

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



NO = 13804
KRF = 13673

Επικοινωνία
Kserifi@mie.

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας
Εργαστήριο Φυσικών & Χημικών Διεργασιών

Διδακτορική διατριβή
της
Κατερίνας Σερίφη

Προσομοίωση της Ροής Υγρού
πάνω από Επίπεδο και Διαμορφωμένο
Τοίχωμα

Επιβλέπων: Καθηγητής Β. Μποντόζογλου

Μάρτιος 2006, Βόλος

ABSTRACT

Inclined film flow along flat or corrugated walls is of particular interest in some industrial applications, such as gas-liquid process equipment for heat/mass transfer and coating processes. Film flows also occur in many natural and biological phenomena, as well. The combination of interesting fundamental fluid mechanics and of numerous applications has made film flow the subject of intense experimental and theoretical/computational study.

The goal of the present work is the computational study of film flow characteristics along flat and corrugated walls. A Galerkin finite-element scheme is used for the solution of steady or unsteady versions of the equations of mass conservation and motion. The inlet boundary condition permits introduction of fully-controlled disturbances, whose downstream evolution is subsequently investigated. The discretization of the complicated flow domain (bounded by the arbitrarily shaped wall and the unknown free surface) is accomplished by an appropriate transformation.

Preliminary simulations focus on the development of solitary waves along a flat wall. The wave characteristics are studied as functions of Reynolds number and disturbance frequency. It is shown that disturbances of very low frequency give birth to parasitic crests and thus destroy the regularity of the wave train. The modulation of wall shear stress caused by the passage of solitary waves is investigated and flow reversal in front of the main hump is documented. Proceeding to steady flow along a sinusoidal wall, the two main characteristics studied are the deformation of the free surface and the creation of separation eddies inside the wall troughs. Finally, film flow on a wall with an isolated cavity is considered, and the influence of the geometrical features of the cavity and the surface tension of the liquid is investigated for creeping flow ($Re \ll 1$) and for inertial flow ($Re \gg 1$).

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ροή υγρού υμένα πάνω σε επίπεδο ή διαμορφωμένο τοίχωμα έχει ιδιαίτερη σημασία για ορισμένες βιομηχανικές εφαρμογές, όπως τις διφασικές συσκευές μεταφοράς θερμότητας/μάζας και τις διεργασίες επικάλυψης. Υγροί υμένες απαντώνται επίσης σε μία ευρεία κλίμακα φυσικών και βιολογικών φαινομένων. Ο συνδυασμός της ενδιαφέρουσας ρευστοδυναμικής συμπεριφοράς και της ποικιλίας των εφαρμογών έχουν καταστήσει τη ροή υγρού υμένα αντικείμενο έντονης μελέτης τόσο θεωρητικής/υπολογιστικής όσο και πειραματικής.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η υπολογιστική διερεύνηση των χαρακτηριστικών ροής υγρού υμένα πάνω σε επίπεδο ή διαμορφωμένο τοίχωμα. Τα ισοζύγια μάζας και ορμής επιλύονται αριθμητικά -για μόνιμες και μη-μόνιμες συνθήκες- με τη μέθοδο Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων. Εφαρμόζεται συνοριακή συνθήκη εισόδου που επιτρέπει την εισαγωγή διαταραχών ελεγχόμενης μορφής, των οποίων μελετάται η κατάντη εξέλιξη. Η διακριτοποίηση του πολύπλοκου πεδίου ροής (από το -πιθανά διαμορφωμένο- τοίχωμα έως την άγνωστης θέσης ελεύθερη επιφάνεια) διευκολύνεται από κατάλληλο μετασχηματισμό.

Προσομοιώνεται αρχικά η ανάπτυξη μοναχικών κυμάτων σε επίπεδο τοίχωμα από ελεγχόμενες διαταραχές εισόδου, και μελετώνται τα χαρακτηριστικά των κυμάτων ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds της ροής και της συχνότητας της διαταραχής. Σε πολύ χαμηλές συχνότητες προβλέπεται η εμφάνιση παρασιτικών κορυφών και ερμηνεύεται ο μηχανισμός δημιουργίας τους. Διερευνάται η επίδραση των μοναχικών κυμάτων στη διατμητική τάση στο τοίχωμα και διαπιστώνεται τοπική αναστροφή της ροής μπροστά από την κύρια κορυφή του κύματος. Στη συνέχεια, εξετάζεται η μόνιμη ροή πάνω από τοίχωμα με ημιτονοειδή διαμόρφωση, και μελετάται η επίδραση του βάθους διαμόρφωσης και του αριθμού Reynolds στα δύο κύρια χαρακτηριστικά της ροής: την ανάπτυξη δινών ανακυκλοφορίας στο εσωτερικό των κοιλιοτήτων και την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας του υμένα. Τέλος, εξετάζεται η ροή υγρού υμένα σε επίπεδο τοίχωμα με μία μεμονωμένη κοιλότητα. Διερευνάται η επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κοιλότητας και της επιφανειακής τάσης του υγρού στις δύο οριακές περιπτώσεις της έρπουσας ροής ($Re \ll 1$) και της ροής με έντονες αδρανειακές δυνάμεις.

στέκω και θεωρώ τα κύματα

ό,τι πιο τέλειο πιο ανεπίδεκτο φθοράς
ποτέ που υπήρξε.

Ο. Ελύτης (Το αμύγδαλο του Κόσμου)

Στον Κωνσταντίνο

Περί καύσεων...

Η εκπόνηση διδακτορικής διατριβής είναι στην πραγματικότητα διεργασία πολλών παραμέτρων, δύσκολη και πολύπλοκη. Θυμίζει καύση με πρώτες ύλες, κρίσιμες συνθήκες έναρξης, συνθήκες που διασφαλίζουν τη συνέχιση της διεργασίας, προϊόντα, παραπροϊόντα και τεφρά. Τέλεια ή ατελής (δεν έχω αποφασίσει ακόμα), είμαι απόλυτα σίγουρη όμως για το ποιος παρείχε άπλετο το οξυγόνο καθ' όλη τη χρονική της διάρκεια.

Ο καθηγητής μου Βασίλης Μποντόζογλου. Με τη διαύγεια του επιστημονικού του λόγου, την πολύπλευρη καθαρή και ουσιαστική διδασκαλία του, την εντιμότητα των πράξεών του, το γαλαντόμο και θετικό πνεύμα του και τη ζωτικής σημασίας έμπρακτη παρουσία του στην καύση μου είναι ο καθοριστικός παράγοντας για την ολοκλήρωσή της. Ο μέντορας (σοφός και έμπιστος, κατά την αρχαία ελληνική ονομασία) είναι ο άνθρωπος που βρίσκεται εκεί σα φίλος και σα δάσκαλος για να συμβουλέψει, να ενθαρρύνει, να στηρίξει τον ασκούμενό του. Στο πλαίσιο αυτής της σχέσης ο μέντορας λαμβάνει υπόψη την όποια ιδιαιτερότητα ή αναπηρία του ασκούμενου και ανάλογα με τις ανάγκες που αυτή υπαγορεύει, δίνει την απαραίτητη καθοδήγηση, εφόσον του ζητηθεί. Ευγνωμοσύνη άπειρη για την απόφασή του να με διδάξει διδακτορικό. Τύχη ανέλπιστα η συγκυρία να συνεργαστώ μαζί του.

Τις κρίσιμες συνθήκες έναρξης παρείχαν πολλοί και διαφορετικοί άνθρωποι. Ο τρόπος που ο καθένας επηρέασε τη διεργασία είναι ιδιαίτερος. Με ενθουσιασμό, το λιγότερο, αναφέρομαι στον καθηγητή Νικόλαο Αράβα και στο εξάμηνο-ολοκαύτωμα που παρακολούθησα το μάθημά του. Συμμετείχε και συμμετέχει επίσης στις εξεταστικές μου επιτροπές συμβάλλοντας τα μέγιστα στο ξεκαθάρισμα και στην πλήρη κατανόηση επιστημονικών εννοιών, φαινομένων και ουσιοδών λεπτομερειών των υπολογιστικών μεθόδων. Ουσιαστική η συμβολή στο ξεκίνημά της διεργασίας των καθηγητών Σπύρου Καραμάνου και Νίκου Μαλαματάρη που πότισαν τη φλόγα με πεπερασμένα στοιχεία και κώδικες. Οι καθηγητές Δημήτρης Βαλουγεώργης, Νίκος Ανδρίτσος και Νίκος Πελεκάσης, μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής, συνέβαλαν ώστε η καύση μου να συνεχιστεί και να διατηρηθεί μέσω επιμέρους συνεργασιών, άμεσης διδασκαλίας, καθημερινής επαφής και προπαντός αμέριστης εμπιστοσύνης. Ο καθηγητής Νίκος Βλάχος, παράδειγμα ευγένειας και διακριτικότητας, συμμετέχει στην εξεταστική μου επιτροπή, τον ευχαριστώ για αυτό.

Ιδιαίτερη αναφορά οφείλω στον καθηγητή Ιωάννη Τσαμόπουλο, καταρχήν για την απόδοση στα ελληνικά πολλών επιστημονικών όρων που χρησιμοποιήθηκαν και επιπλέον για ευγενική του αποδοχή να δώσει αξία στην διεργασία μου συμμετέχοντας στην επταμελή μου επιτροπή.

Ευχαριστίες οφείλω στην Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας, που μέσω προγράμματος ΠΕΝΕΔ στηριξε οικονομικά τη διατριβή.

Προϊόν της καύσης, πολύτιμο, η παρούσα επιστημονική μελέτη. Παραπροϊόντα όλες οι σχέσεις, φιλίες, γνωριμίες, επαφές έλαβαν χώρα κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της και που φορές φορές είχα την αίσθηση ότι καταξίωναν την ύπαρξή της.

Καύση λυτρωτική με διπλό χαρακτήρα η διεργασία του διδακτορικού μου και εννίοτε άκρως προστατευτική απέναντι σε περιβάλλον επικίνδυνα άξεστο και προκλητικά ημιτελές. Καύση που αναζήτησε πρόσθετη πρώτη ύλη στο Ινστιτούτο Χημικών Διεργασιών της Πράγας, σε επιστημονικά συνέδρια και σε θερινά σχολεία. Μια διεργασία που όταν στάθηκα σκνηρή με σιγόκαψε και όταν ριχτήκα με πάθος έγινα παρανάλωμα. Έτσι και αλλιώς γενναιόδωρη και θερμή απέναντι μου. Έτσι και αλλιώς με το σημάδι της, έγκαυμα πάνω μου.

Οι άνθρωποι που «κάηκαν» μαζί μου είτε με τη θέληση τους είτε γιατί βρέθηκαν στα όρια της διεργασίας μου, άναρχα και άτακτα οι: Κώστας, Ελένη, Μαρία, «Μεταμορφωμένοι», Έλσα, Κατερίνα, «Τζιατζιάδες», Θανάσης, Σοφία, Ελένη.

Μακριά από τους χώρους της διεργασίας και χωρίς άμεση εμπλοκή (ευτυχώς για αυτούς) οι ομοαίματοι, εκείνοι που υποσιάζονταν ή γνώριζαν τα μυστικά της καύσης, αλλά ποτέ δεν παρενέβησαν (ευτυχώς για μένα). Λένα, Χριστίνα, Ρούλα, Γιώργο, Ροδάνθη, Αλέξη, Ιάσονα σας ευχαριστώ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....σελίδα 1	
1.1 Σημασία της μελέτης.....1	
1.2 ενδεικτικές εφαρμογές.....1	
1.3 Βασικά περιεχόμενα της μελέτης.....6	
Κεφάλαιο 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ	
2.1 Επίπεδο τοίχωμα.....9	
2.1.1 Λύση Nusselt.....9	
2.1.2 Γραμμική ευστάθεια της ροής υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο- Οπ Sommerfeld.....11	
2.1.3 Μη γραμμική εξέλιξη της ροής.....13	
2.2 Περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα.....23	
2.2.1 Θεωρητικές-Υπολογιστικές μελέτες.....23	
2.2.2 Πειραματικές μελέτες.....30	
2.3 Τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση.....33	
Κεφάλαιο 3: ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ & ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	
3.1 Γενικές εξισώσεις της ροής υγρού υμένα.....39	
3.1.1 Αναπτυσσόμενη ροή σε επίπεδο τοίχωμα.....41	
3.1.2 Μόνιμη ροή σε περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα.....44	
3.1.3 Μόνιμη ροή σε τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση.....46	
3.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.....48	
3.2.1 Υπολογιστικό πλέγμα.....48	
3.2.2 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin.....49	
3.2.3 Σταθμισμένα υπόλοιπα- Οι ιδιαιτερότητες της μεθόδου Galerkin.....51	
Κεφάλαιο 4: ΡΟΗ ΥΓΡΟΥ ΥΜΕΝΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ	
4.1 Χαρακτηριστικά μοναχικών κυμάτων.....53	
4.2 Η διατμητική τάση στο τοίχωμα λόγω διέλευσης μοναχικού κύματος.....61	
4.3 Μη γραμμική εξέλιξη της ροής : η επίδραση της μορφής της διαταραχής.....65	
4.4 Η συμπεριφορά διαταραχών πολύ μικρής συχνότητας.....72	
Κεφάλαιο 5: ΡΟΗ ΥΓΡΟΥ ΥΜΕΝΑ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟ ΤΟΙΧΩΜΑ	
5.1 Φαινόμενα στην κύρια μάζα του ρευστού.....79	
5.1.1 Επίδραση του αριθμού Reynolds.....80	
5.1.2 Επίδραση του βάθους του τοιχώματος.....88	

5.2 Φαινόμενα στην ελεύθερη επιφάνεια.....	96
5.2.1 Επαλήθευση γραμμικών αποτελεσμάτων.....	97
5.2.2 Θέση και μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.....	98
5.2.3 Φασματική ανάλυση μορφής ελεύθερης επιφάνειας.....	104
Κεφάλαιο 6: ΡΟΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ ΥΓΡΟΥ ΥΜΕΝΑ ΣΕ ΤΟΙΧΩΜΑ ΜΕ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ	
6.1 Περιγραφή γεωμετρικών χαρακτηριστικών διαμόρφωσης.....	108
6.2 Έρπουσα ροή σε επιμήκεις κοιλότητες.....	110
6.2.1 Επίδραση βάθους και οξύτητας κοιλότητας.....	111
6.2.2 Επίδραση επιφανειακής τάσης σε ροή πάνω από επιμήκεις κοιλότητες.....	118
6.3 Έρπουσα ροή σε στενές κοιλότητες.....	122
6.4 Ροή για πεπερασμένους αριθμούς Reynolds.....	128
6.4.1 Επιμήκεις κοιλότητες.....	128
6.4.2 Στενές κοιλότητες.....	133
Κεφάλαιο 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ	
7.1 Αναπτυσσόμενη ροή υμένα σε επίπεδο τοίχωμα.....	138
7.2 Μόνιμη ροή υμένα σε ημιτονοειδές τοίχωμα.....	138
7.3 Μόνιμη ροή υμένα σε τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση.....	139
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	140

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Διαμόρφωση ππερύγιων για συμπύκνωση (Myers, 1998).....	Σελίδα 2
Σχήμα 1.2: Εναλλάκτης με πλάκες.(α) Γενική διάταξη (b) Λεπτομέρεια σχεδιασμού πλάκας.....	3
Σχήμα 1.3: Είδη πληρωτικών υλικών.....	4
Σχήμα 1.4: Σχηματική αναπαράσταση διεργασίας επικάλυψης.....	5
Σχήμα 2.1: Σχηματική διάταξη της ροής υγρού υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο.....	10
Σχήμα 2.2: Ο κρίσιμος Reynolds συναρτήσει της γωνίας κλίσης. Πειραματική επιβεβαίωση της θεωρητικής πρόβλεψης (Liu et al. 1993.....	13
Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση των τεσσάρων περιοχών που διακρίνονται κατά την εξέλιξη ενός υμένα ρευστού όταν η διαταραχή στην είσοδο είναι θόρυβος.....	14
Σχήμα 2.4: Διάγραμμα φάσης της συχνότητας διαταραχής f και του αριθμού Reynolds.....	17
Σχήμα 2.5: Η εξέλιξη των κυμάτων με επιβαλλόμενη συχνότητα 1.5 Hz, γωνία κλίσης $\varphi=6.4^\circ$, $Re=29$ και $We=35$	18
Σχήμα 2.6: Η εξέλιξη των κυμάτων με επιβαλλόμενη συχνότητα 4,5Hz, γωνία κλίσης $\varphi=6.4^\circ$, $Re=29$ και $We=35$	19
Σχήμα 2.7: Η συγχώνευση δύο μοναχικών κυμάτων για $Re=37$, $\varphi = 4^\circ$	20
Σχήμα 2.8: Η κατά μήκος της ροής εξέλιξη της ροής για αρχική διαταραχή 1Hz με τη συγχώνευση των μοναχικών κορυφών.....	22
Σχήμα 2.9: Πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος.....	24
Σχήμα 2.10: Διαφορά φάσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος.....	25
Σχήμα 2.11: Σχηματική διάταξη της ροής σε κεκλιμένο επίπεδο και σύγκριση των θεωριών έρπουσας και στρωτής ροής για το εύρος της ελεύθερης επιφάνειας.....	26
Σχήμα 2.12: Εύρος της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του αριθμού Reynolds για διαφορετικά μήκη κύματος τοιχώματος.....	27
Σχήμα 2.13: Διαφορά φάσης μεταξύ τοιχώματος και ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του αριθμού Reynolds.....	28
Σχήμα 2.14: Ο αριθμός Reynolds στον οποίο εμφανίζεται συντονισμός συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος.....	28
Σχήμα 2.15: Ισοΰψεις της ελεύθερης επιφάνειας της ροής με την εμφάνιση της τρισδιάστατης δομής των βαθουλωμάτων.....	31
Σχήμα 2.16: Κρίσιμο πάχος υμένα συναρτήσει της οξύτητας του τοιχώματος (Aksel et al, 2003).....	32

Σχήμα 2.17: Επίδραση της γωνίας κλίσης στο κρίσιμο πάχος υμένα (Aksel et al, 2003).....	33
Σχήμα 2.18: Το μέγεθος των δινών ως συνάρτηση του πάχους του υμένα.....	33
Σχήμα 2.19: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διαφορετικά βάθη (D) λακκούβας. Το διάγραμμα (α) παριστάνει την απόκριση στην έξοδο από την κοιλότητα και το (β) την απόκριση στην είσοδο.....	35
Σχήμα 2.20: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για τρία διαφορετικά μήκη (w) λακκούβας.....	36
Σχήμα 2.21: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διαφορετικούς αριθμούς Ca	37
Σχήμα 2.22: Με λεπτομέρεια η επίδραση στη θέση της ελεύθερης επιφάνειας του αριθμού Ca και του βάθους.....	38
Σχήμα 3.1: Σχηματική διάταξη της ροής λεπτού υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο.....	40
Σχήμα 3.2: Σχηματική αναπαράσταση της εξάρτησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας από το ρυθμό ροής.....	45
Σχήμα 3.3: Σχηματική διάταξη της ροής λεπτού υμένα σε περιοδικά διαμορφωμένο κεκλιμένο επίπεδο.....	46
Σχήμα 3.4: Ημιτονοειδές τοίχωμα.....	46
Σχήμα 3.5: Τοίχωμα μεμονωμένης διαμόρφωσης.....	48
Σχήμα 3.6: Διαμόρφωση κοιλότητας από δύο συνημιτονοειδή και ένα επίπεδο τμήμα.....	49
Σχήμα 3.7: Υπολογιστικό πλέγμα.....	50
Σχήμα 3.8: Σχηματική αναπαράσταση της αντιστοίχισης του πραγματικού στοιχείου στο πρότυπο μέσω της ισοπαραμετρικής απεικόνισης.....	51
Σχήμα 4.1: Το μοναχικό κύμα.....	54
Σχήμα 4.2: Το ύψος των μοναχικών κυμάτων για $Re=35$ και $f=1.2, 1.5, 1.8$	55
Σχήμα 4.3: Το ύψος των μοναχικών κυμάτων για $f=1.2$ και $Re=17, 35, 50$	56
Σχήμα 4.4: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας από την προσομοίωση και το πείραμα για $Re=35$ και $f=1.2$	57
Σχήμα 4.5: Μήκος κύματος μοναχικών κυμάτων για $Re=35$	58
Σχήμα 4.6: Μήκος κύματος μοναχικών κυμάτων για $f=1.2$	58
Σχήμα 4.7: Μήκος κύματος τριχοειδών κυμάτων για $f=1.2$	59
Σχήμα 4.8: Μήκος κύματος τριχοειδών κυμάτων για $Re=35$	59
Σχήμα 4.9: Αδιάστατο πάχος υμένα για $f=1.2$ Hz.....	60
Σχήμα 4.10: Αδιάστατη φασική ταχύτητα για $f=1.2$ Hz.....	60
Σχήμα 4.11: Η συσχέτιση μεταξύ του μέγιστου ύψους και της φασικής ταχύτητας των μοναχικών κυμάτων.....	61

Σχήμα 4.12: Η διατμητική τάση στο τοίχωμα κατά το πέρασμα ενός μοναχικού κύματος, $Re=35$, $f = 1.2$	62
Σχήμα 4.13: Το μέγιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα.....	63
Σχήμα 4.14: Το ελάχιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα.....	64
Σχήμα 4.15: Το ελάχιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα.....	65
Σχήμα 4.16: Θεωρητικά προβλεπόμενη διατμητική τάση και υπολογισμένη για $Re=17$ και $f = 1.2$	65
Σχήμα 4.17: Χωροχρονική εξέλιξη της διαταραχής με σχήμα κατανομής Gauss για συχνότητα 0.5 Hz και $Re=35$	67
Σχήμα 4.18: Μια πλήρης ανεπτυγμένη κυματοσειρά για συχνότητα 0.5 Hz, σχήματος κατανομής Gauss και $Re=35$	68
Σχήμα 4.19: Μια πλήρης ανεπτυγμένη κυματοσειρά για συχνότητα 0.5 Hz, σχήματος άθροισμα κατανομών Gauss και $Re=32$	68
Σχήμα 4.20: Ένα πλήρες ανεπτυγμένο προφίλ κύματος για συχνότητα 0.5 Hz σχήματος ημιτόνου και $Re=32$	69
Σχήμα 4.21: Η ελεύθερη επιφάνεια για δύο διαφορετικά σχήματα αρχικής διαταραχής.....	70
Σχήμα 4.22: Η χωροχρονική εξέλιξη ενός παλμού για συχνότητα διαταραχής 0.5Hz σχήματος Gauss.....	71
Σχήμα 4.23: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για συχνότητα 0.25 Hz σχήματος κατανομής Gauss και $Re=22$	71
Σχήμα 4.24: Ένα πλήρες ανεπτυγμένο προφίλ κύματος για συχνότητα 3.5 Hz σχήματος ημιτόνου και $Re=22$	72
Σχήμα 4.25: Στιγμιαία θέση της ελεύθερης επιφάνειας ανά 10 χρονικές στιγμές για αρχική διαταραχή 1Hz. Οι διακεκομμένες κάθετες υποδεικνύουν την χρονική εξέλιξη δυο θέσεων.....	75
Σχήμα 4.26: Στιγμιαία θέση της ελεύθερης επιφάνειας ανά 10 χρονικές στιγμές για αρχική διαταραχή 0.5 Hz.....	76
Σχήμα 4.27: Στιγμιαία θέση της ελεύθερης επιφάνειας ανά 10 χρονικές στιγμές για αρχική διαταραχή 0.25 Hz.....	77
Σχήμα 4.28: Λεπτομέρεια του Σχήματος 4.27 που δείχνει την γένεση της παρασιτικής κορυφής για συχνότητα 0.25 Hz.....	78
Σχήμα 4.29: Λεπτομέρεια της γένεσης της παρασιτικής κορυφής για συχνότητα 1 Hz με αρχική διαταραχή σχήματος κατανομής Gauss.....	79
Σχήμα 5.1: Οι δυο βασικές δίνες της ροής.....	81
Σχήμα 5.2: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη u ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0.0008 m.....	82

Σχήμα 5.3: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη v ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0.0008 m.....	83
Σχήμα 5.4: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη u ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0.002 m.....	83
Σχήμα 5.5: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη v ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0.002 m.....	84
Σχήμα 5.6: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη μέγιστη ταχύτητα της δίνης για βάθος τοιχώματος 0.0008 m.....	85
Σχήμα 5.7: Επίδραση του αριθμού Reynolds στην ογκομετρική παροχή της πρωτεύουσας δίνης για εύρος βάθους τοιχώματος.....	86
Σχήμα 5.8: Επίδραση του αριθμού Reynolds στην οριζόντια θέση της δίνης.....	86
Σχήμα 5.9: Μορφολογία της δίνης για βάθος τοιχώματος 0.002 m και Reynolds 20 και 100.....	87
Σχήμα 5.10: Μορφολογία της δίνης για βάθος τοιχώματος 0.008 m και Reynolds 40 και 100.....	87
Σχήμα 5.11 : Επίδραση του αριθμού Reynolds στην οριζόντια θέση της δευτερεύουσας δίνης.....	88
Σχήμα 5.12: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=20$ και βάθη τοιχώματος $A=0,0008m, B=0,0012m, \Gamma=0,002m, \Delta=0,0036m$	89
Σχήμα 5.13: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=20$ και βάθη τοιχώματος $A=0,004m, B=0,0048m, \Gamma=0,006m, \Delta=0,0072m$	90
Σχήμα 5.14: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=20$ και βάθη τοιχώματος $A=0,008m, B=0,0088m, \Gamma=0,01m, \Delta=0,012m$	91
Σχήμα 5.15: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=150$ και βάθη τοιχώματος $A=0,0001m, B=0,0012m, \Gamma=0,002m, \Delta=0,0032m$	92
Σχήμα 5.16: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=150$ και βάθη τοιχώματος $A=0,0088m, B=0,01m, \Gamma=0,0108m, \Delta=0,012m$	93
Σχήμα 5.17: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στη u ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για $Re=80$	93
Σχήμα 5.18: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δίνης.....	94
Σχήμα 5.19: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στη u ταχύτητα της δευτερεύουσας δίνης για $Re=100$	95
Σχήμα 5.20: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στη u ταχύτητα της δευτερεύουσας δίνης για $Re=20$	96
Σχήμα 5.21: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δευτερεύουσας δίνης.....	97

Σχήμα 5.22: Επαλήθευση αποτελεσμάτων συντονισμού από τη γραμμική ανάλυση.....	98
Σχήμα 5.23: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για αριθμό Reynolds 20.....	99
Σχήμα 5.24: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για αριθμό Reynolds 100.....	100
Σχήμα 5.25: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για αριθμό Reynolds 200.....	101
Σχήμα 5.26: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0.0002 m.....	101
Σχήμα 5.27: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0.004 m.....	102
Σχήμα 5.28: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0.012 m.....	102
Σχήμα 5.29: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0.00001 m...	103
Σχήμα 5.30: Επίδραση του αριθμού Reynolds ύψος της ελεύθερης επιφάνειας για μεγάλο εύρος βάθους τοιχώματος.....	104
Σχήμα 5.31: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας για όλο το εύρος των αριθμών Reynolds.....	105
Σχήμα 5.32: Αρμονικές της ελεύθερης επιφάνειας για Reynolds 80: (α) βάθος τοιχώματος 0.0002 m, (b) βάθος τοιχώματος 0.004 m, (c) βάθος τοιχώματος 0.012 m.....	106
Σχήμα 5.33: Αρμονικές της ελεύθερης επιφάνειας για Reynolds 160: (α) βάθος τοιχώματος 0.0002 m, (b) βάθος τοιχώματος 0.004 m, (c) βάθος τοιχώματος 0.012 m.....	107
Σχήμα 6.1: Σχηματικές διατάξεις της διαμόρφωσης του τοιχώματος.....	110
Σχήμα 6.2: Κοιλότητες διαφόρων μορφών και η αντίστοιχη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Λεπτομέρειες της ροής σε μεγέθυνση.....	112
Σχήμα 6.3: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για τρία βάθη κοιλότητας και οι λεπτομέρειες στην είσοδο και έξοδο από αυτήν.....	113
Σχήμα 6.4: Οι ροϊκές γραμμές για τοίχωμα σχήματος συνημιτόνου με $D=2$ και $Ca=0.01$	114
Σχήμα 6.5: Η ελεύθερη επιφάνεια για τρία βάθη ($D=0.5, 1, 2$) και δυο οξυτήτες, $\delta_1 < \delta_2$	114
Σχήμα 6.6: Λεπτομέρεια σε μεγέθυνση από το Σχήμα 6.5 . Το κύμα της εισόδου για τρία βάθη (0.5, 1, 2) και δύο οξυτήτες, $\delta_1=0.02 < \delta_2=0.05$	115
Σχήμα 6.7: Ροϊκή συνάρτηση για βάθος $D=2$ και οξυτήτα $\delta_2=0.05$	116
Σχήμα 6.8: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας και το κύμα της εισόδου για σχεδόν ορθογωνική κοιλότητα ($\delta=0.8$). Ο τριχοειδής αριθμός είναι $Ca=0.01$	116
Σχήμα 6.9:(α) Ροϊκή συνάρτηση για σχεδόν κατακόρυφα τοιχώματα και βάθος $D=2$, (β) Λεπτομέρεια της ροής σε μεγέθυνση.....	117
Σχήμα 6.10.(α) Η επίδραση της οξυτήτας και του βάθους της κοιλότητας στο ύψος του τριχοειδούς κύματος εισόδου (β) Λεπτομέρεια σε μεγέθυνση.....	118

Σχήμα 6.11: Η επίδραση του βάθους της κοιλότητας στο ύψος του κύματος εισόδου.....	119
Σχήμα 6.12: Θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορους τριχοειδείς αριθμούς (α) Δημοσιευμένο διάγραμμα Mazouchi et al. (2001) (β) Παρούσα εργασία.....	120
Σχήμα 6.13: Θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορους τριχοειδείς αριθμούς και τρεις διαφορετικές οξύτητες της κοιλότητας βάθους $D=1$	121
Σχήμα 6.14: Η επίδραση της επιφανειακής τάσης στο ύψος του κύματος στην είσοδο ορθογωνικής κοιλότητας.....	122
Σχήμα 6.15: Η επίδραση της επιφανειακής τάσης και της οξύτητας στο ύψος του κύματος στην είσοδο.....	123
Σχήμα 6.16: Η επίδραση της επιφανειακής τάσης και της οξύτητας στο βύθισμα του υμένα στην έξοδο από κοιλότητα.....	123
Σχήμα 6.17: Η ροϊκή συνάρτηση για διάφορους αριθμούς <i>Capillary</i> για πλατιά και ρηχή κοιλότητα.....	124
Σχήμα 6.18: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για κοιλότητες με $D=w=1$ και οξύτητες $\delta=20, 5, 2,$ και 1	125
Σχήμα 6.19: Οι ροϊκές γραμμές για κοιλότητες με $D=w=1$ και οξύτητες $\delta=20, 5, 2,$ και 1	126
Σχήμα 6.20: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για κοιλότητα με $D=w=1,$ και διάφορες τιμές του τριχοειδούς αριθμού.....	127
Σχήμα 6.21: (α) Το ύψος του τριχοειδούς κύματος και (β) η μέγιστη παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας του υμένα συναρτήσει του τριχοειδούς αριθμού.....	128
Σχήμα 6.22: Οι ροϊκές γραμμές για κοιλότητα με $D=w=1,$ και διάφορες τιμές του τριχοειδούς αριθμού.....	128
Σχήμα 6.23: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για Reynolds $0,001-100$	130
Σχήμα 6.24(α): Ελεύθερη επιφάνεια σε μεγέθυνση στον αναβαθμό της εισόδου.....	131
Σχήμα 6.24(β): Ελεύθερη επιφάνεια σε μεγέθυνση στον αναβαθμό της εξόδου.....	131
Σχήμα 6.25: Η ελεύθερη επιφάνεια για $Re=50$ και διάφορες οξύτητες.....	132
Σχήμα 6.26: Η ροϊκή συνάρτηση για ορθογωνική κοιλότητα ($\delta=2,5$) και αριθμούς Reynolds, $Re=1-100$	133
Σχήμα 6.27: Λεπτομέρειες της ροής για $Re=100$ σε μεγέθυνση.....	134
Σχήμα 6.28: Εξάρτηση του ύψους του κύματος του αναβαθμού εξόδου από τον αριθμό Reynolds και από τον τριχοειδή αριθμό.....	134
Σχήμα 6.29: Η ροϊκή συνάρτηση για $\varepsilon=1$ και $\varepsilon=1/2$ και αριθμούς Reynolds, $Re=10-100$	135
Σχήμα 6.30: Η ροϊκή συνάρτηση για $\varepsilon=1/3$ και αριθμούς Reynolds, $Re=10-100$	136

Σχήμα 6.31 : Η ελάχιστη θέση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου των μηκών, ϵ , της κοιλότητας.....137

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Λατινικά σύμβολα

h_N	πάχος υμένα κατά Nusselt (m)
U	μέση ταχύτητα υμένα (m/sec)
Q	μέση ογκομετρική παροχή (Kg/sec)
g	το μέτρο της βαρύτητας (m/sec ²)
\underline{g}	το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνσή της βαρύτητας
L	μήκος υπολογιστικού πεδίου (m)
W	πλάτος υπολογιστικού πεδίου (m)
x, y	οριζόντια και κάθετη κατεύθυνση στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων
\underline{u}	διάνυσμα στιγμιαίας ταχύτητας υμένα (m/sec)
u, v	οριζόντια και κατακόρυφη συντεταγμένη του διανύσματος της ταχύτητας
T_{yx}	διαμητική τάση στο τοίχωμα (N/m ²)
$h(x, t)$	στιγμιαία θέση ελεύθερης επιφάνειας (m)
$q(x, t)$	στιγμιαία ογκομετρική παροχή (Kg/m ³)
c	φασική ταχύτητα κίνησης (m/sec)
$\phi(y)$	συνάρτηση που περιγράφει τη μορφή της διαταραχής στην κατακόρυφη διεύθυνση
k	κυματαριθμός (m ⁻¹)
$\underline{n}, \underline{t}$	μοναδιαία διανύσματα, κάθετο και οριζόντιο (m)
f	συχνότητα διαταραχής (Hz)
D	γεωμετρική παράμετρος, βάθος διαμόρφωσης τοιχώματος (m)
B	γεωμετρική παράμετρος, βάθος διαμόρφωσης ίσο με $D/2$ (m)
w	γεωμετρική παράμετρος, μήκος διαμόρφωσης τοιχώματος (m)
l	τριχοειδές μήκος (m)
t	χρόνος (sec)
D/Dt	υλική (ή σωματιδιακή) παράγωγος
\underline{F}^*	οι δυνάμεις που ενεργούν στον όγκο του ρευστού
H_c	μέση καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας (m ⁻¹)
p	πίεση (N/m ²)
\underline{I}	μοναδιαίος πίνακας
r	αιχμηρότητα καμπύλης Gauss

$b(x)$	συνάρτηση που περιγράφει τη μορφή της διαμόρφωσης του τοιχώματος
$R_C^i R_M^i R_K^i$	σταθμισμένα υπόλοιπα συνέχειας, ορμής και κινηματικό
J	Ιακωβιανός πίνακας των σταθμισμένων υπολοίπων
Δt	χρονικό βήμα ολοκλήρωσης
Re	αριθμός Reynolds
Re_c	κρίσιμος αριθμός Reynolds
We	αριθμός Weber
Ka	αριθμός Kapitsa
Ca	αριθμός Capillary
Fr	αριθμός Froude

Ελληνικά σύμβολα

λ	μήκος κύματος (m)
ν	κινηματικό ιξώδες του ρευστού (m^2/sec)
φ	γωνία κλίσης (μοίρες)
ρ	πυκνότητα ρευστού (Kg/m^3)
μ	δυναμικό ιξώδες του ρευστού ($Kg/m \cdot sec$)
σ	επιφανειακή τάση ρευστού (N/m)
Ψ	ροϊκή συνάρτηση
κ	καμπυλότητα (m^{-1})
ω	γωνιακή συχνότητα (Hz)
$\underline{\underline{\sigma}}$	τανυστής τάσης
a	εύρος (ύψος) διαταραχής (m)
π	αριθμός πι 3,141592
δ	οξύτητα διαμορφώσεων του τοιχώματος
$\varphi^i \psi^i$	συναρτήσεις βάσεις, διδιάστατη τετραγωνική και διδιάστατη γραμμική
ξ, η	κάθετη και οριζόντια κατεύθυνση στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
N	διάνυσμα των αγνώστων στους κόμβους

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σημασία της μελέτης

Η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Φυσικών & Χημικών Διεργασιών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Η υπολογιστική μελέτη των δυναμικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά τη ροή υγρού υμένα σε επίπεδο ή περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα είναι ο στόχος της παρούσας εργασίας. Τα φαινόμενα ροής σε υμένες υγρών αποτελούν θεμελιώδες κεφάλαιο της ρευστοδυναμικής και η παρούσα ερευνητική προσπάθεια στοχεύει στην αποκωδικοποίηση των βασικών φυσικών μηχανισμών που τα διέπουν.

Η εφαρμοσμένη σημασία της εν λόγω ροής συχνά έγκειται στην άμεση σχέση της με φαινόμενα μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Λεπτοί υμένες υγρού συναντώνται ευρέως σε διεργασίες μεταφοράς θερμότητας και μάζας σε βιομηχανικό περιβάλλον. Η δεδομένη ικανότητα των λεπτών υμένων να μεταφέρουν θερμότητα και μάζα με τη χαμηλότερη υδραυλική αντίσταση είναι αυτή που τους έχει καταδείξει ως κατάλληλους για τις συγκεκριμένες εφαρμογές. Υγροί υμένες απαντώνται ακόμα σε μία ευρύτατη κλίμακα φυσικών φαινομένων, ξεκινώντας από γεωφυσικά (πχ. κίνηση μάγματος) και καταλήγοντας σε βιολογικά (πχ. υμένας λίπανσης οφθαλμών). Η ροή λεπτού υμένα είναι εύκολα ταυτοποιήσιμη καθώς το πάχος του ρευστού είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις υπόλοιπες κλίμακες μήκους που εμφανίζονται (πχ. το φυσικό μήκος εξέλιξης κατά τη διεύθυνση της ροής).

Ρέοντας πάνω σε μια στερεή επιφάνεια, οι λεπτοί υμένες αναπτύσσουν μια πολύπλοκη δομή επιφανειακών κυμάτων, η μορφή και τα χαρακτηριστικά των οποίων ποικίλλουν ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροής. Η εμφάνιση αυτών των δομών οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις βαρύτητας, αλλά υπάρχουν και δομές που οφείλονται αποκλειστικά στη δράση της επιφανειακής τάσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον υπάρχει για τα κύματα που δημιουργούνται από τη συνέργια των δυνάμεων της βαρύτητας με την επιφανειακή τάση του ρευστού. Τα κύματα αυτά αναφέρονται ως μοναχικά κύματα (*solitary waves*). Τα χαρακτηριστικά της ροής και των δομών αυτών επηρεάζουν τη μεταφορά θερμότητας και μάζας, με αποτέλεσμα να καθορίζουν τον βαθμό απόδοσής των συσκευών στις οποίες απαντώνται.

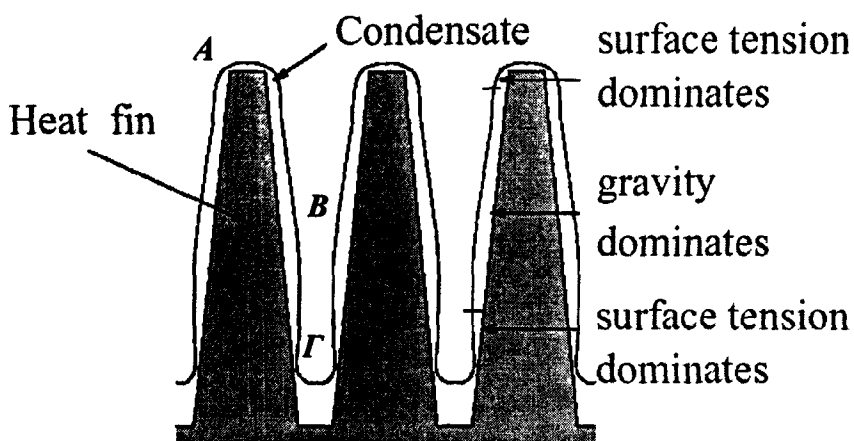
1.2 Ενδεικτικές εφαρμογές

Η πρακτική σημασία της δυναμικής των λεπτών υμένων εξαρτάται άμεσα από την κατά περίπτωση εφαρμογή. Έτσι σε εναλλάκτες θερμότητας, συμπυκνωτές, εξατμιστήρες, στήλες απορρόφησης, πύργους ψύξης, διφασικούς αντιδραστήρες

σκοπός συνήθως είναι η εντατικοποίηση των φαινομένων μεταφοράς θερμότητας/μάζας και η συνακόλουθη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης των συσκευών. Αντίθετα, σε διεργασίες επικάλυψης στερεών υποστρωμάτων με υγρά επιστρώματα (coating processes) στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των διακυμάνσεων της ελεύθερης επιφάνειας ώστε να επιτυγχάνεται κατά το δυνατόν ομοιόμορφη επικάλυψη.

Η συμπύκνωση ατμού (που λόγω απελευθέρωσης της αντίστοιχης ενθαλπίας αλλαγής φάσης αποτελεί τη συνηθέστερη μέθοδο μεταφοράς θερμότητας στη βιομηχανία) προσφέρει ένα ενδιαφέρον παράδειγμα επίδρασης της δυναμικής υγρού υμένα σε διεργασία. Συγκεκριμένα, το συμπύκνωμα που παράγεται σχηματίζει συνήθως πάνω στο στερεό τοίχωμα έναν υγρό υμένα που προβάλλει την ελέγχουσα αντίσταση στη μεταφορά θερμότητας. Συνεπώς, η ταχύτητα απομάκρυνσής του καθορίζει το ρυθμό μεταφοράς θερμότητας.

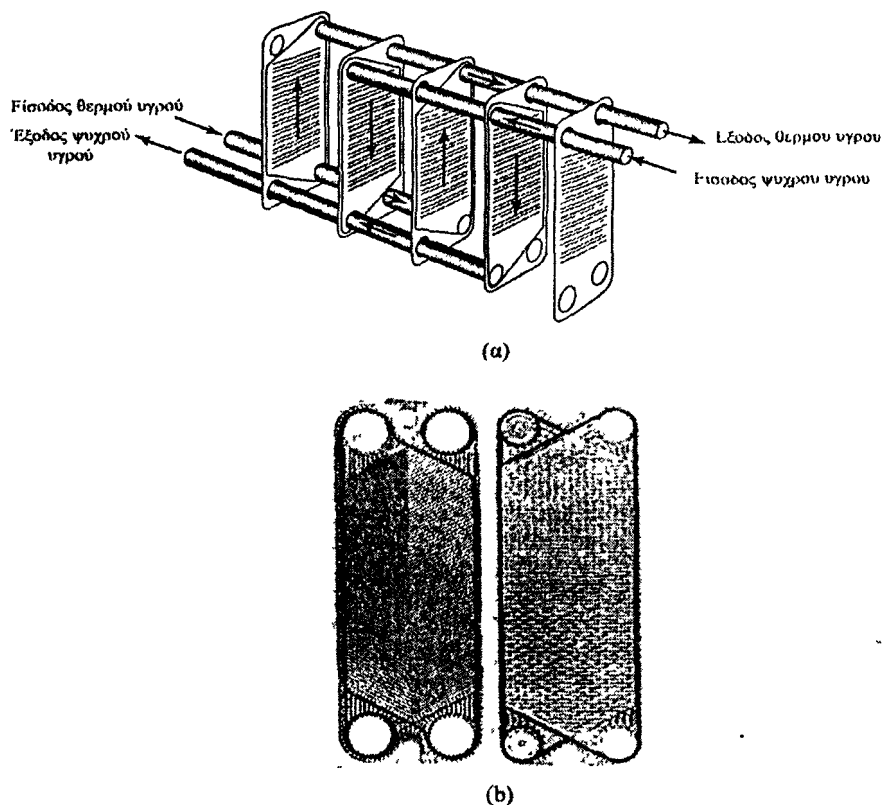
Μία μη-επίπεδη διαμόρφωση τοιχώματος συμπυκνωτή παρουσιάζεται στο **Σχήμα 1.1**, και αποτελείται από σειρά διαμήκων πτερυγίων προσανατολισμένων κατά τη διεύθυνση της βαρύτητας. Η γεωμετρία αυτή συντελεί στη διατήρηση μικρού τοπικού πάχους υμένα σε όλη σχεδόν την επιφάνεια του πτερυγίου (περιοχές A και B στο σχήμα), και συνεπώς στην ελαχιστοποίηση της αντίστασης μεταφοράς θερμότητας. Ο φυσικός μηχανισμός οφείλεται στην επιφανειακή τάση, η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη τριχοειδούς πίεσης στο εσωτερικό του υγρού υμένα όταν η ελεύθερη επιφάνεια παρουσιάζει καμπυλότητα. Συγκεκριμένα, η κορυφή του πτερυγίου (περιοχή A) έχει καμπυλότητα που προκαλεί θετική τριχοειδή πίεση ενώ η βάση (περιοχή Γ) έχει καμπυλότητα που προκαλεί αρνητική τριχοειδή πίεση. Λόγω της διαφορικής πίεσης, συμπύκνωμα κατευθύνεται συνεχώς προς τη βάση των πτερυγίων, απελευθερώνοντας την υπόλοιπη επιφάνεια ώστε να συνεχίζεται η συμπύκνωση με υψηλούς ρυθμούς.



Σχήμα 1.1: Διαμόρφωση πτερυγίων για συμπύκνωση (Myers, 1998)

Ήδη έχει αναφερθεί η σημασία της δυναμικής της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού υμένα (οδεύοντα κύματα) στη διαμόρφωση του ροϊκού πεδίου και τη συνακόλουθη επίδραση στους συντελεστές μεταφοράς. Το παραπάνω παράδειγμα υπογραμμίζει επίσης τη σημασία της μορφής της στερής επιφάνειας (πάνω στην οποία ρέει ο λεπτός υμένας) στα χαρακτηριστικά της ροής και των φαινομένων μεταφοράς θερμότητας/μάζας. Στη συνέχεια αναφέρονται δύο παραδείγματα εφαρμογών (ένα σχετικό με μεταφορά θερμότητας και ένα με μεταφορά μάζας) όπου το στερεό τοίχωμα παρουσιάζει πολύπλοκη γεωμετρία με στόχο την κατάλληλη διαμόρφωση της ροής και την εντατικοποίηση των φαινομένων μεταφοράς. Αξίζει να αναφερθεί ότι οι εφαρμογές προηγούνται της θεμελιώδους κατανόησης των φαινομένων και η βελτιστοποίησή τους βασίζεται προς το παρόν σε εμπειρικές δοκιμές. Η ροή λεπτού υμένα σε μη-επίπεδο τοίχωμα αποτελεί ανοιχτό πεδίο έρευνας και για το οποίο μέχρι στιγμής οι βιβλιογραφικές αναφορές υστερούν, ίσως επειδή τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα είναι πολύπλοκα και πολυδιάστατα.

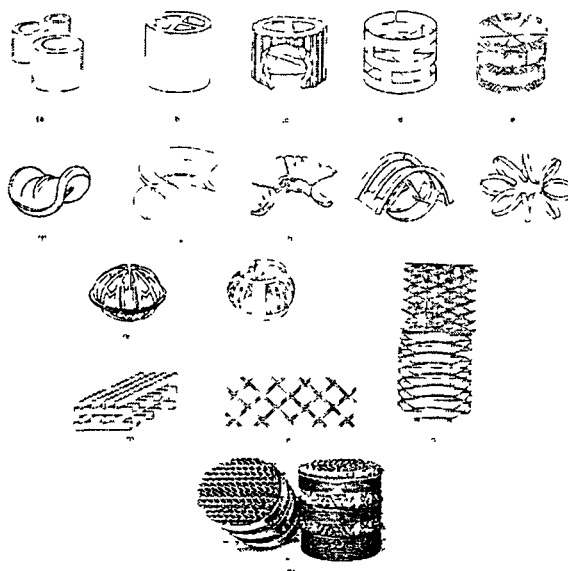
Σε εφαρμογές μεταφοράς θερμότητας σε ήπιες συνθήκες (μέτρια πίεση και θερμοκρασία) είναι συχνά συμφέρουσα η αντικατάσταση των συμβατικών εναλλακτών αυλών-κελύφους από εναλλάκτες πλακών. Οι τελευταίοι αποτελούνται από συστοιχία χαλύβδινων πλακών που στεγανοποιούνται με περιφερειακά παρεμβύσματα και συμπιέζονται σε κατάλληλο πλαίσιο (**Σχήμα 1.2**). Τα δύο ρευστά



Σχήμα 1.2: Εναλλάκτης με πλάκες. (α) Γενική διάταξη (β) Λεπτομέρεια σχεδιασμού πλάκας.

κατευθύνονται σε διαδοχικά διάκενα μεταξύ των πλακών, οι οποίες παρουσιάζουν χαρακτηριστικούς κυματισμούς (Σχήμα 1.2b) που αυξάνουν εντυπωσιακά τους συντελεστές συναγωγής. Με τον τρόπο αυτό υψηλά θερμικά καθήκοντα επιτυγχάνονται σε εναλλάκτες μικρού σχετικά μεγέθους.

Άλλο παράδειγμα μη-επίπεδου στερεού τοιχώματος προσφέρουν τα πληρωτικά υλικά (Σχήμα 1.3) που χρησιμοποιούνται για την αύξηση της διεπιφάνειας υγρού-αερίου σε στήλες απορρόφησης, πύργους ψύξης και δίσκους αποστακτικών στηλών. Το υγρό, που κινείται λόγω βαρύτητας (συνήθως σε αντιρροή με το αέριο) κατανέμεται σε ένα πολύπλοκο δίκτυο υγρών υμένων πάνω στο πληρωτικό υλικό. Με τον τρόπο αυτό αυξάνεται η διεπιφάνεια και διαμορφώνεται η ροή έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο ρυθμός μεταφοράς μάζας.



Σχήμα 1.3: Είδη πληρωτικών υλικών

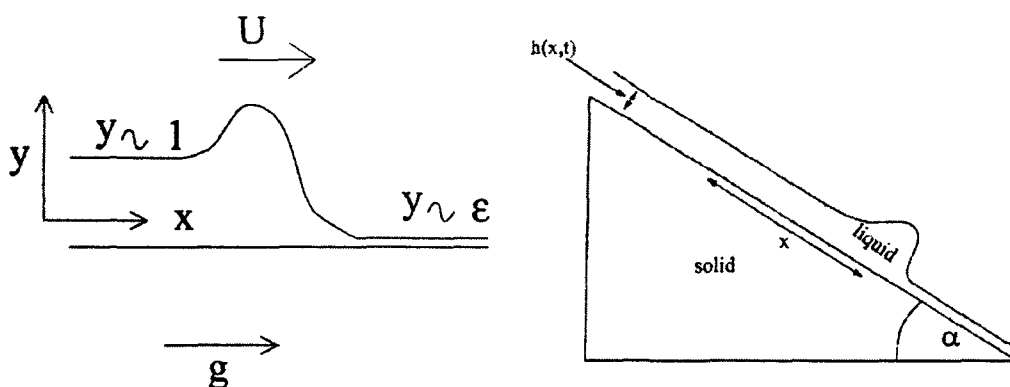
Αν και το γεγονός της ενίσχυσης των συντελεστών μεταφοράς μάζας και θερμότητας με εντατικοποίηση της ροής υγρού υμένα είναι επιβεβαιωμένο πειραματικά, ο λόγος και ο τρόπος που συμβαίνει αυτό δεν είναι ξεκάθαρος. Αρχικά, είχε προταθεί η απλοϊκή υπόθεση ότι η αύξηση των συντελεστών μεταφοράς οφείλεται στην αύξηση της διεπιφάνειας λόγω της δημιουργίας κυματισμών, υπόθεση που απορρίφθηκε σύντομα. Η παρούσα κατανόηση του φαινομένου εστιάζεται στην επίδραση των κυματισμών και περιλαμβάνει δύο συνιστώσες: (α) Τα κύματα επηρεάζουν άμεσα το ροϊκό πεδίο και προκαλούν με τη διέλευση τους ανάδευση που αυξάνει την μεταφορά. Ιδιαίτερα αποτελεσματικά είναι από την άποψη αυτή τα τρισδιάστατα κύματα. Ο ακριβής μηχανισμός του φαινομένου είναι ακόμη ανεπαρκώς κατανοητός. (β) Τα κύματα διεκπεραιώνουν μεγαλύτερες του μέσου όρου παροχές υγρού, με αποτέλεσμα

το πάχος του υμένα μεταξύ διαδοχικών κυμάτων (και συνεπώς η αντίσταση στη μεταφορά θερμότητας/μάζας διαμέσου του) να μειώνεται.

Στον αντίποδα των παραπάνω εφαρμογών βρίσκονται οι διεργασίες επικάλυψης, οι οποίες εφαρμόζονται στην παρασκευή μικροηλεκτρονικών κυκλωμάτων και οπτικών ή μαγνητικών δίσκων. Στις περιπτώσεις αυτές το (επίπεδο ή ανώμαλο) στερεό υποστρώμα απαιτείται να καλυφθεί με έναν κατά το δυνατόν ομοιόμορφο υμένα. Αντιμετωπίζοντας τη διεργασία από ρεολογική σκοπιά, το ενδιαφέρον εστιάζεται στη συνεχή επικάλυψη υποστρωμάτων μεγάλης έκτασης, στα οποία εμφανίζεται ιδανικά διδιάστατη μόνιμη στρωτή ροή.

Το **Σχήμα 1.4** παρουσιάζει την εξέλιξη μίας διεργασίας επικάλυψης που συντελείται με τη βαρύτητα. Συνήθως, η επικάλυψη επιτυγχάνεται με ταχεία περιστροφή του υποστρώματος, έτσι ώστε η φυσική βαρύτητα να υποκαθίσταται από την πολλαπλάσια σε ένταση φυγόκεντρο δύναμη. Εντούτοις, η απλή ανάλυση του υγρού υμένα σε βαρυτική ροή εξακολουθεί να ισχύει για κλίμακα μήκους μικρή σε σχέση με τη χωρική μεταβολή της φυγόκεντρης δύναμης.

Είναι προφανώς κατανοητό ότι, σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές, η ανάπτυξη κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια του επιστρώματος υποβαθμίζει την ποιότητα του προϊόντος. Μία ιδιαιτερότητα των διεργασιών επικάλυψης είναι ότι συνήθως συντελούνται σε συνθήκες πολύ χαμηλού αριθμού Reynolds, οπότε η επίδραση αδρανειακών φαινομένων είναι αμελητέα. Στις συνθήκες αυτές, η ανάπτυξη κυματισμών σχετίζεται με την αντίδραση του υμένα στις μικροανωμαλίες του υποστρώματος, καθώς και με τη δυναμική της γραμμής επαφής των τριών φάσεων (contact line dynamics) υγρού-στερεού-αέρα. Σε κάθε περίπτωση, κεντρικό ρόλο διαδραματίζει η ισορροπία τριχοειδών και ιξωδών φαινομένων.



Σχήμα 1.4: Σχηματική αναπαράσταση διεργασίας επικάλυψης.

1.3 Βασικά περιεχόμενα της μελέτης

Η πλήρης και σε βάθος κατανόηση της δυναμικής της ροής λεπτού υμένα αναμένεται να συνεισφέρει στην ερμηνεία των φαινομένων που υπεισέρχονται σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές. Καθώς η στρωτή ροή υμένα είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την παρουσία κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια, η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται στα κύματα, τον τρόπο δημιουργίας και ανάπτυξής τους και στις παραμέτρους που τα επηρεάζουν.

Η έρευνα στους υγρούς υμένες ξεκίνησε με τη θεωρητική μελέτη του Nusselt, ο οποίος πρώτος ασχολήθηκε με το φαινόμενο το 1916 και έδωσε απαντήσεις για την πιο απλή μορφή της ροής. Η θεωρία υποθέτει υγρό σταθερού πάχους το οποίο κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας σε κεκλιμένο επίπεδο. Έκτοτε η έρευνα συνεχίζεται τόσο σε θεωρητικό επίπεδο, όσο και σε πειραματικό και υπολογιστικό. Ήδη διάφορα ερωτήματα που αφορούν τη ροή υγρού υμένα, όπως η ανάλυση ευστάθειας, τα είδη και οι μηχανισμοί αστάθειας και τα βασικά στάδια μη-γραμμικής εξέλιξης της ροής, έχουν απαντηθεί σε μεγάλο βαθμό.

Ένα σύνολο υπολογιστικών/θεωρητικών ερευνών (Chang et al. 1986, 1994, 1995, και 2002, Malamataris et al. 2002) καθώς και πειραματικών (Alekseenko et al. 1985, Liu & Gollub 1993, 1994, Vlachogiannis & Bontozoglou 2001, Yoshimura et al. 1996 κ.ά.) συμφωνούν στο ότι η δυναμική της ροής υγρού υμένα σε χαμηλούς και μέσους αριθμούς Reynolds καθορίζεται από την εμφάνιση μοναχικών κυμάτων (solitary waves). Τα μοναχικά κύματα οφείλουν το όνομά τους στη ικανή απόσταση που διατηρούν το ένα από το άλλο, έτσι ώστε συνήθως να μην αλληλοεπηρεάζονται, και χαρακτηρίζονται από δύο διαφορετικές δομές άρρηκτα συνδεδεμένες: μια κύρια κορυφή με απότομο μέτωπο και ομαλό τελείωμα είναι η πρώτη ταυτοποιήσιμη δομή, μια σειρά μικρών, τόσο σε ύψος όσο και σε μήκος, κυματισμών που προηγούνται αυτής η δεύτερη. Στα πειράματα, τα κύματα αναπτύσσονται είτε υπό την επίδραση του φυσικού θορύβου είτε, συνηθέστερα, λόγω μιας συστηματικά επιβαλλόμενης διαταραχής (Karitza & Karitza 1965).

Βασικό χαρακτηριστικό των μοναχικών κυμάτων αποτελεί η γραμμική εξάρτηση της φασικής τους ταχύτητας από το ύψος της κύριας κορυφής. Έτσι, μεγαλύτερα κύματα κινούνται πιο γρήγορα από τα μικρότερα και τα προλαβαίνουν. Επίσης, το ύψος του κύματος σχετίζεται με το μήκος κύματος και επομένως με τη συχνότητα της επιβαλλόμενης διαταραχής. Αυτές και άλλες ιδιότητες των μοναχικών κυμάτων έχουν αναφερθεί σε αρκετές θεωρητικές μελέτες και σπανιότερα σε πειραματικές ή υπολογιστικές. Εντούτοις, μια συστηματική παραμετρική μελέτη και σύγκριση προσομοιώσεων με πειράματα δεν φαίνεται να υπάρχει στη βιβλιογραφία. Ένα άλλο συναφές αντικείμενο, το οποίο δεν έχει μελετηθεί καθόλου, είναι η επίδραση των

μοναχικών κυμάτων στη διατμητική τάση στο τοίχωμα. Έτσι, το πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας έχει αφιερωθεί στη συστηματική υπολογιστική μελέτη των παραπάνω χαρακτηριστικών των μοναχικών κυμάτων και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με μετρήσεις.

Όπως προαναφέρθηκε, η γένεση των κυμάτων οφείλεται σε διαταραχές στη ροή, τυχαίες ή συστηματικά επιβαλλόμενες. Η συχνότητα της διαταραχής έχει αποδειχθεί τόσο πειραματικά όσο και υπολογιστικά ότι επηρεάζει καθοριστικά την εξέλιξη της ροής. Συγκεκριμένα, μεγάλες συχνότητες οδηγούν σε κορεσμένα περιοδικά κύματα, ενώ μικρές συχνότητες διαταραχής σε μοναχικά κύματα (Liu & Gollub, 1994). Ένας γενικός κανόνας είναι ότι τα δημιουργούμενα κύματα εμφανίζονται με συχνότητα ίδια με τη συχνότητα της επιβαλλόμενης διαταραχής. Το εύρος των συχνοτήτων εξωτερικής διαταραχής που υπακούουν στον παραπάνω κανόνα περιορίζεται από ένα μέγιστο, πέρα από το οποίο οι διαταραχές γίνονται γραμμικά ευσταθείς. Από την άλλη πλευρά υπάρχει και μια ελάχιστη συχνότητα, κάτω από την οποία η κανονική σειρά των κυμάτων καταστρέφεται από την εμφάνιση παρασιτικών κορυφών. Το φαινόμενο αυτό έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία (Alekseenko et al. 1985, Yoshimura et al. 1996), αλλά δεν έχει μελετηθεί διεξοδικά. Για τον λόγο αυτό, μέρος της διατριβής ερευνά υπολογιστικά τον τρόπο δημιουργίας και ανάπτυξης των παρασιτικών κορυφών σε χαμηλές συχνότητες διαταραχής, έχοντας στόχο την αποκάλυψη του φυσικού μηχανισμού γένεσής τους.

Η περίπτωση της ροής επάνω σε μη-επίπεδο τοίχωμα, παρά τις πολυάριθμες εφαρμογές της, έχει μελετηθεί πολύ λιγότερο από ότι η περίπτωση του επίπεδου τοιχώματος. Μεταξύ των πρώτων, ο Wang (1981) επικεντρώνεται στη θεωρητική μελέτη της ροής υγρού υμένα πάνω σε περιοδικό ημιτονοειδές τοίχωμα, θεωρώντας μικρούς αριθμούς Reynolds και μικρό πλάτος τοιχώματος. Ο Wang παρατήρησε ότι στην ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζεται στατική περιοδική δομή η οποία έχει μήκος κύματος ίδιο με το μήκος κύματος του τοιχώματος. Σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds, έχει αναφερθεί (Bontozoglou & Parapolymereou, 1997) ότι το κυματοειδές τοίχωμα έρχεται σε συντονισμό με την ελεύθερη επιφάνεια δημιουργώντας μεγάλες στατικές διαταραχές. Για ροή σε πεπερασμένους αριθμούς Reynolds, πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάστηκαν από τους Vlachogiannis & Bontozoglou (2002) και Aksel et al. (2003), με τους τελευταίους να έχουν εργαστεί με υγρά πολύ μεγάλου ιξώδους. Ο τρόπος με τον οποίο επηρεάζεται η ροή από την ύπαρξη της διαμόρφωσης του τοιχώματος δεν έχει ακόμα πλήρως διαλευκανθεί και αποτελεί αντικείμενο έρευνας. Ειδικότερα, η παρούσα διατριβή ασχολείται με την εύρεση του μόνιμου πεδίου ροής ως συνάρτηση του αριθμού Reynolds, για υγρό υμένα πάνω σε τοίχωμα με ημιτονοειδή διαμόρφωση μεγάλου πλάτους.

Ένα ενδιαφέρον συναφές πρόβλημα, που αποτελεί το τελευταίο αντικείμενο της διατριβής, είναι η συμπεριφορά υγρού υμένα όταν συναντήσει μία μεμονωμένη διαταραχή σε ένα επίπεδο τοίχωμα (πχ. μία λακούβα). Εδώ ενδιαφέρει τόσο η ένταση της τοπικής παραμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας και του ροϊκού πεδίου όσο και η έκτασή της, δηλαδή το μήκος επηρεασμού της ροής ανάντι και κατόντι της διαταραχής. Είναι προφανές ότι η μελέτη τοιχώματος με μία μεμονωμένη διαταραχή είναι συμπληρωματική της μελέτης τοιχώματος με περιοδική διαμόρφωση. Τα δύο προβλήματα παρουσιάζουν ορισμένες ομοιότητες αλλά και αρκετές ενδιαφέρουσες διαφορές.

Η ροή υγρού υμένα πάνω από μεμονωμένη διαταραχή έχει μελετηθεί κυρίως σε συνάρτηση με διεργασίες επικάλυψης, δηλαδή στο όριο του μηδενικού αριθμού Reynolds. Επίσης, οι περισσότερες αναλύσεις βασίζονται στην προσέγγιση της θεωρίας λίπανσης (lubrication approximation), η οποία ισχύει για σχετικά ήπιες διαταραχές και απλοποιεί το πρόβλημα με βάση τη μεγάλη διαφορά κλίμακας μήκους παράλληλα και κάθετα στη ροή και την αμελητέα επίδραση της αδράνειας. Η παρούσα προσπάθεια, που επιλύει αριθμητικά τις πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes, επικεντρώνεται στη μελέτη της επίδρασης των αδρανειακών δυνάμεων καθώς και της γεωμετρίας της διαταραχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται ανασκόπηση της έρευνας στη ροή των υγρών υμένων. Η βιβλιογραφία για ροή πάνω από επίπεδο τοίχωμα είναι εκτεταμένη, με τις πρώτες σημαντικές δημοσιεύσεις να ανάγονται στις αρχές του περασμένου αιώνα. Αντίθετα, για τη ροή πάνω σε μη-επίπεδο τοίχωμα οι αναφορές είναι συγκριτικά περιορισμένες και πολύ πιο σύγχρονες. Όπως αναμένεται, ο βαθμός κατανόησης των προβλημάτων είναι αντίστροφα ανάλογος της πολυπλοκότητας της ροής. Τα τρία βασικά στάδια ανάλυσης είναι η εύρεση της μόνιμης λύσης, η εξέταση της γραμμικής της ευστάθειας και -σε περίπτωση ασταθών συνθηκών- η μελέτη της μη-γραμμικής εξέλιξης. Σε όλες τις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν (χαμηλοί και μέσοι αριθμοί Reynolds), ο κύριος βαθμός ελευθερίας της ροής προσφέρεται από τη δυναμική της ελεύθερης επιφάνειας, η οποία καθορίζει και το ροϊκό πεδίο.

2.1 Επίπεδο τοίχωμα

2.1.1 Λύση Nusselt

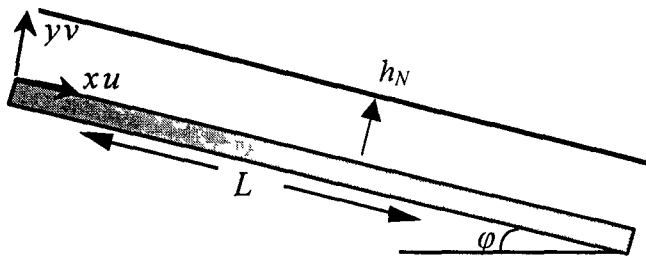
Η ανασκόπηση της δυναμικής των υγρών υμένων ξεκινάει με την παράθεση της λύσης Nusselt, δηλαδή της βασικής, μόνιμης ροής σε επίπεδο τοίχωμα. Ο Nusselt το 1916 έλυσε το πρόβλημα της ροής υμένα σταθερού πάχους σε κατακόρυφο τοίχωμα, ο οποίος κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας. Η ροή θεωρείται μόνιμη και στρωτή. Οι επόμενες σχέσεις, γνωστές ως σχέσεις Nusselt, αποτελούν τη λύση για το πάχος του υμένα (h_N) και τη μέση ταχύτητα του υμένα (U) συναρτήσει της ογκομετρικής παροχής (Q) ή του αριθμού Reynolds:

$$h_N = \left[\frac{3\nu}{g} \right]^{1/3} Q^{1/3} = \left[\frac{3\nu^2}{g} \right]^{1/3} Re^{1/3} \quad (2.1)$$

$$U = \left[\frac{g}{3\nu} \right]^{1/3} Q^{2/3} = \left[\frac{\nu g}{3} \right]^{1/3} Re^{2/3} \quad (2.2)$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, ν το κινηματικό ιξώδες και Re ο αριθμός Reynolds ($Re = Uh_N / \nu$).

Για τη γενικότερη περίπτωση ενός κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης ϕ , υπολογίζεται παρακάτω η κατανομή της ταχύτητας και αποδεικνύονται οι σχέσεις Nusselt. Η ροή είναι διδιάστατη και αδιατάρακτη χαρακτηριστικού μήκους L (**Σχήμα 2.1**), η συνιστώσα της ταχύτητας στη x -κατεύθυνση, u , θεωρείται ανεξάρτητη του x , η πυκνότητα ρ και το ιξώδες μ παραμένουν σταθερά.



Σχήμα 2.1: Σχηματική διάταξη της ροής υγρού υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο

Σε ένα στοιχειώδη όγκο πλάτους W , η καθαρή εισροή x -ορμής οφείλεται στην ύπαρξη της συναγωγής και στη δράση του ιξώδους. Έτσι το ισοζύγιο δίνει:

$$\left[(Wdy u)(\rho u) \right]_x - (Wdy u)(\rho u) \Big|_{x+L} + \left[WL\tau_{yx} \Big|_y - WL\tau_{yx} \Big|_{y+dy} \right] + WLdy\rho g \sin \varphi = 0 \quad (2.3)$$

το οποίο, διαιρούμενο με $WLdy$ στο όριο της πλήρως ανεπτυγμένης ροής όπου $u|_x = u|_{x+L}$, γίνεται:

$$-\frac{d(\tau_{yx})}{dy} + \rho g \sin \varphi = 0 \quad (2.4)$$

όπου: $\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy}$.

Αντικαθιστώντας τις συνοριακές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow u(0) = 0 \\ y = h_N &\Rightarrow \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

προκύπτει τελικά η κατανομή της ταχύτητας στη x -κατεύθυνση:

$$u = \left(\frac{g \sin \varphi}{2\nu} \right) y(2h_N - y) \quad (2.6)$$

Η μέση ταχύτητα U δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{\int_0^{h_N} u dy}{h_N} = \frac{g \sin \varphi h_N^2}{3\nu} \quad (2.7)$$

από την οποία προκύπτει η εξάρτηση της ογκομετρικής παροχής από το μέσο πάχος του υμένα:

$$Q = Uh_N = \frac{g \sin \varphi h_N^3}{3\nu} \quad (2.8)$$

ή, αντίστροφα,

$$h_N = \sqrt[3]{\frac{3Q\nu}{g \sin \varphi}} \quad (3.9)$$

Η συνήθης διαστατική ανάλυση οδηγεί στους αριθμούς Reynolds και Weber ή στους αριθμούς Reynolds και Kapitza, οι οποίοι, για επιφανειακή τάση σ , ορίζονται ως εξής:

$$\text{Re} = \frac{U h_N}{\nu} = \frac{Q}{\nu} \quad (2.10)$$

$$\text{We} = \frac{\sigma}{\rho U^2 h_N} \quad (2.11)$$

$$\text{Ka} = \frac{\sigma}{\rho \nu^{4/3} g^{1/3}} \quad (2.12)$$

Η μαθηματική επίλυση της γενικότερης περίπτωσης, δηλαδή της ροής με οδεύοντα επιφανειακά κύματα, παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία εξαιτίας του γεγονότος ότι η θέση της ελεύθερης επιφάνειας $h(x,t)$, η οποία ορίζει την περιοχή το υγρού, δεν είναι γνωστή εξ αρχής αλλά προκύπτει ως μέρος της λύσης.

2.1.2 Γραμμική ευστάθεια της ροής υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο-Η εξίσωση Orr Sommerfeld

Εάν εισαχθεί σε έναν επίπεδο υμένα, για παράδειγμα σε αυτόν που επιλύθηκε παραπάνω, μια μικρή διαταραχή (γραμμική) είναι πιθανόν ότι αυτή θα οδηγήσει υπό ορισμένες συνθήκες στην εμφάνιση κυμάτων. Η μελέτη της γραμμικής ευστάθειας της παραπάνω βασικής ροής περιορίζεται στις διδιάστατες διαταραχές καθώς είναι γνωστό ότι αυτές είναι περισσότερο ασταθείς από τις τρισδιάστατες (θεώρημα Squire).

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Navier-Stokes και ακολουθώντας τα ενδεδειγμένα βήματα της γραμμικής ανάλυσης για διαταραχές περιοδικές στη διεύθυνση ροής και αναπτυσσόμενες χρονικά, προκύπτει ότι η ροϊκή συνάρτηση Ψ περιγράφεται από τη σχέση $\Psi = \phi(y) \exp[ik(x - ct)]$, όπου c η φασική ταχύτητα και k ο κυματαριθμός της διαταραχής. Για την άγνωστη μορφή της διαταραχής $\phi(y)$ στη διεύθυνση την κάθετη στο τοίχωμα προκύπτει η εξής τέταρτης τάξης γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση, η οποία διατυπώθηκε ανεξάρτητα πρώτη φορά από τους Orr (1907) και Sommerfeld (1908):

$$\phi'''' + 2k\phi'' + k^4\phi = i\frac{k}{\nu} [(U - c)(\phi'' - k^2\phi) - U''\phi] \quad (2.13)$$

Για την αδιαστατοποίηση χρησιμοποιούνται ένα χαρακτηριστικό μήκος L (συνήθως $L \equiv h_N$) η μέση ταχύτητα U , και ο χρόνος L/U , οπότε η αδιάστατη Orr-Sommerfeld λαμβάνει τη μορφή:

$$\hat{\phi}'''' + 2k^2\hat{\phi}'' + k^4\hat{\phi} = i\text{Re}k(\hat{U} - \hat{c})(\hat{\phi}'' - k^2\hat{\phi}) - \hat{U}''\hat{\phi} \quad (2.14)$$

όπου: $\hat{\varphi} = \frac{\varphi}{UL}$, $\hat{U} = \frac{U}{U}$, $\hat{c} = \frac{c}{U}$, $Re = \frac{UL}{\nu}$. Οι τόνοι δείχνουν διαφόριση ως προς το αδιάστατο

διάνυσμα : $\hat{y} = \frac{Y}{L}$. Με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες το πρόβλημα που

προκύπτει είναι πρόβλημα ιδιοτιμών για την φασική ταχύτητα c . Οι συνοριακές συνθήκες για τη ροή υγρού υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο είναι:

- ο Μη ολίσθησης και μη -διδείσδυσης : $y = 0, u = v = 0 \Rightarrow \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$
- ο Ισορροπία δυνάμεων στην ελεύθερη επιφάνεια: $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{t}} = 0$ και $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{n}} = \sigma \kappa$,
όπου κ είναι η καμπυλότητα.

Η ανάλυση ευστάθειας μπορεί να είναι είτε χρονική είτε χωρική. Η λύση $k = k(\omega), \omega \in \mathbb{R}$ οδηγεί σε συμπεράσματα για τη χωρική εξέλιξη μίας διαταραχής που επιβάλλεται με συχνότητα ω σε ορισμένη θέση. Αντίστοιχα, η λύση $\omega = \omega(k), k \in \mathbb{R}$ περιγράφει τη χρονική εξέλιξη διαταραχής που είναι ομοιόμορφη χωρικά με κυματαριθμό k . Οι παραπάνω παράμετροι συνδέονται με τη γνωστή σχέση $\omega = kc$. Στην οριακή ευστάθεια ή ουδέτερη ευστάθεια, εκεί δηλαδή όπου: $\omega_i = 0$ και $k_i = 0$, οι δυο λύσεις ταυτίζονται.

Αν θεωρηθεί ότι το μήκος κύματος της διαταραχής είναι πολύ μεγαλύτερο του πάχους του υμένα, δηλαδή $\varepsilon = kh_n \ll 1$, και αναπτυχθεί η λύση ασυμπτωτικά ως προς τη μικρή παράμετρο ε (Yih, 1961), προκύπτει στη μηδενική τάξη ότι $c_0 = 3$ και στην πρώτη τάξη ότι $c_1 = i(\text{Re} - \frac{6}{5} \cot \varphi)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός

Reynolds:

$$Re_c = \frac{6}{5} \cot \varphi \quad (2.15)$$

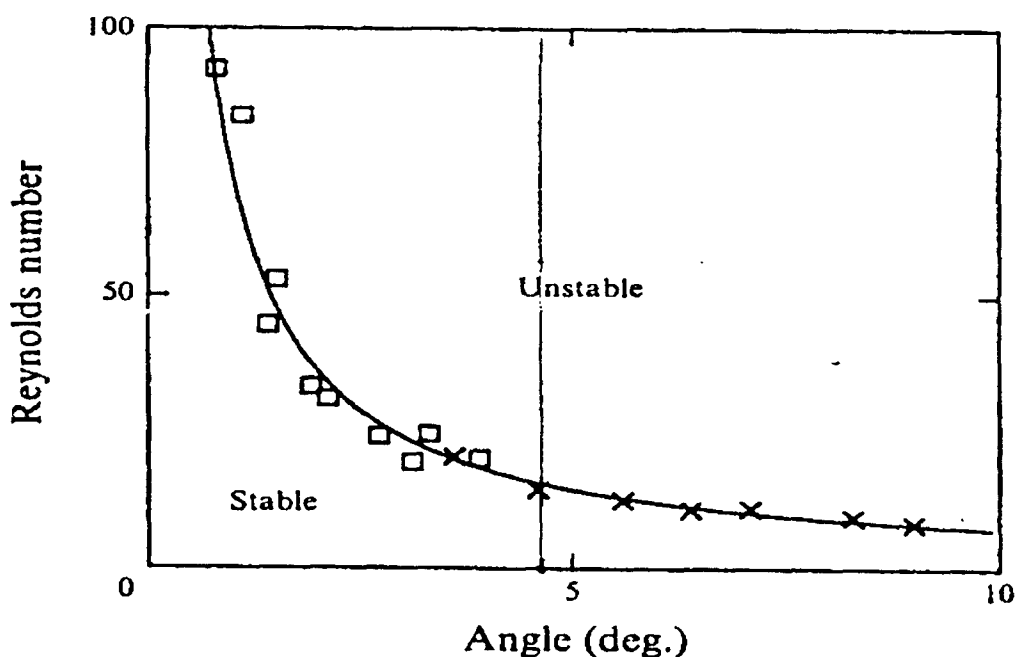
πέρα από τον οποίο η ροή γίνεται γραμμικά ασταθής, και ότι οι πρώτες ασταθείς διαταραχές με την αύξηση του Re έχουν άπειρο μήκος κύματος και φασική ταχύτητα τρεις φορές μεγαλύτερη από τη μέση ταχύτητα κίνησης του υγρού.

Η σχέση του κρίσιμου αριθμού Reynolds με τη γωνία κλίσης του τοιχώματος επιβεβαιώθηκε πειραματικά από τους Liu et al. (1993). Το **Σχήμα 2.2**, που προέρχεται από αυτή την εργασία, παρουσιάζει μετρήσεις του κρίσιμου αριθμού Reynolds ως συνάρτησης της γωνίας κλίσης. Τα δεδομένα συγκρίνονται με τη θεωρητική πρόβλεψη,

$Re_c = \frac{6}{5} \cot \varphi$, η οποία παριστάνεται με τη συνεχή γραμμή. Τα πειράματα έγιναν για

νερό (□) και διάλυμα νερού-γλυκερίνης 26% (×), και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η ευστάθεια εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Reynolds και δεν επιδρά σε αυτή η φύση του ρευστού. Η συμφωνία με τη θεωρητική πρόβλεψη που είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική δηλώνει ότι οι φυσικές προσεγγίσεις οι οποίες έγιναν για την επίλυση της εξίσωσης

Orr-Sommerfeld και την ανάλυση της γραμμικής ευστάθειας είναι ακριβείς, τουλάχιστον κοντά στο κρίσιμο σημείο.



Σχήμα 2.2: Ο κρίσιμος Reynolds συναρτήσεως της γωνίας κλίσεως. Πειραματική επιβεβαίωση της θεωρητικής πρόβλεψης (Liu et al. 1993)

2.1.3 Μη γραμμική εξέλιξη της ροής

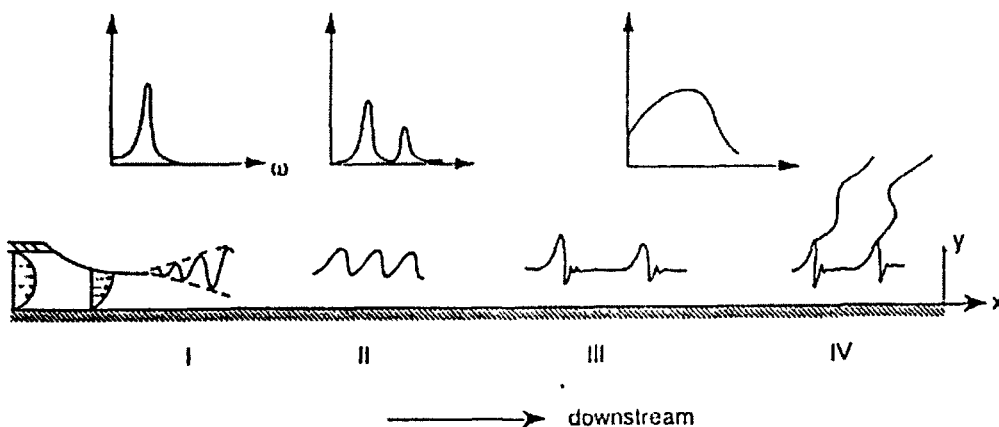
Τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα κατά μήκος μιας ροής υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τον αριθμό Reynolds. Ακολουθώντας τη σύνοψη του Chang (1994), παρατηρούμε ότι για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds ($Re > 1000$), τα κύματα που εμφανίζονται οφείλονται σε διάτμηση και χαρακτηρίζονται από διάφορα μήκη κύματος. Τα μήκη κύματος παρατηρήθηκε να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους ή μικρότερα από το πάχος υμένα κατά Nusselt. Τέτοιες υψηλού ρυθμού συνθήκες ροής συνήθως οδηγούν σε τυρβώδεις υμένες, με την κλασική έννοια της τύρβης, στους οποίους κυριαρχούν οι εσωτερικές αστάθειες Tollmien-Schlichting. Γρήγορα και η ελεύθερη επιφάνεια γίνεται τυρβώδης μια και η εσωτερική τύρβη μεταφέρεται.

Για ενδιάμεσους έως υψηλούς αριθμούς Reynolds ($300 < Re < 1000$) η ροή χαρακτηρίζεται από μεγάλα επιφανειακά κύματα ενδεικτικά της αστάθειας βαρύτητας-ισώδους (Chu & Dukler, 1974). Παρόλα αυτά η δυναμική των κυμάτων είναι εξαιρετικά ασταθής, ιδιαίτερα για τα συνοδευτικά μικρά κύματα, τα οποία φαίνονται να παράγονται από έναν μηχανισμό αποβολής δινών από τα μεγάλα κύματα. Αντίθετα, σε πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds ($Re \ll 1$) ο υμένας υγρού γίνεται τόσο λεπτός

ώστε σημασία έχουν οι ενδομοριακές δυνάμεις και η συνεκτικότητα των γραμμών επαφής που δημιουργούνται καθώς ο υμένας διαρρηγνύεται.

Στην ενδιάμεση περιοχή ($1 < Re < 300$) τα μεγάλα μήκη κύματα σταθεροποιούνται υπό την επίδραση της βαρύτητας και του ιξώδους. Για αυτή την περιοχή, ο Chang (1994) ξεχώρισε τα εξής τέσσερα διακριτά στάδια στην ανάπτυξη του υγρού υμένα (Σχήμα 2.3): Στην περιοχή έναρξης (περιοχή I) οι απειροελάχιστες διαταραχές που εμφανίζονται με φυσικό τρόπο στην είσοδο ενισχύονται γραμμικά κατά μήκος της ροής για να μορφοποιηθούν τελικά σε ένα μονοφασματικό κύμα στο τέλος της περιοχής I. Αυτό αποτελεί ένδειξη του συναγωγικού χαρακτήρα της αστάθειας, η διαταραχή δηλαδή ταξιδεύει μαζί με τη ροή κατά μήκος της επιφάνειας.

Εάν η αρχική διαταραχή φέρει μια κυρίαρχη συχνότητα τότε το αναδύμενο κύμα κληρονομεί τη συχνότητα της αρχικής διαταραχής. Αν στην αρχική διαταραχή



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση των τεσσάρων περιοχών που διακρίνονται κατά την εξέλιξη ενός υμένα ρευστού όταν η διαταραχή στην είσοδο είναι θόρυβος.

υπάρχει ένα εύρος συχνοτήτων χωρίς καμία να κυριαρχεί, όπως γίνεται στην πραγματικότητα με το φυσικό θόρυβο, μια εξαιρετικά εκλεκτική διαδικασία ανάπτυξης λαμβάνει χώρα στην περιοχή I, οδηγώντας τελικά σε ένα κυρίαρχο κύμα. Ειδικότερα οι εγκάρσιες διαταραχές ανακόπτονται επιλεκτικά στην περιοχή έναρξης. Το ύψος του κύματος που παράχθηκε μεγαλώνει εκθετικά κατά μήκος της ροής όπως συμβαίνει κατά τη διέγερση όλων των συναγωγικά ασταθών συστημάτων.

Η περιοχή II αφορά την εμφάνιση των πρώτων μη-γραμμικών φαινομένων, όταν η ανάπτυξη του κυρίαρχου κύματος αρχίζει να υπολείπεται της εκθετικής πρόβλεψης της γραμμικής θεωρίας. Τελικά, το κύμα ισορροπεί σε ένα ύψος το οποίο εξαρτάται από τον κυματαριθμό, τον αριθμό Reynolds και τον αριθμό Kapitza. Αιτία αυτής της ασθενούς μη-γραμμικής συμπεριφοράς είναι η αλληλοεπίδραση της θεμελιώδους αρμονικής της περιοδικής λύσης με την αρμονική δεύτερης τάξης. Υπό

την επίδραση του ασθενούς μη-γραμμικού μηχανισμού, το μονοχρωματικό κύμα που αναπτύχθηκε στην περιοχή I χάνει σταδιακά το ημιτονοειδές σχήμα και τελικά ισορροπεί σε ένα ύψος το οποίο εξαρτάται από τον κυματαριθμό, τον αριθμό Reynolds και τον αριθμό Karitzka. Ο Lin (1983) απέδειξε ότι τα κύματα φέρουν από την περιοχή I μια αρνητική μη-γραμμική διόρθωση της ταχύτητας, τέτοια ώστε καθώς μεγαλώνουν να επιβραδύνονται. Πειραματικές προσπάθειες έδειξαν ότι εξαιτίας της μη γραμμικότητας ακόμα και ο κυματαριθμός του περιοδικού κύματος που βγαίνει από την περιοχή II μπορεί να είναι διαφορετικός από τον κυματαριθμό του πρωταρχικού κύματος που βγαίνει από την περιοχή I.

Οι περιοδικές κυματοσειρές που αναπτύσσονται στην περιοχή II, είτε λόγω της επιβαλλόμενης συστηματικής διαταραχής είτε με τη διαδικασία επιλεκτικής ενίσχυσης του φυσικού θορύβου, ταξιδεύουν μία μεγάλη απόσταση (~10 μήκη κύματος) με σταθερή μορφή, δηλαδή χωρίς εμφανή αλλαγή στο σχήμα και τη ταχύτητα τους. Η επόμενη μεταβολή που παρατηρείται οφείλεται στην ανάπτυξη δευτερευουσών ασταθειών που σηματοδοτούν την είσοδο στην περιοχή III. Οι δευτερεύουσες αστάθειες είναι δύο ειδών: η υποαρμονική αστάθεια που οδηγεί σε συγχώνευση διαδοχικών κορυφών και η πλευρική αστάθεια που μεταφέρει ενέργεια σε μήκη κύματος πολύ μεγαλύτερα από της περιοδικής κυματομορφής (Prokoriou et al. 1991, Cheng & Chang 1992, Liu et al. 1993). Ο συνδυασμός των δύο αυτών ασταθειών δημιουργεί νησίδες μεγάλων κυμάτων που αναπτύσσονται περαιτέρω σε μήκος, εύρος και ταχύτητα και εξελίσσονται βαθμιαία στις χαρακτηριστικές χωρικά εντοπισμένες κορυφές των μοναχικών κυμάτων. Τα μοναχικά κύματα έχουν απότομα μέτωπα, των οποίων η ένταση μετριάζεται από μια σειρά προπορευόμενων τριχοειδών κύματων με μήκος κύματος κοντά σε αυτό της περιοχής I. Τα μοναχικά κύματα κινούνται ταχύτερα από τις προγενέστερα περιοδικές κυματομορφές και τις απορροφούν, έτσι ώστε η ροή τελικά απαρτίζεται από μία ακανόνιστη αλληλουχία μοναχικών κορυφών.

Είναι αξιοσημείωτο ότι η κυριαρχία των μοναχικών κυμάτων οδηγεί σε εντυπωσιακή αύξηση του εύρους του φάσματος συχνοτήτων της ροής. Η συμπεριφορά αυτή έρχεται σε εντυπωσιακή αντίθεση με το μονοχρωματικό ή διχρωματικό φάσμα των περιοχών I και II. Τονίζεται ότι το σύνθετο αυτό φάσμα δεν οφείλεται στη στοχαστική αλληλεπίδραση πολλών ανεξάρτητων συχνοτήτων (όπως συμβαίνει με τις δίνες της τύρβης) αλλά οφείλεται αποκλειστικά στο έντονα μη-γραμμικό σχήμα των μοναχικών κορυφών. Ως συνέπεια, όλες οι αρμονικές του φάσματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα, δηλαδή είναι «κλειδωμένες».

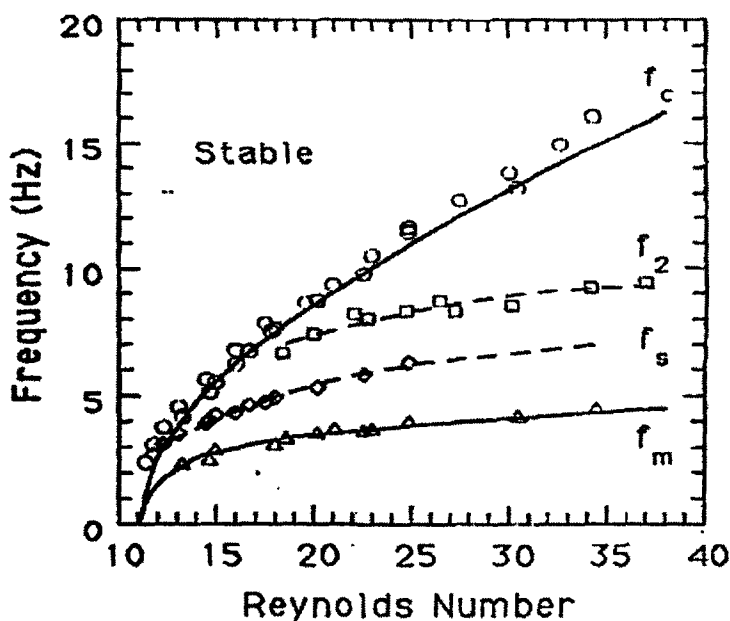
Στα πειράματα όπου επιβάλλεται κανονική διαταραχή χαμηλής συχνότητας και ικανοποιητικά υψηλής έντασης, οι περιοχές I και II μπορεί να παρακαμφθούν. Σε αυτή την περίπτωση, το κυματικό πεδίο που σχηματίζεται απαρτίζεται από κανονικά κύματα μεγάλου φασματικού εύρους, των οποίων η συχνότητα ταυτίζεται με την επιβαλλόμενη

συχνότητα διαταραχής και τα οποία γρήγορα μεταπίπτουν σε μία κανονική σειρά μοναχικών κυμάτων (Karitza & Karitza 1949, Aleksenko et al. 1985).

Τέλος, στη περιοχή IV αρχίζουν να αναπτύσσονται εγκάρσιες διαταραχές στην κύρια κορυφογραμμή του μοναχικού κύματος, με αποτέλεσμα διαδοχικές κορυφές αλλού να απομακρύνονται και αλλού να πλησιάζουν μεταξύ τους. Η δυναμική των εγκάρσιων διαταραχών είναι μη-μόνιμη και σύντομα καθιστά τη ροή τρισδιάστατη. Παρόλα αυτά, το σχήμα του κύματος στη διεύθυνση της ροής (x - στο **Σχήμα 2.3**) παραμένει αυτό του μοναχικού, εκτός από τα σημεία εκείνα όπου η αλληλεπίδραση γειτονικών κορυφών παύει να είναι αμελητέα.

Για κατακόρυφο υμένα υγρού και χαμηλούς αριθμούς Reynolds, οι περιοχές I έως και III εκτείνονται σε 30 έως 40 αρχικά μήκη κύματος, με κάθε μία περιοχή να καταλαμβάνει περίπου δέκα μήκη (το φυσικά επιλεγμένο μήκος κύματος στα αρχικά στάδια γραμμικής ανάπτυξης είναι για το νερό στην τάξη του 1 cm). Η εμφάνιση της περιοχής IV φαίνεται να ποικίλει ανάλογα με το τρισδιάστατο περιεχόμενο της αρχικής διαταραχής. Εάν η τελευταία είναι κυρίως διδιάστατη, τότε ακολουθείται ακριβώς η αλληλουχία που μόλις περιγράφηκε. Αντίθετα, αν η αρχική διαταραχή περιέχει ισχυρές εγκάρσιες μεταβολές, τότε αυτές δεν αποσβένονται με τη διαδικασία επιλογής της περιοχής I αλλά οδηγούν απευθείας από την II στην IV, δηλαδή παρακάμπτουν την φάση των διδιάστατων μοναχικών κυμάτων (Chang, 1994).

Όλα τα προηγούμενα στάδια ανάπτυξης της ροής επιβεβαιώθηκαν πειραματικά από τους Liu και Gollub (1994). Για να κατανοηθεί η σπουδαιότητα της έρευνας τους, παρατίθεται το **Σχήμα 2.4**, το οποίο συνοψίζει τη σημασία της συχνότητας εξωτερικά επιβαλλόμενης διαταραχής ως συνάρτησης του αριθμού Reynolds της ροής.



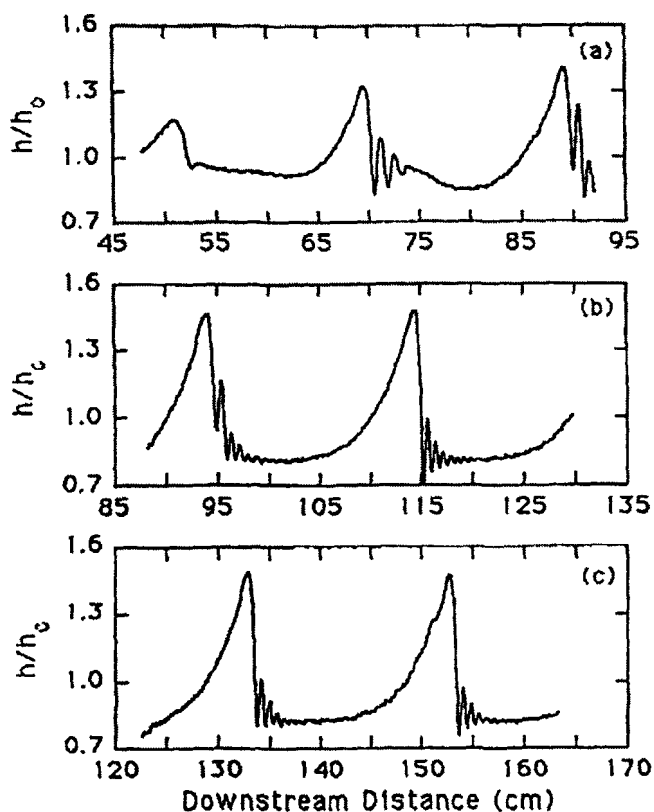
Σχήμα 2.4: Διάγραμμα φάσης της συχνότητας διαταραχής f και του αριθμού Reynolds.

Οι κύκλοι παριστάνουν μετρήσεις της οριακής ευστάθειας. Δηλαδή, για διαταραχές συχνότητας υψηλότερης της f_c η ελεύθερη επιφάνεια είναι ευσταθής, ενώ για διαταραχές συχνότητας χαμηλότερης της f_c καθίσταται ασταθής. Αντίστοιχα, τα τρίγωνα παριστούν πειραματικά αποτελέσματα της ισχυρότερα αναπτυσσόμενης συχνότητας f_m . Και στις δύο περιπτώσεις, οι συνεχείς γραμμές είναι αποτέλεσμα υπολογισμού με βάση τη θεωρία γραμμικής ευστάθειας και συμφωνούν εντυπωσιακά με τις μετρήσεις. Το σύνορο f_s , που οι μετρήσεις του συμβολίζονται με ρόμβους, διαχωρίζει τα δύο βασικά σενάρια εξέλιξης. Για επιβαλόμενες συχνότητες μεταξύ f_s και f_c , τα κύματα εξελίσσονται σε κορεσμένα περιοδικά με ένα μέγιστο ανά περίοδο. Αντίθετα, για συχνότητες κάτω της f_s , κάθε κύκλος της διαταραχής οδηγεί σε ένα κύμα με πολλές κορυφές, μία εκ των οποίων είναι εμφανώς κυρίαρχη. Τα κύματα αυτά προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τα μοναχικά με τη μείωση της συχνότητας. Τέλος, το σύνορο f_2 , που παριστάνεται με τετράγωνα, διαχωρίζει τις δευτερεύουσες αστάθειες των περιοδικών κυμάτων. Η πλευρική αστάθεια της πρωταρχικής κυματοσειράς επικρατεί πάνω από την f_2 και η υποαρμονική αστάθεια σε συχνότητες κάτω από αυτό το όριο και κοντά στην f_m . Και οι δύο δευτερεύουσες αστάθειες είναι συναγωγικές και επομένως ευαίσθητες στο θόρυβο.

Ένα παράδειγμα εξέλιξης κανονικής διαταραχής εισόδου σε κυματοσειρά μοναχικών κυμάτων δίνεται στο **Σχήμα 2.5**. Προέρχεται από τη δουλειά των Liu & Gollub (1994) και η συχνότητα διαταραχής είναι $f=1,5$ Hz. Παρουσιάζονται τρεις στιγμιαίες αποτυπώσεις της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας σε αυξανόμενη απόσταση από την αρχή του καναλιού, έτσι ώστε να καταστεί εμφανής η χωρική ανάπτυξη. Τα αρχικά ημιτονοειδή κύματα (δε φαίνονται στο σχήμα) μεταφέρουν ενέργεια στις υψηλότερες αρμονικές, αναπτύσσοντας απότομα μέτωπα και μακριές ουρές. Δευτερεύοντα κύματα εμφανίζονται μπροστά από το μέτωπο της κύριας κορυφής καθώς αυτή συνεχίζει να μεγαλώνει (**Σχήμα 2.5a**). Αρκετά κατόπι της ροής, η κύρια κορυφή βαθμιαία φτάνει στο μέγιστο ύψος της (**Σχήμα 2.5b**) και το μοναχικό κύμα αποκτά τη σταθερή του δομή με την οποία αναγνωρίζεται πολύ εύκολα (**Σχήμα 2.5c**).

Η γένεση των πρόδρομων τριχοειδών κυματισμών μπορεί να θεωρηθεί ότι οφείλεται σε ένα «ρυτίδιασμα» της ελεύθερης επιφάνειας καθώς αυτή συμπιέζεται από τη γρήγορη κίνηση της μοναχικής κορυφής. Όταν η συχνότητα της διαταραχής γίνεται μεγαλύτερη, τα κύρια μέτωπα των κυμάτων έρχονται πιο κοντά και το μοναχικό κύμα δεν διακρίνεται εύκολα. Η σημαντική επικάλυψη της ουράς με το μέτωπο μπορεί να οδηγήσει σε έντονες αλληλεπιδράσεις αυτών των προσεγγιστικά μοναχικών κυμάτων. Καθώς η συχνότητα αυξάνει κι άλλο, οι αλληλεπιδράσεις γίνονται ιδιαίτερα έντονες και

τα κύματα χάνουν εντελώς τα χαρακτηριστικά του μοναχικού προσεγγίζοντας σταδιακά την απλή περιοδική κυματοσειρά.

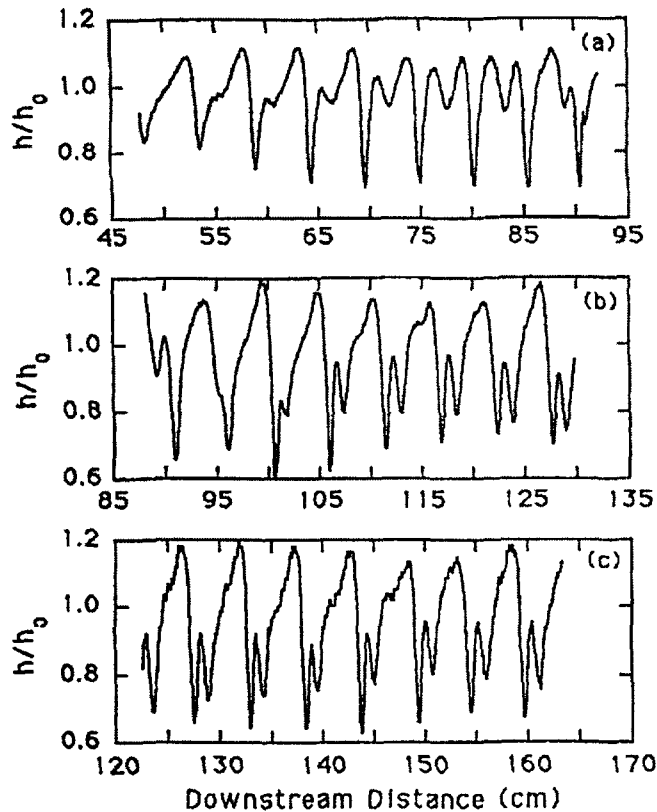


Σχήμα 2.5: Η εξέλιξη των κυμάτων με επιβαλλόμενη συχνότητα 1.5 Hz, γωνία κλίσης $\varphi=6.4^\circ$, $Re=29$ και $We=35$.

Τα προηγούμενα επιβεβαιώνονται με το **Σχήμα 2.6**, όπου παριστάνει την εξέλιξη των κυματισμών για συχνότητα αρχικής διαταραχής 4,5 Hz. Στο διάγραμμα εμφανίζεται αρχικά μία μικρή βύθιση πίσω από την κύρια κορυφή, η οποία αποτελεί υπόλειμα των τριχοειδών κυματισμών της επόμενης κορυφής. Η βύθιση κινείται ταχύτερα από την κύρια κορυφή (**Σχήμα 2.6a**), με αποτέλεσμα να την υπερπηδά και να εμφανίζεται ως δευτερεύουσα κορυφή στο μέτωπο αυτής που μόλις έχει ξεπεράσει (**Σχήμα 2.6b,c**). Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω κυματομορφή παραμένει περιοδική με το χρόνο πριν χάσει την ευστάθεια της, αν και έχει εμφανώς απωλέσει την περιοδικότητα στο χώρο (Liu & Gollub 1994).

Τα πειράματα των Liu και Gollub διερευνήθηκαν και επεκτάθηκαν πρόσφατα από τους Vlachogiannis & Bontozoglou (2001), οι οποίοι μελέτησαν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ μοναχικών κυμάτων, παρατήρησαν συστηματικά ένα πλήθος φαινομένων συγχώνευσης και κατέγραψαν τα λεπτομερή χαρακτηριστικά τους. Η χρονική διάρκεια της διαδικασίας συγχώνευσης βρέθηκε να είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη διάφορα ύψους μεταξύ των κορυφών που αλληλεπιδρούν, ενισχύοντας

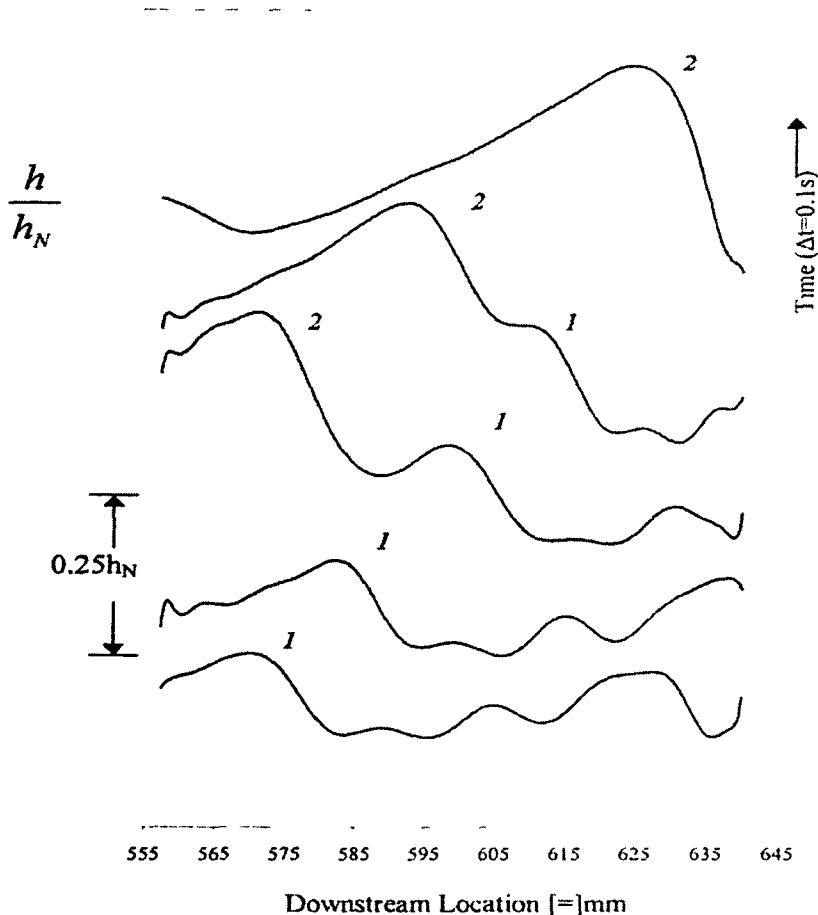
το συμπέρασμα ότι οι κορυφές με παρόμοιο ύψος δεν συγχωνεύονται αλλά σχηματίζουν ένα συσσωμάτωμα με δύο κορυφές.



Σχήμα 2.6: Η εξέλιξη των κυμάτων με επιβαλλόμενη συχνότητα 4,5Hz, γωνία κλίσης $\phi=6.4^\circ$, $Re=29$ και $We=35$.

Το κύμα που προέρχεται από συγχώνευση ονομάζεται διεγερμένο και αρχικά χαρακτηρίζεται από παροδική υποχώρηση των τριχοειδών κυμάτων και διαμόρφωση ενός υπερυψωμένου πίσω υποστρώματος. Το ύψος του υποστρώματος βρέθηκε να είναι της κλίμακας του ύψους του κύματος και ο εκφυλισμός του με το χρόνο διαπιστώθηκε ότι υπακούει σε εκθετικό νόμο. Οι μετρήσεις των χαρακτηριστικών της εξέλιξης του υπερυψωμένου πίσω υποστρώματος παρέχουν την πρώτη πειραματική επιβεβαίωση των προβλέψεων των Chang et al. (1995).

Στα περισσότερα πειράματα με νερό, το υπερυψωμένο υπόστρωμα αποδίδεται σε αστάθεια που οφείλεται στις διακυμάνσεις της ουράς του κύματος. Αυτή η ουρά παρατηρήθηκε να μένει πίσω ως απομονωμένο κύμα και βαθμιαία να σβήνει. Αντίθετα, αν μια κορυφή είναι διεγερμένη και ακολουθείται από ένα μοναχικό κύμα, η ουρά του προπορευόμενου μπορεί να παγιδευτεί μεταξύ των δύο κορυφών και το αποτέλεσμα είναι η γένεση μιας νέας κορυφής. Αυτή η διαμόρφωση της ουράς του κύματος είναι από καιρό γνωστό ότι αποτελεί έναν ρυθμιστικό μηχανισμό των άτριβων σολιτονίων της εξίσωσης Korteweg-de-Vries, αλλά τεκμηριώνεται για πρώτη φορά σε ροή με ιξώδες.



Σχήμα 2.7: Η συγχώνευση δύο μοναχικών κυμάτων για $Re=37$, $\phi = 4^\circ$.

Η ποιοτική περιγραφή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των κυμάτων και η απόσβεση των διεγερμένων μοναχικών κορυφών μπορούν να εξηγηθούν με απλούς όρους διατήρησης μάζας. Επεκτείνοντας το μηχανισμό που περιγράφηκε από τους Chang et al. (1995), οι Vlachogiannis & Bontozoglou (2001) παρατήρησαν ταυτόχρονα την ανύψωση του υποστρώματος και το αποτέλεσμα αυτής της αστάθειας, τη διαμόρφωση δηλαδή της ουράς ως αποτέλεσμα άντλησης υγρού από το πίσω μέρος της ουράς. Αυτός ο μηχανισμός δείχνει παράλληλος με αυτόν που δημιουργεί τα τριχοειδή κύματα και ο οποίος σταθεροποιεί όλες τις μοναχικές κορυφές (κανονικές και διεγερμένες) αντλώντας υγρό έξω από την κορυφή. Μια συγχώνευση κορυφών έτσι όπως την είδαν οι Vlachogiannis και Bontozoglou παρουσιάζεται στο **Σχήμα 2.7**.

Με βάση τα προηγούμενα, μια παράμετρος κλειδί της αλληλεπίδρασης των κυμάτων φαίνεται να είναι ο βαθμός διέγερσης του κύματος που προπορεύεται όπως παρουσιάζεται από την ανύψωση του πίσω υποστρώματος ή από την ένταση των διακυμάνσεων της ουράς του. Ειδικότερα, όταν το προπορευόμενο κύμα δεν είναι διεγερμένο μπορεί να προσεγγιστεί από ένα μεγαλύτερο άρα ταχύτερο κύμα που ακολουθεί. Τότε υγρό αντλείται από το μέτωπο του δεύτερου μοναχικού κύματος

συνεισφέροντας στην ανύψωση του υποστρώματος μεταξύ των δύο κορυφών και καταλήγοντας στη συγχώνευση με διαμόρφωση μιας απλής κορυφής. Αντίθετα, ένα διεγερμένο προπορευόμενο κύμα ανθίσταται στη συγχώνευση με ένα μεγαλύτερο που το πλησιάζει από πίσω. Εάν η διάφορα στο ύψος τους είναι ασήμαντη, οι δυο κορυφές δεν πλησιάζουν εξαντλητικά. Στο μεσοδιάστημα μεταξύ τους συσσωρεύεται μάζα υγρού που προέρχεται από δύο πηγές: (α) από την ουρά του προπορευόμενου διεγερμένου κύματος που τείνει να αποσβεστεί και (β) από το μέτωπο του κύματος που ακολουθεί, μέσω του μηχανισμού άντλησης των τριχοειδών κυματισμών. Έτσι, διαμορφώνονται οι συνθήκες για την εμφάνιση μιας νέας κορυφής μεταξύ των δύο που αλληλεπιδρούν.

Ακόμα και όταν το κύμα που ακολουθεί είναι αρκετά μεγαλύτερο και σαρώνει την απόσταση προς την προπορευόμενη κορυφή, η διαδικασία συγχώνευσης μπορεί να επιβραδυνθεί λόγω της άντλησης υγρού από την ουρά του διεγερμένου προπορευόμενου κύματος. Το αποτέλεσμα σε αυτή την περίπτωση είναι ένα ψευδομόνιμο κύμα δύο κορυφών.

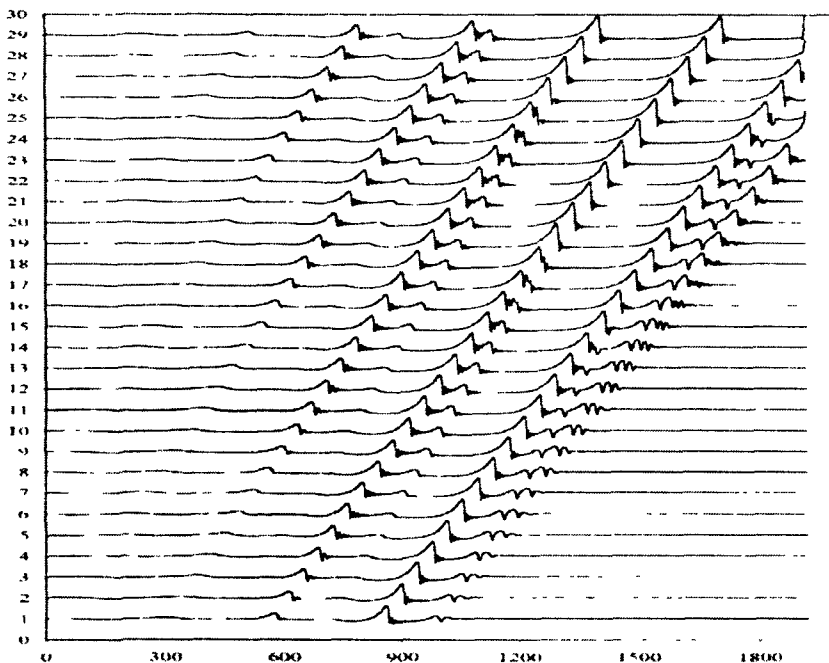
Προσομοιώσεις της ροής υγρού υμένα, με αριθμητική επίλυση των πλήρων εξισώσεων Navier-Stokes, διεξήχθησαν για πρώτη φορά από τους Ramaswamy et al. (1995). Οι αριθμητικές λύσεις συμφωνούν, ως προς τα αρχικά στάδια εξέλιξης και ως προς την εξάρτηση από τον κυματαριθμό της επιβαλλόμενης διαταραχής, με τις προβλέψεις της γραμμικής και της ασθενώς μη-γραμμικής θεωρίας. Αντίθετα, όταν το ύψος (ή ακριβέστερα η οξύτητα) του κύματος αυξηθεί, καμιά από τις ασθενώς μη-γραμμικές θεωρίες δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, και μόνες πηγές πληροφοριών απομένουν το πείραμα και η προσομοίωση.

Οι ανωτέρω προσομοιώσεις επιβεβαιώνουν την πειραματική παρατήρηση (Liu & Gollub 1994), ότι, για κυματαριθμούς κοντά στον κρίσιμο οι σειρές των κυμάτων είναι σχεδόν ημιτονοειδείς ενώ για κυματαριθμούς πολύ μικρότερους του κρίσιμου τα κύματα είναι μοναχικά. Η μετάβαση από τα περιοδικά στα μοναχικά κύματα φαίνεται να συμβαίνει μέσω μιας ψευδομόνιμης περιοχής όπου οι χωρικοί αρμονικοί συντελεστές είναι σε συνεχή ταλάντωση.

Εκτεταμένες προσομοιώσεις της ροής υγρού υμένα πραγματοποιήσαν και οι Malamataris et al. (2002), θεωρώντας ένα πολύ μακρύ υπολογιστικό πεδίο, περιοδική συχνότητα διαταραχής στην είσοδο και κατάλληλες συνθήκες στην έξοδο. Οι ερευνητές αυτοί απέδειξαν για πρώτη φορά ένα ισχυρά μη-γραμμικό φαινόμενο του πεδίου ταχύτητας των μοναχικών κυμάτων, την τοπική αντιστροφή της ροής μπροστά από την κορυφή του κύματος.

Επίσης, οι Malamataris et al. (2002) εξέτασαν διεξοδικά στις προσομοιώσεις τους τα εναλλακτικά σενάρια αλληλεπίδρασης μοναχικών κυμάτων και έδειξαν ότι υπάρχουν τρεις δυνατότητες: Κύματα με μεγάλη διαφορά μεγέθους αλληλεπιδρούν

ισχυρά, και η τελική κατάληξη είναι έλξη των κορυφών και συγχώνευση της μικρής με την μεγάλη. Αντίθετα, σε κύματα με μικρή διαφορά μεγέθους υπερισχύει η άπωση και οι κορυφές τελικά απομακρύνονται. Τέλος, η τρίτη δυνατότητα αφορά μοναχικά κύματα με ενδιάμεση διαφορά ύψους, τα οποία μπορεί να εμφανίζουν παρατεταμένη περιοδική αλληλεπίδραση. Το **Σχήμα 2.8** είναι αποτέλεσμα αυτών των προσομοιώσεων και παριστάνει τη συγχώνευση μοναχικών κυμάτων διαφορετικού μεγέθους.



Σχήμα 2.8: Η κατά μήκος της ροής εξέλιξη της ροής για αρχική διαταραχή 1Hz με τη συγχώνευση των μοναχικών κορυφών

Όπως προαναφέρθηκε, η γένεση των κυμάτων οφείλεται σε διαταραχές στη ροή, τόσο τυχαίες όσο και συστηματικά επιβαλλόμενες. Στην υπολογιστική μελέτη της ροής οι διαταραχές που επιβάλλονται είναι απόλυτα ελεγχόμενες ως προς το μέγεθος, τη συχνότητα και το είδος τους. Ένας γενικός κανόνας από τα πειράματα και τις προσομοιώσεις είναι ότι η συχνότητα της δημιουργούμενης κυματοσειράς ταυτίζεται με τη συχνότητα της επιβαλλόμενης διαταραχής. Το εύρος των συχνοτήτων εξωτερικής διαταραχής που υπακούουν σε αυτό τον κανόνα περιορίζεται από ένα μέγιστο πέρα από το οποίο οι διαταραχές γίνονται γραμμικά ευσταθείς. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει και μια ελάχιστη συχνότητα στην οποία παρατηρείται το παραπάνω φαινόμενο. Κάτω από αυτό το όριο, έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία ότι η κανονική σειρά των κυμάτων καταστρέφεται από την εμφάνιση νέων κορυφών, οι οποίες ακολουθούν την κύρια κορυφή των μοναχικών κυμάτων. Το φαινόμενο αυτό έχει αναφερθεί (Alekseenko et al. 1985, Yoshimura et al. 1996), αλλά δεν έχει μελετηθεί διεξοδικά. Για το λόγο αυτό, μέρος του διδακτορικού ερευνά υπολογιστικά τον τρόπο

δημιουργίας και ανάπτυξης των νέων αυτών κορυφών σε χαμηλές συχνότητες διαταραχής, έχοντας στόχο την αποσαφήνιση του φυσικού μηχανισμού γένεσής τους.

2.2 Περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα

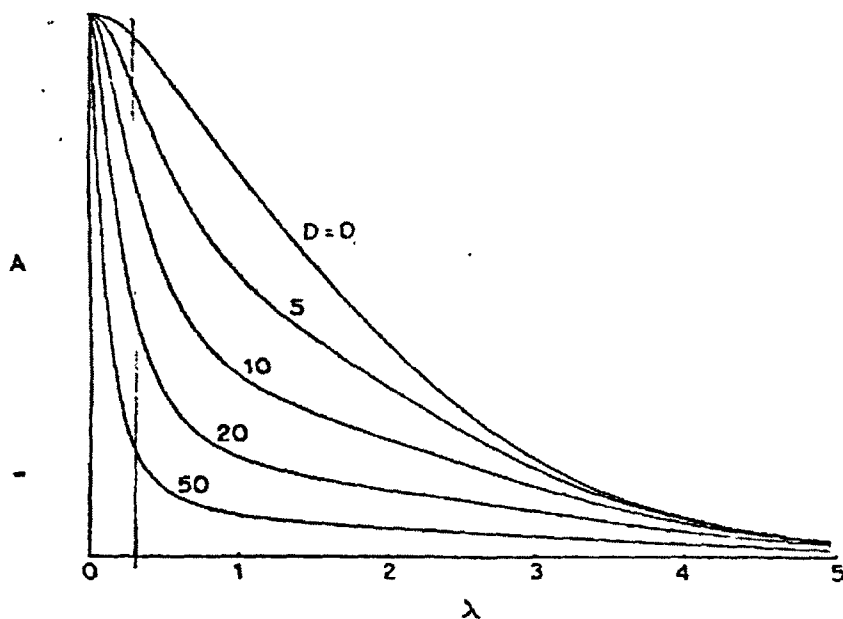
Το πρώτο που γίνεται εμφανές για το περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα είναι η αναντιστοιχία της σπυροειδότητας του με τον περιορισμένο αριθμό των βιβλιογραφικών αναφορών. Στις εφαρμογές, στην πλειονότητα των περιπτώσεων το τοίχωμα είναι περιοδικά διαμορφωμένο. Παρόλα αυτά, η δυσκολία που εισάγει η περιοδική διαμόρφωση στις εξισώσεις της ροής υγρού υμένα έχει σταθεί εμπόδιο στην εκτεταμένη μελέτη. Τα διαθέσιμα αποτελέσματα επικεντρώνονται στη διερεύνηση της επίδρασης της διαμόρφωσης στη μόνιμη λύση και αφορούν σε μεγάλο ποσοστό έρπουσα ροή.

2.2.1 Θεωρητικές-Υπολογιστικές μελέτες

Για τη θεωρητική μελέτη της ροής υμένα πάνω από περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα, ο Wang (1981), από τους πρωτοπόρους, επικεντρώνεται σε ημιτονοειδές τοίχωμα θεωρώντας μικρούς αριθμούς Reynolds και μικρού ύψους διαμόρφωση του τοιχώματος. Με βάση την παραδοχή ότι το ύψος των κυματισμών είναι πολύ μικρότερο του πάχους του ρευστού, ο Wang χρησιμοποίησε τη μέθοδο των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων για να επιλύσει το γραμμικό πρόβλημα της εγκάρσιας ροής κατά μήκος των κυματώσεων του τοιχώματος.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης του συνοψίζονται στο **Σχήμα 2.9**. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας και ο οριζόντιος είναι αντιστρόφως ανάλογος του μήκους κύματος των πτυχώσεων του τοιχώματος. Η παράμετρος D είναι συνάρτηση γεωμετρικών χαρακτηριστικών (γωνία με το επίπεδο, γωνία κυματώσεων, μήκος κύματος διαμόρφωσης του τοιχώματος) και παραμέτρων του ρευστού και της ροής (επιφανειακή τάση, πυκνότητα, ιξώδες, ρυθμός παροχής, μέσο πάχος υμένα). Από το **Σχήμα 2.9** προκύπτει ότι, για σταθερό D , το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μειώνεται με μείωση του μήκους κύματος του τοιχώματος. Επίσης, το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μειώνεται με την αύξηση της παραμέτρου D , που είναι ανάλογη του μέσου πάχους του υμένα. Μια σημαντική παράμετρος της ροής υγρού υμένα σε κυματοειδές τοίχωμα είναι η διάφορα φάσης που παρουσιάζει η διαμόρφωση στην ελεύθερη επιφάνεια με αυτήν του τοιχώματος. Το **Σχήμα 2.10** προέρχεται από την εργασία του Wang (1981) και παρουσιάζει τη διαφορά φάσης ως συνάρτηση του μήκους κύματος, για διάφορες τιμές της παραμέτρου D . Διαπιστώνεται ότι μέγιστη διαφορά φάσης (που προσεγγίζει τις 90°) εμφανίζεται για μεγάλα πάχη υμένα (μεγάλο D) και μικρά μήκη κύματος. Αντίθετα, σε τοίχωμα με κυματισμούς με

μήκος σαφώς μεγαλύτερο του πάχους του υμένα, η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας ακολουθεί πιστά τη μορφή του τοιχώματος.



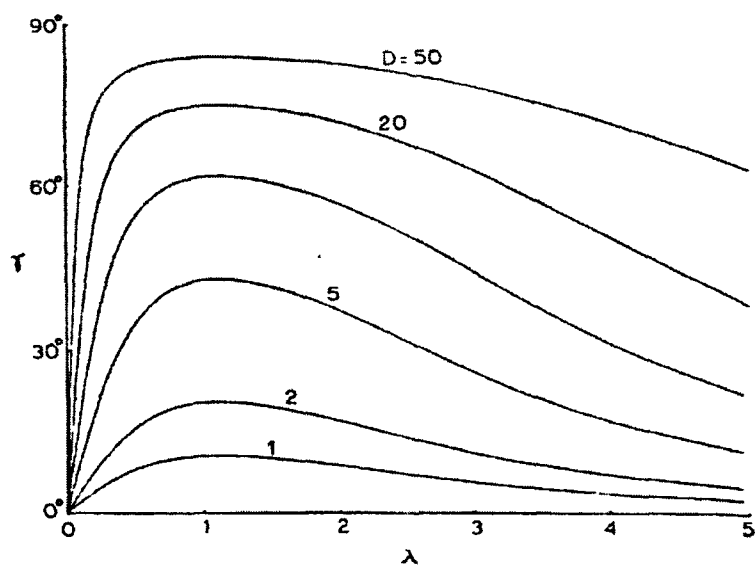
Σχήμα 2.9: Πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν από τον Pozrikidis (1988), ο οποίος μελέτησε υπολογιστικά τη ροή υγρού υμένα στο όριο του μηδενικού αριθμού Reynolds (έρπουσα ροή). Χρησιμοποιώντας κατάλληλη αριθμητική τεχνική, ο Pozrikidis μπόρεσε να διερευνήσει τη συμπεριφορά περιοδικού τοιχώματος με διαμόρφωση μεγάλου ύψους και ποικίλων μορφών. Τα αποτελέσματα του αφορούν τόσο την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας όσο και τη μεταβολή της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα.

Για τη μελέτη της διφασικής ροής μη-αναμίξιμων ρευστών σε συμμετρικό ημιτονοειδές κατακόρυφο τοίχωμα στο όριο του μηδενικού αριθμού Reynolds, οι Dassarí et al. (1984) χρησιμοποίησαν κανονικά ασυμπτωτικά αναπτύγματα. Με τον τρόπο αυτό τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι παραπλήσια των Pozrikidis (1988) και Wang (1981).

Μία άλλη, σημαντική για την παρούσα εργασία, μελέτη είναι ασυμπτωτική/υπολογιστική και πραγματοποιήθηκε από τους Bontozoglou και Parapolymetou (1997). Αν και περιορίστηκε σε γραμμικό ύψος τοιχώματος (δηλαδή πολύ μικρό σε σχέση με το πάχος του υμένα), ήταν η πρώτη ανάλυση που περιέλαβε την επίδραση πεπερασμένου αριθμού Reynolds. Ειδικότερα, εξετάστηκαν το ύψος και η

φάση της ελεύθερης επιφάνειας σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη του τοιχώματος για εύρος αριθμών Reynolds από 0 έως 400.

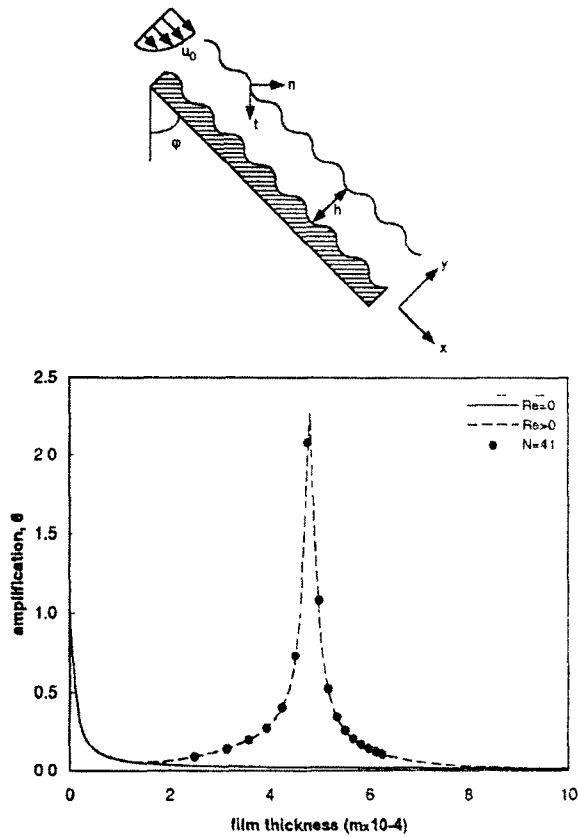


Σχήμα 2.10: Διαφορά φάσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος.

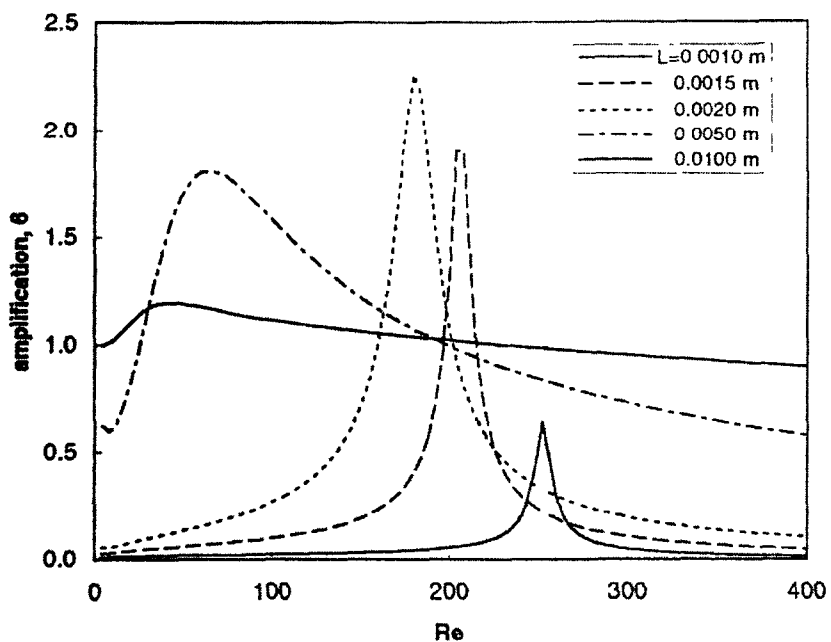
Η παραπάνω μελέτη επιβεβαίωσε τα αποτελέσματα του Wang (1981) για αριθμούς Reynolds κοντά στο μηδέν, αλλά πρόβλεψε πολύ διαφορετική συμπεριφορά για μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds. Ειδικότερα, έδειξε ότι υπάρχει μια περιοχή αριθμών Reynolds όπου το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας είναι σημαντικά μεγαλύτερο συγκρινόμενο με το ύψος του τοιχώματος. Στο **Σχήμα 2.11** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης για το λόγο ύψους επιφάνειας προς ύψος τοιχώματος (ενίσχυση, amplification) ως συνάρτηση του πάχους του υγρού υμένα. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην παραδοχή ροής Stokes και η διακεκομμένη στις πλήρεις εξισώσεις. Είναι εμφανές ότι, όταν το πάχος κατά Nusselt τείνει στο μηδέν $h_w \rightarrow 0$, τα αποτελέσματα των δύο αναλύσεων συμπίπτουν. Αντίθετα, όταν ο αριθμός Reynolds γίνεται πεπερασμένος (οπότε η ανάλυση Stokes παύει να ισχύει), η ενίσχυση της διαταραχής που επιβάλλει το τοίχωμα παρουσιάζει ένα οξύ μέγιστο που παραπέμπει σε φαινόμενο συντονισμού. Υπενθυμίζεται ότι συντονισμός μεταξύ περιοδικού τοιχώματος και υγρού λαμβάνει χώρα σε ιδανική ροή (Bontozoglou, Kalliadasis & Karabelas, 1991).

Το **Σχήμα 2.12** απεικονίζει την εξάρτηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας από τον αριθμό Reynolds για τοιχώματα με διάφορα μήκη κύματος, σύμφωνα με την εργασία των Bontozoglou & Parapolymereu (1997). Παρατηρείται ότι η συμπεριφορά του συντονισμού δεν ισχύει σε όλο το εύρος των παραμέτρων, αλλά μεγιστοποιείται για μήκος κύματος τοιχώματος 0,002 m. Σε μικρότερα μήκη κύματος διατηρείται η μορφή της καμπύλης του συντονισμού, αλλά μειώνεται βαθμιαία το μέγιστο της.

Αντίθετα, σε μεγαλύτερα μήκη κύματος η κορυφή αμβλύνεται και η ελεύθερη επιφάνεια καταλήγει τελικά αντίγραφο της διαμόρφωσης του τοιχώματος.



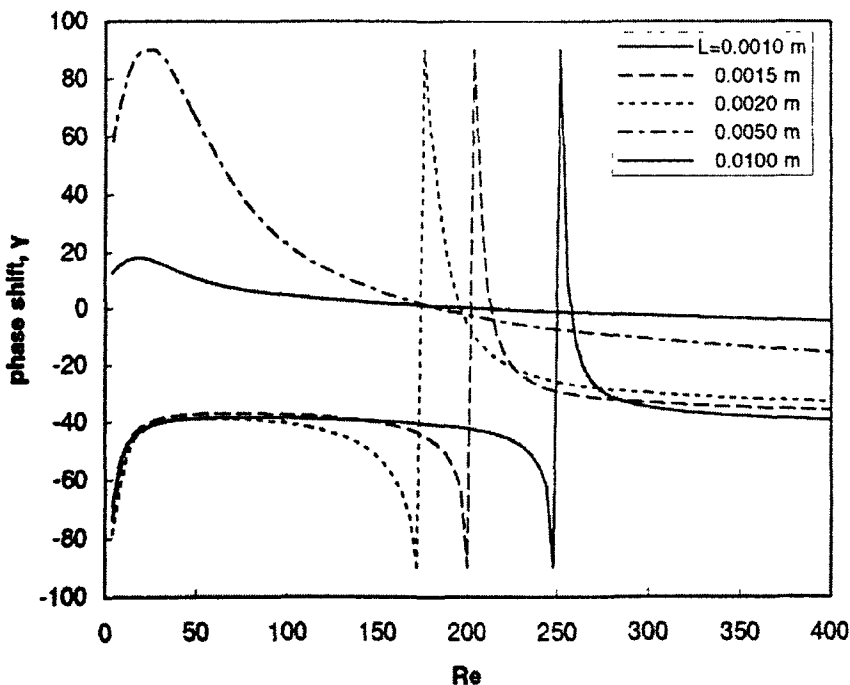
Σχήμα 2.11: Σχηματική διάταξη της ροής σε κεκλιμένο επίπεδο και σύγκριση των θεωριών έρπουσας και στρωτής ροής για το εύρος της ελεύθερης επιφάνειας.



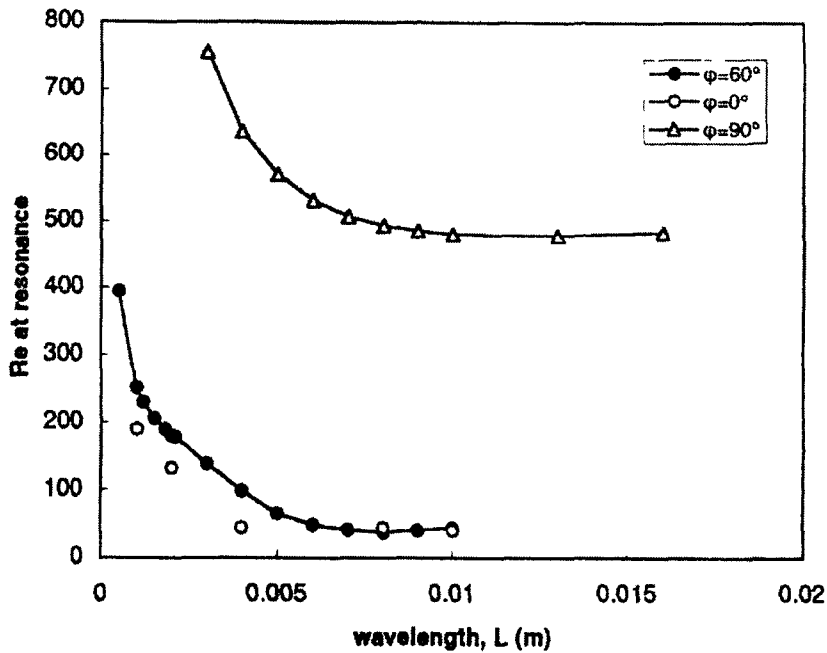
Σχήμα 2.12: Εύρος της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσεσι του αριθμού Reynolds για διαφορετικά μήκη κύματος τοιχώματος.

Η διαφορά φάσης μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας και του κυματοειδούς τοιχώματος παρουσιάζει περισσότερο πολύπλοκη συμπεριφορά κατά τη στρωτή ροή σε σχέση με την έρπουσα. Για μικρά μήκη κύματος (μικρότερα από 0,002 m) και για μικρούς αριθμούς Reynolds, η ελεύθερη επιφάνεια παρουσιάζει υστέρηση σαράντα μοιρών (-40°) σε σχέση με το τοίχωμα (Σχήμα 2.13). Καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνει πλησιάζοντας στις συνθήκες συντονισμού, η διάφορα φάσης αρχικά ελαχιστοποιείται (-90°) και κατόπιν, με τρόπο ασυνεχή, μεγιστοποιείται (90°) και με απότομη μείωση προσεγγίζει ασυμππτωτικά τις -20° μοίρες. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι αριθμοί Reynolds στους οποίους συντελείται η ασυνεχής απότομη αύξηση της τιμής της διαφοράς φάσης είναι ίδιοι με αυτούς στους οποίους παρατηρείται μεγιστοποίηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας. Η τελευταία παράμετρος που μελετήθηκε από τους Bontozoglou & Paparolymerou (1997) είναι η γωνία κλίσης του τοιχώματος.

Στο Σχήμα 2.14 απεικονίζεται ο αριθμός Reynolds για τον οποίο υπάρχει συντονισμός συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος, για διαφορετικές γωνίες κλίσης. Σταδιακά, ο κρίσιμος αριθμός Reynolds προσεγγίζει μια ελάχιστη τιμή, η οποία παραμένει σταθερή καθώς αυξάνεται το μήκος κύματος. Είναι χαρακτηριστική πάντως η ενοποίηση της συμπεριφοράς για αρκετά κεκλιμένα έως κατακόρυφα τοιχώματα ($\varphi=60-0^\circ$ στο σχήμα), σε αντιδιαστολή με τη συμπεριφορά όταν το τοίχωμα είναι σχεδόν οριζόντιο ($\varphi=90^\circ$ στο σχήμα).



Σχήμα 2.13: Διαφορά φάσης μεταξύ τοιχώματος και ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του αριθμού Reynolds.



Σχήμα 2.14: Ο αριθμός Reynolds στον οποίο εμφανίζεται συντονισμός συναρτήσει του μήκους κύματος του τοιχώματος.

Ο Bontozoglou (2000) ασχολήθηκε με το ίδιο πρόβλημα αριθμητικά επιλύοντας το πρόβλημα με φασματική μέθοδο, και επέκτεινε τα αποτελέσματα σε ημιτονοειδές τοίχωμα πεπερασμένου ύψους. Επιβεβαιώθηκε η συμπεριφορά συντονισμού (με μέγιστο σε μήκος κύματος τοιχώματος 0,002 m), και διαπιστώθηκε υπερκρίσιμη μη-γραμμική εξέλιξη. Με αύξηση του ύψους του τοιχώματος διαπιστώθηκε η σταδιακή ανάπτυξη ζωνών ανακυκλοφορίας, οι οποίες επηρεάζουν τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας αλλά και την κατανομή της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα. Αντίστοιχη με την παραπάνω είναι η υπολογιστική δραστηριότητα του Trifonov (1998, 2004), ο οποίος έλυσε με φασματική μέθοδο τις εξισώσεις της μόνιμης ροής, εξέτασε τη γραμμική ευστάθεια των λύσεων και μελέτησε την επίδραση της επιφανειακής τάσης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εργασία των Valluri et al. (2004) για μέσους αριθμούς Reynolds, η οποία αφορά κυματοειδές τοίχωμα με επιπλέον διαμόρφωση σε μικρότερη κλίμακα, έτσι ώστε να προσομοιάζεται ικανοποιητικά η μορφή δομημένου πληρωτικού υλικού. Οι ερευνητές μελέτησαν τη δυναμική της κατακόρυφης ροής με βάση μοντέλο βασισμένο στην υπόθεση της παραβολικής κατανομής, και συνέκριναν τα αποτελέσματα με προβλέψεις εμπορικού κώδικα CFD. Κοινά συμπεράσματα των δύο προσεγγίσεων είναι ότι σε σχετικά χαμηλούς Re η διαμόρφωση του τοιχώματος επιβραδύνει την ανάπτυξη οδευόντων κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια, ενώ σε υψηλούς Re αναπτύσσεται εκτεταμένη ανακυκλοφορία στις κοιλότητες του τοιχώματος.

Άλλες συναφείς δραστηριότητες είναι η μελέτη του Pozrikidis (2003) που εξέτασε την επίδραση επιφανειοδραστικών ουσιών σε έρπουσα ροή πάνω από περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα και η μελέτη των Nergy et al. (2001) που ασχολήθηκαν με τη συζευγμένη μεταφορά ορμής και θερμότητας/μάζας.

Πολύ πρόσφατα, η ερευνητική ομάδα του Aksel παρουσίασε σειρά θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων στη ροή υγρού υμένα πάνω σε ημιτονοειδές τοίχωμα μεγάλου ύψους. Τα θεωρητικά αποτελέσματα (που εξετάζονται στην παρούσα παράγραφο, Aksel et al., 2003) αφορούν βασική λύση που ισχύει ασυμπτωτικά για υμένα πολύ μικρού πάχους σε σχέση με το ύψος του τοιχώματος, καθώς και την γραμμική της ευστάθεια. Ένα κεντρικό αποτέλεσμα είναι ότι ο κρίσιμος αριθμός Reynolds για την ενίσχυση οδοντών διαταραχών είναι υψηλότερος από τον αντίστοιχο για επίπεδο τοίχωμα, δηλαδή η περιοδική διαμόρφωση σταθεροποιεί τη ροή. Επιπλέον, όσο αυξάνεται το ύψος των κυματισμών του τοιχώματος και μειώνεται η γωνία κλίσης με το επίπεδο τόσο ο Reynolds αποκλίνει από αυτόν για ροή σε επίπεδο τοίχωμα. Η επιφανειακή τάση διαπιστώθηκε ότι μεταβάλλει τον ελάχιστο κρίσιμο αριθμό Reynolds, και η ασταθής περιοχή βρέθηκε να ελέγχεται από διαταραχές μεγάλου μήκους και να περιέχει στενότερο φάσμα συχνοτήτων συγκρινόμενο με αυτό του επίπεδου τοιχώματος.

2.2.2 Πειραματικές μελέτες

Οι Vlachogiannis & Bontozoglou (2002) εμφανίζονται να είναι οι πρώτοι στη βιβλιογραφία που μελέτησαν πειραματικά τη ροή υγρού υμένα κατά μήκος περιοδικά διαμορφωμένου τοιχώματος για ένα ευρύ φάσμα αριθμών Reynolds. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απεικόνισης φθορισμού για ένα τοίχωμα ορθογωνικής διατομής μήκους 12 mm, οι ερευνητές περιέγραψαν τις παρακάτω διαφορετικές περιοχές ροής:

Η πρώτη περιοχή αντιστοιχεί στη μόνιμη ροή, και παρατηρείται στα πρώτα μήκη κύματος του τοιχώματος ακόμη και αν η ροή είναι στην πραγματικότητα ασταθής. Η ελεύθερη επιφάνεια χαρακτηρίζεται από μία στατική διαμόρφωση της μορφής της, η οποία αποτελεί τη βάση για την εξήγηση των μη-γραμμικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατάντη της ροής. Το μήκος κύματος, το πλάτος, η διαφορά φάσης και η σύνθεση των αρμονικών της ελεύθερης επιφάνειας συσχετίζονται με τον αριθμό Reynolds, τη γωνία κλίσης και τον αριθμό Kapitza. Πολλά από τα αποτελέσματα της στατικής περιοχής αντιπαραβάλλονται ικανοποιητικά με τις προβλέψεις των Bontozoglou & Papanolymerou (1997).

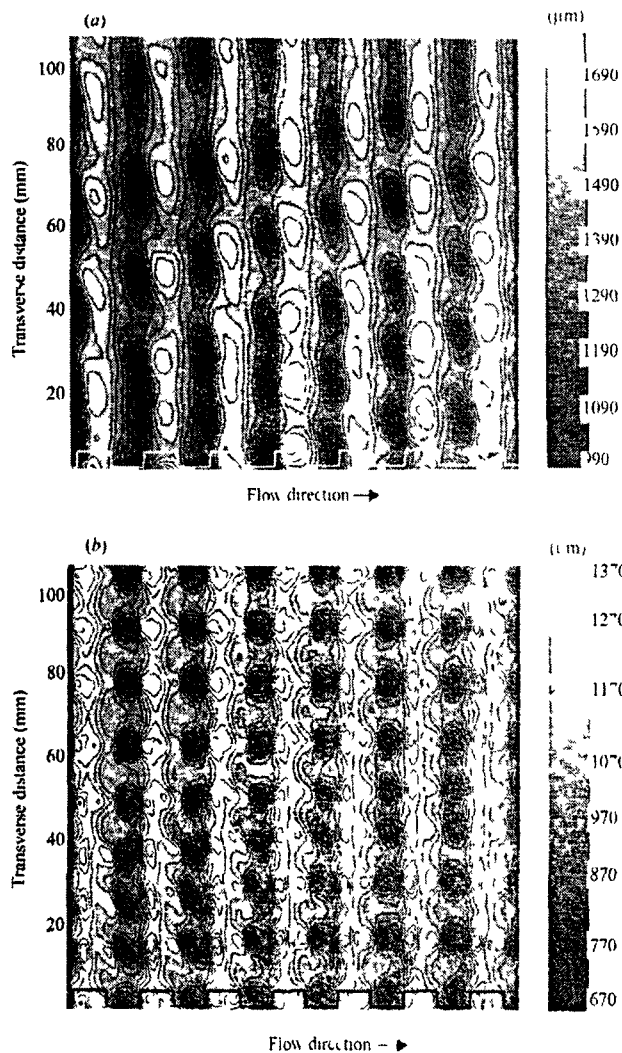
Περνώντας στη δεύτερη περιοχή της ροής, παρατηρήθηκε μια ταλάντωση των μεγεθών που χαρακτηρίζουν την ελεύθερη επιφάνεια. Αρχικά ταλαντώνεται μόνο το πλάτος, στη συνέχεια προστίθεται και η ταλάντωση της διάφορας φάσης μεταξύ

ελεύθερης επιφάνειας και τοιχώματος ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις κατάντη της ροής (για τον ίδιο Reynolds και γωνία κλίσης) ταλαντώνεται και η τιμή της βασικής αρμονικής στο φάσμα των κυματαριθμών. Η συχνότητα ταλάντωσης των είναι ίδια και ίση περίπου με 2 Hz, ενώ συμπίπτει με τη συχνότητα εμφάνισης των μοναχικών κυμάτων που αναπτύσσονται κατάντη της ροής.

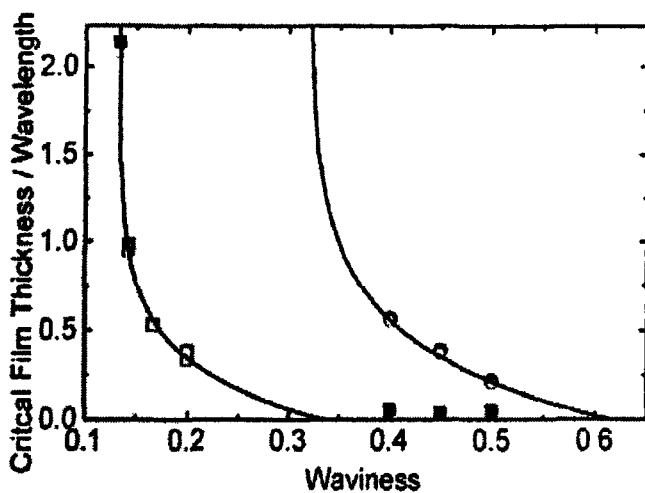
Τα μοναχικά κύματα παρατηρήθηκε ότι αναπτύσσονται σε αρκετά μικρότερες αποστάσεις από ότι στη ροή υγρού υμένα πάνω σε επίπεδο τοίχωμα. Επιπλέον, χαρακτηρίζονται από μείωση του εύρους του φάσματος συχνοτήτων, γεγονός που υποδεικνύει επιλεκτική αλληλεπίδραση μεταξύ τοιχώματος και ελεύθερης επιφάνειας. Σε υψηλούς Re, η σταδιακή αλλαγή της κατεύθυνσης του μέτωπου των μοναχικών κυμάτων εξαιτίας των δευτερευουσών ασταθειών και ο διαχωρισμός τους σε περισσότερα κύματα με μικρότερο μέτωπο οδηγεί στη δημιουργία πεταλοειδών κυμάτων (horse-shoe waves).

Οι Vlachogiannis & Bontozoglou (2002) παρατήρησαν τέλος την εμφάνιση μιας σχεδόν στατικής τρισδιάστατης δομής σε υψηλούς αριθμούς Reynolds ($Re \sim 150-400$ για $\phi \sim 1-8^\circ$), η οποία εμφανίζεται ως διακλάδωση της βασικής διδιάστατης λύσης. Με την εμφάνιση της τρισδιάστατης δομής τα μοναχικά κύματα αποσβένονται και το μέσο πάχος του υμένα μειώνεται δραστικά, οδηγώντας σε σταθεροποίηση της ροής. Παραδείγματα αυτής της δομής εμφανίζονται στο **Σχήμα 2.15** για: (a) $\phi = 1.3^\circ, Re = 380$, και (b) $\phi = 2.6^\circ, Re = 355$ αντίστοιχα.

Η πιο πρόσφατη πειραματική μελέτη ροής σε περιοδικό τοίχωμα ανήκει στους Aksel et al. (2003), και πραγματοποιήθηκε με ρευστά υψηλού ιξώδους (έλαια σιλικόνης) σε ημιτονοειδή τοιχώματα μεγάλου ύψους. Η ροή στα εν λόγω πειράματα είναι έρπουσα, και οι κύριες παρατηρήσεις αφορούν τη δημιουργία δινών ανακυκλοφορίας στις κοιλότητες των τοιχωμάτων. Αποδείχθηκε ότι η γένεση των δινών είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό Reynolds (10^{-1} έως 10^{-5}) αλλά επηρεάζεται έντονα από την οξύτητα του τοιχώματος (waviness), δηλαδή τον λόγο του ύψους προς το μήκος της διαμόρφωσης. Ειδικότερα, δίνες δεν εμφανίζονται ποτέ για τοιχώματα πολύ μικρής οξύτητας και υπάρχουν πάντοτε σε τοιχώματα πολύ μεγάλης οξύτητας. Στις ενδιάμεσες οξύτητες, η δημιουργία δινών ανακυκλοφορίας διευκολύνεται σε υμένες μεγάλου πάχους, με συνέπεια την ύπαρξη ενός κρίσιμου πάχους υμένα πέρα από το οποίο πάντα εμφανίζεται η δίνη. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στο **Σχήμα 2.16**, όπου φαίνεται ότι για μεγάλη οξύτητα το απαιτούμενο πάχος υμένα είναι μηδενικό (δηλαδή η δίνη υπάρχει σε όλες τις συνθήκες ροής), ενώ κάτω από μία οξύτητα το απαιτούμενο κρίσιμο πάχος υμένα απειρίζεται. Η δεύτερη ενότητα δεδομένων στο σχήμα παριστάνει τις συνθήκες σχηματισμού και δεύτερης δίνης στο βάθος της κοιλότητας.



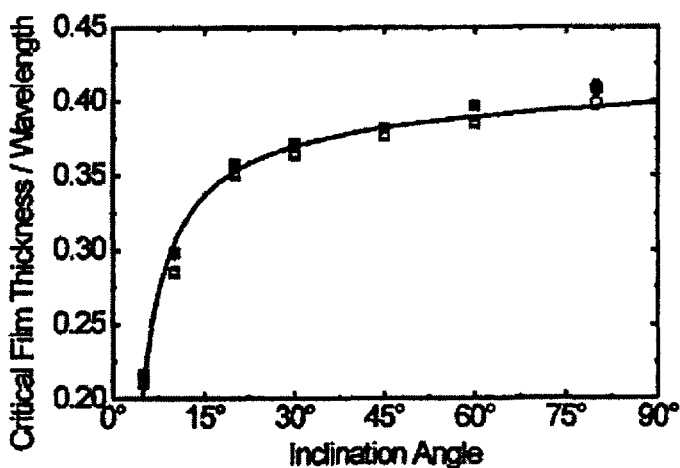
Σχήμα 2.15: Ισοϋψείς της ελεύθερης επιφάνειας της ροής με την εμφάνιση της τρισδιάστατης δομής των βαθουλωμάτων



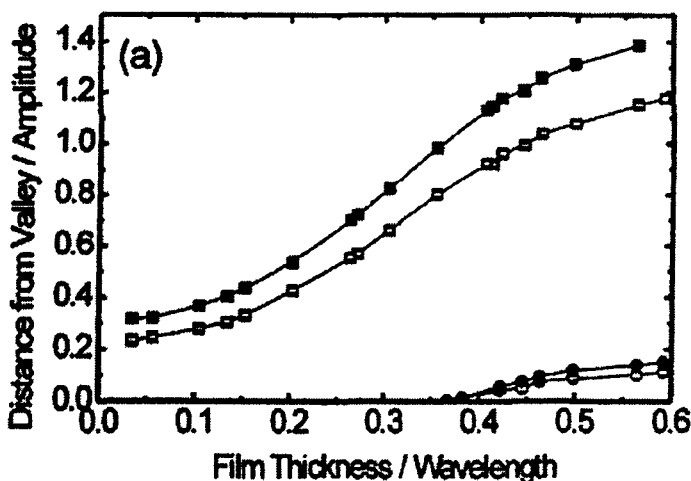
Σχήμα 2.16: Κρίσιμο πάχος υμένα συναρτήσεσι της οξύτητας του τοιχώματος (Aksel et al, 2003).

Το κρίσιμο πάχος του υγρού υμένα, για τη δημιουργία δίνης σε ενδιάμεση οξύτητα τοιχώματος, αποδείχθηκε από τους Aksel et al. (2003) ότι εξαρτάται ισχυρά από τη γωνία κλίσης. Τα σχετικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο **Σχήμα 2.17**, όπου τα σκούρα τετράγωνα αντιστοιχούν στο ελάχιστο πάχος υμένα για το οποίο υπάρχουν δίνες, τα ανοιχτά τετράγωνα στο μέγιστο πάχος για το οποίο δεν υπάρχουν δίνες και η συνεχής γραμμή είναι απλή παρεμβολή. Είναι εμφανές από το σχήμα ότι οι δίνες ανακυκλοφορίας σχηματίζονται δυσκολότερα όσο αυξάνει η κλίση του τοιχώματος.

Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της έρπουσας ροής πάνω από κυματοειδές τοίχωμα μεγάλου ύψους είναι η ανάπτυξη δινών ανακυκλοφορίας ακόμη και στο όριο του μηδενικού πάχους υμένα. Τέτοια αποτελέσματα παρουσιάζονται στο **Σχήμα 2.18** για τοίχωμα που αποτελείται από κύματα μήκους 20 mm και ύψους 18 mm, και το οποίο σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο μέση γωνία 45°. Το μέγεθος της δίνης μετράται στο σχήμα με δύο τρόπους, δηλαδή από τον πυθμένα της κοιλότητας είτε έως το κέντρο της δίνης είτε έως τη διαχωριστική ροϊκή (separatrix). Οι Aksel et al. (2003) παρατήρησαν ότι, με μείωση του πάχους υμένα, το μέγεθος της δίνης μειώνεται αλλά δεν μηδενίζεται.



Σχήμα 2.17: Επίδραση της γωνίας κλίσης στο κρίσιμο πάχος υμένα (Aksel et al, 2003).



Σχήμα 2.18: Το μέγεθος των δινών ως συνάρτηση του πάχους του υμένα.

2.3 Τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση

Η τελευταία κατηγορία ροής υγρού υμένα που ενδιαφέρει την παρούσα εργασία είναι η ροή πάνω από τοίχωμα με μία μεμονωμένη κοιλότητα. Η γεωμετρία αυτή μπορεί να προσομοιώνει τοπική ατέλεια του τοιχώματος, και το βασικό ερώτημα που τίθεται είναι ο βαθμός και η έκταση επηρεασμού του υγρού υμένα ως συνάρτηση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της βύθισης. Σημαντικές εφαρμογές του παραπάνω προβλήματος εμφανίζονται σε διεργασίες επικάλυψης. Για το λόγο αυτό οι διαθέσιμες αναλύσεις εστιάζουν σε παραδοχές που ισχύουν σε αυτές τις διεργασίες. Συγκεκριμένα, σε πολλές περιπτώσεις οι αδρανειακοί όροι έχουν αμελητέα συνεισφορά, και οι δυνάμεις που καθορίζουν τα φαινόμενα είναι οι ιξώδεις, οι βαρυτικές και οι τριχοειδείς.

Για να αγνοηθούν οι αδρανειακές δυνάμεις, δεν απαιτείται υποχρεωτικά ο αριθμός Reynolds να είναι πολύ μικρός, αλλά αρκεί να ελαχιστοποιείται το γινόμενο ϵRe . Η παράμετρος ϵ είναι ο λόγος των χαρακτηριστικών μηκών στην κάθετη διεύθυνση και στη διεύθυνση ροής, και για ροή υγρού υμένα με σχετικά ήπιες χωρικά μεταβολές ισχύει ότι $\epsilon \ll 1$. Το παραπάνω πλαίσιο ανάλυσης συνιστά τη θεωρία λίπανσης (lubrication theory). Αντίθετα, στις περιπτώσεις που η παράμετρος ϵRe δεν είναι μικρή, οι όροι αδράνειας πρέπει να συμπεριληφθούν στις εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο (Weinstein et al. 2004). Στις περιπτώσεις αυτές, η ανάλυση συνήθως βασίζεται σε κατάλληλη τροποποιημένες εξισώσεις οριακού στρώματος (Lenich 1962, Schlichting 1979).

Οι Stillwagon & Larson (1988) διεξήγαγαν πειράματα ροής υγρού υμένα πάνω από μεμονωμένη κοιλότητα με υγρά μεγάλου ιξώδους (100-4800 cP), και τα συνέκριναν με υπολογισμούς βασισμένους στη θεωρία λίπανσης. Τα πειράματα και οι υπολογισμοί έδειξαν τη δημιουργία ενός βυθίσματος (depression) στην ελεύθερη επιφάνεια του υμένα που αποδόθηκε στην επίδραση της κοιλότητας. Διαπιστώθηκε επίσης η ανάπτυξη ενός στατικού τριχοειδούς κύματος (capillary ridge) πριν από την είσοδο του υγρού στην κοιλότητα.

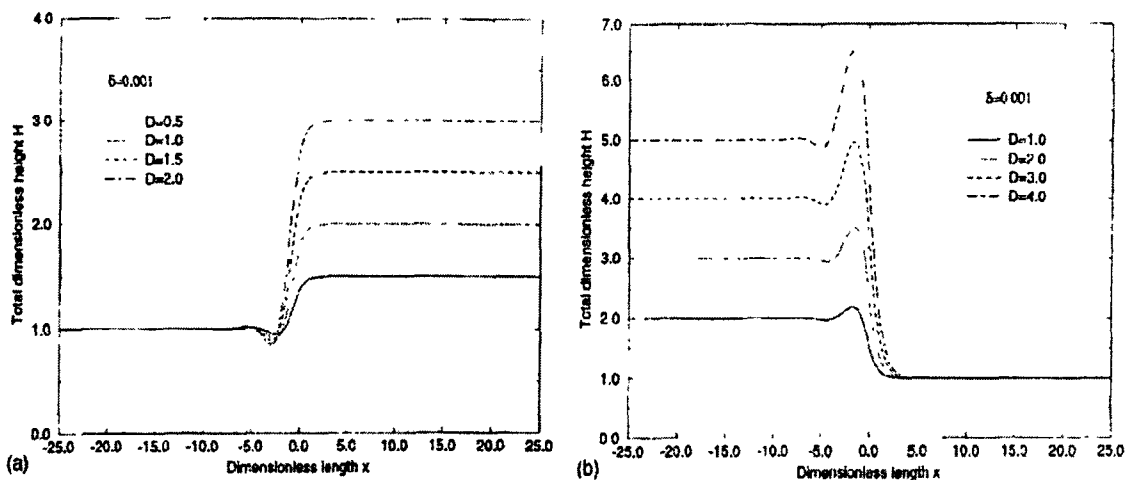
Οι Pritchard et al. (1992) διερεύνησαν το εύρος αξιοπιστίας της θεωρίας λίπανσης. Οι Fernandez-Parent et al. (1998) έδωσαν αναλυτική λύση στο πρόβλημα και ισχυρίστηκαν ότι το κύμα που εμφανίζει η ελεύθερη επιφάνεια πριν την είσοδο στην κοιλότητα εξαρτάται μόνο από το βάθος της κοιλότητας. Οι Schwartz και Weider (1995) έλυσαν επίσης αναλυτικά τις εξισώσεις για υπόστρωμα με συνεχείς διαμορφώσεις και διαπίστωσαν ικανοποιητική συμφωνία με αποτελέσματα από προσομοιώσεις.

Πιο πρόσφατα, οι Kalliadasis et al. (2000) μελέτησαν το πρόβλημα με συνδυασμό ανάλυσης και υπολογισμών. Έτσι, χρησιμοποιώντας θεωρία λίπανσης και κατάλληλη κλιμάκωση των μεταβλητών, οδηγήθηκαν σε μία μη-γραμμική διαφορική

εξίσωση που περιγράφει τη χωροχρονική εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας. Η εξίσωση επιλύθηκε αριθμητικά για τις περιπτώσεις μεμονωμένης κοιλότητας ή μεμονωμένου υψώματος, των οποίων τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά προσδιορίζονται από το ύψος, το μήκος και την οξύτητα.

Η λύση του προβλήματος είναι η θέση της ελεύθερης επιφάνειας και την δίνουν για ένα μεγάλο εύρος τιμών των γεωμετρικών παραμέτρων που προαναφέρθηκαν. Επιβεβαίωσαν έτσι, ότι η ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζει ένα τριχοειδές κύμα ακριβώς πριν από την είσοδο στην κοιλότητα ή την έξοδο από τον λοφίσκο και αυτό το κύμα μεγαλώνει όσο η οξύτητα της γεωμετρίας αυξάνει παράλληλα με την αύξηση του βάθους. Το ίδιο τριχοειδές κύμα έχει παρατηρηθεί στην κίνηση των γραμμών επαφής πάνω σε επίπεδο υπόστρωμα και οφείλει την ύπαρξη του στη δημιουργούμενη πίεση. Για τη ροή πάνω από διαμόρφωση η εμφάνιση του τριχοειδούς κύματος αποδεικνύει την επίδραση της κλίσης της τριχοειδούς πίεσης που επιβάλλεται από την καμπυλότητα του υποστρώματος. Επιπλέον, οι Kalliadasis et al. (2000) παρατήρησαν ότι το ελάχιστο πάχος υμένα εντοπίζεται πάντα κοντά στη γωνία της διαμόρφωσης που αντιστοιχεί στο τριχοειδές κύμα. Και το ύψος του κύματος και το ελάχιστο πάχος υμένα απέδειξαν ότι εξαρτώνται έντονα από το βάθος και την οξύτητα της διαμόρφωσης. Στο τέλος, βρήκαν και τις παραμέτρους που υποβαθμίζουν ποσοτικά το τριχοειδές κύμα. Αυτοί είναι : το πεπερασμένο πλάτος της διαμόρφωσης και η ενίσχυση των όρων της βαρύτητας. Επιπλέον ισχυρίζονται ότι η δράση αυτών των παραμέτρων υποβάθμισης επιτρέπει να ερμηνευτεί ο ισχύων φυσικός μηχανισμός του φαινομένου.

Οι παραπάνω ερευνητές διαπίστωσαν τη δημιουργία στατικού κύματος στην είσοδο της κοιλότητας ή στην έξοδο του υψώματος. Στο **Σχήμα 2.19** παρουσιάζονται τα αποτελέσματά τους για τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας στην είσοδο (b) και την έξοδο (a) μιας κοιλότητας με μεγάλο μήκος.



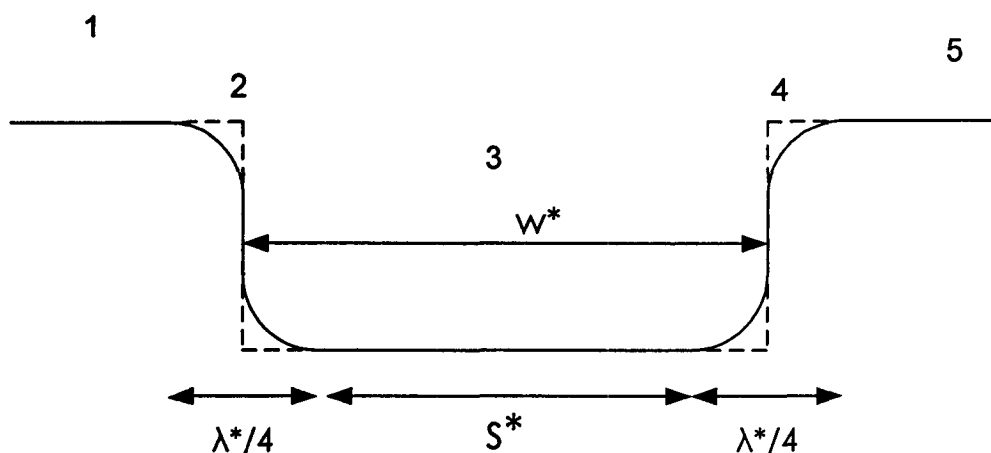
Σχήμα 2.19: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διαφορετικά βάθη (D) λακκούβας. Το διάγραμμα (a) παριστάνει την απόκριση στην έξοδο από την κοιλότητα και το (b) την απόκριση στην είσοδο.

Το βάθος των κοιλότητων που μελετώνται είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το πάχος του υμένα, ενώ το μήκος τους μπορεί να είναι παρόμοιο ή πολύ μεγαλύτερο. Η μορφή της κοιλότητας ποικίλει από απλό ημίτονο έως τελείως ορθογωνική, και η επίδρασή της στα χαρακτηριστικά της ροής εξετάζεται διεξοδικά.

Στην παρούσα εργασία μελετάται η μόνιμη ροή πάνω σε κατακόρυφο τοίχωμα ($\phi=90^\circ$). Συνεπώς ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις και συνοριακές συνθήκες που περιγράφηκαν παραπάνω. Όπως και για το περιοδικό τοίχωμα, η εγκυρότητα των υπολογιστικών αποτελεσμάτων εξασφαλίζεται με την ύπαρξη ικανού μήκους επίπεδου τοιχώματος πριν και μετά την κοιλότητα, έτσι ώστε ο υγρός υμένας να εισέρχεται στο πεδίο αλλά και να εξέρχεται από αυτό με αδιατάραχτη ροή Nusselt.

Η μορφή της κοιλότητας μεταβάλλεται συστηματικά με την εξής διαδικασία: Η κοιλότητα διαμορφώνεται από τρία τμήματα, δύο «μισά» συνημίτονα, μήκους κύματος λ^* , που παριστάνουν τα τμήματα εισόδου/εξόδου και ένα επίπεδο που αποτελεί τον κυρίως πυθμένα (Σχήμα 3.6). Το μήκος, w^* , της κοιλότητας μετράται στο μέσο βάθος όπως φαίνεται στο σχήμα, έτσι ώστε το επίπεδο τμήμα της κοιλότητας έχει μήκος $(w^* - \lambda^*/2)$ ενώ το συνολικό μήκος διαταραχής του τοιχώματος είναι $(w^* + \lambda^*/2)$.

Το μήκος κύματος, λ^* , των συνημιτονοειδών τμημάτων αποτελεί ελεύθερη παράμετρο, που μεταβάλλεται από πολύ μικρές τιμές έως τη μέγιστη τιμή $\lambda^*=2w^*$. Όταν $\lambda^* \rightarrow 0$ οι παριές γίνονται σχεδόν κατακόρυφες και η κοιλότητα προσεγγίζει το ορθογωνικό σχήμα. Αντίθετα, όταν $\lambda^*=2w^*$, το επίπεδο τμήμα του πυθμένα εξαφανίζεται και η κοιλότητα μετατρέπεται σε ένα απλό συνημίτονο, το οποίο συνιστά την ηπιότερη μεταβολή κλίσης. Η διακριτοποίηση σε κάθε ένα από τα τμήματα του τοιχώματος (1, 2, 3, 4 και 5 στο Σχήμα 3.6) είναι διαφορετική. Ειδικότερα, η πύκνωση των στοιχείων στα τμήματα 2 και 4 αυξάνεται όσο η κοιλότητα προσεγγίζει την ορθογωνική μορφή.



Σχήμα 3.6: Διαμόρφωση κοιλότητας από δύο συνημιτονοειδή και ένα επίπεδο τμήμα.

3.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η ροή υγρού υμένα πάνω από επίπεδο και διαμορφωμένο τοίχωμα προσομοιώνεται υπολογιστικά στην παρούσα εργασία με την μέθοδο Galerkin πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια, συνοψίζονται τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθόδου και τονίζονται οι λεπτομέρειες που συσχετίζονται με τις υπό εξέταση εφαρμογές.

3.2.1 Υπολογιστικό πλέγμα

Το πεδίο της ροής εκτείνεται στη x - κατεύθυνση από την είσοδο έως την έξοδο του υπολογιστικού καναλιού και στη y - κατεύθυνση από το τοίχωμα έως την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υμένα. Μία βασική δυσκολία στη διακριτοποίηση του πεδίου οφείλεται στην χωροχρονική μεταβολή της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας $y=h(x,t)$. Ειδικότερα, η θέση της επιφάνειας δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων αλλά προκύπτει ως μέρος της λύσης.

Για την αντιμετώπιση της παραπάνω ιδιαιτερότητας της ροής, εισάγεται κατάλληλος μετασχηματισμός $(x,y) \rightarrow (\hat{x},\hat{y})$ έτσι ώστε στο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων το τοίχωμα να αντιστοιχεί στη θέση $\hat{y} = 0$ και η ελεύθερη επιφάνεια στη θέση $\hat{y} = 1$. Στην περίπτωση του επιπέδου τοιχώματος, ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται από τις σχέσεις:

$$(x,y) \rightarrow (\hat{x},\hat{y}): \quad \hat{x} = x, \quad \hat{y} = \frac{y}{h(x,t)} \quad (3.17)$$

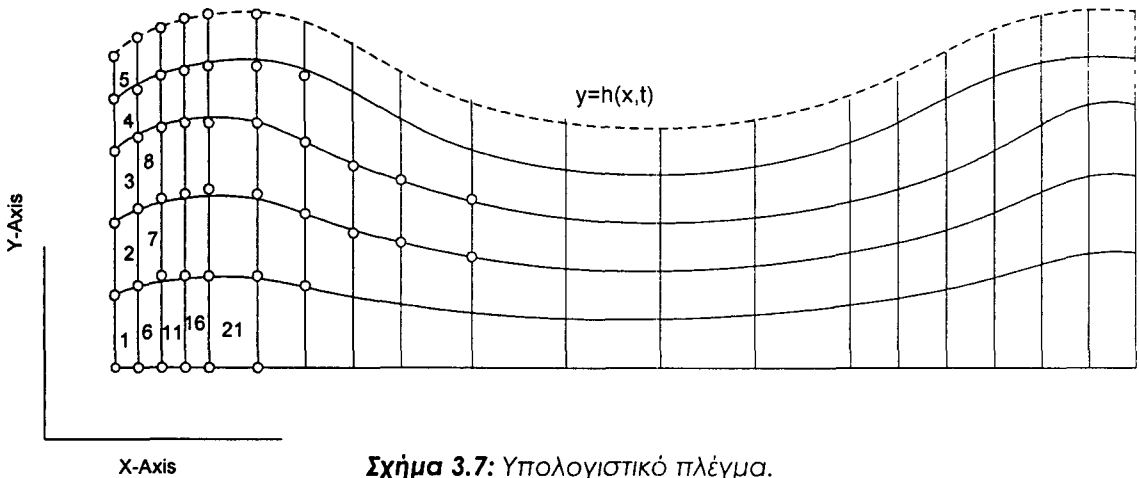
όπου $h(x,t)$ είναι το στιγμιαίο, τοπικό πάχος του υμένα. Αντίστοιχα, για τοίχωμα με διαμόρφωση που περιγράφεται από την εξίσωση $y=b(x)$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$(x,y) \rightarrow (\hat{x},\hat{y}): \quad \hat{x} = x, \quad \hat{y} = \frac{y-b(x)}{h(x,t)-b(x)} \quad (3.18)$$

Μία ενδεικτική μορφή φυσικού πλέγματος παρουσιάζεται στο **Σχήμα 3.7**. Το ύψος των πεπερασμένων στοιχείων διαφοροποιείται με τη θέση x , σύμφωνα με τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Είναι προφανές ότι, στη γενική περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενης ροής, το πλέγμα επανασχηματίζεται σε κάθε χρονικό βήμα σύμφωνα με τη νέα θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Δηλαδή, η φυσική θέση των κόμβων μεταβάλλεται ενώ η μετασχηματισμένη παραμένει σταθερή.

Τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιούνται είναι ισοπαραμετρικά εννιά κόμβων. Η πυκνότητα των στοιχείων στις δύο διευθύνσεις είναι διαφορετική και καθορίζεται από τη φυσική του προβλήματος. Έτσι, στη x - διεύθυνση η διακριτοποίηση καθορίζεται από την μικρότερη κλίμακα της ροής και συχνά απαιτούνται εκατοντάδες ως χιλιάδες στοιχεία για την ικανοποιητική περιγραφή ενός μεγάλου υπολογιστικού καναλιού. Ικανοποιητική διακριτοποίηση στην y - διεύθυνση επιτυγχάνεται τυπικά με 5-10

στοιχεία, αλλά η ακριβής περιγραφή λεπτομερειών της ροής σε διαμορφωμένα τοιχώματα απαιτήσε τη χρήση έως και 40 στοιχείων.



Σχήμα 3.7: Υπολογιστικό πλέγμα.

Στη διάταξη του κάναβου (**Σχήμα 3.7**) παριστάνεται και ο τρόπος αρίθμησης των στοιχείων. Οι κόμβοι σε κάθε στοιχείο αριθμούνται με τρεις διαφορετικούς τρόπους, γεγονός που εξασφαλίζει τη μεγαλύτερη δυνατή ευελιξία στη δομή του κώδικα. Η τοπική αρίθμηση από 1 έως 9 αναφέρεται στο κάθε στοιχείο ξεχωριστά και καθορίζει τη σχετική θέση των κόμβων στο στοιχείο. Χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης και τον υπολογισμό των εξισώσεων σταθμισμένων υπολοίπων, δεδομένου ότι η συνεισφορά κάθε στοιχείου υπολογίζεται αυτόνομα και τα δεδομένα του μεταφέρονται στο συνολικό πίνακα άγνωστων του προβλήματος.

Η γενική αρίθμηση είναι η απόλυτη αρίθμηση των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος και ακολουθεί τη λογική αρίθμησης των στοιχείων. Ξεκινάει από τη y -κατεύθυνση, τη διατρέχει και στη συνέχεια μετακινείται στον επόμενο κόμβο στη x -κατεύθυνση. Η γενική αρίθμηση χρησιμοποιείται για την ενιαία αποθήκευση με μορφή διανύσματος όλων των αγνώστων του προβλήματος. Τέλος, η καρτεσιανή αρίθμηση γίνεται συναρτήσει της διακριτοποίησης στη x - και y -κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, η θέση κάθε κόμβου εκφράζεται από τις συντεταγμένες του σημείου που του αντιστοιχεί. Έτσι, το σημείο (i, j) αντιστοιχεί στον κόμβο που ανήκει στη γραμμή i και στη στήλη j .

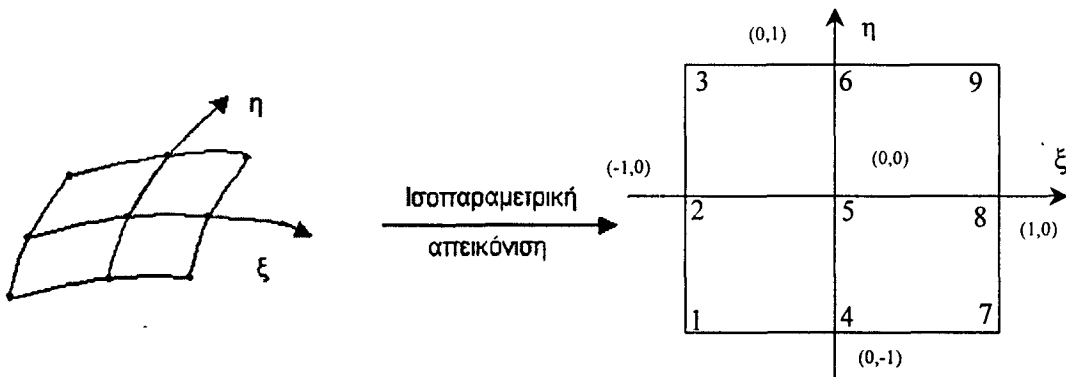
3.2.2 Διακριτοποίηση με τη μέθοδο Galerkin

Οι κύριες μεταβλητές του προβλήματος της ροής υγρού υμένα, έτσι όπως έχει δομηθεί είναι οι ταχύτητες στη x - και y -κατεύθυνση, u και v αντίστοιχα, η κατανομή της πίεσης p και η θέση της ελεύθερης επιφάνειας h . Οι άγνωστοι του υπολογιστικού

προβλήματος είναι οι τιμές των μεταβλητών στους κόμβους, ενώ στο εσωτερικό κάθε στοιχείου οι μεταβλητές υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις παρεμβολής

$$u = \sum_{i=1}^9 u_i \varphi^i, v = \sum_{i=1}^9 v_i \varphi^i, h = \sum_{i=1}^3 h_i \varphi^i, p = \sum_{i=1}^4 p_i \psi^i \quad (3.19)$$

όπου φ^i είναι οι διδιάστατες τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης και ψ^i οι διδιάστατες γραμμικές συναρτήσεις βάσης. Ο τρόπος αυτός διακριτοποίησης των αγνώστων είναι τυπικός στα προβλήματα ροής με την μέθοδο Galerkin. Σημειώνεται ότι στη διακριτοποίηση της ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιείται τετραγωνική συνάρτηση βάσης που όμως μεταβάλλεται μόνον κατά τη μία διεύθυνση (παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια).



Σχήμα 3.8: Σχηματική αναπαράσταση της αντιστοίχισης του πραγματικού στοιχείου στο πρότυπο μέσω της ισοπαραμετρικής απεικόνισης.

Το **Σχήμα 3.8** εισάγει την ισοπαραμετρική απεικόνιση, δηλαδή τον μετασχηματισμό ενός γενικού πεπερασμένου στοιχείου, (που είναι καμπυλόγραμμο στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων) στο πρότυπο ορθοκανονικό στοιχείο αναφοράς με τοπικές συντεταγμένες $(\xi, \eta) \in (-1:1, -1:1)$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η απαίτηση συμβατότητας των αναπτυγμάτων (3.19) στα συστήματα (x, y) και (ξ, η) οδηγεί στις σχέσεις

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 x_i \varphi^i(\xi, \eta) \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 y_i \varphi^i(\xi, \eta) \quad (3.20)$$

που αποτελούν τον ορισμό της ισοπαραμετρικής απεικόνισης.

Με βάση όλα τα παραπάνω, οι τιμές των συναρτήσεων βάσης στους κόμβους των στοιχείων ικανοποιούν τις ταυτότητες $\varphi^i(\xi_j, \eta_j) = 1, \varphi^j(\xi_i, \eta_i) = 0 (j \neq i)$, ενώ η μορφή τους στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι:

Διδιάστατες τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης,

$$\varphi(1) = 0.25\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1)$$

$$\varphi(2) = 0.5\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2)$$

$$\varphi(3) = 0.25\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1)$$

$$\varphi(4) = 0.5\xi(1 - \xi^2)\eta(\eta - 1)$$

$$\varphi(5) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

$$\varphi(6) = 0.5(1 - \xi^2)\eta(\eta + 1)$$

$$\varphi(7) = 0.25\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1)$$

$$\varphi(8) = 0.5\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2)$$

$$\varphi(9) = 0.25\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1)$$

Διδιάστατες γραμμικές συναρτήσεις βάσης,

$$\psi(1) = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$\psi(2) = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\psi(3) = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\psi(4) = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$$

3.2.3 Σταθμισμένα υπόλοιπα- Οι ιδιαιτερότητες της μεθόδου Galerkin

Προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος Galerkin στις βασικές εξισώσεις της ροής που έχουν ήδη περιγραφεί, αυτές μετασχηματίζονται στη μορφή των σταθμισμένων υπολοίπων ολοκληρωμάτων όγκου ή επιφάνειας με τη χρήση των συναρτήσεων βάσης. Η δημιουργία των σταθμισμένων υπολοίπων με τις ίδιες συναρτήσεις βάσης με τις οποίες έχουν ήδη διακριτοποιηθεί οι άγνωστοι αποτελεί την θεμελιώδη ιδέα της μεθόδου Galerkin.

$$R_C^i = \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \psi^i dV \quad (3.21)$$

$$R_M^i = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} u - \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{Fr} \underline{g} \right) \psi^i dV \quad (3.22)$$

$$R_K^i = \int_S \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v \right) \psi^i dS \quad (3.23)$$

όπου R_C^i, R_M^i, R_K^i είναι τα σταθμισμένα υπόλοιπα συνέχειας, ορμής και κινηματικό αντίστοιχα. Στην εξίσωση (3.22) εφαρμόζεται το θεώρημα της απόκλισης ώστε να μειωθεί η τάξη της διαφορίσης οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} R_M^i &= \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} u - \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{Fr} \underline{g} \right) \psi^i dV \rightarrow \\ R_M^i &= \int_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} u - \frac{1}{Fr} \underline{g} \right) \psi^i - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\nabla} \psi^i \right] dV - \int_S \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \psi^i dS \end{aligned}$$

όπου $\underline{\underline{\sigma}}$ ο αδιάστατος τανυστής τάσης του ρευστού. Αποτέλεσμα της εφαρμογής του θεωρήματος της απόκλισης είναι και η εμφάνιση της φυσικής (natural) συνοριακής

συνθήκης του προβλήματος (3.7), που είναι η εξίσωση της ρευστοδυναμικής δύναμης με την τριχοειδή λόγω καμπυλότητας της ελεύθερης επιφάνειας.

Αναγκαίες (essential) συνοριακές συνθήκες για τους αγνώστους u και v ικανοποιούνται στην είσοδο της ροής και κατά μήκος του τοιχώματος. Κατά μήκος της ελεύθερης επιφάνειας του υπολογιστικού πεδίου ισχύει η φυσική (natural) συνοριακή συνθήκη (3.7) που εξισώνει τις υδροδυναμικές με τις τριχοειδείς δυνάμεις. Συνεπώς, το επιφανειακό ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο υπόλοιπο R'_M υπολογίζεται άμεσα από την (3.7).

Η παρούσα εφαρμογή της μεθόδου Galerkin παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα ιδιαιτερότητα, η οποία εντοπίζεται στην έξοδο του πεδίου ροής. Συγκεκριμένα, αντί να επιβληθεί κάποιου είδους συνοριακή συνθήκη (που θα περιόριζε τεχνητά την ανοικτή φύση της ροής), επεκτείνεται η ισχύς των εξισώσεων έως τους κόμβους της εξόδου, και τα αντίστοιχα σταθμισμένα υπόλοιπα περιλαμβάνονται στο μητρώο στοιβαρότητας. Με τον τρόπο αυτό, οι τιμές των μεταβλητών στους κόμβους της εξόδου προκύπτουν ως μέρος της λύσης. Η καταλληλότητα της παραπάνω συνοριακής συνθήκης, που έχει προταθεί αρχικά από τους Malamataris & Papapanastasiou (1991), έχει επαληθευθεί επανειλημμένα στη βιβλιογραφία.

Τα σταθμισμένα υπόλοιπα υπολογίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά Gauss εννιά σημείων. Το σύστημα των μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει επιλύεται με επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson σύμφωνα με το σχήμα: $\mathbf{N}^{(n+1)} = \mathbf{N}^{(n)} - \mathbf{J}^{-1}R(\mathbf{N}^{(n)})$, όπου $\mathbf{N}^T = [u_1, v_1, p_1, h_1, \dots, u_n, v_n, p_n, h_n]$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων και $\mathbf{J} = \partial R / \partial \mathbf{N}$ ο Ιακωβιανός πίνακας των υπολοίπων, R , συναρτήσεων των άγνωστων στους κόμβους, \mathbf{N} . Όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν ελεγχθεί ως προς την ανεξαρτησία από τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού πλέγματος ως τάξη ακρίβειας της λύσης 10^{-6} .

Για την ολοκλήρωση των σταθμισμένων υπολοίπων στο χρόνο, η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η Crank-Nicolson που έχει ως γνωστόν ακρίβεια δεύτερης τάξης. Δηλαδή, αν η χρονική εξέλιξη παρασταθεί σχηματικά από την εξίσωση

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = F(\vartheta, \nabla \vartheta, \dots)$$

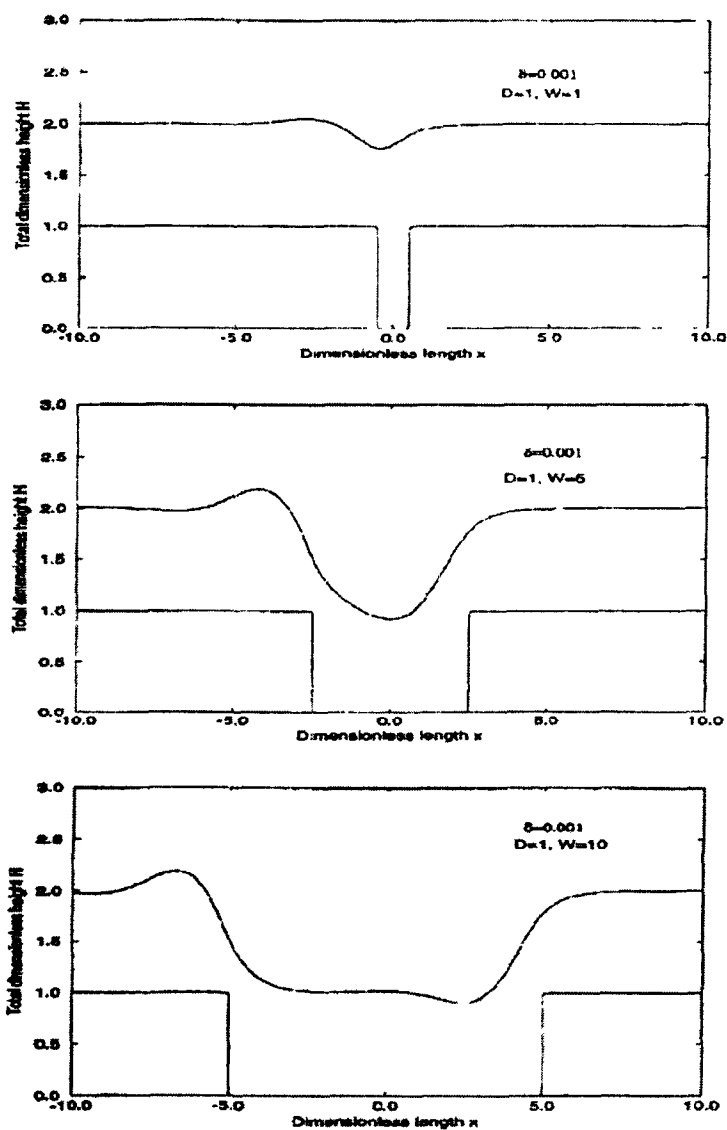
η χρονική παράγωγος διακριτοποιείται μεταξύ των χρονικών στιγμών (i) και $(i-1)$ και ο όρος των χωρικών παραγώγων υπολογίζεται ως αριθμητικός μέσος όρος των τιμών του τις δύο χρονικές στιγμές. Δηλαδή,

$$\frac{\vartheta^{(i)} - \vartheta^{(i-1)}}{\Delta t} = 0.5 \left[F^{(i)}(\vartheta, \nabla \vartheta, \dots) + F^{(i-1)}(\vartheta, \nabla \vartheta, \dots) \right]$$

Και για αυτή την περίπτωση έχει ελεγχθεί η ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων από το χρονικό βήμα της ολοκλήρωσης.

Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται για διαφορετικά βάθη (D) κοιλότητας αλλά για την ίδια οξύτητα (δ). Διαπιστώνεται ότι, με αύξηση του βάθους αυξάνει το ύψος του τριχοειδούς κύματος που σχηματίζεται πριν την είσοδο στην κοιλότητα και μειώνεται το ύψος του υμένα στο βύθισμα που παρατηρείται κατά την έξοδο.

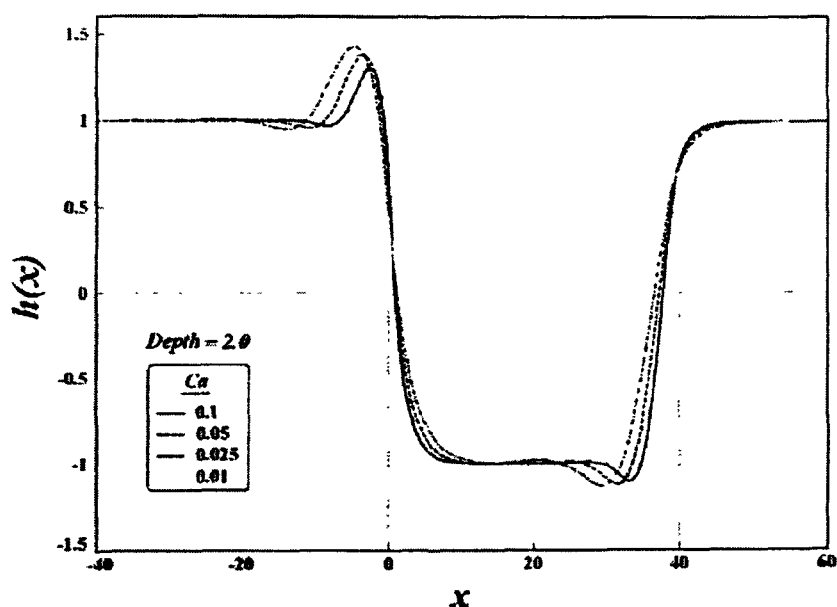
Στο **Σχήμα 2.20** οι Kalliadasis et al. (2000) παρουσιάζουν την επίδραση του μήκους (w) της κοιλότητας στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Διατηρώντας σταθερή οξύτητα και βάθος, διαπιστώνουν ότι όσο μικρότερο το μήκος (στενότερη κοιλότητα) τόσο λιγότερο επηρεάζεται η ελεύθερη επιφάνεια, ή με άλλα λόγια τόσο δυσκολότερα ακολουθεί το υγρό τη γεωμετρία του υποστρώματος. Το τριχοειδές στάσιμο κύμα στη είσοδο εμφανίζεται ακόμα και για πολύ στενή κοιλότητα αλλά σαφώς εξασθενημένο.



Σχήμα 2.20: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για τρία διαφορετικά μήκη (w) λακούβας.

Επεκτείνοντας την έρευνα των Kalliadasis et al. (2000), οι Mazouchi & Homay (2001) μελέτησαν υπολογιστικά τη ροή πάνω από μεμονωμένη κοιλότητα επιλύοντας αριθμητικά τις εξισώσεις Stokes έρπουσας ροής. Με τον τρόπο αυτό μπόρεσαν να εξετάσουν χωρικές μεταβολές μεγάλης οξυτήτας, για τις οποίες δεν ισχύει η παραδοχή λίπανσης. Η μελέτη εστιάστηκε στην εξέταση της επίδρασης των τριχοειδών φαινομένων, τα οποία κλιμακώνονται με τον τριχοειδή αριθμό, $Ca = \rho g h_N^2 / \sigma$, και το χαρακτηριστικό τριχοειδές μήκος, $l = \frac{h_N}{Ca^{1/3}}$, όπου ρ η πυκνότητα, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, h_N το πάχος του υμένα κατά Nusselt και σ η επιφανειακή τάση του ρευστού.

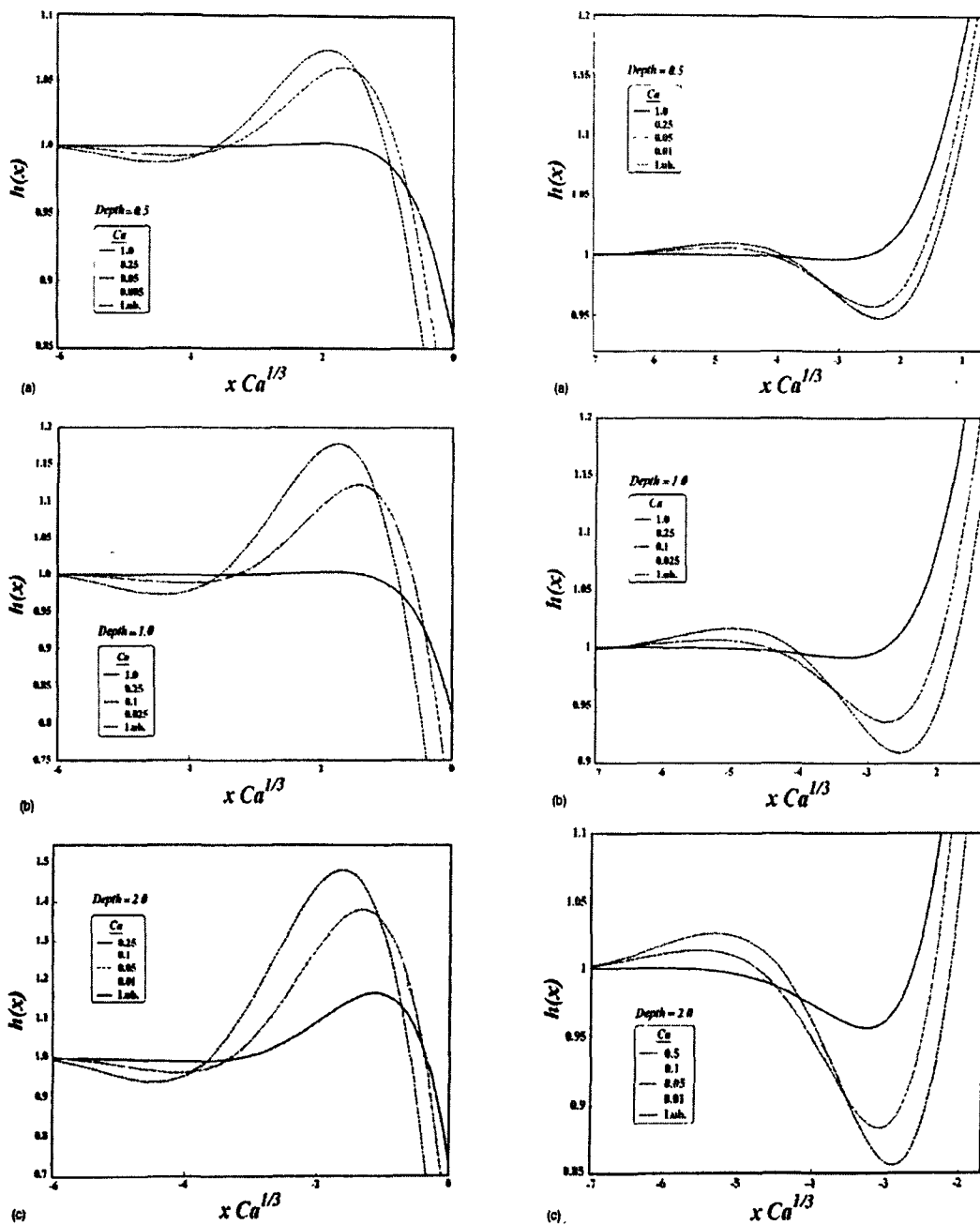
Οι προσομοιώσεις των Mazouchi & Homay (2001) έδειξαν ότι το τριχοειδές, στατικό κύμα εμφανίζεται πριν την είσοδο στην κοιλότητα και παράλληλα ο υμένας βυθίζεται πριν την έξοδο. Το ύψος και η θέση αυτών των χαρακτηριστικών που αναπτύσσει η ελεύθερη επιφάνεια εξαρτώνται από τον αριθμό Ca και το βάθος της κοιλότητας. Έτσι, για μεγάλους αριθμούς Ca η ελεύθερη επιφάνεια ακολουθεί σχεδόν πιστά τη γεωμετρία του τοιχώματος, και τόσο το ύψος του κύματος όσο και το μέγεθος του βυθίσματος μειώνονται εκθετικά. Από την άλλη, για μικρούς αριθμούς Ca τα δύο μεγέθη αυξάνονται σε συμφωνία με τα προσεγγιστικά αποτελέσματα της θεωρίας λίπανσης. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στο **Σχήμα 2.21** και η παραμετρική τους εξάρτηση παρουσιάζεται αναλυτικότερα **Σχήμα 2.22**.



Σχήμα 2.21: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διαφορετικούς αριθμούς Ca .

Οι Mazouchi και Homay (2001) προτείνουν έναν ενδιαφέροντα φυσικό μηχανισμό ερμηνείας του φαινομένου δημιουργίας του στατικού τριχοειδούς κύματος, ο οποίος ισχύει για κατακόρυφο τοίχωμα. Ειδικότερα, στο οριζόντιο τμήμα της

κοιλότητας δεν υπάρχει συνιστώσα της βαρύτητας ώστε να απομακρύνει το υγρό, με αποτέλεσμα η συσώρευση μάζας να προκαλεί το κύμα. Λόγω της τοπικής καμπυλότητας της ελεύθερης επιφάνειας αναπτύσσεται τριχοειδής πίεση η οποία τελικά ωθεί το υγρό υποκαθιστώντας τοπικά τη βαρύτητα.



Σχήμα 2.22: Με λεπτομέρεια η επίδραση στη θέση της ελεύθερης επιφάνειας του αριθμού Ca και του βάθους.

Επομένως, η μόνη δύναμη που οδηγεί το ρευστό είναι η τριχοειδής πίεση που αναπτύσσεται στη συγκεκριμένη θέση λόγω της καμπυλότητας του τοιχώματος.

Αύξηση του βάθους του τοιχώματος απαιτεί υψηλότερη διαφορική πίεση για την ίδια παροχή υγρού, και συνεπώς οδηγεί σε αύξηση του ύψους του τριχοειδούς κύματος. Αντίστοιχα, αν το τοίχωμα δεν είναι κατακόρυφο ($B_\gamma \neq 0$) τότε η δύναμη της βαρύτητας συνεισφέρει πάντα στην κίνηση του ρευστού κατά μήκος της κοιλότητας, με αποτέλεσμα να μειώνεται το ύψους του τριχοειδούς κύματος.

Παρότι στη βιβλιογραφία οι αναφορές για ροή υμένα που οδηγείται από την επιφανειακή τάση του υγρού είναι αρκετές (S.J. Weinstein and K.J. Ruschak, 2004, T.G. Myers, 1998, R.V. Roy et al., 1997, L.E. Stillwagon and R.G. Larson, 1988, R.E. Khayat and S.R. Welke, 2000, P.D. Howell, 2004, Kalliadasis et al., 2000, A. Mazouchi and G.M. Homsy, 2001) δεν υπάρχει αναφορά για εξέταση του προβλήματος για πεπερασμένη αδράνεια μέσω της επίλυσης των πλήρων εξισώσεων Navier Stokes. Αντίθετα, σημειώνεται η ανάγκη (S.J. Weinstein and K.J. Ruschak, 2004) για αντιμετώπιση της δεδομένης ροής με άμεσες αριθμητικές τεχνικές.

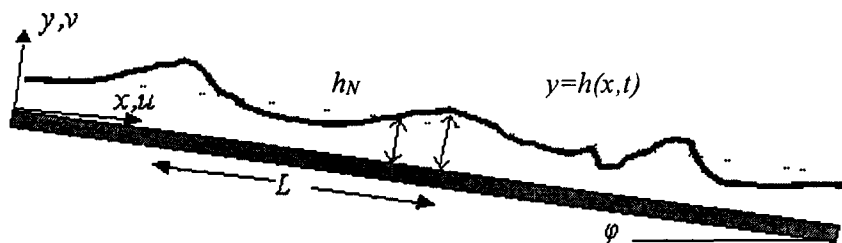
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται σε λεπτομέρεια όλα τα επιμέρους προβλήματα ροής υγρού υμένα που επιλύθηκαν στη διατριβή. Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες για: (α) την αναπτυσσόμενη ροή πάνω σε επίπεδο τοίχωμα με ελεγχόμενης μορφής διαταραχές εισόδου, (β) τη μόνιμη ροή πάνω σε τοίχωμα με περιοδική ημιτονοειδή διαμόρφωση και (γ) τη μόνιμη ροή πάνω σε επίπεδο τοίχωμα με μία μεμονωμένη κοιλότητα μεταβλητής οξύτητας.

Επίσης, συνοψίζονται τα γενικά χαρακτηριστικά της μεθόδου Galerkin των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία είναι η υπολογιστική μέθοδος που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Δίνονται λεπτομέρειες για τις ιδιαιτερότητες της εφαρμογής της μεθόδου σε κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα ροής υγρού υμένα, καθώς και για τις αναγκαίες προς τούτο μετατροπές του υπάρχοντα υπολογιστικού κωδικα.

3.1 Γενικές εξισώσεις της ροής υγρού υμένα

Κοινός παρονομαστής όλων των επιμέρους προβλημάτων που θα επιλυθούν είναι η ροή ενός ασυμπύεστου υγρού με ελεύθερη επιφάνεια. Η γενική αναπαράσταση της ροής για επίπεδο τοίχωμα, κεκλιμένο υπό γωνία φ ως προς το οριζόντιο, φαίνεται στο **Σχήμα 3.1**. Οι άλλες υποπεριπτώσεις προκύπτουν αντικαθιστώντας το επίπεδο τοίχωμα με άλλο κατάλληλα διαμορφωμένο, το οποίο διατηρεί την ίδια μέση κλίση, φ . Η ροή θεωρείται πάντα διδιάστατη και περιγράφεται από ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (x,y) , όπου η διεύθυνση x είναι παράλληλη στο τοίχωμα και η διεύθυνση y ξεκινά από τη μέση θέση του τοιχώματος και είναι κάθετη σε αυτό. Η ροή περιγράφεται κατά Euler από το διάνυσμα της ταχύτητας, \underline{u}^* , με συνιστώσες κατά x και y αντίστοιχα τις u^* και v^* και από την πίεση p^* .



Σχήμα 3.1: Σχηματική διάταξη της ροής λεπτού υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο.

Το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας γενικά μεταβάλλεται με την απόσταση x και το χρόνο t , και περιγράφεται από τη συνάρτηση $h(x,t)$. Αντίστοιχα μεταβάλλεται και η ογκομετρική παροχή του υγρού στη x διεύθυνση, $q(x,t)$. Η μέση ογκομετρική παροχή, Q , χρησιμοποιείται για τον ορισμό του αριθμού Reynolds της ροής σύμφωνα με τη σχέση

$$Re = \frac{Q}{\nu} \quad (3.1)$$

όπου ν είναι το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή είναι η διατήρηση της μάζας και η εξίσωση κίνησης. Η θεμελιώδη απαίτηση της διατήρησης της μάζας εκφράζεται για ασυμπιεστο ρευστό από την εξίσωση

$$\nabla \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (3.2)$$

Η εξίσωση κίνησης του ρευστού συνδέει το ρυθμό μεταβολής της ορμής μίας υλικής μάζας με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω της. Για την ειδική περίπτωση Νευτώνειου ρευστού με σταθερές ιδιότητες, προκύπτει η εξίσωση Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\underline{u}^*}{Dt} = \rho \underline{F}^* - \nabla p^* + \mu \nabla^2 \underline{u}^* \quad (3.3)$$

όπου στο αριστερό σκέλος εμφανίζεται η υλική (ή σωματιδιακή) παράγωγος, D/Dt , και ο όρος \underline{F}^* παριστάνει τις δυνάμεις που ενεργούν στον όγκο του ρευστού. Στην προκειμένη περίπτωση, η μόνη δύναμη όγκου είναι η βαρύτητα, και συνεπώς ισχύει ότι $\underline{F}^* = g \underline{g}$, όπου g είναι το μέτρο της βαρύτητας και \underline{g} το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνσή της.

Οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) αδιαστατοποιούνται με το χαρακτηριστικό πάχος υμένα κατά Nusselt, h_N , και τη χαρακτηριστική μέση ταχύτητα, $U = Q/h_N$. Παράγωγες κλίμακες είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος h_N/U και η χαρακτηριστική πίεση ρU^2 . Με την αδιαστατοποίηση αυτή, οι εξισώσεις λαμβάνουν την τελική μορφή

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{Fr} \underline{g} \quad (3.5)$$

όπου τα αδιάστατα μεγέθη συμβολίζονται τώρα χωρίς αστερίσκο. Ο αριθμός Reynolds έχει ήδη οριστεί ενώ ο αριθμός Froude είναι: $Fr = U/\sqrt{gh_N}$. Ο τρόπος με τον οποίο οι εξισώσεις αδιαστατοποιήθηκαν οδηγεί στην εξής σχέση εξάρτησης των αριθμών Froude και Reynolds: $Fr^2 = \frac{Re}{3} \sin \varphi$.

Οι παραπάνω εξισώσεις (3.4) και (3.5) συμπληρώνονται με τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα άκρα του υπολογιστικού πεδίου, δηλαδή στην είσοδο

και την έξοδο του υμένα, στην ελεύθερη επιφάνεια και στο στερεό τοίχωμα. Κοινές σε όλα τα προβλήματα είναι οι συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια και στην έξοδο της ροής. Ειδικότερα, στην ελεύθερη επιφάνεια ισχύει η κινηματική συνθήκη, κατά την οποία οι στοιχειώδεις μάζες του υγρού που συνιστούν την ελεύθερη επιφάνεια την ακολουθούν στην κίνησή της, και η οποία εκφράζεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad (3.6)$$

Επίσης, στην ελεύθερη επιφάνεια (που έχει μηδενική μάζα) επικρατεί ισορροπία δυνάμεων, δηλαδή η δύναμη που προκαλείται από τη ροή εξισορροπείται από την τριχοειδή δύναμη που οφείλεται στο συντελεστή επιφανειακής τάσης. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται από την εξίσωση

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = We 2H_c \underline{n} \quad (3.7)$$

όπου $\underline{\underline{\sigma}}$ είναι ο αδιάστατος τανυστής τάσης $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \frac{1}{Re} [\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T]$, We ο αριθμός

Weber $We = \frac{\sigma}{\rho U h_N^2}$, με σ την επιφανειακή τάση του ρευστού, $2H_c = \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}$ η μέση

καμπυλότητα της ελεύθερης επιφάνειας, και \underline{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην ελεύθερη επιφάνεια.

Τέλος, στην έξοδο του υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιείται η τακτική των Malamataris & Papanastasiou (1991) να μην επιβάλλεται καμία συνοριακή συνθήκη αλλά να απαιτείται ικανοποίηση των διαφορικών εξισώσεων στους κόμβους εξόδου και οι αντίστοιχες τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών να περιλαμβάνονται στο μητρώο των αγνώστων. Έχει επανειλημμένα διαπιστωθεί ότι με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η ομαλή έξοδος από το υπολογιστικό πεδίο των διαταραχών της ελεύθερης επιφάνειας.

3.1.1 Αναπτυσσόμενη ροή σε επίπεδο τοίχωμα

Στην περίπτωση του επιπέδου τοιχώματος, η συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα είναι η απαίτηση μηδενικής διείσδυσης και μηδενικής ολίσθησης, που λαμβάνει την απλή μορφή

$$u = v = 0 \quad \text{στο } y=0 \quad (3.8)$$

Ιδιαίτερη σημασία έχει η συνοριακή συνθήκη εισόδου ($x=0$), η οποία προσομοιώνει διαταραχές με επιθυμητά χαρακτηριστικά συχνότητας, έντασης και μορφής. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν δύο ειδών διαταραχές, όπως περιγράφονται από τη χρονική εξέλιξη, $h(0,t)$, του πάχους του υμένα στην είσοδο. Η πρώτη είναι μια απλή συνάρτηση ημιτόνου της μορφής

$$h(0,t) = -a \sin 2\pi f t \quad (3.9)$$

όπου a το εύρος της διαταραχής και f η συχνότητά της.

Η άλλη εκδοχή διαταραχής που χρησιμοποιήθηκε συνιστάται από περιοδική αύξηση της παροχής του ρευστού. Κάθε περίοδος προκαλεί παροδική αύξηση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας με μορφή καμπύλης Gauss. Το άθροισμα όλων αυτών των Gaussian μεταβολών του πάχους του υμένα στην είσοδο περιγράφεται από τη σχέση:

$$h(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a e^{-\left(t-t_0 + \frac{n-1}{f}\right)^2 / 2r^2} \quad (3.10)$$

όπου f η συχνότητα της διαταραχής και r η παράμετρος που δηλώνει την αιχμηρότητα της καμπύλης. Δυο τα σημαντικά προτερήματα αυτού του είδους διαταραχής: (α) Προκαλεί παροδική αύξηση της ογκομετρικής παροχής στο σύστημα, και έτσι προσομοιάζει ακριβέστερα τον πλέον συνήθη τρόπο εισαγωγής διαταραχής σε φυσικό πείραμα. (β) Επιτρέπει ανεξάρτητη μεταβολή της συχνότητας και της αιχμηρότητας της διαταραχής.

Για οποιαδήποτε διαταραχή επιβάλλεται στην είσοδο είναι απαραίτητο να είναι γνωστά, εκτός από τη μορφή της διαταραχής $h(0,t)$, η κατανομή της x και y συνιστώσας της ταχύτητας, $u(0,y,t)$ και $v(0,y,t)$ αντίστοιχα. Η $u(0,y,t)$ υπολογίζεται με βάση την παραδοχή παραβολικής κατανομής, δηλαδή θεωρείται ότι ακολουθεί τη λύση Nusselt για το τοπικό πάχος υμένα. Έτσι ισχύει ότι:

$$u(0,y,t) = \frac{3q(0,t)}{h(0,t)} \left[\frac{y}{h(0,t)} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h^2(0,t)} \right] \quad (3.11)$$

Η μορφή της συνάρτησης $v(0,y,t)$ προσδιορίζεται ώστε να ικανοποιείται στην είσοδο η εξίσωση συνέχειας. Δηλαδή, αντικαθίσταται στο διαφορικό ισοζύγιο μάζας η ταχύτητα $u(0,y,t)$ από την (3.11), και η εξίσωση που προκύπτει ολοκληρώνεται από $y = 0$ έως μια τυχαία θέση y . Η έκφραση που προκύπτει είναι:

$$v(0,y,t) = \left[\frac{\partial q(0,t)}{\partial x} \frac{1}{2h^3(0,t)} - 3 \frac{\partial h(0,t)}{\partial x} \frac{q(0,t)}{2h^4(0,t)} \right] y^3 - \left[3 \frac{\partial q(0,t)}{\partial x} \frac{1}{2h^2(0,t)} - 3 \frac{\partial h(0,t)}{\partial x} \frac{q(0,t)}{2h^3(0,t)} \right] y^2 \quad 0 \leq y \leq h \quad (3.12)$$

Από τις εξισώσεις (3.11) και (3.12) είναι εμφανές ότι πρέπει να είναι γνωστές οι συναρτήσεις $q(0,t)$ και $h(0,t)$ και οι χωρικές τους παράγωγοι στη θέση $x = 0$. Οι άγνωστες συναρτήσεις υπολογίζονται με βάση τις εξής παραδοχές:

(α) Οι διαταραχές στην είσοδο ταξιδεύουν με τη φασική ταχύτητα μικρών διαταραχών, δηλαδή με αδιάστατη ταχύτητα $c = 3$.

(β) Η ανάπτυξη της διαταραχής είναι αργή σε σχέση με την κίνησή της, έτσι ώστε τα χαρακτηριστικά της διαταραχής να παραμένουν σταθερά στην είσοδο για έναν παρατηρητή που κινείται στη διεύθυνση x με ταχύτητα $c = 3$.

Οι παραπάνω παραδοχές δίνουν για την εξέλιξη του πάχους του υμένα τη σχέση: $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{\text{ακολουθώντας το κύμα}} = 0$ ή αν λάβουμε υπόψη τον ορισμό της χρονικής παραγώγου

για ένα έναν κινούμενο παρατηρητή:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

Συνεπώς, η χωρική παράγωγος του πάχους υμένα στην είσοδο υπολογίζεται άμεσα από την (3.13) όταν προδιαγραφεί η χρονική εξέλιξη του πάχους στην είσοδο.

Αντίστοιχη σχέση ισχύει για την ογκομετρική παροχή. Δηλαδή,

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{\text{ακολουθώντας το κύμα}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

Η χωρική παράγωγος της ογκομετρικής παροχής στην είσοδο υπολογίζεται ανεξάρτητα, από τη σχέση,

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = - \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (3.15)$$

και συνεπώς, με τον ορισμό της διαταραχής στην είσοδο, $h(0,t)$, υπολογίζονται όλες οι υπόλοιπες συναρτήσεις για τον πλήρη προσδιορισμό των συνοριακών συνθηκών στην είσοδο.

Η εξίσωση (3.15) είναι η ολοκληρωμένη μορφή του ισοζυγίου μάζας. Συγκεκριμένα, ολοκληρώνοντας την εξίσωση διατήρησης κατά y από $y=0$ έως την ελεύθερη επιφάνεια, $y=h(0,t)$ προκύπτει:

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dy = - \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial v(x,t)}{\partial y} dy$$

Από τον πρώτο όρο, εφαρμόζοντας το θεώρημα Leibnitz και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ογκομετρικής παροχής, προκύπτει ότι

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} u(x,y) dy - u(h(x,t)) \frac{dh(x,t)}{dx} = \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} - u(h(x,t)) \frac{dh(x,t)}{dx}$$

Αντίστοιχα, ο δεύτερος όρος της εξίσωσης γίνεται

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial v(x,t)}{\partial y} dy = \frac{d}{dy} \int_0^{h(x,t)} v(x,y) dy = v(h(x,t)) - v(0)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα λαμβάνουμε:

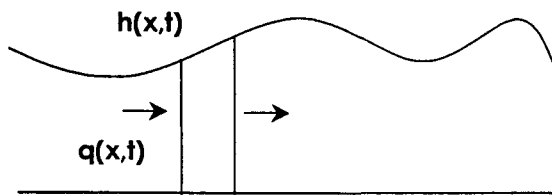
$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} - u(h(x,t)) \frac{dh(x,t)}{dx} = -v(h(x,t)) \Rightarrow \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = u(h(x,t)) \frac{dh(x,t)}{dx} - v(h(x,t)).$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με την κινηματική συνοριακή συνθήκη στο $y=h(x,t)$:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + u(x,y) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = v(x,y) \text{ οδηγούμαστε στο τελικό αποτέλεσμα:}$$

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = - \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} \quad (3.16)$$

Το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.16) είναι μια ολοκληρωτική έκφραση διατήρησης της μάζας. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί επίσης να εξαχθεί απευθείας από ισοζύγιο μάζας σε διαφορικό τμήμα του υμένα, σύμφωνα με το **Σχήμα 4.2**.



Σχήμα 3.2: Σχηματική αναπαράσταση της εξάρτησης της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας από το ρυθμό ροής.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε τον όγκο ελέγχου του σχήματος και διαπιστώνουμε ότι η καθαρή εισροή μάζας (δηλαδή η συσσώρευση) εκφράζεται από την τοπική αύξηση της στάθμης του υγρού. Με μαθηματικούς όρους, ο συλλογισμός αυτός γίνεται:

$$[q(x,t) - q(x+dx,t)]dt = [h(x,t+dt) - h(x,t)]dx \Rightarrow \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$$

3.1.2 Μόνιμη ροή σε περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα

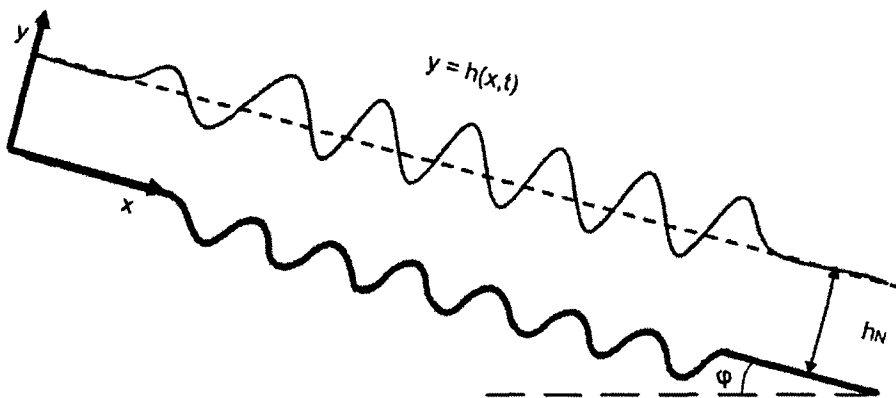
Στο περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα επιλύεται η μόνιμη εκδοχή των εξισώσεων ροής, δηλαδή απαλείφονται οι χρονικές παράγωγοι. Οι συνοριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια παραμένουν αμετάβλητες και οι συνοριακές συνθήκες μη-διδείσδυσης και μη-ολίσθησης στο τοίχωμα εφαρμόζονται σε συνάρτηση με τη γεωμετρία του τοιχώματος που επιλέγεται.

Μία ιδιαίτερη δυσκολία εμφανίζεται στην εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών εισόδου και εξόδου. Συγκεκριμένα, η επέκταση του διαμορφωμένου τοιχώματος ως τα άκρα του υπολογιστικού πεδίου εξασθενεί την εγκυρότητα της συνθήκης ροής Nusselt στην είσοδο και ενισχύει την ανάκλαση προς τα πίσω των διαταραχών που εξέρχονται από το υπολογιστικό πεδίο. Για τους λόγους αυτούς, επιλέχθηκε να περιλαμβάνονται στο τοίχωμα δύο επίπεδα τμήματα, ένα στην είσοδο και ένα στην έξοδο του πεδίου. Ειδικά, το επίπεδο τμήμα εισόδου είναι αρκετά επιμήκες ώστε η αδιατάραχη ροή Nusselt που εισέρχεται να παραμένει ως τέτοια για μία μικρή κατάντη απόσταση. Το πλήρες υπολογιστικό πεδίο παρουσιάζεται στο **Σχήμα 3.3**.

Η συγκεκριμένη γεωμετρία τοιχώματος για την οποία έγιναν οι προσομοιώσεις είναι ημιτονοειδής, της μορφής $y = a \cos k(x - x_0) - a$, και τα χαρακτηριστικά της εμφανίζονται στο **Σχήμα 3.4**. Ο κυματαριθμός του τοιχώματος αδιαστατοποιείται με το

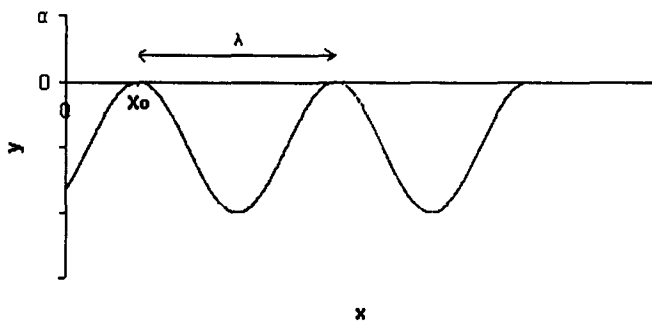
μέσο πάχος υμένα κατά Nusselt και ορίζεται ως $k = \frac{2\pi h_N}{\lambda}$, όπου λ το μήκος κύματος

της διαμόρφωσης. Με a συμβολίζεται το πλάτος της διαμόρφωσης, το οποίο επίσης αδιαστατοποιείται με το πάχος υμένα κατά Nusselt.



Σχήμα 3.3: Σχηματική διάταξη της ροής λεπτού υμένα σε περιοδικά διαμορφωμένο κεκλιμένο επίπεδο.

$$y = a \cos k(x - x_0) - a$$



Σχήμα 3.4: Ημιτονοειδές τοίχωμα

Παρατηρείται ότι η ανωτέρω διαμόρφωση εισάγει μόνον βυθίσεις στο τοίχωμα, ενώ οι κορυφές της αντιστοιχούν στο αρχικό επίπεδο. Η σύγκλιση του υπολογιστικού κώδικα δυσκολεύει με την αύξηση του πλάτους της διαμόρφωσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτείται βηματική διαδικασία (continuation), όπου η λύση για ένα ορισμένο πλάτος χρησιμοποιείται ως αρχική συνθήκη για το μεγαλύτερο πλάτος.

Ο αριθμός των περιόδων που σχηματίζουν το διαμορφωμένο τοίχωμα καθορίζεται από συμβιβασμό μεταξύ υπολογιστικών δυνατοτήτων και απαίτησης πλήρους ανάπτυξης της ροής. Έτσι, χρησιμοποιούνται συνήθως 6-8 επαναλήψεις και εξετάζονται τα χαρακτηριστικά των ενδιάμεσων κοιλοτήτων. Ένα κριτήριο προσέγγισης των αποτελεσμάτων σε πλήρη ανάπτυξη είναι η ομοιότητα της ροής σε διαδοχικές κοιλοότητες.

Η ανάγκη για την παράσταση της ροής σε όλο το πεδίο της οδήγησε στον υπολογισμό της ροϊκής της συνάρτησης. Η ροϊκή συνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

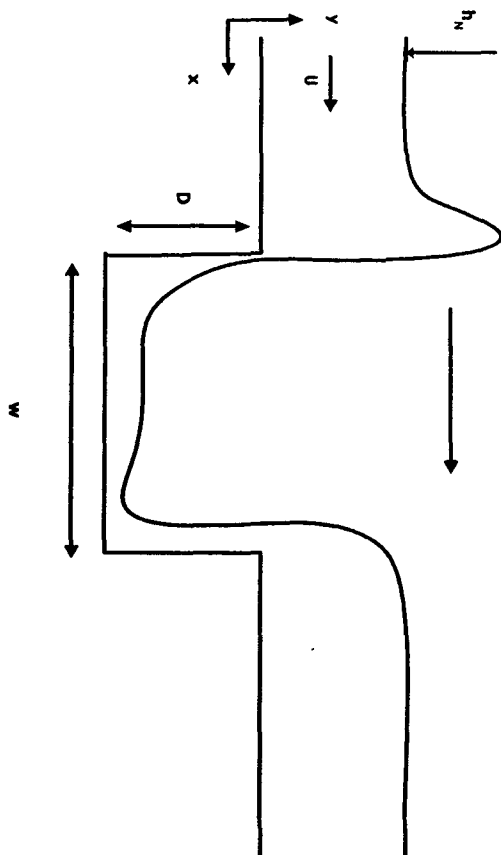
Η διαφορά των τιμών της ροϊκής συνάρτησης Ψ σε σημεία του χώρου y_0, y δίνει την ογκομετρική παροχή του ρευστού μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Συγκεκριμένα:

$$\Psi - \Psi_0 = \int_{y_0}^y u dy$$

Στον υπολογισμό της ροϊκής συνάρτησης χρησιμοποιείται αυτή η ιδιότητα και η λύση προκύπτει ως ένα άθροισμα γινομένων της u -ταχύτητας και της διαφορικής ποσότητας dy . Επιλέγεται δε να υπολογίζεται μόνο στους 4 από τους 9 κόμβους κάθε στοιχείου.

3.1.3 Μόνιμη ροή σε τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση

Στο τμήμα αυτό της μελέτης ενδιαφέρει η επίδραση στη ροή υμένα μίας διδιάστατης κοιλότητας (εγκοπής) η οποία υφίσταται σε ένα κατά τα άλλα επίπεδο τοίχωμα. Ένα ενδεικτικό πεδίο ροής, από αυτά που εξετάζονται λεπτομερώς στη συνέχεια της μελέτης, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 4.5**.



Σχήμα 3.5: Τοίχωμα μεμονωμένης διαμόρφωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

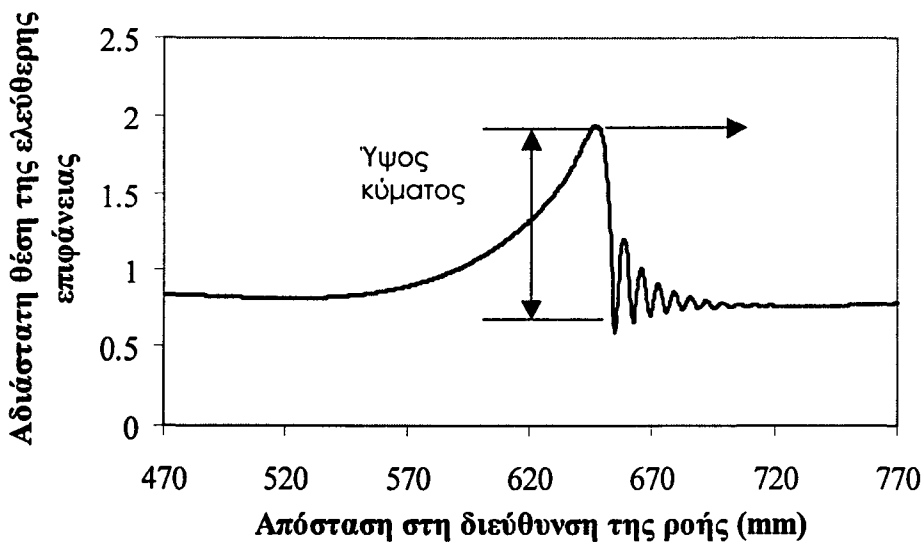
ΡΟΗ ΥΓΡΟΥ ΥΜΕΝΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ

Η ροή κεκλιμένου υγρού υμένα σε $Re \sim O(10^0-10^2)$ κυριαρχείται από τα μοναχικά κύματα. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η επίδραση της συχνότητας διαταραχής εισόδου στο μήκος και το ύψος των μοναχικών κυμάτων και καταγράφονται τα λεπτομερή χαρακτηριστικά των κυμάτων. Η διατμητική τάση στο τοίχωμα μεταβάλλεται έντονα με τη διέλευση μοναχικών κυμάτων και το συμπέρασμα αυτό παρατίθεται τεκμηριωμένο. Οι χαμηλές συχνότητες διαταραχής εισόδου και η επίδραση τους στη δυναμική του υγρού υμένα διερευνήθηκαν διεξοδικά και τα όποια συμπεράσματα ολοκληρώνουν το κεφάλαιο της μελέτης της ροής πάνω από επίπεδο τοίχωμα.

4.1 Χαρακτηριστικά μοναχικών κυμάτων

Οι σταθερής συχνότητας διαταραχές στην είσοδο του υπολογιστικού πεδίου οδηγούν σε μοναχικά κύματα [Alekseenko et al., 1985, Liu & Gollub, 1994] και αυτός είναι ένας μόνο τρόπος για να οδηγηθεί η ροή σε αυτά. Τα μοναχικά κύματα (solitary waves) εμφανίζονται επίσης στη ροή όταν

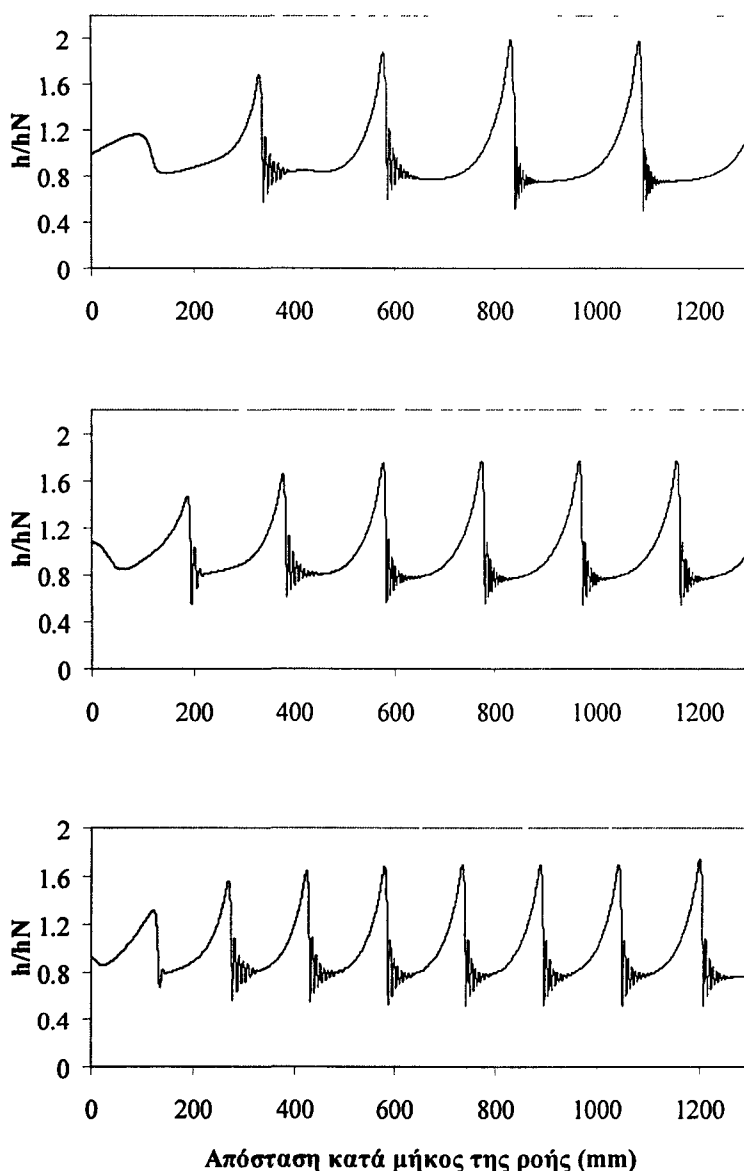
- (i) διαταραχές χαμηλής συχνότητας επιβάλλονται στην είσοδο του πεδίου (υπολογιστικού ή πειραματικού)



Σχήμα 4.1: Το μοναχικό κύμα

- (ii) όταν επιτραπεί σε υψηλής συχνότητας περιοδικά κύματα να αναπτυχθούν κατά μήκος της ροής και
- (iii) όταν τυχαίες διαταραχές, μη γραμμικές, που οφείλονται σε φυσικό θόρυβο αφεθεί να εξελιχθούν, και αυτή η τελευταία αναφορά είναι από πειράματα.

Το **Σχήμα 4.1** παριστάνει ένα πλήρως σχηματισμένο μοναχικό κύμα έτσι όπως προκύπτει από τις προσομοιώσεις για ορισμένες παραμέτρους. Αποτελεί τη λύση των πληρών εξισώσεων Navier- Stokes για τις συνθήκες που έχουν περιγραφεί στο τρίτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Το κύμα κινείται στη φορά του βέλους με τη φασική ταχύτητα.

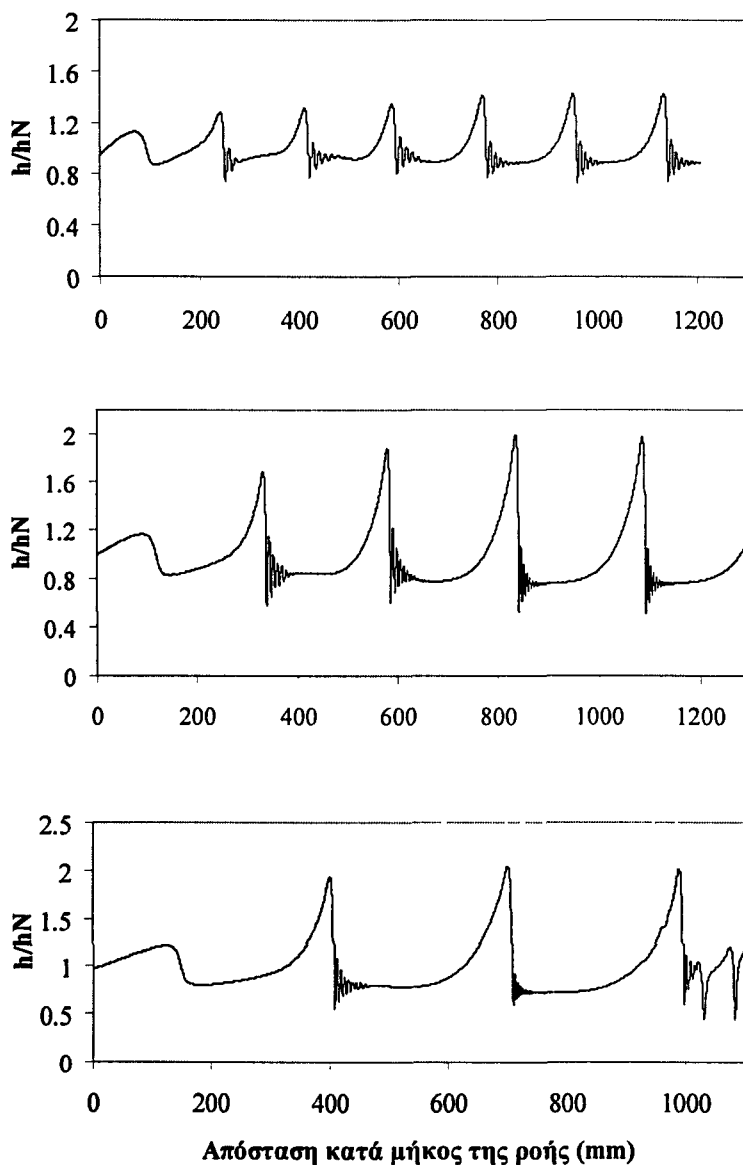


Σχήμα 4.2: Το ύψος των μοναχικών κυμάτων για $Re=35$ και $f=1,2, 1,5, 1,8$.

Προκειμένου να καταγράψουν έγκυρα τα χαρακτηριστικά των μοναχικών κυμάτων το πεδίο ροής πρέπει να είναι πλήρως ανεπτυγμένο. Το πλήρως ανεπτυγμένο πεδίο ροής ορίζεται από τα κύματα. Αυτό σημαίνει ότι έχουν φτάσει στη μόνιμη μορφή τους, όπως εικονίζεται στο **Σχήμα 4.1**, δεν αυξάνεται το ύψος τους και κινούνται στο πεδίο με σταθερή φασική ταχύτητα.

Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου αντιστοιχούν σε ένα εύρος αριθμών Re και χαρακτηριστικών διαταραχής εισόδου. Σε όλες τις περιπτώσεις των

παραγράφων 4.1 και 4.2, η γωνιά κλίσης που επιλέχτηκε είναι πέντε μοίρες (5°), τέτοια ώστε να επιτευχθεί σταδιακή μετάβαση της ροής στην πλήρως ανεπτυγμένη μορφή της.



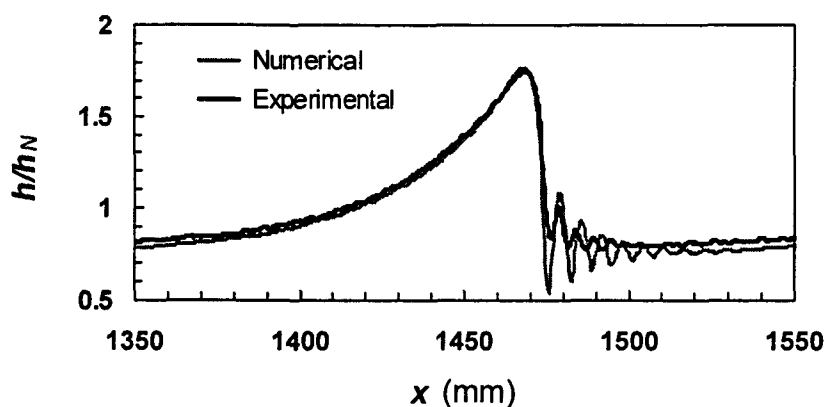
Σχήμα 4.3: Το ύψος των μοναχικών κυμάτων για $f=1,2$ και $Re=17, 35, 50$.

Τα **Σχήματα 4.2** και **4.3** εισάγουν στην εικόνα του πεδίου ροής όταν ο αριθμός Reynolds είναι σταθερός και μεταβάλλεται η αρχική συχνότητα διαταραχής (**Σχήμα 4.2**) και όταν η συχνότητα διαταραχής είναι σταθερή και μεταβάλλεται ο αριθμός Reynolds (**Σχήμα 4.3**). Τα σχήματα δίνουν την ευκαιρία για κάποια ουσιαστικά σχόλια.

Το ύψος των κορυφών των κυμάτων εξαρτάται από τη συχνότητα διαταραχής. Πιο ειδικά, αυξάνοντας τη συχνότητα διαταραχής ($f = 1,2, 1,5, 1,8$ Hz) το ύψος μικραίνει και την ίδια τάση ακολουθεί και η περίοδος των κυμάτων. Με άλλα λόγια, τα κύματα κονταίνουν και έρχονται πιο κοντά το ένα στο άλλο. Το εύρος των συχνοτήτων

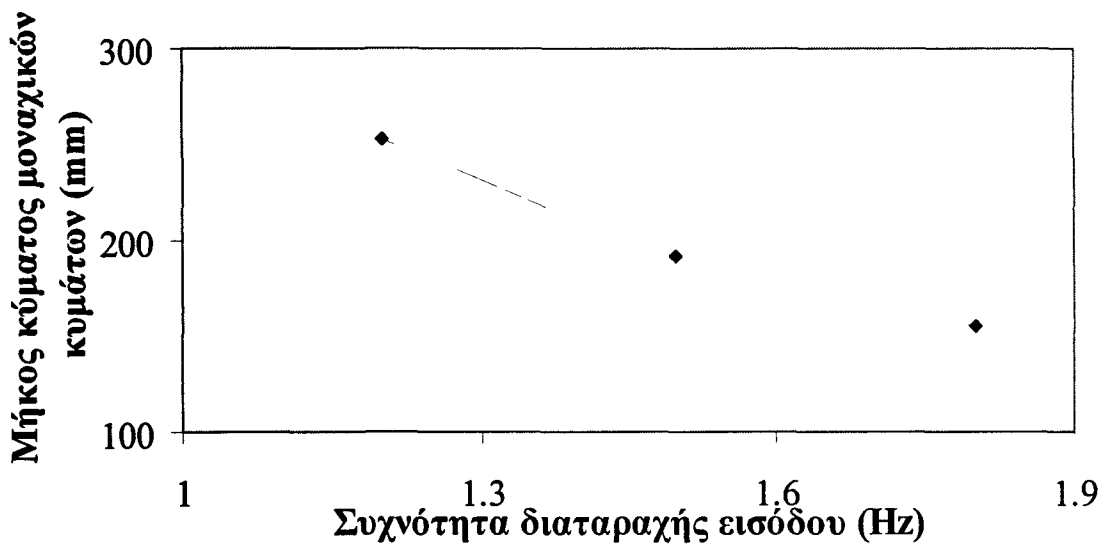
περιορίστηκε στην ενδιάμεση περιοχή, όπου τα κύματα που δημιουργούνται είναι εμφανώς μοναχικά. Αν για την ίδια συχνότητα διαταραχής αυξηθεί ήπια ο αριθμός Reynolds, τα κύματα μεγαλώνουν. Στο **Σχήμα 4.3** η συχνότητα διαταραχής είναι 1,2 Hz και ο αριθμός Reynolds κυμαίνεται από 17 έως 50.

Στο σημείο αυτό έχει ενδιαφέρον να διευκρινιστεί ότι η πλήρως ανεπτυγμένη μορφή των κυμάτων καθιστά δυνατή την παρουσίαση των αποτελεσμάτων είτε συναρτήσεως του χρόνου είτε συναρτήσεως της απόστασης. Οι δυο εκδοχές είναι σε αυτή την περίπτωση απολύτως ισοδύναμες μέσω του μετασχηματισμού $x \rightarrow -ct$. Η ανάγκη αυτή προέκυψε από τον παραλληλισμό των προσομοιώσεων με πειραματικές μετρήσεις, που ως γνωστό λαμβάνονται σε συγκεκριμένες θέσεις του καναλιού για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Πολύ συχνά στη διάρκεια αυτού του κεφαλαίου θα υπάρχουν αναφορές σε πρόσφατα πειράματα [Αργυριάδη, 2005].

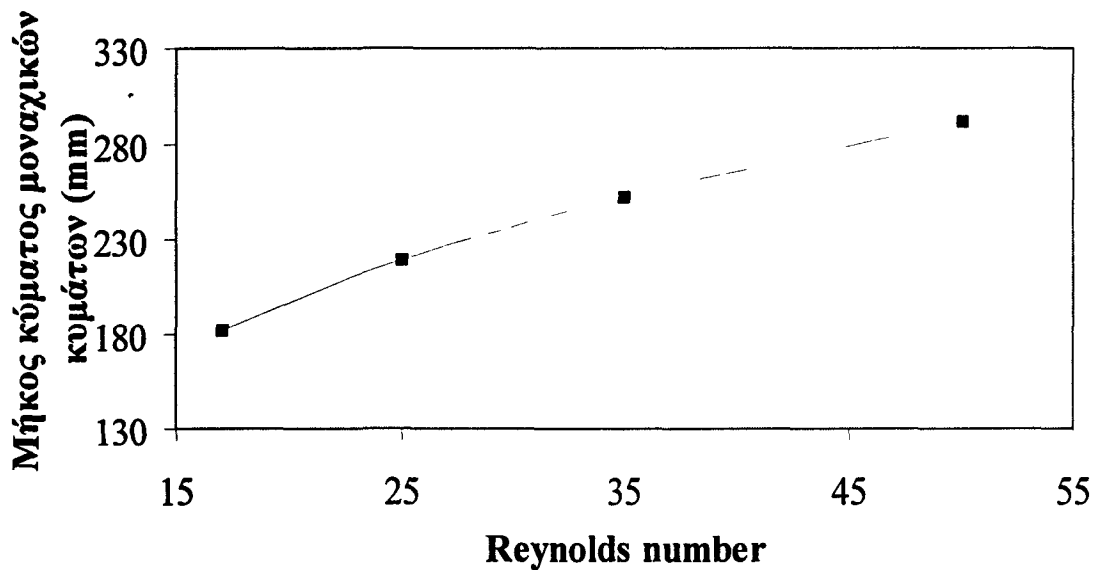


Σχήμα 4.4: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας από την προσομοίωση και το πείραμα για $Re=35$ και $f = 1,2$.

Το **Σχήμα 4.4** τεκμηριώνει την αλήθεια του παραπάνω ισχυρισμού καθώς παρουσιάζει υπολογιστικά αποτελέσματα (χωρική εικόνα της ροής) μαζί με μετρήσεις της χρονικής μεταβολής του τοπικού πάχους υμένα που έχουν ληφθεί με την μέθοδο της χωρητικότητας [Tihon et al., 2003]. Η συχνότητα διαταραχής είναι 1,2 Hz και ο αριθμός Reynolds 35. Το διάγραμμα δίνει την ευκαιρία εκτός των άλλων να διαπιστωθεί η ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ πειραμάτων και προσομοιώσεων για τις δεδομένες συνθήκες τόσο στο σχήμα όσο και στο ύψος του κύματος. Η διαφορά στο ύψος των τριχοειδών κυματισμών του κύματος είναι αποτέλεσμα αδυναμίας της πειραματικής μεθόδου να συλλάβει με ακρίβεια μεταβολές τόσο υψηλής συχνότητας [Tihon et al., 2003]. Τα προηγούμενα συμπεράσματα, που γίνονται εμφανή από την παρουσίαση της χωρικής δομής της ελεύθερης επιφάνειας, κωδικοποιούνται στα δύο διαγράμματα όπου παρουσιάζεται το μήκος κύματος των κυρίων κορυφών του μοναχικού κύματος αυξάνοντας τη συχνότητα για σταθερό Reynolds (**Σχήμα 4.5**) και αυξάνοντας τον Reynolds για σταθερή συχνότητα (**Σχήμα 4.6**).

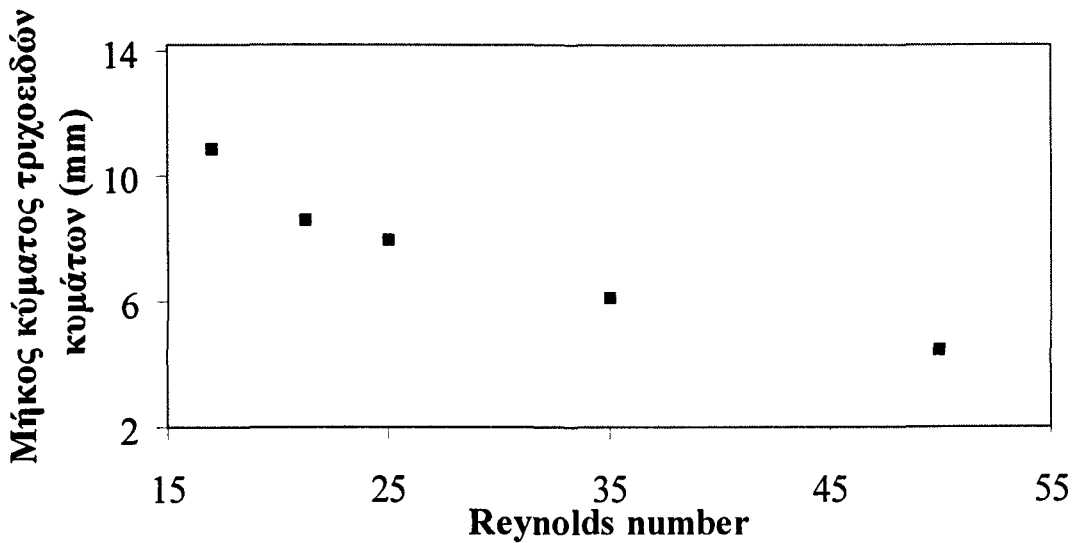


Σχήμα 4.5: Μήκος κύματος μοναχικών κυμάτων για $Re=35$.



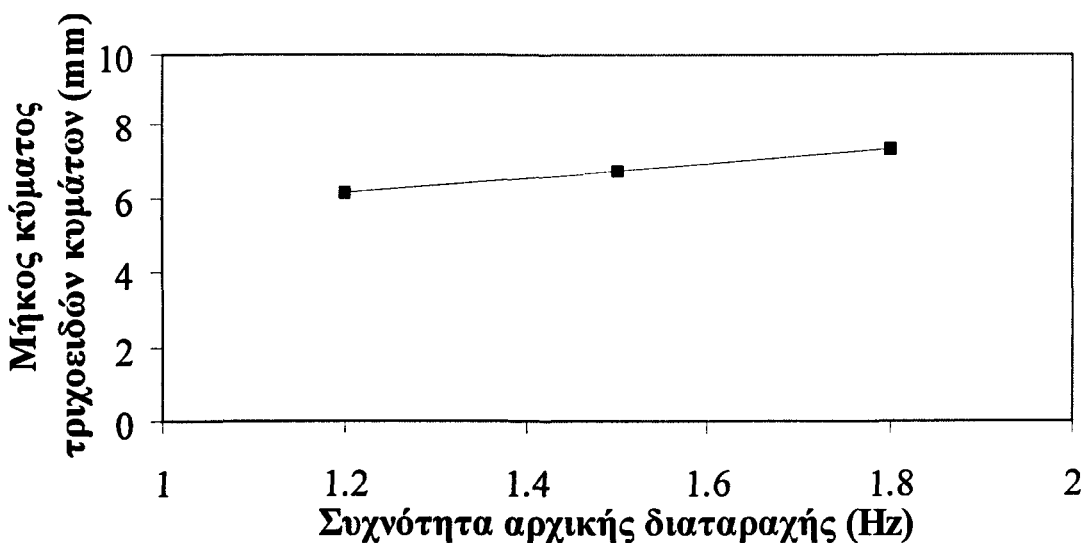
Σχήμα 4.6: Μήκος κύματος μοναχικών κυμάτων για $f = 1,2$.

Μία γενική παρατήρηση για όλες τις συνθήκες ύπαρξης μοναχικών κυμάτων είναι ότι των κύριων κορυφών προηγούνται πολλά τριχοειδή κύματα. Η συμπεριφορά των τριχοειδών κυμάτων (i) αυξάνοντας τη συχνότητα για τον ίδιο Reynolds και (ii) αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds για την ίδια συχνότητα δικαιολογεί αρμονικά την αντίστοιχη συμπεριφορά των κύριων κορυφών. Η πιο εμφανής τάση από τα δύο διαγράμματα είναι αυτή που τεκμηριώνεται στο **Σχήμα 4.7**. Με αύξηση του αριθμού Reynolds, τα τριχοειδή κύματα γίνονται μικρότερα και οξύτερα πλησιάζοντας το ένα το άλλο. Αυτή η συμπεριφορά δείχνει να είναι θεμελιώδης για τη διατήρηση της μορφής του μοναχικού κύματος σε υψηλούς Reynolds.



Σχήμα 4.7: Μήκος κύματος τριχοειδών κυμάτων για $f = 1,2$.

Ο μηχανισμός σταθεροποίησης της κύριας κορυφής μέσω των τριχοειδών κυμάτων είναι ο εξής: Καθώς τα τριχοειδή κύματα πλησιάζουν και οξύνονται στο σχήμα τους με αύξηση του Re , η καμπυλότητα τους αυξάνεται προοδευτικά και αποδεικνύεται ότι γίνεται μέγιστη ακριβώς στο απότομο βύθισμα της κύριας κορυφής. Αυτό έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση αρνητικής τριχοειδούς πίεσης που οδηγεί σε ένα μηχανισμό άντλησης υγρού από την αναπτυσσόμενη κύρια κορυφή, γεγονός που οδηγεί σε ισορροπία.

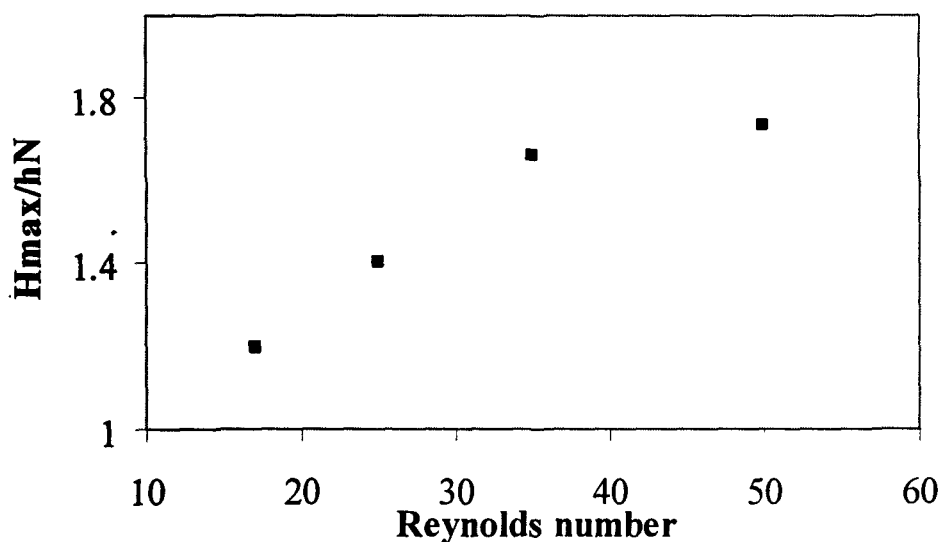


Σχήμα 4.8: Μήκος κύματος τριχοειδών κυμάτων για $Re=35$

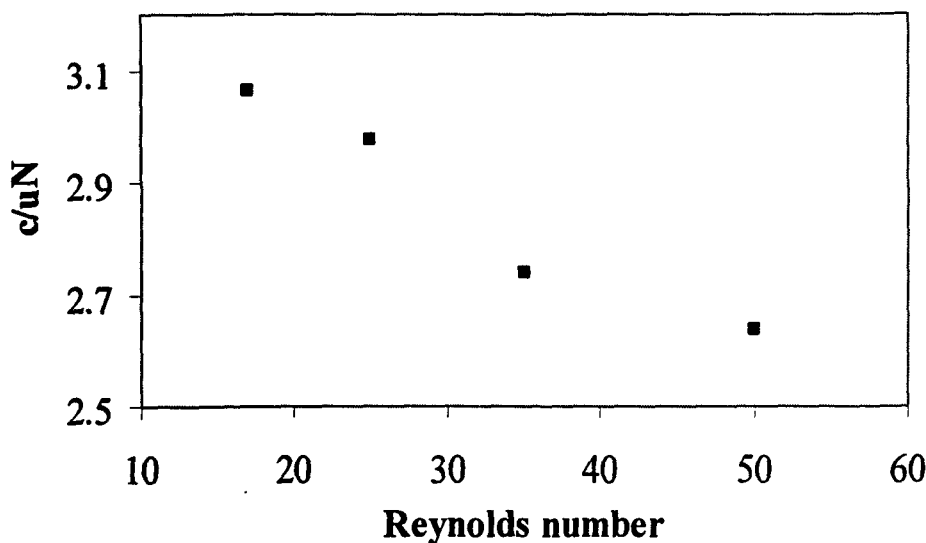
Από το διάγραμμα της αύξησης της συχνότητας για σταθερό αριθμό Reynolds (Σχήμα 4.8), διαγράφεται μία ασθενής αυξητική τάση του μήκους των τριχοειδών κυμάτων. Λεπτομερής μελέτη της επίδρασης της συχνότητας της αρχικής διαταραχής στη ροή θα παρουσιαστεί σε επόμενο υποκεφάλαιο.

Συμπερασματικά από το σύνολο των διαγραμμάτων που έχουν παρουσιαστεί έως τώρα (i) επιβεβαιώνεται το αλληλένδετο της ύπαρξης της κύριας κορυφής με τους τριχοειδείς κυματισμούς (ii) επιβεβαιώνεται ότι η ύπαρξη των τριχοειδών κυματισμών παράγει έναν μηχανισμό σταθεροποίησης των κυρίων κορυφών.

Ένα εξαιρετικά σημαντικό χαρακτηριστικό των μοναχικών κυμάτων είναι η εξάρτηση της φασικής τους ταχύτητας από το ύψος τους. Είναι γενικά γνωστό ότι μεγαλύτερα μοναχικά κύματα κινούνται ταχύτερα, και η συμπεριφορά αυτή οδηγεί σε αλληλεπίδραση μεταξύ τους.



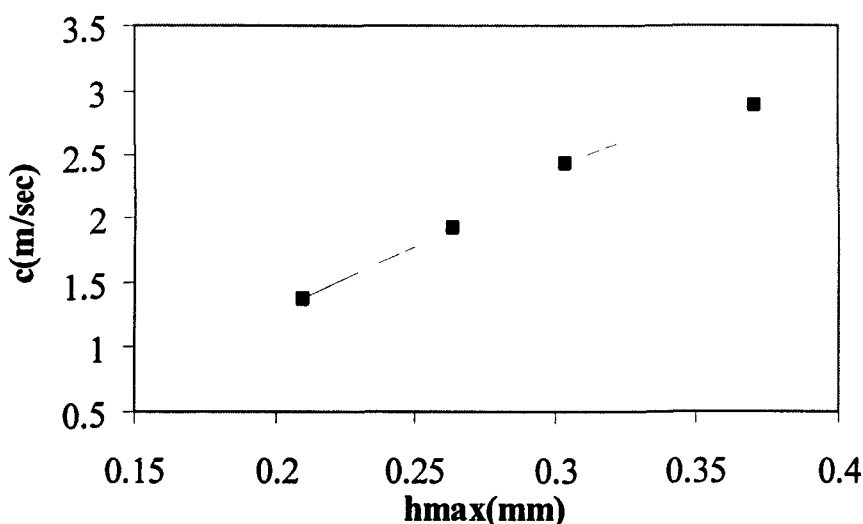
Σχήμα 4.9: Αδιάστατο πάχος υμένα για $f = 1,2$ Hz.



Σχήμα 4.10: Αδιάστατη φασική ταχύτητα για $f = 1,2$ Hz.

Η παρούσα υπολογιστική μελέτη προβλέπει ότι τόσο η ταχύτητα όσο και το ύψος επηρεάζονται έντονα από τον αριθμό Reynolds, αλλά με διαφορετικό τρόπο. Το μέγεθος του μοναχικού κύματος (όπως εκφράζεται από το μέγιστο του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού υμένα (**Σχήμα 4.9**)) ακολουθεί ασυμπτωτική συμπεριφορά. Για μικρούς αριθμούς Reynolds, το διάγραμμα δείχνει το μέγιστο ύψος να μεγαλώνει έντονα και ταχύτερα από το μέσο πάχος, αλλά προοδευτικά για μεγαλύτερους Reynolds η τιμή h/h_w προσεγγίζει ένα σταθερό όριο. Αντίστοιχα, η φασική ταχύτητα αυξάνεται με τον αριθμό Reynolds, αλλά όχι τόσο έντονα όσο η μέση ταχύτητα του υμένα. Ως αποτέλεσμα, η αδιάστατη φασική ταχύτητα μειώνεται ασθενικά (**Σχήμα 4.10**).

Η έντονη σχέση και αλληλεξάρτηση των δύο παραμέτρων σε όλο το εύρος των συνθηκών που έχουν μελετηθεί γίνεται εμφανής στο επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.11**). Για σταθερή γωνία κλίσης, το πάχος του υποστρώματος κάτω από τα μοναχικά κύματα είναι πρακτικά σταθερό (βλέπε **Σχήμα 4.2**, **Σχήμα 4.3**), όποτε μπορεί να ειπωθεί χωρίς μεγάλο σφάλμα ότι: $\sigma = h_{max} - h_{min} \approx h_{max} - h_{sub}$, δηλαδή το ύψος των κυμάτων αντιστοιχίζεται με το μέγιστο ύψος του υμένα. Η ισχυρή και πρακτικά γραμμική εξάρτηση μεταξύ φασικής ταχύτητας και ύψους για κάθετο τοίχωμα έχει αποδειχτεί πειραματικά [Aleksenko et al., 1994]. Στην παρούσα μελέτη διαπιστώνεται ότι ισχύει και για τα μοναχικά κύματα σε κεκλιμένο επίπεδο. Παρατηρείται ότι η εξάρτηση του **Σχήματος 4.11** εκφράζεται σε διαστατικά μεγέθη.



Σχήμα 4.11: Η συσχέτιση μεταξύ του μέγιστου ύψους και της φασικής ταχύτητας των μοναχικών κυμάτων

Είναι ενδιαφέρον ότι η συσχέτιση δεν είναι τόσο επιτυχής όταν χρησιμοποιηθούν τα αντίστοιχα αδιάστατα μεγέθη με βάση το μέσο πάχος και τη μέση ταχύτητα κατά Nusselt. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η επιλογή χαρακτηριστικού μήκους και χαρακτηριστικής ταχύτητας δεν είναι προφανής, και πιθανότατα σχετίζεται με ιδιότητες του υποστρώματος πάνω στο οποίο κινούνται τα μοναχικά κύματα παρά με μέσες ιδιότητες της ροής.

4.2 Η διατμητική τάση στο τοίχωμα λόγω διέλευσης μοναχικού κύματος.

Η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στο τοίχωμα υπολογίζεται από το πεδίο ταχύτητας της προσομοίωσης σύμφωνα με τη σχέση

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

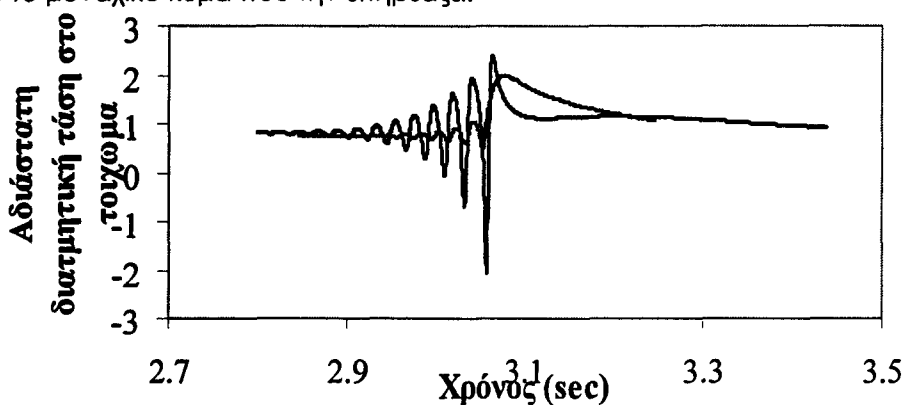
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή τάσης και το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο τοίχωμα, αποδεικνύεται εύκολα ότι η κάθετη προς το τοίχωμα συνιστώσα της δύναμης ταυτίζεται με την πίεση, ενώ η παράλληλη δίνεται από τη σχέση:

$$T_x = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Η παράλληλη αυτή συνιστώσα ονομάζεται διατμητική τάση, και αδιαστατοποιείται με την αντίστοιχη τιμή της ροής Nusselt, $\tau_{x,Nusselt} = \rho g \sin \phi h_N$.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται υπολογιστικά αποτελέσματα για ένα εύρος τιμών Re. Η εξάρτηση από τη συχνότητα διαταραχής δεν δίνει αξιόλογες ποιοτικές διαφοροποιήσεις, και για τον λόγο αυτό παρουσιάζονται αποτελέσματα μόνον για τη συχνότητα $f = 1,2$ Hz, που οδηγεί σε καλά διαμορφωμένα μοναχικά κύματα.

Το πρώτο βασικό συμπέρασμα από τις προσομοιώσεις είναι ότι η διατμητική τάση στο τοίχωμα επηρεάζεται έντονα από το πέρασμα ενός μοναχικού κύματος. Στο επόμενο διάγραμμα (Σχήμα 4.12) παρουσιάζεται μία αντιπροσωπευτική περίπτωση, όπου με μαύρο χρώμα παριστάνεται η χωρική κατανομή της διατμητικής τάσης και με κόκκινο το μοναχικό κύμα που την επηρεάζει.



Σχήμα 4.12: Η διατμητική τάση στο τοίχωμα κατά το πέρασμα ενός μοναχικού κύματος,

$$Re=35, f = 1,2$$

Το διάγραμμα έχει πολλές ενδιαφέρουσες πληροφορίες:

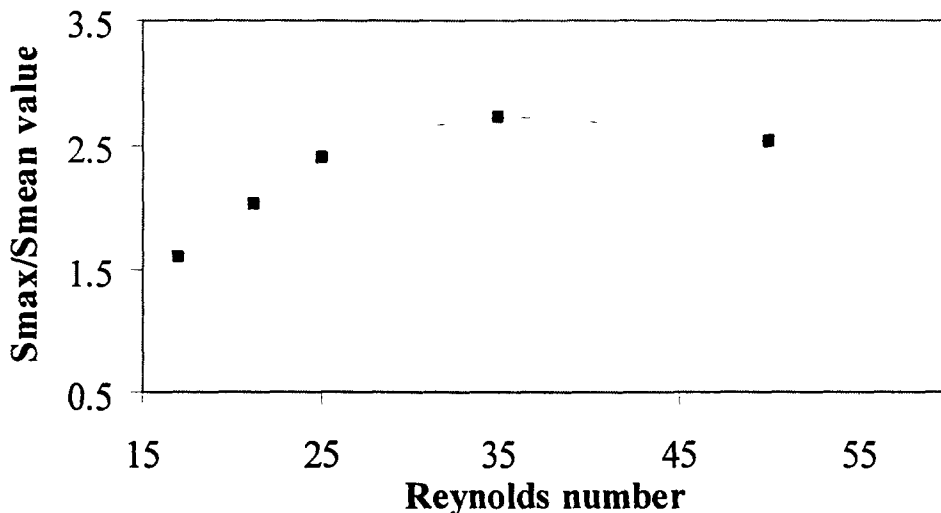
(i) Το απότομο μέγιστο της διατμητικής τάσης δεν ταυτίζεται με την κύρια κορυφή του κύματος αλλά προηγείται ελαφρά.

(ii) Η διατμητική τάση αλλάζει πρόσημο σε μια στενή περιοχή κοντά στην κύρια κορυφή. Η αλλαγή στο πρόσημο αποτελεί ένδειξη τοπικής αναστροφής της ροής.

(iii) Η έντονη διακύμανση στη διατμητική τάση συνεχίζεται και κατά το πέρασμα των τριχοειδών κυματισμών. Το πρώτο δε μέγιστο που οφείλεται στα τριχοειδή κύματα είναι σχεδόν της ίδιας τάξης μεγέθους με το μέγιστο που προκαλεί η κύρια κορυφή του μοναχικού κύματος.

(iv) Είναι χαρακτηριστική η απότομη πτώση που συμβαίνει πίσω από το απόλυτο μέγιστο και η διατήρηση μετά από αυτό μιας ομοιόμορφης τιμής, αποτέλεσμα της δράσης της «ουράς» του μοναχικού κύματος.

Από το διάγραμμα μεταβολής της διατμητικής τάσης κατά μήκος του μοναχικού κύματος, διακρίνουμε δύο χαρακτηριστικές τιμές: την μέγιστη τάση, S_{max} , που παρατηρείται λίγο πριν την διέλευση της κύριας κορυφής και την ελάχιστη τάση, S_{min} , που αντιστοιχεί στο πρώτο βύθισμα των τριχοειδών κυματισμών. Η εξάρτηση των δύο παραπάνω οριακών τιμών από τον αριθμό Reynolds παριστάνεται στα επόμενα διαγράμματα (**Σχήμα 4.13** και **Σχήμα 4.14** αντίστοιχα).



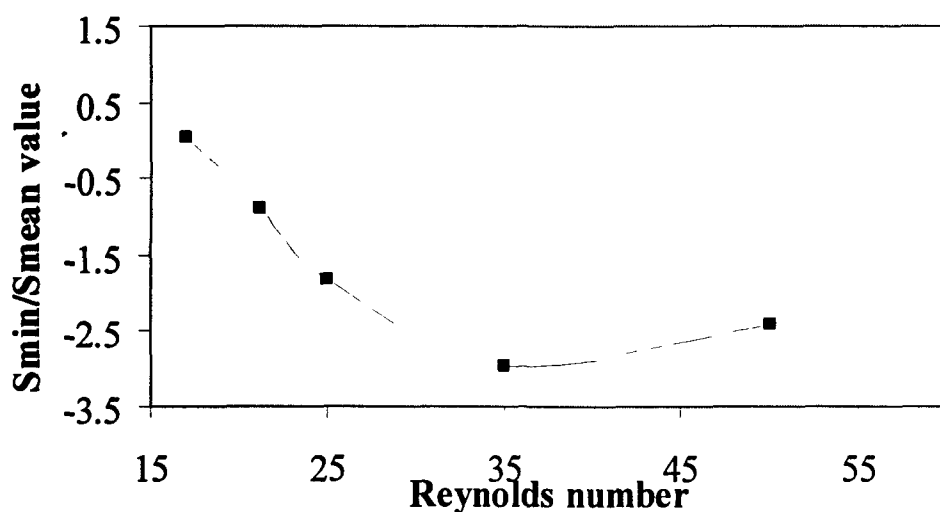
Σχήμα 4.13: Το μέγιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα

Από το **Σχήμα 4.13**, παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή της αδιάστατης διατμητικής τάσης αρχικά αυξάνει ενώ στη συνέχεια παρουσιάζει ένα ευρύ μέγιστο και αρχίζει να μειώνεται. Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται από την παρατήρηση ότι η μέγιστη διατμητική τάση εξαρτάται από το ύψος του κύματος ενώ η μέση τάση από το μέσο πάχος του υμένα, σε συνδυασμό με τις πληροφορίες του **Σχήματος 4.9** που παριστάνει την εξάρτηση του ύψους των μοναχικών κυμάτων από τον αριθμό Reynolds. Έτσι, σε χαμηλούς Re αύξηση της παροχής οδηγεί σε έντονη αύξηση του ύψους των κυμάτων

που υπερεισχύει της μικρής σχετικά αύξησης του μέσου πάχους υμένα. Ως αποτέλεσμα, η αδιάστατη διατμητική τάση αυξάνεται. Αντίθετα, σε υψηλότερους Re τα κύματα αποκτούν ένα ασυμπτωτικά σταθερό ύψος ενώ το μέσο πάχος υμένα συνεχίζει να αυξάνει.

Εντελώς παρόμοια είναι και η συμπεριφορά για το ελάχιστο της τιμής της διατμητικής τάσης, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 4.14**. Παρατηρείται δηλαδή και πάλι ένα ακρότατο στην επίδραση των μοναχικών κυμάτων στην περιοχή $Re=30-40$, που αντιστοιχεί σε μέγιστο ύψος των κυμάτων σε σχέση με το μέσο πάχος υμένα. Υπενθυμίζεται ότι το ελάχιστο της διατμητικής τάσης αντιστοιχεί σε τοπική αντιστροφή της ροής και έχει δειχθεί ότι επηρεάζει φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας μεταξύ υμένα και τοιχώματος [Serifi et al., 2004].

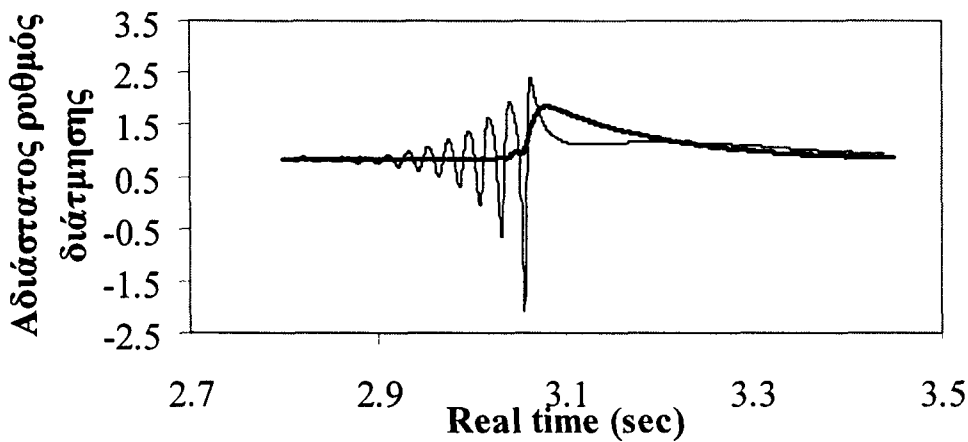
Μία γενική παρατήρηση είναι ότι σε υψηλούς Re το σχετικά μεγάλο μέσο πάχος υμένα απομακρύνει τα οδεύοντα μοναχικά κύματα από την άμεση γειτονία του τοιχώματος και έτσι περιορίζει σταδιακά την επίδρασή τους.



Σχήμα 4.14: Το ελάχιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα

Η ισχυρότερη επίδραση για τις παραπάνω συνθήκες αντιστοιχούν σε ίδια τάξη μεγέθους για το μέγιστο και το ελάχιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα, δηλαδή $T_{w,max} / \bar{T}_w \sim |T_{w,min} / \bar{T}_w| \approx 2.5 - 3$.

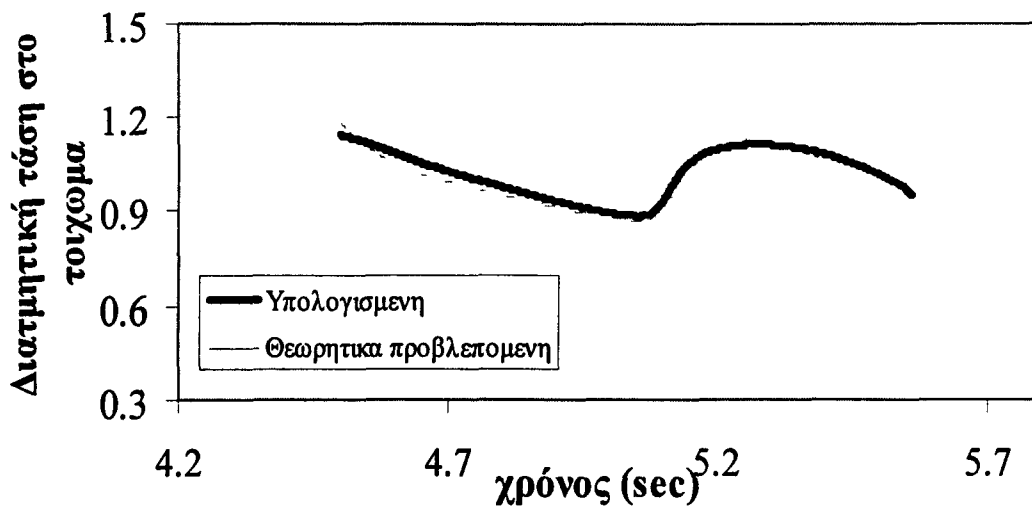
Ένα σημαντικό εργαλείο για τη θεωρητική και υπολογιστική μελέτη των μοναχικών κυμάτων στις ενδιάμεσες περιοχές του αριθμού Reynolds, δηλαδή για $Re = O(10^1 - 10^2)$ είναι η υπόθεση της παραβολικής κατανομής της ταχύτητας. Σύμφωνα με την παραδοχή, η κατανομή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας κάτω από το μοναχικό κύμα ταυτίζεται με την κατανομή Nusselt για το τοπικό πάχος υμένα.



Σχήμα 4.15: Το ελάχιστο της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα

Έτσι, εξαφανίζεται ο βαθμός ελευθερίας του πεδίου ταχύτητας και παραμένει ως κύρια μεταβλητή η διακύμανση του πάχους υμένα. Το πιθανό σφάλμα αυτής της υπόθεσης είναι υπό έρευνα.

Ένας αυστηρός έλεγχος της υπόθεσης παραβολικής κατανομής επιτυγχάνεται μέσω της πρόβλεψης της διατμητικής τάσης στο τοίχωμα. Στο διάγραμμα (**Σχήμα 4.15**) παριστάνεται η διατμητική τάση όπως προκύπτει από την προσομοίωση με τη διατμητική τάση που υπολογίζεται από την υπόθεση παραβολικής κατανομής αν χρησιμοποιηθεί το πάχος υμένα που έχει παρθεί από μετρήσεις [Tihon et al., 2006]. Ο αριθμός Reynolds είναι 35 και η συχνότητα διαταραχής 1,5 Hz. Η ασυμφωνία είναι εντυπωσιακή όταν το κύμα είναι πλήρως ανεπτυγμένο, όχι μόνο στο απότομο βύθισμα της κύριας κορυφής (όπου η διατμητική τάση είναι αρνητική), αλλά σχεδόν οπουδήποτε στο μήκος του κύματος.



Σχήμα 4.16: Θεωρητικά προβλεπόμενη διατμητική τάση και υπολογισμένη για $Re=17$ και $f = 1,2$.

Παρόλαυτα η υπόθεση της παραβολικής κατανομής ισχύει πολύ καλά όταν τα κύματα είναι στα αρχικά στάδια της ανάπτυξής τους. Αυτό επιβεβαιώνεται από το **Σχήμα 4.16**, όπου για $Re = 35$ και συχνότητα διαταραχής $1,2 \text{ Hz}$ η διατμητική τάση στο τοίχωμα συμπίπτει πολύ καλά με τη θεωρητικά προβλεπόμενη.

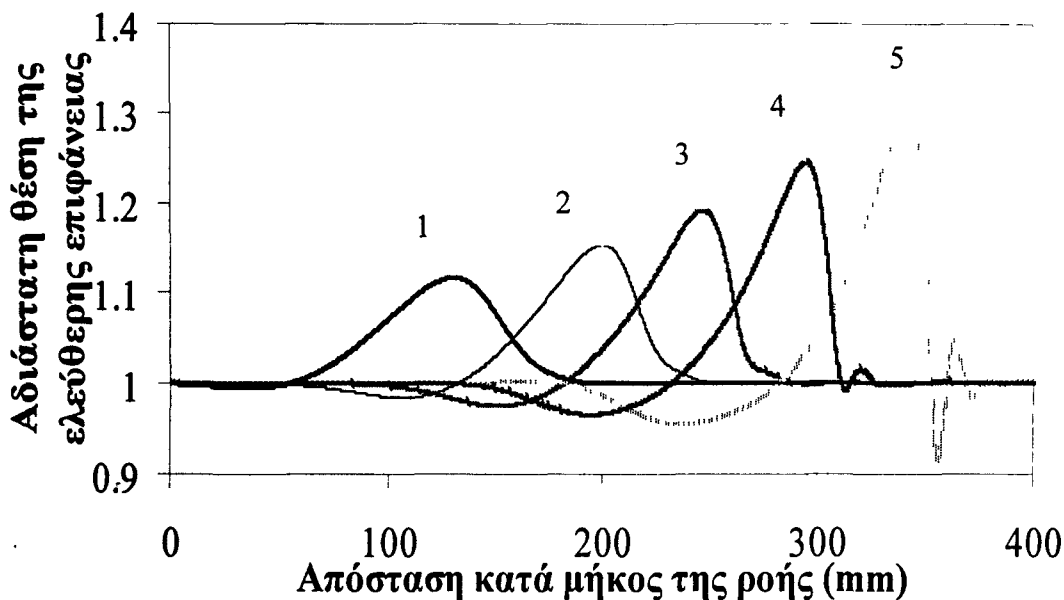
4.3 Μη γραμμική εξέλιξη της ροής : η επίδραση της μορφής της διαταραχής

Από αρκετές, τόσο πειραματικές όσο και θεωρητικές/υπολογιστικές μελέτες έχει αποδειχτεί ότι σε μικρούς και ενδιάμεσους αριθμούς Reynolds η ροή λεπτού υμένα κυριαρχείται από τα μοναχικά κύματα. Η συστηματική μελέτη της δυναμικής των κυμάτων διευκολύνεται από την εισαγωγή στην είσοδο διαταραχών καθορισμένης συχνότητας, καθώς με τον τρόπο αυτό παράγεται μία κανονική κυματοσειρά που είναι ευκολότερο να χαρακτηριστεί (Alekseenko et al. 1985). Τα πειράματα των Liu & Gollub (1993) και η έρευνα που διεξήγαγαν για την επίδραση της συχνότητας διαταραχής στη μορφή της κυματοσειράς (**Σχήμα 2.4**) στάθηκαν κίνητρο στην παρούσα εργασία για σειρά προσομοιώσεων σε ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων.

Ένα γενικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι ότι η συχνότητα της παραγόμενης από κανονική διαταραχή κυματοσειράς ταυτίζεται με τη συχνότητα εισόδου. Το συμπέρασμα αυτό φαίνεται να αμφισβητείται από σποραδικές παρατηρήσεις σε πολύ χαμηλές συχνότητες [Alekseenko et al., 1985, Liu et al., 1993, Yosimura et al., 1996], όπου όμως δεν υπάρχουν συστηματικές μελέτες. Έτσι, αναλήφθηκε μία συστηματική υπολογιστική αλλά και πειραματική [Αργυριάδη, 2005] δραστηριότητα για τη διερεύνηση του φαινομένου. Τα πρώτα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης εστιάστηκαν στην επίδραση του σχήματος της αρχικής διαταραχής και στην εύρεση εκείνου που τελικά θα απέδιδε υπολογιστικά καλύτερα τα πειράματα που διεξάγονταν παράλληλα.

Το πρώτο διάγραμμα της ενότητας αυτής (**Σχήμα 4.17**) παριστάνει τη χωροχρονική εξέλιξη μια διαταραχής όταν το αρχικό της σχήμα είναι απλή κατανομή Gauss. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματική μορφή της κατανομής αντιστοιχεί στη χρονική μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο σημείο εισόδου και η αρχική φασική ταχύτητα είναι η ταχύτητα μικρών διαταραχών $c/U = 3$. Λεπτομερείς πληροφορίες για το μαθηματικό χειρισμό της διαταραχής εισόδου έχουν ήδη δοθεί στην παράγραφο 3.1.1. Όσον αφορά στη φυσική της σημασία, παρατηρείται ότι η διαταραχή αντιστοιχεί σε παροδική εισαγωγή επιπλέον μάζας στη ροή. Οι αριθμημένες θέσεις πάνω από τα κύματα του **Σχήματος 4.17** δηλώνουν τη χρονική διαδοχή και η μια κορυφή από την άλλη απέχει είκοσι αδιάστατες χρονικές μονάδες. Επιλέχθηκε να απεικονιστούν μόνο τα αρχικά στάδια της ανάπτυξης της διαταραχής έτσι ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο αυτή μεγαλώνει. Η πρώτη καμπύλη ανταποκρίνεται προσεγγιστικά στο σχήμα της απλής κατανομής Gauss, δηλαδή η

εξέλιξη της διαταραχής κατά την είσοδο στο υπολογιστικό πεδίο είναι σχετικά αργή. Στη συνέχεια, η κορυφή αποκτά λοξότητα που προοιωνίζει το απότομο μπροστινό μέρος και την αργή απόληξη της ουράς του μοναχικού κύματος. Στις δύο τελευταίες χρονικές στιγμές, η μεγέθυνση και μετατόπιση της κορυφής προς τα επάνω και προς τα εμπρός αντίστοιχα, οδηγεί στην εμφάνιση των τριχοειδών κυματισμών. Έτσι, διαπιστώνεται ο ρόλος των τελευταίων στην εξισορρόπηση της κορυφής και τον τελικό σχηματισμό του πλήρως ανεπτυγμένου μοναχικού κύματος.

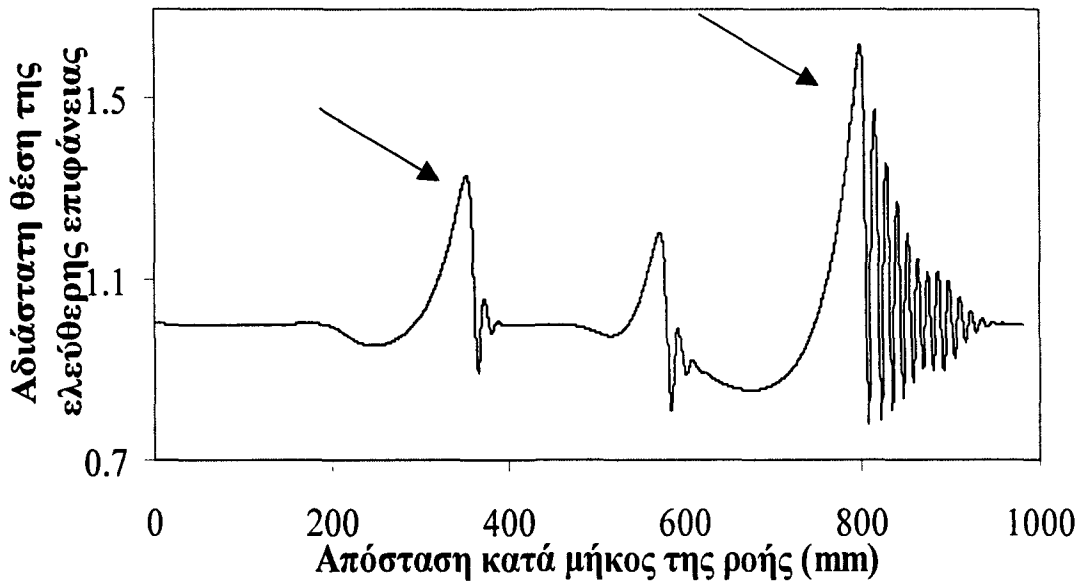


Σχήμα 4.17: Χωροχρονική εξέλιξη της διαταραχής με σχήμα κατανομής Gauss για συχνότητα 0,5 Hz και $Re=35$.

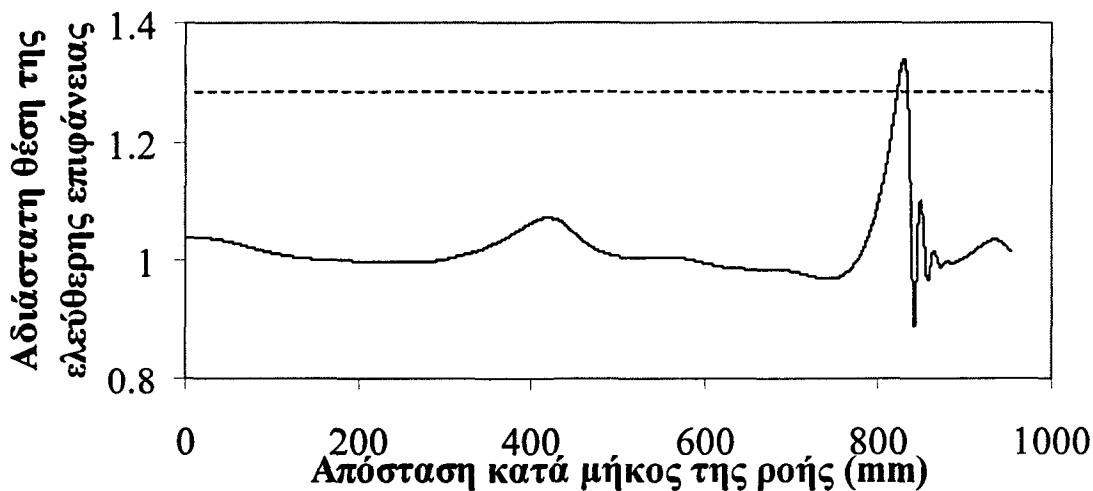
Το **Σχήμα 4.18** συμπληρώνει το προηγούμενο καθώς παριστάνει το πλήρες ανεπτυγμένο πεδίο ροής όταν η διαταραχή έχει σχήμα Gauss. Το εύρος της διαταραχής είναι 8% του πάχους κατά Nusselt. Αυτό που έχει ενδιαφέρον στο συγκεκριμένο διάγραμμα είναι ότι τα κύματα που οφείλονται στη αρχική διαταραχή είναι μόνο αυτά που συμβολίζονται με τα βέλη. Το ενδιάμεσο είναι αποτέλεσμα της δυναμικής της ροής, και ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει αποτελεί **κεντρικό αποτέλεσμα** του παρόντος κεφαλαίου και θα εξηγηθεί αναλυτικά στη συνέχεια. Το πρώτο κύμα από διαταραχή εξελίσσεται τελικά σε αυτό το μοναχικό με τα πολλά και πολύ έντονα τριχοειδή κύματα. Η συχνότητα της διαταραχής είναι πολύ μικρή και ο κάθε παλμός απέχει αρκετά (~ 50 cm) από τους άλλους και δεν αλληλεπιδρά με αυτούς.

την επόμενη προσομοίωση, ο μοναχικός παλμός αντικαθίσταται από μία σειρά κορυφών Gauss, έτσι ώστε να προστεθεί περιοδικότητα στη διαταραχή. Το αποτέλεσμα του εγχειρήματος παρουσιάζεται στο επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.19**). Ο αριθμός Reynolds είναι περίπου ίδιος, αλλά αυτό που εδώ είναι διαφορετικό είναι η οξυότητα των

«καμπανών» Gauss (μικρότερη διασπορά) καθώς και το εύρος της αρχικής διαταραχής, που είναι 4% του κατά Nusselt πάχους υμένα.



Σχήμα 4.18: Μια πλήρης ανεπτυγμένη κυματοσειρά για συχνότητα 0.5 Hz, σχήματος κατανομής Gauss και $Re=35$

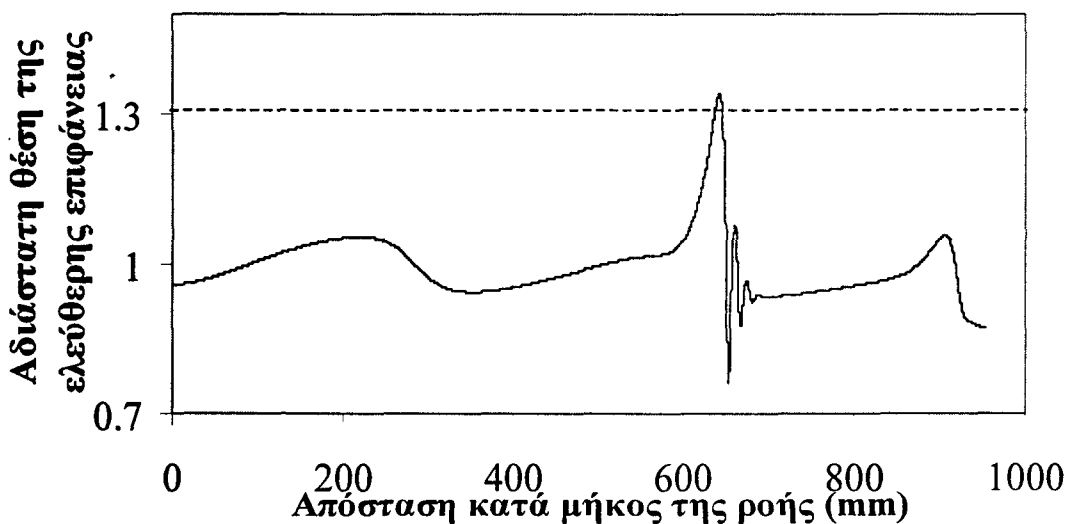


Σχήμα 4.19: Μια πλήρης ανεπτυγμένη κυματοσειρά για συχνότητα 0.5 Hz, σχήματος άθροισμα κατανομών Gauss και $Re=32$.

Το υπολογιστικό μήκος δεν αρκεί ώστε να εμφανιστούν μαζί περισσότεροι από τρεις παλμοί, καθώς ο ένας εξακολουθεί να απέχει από τον άλλον μισό περίπου μέτρο. Εκτός αυτού, αυτός ο τρόπος εισαγωγής περιορίζει το κύμα να εξελιχτεί στην πλήρη του μορφή καθώς δεν υπάρχει χώρος για αυτό και όσο και αν εξελίσσεται η διαδικασία στο χρόνο το αποτέλεσμα είναι αυτό του **Σχήματος 4.19**. Η μεταβολή του ύψους της κορυφής με την κατάντη απόσταση για τη δεδομένη μικρή γωνία κλίσης του

τοιχώματος ($3,4^\circ$) είναι ενδιαφέρουσα καθώς σε απόσταση πενήντα περίπου εκατοστών το κύμα πολλαπλασιάζει εντυπωσιακά το ύψος του. Ένα ακόμα στοιχείο που έγινε εμφανές από τη σύγκριση των παραπάνω προσομοιώσεων (**Σχήμα 4.18**, **Σχήμα 4.19**) είναι ότι παλμοί με μεγαλύτερο εύρος διαταραχής (πιο έντονοι) εξελίσσονται πολύ πιο γρήγορα σε μοναχικά κύματα.

Για τις ίδιες ακριβώς συνθήκες ($Re=32$, $f=0,5\text{ Hz}$, $\varphi=3,4^\circ$, $amp=0,04$) έγιναν προσομοιώσεις για σχήμα αρχικής διαταραχής απλό ημίτονο και αυτό το γεγονός δίνει υλικό για σύγκριση. Πριν από το διάγραμμα της σύγκρισης δίνεται η εικόνα της εξέλιξης της διαταραχής (**Σχήμα 4.20**) όταν αυτή έχει το σχήμα ημιτόνου. Το υπολογιστικό πεδίο δεν επιτρέπει την πλήρη ανάπτυξη της ροής όπως και στο προηγούμενο σχήμα, αλλά αυτό είναι συνάρτηση του μικρού εύρους της αρχικά επιβαλλόμενης διαταραχής. Η σημαντικότερη ίσως παρατήρηση είναι ότι η διαταραχή εξελίσσεται και πάλι σε μοναχικό κύμα. Δηλαδή, η τελική μορφή της ροής είναι ανεξάρτητη των λεπτομερών χαρακτηριστικών της αρχικής διαταραχής, και αποτελείται πάντα από μία αλληλουχία μοναχικών κυμάτων.



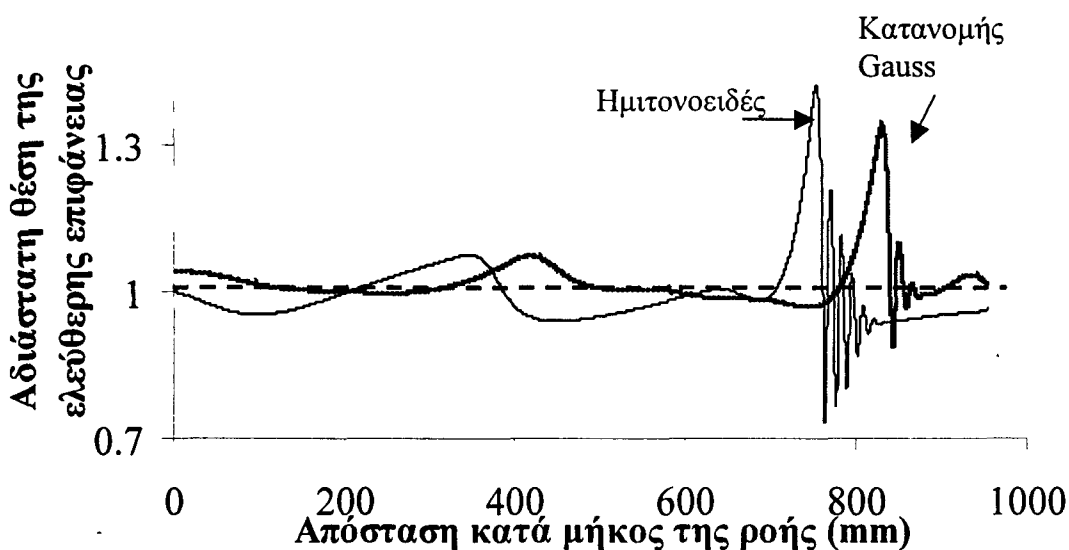
Σχήμα 4.20: Ένα πλήρες ανεπτυγμένο προφίλ κύματος για συχνότητα 0.5 Hz σχήματος ημιτόνου και $Re=32$.

Από τα δυο προηγούμενα σχήματα (**Σχήμα 4.19**, **Σχήμα 4.20**) παρατηρείται ότι πιο μικρό μήκος χρειάζεται ο παλμός του ημιτόνου για να οδηγήσει σε μοναχικό κύμα. Οι επιμέρους παρατηρήσεις για το σχήμα και τη δυναμική της εξέλιξης της διαταραχής προκύπτουν από το επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.21**) που παριστά τις δύο καμπύλες μαζί.

Συγκεντρωτικά οι παρατηρήσεις από το **Σχήμα 4.21**:

- (i) Οι δυο καμπύλες αναφέρονται στον ίδιο αδιάστατο χρόνο και για το ίδιο ακριβώς μήκος καναλιού.

- (ii) Το ημίτονο αναπτύσσεται πιο γρήγορα σε μοναχικό κύμα και απαιτεί μικρότερο μήκος για να γίνει αυτό.
- (iii) Το σχήμα της αρχικής διαταραχής δεν επηρεάζει καθόλου τη διαμόρφωση της ουράς των δυο τελικών κυμάτων, η οποία δείχνει πολύ παρόμοια παρά τη διαφορετική ενδιάμεση πορεία της διαταραχής.

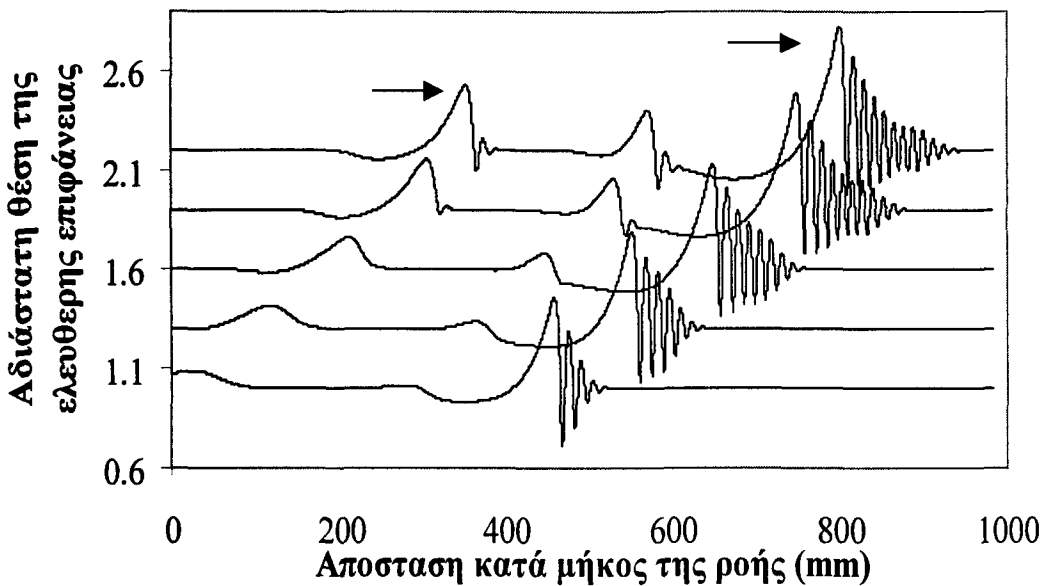


Σχήμα 4.21: Η ελεύθερη επιφάνεια για δύο διαφορετικά σχήματα αρχικής διαταραχής.

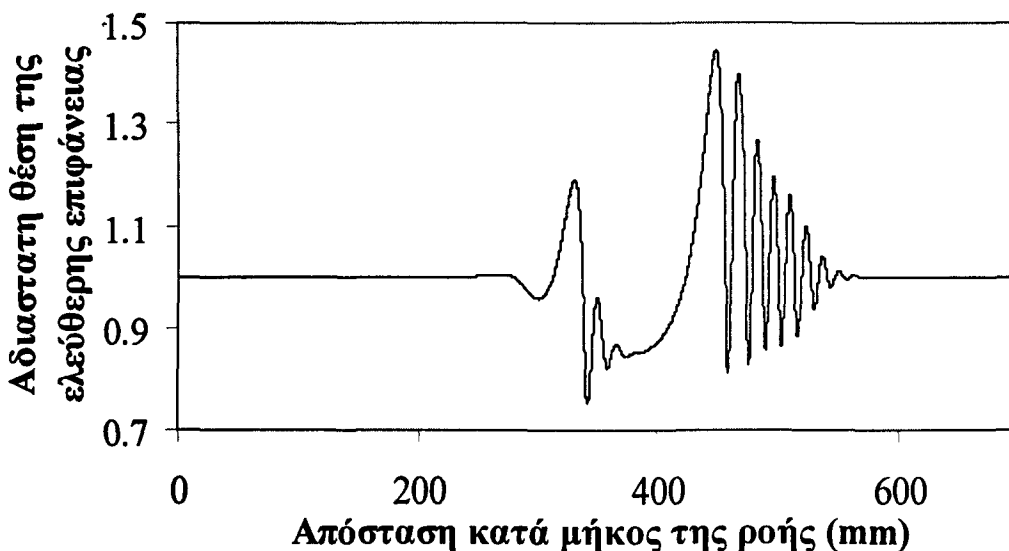
- (iv) Η σχέση των δυο παλμών με τον αδιατάρακτο υμένα (διακεκομμένη γραμμή) είναι διαφορετική. Ο παλμός που αντιστοιχεί στην κατανομή Gauss κινείται κυρίως στο επίπεδο του αδιατάρακτου υμένα και όταν φεύγει από εκεί είναι για να αυξηθεί, ενώ ο παλμός του ημιτόνου είναι σαφώς κάτω από το επίπεδο του πάχους Nusselt και οι διακυμάνσεις γύρω από αυτό είναι πολύ πιο έντονες.

Η τελευταία παρατήρηση σχετίζεται με το γεγονός ότι ο παλμός Gauss εισάγει επιπλέον μάζα στη ροή ενώ η ημιτονοειδής διαταραχή αυξομειώνει την παροχή γύρω από σταθερή μέση τιμή.

Προκειμένου να ολοκληρωθεί η αναφορά στη συχνότητα διαταραχής 0,5 Hz παρουσιάζεται στο επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.22**) η εξέλιξη μίας ισχυρότερης διαταραχής εισόδου. Συγκεκριμένα πρόκειται για παλμούς Gauss σε συνθήκες $f=0,5$ Hz, $Re=35$, γωνία $3,5^\circ$, αλλά τώρα με ύψος διαταραχής $0,08 h_N$. Οι παλμοί που εισάγονται με τη διαταραχή εισόδου διακρίνονται στο σχήμα με τα βέλη. Το πιο ενδιαφέρον που εντοπίζεται στο **Σχήμα 4.22** είναι η δημιουργία ενός παρασιτικού κύματος από την ουρά της κύριας κορυφής. Το φαινόμενο αυτό εξετάζεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια και τεκμηριώνεται πληρέστερα στη συνέχεια του κεφαλαίου.



Σχήμα 4.22: Η χωροχρονική εξέλιξη ενός παλμού για συχνότητα διαταραχής 0.5Hz σχήματος Gauss.

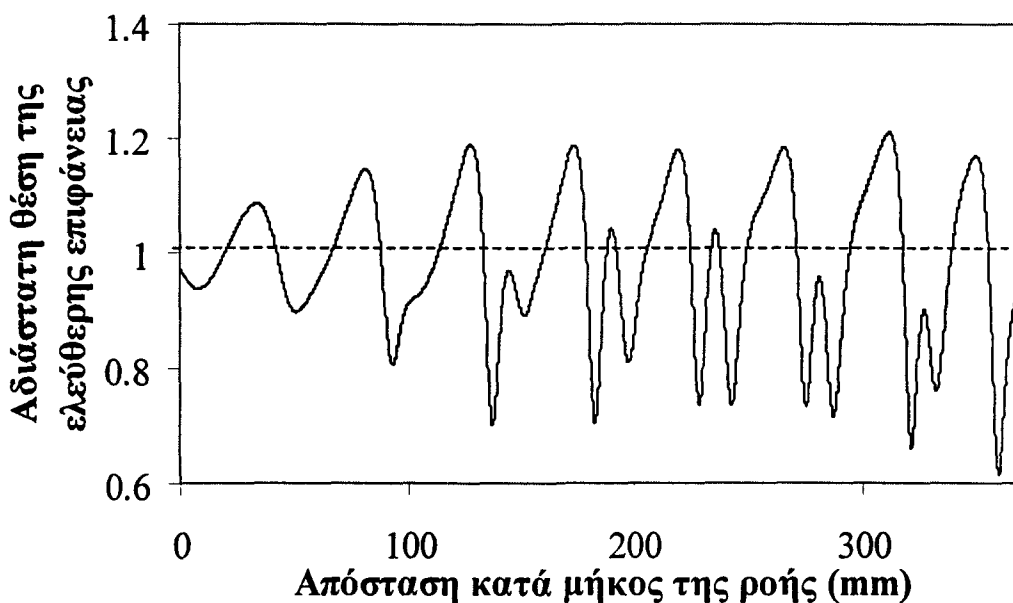


Σχήμα 4.23: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για συχνότητα 0,25 Hz σχήματος κατανομής Gauss και $Re=22$.

Για να ολοκληρωθεί η διερεύνηση της επίδρασης της συχνότητας διαταραχής, παρουσιάζονται αποτελέσματα (**Σχήμα 4.23**, **Σχήμα 4.24**) σε δύο ακραίες τιμές 0,25 Hz και 3,5 Hz αντίστοιχα. Στο **Σχήμα 4.23** η γωνία κλίσης του τοιχώματος είναι $5,4^\circ$. Το τελικό κύμα που σχηματίζεται είναι μοναχικό αλλά με έντονα τριχοειδή κύματα που παραπέμπουν πιο πολύ στα κορεσμένα περιοδικά κύματα από τα πειράματα των Liu & Gollub παρά στο τυπικό μοναχικό **Σχήμα 4.1**. Το πρώτο τριχοειδές είναι εμφανώς

κοντά στο ύψος της κύριας κορυφής και η συνέχεια τους θυμίζει ημιτονοειδή παλμό που σβήνει. Παρατηρείται και πάλι η δημιουργία παρασιτικής κορυφής που δεν οφείλεται σε συστηματική διαταραχή (η συχνότητα είναι εξαιρετικά μικρή όποτε κανένας άλλος παλμός δεν υπάρχει στο υπολογιστικό πεδίο) αλλά προκαλείται από την «ουρά» του κύριου κύματος.

Η εικόνα που έχει η ελεύθερη επιφάνεια για συχνότητα διαταραχής 3,5 Hz παριστάνεται στο **Σχήμα 4.24**. Τα κύματα πολύ γρήγορα οδηγούνται σε κορεσμένα περιοδικά, ίδια με αυτά που παρατηρήθηκαν από τους Liu & Gollub (1994) και Αργυριάδη (2005) για τις ίδιες συνθήκες. Η γωνία κλίσης και εδώ είναι $5,4^\circ$.



Σχήμα 4.24: Ένα πλήρως ανεπτυγμένο προφίλ κύματος για συχνότητα 3,5 Hz σχήματος ημιτόνου και $Re=22$.

Τα κορεσμένα περιοδικά κύματα σαφώς κινούνται κυρίως κάτω από το ύψος του υμένα κατά Nusselt αυτό δεν σημαίνει όμως ότι το πραγματικό τους ύψος τους είναι μικρό. Επειδή η συχνότητα της διαταραχής είναι μεγάλη, δεν απαιτούν όλο το υπολογιστικό μήκος του καναλιού προκειμένου να αναπτυχθούν.

Το βασικό συμπέρασμα από όλα τα παραπάνω είναι ότι η τελική μορφή της πλήρως ανεπτυγμένης ροής δεν εξαρτάται από το σχήμα της διαταραχής που επιβάλλεται, αλλά, (για τις παραμέτρους που μελετήθηκαν) μόνο από τη συχνότητα. Παρόλαυτα το σχήμα και η ένταση επηρεάζουν στα στάδια της ανάπτυξης και της μετάβασης από την αναπτυσσόμενη μορφή στην πλήρως ανεπτυγμένη. Είναι γνωστό για παράδειγμα ότι μικρού εύρους διαταραχές (σχεδόν γραμμικές) εκτείνουν τη γραμμική περιοχή ανάπτυξης κατά πολύ προκειμένου να φτάσουν τελικά να δώσουν τη μη γραμμική δομή του μοναχικού κύματος.

Όλα τα παραπάνω επιβεβαιώνουν τους Liu & Gollub (1994) σύμφωνα με τους οποίους υπάρχει κάποια συχνότητα μετάβασης πάνω από την οποία οι διαταραχές στην είσοδο της ροής εξελίσσονται σε περιοδικά κορεσμένα κύματα με μια κορυφή ανά περίοδο και κάτω από την οποία οι διαταραχές εξελίσσονται σε δομές με πολλές κορυφές συμπεριλαμβανομένων και των μοναχικών κυμάτων. Η τιμή της συχνότητας μετάβασης f_c εξαρτάται από τη γωνία κλίσης του επιπέδου και από τον αριθμό Reynolds.

Τα προτερήματα στην υπολογιστική δουλειά μπορούν να επικεντρωθούν στα σημεία :

- (i) οι επιβαλλόμενες διαταραχές είναι απόλυτα ελεγχόμενες στο σχήμα, στην ένταση και στη συχνότητα γεγονός που εξασφαλίζει την ύπαρξη διδιάστατων και μόνο κυμάτων
- (ii) δίνεται η ευκαιρία για βαθμιαία μελέτη της ανάπτυξης της διαταραχής σε όλο το μήκος του υπολογιστικού πεδίου
- (iii) παρέχεται στη ροή ικανοποιητικό μήκος πεδίου για την πλήρη ανάπτυξη της.

4.4 Η συμπεριφορά διαταραχών πολύ μικρής συχνότητας

Το γενικό συμπέρασμα από τα πειράματα των Liu & Gollub (1994) και άλλων είναι ότι η συχνότητα της κυματοσειράς που παράγεται από κανονική διαταραχή ταυτίζεται με τη συχνότητα της διαταραχής. Υπάρχουν διάσπαρτα πειράματα που δηλώνουν ότι η συμφωνία αυτή πιθανόν να ακυρώνεται σε πολύ χαμηλές συχνότητες.

Οι Alekseenko et al. φαίνεται να είναι οι πρώτοι που παρατήρησαν ότι κάτω από ορισμένη συχνότητα, νέα κύματα εμφανίζονται και η κανονική κυματοσειρά χαλάει. Οι ίδιοι προσπαθώντας να τεκμηριώσουν τον ισχυρισμό τους έφτιαξαν ένα «χάρτη» περιοχών της ροής όπου ομαδοποιούν τις μετρήσεις με παράμετρο το μήκος κύματος. Οι Liu & Gollub συνάντησαν δυσκολία στο να παράγουν κανονική κυματοσειρά σε πολύ χαμηλές συχνότητες. Οι Yoshimura et al. αναφέρουν ότι ένα νέο κύμα εμφανίζεται μεταξύ των κυμάτων που δημιουργούνται από ελεγχόμενες διαταραχές και αυτό το παρασιτικό κύμα συγχωνεύεται με την επόμενη κύρια κορυφή.

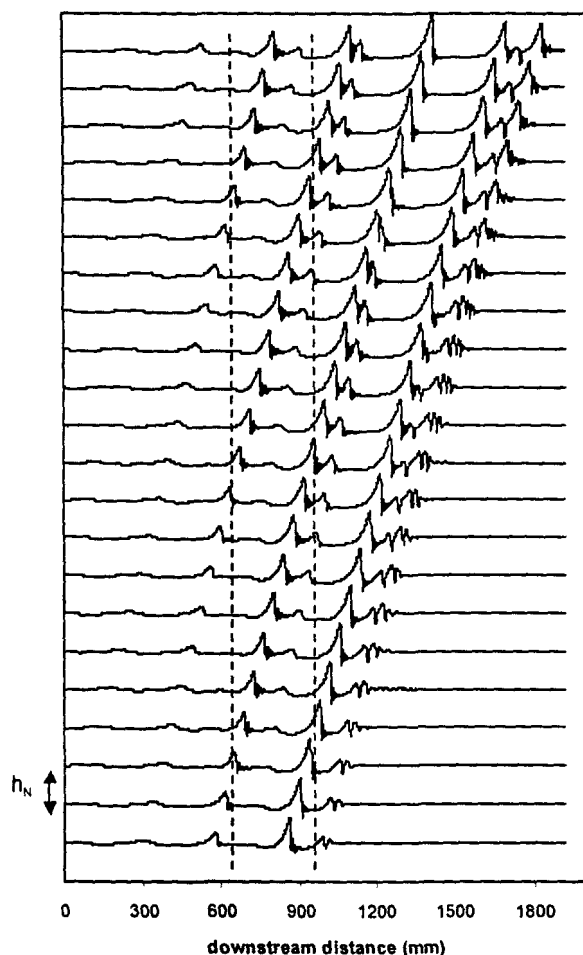
Σε όλα τα παραπάνω πειράματα το χάλασμα της κανονικότητας της κυματοσειράς αποδίδεται στην πρωτογενή αστάθεια του εκτεταμένου επιπέδου υποστρώματος μεταξύ δύο πλήρως σχηματισμένων κορυφών. Η εικόνα αυτή δεν συναντιέται μόνο στις ροές λεπτού υμένα, αλλά γενικά σε οποιοδήποτε ενεργό μέσο με διασπορά. Ο Balmforth σημειώνει ότι, «...εάν η απόσταση μεταξύ δύο παλμών είναι πολύ μεγάλη, τότε το κενό μεταξύ τους εμφανίζει αστάθεια η οποία παίρνει τη μορφή παλμών μη εντοπισμένων χωρικά, οι οποίοι αναφέρονται ως ακτινοβολία».

Το φαινόμενο θεωρητικά έχει ερευνηθεί πολύ περιορισμένα και υπάρχουν ελάχιστες σχετικές αναφορές. Ο Chang μελέτησε τη γένεση και το σβήσιμο της ακτινοβολίας σε μοναχικά κύματα, βασιζόμενος στα μοντέλα Kawahara και Shkadon για κάθετο υμένα ρευστού και προέβλεψε ότι οι διεγερμένοι παλμοί εξελίσσονται αναδύοντας από την ουρά τους κυματοσειρές όλων των συχνοτήτων. Η διατήρηση αυτού του συρμού ακτινοβολίας εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ δύο πληρών κορυφών, η οποία -σύμφωνα με τα προηγούμενα- είναι ευθέως ανάλογη με την επιβαλλόμενη συχνότητα διαταραχής. Επίσης οι Chang et al. μελέτησαν την ευστάθεια Floquet μιας κανονικής σειράς κυμάτων που προέκυψε από τη γενική εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky και έδειξαν ότι γίνεται ασταθής όταν το μήκος κύματος υπερβεί μια κρίσιμη τιμή.

Πιο πρόσφατα οι Shkadon και Sisoen ολοκλήρωσαν αριθμητικά την εξίσωση ολοκληρωτικού οριακού στρώματος ή εξίσωση Shkadon αντιμετωπίζοντας την ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, και αναζητώντας χωρικά περιοδική λύση με παράμετρο το μήκος κύματος. Αυξάνοντας το, βρήκαν ότι, πέρα από ορισμένα μήκη κύματος, η λύση οδηγείται σε περιοδική είτε με το μισό είτε με το ένα τρίτο του αρχικού μήκους κύματος. Έτσι συμπεράναν ότι πολύ μεγάλα κύματα είναι ασυμβίβαστα με τη ροή και αυθόρμητα αποδομούνται σε μικρότερα.

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να καταγράψει με λεπτομέρεια τον τρόπο γένεσης και εξέλιξης των παρασιτικών παλμών σε χαμηλές συχνότητες διαταραχής και να διερευνήσει το φυσικό μηχανισμό που κρύβεται κάτω από αυτό.

Το **Σχήμα 4.25** προκύπτει από την προσομοίωση των πειραμάτων των Liu & Gollub (54% κατά βάρος διάλυμα γλυκερίνης-νερού, $\phi=6,4^\circ$, $Re=19,33$) με διάφορα ότι η συχνότητα διαταραχής είναι ημιτονοειδής και έχει τιμή μικρότερη από 1,5 Hz στην όποια εκείνοι διεξήγαγαν τα πειράματά τους. Έτσι λοιπόν στο διάγραμμα υπάρχει μια συλλογή από στιγμιαίες κατανομές της ελεύθερης επιφάνειας οι οποίες απέχουν 10 αδιάστατες χρονικές στιγμές (χαρακτηριστικός χρόνος $=h_w/U$) και παράγονται με αρχική συχνότητα διαταραχής ημιτονοειδή 1 Hz. Στην πρώτη καμπύλη του διαγράμματος μπορεί κάποιος να δει την πρώτη κύρια κορυφή η οποία εμφανίζει στην ουρά της μια λακκούβα. Ακολουθώντας τη λακκούβα γίνεται αντιληπτό ότι μετά από κάποια στάδια και σύμφωνα με τη μη γραμμική εξέλιξη των διαταραχών βαθμιαία οδηγεί σε ένα καινούργιο μοναχικό κύμα. Πριν όμως αυτό μεγαλώσει ικανοποιητικά το επόμενο μοναχικό που οφείλεται στην αρχική διαταραχή το φτάνει από πίσω και τα δυο κύματα συγχωνεύονται σε ένα. Κατά τη διάρκεια της συγχώνευσης το κύριο κύμα εμφανίζει στην ουρά του μια λακκούβα όμοια με την προηγούμενη και η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται.

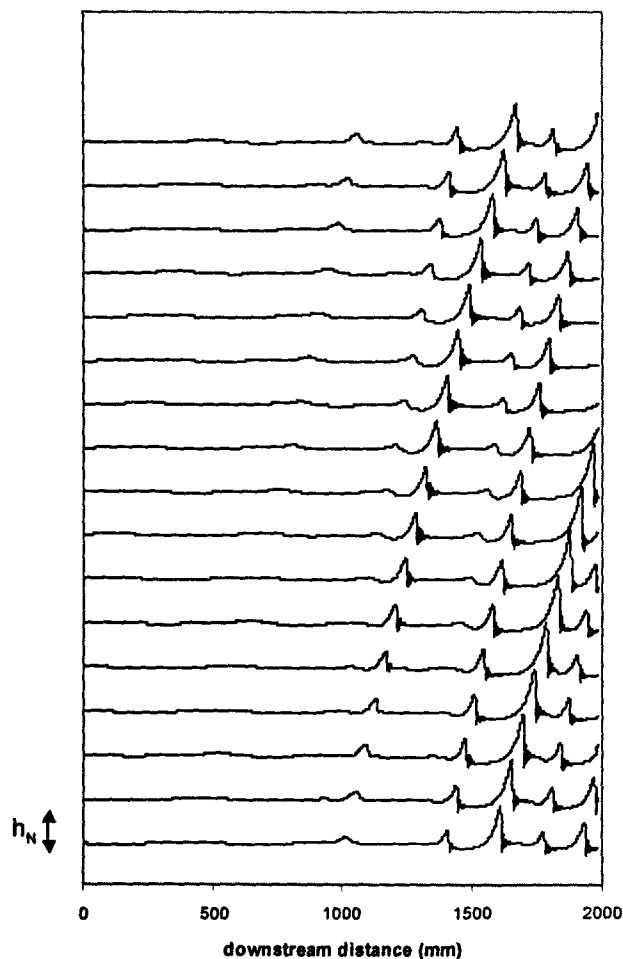


Σχήμα 4.25: Στιγμιαία θέση της ελεύθερης επιφάνειας ανά 10 χρονικές στιγμές για αρχική διαταραχή 1Hz. Οι διακεκομμένες κάθετες υποδεικνύουν την χρονική εξέλιξη δυο θέσεων.

Στο παραπάνω σχήμα αποκαλύπτεται ότι η χωρική δομή της ελεύθερης επιφάνειας είναι μη περιοδική και συνυπάρχει με μια ποικιλία παρασιτικών κυματισμών τα οποία επιζούν για κάποιες χρονικές στιγμές. Το αντίθετο ακριβώς ισχύει για την χρονική εξέλιξη ενός δεδομένου σημείου της ελεύθερης επιφάνειας, η εξέλιξη του οποίου είναι τέλεια περιοδική και σύμφωνη με την αρχική διαταραχή και παρά το γεγονός ότι ανεξάρτητες κορυφές εμφανίζονται αν περίοδο σε διαφορετικές θέσεις. Οι διακεκομμένες κάθετες γραμμές τραβήχτηκαν ακριβώς για να αναδείξουν τη χρονική εξέλιξη δύο αντιπροσωπευτικών θέσεων κατά μήκος του υπολογιστικού πεδίου.

Στις ίδιες ακριβώς συνθήκες ροής αναφέρεται και το επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.26**) μόνο που η αρχική συχνότητα διαταραχής είναι μικρότερη τώρα, 0.5 Hz. Ξανά μια παρασιτική κορυφή αναδύεται από την ουρά μιας κύριας με την ίδια ακριβώς διαδικασία. Η μικρότερη συχνότητα όμως επιτρέπει στην παρασιτική κορυφή να

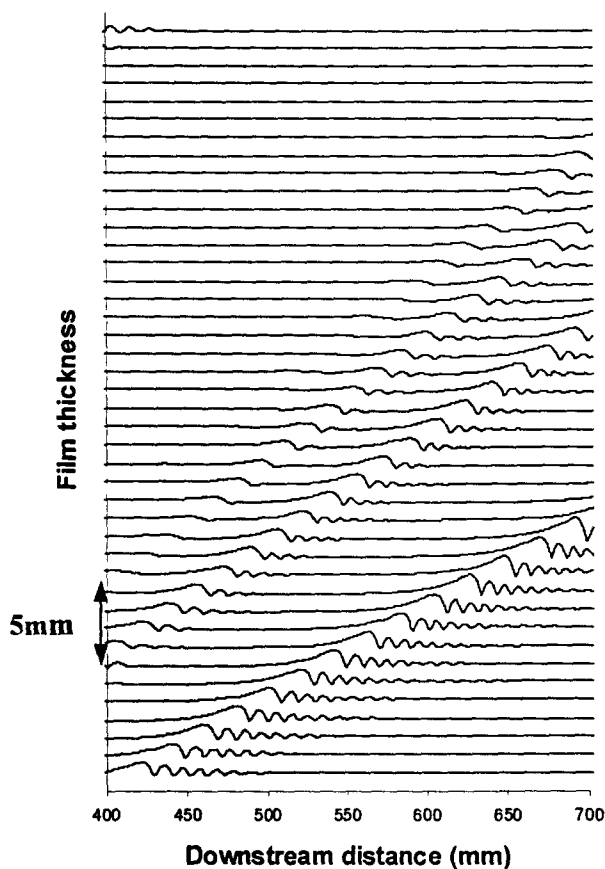
αναπτυχθεί σε πλήρες μοναχικό κύμα καθότι το επόμενο κύριο κύμα είναι αρκετά μακριά και δεν την προλαβαίνει. Από τη στιγμή που η παρασιτική κορυφή αναπτύσσεται σε μοναχικό κύμα έχει ενταχθεί απολύτως ισότιμα στη δομή της ροής και αμέσως ξεκινάει η διαδικασία της ανάπτυξης μιας νέας παρασιτικής κορυφής από την ουρά του. Αυτή η συνεχής διαδικασία ανάδυσης κορυφών από τις ουρές των προηγούμενων οδηγεί αρκετά κάτω στο υπολογιστικό πεδίο σε μια περίπλοκη δομή της ελεύθερης επιφάνειας με την εμφάνιση δυο επιπλέον κυμάτων μεταξύ διαδοχικών κυμάτων που οφείλονται στην αρχική συχνότητα.



Σχήμα 4.26: Στιγμαίαία θέση της ελεύθερης επιφάνειας ανά 10 χρονικές στιγμές για αρχική διαταραχή 0.5 Hz.

Για $f < f_p$, (αναφέρονται στο χάρτη συχνοτήτων των Liu & Gollub, **Σχήμα 2.4**) τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δημιουργίας κύματος από την ουρά μιας κύριας κορυφής είναι τα ίδια, αλλά η ακριβής χωρική και χρονική ανάπτυξη τους ποικίλει σύμφωνα με το σχήμα και την ένταση της αρχικής διαταραχής. Έχοντας κατά νου όλες τις προηγούμενες παρατηρήσεις το επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.27**) παρατίθεται για να πιστοποιήσει κάποιες από αυτές. Οι συνθήκες είναι: $\phi=5,4^\circ$, $Re=22$, $f=0,25$ Hz και

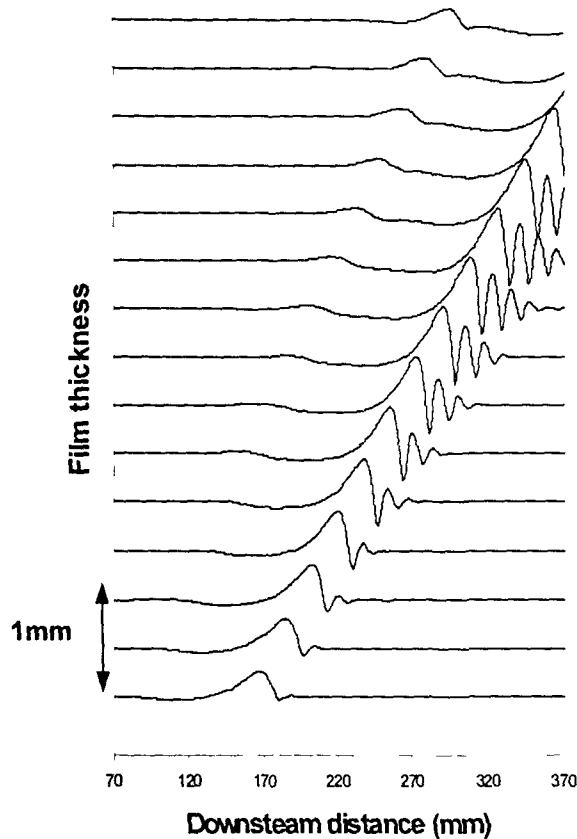
το υγρό είναι διάλυμα νερού-γλυκερίνης 21% κατά βάρος. Στο διάγραμμα δίνεται η στιγμιαία μορφή της ελεύθερης επιφάνειας ανά δέκα αδιάστατες χρονικές στιγμές.



Σχήμα 4.27: Στιγμιαία θέση της ελεύθερης επιφάνειας ανά 10 χρονικές στιγμές για αρχική διαταραχή 0,25 Hz.

Γίνεται εμφανής η παρουσία πολλαπλών κορυφών αλλά η λεπτομέρεια του μηχανισμού γένεσης κορυφών δίνεται στο επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 4.28**). Μετά από τα παραπάνω διαγράμματα γεννιέται η υποψία ότι η εμφάνιση της παρασιτικής κορυφής με το δεδομένο μηχανισμό μπορεί να οφείλεται στο είδος της επιβαλλόμενης διαταραχής (τέλεια περιοδική και με απόλυτα δεδομένη συχνότητα).

Εναλλακτικά θα μπορούσε να δημιουργηθεί λόγω ενός ανάντη της ροής άλματος που συχνά αναπτύσσεται και εξελίσσεται μεταξύ της κύριας κορυφής και του επιπέδου υμένα που ακολουθεί το προηγούμενο κύμα. Ένα τέτοιο άλμα δημιουργείται από την ημιτονοειδή διαταραχή και είναι εμφανές στο **Σχήμα 4.28**. Για να διαλυθεί η υποψία αυτής της εξάρτησης στο **Σχήμα 4.29** παρουσιάζεται λεπτομέρεια της ανάπτυξης της παρασιτικής κορυφής με αρχική διαταραχή σχήματος κατανομής Gauss.



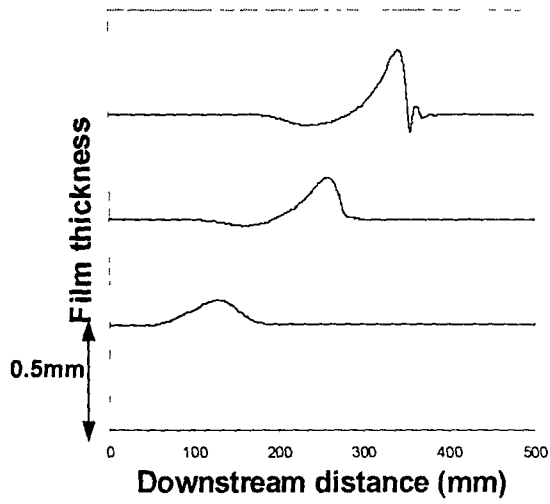
Σχήμα 4.28: Λεπτομέρεια του Σχήματος 4.27 που δείχνει την γένεση της παρασιτικής κορυφής για συχνότητα 0,25 Hz.

Αυτό που διαπιστώνεται είναι ότι η λακκούβα εμφανίζεται και εξελίσσεται με τον ίδιο τρόπο παρότι απουσιάζει το άλμα του υμένα που εμφανίστηκε σε προηγούμενες ροές.

Το είδος αυτής της διαταραχής εξασφαλίζει στη ροή περίσσεια μάζας ρευστού έτσι αποφεύγεται η εμφάνιση του άλματος. Η εμφάνιση όμως της παρασιτικής κορυφής από την ουρά της κύριας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αυτός ο μηχανισμός είναι ιδιαίτερα σταθερός.

Συμπερασματικά τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου:

- (i) παρασιτικές κορυφές αναδύονται από την ουρά της κύριας μέσω μηχανισμού κατάθλιψης (depression) της ροής όταν οι συχνότητες αρχικής διαταραχής είναι μικρές
- (ii) δυο είναι τα σενάρια εξέλιξης των παρασιτικών κορυφών, για $f \approx f_p$ αυτές σβήνουν λόγω συγχώνευσης, για $f \ll f_p$ διατηρούνται και εντάσσονται στη δομή της ροής.



Σχήμα 4.29: Λεπτομέρεια της γένεσης της παρασιτικής κορυφής για συχνότητα 1 Hz με αρχική διαταραχή σχήματος κατανομής Gauss.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΡΟΗ ΥΓΡΟΥ ΥΜΕΝΑ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΟ ΤΟΙΧΩΜΑ

Το ενδιαφέρον για εύρεση βασικής λύσης για μόνιμη ροή πάνω από περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα αποτέλεσε το κίνητρο για τη μελέτη του προβλήματος και οδήγησε στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό. Δύο βασικά χαρακτηριστικά της ροής διακρίθηκαν: Η εμφάνιση των δινών αποκόλλησης στις κοιλότητες του τοιχώματος και η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας. Τα ως τώρα διαθέσιμα υπολογιστικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας αφορούν σχεδόν αποκλειστικά έρπουσα ροή (Pozrikidis, 1988, Aksel et al., 2003). Συνεπώς η παρούσα μελέτη αποτελεί μία από τις πρώτες προσπάθειες επέκτασης των προβλέψεων σε πεπερασμένους Re .

5.1 Φαινόμενα στην κύρια μάζα του ρευστού

Η ύπαρξη δινών εσωτερικά στη ροή ενός υγρού υμένα είναι φαινόμενο καθοριστικό καθώς μπορεί να επηρεάσει τους συντελεστές μετάδοσης θερμότητας από και προς το τοίχωμα, το ρυθμό απορρόφησης και διάχυσης ενός υπερκείμενου αερίου εσωτερικά στο ρευστό καθώς και τη διατμητική τάση στο τοίχωμα, η οποία επιδρά σε φαινόμενα επικάθισης ή αποκόλλησης. Έτσι, ακόλουθα μελετάται η επίδραση του βάθους του τοιχώματος και του αριθμού Reynolds στα χαρακτηριστικά (ταχύτητες, ογκομετρική παροχή, θέση της δίνης, κτλ) των δινών που διαμορφώνονται στις κοιλότητες του τοιχώματος.

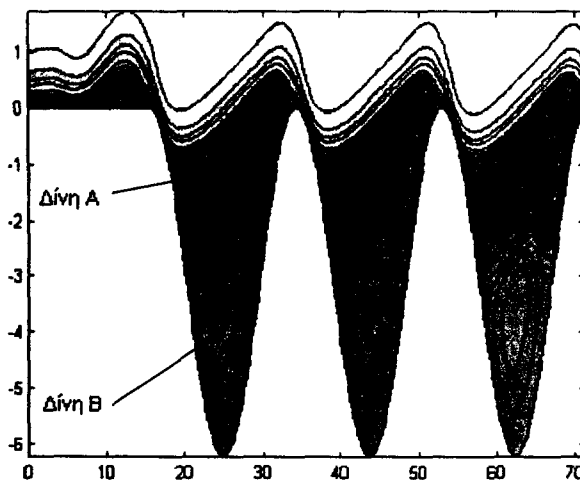
Οι προσομοιώσεις της παρούσας εργασίας αφορούν νερό και μέση γωνία κλίσης τοιχώματος ίση με δέκα μοίρες (10°). Ο περιορισμός σε μία γωνία είναι αναπόφευκτος καθώς το πλήθος των παραμέτρων γίνεται αλλιώς απαγορευτικά μεγάλο. Επίσης, εξετάζονται δύο διαφορετικά μήκη κύματος του τοιχώματος, 0,012 m και 0,003 m, που είναι αντίστοιχα αντιπροσωπευτικά των συνθηκών μακριά και κοντά στο συντονισμό.

Η γεωμετρία που προσομοιώνεται είναι ένα πλήθος 6-12 επαναλήψεων της περιόδου του τοιχώματος, με μικρά επίπεδα τμήματα για την ομαλοποίηση της εισόδου και της εξόδου. Η επιλογή του πλήθους των περιόδων έγινε με κριτήριο την εμφάνιση πλήρους ανάπτυξης. Δηλαδή, είναι απαραίτητο στο κέντρο του καναλιού να παρατηρηθούν 2-3 επαναλήψεις της ίδιας ακριβώς δομής, ώστε αυτή να θεωρηθεί η πλήρως ανεπτυγμένη μόνιμη ροή. Αντίθετα, στην αρχή και στο τέλος του περιοδικού τοιχώματος υπάρχει πάντα διαφοροποίηση λόγω των φαινομένων εισόδου και εξόδου.

5.1.1 Επίδραση του αριθμού Reynolds

Τα χαρακτηριστικά των δινών είναι άμεσα εξαρτώμενα από τον αριθμό Reynolds. Είναι λογικό λοιπόν η επίδραση του σε αυτά να είναι καθοριστική και ιδιαίτερης σημασίας. Το εύρος των αριθμών Reynolds που μελετήθηκαν είναι ικανοποιητικά μεγάλο και ενδεικτικά αναφέρεται ότι ο μικρότερος Reynolds με τον μεγαλύτερο απέχουν μια τάξη μεγέθους. Μία γενική παρατήρηση είναι ότι σε όλα σχεδόν τα χαρακτηριστικά των δινών (πρωτεύουσας και δευτερεύουσας, **Σχήμα 5.1**) η επίδραση του Reynolds ακολουθεί δυο τάσεις, μια για τους μικρούς Reynolds (10-60) και μια για τους μεγαλύτερους (80-200).

Το **Σχήμα 5.1** που ακολουθεί δίνει μία αντιπροσωπευτική εικόνα του πεδίου ροής. Διακρίνονται δύο δίνες ανακυκλοφορίας, η πρωτεύουσα κοντά στην επιφάνεια και η δευτερεύουσα βαθύτερα στην κοιλότητα. Οι δυο δίνες είναι αντίρροπες. Η πρωτεύουσα διατηρείται μέσω της διάτμησης με τον υπερκείμενο υμένα ρευστού ενώ η δευτερεύουσα παίρνει ενέργεια από την περιστροφή της πρώτης.

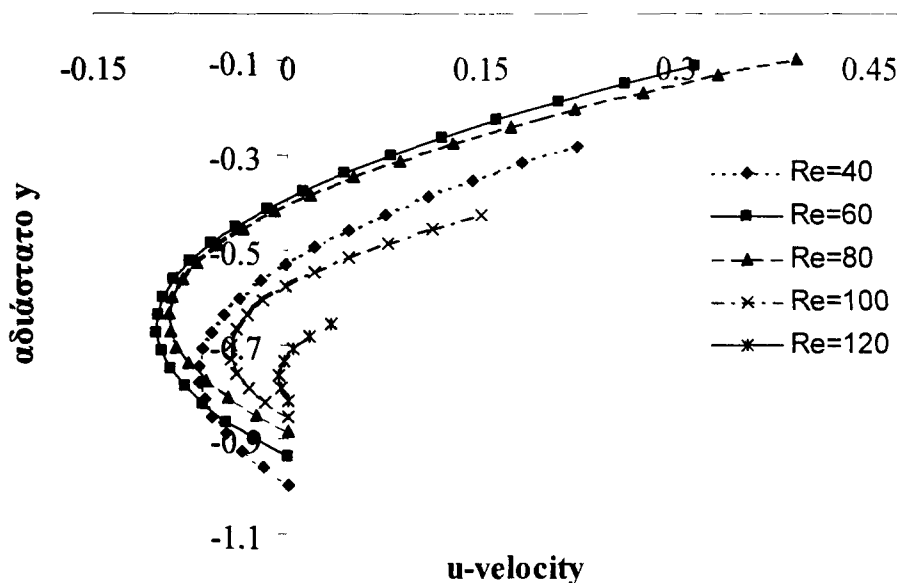


Σχήμα 5.1: Οι δυο βασικές δίνες της ροής.

Η συμπεριφορά της πρωτεύουσας δίνης είναι καθοριστική για το χαρακτηρισμό της ροής. Στη συνέχεια αναλύεται το πεδίο ροής της δίνης στο επίπεδο συμμετρίας της κοιλότητας του τοιχώματος. Ειδικότερα, παρουσιάζεται για διάφορους αριθμούς Re η εξάρτηση από το βάθος των δύο συνιστωσών της ταχύτητας u και v , δηλαδή της παράλληλης και της κάθετης προς τη μέση κλίση του καναλιού. Τα αποτελέσματα αυτά είναι ενδεικτικά αλλά δεν χαρακτηρίζουν πλήρως τη ροή γιατί οι δίνες παρουσιάζουν γενικά ασυμμετρία. Για το λόγο αυτό, η ανάλυση συμπληρώνεται με τον προσδιορισμό του βαθμού ασυμμετρίας, καθώς και άλλων παραμέτρων της δίνης.

Στο **Σχήμα 5.2** παρουσιάζεται η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας. Όπως και σε όλα τα αντίστοιχα διαγράμματα που ακολουθούν, ο άξονας y είναι

αδιαστατοημένους με το βάθος του τοιχώματος ενώ η ταχύτητα με τη μέση κατά Nusselt ταχύτητα, U .



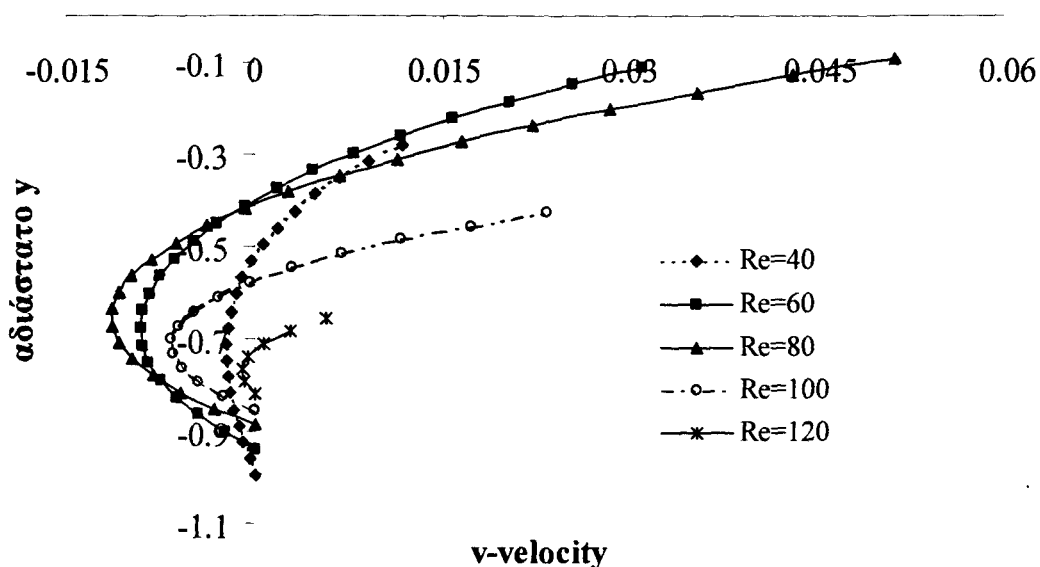
Σχήμα 5.2: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη u ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος $0,0008\text{ m}$.

Η θέση $u = 0$ προσδιορίζει χονδρικά το κέντρο της δίνης. Οι παρατηρήσεις από το διάγραμμα είναι οι εξής:

- (i) Για το δεδομένο βάθος τοιχώματος (μικρό) οι αριθμοί Reynolds (40, 60, 80) επιδρούν στη δίνη με τον ίδιο τρόπο, ενώ είναι εμφανής η αλλαγή για Reynolds (100, 120) όχι στην τάση, αλλά στην ένταση της επιρροής τους.
- (ii) Η δίνη με αύξηση του Reynolds μετατοπίζεται προς τα πάνω.
- (iii) Η δίνη περιστρέφεται δεξιόστροφα. Οι ταχύτητες πάνω από κέντρο της δίνης είναι θετικές ενώ κάτω από αυτό αρνητικές. Οι θετικές ταχύτητες είναι διπλάσιες των αρνητικών.
- (iv) Η επίδραση του αριθμού Reynolds στη μέγιστη ταχύτητα της δίνης είναι καταλυτική: με αύξηση του Reynolds η μέγιστη ταχύτητα μεγαλώνει έως τον Reynolds 80, ενώ στη συνέχεια μειώνεται.
- (v) Η u ταχύτητα της δίνης έχει διαφορετική κατανομή πάνω από το κέντρο της και διαφορετική κάτω από αυτό. Στην πρώτη περίπτωση αυξάνεται εκθετικά, στη δεύτερη είναι μόνιμη σχεδόν παραβολική κατανομή.

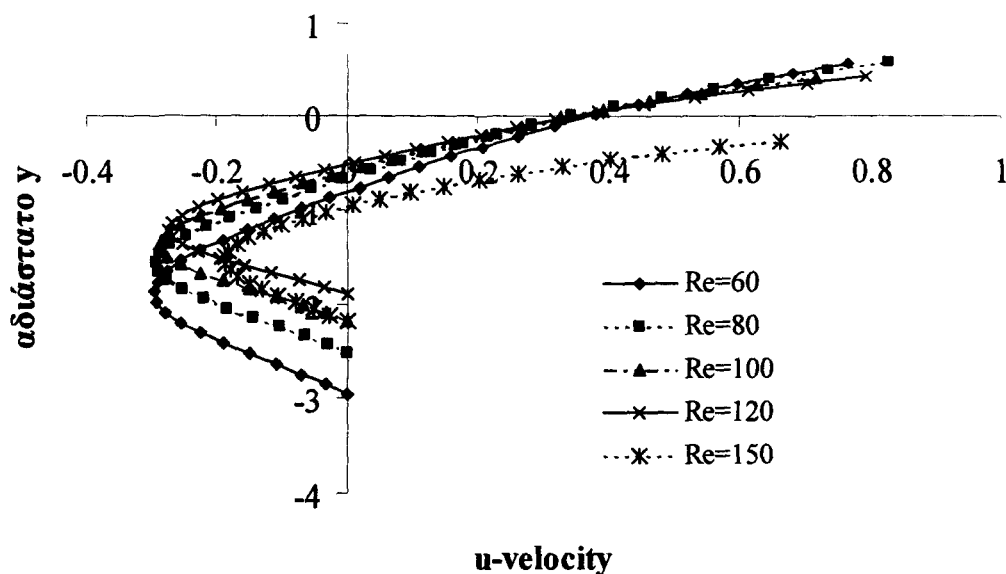
Η ταχύτητα v παρουσιάζεται στο **Σχήμα 5.3**, και εκφράζει την ασυμμετρία της δίνης, καθώς στον κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μιας απόλυτα συμμετρικής δίνης, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδέν, δεδομένου ότι η ταχύτητα της ροής είναι παράλληλη με την κλίση του επιπέδου ροής. Η επίδραση του

αριθμού Reynolds στη v ταχύτητα είναι εντελώς ανάλογη με την επίδραση του στην οριζόντια συνιστώσα.



Σχήμα 5.3: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη v ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0,0008 m.

Αυτό που μπορεί με μια δεύτερη ματιά να γίνει αντιληπτό από τα δυο προηγούμενα διαγράμματα (Σχήμα 5.2, Σχήμα 5.3) είναι ότι οι μεγαλύτερες σε μέγεθος και ταχύτητα δίνες εμφανίζονται για το δεδομένο βάθος τοιχώματος μεταξύ των Reynolds 60 και 80. Στην περιοχή αυτή η δίνη έχει ήδη σχηματιστεί και είναι στη φάση εκείνη όπου το μέγεθος της και οι ταχύτητές της κυριαρχούν στη ροή.

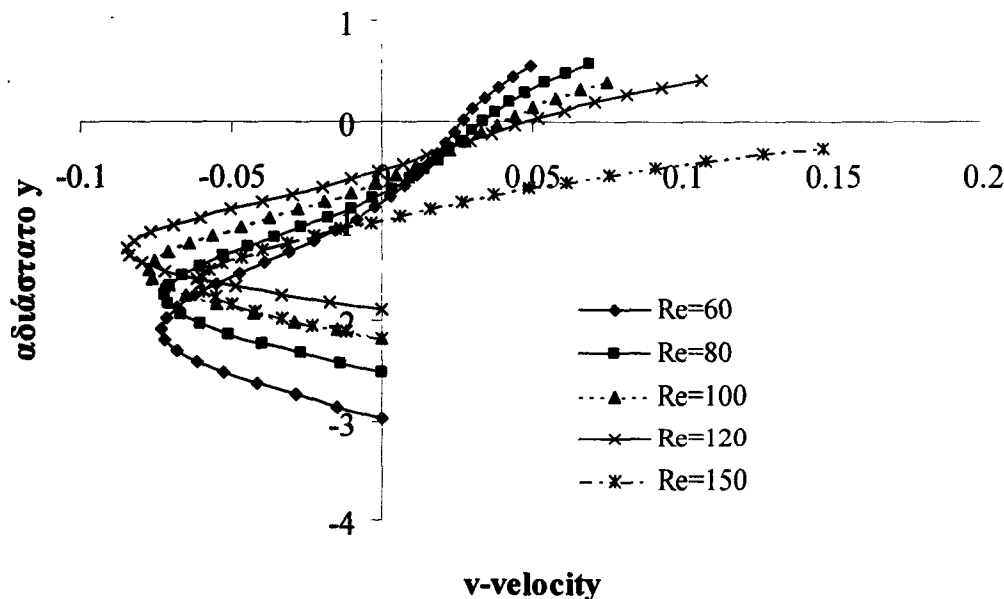


Σχήμα 5.4: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη u ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0,002 m.

Στο **Σχήμα 5.4**, για βάθος τοιχώματος δυόμισι φορές μεγαλύτερο από το προηγούμενο, η επίδραση του αριθμού Reynolds αν και παραμένει παρόμοια ως προς την τάση, έχει διαφοροποιηθεί στα επιμέρους χαρακτηριστικά. Η δίνη σαφώς είναι μικρότερη από την προηγούμενη παρόλαυτα συνεχίζει να μεγαλώνει αυξάνοντας τον Reynolds. Η ιδιαιτερότητα εδώ εμφανίζεται στην περιοχή του αριθμού Reynolds 120.

Για μεγαλύτερο βάθος τοιχώματος δηλαδή απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός Reynolds ώστε η ταχύτητα και το μέγεθος της δίνης να αποκτήσει ακρότατο και να αλλάξει η συμπεριφορά της. Αυτό το συμπέρασμα ενισχύεται από το επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 5.5**).

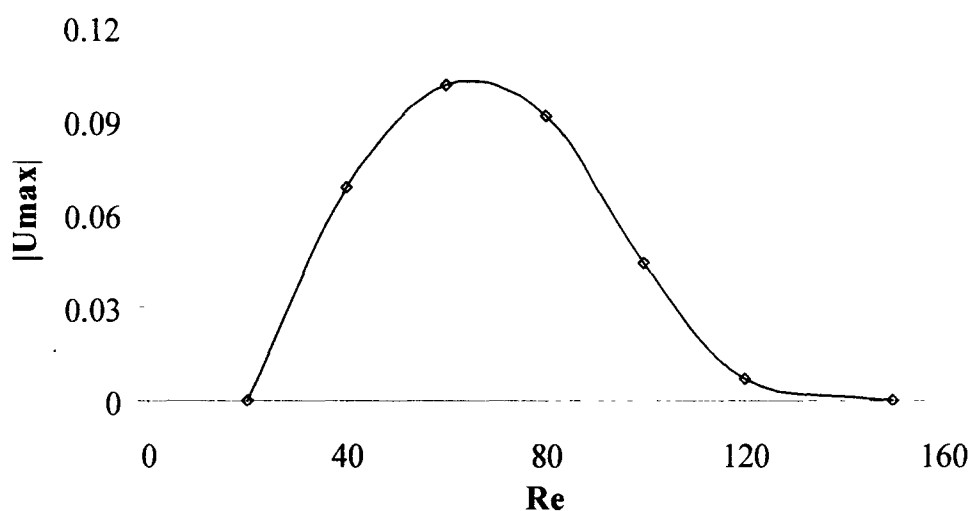
Η δίνη για βάθος 0,002 m είναι σαφώς πιο ασύμμετρη (παράμετρος συμμετρίας η θέση του κέντρου της δίνης, δηλαδή $u = v = 0$) από την αντίστοιχη για βάθος 0,0008 m. Βάθη που στην ουσία δεν διαφέρουν εντυπωσιακά, παρόλαυτα η δίνη διαφοροποιείται και αυτή της η διαφοροποίηση καταγράφεται συναρτήσει του αριθμού Reynolds. Αύξηση του αριθμού Reynolds οδηγεί τη δίνη πιο κοντά στην επιφάνεια (θετική μετατόπιση κατά y) και τείνει να την κάνει πιο συμμετρική. Αυτό επιτυγχάνεται στην περιοχή του αριθμού Reynolds 120.



Σχήμα 5.5: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη v ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για βάθος τοιχώματος 0,002 m.

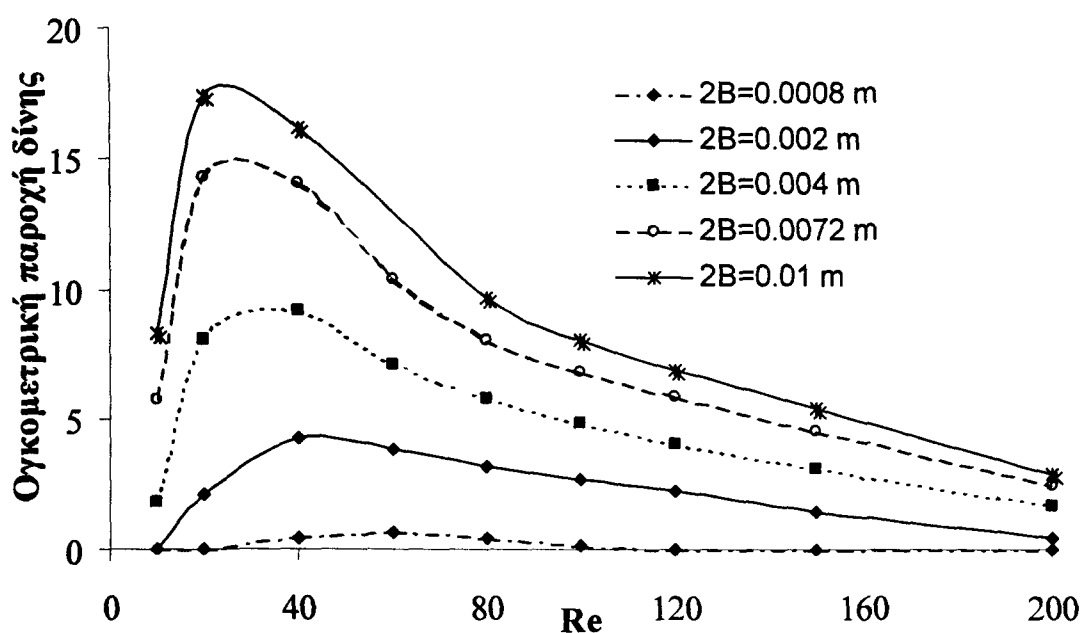
Η αλλαγή της τάσης των χαρακτηριστικών της δίνης με αύξηση του βάθους και του αριθμού Reynolds οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένα κρίσιμο βάθος τοιχώματος και ένας κρίσιμος αριθμός Reynolds για τους οποίους η λύση του προβλήματος αλλάζει κατεύθυνση. Αυτό είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό των δυναμικών συστημάτων και στη θεωρία καταγράφεται ως σημείο διακλάδωσης της λύσης.

Η επίδραση του αριθμού Reynolds στις ταχύτητες τις δίνης ολοκληρώνεται με την παράθεση του επόμενου διαγράμματος (**Σχήμα 5.6**), όπου για βάθος τοιχώματος 0,0008 m παριστάνεται η μέγιστη ταχύτητα της δίνης συναρτήσει του Reynolds. Στο διάγραμμα γίνεται εμφανές ότι υπάρχει μια περιοχή αριθμών Reynolds όπου η δίνη περιστρέφεται με μέγιστη ταχύτητα και σε αυτή την περιοχή αποκτάει και το μεγαλύτερο μέγεθός της. Αυτό που μπορούμε να καταλάβουμε είναι ότι, με την αύξηση του Re, η δίνη δημιουργείται έντονα και ξαφνικά, αλλά δεν σβήνει το ίδιο εύκολα. Διατηρείται στη ροή, πράγμα που κάνει εμφανές το γεγονός ότι η δίνη για τη συγκεκριμένη γεωμετρία αποτελεί κυρίαρχο συστατικό της ροής ακόμη και για υψηλούς αριθμούς Re.



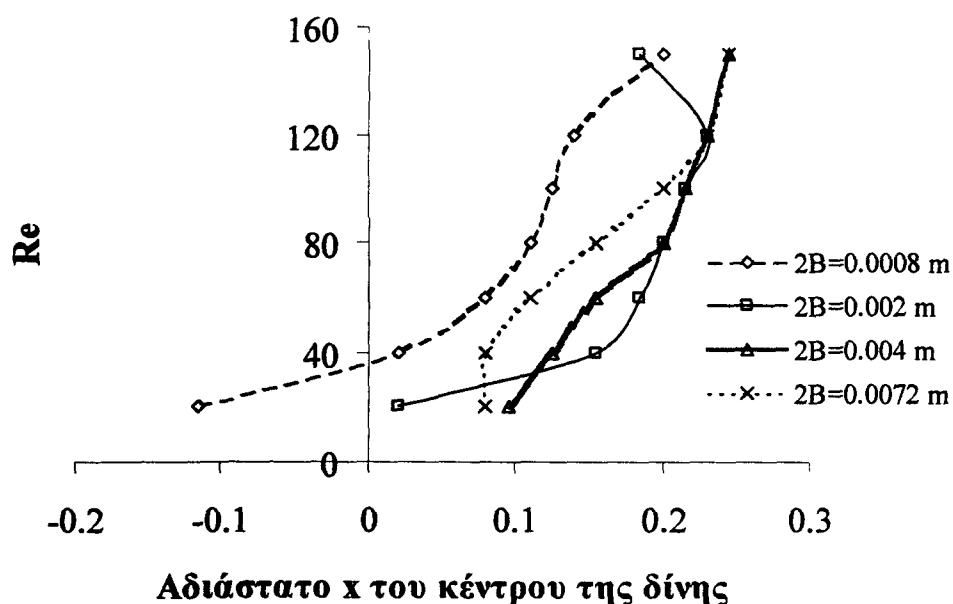
Σχήμα 5.6: Επίδραση του αριθμού Reynolds στη μέγιστη ταχύτητα της δίνης για βάθος τοιχώματος 0,0008 m.

Το επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 6.7**) παριστάνει την εξάρτηση από τον αριθμό Re και το βάθος του τοιχώματος της ογκομετρικής παροχής ρευστού που ανακυκλοφορεί στη δίνη. Η ογκομετρική παροχή μεταξύ δυο σημείων ενός ροϊκού πεδίου προκύπτει από τη διάφορα των τιμών της ροϊκής συνάρτησης που αντιστοιχεί στα δυο αυτά σημεία, και αυτό αποδεικνύεται ξεκινώντας από τον ορισμό της ροϊκής συνάρτησης, $\Psi: u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Το διάγραμμα αυτό είναι συνολικό και επομένως τα συμπεράσματα ισχύουν για μεγάλο εύρος βάθους τοιχωμάτων μια και για όλα καταγράφεται η ίδια τάση. Η περιοχή του Reynolds όπου η ογκομετρική παροχή είναι μέγιστη γίνεται όλο πιο στενή και όλο πιο μικρή όσο το βάθος του τοιχώματος μεγαλώνει. Από τις καμπύλες του διαγράμματος μπορεί κάποιος να αποφανθεί για ποιες συνθήκες (τοιχώμα και Reynolds) οι δίνες είναι πιο έντονες και φέρουν τη μεγαλύτερη μάζα ρευστού. Για παράδειγμα, για μεγάλα βάθη και μικρούς Reynolds αυξάνουν τον όγκο του ρευστού που φέρουν πολύ απότομα.



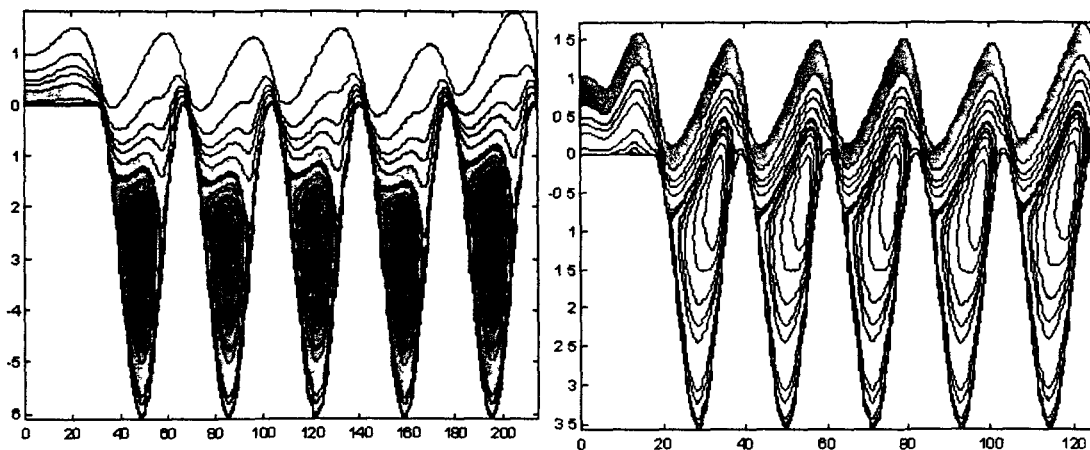
Σχήμα 5.7: Επίδραση του αριθμού Reynolds στην ογκομετρική παροχή της πρωτεύουσας δίνης για εύρος βάθους τοιχώματος.

Το **Σχήμα 5.8** παρουσιάζει την οριζόντια θέση του κέντρου της δίνης ($u = v = 0$). Οι τιμές του x έχουν αδιαστοποιηθεί με το μήκος κύματος του τοιχώματος και η τιμή $x = 0$ αντιστοιχεί στο επίπεδο συμμετρίας της κοιλότητας. Για όλες λοιπόν τις συνθήκες αυτό που γίνεται εμφανές είναι ότι η δίνη βρίσκεται στο κατάντι μισό της κοιλότητας. Για μικρούς αριθμούς Reynolds η δίνη είναι σαφώς μετατοπισμένη προς τον άξονα συμμετρίας ενώ για μεγαλύτερους (πιο έντονες συνθήκες ροής) παρασύρεται.



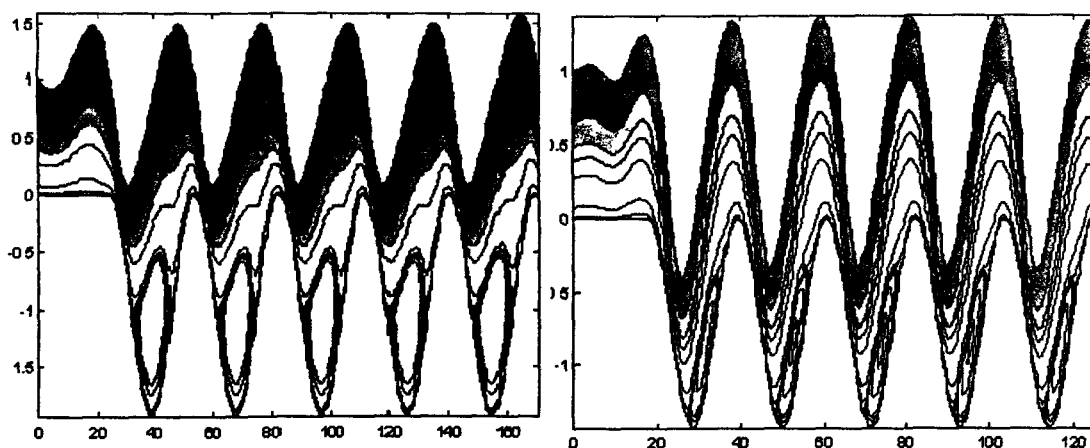
Σχήμα 5.8: Επίδραση του αριθμού Reynolds στην οριζόντια θέση της δίνης.

Για μια περίπτωση (βάθος = 0,0008 m, $Re=20$) η δίνη βρίσκεται ανάντι της κοιλότητας. Οι μεταβολές αυτές που έχουν καταγραφεί σε αυτό το διάγραμμα είναι σημαντικές, αν ληφθεί υπόψη ότι μια μεταβολή στο διάγραμμα κατά 0,1 αντιστοιχεί σε μετατόπιση του κέντρου της δίνης κατά 10% σε σχέση με το μήκος κύματος του τοιχώματος.



Σχήμα 5.9: Μορφολογία της δίνης για βάθος τοιχώματος 0,002 m και Reynolds 20 και 100.

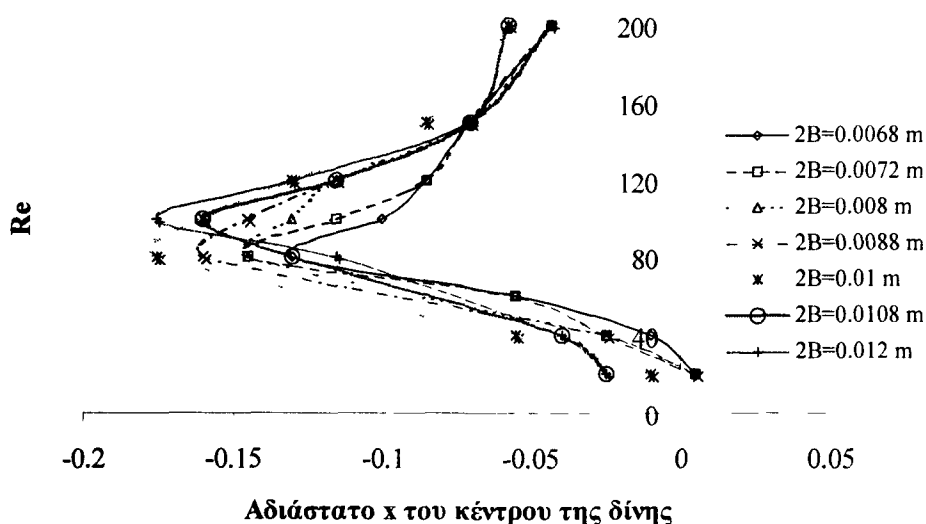
Η διαδικασία ποσοτικοποίησης των χαρακτηριστικών της πρωτεύουσας δίνης έχει ιδιαίτερη σημασία για το συγκεκριμένο πρόβλημα δεδομένης της πολυπλοκότητας της ροής, τόσο λόγω της ποικιλίας στη μορφολογία των δινών όσο και της έντασης με την οποία εμφανίζονται αυτές. Για του λόγου το αληθές, τα **Σχήματα 5.9, 5.10** που παριστάνουν ισοϋψείς των ροϊκών γραμμών του πεδίο ροής για τις συνθήκες που αναγράφονται. Η ποικιλία των μορφών είναι έκδηλη, από τις καλά σχηματισμένες συμμετρικές δίνες για Reynolds 20 και 40, στις δυσδιάκριτες δίνες για Reynolds 100.



Σχήμα 5.10: Μορφολογία της δίνης για βάθος τοιχώματος 0,008 m και Reynolds 40 και 100.

Η επίδραση του αριθμού Reynolds στα χαρακτηριστικά της δευτερεύουσας δίνης επικεντρώνεται στην οριζόντια θέση της δίνης καθώς η δευτερεύουσα δίνη εκ των πραγμάτων επηρεάζεται πολύ περισσότερο από το τοίχωμα. Στην επόμενη παράγραφο που αφορά την επίδραση του τοιχώματος στη ροή δίνονται με λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά της δευτερεύουσας δίνης.

Το **Σχήμα 5.11** είναι συγκεντρωτικό και δίνει την εξάρτηση της θέσης της δίνης από τον αριθμό Reynolds για ένα μεγάλο εύρος βάθους τοιχώματος. Ο άξονας x είναι αδιαστατοποιημένος ως προς το κέντρο της κοιλότητας. Η εικόνα είναι εντελώς διαφορετική από την εικόνα της θέσης της πρωτεύουσας δίνης μέσα στα κοιλώματα του τοιχώματος. Για όλες τις συνθήκες το κέντρο της δίνης βρίσκεται στο πρώτο μισό της κοιλότητας κινούμενοι με φορά προς τα δεξιά, ή αλλιώς στο ανάντι μισό.



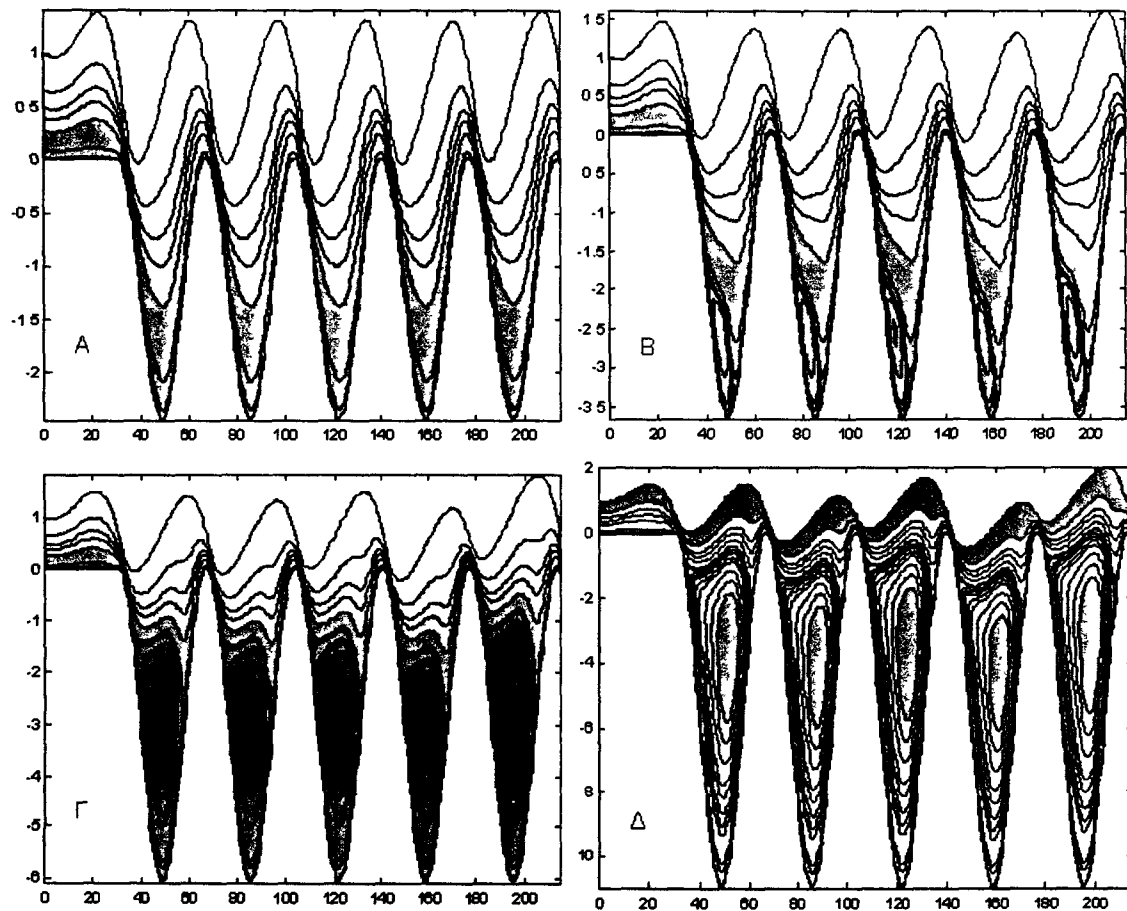
Σχήμα 5.11 : Επίδραση του αριθμού Reynolds στην οριζόντια θέση της δευτερεύουσας δίνης.

Ειδικότερα, για μικρούς αριθμούς Reynolds η δίνη βρίσκεται στο κέντρο της κοιλότητας ενώ αυξάνοντας τον Reynolds η δίνη συμπεριφέρεται ως εξής: δεν παρασύρεται από τη ροή, αλλά αντιστέκεται σε αυτήν και μετατοπίζεται στο αριστερό μισό της κοιλότητας. Αυτό συνεχίζεται μέχρι μια περιοχή αριθμών Reynolds. Όταν ο Reynolds αυξάνει ακόμα, αλλάζοντας τάξη μεγέθους η δίνη επιστρέφει κοντά στο κέντρο της λακκούβας χωρίς να ταυτιστεί με αυτό. Η συμπεριφορά είναι ίδια για όλα τα βάθη που αναφέρονται. Η εξήγηση κρύβεται στη φυσική του προβλήματος καθώς μεγάλος Reynolds σημαίνει μεγαλύτερο πάχος υμένα άρα η δευτερεύουσα δίνη αργεί να επηρεαστεί. Όσο για την αρχική της θέση φαίνεται να μένει εκεί που δημιουργείται καθώς οι αριθμοί Reynolds είναι πολύ μικροί, άρα ανίσχυροι να την συμπαράσσουν όπως συμβαίνει με την πρωτεύουσα δίνη. Η αριστερόστροφη κίνησή της την οδηγεί

στο αριστερό άκρο της λακκούβας για την περιοχή Reynolds που μπορούν να την επηρεάσουν.

5.1.2 Επίδραση του βάθους του τοιχώματος

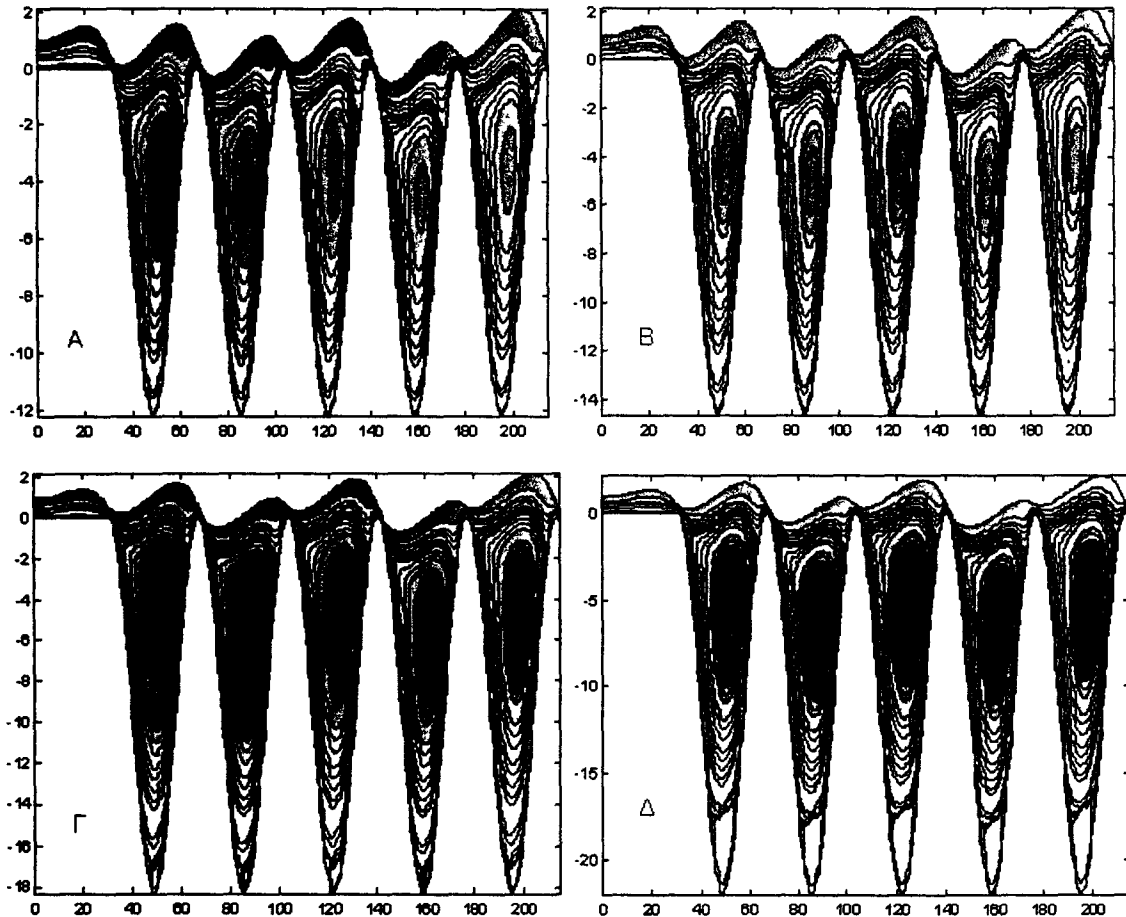
Σύμφωνα με την ασυμπτωτική μελέτη της ροής σε περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα των Bontozoglou & Paparolymerou (1996), αν η διαμόρφωση του τοιχώματος είναι γραμμική (απειροστό ύψος) τότε δεν εμφανίζεται καμία περιοχή ανακυκλοφορίας της ροής. Το δαισθητικά αναμενόμενο αυτό αποτέλεσμα υπενθυμίζει ότι ο σχηματισμός των δινών αποτελεί εγγενώς μη-γραμμικό φαινόμενο.



Σχήμα 5.12: Η ροή πάνω από ημιοειδές τοίχωμα για $Re=20$ και βάθη τοιχώματος $A=0,0008m$, $B=0,0012m$, $\Gamma=0,002m$, $\Delta=0,0036m$

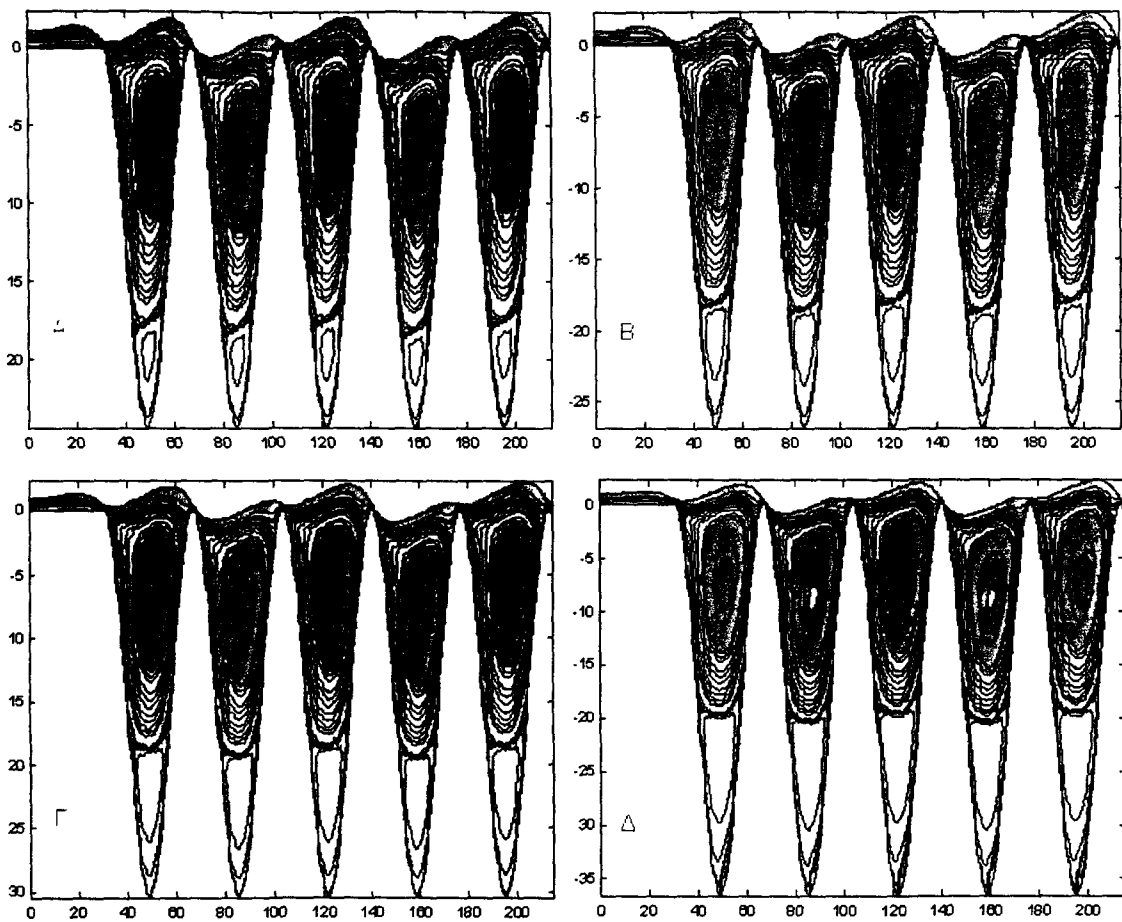
Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η επίδραση στα χαρακτηριστικά των δινών του βάθους του τοιχώματος. Καταρχάς επιχειρείται μία ποιοτική περιγραφή των διαφοροποιήσεων με το βάθος, διαμέσου διαγραμμάτων ροϊκών γραμμών. Για το σκοπό αυτό επιλέχτηκαν δύο τυπικοί αριθμοί Reynolds. Ένας μικρός, $Re=20$, (Σχήμα 5.12-Σχήμα 5.14) και ένας μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερος, $Re=150$ (Σχήμα 5.15, Σχήμα 5.16). Για βάθος τοιχώματος $0,0008\text{ m}$ το ρευστό ακολουθεί τις κοιλότητες του

τοιχώματος χωρίς να εγκλωβίζεται σε αυτές και να ανακυκλοφορεί. Τα διαγράμματα παριστάνουν ισοϋψείς της ταχύτητας του ρευστού. Για βάθος 0,0012 m και στο κάτω τοίχωμα της λακκούβας υπάρχει η ένδειξη ότι κάποια ποσότητα ρευστού ανακυκλοφορεί. Για βάθος 0,002 m σε όλες τις λακκούβες έχουν σχηματιστεί πρωτεύουσες δίνες και έχουν πάρει θέση σχεδόν στο κέντρο του κοιλώματος.



Σχήμα 5.13: Η ροή πάνω από ημιοιόδες τοίχωμα για $Re=20$ και βάθη τοιχώματος $A=0,004\text{ m}$, $B=0,0048\text{ m}$, $\Gamma=0,006\text{ m}$, $\Delta=0,0072\text{ m}$

Με αύξηση του βάθους η δίνη επιμηκύνεται, γίνεται πιο συμμετρική και καταλαμβάνει σχεδόν ολόκληρη τη λακκούβα (0,0048 m). Σε βάθος 0,006 m γίνεται αντιληπτή, με προσεκτική παρατήρηση, η γένεση νέας δευτερεύουσας δίνης, η οποία σχηματίζεται πλήρως στα οχτώ χιλιοστά βάθος. Η γένεση της νέας δίνης σηματοδοτεί και το σταμάτημα της ανάπτυξης της πρώτης δίνης, η οποία φαίνεται να συρρικνώνεται με περαιτέρω αύξηση του βάθους, σε αντίθεση με την δεύτερη που μεγαλώνει (**Σχήμα 5.14, Γ, Δ**). Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι στο τελευταίο διάγραμμα (**Σχήμα 5.14, Δ**) το βάθος της κοιλότητας είναι ίσο με το μήκος κύματος της διαμόρφωσης του τοιχώματος, 0,012 m. Για τα μεγέθη του φαινομένου αυτή είναι μια πολύ βαθιά κοιλότητα και σαφώς πολύ μακριά από τη γραμμική διαμόρφωση.

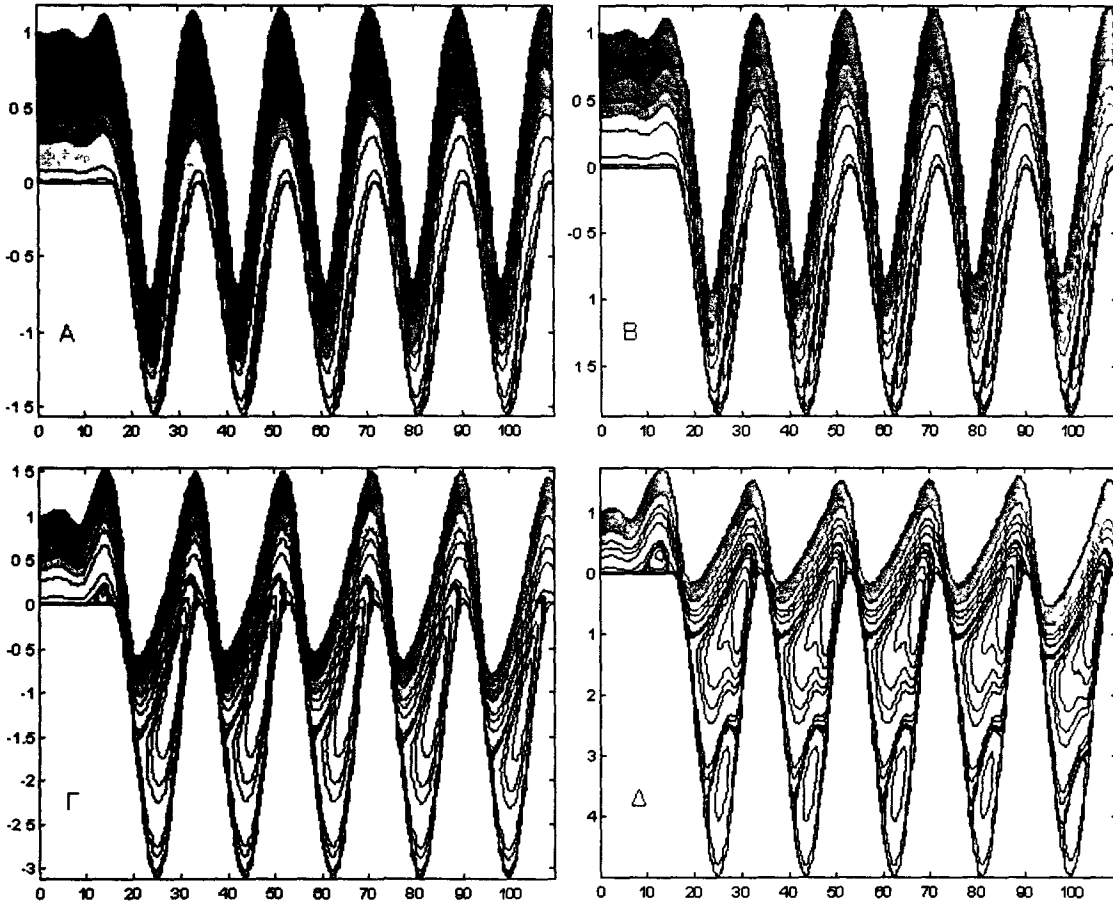


Σχήμα 5.14: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=20$ και βάθη τοιχώματος $A=0,008\text{ m}$, $B=0,0088\text{ m}$, $\Gamma=0,01\text{ m}$, $\Delta=0,012\text{ m}$

Δουλεύοντας με αριθμό Reynolds μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο, το πρώτο που γίνεται εμφανές είναι ότι, η επίδραση του τοιχώματος συμβαίνει για ίδιες τάξης μεγέθους βάθος κοιλότητας. Στο (**Σχήμα 5.15, A**) η ροή απλά ακολουθεί τη διαμόρφωση του τοιχώματος ενώ οι πρωτεύουσες δίνες σχηματίζονται για βάθος $0,0012\text{ m}$. Η ροή για Reynolds 150 έχει μεγαλύτερη ένταση με αποτέλεσμα οι δίνες να κολλάνε στο τοίχωμα της λακούβας, ένδειξη ότι παρασύρονται από τη ροή.

Με αύξηση του βάθους, η πρωτεύουσα δίνη μεγαλώνει, αναπτύσσεται και τείνει να καλύψει ολόκληρη την κοιλότητα. Για βάθος τοιχώματος $0,002\text{ m}$ οι δίνες είναι στρεβλές και επιμήκεις προς τα πάνω. Αυξάνοντας και άλλο το βάθος του τοιχώματος, η δίνη χωρίζεται σε δύο, μία στο κάτω μέρος της λακούβας και μία πάνω από αυτήν. Η δίνη που βρίσκεται στο κάτω μέρος της λακούβας μεγαλώνει εις βάρος της δίνης που βρίσκεται από πάνω της και αποκτά ένα συμμετρικό σχήμα. Σε βάθος τοιχώματος πάνω από $0,0088\text{ m}$, οι δίνες είναι εμφανώς δυο, ενώ στο τέλος του κοιλώματος ξεκινάει να δημιουργείται και τρίτη δίνη. Για το μέγιστο βάθος (ίσο με το μήκος κύματος του τοιχώματος $0,012\text{ m}$) οι διακριτές περιοχές ανακυκλοφορίας είναι τρεις. Κάτι που

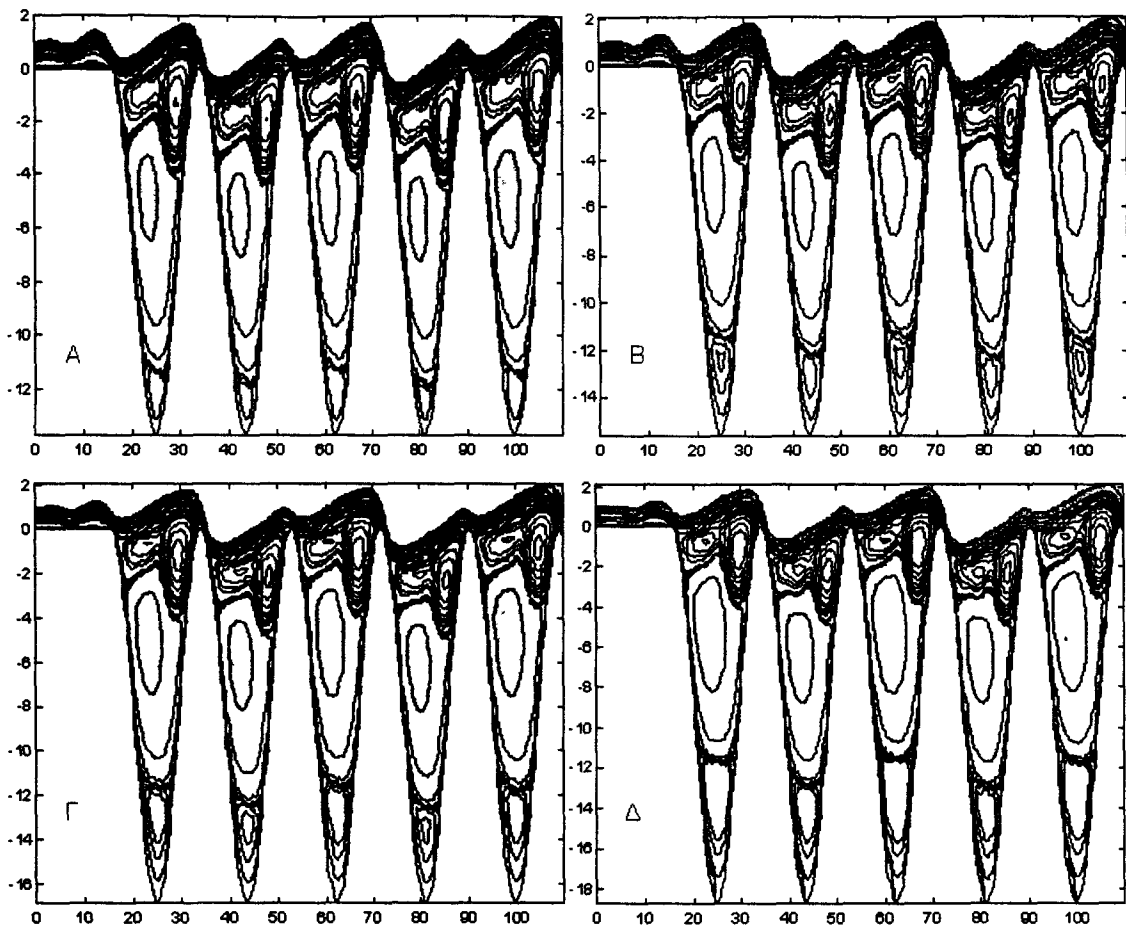
αξίζει εδώ να παρατηρηθεί είναι η ανά δύο δίνες συμμετρία που εμφανίζεται, η πρώτη με την τρίτη, η δεύτερη με την τέταρτη κ.τ.λ Το φαινόμενο με μικρότερη ένταση έχει συμβεί και για αριθμό Reynolds 20.



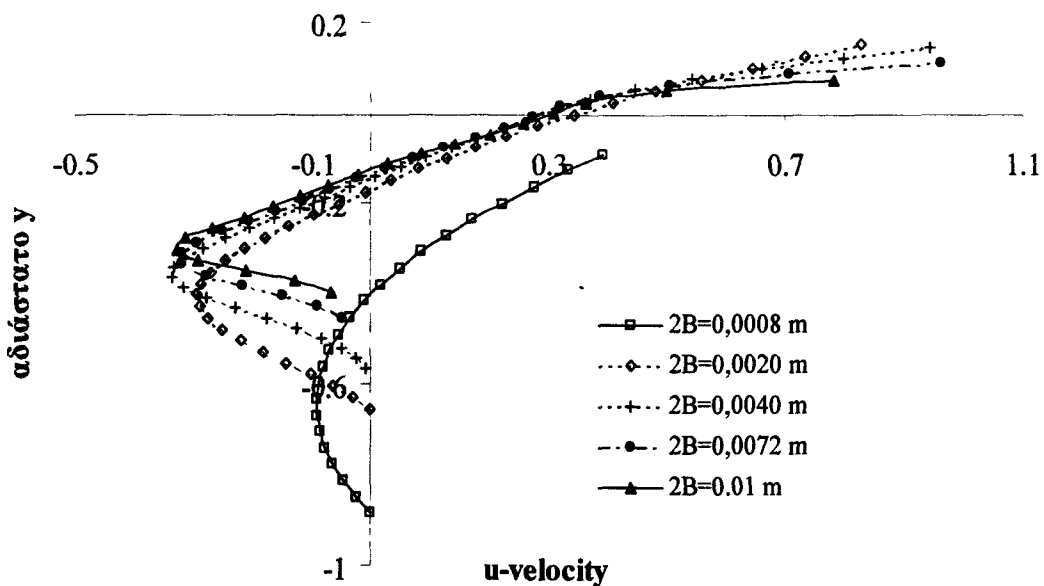
Σχήμα 5.15: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοιχώμα για $Re=150$ και βάθη τοιχώματος $A=0,0001\text{ m}$, $B=0,0012\text{ m}$, $\Gamma=0,002\text{ m}$, $\Delta=0,0032\text{ m}$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν πλήρως τη δίνη, είτε πρωτεύουσα, είτε δευτερεύουσα, είναι οι ταχύτητες εσωτερικά της δίνης, η ογκομετρική παροχή, η φορά περιστροφής της, και η ακριβής θέση της σε σχέση με την κοιλότητα του τοιχώματος. Η επίδραση του βάθους του τοιχώματος σε κάποια από αυτά τα χαρακτηριστικά ποσοτικοποιείται και παρουσιάζεται στη συνέχεια. Το εύρος των αριθμών Reynolds για το οποίο ισχύουν όλα τα επόμενα είναι αρκετά μεγάλο, από 10 έως 200.

Το **Σχήμα 5.17** παρουσιάζει την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας της κοιλότητας για σταθερό $Re=80$ και για βάθος τοιχώματος που ξεκινάει από $0,0008\text{ m}$ και φτάνει στα $0,01\text{ m}$. Η θέση $u=0$ προσδιορίζει χονδρικά το κέντρο της δίνης. Οι παρατηρήσεις από το διάγραμμα είναι οι εξής:



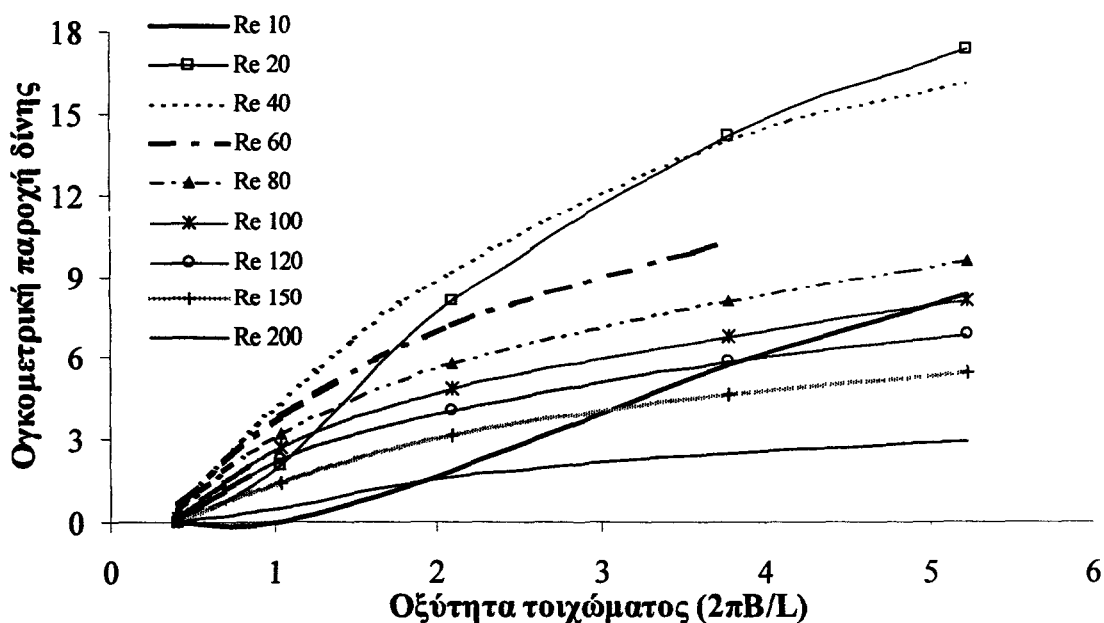
Σχήμα 5.16: Η ροή πάνω από ημιτοειδές τοίχωμα για $Re=150$ και βάθη τοιχώματος $A=0,0088m$, $B=0,01m$, $\Gamma=0,0108m$, $\Delta=0,012m$



Σχήμα 5.17: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στη u ταχύτητα της πρωτεύουσας δίνης για $Re=80$

- (i) Η δίνη περιστρέφεται δεξιόστροφα, με τις θετικές ταχύτητες (πάνω από το κέντρο της δίνης) να είναι υψηλότερες των αρνητικών (κάτω από το κέντρο).
- (ii) Η δίνη του μικρότερου βάθους διαφέρει ουσιαστικά από τις υπόλοιπες, ενώ οι κοιλότητες από 0,002 m έως 0,01 m δίνουν δίνες με παρόμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά. Ειδικότερα, σε βάθος 0,0008 m η κατανομή ταχύτητας είναι παραβολική, ενώ σε όλες τις άλλες υπάρχει παραμόρφωση τόσο στον πάτο της δίνης όσο και στην κορυφή.
- (iii) Αυξάνοντας το βάθος, η περιοχή ισχυρής αναστροφής της δίνης μετατοπίζεται σταδιακά προς υψηλότερες αδιάστατες θέσεις.
- (iv) Η επίδραση του βάθους (εξαιρούμενου του μικρότερου) στη μέγιστη ταχύτητα της δίνης είναι αμελητέα. Η συμμετρία της δίνης και η διατήρηση της δείχνει να είναι αποτέλεσμα δράσης της ν συνιστώσας της ταχύτητας μια και η οριζόντια συνιστώσα παρουσιάζει για όλα τα βάθη εντέλως ανομία εικόνα πάνω και κάτω από το κέντρο της δίνης.

Κύριο χαρακτηριστικό της δίνης είναι η ογκομετρική παροχή του υγρού που ανακυκλοφορεί στο εσωτερικό της. Ενώ, όπως έχει ήδη δειχθεί (**Σχήμα 5.7**), η παροχή αυτή εξαρτάται έντονα από τον αριθμό Re , η εξάρτηση από το βάθος του τοιχώματος είναι και αυτή σημαντική και παρουσιάζεται στο **Σχήμα 5.18**.



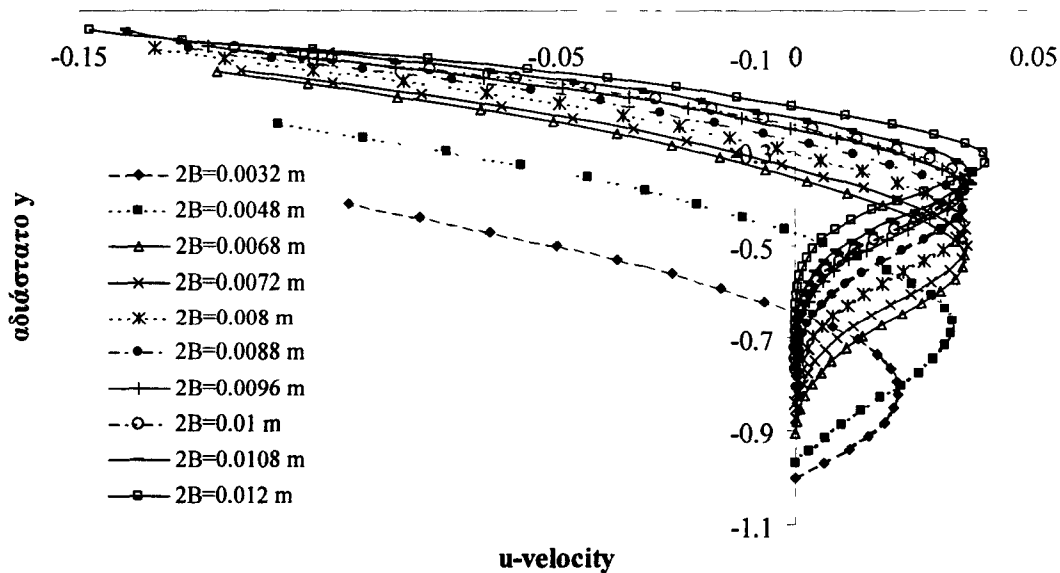
Σχήμα 5.18: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δίνης.

Εδώ είναι εμφανής η απαίτηση ενός ελάχιστου βάθους για τη δημιουργία δίνης, καθώς και η μονοτονική αύξηση της ανακυκλοφορίας με το βάθος. Αυτό σημαίνει ότι

με την αύξηση του χώρου της κοιλότητας, η δίνη διογκώνεται τείνοντας να την καταλάβει ολόκληρη. Η παρατήρηση αυτή έρχεται σε αντιδιαστολή με την εξάρτηση από τον Αριθμό Re , που δεν είναι μονοτονική αλλά παρουσιάζει μέγιστο σε ενδιάμεσες τιμές. Από το **Σχήμα 5.18** μένει ως ουσιώδες συμπέρασμα η τάση της επίδρασης του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή που είναι ίδια για όλο το εύρος των αριθμών Reynolds.

Η επίδραση του βάθους του τοιχώματος στα χαρακτηριστικά της δευτερεύουσας δίνης ολοκληρώνει την παράγραφο δίνοντας έτσι συνολική καταγραφή της εξάρτησης της ροής από αυτό. Η εποπτική εικόνα των δυο δινών έχει δοθεί σε προηγούμενο διάγραμμα (**Σχήμα 5.1**). Η δευτερεύουσα δίνη σχηματίζεται ανάλογα με τον αριθμό Reynolds, σε βάθη 0,0016 – 0,004 m.

Το πρώτο χαρακτηριστικό της δευτερεύουσας δίνης για το οποίο ποσοτικοποιείται η επίδραση του βάθους του τοιχώματος είναι η u ταχύτητα (**Σχήμα 5.19**). Όπως και στην περίπτωση της πρωτεύουσας δίνης, η μεταβολή του βάθους, επιδρά σταδιακά και όχι με τρόπο εντυπωσιακό στην οριζόντια ταχύτητα της δίνης. Η μορφή της κατανομής ταχύτητας είναι διαφορετική για τα χαμηλότερα βάθη ($2B=0,0032$ m, 0,0048 m) από ότι για όλα τα υψηλότερα. Με την αύξηση του βάθους, η ταχύτητα μεγαλώνει και το κέντρο της δίνης μετατοπίζεται σε υψηλότερη αδιάστατη θέση.



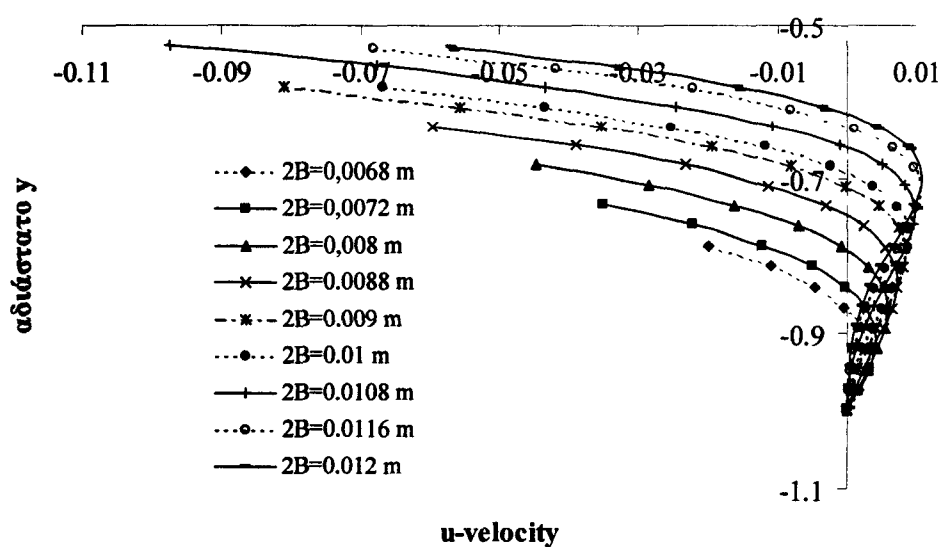
Σχήμα 5.19: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στη u ταχύτητα της δευτερεύουσας δίνης για $Re=100$.

Η δίνη όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.19** είναι αριστερόστροφη, καθώς η ταχύτητα πάνω από το κέντρο της δίνης είναι αρνητική άνω κάτω από αυτό θετική. Οι ταχύτητες πάνω από το κέντρο της δίνης είναι έως και πέντε φορές μεγαλύτερες.

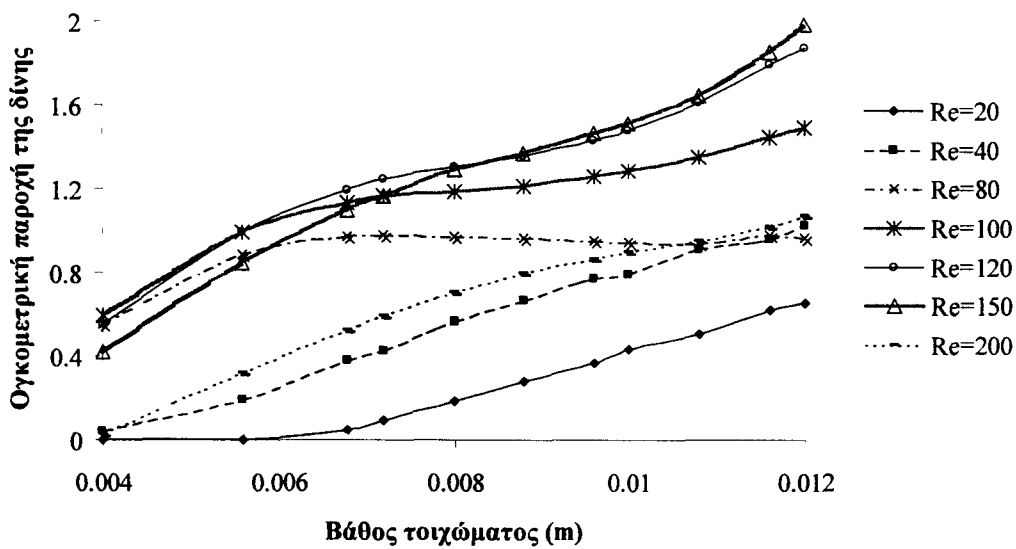
Οι ταχύτητες μαζί με την ογκομετρική παροχή είναι χαρακτηριστικά άμεσα εξαρτώμενα από τον αριθμό Reynolds και, όπως ήδη έχει φανεί, η επίδραση του σε αυτά είναι καταλυτική.

Το τοίχωμα επιδρά διαφορετικά στην οριζόντια ταχύτητα της δευτερεύουσας δίνης όταν ο αριθμός Reynolds είναι μικρός, γεγονός που δεν διαπιστώθηκε στην πρωτεύουσα δίνη. Αυτό δείχνει να είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η δευτερεύουσα δίνη βρίσκεται πολύ πιο κοντά στο τοίχωμα και για ήπιες συνθήκες ροής ($Re=20$) η δίνη επηρεάζεται έντονα από αυτό (Σχήμα 5.20). Για μικρές λοιπόν τιμές του αριθμού Reynolds (10, 20, 40) η δίνη μεγαλώνει με αύξηση του βάθους του τοιχώματος, η οριζόντια ταχύτητα της δίνης αυξάνεται πιο έντονα και παράλληλα η δίνη απλώνει στην κάθετη κατεύθυνση.

Η επίδραση του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή δίνεται για όλο το εύρος των αριθμών Reynolds στο Σχήμα 5.21. Το κυρίαρχο συμπέρασμα από το διάγραμμα είναι ότι αυξάνοντας το βάθος των διαμορφώσεων του τοιχώματος η ογκομετρική παροχή της δίνης αυξάνει μονοτονικά, ανεξαρτήτως του αριθμού Reynolds. Υπενθυμίζεται ότι η ογκομετρική παροχή μιας δίνης αποτελεί μέτρο της έντασης και της ισχύος της. Έτσι, σύγκριση με τα προηγούμενα αποτελέσματα δείχνει ότι η δευτερεύουσα δίνη φέρει σχεδόν δέκα φορές λιγότερο ρευστό σε σχέση με τη πρωτεύουσα. Αξίζει εδώ να παρατηρηθεί ότι η δευτερεύουσα δίνη μειώνεται σε ένταση σε υψηλούς Reynolds, σε αναλογία με την αντίστοιχη συμπεριφορά της πρωτεύουσας. Η δημιουργία επιπλέον δινών (σημείο διακλάδωσης της ροής) οδηγεί στο παραπάνω αποτέλεσμα.



Σχήμα 5.20: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στη u ταχύτητα της δευτερεύουσας δίνης για $Re=20$.



Σχήμα 5.21: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στην ογκομετρική παροχή της δευτερεύουσας δίνης.

5.2 Φαινόμενα στην ελεύθερη επιφάνεια

Η επίδραση του περιοδικά διαμορφωμένου τοιχώματος στην ελεύθερη επιφάνεια του λεπτού υμένα που ρέει πάνω από αυτό έχει αποδειχθεί ασυμππωτικά για την περίπτωση όπου η διαμόρφωση έχει πολύ μικρό ύψος και συνεπώς οι εξισώσεις γραμμικοποιούνται [Bontozoglou & Parapolymou, 1997]. Η περιοδικότητα του τοιχώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι εισάγει στη ροή μία χωρική διαταραχή.

Ένα πρώτο ερώτημα είναι αν η διαμόρφωση της ροής παρουσιάζει το ίδιο μήκος κύματος με του τοιχώματος και αν βρίσκεται σε φάση με αυτό. Ένα σημαντικότερο ερώτημα αφορά την δεκτικότητα της ροής στη διαταραχή, δηλαδή τη σύγκριση μεταξύ παραμόρφωσης της ροής και παραμόρφωσης του τοιχώματος. Αναφορικά με το τελευταίο, οι Bontozoglou & Parapolymou διαπίστωσαν συντονισμό, δηλαδή ένα στενό διάστημα αριθμών Re όπου το ύψος της διαταραχής της ελεύθερης επιφάνειας γινόταν μέγιστο.

Στο παρόν κεφάλαιο επαληθεύονται αρχικά τα γραμμικά αποτελέσματα για δύο μήκη κύματος τοιχώματος, από τα οποία το ένα προκαλεί σχετικά ισχυρό συντονισμό και το άλλο πολύ ασθενή. Στη συνέχεια μελετάται η επίδραση του τοιχώματος υπό το πρίσμα δυο παραμέτρων, του αριθμού Reynolds και του βάθους της διαμόρφωσης του τοιχώματος. Η διερεύνηση του φαινομένου μέσω του φάσματος ισχύος των αρμονικών της ελεύθερης επιφάνειας λειτουργεί συμπληρωματικά στην προσπάθεια τεκμηρίωσης όσων παρατηρήθηκαν.

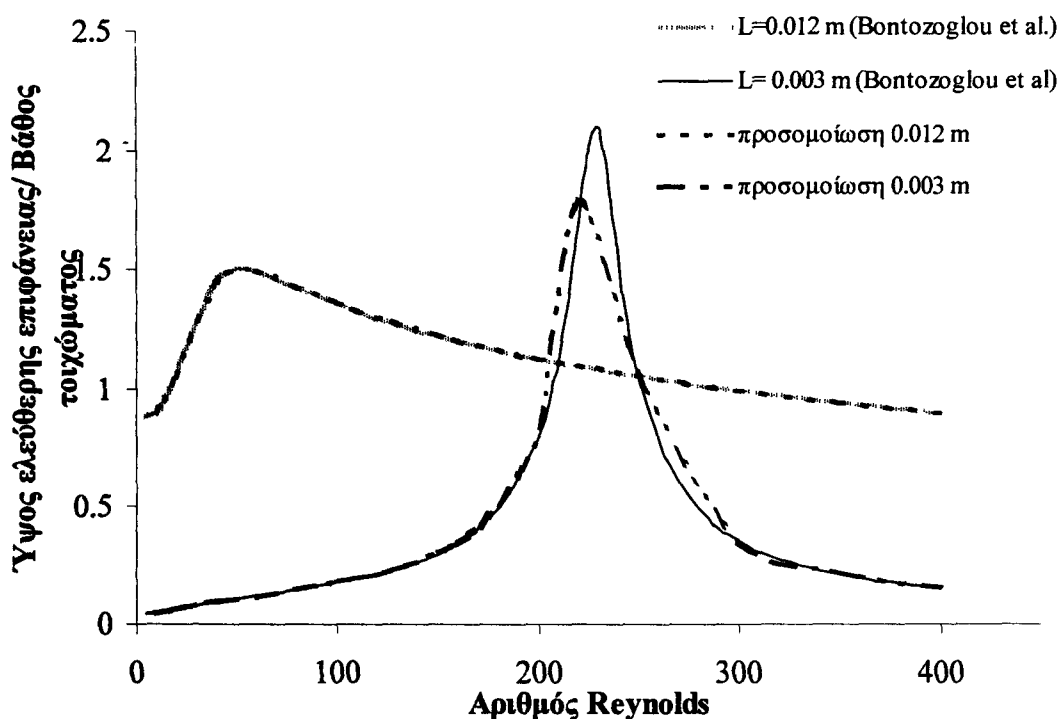
Αν και η ροή πάνω από περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα έχει χωριστεί στα φαινόμενα της κύριας μάζας του ρευστού και σε αυτά στην ελεύθερη επιφάνεια, είναι

δεδομένο ότι τα δύο αλληλεξαρτώνται και αλληλεπιδρούν. Ο τρόπος με τον οποίο συμβαίνει αυτό αποτελεί αντικείμενο έρευνας.

5.2.1 Επαλήθευση γραμμικών αποτελεσμάτων

Η επαλήθευση αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας αποτελεί πάγια τακτική, ειδικά στις περιπτώσεις των υπολογιστικών μελετών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπήρχε πληθώρα αποτελεσμάτων της γραμμικής ανάλυσης της ροής πάνω από περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα από τους Bontozoglou & Papanolymerou, 1997. Επιλέχθηκαν να επαληθευτούν και να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα εκείνα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τη δεδομένη μελέτη.

Στο **Σχήμα 5.22** δίνεται το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αδιαστατοποιημένο με το βάθος της διαμόρφωσης του τοιχώματος για ένα μεγάλο εύρος αριθμών Reynolds.



Σχήμα 5.22: Επαλήθευση αποτελεσμάτων συντονισμού από τη γραμμική ανάλυση

Τα αποτελέσματα της προσομοιώσεις για ασθενή και ισχυρο συντονισμό δίνονται στο ίδιο διάγραμμα. Το μέγεθος που διαφοροποιεί τις καμπύλες είναι το μήκος κύματος της διαμόρφωσης. Στη μια περίπτωση (ασθενής συντονισμός) το μήκος κύματος είναι 0,012 m. Ο ισχυρός συμβαίνει για μήκος κύματος 0,003 m.

Ο συντονισμός είναι γραμμικό φαινόμενο και μια ένδειξη της γραμμικότητας του φαινομένου είναι ο λόγος $\varepsilon = \frac{\sigma}{\lambda}$, όπου σ το ύψος της διαταραχής και λ το μήκος

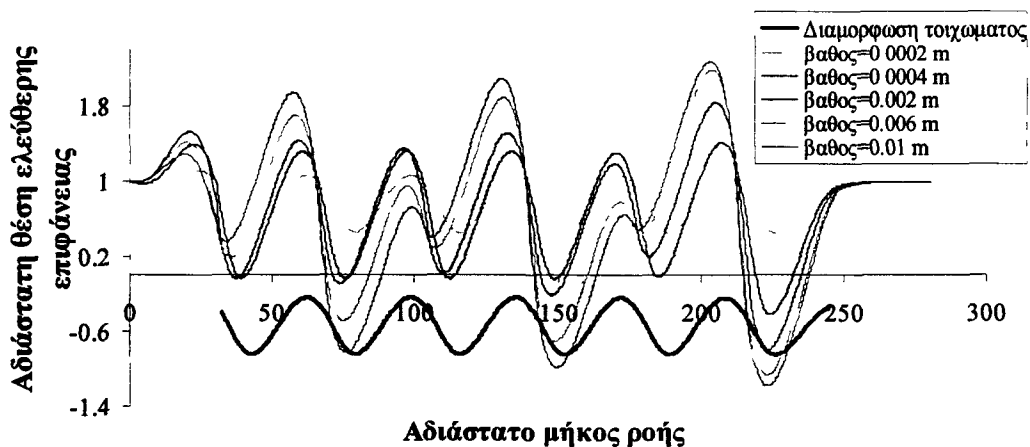
κύματος. Το βάθος του τοιχώματος στις προσομοιώσεις διατηρήθηκε 0,00001 m. Έτσι για $\lambda=0,012$ m το $\varepsilon \sim 10^{-4}$ και για $\lambda=0,003$ m το $\varepsilon \sim 10^{-3}$. Αυτό εξηγεί την απόλυτη συμφωνία των προσομοιώσεων με τα αποτελέσματα από τους Βοντοζογίου & Ραπαρολυμέου για $\lambda=0,012$ m και την καλή συμφωνία με απόκλιση στις μέγιστες τιμές για $\lambda=0,003$ m.

Με δεδομένη τη συμφωνία των γραμμικών αποτελεσμάτων η έρευνα συνεχίστηκε για μεγαλύτερα βάθη τοιχώματος. Μελετήθηκε και παρουσιάζεται ποσοτικά η επίδραση του βάθους τοιχώματος στη θέση και τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας παράλληλα με την επίδραση του αριθμού Reynolds.

5.2.2 Θέση και μορφή της ελεύθερης επιφάνειας

Ο αριθμός Reynolds και η διαμόρφωση του τοιχώματος επηρεάζουν τη θέση και τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας με τρόπο ιδιαίτερα έντονο και χαρακτηριστικό. Εδώ, πολύ περισσότερο από ότι για την κύρια μάζα του ρευστού, η επίδραση αυτή διακρίνεται σε δυο περιοχές, μικροί-μεγάλοι Reynolds και μικρά και μεγάλα βάθη τοιχώματος αντίστοιχα. Στα σχήματα που έχουν προηγηθεί (**Σχήμα 5.1, Σχήμα 5.9, Σχήμα 5.10, Σχήμα 5.12, Σχήμα 5.13, Σχήμα 5.14, Σχήμα 5.15, Σχήμα 5.16**) εκτός των άλλων, αποτυπώνεται η θέση και η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

Στα επόμενα τρία διαγράμματα (**Σχήμα 5.23, Σχήμα 5.24, Σχήμα 5.25**) δίνεται η ελεύθερη επιφάνεια σε σχέση με τη διαμόρφωση του τοιχώματος για διαφορετικά βάθη διαμόρφωσης του ίδιου αριθμού Reynolds. Αν και οι καμπύλες είναι μάλλον ευανάγνωστες αξίζει να δοθεί με κάποια λεπτομέρεια η περιγραφή τους μαζί με σχόλια για το φυσικό φαινόμενο. Στο **Σχήμα 5.23** ο αριθμός Reynolds είναι είκοσι. Η μαύρη έντονη καμπύλη αντιστοιχεί στο ημίτονο της διαμόρφωσης του τοιχώματος. Είναι εμφανές ότι η ελεύθερη επιφάνεια αποκρίνεται πιστά στη διαμόρφωση αυτή όταν το τοίχωμα είναι μικρού βάθους (0,0002 m, πράσινη αχνή καμπύλη).



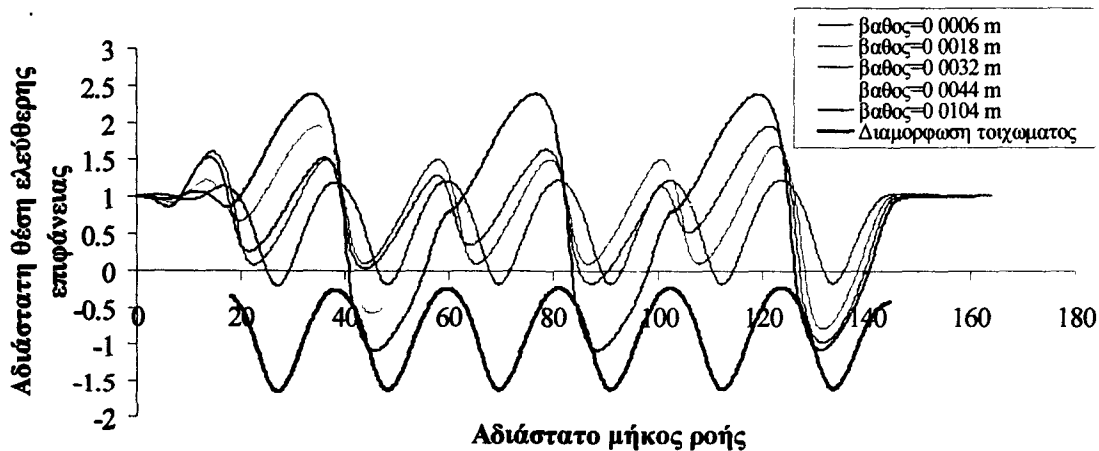
Σχήμα 5.23: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για αριθμό Reynolds 20.

Υπενθυμίζεται ότι ο υμένας ρέει πάνω από το περιοδικά διαμορφωμένο τοίχωμα χωρίς αρχική διαταραχή και ότι η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στο τοίχωμα. Για διπλάσιο βάθος τοιχώματος η ελεύθερη επιφάνεια δείχνει να ακολουθεί το τοίχωμα, παρόλαυτα διαφαίνεται μικρή διάφορα φάσης με αυτό (κόκκινη καμπύλη). Η διάφορα φάσης της ελεύθερης επιφάνειας με το τοίχωμα γίνεται πολύ πιο έντονη όταν αυτό βαθαινει ακόμα.

Παράλληλα με τη διάφορα φάσης, το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μεγαλώνει όσο μεγαλώνει το βάθος του τοιχώματος. Με την αύξηση του ύψους και τη διεύρυνση της διαφοράς φάσης, η ελεύθερη επιφάνεια χάνει σταδιακά τη μορφή της που οφειλόταν στη διαμόρφωση του τοιχώματος και οδηγείται σε μια μορφή με υποδιπλάσιες κορυφές από αυτές του τοιχώματος. Η διαμόρφωση αυτή δείχνει να είναι ανεπηρέαστη από το βάθος από τη στιγμή που δημιουργείται και μετά.

Παρόμοια είναι η συμπεριφορά για αριθμό Reynolds εκατό. Αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος η ελεύθερη επιφάνεια αποκτάει διαφορά φάσης με αυτό, μεγαλώνει σε ύψος και καταλήγει σε μια σταθερή διαμόρφωση με τρεις κορυφές.

Συγκρίνοντας το διάγραμμα για Reynolds εκατό με αυτό για Reynolds είκοσι γίνεται εμφανές ότι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας για το πρώτο είναι μεγαλύτερο από αυτό για Reynolds είκοσι και αυτό γιατί στο πρώτο ο υμένας είναι πιο παχύς.

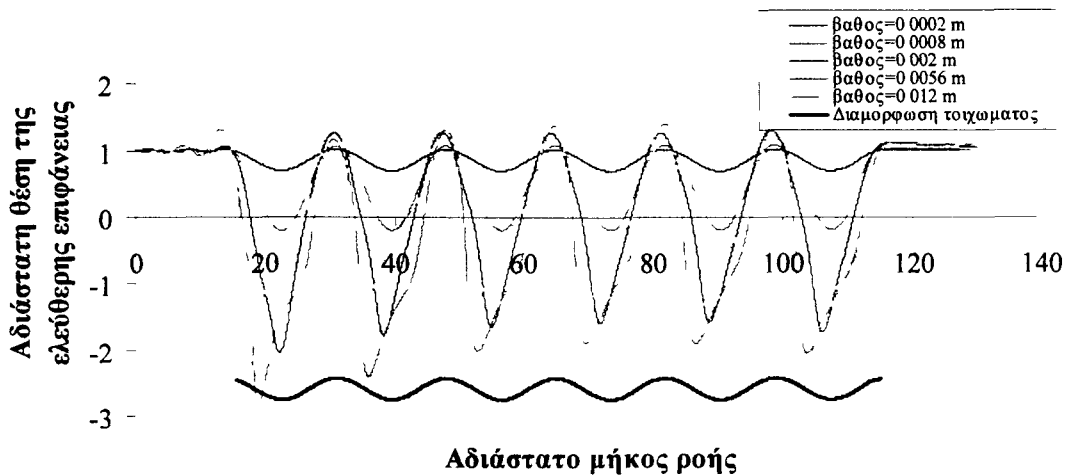


Σχήμα 5.24: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για αριθμό Reynolds 100.

Επίσης για το μεγάλο Reynolds απαιτείται μικρότερο βάθος κοιλότητας ώστε η ελεύθερη επιφάνεια να φτάσει στη σταθερή διαμόρφωση των τριών κορυφών.

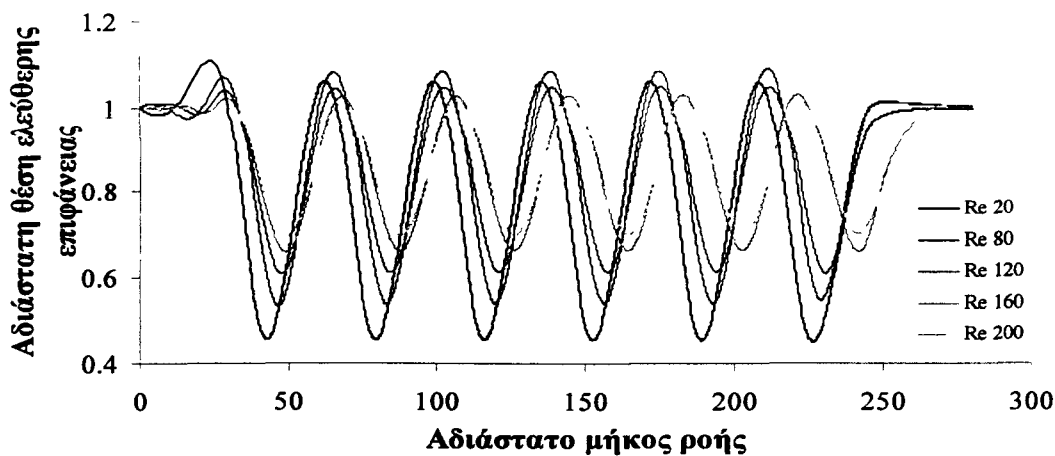
Τα πράγματα είναι εντελώς διαφορετικά όταν ο Reynolds είναι διακόσια. Το βάθος του τοιχώματος δεν επηρεάζει τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας παρά μόνο το ύψος της το οποίο αυξάνει μέχρι ένα βάθος και μετά μικραίνει ξανά (ένδειξη συντονισμού, ασθενικού όπως έχει ήδη αποδειχτεί). Οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε βάθη 0,0056 m και 0,012 m είναι ενδεικτικές αυτού του γεγονότος. Ούτε καν διάφορα

φάσης με το τοίχωμα δεν παρατηρείται καθώς το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μεγαλώνει.



Σχήμα 5.25: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για αριθμό Reynolds 200.

Ο Reynolds διακόσια αντιστοιχεί σε υμένα αρκετά παχύ και η οποιαδήποτε επίδραση του τοιχώματος στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού πιθανόν σβήνει μέσα στην κύρια μάζα του ρευστού με τη βοήθεια των δινών. Είναι χαρακτηριστικό (**Σχήμα 5.20**) ότι ογκομετρική παροχή των δινών για Reynolds διακόσια είναι σχεδόν ίση με αυτή για Reynolds σαράντα. Ένας μεγάλος Reynolds φαίνεται να επιδρά καθοριστικά στη ροή έτσι ώστε η οποιαδήποτε επίδραση του τοιχώματος να σβήνει. Η σχέση των δινών στην κύρια μάζα του ρευστού με την αντίστοιχη διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι υπό διερεύνηση.

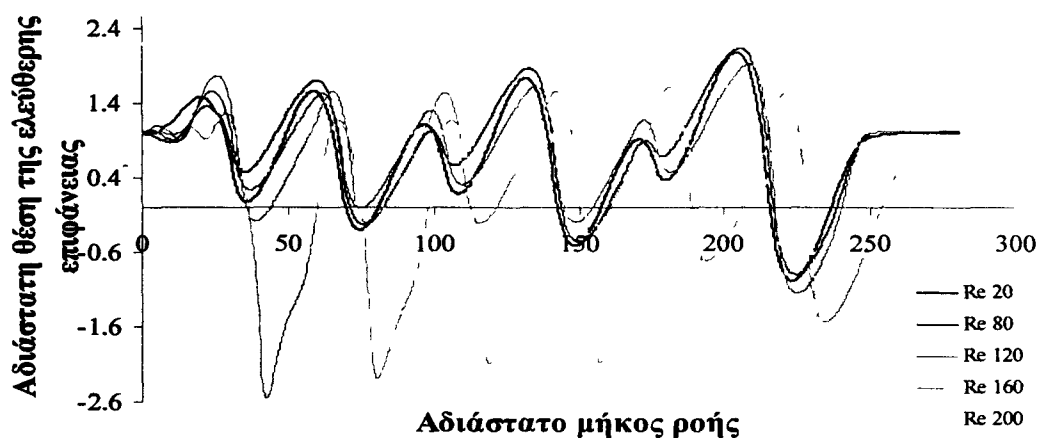


Σχήμα 5.26: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0,0002 m.

Τα **Σχήματα 5.26, 5.27, 5.28** παριστάνουν για ίδια βάθη τοιχώματος την επίδραση του αριθμού Reynolds. Έτσι, για βάθος 0,0002 m, αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds το αδιάστατο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μικραίνει ενώ δεν υπάρχει καμία

επίδραση στη μορφή της επιφάνειας. Αναλογιζόμενοι ότι αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds παχιάει ο υμένα, δείχνει λογικό να μειώνεται το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας καθώς όλο και μεγαλύτερη ποσότητα ρευστού ρέει κάτω απ' αυτήν. Υπενθυμίζεται πάντως ότι με αύξηση του Reynolds αυξάνει και το μέσο πάχος υμένα κατά Nusselt, που χρησιμοποιείται στην αδιαστατοποίηση της ελεύθερης επιφάνειας. Το ίδιο για βάθος 0,004 m για όλους τους Reynolds έως εκατόν πενήντα η τάση είναι εντελώς ίδια. Από αυτό διαπιστώνεται ότι η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι αποτέλεσμα αποκλειστικά της επίδρασης του τοιχώματος.

Το πρόβλημα έχει διαφορετική εντελώς εικόνα για αριθμό Reynolds πάνω από εκατόν πενήντα. Όταν ο Reynolds είναι εκατόν εξήντα η ελεύθερη επιφάνεια έχει τη διαμόρφωση του τοιχώματος και ύψος συγκρίσιμο με αυτό των προηγούμενων Reynolds. Μεταβαίνοντας σε Reynolds διακόσια το ύψος διπλασιάζεται χωρίς να αλλάξει η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 5.27: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0,004 m

Η επίδραση των αριθμών Reynolds για βάθος τοιχώματος ίσο με το μήκος κύματος του (0,012 m) παριστάνεται στο επόμενο διάγραμμα (**Σχήμα 5.28**).

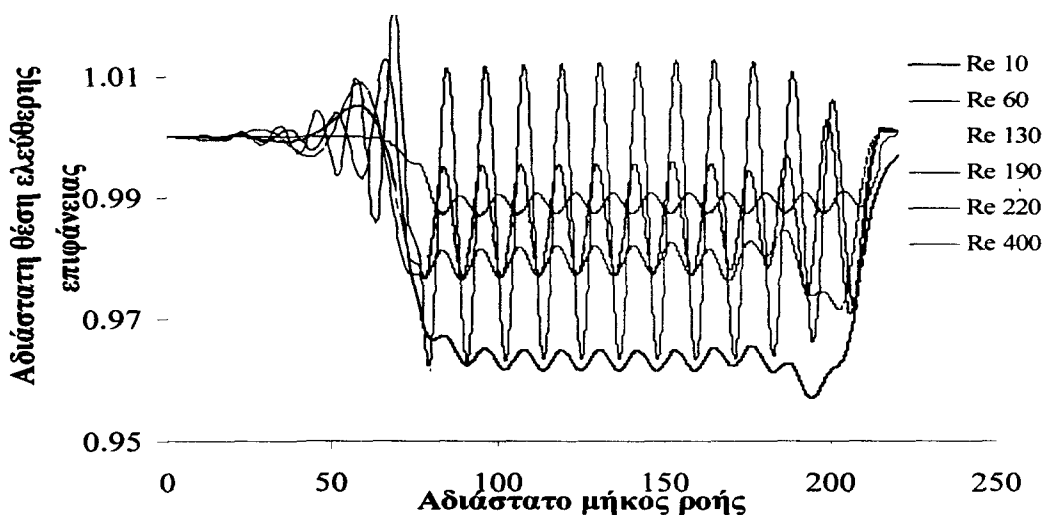


Σχήμα 5.28: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0,012 m

Σε αυτό, η ελεύθερη επιφάνεια για αριθμό Reynolds εκατόν εξήντα, δείχνει να επηρεάζεται από το τοίχωμα και να αντιδρά ανάλογα (διαμόρφωση με τρεις κορυφές). Η ελεύθερη επιφάνεια για Reynolds διακόσια εξακολουθεί να έχει τη διαμόρφωση του τοιχώματος.

Το **Σχήμα 5.29** είναι το μοναδικό σε αυτήν την παράγραφο για μήκος κύματος διαμόρφωσης 0,003 m μια και για το συγκεκριμένο μέγεθος τα

αποτελέσματα ακόμα παράγονται και διερευνούνται. Έτσι πριν κλείσει η παρουσίαση των διαμορφώσεων της ελεύθερης επιφάνειας για ένα βάθος και μια ένα εύρος Reynolds δίδεται και το αντίστοιχο διάγραμμα για μήκος κύματος 0,003 m.



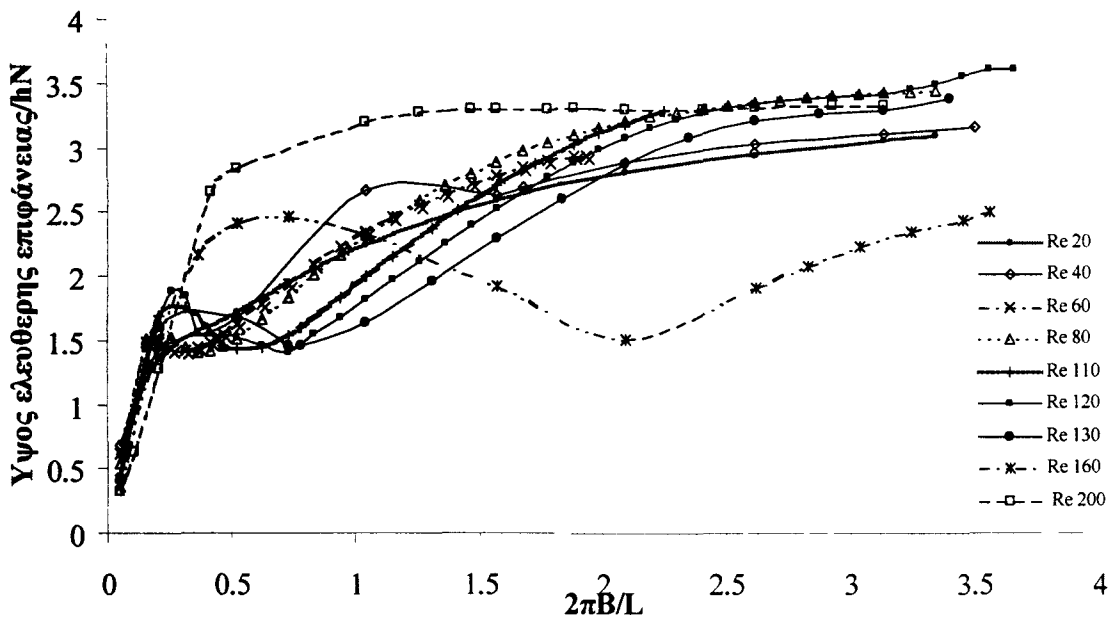
Σχήμα 5.29: Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για βάθος τοιχώματος 0,00001 m

Το χαρακτηριστικό του **Σχήματος 5.29** είναι η θέση της ελεύθερης επιφάνειας που αντιστοιχεί σε Reynolds διακόσια είκοσι. Το ύψος της είναι εμφανώς πολλαπλάσιο από το ύψος που αντιστοιχεί στους άλλους Reynolds. Το ύψος αυτό αντιστοιχεί στο συντονισμό και σε αυτό το διάγραμμα παρουσιάζεται εποπτικά. Κάτι ακόμα που μπορεί να γίνει αντιληπτό από το διάγραμμα είναι εν γενεί το πολύ μικρό ύψος της ελεύθερης επιφάνειας, ακόμα και για Reynolds τετρακόσια.

Για μια ακόμα φορά επιβεβαιώνεται ότι η διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας για δεδομένη γωνία κλίσης του τοιχώματος, δεν εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Reynolds αλλά το ίδιο ισχυρά και από το βάθος του τοιχώματος μια και όπως φαίνεται για σταθερό βάθος η αύξηση του Reynolds επιδρά αποκλειστικά στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας, τουλάχιστον όσο το βάθος είναι γραμμικό. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας παραμένει αντίστοιχη με τη διαμόρφωση του τοιχώματος σε όλο το εύρος των Reynolds.

Το **Σχήμα 5.30** είναι συγκεντρωτικό και παριστάνει την επίδραση του αριθμού Reynolds στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού υμένα όταν το μήκος κύματος της διαμόρφωσης είναι 0,012 m. Οι άξονες στο διάγραμμα είναι

αδιαστατοποιημένοι, ο μεν x με το μήκος κύματος της διαμόρφωσης, ο δε y με το ύψος του υμένα κατά Nusselt.



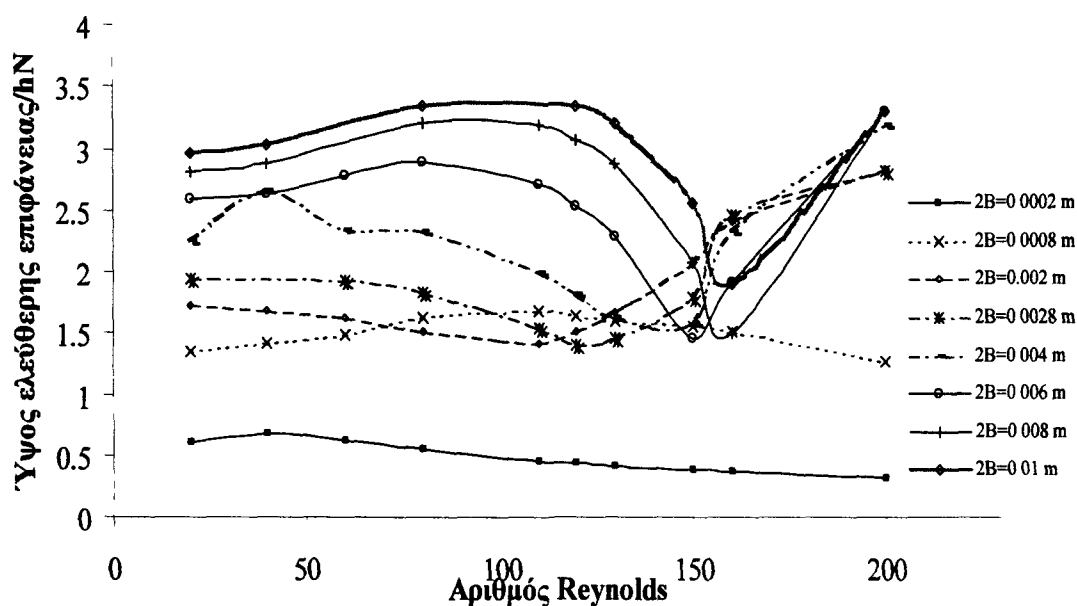
Σχήμα 5.30: Επίδραση του αριθμού Reynolds ύψος της ελεύθερης επιφάνειας για μεγάλο εύρος βάθους τοιχώματος.

Από την παρατήρηση του διαγράμματος προκύπτουν:

- (i) Για μικρά βάθη τοιχώματος και για όλους τους αριθμούς Reynolds το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνει έντονα και απότομα.
- (ii) Δεν γίνονται εμφανείς συνθήκες συντονισμού παρά μόνο ένας ασθενικός για τοίχωμα κοντά στο 0,4 και Reynolds από εκατό έως εκατόν είκοσι.
- (iii) Η περιοχή Reynolds γύρω από το εκατόν πενήντα σηματοδοτεί αλλαγή στην επίδραση του αριθμού Reynolds μετά από κάποιο βάθος τοιχώματος.
- (iv) Από ένα βάθος τοιχώματος και μετά το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας αλλάζει ασυμπωπτικά με το βάθος του τοιχώματος και αυτό είναι πολύ παρόμοιο για όλους τους αριθμούς Reynolds που μελετήθηκαν.

Το **Σχήμα 5.31** είναι ένα ακόμα συγκεντρωτικό όπου παρεμβάλλονται συνολικά δεδομένα για βάθος τοιχώματος και αριθμούς Reynolds όταν η διαμόρφωση του τοιχώματος έχει μήκος κύματος 0,012 m. Οι παρατηρήσεις:

- (i) Η τάση που διαφαίνεται συνολικά στο διάγραμμα είναι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας τείνει να μικρύνει με αύξηση του αριθμού Reynolds, με πολλές ενδιαφέρουσες εξαιρέσεις.
- (ii) Το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας εξαρτάται πιο έντονα από το βάθος της διαμόρφωσης για αριθμούς Reynolds κάτω από τον εκατόν πενήντα.



Σχήμα 5.31: Επίδραση του βάθους του τοιχώματος στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας για όλο το εύρος των αριθμών Reynolds.

- (iii) Για τα τελευταία τρία μεγάλα βάθη τοιχώματος η περιοχή Reynolds γύρω στο εκατόν πενήντα είναι καθοριστική καθώς με την ίδια ακριβώς τάση το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας μικραίνει και μετά αυξάνει απότομα.
- (iv) Η ίδια περιοχή αριθμών Reynolds σηματοδοτεί αλλαγή στην τάση του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας και για βάθη ενδιάμεσα (0,002 m, 0,0028 m, 0,004 m).

Μετά την παρατήρηση των διαγραμμάτων για τη θέση και τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας και λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των Βοητοζογλου & Ραπαρολυμερου (1997) μένει η αίσθηση ότι το φαινόμενο που παρακολουθούμε εδώ αποτελεί κομμάτι ενός γενικότερου και πιο σημαντικού που έχει να κάνει με την επίδραση του τοιχώματος στη θέση της ελεύθερης επιφάνειας και τις ενδεχόμενες συνθήκες συντονισμού.

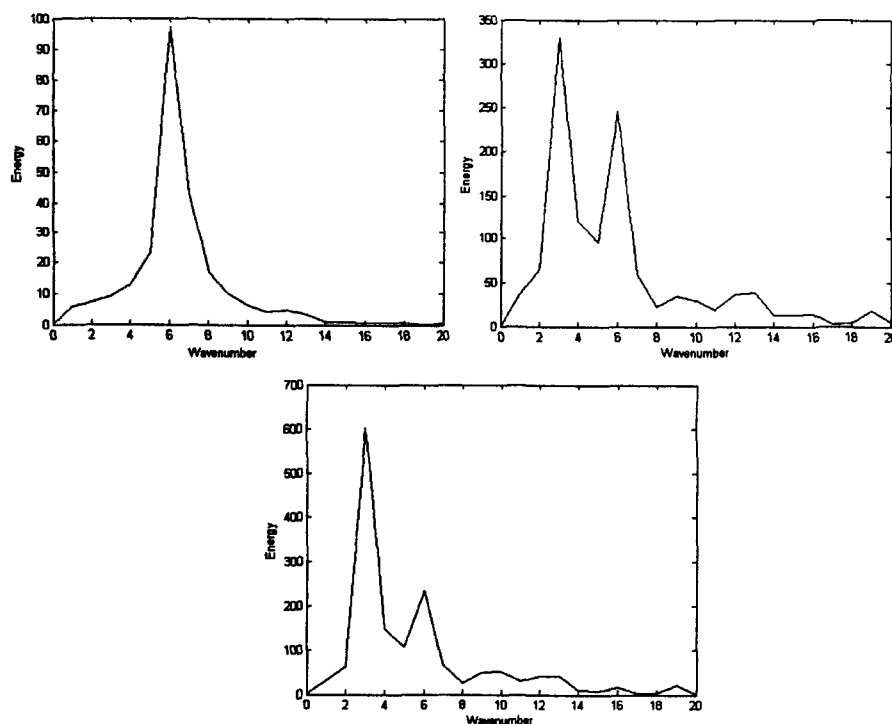
Το πιο καθαρό και ανεξάρτητο φαινόμενο που διαπιστώθηκε στη παρούσα μελέτη είναι η μετάβαση της ελεύθερης επιφάνειας από τη μορφή που ακολουθεί τη διαμόρφωση του τοιχώματος σε αυτή με τις υποδιπλάσιες κορυφές. Η παράγραφος που ακολουθεί επικεντρώνεται στην ύπαρξη αυτού του φαινομένου.

5.2.3 Φασματική ανάλυση μορφής ελεύθερης επιφάνειας

Η ανάλυση μιας περιοδικής συνάρτησης σε σειρές Fourier και η εύρεση των αρμονικών της παρέχει ουσιαστικές πληροφορίες για την περιοδικότητα του φαινομένου που περιγράφεται από αυτή τη συνάρτηση. Η κύρια αρμονική του φαινομένου είναι γνωστό ότι φέρει τη μεγαλύτερη φασματική ισχύ και αυτός ακριβώς

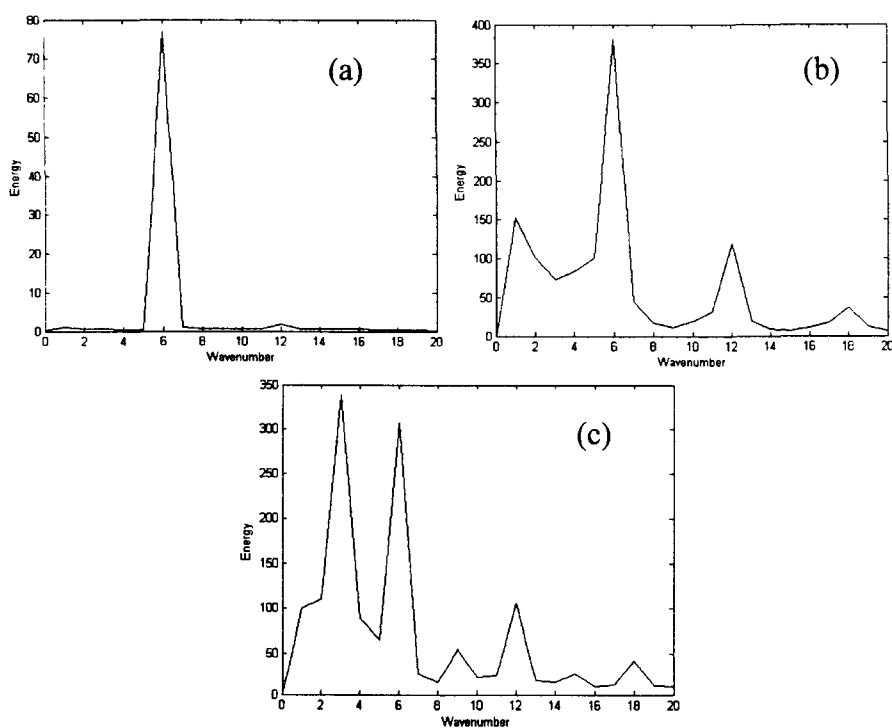
είναι ο τρόπος με τον οποίο διακρίνεται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το αντικείμενο του ενδιαφέροντος είναι η περιοδικότητα της ελεύθερης επιφάνειας η οποία διαπιστώθηκε ότι αλλάζει καθώς αυξάνει το βάθος του τοιχώματος. Να σημειωθεί εδώ ότι το πλήθος των διαμορφώσεων είναι μικρό, ο κυματαριθμός δηλαδή είναι μικρός (έξι), παρόλαυτα η ένταση του φαινομένου δείχνει να είναι ανεξάρτητη του κυματαριθμού.

Τα διαγράμματα που ακολουθούν τεκμηριώνουν τη μετάβαση της ελεύθερης επιφάνειας από τη μορφή που ακολουθεί το τοίχωμα σε αυτήν με τις υποδιπλάσιες κορυφές. Το **Σχήμα 5.32** είναι για αριθμό Reynolds 80 και τρία διαφορετικά βάθη τοιχώματος. Στο **Σχήμα 5.32(a)** το βάθος του τοιχώματος είναι μικρό και η ελεύθερη επιφάνεια ακολουθεί το τοίχωμα, η κύρια αρμονική λοιπόν της συνάρτησης που την περιγράφει είναι μια και γίνεται μέγιστη στο κυματαριθμό που αντιστοιχεί στην ημιτονοειδή συνάρτηση του τοιχώματος. Για την ακρίβεια, καμία άλλη περιοδικότητα δεν φαίνεται να υπάρχει στην ελεύθερη επιφάνεια. Στο **Σχήμα 5.32(b)** πολλές αρμονικές έχουν κάνει την εμφάνισή τους, δυο από αυτές κυριαρχούν, αυτή που αντιστοιχεί στον κυματαριθμό του τοιχώματος και πολύ πιο ισχυρή δίπλα της η αρμονική που αντιστοιχεί στο υποδιπλάσιο του κυματαριθμού του τοιχώματος. Αυτή είναι τώρα η κύρια αρμονική της συνάρτησης της ελεύθερης επιφάνειας και αυτή καθορίζει την περιοδικότητα της. Στο **Σχήμα 5.32(c)** η κύρια αρμονική έχει ενισχυθεί ακόμα πιο πολύ και αδιαμφισβήτητα επιβάλλεται στο φαινόμενο. Η ισχύ δε που φέρει η υποαρμονική που γίνεται κύρια συγκρινόμενη με την αρχικά κύρια αρμονική του φαινομένου είναι σχεδόν εξαπλάσια καθώς το τοίχωμα στο οποίο αντιστοιχεί είναι 60 φορές βαθύτερο.



Σχήμα 5.32: Αρμονικές της ελεύθερης επιφάνειας για Reynolds 80: (a) βάθος τοιχώματος 0,0002 m, (b) βάθος τοιχώματος 0,004 m, (c) βάθος τοιχώματος 0,012 m.

Τα γενικά σχόλια για τον αριθμό Reynolds 160 (**Σχήμα 5.33**) θα μπορούσαν να είναι εντελώς παρόμοια, παρόλαυτα ο αριθμός Reynolds 160 είναι ιδιαίτερος καθώς είναι όριο στην μετάβαση της συμπεριφοράς του συνολικού φαινομένου. Χαρακτηριστικό λοιπόν ιδιαίτερο η εμφάνιση υπεραρμονικών για βάθος τοιχώματος 0,004 m οι οποίες διατηρούν την ένταση τους ακόμα και όταν το βάθος είναι ίσο με το μήκος κύματος του τοιχώματος. Σε αυτό το βάθος κανείς δεν μπορεί να αποφανθεί με σιγουριά για την κύρια αρμονική του φαινομένου καθότι οι δυο επικρατούσες είναι σχεδόν της ίδιας έντασης με μικρό προβάδισμα εκείνης που αντιστοιχεί στον υποδιπλάσιο κυματαριθμό. Μάλιστα αυτό που γίνεται εμφανές είναι ότι αυξάνοντας το βάθος του τοιχώματος η αρμονική που αντιστοιχεί στον κυματαριθμό του τοιχώματος ενισχύεται σημαντικά φέροντας όλο και πιο πολύ ενέργεια, ακριβέστερα τετραπλασιάζεται.



Σχήμα 5.33: Αρμονικές της ελεύθερης επιφάνειας για Reynolds 160: (a) βάθος τοιχώματος 0,0002 m, (b) βάθος τοιχώματος 0,004 m, (c) βάθος τοιχώματος 0,012 m.

Η ύπαρξη υποαρμονικών περιοδικών λύσεων περιόδου mT ($m=2,3,\dots$), όπου T η περίοδος της εξωτερικής διαταραχής (στο συγκεκριμένο πρόβλημα εξωτερική διαταραχή είναι η διαμόρφωση του τοιχώματος) ενός διδιάστατου δυναμικού συστήματος αποτελεί ένα ξεχωριστό σημαντικό φαινόμενο της μη γραμμικής δυναμικής. Η εξίσωση Duffing που περιγράφει μια ειδική κατηγορία ταλαντωτών στους οποίους η σχέση μεταξύ της δύναμης και της προκαλούμενης επιμήκυνσης περιέχει και κυβικό όρο της μετατόπισης, έχει λύσεις που ανάλογα με τις παραμέτρους οδηγούν σε υποαρμονική ταλάντωση, αλλιώς διπλασιασμό της περιόδου. Το γεγονός αυτό από

μόνο του είναι ένδειξη έντονης μη γραμμικότητας και η οποία σε πολλές περιπτώσεις οδηγεί στην πρόβλεψη της χαοτικής συμπεριφοράς ενός συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΡΟΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ ΥΓΡΟΥ ΥΜΕΝΑ ΣΕ ΤΟΙΧΩΜΑ ΜΕ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας και του ροϊκού πεδίου όταν ο υγρός υμένας συναντήσει μία μεμονωμένη κοιλότητα. Εξετάζονται παραμετρικά η επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κοιλότητας (ύψος, μήκος, οξύτητα) και αναδεικνύεται η κεντρική σημασία της επιφανειακής τάσης του υγρού. Ειδικότερα, διερευνάται το τριχοειδές κύμα που εμφανίζεται πριν την είσοδο του ρευστού στην κοιλότητα, όπως έχει αναφερθεί επανειλημμένα σε εφαρμογές ροών επικάλυψης.

Το πρώτο τμήμα του κεφαλαίου αφιερώνεται στην επαλήθευση και επέκταση αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας που έχουν εξαχθεί για $Re \ll 1$ (έρπουσα ροή) με ή χωρίς τις παραδοχές της θεωρίας λίπανσης. Η παρούσα αριθμητική αντιμετώπιση έχει μεγαλύτερο εύρος ισχύος, καθώς βασίζεται στην επίλυση των πλήρων εξισώσεων Navier-Stokes και διακρίτοποιεί το πεδίο ροής έτσι ώστε να περιγράφεται ικανοποιητικά κοιλότητα με οποιαδήποτε γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Το δεύτερο τμήμα του κεφαλαίου αφορά ροές με πεπερασμένο αριθμό Reynolds και συνεπώς εξετάζει –για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία– την επίδραση της αδράνειας στη διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας και του ροϊκού πεδίου στη γειτονία της κοιλότητας.

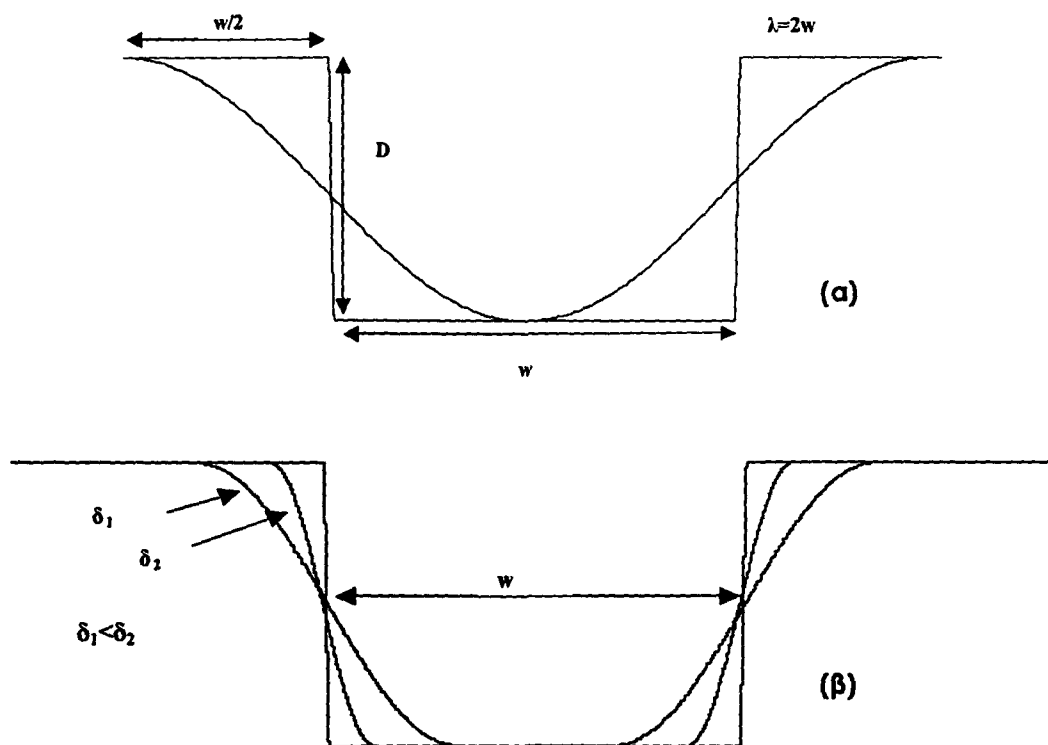
6.1 Περιγραφή γεωμετρικών χαρακτηριστικών διαμόρφωσης

Για τη μελέτη της επίδρασης του σχήματος της κοιλότητας εξετάζονται παραμετρικά τρία χαρακτηριστικά μεγέθη της κοιλότητας που επεξηγούνται στο **Σχήμα 6.1**: το βάθος, το μήκος και η οξύτητα. Το βάθος της κοιλότητας, D^* , είναι η απόσταση από το ελάχιστο έως το αδιατάρακτο τοίχωμα. Στην παρούσα μελέτη εξετάζονται κοιλότητες βάθους συγκρίσιμου με το πάχος του υμένα. Έτσι, χαρακτηριστικές τιμές του αδιάστατου βάθους είναι $D=D^*/h_N=0,5, 1,0$ και $2,0$.

Το μήκος της κοιλότητας συγκρίνεται και πάλι με το πάχος του υμένα, και διακρίνονται δύο θεμελιωδώς διαφορετικές περιπτώσεις: (α) Κοιλότητες πολύ επιμήκεις σε σχέση με τον υμένα, έτσι ώστε τα φαινόμενα στον αναβαθμό της εισόδου (κάθοδος στην κοιλότητα) να διαχωρίζονται πλήρως από τα φαινόμενα στον αναβαθμό της εξόδου (άνοδος από την κοιλότητα). (β) Κοιλότητες με μήκος συγκρίσιμο του πάχους του υμένα, όπου τα παραπάνω φαινόμενα είναι αδιαχώριστα. Ως αντιπροσωπευτική της περίπτωσης (α) εξετάζεται κοιλότητα αδιάστατου μήκους $w=w^*/h_N=40$, και ως αντιπροσωπευτική της (β) κοιλότητα με $w=w^*/h_N=1$.

Η οξύτητα της κοιλότητας είναι το τρίτο γεωμετρικό της μέγεθος, και καθορίζει το πόσο απότομα αλλάζει τοπικά η διεύθυνση ροής του υμένα. Στην παρούσα μελέτη, η οξύτητα μεταβάλλεται συστηματικά με τον εξής τρόπο: Η κοιλότητα διαμορφώνεται από τρία τμήματα, δύο «μισιά» συνημίτονα, μήκους κύματος λ^* , που παριστάνουν τα τμήματα εισόδου/εξόδου και ένα επίπεδο που αποτελεί τον κυρίως πυθμένα (**Σχήμα 6.1(β)**). Το μήκος, w^* , της κοιλότητας μετράται στο μέσο βάθος όπως φαίνεται στο σχήμα, έτσι ώστε το επίπεδο τμήμα της κοιλότητας έχει μήκος $(w^*-\lambda^*/2)$ ενώ το συνολικό μήκος διαταραχής του τοιχώματος είναι $(w^*+\lambda^*/2)$.

Το μήκος κύματος, λ^* , των συνημιτονοειδών τμημάτων αποτελεί ελεύθερη παράμετρο, που μεταβάλλεται από πολύ μικρές τιμές έως τη μέγιστη τιμή $\lambda^*=2w^*$. Όταν $\lambda^*\rightarrow 0$ οι παριές γίνονται σχεδόν κατακόρυφες και η κοιλότητα προσεγγίζει το ορθογωνικό σχήμα. Αντίθετα, όταν $\lambda^*=2w^*$, το επίπεδο τμήμα του πυθμένα εξαφανίζεται και η κοιλότητα μετατρέπεται σε ένα απλό συνημίτονο, το οποίο συνιστά την ηπιότερη μεταβολή κλίσης. Οι δύο αυτές ακραίες περιπτώσεις παρουσιάζονται στο **Σχήμα 6.1(α)**. Η αδιάστατη οξύτητα, δ , της κοιλότητας ορίζεται συγκρίνοντας το μήκος κύματος λ^* με το πάχος κατά Nusselt, δηλαδή $\delta = h_N / \lambda^*$. Για παράδειγμα, η ελάχιστη οξύτητα της επιμήκου κοιλότητας ($w=40$) είναι $\delta = h_N / 2w^* = 0,0125$. Στο **Σχήμα 6.1(β)** παρουσιάζονται κάποια από τα δυνατά ενδιάμεσα σχήματα που λαμβάνονται για $\delta_1=0,02$ και $\delta_2=0,05$.



Σχήμα 6.1: Σχηματικές διατάξεις της διαμόρφωσης του τοιχώματος

6.2 Έρπουσα ροή σε επιμήκεις κοιλότητες

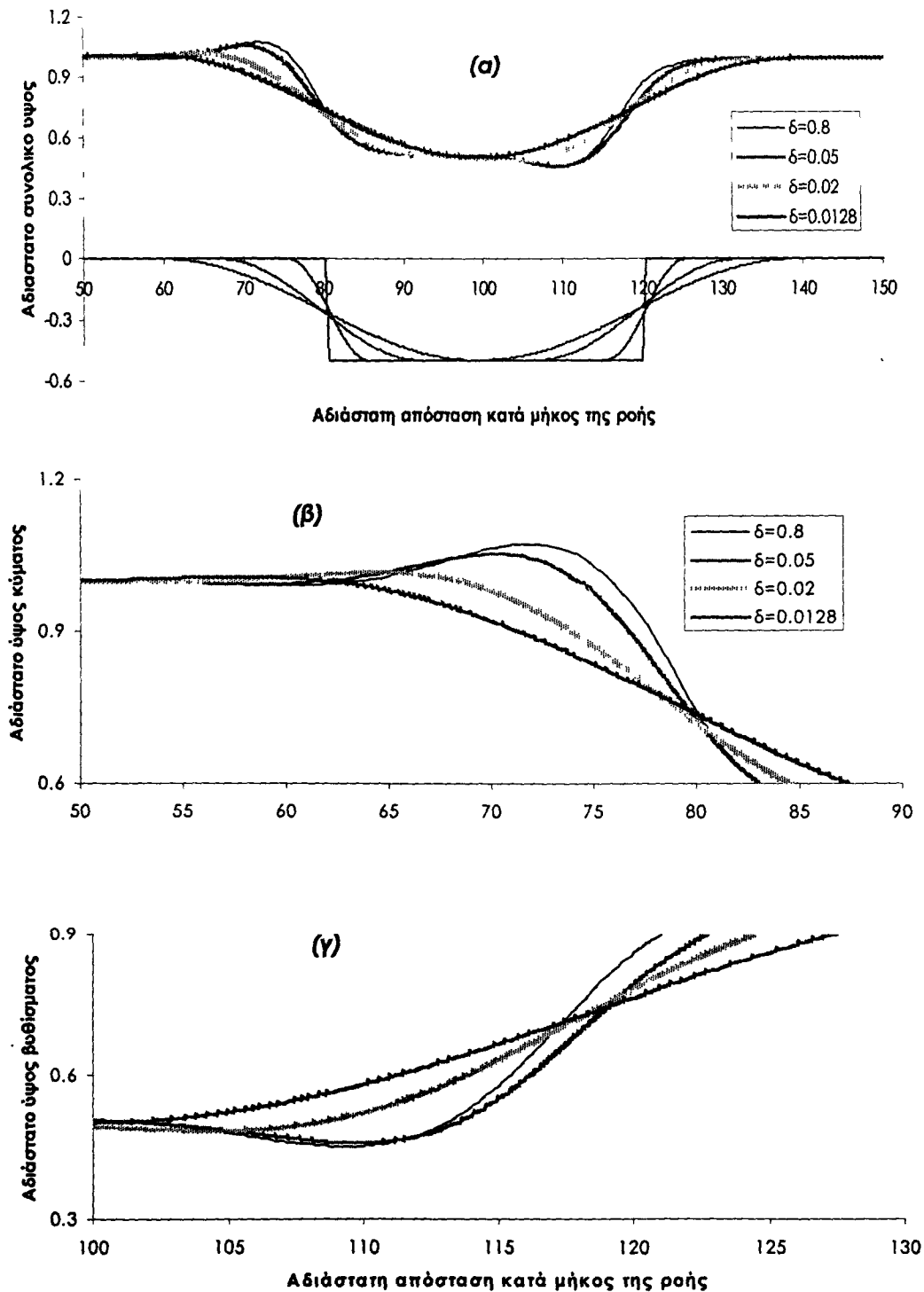
Οι ροές επικάλυψης χρησιμοποιούν συνήθως υγρά μεγάλου ιξώδους και συνακόλουθα χαρακτηρίζονται από πολύ χαμηλούς Re . Αναφέρεται ενδεικτικά ότι το ιξώδες κυμαίνεται στην περιοχή των 100-5000 cp , και ότι το πάχος υμένα μπορεί να μειωθεί έως τα 0,5 – 2 μm . Όταν επιπλέον οι χωρικές μεταβολές είναι ήπιες, η ανάλυση μπορεί να αξιοποιήσει τη θεωρία λίπανσης. Τα περισσότερα διαθέσιμα στη βιβλιογραφία αποτελέσματα βασίζονται στις παραπάνω παραδοχές, και αποκαλύπτουν φυσικούς μηχανισμούς που αφορούν την ισορροπία των δυνάμεων βαρύτητας και επιφανειακής τάσης.

Βασικός στόχος των διεργασιών επικάλυψης είναι η πλήρης και κατά το δυνατόν αδιατάρακτη κάλυψη του υποστρώματος. Έτσι, παρουσιάζονται καταρχάς αποτελέσματα για τη διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας και του ροϊκού πεδίου συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κοιλότητας. Σε όλες τις προσομοιώσεις, το τοίχωμα είναι κατακόρυφο ($\varphi = 90^\circ$) και ο αριθμός Reynolds διατηρείται σταθερός στη χαμηλή τιμή $Re=0,001$. Όλα τα μήκη αδιαστατοποιούνται με το πάχος κατά Nusselt, h_N , και επίδραση της επιφανειακής τάσης περιγράφεται από τον τριχοειδή αριθμό $Ca = \rho g h_N^2 / \sigma$, όπου ρ η πυκνότητα, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και σ η επιφανειακή τάση του υγρού. Η ροή εισέρχεται στο υπολογιστικό πεδίο αδιατάρακτη, με σταθερό πάχος h_N και τη μόνιμη κατανομή ταχυτήτων Nusselt (η απόσταση της κοιλότητας από την είσοδο του υπολογιστικού πεδίου λαμβάνεται αρκετά μεγάλη ώστε οι παραπάνω συνθήκες εισόδου να είναι απόλυτα ακριβείς).

Στην παρούσα σειρά προσομοιώσεων χρησιμοποιείται κοιλότητα με αδιάστατο μήκος $w=40$ και οξύτητα που κυμαίνεται από $\delta=0,0125$ (ένα απλό συνημίτονο) έως $\delta=0,8$ (σχεδόν ορθογωνική). Στο **Σχήμα 6.2(α)** παρατίθεται μία ενδεικτική σειρά αποτελεσμάτων για αδιάστατο βάθος κοιλότητας $D=0,5$ και τριχοειδή αριθμό $Ca=0,01$, η οποία παρουσιάζει τα σημεία που αξίζουν περαιτέρω μελέτης. Παρατηρείται ότι, στην περίπτωση του απλού συνημιτόνου η μεταβολή του τοιχώματος είναι εξαιρετικά ήπια και αντίστοιχη συμπεριφορά έχει και η ελεύθερη επιφάνεια. Με την αύξηση της οξύτητας, οι μεταβολές της ελεύθερης επιφάνειας καθίστανται χωρικά εντοπισμένες και σταδιακά τα φαινόμενα του ανάντη αναβαθμού αποσυμπλέκονται πλήρως από τα φαινόμενα του κατόντη αναβαθμού. Επίσης, η αύξηση της οξύτητας εντείνει τον τριχοειδή κυματισμό στην είσοδο της κοιλότητας και την βύθιση στην έξοδο της κοιλότητας. Τα δύο αυτά τοπικά φαινόμενα παρουσιάζονται σε μεγέθυνση στα **Σχήματα 6.2 (β)** και **(γ)**.

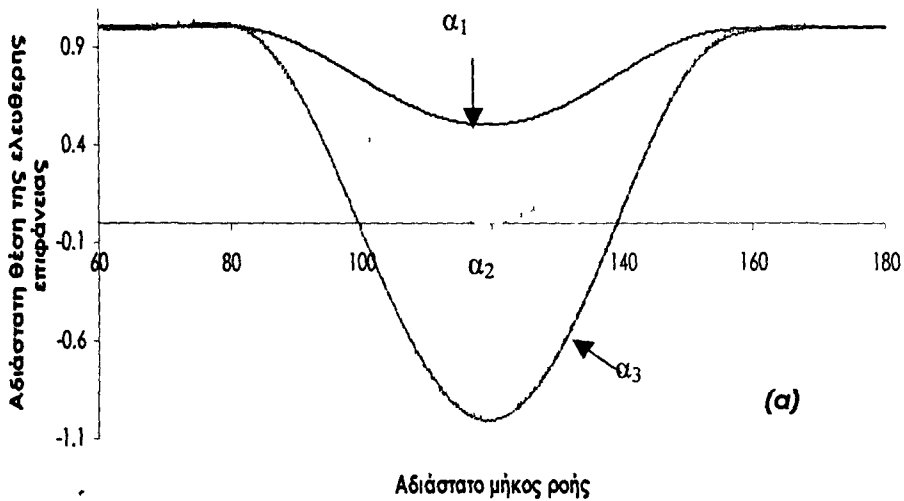
6.2.1 Επίδραση βάθους και οξύτητας κοιλότητας

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά αποτελέσματα για επιμήκεις κοιλότητες ($w=40$) διαφόρων οξύτητων, με αδιάστατα βάθη $D=0.5, 1.0$ και 2.0 . Το **Σχήμα 6.3(α)** παρουσιάζει την ελεύθερη επιφάνεια πάνω από κοιλότητες σχήματος συνημιτόνου

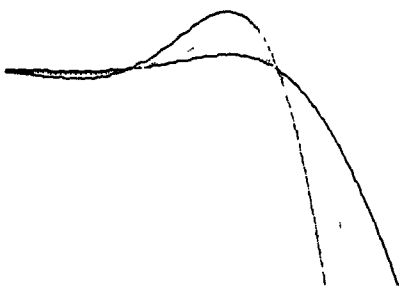


Σχήμα 6.2: Κοιλότητες διαφόρων μορφών και η αντίστοιχη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Λεπτομέρειες της ροής σε μεγέθυνση.

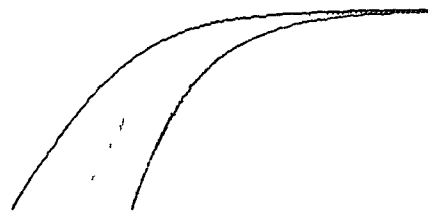
($\delta=0,0125$) για $Ca=0,01$, και τα **Σχήματα 6.3(β),(γ)** δείχνουν σε μεγέθυνση τις λεπτομέρειες της διαμόρφωσης στην είσοδο και την έξοδο της κοιλότητας. Παρατηρείται ότι η ελεύθερη επιφάνεια ακολουθεί πάντα πιστά το τοίχωμα και ότι τα τριχοειδή φαινόμενα, αν και εμφανίζονται, είναι ποσοτικά ασήμαντα. Το ροϊκό πεδίο παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.4** και επιβεβαιώνει ότι η ροή ακολουθεί παντού τη μορφή του τοιχώματος.



(β)



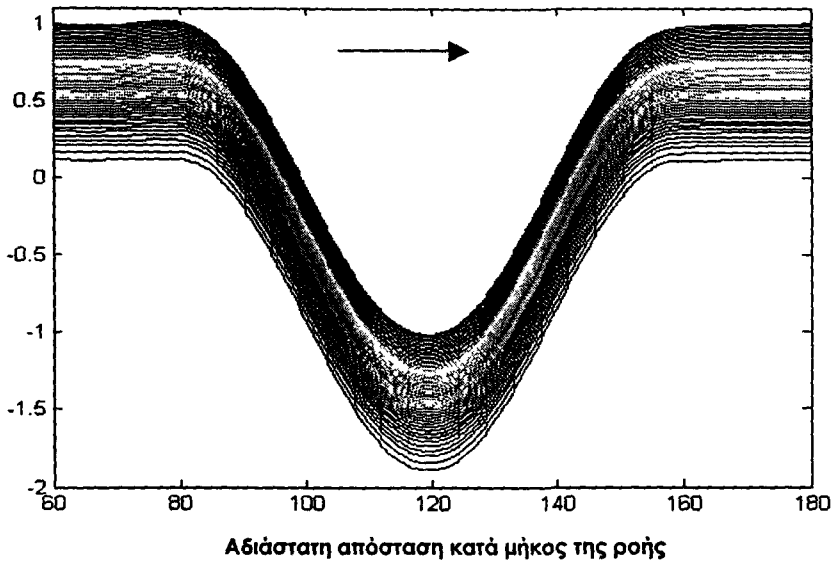
(γ)



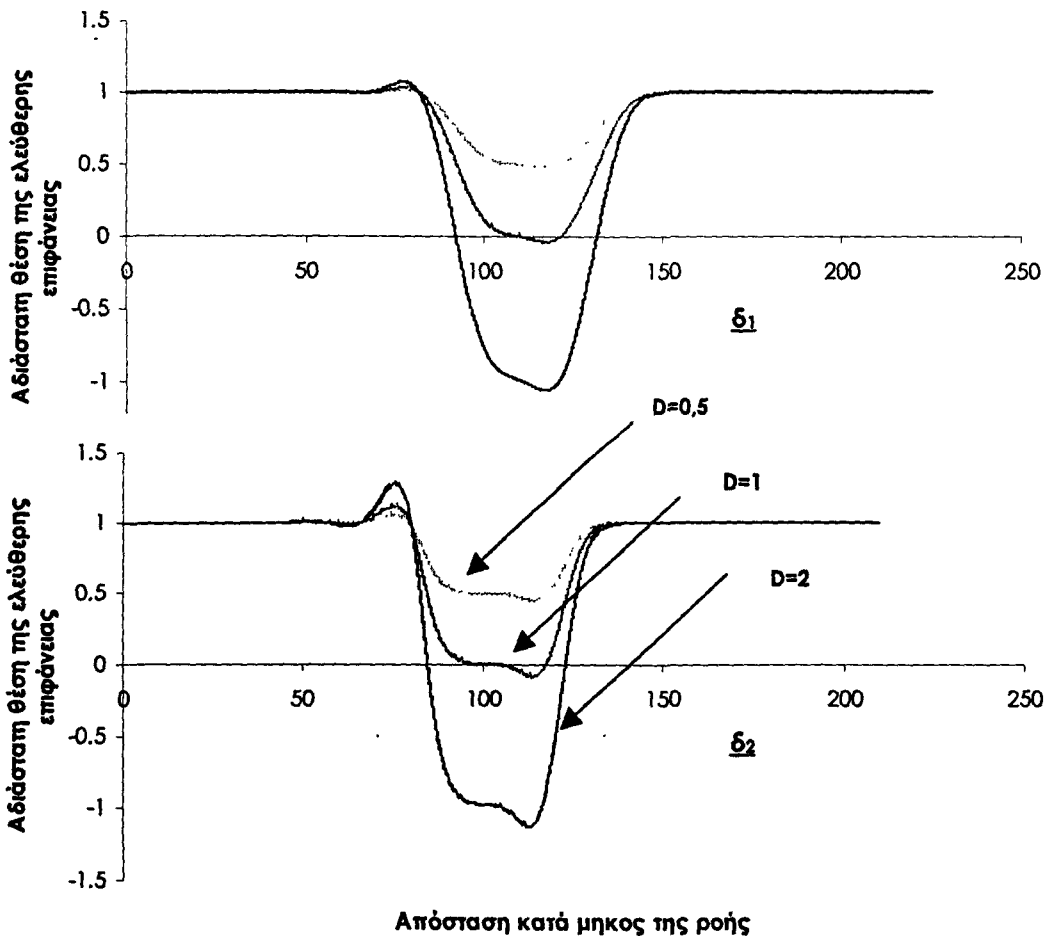
Σχήμα 6.3: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για τρία βάθη κοιλότητας και οι λεπτομέρειες στην είσοδο και έξοδο από αυτήν.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.5** η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας για δύο ενδιάμεσες τιμές οξύτητας $\delta_1=0,02$ και $\delta_2=0,05$, όπου σταδιακά συμβαίνει η αποσύμπλεξη των φαινομένων εισόδου και εξόδου στην κοιλότητα. Η βαρύτητα των τριχοειδών δομών αυξάνεται τόσο με την οξύτητα όσο και με το βάθος της κοιλότητας. Ειδικότερα, το τριχοειδές κύμα της εισόδου, που παρουσιάζεται σε μεγέθυνση στο

Σχήμα 6.6, αυξάνει αισθητά σε ύψος με το βάθος της κοιλότητας, και ταυτόχρονα αναπτύσσει περαιτέρω κυματισμούς ανάντη της κοιλότητας.



Σχήμα 6.4: Οι ροϊκές γραμμές για τοίχωμα σχήματος συνημιτόνου με $D=2$ και $Ca=0,01$.

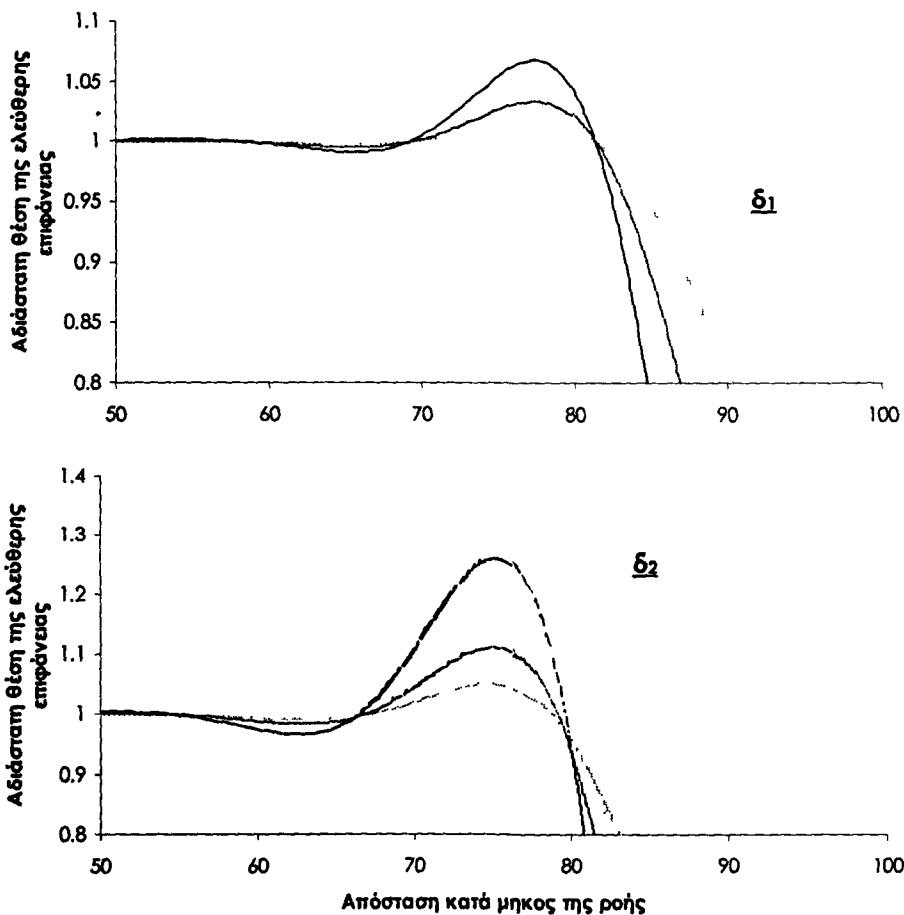


Σχήμα 6.5: Η ελεύθερη επιφάνεια για τρία βάθη ($D=0,5, 1, 2$) και δυο οξυτήτες, $\delta_1 < \delta_2$.

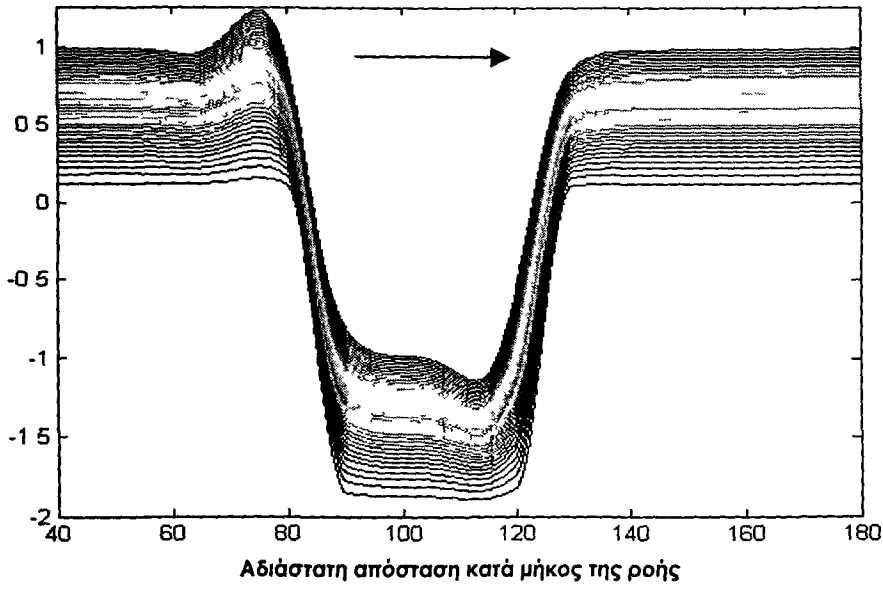
Η συμπεριφορά αυτή, δηλαδή η ανάπτυξη του τριχοειδούς κυματισμού ανάντη της ροής οδηγεί σε αύξηση του πεδίου που επηρεάζεται από την κοιλότητα. Υπολογιστικά, έχει ως συνέπεια την ανάγκη για επέκταση του πεδίου επίλυσης των εξισώσεων ώστε οι συνοριακές συνθήκες εισόδου να είναι ακριβείς, δηλαδή ο υμένας να παρουσιάζει ένα τμήμα εισόδου όπου είναι εντελώς αδιατάρακτος.

Το συνολικό πεδίο ροής σε ενδιάμεση τιμή οξύτητας, $\delta=0,05$, απεικονίζεται στο **Σχήμα 6.7**, και συνδυάζει την επίδραση του τοιχώματος κοντά στον πυθμένα με την επίδραση των τριχοειδών δομών κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια.

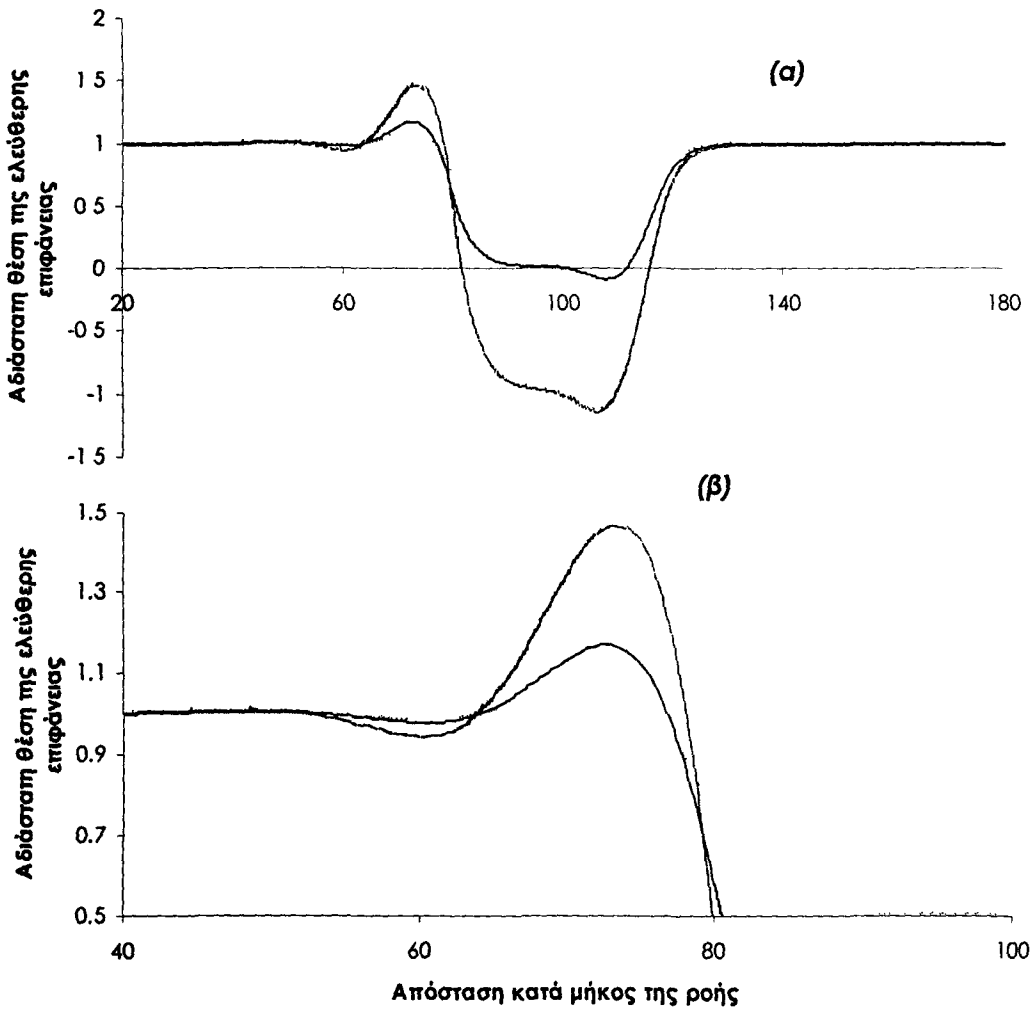
Η τελευταία ενότητα προσομοιώσεων επιμήκους κοιλότητας παρουσιάζεται στα **Σχήματα 6.8(α),(β)** και **6.9(α),(β)**, και αφορά τιμή οξύτητας $\delta=0,8$ που είναι κοντά στη μέγιστη για την οποία ο κώδικας συγκλίνει. Τα αποτελέσματα αυτά προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά το όριο ορθογωνικής κοιλότητας, όπως διαπιστώθηκε από συγκρίσεις με ανεξάρτητο υπολογιστικό κώδικα που σχεδιάστηκε ειδικά για την ορθογωνική γεωμετρία. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στο **Σχήμα 6.8(α)** δείχνει τις μέγιστες τιμές που λαμβάνουν το τριχοειδές κύμα στην είσοδο και η βύθιση πριν την έξοδο.



Σχήμα 6.6: Λεπτομέρεια σε μεγέθυνση από το **Σχήμα 6.5**. Το κύμα της εισόδου για τρία βάθη(0,5, 1, 2) και δύο οξύτητες, $\delta_1=0,02 < \delta_2=0,05$.

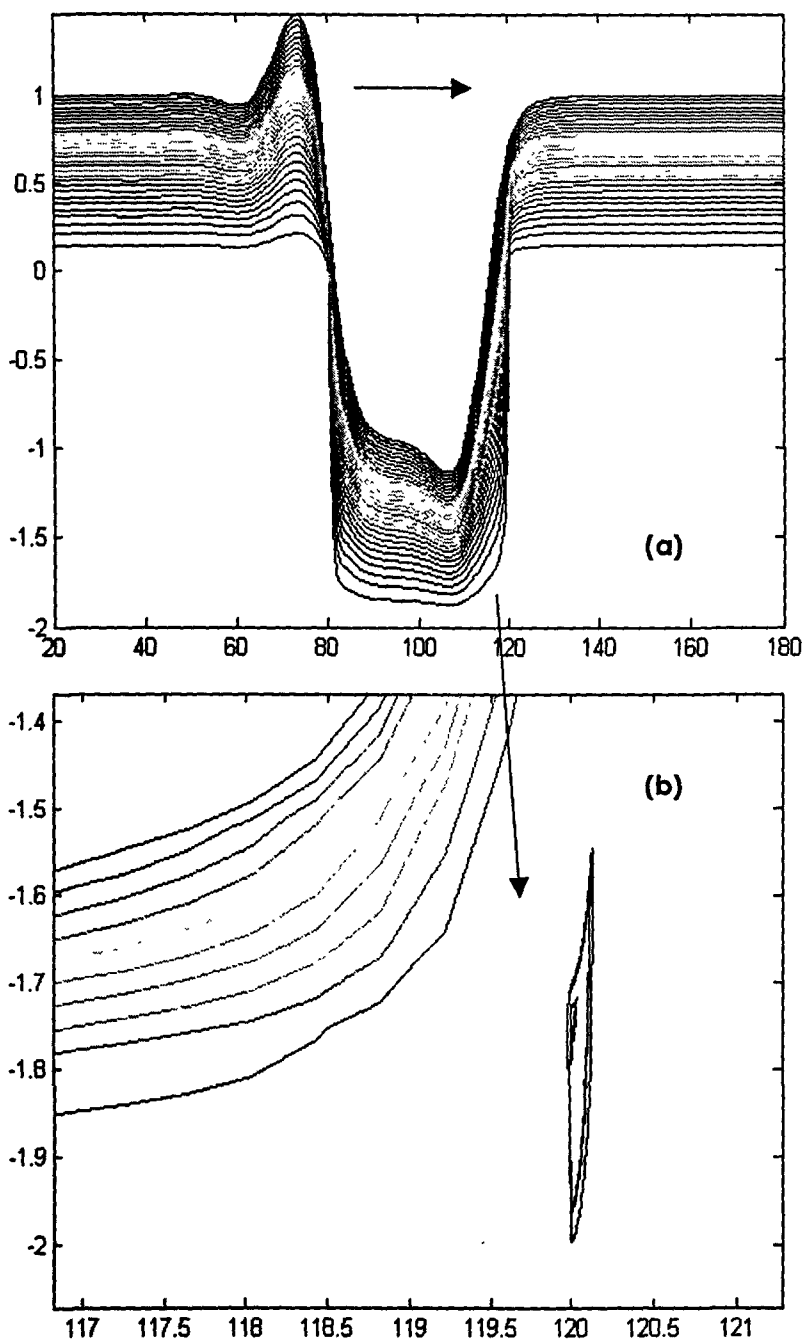


Σχήμα 6.7: Ροϊκή συνάρτηση για βάθος $D=2$ και οξυτητα $\delta_2=0,05$.



Σχήμα 6.8: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας και το κύμα της εισόδου για σχεδόν ορθογωνική κοιλότητα ($\delta=0,8$) . Ο τριχοειδής αριθμός είναι $Ca=0,01$.

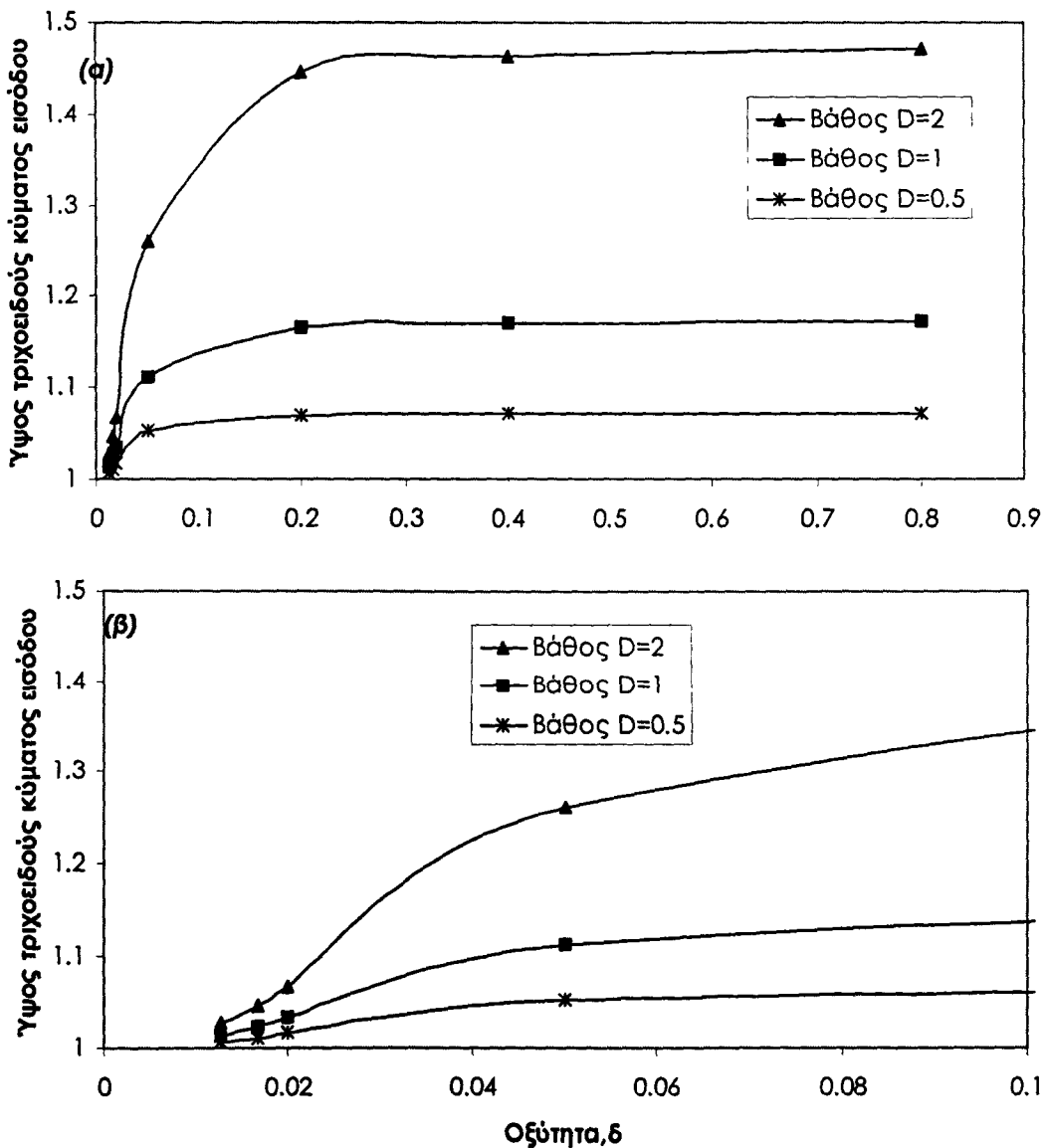
Η μεγέθυνση στο **Σχήμα 6.8(β)** επιβεβαιώνει ότι η εξάρτηση από το βάθος της κοιλότητας παραμένει η ίδια όπως και σε μικρότερες τιμές οξύτητας. Το **Σχήμα 6.9** παρουσιάζει τις ροϊκές γραμμές για βάθος $D=2.0$, και εντοπίζει μία μικρή περιοχή αποκόλλησης της ροής κοντά στην έξοδο της κοιλότητας (**Σχήμα 6.9(β)**). Είναι αξιοσημείωτο ότι, στις παρούσες συνθήκες έρπουσας ροής, δεν παρατηρήθηκε αποκόλληση σε καμία άλλη συνθήκη βάθους και οξύτητας.



Σχήμα 6.9:(α) Ροϊκή συνάρτηση για σχεδόν κατακόρυφα τοιχώματα και βάθος $D=2$, **(β)** Λεπτομέρεια της ροής σε μεγέθυνση.

Τα **Σχήματα 6.8** και **6.9(α)** αποκαλύπτουν ένα ιδιαίτερα σημαντικό παράπλευρο αποτέλεσμα της δημιουργίας του τριχοειδούς κύματος στην είσοδο της κοιλότητας: Συγκεκριμένα, ο υγρός υμένας αποκτά στην περιοχή αυτή ένα ελάχιστο πάχος, το οποίο εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από την οξύτητα της κοιλότητας. Το φαινόμενο αυτό προβλέφθηκε αρχικά από τους Kalliadasis et al., (2000) με χρήση της θεωρίας λίπανσης, και επιβεβαιώθηκε επίσης από τους Mazouchi et al., (2001). Η σημασία του έγκειται στο ότι εντοπίζει την περιοχή πιθανής διακοπής της συνέχειας ενός πολύ λεπτού υμένα, ενδεχομένου προφανώς ανεπιθύμητου σε διεργασίες επικάλυψης.

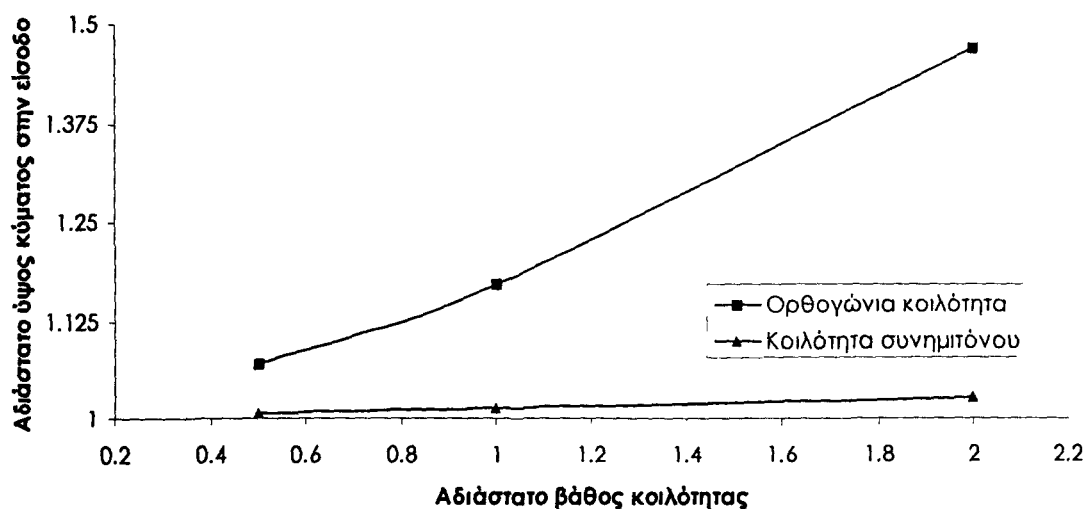
Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα συσχέτισης του τριχοειδούς κύματος εισόδου με την οξύτητα και το βάθος της κοιλότητας συνοψίζονται στο **Σχήμα 6.10**,



Σχήμα 6.10. (α) Η επίδραση της οξύτητας και του βάθους της κοιλότητας στο ύψος του τριχοειδούς κύματος εισόδου **(β)** Λεπτομέρεια σε μεγέθυνση

Ο οριζόντιος άξονας ξεκινά από πολύ μικρές τιμές οξύτητας (κοιλότητα απλού συνημιτόνου) και καταλήγει σε γεωμετρία σχεδόν ορθογωνική. Το ύψος του τριχοειδούς κύματος αυξάνει με την οξύτητα, στην αρχή ασθενικά, στη συνέχεια εντονότερα και τέλος προσεγγίζει ασυμπτωτικά την οριακή τιμή της ορθογωνικής κοιλότητας. Η επίδραση του βάθους της κοιλότητας στο ύψος του τριχοειδούς κύματος απεικονίζεται αναλυτικά στο **Σχήμα 6.11**.

Η επίδραση της οξύτητας και του βάθους στο ύψος του τριχοειδούς κύματος μπορεί να ερμηνευθεί με βάση την συνεισφορά της βαρύτητας στην παροχή του υγρού. Συγκεκριμένα, για κατακόρυφο τοίχωμα και ορθογωνική κοιλότητα, το τμήμα εισόδου έχει προσανατολισμό κάθετο προς το διάνυσμα της βαρύτητας. Συνεπώς, η βαρύτητα δεν μπορεί να συνεισφέρει στην μεταφορά του υγρού στο τμήμα αυτό και ο μόνος μηχανισμός που απομένει είναι η τριχοειδής πίεση που προκαλείται από το κύμα εισόδου. Η απαιτούμενη διαφορική πίεση είναι προφανώς ανάλογη της διαδρομής ροής, δηλαδή του βάθους της κοιλότητας. Αντίθετα, μειώνοντας την οξύτητα αναπτύσσεται μία σταδιακά εντονότερη συνιστώσα βαρύτητας τοπικά παράλληλη με το τοίχωμα. Ως αποτέλεσμα, το υγρό παροχετεύεται ευκολότερα και δεν αναπτύσσει υψηλό τριχοειδές κύμα.



Σχήμα 6.11: Η επίδραση του βάθους της κοιλότητας στο ύψος του κύματος εισόδου.

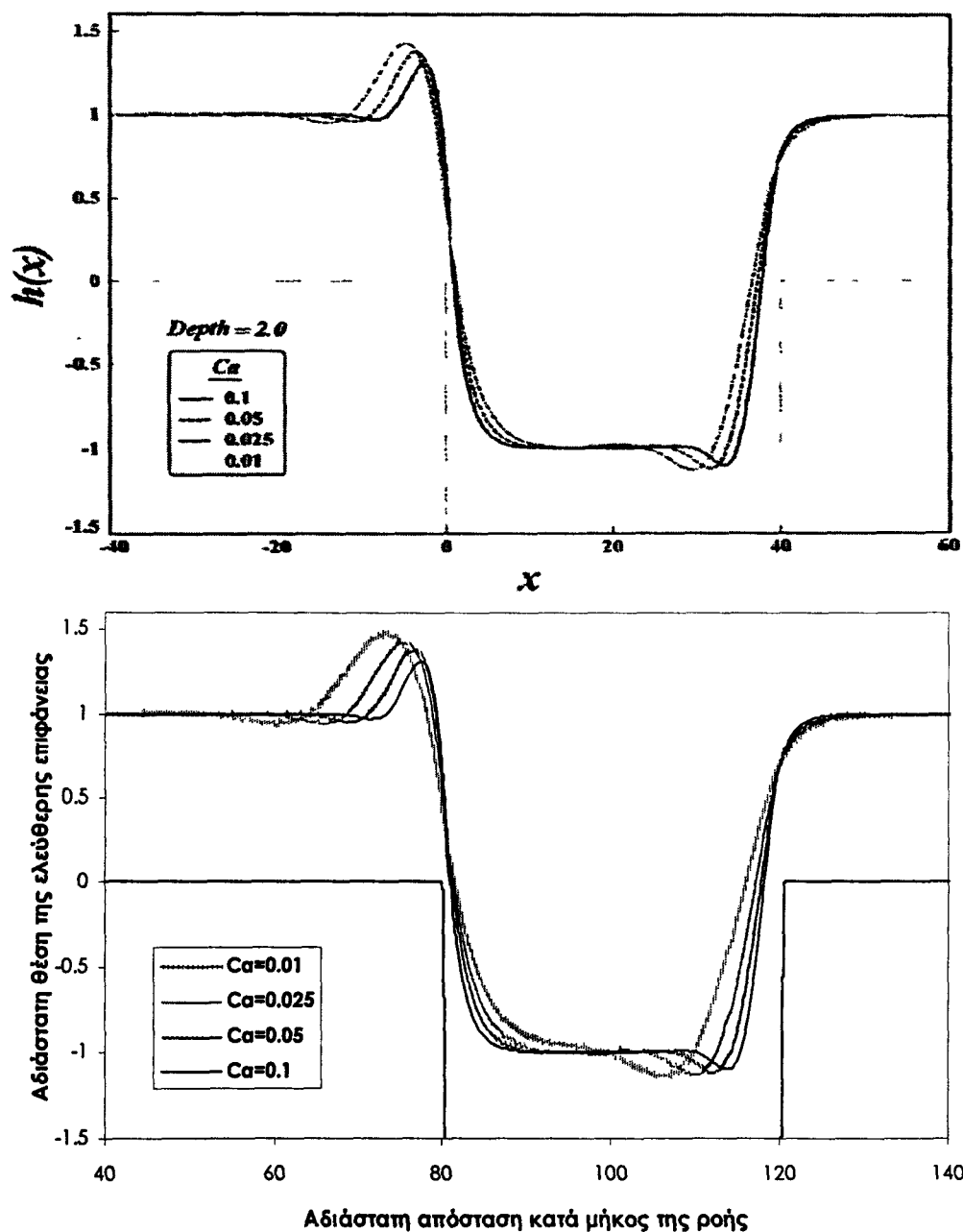
6.2.2 Επίδραση επιφανειακής τάσης σε ροή πάνω από επιμήκεις κοιλότητες

Η επίδραση της επιφανειακής τάσης στο ρευστό εκφράζεται μέσω του τριχοειδούς αριθμού Ca , όπως έχει οριστεί στην αρχή του κεφαλαίου. Η πιο πρόσφατη μελέτη της επίδρασης της επιφανειακής τάσης σε έρπουσα ροή ανήκει στους Mazouchi & Homay (2001), οι οποίοι διερεύνησαν υπολογιστικά τη συμπεριφορά κατακόρυφου υμένα πάνω από ορθογωνική κοιλότητα στο όριο της ροής Stokes. Στην

παράγραφο αυτή επαναπαράγονται και επεκτείνονται μερικά από τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνητών.

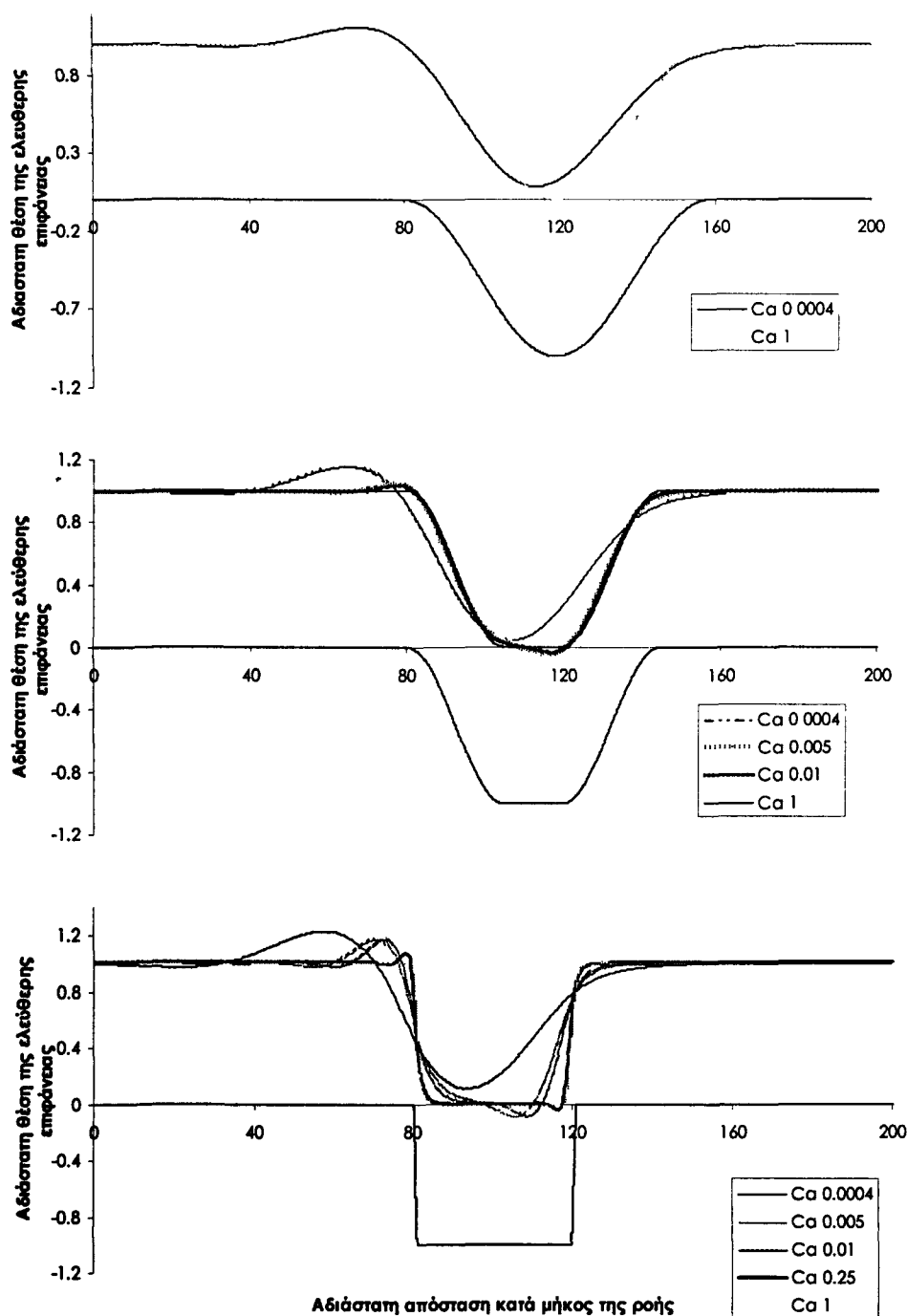
Στο **Σχήμα 6.12** συγκρίνονται τα αποτελέσματα των Mazouchi & Homsy (2001) με αντίστοιχα της παρούσας εργασίας για την περίπτωση ορθογωνικής κοιλότητας μήκους $w=40$ και βάθους $D=2$. Παρατηρείται ιδιαίτερα ικανοποιητική συμφωνία των δύο προσομοιώσεων ως προς τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας για όλες τις τιμές του τριχοειδούς αριθμού που δοκιμάστηκαν.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επεκτείνονται στο **Σχήμα 6.13** κατά δύο τρόπους: Πρώτον, δοκιμάζονται κοιλότητες μικρής και ενδιάμεσης οξύτητας και δεύτερον, οι τιμές του τριχοειδούς αριθμού διευρύνονται κατά μία με δύο τάξεις μεγέθους και προς τις



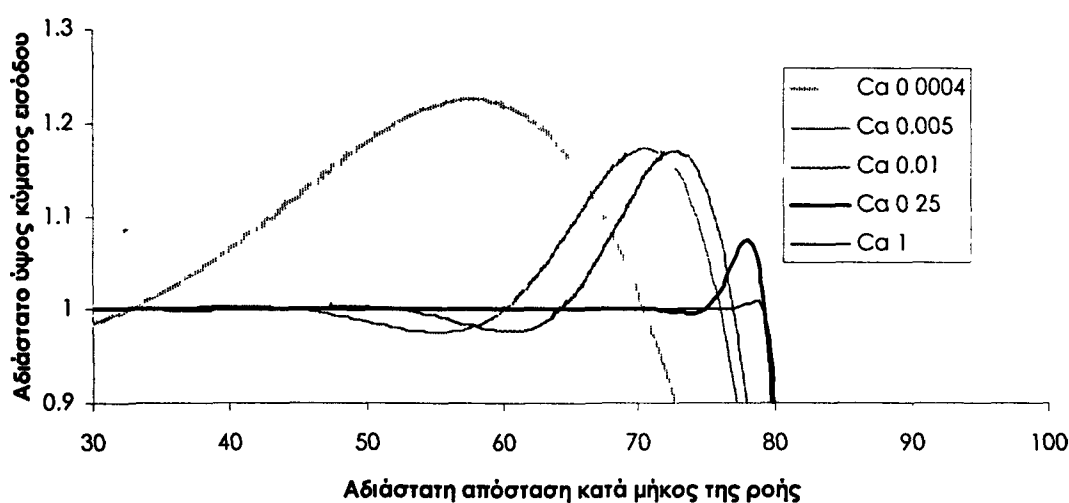
Σχήμα 6.12: Θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορους τριχοειδείς αριθμούς (α) Δημοσιευμένο διάγραμμα Mazouchi et al. (2001) (β) Παρούσα εργασία.

δύο κατευθύνσεις. Παρατηρείται, όπως και προηγουμένως, ότι το τριχοειδές κύμα στην είσοδο και η βύθιση στην έξοδο της κοιλότητας εξαρτώνται αντίστροφα από το μέγεθος του τριχοειδούς αριθμού. Ενώ όμως στην ορθογωνική κοιλότητα τα φαινόμενα αυτά παρατηρούνται πάντοτε, έστω και εξασθενημένα, σε ομαλότερες κοιλότητες μπορούν να εξαφανιστούν τελείως. Έτσι, για $Ca=1$, η ροή ακολουθεί με μεγάλη ακρίβεια τη μορφή του τοιχώματος σε όλες τις περιπτώσεις εκτός της ορθής γωνίας.



Σχήμα 6.13: Θέση της ελεύθερης επιφάνειας για διάφορους τριχοειδείς αριθμούς και τρεις διαφορετικές οξύτητες της κοιλότητας βάθους $D=1$.

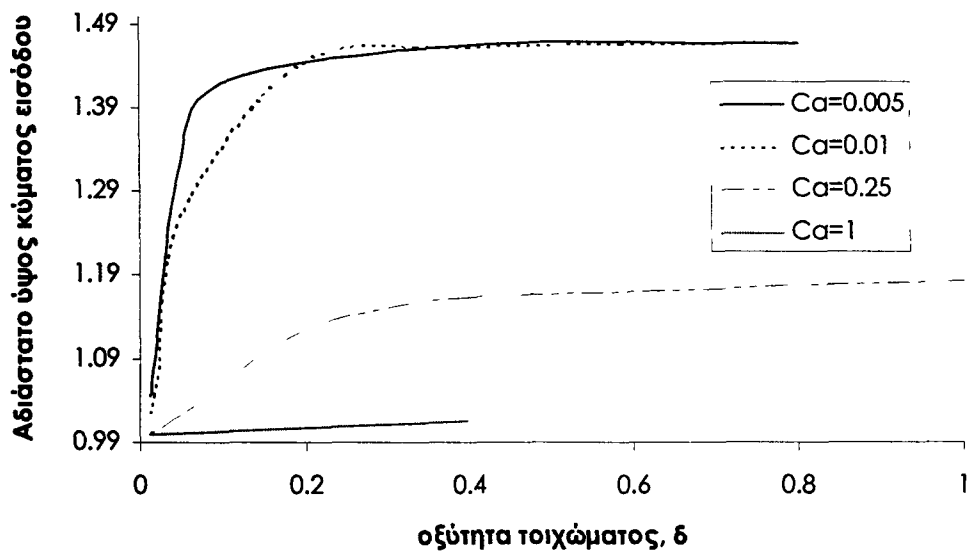
Στο αντίθετο όριο των χαμηλών τιμών τριχοειδούς αριθμού ($Ca=0,1-0,005$), διαπιστώνεται ότι τα τριχοειδή φαινόμενα ενισχύονται και τείνουν αρχικά σε ένα ασυμπτωτικό όριο. Όμως περαιτέρω μείωση του τριχοειδούς αριθμού ($Ca<0,001$) οδηγεί σε νέα έντονη ενίσχυση ακυρώνοντας την προηγούμενη τάση. Η ιδιόμορφη αυτή συμπεριφορά καθίσταται εμφανέστερη από το **Σχήμα 6.14**, που αποτελεί μεγέθυνση της ροής πάνω από την ορθογωνική κοιλότητα, και ερμηνεύεται ως εξής: Καταρχάς, η ασυμπτωτική τάση οφείλεται στη σταδιακή προσέγγιση στις συνθήκες της θεωρίας λίπανσης, που απαιτεί όχι μόνον χαμηλούς Re αλλά και χαμηλούς Ca . Συγκεκριμένα, έχει δειχθεί στη βιβλιογραφία (Mazouchi & Homay, 2001), ότι ακριβή υπολογιστικά αποτελέσματα στην περιοχή αυτή τιμών συμφωνούν με προσεγγιστικές εκτιμήσεις βασισμένες στη θεωρία λίπανσης.



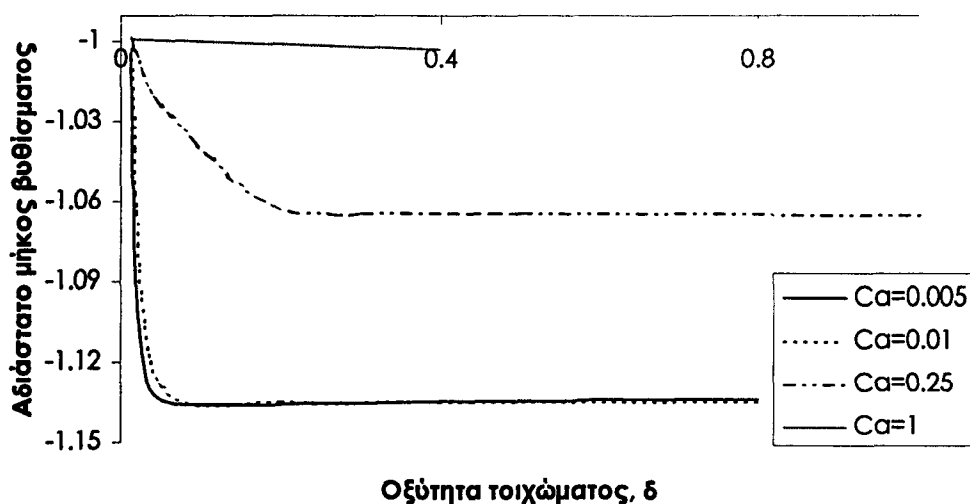
Σχήμα 6.14: Η επίδραση της επιφανειακής τάσης στο ύψος του κύματος στην είσοδο ορθογωνικής κοιλότητας.

Η απόκλιση από τις προβλέψεις της θεωρίας λίπανσης για ακόμη μικρότερους Ca οφείλεται στο γεγονός ότι η κοιλότητα παύει πλέον να είναι επιμήκης. Πράγματι, ο ορισμός της επιμήκους κοιλότητας, $w^* \gg h_N$, που χρησιμοποιήθηκε ως τώρα είναι ατελής διότι συγκρίνει το γεωμετρικό μήκος μόνον με το πάχος του υμένα, δηλαδή το δυναμικό μήκος που προκύπτει από την ισορροπία ιξωδών και βαρυτικών δυνάμεων. Όμως, το χαρακτηριστικό μήκος, l_c^* , των τριχοειδών φαινομένων είναι αυτό που χαρακτηρίζει τις δομές της ελεύθερης επιφάνειας, και η ισορροπία τριχοειδών και βαρυτικών δυνάμεων δίνει $l_c = l_c^* / h_N \sim Ca^{-1/3}$. Έτσι, για $Ca < 0,001$, το τριχοειδές χαρακτηριστικό μήκος αποκτά την ίδια τάξη μεγέθους με το μήκος της εξεταζόμενης κοιλότητας, και άρα η κοιλότητα παύει να είναι επιμήκης.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα για το ύψος του τριχοειδούς κύματος στην είσοδο και του βυθίσματος στην έξοδο, ως συναρτήσεις του τριχοειδούς αριθμού και της οξύτητας της κοιλότητας, συνοψίζονται αντίστοιχα στα **Σχήματα 6.15** και **6.16**. Τέλος, το ροϊκό πεδίο για διάφορους Ca , σε ορθογωνική κοιλότητα βάθους $D=2$, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.17**, όπου παρατηρείται η παντελής έλλειψη περιοχών ανακυκλοφορίας.



Σχήμα 6.15: Η επίδραση της επιφανειακής τάσης και της οξύτητας στο ύψος του κύματος στην είσοδο

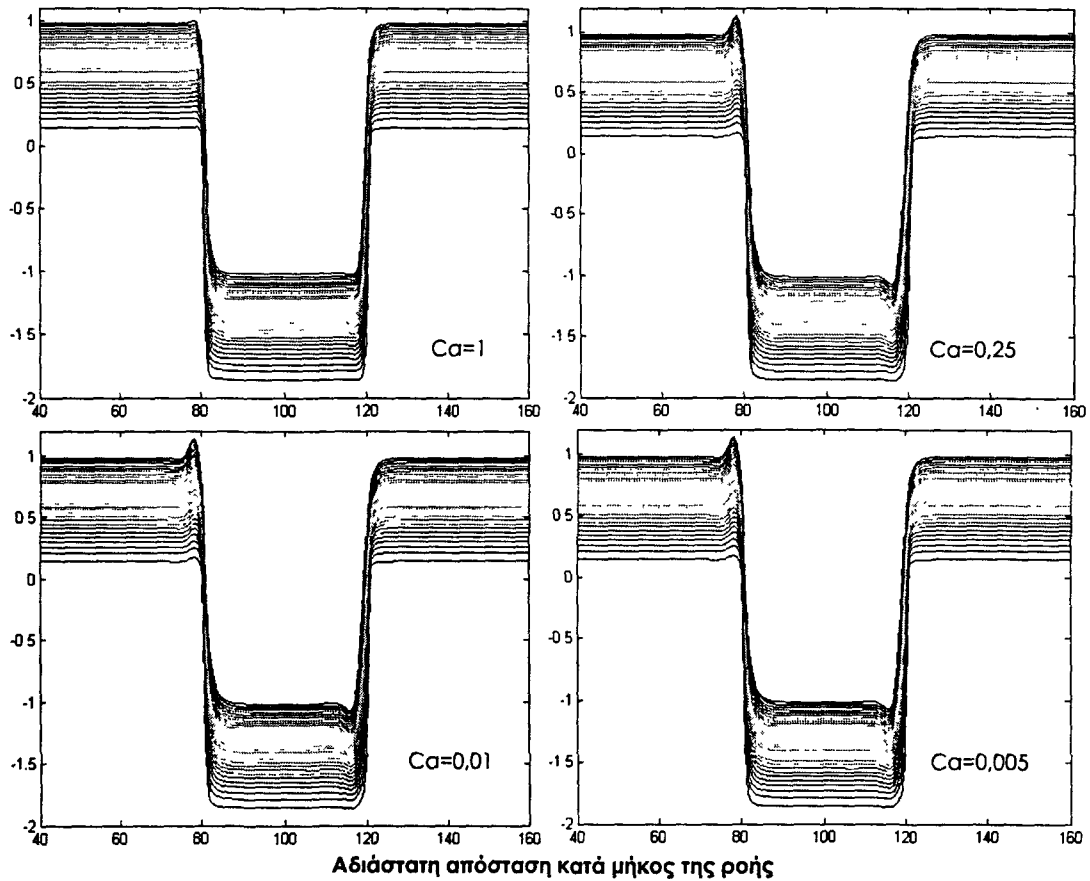


Σχήμα 6.16: Η επίδραση της επιφανειακής τάσης και της οξύτητας στο βύθισμα του υμένα στην έξοδο από κοιλότητα.

6.3 Έρπουσα ροή σε στενές κοιλότητες

Όπως προαναφέρθηκε, στην επιμήκη κοιλότητα τα φαινόμενα του αναβαθμού εισόδου είναι διαχωρισμένα από τα φαινόμενα του αναβαθμού εξόδου. Η παρούσα

παράγραφος διερευνά την συμπληρωματική γεωμετρία των στενών κοιλοτήτων, όπου τα παραπάνω φαινόμενα είναι έντονα συζευγμένα. Ως πρότυπο χρησιμοποιούνται κοιλότητες με $D=w=1$, και εξετάζεται πρώτα η επίδραση της οξύτητας των τοιχωμάτων για σταθερό Ca και στη συνέχεια η επίδραση του τριχοειδούς αριθμού για σταθερή οξύτητα δ .

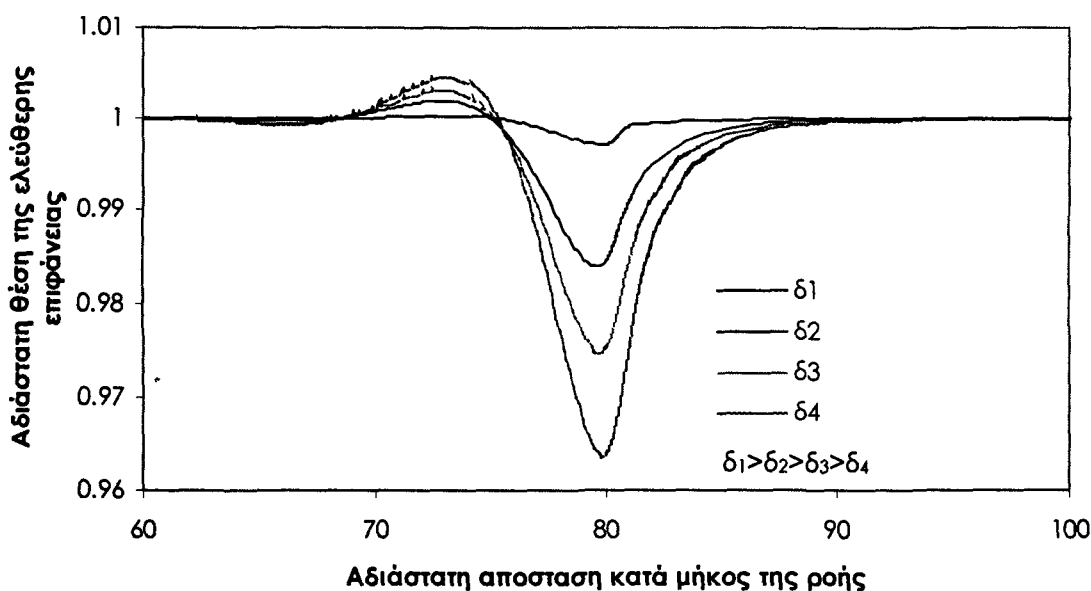


Σχήμα 6.17: Η ροϊκή συνάρτηση για διάφορους αριθμούς *Capillary* για πλατιά και ρηχή κοιλότητα.

Το **Σχήμα 6.18** παριστάνει την θέση της ελεύθερης επιφάνειας σε κοιλότητες με λόγο 1:1, και για ροή στην οποία $Ca=0.05$. Τα αποτελέσματα αναφέρονται σε οξύτητες $\delta=1, 2, 5$ και 20 . Υπενθυμίζεται ότι η κοιλότητα σχήματος συνημιτόνου (ελάχιστη οξύτητα) αντιστοιχεί σε $\delta=1$, και η κοιλότητα με $\delta=20$ είναι πρακτικά ορθογωνική. Παρατηρείται ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού παρουσιάζει την ελάχιστη παραμόρφωση για ορθογωνική κοιλότητα. Με μείωση της οξύτητας, η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας αυξάνεται αν και γενικά εξακολουθεί να είναι μικρή σε σύγκριση με το πάχος του υμένα.

Δύο σημεία αξίζει να σχολιαστούν: Στην είσοδο της κοιλότητας εμφανίζεται ένα (ασθενικό) τριχοειδές κύμα, του οποίου το ύψος αυξάνεται με τη μείωση της οξύτητας. Η συμπεριφορά είναι φαινομενικά αντίστροφη αυτής των επιμήκων κοιλοτήτων, όπου

το ύψος του τριχοειδούς κύματος είναι ανάλογο της οξύτητας. Επίσης, το μήκος επηρεασμού της ροής ανάντη και κατόντη της κοιλότητας είναι κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερο του μήκους της ίδιας της κοιλότητας. Η έκταση της επηρεασμένης ζώνης είναι εμφανέστερη στις χαμηλές οξύτητες τοιχώματος, όπου τα τριχοειδή φαινόμενα ενισχύονται, και ερμηνεύεται συγκρίνοντας το χαρακτηριστικό τριχοειδές μήκος με το μήκος της κοιλότητας ($l_c \sim Ca^{-1/3} > w$). Από τα παραπάνω προκύπτει το πρακτικής σημασίας συμπέρασμα ότι η έκταση της επιρροής μίας μεμονωμένης διαταραχής του τοιχώματος εξαρτάται κυρίως από τον Ca μέσω της επίδρασής του στο χαρακτηριστικό τριχοειδές μήκος.

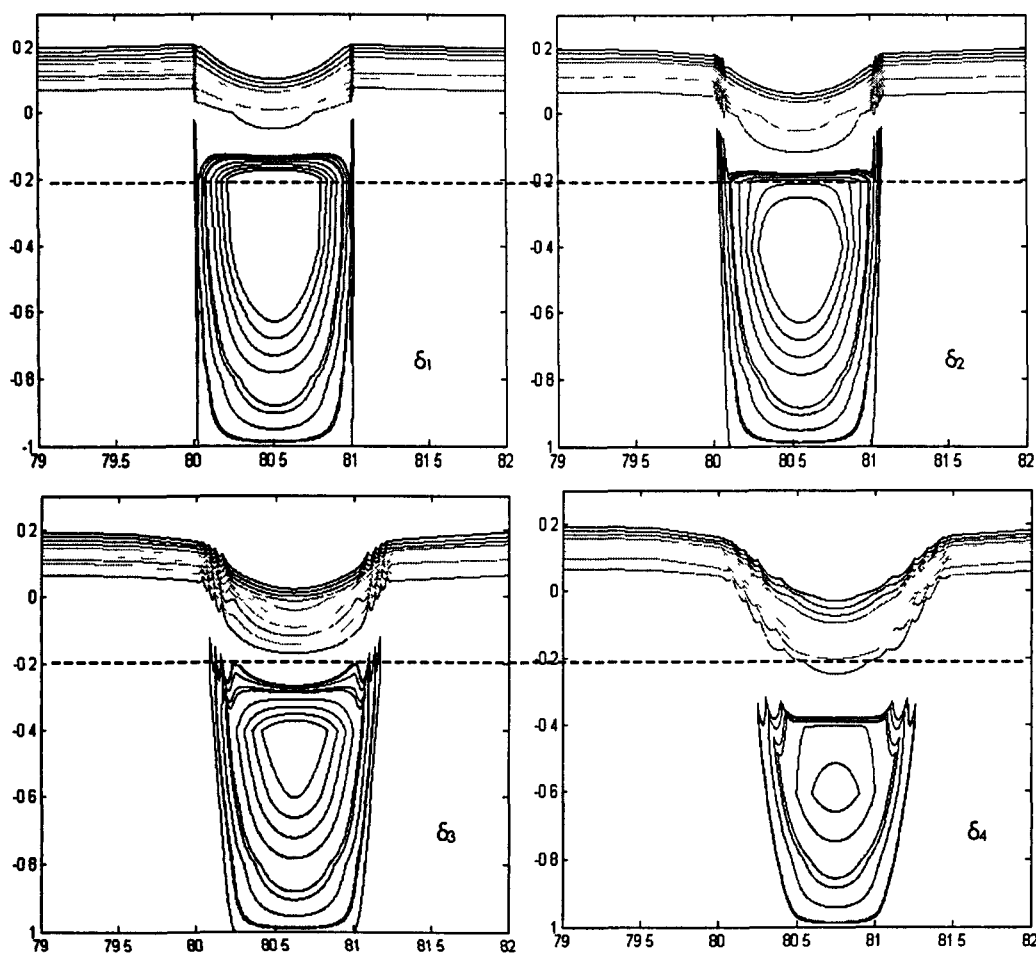


Σχήμα 6.18: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για κοιλότητες με $D=w=1$ και οξύτητες $\delta=20, 5, 2,$ και 1 .

Η ερμηνεία της παραπάνω συμπεριφοράς υποβοηθάται από την εξέταση του πεδίου ροής, όπως παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.19**. Σημειώνεται ότι στο σχήμα περιλαμβάνεται μόνον η κοιλότητα και ένα μικρό τμήμα του υπόλοιπου υμένα, δηλαδή δεν εμφανίζεται η περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας. Ένα γενικό συμπέρασμα είναι ότι σε όλες τις περιπτώσεις εμφανίζεται αποκόλληση της ροής και έντονη ανακυκλοφορία. Υπενθυμίζεται ότι η ροή είναι έρπουσα, και συνεπώς η αποκόλληση δεν είναι αποτέλεσμα της αδράνειας του υγρού αλλά προκύπτει από την απαίτηση ελαχιστοποίησης της σκεδαζόμενης ενέργειας (Θεώρημα Helmholtz έρπουσας ροής).

Διαφορές οξύτητας του τοιχώματος προκαλούν διαφορετικό βαθμό ανακυκλοφορίας. Έτσι, ενώ στην ορθογωνική γεωμετρία η δίνη καταλαμβάνει το 90 % της κοιλότητας, στην ήπια διαμόρφωση με $\delta=1$ δεν ξεπερνά το 50 % (οι διακεκομμένες οριζόντιες γραμμές στη θέση $\gamma=-0,2$ του **Σχήματος 6.19** βοηθούν στη γρήγορη εκτίμηση της έκτασης της ζώνης ανακυκλοφορίας). Με βάση τη συμπεριφορά αυτή,

ερμηνεύεται εύκολα η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας του **Σχήματος 6.18**. Συγκεκριμένα, η ανάπτυξη εκτεταμένης δίνης ανακυκλοφορίας μειώνει αντιστοίχα το ενεργό βάθος της κοιλότητας, και συνεπώς την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας. Επειδή η αποκόλληση υποβοηθάται από απότομη αλλαγή της κλίσης τοιχώματος, η ορθογωνική κοιλότητα παρουσιάζει την μεγαλύτερη δίνη ανακυκλοφορίας και την μικρότερη παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας.

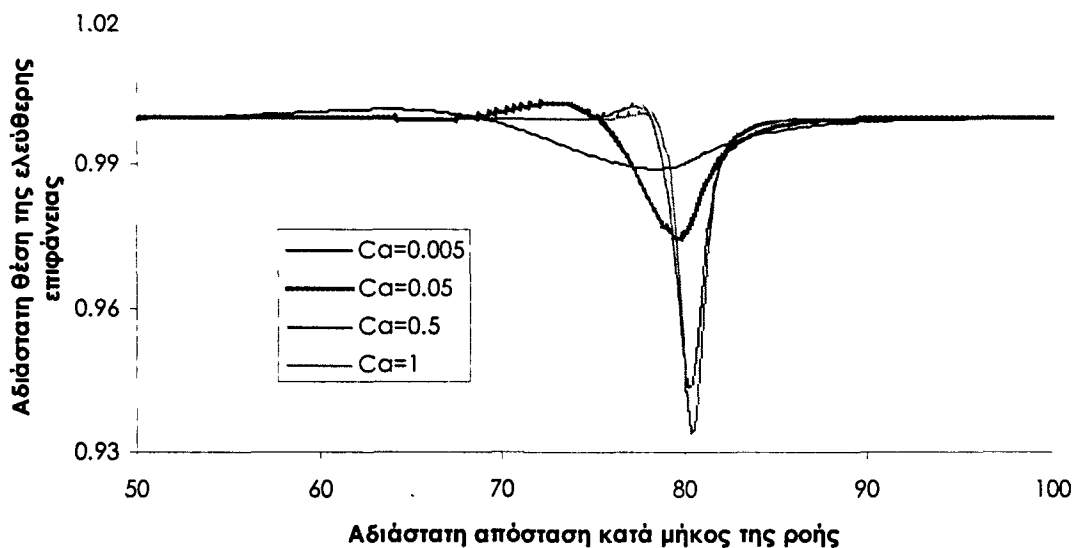


Αδιάστατη απόσταση κατά μήκος της ροής

Σχήμα 6.19: Οι ροϊκές γραμμές για κοιλότητες με $D=w=1$ και οξυότητες $\delta=20, 5, 2,$ και 1 .

Το μέγεθος του τριχοειδούς κύματος ερμηνεύεται επίσης ως συνέπεια των παραπάνω διαφοροποιήσεων. Ειδικότερα, το κύμα εμφανίζεται έντονο εκεί όπου το ρευστό υφίσταται απότομη αλλαγή της διεύθυνσης ροής και συμβάλει στην ανάπτυξη της απαραίτητης για την κίνηση διαφορικής πίεσης. Όταν η αλλαγή της διεύθυνσης ροής καθίσταται ηπιότερη, είτε λόγω του σχήματος της κοιλότητας (ημιτονοειδές) είτε λόγω των ροϊκών συνθηκών (εκτεταμένη ανακυκλοφορία) το τριχοειδές κύμα στην είσοδο ατονεί.

Η επίδραση του τριχοειδούς αριθμού στην συμπεριφορά της ροής υμένα πάνω από στενές κοιλότητες παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.20**. Τα αποτελέσματα αφορούν κοιλότητα οξύτητας $\delta=2$ και εύρος τριχοειδούς αριθμού $Ca=0,005-1$. Σημειώνεται ότι υψηλή οξύτητα κοιλότητας και χαμηλή τιμή Ca οδηγούν σε δυσκολίες σύγκλισης του υπολογιστικού κώδικα.

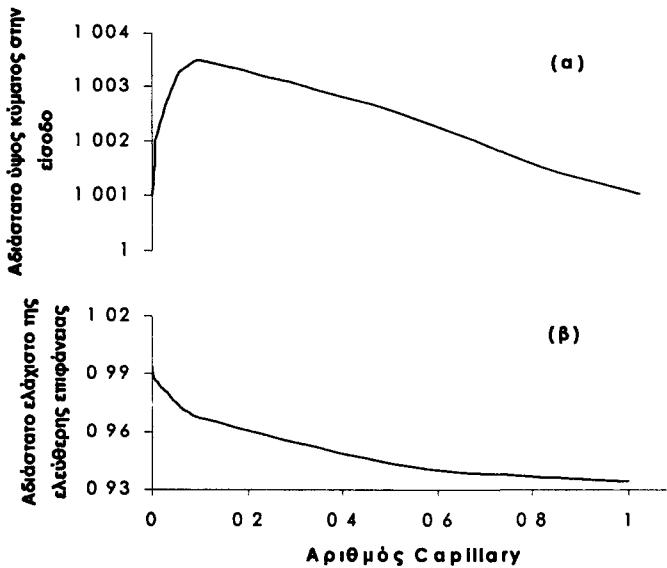


Σχήμα 6.20: Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για κοιλότητα με $D=w=1$, και διάφορες τιμές του τριχοειδούς αριθμού.

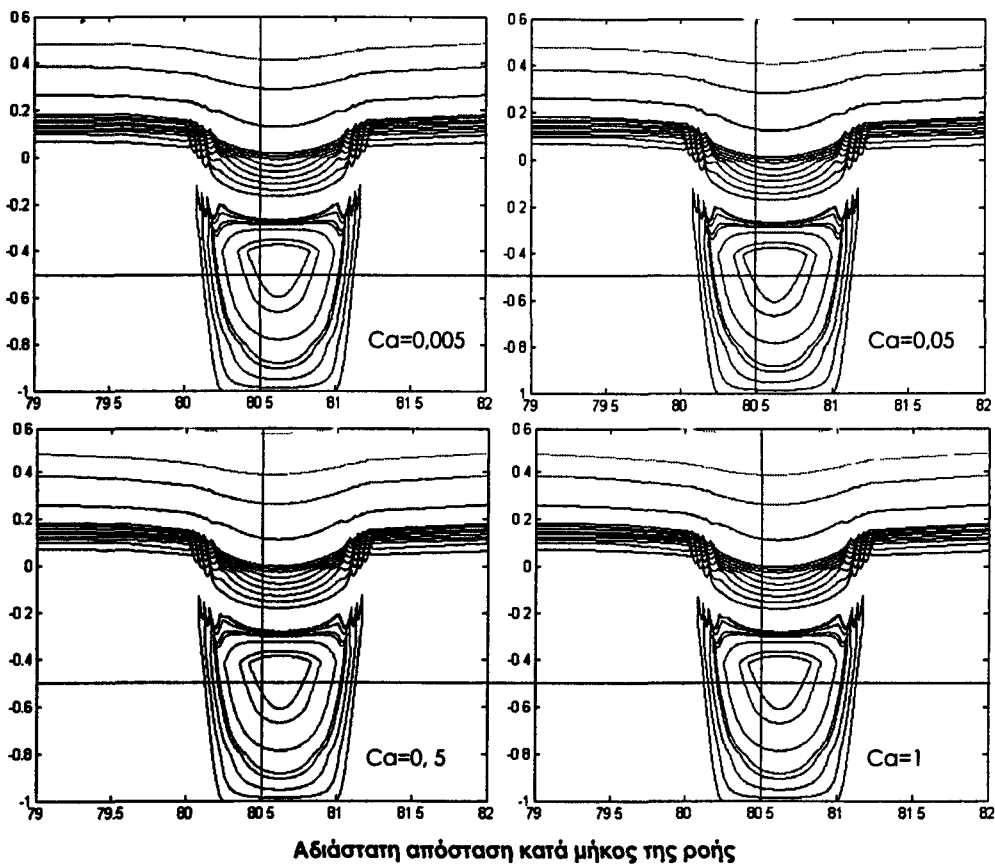
Από το **Σχήμα 6.20** συμπεραίνεται ότι αύξηση του τριχοειδούς αριθμού οδηγεί σε αύξηση της παραμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας. Γενικά όμως η παραμόρφωση αυτή είναι μικρή και τείνει ασυμπτωτικά σε σταθερή τιμή με αύξηση του Ca . Το αποτέλεσμα αυτό τεκμηριώνεται ποσοτικά από το **Σχήμα 6.21(β)**. Αντίστοιχα μικρό είναι και το ύψος του τριχοειδούς κύματος που αναπτύσσεται, και που παρουσιάζει μέγιστο σε ενδιάμεσες τιμές του τριχοειδούς αριθμού (**Σχήμα 6.21(α)**). Για πολύ μικρές τιμές Ca , το ύψος του κύματος μικραίνει ενώ το μήκος του αυξάνει σε συμφωνία με το χαρακτηριστικό τριχοειδές μήκος. Για μεγάλες τιμές του Ca , το τριχοειδές κύμα επίσης εξασθενεί και η ελεύθερη επιφάνεια τείνει να ακολουθήσει πιστότερα τη μορφή της κοιλότητας.

Η δομή του ροϊκού πεδίου για τις τιμές τριχοειδούς αριθμού του **Σχήματος 6.20** αναπαρίσταται από τα διαγράμματα ροϊκών γραμμών του **Σχήματος 6.22**. Είναι εμφανές ότι μεταβολή του τριχοειδούς αριθμού κατά τρεις τάξεις μεγέθους έχει αμελητέα επίδραση στην έκταση της ζώνης ανακυκλοφορίας. Συνεπώς, το μέγεθος της δίνης που σχηματίζεται στην έρπουσα ροή εξαρτάται ισχυρά από τη μορφή της κοιλότητας αλλά καθόλου από τον τριχοειδή αριθμό της ροής. Σύμφωνα με τα

παραπάνω, κοιλότητα μικρότερης οξύτητας θα οδηγούσε σε μικρότερη δίνη ανακυκλοφορίας και συνεπώς εντονότερη παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 6.21: (α) Το ύψος του τριχοειδούς κύματος και (β) η μέγιστη παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας του υμένα συναρτήσει του τριχοειδούς αριθμού.



Σχήμα 6.22: Οι ροϊκές γραμμές για κοιλότητα με $D=w=1$, και διάφορες τιμές του τριχοειδούς αριθμού.

Συμπερασματικά, η μείωση του μήκους της κοιλότητας μειώνει την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας και οδηγεί σε ανάπτυξη ζώνης ανακυκλοφορίας. Η οξύτητα του τοιχώματος επηρεάζει έντονα την έκταση της ανακυκλοφορίας και ασθενικά την παραμόρφωση της επιφάνειας, ενώ ο τριχοειδής αριθμός εξακολουθεί να καθορίζει το χαρακτηριστικό μήκος των (ασθενών) τριχοειδών φαινομένων.

6.4 Ροή για πεπερασμένους αριθμούς Reynolds

Όλα τα αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί ως αυτό το σημείο στο παρόν κεφάλαιο ισχύουν για έρπουσα ροή ($Re=0,001$). Τα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν αφορούν την ισορροπία μεταξύ βαρυτικών δυνάμεων (που προκαλούν την κίνηση), ιξωδών δυνάμεων (που διαμορφώνουν το βασικό πεδίο ροής) και τριχοειδών δυνάμεων (που καθορίζουν τη δυναμική της ελεύθερης επιφάνειας). Αύξηση του αριθμού Reynolds ανατρέπει την ισορροπία δυνάμεων και οδηγεί σε τοπικές επιταχύνσεις/επιβραδύνσεις του υγρού.

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι η διερεύνηση των αλλαγών στη δυναμική της ροής πάνω από μεμονωμένη κοιλότητα όταν μεταβάλλεται ο αριθμός Reynolds. Για να είναι δυνατή η άμεση σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με τα προηγούμενα για $Re=10^{-3}$, καθώς και η εξέταση της επίδρασης μόνον του Re , η παραμετρική ανάλυση γίνεται για μεταβλητό Re αλλά σταθερό πάχος υμένα h_N . Ο τελευταίος περιορισμός είναι απαραίτητος καθώς όλα τα γεωμετρικά μεγέθη της κοιλότητας αδιαστατοποιούνται με το h_N . Με τη διατήρηση σταθερού πάχους υμένα αποφεύγεται η διαφοροποίηση των αδιάστατων χαρακτηριστικών της ίδιας φυσικής κοιλότητας όταν μεταβάλλεται ο Re . Επίσης, διατηρείται σταθερός ο τριχοειδής αριθμός, Ca , έτσι ώστε να εξετάζεται μόνον η επίδραση του Re . Από πειραματική σκοπιά, η παραπάνω διαδικασία αντιστοιχεί σε αλλαγή του Re με αυξομείωση του ιξώδους του υγρού (και διατήρηση σταθερής επιφανειακής τάσης), έτσι ώστε να ισχύει:

$$h_N^3 = \frac{Re \cdot 3\nu^2}{g} = \text{σταθ.} \quad (6.1)$$

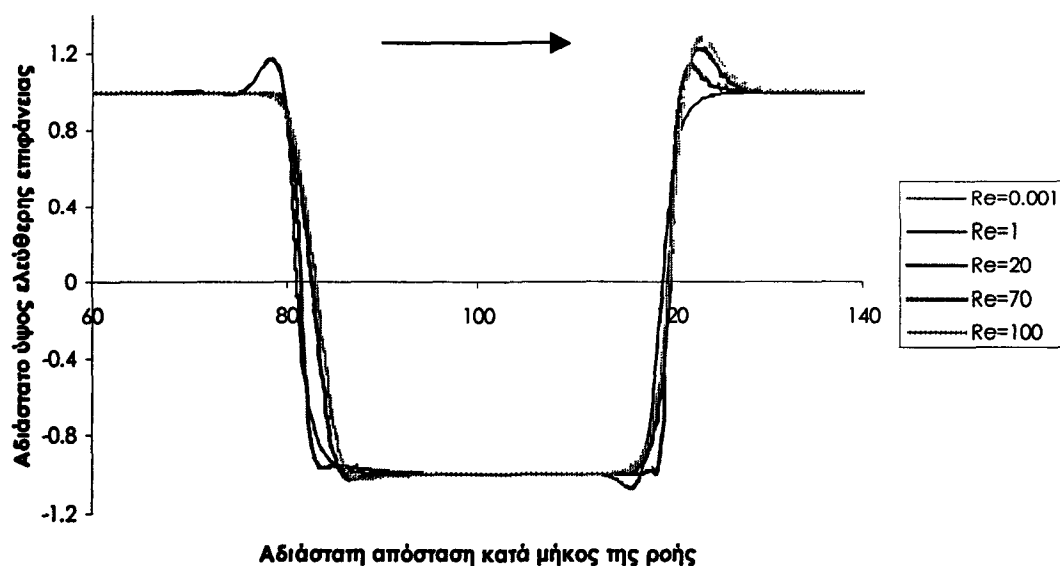
6.4.1 Επιμήκεις κοιλότητες

Αποτελέσματα αντιπροσωπευτικά των επιμήκων κοιλοτήτων λαμβάνονται για μία πρότυπη κοιλότητα με $D=2$ και $w=40$. Η οξύτητα μεταβλήθηκε σε όλο το διαθέσιμο εύρος τιμών, αλλά παρουσιάζονται καταρχάς αποτελέσματα για σχεδόν ορθογωνική κοιλότητα ($\delta=0,8$), όπου τα επιφανειακά χαρακτηριστικά είναι εντονότερα. Επίσης, ο τριχοειδής αριθμός διατηρείται προς το παρόν σταθερός και ίσος με $Ca=0,25$.

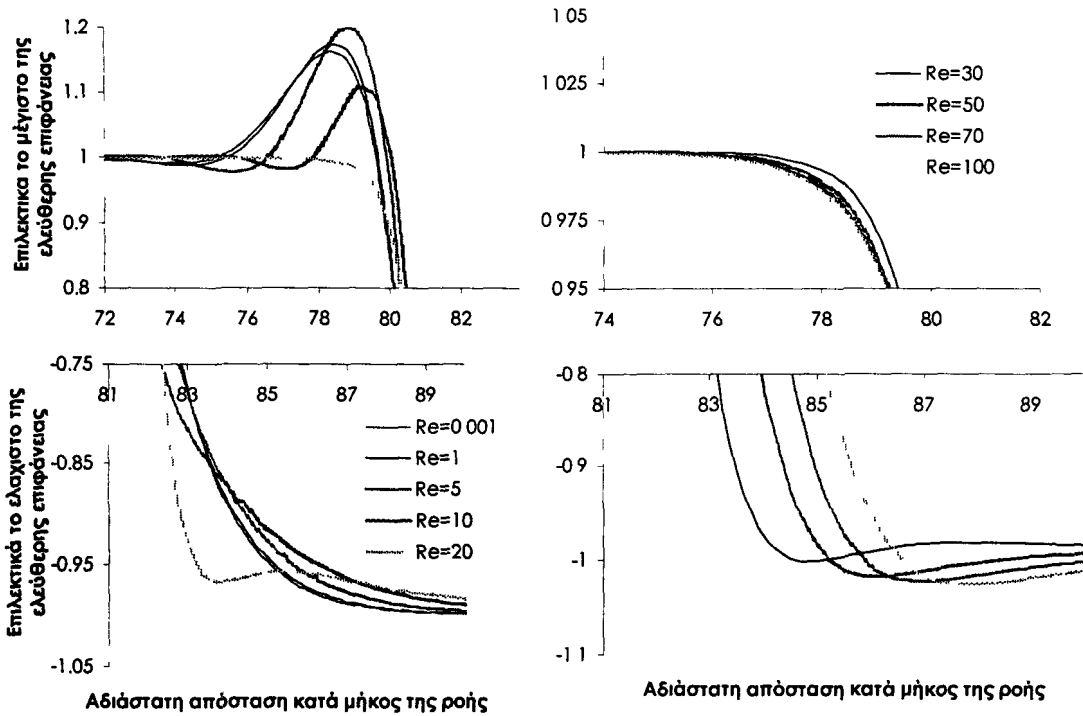
Το **Σχήμα 6.23** παρουσιάζει συνοπτικά τη διαφοροποίηση της ελεύθερης επιφάνειας με τον αριθμό Reynolds σε ένα εύρος τιμών $Re=0,001-100$, ιδιαίτερες

διαμορφώσεις παρατηρούνται τόσο στον αναβαθμό της εισόδου στην κοιλότητα όσο και στον αναβαθμό της εξόδου από την κοιλότητα, και παρουσιάζονται σε μεγέθυνση στα **Σχήματα 6.24(α)** και **6.24(β)** αντίστοιχα. Μία πρώτη γενική παρατήρηση αφορά την σχεδόν ολοκληρωτική ταύτιση των αποτελεσμάτων για $Re=0,001$ και $Re=1$. Δηλαδή, η συνεισφορά μικρών αδρανειακών δυνάμεων είναι αμελητέα όπως έχουν ήδη προβλέψει με ασυμπτωτική ανάλυση οι Bielarz et al. (2001).

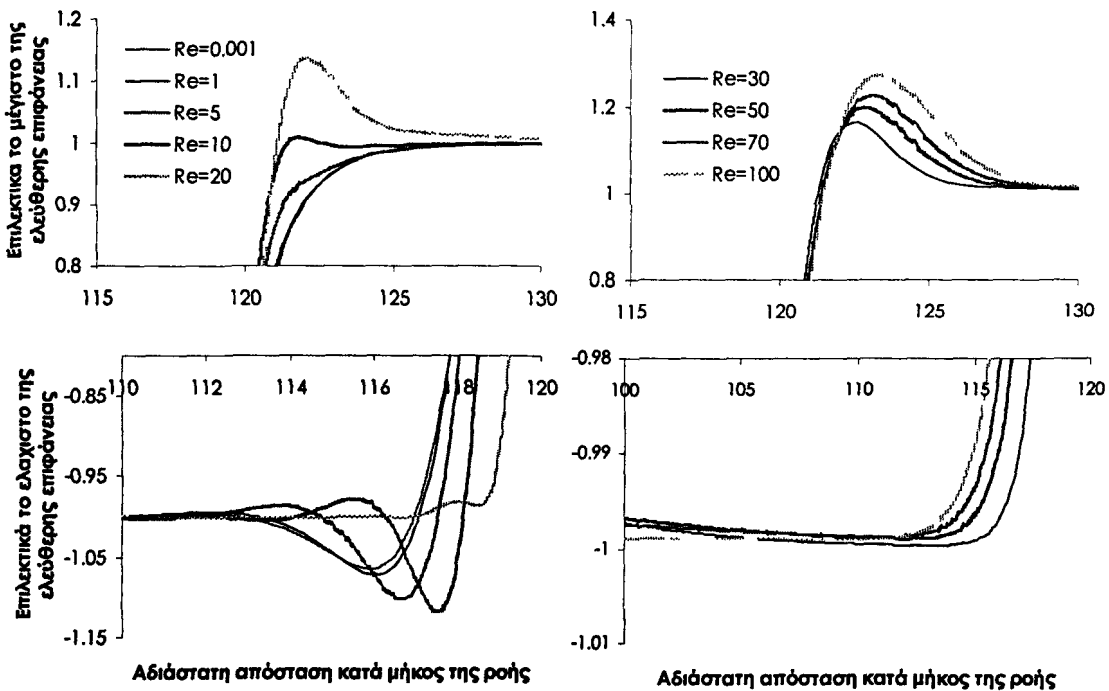
Πεπερασμένες αδρανειακές δυνάμεις διαφοροποιούν αισθητά τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Ειδικότερα, το τριχοειδές κύμα εισόδου αρχικά ενισχύεται ελαφρά σε ύψος και καθίσταται οξύτερο ($Re=5$), ενώ στη συνέχεια αρχίζει να εξασθενεί και τελικά εξαφανίζεται εντελώς σε $Re=20$. Αντίστοιχα, ο πυθμένας της εισόδου εμφανίζει σε $Re=20$ μία μικρή βύθιση. Περαιτέρω αύξηση του Re διαφοροποιεί ελαφρά το βάθος και τη θέση της βύθισης αλλά δεν εμφανίζει κάτι ποιοτικά διαφορετικό. Η συμπεριφορά στον κατόντη αναβαθμό της κοιλότητας είναι επίσης ενδιαφέρουσα. Η βύθιση της έρπουσας ροής καθίσταται αρχικά οξύτερη αλλά για $Re=20$ εξαφανίζεται. Εμφανίζεται όμως σταδιακά ένα κύμα στην έξοδο του αναβαθμού, το οποίο για $Re=20$ έχει αποκτήσει την τελική του μορφή και με περαιτέρω αύξηση του Re απλά μεγαλώνει σε μέγεθος. Καθίσταται εμφανές από τα παραπάνω ότι υπάρχει μία οριακή τιμή Re (για τον εξεταζόμενο $Ca=0,25$ αυτή η τιμή $Re=20$) πέρα από την οποία τα χαρακτηριστικά της ελεύθερης επιφάνειας επηρεάζονται κυρίως από την αδράνεια. Η ερμηνεία των διαφοροποιήσεων που παρατηρούνται θα γίνει στη συνέχεια, αφού συνεκτιμηθούν μεταβολές στο πεδίο ροής.



Σχήμα 6.23. Η θέση της ελεύθερης επιφάνειας για Reynolds 0,001-100,



Σχήμα 6.24(α): Ελεύθερη επιφάνεια σε μεγέθυνση στον αναβαθμό της εισόδου



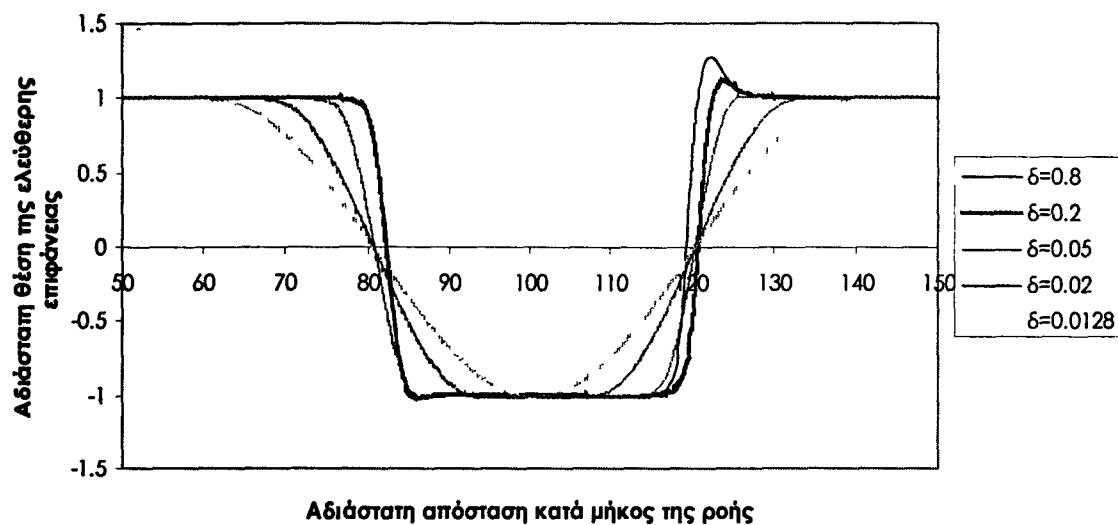
Σχήμα 6.24(β): Ελεύθερη επιφάνεια σε μεγέθυνση στον αναβαθμό της εξόδου.

Η εξάρτηση των επιφανειακών φαινομένων από την οξύτητα της κοιλότητας παρουσιάζεται ενδεικτικά για $Re=50$ στο **Σχήμα 6.25**, και είναι η αναμενόμενη: δηλαδή

παρατηρείται σταδιακή εξασθένηση με μείωση της οξύτητας. Το συμπέρασμα είναι ότι οι έντονες διαμορφώσεις της ελεύθερης επιφάνειας προκαλούνται και πάλι από την απότομη μεταβολή της διεύθυνσης ροής που επιβάλλει η γεωμετρία του τοιχώματος. Η μορφή τους όμως τώρα προκύπτει από την αλληλεπίδραση των αδρανειακών και των τριχοειδών δυνάμεων που ενεργοποιεί η ροή.

Η εισαγωγή της αδράνειας στην κατακόρυφη ροή υμένα σε τοίχωμα μοναδικής διαμόρφωσης οδηγεί συστηματικά στην εμφάνιση τριχοειδούς κύματος στην έξοδο της διαμόρφωσης και παράλληλα στην ακύρωση του κύματος στην είσοδο. Για την ερμηνεία των παρατηρήσεων και την ταυτοποίηση των φυσικών μηχανισμών του φαινομένου βασικές είναι οι πληροφορίες που δίνει το **Σχήμα 6.26**.

Στο **Σχήμα 6.26** παριστάνεται η ροϊκή συνάρτηση για τους αριθμούς Reynolds $Re=1, 100$, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν ροές με αμελητέα και κυρίαρχη αντίστοιχα αδρανειακή συνεισφορά. Στο **Σχήμα 6.27** δίνονται σε μεγέθυνση λεπτομέρειες της ροής για $Re=100$. Η σημαντικότερη διαφοροποίηση που παρατηρείται σε υψηλούς Re είναι η εμφάνιση μίας μεγάλης δίνης αποκόλλησης στην είσοδο και δύο μικρότερων στην έξοδο της κοιλότητας.

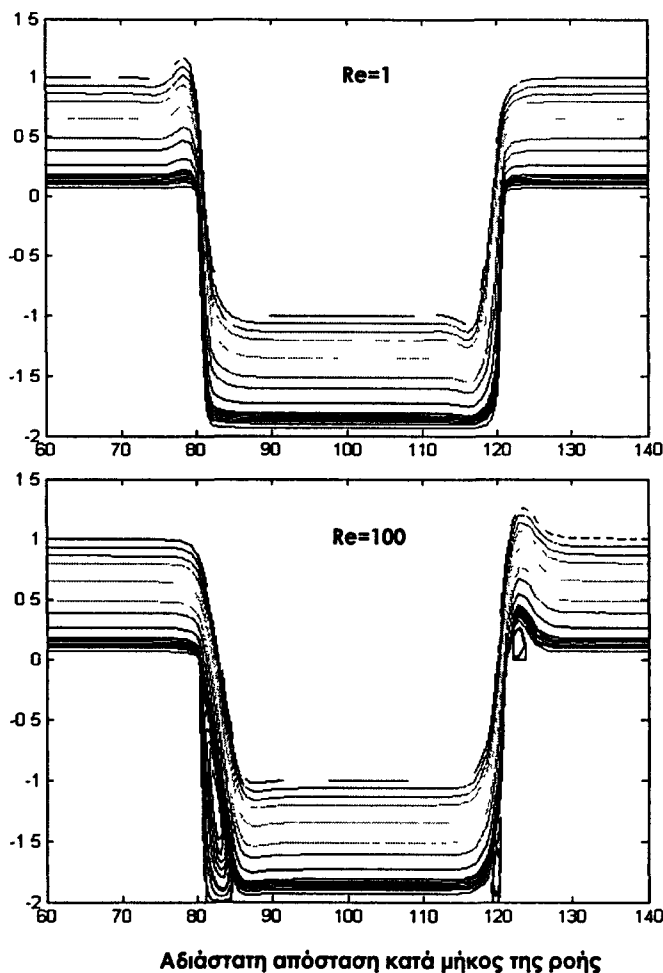


Σχήμα 6.25: Η ελεύθερη επιφάνεια για $Re=50$, $Ca=0,25$ και διάφορες οξύτητες.

Ειδικότερα, παρατηρείται ότι αύξηση των αδρανειακών δυνάμεων θα έπρεπε αρχικά να οδηγήσει σε ενίσχυση του τριχοειδούς κύματος εισόδου (όπως και όντως παρατηρείται) καθώς απαιτείται ισχυρότερη διαφορική πίεση για την ροή. Όμως, η ανάπτυξη, πέρα από έναν Re , της δίνης αποκόλλησης καθιστά την μεταβολή της διεύθυνσης ροής του υμένα κατά πολύ ηπιότερη, με συνέπεια το κύμα σταδιακά να εξαφανίζεται.

Αντίστοιχα, η ανάπτυξη κύματος στην έξοδο της κοιλότητας μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Με αύξηση της αδράνειας του υγρού ενισχύεται η τάση για

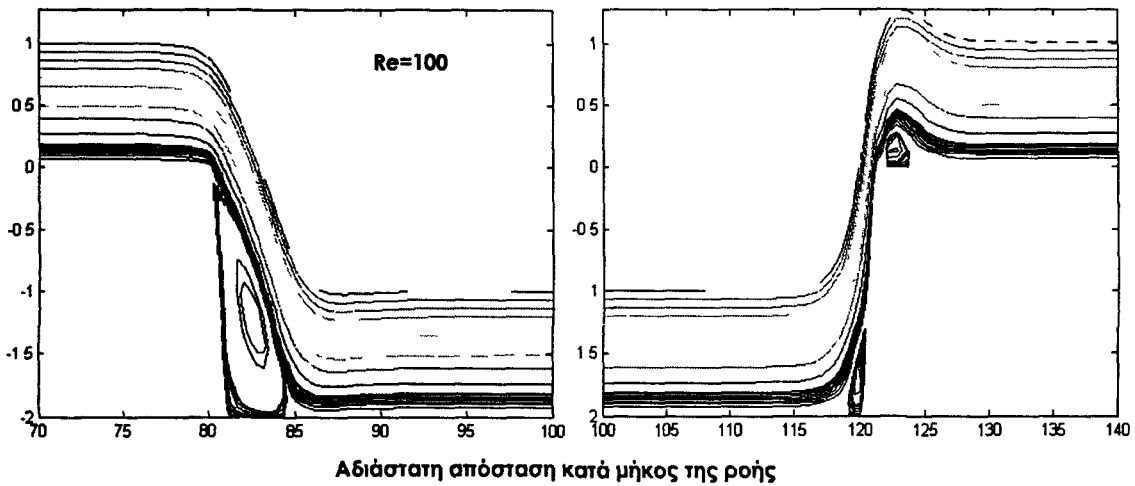
εκτόξευσή του υπό μορφή δέσμης κατά τη διεύθυνση της παριάς εξόδου της κοιλότητας. Ένδειξη της τάσης αυτής είναι η μικρή δίνη αποκόλλησης που εμφανίζεται στην κορυφή της εξόδου. Στην περίπτωση αυτή, η επιφανειακή τάση ενεργεί ως δύναμη επαναφοράς, προκαλώντας αυξημένη τριχοειδή πίεση που διατηρεί το υγρό σε επαφή με το τοίχωμα.



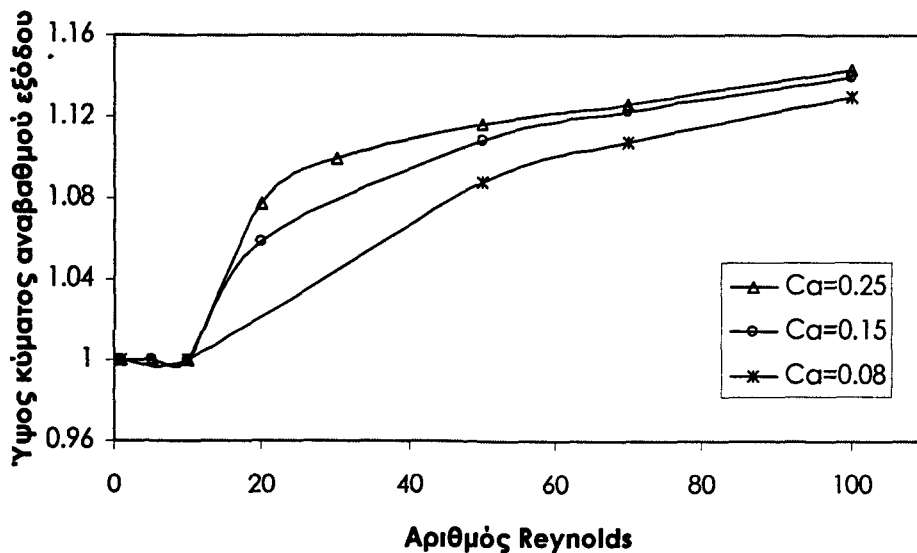
Σχήμα 6.26: Η ροϊκή συνάρτηση για ορθογωνική κοιλότητα ($\delta=2,5$) και αριθμούς Reynolds, $Re=1-100$

Η επίδραση του τριχοειδούς αριθμού στη διαμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας υμένα πεπερασμένου Re επιβεβαιώνει την παραπάνω ερμηνεία. Ειδικότερα, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 6.28**, η εξάρτηση του ύψους του κύματος εξόδου (αδρανειακού) ως συνάρτηση του Re , για τρεις διαφορετικές τιμές του τριχοειδούς αριθμού. Σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρείται ότι το αδρανειακό κύμα εμφανίζεται σε $Re \sim 10$ και το μέγεθος του αυξάνεται συνεχώς με τον Re . Είναι εμφανές όμως ότι, για σταθερό Re , το ύψος του κύματος αυξάνεται με τον Ca , δηλαδή με τη μείωση της επιφανειακής τάσης. Η συμπεριφορά αυτή υποδηλώνει ότι η επιφανειακή τάση προσφέρει τον μηχανισμό συγκράτησης του αδρανειακού κύματος στην έξοδο. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι η επίδραση του Ca είναι αντίστροφη στο τριχοειδές

κύμα εισόδου στην έρπουσα ροή και στο αδρανειακό κύμα εξόδου στη ροή με πεπερασμένο Re .



Σχήμα 6.27: Λεπτομέρειες της ροής για $Re=100$ σε μεγέθυνση



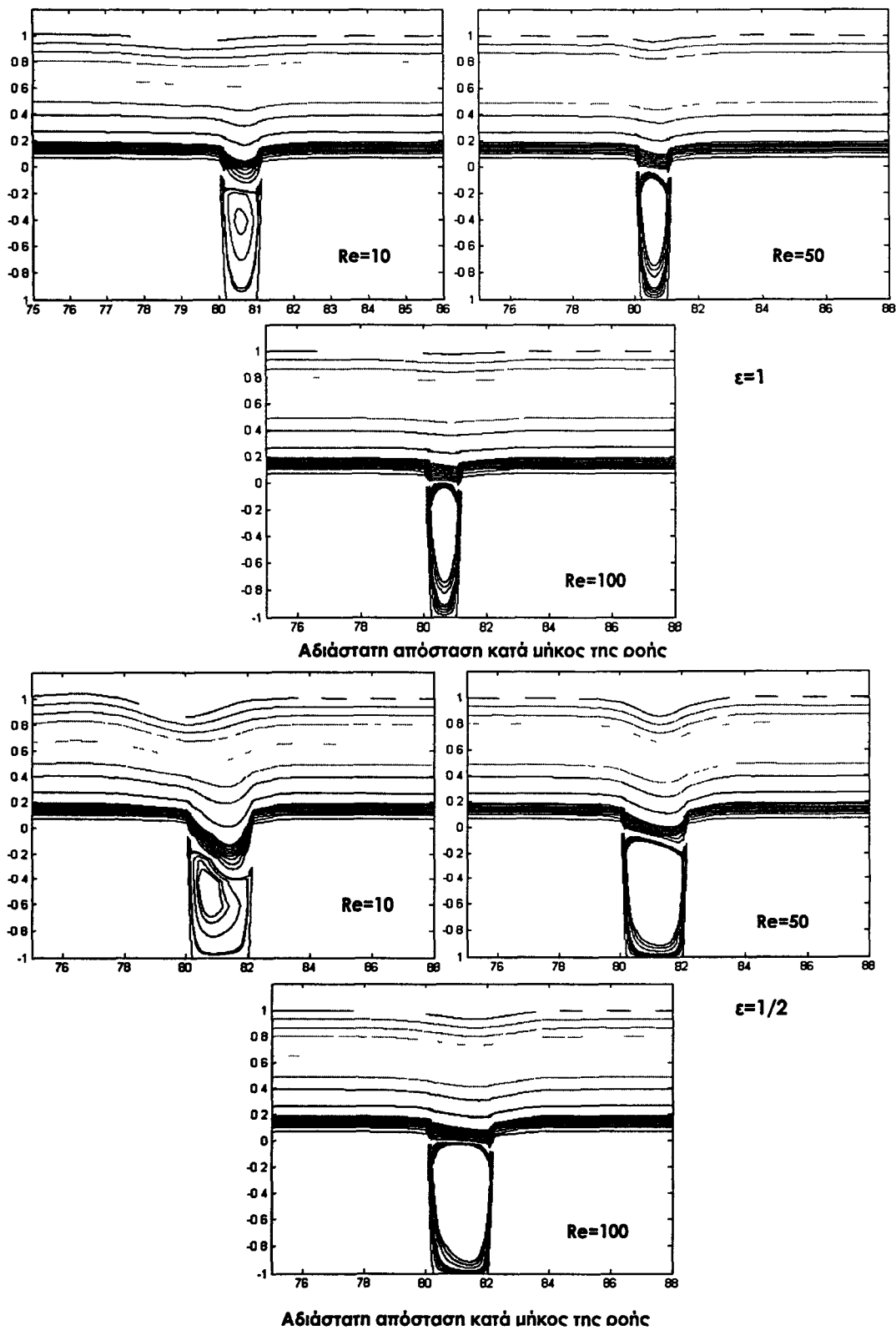
Σχήμα 6.28: Εξάρτηση του ύψους του κύματος του αναβαθμού εξόδου από τον αριθμό Reynolds και από τον τριχοειδή αριθμό.

6.4.2 Στενές κοιλότητες

Η εργασία ολοκληρώνεται με την ενδεικτική μελέτη της συμπεριφοράς στενών κοιλοτήτων. Ειδικότερα, εξετάζονται κοιλότητες με $D=1$ και $w=2, 3, 4$, ώστε να τεκμηριωθούν οι διαφοροποιήσεις που προκαλούνται από τη σταδιακή αύξηση του μήκους, και παρουσιάζονται διαγράμματα του ροϊκού πεδίου για $Ca=0,1$ και $Ca=1$, και $Re=10, 50, 100$. Οι κοιλότητες έχουν υψηλή οξύτητα, καθώς έχει διαπιστωθεί ότι για

αυτές τις γεωμετρίες τα φαινόμενα τόσο της ελεύθερης επιφάνειας όσο και της κύριας μάζας του ρευστού είναι εντονότερα.

Τα **Σχήμα 6.29**, **Σχήμα 6.30**, παριστάνουν τη ροϊκή συνάρτηση για κοιλότητες με λόγο μηκών $\varepsilon=1$, $1/2$ και $1/3$ αντίστοιχα, όταν ο αριθμός Reynolds αυξάνει.



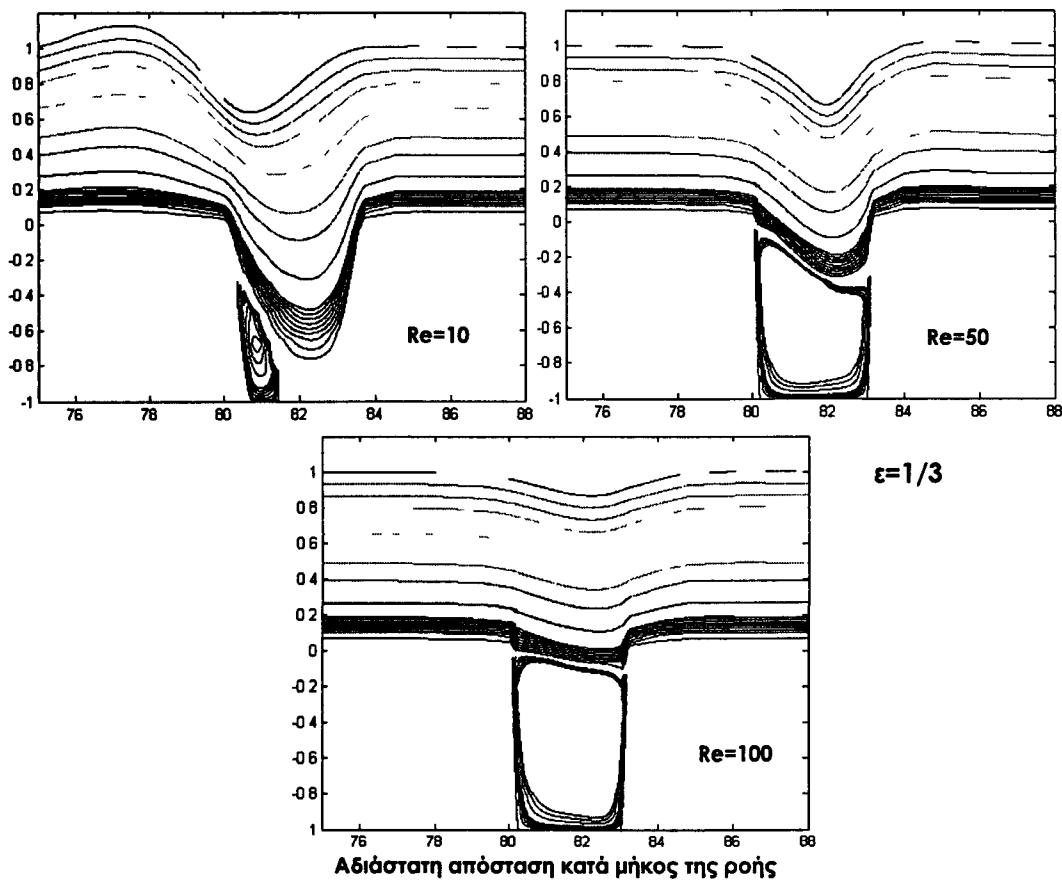
Σχήμα 6.29: Η ροϊκή συνάρτηση για $\varepsilon=1$ και $\varepsilon=1/2$ και αριθμούς Reynolds, $Re=10-100$

Οι καμπύλες καλύπτουν όλο το εύρος του ροϊκού πεδίου, από την ελεύθερη επιφάνεια έως το βάθος της κοιλότητας.

Για τη μάζα του ρευστού μέσα στην κοιλότητα:

(α) Το ρευστό ανακυκλοφορεί ανεξαρτήτως του λόγου μηκών, ϵ .

(β) Όσο ο αριθμός Reynolds μεγαλώνει το ρευστό που ανακυκλοφορεί καταλαμβάνει ολόκληρη την κοιλότητα, ανεξαρτήτως του λόγου μηκών της. Ο τρόπος της ανακυκλοφορίας εξαρτάται από το λόγο των μηκών, αλλά αυτό αποτελεί λεπτομέρεια που δεν αλλοιώνει ποιοτικά τη συμπεριφορά.



Σχήμα 6.30: Η ροϊκή συνάρτηση για $\epsilon=1/3$ και αριθμούς Reynolds, $Re=10-100$

(γ) Ο λόγος των μηκών, ϵ , επηρεάζει την ανακυκλοφορία του ρευστού μόνο στους χαμηλούς αριθμούς Reynolds. Έτσι, όσο μικραίνει ο λόγος για παράδειγμα $\epsilon=1/2, 1/3$, η δίνη ανακυκλοφορίας περιορίζεται στην αριστερή γωνία της κοιλότητας. Η δίνη ανακυκλοφορίας, στον μικρότερο αριθμό Reynolds, για $\epsilon=1/3$ είναι πολύ μικρότερη της δίνης που δημιουργείται για $\epsilon=1/2$.

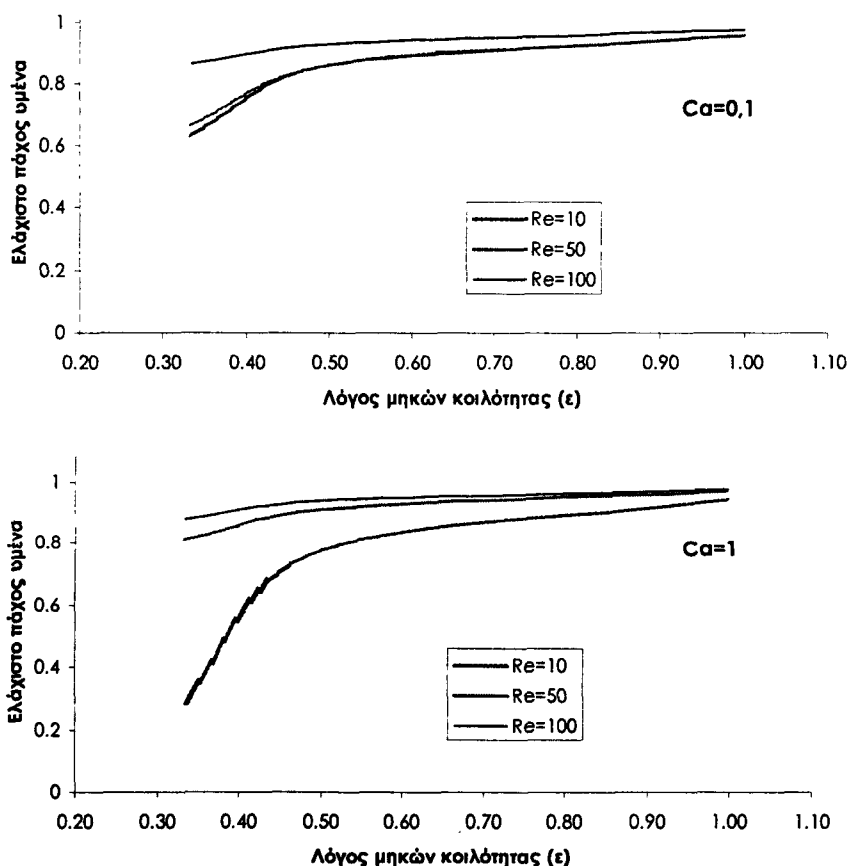
Η θέση και η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας δείχνει να είναι συνάρτηση τόσο του αριθμού Reynolds όσο και του λόγου μηκών της κοιλότητας, ϵ . Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

(α) Η ελεύθερη επιφάνεια τείνει να γίνει επίπεδη. Αυτό επιτυγχάνεται σε αριθμό Reynolds εκατό, $Re=100$ και λόγο μήκων, $\epsilon=1$.

(β) Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας εξαρτάται από την δίνη ανακυκλοφορίας στην κοιλότητα. Αυτό γίνεται εμφανές πολύ περισσότερο στο **Σχήμα 6.30**,

(γ) Όσο μεγαλύτερος ο αριθμός Reynolds τόσο λιγότερο αντιλαμβάνεται την κοιλότητα η ελεύθερη επιφάνεια. Ο λόγος για αυτό είναι η δίνη ανακυκλοφορίας του ρευστού μέσα στην κοιλότητα.

Τα επόμενα διαγράμματα παριστάνουν το μέγιστο βύθισμα της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου των μήκων της κοιλότητας και συναρτήσει του αριθμού Reynolds. Οι καμπύλες του **Σχήματος 6.31** έχουν παραχθεί για δυο αριθμούς Capillary, $Ca=0,1$ και $Ca=1$. Αυτό που είναι χαρακτηριστικό είναι ότι η επιφανειακή τάση επιδρά στη θέση της ελεύθερης επιφάνειας όταν ο αριθμός Reynolds είναι της τάξης του δέκα, $Re=10$.



Σχήμα 6.31 : Η ελάχιστη θέση της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει του λόγου των μήκων, ϵ , της κοιλότητας.

Για μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο Reynolds, $Re=100$, η ελεύθερη επιφάνεια γεφυρώνει τα δύο άκρα της κοιλότητας χωρίς να αντιλαμβάνεται σχεδόν την ύπαρξη

της κοιλότητας. Αυτό είναι τόσο πιο αποτελεσματικό όσο πιο κοντά βρίσκονται τα άκρα και όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός Reynolds. Για παράδειγμα, για την κοιλότητα με λόγο μήκων, $\epsilon=1$, αρκεί αριθμός Reynolds δέκα, $Re=10$ για να υπάρξει σχεδόν οριζόντια ελεύθερη επιφάνεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

Η παρούσα μελέτη επικεντρώθηκε σε δυο βασικές κατηγορίες βαρυτικών ροών υγρού υμένα, την αναπτυσσόμενη ροή σε επίπεδο τοίχωμα και τη μόνιμη ροή σε τοίχωμα με διαμορφώσεις. Στη δεύτερη κατηγορία εξετάστηκε αρχικά ημιτονοειδές τοίχωμα με πολλές περιόδους και στη συνέχεια τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση. Τα συμπεράσματα παρατίθενται με την ίδια σειρά.

7.1 Αναπτυσσόμενη ροή υμένα σε επίπεδο τοίχωμα

- Διαπιστώθηκε ότι η εισαγωγή κανονικών διαταραχών χαμηλής-μέσης συχνότητας οδηγεί στη δημιουργία μίας σειράς μοναχικών κυμάτων. Τα χαρακτηριστικά των μοναχικών κυμάτων (ύψος, φασική ταχύτητα, μήκος κύματος, συχνότητα τριχοειδών κυματισμών) μελετήθηκαν ως συναρτήσεις της συχνότητας διαταραχής εισόδου και του αριθμού Reynolds. Επιβεβαιώθηκε η γραμμική εξάρτηση της φασικής ταχύτητας από το ύψος του κύματος και διαπιστώθηκε ότι οι σωστές κλίμακες αδιαστατοποίησης σχετίζονται όχι με τη μέση ροή αλλά με το υπόστρωμα.
- Προβλέφθηκε για πρώτη φορά η επίδραση των μοναχικών κυμάτων στη διατμητική τάση στο τοίχωμα. Διαπιστώθηκε η εμφάνιση ενός μεγίστου κοντά στην κύρια κορυφή και ενός αρνητικού ελαχίστου (ενδεικτικού τοπικής αναστροφής της ροής) στην πρώτη τριχοειδή βύθιση. Παρατηρήθηκε ότι η διέλευση των τριχοειδών κυματισμών προκαλεί συγκριτικά έντονες διακυμάνσεις της διατμητικής τάσης, ενώ η διέλευση τους ουράς του κύματος ένα εκτεταμένο πλατώ. Γενικότερα, η ένταση της ταλάντωσης της διατμητικής τάσης με το πέρασμα ενός μοναχικού κύματος μεγιστοποιείται σε ενδιάμεσους Re , καθώς είναι ανάλογη του ύψους του κύματος και αντίστροφα ανάλογη του πάχους του υποστρώματος.
- Ελέγχθηκε η επίδραση στη ροή διαταραχών πολύ χαμηλής συχνότητας και διαφόρων μορφών. Διαπιστώθηκε ότι η ουρά του σχηματιζόμενου μοναχικού κύματος εισάγει στη ροή αστάθεια που τελικά οδηγεί στη δημιουργία ενός νέου κύματος, αυξάνοντας έτσι τη συχνότητα των κυμάτων και καταστρέφοντας την κανονικότητα της κυματοσειράς. Ο μηχανισμός του φαινομένου είναι ανεξάρτητος από το είδος της αρχικής διαταραχής.
- Όλα τα ανωτέρω αποτελέσματα προσομοιώσεων συγκρίθηκαν με εργαστηριακές μετρήσεις και διαπιστώθηκε ικανοποιητική ποσοτική συμφωνία.

7.2 Μόνιμη ροή υμένα σε ημιτονοειδές τοίχωμα

- Μελετήθηκε η επίδραση του βάθους διαμόρφωσης του τοιχώματος και του αριθμού Reynolds στα δύο κύρια χαρακτηριστικά της μόνιμης ροής: την ανάπτυξη δινών ανακυκλοφορίας στο εσωτερικό των κοιλοτήτων και την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας του υμένα. Η επίδραση του αριθμού Reynolds διαπιστώθηκε ότι ακολουθεί δύο τάσεις: μια για τους μικρούς Reynolds (10-100) και μια για τους μεγαλύτερους (100-200).
- Η κύρια δίνη ανακυκλοφορίας περιγράφηκε με βάση τη θέση και το μέγεθος της (διαστάσεις, όγκομετρική παροχή που ανακυκλώνεται). Για μεγάλα βάθη τοιχώματος, τεκμηριώθηκε η εμφάνιση δεύτερης δίνης. Διαπιστώθηκε ότι η πρώτη δίνη επηρεάζεται κυρίως από τον αριθμό Reynolds (και μεγιστοποιεί το μέγεθος της σε ενδιάμεσο Re), ενώ η δεύτερη επηρεάζεται κυρίως από το βάθος της διαμόρφωσης.
- Η διαμόρφωση του τοιχώματος προκαλεί στην ελεύθερη επιφάνεια μία μόνιμη, περιοδική παραμόρφωση, η ένταση της οποίας εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds και το βάθος του τοιχώματος. Η εξάρτηση από τον Re λαμβάνει τη μορφή συντονισμού, όπως έχει προβλεφθεί ασυμπτωτικά στο όριο μηδενικού βάθους. Με αύξηση του βάθους του τοιχώματος, η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας μεταπίπτει από την περιοδικότητα του τοιχώματος σε διπλάσια.

7.3 Μόνιμη ροή υμένα σε τοίχωμα με μεμονωμένη διαμόρφωση

- Εξετάστηκε η επίδραση των γεωμετρικών κλιμάκων μεμονωμένης κοιλότητας (βάθος, μήκος, οξύτητα) και των παραμέτρων της ροής (αριθμός Re , τριχοειδής αριθμός Ca) στα χαρακτηριστικά του υγρού υμένα. Στο όριο της έρπουσας ροής, επιβεβαιώθηκε η ανάπτυξη τριχοειδούς κυματισμού στην είσοδο της κοιλότητας, του οποίου το ύψος εξαρτάται ευθέως από την οξύτητα της κοιλότητας και αντίστροφα από τον Ca . Έρπουσα ροή πάνω από στενή κοιλότητα (μήκος κοιλότητας < χαρακτηριστικού τριχοειδούς μήκους $\sim Ca^{-1/3}$) οδηγεί σε εκτεταμένη ανακυκλοφορία και η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας εξαρτάται αντίστροφα από το μέγεθος της αναπτυσσόμενης δίνης.
- Αύξηση του αριθμού Reynolds οδηγεί σε σταδιακή εξαφάνιση του τριχοειδούς κύματος εισόδου, με παράλληλη ανάπτυξη ενός κύματος στην έξοδο της κοιλότητας. Το νέο κύμα οφείλεται στην αδράνεια του εκτοξευόμενου από την κοιλότητα υγρού, και η επίδραση της επιφανειακής τάσης είναι τώρα σταθεροποιητική (αύξηση μεγέθους με τους Re και Ca). Η εξαφάνιση του τριχοειδούς κύματος εισόδου ερμηνεύεται από την εμφάνιση μίας εκτεταμένης ζώνης ανακυκλοφορίας στην αρχή της κοιλότητας (αποτέλεσμα αδρανειακής αποκόλλησης της ροής), η οποία αμβλύνει την αλλαγή διεύθυνσης κατά την είσοδο του υγρού στη διαμόρφωση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Alekseenko, S.V., Nakoryakov, V. Y., Pokusaev, B. G., "Wave formation on a vertical falling liquid film," *AIChE J.* **31**, 1446-1460 (1985).
2. Alekseenko, S.V., Nakoryakov, V. Y., Pokusaev, B. G., *Wave flow of Liquid film, Begell House* (1994).
3. Αράβας, Ν., *Καρτεσιανοί Τανυστές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας*, (2005)
4. Αργυριάδη, Κ., *Ροή Υμένα: Επίδραση Χαρακτηριστικών Διαταραχής και Μορφολογίας Τοιχώματος, Διδακτορική Διατριβή*, 2005
5. Bach, P., Villadsen, J., "Simulation of the vertical flow of a thin wavy film using a finite element method", *Int. Journal Heat Mass Transfer*, **27**, 815-827 (1984)
6. Batchelor, G.K. *An introduction to fluid dynamics, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press* (2000).
7. Benney, D.J., "Long waves on liquid films", *J. Math. Phys.*, **45**, 150-155 (1966)
8. Bertozzi, A.L., Brenner, M.P., "Linear stability and transient growth in driven contact lines, *Phys. Fluids*, **9**, 530-539, (1996)
9. Bielarz, C., Kalliadasis, S., "Time-dependent free surface thin film flows over topography", *J. Physics of fluids*, **15**, 2512-2524 (2003)
10. Billingham, J., King, A.C., *Wave motion, Cambridge texts in applied Mathematics, Cambridge University Press* (2000).
11. Bird, R., Stewart, W., Lightfoot, E., *Transport phenomena, John Wiley & Sons, Inc*, (1960).
12. Bontozoglou, V., "Laminar film flow along a periodic wall", *CMES*, **1**, 129-138 (2000)
13. Bontozoglou, V., Papapolymerou, G., "Laminar flow down a wavy incline", *Int. J. Multiphase Flow*, **23**, 69-79 (1997)
14. Chang, H.-C., "Evolution of nonlinear waves on vertically falling films- A normal form analysis", *Chemical Engineering Science*, **40**, 3, 515-533 (1987).
15. Chang, H.-C., "Wave evolution on a falling film", *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 103-136 (1994).
16. Chang, H.-C., Demekhin, E.A., *Complex Wave dynamics on Thin Films, Studies in Interface science, Elsevier* (2002).
17. Chang, H.-C., Demekhin, E.A and Saprkin, S.S., " Noise-drive wave transitions on a vertical falling film", *J. Fluid Mech*, **294**, 123 (1995).

18. Cheng, M., Chang, H.-C., "Stability of axisymmetric waves on liquid films flowing down a vertical column to azimuthal and streamwise disturbances", *Chem Engrg. Comm.*, 327-40 (1992a).
19. Chu, K.J., Dukler, A.E., " Statistical characteristics of thin wave films, *Aiche J.*, **20**,4, 695-706 (1974).
20. Dassori, C.G., Deiber J. A., Cassano A. E., "Slow two phase flow through a sinusoidal channel", *Int. J. Multiphase Flow*, **10**,181-193 (1984)
21. Drazin, P.G., *Nonlinear systems, Cambridge texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press* (1997)
22. Howell, P.D., *Surface-tension-driven flow on a moving curved surface, Kluwer Academic Press, 2004*
23. Kalliadasis, S., Bielarz, C., Homsy, G.M., " Steady free-surface thin film flows over topography", *Phys. Fluids*, **12**,1889-1898,(2000)
24. Kalliadasis, S., Homsy, G.M., "Stability of free surface thin film flows over topography", *Journal of Fluid Mechanics*, **448**, 387-410, (2001)
25. Kapitza, P.L., Kapitza, S.P., "Wave flow of thin layers of viscous fluid (in Russian), *Zhurm.Eksper. Teor. Fiz.*, **19**, 2, 105-120 (1949)
26. Khayat R.E., Welke, S.R., " Influence of inertia, gravity, and substrate topography on the two-dimensional transient coating flow of a thin Newtonian fluid film", *Phys. Fluids*, **13**, 355-367, (2000)
27. Kliakhandler, I., "Inverse cascade in film flows", *J. Fluid Mech*, **423**, 205-225 (2000)
28. Lee J.J., & Mei, S.C., "Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high Reynolds and moderate Weber numbers", *Journal of Fluid Mechanics* **307**, 191-229 (1996).
29. Lighthill, J., *Waves in fluids, Cambridge University Press* (1996).
30. Lin, S.P., " Film waves. Waves fluid interface", *Proc. Symp.*, Madison, Wisc.,18-10 Oct, New York, 261-289 (1983).
31. Liu J., Gollub, J.P., "Solitary wave dynamics of film flows", *Phys. Fluids*, **6**, 1702-1712 (1994).
32. Liu J., Gollub, J.P., "Onset of Spatially Chaotic Waves on Flowing Films", *Physical Review Letters*, **70**, 15, 2289-2292 (1993)
33. Malamataris, N., Bontozoglou, V., "Computer aided analysis of viscous film flow along an onclined wavy wall", *J. Comput. Phys.*, **154**, 372-392 (1999).

34. Malamataris, N., Vlachogiannis, M., Bontozoglou, V., "Solitary waves on inclined films: Flow structure and binary interactions", *Physics of Fluids*, **14**, 3, 1082-1095 (2002).
35. Malamataris, N.A., & Papanastasiou, T. C., "Unsteady free surface flows on truncated domains," *Ind. Engng. Chem. Res.* **30**, 2210 (1991).
36. Mazouchi, A., Homsy, G.M., "Free surface Stokes flow over topography", *Phys. Fluids*, **13**, 2751-2761,(2001).
37. McCabe, Smith, Harriot, Βασικές Φυσικές Διεργασίες Μηχανικής, Εκδόσεις Τζιολας (2003).
38. Mei, C. C., "Nonlinear gravity waves in a thin sheet of viscous fluid", *J.Math. Phys.*,**45**, 266 (1966)
39. Miyara, A., "Numerical simulation of wavy liquid film flowing down on a vertical wall and an inclined wall", *Int. J. Thermal Sci.*, 39, 1015-1027 (2000).
40. Myers, T.G., "Thin films with high surface tension", *SIAM Rev.*, **40**, 441-462, (1998)
41. Μπούντης, Α., Δυναμικά Συστήματα και Χάος, Εκδόσεις Πανεπιστήμιου Πατρών, Πάτρα (2000)
42. Negny, S., Meyer, M. & Prevost, M., "Study of laminar falling film flowing over a wavy wall column: Part I. Numerical investigation of the flow pattern and the coupled heat and mass transfer" *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **44**, 2137-2146 (2001)
43. Negny, S., Meyer, M. & Prevost, M. "Study of laminar falling film flowing over a wavy wall column: Part II. Experimental validation of hydrodynamic model", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **44**, 2147-2154 (2001)
44. Nosoto T., Yoshimura P.N., Nagata, T., Oyakawa K., " Characteristics of two dimensional waves on a falling liquid film" , *Chem. Eng. Sci.*, **51**, 5, 725-732, (1996)
45. Nusselt, W., "Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes" *Zeitschrift VDI*, **60**, 541-546 (1916).
46. Pozrikidis, C., Introduction to theoretical and computational fluid dynamics, *Oxford University Press* (1997).
47. Pozrikidis, C., Numerical computation in science and engineering, *Oxford University Press* (1998).
48. Pozrikidis, C., The flow of a liquid film along a periodic wall, *J. Fluid Mech*, **188**, 275-300 (1988)
49. Prokopiou, T., Cheng, M., Chang, H.-C., "Long waves on inclined films at high Reynolds number", *J. Fluid Mechanics*, **222**, 665-691 (1991).

50. Ramaswamy, B., Chippada, S., & Joo, S.W., " A full-scale numerical study of interfacial in thin-film flows", *Journal of Fluid Mechanics* **325**, 163-194 (1996)
51. Roy., R.V., Roberts, A.J, Simpson, M.E., " A lubrication model of coating flows over a curved substrate in space", *Proceedings of the Second European Coating Symposium*, edited by P. Bourgin (Universite Louis Pasteur, Strasbourg, 1997)
52. Salamon, T. R., Amstrong R., Brown R., "Traveling waves on vertical films: Numerical analysis using the finite element methods", *Phys. of Fluids*, **6**, 2202-2220 (1994)
53. Serifi, K., Malamataris, N., Bontozoglou, V., "Transient and heat transfer phenomena in inclined wavy films", *Int. J. Thermal Sciences*, **43**, 761-767 (2004).
54. Shetty, L., Cerro, R.L., "Flow of a thin film over a periodic surface", *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 495-516 (1993)
55. SIAM News, Making Waves: Solitons and their Optical Applications, **31,2**
56. Stillwagon ,L.E., Larson, R.G., "Fundamentals of topography substrate leveling", *L. Appl. Phys.*, **63**, 5251-5258, 1988
57. Taylor, C., Hughes, T.G., Finite elements programming of the Navier-Stokes equations, *Pineridge Press Swansea* (1981)
58. Tihon, J., Tovchigrechko, V., Sobolic, V., Wein, O., "Electrodifusion detection of the near wall reversal in liquid films at the regime of solitary waves", *J. Appl. Electrochemistry*, **33**, 577-587 (2003)
59. Trifonov, Yu., Ya., "Viscous film flow down corrugated surfaces", *J. of Applied Mech. And Tech. Physics*, **45**, 3, 389-400 (2004)
60. Valluri, P., Matar, O., Hewitt, G., Mendes, M.A., "Thin film flow over structured packings at moderate Reynolds numbers", *Chem. Eng. Science*, **60**, 1965-1975 (2005)
61. Vlachogiannis, M., Bontozoglou, B., "Observations of solitary wave dynamics of film flows", *J. Fluid Mech.*, **435**, 191-215 (2001).
62. Vlachogiannis, M., Bontozoglou, B., "Experiments on laminar film flow along a periodic wall", *J. Fluid Mech.*, **457**, 133-156 (2001).
63. Walas S.M., *Chemical Process Equipment, Selection and Design*, Butterworth Publishers, (1988)
64. Wang, C.-Y., "Liquid film flowing slowly down a wavy inclined" *AIChE J.*, **27**, 207-212 (1981)
65. Whitham, G.B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons, Inc. (1974)

66. Weinstein, S.J, Kenneth, J. R., "Coating Flows", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **36**, 29-53, (2004)
67. Wierschem, A., Scholle, M., Aksel N., "Vortices in film flow over strongly undulated bottom profiles at low Reynolds numbers", *Physics of Fluids*, **15**, 2, 426-435 (2003)
68. Wierschem, A., Aksel N., " Influence of inertia on eddies created in films creeping over strongly undulated substrates", *Physics of Fluids*, **16**, 12, 4566-4574 (2004)
69. Wilke, W., "The measurement of velocities in thin films of liquid, *Chem. Eng. Sci.*, **17**, 177-187 (1962).
70. Yih, C.S., "Stability of liquid flow down an inclined plane", *Phys. Fluids*, **6**, 321-334 (1963).

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΣΕΡΙΦΗ

ΠΡΟΣΩΠΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

- Ημερ. Γέννησης: 07 Ιανουαρίου 1975
- Τόπος Γέννησης: Μόρφι Πάργας
- Τρέχουσα Διεύθυνση: Μεταμορφώσεως 70, 38333 Βόλος
- Τηλέφωνο: +30 2421074095
- E-mail: kserifi@mie.uth.gr

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

- **PhD**, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας (Σεπτέμβριος 2000-present, Αναμενόμενη ημερομηνία αποφοίτησης: Πρώτο τρίμηνο 2006) Τίτλος διδακτορικού: *"Προσομοίωση της ροής υμένα πάνω από επίπεδο και διαμορφωμένο τοίχωμα"*
Επιβλέπων: Καθηγητής Β. Μποντόζογλου
- **MSc**, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας (Ιούλιος 2004)
Τίτλος διπλώματος: *"Μεταβατικά φαινόμενα μεταφοράς σε ροή κεκλιμένου υμένα"*
Επιβλέπων: Καθηγητής Β. Μποντόζογλου
- **Πτυχίο Χημικού Μηχανικού**, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο, Θεσσαλονίκη (Ιούλιος 2000)

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ

- Μοναχικά Κύματα
- Φαινόμενα Μεταφοράς
- Προσομοιώσεις Ροών Λεπτού Υμένα
- Πεπερασμένα Στοιχεία
- Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
- Κινηματική της ανάμιξης
- Ρευστομηχανική

ΥΠΟΤΡΟΦΙΕΣ - ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ

- Υποτροφία επίδοσης από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας (Ακαδημαϊκό έτος 2001-2002)
- Υποτροφία ΠΕΝΕΔ για το διδακτορικό, *Ελληνική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ)*, 2003-2005
- Υποτροφία από το NATO Advanced Study Institute (ASI), Cesme, Σμύρνη, Τουρκία, Ιούλιος 18-30, 2004
- Υποτροφία Marie Curie, Institute of Chemical Process Fundamentals, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague (Μάιος 2003- Ιούλιος 2003)
- Υποτροφία Euromech, Τουλούζη, Αύγουστος 24-28, 2003

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ

Βοηθός Διδασκαλίας:

- Εμβάθυνση στα Φαινόμενα Μεταφοράς (μεταπτυχιακό μάθημα- Φθινόπωρο 2002-2003, Φθινόπωρο 2004-2005)
- Θεωρία Υδροδυναμικής Ευστάθειας (μεταπτυχιακό μάθημα - Άνοιξη 2003-2004)
- Φυσικές Διεργασίες (προπτυχιακό μάθημα- Φθινόπωρο 2000-2001, Φθινόπωρο 2004-2005, Φθινόπωρο 2005-2006)
- Φαινόμενα Μεταφοράς (προπτυχιακό μάθημα - Άνοιξη 2001-2002)
- Αντιρρυπαντική τεχνολογία (προπτυχιακό μάθημα - Φθινόπωρο 2004-2005)
- Μεταφορά Θερμότητας (προπτυχιακό μάθημα - Φθινόπωρο 2005-2006)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

- Θεωρία Υδροδυναμικής Ευστάθειας
- Εμβάθυνση στα Φαινόμενα Μεταφοράς
- Εμβάθυνση στη Ρευστοδυναμική
- Εμβάθυνση στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων
- Μηχανική του Συνεχούς Μέσου
- Δυναμική Συστημάτων

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

- Serifi K., Malamataris N., and Bontozoglou V., 2004, "Transient and heat transfer phenomena in inclined wavy films", *International Journal of Thermal Sciences*, 43, 761-767.

- Argyriadi K., Serifi K., and Bontozoglou V., 2004, "Nonlinear dynamics of inclined films under low-frequency forcing", *Physics of Fluids*, 16, 2457-2468.
- Tihon J., Serifi K., Argyriadi K., and Bontozoglou V., 2005, "Solitary waves on inclined films: their characteristics and the effect on wall shear stress" (under review)

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ ΣΕ ΣΥΝΕΔΡΙΑ

- Serifi K., Bontozoglou V., and Tihon J., 2005, "Τα χαρακτηριστικά των μοναχικών κυμάτων σε κεκλιμένη ροή υμένα και η επίδραση τους στη διατμητική τάση στο τοίχωμα", *5th Πανελλήνιο Συνέδριο Χημικών Μηχανικών, Θεσσαλονίκη, 26-28 Μαΐου 2005*
- Argyriadi K., Serifi K., and Bontozoglou V., 2003, "Nonlinear dynamics of inclined films under low-frequency disturbance", *5th Euromech Fluid Mechanics Conference, Τουλουζη, 24-28 Αυγούστου 2003, Γαλλία*
- Serifi K., Malamataris N., and Bontozoglou V., 2003, "Transient and heat transfer phenomena in inclined wavy films", *Transient Convective Heat Transfer in Single and Two-Phase Flows, Conference, Cesme, 17-22 Αυγούστου 2003, Τουρκία*
- Serifi K., Malamataris N., and Bontozoglou V., 2002, "Κύματα σε κεκλιμένη ροή υγρού υμένα: Το παραγόμενο ροϊκό πεδίο και η επίδραση του στα φαινόμενα μεταφοράς", *4th GRACM Congress-on Computational Mechanics, Πάτρα, Ιούνιος 2002.*

ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΣΕ ΘΕΡΙΝΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

- 18ο Σχολείο Πολυπλοκότητας και Χάους, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, 18-30 Ιουλίου 2005.
- NATO Advanced Study Institute (ASI), Cesme, Σμύρνη, Τουρκία, Ιούλιος 18-30, 2004
- Κατεργασία πολυμερών και συνθετικών υλικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, 29 Νοέμβριου - 3 Δεκεμβρίου 2004.

ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΣΕ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

- "Βελτιστοποίηση της ενέργειας διαφασικών ροών σε χημικές και βιομηχανικές διεργασίες", Πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ, χρηματοδοτούμενο από την Ελληνική

Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ), 2003-2005

- “Ανάπτυξη φούρνου βιομάζας για την παραγωγή ξυλάνθρακα”, Πρόγραμμα ΠΑΒΕΤ χρηματοδοτούμενο από την *Ελληνική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (ΓΓΕΤ)*, 2001-2003
- “Μεταφορά μάζας για την ανάπτυξη φυσαλίδων σε συνθήκες μικροβαρύτητας”, χρηματοδοτούμενο από την Επιτροπή Ερευνών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας & MEGA TV, 2001

ΔΕΞΙΟΤΗΤΕΣ

- *Προγραμματισμός*: Fortran, Matlab, Mathematica
- *Λογισμικά*: MS-DOS, Windows 95/98/2000/NT
- *Εφαρμογές γραφείου*: Word, Excel, PowerPoint, Publisher

ΞΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

- **Αγγλικά**