

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μελέτη και υλοποίηση μεθόδων φασματικής ανάλυσης γράφων για  
προσομοίωση μεγάλης κλίμακας γραμμικών κυκλωμάτων

Design and development of a spectral graph-based preconditioner for large-scale  
circuit simulation

Διπλωματική Εργασία

Σιαμαντά Ιωάννα

**Επιβλέποντες Καθηγητές:** Ευμορφόπουλος Νέστωρ

Επίκουρος Καθηγητής

Σταμούλης Γεώργιος

Καθηγητής

Βόλος, Οκτώβριος 2014





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μελέτη και υλοποίηση μεθόδων φασματικής ανάλυσης γράφων για  
προσομοίωση μεγάλης κλίμακας γραμμικών κυκλωμάτων

## Διπλωματική Εργασία

Σιαμαντά Ιωάννα

**Επιβλέποντες Καθηγητές:** Ευμορφόπουλος Νέστωρ

Επίκουρος Καθηγητής

Σταμούλης Γεώργιος

Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την διμελή εξεταστική επιτροπή την 10<sup>η</sup> Οκτωβρίου 2014

.....  
Ν. Ευμορφόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής

.....  
Γ. Σταμούλης  
Καθηγητής



Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του Διπλώματος του Μηχανικού Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στα πλαίσια του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

.....

Ιωάννα Σιαμαντά

Διπλωματούχος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων  
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

© 2014 – All rights reserved



*Στην οικογένειά μου και στους φίλους μου.*





# Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερω τον κ. Νέστορα Ευμορφόπουλο και κ. Γεώργιο Σταμούλη, τόσο για τη συνεχή καθοδήγηση κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας μου, όσο και για την άψογη συνεργασία που υπήρχε μεταξύ μας.

Εν συνεχεία, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον διδακτορικό απόφοιτο Κωνσταντή Νταλούκα για τις ουσιαστικές υποδείξεις αλλά και παρεμβάσεις, οι οποίες συνέβαλαν δραστικά στην περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω την οικογένεια μου και τους φίλους μου, που χωρίς την ψυχολογική και ηθική τους συμπαράσταση, δε θα κατάφερνα να φέρω εις πέρας τις σπουδές μου.

Ιωάννα Σιαμαντά  
Βόλος, 2014

# Περιεχόμενα

Κατάλογος πινάκων.....	3
Κατάλογος Συντομογραφιών .....	4
Περίληψη .....	5
Abstract .....	6
Κεφάλαιο 1 .....	7
Εισαγωγή.....	7
1.1 Περιγραφή του Προβλήματος.....	7
1.2 Συμβολή της Εργασίας .....	7
1.3 Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας .....	8
Κεφάλαιο 2.....	9
Προσομοίωση Γραμμικών Κυκλωμάτων.....	9
Η διαδικασία προσομοίωσης ενός γραμμικού κυκλώματος αναφέρεται στον υπολογισμό των δυναμικών στους κόμβους και των ρευμάτων στους κλάδους του κυκλώματος όταν εφαρμόζεται μία σταθερή διέγερση (στατική ή DC ανάλυση) ή μία χρονικά μεταβαλλόμενη διέγερση (ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς ή transient ανάλυση).....	9
Κεφάλαιο 3 .....	11
Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων .....	11
3.1 Άμεσες Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων .....	12
3.2 Επαναληπτικές Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων.....	14
3.3 Preconditioning .....	16
Κεφάλαιο 4.....	19
Προτεινόμενος αλγόριθμος preconditioning.....	19
Εύρεση Ιδιοτιμών Laplacian Πίνακα .....	20
Ομαδοποίηση Κόμβων Γραφήματος.....	20
Κατασκευή Preconditioner.....	21
Κεφάλαιο 5 .....	22
Πειραματική Αξιολόγηση .....	22
Βιβλιογραφία .....	24

# Κατάλογος πινάκων

5.1: Ο αριθμός κόμβων και το πλήθος επαναλήψεων για σύγκλιση των αλγορίθμων υπό μελέτη.

5.2: Χρόνος κατασκευής (Cst) του preconditioner και της λύσης (Sol) του αντίστοιχου συστήματος. Οι χρόνοι αναφέρονται σε δευτερόλεπτα.

# Κατάλογος Συντομογραφιών

**BE** backward Euler

**BiCG** biconjugate gradient

**CG** conjugate gradients

**GMRES** generalized minimal residual

**MNA** modified nodal analysis

**PDN** power delivery network

**SOR** successive overrelaxation

**SSOR** symmetric successive overrelaxation

**SPD** symmetric positive definite

**TR** trapezoidal

# Περίληψη

Η συνεχής κλιμάκωση της τεχνολογίας σχεδίασης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της πολυπλοκότητας των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, και την συνεπακόλουθη αύξηση της πολυπλοκότητας στη διαδικασία ανάλυσης αυτών. Το δίκτυο τροφοδοσίας αποτελεί ένα σημαντικό υποσύστημα των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, καθώς καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την αξιοπιστία και την ταχύτητα λειτουργίας τους. Η παρούσα εργασία παρουσιάζει έναν νέο αλγόριθμο για την ανάλυση των δικτύων τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων μεγάλης κλίμακας. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος συνδυάζει μια επαναληπτική μέθοδο με ένα μηχανισμό preconditioning, ο οποίος βασίζεται στη φασματική ανάλυση και το clustering του γραφήματος που αναπαριστά το δίκτυο τροφοδοσίας. Η πειραματική αξιολόγηση του προτεινόμενου preconditioner σε δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων πολύ μεγάλης κλίμακας καταδεικνύει την αποτελεσματικότητά του. Ο προτεινόμενος μηχανισμός preconditioning μπορεί να επιταχύνει τον ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου κατά έναν παράγοντα ίσο με 4.67 και τον χρόνο εκτέλεσης κατά έναν παράγοντα ίσο με 4.65.

# **Abstract**

The continuous scaling of design technology has resulted in increased complexity in the analysis of integrated circuits. The power delivery network is a significant subsystem of integrated circuits as it affects circuit performance and reliability. This work presents a new algorithm for analyzing the power delivery network found in modern large scale integrated circuits. The proposed algorithm combines an iterative method with a preconditioning mechanism which is based on spectral analysis and clustering of the graph that corresponds to the power delivery network. The experimental evaluation of the proposed preconditioner on supply networks of large scale designs demonstrates that it can accelerate the convergence rate by a factor of 4.67X and achieve a speedup of 4.65X in the execution time of the analysis procedure.

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Το δίκτυο τροφοδοσίας αποτελεί ένα σημαντικό υποσύστημα των σύγχρονων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων καθώς καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την αξιοπιστία και την απόδοση του ολοκληρωμένου κυκλώματος. Προκειμένου να αναλυθεί η συμπεριφορά του δικτύου, ο σχεδιαστής του, εφαρμόζει στατική (DC) και transient ανάλυση. Η ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, κύριο χαρακτηριστικό του οποίου είναι ο πολύ μεγάλος αριθμός των αγνώστων. Οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες, τις άμεσες και τις επαναληπτικές. Κύριο πλεονέκτημα της πρώτης κατηγορίας, είναι ότι η επίλυση του συστήματος γίνεται σε προκαθορισμένο αριθμό βημάτων. Όμως, οι απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη είναι ιδιαίτερα αυξημένες, με αποτέλεσμα η εφαρμογή τους σε συστήματα μεγάλης κλίμακας να είναι μη πρακτική. Οι επαναληπτικές μέθοδοι με τη σειρά τους, έχουν μειωμένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη αλλά κύριο μειονέκτημά τους είναι ο μη ντετερμινιστικός ρυθμός σύγκλισης. Η τεχνική του preconditioning στοχεύει στην τροποποίηση του αρχικού συστήματος ώστε να βελτιώσει τον δείκτη κατάστασης και να επιταχύνει τη σύγκλιση. Όμως, η εύρεση του κατάλληλου preconditioner δεν είναι τετριμμένη διαδικασία και εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα.

### 1.2 Συμβολή της Εργασίας

Η συγκεκριμένη εργασία προτείνει έναν νέο preconditioner, ο οποίος κατασκευάζεται μέσω φασματικής ανάλυσης και clustering στο γράφο του αρχικού μας κυκλώματος. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος στοχεύει στην καλύτερη ομαδοποίηση των κόμβων και λαμβάνει υπόψη τις ιδιότητες του αρχικού πίνακα. Έτσι, επιτυγχάνει την μείωση του αριθμού των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου και βελτιώνει τον χρόνο εκτέλεσης. Η πειραματική αξιολόγηση του προτεινόμενου αλγορίθμου σε δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων μεγάλης κλίμακας καταδεικνύει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου, η οποία επιταχύνει το ρυθμό σύγκλισης κατά 4.67 φορές, ενώ μειώνει τον χρόνο εκτέλεσης κατά 4.65 φορές.

### 1.3 Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας

Η διάρθρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφουμε τη μοντελοποίηση και τη διαδικασία ανάλυσης του δικτύου τροφοδοσίας. Στη συνέχεια, περιγράφουμε τις άμεσες και επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, καθώς επίσης και την τεχνική του preconditioning. Στο Κεφάλαιο 4 αναλύουμε τον προτεινόμενο αλγόριθμο για την κατασκευή του preconditioner. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της πειραματικής αξιολόγησης του προτεινόμενου αλγορίθμου.



# Κεφάλαιο 2

## Προσομοίωση Γραμμικών Κυκλωμάτων

Η διαδικασία προσομοίωσης ενός γραμμικού κυκλώματος αναφέρεται στον υπολογισμό των δυναμικών στους κόμβους και των ρευμάτων στους κλάδους του κυκλώματος όταν εφαρμόζεται μία σταθερή διέγερση (στατική ή DC ανάλυση) ή μία χρονικά μεταβαλλόμενη διέγερση (ανάλυση μεταβατικής συμπεριφοράς ή transient ανάλυση).

Τα γραμμικά κυκλώματα που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία είναι αυτά που μοντελοποιούν δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Ένα δίκτυο τροφοδοσίας αποτελεί ένα πολυεπίπεδο δίκτυο από γραμμές μετάλλου, όπου το χαμηλότερο επίπεδο συνδέει το δίκτυο τροφοδοσίας με τις πύλες του κυκλώματος, ενώ το τελευταίο επίπεδο συνδέει το δίκτυο τροφοδοσίας με τις πηγές τροφοδοσίας. Κάθε ολοκληρωμένο κύκλωμα εμπεριέχει δύο δίκτυα τροφοδοσίας: ένα για την τάση τροφοδοσίας (VDD) και ένα για τη γείωση (GND).

Ένα δίκτυο τροφοδοσίας μοντελοποιείται ως ένα σύνολο κόμβων οι οποίοι συνδέονται μέσω κλάδων αντιστάσεων και επαγωγών, ενώ ενδέχεται να υπάρχουν και χωρητικότητες από κόμβους προς τη γείωση. Εάν το ηλεκτρικό ισοδύναμο ενός δικτύου τροφοδοσίας αποτελείται από  $N$  κόμβους και  $b$  κλάδους αντιστάσεων-επαγωγών, τότε εφαρμόζοντας την Τροποποιημένη Μέθοδο Κόμβων (Modified Nodal Analysis – MNA)[1][2], καταλήγουμε στα παρακάτω γραμμικά συστήματα, με το πρώτο να αποτελεί το γραμμικό σύστημα για DC ανάλυση και το δεύτερο μη γραμμικό σύστημα για transient ανάλυση:

$$Gx = e$$

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{e}(t)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{rl} \\ -\mathbf{A}_{rl}^T & \mathbf{R}_b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(t) \\ \mathbf{i}_b(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Στα συστήματα που περιγράφουν οι παραπάνω εξισώσεις, ο πίνακας  $\mathbf{A}_{rl}$  είναι ο  $N \times b$  πίνακας πρόσπτωσης των κλάδων του δικτύου, με στοιχεία  $a_{ij} = \pm 1$  στην περίπτωση που ο κλάδος  $j$  εξέρχεται από ή εισέρχεται στον κόμβο  $i$  αντίστοιχα, και στοιχεία  $a_{ij} = 0$ , στη περίπτωση που οι δύο κλάδοι δεν συνδέονται. Επίσης, τα διανύσματα  $\mathbf{v}_n(t)$  και  $\mathbf{i}_b(t)$  είναι τα  $N \times 1$  και  $b \times 1$  διανύσματα των τάσεων κόμβων και των ρευμάτων των κλάδων του δικτύου, το διάνυσμα  $\mathbf{e}_n(t)$  είναι το διάνυσμα των διεγέρσεων από τις ανεξάρτητες πηγές εισόδου, ο πίνακας  $\mathbf{C}_n$  είναι ένας  $N \times N$  πίνακας με τις χωρητικότητες των κόμβων, ενώ οι πίνακες  $\mathbf{R}_b$  και  $\mathbf{L}_b$  είναι διαγώνιοι  $b \times b$  πίνακες με τις αντιστάσεις και τις επαγωγές των κλάδων του κυκλώματος αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη μέθοδο διακριτοποίησης όπως η μέθοδος Backward-Euler ή η μέθοδος TR (Trapezoidal) στο μη γραμμικό σύστημα που περιγράφει η δεύτερη από τις παραπάνω εξισώσεις και εφαρμόζοντας block πράξεις, καταλήγουμε στο παρακάτω γραμμικό σύστημα για την transient ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας:

$$(\mathbf{A}_{rl}\mathbf{R}_b^{-1}\mathbf{A}_{rl}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h_k})\mathbf{v}_n(h_k) = \frac{\mathbf{C}_n}{h_k}\mathbf{v}_n(h_{k-1}) + \mathbf{e}(h_k)$$

Κύριο χαρακτηριστικό των δύο γραμμικών συστημάτων για DC και transient ανάλυση είναι ο πολύ μεγάλος αριθμός αγνώστων καθώς επίσης και το γεγονός ότι είναι συμμετρικά και θετικά ορισμένα συστήματα. Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε αρκετά αποδοτικές μεθόδους επίλυσης, όπως είναι η μέθοδος Cholesky για άμεση ή η μέθοδος Conjugate Gradient για επαναληπτική επίλυση.

# Κεφάλαιο 3

## Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Ένα γραμμικό σύστημα πραγματικών εξισώσεων περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$Ax = b$$

όπου ο πίνακας  $A$  είναι ένας  $N \times N$  πίνακας πραγματικών αριθμών, το διάνυσμα  $b$  αποτελεί ένα  $N \times 1$  διάνυσμα με γνωστές τιμές (αναφέρεται και ως right hand side vector – rhs vector), ενώ το διάνυσμα  $x$  αποτελεί το διάνυσμα των αγνώστων ως προς το οποίο επιλύεται το γραμμικό σύστημα. Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη λύσης του παραπάνω γραμμικού συστήματος είναι ο πίνακας  $A$  να μπορεί να αντιστραφεί. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση γραμμικών συστημάτων χωρίζονται σε άμεσες και επαναληπτικές μεθόδους. Οι άμεσες μέθοδοι επιλύουν το σύστημα σε έναν προκαθορισμένο αριθμό βημάτων, ο οποίος εξαρτάται από το μέγεθος  $N$  του γραμμικού συστήματος. Σε αντίθεση, οι επαναληπτικές μέθοδοι υπολογίζουν μία προσέγγιση της πραγματικής λύσης του συστήματος, δοθέντος ενός επιπέδου ανοχής.

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν γραμμικά συστήματα που προκύπτουν από την ανάλυση δικτύων τροφοδοσία ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Τα κύρια χαρακτηριστικά των πινάκων που αυτά τα συστήματα εμπεριέχουν είναι τα παρακάτω:

- Αποτελούν αραιούς πίνακες, με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η αποθήκευση και η επεξεργασία τους με τεχνικές αραιών πινάκων.
- Είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες (Symmetric and Positive-Definite - SPD), οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποδοτικότερες άμεσες και επαναληπτικές μεθόδους για την επίλυση του αντίστοιχου συστήματος σε σχέση με τις μεθόδους που θα χρησιμοποιούσαμε στην περίπτωση που ο πίνακας είχε μία γενική μορφή.

Το παρόν κεφάλαιο περιγράφει τις βασικές αρχές των άμεσων επαναληπτικών μεθόδων και αναλύει τους σημαντικότερους αλγορίθμους για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος που εμπεριέχει έναν SPD πίνακα, δηλαδή την παραγοντοποίηση Cholesky και τη μέθοδο Συζυγών Κλίσεων (Preconditioned Conjugate Gradient – PCG).

### 3.1 Άμεσες Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων

Οι άμεσες μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων επιλύουν το σύστημα σε έναν προκαθορισμένο αριθμό βημάτων ο οποίος εξαρτάται από το μέγεθος του συστήματος. Οι άμεσες μέθοδοι υλοποιούνται σε δύο βήματα: το πρώτο βήμα αποτελεί το βήμα της παραγοντοποίησης, όπου ο πίνακας του συστήματος διασπάται ως γινόμενο δύο επιμέρους πινάκων, και το βήμα της επίλυσης, όπου οι παράγοντες του πίνακα χρησιμοποιούνται για την επίλυση του αρχικού συστήματος.

Η *Απαλοιφή Gauss* (Gauss elimination) αποτελεί την πιο γνωστή άμεση μέθοδο, με τις περισσότερες άμεσες μεθόδους να βασίζονται σε αυτή. Άλλες, κατ' εξοχήν χρησιμοποιούμενες μέθοδοι για άμεση επίλυση γραμμικών συστημάτων αποτελούν η παραγοντοποίηση LU, για την περίπτωση μη συμμετρικών συστημάτων, και η παραγοντοποίηση Cholesky, για SPD συστήματα.

Η παραγοντοποίηση LU αναλύει τον πίνακα του συστήματος σε δύο παράγοντες, έναν κάτω και έναν άνω τριγωνικό πίνακα, ως εξής:  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ . Έτσι, το αρχικό γραμμικό σύστημα μετασχηματίζεται στο παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{L}$  είναι κάτω τριγωνικός ενώ ο πίνακας  $\mathbf{U}$  είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Έτσι, το αρχικό σύστημα μετασχηματίζεται σε δύο ισοδύναμα συστήματα, ως εξής:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Τα πλεονεκτήματα από τον μετασχηματισμό του αρχικού συστήματος στα δύο συστήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι ότι πλέον για την επίλυση του πρώτου απαιτείται μία προς τα μπρος αντικατάσταση (forward substitution) και μία προς τα πίσω αντικατάσταση (backward substitution) για την επίλυση του πρώτου και του δεύτερου από τα δύο τελευταία συστήματα αντίστοιχα. Τόσο η προς τα μπροστά όσο και η προς τα πίσω αντικατάσταση αποτελούν δύο διαδικασίες με πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος, διευκολύνοντας έτσι την επίλυση του αρχικού συστήματος.

Η πολυπλοκότητα της παραγοντοποίησης LU καθορίζεται από το βήμα της παραγοντοποίησης, το οποίο απαιτεί  $\frac{2N^3}{3}$  πράξεις, όπου  $N$  είναι το μέγεθος του συστήματος, με αποτέλεσμα η εφαρμογή της μεθόδου για γραμμικά συστήματα μεγάλης τάξης να καθίσταται μία ιδιαίτερος απαιτητική διαδικασία σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη.

Στην περίπτωση που ο πίνακας του συστήματος  $\mathbf{A}$  αποτελεί έναν SPD πίνακα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο αποδοτική άμεση μέθοδο της παραγοντοποίησης Cholesky. Η

παραγοντοποίηση Cholesky αναλύει τον πίνακα του συστήματος σε δύο παράγοντες, έναν κάτω και έναν άνω τριγωνικό πίνακα, ως εξής:  $A = LL^T$ , με αποτέλεσμα τον μετασχηματισμό του αρχικού συστήματος στα δύο παρακάτω συστήματα, τα οποία είναι ισοδύναμα με το αρχικό σύστημα:

$$Ly = b$$

$$L^T x = y$$

Ο Αλγόριθμος 1 παρουσιάζει τον ψευδοκώδικα του αλγορίθμου παραγοντοποίησης Cholesky. Όπως παρατηρούμε, η παραγοντοποίηση Cholesky αποτελεί έναν πιο αποδοτικό αλγόριθμο σε σχέση με την παραγοντοποίηση LU καθώς απαιτεί  $\frac{N^3}{3}$  πράξεις. Επίσης, έχει μειωμένες απαιτήσεις σε μνήμη καθώς απαιτεί την αποθήκευση μόνο του ενός παράγοντα ( $L$ ), αφού ο δεύτερος μπορεί να προκύψει πολύ εύκολα από αυτόν.

Αναφορικά με τα πλεονεκτήματα των άμεσων μεθόδων, αυτά είναι η δυνατότητα να επιλύουν κάθε γραμμικό σύστημα, χωρίς να χρειάζεται να προηγηθεί κάποια μετατροπή του συστήματος, καθώς και η δυνατότητα για επίλυση πολλαπλών διαδοχικών συστημάτων. Στην τελευταία περίπτωση, εάν θέλουμε να λύσουμε γραμμικά συστήματα όπου το μόνο που μεταβάλλεται είναι το διάνυσμα του δεξιού μέλους, τότε δεν χρειάζεται να προηγηθεί το βήμα

```
for i = 1 : n - 1 do
  for j = 0 : i do
    s = 0
    for k = 0 : j - 1 do
      s += L[i * n + k] * L[j * n + k];
    end for
    if i == j then
      L[i * n + j] = sqrt(A[i * n + i] - s)
    else
      L[i * n + j] = (1.0 / L[j * n + j] * (A[i * n + j] - s));
    end if
  end for
end for
end for
```

*Αλγόριθμος 1: Ψευδοκώδικας αλγορίθμου παραγοντοποίησης Cholesky.*

της παραγοντοποίησης σε κάθε επίλυση. Η παραγοντοποίηση του πίνακα γίνεται μία φορά και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται οι παράγοντες για την επίλυση των υπολοίπων συστημάτων.

Όμως, λόγω της πολυπλοκότητάς τους, οι άμεσες μέθοδοι εμφανίζουν μη γραμμική αύξηση των απαιτήσεων σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη με την αύξηση του μεγέθους του συστήματος, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συστήματα πολύ μεγάλης κλίμακας.

### 3.2 Επαναληπτικές Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων

Οι επαναληπτικές μέθοδοι εντάσσονται στη γενικότερη κατηγορία των μεθόδων χαλάρωσης (relaxation). Προκειμένου να επιλύσουν το αρχικό σύστημα, αρχίζουν από μία αρχική εκτίμηση της λύσης και σε κάθε βήμα παρέχουν μία μερική λύση του αρχικού συστήματος. Στο τέλος, η διαδικασία έχει προσεγγίσει την πραγματική λύση του συστήματος εντός ενός προκαθορισμένου σφάλματος.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι κατηγοριοποιούνται σε στάσιμες και μη στάσιμες. Οι στάσιμες μέθοδοι επιλύουν το αρχικό σύστημα μέσω μίας σειράς βημάτων που έχουν ως στόχο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος. Αυτές οι μέθοδοι, χρησιμοποιούν έναν πίνακα που προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό τον αρχικό πίνακα του συστήματος αλλά επιτρέπει αποδοτικότερη επίλυση λόγω της μορφής του. Οι κυριότερες στάσιμες επαναληπτικές μέθοδοι είναι η μέθοδος Jacobi, η μέθοδος Gauss-Seidel και η μέθοδος Successive Over-Relaxation.

Το σύστημα που επιλύεται σε κάθε επανάληψη μία στάσιμης επαναληπτικής μεθόδου μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B} \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{B}$  είναι ο πίνακας που προσεγγίζει τον πίνακα του αρχικού συστήματος. Εάν συμβολίσουμε με  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  και  $\mathbf{D}$  το κάτω τριγωνικό, το άνω τριγωνικό και το διαγώνιο τμήμα του πίνακα  $\mathbf{A}$ , δηλαδή  $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{U} + \mathbf{D}$ , τότε η προσέγγιση για κάθε μία από τις στάσιμες επαναληπτικές μεθόδους παρουσιάζεται παρακάτω:

- *Jacobi*:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{R}\mathbf{x}^k)$ , όπου  $\mathbf{R} = \mathbf{L} + \mathbf{U}$
- *Gauss-Seidel*:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}_*^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^k)$ , όπου  $\mathbf{L}_* = \mathbf{L} + \mathbf{D}$
- *SOR*:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}(\omega\mathbf{b} - (\omega\mathbf{U} + (\omega - 1)\mathbf{D}))\mathbf{x}^k$ , όπου  $0 < \omega < 2$ .

Σε αντίθεση με τις στάσιμες μεθόδους, οι μη στάσιμες επαναληπτικές μέθοδοι, και ιδιαίτερα οι μέθοδοι που βασίζονται στους υποχώρους Krylov, δημιουργούν μία βάση από διαδοχικά γινόμενα δυνάμεων του αρχικού πίνακα με το διάνυσμα των υπολοίπων. Τα διαδοχικά αυτά

διανύσματα ορίζουν την Krylov ακολουθία. Αφού έχουν σχηματίσει την ακολουθία, η προσέγγιση στη λύση υπολογίζεται με ελαχιστοποίηση του υπολοίπου στον υποχώρο που έχει δημιουργηθεί. Οι βασικότερες επαναληπτικές μέθοδοι, μαζί με τα κύρια χαρακτηριστικά τους, παρουσιάζονται παρακάτω:

- *Conjugate Gradient (CG)*: Η μέθοδος των *συζυγών κλίσεων* αντλεί το όνομά της από το γεγονός ότι παράγει μια σειρά από συζυγή (ή ορθογώνια) διανύσματα. Αυτά τα διανύσματα αποτελούν τα διανύσματα των υπολοίπων σε κάθε επανάληψη. Η CG είναι μια εξαιρετικά αποτελεσματική μέθοδος όταν ο πίνακας συντελεστών είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος, αφού απαιτείται η αποθήκευση για μόνο ένα περιορισμένο αριθμό διανυσμάτων.
- *Minimum Residual (MINRES)* and *Symmetric LQ (SYMMLQ)*: Αυτές οι μέθοδοι είναι υπολογιστικά εναλλακτικές λύσεις για την CG για πίνακες συντελεστών που είναι συμμετρικοί αλλά ενδεχομένως μη θετικά ορισμένοι. Η SYMMLQ θα δημιουργήσει τις ίδιες επαναλήψεις λύσης όπως η CG αν ο πίνακας συντελεστών είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος.
- *Generalized Minimal Residual (GMRES)*: Η μέθοδος *Generalized Minimal Residual* υπολογίζει μια σειρά από ορθογώνια διανύσματα (όπως η MINRES), και τα συνδυάζει μέσω μιας λύσης και ενημέρωσης ελαχίστων τετραγώνων. Ωστόσο, αντίθετα με την MINRES (και την CG) απαιτεί την αποθήκευση ολόκληρης της αλληλουχίας, αυξάνοντας έτσι τις απαιτήσεις σε μνήμη. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιείται η τεχνική της επανεκκίνησης (restarting), όπου οι απαιτήσεις σε μνήμη περιορίζονται από τον καθορισμό ενός σταθερού αριθμού διανυσμάτων που πρόκειται να παραχθεί. Αυτή η μέθοδος είναι χρήσιμη για γενικούς μη συμμετρικούς πίνακες.
- *BiConjugate Gradient (BiCG)*: Η μέθοδος *Biconjugate Gradient* παράγει δύο παρόμοιες με την CG αλληλουχίες διανυσμάτων, μία βασισμένη σε ένα σύστημα με τον αρχικό πίνακα συντελεστών  $A$ , και μία για τον  $A^T$ . Αυτή η μέθοδος, όπως η CG, χρησιμοποιεί περιορισμένη αποθήκευση. Όμως, το κύριο μειονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η σύγκλιση μπορεί να είναι ακανόνιστη, και υπάρχει η πιθανότητα να καταρρεύσει η μέθοδος. Η BiCG απαιτεί πολλαπλασιασμό με τον συντελεστή πίνακα και με ανάστροφο του σε κάθε επανάληψη.

Οι βασικές πράξεις που εκτελούνται εντός μία επαναληπτικής μεθόδου είναι πράξεις πολλαπλασιασμών πίνακα με διάνυσμα καθώς και εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων. Έτσι, οι επαναληπτικές μέθοδοι αποτελούν μία πολύ καλή εναλλακτική έναντι των άμεσων μεθόδων, καθώς έχουν μειωμένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ και μνήμη.

Τα συστήματα που προκύπτουν από την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος εμπεριέχουν SPD πίνακες. Σε αυτού του είδους τα συστήματα μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρκετά αποδοτική μέθοδο CG. Η μέθοδος CG αποτελεί την πρώτη επαναληπτική μέθοδο υποχώρων Krylov που αναπτύχθηκε για SPD πίνακες. Η μέθοδος

CG βασίζεται στη θεωρία της βελτιστοποίησης και των ορθογώνιων πολυωνύμων. Εάν ορίσουμε ως  $K_i(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) = (\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{r}_0)$  τον Krylov υποχώρο στην  $i$ -οστή επανάληψη, τότε η μέθοδος CG στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της  $A$ -norm,  $\|x_i - x\| \equiv (x_i - x, \mathbf{A}(x_i - x))$ , όπου τα διανύσματα  $x_i$  ανήκουν στον αντίστοιχο υποχώρο Krylov.

Αναφορικά με το ρυθμό σύγκλισης (δηλαδή το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό της λύσης) της μεθόδου CG, αυτός εξαρτάται από τον δείκτη κατάστασης του συστήματος

$$k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) / \lambda_{\min}(\mathbf{A}) \geq 1$$

όπου  $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ ,  $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$  είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα αντίστοιχα. Έτσι, η σύγκλιση της μεθόδου είναι γρήγορη εάν  $k(\mathbf{A}) \approx 1$  και αργή εάν  $k(\mathbf{A}) \gg 1$ . Το κύριο μειονέκτημα των επαναληπτικών μεθόδων που δεν έχει επιτρέψει την ευρεία εφαρμογή τους είναι ο άγνωστος ρυθμός σύγκλισης, ο οποίος εξαρτάται από τις φασματικές ιδιότητες του πίνακα του συστήματος. Έτσι, προκειμένου να βελτιώσουμε τις ιδιότητες του πίνακα, εφαρμόζουμε την τεχνική της προρύθμισης (preconditioning), η οποία μετατρέπει τον αρχικό πίνακα σε ένα νέο πίνακα με δείκτη κατάστασης ο οποίος επιτρέπει ταχύτερη σύγκλιση.

### 3.3 Preconditioning

Η τεχνική του preconditioning στοχεύει στη βελτίωση των φασματικών ιδιοτήτων του πίνακα του συστήματος, προκειμένου να επιταχύνει το ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου. Στην περίπτωση SPD συστημάτων, ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου CG εξαρτάται από την κατανομή των ιδιοτιμών του πίνακα του συστήματος και η τεχνική του preconditioning στοχεύει στη μείωση του δείκτη κατάστασης του πίνακα και στην ομαδοποίηση των ιδιοτιμών γύρω από το 1. Εάν με  $\mathbf{M}$ , συμβολίσουμε τον preconditioner πίνακα, τότε το σύστημα

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

έχει την ίδια λύση με το αρχικό σύστημα αλλά επιλύεται πολύ πιο εύκολα. Στην περίπτωση της μεθόδου CG, ο preconditioned πίνακας  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$  δε σχηματίζεται ρητά, καθώς αυτό θα αύξανε τις υπολογιστικές απαιτήσεις, λόγω της αντιστροφής του πίνακα  $\mathbf{M}$ . Αντιθέτως, η εφαρμογή του preconditioner ανάγεται στην επίλυση ενός αριθμού από γραμμικά συστήματα (ένα σε κάθε επανάληψη της μεθόδου CG), τα οποία περιγράφονται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\mathbf{M}\mathbf{z} = \mathbf{r}$$



```

1:  $\mathbf{x} =$  initial guess  $\mathbf{x}^{(0)}$ 
2:  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ 
3:  $iter = 0$ 
4: repeat
5:    $iter = iter + 1$ 
6:   Solve  $\mathbf{Mz} = \mathbf{r}$  (Preconditioner Solve Step)
7:    $\rho = \mathbf{r} \cdot \mathbf{z}$ 
8:   if  $iter == 1$  then
9:      $\mathbf{p} = \mathbf{z}$ 
10:  else
11:     $\beta = \rho / \rho_1$ 
12:     $\mathbf{p} = \mathbf{z} + \beta \mathbf{p}$ 
13:  end if
14:   $\rho_1 = \rho$ 
15:   $\mathbf{q} = \mathbf{Ap}$ 
16:   $\alpha = \rho / (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ 
17:   $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}$ 
18:   $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha \mathbf{q}$ 
19: until convergence

```

Αλγόριθμος 2: Ψευδοκώδικας της μεθόδου PCG

Ο αλγόριθμος 2 παρουσιάζει τον ψευδοκώδικα της μεθόδου Preconditioned Conjugate Gradient, η οποία αποτελεί την τροποποίηση της μεθόδου CG στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί η τεχνική του preconditioning. Όπως παρατηρούμε, η μέθοδος εμπεριέχει μόνο γινόμενα πίνακα με διάνυσμα καθώς και εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων, γεγονός που την καθιστά αρκετά αποδοτική αναφορικά με τις απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ. Επίσης, το βήμα 6 του αλγορίθμου που εμπεριέχει την επίλυση του συστήματος με τον preconditioner πίνακα είναι αυτό που μετασχηματίζει τον αλγόριθμο ώστε να επιλύει το ισοδύναμο σύστημα  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ , το οποίο όμως εμφανίζει πολύ καλύτερες ιδιότητες ως προς τη σύγκλιση του αλγορίθμου.

Ένας αποδοτικός preconditioner θα πρέπει να προσεγγίζει πολύ καλά τον πίνακα του συστήματος ώστε ο πίνακας  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} \approx \mathbf{I}$  και να επιταχύνεται ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου. Όμως, η εύρεση ενός κατάλληλου preconditioner δεν είναι μία τετριμμένη διαδικασία και εξαρτάται από τη φύση του εκάστοτε προβλήματος. Preconditioners γενικού σκοπού όπως είναι ο Jacobi preconditioner (που δημιουργείται από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα του συστήματος) ή ο Incomplete Cholesky, αν και μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα διαφόρων ειδών, δε λαμβάνουν υπόψη τη δομή και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του πίνακα

του συστήματος, με αποτέλεσμα να μη βελτιώνουν αρκετά το ρυθμό σύγκλισης. Το επόμενο κεφάλαιο θα περιγράψει μία διαδικασία κατασκευής ενός preconditioner για το πρόβλημα της ανάλυσης του δικτύου τροφοδοσίας, ο οποίος κατασκευάζεται λαμβάνοντας υπόψη τις φασματικές ιδιότητες του πίνακα του συστήματος και επιταχύνει σημαντικά το ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου.

# Κεφάλαιο 4

## Προτεινόμενος αλγόριθμος preconditioning

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 3, οι επαναληπτικές μέθοδοι αποτελούν μια καλύτερη εναλλακτική έναντι των άμεσων μεθόδων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων μεγάλης κλίμακας λόγω των μικρών απαιτήσεων σε μνήμη και υπολογιστική ισχύ. Όμως, η εύρεση ενός κατάλληλου μηχανισμού preconditioning ο οποίος θα επιταχύνει σημαντικά το ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου αποτελεί ένα μη τετριμμένο πρόβλημα.

Έτσι, η ανάγκη για κατασκευή preconditioning μηχανισμών με μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης έχει οδηγήσει τους ερευνητές στη χρήση νέων μεθόδων. Μία αρκετά υποσχόμενη τεχνική για την κατασκευή ενός preconditioner είναι αυτή που βασίζεται στην θεωρία των support graphs[7][9]. Η τεχνική των support graphs έχει ως στόχο τη δημιουργία ενός preconditioner ο οποίος θα βασίζεται σε ένα γράφο που θα προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα το γράφο που αναπαριστά ο πίνακας του συστήματος. Βασικό χαρακτηριστικό αυτής της κατηγορίας μεθόδων είναι ότι παρέχουν μία οριοθέτηση του αριθμού κατάστασης του συστήματος. Έτσι, μπορούμε να επιτύχουμε ταχεία σύγκλιση μία επαναληπτικής μεθόδου, όπως η μέθοδος PCG.

Ένα δίκτυο τροφοδοσίας μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν ισοδύναμο γράφο, όπου οι κόμβοι αποτελούν τους κόμβους του κυκλώματος και οι ακμές αντιστοιχούν στους κλάδους του δικτύου. Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία του support graph preconditioning προκειμένου να δημιουργήσουμε έναν preconditioner που θα προσεγγίζει τον πίνακα του αρχικού συστήματος αρκετά καλά και θα επιταχύνει τη σύγκλιση της μεθόδου PCG. Μία κατηγορία αλγορίθμων για την κατασκευή ενός support graph preconditioner είναι η τεχνική της φασματικής ανάλυσης (spectral analysis) ενός γράφου.

### 4.1 Φασματική Ανάλυση Γράφων

Η τεχνική της φασματικής ανάλυσης ενός γράφου προσπαθεί να ομαδοποιήσει τις κορυφές του γράφου που αναπαριστά ο πίνακας του συστήματος ώστε κορυφές με μεγάλη ομοιογένεια να ανήκουν στην ίδια συστάδα (cluster). Στόχος της τεχνικής είναι μέσω της ομαδοποίησης των κόμβων να παρέχει μία καλύτερη ομαδοποίηση των ιδιοτιμών του πίνακα του συστήματος, η οποία θα οδηγήσει στην ταχύτερη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου.

Οι αλγόριθμοι φασματικής ανάλυσης χρησιμοποιούν τον πίνακα συνδεσιμότητας (Laplacian matrix) του συστήματος, αναλύουν το φασματικό του περιεχόμενο μέσω της ανάλυσης ιδιοτιμών και στη συνέχεια εφαρμόζουν έναν αλγόριθμο για την ομαδοποίηση των κόμβων του γραφήματος. Το αποτέλεσμα της φασματικής ανάλυσης είναι η απεικόνιση των κόμβων του γραφήματος σε έναν χώρο μικρότερης διάστασης (αυτός που καθορίζεται από το πλήθος των ιδιοτιμών που υπολογίζονται) όπου ένας αλγόριθμος clustering (όπως ο K-Means) μπορεί να υπολογίσει μία βέλτιστη ομαδοποίηση των κόμβων. Την τεχνική της φασματικής ανάλυσης

γράφων εφαρμόζει ο προτεινόμενος αλγόριθμος για την κατασκευή του preconditioner προκειμένου να επιταχύνει την ταχύτητα σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου.

## 4.2 Αλγόριθμος κατασκευής προτεινόμενου preconditioner

Για την κατασκευή του preconditioner, ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόζει την τεχνική της φασματικής ανάλυσης στον γράφο που προκύπτει από το δίκτυο τροφοδοσίας υπό ανάλυση. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τρία στάδια: α) εύρεση των ιδιοτιμών του Laplacian πίνακα που αντιστοιχεί στο γράφο του κυκλώματος, β) ομαδοποίηση των κόμβων του κυκλώματος βάσει των ιδιοδιανυσμάτων, γ) κατασκευή του preconditioner βάσει της ομαδοποίησης που έχει υπολογισθεί.

### Εύρεση Ιδιοτιμών Laplacian Πίνακα

Η διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών ενός πίνακα αποτελεί μία υπολογιστικά περίπλοκη διαδικασία, με αρκετούς αλγορίθμους να έχουν προταθεί οι οποίοι στοχεύουν στη μείωση της πολυπλοκότητας του υπολογισμού. Για το βήμα της φασματικής ανάλυσης στη διαδικασία κατασκευής του προτεινόμενου preconditioner βασιζόμαστε στο γεγονός ότι δεν είναι απαραίτητη η εύρεση όλων των ιδιοτιμών του πίνακα, παρά μόνο των  $k$  πρώτων από αυτές. Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό BLOPEX[10]. Το συγκεκριμένο πακέτο λογισμικού παρέχει βελτιστοποιημένους αλγορίθμους για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών ενός πίνακα. Οι αλγόριθμοι βασίζονται σε χρήση επαναληπτικών μεθόδων, με αποτέλεσμα η διαδικασία υπολογισμού των ιδιοτιμών να έχει μικρή πολυπλοκότητα.

### Ομαδοποίηση Κόμβων Γραφήματος

Μετά τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα ακολουθεί η διαδικασία της ομαδοποίησης των κόμβων του γραφήματος. Η ποιότητα του preconditioner που θα υπολογισθεί εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα της ομαδοποίησης των κόμβων του γραφήματος. Για την ομαδοποίηση, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο K-Means[11]. Ο αλγόριθμος K-Means αποτελεί έναν επαναληπτικό αλγόριθμο για την ομαδοποίηση ενός συνόλου παρατηρήσεων. Σε κάθε επανάληψη, υπολογίζει τα κεντροειδή του συνόλου των παρατηρήσεων και στη συνέχεια αναθέτει κάθε κόμβο στο cluster του κεντροειδούς που απέχει τη μικρότερη απόσταση από τον κόμβο υπό εξέταση. Τα πλεονεκτήματα του αλγορίθμου είναι η μικρή πολυπλοκότητα και η ποιότητα της ομαδοποίησης που παράγεται.

Έχοντας υπολογίσει τα  $k$  πρώτα ιδιοδιανύσματα του πίνακα, αναθέτουμε τις τιμές τους ως χαρακτηριστικά των κόμβων του δικτύου. Πιο συγκεκριμένα, αναθέτουμε στον πρώτο κόμβο την πρώτη τιμή από κάθε ιδιοδιάνυσμα, στον δεύτερο κόμβο τη δεύτερη τιμή από κάθε ιδιοδιάνυσμα, κ.ο.κ. Έτσι, οι κόμβοι απεικονίζονται στο χώρο των  $k$  διαστάσεων. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο K-Means και ομαδοποιούμε τους κόμβους.

## Κατασκευή Preconditioner

Το τελευταίο βήμα μετά την ομαδοποίηση των κόμβων του γραφήματος είναι η κατασκευή του preconditioner, η οποία πραγματοποιείται ως εξής: α) εισάγουμε στον πίνακα τις συνεισφορές όλων των ακμών που συνδέουν κόμβους που ανήκουν στο ίδιο cluster, β) διατηρούμε μόνο την ακμή με το μεγαλύτερο βάρος για clusters που συνδέονται μέσω πολλαπλών ακμών και γ) διατηρούμε την ακμή με το μεγαλύτερο βάρος για κόμβους που συνδέονται μόνο με κόμβους που ανήκουν σε διαφορετικό cluster. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον πίνακα που έχει παραχθεί ως preconditioner στην αντίστοιχη επαναληπτική μέθοδο.

Τα πλεονεκτήματα του preconditioner που παράγεται βάσει της παραπάνω διαδικασίας είναι η πολύ καλή προσέγγιση του αρχικού πίνακα καθώς λαμβάνει υπόψη τα χαρακτηριστικά του γραφήματος που αναπαριστά το δίκτυο τροφοδοσίας, η οποία οδηγεί σε επιτάχυνση της σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου καθώς και η μικρή πολυπλοκότητα του αλγορίθμου κατασκευής. Επίσης, ένα ακόμη επιπλέον επιθυμητό χαρακτηριστικό είναι η μείωση των μη μηδενικών στοιχείων του αρχικού πίνακα καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη όλες οι ακμές που συνδέουν κόμβους που ανήκουν σε διαφορετικά clusters. Έτσι, μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν preconditioner ο οποίος θα προσφέρει σημαντική επιτάχυνση του ρυθμού σύγκλισης της μεθόδου PCG για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας, όπως περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο.

# Κεφάλαιο 5

## Πειραματική Αξιολόγηση

Για την πειραματική αξιολόγηση χρησιμοποιήθηκαν τα IBM power grid benchmarks[6]. Τα κυκλώματα αυτά μοντελοποιούν το δίκτυο τροφοδοσίας διαφόρων σχεδιάσεων επεξεργαστών της IBM και η πολυπλοκότητά τους είναι ενδεικτική των δικτύων τροφοδοσίας που καλείται να αναλύσει ο σχεδιαστής ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος. Για την εκτέλεση του κώδικα, χρησιμοποιήθηκε ένας υπολογιστής με λειτουργικό σύστημα Linux, επεξεργαστή Intel Core i3 (συχνότητα λειτουργίας 2GHz) και 4GB κύριας μνήμης.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος υλοποιήθηκε και αξιολογήθηκε στη διαδικασία της DC ανάλυσης γραμμικών κυκλωμάτων με χρήση της μεθόδου PCG. Η ποιότητα του preconditioner που κατασκευάζεται βάσει του προτεινόμενου αλγορίθμου καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων και των clusters που δημιουργούνται. Έτσι, προκειμένου να αξιολογηθεί καλύτερα η ποιότητα του προτεινόμενου preconditioner, τα πειραματικά αποτελέσματα περιλαμβάνουν την εκτέλεση του αλγορίθμου κατασκευής του preconditioning με 10 και 20 ιδιοτιμές και αριθμό clusters ίσο με 10, 20 και 30. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα χαρακτηριστικά των δύο κυκλωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για την πειραματική αξιολόγηση καθώς επίσης και τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου PCG, ενώ ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τον χρόνο εκτέλεσης της μεθόδου PCG με χρήση του Jacobi και των διαφόρων εκδόσεων του προτεινόμενου preconditioner.

			K = 10			K = 20		
	Nodes	Jacobi	C = 10	C = 20	C = 30	C = 10	C = 20	C = 30
<b>ibmpg1</b>	11472	341	254	78	94	91	73	79
<b>ibmpg2</b>	38480	655	355	274	365	281	311	441

Πίνακας 1: Ο αριθμός κόμβων και το πλήθος επαναλήψεων για σύγκλιση των αλγορίθμων υπό μελέτη.

	K = 10								K = 20					
	Jacobi		C = 10		C = 20		C = 30		C = 10		C = 20		C = 30	
	Cst.	Sol.	Cst.	Sol.	Cst.	Sol.	Cst.	Sol.	Cst.	Sol.	Cst.	Sol.	Cst.	Sol.
<b>ibmpg1</b>	0	0.34	1.9	0.26	2.2	0.08	2.3	0.095	7.8	0.091	7.99	0.073	8.07	0.079
<b>ibmpg2</b>	0	7.49	11.2	7.26	12.0	5.46	13.0	5.68	39	2.25	37.33	3.8	37.14	4.0

Πίνακας 2: Χρόνος κατασκευής (Cst) του preconditioner και της λύσης (Sol) του αντίστοιχου συστήματος. Οι χρόνοι αναφέρονται σε δευτερόλεπτα.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στον Πίνακα 1, ο προτεινόμενος αλγόριθμος αυξάνει σημαντικά την ταχύτητα σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου. Η μέση επιτάχυνση ισούται με 3.67 και 1.99 για το κύκλωμα **ibmpg1** και **ibmpg2** αντίστοιχα, με τη μέγιστη επιτάχυνση να ισούται με 4.67 και 2.39. Επίσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αύξηση του αριθμού των ιδιοτιμών οδηγεί σε καλύτερο clustering (αφού πλέον, υπάρχουν περισσότερα χαρακτηριστικά – ιδιοδιανύσματα), καθώς ο αλγόριθμος clustering μπορεί να επιτύχει καλύτερη ποιότητα ομαδοποίησης των κόμβων, και κατά συνέπεια καλύτερη ταχύτητα σύγκλισης.

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στις συγκρίσεις στον χρόνο εκτέλεσης, παρατηρούμε ότι η μείωση του αριθμού των επαναλήψεων οδηγεί και σε μείωση του χρόνου εκτέλεσης. Όμως, πλέον ο χρόνος κατασκευής του preconditioner δεν είναι αμελητέος (όπως συμβαίνει για τον Jacobi preconditioner). Λαμβάνοντας υπόψη μόνο τον χρόνο εκτέλεσης της μεθόδου PCG, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος επιτυγχάνει μέγιστο speedup σε σχέση με τον Jacobi preconditioner ίσο με 4.65X και 3.82X, για τα κυκλώματα **ibmpg1** και **ibmpg2**, ενώ το μέσο speedup ισούται με 3.63X και 1.90X αντίστοιχα.

Ο χρόνος κατασκευής του preconditioner αποτελεί πλέον το υπολογιστικά πιο περίπλοκο βήμα στη διαδικασία ανάλυσης. Όπως παρατηρούμε, ο χρόνος κατασκευής ξεπερνά κατά πολύ τον χρόνο που απαιτείται μόνο για την επίλυση του συστήματος, καθιστώντας τη ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας με χρήση της προτεινόμενης μεθόδου πιο αργή από τη μέθοδο που ενσωματώνει τον Jacobi preconditioner. Όμως, τα οφέλη της μεθόδου γίνονται πιο ορατά στην περίπτωση της transient ανάλυσης. Σε αυτήν την περίπτωση, ο preconditioner κατασκευάζεται μόνο μία φορά και χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την επίλυση των διαδοχικών γραμμικών συστημάτων. Κατά συνέπεια, ο χρόνος κατασκευής επιμερίζεται στις επιμέρους επιλύσεις των γραμμικών συστημάτων, καθιστώντας την προτεινόμενη μέθοδο πιο αποδοτική.

# Βιβλιογραφία

- [1] H. Qian, S. R. Nassif, and S. S. Sapatnekar, "Power grid analysis using random walks," *IEEE Trans. on Computer-Aided Design*, vol. 24, no.8, pp. 1204–1224, 2005.
- [2] Xueqian Zhao, Jia Wang, Zhuo Feng, and Shiyuan Hu, "*Power Grid Analysis with Hierarchical Support Graphs*," Department of Electrical and Computer Engineering Michigan Technological University
- [4] J. N. Kozhaya, S. R. Nassif, and F. N. Najm, "A multigrid-like technique for power grid analysis," *IEEE Trans. on Computer-Aided Design*, vol. 21, no. 10, pp. 1148–1160, 2002.
- [5] T. H. Chen and C. C.-P. Chen, "Efficient large-scale power grid analysis based on preconditioned Krylov-subspace iterative methods," in *Proc. IEEE/ACM DAC*, 2001, pp. 559–562.
- [6] S. R. Nassif, *IBM power grid benchmarks*, [Online]. Available: <http://dropzone.tamu.edu/pli/PGBench/>, 2008.
- [7] E. Boman and B. Hendrickson, "Support theory for preconditioning," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 25, pp. 694–717, 2003.
- [8] Z. Feng and Z. Zeng, "Parallel multigrid preconditioning on graphics processing units (GPUs) for robust power grid analysis," in *Proc. IEEE/ACM DAC*, 2010, pp. 661–666.
- [9] E. Boman, B. Hendrickson, and S. Vavasis, "Solving elliptic finite element systems in near-linear time with support preconditioners," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 46, pp. 3264–3284, 2004.
- [10] *Block Locally Optimal Preconditioned Eigenvalue Solvers (BLOPEX)*, Available online: <https://code.google.com/p/blopex/>
- [11] Wikipedia, *K-Means Clustering Algorithm*, Available online: [http://en.wikipedia.org/wiki/K-means\\_clustering](http://en.wikipedia.org/wiki/K-means_clustering)



