

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ**

υπό

ΓΩΓΟΥΛΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2016



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 14919/1
Ημερ. Εισ.: 21-03-2018
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ
2016
ΓΩΓ

© 2016 Γώγουλος Αριστοτέλης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτριος Παντελής
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεωργιος Κοζανίδης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κ. Δήμητριο Παντελή και Νικόλαο Κοζανίδη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Επίσης, ευχαριστώ την σύζυγό μου και τους γονείς μου για την κατανόησή της καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου για την περάτωση της σχολής. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στην σχολή για την δυνατότητα που είχα να διευρύνω τις γνώσεις στον μηχανολογικό τομέα. Αφιερώνω αυτή την εργασία στους καθηγητές της σχολής.

Αριστοτέλης Γώγουλος

**ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ**

ΓΩΓΟΥΛΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2016

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος, Καθηγητής,
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή.....	1
1	Η δομημένη βελτιστοποίηση δυναμικών συστημάτων σαν πρόβλημα μεταβολών	3
1.1	Βελτιστοποίηση παραμέτρων και δομημένη βελτιστοποίηση.....	3
1.2	Κριτήρια ποιότητας	10
1.3	Διατύπωση του προβλήματος της δομημένης βελτιστοποίησης	16
1.4	Βασική δομή ενός βέλτιστου ελέγχου	18
Κεφάλαιο 2	Μαθηματικές προκαταρκτικές παρατηρήσεις	23
2.1	Παραγωγή έμμεσων διανυσματικών συναρτήσεων	23
2.2	Κανόνες παραγωγής ειδικών διανυσματικών συναρτήσεων και τετραγωνικών μορφών	26
Κεφάλαιο 3	Μέθοδοι δομημένης βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου	31
3.1	Μέθοδος Euler-Lagrange με δεδομένες οριακές συνθήκες και χωρίς πρόσθετους περιορισμούς-Παραδείγματα	32
3.2	Μέθοδος Euler-Lagrange με δεδομένες οριακές συνθήκες και επιπλέον περιορισμούς ισότητας -Παραδείγματα	37
Κεφάλαιο 4	Βελτιστοποίηση με την εξίσωση Hamilton.....	41
4.1	Η εξίσωση Hamilton και οι οριακές συνθήκες στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης	41
4.2	Χρησιμοποίηση πολλαπλασιαστών Lagrange στην επίλυση του προβλήματος	44
4.3	Χρησιμοποίηση καμπυλών σύγκρισης στην επίλυση του προβλήματος	46
4.4	Υπολογισμός των οριακών συνθηκών (συνθήκες εγκαρσιότητας).....	50
4.5	Παράδειγμα βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Hamilton.....	53
4.6	Περιορισμοί των κλασσικών μεθόδων βελτιστοποίησης.....	57
Κεφάλαιο 5	Βελτιστοποίηση γραμμικών συστημάτων με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας και πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα ελέγχου $t_e < \infty$	61
5.1	Διατύπωση του προβλήματος.....	61
5.2	Επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης γραμμικών συστημάτων με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας και πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα ελέγχου	65

5.2.1	Καθορισμός του βέλτιστου ρυθμιστή από την διαφορική εξίσωση Ricatti	65
5.2.2	Ιδιότητες της λύσης $P(t)$ της εξίσωσης Ricatti	70
5.2.3	Παραδείγματα βέλτιστου ελέγχου γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος $1^{η}$ τάξης με $t_e < \infty$ μέσω της επίλυσης εξίσωσης Ricatti	73
5.2.4	Παραδείγματα βέλτιστου ελέγχου γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος $2^{η}$ τάξης με $t_e < \infty$ με αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Ricatti (έλεγχος θέσης εργλειομηχανής)	77
Κεφάλαιο 6 Βέλτιστος έλεγχος γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων με άπειρο χρονικό ορίζοντα ελέγχου ($t \rightarrow \infty$)		
83		
6.1	Επίλυση μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης Ricatti	86
6.1.1	Βέλτιστος ρυθμιστής για τον έλεγχο θέσης κινούμενου πυράβλου-Εξομοίωση με Matlab για διάφορους συντελεστές βαρύτητας στο δείκτη απόδοσης	86
6.2	Επίλυση μέσω των εξισώσεων Hamilton και του Χαμιλτινιανού πίνακα του συστήματος	91
6.2.1	Βέλτιστος ρυθμιστής για τον έλεγχο θέσης εργαλειομηχανής με την χρήση του Χαμιλτινιανού πίνακα του συστήματος	97
6.3	Πρόγραμμα Matlab για την επίλυση του προβλήματος LQR	103
Κεφάλαιο 7 Βελτιστοποίηση με την μέθοδο Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).....		
107		
7.1	Εφαρμογή της μεθόδου HJB στον υπολογισμό του ρυθμιστή στο πρόβλημα LQR-Παραδείγματα	113
Κεφάλαιο 8 Βιβλιογραφία		
Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.		

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1-1: Κύκλωμα ελέγχου.....	4
Σχήμα 1-2: Δυνατή πορεία της διαφορικής ρύθμισης $e(t)$ και ιδανική πορεία.....	5
Σχήμα 1-3: Δυναμικό σύστημα με περιγραφή στο χώρο κατάστασης.....	7
Σχήμα 1-4: Τροχιές του συστήματος σε εξάρτηση από το διάνυσμα ελέγχου.....	9
Σχήμα 1-5: Σύστημα μιας εισόδου.....	10
Σχήμα 1-6: Σύστημα πολλών εισόδων.....	11
Σχήμα 1-7: Ερμηνεία του κριτηρίου Mayer.....	15
Σχήμα 1-8: Βέλτιστος έλεγχος.....	19
Σχήμα 1-9: Βέλτιστη ρύθμιση.....	21
Σχήμα 1-10: Βέλτιστος ρυθμιστής με παρατηρητή κατάστασης.....	22
Σχήμα 3-1: Βασικό πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης. 2	
Σχήμα 3-2: Καμπύλες σύγκρισης στο βασικό πρόβλημα. Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης. 3	
Σχήμα 4-1: Σχήμα των καμπυλών σύγκρισης.....	47
Σχήμα 4-2: Ρύθμιση βέλτιστης κατανάλωσης ενέργειας για προκαθορισμένο τελικό σημείο.....	55
Σχήμα 4-3: Δέσμη καμπυλών σύγκρισης με φραγμένο διάνυσμα ελέγχου.....	57
Σχήμα 4-4: Ελάχιστο άκρου και ελάχιστο στο εσωτερικό περιοχής.....	58
Σχήμα 5-1: Δομή βέλτιστου ρυθμιστή σε γραμμικό σύστημα και τετραγωνικό δείκτη	

ποιότητα.....	70
Σχήμα 5-2: Διάταξη ρύθμισης θέσης εργαλειομηχανής.....	77
Σχήμα 5-3: Σύστημα 2 ^{ης} τάξης εργαλειομηχανής ελέγχου θέσης στο χώρο της συχνότητας. .	79
Σχήμα 5-4: Δομή του ρυθμιστή για το σύστημα της εργαλειομηχανής.....	82
Σχήμα 6-1: Δομή του βέλτιστου ρυθμιστή για τον έλεγχο της θέσης του πυραύλου	89
Σχήμα 6-2: Διαγράμματα προσομείωσης Matlab.....	90-91
Σχήμα 6-3: Ιδιοτιμές του χαμιλτονιανού πίνακα w του συστήματος.....	95
Σχήμα 6-4: Διαγράμματα προσομείωσης Matlab	102-103
Σχήμα 7-1: Απεικόνιση της αρχής της βελτιστότητας	108

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τις κλασσικές-όπως χαρακτηρίζονται-μεθόδους βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου, οι οποίες έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα κατάλληλες για τη επίλυση των τεχνικών προβλημάτων στα πλαίσια της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου. Βελτιστοποίηση ενός δυναμικού συστήματος σημαίνει η ελαχιστοποίηση ενός δείκτη απόδοσης (μέτρο ποιότητας) ο οποίος συναρτάται με το σύστημα, ώστε η απόκρισή του να παρουσιάζει την επιθυμητή συμπεριφορά. Η επιθυμητή συμπεριφορά μπορεί όπως θα δούμε να προσδιοριστεί ως έννοια στο πεδίο του χρόνου μέσω των δεικτών απόδοσης (μέτρου ποιότητας).

Υπάρχουν δύο είδη βελτιστοποίησης:

1. Βελτιστοποίηση παραμέτρων: Η δομή του ρυθμιστή είναι καθορισμένη (π.χ. ένας P.I ρυθμιστής) και μόνο οι παράμετροι αυτού είναι ελεύθεροι προς επιλογή.
2. Δομημένη ή διαρθρωτική βελτιστοποίηση: Εδώ είναι δεδομένα το σύστημα και ο δείκτης ποιότητας και είναι ελεύθερο προς επιλογή η δομή του ρυθμιστή.

Η εργασία ασχολείται αποκλειστικά με την δομημένη βελτιστοποίηση από την οποία προκύπτουν, όπως θα δούμε, τα πιο βέλτιστα συστήματα ελέγχου.

Συγκεκριμένα εξετάζονται αναλυτικά τα παρακάτω:

- Η μέθοδος Euler-Lagrange με και χωρίς περιορισμούς ισότητας

- Η μέθοδος Hamilton
- Βέλτιστος έλεγχος μέσω της διαφορικής και αλγεβρικής εξίσωσης Ricatti στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας. Πρόβλημα LQR (Linear Quadratic Regulator)
- Πρόγραμμα σε περιβάλλον Matlab για την επίλυση του προβλήματος LQR
- Η μέθοδος βελτιστοποίησης Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)
- Παρουσιάζονται δύο ολοκληρωμένα παραδείγματα βέλτιστου ελέγχου με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας για την ρύθμιση της θέσης κινούμενου πυραύλου και την ρύθμιση της θέσης της εργαλειομηχανής και γίνεται ανάλυση και εξομοίωση των αποτελεσμάτων με το πρόγραμμα Matlab για διαφόρους συντελεστές βαρύτητας.
- Επιπρόσθετα σε κάθε μέθοδο δίδονται χαρακτηριστικά παραδείγματα βελτιστοποίησης

Για πολλά τεχνικά προβλήματα, όπως υπάρχουν μεταβαλλόμενες μεταβλητές κατάστασης, οι οποίες πρέπει να βρίσκονται εντός προκαθορισμένων ορίων, έχουν αναπτυχθεί πιο ολοκληρωμένες θεωρίες οι οποίες αναφέρονται χωρίς να εξετάζονται στην παρούσα εργασία.

Οι θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς στις μεταβλητές κατάστασης και εισόδου είναι:

1. Βελτιστοποίηση με την αρχή του μεγίστου αναπτύχθηκε το 1956 από τον Ρώσο μαθηματικό L.S. PONTRJAGIN και διατυπώθηκε σε μια πλήρη θεωρία τα επόμενα χρόνια από τους μαθητές του. Η προετοιμασία για αυτήν την θεωρία βασίστηκε στις έρευνες του Ρώσου μηχανικού αυτομάτου ελέγχου A.A. FELDBAUM.
2. Η δεύτερη μέθοδος βελτιστοποίησης προβλημάτων με περιορισμούς στις μεταβλητές ονομάζεται δυναμικός προγραμματισμός και αναπτύχθηκε την δεκαετία του 1950 από

τον Αμερικάνο μαθηματικό R. Bellman. Πρόκειται για μια πολύ γενική μέθοδο, η οποία δεν περιορίζεται μόνο στα τεχνικά προβλήματα, αλλά έχει εφαρμογή σε οικονομικά, στρατιωτικά και πολλά άλλα. Βάση γι' αυτή την μέθοδο αποτέλεσαν οι έρευνες του Έλληνα μαθηματικού Κ. Καραθεοδωρή (1932).

1 Η δομημένη βελτιστοποίηση δυναμικών συστημάτων σαν πρόβλημα μεταβολών

1.1 Βελτιστοποίηση παραμέτρων και δομημένη βελτιστοποίηση

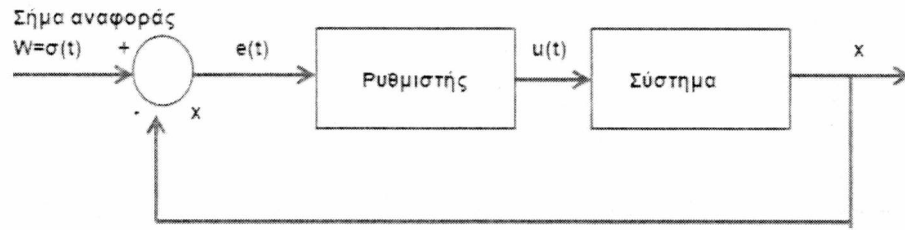
Προσωρινά σαν γενική διατύπωση θεωρούμε: Βελτιστοποίηση ενός δυναμικού συστήματος σημαίνει η ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση ενός δείκτη ποιότητας, με την κατάλληλη επιλογή των διαθέσιμων τεχνικών στοιχείων. Μπορούμε να περιορισθούμε στην ελαχιστοποίηση αντιστρέφοντας το πρόσημο του δείκτη ποιότητας.

Υπάρχουν δύο είδη βελτιστοποίησης:

3. Βελτιστοποίηση παραμέτρων
4. Δομημένη βελτιστοποίηση

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθώ στα δύο αυτά είδη βελτιστοποίησης και ακολούθως θα ασχοληθώ μόνο με την δομημένη βελτιστοποίηση που αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσης εργασίας.

Η επεξήγηση της προσωρινής διατύπωσης της βελτιστοποίησης θα γίνει με βάση το κύκλωμα ελέγχου του σχήματος 1.1.



Σχήμα 1.1: Κύκλωμα ελέγχου

$\sigma(t)$: μοναδιαία βηματική συνάρτηση

Εδώ η δομή του ρυθμιστή, δηλαδή η εξίσωση που περιγράφει τον ρυθμιστή είναι δεδομένη. Αν πρόκειται π.χ. για ένα PI-ρυθμιστή τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι

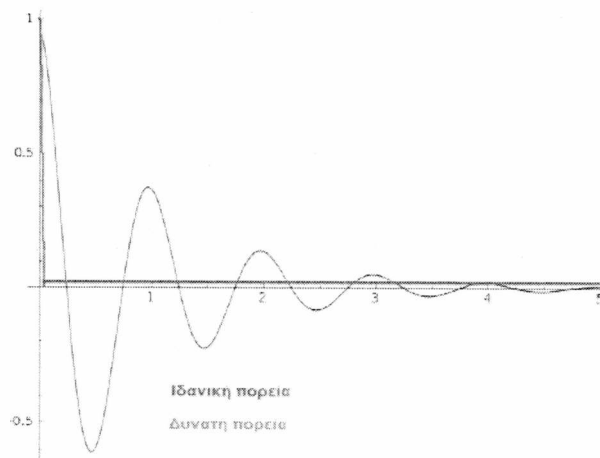
$$U(s) = K_R \frac{1 + T_R s}{s} E(s)$$

Στο πεδίο του χρόνου η εξίσωση του PI-ρυθμιστή είναι:

$$U(t) = K_R T_R e(t) + K_R \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Σαν διαθέσιμα τεχνικά δεδομένα υπάρχουν οι δύο παράμετροι K_R και T_R του ρυθμιστή. Αυτοί πρέπει να επιλέγουν με τέτοιο τρόπο ώστε το σύστημα να παρουσιάζει μια ευνοϊκή συμπεριφορά. Για το σκοπό αυτό θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε με διάφορους τρόπους. Μια δυνατότητα είναι να αποδώσουμε στο σύστημα ένα δείκτη ποιότητας και με την κατάλληλη επιλογή των K_R και T_R να τον ελαχιστοποιήσουμε. Ένας ευρέως χρησιμοποιούμενος δείκτης ποιότητας είναι ο ονομαζόμενος "τετραγωνικής επιφάνειας ρύθμισης" ή τετραγωνική συνάρτηση σφάλματος.

Θεωρούμε σαν σήμα αναφοράς w την μοναδιαία βηματική συνάρτηση $\sigma(t)$ στο κύκλωμα του σχήματος 1.1. Με την παραδοχή ότι το κύκλωμα ρύθμισης είναι ευσταθές, η διαφορά ρύθμισης $e(t)$ διατρέχει μια μεταβατική κατάσταση και τείνει με την πάροδο του χρόνου t στο μηδέν. Στο σχήμα 1.2 είναι σχεδιασμένη μια δυνατή πορεία και η ιδανική πορεία.



Σχήμα 1.2 : Δυνατή πορεία της διαφοράς ρύθμισης $e(t)$ και ιδανική πορεία.

Την πρώτη στιγμή η $e=w-x$ έχει την τιμή 1, καθώς εξαιτίας της συμπεριφοράς καθυστέρησης της απόκρισης του συστήματος η τιμή του x είναι μηδέν. Η ιδανική συμπεριφορά θα ήταν το e να έπαιρνε αμέσως την τιμή 0, ώστε το μέγεθος ρύθμισης $x(t)$ να έχει την ίδια τιμή με το σήμα αναφοράς $w(t)$. Η ιδανική τροχιά δεν είναι πραγματοποιήσιμη εξαιτίας την χρονική καθυστέρησης απόκριση των συστημάτων (χρονική καθυστέρηση στην απόκριση των ρυθμιστικών διατάξεων).

Επιδίωξη είναι να προσπαθήσουμε να διατηρήσουμε το $e(t)$ μικρό όχι σε ένα ξεχωριστό σημείο, αλλά στο σύνολο της τροχιάς. Η σκέψη αυτή οδηγεί στο κριτήριο ποιότητας (ή δείκτης απόδοσης)

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (\text{“ τετραγωνική επιφάνεια ρύθμισης”})$$

Σαν όρος του ολοκληρώματος επιλέγεται αντί του $e(t)$ το $e(t)^2$ ώστε να αποκλεισθούν επιδράσεις του προσήμου. Διαφορετική θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση που η $e(t)$ παριστάνει μια ασθενή διαρκή ταλάντωση με ίδιες θετικές και αρνητικές επιφάνειες-τα θετικά και αρνητικά τμήματα του ολοκληρώματος να αντισταθμίζονται, με αποτέλεσμα να προκύπτει πολύ μικρή τιμή για το J , παρόλο που η χρονική εξέλιξη της διαδικασίας είναι “κακή”. Αντί του $e(t)$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο όρος $|e(t)|$ αλλά θα δημιουργούσε περαιτέρω δυσκολίες –όπως θα δούμε πιο κάτω-από το γεγονός ότι η $|e(t)|$ είναι μια μη παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Με μια καθορισμένη ρύθμιση των παραμέτρων K_R και T_R και με την σύνδεση του σήματος αναφοράς $\sigma(t)$ προκύπτει επίσης μια καθορισμένη τροχιά της $e(t)$ και έτσι μια συγκεκριμένη τιμή του J . Μεταβάλλοντας τα K_R και T_R , μεταβάλλεται και η τροχιά της $e(t)$ και μαζί μ’ αυτή και η τιμή J .

Συμπερασματικά το μέτρο ποιότητας J είναι μια συνάρτηση των παραμέτρων ρύθμισης

$$J = J(K_R, T_R)$$

Η λύση του προβλήματος είναι να καθορίσουμε τα K_R και T_R ώστε η τιμή του J να ελαχιστοποιείται. Αυτό προκύπτει από τις σχέσεις

$$\frac{\partial J}{\partial K_R} = 0, \frac{\partial J}{\partial T_R} = 0$$

Βελτιστοποίηση παραμέτρων σημαίνει ότι η δομή του ρυθμιστή είναι δεδομένη (π.χ. PID-ρυθμιστής) και μόνοι οι παράμετροι του ρυθμιστή είναι διαθέσιμοι προς επιλογή. Η βελτιστοποίηση των παραμέτρων είναι σε χρήση με το ξεκίνημα της θεωρίας του αυτομάτου ελέγχου και έχει προσφέρει και προσφέρει λύσεις σε μια πληθώρα εφαρμογών. Με τη χρήση δεδομένου ρυθμιστή π.χ. ενός PID-ρυθμιστή, σε μια εφαρμογή βελτιστοποίησης, θα μπορούσε να συμβεί, μια μη γραμμική χαρακτηριστική να έδινε μια πολύ καλύτερη τιμή του δείκτη απόδοσης απ' όλες τις δυνατές του PID-ρυθμιστή.

Εάν θέλουμε πραγματικά να εξαντλήσουμε όλες τις δυνατότητες βελτιστοποίησης τότε προσπαθούμε: από όλες τις δυνατές δομές του ρυθμιστή να βρούμε εκείνη η οποία για το συγκεκριμένο πρόβλημα ελαχιστοποιεί το δεδομένο δείκτη ποιότητας. Αυτό χαρακτηρίζεται σαν δομημένη βελτιστοποίηση.

Δομημένη Βελτιστοποίηση:

- Είναι δεδομένο το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος όπως προκύπτει από τους φυσικούς νόμους ή μέσω ταυτοποίησης.
- Είναι δεδομένο το κριτήριο ποιότητας που συναρτάται με το σύστημα ώστε αυτό να παρουσιάζει την επιθυμητή συμπεριφορά.

$$\begin{array}{c} \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \\ \Downarrow \\ \underline{u}(t) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{array} \right] \Rightarrow \underline{y}(t) \end{array}$$

Σχήμα 1.3: Δυναμικό σύστημα με περιγραφή στο χώρο κατάστασης.

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ διάνυσμα κατάστασης}$$

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \text{ διάνυσμα ελέγχου ή διάνυσμα εισόδου}$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \text{ διάνυσμα εξόδου}$$

Η διαφορική εξίσωση κατάστασης

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t), t \geq t_0$$

μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική, όπως και η εξίσωση εξόδου.

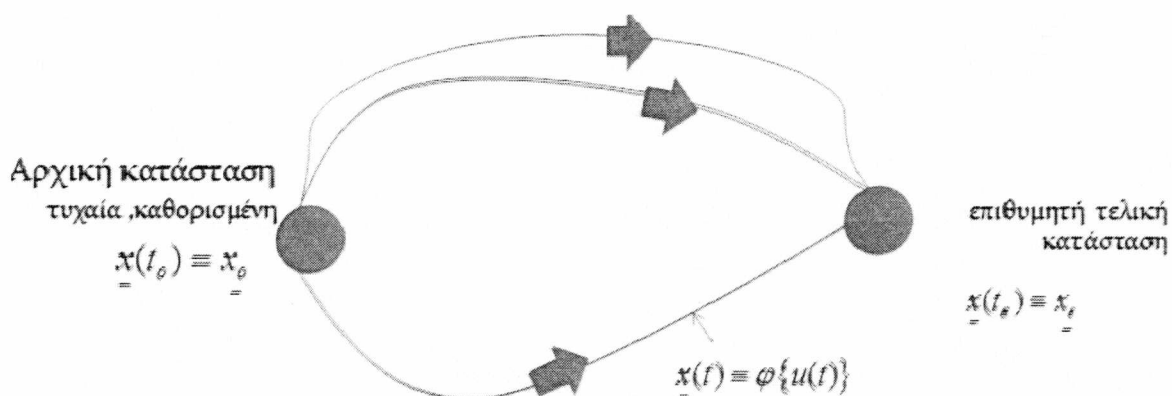
$$\underline{y}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t), t \geq t_0$$

Το σύστημα εξετάζεται από ένα χρονικό σημείο t_0 και μετά. Η κατάσταση $x(t)$ βρίσκεται στο σημείο $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ στο χώρο της κατάστασης την χρονική περίοδο t_0 , που καθορίζεται από την “προϊστορία”, δηλαδή από τις προγενέστερες διαδικασίες ελέγχου, τις επιδράσεις διαταραχών κλπ. Συχνά η αρχική κατάσταση δεν είναι γνωστή αλλά τυχαία. Στην ανάπτυξη της γενικής μεθόδου επίλυσης θα υποθέσουμε ότι η αρχική κατάσταση βρίσκεται σε μια τυχαία θέση.

Σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης απαιτείται συχνά το διάνυσμα της κατάστασης $\underline{x}(t)$ του συστήματος, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t_e να καταλήγει σε ένα επιθυμητό σημείο προορισμού \underline{x}_e δηλαδή $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$. Επίσης σε πολλά προβλήματα

απαιτείται σε δεδομένη χρονική διάρκεια το σύστημα να βρίσκεται στην επιθυμητή κατάσταση λειτουργίας. Υπάρχουν επίσης και περιπτώσεις προβλημάτων στα οποία το τελικό χρονικό σημείο t_e είναι ελεύθερο ή το τελικό σημείο \underline{x}_e δεν είναι καθορισμένο. Όλα αυτά θα τα δούμε αναλυτικά στην συνέχεια.

Για τον καθορισμό των εννοιών που ακολουθούν θα υποθέσουμε εδώ ότι το τελικό χρονικό σημείο t_e και η τελική κατάσταση \underline{x}_e είναι δεδομένα. Έχουμε τότε να επιλέξουμε ένα διάνυσμα ελέγχου $\underline{u}(t)$ το οποίο οδηγεί το σημείο κατάστασης $\underline{x}(t)$ από την αρχική τυχαία κατάσταση $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ στην επιθυμητή τελική κατάσταση $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$. Για κάθε διαφορετικό διάνυσμα ελέγχου $\underline{u}(t)$ προκύπτει και μια διαφορετική τροχιά μετάβασης.



Σχήμα 1.4: Τροχιές του συστήματος σε εξάρτηση από το διάνυσμα ελέγχου.

Προσωρινή διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης:

Από όλα τα δυνατά διανύσματα ελέγχου $\underline{u}(t)$ τα οποία οδηγούν το σύστημα από την αρχική κατάσταση $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ στη τελική κατάσταση $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$, αναζητούμε εκείνο που ελαχιστοποιεί τον δεδομένο δείκτη ποιότητας J που συναρτάται με το σύστημα.

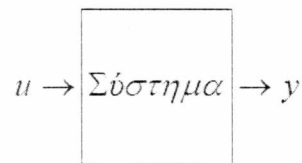
Στην συνέχεια θα αναφερθώ λεπτομερώς στα κριτήρια ποιότητας ή δείκτες ποιότητας πριν υπεισέλθω στην θεωρία βελτιστοποίησης.

1.2 Κριτήρια ποιότητας

Στον κλάδο του αυτομάτου ελέγχου υπάρχει μια πλειονότητα κριτηρίων ποιότητας που χρησιμοποιούνται στην βελτιστοποίηση των δυναμικών συστημάτων. Το ποιο, από τα παρακάτω που θα αναφερθώ χρησιμοποιείται κάθε φορά, εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα και τις απαιτήσεις του μηχανικού. Θα εξετάσω με κάθε λεπτομέρεια τους συνηθέστερους τύπους κριτηρίων, ώστε να γίνει κατανοητός ο προορισμός τους και θα διατυπώσω τις μαθηματικές εκφράσεις που τους περιγράφουν, οι οποίες είναι απαραίτητες στην επίλυση του προβλήματος της βελτιστοποίησης.

Κριτήριο βέλτιστης κατανάλωσης ενέργειας

Έστω ένα δυναμικό σύστημα μιας εισόδου όπως στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Σύστημα μιας εισόδου

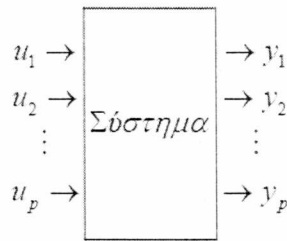
Είναι φανερό σαν μέτρο της συνολικής ενέργειας που προσάγεται στο σύστημα για το χρονικό διάστημα ελέγχου από t_0 μέχρι t_e πρέπει να επιλεγεί η τιμή

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} u^2(t) dt \quad (1.1)$$

Για τους λόγους που αναφέρθηκα πιο πάνω χρησιμοποιείται το $u^2(t)$ αντί του $u(t)$ ή $|u(t)|$.

Ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ είναι επουσιώδης και έχει απλά το στόχο να απλοποιήσει τους περαιτέρω υπολογισμούς όπως θα δούμε πιο κάτω.

Εάν έχουμε ένα σύστημα πολλών εισόδων $u_1(t), \dots, u_p(t)$ όπως στο παρακάτω σχήμα 1.6



Σχήμα 1.6. Σύστημα πολλών εισόδων

Τότε το κριτήριο ποιότητας (1.1) παίρνει την μορφή

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [r_1 u_1^2(t) + r_2 u_2^2(t) + \dots + r_p u_p^2(t)] dt \quad (1.2)$$

τα $r_v > 0$ είναι συντελεστές βαρύτητας. Μ' αυτούς μπορούμε να ασκήσουμε εμμέσως περιορισμένη επίδραση στην συνάρτηση ελέγχου. Αν πρέπει π.χ. το μέγεθος ελέγχου u_1 να χρησιμοποιηθεί ιδιαίτερα οικονομικά, επιλέγεται το r_1 πολύ μεγάλο σε σύγκριση με τα άλλα r_v . Έτσι αναμένουμε το u_1 να παραμείνει μικρό για να ισχύει $r_1 |u_1(t)| \rightarrow$ μικρό από την απαίτηση ελαχιστοποίησης του J . Φυσικά αυτό το συμπέρασμα δεν είναι αυστηρό, καθώς είναι δυνατό το u_1 να παρουσιάζει κρουστικές κορυφές οι οποίες είναι ελάχιστα παρατηρήσιμες από το ολοκλήρωμα. Πολλές φορές συμβαίνει με την παραπάνω επιλογή - r_1 μεγάλο- να μην έχουμε u_1 μικρό. Στην περίπτωση αυτή είναι προτιμότερο να βάζουμε ποιοτικούς περιορισμούς στο μέγεθος ελέγχου.

Την (1.2) μπορούμε περαιτέρω να την γενικεύσουμε εάν από το άθροισμα των τετραγώνων

$$\sum_{v=1}^p r_v u_v^2(t) \quad r_v > 0$$

μεταβούμε σε μια γενική τετραγωνική μορφή

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i,k=1}^p r_{ik} u_i(t) u_k(t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) dt \quad (1.3)$$

όπου $\underline{R} = (r_{ik})$ ένας p -σειρών συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, που σημαίνει ότι $\underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \geq 0$ και $\underline{u}^T \underline{R} \underline{u} = 0$ μόνο για $\underline{u} = 0$.

Κριτήριο ποιότητας βέλτιστης τροχιάς

Ένα δεύτερο κριτήριο ποιότητας είναι το κριτήριο της βέλτιστης τροχιάς. Εξετάζουμε αρχικά ένα σύστημα μιας εξόδου $y(t)$. Η έξοδος πρέπει να οδηγηθεί μέσω του ελέγχου μετά

από μια αρχική εκτροπή x_0 σε μια τελική καθορισμένη θέση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η θέση αυτή είναι το μηδέν. Για να αποφύγουμε μεγάλες εκτροπές της εξόδου σ' αυτή την μετάβαση, προσπαθούμε να κρατήσουμε την έξοδο μικρή όχι σε μια θέση αλλά στην τροχιά της.

Το κριτήριο ποιότητας που εκφράζει αυτή την απαίτηση είναι η ελαχιστοποίηση του

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} y^2(t) dt \quad (1.4)$$

Στην περίπτωση πολλών εξόδων το κριτήριο παίρνει τη μορφή

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [g_1 y_1^2(t) + \dots + g_q y_q^2(t)] dt$$

όπου $g_1, g_2, \dots, g_q \geq 0$ είναι συντελεστές βαρύτητας. Το ολοκλήρωμα μπορούμε να το γράψουμε σε τετραγωνική μορφή:

$$\sum_{\mu=1}^q g_{\mu} y_{\mu}^2 = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & g_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \underline{y}^T \underline{G} \underline{y} \quad (1.5)$$

Εάν το σύστημα είναι γραμμικό τότε ισχύει

$$\underline{y} = \underline{c} \underline{x}$$

και λόγω της 1.5 έχουμε

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^g g_{\mu} y_{\mu}^2 = \underline{x}^T \underline{c}^T \underline{G} \underline{c} \underline{x}} \quad (1.6)$$

Όπου ο πίνακας $\underline{Q} = \underline{c}^T \underline{G} \underline{c}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας καθώς

$$\sum_{\mu=1}^g g_{\mu} y_{\mu}^2 = \underline{x}^T \underline{c}^T \underline{G} \underline{c} \underline{x} \geq 0$$

προκύπτει ότι ο πίνακας \underline{Q} είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας δηλαδή $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} \geq 0$, $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} = 0$

επίσης και για $\underline{x} \neq 0$.

Τελικά το κριτήριο ποιότητας βέλτιστης τροχιάς παίρνει την μορφή

$$\boxed{J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} \underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) dt} \quad (1.7)$$

Και η φυσική του σημασία είναι ότι έχουμε μια βέλτιστη μετάβαση από την αρχική

κατάσταση $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ στην τελική $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$ χωρίς πολλές ταλαντώσεις.

Τετραγωνικό κριτήριο ποιότητας

Τις περισσότερες φορές στα συστήματα υπάρχει η απαίτηση μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση και της βέλτιστης κατανάλωσης ενέργειας και της βέλτιστης

τροχιάς. Ο συνδυασμός των σχέσεων (1.3) και (1.7) δίνει το ονομαζόμενο τετραγωνικό κριτήριο ποιότητας

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right) dt \quad (1.8)$$

όπου \underline{R} - συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας και \underline{Q} - συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Κριτήριο ποιότητας βέλτιστου χρόνου μετάβασης

Ένα κριτήριο που αξιολογεί τον χρόνο (ταχύτητα) μετάβασης από την αρχική κατάσταση \underline{x}_0 στην τελική κατάσταση \underline{x}_e δίδεται από την σχέση:

$$J = t_e - t_0 = \int_{t_0}^{t_e} 1 dt \quad (1.9)$$

Το τετραγωνικό και το βέλτιστου χρόνου κριτήρια αποτελούν τα περισσότερα χρησιμοποιούμενα κριτήρια στην θεωρία βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων. Εκτός αυτού υπάρχουν και άλλα όπως θα δούμε παρακάτω. Τα δύο αυτά κριτήρια σύμφωνα με τις σχέσεις (1.8) και (1.9) έχουν τον τύπο ενός ορισμένου ολοκληρώματος της μορφής

$$J = \int_{t_0}^{t_e} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt \quad (1.10)$$

Που ονομάζεται κριτήριο ποιότητας Lagrange επειδή είναι πρώτος αυτός που ασχολήθηκε με προβλήματα βελτιστοποίησης με τέτοιου τύπου περιορισμούς.

Κριτήριο ποιότητας τελικής συμπεριφοράς

Ο τύπος του κριτηρίου ποιότητας που αξιολογεί την τελική συμπεριφορά των

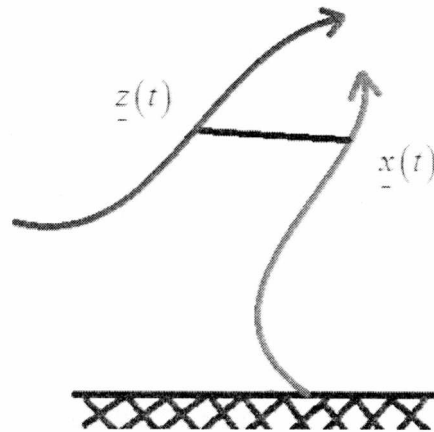
συστημάτων έχει την μορφή $J = |x(t_e) - \underline{z}(t_e)| = \min$

Ο γενικός τύπος του παραπάνω κριτηρίου έχει την μορφή

$$\boxed{J = h(x(t_e), t_e)} \quad (1.12)$$

και ονομάζεται κριτήριο Mayer, προς τιμή του μαθηματικού ADOLPH MAYER που ασχολήθηκε με τέτοια προβλήματα βελτιστοποίησης.

Ερμηνεία του κριτηρίου Mayer



Σχήμα 1.7: Ερμηνεία του κριτηρίου Mayer

Στο παρακάτω σχήμα το χρονικά εξαρτώμενο διάνυσμα $\underline{z}(t)$ περιγράφει την τροχιά στο τρισδιάστατο χώρο ενός ιπτάμενου αντικειμένου που θεωρείται γνωστή. Από το έδαφος ξεκινά ένα δεύτερο αντικείμενο που η τροχιά του περιγράφεται από την $\underline{x}(t)$. Η τροχιά αυτή πρέπει να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε η απόσταση των δύο αντικειμένων στον

προκαθορισμένο χρόνο t_e να είναι ελάχιστη. Η απόσταση δίδεται από το μήκος της διαφοράς των διανυσμάτων $\underline{x}(t) - \underline{z}(t)$. Σαν κριτήριο ποιότητας για την βελτιστοποίηση τόσο της μεταβατικής όσο και της τελικής κατάστασης χρησιμοποιείται το κριτήριο BOLZA που αποτελεί συνδυασμό των κριτηρίων Lagrange και Mayer.

$$J = h(\underline{x}(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt$$

1.3 Διατύπωση του προβλήματος της βελτιστοποίησης

Μετά την μαθηματική διατύπωση του μοντέλου ενός δυναμικού συστήματος και των κριτηρίων ποιότητας, η τελική διατύπωση του προβλήματος της βελτιστοποίησης διαμορφώνεται ως ακολούθως:

Από όλα τα διανύσματα $\begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix}$, $t_0 \leq t \leq t_e$ τα οποία ικανοποιούν την διαφορική

εξίσωση κατάστασης

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

και τις οριακές

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$$

του συστήματος, αναζητούμε εκείνο, το οποίο ελαχιστοποιεί το κριτήριο ποιότητας

$$J = h(\underline{x}(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt$$

Το παραπάνω πρόβλημα έχει σαν στόχο την ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού. Συναρτησιακό στα μαθηματικά είναι η μονοσήμαντη απεικόνιση μιας συνάρτησης ή μιας διανυσματικής συνάρτησης σε ένα αριθμό. Εν προκειμένω η διανυσματική συνάρτηση $\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$ απεικονίζεται στον αριθμό J . Τέτοια προβλήματα ονομάζονται προβλήματα μεταβολών και η επίλυσή τους στα μαθηματικά γίνεται με τις μεθόδους του λογισμού των μεταβολών.

Ένα απλό παράδειγμα ενός συναρτησιακού είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$z = \int_a^b f(t) dt$$

Μέσω του οποίου για κάθε t στο διάστημα $a \leq t \leq b$ αντιστοιχεί σε κάθε $f(t)$ κατά μονοσήμαντο τρόπο ένας αριθμός z . Ένα συναρτησιακό διαφέρει από μια συνάρτηση στην οποία έχουμε απεικόνιση ενός αριθμού σε αριθμό (π.χ. $y = e^x$).

Συμπερασματικά το πρόβλημα της βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων αποτελεί ένα πρόβλημα μεταβολών με επί πλέον περιορισμούς: Το συναρτησιακό ελαχιστοποιείται με το περιορισμό ότι πρέπει να ικανοποιείται και η διαφορική εξίσωση κατάστασης του συστήματος. Ανάλογα με το κριτήριο ποιότητας, διακρίνουμε την βελτιστοποίηση σαν πρόβλημα Lagrange, Mayer και Bolza.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα διατυπωθούν συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από την λύση της βελτιστοποίησης. Εάν η ικανοποίηση αυτών των συνθηκών δίδουν μια λύση, αυτή αποτελεί και την λύση της βελτιστοποίησης. Εάν υπάρχουν περισσότερες λύσεις, θα πρέπει με συγκεκριμένους υπολογισμούς να βρούμε εκείνη που δίδει την ελάχιστη τιμή στον δείκτη ποιότητας.

1.4 Βασική δομή μιας βέλτιστης ρύθμισης

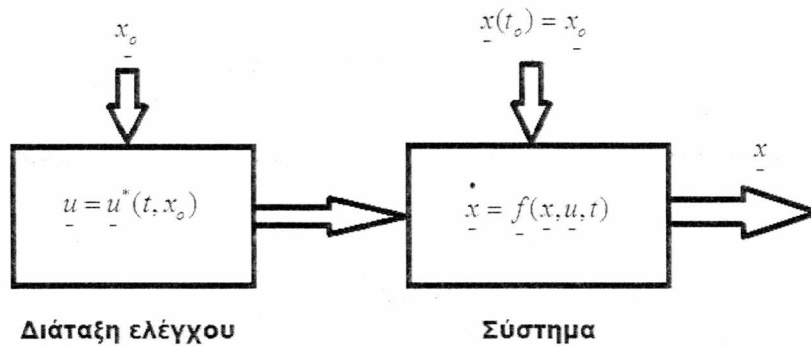
Το βασικό πρόβλημα συνίσταται στην επίλυση του διατυπωμένου στην (1.18) προβλήματος μεταβολών. Εδώ να εξηγήσουμε μερικά βασικά ερωτήματα. Μέχρι τώρα δεν έχουμε αναφερθεί καθόλου για “ρύθμιση”. Έχουμε αναφερθεί μόνο στην επίλυση ενός προβλήματος “ελέγχου”: δηλαδή την εύρεση ενός διανύσματος ελέγχου το οποίο μαζί με την καθορισμένη από αυτό τροχιά, ελαχιστοποιεί το μέτρο ποιότητας J .

Είναι σαφές, ότι το βέλτιστο διάνυσμα ελέγχου, όπως επίσης και η βέλτιστη τροχιά εξαρτώνται από την αρχικά κατάσταση \underline{x}_0 :

$$\underline{u} = \underline{u}^*(t, \underline{x}_0) \quad (1.19)$$

$$\underline{x} = \underline{x}^*(t, \underline{x}_0), t_0 \leq t \leq t_e \quad (1.20)$$

όπου εδώ και για τα επόμενα, ο αστερίσκος συμβολίζει την βέλτιστη λύση. Υποθέτουμε ότι έχουμε βρει το ελάχιστο διάνυσμα ελέγχου και έχει υπολογισθεί η βέλτιστη τροχιά, δηλαδή οι εξισώσεις (1.19) και (1.20) είναι γνωστές. Γνωρίζοντας κανείς την αρχική κατάσταση \underline{x}_0 από τα δεδομένα του προβλήματος ή μέσω μέτρησης, δημιουργεί σύμφωνα με την (1.19) το διάνυσμα ελέγχου- για παράδειγμα σε ένα υπολογιστή- και το συνδέει στο σύστημα. Έτσι το \underline{x} παρουσιάζει την επιθυμητή βέλτιστη τροχιά σύμφωνα με την (1.20). Στο σχήμα 1.8 είναι σχεδιασμένος ο προκύπτων βέλτιστος έλεγχος.



Σχήμα 1.8: Βέλτιστος έλεγχος (Η εξίσωση εξόδου του συστήματος, εδώ δεν παίζει κανένα ρόλο)

Αυτός ο έλεγχος μπορεί όμως να πραγματοποιηθεί, με τον τρόπο που έχει περιγραφεί, μόνο εάν η αρχική κατάσταση \underline{x}_0 είναι γνωστή και λειτουργεί με τον υπολογιζόμενο βέλτιστο τρόπο, εάν για το χρονικό διάστημα του ελέγχου $t_0 \leq t \leq t_e$ δεν επιδρά καμία διαταραχή στο σύστημα. Για τα περισσότερα πραγματικά προβλήματα αυτή η προϋπόθεση δεν τηρείται (σύστημα χωρίς επιδράσεις εξωτερικών διαταραχών). Στην περίπτωση των επιδράσεων των εξωτερικών διαταραχών μεταβαίνουμε από τον “έλεγχο” στην “ρύθμιση”. Αποφεύγουμε έτσι ο βέλτιστος έλεγχος να εξαρτάται από την αρχική κατάσταση \underline{x}_0 και λειτουργεί για τυχαίο \underline{x}_0 . Για τον σκοπό αυτό καταγράφουμε συνεχώς την τρέχουσα τιμή $\underline{x}(t)$ του διανύσματος κατάστασης και σχηματίζουμε από αυτό την τιμή $\underline{u}(t)$ του διανύσματος ελέγχου. Έτσι έχουμε μια ανάδραση της μορφής

$$\underline{u} = \underline{\kappa}(\underline{x}, t) \quad (1.21)$$

Επειδή η εκάστοτε τιμή του $\underline{x}(t)$ αντικατοπτρίζει την τιμή των προγενέστερων διαταραχών, λαμβάνεται έτσι υπόψη η επίδραση τους στο σύστημα. Εδώ θα μπορούσαμε να σκεφτούμε

κρουστικές διαταραχές που επιδρούν σε τυχαία χρονικά σημεία, δημιουργώντας στο σύστημα νέες αρχικές συνθήκες. Εάν επιδρούν μακράς διάρκειας διαταραχές, μπορούμε να τις ανάγουμε σε κρουστικές κάνοντας χρήση ενός μοντέλου διαταραχών.

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την ανάδραση(1.21):

Θεωρούμε την (1.20) σαν ένα σύστημα από n εξισώσεις για τις n συνιστώσες του \underline{x}_o :

$$\begin{aligned} x_1^*(t, x_{10}, \dots, x_{n0}) &= x_1 \\ \vdots & \\ x_n^*(t, x_{10}, \dots, x_{n0}) &= x_n \end{aligned} \quad (1.22)$$

Επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων ως προς x_{10}, \dots, x_{n0} παίρνουμε τις εξισώσεις :

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \\ x_{n0} &= x_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

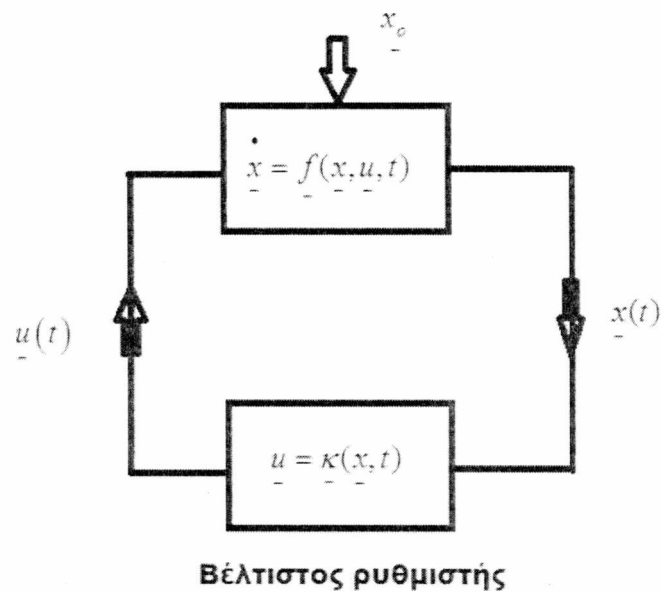
ή την διανυσματική συνάρτηση

$$\underline{x}_o = \underline{X}(t, \underline{x})$$

θέτοντας αυτή στην (1.19) προκύπτει

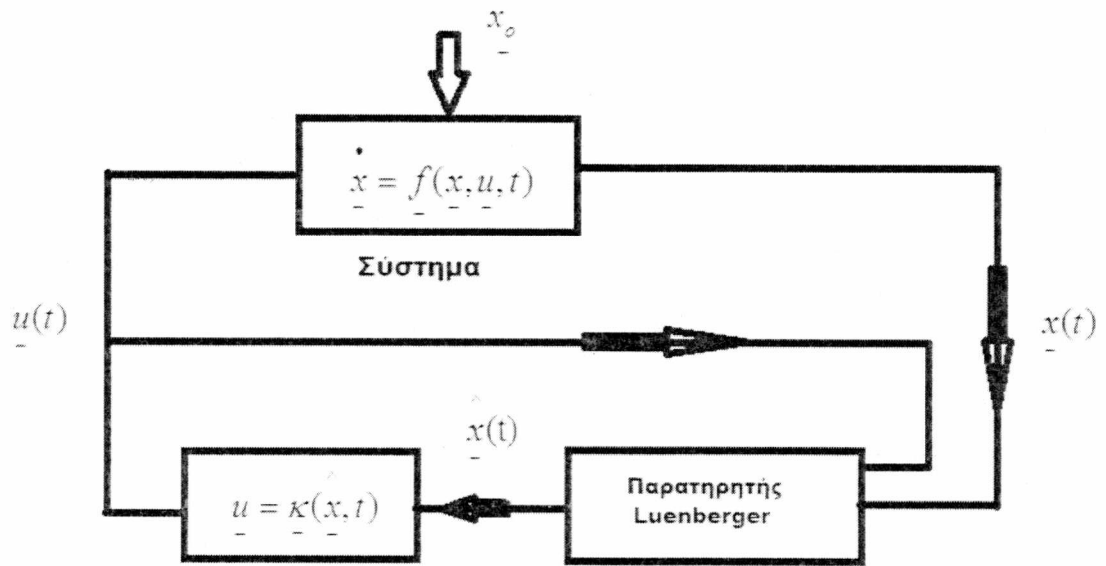
$$\underline{u} = \underline{u}^*(t, \underline{X}(t, \underline{x})) = \underline{\kappa}(\underline{x}, t) \quad (1.23)$$

Το σχήμα 1.9 παρουσιάζει την βασική δομή μιας βέλτιστης ρύθμισης όπως προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις.



Σχήμα 1.9: Βέλτιστη ρύθμιση

Εάν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο το σχήμα 1.10 απεικονίζει την δομή του βέλτιστου ρυθμιστή. Γενικά σε ένα σύστημα δεν μπορούν να μετρηθούν όλες οι μεταβλητές κατάστασης. Επειδή όμως για τον βέλτιστο ρυθμιστή είναι απαραίτητο το συνολικό διάνυσμα κατάστασης \underline{x} , πρέπει οι μεταβλητές κατάστασης να “εκτιμηθούν” μέσω ενός παρατηρητή κατάστασης (παρατηρητής-Luenberger), ο οποίος ανακατασκευάζει προσεγγιστικά τις μη μετρούμενες μεταβλητές κατάστασης. Για την περίπτωση αυτή η δομή του βέλτιστου ρυθμιστή του σχήματος 1.8. Επειδή ο παρατηρητής κατάστασης δεν παίζει κανένα ειδικό ρόλο στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω.



Σχήμα 1.10: Βέλτιστος ρυθμιστής με παρατηρητή κατάστασης

Κεφάλαιο 2 Μαθηματικές προκαταρτικές παρατηρήσεις

2.1 Παραγωγήιση έμμεσων διανυσματικών συναρτήσεων

Πριν την επίλυση του προβλήματος της βελτιστοποίησης που αποτελεί όπως είδαμε ένα πρόβλημα λογισμού των μεταβολών με επιπλέον περιορισμούς, θα παρουσιάσω συνοπτικά τους κανόνες παραγωγίσης των διανυσματικών συναρτήσεων διότι εμφανίζονται συχνά στην παρακάτω ανάλυση.

Έστω \underline{f} ένα m -διάστατο διάνυσμα, το οποίο εξαρτάται από ένα n -διάστατο διάνυσμα

\underline{x} :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα \underline{x} μπορεί από την πλευρά του να εξαρτάται από δυο βαθμωτές μεταβλητές t και ε .

$$\underline{x} = \underline{x}(t, \varepsilon) \quad (2.2)$$

Από την (2.1) και (2.2) σχηματίζουμε την συνάρτηση

$$\underline{f}(\underline{x}(t, \varepsilon)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t, \varepsilon), \dots, x_n(t, \varepsilon)) \\ \vdots \\ f_m(x_1(t, \varepsilon), \dots, x_n(t, \varepsilon)) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Η (2.3) παριστάνει μια έμμεση συνάρτηση των t και ε . Παραγωγίζοντας ως προς ε , έχουμε σύμφωνα με τον ορισμό της διανυσματικής παραγώγισης:

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\underline{x}(t, \varepsilon)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα αυτό μπορεί να γραφεί ως γινόμενο:

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\underline{x}(t, \varepsilon)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ο δεύτερος όρος του γινομένου της (2.4) είναι η παράγωγος του διανύσματος \underline{x} ως προς ε :

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varepsilon}$. Ο πρώτος όρος παριστάνει ένα (m, n) -πίνακα, του οποίου η i -ιστη σειρά καθορίζεται από

τις μερικές παραγώγους της $f_i(x_1, \dots, x_n)$ και γράφεται εν συντομία

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$$

και αποτελεί τον Ιακωβιανό πίνακα του συστήματος των συναρτήσεων (f_1, \dots, f_m) . Σύμφωνα

με την (2.4) ο κανόνας παραγώγισης των έμμεσων διανυσματικών συναρτήσεων (2.3) είναι:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\underline{x}(t, \varepsilon)) = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varepsilon}} \quad (2.5)$$

όπου

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.6) \text{ Ιακωβιανός πίνακας}$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση στην οποία μια βαθμωτή συνάρτηση εξαρτάται από ένα

διάνυσμα:

$$f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Αυτό είναι μια ειδική περίπτωση της προηγούμενης και σύμφωνα με την (2.6)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

Είναι όμως σύνηθες στην διεθνή βιβλιογραφία η παράγωγος μιας βαθμωτής συνάρτησης ως προς ένα διάνυσμα να ορίζεται ως διάνυσμα στήλης

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Αυτό είναι η κλίση της συνάρτησης $f(\underline{x})$. Έτσι έχουμε για την έμμεση βαθμωτή συνάρτηση

$$f(\underline{x}(t, \varepsilon))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\underline{x}(t, \varepsilon)) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_1(t, \varepsilon), \dots, x_n(t, \varepsilon)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και λόγω της (2.7)

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\underline{x}(t, \varepsilon)) = \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right]^{-T} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varepsilon} \quad (2.8)$$

2.2 Κανόνες παραγωγίσης ειδικών διανυσματικών συναρτήσεων και τετραγωνικών μορφών

Έστω η γραμμική διανυσματική συνάρτηση

$$f(\underline{u}) = \underline{u}^T \underline{z} = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \dots + u_p z_p \quad (2.9)$$

όπου \underline{u} είναι η μεταβλητή και \underline{z} ένα σταθερό διάνυσμα. Σύμφωνα με τον ορισμό (2.7)

ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}}(\underline{u}^T \underline{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1}(\underline{u}^T \underline{z}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_p}(\underline{u}^T \underline{z}) \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}}(\underline{u}^T \underline{z}) = \underline{z} \quad (2.10)$$

Επειδή σε ένα βαθμωτό γινόμενο η αντιμετάθεση δεν προσφέρει τίποτα, ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}}(\underline{z}^T \underline{u}) = \frac{\partial}{\partial \underline{u}}(\underline{u}^T \underline{z}) = \underline{z} \quad (2.11)$$

Συχνά στην βελτιστοποίηση εμφανίζονται διανυσματικές συναρτήσεις της μορφής

$$f(\underline{u}) = \underline{u}^T \underline{A} \underline{v}$$

οι οποίες πρέπει να παραγωγιστούν ως προς \underline{u} . Θέτοντας $\underline{z} = \underline{A}\underline{y}$ και εφαρμόζοντας την (2.10) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} (\underline{u}^T \underline{A}\underline{y}) = \underline{A}\underline{y} \quad (2.12)$$

Επίσης και εδώ η σειρά των συντελεστών μπορεί να είναι διαφορετική:

$$f(\underline{u}) = \underline{v}^T \underline{A}\underline{u}$$

Καθώς πρόκειται για βαθμωτή συνάρτηση και η αντιμετάθεση δεν αλλάζει τίποτα:

$$f(\underline{u}) = \underline{u}^T \underline{A}\underline{v}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την (2.12):

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} (\underline{u}^T \underline{A}\underline{v}) = \underline{A}^T \underline{v}$$

Έτσι ισχύει:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \underline{u}} (\underline{v}^T \underline{A}\underline{u}) = \underline{A}^T \underline{v}} \quad (2.13)$$

Μαζί με τέτοιες διανυσματικές συναρτήσεις, εμφανίζονται συχνά στα επόμενα και οι τετραγωνικές μορφές

$$\boxed{f(\underline{u}) = \underline{u}^T \underline{S}\underline{u}} \quad (2.14)$$

όπου \underline{S} ένας συμμετρικός πίνακας. Σύμφωνα με τον ορισμό ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_p} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Εάν $\underline{s} = (s_{ik})$ τότε

$$\underline{u}^T \underline{s} \underline{u} = \sum_{i,k=1}^n s_{ik} u_i u_k = s_{11} u_1^2 + s_{12} u_1 u_2 + \dots + s_{1p} u_1 u_p + s_{21} u_2 u_1 + \dots + s_{p1} u_p u_1 + \text{ υπόλοιποι όροι χωρίς } u_1.$$

Από αυτή προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) = 2s_{11} u_1 + s_{12} u_2 + \dots + s_{1p} u_p + s_{21} u_2 + \dots + s_{p1} u_p$$

και λόγω ότι $\underline{s} = (s_{ik})$ (\underline{s} συμμετρικός πίνακας):

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) = 2 \sum_{v=1}^p s_{1v} u_v$$

Τελικά λόγω της (2.7) έχουμε τον κανόνα παραγώγισης

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) = \begin{bmatrix} 2 \sum_{v=1}^p s_{1v} u_v \\ \vdots \\ 2 \sum_{v=1}^p s_{pv} u_v \end{bmatrix} \quad \text{δηλαδή}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \underline{u}} (\underline{u}^T \underline{s} \underline{u}) = 2 \underline{s} \underline{u}} \quad (2.16)$$

Ο κανόνας παραγώγισης (2.16) των τετραγωνικών μορφών είναι πλήρως ανάλογος των βαθμωτών:

$$\frac{\partial}{\partial u}(usu) = \frac{\partial}{\partial u}(su^2) = 2su$$

Με το παραπάνω σύντομο μαθηματικό υπόβαθρο μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην μαθηματική επεξεργασία και επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Κεφάλαιο 3 Μέθοδοι βελτιστοποίησης Δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου

Το πρόβλημα μεταβολών με πρόσθετους περιορισμούς, όπως αυτό προκύπτει από την δομημένη βελτιστοποίηση δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου και διατυπώθηκε στην (1.14) αποτελεί ένα αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα. Για την επίλυσή του έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι. Η παρούσα εργασία ασχολείται με τις παρακάτω μεθόδους:

1. Μέθοδος EULER-LAGRANGE με δεδομένες οριακές συνθήκες και χωρίς πρόσθετους περιορισμούς ισότητας
2. Μέθοδος EULER-LAGRANGE με δεδομένες οριακές συνθήκες και με πρόσθετους περιορισμούς ισότητας
3. Η μέθοδος HAMILTON
4. Η μέθοδος HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Η αύξουσα σειρά εκφράζει και την πληρότητα της αντίστοιχης μεθόδου στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Για την μέθοδο HAMILTON που αποτελεί μια πολύ αποτελεσματική μέθοδο για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων γίνεται πιο λεπτομερές παρουσίαση.

3.1 Μέθοδος EULER-LAGRANGE με δεδομένες οριακές συνθήκες και χωρίς πρόσθετους περιορισμούς ισότητας

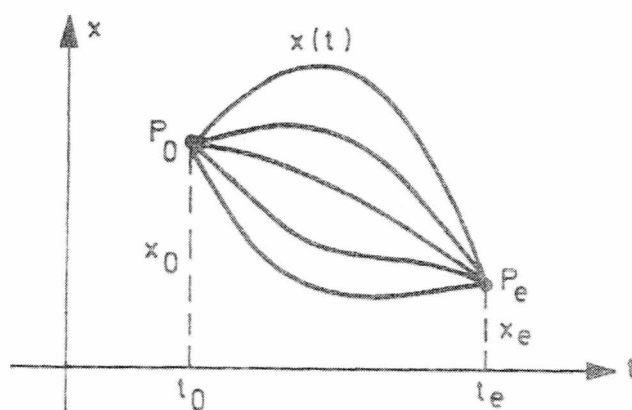
Το πρόβλημα των μεταβολών διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{Δίνεται το μέτρο ποιότητας: } J = \int_{t_0}^{t_e} f(t, x, \dot{x}) dt \quad (3.1). \text{ Αναζητούμε εκείνη την}$$

συνάρτηση $x=x(t)$ η οποία ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $x_0 = x(t_0), x_e = x(t_e)$ (3.2) και ελαχιστοποιεί το J .

Αυτό χαρακτηρίστηκε από τους μαθηματικούς σαν το βασικό πρόβλημα των μεταβολών.

Οι επιτρεπτές καμπύλες $x(t)$ είναι σχεδιασμένες στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1. Βασικό πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών

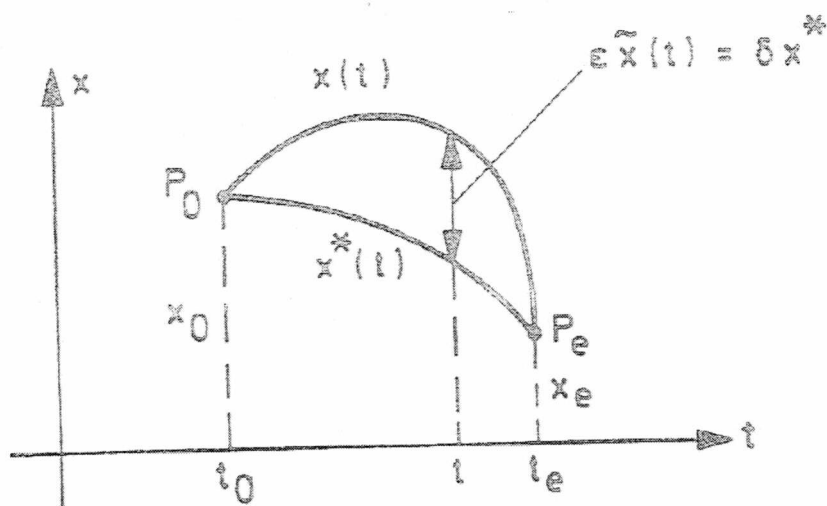
Η επίλυσή του βασίστηκε στην προσέγγιση Euler: Υποθέτουμε ότι $x=x^*(t)$ του προβλήματος έχει βρεθεί και κατασκευάζουμε μιας παραμέτρου δέσμης καμπυλών σύγκρισης.

$$x = x^*(t) + \varepsilon x(t) \quad (3.3)$$

Το ε είναι μια παράμετρος με $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ (ε_0 θετικό) και $x(t)$ μια οποιαδήποτε συνάρτηση για την οποία απλώς και μόνο πρέπει να ισχύει:

$$x(t_0) = 0, x(t_e) = 0 \quad (3.4)$$

Το σχήμα 3.2 δείχνει την κατασκευή της καμπύλης σύγκρισης



Σχήμα 3.2. Καμπύλες σύγκρισης στο βασικό πρόβλημα

Για $\varepsilon=0$ έχουμε την βέλτιστη λύση. Η μεταβολή $\delta x^* = \varepsilon x$ από την οποία προκύπτουν οι καμπύλες σύγκρισης από την θεωρούμενη λύση $x^*(t)$ χαρακτηρίστηκε από τους μαθηματικούς τον 18^ο αιώνα σαν “μεταβολή” του $x^*(t)$, από τον οποίο χαρακτηρισμό προέρχεται μέχρι και σήμερα το όνομα “πρόβλημα μεταβολών” ή “λογισμός των μεταβολών”.

Θέτοντας την (3.3) στο μέτρο ποιότητας (3.1) έχουμε

$$J = \int_{t_0}^{t_e} f(t, x^*(t) + \varepsilon x(t), x^*(t) + \varepsilon x(t)) dt = F(\varepsilon) \quad (3.5)$$

Καθώς το $x^*(t)$ θεωρείται ως γνωστό και το $x(t)$ είναι προκαθορισμένο, με την εκτέλεση του ολοκληρώματος θα έχουμε μια συνάρτηση του ε . Επειδή η βέλτιστη λύση $x^*(t)$ περιέχεται στην δέσμη των καμπυλών σύγκρισης για $\varepsilon=0$, πρέπει η συνάρτηση $F(\varepsilon)$ για $\varepsilon=0$ να έχει ελάχιστο. Δηλαδή πρέπει

$$\left[\frac{dF}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.6)$$

Παραγωγίζοντας την (3.5) ως προς ε και θέτοντας $\varepsilon=0$ προκύπτει:

$$\left[\frac{dF}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_e} \left. f(t, x^*(t) + \varepsilon x(t), x^*(t) + \varepsilon x(t)) \right|_{\varepsilon=0} dt = \int_{t_0}^{t_e} \left[\frac{\partial f}{\partial x} x(t) + \frac{\partial f}{\partial x} x(t) \right] dt = 0 \quad (3.7)$$

Εφαρμόζοντας στον δεύτερο όρο της (3.7) μερική παραγωγή με $u = \frac{\partial f}{\partial x}$, $v = x$ έχουμε

$$\int_{t_0}^{t_e} \frac{\partial f}{\partial x} x(t) dt = \left[\frac{\partial f}{\partial x} x(t) \right]_{t=t_0}^{t=t_e} - \int_{t_0}^{t_e} x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dt \quad (3.8)$$

Λόγω της (3.4) ο πρώτος όρος της (3.8) είναι μηδέν. Με την χρησιμοποίηση της (3.8) στην (3.7) προκύπτει

$$\int_{t_0}^{t_e} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] x(t) dt = 0 \quad (3.9)$$

Η (3.9) πρέπει συνεπώς να ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση $x(t)$. Αυτό είναι δυνατόν εάν για κάθε t στο διάστημα $[t_e, t_0]$ ισχύει

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0} \quad (3.10)$$

Αυτή είναι η εξίσωση Euler-Lagrange και αποτελεί μια συνήθης διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης.

Συμπερασματικά: Μέθοδος Euler-Lagrange χωρίς πρόσθετους περιορισμούς

$$J = \min_x \int_{t_0}^{t_e} f(t, x, \dot{x}) dt$$

με οριακές συνθήκες $x(t_0) = x_0$ και $x(t_e) = x_e$.

Ο βέλτιστος έλεγχος προκύπτει από την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

Παράδειγμα 1

$$J = \min_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - x^2) dt, \quad x(0)=0, \quad x(\pi/2)=1$$

Λύση

$$f(t, x, \dot{x}) = x^2 - x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 2x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 2\dot{x}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση Euler-Lagrange: $\ddot{x} + x = 0$

Η λύση: $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$x(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

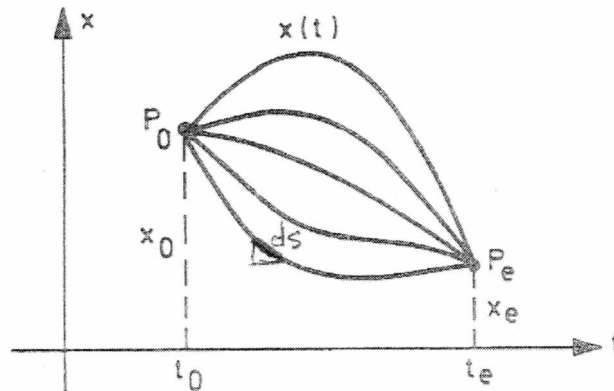
$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow c_2 = 1$$

Άρα $x^*(t) = \sin t$



Παράδειγμα 2

Ποια είναι η συντομότερη σύνδεση μεταξύ των σημείων $P_o = (t_o, x_o)$ και $P_e = (t_e, x_e)$ του επιπέδου όπου το t εκφράζει μήκος:



Λύση

Το τόξο ds δίνεται από την σχέση:

$$ds^2 = dt^2 + dx^2 = \left[1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] dt^2 = \left(1 + \dot{x}^2 \right) dt^2$$

Το συνολικό μήκος τόξου της καμπύλης μεταξύ των σημείων P_o και P_e :

$$s_{oe} = \int_{s_o}^{s_e} ds = \int_{t_o}^{t_e} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

$$f(t, x, \dot{x}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{const.}$$

άρα και $\dot{x} = \text{const.} = c_1 \rightarrow x = c_1 t + c_2$

Από τις οριακές συνθήκες $x(t_o) = x_o$ και $x(t_e) = x_e$ προκύπτει

$$c_1 = \frac{x_e - x_o}{t_e - t_o}, \quad c_2 = \frac{x_e - x_o}{t_e - t_o} t_o + x_o$$

Συνεπώς η λύση είναι:

$$x - x_o = \frac{x_e - x_o}{t_e - t_o} (t - t_o)$$

δηλαδή η ευθεία που περνά από τα σημεία $P_o = (t_o, x_o)$ και $P_e = (t_e, x_e)$, όπως φυσικά αναμέναμε.

3.2 Μέθοδος EULER-LAGRANGE με δεδομένες οριακές συνθήκες και επιπλέον περιορισμούς ισότητας

Διατύπωση του προβλήματος:

$$J = \min_{\underline{y}} \int_{t_o}^{t_e} f_o \left(\underline{\dot{y}}, \underline{y}, t \right) dt$$

με οριακές συνθήκες: $\underline{y}(t_o) = \underline{y}_o$ και $\underline{y}(t_e) = \underline{y}_e$

περιορισμούς ισότητας: $g \left(\underline{\dot{y}}, \underline{y}, t \right) = 0$

Η τεχνική Lagrange μετατρέπει ένα πρόβλημα ακροτήτων με πρόσθετους περιορισμούς σε ένα πρόβλημα χωρίς πρόσθετους περιορισμούς με την χρήση της εξίσωσης και των πολλαπλασιαστών Lagrange.

$$\text{Εξίσωση Lagrange: } L = f_o\left(\underset{-}{\dot{y}}, \underset{-}{y}, t\right) + \psi^T g\left(\underset{-}{\dot{y}}, \underset{-}{y}, t\right) \quad (3.11)$$

$$\text{Πολλαπλασιαστές Lagrange: } \psi^T(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)] \quad (3.12)$$

Με την χρήση της (3.11) το πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα χωρίς περιορισμούς

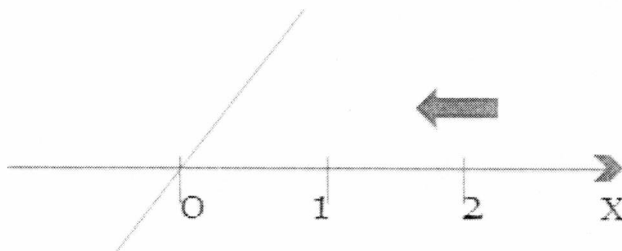
$$J = \min_{\underset{-}{y}} \int_{t_0}^{t_f} \left[f_o\left(\underset{-}{\dot{y}}, \underset{-}{y}, t\right) + \psi^T g\left(\underset{-}{\dot{y}}, \underset{-}{y}, t\right) \right] dt$$

Η λύση προκύπτει από την εξίσωση Euler-Lagrange (3.10)

$$\frac{\partial L}{\partial \underset{-}{y}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{-}{\dot{y}}} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Παράδειγμα I

Βέλτιστος έλεγχος πυραύλου με ώθηση και στις δύο διευθύνσεις:



Σκοπός: Βέλτιστος έλεγχος ώστε ο πύραυλος να οδηγηθεί σε χρόνο $t=2\text{sec}$ στην τελική κατάσταση (θέση "0") όπου έρχεται σε ακινησία με την ελάχιστη δυνατή δύναμη:

$$J = \min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^2 [u(t)]^2 dt$$

Αρχική κατάσταση: $x_1(0) = 2m$, $x_2(0) = 1m/s$

Τελική κατάσταση: $x_1(2) = 0m$, $x_2(2) = 0m/s$

Μέτρο ποιότητας: $\min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^2 [u(t)]^2 dt$

Εξίσωση συστήματος: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ και $\dot{x}_2(t) = u(t)$ αφού $m=1\text{kg}$

Συνάρτηση Lagrange: $L = f_o \left(\begin{matrix} \dot{y} \\ y, t \end{matrix} \right) + \psi^T g \left(\begin{matrix} \dot{y} \\ y, t \end{matrix} \right)$

Εξίσωση Euler-Lagrange: $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0$

Με

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial u} \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \psi_2 \\ 0 \\ -\psi_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$\begin{bmatrix} u - \psi_2 \\ 0 \\ -\psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

Έχουμε ένα σύνολο 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μπορεί να λυθεί:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0 \rightarrow \psi_1 = c_1 \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 \rightarrow \psi_2 = -c_1 t + c_2 \\ u &= \psi_2 \rightarrow u = -c_1 t + c_2 \\ \dot{x}_2 &= u = -c_1 t + c_2 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \\ \dot{x}_1 &= x_2 = -\frac{1}{2} c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{6} c_1 t^3 + \frac{1}{2} c_2 t^2 + c_3 t + c_4 \end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} x_1(0) = c_4 &= 2 & x_1(2) &= -\frac{4}{3} c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 = 0 \\ x_2(0) = c_3 &= 1 & x_2(2) &= -2c_2 + 2c_3 + c_4 = 0 \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει

$$c_1 = -\frac{9}{2}, c_2 = -5, c_3 = 1, c_4 = 2$$

Επομένως οι βέλτιστες τιμές του ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{3}{4} t^3 - \frac{5}{2} t^2 + t + 2 \\ x_2^*(t) &= \frac{9}{4} t^2 - 5t + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u^*(t) = \frac{9}{2} t - 5} = \underline{\underline{\text{Βέλτιστη ώθηση πυραύλου}}}$$

Κεφάλαιο 4 Βελτιστοποίηση δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου με την μέθοδο HAMILTON

Η εισαγωγή της εξίσωσης Hamilton (1834/35) οδηγεί τα τεχνικά προβλήματα βελτιστοποίησης σε μια εξαιρετικά συμμετρική και ενδεδειγμένη μορφή. Αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο των τεχνικών στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων, υπό κάποιους περιορισμούς που θα δούμε πιο κάτω. Η μέθοδος παρουσιάζεται λεπτομερώς στα επόμενα, μαζί με αναλυτικά παραδείγματα και την ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος του πυραύλου με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας και διαφόρους συντελεστές βαρύτητας.

4.1 Η εξίσωση Hamilton και οι οριακές συνθήκες (συνθήκες εγκαρσιότητας) στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης

Προτού προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος όπως αυτό διατυπώθηκε στην (1.14) θα το επεκτείνουμε, υποθέτοντας ότι η τελική κατάσταση $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$ δεν είναι οπωσδήποτε σταθερή προκαθορισμένη, αλλά γενικά ότι μπορεί να βρίσκεται μέσα σε ένα συγκεκριμένο σύνολο σημείων του χώρου της κατάστασης, την ονομαζόμενη πολλαπλότητα \underline{z} .

Τέτοιες περιπτώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά. Για παράδειγμα αυτή η κατάσταση υφίσταται εάν ενδιαφερόμαστε λιγότερο για μια επιθυμητή τελική κατάσταση, αλλά πολύ περισσότερο για επιθυμητή τελική συμπεριφορά του διανύσματος εξόδου \underline{y}_e του συστήματος. Δεδομένου ότι η εξίσωση εξόδου είναι $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$, θα πρέπει η τελική κατάσταση \underline{x}_e να ικανοποιεί την σχέση

$$\underline{g}(\underline{x}_e) - \underline{y}_e = \underline{0} \quad (4.1)$$

Αυτή χαρακτηρίζει ένα σύνολο σημείων στο χώρο της κατάστασης, την πολλαπλότητα z. Για παράδειγμα εάν έχουμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα 2^{ης} τάξης με μόνο μια έξοδο y, τότε

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

και με προκαθορισμένη τελική τιμή της εξόδου y_e , η πολλαπλότητα δίνεται από την σχέση

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = y_e$$

που εκφράζει μια ευθεία στο επίπεδο της κατάστασης. Γενικά η πολλαπλότητα δίνεται από την σχέση

$$\underline{z}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} z_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ z_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

με $0 < m < n$.

Σαν οριακές περιπτώσεις διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο:

1. $m=0$: τότε δεν υπάρχει καμία συνθήκη που πρέπει το τελικό σημείο \underline{x}_e να πληρεί, που σημαίνει ότι μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στον χώρο της κατάστασης. Αυτό όπως θα δούμε πιο κάτω μπορεί να είναι μια απολύτως σωστή οριακή συνθήκη του προβλήματος βελτιστοποίησης.
2. $m=n$: τότε το πλήθος των εξισώσεων της (4.2) είναι ίσο με το πλήθος των συνιστωσών της τελικής κατάστασης. Το σύστημα των εξισώσεων (4.2) έχει τότε μια και μοναδική λύση. Αυτό σημαίνει ότι το τελικό σημείο είναι σταθερό προκαθορισμένο σημείο.

Δεδομένης της πολλαπλότητας το πρόβλημα της βελτιστοποίησης συνίσταται να βρεθεί έτσι το διάνυσμα ελέγχου και η τροχιά, ώστε να ελαχιστοποιεί το κριτήριο ποιότητας, ικανοποιώντας συγχρόνως την διαφορική εξίσωση και η τροχιά a οδηγεί από το αρχικό \underline{x}_o σε ένα σημείο της πολλαπλότητας z .

Το πρόβλημα (1.14) με την παραπάνω επέκτασή του διατυπώνεται πλέον ως ακολούθως:

$$\text{Μέτρο ποιότητας: } J = h\left(\underline{x}(t_e), t_e\right) + \int_{t_o}^{t_e} f_o\left(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t\right) dt = \min \quad (4.3)$$

Πρόσθετος περιορισμός: Η διαφορική εξίσωση του συστήματος στο χώρο της

$$\text{κατάστασης } \dot{\underline{x}} = \underline{f}\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right) \quad (4.4)$$

Αρχική συνθήκη: t_o δεδομένο, $\underline{x}(t_o) = \underline{x}_o$ οποιοδήποτε αλλά σταθερό

Τελική συνθήκη: t_e δεδομένο, $\underline{x}(t_e)$ στην πολλαπλότητα

$$z: \underline{z}(\underline{x}) = \underline{0} \text{ ή } \begin{cases} z_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ z_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Οριακές συνθήκες είναι:

$m=0$, που σημαίνει $\underline{x}(t_e)$ οποιοδήποτε στο χώρο της κατάστασης

$m=n$, που σημαίνει $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$ σταθερό, προκαθορισμένο

Στην τελευταία περίπτωση $h(\underline{x}(t_e), t)$ είναι σταθερό και μπορεί να απαλειφθεί από το κριτήριο ποιότητας. Να σημειώσουμε εδώ ότι υπάρχουν περιορισμοί για την συνάρτηση ελέγχου και τις μεταβλητές κατάστασης, μπορούν δηλαδή να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές.

4.2 Χρησιμοποίηση πολλαπλασιαστών Lagrange

Το πρόβλημα όπως αυτό διατυπώθηκε πιο πάνω, διαφέρει από το βασικό πρόβλημα που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 3.1 στο ότι στην απαίτηση βελτιστοποίησης (4.3) έρχεται να προστεθεί η συνθήκη, της ικανοποίησης συγχρόνως της διαφορικής εξίσωσης κατάστασης (4.4) η οποία μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\dot{\underline{x}} - \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) = \underline{0}$$

Με την τεχνική Lagrange μπορούμε ένα πρόβλημα ακροτήτων με πρόσθετους περιορισμούς, να το ανάγουμε σε ένα χωρίς περιορισμούς με την εισαγωγή των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ο πολλαπλασιαστής εδώ είναι πλέον σταθερός αλλά είναι χρονικά εξαρτώμενο διάνυσμα:

$$\underline{\psi}^T(t) = \left[\underline{\psi}_1(t), \dots, \underline{\psi}_n(t) \right]$$

όπου $\underline{\psi}_n(t)$ προσωρινά είναι ελεύθερα. Με το διάνυσμα αυτό πολλαπλασιάζουμε την (4.6) από αριστερά και την προκύπτουσα έκφραση- που είναι μηδέν όπως πριν- την προσθέτουμε στους όρους του ολοκληρώματος (4.3), στο οποίο βεβαίως δεν αλλάζει τίποτα:

$$J = h\left(\underline{x}(t_e), t_e\right) + \int_{t_0}^{t_e} \left[f_o\left(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t\right) + \underline{\psi}^T \dot{\underline{x}}(t) - \underline{\psi}^T f\left(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t\right) \right] dt \quad (4.7)$$

Στην διατύπωση αυτή του μέτρου ποιότητας περιλαμβάνεται και ο πρόσθετος περιορισμός και δεν χρειάζεται πλέον να ληφθεί ξεχωριστά υπόψη.

Εισάγοντας την συνάρτηση Hamilton, η οποία συνδέει τους πολλαπλασιαστές Lagrange, τους όρους του αρχικού ολοκληρώματος, το δείκτη απόδοσης και το πρόσθετο περιορισμό, προκύπτει όπως θα δούμε μια σημαντική απλοποίηση στην επίλυση του προβλήματος:

Συνάρτηση Hamilton

$$\boxed{H\left(\underline{x}, \underline{\psi}, \underline{u}, t\right) = -f_o\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right) + \underline{\psi}^T f\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right)} \quad (4.8)$$

Λόγω της (4.8) η (4.7) του δείκτη ποιότητας παίρνει την μορφή

$$J = h\left(\underline{x}(t_e), t_e\right) + \int_{t_0}^{t_e} \left[\underline{\psi}^T \dot{\underline{x}}(t) - H\left(\underline{x}(t), \underline{\psi}(t), \underline{u}(t), t\right) \right] dt$$

4.3 Χρησιμοποίηση των καμπυλών σύγκρισης

Εντελώς αντίστοιχα όπως και στο βασικό πρόβλημα υποθέτουμε ότι η λύση $\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t)$ του προβλήματος υπάρχει και κατασκευάζουμε μιας παραμέτρου δέσμη καμπυλών σύγκρισης με στόχο την μετατροπή του προβλήματος σε ένα σύνηθες πρόβλημα ακροτήτων χωρίς πρόσθετους περιορισμούς.

$$\left. \begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}^*(t) + \varepsilon \underline{x}(t) \\ \underline{u} &= \underline{u}^*(t) + \varepsilon \underline{u}(t) \\ t_0 &\leq t \leq t_e, |\varepsilon| < \varepsilon_0 \end{aligned} \right\} (4.9)$$

$\underline{x}(t)$ και $\underline{u}(t)$ μπορούν οποιαδήποτε να επιλεγούν, υπό τον όρο να ικανοποιούν την αρχική, την τελική και την επιπλέον συνθήκη.

Αρχικά πρέπει

$$\underline{x}(t_0) = \underline{0} \quad (4.10)$$

καθώς και $\underline{x}^*(t_0) = \underline{x}_0$ και $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ αφού τόσο η βέλτιστη λύση αλλά και οι καμπύλες σύγκρισης πρέπει να πληρούν την αρχική συνθήκη. Λόγω της τελικής συνθήκης ισχύει

$$\underline{z}\left(\underline{x}^*(t_e) + \varepsilon \underline{x}(t_e)\right) = \underline{0} \quad \text{για } |\varepsilon| < \varepsilon_0 \quad (4.11)$$

Από τον επιπλέον περιορισμό (4.6) λόγω της (4.9) προκύπτει

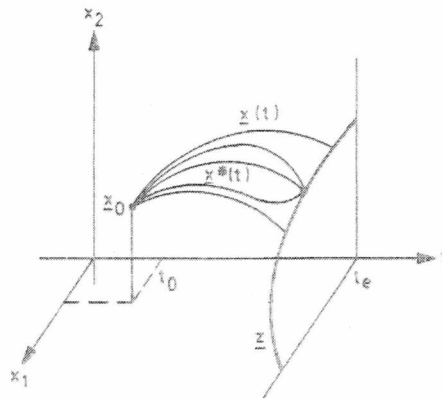
$$\dot{\underline{x}}^*(t) + \varepsilon \dot{\underline{x}}(t) - \underline{f}\left(\underline{x}^*(t) + \varepsilon \underline{x}(t), \underline{u}^*(t) + \varepsilon \underline{u}(t), t\right) = 0$$

για $t_0 \leq t \leq t_e, |\varepsilon| < \varepsilon_0$

Παραγωγίζοντας ως προς ε εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης (2.5) και θέτοντας έπειτα $\varepsilon=0$, παίρνουμε την σχέση:

$$\dot{\underline{x}}(t) - \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \underline{x}(t) - \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{u}(t) = \underline{0}, \quad t_0 \leq t \leq t_e \quad (4.12)$$

Στο σχήμα 3.3 είναι χαραγμένες οι καμπύλες σύγκρισης για ένα σύστημα 2^{ης} τάξης.



Σχήμα 4.1: Σχήμα των καμπυλών σύγκρισης

Θέτοντας τις καμπύλες σύγκρισης στο κριτήριο ποιότητας προκύπτει μια συνάρτηση του ε αφού τα $\underline{x}^*(t)$ και $\underline{u}^*(t)$ θεωρούνται γνωστά και το $\underline{x}(t)$ και $\underline{u}(t)$ έχουν επιλεγεί:

$$J = h\left(\underline{x}^*(t_e) + \varepsilon \underline{x}(t_e), t_e\right) + \int_{t_0}^{t_e} \underline{\psi}^T(t) \left[\dot{\underline{x}}^*(t) + \varepsilon \dot{\underline{x}}(t) \right] dt \quad (4.13)$$

$$- \int_{t_0}^{t_e} H\left(\underline{x}^*(t) + \varepsilon \underline{x}(t), \underline{\psi}(t), \underline{u}^*(t) + \varepsilon \underline{u}(t), t\right) dt = F(\varepsilon)$$

Επειδή η βέλτιστη λύση $\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t)$ προκύπτει για $\varepsilon=0$ από την δέσμη των καμπυλών σύγκρισης, πρέπει η $F(\varepsilon)$ για $\varepsilon=0$ να παρουσιάζει ελάχιστο:

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad (4.14)$$

Παραγωγίζοντας την (4.13) εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης (2.5) και (2.8) προκύπτει:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right)_{t_e}^T \underline{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \underline{\psi}^T(t) \dot{\underline{x}}(t) dt - \int_{t_0}^{t_e} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}\right)^T \underline{x}(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}\right)^T \underline{u}(t) \right] dt \quad (4.15)$$

Εφαρμόζοντας μερική παραγώγιση στον πρώτο όρο του ολοκληρώματος, για να μεταβούμε

από το $\dot{\underline{x}}(t)$ στο $\underline{x}(t)$ και με δεδομένο $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$ έχουμε

$$\int_{t_0}^{t_e} \underline{\psi}^T(t) \dot{\underline{x}}(t) dt = \left[\underline{\psi}^T(t) \underline{x}(t) \right]_{t=t_0}^{t=t_e} - \int_{t_0}^{t_e} \dot{\underline{\psi}}^T(t) \underline{x}(t) dt = \underline{\psi}^T(t_e) \underline{x}(t_e) - \int_{t_0}^{t_e} \dot{\underline{\psi}}^T(t) \underline{x}(t) dt$$

Συνενώνοντας τα δύο ολοκληρώματα της (4.15) παίρνουμε την σχέση:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right)_{t_e} + \underline{\psi}^T(t_e) \right] \underline{x}(t_e) - \int_{t_0}^{t_e} \left\{ \dot{\underline{\psi}}^T(t) + \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right\}^T \underline{x}(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}\right)^T \underline{u}(t) \right] dt \quad (4.16)$$

Εδώ οι μεταβλητές του $\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}$ είναι $\underline{x}^*(t_e) + \varepsilon \underline{x}(t_e)$ και οι παράγωγοι της συνάρτησης

Hamilton έχουν τις μεταβλητές $\underline{x}^*(t) + \varepsilon \underline{x}(t), \underline{\psi}(t), \underline{u}^*(t) + \varepsilon \underline{u}(t), t$.

Λόγω της (4.14), η (4.16) δίνει

$$\left[\left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right)_{t_e} + \underline{\psi}^T(t_e) \right] \underline{x}(t_e) - \int_{t_0}^{t_e} \left\{ \dot{\underline{\psi}}^T(t) + \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right\}^T \underline{x}(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{u}}\right)^T \underline{u}(t) \right] dt = 0 \quad (4.17)$$

Αυτή η εξίσωση πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε διανύσματα $\underline{u}(t)$ και $\underline{\psi}(t)$ καθώς και το $\underline{x}(t)$ δεν είναι πλέον τυχαίο εάν έχουμε επιλέξει το $\underline{u}(t)$. Εφαρμόζουμε τώρα τον λογισμό Lagrange: Μπορούμε να επιλέξουμε έτσι το ελεύθερο διάνυσμα $\underline{\psi}(t)$ ώστε να ισχύει

$$\dot{\underline{\psi}}(t) + \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = \underline{0} \quad (4.18)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση Hamilton προκύπτει

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = -\frac{\partial f_o}{\partial \underline{x}} + \left[\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left(\underline{\psi}^T \underline{f} \right) \right]^T = -\frac{\partial f_o}{\partial \underline{x}} + \left[\underline{\psi}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right]^T$$

Η (4.18) δίδει

$$\dot{\underline{\psi}}(t) = \frac{\partial f_o}{\partial \underline{x}} - \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{\psi}(t) \quad t_o \leq t \leq t_e \quad (4.19)$$

Αυτή αποτελεί ένα σύστημα εξισώσεων από n γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για τις n συνιστώσες του διανύσματος $\underline{\psi}(t)$.

Έτσι η (4.17) μειώνεται στην σχέση:

$$\int_{t_o}^{t_e} \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} \right)^T \underline{u}(t) dt = 0$$

Για να ισχύει αυτή η σχέση επειδή το $\underline{u}(t)$ είναι τυχαίο, θα πρέπει:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0} \quad , \quad t_o \leq t \leq t_e \quad (4.20)$$

Έχουμε συνεπώς το συμπέρασμα:

Η βέλτιστη λύση $\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t)$ θα πρέπει στο διάστημα $t_0 \leq t \leq t_e$ να ικανοποιεί τις

δύο διανυσματικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \\ \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0 \end{cases} \quad (4.21)/(4.22)$$

Λόγω των (4.21) και (4.22) από την (4.17) έχουμε την σχέση

$$\left[\left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right)_{t_e} + \psi(t_e) \right]^T \underline{x}(t_e) = 0 \quad (4.23)$$

4.4 Υπολογισμός των οριακών συνθηκών (συνθήκες εγκαρσιότητας)

Στους μέχρι τώρα υπολογισμούς και στα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αξιοποίηση της εξίσωσης (4.17) λάβαμε υπόψη μόνο τις καμπύλες σύγκρισης, οι οποίες έχουν το ίδιο τελικό σημείο με την βέλτιστη λύση (σχήμα 3.3), ώστε να ισχύει η σχέση $\underline{x}(t_e) = \underline{0}$. Στην περίπτωση που το τελικό σημείο δεν είναι σταθερά καθορισμένο, αλλά βρίσκεται σε μια πολλαπλότητα, μεταβαίνουμε σε καμπύλες με διαφορετικό τελικό σημείο (σχήμα 3.3), έτσι ώστε $\underline{x}(t_e) \neq \underline{0}$.

Οι σχέσεις (4.21) και (4.22) εξακολουθούν να ισχύουν, καθώς η βέλτιστη λύση πρέπει σε κάθε περίπτωση να δίδει ένα ελάχιστο για τις καμπύλες με το ίδιο τελικό σημείο. Θα εξετάσουμε τώρα καμπύλες σύγκρισης με διαφορετικό τελικό σημείο από αυτό της βέλτιστης λύσης.

Η σχέση (4.23)

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \\ \psi \end{pmatrix}_{t_e} + \underline{\psi}(t_e) \right]^T \underline{x}(t_e) = 0$$

επειδή το $\underline{x}(t_e)$ είναι τυχαίο για να ισχύει θα πρέπει

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \\ \psi \end{pmatrix}_{t_e} + \underline{\psi}(t_e) = 0 \quad (4.24)$$

Συμπερασματικά για τις οριακές συνθήκες στη βελτιστοποίηση με την μέθοδο Hamilton έχουμε τα ακόλουθα

- Αν το τελικό σημείο είναι προκαθορισμένο, τότε όλες οι καμπύλες σύγκρισης καταλήγουν στο δεδομένο τελικό σημείο \underline{x}_e . Γι αυτό ισχύει η σχέση $\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε οριακές συνθήκες, αλλά μόνο τις σχέσεις (4.21) και (4.22).
- Εάν το τελικό σημείο είναι πλήρως ελεύθερο στο χώρο της κατάστασης, τότε έχουμε εξίσωση πολλαπλότητας για την τελική κατάσταση. η οριακή συνθήκη (ή συνθήκη εγκαρσιότητας) δίδεται από την σχέση (4.24)

$$\boxed{\underline{\psi}(t_e) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \\ \psi \end{pmatrix}_{t_e}} \quad (4.25)$$

- Στην περίπτωση που το τελικό σημείο βρίσκεται σε μια πολλαπλότητα \underline{z} η τελική συνθήκη (συνθήκη εγκαρσιότητας) δίδεται από την σχέση

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{x}_e} + \underline{\psi}(t_e) - \left(\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{x}_e} \underline{\mu} = \underline{0} \quad (4.26)$$

όπου $\underline{\mu}$ το σταθερό διάνυσμα

$$\underline{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$$

με $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ πολλαπλασιαστές Lagrange.

Συμπερασματικά για την μέθοδο Hamilton που παρουσιάστηκε λεπτομερώς πιο πάνω έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα

ΜΕΘΟΔΟΣ HAMILTON

$$\underline{\text{Συνάρτηση Hamilton:}} \quad H(\underline{x}, \underline{\psi}, \underline{u}, t) = -f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\psi}^T f(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (4.25)$$

Η βέλτιστη λύση $\underline{u} = \underline{u}^*(t), \underline{x} = \underline{x}^*(t)$ στο διάστημα $t_o \leq t \leq t_e$ πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\blacktriangleright \quad \dot{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\psi}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad \text{διαφορική εξίσωση κατάστασης} \quad (4.26)$$

$$\blacktriangleright \quad \dot{\underline{\psi}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial f_o}{\partial \underline{x}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{\psi} \quad \text{αντίστροφος διαφορική εξίσωση} \quad (4.27)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0} \quad \text{εξίσωση ελέγχου} \quad (4.28)$$

$$\blacktriangleright \quad \underline{x}(t_o) = \underline{x}_o \quad \text{αρχική συνθήκη} \quad (4.29)$$

$$\blacktriangleright \quad \underline{x}(t_e) = \underline{x}_e \quad \text{όταν το τελικό σημείο προκαθορισμένο} \quad (4.30)$$

$$\triangleright \psi_{\underline{x}}(t_e) = - \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right)_{t_e} \quad \text{όταν το τελικό σημείο είναι ελεύθερο} \quad (4.31)$$

$$\triangleright \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right)_{t_e} + \psi_{\underline{x}}(t_e) - \left(\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{x}} \right)_{t_e}^T \underline{\mu} = 0 \quad (4.32)$$

όταν το τελικό σημείο βρίσκεται σε δομημένη πολλαπλότητα $\underline{z}(\underline{x}) = \underline{0}$ για την οποία

$$\text{ισχύει } \underline{z}[\underline{x}(t_e)] = \underline{0}$$

Οι εξισώσεις (4.26), (4.27), (4.28) ονομάζονται εξισώσεις Hamilton.

4.5 Παράδειγμα επίλυσης με την μέθοδο Hamilton

Διαφορική εξίσωση του συστήματος: $T \dot{x} + x = ku$ ή $\dot{x} = -ax + bu$ (4.33)

$$\text{με } a = \frac{1}{T}, b = \frac{k}{T}, a, b > 0$$

Είναι $t_o = 0, x(0) = x_o, t_e$ προκαθορισμένο και $x(t_e) = 0$.

Κριτήριο ποιότητας βέλτιστης κατανάλωσης:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_e} u^2(t) dt \quad (4.34)$$

Λύση

Σχηματίζουμε αρχικά την συνάρτηση Hamilton για να προκύψουν κατόπιν οι εξισώσεις

Hamilton:

$$H = -\frac{1}{2}u^2 + \psi(-ax + bu) \quad (4.35)$$

1. Εξίσωση ελέγχου:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow -u + b\psi = 0 \rightarrow u = b\psi \quad (4.36)$$

2. Κανονικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{x} = -ax + bu \xrightarrow{(4.36)} \dot{x} = -ax + b^2\psi \quad (4.37)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \psi a \quad (4.38)$$

Επίλυση με μετασχηματισμό Laplace:

$$sX(s) - x_0 = -aX(s) + b^2\psi(s)$$

$$s\psi(s) - \psi_0 = a\psi(s)$$

Λύνοντας ως προς $X(s)$ και $\Psi(s)$ έχουμε

$$X(s) = \frac{x_0}{s+a} + \frac{b^2\psi_0}{(s+a)(s-a)} = \frac{x_0}{s+a} + \frac{b^2\psi_0}{2\alpha} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right)$$

$$\text{και } \Psi(s) = \frac{\psi_0}{s-a}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace βρίσκουμε:

$$x(t) = x_0 e^{at} + \frac{b^2\psi_0}{2\alpha} (e^{at} - e^{-at}) \quad (4.39)$$

$$\psi(t) = \psi_0 e^{at} \quad (4.40)$$

3. Εφαρμόζουμε την τελική συνθήκη $x(t_e) = 0$:

$$x_0 e^{-at_c} + \frac{b^2 \psi_0}{2\alpha} (e^{at_c} - e^{-at_c}) = 0 \Rightarrow \psi_0 = -\frac{2\alpha}{b^2} \frac{e^{-at_c}}{e^{at_c} - e^{-at_c}} x_0 \quad (4.41)$$

4. Εύρεση βέλτιστης τροχιάς και βέλτιστου ελέγχου:

Αντικαθιστώντας την (4.41) στις (4.39) και (4.40) βρίσκω:

$$x(t) = x_0 \frac{e^{a(t_c-t)} - e^{-a(t_c-t)}}{e^{at_c} - e^{-at_c}} := x^*(t) \text{ βέλτιστη τροχιά} \quad (4.42)$$

$$u(t) = b\psi_0 e^{at} = -\frac{2\alpha}{b} \frac{e^{-a(t_c-t)}}{e^{at_c} - e^{-at_c}} x_0 := u^*(t) \text{ βέλτιστος έλεγχος} \quad (4.43)$$

5. Βέλτιστος κανόνας ρύθμισης:

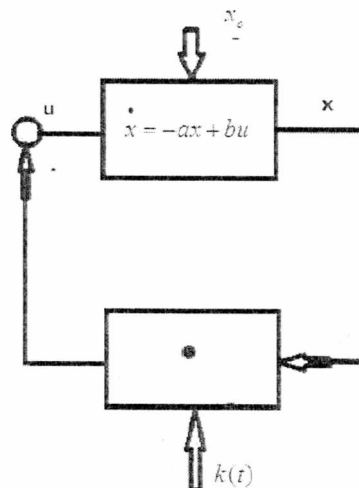
Από την (4.42) λύνοντας ως προς x_0 έχω

$$x_0 = \frac{e^{at_c} - e^{-at_c}}{e^{a(t_c-t)} - e^{-a(t_c-t)}} x(t) \text{ οπότε η (4.43) δίδει}$$

$$u(t) = \frac{2\alpha}{b} \underbrace{\frac{e^{-a(t_c-t)}}{e^{a(t_c-t)} - e^{-a(t_c-t)}}}_{K(t)} x(t) = K(t)x(t) \quad (4.44)$$

Όπως παρατηρούμε ο βέλτιστος ρυθμιστής είναι γραμμικός αλλά χρονικά μεταβαλλόμενος.

Στο σχήμα (3.4) απεικονίζεται η ρύθμιση του συστήματος



Σχήμα 4.2: Ρύθμιση βέλτιστης κατανάλωσης ενέργειας για προκαθορισμένο τελικό

σημείο όπου :
$$K(t) = \frac{2a}{b} \frac{e^{-a(t_e-t)}}{e^{a(t_e-t)} - e^{-a(t_e-t)}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Σε ότι αφορά την υλοποίηση του ρυθμιστή, σε τέτοιου είδους ρυθμίσεις γραμμικών συστημάτων, με τετραγωνικό κριτήριο ποιότητας και προκαθορισμένο τελικό σημείο, προκύπτει πρόβλημα καθώς όπως παρατηρούμε για $t \rightarrow t_e$ το $K \rightarrow \infty$. Ένας τέτοιος ρυθμιστής μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά- όπως πάνω- δε μπορεί όμως να υλοποιηθεί.

Για να ξεπεράσουμε αυτή την δυσκολία, αντί της απαίτησης το $x(t)$ να φθάνει ακριβώς στο τελικό σημείο x_e απαιτούμε το $x(t_e)$ να βρίσκεται αρκετά κοντά στο περιβάλλον του $x_e = 0$. Επιτρέπουμε έτσι το $x(t_e)$ να είναι οπουδήποτε, φροντίζουμε όμως με την επιλογή του κριτηρίου ποιότητας να βρίσκεται κοντά στο 0. Ένα τέτοιο κριτήριο για το παραπάνω πρόβλημα θα ήταν:

$$J = \frac{1}{2} s x^2(t_e) + \frac{1}{2} \int_0^{t_e} u^2(t) dt \quad (4.45)$$

όπου το s είναι ένας αρκετά μεγάλος συντελεστής βαρύτητας. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος του J αξιολογεί την τελική συμπεριφορά, αφού για την ελαχιστοποίηση του J θα πρέπει $|x(t_e)|$ να πάρει μια πολύ μικρή τιμή δηλαδή $|x(t_e)| \rightarrow 0$.

Αυτό το πρόβλημα και η υλοποίηση του ρυθμιστή θα εξεταστεί αναλυτικά πιο κάτω και στην εφαρμογή θα λυθεί το πρόβλημα του κινούμενου πυραύλου με τετραγωνικό δείκτη απόδοσης.

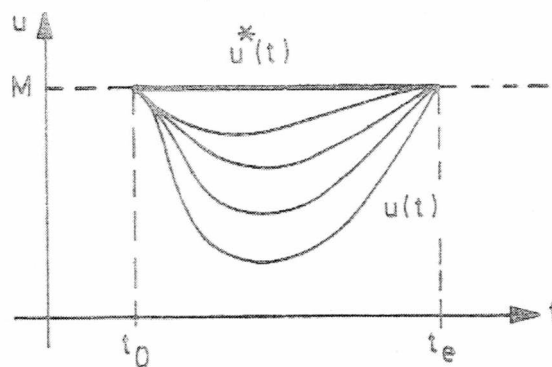
4.6 Περιορισμοί των κλασικών μεθόδων βελτιστοποίησης

Το βασικό στοιχείο των κλασικών μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος της βελτιστοποίησης, συνίσταται όπως είδαμε στην κατασκευή δέσμης καμπυλών σύγκρισης μιας παραμέτρου. Με αυτό τον τρόπο ένα πρόβλημα μεταβολών, μετατρέπεται σε ένα σύνηθες πρόβλημα ακροτήτων το οποίο επιλύεται με τις γνωστές μεθόδους του διαφορικού λογισμού. Καταλήγουμε έτσι στην διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange ή στις εξισώσεις Hamilton.

Η εξαγωγή αυτών των εξισώσεων είναι αδύνατος εάν υπάρχουν περιορισμοί στις μεταβλητές, δηλαδή εάν πρέπει να ληφθούν υπόψη περιορισμοί στο διάνυσμα ελέγχου ή κατάσταση. Τέτοιες περιπτώσεις εμφανίζονται σε πολλά τεχνικά προβλήματα. Για να γίνει αυτό κατανοητό εξετάζουμε ένα σύστημα με μια μόνο είσοδο η οποία πρέπει να είναι μονόπλευρα φραγμένη

$$n(t) \leq M$$

Στο σχήμα 3.5 είναι σχεδιασμένη η κατάσταση



Σχήμα 4.3: Δέσμη καμπυλών σύγκρισης με φραγμένο διάνυσμα ελέγχου

Εδώ είναι δυνατόν η βέλτιστη λύση να βρίσκεται όπως στο σχήμα στο όριο της περιοχής ελέγχου:

$$u^*(t) = M, t_0 \leq t \leq t_e$$

Σχηματίζουμε με τον ίδιο τρόπο όπως πριν τις καμπύλες σύγκρισης:

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon u(t)$$

Για να είναι σωστό αυτό επιτρεπτό πρέπει να ισχύει:

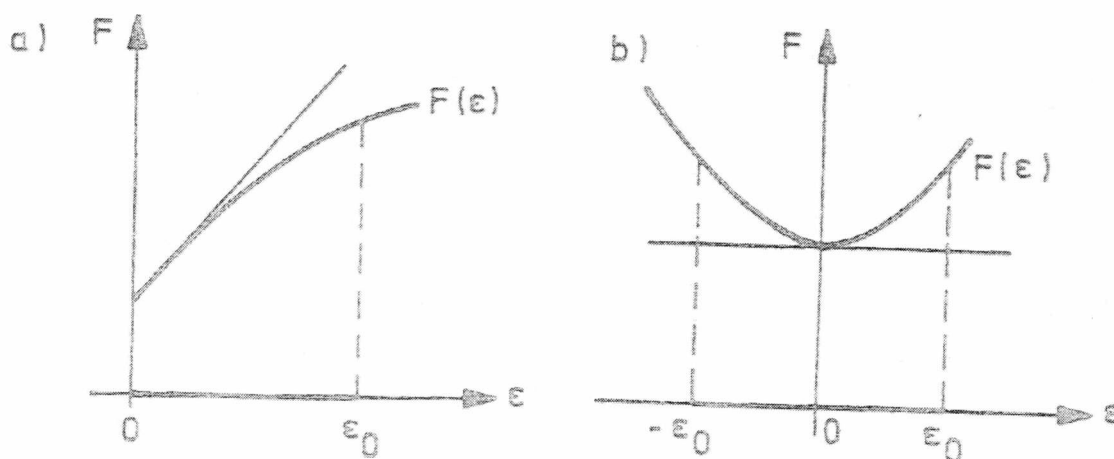
$$\bar{u}(t) \leq 0 \text{ και } \varepsilon \geq 0$$

Τότε όπως στα προηγούμενα θα ισχύει

$$J = F(\varepsilon)$$

Εδώ όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7a το $F(0)$ είναι ελάχιστο άκρου και έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} > 0 \text{ και όχι } \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 0$$



Σχήμα 4.4. Ελάχιστο άκρου και ελάχιστο στο εσωτερικό περιοχής

Στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς έδωσε λύση η θεωρία του Pontryagin με την θεωρία της αρχής του μεγίστου, που αποτελεί μια πλήρη θεωρία.

Στα επόμενα κεφάλαια επιλύεται αναλυτικά με τις εξισώσεις Hamilton μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων βελτιστοποίησης με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας στην ολοκληρωμένη μορφή. Το πρόβλημα αυτό συναντάται στην διεθνή βιβλιογραφία ως LQR-Linear Quadratic Regulator.

Κεφάλαιο 5 Βελτιστοποίηση γραμμικών συστημάτων με τετραγωνικό δείκτη ποιότητας και πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα ελέγχου ($t_e < \infty$)

5.1 Διατύπωση προβλήματος

Σε πολλές περιπτώσεις προβλημάτων ρύθμισης, το σύστημα μπορεί με αρκετή προσέγγιση να γραμμικοποιηθεί. Η διαφορική εξίσωση κατάστασης του συστήματος έχει τότε την μορφή

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u$$

όπου ο (n,n) -πίνακας \underline{A} χαρακτηρίζεται σαν δυναμικός πίνακας και ο (n,p) -πίνακας \underline{B} ως πίνακας εισόδου. Το n δηλώνει την τάξη του συστήματος. Στην μεγαλύτερη πλειονότητα των εφαρμογών \underline{A} και \underline{B} είναι σταθεροί πίνακες, οπότε έχουμε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Η θεωρία που ακολουθεί έχει εφαρμογή και στην περίπτωση των χρονικά εξαρτώμενων πινάκων $\underline{A}(t)$ και $\underline{B}(t)$.

Θεωρούμε ότι η κατάσταση στην οποία πρέπει να λειτουργεί ένα σύστημα, δίδεται από τη σχέση $\underline{x}_{\underline{B}} = \underline{0}$. Αν αυτή βρίσκεται σε ένα άλλο σημείο του χώρου της κατάστασης,

μπορούμε με παράλληλη μετατόπιση του συστήματος των συντεταγμένων να επιτύχουμε $\underline{x}_{-B} = \underline{0}$. Την χρονική στιγμή t_0 , στην οποία αρχίζει η παρατήρηση, η κατάσταση $\underline{x}(t)$ του συστήματος βρίσκεται εξαιτίας προγενέστερων διαταραχών στην $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ αντί της επιθυμητής $\underline{x}_{-B} = \underline{0}$. Η αρχική κατάσταση μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Η κατάσταση $\underline{x}(t)$ πρέπει να οδηγηθεί πάλι στο επιθυμητό σημείο λειτουργίας $\underline{x}_{-B} = \underline{0}$ και μάλιστα σε προδιαγεγραμμένο χρόνο t_e .

Αυτή η μετάβαση μπορεί να εκτελεσθεί με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος μετάβασης αποτελεί η ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού δείκτη ποιότητας

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} \left[\underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) \right] dt \quad (5.1)$$

Με αυτή την επιλογή έχουμε μια ευνοϊκή μετάβαση- βέλτιστης κατανάλωσης ενέργειας και βέλτιστης τροχιάς- χωρίς να υπάρχει άλλος κατασκευαστικός περιορισμός όπως π.χ. βέλτιστος χρόνος μετάβασης.

Απομένει να εξηγήσουμε την τελική συνθήκη. Το απλούστερο θα ήταν να απαιτήσουμε $\underline{x}(t_e) = \underline{0}$, ώστε η κατάσταση του συστήματος την τελική χρονική στιγμή t_e να είναι ακριβώς η επιθυμητή κατάσταση λειτουργίας $\underline{x}_{-B} = \underline{0}$. Αυτή η απαίτηση, όπως είδαμε στο παράδειγμα του τμήματος 4.4, οδηγεί σε ένα ρυθμιστή με χρονικά εξαρτώμενους παραμέτρους, οι οποίες για $t \rightarrow t_e$ παίρνουν απείρως μεγάλες τιμές. Ένα τέτοιος ρυθμιστής δεν είναι υλοποιήσιμος.

Για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία προχωρούμε αντί της απαίτησης το $\underline{x}(t)$ να μεταβεί ακριβώς στο $\underline{x}_B = \underline{0}$, να κάνουμε το $\left| \underline{x}(t_e) \right|$ αρκετά μικρό, ώστε προσεγγιστικά να είναι μηδέν. Εξαιτίας των διακυμάνσεων των παραμέτρων αλλά και της μη ακριβούς γνώσης στην συμπεριφορά των συστημάτων, είναι λογικό να μην απαιτούμε το $\underline{x}(t_e)$ να γίνει ακριβώς μηδέν, αλλά να το οδηγήσουμε κοντά στο μηδέν.

Θεωρούμε έτσι το τελικό σημείο ως ελεύθερο στο χώρο της κατάστασης, φροντίζουμε όμως με την κατάλληλη τροποποίηση τον δείκτη ποιότητας, ώστε το $\underline{x}(t_e)$ να βρίσκεται κοντά στο μηδέν. Αυτό γίνεται προσθέτοντας στον δείκτη ποιότητας (5.1) τον όρο

$$\frac{1}{2} \underline{x}^T(t_e) \underline{s} \underline{x}(t_e)$$

ο οποίος αξιολογεί την τελική συμπεριφορά. Στην σχέση αυτή το \underline{s} είναι ένας σταθερός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Καταλήγουμε έτσι στον δείκτη ποιότητας

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t_e) \underline{s} \underline{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \left[\underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) \right] dt$$

Ο πίνακας \underline{s} επιλέγεται με κατάλληλο τρόπο, όπως ένας διαγώνιος πίνακας τα διαγώνια στοιχεία του οποίου έχουν πολύ μεγαλύτερες τιμές έναντι των στοιχείων των πινάκων \underline{Q} και \underline{R} . Σ' αυτή την περίπτωση, όπως είδαμε και στην παρουσίαση των κριτηρίων ποιότητας, τα μεγέθη που συναρτώνται με μεγάλο συντελεστή βαρύτητας πρέπει να πάρουν πολύ μικρές τιμές διότι διαφορετικά δεν επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του δείκτη ποιότητας J.

Σύμφωνα με την μέθοδο Hamilton αφού το τελικό σημείο είναι ελεύθερο θα ισχύει η συνθήκη εγκαρσιότητας (τελική συνθήκη):

$$\underline{\psi}(t_e) = - \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right)_{t_e}$$

Επειδή εδώ είναι

$$h(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{s} \underline{x}$$

σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης (2.16) προκύπτει

$$\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} = \underline{s} \underline{x}$$

Έτσι προκύπτει η σχέση

$$\underline{\psi}(t_e) = -\underline{s} \underline{x}(t_e)$$

Τελικά το πρόβλημα βελτιστοποίησης δυναμικών συστημάτων με τετραγωνικό δείκτη απόδοσης και πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα ελέγχου διατυπώνεται ως ακολούθως:

Σύστημα: $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}$ διαφορική εξίσωση κατάστασης (5.2)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A}(n, n) \\ \underline{B}(n, n) \end{array} \right\} \text{σταθεροί ή χρονικά εξαρτώμενοι}$$

Δείκτης ποιότητας:

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t_e) \underline{s} \underline{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \left[\underline{x}^T(t) \underline{Q} \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) \right] dt$$

\underline{s} : σταθερός, συμμετρικός, θετικά ημιορισμένος πίνακας

\underline{Q} : συμμετρικός, θετικά ημιορισμένος

\underline{R} : συμμετρικός, θετικά ορισμένος

\underline{Q} και \underline{R} μπορεί να είναι χρονικά εξαρτώμενοι πίνακες

Οριακές συνθήκες:

$$t_o \text{ δεδομένο, } \underline{x}(t_o) = \underline{x}_o \quad (5.4)$$

$$t_e > t_o \text{ δεδομένο, } \underline{\psi}(t_e) = -\underline{s} \underline{x}(t_e) \quad (5.5)$$

Να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος $\underline{u}^*(t)$ που ελαχιστοποιεί τον δείκτη ποιότητας J.

5.2 Επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης γραμμικών συστημάτων με τετραγωνικό δείκτη απόδοσης και πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα ελέγχου

5.2.1 Καθορισμός του βέλτιστου ρυθμιστή

Η λύση του προβλήματος ξεκινά με την εισαγωγή της συνάρτησης Hamilton σύμφωνα με την εξίσωση (4.25):

$$\begin{aligned} H(\underline{x}, \underline{\psi}, \underline{u}, t) &= -\frac{1}{2} \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right) + \underline{\psi}^T \left(\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \right) \rightarrow \\ H(\underline{x}, \underline{\psi}, \underline{u}, t) &= -\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} + \underline{\psi}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{\psi}^T \underline{B} \underline{u} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Παραγωγίζουμε την σχέση (5.6) ως προς το διάνυσμα \underline{x} και \underline{u} σύμφωνα με τους κανόνες παραγώγισης (2.12) και (2.14) και προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = -\underline{Q}\underline{x} + \underline{A}^T \underline{\psi} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = -\underline{R}\underline{u} + \underline{B}^T \underline{\psi}$$

Έτσι έχουμε

$$\dot{\underline{\psi}} = \underline{Q}\underline{x} - \underline{A}^T \underline{\psi} \quad \text{αντίστροφη διαφορική εξίσωση} \quad (5.7)$$

$$-\underline{R}\underline{u} + \underline{B}^T \underline{\psi} = \underline{0} \quad \text{εξίσωση ελέγχου} \quad (5.8)$$

Η εξίσωση ελέγχου (5.8) δεν είναι διαφορική εξίσωση αλλά μια συνήθη εξίσωση από την οποία προκύπτει:

$$\underline{u} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{\psi} \quad (5.9)$$

Ο αντίστροφος πίνακας \underline{R}^{-1} υπάρχει διότι ο \underline{R} ορίζεται σαν ένας θετικά ορισμένος πίνακας και ένας θετικά ορισμένος έχει πάντοτε αντίστροφο. Θέτοντας την (5.9) στην διαφορική εξίσωση κατάστασης του συστήματος

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad (5.10)$$

προκύπτει το ακόλουθο σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τα \underline{x} και $\underline{\psi}$:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{\psi} \quad (5.11)$$

$$\dot{\underline{\psi}} = \underline{Q}\underline{x} - \underline{A}^T \underline{\psi} \quad (5.12)$$

Τις εξισώσεις (5.11) και (5.12) για το υπόλοιπο του κεφαλαίου τις ονομάζουμε εξισώσεις Hamilton. Οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ως προς \underline{x} και $\underline{\psi}$. Έτσι

είναι φανερό ότι και ο βέλτιστος έλεγχος θα είναι επίσης γραμμικός. Συνεπώς είναι ευνόητο να κάνουμε την γραμμική προσέγγιση για τον κανόνα ελέγχου:

$$\underline{u}(t) = -\underline{k}(t)\underline{x}(t) \quad (5.13)$$

Σύμφωνα με την (5.9) αυτό ισχύει, εάν

$$\underline{\psi}(t) = -\underline{P}(t)\underline{x}(t) \quad (5.14)$$

Λόγω της (5.14) η (5.9) παίρνει την μορφή:

$$\underline{u}(t) = -\underline{R}(t)^{-1} \underline{B}^T(t) \underline{P}(t) \underline{x}(t)$$

Για να υπολογίσουμε τον άγνωστο πίνακα $\underline{P}(t)$ αντικαθιστούμε την (5.14) στις εξισώσεις Hamilton (5.11) και (5.12):

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} - \underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\underline{x} \quad (5.16)$$

$$-\left(\dot{\underline{P}}\underline{x} + \underline{P}\dot{\underline{x}} \right) = \underline{Q}\underline{x} + \underline{A}^T \underline{P}\underline{x} \quad (5.17)$$

Αντικαθιστώντας την (5.16) στην (5.17):

$$\begin{aligned} -\dot{\underline{P}}\underline{x} + \underline{P}\left(\underline{A}\underline{x} - \underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\underline{x}\right) &= \underline{Q}\underline{x} + \underline{A}^T \underline{P}\underline{x} \Rightarrow \\ \left(\dot{\underline{P}} + \underline{P}\underline{A} - \underline{P}\underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} + \underline{A}^T \underline{P} + \underline{Q} \right) \underline{x} &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή αυτή η εξίσωση ισχύει για οποιοδήποτε \underline{x} πρέπει

$$\boxed{\dot{\underline{P}} + \underline{P}\underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P}\underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} - \underline{Q}} \quad (5.18)$$

Η εξίσωση (5.18) ονομάζεται διαφορική εξίσωση πίνακας-Ricatti ή απλώς εξίσωση Ricatti και είναι μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξεως. Αυτή δίδει ένα σύστημα από n^2 βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις για τα n^2 στοιχεία P_{ik} του πίνακα \underline{P} . Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων είναι μη γραμμικό.

Αρχική συνθήκη για την εξίσωση Ricatti:

Επειδή $\underline{x}(t_e)$ ελεύθερο, συνθήκη εγκαρσιότητας

$$\underline{\psi}(t_e) + \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right)_{t_e} = \underline{0}$$

$$h = \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{s} \underline{x} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} = \underline{s} \underline{x}$$

Από την (5.14) προκύπτει

$$\underline{\psi}(t_e) = -\underline{P}(t_e) \underline{x}(t_e)$$

Συνεπώς:

$$\underline{P}(t_e) \underline{x}(t_e) = \underline{s} \underline{x}(t_e)$$

Επειδή το $\underline{x}(t_e)$ είναι τυχαίο προκύπτει

$$\boxed{\underline{P}(t_e) = \underline{s}} \quad (5.19)$$

που αποτελεί την αρχική συνθήκη.

Από τις εξισώσεις (5.18) και (5.19) προκύπτει μονοσήμαντα ο πίνακας $\underline{P}(t)$ και από αυτόν ο κανόνας ελέγχου (5.15)

$$\underline{u}(t) = -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}(t) \underline{x}(t) \quad (5.20)$$

ο οποίος δίδει από όλους τους δυνατούς κανόνες $\underline{u} = -\underline{K} \underline{x}(t)$ την ελάχιστη τιμή στο κριτήριο ποιότητας J και μάλιστα για οποιοδήποτε $t_o < t_e$ και οποιοδήποτε αρχική κατάσταση $\underline{x}(t_o)$.

Παρατηρώντας την περίπτωση ενός συστήματος με ένα μέγεθος ελέγχου $\underline{u}(t)$ ο ρυθμιστής (5.20) θα έχει την μορφή

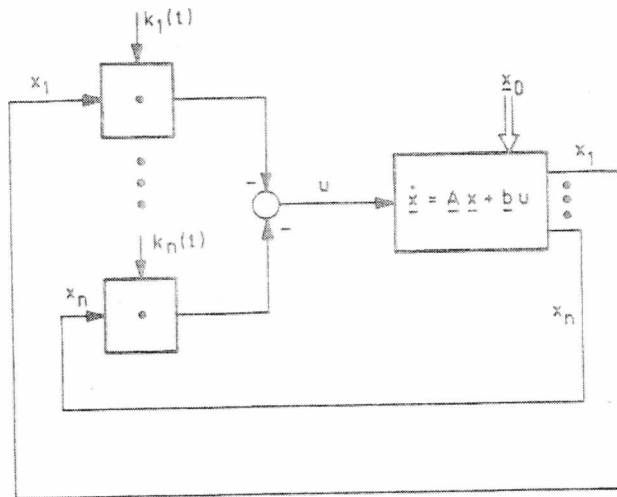
$$\underline{u} = -\underline{K}^T \underline{x} = -[k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n]$$

όπου k_1, k_2, \dots, k_n είναι τα στοιχεία του διανύσματος

$$\underline{K}^T = r^{-1} \underline{b}^T \underline{P}$$

Ο ρυθμιστής είναι συνεπώς γραμμικός, αλλά γενικά χρονικά μεταβαλλόμενος.

Το σχήμα (5.1) δείχνει την δομή του ρυθμιστή. Αν το αρχικό σημείο είναι $t_o = 0$ τότε οι συναρτήσεις $k_i(t)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq t_e$ είναι δεδομένες.



Σχήμα 5.1: Δομή του βέλτιστου ρυθμιστή σε γραμμικό σύστημα και τετραγωνικό δείκτη

Αυτές αποθηκεύονται σε ένα υπολογιστή και πολλαπλασιάζονται με την ανατροφοδότηση των μεταβλητών κατάστασης. με την παρέλευση του χρόνου t_e εκτελείται ο ίδιος κύκλος ρύθμισης για το διάστημα $t_e \leq t \leq 2t_e$ κ.ο.κ.

5.2.2 Ιδιότητες της λύσης $\underline{P}(t)$ της εξίσωσης Ricatti

Δύο σημαντικές ιδιότητες του πίνακα $\underline{P}(t)$ της εξίσωσης Ricatti είναι οι ακόλουθες που παρουσιάζονται μαζί με τις αποδείξεις τους

1. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης Ricatti με την τελική συνθήκη $\underline{P}(t_e) = \underline{s}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας

Απόδειξη: Αναστρέφοντας την εξίσωση Ricatti (5.18):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\underline{P}} \\ \underline{P} \end{pmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} - \underline{Q} \end{bmatrix}^T \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} \dot{\underline{P}} \\ \underline{P} \end{pmatrix}^T &= \underline{P}^T \underline{B} (\underline{R}^T)^{-1} \underline{B}^T \underline{P}^T - \underline{A}^T \underline{P}^T - \underline{P}^T \underline{A} - \underline{Q}^T \end{aligned}$$

Επειδή παραγώγιση και αναστροφή μπορούν να εναλλαχθούν και οι πίνακες \underline{R} και \underline{Q} είναι συμμετρικοί προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} \underline{P}^T \\ \underline{P} \end{pmatrix}^{\bullet} = \underline{P}^T \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}^T - \underline{P}^T \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P}^T - \underline{Q} \quad (5.20)$$

Επίσης λόγω της συμμετρίας του \underline{s} και της σχέσης (5.19)

$$\underline{P}(t_e) = \underline{s}$$

Προκύπτει
$$\underline{P}^T(t_e) = \underline{s}^T = \underline{s}$$

Η σχέση (5.20) εκφράζει ότι πίνακας $\underline{P}^T(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση Ricatti και συγχρόνως την τελική συνθήκη (5.21). Επειδή η λύση της διαφορικής εξίσωσης Ricatti είναι μονοσήμαντη πρέπει να ισχύει

$$\underline{P}^T(t) \equiv \underline{P}(t) \quad (5.22)$$

2. Η ελάχιστη τιμή του δείκτη απόδοσης είναι: $J^* = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t_o) \underline{P}(t_o) \underline{x}(t_o)$

Απόδειξη: Ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{P}} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} - \underline{Q} \quad \text{διαφ. εξ. Ricatti}$$

$$\underline{P}(t_e) = \underline{s} \quad \text{τελική συνθήκη}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad \text{διαφ. εξ. κατάστασης}$$

$$\underline{u} = -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\underline{x} \quad \text{εξίσωση ελέγχου}$$

Η εξίσωση κατάστασης λόγω της εξίσωσης ελέγχου παίρνει την μορφή

$$\dot{\underline{x}} = \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \right) \underline{x} \quad (5.22)$$

με αρχική συνθήκη $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$.

$$\frac{d}{dt} \left[\underline{x}^T(t) \underline{P}(t) \underline{x}(t) \right] = \dot{\underline{x}}^T(t) \underline{P}(t) \underline{x}(t) + \underline{x}^T(t) \dot{\underline{P}}(t) \underline{x}(t) + \underline{x}^T(t) \underline{P}(t) \dot{\underline{x}}(t) =$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι έχουμε: } & \underline{x}^T \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \right) \underline{P}\underline{x} + \underline{x}^T \left(\underline{P}\underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P}\underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} - \underline{Q} \right) \underline{x} + \\ & \underline{x}^T \underline{P} \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \right) \underline{x} \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις και επειδή \underline{R} και \underline{P} συμμετρικοί πίνακες καταλήγουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{x}^T \underline{P}\underline{x} \right) = - \left(\underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{x}^T \underline{P}\underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\underline{x} \right) \quad \text{ή}$$

$$- \frac{d}{dt} \left(\underline{x}^T \underline{P}\underline{x} \right) = \underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{x}^T \underline{P}\underline{B}\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\underline{x}$$

Λόγω της εξίσωσης ελέγχου

$$\underline{u} = -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}\underline{x}$$

η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην:

$$- \frac{d}{dt} \left(\underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} \right) = \underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{u}^T \underline{R}\underline{u}$$

Ολοκληρώνοντας από t_0 μέχρι t_e :

$$-\left[\underline{x}^T(t_e) \underline{P}(t_e) \underline{x}(t_e) - \underline{x}^T(t_o) \underline{P}(t_o) \underline{x}(t_o) \right] = \int_{t_o}^{t_e} \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right) dt$$

Επειδή $\underline{P}(t_e) = s$ και $\underline{x}(t_o) = \underline{x}_o$ παίρνουμε την σχέση

$$\frac{1}{2} \underline{x}_o^T \underline{P}(t_o) \underline{x}_o = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t_e) \underline{P} \underline{x}(t_e) + \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_e} \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right) dt$$

που εκφράζει την σχέση

$$J^* = \frac{1}{2} \underline{x}_o^T \underline{P}(t_o) \underline{x}_o \quad \text{ή}$$

$$J^* = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t_o) \underline{P}(t_o) \underline{x}(t_o)$$

5.2.3 Παράδειγμα βέλτιστου ελέγχου ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος 1^{ης} τάξεως με $t_e < \infty$ μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Ricatti

Η διατήρηση του προβλήματος για το σύστημα, που εν προκειμένω είναι ένα στοιχείο καθυστέρησης 1^{ης} τάξεως, έχει ως ακολούθως:

Δίδεται το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\dot{x} = ax + bu \quad (5.23)$$

με a, b σταθερές, a < 0 και b > 0

και ο δείκτης ποιότητας

$$J = \frac{1}{2} sx^2(t_e) + \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_e} [qx^2(t) + ru^2(t)] dt$$

όπου s, q, r σταθερές, $s \geq 0$ και $q, r > 0$.

Να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος του συστήματος $u^*(t)$

Λύση: Επειδή εδώ όλα τα διανύσματα και οι πίνακες της γενικής περίπτωσης είναι βαθμωτά μεγέθη, αντί του (n,n)-πίνακα $P(t)$ θα έχουμε το βαθμωτό μέγεθος $P(t)$ και της διαφορικής εξίσωσης (5.18) την κλασσική βαθμωτή εξίσωση Ricatti:

$$\dot{P} = \frac{b^2}{r} p^2 - 2ap - q \quad (5.24)$$

$$\text{ή } \frac{dp}{dt} = \frac{b^2}{r} \left(p^2 - 2 \frac{ar}{b^2} p - \frac{qr}{b^2} \right)$$

Η λύση βρίσκεται με διαχωρισμό των μεταβλητών:

$$\frac{dp}{p^2 - 2 \frac{ar}{b^2} p - \frac{qr}{b^2}} = \frac{b^2}{r} dt \quad (5.25)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή και έπειτα κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα:

$$p^2 - 2 \frac{ar}{b^2} p - \frac{qr}{b^2} = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{ar}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{ar}{b^2}\right)^2 + \frac{qr}{b^2}} \quad (5.26)$$

Και οι δύο ρίζες είναι θετικές και ισχύει $p_1 - p_2 > 0$, εάν p_1 είναι η ρίζα με θετικό πρόσημο και p_2 η ρίζα με αρνητικό.

Η (5.25) γράφεται

$$\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} dp = \frac{b^2}{r} dt$$

και διαπιστώνοντας σε απλά κλάσματα

$$\left[\frac{1}{(p-p_1)} - \frac{1}{(p-p_2)} \right] \frac{1}{(p_1-p_2)} dp = \frac{b^2}{r} dt \quad \text{ή}$$

$$\left[\frac{1}{(p-p_1)} - \frac{1}{(p-p_2)} \right] dp = \frac{b^2}{r} (p_1-p_2) dt$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\ln \left[\frac{p-p_1}{p-p_2} \right] = \frac{b^2}{r} (p_1-p_2) t + const.$$

$$\frac{p(t)-p_1}{p(t)-p_2} = ce^{\frac{b^2}{r}(p_1-p_2)t} \quad (5.27)$$

όπου c η παράμετρος ολοκλήρωσης.

Η τελική συνθήκη (5.19) ορίζει:

$$P(t_e) = s \quad (5.28)$$

Θέτοντας στην (5.27) $t = t_e$ λόγω της (5.28) έχουμε:

$$\frac{s-p_1}{s-p_2} = ce^{\frac{b^2}{r}(p_1-p_2)t_e} \Rightarrow$$

$$c = \frac{s-p_1}{s-p_2} e^{-\frac{b^2}{r}(p_1-p_2)t_e}$$

Αντικαθιστώντας το c στην (5.27) προκύπτει

$$\frac{P(t) - p_1}{P(t) - p_2} = \frac{s - p_1}{s - p_2} e^{-\frac{b^2}{r}(p_1 - p_2)(t_e - t)}$$

Λύνοντας ως προς $P(t)$ βρίσκουμε την λύση $P(t)$ της εξίσωσης Ricatti:

$$P(t) = \frac{p_1(s - p_2) - p_2(s - p_1)e^{-\frac{b^2}{r}(p_1 - p_2)(t_e - t)}}{(s - p_2) - (s - p_1)e^{-\frac{b^2}{r}(p_1 - p_2)(t_e - t)}} \quad (5.29)$$

Συνεπώς ο βέλτιστος έλεγχος προκύπτει από την εξίσωση (5.20):

$$u^* = -\frac{b}{r} p(t)x \quad (5.30)$$

Παρατηρήσεις:

- Η λύση της εξίσωσης Ricatti αποτελείται από ένα μη γραμμικό συνδυασμό εκθετικών συναρτήσεων με την μορφή της ρητής συνάρτησης.
- Η διαφορική εξίσωση-Ricatti είναι μη γραμμική
- Τα ίδια ισχύουν και για συστήματα μεγαλύτερης τάξης, εφόσον οι πίνακες $\underline{A}, \underline{B}, \underline{Q}, \underline{R}$ είναι σταθεροί
- Μία σημαντική παρατήρηση στην λύση (5.29) είναι η ακόλουθη: Εάν το $t_e \rightarrow +\infty$ έχουμε δηλαδή άπειρο χρονικό ορίζοντα- τότε στην (5.27) όλες οι υπάρχουσες εκθετικές συναρτήσεις $\rightarrow 0$, αφού ισχύει $p_1 - p_2 > 0$. Τότε έχουμε

$$p(t) \rightarrow p_1 \text{ για } t_e \rightarrow +\infty$$

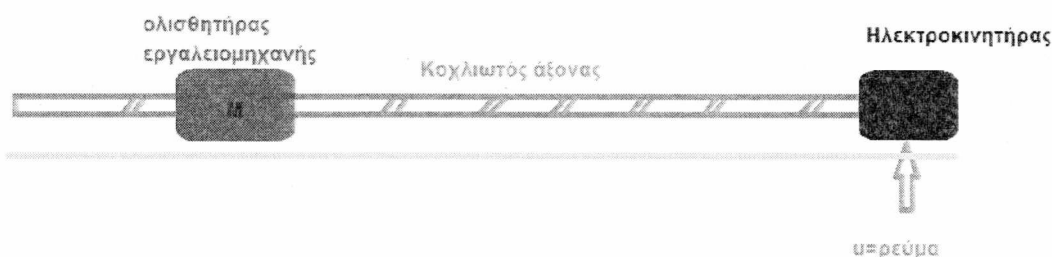
Αυτό σημαίνει: Για $t_e \rightarrow +\infty$ ο ρυθμιστής μεταπίπτει από χρονικά μεταβαλλόμενος σε χρονικά αμετάβλητος.

$$u^* = -\frac{b}{r} p_1 x$$

Το ίδιο ισχύει και για συστήματα μεγαλύτερης τάξης, εφόσον $\underline{A}, \underline{B}, \underline{Q}, \underline{R}$ σταθεροί πίνακες. Το πρόβλημα αυτό του απείρου χρονικά ορίζοντα ελέγχου θα το δούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

5.2.4 Παράδειγμα βέλτιστου ελέγχου ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος 2^{ης} τάξης με $t_e < \infty$ με αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Ricatti

Το σύστημα που απεικονίζεται στο σχήμα 5.2 αποτελεί την διάταξη ρύθμισης θέσης μιας εργαλειομηχανής. Θα υπολογισθεί ο βέλτιστος ρυθμιστής για βέλτιστο έλεγχο της θέσης της μηχανής.



Σχήμα 5.2: Διάταξη ρύθμισης θέσης εργαλειομηχανής

Διατύπωση του προβλήματος:

Να βρεθεί ο βέλτιστος ρυθμιστής της παραπάνω διάταξης για την ελαχιστοποίηση του δείκτη ποιότητας:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_e} \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right) dt$$

όπου $\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{12} \end{bmatrix}$, $\underline{R} = [r]$ σταθερά και $q_{11}, q_{12} > 0$.

Λύση: Υπολογισμός της διαφορικής εξίσωσης κατάστασης του συστήματος:

Με F : δύναμη ώθησης $F = c_2 u$

c_1 : συντελεστής τριβής ολίσθησης

M : μάζα+αδράνεια του φορέα (ολισθητήρα)

Προκύπτει η εξίσωση

$$M\ddot{x} = F - c_1 \dot{x}$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές,

$$x_1 = x \text{ και } x_2 = \dot{x} \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = x_2} \rightarrow X_1(s) = \frac{1}{2} X_2(s)$$

οπότε η εξίσωση παίρνει την μορφή,

$$M\ddot{x} = -c_1 \dot{x} + F \Rightarrow M \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = -c_1 \dot{x} + c_2 u \Rightarrow$$

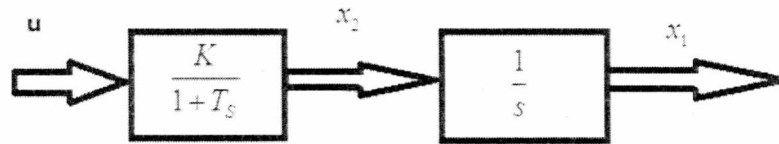
$$M\dot{x}_2 = -c_1 x_2 + c_2 u \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{c_1}{M} x_2 + \frac{c_2}{M} u$$

Ορίζοντας $\frac{c_1}{M} \equiv \frac{1}{T}$ και $\frac{c_2}{M} \equiv \frac{\kappa}{T}$ η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\boxed{\dot{x}_2 = -\frac{1}{T} x_2 + \frac{\kappa}{T} u} \rightarrow X_2(s) = \frac{\kappa}{1+Ts} U(s)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η διαφορική εξίσωση κατάστασης του συστήματος

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\kappa}{T} \end{bmatrix} u$$



Σχήμα 5.3: Σύστημα 2^{ης} τάξης εργαλειομηχανής ελέγχου θέσης στο χώρο της συχνότητας

Λόγω της συμμετρίας του πίνακα P,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

οπότε οι όροι της εξίσωσης Ricatti είναι:

$$\underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} = \frac{\kappa^2}{rT^2} \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{11}^2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{P} \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & p_{11} - \frac{1}{T} p_{12} \\ 0 & p_{12} - \frac{1}{T} p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T \underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} - \frac{1}{T} p_{12} & p_{12} - \frac{1}{T} p_{22} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Ricatti και περιοριζόμενοι λόγω συμμετρίας στους όρους πάνω από την κύρια διαγώνιο προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_{11} &= \frac{\kappa}{rT^2} p_{12}^2 - q_{11} \\ \dot{p}_{12} &= \frac{\kappa}{rT^2} p_{12}p_{22} - \left(p_{11} - \frac{1}{T} p_{12} \right) \\ \dot{p}_{22} &= \frac{\kappa}{rT^2} p_{22}^2 - 2 \left(p_{12} - \frac{1}{T} p_{22} \right) - q_{22} \end{aligned} \right\} (5.31)$$

Αυτό είναι ένα σύστημα τριών συζευγμένων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για τις τρεις συναρτήσεις $p_{11}(t), p_{12}(t), p_{22}(t)$ του πίνακα Ricatti που αναζητούμε. Επί πλέον επειδή εν προκειμένω $\underline{s} = \underline{0}$ ισχύει η τελική συνθήκη

$$\underline{P}(t_e) = \underline{0} \quad \text{ή}$$

$$P_{ix}(t_e) = \underline{0}$$

Για την επίλυση του συστήματος (5.31) επειδή μας λείπει η αρχική συνθήκη κάνουμε τον χρονικό μετασχηματισμό

$$\tau = t_e - t \rightarrow dt = -d\tau$$

$$\text{Έτσι έχουμε } P_{ix}(t) = P_{ix}(t_e - \tau) = P_{ix}(\tau) \quad (5.33)$$

$$\text{δηλαδή } \frac{dP_{ix}}{d\tau} = \frac{dP_{ix}}{dt}(-1)$$

Η (5.31) γίνεται

$$\left. \begin{aligned} \frac{d p_{11}}{d \tau} &= -\frac{\kappa}{r T^2} p_{12}^2 + q_{11} \\ \frac{d p_{12}}{d \tau} &= -\frac{\kappa}{r T^2} p_{12} p_{22} + p_{11} - \frac{1}{T} p_{12} \\ \frac{d p_{22}}{d \tau} &= -\frac{\kappa}{r T^2} p_{22}^2 + 2 p_{12} - \frac{1}{T} p_{22} + q_{22} \end{aligned} \right\} (5.34)$$

Από την (5.33) προκύπτει και η αρχική συνθήκη

$$p_{ik}(0) = p_{ik}(t_e) = 0$$

που είναι απαραίτητη στην επίλυση του συστήματος.

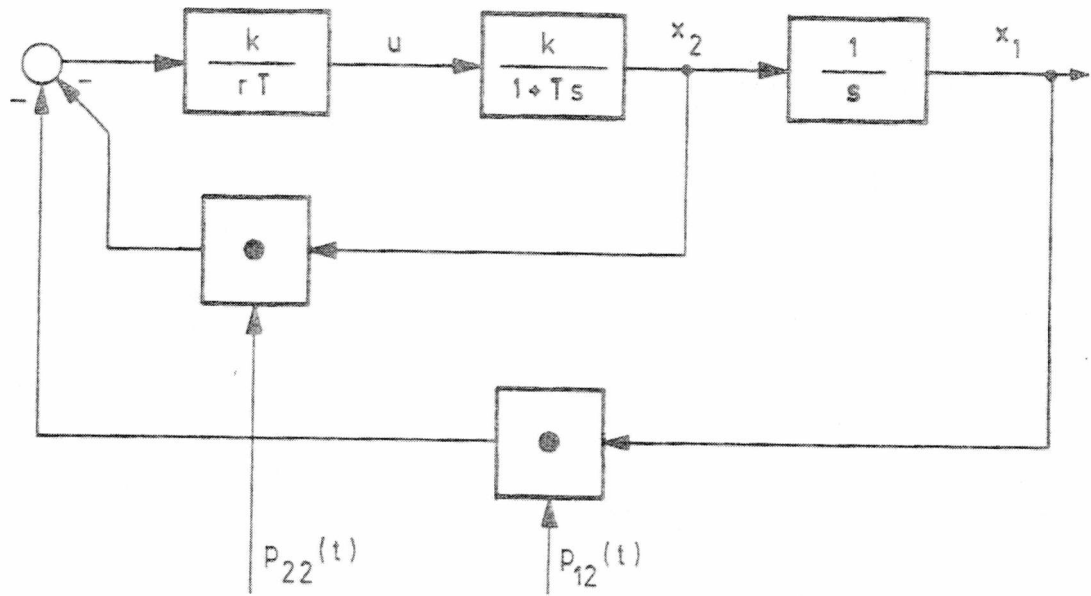
Η λύση των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων του συστήματος (5.34) γίνεται αριθμητικά με τις μεθόδους (Euler, Runge-Kutta).

Σύμφωνα με την (5.20) ο κανόνας ρύθμισης προκύπτει από την σχέση $\underline{u} = -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} \underline{x}$ που εν προκειμένω είναι:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{T} \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \\ u &= -\frac{\kappa}{r T} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{u = -\frac{\kappa}{r T} p_{12}(t) x_1 - \frac{\kappa}{r T} p_{22}(t) x_2} \quad (5.35)$$

Το σχήμα 5.4 δείχνει την δομή του ρυθμιστή Ricatti.



Σχήμα 5.4: Δομή του ρυθμιστή για το σύστημα της εργαλειομηχανής

Ο ρυθμιστής όπως θα δούμε πιο κάτω μπορεί εύκολα να εξομοιωθεί σε περιβάλλον Matlab και Simulink για διάφορους συντελεστές βαρύτητας q_{11} , q_{22} και r .

Κεφάλαιο 6 Βέλτιστος έλεγχος γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων με άπειρο χρονικό ορίζοντα ελέγχου ($t_e \rightarrow +\infty$)

Στην μεγαλύτερη πλειονότητα των εφαρμογών βελτιστοποίησης, πρόκειται για συστήματα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα. Αυτά περιγράφονται από την διαφορική εξίσωση κατάστασης

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u \quad (6.1)$$

όπου ο (n,n) -πίνακας \underline{A} και ο (n,p) -πίνακας \underline{B} είναι σταθεροί.

Επίσης στο κριτήριο ποιότητας

$$J = \frac{1}{2} \underline{x}^T(t_e) \underline{s} \underline{x}(t_e) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + u^T \underline{R} u \right] dt \quad (6.2)$$

\underline{Q} και \underline{R} είναι σταθεροί και θετικά ορισμένοι πίνακες, ενώ ο \underline{s} σε κάθε περίπτωση είναι σταθερός πίνακας. Εδώ εξετάζουμε την περίπτωση που έχουμε άπειρο χρονικό ορίζοντα ελέγχου ($t_e \rightarrow +\infty$), ώστε το ολοκλήρωμα του δείκτη ποιότητας (6.2) να εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Για να υπάρχει (να έχει πεπερασμένο όριο) το ολοκλήρωμα του δείκτη απόδοσης πρέπει να ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$$

Έχουμε τότε την τελική συνθήκη

$$\underline{x}(t_e) = \underline{x}(+\infty) = \underline{0}$$

Κατά συνέπεια ο πρώτος όρος της (6.2) απαλείφεται και το κριτήριο ποιότητας παίρνει την μορφή

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right] dt$$

με \underline{Q} και \underline{R} σταθερούς και θετικά ορισμένους πίνακες. Αυτό το πρόβλημα του βέλτιστου ρυθμιστή ονομάζεται πρόβλημα LQR (Linear Quadratic Regulator) και διατυπώνεται ως εξής:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ LQR

Δίνεται το σύστημα:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}, \text{ με}$$

αρχική συνθήκη: $t_e = 0, \underline{x}(0) = \underline{x}_0$ τυχαίο αλλά σταθερό

τελική συνθήκη: $t_e \rightarrow \infty, \underline{x}(t_e) = \underline{0}$

Να βρεθεί ο βέλτιστος ρυθμιστής που ελαχιστοποιεί το κριτήριο ποιότητας

$$J = \min_{\underline{u}(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right] dt$$

όπου $\underline{A}, \underline{B}, \underline{Q}, \underline{R}$ σταθεροί πίνακες

$\underline{Q}, \underline{R}$ θετικά ορισμένοι πίνακες

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στην μαθηματική διατύπωση του κριτηρίου ποιότητας $t_e = +\infty$, που σημαίνει ότι έχουμε να κάνουμε με άπειρο χρονικό ορίζοντα ελέγχου που δημιουργεί εύλογα ερωτήματα. Πρακτικά έχει αποδειχθεί από την θεωρία του προσεγγιστικού ελέγχου (Superoptimal control) του αυτομάτου ελέγχου, ότι αυτό δεν αλλοιώνει το τελικό αποτέλεσμα (κατάσταση) σε σχέση με την περίπτωση του πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αποδεικνύονται (όπως θα δούμε και στα παραδείγματα παρακάτω) ότι ο ρυθμιστής που προκύπτει εξασφαλίζει μια πολύ προσεγγιστική βελτιστοποίηση σε πεπερασμένο χρόνο σημαντικά μικρό. Όπως είδαμε στο παράδειγμα (5.23) σ' αυτή την περίπτωση ($t_e \rightarrow \infty$) προκύπτει αντί του χρονικά μεταβαλλόμενου ρυθμιστή ένας χρονικά αμετάβλητος που είναι εύκολα υλοποιήσιμος και μπορεί εύκολα να εξομοιωθεί σε περιβάλλον Matlab.

Από την θεωρία του αυτομάτου ελέγχου προκύπτει ότι ένας LQ-ρυθμιστής είναι πραγματοποιήσιμος εάν το σύστημα $(\underline{A}, \underline{B})$ είναι πλήρως ελέγξιμο οπότε έχουμε ένα ασυμπτωτικά ευσταθή ρυθμιστή δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0}$.

Για την επίλυση του προβλήματος LQR υπάρχουν δύο τρόποι, οι οποίοι παρουσιάζονται αναλυτικά μαζί με χαρακτηριστικά παραδείγματα. Παρουσιάζεται επίσης πρόγραμμα σε περιβάλλον Matlab για την επίλυση του LQR και την εξομοίωση των αποτελεσμάτων για διαφόρους συντελεστές βαρύτητας του δείκτη ποιότητας.

Με την πρώτη μέθοδο υπολογίζεται και εξομοιώνεται σε Matlab ο βέλτιστος ρυθμιστής για το πρόβλημα ελέγχου της θέσης του κινούμενου πυραύλου και με την δεύτερη για το πρόβλημα ελέγχου της θέσης εργαλειομηχανής που είδαμε στο κεφάλαιο (5.2.4) και υπολογίσαμε το βέλτιστο ρυθμιστή για $t_e = \text{πεπερασμένο}$.

6.1 1^η Μέθοδος: Επίλυση μέσω αλγεβρικής εξίσωσης Ricatti

Όπως διαπιστώθηκε πιο πάνω, για $t_e = +\infty$ προκύπτει ένας σταθερός πίνακας \underline{P} σαν λύση της διαφορικής εξίσωσης Ricatti, που σημαίνει $\dot{\underline{P}} = 0$. Συνεπώς η διαφορική εξίσωση την μορφή

$$\underline{0} = \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{P} - \underline{Q} \quad (6.3)$$

που ονομάζεται αλγεβρικά εξίσωση Ricatti και αποτελεί μια μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση πίνακα. Από την λύση της προκύπτει ο βέλτιστος ρυθμιστής (βέλτιστος κανόνας ελέγχου).

6.1.1 Εφαρμογή: Βέλτιστος ρυθμιστής για τον έλεγχο της θέσης κινούμενου σε δύο κατευθύνσεις πυραύλου και εξομοίωση των αποτελεσμάτων σε Matlab

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΡΥΘΜΙΣΤΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΘΕΣΗΣ ΠΥΡΑΥΛΟΥ

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$x_1(t)$: Θέση

$x_2(t)$: Ταχύτητα

$u(t)$: Δύναμη ώθησης

m : Μάζα πυραύλου ($m=1\text{kg}$)

Επειδή $\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{array} \right\}$ εξίσωση κατάστασης του συστήματος

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Αρχική κατάσταση: $x_1(0) = 2m$, $x_2(0) = 1 \frac{m}{s}$

Επιθυμητή τελική κατάσταση: $x_1^s = 0m$, $x_2^s = 0 \frac{m}{s}$

Να βρεθεί ο βέλτιστος ρυθμιστής (κανόνας ελέγχου $u^*(t)$) που οδηγεί τον πύραυλο στη θέση μηδέν όπου έρχεται σε ακινησία ελαχιστοποιώντας το δείκτη απόδοσης:

$$J = \min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ [x_1^s - x_1(t)]^2 + 2[x_2^s - x_2(t)]^2 + [u(t)]^2 \right\} dt$$

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι:

$$\min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x^T & Qx + u^T & Ru \end{bmatrix} dt$$

$$\text{με } \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

όπου για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = 1$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην αλγεβρική εξίσωση Ricatti:

$$0 = Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P$$

και δεδομένου ότι ο πίνακας P είναι συμμετρικός πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet 1 \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

έχουμε,

$$P A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix}$$

$$A^T P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix}$$

$$B R^{-1} B^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P B R^{-1} B^T P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12} p_{22} \\ p_{12} p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

οπότε η (6.3) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12} p_{22} \\ p_{12} p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_{11} \\ p_{11} & 2 + 2p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12} p_{22} \\ p_{12} p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_{12}^2 & p_{12} p_{22} \\ p_{11} - p_{12} p_{22} & 2 + 2p_{12} - p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 - p_{12}^2 = 0 \\ p_{11} - p_{12} p_{22} = 0 \\ 2 + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_{11} = 2 \\ p_{12} = 1 \\ p_{22} = 2 \end{cases} \rightarrow P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει έτσι ο βέλτιστος έλεγχος

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P x(t) = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

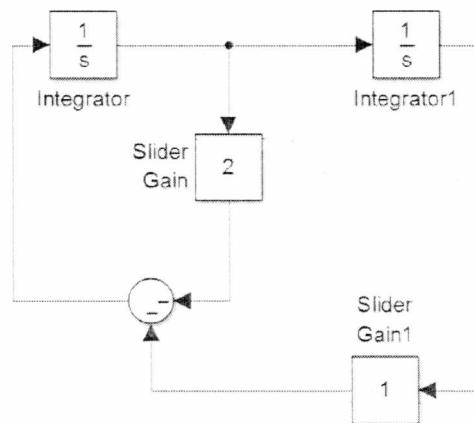
$$u^*(t) = - \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{u^*(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)}$$

και $\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad x_1(0) = 2$

$$\dot{x}_2(t) = u^*(t) = -x_1 - 2x_2(t) \quad x_2(0) = 1$$

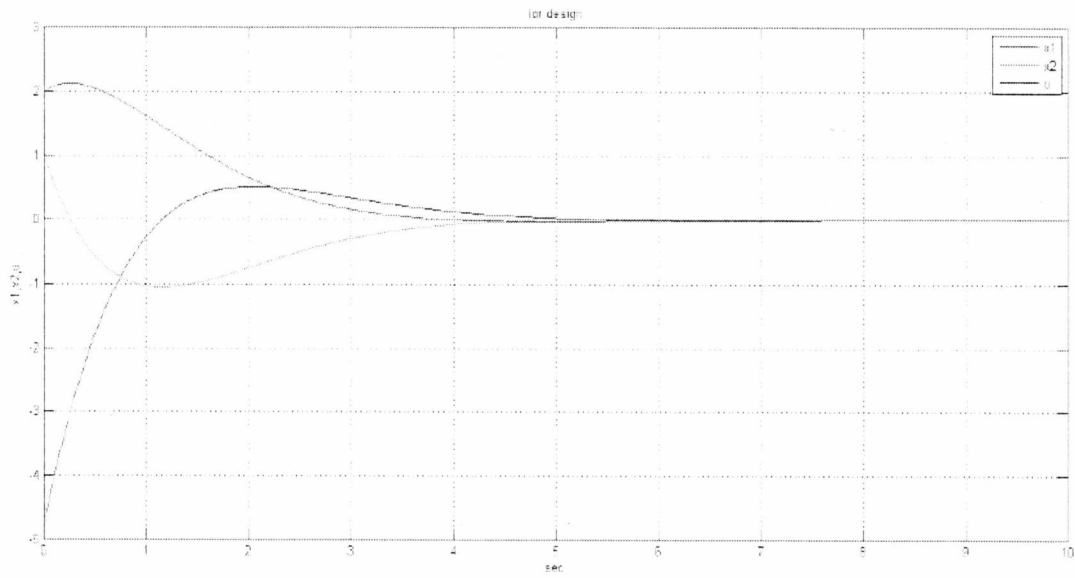
Η δομή του βέλτιστου ρυθμιστή απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (6.1)



Σχήμα 6.1: Δομή βέλτιστου ρυθμιστή για τον έλεγχο της θέσης του κινούμενου πυραύλου σε 2 κατευθύνσεις

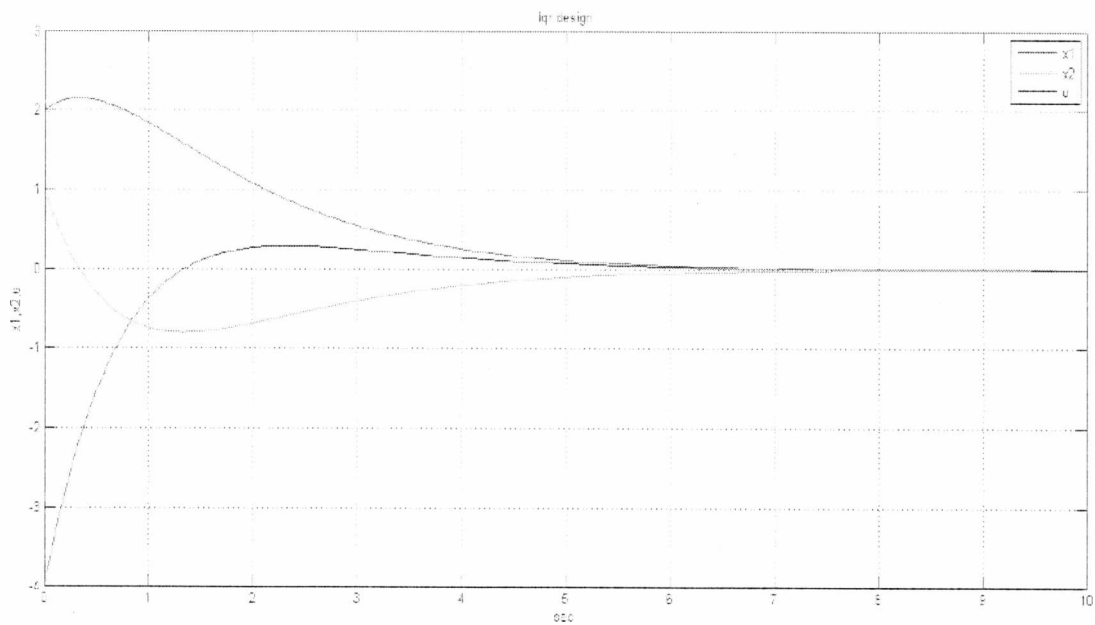
Αποτελέσματα του βέλτιστου ελέγχου:

$$\boxed{J = \min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ 2[x_1^s - x_1(t)]^2 + [x_2^s - x_2(t)]^2 + [u(t)]^2 \right\} dt}$$



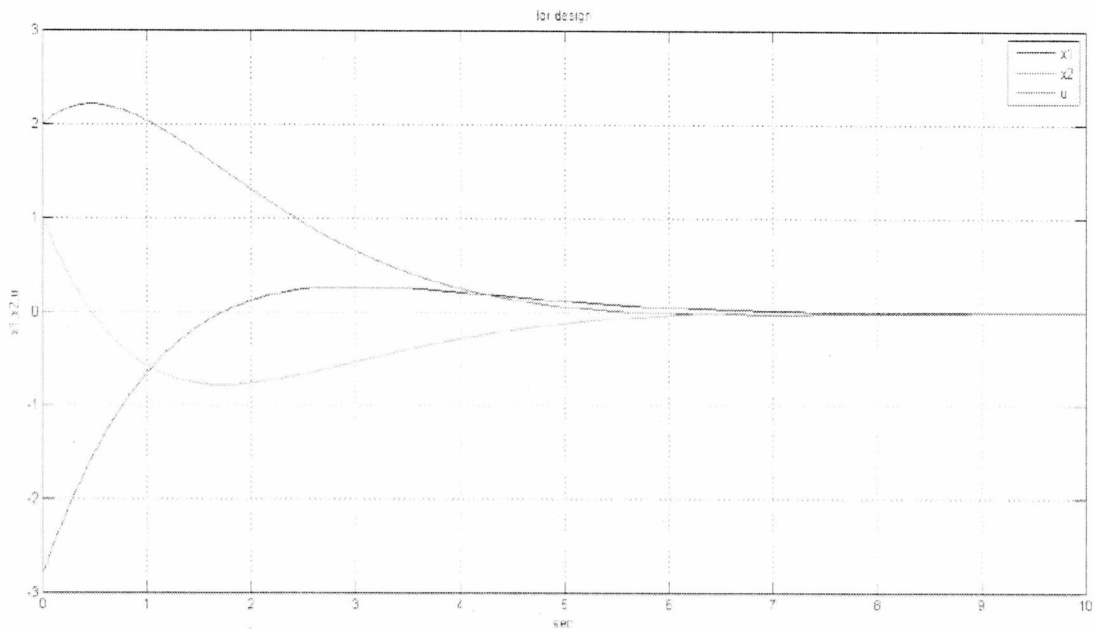
Περίπτωση 1: Μεγαλύτερη βαρύτητα στη θέση

$$J = \min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ [x_1^s - x_1(t)]^2 + 2[x_2^s - x_2(t)]^2 + [u(t)]^2 \right\} dt$$



Περίπτωση 2: Μεγαλύτερη βαρύτητα στη ταχύτητα

$$J = \min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ [x_1^s - x_1(t)]^2 + [x_2^s - x_2(t)]^2 + 2[u(t)]^2 \right\} dt$$



Περίπτωση 3: Μεγαλύτερη βαρύτητα στη δύναμη ώθησης

6.2 Επίλυση μέσω των εξισώσεων Hamilton και του χαμιλτονιανού πίνακα του συστήματος

Δεδομένα: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u$, $\underline{A}, \underline{B}$ σταθεροί

$t_0 = 0, \underline{x}_0$ τυχαίο αλλά καθορισμένο

$t_e \rightarrow \infty, \underline{x}(t_e) = \underline{0}$

Αναζητούμε το βέλτιστο ρυθμιστή, έτσι ώστε

$$J = \min_{u(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right] dt$$

όπου \underline{Q} και \underline{R} θετικά ορισμένοι πίνακες

1. Γράφουμε την συνάρτηση Hamilton

$$H = -\frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} + \underline{\psi}^T \underline{A} \underline{x} + \underline{\psi}^T \underline{B} \underline{u}$$

2. Γράφουμε την εξίσωση ελέγχου και επιλύουμε ως προς \underline{u}

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = -\underline{R} \underline{u} + \underline{B}^T \underline{\psi} = 0 \rightarrow \underline{u} = \underline{R}^{-1} \underline{B} \underline{\psi} \quad (6.4)$$

3. Αντικαθιστούμε το \underline{u} στην εξίσωση κατάστασης και γράφουμε την ανάστροφη

διαφορική εξίσωση Hamilton

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{\psi} \quad \text{εξίσωση κατάστασης} \quad (6.5)$$

$$\dot{\underline{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = \underline{Q} \underline{x} - \underline{A}^T \underline{\psi} \quad \text{ανάστροφη διαφορική εξίσωση}$$

4. Επιλύοντας τις παραπάνω δύο συζευγμένες εξισώσεις που μπορούν να γραφούν σε μία

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\psi} \end{bmatrix} \dot{\quad} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \\ \underline{Q} & -\underline{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\text{ή εν συντομία} \quad \boxed{\begin{matrix} \dot{\underline{V}} & = & \underline{W} & \bullet & \underline{V} \\ (2n,1) & & (2n,2n) & & (2n,1) \end{matrix}} \quad (6.7)$$

Ο πίνακας \underline{W} χαρακτηρίζεται ως χαμιλτονιανός πίνακας του συστήματος.

Από την θεωρία του συστήματος είναι γνωστό ότι η γενική λύση της (6.7) είναι της μορφής:

$$\underline{V}(t) = e^{\lambda_i t} \underline{V}_i$$

όπου λ_i μια ιδιοτιμή του \underline{W} και \underline{V}_i ένα γνωστό σταθερό διάνυσμα. Έτσι από την (6.7)

$$\text{ανάγεται } \left[e^{\lambda_i t} \underline{V}_i \right]' = \underline{W} e^{\lambda_i t} \underline{V}_i \Rightarrow \lambda_i e^{\lambda_i t} \underline{V}_i = \underline{W} e^{\lambda_i t} \underline{V}_i \Rightarrow \boxed{(\lambda_i I_{2n} - \underline{W}) \underline{V}_i = \underline{0}} \quad (6.8)$$

Η (6.8) δηλώνει ότι το \underline{V}_i είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του \underline{W} . Συνεπώς η γενική λύση της (6.7)

θα είναι:

$$\underline{V}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{V}_i \quad (6.9)$$

όπου c_i τυχαία παράμετρος.

$$\text{Επειδή } \underline{V}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\psi}(t) \end{bmatrix} \text{ και με } \underline{V}_i = \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} \\ \underline{V}_{i\psi} \end{bmatrix}$$

όπου \underline{V}_{ix} παριστάνει το επάνω μισό και το $\underline{V}_{i\psi}$ το κάτω μισό του πίνακα των

ιδιοδιανυσμάτων του \underline{V}_i προκύπτει από την (6.9)

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{\psi}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} \\ \underline{V}_{i\psi} \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{V}_{-ix} \quad (6.10)$$

$$\underline{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{V}_{-i\psi} \quad (6.11)$$

Για το που βρίσκονται οι ιδιοτιμές του \underline{W} ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του χαμιλτονιανού πίνακα \underline{W} ,

$$F(s) = \det \left(s \underline{I}_{2n} - \underline{W} \right)$$

είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή $F(-s) = F(s)$.

Απόδειξη: Όπως είναι εύκολο να επαληθευτεί, ισχύει η εξίσωση

$$\left(-s \underline{I}_{2n} - \underline{W} \right) = \left\{ \underline{U} \left(s \underline{I}_{2n} - \underline{W} \right) \underline{U}^T \right\}$$

όπου

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I}_n \\ -\underline{I}_n & \underline{0} \end{bmatrix}$$

και με δεδομένο ότι οι πίνακες \underline{Q} και \underline{R} είναι συμμετρικοί. Σχηματίζοντας την ορίζουσα από την εξίσωση αυτή έχουμε την σχέση

$$\det \left(-s \underline{I}_{2n} - \underline{W} \right) = \det \underline{U} \det \left(s \underline{I}_{2n} - \underline{W} \right) \det \underline{U}$$

(γίνεται χρήση του γνωστού κανόνα από την θεωρία των πινάκων ότι δεν αλλάζει τίποτα με τον ανάστροφο πίνακα στο αποτέλεσμα της ορίζουσα).

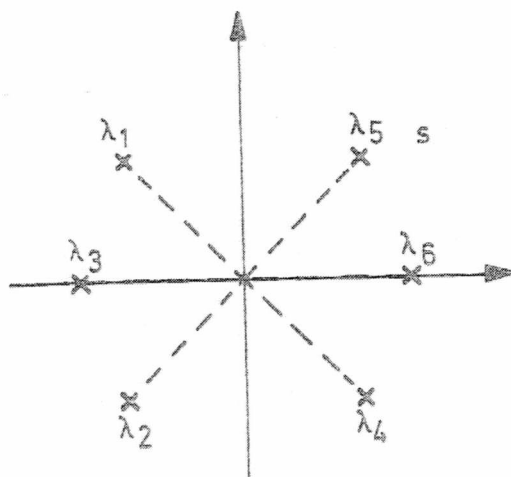
Επειδή $\det \underline{U} = 1$ και ισχύει $F(s) = \det \left(s \underline{I}_{2n} - \underline{W} \right)$ προκύπτει $F(-s) = F(s)$ που δηλώνει εάν π.χ. το λ είναι ιδιοτιμή του \underline{W} και το $-\lambda$ θα είναι επίσης ιδιοτιμή.

Υποθέτουμε τώρα: Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ του πίνακα \underline{W} είναι απλές και δεν βρίσκονται στον άξονα j . Εάν αυτό δεν συμβαίνει μπορεί εύκολα να προκύψει με την κατάλληλη τροποποίηση των \underline{Q} και \underline{R} .

Αριθμούμε τις ιδιοτιμές όπως στο σχήμα

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ αριστερά του άξονα j

$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n}$ δεξιά του άξονα j



Σχήμα 6.3: Ιδιοτιμές του χαμιλτονιανού πίνακα \underline{W} του συστήματος

Επειδή ισχύει $\underline{x}(+\infty) = \underline{0}$ (διότι διαφορετικά δεν συγκλίνει το ολοκλήρωμα του δείκτη ποιότητας) και επειδή $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n}$ βρίσκονται δεξιά του άξονα j , πρέπει να ισχύει

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = c_{2n} = 0$$

Κατά συνέπεια τα αθροίσματα των (6.10) και (6.11) εκτείνεται μέχρι $i=n$:

$$\underline{x}(t) = \underline{V}_{ix} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \underline{V}_{nx} c_n e^{\lambda_n t} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} & \dots & \underline{V}_{nx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\underline{\psi}(t) = \underline{V}_{iw} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \underline{V}_{nw} c_n e^{\lambda_n t} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{iw} & \dots & \underline{V}_{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Από την (6.12) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} & \dots & \underline{V}_{nx} \end{bmatrix}^{-1} \underline{x}(t)$$

και αντικαθιστώντας στην (6.13) έχουμε

$$\underline{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \underline{V}_{iw} & \dots & \underline{V}_{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} & \dots & \underline{V}_{nx} \end{bmatrix}^{-1} \underline{x}(t)$$

Από την εξίσωση ελέγχου έχουμε (6.4) $\underline{u} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{\psi}$ προκύπτει:

Βέλτιστος γραμμικός χρονικά αμετάβλητος κανόνας ελέγχου

$$\underline{u}(t) = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \begin{bmatrix} \underline{V}_{iw} & \dots & \underline{V}_{nw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} & \dots & \underline{V}_{nx} \end{bmatrix}^{-1} \underline{x}(t)$$

$$\text{όπου } \underline{V}_i = \begin{bmatrix} \underline{V}_{ix} \\ \underline{V}_{iw} \\ \underline{V}_{ix} \\ \underline{V}_{iw} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} n \\ \} n \end{array} \right\} i=1,2,3,\dots,n$$

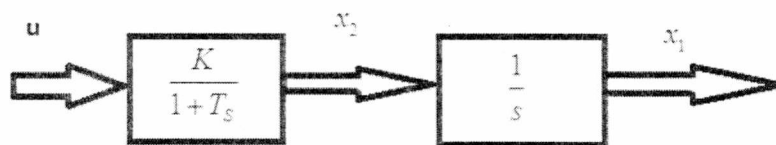
τα ιδιοδιανύσματα των ευσταθών ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του χαμιλτονιανού πίνακα \underline{W} .

Με αυτόν τον τρόπο αυτό ο βέλτιστος ρυθμιστής γίνεται με τον υπολογισμό των ευσταθών ιδιοτιμών (αυτών που βρίσκεται δεξιά του άξονα j) και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του χαμιλτονιανού πίνακα \underline{W} του συστήματος. Η εύρεση των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι εύκολη με το πρόγραμμα Matlab.

6.2.1 Εφαρμογή: Βέλτιστος ρυθμιστής για τον έλεγχο της θέσης της εργαλειομηχανής

Διατύπωση του προβλήματος

Για το σύστημα ρύθμισης της θέσης της εργαλειομηχανής- που είδαμε στο κεφάλαιο 5.2.4- το οποίο περιγράφεται από το ακόλουθο λειτουργικό διάγραμμα ($\kappa > 0$, $T > 0$)



να βρεθεί ο βέλτιστος κανόνας ρύθμισης (ανατροφοδότηση κατάστασης)

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$$

που ελαχιστοποιεί τον τετραγωνικό δείκτη ποιότητας

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + r u^2) dt \quad \text{με } q_1 > 0, q_2 > 0, r > 0,$$

Λύση:

Από το λειτουργικό διάγραμμα του συστήματος προκύπτουν οι σχέσεις:

$$X_2(s) \frac{1}{s} = X_1(s) \rightarrow X_2(s) = sX_1(s) \rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$
$$X_2(s) = \frac{k}{1+Ts} U(s) \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{T}x_2 + \frac{k}{T}u$$

Συνεπώς η διαφορική εξίσωση κατάστασης του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T} \end{bmatrix} u$$

από την οποία προκύπτει:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T} \end{bmatrix}$$

Ο δείκτης ποιότητας μπορεί γραφεί σε τετραγωνική μορφή

$$J = \int_0^{\infty} \left(\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + u^T \underline{Q} u \right) dt$$

όπου

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad R = [r] = r$$

Έτσι ο χαμιλτονιανός πίνακας του συστήματος

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{A} & -\underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \\ \underline{Q} & -\underline{A}^T \end{bmatrix}$$

με

$$\underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T} \end{bmatrix} r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2}{rT^2} \end{bmatrix}$$

παίρνει την μορφή

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{A} & -\underline{B}\underline{R}^{-1}\underline{B}^T \\ \underline{Q} & -\underline{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 & \frac{k^2}{rT^2} \\ q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & -1 & \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του προκύπτουν από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μέσω της εξίσωσης:

$$\det \left(\lambda \underline{I}_{-2n} - \underline{W} \right) = \lambda^4 - \left(\frac{r + q_2 k^2}{rT^2} \right) \lambda^2 + \frac{q_1 k^2}{rT^2} = 0$$

οπότε

$$\lambda^2 = \frac{\left(\frac{r + q_2 k^2}{rT^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{r + q_2 k^2}{rT^2} \right)^2 - 4 \frac{q_1 k^2}{rT^2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{r + q_2 k^2}{2rT^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r + q_2 k^2}{2rT^2} \right)^2 - \frac{q_1 k^2}{rT^2}}$$

και

$$\lambda_{1,2} = -\sqrt{\frac{r + q_2 k^2}{2rT^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r + q_2 k^2}{2rT^2} \right)^2 - \frac{q_1 k^2}{rT^2}}}$$

$$\lambda_{3,4} = +\sqrt{\frac{r + q_2 k^2}{2rT^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r + q_2 k^2}{2rT^2} \right)^2 - \frac{q_1 k^2}{rT^2}}}$$

Σαν επόμενο βήμα υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα \underline{V}_1 και \underline{V}_2 του πίνακα \underline{W} για τις

ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 οι οποίες βρίσκονται αριστερά του άξονα j . Από την σχέση

$$\left(\lambda_i \underline{I}_{-2n} - \underline{W} \right) \underline{V}_i = \underline{0} \quad i=1,2$$

$$\underline{V}_i = [V_{1i}, V_{2i}, V_{3i}, V_{4i}]^T$$

έχουμε την σχέση

$$\lambda_i \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & 0 & \frac{k^2}{rT^2} \\ q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & -1 & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_{1i} \\ V_{2i} \\ V_{3i} \\ V_{4i} \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i + \frac{1}{T} & 0 & -\frac{k^2}{rT^2} \\ -q_1 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & -q_2 & -1 & \lambda_i - \frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1i} \\ V_{2i} \\ V_{3i} \\ V_{4i} \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_i V_{1i} - V_{2i} = 0 \\ \left(\lambda_i + \frac{1}{T} \right) V_{2i} - \frac{k^2}{rT^2} V_{4i} = 0 \\ -q_1 V_{1i} + \lambda_i V_{3i} = 0 \\ -q_2 V_{2i} + V_{3i} + \left(\lambda_i - \frac{1}{T} \right) V_{4i} = 0 \end{array} \right]$$

Επιλέγοντας $V_{1i} = 1$ από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει

$$\begin{aligned} V_{1i} &= 1 \\ V_{2i} &= \lambda_i \\ V_{3i} &= \frac{q_1}{\lambda_i} \\ V_{4i} &= \frac{rT^2}{k^2} \lambda_i \left(\lambda_i + \frac{1}{T} \right) \end{aligned}$$

Συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα \underline{V}_1 και \underline{V}_2 που αναζητούμε είναι:

$$\left[\underline{V}_1 \quad \underline{V}_2 \right] = \begin{bmatrix} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1\psi} & V_{2\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \\ \frac{q_1}{\lambda_1} & \frac{q_1}{\lambda_2} \\ \frac{rT^2}{k^2} \lambda_1 \left(\lambda_1 + \frac{1}{T} \right) & \frac{rT^2}{k^2} \lambda_2 \left(\lambda_2 + \frac{1}{T} \right) \end{bmatrix}$$

Με
$$\begin{bmatrix} V_{1x}, V_{2x} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτει σύμφωνα με την εξίσωση (6.14)

$$\underline{u}(t) = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \begin{bmatrix} V_{1w}, V_{2w} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1x}, V_{2x} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}^{-1} \underline{x}(t)$$

ο βέλτιστος κανόνας ρύθμισης:

$$u = r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q_1}{\lambda_1} & \frac{q_2}{\lambda_2} \\ \frac{rT^2}{k^2} \lambda_1 \left(\lambda_1 + \frac{1}{T} \right) & \frac{rT^2}{k^2} \lambda_1 \left(\lambda_1 + \frac{1}{T} \right) \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$u = -\frac{k}{T} \lambda_1 \lambda_2 x_1 + \frac{T}{k} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{T} \right) x_2$$

Επειδή $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{k}{T} \sqrt{\frac{q_1}{r}}$ και

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \frac{r + q_2 k^2}{r T^2} + 2 \frac{k}{T} \sqrt{\frac{q_1}{r}} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{k}{T} \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{q_2}{r} + 2 \frac{T}{k} \sqrt{\frac{q_1}{r}}}$$

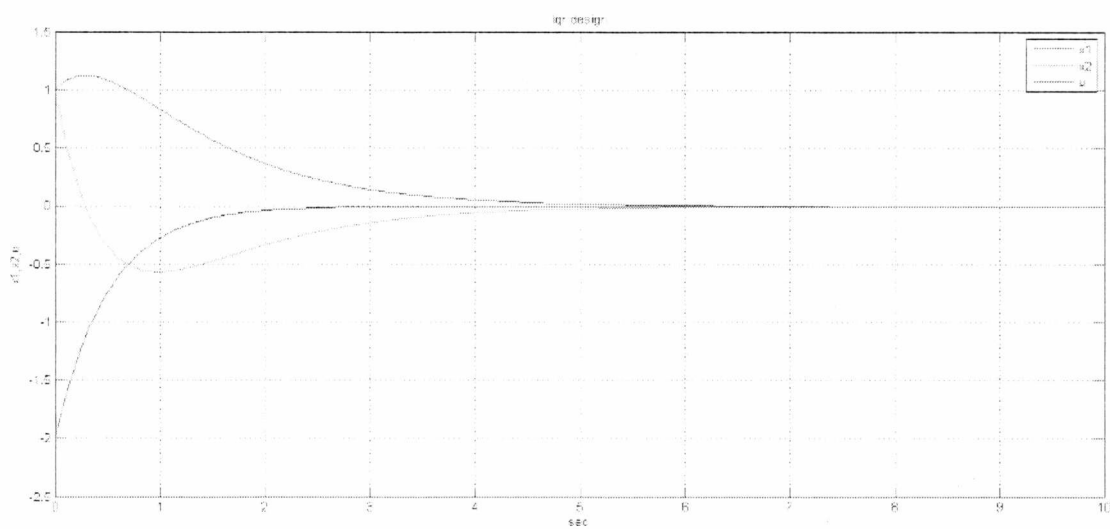
Οπότε προκύπτει τελικά

$$u = -\sqrt{\frac{q_1}{r}} x_1 - \left(\sqrt{\frac{1}{k^2} + 2 \frac{T}{k} \sqrt{\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r}} - \frac{1}{k}} \right) x_2$$

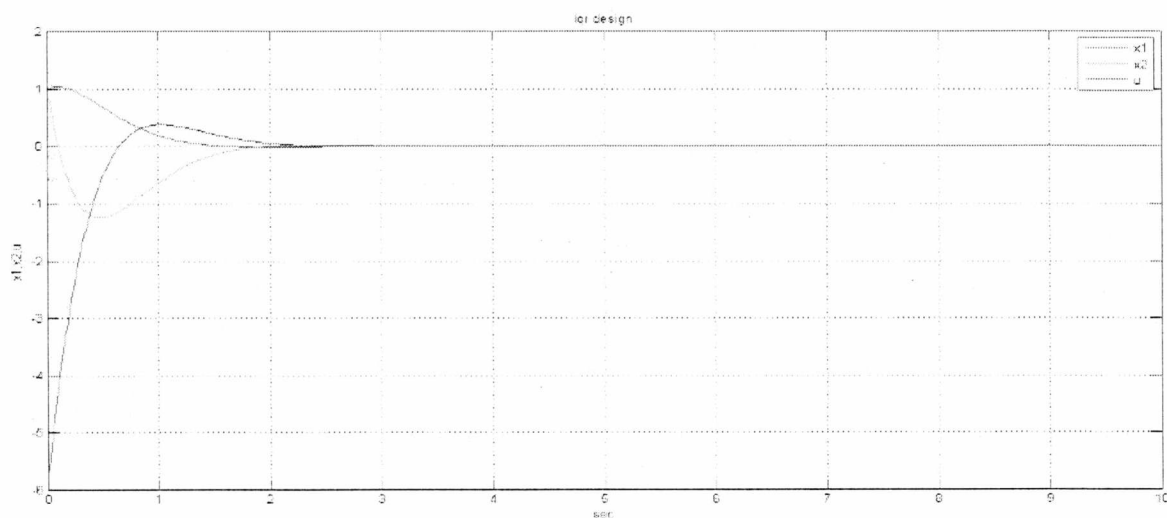
Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι τροχιές των μεγεθών κατάστασης x_1 και x_2 καθώς και του μεγέθους ελέγχου u του βέλτιστου ρυθμιστή του συστήματος για $k=2$ και $T=1$ για τις δύο περιπτώσεις

1. $q_1 = q_2 = r = 1$
2. $q_1 = 16, q_2 = r = 1$

όπως αυτές προκύπτουν από την προσομοίωση του συστήματος μέσω του προγράμματος Matlab που παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο. Σαν αρχικές τιμές έχουν επιλεγεί $x_1(0) = x_2(0) = 1$. Όπως διακρίνουμε από τα διαγράμματα, η μεγαλύτερη βαρύτητα του x_1 στην δεύτερη περίπτωση οδηγεί σε μια σημαντικά γρηγορότερη μεταβατική κατάσταση αυτής της μεταβλητής, αλλά σε μεγαλύτερο κόστος και μεγαλύτερη εκτροπή της μεταβλητής κατάστασης x_2 και του μεγέθους ρύθμισης u .



Περίπτωση 1



Περίπτωση 2

6.3 Κατασκευή βέλτιστου ρυθμιστή με Matlab στο πρόβλημα LQR

- Αλγόριθμος κατασκευής

Στα προβλήματα εφαρμογών, ο κύριος στόχος ενός βέλτιστου ρυθμιστή είναι όχι η ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού δείκτη ποιότητας αλλά η συστηματική επιλογή ενός κανόνα ρύθμισης με τον οποίο το κύκλωμα ελέγχου θα ικανοποιεί προκαθορισμένες απαιτήσεις ποιότητας ευστάθειας και δυναμικής συμπεριφοράς. Υπάρχουν πολύ λίγα προβλήματα ρύθμισης στα οποία ο κύριος στόχος είναι να πάρει ο δείκτης ποιότητας την όσο το δυνατό μικρότερη τιμή. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ο έλεγχος και σταθεροποίηση ενός διαστημόπλοιου, επειδή εδώ θέλουμε την πιο “οικονομική” επιλογή μεταξύ της θέσης και της κατανάλωσης του καύσιμου υλικού.

Στα περισσότερα προβλήματα ρύθμισης, ο βέλτιστος έλεγχος χρησιμοποιείται σαν ένας δρόμος για να επιλεγεί παραστατικά και με συστηματικό τρόπο ο κατάλληλος κανόνας ελέγχου μέσα από την κατάλληλη επιλογή των πινάκων βαρύτητας του δείκτη ποιότητας. Η

κατασκευή του βέλτιστου ρυθμιστή γίνεται επαναληπτικά με διαφόρους πίνακες βαρύτητας και με βάση τα αποτελέσματα προσομοίωσης –με το πρόγραμμα Matlab που ακολουθεί– αξιολογείται το αποτέλεσμα με βάση την επιθυμητή συμπεριφορά.

- Διαδικασία κατασκευής ρυθμιστή

Δίδεται το σύστημα (A,B,C):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

και οι επιθυμητές απαιτήσεις ποιότητας

1. Από τις απαιτήσεις ποιότητας του συστήματος κλειστού βρόγχου δημιουργούνται οι πίνακες βαρύτητας \underline{Q} και \underline{R} του δείκτη ποιότητας.
2. Επιλύεται η εξίσωση Ricatti (διαφορική ή αλγεβρική) και από την λύση της προκύπτει ο βέλτιστος ρυθμιστής
3. Προσομοιώνεται η χρονική απόκριση (συμπεριφορά) του κυκλώματος κλειστού βρόγχου με το πρόγραμμα Matlab που ακολουθεί. Εάν η δυναμική απόκριση δεν αντιστοιχεί στις προκαθορισμένες επιθυμητές απαιτήσεις ποιότητας, επαναλαμβάνεται η κατασκευή με διαφορετικούς πίνακες βαρύτητας.

Αποτέλεσμα: βρίσκεται η “βέλτιστη” ανάδραση κατάστασης k^* δηλαδή ο επιθυμητός ρυθμιστής.

- Πρόγραμμα Matlab υπολογισμού και προσομοίωσης βέλτιστου ρυθμιστή στο πρόβλημα LQR

Προϋποθέσεις για την κατασκευή του προγράμματος:

- Οι πίνακες A,B,C,D του συστήματος

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Ο D είναι μηδενικός πίνακας ανάλογης διάστασης

1° ΒΗΜΑ: Έλεγχος των προϋποθέσεων για την κατασκευή του βέλτιστου ρυθμιστή

```
>>System=ss(A,B,C,D);
```

```
>>rank(ctrb(system))    έλεγχος ελεγχιμότητας του συστήματος
```

```
>>eig(Q)                έλεγχος για θετικά ορισμένο πίνακα βαρύτητας Q
```

```
>>eig(R)                έλεγχος για θετικά ορισμένο πίνακα βαρύτητας R
```

2° ΒΗΜΑ: Υπολογισμός του βέλτιστου ρυθμιστή μέσω της εντολής lqr του Matlab

```
>> K = lqr(A,B,Q,R);
```

3° ΒΗΜΑ: Ανάλυση ελέγχου

```
>> Ag = A - B * K;
```

```
>>eig(Ag)
```

```
>>Kreis=ss(Ag, B,C,D);
```

```
>>initial(Kreis, x_0); σχεδιασμός της απόκρισης σε γραφική παράσταση
```

Αναλυτικά ο αλγόριθμος φαίνεται στο παράρτημα στο τέλος της εργασίας.

Κεφάλαιο 7 Βελτιστοποίηση δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου με τη μέθοδο Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Η θεωρία βελτιστοποίησης του δυναμικού προγραμματισμού, που αναπτύχθηκε την δεκαετία του 1950 από τον Αμερικάνο μαθηματικό Richard Bellman, αποτελεί μια πολύ ευέλικτη μέθοδο βελτιστοποίησης, η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί σε διάφορα προβλήματα (τεχνικά, οικονομικά, στρατιωτικά κλπ). Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή της στη βελτιστοποίηση συστημάτων συνεχούς χρόνου καταλήγοντας στην γνωστή εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Διατύπωση προβλήματος

Για το συνεχές δυναμικό σύστημα

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \text{ δεδομένο (7.1)}$$

να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος $\underline{u}^*(t)$ στο χρονικό διάστημα $t_0 \leq t \leq t_e$ που ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης

$$J = \int_{t_0}^{t_e} \underline{f}_0(\underline{x}, \underline{u}, t) dt \quad (7.2)$$

όπου το τελικό χρονικό σημείο t_e είναι προκαθορισμένο και η τελική θέση \underline{x}_e βρίσκεται σε δεδομένη πολλαπλότητα \underline{z} .

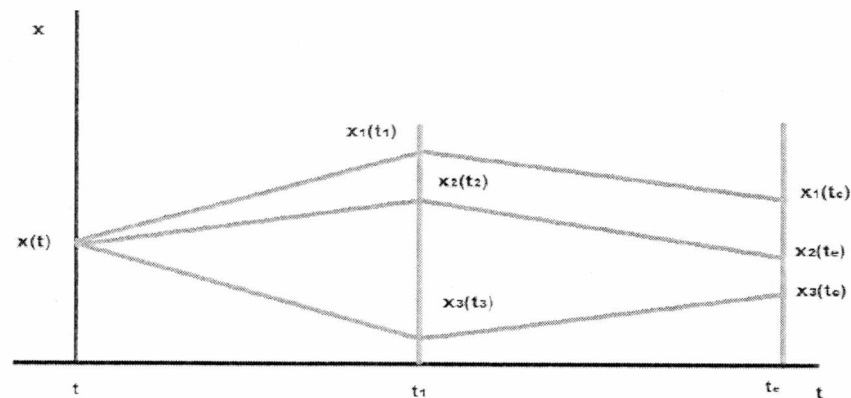
Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος βασίζεται εδώ στην αρχή.....της βελτιστοποίησης του Bellman που εκφράζεται από την εξίσωση

$$J^*(\underline{x}(t), t) = \min_{u[t, t_1]} \left[\int_{t_1}^{t_e} f_o(\underline{x}, u, t) dt + J^*(\underline{x}(t_1), t_1) \right] \quad (7.3)$$

Αυτό που εκφράζει η εξίσωση (7.3) είναι ότι το βέλτιστο κόστος που αρχίζει στο t και καταλήγει στο t_e προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του κόστους για την μετάβαση στο $\underline{x}(t_1)$ όπου $t < t_1 < t_e$ και του βέλτιστου κόστους από εκεί και πέρα από το t_1 μέχρι το t_e , δηλαδή

$$\int_{t_1}^{t_e} f_o(\underline{x}, u, t) dt + \underbrace{J^*(\underline{x}(t_1), t_1)}_{\text{βέλτιστο κόστος από } t_1 \text{ μέχρι το τέλος } t_e}$$

Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα (7.1)



Σχήμα 7.1: Απεικόνιση της αρχής βελτιστότητας. Οι τροχιές για το χρονικό διάστημα $[t_1, t_e]$ είναι όλες βέλτιστες

Συμπερασματικά η αρχή της βελτιστότητας του Bellman δηλώνει:

Μια διαδικασία ελέγχου είναι βέλτιστη αν είναι βέλτιστη σε όλο το τμήμα των υποδιαδικασιών ή διαφορετικά, κάθε τμήμα της βέλτιστης τροχιάς είναι επίσης βέλτιστο.

Επίλυση προβλήματος

Με βάση την αρχή της βελτιστοποίησης (7.3) το ελάχιστο κόστος από το $\left(\underline{x}_e, t_e\right)$ για τα Δt και $\Delta \underline{x}$ πολύ μικρά δίδεται από την σχέση

$$J^*(\underline{x}(t), t) = \min_{\underline{u}} \left[\int_{t_0}^{t_e} f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) dt + J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t) \right] \quad (7.4)$$

Στην συνέχεια

- Αναπτύσσουμε την συνάρτηση $J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t)$ κατά Taylor
- Κάνουμε την οριακή μετάβαση για $\Delta \underline{x} \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$

Το ανάπτυγμα Taylor της $J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t)$ δίδει

$$J^*(\underline{x}, t) = \min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) \Delta t + \left[J^*(\underline{x}, t) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T \Delta \underline{x} + \left(\frac{\partial J^*}{\partial t} \right) \Delta t + \dots \right] \right\} \quad (7.6)$$

Σ' αυτή την σχέση (7.6) στον όρο $J^*(\underline{x}, t)$ δεν υπεισέρχεται η μεταβλητή \underline{u} , οπότε μπορεί να απαληφθεί από την απαίτηση ελαχιστοποίησης. Έτσι έχουμε

$$0 = \min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) \Delta t + \left[\left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T \Delta \underline{x} + \left(\frac{\partial J^*}{\partial t} \right) \Delta t + \dots \right] \right\}$$

Στην συνέχεια:

1. Διαιρούμε την (7.7) με $\Delta t \neq 0$
2. Οριακή μετάβαση για $\Delta \underline{x} \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$ οπότε προκύπτει $\frac{\Delta \underline{x}}{\Delta t} = \frac{d \underline{x}}{dt} = \dot{\underline{x}}(t)$
3. Απαλείφουμε τους όρους μεγαλύτερης τάξης στην εξίσωση (7.7) καθώς τείνουν στο μηδέν για $\Delta t \rightarrow 0$.

Διαιρώντας την (7.7) με $\Delta t \neq 0$ έχουμε

$$0 = \min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T \frac{\Delta \underline{x}}{\Delta t} + \left(\frac{\partial J^*}{\partial t} \right) + \dots \right] \right\}$$

Για $\Delta \underline{x} \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ έχουμε

$$0 = \min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T \frac{d \underline{x}}{dt} + \left(\frac{\partial J^*}{\partial t} \right) + \dots \right] \right\} \Rightarrow$$

$$0 = \min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T \dot{\underline{x}} + \left(\frac{\partial J^*}{\partial t} \right) + \dots \right] \right\}$$

επειδή $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \rightarrow$ εξίσωση κατάστασης συστήματος προκύπτει

$$\min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left[\left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T f(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial t} + \dots \right] \right\} = 0$$

Ο όρος $\frac{\partial J^*}{\partial t}$ μπορεί να βγει έξω από την αγκύλα ελαχιστοποίησης καθώς δεν υπεισέρχεται σ'

αυτό η μεταβλητή \underline{u} , οπότε έχουμε

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left(\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \right)^T f(\underline{x}, \underline{u}, t) \right\} \quad (7.8)$$

Αυτή είναι η εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) και είναι μια μερική διαφορική εξίσωση.

Δίδεται: το σύστημα $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t), & x = x(t) \\ u = u(t) \end{cases}$

το κριτήριο ποιότητας

$$J = h_o[x(t_f), t_f] + \int_{t_o}^{t_f} f_o(x, u, t) dt = \min$$

η εξίσωση HJB

$$\min_{\underline{u}} \left\{ f_o(\underline{x}, \underline{u}, t) + \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{x}} \right)^T f(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\}$$

ΒΗΜΑ 1: Ελαχιστοποίηση της

$$\left\{ f_o \left(\underline{x}, \underline{u}, t \right) + \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{x}} \right)^T f \left(\underline{x}, \underline{u}, t \right) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\} \text{ ως προς } \underline{u} \text{ και αυτό οδηγεί}$$

$$\underline{u}^* = \underline{u}^* \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{x}}, \underline{x}, t \right)$$

ΒΗΜΑ 2: Λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης για $J(\underline{x}, t)$

$$f_o \left(\underline{x}, \underline{u} \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{x}}, \underline{x}, t \right), t \right) + \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{x}} \right)^T f \left(\underline{x}, \underline{u} \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{x}}, \underline{x}, t \right), t \right) + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

Αυτή είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης για

$$J = h_o \left[\underline{x}(t_f), t_f \right] + \int_{t_o}^{t_f} f_o \left(\underline{x}, \underline{u}^*, t \right) dt$$

με οριακή συνθήκη

$$\alpha) J(\underline{x}, t_f) = 0 \text{ για } h=0$$

$$\beta) J(\underline{x}, t_f) = h_o \left[\underline{x}(t_f), t_f \right] \text{ για } h \neq 0$$

ΒΗΜΑ 3: Τοποθέτηση του αποτελέσματος $J(\underline{x}, t)$ του βήματος 2 στην \underline{u}^* του βήματος 1, για να πάρουμε την μορφή του βέλτιστου ελέγχου $\underline{u}^* = \underline{u}^*(\underline{x}, t)$

ΒΗΜΑ 4: Τοποθετούμε το αποτέλεσμα $\underline{u}^*(\underline{x}, t)$ του βήματος 3 στην εξίσωση του συστήματος $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}^*(\underline{x}, t), t)$, $\underline{x}(t_o) = \underline{x}_o$ ώστε με ολοκλήρωση να προκύψει η βέλτιστη τροχιά $\underline{x}^* = \underline{x}^*(t)$

ΒΗΜΑ 5: Τοποθετούμε την λύση $x^*(t)$ του βήματος 4 στην $u^*(x^*,t)$ του βήματος 3 και βρίσκουμε τον βέλτιστο έλεγχο $u^* = u^*(t)$

7.1 Παράδειγμα: Υπολογισμός βέλτιστου ελέγχου στο πρόβλημα LQR με την χρήση HJB

Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$x(0) \xrightarrow[\substack{\dot{x}=Ax+Bu \\ J=J(u)=\min}]{} x(t_e), \quad x(0) = \text{δεδομένο}, \quad x(t_e) = \text{ελεύθερο}, \quad t_e = \text{δεδομένο}$$

Κριτήριο ποιότητας

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_e} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad Q = Q^T \geq 0 \text{ θετικά ημιορισμένος}$$

$$R = R^T > 0 \text{ θετικά ορισμένος}$$

Επίλυση του προβλήματος σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα:

ΒΗΜΑ 1:

$$\min_u \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) Q u(t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T (Ax + Bu) + \frac{\partial J}{\partial t} \right\}$$

για να υπάρχει θα πρέπει να ισχύει η αναγκαία συνθήκη βελτιστότητας

$$\frac{\partial}{\partial u} \{ \dots \} = 0$$

Η αναγκαία συνθήκη βελτιστότητας είναι

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{2} u^T(t) Q u(t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T B u + \right\} = 0$$

από την οποία προκύπτει

$$R u + B^T \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \rightarrow$$

$$u = u^* = -R^{-1} B^T \frac{\partial J}{\partial x}$$

Επειδή $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \{ \dots \} = R$ και $R > 0$ υπάρχει ελάχιστο

ΒΗΜΑ 2: Η μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης για το $J(x,t)$ είναι

$$\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T B (R^{-1})^T R R^{-1} B^T \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T \left(A x - B R^{-1} B^T \frac{\partial J}{\partial x} \right) + \frac{\partial J}{\partial t} = 0$$

$$\text{ή } -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T B R^{-1} B^T \frac{\partial J}{\partial x} + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T A x + \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (7.9)$$

προσέγγιση λύσης: $J(x,t) = \frac{1}{2} x^T P(t) x$ με $P(t) = P^T(t)$

συνεπώς: $\frac{\partial J}{\partial x} = P(t) x$, $\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T \dot{P}(t) x$

Αντικαθιστώντας στην (7.9) προκύπτει

$$-\frac{1}{2} x^T P B R^{-1} B^T P x + \underbrace{x^T P A x}_{\frac{1}{2} x^T (P A + A^T P) x} + \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} x^T \dot{P} x = 0 \Rightarrow$$

$$x^T \left\{ -P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P + Q + \dot{P} \right\} x = 0 \quad (7.10)$$

Η σχέση (7.10) πρέπει να ισχύει για κάθε x , συνεπώς πρέπει να ισχύει $\{ \dots \} = 0$, δηλαδή

$$P B R^{-1} B^T P - P A - A^T P - Q = \dot{P} \quad (7.11)$$

που είναι η γνωστή διαφορική εξίσωση Ricatti όπως την υπολογίσαμε και στις προηγούμενες μεθόδους βελτιστοποίησης.

Η οριακή συνθήκη είναι $P(t_e) = 0$ διότι $J(x(t_e), t_e) = 0$

Στην ειδική περίπτωση $t_e \rightarrow \infty$ προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση Ricatti

$$P_o B R^{-1} B^T P_o - P_o A - A^T P_o - Q = 0$$

διότι $P(t) = P_o = \text{σταθερή}$, $P_o = P_o^T$

ΒΗΜΑ 3: Γραμμικός ρυθμιστής ανατροφοδότησης κατάστασης:

$$u^* = -R^{-1} B^T P(t) x$$

ΒΗΜΑ 4: Ρυθμιζόμενο σύστημα:

$$\dot{x} = [A - B R^{-1} B^T P(t)] x$$

ΒΗΜΑ 5: Με το $x^*(t)$ που υπολογίζεται από το βήμα 4 προκύπτει ο βέλτιστος έλεγχος

$u^*(t)$.

Παράρτημα (Αλγόριθμος κατασκευής διαγραμμάτων LQR)

```
% Matlab programm LQR

>> A=[ ];          system matrix
>> B=[ ];          system matrix
>> C=[ ];          system matrix
>> D=[0];          system matrix
>> Q=[ ];          weight matrix
>> R=[ ];          weight matrix
>> System=ss(A,B,C,D);  Σύστημα στο χώρο της κατάστασης
>> x0=[ ];         Αρχικές τιμές
>> t=0: 0.01: 10;  Διάλυμα τιμών του χρόνου
>> rank(ctrb(System)); Έλεγχος ελεγχιμότητας
>> eig(Q)          Ιδιοτιμές του Q
>> eig(R)          Ιδιοτιμές του R
>> K=lqr(A,B,Q,R);
>> Ag=A-B*K;
>> eig(Ag)
```



```
>> Kreis=ss(Ag,B,C,D);  
  
>> [y,t,x]=initial(Kreis.x0,t);  
  
>> u=-K*x';  
  
>> % plotting  
  
>> plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'g',t,u,'b')  
  
>> legend('x1','x2','u')  
  
>> xlabel('sec')  
  
>> ylabel('x1,x2,u');  
  
>>grid;  
  
>>title('Lqr design');
```



Βιβλιογραφία

- [1] Π.Ν.Παρασκευόπουλου, Αθήνα 2006 “Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο”
- [2] Branislav Kisićanin and Gyan C. Agarwal (2001) “Linear Control Systems”
- [3] Brian D.O. Anderson and John B. Moore (2007) “Optimal Control, Linear Quadratic Methods”
- [4] Otto Föllinger (2008) “Regelungstechnik”
- [5] Donald E. Kirk (2004) “Optimal Control Theory, An Introduction”
- [6] Takashi Ono (1994) “Variations on a Theme of Euler”
- [7] Frank M. White (2011) “Fluid Mechanics”
- [8] Ευάγγελος Β. Χατζίκος (2002) “Matlab για Μηχανικούς”
- [9] www.mathworks.com



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000137368