.17}$$

3.5 Συμπεράσματα

Τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν και αναλυθήκαν στην παράγραφο αυτή έχουν αναπτυχθεί τροποποιώντας το βασικό πλαίσιο που έθεσαν οι Arthetti et al. το 2007. Αναλύοντας τα κοινά τους στοιχεία αλλά και μελετώντας τις διαφορές τους σχηματίστηκε μια πιο σφαιρική εικόνα σχετικά με την μοντελοποίηση του προβλήματος και των προϋποθέσεων τους. Η πολιτική του OU εισάγεται στο πρόβλημα ώστε να οριστούν οι περιορισμοί που θα καθοδηγήσουν τον καθορισμό των ποσοτήτων που πρέπει να μεταφερθούν σε κάθε χρονική στιγμή σε κάθε αποθήκη. Μια κοινή αποδοχή των μοντέλων αυτών είναι η προϋπόθεση της συσχέτισης της ποσότητας που θα διανεμηθεί με εκείνη της ζήτησης της συγκεκριμένης χρονικής στιγμής. Ωστόσο σε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο όπου οι πληροφορίες θεωρούνται εκ των προτέρων γνωστές για όλο το χρονικό ορίζοντα η προϋπόθεση αυτή δείχνει περιοριστική. Έτσι θεωρήθηκε ότι υπάρχει δυνατότητα να τεθούν διαφορετικές σχέσεις που να ορίζουν την βέλτιστη ποσότητα μεταφοράς προϊόντων. Ο σημαντικότερος λόγος – που το εξετάστηκε αυτό είναι επειδή – ο στόχος ήταν να μελετηθούν οικονομικότερες πολιτικές διανομής που θα αποσκοπούν σε μειωμένα κόστη αποθήκευσης.

Κεφάλαιο 4 Στοχαστικός προγραμματισμός

4.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια της έρευνας της διδακτορικής διατριβής μελετήθηκε ενδελεχώς η μεθοδολογική προσέγγιση του στοχαστικού προγραμματισμού. Η μελέτη αυτή έδωσε την δυνατότητα στον ερευνητή να ορίσει και να λύσει το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής προϊόντων και του εφοδιασμού των αποθηκών, ως στοχαστικό πρόβλημα και να προτείνει την διαδικασία της μεταφόρτωσης ως διορθωτική πολιτική. Όταν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης βρίσκεται σε συνθήκες αβεβαιότητας, το ζητούμενο είναι να διαμορφωθεί εκείνη η πολιτική που θα ελαχιστοποιήσει το κόστος των αρχικών αποφάσεων αλλά και εκείνων που θα χρειαστεί να παρθούν στην περίπτωση που θα απαιτηθεί αναπροσαρμογή του πλάνου. Αν όμως, πραγματικά επιθυμείται η αξιολόγηση των επιλογών σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας, θα πρέπει να διατυπωθούν (μοντελοποιηθούν) σαφέστατα και με ακρίβεια οι δυνατές μελλοντικές αποφάσεις – προοπτικές. Η αποτύπωση των προοπτικών που πηγάζουν από την αβεβαιότητα είναι απαραίτητη για να επιτευχθεί η ορθή εκτίμηση του μελλοντικού κόστους που μπορεί να προκύψει . Μόνο όταν αξιολογούνται σαφώς και αναλυτικά οι πιθανές μελλοντικές αποφάσεις παρέχεται η δυνατότητα καθορισμού ενός ευέλικτου συστήματος αποφάσεων. Η ευελιξία με την σειρά της έχει αξία και νόημα όταν συνεκτιμάται η στοχαστικότητα των παραμέτρων του συστήματος αποφάσεων.

Κρίνεται λοιπόν σκόπιμο, να παρουσιαστεί αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο ένα ντετερμινιστικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού διευρύνεται σε πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού και πώς αυτό με τη σειρά του, με κάποιους μετασχηματισμούς, διατυπώνεται με την μορφή του ντετερμινιστικά ισοδυνάμου του. Μετέπειτα παρουσιάζεται πως αυτό μπορεί να επιλυθεί στο πλαίσιο της μεθόδου της αποσύνθεσης του Bender, με ποια αλγοριθμική διαδικασία, αλλά και πώς η μεθοδολογία αυτή διευρύνεται ώστε να δώσει λύση και σε προβλήματα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού. Επίσης, γίνεται αναφορά στις ομοιότητες που παρουσιάζει η μέθοδος αυτή, η λεγόμενη "L –Shaped", με την μέθοδο του κλάδου και φραγής (Branch and Bound) αλλά και του συνδυασμού της με την μέθοδο του περιορισμού της εφικτής περιοχής ή αλλιώς και μέθοδος τεμνόμενων επιπέδων (cutting plane method) την λεγόμενη "Branch and Cut" εφεξής κλάδου και αποκοπής.

4.1.1 Στοχαστικός γραμμικός προγραμματισμός δύο φάσεων

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποτίθεται ότι ένα ντετερμινιστικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\min \mathrm{z} = \mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{s.t.}\, \mathrm{Ax} = \mathrm{b},$$

$$\mathrm{x} \geq 0$$

Όπου x ένα (n x 1) διάνυσμα αποφάσεων , και C, A, b σταθεροί όροι (n x 1) διάνυσμα, (m x n) πίνακας και (m x 1) διάνυσμα αντίστοιχα. Η τιμή $z = C^T x$ εκφράζει την αντικειμενική συνάρτηση ενώ το σύνολο $\mathrm{K_1} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \mathrm{x} \geq 0\}$

αποτελεί το σύνολο των εφικτών λύσεων. Η βέλτιστη λύση x^*είναι μια εφικτή λύση για την όποια ικανοποιείται η σχέση $\mathrm{C^T x} \geq \mathrm{C^T x^*}$για όλες τις εφικτές λύσεις. Στο στοχαστικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού κάποιοι από τους σταθερούς όρους δεν είναι εκ των προτέρων γνωστοί και μπορούν να θεωρηθούν ως τυχαίες μεταβλητές. Τα μοντέλα προσφυγής τα λεγόμενα “recourse programs”στην ξένη βιβλιογραφία είναι εκείνα στα οποία μπορούν να υλοποιηθούν διορθωτικές ενέργειες (recourse actions) όταν οι τυχαίες παράμετροι του μοντέλου αποκαλυφθούν. Για την ακρίβεια, θεωρείται ότι οι τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τις παραμέτρους του προβλήματος, έχουν εκ των προτέρων γνωστή κατανομή και μετρά πιθανοτήτων. Στην συνέχεια υποτίθεται όμως ότι η πραγματική τιμή των τυχαίων παραμέτρων αποκαλύπτεται αφού έχουν παρθεί οι αποφάσεις. Δηλαδή το διάνυσμα $\xi = \xi(\omega)$ εξαρτώμενο από τον χώρο των γεγονότων $\omega \in \Omega$ γίνεται στη συνέχεια γνωστό.

Στα μοντέλα προσφυγής το σύνολο των αποφάσεων χωρίζεται σε δύο ομάδες:

- Ένα πλήθος αποφάσεων θα πρέπει να παρθεί πριν γίνουν γνωστές όλες οι τυχαίες παράμετροι . Όλες αυτές οι αποφάσεις καλούνται αποφάσεις πρώτης φάσης “ *first – stage decision*” και η περίοδος που λαμβάνονται λέγεται πρώτη φάση *“first – stage”.*
- Ένα άλλο πλήθος αποφάσεων μπορεί να παρθεί αφού αποκαλυφθούν όλες οι τιμές των μεταβαλλόμενων παραμέτρων του προβλήματος . Όλες αυτές οι αποφάσεις καλούνται αποφάσεις δεύτερης φάσης “ *second – stage decision”* και η αντίστοιχη περίοδος που λαμβάνονται λέγεται δεύτερη φάση *“second – stage”.*

Οι μεταβλητές απόφασης της πρώτης φάσης εκφράζονται με τον διάνυσμα x ενώ οι μεταβλητές απόφασης της δεύτερης φάσης εκφράζονται αντίστοιχα με το διάνυσμα y ή y(ω) ή και y(ω,x) . Στην ουσία, οι μεταβλητές της δεύτερης φάσης εξαρτώνται από την αποκάλυψη των τιμών των τυχαίων παραμέτρων αλλά και των αποφάσεων της πρώτης φάσης. Θέλοντας να αποτυπωθεί η λογική μετάβαση των γεγονότων και των αποφάσεων η παρακάτω σχέση δίνει μια ένδειξη για την ροή των καταστάσεων.

$$\mathrm{x} \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow \mathrm{y}(\omega, \mathrm{x})$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι εκείνο που διαχωρίζει τις αποφάσεις της πρώτης και δεύτερης φάσης είναι η αποκάλυψη της πραγματικής τιμής των τυχαίων παραμέτρων του προβλήματος. Οι αποφάσεις αυτές μπορεί να εκφράζουν και μια ακολουθία αποφάσεων και γεγονότων. Γενικά, η μοντελοποίηση αυτή υποθέτει ότι στο σύστημα αυτό επιλέγονται οι αποφάσεις εκείνες που ελαχιστοποιούν το κόστος της πρώτης φάσης αλλά και το αναμενόμενο κόστος της δεύτερης φάσης δηλαδή των διορθωτικών ενεργειών.

Το κλασσικό πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού δύο φάσεων όπως διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1955 από τους Dantzig [63] & Beale [19]. δίνεται από το παρακάτω μοντέλο.

$$\min \mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \mathrm{E}_{\xi}[\mathrm{q}(\omega)^{\mathrm{T}}\mathrm{y}(\omega)] \tag{4.1}$$

$$\mathrm{s.t.}\, \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{T}(\omega)\mathrm{x} + \mathrm{W}\,\mathrm{y}(\omega) = \mathrm{h}(\omega), \tag{4.3}$$

$$\mathrm{x} \geq 0, \mathrm{y}(\omega) \geq 0. \tag{4.4}$$

Το (n_1 x 1) διάνυσμα x αποτελεί τη μεταβλητή απόφασης της πρώτης φάσης ενώ τα δεδομένα του προβλήματος της πρώτης φάσης δίνονται από (n_1 x 1) διάνυσμα C , από τον πίνακα (m_1 x n_1) A και το διάνυσμα (m_1 x1) b. Στην δεύτερη φάση ένα πλήθος γεγονότων $\omega \in \Omega$ μπορούν να πραγματοποιηθούν. Για κάθε πραγματοποίηση $\omega \in \Omega$ οι παράμετροι της δεύτερης φάσης $q(\omega), T(\omega), h(\omega)$ γνωστοποιούνται όπου $q(\omega)$και $h(\omega)$είναι διανύσματα διάστασης (n_2 x 1) και (m_2 x1) αντίστοιχα, ενώ $T(\omega)$ ένας πίνακας διαστάσεων (m_2 x n_2). Κάθε συνιστώσα των q, T, h είναι άρα και μια πιθανή τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι $T_i(\omega)$ η i γραμμή του $T(\omega)$. Θέλοντας σε ένα διάνυσμα να συμπεριληφθούν όλες τις τυχαίες μεταβλητές της δεύτερης φάση διαμορφώνεται το διάνυσμα $\xi^T(\omega) = (\ q(\omega)^T, h(\omega)^T, T_1(\omega), \dots, T_{m_2}(\omega))$ διάστασης θεωρητικά έως $N = n_2 + m_2 + (m_2 \text{ x } n_2)$ συνιστώσες.

Έστω το σύνολο $\Xi \subset \Re^N$των ξ που αντιπροσωπεύει το μικρότερο κλειστό υποσύνολο στον $\Re^N$ για τον οποίο ισχύει $P(\Xi) = 1$. Όταν το γεγονός ω γίνεται γνωστό οι τιμές των q, T, h γνωστοποιούνται και αυτές με την σειρά τους. Μετέπειτα οι αποφάσεις y(ω) ή και y(ω,x) θα πρέπει να παρθούν. Η εξάρτηση του y από το ω είναι τελείως διαφορετικής φύσης από αυτή του q ή των άλλων παραμέτρων από το ω. Στην ουσία, δεν υπάρχει συναρτησιακή σχέση, αλλά ο συμβολισμός απλά υποδηλώνει ότι η τιμή της απόφασης του y δεν είναι ίδια για διαφορετικά γεγονότα ω. Επιλέγονται ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (4.3) και (4.4) σχεδόν βεβαία για κάθε $\omega \in \Omega$ εκτός ίσως των συνόλων με μηδενική πιθανότητα. Υποτίθεται λοιπόν ότι οι τυχαίοι περιορισμοί ισχύουν υπό τις συνθήκες. Η αντικειμενική συνάρτηση (4.1) του στοχαστικού μοντέλου περιέχει ένα ντετερμινιστικό όρο $C^T x$ και την αναμενόμενη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της δεύτερης φάσης για το σύνολο των πραγματοποιήσεων των τυχαίων γεγονότων ω . Ο όρος αυτός της δεύτερης φάσης είναι πιο πολύπλοκος αφού για κάθε ω η τιμή του y(ω) είναι λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Για να απλοποιηθεί αυτό, πολλές φορές ο όρος αυτός αντικαθιστάται από τον ντετερμινιστικά ισοδύναμό του. Έτσι για κάθε πραγματοποίηση των γεγονότων ω έστω ότι

$$Q\big(x,\xi(\omega)\big) = \min_y\{\, q(\omega)^T y(\omega) \mid W\, y(\omega) = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0\}$$

εκφράζει την συνάρτηση των διορθωτικών ενεργειών. Στην συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση της αναμενόμενη τιμής των διορθωτικών ενεργειών να δίνεται από την ακόλουθη σχέση.

$$Q(x) = E_\xi\, Q\big(x,\xi(\omega)\big)$$

Τότε το ντετερμινιστικά ισοδύναμο πρόγραμμα (Deterministic Equivalent Program) δίνεται από το παρακάτω μοντέλο.

$$\min z = C^T x + Q(x)$$

$$s.t. Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

Η μορφή αυτή του στοχαστικού προβλήματος παρουσιάζει ξεκάθαρα την διαφοροποίησή του από την ντετερμινιστική μοντελοποίηση η οποία οφείλεται στη παρουσία της συνάρτησης της αναμενόμενης τιμή των διορθωτικών ενεργειών. Αν η συνάρτηση αυτή δίνεται τότε το στοχαστικό πρόγραμμα μετατρέπεται σε ένα τυπικό μη γραμμικό πρόγραμμα βελτιστοποίησης.

4.2 L –shaped μέθοδος αποσύνθεσης

Τα μοντέλα προσφυγής βασίζονται στο γεγονός ότι οι αποφάσεις που προκύπτουν, ελαχιστοποιούν το κόστος της πρώτης φάσης – του αρχικού προβλήματος δίχως να αποκαλυφθεί η πληροφορία των τυχαίων παραμέτρων, αλλά και το αναμενόμενο κόστος των μελλοντικών αποφάσεων της δεύτερης φάσης όπου πραγματοποιούνται οι διορθωτικές ενέργειες . Στην περίπτωση που το πλήθος των γεγονότων της δεύτερης φάσης είναι πεπερασμένο, μπορεί να μετασχηματιστεί το στοχαστικό μοντέλο στο ντετερμινιστικά ισοδύναμό του. Όταν το πλήθος των πραγματώσεων της δεύτερης φάσης είναι μεγάλο, το πρόβλημα γίνεται πολύ μεγάλο. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων στοχεύει στην βελτιστοποίηση του γραμμικού μετασχηματισμού των διορθωτικών ενεργειών και της αντικειμενικής συνάρτησης της πρώτης φάσης. Η μέθοδος αυτή του περιορισμού του χώρου των εφικτών λύσεων (cutting plane method) καλείται L – Shaped. Η μέθοδος προτάθηκε από τους Van Slyke & Wets [114]το 1969. Αποτελεί τροποποίηση της μεθόδου αποσύνθεσης του Benders, η όποια με την σειρά της είχε προταθεί λίγα χρόνια νωρίτερα το 1962. Η ιδέα της μεθόδου στοχεύει στον να προσεγγιστούν προοδευτικά οι λύσεις του μη – γραμμικού όρου της αντικειμενικής συνάρτησης $Q(x)$. Η γενική αρχή, πίσω από αυτή την προσέγγιση, στοχεύει στην αποφυγή της πλήρης αξιολόγησης του χώρου των εφικτών λύσεων, επειδή στην ουσία απαιτείται η επίλυση των προβλημάτων της δεύτερης φάσης για όλο το σύνολο των γεγονότων που μπορεί να προκύψουν. Έτσι, ο όρος χρησιμοποιείται για να συνδέσει ένα κύριο πρόβλημα (master problem) με μεταβλητές απόφασης x με τα πιθανά υπό- πρόβλημα (sub -problem) των διορθωτικών ενεργειών. Για να υλοποιηθεί η προσέγγιση αυτή, υποτίθεται ότι το τυχαίο διάνυσμα ξ έχει πεπερασμένο πλήθος γεγονότων. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποτίθεται ότι k =1,…, K είναι δείκτης των πιθανών πραγματώσεων του χώρου και p_k οι αντίστοιχες πιθανότητες του. Κάτω από αυτή την υπόθεση, μπορεί να μετασχηματιστεί το ντετερμινιστικά ισοδύναμο μοντέλο σε ένα πιο εκτενές της ακόλουθης μορφής. Η μορφή αυτή δημιουργείται συσχετίζοντας ένα σύνολο μεταβλητών απόφασης δεύτερης φάσης y_k με κάθε πραγματοποίηση ξ δηλαδή (q_k, h_k, T_k) . Συνήθως λέγεται εκτεταμένη μορφοποίηση (Extensive Form) του ντετερμινιστικά ισοδύναμου προβλήματος .

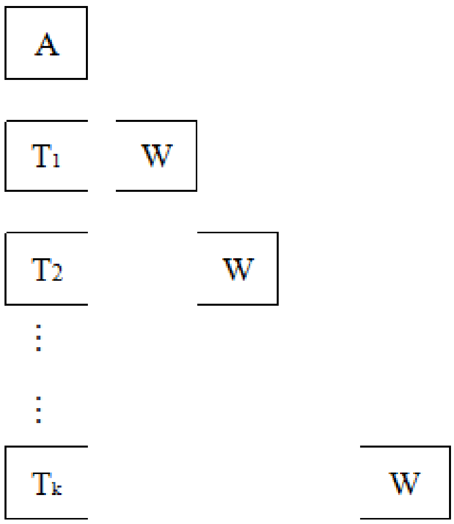
$$(EF): \min C^T x + \sum_{k=1}^{K} p_k \, {q_k}^T y_k \qquad (4.5)$$

$$s.t. \, Ax = b, \qquad (4.6)$$

$$T_k x + W \, y_k = h_k, \text{ k=1… K} \qquad (4.7)$$

$$x \geq 0, y_k \geq 0 \quad \text{k=1… K} \qquad (4.8)$$

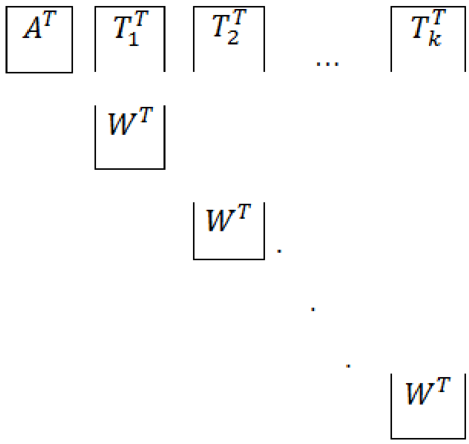
Αναλυτικά η ανά μπλοκ δομή του γραμμικού προβλήματος δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 4-1:



Σχήμα 4-1: Η δομή των μπλοκ της εκτεταμένης μορφής του μοντέλου δύο φάσεων

Στην δομή αυτή οφείλεται και η ονομασία της μεθόδου L –shaped που σημαίνει σε σχήμα λάμδα του αγγλικού αλφάβητου .

Βλέποντας την δυική μορφή του εκτεταμένου μοντέλου που δίνεται στο Σχήμα 4-2 αλλά και του πρωτεύοντος στο Σχήμα 4-1 είναι απόλυτα σαφές ότι μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος αποσύνθεσης του Bender για το πρωτεύον πρόβλημα και η μεθόδος Dantzig – Wolfe για το δυικό.



Σχήμα 4-2: Η δομή των μπλοκ της εκτεταμένης μορφής του δυικού μοντέλου δύο φάσεων

Στη ουσία η L – shaped μεθοδολογία είναι εφαρμογή ή αλλιώς τροποποίηση της Bender Decomposition μεθόδου για τα προβλήματα του στοχαστικού προγραμματισμού. Η Bender Decomposition είναι μια τεχνική επίλυσης πολύ μεγάλων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, που έχουν μια συγκεκριμένη δομή πίνακα ανά μπλοκ. Όσο η επαναληπτική διαδικασία προσεγγίζει την λύση, η μέθοδος προσθέτει περιορισμούς στο πρόβλημα σταδιακά και γι αυτό το λόγο αυτή καλείται και "Row Generation". Εφάμιλλη με αυτή η μέθοδος των Dantzig & Wolfe Decomposition που στην ουσία είναι βασισμένη στην μέθοδο του "Column Generation". Στην περίπτωση αυτή, προστίθενται σταδιακά οι μεταβλητές και εφαρμόζεται επίσης σε μεγάλα γραμμικά προβλήματα της μορφής του δυικού μοντέλου. Η πιο γενική διατύπωση της μεθόδου L – Shaped δίνεται από τα ακόλουθα βήματα.

<u>Βήμα 0:</u> Αρχικές συνθήκες

Θέτεις το r = s = v = 0

<u>Βήμα 1: Επίλυση του κύριου προβλήματος</u>

Θέτεις ν := ν +1 και λύνεις το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα το οποίο καλείται «*πρόσφατο*» *"current problem"*

$$(CP) \quad \min C^T x + \theta \tag{4.9}$$

$$\mathrm{s.t.}\, \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \tag{4.10}$$

$$\mathrm{D_l x} \geq \mathrm{d_l}, \mathrm{l} = 1, \dots, \mathrm{s} \tag{4.11}$$

$$\mathrm{E_l x} + \theta \geq \mathrm{e_l} \ \mathrm{l} = 1, \dots, \mathrm{r} \tag{4.12}$$

$$\mathrm{x} \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

Υποθέτοντας ότι (x^ν, θ^ν) είναι η βέλτιστη λύση του CP

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί της μορφής (4.12) θέτεις $\theta^\nu = -\infty$ και δεν λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό του x^ν.

<u>Βήμα 2:</u> Περιορισμοί εφικτότητας *"Feasibility Cuts"*

Για k=1… K λύνεις τα ακόλουθα γραμμικά προβλήματα

$$\min \mathrm{w}' = \mathrm{e^T v^+} + \mathrm{e^T v^-} \tag{4.14}$$

$$\mathrm{s.t.} \qquad \mathrm{Wy} + \mathrm{Iv^+} - \mathrm{Iv^-} = \mathrm{h_k} - \mathrm{T_k x^\nu} \tag{4.15}$$

$$\mathrm{y} \geq 0, \mathrm{v^+} \geq 0, \mathrm{v^-} \geq 0. \tag{4.16}$$

Όπου $\mathrm{e^T} = (1,1,1 \dots 1)$

Για τα k στα οποία προκύπτει $w' > 0$ υπολογίζεις τη σκιώδη τιμή (shadow price / simplex multiplier) σ^ν και έπειτα ορίζεις οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathrm{D_{r+1}} = (\sigma^\nu)\mathrm{T_k} \tag{4.17}$$

Και

$$\mathrm{d}_{r+1} = (\sigma^{\nu})\mathrm{h}_{k} \tag{4.18}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω παραμέτρους δημιουργούνται τα λεγόμενα feasibility cuts $D_l x \geq d_l$ έπειτα θέτεις τη τιμή r:=r+1 και στην συνέχεια επιστρέφεις στο βήμα 1.

Αν για όλα τα k=1… K προκύπτει $w' = 0$ τότε συνεχίζεις στο βήμα 3.

<u>**Βήμα 3 :**</u> Περιορισμοί αριστότητας *“Optimality Cuts”*

Για k=1… K λύνεις τα γραμμικά προβλήματα της δεύτερης φάσης

$$\min \mathrm{w} = \mathrm{q}^{T}\mathrm{y} \tag{4.19}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathrm{W}\mathrm{y} = \mathrm{h}_{k} - \mathrm{T}_{k}\mathrm{x}^{\nu}, \tag{4.20}$$

$$\mathrm{y} \geq 0. \tag{4.21}$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την σκιώδη τιμή π_k^{ν} για κάθε k υπολογίζεις τις ακόλουθες παραμέτρους

$$\mathrm{E}_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{p}_{k} (\pi_{k}^{\nu})\mathrm{T}_{k} \tag{4.22}$$

Και

$$\mathrm{e}_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{p}_{k} (\pi_{k}^{\nu}) \ \mathrm{h}_{k} \tag{4.23}$$

Στην συνέχεια θέτεις την τιμή $w^{\nu} = e_{s+1} - E_{s+1}\, x^{\nu}$

Αν $\theta^{\nu} \geq w^{\nu}$ τότε έχει βρεθεί η βέλτιστη λύσηx^{ν} και σταματάει η διαδικασία.

Διαφορετικά θέτεις με s:=s+1 και προσθέτεις τον ακόλουθο περιορισμό $\theta \geq e_{s+1} - E_{s+1}x$ στο CP και επιστρέφεις στο βήμα 1. ■

Η μέθοδος βασίζεται στην προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό της συνάρτησης προσφυγής Q(x) . Προσεγγίζει την λύση προσθέτοντας προοδευτικά δύο ειδών περιορισμούς, εκείνων που περιορίζουν τον εφικτό χώρο $\{x|Q(x) < \infty\}$ της πρώτης φάσης, έτσι ώστε να είναι εφικτή η λύση στην δεύτερη φάση (feasibility cuts) και στην συνέχεια εκείνους που προσεγγίζουν την βέλτιστη αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης προσφυγής (Optimality Cuts).

4.3 Περιορισμός του εφικτού χώρου - Πλήρης διορθωτικός σχεδιασμός

Το δεύτερο βήμα της μεθόδου L – Shaped στοχεύει να περιορίσει τον χώρο των εφικτών λύσεων σε εκείνα τα x για τα οποία η λύση του προβλήματος του δευτέρου σταδίου είναι εφικτή. Το βήμα αυτό μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να είναι εξαιρετικά χρονοβόρο. Μπορεί να απαιτηθεί να λυθεί έως και K φορές και να χρειαστεί να επαναληφθεί αρκετές φορές, ώστε να επιτευχθεί ο πλήρης περιορισμός του εφικτού χώρου της πρώτης φάση. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που το βήμα αυτό μπορεί να απλουστευτεί σημαντικά. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν η λύση του προβλήματος της δεύτερης φάσης είναι πάντοτε εφικτή. Στην περίπτωση αυτή το στοχαστικό πρόβλημα έχει πλήρη διορθωτικό σχεδιασμό.

Ορισμός 1 : Ένα στοχαστικό πρόβλημα με διορθωτικό σχεδιασμό (recourse) καλείται *πλήρες (“Complete Recourse”)* όταν η εφικτή περιοχή του είναι όλο το $pos\ W = \{t|t = Wy, y \geq 0\} = \mathbb{R}^{m_2}$.

Αντίστοιχα ο σχεδιασμό καλείται *μερικός (“relatively complete recourse”)* όταν

$K_2 \supseteq K_1$ ή διαφορετικά όταν :

$$\{x|\, k = 1..K\ \exists y \geq 0\ s.t. Wy = h_k - T_k x\ \} \supseteq \{x|\, Ax = b, x \geq 0\}$$

Μια δεύτερη περίπτωση, είναι όταν μπορούν να παραχθούν περιορισμοί οι οποίοι όταν ικανοποιηθούν εξασφαλίζουν την εφικτότητα των προβλημάτων της δεύτερης φάσης. Οι περιορισμοί αυτοί καλούνται επαγωγικοί *"induced constraints"*.Μπορούν να εξαχθούν εμπειρικά από την πολλή καλή κατανόηση των συνθηκών του μοντέλου της δεύτερης φάσης. Μια τρίτη περίπτωση είναι εκείνη που οι περιορισμοί δεν απαιτείται να οριστούν για όλα τα k αλλά μόνο για ένα h_k. Αυτό ισχύει στην περίπτωση που το T είναι ντετερμινιστικό.

4.4 Μέθοδος κλάδου και φραγής και μέθοδος κλάδου και αποκοπής

Πριν παρουσιαστεί η επέκταση της μεθόδου L – Shaped στα προβλήματα ακέραιου στοχαστικού προγραμματισμού, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν οι μέθοδοι που επιλύουν τα ντετερμινιστικά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Αναφέρεται η μέθοδος κλάδου και φραγή (Branch & Bound) και η μέθοδος κλάδου και αποκοπής (Branch & Cut) . Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτό είναι διττός. Δίνεται η δυνατότητα να εντοπιστούν οι ομοιότητες των μεθόδων αλλά και η συσχέτιση των δύο περιοχών. Στην βιβλιογραφία, ο στοχαστικός προγραμματισμός προάγεται ως επέκταση του γραμμικού, βασισμένη στις μεθόδους που αναπτύχθηκαν για τον ακέραιο προγραμματισμό. Και αυτό εξηγείται από το γεγονός, ότι μέθοδοι επίλυσης του ακέραιου προγραμματισμού εφαρμόζονται εύρωστα στις διαδικασίες αποσύνθεσης (Bender decomposition) που απαιτούνται στον στοχαστικό προγραμματισμό.

4.4.1 Μέθοδος Κλάδου & Φραγής / "Branch & Bound" (B&B)

Η μέθοδος κλάδου και φραγής ή διακλάδωσης και οριοθέτησης όπως αλλιώς μπορεί να βρεθεί στην ελληνική βιβλιογραφία, στηρίζεται σε μια έμμεση διαδικασία απαρίθμησης των ακέραιων λύσεων που επιδέχεται το πρόβλημα. Η αρχή που την διέπει βασίζεται στο γεγονός ότι, ο χώρος των εφικτών λύσεων μπορεί να διαμεριστεί σε μικρότερα υποσύνολα.

Θεωρώντας το πρόβλημα βελτιστοποίησης του μοντέλου της πρώτης φάσης με την παρακάτω μορφή και περιορίζοντας τις μεταβλητές απόφασης στο σύνολο των ακέραιων αριθμών.

$$\min z = C^T x$$

$$s.t. Ax = b,$$

$$x \in \mathbb{Z}^{n_1}$$

η γενική μέθοδος μπορεί να αναπτυχθεί στα ακόλουθα τέσσερα βήματα:

Βήμα 1:

Λύνεται το αντίστοιχο χαλαρωμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Το γραμμικό πρόβλημα δηλαδή για το οποίο το $x \geq 0$. Έστω ότι παράγει τη λύση $\hat{x}$ και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής είναι $C^T\hat{x}$.

Βήμα 2:

Εάν η λύση $\hat{x}$ που επιτεύχθηκε είναι ακέραιη, η τιμή $C^T\hat{x}$ αποτελεί την βέλτιστη λύση του προβλήματος και η διαδικασία τερματίζεται.

Σε αντίθετη περίπτωση τη τιμή $\underline{z} = C^T\hat{x}$ αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την βέλτιστη λύση. Στρογγυλοποιώντας προς τα πάνω τις τιμές των μεταβλητών υπολογίζεται και το άνω φράγμα του προβλήματος.

Αξιοσημείωτο για την μέθοδο είναι ότι στην περίπτωση που επιλύεται πρόβλημα ελαχιστοποίησης, η λύση αποτελεί κάτω φράγμα, ενώ στην περίπτωση που το μοντέλο βελτιστοποίησης είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, η λύση θεωρείται άνω φράγμα. Αντίστοιχα στρογγυλοποίηση γίνεται προς τα κάτω για να βρεθεί το κάτω φράγμα του μοντέλου μεγιστοποίησης.

Βήμα 3:

Για να συνεχιστεί η διαδικασία επιλέγεται μια μη ακέραιη μεταβλητή, (συνήθως εκείνη με το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος) και λαμβάνοντας υπόψη την τιμή της, δημιουργείται ένα διάγραμμα - δέντρο όπου σε κάθε φύλο του δημιουργείται ένας κόμβος, στην συνέχεια τίθεται το χαλαρωμένο γραμμικό πρόβλημα που λύθηκε στο προηγούμενο βήμα προσθέτοντας τους εξής περιορισμούς. Στην μεν μια πλευρά, η τιμή της μεταβλητής να είναι μικρότερη από το ακέραιο μέρος της ($x_j \leq d$), και στην δε άλλη την η τιμή της μεταβλητής να είναι μεγαλύτερη ίση από την επόμενη ακέραια τιμή ($x_j \geq d + 1$). Η διαδικασία αυτή λέγεται διακλάδωση ή κλάδεμα.

Τα δύο υπό – προβλήματα λέγονται κορυφές σε αναμονή (waiting node) και αποτελούν τα φύλα (leaves) στο δέντρο που δημιουργούν.

Βήμα 4:

Επιλύονται και τα δύο υπό – προβλήματα και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αποτελεί το νέο κάτω φράγμα, ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της μέχρι τώρα ακέραιης λύσης το άνω φράγμα.

Για να προχωρήσει η διαδικασία, υπάρχουν τα εξής πιθανά ενδεχόμενα

1. Το πρόβλημα που εξετάζεται να έχει κάτω φράγμα υψηλότερο από το άνω φράγμα. Το πρόβλημα αυτό δεν εμβαθύνεται περαιτέρω και αποκλείεται να μπορεί να μας οδηγήσει στην βέλτιστή λύση.
2. Το πρόβλημα που εξετάζεται έχει ακέραιη λύση και το κάτω φράγμα της είναι μικρότερο ή και ίσο από το κάτω φράγμα όλων των υπόλοιπων προβλημάτων. Η τιμή αυτή αποτελεί τη βέλτιστη λύση και η διαδικασία τερματίζεται.
3. Το πρόβλημα που εξετάζεται μπορεί να είναι αδύνατο.
4. Δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω, όποτε διακλαδώνεται περαιτέρω το πρόβλημα και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 3. Επιλέγεται να γίνει εμβάθυνση του προβλήματος με το καλύτερο κάτω φράγμα (χαμηλότερη τιμή) για περαιτέρω κλάδεμα. ■

Καθοριστικό ρόλο για την εύρωστη εφαρμογή της μεθόδου είναι ο τρόπος με το οποίο επιλέγονται οι μεταβλητές που συμμετέχουν στην διαδικασία της διακλάδωσης. Επίσης, πολύ μεγάλη έρευνα έχει κατατεθεί σχετικά με την μορφοποίηση των προβλημάτων, ώστε η διαδικασία του κλαδεύματος να είναι ευκολότερη αλλά και ερευνάται πως να εποπτεύεται μια καλή αρχική λύση ώστε να βρεθεί η βέλτιστη σε μικρό αριθμό βημάτων.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν οι ομοιότητες της μεθόδου κλάδου και φραγής (Branch & Bound) του ακέραιου προγραμματισμού με αυτή της L – Shaped του στοχαστικού.

1. Στον ακέραιο προγραμματισμό διαμερίζεται ο χώρος των λύσεων, ενώ στην περίπτωση του στοχαστικού προγραμματισμού τα δεδομένα εισόδου.

2. Στον ακέραιο προγραμματισμό θα πρέπει να βρεθεί μια μεταβλητή και να δημιουργηθούν τα κλαδιά του δέντρου των αποφάσεων, ενώ στο στοχαστικό πρέπει να βρεθεί μια μεταβλητή για να διαμεριστεί το πρόβλημα.
3. Στον ακέραιο προγραμματισμό πρέπει να βρεθεί μια ακέραια τιμή d_j για να δημιουργηθούν τα κλαδιά, ενώ στο στοχαστικό πρέπει να οριστεί η τιμή ώστε να δημιουργηθεί η διαμέριση.
4. Και οι δύο μέθοδοι δημιουργούν δέντρα αποφάσεων για την προσέγγιση της βέλτιστης λύσης.
5. Τέλος στην περίπτωση του ακέραιου προγραμματισμού φράζεται ένας κόμβος όταν δεν έχει να αποδώσει παραπάνω βελτίωση της λύσης, ενώ στο στοχαστικό προγραμματισμό αυτό γίνεται όταν τα όρια (άνω και κάτω φράγμα) είναι πολύ κοντά.

4.4.2 Μέθοδος τεμνόμενων επιπέδων (Cutting plane method)

Πριν παρουσιαστεί η μέθοδος κλάδου και αποκοπής θεωρείται σκόπιμο να παρουσιαστούν και να αποσαφηνιστούν κάποιες ορολογίες που χρησιμοποιούνται αλλά και η μέθοδος των τεμνόμενων επιπέδων.

Ορισμός 2: «Έγκυρος περιορισμός ή ανίσωση » γνωστό ως "*Valid Inequality*" στην ξένη βιβλιογραφία ορίζεται ο περιορισμός (ανίσωση) αυτός ο οποίος ικανοποιείται από όλο το χώρο των εφικτών λύσεων.

Ορισμός 3: «Τομή» ή γνωστό ως "Cut" στην ξένη βιβλιογραφία ορίζεται εκείνος ο έγκυρος περιορισμός, ο οποίος δεν είναι μέρος της πρόσφατης μορφοποίησης του προβλήματος (current formulation).

Ορισμός 4: «Καταστρατήγηση τομής» ή γνωστό ως "Violated Cut" στην ξένη βιβλιογραφία ορίζεται εκείνη η τομή του χώρου των εφικτών λύσεων, που δεν ικανοποιείται από την βέλτιστη λύση της πρόσφατης μορφοποίησης. του προβλήματος (current formulation).

Συνοπτικά στην μέθοδος των τεμνόμενων επιπέδων, αφού λυθεί το χαλαρωμένο πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, γίνεται έλεγχος αν κάποιες βασικές ανισότητες ικανοποιούνται. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιούνται, εισάγονται τμηματικά στην διαδικασία και ξανά λύνεται το πρόβλημα έως ότου βρεθεί ακέραια λύση στο πρόβλημα. Αναλυτικότερα ο αλγόριθμος των τεμνόμενων επιπέδων τμηματοποιείται στα εξής τρία βήματα:

Βήμα 1: Λύνεται το χαλαρωμένο πρόβλημα και βρίσκεται η βέλτιστή λύση του x^*

Βήμα 2: Αν η λύση x^* ανήκει στο σύνολο των ακέραιων αριθμών, έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση και η διαδικασία τερματίζεται, διαφορετικά

Βήμα 3: Προστίθεται στην πρόσφατη μορφή του προβλήματος μια γραμμική ανίσωση – περιορισμός, ο οποίος ικανοποιείται από όλες τις ακέραιες τιμές του χώρου των εφικτών λύσεων αλλά όχι από την λύση x^* και στην συνέχεια λύνεται το πρόβλημα και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 2.

4.4.3 Μέθοδος κλάδου και αποκοπής “Branch & Cut” (B&C)

Η μέθοδος κλάδου και αποκοπής γνωστή και ως “Branch & Cut” στην ξένη βιβλιογραφία, είναι μια γενίκευση της μεθόδου κλάδου και φραγής, στην οποία, αφού λυθεί το χαλαρωμένο πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, γίνεται έλεγχος αν κάποιες βασικές ανισότητες ικανοποιούνται. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιούνται, εισάγονται τμηματικά στην διαδικασία και ξανά λύνεται το πρόβλημα έως ότου ικανοποιηθούν όλες και στην συνέχεια ακολουθεί η διαδικασία του κλάδου και φραγής B&B. Στην περίπτωση των προβλημάτων της δρομολόγησης και ειδικότερα του IRP οι περιορισμοί αυτοί αποτελούν τους περιορισμούς του αποκλεισμού των κύκλων στα δρομολόγια (Sub tour Elimination Constraint), αλλά και άλλοι που έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία γνωστοί σαν έγκυροι περιορισμοί *"valid inequalities"*. Στην ουσία αποτελεί συνδυασμό της αρχικής μεθόδου κλάδου και φραγής B&B, με μεθόδους περιορισμού του χώρου των εφικτών λύσεων (Cutting Plane method). Οι περιορισμοί που εισάγονται στο πρόβλημα ονομάζονται "Cuts" και για να βρεθούν χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος διαχωρισμού *"separation"* στην περίπτωση του IRP, εκείνος που έχουν προτείνει για το συμμετρικό πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή TSP των Padberg & Rinaldi[100]. Ο λόγος για τον οποίο συνήθως προτιμάται η μέθοδος είναι επειδή το πλήθος των περιορισμών στο χαλαρωμένο πρόβλημα είναι αρκετά μεγάλο και δεν είναι εφικτό να εισαχθούν από την αρχή.

Η γενική μέθοδος μπορεί να αναπτυχθεί στα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1:

Υποθέτοντας ότι δίνεται ένα ακέραιο πρόβλημα IP και το αντίστοιχο LP(∞) αποτελεί το χαλαρωμένο γραμμικό πρόβλημα, στο οποίο ανήκει ένα μεγάλο πλήθος περιορισμών και υποθέτοντας ότι το πρόβλημα είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Βήμα 2:

Για μια τιμή $h \geq 0$, δίνεται το γραμμικό πρόγραμμα LP(h) που αποτελείται από ένα υπό – πρόβλημα του LP(∞), δηλαδή, περιέχει ένα υποσύνολο των αρχικών περιορισμών. Λύνεται το LP(h) και δίνει μια βέλτιστη λύση $\hat{x}^h$Αν η λύση είναι εφικτή για το IP τότε είναι βέλτιστη λύση διαφορετικά χρησιμοποιώντας κάποιον αλγόριθμο διαχωρισμού βρίσκονται ανισότητες οι οποίες δεν ικανοποιούνται από την λύση αυτή και προστίθενται στο πρόβλημα.

Βήμα 3:

Όταν η διαδικασία της προσθήκης των ανισοτήτων ολοκληρωθεί και δεν έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση, συνεχίζεται η διαδικασία, δημιουργώντας διακλαδώσεις όπως στην Branch & Bound μέθοδο. ■

Και στην περίπτωση της μεθόδου κλάδου και αποκοπής B&C μπορεί κανείς να εντοπίσει ομοιότητες με την L - Shaped. Ο τρόπος με τον οποίο προστίθενται οι περιορισμοί στην B&C μοιάζει πολύ με εκείνο των feasibility cut της L - Shaped.

4.5 L – Shaped μέθοδος για ακέραια μοντέλα προσφυγής

Στην περίπτωση που τα μοντέλα της πρώτης ή και της δεύτερης φάσης είναι μοντέλα μεικτού ή ακέραιου προγραμματισμού, η μέθοδός L – Shaped τροποποιείται, έτσι ώστε να συμπεριλάβει και ένα τρίτο είδος περιορισμών, που αφορούν την περιορισμό των εφικτών λύσεων στο χώρο των ακέραιων αριθμών (“integrality cuts”). Στην περίπτωση που μορφοποιείται το εκτενές πρόγραμμα του ντετερμινιστικά ισοδύναμου ακέραιου μοντέλου, θα χρειαστεί να προστεθούν και οι περιορισμοί των τιμών των μεταβλητών στο σύνολο των ακέραιων αριθμών.

$$\min_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} z = C^T x + Q(x)$$

$$s.t. Ax = b$$

Όπου το σύνολο των X περιέχει και περιορισμούς των ακέραιων τιμών. Έτσι το σύνολο των $X = \bar{X} \cap \mathbb{Z}^{n_1}$ και το ακόλουθο «*πρόσφατο*» *“current problem”*

$$\text{(CP)}\quad \min \mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \theta \tag{4.24}$$

$$\mathrm{s.t.\,Ax = b,} \tag{4.25}$$

$$\mathrm{D_l x \geq d_l, l = 1, \dots, r} \tag{4.26}$$

$$\mathrm{E_l x + \theta \geq e_l \; l = 1, \dots, s} \tag{4.27}$$

$$\mathrm{x \geq 0, \theta \in \mathbb{R}} \tag{4.28}$$

Βήμα 0:

Θέτονται οι αρχικές τιμές r=s=v=0 $\bar{z} = \infty$ Η τιμή του θ = - ∞ ή ίση με κατάλληλο κάτω όριο και εξαιρείται από τους υπολογισμούς. Δημιουργείται μια λίστα που συνδέεται με ένα μοναδικό υποψήφιο κόμβο που αφορά το αρχικό πρόβλημα.

Βήμα 1:

Επιλέγεται ένας υποψήφιος κόμβος και θέτεται αυτόν σαν πρόσφατο πρόβλημα Αν δεν βρεθούν υποψήφιοι κόμβοι η διαδικασία σταματάει.

Βήμα 2:

Θέτεται η τιμή v:=v+1 και λύνεται το πρόσφατο πρόβλημα. Αν το πρόβλημα είναι αδύνατο, φράζεται ο κόμβος και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 1. Διαφορετικά θέτεται η λύση (x^v, θ^v) βέλτιστη λύση.

Βήμα 3:

Ελέγχεται αν υπάρχουν περιορισμοί που δεν ικανοποιούνται και τότε προστίθενται οι περιορισμοί της εφικτότητας (feasibility Cuts) $D_l x \geq d_l, l = 1, \dots, r$ θέτεται η τιμή r=r+1 και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 2. Αν ισχύει $C^T x^v + \theta^v > \bar{z}$ φράζεται ο κόμβος και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 2.

Βήμα 4:

Γίνεται έλεγχος για περιορισμούς των ακέραιων τιμών. Αν κάποιος περιορισμός δεν ικανοποιείται δημιουργούνται δύο κλάδοι χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη διαδικασία του B&C. Στέλνονται οι νέοι κόμβοι στο σύνολο των υποψήφιων κόμβων προς εξέταση και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 1.

Βήμα 5 :

Υπολογίζεται το Q (x^v) και θέτεται η τιμή $z^v = C^T x^v + Q(x^v)$

Αν $\bar{z} > z^v$ θέτεται η τιμή $\bar{z} = z^v$

Βήμα 6:

Αν $\theta^v \geq Q(x^v)$ τότε φράζεται ο κόμβος και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 1 .

Διαφορετικά προστίθενται οι περιορισμοί της αριστότητας (Optimality Cuts) θέτεται η τιμή s=s+1 και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 2.■

Υπόθεση *Για δεδομένο τιμή x το Q(x) υπολογίζεται σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων.*

Αξίωμα :Όταν ισχύει η παραπάνω υπόθεση, για κάθε πρόβλημα για το οποίο υπάρχουν ένα σύνολο με εγκύρους περιορισμούς εφικτότητας και αριστότητας, η παραπάνω μέθοδος βρίσκει βέλτιστη λύση, όταν αυτή υπάρχει σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Μια σημαντική διαπίστωση είναι ότι, περιορισμοί που αφορούν τη συνθήκη των ακέραιων τιμών των μεταβλητών (integrality cuts) θεωρούνται υποπερίπτωση των περιορισμών της εφικτότητας του χώρου των λύσεων (feasibility cuts).

Πρόταση 1: Για κάθε πρόβλημα στο οποίο υπάρχει ένα σύνολο έγκυρων περιορισμών της εφικτότητας του χώρου των λύσεων και ένα σύνολο περιορισμών αριστότητας, η ακέραια μέθοδος L – Shaped βρίσκει την βέλτιστη λύση (όταν αυτή υπάρχει) σε ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Υπόθεση 1:Η αναμενόμενη συνάρτηση των διορθωτικών ενεργειών Q(x) είναι υπολογίσιμη από το δυαδικό διάνυσμα x των μεταβλητών απόφασης της πρώτης φάσης όταν αυτό δίνεται.

Υπόθεση 2: Υπάρχει πεπερασμένη τιμή L η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$L \leq \min_x\{Q(x)|\, Ax = b, x \in [0,1]^{n_1}\}$. (Εκφράζει την περίπτωση που το πρόβλημα της πρώτης φάσης είναι φραγμένο)

Πρόταση 2: Έστω $x_i = 1, i \in S_r$ και $x_i = 0, i \notin S_r$ εκφράζει την r εφικτή λύση, και θ_rτη αντίστοιχη αναμενόμενη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης της δεύτερης φάσης .

Ορίζεται ο περιορισμός της αριστότητας

$$\theta \geq (\theta - L)\left(\sum_{i \in S_r} x_i - \sum_{i \notin S_r} x_i\right) - (\theta - \mathrm{L})(|\mathrm{S_r}| - 1) + \mathrm{L} \qquad (4.29)$$

Όπου $|\mathrm{S_r}|$ ο βαθμός του συνόλου $\mathrm{S_r}$. Το σύνολο των περιορισμών αριστότητας (25) ορίζεται για όλες τις λύσεις πρώτης φάσης και εκφράζει ένα έγκυρο σύνολο περιορισμών εφικτότητας.

Συμπεράσματα

Η μεθοδολογική προσέγγιση του στοχαστικού προγραμματισμού είναι σχετικά νέα και αποτελεί την πρόταση της παρούσας διατριβής για την επίλυση του προβλήματος της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών σε συνθήκες αβεβαιότητας. Το μεθοδολογικό πλαίσιο των μοντέλων 2 φάσεων ή αλλιώς προσφυγής, θεωρείται ένα πολλά υποσχόμενο πλαίσιο μοντελοποίησης προβλημάτων βελτιστοποίησης σε συνθήκες αβεβαιότητας. Στην συνέχεια, στο επόμενο κεφάλαιο, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της εφαρμογής του μεθοδολογικού πλαισίου του στοχαστικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών.

Κεφάλαιο 5 Μαθηματικό Μοντέλο Συνδυαστικής Διαχείρισης Διανομής Προϊόντων & Εφοδιασμού Αποθηκών

5.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια της διδακτορικής έρευνας, αναπτύχθηκαν δύο μοντέλα βελτιστοποίησης – για την μαθηματική τεκμηρίωση των σχέσεων που διέπουν το σύστημα της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών. Το ένα είναι ντετερμινιστικό ή αιτιοκρατικό, όπως μπορεί να το βρει κανείς στην ελληνική βιβλιογραφία και το άλλο στοχαστικό μεικτού ακέραιου προγραμματισμού. Το ντετερμινιστικό χρησιμοποιείται ως πρωτεύον στο πλαίσιο του στοχαστικού μοντέλου. Για να οριστεί το στοχαστικό απαιτείται να μορφοποιηθεί κατάλληλα το μοντέλο των διορθωτικών ενεργειών του καθορισμού της διαδικασίας της μεταφόρτωσης. Το μοντέλο της μεταφόρτωσης παρουσιάζεται αρχικά ως ανεξάρτητο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Στην συνέχεια αναλύεται η συνένωσή τους, η οποία δημιουργεί το τελικό στοχαστικό μοντέλο δύο σταδίων. Έπειτα παρουσιάζεται η διαδικασία του μετασχηματισμού του στο ντετερμινιστικά ισοδύναμο, το οποίο αποτελεί το πρότυπο στο οποίο αναπτύχθηκε ο κώδικας που χρησιμοποιείται στην πειραματική τεκμηρίωση της μεθοδολογικής προσέγγισης που αναπτύχτηκε. Τέλος δίνεται ο αλγόριθμος υλοποίησης της μεθόδου L Shaped με την μορφή ψευδό – κώδικα.

5.2 Μοντέλο Συνδυαστικής Διαχείρισης Διανομής Προϊόντων & Εφοδιασμού Αποθηκών (Ντετερμινιστικό Α – Φάση)

Στο πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων & εφοδιασμού αποθηκών ο κεντρικός διαχειριστής του συστήματος διανέμει προϊόντα σε ένα πλήθος πελατών για ένα πεπερασμένο πλήθος διακεκριμένων χρονικών διαστημάτων χρησιμοποιώντας ένα φορτηγό δοθείσας χωρητικότητας C. Παραδοσιακά ένα μοντέλο διανομής αναπαρίσταται από ένα γράφημα $\mathrm{G(V,E)}$ όπου V το σύνολο των κορυφών του γραφήματος (N στο πλήθος) αντιπροσωπεύει το σύνολο των σημείων διανομής, ενώ $\mathrm{E = \{(i,j): i \neq j, i, j \in V\}}$ το σύνολο των συνδέσεων μεταξύ των κορυφών. Η κορυφή $\{1\}$ αντιπροσωπεύει τον κεντρικό διαχειριστή διανομέα (Κεντρική Αποθήκη), ενώ οι κορυφές $\mathrm{V' = \{2,3,\dots,N\}}$τα σημεία διανομής (Περιφερειακές Αποθήκες). Το κόστος αποθήκευσης προϊόντων συμβολίζεται με $\mathrm{h_i, \forall i \in V}$ και ορίζεται για κάθε χρονικό διάστημα για το σύνολο των περιφερειακών αποθηκών αλλά και για την κεντρική αποθήκη. Επίσης κάθε αποθήκη (κεντρική & περιφερειακές) έχει περιορισμένη χωρητικότητα που συμβολίζεται με $C_{\mathrm{i}}, \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V}$. Ο χρονικός ορίζοντας του προβλήματος συμβολίζεται με $\mathrm{t \in T}$ και το πλήθος του με H, δηλαδή $\mathrm{t = \{1,2,\dots,H\}}$. Από την αρχή του προβλήματος, ο κεντρικός διαχειριστής γνωρίζει : (1) την ποσότητα των προϊόντων που θα έχει στην διάθεσή του σε κάθε χρονικό διάστημα $\mathrm{r^t}$ $\mathrm{\forall t \in T}$, (2) την ζήτηση κάθε περιφερειακής αποθήκης για κάθε χρονικό διάστημα $\mathrm{d_i^t}$ $\mathrm{\forall t \in T, \forall i \in V'}$, (3) τις αρχικές ποσότητες προϊόντων των αποθηκών (κεντρική & περιφερειακές) $\mathrm{\{I_1^0, I_i^0\ \forall i \in V'\}}$. Ένα φορτηγό χωρητικότητας C θα εκτελέσει τις διανομές και το κόστος μεταφοράς συμβολίζεται με $c_{i,j} \forall i, j \in V\colon i \neq j$,και ισχύει για τα $\mathrm{(i,j) \in E}$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί, ότι εφόσον ο κεντρικός διαχειριστής γνωρίζει εξαρχής την ζήτηση όλων των πελατών του για το σύνολο της χρονικής περιόδου, έχει την δυνατότητα να καθορίσει την ποσότητα $q_i^t, \forall t \in T, \forall i \in V'$ που θα διανέμει σε κάθε περιφερειακή αποθήκη την χρονική περίοδο t, έτσι ώστε να εκπληρώσει την ζήτηση της χρονικής στιγμής t αλλά και μεταγενέστερων αυτής. Αντίστοιχα, εφόσον ο κεντρικός διαχειριστής γνωρίζει εκ των προτέρων τις ποσότητες των προϊόντων που του διατίθενται κάθε χρονική στιγμή, η ποσότητα που διανέμει την χρονική στιγμή t μπορεί να εξυπηρετήσει την ζήτηση της χρονικής στιγμής t και μεταγενέστερης. Η προσέγγιση αυτή αποτέλεσε καινοτομία της διατριβής, αφού δεν έχει βρεθεί στην βιβλιογραφία αντίστοιχη θεώρηση. Σε όλες τις εργασίες που μελετήθηκαν στην φάση της ανασκόπησης, βασική υπόθεση που χρησιμοποιούσαν ήταν ότι η ποσότητα της διανομής για κάθε χρονική στιγμή, καθορίζεται από την ζήτηση εκείνης της στιγμής. Μια υπόθεση, που στην πραγματικότητα είναι μυωπική, αφού είναι εκ των προτέρων γνωστές από την αρχή του προβλήματος όλες οι παράμετροι . Δηλαδή, στην ουσία παρόλο που εξετάζεται ένα ντετερμινιστικό μοντέλο όπου όλοι οι παράμετροι είναι εκ των προτέρων γνωστοί, χρησιμοποιείται η αρχή της δυναμικής πληροφόρησης που όμως δεν είναι απαραίτητη.

Στο πρόβλημα ορίζονται οι ακόλουθες μεταβλητές απόφασης:

- $x_{i,j}^t = \{0,1\}$ Η δυική τιμή παίρνει την τιμή 1 όταν ο πελάτης j εξυπηρετείται ακριβώς μετά τον i στο δρομολόγιο της χρονικής περιόδου t. Σε αντίθετη περίπτωση παίρνει την τιμή 0.
- $I_i^t \in \mathbb{R}, \forall i \in V, \forall t \in T$ η οποία εκφράζει την ποσότητα των προϊόντων κάθε αποθήκης στο τέλος της χρονικής περιόδου t.

- $y_i^t = \{0,1\}$ Η δυική τιμή παίρνει την τιμή 1 όταν ο πελάτης i εξυπηρετείται από το δρομολόγιο της χρονικής περιόδου t. Σε αντίθετη περίπτωση παίρνει την τιμή 0.
- $q_i^t \in \mathbb{R}, \forall i \in V, \forall t \in T$ εκφράζει την ποσότητα των προϊόντων που διανέμονται στον i πελάτη την χρονική περίοδο t.
- $u_i^t \in \mathbb{R}, \forall i \in V, \forall t \in T$ μια ακόμη βοηθητική μεταβλητή απόφασης που χρησιμοποιείται για να οριστούν οι περιορισμοί του αποκλεισμού κυκλικών διαδρομών ("Sub tour Elimination Constraint") η οποία εκφράζει την ποσότητα προϊόντων που βρίσκονται στο όχημα αφού επισκεφτεί τον πελάτη i.

Η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται ως το άθροισμα του κόστους διανομής και του κόστους αποθήκευσης για το σύνολο του χρονικού ορίζοντα του προβλήματος. Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\min \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon V} h_i I_i^t + \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon V} \sum_{\substack{j \epsilon V \\ i \neq j}} c_{ij} x_{i,j}^t \qquad (5.18)$$

(

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς :

Περιορισμοί καθορισμού των τιμών της κεντρική αποθήκης

$$I_1^t \geq 0 \, , \forall t \in T \qquad (5.2)$$

$$I_1^t = I_1^{t-1} + r^t - \sum_{i \in V'} q_i^t \, \forall t \in T \qquad (5.3)$$

Ο περιορισμός (5.2) εξασφαλίζει ότι η κεντρική αποθήκη στο τέλος κάθε περιόδου δεν μπορεί να είναι αρνητική, δηλαδή, ο διανομέας δεν μπορεί να παραδώσει μεγαλύτερη ποσότητα από την διαθέσιμη . Ενώ ο περιορισμός (5.3) εκφράζει ότι η ποσότητα των προϊόντων της κεντρικής αποθήκης {1} στο τέλος της χρονικής περιόδου t καθορίζεται από την ποσότητα των προϊόντων της αποθήκης στο τέλος της προηγούμενης χρονικής περιόδου t -1 συν την ποσότητα που γίνεται διαθέσιμη τη χρονική περίοδο t μείον το άθροισμα των διανομών που θα πραγματοποιηθούν την χρονική περίοδο t.

Περιορισμοί καθορισμού των τιμών των περιφερειακών αποθηκών

$$\mathrm{I}_i^{\mathrm{t}} \geq 0 \, , \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T}, \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V}' \tag{5.4}$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}-1} + \mathrm{q}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}} - \mathrm{d}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}} \; \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T} \, , \forall \mathrm{i} \in \mathrm{V}' \tag{5.5}$$

$$I_i^t \leq C_i \; \forall t \in T \, , \forall i \in V' \tag{5.6}$$

Ο περιορισμός (5.4) εξασφαλίζει ότι σε κάθε περιφερειακή αποθήκη στο τέλος κάθε περιόδου η ποσότητα των αποθεμάτων δεν μπορεί να είναι αρνητική.

Ενώ ο περιορισμός (5.5) εκφράζει ότι για κάθε περιφερειακή αποθήκη, η ποσότητα των προϊόντων της αποθήκης i στο τέλος της χρονικής περιόδου t καθορίζεται από την ποσότητα των προϊόντων της αποθήκης στο τέλος της προηγούμενης χρονικής περιόδου t -1 συν την ποσότητα που μεταφέρεται σε αυτή τη χρονική περίοδο t μείον τη ζήτησή της την χρονική περίοδο t.

Τέλος ο περιορισμός (5.6) εξασφαλίζει ότι το ύψος των αποθεμάτων κάθε χρονικής περιόδου για κάθε αποθήκη δεν μπορεί να ξεπεράσει την μέγιστη χωρητικότητα της εκάστοτε αποθήκης i.

Περιορισμοί καθορισμού του ύψους των διανομών ανά αποθήκη και χρονική περίοδο

$$\sum_{i\in V'} q_i^t \leq C \; \forall t \in T \tag{5.7}$$

$$\sum_{t\in T} q_i^t = \sum_{t\in T} d_i^t - I_i^0, \forall i \in V' \tag{5.8}$$

$$q_i^t \leq y_i^t \sum_{j=t}^{H} d_i^j \, , \forall i \in V', \forall t \in T \tag{5.9}$$

$$\sum_{j=1}^{t} q_i^j \leq I_1^0 + \sum_{j=1}^{t} r^j \; , \forall t \in T, , \forall i \in V' \tag{5.10}$$

Ο περιορισμός (5.7) εξασφαλίζει το γεγονός ότι η συνολική ποσότητας διανομής που θα οριστεί για κάθε χρονική περίοδο δεν μπορεί να ξεπεράσει την χωρητικότητα του φορτηγού εξυπηρέτησης.

Ο περιορισμός (5.8) δηλώνει ότι η συνολική ποσότητα που θα διανεμηθεί σε μια αποθήκη για το σύνολο του χρονικού ορίζοντα ισούται με την ποσότητα της συνολικής ζήτησης και των αρχικών τιμών του αποθεματικού.

Ο περιορισμός (5.9) εξασφαλίζει ένα άνω φράγμα για την ποσότητα διανομής σε κάθε χρονική στιγμή t που δεν μπορεί να ξεπεράσει τις ποσότητες της ζήτησης της χρονικής στιγμής t και μεταγενέστερων.

Ο περιορισμός (5.10) εκφράζει ότι η συνολική ποσότητα προϊόντων που θα διανεμηθεί σε ένα πελάτη i έως τη χρονική στιγμή t δεν μπορεί να ξεπεράσει την συνολική ποσότητα που του διατίθεται μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή λαμβάνοντας υπόψη και το αρχικό αποθεματικό του. Ο περιορισμός αυτός ουσιαστικά οριοθετεί την ποσότητα διανομής λαμβάνοντας υπόψη την τμηματική διάθεση των προϊόντων στην κεντρική αποθήκη.

Περιορισμοί προσδιορισμού των δρομολογίων διανομής για κάθε χρονική περίοδο

$$\sum_{t\in T}\sum_{j\in V'} x_{1j}^{t} \leq H \tag{5.11}$$

$$\sum_{j\in V'} x_{1j}^{t} \leq y_1^t \ \forall t \in T \tag{5.12}$$

$$\sum_{j\in V'} x_{ij}^{t} = \sum_{j\in V'} x_{ji}^{t} \ \forall t \in T\ , \forall i \in V' \tag{5.13}$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij}^{t} + \sum_{j\in V} x_{ji}^{t} = 2y_i^t \quad \forall t \in T\ , \forall i \in V' \tag{5.14}$$

$$\sum_{j\in V} x_{i,j}^{t} \leq y_i^t \forall t \in T, \forall i \in V' \tag{5.15}$$

$$\sum_{i\in V} x_{i,j}^{t} \leq y_j^t \forall t \in T, \forall i,j \in V' \tag{5.16}$$

$$C\left(1 - x_{i,j}^{t}\right) + u_i^t \geq u_j^t + q_j^t \quad \forall i,j \in V' : i \neq j, t \in T \tag{5.17}$$

$$q_i^t \leq u_i^t \ \forall i,j \in V^{'}, t \in T \tag{5.18}$$

$$u_i^t \leq y_i^t * C \quad \forall i \in V^{'}, t \in T \tag{5.19}$$

$$y_i^t \leq y_1^t \forall t \in T, \forall i \in V^{'} \tag{5.20}$$

Ο περιορισμός (5.11) εξασφαλίζει το γεγονός ότι το συνολικό πλήθος των δρομολογίων δεν μπορεί να ξεπεράσει το πλήθος των τιμών του χρονικού ορίζοντα.

Δηλαδή, ότι μπορούν να πραγματοποιηθούν το πολύ H στο πλήθος δρομολόγια χωρίς να είναι απαραίτητο για κάθε χρονική περίοδο να σχεδιάζεται δρομολόγιο.

Ο περιορισμός (5.12) εξασφαλίζει ότι αν κάποια χρονική περίοδο σχεδιαστεί δρομολόγιο αυτό θα ξεκινάει από την κεντρική αποθήκη και θα επισκεφτεί αμέσως μετά ακριβώς μια αποθήκη.

Οι περιορισμοί (5.13) και (5.14) διασφαλίζουν την ροή στην δρομολόγηση. Πιο συγκεκριμένα με την ισότητα (5.13) εξασφαλίζεται ότι αν σε μια αποθήκη φτάσει το δρομολόγιο την χρονική περίοδο t θα πρέπει και να υπάρξει μια άλλη αποθήκη που θα εξυπηρετηθεί μετά από αυτή. Αντίστοιχα ο περιορισμός (5.14) εκφράζει την συνθήκη ότι αν μία αποθήκη εξυπηρετηθεί τη χρονική περίοδο t το άθροισμα των εισροών και εκροών ισούται με 2 ενώ σε αντίθετη περίπτωση με 0. Το οποίο ισχύει και για την περίπτωση που το δρομολόγιο εξυπηρετεί μόνο ένα πελάτη και έπειτα επιστρέφει στην κεντρική αποθήκη.

Ο περιορισμός (5.15) εξασφαλίζει ότι όταν ένας πελάτης εξυπηρετείται από το δρομολόγιο της χρονικής περιόδου, το δρομολόγιο επισκέπτεται ένα και μόνο έναν πελάτη στη συνέχεια και αντίστοιχα ο περιορισμός (5.16) ότι το δρομολόγιο έρχεται από ένα μόνο έναν πελάτη. Η ομάδα των περιορισμών (5.17) – (5.19) διασφαλίζει τον αποκλεισμό κύκλων στα δρομολόγια διανομής. Οι περιορισμοί αυτοί είναι γνωστοί ως Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) περιορισμοί και αποτελούν εναλλακτική των κλασικών περιορισμών του αποκλεισμού κύκλων (Sub Tour Elimination Constraint). Έχουν αποδειχθεί ότι έχουν πολυωνυμική πολυπλοκότητα σε αντίθεση με την εκθετική των κλασσικών περιορισμών του SEC. Τέλος ο περιορισμός (5.20) εξασφαλίζει το γεγονός ότι αν ένα δρομολόγιο εξυπηρετήσει κάποια περιφερειακή αποθήκη, θα πρέπει στο δρομολόγιο να συμμετέχει και η κεντρική αποθήκη.

Περιορισμοί εξασφάλισης των ακέραιων τιμών των μεταβλητών απόφασης και των ορίων του

$$q_i^t, u_i^t \geq 0 \forall i \in V', t \in T \tag{5.21}$$

$$x_{i,j}^t \in \{0,1\} \; \forall i,j \in V': i \neq j, t \in T \tag{5.22}$$

$$y_i^t \in \{0,1\} \; \forall i \in V, t \in T \tag{5.23}$$

Ο περιορισμός (5.21) εξασφαλίζει ότι οι ποσότητες που μεταφέρονται σε κάθε χρονική περίοδο και σε κάθε αποθήκη δεν μπορούν να είναι αρνητικές. Ενώ οι περιορισμοί (5.22) και (5.23) την εξασφάλιση των τιμών [0 ή 1] για τις δυικές μεταβλητές απόφασης.

5.3 Μοντέλο καθορισμού μεταφόρτωσης (Ντετερμινιστικό Β – Φάση)

Το πρόβλημα του καθορισμού της διαδικασίας της μεταφόρτωσης αποτελεί την μαθηματική τεκμηρίωση της προτεινόμενης διορθωτικής πολιτικής στο στοχαστικό μοντέλο δύο φάσεων. Στο σημείο αυτό, παρουσιάζεται ως ανεξάρτητο μοντέλο βελτιστοποίησης και στην συνέχεια αναλύεται ο τρόπος που τα δύο μοντέλα (πρώτης και δεύτερης φάσης) αλληλεπιδρούν. Αρχικά το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

Όπως παρουσιάστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο της διατριβής σε ένα στοχαστικό μοντέλο δύο φάσεων, αφού παρθούν οι αποφάσεις της πρώτης φάσης, στην συνέχεια αποκαλύπτονται οι τιμές των τυχαίων παραμέτρων και ο διαχειριστής του συστήματος αποφασίζει το πλάνο των διορθωτικών ενεργειών του. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρείται ότι όταν αποκαλυφθούν οι πραγματικές τιμές της ζήτησης, ο διαχειριστής του συστήματος επιθυμεί να καλύψει τη έξτρα ζήτηση. Αυτό θα το επιτύχει επιλέγοντας να τροφοδοτήσει τις αποθήκες αυτές με απευθείας μεταφορά προϊόντων από άλλα σημεία, που υπάρχει πλεονάζον απόθεμα. Έτσι ο στόχος του μοντέλου της μεταφόρτωσης είναι να καθοριστεί από ποιά σημεία (περιφερειακές αποθήκες ή κεντρική) υπάρχει δυνατότητα να διαθέσουν προϊόντα έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί παράλληλα και το κόστος μεταφοράς.

Για να διορθωθεί η πολιτική της διανομής με την διαδικασία της μεταφόρτωσης, ο κεντρικός διαχειριστής επιβαρύνεται με ένα πέναλτι κόστους, το οποίο ορίζεται ως το κόστος μεταφοράς των προϊόντων $c_{i,j}: \forall i,j \in V: i \neq j$ όπως καθοριζόταν στην πρώτη φάση πολλαπλασιαζόμενο με ένα σταθερό όρο α<1. Η τιμή αυτή καθορίζει την σχέση του κόστους μεταφόρτωσης ανά μονάδα προϊόντων με το κόστος μετακίνησης από το $i \rightarrow j$ στην πρώτη φάση των αρχικών διανομών. Ειδοποιός διαφορά ότι στο μεν πρωτεύον μοντέλο το κόστος ορίζεται ανεξάρτητα της ποσότητας που διανέμεται, ενώ το δευτερεύον μοντέλο της μεταφόρτωσης υλοποιείται με κόστος μετακίνησης που εξαρτάται και από την ποσότητα που μεταφέρεται. Η τιμής της παραμέτρου του α =0.001 θεωρείται ενδεικτική για της σχέση που διέπει τα δύο αυτά κόστη όπως αναφέρει και ο Coelho[49].

Έτσι ορίζεται η μη αρνητική μεταβλητή απόφασης $w_{i,j}: \forall i \in V, j \in V': i \neq j$ η οποία εκφράζει την ποσότητα που μεταφέρεται από την αποθήκη i, ώστε να εξυπηρετήσει τις ανάγκες της αποθήκης j. Η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται από την ακόλουθη σχέση και εκφράζει το συνολικό επαυξημένο κόστος μεταφόρτωσης προϊόντων.

$$minimize \sum_{t\epsilon T} \sum_{i,j} a * c_{ij} w^t{}_{i,j} \tag{5.24}$$

Υπό τους ακόλουθους περιορισμούς:

$$I_i^o = St\_Inv(i) \forall i \in V \tag{5.25}$$

$$I_i^t - \sum_{\substack{k \in V\prime \\ k \neq i}} w_{ik}^t + \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq i}} w_{\kappa i}^t \geq 0 \, , \forall t \in T, \forall i \in V \tag{5.26}$$

$$I_i^t = I_i^{t-1} - \sum_{\substack{k \in B \\ k \neq i}} w_{ik}^t + \sum_{\substack{k \in A \\ k \neq i}} w_{\kappa i}^t + q_i^t - d_i^t \; \forall t \in T \, , \forall i \in V' \tag{5.27}$$

$$\sum_{t \in T} q_i^t + I_i^0 - \sum_{\substack{k \in B \\ k \neq i}} w_{ik}^t + \sum_{\substack{k \in A \\ k \neq i}} w_{\kappa i}^t = \sum_{t \in T} d_i^t \, , \forall i \in V' \tag{5.28}$$

$$\mathrm{I}_1^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}_1^{\mathrm{t}-1} + \mathrm{r}^{\mathrm{t}} - \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} w_{1i}^t - \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{q}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}} \, \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T} \tag{5.29}$$

Ο περιορισμός (5.25) εξασφαλίζει ότι κάθε αποθήκη έχει στην διάθεσή της ένα αρχικό αποθεματικό εκ των προτέρων γνωστό. Ενώ ο περιορισμός (5.26) εξασφαλίζει ότι σε κάθε περιφερειακή αποθήκη στο τέλος κάθε περιόδου, η ποσότητα των αποθεμάτων δεν μπορεί να είναι αρνητική, συνυπολογίζοντας ταυτόχρονα και τις ποσότητες που μπορεί να λάβει ή να δώσεις σε άλλες αποθήκες.

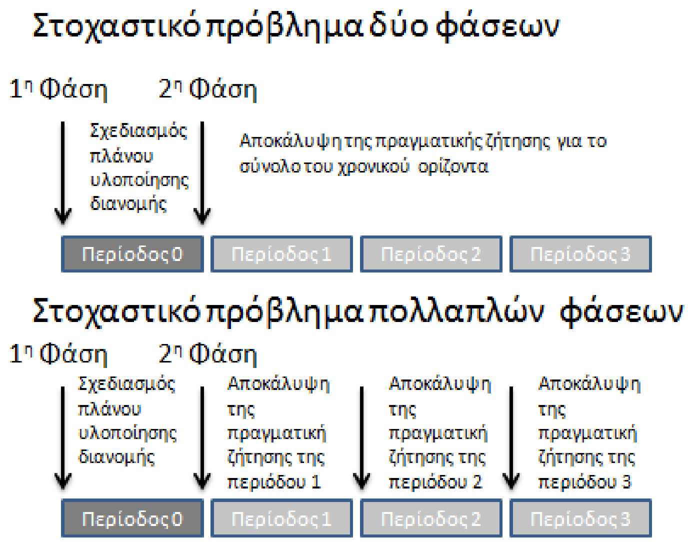
Ο περιορισμός (5.27) εκφράζει ότι για κάθε περιφερειακή αποθήκη, η ποσότητα των προϊόντων της αποθήκης i στο τέλος της χρονικής περιόδου t καθορίζεται από την ποσότητα των προϊόντων της αποθήκης στο τέλος της προηγούμενης χρονικής περιόδου t -1 συν την ποσότητα που μεταφέρεται σε αυτή τη χρονική περίοδο t μείον τη ζήτησή της την χρονική περίοδο t, λαμβάνοντας υπόψη και τις ποσότητες που μπορούν να μεταφερθούν και από την διαδικασία της μεταφόρτωσης από και προς την εκάστοτε αποθήκη.

Ο περιορισμός (5.28) δηλώνει ότι η συνολική ποσότητα που θα διανεμηθεί σε κάθε μια αποθήκη για το σύνολο του χρονικού ορίζοντα, δεν μπορεί να ξεπεράσει την αποκαλυπτόμενη συνολική ζήτηση και των αρχικών τιμών του αποθεματικού, λαμβάνοντας υπόψη και τις ποσότητες που διανέμονται με τη διαδικασία της μεταφόρτωσης.

Ο περιορισμός (5.29) διασφαλίζει το ύψος του αποθεματικού της κεντρικής αποθήκης για κάθε χρονική στιγμή, το οποίο ισούται με το ύψος του αποθεματικού της προηγούμενης χρονικής περιόδου συν την ποσότητα των προϊόντων που διατίθενται την χρονική στιγμή t μείον τις ποσότητες που διανέμει είτε με το πρωτεύον δρομολόγιο είτε με την διαδικασία της μεταφόρτωσης.

5.4 Μοντέλο Προσφυγής Συνδυαστικής Διαχείρισης Διανομής Προϊόντων & Εφοδιασμού Αποθηκών με Μεταφόρτωση (Στοχαστικό)

Θέλοντας να μορφοποιηθεί το πρόβλημα σε στοχαστικό πρόβλημα δύο φάσεων, αρχικά θα πρέπει να οριστούν ποιές είναι οι παράμετροι του μοντέλου που θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές, ποιές είναι οι μεταβλητές απόφασης της πρώτης φάσης και ποιές της δεύτερης φάσης. Ο καθορισμός των μεταβλητών εξαρτάται άμεσα με τον τρόπο με τον οποίο έχουν σχεδιαστεί οι πολιτικές των διορθωτικών ενεργειών. Στην προκειμένη περίπτωση, οι παράμετροι του μοντέλου που θεωρούνται στοχαστικές είναι η ζήτηση των αποθηκών αλλά και το κόστος των διορθωτικών ενεργειών για την κάθε χρονική περίοδο. Υπάρχει η δυνατότητα να θεωρήσει κανείς και την ποσότητα του προϊόντος που γίνεται διαθέσιμη στην κεντρική αποθήκη στοχαστική, αλλά και η περίπτωση σε κάθε χρονική περίοδο η τιμή της ζήτησης να διαφοροποιείται, δηλαδή, η ζήτηση να αποκαλύπτεται σταδιακά. Για λόγους απλούστευσης του προβλήματος, θα θεωρηθεί μόνο η ζήτηση των περιφερειακών αποθηκών τυχαία μεταβλητή και ότι η τιμή των τυχαίων παραμέτρων αποκαλύπτεται για όλες τις περιόδους του χρονικού ορίζοντα εξέτασης. Στην περίπτωση που κάθε χρονική περίοδο αποκαλύπτεται δυναμικά κατά την διάρκεια της περιόδου, το στοχαστικό μοντέλο θα πρέπει να οριστεί ως πολλαπλών φάσεων. Κάτι τέτοιο δεν θα εξεταστεί σε αυτή τη φάση του, άλλα θα μπορούσε να αποτελέσει επέκταση της προσέγγισης αυτής. Σχηματικά, η διαφοροποίηση του στοχαστικού μοντέλου δύο φάσεων με εκείνο των πολλαπλών φάσεων δίνεται από το παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5-1: Διαφοροποίηση των σημείων αποκάλυψης των πραγματικών τιμών ζήτησης στα μοντέλα δυο και πολλαπλών φάσεων

Υποθέτοντας ότι ξ ορίζεται το τυχαίο διάνυσμα το οποίο κυμαίνεται στο σύνολο $\Xi \in \mathbb{R}^k$, έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των γεγονότων των υποσυνόλων του Ξ και P, το μέτρο πιθανότητας οριζόμενο στο $\mathcal{F}$, όπου $A \subset \Xi$, $A \in \mathcal{F}$, και $P(A)$ γνωστή. Το τυχαίο διάνυσμα εμπεριέχει όλες εκείνες τις παραμέτρους του προβλήματος που θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές δηλαδή του κόστους της διορθωτικής μεταφόρτωσης c(ω) αλλά και της ζήτησης, $d_i^t(\omega), \forall i \in V'$ $\xi^T = \{d_2^t(\omega), d_3^t(\omega), \dots, d_N^t(\omega), a(\omega)\}$.

Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση του στοχαστικού προβλήματος δύο φάσεων δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\min \sum_{t\epsilon T} \sum_{i\epsilon V} h_i I_i^t + \sum_{t\epsilon T} \sum_{i\epsilon V} \sum_{\substack{j\epsilon V \\ i\neq j}} c_{ij} x_{i,j}^t + E_\xi \left\{ \sum_{t\in T} \sum_{\substack{i\in V \\ j\in V'}} \alpha(\omega) * c_{i,j} w_{ij}^t(\omega) \right\} \qquad (5.30)$$

Το επόμενο βήμα είναι να εντοπιστούν ποιοί περιορισμοί του πρώτου σταδίου επηρεάζονται από την στοχαστικότητα της ζήτησης. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να καθοριστούν το $h(\omega)$ το δεξιό σκέλος του γραμμικού προβλήματος της δεύτερης φάσης και το T(ω) ο συντελεστής των μεταβλητών απόφασης που εξαρτάται από την τυχαία παράμετρο της ζήτησης. Οι περιορισμοί δηλαδή του μοντέλου της μεταφόρτωσης θα πρέπει να μετασχηματιστούν στην σχέση :

$$W\, y(\omega) = h(\omega) - T(\omega)x \qquad (5.31)$$

Στο διάνυσμα y(ω) συμπεριλαμβάνονται οι μεταβλητές απόφασης της δεύτερης φάσης, που είναι οι ποσότητες της μεταφόρτωσης και η χωρητικότητα των αποθηκών. Στο διάνυσμα x συμπεριλαμβάνονται οι μεταβλητές απόφασης που έρχονται από την πρώτη φάση, που είναι η μεταβλητή που εκφράζει τις ποσότητες που μεταφέρονται . Στο στοιχείο Τ(ω) που είναι ο συντελεστής των μεταβλητών αυτών. Ενώ το το $h(\omega)$ εκφράζει την διαφορά που υπάρχει στην ζήτηση όταν αποκαλύπτεται από την προβλεπόμενη από το πρώτο στάδιο.

Οι σχέσεις που εντοπίστηκαν είναι αρχικά εκείνες που καθορίζουν το ύψος του αποθεματικού της κεντρικής αποθήκης (5.3) και των περιφερειακών αποθηκών δηλαδή οι σχέσεις (5.4) –(5. 5) και (5.8) . Πιο αναλυτικά, θέλοντας να γραφτούν οι στοχαστικοί περιορισμοί η μορφή τους θα ήταν η ακόλουθη:

$$I_i^o(\omega) = St\_Inv(i) \forall i \in V \tag{5.32}$$

$$I_i^t(\omega) - \sum_{\substack{k \in V' \\ k \neq i}} w_{ik}^t(\omega) + \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq i}} w_{ki}^t(\omega) \geq 0 \,, \forall t \in T, \forall i \in V \tag{5.33}$$

$$\mathrm{I}_1^{\mathrm{t}}(\omega) = \mathrm{I}_1^{\mathrm{t}-1}(\omega) + \mathrm{r}^{\mathrm{t}} - \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} w_{1i}^t(\omega) - \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{q}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}} \, \forall \mathrm{t} \in \mathrm{T} \tag{5.34}$$

$$I_i^t(\omega) = I_i^{t-1}(\omega) - \sum_{\substack{k \in V' \\ k \neq i}} w_{ik}^t(\omega) + \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq i}} w_{\kappa i}^t(\omega) + q_i^t - d_i^t(\omega) \tag{5.35}$$

$$\forall t \in T \,, \forall i \in V'$$

$$\sum_{t \in T} q_i^t + I_i^0(\omega) - \sum_{\substack{k \in V' \\ k \neq i}} w_{ik}^t(\omega) + \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq i}} w_{\kappa i}^t(\omega) = \sum_{t \in T} d_i^t(\omega) \,, \forall i \in V' \tag{5.36}$$

$$I_i^t, w_{ji}^t(\omega) \geq 0 \tag{5.37}$$

Ο περιορισμός (5.32) εκφράζει ότι το ύψος του αποθεματικού της αποθήκης το οποίο πρέπει να είναι θετικό και αυτό εξασφαλίζεται από το επίπεδο που προκύπτει από την πρώτη φάση, αλλά και των ποσοτήτων που μεταφορτώνονται στη δεύτερη.

Ο περιορισμός (5.33) εσωκλείει και τις ποσότητες που μεταφέρονται με την διορθωτική μεταφόρτωση της δεύτερης φάσης, στην σχέση που εξασφαλίζει την αναδρομική σχέση του επίπεδου των αποθηκών στο χρονικό ορίζοντα για την κεντρική αποθήκη.

Ο περιορισμός (5.34) εσωκλείει και τις ποσότητες που μεταφέρονται με την διορθωτική μεταφόρτωση της δεύτερης φάσης, στην σχέση που εξασφαλίζει την αναδρομική σχέση του επίπεδου των αποθηκών στο χρονικό ορίζοντα για το σύνολο των αποθηκών.

Ο περιορισμός (5.35) αντίστοιχα συμπεριλαμβάνει τις ποσότητες που μεταφέρονται με την διορθωτική μεταφόρτωση της δεύτερής φάσης στην σχέση που καθορίζει το ύψος των ποσοτήτων που μεταφέρονται συνολικά σε κάθε αποθήκη.

Αυτό που βρέθηκε ότι ήταν πολύ σημαντικό για την συνένωση των δυο μοντέλων στο πλαίσιο της L – Shaped, ήταν ότι κάποιοι από τους περιορισμούς στο πρωτεύον πρόβλημα θα πρέπει να χαλαρώσουν, ώστε να επιτευχθεί η σύγκλιση σε ποσότητες αποθεματικού μεγαλύτερες και να μειωθεί το αναμενόμενο κόστος των διορθωτικών ενεργειών.

5.5 Μοντέλο Προσφυγής Συνδυαστικής Διαχείρισης Διανομής Προϊόντων & Εφοδιασμού Αποθηκών με Μεταφόρτωση (Ντετερμινιστικά Ισοδύναμο)

Υποθέτοντας ότι το σύνολο Ξ των είναι πεπερασμένο, και έστω l = 1, ..r τα γεγονότα που μπορούν να εμφανιστούν με πιθανότητα $\boldsymbol{p_k}$, το στοχαστικό μοντέλο δύο φάσεων μπορεί να μετασχηματιστεί στο ντετερμινιστικά ισοδύναμο μοντέλο. Η αντικειμενική συνάρτηση στην περίπτωση του ντετερμινιστικά ισοδύναμου μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\min \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon V} h_i I_i^t + \sum_{t \epsilon T} \sum_{i \epsilon V} \sum_{\substack{j \epsilon V \\ i \neq j}} c_{ij} x_{i,j}^t + \sum_{l=1}^{r} p_l \left\{ \sum_{t \in T} \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V'}} \alpha(\omega) * c_{i,j} \varsigma_{ij}^t(\omega^l) \right\} \tag{5.38}$$

Υπό τους περιορισμούς :

(5.2), (5.4), (5.6), (5.7),(5.9), (5.10) – (5.20) και επιπλέον χαλαρώνοντας τους περιορισμούς (5.3)(5.5)(5.8) :

$$I_i^o(\omega^l) = St\_Inv(i) \forall i \in V \tag{5.39}$$

$$I_i^t(\omega^l) - \sum_{\substack{k \in V' \\ k \neq i}} w_{ik}^t(\omega^l) + \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq i}} w_{ki}^t(\omega^l) \geq 0 , \forall t \in T, \forall i \in V \tag{5.40}$$

$$I_1^t(\omega^l) = I_1^{t-1}(\omega^l) + r^t - \sum_{i \in V'} w_{1i}^t(\omega^l) - \sum_{i \in V'} q_i^t \, \forall t \in T \tag{5.41}$$

$$I_i^t(\omega^l) = I_i^{t-1}(\omega^l) - \sum_{\substack{k\in V' \\ k\neq i}} w_{ik}^t(\omega^l) + \sum_{\substack{k\in V \\ k\neq i}} w_{\kappa i}^t(\omega^l) + q_i^t - d_i^t(\omega^l) \quad (5.42)$$

$$\forall t \in T, \forall i \in V'$$

$$\sum_{t\in T} q_i^t + I_i^0(\omega^l) - \sum_{\substack{k\in V' \\ k\neq i}} w_{ik}^t(\omega^l) + \sum_{\substack{k\in V \\ k\neq i}} w_{\kappa i}^t(\omega^l) = \sum_{t\in T} d_i^t(\omega^l), \forall i \in V' \quad (5.43)$$

$$I_i^t(\omega^l), w_{ji}^t(\omega^l) \geq 0 \quad (5.44)$$

5.6 Διαδικασία επίλυσης L – Shaped

Για την υλοποίηση της μεθόδου L – Shaped θα πρέπει στην φάση που επιλύεται το μοντέλο της δεύτερης φάσης να υπολογίζεται το διάνυσμα των δυικών τιμών που προκύπτουν από τους περιορισμούς της. Υπολογίζοντας τις δυικές τιμές π_l^vγια κάθε σενάριο l σε κάθε $\bar{x}^v$ λύση που έρχεται από την πρώτη φάση δίνεται η δυνατότητα να εκτελεστεί ο υπολογισμός των τιμών $E_{s+1} = \sum_{l=1}^{r} p_l(\pi_l^n)T_l$ και $e_{s+1} = \sum_{l=1}^{r} p_l(\pi_l^n)h_l$, όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο του στοχαστικού προγραμματισμού. Οι τιμές αυτές στην συνέχεια χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθεί η τομή που πρέπει να περάσει στο αρχικό μοντέλο που αφορά τις ποσότητες της μεταφόρτωσης . Έτσι, σε κάθε φάση επιστρέφει στο πρωτεύον ένας ακόμη περιορισμός της μορφής $-E_{s+1} * q + \theta \geq e_{s+1}$■

Στην συνέχεια αφού επιστρέφεται ο περιορισμός αυτός, το πρωτεύον μοντέλο επιλύεται και πάλι. Γίνεται επαναπροσδιορισμός της αντικειμενικής και του μη γραμμικού τμήματος αυτού του θ και η νέες τιμές του διανύσματος $\bar{x}^v$ μεταφέρονται στο μοντέλο του δεύτερου σταδίου. Αυτό που πρέπει να ξεκαθαριστεί είναι πότε γίνεται ο έλεγχος της σύγκλισης .

Η διαδικασία της επίλυσης μπορεί να δοθεί και από τον ακόλουθο ψευδό –κώδικα.

Algorithm: The L – shaped algorithm for stochastic inventory with transshipment

---

1: **for** t=0

2: **compute** the IRP plan by solving the first stage decision process (Obj. Function: (5.38) s.t. (5.2) - (5.20))

3: **for** each scenario $\omega \in \Omega$ **do** indentify if feasibility cuts are required

4: **compute** the dual multiplier and produce the feasibility cut

5: **add** feasibility cut to the master problem

6: **endfor**

7: **for** each scenario $\omega \in \Omega$ **solve** the sub problem (Obj. Function: (5.24) st. (5.39) – (5.44)

8: **compute** optimal value and optimal dual value /create the optimality cut/construct the cut

9: **endfor**

10: compute UB and execute convergence test

11: **If** $\frac{\boldsymbol{UB-LB}}{\boldsymbol{1-|LB|}} \leq \mathbf{0.001}$ **then**

12: **Stop** required accuracy achieved

13: **Return** $\bar{x}^{v}$

14: **Endif**

5.7 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε η παρουσίαση των μοντέλων που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της ερευνητικής εργασίας . Για να γίνει πιο βατή η παρουσίασή τους επιλέχθηκε αρχικά να παρουσιαστούν τα μοντέλα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών, αλλά και της μεταφόρτωσης ξεχωριστά. Στην συνέχεια δόθηκε η διατύπωση του στοχαστικού και του ντετερμινιστικά ισοδυνάμου συνενώνοντάς τα . Τέλος έγινε μια προσπάθεια να παρουσιαστεί και το πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκε η επίλυση τους, που ακολουθεί την μεθοδολογική προσέγγιση της αποσύνθεσης L – Shaped. Στην συνέχεια στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν αναλυτικά τα αποτελέσματα της εφαρμογής των μοντέλων σε πρότυπα προβλήματα, ώστε να διαπιστωθεί ποιά είναι τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία τους.

Κεφάλαιο 6 Πειραματική διαδικασία – Αριθμητικά Αποτελέσματα

6.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια της αξιολόγησης των προτεινομένων μοντέλων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε εκτενής πειραματική διαδικασία. Η διαδικασία διεκπεραιώθηκε σε δύο επίπεδα. Στο πρώτο επίπεδο έγινε αξιολόγηση της αποδοτικότητας των έγκυρων περιορισμών στο προτεινόμενο τροποποιημένο ντετερμινιστικό μοντέλο, ενώ στο δεύτερο επίπεδο αξιολογήθηκε η προσέγγιση του στοχαστικού προγραμματισμού και το προτεινόμενο μοντέλο των δύο σταδίων .

Ο στόχος της αξιολόγησης του πρώτου επιπέδου ήταν η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των προτεινόμενων εγκύρων περιορισμών, ως προς την βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Δευτερεύον στόχος που τέθηκε ήταν η επίπτωσή τους στην υπολογιστική πολυπλοκότητα. Για να επιτευχθεί η ποσοτικοποίηση της διαφοροποίησης της βέλτιστης λύσης χρησιμοποιήθηκαν τα πρότυπα προβλήματα που έχουν προτείνει οι Archetti, Bertazzi, Laporte και Speranza (2007) και τα οποία βρέθηκαν δημοσιευμένα στο διαδίκτυο. Αναλυτική περιγραφή της δομής και του περιεχομένου των προβλημάτων δίνεται στην επόμενη παράγραφο. Το αποτέλεσμα της προτεινόμενης μορφοποίησης του μοντέλου συγκρίθηκε με εκείνο που έχουν δημοσιεύσει χρησιμοποιώντας την πολιτική του

(Order Up to level) OU, (Maximum Level) ML, αλλά και με το αποτέλεσμα της πολιτικής του (Optimized Target Level) OTL των Coelho και Laporte του [53].

Αναφορικά με την αξιολόγηση του δεύτερου επιπέδου του στοχαστικού μοντέλου δημιουργήθηκαν νέα πρότυπα, τα οποία δομήθηκαν σε συνάφεια με τα προαναφερθέντα. Η πρώτη επιλογή ήταν να χρησιμοποιηθούν τα πρότυπα των Coelho και Laporte, με τα οποία αξιολόγησαν την δική τους προσέγγιση, για το στοχαστικό – δυναμικό πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής και εφοδιασμού αποθηκών (Stochastic – Dynamic IPR). Στην συνέχεια όμως, διαπιστώθηκε ότι αρχικά δεν ήταν δυνατή η συγκριτική αξιολόγηση, αλλά και ότι η προσέγγιση της στοχαστικότητας της ζήτησης ήταν διαφορετική. Αναλυτική αναφορά των αιτιών που οδήγησαν τον ερευνητή στην απόφαση αυτή δίνεται στη παρακάτω παράγραφο που παρουσιάζεται και η τελική δομή των προτύπων που δημιουργηθήκαν.

Τέλος γίνεται συνοπτική αναφορά στα συμπεράσματα που εξάχθηκαν από την πειραματική διαδικασία και η σύνδεσή τους με το τελικό κεφάλαιο των συμπερασμάτων της διατριβής.

6.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων πρώτου επιπέδου

Η αξιολόγηση των προτεινόμενων έγκυρων περιορισμών έγινε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης του προτεινόμενου μοντέλου με εκείνα που παρουσίασαν οι Arhetti et al.(2007) και για τις δύο πολιτικές OU και ML, αλλά και της πολιτικής του OTL των Coelho και Laporte [53] (2013c). Αντίστοιχη σύγκριση έγινε και για την υπολογιστική πολυπλοκότητα αξιολογώντας το χρόνο απόκρισης των εναλλακτικών μοντέλων. Η ηλεκτρονική εκτέλεση (τρεξίματα) των προτύπων έγινα στον server της σχολής του τμήματος των

Μηχανολόγων Μηχανικών με τα κάτωθι χαρακτηριστικά Intel Core i5-4590, 3.30 Ghz,8 Gb memory 64-bit Operating Processor. Τα προβλήματα επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό βελτιστοποίησης μαθηματικού προγραμματισμού IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.4 έκδοση . Ο κώδικας συντάχθηκε χρησιμοποιώντας την γλώσσα αλγεβρικής μοντελοποίησης IBM ILOG OPL του προγράμματος. Αναλυτική παρουσίασή του δίνεται στον παράρτημα του διδακτορικού που αφορά τους κώδικες που αναπτύχθηκαν.

6.2.1 Αναλυτική παρουσίαση της δομής των δεδομένων

Τα πρότυπα προβλήματα των Arhetti et al.(2007) χωρίζονται σε 4 κλάσεις που συσχετίζονται με το χρονικό ορίζοντα και το ύψος του κόστους αποθήκευση των προϊόντων. Ορίζουν δύο βαθμίδες για το κόστος της αποθήκευσης ένα υψηλό και ένα χαμηλό, καθώς και δύο περιπτώσεις εύρους του χρονικού ορίζοντα ένα 3 περιόδων και ένα 6 περιόδων. Τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων κλάσεων δίνονται αναλυτικά παρακάτω.

Πρώτη κλάση [H=3 / Low Cost]

- Χρονικός ορίζοντας = 3
- Κόστος αποθήκευσης κεντρικής αποθήκης = 0.03[Χαμηλό κόστος]
- Κόστος αποθήκευσης περιφερειακών αποθηκών τυχαία παραγόμενο στο διάστημα τιμών(0.01 – 0.05) [Χαμηλό κόστος]

Δεύτερη κλάση [H=3 / High Cost]

- Χρονικός ορίζοντας = 3
- Κόστος αποθήκευσης κεντρικής αποθήκης = 0.3[Υψηλό κόστος]

- Κόστος αποθήκευσης περιφερειακών αποθηκών τυχαία παραγόμενο στο διάστημα τιμών(0.1 – 0.5) [Υψηλό κόστος]

Τρίτη κλάση [H=6 / Low Cost]

- Χρονικός ορίζοντας = 6
- Κόστος αποθήκευσης κεντρικής αποθήκης = 0.03[Χαμηλό κόστος]
- Κόστος αποθήκευσης περιφερειακών αποθηκών τυχαία παραγόμενο στο διάστημα τιμών(0.01 – 0.05) [Χαμηλό κόστος]

Τέταρτη κλάση [H=6 / High Cost]

- Χρονικός ορίζοντας = 6
- Κόστος αποθήκευσης κεντρικής αποθήκης = 0.3[Υψηλό κόστος]
- Κόστος αποθήκευσης περιφερειακών αποθηκών τυχαία παραγόμενο στο διάστημα τιμών(0.1 – 0.5) [Υψηλό κόστος]

Το πλήθος των περιφερειακών αποθηκών για την περίπτωση του χρονικού ορίζοντα των 3 περιόδων είναι n = 5,10,15, 20, 25,30,35,40,45,50 αποθήκες. Αντίστοιχα, το πλήθος των περιφερειακών αποθηκών για την περίπτωση του χρονικού ορίζοντα των 6 περιόδων είναι n = 5,10,15, 20, 25,30 αποθήκες.

Σε κάθε σετ δεδομένων για κάθε κεντρική αποθήκη δίνονται οι πληροφορίες :

[1] της χωρητικότητας της αποθήκης,

[2] του αρχικό επίπεδο διαθέσιμων προϊόντων,

[3] του κόστους αποθήκευσης προϊόντων ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου

[4] και οι συντεταγμένες (τετμημένη και η τεταγμένη) της θέσης της αποθήκης.

Αντίστοιχα για κάθε περιφερειακή αποθήκη δίνονται οι πληροφορίες:

[1] της χωρητικότητας της αποθήκης,

[2] του αρχικού επιπέδου διαθέσιμων προϊόντων,

[3] του κόστους αποθήκευσης προϊόντων ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου,

[4] και οι συντεταγμένες (τετμημένη και η τεταγμένη) της θέσης της αποθήκης,

[5] Μέγιστο και ελάχιστο όριο του επίπεδου αποθήκευσης,

[6] και η ζήτηση των προϊόντων ανά χρονική στιγμή.

Το κόστος της μετακίνησης από τη μία αποθήκη στην άλλη δίνεται από την παρακάτω σχέση που υπολογίζει την ευκλείδεια απόσταση των δυο σημείων.

$$c_{i,j} = NINT(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}),$$

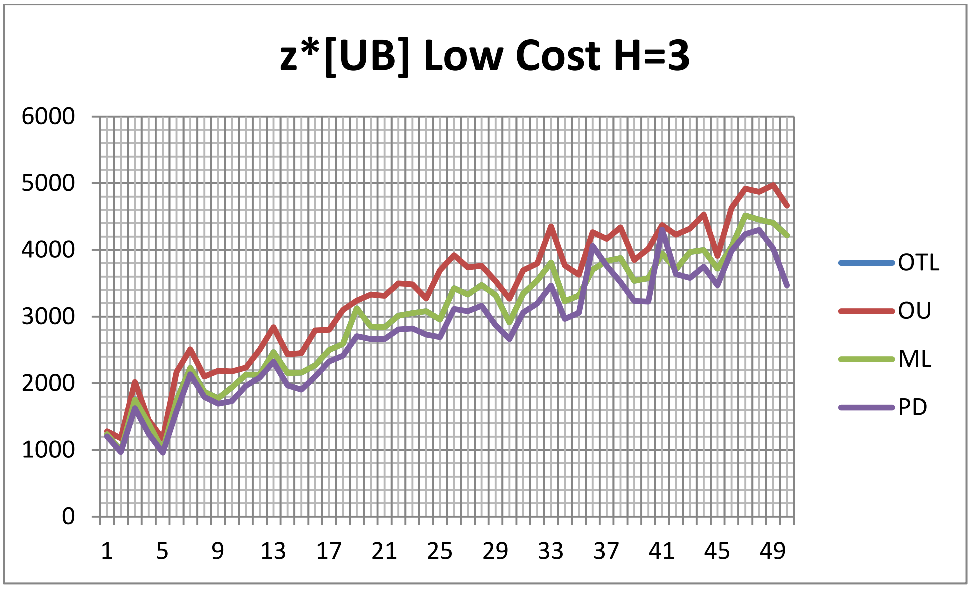
όπου NINT συνάρτηση που εκφράζει τη διαδικασία της στρογγυλοποίησης στο κοντινότερο ακέραιο αριθμό.

6.2.2 Αποτελέσματα

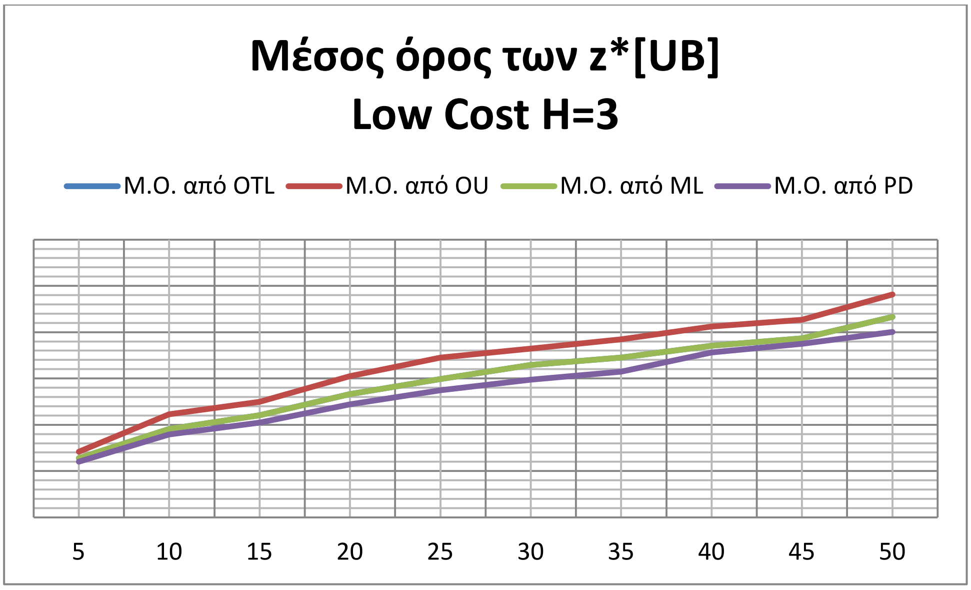
Στους παρακάτω πίνακες παρατίθενται αναλυτικά τα αποτελέσματα των τεσσάρων κλάσεων για τις εναλλακτικές πολιτικές του OU ML OTL και η πρόταση της διατριβής η οποία προάγεται ως προληπτικές διανομές δηλαδή “Proactive Deliveries” (PD) .

Στον πίνακα δίνονται η μέση τιμή του ανώτατου φράγματος της αντικειμενικής συνάρτησης, για τις τέσσερεις εναλλακτικές πολιτικές. Στην συνέχεια, στα δύο γραφήματα δίνονται η τιμή για κάθε ένα από τα 50 προβλήματα για την κλάση των προβλημάτων χρονικού ορίζονται 3 τιμών, και οι τιμές του μέσου όρου των 5 προβλημάτων ίσου πλήθους αποθηκών.

Στην αρχή παρουσιάζονται, η περίπτωση του χαμηλού κόστους αποθήκευσης προϊόντων και στην συνέχεια του υψηλού.



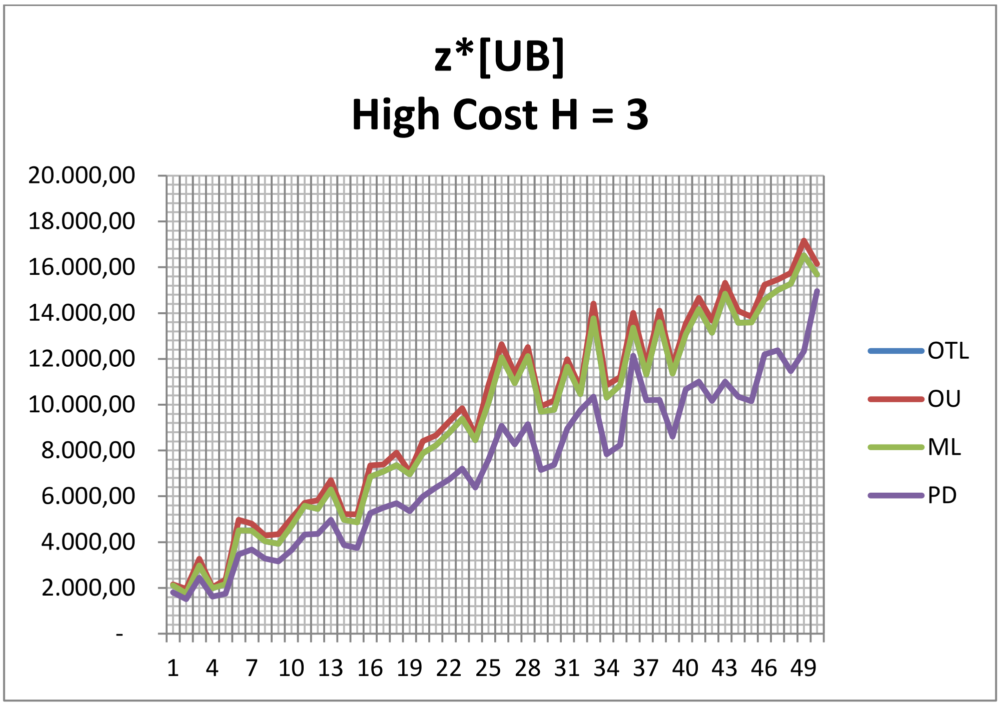
Σχήμα 6-1: Αποτελέσματα άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Χαμηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 3



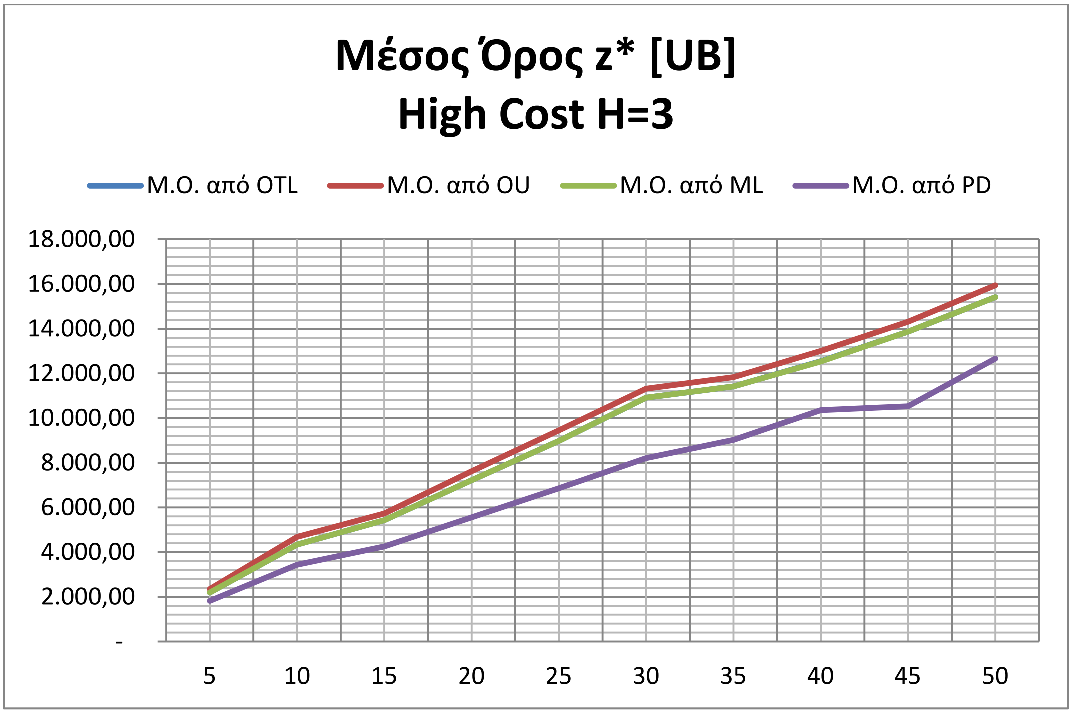
Σχήμα 6-2: Μέσοι όροι τιμών άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Χαμηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 3

	Μέσος όρος z*[UB]			
Πλήθος Αποθηκών	Μ.Ο. από OTL	Μ.Ο. από OU	Μ.Ο. από ML	Μ.Ο. από PD
5	1.275,99	1.418,76	1.275,86	1.200,28
10	1.911,08	2.228,67	1.910,93	1.787,32
15	2.207,88	2.493,47	2.207,77	2.048,50
20	2.665,58	3.053,02	2.665,58	2.442,18
25	2.987,90	3.451,15	2.987,90	2.742,42
30	3.292,96	3.643,22	3.292,93	2.977,12
35	3.448,84	3.846,87	3.448,84	3.149,00
40	3.703,82	4.125,70	3.703,82	3.559,26
45	3.867,63	4.270,61	3.867,48	3.747,65
50	4.327,53	4.810,87	4.327,16	4.002,34
Μέσος Όρος	2.968,92	3.334,23	2.968,83	2.765,61

Πίνακας 6-1: Χαμηλό κόστος αποθήκευσης / Χρονικός ορίζοντας 3



Σχήμα 6-3: Αποτελέσματα άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Υψηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 3



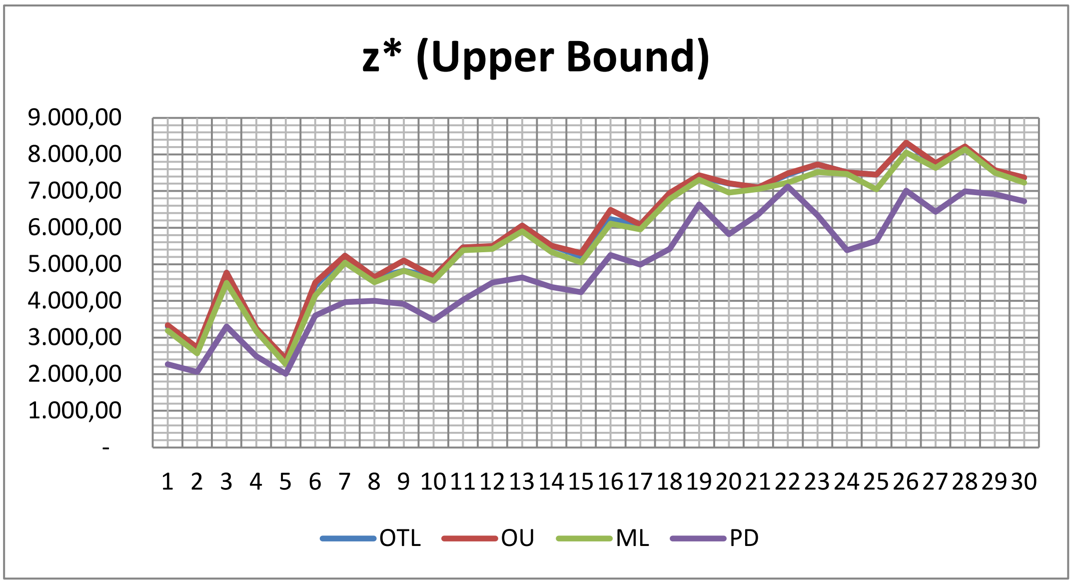
Σχήμα 6-4: Μέσοι όροι τιμών άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Υψηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 3

Πλήθος Αποθηκών	Μέσος όρος z*[UB]			
	M.O. από OTL	M.O. από OU	M.O. από ML	M.O. από PD
5	2.201,20	2.354,18	2.199,90	1.827,95
10	4.338,72	4.690,46	4.337,97	3.447,27
15	5.436,81	5.736,91	5.435,80	4.255,57
20	7.225,70	7.619,91	7.225,70	5.564,66
25	8.982,58	9.460,75	8.982,07	6.861,80
30	10.919,21	11.320,65	10.918,32	8.203,11
35	11.411,68	11.828,82	11.411,68	9.027,69
40	12.543,68	13.011,46	12.541,04	10.359,46
45	13.867,30	14.317,82	13.865,34	10.535,65
50	15.413,84	15.948,78	15.410,82	12.665,34
Μέσος Όρος	9.234,07	9.628,97	9.232,86	7.274,85

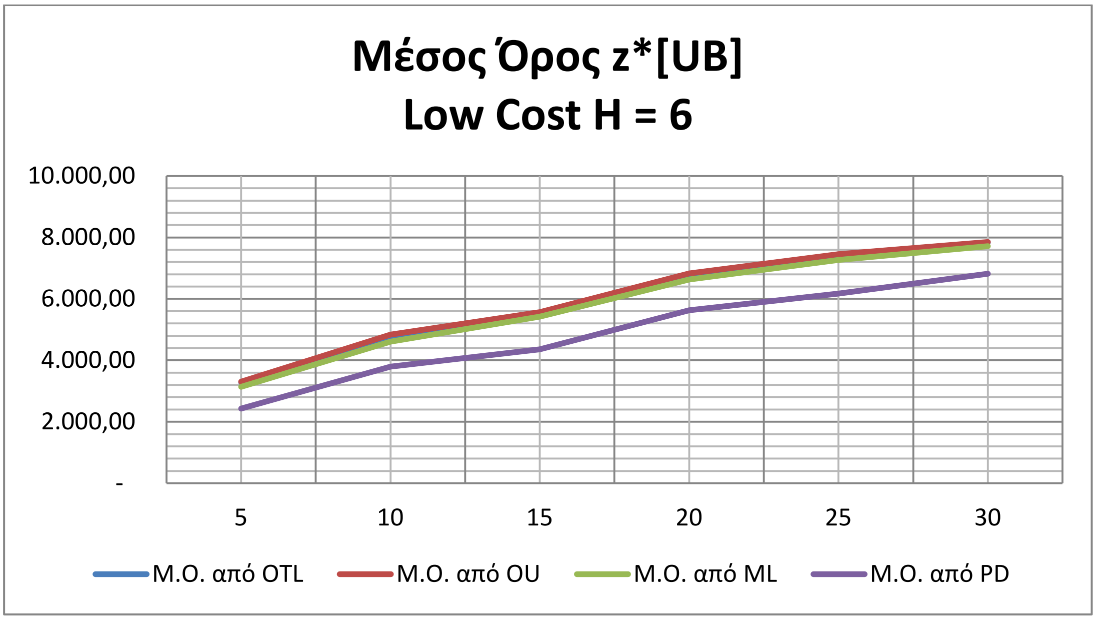
Πίνακας 6-2: Υψηλό κόστος αποθήκευσης / Χρονικός ορίζοντας 3

Αυτό που φαίνεται και στις δύο περιπτώσεις είναι ότι η πολιτική των προληπτικών διανομών που προτείνεται και στις δύο περιπτώσεις έχει χαμηλότερο συνολικό κόστος. Στην περίπτωση του χαμηλού επιπέδου αποθήκευσης, η βελτίωση είναι κατά μέσο όρο της τάξης του 7%, ενώ στην περίπτωση του υψηλού κόστους 25%.

Η περίπτωση του μεγαλύτερου χρονικού ορίζοντα φαίνεται στα παρακάτω γραφήματα, αρχικά για τα προβλήματα με χαμηλό κόστος αποθήκευσης και στην συνέχεια με υψηλό κόστος.



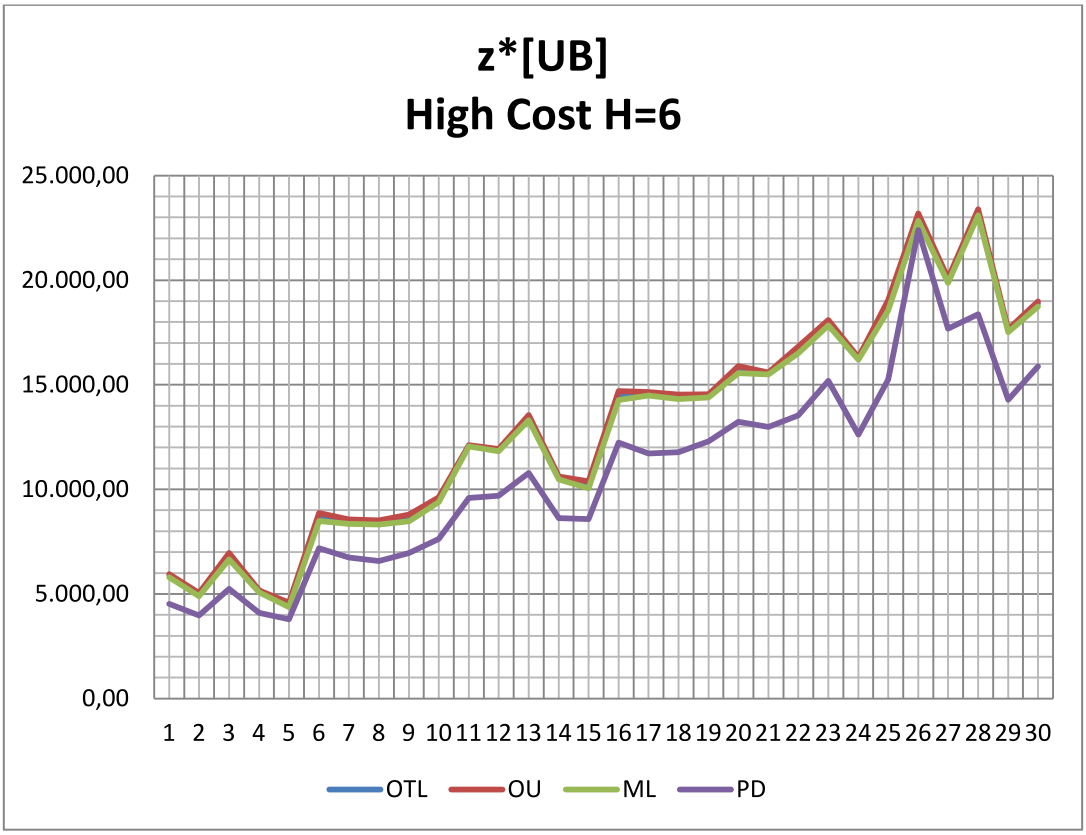
Σχήμα 6-5: Αποτελέσματα άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Χαμηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 6



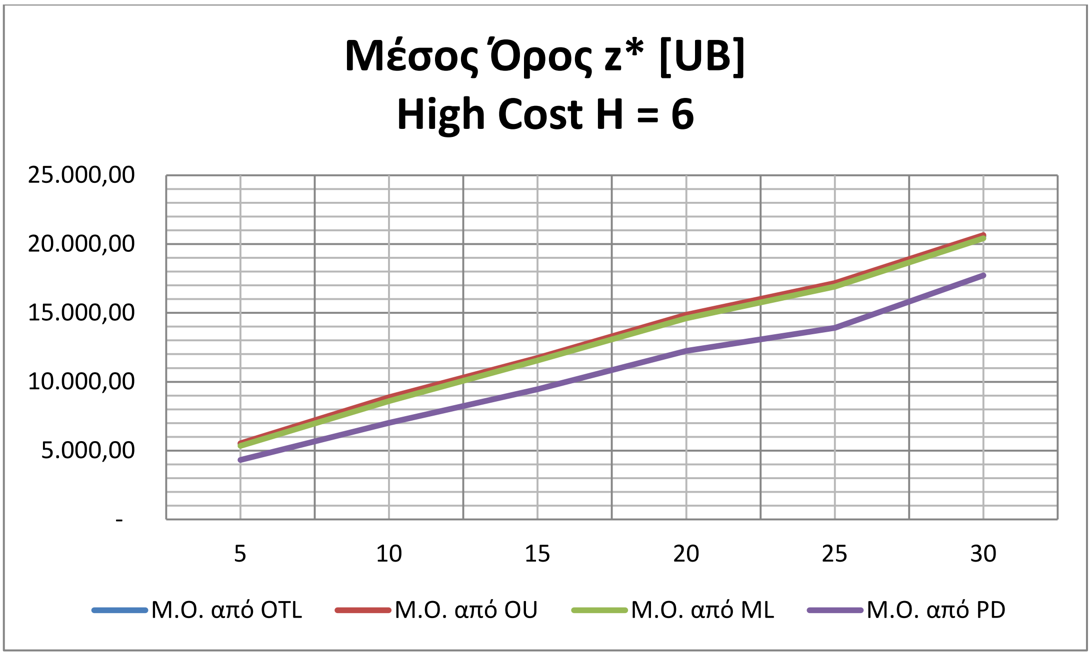
Σχήμα 6-6: Μέσοι όροι τιμών άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Χαμηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 6

	Μέσος όρος z*[ub]			
Πλήθος Αποθηκών	Μ.Ο. από OTL	Μ.Ο. από OU	Μ.Ο. από ML	Μ.Ο. από PD
5	3.288,30	3.299,98	3.136,90	2.428,48
10	4.751,96	4.832,89	4.612,50	3.792,94
15	5.546,96	5.566,39	5.418,55	4.359,50
20	6.762,36	6.833,29	6.625,35	5.625,33
25	7.443,39	7.454,15	7.261,77	6.170,24
30	7.835,02	7.847,39	7.709,87	6.815,64
Μέσος Όρος	5.938,00	5.972,35	5.794,16	4.865,35

Πίνακας 6-3: Χαμηλό κόστος αποθήκευσης / Χρονικός ορίζοντας 6



Σχήμα 6-7: Αποτελέσματα άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Χαμηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 6



Σχήμα 6-8: Μέσοι όροι τιμών άνω φράγματος αντικειμενικής συνάρτησης, Υψηλό κόστος αποθήκευσης Χρονικός Ορίζοντας 6

	Μέσος Όρος z* [UB]			
Πλήθος Αποθηκών	Μ.Ο. από OTL	Μ.Ο. από OU	Μ.Ο. από ML	Μ.Ο. από PD
5	5.514,49	5.538,02	5.354,20	4.322,97
10	8.757,00	8.872,41	8.601,92	7.017,36
15	11.681,58	11.721,82	11.543,04	9.456,25
20	14.750,66	14.863,86	14.602,12	12.250,11
25	17.113,84	17.170,82	16.913,98	13.916,11
30	20.547,02	20.657,28	20.410,64	17.720,63
Μέσος Όρπς	13.060,77	13.137,37	12.904,32	10.780,57

Πίνακας 6-4: Υψηλό κόστος αποθήκευσης / Χρονικός ορίζοντας 6

Στο παράρτημα δίνονται αναλυτικά τα στοιχεία του χρόνου που απαιτήθηκε για τον υπολογισμό της λύσης , το χάσμα αριστότητας, αλλά και το πλήθος των προβλημάτων που επιλύθηκαν .

6.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων δεύτερου επιπέδου

Όπως ειπώθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, η αξιολόγηση της αποδοτικότητας του στοχαστικού μοντέλου αρχικά θεωρήθηκε ότι ήταν εφικτό να επιτευχθεί με τα πρότυπα προβλήματα που παρουσίασε ο Coelho στην διδακτορική του διατριβή πριν από δύο έτη. Τα προβλήματα αυτά δημιουργηθήκαν χρησιμοποιώντας ως βάση τους αυτά των Arhetti et at. (2007) και με στόχο να αξιολογήσουν τον προτεινόμενο στοχαστικό – δυναμικό πρόβλημα της συνδυαστικής διαχείρισης και διανομής προϊόντων και εφοδιασμού. Τα δεδομένα τους έχουν δομηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να κάνουν χρήση μοντέλων πρόβλεψης της ζήτηση και να τρέχουν το ντετρμινιστικό τους μοντέλο σε ένα πλαίσιο κινούμενου ορίζοντα. Δεν υπάρχει η έννοια του μελλοντικού σεναρίου εναλλακτικών τιμών ζήτησης.

Η δομή του στοχαστικού μοντέλου προγραμματισμού της προσέγγισης της παρούσας εργασίας αξιολογεί το κόστος των διορθωτικών κινήσεων σε συνάρτηση με των εναλλακτικών σεναρίων που μπορεί να προκύψουν αλλά και την πιθανότητα εμφάνισής τους. Επίσης, στην παρούσα προσέγγιση δίνεται η δυνατότητα να αξιολογηθούν διαφορετικά κόστη διορθωτικών κινήσεων μεταφόρτωσης και πάλι συσχετιζόμενη με τα υπό αξιολόγηση σενάρια.

Η πληροφορία των πιθανών διαφορετικών τιμών ζήτησης και κόστους μεταφοράς που έπρεπε να αξιολογηθούν δεν γινόταν με τα πρότυπα προβλήματα του Coelho(2013). Έτσι αποφασίστηκε με την λογική που έχει δομηθεί το προτεινόμενο μοντέλο να τροποποιηθούν τα πρότυπα προβλήματα των Arthetti et al(2007) και να εκτελεστεί η πειραματική διαδικασία.

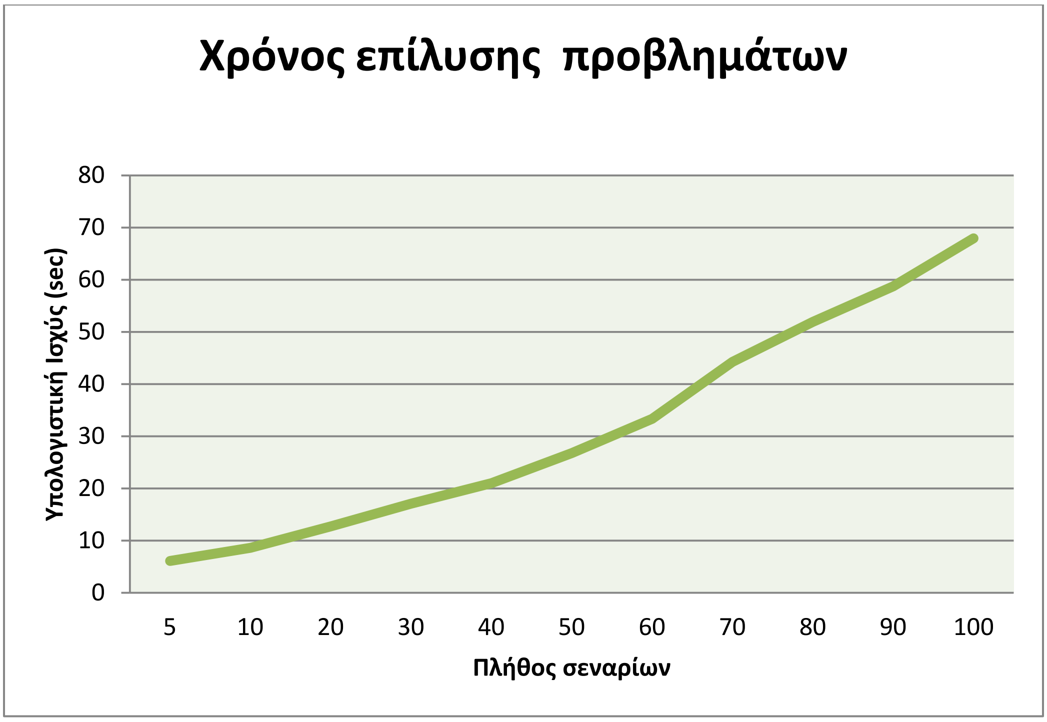
Για κάθε λοιπόν πρόβλημα των Arhetti et al(2007) δημιουργήθηκε ένα πρότυπο όπου περιέχει επιπλέον τις εξής πληροφορίες:

1. την τιμή του εναλλακτικού κόστους μεταφόρτωσης ανά σενάριο,
2. την πραγματική ζήτηση ανά αποθήκη και ανά σενάριο,
3. και την πιθανότητα εμφάνισης κάθε εναλλακτικού σεναρίου.

6.3.1 Χρονική απόκριση σε συνάφεια με το πλήθος των σεναρίων

Αυτό που θέλουμε τώρα να μπορούμε να αξιολογήσουμε είναι την ανοχή του μοντέλου, ως προς το πλήθος των σεναρίων . Την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης και άρα του συνολικού κόστους (τωρινού και αναμενόμενου μελλοντικού), ως προς την κατανομή των πιθανοτήτων και του κόστους των διορθωτικών ενεργειών μεταφόρτωσης.

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα σε συνάφεια με το πλήθος των σεναρίων ήταν το πρώτο στοιχείο που θελήσαμε να αξιολογήσουμε. Έτσι, εκτελέστηκε η διαδικασία για περιπτώσεις που η κατανομή της μελλοντικής ζήτησης δίνεται από 5 ,10 , 20 έως και 100 σενάρια. Το παρακάτω γράφημα οπτικοποιεί το αποτέλεσμα ενώ ο πίνακας περιέχει όλα τα διευκρινιστικά στοιχεία.



Σχήμα 6-9: Οπτικοποίηση της χρονικής απόκρισης σε συνάφεια με το πλήθος των σεναρίων

Πλήθος Σεναρίων	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Χρόνος επίλυσης (sec)	6,14	8,62	12,72	17,07	21,01	26,78	33,35	44,25	51,91	58,76	67,95

Πίνακας 6-5: Χρονική απόκριση σε συνάφεια με το πλήθος των σεναρίων

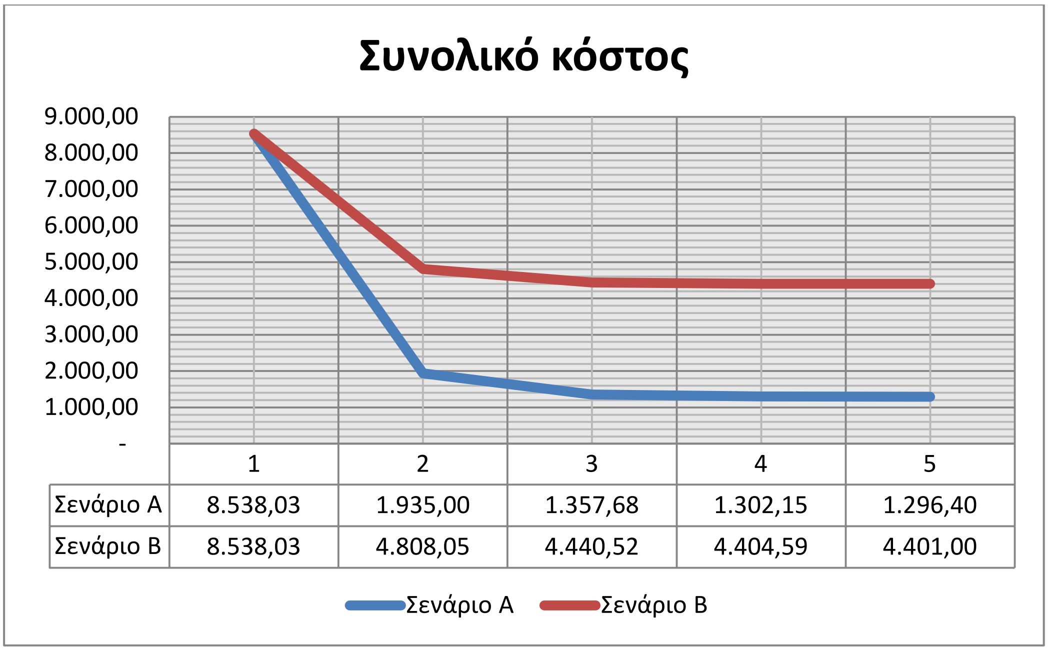
Στην συνέχεια θέλοντας να αξιολογηθούν οι δυνατότητες που μπορεί να δώσει ένα τέτοιο μοντέλο σε ένα διαχειριστή “Vendor Managed Inventory” εκτελέστηκαν διάφορα σενάρια, που από την μία διατηρούνται σταθερές οι τιμές των πιθανοτήτων εμφάνισης των σεναρίων, αλλά μεταβάλλεται το κόστος των διορθωτικών κινήσεων. Αντίστοιχα, εκτελέστηκε η διαδικασία διατηρώντας σταθερές τις τιμές του κόστους των διορθωτικών κινήσεων, ενώ μεταβάλλεται η κατανομή τη μελλοντικής ζήτησης. Έτσι, ξεκινώντας από μία λοξή προς τα αριστερά κατανομή, μετατρέπεται σε μια λοξή προς τα δεξιά. Ο έλεγχος γίνεται σε ένα πρόβλημα 5 και σε ένα 10 αποθηκών, έτσι ώστε να δοθεί εστίαση στην ανάλυση της ευαισθησία των παραμέτρων που ελέγχονται και όχι στην υπολογιστική πολυπλοκότητα της διαδικασίας.

6.3.2 Ανάλυση ευαισθησίας των τιμών του κόστους των διορθωτικών κινήσεων με την διαδικασία της μεταφόρτωσης

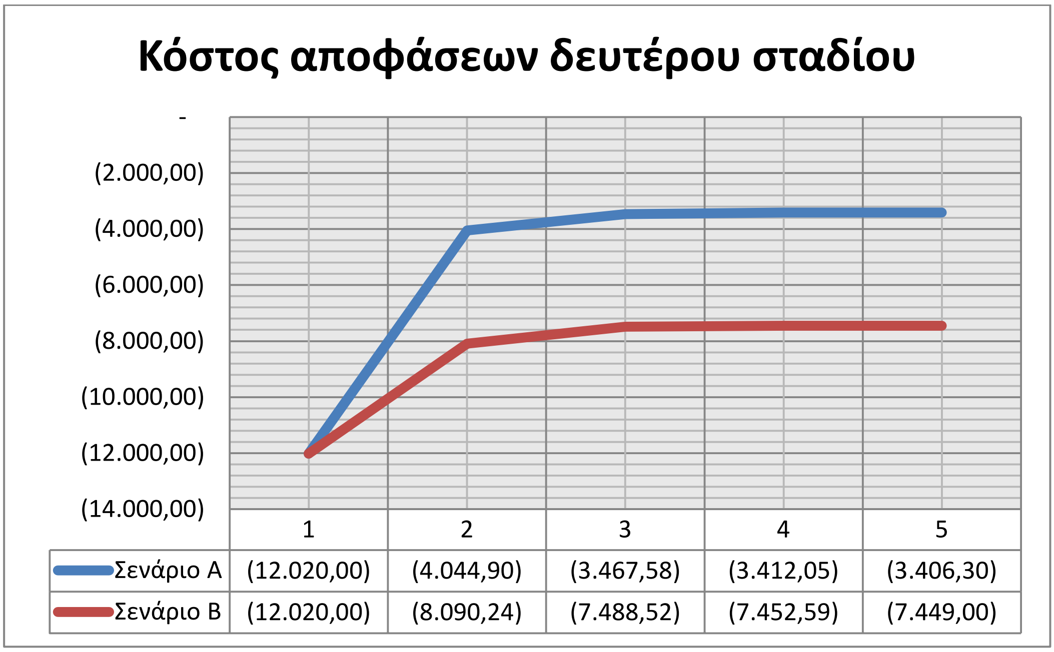
Υποθέτοντας ότι υπάρχουν δύο εναλλακτικά σενάρια, τα οποία στο πρώτο θα υπάρξει αύξηση της ζήτησης 5% με πιθανότητα εμφάνισης 90% και στο δεύτερο σενάριο αύξηση της ζήτησης 10% με πιθανότητα εμφάνισης 10%.

Αυτό που επιθυμείται να αξιολογηθεί είναι πως και πόσο επηρεάζει η μεταβολή της τιμής του κόστους της μεταφόρτωσης στην διαμόρφωση της τελικής πολιτικής του εφοδιασμού. Έτσι, από την μία κρατώντας σταθερή την τιμή του κόστους του δεύτερου σεναρίου (10% αύξηση – 10% πιθανότητα εμφάνισης), μεταβάλλεται η τιμή του συντελεστή α στο κόστος της μεταφόρτωσης ανά μονάδα προϊόντος σε 4 διαφορετικές κλίμακες από 0.1 0.01,0.001,0.0001. Στην συνέχεια έγινε η ίδια διαδικασία για το πρώτο σενάριο (5% αύξηση – πιθανότητα εμφάνισης 90%) με κλίμακα κόστους από 0.5,0.05,0.005,0.0005. Τα τρία στοιχεία που αξιολογήθηκαν ήταν η μεταβολή της πολιτικής των αποφάσεων πρώτου σταδίου, η τιμή της πολιτικής των διορθωτικών πολιτικών δευτέρου σταδίου και η συνολική αντικειμενική συνάρτηση του κόστους των αποφάσεων.

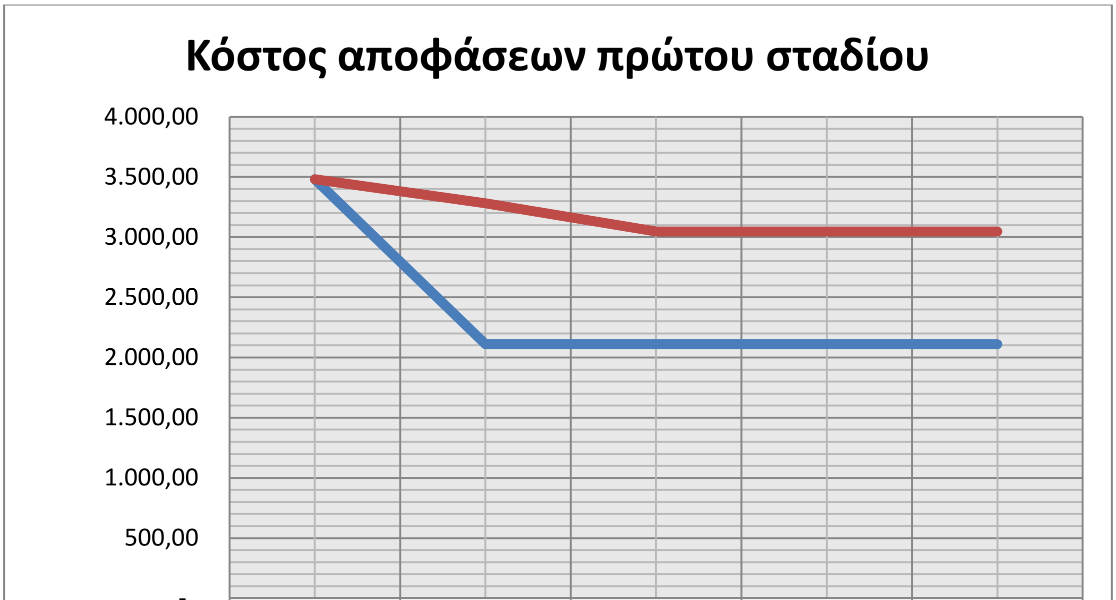
Τα παρακάτω γραφήματα οπτικοποιούν την πληροφορία της μεταβολής αύτης.



Σχήμα 6-10: Συνολικό κόστος σε συνάφεια με τη μεταβολή του κόστους της μεταφόρτωσης



Σχήμα 6-11: Κόστος διορθωτικών ενεργειών σε συνάφεια με τη μεταβολή του κόστους της μεταφόρτωσης



	1	2	3	4	5
Σενάριο Α	3.481,97	2.109,90	2.109,90	2.109,90	2.109,90
Σενάριο Β	3.481,97	3.282,19	3.048,00	3.048,00	3.048,00

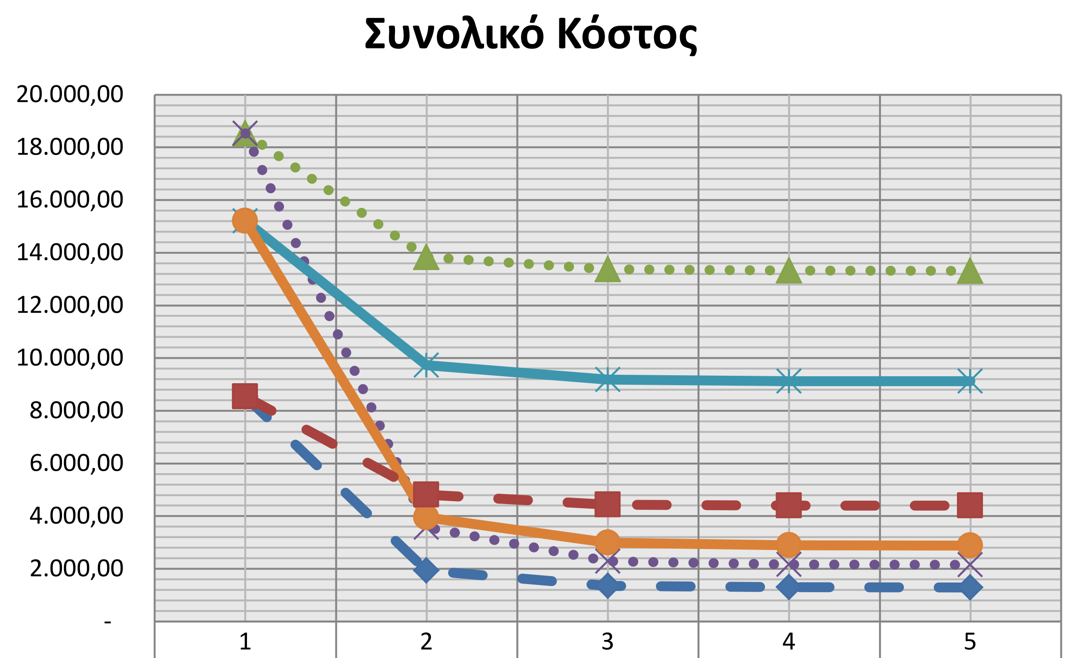
Σχήμα 6-12: Κόστος αποφάσεων πρώτου σταδίου σε συνάφεια με τη μεταβολή του κόστους της μεταφόρτωσης

Αυτό που γίνεται σαφές λοιπόν, είναι ότι η μεταβολή της τιμής του κόστους επηρεάζει σημαντικά της πολιτική των πλάνων διανομής. Όταν επιτευχθεί μια συμφωνία με αρκετά χαμηλό κόστος μεταφόρτωσης υπάρχει περιθώριο στον αποφασίζων να μην προβεί σε προληπτικές διανομές. Έτσι, στην περίπτωση αυτή υπάρχει μεγάλο περιθώριο περεταίρω μείωσης των αποθεματικών. Όμως σε περιπτώσεις που το κόστος της μεταφόρτωσης είναι πολύ μεγάλο, δεν μπορεί να γίνει σημαντική μείωση στο αποθεματικό των αποθηκών.

6.3.3 Ανάλυση ευαισθησίας της κατανομής των πιθανοτήτων των σεναρίων των διορθωτικών κινήσεων

Στην συνέχεια για να αξιολογηθεί η διαφοροποίηση του κόστους των αποφάσεων τώρα και σε συνάφεια με την κατανομή των πιθανοτήτων στα εναλλακτικά σενάρια, εξετάστηκε και το παραπάνω ζήτημα για άλλα δύο προβλήματα.

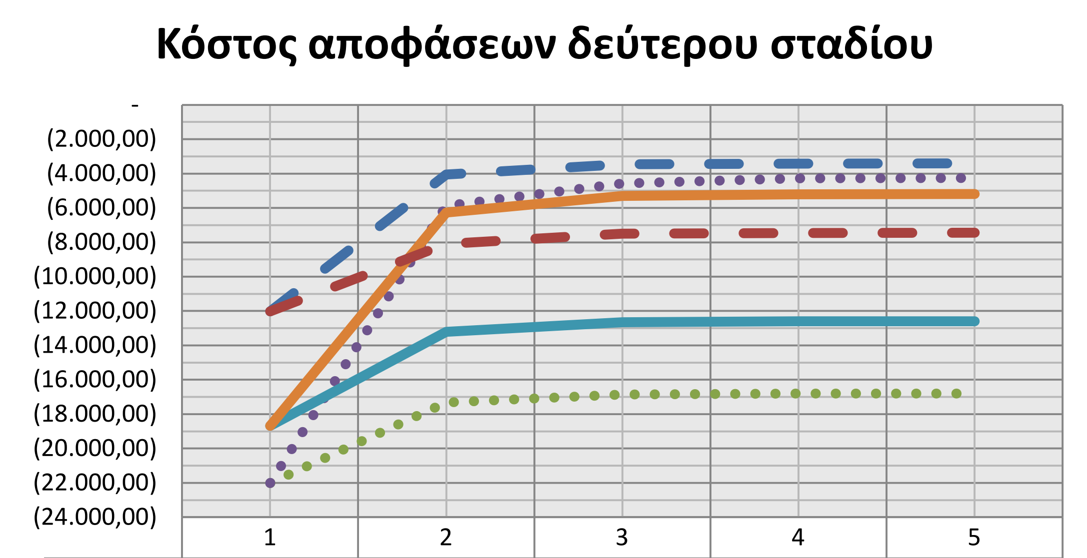
Τώρα το πρώτο εναλλακτικό πρόβλημα θα έχει πιθανότητα εμφάνισης 70 % στο σενάριο Α ενώ το δεύτερο 30% στο σενάριο Β. Το δεύτερο εναλλακτικό πρόβλημα θα έχει πιθανότητα 60% στο πρώτο σενάριο και 40% στο δεύτερο.



	1	2	3	4	5
60%	18.530,49	13.837,71	13.368,43	13.321,51	13.316,81
40%	18.530,49	3.570,38	2.289,76	2.165,25	2.152,99
70%	15.199,95	9.725,05	9.177,56	9.122,81	9.117,34
30%	15.199,95	3.956,18	2.993,14	2.896,84	2.887,21
90%	8.538,03	1.935,00	1.357,68	1.302,15	1.296,40
10%	8.538,03	4.808,05	4.440,52	4.404,59	4.401,00

Σχήμα 6-13: Συνολικό κόστος σε συνάφεια με τη μεταβολή του κόστους της μεταφόρτωσης και την κατανομή των πιθανοτήτων

Αυτό που μπορεί να διακρίνει κάποιος από το παραπάνω γράφημα είναι ότι, όσο κλείνει η ψαλίδα των πιθανοτήτων μεταξύ των δύο εναλλακτικών σεναρίων, το συνολικό κόστος είναι μεγαλύτερο. Καθώς μεταβάλλεται όμως και το κόστος της μεταφόρτωσης, το συνολικό κόστος σε όλες τις περιπτώσεις μειώνεται σχεδόν εκθετικά . Διατηρώντας την μεταξύ τους διαφορά.



	1	2	3	4	5
60%	(22.012,46)	(17.319,68)	(16.850,40)	(16.803,48)	(16.798,78)
40%	(22.012,46)	(5.881,62)	(4.567,00)	(4.275,14)	(4.262,88)
70%	(18.681,92)	(13.207,02)	(12.659,53)	(12.604,78)	(12.599,31)
30%	(18.681,92)	(6.267,42)	(5.304,38)	(5.208,08)	(5.198,45)
90%	(12.020,00)	(4.044,90)	(3.467,58)	(3.412,05)	(3.406,30)
10%	(12.020,00)	(8.090,24)	(7.488,52)	(7.452,59)	(7.449,00)

Σχήμα 6-14: Κόστος διορθωτικών ενεργειών σε συνάφεια με τη μεταβολή του κόστους της μεταφόρτωσης και την κατανομή των πιθανοτήτων

	1	2	3	4	5
90%	3.481,97	2.109,90	2.109,90	2.109,90	2.109,90
10%	3.481,97	3.282,19	3.048,00	3.048,00	3.048,00
60%	3.481,97	3.481,97	3.481,97	3.481,97	3.481,97
40%	3.481,97	2.311,24	2.277,24	2.109,89	2.109,89
30%	3.481,97	2.311,24	2.311,24	2.311,24	2.311,24
70%	3.481,97	3.481,97	3.481,97	3.481,97	3.481,97

Σχήμα 6-15: Κόστος αποφάσεων πρώτου σταδίου σε συνάφεια με τη μεταβολή του κόστους της μεταφόρτωσης και την κατανομή των πιθανοτήτων

Και στις τρεις περιπτώσεις, με υψηλό κόστος μεταφόρτωσης επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή για το κόστος των αποφάσεων πρώτου σταδίου. Άρα, μεγιστοποιείται η προληπτική διανομή. Καθώς μειώνεται το κόστος μεταφόρτωσης και ανάλογα το μοντέλο των ανταγωνιστικών σεναρίων, επιτυγχάνεται άμεση ή σταδιακή μείωση.

6.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν συνοπτικά τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας που εκπονήθηκε . Ο στόχος της πρώτης φάσης ήταν να ποσοτικοποιηθεί και να αποδειχθεί η δυναμική των δύο έγκυρων περιορισμών που προτάθηκαν για την οριοθέτηση των ποσοτήτων διανομής. Ο δεύτερος στόχος ήταν να πιστοποιηθεί η δυναμική της θεώρησης της διαδικασίας της μεταφόρτωσης ως διορθωτική κίνηση ενός στοχαστικού μοντέλου.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον να ειπωθεί στο στάδιο αυτό είναι ότι το μοντέλο του στοχαστικού προγραμματισμού που αναπτύχθηκε είχε ως στόχο του να εσωκλείσει στις τωρινές αποφάσεις το κόστος των μελλοντικών αποφάσεων που άγονται από την ευελιξία των αποφάσεων αυτών. Για το λόγο αυτό η πειραματική διαδικασία εστίασε στο να διερευνηθεί πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί από ένα διαχειριστή ένα τέτοιο μεθοδολογικό πλαίσιο, και ποιά είναι τα πλεονεκτήματά του έναντι μιας επαναληπτικής διαδικασίας επαναϋπολογισμού ντετερμινιστικών μοντέλων.

Η ενσωμάτωση της μεταφόρτωσης στην διαδικασία της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών προτάθηκε πολύ πρόσφατα από τον Coelho στην διατριβή του. Η προσέγγιση του Coelho παρέχει την δυνατότητα να διερευνηθεί η λειτουργικότητα των μεγάλων κέντρων μεταφόρτωση (hub & spoke). Όμως, στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιήθηκε σε διαφορετικό μεθοδολογικό πλαίσιο μόνο ως διορθωτική κίνηση σε αδυναμία εκπλήρωσης της ζήτησης από τις υπάρχουσες ποσότητες των αποθηκών. Με την προτεινόμενη θεώρηση στο μοντέλο παρουσιάζεται μια διαδικασία αλληλεπίδρασης μεταξύ τωρινών και μελλοντικών αποφάσεων, σε συνάφεια με το κόστος της μεταφόρτωσης. Θεωρείται ένα εύρωστο εργαλείο αξιολόγησης και κοστολόγησης της διαδικασίας της μεταφόρτωσης.

Κεφάλαιο 7 Σύνοψη Διατριβής

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκε το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης στόλου οχημάτων αλλά και η ειδική περίπτωση της συνδυαστικής διαχείρισης της διανομής των προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών. Το πρωτεύον ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε ήταν η διερεύνηση των επιπτώσεων της μεταβλητότητας – στοχαστικότητας των παραμέτρων του προβλήματος. Το μεθοδολογικό πλαίσιο του στοχαστικού προγραμματισμού επιλέχθηκε να στοιχειοθετήσει το μαθηματικό μοντέλο που προτάθηκε για την περίπτωση της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών σε συνθήκες αβεβαιότητας. Το πλαίσιο αυτό έδωσε την δυνατότητα να οριστεί ένα ευέλικτο μοντέλο βελτιστοποίησης. Ευέλικτο με την έννοια, ότι παρέχει την δυνατότητα στους διαχειριστές του συστήματος να καθορίσουν μια πολιτική, όπου να συμπεριλάβουν στα βραχυπρόθεσμα πλάνα τους, τους μακροπρόθεσμούς στόχους τους. Αυτό αρχικά επιτυγχάνεται ποσοτικοποιώντας το κόστος των μελλοντικών αποφάσεων που πηγάζουν από τις σημερινές επιλογές και αποφάσεις. Στην συνέχεια, με βάση την θεωρία της δυϊκότητας επαναπροσδιορίζεται το αρχικό σύστημα αποφάσεων και συγκλίνει στο βέλτιστο σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Από το γενικό πρόβλημα της δρομολόγησης και των μαθηματικών – προτύπων η έρευνα εστιάστηκε στο ειδικό πρόβλημα και τα μαθηματικά πρότυπα που το πλαισιώνουν. Αποσυνθέτοντας την διαδικασία και εντοπίζοντας κοινά σημεία στις εναλλακτικές μορφοποιήσεις, έγινε προσπάθεια με δημιουργικότητα και πρωτοτυπία να προστεθεί ένα λιθαράκι στην έρευνα που έχει εκπονηθεί μέχρι σήμερα.

Το πεδίο της συνδυαστικής διαχείρισης διανομής προϊόντων και εφοδιασμού αποθηκών έχει πολλά να αναδείξει σε ένα πολύπλοκο διαχειριστικό σύστημα όπως είναι αυτό της εφοδιαστικής αλυσίδας και των logistics. Η σύγκλιση της βιομηχανικής και της ακαδημαϊκής έρευνας δείχνει να μπαίνει σε μια καλή τροχιά με την συνεργασία των G. Desaulniers, J. G. Rakke, L. Και C. Coelho.

Πέρα από την μορφοποίηση του προβλήματος, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση «Vehicle – Flow formulation», θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και οι άλλες τρείς εναλλακτικές που δείχνουν να μελετώνται από τους ερευνητές του κλασσικού προβλήματος δρομολόγησης.

Επίσης, η παραγωγική συνεργασία και η άμμιλα της ομάδας των ακαδημαϊκών του πανεπιστημίου της Μπολόνιας με τον καθηγητή Baldacci από την μία πλευρά του πλανήτη και της ομάδας των ακαδημαϊκών του πανεπιστημίου του Waterloo στον Καναδά και τον Fukasawa, από την άλλη, ίσως να μας οδηγήσει πολύ σύντομα σε νέους έγκυρους περιορισμούς που να ισχυροποιήσουν τα μοντέλα τους και να μπορούν να επιλυθούν προβλήματα διανομής σε μεγαλύτερα δίκτυα πελατών με ακριβείς μεθόδους.

Τέλος αντί επίλογο παρουσιάζεται στον αναγνώστη το ακόλουθο γνωμικό του Γάλλος συγγραφέας Albert Camus, 1913 – 1960, Νόμπελ 1957,“*Αυτοί που γράφουν ξεκάθαρα έχουν αναγνώστες. Αυτοί που γράφουν δυσνόητα έχουν σχολιαστές*”.

Παράρτημα Ι

Στο σημείο αυτό παρατίθενται τα μοντέλα που αναπτύχτηκαν στο πλαίσιο της διατριβής και χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της πειραματικής διαδικασίας.

Τα μοντέλα κωδικοποιήθηκαν σε αλγεβρική γλώσσα μοντελοποίησης του IBM ILOG CPLEX Optimization Studio V12.4 OPL IDE και επιλύθηκαν με την μηχανή βελτιστοποίησης CPLEX.

```
/*********************************************
 * OPL 12.4 Model
 * Author: ΕΥΗ
 * Creation Date: 08 Ιουλ 2014 at 10:36:33 π.μ.
 *********************************************/
// This model constitutes the first component of a two stage
stochastic programming model
// It aims to find the IRP solution before the real demand is
revealed

//Definition of Parameters
int Nbnodes=...;
range Nnodes = 1..Nbnodes;// Number of Customers  in the problem /
//Node 1 == Supplier
int NbPeriods = ...;
range Periods = 1..NbPeriods;
float Demand[Nnodes][Periods] = ...;// Demand of each customer
float Capacity[Nnodes] = ...;// Inventory Capacity of each Customer
//of each customer
float Avail_Product[Periods]=...;
float Vehicle_Capacity=...;
float Inv_Holding_Cost[Nnodes]=...;
float Start_Inv[Nnodes]=...;
float Distances[Nnodes][Nnodes] = ...;// Distance from i ->j
//(Symmetric/ (i->i big M)
//Verification of consistency of the demand VS Vehicle Capacity

assert forall(t in Periods)
 sum(i in Nnodes)Demand[i][t]<=Vehicle_Capacity;

// variables
dvar float+ q[Nnodes][Periods];
dvar float+ u[Nnodes][Periods];
dvar float+ Inv[Nnodes][0..NbPeriods];
dvar boolean y[Nnodes][Periods];
```

```
dvar boolean X[Nnodes][Nnodes][Periods];
// equals to 1 if i ->j
  dexpr float Inv_cost=sum(i in Nnodes, t in Periods)
Inv_Holding_Cost[i]*Inv[i][t];
  dexpr float Trans_cost=sum(i in Nnodes, j in Nnodes,t in Periods)
Distances[i][j]  *X[i][j][t];
// Objective function
 minimize Inv_cost + Trans_cost;


//Constraints

 subject to {

C1b:Inv[1][0]==Start_Inv[1];

forall(t in Periods)
C2:Inv[1][t]>=0;

forall(t in Periods)
C3:Inv[1][t]==Inv[1][t-1]+Avail_Product[t]-sum(i in Nnodes
:i>1)q[i][t];

 forall (i in Nnodes: i>1,t in Periods)
 C4:Inv[i][t]>=0;

  forall (i in Nnodes: i>1,t in Periods)
  C5:Inv[i][t]<=Capacity[i];

 forall (i in Nnodes: i>1,t in Periods)
 C6: Inv[i][t]==Inv[i][t-1] +q[i][t]-Demand[i][t];
 forall(i in Nnodes: i>1)

C7b:Inv[i][0]==Start_Inv[i];

 forall(t in Periods)
AC1: sum(i in Nnodes:i>1)q[i][t]<=Vehicle_Capacity;

 forall(i in Nnodes:i>1,t in Periods)
AC2: q[i][t]<=y[i][t]*sum(j in t..NbPeriods)Demand[i][j] ;

 forall(i in Nnodes:i>1)
sum(t in Periods)q[i][t] == sum(t in Periods)Demand[i][t] -
Start_Inv[i];

 forall(t in Periods)
   sum(j in 1..t,i in Nnodes : i>1 )q[i][t]<= Start_Inv[1] +sum(j in
1..t) Avail_Product[j];

 forall(i in Nnodes:i>1)
  AC44: Inv[i][0]+ sum(t in Periods)q[i][t]==sum(t in
Periods)Demand[i][t];

 //routing constrains

  sum(j in Nnodes:j>1,t in Periods)X[1][j][t]<=NbPeriods;

// forall(t in Periods)
// If secures that the vehicle will start the path from node 1. (the
supplier)
 forall(t in Periods)
```

```
   C111: sum( j in Nnodes : j > 1) X[1][j][t] ==y[1][t];
   forall(i,j in Nnodes:i==j,t in Periods)
     C1111:X[i][j][t]==0;
 forall ( j in Nnodes,t in Periods)// It secures indermidiate balance
    C14:sum ( i in Nnodes:i!= j) X[i][j][t] == sum( k in Nnodes:k!=
j) X[j][k][t];
 forall (j in Nnodes,t in Periods)
  C14b:  sum ( i in Nnodes:i!= j) X[i][j][t] + sum( k in Nnodes:k!=
j) X[j][k][t]==2*y[j][t];
  forall(i in Nnodes,t in Periods)
    C14c: sum(j in Nnodes:i!= j)X[i][j][t]<=y[i][t];
    forall(j in Nnodes,t in Periods)
     C14d:sum(i in Nnodes:i!= j)X[i][j][t]<=y[j][t];
 forall (i in Nnodes :i>1 , j in Nnodes: j>1 && i!= j, t in
Periods)// subtour elimination constrains
  C15: Vehicle_Capacity*(1- X[i][j][t]) + u[i][t] >= u[j][t]+ q[j][t]
;
forall ( i in Nnodes :i>1,t in Periods)
   C17: q[i][t] <= u[i][t];
 forall ( i in Nnodes :i>1,t in Periods)
   C177: u[i][t]<= Vehicle_Capacity *y[i][t];  // Capacity constrain
of the vehicle // Capacity constrain of the vehicle

forall (t in Periods, i in Nnodes:i>1)
  y[i][t]<=y[1][t];

}
execute DISPLAY {
  writeln("Initial Objective Function:",Inv_cost + Trans_cost);
   writeln("\n<from node,to node,period,x[i][j][t]>\n");
   for(var t in Periods){
   for(var i in Nnodes){
   for(var j in Nnodes){
      if(X[i][j][t] > 0)
         writeln("<",i,",",j,",",t,",",X[i][j][t],">");
}

      }}}
```

Στην συνέχεια παραθέτεται ο κώδικας που αναπτύχθηκε για την λύση του στοχαστικού μοντέλου. Για να υλοποιηθεί αυτό χρειάστηκε να δημιουργηθεί ένα πρωτεύον μοντέλο που θα εκτελέσει την διαδικασία του IRP θα καλεί το δευτερεύον που θα εκτελεί την διαδικασία της εκτίμησης του αναμενόμενου κόστους τη μεταφόρτωσης και θα το επιστρέφει στο πρωτεύον με την μορφή ενός νέου περιορισμού. Αρχικά παραθέτεται το πρωτεύον και στην συνέχεια το δευτερεύον .

Πρωτεύον

```
/*********************************************
 * OPL 12.4 Model
 * Author: ΕΥΗ ΧΡΥΣΟΧΟΟΥ
 * Creation Date: 06 Ιουν 2015 at 8:05:32 μ.μ.
```

```
*********************************************/

// This model constitutes the two stage stochastic programming model
// for the Inventory Routing problem with recourse actions of
transshipment
// It is stucture in the framework of the L - Shaped Decomposition
method of
// Laporte & Levouex.....


//Definition of Parameters
int verbose = ...;                                    //1 or 0
      Print detailed info while running

int sc=...;
range scenario=1..sc;                           //1..2


//batch mode values
int Nbatch = ...;                               //Num of batch runs
range batches = 1..Nbatch;                      //1..numofbatches
float batchP[batches][scenario] = ...;
float batchSCConst[batches][scenario] = ...;
float m_p[i in scenario] = 0.0;                 //probabilities to be
used as data to sub model
float m_c[i in scenario] = 0.0;                 //constants to be
used as data to sub model
//float a[i in scenario]=...;


int Nbnodes=...;                                //6   Nnumber of
nodes that are participating to the problem
range Nnodes = 1..Nbnodes;                      //1..6      Set of
Retailers  including the supplier "Node 1 == Supplier"
range NMOnodes = 2..Nbnodes;              //2..6      Set of
Retailers  excluding the supplier "Node 1 == Supplier"
int NbPeriods = ...;                            //3         Planning
Horizon
int cutSize = (Nbnodes-1)*NbPeriods;      //15
range NbCuts = 1..cutSize;                      //1..15

range Periods = 1..NbPeriods;             //1..3      Set of the time
horizon
range PeriodsZero = 0..NbPeriods;         //0..3      Set of the time
horizon with zero
float Demand[Nnodes][Periods] = ...;      // Demand of each retailer
float Capacity[Nnodes] = ...;             // Inventory Capacity of
both supplier and retailers
float Avail_Product[Periods]=...;         // The amount of products
that are made available to the supplier each period
float Vehicle_Capacity=...;                     // The capacity of
the vehicle
float Inv_Holding_Cost[Nnodes]=...;       // Inventory Holding cost
of each node (both supplier & retailers)
float Start_Inv[Nnodes]=...;              // Starting inventory level
of each node(supplier & retailers)
float Distances[Nnodes][Nnodes] = ...;    // Distance from i ->j
(Symmetric/ (i->i big M)

//aux vars
```

```
float e = 0;
float E[i in NbCuts] =0.0;                                  //
float qX[i in NbCuts] =0.0;                                 //


tuple pattern {
   key int id;
   float E[NbCuts];
   float e;
}
{pattern} Cuts = ...;


//isolates theta during the first iteration
float tf = ...;


//Verification of consistency of the total Demand of the retailers
for each period VS Vehicle Capacity
assert forall(t in Periods)
 sum(i in Nnodes)Demand[i][t]<=Vehicle_Capacity;



// Decision variables
dvar  float+ q[Nnodes][Periods];// the amount of products that are
transported to retailer i at time t
dvar float+ u[Nnodes][Periods];// the total amounts that the vehicle
has until retailer i at time t
dvar float+ Inv[Nnodes][0..NbPeriods];// the inventory level of each
node(Supplier&Retailer)
dvar boolean y[Nnodes][Periods];// equal to 1 if  node i is served at
time t
dvar boolean X[Nnodes][Nnodes][Periods] ; // equals to 1 if i ->j at
time t
dvar float theta in -infinity..infinity;

dexpr float restheta = theta;

dexpr float Inv_cost=sum(i in Nnodes, t in Periods)
Inv_Holding_Cost[i]*Inv[i][t];
dexpr float Trans_cost=sum(i in Nnodes, j in Nnodes,t in Periods)
Distances[i][j]  *X[i][j][t];


// Objective function
minimize Inv_cost + Trans_cost+tf*theta;// TOTAL COST ==Inventory
cost //+ transportation cost + expected transshipment cost of second
stage

//Constraints
subject to {

// Inventory level of Supplier
//(1) Initial Supplier's inventory level equals to the starting
inventory level
            C1:Inv[1][0]==Start_Inv[1];

//(2)for each period supplier's inventory level is positive
      forall(t in Periods)
            C2:Inv[1][t]>=0;
```

```
 //(3) Recurrence Relation of inventory level at supplier
       forall(t in Periods)
            C3:Inv[1][t]>=Inv[1][t-1]+Avail_Product[t]-sum(i in
Nnodes :i>1)q[i][t];

 //Inventory level of Retailers

//(4) for each period & retailer invnetory level is always positive
      forall (i in Nnodes: i>1,t in Periods)
            C4:Inv[i][t]>=0;

//(5) for each period & each retailer the invnetory level cannot
exceed its capacity
      forall (i in Nnodes: i>1,t in Periods)
            C5:Inv[i][t]<=Capacity[i];

//(6)Recurrence Relation of inventory level of retailers
      forall (i in Nnodes: i>1,t in Periods)
            C6: Inv[i][t]>=Inv[i][t-1] +q[i][t]-Demand[i][t];

//(7)Initial Inventory level equal to starting invnetory level
       forall(i in Nnodes: i>1)
        C7:Inv[i][0]==Start_Inv[i];

// determine the transported quantities - Constrains

// (8)Constrains that fraction the transported quantities for each
period
// the total transported quantities are less than the capacity of the
vehicle
       forall(t in Periods)
      C8: sum(i in Nnodes:i>1)q[i][t]<=Vehicle_Capacity;

//(9)the quantities to be transported to each retailer at period t
//can be less or equal
//to the demand requested at period t and subsequent periods when the
//retailer is served at period t.
      forall(i in Nnodes:i>1,t in Periods)
      C9:q[i][t]<=y[i][t]*sum(j in t..NbPeriods)Demand[i][j] ;

//(10) the total quantities to be transported to each retailer are
//equal to the total
//demand over the whole planning horizon minus the starting inventory
level.
      forall(i in Nnodes:i>1)
      C10:sum(t in Periods)q[i][t] >= sum(t in Periods)Demand[i][t] -
Start_Inv[i];

 //(11) for each time the total quantities to be transported are
//fractioned by the products t
 //that are made  available to the supplier until the time t
      forall(t in Periods)
      C11:sum(j in 1..t,i in Nnodes : i>1 )q[i][t]<= Start_Inv[1]
+sum(j in 1..t) Avail_Product[j];

 //(12) Total demand of each retailer will be served by the product
 //that are made available (starting Invnetory + transported
//quantities)
      forall(i in Nnodes:i>1)
       C12: Inv[i][0]+ sum(t in Periods)q[i][t]>=sum(t in
Periods)Demand[i][t];
```

```
 //Routing Constrains
 //(13) Each period can be served by a route or not
      C13:sum(j in Nnodes:j>1,t in Periods)X[1][j][t]<=NbPeriods;

//(14) If a route will be served at time t it will have to start from
the supplier
 forall(t in Periods)
   C14: sum( j in Nnodes : j > 1) X[1][j][t] == y[1][t];

//(15)Intermidiate balance   (1)
 forall ( j in Nnodes,t in Periods)// It secures indermidiate balance
    C15:sum ( i in Nnodes) X[i][j][t] == sum( k in Nnodes)
X[j][k][t];

//(16) Intermediate Balance 2 for the j that are served at time t
 forall (j in Nnodes,t in Periods)
  C16:  sum ( i in Nnodes) X[i][j][t] + sum( k in Nnodes)
X[j][k][t]==2*y[j][t];

//(17) if a node i is served at time t than x[i][j][t] is less or
equal to 1
  forall(i in Nnodes,j in Nnodes,t in Periods)
    C17: sum(j in Nnodes)X[i][j][t]<=y[i][t];

// (18)   if a node j is served at time t than x[i][j][t] is less or
equal to 1
    forall(j in Nnodes,t in Periods)
     C18:sum(i in Nnodes)X[i][j][t]<=y[j][t];

// (19) Subtour elimination constrains (MTZ) Polynomial cardinality
 forall (i in Nnodes :i>1 , j in Nnodes: j>1 && i!= j, t in
Periods)// subtour elimination constrains
  C19:Vehicle_Capacity*(1- X[i][j][t]) + u[i][t] >= u[j][t]+ q[j][t]
;

//(20) quantities transported at i node are less that the load of the
vehicle until i retailer
forall ( i in Nnodes :i>1,t in Periods)
   C20:q[i][t] <= u[i][t];

//(21) The load until i retailer are less the the capacity of the
vehicle if the retailer is served
 forall ( i in Nnodes :i>1,t in Periods)
   C21: u[i][t]<= Vehicle_Capacity *y[i][t];

//(22) whenever a retailer is served the supplier belongs to the
route
forall (t in Periods, i in Nnodes:i>1)
 C22: y[i][t]<=y[1][t];

 // (23) Optimality Cuts added in a cuttion plane fashion

      forall( cut in Cuts )
    ctFill:
            theta +
            sum( i in NbCuts )
            cut.E[i]*q[2 + (i-1)%(Nbnodes-1)][1 + ( (i-1) div
(Nbnodes-1) )]
            >= cut.e;
```

```
}

execute Calculate_Parameters {

      for (var p = 1; p<=NbPeriods; p++){
            for (var n = 2; n<=Nbnodes; n++){
            var c = (Nbnodes-1)*(p-1) + (n-1);
            //writeln("c=", c, " [p=", p, ", n=", n, "]");
            qX[c] = q[n][p];
            }
      }
      if (verbose){
            writeln("q=", q);
            writeln("qX=", qX);
      }
} ;


main{

      function formatFloat_prec2 (f) {
            f = Math.round(f*10000);
            var fs = f.toString();
            while (fs.length<5){
              fs = "0" + fs;
            }
            fs = fs.substring(0,fs.length-
4)+','+fs.substring(fs.length-4,fs.length);
            return fs;
      }

      thisOplModel.generate();

      // Retrieving model definition, engine and data elements from
this OPL model to reuse them later
      var masterDef;
      var masterCplex;
      var masterData;

      // Preparing sub-model source, definition and engine
      var subSource;
      var subDef;
      var subCplex;



      // The master-model
      var masterOpl;

      var verbose = 0;

      var i;
      var t;

      var masterP;
      var masterConst;
    var X;
    var y;
      var z;
      var q;
      var Inv;
```

```
	var curtheta, subtheta;
	var iter;
	var rScenarios;
	var rNnodes;
	var rPeriods;
	var rPeriodsZero;

	var numOfBatches = 1; //will be updated later
// Write results to a excel file in a specific folder
  //  var ofile = new
IloOplOutputFile("Z:\\Downloads\\IRP_results.csv");
  var ofile = new IloOplOutputFile(
"C:\\Users\\ΕΥΗ\\Documents\\Διδακτορικό\\Paradoteo\\Paradeigma\\IRP_r
esults4.csv");
	ofile.writeln("IRP_06 results");

	for (var iBatch = 1; iBatch<=numOfBatches; iBatch++){
		writeln("Batch #", iBatch);
		ofile.writeln("Batch #", iBatch);

		masterDef = thisOplModel.modelDefinition;
		masterCplex = cplex;
		masterData = thisOplModel.dataElements;

		masterData.tf = 0.0;
		masterData.Cuts.clear();

		// Preparing sub-model source, definition and engine
		subSource = new IloOplModelSource("IRP_Sub.mod");
		subDef = new IloOplModelDefinition(subSource);
		subCplex = new IloCplex();

		iter = 0;
		curtheta = -Infinity;
		subtheta = +Infinity;

		while (subtheta > curtheta){
			iter++;

			masterOpl = new IloOplModel(masterDef,masterCplex);
			masterOpl.addDataSource(masterData);
			masterOpl.generate();

			numOfBatches = masterOpl.Nbatch;

			verbose = masterOpl.verbose;

			if (verbose){
				writeln("Iteration #", iter);
				writeln("  * MASTER PROBLEM");
			}

		if ( masterCplex.solve() ) {
				masterOpl.postProcess();
			z = masterCplex.getObjValue();
			curtheta = masterOpl.restheta;
				if (verbose){
				writeln("    - z = ", z);
				writeln("    - qX =",  masterOpl.qX);
			writeln("    - θ = ",  curtheta);
			}
```

```
                }else {
                writeln("No solution to master problem!");
                masterOpl.end();
                break;
                }

                X = masterOpl.X;
                y = masterOpl.y;
                q = masterOpl.q;
                Inv = masterOpl.Inv;
                rScenarios = masterOpl.scenario;
                rNnodes = masterOpl.Nnodes;
                rPeriods = masterOpl.Periods;
                rPeriodsZero = masterOpl.PeriodsZero;
                masterP = masterOpl.batchP;
                masterConst = masterOpl.batchSCConst;
                var e = masterOpl.e;
                var E = masterOpl.E;
                var cutSize = masterOpl.cutSize;

                var numOfScenarios = 1; //will be set later ...

                if (iter == 1){
                      writeln("probabilities = ", masterP[iBatch]);
                      writeln("constants = ", masterConst[iBatch]);

                      ofile.write("probabilities;");
                      for (i in rScenarios){

        ofile.write(formatFloat_prec2(masterP[iBatch][i]), ";");
                }
                ofile.writeln();
                      ofile.write("constants;");
                      for (i in rScenarios){

        ofile.write(formatFloat_prec2(masterConst[iBatch][i]), ";");
                }
                ofile.writeln();
          }

                /*
                 * SUB-MODEL
                 */
                if (verbose){
                      writeln("  * SOLVE SUB-PROBLEM");
                }
                //for all scenarios
                for (var sc = 1; sc<=numOfScenarios; sc++){
                      if (verbose){
                            writeln("    - Scenario: ", sc);
                      }

                      // Ceating the sub model
                      var subOpl = new
    IloOplModel(subDef,subCplex);
                      // Using data elements from the master model.

                      /*
                      subData.sc = sc;
                      subData.x = xsub;
                      subData.x[1] = x[1];
```

```
                        subData.x[2] = x[2];
                        subData.Duals = Duals;
                        */
                        //subOpl.addDataSource(subData);
                  //    var subData = new
IloOplDataSource("IRP_Sub.dat");
                   //    var subData=new
IloOplDataSource("Final_TwoStageStochasticIRP.dat");
                              // var subData=new
IloOplDataSource("RCAb1n5.dat");
                                    var subData=new
IloOplDataSource("Scenario_Test.dat");
                        subOpl.addDataSource(subData);

                        var subDataEx = new IloOplDataElements();

                        subDataEx.activeSc = sc;
                        subDataEx.p = masterOpl.m_p;
      //initialize to 0's
                        subDataEx.scconst = masterOpl.m_c;
      //initialize to 0's

                        for (i in masterOpl.scenario){
                              subDataEx.p[i] = masterP[iBatch][i];
                  //set to batch values
                              subDataEx.scconst[i] =
masterConst[iBatch][i]; //set to batch values
                  }

                        subOpl.addDataSource(subDataEx);

                        subOpl.generate();

                        numOfScenarios = subOpl.sc;

                        for (i in masterOpl.Nnodes){
                              for(t in masterOpl.Periods) {

                                    subOpl.q[i][t] =
masterOpl.q[i][t];
                        }
                        }

                        var p = subOpl.p[sc];

                        if ( subCplex.solve() ) {
                              subOpl.postProcess();
                              if (verbose){
                              writeln("      - sub obj-value =
",subCplex.getObjValue());
                              writeln("      - E =", subOpl.E);
                              writeln("      - pE =", subOpl.pE);
                              writeln("      - π =", subOpl.Duals);
                        }
                        }else{
                        writeln("No new good pattern, stop.");
                        subData.end();
                        subOpl.end();
                        break;
                        }
```

```
                        for (var jj=1; jj<=cutSize; jj++){
                              E[jj] += subOpl.pE[jj];
                        }
                        e += subOpl.pe;

                        //deallocate sub-problem objects
                        subData.end();
                        subDataEx.end();
                  subOpl.end();
            }

            subtheta = e; // - (E[1]*x[1]+E[2]*x[2]);
                  for (jj=1; jj<=cutSize; jj++){
                        subtheta -= E[jj]*masterOpl.qX[jj];
                  }

                  // Previous master model is not needed anymore.

                  masterOpl.end();

                  if (verbose){
                        writeln("subtheta=", subtheta, "  --
curtheta=", curtheta);
                  }

                  //prepare next iteration
                  if (subtheta > curtheta){
                        masterData.tf = 1.0;
                        if (verbose){
                              writeln("    - add Cut: ", E, e);
                  }
                        masterData.Cuts.add(masterData.Cuts.size, E,
e);
            }else{
                        if (verbose){
                        writeln("no better solution found");
                  }
                  }

            }

            //if (verbose){
                  writeln();
                  //writeln("optimum solution found: X =", X);
                  writeln("Obj.Function:=", -curtheta+z);
                  writeln("Finished in ", iter, " iterations.");
                  writeln("Expected Cost Recourse Action:",curtheta);
                  //writeln(y);
                  writeln();
                  writeln("Final Delivered Quantites",q);
                  writeln();
                  writeln("Final Inventory level:=",Inv);
            //}

            ofile.writeln("Finished in:;", iter, ";iterations.");
            ofile.writeln("Obj.Function:=;",formatFloat_prec2(-
curtheta+z));
            ofile.writeln("Expected Cost Recourse Action:;",
formatFloat_prec2(curtheta));
          ofile.writeln("Optimal Paths found:X[i,j,t]");
```

```
      for( t in rPeriods){
   for( i in rNnodes){
   for( j in rNnodes){
      if(X[i][j][t] > 0)
         ofile.writeln(";",i,";",j,";",t,";");
}
}}


            ofile.writeln("Final Delivered Quantites");
            for (i in rNnodes){
                  ofile.write(";");
                  for(t in rPeriods) {
                        ofile.write(formatFloat_prec2(q[i][t]), ";");
            }
            ofile.writeln();
            }

            ofile.writeln();
            ofile.writeln("Final Inventory level");
            for (i in rNnodes){
                  ofile.write(";");
                  for(t in rPeriodsZero) {
                        ofile.write(formatFloat_prec2(Inv[i][t]),
";");
            }
            ofile.writeln();
            }

            ofile.writeln();
            ofile.writeln();
            //Nnodes][Periods
            //ofile.writeln("y["+i+"]="+thisOplModel.y[i]);

      }

      ofile.close();

      writeln("finished batch");
}

 execute DISPLAY {
   writeln("\n<from node,to node,period,x[i][j][t]>\n");
   for(var t in Periods){
   for(var i in Nnodes){
   for(var j in Nnodes){
      if(X[i][j][t] > 0)
         writeln("<",i,",",j,",",t,",",X[i][j][t],">");
}
      }}}
```

```
/*********************************************
 * OPL 12.4 Model
 * Author: EYH
 * Sub – Model : Transshipment estimation
 *********************************************/
int verbose = ...;                                    //1 or 0
      Print detailed info while running
int sc=...;                                           //2
int activeSc=...;
range scenario=1..sc;                           //1..2
float p[scenario] = ...;                        //probabilities
float scconst[scenario] = ...;                  //constants
//float p[i in scenario] = 0.0;                 //probabilities
//float scconst[i in scenario] = 0.0;           //constants

//batch mode values
int Nbatch = ...;                               //Num of batch runs
range batches = 1..Nbatch;                      //1..numofbatches
float batchP[batches][scenario] = ...;
float batchSCConst[batches][scenario] = ...;


int Nbnodes=...;                                //6
range Nnodes = 1..Nbnodes;                      //1..6 Number of
Customers  in the problem / Node 1 == Supplier
range CustomerNodes = 2..Nbnodes;         //2..6 Number of Customers
in the problem / Node 1 == Supplier
float tf=...;
int NbPeriods = ...;                            //3
range Periods = 1..NbPeriods;             //1..3

int cutSize = (Nbnodes-1)*NbPeriods;      //15
range NbCuts = 1..cutSize;                      //1..15
float Inv_Holding_Cost[Nnodes]=...;
tuple pattern {
   key int id;
   float E[NbCuts];
   float e;
}
{pattern} Cuts = ...;
float Capacity[Nnodes] = ...;
float Vehicle_Capacity=...;
float Demand[Nnodes][Periods] = ...;      // Demand of each customer


int M = (Nbnodes-1) * NbPeriods;          //15
range Mrange=1..M;                              //1..15


float Distances[Nnodes][Nnodes]=...;                        //
distance_cost_initial from master

//float RD[scenario][Nnodes][Periods] = ...;    // Revealed Demand of
each customer[to de defined for each scenario]
float RD[i in scenario][n in 2..Nbnodes][p in Periods]=0.0;
float a[i in scenario]=...;// multiplier for the estimation of RD
//float q[Nnodes][Periods]=...;                       //
float q[i in Nnodes][t in Periods]=0.0;
```

```
float Avail_Product[Periods]=...;                //
float Start_Inv[Nnodes]=...;                     //
float Duals[i in Nnodes]= 0.0;                         //
float Duals_B[i in Periods]=0.0;                 //
float Duals_C[i in Mrange]= 0.0;                 //
float Duals_D[i in Mrange]= 0.0;                 //

// decision Variables are the the amount of extra demand served
// by outsourcing and level of inventory per period
dvar float+ w[Nnodes][Nnodes][Periods];
dvar float Inv[Nnodes][0..NbPeriods];

dexpr float esum = sum(i in Nnodes) Start_Inv[i]*Duals[i];

float R[i in Mrange]=0.0;
float K[i in Mrange]= 0.0;

//Initialization
//float a[1..sc]=[1.05,1.1,1.5];

 execute RD_Definition{
   //writeln("scconst=", scconst);
   //writeln("p=", p);
      for(var k=1; k<=sc;k++) {
      for (var pp = 1; pp<=NbPeriods; pp++){
                  for (var nn = 2; nn<=Nbnodes; nn++){
                  RD[k][nn][pp]=a[k]*Demand[nn][pp];
                  }
            }
      }
      if (verbose){
            writeln("RD=",RD);
      }
}

execute R_calculation{
      if (verbose){
            writeln("Initialization");
      }

      for( var tIdx in Periods) {
      for(var nIdx in CustomerNodes){
                  var c = (Nbnodes-1)*(tIdx-1) + (nIdx-1);
                  R[c]=-RD[activeSc][nIdx][tIdx];
      }
      }

      if (verbose){
            writeln("RD=",RD[activeSc]);
            writeln("R=",R);
      }
}


float T[i in Mrange]=-1.0;
float E[i in Mrange] = 0.0;
float pE[i in Mrange] =0.0;
float pe = 0;

dexpr float esum_B=sum(i in Periods)Avail_Product[i]*Duals_B[i];
dexpr float esum_C=sum(i in Mrange)R[i]*Duals_C[i];
```

```
dexpr float esum_D=sum(i in Mrange)K[i]*Duals_D[i];
dexpr float esum_total=esum +esum_B+esum_C+esum_D;
// cost of transshipment is calculated by multiplying initial
distance cost with sc conts which is depended from scenario
minimize sum(i in Nnodes,j in Nnodes:j>1,t in Periods)
scconst[activeSc]*Distances[i][j]*w[i,j,t];// to const allazei ana
scenario


subject to
{
forall(i in Nnodes)
   A:Inv[i][0]==Start_Inv[i];

forall(t in Periods)
   B: Inv[1][t]==Inv[1][t-1]+Avail_Product[t]-sum(i in
Nnodes:i>1)w[1][i][t]-sum(i in Nnodes:i>1)q[i][t];

forall(t in Periods,i in Nnodes:i>1)
   C:Inv[i][t] == Inv[i][t-1] + q[i][t]- RD[activeSc][i][t] +sum(j in
Nnodes)w[j][i][t]-sum(k in Nnodes)w[i][k][t]; // to RD [i][t] allazei
ana scenario

forall(t in Periods,i in Nnodes:i>1)
 D:Inv[i][t]+sum(j in Nnodes)w[j][i][t] -sum(k in
Nnodes)w[i][k][t]>=0;
}
execute SubTrans_Duals{
      if (verbose){
            writeln("q=", q);
      }

      var tIdx;
      var nIdx;
      var c;

      //Duals of A constraints
      for(var i in Nnodes) {
      Duals[i] = A[i].dual;
      }

      //Duals of B
      for(var j in Periods){
      Duals_B[j]=B[j].dual;
      }


      //Duals of Cconstrains
      for(tIdx in Periods) {
      for(nIdx in CustomerNodes){
                  c = (Nbnodes-1)*(tIdx-1) + (nIdx-1);
                  Duals_C[c]=C[tIdx][nIdx].dual;
      }
      }


      //Duals of D constrains
      for(tIdx in Periods) {
      for(nIdx in CustomerNodes){
                  c = (Nbnodes-1)*(tIdx-1) + (nIdx-1);
                  Duals_D[c]=D[tIdx][nIdx].dual;
```

```
            }
            }

            if (verbose){
                  writeln("esum=",esum);
                  writeln("esum_C=",esum_C);
                  writeln("esum_Total=",esum_total);
            }

            for(tIdx in Periods) {
            for(nIdx in CustomerNodes){
                        c = (Nbnodes-1)*(tIdx-1) + (nIdx-1);
                        E[c]=T[c]*Duals_C[c]+Duals_B[tIdx];
            }
            }

            for(c in Mrange){
                  pE[c] = p[activeSc]*E[c];
            }

            pe = p[activeSc]*esum_total;
            if (verbose){
                  writeln("E=",E);
            }

      }
```

Βιβλιογραφία

[1] Abdelmaguid TF, Dessouky MM, Ordóñez F (2009) “Heuristic approaches for the inventory-routing problem with backlogging,” *Computers & Industrial Engineering* 56(4), 1519–1534.

[2] Adelman D., (2004) “A Price-Directed Approach to Stochastic Inventory/Routing,” *Operations Research* 52(4):499-514.

[3] Adulyazak Y., JF. Condreau & R.Jan (2015) “The production routing problem: A review of formulations and solution algorithms” Computers & Operations Research , 55 , 141 -152.

[4] Aghezzaf E.-H., B. Raa, and H.van Landeghem (2006) “Modeling inventory routing problem in supply chains of high consumption products,” *European Journal of Operational Research*, 169(3), 1048 – 1063.

[5] Agra, A., Christiansen, M., & Delgado, A. (2013). Mixed integer formulations for a short sea fuel oil distribution problem. *Transportation Science*, 47(1), 108–124.

[6] Aksen, D. et al.2012. “Selective and periodic inventory routing problem for waste vegetable oil collection”, *Optimization Letters* 6(6), 1063–1080.

[7] Andersson H., A. Hoff, M. Christiansen, G. Hasle, and A. Løkketangen. (2010).”Industrial aspects and literature survey: Combined inventory

management and routing,” *Computers & Operations Research*, Vol. 37(9), pp.1515–1536.

[8] Anily S. and A. Federgruen, (1990) “One warehouse multiple retailers system with vehicle routing cost” *Management Science*, 36(1), 92 – 114.

[9] Applegate, D. L., R. E. Bixby, V. Chvatal, W. J. Cook. (2007), “The Traveling Salesman Problem. A Computational Study,” Princeton University Press, Princeton, NJ.

[10] Archetti C, Bertazzi L, Hertz A, Speranza MG (2012) “A hybrid heuristic for an inventory routing problem,” *INFORMS Journal of Computing* 24(1), 101–116.

[11] Archetti C, Bertazzi L, Laporte G, Speranza MG (2007) A branch - and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem. *Transportation Science* 41(3), 382–391.

[12] Arhetti C., N.Banchessi, S Irnich & MG Speranza. (2014) “Formulations for an inventory routing problem” *International Transactions in Operational Research* 21(3),353 – 374.

[13] Baita F., W. Ukovich, R. Pesenti, and D. Favaretto, (1998) “Dynamic routing-and inventory problems: A review,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32(8), 585–598.

[14] Baldacci, R., E. Hadjiconstantinou, and A. Mingozzi. (2004) “An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation,” *Operational. Research.* 52 723–738.

[15] Baldacci, R., N. Christofides and A. Mingozzi. (2008) "An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts.," *Math. Programming Ser. A* 115, 351–385.

[16] Balinski,M. and R. Quandt. (1964). "On an integer program for a delivery problem," *Operational Research* 12 300–304.

[17] Bard J., L. Huang, P. Jaillet, and M. Dror, (1998) "A Decomposition Approach to the Inventory Routing Problem with Satellite Facilities," *Transportation Science* 32, 189 – 203.

[18] Bastin F.(2004). PhD Dissertation "Trust-Region Algorithms for Nonlinear Stochastic Programming and Mixed Logit Models"

[19] Beale EML, (1955) "On minimizing a convex function subject to linear inequalities" *Journal of Royal Statistical Society* 17b 173 – 184.

[20] Bell W. J., L. M. Dalberto, M. L. Fisher, A. J. Greenfield, R. Jaikumar, P. Kedia, R. G. Mack, and P. J. Prutzman, (1983) "Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer," *Interfaces*, 13(6), 4–23.

[21] Ben – Tal A. & A., Nemirovski, L. El – Chaoui (2009) "Robust Optimization" *Princeton University Press,* Princeton.

[22] Benjamin, J. (1989) "An analysis of inventory and transportation costs in a constrained network," *Transportation Science* 23, 177 – 183.

[23] Berbeglia, G. Cordeau, JF.,Laporte,G. (2010) "Dynamic pickup and delivery problem" *European Journal of Operational Research* 202 (1), 8-15

[24] Berstimas, D. & Sim M. (2004) The price of robustness Operational Research 32:1 , 35 – 53.

[25] Bertazzi L , G. Paletta and M.G. Speranza (2002). “Deterministico rder-up-to level policies in an inventoryr outingp roblem,” *Transportation Science* 36: 119-132.

[26] Bertazzi, L., Bosco A.,Guerierro F.and Lagana D. (2011), “A stochastic inventory routing problem with stock-out,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*,(doi: 10.1016/j.trc.2011.06.003) .

[27] Bertazzi, L., M. G. Speranza and W. Ukovich, (1997) “Minimization of logistic costs with given frequencies,” *Transportation Research* 31, 327 - 340.

[28] Bertazzi, L., Paletta, G., & Speranza, M. G. (2005). “Minimizing the total cost in an integrated vendor—Managed inventory system”. *Journal of Heuristics*, 11(5-6), 393-419.

[29] Birge, J. & Louveaux, F.(1988**)** “A Multicut Algorithm for Two Stage Stochastic Linear Programs” *European Journal of Operational Research*, *34*(3), 384.

[30] Birge, J. & Louveaux, F.(1997) “Introduction to stochastic programming” Springer, New York, NY

[31] Blumenfeld, D. E., Burns, L. D., Daganzo, C. F., Frick, M. C. and Hall, R.W. (1987) “Reducing logistics costs at General Motors,” *Interfaces* 17, 26 – 47.

[32] Blumenfeld, D. E., L. D. Burns, J. D. Diltz, and C. F. Daganzo, (1985) “Analyzing trade-offs between transportation, inventory and production costs on freight networks,” *Transportation Research*, 19,361– 380.

[33] Boudia M, Prins C (2009) “A memetic algorithm with dynamic population management for an integrated production-distribution problem,” *European Journal of Operational Research* 195(3), 703–715.

[34] Bramel, J. and Simchil Levi, D. (1995) “A location based heuristic for general routing problems,” *Operations Research* 43, 649 - 660.

[35] Braysy O. & M. Gendreau (2005a) “Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part I: Route Construction and Local Search Algorithms” *Transportation Science* 39 , 104-118

[36] Braysy O. & M. Gendreau (2005b) “Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part II: Metaheuristics,” *Transportation Science* 39 , 119-139

[37] Burns L.D., R.W. Hall, D.E. Blumenfeld, and C.F. Daganzo, (1985) “Distribution strategies that minimize transportation and inventory cost,” *Operation Research*, 33 (3), 469 – 490.

[38] Campbell AM, Clarke L, Kleywegt AJ, Savelsbergh MWP (1998) “The inventory routing problem.,” Crainic TG, Laporte G, eds. *Fleet Management and Logistics (Springer, Boston)*, 95–113.

[39] Campbell and Savelsbergh (2004) “A Decomposition Approach for the Inventory-Routing Problem,” *Transportation Science* 38(4), 488–502.

[40] Campbell, A., L. Clarke, A. J. Kleywegt, M. W. P. Savelsbergh. (1998). “The inventory routing problem,” T. G. Crainic, G. Laporte, eds. *Fleet Management and Logistics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, Chapter 4.

[41] Campbell, J. F. (1993) “One – to – many distribution with transshipments: an analytic model,” *Transportation Science* 27, 330 – 340.

[42] Carøe, C.C. & J. Tind (1998) *“L – Shaped decomposition of two stage stochastic integer programming”* Mathematical Programming 83, 451 – 464.

[43] Carpaneto, G. and P. Toth. (1980) “Some new branching and bounding criteria for the asymmetric travelling salesman problem,” *Management Science* 26 736–743.

[44] Chien T., A. Balakrishnan, and R. Wong. (1989) “An integrated inventory allocation and vehicle routing problem,” *Transportation Science*, 23(2):67–76,.

[45] Christiansen M., K. Fagerholt, B. Nygreen, and D. Ronen.(2013) “Ship routing and scheduling in a new millennium.” *European Journal of Operational Research*, 228, 467 - 483.

[46] Christofides, N., A. Mingozzi, and P. Toth. (1981b). “Space state relaxation procedures for the computation of bounds to routing problems,” *Networks* 11 145–164.

[47] Coelho L. C., G. Laporte, (2014) “Optimal Joint Replenishment, Delivery and Inventory Management Policies for Perishable Products”**,** *Computers & Operations Research*, 47(1):42-52,.

[48] Coelho L. C., J.-F. Cordeau, and G. Laporte, (2014). “Thirty years of Inventory Routing”. *Transportation Science*, Vol. 48(1), pp.1-19.

[49] Coelho L. C.,(2012) “Flexibility & Consistency in Inventory Routing”, PhD Thesis HEC University of Montreal.

[50] Coelho LC, Cordeau J-F, Laporte G (2012c) "The inventory routing problem with transshipment". *Computers & Operational Research* 39(11), 2537–2548.

[51] Coelho LC, Laporte G (2013a) "A branch-and-cut algorithm for the multi-product multi-vehicle inventory-routing problem," *International Journal of Production Research.*, ePub ahead of print February 13, http://dx.doi.org/10.1080/00207543.2012.757668.

[52] Coelho LC, Laporte G (2013b) "The exact solution of several classes of inventory-routing problems," *Computers & Operations Research*, 40(2), 558–565.

[53] Coelho LC, Laporte G (2013c) "An Optimized Target Level Inventory Replenishment Policy for Vendor-Managed Inventory Systems" *Technical Report CIRRELT-2013-15.*

[54] Coelho, L.C., Cordeau, J.-F., Laporte, G., (2014) "Heuristics for Dynamic and Stochastic Inventory-Routing", *Computers* & *Operations Research 52, 55-67.*

[55] Condreau J.F., M. Gendreau, G.Laporte, J.Y.Potvi & F. Semet (2002) "A guide to the vehicle routing heuristics," *Journal of Operational Research Society* 53 : 512 - 522.

[56] Daganzo, C. F. (1987) "The break-bulk role of terminals in many – to – many logistic networks," *Operations Research* 35, 543 – 555.

[57] Daganzo, C. F. (1988) "A comparison of in-vehicle and out-of-vehicle freight consolidation strategies," *Transportation Research* 22, 173 – 180.

[58] Daganzo, C. F. (1996) *Logistics System Analysis*. Springer-Verlag.

[59] Daganzo, C. F. and Newell G. F., (1986) “Configuration of physical distribution networks,” *Networks* 16, 113 – 132.

[60] Daganzo, C. F. and Newell, G. F. (1985) “Physical distribution from a warehouse: Vehicle coverage and inventory levels,” *Transportation Research* 19(B), 397 – 407.

[61] Daganzo, C. F. and Newell, G. F. (1993) “Handling operations and the lot size trade-off,” *Transportation Research* 27, 167 -183.

[62] Daganzo, C. Y. (1985) “Supplying a single location from heterogeneous sources,” *Transportation Research* 19, 409 – 419.

[63] Dantzig G. (1955) “Liner programming under uncertainty” , Management Science, 1(4 -5) 197 – 206.

[64] Dantzig, G. B., D. R. Fulkerson and S. M. Johnson. (1954). “Solution of a large-scale travelling-salesman problem,” *Operational Research* 2 393–410.

[65] Desaulniers G., J. G. Rakke,and L. C. Coelho, (2014) “A branch and price and cut algorithm for the inventory routing problem,” Technical Report *Les Cahiers du GERAD* G -2014 – 9.

[66] Dror M. and L. Levy, (1986) “A vehicle routing improvement algorithm comparison of a ‘greedy’ and a matching implementation for inventory routing,” *Computers & Operations Research*, 13(1), 33 – 45.

[67] Dror M., M.O. Ball and B.L. Golden, (1985) “A computational comparison of algorithms for inventory routing problem,” *Annuals of Operations Research*, 4(1- 4), 3 – 23.

[68] Dror, M. and Trudeau, P. (1996) “Cash flow optimization in delivery scheduling,” *European Journal of Operational Research* 88, 504 - 515.

[69] Ernst, R. and Pyke, D. F. (1993) “Optimal base stock policies and truck capacity in a two-echelon system,” *Naval Research Logistics* 40, 879 - 903.

[70] Federgruen A. and P. H. Zipkin, (1984) “A combined vehicle-routing and inventory allocation problem,” *Operations Research*, 32(5), 1019–1037.

[71] Federgruen, A. and Simchi-Levi, D. (1995) “Analysis of vehicle routing and inventory routing problems,” *Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 8: Network Routing.* eds. M. O. Ball, T. L. Magna, C. L. Monma, and G. L. Nemhauser, pp. 297 – 373 Elsevier, Amsterdam.

[72] Federgruen, A., Prastacos, G. and Zipkin, P. (1986) “An allocation and distribution model for perishable products,” *Operations Research* 34, 75 - 82.

[73] Fisher M. L., and R. Jaikumar, (1981) “A generalized assignment heuristic for vehicle routing,” *Networks*, 11(2), 109–124.

[74] Fukasawa, R., H. Longo, J. Lysgaard, M. Poggi de Aragγo, M. Reis, E. Uchoa, R. F. Werneck. (2006). Robust branch – and – cut – and – price for the capacitated vehicle routing problem. *Math. Programming Ser.* A 106 p.491–511.

[75] Gallego G, Simchi-Levi D (1990) “On the effectiveness of direct shipping strategy for the one-warehouse multi-retailer r-systems,” *Management Science* 36(2),240–243.

[76] Gavish, B., and S. C. Graves (1979) “The travelling salesman problem and related problems,” Working Paper 7905, Graduate School of Management, University of Rochester, Rochester, NY.

[77] Golden B. L. , T. L. Magnanti and H. Q. Nguyen (1977) “Implementing vehicle routing algorithms”, *Networks* 7 (2) p.113 – 148.

[78] Hall, R. W. (1985) “Determining vehicle dispatch frequency when shipping frequency differs among suppliers,” *Transportation Research* 19(B), 421 - 431.

[79] Hvattum L. M., A. Løkketangen, G. Laporte, (2006) “Solving a Dynamic and Stochastic Vehicle Routing Problem with a Sample Scenario Hedging Heuristic,” Transportation Science 40 (4), 421-438.

[80] Hvattum L.M., A. Løkketangen, and G. Laporte, (2009) Scenario Tree-Based Heuristics for Stochastic Inventory – Routing Problems. *INFORMS Journal on Computing* 21(2) 268-285.

[81] Hvattum L.M., A. Løkketangen. (2009) “Using scenario trees and progressive hedging for stochastic inventory routing problems,” Journal of Heuristics 15, 527–557.

[82] Jaillet, P., Bard J. Huang L, & Dror M. (2002) “Delivery cost approximation for inventory routing problem in a rolling horizon framework” Transportation Science 36, 292 – 300.

[83] Kall, P. & Wallace, S. W. (1994). Stochastic Programming. John Wiley and Sons, Chichester, England

[84] Kleywegt A. J., V. S. Nori, and M. W. P. Savelsbergh, (2002) “The Stochastic Inventory Routing Problem with Direct Deliveries,” *Transportation Science* 36(1) 94-118.

[85] Kleywegt A. J., V. S. Nori, and M. W. P. Savelsbergh, (2004) “Dynamic Programming Approximations for a Stochastic Inventory Routing Problem,” *Transportation Science* 38(1), 42-70.

[86] Klincewicz, J. G. (1990) “Solving a freight transport problem using facility location techniques,” *Operations Research*, 38, 99 – 109.

[87] Langevin, A., Mbaraga, P. and Campbell, J. F. (1991) “Continuous approximation models in freight distribution: an overview,” *Transportation Research*, 30(B), 163 - 188.

[88] Laporte G. (1992) “The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms,” *European Journal of Operational Research* 59 , 345 – 358

[89] Laporte G. (2009) “Fifty years of Vehicle Routing,” *Transportation Science* 43(4), 408-416.

[90] Laporte, G. & Louveaux, F.V. (1993) *“The integer L – shaped method for stochastic integer programming with complete recourse”* Operations Research Letters 13, 133 – 142.

[91] Laporte, G., H. Mercure and Y. Nobert., (1986). “An exact algorithm for the asymmetrical capacited vehicle routing problem,*”* *Networks* 16 33–46.

[92] Laporte, G., Y. Nobert, M. Desrochers. (1985). Optimal routing under capacity and distance restrictions. *Operational Research* 33 1050–1073.

[93] Laporte, G., Y. Nobert. (1983). “A branch and bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem,”. *Operational Research Spektrum* 5 77–85.

[94] Li, J., Karimi, I., & Srinivasan, R. (2010). Efficient bulk maritime logistics for the upply and delivery of multiple chemicals. *Computers & Chemical Engineering,* 34(12), 2118–2128.

[95] Little, J. D. C., K. G. Murty, D. W. Sweeney and C. Karel. (1963)." An algorithm for the travelling salesman problem," *Operational Research* 11 972–989.

[96] Maniezzo V, Stützle T, Voß S (2009) *Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming,* Vol. 10 Springer, London.

[97] Miller C., A. Tucker and R. Zemlin. (1960) "Integer programming formulations and travelling salesman problems," *Journal of the Association for Computing Machinery (J.A.C.M).* 7, 326-329.

[98] Minkoff, A. S. (1993). "A Markov decision model and decomposition heuristic for dynamic vehicle dispatching," *Operational Research* 41, 77–90.

[99] Naturwissenschaften D. (2010) "Online optimization Probabilistic Analysis and Algorithm Engineering" PhD Thesis University of Berlin.

[100] Padberg, M., G. Rinaldi. (1991). "A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems," *SIAM Rev*. 33(1), 60–100.

[101] Papageorgiou, D., Nemhauser,G.,, Sokol J.,MS.Cheon MS., A. Keha (2013) MIRPLib – A library of maritime inventory routing problem instances: Survey, core model, and benchmark results, European Journal of Operational Research 235, 350 – 366.

[102] Pessoa A., M Uchoa and E.Poggi (2007) "A robust branch-cut-and-price algorithm for the heterogeneous fleet vehicle routing problem," Networks 54 (4), 167 – 177.

[103] Popken, D. A. (1994) "Algorithm for the multi – attribute multi – commodity flow problem with freight consolidation and inventory costs," *Operations Research* 42, 274 – 286.

[104] Prékopa ,A.(1995) *"Stochastic Programming"* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[105] Raa B, Aghezzaf E-H (2008) "Designing distribution patterns for long-term inventory routing with constant demand rates," *Internat. J. Production Econom*. 112(1),255–263.

[106] Raa B, Aghezzaf E-H (2009) "A practical solution approach for the cyclic inventory routing problem," *Eur. J. Oper. Res.* 192(2), 429–441.

[107] Rakke J. , H. Andersson, M. Christiansen, G. Desaulniers (2014) A New Formulation Based on Customer Delivery Patterns for a Maritime Inventory Routing Problem. *Transportation Science* Article in press 1 -18.

[108] Sahinidis N.(2004) "Optimization under uncertainty: State-of-the-art and opportunities" ,*Computers and Chemical Engineering*, 28 (6 – 7), 971 – 983.

[109] Solyalı O, Süral H (2011) "A branch-and-cut algorithm using a strong formulation and an a priori tour-based heuristic for an inventory-routing problem," *Transportation Science* 45(3),335–345.

[110] Solyali O., Cordreau J.F. and G. Laporte (2012) "Robust inventory routing problem under demand uncertainty," *Transportation Science* 46 (3), 327–340.

[111] Speranza MG, Ukovich W (1994a) "Minimizing transportation and inventory costs for several products on a single link," *Oper. Res*. 42(5), 879–894.

[112] Speranza, M. G. and Ukovich, W. (1994b) "Analysis and integration of optimization models for logistic systems," *International Journal of Production Economics* 35, 183 – 190.

[113] Trudeau, P. and Dror, M. (1992) "Stochastic inventory routing: route design with stockouts and route failures," *Transportation Science* 26, 171 - 184.

[114] Van Slyke, R. & Wets, R. J.-B. (1969). "L-Shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming". *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 17, 638– 663.

[115] Zhao Q-H, Chen S, Zang C-X (2008) "Model and algorithm for inventory/routing decisions in a three-echelon logistics system," *European Journal of Operational Research* 19(3):623–635