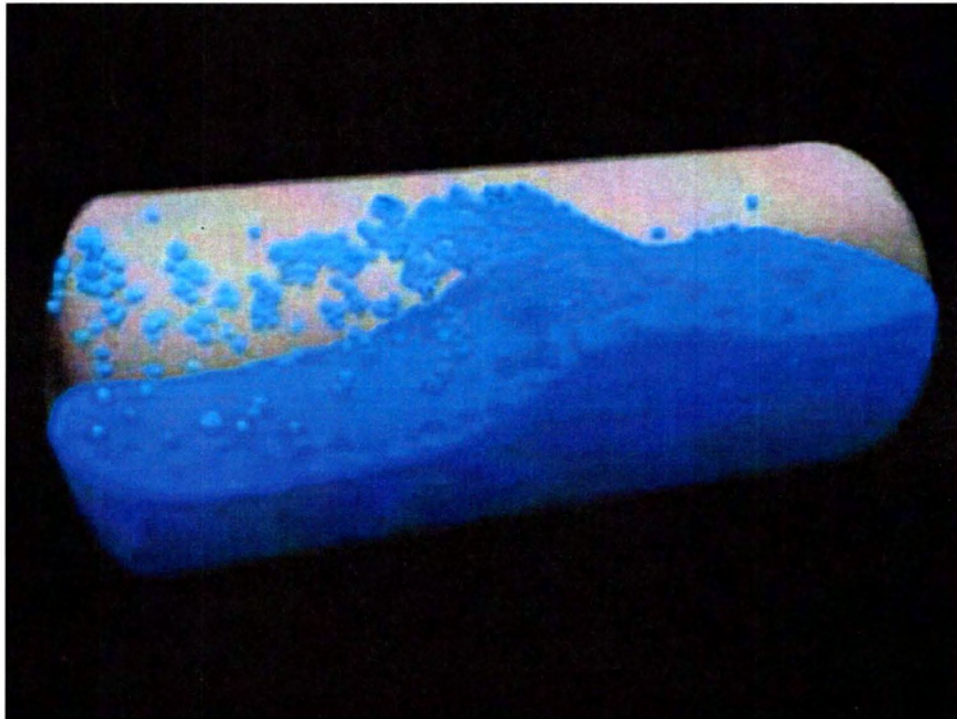


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΗΜΙΠΛΗΡΟΥΣ ΔΟΧΕΙΟΥ ΜΕ
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ ΥΠΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ**



ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΚΟΥΚΑ

ΒΟΛΟΣ, 2014



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 12937/1
Ημερ. Εισ.: 25-07-2014
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ
2014
ΚΟΥ

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Επιτροπής

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Βασίλειος Κανακούδης
(Επιβλέπων) Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος
(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Τσιτσιφλή Σταυρούλα
Διδάσκουσα, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Με το πέρας της διπλωματικής αυτής εργασίας και ταυτόχρονα των προπτυχιακών σπουδών μου θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες,

στους δύο επιβλέποντες καθηγητές μου; τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Κανακούδη Βασίλειο για τη συνεχή βοήθεια, υποστήριξη και καθοδήγηση σε οποιοδήποτε πρόβλημα αντιμετώπισα κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, καθώς επίσης για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστώ με τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Καραμάνο Σπύρο ο οποίος αξίζει τις θερμές μου ευχαριστίες για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την ουσιαστική και ανεκτίμητη συμβολή του στην υλοποίηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Το εύρος των γνώσεων και η ειλικρινής διάθεση του να βοηθήσει σε όποιο πρόβλημα προέκυπτε ήταν καθοριστικά στοιχεία για την επίτευξη των στόχων της εργασίας.

στη Δρ. Τσιτσιφλή Σταυρούλα για την προσεκτική μελέτη της εργασίας αυτής.

στον μεταπτυχιακό φοιτητή Σαρβάνη Γρηγόριο για την πολύτιμη βοήθεια του πάνω σε θέματα προγραμματισμού με το πρόγραμμα Matlab.

στη Μαρία για τη παραχώρηση του ηλεκτρονικού υπολογιστή της με αποτέλεσμα την καθοριστική επιτάχυνση της περάτωσης αυτής της εργασίας καθώς επίσης τις συγκατοίκους μου Σοφία και Μυρτώ για τη συνεχή υποστήριξή τους.

στους φίλους μου για την ενθάρρυνση, κατανόηση και υπομονή που έδειχναν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας αλλά και κατά τη διάρκεια όλων των χρόνων των σπουδών μου. Οι ξεχωριστά όμορφες στιγμές μαζί τους ήταν αυτές που μου έδιναν δύναμη για εποικοδομητική μελέτη και αφοσίωση στις σπουδές μου.

στην οικογένεια μου, και συγκεκριμένα στον πατέρα μου Ευθύμιο Κούκα, στη μητέρα μου Μαρία Κούκα, και στις αδερφές μου Ελένη, Ευφημία, Φιλοθέη και Διονυσία για την ουσιαστική υποστήριξή τους και την αμέριστη αγάπη τους.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η απόκριση ενός ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου με παραμορφώσιμα τοιχώματα υπό δυναμική διέγερση στην εγκάρσια διεύθυνση, με έμφαση στην απόκριση σε σεισμό. Στην περίπτωση άκαμπτου δοχείου χρησιμοποιείται ένα δισδιάστατο μαθηματικό μοντέλο ώστε να περιγράψει το φαινόμενο κυματισμού. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το δυναμικό της ταχύτητας εκφράζεται σε μορφή σειράς, όπου κάθε όρος είναι το γινόμενο μιας συνάρτησης χρόνου και της σχετιζόμενης συνάρτησης σχήματος. Λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους δύο πρώτους όρους της σειράς το πρόβλημα καταλήγει σε μία απλοποιημένη λύση. Έπεται η αναλυτική μελέτη του προβλήματος απόκρισης οριζόντιου κυλινδρικού ημιπλήρους δοχείου με παραμορφώσιμα τοιχώματα. Θεωρώντας ότι η δοκός μπορεί να υποστεί μία παραμόρφωση τύπου δοκού η απλοποιημένη διατύπωση του προβλήματος για την εγκάρσια διέγερση μπορεί να επεκταθεί ώστε να προσεγγίσει την απόκριση του συστήματος δοχείο-ρευστό. Το δυναμικό της ταχύτητας διαχωρίζεται σε τρία μέρη και η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών καταλήγει σε ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον, υπολογίζονται οι υδροδυναμικές πιέσεις και δυνάμεις στο τοίχωμα του δοχείου και διατυπώνεται η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας του συστήματος. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμόρφωση, αναζητείται η συζευγμένη λύση του συστήματος δοχείο-ρευστό. Αρχικά λύνεται αριθμητικά το πρόβλημα ιδιοτιμών και στην συνέχεια υπολογίζεται η απόκριση ενός τυπικού σωλήνα πίεσης υπό δυναμική διέγερση και αποτυπώνεται η επίδραση της παραμόρφωσης των τοιχωμάτων σε αυτήν. Τέλος, παρουσιάζεται η λύση για επιμήκες δοχείο. Η επίλυση των παραπάνω προβλημάτων γίνεται μέσω του προγράμματος MATLAB (Matrix Laboratory) το οποίο είναι ένα περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	8
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	8
1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	11
1.3 ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	17
2.1 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ.....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	23
ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΗΜΙΠΛΗΡΟΥΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΣΕ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ	23
3.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	23
3.2 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ	26
3.3 ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΠΙΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ	28
3.4 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ.....	29
3.5 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΟΧΕΙΟΥ ΚΑΙ ΡΕΥΣΤΟΥ	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	37
ΑΝΑΛΥΣΗ ΗΜΙΠΛΗΡΟΥΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΜΕ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ ΣΕ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ	37
4.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΟΧΕΙΟ-ΡΕΥΣΤΟ.....	37
4.1.1 Παραμόρφωση του δοχείου.....	38
4.1.2 Διαχωρισμός της κίνησης του ρευστού.....	38
4.2 ΛΥΣΗ ΜΟΡΦΗΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΕΙΡΑΣ.....	40
4.2.1 Ανάλυση ωστικής κίνησης και κίνησης παραμόρφωσης δοχείου.....	42
4.2.2 Ανάλυση "επαγωγικής" κίνησης.....	43
4.2.3 Αλληλεπίδραση δοχείου-ρευστού και τελικές εξισώσεις.....	44
4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΟΣ	46
4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΠΙΜΗΚΕΣ (ΜΑΚΡΥ) ΔΟΧΕΙΟ	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	50
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΕ MATLAB ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	50
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB.....	50
5.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΣΤΟ MATLAB.....	51
5.3 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ	51
5.3.1 Μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης.....	52
5.3.2 Μέθοδος <i>Newmark</i>	54
5.4 ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΆΜΕΣΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ	58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	59
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΑ ΚΑΙ ΜΗ ΔΟΧΕΙΑ	59
6.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ	59
6.1.1 Πολυβάθμιο σύστημα για δοχείο με μη παραμορφώσιμα τοιχώματα	59
6.1.2 Σύστημα δοχείο-ρευστό για απλοποιημένη λύση ($n=1$).....	63
6.2 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ	74
6.2.1 Δοχείο με μη παραμορφώσιμα τοιχώματα.....	74
6.2.2 Δοχείο με παραμορφώσιμα τοιχώματα.....	76
6.2.3 Αποτελέσματα εφαρμογής για επιμήκες (μακρύ) κύλινδρο.....	89
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7	93

ΣΥΝΟΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	93
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο του κυματισμού συνίσταται στην δυναμική απόκριση της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού καθώς και στην γενική δυναμική συμπεριφορά της μάζας του ρευστού λόγω εξωτερικής διέγερσης. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών και δοχεία πίεσης δεν περιορίζεται από τα τοιχώματα του δοχείου ή της δεξαμενής. Επομένως, επιτρέπεται η σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το δοχείο, και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση των κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Αποδεικνύεται ότι για σχετικά μικρές κινήσεις οι κυματισμοί της ελεύθερης επιφάνειας μπορούν να θεωρηθούν ότι συνεπάγονται με κίνηση μόνο κάθετη ως προς την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής και τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών της συχνότητας κίνησης που αποτελούν τις ιδιοτιμές του συστήματος. Αντίστοιχα οι ιδιομορφές του συστήματος περιγράφουν την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Όταν μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος υγρό-δοχείο είναι στην περιοχή ή ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα μίας εξωτερικής κίνησης, διαταραχής ή διέγερσης που ασκείται πάνω στην κατασκευή, τότε εμφανίζεται συντονισμός, το εύρος της ταλάντωσης αυξάνει σημαντικά και μπορεί να προκληθεί αστοχία. Επομένως, ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων του φαινομένου του κυματισμού και γενικότερα η μελέτη της απόκρισης του συστήματος υγρό-δοχείο σε εξωτερική διέγερση αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σημασία.

Με τον όρο αλληλεπίδραση ρευστού-κατασκευής εννοείται η συζευγμένη επίλυση του ρευστού σε αλληλεπίδραση με την περιβάλλουσα δεξαμενή. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις και παραμορφώσεις στο κέλυφος της δεξαμενής υπολογίζονται μαζί με τα υδροδυναμικά μεγέθη του υγρού που περιβάλλεται από την δεξαμενή. Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αλληλεπίδρασης ρευστού-κατασκευής είναι ανάλογη του βαθμού παραμόρφωσης της κατασκευής. Για στατικά φαινόμενα και μικρές παραμορφώσεις το πρόβλημα του ρευστού και αυτό της κατασκευής δύνανται να διατυπωθούν χωριστά. Όταν όμως η κίνηση είναι χρονικά μεταβαλλόμενη, ακόμη και στην περίπτωση της μικρής παραμόρφωσης, η σύζευξη των δύο προβλημάτων είναι απαραίτητη, αφού το ρευστοδυναμικό πρόβλημα μπορεί να μην εξαρτάται από την μικρή παραμόρφωση της κατασκευής, εξαρτάται όμως από

τις οριακές συνθήκες, καθώς οι ταχύτητες που αναπτύσσονται στην κατασκευή μεταφέρονται στο ρευστό. Η παρούσα εργασία εστιάζει αρχικά στην αριθμητική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε απαραμόρφωτο δοχείο όπου η συνολική κίνηση του απαραμόρφωτου δοχείου μεταφέρεται στο υγρό, αλλά κυρίως στην αριθμητική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε παραμορφώσιμο δοχείο όπου δημιουργείται μία επιπλέον κίνηση (κίνηση παραμόρφωσης) εξαιτίας της παραμόρφωσης του δοχείου.

Η σημασία της μελέτης του φαινομένου του κυματισμού είναι μεγάλη όχι μόνο από την ερευνητική σκοπιά αλλά και επειδή υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός σημαντικών και τεχνολογικών εφαρμογών που μεταξύ άλλων περιλαμβάνουν:

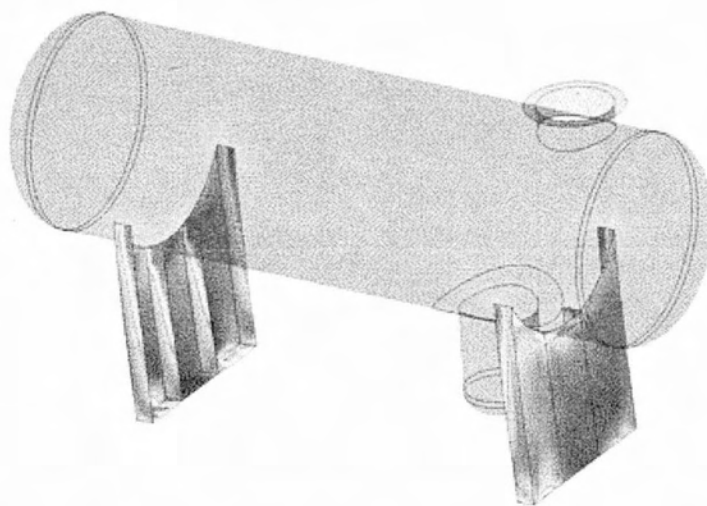
- Δυναμική απόκριση βιομηχανικών δεξαμενών και δοχείων πίεσης διαφορετικών γεωμετριών (κυλινδρικές, σφαιρικές) λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην ευστάθεια της δεξαμενής.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών πλοίων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από τα θαλάσσια κύματα, του αποθηκευόμενου υγρού στις δεξαμενές του πλοίου. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας του πλοίου.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών καυσίμων διαστημικών οχημάτων λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την μεταβαλλόμενη επιτάχυνση του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε πιθανό συνδυασμό συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα ευστάθειας στην κίνηση του διαστημικού οχήματος.
- Δυναμική απόκριση δεξαμενών οχημάτων μεταφοράς καυσίμων όπου το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξωτερικής διέγερσης, η οποία προκαλείται από την απότομη αλλαγή της πορείας του οχήματος. Το φαινόμενο του κυματισμού στην

ελεύθερη επιφάνεια του καυσίμου λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε πιθανό συνδυασμό συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα ευστάθειας στην κίνηση του οχήματος μεταφοράς.

- Δυναμική απόκριση φραγμάτων λόγω σεισμικής διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή το φαινόμενο του κυματισμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού λόγω εξαναγκασμένης ταλάντωσης και σε συνδυασμό με πιθανό φαινόμενο συντονισμού μπορούν να δημιουργήσουν πρόβλημα στην ευστάθεια του φράγματος.

Γενικά, οι δεξαμενές είναι κατασκευές με σημαντική συμβολή τόσο στην βιομηχανική όσο και στην κοινωνική ανάπτυξη του σύγχρονου κόσμου. Παρέχουν την δυνατότητα αποθήκευσης υγρών, όπως το νερό, τα έλαια, το υγροποιημένο φυσικό αέριο και διάφορα χημικά προϊόντα σε υγρή φάση, και στερεών των οποίων η συμπεριφορά είναι σχεδόν ανάλογη με αυτή των υγρών, π.χ. τα σιτηρά. Το σχήμα, το μέγεθος και οι σχετικές διαστάσεις των δεξαμενών ποικίλουν ανάλογα με την χρήσης τους. Οι κυλινδρικές δεξαμενές, μεγάλων διαστάσεων, χρησιμοποιούνται συνήθως σε εγκαταστάσεις επεξεργασίας, παραγωγής και αποθήκευσης καυσίμων (πετρελαιοπαραγωγή), όπως είναι τα διυλιστήρια, αλλά και σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις που χρησιμοποιούν για την λειτουργία τους μεγάλες ποσότητες τέτοιων καυσίμων.

Εξαιτίας της επικινδυνότητας ορισμένων υλικών που αποθηκεύονται στις δεξαμενές έναντι εκρήξεων και πυρκαγιάς, οι δεξαμενές αυτές θεωρούνται κατασκευές υψίστης σπουδαιότητας και η απαίτηση για εκτενή μελέτη κατά τον σχεδιασμό είναι απόλυτα λογική. Τα οριζόντια δοχεία είναι συνήθως στηριγμένα σε ένα μηχανισμό που αποτελείται από δύο πυλώνες στις δύο άκρες του (σχ.1.1) ή από διαμήκεις δοκούς κατά μήκος του δοχείου. Γενικότερα, όμως, η μέθοδος στήριξης του δοχείου εξαρτάται από το μέγεθος και το βάρος του οριζόντιου δοχείου, τη θερμοκρασία και την πίεση σχεδιασμού, την τοποθεσία όπου τοποθετείται και τους αντίστοιχους κανονισμούς, και τέλος τις εσωτερικές και εξωτερικές συνδέσεις.



Σχήμα 1.1 Μορφή τυπικού κυλινδρικού οριζόντιου δοχείου

1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η παρουσία ελεύθερης επιφάνειας σε μερικά γεμάτα δοχεία επιτρέπει την σχετική κίνηση του ρευστού σε σχέση με το δοχείο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο κυματισμού (liquid sloshing) το οποίο προκαλείται από εξωτερική διέγερση του δοχείου (π.χ. σεισμό), και μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στην απόκριση του.

Το φαινόμενο κυματισμού συχνά θεωρείται ως ένα τυπικό γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο μελετά τις ταλαντώσεις της ελεύθερης επιφάνειας ενός ιδανικού ρευστού μέσα σε ένα ακίνητο δοχείο. Η λύση του προβλήματος δίνει ως αποτέλεσμα τις φυσικές συχνότητες (ιδιοσυχνότητες) της ταλάντωσης του ρευστού και τις αντίστοιχες ιδιομορφές του συστήματος που περιγράφουν την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Οι τιμές αυτές εξαρτώνται άμεσα από το σχήμα του δοχείου. Στην περίπτωση ενός εξωτερικά διεγερόμενου δοχείου, καταλήγουμε σε ένα δυναμικό πρόβλημα αρχικών τιμών του οποίου οι λύσεις μας δίνουν την σχετική κίνηση της μάζας του υγρού σε σχέση με το δοχείο καθώς επίσης και τις υδροδυναμικές πιέσεις και δυνάμεις που ασκούνται πάνω στα τοιχώματα του δοχείου. Και στα δύο προβλήματα, έχοντας θεωρήσει το ρευστό ως ιδανικό, η ροή περιγράφεται μέσω μίας δυναμικής συνάρτησης ταχύτητας η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, την κινηματική συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου, και τέλος την κινηματική και δυναμική συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια του ρευστού.

Για άκαμπτα τετραγωνικά και κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία, το πρόβλημα του κυματισμού μπορεί να λυθεί αναλυτικά χρησιμοποιώντας διαχωρισμό μεταβλητών. Οι ιδιομορφές που προκύπτουν είναι ορθογώνιες και ασύζευκτες μεταξύ τους. Για άλλες γεωμετρίες (π.χ. οριζόντιους κυλίνδρους ή σφαίρες) ακριβείς αναλυτικές λύσεις πιθανόν να μην υπάρχουν, και έτσι γίνεται απαραίτητη η χρήση αριθμητικών μεθόδων. Ο Budiansky (1960) εξέτασε τις επιδράσεις του κυματισμού σε μη παραμορφώσιμα κυκλικά κανάλια, και κατέγραψε τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και των υδροδυναμικών δυνάμεων. Οι Moiseev και Petron (1966) περιέγραψαν την εφαρμογή της μεθόδου των μεταβολών κατά Ritz για τον αριθμητικό υπολογισμό των κυματικών συχνοτήτων μέσα σε δοχεία διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων, συμπεριλαμβανόμενης και της περίπτωσης οριζόντιου κυλινδρικού αγωγού. Στις εργασίες των Fox και Kuttler (1981, 1983) δίνονται πάνω και κάτω όρια για τις τιμές των συχνοτήτων κυματισμού για ημικυκλικό κανάλι, η γεωμετρία του οποίου είναι το δισδιάστατο ανάλογο του σφαιρικού δοχείου, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισης και τη μέθοδο του ενδιάμεσου προβλήματος. Ωστόσο, η πλειονότητα των τεχνικών σύμμορφης απεικόνισης απαιτούν πολύπλοκους μετασχηματισμούς. Ο McIver (1989) εξέτασε το φαινόμενο του κυματισμού σε οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο, με τυχαίο ύψος της στάθμης του ρευστού, επαναδιατυπώνοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών σε όρους ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες επιλύθηκαν αριθμητικά. Στην συνέχεια, οι McIver και McIver (1993) παρουσίασαν αναλυτικές μεθόδους ώστε να υπολογίσουν τα ανώτατα και κατώτατα όρια των συχνοτήτων του κυματισμού σε οριζόντιους κυλίνδρους.

Γενικότερα, η ανάλυση του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά και σφαιρικά δοχεία με τυχαία πληρότητα απαιτεί αριθμητική λύση. Ωστόσο για την ειδική περίπτωση οριζόντιου κυλινδρικού και σφαιρικού δοχείου με πληρότητα 50% είναι δυνατό να βρεθεί αναλυτική λύση. Συγκεκριμένα, οι Evans and Linton (1993) παρουσίασαν μία ημι-αναλυτική λύση σε μορφή σειράς του προβλήματος ιδιοτιμών σε ημιπλήρεις οριζόντιους κυλινδρικούς αγωγούς, αναπτύσσοντας το δυναμικό της ταχύτητας σε όρους μη ορθογωνικών φραγμένων αρμονικών χωρικών συναρτήσεων. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στο τοίχωμα του δοχείου και στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού προκύπτει ένα ομογενές σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, η επίλυση των οποίων δίνει τις συχνότητες του κυματισμού.

Βασισμένοι στην εργασία των Evans and Linton (1993), οι Papaspyrou et al. (2003, 2004) έλυσαν το πρόβλημα του εξωτερικά διεγερόμενου σφαιρικού δοχείου με πληρότητα 50% με μη παραμορφώσιμα τοιχώματα υπολογίζοντας την απόκριση του λόγω κυματισμού. Στις εργασίες αυτές αναπτύχθηκε μεθοδολογία μέσα από την οποία το δυναμικό της λύσης διαχωρίζεται σε θεώρηση μίας “ομοιόμορφης κίνησης” και της “κίνησης κυματισμού (π.χ. Miles 1958, Abramson 1966, Bauer 1984, Isaacson και Subbiach 1991). Τέλος, πάνω σε αυτήν την θεώρηση της ομοιόμορφης κίνησης και της κίνησης κυματισμού βασίστηκαν ο Πλατύρραχος (2004) ο οποίος χρησιμοποίησε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αναπτύσσοντας μεθοδολογία για την ανάλυση κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε οριζόντια κυλινδρικά δοχεία πίεσης υπό σεισμικές και άλλες διεγέρσεις και οι Patkas και Karamanos (2007), οι οποίοι χρησιμοποίησαν την μέθοδο των μεταβολών ώστε να λύσουν το φαινόμενο του κυματισμού σε οριζόντια κυλινδρικά και σφαιρικά δοχεία μέσω “καθολικών” (global) αρμονικών συναρτήσεων Galerkin.

Ένα άλλο πρόβλημα που έχει μελετηθεί εκτενώς είναι η απόκριση δοχείων με παραμορφώσιμα τοιχώματα και ειδικότερα η περίπτωση των κατακόρυφων κυλινδρικών δοχείων. Σε αυτές τις εργασίες θεωρήθηκε ότι η παραμορφωσιμότητα των τοιχωμάτων του δοχείου επηρεάζει μόνο το ομοιόμορφο μέρος της κίνησης περιγράφοντας την κίνηση του δοχείου μέσω είτε απλών συναρτήσεων σχήματος (Veletsos and Yang, 1977; Fischer, 1979), ή μέσω πολυπλοκότερων μοντέλων (Chu, 1963; Haroun and Housner, 1981; Haroun, 1983; Natsiavas, 1988; Rammerstorfer et al., 1990; Gupta, 1995). Όσον αφορά τα οριζόντια κυλινδρικά δοχεία, η επίδραση της παραμορφωσιμότητας του δοχείου έχει ληφθεί υπόψη μέσω ενός απλοποιημένου τρισδιάστατου μοντέλου, που παρουσιάστηκε από τους Papaspyrou et al. και αργότερα αναπτύχθηκε στην εργασία Karamanos et al., έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος δοχείο-ρευστό. Σε μετέπειτα εργασία του Spyros A. Karamanos αναπτύσσεται ένα μαθηματικό μοντέλο ώστε να υπολογιστεί η απόκριση ενός ημιγεμάτου οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου υπό εγκάρσια διέγερση, επεκτείνοντας τις εργασίες των Papaspyrou et al και Karamanos et al.. Σε αυτή την εργασία η απόκριση του συστήματος μελετάται αναλυτικά, θεωρώντας ότι η παραμορφωσιμότητα του δοχείου επηρεάζει τον κυματισμό, μέσω μίας κατάλληλης συνάρτησης σχήματος που προκαλεί και την παραμόρφωση του δοχείου.

Σε βιομηχανικές εφαρμογές, τα τοιχώματα αυτών των δοχείων είναι αρκετά παχιά ώστε να αντέχουν υψηλές εσωτερικές πιέσεις και, συνεπώς, οι ιδιομορφές δεν

είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Ωστόσο, επιμήκη οριζόντια κυλινδρικά δοχεία ($L/R \gg 10$), τα οποία συναντώνται συχνά στις πετρελαιοχημικές βιομηχανίες και διυλιστήρια, υπόκεινται μία παραμόρφωση τύπου δοκού, η οποία μπορεί να επηρεάσει την συνολική απόκριση του δοχείου υπό εγκάρσια διέγερση.

1.3 ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία στοχεύει αρχικά στη μαθηματική επίλυση του φαινομένου του κυματισμού σε ημιπλήρη οριζόντια κυλινδρικά δοχεία υπό εξωτερική διέγερση στην εγκάρσια διεύθυνση μέσω του προγράμματος MATLAB. Συγκεκριμένα, ο κύριος σκοπός της εργασίας είναι η λύση του προβλήματος του κυματισμού σε ημιπλήρες δοχείο υπό εγκάρσια διέγερση με αριθμητική μέθοδο, χωρίς να εφαρμόζεται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων στοιχείων. Το δυναμικό της ταχύτητας εκφράζεται μέσω φραγμένων σειρών σε όρους αυθαίρετων χρονικών συναρτήσεων και των σχετικών μη ορθογωνικών συναρτήσεων σχήματος. Το πρόβλημα καταλήγει σε ένα σύστημα συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες επιλύονται αριθμητικά. Στην εργασία λαμβάνεται υπόψη μηχανισμός κλασσικής απόσβεσης μέσω της διαδικασίας Rayleigh, η οποία στοχεύει στην μόρφωση ενός κλασσικού μητρώου απόσβεσης. Στην συνέχεια, μελετάται μία απλοποιημένη μεθοδολογία η οποία λαμβάνει υπόψη μόνο τους δύο πρώτους όρους της σειράς του δυναμικού της ταχύτητας μετατρέποντας το πρόβλημα σε πρόβλημα επίλυσης μίας γραμμικής εξίσωσης ταλάντωσης επιτρέποντας την ανάπτυξη ενός ισοδύναμου μηχανικού μοντέλου.

Στη συνέχεια, η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει την απόκριση ενός ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου με παραμορφώσιμα τοιχώματα υπό εξωτερική εγκάρσια διέγερση επεκτείνοντας τις εργασίες των Papaspyrou et al. (2004) [4] και Karamanos et al. (2006) [5]. Η συζευγμένη απόκριση του συστήματος δοχείο-ρευστό μελετάται αναλυτικά, λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της παραμόρφωσης του δοχείου στο κυματισμό μέσω μίας συνάρτησης σχήματος που προκαλεί τη παραμόρφωση. Έχοντας θεωρήσει ιδανικό ρευστό και συνθήκες αστρόβιλης ροής, το διάνυσμα της ταχύτητας της ροής προσδιορίζεται μέσω της συνάρτησης δυναμικού ταχύτητας η οποία ικανοποιεί τη γραμμικοποιημένη κινηματική και δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Το

δυναμικό της ταχύτητας, όπως και στην περίπτωση δοχείων με μη παραμορφώσιμα τοιχώματα, αναπτύσσεται σε μορφή σειράς σε όρους αυθαίρετων χρονικών συναρτήσεων και σχετικών συναρτήσεων σχήματος. Ο κυματισμός και η παραμόρφωση των τοιχωμάτων θεωρούνται άμεσα συνδεδεμένα. Η παραμόρφωση των τοιχωμάτων θεωρείται ότι ακολουθεί τους κανόνες παραμόρφωσης μίας δοκού, όπως έχει θεωρηθεί και σε εργασίες που προαναφέραμε. Όσον αφορά την μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, το δυναμικό της ταχύτητας χωρίζεται σε τρία μέρη: (α) το ωστικό (impulsive) μέρος, το οποίο αντιπροσωπεύει την κίνηση του ρευστού, που ακολουθεί την εξωτερική διέγερση, (β) το επαγωγικό (convective) μέρος, που αντιπροσωπεύει την σχετική κίνηση του κυματισμού σε σχέση με την κίνηση του δοχείου, και (γ) ένα μέρος που προκαλείται από την παραμόρφωση του τοιχώματος.

Αρχικά, στο κεφάλαιο 1 υπάρχει μία εισαγωγή για το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε δεξαμενές και τις επιδράσεις που έχει σε αυτές. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση της μελέτης του φαινομένου από διάφορους ερευνητές στη διάρκεια των χρόνων μέχρι σήμερα.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η φυσική και μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, η οποία βασίζεται στην γενική θεωρία των επιφανειακών κυμάτων.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται η ανάλυση του προβλήματος του κυματισμού για άκαμπτο ημιπλήρες οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο υπό σεισμική διέγερση στην εγκάρσια διέγερση. Το συγκεκριμένο πρόβλημα καταλήγει σε ένα πολυβάθμιο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης. Επίσης, παρουσιάζονται οι υδροδυναμικές πιέσεις και δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα του δοχείου. Τέλος, μελετάται μία απλοποιημένη ανάλυση του κυματισμού.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η ανάλυση του προβλήματος της απόκρισης οριζόντιου ημιπλήρους κυλινδρικού δοχείου με παραμορφώσιμα τοιχώματα υπό σεισμική διέγερση στην εγκάρσια διεύθυνση. Παρουσιάζεται επίσης μία απλοποιημένη λύση του προβλήματος πάνω στην οποία βασίζεται η εφαρμογή για ημιτονοειδή συνάρτηση σχήματος και για επιμήκη κύλινδρο, η οποία αναλύεται στο τέλος του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο 5 γίνεται μία εισαγωγή στο υπολογιστικό περιβάλλον του Matlab. Αρχικά παρουσιάζεται η μεθοδολογία επίλυσης των ιδιοτιμών των προβλημάτων που αναπτύχθηκαν στα κεφάλαια 4 και 5, ενώ στη συνέχεια αναπτύσσεται η μεθοδολογία Newmark με την οποία προγραμματίστηκε και επιλύθηκε το δυναμικό πρόβλημα

αρχικών τιμών λόγω εξωτερικής διέγερσης στην εγκάρσια διεύθυνση. Τέλος, γίνεται αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μαθηματικής επίλυσης της απόκρισης οριζόντιου ημιπλήρους κυλινδρικού δοχείου με άκαμπτα αλλά και με παραμορφώσιμα τοιχώματα. Αρχικά, παρουσιάζονται οι ιδιοσυχνότητες των δύο προβλημάτων καθώς επίσης δίνονται οι ιδιοτιμές του προβλήματος για την περίπτωση επιμήκους κυλίνδρου με παραμορφώσιμα τοιχώματα. Στην συνέχεια, αναλύονται τα αποτελέσματα του δυναμικού προβλήματος αρχικών τιμών. Συγκεκριμένα για την περίπτωση παραμορφώσιμου δοχείου, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για διάφορες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος.

Τέλος, στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται συνοπτικά τα συμπεράσματα της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ

Το φαινόμενο του κυματισμού αποτελεί πρόβλημα ροής με ελεύθερη επιφάνεια και σχετίζεται με την θεωρία των επιφανειακών κυμάτων, τα οποία δημιουργούνται στην διαχωριστική επιφάνεια δύο ρευστών, εν προκειμένω ενός ρευστού και του αέρα. Η ατμοσφαιρική πίεση θεωρείται σαν η πίεση αναφοράς, οπότε η τάση στην επιφάνεια του υγρού είναι μηδενική και η επιφάνεια του υγρού λέγεται ελεύθερη. Οι ροές, οι οποίες σχετίζονται με επιφανειακά κύματα συνηθίζεται να θεωρούνται δυναμικές ροές γεγονός το οποίο αποτελεί αποδεκτή προσέγγιση για φαινόμενα ελεύθερης επιφάνειας. Οι παραδοχές που κάνουμε είναι οι εξής:

- Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού κινείται μόνο κάθετα ως προς την βάση της δεξαμενής.
- Τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών που αποτελούν τις ιδιοτιμές του συστήματος.
- Τέλος, ο λόγος του μήκους κύματος του κυματισμού προς την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι αρκετά μεγάλος ώστε η γραμμικοποίηση των εξισώσεων να είναι αποδεκτή.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω θεωρήσεις μπορούμε να παρουσιάσουμε την μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού.

Η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου του κυματισμού βασίζεται στην μαθηματική διατύπωση των επιφανειακών κυμάτων. Όταν σε ένα ρευστό που βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας δημιουργηθούν κυματισμοί βαρύτητας στην ελεύθερη επιφάνεια, η κίνηση του ρευστού περιγράφεται από την θεωρία των επιφανειακών κυμάτων και η ροή χαρακτηρίζεται ως αστρόβιλη. Το διάλυμα της ταχύτητας εκφράζεται ως η κλίση του δυναμικού της ταχύτητας, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Η παρακάτω ανάλυση είναι γενική, παρότι στο τέλος του κεφαλαίου η ανάλυση εστιάζει σε δισδιάστατο δοχείο. Η γενίκευση για δισδιάστατο δοχείο είναι άμεση.

Οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για ένα ατριβές και ασυμπίεστο ρευστό είναι

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (2.2)$$

όπου \mathbf{g} είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η ροή είναι αστρόβιλη, το πεδίο ροής \mathbf{u} μπορεί να γραφεί ως η κλίση του δυναμικού της συνάρτησης

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (2.3)$$

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι μια ροή ονομάζεται αστρόβιλη όταν η περιστροφή (curl) του πεδίου ταχύτητας \vec{V} είναι μηδενική, δηλαδή όταν $\nabla \times \vec{V} = \vec{0}$. Επίσης, από το διανυσματικό λογισμό γνωρίζουμε ότι για ένα διανυσματικό πεδίο \vec{B} ισχύει

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \Phi \quad (2.4)$$

όπου Φ βαθμωτή συνάρτηση. Δηλαδή, εάν η περιστροφή (curl) ενός διανυσματικού πεδίου είναι παντού μηδέν τότε το διανυσματικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί ως η βαθμίδα κάποιας βαθμωτής συνάρτησης. Έτσι, προκύπτει η σχέση (2.3), η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση διατήρησης της μάζας γίνεται η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της απόκλισης

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \mathbf{u} \right) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.6)$$

ο όρος της συναγωγής γράφεται ως εξής

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \quad (2.7)$$

καθώς η ροή θεωρείται αστρόβιλη ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Εάν η βαρύτητα επιδρά στην αρνητική y -κατεύθυνση μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{g} = \nabla(-g \cdot y) \quad (2.8)$$

Η εξίσωση της ορμής γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gy) \quad (2.9)$$

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση Φ είναι ομαλή, η εξίσωση της ορμής γίνεται

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + g \cdot y \right\} = 0 \quad (2.10)$$

και επομένως

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + g \cdot y = C(t) \quad (2.11)$$

για κάποια συνάρτηση $C(t)$. Όμως μπορούμε να επιλέξουμε $C(t)=0$ χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$\Phi \rightarrow \Phi + \int_0^t C(s) ds \quad (2.12)$$

ο οποίος δεν επηρεάζει το πεδίο ταχύτητας.

Για αυτό τον τύπο ροής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p}{\rho} + g \cdot y = 0 \quad (2.13)$$

Υπολογίζοντας το Φ από την εξίσωση Laplace (2.3) υπολογίζεται στην συνέχεια το πεδίο των πιέσεων από την εξίσωση Bernoulli (2.12).

Θεωρώντας ότι η ροή είναι δυοδιάστατη η ελεύθερη επιφάνεια περιγράφεται από την σχέση $y=\eta(x,t)$, όπου η συντεταγμένη x βρίσκεται κατά μήκος της διεπιφάνειας (Σχ. 2.1). Θεωρώντας αμελητέα την επιφανειακή τάση η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι η ατμοσφαιρική $p=p_{atm}$. Επιλέγουμε $p=0$ στην ελεύθερη επιφάνεια και κάνουμε χρήση του απλού μετασχηματισμού $p \rightarrow p-p_{atm}$ γεγονός το οποίο δεν αλλάζει τις βασικές εξισώσεις Euler, οι οποίες εξαρτώνται από ∇p . Η εξίσωση Bernoulli στην ελεύθερη επιφάνεια δίνει την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g \cdot y = 0 \quad \text{στο } y=-\eta(x,t) \quad (2.14)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια. Η άλλη εξίσωση που ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια είναι η κινηματική συνοριακή συνθήκη, η οποία υποδηλώνει ότι κάθε σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια παραμένει σε αυτήν. Η μαθηματική διατύπωση της κινηματικής συνοριακής συνθήκης για διδιάστατο πρόβλημα είναι

$$\frac{D}{Dt} \{y - \eta(x,t)\} = \frac{\partial}{\partial t} \{y - \eta(x,t)\} + u \cdot \nabla \{y - \eta(x,t)\} = 0 \quad (2.15)$$

η οποία δίνει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.16)$$

Τέλος το ρευστό περιορίζεται από την απαραμόρφωτη επιφάνεια στο B1. Σε αυτή την συνοριακή συνθήκη το κάθετο διάνυσμα της ταχύτητας είναι μηδέν και επομένως ισχύει

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο B1} \quad (2.17)$$

Στην συνέχεια γραμμικοποιούμε τις μη-γραμμικές συνοριακές συνθήκες θεωρώντας ότι το ύψος των κυματισμών $\eta(x)$ είναι μικρό σε σχέση με χαρακτηριστικά μήκη του προβλήματος, όπως το μέσο βάθος του ρευστού και το μήκος κύματος του κυματισμού. Επομένως, οι ποσότητες $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ που εκφράζουν την κλίση της ελεύθερης επιφάνειας και την συνιστώσα της ταχύτητας θα είναι μικρές. Επομένως, το γινόμενο $\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ θα είναι πολύ μικρό (δεύτερης τάξης) και μπορούμε να το αγνοήσουμε σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους που είναι πρώτης τάξης. Τότε η κινηματική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια γίνεται

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{στο B2} \quad (2.18)$$

Η δυναμική συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Επειδή το ρευστό είναι σε ηρεμία και κάθε κίνηση του ρευστού προκαλείται από τον κυματισμό, ο μη γραμμικός όρος

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (2.19)$$

μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρός και να αγνοηθεί. Επομένως, η 2.14 γίνεται

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g \eta = 0 \quad \text{στο B2} \quad (2.20)$$

Υπολογίζοντας την χρονική παράγωγο της τελευταίας εξίσωσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ με τον όρο $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ και η δυναμική συνοριακή συνθήκη γράφεται

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

Λόγω του ότι στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με κυλινδρικό αγωγό θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις εκφρασμένες σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα, οι εξισώσεις 2.5, 2.17 και 2.21 γίνονται

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{στο B1} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{στο B2} \quad (2.24)$$

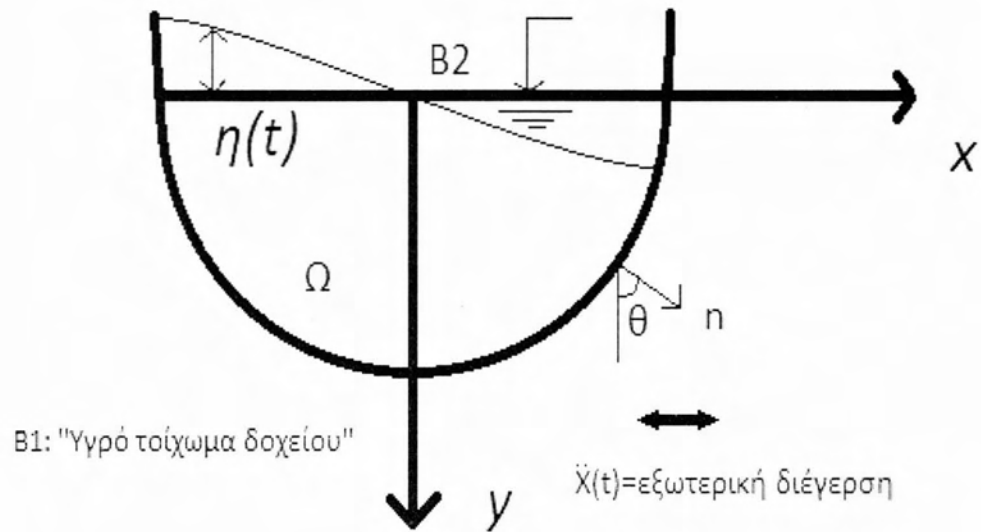
Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος με ομογενείς συνοριακές συνθήκες αποτελεί κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών και για τον λόγο αυτόν το φαινόμενο του κυματισμού θεωρείται και επιλύεται ως πρόβλημα ιδιοτιμών. Στις περιπτώσεις που ασκείται στον αγωγό εξωτερική διέγερση το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα συνοριακών τιμών με την εμφάνιση μη-ομογενών όρων στις συνοριακές συνθήκες των τοιχωμάτων του αγωγού. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \dot{X}(t) \sin \theta \quad \text{στο B1} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad \text{στο B2} \quad (2.27)$$

όπου $\dot{X}(t)$ είναι η εξωτερική διέγερση και $\cos \theta$ είναι το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} με τον άξονα y όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



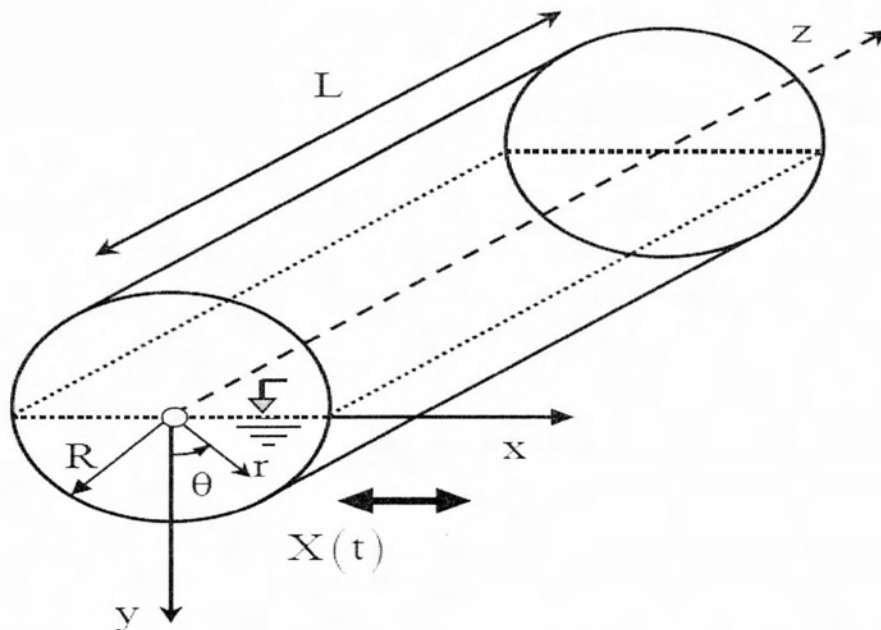
Σχήμα 2.1: Δυσδιάστατη γεωμετρική απεικόνιση του όγκου υγρού Ω και των συνοριακών τμημάτων B1, B2 του προβλήματος κυματισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΗΜΙΠΛΗΡΟΥΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΣΕ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

3.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην ανάλυση του φαινομένου του κυματισμού σε ένα τρισδιάστατο δοχείο η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Το υγρό περιέχεται σε ένα ημιπλήρες οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο ακτίνας R , με τον y άξονα των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y, z να δείχνει κατακόρυφα προς τα κάτω (Σχήμα 3.1), και η γεωμετρία του προβλήματος περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, z . Το δοχείο υποβάλλεται σε μία αυθαίρετη κίνηση στην διεύθυνση του άξονα x με μετατόπιση $X(t)$. Το πλάτος της εξωτερικής διέγερσης και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας θεωρούνται αρκετά μικρά ώστε να είναι ρεαλιστική η υπόθεση γραμμικοποίησης του προβλήματος. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο το δοχείο θεωρείται άκαμπτο. Η παραμορφωσιμότητα του δοχείου θα αναπτυχθεί σε επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 3.1: Γεωμετρική απεικόνιση ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου σε επιβαλλόμενη εξωτερική διέγερση στον εγκάρσιο άξονα x

Θεωρώντας την κίνηση του ρευστού ως αστρόβιλη, η ροή περιγράφεται μέσω μίας δυναμικής συνάρτησης ταχύτητας $\Phi(r, \theta, z, t)$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στο σύνολο του όγκου του ρευστού:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad r < R, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < z < L \quad (3.1)$$

Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας θεωρείται αρκετά μικρή ώστε να επιτρέπεται η γραμμικοποίηση του προβλήματος. Επομένως, το δυναμικό Φ της ταχύτητας υπόκειται στην γραμμικοποιημένη δυναμική (3.2) και κινηματική (3.3) συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g\eta = 0, \quad \text{στο } \theta = \pm\pi/2, r < R, 0 < z < L \quad (3.2)$$

και

$$\pm \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad \text{στο } \theta = \pm\pi/2, r < R, 0 < z < L \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα, όπου g είναι η σταθερά της βαρύτητας ενώ $\eta = \eta(r, z, t)$ είναι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας. Ο συνδυασμός των σχέσεων (3.2) και (3.3) οδηγεί στην ακόλουθη μεικτή συνοριακή συνθήκη:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \quad \text{στο } \theta = \pm\pi/2, r < R, 0 < z < L \quad (3.4)$$

Θεωρώντας εξωτερική διέγερση στην εγκάρσια διεύθυνση (άξονας x), το δυναμικό της ταχύτητας πρέπει να ικανοποιεί την κινηματική συνθήκη στα τοιχώματα του δοχείου:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \dot{X}(t) \sin \theta, \quad \text{στο } r=R, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < z < L \quad (3.5)$$

και

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{στο } z=0, L, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < r < R \quad (3.6)$$

Έπεται ο διαχωρισμός του δυναμικού της ταχύτητας Φ σε δύο μέρη:

$$\Phi = \Phi_U(r, \theta, z, t) + \Phi_S(r, \theta, z, t) \quad (3.7)$$

όπου $\Phi_U(r, \theta, z, t)$ και $\Phi_S(r, \theta, z, t)$ είναι το δυναμικό της "ομοιόμορφης κίνησης" και το δυναμικό που σχετίζεται με τον κυματισμό αντίστοιχα. Το δυναμικό της ταχύτητας Φ_U αντιστοιχεί σε μία κίνηση άκαμπτου σώματος του ρευστού, η οποία

ακολουθεί ακριβώς την κίνηση της πηγής που προκαλεί την εξωτερική διέγερση ενώ το δυναμικό της ταχύτητας Φ_S παριστάνει τη σχετική κίνηση του ρευστού μέσα στο δοχείο. Το δυναμικό της ομοιόμορφης ταχύτητας λαμβάνεται ως:

$$\Phi_U = \dot{X}(t)x = \dot{X}(t)r \sin \theta, \quad (3.8)$$

το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (3.1), και την κινηματική συνθήκη (3.5) και (3.6) στα τοιχώματα του δοχείου. Επομένως, η άγνωστη συνάρτηση δυναμικού $\Phi_S(r, \theta, z, t)$, που σχετίζεται με τον κυματισμό, πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace μέσα στον όγκο του ρευστού, καθώς επίσης και την μεικτή συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια. Διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi_S}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi_U}{\partial \theta} = 0$$

Εφόσον η σχέση αυτή ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια, για $\theta = \pm \pi/2$ έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi_S}{\partial \theta} = - \frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial t^2} \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, r < R, 0 < z < L \quad (3.9)$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial r} = 0 \quad \text{στο } r=R, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < z < L \quad (3.10)$$

και

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } z=0, L, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < r < R \quad (3.11)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας Φ_S γράφεται ως

$$\Phi_S(r, \theta, z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{S_p}(r, \theta, t) \cos\left(\frac{p\pi z}{L}\right), \quad r < R, -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < z < L \quad (3.12)$$

ώστε να εξασφαλίζεται η συνοριακή συνθήκη (3.11) για $p=0, 1, 2, 3, \dots$. Όσον αφορά την συνοριακή συνθήκη (3.10), μπορεί άμεσα να αποδειχθεί ότι, εξαιτίας της εξωτερικής διέγερσης, μόνο ο πρώτος όρος που αντιστοιχεί στον όρο για $p=0$ είναι μη μηδενική (δηλαδή ο όρος ο οποίος είναι σταθερός για οποιοδήποτε z), καθώς όλοι οι άλλοι όροι ($p=1, 2, 3, \dots$) πρέπει να θεωρηθούν ίσοι με το μηδέν προκειμένου να ικανοποιηθεί η συνθήκη (3.10). Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\Phi_S(r, \theta, z, t) = \Phi_{S0}(r, \theta, t) + \Phi_{S1}(r, \theta, t) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \Phi_{S2}(r, \theta, t) \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) + \dots$$

στο εσωτερικό του όγκου του ρευστού. Επομένως, η (3.10) γίνεται:

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{s0}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{s1}(r, \theta, t)}{\partial r} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{\partial \Phi_{s2}(r, \theta, t)}{\partial r} \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right) + \dots = 0, \text{ για κάθε } z.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι εκτός από τον πρώτο όρο όλοι οι υπόλοιποι όροι απαλείφονται, δηλαδή το πρόβλημα του κυματισμού μεταπίπτει σε ένα αυστηρά δισδιάστατο πρόβλημα που στοχεύει στον υπολογισμό του δυναμικού της ταχύτητας για το οποίο ισχύει $\varphi = \Phi_s(r, \theta, t)$, η οποία συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον όγκο του ρευστού που βρίσκεται στο κάτω ημισφαίριο του δοχείου, τη μεικτή συνοριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 \Phi_U}{\partial t^2}, \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, r < R \quad (3.13)$$

και την κινηματική συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \text{στο } r=R, -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (3.14)$$

3.2 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ακολουθώντας την μεθοδολογία των S. Papaspyrou, S.A Karamanos, D. Valougeorgis [4] η λύση για την άγνωστη συνάρτηση φ λαμβάνεται στην ακόλουθη μορφή

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \varphi_n(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) r^n \sin(n\theta), \quad c \quad (3.15)$$

όπου $\dot{q}_n(t)$ είναι άγνωστες αυθαίρετες χρονικές συναρτήσεις, και $\varphi_n(r, \theta) = r^n \sin(n\theta)$ είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος. Οι προαναφερθέντες, σύμφωνα με την μεθοδολογία των Evans και Linton(1993), ξαναγράφουν την άγνωστη συνάρτηση του δυναμικού στην ακόλουθη μορφή:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{q}_{2n-1}(t) r^{2n-1} \sin(2n-1)\theta + \dot{q}_{2n}(t) r^{2n} \sin(2n\theta)] \quad (3.16)$$

διαχωρίζοντας τους περιττούς από τους άρτιους όρους της σειράς. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.16) και (3.8) στην εξίσωση (3.13) και εξισώνοντας τους όρους της ίδιας τάξης ως προς r προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$q_2(t) = \frac{1}{2g} \ddot{q}_1(t) + \frac{1}{2g} \ddot{X}(t) \quad (3.17)$$

και

$$q_{2n}(t) = \frac{1}{2ng} \ddot{q}_{2n-1}(t), \quad \text{για } n > 1 \quad (3.18)$$

Στην συνέχεια οι εξισώσεις (3.17) και (3.18) υποκαθίστανται στην σχέση (3.16) και έπειτα εφαρμόζουμε την συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου, η οποία εκφράζεται από την σχέση (3.14). Έτσι προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{R^{2n-1}}{g} \sin(2n\theta) q_{2n-1}(t) + (2n-1)R^{2n-2} \sin(2n-1)\theta q_{2n-1} \right\} = -\frac{R}{g} \sin(2\theta) \ddot{X}(t) \quad (3.19)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση με το ολοκλήρωμα

$$I_s = \int_0^{\pi/2} \dots \sin(2s-1)\theta d\theta, \quad s=1, 2, 3, \dots, \quad (3.20)$$

και εφαρμόζοντας κάποιους μαθηματικούς χειρισμούς, προκύπτει το ακόλουθο άπειρο σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = -\{\gamma\}\ddot{X} \quad (3.21)$$

Στην εξίσωση (3.21), ο $[\mathbf{M}]$ είναι ένας μη συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας, ο $[\mathbf{K}]$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας, και $\{\gamma\}$ είναι ένα διάνυσμα, όπου

$$M_{sn} = \frac{2n(-1)^{(n+s)}}{n^2 - (s-1/2)^2} R^{2n-1}, \quad n=1, 2, 3, \dots \text{ και } s=1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

$$K_{nn} = (2n-1)\pi g R^{2n-2}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

$$\gamma_s = \frac{8(-1)^{s+1}}{3+4s-4s^2} R, \quad s=1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

Τέλος, το $\{q\}$ είναι το άγνωστο διάνυσμα με στοιχεία $q_{2n-1}(t)$, $n=1, 2, \dots$.

Το σύστημα των εξισώσεων (3.21) εκφράζει την δυναμική ισορροπία του συστήματος, όπου $\{q\}$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων γενικευμένων συντεταγμένων, οι πίνακες $[\mathbf{M}]$ και $[\mathbf{K}]$ θεωρούνται τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας του συστήματος, αντίστοιχα, και το διάνυσμα $\{\gamma\}$ είναι το διάνυσμα που εκφράζει την συνεισφορά της εξωτερικής διέγερσης στην δυναμική ισορροπία του συστήματος.

Προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι μηχανισμοί απόσβεσης του συστήματος, προστίθεται στην εξίσωση (3.21) ένας όρος ανάλογος της πρώτης παραγώγου των γενικευμένων συντεταγμένων q . Έτσι προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = -\{\gamma\}\ddot{X} \quad (3.25)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο πίνακας $[C]$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Σύμφωνα με τους S. Papaspyrou, S.A Karamanos, D. Valougeorgis [4], ο υπολογισμός του μητρώου $[C]$ προσεγγίζεται κατά Rayleigh, σύμφωνα με την οποία ισχύει:

$$[C]=a_0[M] + a_1[K] \quad (3.26)$$

όπου a_0 και a_1 είναι αριθμητικοί συντελεστές (συντελεστές αναλογίας), οι τιμές των λαμβάνονται από πειραματικά δεδομένα (δηλαδή από μέτρηση της απόκρισης πραγματικών κατασκευών). Με άλλα λόγια, το μητρώο απόσβεσης $[C]$ προσεγγίζεται ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας $[M]$ και δυσκαμψίας $[K]$. Ισοδύναμα, το μητρώο απόσβεσης $[C]$ θεωρείται ως μία αναλογία μεταξύ των μητρώων μάζας $[M]$ και δυσκαμψίας $[K]$. Εφόσον το μητρώο $[M]$ δεν είναι διαγώνιο και το μητρώο $[C]$ δεν θα είναι διαγώνιο αντίστοιχα. Ένα αξιοσημείωτο στοιχείο που αναφέρεται από τους S. Papaspyrou, S.A Karamanos, D. Valougeorgis [4] είναι το γεγονός ότι σε προηγούμενες εργασίες [Faltinsen (1978); Isaacson και Subbiach (1991)] ο υπολογισμός της απόσβεσης είχε γίνει με μία διαφορετική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, εισάγεται στην εξίσωση (3.2) της δυναμικής συνοριακής συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού ένας επιπλέον όρος απόσβεσης ανάλογος του δυναμικού που σχετίζεται με τον κυματισμό:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v\tilde{\varphi} - g\eta = 0 \quad \text{στο } \theta = \pm \pi/2, r < R, 0 < z < L. \quad (3.27)$$

Ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέρος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει μία δύναμη, η οποία αντιτίθεται στην κίνηση των σωματιδίων, με την σταθερά v να είναι ο συντελεστής ιξώδους. Αν στο παρόν πρόβλημα η εξίσωση (3.2) αντικατασταθεί από την εξίσωση (3.27) το πρόβλημα καταλήγει σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων όμοιο με αυτό της σχέσης (3.25), με $[C]=v[M]$, μία ειδική περίπτωση του μητρώου απόσβεσης κατά Rayleigh.

3.3 ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΠΙΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Έχοντας υπολογίσει το δυναμικό της ταχύτητας φ που σχετίζεται με τον κυματισμό, μπορούν να υπολογιστούν οι υδροδυναμικές πιέσεις σε οποιοδήποτε σημείο από την γραμμικοποιημένη εξίσωση Bernoulli, καθώς επίσης και η συνολική οριζόντια δύναμη η οποία ασκείται στο δοχείο. Αυτή υπολογίζεται από κατάλληλη

ολοκλήρωση της πίεσης στο ημισφαιρικό τοίχωμα του δοχείου. Η συνολική υδροδυναμική δύναμη f_T στο τοίχωμα του δοχείου είναι το άθροισμα της "ομοιόμορφης κίνησης" δύναμη f_U , της δύναμης f_s που σχετίζεται με τον κυματισμό και της δύναμης f_c που αντιπροσωπεύει την αδρανειακή δύναμη του δοχείου. Οι παραπάνω δυνάμεις δίνονται από τις σχέσεις

$$f_U = -\rho \int_A \frac{\partial \varphi_U}{\partial t} (\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}) dA, \quad (3.28)$$

$$f_s = -\rho \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}) dA, \quad (3.29)$$

και

$$f_c = -m_c \ddot{X}(t) \quad (3.30)$$

αντίστοιχα, όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, A είναι η βρεχόμενη επιφάνεια του κυλίνδρου, και m_c είναι η μάζα του δοχείου ανά μονάδα μήκους. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.8) και (3.16), οι δυνάμεις f_U και f_s υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$f_U = -\rho \ddot{X}(t) R^2 \int_0^L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta dz = -\left(\rho \frac{\pi R^2}{2}\right) X(t) = -m_L \ddot{X}(t), \quad (3.31)$$

$$f_s = -\rho R^2 \sum_0^{\infty} R^{2n-2} [\ddot{q}_{2n-1} Y_{2n-1} + R \ddot{q}_{2n}(t) Y_{2n}], \quad (3.32)$$

όπου $m_L = \rho \frac{\pi R^2}{2}$ είναι η μάζα του ρευστού ανά μονάδα μήκους του ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού αγωγού, και

$$Y_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2k\theta) \sin \theta d\theta = (-1)^{k+1} \frac{4k}{4k^2 - 1}, \quad k=1, 2, 3... \quad (3.33)$$

Καθώς η πίεση είναι πάντα κάθετη στο τοίχωμα του δοχείου, η κατεύθυνση της συνολικής υδροδυναμικής δύναμης περνάει πάντοτε από το κέντρο της εγκάρσιας τομής του οριζόντιου δοχείου.

3.4 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η διατύπωση του προβλήματος της απόκρισης του ημιπλήρους δοχείου απλοποιείται σημαντικά αν λάβουμε υπόψη μας μόνο τους δύο πρώτους όρους της σειράς της σχέσης (3.16), δηλαδή για $n=1$. Σε αυτή την περίπτωση, σύμφωνα με τους S. Papaspyrou, S.A Karamanos, D. Valougeorgis [4], υπολογίζεται μία προσεγγιστική

λύση και το πρόβλημα του κυματισμού περιγράφεται σαν ένας απλός γραμμικός ταλαντωτής, ο οποίος μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο (σχήμα 3.2).

Στην απλοποιημένη ανάλυση για τον κυματισμό θεωρείται ότι η εξίσωση (3.16) αντικαθίσταται από την παρακάτω προσεγγιστική σχέση:

$$\varphi(r, \theta, t) = \dot{q}_1 r \sin \theta + \dot{q}_2 r^2 \sin 2\theta \quad (3.34)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες, το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (3.21) περιορίζεται στη μοναδική εξίσωση:

$$\ddot{q}_1 + \left(\frac{3\pi g}{8R}\right)q_1 = -\ddot{X}, \quad (3.35)$$

η οποία είναι η εξίσωση του γραμμικού απλού ταλαντωτή. Η συχνότητα του ταλαντωτή $\omega_s = \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}}$ είναι μία προσέγγιση της πρώτης ιδιοσυχνότητας κυματισμού του συστήματος. Αφού υπολογιστεί η συνάρτηση $q_1(t)$ από την εξίσωση (3.35), εύκολα υπολογίζεται η συνάρτηση $q_2(t)$ από την σχέση:

$$q_2 = -\left(\frac{3\pi}{16R}\right)q_1. \quad (3.36)$$

Η επίδραση της απόσβεσης μπορεί να εισαχθεί στην παραπάνω εξίσωση μέσω ενός επιπλέον όρου απόσβεσης. Συγκεκριμένα η εξίσωση (3.36) γίνεται:

$$\ddot{q}_1 + 2\omega_s \xi_s \dot{q}_1 + \omega_s^2 q_1 = -\ddot{X} \quad (3.37)$$

όπου ξ_s είναι ο λόγος απόσβεσης.

Όσον αφορά τις δυνάμεις, σύμφωνα με την ολοκλήρωση που υποδείχθηκε στην εξίσωση (3.29), λαμβάνεται μία απλοποιημένη έκφραση για την δύναμη που ασκείται στο δοχείο λόγω του κυματισμού

$$f_s = -\left(\frac{m_L}{2}\right)\ddot{q}_1 = -m_s \ddot{q}_1, \quad (3.38)$$

όπου m_s είναι η μισή μάζα του ρευστού m_L ανά μονάδα μήκους του δοχείου, και υποδηλώνει την μάζα που ακολουθεί τον κυματισμό ανά μονάδα μήκους του δοχείου. Η συνολική οριζόντια δύναμη f_T είναι το άθροισμα της δύναμης f_s που σχετίζεται με τον κυματισμό, της δύναμης f_U που ασκείται από την "ομοιόμορφη κίνηση" του ρευστού που ακολουθεί το δοχείο λόγω εξωτερικής διέγερσης, και τέλος της αδρανειακής δύναμης του δοχείου f_c . Έτσι, προκύπτει:

$$f_T = -m_T \ddot{X} - m_s \ddot{q}_1, \quad (3.39)$$

όπου

$$m_T = m_L + m_c \quad (3.40)$$

είναι η συνολική μάζα του συστήματος δοχείο-ρευστό. Επιπλέον, εφαρμόζοντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών:

$$u = q_1 + X, \quad (3.41)$$

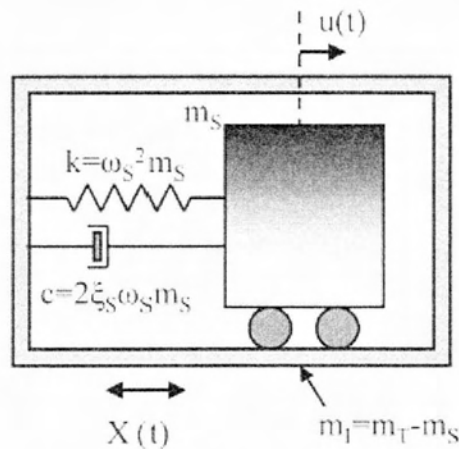
η συνολική δύναμη της εξίσωσης (3.39) γίνεται:

$$f_T = -m_I \ddot{X} - m_s \ddot{u}, \quad (3.42)$$

όπου

$$m_I = m_T - m_s. \quad (3.43)$$

Οι εξισώσεις (3.37), (3.41) και (3.42) οδηγούν στην θεώρηση ενός ισοδύναμου μηχανικού μοντέλου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2, για την απόκριση ενός ημικυκλικού δίσκου σε εγκάρσια διέγερση. Το μηχανικό αυτό μοντέλο είναι παρόμοιο με μοντέλα που έχουν προταθεί για τετραγωνικά και κάθετα κυλινδρικά δοχεία (Abramson, 1966). Η συνάρτηση $u(t)$ αντιστοιχεί στην καλούμενη "επαγωγική" κίνηση και η αντίστοιχη μάζα m_s ονομάζεται "επαγωγική" μάζα ή μάζα κυματισμού. Η μάζα m_I αντιπροσωπεύει την ονομαζόμενη "ωστική" μάζα και εκφράζει την μάζα που επιταχύνεται μόνο λόγω της εξωτερικής διέγερσης.



Σχήμα 3.2 Ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο για δισδιάστατη ανάλυση.

3.5 ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΟΧΕΙΟΥ ΚΑΙ ΡΕΥΣΤΟΥ

Βασιζόμενοι στην απλοποιημένη λύση του κυματισμού του προηγούμενου κεφαλαίου και θεωρώντας ότι το δοχείο παραμορφώνεται σαν δοκός, οι S. Paraspyrou, S.A Karamanos, D. Valougeorgis [4] διατύπωσαν τη λύση του συζευγμένου προβλήματος της απόκρισης του συστήματος δοχείο-ρευστό.

Λόγω ποικίλων πρακτικών εφαρμογών, το δοχείο θεωρείται επιμήκες (με λόγο μήκους προς ακτίνα $L/R \ll 10$) και παχύ (με λόγο ακτίνας προς πάχος $R/h \ll 100$), έτσι ώστε να παραμορφώνεται σαν δοκός και ταυτόχρονα η εγκάρσια τομή να παραμένει κυκλική (απαραμόρφωτη). Επομένως, η κίνηση του δοχείου καθορίζεται από τη κίνηση του άξονα κατά μήκος του δοχείου, η οποία διαχωρίζεται σε δύο μέρη (σχήμα 3.3), τη κίνηση των στηρίξεων $X_g(t)$, ανεξάρτητη του άξονα z , και τη κίνηση λόγω της παραμόρφωσης του δοχείου η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $y(z,t)$:

$$X(z,t) = X_g(t) + y(z,t). \quad (3.44)$$

Θεωρείται η αποδεκτή συνάρτηση $\psi(z)$ η οποία σχετίζεται με τη παραμόρφωση του δοχείου:

$$y(z,t) = \psi(z)\Delta(t), \quad (3.45)$$

και

$$X(z,t) = X_g(t) + \psi(z)\Delta(t) \quad (3.46)$$

έτσι ώστε το παραμορφώσιμο δοχείο αντιμετωπίζεται ως ένα γενικευμένο μονοβάθμιο σύστημα. Σε αυτή τη περίπτωση, το δοχείο υπόκειται σε μία ανομοιόμορφη κίνηση ως προς το z και η λύση του κυματισμού απαιτεί τρισδιάστατη ανάλυση. Παρ' όλα αυτά, στη πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών, η βασική συχνότητα ταλάντωσης του κυματισμού ω_s είναι αρκετά μικρότερη σε σχέση με τη βασική συχνότητα ταλάντωσης του δοχείου και, επομένως, θεωρείται ότι η λύση του δισδιάστατου προβλήματος του κυματισμού για το άκαμπτο δοχείο, όπως εκφράζεται από τη σχέση (3.37), είναι έγκυρη στις διατομές κατά μήκος του αγωγού. Συνεπώς, η κίνηση κυματισμού κατά μήκος του δοχείου περιγράφεται μέσω της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} + 2\xi_s \omega_s \frac{\partial q_1}{\partial t} + \omega_s^2 q_1 = -\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \quad (3.47)$$

όπου $q_1 = q_1(z,t)$. Από τις εξισώσεις (3.44)-(3.46), η άγνωστη συνάρτηση $q_1(z,t)$ είναι το άθροισμα από δύο μέρη, αυτού που σχετίζεται με την κίνηση του εδάφους q_g , και

του δευτέρου που σχετίζεται με τη κίνηση του δοχείου σε σχέση με τη κίνηση του εδάφους,

$$q_1(z, t) = q_g(t) + \psi(z)q(t) \quad (3.48)$$

Έτσι, οι άγνωστες συναρτήσεις $q_g(t)$ και $q(t)$ ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\ddot{q}_g + 2\omega_s \xi_s \dot{q}_g + \omega_s^2 q_g = -\ddot{X}_g \quad (3.49)$$

$$\ddot{q} + 2\omega_s \xi_s \dot{q} + \omega_s^2 q = -\ddot{\Delta} \quad (3.50)$$

Στη παραπάνω διατύπωση, η συνάρτηση $q(t)$ εκφράζει την επίδραση της παραμόρφωσης του δοχείου στο κυματισμό.

Επιπλέον, από την εξίσωση (3.42), προκύπτει ότι η συνολική δύναμη στο τοίχωμα του δοχείου ανά μονάδα μήκους του δοχείου στη διατομή στη διεύθυνση z είναι

$$f_T(z, t) = -m_s \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} - m_T \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -m_s \ddot{q}_g - m_T \ddot{X}_g - m_s \psi(z) \ddot{q} - m_T \psi(z) \ddot{\Delta}. \quad (3.51)$$

Η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας δοκού είναι

$$EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = f_T(z, t), \quad (3.52)$$

όπου EI είναι η ακαμψία του κυλίνδρου. Χρησιμοποιώντας μία αυθαίρετη αποδεκτή συνάρτηση $w(z)$ και θεωρώντας ότι ο κύλινδρος είναι απλά εδραζόμενος στα δύο άκρα του ($z=0$ και $z=L$), η ασθενής μορφή της παραπάνω εξίσωσης γίνεται:

$$\int_0^L EI y''(z, t) w(z) dz = \int_0^L f_T w(z) dz, \quad (3.53)$$

όπου $()''$ υποδηλώνει διπλή παραγωγή ως προς z . Βασιζόμενοι στη διαδικασία επίλυσης τύπου Galerkin, η συνάρτηση $w(z)$ προσεγγίζεται ως εξής:

$$w(z) = A_w \psi(z) \quad (3.54)$$

όπου A_w είναι ένας αυθαίρετος αριθμός. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.51) και (3.53), προκύπτει η παρακάτω εξίσωση δυναμικής ισορροπίας:

$$K_b \Delta = \int_0^L f_T \psi(z) dz = -M_s \ddot{q}_g - M_T \ddot{X}_g - M'_s \ddot{q} - M'_T \ddot{\Delta} \quad (3.55)$$

όπου οι "γενικευμένες μάζες" M_s , M_T , M'_s και M'_T , και η "γενικευμένη δυσκαμψία" K_b δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_s = \int_0^L m_s \psi(z) dz, \quad M_T = \int_0^L m_T \psi(z) dz, \quad M'_s = \int_0^L m_s \psi^2(z) dz \quad (3.56)$$

$$M'_T = \int_0^L m_T \psi^2(z) dz, \quad K_b = \int_0^L EI \psi''^2(z) dz.$$

Στις σχέσεις (3.36), EI και M_T είναι σταθερές ποσότητες αφού το πάχος του κυλίνδρου παραμένει σταθερό κατά μήκος του κυλίνδρου. Επιπλέον, οι παραπάνω ποσότητες μπορούν να υπολογιστούν από τους παρακάτω τύπους:

$$EI \square E\pi(R + \frac{h}{2})^3 h, \quad (3.57)$$

$$m_T \square m_L + 2\rho_c \pi(R+h)h, \quad (3.58)$$

όπου E και ρ_c είναι το μέτρο ελαστικότητας και η πυκνότητας της μάζας του υλικού του δοχείου, και h είναι το πάχος του τοιχώματος του δοχείου. Η απόσβεση του συστήματος μπορεί να εισαχθεί στην εξίσωση δυναμικής ισορροπίας μέσω ενός όρου ανάλογου της ταχύτητας $\dot{\Delta}$, έτσι ώστε η εξίσωση (3.55) να γίνει:

$$M_s \ddot{q}_g + M_T \ddot{X}_g + M'_s \dot{q}_g + M'_T \dot{\Delta} + C_b \dot{\Delta} + K_b \Delta = 0 \quad (3.59)$$

όπου C_b είναι ο συντελεστής απόσβεσης. Οι τρεις εξισώσεις (3.49), (3.50) και (3.59) μπορούν να γραφτούν στη μορφή πινάκων που ακολουθεί:

$$[M]\ddot{Q} + [C]\dot{Q} + [K]Q = -\{\Gamma\}\ddot{X}_g \quad (3.60)$$

όπου

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ M_s & M'_s & M'_T \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} 2\xi_s \omega_s & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_s \omega_s & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{pmatrix}$$

$$[K] = \begin{pmatrix} \omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{pmatrix}, \quad \{\Gamma\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ M_T \end{pmatrix} \text{ και } Q = \begin{pmatrix} q_g \\ q \\ \Delta \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

η οποία μπορεί να λυθεί άμεσα και να υπολογιστούν οι άγνωστες συναρτήσεις $q_g(t)$, $q(t)$ και $\Delta(t)$. Επομένως, η συνολική οριζόντια δύναμη που ασκείται στο τοίχωμα του δοχείου υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$F_T = \int_0^L f_T(z, t) dz = -(m_s L) \ddot{q}_g - (m_T L) \ddot{X}_g - M_s \ddot{q} - M_T \ddot{\Delta} \quad (3.62)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως στη περίπτωση του άκαμπτου κυλίνδρου, ο τρίτος και ο τέταρτος όρος στο δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης μηδενίζονται και έτσι προκύπτει η εξίσωση άκαμπτου δοχείου (3.39).

Οι τρεις φυσικές ιδιοσυχνότητες $\omega(i)$ του συστήματος δοχείο-ρευστό χωρίς απόσβεση ($\xi_s = \xi_b = 0$) είναι οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0, \quad (3.63)$$

και οι αναλυτικές τους εκφράσεις είναι:

$$\omega^2(1) = \omega_s^2, \quad (3.64)$$

$$\omega^2_{(2),(3)} = \frac{K_b}{2(M'_T - M'_S)} \left[\left(1 + \frac{\omega_s^2}{\omega_b^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_b^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\omega_s^2}{\omega_b^2}\right) \frac{M'_S}{M'_T}} \right] \quad (3.65)$$

όπου $\omega_b^2 = K_b / M'_T$. Σε πρακτικές εφαρμογές ($L/R \geq 10, R/h \leq 100$), αποδεικνύεται άμεσα πως $\omega_s^2 \ll \omega_b^2$ και, συνεπώς, οι δύο φυσικές συχνότητες του συστήματος ισούνται με:

$$\omega^2_{(2)} \approx \omega_s^2 \quad (3.66)$$

$$\omega^2_{(2)} \approx \omega_l^2 = \frac{K_b}{M'_T - M'_S} = \frac{K_b}{M'_I} \quad (3.67)$$

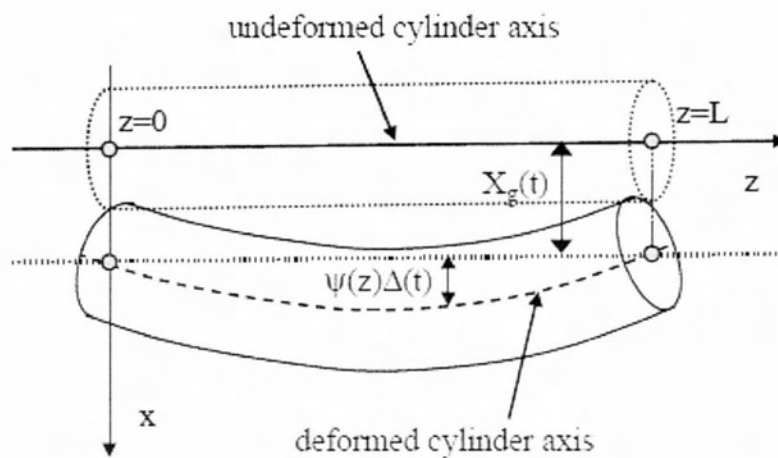
Ο παρανομαστής $M'_I = M'_T - M'_S$ στην εξίσωση (3.67) εκφράζει τη διαφορά μεταξύ της γενικευμένης συνολικής μάζας M'_T και της γενικευμένης μάζας κυματισμού M'_S και μπορεί να θεωρηθεί ως η "γενικευμένη ωστική μάζα", ανάλογη του m_l που προσδιορίζεται στη σχέση (3.43). Σε αυτή τη περίπτωση, η δυναμική απόκριση του συστήματος βασίζεται στις δύο φυσικές συχνότητες του συστήματος, και συγκεκριμένα στη συχνότητα ταλάντωσης του κυματισμού ω_s , η οποία αντιπροσωπεύει τη κίνηση του ρευστού σε σχέση με το δοχείο, και την "ωστική" συχνότητα ω_l , η οποία δίνεται από την σχέση (3.67), και αντιπροσωπεύει τη κίνηση της μάζας που επιταχύνεται με την εξωτερική διέγερση. Ακολουθώντας τον ορισμό της συχνότητας ω_l , η οποία εκφράζει τη κίνηση της γενικευμένης μάζας M'_I , ο συντελεστής απόσβεσης υπολογίζεται ως εξής:

$$C_b = 2\xi_b \omega_l M'_I \quad (3.68)$$

όπου ξ_b είναι ο λόγος απόσβεσης.

Τέλος, σημειώνεται πως η αυτή η απλοποιημένη συζευγμένη διατύπωση, όπως εκφράζεται από τις εξισώσεις (3.60) και (3.62), μπορεί να εφαρμοστεί ώστε να

προσεγγιστεί η λύση για την απόκριση του συστήματος δοχείο-ρευστό για οποιοδήποτε πληρότητα του οριζόντιου κυλίνδρου, δεδομένου ότι λαμβάνονται οι κατάλληλες τιμές για τη μάζα κυματισμού m_s και για τη συχνότητα ταλάντωσης της μάζας κυματισμού ω_s . Ο υπολογισμός αυτών των μεγεθών απαιτούν αριθμητική επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος, το οποίο είναι εκτός του σκοπού της παρούσης εργασίας.



Σχήμα 3.3 Σχηματική απεικόνιση της παραμόρφωσης τύπου-δοκού του οριζόντιου κυλινδρικού αγωγού, απλά εδραζόμενου στα $z=0, z=L$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΗΜΙΠΛΗΡΟΥΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΜΕ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ ΣΕ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

4.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΟΧΕΙΟ-ΡΕΥΣΤΟ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα της απόκρισης ενός ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου με παραμορφώσιμα τοιχώματα σε εγκάρσια διέγερση, όπως έχει αναπτυχθεί από τον Karamanos(2007). Και σε αυτή την περίπτωση η ροή θεωρείται ασυμπιέστη και αστρόβιλη. Επίσης, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος βασίζεται πάνω στη ανάλυση του 2^{ου} κεφαλαίου, δηλαδή η ροή περιγράφεται μέσω μίας συνάρτησης δυναμικού η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace μέσα στον όγκο του ρευστού καθώς και την κινηματική συνθήκη στο τοίχωμα του δοχείου. Επιπλέον, θεωρώντας μικρή την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, η συνάρτηση δυναμικού ικανοποιεί την γραμμικοποιημένη κινηματική και δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια. Το ρευστό περιέχεται σε ένα ημιγεμάτο οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο ακτίνας R , με τον y άξονα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων xyz να έχει φορά προς τα κάτω (Σχήμα 3.1). Η γεωμετρία του προβλήματος περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Πρέπει να τονισθεί ότι μέχρι στιγμής στην περίπτωση δοχείων με παραμορφώσιμα τοιχώματα θεωρούνταν πως μόνο η “ωστική” κίνηση επηρεαζόταν από την παραμορφωσιμότητα των τοιχωμάτων του δοχείου ενώ η “επαγωγική” κίνηση ακολουθούσε την κίνηση του άκαμπτου δοχείου χωρίς να επηρεάζεται από την παραμόρφωση των τοιχωμάτων. Αυτή η ανάλυση εφαρμόστηκε ευρέως σε προηγούμενες εργασίες για σεισμική ανάλυση κατακόρυφων κυλινδρικών δεξαμενών αποθήκευσης, όπου η παραμόρφωση της δεξαμενής αποτυπωνόταν μέσω της θεώρησης απλών συναρτήσεων σχήματος (Veletsos, A. S. and Yang, J. Y., Fischer, F. D.). Από όσα γνωρίζουμε, η μόνη εργασία για κατακόρυφους κυλινδρικούς αγωγούς υπό σεισμική διέγερση που ακολούθησε μία ακριβή προσέγγιση θεωρώντας ολοκληρωτική σύνδεση της παραμορφωσιμότητας των δοχείων και του κυματισμού είναι αυτή των Fischer and Rammerstorfer. Τέτοιου είδους προσέγγιση ακολουθεί και στην εργασία του ο Spyros A. Karamanos για την περίπτωση του ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού αγωγού που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο. Η ολοκληρωτική αυτή σύνδεση αποτυπώνεται μέσω του διαχωρισμού της κίνησης του ρευστού σε τρία

μέρη: μία “ωστική” κίνηση που ακολουθεί την εξωτερική διέγερση, μία κίνηση λόγω της παραμόρφωσης του τοιχώματος και μία “επαγωγική” κίνηση που σχετίζεται με τον κυματισμό.

4.1.1 Παραμόρφωση του δοχείου

Το δοχείο υπόκειται σε μία τυχαία κίνηση των στηρίξεων της στην κατεύθυνση του άξονα x με μετατόπιση $X(t)$. Το δοχείο θεωρείται παραμορφώσιμο με παραμορφωσιμότητα τύπου-δοκού και η διατομή του παραμένει κυκλική (αυτά τα δοχεία είναι αρκετά παχιά ώστε να αντέχουν τις υψηλές εσωτερικές πιέσεις). Παρ’ όλα αυτά, σχετικά επιμήκη οριζόντια κυλινδρικά δοχεία ($L/R \geq 10$), που είναι συνήθη στις πετρελαιοχημικές βιομηχανίες και διυλιστήρια, υπόκεινται σε παραμόρφωση τύπου-δοκού που είναι πιθανή να επηρεάσει την συνολική απόκριση υπό εγκάρσια διέγερση. Στην συγκεκριμένη θεώρηση, λόγω του επαρκούς πάχους του δοχείου, θεωρείται ότι η διατομή παραμένει κυκλική (απαραμόρφωτη) και η κίνηση του δοχείου καθορίζεται από την κίνηση του άξονα του δοχείου, που διαχωρίζεται σε δύο τμήματα, την κίνηση των στηρίξεων $X(t)$, ανεξάρτητη της συντεταγμένης z , και την κίνηση εξαιτίας της παραμόρφωσης των τοιχωμάτων του δοχείου που περιγράφεται μέσω μίας συνάρτησης $y(z,t)$

$$y(z,t) = \psi(z)\Delta(t) \quad (4.1)$$

όπου $\psi(z)$ είναι μία συνάρτηση σχήματος και $\Delta(t)$ είναι μία συνάρτηση αγνώστου αριθμού βαθμών ελευθερίας που αντιπροσωπεύει το μέγεθος της κίνησης του δοχείου σε σχέση με τις στηρίξεις.

4.1.2 Διαχωρισμός της κίνησης του ρευστού

Θεωρώντας ροή χωρίς τριβές, η ροή περιγράφεται μέσω μίας συνάρτησης δυναμικού $\Phi(r,\theta,z,t)$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον όγκο του ρευστού, με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στο τοίχωμα του δοχείου και στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Έτσι, έχουμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (4.2)$$

και τις συσχετιζόμενες συνοριακές συνθήκες στα τοιχώματα του δοχείου υπό κίνηση και στην ελεύθερη επιφάνεια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0, L, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < r < R \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\dot{X} + \psi(z) \dot{\Delta}) \sin \theta \quad r = R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = \pm \pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L \quad (4.5)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας αναλύεται σε τρία τμήματα:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \varphi_I(r, \theta, t) + \varphi_D(r, \theta, z, t) + \varphi_C(r, \theta, z, t) \quad (4.6)$$

όπου $\varphi_I(r, \theta, t)$, $\varphi_D(r, \theta, z, t)$ και $\varphi_C(r, \theta, z, t)$ είναι το ονομαζόμενο "ωστικό" δυναμικό, δυναμικό "παραμόρφωσης" και "επαγωγικό" δυναμικό αντίστοιχα.

Το δυναμικό της "ωστικής" κίνησης φ_I ικανοποιεί την εξίσωση Laplace μέσα στον όγκο του ρευστού

$$\nabla^2 \varphi_I = 0 \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (4.7)$$

και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial r} = (\dot{X} + \psi_m \dot{\Delta}) \sin \theta \quad r = R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (4.8)$$

$$\varphi_I = 0 \quad \theta = \pm \pi/2, \quad r < R \quad (4.9)$$

Στην εξίσωση (4.8), ψ_m είναι η μέση τιμή της $\psi(z)$:

$$\psi_m = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(z) dz \quad (4.10)$$

έτσι ώστε

$$\psi(z) = \psi_m + \tilde{\psi}(z) \quad (4.11)$$

και

$$\int_0^L \tilde{\psi}(z) dz = 0.$$

Από τις εξισώσεις (4.7)-(4.9), εύκολα βγαίνει το συμπέρασμα ότι το ωστικό δυναμικό είναι δύο διαστάσεων, αφού είναι ανεξάρτητο του z .

Το δυναμικό της "παραμόρφωσης" φ_D ικανοποιεί την εξίσωση Laplace μέσα στον όγκο του ρευστού

$$\nabla^2 \varphi_D = 0 \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (4.12)$$

και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial \varphi_D}{\partial z} = 0 \quad z = 0, L, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < r < R \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \varphi_D}{\partial r} = \dot{\Delta} \tilde{\psi}(z) \sin \theta \quad r = R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (4.14)$$

$$\varphi_D = 0 \quad \theta = \pm\pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L \quad (4.15)$$

Τέλος, το ‘‘επαγωγικό’’ δυναμικό φ_C , που σχετίζεται με την κίνηση του κυματισμού του ρευστού, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \varphi_C = 0 \quad r < R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (4.16)$$

και τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial \varphi_C}{\partial z} = 0 \quad z = 0, L, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < r < R \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \varphi_C}{\partial r} = 0 \quad r = R, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad 0 < z < L \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial t^2} \pm \frac{g}{r} \frac{\partial \varphi_C}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_D}{\partial t^2} \quad \theta = \pm\pi/2, \quad r < R, \quad 0 < z < L \quad (4.19)$$

Στην συνοριακή συνθήκη (4.19), ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος αντιπροσωπεύει την επιρροή της ωστικής κίνησης στο επαγωγικό δυναμικό, καθώς επίσης ο δεύτερος όρος εκφράζει την επιρροή της παραμόρφωσης του δοχείου στο επαγωγικό δυναμικό.

4.2 ΛΥΣΗ ΜΟΡΦΗΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΕΙΡΑΣ

Στην εργασία του ο Karamanos(2007) αναπτύσσει τα τρία ανεξάρτητα δυναμικά που αποτελούν το συνολικό δυναμικό της ταχύτητας του ρευστού σε μορφή σειράς. Το πρόβλημα που σχετίζεται με την κίνηση του ρευστού που ακολουθεί την εξωτερική διέγερση είναι ένα δισδιάστατο πρόβλημα και το δυναμικό του αναπτύσσεται σε σειρά της μορφής:

$$\varphi_I(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n^I(t) r^n \sin(n\theta) \quad (4.20)$$

όπου $\dot{q}_n^I(t)$, $n=1,2,3,\dots$ είναι γενικευμένες συντεταγμένες του ωστικού προβλήματος.

Η λύση του τρισδιάστατου δυναμικού ταχύτητας που σχετίζεται με την παραμόρφωση του δοχείου παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\varphi_D(r,\theta,z) = \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \dot{q}_{n,p}^D(t) I_n(k_p r) \sin(n\theta) \cos(k_p z) \quad (4.21)$$

όπου $k_p = p\pi/L$ και $\dot{q}_{n,p}^D(t)$ είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες της κίνησης του ρευστού που προκαλείται από την παραμόρφωση του δοχείου. Επίσης, I_n είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, τάξης n (Παράρτημα 4.2).

Τέλος, το δυναμικό που σχετίζεται με την επαγωγική κίνηση γράφεται στην μορφή της παρακάτω σειράς, διαχωρίζοντας περιττούς και άρτιους όρους.

$$\begin{aligned} \varphi_C(r,\theta,z,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_{2n-1}^C(t) r^{2n-1} \sin[(2n-1)\theta] + \dot{q}_{2n}^C(t) r^{2n} \sin(2n\theta) \right] + \\ & + \sum_{p=2,4}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{q}_{2n-1,p}^C(t) I_{2n-1}(k_p r) \sin[(2n-1)\theta] + \dot{q}_{2n,p}^C(t) I_{2n}(k_p r) \sin(2n\theta) \right] \cos(k_p z) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας ορισμένους μαθηματικούς χειρισμούς στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που σχετίζεται με τον κυματισμό σε συνδυασμό με την εξίσωση (4.22) προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις με τις οποίες οι περιττοί όροι της σειράς $\dot{q}_{2n-1,p}^C$ εκφράζονται άμεσα συναρτήσει των άρτιων όρων $\dot{q}_{2n,p}^C$ της σειράς

$$(2m-1)R^{2m-2} \dot{q}_{2m-1}^C = - \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} R^{2n-1} \frac{n^2 (-1)^{m+n}}{n^2 - (m^2 - 1/2)} \dot{q}_{2n}^C \quad (4.23)$$

$$I'_{2m-1}(k_p R) \dot{q}_{2m-1,p}^C(t) = - \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} I'_{2n}(k_p R) \frac{n(-1)^{m+n}}{2[n^2 - (m^2 - 1/2)]} \dot{q}_{2n,p}^C(t) \quad (4.24)$$

Είναι δυνατό να καταλήξουμε σε μία απλοποιημένη λύση του προβλήματος, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους δύο πρώτους όρους των παραπάνω σειρών σε όρους της γωνίας θ . Αυτή η λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μία λεπτομερή εξέταση της επίδρασης της παραμόρφωσης του τοιχώματος του δοχείου στην δυναμική ισορροπία του συστήματος. Για λόγους απλοποίησης, η μάζα του δοχείου m_{SH} μπορεί να θεωρηθεί μικρή και να αγνοηθεί.

4.2.1 Ανάλυση ωστικής κίνησης και κίνησης παραμόρφωσης δοχείου

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μεθοδολογία του απλοποιημένου προβλήματος, η εξίσωση του δυναμικού της “ωστικής” κίνησης (4.20) καταλήγει στην παρακάτω μαθηματική έκφραση

$$\varphi_1(r,\theta,t) = \frac{3\pi}{16R} (\dot{X} + \psi_m \dot{\Delta}) r^2 \sin 2\theta \quad (4.25)$$

Η αντίστοιχη έκφραση της πίεσης που ασκείται στο τοίχωμα από το ρευστό που κινείται λόγω εξωτερικής διέγερσης γίνεται

$$P_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\rho \frac{3\pi R}{16} (\ddot{X} + \psi_m \ddot{\Delta}) \sin 2\theta \quad (4.26)$$

Εφαρμόζοντας μια απλή ολοκλήρωση στο πλευρικό τοίχωμα δίνει την “ωστική” δύναμη που ασκείται στο τοίχωμα ανά μονάδα μήκους

$$f_1 = -\rho \frac{\pi R^2}{4} (\ddot{X} + \psi_m \ddot{\Delta}) = -\frac{m_L}{2} (\ddot{X} + \psi_m \ddot{\Delta}) \quad (4.27)$$

Επιπλέον, η εξίσωση του δυναμικού της ταχύτητας που προκαλείται από την παραμόρφωση του τοιχώματος του δοχείου (4.21) γίνεται:

$$\varphi_D(r,\theta,z) = \sum_{p=2,4}^{\infty} \dot{q}_{2,p}^D(t) I_2(k_p r) \sin(2\theta) \cos(k_p z) \quad (4.28)$$

όπου

$$\dot{q}_{2,p}^D(t) = \frac{3\pi \dot{\Delta}}{4L k_p I_2'(k_p R)} \int_0^L \tilde{\psi}(z) \cos(k_p z) dz \quad (4.29)$$

Η αντίστοιχη πίεση που ασκείται στα τοιχώματα υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$P_D = -\rho \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{3\pi}{4L k_p} \frac{I_2(k_p R)}{I_2'(k_p R)} \ddot{\Delta} \left(\int_0^L \cos(k_p z) \tilde{\psi}(z) dz \right) \sin 2\theta \cos(k_p z) \quad (4.30)$$

και η αντίστοιχη δύναμη ανά μονάδα μήκους είναι

$$f_D = -\rho \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\pi R}{L} \frac{I_2(k_p R)}{k_p I_2'(k_p R)} \ddot{\Delta} \left(\int_0^L \cos(k_p z) \tilde{\psi}(z) dz \right) \cos(k_p z) \quad (4.31)$$

4.2.2 Ανάλυση “επαγωγικής” κίνησης

Λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους δύο πρώτους όρους της σειράς (4.22), και λόγω του ότι οι εξισώσεις (4.23) και (4.24) απλοποιούνται στις εκφράσεις

$$q_2^C = -\frac{3\pi}{16R} q_1^C \quad (4.32)$$

$$q_{2,p}^C = -\frac{3\pi}{8} \frac{I_1'(k_p R)}{I_2'(k_p R)} q_{1,p}^C \quad (4.33)$$

αντίστοιχα, το δυναμικό της “κυκλοφορούσας” κίνησης της εξίσωσης (4.22) και η αντίστοιχη πίεση, εκφρασμένες συναρτήσει των μεταβλητών q_1^C και $q_{1,p}^C$ γίνονται

$$\begin{aligned} \varphi_C(r, \theta, z, t) = & \dot{q}_1^C(t) \left[r \sin\theta - \frac{3\pi}{16R} r^2 \sin 2\theta \right] + \\ & + \sum_{p=2,4}^{\infty} \dot{q}_{1,p}^C(t) \left[I_1(k_p r) \sin\theta - \frac{3\pi}{8} \frac{I_1'(k_p R)}{I_2'(k_p R)} I_2(k_p r) \sin 2\theta \right] \cos(k_p z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

και

$$\begin{aligned} P_C = -\rho \{ & \ddot{q}_1^C(t) \left[R \sin\theta - \frac{3\pi R}{16} \sin 2\theta \right] + \\ & + \sum_{p=2,4}^{\infty} \ddot{q}_{1,p}^C(t) \left[I_1(k_p R) \sin\theta - \frac{3\pi}{8} \frac{I_1'(k_p R)}{I_2'(k_p R)} I_2(k_p R) \sin 2\theta \right] \cos(k_p z) \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, η συνολική δύναμη ανά μονάδα μήκους γίνεται

$$f_C = -\frac{m_L}{2} \ddot{q}_1^C(t) - m_L \sum_{p=2,4}^{\infty} \ddot{q}_{1,p}^C(t) \left[\frac{I_1(k_p R)}{R} - \frac{I_2(k_p R)}{R} \frac{I_1'(k_p R)}{I_2'(k_p R)} \right] \cos(k_p z) \quad (4.36)$$

όπου οι γενικευμένες συντεταγμένες $q_1^C(t)$ και $q_{1,p}^C(t)$ υπολογίζονται μέσω των ακόλουθων συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\ddot{q}_1^C(t) + \omega_{S0}^2 q_1^C(t) = \omega_{S0}^2 [X(t) + \psi_m \Delta(t)] \quad (4.37)$$

$$\ddot{q}_{1,p}^C(t) + \omega_{Sp}^2 q_{1,p}^C(t) = \gamma_p \Delta(t) \quad p = 2, 4, 6, \dots \quad (4.38)$$

όπου

$$\omega_{S0}^2 = \frac{3\pi g}{8R} \quad (4.39)$$

$$\omega_{Sp}^2 = \frac{3\pi g k_p}{16} \frac{I_1'(k_p R)}{I_2'(k_p R)} \quad (4.40)$$

$$\gamma_p = \omega_{S_0}^2 \frac{a_p R}{I_2'(k_p R)} \quad (4.41)$$

4.2.3 Αλληλεπίδραση δοχείου-ρευστού και τελικές εξισώσεις

Η εξίσωση της δυναμικής ισορροπίας του συστήματος (Παράρτημα 4.3), θεωρώντας την μάζα του δοχείου αμελητέα και έχοντας κάνει την κατάλληλη ολοκλήρωση για όλο το μήκος του δοχείου, διατυπώνεται ως εξής:

$$\left(M_T' - \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{Sp} \right) \ddot{\Delta} + K_b \Delta + (M_T - M_{S_0}) \ddot{X} + M_{S_0} \ddot{q}_{1,0}^C + \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{Sp} \frac{\omega_{Sp}^2}{\gamma_p} \ddot{q}_{1,p}^C = 0 \quad (4.42)$$

όπου

$$M_T = \int_0^L m_L \psi(z) dz = m_L \psi_m L \quad (4.43)$$

$$M_{S_0} = \int_0^L \frac{m_L}{2} \psi(z) dz = \frac{m_L}{2} \psi_m L \quad (4.44)$$

$$M_{Sp} = \left(\frac{L}{R} \right) m_L \frac{\gamma_p}{\omega_{Sp}^2} B_p a_p \quad (4.45)$$

$$M_T' = \left\{ M_{S_0} \psi_m + \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{Sp} + 2 \left(\frac{L}{R} \right) m_L \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{I_2(k_p R)}{k_p I_2'(k_p R)} a_p^2 \right\} \quad (4.46)$$

$$a_p = \frac{1}{L} \int_0^L \cos(k_p z) \tilde{\psi}(z) dz \quad (4.47)$$

$$B_p = I_1(k_p R) - \frac{I_1'(k_p R)}{I_2'(k_p R)} I_2(k_p R) \quad (4.48)$$

Η εξίσωση (4.37) διαχωρίζεται σε δύο μέρη, έτσι ώστε $q_1^C = q_{1A}^C + q_{1B}^C$ και

$$\ddot{q}_{1A}^C(t) + \omega_{S_0}^2 q_{1A}^C(t) = \omega_{S_0}^2 X(t) \quad (4.49)$$

$$\ddot{q}_{1B}^C(t) + \omega_{S_0}^2 q_{1B}^C(t) = \omega_{S_0}^2 \psi_m \Delta(t) \quad (4.50)$$

Έπεται στη συνέχεια η ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών

$$q_{1A}^C = q_g + X \quad (4.51)$$

$$q_{1B}^C = \psi_m (Q_0 + \Delta) \quad (4.52)$$

$$q_{1,p}^C = \frac{\gamma_p}{\omega_{Sp}^2} (Q_p + \Delta) \quad (4.53)$$

ώστε το σύστημα των εξισώσεων (4.38), (4.49), (4.50) και (4.42) μπορεί να γίνει

$$\ddot{q}_g(t) + \omega_{s_0}^2 q_g(t) = -\ddot{X}(t) \quad (4.54)$$

$$\ddot{Q}_0(t) + \omega_{s_0}^2 Q_0(t) = -\ddot{\Delta}(t) \quad (4.55)$$

⋮

$$\ddot{Q}_p(t) + \omega_{s_p}^2 Q_p(t) = -\ddot{\Delta}(t) \quad (4.56)$$

και

$$(M'_T + M_{s_0}\Psi_m) \ddot{\Delta} + K_b \Delta + M_T \ddot{X} + M_{s_0} \ddot{q}_g + M_{s_0}\Psi_m \ddot{Q}_0 + \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{s_p} \ddot{Q}_p = 0 \quad (4.57)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως οι εξισώσεις (4.54)-(4.56) είναι εξισώσεις κίνησης απλού ταλαντωτή. Τέλος, κανονικοποιώντας την εξίσωση (4.57) με τον όρο M_b , όπου

$$M_b = \int_0^L m_L \psi^2(z) dz \quad (4.58)$$

το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή πίνακα

$$[\mathcal{M}]\ddot{Q} + [\mathcal{K}]Q = -\{\mathcal{T}\}\ddot{X} \quad (4.59)$$

όπου

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots \dots \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \dots \dots \dots 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots 1 & 1 \\ \frac{M_{s_0}}{M_b} & \frac{M_{s_0}\Psi_m}{M_b} & \left(\frac{M_{s_2}}{M_b}\right) \dots \dots \dots \left(\frac{M_{s_p}}{M_b}\right) & \left(\frac{(M'_T + M_{s_0}\Psi_m)}{M_b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$[\mathcal{K}] = \begin{bmatrix} \omega_{s_0}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{s_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{s_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \omega_{s_p}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_b^2 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\{\mathcal{F}\} = \left[1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{M_T}{M_b} \right]^T \quad (4.62)$$

$$\mathcal{Q} = [q_g \quad Q_0 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_p \quad \Delta]^T \quad (4.63)$$

4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Θεωρώντας μία ημιτονοειδή συνάρτηση $\psi(z)$ για την παραμόρφωση του δοχείου, προκύπτει ένα ενδιαφέρον μαθηματικό αποτέλεσμα για την συγκεκριμένη περίπτωση του μακρύ κυλίνδρου. Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας την συνάρτηση $\psi(z)$ ως

$$\psi(z) = \sin(\pi z/L) \quad (4.64)$$

προκύπτει $\psi_m = 2/\pi$, $M_b = m_L L/2$, $a_p = 2/[\pi(1-p^2)]$

$$\frac{M_{S0}}{M_b} = \frac{2}{\pi} \quad (4.65)$$

$$\frac{M_{Sp}}{M_b} = \frac{16}{\pi^2(1-p^2)} \cdot \frac{1}{k_p R} \left[\frac{I_1(k_p R)}{I_1'(k_p R)} - \frac{I_2(k_p R)}{I_2'(k_p R)} \right], \quad p = 2, 4, 6, \dots \quad (4.66)$$

και επομένως η εξίσωση της δυναμικής ισορροπίας του συστήματος γίνεται

$$\omega_b^2 \Delta + \left(\frac{4}{\pi}\right) \ddot{X} + \left(\frac{2}{\pi}\right) \ddot{q}_g + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \ddot{Q}_0 + \left(\frac{8}{\pi^2} + \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-p^2)^2} \frac{1}{x} \frac{I_2(x)}{I_2'(x)} + \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-p^2)^2} \frac{1}{x} \left[\frac{I_1(x)}{I_1'(x)} - \frac{I_2(x)}{I_2'(x)} \right] \right) \ddot{\Delta} + \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-p^2)^2} \frac{1}{x} \left[\frac{I_1(x)}{I_1'(x)} - \frac{I_2(x)}{I_2'(x)} \right] \ddot{Q}_p = 0 \quad (4.67)$$

όπου $x = k_p R$.

4.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΠΙΜΗΚΕΣ (ΜΑΚΡΥ) ΔΟΧΕΙΟ

Θεωρούμε τώρα πως $L/R \rightarrow \infty$, ή ισοδύναμα $x \rightarrow 0$. Τα παρακάτω όρια ισούνται με

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{I_1(x)}{I_1'(x)} - \frac{I_2(x)}{I_2'(x)} \right] = \frac{1}{2} \quad (4.68)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{I_1(x)}{I_1'(x)} = 1 \quad (4.69)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{I_2(x)}{I_2'(x)} = \frac{1}{2} \quad (4.70)$$

$$\lim_{L/R \rightarrow \infty} \omega_{Sp}^2 = \omega_{S0}^2 \quad (4.71)$$

Λόγω της εξίσωσης (4.71), οι εξισώσεις (4.55) και (4.56) γίνονται όμοιες, και συνεπάγεται ότι $Q_p \equiv Q_0$ για $p = 2, 4, 6, \dots$. Έτσι, η εξίσωση (4.66) γίνεται

$$\omega_b^2 \Delta + \left(\frac{2}{\pi} \right) \ddot{q}_g + \left(\frac{4}{\pi^2} + \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(1-p^2)^2} \right) \ddot{Q}_0 + \left(\frac{8}{\pi^2} + \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-p^2)^2} \right) \ddot{\Delta} + \left(\frac{4}{\pi} \right) \ddot{X} = 0 \quad (4.72)$$

Τέλος, αποδεικνύεται πως

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(1-p^2)^2} = 1 \quad (4.73)$$

και, επομένως, το σύστημα των εξισώσεων (4.59) μπορεί να γραφτεί ως ακολούθως

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ (2/\pi) & (1/2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_g \\ \ddot{Q}_0 \\ \ddot{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{S0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{S0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g \\ Q_0 \\ \Delta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4/\pi \end{bmatrix} \ddot{X} \quad (4.74)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

4.1 Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την τροποποιημένη διαφορική εξίσωση του Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geq 0$$

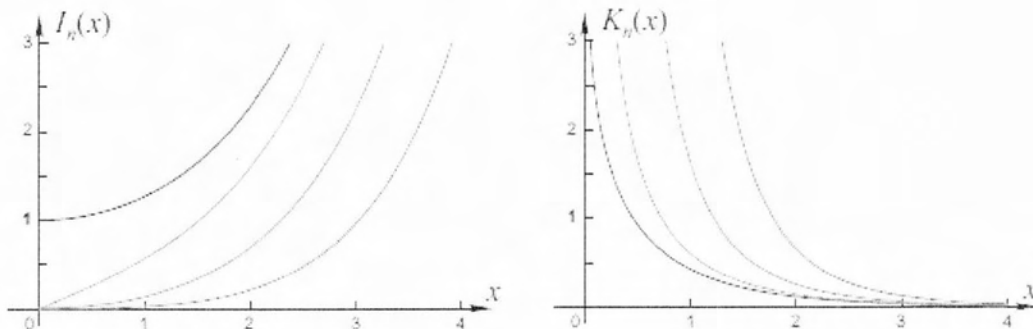
καλούνται τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel τάξης n . Η γενική λύση της τροποποιημένης διαφορικής εξίσωσης του Bessel είναι

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_{-n}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x), \quad \text{για κάθε } n$$

$$y = c_1 I_n(x) + c_2 I_n(x) \int \frac{dx}{x I_n^2(x)}, \quad \text{για κάθε } n$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και $I_n(x)$ και $K_n(x)$ οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.



Σχ. 16-2: $I_n(x)$, $K_n(x)$, $n = 0$ —, $n = 1$ —, $n = 2$ —, $n = 3$ —

4.2 Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i} J_n(ix)$$

$$= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

και

$$\begin{aligned}
I_{-n}(x) &= i^n J_{-n}(ix) = e^{n\pi i/2} J_{-n}(ix) \\
&= \frac{x^{-n}}{2^{-n} \Gamma(1-n)} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2-2n)(4-2n)} + \dots \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)}
\end{aligned}$$

Για $n \neq 0, 1, 2, \dots$ οι $I_n(x)$ και $I_{-n}(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για $n=0, 1, 3, \dots$ είναι $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

4.3 Εξίσωση δυναμικής ισορροπίας

Κάθε χρονική στιγμή το στοιχείο υπό εξέταση ισορροπεί υπό την επενέργεια των εντατικών μεγεθών, των αδρανειακών δυνάμεων λόγω της μεταβολής του βέλους κάμψης με τον χρόνο και των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε αυτό. Επομένως, η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας προκύπτει από το άθροισμα των τριών αυτών δυνάμεων η οποία καταλήγει στην μορφή

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \ddot{X} \right) = f_T(z, t)$$

όπου EI η ακαμψία του κυλίνδρου που μελετάται με παραμόρφωση δοκού. Χρησιμοποιώντας μία τυχαία αποδεκτή συνάρτηση $w(z)$ και θεωρώντας ότι ο κύλινδρος είναι απλά εδραζόμενος στα δύο άκρα του ($z=0$ και $z=L$), προκύπτει η ασθενής μορφή της παραπάνω εξίσωσης ισορροπίας

$$\int_0^L EI y''(z, t) w''(z) dz + m \int_0^L [y(z, t) + \ddot{X}] w(z) dz = \int_0^L f_T w(z) dz$$

όπου $EI \square E\pi(R+h/2)^3 h$ και $w(z) = A_w \psi(z)$ σύμφωνα με την διαδικασία επίλυσης της μεθόδου Galerkin. A_w είναι ένας αυθαίρετος αριθμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΕ MATLAB ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Το MATLAB[®] (MATrix LABoratory) είναι μία γλώσσα προγραμματισμού υψηλών αποδόσεων για υπολογιστικές τεχνικές. Η συγγραφή του ξεκίνησε με σκοπό το πρόγραμμα αυτό να αποτελέσει ένα εργαλείο για εύκολη πρόσβαση σε προϋπάρχοντα προγράμματα λογισμικού για επεξεργασία πινάκων (LINPACK και EISPACK projects) αλλά σήμερα το MATLAB εξελίσσεται με προσθήκες από έργα (LAPACK και ARPACK projects) και πανεπιστήμια από όλο τον κόσμο, αποτελώντας το σημαντικότερο εργαλείο λογισμικού για υπολογιστική πινάκων.

Το υπολογιστικό πακέτο του MATLAB ενσωματώνει υπολογισμούς, οπτικοποίηση και προγραμματιστικές δυνατότητες σε ένα εύχρηστο περιβάλλον όπου προβλήματα και λύσεις εκφράζονται με μαθηματική σημειογραφία. Χρησιμοποιείται ευρέως στα πανεπιστήμια για ερευνητικούς σκοπούς, στην επιστήμη των μηχανικών και στις επικοινωνίες. Το MATLAB είναι ένα διαδραστικό (interactive) σύστημα που στηρίζεται σε πίνακες και δεν απαιτεί δήλωση των διαστάσεων των πινάκων πριν χρησιμοποιηθούν. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την επίλυση πολλών τεχνικών υπολογιστικών προβλημάτων, ιδιαίτερα εκείνων με υπολογισμούς πινάκων και διανυσμάτων, σε χρόνο υποπολλαπλάσιο εκείνου που θα απαιτούνταν από μια βαθμωτή μη-διαδικαστική (scalar non-interactive) γλώσσα προγραμματισμού όπως η C ή η Fortran.

Το υπολογιστικό πακέτο MATLAB στηρίζεται σε εργαλειοθήκες (toolboxes) που αναπτύσσονται για συγκεκριμένες εφαρμογές. Οι εργαλειοθήκες είναι συλλογές από συναρτήσεις του MATLAB σχετικές με ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, όπως για παράδειγμα στατιστική, επεξεργασία σήματος, συστήματα ελέγχου και πολλά άλλα. Στο δυναμικό του MATLAB συμπεριλαμβάνονται μοντέρνοι αλγόριθμοι, δυνατότητες χειρισμού τεράστιων ποσοτήτων δεδομένων και ισχυρά προγραμματιστικά εργαλεία. Το MATLAB έρχεται ως πακέτο του βασικού προγράμματος ενώ οι διάφορες εργαλειοθήκες πωλούνται ξεχωριστά. Η τρέχουσα έκδοση (Μάρτιος 2014) είναι το R2014a.

5.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΣΤΟ MATLAB

Στην ενότητα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης τονίζεται ότι η επίλυση του ιδιομορφικού προβλήματος για την περίπτωση οριζόντιων κυλινδρικών δοχείων είναι πολύ δύσκολη και δεν έχει επιτευχθεί ακόμη με αναλυτικό τρόπο. Παρ' όλα αυτά για την περίπτωση του άκαμπτου ημιπλήρους οριζόντιου κυλινδρικού αγωγού οι Evans και Linton παρουσίασαν ημι-αναλυτικές λύσεις σε μορφή σειράς. Επιπρόσθετα, στην περίπτωση του παραμορφώσιμου ημιπλήρους επιμήκους αγωγού υπάρχουν αναφορές της αναλυτικής λύσης του προβλήματος των ιδιοτιμών στο S. Papaspyrou et al [4], όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3.5.

Στην παρούσα εργασία το πρόβλημα των ιδιοτιμών λύνεται με την χρήση του προγράμματος Matlab. Οι ιδιοσυχνότητες του κυματισμού για την περίπτωση του οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου με πληρότητα 50% υπολογίζονται λύνοντας το κλασσικό ιδιοπρόβλημα:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\mathbf{q} = 0 \quad (5.1)$$

Το Matlab απαιτεί ως δεδομένα εισόδου τα μητρώα $[\mathbf{K}]$ και $[\mathbf{M}]$. Το περιβάλλον εργασίας MATLAB υπολογίζει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων με τη συνάρτηση eig. Η συγκεκριμένη συνάρτηση όχι μόνο αναγνωρίζει τον τύπο των στοιχείων του πίνακα εισόδου (πραγματικά ή μιγαδικά) αλλά και ιδιότητές τους, όπως για παράδειγμα η συμμετρία. Και στην περίπτωση του άκαμπτου αλλά και του παραμορφώσιμου δοχείου προκύπτουν οι γενικευμένες ιδιοτιμές των γενικευμένων μητρώων $[\mathbf{K}]$ και $[\mathbf{M}]$.

5.3 ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Ο υπολογισμός της απόκρισης οριζόντιου ημιπλήρους κυλινδρικού δοχείου σε εξωτερική διέγερση ανάγεται στην επίλυση στο χρόνο ενός προβλήματος αρχικών τιμών. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε και πάλι το υπολογιστικό περιβάλλον του Matlab. Ο υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων q της εξίσωσης (3.25) καθώς και ο υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων των συνιστωσών του διανύσματος της εξίσωσης (4.59) $\mathbf{Q} = [q_g \quad Q_0 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_p \quad \Delta]^T$ υπολογίζονται μέσα από πηγαίο κώδικα. Στον κώδικα γίνεται χρήση της αριθμητικής μεθόδου Newmark. Η χρήση μίας αριθμητικής μεθόδου στα δύο προβλήματα μας είναι

απαραίτητη διότι η αναλυτική επίλυση της εξίσωσης κίνησης ενός μονοβάθμιου ή πολυβάθμιου συστήματος δεν είναι συνήθως εφικτή αν η διέγερση –επιβαλλόμενη δύναμη $p(t)$ ή εδαφική επιτάχυνση $\ddot{u}_g(t)$ μεταβάλλεται αυθαίρετα με το χρόνο, όπως συμβαίνει στην δική μας περίπτωση. Αυτά τα προβλήματα μπορούν να αντιμετωπισθούν με αριθμητικές βηματικές μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων (time stepping methods, μέθοδοι χρονικών βημάτων). Πριν αναπτύξουμε λεπτομερώς την μέθοδο Newmark, την οποία χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση των προβλημάτων της συγκεκριμένης εργασίας, θα παρουσιάσουμε ορισμένα θεωρητικά στοιχεία των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης.

5.3.1 Μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης

Μία κατηγορία μεθόδων επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση ενός μονοβάθμιου ή πολυβάθμιου συστήματος υποβαλλόμενου σε δυναμικές φορτίσεις είναι οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration methods). Οι μέθοδοι αυτές είναι γενικές, καθώς μπορούν να εφαρμοστούν τόσο για δυναμικές αναλύσεις γραμμικών συστημάτων με τυπική ή μη απόσβεση, όσο για μη γραμμικές αναλύσεις. Σύμφωνα με τις μεθόδους αυτές, η μητρωϊκή διαφορική εξίσωση κίνησης είναι:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P(t) \quad (5.2)$$

όπου M , C , K , $P(t)$ συμβολίζουν το μητρώο μάζας, απόσβεσης, δυσκαμψίας και εξωτερικών φορτίσεων, αντίστοιχα.

Η εξίσωση (5.2) ολοκληρώνεται με τη χρήση κάποιας αριθμητικής βήμα προς βήμα διαδικασίας, όπου οι διαφορικές εξισώσεις μπορούν να είναι σε οποιαδήποτε μορφή διαζευγμένες ή όχι. Ο όρος ‘‘άμεση’’ υποδηλώνει ότι πριν την αριθμητική ολοκλήρωση δεν απαιτείται μετασχηματισμός των αρχικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης σε κάποια άλλη μορφή. Στην πράξη, υπάρχουν περιπτώσεις που κάποιος μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα, αυτό όμως γίνεται όχι εξαιτίας της αδυναμίας των μεθόδων να αντιμετωπίσουν αυτούσιο το αρχικό πρόβλημα, αλλά για τη διευκόλυνση των υπολογισμών και τη μείωση του κόστους.

Οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης βασίζονται γενικά σε δύο θεωρήσεις. Κατ’ αρχάς, οι μέθοδοι αυτές δεν αναζητούν μία λύση η οποία να ικανοποιεί την εξίσωση (5.2) για κάθε χρονική στιγμή t . Αντίθετα, γίνεται προσπάθεια να ικανοποιηθεί η εν

λόγω εξίσωση μονάχα για κάποιες διακριτές τιμές του χρόνου, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους κάποιο χρονικό διάστημα Δt , το οποίο τις περισσότερες φορές λαμβάνεται σταθερό για διευκόλυνση των υπολογισμών. Επομένως, η στατική ισορροπία, η οποία εμπεριέχει και τις επιδράσεις των αδρανειακών δυνάμεων και των δυνάμεων απόσβεσης, εξετάζεται μόνο για κάποιες διακριτές τιμές του χρόνου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όλες οι τεχνικές επίλυσης που εφαρμόζονται με στατική ανάλυση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις επιλύσεις που απαιτεί κάθε βήμα της διαδικασίας άμεσης ολοκλήρωσης.

Η δεύτερη βασική θεώρηση στην οποία βασίζονται οι μέθοδοι της άμεσης ολοκλήρωσης είναι ότι για κάθε ένα από τα χρονικά υποδιαστήματα Δt προϋποτίθεται μία μεταβολή μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων. Η υπόθεση που γίνεται για τις μεταβολές αυτές, είναι εκείνο που καθορίζει τελικά την ακρίβεια, την ευστάθεια αλλά και το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας επίλυσης. Επομένως, η απόκριση του συστήματος κατά τη διάρκεια των υποδιαστημάτων υπολογίζεται προσεγγιστικά, βάσει ενός υποθετικού μηχανισμού αποκρίσεως, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ισορροπία του συστήματος κατά τα διαστήματα αυτά.

Σκοπός των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης είναι η αριθμητική επίλυση της μητρωϊκής διαφορικής εξίσωσης κίνησης (5.2). Το συνολικό χρονικό διάστημα $t_{ολ}$ για το οποίο ζητείται η απόκριση του συστήματος, χωρίζεται σε n υποδιαστήματα σταθερής διάρκειας $\Delta t = t_{ολ}/n$. Η διέγερση καθορίζεται για κάθε μία από τις εξεταζόμενες διακριτές τιμές του χρόνου $t_i = i \cdot \Delta t$, μέσω των τιμών της $p_i = p(t_i)$. Η απόκριση του συστήματος $u_i = u(t_i)$, $\dot{u}_i = \dot{u}(t_i)$, $\ddot{u}_i = \ddot{u}(t_i)$ υπολογίζεται για κάθε διακριτή τιμή του χρόνου. Έστω ότι είναι γνωστή η απόκριση $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ του συστήματος για την χρονική στιγμή t_i . Η απόκριση αυτή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας (5.2), επομένως:

$$M\ddot{u}_i + C\dot{u}_i + Ku_i = P_i \quad (5.3)$$

Οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης παρέχουν την απόκριση του συστήματος για την χρονική στιγμή t_{i+1} , η οποία επίσης ικανοποιεί την συνθήκη ισορροπίας (5.2):

$$M\ddot{u}_{i+1} + C\dot{u}_{i+1} + Ku_{i+1} = P_{i+1} \quad (5.4)$$

Αν εφαρμοστεί σωστά, για $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ η βήμα προς βήμα διαδικασία δίνει την απόκριση του συστήματος για κάθε εξεταζόμενη διακριτή χρονική στιγμή, οπότε με τον τρόπο αυτό μορφώνεται ο γενικός αλγόριθμος επίλυσης. Οι γνωστές αρχικές

συνθήκες για $i=0$, παρέχουν τις απαραίτητες πληροφορίες για την έναρξη της διαδικασίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι αρκούν δύο μόνο από τα διανύσματα $u_0, \dot{u}_0, \ddot{u}_0$, για τον πλήρη προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών, καθώς το τρίτο από αυτά μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα από την εξίσωση ισορροπίας (5.3), για τη χρονική στιγμή μηδέν ($i=0$).

Η αριθμητική διαδικασία απαιτεί τρεις μητρωϊκές εξισώσεις προκειμένου να προσδιοριστούν τα άγνωστα διανύσματα $u_{i+1}, \dot{u}_{i+1}, \ddot{u}_{i+1}$. Οι δύο από τις εξισώσεις αυτές προκύπτουν είτε από εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για την ταχύτητα και την επιτάχυνση, είτε από άλλη υπόθεση που έχει γίνει σχετικά με τη μεταβολή της απόκρισης, μεταξύ των διακριτών τιμών του χρόνου. Η τρίτη απαιτούμενη εξίσωση είναι η εξίσωση ισορροπίας (5.2) εφαρμοζόμενη για μία επιλεγμένη τιμή του χρόνου. Αν επιλεγεί η τρέχουσα χρονική στιγμή t_i (5.3), τότε η χρησιμοποιούμενη μέθοδος καλείται explicit method, ενώ αν επιλεγεί η χρονική στιγμή t_{i+1} του τέλους κάθε βήματος (5.4), τότε η μέθοδος καλείται implicit method.

Για να είναι μία από τις παραπάνω αριθμητικές διαδικασίες αξιόπιστη και αποτελεσματική, πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια:

- Να οδηγεί σε σύγκλιση προς την ακριβή λύση του προβλήματος, καθώς το βήμα Δt μειώνεται.
- Να ανταποκρίνεται με σταθερότητα στην ενδεχόμενη ύπαρξη μικροσφαλμάτων στρογγυλοποίησης.
- Να είναι ακριβής, δηλαδή τα υπολογιστικά σφάλματα να είναι αμελητέα και η προκύπτουσα λύση να είναι κοντά στην ακριβή λύση του προβλήματος.

5.3.2 Μέθοδος Newmark

A. Βασική διαδικασία

Ο N. M. Newmark (1959) [25] ανέπτυξε μία οικογένεια μεθόδων χρονικών βημάτων που βασίζονται στις ακόλουθες εξισώσεις

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \quad (5.5)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \quad (5.6)$$

Οι παράμετροι β και γ ορίζουν τον τρόπο που μεταβάλλεται η επιτάχυνση σε ένα χρονικό υποδιάστημα Δt και καθορίζουν τη σταθερότητα και την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων αυτών είναι

$\gamma = \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$, οι οποίες δίνουν γενικά καλά αποτελέσματα, τόσο από άποψη ακρίβειας, όσο και από άποψη ευστάθειας της μεθόδου. Όσον αφορά τα μονοβάθμια συστήματα, οι δύο αυτές εξισώσεις, σε συνδυασμό με την βασική εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \quad (5.7)$$

στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, παρέχουν την βάση για τον υπολογισμό των u_{i+1}, \dot{u}_{i+1} και \ddot{u}_{i+1} τη χρονική στιγμή $i+1$ από τα γνωστά u_i, \dot{u}_i και \ddot{u}_i τη χρονική στιγμή i . Για την εφαρμογή αυτών των υπολογισμών απαιτούνται επαναλήψεις διότι ο άγνωστος \ddot{u}_{i+1} εμφανίζεται στο δεξί μέλος της εξίσωσης (5.5). Για γραμμικά συστήματα είναι, ωστόσο, δυνατή η τροποποίηση των αρχικών διατυπώσεων του Newmark, που επιτρέπει την επίλυση των εξισώσεων (5.5) και (5.6) χωρίς επαναλήψεις. Πριν από την περιγραφή αυτής της τροποποίησης, θα παρουσιάσουμε την ειδική περίπτωση της μεθόδου Newmark που χρησιμοποιήσαμε στην εργασία μας για την επίλυση των υπό εξέταση εξισώσεων, η οποία είναι η μέθοδος της μέσης επιτάχυνσης.

B. Ειδική περίπτωση μεθόδου μέσης επιτάχυνσης

Για την περίπτωση της μεθόδου μέσης επιτάχυνσης οι παρακάτω σχέσεις συνοψίζουν την ανάπτυξη της σχέσης μεταξύ των μεγεθών απόκρισης u_{i+1}, \dot{u}_{i+1} και \ddot{u}_{i+1} την χρονική στιγμή $i+1$ και των αντίστοιχων μεγεθών τη χρονική στιγμή i . Η εξίσωση (5.8) περιγράφει την υπόθεση ότι η μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα είναι σταθερή και ίση με τη μέση επιτάχυνση. Η ολοκλήρωση του $\ddot{u}(\tau)$ δίνει την εξίσωση (5.9) για την μεταβολή $\dot{u}(\tau)$ της ταχύτητας στο χρονικό βήμα, στην οποία η αντικατάσταση $\tau = \Delta t$ δίνει την εξίσωση (5.10) για την ταχύτητα \dot{u}_{i+1} τη χρονική στιγμή $i+1$. Η ολοκλήρωση του $\dot{u}(\tau)$ δίνει την εξίσωση (5.11) για τη μεταβολή $u(\tau)$ της μετατόπισης στο χρονικό βήμα, στην οποία η αντικατάσταση $\tau = \Delta t$ δίνει την εξίσωση (5.12) για τη μετατόπιση u_{i+1} τη χρονική στιγμή $i+1$. Η σύγκριση των εξισώσεων (5.10) και (5.12) με τις εξισώσεις (5.5) και (5.6) αντίστοιχα αποδεικνύει ότι οι εξισώσεις του Newmark με $\gamma = 1/2$ και $\beta = 1/4$ είναι ίδιες με αυτές που προέκυψαν με την υπόθεση της σταθερής μέσης επιτάχυνσης.

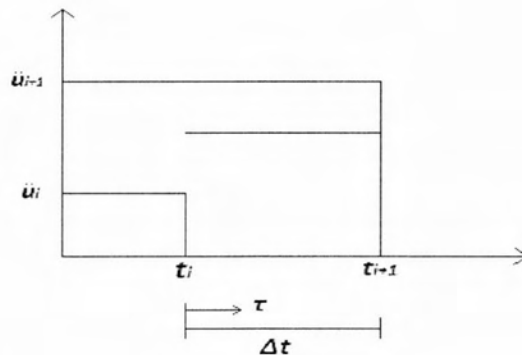
$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.8)$$

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.9)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.10)$$

$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.11)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (5.12)$$



Γ. Μη επαναληπτική διατύπωση

Προκειμένου να αποφύγουμε την επαναληπτική διαδικασία που απαιτούν οι εξισώσεις (5.2) και (5.3) τις επαναδιατυπώνουμε χρησιμοποιώντας αυξητικές ποσότητες

$$\Delta u_i \equiv u_{i+1} - u_i \quad \Delta \dot{u}_i \equiv \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \quad \Delta \ddot{u}_i \equiv \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \quad (5.13)$$

$$\Delta p_i \equiv p_{i+1} - p_i \quad (5.14)$$

Στην πραγματικότητα, στα γραμμικά συστήματα αυτή η αναδιατύπωση δεν είναι απαραίτητη αλλά γίνεται για λόγους γενίκευσης ώστε να χρησιμοποιείται και για μη γραμμικά συστήματα. Οι εξισώσεις (5.5) και (5.6) μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\Delta \dot{u}_i = (\Delta t) \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \Delta \ddot{u}_i \quad \Delta u_i = (\Delta t) \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i + \beta (\Delta t)^2 \Delta \ddot{u}_i \quad (5.15)$$

Η δεύτερη από αυτές τις εξισώσεις λύνεται:

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{(\beta \Delta t)} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (5.16)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.16) στην εξίσωση (5.15.α) έχουμε:

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u}_i \quad (5.17)$$

Η αυξητική εξίσωση της κίνησης για μονοβάθμιο σύστημα είναι:

$$m \Delta \ddot{u}_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta u_i = \Delta p_i \quad (5.18)$$

η οποία προκύπτει αφαιρώντας την εξίσωση κίνησης για t_{i+1} από την εξίσωση κίνησης για t_i , δύο εξισώσεις που αφορούν γραμμικά συστήματα με $(fs)_i = ku_i$ και $(fs)_{i+1} = ku_{i+1}$. Η αντικατάσταση αυτή δίνει:

$$\hat{k} \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i \quad (5.19)$$

όπου

$$k = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \quad (5.20)$$

και

$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c\right) \dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) c\right] \ddot{u}_i \quad (5.21)$$

Με τα \hat{k} και $\Delta \hat{p}_i$ γνωστά από τις ιδιότητες του συστήματος m, k και c , τις παραμέτρους του αλγορίθμου γ και β , και τα \dot{u}_i και \ddot{u}_i στην αρχή του χρονικού βήματος, η αυξητική μετατόπιση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}} \quad (5.22)$$

Αφού το Δu_i καταστεί γνωστό, τα $\Delta \dot{u}_i$ και $\Delta \ddot{u}_i$ μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (5.17) και (5.16), αντιστοίχως, και τα u_{i+1}, \dot{u}_{i+1} και \ddot{u}_{i+1} από την εξίσωση (5.13).

Η επιτάχυνση μπορεί επίσης να υπολογισθεί από την εξίσωση της κίνησης τη χρονική στιγμή $i+1$:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c \dot{u}_{i+1} - k u_{i+1}}{m} \quad (5.23)$$

αντί από τις εξισώσεις (5.16) και (5.13). Η εξίσωση (5.23) χρειάζεται για τον υπολογισμό του \ddot{u}_0 για να αρχίσουν οι υπολογισμοί.

Στη μέθοδο Newmark η λύση τη χρονική στιγμή $i+1$ προσδιορίζεται από την εξίσωση (5.18), η οποία ισοδυναμεί με τη χρήση της συνθήκης ισορροπίας, εξίσωση (5.7), τη χρονική στιγμή $i+1$.

5.4 ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΜΕΣΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Στην προηγούμενη ενότητα αναπτύξαμε την μέθοδο χρονικών βημάτων Newmark και συγκεκριμένα την ειδική περίπτωση της μέσης επιτάχυνσης. Ο Newmark ανέπτυξε και μία άλλη ειδική περίπτωση, αυτή της γραμμικής επιτάχυνσης, στην οποία οι τιμές β και γ παίρνουν τις τιμές $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Σε αυτή την μέθοδο η επιτάχυνση θεωρείται ότι μεταβάλλεται γραμμικά σε ένα χρονικό βήμα. Και οι δύο περιπτώσεις της μεθόδου Newmark είναι implicit methods διότι η ισορροπία εξετάζεται τη χρονική στιγμή t_{i+1} .

Πλην αυτών των μεθόδων, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης. Η πιο θεμελιώδης και απλή μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος κεντρικής διαφοράς η οποία βασίζεται σε μία προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών των παραγώγων ως προς το χρόνο της μετατόπισης (δηλαδή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης). Η μέθοδος αυτή είναι explicit. Επίσης, μία άλλη μέθοδος είναι η μέθοδος Houbolt, η οποία είναι συγγενής με την μέθοδο των κεντρικών διαφορών, με την έννοια ότι και αυτή βασίζεται σε εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών προκειμένου να εκφράσει την ταχύτητα και την επιτάχυνση με όρους της μετατόπισης. Η συγκεκριμένη μέθοδος διαφοροποιείται με τη μέθοδο κεντρικών διαφορών σε δύο σημεία. Πρώτα από όλα, ότι πρόκειται για μία implicit μέθοδο αφού λαμβάνει την εξίσωση ισορροπίας τη χρονική στιγμή t_{i+1} και κατά δεύτερο λόγο στο ότι σε αντίθεση με τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών, παρουσιάζει άνευ όρων ευστάθεια, είναι επομένως μία άνευ όρων ευσταθής μέθοδος.

Τέλος, υπάρχει η μέθοδος Wilson θ , η οποία αποτελεί μία επέκταση της μεθόδου της γραμμικής επιτάχυνσης. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά για ένα εκτεταμένο χρονικό διάστημα από t έως $t+\theta\Delta t$, όπου $\theta \geq 1.0$. Η ακρίβεια και η ευστάθεια της μεθόδου, εξαρτώνται από την επιλογή της παραμέτρου θ . Για $\theta=1.0$, η μέθοδος ανάγεται στη μέθοδο της γραμμικής επιτάχυνσης την οποία προαναφέραμε. Η μέθοδος Wilson θ είναι μια implicit μέθοδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΑ ΚΑΙ ΜΗ ΔΟΧΕΙΑ

6.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

6.1.1 Πολυβάθμιο σύστημα για δοχείο με μη παραμορφώσιμα τοιχώματα

Το πρόβλημα των ιδιοτιμών για πολυβάθμιο σύστημα προκύπτει από την εξίσωση (3.21) αν τεθεί $\ddot{X}=\{0\}$. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης για σύστημα το οποίο εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση, η οποία για συστήματα χωρίς απόσβεση, γίνεται:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{0\} \quad (6.1)$$

Η εξίσωση (6.1) παριστά N ομογενείς διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι συζευγμένες μεταξύ τους μέσω του μητρώου μάζας καθώς, όπως προαναφέραμε, είναι μη συμμετρικό. Το πρόβλημα συνίσταται στον καθορισμό των συνθηκών υπό τις οποίες η εξίσωση (6.1) επιτρέπει την ύπαρξη κινήσεως. Το πρόβλημα ιδιοτιμών μεταπίπτει στην εύρεση των ριζών της εξίσωσης

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\mathbf{q} = 0 \quad (6.2)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τετριμμένη λύση την $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ για την οποία δεν έχουμε κίνηση, ενώ για να υπάρχει μη τετριμμένη λύση, πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (6.3)$$

Με την ανάπτυξη της παραπάνω ορίζουσας, προκύπτει μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ως προς την παράμετρο συχνότητας ω^2 . Για πραγματικά συστήματα κατασκευών τα οποία έχουν συμμετρικά και θετικά ορισμένα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας αποδεικνύεται ότι όλες οι N ρίζες της πολυωνυμικής αυτής εξίσωσης είναι πραγματικές και θετικές. Οι ρίζες αυτές καθορίζουν τις ιδιοσυχνότητες ω_n των n μορφών ταλαντώσεων που είναι δυνατές για το σύστημα. Η μορφή που αντιστοιχεί στην χαμηλότερη συχνότητα καλείται πρώτη μορφή, η επόμενη δεύτερη μορφή, κ.ο.κ.

Στην δικιά μας περίπτωση, λόγω της μη ορθογωνικότητας των συναρτήσεων φ_n που παριστούν το σχήμα της ταλάντωσης, το οποίο δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, το μητρώο μάζας δεν είναι συμμετρικό. Επομένως, ο αριθμός των πραγματικών θετικών

ιδιοτιμών ω_j , $j=1,2,\dots$ που προκύπτουν εξαρτάται από το μέγεθος περικοπής n στην εξίσωση (3.16).

Τέλος, για τον υπολογισμό των μητρώων $[K]$ και $[M]$ απαιτούνται, όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (3.22) και (3.23), μόνο η ακτίνα R του δοχείου και ο αριθμός του μεγέθους περικοπής. Στο πρόβλημά μας θεωρήσαμε δοχείο ακτίνας $R=1$.

Όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 6.1), ο ρυθμός σύγκλισης και η ακρίβεια των τιμών των ιδιοσυχνοτήτων εξαρτάται από το μέγεθος περικοπής n . Παρουσιάζουμε επίσης και τον αριθμό των πραγματικών ιδιοσυχνοτήτων που προέκυψαν. Όπως φαίνεται, οι πραγματικές ιδιοτιμές δεν ισούνται με το μέγεθος περικοπής n λόγω του ότι το μητρώο μάζας δεν είναι συμμετρικό. Στον σχήμα (6.1) που ακολουθεί φαίνονται οι τιμές των πρώτων πέντε ιδιοσυχνοτήτων ($\omega_i^2 R/g$) συναρτήσει του μεγέθους περικοπής n για μηδενική απόσβεση. Από άποψη ακρίβειας και σύγκλισης, βλέπουμε από τα αποτελέσματα ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι σχετικά γρήγορος, και ότι γρηγορότερη σύγκλιση έχουμε στις χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες. Το απαιτούμενο μέγεθος περικοπής n ώστε να εξασφαλίσουμε ακριβή αποτελέσματα μέχρι τρία σημαντικά ψηφία για τις τρεις πρώτες ιδιοτιμές είναι $n=4$, $n=10$, $n=12$.

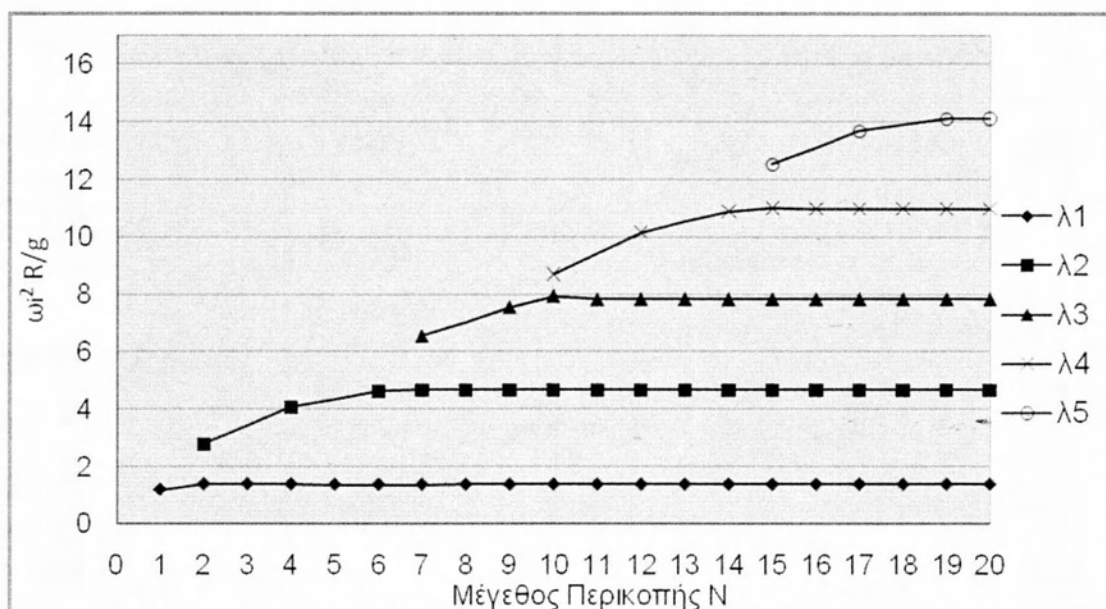
Επιπλέον, αξίζει να σημειώσουμε πως η κανονικοποιημένη ιδιοσυχνότητα που βασίζεται στην απλοποιημένη μεθοδολογία για $n=1$ έχει τιμή $\omega_s^2 R/g = 1.178$ και δίνει μία ικανοποιητική προσέγγιση της πρώτης συγκεκριμένης κανονικοποιημένης ιδιοσυχνότητας $\omega_{s1}^2 R/g = 1.355$ επιτρέποντας έτσι την απλοποιημένη μεθοδολογία να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα αντίστοιχα της εργασίας του McIver (1989). Η σύγκριση των αποτελεσμάτων φαίνεται στον Πίνακα 2. Στον συγκεκριμένο πίνακα η σύγκλιση των τιμών είναι ικανοποιητική. Πρέπει να επισημάνουμε ότι τρέχοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών στο Matlab για αρκετά μεγάλα μεγέθη περικοπής οι τιμές που προκύπτουν συμπίπτουν με τα αποτελέσματα του McIver (1989) έως και πέντε σημαντικά ψηφία.

Τέλος, οι μονάδες όλων των μεγεθών που ακολουθούν είναι σύμφωνα με το διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.).

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΔΟΧΕΙΟΥ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ 50%		
Truncation Size	Αριθμός πραγματικών κανονικ. ιδιοσυχνοτήτων	ω_i^2 *(R/g)
1	1	1,1781
2	2	1,3684 2,7733
3	1	1,3525
4	2	1,3545 4,0474
5	1	1,355
6	2	1,3553 4,6062
7	3	1,3555 4,6532 6,5356
8	2	1,3555 4,6491
9	3	1,3556 4,6498 7,5396
10	4	1,3556 4,6501 7,9191 8,6875
11	3	1,3557 4,6503 7,8098
12	4	1,3557 4,6505 7,8193 10,1591
13	3	1,3557 4,6506 7,8187
14	4	1,3557 4,6507 7,819 10,8767
15	5	1,3557 4,6507 7,8191 10,986 12,519

Πίνακας 6.1



Σχήμα 6.1 Γραφική παράσταση των πέντε πρώτων τιμών $\omega_n^2 R / g$

Αποτελέσματα Matlab	McIver (1989)
1,3557	1,35573
4,6509	4,65105
7,8195	7,81986
10,9711	10,9718

Πίνακας 6.2 Σύγκριση των τιμών $\omega_n^2 R / g$ της εργασίας McIver (1989) και της παρούσας εργασίας.

6.1.2 Σύστημα δοχείο-ρευστό για απλοποιημένη λύση (n=1)

Το πρόβλημα ιδιοτιμών για το σύστημα δοχείο-ρευστό για την απλοποιημένη λύση (n=1) προκύπτει από την σχέση (4.59) αν θεωρήσουμε ότι $\dot{X}=0$. Έτσι η διαφορική εξίσωση κίνησης για το σύστημα δοχείο-ρευστό γίνεται:

$$[\mathcal{M}]\ddot{Q} + [\mathcal{K}]Q = \{0\} \quad (6.4)$$

Σύμφωνα με αυτή την εξίσωση θεωρούμε ότι δεν υπάρχει κίνηση του συστήματος λόγω εξωτερικής διέγερσης και το σύστημα δοχείο-ρευστό εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση. Η εξίσωση (6.4) αποτελείται από 3 τουλάχιστον ομογενείς εξισώσεις. Ο αριθμός των εξισώσεων αυξάνεται ανάλογα με το μέγεθος περικοπής της εξίσωσης (4.34) (p=2,4,6...). Για κάθε επιπλέον όρο στο άθροισμα της εξίσωσης (4.34) αυξάνεται κατά μία εξίσωση το σύστημα των εξισώσεων και αυτό συνεπάγεται την ανάλογη αύξηση του αριθμού των ιδιοτιμών. Έτσι έχουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\ddot{q}_g(t) + \omega_{s_0}^2 q_g(t) = 0 \quad (6.5)$$

$$\ddot{Q}_0(t) + \omega_{s_0}^2 Q_0(t) = 0 \quad (6.6)$$

⋮

$$\ddot{Q}_p(t) + \omega_{s_p}^2 Q_p(t) = 0 \quad (6.7)$$

και

$$(M'_T + M_{s_0}\Psi_m) \ddot{\Delta} + K_b \Delta + M_{s_0} \ddot{q}_g + M_{s_0}\Psi_m \ddot{Q}_0 + \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{s_p} \ddot{Q}_p = 0 \quad (6.8)$$

Η τετριμμένη λύση του παραπάνω συστήματος είναι $Q=0$, όπου $Q = [q_g \quad Q_0 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_p \quad \Delta]^T$, όπως ορίστηκε στη σχέση (4.63). Για να έχουμε μη τετριμμένη λύση στο παραπάνω σύστημα η οποία εξασφαλίζει την κίνηση του συστήματος δοχείο-ρευστό πρέπει:

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (6.9)$$

όπου [M] και [K] τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας αντίστοιχα, όπως ορίστηκαν από τις σχέσεις (4.60) και (4.61). Οι τιμές που προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης (6.9) εξαρτώνται άμεσα από το μέγεθος p αλλά και από το λόγο L/R καθώς το πρόβλημα κυματισμού για το σύστημα δοχείο-ρευστό είναι τρισδιάστατο.

Πρέπει να αναφερθεί ότι στις εξισώσεις (6.5) και (6.6) όπου ω_{so} είναι η τιμή της συχνότητας που προκύπτει για την απλοποιημένη λύση του προβλήματος (θεωρώντας τους δύο πρώτους όρους των 4.20-4.22, ως προς θ) με παραμορφώσιμα τοιχώματα και συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα κυματισμού του απλοποιημένου προβλήματος κυματισμού για άκαμπτο δοχείο, όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Επίσης, ως συνάρτηση σχήματος λαμβάνεται η ακόλουθη ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$\psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (6.10)$$

Στους παρακάτω πίνακες (6.3)-(6.8) φαίνονται τα αποτελέσματα του προβλήματος ιδιοτιμών του συστήματος εξισώσεων (6.4) για $L=3\text{m}$, $L=5\text{m}$, $L=10\text{m}$, $L=40\text{m}$, $L=80\text{m}$ και $L=95\text{m}$ αντίστοιχα. Παρουσιάζονται, επίσης, οι τιμές των $\omega_{sp}^2 R/g$, όπως προκύπτουν από την σχέση (4.40) προκειμένου να συγκριθούν με τις τιμές των αντίστοιχων ιδιοτιμών. Όσον αφορά την συχνότητα ταλάντωσης του δοχείου, αυτή υπολογίζεται από τη σχέση $\omega_b = \sqrt{K_b/M_b}$ και συγκρίνεται με την υψηλότερη ιδιοσυχνότητα. Τέλος, παρουσιάζεται και η τελευταία ιδιοσυχνότητα που προκύπτει από την εφαρμογή για επιμήκες δοχείο. Ως δεδομένα θεωρήσαμε ακτίνα δοχείου $R=1\text{ m}$ και πάχος δοχείου $h=0.02\text{ m}$. Τέλος, το δοχείο είναι από χάλυβα ($E=200\text{GP}$).

Από τους πίνακες συμπεραίνουμε ότι για δεδομένη τιμή του L , οι ιδιοσυχνότητες των μαζών κυματισμού δεν επηρεάζονται σχεδόν καθόλου από το μέγεθος περικοπής. Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων για όλα τα p συμπίπτουν έως και τέσσερα σημαντικά ψηφία. Επιπλέον, οι ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν έρχονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις συχνότητες που υπολογίζονται από τη σχέση (4.40). Τέλος, παρατηρούμε ότι όσο το L/R αυξάνει τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής στη τελευταία ιδιοτιμή του προβλήματος για επιμήκες δοχείο.

Truncation Size										
1 (p=2)	2 (p=4)	3 (p=6)	4 (p=8)	5 (p=10)	6 (p=12)	7 (p=14)	8 (p=16)	wsp ² R/g	wsp ² R/g	wsp ² R/g
1,178096	1,178096	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097			
1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097			
1,996598	1,996597	1,996598	1,996598	1,996598	1,996598	1,996598	1,996598	1,996598	1,996598	1,996598
2137631,00	3,305341	3,305342	3,305342	3,305342	3,305342	3,305342	3,305342	3,305342	3,305342	3,305342
	2129971,57	4,574157	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158
		2129002,85	5,819457	5,819458	5,819458	5,819457	5,819458	5,819458	5,819458	5,819458
			2128777,48	7,057285	7,057287	7,057285	7,057287	7,057287	7,057287	7,057287
				2128704,53	8,292492	8,292492	8,292493	8,292493	8,292493	8,292493
					2128675,46					9,526661
						2128662,08				10,760385
										2128655,26

Από εφαρμογή για επιμήκες δοχείο: ω²R/g = 2020830,1916

Πίνακας 6.3 Ιδιότητες συστήματος δοχείο-ρευστό με μήκος δοχείου L=3m, ω_b² R/g = 1010414.51 και ω_{so}² R/g = 1.178093

Truncation Size										
1 (p=2)	2 (p=4)	3 (p=6)	4 (p=8)	5 (p=10)	6 (p=12)	7 (p=14)	8 (p=16)	wsp ² R/g	wsp ² R/g	wsp ² R/g
1,178093	1,178093	1,178093	1,178093	1,178093	1,178093	1,178093	1,178093			
1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097			
1,524002	1,524002	1,524002	1,524002	1,524002	1,524002	1,524002	1,524002	1,524003	1,524003	1,524003
269908,84	2,256482	2,256482	2,256482	2,256482	2,256482	2,256482	2,256482	2,256484	2,256484	2,256484
	268551,38	3,045854	3,045857	3,045854	3,045857	3,045854	3,045857	3,045857	3,045857	3,045857
		268864,00	3,817625	3,817625	3,817625	3,817625	3,817625	3,817631	3,817631	3,817631
			268318,85	4,574150	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158	4,574158
				268304,02				5,322726	5,322737	5,322726
					268290,72					6,067368
										6,067368
										6,809995
										268293,92

Από εφαρμογή για επιμήκες δοχείο: ω²R/g=261900,6182

Πίνακας 6.4 Ιδιότητες συστήματος δοχείο-ρευστό με μήκος δοχείου $L=5m$, $\omega_b^2 R/g = 130949.72$ και $\omega_{so}^2 R/g = 1.178093$

Truncation Site											
1 ($\beta=2$)	2 ($\beta=4$)	3 ($\beta=6$)	4 ($\beta=8$)	5 ($\beta=10$)	6 ($\beta=12$)	7 ($\beta=14$)	8 ($\beta=16$)	9 ($\beta=18$)	10 ($\beta=20$)	11 ($\beta=22$)	12 ($\beta=24$)
1,178029	1,178029	1,178029	1,178029	1,178028	1,178028	1,178028	1,178028	1,178028	1,178028	1,178028	1,178028
1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097
1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067	1,272067
16619,09	1,523980	1,523980	1,523980	1,523980	1,523980	1,523980	1,523980	1,524003	1,524003	1,524003	1,524003
	16511,97	1,870291	1,870291	1,870291	1,870291	1,870291	1,870291	1,870325	1,870325	1,870325	1,870325
		16494,72	2,256435	2,256484	2,256435	2,256484	2,256435	2,256484	2,256435	2,256484	2,256484
			16490,10	2,652232	2,652300	2,652232	2,652300	2,652232	2,652300	2,652232	2,652300
				16488,48				3,045768	3,045857	3,045768	3,045857
					16487,80					3,434083	3,434198
											3,817490
											16487,31

Από εφαρμογή για επιμήκες δοχείο: $\omega_b^2 R/g = 16369,8931$

Πίνακας 6.5 Ιδιοτιμές συστήματος δοχείο-ρευστό με μήκος δοχείου $L=10m$, $\omega_b^2 R/g = 8184.3575$ και $\omega_{so}^2 R/g = 1.178093$

Truncation Size										
1 (p=2)	2 (p=4)	3 (p=6)	4 (p=8)	5 (p=10)	6 (p=12)	7 (p=14)	8 (p=16)	wsp ² R/g	wsp ² R/g	wsp ² R/g
1,157466	1,157411	1,157403	1,157401	1,157401	1,157400	1,157400	1,157400			
1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097			
1,183255	1,183254	1,183253	1,183253	1,183253	1,183253	1,183253	1,183253	1,184141	1,184141	1,184141
65,763792	1,202053	1,202053	1,202053	1,202053	1,202053	1,202053	1,202053	1,202134	1,202134	1,202134
	65,301275	1,231644	1,231644	1,231644	1,231644	1,231644	1,231644	1,231664	1,231664	1,231664
		65,217863	1,272075	1,272082	1,272075	1,272082	1,272075	1,272082	1,272082	1,272082
			65,192507	1,372542	1,372542	1,372542	1,372542	1,372545	1,372545	1,372545
				65,182417	1,382065	1,382067	1,382065	1,382065	1,382067	1,382065
					65,177679		1,449583	1,449584	1,449584	1,449583
							65,175189			1,524002
										65,173770

Αυτό εφαρμόζει για επιμήκες δοχείο: $\omega_b^2 R/g = 65.140089$

Πίνακας 6.6 Ιδιοτιμές συστήματος δοχείο-ρευστό με μήκος δοχείου $L=40m$, $\omega_b^2 R/g = 31.97014$ και $\omega_{sp}^2 R/g = 1.178093$.

Truncation Site										
1 (p=2)	2 (p=4)	3 (p=6)	4 (p=8)	5 (p=10)	6 (p=12)	7 (p=14)	8 (p=16)	wsp ² R/g	wsp ² R/g	wsp ² R/g
0,859474	0,857510	0,857158	0,857053	0,857012	0,856993	0,856984	0,856979			
1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097	1,178097			
1,179336	1,179336	1,179336	1,179336	1,179336	1,179336	1,179336	1,179336	1,179610	1,179610	1,179610
5,531005	1,184101	1,184101	1,184101	1,184101	1,184101	1,184101	1,184101	1,184141	1,184141	1,184141
	5,503914	1,191647	1,191647	1,191647	1,191647	1,191647	1,191647	1,191664	1,191664	1,191664
		5,498992	1,202124	1,202124	1,202124	1,202124	1,202124	1,202134	1,202134	1,202134
			5,497479	1,215486	1,215486	1,215486	1,215486	1,215492	1,215492	1,215492
				5,496869	1,231660	1,231660	1,231660	1,231664	1,231664	1,231664
					5,496577	1,250558	1,250558	1,250561	1,250561	1,250561
						5,496422	1,272080			1,272082
							5,496331			

Από εφαρμογή για επιμήκη δοχεία: $\omega_3^2 R/g = 5,495812$

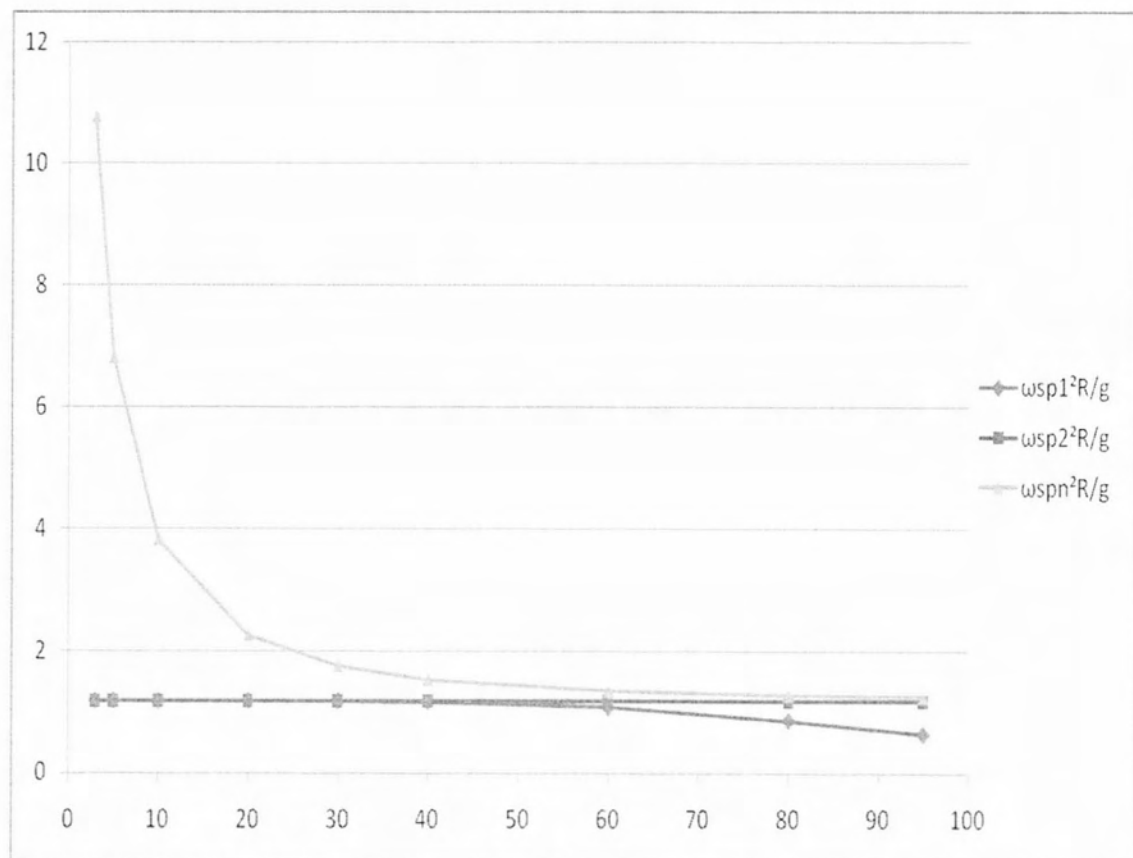
Πίνακας 6.7 Ιδιοτιμές συστήματος δοχείο-ρευστό με μήκος δοχείου $L=80m$, $\omega_6^2 R/g = 1,998134$ και $\omega_{\infty}^2 R/g = 1,178093$.

Truncation Size										
1 (p=2)	2 (p=4)	3 (p=6)	4 (p=8)	5 (p=10)	6 (p=12)	7 (p=14)	8 (p=16)	wsp ² R/g	wsp ² R/g	wsp ² R/g
0,63939	0,63503	0,63493	0,63484	0,634748	0,63472	0,634709	0,634701			
1,17897	1,17897	1,17897	1,17897	1,17897	1,17897	1,17897	1,17897			
1,178976	1,178966	1,178962	1,178960	1,178958	1,178957	1,178975	1,178975	1,179170	1,179170	1,179170
3,74690	1,181745	1,181683	1,181653	1,181635	1,181622	1,182357	1,182357	1,182386	1,182386	1,182386
	3,74910	1,186583	1,186442	1,186366	1,186317	1,187718	1,187718	1,187730	1,187730	1,187730
		3,732715	1,193527	1,193298	1,193169	1,195174	1,195174	1,195181	1,195181	1,195181
			3,732040	1,193298	1,202246	1,204704	1,204704	1,204708	1,204708	1,204708
				3,731768	1,213660	1,216271	1,216271	1,216274	1,216274	1,216274
					3,731638	1,229829	1,229829	1,229832	1,229832	1,229832
						3,731568	1,245328			1,245329
							3,731527			

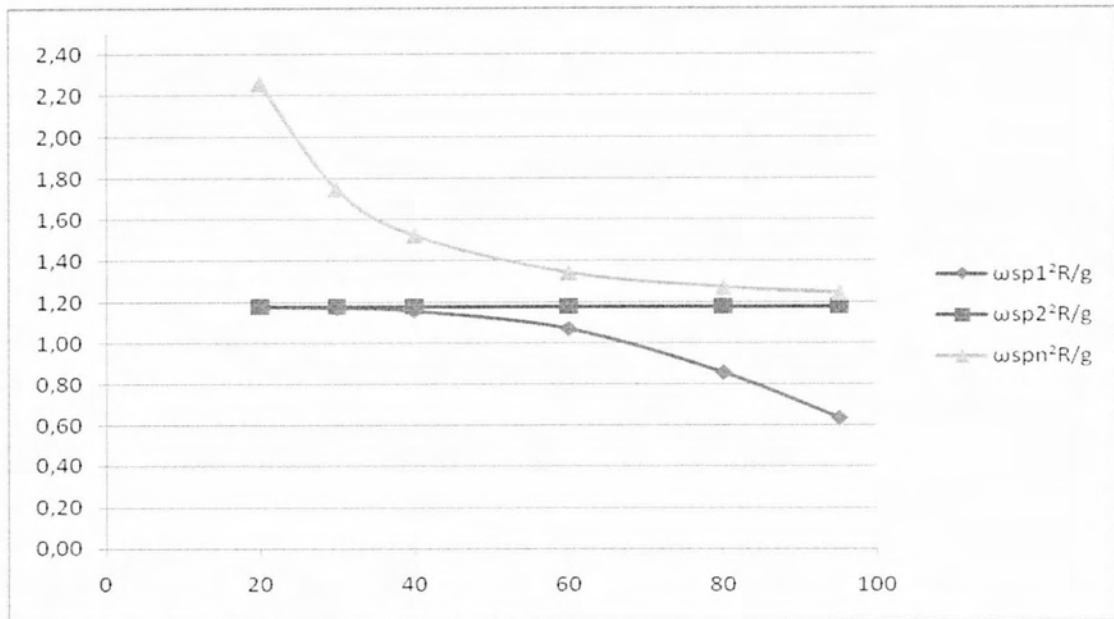
Από εφαρμογή για επιμήκες δοχείο: $\omega_b^2 R/g = 3,731335$

Πίνακας 6.8 Ιδιότητες συστήματος δοχείο-ρευστό με μήκος δοχείου $L=90m$, $\omega_b^2 R/g = 1.0048244$ και $\omega_{sp}^2 R/g = 1.178093$.

Στο σχήμα 6.2 παρουσιάζεται η σύγκλιση των ιδιοσυχνοτήτων $\omega_{sp}^2 R/g$ στη τιμή $\omega_{so}^2 R/g$ με την αύξηση του λόγου L/R . Επομένως, το σύστημα δοχείο-ρευστό έχει δύο βασικές συχνότητες ταλάντωσης, μία συχνότητα κυματισμού ω_{so} , που αντιπροσωπεύει την κίνηση του ρευστού σε σχέση με το δοχείο και μία συχνότητα ω_b που αντιστοιχεί στη κίνηση της μάζας ρευστού που ταλαντώνεται σε απόλυτη συμφωνία με το δοχείο. Αυτό σημαίνει πως όσο μεγαλώνει το μήκος του δοχείου η επιρροή της συντεταγμένης z δεν επηρεάζει την κίνηση κυματισμού των αντίστοιχων μαζών. Παρ' όλα αυτά, παρατηρείται η απόκλιση της μικρότερης ιδιοτιμής από τη βασική συχνότητα ταλάντωσης ω_{so} , γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την αναλυτική σχέση (3.66).

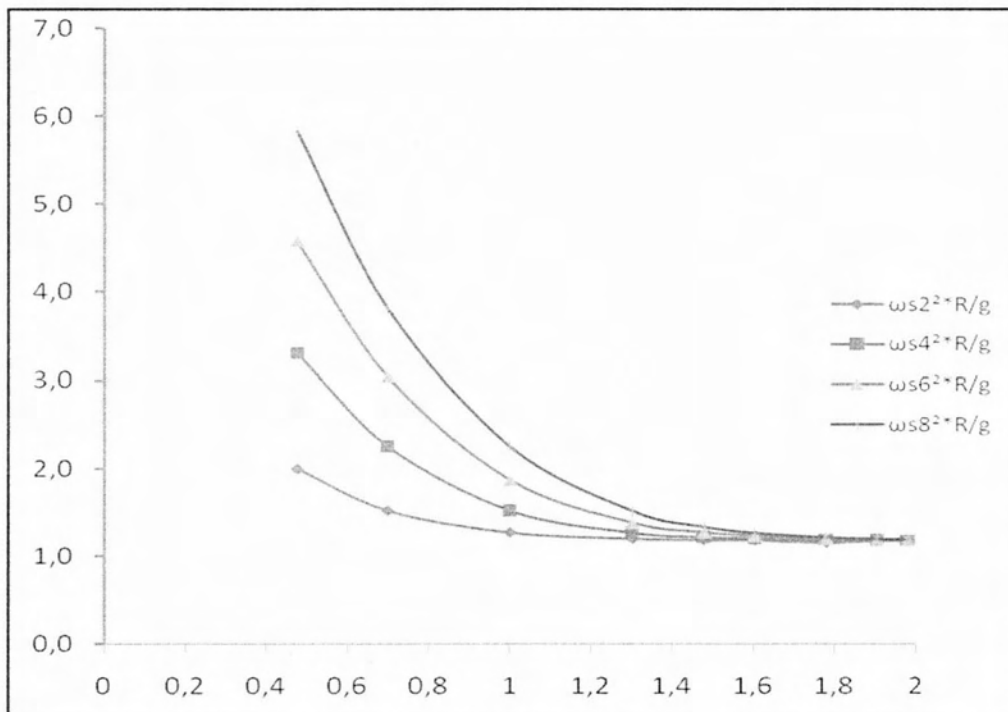


Σχήμα 6.2 Διάγραμμα των τιμών $\omega^2 R/g$ των δύο πρώτων ιδιοσυχνοτήτων και της $\omega_{sp}^2 R/g$ συναρτήσει του λόγου L/R για συγκεκριμένο μέγεθος περιεκτικότητας ($p \leq 16$)



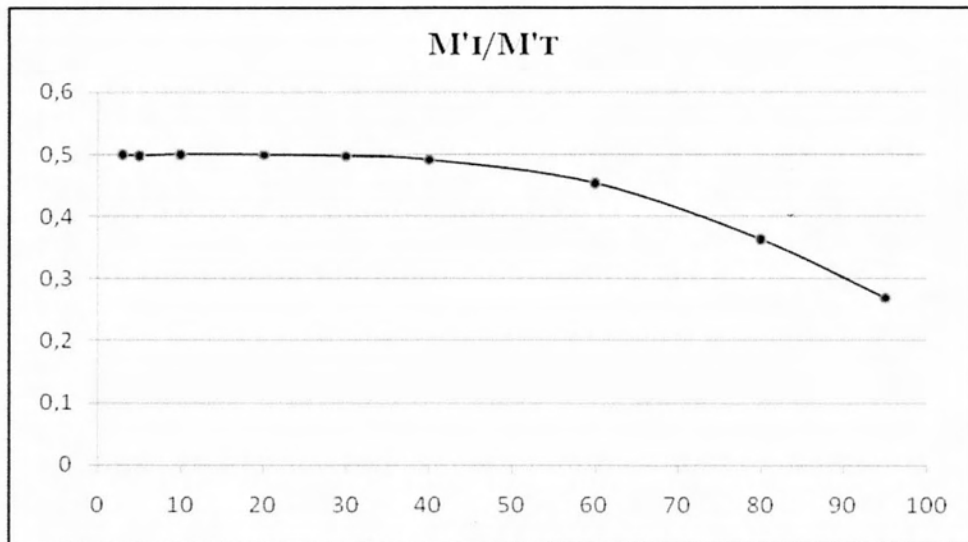
Σχήμα 6.3 Λεπτομέρεια του προηγούμενου διαγράμματος για $L/R \geq 20$.

Στο σχήμα (6.4) απεικονίζεται η σύγκλιση των συχνοτήτων ω_{sp} με την αύξηση του λόγου L/R . Οι συχνότητες συγκλίνουν στη βασική συχνότητα ταλάντωσης και ουσιαστικά επαληθεύεται η σχέση $\lim_{L/R \rightarrow \infty} \omega_{sp}^2 = \omega_{S0}^2$. Τα αποτελέσματα δίνονται σε λογαριθμική κλίμακα.



Σχήμα 6.4 Διάγραμμα των $\omega_{sp^2}R/g$ συναρτήσει του λόγου L/R (για τιμές του λόγου $L/R=3, 5, 10, 20, 40, 60, 80, 95$)

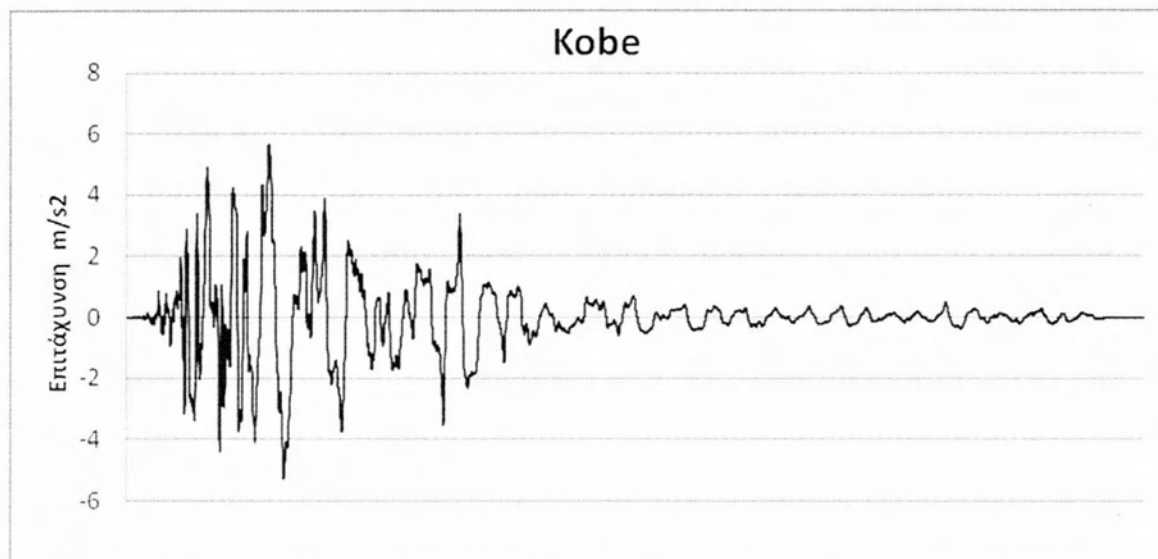
Τέλος, στο σχήμα (6.5) παρουσιάζεται το διάγραμμα του λόγου της ωστικής μάζας ρευστού προς τη συνολική μάζα ρευστού συναρτήσει του λόγου L/R . Βλέπουμε πως για μικρές τιμές του λόγου L/R η μάζα που ακολουθεί τη κίνηση του δοχείου είναι η μισή της συνολικής μάζας ρευστού, ενώ όσο αυξάνεται ο λόγος L/R η ωστική μάζα είναι όλο και μικρότερη.



Σχήμα 6.5 Διάγραμμα λόγου ωστικής μάζας προς συνολικής μάζας ρευστού συναρτήσει του λόγου L/R .

6.2 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Η εξωτερική διέγερση μετατόπισης $X(t)$ που επιβάλλεται στο οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο είναι τυχαία, επομένως είναι οποιαδήποτε. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε σεισμική διέγερση και σαν παράδειγμα χρησιμοποιούμε τον σεισμό του Kobe (1995) στην Ιαπωνία, το επιταχυνσιογράφημα του οποίου φαίνεται στο σχήμα (6.6).



Σχήμα 6.6 Επιταχυνσιογράφημα του σεισμού Kobe, 1995

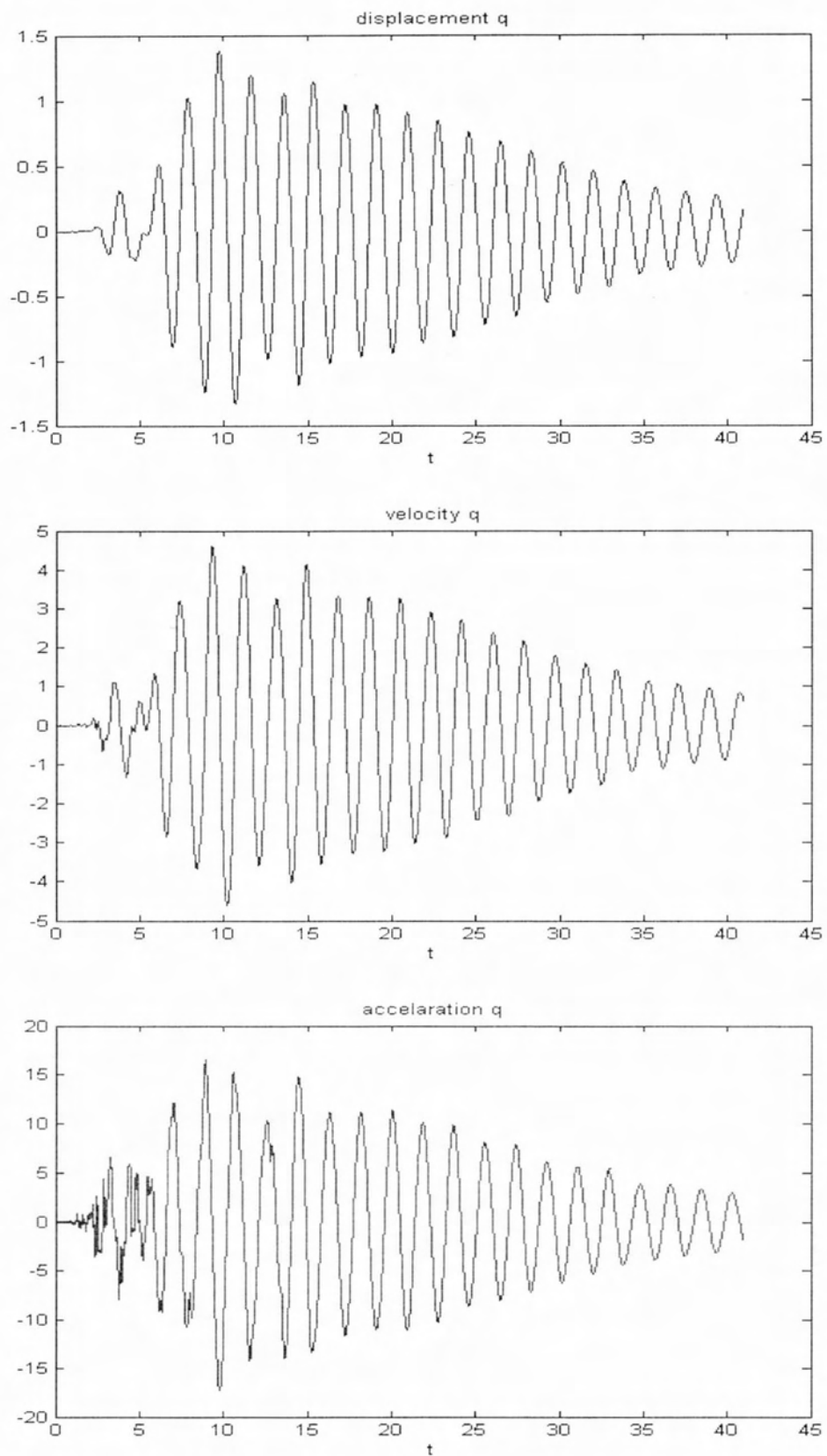
6.2.1 Δοχείο με μη παραμορφώσιμα τοιχώματα

Το δοχείο θεωρείται ότι έχει άκαμπτα τοιχώματα με ακτίνα $R=1$ m. Το πρόβλημα είναι δισδιάστατο και η απόκριση της μάζας κυματισμού που κινείται λόγω εξωτερικής διέγερσης προκύπτει από την επίλυση του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (3.25).

Θεωρούμε την απλοποιημένη λύση του προβλήματος απόκρισης για $n=1$. Παρουσιάζουμε τα διαγράμματα των τιμών της μετατόπισης $q_1(t)$, της ταχύτητας $\dot{q}_1(t)$ και της επιτάχυνσης $\ddot{q}_1(t)$ της μάζας κυματισμού (Σχήμα 6.7). Αυτά τα μεγέθη είναι επιπλέον της απόκρισης της οστικής μάζας m_1 που κινείται μαζί με το άκαμπτο δοχείο λόγω εξωτερικής διέγερσης. Δηλαδή, η μάζα κυματισμού έχει συνολική μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση :

$$\begin{aligned} u &= q_1 + X \\ \dot{u} &= \dot{q}_1 + \dot{X} \\ \ddot{u} &= \ddot{q}_1 + \ddot{X} \end{aligned} \tag{6.11}$$

αντίστοιχα.



Σχήμα 6.7 Διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας, επιτάχυνσης άκαμπτου οριζόντιου κυλινδρικού ημιπλήρους δοχείου συναρτήσει του χρόνου, $\xi=0,02$, $n=1$. (S.I)

6.2.2 Δοχείο με παραμορφώσιμα τοιχώματα

Η δυναμική απόκριση οριζόντιου κυλινδρικού δοχείου με παραμορφώσιμα τοιχώματα υπό σεισμική διέγερση είναι μείζονος σημασίας στην πετρελαιοχημική βιομηχανία. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μελετούμε ένα δοχείο από χάλυβα, ακτίνας $R=1$ m, πάχους $h=0.02$ m ο οποίος είναι πληρότητας 50%. Το μήκος του δοχείου μπορεί να είναι οποιοδήποτε. Τέλος, το δοχείο είναι απλά εδραζόμενο στα άκρα του, $z=0$ και $z=L$, και ως συνάρτηση σχήματος λαμβάνεται και πάλι η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$\psi(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (6.11)$$

Το δοχείο υπόκειται στο σεισμό του Kobe (1995) το επιταχυνσιογράφημα του οποίου φαίνεται στο σχήμα (6.6).

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε την σημασία των συνιστωσών του διανύσματος \mathbf{Q} (σχέση 4.63). Η συνιστώσα q_g αναφέρεται στη μάζα κυματισμού η οποία κινείται λόγω εξωτερικής διέγερσης \ddot{X} με συχνότητα ταλάντωσης ω_{so} η οποία είναι η βασική συχνότητα ταλάντωσης κυματισμού που προκύπτει από τη περικομμένη λύση. Η συνιστώσα Q_0 αντιστοιχεί στη μάζα κυματισμού της οποίας η κίνηση προκαλείται λόγω της παραμόρφωσης του δοχείου. Η συχνότητα ταλάντωσης αυτής της μάζας είναι επίσης η ω_{so} . Στην συνέχεια, οι συνιστώσες Q_p αντιστοιχούν στις επιμέρους μάζες κυματισμού οι οποίες αποκτούν μία επιπλέον κίνηση λόγω της παραμόρφωσης του δοχείου. Η κάθε μία από αυτές έχει τη δική της συχνότητα ταλάντωσης ω_{sp} η οποία εξαρτάται από τη συντεταγμένη z . Βέβαια, η συνολική κίνηση όλων των μαζών κυματισμού είναι αποτέλεσμα μίας συζευγμένης κίνησης. Τέλος, η συνιστώσα Δ αντιπροσωπεύει το μέγεθος κίνησης του άξονα του δοχείου σε σχέση με τη μετατόπιση των στηρίξεων.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα των μετατοπίσεων q_g , Q_0 , Q_p και Δ καθώς επίσης η ταχύτητα $\dot{\Delta}$ και η επιτάχυνση $\ddot{\Delta}$. Όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα η επιρροή του μήκους L του δοχείου στην απόκριση του δοχείου είναι σημαντική. Επίσης, υπάρχει ενδιαφέρον στα διαγράμματα της απόκρισης για διαφορετικό αριθμό μαζών με απόκριση Q_p ($p \leq 2,4,6 \dots$).

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε πως το πρόβλημα έχει λυθεί και για περίπτωση συστήματος χωρίς απόσβεση (4.59) αλλά και για περίπτωση συστήματος με απόσβεση. Σε περίπτωση που μελετάμε σύστημα με απόσβεση εισάγεται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.59) ένας επιπλέον όρος απόσβεσης. Έτσι, η εξίσωση (4.59) γίνεται:

$$[\mathcal{M}]\ddot{\mathbf{Q}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{Q}} + [\mathcal{K}]\mathbf{Q} = -\{\mathbf{F}\} \ddot{\mathbf{X}} \quad (6.12)$$

Το μητρώο $[\mathbf{C}]$ είναι το μητρώο απόσβεσης. Θεωρήσαμε ως μητρώο απόσβεσης ένα διαγώνιο κλασσικό μητρώο απόσβεσης με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο όπως φαίνεται στην σχέση (5.25) παρακάτω:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 2\xi_s \omega_{s0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_s \omega_{s0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_s \omega_{sp1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi_s \omega_{spn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi_s \omega_b \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Επομένως, οι εξισώσεις (4.54)-(4.57) γίνονται:

$$\ddot{q}_g(t) + 2\xi_s \omega_{s0} \dot{q}_g(t) + \omega_{s0}^2 q_g(t) = -\ddot{X}(t) \quad (6.14)$$

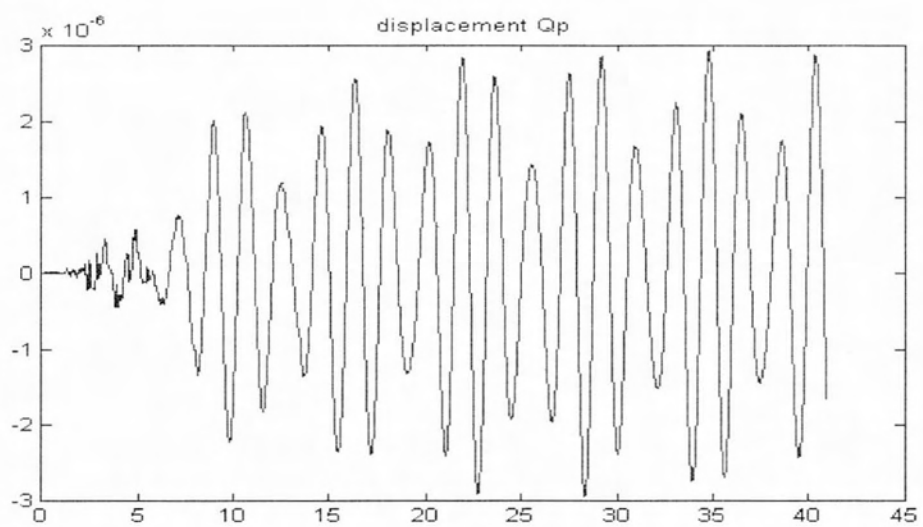
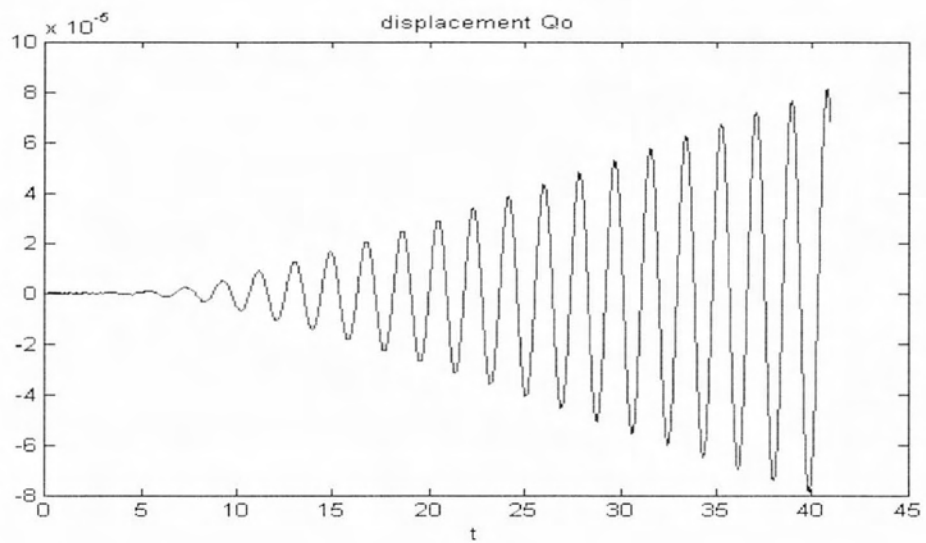
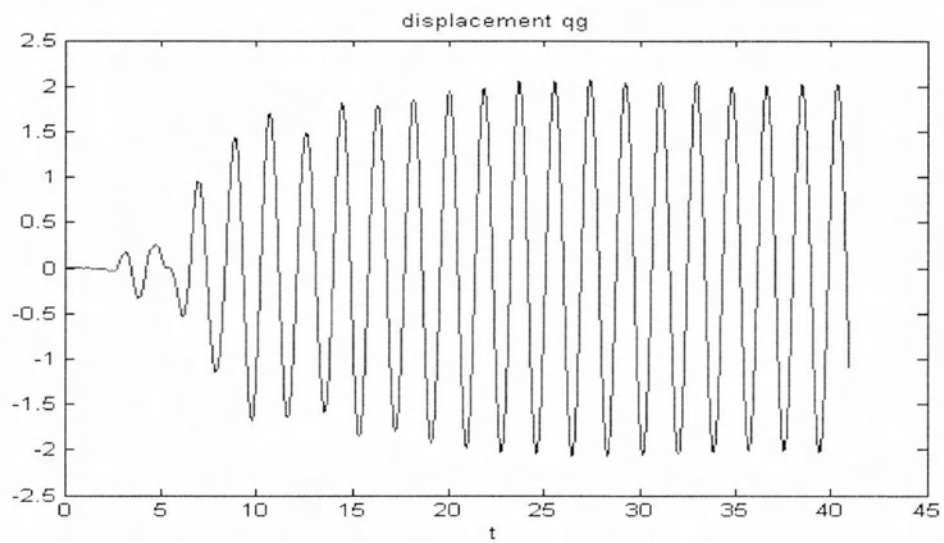
$$\ddot{Q}_0(t) + 2\xi_s \omega_{s0} \dot{Q}_0(t) + \omega_{s0}^2 Q_0(t) = -\ddot{\Delta}(t) \quad (6.15)$$

$$\vdots$$

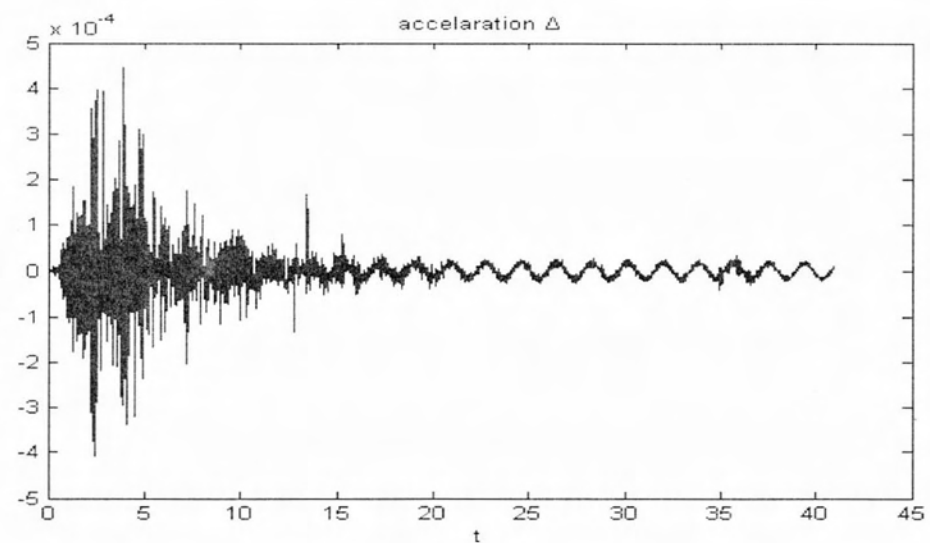
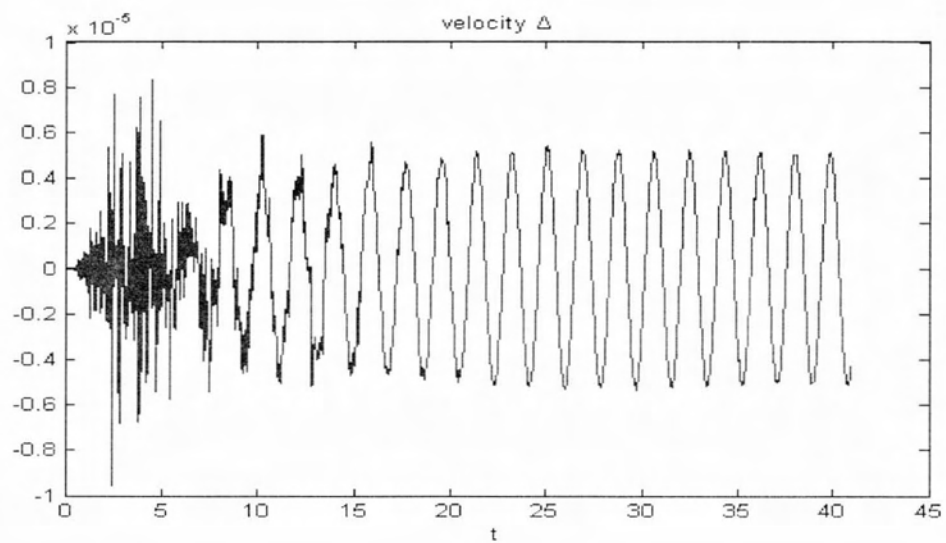
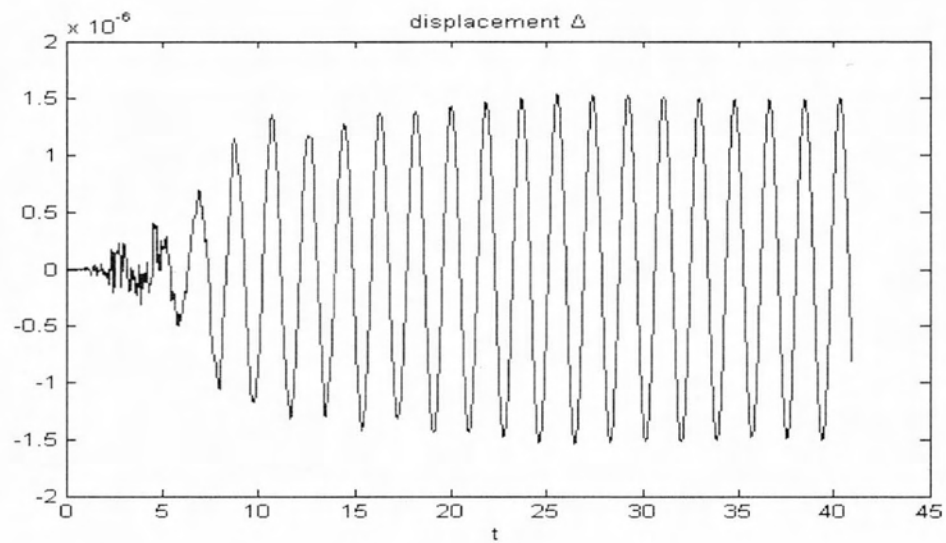
$$\ddot{Q}_{pn}(t) + 2\xi_s \omega_{spn} \dot{Q}_{pn}(t) + \omega_{spn}^2 Q_{pn}(t) = -\ddot{\Delta}(t) \quad (6.16)$$

και

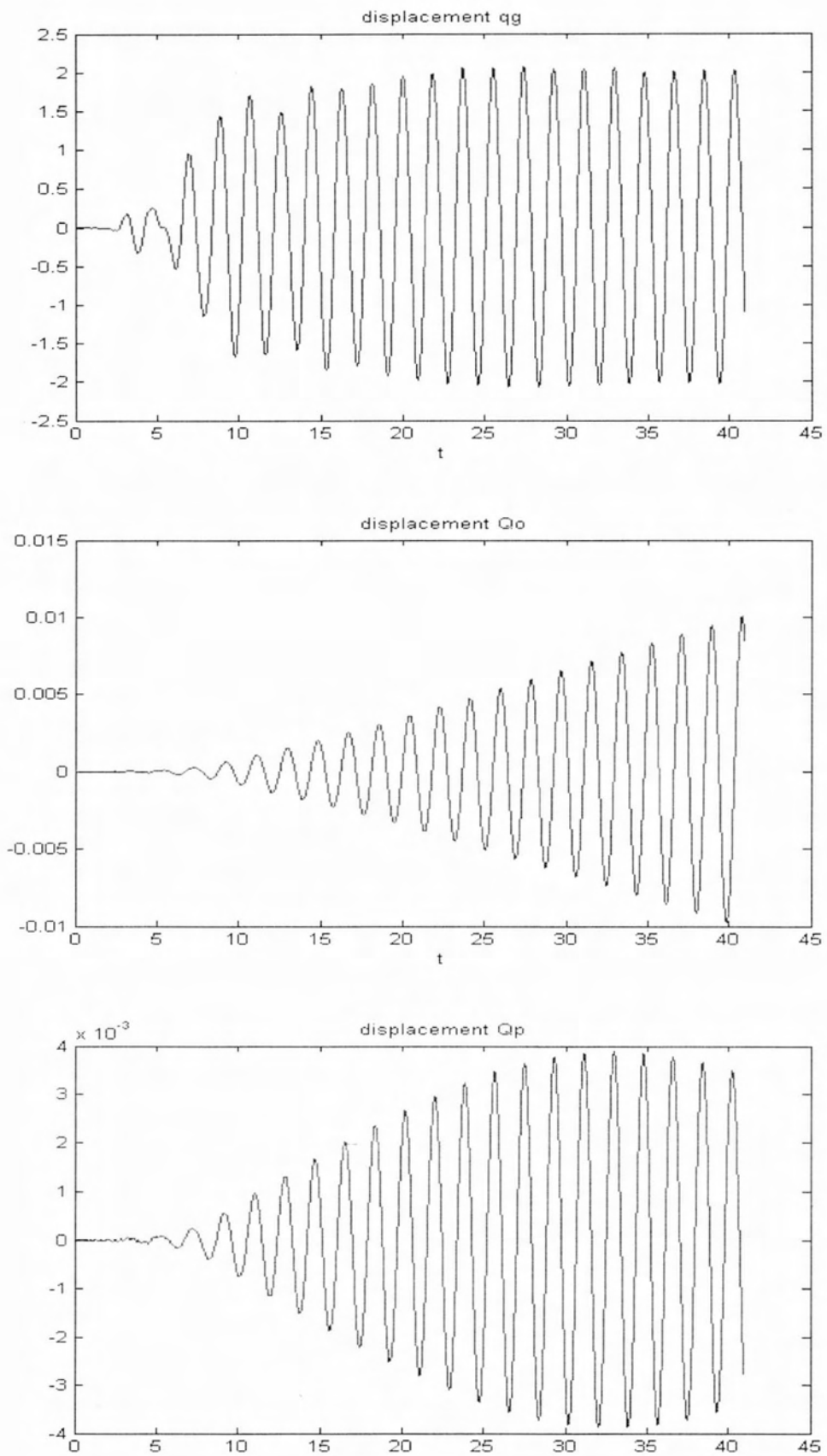
$$(M'_T + M_{s0}\Psi_m) \ddot{\Delta} + 2\xi_s \omega_b \dot{\Delta} + K_b \Delta + M_T \ddot{X} + M_{s0} \ddot{q}_g + M_{s0}\Psi_m \ddot{Q}_0 + \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{Sp} \ddot{Q}_p = 0 \quad (6.17)$$



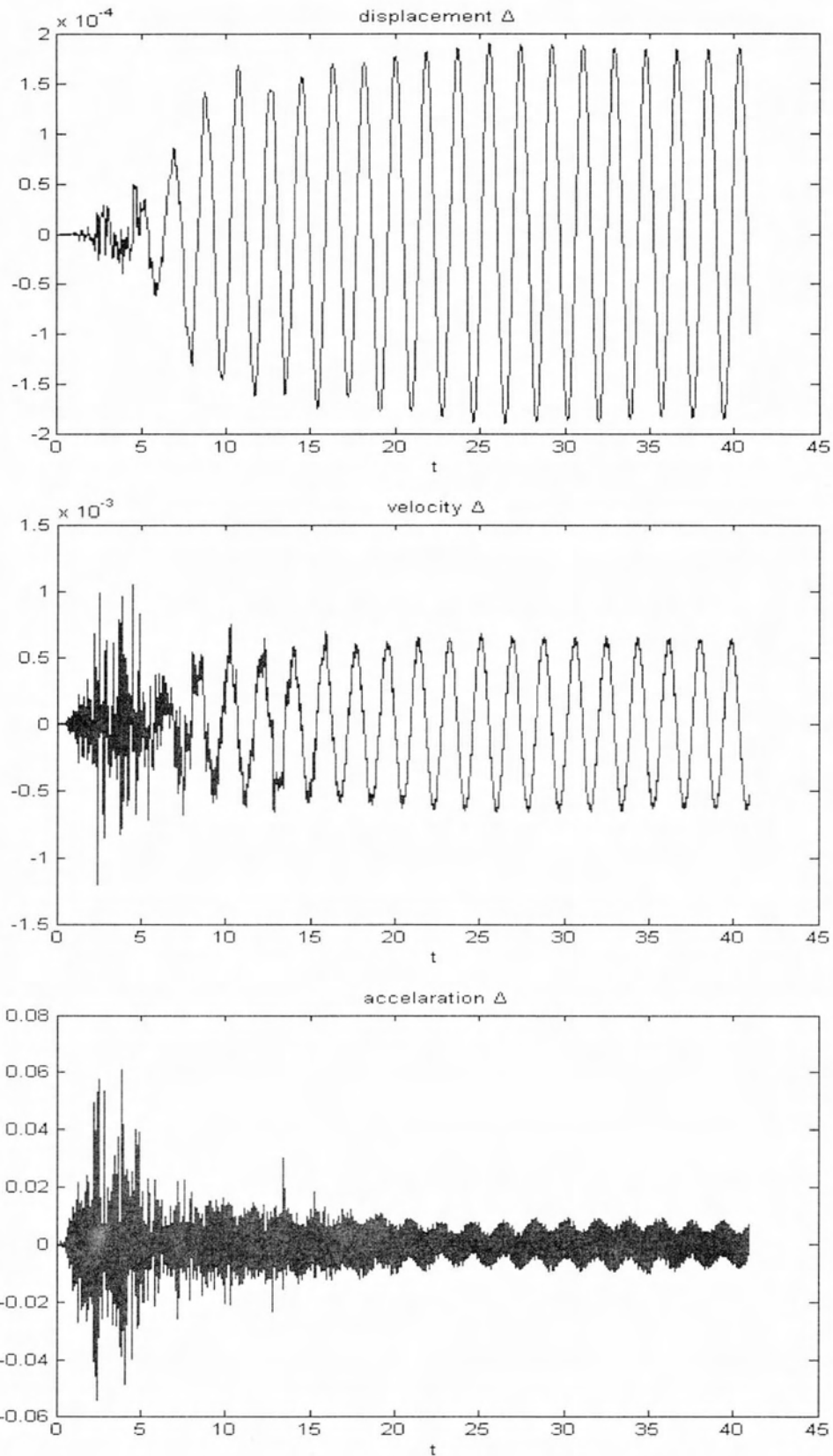
Σχήμα 6.8 Διαγράμματα μετατόπισης q_g , Q_0 , Q_p για $L=3m$, $p \leq 2$, $\xi=0$. (S.I)



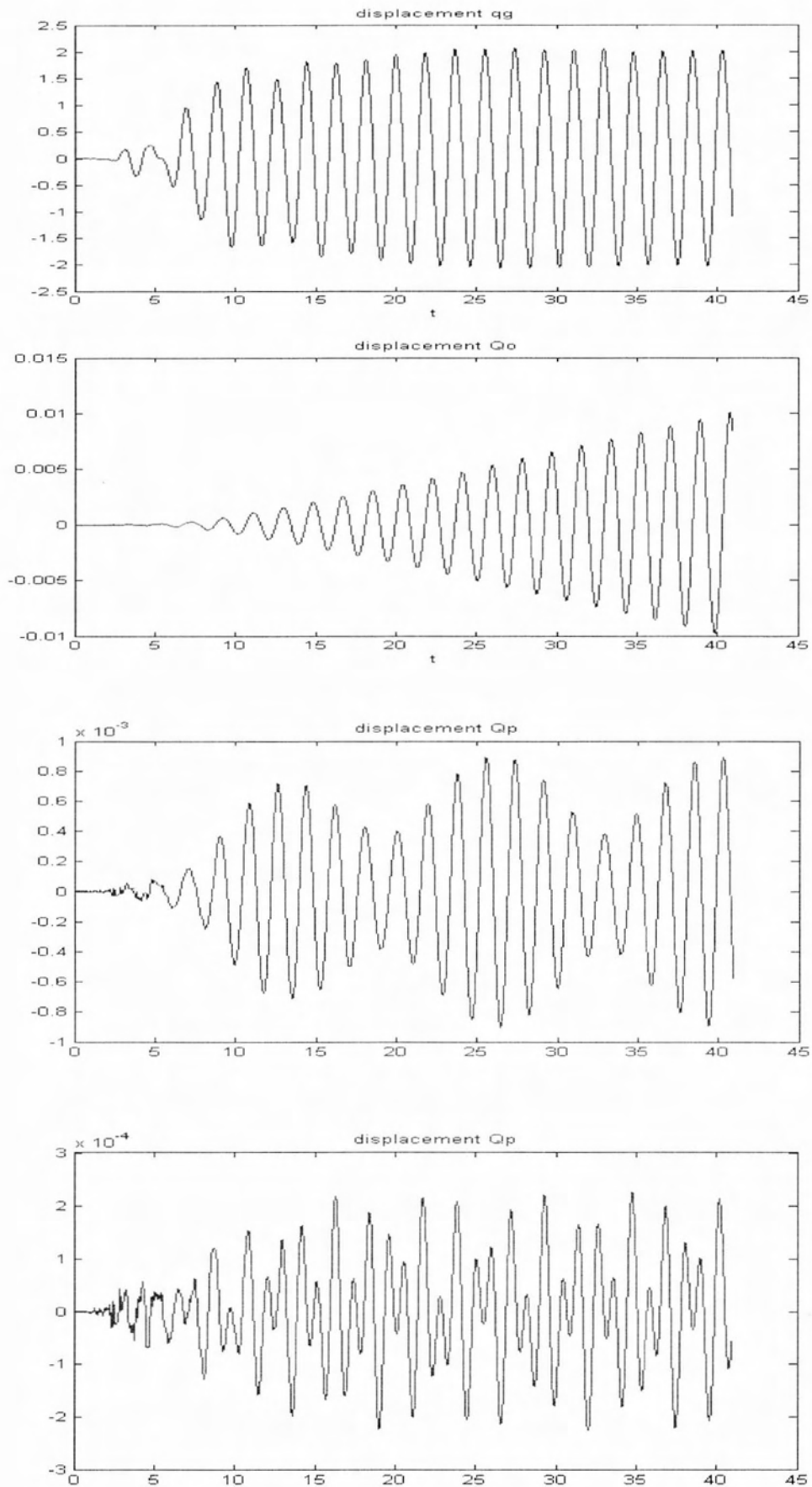
Σχήμα 6.9 Διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συνιστώσας Δ για $L=3\text{m}$, $\rho \leq 2$, $\xi=0$. (S.I)



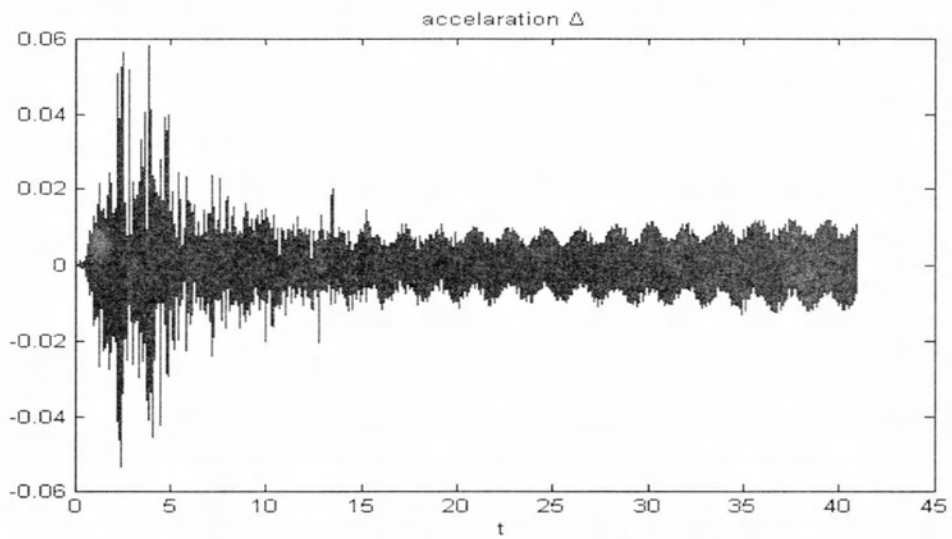
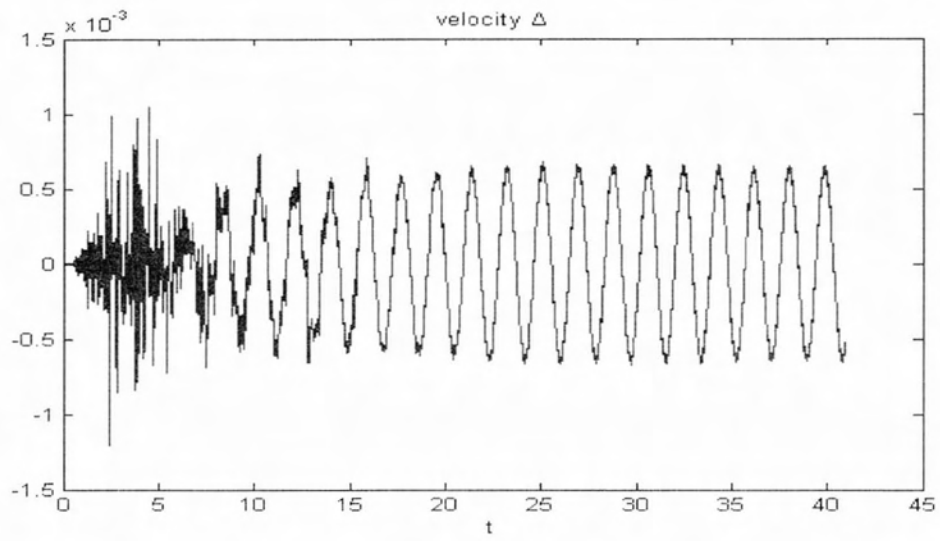
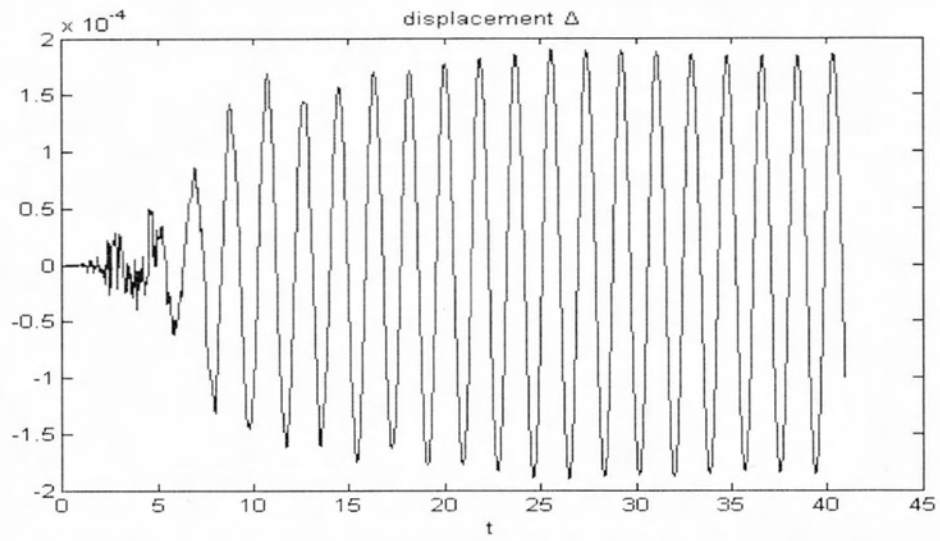
Σχήμα 6.10 Διαγράμματα μετατόπισης q_g , Q_0 , Q_p για $L=10m$, $p \leq 2$, $\xi=0$. (S.I)



Σχήμα 6.11 Διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συνιστώσας Δ για $L=10\text{m}$, $\rho=2$, $\xi=0$. (S.I)



Σχήμα 6.12 Διαγράμματα μετατόπισης q_g , Q_0 , Q_2 και Q_{14} για $L=10\text{m}$, $p \leq 14$, $\xi=0$. (S.I)



Σχήμα 6.13 Διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συνιστώσας Δ για $L=10\text{m}$, $\rho \leq 14$, $\xi=0$. (S.I)

Όπως φαίνεται από τα σχήματα (6.8), (6.9) και (6.10), (6.11) που απεικονίζουν την απόκριση του συστήματος για $L=3m$ και $L=10m$ ($p \leq 2$) αντίστοιχα, το μήκος L του δοχείου παίζει σημαντικό ρόλο στην απόκριση του συστήματος δοχείο-ρευστό. Παρατηρούμε ότι με την αύξηση του μήκους L αυξάνονται τα μεγέθη απόκρισης. Η μόνη μάζα κυματισμού που παραμένει ανεπηρέαστη από το μήκος του δοχείου είναι αυτή που κινείται αποκλειστικά λόγω εξωτερικής διέγερσης. Είναι σημαντική η αύξηση της μετατόπισης Δ με την αύξηση του μήκους καθώς μειώνεται η δυσκαμψία του δοχείου K_b .

Παρατηρώντας τα διαγράμματα q_g , Q_0 , Q_2 και Q_{14} είναι φανερή η μεγάλη διαφορά του εύρους του q_g σε σχέση με τις άλλες τρεις συνιστώσες κίνησης. Αυτή η διαφορά δείχνει τη μικρή επιρροή της παραμόρφωσης του τοιχώματος οριζόντιου κυλινδρικού αγωγού στον κυματισμό.

Στην συνέχεια, συγκρίνουμε τα σχήματα (6.10), (6.11) και (6.12), (6.13) τα οποία απεικονίζουν την απόκριση του συστήματος για το ίδιο μήκος δοχείου, $L=10m$, αλλά για διαφορετικό αριθμό μαζών που κινούνται λόγω της παραμόρφωσης του δοχείου, δηλαδή για διαφορετικό μέγεθος περικοπής της σειράς στη σχέση (4.34). Στο πρώτο σχήμα θεωρούμε $p \leq 2$, ενώ στο δεύτερο λαμβάνουμε $p \leq 14$. Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι η μικρή αύξηση ή μείωση του αριθμού των μαζών κυματισμού M_{sp} με συχνότητα κυματισμού ω_{sp} δεν επηρεάζει σημαντικά τα μεγέθη απόκρισης.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε τη σημαντική συνεισφορά της πρώτης ιδιοσυχνότητας ω_{sp2} που αντιστοιχεί στη μάζα M_{sp2} στην απόκριση του συστήματος καθώς οι μάζες M_{spn} για τις επόμενες ιδιοσυχνότητες μειώνονται σημαντικά όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 6.9)

p	M_{sp2}/Mb	M_{sp4}/Mb	M_{sp6}/Mb	M_{sp8}/Mb	M_{sp10}/Mb	M_{sp12}/Mb	M_{sp14}/Mb
14	0.07696529	0.00205964	0.00022493	0.00004018	0.00000960	0.00000283	0.00000097

Πίνακας 6.9 Λόγοι μαζών M_{sp}/Mb για $p \leq 14$

Επιπρόσθετα, προκειμένου να καταλάβουμε το μέγεθος των μαζών τα οποία κινούνται με διαφορετικές συχνότητες παρουσιάζουμε τον παρακάτω πίνακα μαζών (Πίνακας 6.10), όπως αυτές φαίνονται στην εξίσωση (4.57):

$$(M_T' + M_{so}\Psi_m) \ddot{\Delta} + K_b \Delta + M_T \ddot{X} + M_{so} \ddot{q}_g + M_{so}\Psi_m \ddot{Q}_0 + \sum_{p=2,4}^{\infty} M_{sp} \ddot{Q}_p = 0$$

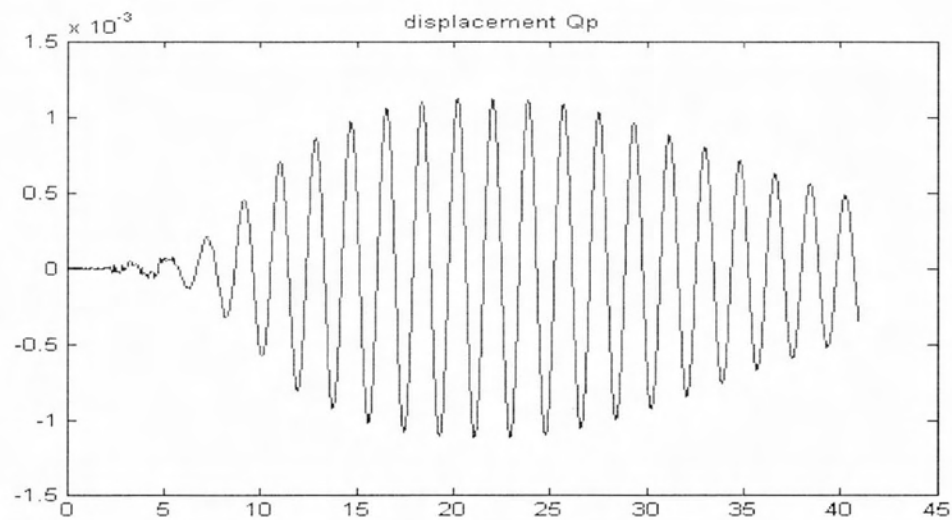
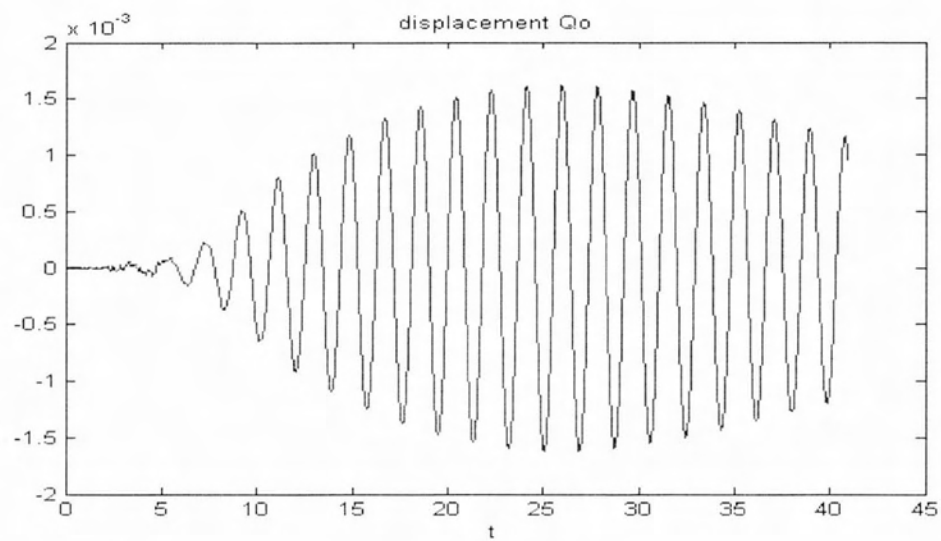
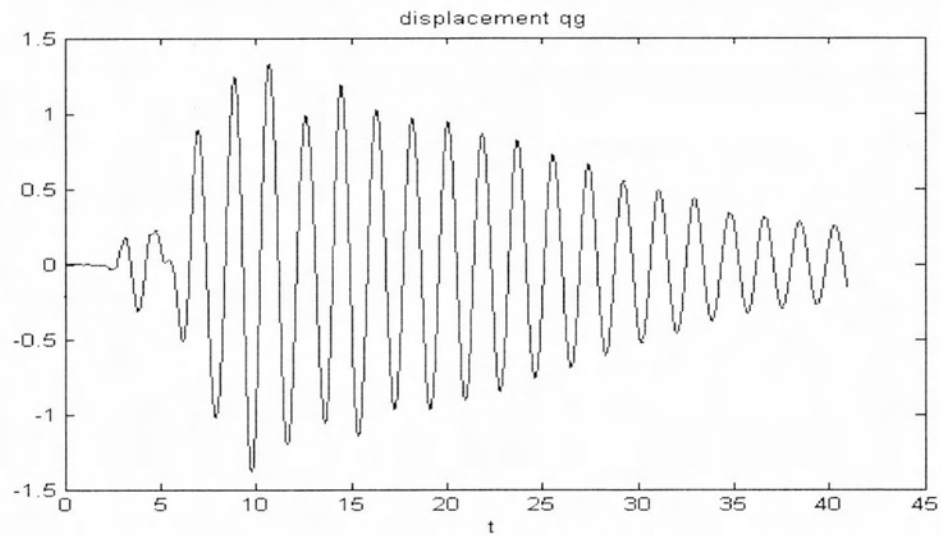
Κανονικοποιώντας την εξίσωση με M_b βλέπουμε ότι οι τιμές των λόγων των μαζών για δύο διαφορετικά μήκη του δοχείου δεν επηρεάζονται παρά μόνο οι τιμές $(M_T' + M_{so}*\Psi_m)/M_b$ και M_{sp2}/M_b . Αυτό συμβαίνει διότι οι ποσότητες αυτές επηρεάζονται από τη παραμόρφωση του δοχείου συναρτήσει του z και όχι από μία μέση παραμόρφωση.

	$(M_T' + M_{so}*\Psi_m)/M_b$	M_T/M_b	M_{so}/M_b	$M_{so}*\Psi_m/M_b$	M_{sp2}/M_b
L=3	0,9035	1,2732	0,6366	0,4053	0,0255

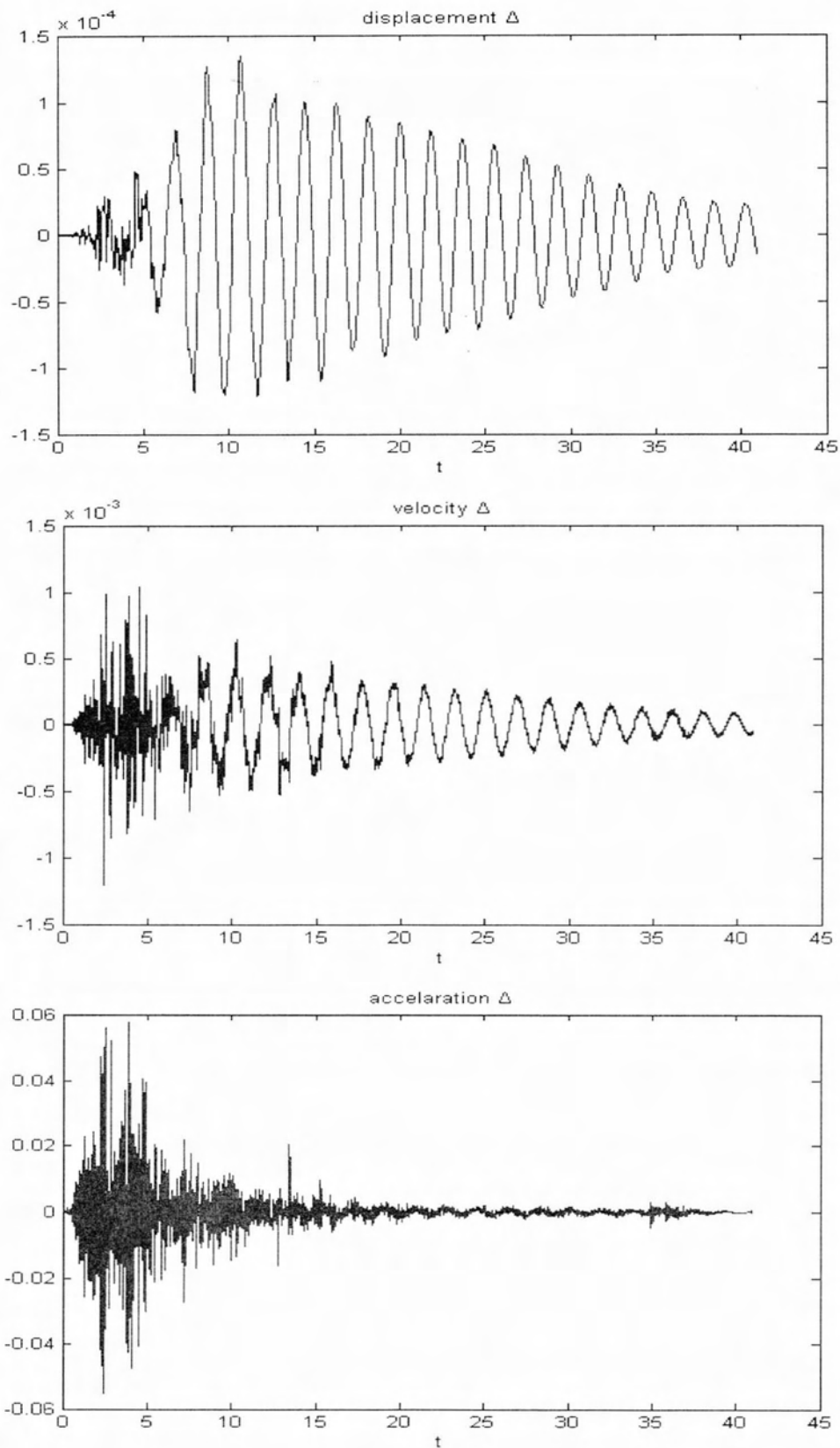
	$(M_T' + M_{so}*\Psi_m)/M_b$	M_T/M_b	M_{so}/M_b	$M_{so}*\Psi_m/M_b$	M_{sp2}/M_b
L=10	0,9748	1,2732	0,6366	0,4053	0,0770

Πίνακας 6.10 Λόγοι μαζών M/M_b για $L=3m$ και $L=10m$ ($p \leq 2$). (S.I)

Όπως προαναφέραμε, μία επιπλέον αξιόλογη σύγκριση αποτελεσμάτων απόκρισης του συστήματος δοχείο-ρευστό είναι η σύγκριση για σύστημα στο οποίο λαμβάνουμε υπόψη έναν μηχανισμό απόσβεσης, όπως αυτός εισάγεται στην εξίσωση (5.30). Στα σχήματα (6.14), (6.15) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου Newmark που προγραμματίστηκε στο υπολογιστικό περιβάλλον του Matlab για σύστημα με απόσβεση. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα είναι για δοχείο μήκους $L=10$ m, ακτίνας $R=1$ m, πάχους $h=0.02$ m και $p \leq 2$.



Σχήμα 6.14 Διαγράμματα μετατόπισης q_g , Q_0 , Q_2 για $L=10m$, $p \leq 2$, $\xi=0,02$. (S.I)



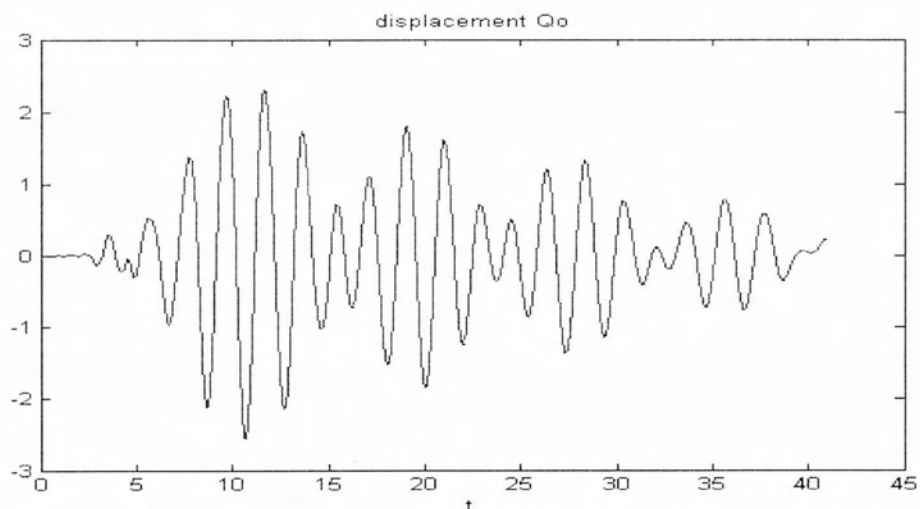
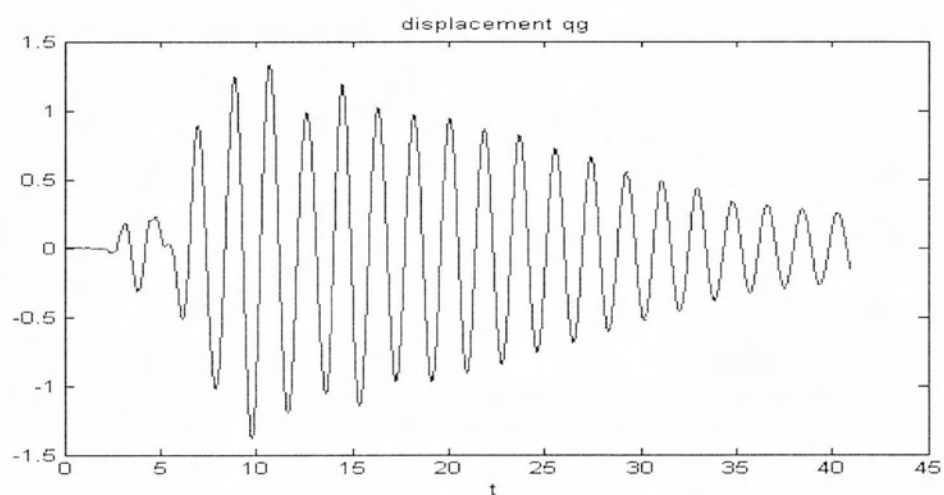
Σχήμα 6.15 Διαγράμματα μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης συνιστώσας Δ για $L=10\text{m}$, $\rho \leq 2$, $\xi=0,02$. (S.I)

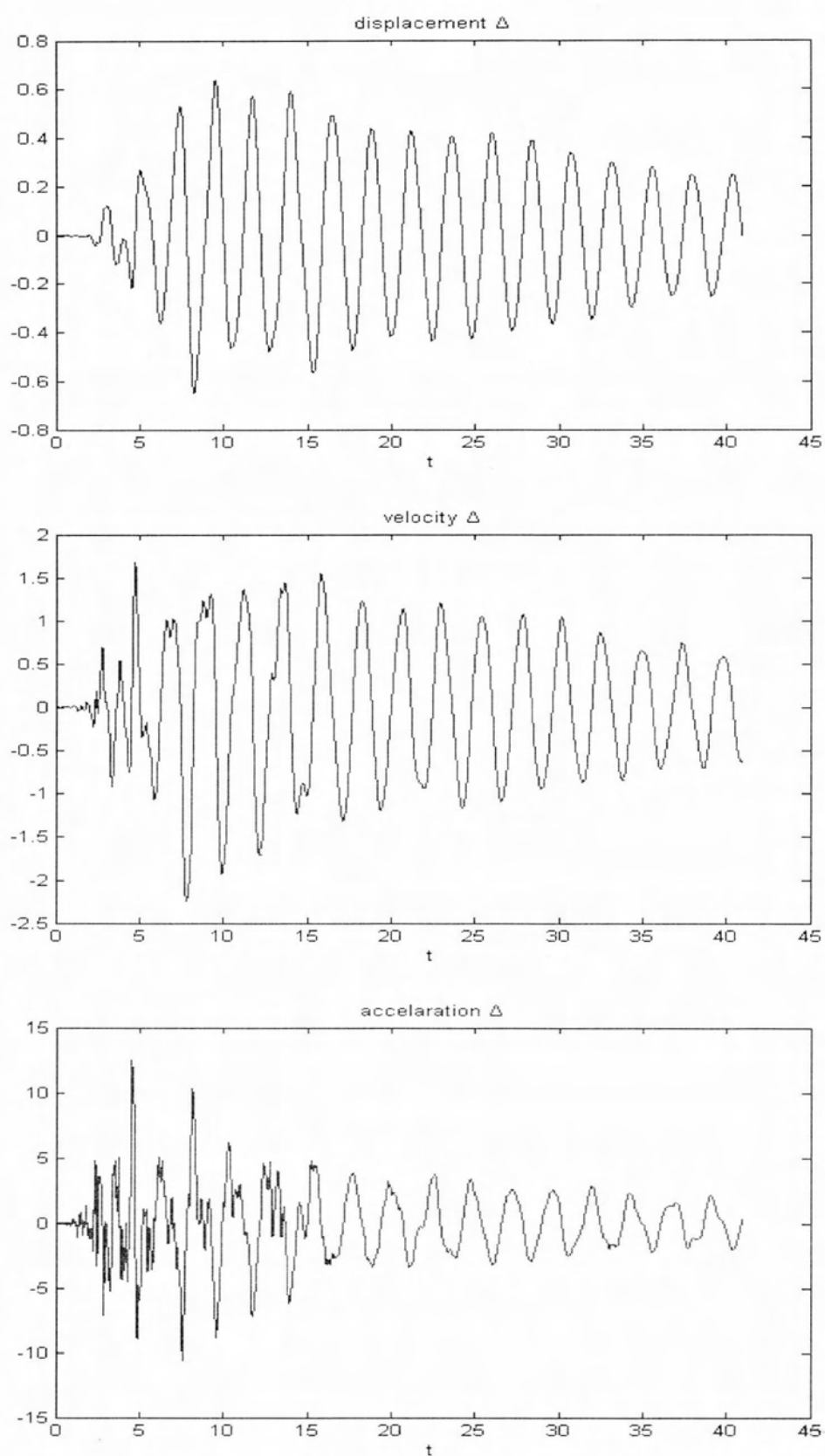
Όπως φαίνεται στα σχήματα (6.10), (6.11) και (6.14), (6.15) το εύρος κάθε μεγέθους για όλες τις συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{Q} είναι μικρότερο για σύστημα με απόσβεση. Επίσης, με την πάροδο του χρόνου το εύρος των μεγεθών μετατόπισης και ταχύτητας μειώνεται σε αντίθεση με σύστημα χωρίς απόσβεση για το οποίο το εύρος των μεγεθών αυτών αυξάνεται μέχρι μία συγκεκριμένη τιμή.

6.2.3 Αποτελέσματα εφαρμογής για επιμήκες (μακρύ) κύλινδρο

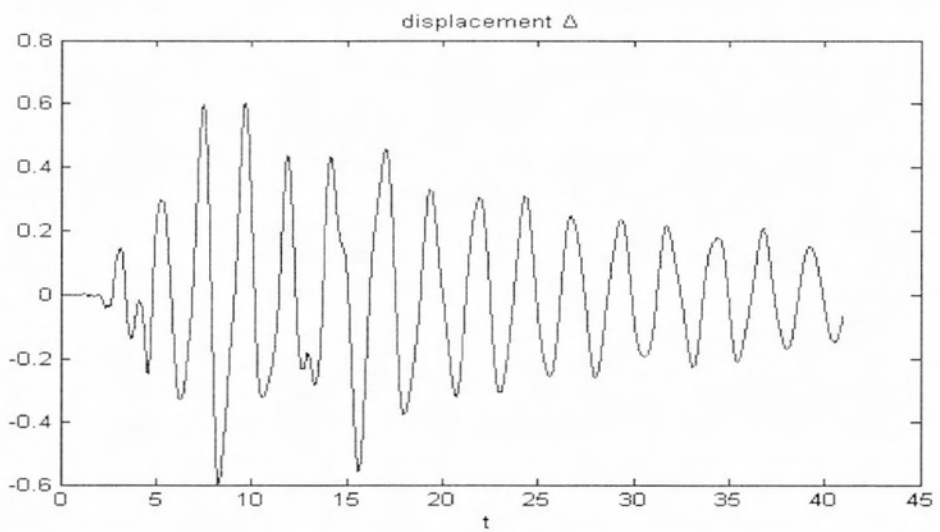
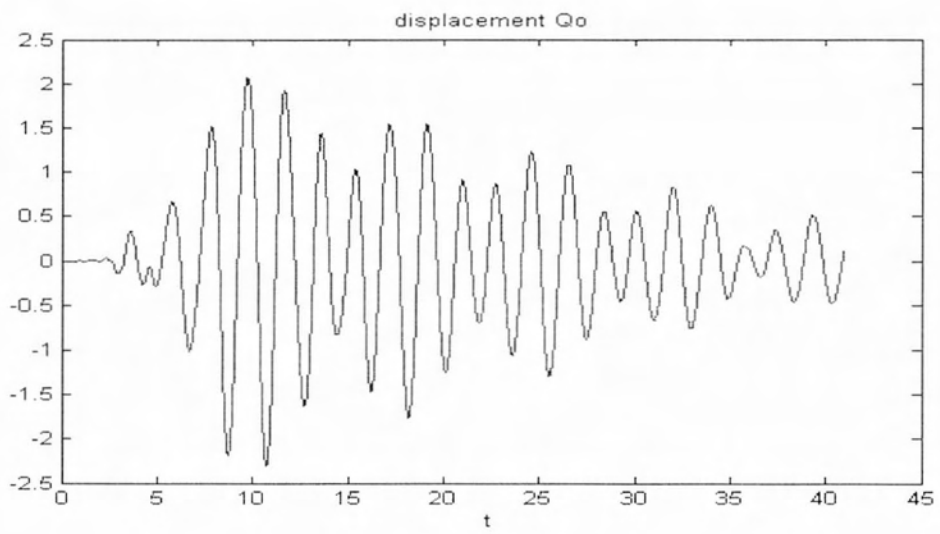
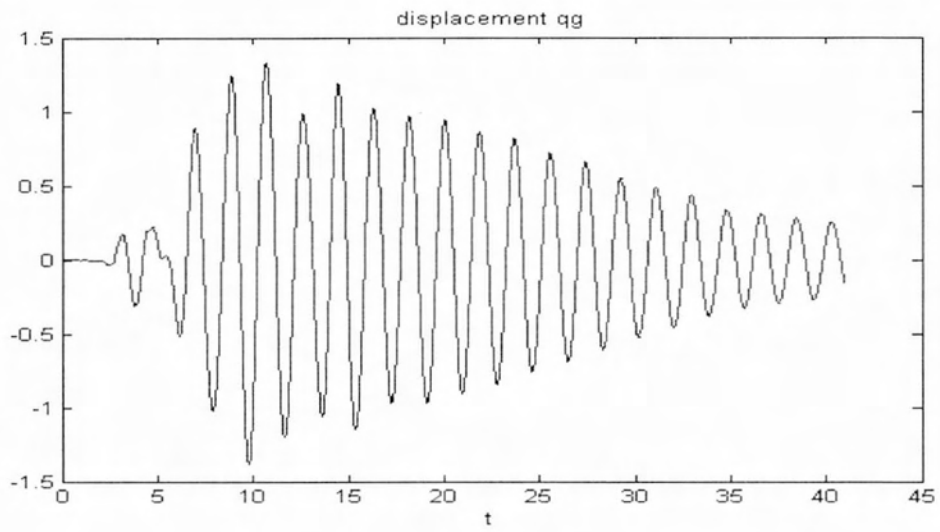
Στην παράγραφο 4.4 αναπτύχθηκε η περίπτωση επιμήκους κυλίνδρου για την ημιτονοειδή συνάρτηση που μελετούσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στη παρούσα ενότητα μελετούμε την απόκριση ενός τέτοιου κυλίνδρου. Τα χαρακτηριστικά του κυλίνδρου και του ρευστού που περιέχεται σε αυτό είναι ίδια με αυτά της προηγούμενης ενότητας. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή λαμβάνουμε σύστημα με απόσβεση.

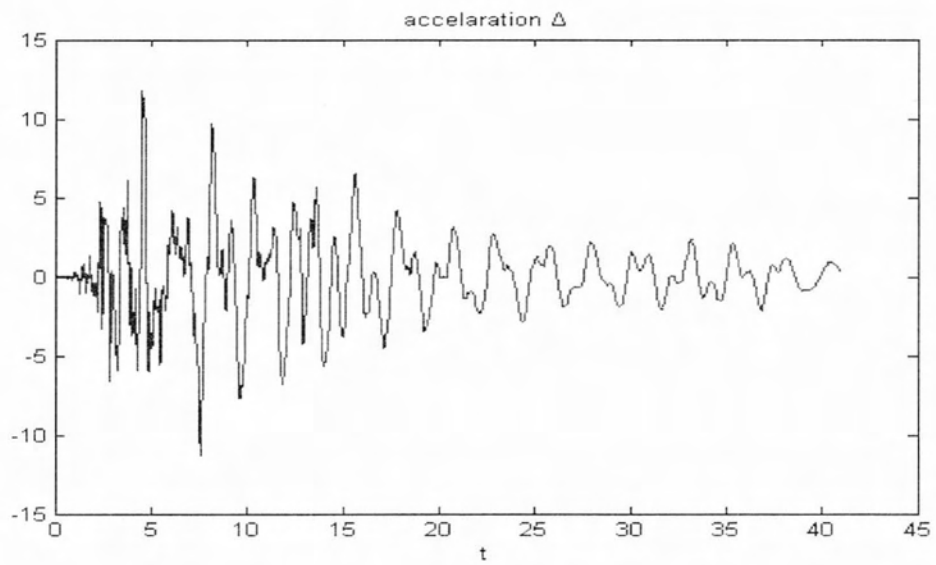
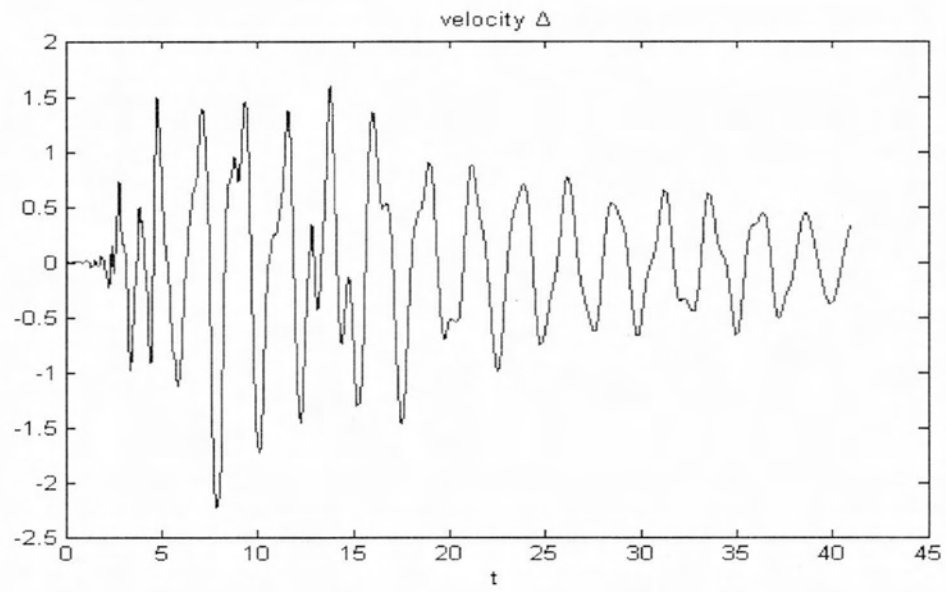
Στο σχήμα (6.17) παρουσιάζεται η απόκριση του επιμήκους δοχείου με επίλυση του προβλήματος που αναπτύσσεται στην ενότητα 4.4. Τα αποτελέσματα αυτά βλέπουμε ότι έρχονται σε πολύ καλή συμφωνία για μήκος δοχείου $L=95\text{m}$ (Σχήμα 6.18) επιλύοντας το πρόβλημα για δοχείο οποιουδήποτε μήκους, δηλαδή επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων (6.12).





Σχήμα 6.17 Διαγράμματα μεγεθών απόκρισης για επιμήκες δοχείο με παραμορφώσιμα τοιχώματα ($\xi=0,02$), (S.I).





Σχήμα 6.18 Διαγράμματα μεγεθών απόκρισης για δοχείο μήκους $L=95m$, $\rho \leq 2$, $\xi=0,02$.
(S.I)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΝΟΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Παρουσιάζεται ένα δισδιάστατο μαθηματικό μοντέλο για τη μελέτη της απόκρισης ενός άκαμπτου οριζόντιου κυλινδρικού ημιπλήρους δοχείου. Το πρόβλημα του κυματισμού αναπτύσσεται σε μορφή σειράς αρμονικών συνατήσεων οι οποίες δεν είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και συνεπώς οι εξισώσεις του πολυβάθμιου συστήματος είναι εξαρτημένες μεταξύ τους. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα άκαμπτου δοχείου παρουσιάζεται μία απλοποιημένη λύση του κυματισμού λαμβάνοντας μόνο τους δύο πρώτους όρους της σειράς.

Στη συνέχεια, η λύση αυτή μπορεί να επεκταθεί για παραμορφώσιμα δοχεία, με μία απλή θεώρηση διαμήκους παραμόρφωσης. Όσον αφορά τα δοχεία αυτά, το πρόβλημα γίνεται τρισδιάστατο και αναζητείται η συζευγμένη λύση του συστήματος δοχείο-ρευστό. Λαμβάνοντας μόνο τους δύο πρώτους όρους της σειράς για την εγκάρσια διεύθυνση, όπως αναπτύχθηκε και για άκαμπτο δοχείο, προκύπτει μία απλοποιημένη μαθηματική λύση. Θεωρώντας μία ημιτονοειδή συνάρτηση σχήματος για τη παραμόρφωση του δοχείου, το σύστημα του προβλήματος απόκρισης του συστήματος δοχείο-ρευστό υπό εγκάρσια διέγερση επιλύεται αριθμητικά. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των δύο προβλημάτων είναι η μέθοδος Newmark και συγκεκριμένα η ειδική περίπτωση της μέσης επιτάχυνσης.

Αρχικά, στο κεφάλαιο 6 γίνεται εκτενής αναφορά στις ιδιοσυχνότητες του συζευγμένου συστήματος. Για άκαμπτο δοχείο οι τιμές έρχονται σε πολύ καλή συμφωνία με αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών. Για παραμορφώσιμο δοχείο παρουσιάζονται οι ιδιοτιμές που περιγράφουν τη κίνηση της ωστικής μάζας όσο και των μαζών κυματισμού. Όσο αυξάνεται ο λόγος L/R οι ιδιοσυχνότητες των μαζών κυματισμού συγκλίνουν στη βασική συχνότητα ταλάντωσης κυματισμού που προκύπτει και από την απλοποιημένη λύση άκαμπτου δοχείου. Για πολύ μεγάλη τιμή του λόγου L/R οι ιδιοτιμές έρχονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις ιδιοτιμές της απλοποιητικής λύσης για επιμήκες κύλινδρο. Τέλος, από τα μεγέθη των ιδιοτιμών είναι δυνατό να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι με την αύξηση του λόγου L/R η ωστική μάζα ταλάντωσης, η οποία ακολουθεί την εξωτερική διέγερση, μειώνεται.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μαθηματικής επίλυσης της απόκρισης του οριζόντιου κυλινδρικού ημιπλήρους δοχείου σε εγκάρσια διέγερση. Θεωρήσαμε ως διέγερση το σεισμό του Kobe. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι συναρτήσει του λόγου L/R και του θεωρούμενου αριθμού των όρων της σειράς των διαμήκων συναρτήσεων. Φαίνεται πως όσο αυξάνει ο λόγος L/R τόσο μεγαλύτερα είναι τα μεγέθη απόκρισης. Αντίθετα, η επίδραση του μεγέθους αποκοπής δεν είναι αξιοσημείωτη. Τέλος, παρουσιάζονται τα διαγράμματα της απόκρισης επιμήκους δοχείου τα οποία έρχονται σε πολύ καλή συμφωνία με το γενικό πρόβλημα για πολύ μεγάλες τιμές του L .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Abramson, H. N., "The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers.", *Southwest Research Institute*, NASA SP-106, Washington, DC, 1966.
- [2] Evans, D. V., and Linton, C. M., "Sloshing frequencies", *J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 46, Pt. 1, pp. 71-87, 1993.
- [3] Papaspyrou, S., Valougeorgis, D. and Karamanos, S. A., "Sloshing effects in half-full horizontal cylindrical vessels under longitudinal excitation.", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 71, No. 2, pp. 255-265, 2004.
- [4] Papaspyrou, S., Karamanos, S. A. and Valougeorgis, D., "Response of Half Full Horizontal Cylinders Under Transverse Excitation.", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 7, pp. 985-1003, 2004.
- [5] Karamanos, S. A., Patkas, L. A. and Platyrrachos, M. A., "Sloshing Effects on the Seismic Design of Horizontal-Cylindrical and Spherical Industrial Vessels.", *Journal of Pressure Vessel Technology*, ASME, Vol. 128, No. 3, pp. 328-340, 2006
- [6] Veletsos, A. S. and Yang, J. Y., "Earthquake Response of Liquid Storage Tanks", *2nd Engineering Mechanics Conference*, ASCE, Raleigh, NC, pp. 1-24, 1977.
- [7] Fischer, F. D., "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 587-601, 1979.
- [8] Fischer, F. D. & Rammerstorfer, F. G., "A Refined Analysis of Sloshing Effects in Seismically Excited Tanks", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 76, pp. 693-709, 1998.
- [9] Papaspyrou, S., "Analytical & Numerical Sloshing Solutions in Spherical and Horizontal-Cylindrical Vessels with Fluid-Structure Interaction.", *PhD*

- dissertation, Dept. Mechanical & Industrial Engrg, Univ. of Thessaly, Volos, Greece, to be completed, 2007.*
- [10] Budiansky, B., "Sloshing of liquids in circular canals and spherical tanks.", *Journal of Aerospace Sciences*, Vol. 27, pp. 161-173, 1960.
- [11] Chu, W.H., "Breathing vibrations of a partially filled cylindrical tank-linear theory.", *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 30, pp. 532-536, 1963.
- [12] Faltinsen, O.M., "A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow.", *Journal of Ship Research*, Vol. 22, pp. 193-202, 1978.
- [13] Fox, D.W., Kuttler, J.R., "Upper and lower bounds for sloshing frequencies by intermediate problems.", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 32, pp. 667-682, 1981.
- [14] Fox, D.W., Kuttler, J.R., "Sloshing frequencies.", *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 34, pp. 669-696, 1983.
- [15] Gupta, R.K., "Free vibrations of partially filled cylindrical tanks.", *Engineering Structures*, Vol. 17, pp. 221-230, 1995.
- [16] Haroun, M.A., "Vibration studies and tests of liquid storage tanks.", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 179-206, 1983.
- [17] Haroun, M.A., Housner, G.W., "Earthquake response of deformable liquid storage tanks.", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 411-417, 1981.
- [18] Isaacson, M., Subbiach, K., "Earthquake-induced sloshing in a rigid circular tank.", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 18, pp. 904-915, 1991.
- [19] McIver, P., "Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth.", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 201, pp. 243-257, 1989.

- [20] McIver, P., McIver, M., "Sloshing frequencies of longitudinal modes for a liquid contained in a trough.", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 252, pp. 525-541, 1993.
- [21] Moiseev, N.N., Petrov, A.A., "The calculation of free oscillations of a liquid in a motionless container.", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, pp. 91-154, 1966.
- [22] Natsiavas, S., "An analytical model for unanchored fluid-filled tanks under base excitation.", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 648-653, 1988.
- [23] Papaspyrou, S., et al., "Refined solutions of externally induced sloshing in half-full spherical containers.", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 129, pp. 1369-1379, 2003.
- [24] Rammerstorfer, F.G., et al., "Storage tanks under earthquake loading", *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 43, pp. 261-283, 1990.
- [25] Newmark M. N., "A method of computation for structural dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol 3, pp 67-94, 1959.
- [26] Anil K. Chopra, "Δυναμική των Κατασκευών", 3^η έκδοση, Αθήνα, Μ. Γκιούρδας, 2010.
- [27] Λιακόπουλος, Αντώνης, "Μηχανική Ρευστών/ Αντώνιος Λιακόπουλος", Αστρόβιλη Ροή, 1^η έκδοση, Θεσσαλονίκη, Τζιόλα, 2011.
- [28] Adrian Biran & Moshe Breiner, "Matlab 6 for Engineers", 3^η έκδοση, Θεσσαλονίκη, Τζιόλα, 2003.
- [29] Howard B. Wilson & Louis H. Turcotte, "Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using Matlab", 2nd edition, Florida, CRC Press LLC, 2000.

- [30] Duane Hanselman & Bruce Littlefield, "Mastering Matlab 7", United States of America, Pearson Prentice Hall, 2005.
- [31] Ευάγγελος Ε. Πλεύρης, "Βέλτιστος Σχεδιασμός Κατασκευών με Πολλαπλά Κριτήρια με Χρήση Στρατηγικών Εξέλιξης", Μεταπτυχιακή Εργασία, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2001.
- [32] Δημήτρης Παπαπροκοπίου, "Ανάλυση Κυματισμού της Ελεύθερης Επιφάνειας σε Κυλινδρικά και Αξονοσυμμετρικά Δοχεία Πίεσης με Πεπερασμένα Στοιχεία", Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2007.
- [33] Γεώργιος Χ. Δρόσος, "Επίδραση Κλυδασμού στη Σεισμική Απόκριση Σφαιρικών Δεξαμενών", Διατριβή Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2005.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000124120