

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Μ. Δ. Ε.**

**Εφαρμοσμένη Μηχανική  
και  
Προσομοίωση Συστημάτων**

**Μεταπτυχιακή Εργασία Ειδίκευσης**

**Συνθήκες Τοπικής Αστάθειας  
Διβάθμιου Μη Συντηρητικού Συστήματος  
στην Αρχική Θέση Ισορροπίας**

**Επιμέλεια: Β. Σ. Πανταζή, Πολ. Μηχ. Π.Θ.**

**Επιβλέπων: Δ. Σ. Σοφιανόπουλος, Επ. Καθ. Π.Θ.**

**Βόλος, Νοέμβριος 2008**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6735/1  
Ημερ. Εισ.: 14-01-2009  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ  
515.355  
ΠΑΝ

Αφιερωμένη στη μαμά μου...

.....Ευχαριστίες

Ευχαριστώ, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Δ. Σοφιανόπουλο για την καθοδήγηση, την κατανόηση και την υποστήριξη που μου παρείχε.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Πασχάλη, τον Κώστα, την Λίνα και την Ιωάννα για τις φιλικές συμβουλές τους και την στήριξη τους, καθώς επίσης και την Βάσια για την επιμέλεια των διαδικαστικών λεπτομερειών.

## ❖ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	2
1. Εισαγωγή.....	4
2. Τοπική ανάλυση.....	7
3. Το κριτήριο ευστάθειας των Liénard-Chipart.....	9
4. Μαθηματική Ανάλυση.....	11
5. Σκοπός της εργασίας : Ο αφόρτιστος πρόβολος ( $\lambda=0$ ).....	16
6. Αριθμητικά αποτελέσματα - συμπεράσματα.....	26
7. Σχόλια και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	35
<u>Βιβλιογραφία</u> .....	36

## Σκοπός και Αντικείμενο της Εργασίας

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών της σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Π.Θ., για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στο ευρύτερο γνωστικό αντικείμενο «Εφαρμοσμένη Μηχανική και Προσομοίωση Συστημάτων».

Ειδικότερα, η όλη εργασία βασίστηκε στο μεγαλύτερο μέρος της σε γνώσεις που αποκτήθηκαν στο μάθημα «Προχωρημένη Στατική και Δυναμική Ευστάθεια των Κατασκευών» και ιδιαίτερα στα κεφάλαια της ασυμπωτικής τοπικής αστάθειας διακεκριμένων μη συντηρητικών συστημάτων με απόσβεση. Πιο αναλυτικά, το παρόν πόνημα πραγματεύεται συνθήκες υπό τις οποίες το κλασσικό διβάθμιο μη συντηρητικό προσομοίωμα του ανεστραμμένου εκκρεμούς μπορεί να εμφανίσει τοπική στατική ή δυναμική αστάθεια *χωρίς την παρουσία εξωτερικής φόρτισης*, είτε τύπου αποκλίσεως (divergence) είτε τύπου πτερυγισμού (flutter).

Μετά τον συμβολικό υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου<sup>[8]</sup> (οι ρίζες του οποίου αποτελούν τις Ιακωβιανές ιδιοτιμές της τετριμμένης θέσης ισορροπίας) εξετάζονται οι πιθανές συνθήκες συνδυασμού των παραμέτρων του συστήματος (κατανομή μαζών και δυσκαμψιών, μορφή μητρώου απόσβεσης) που μπορούν να οδηγήσουν σε παραβίαση του κριτηρίου ευστάθειας των *Liénard-Chipart* με όλους τους δυνατούς τρόπους.

Βρέθηκε ότι για μηδενικό φορτίο είναι αδύνατη η απώλεια της ευστάθειας (μετά από μια ελάχιστη διαταραχή) μέσω διακλαδώσεων Hopf (τοπική διακλάδωση συνδιάστασης 1 - ζεύγος αμιγώς φανταστικών ιδιοτιμών) ενώ είναι δυνατή η απώλεια ευστάθειας μέσω ταλαντώσεων

συνεχώς αυξανόμενου εύρους με την παρουσία αρχικά μη ευσταθούς σημείου ισορροπίας της αρχικής θέσης ισορροπίας. Τούτο παρουσιάστηκε για non-Rayleigh μητρώο απόσβεσης με αντιθέτου προσήμου διαγώνια στοιχεία, εύρημα το οποίο έχει ήδη αναφερθεί και για Rayleigh μητρώα απόσβεσης του αντίστοιχου συντηρητικού συστήματος.

Προτείνεται η συνέχιση της μελέτης για την ανεύρεση παρομοίων συνθηκών υπό την παρουσία φορτίου μικρότερου του πρώτου κρίσιμου στην περιοχή αστάθειας του τύπου απόκλισης καθώς και η πλήρης ανάλυση σχετικών συνθηκών του συντηρητικού καταρχήν τριβάθμιου συστήματος με την παρουσία φυσιολογικού μητρώου απόσβεσης, στα πλαίσια σπουδών με σκοπό την απόκτηση διδακτορικού διπλώματος.

Βόλος, Νοέμβριος 2008

Η συντάξασα, Β. Σ. Πανταζή

Πολιτικός Μηχανικός Π.Θ.

Ο επιβλέπων, Δ. Σ. Σοφιανόπουλος

Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

## 1. Εισαγωγή

Όπως έχει δειχθεί σε πρόσφατες μελέτες<sup>[1,2]</sup>, βασισμένες σε τριβάθμια και διβάθμια συστήματα υπό μερικά εφαπτομενικές (μη συντηρητικές) δυνάμεις, σε μια μικρή περιοχή αστάθειας λόγω τύπου αποκλίσεως, ο πτερυγισμός (δυναμική αστάθεια) μπορεί να εκδηλωθεί πριν από την στατική αστάθεια αν μικρή απόσβεση λαμβάνει μέρος. Ο Bolotin<sup>[3]</sup> χρησιμοποιώντας ένα αεροελαστικό μοντέλο παρουσίασε ένα πανομοιότυπο αποτέλεσμα. Ο Παϊδούσης<sup>[4]</sup> απέδειξε ότι ο πτερυγισμός μπορεί να συμβεί σε ένα συντηρητικό σύστημα αλλά για μεγάλη απόσβεση. Ωστόσο, η επίδραση της απόσβεσης, όντας ύψιστης σπουδαιότητας σε μη συντηρητικά συστήματα, γενικά δεν λαμβανόταν υπόψη όταν αυτά τα συστήματα υπόκεινται σε ένα βηματικό συντηρητικό (δυναμικό) φορτίο. Αυτό συνέβαινε διότι ήταν ευρέως αποδεκτό ότι η δυναμική ευστάθεια σε μη συντηρητικά συστήματα, τα οποία είναι σταθερά, δεν αλλάζει αν συμπεριληφθεί η απόσβεση. Ο Κουνάδης και οι συνεργάτες του<sup>[5,6]</sup> σε δύο πρόσφατες δημοσιεύσεις έδειξε τις συνθήκες υπό τις οποίες τα παραπάνω αυτόνομα συστήματα υπό συντηρητικό φορτίο μπορούν να εμφανίσουν δυναμική διακλάδωση αστάθειας πριν από την περιοχή στατικής αστάθειας, το οποίο συμβαίνει για φορτίο  $\lambda < \lambda_1^c$ , όταν απειροστή απόσβεση συμπεριλαμβάνεται. Αυτοί οι τρόποι διακλάδωσης μπορούν να οδηγήσουν είτε σε μια διακλάδωση Hopf bifurcation που οδηγεί σε περιοδική κίνηση γύρω από κέντρα ή μια γενική Hopf bifurcation που οδηγεί σε περιοδικούς έλκτες ή σε πτερυγισμό.

Η ανάλυση μας ασχολείται με την πλέον γενική περίπτωση ενός  $n$  βαθμών ελευθερίας κινήσεων διακεκριμένου συστήματος, υπό μερικώς εφαπτομενική δύναμη  $\lambda$  σταθερού μεγέθους, η οποία συνδέεται με μια



παράμετρο μη συντηρητικότητας  $\eta$ . Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του Lagrange, που διέπουν την κίνηση κάθε χρονική στιγμή  $t$ , μέσω των γενικευμένων μετατοπίσεων  $q_i$  και ταχυτήτων  $\dot{q}_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) δίνονται από τη σχέση

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} - Q_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

όπου  $U$  είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος,  $K$  η κινητική ενέργεια,  $F$  οι δυνάμεις απόσβεσης (dissipative forces) και  $Q_i = Q_i(q_i, \eta, \lambda)$  γενικευμένες μη συντηρητικές δυνάμεις, που είναι γραμμικές συναρτήσεις της φόρτισης  $\lambda$  και μη γραμμικές συναρτήσεις των  $q_i, \eta$ . Τα  $\eta, \lambda$  αποτελούν τις κύριες παραμέτρους ελέγχου της συμπεριφοράς του συστήματος, για στατικές και δυναμικές διακλαδώσεις, καθώς επίσης και για την ευστάθεια των ισορροπιών και των οριακών κύκλων. Γενικά, έχει αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά ενός τέτοιου συστήματος ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση σε μορφή μητρώου-διανύσματος

$$\dot{y} = Y(y, \mu) \quad (2)$$

όπου  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y$  είναι μία γραμμική συνάρτηση-διάνυσμα, ενώ  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^T$  είναι το διάνυσμα παραμέτρων ελέγχου, που περιέχει  $m$  ανεξάρτητες παραμέτρους ελέγχου όπως  $\lambda, \eta, k_i$  (ακαμψίες με  $i \leq n/2$ ).

Με βάση τον ορισμό των δυναμικών διακλαδώσεων, όπου δυναμική διακλάδωση θεωρείται μια απότομη ποιοτική αλλαγή της απόκρισης του συστήματος, που εκδηλώνεται στο επίπεδο (ή χώρο) φάσεως, η οποία συμβαίνει για κάποια ορισμένη τιμή μιας ομαλά μεταβαλλόμενης παραμέτρου, η σειρά των διακλαδώσεων της εξίσωσης  $\dot{y} = Y(y, \mu)$

αντιστοιχεί σε εκείνες τις τιμές του  $\mu$  για τις οποίες το  $Y$  καθίσταται ένα «δομικά» ασταθές δυναμικό σύστημα. Για αυτό το διακλαδικό σύστημα η εξίσωση ικανοποιείται για τις μηδενικές λύσεις ( $y=0$ ), για όλες τις τιμές των παραμέτρων ελέγχου, δηλαδή  $Y(0,\mu)=0$ , ενώ τα σημεία στην εξίσωση που αναπαριστούν ισορροπίες βρίσκονται από την εξίσωση  $Y(y,\mu)=0$ , η οποία ορίζει ένα πολλαπλό  $m$  διαστάσεων, το οποίο αναπαριστά μια σύνθετη επιφάνεια εργασίας, της οποίας τα σημεία ισορροπίας μπορεί να είναι ευσταθή ή ασταθή. Τα ευσταθή σημεία ισορροπίας  $y^E$  του αρχικά ευσταθούς δρόμου ισορροπίας πάνω σ'αυτήν την επιφάνεια καθορίζονται με ιδιοτιμές

$$\text{της Ιακωβιανής } Y_y(y^E, \mu) = \frac{\partial Y(y^E, \mu)}{\partial y} \quad (3)$$

που είναι συζυγείς μιγαδικές ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη. Είναι γνωστό ότι όταν τα πραγματικά μέρη όλων των ιδιοτιμών είναι διάφορα του μηδενός, το σημείο ισορροπίας καλείται υπερβολικό.

Οι περιπτώσεις εμφάνισης «σημείου διακλάδωσης» είναι τρεις:

1. Όταν ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας της  $Y(y,\mu)=0$  καθίσταται μη-υπερβολικό (τουλάχιστον μία ιδιοτιμή της Ιακωβιανής έχει μηδενικό πραγματικό μέρος, δηλαδή είναι αμιγώς φανταστική ή έχει μηδενιστεί),
2. Όταν μια υπερβολική περιοδική τροχιά καθίσταται μη υπερβολική (τουλάχιστον ένας χαρακτηριστικός πολλαπλασιαστής έχει μοναδιαίο μέτρο) και
3. Όταν υπάρχουν τροχιές που συνδέουν σημεία σέλας.

Οι διακλαδώσεις του πρώτου και μερικές φορές του δεύτερου είδους είναι τοπικές και συνήθως μπορούν να εντοπιστούν μέσω μιας τοπικής γραμμικής

ανάλυσης, με βάση την Ιακωβιανή. Αντίθετα, οι διακλαδώσεις του τρίτου είδους είναι καθολικές και γενικά αντιμετωπίζονται μόνο με εφαρμογή μιας καθολικής μη γραμμικής ανάλυσης. Πάντως, η ευστάθεια ή η αστάθεια των κρίσιμων σημείων όλων των ανωτέρω διακλαδώσεων μπορούν να μελετηθούν μόνο με εφαρμογή μη γραμμικής ανάλυσης.

## 2. Τοπική ανάλυση

Η χαρακτηριστική εξίσωση που προέρχεται από το Ιακωβιανό μητρώο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\left| \rho^2 [a_{ij}] + \rho [c_{ij}] + [V_{ij}] \right| = 0 \quad (4)$$

όπου  $[a_{ij}]$  ένα θετικά ορισμένο μητρώο, που σχετίζεται με την συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος,  $[c_{ij}]$  ένα μη αρνητικά ορισμένο μητρώο απώλειας ενέργειας λόγω απόσβεσης και  $[V_{ij}]$  είναι γενικά ένα ασύμμετρο μητρώο συνολικής δυσκαμψίας για μη συντηρητικά συστήματα. Μηδενίζοντας την ορίζουσα του μητρώου  $[V_{ij}]$ ,

$$\det [V_{ij}] = |V_{ij}| = 0 \quad (5)$$

καταλήγουμε στην εξίσωση του στατικού λυγισμού (αποκλίσεως), από την οποία λαμβάνουμε τις τιμές των φορτίων λυγισμού.

Η εξίσωση (4) μετά από ανάπτυξη της ορίζουσας λαμβάνει την μορφή του ακόλουθου αλγεβρικού πολυωνύμου

$$\varphi(\rho) = \rho^{2n} + \alpha_1 \rho^{2n-1} + \alpha_2 \rho^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-1} \rho + \alpha_{2n} = 0 \quad (6)$$

$$\text{με } \alpha_1 = -\text{tr} Y_y = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_{ii} = \sum_{i=1}^{2n} \rho_i, \quad \alpha_{2n} = \det(Y_y) = \det[\tilde{V}_{ij}] = \prod_{i=1}^{2n} \rho_i$$

και  $[\tilde{c}_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1} [c_{ij}]$ ,  $[\tilde{V}_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1} [V_{ij}]$ ,  $\rho_i$  οι Ιακωβιανές ιδιοτιμές. Οι συντελεστές  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, 2n$ ) υπολογίζονται με τους τύπους του Bôcher.

Από τους συντελεστές  $\alpha_1 - \alpha_{2n}$ , ο  $\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{c}_{ij})$  είναι πάντα θετικός (σχετίζεται με δείκτες απόσβεσης), οι  $\alpha_2 - \alpha_{2n-1}$  είναι συναρτήσεις των  $\lambda, \eta, k_i$  και  $\tilde{c}_{ij}$  ενώ ο  $\alpha_{2n} = \alpha_{2n}(\lambda, \eta, k_i)$ , που σημαίνει ότι η εξίσωση λυγισμού (5) υποδηλώνει ότι  $\alpha_{2n} = 0$ .

Συνεπώς, οι τοπικές διακλαδώσεις μελετώνται εξετάζοντας την φύση των ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος, που σχετίζεται με την Ιακωβιανή. Αυτή εξαρτάται από το μητρώο  $\mu$  (παραμέτρων ελέγχου), του οποίου μια ελάχιστη μεταβολή μπορεί να οδηγήσει σε απότομες αλλαγές μιας ή μερικών ιδιοτιμών, με αποτέλεσμα τα φαινόμενα διακλάδωσης. Κρατώντας σταθερές τις τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων, για μικρές τιμές της φόρτισης  $\lambda$  ο αρχικός δρόμος είναι ευσταθής και τα αντίστοιχα (υπερβολικά) σημεία ισορροπίας έχουν ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη. Αυξανόμενου του  $\lambda$ , με τις υπόλοιπες παραμέτρους να παραμένουν σταθερές, σε ένα διακλαδικό σημείο η αντίστοιχη κρίσιμη κατάσταση ισορροπίας καθίσταται μη υπερβολική, με αποτέλεσμα η Ιακωβιανή να γίνεται ανώμαλη, οπότε τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις μπορούν να συμβούν:

1. Μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας με μια μηδενική (πραγματική) ιδιοτιμή
2. Μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας με ένα ζεύγος αμιγώς φανταστικών ιδιοτιμών

3. Μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας με μία διπλή μηδενική (πραγματική) ιδιοτιμή.

Η πρώτη περίπτωση συνδέεται με τη λεγόμενη αστάθεια λόγω αποκλίσεως και δύναται να μελετηθεί από πλευράς αστάθειας με μία μη γραμμική στατική ανάλυση. Η δεύτερη αποτελεί μια τυπική περίπτωση δυναμικής αστάθειας, που καλείται περυγισμός (αυτοδιεγειρόμενες ταλαντώσεις), οπότε το σύστημα διακλαδίζεται σε οριακούς κύκλους ευσταθείς (περιοδικούς έλκτες) ή ασταθείς. Η τρίτη περίπτωση συνδέεται με οριακούς κύκλους, παρόλο που η αντίστοιχη δυναμική διακλάδωση συμβαίνει για ένα στατικό φορτίο λυγισμού (απόκλιση). Γενικά, διακλαδώσεις που σχετίζονται με σημειακό έλκτη είναι στατικές ενώ αυτές που σχετίζονται με περιοδικό έλκτη (οριακούς κύκλους) είναι δυναμικές.

### 3. Το κριτήριο ευστάθειας των Liénard-Chipart<sup>[9]</sup>

Για να έχει ένα πολυώνυμο της μορφής

$$f(z) = \alpha_0 z^{2n} + \alpha_1 z^{2n-1} + \alpha_2 z^{2n-2} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (\alpha_0 > 0) \quad (7)$$

με πραγματικούς συντελεστές, όλες τις ρίζες του με αρνητικό πραγματικό μέρος, οι *ικανές* και *αναγκαίες* συνθήκες είναι οι εξής:

- (1) όλοι οι συντελεστές του να είναι θετικοί, δηλαδή

$$\alpha_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8a)$$

- (2) να ισχύουν οι ανισότητες

$$\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \dots, \quad (8b)$$

όπου  $\Delta_k$  η ορίζουσα Hurwitz κ τάξης, οι οποία ορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μορφής

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n$$

μέσω της οποίας προσδιορίζονται οι  $n$  ιδιοτιμές του  $n \times n$  τετραγωνικού μητρώου  $A$ , όπου  $I$  το μοναδιαίο μητρώο.

Οι ορίζουσες **Routh - Hurwitz** του ανωτέρω πολυωνύμου ορίζονται ως

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2k-1} & b_{2k-2} & b_{2k-3} & b_{2k-4} & b_{2k-5} & b_{2k-6} & \dots & b_k \end{vmatrix}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν οι περιττής τάξης ορίζουσες Hurwitz είναι θετικές τότε θα είναι επίσης θετικές και οι άρτιας τάξης και το αντίστροφο. Αυτό δε ισχύει ακόμα και αν μόνο μερικοί από τους συντελεστές  $a_i$  του  $f(z)$  είναι θετικοί (και όχι απαραίτητα όλοι). Σύμφωνα με αυτά το κριτήριο Liénard-Chipart λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει ένα πολυώνυμο της μορφής (7), με πραγματικούς συντελεστές, όλες τις ρίζες του με αρνητικό πραγματικό μέρος μπορεί να δοθούν με οποιαδήποτε από τις παρακάτω μορφές

$$(1) \quad \alpha_n > 0, \alpha_{n-2} > 0, \dots; \text{ με } \begin{cases} \text{είτε } \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \\ \text{είτε } \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \end{cases} \quad (9a)$$

$$(2) \quad \alpha_n > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_{n-3} > 0, \dots; \text{ με } \begin{cases} \text{είτε } \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \\ \text{είτε } \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \end{cases} \quad (9b)$$

Ειδικότερα, για ένα διβάθμιο σύστημα, η χαρακτηριστική εξίσωση (6) λαμβάνει την μορφή

$$\rho^4 + \alpha_1 \rho^3 + \alpha_2 \rho^2 + \alpha_3 \rho + \alpha_4 = 0 \quad (\alpha_0 = 1) \quad (10)$$

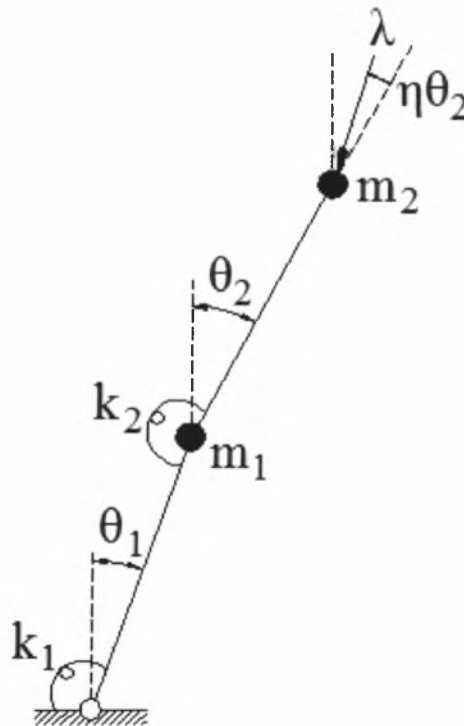
οπότε σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο όλες οι ρίζες της (10) θα έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη αν ισχύει ότι

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \Delta_1 = \alpha_1 > 0 \\ \Delta_3 = \alpha_3(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha_1^2\alpha_4 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Προφανώς, από την τελευταία ανισότητα προκύπτει άμεσα ότι  $\alpha_3 > 0$ . Άρα η θετικότητα των  $\alpha_1$  και  $\alpha_3$  εξασφαλίστηκε με τις παραπάνω συνθήκες.

#### 4. Μαθηματική Ανάλυση

Θεωρούμε το διβάθμιο μη συντηρητικό προσομοίωμα του προβόλου που φαίνεται στο σχήμα 1, για το οποίο θα μελετηθεί με λεπτομέρεια η επιρροή της παραβίασης μιας ή περισσότερων των συνθηκών των Liénard-Chirpact στην ασυμπτωτική ευστάθεια του.



Σχήμα 1

Η απόκριση αυτού του δυναμικού μοντέλου εκ δύο συγκεντρωμένων μαζών και αντιστοίχων γραμμικών ελατηρίων και αποσβέσεων μελετάται είτε χωρίς

φορτίο είτε φορτισμένο με αιφνίδια επιβαλλόμενη δύναμη στην κορυφή του άπειρης διάρκειας και μερικά εφαπτομενικής φύσης (μη συντηρητικό), χαρακτηριζόμενο από μια παράμετρο μη συντηρητικότητας  $\eta$ . Θα εξεταστεί δε ειδικότερα η επιρροή μικρού μεγέθους απόσβεσης και ανομοιόμορφης κατανομής μαζών και δυσκαμψιών.

Η αναζήτηση αμιγώς φανταστικών ιδιοτιμών της τετριμμένης θέσης ισορροπίας (δηλαδή τέτοιων ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης), που αντιπροσωπεύει το σύνορο μεταξύ δυναμικής ευστάθειας και αστάθειας, αποτελεί πρωταρχικό μέλημα της όλης ανάλυσης, χωρίς να αποκλείονται πολλαπλές τέτοιου είδους ρίζες που ισοδυναμούν με τοπική δυναμική αστάθεια.

Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης του εξεταζόμενου μοντέλου είναι οι ακόλουθες:

$$\left. \begin{aligned} (1+m)\ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\beta_1 + \beta_2)\dot{\vartheta}_1 - \beta_2\dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_1} &= 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 + \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \beta_2\dot{\vartheta}_2 - \beta_1\dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = \dot{\vartheta}_1(0) = \dot{\vartheta}_2(0) = 0 \quad (13)$$

όπου  $m=m_1/m_2$ ,  $\lambda=Pl/k_2$ ,  $k=k_1/k_2$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \vartheta_1} &= (1+k)\vartheta_1 - \vartheta_2 - \lambda \sin[\vartheta_1 + (n-1)\vartheta_2] \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta_2} &= (\vartheta_2 - \vartheta_1) - \lambda \sin \eta \vartheta_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ενώ ο αδιαστατοποιημένος χρόνος είναι  $\tau = t(k_1 / m_2 l^2)^{1/2}$



Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, τα μητρώα  $[\alpha_{ij}]$ ,  $[V_{ij}]$  υπολογιζόμενα στην τετριμμένη θέση ( $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ ) καθώς και το μητρώο απόσβεσης  $[c_{ij}]$  γράφονται ως ακολούθως:

$$[\alpha_{ij}] = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, [V_{ij}] = \begin{pmatrix} k+1-\lambda & -1-\lambda(\eta-1) \\ -1 & 1-\eta\lambda \end{pmatrix} \quad (15a)$$

$$[c_{ij}] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (15b)$$

Οι συντελεστές  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  και  $a_4$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης (10) υπολογίζονται συμβολικά όπως ακολουθεί:

```

ClearAll[a1, a2, a3, a4, a11, a12, a22, c1, c2, c11, c12, c22, V, λ,
  D3, k, m, t, η, λ, CC, DC, V, V11, V12, V22, S1, S2, ρ, MM, λ, B, Γ]
c11 = c1 + c2;
c12 = -c2;
c22 = c2;
a11 = 1 + m;
a12 = 1;
a22 = 1;
Text[Style["Μητρώο Μαζών", Bold, 14]]
MM =  $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{pmatrix}$ ;
MatrixForm[MM]
Text[Style["Μητρώο Δυναμικής Ενέργειας", Bold, 14]]
V11 = k + 1 - λ;
V12 = -1 - λ * (η - 1);
V21 = -1;
V22 = 1 - λ * η;
V =  $\begin{pmatrix} V11 & V12 \\ V21 & V22 \end{pmatrix}$ ;
MatrixForm[V]
Text[Style["Μητρώο Απόσβεσης", Bold, 14]]
CC =  $\begin{pmatrix} c11 & c12 \\ c12 & c22 \end{pmatrix}$ ;
MatrixForm[CC]
Text[Style["Ορίζουσα Μητρώου Απόσβεσης", Bold, 14]]
DC = Det[CC]
S1 = ρ2 MM + ρ CC + V;
Text[Style["Χαρακτηριστικό Πολύωνυμο", Bold, 14]]

```

**MatrixForm[S1]**

$$S2 = \frac{1}{m} \text{Det}[S1]$$

**Collect[%, ρ, Simplify]**

**CoefficientList[%, ρ]**

**a1 = Coefficient[S2, ρ, 3]:**

**Text[Style["Συντελεστής α1", Bold, 14]]**

**FullSimplify[a1]**

**a2 = Coefficient[S2, ρ, 2]:**

**Text[Style["Συντελεστής α2", Bold, 14]]**

**FullSimplify[a2]**

**a3 = Coefficient[S2, ρ, 1]:**

**Text[Style["Συντελεστής α3", Bold, 14]]**

**FullSimplify[a3]**

**a4 = Coefficient[S2, ρ, 0]:**

**Text[Style["Συντελεστής α4", Bold, 14]]**

**FullSimplify[a4]**

**Collect[%, λ]**

Out[742]= **Μητρώο Μαζών**

Out[744]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 + m & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[746]= **Μητρώο Δυναμικής Ενέργειας**

Out[751]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 + k - \lambda & -1 - (-1 + \eta) \lambda \\ -1 & 1 - \eta \lambda \end{pmatrix}$$

Out[752]= **Μητρώο Απόσβεσης**

Out[754]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} c1 + c2 & -c2 \\ -c2 & c2 \end{pmatrix}$$

Out[755]= **Οριζουσα Μητρώου Απόσβεσης**

Out[756]=  $c1 c2$

Out[758]= **Χαρακτηριστικό Πολύωνυμο**

Out[759]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 + k - \lambda + (c1 + c2) \rho + (1 + m) \rho^2 & -1 - (-1 + \eta) \lambda - c2 \rho + \rho^2 \\ -1 - c2 \rho + \rho^2 & 1 - \eta \lambda + c2 \rho + \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out[760]} = \frac{1}{m} (k - 2\eta\lambda - k\eta\lambda + \eta\lambda^2 + c1\rho + c2k\rho - c1\eta\lambda\rho - 2c2\eta\lambda\rho + 4\rho^2 + c1c2\rho^2 + k\rho^2 + m\rho^2 - 2\lambda\rho^2 - m\eta\lambda\rho^2 + c1\rho^3 + 4c2\rho^3 + c2m\rho^3 + m\rho^4)$$

$$\text{Out[761]} = \frac{k - k\eta\lambda + \eta(-2 + \lambda)\lambda}{m} + \frac{(c1 + c2k - c1\eta\lambda - 2c2\eta\lambda)\rho}{m} + \frac{(4 + c1c2 + k + m - 2\lambda - m\eta\lambda)\rho^2}{m} + \frac{(c1 + c2(4 + m))\rho^3}{m} + \rho^4$$

$$\text{Out}[762]= \left\{ \frac{k - k \eta \lambda + \eta (-2 + \lambda) \lambda}{m}, \frac{c1 + c2 k - c1 \eta \lambda - 2 c2 \eta \lambda}{m}, \right. \\ \left. \frac{4 + c1 c2 + k + m - 2 \lambda - m \eta \lambda}{m}, \frac{c1 + c2 (4 + m)}{m}, 1 \right\}$$

Out[764]= **Συντελεστής α1**

$$\text{Out}[765]= \frac{c1 + c2 (4 + m)}{m}$$

Out[767]= **Συντελεστής α2**

$$\text{Out}[768]= \frac{4 + c1 c2 + k + m - (2 + m \eta) \lambda}{m}$$

Out[770]= **Συντελεστής α3**

$$\text{Out}[771]= \frac{c1 + c2 k - (c1 + 2 c2) \eta \lambda}{m}$$

Out[773]= **Συντελεστής α4**

$$\text{Out}[774]= \frac{k - k \eta \lambda + \eta (-2 + \lambda) \lambda}{m}$$

και προκύπτουν ίσοι με

$$\alpha_1 = \frac{1}{m} [\beta_1 + (m + 4) \beta_2], \quad \alpha_2 = \frac{1}{m} [\beta_1 \beta_2 + k + m + 4 - \lambda (2 + m \eta)]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{m} [\beta_1 (1 - \eta \lambda) + \beta_2 (k - 2 \eta \lambda)], \quad \alpha_4 = \frac{1}{m} [\eta \lambda^2 - \eta \lambda (k + 2) + k] \quad (16)$$

Το όριο μεταξύ αστάθειας αποκλίσεως (στατικής) και πτερυγισμού (δυναμικής) υπολογίζεται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων  $\alpha_4 = d\alpha_4 / d\lambda = 0$ , και είναι ανεξάρτητο των  $m$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Με τον τρόπο αυτό

λαμβάνουμε το διπλό σημείο

$$\eta_0 = \frac{4k}{(k+2)^2}, \quad \lambda_0^c = \frac{k+2}{2} \quad (17)$$

Προφανώς, το μέγιστο  $\eta_0=1/2$  (για  $k=2$ ), ενώ για  $k=1$  τότε  $\eta_0=4/9$  και  $\lambda_0^c=3/2$ . Επίσης όταν το  $\eta_0$  τείνει στο μηδέν είτε το  $k$  μηδενίζεται είτε απειρίζεται, οπότε το διπλό σημείο λαμβάνει τιμές μεταξύ 0 και  $1/2$ .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν η παράμετρος  $\eta$  λαμβάνει τιμές μεταξύ  $\eta=0$  (πλήρως εφαπτομενικό φορτίο) και  $\eta=1$  (συντηρητικό φορτίο), για  $k \rightarrow 0$  αλλά και για  $k \rightarrow \infty$ , η περιοχή αστάθειας τύπου αποκλίσεως καθίσταται μέγιστη ( $\eta_0 \rightarrow 0$ ), με παράλληλη τάση εξαφάνισης της περιοχής μη ύπαρξης γειτονικών ισορροπιών. Για  $k=2$  όμως η τελευταία αυτή περιοχή γίνεται μέγιστη ( $0 < \eta < 1/2$ ), ενώ η περιοχή αποκλίσεως εξαφανίζεται για  $\eta < 0.50$ . Για  $k > 2$  η περιοχή αυτή επανεμφανίζεται και αυξάνεται αυξανόμενου του  $k$ . Επισημαίνεται ότι το  $\lambda^c$  (στατικό φορτίο) λαμβάνεται από τον μηδενισμό του συντελεστή  $a_4$  και ισούται με

$$\lambda_{1,2}^c = \frac{1}{2} \left\{ k + 2 \pm \sqrt{(k+2)^2 - \frac{4k}{\eta}} \right\} \quad (18)$$

Επίσης, οι καμπύλες  $(\eta, \lambda^c)$  για διάφορα  $k$  διέρχονται από το ακραίο διπλό σημείο  $\eta_0 = 0.50$ ,  $\lambda^c = 2$ , που αντιστοιχεί στον πλήρως πακτωμένο πρόβολο.

Αναζητούμε κατά συνέπεια περιπτώσεις, που αντιστοιχούν σε συνδυασμούς των παραμέτρων  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $m$ ,  $\eta$ , όπου η δυναμική αστάθεια πιθανώς να συμβαίνει πριν την στατική, δηλαδή για τιμές του  $\lambda < \lambda_1^c$ . Έτσι, διερευνούμε το πρόσημο των  $\Delta_3$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  και  $a_4$  καθώς και τις αντίστοιχες αλλαγές στον τύπο των ιδιοτιμών - ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης αυξανόμενου του  $\lambda$ , θεωρώντας ότι ο δρόμος ισορροπίας είναι αρχικά ευσταθής.

##### 5. Σκοπός της εργασίας : Ο αφόρτιστος πρόβολος ( $\lambda=0$ )

(α)  $a_1=0$  με  $a_2 > 0$ . Αν λοιπόν  $a_1=0$  που οδηγεί σε πάντα αρνητική  $\Delta_3$  ( $= -a_3^2$ ) τότε θα ισχύει ότι

$$\beta_1 + (m+4)\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1^2 + (m+4)\beta_1\beta_2 = 0 \quad (19)$$

και καθόσον  $\beta_1\beta_2 = \det[C]$  η παραπάνω ισότητα ικανοποιείται μόνο αν το μητρώο απόσβεσης  $C$  είναι αόριστο δηλαδή  $\beta_1\beta_2 < 0$ . Κατά συνέπεια, όπως ισχύει και στο αντίστοιχο συντηρητικό σύστημα με κλασσική απόσβεση, διαπιστώνουμε ότι το αφόρτιστο (ευσταθές) σύστημα καθίσταται ασταθές δυναμικά για οποιαδήποτε μικρή διαταραχή σε περίπτωση αόριστου μητρώου απόσβεσης ακόμα και για ελάχιστες τιμές των επιμέρους αποσβέσεων. Αφού πλέον όλοι οι συντελεστές χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι θετικοί αυτή δεν μπορεί να έχει θετική ρίζα αλλά ούτε και ένα ζεύγος αμιγώς φανταστικών ιδιοτιμών (που θα σχετιζόταν με το μηδενισμό της  $\Delta_3$ ) καθόσον  $\Delta_3 < 0$  ως ανωτέρω. Άρα η (10) θα έχει είτε δύο αρνητικές ρίζες και ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών με θετικό πραγματικό μέρος είτε δύο ζεύγη συζυγών μιγαδικών ριζών με αντίθετα πραγματικά μέρη. Και σε αμφότερες τις καταστάσεις υποδηλώνεται τοπική δυναμική αστάθεια.

(β)  $\alpha_2=0$  με  $\alpha_1>0$ . Αν  $\alpha_2=0$  (οπότε και πάλι  $\Delta_3 = -(\alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_4) < 0$ ) θα ισχύει ότι :

$$\beta_1\beta_2 = \det[C] = -k - m - 4 \quad (20)$$

γεγονός που σημαίνει ότι το μητρώο απόσβεσης είναι εκ νέου αόριστο αλλά με ιδιαζόντως μεγάλη αρνητική τιμή της ορίζουσας του (μάλλον μη ρεαλιστική κατάσταση). Καθόσον το κριτήριο Liénard-Chipart παραβιάζεται το προσομοίωμα είναι πάλι τοπικά δυναμικά ασταθές και ισχύουν τα προηγουμένως αναφερθέντα για τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

(γ)  $\Delta_3=0$ . Συνδυάζοντας την έκφραση της  $\Delta_3$  από την (11) και τις σχέσεις (16), η  $\Delta_3$  μπορεί να γραφεί υπό μορφή πολυωνύμου δευτέρου βαθμού ως προς  $\lambda$  ως εξής:

$$A\lambda^2 + B\lambda + \Gamma = 0 \quad (B^2 \geq 4A\Gamma) \quad (21)$$

Οι συντελεστές A, B, Γ υπολογίζονται επίσης συμβολικά

$$D3 = \begin{pmatrix} a1 & 1 & 0 \\ a3 & a2 & a1 \\ 0 & a4 & a3 \end{pmatrix};$$

`t = ExpandAll[m^3 * Det[D3]];`

`Text[Style["Η Ορίζουσα Δ3 υπό μορφή πολυωνύμου 2ου βαθμού ως προς λ",  
Bold, 14]]`

`Text[Style["της μορφής Aλ2+Bλ+Γ", Bold, 14]]`

`Text[Style["Συντελεστής A", Bold, 14]]`

`A = Coefficient[t, λ, 2];`

`FullSimplify[%]`

`Text[Style["Συντελεστής B", Bold, 14]]`

`B = Coefficient[t, λ, 1];`

`FullSimplify[%]`

`Text[Style["Συντελεστής Γ", Bold, 14]]`

`Γ = Coefficient[t, λ, 0];`

`FullSimplify[%]`

Out[778]= Η Ορίζουσα Δ3 υπό μορφή πολυωνύμου 2ου βαθμού ως προς λ

Out[779]= της μορφής Aλ<sup>2</sup>+Bλ+Γ

Out[780]= Συντελεστής A

Out[782]=  $\eta (c1^2 + c2^2 m (-4 - m + 2 (2 + m) \eta) + c1 c2 (4 + m (2 + m) \eta))$

Out[783]= Συντελεστής B

Out[785]=  $-c1^3 c2 \eta - 2 c2^2 k (4 + m - 4 \eta - 3 m \eta) - 2 c1 c2 (4 + k + m + (4 - k (1 + m) + m (3 + m) + c2^2 (4 + m)) \eta) - c1^2 (2 + (2 + c2^2 (6 + m)) \eta)$

Out[786]= Συντελεστής Γ

Out[788]=  $(c1 + 4 c2) (c1 (4 + c1 c2) + c1 c2^2 k + c2 k^2) + c1 c2 (8 + c1 c2 + (-2 + c2^2) k) m + c1 c2 m^2$

αν δε προβούμε στην αντικατάσταση ( $\beta = \beta_1 / \beta_2$ ) οι εν λόγω συντελεστές

γράφονται ως

$$A = \eta \left[ (\beta + 2)^2 - (m + 2)^2 + m\eta(\beta + 2)(m + 2) \right]$$

$$B = -2(\beta + m + 4)(\beta + k) - \eta \left[ m(\beta + k)(m - \beta) + (m + \beta + 4) \{ \beta_1 \beta_2 (\beta + 2) + (\beta - k)(m + 2) \} \right]$$

$$\Gamma = 4\beta^2 + \beta m^2 + \beta k^2 + 4k^2 + 16\beta + 8\beta m - 2\beta k m + (\beta + m + 4)(\beta + k) \beta_1 \beta_2 \quad (22)$$

Για  $\lambda=0$  απαιτείται ο μηδενισμός του  $\Gamma$ , ο οποίος πραγματοποιούμενος **συμβολικά** (Mathematica) με άγνωστο την παράμετρο  $\beta$ , οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση:

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2(4+c)} \left[ -16 - 4c - ck - k^2 - 8m - cm + 2km - m^2 \pm \sqrt{16 + 8c + c^2 + 8k + 2ck + k^2 + 8m + 2cm - 2km + m^2} \right] \quad (23)$$

όπου  $c = \beta_1 \beta_2 = \det[C]$ .

Προφανώς, η ποσότητα στο υπόρριζο θα πρέπει να είναι μη αρνητική, με θετικές δε τις ποσότητες  $k$  και  $m$  (όπως επιβάλλεται για ένα φυσικό σύστημα) οδηγούμεθα εκ νέου **συμβολικά** (μέσω της εντολής **Reduce**) στις ακόλουθες συνθήκες:

$$[c \leq X_1 = -4 - k - m - 2\sqrt{km}] \vee [c \geq X_2 = -4 - k - m + 2\sqrt{km}] \quad (24)$$

Στις ανωτέρω ανισότητες η παράσταση  $X_1$  είναι προφανώς πάντοτε αρνητική, ενώ η παράσταση  $X_2$  επίσης αρνητική, όπως προκύπτει συμβολικά. Τεκμαίρεται συνεπώς ότι υπάρχει αρχικά δυνατότητα μηδενισμού του  $\Gamma$ , και για μη αρνητικές τιμές της ορίζουσας του μητρώου απόσβεσης. Θέτοντας  $c=0$  και απαιτώντας το προκύπτον υπόρριζο στην (23) να μηδενιστεί, διαπιστώνουμε ότι τούτο είναι ανέφικτο για  $k, m > 0$ . Ακολουθεί η λίστα του αντίστοιχου προγράμματος Mathematica.

```

In[107]:= ClearAll[k, m, β, c, Γ, Ψ, Ξ, a, s1, s2]
Γ = FullSimplify[4 β2 + β m2 + β k2 + 4 k2 + 16 β + 8 β m - 2 β k m +
  (β + m + 4) (β + k) c];
Collect[Γ, β];
Collect[Γ, c];
Solve[Γ == 0, β]
Ψ = 16 + 8 c + c2 + 8 k + 2 c k + k2 + 8 m + 2 c m - 2 k m + m2
Reduce[Ψ ≥ 0 && k > 0 && m > 0]
Print[
  "-----"
  "--"]
Ξ = -4 - k - m + 2 √k m
Reduce[Ξ ≥ 0 && k > 0 && m > 0]
Print[
  "-----"
  "--"]
a = Ψ /. c → 0
b = 16 + 8 k + k2 + 8 m - 2 k m + m2
Solve[b == 0, k]

Out[107]= {{β →  $\frac{1}{2(4-c)} \left( -16 - 4c - ck - k^2 - 8m - cm - 2km - m^2 - \right.$ 
   $\left. (-4 - k - m) \sqrt{16 - 8c + c^2 - 8k - 2ck + k^2 - 8m + 2cm - 2km - m^2} \right)$ },
  {β →  $\frac{1}{2(4-c)} \left( -16 - 4c - ck - k^2 - 8m - cm - 2km - m^2 - \right.$ 
   $\left. (-4 + k - m) \sqrt{16 - 8c + c^2 - 8k + 2ck - k^2 - 8m - 2cm - 2km - m^2} \right)$ }}

Out[108]= 16 - 8 c + c2 + 8 k + 2 c k + k2 + 8 m + 2 c m - 2 k m - m2
Out[109]= m > 0 && k > 0 && (c ≤ -4 - k - m - 2 √k m || c ≥ -4 - k - m - 2 √k m)
-----
Out[110]= -4 - k - m + 2 √k m
Out[111]= False
-----
Out[112]= 16 + 8 k + k2 + 8 m - 2 k m - m2
Out[113]= 16 + 8 k + k2 + 8 m - 2 k m + m2
Out[120]= {{k → -4 - 4 √-m + m}, {k → -4 + 4 √-m + m}}

```

Στη συνέχεια, και καθώς οι ποσότητες  $\beta_1\beta_2=c$  και  $\beta=\beta_1/\beta_2$  είναι ομόσημες, αναζητούνται συνθήκες που η ανωτέρω ιδιότητα να ικανοποιείται για συνδυασμό των σχέσεων (23) και (24) χωρίς να παραβιάζονται οι υπόλοιπες συνθήκες, δηλαδή με  $a_1, a_2, a_3$  θετικά. Για να ικανοποιείται η πρώτη των (24) και το ομόσημο των παραπάνω ποσοτήτων προκύπτει το ακόλουθο συμβολικό αποτέλεσμα, όπου  $\&\& = \wedge$  (σύζευξη) και  $| | = \vee$  (διάζευξη):



```

ClearAll[k, m, β, c, Γ, Ψ, Ξ, a, s1, s2, a1, a2, a3, a4, c1, c2]
λ = 0
a1 = 1/m * ((4 + m) * c2 + c1);
a2 = 1/m * (c1 * c2 + k + m + 4 - λ * (2 + m * η));
a3 = 1/m * (c1 * (1 - η * λ) + c2 * (k - 2 * η * λ));
a4 = 1/m * (η * λ^2 - η * (k + 2) * λ + k);
D3 =  $\begin{pmatrix} a1 & 1 & 0 \\ a3 & a2 & a1 \\ 0 & a4 & a3 \end{pmatrix}$ ;
t = m^3 * Det[D3];
Γ = FullSimplify[4 β^2 + β m^2 + β k^2 + 4 k^2 + 16 β + 8 β m - 2 β k m + (β + m + 4) (β + k) c];
Collect[Γ, β];
Collect[Γ, c];
Solve[Γ == 0, β];
Ψ = 16 + 8 c + c^2 + 8 k + 2 c k + k^2 + 8 m + 2 c m - 2 k m + m^2;
Reduce[Ψ ≥ 0 && k > 0 && m > 0];

Ξ = -4 - k - m + 2 √k m;
Reduce[Ξ ≥ 0 && k > 0 && m > 0];
(*k>0, c> 0;
*16+8 c-k-k^2+8 m-2 k m+m^2;
*Solve[h=0,k] *)
s1 =
1 / (2 (4 + c)
(-16 - 4 c - c k - k^2 - 8 m - c m + 2 k m - m^2 - (-4 + k - m) √(16 + 8 c + c^2 + 8 k + 2 c k + k^2 + 8 m + 2 c m - 2 k m + m^2)))
s2 =
1 / (2 (4 + c)
(-16 - 4 c - c k - k^2 - 8 m - c m + 2 k m - m^2 + (-4 + k - m) √(16 + 8 c + c^2 + 8 k + 2 c k + k^2 + 8 m + 2 c m - 2 k m + m^2)))
Reduce[s1 < 0 && c ≤ -4 - k - m - 2 √k m && m > 0 && k > 0 && a1 > 0 && a2 > 0 && a3 > 0]
(*Reduce[s2>0 && c≥-4-k-m+2 √k m && m>0 && k>0]
Reduce[s2≥0 && c≥-4-k-m+2 √k m && m>0 && k>0] *)

```

s1 =

$$\frac{1}{2(4+c)}$$

$$\left( -16-4c-ck-k^2-8m-cm+2km-m^2 - (-4+k-m) \sqrt{16+8c+c^2+8k+2ck+k^2+8m+2cm-2km+m^2} \right)$$

s2 =

$$\frac{1}{2(4+c)}$$

$$\left( -16-4c-ck-k^2-8m-cm+2km-m^2 + (-4+k-m) \sqrt{16+8c+c^2+8k+2ck+k^2+8m+2cm-2km+m^2} \right)$$

Reduce[ s1 < 0 && c < -4 - k - m - 2\sqrt{km} && m > 0 && k > 0 && a1 > 0 && a2 > 0 && a3 > 0 ]

$$\begin{aligned} & c > 0 \& \& m > 0 \& \& \left( \left( 0 < k \leq m \& \& \left( -\sqrt{4k-k^2-km} < c1 < 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& -\frac{c1}{k} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \right) \right) \& \& \\ & \left( 0 \leq c1 < \sqrt{16-4k-8m-km-m^2} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{4-m} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 \geq \sqrt{16-4k+8m-km-m^2} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \& \\ & \left( m < k < 4-m \& \& \left( -\sqrt{4k-k^2-km} < c1 < 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& -\frac{c1}{k} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 = 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > 0 \right) \& \& \& \& \\ & \left( 0 < c1 < \sqrt{16-4k-8m-km-m^2} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{4-m} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 \geq \sqrt{16+4k-8m-km-m^2} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \& \\ & \left( k = 4-m \& \& \left( -\sqrt{4k+k^2-km} < c1 < 0 \& \& \left( c < -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& -\frac{c1}{4-m} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \right) \right) \& \& \& \& \\ & \left( c = -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& -\frac{c1}{k} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \left( 0 \leq c1 < \sqrt{16-4k+8m-km-m^2} \& \& \right) \& \& \\ & \left( c < -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{4-m} \right) \& \& \left( c = -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{k} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 = \sqrt{16-4k+8m-km+m^2} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{k} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 \geq \sqrt{16+4k-8m-km-m^2} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \& \\ & \left( 4-m < k < \frac{16+8m-m^2}{m} \& \& \left( -\sqrt{16+4k+8m-km+m^2} < c1 < 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& \right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{c1}{4-m} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \right) \& \& \left( c1 = 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > 0 \right) \& \& \& \& \\ & \left( 0 < c1 \leq \sqrt{4k+k^2-km} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{k} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 > \sqrt{4k-k^2-km} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \left( k = \frac{16-8m-m^2}{m} \& \& \right) \& \& \\ & \left( -\sqrt{16-4k-8m-km-m^2} < c1 < 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& -\frac{c1}{4+m} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \& \\ & \left( 0 \leq c1 \leq \sqrt{4k-k^2-km} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{k} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 > \sqrt{4k+k^2-km} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \& \\ & \left( k > \frac{16-8m-m^2}{m} \& \& \left( -\sqrt{16-4k-8m-km-m^2} < c1 < 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& \right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{c1}{4+m} < c2 < \frac{-4-k-m}{c1} \right) \right) \& \& \left( c1 = 0 \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > 0 \right) \& \& \& \& \\ & \left( 0 < c1 \leq \sqrt{4k-k^2-km} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > -\frac{c1}{k} \right) \& \& \& \& \\ & \left( c1 > \sqrt{4k-k^2-km} \& \& c \leq -4-k-m-2\sqrt{km} \& \& c2 > \frac{-4-k-m}{c1} \right) \& \& \& \& \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την δεύτερη των (24) οι συνθήκες έχουν ως εξής:

Reduce [s2 < 0 && c ≥ -4 - k - m + 2√km && m > 0 && k > 0 && a1 > 0 && a2 > 0 && a3 > 0]

```

c1[355]= m > 0 && (| 0 < k ≤ m &&
  (| -√4k-k²+km < c1 < 0 && c > -4 && -c1/k < c2 < (-4-k-m)/c1 | | 0 ≤ c1 < √16-4k-8m-km-m² &&
    c > -4 && c2 > -c1/(4-m) | | c1 ≥ √16-4k-8m-km-m² && c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | |
  (m < k < 4-m && (| -√4k-k²-km < c1 < 0 && (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && -c1/k < c2 < (-4-k-m)/c1 | |
    (c > -4 && -c1/k < c2 < (-4-k-m)/c1 | | ) | |
    (c1 = 0 && (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && c2 > 0 | | (c > -4 && c2 > 0) | | ) | |
    (0 < c1 < √16-4k-8m-km-m² && (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && c2 > -c1/(4-m) | |
      (c > -4 && c2 > -c1/(4-m) | | ) | | c1 ≥ √16-4k-8m-km-m² &&
        (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | |
      (k = 4-m && (| -√4k+k²+km < c1 < 0 && (| c = -4-k-m-2√km && -c1/k < c2 < (-4-k-m)/c1 | |
        (| -4-k-m+2√km < c < -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | |
        (0 ≤ c1 < √16-4k+8m-km-m² && (| c = -4-k-m+2√km && c2 > -c1/k | |
          (| -4-k-m-2√km < c < -4 && c2 > -c1/(4-m) | | (c > -4 && c2 > -c1/(4-m) | | ) | | ) | |
          (c1 = √16-4k+8m-km-m² && (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && c2 > -c1/k | | (c > -4 && c2 > -c1/k | | ) | | ) | |
          (c1 > √16-4k+8m-km-m² &&
            (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | |
        (4-m < k < (16-8m-m²)/m && (| -√16-4k-8m-km-m² < c1 < 0 &&
          (| -4-k-m+2√km ≤ c < -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | ) | |
          (c1 = 0 && (| -4-k-m-2√km ≤ c < -4 && c2 > 0 | | (c > -4 && c2 > 0) | | ) | |
          (0 < c1 ≤ √4k-k²-km && (| -4-k-m+2√km ≤ c < -4 && c2 > -c1/k | | (c > -4 && c2 > -c1/k | | ) | | (c1 >
            √4k-k²-km && (| -4-k-m+2√km ≤ c < -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | | ) | |
        (k = (16-8m-m²)/m && (| -√16-4k-8m-km-m² < c1 < 0 &&
          (| -4-k-m-2√km < c < -4 && -c1/(4+m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | ) | |
          (0 ≤ c1 ≤ √4k-k²-km && (| -4-k-m+2√km < c < -4 && c2 > -c1/k | | (c > -4 && c2 > -c1/k | | ) | | (c1 >
            √4k-k²-km && (| -4-k-m+2√km < c < -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | | ) | |
        (k > (16-8m-m²)/m && (| -√16-4k-8m-km-m² < c1 < 0 &&
          (| -4k/(4-m) < c < -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && -c1/(4-m) < c2 < (-4-k-m)/c1 | | ) | |
          (0 ≤ c1 ≤ √4k-k²-km && (| -4k/(4-m) < c < -4 && c2 > -c1/k | | (c > -4 && c2 > -c1/k | | ) | | (c1 >
            √4k-k²-km && (| -4k/(4-m) < c < -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | | ) | |
          (c1 > √4k-k²-km && (| -4k/(4-m) < c < -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | (c > -4 && c2 > (-4-k-m)/c1 | | ) | | ) | | ) | |

```

Reduce [s2 ≥ 0 && c ≥ -4 - k - m + 2√km && m > 0 && k > 0 && a1 > 0 && a2 > 0 && a3 > 0 && c ≥ 0,  
Reals]

c1[42]= False

Από τους παραπάνω συμβολικούς υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατή η καταστρατήγηση της συγκεκριμένης συνθήκης για θετικά ορισμένο ή ημιορισμένο μητρώο απόσβεσης, παρά μόνο για ιδιάζον (με αρνητικά κύρια διαγώνια στοιχεία) αόριστο. Συνεπώς διακλαδώσεις Horf θα μπορούσαν να παρουσιαστούν μόνο για μη πραγματικές συνθήκες απόσβεσης του συστήματος.

Στη συνέχεια προχωρούμε σε περαιτέρω συμβολικούς υπολογισμούς καθώς οι ανωτέρω περίπλοκες συνθήκες πιθανόν να μην μπορούν να εξασφαλίσουν μηδενισμό της  $\Gamma$  για πραγματικές τιμές των κυρίων παραμέτρων. Προς τούτο αναζητούμε πραγματικές τιμές των  $\beta_1, \beta_2$  που πέραν άλλων να οδηγούν σε μηδενισμό της  $\Delta_3$ . Από το Mathematica notebook που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό.

```

ClearAll[k, m, β, c, Γ, c1, c2]
Γ =
FullSimplify[4 β2 + β m2 + β k2 + 4 k2 + 16 β + 8 β m - 2 β k m +
(β + m + 4) (β + k) c] /. {β → c1/c2, c → c1 c2}
Solve[Γ == 0, k]
Reduce[

$$\frac{1}{2 (c_1 c_2 + 4 c_2^2)}$$


$$\left( -c_1^2 c_2^2 - 4 c_1 c_2^3 + 2 c_1 c_2 m - c_1 c_2^3 m - \sqrt{c_1} \sqrt{c_2} \sqrt{-16 - 4 c_1 c_2 + c_1 c_2^3} (c_1 + 4 c_2 + c_2 m) \right) > 0 \ \&\& \ m > 0, \text{Reals}]$$

Reduce[

$$\frac{1}{2 (c_1 c_2 + 4 c_2^2)}$$


$$\left( -c_1^2 c_2^2 - 4 c_1 c_2^3 + 2 c_1 c_2 m - c_1 c_2^3 m + \sqrt{c_1} \sqrt{c_2} \sqrt{-16 - 4 c_1 c_2 + c_1 c_2^3} (c_1 + 4 c_2 + c_2 m) \right) > 0 \ \&\& \ m > 0, \text{Reals}]$$


```

$$\text{Out}[15]= \left(4 + \frac{c1}{c2}\right) k^2 - \frac{2 c1 k m}{c2} +$$

$$c1 c2 \left(\frac{c1}{c2} + k\right) \left(4 + \frac{c1}{c2} + m\right) + \frac{c1 \left(\frac{4 c1}{c2} + (4 + m)^2\right)}{c2}$$

$$\text{Out}[16]= \left\{ \left\{ k \rightarrow \frac{1}{2 (c1 c2 + 4 c2^2)} \left( -c1^2 c2^2 - 4 c1 c2^3 + 2 c1 c2 m - c1 c2^3 m - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{c1} \sqrt{c2} \sqrt{-16 - 4 c1 c2 + c1 c2^3} (c1 + 4 c2 + c2 m) \right) \right\},$$

$$\left\{ k \rightarrow \frac{1}{2 (c1 c2 + 4 c2^2)} \left( -c1^2 c2^2 - 4 c1 c2^3 + 2 c1 c2 m - c1 c2^3 m + \right. \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{c1} \sqrt{c2} \sqrt{-16 - 4 c1 c2 + c1 c2^3} (c1 + 4 c2 + c2 m) \right) \right\} \left. \right\}$$

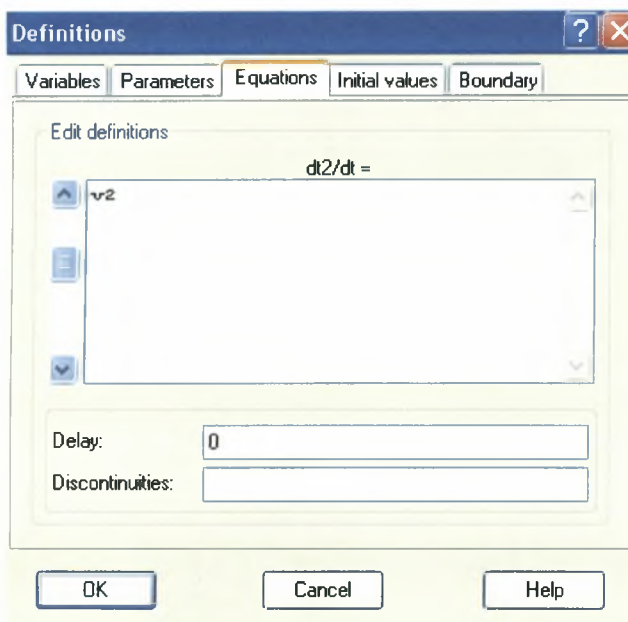
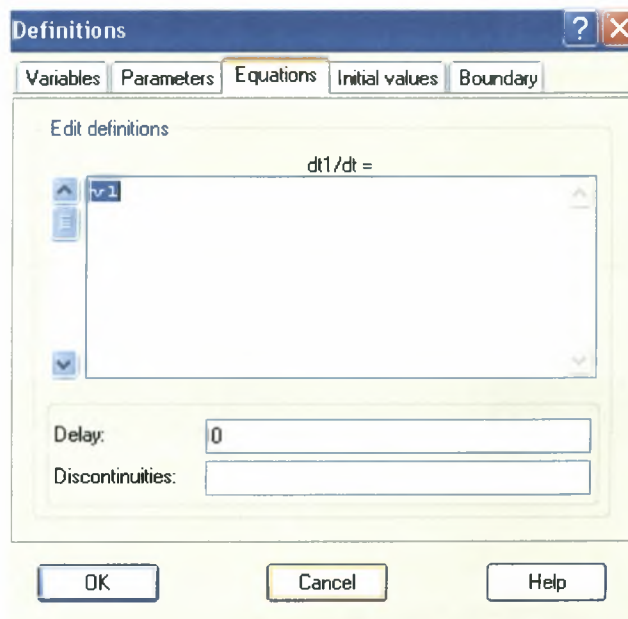
Out[17]= **False**

Out[18]= **False**

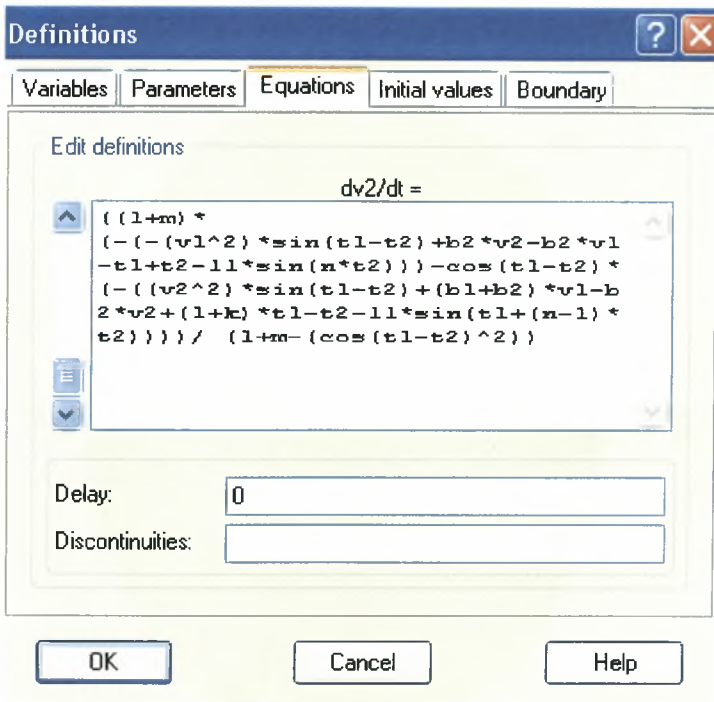
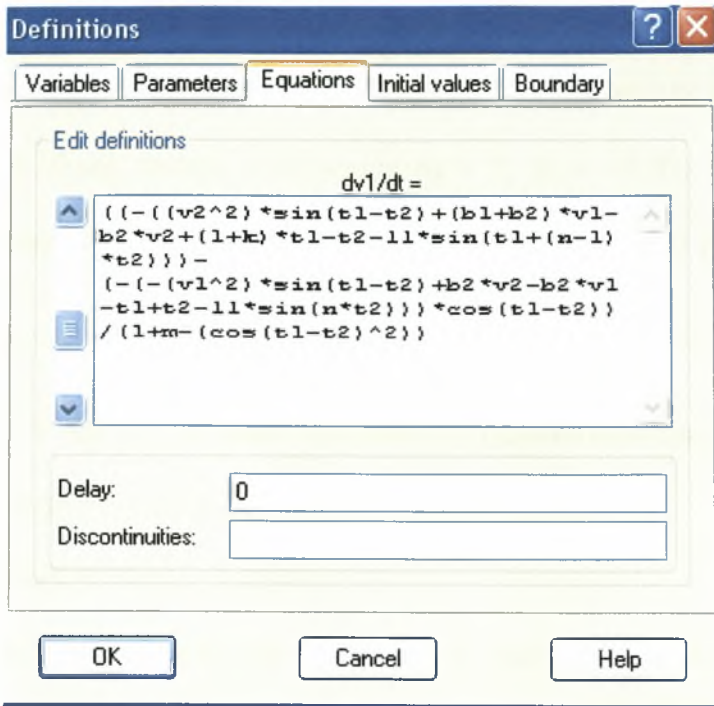
Κατά συνέπεια δεν είναι δυνατόν για τον αφόρτιστο φορέα να υπάρξει περίπτωση διακλαδώσεων Hopf για πραγματικές (ρεαλιστικές) τιμές της κατανομής μαζών και δυσκαμψιών, το οποίο αναμενόταν λόγω της φύσης του μητρώου απόσβεσης (non-Rayleigh damping). Η φυσική ερμηνεία των αρνητικών συντελεστών απόσβεσης ( $\beta_i < 0$ ) σημαίνει ότι το υλικό στην φυσική του κατάσταση, είτε λόγω μοριακής δομής είτε λόγω μετασχηματισμού (αλλαγή φάσης), διαθέτει αποθηκευμένη ενέργεια η οποία εκλύεται μόλις το υλικό αρχίσει να κινείται, π.χ. για στερεά υλικά τέτοια συμπεριφορά μέχρι στιγμής σε συνθήκες μικροδομής παρουσιάζουν τα κράματα υάλου-πλατίνας. Περαιτέρω ενασχόληση με τη ιδιάζουσα αυτή περίπτωση εκφεύγει των σκοπών της παρούσης εργασίας καθόσον τέτοιες καταστάσεις εμφανίζονται μόνο στην μηχανική των ρευστών.

## 6. Αριθμητικά αποτελέσματα - συμπεράσματα

Σε ότι ακολουθεί η αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων κίνησης πραγματοποιείται με την μέθοδο Dormand-Prince 8<sup>▼</sup>, η οποία είναι ενσωματωμένη στο λογισμικό Dynamics Solver, του οποίου η επιφάνεια εργασίας και η διατύπωση των σχετικών εξισώσεων φαίνονται στην συνέχεια.



▼ Dormand, J. R. & Prince, P. J. (1980), "A family of embedded Runge-Kutta formulae", *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6(1): 19–26.



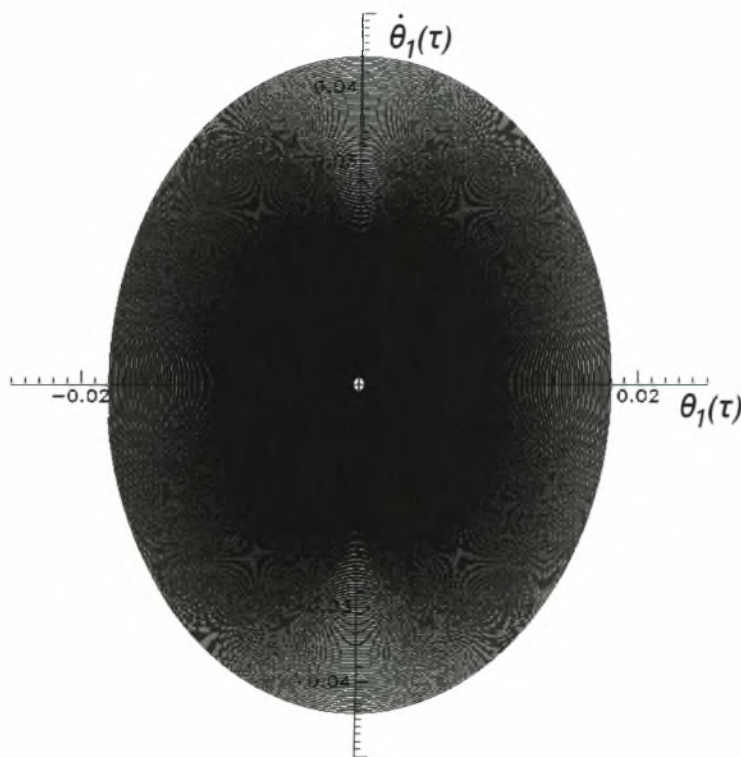
(a)  $a_1=0$  με  $a_2>0$ 

Καθόσον  $\beta_1, \beta_2$  αναγκαστικά ετερόσημα θα πρέπει να ελεγχθεί και η συνθήκη  $\alpha_3>0$ . Προς τούτο, επιλέγουμε  $m = 1, \beta_1 = -0.05, \beta_2 = 0.01$  που ικανοποιούν την (19), καθώς και  $k = 6$  ενώ  $\eta=0.38>\eta_0$ , αφού για  $\lambda = 0$  ισχύει ότι  $\alpha_3 = \frac{1}{m}[c_1 + kc_2]$ . Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 10.9995, \alpha_3 = 0.01, \alpha_4 = 6$  και  $\Delta_3 = -0.0001$ . Οι ιδιοτιμές προκύπτουν ίσες με

$$\rho_{1,2} = -0.000507702 \pm 0.758683i$$

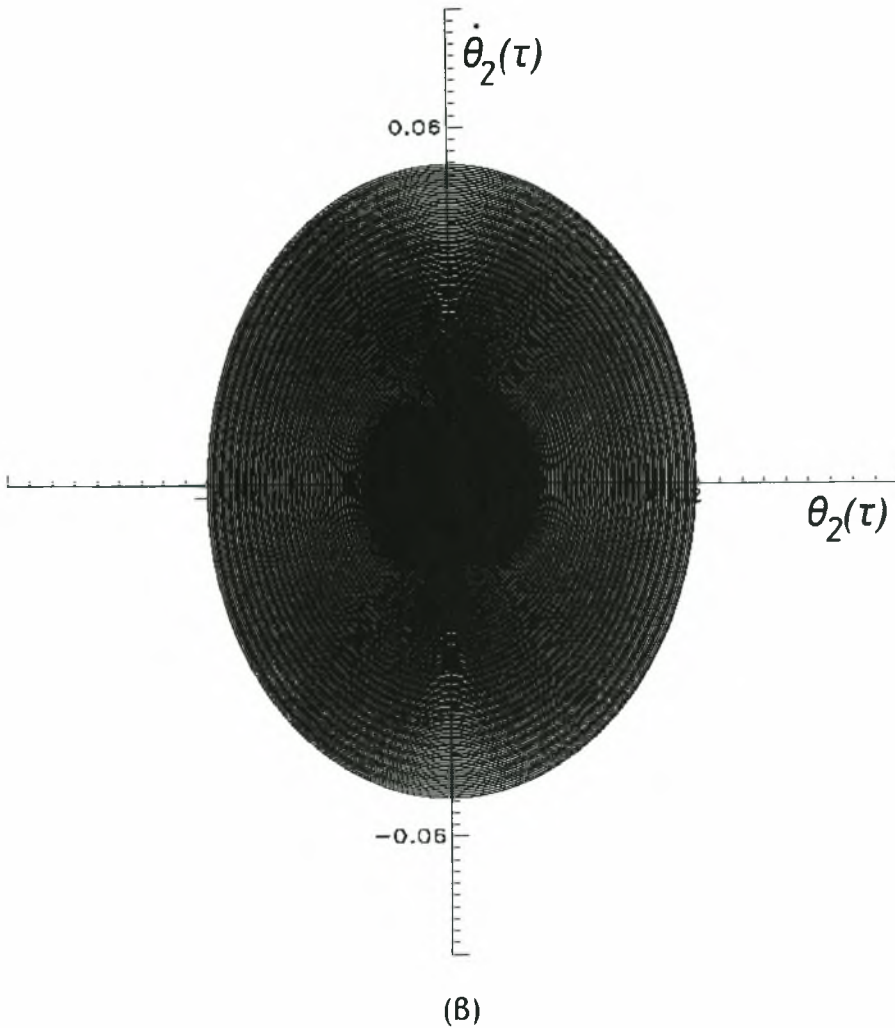
$$\rho_{3,4} = 0.000507702 \pm 3.22861i$$

οπότε η δυναμική απόκριση του συστήματος σχετίζεται με αστάθεια τύπου αποκλίσεως, όπως φαίνεται στα πορτραίτα επιπέδου φάσεως<sup>[7]</sup> που περιέχονται στο σχήμα 2(α,β) που ακολουθεί.



(a)





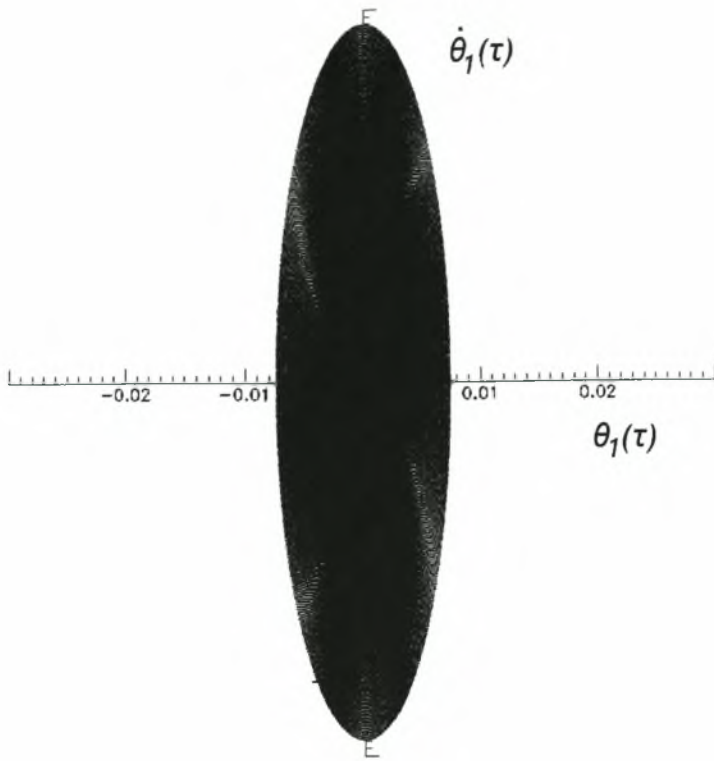
Σχήμα 2

**2<sup>ο</sup> Παράδειγμα:** Επιλέγουμε  $m = 0.2$ ,  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = 0.238095238$  που ικανοποιούν την (19), καθώς και  $k = 4.5$  ενώ  $\eta = 0.45 > \eta_0$ . Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 42.3095$ ,  $\alpha_3 = 0.357143$ ,  $\alpha_4 = 22.5$  και  $\Delta_3 = -0.00102041$ . Οι ιδιοτιμές προκύπτουν ίσες με

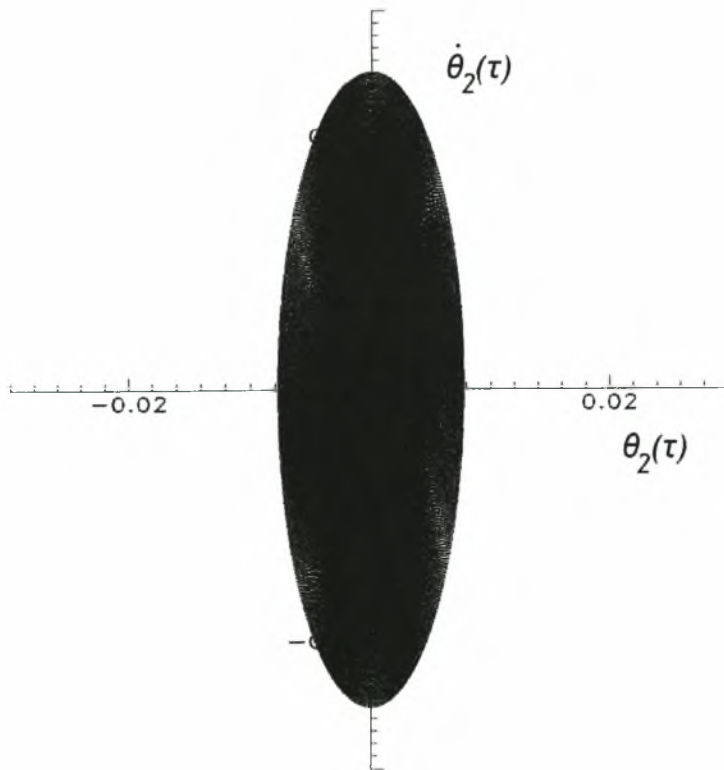
$$\rho_{1,2} = -0.00433086 \pm 0.733916i$$

$$\rho_{3,4} = 0.00433086 \pm 6.46304i$$

οπότε η δυναμική απόκριση του συστήματος σχετίζεται με αστάθεια τύπου αποκλίσεως, όπως φαίνεται στα πορτραίτα επιπέδου φάσεως<sup>[7]</sup> που περιέχονται στο σχήμα 3(α,β) που ακολουθεί.



(α)



(β)

Σχήμα 3

(B)  $a_2=0$  με  $a_1>0$ 

Με το ίδιο ως άνω σκεπτικό και προκειμένου τόσο η παραπάνω συνθήκη να ικανοποιείται όσο και να μην υπάρχει συντελεστής της χαρακτηριστικής εξίσωσης αρνητικός επιλέγουμε τον ακόλουθο συνδυασμό παραμέτρων:

$$k = m = 1, \beta_1 = 6, \beta_2 = -1 \quad (c = -4-k-m = \beta_1\beta_2 = -6), \eta = 0.45 > \eta_0$$

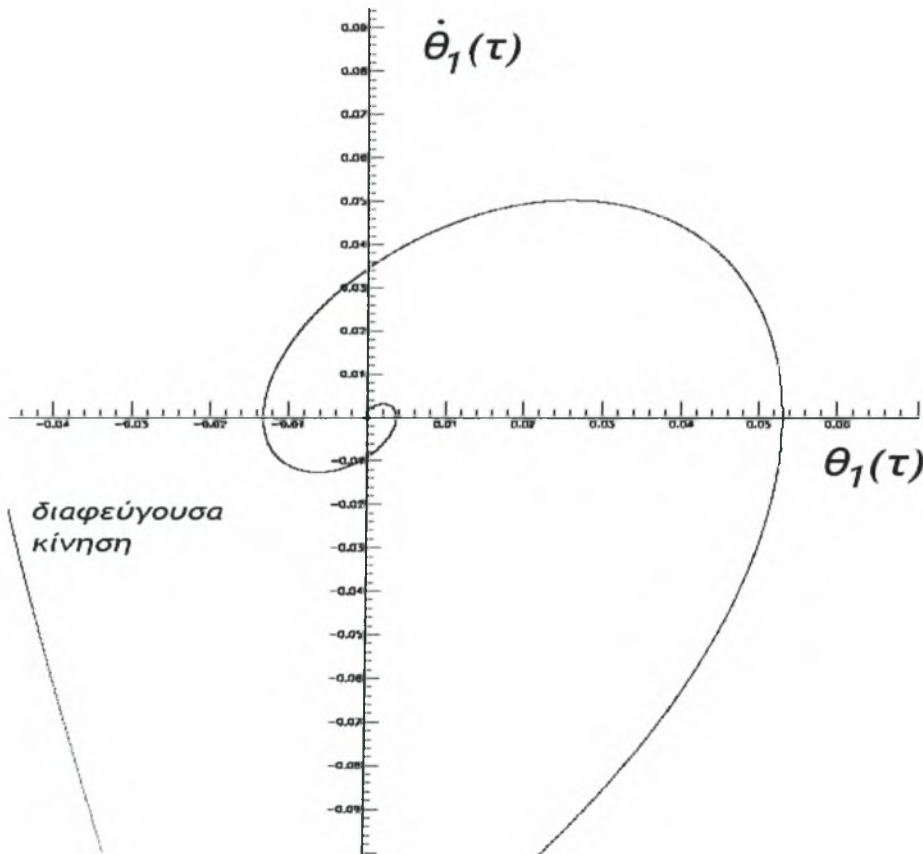
και λαμβάνουμε  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = 1$  με ιδιοτιμές ίσες με :

$$\rho_{1,2} = 0.630346 \pm 1.4293i$$

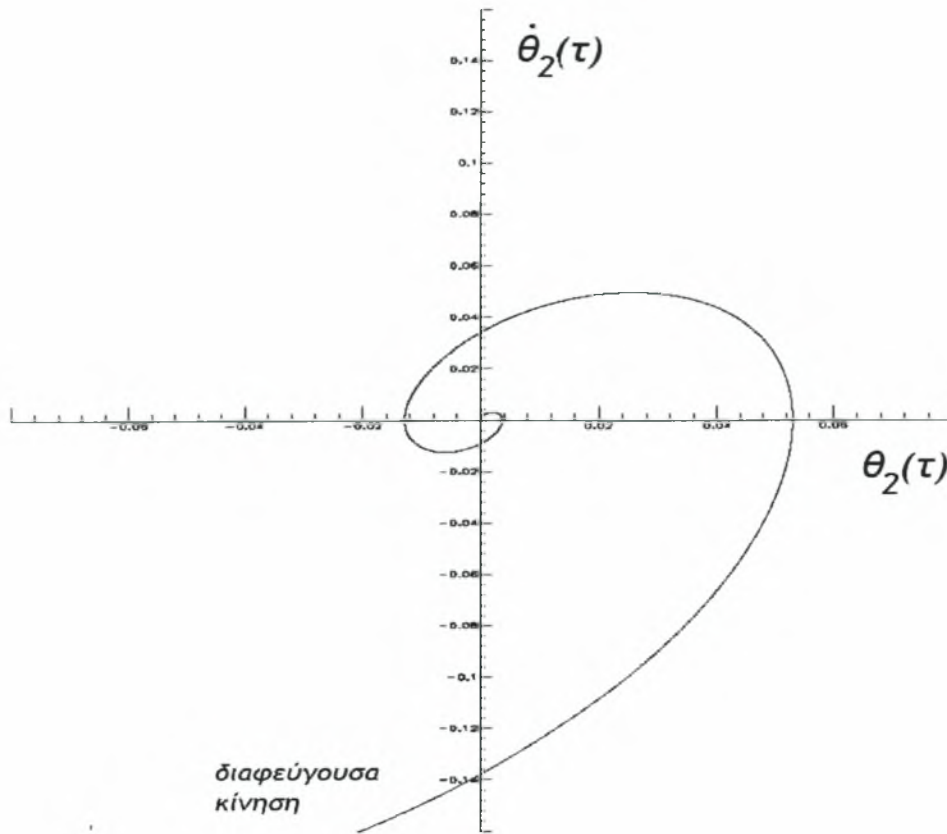
$$\rho_3 = -2.06195$$

$$\rho_4 = -0.198742$$

Η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος σχετίζεται με διαφεύγουσα κίνηση<sup>[7]</sup> όπως προηγουμένως, και απεικονίζεται στο σχήμα 4 κατωτέρω:



(a)



(B)

Σχήμα 4

**2<sup>ο</sup> Παράδειγμα:** Επιλέγουμε τον ακόλουθο συνδυασμό παραμέτρων:

$$k = 4, m = 0.1, b_1 = -2, b_2 = 4.05 \quad (c = -4 - k - m = b_1 b_2 = -8.1),$$

$$\eta = 0.47 > \eta_0$$

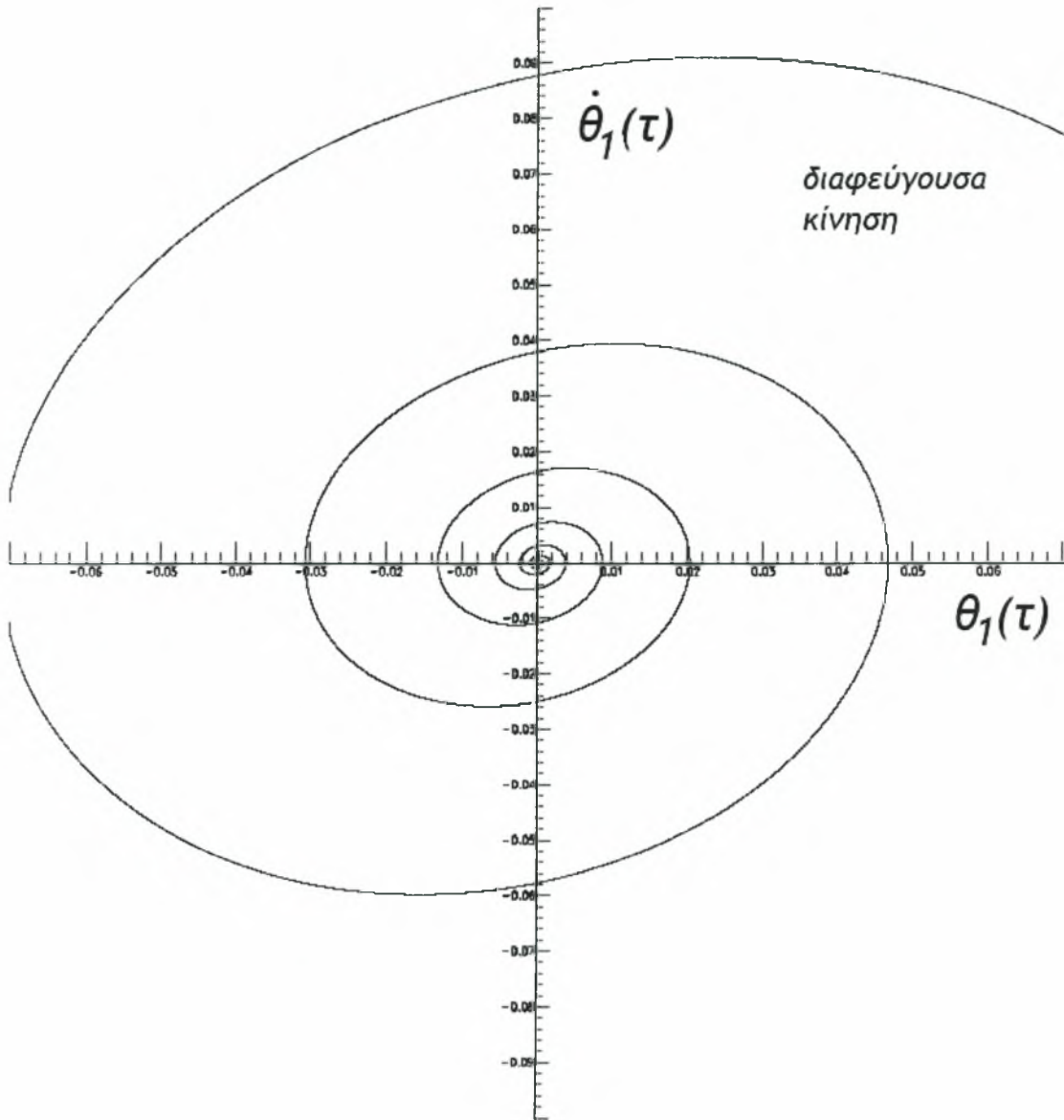
και λαμβάνουμε  $\alpha_1 = 146.05, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 142, \alpha_4 = 40$  με ιδιοτιμές ίσες με :

$$\rho_{1,2} = 0.134827 \pm 1.01148i$$

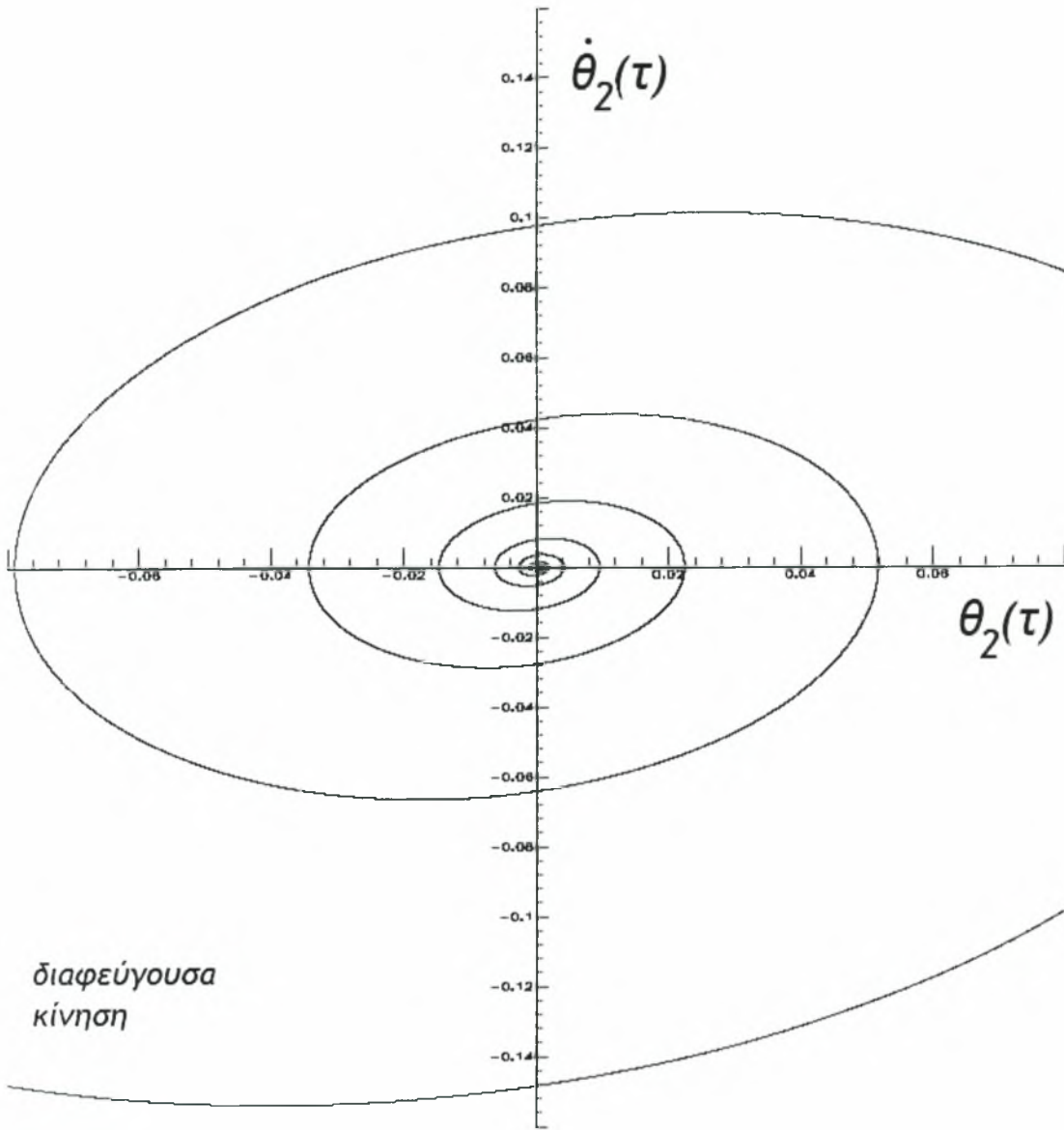
$$\rho_3 = -146.057$$

$$\rho_4 = -0.263011$$

Η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος σχετίζεται με διαφεύγουσα κίνηση<sup>[7]</sup> όπως προηγουμένως, και απεικονίζεται στο σχήμα 5 κατωτέρω:



(α)



(B)

Σχήμα 5

## 7. Σχόλια και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Οι παραπάνω εφαρμογές είναι απολύτως ενδεικτικές και παρόμοιες δυναμικές συμπεριφορές θα μπορούσαν να εμφανιστούν και για το αντίστοιχο συντηρητικό σύστημα, αφού οι συνθήκες δεν εξαρτώνται για αφόρτιστο πρόβολο από την παράμετρο μη συντηρητικότητας  $\eta$ . Πλην όμως έγινε χρήση τιμών του  $\eta$  στην περιοχική αστάθειας τύπου απόκλισης και εντός των ορίων αλληλεπίδρασης μορφών λυγισμού για λόγους ακολουθίας με τα περιεχόμενα της εισαγωγής. Άκρως ενδιαφέρουσα θα ήταν η μελέτη των αντίστοιχων συνθηκών για  $\lambda < \lambda_1^c$ , όπου θα υπάρξει και εξάρτηση από την τιμή του  $\eta$ . Τούτο κάλλιστα μπορεί να αποτελέσει θέμα περαιτέρω έρευνας προχωρημένου επιπέδου που όμως δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί στα πλαίσια της παρούσης εργασίας για ευνόητους λόγους.

Τούτο κατά μείζονα λόγο ισχύει και για την περίπτωση μηδενισμού της  $\Delta_3$  με  $\lambda$  διάφορο του μηδενός πριν το πρώτο κρίσιμο φορτίο, όπου η όλη ανάλυση θα καταστεί ακόμα πιο περίπλοκη, με πιθανότητα αποτυχίας ακόμα και των πλέον εξευγενισμένων εργαλείων συμβολικών μαθηματικών.

**BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Kounadis, A. N., “On the failure of static stability analyses of nonconservative systems in regions of divergence”, *International Journal of Solids and Structures* **31**(15), 2099 - 2120, 1994.
2. Kounadis, A. N., “Non-potential dissipative systems exhibiting periodic attractors in regions of divergence”, *Chaos, Solitons and Fractals* **8**(4), 583 - 612, 1997.
3. Bolotin, V. V., Grishko, A. A., Petrovsky, “Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic non-linear system in the divergence domain”, *Journal of Sound and Vibration* **191**(3), 431 - 451, 1996
4. Paidoussis, M. P., *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, Elsevier Academic Press, London, UK, 2003.
5. Kounadis, A. N., “Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **42**(1), 24 - 35, 2007.
6. Sophianopoulos, D. S., Michaltsos, G. T., Kounadis, A. N., “The effect of Infinitesimal Damping on the Dynamic Instability Mechanism of Conservative Systems”, *Mathematical Problems of Engineering*, Volume 2008, Article ID 471080, 25 pages.
7. *Dynamics Solver, FreeWare for the numerical solution of initial and boundary value problems for continuous and discrete dynamical systems*, Copyright 1992 - 2008, J. M. Aguirregabiria, Department of Theoretical Physics and History of Science, University of the Basque Country, Bilbao, Spain.



8. Bahder, T. B., *Mathematica for Scientists and Engineers*, Addison - Wesley, Reading, Mass, USA, 1995.
9. Fuller, A. T., “Conditions for a matrix to have only characteristic roots with negative real parts”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **23(1)**, 71 - 98, 1968.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091702