ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης και
Παραγωγή Διδακτικού Υλικού
Κατεύθυνση Β΄: Επιστήμες του Ανθρώπου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η Εξέλιξη των Μουσικών Συστημάτων: Μια Διδακτική Ιστορικο–Μαθηματική Προσέγγιση σε Μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου του Μουσικού Σχολείου»

Όνομα Φοιτήτριας: Ελένη Νιτσοτόλη

Επιβλέποντες Καθηγητές: Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου
Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης
Παναγιώτης Κανελλόπουλος

ΒΟΛΟΣ
2017

Πίνακας περιεχομένων

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής, Αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, κ. Κωνσταντίνο Χατζηκυριάκου για την ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου και για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις του σε καίρια ζητήματα της έρευνας.

Επίσης, ευχαριστίες εκφράζονται στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, κ. Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη και στον Αναπληρωτή Καθηγητή του Παιδαγωγικού Τμήματος Προσχολικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, κ. Παναγιώτη Κανελλόπουλο, για τις χρήσιμες διορθώσεις και παρατηρήσεις τους στην εργασία μου.

Ακόμη, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους καθηγητές και όλες τις καθηγήτριες του ΠΜΣ του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης για την υποστήριξη και την συνεργασία που προσέφεραν.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία για το χρόνο που διέθεσαν και την εμπειρία που κατέθεσαν.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο το σχεδιασμό, την ανάπτυξη, την εφαρμογή και την αξιολόγηση μιας μαθηματικής προσέγγισης της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων μέσα από τη διαθεματική σύνδεση δύο μαθημάτων, της Μουσικής και των Μαθηματικών. Στόχος της εργασίας είναι αφενός η παρουσίαση ορισμένων μεθοδολογικών προσεγγίσεων και ενδεικτικών δραστηριοτήτων αναφορικά με συγκεκριμένες πτυχές της Μουσικής Θεωρίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών και αφετέρου η εξέταση των αποτελεσμάτων της διαθεματικής διδακτικής παρέμβασης στην απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών. Επιπλέον, διερευνώνται οι στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απέναντι σε καινοτόμες μεθόδους διδασκαλίας του μαθήματος της Μουσικής και των Μαθηματικών.

Ως μεθοδολογικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε η έρευνα–δράση. Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (n=16) και συγκεκριμένα της Γ΄ Γυμνασίου του Μουσικού Σχολείου. Πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε ένα pre–test και ένα post–test αντίστοιχα προκειμένου να αξιολογηθούν οι αλλαγές στην επίδοση των μαθητών στη Μουσική και στα Μαθηματικά καθώς και οι αλλαγές στις στάσεις και στις αντιλήψεις τους απέναντι στα Μαθηματικά.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας προέκυψε ότι οι μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση είχαν καλύτερη επίδοση στις γραπτές δοκιμασίες τόσο στη Μουσική όσο και στα Μαθηματικά. Επιπλέον, η έρευνα κατέδειξε τη θετική επίδραση της διαθεματικής διδασκαλίας της Μουσικής και των Μαθηματικών όσον αφορά τις στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Τα παραπάνω εμπειρικά ευρήματα ανέδειξαν τα οφέλη που αποκτούν οι μαθητές όταν οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν στρατηγικές για το σχεδιασμό και την οργάνωση της διδασκαλίας τους που βασίζονται στη διαθεματική προσέγγιση διακριτών μαθημάτων, όπως είναι τα Μαθηματικά και η Μουσική. Με αυτόν τον τρόπο, οι εκπαιδευτικοί παρέχουν ένα πλούσιο σε ερεθίσματα μαθησιακό περιβάλλον.

Λέξεις-Κλειδιά: Μουσική, Μαθηματικά, Θεωρία της Μουσικής, Ιστορία των Μαθηματικών, διδακτική, μάθηση, διαθεματικότητα, έρευνα– δράση

Abstract

The present thesis refers to the design, development, implementation, and evaluation of a mathematical approach to the historical development of musical tunings based on an interdisciplinary approach through the engagement of two distinct disciplines, Music and Mathematics. The aim of the present study is to present some methodological approaches and indicative learnings activities regarding specific aspects of Music Theory and History of Mathematics along with the effects of music-mathematics integrated lessons on students' knowledge and skills acquisition. Moreover, attitudes and beliefs of secondary school students towards innovative teaching methods of Music and Maths are investigated.

Action research was used as a methodological tool. Secondary–school students (n=16) from the third grade of Musical High School participated in this research study. A pre–test and a post–test were utilized respectively before and after the instructional intervention in order to evaluate changes both in students' performance in Music and Mathematics and in their attitudes and beliefs towards Mathematics.

An analysis of the survey results demonstrated that students achieved better performance on musical and mathematical tests after the intervention. Furthermore, the results demonstrated the music-mathematics interdisciplinary lessons had a positive effect on students' attitude and beliefs toward Mathematics learning. These findings provide empirical evidence of the benefits students enjoy when teachers develop multiple instructional strategies by connecting the content of district disciplines fields, such as Mathematics and Music. In this way, teachers provide a challenging learning environment.

Keywords: Music, Mathematics, Music Theory, History of Mathematics, teaching, learning, interdisciplinarity, action research

Εισαγωγή

Ο ήχος και ειδικότερα ο περιοδικός ήχος αποτελεί τη βάση της μουσικής δημιουργίας. Η κωδικοποίηση και συστηματοποίηση των βασικών χαρακτηριστικών του (συχνότητα, ένταση, διάρκεια, χροιά) και η συγκρότησή τους σε μουσικά συστήματα αποτέλεσε διεπιστημονικό αντικείμενο μελέτης διαχρονικά τόσο της μουσικής επιστήμης όσο και άλλων επιστημονικών κλάδων όπως τα Μαθηματικά και η Φυσική. Παρόλο που η οργάνωση του μουσικού υλικού βασίζεται στις φυσικές ιδιότητες του ήχου, εντούτοις καθοριστικό ρόλο στη δημιουργία των μουσικών κλιμάκων (musical scales) και των διαστηματικών συστημάτων (interval systems) διαδραμάτισαν και άλλα πρακτικά ζητήματα όπως είναι η τεχνογνωσία για την κατασκευή μουσικών οργάνων καθώς επίσης το είδος της μουσικής δημιουργίας που διαμορφώνεται με βάση τις πολιτισμικές νόρμες (cultural norms) της εκάστοτε κοινωνίας (Lehman, 2005). Για το λόγο αυτό ποικίλα μουσικά συστήματα αναδύθηκαν στους διάφορους πολιτισμούς. Κατά συνέπεια, η εξέλιξη των μουσικών συστημάτων αντικατοπτρίζει όχι μόνο τις αλλαγές στη μουσική έκφραση και δημιουργία αλλά ταυτόχρονα καταδεικνύει την ίδια την εξέλιξη της επιστήμης και της τεχνολογίας και εν τέλει αποκρυσταλλώνει τις ευρύτερες κοινωνικές αλλαγές (Christensen, 2008).

Η κατασκευή ενός λειτουργικού μουσικού συστήματος είναι μία περίπλοκη διαδικασία και συναρτάται με το είδος και το επίπεδο της μαθηματικής γνώσης κάθε εποχής (Κεΐσογλου & Σπύρου, 2000). Θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες όπως οι αριθμητικές αναλογίες, οι άρρητοι αριθμοί υπήρξαν καθοριστικές για τη μαθηματική δομή των μουσικών συστημάτων. Έτσι λοιπόν, από τη συγκρότηση του πρώτου μουσικού συστήματος του Πυθαγόρα το οποίο βασίστηκε στην έκφραση των μουσικών διαστημάτων με αριθμητικές αναλογίες, μέσα από μία διαρκή προσπάθεια επαναπροσδιορισμού των μουσικών συστημάτων καταλήξαμε στη συγκερασμένη Μουσική η οποία κατέκτησε το σύνολο της δυτικής Μουσικής δημιουργίας από την εποχή του J.S.Bach. Καθοριστικό ρόλο στη μετάβαση αυτή διαδραμάτισε η αλλαγή της επιστημονικής σκέψης και η μελέτη των μουσικών φαινομένων υπό το πρίσμα των παλμικών κινήσεων.

Η γνώση των μουσικών συστημάτων και των δομικών τους συστατικών στοιχείων αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την περαιτέρω μελέτη της μουσικής πρακτικής και θεωρίας. Για το λόγο αυτό είναι αναπόσπαστο στοιχείο της μουσικής εκπαίδευσης. Παράλληλα, η μαθηματική θεώρηση των μουσικών διαστημάτων και κλιμάκων συμβάλλει στην ολοκληρωμένη κατανόησή τους (Fauvel et al., 2003). Επιπλέον, η χρήση της Μουσικής μπορεί να πλαισιώσει μια αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών (An et al., 2013; Still & Bobis, 2005). Έχοντας λοιπόν ως στόχο την επίτευξη σφαιρικής γνώσης των μουσικών φαινομένων από τους μαθητές καθώς επίσης και την ανάπτυξη αποτελεσματικών μορφών διδασκαλίας των Μαθηματικών δημιουργήθηκε και εφαρμόστηκε το παρόν διδακτικό υλικό το οποίο βασίστηκε στη διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών με έμφαση στα μουσικά συστήματα.

Δομή της έρευνας

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη, στο θεωρητικό και στο εμπειρικό. Το *πρώτο μέρος* περιλαμβάνει τη θεωρητική προσέγγιση, που αποτέλεσε και το πλαίσιο για τη διεξαγωγή της έρευνας, και χωρίζεται σε δύο κεφάλαια.

Στο 1ο κεφάλαιο εξετάζεται η διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών σε γνωστικό, παιδαγωγικό και διδακτικό επίπεδο. Επίσης, διερευνάται η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών αλλά και ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να ενταχθεί η ιστορική προσέγγιση στη διδακτική πράξη.

Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη των μουσικών συστημάτων υπό το πρίσμα των Μαθηματικών. Αναλύονται οι μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με τη διαμόρφωση των μουσικών διαστημάτων και κλιμάκων στην πυθαγόρεια Μουσική και στην δυτική ευρωπαϊκή μουσική παράδοση.

Το *δεύτερο μέρος*, δηλαδή το ερευνητικό μέρος της εργασίας, περιλαμβάνει το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας και τη δημιουργία και εφαρμογή της διδακτικής πρότασης στη σχολική τάξη με τη διενέργεια έρευνας δράσης. Χωρίζεται σε πέντε κεφάλαια, που ακολουθούν ενιαία αρίθμηση:

Στο 3ο κεφάλαιο καταγράφονται ο σκοπός, οι στόχοι και τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας και αιτιολογείται η σπουδαιότητα και η σημασία της. Επιπλέον, παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας η οποία πραγματοποιήθηκε στα τρία επιμέρους στάδια του σχεδιασμού, της εφαρμογής και της αξιολόγησης.

Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο σχεδιασμός της διαθεματικής διδακτικής παρέμβασης που αφορά την αξιοποίηση της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων με έμφαση στη μαθηματική τους δομή στη διδασκαλία τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκεκριμένα στα Μουσικά Σχολεία μέσα στα πλαίσια του σημερινού προγράμματος σπουδών.

Στο 5ο κεφάλαιο περιγράφονται αναλυτικά όλα τα στάδια της παρέμβασης αυτής όπως επίσης και η χρονική διάρκεια καθενός από αυτά. Επιπρόσθετα, αναλύονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι και οι τρόποι επίτευξής τους (τρόπος παρουσίασης του διδακτικού υλικού, φύλλα εργασίας, ερωτηματολόγια κ.λ.π.).

Στο 6ο κεφάλαιο γίνεται αναλυτική παρουσίαση των ευρημάτων της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται αναλυτικά τα ευρήματα κάθε φάσης της έρευνας αλλά και σχολιάζονται τα δεδομένα από τις επιδόσεις των μαθητών σε κάθε μέρος του Τεστ Γνώσεων και Δεξιοτήτων και του Ερωτηματολογίου Στάσεων και Αντιλήψεων πριν και μετά την παρέμβαση.

Στο 7ο κεφάλαιο γίνεται μία γενική αποτίμηση της εκπαιδευτικής παρέμβασης και καταγράφονται τα συμπεράσματα της έρευνας και επιπλέον κατατίθενται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Τέλος, ακολουθεί το παράρτημα στο οποίο περιλαμβάνονται τα ερευνητικά εργαλεία της έρευνας καθώς επίσης και το διδακτικό υλικό που χρησιμοποιήσαμε στη διδακτική μας παρέμβαση.

Μέρος Α΄: Θεωρητικό πλαίσιο

Κεφάλαιο 1

1. Η Διασύνδεση Μουσικής και Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά και η Μουσική αποτελούν δύο διακριτά αλλά αλληλοσυσχετιζόμενα πεδία της ανθρώπινης δημιουργίας και του παγκόσμιου πολιτισμού. Η συσχέτιση της Μουσικής με τα Μαθηματικά είναι αποτέλεσμα της συνεχούς προσπάθειας αναγωγής όλων των ποιοτικών φαινομένων σε ποσότητες δηλαδή της μαθηματικοποίησής τους (Κεΐσογλου & Σπύρου, 2000). Ανεξάρτητα όμως από την επιστημολογική τους θεώρηση, τόσο η Μουσική όσο και τα Μαθηματικά αποτελούν αναπόσπαστα στοιχεία των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών των εκπαιδευτικών συστημάτων σε ευρωπαϊκό και σε παγκόσμιο επίπεδο. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τα κοινά σημεία της Μουσικής και των Μαθηματικών σε επιστημολογικό επίπεδο αλλά και τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να συνυπάρξουν μέσα στην εκπαιδευτική διαδικασία.

1.1. Η αλληλένδετη σχέση της Μουσικής και των Μαθηματικών μέσα από την επιστημολογική τους αμφίδρομη εξελικτική πορεία

Μέσα από τη διαχρονική ανάλυση της σχέσης της Μουσικής και των Μαθηματικών, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα Μαθηματικά αποτέλεσαν τη μεθοδολογική βάση τόσο για τη μουσική θεωρία όσο και στη μουσική δημιουργία (Popescu & Goldbach, 2011). Η στενή σχέση της Μουσικής και της Μουσικής Θεωρίας με τα Μαθηματικά τοποθετείται χρονικά ήδη από την Αρχαία Ελλάδα όπως μαρτυρούν πηγές της αρχαίας ελληνικής γραμματείας. Ένας μεγάλος αριθμός αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων και μαθηματικών (Πυθαγόρας, Αριστόξενος, Πλάτωνας, Αριστοτέλης, Ευκλείδης, Πτολεμαίος) προσπάθησαν να συσχετίσουν τη Μουσική με τα Μαθηματικά (Καϊμάκης, 2004). Στην προσπάθεια αυτή να εκφραστεί αυτός ο συσχετισμός με σταθερές αριθμητικές σχέσεις δεν έπαιξαν ρόλο μόνο οι πρακτικές ανάγκες της Μουσικής (κατασκευή μουσικών οργάνων) αλλά και οι γενικές αντιλήψεις για την φύση και τον κόσμο που είχαν συχνά μυστικιστικό χαρακτήρα.

Στην αρχαιότητα, οι αριθμοί ήταν υπόδειγμα εννοιών ασχέτων προς τη φύση που ο ανθρώπινος νους μπορούσε να συλλάβει και να διατυπώσει με απόλυτη σαφήνεια και επιπλέον τα γεωμετρικά σχήματα αντιπροσώπευαν «καθαρά» σχήματα τα οποία ήταν ανεξάρτητα από την αισθητηριακή αντίληψη. Και επειδή οι αριθμητικές και γεωμετρικές σχέσεις φαίνονταν τόσο ξένες προς την αισθητηριακή αντίληψη, δημιουργούσαν την εντύπωση ότι είναι εκφράσεις ενός υπερβατικού κόσμου, προσιτές με απόλυτη σαφήνεια και λογική συνέπεια στην ανθρώπινη νόηση (Γιάννου, 1995). Μόνο ένας τομέας γήινων φαινομένων προσιτών στην αισθητηριακή αντίληψη φαινόταν πως μπορούσε να συσχετισθεί με αριθμούς και μεγέθη: ο τομέας των ηχητικών φαινομένων και μάλιστα των μουσικών ηχητικών φαινομένων. Γιατί μόνο σ’ αυτά φαινόταν για τους αρχαίους να ισχύει ο συσχετισμός ήχου και αριθμού. Το ενδιαφέρον για την αριθμητική έκφραση ηχητικών σχέσεων (και αντίστροφα) καθοριζόταν έτσι από κοσμοθεωρητικές αντιλήψεις.

Σύμφωνα με την πυθαγόρεια θεώρηση, η Μουσική είναι αδιαχώριστη από τα Μαθηματικά, αποτελεί την αρμονική αντανάκλαση των αριθμών και κατ’ επέκταση είναι η «έσχατη πραγματικότητα» (“ultimate reality”) (Christensen, 2002). Η Μουσική αποτελούσε τη «Θεωρία των Λόγων» και οι αρμονικές συνηχήσεις της μπορούσαν να εκφραστούν μέσω των αριθμητικών σχέσεων δύο ήχων (Σπυρίδης, 1997). Συγκεκριμένα, τα αρμονικά μουσικά διαστήματα της 8^{ης}, 5^{ης}, και 4^{ης} που παράγονται όταν τα μήκη μιας χορδής έχουν λόγο 2:1, 3:2 και 4:3 αντίστοιχα, βασίζονται στην πραγματικότητα σε μαθηματικές σχέσεις και έχουν μαθηματικές ιδιότητες. Ο βασικός τρόπος μελέτης της Μουσικής ήταν μέσω της μελέτης των λόγων (Ferreira, 2002). Κατά συνέπεια, η Μουσική διέπεται από μία μαθηματική τάξη και οργανώνεται με βάση μαθηματικές αρχές (Καϊμάκης, 2004; Γιάννου, 1995). Μάλιστα, για τους Πυθαγόρειους οι αριθμητικοί λόγοι των αρμονικών διαστημάτων εξέφραζαν και τις σχετικές αποστάσεις και ταχύτητες των πλανητών συνδέοντας έτσι την νομοτελειακή τάξη του σύμπαντος με τη μουσική αρμονία όπως αυτό διατυπώθηκε μέσα από το δόγμα τους που αφορούσε την «Αρμονία των Σφαιρών» (Christensen, 2008). Ανεξάρτητα όμως από τη μυστικιστική και κοσμογονική διάσταση του αρχαιοελληνικού μουσικοθεωρητικού στοχασμού, αξιοσημείωτο επιστημονικό επίτευγμά του είναι η ανακάλυψη, η διατύπωση και η κωδικοποίηση θεμελιακών μαθηματικών σχέσεων που διέπουν τους μουσικούς ήχους. Έτσι, τέθηκαν τα θεμέλια για την δημιουργία του κλάδου της Ακουστικής αλλά και της επιστημονικής θεώρησης της Μουσικής Θεωρίας (Γιάννου, 1995).

Η ισότιμη σχέση της Μουσικής με τα Μαθηματικά στους αρχαιοελληνικούς χρόνους διαφαίνεται και από το γεγονός ότι η Μουσική συγκαταλεγόταν ως τρίτο μέρος ανάμεσα στα τέσσερα μέρη (Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική, Αστρονομία) της μαθηματικής επιστήμης (Σπυρίδης, 1997). Από αυτές, η Αριθμητική και η Μουσική σχετίζονταν με την ποσότητα, ενώ η Γεωμετρία και η Αστρονομία με το μέγεθος. Αυτό το περιεχόμενο και ο διαχωρισμός των Μαθηματικών έγινε αποδεκτό από τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη και διατηρήθηκε επί αιώνες ως καθιερωμένη σχολική ύλη.

Η θεώρηση της Μουσικής ως αλληλένδετη επιστήμη με τα Μαθηματικά συνεχίστηκε και στο Μεσαίωνα όπως μαρτυρεί το σύστημα κατάταξης των επιστημών της εποχής. Σύμφωνα μ’ αυτήν την κωδικοποίηση, που διατήρησε την ισχύ της μέχρι τους νεότερους χρόνους και αποτέλεσε τη βάση οργάνωσης των μαθημάτων στην Factulas Artium των πανεπιστημίων μέχρι τον 17^{ο}/18^{ο} αιώνα μ.Χ., οι ελευθέριες επιστήμες/τέχνες ήταν επτά και χωρίζονταν σε δύο ομάδες, στο Trivium που περιλάμβανε την Γραμματική, τη Ρητορική και τη Διαλεκτική και στο Quadrivium που περιλάμβανε τη Γεωμετρία, την Αριθμητική, την Αστρονομία και την Αρμονική (= Μουσική) (Christensen, 2008; Fauvel, et.al., 2003).

Η Αναγέννηση αποτελεί ορόσημο για την επιστημονική εξέλιξη της Μουσικής καθώς συντελείται η μετάβαση από μία μαθηματική–κοσμολογική–υπολογιστική οπτική της Μουσικής θεωρίας σε ένα μαθηματικό–φυσικό–εμπειρικό μοντέλο θεώρησής της (Abdounur, 2008; 2015). Η γένεση της νεότερης Φυσικής το 17^{ο} αιώνα μ.Χ. είχε ως αποτέλεσμα την αναγωγή των φαινομένων της φύσης σε μεγέθη που μετρούνται και τη διατύπωση των νομοτελειών της φύσης με τη μορφή των μαθηματικών τύπων. Η επιστημονική έρευνα για τη μελέτη των μουσικών φαινομένων στηριζόμενη στην έννοια των παλμικών κινήσεων εστιάζει πλέον στον τρόπο παραγωγής των μουσικών ήχων σε αντίθεση με τους Πυθαγόρειους που ασχολήθηκαν με τις αριθμητικές σχέσεις των ήχων (Κεΐσογλου & Σπύρου, 2000). Έτσι αναδύεται ο νέος διεπιστημονικός κλάδος της Ακουστικής ο οποίος ασχολείται με την ερμηνεία της Μουσικής με βάση τους νόμους της Φυσικής οι οποίοι εκφράζονται μέσα από μαθηματικές σχέσεις (Fauvel, et.al., 2003).

Στη σημερινή εποχή έχουν αναπτυχθεί μαθηματικές θεωρίες μουσικής σύνθεσης. Πρόκειται για πρωτοποριακές συνθετικές μεθόδους που συσχετίζουν τη Μουσική με τα Μαθηματικά μέσω της χρησιμοποίησης μοντέλων όπως για παράδειγμα από τη Θεωρία των Συνόλων, τη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Στους συνθέτες που στήριξαν τη μουσική τους δημιουργία στην παραπάνω προσέγγιση συγκαταλέγονται οι Schoenberg, Bartok, Ξενάκης, Messian κ.ά.

1.2. Σημεία σύγκλισης της Μουσικής και των Μαθηματικών στα πλαίσια της Διδακτικής

Η σύγχρονη επιστημολογική αντίληψη βασίζεται στην αναζήτηση κοινών σημείων ανάμεσα στους επιστημονικούς κλάδους και στη διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης. Εξάλλου, η εξελικτική πορεία των επιστημών αντικατοπτρίζει τη μετάβαση από το πολυεπιστημονικό στάδιο κατά το οποίο οι επιστήμες οργανώνονται σε διακριτές γνωστικές περιοχές διατηρώντας την αυτονομία τους χωρίς να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους στο διεπιστημονικό στάδιο όπου οι επιστημονικοί χώροι επικοινωνούν και αλληλοτροφοδοτούνται. Η παραπάνω αλλαγή συντελέστηκε στην επιστημονική σκέψη καθώς κατέστη σαφές ότι ο κατακερματισμός της γνώσης αποδεικνύεται ανεπαρκής για να αντιμετωπίσει τα πολυδιάστατα προβλήματα και για να βρει τις αιτιώδεις σχέσεις τους. Έχει υποστηριχθεί ότι όταν η γνώση παρουσιάζεται με βάση την αρχή της Διεπιστημονικότητας (Interdisciplinary) και της Ενιαιοποίησης (Integration), τότε μπορεί να συνδεθεί και να έχει νόημα για τις πραγματικές συνθήκες της καθημερινής ζωής και να είναι ταυτόχρονα αποτελεσματική για την επίλυση προβλημάτων (Ματσαγγούρας, 2002). Επίσης, σύμφωνα με τα νεότερα πορίσματα της ψυχολογίας της μάθησης το παιδί αντιλαμβάνεται τον κόσμο ως ολότητα (Κολιάδης, 2002; Φουντοπούλου, 2005; 2011). Συνεπώς, προτείνεται η σχολική γνώση για λόγους ψυχολογικούς και διδακτικούς να διδάσκεται σε ενιαιοποιημένη μορφή προσφέροντας έτσι ολιστικές εικόνες της πραγματικότητας, να έχει άμεση σχέση με τις εμπειρίες και την πραγματικότητα που βιώνουν οι μαθητές καθώς με τον τρόπο αυτό γίνεται κατανοητή και ενδιαφέρουσα και τέλος, να προσεγγίζεται με διερευνητικές μεθόδους δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στους ίδιους τους μαθητές να οικοδομήσουν τη γνώση τους (Chrysostomou, 2004; Σκούρας, 2002).

1.2.1. Τέχνη και Διαθεματικότητα

Οι παραπάνω εξελίξεις σε επιστημολογικό και ψυχολογικό επίπεδο επηρέασαν τη διαμόρφωση του κλάδου της Διδακτικής. Για την επιλογή και την οργάνωση της σχολικής γνώσης έχει προταθεί η διαθεματική προσέγγιση (cross curricular thematic approach ή cross – thematic integration) που καταλύει τα διακριτά μαθήματα και αντιμετωπίζει τη γνώση ως ενιαία ολότητα στοχεύοντας στην ανάδειξη των διασυνδέσεων που υπάρχουν μεταξύ των γνωστικών αντικειμένων (Ματσαγγούρας, 2002). Η διαθεματικότητα, ως τρόπος διδακτικής προσέγγισης υιοθετεί κατά βάση τις συλλογικές μεθόδους διερεύνησης των θεμάτων, ζητημάτων και προβληματικών καταστάσεων που άπτονται των ενδιαφερόντων των μαθητών. Μέσα στο παραπάνω διδακτικό πλαίσιο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κατανοήσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις επιμέρους γνωστικές περιοχές (Battersby & Cave, 2014). Ένα ακόμη χαρακτηριστικό γνώρισμα της γνώσης σε μορφές διαθεματικές διδασκαλίας είναι το κοινωνικό πλαίσιο μέσα στο οποίο συντελείται (κοινωνικός κονστρουκτιβισμός) (Κολιάδης, 2002). Συγγενής όρος με τη διαθεματικότητα χωρίς να είναι ταυτόσημος είναι η διεπιστημονικότητα (interdisciplinarity) κατά την οποία τα γνωστικά αντικείμενα του αναλυτικού προγράμματος διατηρούνται ως διακριτά σχολικά μαθήματα το περιεχόμενο των οποίων αλληλοσχετίζεται και διασυνδέεται εξασφαλίζοντας έτσι την σφαιρικότερη κα πληρέστερη μελέτη τους (Αλαχιώτης, 2002; Θεοφιλίδης, 1997). Στη διεπιστημονική προσέγγιση ένα θέμα επεξεργάζεται από την πλευρά διαφορετικών επιστημών και στη συνέχεια επιχειρείται η σύνθεση της γνώσης που προκύπτει από τη μελέτη αυτή.

Η χρησιμοποίηση της τέχνης ως πλαίσιο ανάπτυξης διαθεματικών προσεγγίσεων, έχει πολλαπλά οφέλη για τους μαθητές καθώς τους βοηθάει να αναπτύξουν την αυτοπεποίθησή τους, την αισθητική τους ευαισθησία, την εκφραστικότητά τους και τη δημιουργικότητά τους μέσα από κοινωνικά κατασκευασμένες και πολιτισμικά διαμορφωμένες εμπειρίες (Chrysostomou, 2004; Gershon et. al., 2014; Marshall, 2005). Παράλληλα, δημιουργείται ένα ευχάριστο μαθησιακό περιβάλλον μέσα στο οποίο μειώνονται τα επίπεδα άγχους και του φόβου της αποτυχίας, προωθείται η ανακαλυπτική βιωματική και διερευνητική μάθηση και στο οποίο οι μαθητές αναπτύσσονται γνωστικά, συναισθηματικά και κοινωνικά (Chrysostomou, 2004). Τέλος, μέσα από τη διαθεματική προσέγγιση της τέχνης με άλλα γνωστικά αντικείμενα όπως είναι τα Μαθηματικά καλλιεργούνται οι πολλαπλές εναλλακτικές προσεγγίσεις για την επίλυση ενός προβλήματος καθώς το ίδιο το πρόβλημα αναπαρίσταται από διαφορετικές οπτικές γωνίες (An et. al, 2013; Catterall, 1998; Gershon et. al., 2014).

1.2.2. Η Μουσική ως διδακτικό εργαλείο για την αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών αποβλέπει στην απόκτηση μαθηματικών γνώσεων και στην ανάπτυξη βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων, στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και αρχών, στην εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμού και την αποδεικτική διαδικασία, στην ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, στη δυνατότητα εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών και στην εξοικείωση με τη μαθηματική γλώσσα και τη χρήση της ως μέσο επικοινωνίας (Hilton, et.al, 2015). Λόγω της πολύπλοκης φύσης τους αλλά και δεδομένου ότι ο τρόπος μάθησης διαφοροποιείται από μαθητή σε μαθητή δεν υπάρχει μία ιδανική παιδαγωγική και διδακτική προσέγγιση που να προσιδιάζει σε όλες τις περιπτώσεις. Επιπλέον, η παραδοσιακή μέθοδος διδασκαλίας των Μαθηματικών φαίνεται να είναι αναποτελεσματική καθώς αδυνατεί να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να ανταποκριθεί στις ανάγκες τους (An & Tillman, 2015). Έτσι, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τα Μαθηματικά σαν ένα σώμα αδιάφορων πληροφοριών χωρίς να μπορούν να κάνουν τους κατάλληλους συσχετισμούς με την καθημερινή τους εμπειρία. Επίσης, οι υπάρχοντες τρόποι διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι σε πολλές περιπτώσεις δασκαλοκεντρικές, βασίζονται κατά κύριο λόγο στο σχολικό εγχειρίδιο, παρουσιάζουν με τον ίδιο τρόπο ένα πρόβλημα σε όλους τους μαθητές ανεξαρτήτως από το βαθμό της αντιληπτικής τους ικανότητας, περιορίζονται στην παρουσίαση ενός μόνο τρόπου επίλυσης των προβλημάτων χωρίς να παρουσιάζουν εναλλακτικές προσεγγίσεις ενώ ταυτόχρονα δημιουργούν ένα αγχώδες περιβάλλον που δεν ευνοεί τη μαθησιακή διαδικασία (An et. al, 2013; Furner & Berman, 2005; Hilton, et.al, 2015). Για τον λόγο αυτό η σύγχρονη έρευνα της διδακτικής των Μαθηματικών έχει επικεντρωθεί στη διερεύνηση αποτελεσματικών διδακτικών προσεγγίσεων.

Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών αφορά στην αξιοποίηση της Μουσικής στη μαθηματική εκπαίδευση. Όπως προκύπτει από τα ερευνητικά δεδομένα, υπάρχει μεγάλη συσχέτιση της Μουσικής και των Μαθηματικών σε ψυχογνωστικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, η χρήση της Μουσικής φαίνεται να έχει θετική επίδραση στις επιδόσεις και στη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά σύμφωνα με έναν μεγάλο αριθμό ερευνητών (An, Ma, & Capraro, 2011; Costa-Giomi, 2004; Johnson & Edelson, 2003). Μουσικές δραστηριότητες όπως η μουσική ακρόαση καθώς και η εκμάθηση κάποιου μουσικού οργάνου ενισχύουν τις δεξιότητες στα Μαθηματικά (Costa-Giomi, 2004; Cox & Stephens, 2006). Πιθανότατα, η θετική συσχέτιση που παρατηρείται ανάμεσα στη Μουσική και στα Μαθηματικά οφείλεται στο γεγονός ότι η Μουσική δραστηριοποιεί τις ίδιες περιοχές του εγκεφάλου που είναι υπεύθυνες και για το μαθηματικό συλλογισμό (Rauscher et al., 1995).

Αρκετές έρευνες επικεντρώνονται στο αν η Μουσική είναι ένα αποτελεσματικό μέσο για την επίτευξη των εκπαιδευτικών στόχων του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών. Και αυτό γιατί μπορεί να αποτελέσει ένα πλαίσιο με νόημα για τα Μαθηματικά μέσα στο οποίο οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να δομήσουν νέες έννοιες, να εξασκήσουν νέες δεξιότητες και να αποκτήσουν νέες στάσεις και συναισθήματα απέναντι στα Μαθηματικά (An & Tillman, 2015). Όταν μάλιστα η μάθηση των Μαθηματικών συντελείται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο το οποίο βασίζεται στις εμπειρίες των παιδιών τότε μπορεί να επιτυγχάνεται η ενεργοποίηση τους σε καταστάσεις και προβλήματα που τους είναι οικεία δημιουργώντας ταυτόχρονα περισσότερα κίνητρα και αποτελεσματικότερη μάθηση (Λεμονίδης, 2010).

Τα δομικά συστατικά στοιχεία της Μουσικής όπως είναι η μελωδία, ο ρυθμός, η αρμονία, τα διαστήματα, οι κλίμακες, τα μουσικά συστήματα σχετίζονται άμεσα με μαθηματικές έννοιες και τομείς των Μαθηματικών όπως είναι οι αναλογίες, τα κλάσματα, οι ακέραιοι αριθμοί, οι λογάριθμοι, οι αριθμητικές πράξεις, η άλγεβρα, η τριγωνομετρία, η γεωμετρία (Beer, 1998). Μέσα από τη σύνθεση εννοιών από διαφορετικές πηγές όπως είναι η Μουσική και τα Μαθηματικά δημιουργείται μια πλατιά εννοιολογική βάση, στην οποία η γνώση γίνεται πλουσιότερη και πιο πολύπλευρη. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές μέσω της εμπλοκής τους σε διαθεματικές δραστηριότητες με κεντρικό άξονα τη Μουσική να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και να εφαρμόσουν τις μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε καταστάσεις της πραγματικής ζωής ενώ, ταυτόχρονα, ενισχύεται η αντίληψη των εννοιών της ίδιας της Μουσικής (An & Capraro, 2011; An, Capraro, & Tillman, 2013; Costa-Giomi, 2005). Ειδικότερα, όπως προκύπτει από τα πορίσματα διαφόρων ερευνών, η μουσική σύνθεση και οι ασκήσεις που αφορούν την κατασκευή μουσικών οργάνων βοηθούν ιδιαίτερα τους μαθητές να διερευνήσουν, να αναλύσουν, να κατανοήσουν σε βάθος και να εφαρμόσουν έννοιες των Μαθηματικών (An, Capraro, & Tillman, 2013; An, Ma, & Capraro, 2011; Rogers, 2004; Χιοκτουρίδη, Χατζηκυριάκου & Ασημόπουλος, 2015α; 2015β).

Μέσω των διαθεματικών μουσικο–μαθηματικών δραστηριοτήτων οι μαθητές δημιουργούν συνδέσεις ανάμεσα στις μουσικές εμπειρίες και σε αποσπασματικές μαθηματικές έννοιες που συνεπάγονται αυτές. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η μεταφορά γνώσης από ένα πλαίσιο τέχνης σε ένα διαφορετικό γνωστικό πεδίο όπως είναι τα Μαθηματικά, διαδικασία ιδιαίτερα σημαντική για τη επίτευξη της μάθησης (Catterall, 2005). Οι μουσικές δηλαδή δραστηριότητες δημιουργούν το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο προωθείται η μεταφορά της μαθηματικής γνώσης (Johnson & Edelson, 2003).

Στο παραπάνω διδακτικό πλαίσιο προωθείται η ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική κατά την οικοδόμηση νοημάτων (Abdonour, 2012). Ο σχεδιασμός μαθηματικών και μουσικών σεναρίων μέσω των οποίων θα αναδεικνύεται η πολλαπλότητα της λειτουργίας των εννοιών σε διαφορετικά πλαίσια είναι μία αποτελεσματική στρατηγική κατασκευής νοημάτων. Οι μαθητές μέσα από διαδικασίες, προβλήματα και δραστηριότητες εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές, συγκρίνουν, αντιπαραβάλουν, κατανοούν και δημιουργούν μεταφορές και αναλογίες ανάμεσα στη Μουσική και τα Μαθηματικά. Για να είναι επιτυχής η δημιουργία αναλογιών ανάμεσα στις δύο περιοχές απαραίτητη προϋπόθεση είναι η επιλογή μόνο των στοιχείων εκείνων από κάθε τομέα βάσης που θα μπορούν να εφαρμοστούν στον τομέα στόχο (Abdonour, 2012).

Βέβαια, για να διασφαλιστεί η μάθηση τόσο για τα Μαθηματικά όσο και για τη Μουσική, είναι ιδιαίτερα σημαντικό κατά τη διασύνδεση της Μουσικής με τα άλλα διδακτικά αντικείμενα, μεταξύ των οποίων και τα Μαθηματικά, να διατηρηθεί η αξία της ως διδακτικό αντικείμενο και να μην αντιμετωπισθεί μόνο ως μέσο διδασκαλίας των άλλων μαθημάτων όπως διαπιστώνει ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών (Barrett, 2001; Bresler, 1995; Burton, 2001; Chrysostomou, 2004; Roucher & Lovano-Kerr, 1995; Veblen & Elliott, 2000). Στην πράξη, πολύ συχνά η Μουσική χάνει τον αυτοτελή χαρακτήρα της προκειμένου να αποτελέσει απλά μέρος σε ένα διαθεματικό πρόγραμμα εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που ένας καθηγητής Μαθηματικών χρησιμοποιεί τη Μουσική απλά ως υπόκρουση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του, αν και αποτελεί μία ενδιαφέρουσα μεθοδολογική προσέγγιση δεν συνιστά όμως μια διαθεματική προσέγγιση (Chrysostomou, 2004). Βασική προϋπόθεση για να επιτευχθεί η διασύνδεση μεταξύ διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων αρχικά είναι η ανάδειξη και προώθηση γνώσεων που έχουν αξία και νόημα στα επιμέρους αντικείμενα (Barrett, 2001). Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να έχει προηγηθεί η διδασκαλία των βασικών αρχών και στόχων της Μουσικής προτού οι μαθητές συσχετίσουν τις μουσικές γνώσεις τους με τις πληροφορίες από άλλα αντικείμενα (Chrysostomou, 2004).

Για τον τρόπο αξιοποίησης της Μουσικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι και προσεγγίσεις (Ann, 2013; Barrett, 2001). Ανάλογα με το ρόλο που έχει η τέχνη και κατ' επέκταση η Μουσική σε ένα διαθεματικό πλαίσιο διδασκαλίας μπορούμε να διακρίνουμε τέσσερις τύπους διασύνδεσής της: το βοηθητικό (subservient), το συναισθηματικό (affective), τον κοινωνικό (social) και τον ισότιμα– γνωστικό (coequal-cognitive) (Bresler,1995). Στην πρώτη περίπτωση που είναι και η πιο προσφιλής, η Μουσική χρησιμοποιείται υποστηρικτικά και ουσιαστικά περιορίζεται ως ένα εναλλακτικό μέσο διδασκαλίας του άλλου μαθήματος (πχ. χρήση μουσικού ρυθμού για την κατανόηση της έννοιας των κλασμάτων). Ο δεύτερος τρόπος χρήσης της Μουσικής είναι ο συναισθηματικός, κατά τον οποίο χρησιμοποιείται για να αλλάξει η διάθεση των μαθητών κατά τη διάρκεια του μαθήματος (πχ. ως μουσική υπόκρουση). Βέβαια, η χρήση της Μουσικής όταν περιορίζεται μόνο είτε ως βοηθητικό εργαλείο είτε για συναισθηματικούς λόγους έχει ως αποτέλεσμα την αντιμετώπισή της ως ένα μάθημα λιγότερης σπουδαιότητας σε σχέση με τα άλλα μαθήματα του αναλυτικού προγράμματος και ουσιαστικά αποτελεί ένα διάλειμμα στην καθημερινότητα των μαθητών αγνοώντας τη λειτουργία της ως μέσο συναισθηματικής και γνωστικής ανάπτυξης. Ο τρίτος τρόπος καταδεικνύει τον κοινωνικό ρόλο της Μουσικής που μπορεί να διαδραματίσει μέσα στη σχολική κοινότητα και αναφέρεται στην ενσωμάτωσή της στις εκδηλώσεις του σχολείου και στην συμμετοχή των μαθητών σε αυτές μέσα από τα μουσικά σύνολα. Ο τέταρτος τύπος διαθεματικής διδασκαλίας είναι ο ισότιμα–γνωστικός τύπος ο οποίος αναγνωρίζει τη Μουσική ως εξίσου σημαντικό μάθημα με τα άλλα γνωστικά αντικείμενα όπως τα Μαθηματικά. Επειδή απαιτούνται αυξημένες γνώσεις και δεξιότητες από τους εκπαιδευτικούς για την εφαρμογή του παραπάνω μοντέλου ενσωμάτωσης της Μουσικής, χρησιμοποιείται σε περιορισμένη κλίμακα.

Τέλος, για τη διερεύνηση και ερμηνεία της παιδαγωγικής των Μαθηματικών που χρησιμοποιεί τη Μουσική ως εκπαιδευτική πηγή έχει χρησιμοποιηθεί η έννοια της πολλαπλής νοημοσύνης που εισήγαγε ο Gardner (1983, 1999). Σύμφωνα με τη θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης, η νοημοσύνη είναι ένα πολυδιάστατο χαρακτηριστικό και διακρίνεται σε επτά επιμέρους μορφές που αλληλεπιδρούν:

λεκτική/γλωσσική, λογική/μαθηματική, μουσική/ρυθμική, οπτική/χορική, σωματική/κιναισθητική, διαπροσωπική, ενδοπροσωπική. Ωστόσο, τα υπάρχοντα αναλυτικά προγράμματα, όπως καταγράφεται στη διεθνή βιβλιογραφία, δίνουν έμφαση στην καλλιέργεια κυρίως των λογικομαθηματικών και των γλωσσικών δεξιοτήτων χωρίς να ευνοείται ιδιαίτερα η ανάπτυξη άλλων δυνατοτήτων και κλίσεων των μαθητών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές που διαθέτουν γλωσσικές και λογικομαθηματικές δεξιότητες να συμμετέχουν αποτελεσματικότερα στην εκπαιδευτική διαδικασία, εξασφαλίζοντας σχολική επιτυχία και αυτοπεποίθηση, ενώ στους μαθητές που έχουν περισσότερο αναπτυγμένη μία από τις υπόλοιπες μορφές νοημοσύνης δεν προσφέρονται στην πραγματικότητα ίσες ευκαιρίες στην εκπαίδευση (Goodnough, 2001). Προκειμένου να διασφαλιστεί η ισότιμη συμμετοχή στην εκπαίδευση όλων των μαθητών, η παιδαγωγική επιστήμη προτείνει τη δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος στο οποίο θα λαμβάνεται υπόψη ότι οι μαθητές μαθαίνουν με διαφορετικό τρόπο και επομένως χρειάζεται να παρουσιάζεται το εκπαιδευτικό υλικό και να προσεγγίζεται το υπό εξέταση θέμα μέσα από μια ποικιλία διδακτικών μεθόδων ώστε να δραστηριοποιούνται τα διαφορετικά είδη νοημοσύνης (Armstrong, 2000). Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω της Μουσικής δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές που δεν έχουν τόσο αναπτυγμένη την λογικομαθηματική νοημοσύνη να εμπλακούν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και να αναπτύξουν μαθηματικές δεξιότητες παράλληλα με τη μουσική/ρυθμική νοημοσύνη (Lash, 2004; Shilling, 2002).

1.3. Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διαθεματική διδακτική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά παράλληλα με τη Μουσική, διατρέχουν όλη την ανθρώπινη ιστορία. Μάλιστα, μελετώντας την ιστορική τους πορεία παρατηρούμε ότι εξελίχθηκαν, από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, παράλληλα μέσα από μία πολύπλευρη και αμφίδρομη σχέση. Για παράδειγμα, η ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών και μεθόδων οδηγεί αντίστοιχα και σε αλλαγές στη μουσική τεχνολογία και στη μουσική θεωρία και πράξη. Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο εξελικτικός χαρακτήρας των δύο γνωστικών αντικειμένων και κατ' επέκταση να επιτευχθεί η κατανόησή τους, προτείνεται η ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στη διδασκαλία τους. Στην παρούσα εργασία θα αναζητήσουμε τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη Μουσική σε μία από τις βασικές συνιστώσες της Μουσικής που είναι η Αρμονία, όπως αυτή διαμορφώνεται με βάση το εκάστοτε μουσικό σύστημα. Αρχικά όμως θα διερευνήσουμε τη σημασία της Ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση.

Τα Μαθηματικά είναι ένα ανθρώπινο δημιούργημα που εξελίσσεται διαχρονικά μέσα σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο. Η ενσωμάτωση λοιπόν της ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ότι τα Μαθηματικά δεν είναι απλά ένα σταθερό σώμα καθορισμένων γνώσεων αλλά αντίθετα είναι μία εξελισσόμενη διαδικασία με δυναμικό χαρακτήρα (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Μέσα από την ιστορική εξελικτική πορεία της μαθηματικής επιστήμης διαφαίνονται οι δυσκολίες και τα λάθη που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί της εκάστοτε εποχής αναδεικνύοντας έτσι τον ανθρώπινο χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας. Η ιστορική διάσταση στην μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να συμβάλλει με τον τρόπο αυτόν στην τροποποίηση των αντιλήψεων και των στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά καθώς συνειδητοποιούν ότι τα Μαθηματικά προβλημάτισαν και άλλους ανθρώπους στο παρελθόν. Παράλληλα, η Ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί σημαντική πηγή ερωτημάτων και προβληματικών καταστάσεων ικανών να κινητοποιήσουν τους μαθητές συντελώντας ταυτόχρονα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών περιεχομένων (Tzanakis, 2002). Ασκήσεις και ερευνητικές εργασίες βασιζόμενες σε ιστορικά προβλήματα μπορούν να εμπλουτίσουν το αναλυτικό πρόγραμμα και να κάνουν τα Μαθηματικά πιο ελκυστικά.

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας των Μαθηματικών στα σχολικά Μαθηματικά μπορεί να αναδείξει τη σχέση τόσο ανάμεσα σε διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς όσο και μεταξύ των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα που σε πολλές περιπτώσεις είναι φαινομενικά ασυσχέτιστα παρέχοντας ευκαιρίες διαθεματικής προσέγγισης (Furinghetti & Somaglia, 1998). Επιπλέον, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κατανοήσουν ότι η έρευνα σε έναν επιστημονικό τομέα σε πολλές περιπτώσεις επηρεάζεται από αντίστοιχες ερευνητικές διαδικασίες σε άλλους κλάδους και τομείς (Tzanakis, 2002). Ερωτήματα και προβλήματα που ανακύπτουν σε κάποιον τομέα ή γνωστικό αντικείμενο αποτελούν αρκετά συχνά το έναυσμα για έρευνα για ένα άλλο αντικείμενο.

1.4. Η Διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών στη Β/θμια εκπαίδευση του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος

Η αναζήτηση διαθεματικών προσεγγίσεων στη μάθηση προσανατόλισε το εκπαιδευτικό σύστημα στη δημιουργία νέων παιδαγωγικών δομών και συστημάτων οργάνωσης της σχολικής γνώσης. Έτσι, στα πλαίσια της συνεχούς αναβάθμισης της ποιότητας της εκπαίδευσης εκπονήθηκαν τα Διαθεματικά Ενιαία Πλαίσια Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) τόσο για την πρωτοβάθμια όσο και για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η καινοτομία των ΔΕΠΠΣ όλων των γνωστικών αντικειμένων έγκειται στο γεγονός ότι εισάγει την έννοια της διαθεματικότητας στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα για την επίτευξη της οποίας απαιτείται η οριζόντια διασύνδεση των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Σ.) των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων. Η διδακτέα ύλη δηλαδή κάθε γνωστικού αντικειμένου θα πρέπει να οργανωθεί κατάλληλα ώστε να εξασφαλίζεται η επεξεργασία θεμάτων από πολλές οπτικές γωνίες και να αναδεικνύεται η γνώση και η σχέση της με την πραγματικότητα (ΥΠΕΠΘ – Π.Ι., 2003). Η διδακτική μεθοδολογία που υποστηρίζει τη διαθεματικότητα βασίζεται σε μεθόδους ενεργητικής απόκτησης της μάθησης οι οποίες εφαρμόζονται στη διδασκαλία κάθε γνωστικού αντικειμένου.

Για την επίτευξη των παραπάνω σε κάθε θεματική ενότητα προσφέρονται διαθεματικές δραστηριότητες η οργάνωση των οποίων διευκολύνεται από τη διάχυση της διαθεματικότητας στο κείμενο των σχολικών βιβλίων μέσα από θεμελιώδεις έννοιες των διαφόρων επιστημών, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν βασικούς κρίκους οριζόντιας διασύνδεσης των μαθημάτων (ΥΠΕΠΘ – Π.Ι., 2003). Ο σχεδιασμός των διδακτικών δραστηριοτήτων στηρίζεται στην παραδοχή ότι η κατανόηση των εννοιών και η απόκτηση ουσιαστικής γνώσης επιτυγχάνονται όταν βασίζονται στις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών αλλά και όταν σχετίζονται με τις εμπειρίες και τα βιώματά τους. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρονται στο ΔΕΠΠΣ, για να είναι αποτελεσματική η διδασκαλία θα πρέπει να χρησιμοποιεί μεθόδους που να ενθαρρύνουν την ενεργό συμμετοχή του μαθητή, τη δημιουργική δράση, τη συνεργατική και την ανακαλυπτική μάθηση. Εκτός από τις προαναφερθείσες διδακτικές δραστηριότητες στο ΔΕΠΠΣ περιλαμβάνονται και μία σειρά από προτεινόμενα διαθεματικά σχέδια εργασίας (μέθοδος project) που στόχο έχουν την πολύπλευρη μελέτη ενός θέματος από διάφορες επιστημονικές προοπτικές και με ποικίλες μεθόδους. Ειδικά για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, σύμφωνα με τα

ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ του γυμνασίου και του λυκείου, μεταξύ των στόχων διδασκαλίας τους συγκαταλέγονται οι εννοιολογικές συνδέσεις εντός των Μαθηματικών αλλά και μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών, η ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης των Μαθηματικών ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου και η θεώρηση των Μαθηματικών ως πολιτισμικό, ιστορικά εξελισσόμενο ανθρώπινο δημιούργημα. Η φιλοσοφία πάνω στην οποία βασίστηκαν τα αναλυτικά προγράμματα εντοπίζεται και στην συγγραφή των αντίστοιχων διδακτικών εγχειριδίων των Μαθηματικών που διέπεται από τις αρχές της διαθεματικότητας. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται: «*…το περιεχόμενο κάθε ενότητας είναι αναγκαίο να έχει συνταχθεί έτσι ώστε να αναδεικνύει τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στα διάφορα αντικείμενα που εμπίπτουν στη μελέτη των Μαθηματικών, προκειμένου να ενισχύεται η οριζόντια σύνδεση τους (διαθεματικότητα) και η διεπιστημονικότητα κατά την εξέταση διαφόρων θεμάτων…*» (ΥΠΕΠΘ – Π.Ι., 2003, σ.36). Σε ότι αφορά στη διασύνδεση των Μαθηματικών με τη Μουσική, γίνεται αναφορά στο ΔΕΠΠΣ των Μαθηματικών του Γυμνασίου και προωθείται μέσα από τις προτεινόμενες διαθεματικές διδακτικές δραστηριότητες. Τα κλάσματα στα Μαθηματικά της Α΄ γυμνασίου και η σχέση τους με το μουσικό ρυθμό, οι άρρητοι και οι πραγματικοί αριθμοί στα Μαθηματικά της Β΄ Γυμνασίου χρησιμοποιούνται ως μαθηματικές έννοιες με προεκτάσεις στη Μουσική.

Αντίστοιχες είναι οι διαπιστώσεις σχετικά με τις παιδαγωγικές αρχές που διέπουν τα ΔΕΠΠΣ του μαθήματος της Μουσικής στη Β/θμια εκπαίδευση τα οποία έχουν επηρεαστεί από το μοντέλο C(L)A(S)P (=Αγκάλιασμα) του Swanwick (1979) δίνοντας έμφαση σε τρεις από τις παραμέτρους της μουσικής εμπειρίας που εμπεριέχει: τη Σύνθεση (Composition), την Ακρόαση (Audition) και την Εκτέλεση (Performance) (Μαρκέα, 2008). Η έννοια της διαθεματικότητας αποτελεί θεμελιώδες συστατικό στοιχείο τόσο στις διαθεματικές δραστηριότητες όσο και στα διαθεματικά σχέδια εργασίας (projects) αλλά και στη συγγραφή των διδακτικών βιβλίων. Ένας από τους στόχους της διδασκαλίας της Μουσικής όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται είναι να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές τη σχέση της Μουσικής με τις άλλες Τέχνες και τα γνωστικά αντικείμενα που διδάσκονται στο σχολείο. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι παρόλο που τα Μαθηματικά είναι ένα από τα γνωστικά αντικείμενα που θα μπορούσε να συνδυαστεί με τη Μουσική εντούτοις στο ΔΕΠΠΣ της Μουσικής δεν γίνεται κάποια αναφορά στο συσχετισμό αυτόν. Έτσι, ενώ ενθαρρύνονται τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές να διερευνήσουν τη σχέση της Μουσικής με γνωστικά αντικείμενα όπως την Ιστορία, τη Γεωγραφία, τη Φυσική, την Τεχνολογία, τη Γλώσσα, τη Λογοτεχνία σε κανένα σημείο του ΔΕΠΠΣ δεν αναφέρεται με σαφήνεια η από κοινού μελέτη της Μουσικής με τα Μαθηματικά.

Παρά τις δυσκολίες που προκύπτουν από το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια δεν ενθαρρύνουν ιδιαίτερα τη διαθεματική κάλυψη των επιστημονικών πεδίων της Μουσικής και των Μαθηματικών σε συνδυασμό με την πίεση που υπάρχει για την κάλυψη της ύλης ιδιαίτερα στο μάθημα των Μαθηματικών στη Β/θμια εκπαίδευση, τα Μαθηματικά και η Μουσική εξακολουθούν να αποτελούν δύο γνωστικά αντικείμενα που προσφέρονται για μια διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης αποσκοπώντας στο να αποκτήσει ο μαθητής μια ολιστική θεώρηση της πραγματικότητας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα κατάλληλο για διαθεματική διδασκαλία είναι το 5ο κεφάλαιο (Οι Πρόοδοι) στην Άλγεβρα γενικής παιδείας της Α' Λυκείου. Όπως γίνεται αντιληπτό στην άσκηση 8 του σχολικού βιβλίου επιχειρείται μέσα από την έννοια της Γεωμετρικής Προόδου η κατανόηση της υποδιαίρεσης της μουσικής οκτάβας σε δώδεκα ισαπέχοντες φθόγγους (συγκερασμένο μουσικό σύστημα).

Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C΄ έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C΄΄ έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C΄ και C΄΄ υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C΄ και C΄΄ 13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:

i. το λόγο της προόδου, ii. τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

Λύση

i. Οι 11 ενδιάμεσοι τόνοι με τους δύο ακραίους C΄ και C΄΄ θα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $α_1$=261 και $α_{13}$= 522.
Επειδή $α_{13}= α_1 \cdot λ^{12}$ και $522=261 \cdot λ^{12}$ και επομένως $λ = \sqrt[12]{2}$
ii. Η συχνότητα του 5ου τόνου θα είναι $α_5= α_1 \cdot λ^5= 261 \cdot \sqrt[12]{2^5}$

Άσκηση 8: *Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας (γενικής παιδείας) της Α' Λυκείου,σ.138.*

1.4.1. Η περίπτωση των Μουσικών Σχολείων

Ένας ιδιαίτερος τύπος σχολείου που λειτουργεί στη β/θμια εκπαίδευση είναι τα Μουσικά Σχολεία (Γυμνάσια και Λύκεια). Όπως διακηρύσσεται στο θεσμικό πλαίσιο λειτουργίας τους ως σκοπός της ίδρυσής τους ορίζεται «*η προετοιμασία και κατάρτιση των νέων που επιθυμούν να ακολουθήσουν την επαγγελματική κατεύθυνση της Μουσικής χωρίς να υστερούν σε γενική παιδεία, εάν τελικά επιλέξουν άλλο τομέα* *επιστημονικής ή επαγγελματικής έκφρασης»* (ΥΠ.Ε.Π.Θ. 3345/88 (ΦΕΚ 649 Β'). Η εισαγωγή των μαθητών στα συγκεκριμένα σχολεία γίνεται κατόπιν εξετάσεων στις οποίες αξιολογείται η ακουστική, η φωνητική, η ρυθμική ικανότητα των υποψηφίων καθώς και η ικανότητα διάκρισης ηχοχρωμάτων.

Το αναλυτικό πρόγραμμα των Μουσικών Σχολείων περιλαμβάνει μαθήματα γενικής παιδείας, μαθήματα αισθητικής και άσκηση στα εργαστήρια ειδικότητας. Αναλυτικότερα, ως μαθήματα γενικής παιδείας στα Μουσικά Σχολεία ορίζονται όσα διδάσκονται στα υπόλοιπα σχολεία γενικής παιδείας της ίδιας βαθμίδας, προστίθενται όμως ως μαθήματα αισθητικής παιδείας το μάθημα Ιστορίας της Τέχνης και της Θεατρολογίας (Υ.Α. Γ2/3850/16-6-1998). Τα μαθήματα μουσικής παιδείας για το γυμνάσιο διαιρούνται στην ομάδα Α' που περιλαμβάνει τα μαθήματα: Θεωρία και Πράξη της Ευρωπαϊκής Μουσικής, Ελληνική Παραδοσιακή Μουσική και Ατομικό Όργανο Επιλογής και στην ομάδα Β' που περιλαμβάνει το μάθημα της Χορωδίας, τα Μουσικά Σύνολα (οργανοχρησία), το Πιάνο (υποχρεωτικό) και τον Ταμπουρά (υποχρεωτικό). Αντίστοιχη ομαδοποίηση των μουσικών μαθημάτων παρατηρείται και στο λύκειο όπου τα μαθήματα μουσικής παιδείας διακρίνονται σε πρωτεύοντα στα οποία κατατάσσονται η Αρμονία, η Γραφή καθ' υπαγόρευση (Dictée), η Μουσική Ανάγνωση, η Ελληνική Παραδοσιακή Μουσική και το Ατομικό Όργανο Επιλογής, και σε δευτερεύοντα, στα οποία ανήκουν για την Α' Λυκείου το Πιάνο (υποχρεωτικό), η Ιστορία της Μουσικής και η Μορφολογία ενώ τα Μουσικά Σύνολα είναι κοινό μάθημα για όλες τις λυκειακές τάξεις. Ειδικότερα για το λύκειο προσφέρονται και τα ακόλουθα μαθήματα επιλογής: Οργανολογία Ελληνικών Παραδοσιακών Οργάνων, Οργανολογία Μουσικών Οργάνων Συμφωνικής Ορχήστρας και Μουσική Τεχνολογία (Εφαρμογές της πληροφορικής στη μουσική, Επεξεργασία μουσικού κειμένου με Η/Υ και Στοιχειώδεις αρχές ηχοληψίας). Επιπλέον, στο λύκειο δίνεται η δυνατότητα διεξαγωγής και της Ερευνητικής Εργασίας (project) η οποία μπορεί να αναφέρεται τόσο σε θέματα μαθημάτων γενικής παιδείας όσο και σε θέματα μαθημάτων μουσικής παιδείας. Η διδασκαλία των μουσικών μαθημάτων διεξάγεται κατά τμήμα, είτε ομαδικά είτε ατομικά, ανάλογα με το διδασκόμενο μάθημα. Στα ατομικά μαθήματα ανήκουν το ατομικό όργανο επιλογής καθώς και το υποχρεωτικό μουσικό όργανο και η εξατομικευμένη διδασκαλία γίνεται κατά επίπεδο.

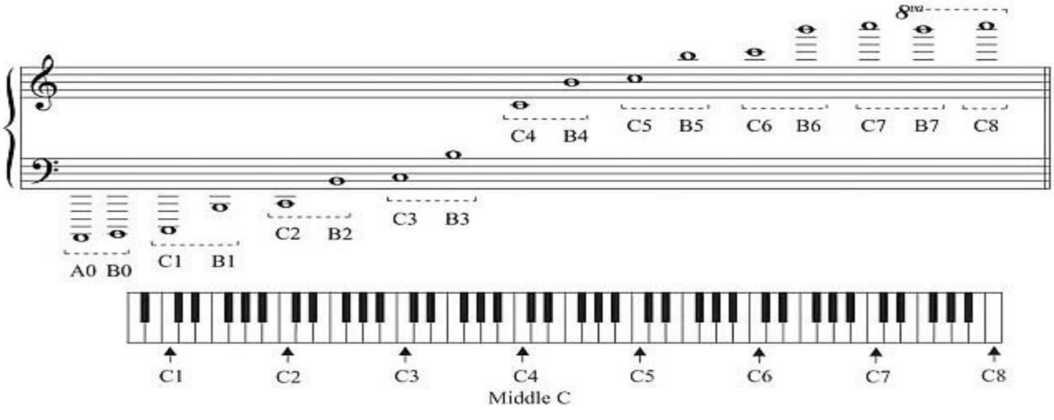
Τα νέα ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων με εφαρμοστική ισχύ από το διδακτικό έτος 2015-2016 συμπεριλαμβάνουν καινοτομίες που τα διαφοροποιούν από τα ισχύοντα προγράμματα σπουδών. Έτσι, λοιπόν, δεν περιορίζονται στην απλή παράθεση της διδακτέας ύλης όπως συνέβαινε με τα προηγούμενα προγράμματα, αλλά αντιθέτως υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα σε στόχους – περιεχόμενο – ενδεικτικές δραστηριότητες για κάθε διδακτική ενότητα (ΑΠΣ μουσικών μαθημάτων των Μουσικών Σχολείων, 2015). Βέβαια η απουσία διδακτικών εγχειριδίων που θα συνάδουν με τα ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων εξακολουθεί να παραμένει ένα πρόβλημα που δυσχεραίνει την εφαρμογή τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ένα ζήτημα που ανακύπτει από τα νέα ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων είναι ότι δεν προωθείται ιδιαίτερα η διαθεματική προσέγγιση μεταξύ των μουσικών μαθημάτων και των μαθημάτων γενικής παιδείας. Ειδικότερα στην περίπτωση της διασύνδεσης των Μαθηματικών με τη μουσική θεωρία και πράξη τα Μαθηματικά θα μπορούσαν να αποτελέσουν ένα εργαλείο ερμηνείας πολλών μουσικών φαινομένων αλλά και θεμάτων που αφορούν τα μουσικά όργανα. Για παράδειγμα, το μοτίβο διαδοχής των άσπρων και μαύρων πλήκτρων στο κλαβιέ του πιάνου ερμηνεύεται με βάση τα Μαθηματικά του συγκερασμένου μουσικού συστήματος. Παρ' όλα αυτά, η μοναδική περίπτωση στην οποία αναφέρεται η από κοινού μελέτη της Μουσικής με τα Μαθηματικά είναι στο μάθημα της Βυζαντινής Μουσικής. Δεδομένου όμως ότι το ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων δεν συνοδεύεται από αντίστοιχα βιβλία ούτε και από βιβλίο εκπαιδευτικού δεν υπάρχουν περαιτέρω οδηγίες για τον τρόπο υλοποίησης της παραπάνω διδακτικής παρέμβασης.

Κεφάλαιο 2

2. Η ιστορική εξέλιξη των μουσικών συστημάτων υπό το πρίσμα της επιστήμης των Μαθηματικών

Η οργάνωση του ηχητικού υλικού σε μουσικά συστήματα μεταβάλλεται χωροχρονικά και προσδιορίζεται από τον μουσικό πολιτισμό της εκάστοτε εποχής και κοινωνίας. Θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε την εξελικτική πορεία των συστημάτων αυτών μελετώντας ταυτόχρονα και τις μαθηματικές έννοιες και εργαλεία που τα διαμόρφωσαν μέσα από την ιστορία των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα θα εστιάσουμε τη διερεύνησή μας στις ιστορικές εκείνες περιόδους που υπήρξε αλλαγή στον τρόπο οργάνωσης των μουσικών ήχων η οποία συνοδεύεται και από αντίστοιχη εννοιολογική αλλαγή των Μαθηματικών. Αρχικά όμως θα παρουσιάσουμε τα στοιχεία εκείνα της μουσικής θεωρίας που κρίνονται απαραίτητα προκειμένου να γίνουν κατανοητά τα μουσικά συστήματα.

Για μεθοδολογικούς λόγους, η μουσική σημειογραφία των μουσικών παραδειγμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε ακολουθεί το σύστημα abc στο οποίο έχει βασιστεί η δυτική Μουσική και εμφανίζεται με τις εξής ονομασίες: A, A #, B, C, C #, D, D #, E, F, F #, G, G # (λα, λα#, σι, ντο, ντο#, ρε, ρε#, μι, φα, φα#, σολ, σολ# αντίστοιχα). Το γραφικό σύμβολο "#" (δίεση) σημαίνει ότι ανυψώνει τον φθόγγο κατά ένα ημιτόνιο και το "b" σημαίνει ότι τον χαμηλώνει κατά ένα ημιτόνιο προς τα κάτω. Για να προσδιορίσουμε την οκτάβα στην οποία ανήκουν οι νότες, χρησιμοποιούμε στην ονομασία της τον κατάλληλο δείκτη πχ C_1, C_2 κτλ. (εικόνα 1). Τέλος, οι τονικές περιοχές των μουσικών παραδειγμάτων θα αποδοθούν πάνω στο πεντάγραμμο με τη χρήση δύο κυρίως μουσικών κλειδιών: του Σολ 𝄞 και του Φα 𝄢.



Εικόνα 1.*Απεικόνιση μουσικών εκτάσεων*

2.1. Η μαθηματική ερμηνεία των θεμελιωδών μουσικών εννοιών

Δομικό συστατικό στοιχείο της Μουσικής είναι ο περιοδικός ήχος ο οποίος προέρχεται από τις περιοδικές ταλαντώσεις του ηχογόνου σώματος, μεταδίδεται μέσω του αέρα με τη μορφή ηχητικών κυμάτων και είναι δυνατόν να αναλυθεί σε αρμονικές (ημιτονοειδείς) ταλαντώσεις (Benson, 2008). Παράμετροι του περιοδικού ήχου είναι το ύψος, η χροιά, η ένταση και η διάρκεια. Για τις ανάγκες της εργασίας, θα αναφερθούμε μόνο στη συχνότητα και στη χροιά.

Το (τονικό) ύψος, για τη Μουσική είναι η παράμετρος που μας δηλώνει αν ο ήχος είναι χαμηλός ή υψηλός και αντιστοιχεί ουσιαστικά στη μουσική νότα που ακούγεται. Κατά καιρούς, έχουν αναπτυχθεί διάφορα συστήματα μέτρησης του τονικού ύψους για τον προσδιορισμό των μουσικών φθόγγων λόγω «*της επιστημονικής περιέργειας και των αναγκών της μουσικής τεχνολογίας*» (Loy, 2006, σ.13). Ωστόσο, στη σύγχρονη εποχή έχει αποδειχθεί ότι το ύψος εξαρτάται από τη συχνότητα του ηχητικού κύματος, η οποία αν εκφραστεί με φυσικομαθηματικούς όρους είναι ο αριθμός των παλμικών κινήσεων ανά δευτερόλεπτο και ως μονάδα μέτρησής της έχει καθιερωθεί το Hertz (Hz) προς τιμήν του Γερμανού φυσικού Heinrich Hertz (1857-1894) (Wright, 2009). Η συχνότητα ταλάντωσης είναι αντιστρόφως ανάλογη με το μήκος της παλλόμενης χορδής της ηχογόνου πηγής και δίνεται από τη σχέση $συχνότητα = \frac{1}{μήκος\ χορδής}$. Για παράδειγμα, εάν μία χορδή με μήκος 50cm κατά την ταλάντωσή της παράγει ήχο που έχει συχνότητα 400Hz τότε η ταλάντωση του μισού της χορδής αυτής, δηλαδή τα 0,25cm αντιστοιχούν σε συχνότητα 400×2=800 Hz. Το τονικό ύψος που αποτελεί τη βάση για το κούρδισμα των μουσικών οργάνων στη δυτική μουσική παράδοση είναι η νότα Λα (A) η συχνότητα της οποίας είναι τα 440 Hz (Loy, 2006) (Εικόνα 2). Αν και η ακουστότητα του ανθρώπινου αυτιού είναι από 20-20000 Hz, το εύρος των συχνοτήτων που έχει χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή μουσικών οργάνων είναι μέχρι 4200 Hz με χαρακτηριστικότερο το πιάνο που καλύπτει το μεγαλύτερο φάσμα συχνοτήτων από το ΛΑ (A_0) των 27 Hz έως το ΝΤΟ (C_8) των 4186 Hz.

Εικόνα 2. *A=440 Hz*

Μία άλλη παράμετρος του μουσικού ήχου είναι η χροιά που μας επιτρέπει να ξεχωρίσουμε τις διαφορετικές ηχητικές πηγές που παράγουν το ίδιο τονικό ύψος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο κάθε σύνθετος ήχος, όπως είναι ο ήχος που παράγουν τα μουσικά όργανα, συνίσταται από τον θεμελιώδη (fundamental) ήχο, που είναι η βασική συχνότητα και τους αρμονικούς του (overtones/harmonics), που είναι όλες οι ακέραιες πολλαπλάσιες (whole–number multiples) συχνότητες της βασικής (Loy, 2006). Οι επιμέρους εντάσεις των αρμονικών ήχων, οι ταχύτητες ανάπτυξης, αλλά και οι διάρκειες όλων αυτών καθορίζουν τη χροιά. Για παράδειγμα, όταν παίζουν ένα βιολί και ένα φλάουτο τον ίδιο θεμέλιο ήχο, ακούγονται διαφορετικά γιατί, λόγω του διαφορετικού τρόπου κατασκευής τους (σχήμα, υλικό) ευνοείται η διάδοση διαφορετικών αρμονικών στα δύο αυτά όργανα. Η ανάλυση του συνολικού αυτού ηχητικού φάσματος λέγεται αρμονική στήλη και η ανακάλυψή της επηρέασε την εξέλιξη της Μουσικής γενικότερα. Στην Εικόνα 3, μπορούμε να διακρίνουμε ολόκληρη τη σειρά των 10 πρώτων αρμονικών και τις αντίστοιχες νότες του χαμηλού Ντο (C_3). Αν θεωρήσουμε ότι ο πρώτος (θεμελιώδης) αρμονικός έχει συχνότητα f_1, τότε ο 2^{ος} αρμονικός έχει συχνότητα $f_2 = 2f_1$, ο τρίτος $f_3 = 3f_1$ κ.ο.κ. (Forster, 2010). Όπως προκύπτει από τα παραπάνω η συχνότητα του n-οστού αρμονικού δίνεται από τη σχέση $f_n = n \cdot f_1$.

Εικόνα 3: *Θεμέλιος και αρμονικοί του Ντο (C_3) (προσαρμογή από Benson, 2009).*

Μουσικά Διαστήματα

Όπως προαναφέρθηκε, οι διάφορες συχνότητες στα πλαίσια της Μουσικής αντιστοιχούν στις μουσικές νότες στο συνδυασμό των οποίων βασίζεται μία μουσική δημιουργία. Οι σχέσεις ανάμεσα στο φθογγικό υλικό μπορούν να μελετηθούν είτε οριζόντια εστιάζοντας ουσιαστικά στην έννοια των μελωδικών διαστημάτων είτε κάθετα διερευνώντας με τον τρόπο αυτό την έννοια της συνήχησης και των αρμονικών διαστημάτων.

Στη Μουσική ως μουσικό διάστημα ορίζεται η απόσταση μεταξύ δύο φθόγγων διαφορετικού τονικού ύψους (Wright, 2009). Στο συγκερασμένο μουσικό σύστημα που χρησιμοποιείται από τη σύγχρονη μουσική θεωρία η ελάχιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα σε δύο νότες είναι το ημιτόνιο, ενώ το άθροισμα δύο ημιτονίων δημιουργεί τον τόνο. Με βάση τον αριθμό των φθόγγων που περιέχονται ανάμεσα στη χαμηλότερη (βάση) και στην υψηλότερη (κορυφή) νότα ενός μουσικού διαστήματος διακρίνονται σε διαστήματα 2^{ας}, 3^{ης}, 4^{ης} κτλ. Επιπλέον, τα προαναφερθέντα διαστήματα με βάση τους τόνους και τα ημιτόνια που περιλαμβάνουν διακρίνονται σε μεγάλα, μικρά, καθαρά, αυξημένα, ελαττωμένα. Για παράδειγμα ένα διάστημα 4^{ης} καθαρό αποτελείται από δύο τόνους και ένα ημιτόνιο.

Από μαθηματικής απόψεως, το διάστημα μεταξύ δύο φθόγγων ορίζεται με το λόγο $f_2{:}f_1$ όπου f_2 είναι η συχνότητα του υψηλότερου φθόγγου του διαστήματος και f_1 είναι του χαμηλότερου (Loy, 2006; Wright, 2009). Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο υπολογισμός ενός μουσικού διαστήματος σχετίζεται με το λόγο συχνοτήτων των δύο φθόγγων που τον αποτελούν και όχι με τη διαφορά των συχνοτήτων τους. Το πιο βασικό διάστημα είναι αυτό της οκτάβας στο οποίο οι φθόγγοι που το συνιστούν έχουν σχέση συχνοτήτων $f_2 = 2f_1$ και δίνουν λόγο 2:1 (Wright, 2009). Γενικότερα, μια συχνότητα f_x έχει απόσταση πολλαπλάσια της οκτάβας από μια άλλη f_R όταν τις συνδέει η σχέση $f_x = f_R \cdot 2^x$ όπου το x ανήκει στους ακέραιους αριθμούς ($x \in I$) (Loy, 2006). Για $x = 0$, τότε $f_x = f_R \cdot 2^0$ οπότε έχουμε το διάστημα της 1^{ης} δηλαδή την ταυτοφωνία. Επίσης, ο υπολογισμός της συχνότητας f_x ενός τυχαίου διαστήματος x από τη συχνότητα αναφοράς f_R δίνεται από τη σχέση $f_x = f_R \cdot 2^x$, όπου το x ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς ($x \in R$). Βασιζόμενοι στους αρμονικούς μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο συχνοτήτων για κάποια σημαντικά μουσικά διαστήματα. Για παράδειγμα, το διάστημα της καθαρής 5^{ης} μπορεί να υπολογιστεί μεταξύ του 2^{ου} και του 3^{ου} αρμονικού. Όπως παρατηρούμε η συχνότητα του 3^{ου} αρμονικού ισοδυναμεί με τα $\frac{3}{2}$ της συχνότητας του 2^{ου} αρμονικού. Οπότε, το διάστημα της 5^{ης} καθαρής αντιστοιχεί με το λόγο $\frac{3}{2}$. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 1) καταγράφονται τα διαστήματα με τους αντίστοιχους λόγους συχνοτήτων τους.

Διάστημα	Λόγος συχνοτήτων
$8^{η}$ Κ	$\frac{2}{1}$
$6^{η}$ Μεγάλη	$\frac{5}{3}$
$6^{η}$ μικρή	$\frac{8}{5}$
$5^{η}$ Καθαρή	$\frac{3}{2}$
$4^{η}$ Καθαρή	$\frac{4}{3}$
$3^{η}$ Μεγάλη	$\frac{5}{4}$
$3^{η}$ μικρή	$\frac{6}{5}$

Πίνακας 1. *Λόγοι συχνοτήτων διαστημάτων που προέρχονται από την αρμονική στήλη.*

Στη μουσική όμως πράξη τα μουσικά διαστήματα δεν χρησιμοποιούνται μόνο μεμονωμένα αλλά αντίθετα, χρειάζεται συχνά να συνθέσουμε νέα διαστήματα από επιμέρους διαστήματα. Η πρόσθεση και η αφαίρεση των μουσικών διαστημάτων μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί μέσα από την πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης των λόγων τους αντίστοιχα (Loy, 2006). Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το διάστημα της οκτάβας ως το άθροισμα του διαστήματος της $5^{ης}$ $(\frac{3}{2})$ και της $4^{ης}$ $(\frac{4}{3})$ τότε πολλαπλασιάζουμε τους λόγους των επιμέρους διαστημάτων δηλαδή $(\frac{3}{2})\cdot(\frac{4}{3})=\frac{2}{1}$. Κατ' ανάλογο τρόπο, εάν από ένα διάστημα οκτάβας αφαιρέσουμε το διάστημα της $5^{ης}$ τότε θα προκύψει το διάστημα της $4^{ης}$ που με μαθηματικούς όρους αντιστοιχεί στη διαίρεση των επιμέρους διαστημάτων δηλαδή $\frac{2}{1} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$.

Όταν δύο νότες ακουστούν διαδοχικά δημιουργούν ένα μελωδικό διάστημα ενώ όταν ακουστούν ταυτόχρονα (συνηχούν) δημιουργούν ένα αρμονικό διάστημα το οποίο άλλοτε είναι εύηχο οπότε χαρακτηρίζεται ως σύμφωνο και άλλοτε προκαλεί δυσφορία οπότε χαρακτηρίζεται ως διάφωνο. Η χρήση του διάφωνου διαστήματος σε μία μουσική σύνθεση δεν αποσκοπεί μόνο στο να προκαλέσει ένα δυσάρεστο άκουσμα, αλλά στοχεύσει στο να δημιουργήσει μία γενικότερη ένταση η οποία θα «λυθεί» με την ακολουθία ενός σύμφωνου διαστήματος (Steck, 2014). Στο τονικό μουσικό σύστημα, η ταυτόχρονη συνήχηση περισσότερων των δύο φθόγγων αποτελεί μία συγχορδία. Με τον όρο τρίφωνη συγχορδία (triad) εννοούμε την ταυτόχρονη συνήχηση τριών φθόγγων που απέχουν διαστήματα τρίτης μεταξύ τους ενώ οι δύο ακραίες νότες σχηματίζουν διάστημα 5ης. Οι έννοιες της συμφωνίας και της διαφωνίας στα πλαίσια της μουσικής θεωρίας εξελίχθηκαν στο πέρασμα των αιώνων, εξέφρασαν το αισθητικό κριτήριο της εκάστοτε εποχής και είχαν τη δική τους σημασία για κάθε μουσικό πολιτισμό (Benson, 2009). Έτσι, για το χρονικό διάστημα στο οποίο περιλαμβάνεται η αρχαία ελληνική Μουσική έως και τη μονοφωνική Μουσική του 9ου αιώνα μ.Χ. οι παραπάνω όροι αφορούν την καλή αρμονική σχέση μεταξύ δύο φθόγγων και όχι τη συνήχησή τους (Σπυρίδης, 1997) Στην πρώιμη πολυφωνία (γύρω στο 900-1300 μ.Χ.) οι όροι συμφωνία και διαφωνία αναφέρονται στο ηχητικό αποτέλεσμα δύο νοτών που ακούγονται ταυτόχρονα. Την περίοδο αυτή, ως σύμφωνα διαστήματα θεωρούνται εκείνα της οκτάβας (2:1), της 5ης (3:2), της 4ης (4:3), και των σύνθετων διαστημάτων (διαστημάτων δηλαδή μεγαλύτερα της οκτάβας) που αποτελούνται από το διάστημα της 8ης + 5ης (3:1), 8ης + 4ης (8:3) και 8ης+ 8ης (4:1). Τα διαστήματα 3ης και 6ης θεωρούνται διάφωνα ως απόρροια της χρήσης της πυθαγόρειας κλίμακας στην οποία τα δύο αυτά διαστήματα είναι εξίσου διάφωνα. Κατά τη χρονική περίοδο μεταξύ του 1300 μ.Χ. και του 1700 μ.Χ. στην οποία κυρίαρχη είναι η αντιστικτική μουσική, παρατηρείται μία μεταβολή στις έννοιες διαφωνία και συμφωνία καθώς ο ρόλος των μουσικών διαστημάτων σε ένα μουσικό κείμενο καθορίζει και τον χαρακτηρισμό τους ως σύμφωνα ή διάφωνα διαστήματα. Έτσι ένα διάστημα που θεωρείται σύμφωνο στα πλαίσια μιας μουσικής σύνθεσης, μπορεί να θεωρηθεί διάφωνο εάν το εξετάσουμε σε σχέση με ένα άλλο μουσικό κείμενο. Κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα μ.Χ. η θέση μίας νότας σε σχέση με τη θεμέλιο νότα (την πρώτη δηλαδή) της συγχορδίας καθόρισε και την αντιμετώπισή της ως σύμφωνη ή διάφωνη. Ο 19ος αιώνας μ.Χ. θεωρείται ορόσημο για την δυτικοευρωπαϊκή Μουσική καθώς ο Γερμανός φυσικός Helmholz που μελέτησε τα ηχητικά φαινόμενα, εισάγει την έννοια των φυσικών αρμονικών φθόγγων πάνω στην οποία βασίστηκε ο καθορισμός της σύμφωνης και διάφωνης συνήχησης.

Για τη μαθηματική ερμηνεία της έννοιας της συμφωνίας και της διαφωνίας χρησιμοποιήθηκαν τα μαθηματικά εργαλεία που είχαν αναπτυχθεί στις αντίστοιχες ιστορικές περιόδους (Benson, 2009). Έτσι, η πυθαγόρεια αντίληψη της αρμονίας που κυριάρχησε από την Αρχαιότητα έως και την Αναγέννηση βασίστηκε στη διαπίστωση ότι όσο πιο απλές ήταν οι αναλογίες της διαίρεσης μιας χορδής, τόσο πιο σύμφωνοι οι φθόγγοι μεταξύ τους. Η ανακάλυψη του Galileo Galilei και του Mersenne της σχέσης ανάμεσα στο τονικό ύψος και στη συχνότητα γύρω στο 16ο – 17ο αιώνα μ.Χ.

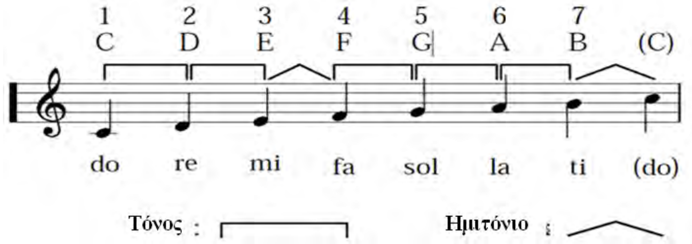
προσέδωσε έναν επιστημονικό χαρακτήρα στην ερμηνεία της ποιότητας μίας συνήχησης. Σύμφωνα με το Galileo, αν ο λόγος συχνοτήτων δύο μουσικών νοτών που συνηχούν είναι ακέραιος τότε πρόκειται για ένα σύμφωνο διάστημα. Το 17ο αιώνα μ.Χ. η ανακάλυψη των αρμονικών ως στοιχεία του ήχου συνέβαλε στη διαμόρφωση ενός νέου κριτηρίου για τη συνήχηση σύμφωνα με το οποίο τα διαστήματα τα οποία προκύπτουν από τους αρμονικούς της ίδιας αρμονικής στήλης δημιουργούν ένα ευχάριστο μουσικό άκουσμα (Steck, 2014). Δύο νότες δηλαδή με συχνότητες f και f΄ συνιστούν ένα σύμφωνο διάστημα εάν οι συχνότητές τους είναι πολλαπλάσιες της ίδιας θεμελιώδους συχνότητας f_1. Έτσι λοιπόν, εάν $f = m \cdot f_1$ και $f' = n \cdot f_1$, όπου m και n είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε ο λόγος των συχνοτήτων τους δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{f}{f'} = \frac{mf1}{nf1} = \frac{m}{n}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, δύο νότες σχηματίζουν ένα σύμφωνο διάστημα όταν ο λόγος συχνοτήτων τους είναι ρητός αριθμός (rational number) (Steck, 2014). Ωστόσο, η έννοια της συμφωνίας στην πραγματικότητα προκύπτει όταν ο λόγος συχνοτήτων είναι ένας απλός ρητός αριθμός (simple rational number) για το σχηματισμό του οποίου απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι όροι m και n να είναι μικροί ακέραιοι (small integers). Για παράδειγμα, δύο μουσικοί φθόγγοι με λόγο συχνοτήτων 3:2 θα ακούγονται ευχάριστα σε αντίθεση με το μουσικό διάστημα που αντιστοιχεί σε λόγο συχνοτήτων οι όροι του οποίου είναι μεγάλοι ακέραιοι αριθμοί όπως 218:191 (Steck, 2014). Επιπλέον, εάν ο λόγος συχνοτήτων δεν μπορεί να εκφραστεί ως λόγος ακέραιων αριθμών γιατί περιέχει άρρητους αριθμούς (irrational numbers) (π.χ. π, e, $\sqrt{2}$), τότε το ηχητικό αποτέλεσμα δεν είναι εύηχο.

<u>Κλίμακες</u>

Ο τρόπος διάταξης των φθόγγων στα πλαίσια μία οκτάβας δημιουργεί τη μουσική κλίμακα. Δεδομένου ότι υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν οι μουσικές νότες δημιουργήθηκαν πολλών ειδών κλίμακες (π.χ. κλίμακα της τζαζ, του Debussy κ.α.). Οι κλίμακες όμως που αποτέλεσαν τη βάση στην οποία στηρίχτηκε η δυτική ευρωπαϊκή Μουσική ήταν εκείνες του τονικού μουσικού συστήματος, δηλαδή οι χρωματικές και οι διατονικές κλίμακες του μείζονα και ελάσσονα τρόπου. Η διατονική κλίμακα του Ντο (ονομάζεται έτσι γιατί ως πρώτο φθόγγο της έχει τον ομώνυμο φθόγγο) αποτελεί τη βάση της δυτικοευρωπαϊκής μουσικής. Η διαδοχή των διαστημάτων της, των τόνων και των ημιτονίων στα πλαίσια της οκτάβας, απεικονίζονται στην εικόνα 4.



Εικόνα 4. *Διατονική κλίμακα του Ντο*

Έχοντας ως αφετηρία μια οποιαδήποτε νότα μπορούμε να σχηματίσουμε μία μείζονα κλίμακα που θα ακολουθεί το πρότυπο της κλίμακας του Ντο και θα διατηρεί την παραπάνω διαδοχή διαστημάτων: δηλαδή Τόνος–Τόνος–Ημιτόνιο–Τόνος–Τόνος–Τόνος–Ημιτόνιο (Τ-Τ-Η-Τ-Τ-Τ-Η) χρησιμοποιώντας αλλοιώσεις (διέσεις ή υφέσεις). Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα που ακολουθεί για το σχηματισμό της Σολ μείζονας τα ημιτόνια τοποθετήθηκαν στην ίδια θέση που έχουν στη Ντο μείζονα (Εικόνα 5).

Εικόνα 5. *Μείζονα κλίμακα της Σολ*

Η επιστήμη των Μαθηματικών ασχολείται με την εύρεση της κατάλληλης μεθόδου υπολογισμού των λόγων συχνοτήτων των μουσικών φθόγγων που καθορίζουν τη δομή μίας μουσικής κλίμακας (Bibby, 2003). Απώτερος στόχος είναι με την επιλογή των συγκεκριμένων συνδυασμών των λόγων συχνοτήτων να ικανοποιούνται τα ψυχολογικά και αισθητικά κριτήρια της συμφωνίας.

<u>Τονικότητα- Μετατροπία</u>

Άμεσα συνυφασμένη με την έννοια της μουσικής κλίμακας είναι η έννοια της τονικότητας η οργάνωση δηλαδή της μελωδίας γύρω από ένα τονικό κέντρο. Όταν για παράδειγμα ένα μουσικό κομμάτι έχει μία συγκεκριμένη τονικότητα όπως είναι η Σολ μείζονα αυτό σημαίνει ότι για τη σύνθεσή του χρησιμοποιήθηκε το φθογγικό υλικό από την αντίστοιχη κλίμακα δηλαδή τη Σολ μείζονα. Βέβαια, ένα μουσικό κομμάτι μπορεί να περιέχει και νότες εκτός τονικότητας η πλειονότητα όμως θα είναι νότες της τονικότητας. Η τονικότητα αναφέρεται σε ένα σύνολο φθόγγων ενώ η κλίμακα είναι η συγκεκριμένη διάταξη (είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω) της συγκεκριμένης ομάδας φθόγγων (Steck, 2014).

Στη μουσική εκτέλεση, για την καλύτερη απόδοση ενός μουσικού κομματιού που θα είναι σύμφωνο με τις φωνητικές δυνατότητες των τραγουδιστών χρειάζεται να ερμηνευτεί ψηλότερα ή χαμηλότερα, να μεταφερθεί δηλαδή σε μία άλλη τονικότητα διατηρώντας όμως όλα τα στοιχεία της αρχικής μελωδίας. Η μεταφορά από μία τονικότητα σε μία άλλη ονομάζεται μετατροπία (Assayag et. al., 2002). Προκειμένου όμως να παραμείνει η αρχική μελωδία αναλλοίωτη πρέπει όλες οι συχνότητες του αρχικού ηχητικού υλικού να πολλαπλασιαστούν με ένα συγκεκριμένο παράγοντα (a given factor) (Assayag et. al., 2002). Με αριθμητικούς όρους, όταν το τονικό ύψος μίας νότας που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη συχνότητα πολλαπλασιαστεί με ένα διάστημα τότε το τονικό ύψος της νότας αλλάζει. Αυτή είναι η μαθηματική βάση της μουσικής μετατροπίας. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να θέλουμε να μεταφέρουμε μία νότα συχνότητας F κατά μία οκτάβα ψηλότερα, τότε θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την αρχική συχνότητα με το διάστημα της οκτάβας δηλαδή με τον παράγοντα $\frac{2}{1}$.

<u>Μουσικά συστήματα</u>

Με τον όρο μουσικό σύστημα αναφερόμαστε στον τρόπο διάταξης των μουσικών φθόγγων που περιέχονται μεταξύ δύο ήχων διαφορετικού τονικού ύψους και στους νόμους που καθορίζουν τις σχέσεις αυτές. Διατρέχοντας την παγκόσμια ιστορία από την αρχαιότητα μέχρι την σύγχρονη εποχή, μπορούμε να εντοπίσουμε μία ποικιλία μουσικών συστημάτων, τα οποία διαμορφώθηκαν και εξελίχθηκαν στις διάφορες ιστορικές περιόδους έχοντας ως βασικό κριτήριο οργάνωσής τους τον τρόπο διαίρεσης της οκτάβας σε ενδιάμεσους μουσικούς φθόγγους. Η αναζήτηση τρόπων υποδιαίρεσης της οκτάβας και η δημιουργία κατ' επέκταση των μουσικών κλιμάκων είναι μία ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία που διήρκησε πολλούς αιώνες και στην οποία καταλυτική ήταν η χρήση των μαθηματικών εργαλείων. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε εκείνα τα μουσικά συστήματα και συγκεκριμένα στις κλίμακες και τα διαστήματα που τις συγκροτούν όπως επίσης και στη μαθηματική τους δομή, που οδήγησαν στη δημιουργία του σημερινού δυτικοευρωπαϊκού μουσικού συστήματος.

2.2. Αρχαιοελληνική και Μεσαιωνική Μουσική: Οι μαθηματικές έννοιες του λόγου και της αναλογίας

Αν και είναι δύσκολο να προσδιορίσει κανείς χρονικά και γεωγραφικά τα όρια του μουσικού πολιτισμού της αρχαίας Ελλάδας, η περίοδος μέγιστης άνθισής του όπως μαρτυρούν φιλολογικές και εικονογραφικές πηγές τοποθετείται χρονικά από τον 7ο έως τον 4ο αιώνα π.Χ. περίπου (Γιάννου, 1995). Κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα της αρχαιοελληνικής Μουσικής ήταν η μονοφωνική της δομή, αποτελούνταν δηλαδή από μία μόνο μελωδία, ωστόσο υπάρχουν ενδείξεις ότι ήταν γνωστές οι συνηχήσεις με τη μορφή ετεροφωνίας, ισοκρατήματος και παράλληλης κίνησης σε διαστήματα 5ης και 8ης. Σημαντικό συστατικό στοιχείο της θεωρίας της αρχαίας ελληνικής Μουσικής είναι ο συσχετισμός μουσικών φαινομένων με αριθμητικά μεγέθη ο οποίος εκφράζεται με το μαθηματικό υπολογισμό των διαστημάτων.

Ο μουσικοθεωρητικός στοχασμός της αρχαιοελληνικής μουσικής, και συγκεκριμένα η πυθαγόρεια παράδοση, συνέχισε να ασκεί την επίδρασή του στο μεσαιωνικό μουσικό πολιτισμό (5ος ─15ος αιώνας μ.Χ.) σχεδόν αποκλειστικά μέσα από το έργο του Βοήθιου (480─524 μ.Χ.) (Herlinger, 2008). Η χριστιανική μονοφωνική λατρευτική Μουσική (Γρηγοριανό Μέλος) που κυριαρχεί το Μεσαίωνα βασίζεται στους εκκλησιαστικούς τρόπους οι οποίοι προέρχονται σε μεγάλο βαθμό από τους αρχαιοελληνικούς τρόπους.

2.2.1. Η πυθαγόρεια κλίμακα

Οι αρχές του μουσικο-μαθηματικού θεωρητικού στοχασμού στην αρχαία Ελλάδα συνδέονται με τη φιλοσοφική σχολή των Πυθαγορείων και ιδιαίτερα με τον ιδρυτή της, τον φιλόσοφο Πυθαγόρα (570–495 π.Χ.). Ήταν από τους πρώτους θεωρητικούς που συστηματοποίησε και ερεύνησε με το μονόχορδο τα ακουστικά φαινόμενα εστιάζοντας στη μελέτη της αρμονικής συνήχησης δύο φθόγγων και της αιτίας της βάζοντας με τον τρόπο αυτόν τις βάσεις του μουσικού συστήματος, που ακολούθησαν πρώτα ο Μεσαίωνας και στη συνέχεια η Αναγέννηση. Το μονόχορδο ήταν πειραματικό περισσότερο παρά μουσικό όργανο (Nef, 1985). Αποτελούνταν από μια χορδή τεντωμένη πάνω σε μία ξύλινη βάση (ηχείο) και έναν κινητό χορδοστάτη (καβαλάρη), τον υπαγωγέα (Σπυρίδης, 2001). Με τη μετακίνηση του καβαλάρη που διαιρούσε τη χορδή σε διαφορετικά μήκη επιτρέποντας μόνο στο ένα τμήμα της να πάλλεται, ο Πυθαγόρας μελέτησε και κατόρθωσε να εκφράσει τις μαθηματικές σχέσεις των διαστημάτων της κλίμακας με το λόγο δύο ακέραιων αριθμών. Άλλωστε, για τον Πυθαγόρα σημαίνουσα θέση στην κατασκευή της μουσικής κλίμακας έχει η έννοια της αναλογικότητας (proportionality) η οποία καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο διαιρείται η χορδή και όχι η αναλογικότητα σε σχέση με άλλα φυσικά φαινόμενα όπως είναι οι αρμονικές σειρές (Loy, 2006). Έτσι, αν μία τεντωμένη χορδή χωριστεί σε δύο μέρη, το ένα μέρος δηλαδή το $1/2$ (*λόγος διπλός*), μας δίνει την οκτάβα ή *διαπασών*. Αν χωριστεί σε τρία μέρη, τα δύο, δηλαδή τα $2/3$ (*λόγος ημιόλιος*) μας δίνουν την καθαρή πέμπτη (*διαπέντε*) και αν σε τέσσερα, τα τρία, δηλαδή τα $3/4$ (*λόγος επίτριτος*), μας δίνουν την καθαρή τέταρτη (*διατεσσάρων)* (Σπυρίδης, 2001). Για τη δημιουργία των παραπάνω καθαρών διαστημάτων, δηλαδή την οκτάβα (2/1), την πέμπτη (3/2) και την τέταρτη (4/3), χρησιμοποιούνται οι αριθμοί 1,2,3,4 και συνδέονται με τη σχέση $2/1 = (3/2) \cdot (4/3)$. Η ομάδα αυτή των αριθμών ονομάζονταν *τετρακτύς* και είχε ιδιαίτερη σημασία για την πυθαγόρεια μουσική θεωρία δεδομένου ότι το άθροισμά τους (1+2+3+4=10) ισούται με το 10 τον οποίον θεωρούσαν ως τον πληρέστερο αριθμό (Mathiesen, 2008).

Ο Πυθαγόρας είναι πιθανόν να αντιμετώπιζε τον υπολογισμό των διαστημάτων ως μία διαδικασία συνεχούς αφαίρεσης η οποία μεταγενέστερα αποτέλεσε τη βάση για τον Ευκλείδειο αλγόριθμο εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ακέραιων αριθμών (Benson, 2008). Με βάση τα παραπάνω, το διάστημα της 4^{ης} καθαρής (4:3) προκύπτει αν από το διάστημα 8^{ης} (2:1) αφαιρέσουμε το διάστημα της 5^{ης} καθαρής, δηλαδή $2/1:3/2= 4/3$. Με τον ίδιο τρόπο αν από το διάστημα 5^{ης} καθαρής αφαιρέσουμε την 4^{η} καθαρή προκύπτει ο τόνος δηλαδή 3/2 : 4/3= 9/8. Ομοίως, αν από την 4^{η} καθαρή αφαιρέσουμε 2 τόνους τότε προκύπτει το *λείμμα* ή *έλλατον* ημιτόνιον ή *δίεση* που αντιστοιχεί στο λόγο 256/243 (ή 2^8: 3^5). Η *αποτομή* ή *μείζον ημιτόνιον* προκύπτει κατά την αφαίρεση της δίεσης από έναν τόνο και εκφράζεται με το λόγο 2187:2048. Η διαφορά του λείμματος και της αποτομής είναι το πυθαγόρειο κόμμα, το οποίο είναι επίσης ίσο με τη διαφορά $(3/2)^{12} : (2/1)^7$= 531441:524288.

Όπως προκύπτει από τον πυθαγόρειο ορισμό της αρμονίας (διαπασών ή οκτάβα) σύμφωνα με τον οποίο «*ἁρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων*», η οκτάβα δομείται από τη σύνθεση της αριθμητικής και της αρμονικής (υπεναντίου) αναλογικότητας (Σπυρίδης, 1997). Ο Πυθαγόρας χρησιμοποιώντας την έννοια του αριθμητικού και αρμονικού μέσου κατασκεύασε την κλίμακα (Loy, 2006).

Αναλυτικότερα, χωρίζοντας την οκτάβα σε 12 ίσα μέρη η οκτάβα αντιστοιχεί στο λόγο 12:6. Η 5η υπολογίζεται με βάση τον αριθμητικό μέσο της οκτάβας από τη σχέση $x = (a + b)/2$, οπότε $(12 + 6)/2 = 9$. Συνεπώς, η 5η δίνεται από το λόγο 12:9 = 3:2. Η 4η υπολογίζεται μέσω του αρμονικού μέσου της οκτάβας και από τη σχέση $x = 2ab/(a + b)$, οπότε $(2 \cdot 12 \cdot 6)/(12 + 6) = 8$. Κατά συνέπεια η 4η δίνεται από το λόγο 8:6 = 4:3. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα σε αυτό που ονόμασε αρμονική αναλογία *(harmonic proportion),* 12:9::8:6, θεμελίωσε τις βάσεις της μουσικής σκέψης (Loy, 2006).

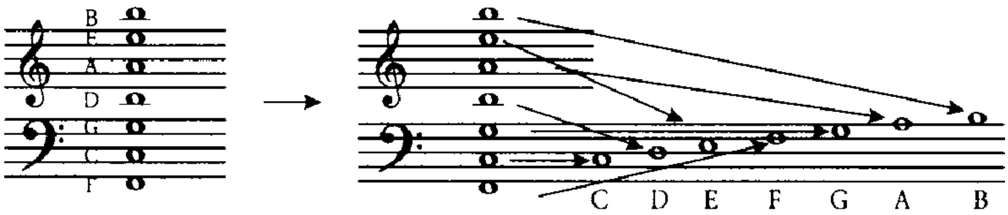
Η κατάταξη των μουσικών διαστημάτων σύμφωνα με τους πυθαγόρειους γινόταν σε δύο βασικές κατηγορίες: τις *ευφωνίες* ή *συμφωνίες* και τις *διαφωνίες* ή *ασυμφωνίες* (Σπυρίδης, 2005). Το κριτήριο κατάταξής τους, όπως αναφέρεται στο δεύτερο μισό της εισαγωγής της Ευκλειδείου πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»,* υπάκουε στο «θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας περί ευφωνίας ή συμφωνίας» (Σπυρίδης, 2005). Συγκεκριμένα, μόνο μία πολλαπλάσια ή επιμόρια σχέση μεταξύ των αριθμών της τετρακτύος (1, 2, 3, 4) εκφράζει ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα. Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 2) φαίνονται τα πυθαγόρεια σύμφωνα διαστήματα. Μεταξύ αυτών περιλαμβάνονται και τα σύνθετα των παραπάνω συμφώνων διαστημάτων με την οκτάβα. Εξαίρεση αποτελεί το διάστημα του τόνου $\frac{9}{8}$ το οποίο παρότι αποτελεί μια επιμόρια σχέση, εντούτοις το κατέτασσαν ως διάφωνο δεδομένου ότι δομείται από τους ακέραιους αριθμούς 8 και 9 οι οποίοι δεν ανήκουν στην τετρακτύα (1, 2, 3, 4).

Σχέση	**Μουσική συμφωνία**
2:1	διά πασών συμφωνία (διάστημα οκτάβας)
3:2	διά πέντε συμφωνία (διάστημα πέμπτης καθαρής)
4:3	διά τεσσάρων συμφωνία (διάστημα τετάρτης καθαρής)
3:1	διά πασών και δια πέντε συμφωνία (διάστημα οκτάβας συν πέμπτης καθαρής)
4:1	δις διαπασών (δύο οκτάβες)

Πίνακας 2: *Πυθαγόρεια σύμφωνα διαστήματα από την τετρακτύα* (Σπυρίδης, 2009).

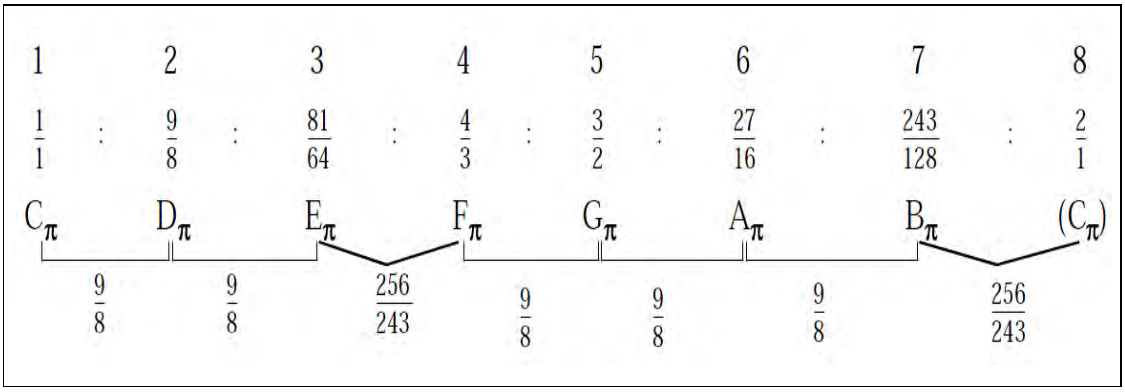
Ο κύκλος των 5^ων^

Η κατασκευή της πυθαγόρειας κλίμακας βασίζεται αποκλειστικά στους απλούς λόγους ακέραιων αριθμών (simple whole-numbers ratios) 2:1 και 3:2 (Bibby, 2003; Benson, 2008). Μία από τις μεθόδους που μπορούμε να ακολουθήσουμε για τον υπολογισμό των πυθαγόρειων διαστημάτων της κλίμακας είναι η υπέρθεση 12 καθαρών πεμπτών. Αυτό σημαίνει ότι ο υπολογισμός κάθε διαστήματος γίνεται με βάση την αριθμητική σχέση της 5ης (3/2) και την επανάληψή της (δηλαδή τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστοιχο εκθέτη) τόσες φορές όσες χρειάζεται να βρεθεί στον κύκλο των 5ων ο ζητούμενος κάθε φορά φθόγγος (Εικόνα, 6).



Εικόνα 6. *Η υπέρθεση των καθαρών πεμπτών στο εύρος της οκτάβας* *(Bibby, 2003)*

Αν ξεκινήσουμε από μία συγκεκριμένη νότα συχνότητας f τότε οι συχνότητες των υπόλοιπων νοτών προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό της f με $(3/2)^n$ ανεβαίνοντας είτε με $(2/3)^n$ κατεβαίνοντας όπου n=0,1,2,… Στην συνέχεια, με τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση του κάθε αποτελέσματος με την κατάλληλη δύναμη του 2 για να συμπτύξουμε τις συχνότητες στα όρια μιας και μόνο οκτάβας ($f_n = 2^n \cdot f$, n = 1,2,3,.. είναι η σχέση που συνδέει δύο συχνότητες σε απόσταση n οκτάβων) σχηματίζεται η κλίμακα που περιέχει πέντε ίσα διαστήματα (τόνους) και δύο μικρότερα (ημιτόνια) όπως φαίνεται στον Πίνακα 3. Οι αριθμοί 1,2,3 κτλ υποδηλώνουν τα διαστήματα που σχηματίζουν οι νότες D, E, F κτλ από τη βάση της κλίμακας, την νότα C δηλαδή. Οι λόγοι πάνω από την ονομασία των νοτών εκφράζουν τη σχέση μήκους χορδής και του παραγόμενου ήχου ενώ οι λόγοι κάτω από αυτές αφορούν τους τόνους (9/8) και τα ημιτόνια (256/243) που σχηματίζονται στη διατονική πυθαγόρεια κλίμακα.



Πίνακας 3. *Πυθαγόρεια διαστήματα και οι αντίστοιχοι λόγοι τους (Loy, 2006)*

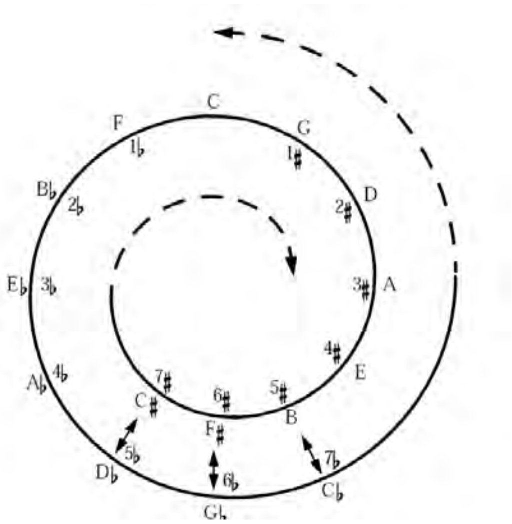
Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλα τα πυθαγόρεια διαστήματα εκφράζονται ως γινόμενο δυνάμεων των αριθμών 2 και 3. Κατά τη διαδικασία κατασκευής της πυθαγόρειας κλίμακας δηλαδή οι μόνοι αριθμοί που χρησιμοποιούνται είναι οι αριθμοί 2 και 3 (και οι δυνάμεις τους). Έτσι, κάθε νότα στο πυθαγόρειο σύστημα δύναται να αναπαρασταθεί με τη σχέση $2^p \times 3^q$, όπου p και q είναι ακέραιοι αριθμοί (Πίνακας 4).

C	D	E	F	G	A	B	C′
1	$3^2/2^3$	$3^4/2^6$	$2^2/3$	$3/2$	$3^3/2^4$	$3^5/2^7$	2

Πίνακας 4: *Πυθαγόρεια κλίμακα εκφρασμένη με τους αριθμούς 2 και 3(Bibby, 2003).*

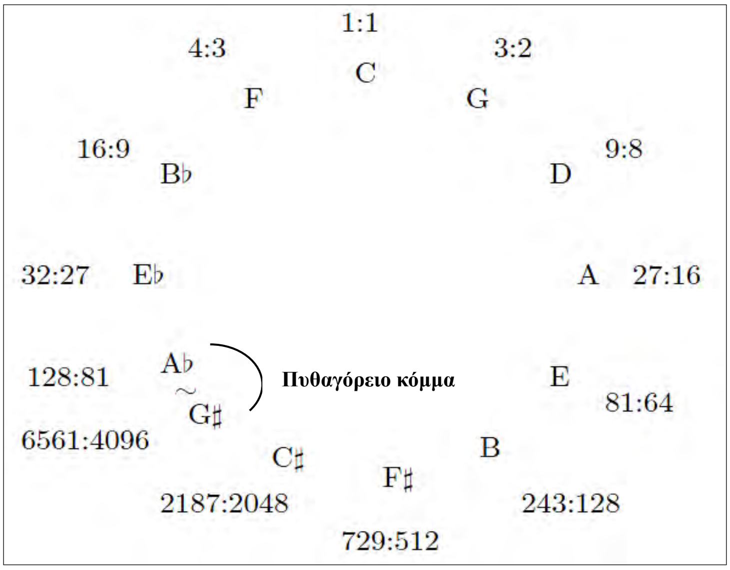
<u>Το πρόβλημα του πυθαγόρειου κουρδίσματος</u>

Στο πυθαγόρειο κούρδισμα δεν μπορεί να υπάρξει κύκλος των 5^{ων} καθώς με την συνεχή επανάληψη του κανόνα των πέμπτων δεν μπορούμε να φθάσουμε στον ίδιο αρχικό αλλά σε υψηλότερο φθόγγο. Στην πραγματικότητα πρόκειται για ένα *συνεχές (spiral)* καθαρών 5^{ων} και όχι για έναν κύκλο καθώς δεν μπορεί να κλείσει (Benson, 2008) (Εικόνα 7).



Εικόνα 7: Ο *κύκλος των 5ων ως συνεχές (Loy, 2006)*

Η υπέρθεση των 12 πεμπτών δίνει μια συχνότητα $(3/2)^{12}\cdot f$= 531441/4096f =129,74f, ενώ οι 7 οκτάβες αντιστοιχούν σε συχνότητα $2^7 f$ = 128f. Η διαφορά αυτή, ο λόγος της οποίας ισούται με 1,0136 και αντιστοιχεί σε περίπου 23,4 cents (1 ημιτόνιο= 100 cents), ονομάζεται Πυθαγόρειο κόμμα (100 cents =1 ημιτόνιο). Αν για παράδειγμα, δώδεκα συνεχείς 5ες υπολογιστούν σε ένα έγχορδο και επτά συνεχείς 8ες σε ένα άλλο, η τελική νότα που θα έχουν καταλήξει και στις δύο περιπτώσεις δεν θα είναι ακριβώς η ίδια και το αποτέλεσμα δεν θα είναι εύηχο. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούν να συμπέσουν οι οκτάβες με τις πέμπτες όσες φορές και να τις επαναλάβουμε (Loy, 2006). Άμεση απόρροια των παραπάνω είναι το γεγονός ότι οι εναρμόνιοι φθόγγοι (φθόγγοι που έχουν διαφορετική ονομασία αλλά αντιστοιχούν στην ίδια νότα του συγκερασμένου συστήματος) που παράγονται μέσα από τη διαδικασία του κύκλου των 5ων να μην ταυτίζονται (Benson, 2008). Πράγματι, έχοντας ως αφετηρία το C και με βάση τον κανόνα των 5ων, ανεβαίνοντας (διαγράφοντας δεξιόστροφα στον κύκλο) φθάνουμε πχ στο A ♭ . Από την άλλη, με τους ίδιους κανόνες ξεκινώντας πάλι από το C αλλά κατεβαίνοντας (διαγράφοντας αριστερόστροφα τον κύκλο) φθάνουμε στο G#. Παρόλο που θα έπρεπε σύμφωνα με το σύγχρονο δυτικοευρωπαϊκό σύστημα οι δύο αυτές νότες να ταυτίζονται στην πραγματικότητα διαφέρουν μεταξύ τους κατά ¼ του ημιτονίου περίπου (πυθαγόρειο κόμμα) (Εικόνα 8).



Εικόνα 8: *Ο κύκλος των 5ων και το πυθαγόρειο κόμμα (*Benson, 2008*)*

Ένα ακόμη πρόβλημα που ανακύπτει από το πυθαγόρειο κούρδισμα είναι το διάστημα της 3ης. Επειδή ο λόγος του εκφράζεται με μεγάλους αριθμούς (81/64) προκαλεί ένα σκληρό άκουσμα (Loy, 2006). Το φυσικό διάστημα της 3ης το οποίο προκύπτει με βάση τους αρμονικούς (βλ. Ενότητα 2.1.) εκφράζεται με το λόγο συχνοτήτων 5/4. Η διαφορά τους $\frac{81/64}{5/4} = \frac{81}{80} = 1.0125$ ονομάζεται συντονικό κόμμα ή κόμμα του Διδύμου.

2.2.2. Η κλίμακα του Αριστόξενου

Στην αρχαιοελληνική Μουσική ο υπολογισμός των διαστημάτων γίνεται με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος, όπως προαναφέρθηκε, είναι ο πυθαγόρειος ο οποίος βασίζεται στους αριθμητικούς λόγους που εκφράζουν το λόγο των μηκών δύο δονουμένων τμημάτων χορδής επί του κανόνος, τα οποία ακουστικά υλοποιούν το μουσικό διάστημα (Σπυρίδης, 2004). Οι πράξεις μεταξύ των μουσικών διαστημάτων στην πυθαγόρειο αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος διέπονται από μια ιδιάζουσα Άλγεβρα, λογαριθμικού χαρακτήρα (Σπυρίδης, 2004). Έτσι, η πρόσθεση και η αφαίρεση των μουσικών διαστημάτων συντελείται με πολλαπλασιασμό και με διαίρεση αντίστοιχα των αριθμητικών τους λόγων (Benson, 2008; Forster, 2010; Loy, 2006; Σπυρίδης, 2004; Steck, 2014; Wright, 2009).

Ο δεύτερος τρόπος, εισήχθη από τον μαθητή του Πυθαγόρα, τον Αριστόξενο τον Ταραντίνο που έζησε τον 4ο αιώνα π.Χ. και οποίος εκφράζει την αντίληψη ότι ο διαστηματικός υπολογισμός δεν πρέπει να γίνεται με αριθμητικές πράξεις, αλλά με βάση την εκτίμηση του αυτιού (Assayag et.al., 2002; Γιάννου, 1995). Σύμφωνα με τον Αριστόξενο ως μουσικό διάστημα ορίζεται η απόσταση ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους και το οποίο αναπαρίσταται ως ένα ευθύγραμμο ακίνητο τμήμα μιας τεντωμένης χορδής (Σπυρίδης, 2004). Στην μουσική πράξη, με βάση τον παραπάνω ορισμό, η έννοια του φθόγγου έχει τη σημασία «θέση πατήματος επί του μάνικου του μουσικού οργάνου», οπότε και ο όρος διάστημα αποκτά τη σημασία ενός ακινήτου ευθυγράμμου τμήματος (μη ηχούντος) μεταξύ των δύο δεσμών (=τάστων) της χορδής του μονοχόρδου μουσικού οργάνου.

Ο Αριστόξενος, σε αντίθεση με την πυθαγόρεια διαίρεση της οκτάβας σε άνισα διαστήματα, διαιρεί το διάστημα της οκτάβας (διαπασών) σε 6 ίσους μεταξύ τους τόνους και τον τόνο σε 2 ίσα μεταξύ τους ημιτόνια ή σε 3 ίσα μεταξύ τους τρίτα ή σε 4 ίσα μεταξύ τους τρίτα. Έτσι προκύπτει μία κλίμακα (σε έκταση οκτάβας) που χωρίζεται είτε σε 6 ισομεγέθεις τόνους, ή σε 12 ισομεγέθη ημιτόνια, ή τέλος, σε 18 ή σε 24 ίσα μουσικά διαστήματα. Στην πραγματικότητα είναι ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του συγκερασμού (Loy, 2006; Σπυρίδης, 2004). Οι θεωρίες του Αριστόξενου διασώθηκαν μέσα από τα συγγράμματα του αλεξανδρινού θεωρητικού της μουσικής, αστρονόμου και μαθηματικού Κλαύδιου Πτολεμαίου (2^{ος} αιώνας μ.Χ.) και οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν εκ νέου ως βάση ενός νέου μουσικού συστήματος από το μουσικοθεωρητικό Zarlino κατά την Αναγέννηση.

2.3. Αναγεννησιακή δυτική πολυφωνική Μουσική: Η έννοια της αρρητότητας

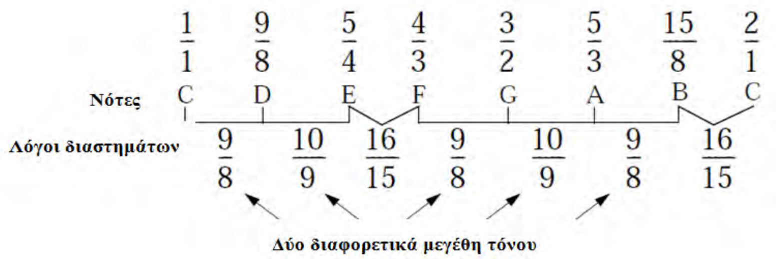
Η αναγεννησιακή Μουσική που τοποθετείται χρονικά από το 1400 έως το 1600 μ.Χ. παρουσιάζει καινοτόμα χαρακτηριστικά τόσο στο επίπεδο της μουσικής θεωρίας όσο και στη μουσική πράξη και δημιουργία. Το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμά της είναι η επικράτηση της πολυφωνικής μουσικής, η χρήση δηλαδή ταυτόχρονα πολλών φωνών (Nef, 1985). Βέβαια, οι πρώτες μαρτυρίες πολυφωνικής πρακτικής εντοπίζονται στο λειτουργικό μέλος ήδη από τον 9^{ο} αιώνα μ.Χ. όπως καταγράφονται στο θεωρητικό εγχειρίδιο Musica Enchiriadis (Ανωνύμου). Σε αυτήν την πρώιμη μορφή πολυφωνικής γραφής που ονομάζεται organum, προστίθενται σε συγκεκριμένα σημεία των μελωδιών του γρηγοριανού μέλους (cantus firmus ή vox principalis) μία παράλληλη μελωδική γραμμή (vox organalis που μετονομάστηκε αργότερα σε discantus) (Fuller, 2008). Η συγκεκριμένη τεχνική που περιορίζεται σε συνηχήσεις των διαστημάτων των παράλληλων $4^{ων}$, $5^{ων}$, $8^{ων}$ –βασίζεται δηλαδή στο ταυτόχρονο άκουσμα της ίδιας μελωδίας, νότα προς νότα, σε απόσταση (τονικού ύψους) 4 ή 5 ή 8 φθόγγων– φτάνει στο απόγειό της στη σχολή της Notre Dame ($12^{ος}$–$13^{ος}$ αιώνας) και ως τεχνική σύνθεσης χρησιμοποιείται στη σημαντικότερη μορφή πολυφωνικής μουσικής, το Μοτέτο (Γιάννου, 1995). Κατά τον ύστερο Μεσαίωνα (*Ars Nova*, $13^{ος}$ – $14^{ος}$ αιώνας μ.Χ.) και την πρώιμη Αναγέννηση εδραιώνεται η ευρεία χρήση των διαστημάτων 3ης και 6ης, που θεωρούνταν μέχρι τότε διαφωνίες, ακόμα και η χρήση των διαστημάτων της $2^{ας}$ και της $7^{ης}$ (Nef, 1985).

Η μετάβαση της Μουσικής από τη μονοφωνία της Αρχαιότητας στην πολυφωνία της Αναγέννησης και ο εμπλουτισμός των μουσικών έργων με τρίφωνες συγχορδίες συνοδεύτηκε και από αντίστοιχη αλλαγή στη δομή των μουσικών κλιμάκων (Steck, 2015). Η αυξανόμενη χρήση των διαστημάτων της $3^{ης}$ και της $6^{ης}$ στο μουσικό ρεπερτόριο της εποχής έκανε επιτακτική την ανάγκη εύρεσης ενός νέου τρόπου υπολογισμού των παραπάνω διαστημάτων έτσι ώστε να αποφευχθεί η σκληρότητα του ακούσματος που προκαλούσε το πυθαγόρειο διάστημα της $3^{ης}$ και της $6^{ης}$ (Herlinger, 2008).

2.3.1. Το φυσικό κούρδισμα (just intonation) του Zarlino

Η πυθαγόρεια κλίμακα, όπως περιγράψαμε παραπάνω, περιέχει όχι μόνο απλούς λόγους αλλά και πιο σύνθετους όπως για παράδειγμα συμβαίνει στο διάστημα της $3^{ης}$ ($\frac{81}{64}$), της $6^{ης}$ ($\frac{27}{16}$) και στο ημιτόνιο ($\frac{256}{243}$) τα οποία περιλαμβάνουν μεγάλους αριθμούς. Επιπλέον, όπως κατέστη σαφές η κλίμακα μέσω των αριθμητικών υπολογισμών δεν μπορεί να διαιρεθεί σε ίσα τμήματα. Κατά την αναγέννηση συστηματοποιούνται οι προσπάθειες επαναπροσδιορισμού των διαστημάτων $3^{ης}$ και $6^{ης}$ ώστε να γίνει μικρότερος ο λόγος τους (slightly flattened) (Fauvel, et. al., 2003).

Ο Gioseffo Zarlino, ένας από τους πιο σημαντικούς θεωρητικούς της μουσικής της Αναγέννησης (1517–1590 μ.Χ.) μέσα από το έργο του *Le Institutioni Armoniche* (1558 μ.Χ.), και στηριζόμενος στους αριθμητικούς υπολογισμούς της αρχαίας και μεσαιωνικής θεωρίας της Μουσικής και ειδικότερα στο μουσικό σύστημα του Αριστόξενου όπως αυτό διασώθηκε μέσα από το θεωρητικό έργο του μουσικού, αστρονόμου και μαθηματικού Κλαύδιου Πτολεμαίου ($2^{ος}$ αιώνας μ.Χ.), περιέγραψε το νέο φαινόμενο της τρίφωνης συνήχησης, το ταυτόχρονο άκουσμα δηλαδή του διαστήματος της μεγάλης και μικρής τρίτης και αντίστροφα στα πλαίσια της πέμπτης καθαρής ως απόρροια της πολυφωνίας (Γιάννου, 1995; Nef, 1985). Συγκεκριμένα χρησιμοποίησε τους λόγους 4:5:6, που συνιστούν μία τρίφωνη συγχορδία (triad) (Loy, 2006). Η συγχορδία συμπεριλαμβάνει τα διαστήματα της μεγάλης τρίτης (5/4), της μικρής τρίτης (6/5) και της καθαρής 5ης (6/4 = 3/2). Έτσι, ενώ η πυθαγόρεια κλίμακα δομούνταν με βάση τους ακέραιους αριθμούς 1,2,3,4 η νέα κλίμακα του Zarlino δομείται με βάση τους ακέραιους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 οι οποίοι ονομάζονται *numero scenario,* έχουν μυστικιστικές ιδιότητες και αποτελούν τη βάση της αρμονίας (Εικόνα 9).



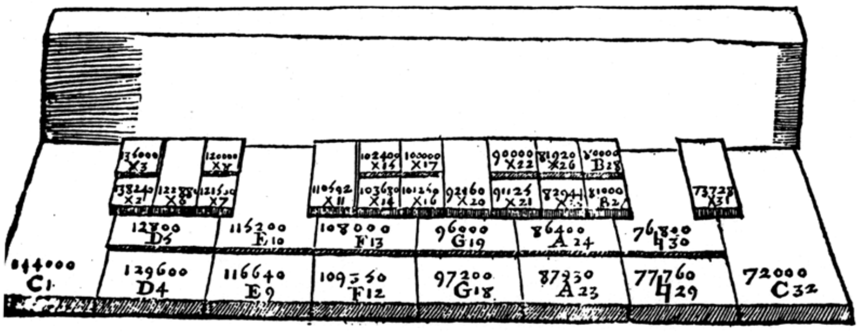
Εικόνα 9: *Η φυσική κλίμακα του Zarlino.*

Δεδομένου ότι κατά το σχηματισμό της κλίμακας εκτός από το διάστημα της 3ης δημιουργούνται και άλλοι νέοι φθόγγοι που ανήκουν στη στήλη των φυσικών αρμονικών η κλίμακα ονομάζεται κλίμακα του φυσικού συστήματος (just intonation) (Fauvel, et. al., 2003). Για παράδειγμα, ενώ έχουμε τον πυθαγόρειο τόνο $\frac{9}{8}$ (μείζονας τόνος) ανάμεσα στις νότες C–D, F–G, A–B δημιουργείται και ένας ακόμη μικρότερος τόνος, ο ελάσσονας με λόγο $\frac{10}{9}$ ανάμεσα στις νότες D–E, G–A. Ο λόγος των δύο παραπάνω τόνων, $\frac{9}{8} : \frac{10}{9}$, ονομάζεται συντονικό κόμμα: $\frac{81}{80} = 3^4/(2^4 \cdot 5) = 1.0125$ (περίπου 22 cents). Το μεγάλο μειονέκτημα της παραπάνω κλίμακας εντοπίζεται όταν θέλουμε να μεταφερθούμε από μία τονικότητα σε μία άλλη, στην περίπτωση δηλαδή της μετατροπίας (Assayag et. al., 2002; Fauvel, et. al., 2003; Loy, 2006). Για παράδειγμα, αν θέλουμε από τη βασική τονικότητα (J) να μεταφερθούμε σε μία άλλη τονικότητα (J^1) κατά ένα διάστημα 5ης προς τα επάνω, τότε η νέα κλίμακα που θα σχηματιστεί περιέχει δύο νέες νότες, τις F # και A όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5. Συγκεκριμένα, η νότα B μετατρέπεται σε F #, και η νότα D μετατρέπεται σε μία νότα A με λόγο όμως $3^3/2^4$ διαφέροντας από την αρχική νότα A (5/3) κατά ένα συντονικό κόμμα. Αυτό συμβαίνει γιατί το διάστημα G–A της αρχική κλίμακας ήταν ένας ελάσσονας τόνος που μετατράπηκε σε μείζονα.

	C		D		E	F	F'	G		A		B	C'
J	1		$3^2/2^3$		$5/2^2$	$2^2/3$		$3/2$		$5/3$		$3.5/2^3$	2
J'	1		$3^2/2^3$		$5/2^2$		$3^2.5/2^5$	$3/2$		$3^3/2^4$		$3.5/2^3$	2

Πίνακας 5: *Το πρόβλημα της μετατροπίας στην φυσική κλίμακα (Fauvel, et. al., 2003).*

Το πρόβλημα που προκύπτει κατά την μετατροπία στο φυσικό σύστημα δημιουργούσε προβλήματα στα πληκτροφόρα όργανα καθώς έπρεπε να προσθέτουν για κάθε κούρδισμα επιπλέον πλήκτρα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κατασκευή ενός κλαβιέ 31 συνολικών πλήκτρων από το μαθηματικό Marin Mersenne (1588-1648 μ.Χ.) εκ των οποίων τα τέσσερα παρεμβάλλονταν μεταξύ των πλήκτρων που αντιστοιχούσαν στο διάστημα του τόνου F και G αντί του ενός που υπάρχει στα σύγχρονα πιάνα (Fauvel, et. al., 2003) (Εικόνα 10). Αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που στα μουσικά κομμάτια της εποχής δεν ήταν σύνηθες το φαινόμενο της μετατροπίας παραμένοντας στην αρχική τους τονικότητα (Nef, 1985).



Εικόνα 10: *Κλαβιέ του Mersenne με τα επιπλέον πλήκτρα.*

2.3.2. Το μεσοτονικό (meantone) σύστημα του Salinas

Στο τέλος του 16ου αιώνα, οι θεωρητικοί της μουσικής και οι κατασκευαστές οργάνων για να μπορέσουν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα που προέκυπτε κατά την αλλαγή τονικότητας σε ένα μουσικό κομμάτι για την ερμηνεία του οποίου στα πληκτροφόρα όργανα έπρεπε να προσθέτουν συνεχώς νέα πλήκτρα, εγκατέλειψαν το φυσικό σύστημα (just intonation) που βασιζόταν στους αρμονικούς ήχους και άρχισαν να αναζητούν νέα μουσικά συστήματα (Barbour, 1951). Για την επίλυση των μουσικών αυτών ζητημάτων ενεπλάκησαν αρκετοί μαθηματικοί όπως οι Galileo Galilei (1564-

1642 μ.Χ.), Rene Descartes (1596-1650 μ.Χ.), Isaac Newton (1643-1727 μ.Χ.) (Assayag et. al., 2002).

Το νέο κούρδισμα (new temperament) όπως το αποκαλούσε ο Zarlino, που θεωρήθηκε κατάλληλο για τα μουσικά όργανα με κλαβιέ ήταν το μεσοτονικό σύστημα (meantone ή quarter-comma meantone) δημιουργός του οποίου ήταν ο Francesco Salinas (1530-1590 μ.Χ.) (Barbour, 1951). Στο σύστημα αυτό, οι δύο τόνοι του φυσικού συστήματος $\frac{9}{8}$ και $\frac{10}{9}$ αντικαταστάθηκαν με το γεωμετρικό μέσο τους δημιουργώντας έτσι ένα νέο διάστημα τόνου $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Το διάστημα 3^{ης} παραμένει να είναι φυσικό έχοντας λόγο $\frac{5}{4}$, ενώ το διάστημα 5^{ης} έχει λόγο $\sqrt[4]{5}$ ≈1.4953 το οποίο είναι λίγο μικρότερο από το λόγο $\frac{3}{2}$ της καθαρής 5^{ης}, δίνοντας έτσι μια πιο μετατοπισμένη προς τα επάνω (δηλαδή πιο υψηλή) 5^{η} (Fauvel, et. al., 2003).

Στην πραγματικότητα το μεσοτονικό σύστημα είναι ένα μερικώς συγκερασμένο σύστημα καθώς γίνεται η προσπάθεια εξάλειψης του συντονικού κόμματος (Benson, 2008). Ο όρος *μερικώς συγκερασμός* αναφέρεται στη διαίρεση της μουσικής κλίμακας με τέτοιο τρόπο ώστε να περιλαμβάνει διαστήματα που βασίζονται τόσο σε λόγους ακέραιων μικρών αριθμών (*simple integer ratios)* όσο και σε άρρητους αριθμούς (irrational), αριθμούς δηλαδή που δεν μπορούν να εκφραστούν ως λόγο δύο ακέραιων αριθμών (Loy, 2006). Άλλωστε, η δημιουργία ενός είδους ισοσυγκερασμένου συστήματος ήταν επιβεβλημένη εκτός από τα πληκτροφόρα όργανα και για το κούρδισμα των οργάνων που είχαν τάστα (δεσμούς) όπως τα λαούτα δεδομένου ότι η οποιαδήποτε ανισομερή τοποθέτηση του τάστου μπορούσε να οδηγήσει σε λανθασμένες οκτάβες (Rasch, 2008 όπως αναφέρεται στον Christensen, 2008).

Αναλυτικότερα, χρησιμοποιώντας την πυθαγόρεια λογική υπέρθεσης των 5^{ων}, φτάνουμε μετά από 4 επάλληλες φυσικές καθαρές 5^{ες} σε μία 3^{η} που διαφέρει από τη φυσική 3^{η} κατά διάστημα ίσο με το συντονικό κόμμα (81/80). Για να εξαλειφθεί αυτή η διαφορά, μοιράζεται ισόποσα στις υπερτοποθετημένες 5^{ες} έτσι ώστε κάθε 5^{η} να χαμηλώσει κατά 1/4 αυτού του κόμματος (5,3765 cents) δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο μεγάλες φυσικές 3^{ες} (Steck, 2015). Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από τον Πίνακα 6, το φθόγγος Ρε στην κλίμακα του μεσοτονικού συστήματος βρίσκεται ακριβώς στη μέση ισαπέχοντας από τις νότες Ντο και Ρε που αποτελούν ένα διάστημα 3^{ης} μεγάλη σε αντίθεση με το πυθαγόρειο όπου η αντίστοιχη νότα απείχε από τη νότα Ντο ένα μεγάλο τόνο (9/8) και από την νότα Μι ένα μικρό τόνο (10/9). Αυτός είναι και ο λόγος που ονομάστηκε μεσοτονικό σύστημα. Επιπλέον, η κλίμακα του μεσοτονικού συστήματος περιλαμβάνει μεταξύ άλλων φυσικές τρίτες ($\frac{5}{4}$), πέντε διαστήματα τόνου με λόγο √5/2:1 και 2 ημιτόνια με λόγο που προκύπτει από τη σχέση $\sqrt{2/\left(\sqrt{5}/2\right)^5} : 1 = 8 : 5^{\frac{5}{4}}$. Το διάστημα 5^{ης} εκφράζεται με άρρητο αριθμό.

note	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
ratio	1:1	$\sqrt{5}$:2	5:4	$2:5^{\frac{1}{4}}$	$5^{\frac{1}{4}}:1$	$5^{\frac{3}{4}}:2$	$5^{\frac{5}{4}}:4$	2:1
cents	0.000	193.157	386.314	503.422	696.579	889.735	1082.892	1200.000

Πίνακα 6: *Η μεσοτονική κλίμακα (Benson, 2008)*

2.4. Ισοσυγκερασμένο σύστημα: Η έννοια των λογαρίθμων

Η μετάβαση από μία τονικότητα σε μία άλλη κατά τη διάρκεια ενός μουσικού κομματιού που αποτέλεσε μία συνηθισμένη τεχνική σύνθεσης της αναγεννησιακής Μουσικής υιοθετήθηκε τόσο από τους συνθέτες της εποχής του Μπαρόκ (1600-1750 μ.Χ.) που ακολούθησε όσο και από τους μεταγενέστερούς τους (Benson, 2008). Προκειμένου λοιπόν, να κατασκευαστούν μουσικά όργανα που να είναι λειτουργικά και εύχρηστα κατά τη μουσική εκτέλεση αναζητήθηκε με τη βοήθεια των μαθηματικών εκ νέου ένα πιο κατάλληλο μουσικό σύστημα απαλλαγμένο από τις αδυναμίες του μεσοτονικού συστήματος (Loy, 2006). Καταλυτικό ρόλο σε αυτήν την κατεύθυνση έπαιξε η επιστημονική εξέλιξη που σημειώθηκε την ίδια ιστορική περίοδο καθώς οι νέες ανακαλύψεις στο χώρο των θετικών επιστημών προσέφεραν νέα μεθοδολογικά εργαλεία για τη μουσική θεωρία και τεχνολογία.

Ο 16^{ος} και 17^{ος} αιώνας μ.Χ. χαρακτηρίζεται από την *Επιστημονική Επανάσταση* (*Scientific Revolution*) κατά την οποία νέες ιδέες και γνώσεις πάνω στη Φυσική, τα Μαθηματικά, την Αστρονομία οδήγησαν σε αναθεώρηση των μεσαιωνικών αντιλήψεων σχετικά με τη φύση ενώ παράλληλα έθεσαν τα θεμέλια της σύγχρονης επιστήμης. Η περίοδος αυτή αποτέλεσε ορόσημο και για την επιστήμη της Μουσικής καθώς συντελέστηκε η μετάβασή της από ένα κοσμολογικό-θεωρητικό μοντέλο σε ένα εμπειρικό-πειραματικό (Abdonour, 2008). Ταυτόχρονα, θεμελιώθηκε ο νέος κλάδος της Φυσικής Ακουστικής ο οποίος στηρίχτηκε στη μαθηματική ερμηνεία των ακουστικών φαινομένων. Πρώτος ο Ιταλός μαθηματικός Giovanni

Battista Benedetti (1530–1590 μ.Χ.) συνέδεσε την έννοια του τονικού ύψους και την έννοια της συμφωνίας με τις συχνότητες της δόνησης (frequencies of vibration) (Loy, 2006). Επιπλέον, ένα από επιστημονικά επιτεύγματα της εποχής είναι αναπαράσταση του ήχου ως ημιτονοειδές σήμα (sine waves).

Βέβαια, η ανακάλυψη της έννοιας του λογάριθμου στην επιστήμη των Μαθηματικών έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη δημιουργία του ισοσυγκεραμένου συστήματος στο βασίζεται το σύγχρονο τονικό ευρωπαϊκό μουσικό σύστημα. Οι θεωρητικοί της Μουσικής και οι μαθηματικοί που ασχολήθηκαν με τα αντίστοιχα ζητήματα, κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης έχοντας ως μέσο το μονόχορδο, προσπάθησαν να υπολογίσουν τον τρόπο διαίρεσης της οκτάβας σε σχέση πάντα με το μήκος της χορδής με βάση αριθμητικές μεθόδους (Rasch, 2008 όπως αναφέρεται στον Christensen, 2008). Από το τέλος του 16ου αιώνα μ.Χ. παρατηρείται όμως μία ριζική μεταβολή στη θεωρία της μουσικής και συγκεκριμένα στον τρόπο κουρδίσματος των οργάνων ο οποίος καθορίζεται από τη μέθοδο υπολογισμού των διαστημάτων που διήρκησε ως τα μέσα του 18ου αιώνα μ.Χ. Οι υπολογισμοί για τη διαίρεση της οκτάβας εξακολουθούσαν να γίνονται σε σχέση με το μήκος χορδής με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούνταν μαθηματικά εργαλεία όπως η διαδικασία εξαγωγής ρίζας (root extraction) (Rasch, 2008 όπως αναφέρεται στον Christensen, 2008). Αυτό σήμαινε για τη μουσική πράξη και θεωρία, ότι τα διαστήματα οποιουδήποτε μεγέθους και κατ’ επέκταση η οκτάβα μπορούσαν με τη λογαριθμική μέθοδο να χωριστούν σε ίσα τμήματα που με τις μέχρι πρότινος χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μεθόδους κάτι τέτοιο ήταν αδύνατο. Αρχικά, η λογαριθμική προσέγγιση των διαστημάτων τον 17ο αιώνα μ.Χ. χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των περίπλοκων μόνο υπολογισμών μηκών της χορδής ενώ στην πορεία γενικεύτηκε για οποιαδήποτε περίπτωση (Wardhaugh, 2008). Βέβαια, από τον 18ο αιώνα μ.Χ. και μετέπειτα η απεικόνιση των μουσικών φθόγγων με την έννοια των συχνοτήτων είχε ως αποτέλεσμα να εγκαταλειφθεί η μέθοδος υπολογισμού τους έχοντας ως σημείο αναφοράς το μήκος της χορδής, η οποία αντικαταστάθηκε από τον υπολογισμό των συχνοτήτων τους.

2.4.1. Η Ισοσυγκερασμένη Κλίμακα (Equal Temperament)

Παρόλο που το ισοσυγκερασμένο σύστημα ήταν ήδη γνωστό κατά τον 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. τουλάχιστον για την κατασκευή κάποιων έγχορδων οργάνων με τάστα, άρχισε να χρησιμοποιείται σε ευρεία κλίμακα στα τέλη του 18ου αιώνα μ.Χ. Η πρώτη αναφορά για το μαθηματικό υπολογισμό με βάση τους άρρητους αριθμούς έγινε από τον Simon Stevin το 1585 μ.Χ. (Rasch, 2002 όπως αναφέρεται στο Christensen, 2002).

Το ισοσυγκερασμένο σύστημα βασίζεται στην υποδιαίρεση του διαστήματος της οκτάβας σε 12 ίσα μέρη που αντιστοιχούν ουσιαστικά σε 12 ίσα ημιτόνια (Benson, 2008; Loy, 2006). Κανένα από τα διαστήματα που προκύπτουν, με εξαίρεση την οκτάβα, δεν είναι φυσικά δηλαδή δεν αντιστοιχούν στους φυσικούς αρμονικούς ήχους. Προκειμένου δηλαδή να μοιραστεί ισομερώς η οκτάβα, όλες για παράδειγμα οι 5ες καθαρές , οι μεγάλες 3ες είναι ίσες μεταξύ τους σε αντίθεση με ότι συνέβαινε στα συστήματα των προηγουμένων ιστορικών περιόδων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οποιαδήποτε τονικότητα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς να χρειάζονται να κατασκευαστούν νέες νότες (Loy, 2006; Steck, 2015).

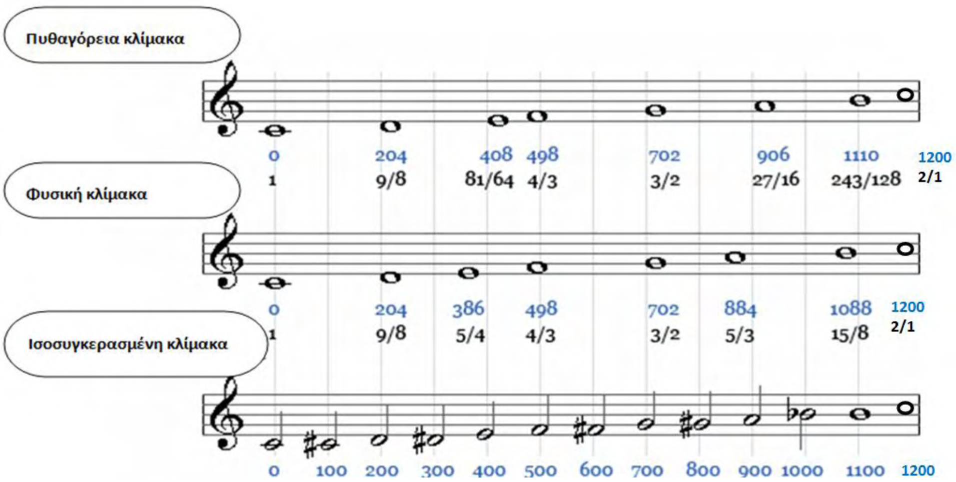
Για τη μαθηματική κατασκευή του συγκεκριμένου συστήματος ακολουθείται η ακόλουθη διαδικασία: εφόσον η οκτάβα δίνεται από το λόγο 2/1, οι λόγοι των 12 ημιτονίων της κλίμακας που προκύπτουν από την ισομερή διαίρεσή της σε 12 ίσα μέρη δίνονται από τη σχέση $2^{\frac{1}{12}}$:1 και είναι η ίδια για όλα τα ημιτόνια ($\sqrt[2]{12} \cong 1,05946$). Κατ' αντίστοιχο τρόπο οι 6 ισομεγέθεις τόνοι δίνονται από τη σχέση $2^{\frac{1}{6}}$:1. Τα διαστήματα της κλίμακας που προκύπτουν καταγράφονται στον Πίνακα 7. Όπως παρατηρούμε, η καθαρή 5η (701,955 cents) είναι ελαφρώς μικρότερη από τη φυσική (700 cents) και η μεγάλη 3η (400 cents) είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη φυσική (386,31 cents).

note	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
ratio	1:1	$2^{\frac{1}{6}}$:1	$2^{\frac{1}{3}}$:1	$2^{\frac{5}{12}}$:1	$2^{\frac{7}{12}}$:1	$2^{\frac{3}{4}}$:1	$2^{\frac{11}{12}}$:1	2:1
cents	0.000	200.000	400.000	500.000	700.000	900.000	1100.000	1200.000

Πίνακας 7: *Λόγοι των διαστημάτων του ισοσυγκερασμένου συστήματος (Benson, 2008).*

2.4.2. Το σύστημα των Cents του Ellis

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού των διαστημάτων που βασίζεται στους λογάριθμους είναι το σύστημα που εισήγαγε ο Alexander Ellis το 1875 μ.Χ. και εξακολουθεί να χρησιμοποιείται στη σύγχρονη μουσική πρακτική (Benson, 2008). Το σύστημα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν θέλουμε να συγκρίνουμε μεταξύ τους διαστήματα ακόμα και μεταξύ διαφορετικών μουσικών συστημάτων. Σύμφωνα με το σύστημα αυτό, η οκτάβα χωρίζεται σε 1200 ίσα τμήματα (cents) και περιλαμβάνει 6 ίσους μεταξύ τους τόνους και 12 ίσα μεταξύ τους ημιτόνια. Κάθε τόνος έχει 200 cents και κάθε ημιτόνιο έχει 100cents. Για να μετατρέψουμε το λόγο συχνοτήτων r:1 σε cents χρησιμοποιούμε τη σχέση: 1200 log2(r) = 1200 ln(r)/ ln(2). Και αντίστροφα για να μετατρέψουμε ένα διάστημα n cents σε λόγο συχνοτήτων χρησιμοποιούμε τη σχέση $2^{\frac{n}{1200}}$: 1. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για να υπολογίσουμε το άθροισμα δύο διαστημάτων προσθέτουμε και δεν πολλαπλασιάζουμε τα δύο διαστήματα. Για παράδειγμα, με βάση τη μονάδα μέτρησης των cents η οκτάβα ως άθροισμα του διαστήματος της 5ης (700cents ή 3/2) και της 4ης (500 cents ή 4/3) υπολογίζεται ως εξής: 700+500 = 1200 cents. Ενώ αντίθετα με βάση το λόγο συχνοτήτων η οκτάβα προκύπτει ως ακολούθως: (3/2) · (4/3) = 2/1. Στον πίνακα 8 που ακολουθεί παρατίθεται η συγκριτική θεώρηση των τριών βασικών συστημάτων δηλαδή του πυθαγόρειου, του φυσικού και του ισοσυγκερασμένου συστήματος με βάση τόσο το λόγο συχνοτήτων όσο και με βάση τα cents. Και στα τρία συστήματα όπως άλλωστε και στα περισσότερα συστήματα μόνο το διάστημα της 8ης παραμένει φυσικό.



Πίνακας 8: *Σύγκριση των τριών συστημάτων με βάση τα cents.*

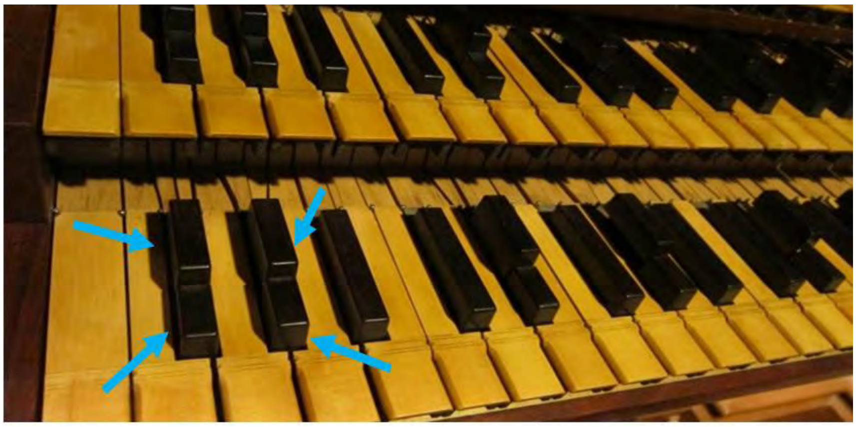
2.6. Το κούρδισμα των μουσικών οργάνων ως πλαίσιο εφαρμογής της μαθηματικής επιστήμης

Τα Μαθηματικά αποτελούν βασικό εργαλείο για την κατασκευή και το κούρδισμα τους. Μέχρι το 16ο αιώνα μ.Χ. ο πυθαγόρειος υπολογισμός των διαστημάτων υπήρξε ο πυρήνας της τεχνικής χορδίσματος των οργάνων. Η εμφάνιση όμως των πληκτροφόρων οργάνων δημιούργησε την ανάγκη εύρεσης ενός νέου συστήματος με τη βοήθεια πιο πολύπλοκων μαθηματικών εργαλείων όπως των λογάριθμων. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα αναφερθούμε μόνο στη μαθηματική δομή του κουρδίσματος του πιάνου και της κιθάρας, τα οποία έχουν προκαθορισμένες, σταθερές (fixed) νότες και ακολουθούν το ισοσυγκερασμένο σύστημα (equal temperament).

2.6.1. Πιάνο

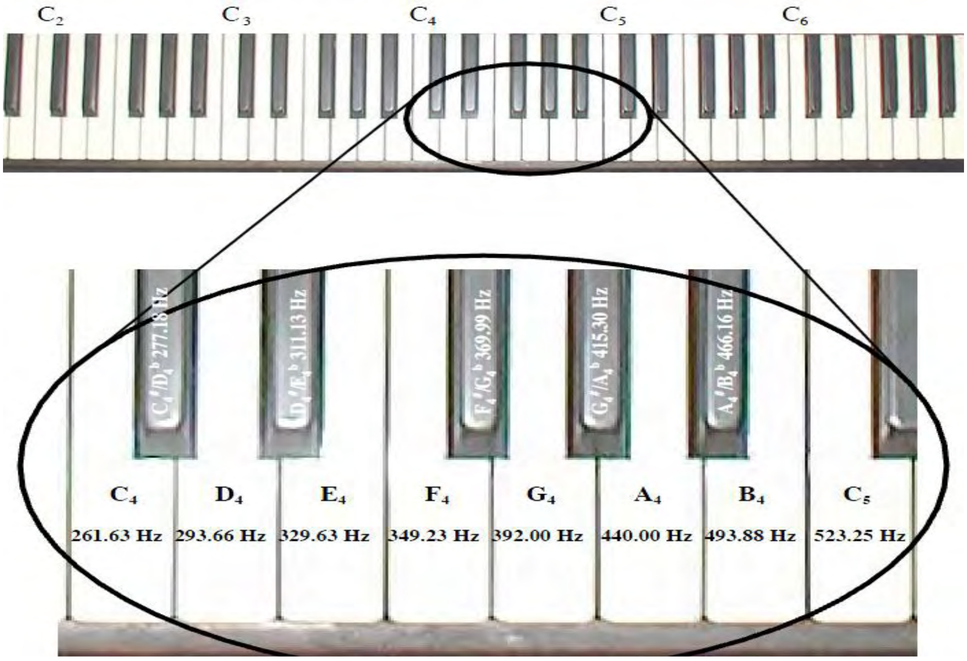
Το πιάνο ανήκει στα πληκτροφόρα όργανα και αποτελεί μία από τις καινοτομίες της μουσικής τεχνολογίας. Το σύγχρονο πιάνο εφευρέθηκε από τον Bartolomeo Cristofori όταν στις αρχές του 17ου αιώνα μ.Χ. παρουσίασε έναν τύπο πιάνου πολύ κοντά στη σημερινή του μορφή, το “gravicembalo col piano e forte”. Προγονικές μορφές του θεωρούνται το τσέμπαλο που αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια του 15ου αιώνα μ.Χ. και το κλαβίχορδο (clavichord) ιδιαίτερα αγαπητό το 18ο αιώνα μ.Χ.

Γενικότερα, τα πληκτροφόρα όργανα κυρίως για τη χρονική περίοδο από τα μέσα του 16ου έως και το 18ο αιώνα μ.Χ. κατασκευαζόταν με βάση το μεσοτονικό σύστημα (Barbour, 1955). Χαρακτηριστικά είναι τα όργανα με κλαβιέ του 16ου αιώνα στα οποία χώριζαν τα πλήκτρα σε δύο μέρη (split keys) για εναρμόνιους φθόγγους όπως για παράδειγμα G♯/A♭ και D♯/E♭ (Benson, 2008) (Εικόνα, 11). Όμως τα προβλήματα που προέκυπταν στην περίπτωση της αλλαγής τονικότητας καθώς απαιτούνταν η προσθήκη επιπλέον πλήκτρων οδήγησε σταδιακά στην εγκατάλειψη του μεσοτονικού συστήματος από την εποχή του πολύ σημαντικού μουσικού και θεωρητικού της μουσικής Jean-Philippe Rameau (1683 –1764 μ.Χ.) και του J.S.Bach (1685-1750 μ.Χ.).



Εικόνα 11: *Κλαβιέ με διαχωρισμένα πλήκτρα βασισμένο στο μεσοτονικό σύστημα (Boston, Massachusetts, USA)*

Τα σύγχρονα πιάνα είναι κατασκευασμένα με βάση το ισοσυγκερασμένο σύστημα σύμφωνα με το οποίο η κλίμακα αποτελείται από 12 χρωματικά ημιτόνια οπότε οι εναρμόνιοι φθόγγοι πχ G♯/A♭ αντιστοιχούν στο ίδιο μαύρο πλήκτρο. Αποτελούνται από 88 πλήκτρα (έκταση 7 1/3 οκτάβων) με τα άσπρα (52) να αντιστοιχούν στις νότες της κλίμακας και τα μαύρα (36) στους αλλοιωμένους φθόγγους. Οποιαδήποτε νότα στο κλαβιέ του πιάνου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $\sqrt[12]{2^x}$ ή διαφορετικά $2^{\frac{x}{12}}$ (Steck, 2015). Για παράδειγμα, ο υπολογισμός της νότας E προκύπτει ως εξής: 2^{4}_{12}= 1.25992 Hz. Στην Εικόνα 12 φαίνονται οι 12 νότες και οι συχνότητές τους. Με το σύστημα αυτό κανένα διάστημα, εκτός της οκτάβας, δεν ταυτίζεται με τις φυσικές νότες.

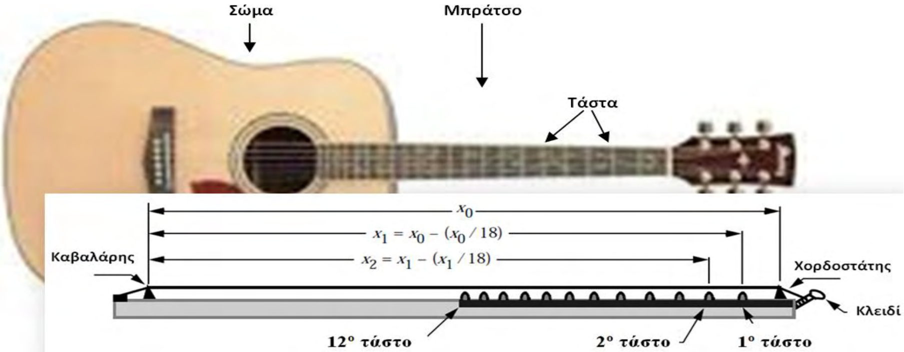


Εικόνα 12: *Κλαβιέ σύγχρονου πιάνου (προσαρμογή από Lapp, 2003)*

2.6.2. Κιθάρα

Η κιθάρα ανήκει στα έγχορδα όργανα με σταθερά τάστα και είναι κατασκευασμένη ώστε να ακολουθεί το ισοσυγκερασμένο σύστημα. Ένα βασικό στάδιο κατά την κατασκευή της είναι η τοποθέτηση των τάστων (μεταλλικών ελασμάτων) στο μπράτσο της κιθάρας τα οποία καθορίζουν την απόσταση ανάμεσα στις νότες. Προκειμένου να υπολογίσουμε την ακριβή θέση των τάστων ακολουθούμε τη συγκερασμένη κλίμακα που πρώτος εισηγήθηκε στα μέσα του $16^{ου}$ αιώνα μ.Χ. ο Vincenzo Galilei (πατέρας του Galileo Galilei) στηριζόμενοι σε ορισμένες μαθηματικές αρχές.

Στην κλίμακα του Galilei το ημιτόνιο δίνεται από τη σχέση 18/17 που είναι σχεδόν ίσο με το ημιτόνιο της ισοσυγκερασμένης κλίμακας $\sqrt[12]{2} \approx \frac{18}{17} \approx 1.0588$. Επειδή όμως είναι πιο εύκολο να χωρίσει κανείς μία γραμμική απόσταση (linear distance) χρησιμοποιώντας λόγους ακέραιων αριθμών (ratios of integers) και όχι λόγους άρρητων αριθμών (irrational ratios), για το λόγο αυτό οι κατασκευαστές έγχορδων οργάνων με σταθερά τάστα χρησιμοποιούν για τους υπολογισμούς τους το ημιτόνιο (17/18) του Galilei (Loy, 2006). Έτσι, αν X_0 είναι το μήκος της ελεύθερης χορδής (χωρίς να είναι πατημένη) από τον καβαλάρη ως το χορδοστάτη τότε η θέση του $1^{ου}$ τάστου θα δίνεται από την σχέση X_1=X_0-(X_0/18). Κατά τον ίδιο τρόπο, η θέση για το $2^{ο}$ τάστο προκύπτει ως εξής: X_2=X_1-(X_1/18) (Εικόνα 12). Όπως παρατηρούμε κάθε επόμενο (subsequent) τάστο τοποθετείται κατά 1/18 του υπολειπόμενου μήκους χορδής σε σχέση με τον καβαλάρη. Πρόκειται, δηλαδή για μια επαναλαμβανόμενη (iterative) διαδικασία και η οποία μπορεί να περιγραφεί γενικότερα από τη μαθηματική σχέση X_n= X_{n-1}- X_{n-1}/k, όπου X_n είναι η απόσταση του n-οστού τάστου από τον καβαλάρη και k είναι ένας σταθερός παράγοντας ο οποίος παίρνει τιμή ίση με 18. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για τον υπολογισμό της θέσης οποιουδήποτε τάστου οδηγούμαστε σε συνεχή κλάσματα (*continued fractions).*



Εικόνα 11: *(Τοποθέτηση τάστων στην κιθάρα, Loy, 2006)*

2.7. Οι παιδαγωγικές προεκτάσεις της μελέτης της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων για τη μαθηματική εκπαίδευση

Η μελέτη της εξέλιξης των μουσικών συστημάτων και εννοιών, εκτός από την ιστορική της αξία έχει και παιδαγωγικές προεκτάσεις για τη διδακτική των Μαθηματικών (Abdonour, 2002). Η επιλογή και η διερεύνηση μουσικού υλικού προερχόμενου από διαφορετικές μουσικές ιστορικές περιόδους και παραδόσεις δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να διαπιστώσουν παράλληλα με τη μουσική εξέλιξη και την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών που συνέβαλλαν στη διαμόρφωση θεμελιωδών μουσικών εννοιών όπως είναι για παράδειγμα η έννοια της αρμονίας, των σύμφωνων και των διάφωνων μουσικών διαστημάτων. Αναλυτικότερα, η μετάβαση από τον πυθαγόρειο υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων που υιοθετήθηκε και από τους θεωρητικούς της μεσαιωνικής Μουσικής στον αριθμητικό υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων της αναγεννησιακής μουσικής υποδεικνύει και μία δομική αλλαγή στη θεωρία των λόγων η οποία συνίσταται στην αριθμητικοποίησή τους (Abdonour, 2002). Κατά συνέπεια, η χρήση του μουσικού πλαισίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί διδακτικά και παιδαγωγικά για την διερεύνηση μίας από τις πτυχές της επιστημολογικής εξέλιξης της έννοιας του λόγου, από τη γεωμετρική–μουσική δηλαδή έννοιά του κατά την οποία ο λόγος δεν έχει σχέση με τον αριθμό αλλά χρησιμοποιείται ως μέγεθος σύγκρισης, στην κατανόηση της έννοιας του λόγου ως αριθμού ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αριθμητικές πράξεις (πολλαπλασιασμός).

Μέρος Β΄: Έρευνα

Κεφάλαιο 3

3. Μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και αιτιολογούνται τα μεθοδολογικά ζητήματα της έρευνας. Έτσι, αναλύονται ο σκοπός και οι στόχοι της, τα ερευνητικά ερωτήματα, η αναγκαιότητα διενέργειάς της καθώς επίσης και η επιλογή των μεθόδων διεξαγωγής της. Επιπρόσθετα, περιγράφονται το δείγμα και τα ερευνητικά εργαλεία συλλογής δεδομένων.

3.1. Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η παραγωγή, η εφαρμογή και η αξιολόγηση διδακτικού υλικού σχετικά με τη διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών εστιάζοντας στη μαθηματική δομή των μουσικών συστημάτων όπως αυτά διαμορφώθηκαν διαχρονικά. Πιο συγκεκριμένα, επιμέρους στόχοι είναι το παραγόμενο υλικό να βοηθήσει τους μαθητές ώστε:

- να κατανοήσουν την άρρηκτη σχέση των Μαθηματικών και της Μουσικής μέσα από ιστορικές και επιστημολογικές πτυχές της σχέσης αυτής.
- να εντάξουν τα Μαθηματικά στο ιστορικό τους πλαίσιο και να τα δουν ως προϊόν της ανθρώπινης εμπειρίας η οποία σχετίζεται άμεσα με την καθημερινή τους μουσική εμπειρία αλλά και τον μουσικό πολιτισμό.
- να αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίο τα Μαθηματικά επέδρασαν στην εξέλιξη της μουσικής θεωρίας γενικά και ειδικότερα στην εξέλιξη των μουσικών κλιμάκων, διαστημάτων και ευρύτερα των μουσικών συστημάτων.
- να διακρίνουν την άμεση συνάρτηση στην εξέλιξη των μουσικών συστημάτων με το επίπεδο και το είδος της μαθηματικής γνώσης κάθε εποχής και πολιτισμού.
- να μπορούν με τη βοήθεια των Μαθηματικών να συγκρίνουν διαφορετικά μουσικά συστήματα (πυθαγόρειο, συγκερασμένο) και να εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές με απώτερο στόχο να συνειδητοποιήσουν την

ιστορική συνέχεια της Μουσικής από την αρχαιότητα μέχρι το σύγχρονο τονικό σύστημα της δυτικής μουσικής παράδοσης.

— να εμβαθύνουν και να εμπλουτίσουν τη μουσική δημιουργική τους εμπειρία αναπτύσσοντας μαθηματικούς τρόπους κατανόησης, ανάλυσης και σύνθεσης των βασικών στοιχείων της μουσικής (ακουστικής, θεωρίας, σύνθεσης και εκτέλεσης) σε ποικίλα επίπεδα.

3.1.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Ειδικότερα με την παρούσα έρευνα επιδιώκεται να ερευνηθούν τα εξής:

1. Η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων υπό το πρίσμα των Μαθηματικών αποτελεί την κατάλληλη διδακτική προσέγγιση ώστε να οδηγήσει τους μαθητές να συγκροτήσουν ένα σώμα γνώσεων απαραίτητων για να ερμηνεύσουν τα μουσικά φαινόμενα και το ιδιαίτερο άκουσμα των διαφορετικών μουσικών παραδόσεων και μουσικών οργάνων;
2. Ποιες μαθηματικές δεξιότητες είναι απαραίτητες να αναπτυχθούν προκειμένου να μπορούν να κατανοήσουν και να ερμηνεύσουν τη μουσική τους εμπειρία αλλά και την ίδια την κατασκευή και λειτουργία των μουσικών τους οργάνων;
3. Η αξιοποίηση εναλλακτικών προσεγγίσεων που ενσωματώνουν μορφές τέχνης όπως είναι η Μουσική και συγκεκριμένα τη θεωρία της σε συνδυασμό με την Ιστορία των Μαθηματικών βοηθούν τους μαθητές ώστε να εξοικειωθούν περισσότερο και ευκολότερα με μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες;
4. Η κατανόηση των τρόπων με τους οποίους εφαρμόζονται τα Μαθηματικά στη δημιουργία της Μουσικής και η ενσωμάτωση αυτών των μαθηματικών αρχών από τους ίδιους τους μαθητές στις μουσικές τους δημιουργίες θα οδηγήσει στη βαθύτερη κατανόηση των μουσικών φαινομένων και θα εμπλουτίσει τις μουσικές δημιουργικές εμπειρίες των μαθητών;
5. Η διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών είναι ο κατάλληλος τρόπος διδασκαλίας ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν τα Μαθηματικά τόσο ως μέρος της καθημερινής τους ζωής όσο και ως μέρος του πολιτισμού;

6. Μία διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών θα οδηγήσει σε αλλαγή στάσεων και αντιλήψεων απέναντι στα Μαθηματικά η οποία είναι απαραίτητη προϋπόθεση προκειμένου να επιτευχθεί η μάθηση;

3.2. Η σημασία της παρούσας έρευνας

Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών που αφορούν τη διασύνδεση της Μουσικής με τα Μαθηματικά στην εκπαίδευση αντιμετωπίζουν τη Μουσική ως ένα εξωτερικό ερέθισμα που επιδρά και βελτιώνει τις μαθηματικές γνωστικές δεξιότητες των μαθητών (Ivanov & Geake, 2003; Rauscher et. al., 1995). Κύριο χαρακτηριστικό των προαναφερθέντων ερευνών είναι ότι έχουν διενεργηθεί σε εργαστηριακές συνθήκες και εντάσσονται στο χώρο της γνωστικής ψυχολογίας (Fitzpatrick, 2006). Ανακύπτει λοιπόν η ανάγκη πραγματοποίησης εμπειρικών ερευνών στη μουσικο–μαθηματική εκπαίδευση οι οποίες θα πραγματοποιηθούν σε πραγματικές συνθήκες τάξης και αντικείμενο μελέτης των οποίων θα είναι η ανάπτυξη και αξιολόγηση διαθεματικών παιδαγωγικών προσεγγίσεων μεταξύ της Μουσικής και των Μαθηματικών (An & Tillman, 2015).

Όπως έχει καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία, οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να νιώθουν ανεπαρκείς σε γνωστικό επίπεδο προκειμένου να εφαρμόσουν διαθεματικές προσεγγίσεις των Μαθηματικών με τη Μουσική και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην επιλέγουν τις διδακτικές αυτές πρακτικές στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα (An & Tillman, 2015; Κωνσταντινίδης κ.α., 2007; Rogers, 2004). Ακόμη όμως και στην περίπτωση που οι εκπαιδευτικοί προσπαθήσουν να αναδείξουν τις σχέσεις ανάμεσα στα δύο αντικείμενα συνήθως αυτές περιορίζονται σε επιφανειακά θέματα όπως στο μέτρημα του μουσικού ρυθμού και στην αντιστοίχισή του με τα αντίστοιχα κλάσματα (Rogers, 2004). Παρόλο που είναι σαφές ότι οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν μουσικο–μαθηματικές δραστηριότητες που θα εξασφαλίζουν τη βαθύτερη κατανόηση και διασύνδεση της Μουσικής με τα Μαθηματικά (Rogers, 2004), οι αναφορές σε θέματα μεθοδολογίας και διδακτικής πρακτικής είναι περιορισμένες τουλάχιστον σε ότι αφορά τη β/θμια εκπαίδευση ενώ σχεδόν ανύπαρκτες είναι για τους μαθητές των Μουσικών Σχολείων.

Επιπλέον, μέσα από τη μελέτη της ελληνικής βιβλιογραφίας διαπιστώθηκε ότι έχουν πραγματοποιηθεί ελάχιστες αντίστοιχες έρευνες που είτε περιορίζονται στις απόψεις των εκπαιδευτικών απέναντι στην προοπτική της ενσωμάτωσης της

Μουσικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Κωνσταντινίδης κ.α., 2007), είτε διερευνούν την επίδραση μιας συνδιδασκαλίας Μουσικής και Μαθηματικών στη βαθμολογική επίδοση και στα συναισθήματά των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Χιονίδου-Μοσκοφόγλου & Πολιτίδου, 2006), είτε τέλος διερευνούν την αποτελεσματικότητα σε μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης μιας λειτουργικής διεπιστημονικής προσέγγισης τριών γνωστικών αντικειμένων (Μαθηματικών, Μουσικής, Φυσικών Επιστημών) όσον αφορά την κατανόηση εννοιών και τη συγκρότηση ενός ενιαίου πλαισίου γνώσεων (Χιοκτουρίδη, Χατζηκυριάκου & Ασημόπουλος, 2015α; 2015β). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν κατέστη εφικτό να εντοπίσουμε κάποια αντίστοιχη έρευνα που να αφορά ειδικά τα Μουσικά Σχολεία.

Συμβολή στις προηγούμενες επισημάνσεις αποτελεί η διδακτική παρέμβαση που εφαρμόστηκε το σχολικό έτος 2016-2017 στο Μουσικό Σχολείο της Λάρισας η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στη συνέχεια (βλ. Ενότητα 3.5.3).

3.3. Η έρευνα – δράση ως μεθοδολογική προσέγγιση

Τα ερωτήματα που προέκυψαν κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση αλλά και από την προκαταρκτική έρευνα που προηγήθηκε της διδακτικής παρέμβασης καθόρισαν τη διαδικασία του σχεδιασμού, της παραγωγής και της εφαρμογής του διδακτικού υλικού η οποία είχε τη μορφή της έρευνας δράσης. Η αξιοποίηση της έρευνας–δράσης συγκαταλέγεται στις σύγχρονες μεθοδολογικές προσεγγίσεις της εκπαιδευτικής διαδικασίας και στόχο έχει να έχει να κατανοήσει και να βελτιώσει την εκπαιδευτική πραγματικότητα (Altrichter et. al., 2001). Αποτελεί μία ευέλικτη ερευνητική στρατηγική η οποία συνδυάζει δράση κι έρευνα και ορίζεται ως η μελέτη μιας κοινωνικής κατάστασης με στόχο τη βελτίωση της ποιότητας της δράσης στο πλαίσιο της κατάστασης αυτής (Robson, 2010). Κύρια χαρακτηριστικά της είναι ο συνεργατικός, δημοκρατικός χαρακτήρας της, διεξάγεται από ανθρώπους που σχετίζονται με την κατάσταση που διερευνάται, ξεκινά από πρακτικά ζητήματα της καθημερινότητας, είναι συμβατή με τις εκπαιδευτικές αξίες του σχολείου και τις εργασιακές συνθήκες των εκπαιδευτικών (Altrichter et. al., 2001). Πρόκειται, εν κατακλείδι, για μία διαρκή προσπάθεια σύνδεσης, συσχέτισης και αντιπαράθεσης πρακτικής και προβληματισμού (σπειροειδής διάσταση) που αποβλέπει στη βελτίωση και στην αλλαγή πτυχών της εκπαιδευτικής πραγματικότητας. Βασικό ρόλο στην έρευνα δράσης διαδραματίζει ο ίδιος ο εκπαιδευτικός ο οποίος έχει τη δυνατότητα να σχεδιάζει, να δρα, να παρατηρεί και να αναστοχάζεται μέσω αλλεπάλληλων επαναλήψεων ακολουθώντας μια σπειροειδή διαδικασία (Altrichter et. al., 2001; Cohen & Manion, 1994). Έτσι, μετατρέπεται από παθητικό σε δρών υποκείμενο που στοχεύει στη βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας του αλλά και στην ανάπτυξη της επαγγελματικής του γνώσης (Altrichter, 2001). Παρόλο που υπάρχουν διάφορα μοντέλα ανάπτυξης της έρευνας–δράσης, εντούτοις όλοι οι τύποι του συγκεκριμένου είδους έρευνας ακολουθούν τα εξής τέσσερα διαδοχικά χαρακτηριστικά στάδια: (α) ο εντοπισμός μιας αφετηρίας, (β) η αποσαφήνιση της κατάστασης, (γ) η ανάπτυξη κι εφαρμογή στρατηγικών δράσης και (δ) η ανάλυση, ο αναστοχασμός και η παραγωγή θεωρίας (Altrichter et. al. 2001).

Με δεδομένο ότι η παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε με στόχο να κατανοήσει και να βελτιώσει τη συνδιδασκαλία των Μαθηματικών και της Μουσικής εντάσσεται στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής έρευνας δράσης.

3.4. Αφετηρία της έρευνας

Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολυάριθμες έρευνες που αφορούν στη χρησιμοποίηση της Τέχνης ευρύτερα και ειδικότερα της Μουσικής στη διδασκαλία των Μαθηματικών (An & Tillman, 2014; Catterall & Waldorf, 1999b). Πιο συγκεκριμένα, η χρήση της Μουσικής ως πλαίσιο ανάπτυξης των μαθηματικών δραστηριοτήτων έχει διαπιστωθεί ότι επιδρά θετικά στη διαδικασία της μάθησης των Μαθηματικών (An & Tillman, 2015). Την ανάγκη δημιουργίας εναλλακτικών μαθησιακών περιβαλλόντων για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των Μαθηματικών ενισχύουν διάφορες έρευνες τόσο σε παγκόσμιο επίπεδο (Cumming, 1994) όσο και σε πανελλαδικό (Τζεκάκη, 2000) οι οποίες καταδεικνύουν ότι ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι αναποτελεσματικός καθώς σε πολλές περιπτώσεις αποτυγχάνει στο να συνδέσει τα Μαθηματικά με τις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών και να ικανοποιήσει τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντά τους.

Στα ελληνικά Μουσικά Σχολεία της Β/θμιας Εκπαίδευσης εφαρμόζονται, παράλληλα με τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (ΑΠΣ) των μαθημάτων γενικής παιδείας (Μαθηματικά, Γλώσσα, Φυσική κ.α.) και τα ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων. Ο ιδιαίτερος δηλαδή αυτός τύπος σχολείου παρέχει στους μαθητές ένα διαφορετικό μαθησιακό περιβάλλον από εκείνο των σχολείων γενικής παιδείας στο οποίο διδάσκονται εξειδικευμένες μουσικές γνώσεις και καλλιεργούνται μουσικές δεξιότητες. Μελετώντας τα ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων παρατηρούμε ότι μουσικές έννοιες όπως είναι τα διαστήματα, οι μουσικές κλίμακες, η αρμονία (σύμφωνα και διάφωνα διαστήματα), τα κουρδίσματα και τα μουσικά συστήματα διατρέχουν όλα τα μουσικά μαθήματα. Για την ουσιαστικότερη και πληρέστερη κατανόηση όμως των παραπάνω εννοιών είναι απαραίτητη προϋπόθεση η κατανόηση μαθηματικών εννοιών που συνδέονται άμεσα με τη μουσική θεωρία όπως είναι η έννοια των κλασμάτων, των λόγων (ratios) και των αναλογιών (proportions), των αριθμητικών σχέσεων (numerical relations), των ακέραιων αριθμών (integers) και των λογάριθμων (logarithms) (Beer, 1998).

Επιπλέον, οι μαθητές στα μουσικά σχολεία έρχονται σε επαφή με μουσικούς πολιτισμούς διαφορετικών εποχών το θεωρητικό μουσικό σύστημα των οποίων διαμορφώθηκε με βάση το επίπεδο της μαθηματικής επιστήμης της αντίστοιχης εποχής. Η αξιοποίηση λοιπόν της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό διδακτικό εργαλείο καθώς οι μαθητές θα μπορέσουν να αντιληφθούν πώς η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης σε διαφορετικές ιστορικές περιόδους καθόρισε και τις αντίστοιχες μουσικές παραδόσεις. Τέλος, τα ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων προβλέπουν την εξάσκηση των μαθητών με διαφορετικούς τύπους μουσικών οργάνων κατάλληλα είτε για το συγκερασμένο είτε για το ασυγκέραστο μουσικό σύστημα. Για να κατανοήσουν τη διαφορά των συστημάτων αυτών είναι ωφέλιμο να μελετήσουν παράλληλα και τη μαθηματική τους δομή.

Κατά συνέπεια, λαμβάνοντας υπόψη ότι, η μουσική πράξη και θεωρία όπως αυτή διδάσκεται στα Μουσικά Σχολεία αφενός συναρτάται άμεσα από τη μαθηματική γνώση αφετέρου παρέχει ένα πλαίσιο νοηματοδότησης που διευκολύνει τη μάθηση των Μαθηματικών, και ταυτόχρονα έχοντας διαπιστώσει την απουσία αντίστοιχου διδακτικού υλικού που θα υποστήριζε μία διαθεματική διδασκαλία των παραπάνω γνωστικών αντικειμένων κρίθηκε σκόπιμη η ανάπτυξη και η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας διαθεματικών διδακτικών προσεγγίσεων της Μουσικής και των Μαθηματικών τόσο σε επίπεδο μαθησιακό όσο και συναισθηματικό επίπεδο.

3.5. Σχεδιασμός της έρευνας– δράσης

Για το συνολικό σχεδιασμό της έρευνας καθώς και για την υλοποίηση της συγκεκριμένης διδακτικής παρέμβασης εκτός από την επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας και τις άτυπες συνεντεύξεις–συζητήσεις με εκπαιδευτικούς (μαθηματικούς, μουσικούς διαφόρων ειδικεύσεων και φυσικούς) που υπηρετούν στο μουσικό σχολείο λάβαμε υπόψη και το υλικό που συγκεντρώθηκε από μια μικρής κλίμακας προκαταρκτικής διερεύνηση του θέματος.

3.5.1. Προκαταρκτική διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών και των εκπαιδευτικών για τη διαθεματική διδασκαλία της Μουσικής και των Μαθηματικών

Πριν τη διεξαγωγή της έρευνας δράσης, διενεργήσαμε μια μικρής κλίμακας προκαταρκτική έρευνα προκειμένου να καταγράψουμε τις απόψεις και τον προβληματισμό εκπαιδευτικών και μαθητών για τη δυνατότητα μιας διαθεματικής προσέγγισης τους μαθήματος της Μουσικής και των Μαθηματικών στα Μουσικά Σχολεία. Για το λόγο αυτό, απευθυνθήκαμε σε μία ομάδα πέντε μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου που δεν ανήκαν όμως στο τμήμα που συμμετείχε στην έρευνα δράσης και ζητήσαμε τη συμπλήρωση ενός ερωτηματολογίου τεσσάρων ερωτήσεων ανοικτού τύπου (βλ. Παράρτημα 2, Ερωτηματολόγιο μαθητών). Επιπλέον, για τη διαμόρφωση του υλικού ελήφθησαν υπόψη οι απόψεις τόσο των εκπαιδευτικών της Μουσικής διαφορετικών ειδικεύσεων (συνολικά τέσσερις εκπαιδευτικοί με αντίστοιχες ειδικεύσεις ο καθένας: τα θεωρητικά μουσικά μαθήματα, την κιθάρα, το βιολί και το πιάνο) όσο και των εκπαιδευτικών των Μαθηματικών και της Φυσικής (δύο μαθηματικοί και ένας φυσικός) όπως αυτές καταγράφηκαν στο ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε και στο οποίο περιλαμβάνονταν πέντε ερωτήσεις ανοικτού τύπου (βλ. Παράρτημα 2, Ερωτηματολόγιο καθηγητών). Στο ερωτηματολόγιο που απευθύνονταν στους μαθηματικούς διατυπώθηκαν ερωτήσεις που αφορούσαν το μάθημα των Μαθηματικών και τη χρησιμότητά του για την κατανόηση της Μουσικής, τη μεθόδευση της διδασκαλίας του μαθήματος σε σχέση με τη Μουσική. Παρόμοιες ήταν και οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου των μουσικών εστιάζοντας στη διδακτική μεθοδολογία των μουσικών μαθημάτων ειδικότερα της Ιστορίας της Μουσικής, της μουσικής θεωρίας και των ατομικών μουσικών οργάνων. Οι ερωτήσεις ήταν ανοικτές, απλές, σύντομα διατυπωμένες και η καθεμιά αναφερόταν σε μία συγκεκριμένη διάσταση του μαθήματος χωρίς ωστόσο να περιορίζουν τη σκέψη και τις απαντήσεις των υποκειμένων (Altrichter, 2001).

Η ταξινόμηση των απαντήσεων έγινε με βάση τους εξής τρεις άξονες: το γνωστικό αντικείμενο (μάθημα των Μαθηματικών, το μάθημα της Μουσικής), τις δυσκολίες που ανακύπτουν από τη διδασκαλία των μαθημάτων αυτών και τη μεθόδευση της διδασκαλίας των παραπάνω μαθημάτων με έμφαση στη δυνατότητα διαθεματικής προσέγγισής τους. Έχοντας ως αφετηρία τις απαντήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών είχαμε μια πρώτη γενική εικόνα της κατάστασης (Altrichter, 2001). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συστηματοποιημένα τις απαντήσεις και τις διαπιστώσεις που αξιοποιήθηκαν για το σχεδιασμός της έρευνάς μας.

3.5.1.1. Απόψεις μαθητών

Όπως προέκυψε από τις απαντήσεις των μαθητών σχετικά με τη χρησιμότητα του μαθήματος των Μαθηματικών, θεωρούν ότι είναι χρήσιμο γιατί τους δίνει τη δυνατότητα να καλλιεργήσουν δεξιότητες απαραίτητες στη ζωή τους ενώ αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση και άλλων μαθημάτων (π.χ. Φυσική). Βέβαια κανένα από τα παιδιά δεν ανέφερε τη χρησιμότητα των Μαθηματικών για τη Μουσική. Σχετικά με τις δυσκολίες που συναντούν μελετώντας το μάθημα των Μαθηματικών αναφέρουν ότι περιέχει έννοιες δυσκολονόητες και αφηρημένες τις οποίες σε πολλές περιπτώσεις δεν μπορούν να αντιληφθούν σε ποιον τομέα της καθημερινής τους ζωής θα τις αξιοποιήσουν. Αναφορικά με το μάθημα της Μουσικής, θεωρούν ότι η χρησιμότητά του έγκειται στο γεγονός ότι τους δίνει τη δυνατότητα να μπορούν να εκφράζονται (π.χ. με τη συμμετοχή τους σε μουσικά σύνολα) ενώ ενισχύει τη δημιουργικότητά τους (π.χ. με τις δραστηριότητες σύνθεσης και αυτοσχεδιασμού). Όσον αφορά τον τρόπο διασύνδεσης των δύο αντικειμένων οι μαθητές διατύπωσαν γενικευμένες διαπιστώσεις (π.χ. τα Μαθηματικά και η Μουσική είναι δύο παγκόσμιες γλώσσες). Τέλος, αναφορικά με τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών θεωρούν ότι είναι αναγκαίο να συνδυάζεται με προβλήματα της καθημερινής τους ζωής ή με άλλα μαθήματα όπως για παράδειγμα της πληροφορικής. Σχετικά με την προοπτική της ενσωμάτωσης της Μουσικής στο μάθημα των Μαθηματικών θεωρούν ότι θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα Μαθηματικά προκειμένου να κατανοήσουν τον τρόπο που κατασκευάζεται το μουσικό όργανο που μαθαίνουν (π.χ. για την εύρεση του σημείου τοποθέτησης του δακτύλου στο μπράτσο του βιολιού προκειμένου να παραχθεί η επιθυμητή νότα). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι κανένας από τους μαθητές δεν ανέφερε τη δυνατότητα για τη μαθηματική διερεύνηση βασικών μουσικών εννοιών (π.χ. ήχος, διαστήματα, αρμονία).

3.5.1.2. Απόψεις εκπαιδευτικών

Στο ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε στην προκαταρκτική διερεύνηση, αποτυπώθηκαν οι απόψεις των εκπαιδευτικών των Μαθηματικών αλλά και της Μουσικής του Μουσικού Σχολείου προκειμένου να διερευνήσουμε τις ιδιαίτερες συνθήκες διδασκαλίας που διαμορφώνονται στα πλαίσια ενός Μουσικού Σχολείου. Έτσι, καταγράφηκαν τα προβλήματα που ανακύπτουν κατά τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών και της Μουσικής αντίστοιχα και οι διδακτικές πρακτικές που οι ίδιοι ακολουθούν εστιάζοντας κυρίως στην δυνατότητα να εφαρμόσουν διαθεματικές διδασκαλίας.

Όπως προέκυψε από την ανάλυση των απαντήσεων, οι μουσικοί πανεπιστημιακής εκπαίδευσης οι οποίοι είχαν διδαχθεί το μάθημα της «Μουσικής Ακουστικής» κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών τους σπουδών θεωρούν ότι θα διευκολυνόταν αν χρησιμοποιούσαν τα Μαθηματικά προκειμένου να εξηγήσουν τόσο τις μουσικές έννοιες (π.χ. συγκερασμένο σύστημα), την δομή των οργάνων (π.χ. τάστο στην κιθάρα) όσο και τις διαφορές στην κατασκευή των μουσικών οργάνων που χρησιμοποιούν τα παιδιά (π.χ. διαφορές ανάμεσα στο βιολί και στην κιθάρα). Δηλώνουν όμως αδυναμία να διδάξουν τις μαθηματικές έννοιες που είναι απαραίτητες στα πλαίσια της Μουσικής Ακουστικής. Για το λόγο αυτό δεν αξιοποιούν στοιχεία της Μουσικής Ακουστικής κατά τη διδασκαλία του μαθήματος τους. Ως βασικότερη δυσκολία αναφέρουν την έλλειψη ενδιαφέροντος των μαθητών όσον αφορά τα θεωρητικά θέματα της Μουσικής.

Αλλά και οι μαθητικοί στα Μουσικά Σχολεία, δεδομένου ότι έχουν μουσική παιδεία ως προϋπόθεση για την μετάθεσή τους σε αυτά, θεωρούν ότι χρησιμοποιώντας μουσικά παραδείγματα θα είναι πιο κατανοητά τα Μαθηματικά και θα προσέλκυαν το ενδιαφέρον των μαθητών. Ωστόσο, ο μεγάλος όγκος της ύλης που πρέπει να καλύψουν καθιστά σχεδόν απαγορευτική την ενσωμάτωση της Μουσικής στη διδασκαλία τους. Όσον αφορά τη διδακτική μεθοδολογία που ακολουθούν, συνήθως πρώτα εξετάζουν με ερωτήσεις γνωστικού περιεχομένου και την επίλυση ενός γνωστού μαθηματικού προβλήματος και στη συνέχεια παραδίδουν τη νέα διδακτική ενότητα. Σε ελάχιστες περιπτώσεις γίνεται συζήτηση ή συσχετισμός με άλλα μαθήματα με αφορμή το υπό διδασκαλία μαθηματικό υλικό. Στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά τη διδασκαλία τους, αναφέρθηκαν στην απροθυμία μαθητών να συμμετέχουν στη διάρκεια του μαθήματος των Μαθηματικών.

Τόσο οι εκπαιδευτικοί της Μουσικής όσο και των Μαθηματικών θεωρούν ότι ειδικά οι μαθητές των Μουσικών Σχολείων θα πρέπει έχουν στη διάθεσή τους ως υποστηρικτικό υλικό ένα εγχειρίδιο που να καλύπτει τομείς της Μουσικής Ακουστικής και το οποίο θα παρέχει αφορμές για έρευνα, δημιουργία και θα προωθεί τη συζήτηση ενώ για τους ίδιους κρίνουν ως απαραίτητο ένα βιβλίο του καθηγητή που θα καλύπτει διεξοδικά τη μαθηματική διερεύνηση των μουσικών θεμάτων της Μουσικής Ακουστικής που θα μπορούσαν να διδαχθούν σε μαθητές γυμνασίου.

3.5.2. Μεθοδολογική προσέγγιση της έρευνας – δράσης

3.5.2.1. Διατύπωση υποθέσεων

Με βάση τη βιβλιογραφική επισκόπηση και τη μικρής κλίμακας προκαταρτική διερεύνηση του θέματος, οι υποθέσεις που τέθηκαν προς διερεύνηση στο πλαίσιο διεξαγωγής της έρευνας δράσης ήταν οι εξής:

- **Υ1:** Η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων υπό το πρίσμα των Μαθηματικών επιδρά θετικά στις γραπτές δοκιμασίες αναφορικά με τις μουσικές γνώσεις και δεξιότητες οι οποίες είναι απαραίτητες τόσο για την κατανόηση της ιστορικής εξέλιξης της Μουσικής αλλά και ευρύτερων μουσικών εννοιών.
- **Υ2:** Η μαθηματική διερεύνηση της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων επιδρά θετικά στις γραπτές δοκιμασίες σχετικά με τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες οι οποίες είναι απαραίτητες τόσο για την κατανόηση της ιστορικής εξέλιξης της Μουσικής αλλά και για την ερμηνεία των μουσικών φαινομένων γενικότερα.
- **Υ3:** Η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων υπό το πρίσμα των Μαθηματικών αποτελεί την κατάλληλη διδακτική προσέγγιση

ώστε να οδηγήσει τους μαθητές να συγκροτήσουν ένα σώμα γνώσεων απαραίτητων για να ερμηνεύσουν τα μουσικά φαινόμενα.

- **Υ4:** Μέσα από την ιστορικό–μαθηματική μελέτη των μουσικών φαινομένων βελτιώνεται η επίδοσή τους στη σύνδεση των κεκτημένων μαθηματικών γνώσεων με την καθημερινή τους μουσική εμπειρία.
- **Υ5:** Η διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών θα οδηγήσει στην καλλιέργεια θετικότερης στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.
- **Υ6:** Η διαθεματική διδασκαλία της Μουσικής με τα Μαθηματικά θα οδηγήσει στην αλλαγή αντιλήψεων που έχουν οι μαθητές για τα Μαθηματικά και θα τους βοηθήσει να τα αντιληφθούν τόσο ως μέρος της καθημερινής τους ζωής όσο και μέρος του πολιτισμού.

Οι υποθέσεις που διατυπώθηκαν προηγουμένως, αφενός μεν υποδεικνύουν σε ένα μεγάλο βαθμό την κατάσταση που χρειάζεται αλλαγή και κατ' επέκταση βελτίωση αφετέρου δε, κατευθύνουν το σχεδιασμό και τη δράση μας χωρίς, όμως, να την περιορίζουν.

3.5.2.2. Ερευνητικά εργαλεία – Μέθοδοι συλλογής δεδομένων

Συνοπτικά, τα ερευνητικά εργαλεία που διαμορφώθηκαν σύμφωνα με το σχεδιασμό της έρευνας και χρησιμοποιήθηκαν συμπληρωματικά μεταξύ τους ήταν (βλ. Παράρτημα 2: Ερευνητικά εργαλεία):

Πριν τη διδακτική παρέμβαση

— Το διαγνωστικό τεστ γνώσεων και δεξιοτήτων (pre–test) με τη μορφή γραπτών δοκιμασιών το οποίο είχε στόχο την εκτίμηση του επιπέδου των απαραίτητων για το εξεταζόμενο θέμα μουσικών και μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση.

— Ερωτηματολόγιο διερεύνησης των στάσεων και αντιλήψεων των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση ως προς το μάθημα των Μαθηματικών και τη διδασκαλία του σε συνδυασμό με τη Μουσική.

Μετά τη διδακτική παρέμβαση

— Τεστ συνολικής αξιολόγησης μουσικών και μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων (post–test) με τη μορφή γραπτών δοκιμασιών μετά την εφαρμογή των διδακτικών παρεμβάσεων, με στόχο την ποσοτική αποτίμηση της επίδρασης της διαθεματικής διδασκαλίας. Οι δοκιμασίες αυτές χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στην έρευνα για τον έλεγχο των ειδικών διδακτικών στόχων (Cohen et al., 2008).

— Ερωτηματολόγιο διερεύνησης των στάσεων και αντιλήψεων μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση ως προς το μάθημα των Μαθηματικών και τη διδασκαλία του σε συνδυασμό με τη Μουσική.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης

— Η τήρηση–καταγραφή και ανάλυση του *αναλυτικού ημερολόγιου* της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας μετά τη λήξη κάθε διδακτικής συνάντησης (Cohen & Manion, 1994). Η τήρηση ημερολογίου είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την αξιολόγηση της έρευνας δράσης (Altrichter, 2001). Η καταγραφή περιλάμβανε περιγραφικές πληροφορίες όπως για παράδειγμα ημερομηνία, χώρο διεξαγωγής, συμβάντα, αναπαραστάσεις διαλόγων, πληροφορίες που χρήζουν περαιτέρω ερμηνεία όπως σκέψεις, συναισθήματα, προβληματισμοί καθώς επίσης παρατηρήσεις και σχόλια αναφορικά με τους μαθητές, τον τρόπο που δούλεψαν στις δραστηριότητες που τους δινόταν, τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν και στους στόχους που επιτεύχθηκαν σε κάθε διδακτική ώρα. Μετά την ανάγνωση του ημερολογίου γινόταν αναστοχασμός της έρευνας που οδηγούσε σε αρκετές περιπτώσεις σε επανασχεδιασμό των ερευνητικών ερωτημάτων, των ερευνητικών μεθόδων ή των διδακτικών πρακτικών.

— Τα *Φύλλα Εργασίας (ΦΕ)* των μαθητών, τα οποία αξιοποιήθηκαν συστηματικά και χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλεία μιας άμεσης διαμορφωτικής αξιολόγησης και αυτοαξιολόγησης των μαθητών. Οι δραστηριότητες των ΦΕ σχεδιάστηκαν ώστε να βρίσκονται σε αντιστοιχία με τους επιδιωκόμενους γενικούς και ειδικούς διδακτικούς στόχους. Η αναλυτική περιγραφή των γενικών στόχων και των αντίστοιχων δραστηριοτήτων λαμβάνει χώρα στο κεφάλαιο που αφορά το σχεδιασμό και την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης (βλ. Κεφάλαιο 5).

— Τεκμήρια (documents) των εργασιών των μαθητών στον προσωπικό τους φάκελο (portfolio).

— Τα σχόλια του κριτικού φίλου (σε γραπτή μορφή ή μέσω συζητήσεων).

3.5.2.3. Εγκυρότητα και δεοντολογία της έρευνας

Εγκυρότητα της έρευνας: Προκειμένου να εξασφαλισθεί η εγκυρότητα στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της «τριγωνοποίησης», σύμφωνα με την οποία συγκεντρώθηκαν δεδομένα από τρεις οπτικές γωνίες έτσι ώστε να γίνει η αντιπαράθεση και η σύγκριση διαφορετικών περιγραφών της ίδιας κατάστασης (Altrichter et. al., 2001). Για το λόγο αυτό συλλέξαμε και αντιπαραθέσαμε στοιχεία από τις ακόλουθες τρεις πηγές (Phillips & Carr, 2010):

α) την οπτική γωνία της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας. Καθ' όλη τη διάρκεια των διδασκαλιών καταγράφονταν από τη γράφουσα εκπαιδευτικό–ερευνήτρια οι εντυπώσεις, οι δυσκολίες και οτιδήποτε άλλο σχετιζόταν με τα ερευνητικά ερωτήματα.

β) την οπτική γωνία των μαθητών. Αν και η ενδεδειγμένη πηγή πληροφοριών για την έρευνα δράσης είναι η συνέντευξη, κάτι τέτοιο δεν κατέστη εφικτό για πρακτικούς λόγους (κυρίως λόγω έλλειψης διαθέσιμου χρόνου των μαθητών). Χρησιμοποιήσαμε όμως δεδομένα που προέκυψαν τόσο από τις κλειστού αλλά και από τις ανοιχτού τύπου ερωτήσεις που συμπεριλαμβάνονταν στα Φύλλα Αυτοαξιολόγησης μετά την ολοκλήρωση της κάθε ενότητας και στα οποία οι ίδιοι οι μαθητές αξιολογούσαν τη συμμετοχή τους στις διδακτικές παρεμβάσεις και τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν σ' αυτές.

γ) τα έργα των μαθητών. Οι απαντήσεις των μαθητών στις γραπτές δοκιμασίες (pre–test, post–test) αλλά και στα Φύλλα Εργασίας εντάσσονταν σε αυτήν την κατηγορία. Εκτός από τις εργασίες των παιδιών ζητήθηκε η τήρηση από μέρους τους ενός ημερολογίου να περιγράψουν δηλαδή σε προσωπικό ύφος και ελεύθερα τις δραστηριότητες στις οποίες συμμετείχαν σε κάθε διδασκαλία αναφέροντας τις δυσκολίες, τις σκέψεις και τους προβληματισμούς τους σχετικά με αυτές. Ωστόσο κανένας μαθητής αν και επέδειξαν ενθουσιασμό στην αρχή δεν ανταποκρίθηκε τελικά στην ημερολογιακή γραφή πιθανότατα λόγω έλλειψης εξοικείωσης με τη συγκεκριμένη διαδικασία. Οι αντιφάσεις που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία συνέβαλλαν στην κατανόηση της συγκεκριμένης εκπαιδευτικής κατάστασης και στην ανάπτυξη της θεωρίας (Altrichter et. al., 2001).

Δεοντολογία της έρευνας: Η οικειοθελής συμμετοχή όλων των εμπλεκομένων δηλαδή των εκπαιδευτικών και των μαθητών ήταν απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να εξασφαλιστεί η αρχή της συνειδητής συναίνεσης των υποκειμένων (Cohen &

Manion, 1994). Επιπλέον, διασφαλίστηκε η αρχή της ιδιωτικότητας, της ανωνυμίας και της εμπιστευτικότητας κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων (Cohen & Manion, 1994).

3.5.3. Διεξαγωγή της έρευνας

3.5.3.1. Οι συμμετέχοντες

Το εκπαιδευτικό υλικό αποφασίστηκε να εφαρμοστεί σε 24 μαθητές (18 κορίτσια και 6 αγόρια) της Γ΄ Γυμνασίου ($Γ_2$΄) του Μουσικού Σχολείου Λάρισας ηλικίας 14–15 ετών στο οποίο εργαζόταν η γράφουσα ως εκπαιδευτικός–ερευνήτρια. Επιλέχτηκε η συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα καθώς τόσο το επίπεδο των γνώσεων των Μαθηματικών και της Μουσικής όσο και ο βαθμός μαθησιακής ετοιμότητας των μαθητών ανταποκρίνονται στο υπό εξέταση θέμα.

Σύμφωνα με το γενικό σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης και της μορφής της έρευνας–δράσης που επιλέχθηκε, η έρευνα διεξήχθη από τη γράφουσα εκπαιδευτικό-ερευνήτρια. Δεδομένου ότι η έρευνα–δράση έχει συνεργατικό χαρακτήρα, είχε επιλεγεί στην όλη διαδικασία η συμμετοχή δύο συνεργατών-εκπαιδευτικών του σχολείου, συγκεκριμένα του εκπαιδευτικού των Μαθηματικών (με μεταπτυχιακές σπουδές στην εκπαίδευση και γνώσεις κιθάρας) ο οποίος ήταν και ο ίδιος διδάσκων στο εν λόγω τμήμα και της εκπαιδευτικού των θεωρητικών της Μουσικής (με μεταπτυχιακές σπουδές στην εκπαίδευση) στο ρόλο του κριτικού φίλου. Αν και για πρακτικούς λόγους (το ατομικό ωράριο διδασκαλίας των εκπαιδευτικών συνέπιπτε με τις ώρες της διδακτικής παρέμβασης) δεν κατέστη εφικτό να παρευρίσκονται μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας κατά το στάδιο της δράσης (της εφαρμογής δηλαδή των διδακτικών παρεμβάσεων) και της παρατήρησης (με τη συλλογή δεδομένων), η προσφορά τους ήταν σημαντική στο στάδιο του στοχασμού και του επανασχεδιασμού προσφέροντας εναλλακτικές ερμηνείες των στοιχείων, ιδέες για τα επόμενα βήματα οι οποίες ήταν απαραίτητες για τις τροποποιήσεις ή/και τον επανασχεδιασμό ώστε να προσεγγίζονται καλύτερα οι ερευνητικοί στόχοι.

3.5.3.2. Η έρευνα – δράση ως κυκλική διαδικασία: Αρχικοί σχεδιασμοί – Επανασχεδιασμοί

Κατά την εφαρμογή των διδασκαλιών στην τάξη, παράγοντες όπως η συμμετοχή, η ανταπόκριση, οι δυσκολίες και οι προτιμήσεις των παιδιών οδήγησαν σε κάποιες τροποποιήσεις και αλλαγές του αρχικού σχεδιασμού του προγράμματος προκειμένου να ανταποκριθεί καλύτερα στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα της τάξης, όπως άλλωστε ορίζει η σπειροειδής διάσταση της έρευνας–δράση. Μάλιστα, αν λάβουμε υπόψη ότι η έρευνα–δράση αποτελεί μία κυκλική διαδικασία κατά την οποία οι συμμετέχοντες μέσα από τη δράση και τον στοχασμό στόχο έχουν να κατανοήσουν, να αλλάξουν και εν τέλει να βελτιώσουν την υπάρχουσα προβληματική κατάσταση τότε κάθε κυκλική σπείρα σχεδιασμού, δράσης, παρατήρησης και στοχασμού οδηγεί στην επόμενη σπείρα.

Ειδικότερα, για τη συγκεκριμένη έρευνα–δράση και οι δύο φάσεις χαρακτηρίστηκαν από τροποποιήσεις του αρχικού σχεδιασμού. Τα ευρήματα της προκαταρκτικής έρευνας οδήγησαν στον επανασχεδιασμό του εκπαιδευτικού υλικού που χρησιμοποιήθηκε στην Α΄ φάση. Με αφετηρία τη διαπίστωση ότι: α) τα παιδιά έρχονταν για πρώτη φορά σε επαφή με τη μελέτη διεπιστημονικών εννοιών που ανήκουν στο γνωστικό πεδίο της Μουσικής και των Μαθηματικών και συγκεκριμένα με τη μελέτη της έννοιας των μουσικών διαστημάτων και της αρμονίας (σύμφωνη/διάφωνη συνήχηση) υπό το πρίσμα των Μαθηματικών και β) την ανεπάρκειά τους σε γνωστικό επίπεδο στα παραπάνω ζητήματα, κρίθηκε σκόπιμο να σχεδιαστεί εκ νέου στη φάση αυτή εκπαιδευτικό υλικό που θα εισάγει τους μαθητές σε απλές μουσικές έννοιες και μέσα από τις κατάλληλες μουσικές δραστηριότητες να τους δοθεί η δυνατότητα να ανακαλύψουν τις μαθηματικές σχέσεις που τις προσδιορίζουν.

Η ανάλυση και ο στοχασμός πάνω στα δεδομένα του πρώτου κύκλου της έρευνας οδήγησε στον επανασχεδιασμό των αρχικών δραστηριοτήτων της Α΄ Φάσης με αλλαγές στη μορφή και το περιεχόμενό τους κατά την εφαρμογή τους στη Β΄ Φάση της έρευνας. Συγκεκριμένα, η επιλογή των μουσικών παραδειγμάτων για τις μουσικές ασκήσεις έγινε με βάση το γνωστικό υπόβαθρο και τις δυνατότητες των μαθητών. Επιπλέον, λάβαμε υπόψη τις προσωπικές μουσικές προτιμήσεις και το βαθμό εξοικείωσης των μαθητών όσον αφορά τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν για τους μουσικούς πειραματισμούς. Για τον λόγο αυτό και ακολουθώντας τις αρχές της διαφοροποιημένης διδασκαλίας δημιουργήσαμε υλικό ανάλογα με τις ιδιαίτερες ανάγκες των μαθητών. Αντίστοιχες αλλαγές έγιναν και στις επιμέρους διδασκαλίες της δεύτερης φάσης και οι οποίες περιγράφονται αναλυτικά στο αντίστοιχο κεφάλαιο (βλ. Κεφάλαιο 5).

3.5.3.3. Το χρονοδιάγραμμα της έρευνας

Ι. Σχεδιασμός της έρευνας (Μάρτιος 2016 – Φεβρουάριος 2017)

Στο στάδιο αυτό έγινε η επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, της συγκέντρωσης και μελέτης του σχετικού υλικού καθώς και άτυπες συζητήσεις με εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Μουσικής της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιπλέον, κατά το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα σχεδιάστηκε και διενεργήθηκε μία προκαταρκτική διερεύνηση μικρής κλίμακας του υπό εξέταση θέματος. Το υλικό που προέκυψε από τις παραπάνω διαδικασίες αξιοποιήθηκε στο σχεδιασμό και στην εφαρμογή της εκπαιδευτικής παρέμβασης. Τέλος, στη φάση αυτή του ερευνητικού σχεδιασμού καθορίστηκε και το πλαίσιο εισαγωγής του εκπαιδευτικού υλικού στην σχολική πραγματικότητα. Παρόλο που θα μπορούσε να υλοποιηθεί κατά την διδασκαλία των μαθημάτων των Μαθηματικών ή των θεωρητικών της Μουσικής ως μία διαθεματική εργασία, εντούτοις η εφαρμογή του στην τάξη είναι δύσκολη δεδομένου ότι ο διδακτικός χρόνος δεν επαρκεί για την ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης των παραπάνω μαθημάτων. Τελικά, η διδακτική μας πρόταση αποφασίστηκε να ενταχθεί στο πλαίσιο του μαθήματος της Ιστορίας της Μουσικής για το οποίο το Αναλυτικό Πρόγραμμα προτείνει την πραγματοποίηση διαθεματικών δραστηριοτήτων και σχεδίων δράσης. Το συγκεκριμένο μάθημα στο εν λόγω τμήμα διδασκόταν κατά το σχολικό έτος 2016-2017 από τη γράφουσα ερευνήτρια–εκπαιδευτικό.

ΙΙ. Εφαρμογή της διδακτικής πρότασης (Μάρτιος–Μάιος 2017)

Στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση η οποία ολοκληρώθηκε σε δέκα ωριαίες διδασκαλίες. Το πρόγραμμα είχε σχεδιαστεί ώστε να υλοποιηθεί σε δύο φάσεις συνολικά. Στην πρώτη φάση (ένα διδακτικό δίωρο), η οποία είχε ως στόχο την αφύπνιση του ενδιαφέροντος των παιδιών πάνω στη διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών και στη δημιουργία ερεθισμάτων και συνθηκών που δίνουν την ώθηση για περαιτέρω μελέτη τους, έγινε η εισαγωγή των μαθητών σε βασικές μουσικές έννοιες και στη διασύνδεσή τους με τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Στην δεύτερη φάση (οκτώ ωριαίες διδασκαλίες), πραγματοποιήθηκε η μελέτη των μουσικών πολιτισμών με τη βοήθεια των Μαθηματικών. Κάθε διδασκαλία διαρθρώνονταν σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο παρουσιάζονταν, μέσα από διερευνητικές δραστηριότητες, θέματα που άπτονταν της μουσικής θεωρίας. Στο δεύτερο στάδιο, εισάγονταν οι μαθηματικές έννοιες που σχετίζονταν με τις μουσικές έννοιες που είχαν παρουσιαστεί στο προγενέστερο στάδιο. Στο τελικό στάδιο, οι μαθητές ασχολήθηκαν με δραστηριότητες εμπέδωσης είτε ατομικές είτε ομαδικές.

Και οι δύο φάσεις της διδακτικής παρέμβασης στηρίχθηκαν μεθοδολογικά στην έρευνα δράσης αποτελώντας η καθεμία και μία σπείρα ολοκλήρωσης του κύκλου διερχόμενη από τα τέσσερα στάδια της έρευνας δράσης: σχεδιασμός, δράση, παρατήρηση και στοχασμός. Αναλυτικότερα, πριν από κάθε φάση προηγούνταν ένας αναλυτικός σχεδιασμός δραστηριοτήτων και στόχων. Στην συνέχεια, ακολουθούσε το στάδιο της δράσης δηλαδή της εφαρμογής των διδασκαλιών της συγκεκριμένης φάσης. Παράλληλα, συλλέγονταν τα δεδομένα από την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης τα οποία αναλύονταν και επεξεργάζονταν μέσα από μια διαδικασία στοχασμού αποτελώντας έτσι την αφετηρία για το σχεδιασμό της επόμενης φάσης.

ΙΙΙ. Αξιολόγηση της έρευνας (Ιούνιος–Αύγουστος 2017)

Η συγκεντρωτική αξιολόγηση της έρευνας μεθοδεύτηκε σε δύο επίπεδα: στην άμεση–διαμορφωτική (*formative)* αξιολόγηση η οποία ακολούθησε την καθεμιά από τις δύο φάσεις της διδακτικής παρέμβασης και στη συνολική *(summative)* αξιολόγηση η οποία έγινε από τους μαθητές μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος.

Κεφάλαιο 4

4. Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

Στηριζόμενοι στην παραδοχή ότι η διδασκαλία είναι μία διαδικασία κατά την οποία οι συμμετέχοντες έχουν ενεργό ρόλο και ότι καθορίζεται από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθητών, του εκπαιδευτικού, του γνωστικού αντικειμένου και των επικοινωνιακών σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους, κατά το σχεδιασμό του εκπαιδευτικού υλικού στηριχτήκαμε σε ένα συνδυασμό διδακτικών αρχών που εστίασαν στα εξής:

— Η διδασκαλία έχει διαθεματικό προσανατολισμό στοχεύοντας όχι μόνο στην ανάπτυξη των μουσικών αλλά και των μαθηματικών δεξιοτήτων και ικανοτήτων των μαθητών.

— Η οικοδόμηση της γνώσης συντελείται σταδιακά (θεωρία εποικοδομισμού) μέσα από διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων (problem solving) και διερευνητικών μεθόδων (discovery learning).

— Η αναγνώριση ότι υπάρχουν πολλαπλές νοημοσύνες (θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης, Gardner) και μαθησιακά στυλ επιβάλλει την δημιουργία ενός ποικιλόμορφου υλικού που προσιδιάζει στις ιδιαίτερες ανάγκες και ικανότητες του κάθε παιδιού.

— Ιδιαίτερη σημασία για τον προγραμματισμό της διδασκαλίας έχουν τόσο οι νοητικές δυνατότητες των μαθητών, όσο και οι προϋπάρχουσες γνώσεις και το ενδιαφέρον των μαθητών (Ματσαγγούρας, 2001).

— Υπάρχουν συγκεκριμένα είδη μουσικών δραστηριοτήτων που είναι κατάλληλα για τη διασύνδεση της Μουσικής με ποικίλες γνωστικές περιοχές των Μαθηματικών (Ann & Tillman, 2014). Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν ποικίλες δραστηριότητες όπως η σύνθεση, η μουσική εκτέλεση και η κατασκευή μουσικών οργάνων ως μουσικές δραστηριότητες που εμπλέκουν τους μαθητές με βαθιές δομές μαθηματικής κατανόησης.

— Όλες οι μουσικο–μαθηματικές δραστηριότητες πρέπει να παρέχουν κίνητρα για την ενεργή συμμετοχή των μαθητών και ταυτόχρονα να οδηγούν στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μέσω πολλαπλών οδών και παραδειγμάτων από την καθημερινή τους εμπειρία (An, 2011).

— Στο πλαίσιο της εγκαθιδρυμένης μάθησης, σύμφωνα με την οποία η μάθηση συντελείται μέσα σε συγκεκριμένα κοινωνικο–πολιτισμικά πλαίσια, το διδακτικό υλικό για να έχει νόημα είναι σημαντικό να αντλείται από τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών δηλαδή από τη Μουσική που τα παιδιά μαθαίνουν και ερμηνεύουν στα μουσικά μαθήματα. Για το λόγο αυτό αναζητήσαμε αυθεντικό υλικό από την καθημερινή εκπαιδευτική πραγματικότητα του Μουσικού Σχολείου για τη δημιουργία του διδακτικού υλικού.

— Η Μουσική στις διαθεματικές δραστηριότητες θα πρέπει να διατηρεί την αυτονομία της ως διακριτό μάθημα και να διασφαλίζεται η επίτευξη των στόχων της ως γνωστικό αντικείμενο.

— Ξεκινήσαμε το σχεδιασμό της διδασκαλίας μελετώντας πρωτίστως τι προβλέπει το ΑΠΣ της Γ΄ Γυμνασίου για το μάθημα της Μουσικής, των Μαθηματικών και της Φυσικής.

4.1. Κριτήρια επιλογής του θέματος

Για την επιλογή της μελέτης των μουσικών συστημάτων ως αντικείμενο της παρούσας εργασίας συνετέλεσαν οι ακόλουθοι λόγοι:

i. Η επιστημονική μελέτη των ακουστικών–ηχητικών κυμάτων, των σύνθετων και αρμονικών ήχων, της χροιάς και του τονικού ύψους, των διαστημάτων, των κλιμάκων, των μουσικών συστημάτων και της οργανικής και φωνητικής παραγωγής του ήχου εντάσσονται στον τομέα της Μουσικής Ακουστικής. Σύμφωνα με τον Rogers (2004) ο συγκεκριμένος τομέας αποτελεί το κατεξοχήν πλαίσιο μέσα από στο οποίο μπορούν να αναδειχθούν οι σχέσεις μεταξύ των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Μουσικής. Έτσι, στα πλαίσια της Μουσικής Ακουστικής, μπορούν να υλοποιηθούν διαθεματικές δραστηριότητες που να λαμβάνουν όμως υπόψη το μουσικο–μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών των Μουσικών Σχολείων και να είναι προσαρμοσμένες στις ανάγκες τους οι οποίες είναι διαφορετικές από εκείνες των μαθητών των γενικών σχολείων.

ii. Οι μέθοδοι οργάνωσης του φθογγικού υλικού, οι διαστηματικές θεωρίες αλλά και η διαμόρφωση της έννοιας της συμφωνίας και της διαφωνίας είναι θεμελιώδους σημασία γενικά για τη μουσική εκπαίδευση. Κατά συνέπεια η πολύπλευρη και ολιστική προσέγγισή τους συνεισφέρει στην βαθύτερη κατανόησή τους.

iii. Η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μουσικών συστημάτων έχει παιδαγωγικές προεκτάσεις για τη μαθηματική εκπαίδευση καθώς μπορεί να προσφέρει παραδείγματα ικανά να λειτουργήσουν ως αφόρμηση για την παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών και την επίτευξη των ειδικών διδακτικών στόχων. Η μετάβαση από τις μουσικές κλίμακες της αρχαιότητας στο ισοσυγκερασμένο σύστημα της σύγχρονης ευρωπαϊκής Μουσικής σηματοδοτεί και την αντίστοιχη αλλαγή της μαθηματικής βάσης της κλίμακας από τις βασισμένες στους ρητούς αριθμούς πυθαγόρειες κλίμακες στη βασισμένη στους άρρητους αριθμούς δωδεκάφθογγη χρωματική κλίμακα (αποτελούμενη από ισομερή 12 ημιτόνια).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, δεν επιλέξαμε να μελετήσουμε μεμονωμένα τη μαθηματική δομή ενός συγκεκριμένου μουσικού συστήματος καθώς στόχος μας δεν ήταν να εντρυφήσουν οι μαθητές μόνο σε μία μουσική παράδοση. Αντίθετα, στόχος μας ήταν έχοντας ως σημείο αναφοράς τα Μαθηματικά να συνενώσουμε θεματικές περιοχές μέσα την ίδια τη Μουσική (Μουσική του Μεσαίωνα και σύγχρονη δυτική ευρωπαϊκή Μουσική, Αρμονία και Αντίστιξη, Οργανογνωσία και Μουσική Θεωρία), εξασφαλίζοντας τη διαθεματικότητα ανάμεσα στα διάφορα μουσικά μαθήματα όπως άλλωστε ορίζει το νέο ΑΠΣ των Μουσικών Σχολείων. Επιπλέον, μέσα από την ποικιλία του μουσικού υλικού που αποτελεί την ιδιαίτερη καθημερινή σχολική πραγματικότητα των μαθητών σε αυτό τον τύπο σχολείων στοχεύσαμε να γνωρίσουν την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της ίδιας της Μουσικής που οι ίδιοι οι μαθητές μαθαίνουν να ερμηνεύουν. Βέβαια, ένα τέτοιο εγχείρημα παρουσιάζει δυσκολίες λόγω της ευρύτητάς του. Παρόλα αυτά το παραγόμενο υλικό θα μπορούσε να είναι χρήσιμο και σημαντικό βοήθημα για να ερμηνεύσουν οι μαθητές τη μουσική πραγματικότητα και τις εμπειρίες που αποκομίζουν κατά τη φοίτησή τους σε ένα Μουσικό Σχολείο αν λάβουμε υπόψη ότι στα σχολεία αυτά οι μαθητές διδάσκονται παράλληλα μουσικούς πολιτισμούς διαφορετικών εποχών (π.χ. Αρχαία Ελληνική Μουσική, Μπαρόκ, Αναγέννηση) και μουσικά όργανα διαφορετικής κατασκευαστικής φιλοσοφίας.

Το διδακτικό υλικό που δημιουργήθηκε μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο σε συνδυασμό με τα μαθήματα του Αναλυτικού Προγράμματος γενικής (Μαθηματικά, Φυσική) και μουσικής παιδείας (Ευρωπαϊκή Μουσική Θεωρία και Πράξη- Εισαγωγή στην Αρμονία, Ιστορία της Μουσικής, Κριτική Μουσική Ακρόαση, Οργανοχρησία – Μουσικό σύνολο, Ατομικά Όργανα: πιάνο, κιθάρα, βιολί) στην Γ΄ Γυμνασίου του Μουσικού Σχολείου σαν συμπληρωματικό–επεξηγηματικό υλικό, όσο και αυτόνομα στα πλαίσια μιας δημιουργικής εργασίας. Επιλέξαμε να εφαρμοστεί κατά βάση στη Γ΄ Γυμνασίου και όχι σε μικρότερη τάξη παρόλο που οι μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που απαιτούνται αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας προγενέστερων τάξεων. Ο λόγος για αυτήν την επιλογή έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές με την ολοκλήρωση της τελευταίας τάξης του Μουσικού Γυμνασίου έχουν αποκτήσει μία σφαιρική εικόνα της Μουσικής, έχουν καλλιεργήσει δεξιότητες μουσικής εκτέλεσης στα όργανα αναφοράς (πιάνο) και στα όργανα επιλογής (κιθάρα, βιολί), έχουν έρθει σε επαφή με διάφορες μουσικές παραδόσεις και είναι σε θέση να μελετούν και να αναλύουν τη Μουσική στα δομικά στοιχεία της. Θα πρέπει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι το παρόν διδακτικό υλικό θα μπορούσε επίσης, να χρησιμοποιηθεί επικουρικά και από τον εκπαιδευτικό της Μουσικής στα σχολεία γενικής παιδείας δεδομένου ότι κατά το σχεδιασμό του ελήφθησαν υπόψη οι στόχοι που ορίζουν τα ΑΠΣ των Μαθηματικών και της Μουσικής γενικής παιδείας. Τέλος, λόγω του ότι το υλικό που δημιουργήσαμε αφορά θεμελιώδεις μουσικές έννοιες θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και από τους μαθητές του Μουσικού Λυκείου ως βοηθητικό υλικό σε μουσικά μαθήματα επιλογής όπως για παράδειγμα στο μάθημα της Αρμονίας και της Μουσικής Τεχνολογίας στη Β΄ Λυκείου που διαπραγματεύονται το θέμα των μουσικών συστημάτων συνεξετάζοντας και τις μαθηματικές πτυχές τους.

4.2. Διδακτικό υλικό – Τα Φύλλα Εργασίας

Το υλικό που δημιουργήθηκε είχε τη μορφή του εκπαιδευτικού πακέτου και περιείχε δύο ή περισσότερα από τα παρακάτω αντικείμενα: Φύλλα Πληροφοριών, Φύλλα Εργασίας, Φύλλα δημιουργικών εργασιών, Φύλλα Ανακεφαλαίωσης, Φύλλα Αυτοαξιολόγησης, cd με ηχητικά αποσπάσματα, γεωμετρικά όργανα μέτρησης (διαβήτης, αβαθμολόγητος κανόνας, μέτρο) ενώ βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή του ήταν η χρήση συγκεκριμένων μουσικών οργάνων που υπάρχουν σε ένα Μουσικό Σχολείο. Το εκπαιδευτικό υλικό ήταν επίσης εμπλουτισμένο με σκίτσα και εικόνες για την υποστήριξη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες. Όλα τα παραπάνω αντικείμενα είχαν ως βασικό περιεχόμενο τη γνωριμία των μαθητών με πτυχές της Μουσικής Ακουστικής (διαστήματα, μουσικές κλίμακες) μέσα από τη μαθηματική προσέγγιση.

Κατά τον σχεδιασμό του διδακτικού υλικού αξιοποιήθηκαν οι προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών ώστε να επιτευχθεί η ενεργός συμμετοχή τους και ακολουθήθηκε μια εξελικτική πορεία της μάθησης από απλές σε πιο σύνθετες έννοιες. Έτσι, οι μαθητές μέσα από κλιμακούμενης δυσκολίας δραστηριότητες εξοικειώθηκαν σταδιακά με τη διασύνδεση της Μουσικής με τα Μαθηματικά. Οι δραστηριότητες ήταν είτε ατομικές είτε ομαδικές και βασιζόταν κατά κύριο λόγο στον πειραματισμό με τα μουσικά όργανα της τάξης.

Το διδακτικό υλικό διαρθρώθηκε σε τρεις διδακτικές ενότητες σε κάθε μία από τις οποίες καταγράφονταν το πλαίσιο της ευρύτερης θεματικής στην οποία εντασσόταν, ο διδακτικός χρόνος που απαιτούνταν, τα απαιτούμενα μέσα και οι διδακτικοί στόχοι και οι δεξιότητες-ικανότητες που επιδιώκονταν να επιτευχθούν. Στο τέλος κάθε ενότητας μεθοδεύτηκε και μια μορφή ανακεφαλαίωσης. Για τις ιστορικές περιόδους της Μουσικής βάσει των οποίων οργανώθηκαν οι ενότητες ακολουθήσαμε το ΑΠΣ της Ιστορίας της Μουσικής των Μουσικών Σχολείων (ΑΠΣ μουσικών μαθημάτων των Μουσικών Σχολείων, 2015). Αναλυτικότερα, σε κάθε διδακτική ενότητα περιλαμβάνονταν:

Α) **Τα *Φύλλα Πληροφοριών* (ΦΠ)** αφορούσαν τη Μουσική Θεωρία και Ιστορία και παρουσίαζαν, ελλείψει μουσικών βιβλίων, συστηματοποιημένα τα στοιχεία που περιλαμβάνονταν στις αντίστοιχες ενότητες των ΑΠΣ των μουσικών μαθημάτων. Επιπλέον, σε κάθε ενότητα και εφόσον είχε ολοκληρωθεί η παρουσίαση και η μελέτη των μουσικών εννοιών παρεχόταν και ένα ακόμη Φύλλο Πληροφοριών το οποίο προετοίμαζε τους μαθητές, δίνοντας τα απαραίτητα στοιχεία, για τη μαθηματική διερεύνηση των μουσικών εννοιών της ενότητας.

Θα πρέπει να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι η ιστορική πλαισίωση των ενοτήτων επιχειρήθηκε μέσα από την ακρόαση και μελέτη αντιπροσωπευτικών μουσικών έργων της εκάστοτε εποχή και όχι μέσα από την παράθεση πληθώρας ιστορικών στοιχείων μέσω των Φύλλων Πληροφοριών. Άλλωστε, η Ιστορία της Μουσικής και η διδακτική της έχει δυναμικό χαρακτήρα και δεν περιορίζεται στην απομνημόνευση ονομάτων συνθετών και έργων (Lowe, 2010). Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στο ρόλο της μουσικής εκτέλεσης (music performance) κατά τη διδασκαλία της Ιστορίας της Μουσικής. Η καλλιέργεια δεξιοτήτων ώστε να μπορούν οι μαθητές να αναδημιουργούν (recreate) τη Μουσική μέσα στο ιστορικό της πλαίσιο είναι εξίσου σημαντική με την ανάπτυξη των ερμηνευτικών ικανοτήτων τους (Yang, 2012). Παιδαγωγικά, η διδασκαλία της Μουσικής η οποία συνδυάζει την ιστορική μελέτη του μουσικού κειμένου με βιωματικές και υποκειμενικές εμπειρίες όπως είναι η μουσική ερμηνεία μεγιστοποιεί τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

Β) **Τα *Φύλλα Εργασίας* (ΦΕ)** περιείχαν δραστηριότητες οι οποίες ήταν σχεδιασμένες έτσι ώστε να βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τους επιδιωκόμενους γενικούς και ειδικούς διδακτικούς στόχους και οι οποίες παρουσιάζονται στη συνέχεια αναλυτικά για κάθε διδασκαλία. Τα Φύλλα Εργασίας έθεταν επιπλέον το πλαίσιο μέσα στο οποίο κινούνταν η διδακτική/μαθησιακή διεργασία, δηλαδή λειτουργούσαν και ως οργανωτές του μαθήματος.

Σχετικά με τους επιδιωκόμενους στόχους, οι γενικοί και ειδικοί διδακτικοί στόχοι αφορούσαν τόσο στη Μουσική όσο και στα Μαθηματικά και αποσκοπούσαν στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και γνώσεων και για τα δύο γνωστικά αντικείμενα όπως ορίζονται από τα αντίστοιχα ΑΠΣ–ΔΕΠΠΣ. Για το λόγο αυτό τα Φύλλα Εργασίας περιλάμβαναν μουσικές δραστηριότητες με τον τίτλο ***«Σκέφτομαι Μουσικά»*** οι οποίες πλαισιώνονταν από μαθηματικές δραστηριότητες με τον τίτλο ***«Ερμηνεύω Μαθηματικά»*** που έδιναν τη δυνατότητα στους μαθητές να ανακαλύψουν τη μαθηματική φύση των αντίστοιχων μουσικών εννοιών. Οι μουσικο–μαθηματικές δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τέτοιον τρόπο ώστε να δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να πειραματίζονται, να εφαρμόζουν και να αξιολογούν διάφορες μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες μέσα από το τρίπτυχο των μουσικών δραστηριοτήτων που διαπλέκονται σε μια μουσική εμπειρία: ακρόαση–εκτέλεση–σύνθεση. Επιπλέον, οι μαθητές καλούνταν να εργασθούν εκτός από ατομικά και σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων και ανταλλάσσοντας απόψεις, εμπειρίες και προηγούμενες γνώσεις να οικοδομήσουν νέα γνώση μέσα από τις απαντήσεις που έδιναν στα ερωτήματα των Φύλλων Εργασίας κατά τρόπο ομαδοσυνεργατικό. Σε κάθε ομάδα συμμετείχαν μαθητές διαφορετικών επιπέδων επίδοσης τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Μουσική, έτσι ώστε οι ομάδες να είναι μικτής ικανότητας και όσο ήταν εφικτό ισοδύναμες. Το σύνολο των δραστηριοτήτων κάλυπτε περισσότερες από μία μαθηματικές έννοιες όπως φαίνεται στο συγκεντρωτικό Πίνακα 9.

Γ) Τα ***Φύλλα Δημιουργικών Εργασιών*** περιλάμβαναν δημιουργικές εργασίες είτε μουσικής σύνθεσης είτε μελέτης της κατασκευής μουσικών οργάνων με τους τίτλους ***«Συνθέτω Μαθηματικά»*** και ***«Κατασκευάζω μουσικά όργανα»*** αντίστοιχα, οι οποίες έδιναν τη δυνατότητα να επιχειρηθεί η εφαρμογή των νέων γνώσεων σε πλαίσια διαφορετικό από το αρχικό. Με τον τρόπο αυτόν δινόταν η δυνατότητα στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τις νέες γνώσεις που απέκτησαν, αλλά και να αναστοχαστούν πάνω στη διαδικασία με την οποία απέκτησαν τη νέα γνώση (μεταγνωστικές δεξιότητες).

Δ) Τα ***Φύλλα Ανακεφαλαίωσης* (ΦΑ)** τα οποία συμπλήρωναν οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση της κάθε ενότητας και στα οποία καταγραφόταν σε μορφή περίληψης το μάθημα. Με τον τρόπο αυτόν κωδικοποιούνταν ο βασικός κορμός της νέας γνώσης.

Ε) Τα ***Φύλλα Αυτοαξιολόγησης* (ΦΑΑ)** με τον τίτλο **«Αξιολόγησε την προσπάθειά σου!»** στο τέλος κάθε ενότητας οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν σε **ένα μικρής κλίμακας ερωτηματολόγιο** ώστε να αποτιμήσουν οι ίδιοι τη μαθησιακή διαδικασία (ΑΠΣ μουσικών μαθημάτων των Μουσικών Σχολείων, 2015). Τα Φύλλα Αυτοαξιολόγησης ανατροφοδότησαν την εκπαιδευτικό αλλά και τους ίδιους τους μαθητές για τις δυσκολίες και το αποτέλεσμα της διδασκαλίας.

Πίνακας 9: *Σύνολο μουσικών εννοιών/δραστηριοτήτων σε αντιστοιχία με τις μαθηματικές έννοιες/δραστηριότητες.*

Ενότητα	Μουσική δραστηριότητα/έννοια	Μαθηματική δραστηριότητα/ έννοια
1	✓ Μουσική ακρόαση: Αναγνώριση μουσικών διαστημάτων ✓ Ασκήσεις μουσικής θεωρίας: αναγνώριση και κατασκευή διαστημάτων.	✓ Υπολογισμός διαστήματος ως λόγος συχνοτήτων ✓ Λόγοι μικρών ακέραιων αριθμών ✓ Σταθερές αναλογίες, κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί
2	✓ Ανάλυση πρώιμης μεσαιωνικής μουσικής: τα πυθαγόρεια διαστήματα ✓ Κατασκευή πυθαγόρειας κλίμακας	✓ Μετρήσεις - Υπολογισμός διαστήματος ως λόγος μηκών με τη βοήθεια των εγχόρδων οργάνων ✓ Πρόσθεση διαστημάτων – πολλαπλασιασμός λόγων ✓ Διάταξη αριθμών
3	✓ Μειονεκτήματα πυθαγόρειου συστήματος: μεταφορά δοσμένης μελωδίας ✓ Ισοσυγκερασμένο σύστημα: μελέτη διάταξης των διαστημάτων με τη βοήθεια του κλαβιέ του πιάνου	✓ Υπολογισμός διαστημάτων ισοσυγκερασμένου συστήματος με βάση τους λόγους συχνοτήτων ✓ Δεκαδικοί αριθμοί, ποσοστά

4.2.1. Μουσικές δραστηριότητες

Οι μουσικές δραστηριότητες σχεδιάστηκαν για την ανάπτυξη των μουσικών δεξιοτήτων και γνώσεων των μαθητών και βασίστηκαν στη διαλεκτική σχέση της εμπειρίας και γνώσης. Οργανώθηκαν μέσα από τέσσερις άξονες: θεωρητική γνώση–ενεργητική μουσική ακρόαση–εκτέλεση–σύνθεση οι οποίοι αλληλοεμπλέκονται μεταξύ τους και οι οποίοι παρέχουν το κατάλληλο πλαίσιο στους μαθητές ώστε να βιώσουν και να αντιληφθούν τη Μουσική ως μια ολότητα και όχι ως μεμονωμένες μουσικές έννοιες (ΑΠΣ –ΔΕΠΣ Μουσικής, 2008).

Αναλυτικότερα, η θεωρητική γνώση αφορούσε στην εννοιολογική κατανόηση και τη διαχείριση του μουσικού υλικού. Η δραστηριότητα της ενεργητικής μουσικής ακρόασης αποσκοπούσε στην ανάπτυξη της ικανότητας αναγνώρισης και αξιολόγησης των χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων του ήχου, της ικανότητας παρακολούθησης και διαχείρισης των παραμέτρων δομικής οργάνωσης της μουσικής, καθώς και της ικανότητας ιστορικής και πολιτισμικής πλαισίωσής της. Μέσα από την ενδυνάμωση αυτών των ικανοτήτων, επιδιώχθηκε τόσο η «αφύπνιση» του αισθητικού κριτηρίου και της κριτικής σκέψης των μαθητών, όσο και ο εμπλουτισμός των ακουστικών τους εμπειριών (ΑΠΣ μουσικών μαθημάτων των Μουσικών Σχολείων, 2015). Παράλληλα, λειτούργησε ως ερέθισμα για τη δημιουργική δραστηριότητα της σύνθεσης από τους μαθητές. Η μουσική εκτέλεση ήταν μία από τις δραστηριότητες που αφορούσε κυρίως την ενόργανη Μουσική όπου οι μαθητές εκτελούσαν συνθέσεις ατομικά ή ομαδικά με τα μουσικά όργανα της τάξης τους καλλιεργώντας έτσι τις δεξιότητες ελέγχου του παραχθέντος ήχου. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η δραστηριότητα της σύνθεσης η δημιουργία δηλαδή μουσικής μέσω πειραματισμού, επιλογής, διόρθωσης, βελτίωσης μέχρι την τελική μορφή της κατά την οποία οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις αποκτηθείσες μουσικές δεξιότητες και γνώσεις σε δικές τους νέες δημιουργίες. Η δραστηριότητα της μουσικής σύνθεσης ενθάρρυνε τη δημιουργική εμπλοκή των μαθητών στη διαχείριση των γνώσεων και των δεξιοτήτων τους και στην ανάπτυξη της κριτικής τους σκέψης μέσα από τις επιλογές και των συνδυασμό μουσικών στοιχείων προκειμένου να αποδώσουν τις μουσικές τους ιδέες. Τέλος, όλες οι παραπάνω δραστηριότητες στόχευαν στην απόκτηση και ενίσχυση θετικών στάσεων και συμπεριφορών σε σχέση με τη μουσική.

4.2.2. Μαθηματικές δραστηριότητες

Οι μαθηματικές δραστηριότητες σχεδιάστηκαν λαμβάνοντας υπόψη τη θεωρία της εποικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης σύμφωνα με την οποία η διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών είναι μία κατασκευαστική διαδικασία κατά την οποία οι εμπειρίες των μαθητών έχουν βαρύνουσα σημασία (ΕΠΠΣ Μαθηματικών, 1997). Οι μαθηματικές έννοιες που αποτέλεσαν αντικείμενο διερεύνησης των μαθηματικών δραστηριοτήτων ανακαλύπτονταν μέσα από τις κατάλληλες μουσικές εμπειρίες (Ann, 2013). Αναλυτικότερα, οι μαθητές έχοντας ως αφόρμηση συγκεκριμένες μουσικές έννοιες παρατηρούσαν και ανέλυαν καταστάσεις οικίες προς αυτούς αναπτύσσοντας με αυτόν τον τρόπο την ικανότητα να διαχειρίζονται μαθηματικές έννοιες σε ποικίλες καταστάσεις. Τέλος, η υλοποίηση των γενικών στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης προσδιόρισαν τη διαμόρφωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων επιδιώκοντας τη δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος ώστε οι μαθητές να μαθαίνουν να διερευνούν, να αιτιολογούν, να κάνουν προβλέψεις για πιθανές λύσεις και να εκφράζονται μέσω των Μαθηματικών ως μέσο επικοινωνίας.

Κεφάλαιο 5

5. Εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης

Το παρόν κεφάλαιο πραγματεύεται το στάδιο της εφαρμογής της έρευνας δράσης η οποία αναπτύχθηκε σε δύο φάσεις. Αρχικά περιγράφεται το Ερωτηματολόγιο Γνώσεων και Δεξιοτήτων και Διερεύνησης Στάσεων και Αντιλήψεων (pre–test) που συμπλήρωσαν οι μαθητές πριν ξεκινήσει η παρέμβαση. Στη συνέχεια, αναλύεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε σε κάθε διδακτική παρέμβαση. Τέλος, παρουσιάζεται το Ερωτηματολόγιο Γνώσεων και Δεξιοτήτων και Διερεύνησης Στάσεων και Αντιλήψεων (post–test) που κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση των διδασκαλιών.

5.1. Αρχικό Ερωτηματολόγιο Γνώσεων και Δεξιοτήτων και Διερεύνησης Στάσεων και Αντιλήψεων (pre–test) πριν τη διδακτική παρέμβαση

Ο σχεδιασμός του εκπαιδευτικού υλικού βασίστηκε στην ενεργό εμπλοκή των μαθητών μέσα από βιωματικές δραστηριότητες και τη διεκπεραίωση ακουστικών πειραμάτων οι οποίες όμως προϋπέθεταν κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις και δεξιότητες Μαθηματικών και Μουσικής. Επιπλέον, η θετική στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά θα αποτελούσε διευκολυντικό παράγοντα για τη διδασκαλία των μουσικών θεμάτων της έρευνάς μας καθώς η διδακτική μας προσέγγιση στηρίχτηκε στη μαθηματική διάσταση της εξέλιξης της μουσικής θεωρίας. Για το λόγο αυτό, πριν από την οργάνωση των διδασκαλιών, κρίθηκε απαραίτητη η εκτίμηση της υπάρχουσας κατάστασης του γνωστικού επιπέδου και των στάσεων και αντιλήψεων των μαθητών ως προς το διερευνώμενο θέμα. Ειδικότερα, οι μουσικές και μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες αλλά και οι αντιλήψεις και στάσεις ελέγχθηκαν με τη βοήθεια γραπτών δοκιμασιών, διάρκειας μίας ώρας, που συντάχθηκαν από την ερευνήτρια-εκπαιδευτικό και είχαν τη χρήση του pre–test (βλ. Παράρτημα 2, pre–test). Στις γραπτές δοκιμασίες περιλαμβάνονταν συνολικά δεκαπέντε ερωτήσεις οργανωμένες σε τέσσερις ομάδες προκειμένου να διερευνηθούν:

1) Οι γνώσεις και δεξιότητες σχετικά με τη Μουσική (6 ερωτήσεις συνολικά) και ειδικότερα:

α) δεξιότητες μουσικής ακρόασης

β) γνώσεις μουσικής θεωρίας (αναγνώριση και κατασκευή διαστημάτων)

γ) γνώσεις Ιστορίας της Μουσικής

2) Οι γνώσεις και δεξιότητες σχετικά με τα Μαθηματικά (6 ερωτήσεις συνολικά) και συγκεκριμένα:

α) την αριθμητική (διάταξη αριθμών, πράξεις μεταξύ αριθμών, κλάσματα)

β) την άλγεβρα: τις σχέσεις αναλογίας (ποσά ανάλογα, ποσά αντιστρόφως ανάλογα)

3) Οι γνώσεις για τη διασύνδεση της Μουσικής με τα Μαθηματικά (Μουσική Ακουστική) με έμφαση στις μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν τους παραγόμενους ήχους και στις μαθηματικές αρχές που εφαρμόζονται κατά την κατασκευή μουσικών οργάνων (1 ερώτηση)

4) Η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν μαθηματικές έννοιες και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, στην προκειμένη περίπτωση της μουσικής τους εμπειρίας (2 ερωτήσεις). Οι ασκήσεις της ομάδας αυτής εντάσσονταν στη Γεωμετρία και στην Άλγεβρα και αφορούσαν απλές γεωμετρικές έννοιες και την εφαρμογή αναλογικής σκέψης αντίστοιχα.

Οι επιμέρους ερωτήσεις για τον έλεγχο των μουσικών και μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων σχετίζονταν με τη διδασκόμενη ύλη και ανταποκρίνονταν στις απαιτήσεις των ελληνικών ΑΠΣ της Μουσικής και των Μαθηματικών. Σε αυτές περιλαμβάνονταν ερωτήσεις κλειστού τύπου, πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης αλλά και σύντομης απάντησης. Προκειμένου να είναι αποτελεσματικό το τεστ επιδιώχθηκε να υπάρχει εγκυρότητα δομήματος, σαφής δηλαδή σχέση των ερωτήσεων με το χαρακτηριστικό που τέθηκε ως στόχος της δράσης (Cohen et.al., 2008).

Στο σημείο αυτό ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στις ερωτήσεις της δεύτερης ομάδας που αφορούσαν τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες οι οποίες είχαν ως πλαίσιο εφαρμογής τόσο αμιγώς μαθηματικό όσο και μουσικό. Δηλαδή ο έλεγχος των μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων γινόταν ταυτόχρονα, στις περιπτώσεις εκείνες που ήταν εφικτό και υπήρχε αντιστοιχία, αρχικά με μουσικές ασκήσεις και στη συνέχεια με ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου καθώς θέλαμε να διαπιστώσουμε κατά πόσο μπορούσαν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις σε διαφορετικά πλαίσια πέραν των Μαθηματικών όπως είναι αυτό της Μουσικής.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι παρότι η έννοια του μουσικού διαστήματος ήταν η θεμελιώδης έννοια του διδακτικού μας υλικού πάνω στο οποίο δομήθηκαν οι δραστηριότητες των Φύλλων Εργασίας εντούτοις, οι ερωτήσεις της συγκεκριμένης ομάδας βασίστηκαν στη μαθηματική δομή του ρυθμού. Για παράδειγμα, η σύγκριση των διαστημάτων και η ιεραρχική κατάταξή τους κατά είδος και μέγεθος ήταν μία από τις βασικότερες διαδικασίες που έπρεπε να είναι σε θέση οι μαθητές να εκτελούν σε όλες τις ενότητες του διδακτικού υλικού. Στο pre/post–test όμως αξιολογήσαμε, κατ' αντιστοιχία, την ικανότητα τους να συγκρίνουν και να κατατάσσουν τα μουσικά ρυθμικά κλάσματα με βάση την αξία τους. Ο λόγος που επιλέξαμε τα ρυθμικά παραδείγματα ήταν γιατί αφενός οι γνώσεις των μαθητών σχετικά με τα διαστήματα και τη μαθηματική τους προσέγγιση ήταν ανεπαρκείς και αποσπασματικές και κατά συνέπεια δεν θα μπορούσαν να ανταποκριθούν σε ασκήσεις με διαστηματικό περιεχόμενο στο pre–test και αφετέρου, η επίλυση των ρυθμικών ασκήσεων προϋπέθετε να εφαρμόσουν οι μαθητές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες όμοιες με εκείνες που απαιτούνταν για τη μελέτη των μουσικών συστημάτων και τη διάταξη των διαστημάτων σε αυτά. Άλλωστε ο ρυθμός είναι πεδίο εφαρμογής των Μαθηματικών εξαρχής της ενασχόλησης παιδιών με τη μουσική εκπαίδευση.

Για να αξιολογήσουμε τις στάσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών ως προς το μάθημα των Μαθηματικών και τη διδασκαλία του σε συνδυασμό με τη Μουσική χρησιμοποιήσαμε κάνοντας τις κατάλληλες προσαρμογές για να ανταποκρίνεται στα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνάς μας, το ερωτηματολόγιο *«The Questionnaire of Attitudes and Beliefs towards Mathematics»* που κατασκεύασε ο An και οι συνεργάτες του προκειμένου να διερευνήσουν την αλλαγή που επέφερε στη στάση και στις αντιλήψεις 35 μαθητών της 6ης δημοτικού σε σχολείο της Βορειοανατολικής Κίνας απέναντι στα Μαθηματικά η διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια δραστηριοτήτων μουσικής σύνθεσης (2008). Το ερωτηματολόγιο της προαναφερθείσας έρευνας περιλάμβανε εννέα (9) ερωτήσεις κλειστού τύπου με κλίμακα Likert πέντε διαβαθμίσεων (κυμαινόμενη από «συμφωνώ απόλυτα» έως «διαφωνώ απόλυτα») προκειμένου να μετρηθεί ο βαθμός αυτοπεποίθησης, άγχους και επιτυχίας των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά και δύο (2) ερωτήσεις ανοικτού τύπου έτσι ώστε να αξιολογηθούν οι αντιλήψεις τους απέναντι στα Μαθηματικά και στη σχέση των Μαθηματικών με τη Μουσική. Το Ερωτηματολόγιο Στάσεων και Αντιλήψεων της έρευνάς μας αποτελούνταν από πέντε (5) ερωτήσεις κλειστού τύπου και δύο (2) ερωτήσεις ανοικτού.

5.2. Διδακτικές παρεμβάσεις

Λαμβάνοντας υπόψη το μεθοδολογικό πλαίσιο σχεδιασμού της έρευνας αλλά και τις πρακτικές δυσκολίες εφαρμογής της, οι διδακτικές παρεμβάσεις αποφασίστηκε να υλοποιηθούν σε δύο φάσεις συνολικής διάρκειας δέκα (10) διδακτικών ωρών. Η πρώτη φάση ολοκληρώθηκε μέσα σε μία δίωρη διδακτική συνάντηση και είχε εισαγωγικό χαρακτήρα με στόχο την ανάκληση και τον εμπλουτισμό των ήδη υπαρχουσών μαθηματικών και μουσικών γνώσεων και δεξιοτήτων ενώ η δεύτερη φάση που ήταν και εκτενέστερη χρονικά, υλοποιήθηκε σε οκτώ ωριαίες διδακτικές συναντήσεις και στόχευε στην αξιοποίηση και εφαρμογή των αποκτηθεισών γνώσεων και δεξιοτήτων σε διαφορετικά ιστορικά μουσικά πλαίσια.

Για κάθε μια από τις διδακτικές παρεμβάσεις χρησιμοποιήθηκε η Μουσική για να αναδείξει σημαντικές μαθηματικές έννοιες και ακολουθήθηκε το διδακτικό μοντέλο διαθεματικής προσέγγισης μουσικο–μαθηματικών μαθημάτων που προτάθηκε από τον An (2012 όπως αναφέρεται στους An et. al, 2013). Το συγκεκριμένο μοντέλο διαρθρώνεται σε πέντε στάδια. Σε κάθε στάδιο διαφέρει ο βαθμός βαρύτητας που δίνεται στα κάθε αντικείμενο ξεχωριστά. Αναλυτικότερα, στο *πρώτο στάδιο* στο οποίο πρωτεύοντα και αποκλειστικό ρόλο στη διδασκαλία έχει η Μουσική, ο εκπαιδευτικός εισάγει τη μουσική γνώση χρησιμοποιώντας είτε τις θεωρίες μουσικής σύνθεσης ή στοιχεία από την οργανογνωσία. Στο *δεύτερο στάδιο*, εξακολουθώντας να δίνεται έμφαση στη Μουσική, ο εκπαιδευτικός δημιουργεί τις κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε να διευκολύνει τους μαθητές να συμμετέχουν στη μουσική δραστηριότητα δημιουργώντας τις απαραίτητες συνδέσεις ανάμεσα στη μουσική δραστηριότητα και στη σχετιζόμενη μαθηματική έννοια–στόχο. Στο *τρίτο στάδιο*, στο οποίο η Μουσική και τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται ισότιμα, οι μαθητές καθοδηγούνται κατάλληλα προκειμένου να συμμετέχουν στη μουσική δραστηριότητα και παράλληλα ενθαρρύνονται να σκεφτούν και να κάνουν τις ανάλογες ερωτήσεις που θα τους βοηθήσουν προκειμένου να αναγνωρίσουν τη βασική μαθηματική έννοια αξιοποιώντας τη μουσική τους εμπειρία. Στο *τέταρτο στάδιο*, εστιάζοντας πλέον κυρίως στα Μαθηματικά, οι εκπαιδευτικοί έχοντας ως πηγή τις εργασίες των μαθητών που προέκυψαν κατά τις μουσικές δραστηριότητες σχεδιάζουν παραδείγματα μαθηματικών εννοιών ή διαδικασιών και αναθέτουν μαθηματικές εργασίες λαμβάνοντας πάντα υπόψη το βαθμό κατανόησης του κάθε μαθητή όπως προέκυψε από την ανάλυση της μουσικής δραστηριότητας. Στο *πέμπτο στάδιο,* στο οποίο η Μουσική δεν περιλαμβάνεται, οι εκπαιδευτικοί εστιάζουν αποκλειστικά πλέον σε καθαρά μαθηματικές έννοιες στοχεύοντας να βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν την κατανόηση τους σχετικά με αυτές.

5.2.1. Α΄ Φάση: Πρόσκτηση, ενίσχυση και εμπλουτισμός βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων – ικανοτήτων

Σχεδιασμός

Στην πρώτη φάση της έρευνας και με αφετηρία τις διαπιστώσεις από την ανάλυση των απαντήσεων στην προκαταρκτική έρευνα κρίθηκε απαραίτητος ο σχεδιασμός μίας εισαγωγικής ενότητας (1η διδακτική παρέμβαση) η οποία είχε κατά κύριο λόγο επαναληπτικό χαρακτήρα καθώς αφορούσε μουσικές και μαθηματικές έννοιες που είχαν ήδη διδαχθεί αλλά και δεξιότητες που είχαν καλλιεργηθεί σε προηγούμενες τάξεις. Έτσι, έγινε η αφύπνιση του ενδιαφέροντος των παιδιών αρχικά πάνω σε βασικές μουσικές έννοιες και στη συνέχεια δημιουργήθηκαν τα κατάλληλα ερεθίσματα και συνθήκες που έδωσαν ώθηση για περαιτέρω διερεύνηση των μαθηματικών σχέσεων στις οποίες αναλύεται ο μουσικός ήχος.

Αναλυτικότερα, η πρώτη ενότητα βασίστηκε στην πολύπλευρη προσέγγιση της έννοιας του μουσικού διαστήματος καθώς αποτελεί το δομικό συστατικό της μουσικής δημιουργίας. Δεδομένου ότι τα μουσικά διαστήματα εκφράζονται ως λόγοι συχνοτήτων και λαμβάνοντας υπόψη ότι η έννοια της συχνότητας διδάσκεται στη Φυσική της Γ΄ Γυμνασίου (Ενότητα 5: Μηχανικά Κύματα, υποενότητα 5.4: Ήχος και τα υποκειμενικά χαρακτηριστικά του – Συχνότητα) θεωρήσαμε ότι έπρεπε στην εισαγωγική ενότητα να εισάγουμε τους μαθητές στην έννοια της συχνότητας που θα τους βοηθούσε να κατανοήσουν τα μουσικά φαινόμενα που διαπραγματεύονταν οι επόμενες ενότητες. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήσαμε ως πλαίσιο μελέτης και ανάλυσης ένα παράδειγμα από τη δική τους μουσική εμπειρία, την έννοια των αρμονικών.

5.2.1.1. 1η Διδακτική παρέμβαση

Θέμα: Μουσικά διαστήματα–Λόγοι συχνοτήτων

Εκτιμώμενη χρονική διάρκεια: δύο (2) διδακτικές ώρες

Διδακτικό υλικό και απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή: Φύλλο Πληροφοριών Α1, Φύλλο Εργασίας Α1, Φύλλο Πληροφοριών Β1, Φύλλο Εργασίας Β1, Φύλλο Δημιουργικής Εργασίας Γ1, Φύλλο Ανακεφαλαίωσης Δ1, Φύλλο Αυτοαξιολόγησης Ε1, μουσικά όργανα τάξης (βιολί, κιθάρα, πιάνο).

Σκοποί και στόχοι της διδασκαλίας:

Σκοπός της διδασκαλίας ήταν οι μαθητές να ανακαλέσουν, να ενισχύσουν και να εμπλουτίσουν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους σχετικά με τη διασύνδεση της έννοιας του διαστήματος και της συχνότητας στη Μουσική με την έννοια του λόγου, της αναλογίας, των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών στα Μαθηματικά.

Διδακτικοί Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση:

Α) Ως προς το γνωστικό αντικείμενο της Μουσικής:

- Να επιδεικνύουν ικανότητα ακουστικής αναγνώρισης όλων των κατηγοριών διαστημάτων μέσα από δραστηριότητες ενεργητικής ακρόασης.
- Να μπορούν να κατατάσσουν τα διαστήματα με βάση το είδος τους.
- Να μπορούν να κατασκευάζουν διαστήματα όλων των κατηγοριών.
- Να κατανοήσουν την έννοια της συνήχησης.
- Να μπορούν να ταξινομούν με βάση το κριτήριο της συμφωνίας/διαφωνίας τις συνηχήσεις των φθόγγων.
- Να κατανοήσουν την έννοια των κλιμάκων σε σχέση με την εσωτερική διάταξη του διαστηματικού τους περιεχομένου.
- Να κατανοήσουν την έννοια της τονικής μεταφοράς (transporto).
- Να επιδεικνύουν ικανότητα ακουστικής αναγνώρισης της μεταφοράς ενός μουσικού κομματιού σε διαφορετικές τονικότητες.
- Να είναι σε θέση να μεταφέρουν μία μελωδία σε άλλη κοντινή τονική βάση.
- Να επιδεικνύουν ικανότητα φωνητικής και οργανικής εκτέλεσης και αναπαραγωγής όλων των διαστημάτων.
- Να αναπτύξουν δεξιότητες δημιουργικής διαχείρισης των δομικών παραμέτρων της Μουσικής (διαστήματα) μέσα από δραστηριότητες σύνθεσης.

Β) Ως προς το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών:

- Να κατανοήσουν ότι οι μαθηματικές ιδέες μπορούν να ερμηνεύσουν βασικά ακουστικά φαινόμενα της Μουσικής όπως είναι το τονικό ύψος (μουσικός φθόγγος), η αρμονική σειρά και οι σύμφωνες/διάφωνες συνηχήσεις.
- Να μάθουν τους τρόπους με τους οποίους εφαρμόζεται η αναλογική σκέψη στη Μουσική (λόγος δύο αριθμών, αναλογία, αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη)
- Να ανακαλύψουν τα είδη των αριθμητικών λόγων και την εφαρμογή τους στην έκφραση των μεγεθών των μουσικών διαστημάτων.
- Να συσχετίσουν την ποιοτική διαβάθμιση των λόγων με την αισθητική κατάταξη των μουσικών διαστημάτων (σύμφωνα/διάφωνα) συνειδητοποιώντας ότι διάφορες εκφάνσεις της μουσικής τέχνης διέπονται από αριθμητικές σχέσεις.
- Να ανακαλύψουν το μαθηματικό μοντέλο βάσει του οποίου αναλύονται οι αρμονικοί των μουσικών φθόγγων.
- Να κατανοήσουν τον τρόπο διευθέτησης των τονικών υψών μέσα σε μια κλίμακα με βάση τους λόγους συχνοτήτων.
- Να εξασκηθούν σε αριθμητικές δεξιότητες.

Γ) Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

- Να αναπτύξουν κριτική και δημιουργική σκέψη.
- Να καλλιεργήσουν την ικανότητα επίλυσης προβλήματος.
- Να μάθουν να συνεργάζονται και ν' ανταλλάσσουν απόψεις προκειμένου να καταλήξουν σε κοινά συμπεράσματα.
- Να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση και αυτοεκτίμηση μέσα από ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες.
- Να αναπτύξουν μαθησιακές δεξιότητες και να αποκτήσουν μεταγνωστικές δεξιότητες.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Το θέμα απευθύνεται σε μαθητές που είχαν ήδη διδαχθεί, στην αντίστοιχη ύλη του Γυμνασίου, τις βασικές μουσικές και μαθηματικές έννοιες. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τη Μουσική οι μαθητές θεωρήθηκε ότι ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια των διαστημάτων, της αρμονίας και των κλιμάκων στις προηγούμενες τάξεις του Γυμνασίου (Α΄ και Β΄). Επιπλέον, είχαν αναπτύξει δεξιότητες μουσικής εκτέλεσης σε μουσικά όργανα του ενδιαφέροντός τους. Αναφορικά με τα Μαθηματικά, η έννοια του λόγου και της αναλογίας αναμένουμε να είναι γνωστές στα παιδιά, δεδομένου ότι τις είχαν διδαχθεί στην Α΄ Γυμνασίου (Κεφάλαιο: Ανάλογα ποσά–Αντιστρόφως ανάλογα ποσά).

Οργάνωση- πορεία της διδασκαλίας

Την πρώτη ώρα η διδάσκουσα έχοντας ταυτόχρονα την ιδιότητα της ερευνήτριας αφού έγινε μια σύντομη ενημέρωση των μαθητών για την εναλλακτική προσέγγιση της Μουσικής, εστίασε στη διδασκαλία των εννοιών του μουσικού διαστήματος και της σύμφωνης και διάφωνης συνήχησης χωρίς να γίνει αναφορά στις μαθηματικές σχέσεις που τις διέπουν (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Πληροφοριών Α1*: Τα μουσικά διαστήματα- Σύμφωνες και Διάφωνες συνηχήσεις*). Ο σχεδιασμός της συγκεκριμένης ενότητας περιελάβανε μουσικές δραστηριότητες (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α2) που ακολούθησαν το τρίπτυχο: ακρόαση–εκτέλεση–σύνθεση. Συγκεκριμένα σχεδιάστηκαν ασκήσεις της μουσικής ακρόασης (δραστηριότητες 1 και 2) με σκοπό να αναπτυχθούν οι ακουστικές δεξιότητες των μαθητών ώστε να καταστούν ικανοί να αναγνωρίζουν ακουστικά τα διάφορα είδη μουσικών διαστημάτων. Η καλλιέργεια της ενεργητικής ακρόασης ήταν ιδιαίτερα σημαντική για τις υπόλοιπες διδακτικές ενότητες καθώς η εκτέλεση των ακουστικών πειραμάτων των επόμενων διδακτικών ενοτήτων βασιζόταν στην αναγνώριση των διαφόρων κατηγοριών διαστημάτων.

Ακολούθησαν ασκήσεις μουσικής θεωρίας στις οποίες κλήθηκαν να αναγνωρίσουν σε γραπτές δοκιμασίες τις διάφορες κατηγορίες διαστημάτων είτε ως μεμονωμένα παραδείγματα (δραστηριότητα 3) είτε ως στοιχεία της αρμονίας ενός μουσικού κομματιού (δραστηριότητα 5) αλλά και να κατασκευάσουν αρμονικά μουσικά διαστήματα μελετώντας ταυτόχρονα το είδος της συνήχησης (συμφωνία/διαφωνία) που αυτά δημιουργούν (δραστηριότητα 4). Η επόμενη δραστηριότητα (δραστηριότητα 6) σχεδιάστηκε προκειμένου να μελετήσουν το διαστηματικό περιεχόμενο των κλιμάκων. Επιπλέον, την πρώτη διδακτική ώρα εισαγάγαμε τους μαθητές στη μουσική έννοια της μετατροπίας (transporto) η οποία προϋπέθετε επαρκή γνώση των διαστημάτων (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α1). Με στόχο την εξάσκησή τους στην κατανόηση της λειτουργίας των μετατροπιών οι μαθητές επεξεργάστηκαν τη δραστηριότητα 7.

Στη συνέχεια, μέσα από τη δημιουργική εργασία (δραστηριότητα 8) που συμπλήρωνε τις μουσικές ασκήσεις και προκειμένου να καλλιεργήσουμε την ομαδοσυνεργατικότητα ζητήθηκε από τους μαθητές, αφού προηγουμένως οργανώθηκαν σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων, να χρησιμοποιήσουν και να χειριστούν τα διαστήματα που είχαν μελετήσει κατά τις προηγούμενες μουσικές δραστηριότητες σε δικές τους συνθέσεις τις οποίες εκτέλεσαν οι ίδιοι στα όργανα της επιλογής τους και στη συνέχεια τις ερμήνευσαν φωνητικά.

Τη δεύτερη διδακτική ώρα επιχειρήθηκε η σύνδεση των παραπάνω μουσικών εννοιών με τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες οι οποίες είχαν αποτελέσει αντικείμενο πραγμάτευσης στα προηγούμενα σχολικά έτη. Επειδή εκτιμήσαμε με βάση τα ευρήματα της προκαταρκτικής έρευνας (pre–test) ότι οι μαθητές αγνοούσαν κάποιες βασικές γνώσεις αναφορικά με τα Μαθηματικά και τη Φυσική του μουσικού ήχου και επιπλέον είχαν κάποιες παρανοήσεις σχετικά με τα τονικά ύψη (νότες) και τις συχνότητες θεωρήσαμε σκόπιμο να γίνει μία διασύνδεση με τη Φυσική και συγκεκριμένα με τον ιδιαίτερο κλάδο της Μουσικής Ακουστικής. Έτσι, παρουσιάστηκε αρχικά η έννοια της αρμονικής σειράς (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Πληροφοριών Β1: *Τονικό ύψος- Αρμονικοί- Λόγοι συχνοτήτων*) η οποία αποτέλεσε το κατάλληλο πλαίσιο βάσει του οποίου συγκροτήθηκε στη συνέχεια το Φύλλο Εργασίας Β1 (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Β1: *Ερμηνεύω Μαθηματικά: Σύμφωνα διαστήματα και λόγοι συχνοτήτων μικρών ακέραιων αριθμών*). Σ' αυτό περιλαμβάνονταν δραστηριότητες που στόχο είχαν οι μαθητές να ανακαλύψουν το μαθηματικό τύπο στον οποίο αναλύονται οι αρμονικοί (άσκηση 1) και τη μαθηματική σχέση των αρμονικών (φθόγγων) που απέχουν διάστημα 8^{ης} Κ (άσκηση 2). Οι δραστηριότητες που ακολούθησαν αποσκοπούσαν στο να προσεγγίσουν οι μαθητές τη έννοια του διαστήματος ως λόγο συχνοτήτων και να κατανοήσουν τους μαθηματικούς κανόνες που καθορίζουν τη σχέση μεταξύ συχνότητας και διαστήματος. Επιπλέον, αντιλήφθηκαν την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων μέσα από τις παρατηρήσεις τους ότι μουσικά διαστήματα διαφορετικού τονικού ύψους (πχ. Ντο- Σολ και Ρε- Λα) αλλά του ίδιου μεγέθους (πχ. διάστημα 5^{ης}) είχαν τον ίδιο λόγο συχνοτήτων και τα οποία μπορούσαν να περιγραφούν με τη μαθηματική σχέση κ=ψ/χ όπου κ είναι μία σταθερά και αντιστοιχεί στο λόγο συχνοτήτων ψ/χ (ασκήσεις 3,4,5). Τέλος, συσχέτισαν το άκουσμα της σύμφωνης συνήχησης με το λόγο συχνοτήτων μικρών ακέραιων αριθμών (άσκηση 6) αλλά και γενικότερα αντιλήφθηκαν τη μαθηματική έννοια του λόγου ως εργαλείο σύγκρισης των μουσικών διαστημάτων ανεξάρτητα από τις συχνότητες των απόλυτων τονικών υψών.

Μετά την ολοκλήρωση της πρώτης διδακτικής ενότητας, η ανακεφαλαίωση έγινε με τη μορφή σύντομου κειμένου στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν τις βασικές έννοιες (λέξεις–κλειδιά) (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Ανακεφαλαίωσης Δ1). Για την αυτοαξιολόγηση ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν τη συμμετοχή τους στο μάθημα (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Αυτοαξιολόγησης Ε1).

Αποτίμηση Α΄ Φάσης

Με βάση τα ευρήματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της 1ης διδακτικής παρέμβασης και λαμβάνοντας υπόψη τις καταχωρίσεις της εκπαιδευτικού-ερευνήτριας καθώς και τα σχόλια των κριτικών φίλων έγινε η αποτίμηση της Α΄ Φάσης η οποία επικεντρώθηκε στα ακόλουθα σημεία: στην καταγραφή του βαθμού κατάκτησης των μαθησιακών στόχων, στην καταγραφή των αντιδράσεων των μαθητών καθώς και στις δυσκολίες που συνάντησαν, στις διδακτικές πρακτικές που ακολουθήθηκαν όπως επίσης και στη στάση της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας μέσα στην τάξη (βλ. Κεφάλαιο 6, Υποενότητα 6.2.1: Αξιολόγηση–Διαπιστώσεις από την Α΄ Φάση). Ο αναστοχασμός της αρχικής παρέμβασης αποτέλεσε την απαρχή και τη βάση για την επιλογή και το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων της Β΄ Φάσης.

5.2.2. Β΄ Φάση: Αξιοποίηση των γνώσεων και δεξιοτήτων – ικανοτήτων σε διαφορετικά μουσικά ιστορικά πλαίσια

Σχεδιασμός

Η συνολική διάρκεια της Β΄ Φάσης, που αποτέλεσε και την εκτενέστερη χρονικά, ήταν οκτώ (8) ωριαίες διδακτικές συναντήσεις και διαρθρώνονταν σε δύο υποενότητες. Ο σχεδιασμός της δεύτερης φάσης του προγράμματος συμπεριλάβανε μια βασική προσθήκη στους επιδιωκόμενους στόχους. Ενώ στην πρώτη φάση κύρια επιδίωξη ήταν η εισαγωγή και εξοικείωση των μαθητών με τη φυσικομαθηματική προσέγγιση των μουσικών εννοιών, στη δεύτερη φάση προστέθηκε ένας επιπλέον στόχος: να έρθουν σε επαφή με μουσικές από πολιτισμούς διαφορετικών ιστορικών περιόδων, τις οποίες παρακινούνται να συσχετίσουν και να συγκρίνουν, αναγνωρίζοντας την ιστορική εξέλιξη βασικών μαθηματικών και μουσικών εννοιών. Ωστόσο, η συγκεκριμένη φάση δεν εμπλουτίστηκε μόνο με στόχους αλλά και με δραστηριότητες. Γενικά, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων της Β΄ Φάσης, οι στόχοι που επιδιώχθηκαν και οι δεξιότητες που καλλιεργήθηκαν οικοδομήθηκαν στην γνώση και εμπειρία που αποκτήθηκε στην πρώτη ενότητα.

5.2.1.1. 2η Διδακτική παρέμβαση

Θέμα: Η Μονοφωνική Μουσική της Αρχαίας Ελλάδας και η Πρώιμη Πολυφωνία του Μεσαίωνα–Πυθαγόρειος υπολογισμός διαστημάτων (Λόγοι Μηκών)

Εκτιμώμενη χρονική διάρκεια: τέσσερις (4) διδακτικές ώρες

Διδακτικό υλικό και απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή: Φύλλο Πληροφοριών Α2, Φύλλο Εργασίας Α2, Φύλλο Πληροφοριών Β2, Φύλλο Εργασίας Β2, Φύλλο Δημιουργικής Εργασίας Γ2, Φύλλο Ανακεφαλαίωσης Δ2, Φύλλο Αυτοαξιολόγησης Ε2, cd με ακουστικές ασκήσεις, μουσικά όργανα τάξης (βιολί, κιθάρα, πιάνο), cd player.

Σκοποί και στόχοι της διδασκαλίας:

Σκοπός της διδασκαλίας ήταν οι μαθητές να είναι σε θέση να αντιληφθούν τις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την πυθαγόρεια αρμονία και να μπορούν να τις εφαρμόσουν σε δημιουργικές μουσικές συνθέσεις.

Διδακτικοί Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση:

Α) Ως προς το γνωστικό αντικείμενο της Μουσικής:

- Να μπορούν να κατατάξουν μέσα από δραστηριότητες ενεργητικής ακρόασης χρονολογικά και υφολογικά διάφορα μουσικά δείγματα.
- Να μπορούν να προσδιορίσουν ακουστικά τη μονοφωνική και πολυφωνική υφή διαφορετικών μουσικών έργων.
- Μέσα από την ακρόαση αποσπασμάτων αντιπροσωπευτικών έργων, να μπορούν να διακρίνουν και να επιβεβαιώσουν ακουστικά τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μουσικής διαφορετικών ιστορικών περιόδων με έμφαση σε πρώιμα μεσαιωνικά είδη (π.χ. organum).
- Να συσχετίσουν ακουστικά την έννοια της αρμονίας με το πολιτισμικό πλαίσιο της εκάστοτε εποχής και να αντιληφθούν ότι η έννοια της σύμφωνης και διάφωνης συνήχησης ορίζεται με διαφορετικά κριτήρια σε κάθε ιστορική μουσική περίοδο και σε κάθε μουσική παράδοση.
- Να συνδέουν τις διάφορες μορφές συνήχησης με στοιχεία από την Ιστορία της Μουσικής.
- Μέσα από τη μελέτη και αρμονική ανάλυση μουσικών παραδειγμάτων πρώιμης πολυφωνίας (π.χ. organum) να μπορούν να αναγνωρίζουν τα

διαστήματα 4ης, 5ης, 8ης ως εργαλεία σύνθεσης έργων του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης.

- Να προτείνουν ευρηματικούς τρόπους εναρμόνισης μιας μελωδίας κατά τα πρότυπα της μεσαιωνικής μουσικής παράδοσης με στόχο την ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους.
- Να εφαρμόζουν πρακτικά την αρμονία της πρώιμης πολυφωνίας σε όργανα της μουσικής τους εκπαίδευσης (πιάνο, βιολί).
- Να εξοικειωθούν με βασικές αρχές της πρώιμης πολυφωνικής γραφής.

Β) Ως προς το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών:

- Να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο ο λόγος των μηκών σχετίζεται με τα μουσικά διαστήματα και να εξασκηθούν στην αναπαραγωγή τους πάνω στο έγχορδο όργανο (π.χ. βιολί).
- Να μπορούν με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη να χωρίζουν τη χορδή ενός εγχόρδου (βιολιού) και να αναπαράγουν τα μουσικά διαστήματα.
- Να διαπιστώσουν μέσω πειραματισμού ότι οι λόγοι μικρών ακέραιων αριθμών σχετίζονται με την σύμφωνη μουσική συνήχηση.
- Να είναι σε θέση να προβλέψουν τις θέσεις που θα πρέπει να τοποθετήσουν τα δάκτυλά τους πάνω στις χορδές ενός έγχορδου οργάνου ώστε να σχηματίσουν τις νότες της πυθαγόρειας κλίμακας και στη συνέχεια να μπορούν να την εκτελέσουν με το έγχορδο όργανό τους (π.χ. βιολί).
- Να κατανοήσουν ότι προσθέτοντας μουσικά διαστήματα στο έγχορδο όργανο αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των λόγων συχνοτήτων τους.
- Να συσχετίσουν τη συχνότητα με το μήκος της χορδής και να αντιληφθούν ότι είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα.
- Να χειρίζονται απλές μαθηματικές έννοιες και να επιλύουν προβλήματα μέσω ατομικών και ομαδικών αλληλεπιδραστικών δραστηριοτήτων.
- Να εξασκηθούν σε αριθμητικές δεξιότητες (υπολογισμοί με κλάσματα, δεκαδικούς αριθμούς).
- Να μπορούν να συγκρίνουν διαφορετικά μουσικά συστήματα (αρμονικοί, πυθαγόρειο) έχοντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά.

- Να εμπλακούν σε ζητήματα που απασχόλησαν μαθηματικούς και μουσικούς της ελληνικής αρχαιότητας.

Γ) Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

- Να συνεργάζονται στο πλαίσιο ομάδας και να αναπτύσσουν ικανότητες διαπροσωπικής επικοινωνίας.
- Να συγκρίνουν και να συζητούν τις απαντήσεις τους σε επίπεδο ομάδας και να τις ανακοινώνουν στην τάξη ως ομάδα.
- Να οδηγηθούν στη νέα γνώση μέσα από την ανακάλυψη και τη διερεύνηση ενεργοποιώντας την κριτική και τη δημιουργική τους σκέψη.
- Να αναπτύσσουν ικανότητες σχετικές με τον επιστημονικό τρόπο εργασίας.

Οργάνωση–πορεία της διδασκαλίας

Την πρώτη ώρα, επιχειρήθηκε η σύνδεση των βασικών μουσικών γνώσεων (μουσικά διαστήματα, διάφωνη/σύμφωνη συνήχηση) που οι μαθητές είχαν διερευνήσει στην πρώτη ενότητα με είδη και στυλ μουσικής διαφορετικών ιστορικών περιόδων. Έμφαση δόθηκε στο μουσικό ιστορικό υλικό του πρώιμου Μεσαίωνα που αποτέλεσε αντικείμενο πραγμάτευσης στα προηγούμενα σχολικά έτη στο μάθημα της Ιστορίας της Μουσικής αλλά και αποτελεί μέρος του ρεπερτορίου στα χορωδιακά μουσικά σύνολα όλων των τάξεων του Γυμνασίου και Λυκείου. Η παρούσα ενότητα αποτέλεσε τον αναγκαίο κρίκο ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν την ιστορική εξελικτική πορεία της ευρωπαϊκής μουσικής.

Αρχικά, παρουσιάστηκαν συνοπτικά οι απαραίτητες ιστορικές πληροφορίες για την εμφάνιση της πολυφωνίας με ιδιαίτερη αναφορά στο πρώτο είδος της πρώιμης πολυφωνίας το organum (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Πληροφοριών Α2: *Η μελωδία ως βασικό στοιχείο της μουσικής δημιουργίας*). Ακολουθώντας την παιδαγωγική αρχή ότι οι θεωρητικές έννοιες πρέπει να έπονται της μουσικής εμπειρίας, δόθηκε προτεραιότητα στην εμπειρική γνώση της Μουσικής την οποία διαδέχθηκε η εννοιολογική γνώση. Για το λόγο αυτό, ζητήθηκε αρχικά από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ακουστικά και να τοποθετήσουν χρονικά μουσικά παραδείγματα διαφορετικών περιόδων (Ύστερη Αρχαιότητα, Μεσαίωνας, Μπαρόκ, Κλασικισμός) με εμφανή τα ιδιαίτερα γνωρίσματα της εκάστοτε ιστορικής περιόδου (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α2: *Σκέφτομαι Μουσικά: Ακούω και αναλύω την πολυφωνία του πρώιμου Μεσαίωνα*). Οι μαθητές μέσα από την παρατήρηση και τη σύγκριση των μουσικών αποσπασμάτων συμμετείχαν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία συνειδητοποιώντας την εξέλιξη της συνθετικής σκέψης (μονοφωνία–πολυφωνία–ομοφωνία). Τα χρησιμοποιούμενα μουσικά αποσπάσματα αφορούσαν τη λατρευτική δυτική Μουσική διαφορετικών ιστορικών περιόδων: Γρηγοριανό Μέλος (Ύστερη Αρχαιότητα, 5^{ος} – 6^{ος} αιώνας μ.Χ.), Organum (πρώιμος Μεσαίωνας, 8^{ος} – 9^{ος} αιώνας μ.Χ.), εκκλησιαστική καντάτα (Μπαρόκ, 1600-1750 μ.Χ.) και Requiem (Κλασική Εποχή, 1750- 1830 μ.Χ.) (βλ. Παράρτημα 1: Κατάλογος Ηχητικών παραδειγμάτων).

Η δραστηριότητα της ενεργητικής ακρόασης προετοίμασε τους μαθητές για τη δραστηριότητα της μουσικής θεωρίας που αφορούσε την αρμονική ανάλυση του organum (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α2). Επιλέξαμε το συγκεκριμένο είδος καθώς βασίζεται σε διαστήματα 4ης, 5ης, 8ης ο υπολογισμός των οποίων γίνεται με βάση την πυθαγόρεια παράδοση παρέχοντας με τον τρόπο αυτόν το ερέθισμα για να γίνει η περαιτέρω συσχέτιση της μουσικής δημιουργίας με τα Μαθηματικά. Κατά τον σχεδιασμό των μουσικών δραστηριοτήτων λάβαμε υπόψη τη μεγάλη ανομοιογένεια των μαθητών όσον αφορά το γνωστικό υπόβαθρό τους στη θεωρία και αρμονία της Μουσικής η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι αρκετοί μαθητές παρακολουθούν παράλληλα και μαθήματα σε ωδείο. Για τον λόγο αυτό, ακολουθήθηκε η αρχή της διαφοροποιημένης διδασκαλίας έτσι ώστε οι ασκήσεις να ανταποκρίνονται στο επίπεδο γνώσεων του κάθε παιδιού χωριστά. Έτσι, για τους μαθητές που είχαν περιορισμένες μουσικές γνώσεις σχεδιάστηκε η άσκηση της ομάδας Α, ενώ οι μαθητές που είχαν υψηλό επίπεδο γνώσεων μουσικής θεωρίας κλήθηκαν να ασχοληθούν με την άσκηση της ομάδας Β (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α2).

Τέλος, για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων δημιουργικής διαχείρισης των δομικών παραμέτρων της Μουσικής και συγκεκριμένα των διαστημάτων ζητήθηκε από τους μαθητές μέσα από τη δραστηριότητα της σύνθεσης να εναρμονίσουν μία μελωδία (να συνθέσουν δηλαδή μία συνοδευτική μελωδία) ακολουθώντας όμως το στυλ και το ύφος του πρώιμου Μεσαίωνα (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α2, *Δημιουργική Εργασία*). Μάλιστα, ως κατευθυντήριες γραμμές για τη σύνθεση δώσαμε κάποιες βασικές μαθηματικές αρχές που είχαν ήδη μελετήσει οι μαθητές στην 1^{η} ενότητα επιχειρώντας με τον τρόπο αυτόν να εισάγουμε τη μαθηματική σκέψη στη δημιουργική εργασία της σύνθεσης.

Μέσα από την κριτική θεώρηση των μουσικών παραδόσεων διαφορετικών ιστορικών περιόδων δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι το αισθητικό κριτήριο της αρμονίας (σύμφωνη/διάφωνη συνήχηση) συναρτάται άμεσα και διαμορφώνεται με βάση την αισθητική αντίληψη του εκάστοτε μουσικού πολιτισμού. Ταυτόχρονα ήρθαν σε επαφή με τη μεσαιωνική Μουσική και αρμονία, τη μαθηματική δομή της οποίας ενθαρρύνθηκαν να διερευνήσουν στην επόμενη διδακτική ώρα.

Τη δεύτερη διδακτική ώρα και έχοντας διαπιστώσει οι μαθητές μέσα από την ανάλυση των μουσικών κομματιών του πρώιμου Μεσαίωνα ότι κυριαρχούν τα μουσικά διαστήματα που οι πυθαγόρειοι θεωρούν σύμφωνα διαστήματα δηλαδή τα διαστήματα 8ης, 5ης, 4ης και τα διαστήματα ταυτοφωνίας κλήθηκαν να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο αυτά υπολογίζονταν με τα μαθηματικά εργαλεία της εποχής. Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων και εφόσον δόθηκαν τα απαραίτητα ιστορικά στοιχεία (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Πληροφοριών Β2: *Ο πυθαγόρειος υπολογισμός των διαστημάτων*) οι μαθητές ασχολήθηκαν με τις δραστηριότητες του Φύλλου Εργασίας Β2 (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Β2: *Ερμηνεύω Μαθηματικά: Τα μουσικά διαστήματα ως λόγοι μηκών*).

Για τον υπολογισμό των διαστημάτων αναπαραστήσαμε το πείραμα του Πυθαγόρα έχοντας ως όργανα πειραματισμού δύο έγχορδα όργανα. Επιλέξαμε τα βιολιά αντί να κατασκευάσουμε το μονόχορδο του Πυθαγόρα γιατί ήταν όργανα στα οποία μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τις μαθηματικές αρχές του Πυθαγόρα και επιπλέον εντάσσονταν στη μουσική εκπαίδευση των παιδιών και ήταν εξοικειωμένα με το παίξιμό τους. Και στις δύο δραστηριότητες αξιοποιήθηκε η εργασία των μαθητών σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Σε κάθε ομάδα εντάχθηκαν τουλάχιστον δύο μαθητές που γνώριζαν να παίζουν βιολί για να μπορούν να υλοποιήσουν τα ακουστικά πειράματα. Ο ρόλος της εκπαιδευτικού ήταν συντονιστικός και συμβουλευτικός κάθε φορά που χρειαζόταν βοήθεια η κάθε ομάδα.

Στην πρώτη δραστηριότητα (*Ακουστικά πειράματα με το βιολί και τη χρήση χάρακα!*) οι μαθητές καλούνταν να υπολογίσουν τα μήκη και τους λόγους των μηκών των χορδών που αντιστοιχούσαν στα βασικά σύμφωνα διαστήματα της 8ης, 5ης, και 4ης με τη χρήση δύο βιολιών, στο πρώτο από τα οποία θα παίζονταν η επιλεγόμενη χορδή ανοιχτή, χωρίς δηλαδή να πατάει το δάχτυλο σε κανένα σημείο της ταστιέρας ενώ στο δεύτερο βιολί θα τοποθετούσαν το δάκτυλό τους με βάση τους μαθηματικούς υπολογισμούς που έκαναν με τη χρήση χάρακα. Μέσω της δραστηριότητας αυτής τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα οπτικά και ακουστικά να συνδέσουν τα μεγέθη των σύμφωνων μουσικών διαστημάτων με τους αριθμητικούς λόγους που τα εκφράζουν και συγκεκριμένα να συσχετίσουν τα διαστήματα 8ης, 5ης, και 4ης με τους λόγους μηκών 2/1, 3/2 και 3/4 αντίστοιχα. Επιπλέον, διαπίστωσαν ότι οι λόγοι των μηκών των χορδών που σχηματίζουν ένα μουσικό διάστημα είναι αντιστρόφως ανάλογοι με τους λόγους συχνοτήτων των φθόγγων του μουσικού διαστήματος. Το ίδιο πείραμα ζητήθηκε από τα παιδιά να αναπαραστήσουν αλλάζοντας το αρχικό μήκος της χορδής με απώτερο στόχο να συνειδητοποιήσουν ότι τα διαστήματα καθορίζονται από τους λόγους των μηκών χορδών και όχι από τις απόλυτες αριθμητικές τιμές των μηκών τους.

Στη δεύτερη δραστηριότητα (*Ακουστικά πειράματα με τη χρήση κανόνα και διαβήτη!*) για τον υπολογισμό των βασικών διαστημάτων της 8ης, 5ης, και 4ης ακολουθήθηκε η μέθοδος που υιοθέτησε ο Πυθαγόρας, χρησιμοποιώντας δηλαδή το λόγο μηκών ως μέτρο σύγκρισης. Αρχικά, έγινε επίδειξη από την εκπαιδευτικό του τρόπου με τον οποίο μπορεί να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα μέρη με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη ώστε να παραχθεί το διάστημα 8ης. Ως όργανο επίδειξης χρησιμοποιήθηκε το βιολί. Στη συνέχεια, οι μαθητές και αφού είχαν χωριστεί σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων σε κάθε μία από τις οποίες συμμετείχε τουλάχιστον ένας μαθητής που γνώριζε να παίζει βιολί, ενθαρρύνθηκαν να υπολογίσουν τα διαστήματα της 5ης και της 4ης πάνω στο βιολί ακολουθώντας την ίδια διαδικασία. Ως οδηγό για την υλοποίηση της συγκεκριμένης διαδικασίας χρησιμοποιήσαμε το βιβλίο των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου και συγκεκριμένα την παράγραφο «Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα» καθώς ο «Λόγος Ευθύγραμμων Τμημάτων» αποτελεί την υποενότητα 1.2 του 1ου Κεφαλαίου της Γεωμετρίας.

Για την επόμενη δραστηριότητα (Δραστηριότητα 3: *Πρόσθεση διαδοχικών διαστημάτων πάνω σε μία χορδή κιθάρας με βάση τους λόγους μηκών!*) ζητήθηκε να προσθέσουν δύο διαδοχικά διαστήματα 5ης Κ και 4ης Κ υπολογίζοντας το άθροισμα των λόγων μηκών τους πάνω σε μία χορδή κιθάρας που ήταν διαιρεμένη σε 12 ίσα μέρη. Απώτερος στόχος της δραστηριότητας ήταν να μπορούν οι μαθητές, έχοντας κατανοήσει την έννοια του λόγου και της αναλογίας, να την εφαρμόσουν στην πρόσθεση και αφαίρεση συνημμένων διαστημάτων, διαστημάτων δηλαδή που ήταν συνεχόμενα.

Την τελευταία διδακτική ώρα, οι μαθητές ασχολήθηκαν με τη δημιουργική δραστηριότητα της μουσικής σύνθεσης που περιλαμβάνονταν στο Φύλλο Εργασίας Γ2 (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Γ2: *Συνθέτω Μαθηματικά: Γίνομαι συνθέτης* *μεσαιωνικής Μουσικής χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά του Πυθαγόρα*). Ο σχεδιασμός του Φύλλου Εργασίας Γ2 βασίστηκε αρχικά στη μαθηματική κατασκευή της κλίμακας του Πυθαγόρα από την οποία οι μαθητές θα αντλούσαν το φθογγικό τους υλικό προκειμένου να συνθέσουν μία μελωδία. Έτσι, με βάση το λόγο (2/3) του διαστήματος της 5ης κατασκεύασαν και τα υπόλοιπα διαστήματα της κλίμακας τη θέση των οποίων πάνω στην ταστιέρα του έγχορδου οργάνου τους (κιθάρα) υπολόγισαν εφαρμόζοντας την αναλογική σκέψη για αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη καθώς με βάση τους λόγους των συχνοτήτων των διαστημάτων που είχαν βρει έπρεπε να υπολογίσουν τους λόγους μηκών που είναι αντιστρόφως ανάλογοι με τους λόγους συχνοτήτων. Επιλέξαμε την κιθάρα γιατί είχε μεγαλύτερο μήκος χορδών από το βιολί γεγονός που διευκόλυνε τους μαθηματικούς υπολογισμούς και επιπλέον σε κάθε μία από τις ομάδες υπήρχαν τουλάχιστον δύο άτομα που έπαιζαν το συγκεκριμένο έγχορδο. Στη συνέχεια, συνέθεσαν μία απλή μελωδία τεσσάρων μέτρων βασιζόμενοι στο πυθαγόρειο φθογγικό υλικό με ρυθμό 2/4 προσθέτοντας στο ισχυρό μέρος κάθε μέτρου μία σύμφωνη συνήχηση (συνοδεία). Για την εκτέλεσή της έγινε επιμερισμός ρόλων σύμφωνα με τον οποίο ένας μαθητής αναλάμβανε να παίξει στη μία κιθάρα της ομάδας την κύρια μελωδία ενώ ένας άλλος μαθητής έπαιζε στην άλλη κιθάρα τη συνοδεία.

Η 2η διδακτική ενότητα ολοκληρώθηκε με τη συμπλήρωση βασικών εννοιών σε ένα σύντομο κείμενο το οποίο είχε ανακεφαλαιωτικό χαρακτήρα (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Ανακεφαλαίωσης Δ2). Τέλος, αξιολογήθηκε η προσπάθειά των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Αυτοαξιολόγησης Ε2).

5.2.2.2. 3η Διδακτική παρέμβαση

Θέμα: Η Πολυφωνική Μουσική του Μεσαίωνα, της Αναγέννησης και του Μπαρόκ και η εμφάνιση των πληκτροφόρων οργάνων– Η ανάγκη του συγκερασμού με τη βοήθεια των Μαθηματικών.

Εκτιμώμενη χρονική διάρκεια: τέσσερις (4) διδακτικές ώρες

Διδακτικό υλικό και απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή: Φύλλο Πληροφοριών Α3, Φύλλο Εργασίας Α3, Φύλλο Πληροφοριών Β3, Φύλλο Εργασίας Β3, Φύλλο Δημιουργικής Εργασίας Γ3, Φύλλο Ανακεφαλαίωσης Δ3, Φύλλο Αυτοαξιολόγησης

Ε3, cd με ακουστικές ασκήσεις, cd player, μουσικά όργανα τάξης (βιολί, κιθάρα, πιάνο).

Σκοποί και στόχοι της διδασκαλίας:

Σκοπός της παρούσας ενότητας ήταν οι μαθητές να αντιληφθούν τους λόγους για τους οποίους εγκαταλείφθηκε ο πυθαγόρειος υπολογισμός των μουσικών διαστημάτων και να κατανοήσουν τη συνεισφορά των Μαθηματικών στην καθιέρωση του νέου ισοσυγκερασμένου μουσικού συστήματος βάσει του οποίου κατασκευάζονται τα πληκτροφόρα όργανα όπως είναι για παράδειγμα το πιάνο.

Διδακτικοί Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας οι μαθητές θα είναι σε θέση:

Α) Ως προς το γνωστικό αντικείμενο της Μουσικής:

- Να αντιλαμβάνονται ακουστικά την εξέλιξη της πολυφωνίας μέσα από την ακρόαση αντιπροσωπευτικών αποσπασμάτων έργων διαφορετικών ιστορικών περιόδων.
- Να αναγνωρίζουν τα ιδιαίτερα αρμονικά γνωρίσματα της πολυφωνίας του Μεσαίωνα μέσα από τη μελέτη και αρμονική ανάλυση αποσπασμάτων αντίστοιχων πολυφωνικών έργων.

Β) Ως προς το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών:

- Να αντιληφθούν με τη βοήθεια των Μαθηματικών τα μειονεκτήματα της πυθαγόρειας κλίμακας.
- Να διαπιστώσουν μέσω της μαθηματικής ανάλυσης ότι η τονική μεταφορά μιας μελωδίας στο πυθαγόρειο σύστημα οδηγεί στην προσθήκη νέου φθογγικού υλικού.
- Να καταλάβουν ότι η εισαγωγή των διαστημάτων φυσικής τρίτης και η επινόηση των πληκτροφόρων οργάνων τον 14^{o}–15^{o} αιώνα μ.Χ. ουσιαστικά έβαλε το οριστικό τέλος στη χρήση των πυθαγόρειων λόγων ως μέθοδο κουρδίσματος των οργάνων.
- Να συσχετίσουν την έννοια του συγκερασμού με τον μαθηματικό υπολογισμό των διαστημάτων του ισοσυγκερασμένου συστήματος.
- Να αντιληφθούν ότι η πρόσθεση μουσικών διαστημάτων αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των συχνοτήτων τους.

- Να μπορούν να συγκρίνουν διαφορετικά μουσικά συστήματα (αρμονικοί, ισοσυγκερασμένο) έχοντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά.

Δ) Ως προς τη μαθησιακή διαδικασία

- Να εμπλακούν σε διερευνητικές διαδικασίες έτσι ώστε να αναπτύξουν την κριτική και δημιουργική τους σκέψη που θα οδηγήσει στην πρόκτηση της νέας γνώσης.

Οργάνωση- πορεία της διδασκαλίας

Την πρώτη διδακτική ώρα παρουσιάστηκαν συνοπτικά οι απαραίτητες ιστορικές πληροφορίες για την εξέλιξη της πολυφωνίας κατά το Μεσαίωνα, την Αναγέννηση και την εποχή Μπαρόκ με ιδιαίτερη αναφορά στο μουσικό είδος του μοτέτου η συμβολή του οποίου ήταν καθοριστική για το πολυφωνικό μουσικό ύφος (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Πληροφοριών Α3: *Η εξέλιξη της αρμονικής σκέψης στη Μουσική*).

Για να αντιληφθούν και ακουστικά την εξέλιξη της αρμονίας οργανώθηκε η δραστηριότητα της κριτικής μουσικής ακρόασης του Φύλλου Εργασίας Α3 κατά την οποία οι μαθητές παρατήρησαν και συνέκριναν μουσικά αποσπάσματα κλιμακούμενης αρμονικής πολυπλοκότητας (δίφωνο organum, τρίφωνο μοτέτο, πεντάφωνου μοτέτου και πολυφωνικό μοτέτο της εποχής Μπαρόκ) (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Α3: *Σκέφτομαι Μουσικά: Ακούω και αναλύω την πολυφωνία του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης*). Τα χρησιμοποιούμενα μουσικά αποσπάσματα αφορούσαν το πολυφωνικά είδη διαφορετικών ιστορικών περιόδων: Organum duplum (Μεσαίωνας, 10^{ος} αιώνας μ.Χ.), τρίφωνο Μοτέτο (Ύστερος Μεσαίωνας, 14^{ου} αιώνας μ.Χ.), πεντάφωνο Μοτέτο (Αναγέννηση, 15^{ος} – 16^{ος} αιώνας μ.Χ.) και Μοτέτο της εποχής Μπαρόκ (1600-1750 μ.Χ.) (βλ. Παράρτημα 1: Κατάλογος Ηχητικών παραδειγμάτων). Στο επόμενο στάδιο, οι μαθητές ανέλυσαν την αρμονική δομή αντιπροσωπευτικών μουσικών παραδειγμάτων. Για το σχεδιασμό της δραστηριότητας αυτής ακολουθήθηκε η αρχή της διαφοροποιημένης διδασκαλίας δίνοντας στους μαθητές τη δυνατότητα να επιλέξουν ανάλογα με το επίπεδο γνώσεών τους την άσκηση είτε της ομάδας Α που ήταν και πιο εύκολη είτε της ομάδας Β που ήταν δυσκολότερη. Μέσα από την αρμονική ανάλυση οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η αρμονία εξελίχθηκε από τη δίφωνη συνήχηση του πρώιμου Μεσαίωνα με κυρίαρχα διαστήματα τα πυθαγόρεια σύμφωνα διαστήματα της 5^{ης} Κ, 4^{ης} Κ και 8^{ης} Κ σε πιο πολύπλοκες μορφές συνήχησης (π.χ. τρίφωνη, τετράφωνη) με την ευρεία χρήση διαστημάτων όπως της 3ης και της 6ης. Με την παραπάνω διαπίστωση δημιουργήσαμε τις κατάλληλες προϋποθέσεις ώστε τα παιδιά να μελετήσουν τις αλλαγές που επέφερε η εξέλιξη αυτή στη μαθηματική θεωρία της Μουσικής.

Για τη μαθηματική προσέγγιση των μουσικών εννοιών που παρουσιάστηκαν την πρώτη ώρα της διδακτική ενότητας δε συγκροτήσαμε Φύλλο Πληροφοριών όπως στις προηγούμενες ενότητες καθώς στοχεύαμε δημιουργώντας ένα μαθησιακό περιβάλλον με τα κατάλληλα ερεθίσματα να διαπιστώσουν οι ίδιοι οι μαθητές μέσω της ανακαλυπτικής μάθησης τον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται τα Μαθηματικά στην εξελικτική πορεία της αρμονίας της Μουσικής. Έτσι, <u>τη δεύτερη διδακτική ώρα</u> αναπτύχθηκαν οι δραστηριότητες του Φύλλου Εργασίας Β3 οι οποίες αναδείκνυαν τους λόγους, από την σκοπιά των μαθηματικών, για τους οποίους η πυθαγόρεια παράδοση της μουσικής θεωρίας εγκαταλείφθηκε κατά τον 14ο αιώνα μ.Χ. (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Β3: *Ερμηνεύω Μαθηματικά: Η προβληματική πυθαγόρεια διαίρεση της οκτάβας και η ανάγκη εύρεσης νέου τρόπου διαίρεσής της*). Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε τα διαστήματα 3ης και 6ης που ευρέως χρησιμοποιούνταν από τους συνθέτες του Μεσαίωνα και ήταν το επίκεντρο της μουσικής δημιουργίας. Συγκεκριμένα, καλούνταν να συγκρίνουν τα εν λόγω διαστήματα της πυθαγόρειας παράδοσης με τα αντίστοιχα φυσικά διαστήματα της αρμονικής στήλης. Μέσα από τη δραστηριότητα αυτή μπορούσαν να αντιληφθούν ότι η απόκλιση στους λόγους συχνοτήτων των πρώτων διαστημάτων σε σχέση με εκείνους των δεύτερων σε συνδυασμό με το σκληρό άκουσμά τους (δεδομένου ότι οι λόγοι τους ήταν πιο περίπλοκοι από τους λόγους που οι πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι επέφεραν αρμονικό άκουσμα) οδηγούσε στην ανάγκη εύρεσης ενός νέου τρόπου υπολογισμού τους και καλύτερου κουρδίσματός τους. Η δεύτερη δραστηριότητα (*Μεταφέρω μία μελωδία σε άλλη τονικότητα με τη βοήθεια των Μαθηματικών του Πυθαγόρα!*) δημιουργήθηκε προκειμένου να καταδείξει το μειονέκτημα που παρουσιάζει η πυθαγόρεια κλίμακα όταν χρειάζεται να γίνει μεταφορά της μελωδίας. Συγκεκριμένα, μέσα από τον υπολογισμό των διαστημάτων της νέας τονικότητας οι μαθητές μπορούσαν να διαπιστώσουν ότι το φθογγικό υλικό που προέκυπτε ήταν διαφορετικό από το αρχικό. Στην συνέχεια οι μαθητές παρακινήθηκαν να συσχετίσουν τα παραπάνω με την κατασκευή των πληκτροφόρων οργάνων και την ανάγκη προσθήκης νέων πλήκτρων σε προγονικές μορφές του σύγχρονου πιάνου κατά την τονική μεταφορά μιας μελωδίας.

Την τελευταία διδακτική ώρα της ενότητας αυτής και εφόσον ήδη είχαν διαπιστώσει οι μαθητές τα προβλήματα της πυθαγόρειας μουσικής παράδοσης εισαγάγαμε την έννοια του ισοσυγκερασμού (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Εργασίας Γ3: *Συνθέτω Μαθηματικά: Ανακαλύπτω την ιστορία των πληκτροφόρων οργάνων-Ισοσυγκερασμένο Σύστημα*). Για να καταστεί κατανοητή η έννοια αυτή χρησιμοποιήσαμε ως σημείο αναφοράς το κλαβιέ του σύγχρονου πιάνου και σχεδιάσαμε την πρώτη δραστηριότητα του Φύλλου Εργασίας Γ3. Δεδομένου ότι οι μαθητές δεν είχαν ακόμη διδαχθεί την έννοια του λογαρίθμου και άρα δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συγκεκριμένη έννοια ως διδακτικό εργαλείο περιοριστήκαμε στη διερεύνηση των λόγων συχνοτήτων ανάμεσα στα ημιτόνια και στους τόνους που αντιστοιχούν στα άσπρα και μαύρα πλήκτρα. Στόχος της άσκησης ήταν να καταδείξουμε ότι ο ισοσυγκερασμός αφορά ίσους λόγους και όχι διαφορά συχνοτήτων. Το Φύλλο Εργασίας Γ3 πλαισίωνε και μία ακόμη δραστηριότητα που στόχευε στην ανάπτυξη της κριτικής και επαγωγικής σκέψης των μαθητών καθώς μέσα από τη συγκριτική θεώρηση των διαστημάτων διαφορετικών μουσικών συστημάτων (ισοσυγκερασμένου, αρμονικοί) καλούνταν να εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με τη μαθηματική δομή τους.

Στο τέλος της διδακτικής ενότητας, η ανακεφαλαίωση έγινε με τη μορφή σύντομου κειμένου στο οποίο οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν τις βασικές έννοιες (λέξεις–κλειδιά) (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Ανακεφαλαίωσης Δ3). Οι μαθητές αυτοαξιολόγησαν τη συμμετοχής τους στο μάθημα με το Φύλλο Αυτοαξιολόγησης (βλ. Παράρτημα 3, Φύλλο Αυτοαξιολόγησης Ε3).

Αποτίμηση Β΄ Φάσης

Με βάση τα ευρήματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της 2ης και της 3ης διδακτικής παρέμβασης και λαμβάνοντας υπόψη τις καταχωρίσεις της εκπαιδευτικού-ερευνήτριας καθώς και τα σχόλια των κριτικών φίλων έγινε η αποτίμηση της Β΄ Φάσης η οποία επικεντρώθηκε στα ακόλουθα σημεία: στην καταγραφή του βαθμού κατάκτησης των μαθησιακών στόχων, στην καταγραφή των αντιδράσεων των μαθητών καθώς και στις δυσκολίες που συνάντησαν, στις διδακτικές πρακτικές που ακολουθήθηκαν όπως επίσης και στη στάση της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας μέσα στην τάξη (βλ. Κεφάλαιο 6, Υποενότητα 6.2.2: Αξιολόγηση–Διαπιστώσεις από τη Β΄ Φάση).

5.3. Τελικό ερωτηματολόγιο Γνώσεων και Δεξιοτήτων και Διερεύνησης Στάσεων και Αντιλήψεων (post–test) μετά τη διδακτική παρέμβαση

Στο τέλος της εκπαιδευτικής παρέμβασης οι μαθητές συμμετείχαν σε ατομικό τεστ μουσικών και μαθηματικών γνώσεων (post–test) με στόχο την ποσοτική αποτίμηση της επίδρασης της διαθεματικής διδασκαλίας. Οι ερωτήσεις στο post–test ήταν όμοιες με τις αντίστοιχες του pre–test. Κρίναμε σκόπιμο να μην διαφοροποιήσουμε τις ερωτήσεις για να εξασφαλίσουμε τα δύο τεστ πριν και μετά την παρέμβαση να είναι ισοδύναμα όσον αφορά το βαθμό δυσκολίας. Παρ' όλα αυτά, για να μην αγνοήσουμε την επίδραση της παρέμβασης συμπεριλάβαμε στο post–test και μία επιπλέον ερώτηση (Ερώτηση 16) προκειμένου να διερευνήσουμε το βαθμό κατανόησης των νέων γνώσεων που αποκόμισαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

Επίσης, όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν εκ νέου το Ερωτηματολόγιο Στάσεων και Αντιλήψεων μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση ως προς το μάθημα των Μαθηματικών και τη διδασκαλία του σε συνδυασμό με τη Μουσική προκειμένου να διερευνηθεί εάν διαμόρφωσαν θετικότερη στάση για το μάθημα των Μαθηματικών και της Μουσικής και της διαθεματικής τους διδασκαλίας.

Κεφάλαιο 6

6. Ανάλυση και αξιολόγηση δεδομένων

Στο παρόν κεφάλαιο, αναλύονται και αξιολογούνται τα δεδομένα που συλλέχθηκαν κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών. Επιπλέον, περιγράφονται και αναλύονται τα ευρήματα των ερωτηματολογίων που δόθηκαν στους μαθητές πριν (pre–test) και μετά (post–test) τις διδακτικές παρεμβάσεις.

Κατά τη διάρκεια της έρευνας εφαρμόστηκαν η διαγνωστική, η διαμορφωτική και η συνολική αξιολόγηση. Με τη διαγνωστική αξιολόγηση που έλαβε μέρος πριν τη διδακτική παρέμβαση ελέγξαμε το επίπεδο μουσικών και μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων με το «Τεστ διαγνωστικής αξιολόγησης μουσικών και μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου» (pre–test) και επιπλέον διερευνήσαμε τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και την αντίληψή τους σε σχέση με τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη Μουσική με το «Ερωτηματολόγιο διερεύνησης των στάσεων και αντιλήψεων των μαθητών πριν τη διδακτική παρέμβαση». Η διαμορφωτική αξιολόγηση πλαισίωνε κάθε διδασκαλία δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στην εκπαιδευτικό–ερευνήτρια να προβαίνει σε ενδεχόμενες τροποποιήσεις της διδακτικής της πρακτικής και να προσφέρει βοήθεια στους μαθητές που είχαν ανάγκη. Η συνολική αξιολόγηση (post–test) μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης είχε το ρόλο της αποτίμησης των αποτελεσμάτων των διδασκαλιών.

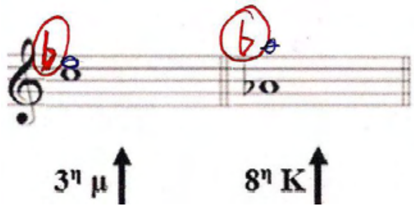
6.2. Αξιολόγηση Διδακτικών Παρεμβάσεων

Για την αξιολόγηση και των δύο φάσεων της παρέμβασης συγκεντρώθηκαν οι επιδόσεις των μαθητών στα Φύλλα Εργασίας, στα Φύλλα Δημιουργικών Εργασιών, στα Φύλλα Ανακεφαλαίωσης και στα Φύλλα Αυτοαξιολόγησης καθώς και οι καταχωρήσεις της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας στο ημερολόγιο. Από το υλικό που συγκεντρώθηκε, αξιοποιήθηκαν τα φυλλάδια εκείνων των μαθητών που ήταν παρόντες και συμμετείχαν σε όλες τις διδασκαλίες της παρέμβασης.

6.2.1. Αξιολόγηση – Διαπιστώσεις από την Α΄ Φάση

Οι βασικές διαπιστώσεις κατά την Α΄ Φάση της παρέμβασης μπορούν να συνοψιστούν στα ακόλουθα σημεία:

Α) Κατά την υλοποίηση των <u>Μουσικών δραστηριοτήτων</u> οι οποίες είχαν ως βασικό αντικείμενο πραγμάτευσης την έννοια του μουσικού διαστήματος, αρκετά λάθη εντοπίστηκαν στον πλήρη προσδιορισμό (μέγεθος και είδος) του διαστήματος. Συγκεκριμένα, ενώ οι μαθητές έβρισκαν το σωστό μέγεθος του διαστήματος (πχ. $2^{ας}$, $5^{ης}$ κ.α.) που ζητούσε η άσκηση, σε πολλές περιπτώσεις αδυνατούσαν να προσδιορίσουν το είδος (π.χ. μεγάλο/μικρό, καθαρό, αυξημένο/ελαττωμένο) ειδικότερα όταν οι δοσμένοι φθόγγοι που χρησιμοποιούνταν είχαν αλλοιώσεις (πχ Ντο#) και δεν ήταν φυσικοί (π.χ. Ντο). Την παραπάνω διαπίστωση επιβεβαιώνουν οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στην άσκηση κατασκευής των μουσικών διαστημάτων (Σχήμα 1, με κόκκινο χρώμα σημειώνεται η αλλοίωση που έχει παραλειφθεί) και στην άσκηση μεταφοράς της δοσμένης μελωδίας κατά ένα διάστημα $3^{ης}$ Μεγάλο προς τα πάνω (Σχήμα 2, με κόκκινο χρώμα σημειώνεται η λανθασμένη νότα). Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια του μουσικού διαστήματος εφόσον παραλείπουν συστηματικά ένα χαρακτηριστικό του, δηλαδή το είδος.



Σχήμα 1: *Απάντηση μαθήτριας: Εύρεση σωστού μεγέθους όχι όμως και είδους.*

Δοσμένη μελωδία *Transporto- $3^{ης}$μ προς τα κάτω*

Σχήμα 2: *Απάντηση μαθήτριας: Παράλειψη σημείων αλλοίωσης κατά την μεταφορά δοσμένης μελωδίας (transporto)*

Β) Οι <u>Δραστηριότητες μαθηματικής ερμηνείας των μουσικών φαινομένων</u> οι οποίες είχαν ως κεντρικό άξονα την εύρεση των μαθηματικών σχέσεων που διέπουν τα μουσικά διαστήματα φαίνεται ότι δε δημιούργησαν κάποια ιδιαίτερα προβλήματα. Βέβαια, στις δύο πρώτες δραστηριότητες του ΦΕ Β1 στις οποίες καλούνταν να προσδιορίσουν τους αρμονικούς ως ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας αλλά και να βρουν το γενικό μαθηματικό τύπο που συνδέει τους αρμονικούς μεταξύ των οποίων σχηματίζεται διάστημα οκτάβας αρχικά προκλήθηκε μία σύγχυση σε μικρό αριθμό μαθητών καθώς δεν ήταν εξοικειωμένοι με τον νέο τρόπο προσέγγισης των μουσικών φαινομένων. Στις δραστηριότητες που ακολούθησαν και έχοντας ήδη εξοικειωθεί με τη μαθηματική δομή των αρμονικών, μπορούσαν να προβούν με ευκολία σε σχετικά συμπεράσματα αναφορικά με το λόγο συχνοτήτων και τις σύμφωνες και διάφωνες συνηχήσεις και να συνειδητοποιήσουν ότι ο μαθηματικός λόγος είναι ένα εργαλείο κατανόησης του μουσικού ήχου (αρμονικές σειρές) και ένα κριτήριο κατάταξης της συνήχησης (συμφωνία/διαφωνία).

Γ) Στα Φύλλα Αυτοαξιολόγησης των μαθητών ως βασική δυσκολία αναδύθηκε ο μικρός βαθμός εξοικείωσης στη χρήση συμβολισμών και ορολογίας των Μαθηματικών προκειμένου να περιγράψουν μουσικές έννοιες αλλά και να κάνουν μαθηματικούς συσχετισμούς για την ερμηνεία των μουσικών φαινομένων. Ενδεικτικά παραθέτουμε την ακόλουθη απάντηση μαθήτριας (Υποκείμενο: Υ4): «*Επειδή δεν είχαμε ξανακάνει έτσι το μάθημα δεν ήξερα πώς να γράψω τους τύπους που κάνουμε στα Μαθηματικά ή στη Φυσική για μουσικές νότες…. Αυτό μου ήταν λίγο περίεργο στις πρώτες ασκήσεις*»

Δ) Στην άσκηση συμπλήρωσης κενών του Φύλλου Ανακεφαλαίωσης φάνηκε ότι οι μαθητές δεν είχαν ιδιαίτερες δυσκολίες.

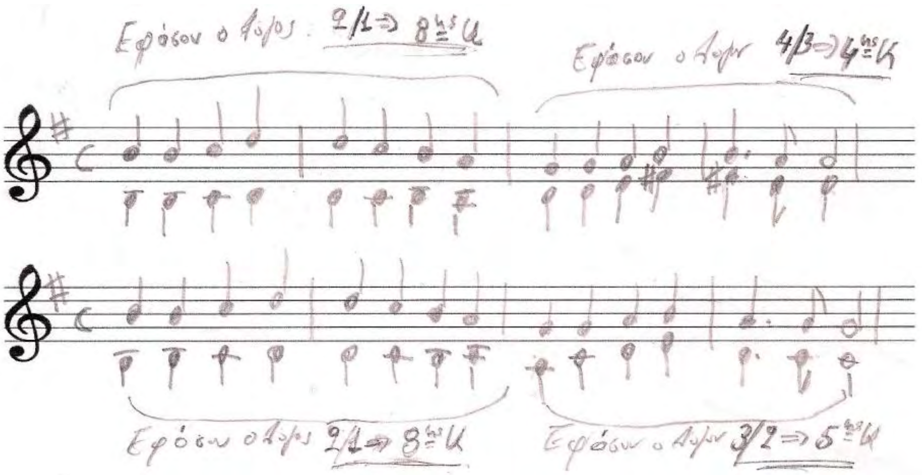
Ε)Τα ευρήματα από την ανάλυση των Φύλλων Εργασίας και των Φύλλων Αυτοαξιολόγησης συμβαδίζουν και με το σύνολο των παρατηρήσεων που κατέγραψε η ερευνήτρια–εκπαιδευτικός στο ημερολόγιό της. Την αρχική έκπληξη των μαθητών, όταν ενημερώθηκαν για τη μελέτη τη Μουσικής με τη βοήθεια των Μαθηματικών, διαδέχθηκε η απορία σχετικά με τη χρησιμότητα μιας τέτοιας παρέμβασης διατυπώνοντας ερωτήσεις όπως: «*Και τί θα κερδίσουμε αν κάνουμε μαζί Μουσική και Μαθηματικά;*» ενώ ένας μικρός αριθμός μαθητών τεσσάρων ατόμων δυσανασχέτησαν με την προοπτική αυτή διατυπώνοντας εκφράσεις όπως: «*πάλι Μαθηματικά θα κάνουμε;*», «*Εγώ που δεν είμαι καλή στα Μαθηματικά, τί θα κάνω αυτήν την ώρα*;».

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που προέκυψε από τις παρατηρήσεις είναι η διαφοροποίηση της διάθεσης συμμετοχής των μαθητών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ενώ δηλαδή, αρχικά δεν υπήρχε ιδιαίτερη προθυμία για ενεργό εμπλοκή των μαθητών ειδικότερα στο στάδιο που δίνονταν οι θεωρητικές πληροφορίες της ενότητας, άρχισαν όμως να κινητοποιούνται όταν δόθηκαν τα Φύλλα Εργασίας αποκτώντας έτσι ενεργό ρόλο στο μάθημα. Τέλος, μια άλλη βασική παράμετρος που προέκυψε από τις παρατηρήσεις ήταν ο βαθμός καθοδήγησης της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας. Επειδή η διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών αποτελούσε έναν νέο τρόπο διδασκαλίας και ειδικότερα στις δραστηριότητες της μαθηματικής ερμηνείας των μουσικών εννοιών οι μαθητές επιζητούσαν διευκρινήσεις και καθοδήγηση πολύ συχνά, οπότε και ο ρόλος της εκπαιδευτικού–ερευνήτριας στην Α’ φάση της παρέμβασης ήταν πιο ενεργός.

6.2.2. Αξιολόγηση – Διαπιστώσεις από τη Β΄ Φάση

Οι βασικές διαπιστώσεις κατά την Β΄ Φάση της παρέμβασης μπορούν να συνοψιστούν στα ακόλουθα σημεία:

Α) Όσον αφορά τις Μουσικές δραστηριότητες, δεν παρατηρήθηκε κάποια ιδιαίτερη δυσκολία κατά την υλοποίησή τους. Αναλυτικότερα, διέκριναν με ευκολία στα ηχητικά αποσπάσματα, τόσο την εξέλιξη της πολυφωνίας όσο και τα πολυφωνικά είδη μεταξύ τους. Ανέλυσαν αρμονικά τα δοσμένα μουσικά αποσπάσματα και κατάφεραν να αποκωδικοποιήσουν το αρμονικό υλικό της Μουσικής του Μεσαίωνα. Μάλιστα κάποιοι μαθητές έκαναν συγκρίσεις σχετικά με τα χρησιμοποιούμενα διαστήματα στην αρμονία του πρώιμου και του ύστερου Μεσαίωνα παρόλο που δεν το ζητούσε η άσκηση (Δραστηριότητα 2, ΦΕ Α3). Αυτό δείχνει ότι είχαν αναπτύξει την ικανότητά τους να προσεγγίζουν με κριτική σκέψη τα μουσικά φαινόμενα και κατ’ επέκταση ήταν ικανοί να κάνουν διασυνδέσεις και συσχετισμούς των εννοιών που ήταν απαραίτητες για την πλήρη κατανόηση της εξελικτικής πορείας της αρμονικής σκέψης. Η πολύπλευρη προσέγγιση της έννοιας του διαστήματος στις προηγούμενες ενότητες είχε θετική επίδραση στην επίλυση των αρμονικών ασκήσεων που ακολούθησαν καθώς παρατηρήθηκαν λιγότερα λάθη αλλά και οι μαθητές κατέφυγαν σε λιγότερες περιπτώσεις στη βοήθεια της εκπαιδευτικού ζητώντας διευκρινήσεις. Έτσι, και στη δημιουργική εργασία της σύνθεσης με μαθηματικές οδηγίες ανταποκρίθηκαν με επάρκεια (ΦΕ Α2).



Σχήμα 3: *Δημιουργική εργασία σύνθεσης με μαθηματικές οδηγίες*

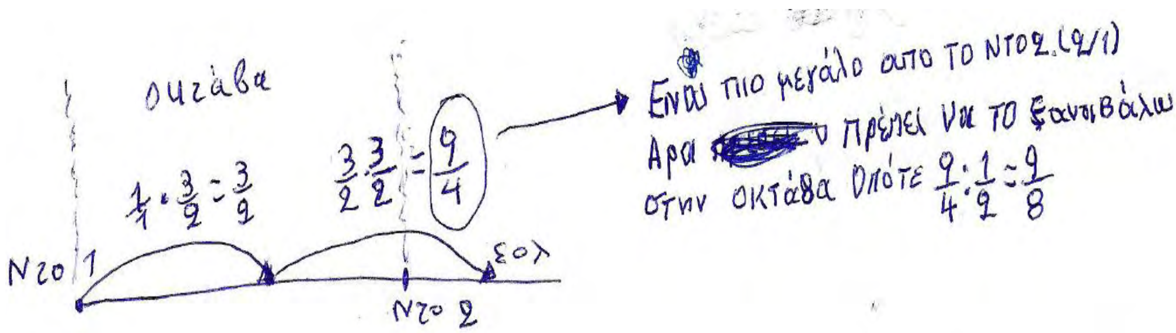
Β) Τα Φύλλα Εργασίας <u>μαθηματικής ερμηνείας των μουσικών φαινομένων</u> περιελάμβαναν μία ποικιλία ασκήσεων (μετρήσεων, σύγκρισης λόγων, αναλογίες) οι οποίες σε ορισμένες περιπτώσεις φάνηκε ότι δε δημιούργησαν προβλήματα κατά την επίλυσή τους από τους μαθητές ενώ αντίθετα άλλες ήταν ιδιαίτερα απαιτητικές.

Συγκεκριμένα, οι ασκήσεις (δραστηριότητα 1,ΦΕ Β2) για την υλοποίηση των οποίων απαιτούνταν μετρήσεις χορδών με χάρακα και αριθμητικές πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς θεωρήθηκαν εύκολες από τους μαθητές. Εξίσου εύκολη τους φάνηκε η συσχέτιση του λόγου μηκών της χορδής με τα μουσικά διαστήματα καθώς επίσης και το ότι οι λόγοι μηκών χορδής και οι λόγοι συχνοτήτων ήταν αντιστρόφως ανάλογοι. Χρειάστηκαν ωστόσο κάποιες διευκρινήσεις όταν ζητήθηκε να επαναλάβουν το πυθαγόρειο πείραμα αλλάζοντας το μήκος της αρχικής χορδής κατά 2/3 και 3/4. Τελικά και σ΄ αυτή την περίπτωση οδηγήθηκαν στη σωστή διαπίστωση ότι ο λόγος είναι ένα εργαλείο σύγκρισης των μουσικών διαστημάτων.

Απαιτητική φάνηκε ότι ήταν η δραστηριότητα 2 του Φύλλου Εργασίας Β2. Πριν την πραγματοποίηση της παραπάνω δραστηριότητας, έγινε ως αφόρμηση η ίδια ερώτηση που περιλαμβανόταν και στο pre-test και με τη οποία ζητούνταν από τους μαθητές να υπολογίσουν τα διαστήματα 8^{ης} Κ, 5^{ης} Κ και 4^{ης} Κ πάνω στη χορδή του βιολιού χωρίς χάρακα. Μόνο τέσσερις μαθητές που είχαν απαντήσει σωστά και στην αντίστοιχη ερώτηση στο pre–test ήταν σε θέση να απαντήσουν επαρκώς. Βέβαια, μετά τις απαραίτητες επεξηγήσεις και οι υπόλοιποι μαθητές ανταποκρίθηκαν στις ομαδικές εργασίες οι οποίες βασίζονταν στα παραπάνω. Ενδιαφέρον, ωστόσο, παρουσιάζει το γεγονός ότι αν και είχαν διδαχτεί στο μάθημα των Μαθηματικών τη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα διαπιστώθηκε αδυναμία να εφαρμόσουν και να μεταφέρουν τη γνώση τους σε άλλο γνωστικό πεδίο, στην προκειμένη περίπτωση της Μουσικής. Στην εκφώνηση της άσκησης αναφερόταν η λέξη χορδή και όχι ευθύγραμμο τμήμα όπως είχαν συνηθίσει. Η λεκτική αυτή διαφοροποίηση φαίνεται ότι τους εμπόδισε να κάνουν μεταφορά των μαθηματικών τους γνώσεων στη μουσική τους πρακτική σύμφωνα με τα όσα γράφουν και στο Φύλλο Αυτοαξιολόγησης: «*....κάναμε στα Μαθηματικά πως να χωρίζουμε μία ευθεία χωρίς χάρακα αλλά μπερδεύτηκα γιατί η άσκηση έλεγε για χορδή βιολιού και δεν μου πήγε το μυαλό να θυμηθώ πράγματα από τα μαθηματικά…βασικά έπρεπε να μας το λέει η άσκηση*» (Υποκείμενο: Υ1)

Στην άσκηση για την κατασκευή της πυθαγόρειας κλίμακας (δραστηριότητα 1, ΦΕ Γ2) χρειάστηκε να δοθούν αρκετές επεξηγήσεις ειδικά σε ότι αφορούσε τα βήματα που έπρεπε να ακολουθήσουν οι μαθητές ώστε οι φθόγγοι που υπολόγιζαν κάθε φορά να ανήκουν στην αρχική οκτάβα. Σε αρκετές περιπτώσεις οι σχηματικές αναπαραστάσεις στη δραστηριότητα διευκόλυναν σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση της διαδικασίας. Είναι προφανές ότι η οπτική αναπαράσταση των πληροφοριών τους έδινε τη δυνατότητα να σκεφτούν και να αναστοχαστούν και εν τέλει να οδηγηθούν στην επίλυση του προβλήματος.

Στην επόμενη δραστηριότητα που αφορούσε τη μεταφορά (transporto) μιας δοσμένης μελωδίας σε διαφορετικό τονικό ύψος με βάση την πυθαγόρεια λογική (δραστηριότητα 2, ΦΕ Β3) ακολούθησαν με επιτυχία τη σωστή διαδικασία που είχαν εφαρμόσει στην προηγούμενη άσκηση επιλέγοντας δηλαδή τη σωστή μαθηματική πράξη όποτε ήταν αναγκαίο προκειμένου να εντάξουν το νέο φθογγικό υλικό στην αρχική οκτάβα. Μάλιστα, αρκετοί μαθητές αποτύπωσαν και σχηματικά την πορεία της σκέψης τους με ένα διάγραμμα παρόμοιο με αυτό που τους είχε δοθεί στην άσκηση της προηγούμενης διδακτικής ενότητας (Σχήμα 4). Συνεπώς, κατανόησαν ότι για να επιλύσουν παρόμοια προβλήματα θα έπρεπε να προχωρούν βήμα βήμα, ώστε να μπορούν να καταστρώνουν την λύση και να την ελέγχουν, δηλαδή θα έπρεπε αρχικά με τον κύκλο των 5^{ων} να βρουν το νέο φθογγικό υλικό, στη συνέχεια να το συγκρίνουν με εκείνο της οκτάβας και στη συνέχεια να κάνουν τις απαραίτητες μαθηματικές πράξεις όπου αυτές απαιτούνταν. Επιπλέον, έχοντας ήδη κατανοήσει από μαθηματικής άποψης την προαναφερθείσα μέθοδο των υπερκείμενων διαστημάτων 5^{ης} κατέστησαν ικανοί να αναπτύξουν την κριτική τους σκέψη και να την εφαρμόσουν στην επίλυση του προβλήματος της επόμενης ερώτησης σχετικά με τους περιορισμούς που θα ανέκυπταν αν κατασκευαζόταν το σύγχρονο πιάνο υιοθετώντας την πυθαγόρεια κλίμακα (2ο υποερώτημα, δραστηριότητα 2, ΦΕ Γ3).



Σχήμα 4: *Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση για την εύρεση νέου φθογγικού υλικού κατά τη μεταφορά δοσμένης μελωδίας*

Οι μαθητές χωρίς δυσκολία και ιδιαίτερη καθοδήγηση απάντησαν επιτυχώς σε ερωτήσεις με θεματικό περιεχόμενο τους λόγους συχνοτήτων στο ισοσυγκερασμένο σύστημα και τη σύγκρισή του με τους αρμονικούς που είχαν ήδη διαπραγματευτεί σε προηγούμενες ενότητες. Παρατηρήθηκαν ωστόσο αρκετά λάθη στις μαθηματικές πράξεις που έπρεπε να κάνουν με δεκαδικούς αριθμούς και ποσοστά.

Γ) Ο μικρός βαθμός εξοικείωσης των μαθητών με το νέο τρόπο προσέγγισης των μουσικών φαινομένων μέσω των μαθηματικών σχέσεων ήταν το βασικότερο στοιχείο που καταγράφηκε ως δυσκολία στο Φύλλο Αυτοαξιολόγησης παρόλο που οι ίδιοι θεώρησαν τον εαυτό τους επαρκή σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στις ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης όσον αφορά την ανταπόκρισή τους στις μαθηματικές ασκήσεις της Μουσικής. Ενδεικτική είναι η απάντηση της μαθήτριας: «*Αν και είμαι πολύ καλή στα Μαθηματικά και μου αρέσουν δεν μας έλεγε κάπου ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα Μαθηματικά που ξέρουμε ήδη…για το ρυθμό κάνω πράξεις με τα κλάσματα… το ξέρω κατευθείαν. Αλλά να κάνω πράξεις και με τα διαστήματα και με τις νότες δεν το είχα ξανακάνει…χρειάζεται χρόνος λίγο για να το συνηθίσεις. Πάντως δεν είναι δύσκολο*» (Υποκείμενο: Υ11)

Δ) Το Ανακεφαλαιωτικό Φύλλο Εργασίας δε δημιούργησε κάποιο πρόβλημα στους μαθητές.

Ε) Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που συγκεντρώθηκαν από το ημερολόγιο της ερευνήτριας–εκπαιδευτικού κατά την υλοποίηση της Β’ φάσης, οι βασικές διαπιστώσεις εστίαζαν κυρίως στη συνολική εικόνα των μαθητών, στο βαθμό αυτενέργειας τους και στον τρόπο συνεργασίας στις ομαδικές εργασίες. Η αξιολόγηση της ομαδικής εργασίας των μαθητών γινόταν από την εκπαιδευτικό η οποία καθ’ όλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων περιφερόταν στην τάξη αποκτώντας με αυτόν τον τρόπο άμεση αντίληψη σχετικά με την επίδοση κάθε ομάδας και κάθε μέλους της ξεχωριστά.

Κατά την εφαρμογή του εκπαιδευτικού υλικού οι μαθητές που συμμετείχαν επέδειξαν θετική στάση απέναντι στην όλη διαδικασία. Ειδικότερα, τους άρεσαν οι δραστηριότητες κατά τις οποίες έκαναν ακουστικά πειράματα και παράλληλα εφάρμοζαν μαθηματικές γνώσεις για να τα ερμηνεύσουν. Όσον αφορά τις ομάδες, φάνηκε ότι μπορούσαν να συνεργαστούν αποτελεσματικά επιμερίζοντας τις αρμοδιότητες ισότιμα σε όλα τα μέλη της ομάδας.

Συμπεράσματα όμως εξάγονται και για τη δομή των Φύλλων Εργασίας. Οι οδηγίες στα Φύλλα Εργασίας θεωρήθηκαν από τους μαθητές σαφείς, χρήσιμες και επαρκείς. Επίσης, οι σχηματικές αναπαραστάσεις των Φύλλων Εργασίας που συνόδευαν κάποιες από τις δραστηριότητες διευκόλυναν στην κατανόηση τους. Τέλος, η οργάνωση των απαντήσεων σε προσχεδιασμένους πίνακες λειτούργησε καθοδηγητικά και σε ορισμένες περιπτώσεις επεξηγηματικά βοηθώντας έτσι τους μαθητές στη μαθησιακή διαδικασία.

6.3. Αξιολόγηση – Διαπιστώσεις του προγράμματος σύμφωνα με το αρχικό (pre–test) και τελικό (post–test) Ερωτηματολόγιο Γνώσεων και Δεξιοτήτων και Διερεύνησης Στάσεων και Αντιλήψεων.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από την ανάλυση των ερωτηματολογίων (pre/post test) κατηγοριοποιήθηκαν σε ποιοτικά και ποσοτικά δεδομένα.

Τα ποιοτικά δεδομένα που προέκυψαν από την επεξεργασία των ερωτήσεων ανοιχτού τύπου αρχικά κατηγοριοποιήθηκαν βάσει των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της κάθε απάντησης και στη συνέχεια καταμετρήθηκαν οι απαντήσεις κάθε κατηγορίας. Προκειμένου να καταστεί σαφής η σημασία της κάθε κατηγορίας απαντήσεων παρατίθενται χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών. Τα ποσοτικά δεδομένα της έρευνας προέκυψαν από την επεξεργασία των απαντήσεων των μαθητών σε ερωτήσεις κλειστού τύπου (σωστό/λάθος, πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης) η ανάλυση των οποίων έγινε σύμφωνα με τις αρχές της περιγραφικής και επαγωγικής στατιστικής (Mertler, 2012). Για την επεξεργασία των δεδομένων αυτών χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS (ver. 25).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε το γεγονός ότι ελήφθησαν υπόψη και αναλύθηκαν μόνο τα ερωτηματολόγια των μαθητών που συμμετείχαν σε όλες τις διδασκαλίες και είχαν απαντήσει τόσο στο αρχικό όσο και στο τελικό ερωτηματολόγιο. Για το λόγο αυτό κάποιοι μαθητές που συμμετείχαν στην αρχική αξιολόγηση αλλά ήταν απόντες (λόγω ασθενείας ή συμμετοχής τους σε πρόβες) – είτε σε κάποια από τις ενδιάμεσες διδασκαλίες είτε στην τελική αξιολόγηση–δε συμπεριλήφθηκαν στο δείγμα μεταβολής καθώς μας ενδιάφερε να δούμε την εξέλιξη των ατομικών απαντήσεων των μαθητών πριν και μετά τη διδασκαλία και πώς άλλαξαν μετά από τη συνεργασία τους στις ομάδες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το αρχικό δείγμα των 24 μαθητών να περιοριστεί σε 16 μαθητές (10 κορίτσια και 6 αγόρια).

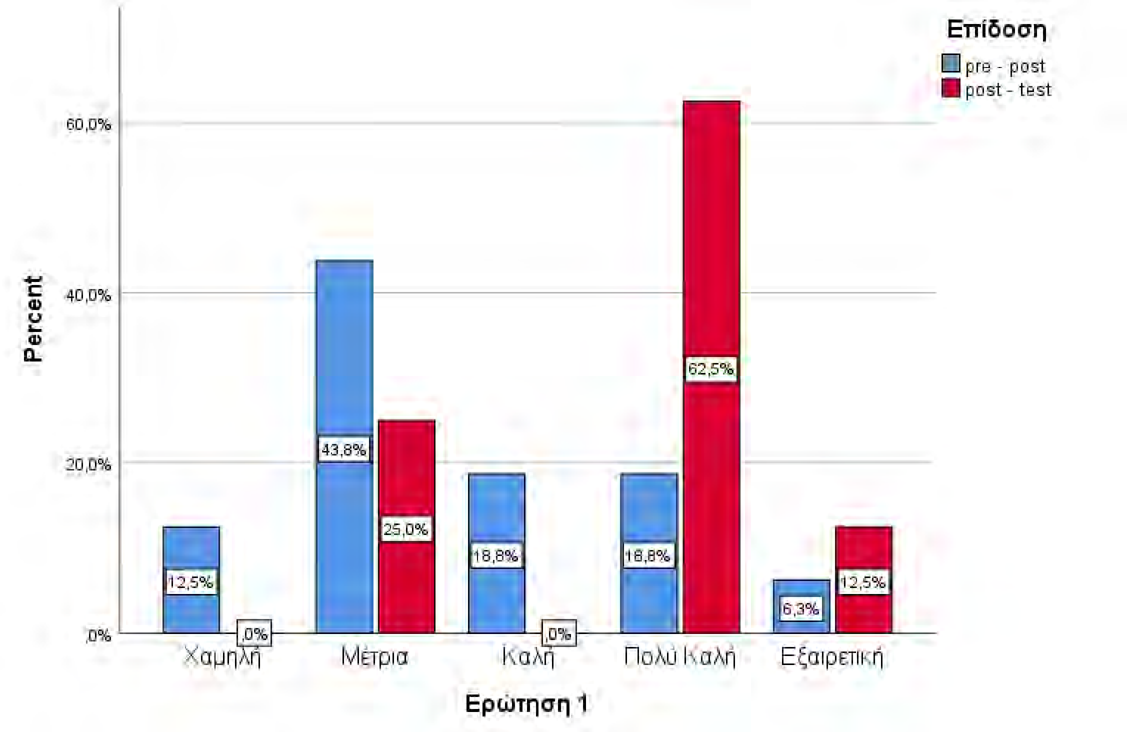
Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε μία από τις 15 ερωτήσεις του αρχικού και τις 16 ερωτήσεις του τελικού Τεστ Γνώσεων και Δεξιοτήτων κατ' αντιπαράσταση ακολουθώντας την κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων ανάλογα με το είδος των δεδομένων που αντλήθηκαν από κάθε μία στις εξής κατηγορίες: α) μουσικές γνώσεις και δεξιότητες, β) μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες, γ) μουσικο–μαθηματικές γνώσεις και δ) επίλυση μαθηματικών προβλημάτων της μουσικής. Για κάθε ερώτηση παρατίθενται το συγκριτικό ραβδόγραμμα της κατανομής των σχετικών συχνοτήτων των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση και επιπλέον οι πίνακες των μέσων όρων της συνολικής επίδοσης πριν και μετά την παρέμβαση για τη σύγκριση των οποίων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό κριτήριο t για εξαρτημένα δείγματα (paired samples t–test). Περισσότερα στατιστικά στοιχεία παρατίθενται στο Παράρτημα 4: Στατιστικά Δεδομένα της έρευνας. Κατά τον ίδιο τρόπο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του Ερωτηματολογίου Διερεύνησης Στάσεων και Αντιλήψεων πριν και μετά την παρέμβαση στο οποίο περιλαμβάνονται 5 ερωτήσεις κλειστού τύπου και 2 ανοικτού.

Μουσικές γνώσεις και δεξιότητες

Αναφορικά με το τεστ διερεύνησης μουσικών γνώσεων και δεξιοτήτων (pre/post-test) επιχειρήθηκε μία αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών με κριτήριο τον αριθμό των λαθών σε κάθε ερώτηση χρησιμοποιώντας μια πεντάβαθμη γραμμική κλίμακα με τις ακόλουθες διαβαθμίσεις: Εξαιρετική (0 λάθη)= 5 βαθμοί, Πολύ καλή (1 λάθος)= 4 βαθμοί, Καλή (2 λάθη)= 3 βαθμοί, Μέτρια (3 λάθη)= 2 βαθμοί, Χαμηλή (4 λάθη)= 1 βαθμός.

<u>Δεξιότητες ενεργητικής ακρόασης</u>

Γράφημα 1. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 1: Ακουστική αναγνώριση διαστημάτων.



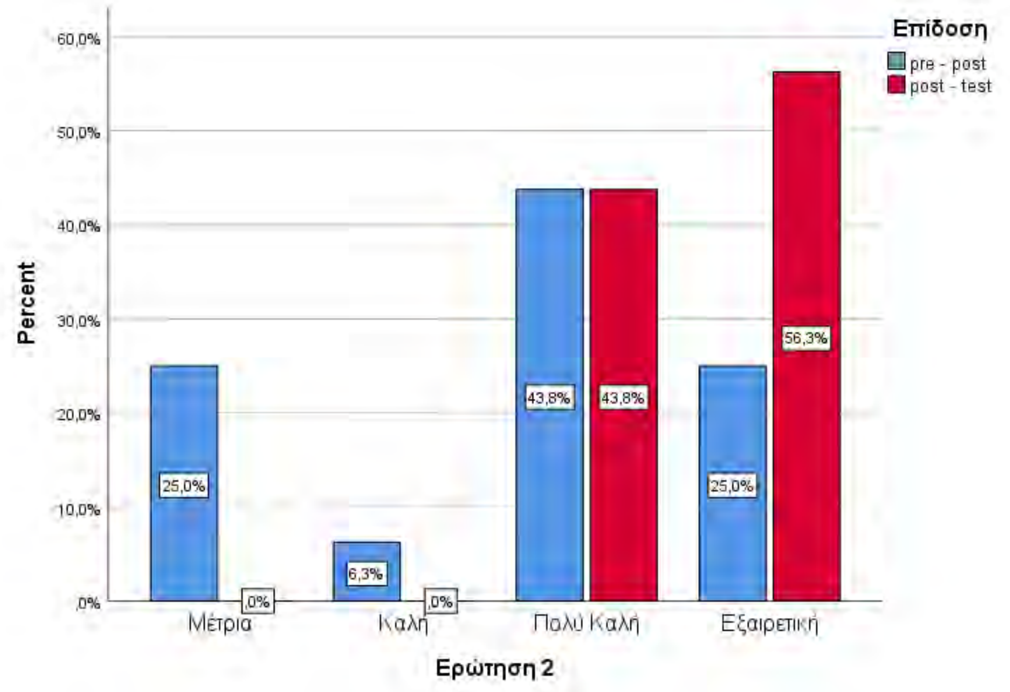
Πίνακας 1. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 1.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 1 pre-test	2,6250	16	1,14746	,28687
	Ερώτηση 1 post-test	3,6250	16	1,02470	,25617

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Ερ.1 pre-test – Ερ.1 post-test	-1,00000	,81650	,20412	-1,43508	-,56492	-4,899	15	,000

Στην πρώτη ερώτηση πολλαπλής επιλογής ελέγχθηκε η ακουστική ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν διάφορες κατηγορίες μουσικών διαστημάτων. Συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση με βάση το Γράφημα 1 παρατηρούμε ότι στο pre–test το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (43,8%) είχε μέτρια επίδοση σε αντίθεση με το post–test όπου το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (62,5%) είχε πολύ καλή επίδοση. Πολύ μικρό ήταν το ποσοστό των μαθητών με εξαιρετική επίδοση (6,3%) στο pre–test το οποίο όμως σχεδόν διπλασιάστηκε μετά την παρέμβαση. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μετά την παρέμβαση δεν καταγράφηκαν καθόλου μαθητές με χαμηλή και καλή επίδοση. Συγκρίνοντας τους μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών παρατηρούμε ότι βελτιώθηκε η δεξιότητα ακρόασης (2,6250 στο pre–test έναντι 3,6250 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική [t (15) = − 4,899, p<0,05].

Γράφημα 2. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 2: Ακουστική διάκριση της συμφωνίας/διαφωνίας.



Πίνακας 2. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 2.

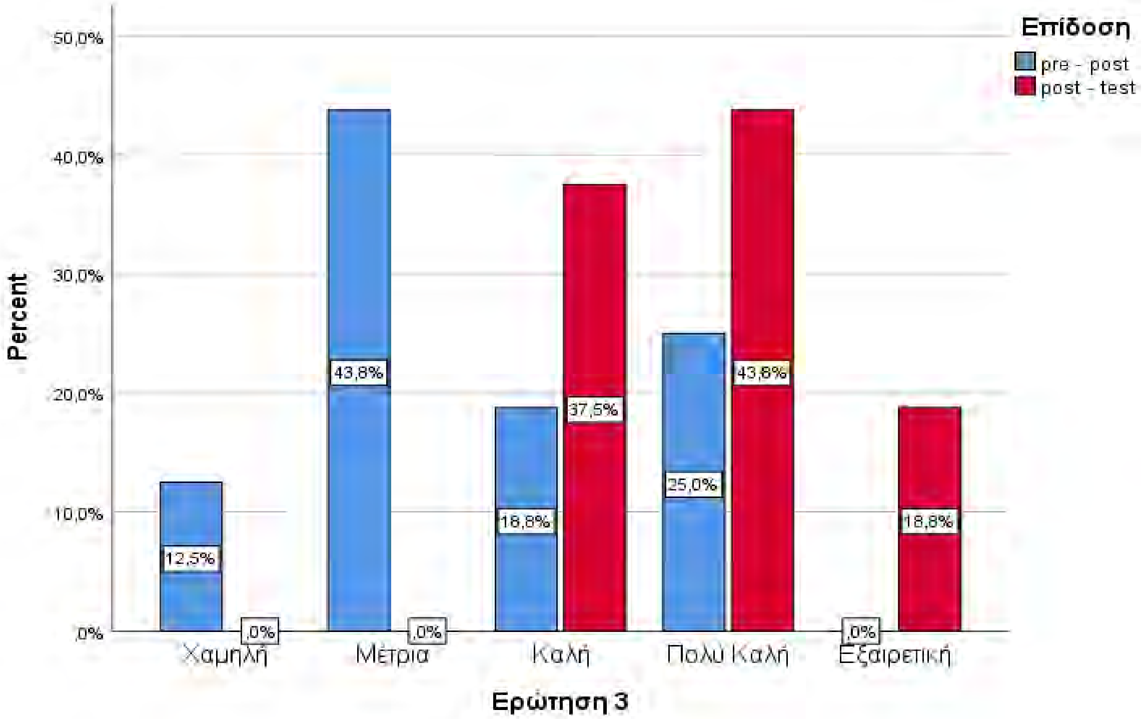
Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 2 pre-test	3,6875	16	1,13835	,28459
	Ερώτηση 2 post-test	4,5625	16	,51235	,12809

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Ερ 2 pre-test – Ερ 2 post-test	-,87500	,80623	,20156	-1,30461	-,44539	-4,341	15	,001

Με τη δεύτερη ερώτηση διερευνήθηκε η δεξιότητα της ενεργητικής ακρόασης όσον αφορά τη διάκριση των σύμφωνων και διάφωνων διαστημάτων. Όπως παρατηρούμε στο Γράφημα 2 το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (43,8%) πριν την παρέμβαση είχε πολύ καλή επίδοση ενώ οι μισοί μαθητές κατέγραψαν μέτρια (25%) και εξαιρετική (25%) επίδοση. Μετά την παρέμβαση διακρίνουμε μόνο δύο ομάδες μαθητών: σε εκείνους που είχαν εξαιρετική επίδοση (56,3%) επίδοση και σε εκείνους που είχαν πολύ καλή (43,8%). Συγκρίνοντας τους μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών (Πίνακας 2) παρατηρούμε ότι βελτιώθηκε η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν ακουστικά τη σύμφωνη/διάφωνη συνήχηση (3,6875 στο pre–test έναντι 4,5625 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προέκυψε από το t–test [t (15)= − 4,341, p<0,05)]

<u>Γνώσεις Θεωρίας της Μουσικής</u>

Γράφημα 3. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 3: Αναγνώριση διαστημάτων.



Πίνακας 3. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 3.

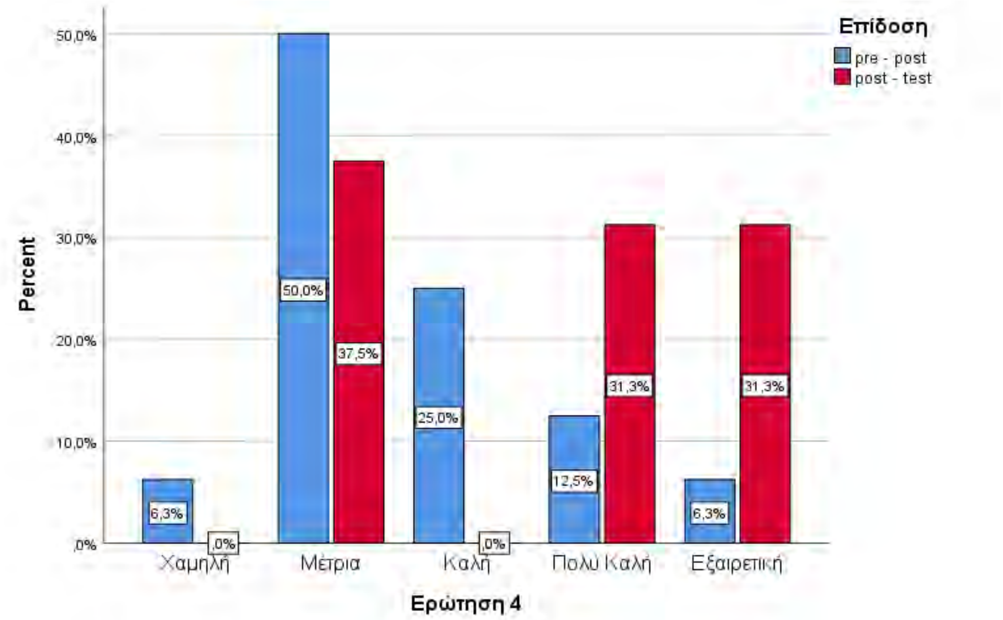
Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 3 pre-test	2,5625	16	1,03078	,25769
	Ερώτηση 3 post-test	3,8125	16	,75000	,18750

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference: Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ.3 pre-test – Ερ. 3 post-test	-1,25000	,77460	,19365	-1,66275	-,83725	-6,455	15	,000

Η τρίτη ερώτηση ήταν γενικών γνώσεων και γνωστικού περιεχομένου, με σκοπό να ανιχνευθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών σε θέματα της θεωρίας της

Μουσικής και στις οποίες κλήθηκαν να αναγνωρίσουν το είδος και μέγεθος των μουσικών διαστημάτων. Όπως φαίνεται στο Γράφημα 3, οι μαθητές πριν την παρέμβαση εμφάνισαν σε μεγάλο ποσοστό μέτρια επίδοση (43,8%) ενώ ένα σημαντικό ποσοστό είχε πολύ καλή (25%) και σε μικρότερα ποσοστά καλή (18,8%) και χαμηλή (12,5%) επίδοση. Στο post–test η εικόνα των μαθητών βελτιώθηκε καθώς η επίδοσή τους κυμάνθηκε από καλή (37,5%), πολύ καλή (43,8%) έως και εξαιρετική (18,8%) ενώ δεν καταγράφηκαν μαθητές με χαμηλή και μέτρια επίδοση. Ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών αυξήθηκε από 2,5625 στο pre–test έναντι 3,8125 στο post–test (Πίνακας 3). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προέκυψε από το t–test [$t(15) = -6{,}455$, $p<0{,}05$].

Γράφημα 4. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 4: Κατασκευή διαστημάτων.



Πίνακας 4. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 4.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 4 pre-test	2,6250	16	1,02470	,25617
	Ερώτηση 4 post-test	3,5625	16	1,31498	,32874

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Ερ 4 pre-test – Ερ 4 post-test	-,93750	,85391	,21348	-1,39252	-,48248	-4,392	15	,001

Η τέταρτη ερώτηση ήταν και αυτή γνωστικού περιεχομένου, όμως ζητούσε την κατασκευή διαφόρων κατηγοριών μουσικών διαστημάτων. Σύμφωνα με το Γράφημα

4, οι μισοί μαθητές πριν την παρέμβαση εμφάνισαν μέτρια επίδοση (50%) ενώ ένα σημαντικό ποσοστό είχε καλή (25%) και σε μικρότερο ποσοστό πολύ καλή (12,5%) επίδοση. Εξίσου μικρός είναι ο αριθμός των μαθητών με χαμηλή (6,3%) αλλά και με εξαιρετική (6,3%) επίδοση. Στο post–test η εικόνα των μαθητών φαίνεται ότι βελτιώθηκε καθώς είχαν περίπου τα ίδια ποσοστά οι μαθητές με μέτρια (37,5%), με πολύ καλή (31,3%) και με εξαιρετική (31,3%) επίδοση ενώ δεν εντοπίστηκαν μαθητές με χαμηλή και καλή επίδοση. Συγκρίνοντας τους μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών (Πίνακας 4) παρατηρούμε ότι βελτιώθηκε η ικανότητά τους να αναγνωρίζουν ακουστικά τη σύμφωνη/διάφωνη συνήχηση (2,6250 στο pre–test έναντι 3,5625 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προέκυψε από το t–test [t (15)= − 4,392, ρ<0.05]

<u>Γνώσεις Ιστορίας της Μουσικής</u>

Γράφημα 5. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 5: Κατάταξη ιστορικών περιόδων.

Πίνακας 5. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 5.

Paired Samples Statistics

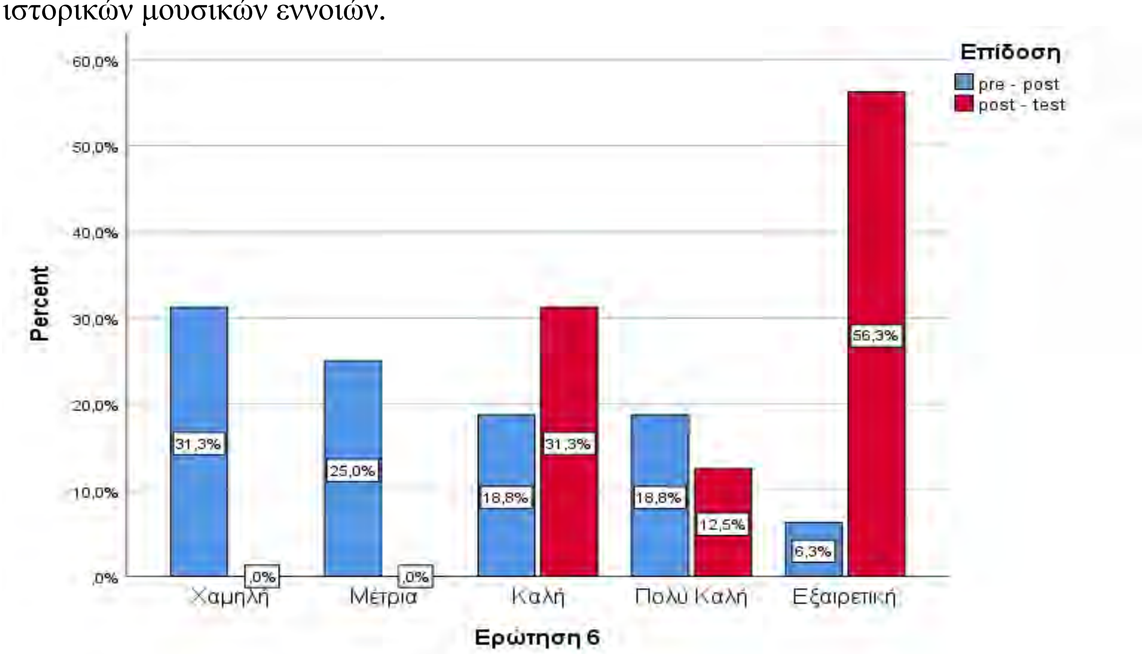
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 5 pre-test	2,5625	16	1,50416	,37604
	Ερώτηση 5 post-test	4,2500	16	,93095	,23274

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Ερ. 5 pre-test – Ερ. 5 post-test	-1,68750	1,07819	,26955	-2,26203	-1,11297	-6,260	15	,000

Η πέμπτη ερώτηση ήταν γνωστικού περιεχομένου και στόχο είχε να εκτιμηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών σε θέματα της Ιστορίας της Μουσικής, ζητώντας τους να βρουν τη σειρά διαδοχής των ιστορικών περιόδων της Μουσικής. Από το Γράφημα 5 παρατηρούμε ότι οι προγενέστερες ιστορικές μουσικές γνώσεις των μαθητών ήταν ανεπαρκείς καθώς παραπάνω από τους μισούς μαθητές είχαν χαμηλή (31,3%) και μέτρια (25,0%) επίδοση. Η εικόνα αυτή ήταν σαφώς βελτιωμένη μετά την παρέμβαση δεδομένου ότι η επίδοση των μαθητών κυμαίνονταν από καλή (31,3%), πολύ καλή (12,5%) έως και εξαιρετική επίδοση (56,3%) ενώ δεν παρατηρήθηκαν μαθητές με χαμηλή και μέτρια επίδοση. Συγκρίνοντας τους μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών (Πίνακας 5) παρατηρούμε ότι βελτιώθηκε το γνωστικό τους επίπεδο στην αντίστοιχη θεματική ενότητα (2,6250 στο pre–test έναντι 4,2500 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική [t (15) = − 6,260, p<0,05)].

Γράφημα 6. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 6: Αντιστοίχιση ιστορικών μουσικών εννοιών.



Πίνακας 6. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 6.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 6 pre-test	2,4375	16	1,31498	,32874
	Ερώτηση 6 post-test	4,2500	16	,93095	,23274

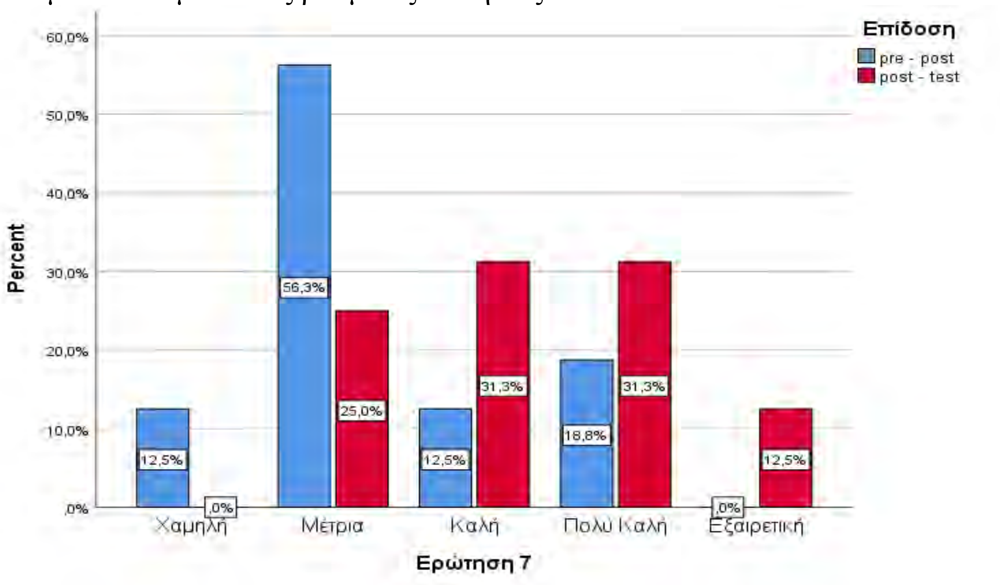
Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Ερ.6 pre-test – Ερ. 6 post-test	-1,81250	,75000	,18750	-2,21215	-1,41285	-9,667	15	,000

Στην έκτη ερώτηση αντιστοίχισης εξεταζόταν η ικανότητα των μαθητών να συσχετίζουν και να συνδυάζουν τις γνώσεις τους σε θέματα που είχαν ήδη διδαχτεί στην Ιστορία της Μουσικής. Όπως φαίνεται από το παραπάνω γράφημα υπήρξε μία βελτίωση στην επίδοσή τους πριν και μετά την παρέμβαση καθώς οι μισοί μαθητές πριν την παρέμβαση είχαν χαμηλή (31,3%) και μέτρια (25%) επίδοση και ελάχιστοι εξαιρετική (6,3,%) επίδοση ενώ μετά την παρέμβαση πάνω από τους μισούς μαθητές είχαν εξαιρετική επίδοση (56,3%). Συγκρίνοντας τους μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών (Πίνακας 6) παρατηρήθηκε αύξηση από 2,4375 στο pre–test έναντι 4,2500 στο post–test. Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική [$t(15) = -9{,}667$, $p<0{,}05$].

Μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες

Όσον αφορά στις ερωτήσεις σχετικά με τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες στο pre-test και στο post-test έγινε μια αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών με κριτήριο τον αριθμό των σωστών απαντήσεων σε κάθε ερώτηση χρησιμοποιώντας μια πεντάβαθμη γραμμική κλίμακα με τις ακόλουθες διαβαθμίσεις: Εξαιρετική (0 λάθη)= 5 βαθμοί, Πολύ καλή (1 λάθος)= 4 βαθμοί, Καλή (2 λάθη)= 3 βαθμοί, Μέτρια (3 λάθη)= 2 βαθμοί, Χαμηλή (4 λάθη)= 1 βαθμός. Στις ερωτήσεις 7, 8, 9 και 10 ζητούνταν να εφαρμόσουν γνώσεις και δεξιότητες των Μαθηματικών σε μουσικά ρυθμικά παραδείγματα ενώ οι ερωτήσεις 11, 12, 13 και 14 αφορούσαν αμιγώς μαθηματικό πλαίσιο.

Γράφημα 7. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 7: Πράξεις κλασμάτων σε μουσικές ρυθμικές ασκήσεις



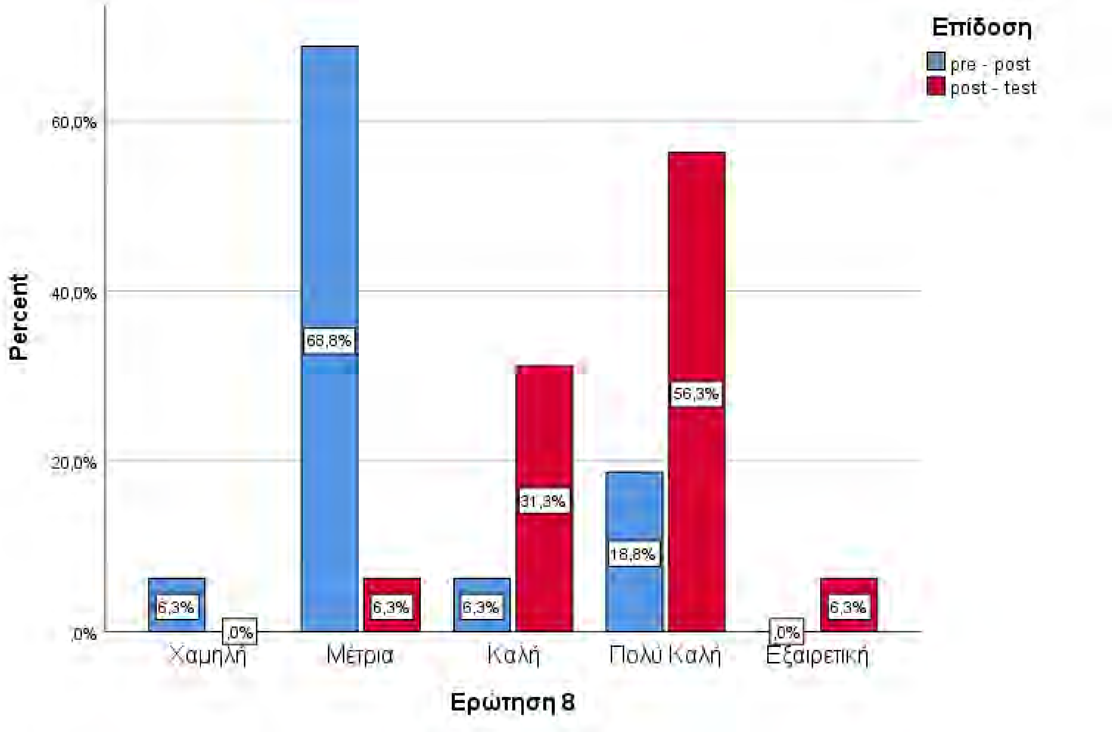
Πίνακας 7. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 7.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 7 pre-test	2,3750	16	,95743	,23936
	Ερώτηση 7 post-test	3,3125	16	1,01448	,25362

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ7 pre-test - Ερ.7 post-test	-,93750	,68007	,17002	-1,29989	-,57511	-5,514	15	,000

Στην έβδομη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν πράξεις κλασμάτων έχοντας ως σημείο αναφοράς τις μουσικές ρυθμικές αξίες. Με βάση το Γράφημα 7 διαπιστώνουμε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών πριν την παρέμβαση είχαν μέτρια (56,3%) επίδοση και σε μικρότερο ποσοστό χαμηλή (12,5%), ενώ δεν υπήρχαν μαθητές με εξαιρετική επίδοση. Μετά την παρέμβαση η εικόνα των μαθητών ήταν βελτιωμένη καθώς σημείωσαν καλή (31,3%), πολύ καλή (31,3%) και εξαιρετική (12,5%) επίδοση. Συνολικά, ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών παρουσίασε αύξηση από 2,3750 στο pre–test έναντι 3,3125 στο post–test. Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προέκυψε από το t–test [$t(15) = -5{,}514$, $\rho < 0.05$]

Γράφημα 8. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 8: Σύγκριση κλασμάτων σε μουσικές ρυθμικές ασκήσεις.



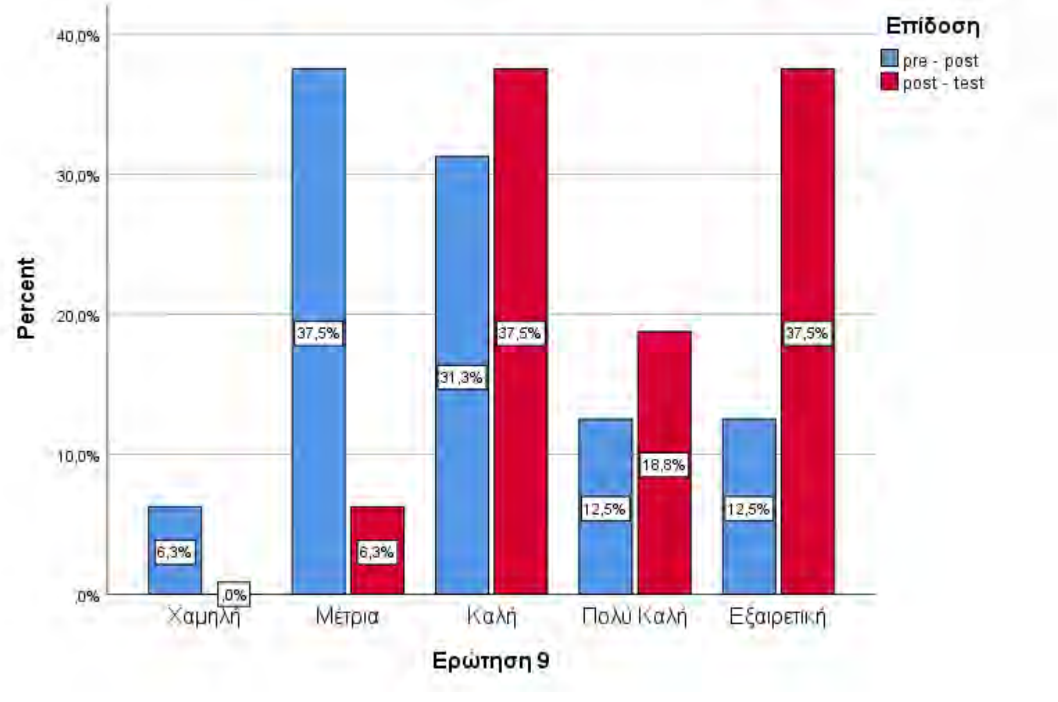
Πίνακας 8. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 8.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 8 pre-test	2,3750	16	,88506	,22127
	Ερώτηση 8 post-test	3,6250	16	,71880	,17970

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Ερ. 8 pre-test – Ερ. 8 post-test	-1,25000	,68313	,17078	-1,61401	-,88599	-7,319	15	,000

Στην όγδοη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές αρχικά να βρουν τα ρυθμικά κλάσματα και στη συνέχεια να τα κατατάξουν σε κατηγορίες με κριτήριο την αξία τους. Σύμφωνα με το Γράφημα 8, ένα πολύ μεγάλο ποσοστό (68,8%) φάνηκε να αντιμετώπισε δυσκολίες σημειώνοντας μέτρια επίδοση πριν την παρέμβαση ενώ δεν υπήρχαν μαθητές με άριστη επίδοση. Σαφώς η παρέμβαση επέδρασε θετικά δεδομένου ότι η πλειονότητά τους εμφάνισε καλή (31,3%) και πολύ καλή (56,3%) επίδοση με ένα πολύ μικρό αριθμό μαθητών να καταγράφει χαμηλή επίδοση (6,3%). Ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση αυξήθηκε (από 2,3750 σε 3,6250). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προκύπτει από το t–test [t (15) = − 7,319, p<0,05].

Γράφημα 9. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 9: Ισοδύναμα ρυθμικά κλάσματα.



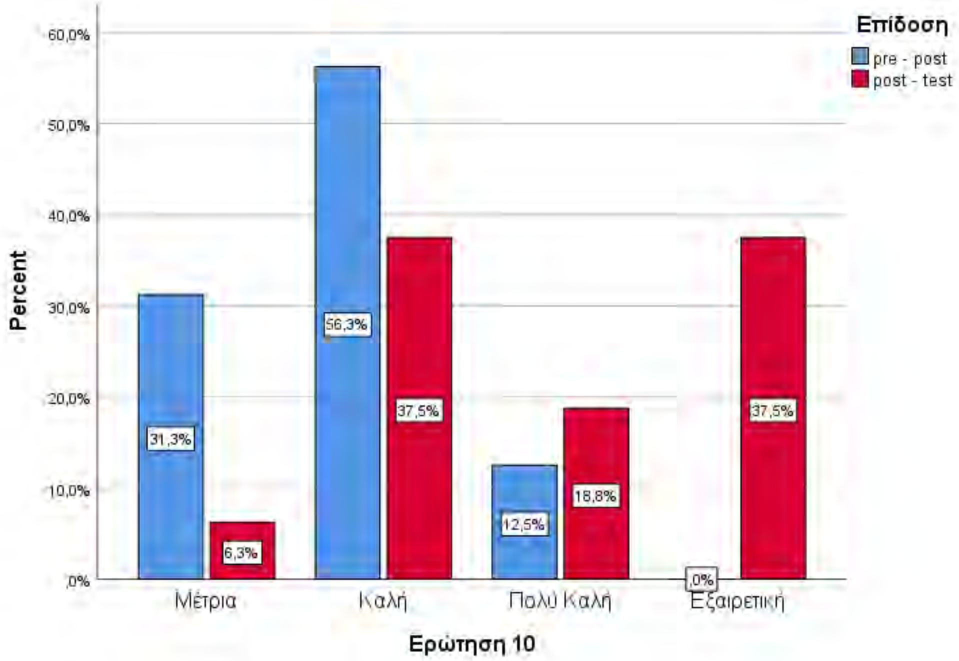
Πίνακας 9. Αποτελέσματα t– test για την Ερώτηση 9.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 9 pre-test	2,8750	16	1,14746	,28687
	Ερώτηση 9 post-test	3,8750	16	1,02470	,25617

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ.9 pre-test – Ερ. 9 post-test	-1,00000	,51640	,12910	-1,27517	-,72483	-7,746	15	,000

Στην ένατη ερώτηση οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν τα ισοδύναμα ρυθμικά κλάσματα σε μουσικά παραδείγματα. Συγκρίνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι ο βαθμός κατανόησης της έννοιας του ισοδύναμου κλάσματος έχοντας ως μονάδα σύγκρισης τα μουσικά ρυθμικά κλάσματα πριν την παρέμβαση δεν ήταν ιδιαίτερα υψηλός καθώς η πλειοψηφία των μαθητών κατέγραψε μέτρια (37,5%) και καλή (31,3%) επίδοση ενώ εμφανώς καλύτερη εικόνα είχαν οι μαθητές μετά την παρέμβαση δεδομένου ότι το μεγαλύτερο ποσοστό εμφάνισε εξαιρετική (37,5%) και καλή (37,5%) επίδοση. Ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών αυξήθηκε (από 2,8750 στο pre–test έναντι 3,8750 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική [$t(15) = -7{,}746$, $p<0{,}05$].

Γράφημα 10. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 10: Πράξεις αριθμών.



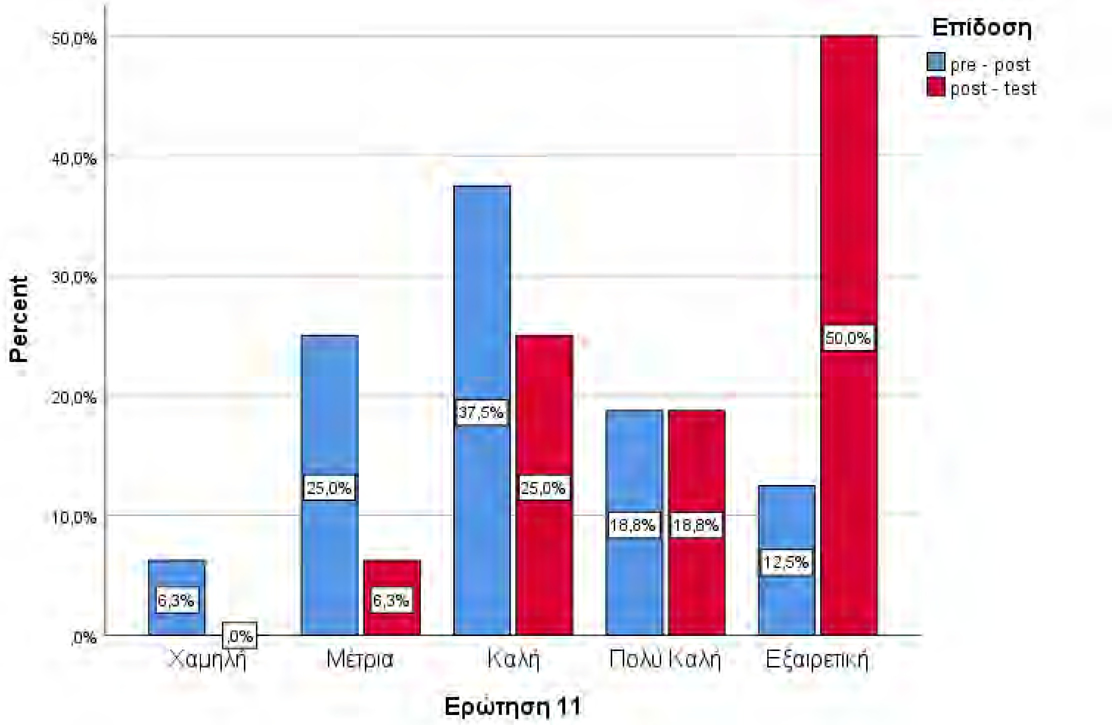
Πίνακας 10. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 10.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 10 pre-test	2,8125	16	,65511	,16378
	Ερώτηση 10 post-test	3,8750	16	1,02470	,25617

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ. 10 pre-test – Ερ.10 post-test	-1,06250	,85391	,21348	-1,51752	-,60748	-4,977	15	,000

Στη δέκατη ερώτηση που αφορούσε πράξεις αριθμών, σύμφωνα με το Γράφημα 8 η επίδοση των μαθητών στο pre-test δεν ήταν ιδιαίτερα υψηλή καθώς οι περισσότεροι μαθητές είχαν μέτρια (31,3%) και καλή (56,3%) επίδοση και ένα μόνο μικρό ποσοστό (12,5%) πολύ καλή επίδοση. Είναι όμως πολύ βελτιωμένες οι επιδόσεις των μαθητών μετά την παρέμβαση καθώς ένα μόνο μικρό ποσοστό (6,3%) σημείωσε μέτρια επίδοση και οι υπόλοιποι μαθητές καλή (37,5%), πολύ καλή (18,8%) και εξαιρετική (37,5%) επίδοση. Συνολικά, ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών παρουσίασε αύξηση από 2,8125 στο pre–test έναντι 3,8750 στο post–test. Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προέκυψε από το t-test [t (15)= − 4,977, ρ<0.05]

Γράφημα 11. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 11: Διάταξη αριθμών.



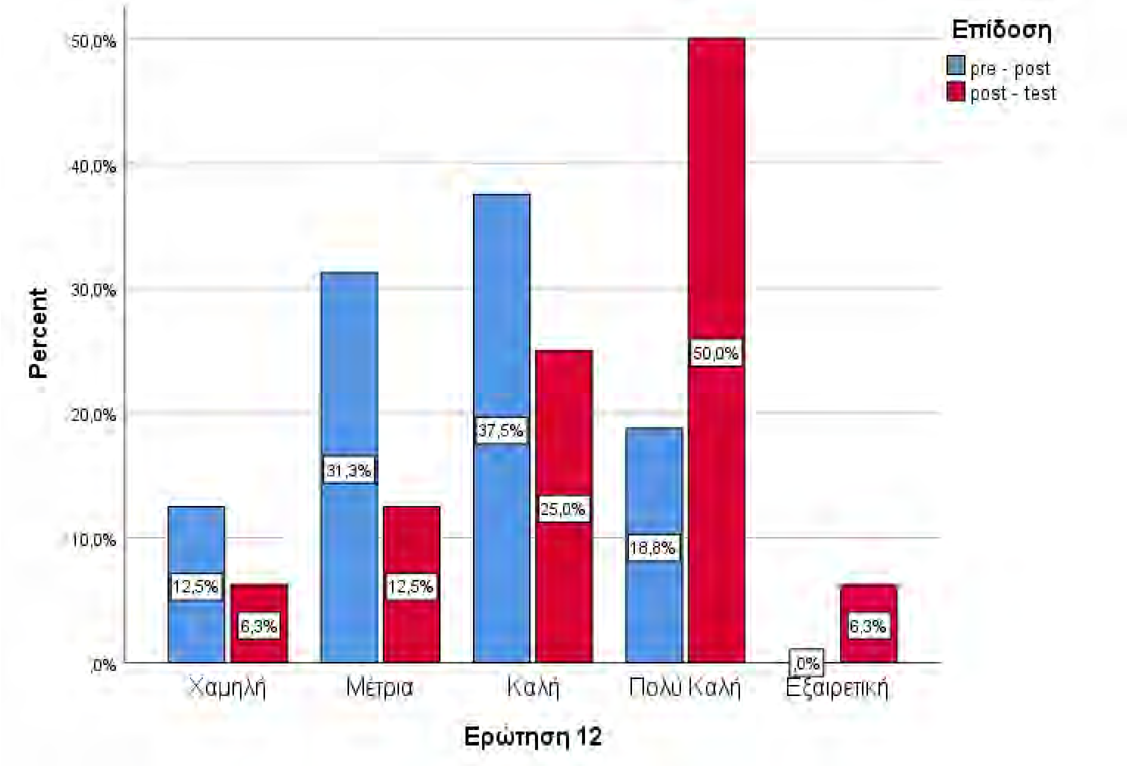
Πίνακας 11. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 11.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 11 pre-test	3,0625	16	1,12361	,28090
	Ερώτηση 11 post-test	4,1250	16	1,02470	,25617

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	95% Confidence Interval of the Difference Upper			
Pair 1	Ερ. 11 pre-test – Ερ. 11 post-test	-1,06250	,68007	,17002	-1,42489	-,70011	-6,249	15	,000

Στην ενδέκατη ερώτηση που αφορούσε τη διάταξη αριθμών όπως προκύπτει από το Γράφημα 11, οι μαθητές δεν είχαν υψηλή επίδοση στο pre–test δεδομένου ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών (37,5%) κατέγραψε καλή επίδοση ενώ ένα σημαντικό ποσοστό (25%) είχε μέτρια επίδοση. Βέβαια, μετά την παρέμβαση οι μισοί μαθητές (50%) σημείωσαν εξαιρετική επίδοση ενώ σημαντικά ποσοστά κατέγραψαν οι μαθητές με καλή (25%) και πολύ καλή (18,8%) επίδοση και μόλις το 6,3% είχε μέτρια επίδοση. Παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών αυξήθηκε (από 3,0625 στο pre–test έναντι 4,1250 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως έδειξαν τα αποτελέσματα του t-test [$t(15) = -6,249$, $p<0,05$].

Γράφημα 12. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 12: Ανάλογα – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά



Πίνακας 12. Αποτελέσματα t– test για την Ερώτηση 12.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 12 pre-test	2,6250	16	,95743	,23936
	Ερώτηση 12 post-test	3,3750	16	1,02470	,25617

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ. 12 pre-test – Ερ. 12 post-test	-,75000	,93095	,23274	-1,24607	-,25393	-3,223	15	,006

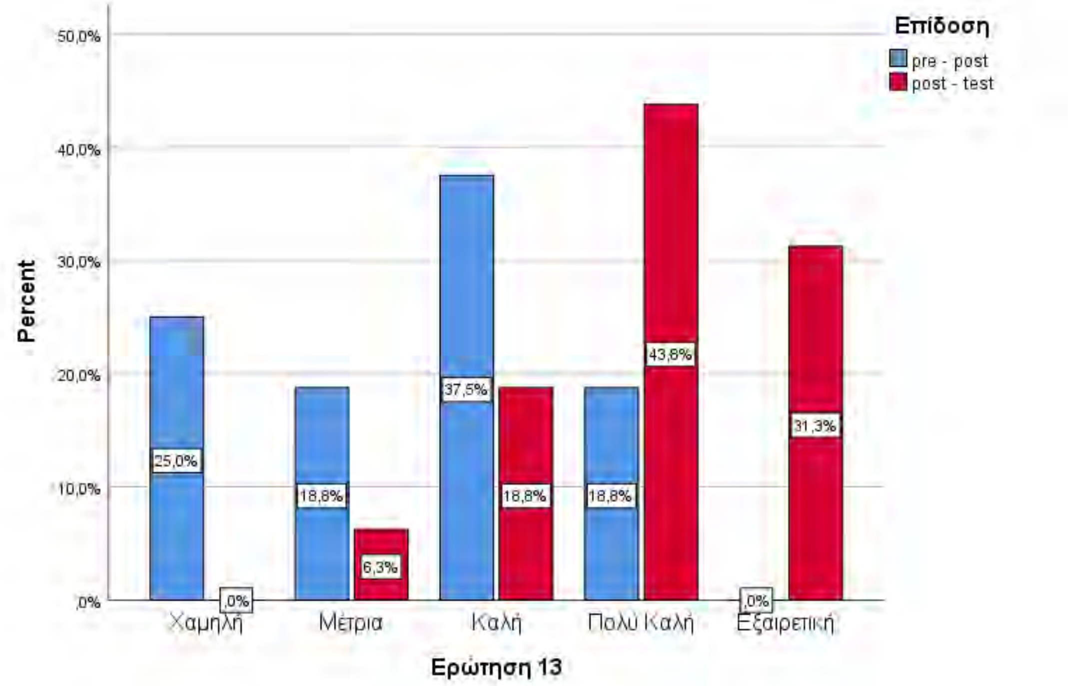
Στη δωδέκατη ερώτηση που αφορούσε τις αναλογίες όπως προκύπτει από το Γράφημα 12 η πλειοψηφία των μαθητών στο pre–test σημείωσε καλή (37,5%) και μέτρια (31,3%) επίδοση ενώ δεν εντοπίστηκαν μαθητές με εξαιρετική επίδοση. Αξίζει να σημειωθεί ότι μετά την παρέμβαση οι μισοί μαθητές (50%) σημείωσαν εξαιρετική επίδοση ενώ σημαντικό ποσοστό κατέγραψαν και οι μαθητές με καλή (25%) επίδοση. Παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών αυξήθηκε από 2,6250 στο pre–test έναντι 3,3750 στο post–test. Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική σύμφωνα με το t–test [t (15)= − 3,223, p<0,05].

Μουσικο–μαθηματικές γνώσεις

Αναφορικά με το τεστ διερεύνησης των μουσικο–μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων (pre/post-test) επιχειρήθηκε μία αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών με κριτήριο τον αριθμό των σωστών απαντήσεων σε κάθε ερώτηση χρησιμοποιώντας μια πεντάβαθμη γραμμική κλίμακα με τις ακόλουθες διαβαθμίσεις:

Εξαιρετική (0–1 λάθη)= 5 βαθμοί, Πολύ καλή (2–3 λάθη)= 4 βαθμοί, Καλή (4–5 λάθη)= 3 βαθμοί, Μέτρια (5–6 λάθη)= 2 βαθμοί, Χαμηλή (περισσότερα από 6 λάθη)= 1 βαθμός.

Γράφημα 13. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 13: Μουσικό–μαθηματικές γνώσεις.



Πίνακας 13. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 13.

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 13 pre-test	2,5000	16	1,09545	,27386
	Ερώτηση 13 post-test	4,0000	16	,89443	,22361

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference: Lower	Upper			
Pair 1	Ερ. 13 pre-test – Ερ. 13 post-test	-1,50000	,73030	,18257	-1,88915	-1,11085	-8,216	15	,000

Η δέκατη τρίτη ερώτηση ήταν γνωστικού περιεχομένου και στόχο είχε να αξιολογηθούν οι γνώσεις των μαθητών σε θέματα που αφορούσαν την διασύνδεση της Μουσικής και των Μαθηματικών, ζητώντας από τους μαθητές να απαντήσουν σε ερωτήσεις τύπου σωστό-λάθος. Από τα δεδομένα στο Γράφημα 13, παρατηρούμε ότι στο pre–test οι μαθητές είχαν ελλιπείς γνώσεις στο σχετικό τομέα καθώς σημαντικά ποσοστά καταγράφονται τόσο στη χαμηλή (25%) όσο και στη μέτρια επίδοση (18,8%). Μετά την παρέμβαση οι επιδόσεις των μαθητών ήταν σαφώς βελτιωμένες. Το μεγαλύτερο ποσοστό είχε πολύ καλή επίδοση (43,8%). Σημαντικά ήταν τα ποσοστά των μαθητών που σημείωσαν εξαιρετική (31,3%) και καλή (18,8%) επίδοση. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι κανένας μαθητής δεν είχε χαμηλή επίδοση μετά την παρέμβαση παρά μόνο ένα μικρό ποσοστό (6,3%) είχε μέτρια επίδοση. Παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος των επιδόσεων των μαθητών αυξήθηκε (από

2,5000 στο pre–test έναντι 4,0000 στο post–test). Η διαφορά των τιμών των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως φαίνεται από το t-test [$t(15)=-8{,}216$, $p<0{,}05$].

Μαθηματικά προβλήματα της Μουσικής

Οι ερωτήσεις που εντάσσονται σε αυτήν την ενότητα ήταν ανοικτού τύπου. Τα δεδομένα κατηγοριοποιήθηκαν βάσει των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της κάθε απάντησης και στη συνέχεια καταμετρήθηκαν οι απαντήσεις κάθε κατηγορίας.

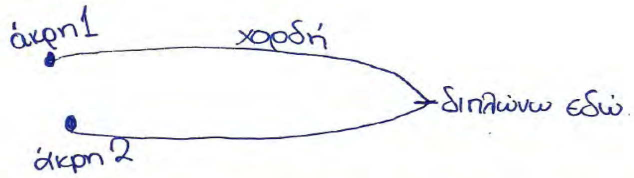
Πίνακας 14. Ερώτηση 14: Διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη.

Κατηγορίες απαντήσεων ως προς τη μέθοδο που ακολούθησαν	**Αριθμός μαθητών**	
	Pre- test	**Post- test**
α) Μη γεωμετρική μέθοδος	6	0
β) Γεωμετρική μέθοδος 1	3	0
γ) Γεωμετρική μέθοδος 2	4	14
δ) Δεν απάντησαν	3	2

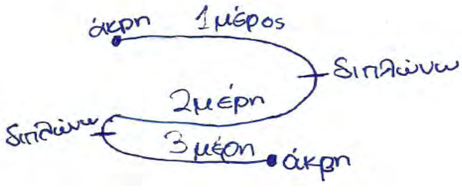
Η δέκατη τέταρτη ερώτηση ήταν ανοικτού τύπου και στόχο είχε να αξιολογηθούν οι γνώσεις των μαθητών σε βασικές έννοιες της Γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, κλήθηκαν να διαιρέσουν μία χορδή σε δύο και σε τρία ίσα τμήματα χωρίς χάρακα. Από την ανάλυση των δεδομένων αναδύθηκαν τέσσερις κατηγορίες απαντήσεων:

α) Οι μαθητές δεν χρησιμοποίησαν κάποια γεωμετρική μέθοδο παρά μόνο βασίζονταν σε εμπειρικές εκτιμήσεις. Χαρακτηριστική είναι η παρακάτω απάντηση του μαθητή (Υποκείμενο: Υ3):

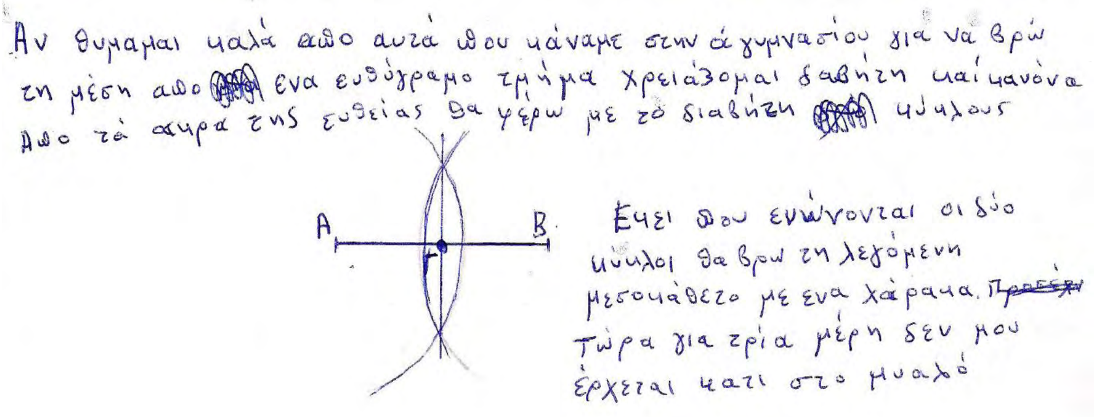
Εξαρτάται αν μπορώ να βγάλω τη χορδή απο την κιθαρα. Αν επιτρεπετε να την βγάλω, θα διπλώσω τα δύο άκρα της και ετσι θα βρώ το ~~μεσαιο~~ μέσο!



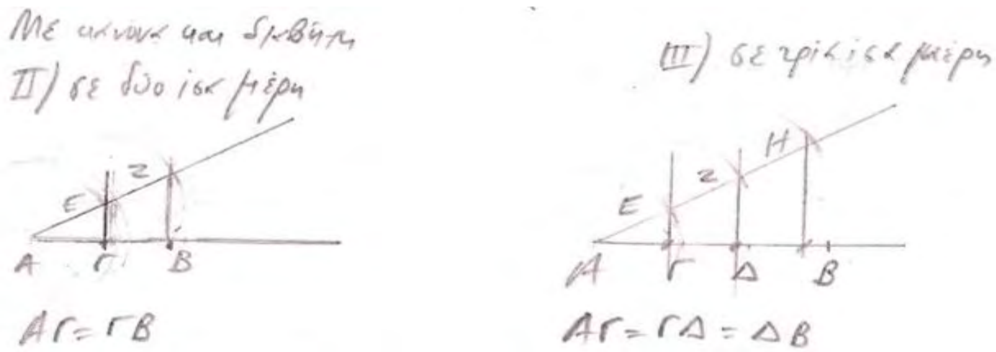
Για να την κόψω σε τρία μέρη δεν είμαι σίγουρος αλλά θα μπορούσε να γίνει με του ίδιο τρόπο



β) οι μαθητές ακολούθησαν μία γεωμετρική μέθοδο και συγκεκριμένα κατασκεύασαν τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ προκειμένου να το χωρίσουν σε δύο ίσα τμήματα. Βέβαια, με αυτήν την μέθοδο δεν ήταν εφικτή η διαίρεση της χορδής σε τρία ίσα μέρη. Ενδεικτική είναι η ακόλουθη απάντηση της μαθήτριας (Υποκείμενο: Υ11):



γ) Οι μαθητές ακολούθησαν τη γεωμετρική μέθοδο της διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη. Χαρακτηριστική είναι η παρακάτω απάντηση μαθητή (Υποκείμενο:Υ5):



δ) Οι μαθητές δεν απάντησαν καθόλου

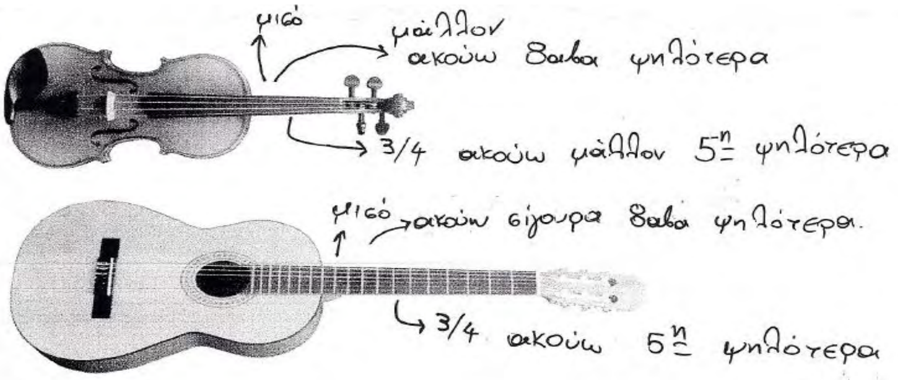
Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 14, αρχικά στο pre–test οι περισσότεροι μαθητές (έξι άτομα) βασίστηκαν σε εμπειρικές εκτιμήσεις για την επίλυση της άσκησης, τρεις από αυτούς επέλεξαν να κατασκευάσουν τη μεσοκάθετο (γεωμετρική μέθοδος 1), τέσσερις ακολούθησαν τη γεωμετρική μέθοδο της διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη (γεωμετρική μέθοδος 2) ενώ τρεις δεν απάντησαν καθόλου. Μετά τη διδακτική παρέμβαση παρατηρούμε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών (δεκατέσσερα άτομα) ακολούθησε τη γεωμετρική μέθοδο 2. Ο αριθμός των μαθητών που δεν απάντησε στην ερώτηση αυτή περιορίστηκε σε μόλις δύο άτομα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι παρόλο που η γεωμετρική μέθοδος 2 εντάσσεται στην διδακτέα ύλη των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου εντούτοις ένας μόνο μικρός αριθμός μαθητών αξιοποίησαν στο pre–test τις προγενέστερες γνώσεις τους στη Γεωμετρία για να τις εφαρμόσουν σε ένα διαφορετικό πεδίο όπως είναι η Μουσική.

Πίνακας 15. Ερώτηση 15: Λόγοι μηκών και διαστήματα.

Κατηγορίες απαντήσεων ως προς τη μέθοδο που ακολούθησαν	**Αριθμός μαθητών**	
	Pre–test	**Post–test**
α) Με βάση τη μουσική εμπειρία	5	3
β) Με βάση τα οπτικά δεδομένα	5	0
γ) Εφαρμογή της αναλογικής σκέψης	3	12
δ) Δεν απάντησαν	3	1

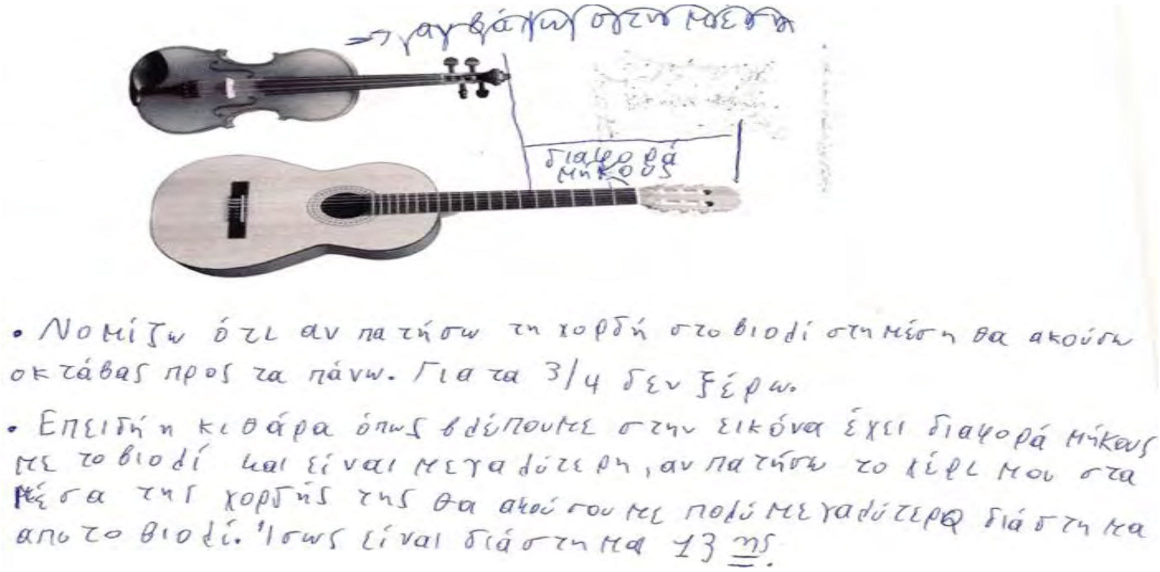
Η δέκατη πέμπτη ερώτηση αφορούσε την έννοια του σταθερού λόγου κατά την επίλυση ενός μουσικού προβλήματος. Αναλυτικότερα, οι μαθητές καλούνταν αρχικά να βρουν τα μουσικά διαστήματα που αντιστοιχούσαν στο 1/2 και στα 2/3 της χορδής εγχόρδων διαφορετικού μήκους (κιθάρας, βιολιού) και στη συνέχεια έκαναν εκτιμήσεις για το αν για την κατασκευή της ίδιας κατηγορίας διαστημάτων (π.χ. διάστημα 5ης Καθαρή) απαιτούνταν τα ίδια μήκη χορδών ανεξάρτητα από τα τονικά ύψη (π.χ. Ρε–Λα, Ντο – Σολ). Οι απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν και προέκυψαν οι εξής τέσσερις κατηγορίες:

α) Οι μαθητές βρήκαν σωστά τα παραγόμενα μουσικά διαστήματα και για τα δύο έγχορδα όργανα (διάστημα 8ης Κ και διάστημα 5ης Κ). Για την αιτιολόγηση της απάντησής τους όμως βασίστηκαν μόνο στην μουσική τους εμπειρία. Ενδεικτική είναι η ακόλουθη απάντηση της μαθήτριας (Υποκείμενο: Υ2):

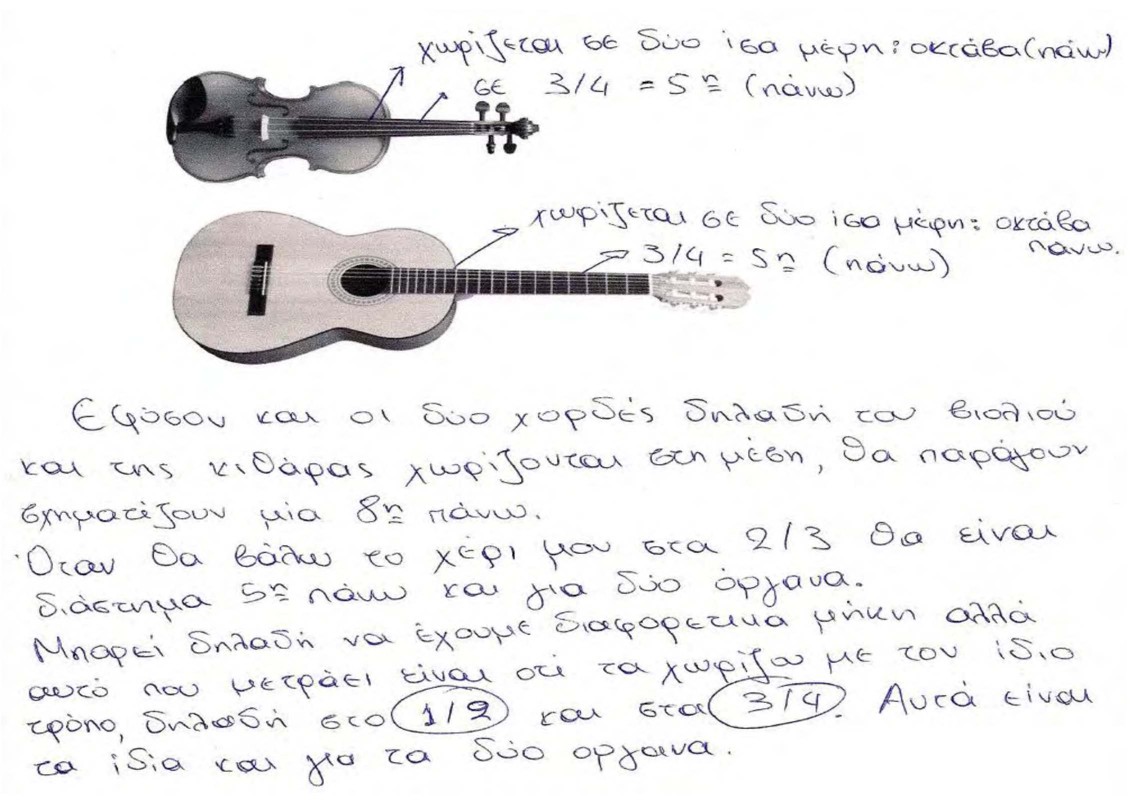


Επειδή παίζω κιθάρα χρόνια ξέρω ότι όταν βάζω το δάκτυλό μου στο μέσω της χορδής σχηματίζω μία 8αβα ψηλότερα. Έχω ακούσει το ίδιο και στο βιολί. Πάλι δηλαδή γίνεται 8αβα ψηλότερα. Αν τώρα βάλω το χέρι μου στα 2/3 της κιθάρας ξέρω επειδή το έχω ακούσει σε ασκήσεις οτι θα ακούσω 5η ψηλότερα. Για το βιολί λογικά θα ακούσω το ίδιο. Δεν το έχω δοκιμάσει η ίδια.

β) οι μαθητές βασιζόμενοι μόνο στις εικόνες οδηγήθηκαν σε εσφαλμένα συμπεράσματα θεωρώντας ότι το μεγαλύτερο έγχορδο όργανο (κιθάρα) θα παράγει και μεγαλύτερο διάστημα από το μικρότερο έγχορδο όργανο (βιολί). Χαρακτηριστική είναι η ακόλουθη απάντηση μαθητή (Υποκείμενο: Υ14):



γ) οι μαθητές βρήκαν τα σωστά διαστήματα και αιτιολόγησαν την απάντησή τους με πληρότητα έχοντας αντιληφθεί ότι ο λόγος και όχι οι απόλυτες τιμές των μηκών καθορίζει το μέγεθος του μουσικού διαστήματος. Ενδεικτική είναι η απάντηση της μαθήτριας (Υποκείμενο: Υ12) που ακολουθεί στη συνέχεια:



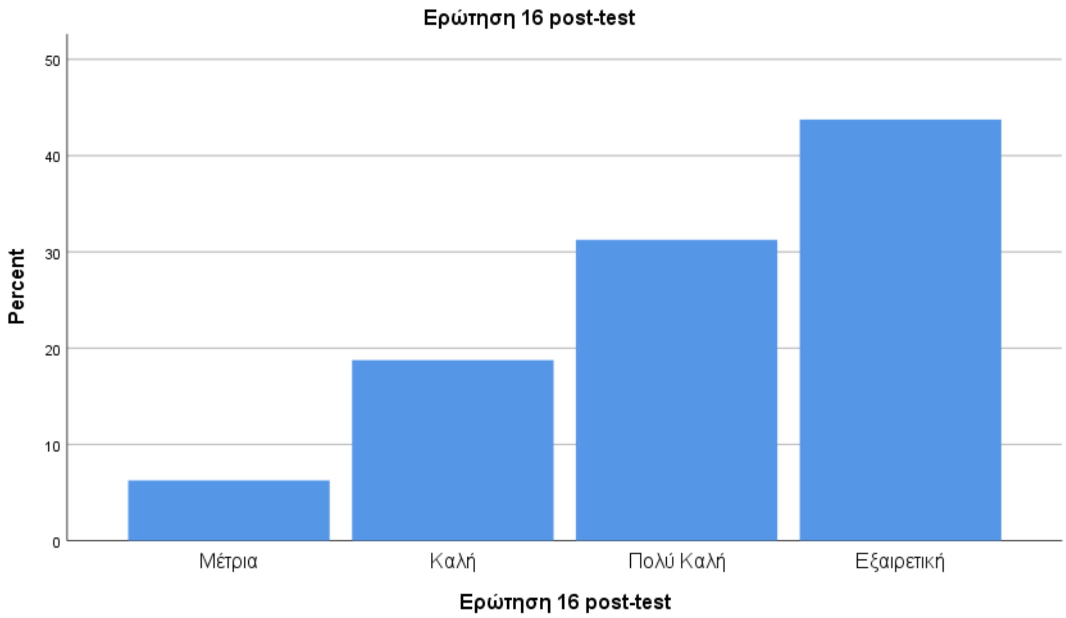
δ) δεν απάντησαν

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 15, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στο pre–test μόλις τρεις μαθητές ήταν σε θέση να εφαρμόσουν την αναλογική σκέψη για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος. Ενθαρρυντικό είναι το γεγονός ότι μετά την παρέμβαση ο αριθμός αυτός αυξήθηκε σε 12 μαθητές παρόλο που εξακολούθησαν 3 μαθητές να προσπαθούν να κάνουν προβλέψεις για τα διαστήματα στηριζόμενοι στη μουσική τους εμπειρία.

Νεοαποκτηθείσες γνώσεις μετά την παρέμβαση

Η συγκεκριμένη ερώτηση περιλαμβανόταν μόνο στο τελικό τεστ (post-test). Αποτελούνταν από 10 υποερωτήματα πολλαπλής επιλογής. Και σε αυτήν την περίπτωση ακολουθήθηκε ως κριτήριο αξιολόγησης της επίδοσης, ο αριθμός των λαθών σε κάθε ερώτηση χρησιμοποιώντας μια πεντάβαθμη γραμμική κλίμακα με τις ακόλουθες διαβαθμίσεις: Εξαιρετική (0–1 λάθη)= 5 βαθμοί, Πολύ καλή (2–3 λάθη)= 4 βαθμοί, Καλή (4–5 λάθη)= 3 βαθμοί, Μέτρια (5–6 λάθη)= 2 βαθμοί, Χαμηλή (περισσότερα από 6 λάθη)= 1 βαθμός.

Γράφημα 16. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 16: Μουσικό-μαθηματικές γνώσεις.



Πίνακας 16. Συχνότητες και σχετικές συχνότητες των απαντήσεων στην Ερώτηση 16.

Ερώτηση 16 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	3	18,8	18,8	25,0
	Πολύ Καλή	5	31,3	31,3	56,3
	Εξαιρετική	7	43,8	43,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Η δέκατη έκτη ερώτηση συμπεριλάμβανε πληροφορίες που καταδείκνυαν τις γνωστικές και διαδικαστικές κατακτήσεις των μαθητών μετά τη διδακτική παρέμβαση. Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνταν να επιλύσουν σύντομες ασκήσεις που αφορούσαν τα μουσικά συστήματα (αρμονικοί, πυθαγόρειο και συγκερασμένο) καθώς επίσης να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για να υπολογίσουν και να συγκρίνουν τα μουσικά διαστήματα που σχηματίζονταν στα παραπάνω συστήματα. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 16 το μεγαλύτερο ποσοστό (43,8%) των μαθητών είχε εξαιρετική επίδοση. Αρκετά υψηλό ήταν και το ποσοστό των μαθητών με πολύ καλή επίδοση (31,3%) ενώ κανένας μαθητής δεν συγκαταλέγεται στις χαμηλές επιδόσεις. Οι παραπάνω διαπιστώσεις επιβεβαιώνουν την αποτελεσματικότητα της παρέμβασης.

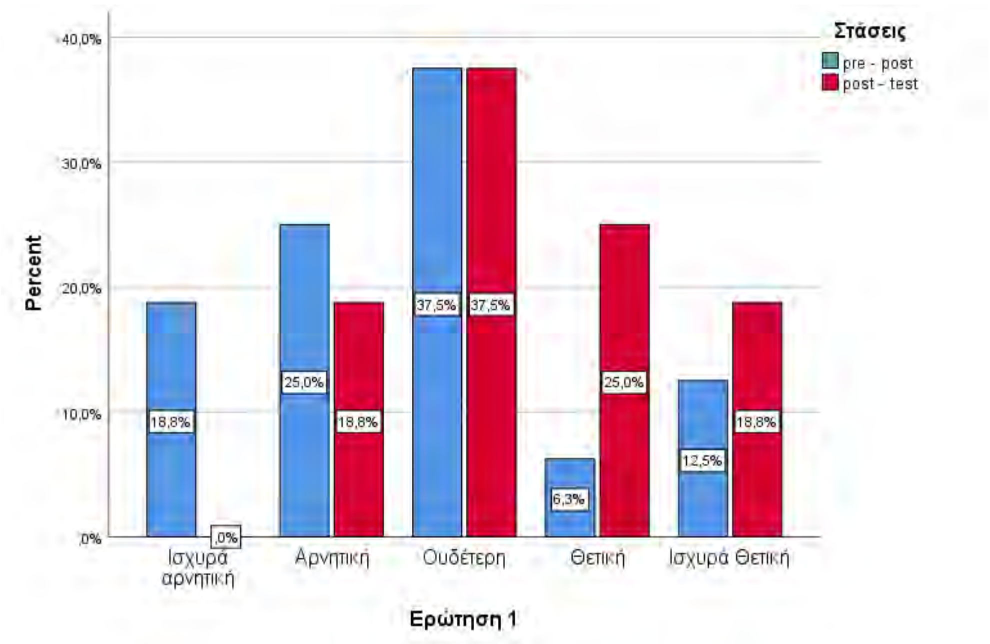
Στάσεις και αντιλήψεις απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών

Οι ερωτήσεις με τις οποίες διερευνήθηκαν οι στάσεις και οι αντιλήψεις απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών ήταν: α) πέντε κλειστού τύπου με κλίμακα Likert πέντε διαβαθμίσεων (κυμαινόμενη από «συμφωνώ απόλυτα» έως «διαφωνώ απόλυτα») και με τι οποίες μετρήθηκε ο βαθμός αυτοπεποίθησης, άγχους και επιτυχίας των μαθητών ως προς τα Μαθηματικά και β) δύο ερωτήσεις ανοικτού τύπου έτσι ώστε να αξιολογηθούν οι αντιλήψεις τους απέναντι στα Μαθηματικά και στη σχέση των Μαθηματικών με τη Μουσική. Η επεξεργασία των ποσοτικών δεδομένων των κλειστών ερωτήσεων έγινε μέσω του στατιστικού πακέτου SPSS (ver.25) ενώ για τα ποιοτικά δεδομένα έγινε κατηγοριοποίηση των απαντήσεων με βάση τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους και στη συνέχεια καταμέτρηση των απαντήσεων κάθε κατηγορίας.

Στάσεις απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών

Με βάση τη βαθμολογία των παιδιών στα ερωτηματολόγια διαμορφώθηκαν πέντε επίπεδα στάσεων προς τα Μαθηματικά: ισχυρά αρνητική, αρνητική, ουδέτερη, θετική και ισχυρά θετική στάση.

Γράφημα 1. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 1: Ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.



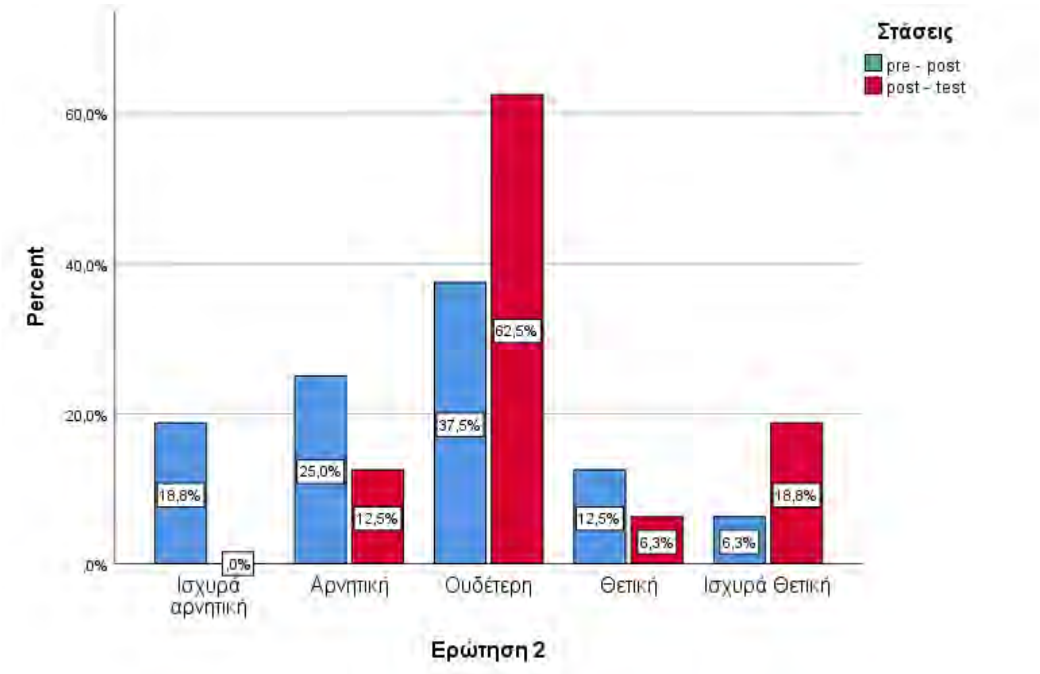
Πίνακας 1. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 1.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 1 pre-test	2,6875	16	1,25000	,31250
	Ερώτηση 1 post-test	3,4375	16	1,03078	,25769

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ.1 pre-test – Ερ.1 post-test	-,75000	,68313	,17078	-1,11401	-,38599	-4,392	15	,001

Στην πρώτη ερώτηση διερευνήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά με την ευρύτερη έννοια του όρου. Όπως προκύπτει από τα δεδομένα στο Γράφημα 1, η ουδέτερη στάση ήταν η επικρατέστερη τόσο στο pre–test όσο και στο post–test λαμβάνοντας το ίδιο ποσοστό (37,5%). Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι ενώ πριν την παρέμβαση εμφανιζόταν με ένα σημαντικό ποσοστό (18,8%) η αρνητική στάση το ποσοστό της οποίας μηδενίζεται μετά. Παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος του επιπέδου των στάσεων των μαθητών αυξήθηκε από 2,6875 στο pre–test έναντι 3,4375 στο post–test. Η διαφορά των τιμών του επιπέδου των στάσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προκύπτει από το t–test [t(15)= − 4,392, p<0,05].

Γράφημα 2. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 2: Ενδιαφέρον για το μάθημα των Μαθηματικών.



Πίνακας 2. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 2.

Paired Samples Statistics

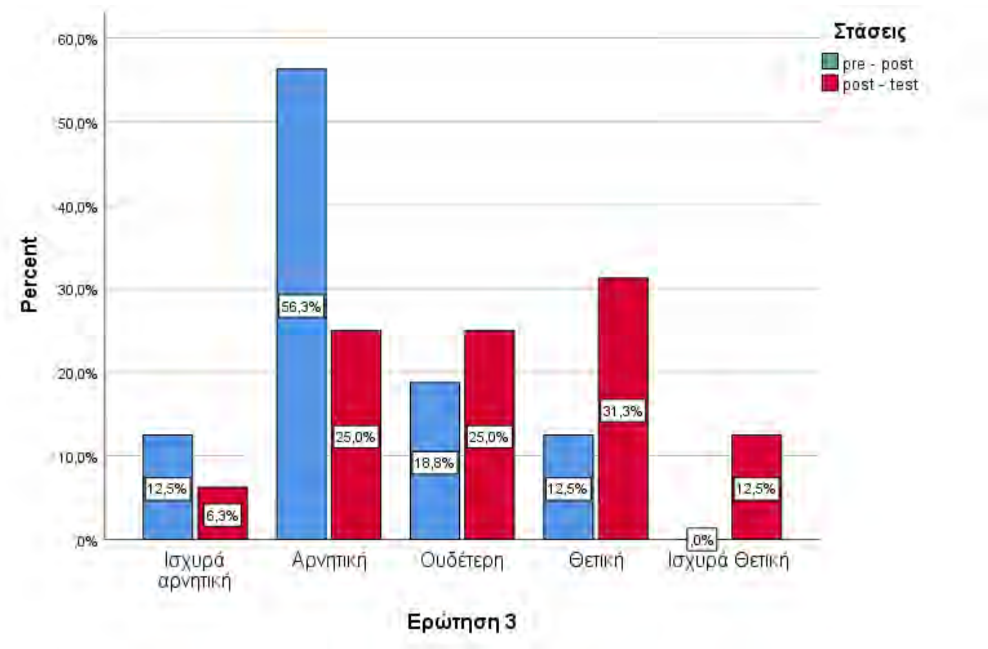
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 2 pre-test	2,6250	16	1,14746	,28687
	Ερώτηση 2 post-test	3,3125	16	,94648	,23662

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference: Lower	95% Confidence Interval of the Difference: Upper			
Pair 1	Ερ. 2 pre-test – Ερ. 2 post-test	-,68750	,60208	,15052	-1,00833	-,36667	-4,568	15	,000

Στη δεύτερη ερώτηση διερευνήθηκε η στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά ως σχολικό μάθημα. Όπως προκύπτει από το Γράφημα 2 η πλειοψηφία των μαθητών τόσο στο pre–test όσο και στο post–test ήταν ουδέτερα διακείμενοι απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών με ποσοστά 37,5% και 62,5% αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι πριν την παρέμβαση ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών έδειξε ισχυρά αρνητική στάση το ποσοστό της οποίας μηδενίζεται μετά την παρέμβαση. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3, υπήρξε μεταβολή στις στάσεις των μαθητών καθώς ο μέσος όρος αυξήθηκε από 2,6250 στο pre–test έναντι 3,3125 στο post–test. Η διαφορά των τιμών του επιπέδου των στάσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως προκύπτει από το t–test [t (15)= − 4,568, p<0,05].

Γράφημα 3. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 3: Αυτοπεποίθηση για τα Μαθηματικά.



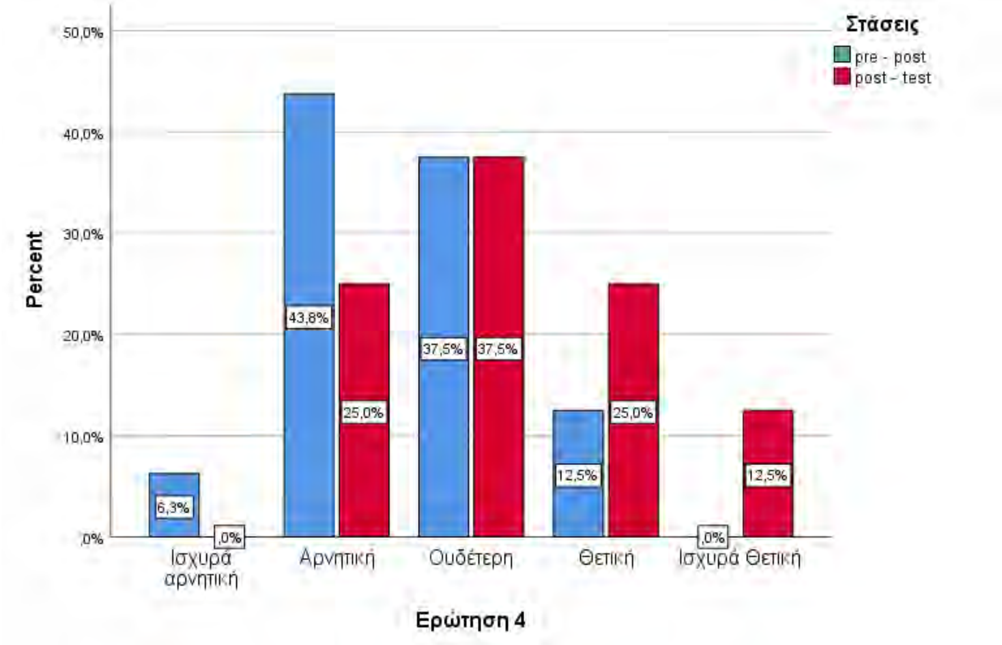
Πίνακας 3. Αποτελέσματα t– test για την Ερώτηση 3.

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 3 pre-test	2,3125	16	,87321	,21830
	Ερώτηση 3 post-test	3,1875	16	1,16726	,29182

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Ερ. 3 pre-test – Ερ, 3 post-test	-,87500	,61914	,15478	-1,20492	-,54508	-5,653	15	,000

Η τρίτη ερώτηση στόχο είχε να καταγράψει την αυτοπεποίθηση που νιώθουν οι μαθητές σχετικά με τα Μαθηματικά. Παρατηρώντας το Γράφημα 3 διαπιστώνουμε ότι στο pre–test περισσότεροι από τους μισούς μαθητές σε ποσοστό 56,3% ένιωθαν αρνητικά όσον αφορά την αυτοπεποίθηση και επιπλέον δεν εντοπίζεται κανένας μαθητής με ισχυρή αυτοπεποίθηση. Μετά την παρέμβαση σημαντικά είναι τα ποσοστά της θετικής (31,3%), ουδέτερης (25%) και αρνητικής στάσης (25%). Παρατηρούμε ότι υπήρξε μεταβολή στις στάσεις των μαθητών (από 2,3125 στο pre–test έναντι 3,1875 στο post–test). Η διαφορά των τιμών του επιπέδου των στάσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική σύμφωνα με το t–test [t(15)= − 5,653, p<0,05].

Γράφημα 4. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 4: Μαθηματική ικανότητα.



Πίνακας 4. Αποτελέσματα t–test για την Ερώτηση 4

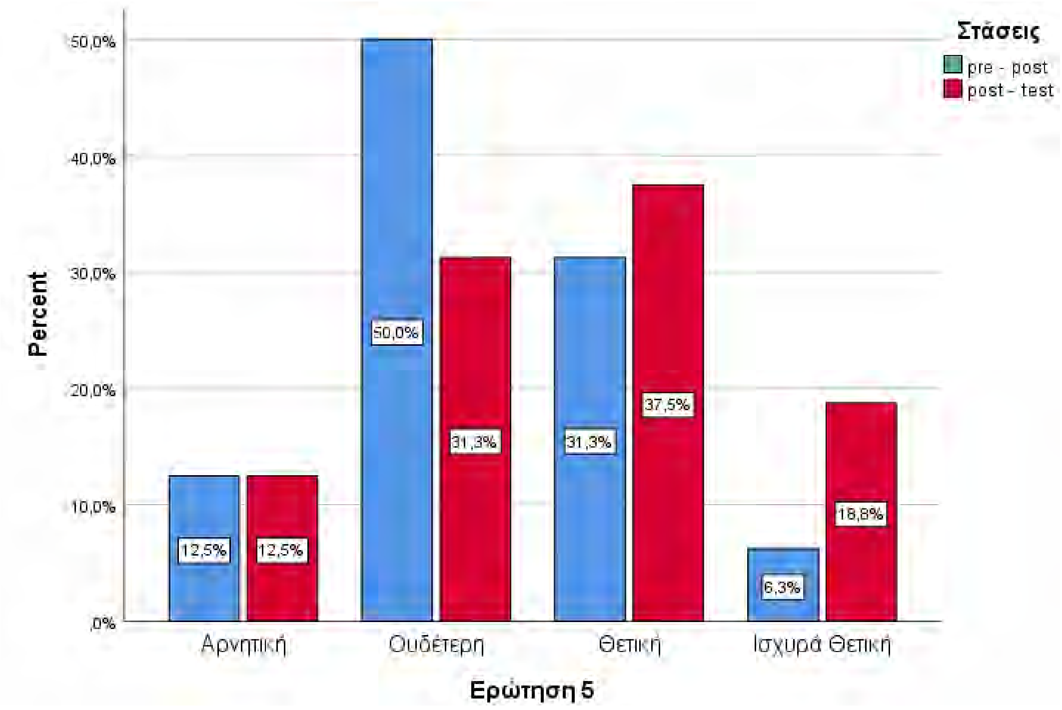
Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 4 pre-test	2,5625	16	,81394	,20349
	Ερώτηση 4 post-test	3,2500	16	1,00000	,25000

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Ερ. 4 pre-test – Ερ. 4 post-test	-,68750	,70415	,17604	-1,06272	-,31228	-3,905	15	,001

Στη τέταρτη ερώτηση που αφορούσε την αυτοαξιολόγηση τους όσον αφορά την ικανότητα τους στα Μαθηματικά όπως προκύπτει από το Γράφημα 4 η πλειοψηφία των μαθητών αρχικά δεν είχε ιδιαίτερα θετική εικόνα για τον εαυτό τους καθώς στο pre–test το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών εκφράστηκε αρνητικά (43,8%) και ουδέτερα (37,5%) ενώ δεν εντοπίστηκαν μαθητές με ισχυρά θετική αυτοεικόνα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι μετά την παρέμβαση το ποσοστό των μαθητών που είχε αρνητική αυτοεικόνα για την ικανότητά τους στα Μαθηματικά μειώνεται σε πολύ μεγάλο βαθμό (25%) και επιπλέον υπήρχαν μαθητές σε ποσοστό 12,5% που αυτοαξιολόγησαν τον εαυτό τους πολύ θετικά. Γενικά, υπήρξε μεταβολή στις στάσεις πριν και μετά την παρέμβαση όπως προκύπτει από την αύξηση του μέσου όρου (από 2,5625 στο pre–test έναντι 3,2500 στο post–test). Η διαφορά των τιμών του επιπέδου των στάσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική όπως φαίνεται από το t–test [t (15)= − 3,905, p<0,05].

Γράφημα 5. Γραφική αναπαράσταση αποτελεσμάτων της Ερώτησης 5: Χρησιμότητα των Μαθηματικών.



Πίνακας 5. Αποτελέσματα t– test για την Ερώτηση 5

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ερώτηση 5 pre-test	3,3125	16	,79320	,19830
	Ερώτηση 5 post-test	3,6250	16	,95743	,23936

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Ερ. 5 pre-test – Ερ. 5 post-test	-,31250	,47871	,11968	-,56759	-,05741	-2,611	15	,020

Στην ερώτηση 5 διερευνήθηκε η στάση των μαθητών σχετικά με τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στην καθημερινή τους ζωή. Όπως προκύπτει από τα δεδομένα στο Γράφημα 5, οι μισοί μαθητές (50%) είχαν μια ουδέτερη στάση πριν την παρέμβαση και μόλις ένα μικρό ποσοστό (6,3%) ήταν πολύ θετικά διακείμενοι για τη χρησιμότητα των Μαθηματικών το οποίο σχεδόν τριπλασιάζεται (18,8%) μετά την παρέμβαση. Αρνητικά εκφράζονται οι μαθητές με το ίδιο ποσοστό (12,5%) τόσο στο pre–test όσο και στο post–test. Παρατηρούμε ότι υπήρξε μεταβολή στις στάσεις των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση όπως προκύπτει από την αύξηση του μέσου όρου (από 3,3125 στο pre–test έναντι 3,6250 στο post–test). Η διαφορά των τιμών του επιπέδου των στάσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση είναι στατιστικά σημαντική σύμφωνα με το t–test [$t\ (15) = -2{,}611$, $p<0{,}05$].

<u>Αντιλήψεις των μαθητών για το μάθημα των Μαθηματικών</u>

Πίνακας 6. Ερώτηση 6: «Τί είναι τα Μαθηματικά;»

Κατηγορίες απαντήσεων ως προς το σημασιολογικό περιεχόμενο των λέξεων/ εκφράσεων	**Αριθμός αναφορών των μαθητών**	
	Pre–test (N=29)	**Post–test (N=38)**
α) παθητική έννοια/ στερεότυπα	16	8
β) ενεργητική έννοια	5	15
γ) ουδέτερη έννοια	8	15

Στην ερώτηση 6 διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια των Μαθηματικών. Με βάση το σημασιολογικό και εννοιολογικό περιεχόμενο των λέξεων και των εκφράσεων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να αναλύσουν το πώς αντιλαμβάνονται τα Μαθηματικά διακρίναμε τις εξής τρεις κατηγορίες:

α) λέξεις/εκφράσεις οι οποίες συνδέονταν με μια μονοδιάστατη και αφηρημένη προσέγγιση των Μαθηματικών που σε ορισμένες περιπτώσεις εξέφραζαν στερεότυπες αντιλήψεις. Χαρακτηριστικές λέξεις και εκφράσεις αυτής της κατηγορίας είναι οι εξής:

— *«τα Μαθηματικά είναι από τα πιο δύσκολα μαθήματα που έχω κάνει ποτέ»* (Υποκείμενο: Υ10)

— *«...με τα Μαθηματικά γίνεσαι πιο έξυπνος γιατί ακονίζεις το μυαλό σου»* (Υποκείμενο: Υ7) β) λέξεις/εκφράσεις που εστίαζαν στη χρησιμότητα και πρακτική εφαρμογή των Μαθηματικών σε όλους τους τομείς της καθημερινής ζωής. Ενδεικτικά παραδείγματα των παραπάνω είναι τα εξής:

— *«Τα Μαθηματικά είναι σημαντικά για να καταλάβεις τη ζωή»* (Υποκείμενο: Υ16)
— *«Τα Μαθηματικά βοηθούν να μετράμε στη Μουσική»* (Υποκείμενο: Υ9)

γ) λέξεις/εκφράσεις οι οποίες αναφέρονταν κυρίως στην ίδια τη φύση των Μαθηματικών ως γνωστικό αντικείμενο:

— «*Τα Μαθηματικά έχουν σύμβολα, γραμμές, ευθείες, εξισώσεις που πρέπει κανείς να τα μάθει γιατί είναι διαφορετικά από τα γράμματα της γλώσσας*» (Υποκείμενο: Υ2)
— *«…τα Μαθηματικά βασίζονται σε αριθμούς και πράξεις»* (Υποκείμενο: Υ1)

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 6 πριν τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές επέλεξαν λέξεις και εκφράσεις κυρίως της πρώτης (16 αναφορές) ενώ λιγότερες ήταν οι αναφορές της τρίτης (8 αναφορές) και της δεύτερης (5 αναφορές) κατηγορίας. Μετά την παρέμβαση εμφανής είναι η διαφοροποίηση στην αντίληψη που έχουν τα παιδιά σχετικά με την έννοια των Μαθηματικών δεδομένου ότι οι αναφορές της πρώτης κατηγορίας μειώθηκαν στο μισό (8 αναφορές), οι αναφορές της δεύτερης κατηγορίας τριπλασιάστηκαν (15 αναφορές) και οι αναφορές στην τρίτη κατηγορία σχεδόν διπλασιάστηκαν (15 αναφορές).

Πίνακας 7. Ερώτηση 7: «Πώς συνδέονται τα Μαθηματικά και η Μουσική;»

Κατηγορίες απαντήσεων ως προς το σημασιολογικό περιεχόμενο των λέξεων/ εκφράσεων	**Αριθμός αναφορών των μαθητών**	
	Pre– test	**Post– test**
α) αντιλήψεις που απορρέουν από τις εμπειρίες τους	**7**	**8**
β) αντιλήψεις που σχετίζονται με την επιστημολογική διασύνδεση των δύο αντικειμένων με βάση:	**21**	**44**
i. το ρυθμό	13	9
ii. την αρμονία-διαστήματα	3	15
iii. την εφαρμογή των μαθηματικών αρχών στην ερμηνεία μουσικών φαινομένων	0	10
iv. την εφαρμογή των μαθηματικών αρχών στην κατασκευή μουσικών οργάνων	5	10

Στην Ερώτηση 7 διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών αναφορικά με τον τρόπο σύνδεσης των Μαθηματικών με τη Μουσική. Με κριτήριο το σημασιολογικό και εννοιολογικό περιεχόμενο των λέξεων και των εκφράσεων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν τη διασύνδεση των δύο αντικειμένων αναδύθηκαν οι ακόλουθες δύο κατηγορίες:

α) αντιλήψεις που απορρέουν από τις εμπειρίες τους. Ενδεικτικά παραθέτουμε τις ακόλουθες απαντήσεις μαθητών:

— *«…και για τα δύο πρέπει να δαπανήσεις ώρα να τα διαβάσεις…»* (Υποκείμενο: Υ4)

— *«…και τα δύο τα κάνουμε ως μαθήματα στο σχολείο αν και τα Μαθηματικά είναι πολύ πιο δύσκολα. Δεν συγκρίνονται με τη Μουσική που είναι και πιο ωραία»* (Υποκείμενο: Υ3)

β) αντιλήψεις που σχετίζονται με την επιστημολογική διασύνδεση των δύο αντικειμένων και αναφέρονται:

I. στο ρυθμό. Χαρακτηριστικές είναι οι ακόλουθες απαντήσεις μαθητών:

— *«Η Μουσική αποτελείται από Μαθηματικά γιατί έχει κλάσματα τα οποία είναι αριθμοί»* (Υποκείμενο: Υ5)

— *«…όταν θέλω να προσθέσω νότες σε ένα μέτρο στη Μουσική πρέπει να προσθέσω τα κλάσματά τους όπως είναι στην αριθμητική»* (Υποκείμενο:Υ11)

II. στην αρμονία-διαστήματα. Αντιπροσωπευτικές είναι οι παρακάτω απαντήσεις των μαθητών:

— *«τα διαστήματα στη Μουσική είναι αποστάσεις. Τις αποστάσεις όμως τις μετράμε με τα Μαθηματικά»* (Υποκείμενο: Υ10)

— *«στην αρμονία που κάνω τις συγχορδίες τις συμβολίζουμε με αριθμούς. Όταν βλέπω πχ το 6/4 πάνω από τη συγχορδία ξέρω ότι είναι β΄ αναστροφή και ποιες είναι οι αποστάσεις από τη θεμέλιο»* (Υποκείμενο: Υ7)

III. την εφαρμογή των μαθηματικών αρχών στην ερμηνεία μουσικών φαινομένων. Οι απαντήσεις που ακολουθούν είναι ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών:

— *«με τα Μαθηματικά αναλύω σίγουρα τον ήχο και το ηχόχρωμα»* (Υποκείμενο: Υ14)

— *«το μηχάνημα που αναλύει τις συχνότητες αλλά και το πρόγραμμα που έχω στον υπολογιστή για να γράφω μουσική το* audacity *βγάζει γραφικές παραστάσεις όταν ακούγεται ο ήχος… έχει δηλαδή μαθηματικούς τύπους σίγουρα»* (Υποκείμενο: Υ8)

IV. την εφαρμογή των μαθηματικών αρχών στην κατασκευή μουσικών οργάνων.

Στη συνέχεια παρατίθενται χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών:

— *«όταν παίζω το βιολί που είναι «τυφλό» όργανο ξέρω ότι αν παίζω το διάστημα μι–φα πάνω στη ρε χορδή πρέπει να βάλω πιο κοντά τα δάκτυλα μου από το να έπαιζα το επόμενο φα–σολ που πρέπει να ανοίξω περισσότερο τα δάκτυλά μου γιατί είναι μεγαλύτερο διάστημα και έχει μεγαλύτερη απόσταση»* (Υποκείμενο: Υ6)

— *« … τα τάστα στην κιθάρα δεν μπαίνουν τυχαία πάνω στο μπράτσο. Υπολογίζονται με συγκεκριμένο τρόπο που αν δεν κάνω λάθος έχουν συγκεκριμένους τύπους από τα Μαθηματικά».* (Υποκείμενο: Υ9)

Συγκρίνοντας τα δεδομένα του Πίνακα 7, διαπιστώνουμε ότι οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη διασύνδεση της Μουσικής και των Μαθηματικών οι οποίες βασίζονταν στην εμπειρία τους παρουσιάζονται με την ίδια σχεδόν συχνότητα τόσο πριν (7 αναφορές) όσο και μετά (8 αναφορές) την παρέμβαση. Μεγάλη διαφοροποίηση όμως παρατηρούμε στις αντιλήψεις τους που βασίζονταν στην επιστημολογική διασύνδεση των δύο αντικειμένων η συχνότητα αναφορών των οποίων διπλασιάστηκε ανάμεσα στο pre–test (21 αναφορές) και στο post–test (44 αναφορές). Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι μαθητές αντιλήφθηκαν τη μαθηματική δομή περισσότερων μουσικών φαινομένων και εννοιών μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι ενώ πριν την παρέμβαση η συσχέτιση που έκαναν οι μαθητές ανάμεσα στη Μουσική και τα Μαθηματικά αφορούσε κατά κύριο λόγο τη μαθηματική ερμηνεία της ρυθμικής δομής της Μουσικής (13 αναφορές) και λιγότερο τις άλλες πτυχές της διασύνδεσης αυτής (συνολικά 8 αναφορές), φαίνεται ότι μετά την εφαρμογή οι μαθητές βασίζονταν περισσότερο στη μαθηματική ερμηνεία της αρμονίας, των μουσικών φαινομένων και της κατασκευής των μουσικών οργάνων (συνολικά 35 αναφορές) και λιγότερο στη μαθηματική ερμηνεία του μουσικού ρυθμού (9 αναφορές).

Κεφάλαιο 7

7. **Συμπεράσματα – Προτάσεις**

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται η συνολική αποτίμηση της έρευνας έχοντας ως σημείο αναφοράς τις υποθέσεις που διατυπώθηκαν (βλ. Κεφάλαιο 3, ενότητα 3.5.2.1.) και στις οποίες στηρίχθηκε τόσο ο σχεδιασμός όσο και η υλοποίηση της έρευνας και επιπλέον παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που εξάγονται από αυτή. Τέλος, διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις σχετικά με την οργάνωση της έρευνας και τη διαθεματική διδασκαλία της Μουσικής και των Μαθηματικών.

Συμπεράσματα

Τα Μαθηματικά και η Μουσική είναι δύο διακριτά γνωστικά αντικείμενα που συσχετίζονται ωστόσο μεταξύ τους. Η μαθηματική θεώρηση των μουσικών εννοιών οδηγεί στη σφαιρική γνώση και καλύτερη κατανόηση των μουσικών φαινομένων ενώ παράλληλα παρέχει το πλαίσιο εκείνο για μια αποτελεσματική διδασκαλία των Μαθηματικών όπως έχει επισημανθεί και από άλλους ερευνητές (An et al., 2013; Still & Bobis, 2005). Σκοπός, λοιπόν, της παρούσας εργασίας ήταν η ανάπτυξη και εφαρμογή ενός διδακτικού υλικού το οποίο βασίστηκε στη διαθεματική προσέγγιση της Μουσικής και των Μαθηματικών. Ως εργαλείο συνολικής αποτίμησης των γνώσεων και των δεξιοτήτων χρησιμοποιήσαμε το «Τεστ αξιολόγησης μουσικών και μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων». Για τον έλεγχο της διαφοροποίησης των στάσεων των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση υιοθετήσαμε το «Ερωτηματολόγιο διερεύνησης των στάσεων και αντιλήψεων».

Συγκρίνοντας τις επιδόσεις των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, το γενικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι ένα διδακτικό πρόγραμμα βασισμένο στη διασύνδεση των μαθημάτων της Μουσικής και των Μαθηματικών βελτιώνει τις επιδόσεις των μαθητών σε γραπτές δοκιμασίες αντικειμενικού τύπου για κάθε ένα από τα παραπάνω αντικείμενα αλλά και επιδρά θετικά στις στάσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

Αναφορικά με τη Μουσική, η σύγκριση των μέσων όρων στην επίδοση των μαθητών στις ερωτήσεις σχετικά με τις μουσικές γνώσεις και δεξιότητες πριν και μετά την υλοποίηση του προγράμματος κατέδειξε τη θετική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στους μαθητές επιβεβαιώνοντας έτσι την 1η υπόθεση της έρευνας.

Αναλυτικότερα, σχετικά με τη δεξιότητα της μουσικής ακρόασης, η πλειοψηφία των μαθητών βελτίωσε την επίδοσή τους στις σχετικές ασκήσεις τόσο όσον αφορά την αναγνώριση μεμονωμένων διαστημάτων όσο και την αναγνώριση της σύμφωνης και διάφωνης συνήχησης. Αντίστοιχη μεταβολή καταγράψαμε και στην επίδοσή τους ως προς τις γνώσεις μουσικής θεωρίας καθώς φάνηκε ότι αναγνώριζαν και κατασκεύαζαν με μεγαλύτερη επιτυχία διάφορες κατηγορίες μουσικών διαστημάτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν τα δεδομένα στο pre–test σχετικά με την Ιστορία της Μουσικής. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των αντίστοιχων ερωτήσεων στο pre–test καταλήξαμε αρχικά στη διαπίστωση ότι οι γνώσεις τους ήταν εξαιρετικά περιορισμένες δεδομένου ότι ελάχιστοι μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις σε αυτές τις ερωτήσεις. Είναι χαρακτηριστικό ότι υπήρχε σύγχυση ακόμη και στην αντίληψη των ιστορικών περιόδων καθώς και της σειράς διαδοχής τους. Υπήρξαν δηλαδή απαντήσεις που κατέδειξαν άγνοια σε βασικά ιστορικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα ότι η Μουσική της εποχής Μπαρόκ προηγείται της Κλασικής. Σημαντικά ιστορικά μουσικά είδη όπως είναι το Μοτέτο, παρά το γεγονός ότι είναι μέρος της διδακτέας ύλης της Β΄ τάξης του Γυμνασίου αλλά αποτελεί και μέρος του χορωδιακού ρεπερτορίου τους, φαίνεται να αποτελούν άγνωστα πεδία. Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις. Όμως, στα τεστ που ακολούθησαν την παρέμβαση καταγράφεται αύξηση του μέσου όρου της επίδοσης. Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο βιωματικός τρόπος προσέγγισης των μουσικών ιστορικών γεγονότων και έργων μπορεί να ενισχύσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας και να επιφέρει μαθησιακά αποτελέσματα, ιδιαίτερα σε μαθητές μετρίων επιδόσεων ή πιο αδύναμους κάτι που έχει αναφερθεί και από άλλους ερευνητές (Yang, 2012; Lowe, 2010; Halpern, 1992).

Όσον αφορά τα Μαθηματικά, εξετάζοντας συγκριτικά τις απαντήσεις των μαθητών στα δυο τεστ αξιολόγησης (pre/post–test), διαπιστώνεται ότι οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης σημείωσαν καλύτερες επιδόσεις στις αντίστοιχες θεματικές ενότητες επιβεβαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο την 2η ερευνητική υπόθεση της έρευνας. Σε παρόμοιες διαπιστώσεις κατέληξαν και άλλοι ερευνητές (An, Ma, & Capraro, 2011; Costa-Giomi, 2004; Johnson & Edelson, 2003), σύμφωνα με τους οποίους οι μαθητές μέσω της εμπλοκής τους σε διαθεματικές δραστηριότητες με κεντρικό άξονα τη Μουσική μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και κατ’ επέκταση να πετύχουν καλύτερες επιδόσεις στα Μαθηματικά. Οι μαθηματικές ασκήσεις αφορούσαν μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που ήταν απαραίτητες για την κατανόηση των μουσικών συστημάτων και των μουσικών διαστημάτων όπως είναι τα κλάσματα, οι λόγοι και οι αναλογίες, οι ακέραιοι αριθμοί (Beer, 1998; Schmidt-Jones, 2015). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι αρχικές επιδόσεις των μαθητών στις ασκήσεις μαθηματικών στο pre–test δεν ήταν ιδιαίτερα υψηλές παρόλο που αφορούσαν γνώσεις που είχαν διδαχθεί σε προγενέστερες τάξεις και σχετίζονται τόσο με την αριθμητική (διάταξη αριθμών, κλάσματα, αριθμητικές πράξεις) όσο και με την άλγεβρα (ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά). Η διαπίστωση αυτή έρχεται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας των Οικονόμου, Σακονίδη και Τζεκάκη (2000) που διενεργήθηκε σε 495 μαθητές της Στ΄ Δημοτικού και 560 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου των σχολείων των νομών Έβρου, Ιωαννίνων και Θεσσαλονίκης σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές γνώσεις σε βασικούς άξονες των ΑΠΣ του μαθήματος των Μαθηματικών που αποκτούν οι μαθητές στο τέλος του Δημοτικού και του Γυμνασίου εξακολουθούν να παραμένουν χαμηλές.

Επίσης, η εφαρμογή της συγκεκριμένης εκπαιδευτικής παρέμβασης όπως προκύπτει από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων στην τρίτη ομάδα ερωτήσεων στο pre–test και στο post–test βελτίωσε σημαντικά τις γνώσεις των μαθητών σχετικά με την κατανόηση των φυσικομαθηματικών συνιστωσών της Μουσικής επιβεβαιώνοντας την 3η ερευνητική υπόθεση. Εκτός από τη συσχέτιση διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, ο σχεδιασμός της δράσης στηρίχθηκε και στην έννοια της διαχρονικότητας. Για το λόγο αυτό εξετάστηκε η ιστορική εξέλιξη των μουσικών συστημάτων παράλληλα με την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης δημιουργώντας έτσι τις κατάλληλες προϋποθέσεις προκειμένου οι μαθητές να συσχετίσουν αλλά και να ανακαλύψουν την αλληλένδετη ιστορική και επιστημολογική σχέση της Μουσικής και των Μαθηματικών και ταυτόχρονα να αντιληφθούν την εξελικτική πορεία των δύο αντικειμένων από την αρχαιότητα μέχρι τη σύγχρονη εποχή. Κατά συνέπεια, η ολιστική προσέγγιση της μουσικής γνώσης στην οποία βασίστηκε ο σχεδιασμός του εκπαιδευτικού υλικού παράλληλα με τη μαθηματική ερμηνεία της οδήγησε σε βαθύτερη γνώση και καλύτερη κατανόησή της και αυτό αποτυπώθηκε με την καλή επίδοση που σημείωσαν οι μαθητές στην επιπρόσθετη ερώτηση που περιλαμβανόταν μόνο στο post–test.

Ένα ακόμη ενδιαφέρον εύρημα από τη συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων του pre–test και του post–test είναι η βελτίωση της ικανότητας των μαθητών να αξιοποιούν τις μαθηματικές τους γνώσεις και δεξιότητες στην επίλυση μουσικών προβλημάτων. Το εύρημα αυτό έρχεται σε συμφωνία με την 4η ερευνητική υπόθεση. Αυτό συμβαίνει γιατί μέσα από τις μουσικο–μαθηματικές δραστηριότητες οι μαθητές δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των μουσικών τους εμπειριών και των μαθηματικών εννοιών που συνεπάγονται αυτές, επιτυγχάνοντας έτσι τη μεταφορά γνώσης από τον ένα τομέα στον άλλο, κάτι που είναι απαραίτητο για να επιτευχθεί η μάθηση (Catterall, 2005).

Η σύνδεση όμως της Μουσικής με τα Μαθηματικά στην οποία βασίστηκε το συγκεκριμένο διαθεματικό πρόγραμμα πέρα από τα οφέλη που επέφερε σε γνωστικό επίπεδο στους μαθητές επηρέασε και τη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά. Η διαπίστωση αυτή έρχεται σε συμφωνία με την 5η ερευνητική υπόθεση. Από τη συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων του pre–test και post–test διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές, μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης, ενδυνάμωσαν την αυτοπεποίθησή τους απέναντι στα Μαθηματικά, αναγνώρισαν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στην καθημερινή τους ζωή, ενώ για κάποιους μαθητές στάθηκε αφορμή για να δουν θετικά και με άλλο ενδιαφέρον το μάθημα των Μαθηματικών. Επιπλέον, ένας μεγαλύτερος αριθμός μαθητών αυτοαξιολόγησαν θετικότερα τις μαθηματικές τους ικανότητες μετά την ολοκλήρωση των διαθεματικών διδασκαλιών. Ανάλογα είναι τα αποτελέσματα της έρευνας που έκαναν οι An, Kulm και Ma (2008) σύμφωνα με την οποία οι μαθητές καλλιέργησαν θετικότερη στάση απέναντι στα Μαθηματικά μέσω της διαθεματικής διδασκαλίας τους με τη Μουσική και ειδικότερα μέσα από τις δραστηριότητες μουσικής σύνθεσης. Η μεταστροφή αυτή των συναισθημάτων οφείλεται στο γεγονός ότι η νέα αυτή διδακτική πρόταση προσέφερε νέες εμπειρίες για τους μαθητές δημιουργώντας έτσι ένα ευχάριστο κλίμα στην τάξη μέσα στο οποίο η συντριπτική τους πλειοψηφία έδειξε πραγματικό ενδιαφέρον και εργάστηκε με καλή διάθεση τόσο σε ατομικό όσο και σε ομαδικό επίπεδο.

Τέλος, μετά τη διαθεματική παρέμβαση παρατηρήθηκε σημαντική αλλαγή στις αντιλήψεις και στις αναπαραστάσεις που είχαν οι μαθητές για τα Μαθηματικά επιβεβαιώνοντας έτσι την 6η ερευνητική υπόθεση. Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι οι στερεότυπες αντιλήψεις που είχαν για τα Μαθηματικά περιορίστηκαν αρκετά μετά την παρέμβαση και ταυτόχρονα διαμόρφωσαν νέες νοητικές αναπαραστάσεις για την έννοια των Μαθηματικών συνδέοντάς τα με τη χρησιμότητά τους στην καθημερινή ζωή. Αντίστοιχη μεταβολή καταγράφηκε και στις αντιλήψεις των μαθητών αναφορικά με τη διασύνδεση των Μαθηματικών και της Μουσικής. Μετά την παρέμβαση, οι μαθητές ήταν σε θέση να συσχετίζουν τα δύο αντικείμενα όχι μόνο στην προφανή μαθηματική δομή του μουσικού ρυθμού αλλά έκαναν διασυνδέσεις σε πιο πολύπλοκο επίπεδο, όπως για παράδειγμα στους μαθηματικούς κανόνες που διέπουν την αρμονία και τα μουσικά φαινόμενα. Οι διαπιστώσεις αυτές έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της προαναφερθείσας έρευνας των An, Kulm και Ma (2008). Ωστόσο, στην παρούσα έρευνα φαίνεται ότι οι αντιλήψεις των μαθητών για τη διασύνδεση της Μουσικής και των Μαθηματικών αφορούσαν κατά κύριο λόγο εξειδικευμένα θέματα που άπτονταν της μουσικής τους πρακτικής κάτι που δεν αποτυπώθηκε στην έρευνα των An, Kulm και Ma (2008). Η διαφοροποίηση αυτή προφανώς οφείλεται στα ιδιαίτερα μαθησιακά περιβάλλοντα των Μουσικών Σχολείων στα οποία έμφαση δίνεται σε διάφορες εκφάνσεις της Μουσικής (θεωρία, μουσική πρακτική κ.α.).

Εν κατακλείδι, ένα διαθεματικό πρόγραμμα που συνδυάζει τη Μουσική και τα Μαθηματικά φαίνεται ότι δημιουργεί το κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον σε μουσικές και μαθηματικές εμπειρίες με αναμενόμενο αποτέλεσμα τη διευκόλυνση της κατανόησης των δύο αντικειμένων.

Προτάσεις

Στην προσπάθεια αναζήτησης καινοτόμων διδακτικών προτάσεων, ο συνδυασμός των Μαθηματικών και της Μουσικής μπορεί να αποτελέσει τον άξονα σχεδιασμού διαθεματικών εκπαιδευτικών προγραμμάτων. Λαμβάνοντας υπόψη τα πορίσματα της παρούσας έρευνας, θα ήταν σκόπιμο να διερευνηθεί περαιτέρω η εφαρμογή του εκπαιδευτικού υλικού σε μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες μαθητών. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε η ιστορική εξέλιξη των μουσικών συστημάτων να διερευνηθεί μέσω πολυπλοκότερων μαθηματικών εννοιών και εργαλείων. Για παράδειγμα, για την υποδιαίρεση της οκτάβας σε 12 ίσα μέρη (δηλαδή τα ημιτόνια) απαιτείται η χρήση των λογάριθμων η διδασκαλία των οποίων αποτελεί μέρος της διδακτέας ύλης του ΑΠΣ των Μαθηματικών του Λυκείου.

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση της έρευνάς μας θα ήταν επίσης η χρήση των Μαθηματικών για τη μελέτη και ανάλυση του ελληνικού μουσικού πολιτισμού (παραδοσιακή ελληνική Μουσική και Βυζαντινή Μουσική) με απώτερο στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές τις αρχαιοελληνικές ρίζες του και να τον συγκρίνουν με τη δυτική ευρωπαϊκή Μουσική έχοντας ως εργαλείο ανάλυσης τα Μαθηματικά. Επιπλέον, στα πλαίσια του μαθήματος της Οργανοχρησίας αλλά και στο μάθημα των Ατομικών Μουσικών Οργάνων θα ήταν χρήσιμο να σχεδιαστεί ένα διδακτικό υλικό που να στοχεύει με τη βοήθεια των Μαθηματικών στο να αναδείξει τις κατασκευαστικές διαφορές των οργάνων που μαθαίνουν οι ίδιοι οι μαθητές στο Μουσικό Σχολείο και τα οποία ακολουθούν τόσο το συγκερασμένο (π.χ. πιάνο) όσο και το ασυγκέραστο σύστημα (π.χ. ταμπουράς).

Τέλος, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η διενέργεια μίας αντίστοιχης έρευνας σε μεγαλύτερη κλίμακα, στο σχεδιασμό της οποίας θα ήταν χρήσιμο να συμμετέχουν και άλλοι εκπαιδευτικοί της ίδιας σχολικής μονάδας.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Αλαχιώτης, Σ. (2002). Για ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων* - Ειδικό αφιέρωμα στη διαθεματικότητα, 7, σ. 7-18.

Γιάννου, Δ. (1995). *Ιστορία της Μουσικής. Σύντομη γενική επισκόπηση,* 1ος τόμος (μέχρι τον 16ο αιώνα). Θεσσαλονίκη: University Studio Press.

Διονυσίου, Ζ. (2007). Ο εκπαιδευτικός της Μουσικής σε διαθεματικές δράσεις. *Μουσική Εκπαίδευση,*17, σ. 27-45.

Θεοφιλίδης, Χ., (1997). *Διαθεματική προσέγγιση της διδασκαλίας* (β΄ έκδοση). Αθήνα: Γρηγόρης.

Καϊμάκης, Π. (2004). *Φιλοσοφία και Μουσική. Η Μουσική στους Πυθαγορείους, τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη και τον Πλωτίνο.* Αθήνα: Μεταίχμιο.

Nef, K. (1985). *Ιστορία της μουσικής*. (Μετ. Ανωγειανάκης, Φ.). Αθήνα: Βότσης.

Κεΐσογλου Σ, Σπύρου Σ. (2000). *Μαθηματικά και Μουσική: πορείες παράλληλες*. 17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας Τα Μαθηματικά κλειδί ανάπτυξης σ. 387-397. Αθήνα.

Κολιάδης, Ε. (2002). *Γνωστική ψυχολογία- Γνωστική Νευροεπιστήμη και εκπαιδευτική πράξη. Τόμος Δ. Μοντέλο επεξεργασίας πληροφοριών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κουτσουβάνου,Ε. (2003). *Προγράμματα Προσχολικής Εκπαίδευσης και η Διαθεματική Διδακτική Προσέγγιση*. Αθήνα: Οδυσσέας.

Κωνσταντινίδης Α., Παρισινός Μ., Γαγάτσης Α- Χ. (2007). Μαθηματικά και Μουσική: η σχέση που συνδέει τις δύο επιστήμες και οι αντιλήψεις των δασκάλων για τη Μουσική αγωγή και τα Μαθηματικά στα δημοτικά σχολεία. Στο Φτιάκα, Ε., Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., & Μοδέστου, Μ. (2006). *Η Σύγχρονη Εκπαιδευτική Έρευνα στην Κύπρο,* Πρακτικά 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, 2-3 Ιουνίου, 2006, Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου. σ. 179-190.

Λεμονίδης, Χ. (2010). Τα Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Θεωρητικές αρχές και επιλογές για τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της Α’ και Γ’ τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Συλλογικός τόμος. *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρητικές και Ερευνητικές Προσεγγίσεις*. Εκδ. Σακονίδης.

Μαρκέα, Γ. Γ., (2008). Αγκαλιάζοντας το Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για τη Μουσική με το Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα στο *Σύγχρονες Τάσεις και Δυναμικές της Σχολικής Ψυχολογίας στην Εκπαίδευση και στη Μουσική Παιδαγωγική, Πρακτικά Συμποσίου*, (Επιμ. Αργυρίου Μ.), Αθήνα: Εκδόσεις Διάπλαση, σ. 59-69.

Ματσαγγούρας, Η. (2002). Διεπιστημονικότητα, διαθεματικότητα και ενιαιοποίηση στα νέα προγράμματα σπουδών: Τρόποι οργάνωσης της σχολικής γνώσης. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων* - Ειδικό αφιέρωμα στη διαθεματικότητα, 7, σ. 19-35.

Οικονόμου, Α., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2000). Αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων μαθητών Στ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου. Στο Μ. Τζεκάκη & Ι. Δεληγιωργάκος (Επιμ.), *Έρευνα για Εναλλακτικές Διδακτικές Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σ. 21-39). Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ.

Παπαζαρής, Α. (2007). Διαθεματικότητα και Μουσική Αγωγή. *Μουσική Εκπαίδευση.* 17, σ. 19-26.

Πατσαντζόπουλος Κ., Μαγαλιού Μ.(2002). *Παρουσίαση του νέου Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Σπουδών Μουσικής Αγωγής με επικέντρωση στην προσχολική και πρωτοσχολική ηλικία και η σχέση του με τις κυριότερες μουσικοπαιδαγωγικές προσεγγίσεις*, Πρακτικά 3ου Συνεδρίου Ε.Ε.Μ.Ε., Βόλος.

Σκούρας, Α. Σ. (2002). Εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία των Μαθηματικών με διαθεματικές προσεγγίσεις, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*–Ειδικό αφιέρωμα στη διαθεματικότητα, 7, σ. 102-111.

Σπυρίδης, Χ. (2009). *Η Μουσική των Σφαιρών των Πυθαγορείων.* Ομιλία στον Πανελλήνιο Διαγωνισμό Αστρονομίας για μαθητές γυμνασίου–λυκείου της Ενώσεως Ελλήνων Φυσικών (ΕΕΦ), Αθήνα, 4 Δεκεμβρίου 2009.

Σπυρίδης, Χ. (2005). *ΚΥΒΟΣ: Μαθηματική δομή της αρχαίας ελληνικής μουσικής*. Εισήγηση στο Συνέδριο «Η ελληνική Μουσική στην εποχή της παγκοσμιοποίησης», στο πλαίσιο των «Ελληνικών Μουσικών Γιορτών: Πρώτος Κύκλος», Αθήνα (Μέγαρο Μουσικής Αθηνών), 7-9 Μαΐου 2005. Συνδιοργάνωση: Κρατική Ορχήστρα Αθηνών, Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Σπυρίδης, Χ. (2004). *Το μουσικό διάστημα κατά τον Αριστόξενο.* Εισήγηση στο Εθνικό Συνέδριο Ελληνικού Ινστιτούτου Ακουστικής, Ακουστική 2004, Θεσσαλονίκη 2004.

Σπυρίδης, Χ. (2001). *Μουσικό διάστημα: μήκος ή λόγος μηκών;* (Ανακοίνωση) Θ' Πανελλήνιο Συνέδριο Φυσικής, Χίος, 1-4 Νοεμβρίου 2001.

Σπυρίδης, Χ. (1997). *Πυθαγόρειες Αναλογικότητες (Μεσότητες): Οι γεννήτορες της αρχαίας ελληνικής Μουσικής διαστηματικής*. Επιστημονική Επετηρίδα της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών, τόμος ΛΑ΄ (1996-1997), σ. 215-230.

Τζεκάκη, Μ. (2000). *Εναλλακτικές διδακτικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών,* Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, Πανελλήνιο Συνέδριο, Έρευνα για την Ελληνική Εκπαίδευση, 21-23 Σεπτεμβρίου, 2000.

ΥΠΕΠΘ – Π.Ι. (2003). *Δ.Ε.Π.Π.Σ.. Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (τόμοι Α' και Β')*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Π.Ι.

ΥΠ.Ε.Π.Θ. 3345/88 (ΦΕΚ 649 Β'). Ίδρυση και λειτουργία Μουσικών Σχολείων.

Φουντοπούλου, Μ-Ζ. (2005). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών (ΔΕΠΠΣ): ψυχολογική θεμελίωση και μαθησιακή τεκμηρίωση. *Εφαρμοσμένη Παιδαγωγική, 2,* Αθήνα.

Χιοκτουρίδη, Κ., Χατζηκυριάκου Κ. & Ασημόπουλος Σ. (2015α). *Μια πρόταση διεπιστημονικής προσέγγισης της Μουσικής και των Μαθηματικών στην Ε' τάξη του Δημοτικού Σχολείου,* Πρακτικά του 6ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, 4-6 Δεκεμβρίου 2015.

Χιοκτουρίδη, Κ., Χατζηκυριάκου, Κ. & Ασημόπουλος, Σ. (2015β). *Μια πρόταση κοινής προσέγγισης εννοιών της Μουσικής, των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών στο Δημοτικό Σχολείο,* Πρακτικά του 9ου Συνεδρίου της ΕΝΕΦΕΤ, Θεσσαλονίκη, 8-10 Μάϊου 2015.

Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Μ., & Πολιτίδου Ε. (2006). *Μία περίπτωση Έρευνας Δράσης Διδασκαλίας Μαθηματικών και Μουσικής.* Ευκλείδης Γ΄.

Ξενόγλωσση

Abdounur, O. J. (2008). An exhibition as a tool to approach didactical and historical aspects of the relationship between mathematics and music. In E. Velikova, & A. Andžāns (Eds.), Promoting creativity for all students in mathematics education: the 11th international congress on mathematical education, Monterrey, Mexico, July 6-13, 2008 (pp. 112-119). Rousse: University of Rousse.

Abdonour, O. (2012). The role of analogies between mathematics and music in creativity in the context of mathematics education. 12th International Congress on Mathematical Education.Creativity in Mathematics Education Seoul, Korea July 8–15, 2012.

Abdounur, O. J. (2015). The Emergence of the Idea of Irrationality In Renaissance Theoretical Music Contexts, Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences, 3 (2). pp. 155–172.

Altrichter, H., Posch, P. & Somekh, B. (2001) Οι Εκπαιδευτικοί Ερευνούν το Έργο τους. Μια εισαγωγή στις Μεθόδους της Έρευνας Δράσης, Δεληγιάννη, Μ. (μτφρ), Αθήνα: Μεταίχμιο.

An. S., Kulm. G.O., Ma. T. (2008). The Effects of a Music Composition Activity on Chinese Students’ Attitudes and Beliefs towards Mathematics: An Exploratory Study, Journal of Mathematics Education, 1(1), pp. 96-113.

An, S. A., & Capraro, M. M. (2011). Music-math integrated activities for elementary and middle school students. Irvine, CA: Education for All.

An, S. A. (2012). The effects of music-mathematics integrated curriculum and instruction on elementary students’ mathematics achievement and dispositions. Texas A&M University, College Station στο An, S. A, Capraro, M. M. &, Tillman, D. (2013).

An, S. A, Capraro, M. M. &, Tillman, D. (2013). Elementary teachers integrate music activities into regular mathematics lessons: Effects on students’ mathematical abilities. Journal for Learning through the Arts, 9 (1), 1 – 20.

An, S. & Tillman, D. (2014). Elementary Teachers’ Design of Arts Based Teaching Investigating the Possibility of Developing Mathematics-Music Integrated Curriculum. Journal of Curriculum Theorizing. 30 (2), pp. 20-38.

An, S. & Tillman, D. (2015). Music activities as a meaningful context for teaching elementary students mathematics: a quasi-experiment time series design with random assigned control group. European Journal of Science and Mathematics Education, 3 (1), pp. 45-60.

Assayag, G., Feichtinger, H. G., Rodrigues J. F. (2002). Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum Kindle Edition. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Barrett, J. (2001). Interdisciplinary work and musical integrity. Music Educators Journal, 87(5), pp 27–31.

Barrett, M., (2002). Toward a "situated" view of the Aesthetic in music education. J. Aesthetic Educ. 36(3), pp. 67-77.

Barbour, J. M. (1951). Tuning and Temperament: A Historical Survey. East Lansing Michigan State College Press.

Battersby, S. L., & Cave, A. (2014). Preservice Classroom Teachers' Preconceived Attitudes, Confidence, Beliefs, and Self-Efficacy Toward Integrating Music in the Elementary Curriculum. National Association for Music Education. 32(2), pp. 52–59.

Beer, M. (1998). How do Mathematics and Music Relate to Each Other? Brisbane, Queensland, Australia: East Coast College of English.

Benson, D. (2008). Music: A Mathematical Offering. Cambridge University Press.

Bibby, N. (2003). Tuning and temperament: closing the spiral in Fauvel, J., Flood, R., Wilson, R. (2003). Music and Mathematics From Pythagoras to Fractals. Oxford: Oxford University Press. pp. 13-28

Bresler, L. (1995). The subservient, co-equal, affective, and social integration styles and their implications for the arts. Arts Education Policy Review, 96(5), pp. 31–38.

Burnaford, G. (2007). Arts Integration Frameworks, Research Practice. A Literature Review. Washington: Arts Education Partnership.

Catterall, J. (2005). Conversation and silence: Transfer of learning through the arts. Journal for Learning through the Arts, 1(1), pp. 1-12.

Catterall, J. S. (1998). Does experience in the arts boost academic achievement? A response to Eisner. Art Education, 51(4), pp.6–11.

Catterall, J., & Waldorf, L. (1999). Chicago Arts Partnerships in Education summary evaluation. In E. Fiske (Ed.), Champions of change: The impact of the arts on learning (pp. 47-62). The Arts Education Partnership and The President's Committee on the Arts and the Humanities. Washington, DC.

Chrysostomou, S. (2004). "Interdisciplinary Approaches in the New Curriculum in Greece: A Focus on Music Education." Arts Education Policy Rev. 105 (5), pp. 23–29.

Christensen, T. (2008). The Cambridge History of Western Music Theory. Cambridge University Press.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας (μτφρ. Χ. Μητροπούλου & Μ. Φιλοπούλου). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Costa-Giomi, E. (2004). Effects of three years of piano instruction on children's academic achievement, school performance and self-esteem. Psychology of Music, 32(2), pp. 139-152.

Cox, H. A., & Stephens, L. J. (2006). The effect of music participation on mathematical achievement and overall academic achievement of high school students. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 37(7), pp. 757.

Cumming, J. (1994). Educating young adolescents: targets and strategies for the 1990s. Curriculum Perspectives,14(3), pp. 41-44.

Fauvel, J., Flood, R., Wilson, R. (2003). Music and Mathematics From Pythagoras to Fractals. Oxford: Oxford University Press.

Ferreira, M. P. (2002). Proportions in Ancient and Medieval Music. In Assayag, G., Feichtinger, H. G., Rodrigues, J. F. (2002). Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum Kindle Edition. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, pp. 1-26.

Field J. V., (2003). Musical cosmology: Kepler and his readers in Fauvel, J., Flood, R., Wilson, R. (2003). Music and Mathematics From Pythagoras to Fractals. Oxford: Oxford University Press. pp. 29-43.

Fitzpatrick, K. R. (2006). The effect of instrumental music participation and socioeconomic status on Ohio fourth-, sixth-, and ninth-grade proficiency test performance. Journal of Research in Music Education, 54(1), pp. 73-84.

Forster, C. (2010). Musical Mathematics - On the art and science of acoustic instruments. Chronicle Books.

Fuller, S. (2008). Organum − discantus − contrapunctus in the Middle Ages. In The Cambridge History of Western Music Theory. Cambridge University Press. pp. 477-502.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. Mathematics in School, 27(4), pp. 48 – 51.

Gershon. W. S. & Ben-Horin, O. (2014). Deepening Inquiry: What Processes of Making Music Can Teach Us about Creativity and Ontology for Inquiry Based Science Education. International Journal of Education & the Arts, 15(19).

Halpern, J. (1992). Effects of historical and analytical teaching approaches on music appreciation. Journal of Research in Music Education, 40, p.46.

Herlinger J. (2008). Medieval canonics. In The Cambridge History of Western Music Theory. Cambridge University Press. pp. 168-192 .

Hilton, C., Saunders, J., Henley, J., Henriksson-Macaulay, L., Welch G. (2015). EMP Maths Review of Literature European Music Portfolio (EMP) – Maths: Sounding Ways Into Mathematics A Review of Literature. UCL Institute of Education, London.

Johnson, G.L. & Edelson, R.J. (2003). Integrating music and mathematics in the elementary classroom. Teaching Children Mathematics, 9 (8), pp 474-479.

Ivanov, V. K., & Geake, J. G. (2003). The Mozart Effect and primary school children. Psychology of Music, 31(4), pp. 405-413.

Lapp, D. (2003). The Physics of Music and Musical Instruments. Massachusetts: Wright Center for Science Education Tufts University.

Lehman B., (2005). Bach's Extraordinary Temperament: Our Rosetta Stone. Early Music,33(1), pp. 3-23.

Lowe, M. (2010). Teaching music history today: Making tangible connections to here and now. Journal of Music History Pedagogy, 1(1), pp. 45-59.

Loy, G., (2006). Musimathics: The Mathematical Foundations of Music (Volume 1). MIT Press.

Marshall, J. (2005). Connecting art, learning, and creativity: A case for curriculum integration. Studies in Art Education, 46(3), pp. 227-241.

Mathiesen, T. J. Greek music theory στο Christensen, T., (2008).The Cambridge History of Western Music Theory. Cambridge University Press. pp. 109- 135.

Phillips, D. & Carr, K. (2010). Becoming a teacher through action research: Process, Context, and Self-Study (2nd ed.). NY: Routledge.

Popescu C. & Goldbach F. (2011). The relationship between mathematics – an exact science – and the musical phenomenon. Journal of Science and Arts 1(2), pp. 79-84.

Rasch, R. (2008). Tuning and Temperaments. In Christensen, T. (2008).The Cambridge History of Western Music Theory. Cambridge University Press.

Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, K. N. (1995). Listening to Mozart enhances spatial-temporal reasoning: Toward a neuropsychological basis. Neuroscience Letters, 185, pp. 44-47.

Rogers, G.L. (2004). Interdisciplinary Lessons in Musical Acoustics: The Science-Math Music Connection. Music Educators Journal. 91 (1), pp 25-30

Schmidt-Jones, C., (2015). Sound, Physics and Music. CreateSpace Independent Publishing Platform

Shilling, W. A. (2002). Mathematics, music, and movement: Exploring concepts and connections. Early Childhood Education Journal, 29, pp. 179-184.

Steck D. A., (2014). Musical Temperament. University of Oregon available online at http://steck.us/teaching (revision 0.2.3, 24 November 2015).

Still, K., & Bobis, J. (2005). The integration of mathematics and music in the primary school classroom. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Ed) Proceedings of Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Building Connections: Theory, Research and Practice (pp.712-719). Melbourne, (7-9th July 2005).

Tzanakis, C. (2002). On the relation between Mathematics and Physics in undergraduate teaching, in Vakalis, I., Hughes Hallett, D., Kourouniotis, Ch., Quinney, D., Tzanakis, C. (eds), Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching and Learning of Mathematics (at the undergraduate level), John Wiley & Sons Inc. New York, ISBN 0-471-46332-9 (in electronic form).

Tzanakis, C. & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. For the Learning of Mathematics, 20(1), pp. 44 – 55.

Veblen, K. K., & Elliott, D. J. (2000). Integration for or against? General Music Today, 14(1), pp. 4-8.

Wardhaugh B. (2008). Musical logarithms in the seventeenth century: Descartes, Mercator, Newton . Historia Mathematica, 35, pp. 19–36.

Wright, D., (2009). Mathematics and Music. American Mathematical Society.

Yang, S. S. (2012). Singing Gesualdo: Rules of engagement in the music history classroom. Music History Pedagogy, 3(1), pp. 39-55.

Παράρτημα 1

Κατάλογος ηχητικών παραδειγμάτων

Σκέφτομαι Μουσικά: Ακούω και αναλύω την πολυφωνία του πρώιμου Μεσαίωνα – Φύλλο Εργασίας Α2

α/α	Τίτλος	Συνθέτης	Πηγή
1	Dies Irae	Γρηγοριανό μέλος	https://www.youtube.com/watch?v=Dlr90NLDp-0
2	Organum	Musica Enchiriadis	https://www.youtube.com/watch?v=E6CVxtPcW78
2	Messe de Notre Dame	Guillaume de Machaut	http://www.hyperion-records.co.uk/dw.asp?dc=W9811_66358 Hilliard Ensemble, σε πυθαγόρειας απόδοσης ερμηνείας
3	Jesu, bleibet meine Freude BWV 147	J. S. Bach	https://www.youtube.com/watch?v=d9EN27Zh_vg
4	Dies irae Requiem in D minor (K.626)	Mozart	https://www.youtube.com/watch?v=sPlhKP0nZII

Σκέφτομαι Μουσικά: Ακούω και αναλύω την πολυφωνία του πρώιμου Μεσαίωνα – Φύλλο Εργασίας Α3

α/α	Τίτλος	Συνθέτης	Πηγή
1	Organum duplum	Leonin	https://www.youtube.com/watch?v=Gq5B3M4jRtQ
2	Quant en moy, Amour et biauté, Amara valde, Motet for 3 voices	Guillaume de Machaut	https://www.youtube.com/watch?v=qeJiFXlvxqQ
3	Motet for 5 voices	G. P. da Palestrina	https://www.youtube.com/watch?v=PQo_LirQY-k
4	Motet BWV 227	J. S. Bach	https://www.youtube.com/watch?v=e8i47kT5G7g

Παράρτημα 2

Ερευνητικά εργαλεία

Ερωτηματολόγιο καθηγητών (Προκαταρκτικής έρευνας)

Επαγγελματικά στοιχεία
Βασικές σπουδές:………………………………………………………………..
Επιπλέον σπουδές (μεταπτυχιακό, επιμόρφωση):…………………………………...
……………………………………………………………………………………….
Χρόνια υπηρεσίας (1-5, 6-10, 11-15, 16-20, 21 και πάνω):……………………………

Διαπιστώσεις από τη διδασκαλία του μαθήματος της Μουσικής/ Μαθηματικών
Ερώτηση 1: Ποια είναι τα συχνότερα προβλήματα που συναντάτε κατά την διδασκαλία σας και πώς προσπαθείτε να τα αντιμετωπίσετε;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 2: Πώς μεθοδεύετε τη διδασκαλία του μαθήματός σας (πχ. χρήση διερευνητικού τεστ, ανακεφαλαίωση κ.α.) ;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 3: Πιστεύετε ότι η διδασκαλία της Μουσικής σε συνδυασμό με τη διδασκαλία των Μαθηματικών θα μπορούσε να βοηθήσει το διδακτικό σας έργο; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 4: Θεωρείτε ότι διαθέτετε επάρκεια επιστημονική και παιδαγωγική προκειμένου να διδάξετε διαθεματικά τη Μουσική και τα Μαθηματικά; Αν όχι, σε ποιους τομείς θεωρείτε ότι χρειάζεστε υποστήριξη (γνωστικό αντικείμενο, διδακτική μεθοδολογία, άλλο τι);
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 5: Ποιες προτάσεις θα κάνατε προκειμένου η συνδιδασκαλία της Μουσικής με τα Μαθηματικά να είναι ευχάριστη και αποτελεσματική για τους μαθητές;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερωτηματολόγιο μαθητών Γ΄ Γυμνασίου (Προκαταρκτικής έρευνας)

Γραφώ τη γνώμη μου για το μάθημα των Μαθηματικών και της Μουσικής!

Ονομ/μο : ....
Τμήμα: ....
Ημερ/νία : ....

Απαντήστε σύντομα τις ακόλουθες ερωτήσεις:
Ερώτηση 1: Ποια είναι η χρησιμότητα του μαθήματος της Μουσικής και ποια των Μαθηματικών;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 2: Ποιες δυσκολίες συναντάς στο μάθημα της Μουσικής και ποιες στο μάθημα των Μαθηματικών;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 3: Πιστεύεις ότι η Μουσική συνδέεται με τα Μαθηματικά; Αν ναι, με ποιο τρόπο; Αιτιολόγησε την απάντησή σου.
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Ερώτηση 4: Ποια είναι η γνώμη σου σχετικά με τη χρησιμοποίηση της Μουσικής ως μέρος της διδασκαλίας του μαθήματος των Μαθηματικών;
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Α) Τεστ Γνώσεων και Δεξιοτήτων

1) Τεστ Γνώσεων και Δεξιοτήτων των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου (Pre–test)

Οι γνώσεις μου και οι δεξιότητες για το μάθημα της Μουσικής και των Μαθηματικών

Ενεργητική Ακρόαση

1) Θα ακούσετε πέντε συνολικά μελωδικά διαστήματα. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση για κάθε παράδειγμα.

Παραδείγματα	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Διαστήματα	2ας Αυξ.	ταυτοφωνία	$2^{ας}$ μ	$4^{ης}$ K	$8^{ης}$
	$4^{ης}$ K	$3^{ης}$ M	4ης K	$2^{ας}$ M	$6^{ης}$ M
	$7^{ης}$ ελατ.	$3^{ης}$ μ	$4^{ης}$ M	$6^{ης}$ μ	$5^{ης}$ ελατ.
	οκτάβα	$5^{ης}$ K	$8^{ης}$	$4^{ης}$ Αυξ	$7^{ης}$ μ

2) Θα ακούσετε πέντε συνολικά **αρμονικά** διαστήματα. Στη συνέχεια θα τα ακούσετε για δεύτερη φορά. Να τα χαρακτηρίσετε είτε ως **Σύμφωνα (Σ)** είτε ως **Διάφωνα (Δ).**

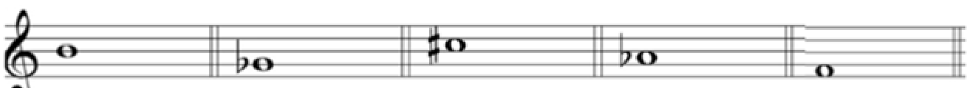
1ο διάστημα	**2ο διάστημα**	**3ο διάστημα**	**4ο διάστημα**	**5ο διάστημα**

Θεωρία της Μουσικής

3) Να **αναγνωρίσετε** σε μέγεθος και είδος τα παρακάτω **μελωδικά** διαστήματα.

4) Να **κατασκευάσετε** τα παρακάτω **αρμονικά** διαστήματα, έτσι ώστε η νότα που θα προσθέσετε να σχηματίζει με το δοσμένο φθόγγο το ζητούμενο αρμονικό διάστημα.

Τα σύμβολα ↑ και ↓ δηλώνουν αν το διάστημα είναι ανιόν ή κατιόν αντίστοιχα δηλαδή αν ο δεύτερος φθόγγος είναι ψηλότερος ή χαμηλότερος από τον πρώτο. Ποια είναι σύμφωνα και ποια διάφωνα;



$3^{η}$ μ ↓ $6^{η}$ M ↑ $5^{η}$ K ↓ $8^{η}$ K ↑ $4^{η}$ K ↑

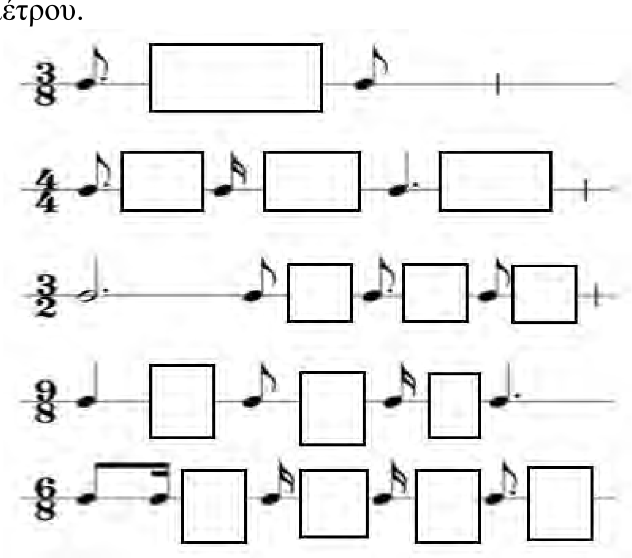
5) Βάλτε σε σειρά τις ακόλουθες ιστορικές περιόδους της Μουσικής ξεκινώντας από την αρχαιότερη: Κλασικισμός, Αναγέννηση, Μπαρόκ, Μεσαίωνας, Ρομαντισμός.
α)…………………………………
β)…………………………………
γ)…………………………………
δ)…………………………………
ε)…………………………………

6) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε όρο της πρώτης στήλης την επεξήγηση που αντιστοιχεί της δεύτερης στήλης:

Organum	Το πρώτο εγχειρίδιο στο οποίο καταγράφεται η πρώτη μορφή πολυφωνικής Μουσικής
Γρηγοριανό μέλος	Μονοφωνικοί θρησκευτικοί ύμνοι
Musica enchiriadis	Συνθέσεις του J.S.Bach για το νέο πληκτροφόρο όργανο
24 κομμάτια για το *«Καλώς Συγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο»*	Πολύ σημαντικό πολυφωνικό είδος της Ars Nova ($14^{ος}$ αιώνας μ.Χ.)
Μοτέτο	Πρώιμο είδος πολυφωνικής Μουσικής

Μαθηματικά της Μουσικής

7) Να συμπληρώσετε τα ακόλουθα μέτρα όπως στο παράδειγμα έτσι ώστε η αξία κάθε μέτρου να είναι **ισοδύναμη με το κλάσμα** που αναγράφεται στην αρχή του κάθε μέτρου.



8) Για κάθε ένα από τα παρακάτω πέντε μετρικά σχήματα:

I. να συμπληρώσετε το **κλάσμα** που λείπει στην αρχή του μέτρου όπως στο παράδειγμα.

II. να τα **κατατάξετε σε σειρά** ξεκινώντας από το μετρικό σχήμα που περιλαμβάνει τις μεγαλύτερες ρυθμικές αξίες στο μετρικό σχήμα που περιλαμβάνει τις μικρότερες ρυθμικές αξίες (πχ. παράδειγμα 1> παράδειγμα 4>…)

III. Έχοντας ως μέτρο σύγκρισης τη ρυθμική αξία του ενός ολόκληρου, να τα τοποθετήσετε στην κατάλληλη στήλη ανάλογα με τον αν η συνολική τους ρυθμική αξία είναι >,=, < από εκείνη του **παρεστιγμένου μισού** 𝅗𝅥. **.**

< 𝅗𝅥. (παρεστιγμένο μισό)	= 𝅗𝅥. (παρεστιγμένο μισό)	> 𝅗𝅥. (παρεστιγμένο μισό)

9) Κυκλώστε τα μουσικά παραδείγματα που ενώ έχουν **διαφορετικά μετρικά (ρυθμικά) κλάσματα** είναι **μαθηματικά ισοδύναμα**.

1.

2.

3.

Bach. *Jesu, Joy of Man's Desiring* (melody shown) — Martha Goldstein, piano. *Pandora* (public domain)

4.

Bach. Minuet in G Major

5.

Bach. Gigue from the French Suite in G Major

10) Να κάνετε τις ακόλουθες πράξεις:

I. $\frac{5}{2} \div \frac{8}{9} =$

II. $\frac{5}{2} + \frac{8}{9} =$

III. $1{,}4 - \frac{5}{8} =$

IV. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{2} =$

V. $1 - \frac{6}{9} =$

11) Βάλτε στη σειρά από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\frac{27}{16}$ 1,5950 1 $\frac{5}{2}$ 1,124 1,4142 $\frac{7}{3}$ 1,0595

Να βρείτε τη θέση τους πάνω στην ευθεία των αριθμών.

---|0-----------------------------|1-----------------------------|2-----

12) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σημειώνοντας Χ στην κατάλληλη στήλη:

<table>
<tr><th>Τα ποσά είναι:</th><th>ανάλογα</th><th>αντιστρόφως ανάλογα</th><th>κανένα από τα δύο</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><td>40</td><td>50</td><td>70</td><td>90</td></tr><tr><td>100</td><td>125</td><td>175</td><td>225</td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td><table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

13) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστές ή λανθασμένες σημειώνοντας Χ στην αντίστοιχη στήλη:

		Σωστό	**Λάθος**
i.	Μία νότα μετριέται σε Hz/sec.		
ii.	Ένας μουσικός ήχος αναλύεται σε περισσότερους ήχους (αρμονικούς).		
iii.	Ο Πυθαγόρας εκτός από το πυθαγόρειο θεώρημα ασχολήθηκε και με τη Μουσική.		
iv.	Όταν αυξάνω το μήκος μίας χορδής παράγονται πιο χαμηλοί ήχοι.		
v.	Όσο πιο χαμηλή είναι μία νότα τόσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητά της.		
vi.	Όταν μειώνω το μήκος μιας χορδής στο μισό, η νότα που παράγεται σε σχέση με τη νότα της ανοιχτής χορδής είναι μία οκτάβα ψηλότερα.		
vii.	Όταν θέλω να προσθέσω ή να αφαιρέσω δύο διαδοχικά μουσικά διαστήματα τότε πολλαπλασιάζω ή διαιρώ αντίστοιχα τους λόγους συχνοτήτων τους.		
viii.	Ένα μουσικό διάστημα μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος των συχνοτήτων των φθόγγων που το αποτελούν.		
ix.	Ο συγκερασμός είναι ο βαθμός απόκλισης των διαστημάτων σε σχέση με τα διαστήματα της πυθαγόρειας κλίμακας.		
x.	Ο διαχωρισμός των μουσικών διαστημάτων σε σύμφωνα και διάφωνα είναι απόλυτος και σταθερός ανεξάρτητα από την ιστορική περίοδο και τις γνώσεις των Μαθηματικών.		

14) Υποθέστε ότι η χορδή της κιθάρας έχει μήκος ΑΒ.

Α **Β**

i. Με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να τη χωρίσετε σε ίσα τμήματα χωρίς τη χρήση χάρακα;
ii. Να χωρίσετε τη χορδή ΑΒ σε δύο ίσα μέρη (χωρίς τη χρήση χάρακα).
iii. Να χωρίσετε τη χορδή ΑΒ σε τρία ίσα μέρη (χωρίς τη χρήση χάρακα).

15) Σε ένα **έγχορδο όργανο (βιολί)** επιλέγω μία οποιαδήποτε ανοιχτή χορδή (χωρίς δηλαδή να πατάω το δάκτυλό μου σε κανένα σημείο της) και σύροντας το δοξάρι πάνω της ακούω το άκουσμά της. Στη συνέχεια τοποθετώντας το δάκτυλο μου αρχικά στο **μέσο** και στη συνέχεια στα **3/4 της αρχικής χορδής** ακούω με τη βοήθεια του δοξαριού τους παραγόμενους ήχους.

Την ίδια διαδικασία επαναλαμβάνω σε ένα **δεύτερο έγχορδο διαφορετικού μεγέθους (κιθάρα).**

I. Τί **διαστήματα** σχηματίζουν οι δύο παραγόμενες νότες σε σχέση με την νότα της αρχικής ανοιχτής χορδής του βιολιού;

II. Τί **διαστήματα** σχηματίζουν οι δύο παραγόμενες νότες σε σχέση με την νότα της αρχικής ανοιχτής χορδής της κιθάρας;

III. Τα **παραγόμενα διαστήματα** στην περίπτωση του **βιολιού** σε σχέση με τα **αντίστοιχα** παραγόμενα διαστήματα της **κιθάρας** είναι **μεγαλύτερα, μικρότερα ή ίσα;** Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2) Τεστ Γνώσεων και Δεξιοτήτων των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου (Post–test)

Οι γνώσεις μου και οι δεξιότητες για το μάθημα της Μουσικής και των Μαθηματικών

Ενεργητική Ακρόαση

1) Θα ακούσετε πέντε συνολικά μελωδικά διαστήματα. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση για κάθε παράδειγμα.

Παραδείγματα	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Διαστήματα	2ας Αυξ.	ταυτοφωνία	2ας μ	4ης Κ	8ης
	4ης Κ	3ης Μ	4ης Κ	2ας Μ	6ης Μ
	7ης ελατ.	3ης μ	4ης Μ	6ης μ	5ης ελατ.
	οκτάβα	5ης Κ	8ης	4ης Αυξ	7ης μ

2) Θα ακούσετε πέντε συνολικά **αρμονικά** διαστήματα. Στη συνέχεια θα τα ακούσετε για δεύτερη φορά. Να τα χαρακτηρίσετε είτε ως **Σύμφωνα (Σ)** είτε ως **Διάφωνα (Δ).**

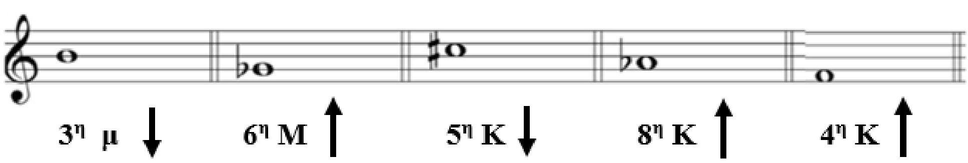
1ο διάστημα	**2ο διάστημα**	**3ο διάστημα**	**4ο διάστημα**	**5ο διάστημα**

Θεωρία της Μουσικής

3) Να **αναγνωρίσετε** σε μέγεθος και είδος τα παρακάτω **μελωδικά** διαστήματα.

4) Να **κατασκευάσετε** τα παρακάτω **αρμονικά** διαστήματα, έτσι ώστε η νότα που θα προσθέσετε να σχηματίζει με το δοσμένο φθόγγο το ζητούμενο αρμονικό διάστημα.

Τα σύμβολα ↑ και ↓ δηλώνουν αν το διάστημα είναι ανιόν ή κατιόν αντίστοιχα δηλαδή αν ο δεύτερος φθόγγος είναι ψηλότερος ή χαμηλότερος από τον πρώτο. Ποια είναι σύμφωνα και ποια διάφωνα;



Ιστορία της Μουσικής

5) Βάλτε σε σειρά τις ακόλουθες ιστορικές περιόδους της Μουσικής ξεκινώντας από την αρχαιότερη: Κλασικισμός, Αναγέννηση, Μπαρόκ, Μεσαίωνας, Ρομαντισμός.

α)…………………………………

β)…………………………………

γ)…………………………………

δ)…………………………………

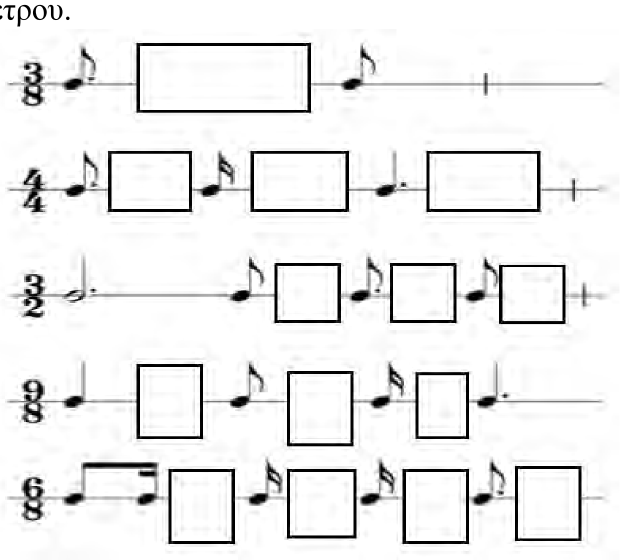
ε)…………………………………

6) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε όρο της πρώτης στήλης την επεξήγηση που αντιστοιχεί της δεύτερης στήλης:

Organum	Το πρώτο εγχειρίδιο στο οποίο καταγράφεται η πρώτη μορφή πολυφωνικής Μουσικής
Γρηγοριανό μέλος	Μονοφωνικοί θρησκευτικοί ύμνοι
Musica enchiriadis	Συνθέσεις του J.S.Bach για το νέο πληκτροφόρο όργανο
24 κομμάτια για το *«Καλώς Συγκερασμένο Κλειδοκύμβαλο»*	Πολύ σημαντικό πολυφωνικό είδος της Ars Nova (14ος αιώνας μ.Χ.)
Μοτέτο	Πρώιμο είδος πολυφωνικής Μουσικής

Μαθηματικά της Μουσικής

7) Να συμπληρώσετε τα ακόλουθα μέτρα όπως στο παράδειγμα έτσι ώστε η αξία κάθε μέτρου να είναι **ισοδύναμη με το κλάσμα** που αναγράφεται στην αρχή του κάθε μέτρου.



8) Για κάθε ένα από τα παρακάτω πέντε μετρικά σχήματα:

I. να συμπληρώσετε το **κλάσμα** που λείπει στην αρχή του μέτρου όπως στο παράδειγμα.

II. να τα **κατατάξετε σε σειρά** ξεκινώντας από το μετρικό σχήμα που περιλαμβάνει τις μεγαλύτερες ρυθμικές αξίες στο μετρικό σχήμα που περιλαμβάνει τις μικρότερες ρυθμικές αξίες (πχ. παράδειγμα 1> παράδειγμα 4>…)

III. Έχοντας ως μέτρο σύγκρισης τη ρυθμική αξία του ενός ολόκληρου, να τα τοποθετήσετε στην κατάλληλη στήλη ανάλογα με τον αν η συνολική τους ρυθμική αξία είναι >,=, < από εκείνη του **παρεστιγμένου μισού** 𝅗𝅥. **.**

< 𝅗𝅥. (παρεστιγμένο μισό)	= 𝅗𝅥. (παρεστιγμένο μισό)	> 𝅗𝅥. (παρεστιγμένο μισό)

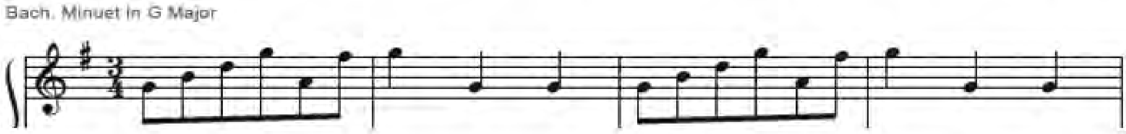
9) Κυκλώστε τα μουσικά παραδείγματα που ενώ έχουν **διαφορετικά μετρικά (ρυθμικά) κλάσματα** είναι **μαθηματικά ισοδύναμα**.

1.

2.

3.

4.



5.

10) Να κάνετε τις ακόλουθες πράξεις:

I. $\frac{5}{2} \div \frac{8}{9} =$

II. $\frac{5}{2} + \frac{8}{9} =$

III. $1{,}4 - \frac{5}{8} =$

IV. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{2} =$

V. $1 - \frac{6}{9} =$

11) Βάλτε στη σειρά από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\frac{27}{16}$ 1,5950 1 $\frac{5}{2}$ 1,124 1,4142 $\frac{7}{3}$ 1,0595

Να βρείτε τη θέση τους πάνω στην ευθεία των αριθμών.

---|0-------------------------------|1-------------------------------|2-----

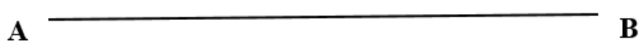
12) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σημειώνοντας Χ στην κατάλληλη στήλη:

Τα ποσά είναι:	ανάλογα	αντιστρόφως ανάλογα	κανένα από τα δύο
4, 6, 8, 10 / 8, 12, 16, 20			
40, 50, 70, 90 / 100, 125, 175, 225			
4, 5, 7, 9 / 9, 7, 5, 4			
2, 3, 4, 5 / 4, 6, 8, 10			

13) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστές ή λανθασμένες σημειώνοντας Χ στην αντίστοιχη στήλη:

		Σωστό	Λάθος
I.	Μία νότα μετριέται σε Hz/sec.		
II.	Ένας μουσικός ήχος αναλύεται σε περισσότερους ήχους (αρμονικούς).		
III.	Ο Πυθαγόρας εκτός από το πυθαγόρειο θεώρημα ασχολήθηκε και με τη Μουσική.		
IV.	Όταν αυξάνω το μήκος μίας χορδής παράγονται πιο χαμηλοί ήχοι.		
V.	Όσο πιο χαμηλή είναι μία νότα τόσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητά της.		
VI.	Όταν μειώνω το μήκος μιας χορδής στο μισό, η νότα που παράγεται σε σχέση με τη νότα της ανοιχτής χορδής είναι μία οκτάβα ψηλότερα.		
VII.	Όταν θέλω να προσθέσω ή να αφαιρέσω δύο διαδοχικά μουσικά διαστήματα τότε πολλαπλασιάζω ή διαιρώ αντίστοιχα τους λόγους συχνοτήτων τους.		
VIII.	Ένα μουσικό διάστημα μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος των συχνοτήτων των φθόγγων που το αποτελούν.		
IX.	Ο συγκερασμός είναι ο βαθμός απόκλισης των διαστημάτων σε σχέση με τα διαστήματα της πυθαγόρειας κλίμακας.		
X.	Ο διαχωρισμός των μουσικών διαστημάτων σε σύμφωνα και διάφωνα είναι απόλυτος και σταθερός ανεξάρτητα από την ιστορική περίοδο και τις γνώσεις των Μαθηματικών.		

14) Υποθέστε ότι η χορδή της κιθάρας έχει μήκος ΑΒ.



I. Με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να τη χωρίσετε σε ίσα τμήματα χωρίς τη χρήση χάρακα;
II. Να χωρίσετε τη χορδή ΑΒ σε δύο ίσα μέρη (χωρίς τη χρήση χάρακα).
III. Να χωρίσετε τη χορδή ΑΒ σε τρία ίσα μέρη (χωρίς τη χρήση χάρακα).

15) Σε ένα **έγχορδο όργανο (βιολί)** επιλέγω μία οποιαδήποτε ανοιχτή χορδή (χωρίς δηλαδή να πατάω το δάκτυλό μου σε κανένα σημείο της) και σύροντας το δοξάρι πάνω της ακούω το άκουσμά της. Στη συνέχεια τοποθετώντας το δάκτυλο μου αρχικά στο **μέσο** και στη συνέχεια στα **3/4 της αρχικής χορδής** ακούω με τη βοήθεια του δοξαριού τους παραγόμενους ήχους.

Την ίδια διαδικασία επαναλαμβάνω σε ένα **δεύτερο έγχορδο διαφορετικού μεγέθους (κιθάρα).**

I. Τί **διαστήματα** σχηματίζουν οι δύο παραγόμενες νότες σε σχέση με την νότα της αρχικής ανοιχτής χορδής του βιολιού;
II. Τί **διαστήματα** σχηματίζουν οι δύο παραγόμενες νότες σε σχέση με την νότα της αρχικής ανοιχτής χορδής της κιθάρας;
III. Τα **παραγόμενα διαστήματα** στην περίπτωση του **βιολιού** σε σχέση με τα **αντίστοιχα** παραγόμενα διαστήματα της **κιθάρας** είναι **μεγαλύτερα, μικρότερα ή ίσα;** Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

16) **Να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις κυκλώνοντας τη σωστή πρόταση (αφορά μόνο το post–test).**

Α) Αν η συχνότητα μίας νότας είναι 220 Hz, η συχνότητα μίας άλλης νότας κατά μία οκτάβα υψηλότερη είναι:

i. 110 Hz
ii. 220 Hz
iii. 440 Hz
iv. 660 Hz

Β) Η συχνότητα της νότας $Σολ_4$ προς τη συχνότητα της ίδιας νότας $Σολ_3$ μία οκτάβα χαμηλότερα εκφράζεται με το λόγο:

i. 1:2
ii. 2:1
iii. 4:3
iv. 3:4

Γ) Αν το μήκος μίας χορδής είναι 12 cm και παράγει μία νότα με συχνότητα 220 Hz, τότε για να παραχθεί η ίδια νότα αλλά μία οκτάβα ψηλότερα το μήκος της χορδής θα πρέπει να είναι:

i. 24 cm
ii. 6 cm
iii. 4 cm
iv. 2 cm

Δ) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις περιγράφει τη διαδικασία εύρεσης του λόγου συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο διάστημα του τόνου στο πυθαγόρειο σύστημα;

i. 3/2 ─ 4/3 = 1/6
ii. 3/2+ 4/3 = 17/6
iii. 3/2
iv. Κανένα από τα παραπάνω

Ε) Στο πυθαγόρειο σύστημα ποιος είναι ο λόγος συχνοτήτων μεταξύ των φθόγγων Φα και Ντο (f_F / f_C);

i. 4/3
ii. 3/2
iii. 9/8
iv. Κανένα από τα παραπάνω

ΣΤ) Ποιος είναι ο λόγος συχνοτήτων μεταξύ των φθόγγων $Ρε_4$ και $Λα_4$ που σχηματίζεται στους αρμονικούς;

i. 3/2
ii. 1/2
iii. 17/16
iv. Κανένα από τα παραπάνω

Ζ) Αν υποθέσουμε ότι μία παραγόμενη νότα στο πιάνο έχει συχνότητα 220 Hz. Ποια από τις παρακάτω συχνότητες δεν ανήκει στους αρμονικούς;

i. 220 Hz
ii. 330 Hz
iii. 440 Hz
iv. 660 Hz.

Η) Σε ποιο μουσικό σύστημα ο λόγος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο διάστημα της οκτάβας είναι 2/1;

i. Φυσικό σύστημα
ii. Ισοσυγκερασμένο
iii. Πυθαγόρειο
iv. Σε όλα τα παραπάνω

Θ) Αν από μία χορδή βιολιού αρχικού μήκους 16 cm χρησιμοποιήσω τα 3/4 σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετήσω το δάκτυλό μου ώστε να παραχθεί διάστημα 4ης Κ;

i. 4 cm
ii. 3 cm
iii. 9 cm
iv. 12 cm

Ι) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις περιγράφει τη διαδικασία εύρεσης του λόγου συχνοτήτων που αντιστοιχεί στο διάστημα της οκτάβας στο πυθαγόρειο σύστημα;

i. $3/2 - 4/3 = 1/6$
ii. $3/2 + 4/3 = 17/12$
iii. $3/2 \cdot 4/3 = 2/1$
iv. Κανένα από τα παραπάνω

Β) Ερωτηματολόγια διερεύνησης των Στάσεων και Αντιλήψεων

3) Ερωτηματολόγιο διερεύνησης των Στάσεων και Αντιλήψεων των μαθητών για τα Μαθηματικά (Πριν τη διδακτική παρέμβαση).

Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………..
Τμήμα ………………………………………………………………………………..

Γραφώ τη γνώμη μου για το μάθημα των Μαθηματικών και της Μουσικής!

Κυκλώστε έναν αριθμό σύμφωνα με το βαθμό (1-5) στον οποίο η καθεμία από τις παρακάτω δηλώσεις σας αντιπροσωπεύει ή ισχύει για εσάς.

1)Με ενδιαφέρουν τα Μαθηματικά.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

2) Μου αρέσει το μάθημα των Μαθηματικών στο σχολείο.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

3) Αισθάνομαι αυτοπεποίθηση στη μάθηση των μαθηματικών.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

4) Είμαι καλός/η στα μαθηματικά.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

5) Τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα για την καθημερινή ζωή.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

Απαντήστε σύντομα τις ακόλουθες ερωτήσεις

6) Θα μπορούσες να εξηγήσεις στον αδερφό/η σου ή σε κάποιο/α φίλο/η σου τί είναι τα Μαθηματικά;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

7) Θα μπορούσες να εξηγήσεις στον αδερφό/η σου ή σε κάποιο/α φίλο/η σου ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Μουσική;

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

4) Ερωτηματολόγιο διερεύνησης των Στάσεων και Αντιλήψεων των μαθητών για τα Μαθηματικά (Μετά τη διδακτική παρέμβαση).

Ονοματεπώνυμο ………………………………………………………………………..
Τμήμα ………………………………………………………………………………..

Γραφώ τη γνώμη μου για το μάθημα των Μαθηματικών και της Μουσικής!

Κυκλώστε έναν αριθμό σύμφωνα με το βαθμό (1-5) στον οποίο η καθεμία από τις παρακάτω δηλώσεις σας αντιπροσωπεύει ή ισχύει για εσάς.

1)Με ενδιαφέρουν τα Μαθηματικά.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

2) Μου αρέσει το μάθημα των Μαθηματικών στο σχολείο.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

3) Αισθάνομαι αυτοπεποίθηση στη μάθηση των μαθηματικών.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

4) Είμαι καλός/η στα μαθηματικά.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

5) Τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα για την καθημερινή ζωή.

Καθόλου	Πολύ λίγο	Ούτε Λίγο Ούτε πολύ	Πολύ	Πάρα πολύ
1	2	3	4	5

Απαντήστε σύντομα τις ακόλουθες ερωτήσεις

6) Θα μπορούσες να εξηγήσεις στον αδερφό/η σου ή σε κάποιο/α φίλο/η σου τί είναι τα Μαθηματικά;

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

7) Θα μπορούσες να εξηγήσεις στον αδερφό/η σου ή σε κάποιο/α φίλο/η σου ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Μουσική;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Γ) Ημερολόγιο παρατήρησης

Ημερομηνία:
Τάξη/ Τμήμα:
Διάρκεια:
Εκπαιδευτικός χώρος:
Δραστηριότητα:
Γενικές παρατηρήσεις ως προς τη δραστηριότητα και το περιβάλλον:
Παρατηρήσεις για τη συμπεριφορά των μαθητών:
Αξιοσημείωτο γεγονός ή σχόλιο:

Παράρτημα 3

Στατιστικά δεδομένα της Έρευνας

Τεστ γνώσεων και δεξιοτήτων

Frequency Table

Ερώτηση 1 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	2	12,5	12,5	12,5
	Μέτρια	7	43,8	43,8	56,3
	Καλή	3	18,8	18,8	75,0
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	93,8
	Εξαιρετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 1 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	4	25,0	25,0	25,0
	Πολύ Καλή	10	62,5	62,5	87,5
	Εξαιρετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 2 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	4	25,0	25,0	25,0
	Καλή	1	6,3	6,3	31,3
	Πολύ Καλή	7	43,8	43,8	75,0
	Εξαιρετική	4	25,0	25,0	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 2 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Πολύ Καλή	7	43,8	43,8	43,8
	Εξαιρετική	9	56,3	56,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 3 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	2	12,5	12,5	12,5
	Μέτρια	7	43,8	43,8	56,3
	Καλή	3	18,8	18,8	75,0
	Πολύ Καλή	4	25,0	25,0	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 3 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Καλή	6	37,5	37,5	37,5
	Πολύ Καλή	7	43,8	43,8	81,3
	Εξαιρετική	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 4 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	1	6,3	6,3	6,3
	Μέτρια	8	50,0	50,0	56,3
	Καλή	4	25,0	25,0	81,3
	Πολύ Καλή	2	12,5	12,5	93,8
	Εξαιρετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 4 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent

Valid	Μέτρια	6	37,5	37,5	37,5
	Πολύ Καλή	5	31,3	31,3	68,8
	Εξαιρετική	5	31,3	31,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 5 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	5	31,3	31,3	31,3
	Μέτρια	4	25,0	25,0	56,3
	Καλή	3	18,8	18,8	75,0
	Πολύ Καλή	1	6,3	6,3	81,3
	Εξαιρετική	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 5 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Καλή	5	31,3	31,3	31,3
	Πολύ Καλή	2	12,5	12,5	43,8
	Εξαιρετική	9	56,3	56,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 6 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	5	31,3	31,3	31,3
	Μέτρια	4	25,0	25,0	56,3
	Καλή	3	18,8	18,8	75,0
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	93,8
	Εξαιρετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 6 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Καλή	5	31,3	31,3	31,3
	Πολύ Καλή	2	12,5	12,5	43,8
	Εξαιρετική	9	56,3	56,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 7 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	2	12,5	12,5	12,5
	Μέτρια	9	56,3	56,3	68,8
	Καλή	2	12,5	12,5	81,3
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 7 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	4	25,0	25,0	25,0
	Καλή	5	31,3	31,3	56,3
	Πολύ Καλή	5	31,3	31,3	87,5
	Εξαιρετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 8 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	1	6,3	6,3	6,3
	Μέτρια	11	68,8	68,8	75,0
	Καλή	1	6,3	6,3	81,3
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 8 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	5	31,3	31,3	37,5
	Πολύ Καλή	9	56,3	56,3	93,8
	Εξαιρετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 9 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	1	6,3	6,3	6,3

	Μέτρια	6	37,5	37,5	43,8
	Καλή	5	31,3	31,3	75,0
	Πολύ Καλή	2	12,5	12,5	87,5
	Εξαιρετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 9 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	6	37,5	37,5	43,8
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	62,5
	Εξαιρετική	6	37,5	37,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 10 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	5	31,3	31,3	31,3
	Καλή	9	56,3	56,3	87,5
	Πολύ Καλή	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 10 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	6	37,5	37,5	43,8
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	62,5
	Εξαιρετική	6	37,5	37,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 11 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	1	6,3	6,3	6,3
	Μέτρια	4	25,0	25,0	31,3
	Καλή	6	37,5	37,5	68,8
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	87,5
	Εξαιρετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 11 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	4	25,0	25,0	31,3
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	50,0
	Εξαιρετική	8	50,0	50,0	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 12 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	2	12,5	12,5	12,5
	Μέτρια	5	31,3	31,3	43,8
	Καλή	6	37,5	37,5	81,3
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 12 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	1	6,3	6,3	6,3
	Μέτρια	2	12,5	12,5	18,8
	Καλή	4	25,0	25,0	43,8
	Πολύ Καλή	8	50,0	50,0	93,8
	Εξαιρετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 13 pre-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Χαμηλή	4	25,0	25,0	25,0
	Μέτρια	3	18,8	18,8	43,8
	Καλή	6	37,5	37,5	81,3
	Πολύ Καλή	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	
Ερώτηση 13 post-test					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent

Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	3	18,8	18,8	25,0
	Πολύ Καλή	7	43,8	43,8	68,8
	Εξαιρετική	5	31,3	31,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 16 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Μέτρια	1	6,3	6,3	6,3
	Καλή	3	18,8	18,8	25,0
	Πολύ Καλή	5	31,3	31,3	56,3
	Εξαιρετική	7	43,8	43,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Ερώτηση 1 pre-test & Ερώτηση 1 post-test	16	,723	,002
Pair 2	Ερώτηση 2 pre-test & Ερώτηση 2 post-test	16	,779	,000
Pair 3	Ερώτηση 3 pre-test & Ερώτηση 3 post-test	16	,663	,005
Pair 4	Ερώτηση 4 pre-test & Ερώτηση 4 post-test	16	,761	,001
Pair 5	Ερώτηση 5 pre-test & Ερώτηση 5 post-test	16	,702	,002
Pair 6	Ερώτηση 6 pre-test & Ερώτηση 6 post-test	16	,830	,000
Pair 7	Ερώτηση 7 pre-test & Ερώτηση 7 post-test	16	,764	,001
Pair 8	Ερώτηση 8 pre-test & Ερώτηση 8 post-test	16	,655	,006
Pair 9	Ερώτηση 9 pre-test & Ερώτηση 9 post-test	16	,893	,000
Pair 10	Ερώτηση 10 pre-test & Ερώτηση 10 post-test	16	,559	,024
Pair 11	Ερώτηση 11 pre-test & Ερώτηση 11 post-test	16	,803	,000
Pair 12	Ερώτηση 12 pre-test & Ερώτηση 12 post-test	16	,561	,024
Pair 13	Ερώτηση 13 pre-test & Ερώτηση 13 post-test	16	,748	,001

Ερωτηματολόγιο διερεύνησης στάσεων και αντιλήψεων απέναντι στα Μαθηματικά

Frequency Table

Ερώτηση 1 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ισχυρά αρνητική	3	18,8	18,8	18,8
	Αρνητική	4	25,0	25,0	43,8
	Ουδέτερη	6	37,5	37,5	81,3
	Θετική	1	6,3	6,3	87,5
	Ισχυρά Θετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 1 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Αρνητική	3	18,8	18,8	18,8
	Ουδέτερη	6	37,5	37,5	56,3
	Θετική	4	25,0	25,0	81,3
	Ισχυρά Θετική	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 2 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ισχυρά αρνητική	3	18,8	18,8	18,8
	Αρνητική	4	25,0	25,0	43,8
	Ουδέτερη	6	37,5	37,5	81,3
	Θετική	2	12,5	12,5	93,8
	Ισχυρά Θετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 2 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Αρνητική	2	12,5	12,5	12,5

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
	Ουδέτερη	10	62,5	62,5	75,0
	Θετική	1	6,3	6,3	81,3
	Ισχυρά Θετική	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 3 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ισχυρά αρνητική	2	12,5	12,5	12,5
	Αρνητική	9	56,3	56,3	68,8
	Ουδέτερη	3	18,8	18,8	87,5
	Θετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 3 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ισχυρά αρνητική	1	6,3	6,3	6,3
	Αρνητική	4	25,0	25,0	31,3
	Ουδέτερη	4	25,0	25,0	56,3
	Θετική	5	31,3	31,3	87,5
	Ισχυρά Θετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 4 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ισχυρά αρνητική	1	6,3	6,3	6,3
	Αρνητική	7	43,8	43,8	50,0
	Ουδέτερη	6	37,5	37,5	87,5
	Θετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 4 post-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Αρνητική	4	25,0	25,0	25,0
	Ουδέτερη	6	37,5	37,5	62,5
	Θετική	4	25,0	25,0	87,5
	Ισχυρά Θετική	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 5 pre-test

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Αρνητική	2	12,5	12,5	12,5
	Ουδέτερη	8	50,0	50,0	62,5
	Θετική	5	31,3	31,3	93,8
	Ισχυρά Θετική	1	6,3	6,3	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Ερώτηση 5 post-test

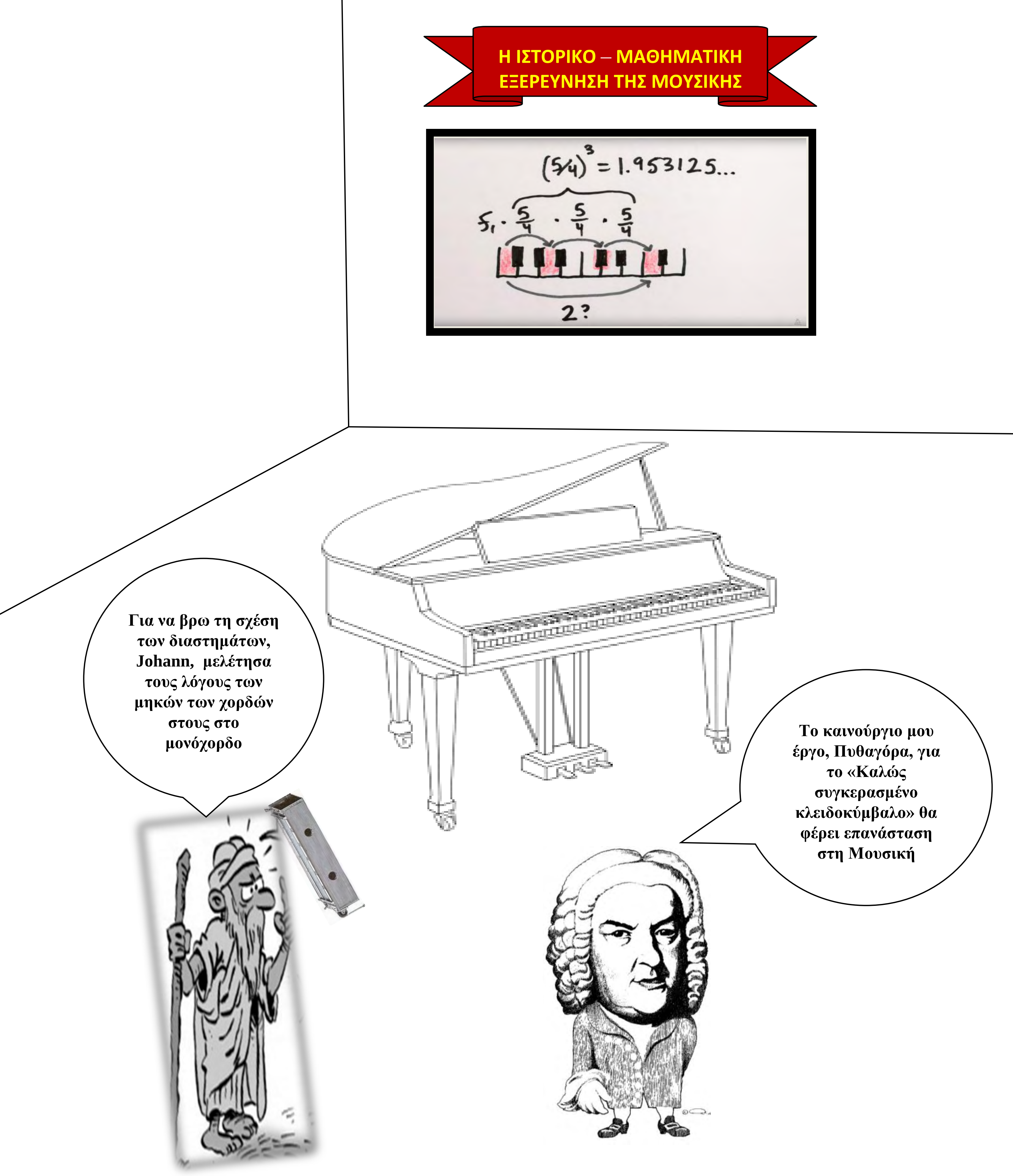
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Αρνητική	2	12,5	12,5	12,5
	Ουδέτερη	5	31,3	31,3	43,8
	Θετική	6	37,5	37,5	81,3
	Ισχυρά Θετική	3	18,8	18,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Paired Samples Correlations

	N	Correlation	Sig.
Ερώτηση 1 pre-test & Ερώτηση 1 post-test	16	,838	,000
Ερώτηση 2 pre-test & Ερώτηση 2 post-test	16	,852	,000
Ερώτηση 3 pre-test & Ερώτηση 3 post-test	16	,854	,000
Ερώτηση 4 pre-test & Ερώτηση 4 post-test	16	,717	,002
Ερώτηση 5 pre-test & Ερώτηση 5 post-test	16	,867	,000

Παράρτημα 4

Εκπαιδευτικό Πακέτο: «Η Ιστορικό – Μαθηματική Εξερεύνηση της Μουσικής»


Η ΙΣΤΟΡΙΚΟ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ
$(5/4)^3 = 1.953125...$
$f_1 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$
2?
Για να βρω τη σχέση των διαστημάτων, Johann, μελέτησα τους λόγους των μηκών των χορδών στους στο μονόχορδο
Το καινούργιο μου έργο, Πυθαγόρα, για το «Καλώς συγκερασμένο κλειδοκύμβαλο» θα φέρει επανάσταση στη Μουσική

Περιεχόμενα

<u>Συντομογραφίες</u>
ΦΠ: Φύλλο Πληροφοριών
ΦΕ: Φύλλο Εργασίας
ΦΑ: Φύλλο Ανακεφαλαίωσης
ΦΑΑ: Φύλλο Αυτοαξιολόγησης

Ενότητα 1^{η}: Μουσικό Διάστημα – Λόγοι συχνοτήτων

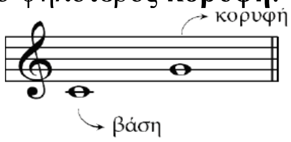
1.1. Τα μουσικά διαστήματα – Σύμφωνες και Διάφωνες συνηχήσεις *(ΦΠ Α1)*

Ένα από τα βασικά στοιχεία που χρειαζόμαστε για να δημιουργήσουμε μία μελωδία είναι τα διαστήματα. Αλλά και οι μουσικές κλίμακες και οι συγχορδίες βασίζονται σε αυτά.

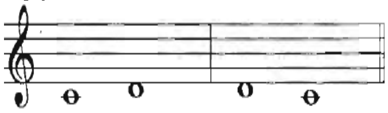
☞ ***Τί εννοούμε όμως με τον όρο μουσικό διάστημα; Ποια τα χαρακτηριστικά του;***

Μουσικό Διάστημα

Μουσικό Διάστημα ονομάζεται η **απόσταση** μεταξύ δύο φθόγγων. Ο χαμηλότερος φθόγγος ονομάζεται **βάση** και ο ψηλότερος **κορυφή**.



Όταν ακούμε διαδοχικά τους φθόγγους που σχηματίζουν το διάστημα, τότε ονομάζεται **μελωδικό** ενώ όταν τους ακούμε ταυτόχρονα, τότε ονομάζεται **αρμονικό**.

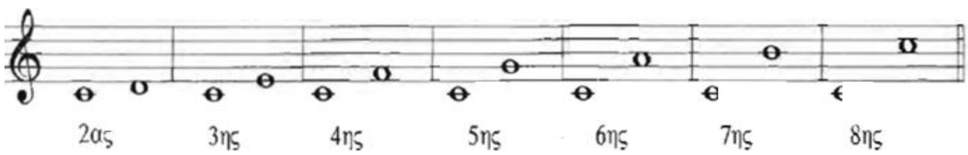


Μελωδικό διάστημα

Αρμονικό διάστημα

Μεγέθη και Είδη Διαστημάτων

Ο **αριθμός των φθόγγων** που περιέχονται μεταξύ της βάσης και της κορυφής ενός διαστήματος καθορίζει το **μέγεθός του**. Τα μεγέθη των διαστημάτων παίρνουν τιμές από το σύνολο των φυσικών αριθμών {1, 2, 3…}. Στη μουσική πράξη τα διαστήματα που μας ενδιαφέρουν είναι μέχρι δύο οκτάβων, δηλαδή έως και τα διαστήματα 15^{ης}. Το **όνομα** του διαστήματος δηλώνει **τον αριθμό των φθόγγων** που περιλαμβάνει.



Μεγέθη μουσικών διαστημάτων σε έκταση μιας οκτάβας

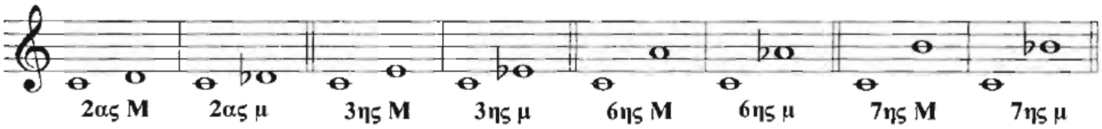
Τα διαστήματα του ιδίου ονόματος δεν σημαίνει απαραίτητα ότι είναι και ισομεγέθη. Για παράδειγμα, τα ακόλουθα διαστήματα 5^{ης} (καθαρό, αυξημένο) είναι ανισομεγέθη καθώς περιέχουν διαφορετικό αριθμό ημιτονίων.

Το **κριτήριο** εκείνο που μας καθορίζει **το είδος του διαστήματος** είναι ο **αριθμός των ημιτονίων** που περιλαμβάνει. Το ημιτόνιο είναι **η ελάχιστη απόσταση** μεταξύ δύο φθόγγων στο δυτικό τονικό σύστημα.

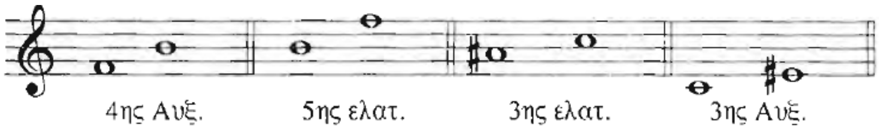
Τα διαστήματα ανάλογα με τον αριθμό των ημιτονίων που περιλαμβάνουν διακρίνονται σε:

i. Καθαρά: Αφορούν τα διαστήματα $1^{ης}$, $4^{ης}$ και $5^{ης}$ και $8^{ης}$.

ii. Μικρά (μ) και μεγάλα (Μ): Αφορούν τα διαστήματα $2^{ας}$, $3^{ης}$, $6^{ης}$ και $7^{ης}$.



iii. Αυξημένα και ελαττωμένα: Αφορούν όλα τα διαστήματα.



Σύμφωνα και διάφωνα διαστήματα

Τα αρμονικά διαστήματα που όταν ηχούν είναι εύηχα ονομάζονται **σύμφωνα** ενώ τα διαστήματα που το άκουσμά τους δημιουργεί ένα δυσάρεστο συναίσθημα ονομάζονται **διάφωνα.**
Ο κάθε **μουσικός πολιτισμός** αντιλαμβάνεται **διαφορετικά** την έννοια της **συμφωνίας** και της **διαφωνίας**. Αλλά και σε κάθε **ιστορική περίοδο** ο διαχωρισμός των μουσικών διαστημάτων σε σύμφωνα και διάφωνα **μεταβαλλέται** ανάλογα με την αισθητική κάθε εποχής.
Η κατάταξη των διαστημάτων σε σύμφωνα και διάφωνα που έγινε κατά την **περίοδο του 1700-1900 μ.Χ.** και πάνω στην οποία στηρίζεται η τονική αρμονία είναι η ακόλουθη:

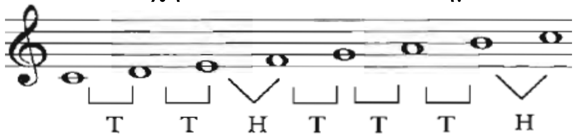
Σύμφωνα διαστήματα	$1^{ης}$ (ταυτοφωνία), $4^{ης}$ Καθαρή, $5^{ης}$ Καθαρή, $8^{ης}$ Κ(Οκτάβα)
Ατελώς σύμφωνα διαστήματα	$3^{ης}$ μικρή+ Μεγάλη, $6^{ης}$ μικρή+ Μεγάλη
Διάφωνα διαστήματα	$2^{ας}$ μικρή+ Μεγάλη, $7^{ης}$ μικρή +Μεγάλη Όλα τα Αυξημένα και Ελαττωμένα

☞ ***Τί εννοούμε όμως με τον όρο Μουσική κλίμακα; Ποια είναι η δομή της;***

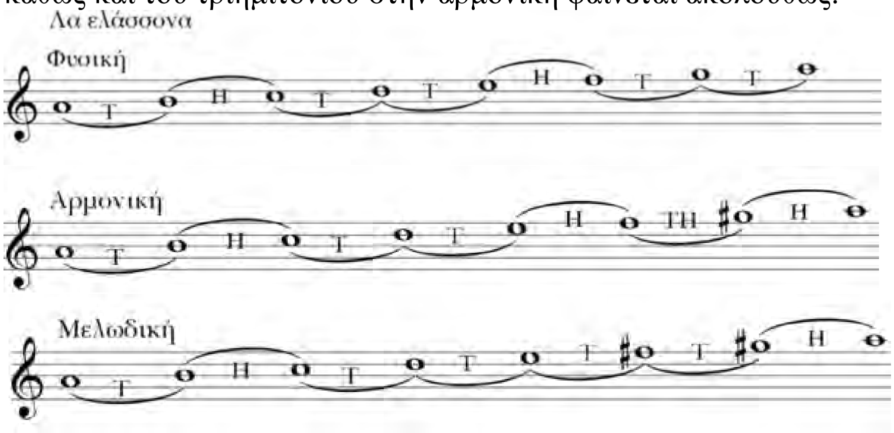
Μουσική Κλίμακα

Μουσική κλίμακα είναι **η διάταξη** σε συνεχή ανιούσα ή κατιούσα **σειρά φθόγγων**. Τα διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών φθόγγων μέσα σε μια κλίμακα καθορίζουν και το χαρακτήρα της κλίμακας. Στο δυτικό τονικό μουσικό σύστημα διακρίνουμε δύο ειδών κλίμακες:

I. **Μείζονα κλίμακα** είναι μία επτάφθογγη κλίμακα που σχηματίζεται με πέντε τόνους και δύο ημιτόνια. Η διαδοχή των τόνων και των ημιτονίων είναι η ακόλουθη:



II. **Ελάσσονα κλίμακα** είναι μία επτάφθογγη κλίμακα και έχει τρεις μορφές: τη φυσική, την αρμονική και τη μελωδική. Η διαδοχή των τόνων και των ημιτονίων καθώς και του τριημιτονίου στην αρμονική φαίνεται ακολούθως:



☞ ***Τί εννοούμε όμως με τον όρο μεταφορά (transporto);***

Μεταφορά (transporto) ονομάζεται η εγγραφή εκ νέου μιας μελωδίας ή ενός μουσικού κομματιού σε **διαφορετικό τονικό ύψος** αυτό το αρχικό, διατηρώντας όμως σταθερά τα διαστήματα, τη διάταξη και την κατεύθυνσή τους (ανιούσα/κατιούσα) μέσα στο μουσικό κείμενο.

Αρχική μελωδία

Μεταφορά κατά ένα διάστημα $3^{ης}$ Μ προς τα κάτω

1.2. Σκέφτομαι Μουσικά: Μουσικά διαστήματα *(ΦΕ Α1)*

Ονομ/μο : ....

Ημερ/νία : ....

ΑΚΡΟΑΣΗ

1) Θα ακούσετε πέντε συνολικά **μελωδικά** διαστήματα. Κυκλώστε τη σωστή απάντηση για κάθε παράδειγμα.

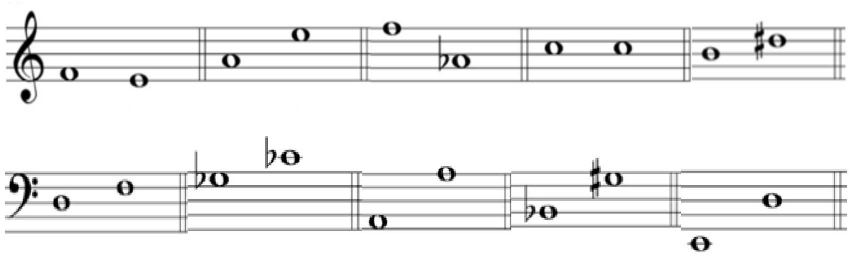
Παραδείγματα	1	2	3	4	5
Διαστήματα	ταυτοφωνία	ταυτοφωνία	2ας μ	4ης Κ	8ης
	4ης Κ	2ας Μ	7ης Μ	2ας Μ	6ης Μ
	5ης Κ	3ης Μ	4ης Μ	6ης μ	4ης ελατ.
	οκτάβα	5ης Κ	8ης	5ης Αυξ	7ης μ

2) Θα ακούσετε πέντε συνολικά **αρμονικά** διαστήματα. Στη συνέχεια θα τα ακούσετε για δεύτερη φορά. Να τα χαρακτηρίσετε είτε ως **Σύμφωνα (Σ)** είτε ως **Διάφωνα (Δ).**

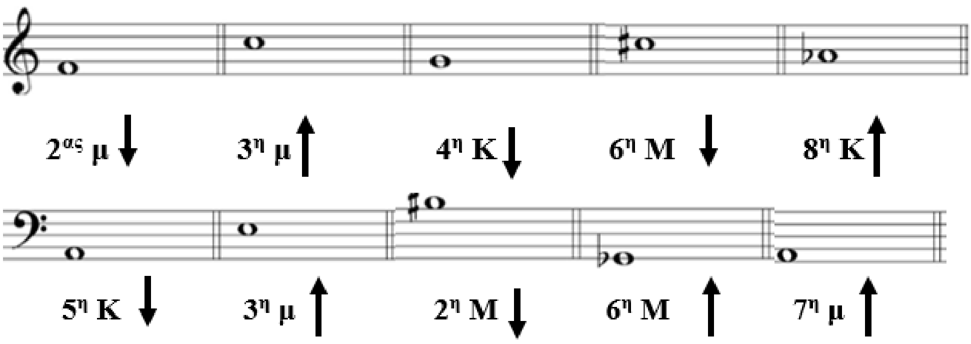
1ο διάστημα	**2ο διάστημα**	**3ο διάστημα**	**4ο διάστημα**	**5ο διάστημα**

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

3) Να **αναγνωρίσετε** σε μέγεθος και είδος τα παρακάτω **μελωδικά** διαστήματα. Εκτελέστε τα στο όργανο επιλογής σας.

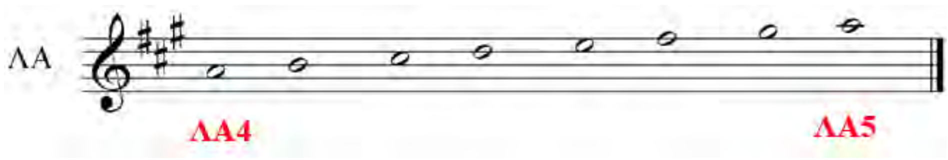


4) Να **κατασκευάσετε** τα παρακάτω **αρμονικά** διαστήματα, έτσι ώστε η νότα που θα προσθέσετε να σχηματίζει με το δοσμένο φθόγγο το ζητούμενο αρμονικό διάστημα. Τα σύμβολα ↓ και ↑ δηλώνουν αν το διάστημα είναι ανιόν ή κατιόν αντίστοιχα δηλαδή αν ο δεύτερος φθόγγος είναι ψηλότερος ή χαμηλότερος από τον πρώτο. Ποια είναι σύμφωνα και ποια διάφωνα; Εκτελέστε τα στο όργανο επιλογής σας.



5) Στο ακόλουθο μουσικό απόσπασμα να αναγνωρίστε τα μελωδικά και αρμονικά διαστήματα που είναι σημειωμένα. Στη συνέχεια να το ερμηνεύσετε στο πιάνο.

6) Με βάση την κλίμακα της Λα Μείζονα που σας δίνετε παρακάτω να βρείτε τουλάχιστον ένα διάστημα από κάθε κατηγορία τόσο σε μέγεθος ($2^{ας}$, $3^{ης}$, $4^{ης}$, $5^{ης}$, $6^{ης}$, $7^{ης}$, και $8^{ης}$) όσο και σε είδος (μικρό, μεγάλο, καθαρό, αυξημένο, ελαττωμένο) και να υπολογίσετε τον αριθμό των ημιτονίων που περιλαμβάνει σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα που ακολουθεί.

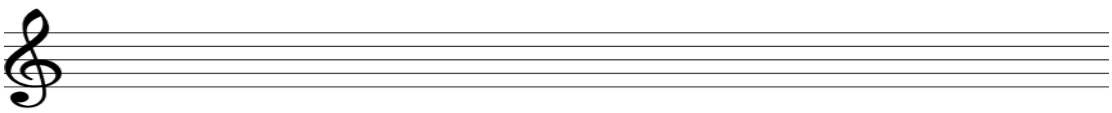


Μέγεθος και είδος διαστήματος	**Παράδειγμα**	**Αριθμός ημιτονίων**
Ταυτοφωνία	$Λα_3$- $Λα_3$	0
$2^{ας}$ μικρή		
$2^{ας}$ Μεγάλη/$3^{η}$ ελαττωμένη		2
$3^{η}$ μικρή/$2^{ας}$ Αυξημένη	Σι- Ρε	
$3^{η}$ Μεγάλη/ $4^{η}$ ελαττωμένη		
$4^{η}$ Καθαρή/ $3^{η}$ Αυξημένη		5
$4^{η}$ Αυξημένη/$5^{η}$ ελαττωμένη		
$5^{η}$ Καθαρή/$6^{η}$ ελαττωμένη	Λα- Μι	
$6^{η}$ μικρή/$5^{η}$ Αυξημένη		
$6^{η}$ Μεγάλη/$7^{η}$ ελαττωμένη		
$7^{η}$ μικρή/$6^{η}$ Αυξημένη		
$7^{η}$ Μεγάλη/$8^{η}$ ελαττωμένη		
Οκτάβα	$Λα_3$- $Λα_4$	12

Πίνακας Διαστημάτων και αντιστοίχου αριθμού ημιτονίων

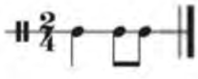
7) Να μεταφέρετε την παρακάτω μελωδία κατά ένα **διάστημα $3^{ης}$ μικρής προς τα επάνω**. Να εκτελέσετε τη μελωδία πριν και μετά τη μεταφορά στο όργανο της επιλογής σας.

Απάντηση

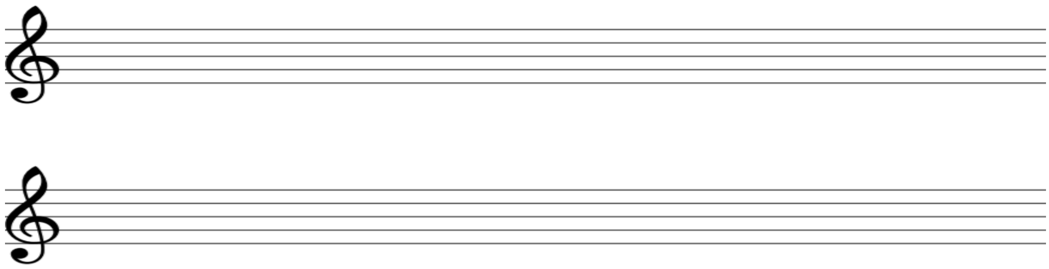


ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

8) Χωριστείτε σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων και δημιουργήστε μία μουσική φράση των 4 μέτρων σε ρυθμό 2/4 χρησιμοποιώντας τις νότες της κλίμακας της Λα μείζονος. Το προτεινόμενο ρυθμικό σχήμα είναι το εξής:



- Φροντίστε ώστε στο ισχυρό μέρος κάθε μέτρου να **συνηχούν σύμφωνα διαστήματα**.
- Να παρουσιάσετε την σύνθεσή σας στην υπόλοιπη τάξη.
- Για την εκτέλεση της σύνθεσής επιλέξετε το όργανο επιλογής σας και προσπαθήστε στη συνέχεια να την τραγουδήσετε.

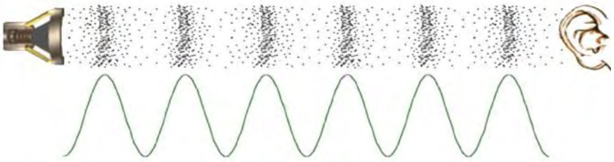


1.3. Τονικό ύψος – Αρμονικοί – Λόγοι συχνοτήτων *(ΦΠ Β1)*

Όπως διαπιστώσατε στις μουσικές ασκήσεις υπάρχουν διαστήματα που ακούγονται ευχάριστα και άλλα όχι. Για ποιο λόγο όμως συμβαίνει αυτό;

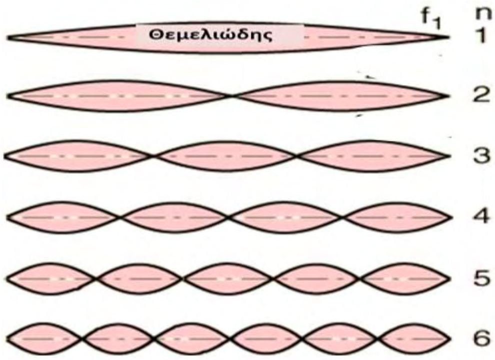
Για να μπορέσουμε να το εξηγήσουμε ας θυμηθούμε πρώτα πώς παράγεται ο ήχος.

Ο ήχος για να παραχθεί θα πρέπει ένα υλικό σώμα να τεθεί σε **ταλάντωση,** ένα υλικό μέσο να διαδώσει την ταλάντωση την οποία τελικά θα ερμηνεύσει το αυτί μας σε ήχο.



Ο αριθμός των ταλαντώσεων σε ένα δευτερόλεπτο είναι η **συχνότητα** και η μονάδα μέτρησής της είναι το **Hz.**

Στη Μουσική η συχνότητα καθορίζει το **τονικό ύψος μιας νότας**. Αν για παράδειγμα η χορδή του βιολιού πάλλεται 440 φορές σε ένα δευτερόλεπτο τότε η συχνότητά της είναι 440Hz και αντιστοιχεί στη νότα Λα. Επίσης, **όσο πιο μεγάλη** είναι **η συχνότητα** τόσο **πιο ψηλή** είναι **η νότα** που παράγεται. Για παράδειγμα, η νότα με συχνότητα 578 Hz ακούγεται πιο ψηλά από μία νότα με συχνότητα 257 Hz.
Στην πραγματικότητα όμως **η ταλάντωση της χορδής** και κατ' επέκταση η παραγωγή μίας νότας είναι ένα πιο **σύνθετο φαινόμενο**. Αν σύρουμε το δοξάρι πάνω στη χορδή του βιολιού τότε αυτή θα ταλαντωθεί σύνθετα δηλαδή δεν πάλλεται μόνο κατά το μήκος της αλλά συγχρόνως και κατά τα μισά της, τα τρίτα της, τα τέταρτά της, κ.ο.κ.



Παράδειγμα 1*: Θεμελιώδης ήχος και αρμονικοί*

Η νότα που τελικά ακούμε είναι το άθροισμα πολλών συχνοτήτων. Δηλαδή πατώντας τη νότα Σολ ταυτόχρονα παράγονται και κάποιες άλλες νότες, οι **αρμονικοί** οι οποίες όλες μαζί αποτελούν την **αρμονική στήλη**. Ο πρώτος φθόγγος της στήλης έχει την μεγαλύτερη ένταση και είναι αυτός που αντιλαμβανόμαστε και ονομάζεται **θεμελιώδης ή πρώτος αρμονικός** και οι υπόλοιποι φθόγγοι ονομάζονται **αρμονικοί**.

☞ **Ποια είναι η σχέση των αρμονικών μεταξύ τους;**

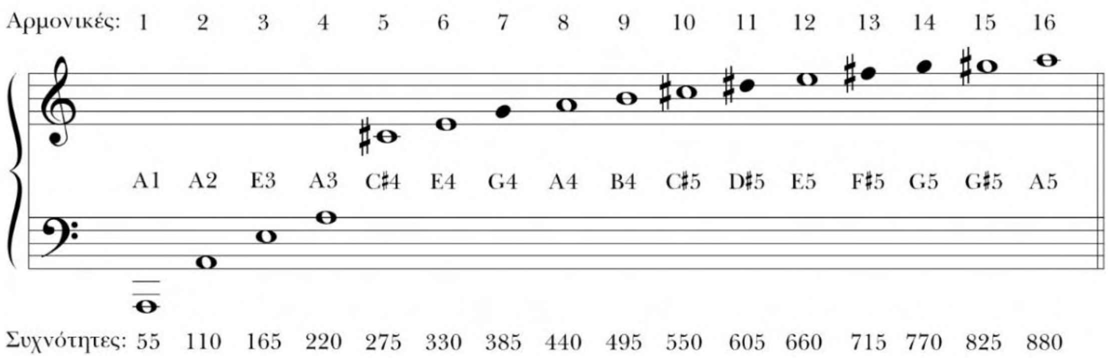
Στις ασκήσεις που ακολουθούν θα διαπιστώσετε με τη βοήθεια των Μαθηματικών πως σχετίζονται οι αρμονικοί μεταξύ τους.

1.4. Ερμηνεύω Μαθηματικά: Σύμφωνα διαστήματα και λόγοι συχνοτήτων μικρών ακέραιων αριθμών *(ΦΠ Β1)*

Ονομ/μο : ....
Ημερ/νία : ....

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Αν πατήσουμε στο πιάνο το **χαμηλό Λα** (Α1) το οποίο αντιστοιχεί στη συχνότητα 55Hz (**θεμελιώδη συχνότητα**) θα παραχθούν ταυτόχρονα και άλλες νότες με διαφορετικές συχνότητες **(αρμονικοί).** Θεωρητικά ο αριθμός των αρμονικών είναι άπειρος, ωστόσο εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τους δεκαέξι πρώτους καθώς είναι εκείνοι που γίνονται περισσότερο αισθητοί.



Εφόσον αρχικά ακούσετε με τη βοήθεια του πιάνου το άκουσμά τους απαντήστε στις εξής ερωτήσεις:

1) Παρατηρώντας την Αρμονική στήλη του Λα:

I. Μπορείτε να σκεφτείτε τί σχέση έχουν οι συχνότητες των 6 πρώτων αρμονικών;
II. Αν ονομάσουμε τη συχνότητα του 1ου αρμονικού F_1, πώς θα μπορούσατε να γράψετε τους υπόλοιπους αρμονικούς σε σχέση με τη θεμέλιο συχνότητα F_1;
III. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Αρμονικοί	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Συχνότητες (Hz)	55	110	165	220	275	330
Αρμονικοί σε σχέση με τη θεμελιώδη συχνότητα F_1	**F_1**					

2) Παρατηρώντας την Αρμονική στήλη του Λα:

I. Μεταξύ ποιων αρμονικών σχηματίζονται διαστήματα $8^{ης}$ Καθαρής; (Να γράψετε τουλάχιστον 4 παραδείγματα)

II. Ποια είναι η **σχέση συχνοτήτων των αρμονικών** που σχηματίζουν **διάστημα οκτάβας;**

III. Αν μία νότα έχει συχνότητας **x**, ποια είναι η συχνότητα **y** μιας νότας που απέχει ένα διάστημα οκτάβας ψηλότερα από αυτήν;

IV. Αν μία νότα έχει συχνότητας **x**, ποια είναι η συχνότητα **y** μιας νότας που απέχει ένα διάστημα οκτάβας χαμηλότερα από αυτήν;

IV. Αν ονομάσουμε τη **συχνότητα του $1^{ου}$ αρμονικού F_1**, πώς θα μπορούσατε να γράψετε τους υπόλοιπους αρμονικούς που σχηματίζουν **οκτάβα** σε σχέση με τη θεμέλιο συχνότητα F_1;

Με βάση τους υπολογισμούς σας να συμπληρώσετε τα δεδομένα των παρακάτω στηλών.

Διάστημα $8^{ης}$ Καθαρή	**Ζεύγη αρμονικών που σχηματίζουν διάστημα $8^{ης}$ Κ**	**Λόγοι συχνοτήτων**

Μέγεθος διαστημάτων

☞ Το **μέγεθος** ενός **μουσικού διαστήματος** μεταξύ δύο φθόγγων συχνότητας F_1 και F_2 αντίστοιχα μπορεί να εκφραστεί **ως ο λόγος των συχνοτήτων F_1/F_2.**

---

3) Παρατηρώντας την Αρμονική στήλη του Λα να βρείτε:

I. Μεταξύ ποιων αρμονικών σχηματίζονται **διαστήματα 5ης Καθαρής;** (Να σημειώσετε τουλάχιστον 2 παραδείγματα)

II. Ποιοι είναι οι **λόγοι συχνοτήτων** τους;

III. Πώς ερμηνεύετε το γεγονός ότι **διαφορετικά ζεύγη** αρμονικών δημιουργούν διαστήματα 5ης;

Με βάση τους υπολογισμούς σας να συμπληρώσετε τα δεδομένα των παρακάτω στηλών.

Διάστημα 5ης Καθαρή	**Αρμονικοί**	**Λόγοι συχνοτήτων**

4) Παρατηρώντας την Αρμονική στήλη του Λα και λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία του Πίνακα 1 να βρείτε:

I. Μεταξύ ποιων αρμονικών σχηματίζονται **διαστήματα 4ης Καθαρής;** (Να σημειώσετε τουλάχιστον 2 παραδείγματα)

II. Ποιοι είναι οι λόγοι συχνοτήτων τους;

III. Πώς ερμηνεύετε το γεγονός ότι διαφορετικά ζεύγη αρμονικών δημιουργούν διαστήματα 4ης;

Με βάση τους υπολογισμούς σας να συμπληρώσετε τα δεδομένα των παρακάτω στηλών.

Διάστημα 4ης Καθαρή	**Αρμονικοί**	**Λόγοι συχνοτήτων**

5) Παρατηρώντας την Αρμονική στήλη του Λα να βρείτε:

I. Μεταξύ ποιων αρμονικών σχηματίζονται **διαστήματα $2^{ας}$ Μεγάλη;**

II. Ποιοι είναι οι λόγοι συχνοτήτων τους; Τι παρατηρείτε;

Με βάση τους υπολογισμούς σας να συμπληρώσετε τα δεδομένα των παρακάτω στηλών.

Διάστημα $2^{ης}$ Μεγάλη	**Αρμονικοί**	**Λόγοι συχνοτήτων**

6) Με βάση τη στήλη των αρμονικών του χαμηλού Λα να συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2

Διάστημα	**Είδος**	**Αρμονικοί**	**Λόγοι συχνοτήτων**
$8^{ης}$ Κ	**Σύμφωνο**		
$5^{ης}$ Κ			
$4^{ης}$ Κ			
$3^{ης}$ μ			
$6^{ης}$ μ			
$2^{ης}$ Μ			
$7^{ης}$ Μ			

I. Τί παρατηρείτε για τους λόγους συχνοτήτων των **σύμφωνων διαστημάτων**;

II. Τί παρατηρείτε για τους λόγους των **ατελώς σύμφωνων διαστημάτων**;

III. Τι παρατηρείτε για τα **διάφωνα διαστήματα**;

1.5. Σύνοψη *(ΦΑ Δ1)*

Συμπλήρωσε τις λέξεις που λείπουν από το παρακάτω κείμενο έτσι ώστε οι προτάσεις που προκύπτουν να είναι επιστημονικά ορθές:

Στην πρώτη ενότητα εξετάσαμε τον τρόπο με τον οποίο οργανώνονται και ταξινομούνται οι μουσικοί ήχοι. Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι το ………………. ………….. που για τους μουσικούς είναι ο μουσικός φθόγγος. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο μουσικούς φθόγγους ονομάζεται …………….. Ο αριθμός των ……..………… που περιλαμβάνουν καθορίζει το μέγεθός τους. Σύμφωνα με την κατάταξη τους κατά την περίοδο του 1700-1900 μ.Χ., τα διαστήματα διακρίνονται σε τρείς κατηγορίες: ……………….., ………………… και ……………….

Για τους φυσικούς, ένας μουσικός φθόγγος αντιστοιχεί σε μία συχνότητα μονάδα μέτρησης της οποίας είναι το ……………... Από φυσικής απόψεως, οι μουσικοί ήχοι είναι σύνθετοι, αποτελούνται δηλαδή από μία ………………… συχνότητα και η οποία είναι αυτή που γίνεται σε μας αντιληπτή και από τους ………….. που καθορίζουν το ιδιαίτερο άκουσμα του κάθε ήχου.

Με μαθηματικούς όρους, το μουσικό διάστημα ορίζεται ως ………. συχνοτήτων. Όσο πιο ………….. είναι ο ……….. συχνοτήτων τόσο πιο εύηχα είναι τα διαστήματα.

1.6. Αξιολόγησε την προσπάθειά σου! *(ΦΑΑ Ε1)*

Σε αυτήν την ενότητα:

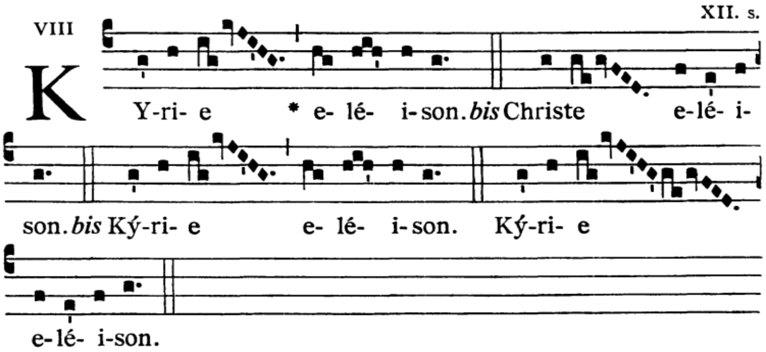
1. **Αναγνώρισες και κατασκεύασες** το **είδος** και το **μέγεθος** των διαστημάτων; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
2. **Αντιλήφθηκες ακουστικά** τη διαφορά ανάμεσα στα **σύμφωνα** και τα **διάφωνα** διαστήματα; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
3. **Διαπίστωσες** ότι όλα τα διαστήματα μπορούν να εκφραστούν **ως λόγοι συχνοτήτων; (ΝΑΙ –ΟΧΙ)**
4. **Διαπίστωσες** ότι όταν ο **λόγος συχνοτήτων** ανάμεσα σε δύο νότες είναι **μικρός ακέραιος αριθμός** τότε **ηχούν εύηχα**; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
5. **Διαπίστωσες** ότι διαφορετικά μουσικά διαστήματα με **το ίδιο όμως μέγεθος** έχουν **σταθερό λόγο**; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**

Κατάγραψε τις δυσκολίες που συνάντησες κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων της ενότητας.

Ενότητα 2η :
Η Μονοφωνική Μουσική της Αρχαίας Ελλάδας και η Πρώιμη Πολυφωνία του Μεσαίωνα – Πυθαγόρειος υπολογισμός διαστημάτων (Λόγοι Μηκών)

2.1. Η μελωδία ως βασικό στοιχείο της μουσικής δημιουργίας *(ΦΠ Α2)*

Η μελωδία κυριαρχεί στη Μουσική για εκατοντάδες χρόνια πριν να χρησιμοποιηθεί συνειδητά **η πολυφωνία ($9^{ος}$ αιώνας μ.Χ.).** Ως τότε, **η υμνωδία** που διαμορφώθηκε στη Χριστιανική Εκκλησία, τόσο στη Δύση όσο και στην Ανατολή, ήταν **μονόφωνη** όπως και τα **αρχαία Ελληνικά μελίσματα**.



Παράδειγμα μονοφωνικής μουσικής: Kyrie (Γρηγοριανό άσμα)

Όμως οι **μοναχοί** κατά το **Μεσαίωνα** θέλοντας να κάνουν πιο μεγαλοπρεπείς τους παραδοσιακούς ύμνους **(Γρηγοριανό Μέλος)** άρχισαν να **προσθέτουν** κάτω από **τη βασική φωνή** (vox principalis) και μια **δεύτερη ή τρίτη μελωδία** (vox organalis) σε **απόσταση διαστήματος $8^{ης}$, $5^{ης}$ καθαρής και $4^{ης}$ καθαρής** καθώς ήταν τα μόνα διαστήματα που οι θεωρητικοί του Μεσαίωνα, επηρεασμένοι από τις διδασκαλίες των Πυθαγορείων, δέχονταν ως **σύμφωνα (εύηχα).** Με τον τρόπο αυτόν επινοήθηκε **η πολυφωνία** στην οποία στηρίχθηκε η **δυτικοευρωπαϊκή μουσική.**

Η **πρώτη μορφή πολυφωνικής μουσικής** χρονολογείται από τον **$9^{ο}$ αιώνα μ.Χ.** και ονομάζεται **Organum**. Η **Musica Enchiriadis** (Ανωνύμου), είναι το **πρώτο εγχειρίδιο** που εμπεριέχει κωδικοποιημένο το **Organum του $9^{ου}$ αιώνα.**

Παράδειγμα πρώιμης πολυφωνικής Μουσικής: Organum, Musica Enchiriadis (859 μ.Χ.)

2.2. Σκέφτομαι Μουσικά: Ακούω και αναλύω την πολυφωνία του πρώιμου Μεσαίωνα *(ΦΕ Α2)*

Ονομ/μο : ....
Ημερ/νία : ....

ΑΚΡΟΑΣΗ

1) Θα ακούσετε 4 σύντομα αποσπάσματα από μουσικά έργα. Να σημειώσετε τη σωστή ιστορική περίοδο για το κάθε παράδειγμα. Τι διαφορές παρατηρείτε όσον αφορά τον αριθμό των φωνών που συγκροτούν τα μουσικά έργα της κάθε εποχής;

Μουσικά κομμάτια	Αρχαιότητα	Μεσαίωνας	Μπαρόκ	Κλασσική εποχή
1				
2				
3				
4				

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

2) Αναλύστε τα παρακάτω μουσικά αποσπάσματα (αρμονική ανάλυση) της ομάδας Α ή της Β ανάλογα με τις γνώσεις σας στην αρμονία. Τι παρατηρείτε όσον αφορά τα διαστήματα που χρησιμοποιούνται; Ερμηνεύστε τα στο πιάνο.

Ομάδα Α

Μουσικό παράδειγμα: $12^{ος}$ αιώνας μ.Χ. (Free Organum, Trope, Agnus Dei)

Ομάδα Β

1ο μουσικό παράδειγμα: Παράλληλο Organum (850 μ.Χ.)

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα παρακάτω οκτώ μέτρα αποτελούν το μουσικό θέμα από την $9^{η}$ Συμφωνία του Beethoven (Ωδή στη Χαρά).

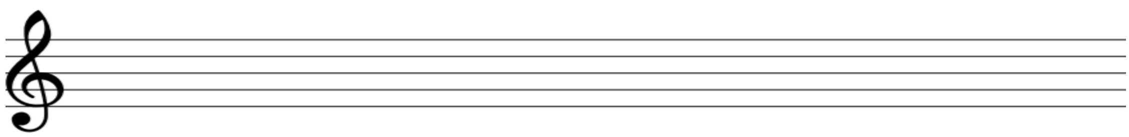
Υποθέστε ότι είστε συνθέτης της πρώιμης πολυφωνίας και καλείστε να συνθέσετε ένα organum έχοντας ως μελωδική γραμμή το παραπάνω μουσικό θέμα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι στο organum που αποτελεί είδος μουσικής σύνθεσης της πρώιμης πολυφωνίας τα διαστήματα που χρησιμοποιούνται είναι κατά κύριο λόγο τα **διαστήματα $5^{ης}$ Καθαρή, $4^{ης}$ Καθαρή και $8^{ης}$ Καθαρή** να συνθέσετε τη συνοδευτική μελωδική γραμμή λαμβάνοντας υπόψη τα εξής:

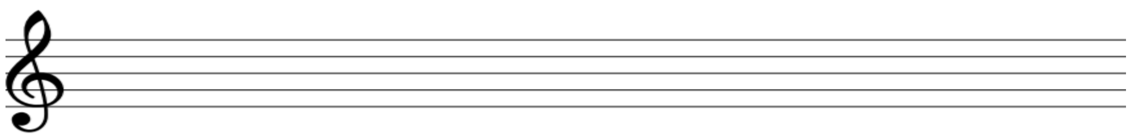
<u>Οδηγίες σύνθεσης</u>

- Στα **μέτρα 1 και 2** η δεύτερη μελωδική γραμμή να σχηματίζει διαστήματα σε σχέση με την πρώτη μελωδική γραμμή που να έχουν **λόγο συχνοτήτων 2/1**.
- Στα **μέτρα 3 και 4** η δεύτερη μελωδική γραμμή να σχηματίζει διαστήματα σε σχέση με την πρώτη μελωδική γραμμή που να έχουν **λόγο συχνοτήτων 4/3**.
- Στα **μέτρα 5 και 6** η δεύτερη μελωδική να σχηματίζει διαστήματα σε σχέση με την πρώτη μελωδική γραμμή που να έχουν **λόγο συχνοτήτων 2/1**.
- Για τα **μέτρα 7 και 8** επιλέξτε η δεύτερη μελωδική γραμμή να σχηματίζει διαστήματα σε σχέση με την πρώτη μελωδική γραμμή που να έχουν **λόγο συχνοτήτων 3/2.**

Εκτελέστε και ακούστε τη σύνθεσή σας στο πιάνο. Στη συνέχεια προσπαθήστε με την ομάδα σας να την τραγουδήσετε.

Απάντηση





2.3. Ο πυθαγόρειος υπολογισμός των διαστημάτων *(ΦΠ Β2)*

- ☞ Έχετε αναρωτηθεί γιατί οι συνθέτες μέχρι και το τέλος του Μεσαίωνα χρησιμοποιούσαν κυρίως τα διαστήματα της ταυτοφωνίας, της 8ης, της 5ης και της 4ης και απέφευγαν να χρησιμοποιούν διαστήματα όπως της 3ης και της 6ης;
- ☞ Και τι σχέση με τα παραπάνω μπορεί να έχουν τα Μαθηματικά;

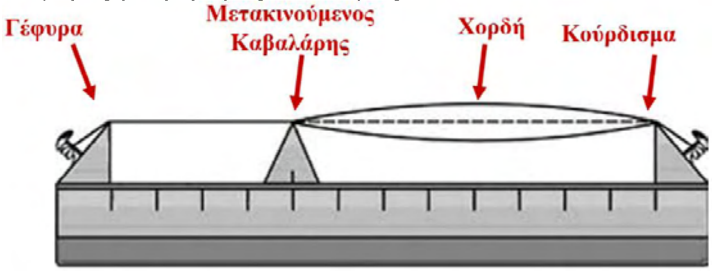
Πυθαγόρας ο Σάμιος (570- 495 π.Χ.)

Οι θεωρητικοί της Μουσικής του πρώιμου Μεσαίωνα για να υπολογίσουν τα μουσικά διαστήματα ακολουθούσαν τον τρόπο που πρώτος ανακάλυψε ο Πυθαγόρας. Ο αρχαίος αυτός Έλληνας **μαθηματικός, φιλόσοφος, γεωμέτρης** και **θεωρητικός της μουσικής** ήταν ο πρώτος που συσχέτισε τη Μουσική με τα Μαθηματικά μέσω **των λόγων των φυσικών αριθμών.**

Σύμφωνα με την παράδοση, ο Πυθαγόρας όταν ζούσε στην Αλεξάνδρεια πέρασε έξω από ένα σιδηρουργείο όπου τυχαία άκουσε τους ήχους που παράγονταν από τα χτυπήματα τεσσάρων τεχνιτών σε πυρακτωμένα μέταλλα. Επειδή οι παραγόμενοι ήχοι είχαν μία **ευχάριστη μελωδία** θέλησε να βρει την **αιτία** που συνέβαινε αυτό. Εξετάζοντας τα σφυριά των τεχνιτών διαπίστωσε ότι είχαν διαφορετικό βάρος και μάλιστα συγκρίνοντας το βαρύτερο από αυτά με τα ελαφρύτερα βρήκε τους λόγους **3/4, 2/3 και 1/2** αντίστοιχα. Για να επιβεβαιώσει την αρχική του υπόθεση ότι δηλαδή οι λόγοι αυτοί έχουν σχέση με τους μελωδικούς ήχους, πήρε μία μεταλλική χορδή την τέντωσε και με βάση το μήκος της τέντωσε άλλες τρεις μεταλλικές χορδές τα μήκη των οποίων ήταν ίσα με τα **3/4, 2/3 και 1/2 του μήκους της πρώτης χορδής**. Στη συνέχεια κρούοντας τις τέσσερις χορδές διαπίστωσε ότι είχαν ένα μελωδικό άκουσμα όμοιο με το μελωδικό άκουσμα που είχε ακούσει στο σιδηρουργείο.

Το μονόχορδο του Πυθαγόρα

Για τη **μελέτη των μουσικών διαστημάτων** σε σχέση με τις **αναλογίες των μηκών των χορδών** που τις παράγουν ο Πυθαγόρας χρησιμοποίησε ένα όργανο, το **μονόχορδο** (ή **Πυθαγόρειος Κανών** προς τιμήν του εφευρέτη του). Αποτελούνταν από ένα **μακρόστενο ηχείο** πάνω στο οποίο ήταν προσαρμοσμένη μία **χορδή**. Η χορδή τεντωνόταν πάνω από έναν **κανόνα** και έναν **μετακινούμενο καβαλάρη.** Η τοποθέτηση του καβαλάρη στις διάφορες θέσεις επέτρεπε τη διαίρεση του μήκους της χορδής σε διάφορες μετρήσιμες αναλογίες.



Το μονόχορδο του Πυθαγόρα

2.4. Ερμηνεύω Μαθηματικά: Τα μουσικά διαστήματα ως λόγοι μηκών (ΦΕ Β2)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1) Ακουστικά πειράματα με έγχορδα και τη χρήση χάρακα!

Με τη βοήθεια δύο εγχόρδων (π.χ. βιολιών) θα υπολογίσουμε τα διαστήματα της 8ης, της 5ης και της 4ης με βάση τα μήκη των χορδών τους με τον αντίστοιχο τρόπο που ο Πυθαγόρας έκανε χρησιμοποιώντας το μονόχορδο.
Για την άσκηση θα χρειαστεί να χωριστείτε σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων σε κάθε μία από τις οποίες δύο από τους συμμαθητές σας που παίζουν βιολί να εκτελέσουν τις ακόλουθες ασκήσεις χρησιμοποιώντας ο καθένας το όργανό του. Με βάση τα όσα θα **ακούσετε** αλλά και τα όσα θα **βλέπετε** απαντήστε στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

I. Αφού κουρδίσετε τα όργανά σας στην ίδια τονικότητα επιλέξετε μία χορδή και παίξτε την με το δοξάρι την ίδια χρονική στιγμή. Ακούστε τον παραγόμενο ήχο.

II. Παίζοντας σταθερά με το δοξάρι τη μία χορδή (πχ την ανοιχτή χορδή της νότας Sol) στο πρώτο βιολί, μετακινήστε το δάκτυλό σας σταδιακά και σταθερά πάνω στην ταστιέρα του δεύτερου βιολιού. Ακούστε τους παραγόμενους ήχους.
Τί **παρατηρείτε** σχετικά με τον ήχο όταν η θέση του δακτύλου πλησιάζει στο χορδοστάτη και όταν απομακρύνεται από αυτόν; Με δικά σας λόγια, **περιγράψτε** πώς **η συχνότητα** (δηλαδή ο μουσικός φθόγγος) **αλλάζει** καθώς **αυξάνεται/ μειώνεται** (γίνεται ψηλότερος/ χαμηλότερος ο μουσικός φθόγγος) **το μήκος της παλλόμενης χορδής**.

III. Αν μετρήσετε με τη βοήθεια ενός χάρακα το συνολικό μήκος της χορδής των βιολιών (από τον καβαλάρη έως τη θέση των κλειδιών) θα διαπιστώσετε ότι είναι **μήκος ανοιχτής χορδής Μ= 30 cm**.

Στο πρώτο βιολί παίξτε τη νότα χρησιμοποιώντας ολόκληρο το μήκος της χορδής (Μ= 30cm), ενώ στο δεύτερο βιολί σύρετε το δοξάρι πάνω στην αντίστοιχη χορδή τοποθετώντας όμως το δάκτυλό σας πάνω στο **1/2** της χορδής (όπως φαίνεται στο σχήμα) έτσι ώστε να **πάλλεται το 1/2 της αρχικής χορδής Μ**.

α) Ποιο είναι το **μήκος M_1** της χορδής που πάλλεται;

β) Ποιος είναι ο **λόγος μηκών** ανάμεσα στο **μήκος M_1 της χορδής** του 2ου βιολιού που πάλλεται και στο **μήκος Μ της ανοιχτής χορδής (30cm);**

γ) Ακούστε διαδοχικά τον ήχο του 1ου βιολιού και στη συνέχεια του 2ου βιολιού. Σε ποιο **μουσικό διάστημα** αντιστοιχούν; Αν δεν μπορείτε να καταλάβετε το μουσικό διάστημα μπορείτε να πειραματιστείτε με το πιάνο για να βρείτε το αντίστοιχο διάστημα.

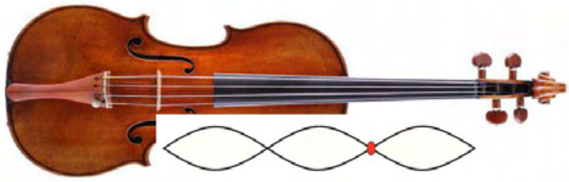
δ) Ακούστε ταυτόχρονα τους δύο ήχους. Τί αίσθημα σας προκαλούν;

ε) Τί σχέση έχει ο **λόγος συχνοτήτων** του διαστήματος 8ης Κ με το **λόγο μηκών** του ίδιου διαστήματος;

Με βάση τα δεδομένα των μετρήσεων και των υπολογισμών σας συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Μήκος αρχικής χορδής Μ (σε cm)	Μήκος παλλόμενης χορδής (σε cm)	Λόγος μηκών των χορδών= μήκος αρχικής χορδής / μήκος παλλόμενης χορδής	Λόγος συχνοτήτων	Μουσικό διάστημα

IV. Επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία, παίζοντας δηλαδή στο **1ο βιολί** ολόκληρο το **μήκος Μ (Μ= 30cm) της ανοιχτής χορδής**, ενώ στο 2ο βιολί σύρετε το δοξάρι πάνω στην αντίστοιχη χορδή τοποθετώντας όμως το δάκτυλό σας πάνω στο **1/3** της χορδής έτσι ώστε να **πάλλονται τα 2/3 της αρχικής χορδής Μ** (όπως φαίνεται στο σχήμα).



α) Ποιο είναι το **μήκος M_2** της χορδής που πάλλεται;

β) Ποιος είναι ο **λόγος μηκών** ανάμεσα στο **μήκος M_2 της χορδής** του 2ου βιολιού που πάλλεται και στο **μήκος Μ της ανοιχτής χορδής (30cm);**

γ) Ακούστε διαδοχικά τον ήχο του 1ου βιολιού και στη συνέχεια του 2ου βιολιού. Σε ποιο **μουσικό διάστημα** αντιστοιχούν; Αν δεν μπορείτε να καταλάβετε το μουσικό διάστημα μπορείτε να πειραματιστείτε με το πιάνο για να βρείτε το αντίστοιχο διάστημα.

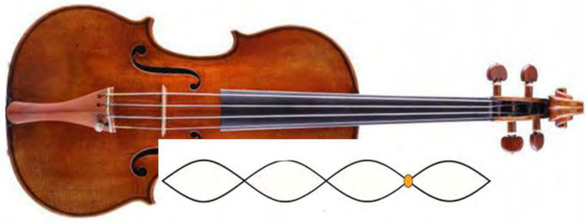
δ) Ακούστε ταυτόχρονα τους δύο ήχους. Τί αίσθημα σας προκαλούν;

ε) Τί σχέση έχει ο **λόγος συχνοτήτων** του διαστήματος 5ης Κ με το **λόγο μηκών** του ιδίου διαστήματος;

Με βάση τα δεδομένα των μετρήσεων και των υπολογισμών σας συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Μήκος αρχικής χορδής Μ (σε cm)	Μήκος παλλόμενης χορδής (σε cm)	Λόγος μηκών των χορδών= μήκος αρχικής χορδής / μήκος παλλόμενης χορδής	Λόγος συχνοτήτων	Μουσικό διάστημα

V. Επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία, παίζοντας δηλαδή στο **$1^{ο}$ βιολί** ολόκληρο το **μήκος Μ (Μ= 30cm) της ανοιχτής χορδής**, ενώ στο $2^{ο}$ βιολί σύρετε το δοξάρι πάνω στην αντίστοιχη χορδή τοποθετώντας όμως το δάκτυλό σας πάνω στο **1/4** της χορδής έτσι ώστε να **πάλλονται τα 3/4 της αρχικής χορδής Μ** (όπως φαίνεται στο σχήμα).



α) Ποιο είναι το **μήκος M_3** (σε cm) της **χορδής που πάλλεται**;

β) Ποιος είναι ο **λόγος μηκών** ανάμεσα στο **μήκος M_3 της χορδής** του $2^{ου}$ βιολιού που πάλλεται και στο **μήκος Μ της ανοιχτής χορδής (30cm);**

γ) Ακούστε διαδοχικά τον ήχο του $1^{ου}$ βιολιού και στη συνέχεια του $2^{ου}$ βιολιού. Σε ποιο **μουσικό διάστημα** αντιστοιχούν; Αν δεν μπορείτε να καταλάβετε το μουσικό διάστημα μπορείτε να πειραματιστείτε με το πιάνο για να βρείτε το αντίστοιχο διάστημα.

δ) Ακούστε ταυτόχρονα τους δύο ήχους. Τί αίσθημα σας προκαλούν;

ε) Τί σχέση έχει ο **λόγος συχνοτήτων** του διαστήματος $4^{ης}$ Κ με το **λόγο μηκών** του ιδίου διαστήματος;

Με βάση τα δεδομένα των μετρήσεων και των υπολογισμών σας συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Μήκος αρχικής χορδής Μ (σε cm)	Μήκος παλλόμενης χορδής (σε cm)	Λόγος μηκών των χορδών= μήκος αρχικής χορδής / μήκος παλλόμενης χορδής	Λόγος συχνοτήτων	Μουσικό διάστημα

Να επιλέξετε με την ομάδα σας μία από τις δύο παρακάτω ασκήσεις:

VI. Να διερευνήσετε το παραπάνω πρόβλημα αν τώρα χρησιμοποιήσετε μία **νέα χορδή το μήκος L** της οποίας είναι τα **2/3 της αρχικής χορδής (M=30cm)** και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα δεδομένα των υπολογισμών σας.

α) Ποιο είναι το **μήκος L** της νέας χορδής;

β) Ποια είναι τα **μήκη L_1, L_2** και **L_3** των παλλόμενων χορδών ώστε να παραχθούν διαστήματα **$8^{ης}$, $5^{ης}$** και **$4^{ης}$** αντίστοιχα;

γ) Οι **λόγοι μηκών** των διαστημάτων $8^{ης}$, $5^{ης}$ και $4^{ης}$ **παραμένουν οι ίδιοι ή αλλάζουν** σε σχέση με τους λόγους των αντίστοιχων διαστημάτων που είχατε υπολογίσει για την αρχική χορδή **M;**

Μήκος αρχικής χορδής L (σε cm)	Μήκος παλλόμενης χορδής (σε cm)	Λόγος μηκών των χορδών= μήκος αρχικής χορδής / μήκος παλλόμενης χορδής	Παραγόμενο μουσικό διάστημα

VII. Να διερευνήσετε το παραπάνω πρόβλημα αν τώρα χρησιμοποιήσουμε μία νέα χορδή το **μήκος Ν** της οποίας είναι **τα 3/4 της αρχικής χορδής (Μ=30cm)** και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα δεδομένα των υπολογισμών σας.

α) Ποιο είναι το **μήκος Ν** της νέας χορδής;

β) Ποια είναι τα **μήκη N_1, N_2** και **N_3** των παλλόμενων χορδών ώστε να παραχθούν διαστήματα **8ης, 5ης** και **4ης** αντίστοιχα;

γ) Οι **λόγοι μηκών** των διαστημάτων 8ης, 5ης και 4ης **παραμένουν οι ίδιοι ή αλλάζουν** σε σχέση με τους λόγους των αντίστοιχων διαστημάτων που είχατε υπολογίσει για την αρχική χορδή **Μ;**

Μήκος αρχικής χορδής Ν (σε cm)	Μήκος παλλόμενης χορδής (σε cm)	Λόγος μηκών των χορδών= μήκος αρχικής χορδής / μήκος παλλόμενης χορδής	Παραγόμενο μουσικό διάστημα

2) Ακουστικά πειράματα με τη χρήση κανόνα και διαβήτη!

Ο υπολογισμός των μηκών των χορδών που απαιτούνται για να παραχθούν τα μουσικά διαστήματα είναι μία σχετικά εύκολη διαδικασία όταν έχουμε στη διάθεσή μας τον χάρακα. Πραγματοποιώντας τις κατάλληλες μετρήσεις και αριθμητικές πράξεις μπορούμε με ακρίβεια να υπολογίσουμε τα μήκη των χορδών και να τα εκφράσουμε και σε δεκαδικούς αριθμούς. Στην **εποχή όμως του Πυθαγόρα η έννοια των δεκαδικών αριθμών δεν ήταν γνωστή** και επιπλέον τα τότε διαθέσιμα **γεωμετρικά όργανα** ήταν ο **βαθμονομημένος κανόνας** και **ο διαβήτης**.

☞ *Με **ποιον τρόπο** λοιπόν μπορούμε **να υπολογίσουμε** τα **μήκη χορδών** που χρειαζόμαστε προκειμένου να παραχθούν τα **μουσικά διαστήματα** που θέλουμε όταν **δεν γνωρίζουμε το ακριβές μήκος τους;***

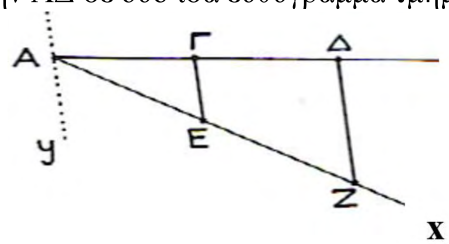
Στην άσκηση που ακολουθεί θα μάθετε να υπολογίζετε τα μουσικά διαστήματα ως **λόγους μηκών των αντίστοιχων χορδών** που τα παράγουν χωρίς να είναι αναγκαία η γνώση των απόλυτων τιμών του μήκους των χορδών.

Υπολογισμός διαστήματος 8ης

Η **απλούστερη σχέση μεταξύ δύο ήχων** προκύπτει όταν **μία χορδή διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη** οπότε και παράγεται το **διάστημα της 8ης**. Στην πραγματικότητα λοιπόν θα πρέπει να δούμε πώς χωρίζεται μία χορδή ή διαφορετικά ένα ευθύγραμμο τμήμα για παράδειγμα μήκους ΑΔ σε δύο ίσα μέρη με τη χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη.

Οδηγίες

- Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Ax
- Πάνω σ’ αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη **δύο διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΕΖ.**
- Ενώνουμε τα σημεία Δ και Ζ
- Από τα σημεία Ε και Α φέρνουμε ΕΓ και Αy παράλληλες προς τη ΔΖ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Ax ίσα τμήματα **ΑΕ=ΕΖ**. Στο σχηματιζόμενο $\widehat{A\Delta Z}$ το σημείο Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επειδή η ΕΓ είναι παράλληλη προς τη ΔΖ και διέρχεται και από το Γ του ΑΔ. Άρα **ΑΓ=ΓΔ.** Οπότε χωρίσαμε την ΑΔ σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα.



I. Με τη βοήθεια του **κανόνα και του διαβήτη** και ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία να χωρίσετε **το μήκος της χορδής ΑΔ του βιολιού**, από τον καβαλάρη δηλαδή έως τη θέση των κλειδιών σε **τρία ίσα μέρη**.

α) Σε **ποιο σημείο της χορδής** θα πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας ώστε να παραχθεί ένα **διάστημα 5ης καθαρής**;

β) Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό **μήκος της χορδής ΑΔ είναι 50cm,** σε ποιο **σημείο της χορδής** πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας ώστε να παραχθεί το **μουσικό διάστημα** που υπολογίσατε προηγουμένως; Είναι ακριβής ο υπολογισμός σας; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

II. Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία και με τη βοήθεια του **κανόνα και του διαβήτη** να χωρίσετε **το μήκος της χορδής ΑΔ του βιολιού** σε **τέσσερα ίσα τμήματα**.

α) Σε ποιο σημείο της χορδής θα πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας ώστε να παραχθεί ένα **διάστημα 4ης καθαρής;**

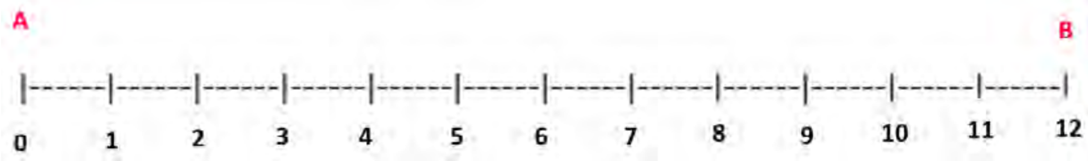
β) Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό μήκος της χορδής **ΑΔ είναι 50cm**, σε **ποιο σημείο της χορδής** πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας ώστε να παραχθεί το **μουσικό διάστημα** που υπολογίσατε προηγουμένως; Είναι **ακριβής** ο υπολογισμός σας; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Δραστηριότητα 3. Πρόσθεση διαδοχικών διαστημάτων πάνω σε μία χορδή κιθάρας με βάση τους λόγους μηκών!

Από τη μουσική θεωρία μας είναι γνωστό ότι ένας από τους τρόπους για να σχηματίσουμε ένα διάστημα $8^{ας}$ είναι ο εξής:

☞ *Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα $8^{η}$ Κ με βάση τους λόγους μηκών των διαστημάτων $5^{ης}$ Κ και $4^{ης}$ Κ;*

i. Αρχικά με τη βοήθεια του διαβήτη και του κανόνα να χωρίσετε το **μήκος ΑΒ** μιας χορδής της κιθάρας σε **12 ίσα τμήματα.**



ii. Με βάση τις μέχρι τώρα γνώσεις σας σε ποιο **σημείο Ε** πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας ώστε να παραχθεί ένα **διάστημα $8^{ης}$ Κ**; Ποιος είναι ο λόγος μηκών **ΑΕ** και **ΕΒ;**

Υπολογισμός 8ης Κ ως άθροισμα 5ης Κ + 4ης Κ

I. Για να παίξετε ένα διάστημα καθαρής 5ης θα πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας στο **σημείο Γ** που αντιστοιχεί στα **2/3 του μήκους της χορδής ΑΒ**.
α) Ποια είναι η ακριβής θέση του σημείου Γ πάνω στη χορδή;
β) Ποιος είναι **ο λόγος των μηκών ΑΒ/ΑΓ** του διαστήματος;

II. Για να προσθέσετε στο διάστημα 5ης Κ που μόλις υπολογίσατε ένα διάστημα 4ης Καθαρή θα πρέπει να τοποθετήσετε το δάκτυλό σας στο **σημείο Δ** που είναι τα **3/4 του τμήματος ΑΓ**.
α) Ποια είναι η ακριβής θέση του σημείου Δ πάνω στη χορδή;
β) Ποιος είναι **ο λόγος των μηκών ΑΓ/ΑΔ** του διαστήματος;

iii. Να συγκρίνετε το λόγο των μηκών **ΑΓ/ΑΔ** που προέκυψε από την πρόσθεση των μουσικών διαστημάτων της 5ης και 4ης με τον λόγο μηκών **ΑΕ/ΑΒ** με τον οποίο αρχικά είχαμε ορίσει την οκτάβα. Τί παρατηρείτε;
Θυμηθείτε ότι η κιθάρα είναι χωρισμένη σε 12 τμήματα.

2.5. Συνθέτω Μαθηματικά: Γίνομαι συνθέτης μεσαιωνικής Μουσικής χρησιμοποιώντας τα Μαθηματικά του Πυθαγόρα *(ΦΕ Γ2)*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1) Συνθέτω την κλίμακα του Πυθαγόρα!

Για να βρούμε τις νότες στην πυθαγόρεια κλίμακα δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτε άλλο παρά μόνο να προσθέτουμε σε δοσμένη νότα συνεχώς διαδοχικά διαστήματα $5^{ης}$Κ.

Για την παρακάτω δραστηριότητα χωριστείτε σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων και φροντίστε σε κάθε μία ομάδα να υπάρχει μία κιθάρα έτσι ώστε να κάνετε τους πειραματισμούς σας.

Βασικές αρχές για τις αριθμητικές πράξεις με τους λόγους μηκών/συχνοτήτων

- ☞ Το **βασικό διάστημα** υπολογισμού για το σχηματισμό της πυθαγόρειας κλίμακας είναι το **διάστημα $5^{ης}$ Καθαρής** το οποίο καθορίζεται από το λόγο **μηκών 3/2** ή διαφορετικά από το **λόγο συχνοτήτων 2/3.**
- ☞ Για να **προσθέσω** ή να **αφαιρέσω** δύο **διαδοχικά διαστήματα** πρέπει να **πολλαπλασιάσω** ή να **διαιρέσω** αντίστοιχα τους **λόγους των μηκών** της χορδής που τα παράγει.
- ☞ Οι **λόγοι μηκών** ενός διαστήματος είναι **αντιστρόφως ανάλογοι** με τους **λόγους συχνοτήτων.**
- ☞ Για να υπολογίσουμε το πυθαγόρειο φθογγικό υλικό θα δουλέψουμε με βάση το λόγο συχνοτήτων.

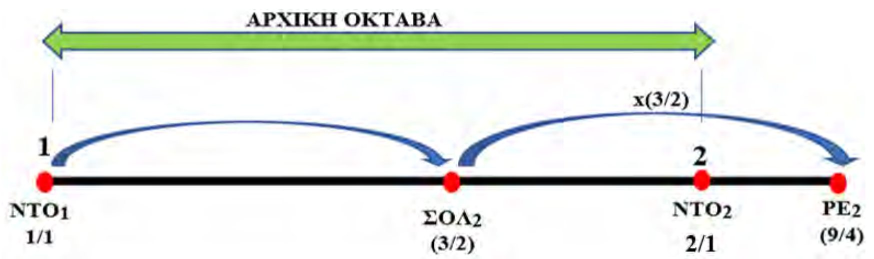
<u>Οδηγίες σύνθεσης</u>

Προκειμένου να σχηματίσουμε την κλίμακα του Ντο πρέπει να βρούμε την ακόλουθη σειρά φθόγγων: $Ντο_1$–Ρε–Μι– Φα–Σολ – Λα – Σι–$Ντο_2$.

I. Ο πρώτος φθόγγος είναι ο $Ντο_1$ που βρίσκεται σε ταυτοφωνία με τον εαυτό του. Οπότε ο λόγος συχνοτήτων είναι 1/1. Για να έχουμε μια πλήρη κλίμακα χρειαζόμαστε και τη νότα $Ντο_2$ μια οκτάβα πάνω από το αρχικό $Ντο_1$ με λόγο συχνοτήτων 2/1.

II. Με βάση τη νότα Ντο$_1$ ανεβείτε μία $5^η$ Καθαρή προς τα επάνω. Ποιος είναι ο λόγος συχνοτήτων της νότας Σολ; Είναι η Σολ μέσα στην οκτάβα;

III. Έχοντας ως βάση τη νότα Σολ ανεβείτε μία $5^η$ Καθαρή προς τα πάνω. Η νότα που προκύπτει είναι η Ρε. Ποιος είναι ο λόγος συχνοτήτων της; Είναι μέσα στα όρια της αρχικής μας οκτάβας; Αν όχι ποια μαθηματική πράξη πρέπει να κάνετε;
Για την απάντησή σας συμβουλευτείτε το παρακάτω διάγραμμα.



IV. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία να υπολογίσετε το λόγο συχνοτήτων των εξής φθόγγων της πυθαγόρειας κλίμακας: Ρε, Λα, Μι, Σι. Συμπληρώστε με βάση τους υπολογισμούς σας τον παρακάτω πίνακα.

Προηγούμενη νότα **(λόγος συχνοτήτων)**	**Μαθηματικός υπολογισμός:** Προηγούμενο διάστημα + μία καθαρή 5η	**Διόρθωση αν το κλάσμα που προκύπτει είναι > (2/1)**	**Τελική νότα Λόγος συχνοτήτων**
			$Ντο_1$: 1/1
$Ντο_1$ (1/1)			Σολ:
Σολ: (3/2)			Ρε:
Ρε:			Λα:
Λα:			Μι:
Μι:			Σι:

V. Αν από την νότα Σι που υπολογίσατε ανεβείτε ένα διάστημα 5ης Καθαρό προς τα επάνω τότε η νότα που θα προκύψει είναι η Φα# και όχι η Φα που θέλουμε εμείς.
Για να βρείτε τη νότα Φα θα χρειαστεί από την αρχική νότα $Ντο_1$ να κατεβείτε ένα διάστημα 5ης Καθαρό. Ποιος είναι ο λόγος συχνοτήτων;

Προηγούμενη νότα **(λόγος συχνοτήτων)**	**Μαθηματικός υπολογισμός:** Προηγούμενο διάστημα − μία καθαρή 5η	**Διόρθωση αν το κλάσμα που προκύπτει είναι > (2/1)**	**Τελική νότα Λόγος συχνοτήτων**
$Ντο_1$: 1/1			Φα:

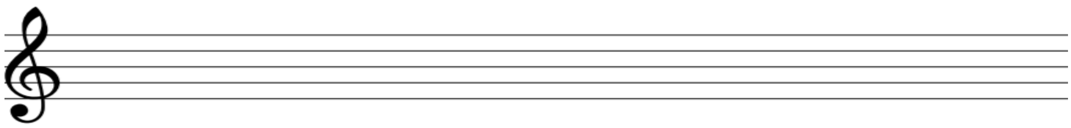
VI. Να υπολογίσετε τα διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών φθόγγων. Τί παρατηρείτε για τα διαστήματα που σχηματίζονται μεταξύ του Μι–Φα και Σι–$Ντο_2$.

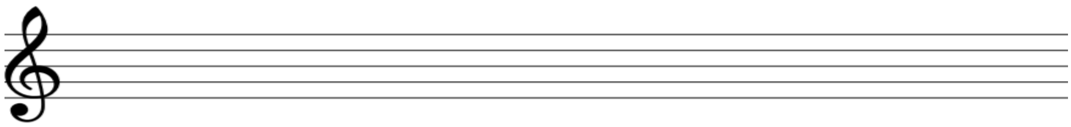
Βρίσκω την Πυθαγόρεια κλίμακα πάνω στην κιθάρα!

- Να βρείτε τους **λόγους μηκών** για κάθε νότα της πυθαγόρειας κλίμακας.
- Με δεδομένο ότι το μήκος της αρχικής χορδής της κιθάρας σας είναι **65cm** να βρείτε τις **θέσεις** πάνω στην ταστιέρα για κάθε μία από τις νότες της κλίμακας.
  Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Φθόγγοι	**Ντο$_1$**	**Ρε**	**Μι**	**Φα**	**Σολ**	**Λα**	**Σι**	**Ντο**
Λόγοι συχνοτήτων	1/1							2/1
Λόγοι μηκών	1/1							
Μήκος σε cm	65							

➢ Να **συνθέσετε** μια μικρή μελωδία **4 μέτρων** σε **ρυθμό 2/4** με τις νότες της πυθαγόρειας κλίμακας και να την εκτελέσετε στην κιθάρα. Στα **ισχυρά μέρη** του μέτρου ένας από τους συμμαθητές σας να σας συνοδεύει με **σύμφωνες συνηχήσεις**.





2.6. Σύνοψη *(ΦΑ Δ2)*

Συμπληρώστε τις λέξεις που λείπουν από το παρακάτω κείμενο έτσι ώστε οι προτάσεις που προκύπτουν να είναι επιστημονικά ορθές:

Στη δεύτερη ενότητα ασχοληθήκαμε με την εμφάνιση της **πολυφωνίας** στη μουσικής η οποία τοποθετείται **χρονικά** γύρω στον .... Το **πρώτο είδος** μουσικής **πολυφωνικής** γραφής είναι το ……….. Η προέλευσή του εντοπίζεται στους ……………………… και τα διαστήματα που κυρίως χρησιμοποιούνται για τη σύνθεσή του είναι τα διαστήματα …………….

Για το **μαθηματικό υπολογισμό** των παραπάνω διαστημάτων οι θεωρητικοί της εποχής ακολουθούσαν τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονταν στην ………………... Ο πρώτος που ασχολήθηκε με τις **αριθμητικές σχέσεις** των μουσικών διαστημάτων ήταν ……………………… Το όργανο με το οποίο πειραματίστηκε ήταν το................. με τη βοήθεια του .... και του .... Για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων βασίστηκε στους .... των χορδών που τα παράγουν. Τα διαστήματα που θεώρησε ότι ήταν **εύηχα** ήταν τα διαστήματα της ....., …… και ……. με λόγους μηκών ...., ………. και .... αντίστοιχα.

2.7. Αξιολόγησε την προσπάθειά σου! *(ΦΑΑ Ε2)*

Σε αυτήν την ενότητα:

1. **Αντιλήφθηκες ακουστικά** τη διαφορά όσον αφορά την υφή ανάμεσα στη δυτική Μουσική διαφορετικών ιστορικών περιόδων; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
2. **Διαπίστωσες** ποια μουσικά διαστήματα είναι κυρίαρχα στον πρώιμο μεσαίωνα; **(ΝΑΙ– ΟΧΙ)**
3. **Μέτρησες** την ακριβή θέση που πρέπει να τοποθετήσεις τα δάκτυλά σου πάνω στο βιολί ώστε να παραχθούν τα ζητούμενα διαστήματα με τη βοήθεια του βαθμονομημένου χάρακα; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
4. **Μέτρησες** την ακριβή θέση που πρέπει να τοποθετήσεις τα δάκτυλά σου πάνω στο βιολί με τη βοήθεια του γνώμονα και του διαβήτη; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
5. **Δημιούργησες** και **υπολόγισες** τους μαθηματικούς λόγους της πυθαγόρειας κλίμακας; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
6. **Παρατήρησες** ποιοι **μαθηματικοί λόγοι** αντιστοιχούν στα **σύμφωνα διαστήματα; (ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
7. Κατανόησες ότι ο **λόγος συχνοτήτων** των μουσικών φθόγγων είναι **αντιστρόφως ανάλογος** με το **λόγο μηκών** των χορδών που τους παράγουν; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
8. **Συνεργάστηκες** αρμονικά και αποτελεσματικά με τους συμμαθητές στις ομαδικές εργασίες; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**

Κατάγραψε τις δυσκολίες που συνάντησες κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων της ενότητας.

Ενότητα 3η:
Η Πολυφωνική Μουσική του Μεσαίωνα, της Αναγέννησης και του Μπαρόκ και η εμφάνιση των πληκτροφόρων οργάνων – Η ανάγκη του συγκερασμού με τη βοήθεια των Μαθηματικών

3.1. Η εξέλιξη της αρμονικής σκέψης στη Μουσική *(ΦΠ Α3)*

Η εξέλιξη της πολυφωνίας στο Μεσαίωνα και στην Αναγέννηση

Όπως είδαμε ένα από τα **μεγαλύτερα επιτεύγματα** της **Μουσικής του Μεσαίωνα** υπήρξε η ανάπτυξη της **πολυφωνίας**. Ο **πρώτος** σταθμός στην εξέλιξη της πολυφωνίας σημειώνεται κατά τις **αρχές του 9ου αιώνα**, όπου εμφανίζεται για πρώτη φορά το **Organum** στο οποίο υπάρχει μία μελωδία από το **Γρηγοριανό μέλος** και προστίθεται **μία δεύτερη ή τρίτη φωνή** σε **διαστήματα $8^{ης}$, $5^{ης}$ και $4^{ης}$ χαμηλότερα**.

Με την πάροδο του χρόνου οι μουσικές συνθέσεις γίνονταν ολοένα και πιο **πολύπλοκες** όσον αφορά στην αρμονία, στο ρυθμό και στα διαστήματα που χρησιμοποιούνταν. Στη διαμόρφωση της μουσικής δημιουργίας σημαντικό ρόλο έπαιξε η εξέλιξη ενός νέου μουσικού είδους, του **Μοτέτου (Motetus).** Πρόκειται για μια από τις **πιο σημαντικές μορφές της πολυφωνικής μουσικής** από το **1250 μ.Χ. περίπου μέχρι και το 1750 μ.Χ.**

Ειδικότερα, την **εποχή της Ars Nova ($14^{ος}$ αιώνας μ.Χ.)** καθιερώνονται τα νέα χαρακτηριστικά του Μοτέτου που σηματοδότησαν τις νέες εξελίξεις στην αρμονία της μουσικής και τα οποία ήταν:

α) η **ευρεία χρήση** των **διαστημάτων $3^{ης}$ και $6^{ης}$**, που θεωρούνταν μέχρι τότε διαφωνίες και

β) η **σταδιακή χρήση** των **διάφωνων διαστημάτων της $2^{ας}$ και της $7^{ης}$**. Ο μεγαλύτερος συνθέτης μοτέτου εκείνη την περίοδο ήταν ο **Guillaume de Machaut** (1300- 1377 μ.Χ.)

Στην Αναγέννηση, το ενδιαφέρον στράφηκε στις **πλήρεις σύμφωνες συγχορδίες.** Δηλαδή οι **συνηχήσεις** οργανώνονται και συστηματοποιούνται στο **ταυτόχρονο άκουσμα τριών ή περισσοτέρων φθόγγων** που απέχουν μεταξύ τους **διαστήματα 3ης**. Το **σημαντικό** λοιπόν **διάστημα** βάσει του οποίου οργανώνεται το ηχητικό υλικό είναι πλέον το **διάστημα $3^{ης}$. Ο Zarlino** (Instituzioni harmoniche, 1558 μ.Χ.) διατύπωσε για πρώτη φορά με μαθηματικό τρόπο την ιδέα της σύμφωνης συγχορδίας, μείζονας και ελάσσονας.

3.2. Σκέφτομαι Μουσικά: Ακούω και αναλύω την πολυφωνία του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης *(ΦΕ Α3)*

Ονομ/μο : ....

Ημερ/νία : ....

ΑΚΡΟΑΣΗ

1) Θα ακούσετε 4 σύντομα αποσπάσματα από μουσικά έργα. Να σημειώσετε τη σωστή ιστορική περίοδο για το κάθε παράδειγμα. Τι διαφορές παρατηρείτε όσον αφορά την αρμονία και τον αριθμό των φωνών που συγκροτούν τα μουσικά έργα της κάθε εποχής;

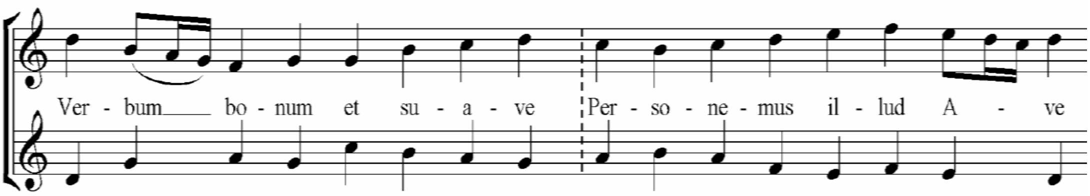
Μουσικά κομμάτια	Πρώιμος Μεσαίωνας	Ύστερος Μεσαίωνας	Αναγέννηση	Μπαρόκ
1				
2				
3				
4				

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

2) Αναλύστε ένα από τα παρακάτω μουσικά αποσπάσματα ανάλογα με τις γνώσεις σας στην αρμονία (αρμονική ανάλυση). Τι παρατηρείτε όσον αφορά τα διαστήματα που χρησιμοποιούνται; Εκτελέστε τα μουσικά κείμενα στο πιάνο.

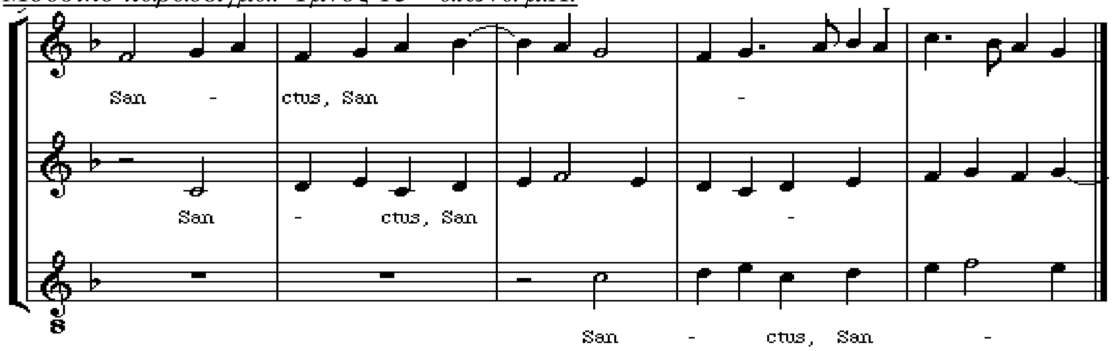
Ομάδα Α

Μουσικό παράδειγμα: Λειτουργία 14ου αιώνα μ.Χ.



Ομάδα Β

Μουσικό παράδειγμα: Ύμνος 13ου αιώνα μ.Χ.



3.3. Ερμηνεύω Μαθηματικά: Η προβληματική πυθαγόρεια διαίρεση της οκτάβας και η ανάγκη εύρεσης νέου τρόπου διαίρεσής της *(ΦΕ Β3)*

Όπως είδαμε η εξέλιξη της πολυφωνίας στο **Μεσαίωνα** είχε ως αποτέλεσμα την **ευρεία χρήση των διαστημάτων της 3ης και 6ης** που μέχρι πρότινος θεωρούνταν διάφωνα.
Επιπλέον, η οργάνωση των συνηχήσεων σε συγχορδίες κατά την **Αναγέννηση** στηρίχτηκε στο **διάστημα της 3ης**.

☞ Είναι όμως τα παραπάνω διαστήματα της πυθαγόρειας κλίμακας **καλά κουρδισμένα**;

☞ Ή με άλλα λόγια **ποια είναι η σχέση τους** με τα αντίστοιχα **φυσικά διαστήματα των αρμονικών**; Υπάρχει δηλαδή **απόκλιση** ανάμεσα στις δύο κατηγορίες διαστημάτων;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1) Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε τους λόγους συχνοτήτων της πυθαγόρειας κλίμακας:

Στη συνέχεια θα τα συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα φυσικά διαστήματα, τα διαστήματα δηλαδή που σχηματίζονται μεταξύ των αρμονικών.

I. Με βάση το παραπάνω διάγραμμα να **συγκρίνετε** τα **φυσικά διαστήματα της αρμονικής στήλης** με τα αντίστοιχα της **πυθαγόρειας κλίμακας**. Τί **ποσοστό απόκλισης** παρατηρείτε ανάμεσα στα διαστήματα αυτά; Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα κάνετε τη σύγκριση.
II. Σε ποια πυθαγόρεια διαστήματα παρατηρείτε **μεγαλύτερη απόκλιση** σε σχέση με τα φυσικά διαστήματα;
III. Τί παρατηρείτε για το **διάστημα 8ης;**

Με βάση τα δεδομένα των υπολογισμών σας να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Μουσικό διάστημα	**Πυθαγόρειο σύστημα**	**Φυσικό σύστημα**	**Απόκλιση**	
			σε δεκαδικούς	**(%)**
3ης Μ		5/4		
4ης Κ		4/3		
5ης Κ		3/2		
6ης Μ		5/3		
7ης Μ		7/4		
8ης Κ		2/1		

2) Μεταφέρω μία μελωδία σε άλλη τονικότητα με τη βοήθεια των Μαθηματικών του Πυθαγόρα!

Υποθέστε ότι είστε συνθέτης του Μεσαίωνα και χρειάζεται να μεταφέρετε (transporto) μία δοσμένη μελωδία κατά διάστημα 5ης ψηλότερα. Το φθογγικό υλικό της αρχικής μελωδίας περιλαμβάνει όλους τους φθόγγους της πυθαγόρειας κλίμακας.

Οδηγίες σύνθεσης

- ☞ Φροντίστε κάθε νότα της πυθαγόρειας κλίμακας να είναι ένα διάστημα 5ης ψηλότερα.
- ☞ Για να υψώσετε έναν φθόγγο μία 5ης ψηλότερα θα πρέπει να πολλαπλασιάσετε το λόγο συχνοτήτων της αρχικής νότας με το λόγο 3/2 που αντιστοιχεί στο διάστημα 5ης.
- ☞ Ο λόγος συχνοτήτων πρέπει να είναι ≤ 2 για να είναι εντός της οκτάβας.

Να σχηματίσετε την νέα κλίμακα από την οποία θα αντλήσετε το φθογγικό υλικό για τη νέα σας μελωδία. Ποια είναι η μεθοδολογία που θα ακολουθήσετε;

I. Τί **παρατηρείτε** όσον αφορά τους **λόγους συχνοτήτων των νέων φθόγγων**; Παραμένουν οι **ίδιοι** ή είναι **διαφορετικοί** σε σχέση με την αρχική κλίμακα;
II. Αν θέλατε σε ένα **πιάνο** που είναι **κουρδισμένο** με **βάση την πυθαγόρεια κλίμακα** τί θα έπρεπε να κάνετε προκειμένου να μεταφέρετε μία μελωδία υψηλότερα ή χαμηλότερα;

Με τα δεδομένα των υπολογισμών σας να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

Αρχικό φθογγικό υλικό **(λόγος συχνοτήτων)**	**Μαθηματικός υπολογισμός:** Προηγούμενο διάστημα + μία καθαρή 5^{η}	**Διόρθωση αν το κλάσμα που προκύπτει είναι >2**	Νέο φθογγικό υλικό **(Λόγος συχνοτήτων)- Αντιστοιχία με το αρχικό**
$Ντο_1$: 1/1			
Ρε: 9/8			
Μι: 81/64			
Φα: 4/3			
Σολ: 3/2			
Λα: 27/16			
Σι: 243/128			
$Ντο_2$: 2/1			

3.4. Συνθέτω Μαθηματικά: Ανακαλύπτω την ιστορία των πληκτροφόρων οργάνων – Ισοσυγκερασμένο Σύστημα *(ΦΕ Γ3)*

Πληκτροφόρα όργανα και δυνατότητα αλλαγής τονικότητας

Το **πιάνο** ανήκει στην οικογένεια των **πληκτροφόρων εγχόρδων** που άρχισαν να αναπτύσσονται σταδιακά στην Ευρώπη από τον 14^{o} αιώνα μ.Χ. Οι προγονικές μορφές του πιάνου που κυριάρχησαν τον 16^{o} – 18^{o} αιώνα μ.Χ. είναι τα νυκτά πληκτροφόρα όργανα και συγκεκριμένα το τσέμπαλο (cembalo), το κλαβίχορδο (clavichord), το βιρτζινάλ (virginal) και το σπινέττο (spinetto). Τα πρώτα πιάνα, τα φορτεπιάνο (fortepiano), όπως ονομάζονταν γιατί μπορούσαν να μεταβάλλουν την ένταση τους κατά το παίξιμό τους (δυνατά/fort-σιγά/piano), εφευρέθηκαν γύρω στα 1700 μ.Χ. από τον κατασκευαστή πληκτροφόρων οργάνων τον Bartolomeo di Francesco Cristofori (1665 – 1731 μ.Χ.) ο οποίος πειραματιζόταν ήδη από το 1698 μ.Χ. με ένα «τσέμπαλο με σφυράκια».

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα του πιάνου είναι η **δυνατότητα αλλαγής τονικότητας χωρίς προσθήκη νέων κλειδιών** όπως γινόταν στο παρελθόν με τις προγονικές μορφές του όπως το τσέμπαλο (cembalo).

Τσέμπαλο με επιπρόσθετα πλήκτρα.

Και αυτό επιτυγχάνεται χάρη στο **νέο σύστημα κουρδίσματος** που ακολουθεί, το **ισοσυγκερασμένο σύστημα.** Το σύστημα αυτό είναι το σύστημα που χρησιμοποιούμε και σήμερα σύμφωνα με το οποίο **η οκτάβα χωρίζεται σε 12 ίσα μέρη**, σε **12 ημιτόνια** δηλαδή που αντιστοιχούν στα 12 πλήκτρα (7 άσπρα και 5 μαύρα) της οκτάβας. Το ισοσυγκερασμένο κούρδισμα είναι γνωστό ήδη από το 16ο αιώνα μ.Χ. αλλά καθιερώθηκε τον 19^{o} αιώνα μ.Χ..
Από τα πρώτα έργα που γράφτηκαν πάνω στο συγκερασμένο σύστημα ήταν τα δύο τεύχη του **«Καλώς συγκερασμένο κλειδοκύμβαλο»** του **J. S. Bach**, στα οποία περιέχονται **48 Πρελούδια και Φούγκες** σε όλες τις κλίμακες.

Τί είναι όμως ο συγκερασμός;

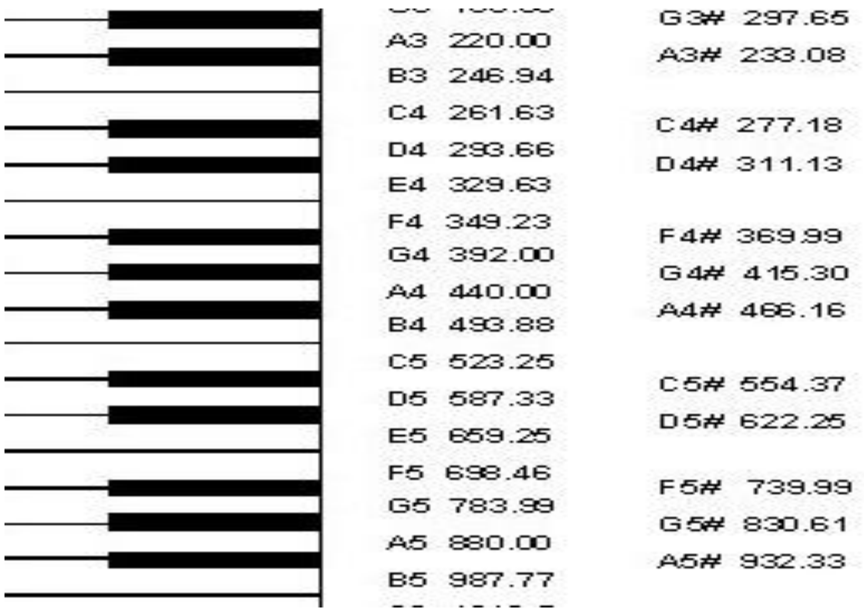
Η διαίρεση της οκτάβας ήταν ένα θέμα που απασχόλησε τους μουσικούς και τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα μέχρι και τον $19^{ο}$ αιώνα μ.Χ. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαιρέσουμε την οκτάβα δημιουργώντας έτσι διαφορά μουσικά συστήματα όπως για παράδειγμα το **πυθαγόρειο** και το **ισοσυγκερασμένο**. Με όποιον τρόπο και να διαιρέσουμε την οκτάβα θα έχουμε **απόκλιση** από τα **φυσικά διαστήματα των αρμονικών** (πχ. 2/1= οκτάβα, 3/2= $5^{η}$ Καθαρή, 5/4= $3^{ης}$ Μ) που αποτελούν και το **φυσικό μέτρο**.
Συγκερασμός καλείται οποιαδήποτε **απόκλιση** ανάμεσα στους **λόγους συχνοτήτων των διαστημάτων του συστήματος** που ακολουθούμε σε σχέση με τους **λόγους συχνοτήτων των φυσικών διαστημάτων.**

Ανακαλύπτω τα Μαθηματικά του σύγχρονου πιάνου!

Τα σύγχρονα πιάνα όπως και τα περισσότερα όργανα είναι κουρδισμένα με βάση το **ισοσυγκερασμένο σύστημα**. Αυτό σημαίνει ότι το **διάστημα του ημιτονίου** ανάμεσα σε **δύο οποιεσδήποτε συνεχόμενες νότες είναι ίσο**.

☞ *Είναι όμως **ίσος ο λόγος συχνοτήτων** ή είναι **ίση η διαφορά** μεταξύ των συχνοτήτων;*

Στη δραστηριότητα αυτή θα ανακαλύψετε τί σημαίνει ισοσυγκερασμένο σύστημα στην πράξη.



3) Με βάση τα δεδομένα του διαγράμματος να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

I. Ποιος είναι ο λόγος συχνοτήτων μεταξύ δύο **οποιοδήποτε** διαδοχικών νοτών που απέχουν ένα **ημιτόνιο**;
II. Ποιος είναι ίσος, **ο λόγος** μεταξύ των συχνοτήτων δύο διαδοχικών νοτών που απέχουν ένα ημιτόνιο ή η **διαφορά** τους;
III. Ποιος είναι ο **λόγος συχνοτήτων** που αντιστοιχούν μόνο στα **άσπρα πλήκτρα** του πιάνου και σχηματίζουν τη διατονική κλίμακα του Ντο;
IV. Ποιο είναι το **ποσοστό μεταβολής** (%) μεταξύ δύο διαδοχικών φθόγγων;

Νότα	Συχνότητα (Hz)	Διαφορά συχνοτήτων σε σχέση με την προηγούμενη νότα (ΔHz)	Λόγος συχνοτήτων σε σχέση με την προηγούμενη νότα	Λόγος συχνοτήτων σε σχέση με το αρχικό $Ντο_4$	Ποσοστό μεταβολής (%) μεταξύ διαδοχικών νοτών
C_4	261.63	0	___	___	
C_4#	277.18				
D_4					
E_4*b*					
E_4					
F_4		$F_{F4} - F_{E4}$	F_{F4} / F_{E4}		
F_4#					
G4					
A_4*b*					
A_4					
B_4*b*					
B4					
C_5					

4) Έχοντας υπολογίσει τα διαστήματα της ισοσυγκερασμένης διατονικής κλίμακας του Ντο στη συνέχεια θα τα συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα φυσικά διαστήματα, τα διαστήματα δηλαδή που σχηματίζονται μεταξύ των αρμονικών.

I. Να υπολογίσετε το **βαθμό απόκλισης** μεταξύ των **φυσικών** και των **ισοσυγκερασμένων διαστημάτων**.

II. Τί παρατηρείτε συγκρίνοντας τα παραπάνω διαστήματα; Σε ποια ισοσυγκερασμένα διαστήματα παρατηρείτε **μεγαλύτερη απόκλιση** σε σχέση με τα φυσικά διαστήματα;

III. Τί παρατηρείτε όσον αφορά το **διάστημα 8^{ης} Κ**;

Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο θα κάνετε τη σύγκριση.

Με βάση τα δεδομένα των υπολογισμών σας να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Μουσικό διάστημα	**Ισοσυγκερασμένο**	**Φυσικό σύστημα**	**Απόκλιση**	
			σε δεκαδικούς	**(%)**
3^{ης} Μ		5/4		
4^{ης} Κ		4/3		
5^{ης} Κ		3/2		
6^{ης} Μ		5/3		
7^{ης} Μ		7/4		
8^{ης} Κ		2/1		

3.5. Σύνοψη *(ΦΑ Δ3)*

Συμπλήρωσε τις λέξεις που λείπουν από το παρακάτω κείμενο έτσι ώστε οι προτάσεις που προκύπτουν να είναι επιστημονικά ορθές:

Στην τρίτη ενότητα ασχοληθήκαμε με την εξέλιξη της ……………….. Σημαντική ήταν η συμβολή στην εξέλιξη αυτή το **μουσικό είδος** του ………………… **Τον 14^{ο} αιώνα μ.Χ.,** την εποχή δηλαδή της ……………….., το κύριο χαρακτηριστικό του ήταν η **ευρεία χρήση των διαστημάτων** της ……… και της …………….. που παλιότερα θεωρούνταν …………….. **Σημαντικότερος συνθέτης** της εποχής αυτής είναι ο …………

Η **εξέλιξη της αρμονίας της Μουσικής** συνοδεύτηκε και από την σταδιακή εγκατάλειψη του ………………….. **υπολογισμού των διαστημάτων** προς αναζήτηση νέων ……………… **συστημάτων**. Αυτός ο τρόπος υπολογισμού των διαστημάτων εγκαταλείφθηκε γιατί είναι **καλά κουρδισμένα μόνο τα διαστήματα** ……….., …………, …………. και όχι τα διαστήματα ……… και ………. που αρχίζουν να **χρησιμοποιούνται ευρέως στην πολυφωνία**.

Η εμφάνιση του **σύγχρονου πιάνου** βασίζεται στο ………………………… …………………. σύμφωνα με το οποίο το διάστημα της ………………….. διαιρείται σε …………. …………… τα οποία ισαπέχουν μεταξύ τους.

3.6. Αξιολόγησε την προσπάθειά σου! *(ΦΑΑ Ε3)*

Σε αυτήν την ενότητα:

1. **Αντιλήφθηκες ακουστικά** τη διαφορά ανάμεσα στα πολυφωνικά είδη διαφορετικών ιστορικών περιόδων; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
2. **Διαπίστωσες** ποια μουσικά διαστήματα από την αρμονική ανάλυση είναι κυρίαρχα στον **ύστερο Μεσαίωνα**; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
3. **Παρατήρησες** τί συμβαίνει κατά τη **μεταφορά μιας μελωδίας** σε άλλη τονικότητα στο **πυθαγόρειο σύστημα**; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
4. **Υπολόγισες** την **απόκλιση** ανάμεσα στα διαστήματα του **ισοσυγκερασμένου συστήματος** και στα **φυσικά διαστήματα**; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**
5. **Συνεργάστηκες** αρμονικά και αποτελεσματικά με τους συμμαθητές στις ομαδικές εργασίες; **(ΝΑΙ–ΟΧΙ)**

Κατάγραψε τις δυσκολίες που συνάντησες κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων της ενότητας