



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**«ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΑΧΕΙΑΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ»**

$$\mathbf{G} * \mathbf{x}(t) + \mathbf{H} * \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) * \mathbf{x}'(t) = \mathbf{s}(t)$$

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΔΕΛΛΑΣ

**Επιβλέποντες: Ευμορφόπουλος Νέστωρ, Επίκουρος καθηγητής
Σταμούλης Γεώργιος, Καθηγητής**

ΒΟΛΟΣ 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τους επιβλέποντες καθηγητές μου κ. Ευμορφόπουλο και κ. Σταμούλη για τις πολύτιμες συμβουλές και την καθοδήγησή τους καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω και όλους τους καθηγητές του Τμήματός μου που συνέβαλαν στον εμπλουτισμό των γνώσεών μου όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και στους φίλους μου που με τη συμπαράστασή τους βοήθησαν να ολοκληρωθεί αυτό το κεφάλαιο της ζωής μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1	6
Εισαγωγή	6
1.1 Προσομοιωτής Κυκλωμάτων	6
1.1.1. Είδη κυκλωμάτων	6
1.1.2. Προσομοίωση κυκλωμάτων	6
1.2 Εξισώσεις Κυκλωματικών Στοιχείων ή Συσκευών.....	6
1.3 Σχηματισμός συστήματος εξισώσεων.....	7
1.4 Μέθοδος Επίλυσης.....	7
1.4.1. Επίλυση Αλγεβρικών γραμμικών εξισώσεων.....	7
1.4.2. Επίλυση Μη Γραμμικών Αλγεβρικών συστημάτων.....	7
1.5. Είδη αναλύσεων προσομοίωσης κυκλωμάτων στο SPICE 3.....	10
Κεφάλαιο 2	11
Εξισώσεις ηλεκτρικού δικτύου	11
2.1. Κατηγοριοποίηση των ηλεκτρικών συσκευών και του δικτύου	11
2.1.1. Ορισμός ηλεκτρικού δικτύου	11
2.1.2 Κατηγοριοποίηση των ηλεκτρικών συσκευών	11
2.1.3 Κατηγοριοποίηση των ηλεκτρικών δικτύων	14
2.2. Από το ηλεκτρικό δίκτυο στη θεωρία γράφων	14
2.2.1. Πίνακας πρόπτωσης.....	15
2.3. Σχηματισμός γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων	17
2.3.1. Τροποποιημένη κομβική ανάλυση (<i>modified nodal analysis, MNA</i>).....	18
Στην τροποποιημένη κομβική ανάλυση, όλες οι συσκευές που το ρεύματος πρέπει να απαλειφθεί από το	
2.4. Αποτύπωμα συσκευών (element stamps) στο σύστημα εξισώσεων	21
Κεφάλαιο 3	27
Επίλυση μη γραμμικών ηλεκτρικών κυκλωμάτων	28
3.1 Μη γραμμικές συσκευές	28
3.2. Σχηματισμός μη γραμμικών εξισώσεων με συσκευές δύο ακροδεκτών.....	29
3.2.1. Σχηματισμός μη γραμμικών εξισώσεων με συσκευές πολλών ακροδεκτών.....	31

3.4. Μέθοδοι επίλυσης	34
3.4.1. Επαναληπτικές μέθοδοι και σύγκλιση.....	34
3.4.2. Μέθοδος του Νεύτωνα (Newton method).....	35
3.4.3. Εφαρμογή της Μεθόδου του Νεύτωνα στην μία διάσταση.....	37
3.4.3.1 Προβλήματα κατά την εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα	38
3.4.5. Τερατισμός μεθόδου Νεύτωνα (Newton).....	41
3.5. Μέθοδος Κουασί – Νεύτωνα (Quasi -Newton)	42
3.6. Εφαρμογή των μεθόδων επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων στην Προσομοίωση κυκλωμάτων	43
3.6.1. Γραμμικοποίηση και αντίστοιχο γραμμικό μοντέλο (companion model).....	43
3.6.2. Γενίκευση της μεθόδου του Νεύτωνα στις εξισώσεις του κυκλώματος.	44
3.6.3. Γραμμικοποίηση συσκευών με δύο και με πολλούς ακροδέκτες	45
3.6.3.1. Γραμμικό μοντέλο για την συσκευή Mosfet	45
3.6.4. Συνολική διαδικασία επίλυσης μη γραμμικών κυκλωμάτων.....	47
3.6.5. Κουασί – Νεύτωνα μέθοδοι (Quasi -Newton) στην προσομοίωση των κυκλωμάτων.....	49
3.6.5.1 Μέθοδοι περιορισμού του βήματος της Μεθόδου του Νεύτωνα.	49
3.6.5.2 Εύρεσης αρχικής λύσης με την μέθοδο της μεταβολής πηγών (Source Stepping).....	50
Κεφάλαιο 4.....	52
Επίλυση διαφορικών κυκλωματικών εξισώσεων	52
4.1. Σύστημα εξισώσεων με δυναμικά στοιχεία	52
4.2. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και (Σ.Δ.Ε) και διαφορικές αλγεβρικές εξισώσεις (Δ.Α.Ε) ...	53
4.3. Συστήματα Σ.Δ.Ε και Βασικά θεωρήματα.....	54
4.4. Μέθοδος Επίλυσης Σ.Δ.Ε Forward Euler (FE).....	55
4.5. Εφαρμογή στην προσομοίωση κυκλωμάτων	56
4.5.1 Γενίκευση της μεθόδου άμεσης διακριτοποίησης στις εξισώσεις του κυκλώματος	56
4.5.2. Εξαγωγή ισοδύναμου κυκλωματικού μοντέλου με την μέθοδο FE	57
4.5.3. Συνολικός αλγόριθμος για την εκτέλεση μεταβατικής ανάλυσης.....	59
Κεφάλαιο 5.....	60
Αρχιτεκτονική και αλγόριθμοι προσομοιωτή ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.....	60
5.1. Αρχιτεκτονική προσομοιωτή ηλεκτρονικών κυκλωμάτων	60
5.2. Συντακτικός αναλυτής	61
5.3. Γραφική απεικόνιση	62
5.4. Δημιουργία και επίλυση συστήματος	63

5.5. Παρατηρήσεις και Παραδείγματα χρήσης	64
Κεφάλαιο 6.....	72
Επίλογος.....	72
6.1 Συμπεράσματα	72
6.2 Μελλοντικές επεκτάσεις	72
Βιβλιογραφία	73
ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	73
ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ	73
Παράρτημα Α (Συνοδευτικό CD με την υλοποίηση του προσομοιωτή).....	74
Δομές δεδομένων	74
Λίστες.....	75
Μέθοδος του Νεύτωνα.....	76
Βηματική στρατηγική	76
Συνθήκες τερματισμού	76
Μέθοδος του Νεύτωνα.....	78
DcSweep ανάλυση	82
Μέθοδος της μεταβολής πηγών	Error! Bookmark not defined.
Μεταβατική ανάλυση	85

«ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΑΧΕΙΑΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ»

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η προσομοίωση κυκλωμάτων είναι μία διαδικασία κατά την οποία ελέγχετε και πιστοποιείται ο σχεδιασμός των ηλεκτρικών ή των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων πριν την κατασκευή τους. Υπάρχουν πολλά είδη προσομοιωτών, καθένας από τους οποίους, αναλύει το κύκλωμα, από διαφορετική σχεδιαστική οπτική γωνία. Ο προσομοιωτής κυκλωμάτων που θα μελετηθεί, αναλύει το ηλεκτρονικό κύκλωμα σε επίπεδο κυκλώματος (circuit level), δηλαδή χρησιμοποιούνται φυσικά μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή των κυκλωματικών συσκευών.

Στην παρούσα διπλωματική, θα μελετηθεί ο τρόπος σχηματισμού του συστήματος εξισώσεων από ένα ηλεκτρικό δίκτυο και ποιες μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την επίλυση του. Στο σχηματισμό των εξισώσεων θα συμμετέχουν γραμμικές, μη γραμμικές και δυναμικές συσκευές. Οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν, εξαρτώνται από το είδος του συστήματος, δηλαδή αν το σύστημα είναι γραμμικό, μη γραμμικό ή διαφορικό. Επίσης, θα μελετηθεί, ποιες είναι εκείνες οι συνθήκες που επιτρέπουν την εφαρμογή των μεθόδων επίλυσης του συστήματος, καθώς και ποια νέα προβλήματα προκύπτουν με την εφαρμογή τους με έμφαση στις μη γραμμικές εξισώσεις. Ακόμα θα εξεταστεί, με ποιους τρόπους μπορούν να ξεπεραστούν τα προβλήματα που προκύπτουν, όσον αφορά, τις μη γραμμικές μεθόδους επίλυσης συστημάτων.

Τέλος, με την ολοκλήρωση του θεωρητικού κομματιού, θα επιχειρηθεί μία προγραμματιστική υλοποίηση και παρουσίαση, βασικών αλγορίθμων ανάλυσης ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Προσομοιωτής Κυκλωμάτων

1.1.1. Είδη κυκλωμάτων

Τα κυκλώματα που λειτουργούν με ηλεκτρικό ρεύμα διαχωρίζονται σε **ηλεκτρικά** και **ηλεκτρονικά**. Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα αποτελούνται σχεδόν αποκλειστικά από ημιαγωγούς ηλεκτρικού ρεύματος και τις προσμίξεις τους. Τα υπόλοιπα κυκλώματα ονομάζονται ηλεκτρικά. Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια εντοπίζονται σε **ηλεκτρονικά κυκλώματα** στοιχεία ηλεκτρικών κυκλωμάτων (όπως είναι τα πηνία στη μητρική πλακέτα του υπολογιστή) και ηλεκτρονικά στοιχεία (μικρο-αντιστάσεις) σε **ηλεκτρικά κυκλώματα**.

1.1.2. Προσομοίωση κυκλωμάτων

Η προσομοίωση κυκλωμάτων είναι μία διαδικασία κατά την οποία ελέγχετε και πιστοποιείται ο σχεδιασμός των ηλεκτρικών ή των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων πριν την κατασκευή τους. Χρησιμοποιείται σε μια ευρεία γκάμα εφαρμογών όπως από ολοκληρωμένα κυκλώματα μέχρι τα δίκτυα διανομής της ηλεκτρικής ενέργεια και την Ηλεκτρονική ισχύος. Η προσομοίωση κυκλωμάτων είναι μία ώριμη και καθιερωμένη τέχνη και ταυτόχρονα παραμένει ένα ενεργό πεδίο έρευνας.

Σε σύγκριση με άλλα είδη προσομοιωτών που λειτουργούν σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης και προβλέπουν την λειτουργία του κυκλώματος π.χ. σε επίπεδο λογικής '0' και '1', οι προσομοιωτές κυκλωμάτων χρησιμοποιούν μία λεπτομερή περιγραφή του κυκλώματος (Transistor level or circuit level) και διεξάγουν μια σχετικά ακριβή προσομοίωση. Μια τέτοια προσομοίωση χρησιμοποιεί φυσικά μαθηματικά μοντέλα των κυκλωματικών στοιχείων, λύνει το προκύπτον σύνολο των διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων, και παράγει μια κυματομορφή των τάσεων των κόμβων και των ρευμάτων των κυκλωματικών στοιχείων συναρτήσει του χρόνου.

1.2 Εξισώσεις Κυκλωματικών Στοιχείων ή Συσκευών

Κάθε ηλεκτρική συσκευή έχει δύο ή περισσότερους ακροδέκτες. Η συσκευή με περισσότερους από δύο ακροδέκτες, συχνά μοντελοποιείται ως υποκύκλωμα συσκευών με δύο τερματικά. Για αυτό τον λόγο θα μελετηθούν προς το παρόν μόνο συσκευές με δύο ακροδέκτες.

Κάθε συσκευή περιγράφεται από μία διανυσματική σχέση ρεύματος - τάσης¹. Η σχέση ρεύματος τάσης των στοιχείων που πρόκειται να μελετηθούν είναι Αλγεβρική και Γραμμική ή μη ή πρώτης τάξεως συνήθης διαφορική και Γραμμική.

1.3 Σχηματισμός συστήματος εξισώσεων

Η συμπεριφορά ενός κυκλώματος καθορίζεται από ένα σύνολο εξισώσεων που σχηματίζονται **συνδυάζοντας τις εξισώσεις που περιγράφουν την λειτουργία των ηλεκτρικών συσκευών και τους νόμους του Kirchoff** (Kirchoff 's Current and Voltage Law , KCL and KVL).

Το προκύπτον σύστημα αποτελείται από εξισώσεις **Γραμμικές ή Μη και Αλγεβρικές και/ή Γραμμικές πρώτης τάξεως συνήθεις διαφορικές**, Σύμφωνα με το είδος της σχέσης ρεύματος τάσης των ηλεκτρικών συσκευών.

1.4. Μέθοδος Επίλυσης

1.4.1. Επίλυση Αλγεβρικών γραμμικών εξισώσεων

Η επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων είναι ένα κλασικό πρόβλημα και συναντάται συχνά στην πράξη. Έχουν βρεθεί πολλές μέθοδοι για την επίλυση του και μια από αυτές είναι η LU παραγοντοποίηση.

1.4.2. Επίλυση Μη Γραμμικών Αλγεβρικών συστημάτων

Η επίλυση μη γραμμικών συστημάτων γίνεται με την μέθοδο του Νεύτωνα (Newton). Η διαδικασία είναι η εξής:

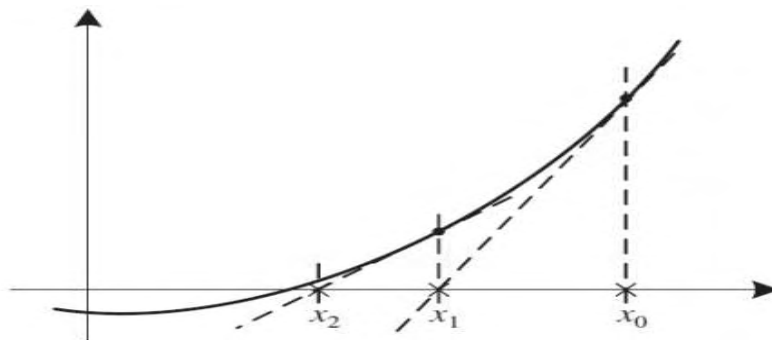
Μέχρι να βρεθεί η σωστή λύση επανάλαβε τα δυο επόμενα βήματα:

¹ Η σχετική φορά των δύο διανυσμάτων εξηγείται στο επόμενο κεφάλαιο.

- 1) **Γραμμοποιήσε** τις εξισώσεις γύρω από μία υποψήφια λύση
- 2) **Λύσε το προκύπτον γραμμικό σύστημα** για να βρεις μια καλύτερη υποψήφια λύση.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ένα απλοποιημένο παράδειγμα μίας υπερβολής όπου η αρχική υποψήφια λύση είναι η X_0 και η γραμμοποίηση της εξίσωσης γύρω από το X_0 είναι η εφαπτομένη στο X_0 . Στην συνέχεια με την επίλυση της γραμμικής πλέον εξίσωσης, μία νέα βελτιωμένη υποψήφια λύση είναι η X_1 . Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για το X_1 και μία νέα βελτιωμένη υποψήφια λύση είναι η X_2 , όπου και ικανοποιούνται τα κριτήρια σύγκλισης της λύσης.

Εικόνα 1.1: Γραφική απεικόνιση της μεθόδου του Νεύτωνα.



1.4.3. Επίλυση γραμμικών συνήθων διαφορικών συστημάτων

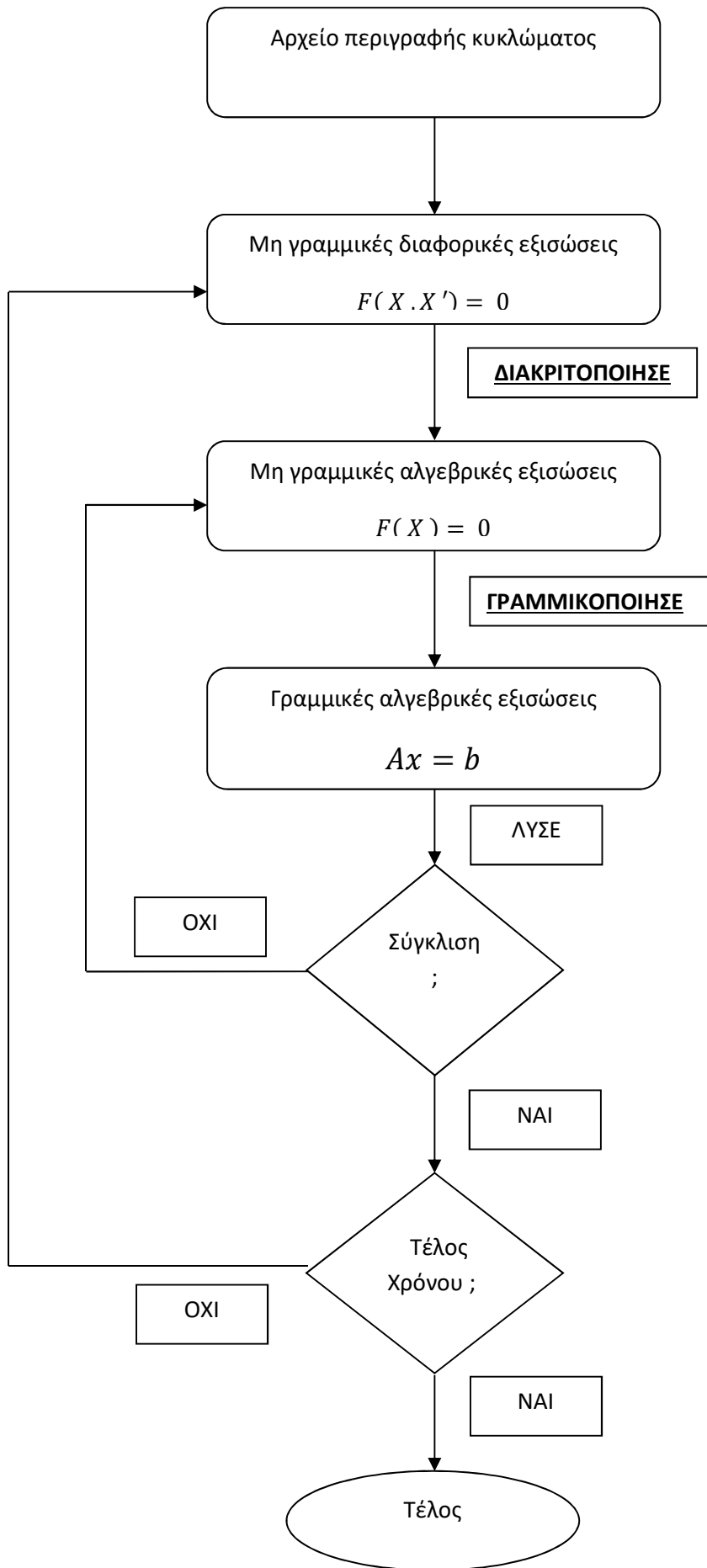
Η επίλυση τέτοιου είδους συστημάτων γίνεται **χρησιμοποιώντας μία πεπερασμένη διαφορά ως προσέγγιση της παραγώγου** (finite difference approximation). Σε γενικές γραμμές η προσέγγιση είναι:

$$K * \frac{dv}{dt} = K * \frac{v(t+d) - v(t)}{dt} \quad (1)$$

όπου K μία αλγεβρική γραμμική ή μη συνάρτηση. Έτσι αντικαθιστώντας όλες τις παραγώγους με την παραπάνω σχέση και δοθέντος της $v(t)$ την χρονική στιγμή t οι εξισώσεις λύνονται ως προς $v(t + dt)$. Έτσι με την **διακριτοποίηση του χρόνου** κάθε χρονική στιγμή λύνεται ένα γραμμικό ή μη σύστημα, σύμφωνα με τις παραπάνω μεθόδους.

1.4.4. Τυπική Ροή της προσομοίωσης ενός κυκλώματος

Διάγραμμα 1.1: Τυπική ροή της προσομοίωσης ενός κυκλώματος



1.5. Είδη αναλύσεων προσομοίωσης κυκλωμάτων στο SPICE 3

- 1) **Συνεχούς ρεύματος ανάλυση (DC analysis):** Καθορίζει το DC σημείο λειτουργίας του κυκλώματος με τα πηνία βραχυκυκλωμένα και τους πυκνωτές ανοιχτό κύκλωμα.
- 2) **Μεταβατική ανάλυση (Transient analysis):** Υπολογίζει τις μεταβλητές εξόδου, τάσεων και ρευμάτων, ως συναρτήσεις του χρόνου πάνω από ένα καθορισμένο από το χρήστη χρονικό διάστημα.
- 3) **Εναλλασσόμενου ρεύματος μικρού σήματος ανάλυση (AC Small-Signal Analysis):** Βρίσκει τις AC μεταβλητές εξόδου σε συνάρτηση με την συχνότητα (συνάρτηση μεταφοράς), πάνω από ένα από το χρήστη καθορισμένο εύρος συχνοτήτων.
- 4) **Πόλου μηδενικού ανάλυση (Pole-Zero Analysis):** Υπολογίζει τους πόλους και / ή μηδενικά στην μικρού σήματος συνάρτηση μεταφοράς. Είναι χρονοβόρο για μεγάλα κυκλώματα.
- 5) **Ανάλυση ευαισθησίας (Sensitivity Analysis):** Βρίσκει την ευαισθησία μιας μεταβλητής εξόδου με σεβασμό σε όλες τις μεταβλητές του κυκλώματος συμπεριλαμβανομένων των παραμέτρων του μοντέλου.
- 6) **Ανάλυση του θορύβου (Noise Analysis):** Ανάλυση θορύβου παραγόμενου από την συσκευή για το συγκεκριμένο κύκλωμα, παρέχοντας τις συνεισφορές του θορύβου της κάθε συσκευής στην εκάστοτε τάση εξόδου.
- 7) **Ανάλυση παραμόρφωσης Μικρού-Σήματος (Small-Signal Distortion Analysis):** Υπολογίζει την σταθερής κατάστασης αρμονική και ενδοδιαμόρφωση για μικρά μεγέθη του σήματος εισόδου.

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις ηλεκτρικού δικτύου

2.1. Κατηγοριοποίηση των ηλεκτρικών συσκευών και του δικτύου

2.1.1. Ορισμός ηλεκτρικού δικτύου

Ένα ηλεκτρικό δίκτυο, ή κύκλωμα είναι ένα σύστημα που αποτελείται από ένα σύνολο από ηλεκτρικές συσκευές που έχουν δυο ακροδέκτες και από ένα σύνολο από κόμβους. Κάθε ακροδέκτης της ηλεκτρικής συσκευής αναγνωρίζεται από ένα μοναδικό κόμβο και κάθε κόμβος αναγνωρίζεται από ένα τουλάχιστον ακροδέκτη. Ένα δίκτυο είναι πλήρως συνδεδεμένο, δηλαδή υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα μονοπάτι από τον ένα κόμβο στον άλλο. Κατά συνέπεια ένα ηλεκτρικό δίκτυο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφο όπου οι κορυφές του αντιστοιχούν στους κόμβους του κυκλώματος και οι ακμές του στις ηλεκτρικές συσκευές.

2.1.2 Κατηγοριοποίηση των ηλεκτρικών συσκευών

Οι ηλεκτρικές συσκευές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες σε **Παθητικές** (passive) και σε **Ενεργές** (active). Οι **Παθητικές συσκευές** έχουν εξίσωση της μορφής:

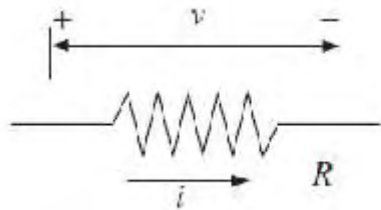
$$v = f(i, i') \quad \text{ή} \quad i = f(v, v') \quad (2)$$

όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και όπου $i'(t)$ και $v'(t)$ πρώτης τάξης παράγωγοι των $i(t)$ και $v(t)$ αντίστοιχα.

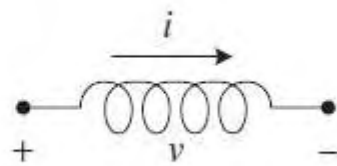
Όταν δεν υπάρχει εξάρτηση από $i'(t)$ και $v'(t)$ τότε οι συσκευές ονομάζονται **ωμικές** (resistive) αλλιώς **δυναμικές** (passive dynamic). Όταν η $f(\cdot)$ είναι γραμμική η συσκευή λέγεται **γραμμική** (linear) αλλιώς **μη γραμμική** (non linear). Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι ακόλουθες συσκευές :

- 1) οι αντιστάσεις (Εικόνα 2.1)
- 2) τα πηνία (Εικόνα 2.2)
- 3) οι πυκνωτές (Εικόνα 2.3)

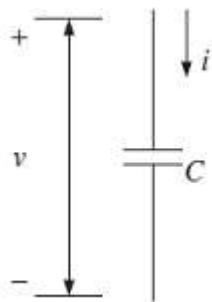
Εικόνα 2.1: Σύμβολο της αντίστασης



Εικόνα 2.2: Σύμβολο του πηνίου



Εικόνα 2.3: Σύμβολο πυκνωτή



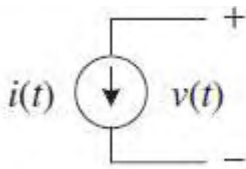
Οι ενεργές συσκευές έχουν την ιδιότητα ότι είτε η τάση στα άκρα τους, $v(t)$, είτε το ρεύμα τους, $i(t)$, μπορούν να εκφράζονται σε οποιοδήποτε μία από τις ακόλουθες μορφές:

- 1) Η Τάση είναι είτε σταθερά ή μια συνάρτηση του χρόνου, $v = f(t)$, στην οποία περίπτωση η συσκευή καλείται **ανεξάρτητη πηγή τάσης** (Εικόνα 2.4).
- 2) Το ρεύμα είναι είτε σταθερά ή μια συνάρτηση του χρόνου, $i = f(t)$, στην οποία περίπτωση η συσκευή καλείται **ανεξάρτητη πηγή ρεύματος** (Εικόνα 2.5).
- 3) Η Τάση είναι συναρτήσει του ρεύματος i_x , $v = f(i_x)$, ή συναρτήσει της τάσης v_x , $v = f(v_x)$, κάποιας άλλης συσκευής του δικτύου, στην οποία περίπτωση, η συσκευή καλείται **ελεγχόμενη πηγή τάσης** από ρεύμα (Εικόνα 2.6) ή από τάση (Εικόνα 2.8) αντίστοιχα (Current Controlled voltage source, CCVS ή Voltage Controlled voltage source, VCVS).
- 4) Το ρεύμα είναι συναρτήσει του ρεύματος i_x , $i = f(i_x)$, ή συναρτήσει της τάσης v_x , $i = f(v_x)$, κάποιας άλλης συσκευής του δικτύου, στην οποία περίπτωση η συσκευή καλείται **ελεγχόμενη πηγή ρεύματος** από ρεύμα (Εικόνα 2.9) ή από τάση (Εικόνα 2.10)

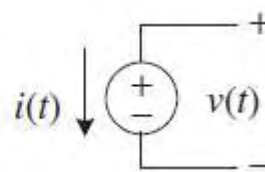
αντίστοιχα (Current Controlled current source, CCCS ή Voltage Controlled current source, VCCS).

Επίσης, μια ελεγχόμενη πηγή λέγεται ότι είναι γραμμική, αν η συνάρτηση $f()$ είναι γραμμική, αλλιώς είναι μη γραμμική. Το παραπάνω σύνολο ηλεκτρικών συσκευών λέγεται **ελάχιστο βασικό σύνολο** (minimum basic set). Στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις, ένα κυκλωματικό στοιχείο που δεν ανήκει στις παραπάνω κατηγορίες μπορεί να αντικατασταθεί από **ένα ισοδύναμο κύκλωμα** (equivalent circuit model) που αποτελείται παθητικές και ενεργητικές συσκευές.

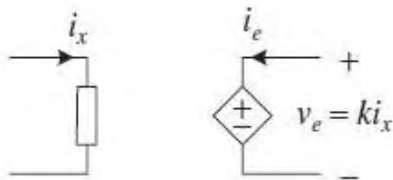
Εικόνα 2.4: Σύμβολο ανεξάρτητης πηγής τάσης



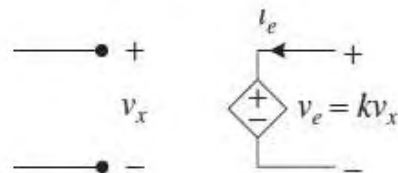
Εικόνα 2.5: Σύμβολο ανεξάρτητης πηγής τάσης



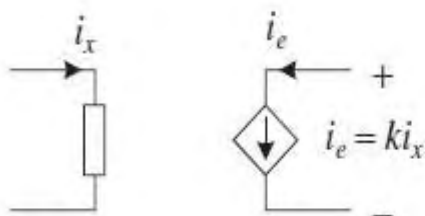
Εικόνα 2.6: Σύμβολο εξαρτημένης πηγής τάσης από ρεύμα



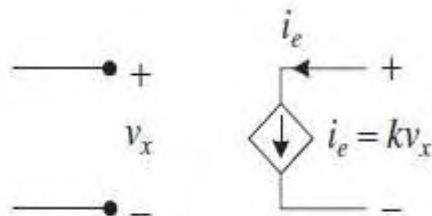
Εικόνα 2.7: Σύμβολο εξαρτημένης πηγής τάσης από τάση



Εικόνα 2.8: Σύμβολο εξαρτημένης πηγής ρεύματος από ρεύμα



Εικόνα 2.9: Σύμβολο εξαρτημένης πηγής ρεύματος από τάση



2.1.3 Κατηγοριοποίηση των ηλεκτρικών δικτύων

Τα ηλεκτρικά δίκτυα κατηγοριοποιούνται, ανάλογα με το είδος των ηλεκτρικών συσκευών που ανήκουν σε αυτό. Έτσι, ένα **δίκτυο** που περιέχει δυναμικές συσκευές λέγεται **δυναμικό** αλλιώς λέγεται **ενεργό**. Αν το δίκτυο έχει μόνο γραμμικές συσκευές λέγεται **γραμμικό** ειδικά λέγεται **μη γραμμικό**. Είναι επίσης σημαντικό να κατατάξουμε ένα δίκτυο σύμφωνα με το αν έχει εξαρτημένες πηγές ή όχι. Γι' αυτό το λόγο, ένα δίκτυο μπορεί να είναι γραμμικό ή μη, με αντίσταση ή δυναμικό, με εξαρτημένες πηγές ή όχι.

Το ελάχιστο βασικό σύνολο του συνόλου των κυκλωματικών στοιχείων είναι **χρονικά αμετάβλητα** (time invariant), με την έννοια ότι οι χαρακτηριστικές $i - v$ των συσκευών παραμένουν αμετάβλητες σε μία οποιαδήποτε χρονική μετατόπιση (time shift). Κατά συνέπεια, ένα δίκτυο που έχει **μόνο** χρονικά αμετάβλητες συσκευές ονομάζεται **χρονικά αμετάβλητο** και αυτού του είδους τα δίκτυα θα μελετηθούν.

2.2. Από το ηλεκτρικό δίκτυο στη θεωρία γράφων

Ένας φυσικός τρόπος για να μελετηθεί ένα ηλεκτρικό δίκτυο N είναι να ορίσουμε έναν κατευθυνόμενο γράφο G_d που να σχετίζεται με αυτό ως εξής :

- 1) Δημιούργησε μία κορυφή του γράφου, για κάθε ένα κόμβο του δικτύου. Οι κορυφές του γράφου, περιστασιακά, θα αναφέρονται και ως κόμβοι.
- 2) Δημιούργησε μία ακμή του γράφου για κάθε ηλεκτρική συσκευή του δικτύου. Οι κορυφές του γράφου, περιστασιακά, θα αναφέρονται και ως κόμβοι.

Η κατεύθυνση των ακμών είναι προς την ίδια κατεύθυνση όπως η θετική φορά αναφοράς του ρεύματος της ηλεκτρικής συσκευής. Από σύμβαση, η φορά της ακμής δείχνει την θετική φορά αναφοράς της τάσης της ηλεκτρικής συσκευής, έτσι ώστε, ο θετικός ακροδέκτης της συσκευής να είναι στην 'ουρά' της κατευθυνόμενης ακμής. Όταν δεν ενδιαφέρει η φορά αναφοράς του ρεύματος

και της τάσης μπορούν να αφαιρεθούν οι ακμές από τον γράφο². Έτσι, δημιουργείται ένα μη κατευθυνόμενος γράφος G_n .

Εν τέλει, για τους γράφους G_n και G_d θα πρέπει να θεωρηθεί ότι έχουν ορισμένες βασικές ιδιότητες:

- 1) Είναι συνδεδεμένοι .
- 2) Δεν έχουν self – loops .
- 3) Ο γράφος G_n έχει κύκλους έτσι ώστε $m \geq n$ (δηλ. να μην είναι δέντρο)

2.2.1. Πίνακας πρόσπτωσης

Για ένα κόμβο j , έστω E_j^{out} είναι το σύνολο των κατευθυνόμενων ακμών των οποίων η ουρά συνδέεται στο j και έστω E_j^{in} είναι το σύνολο των κατευθυνόμενων ακμών των οποίων η κεφαλή συνδέεται στο j . Ορίζουμε τον $n \times m$ πίνακα πρόσπτωσης M σύμφωνα με:

$$M_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{αν } e_k \text{ ανήκει στο } E_{i-1}^{out} \\ -1 & \text{αν } e_k \text{ ανήκει στο } E_{i-1}^{in} \\ 0 & \text{, αλλιώς} \end{cases} \quad (3)$$

όπου $i = 1, 2, \dots, n$ και $k = 1, 2, \dots, m$

- 1) Κάθε στήλη k έχει ένα $+1$ και ένα -1 , που αντιστοιχεί στους ακροδέκτες της ακμής e_k , και όλες άλλες καταχωρήσεις είναι 0 .
- 2) Σε κάθε γραμμή $i = j + 1$ ο αριθμός των $+1$ είναι ίσος με τον βαθμό εξόδου της κορυφής j , δηλαδή τον αριθμό των εξερχόμενων ακμών.
- 3) Σε κάθε γραμμή $i = j + 1$ ο αριθμός των -1 είναι ίσος με τον βαθμό εισόδου της κορυφής j , δηλαδή τον αριθμό των εισερχόμενων ακμών.

² **Σημείωση:** Για ένα γράφο με n κορυφές και m ακμές, η μία κορυφή (κόμβος) θα χαρακτηρίζεται ως κορυφή αναφοράς και θα σημειώνεται με 0 (μηδέν) και όλοι οι υπόλοιποι κόμβοι θα αριθμούνται $1, 2, \dots, n - 1$ σχηματίζοντας το σύνολο των κορυφών του γράφου $V = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Επίσης, όλες οι ακμές σημειώνονται με e_1, e_2, \dots, e_m και σχηματίζουν το σύνολο κορυφών του γράφου $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, το άθροισμα όλων των γραμμών του M είναι το διάνυσμα μηδέν. Έτσι, αν μια γραμμή του M λείπει, μπορεί εύκολα να βρεθεί, λαμβάνοντας το άθροισμα όλων των γραμμών του M και πολλαπλασιάζοντας με -1 . **Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές του M δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.**

2.2.2. Εξισώσεις τάσεων

Έστω ο κατευθυνόμενος γράφος $G_d = (V, E)$ και p_0, p_1, \dots, p_{n-1} το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε κόμβο $0, 1, \dots, n-1$. Έστω u_1, u_2, \dots, u_m η τάση σε κάθε ακμή e_1, e_2, \dots, e_m και όρισε τα διανύσματα $p = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]^T$ και $u = [u_0, u_1, \dots, u_m]^T$. Για κάθε κατευθυνόμενη ακμή e_j , $t(e_j)$ είναι ο κόμβος στην ουρά της e_j και $h(e_j)$ είναι ο κόμβος στην κεφαλή της e_j . Σύμφωνα με το νόμο του Kirchoff (KVL) πρέπει να ισχύει :

$$u_j = p_{t(e_j)} - p_{h(e_j)} \quad (4)$$

για κάθε e_j που ανήκει στο E .

Η

$$u = M^T * p \quad (5)$$

Όρισε $v = p_j - p_0$, για κάθε κόμβο $j = 1, 2, \dots, n-1$, ως την τάση σε κάθε κόμβο σε σχέση με τον κόμβο αναφοράς. Άρα $v_0 = 0$ και $p_j = p_0 + v_j$ έτσι ώστε:

$$u = M^T * \begin{bmatrix} p_0 \\ p_0 \\ \vdots \\ p_0 \\ p_0 \end{bmatrix} + M^T * \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = M^T * \begin{bmatrix} p_0 \\ p_0 \\ \vdots \\ p_0 \\ p_0 \end{bmatrix} + A^T * v \quad (6)$$

όπου $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1}]^T$ και A είναι ο $(n-1) \times m$ πίνακας, αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από τον M και ονομάζεται **ελαττωμένος πίνακας πρόπτωσης.**

Από σύμβαση έστω $p_0 = 0$ στον κόμβο αναφοράς, έτσι ώστε:

$$KVL \leftrightarrow A^T * v \quad (7)$$

2.2.3. Εξισώσεις ρεύματος

Αν i_1, i_2, \dots, i_m είναι το ρεύμα των ακμών e_1, e_2, \dots, e_m τότε ο νόμος ρευμάτων του Kirchoff σε κάθε κόμβο j που ανήκει στο V ισχύει :

$$\sum_{e_k \in E_j^{out}} i_k - \sum_{e_l \in E_j^{in}} i_l = 0 \quad (8)$$

Αν $i = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m]^T$ ο νόμος ρευμάτων μπορεί να γραφεί:

$$M * i = 0 \quad (9)$$

Επειδή μία γραμμή του M μπορεί πάντα να γραφεί συναρτήσει των υπολοίπων, η μία εξίσωση του $M * i = 0$ είναι περιττή. Έτσι, αρκεί να εκφράσουν KCL χρησιμοποιώντας τον ελαττωμένο πίνακα πρόπτωσης:

$$KCL \leftrightarrow A * i = 0 \quad (10)$$

Δηλαδή ή κάθε γραμμή της εξίσωσης $A * i = 0$ εκφράζει απλά τον νόμο ρευμάτων σε κάθε κόμβο, εκτός από τον κόμβο αναφοράς. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, για ένα συνδεδεμένο, loopless, κατευθυνόμενο γράφημα G_d , το σύνολο των γραμμών του ελαττωμένου πίνακα πρόπτωσης A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

2.3. Σχηματισμός γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

Οι δύο νόμοι του Kirchoff μπορούν να εκφραστούν συνοπτικά ως:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & -A^T \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

με $m + n - 1$ ανεξάρτητες εξισώσεις και $2m + n - 1$ αγνώστους.

Τώρα στις εξισώσεις αυτές θα πρέπει να συμπληρωθούν και οι εξισώσεις από τις ηλεκτρικές συσκευές έτσι ώστε το πλήθος των εξισώσεων να είναι ίδιο με το πλήθος των αγνώστων. Η γενική μορφή των εξισώσεων των συσκευών είναι:

$$\mathbf{Z} * \mathbf{i} + \mathbf{Y} * \mathbf{u} = \mathbf{s} \text{ ή } [\mathbf{Z} \quad \mathbf{Y}] * \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = [\mathbf{s}] \quad (12)$$

οι πίνακες \mathbf{Z} και \mathbf{Y} είναι διάστασης $\mathbf{m} \times \mathbf{m}$.

Η παραπάνω μορφή αντιπροσωπεύει τις εξής συσκευές:

- 1) Αντίσταση $u - R * i = 0$
- 2) Ανεξάρτητη πηγή τάσης $u = V$
- 3) Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος $i = I$
- 4) Πηγή τάσης εξαρτώμενη από τάση $u = a * u'$
- 5) Πηγή τάσης εξαρτώμενη από ρεύμα $u = a * i'$
- 6) Πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από ρεύμα $i = a * i'$
- 7) Πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από τάση $i = a * u'$

Η μορφή τους συστήματος πλέον είναι:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{Z} & \mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (13)$$

2.3.1. Τροποποιημένη κομβική ανάλυση (modified nodal analysis, MNA)

Στην τροποποιημένη κομβική ανάλυση, όλες οι συσκευές που το ρεύματος πρέπει να απαλειφθεί από το σύστημα των εξισώσεων θα ανήκουν στην ομάδα 1 και όλες οι άλλες συσκευές θα ανήκουν στην ομάδα 2.

Στην ομάδα 1 ανήκουν:

- 1) Αντίσταση $u - R * i = 0$
- 2) Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος $i = I$
- 3) Πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από τάση $i = a * u'$
- 4) Πηγή ρεύματος εξαρτώμενη από ρεύμα $i = a * i'$

Στην ομάδα 2 ανήκουν:

- 1) Ανεξάρτητη πηγή τάσης $u = V$
- 2) Πηγή τάσης εξαρτώμενη από τάση $u = a * u'$
- 3) Πηγή τάσης εξαρτώμενη από ρεύμα $u = a * i'$
- 4) Αντίσταση $u - R * i = 0$
- 5) Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος $i = I$

Η αντίσταση και η πηγή ρεύματος μπορεί να είναι και στις δύο ομάδες.

Χωρίζουμε το διάνυσμα ρεύματος i σύμφωνα με τις ομάδες που έχουν δημιουργηθεί, δηλαδή, το ρεύμα από τις συσκευές της ομάδας 1 μπαίνει στην ομάδα i_1 και από την ομάδα 2 στην ομάδα i_2 .

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Αντίστοιχα διαχωρίζουμε το διάνυσμα των τάσεων³:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Με αυτόν τον διαχωρισμό οι γενικές εξισώσεις των συσκευών μετατρέπονται σε:

$$\begin{bmatrix} I & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Η γενική μορφή της εξίσωσης μία συσκευής της ομάδας 1 είναι:

$$i_1 + Z_{12} * i_2 - Y_{11} * u_1 - Y_{12} * u_2 = s_1 \quad (17)$$

Και της ομάδας 2 είναι:

³ Η εξαρτώμενη από ρεύμα πηγή ρεύματος έχει εξαρτώμενη μεταβλητή που ανήκει στην ομάδα 2 γιατί το διάνυσμα του ρεύματος που ανήκει στην ομάδα 1 θα επαλειφθεί.

$$Z_{22} * i_2 - Y_{21} * u_1 + Y_{22} * u_2 = s_2 \quad (18)$$

Ακόμα ο KCL και ο KVL σύμφωνα με τα παραπάνω γράφονται:

$$A_1 * i_1 + A_2 * i_2 = 0 \quad (19)$$

$$u_1 = A_1^T * v \quad (20)$$

$$u_2 = A_2^T * v \quad (21)$$

Ξεκινώντας από τον KCL (19) και αντικαθιστώντας το i_1 από την (17) και εν συνεχεία αντικαθιστώντας τα u_1, u_2 με τις εξισώσεις (20), (21) αντίστοιχα, προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$(A_1 Y_{11} A_1^T + A_1 Y_{12} A_1^T) * v + (A_2 - A_1 Z_{12}) * i_2 = -A_1 s_1 \quad (22)$$

Ακόμα, αν στην εξίσωση (18) αντικαταστήσουμε το u_1, u_2 με την εξίσωση (21), προκύπτει η εξίσωση:

$$-(Y_{21} A_1^T + Y_{22} A_2^T) * v + Z_{22} * i_2 = s_2 \quad (23)$$

Το καινούργιο σύστημα εξισώσεων είναι:

$$\begin{bmatrix} (A_1 Y_{11} A_1^T + A_1 Y_{12} A_1^T) & A_2 - A_1 Z_{12} \\ -(Y_{21} A_1^T + Y_{22} A_2^T) A_2^T & Z_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 s_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

II

$$G * x(t) = s(t) \quad (25)$$

Αν θέλαμε να συμπεριλάβουμε τους πυκνωτές και τα πηνία στο σύστημα οι γενικές εξισώσεις των συσκευών είναι:

$$Z * i + L * i' - Y * u - C * u' \quad (26)$$

και μετά την δημιουργία των δυο ομάδων:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{12} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Σύμφωνα με την ίδια λογική αντικαταστάσεων με παραπάνω, το σύστημα που προκύπτει είναι:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (A_1 Y_{11} A_1^T + A_1 Y_{12} A_1^T) & A_2 - A_1 Z_{12} \\ -(Y_{21} A_1^T + Y_{22} A_2^T) A_2^T & Z_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A_1 C_{11} A_1^T) & A_2 \\ A_2^T & L_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} -A_1 s_1 \\ s_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Η

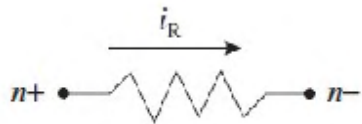
$$G * x(t) + D * x'(t) = s(t) \quad (29)$$

2.4. Αποτύπωμα συσκευών (element stamps) στο σύστημα εξισώσεων

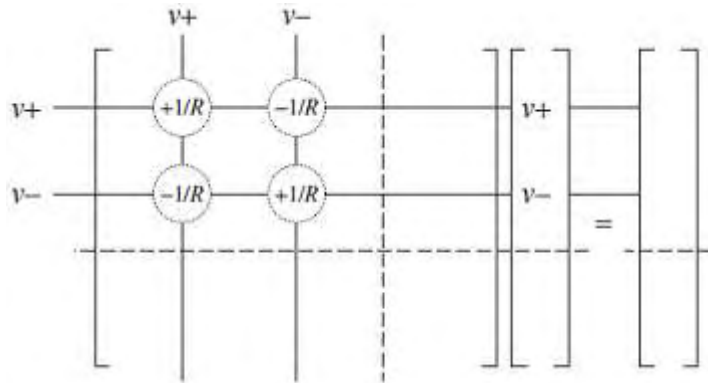
Στην πράξη σε ένα προσομοιωτή δεν χρησιμοποιούμε τις παραπάνω εξισώσεις για την κατασκευή του συστήματος. Αντιθέτως, μπορεί να κατασκευαστεί, σε γραμμικό χρόνο, καθώς το αρχείο που περιέχει την περιγραφή του κυκλώματος, διαβάζεται.

Η συνεισφορά της κάθε συσκευής στο σύστημα των εξισώσεων λέγεται αποτύπωμα συσκευής (element stamp). Η διαδικασία ξεκινάει αρχικοποιώντας το αριστερό και το δεξί σύστημα εξισώσεων σε 0. Τότε, το αποτύπωμα της συσκευής προστίθεται στο αριστερό και στο δεξί μέρος καθώς το αρχείο εισόδου διαβάζεται. Όταν όλα τα στοιχεία του κυκλώματος έχουν διαβαστεί, ο πίνακας με τις εξισώσεις μπορεί να λυθεί.

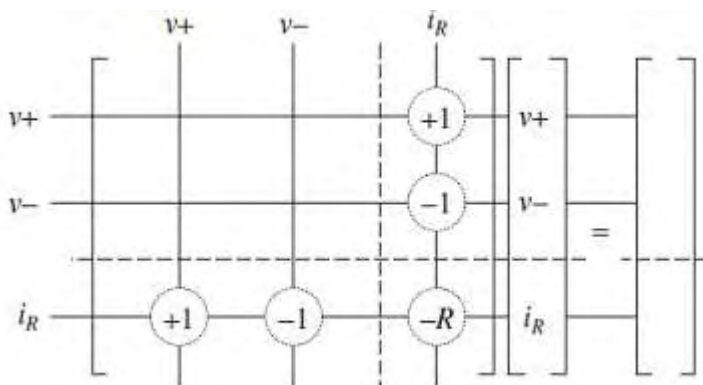
Εικόνα 2.10: Αντίσταση



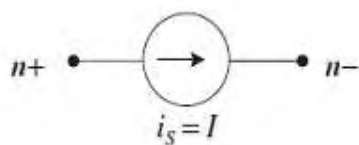
Εικόνα 2.11: Αποτύπωμα αντίστασης στην ομάδα 1



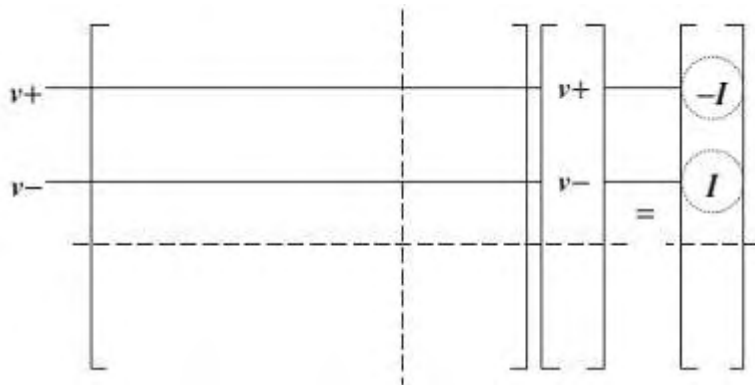
Εικόνα 2.12: Αποτύπωμα αντίστασης στην ομάδα 2



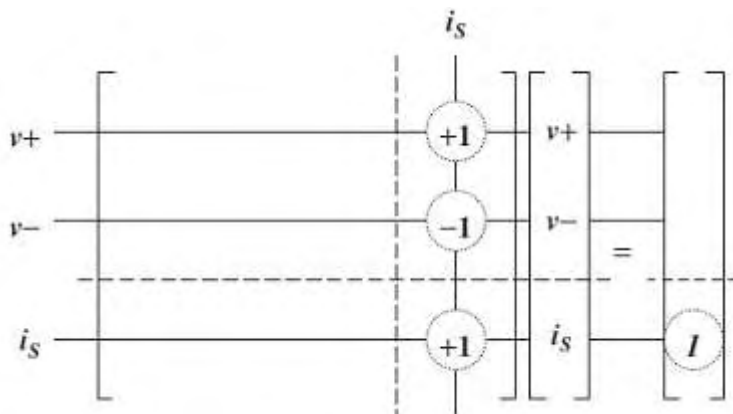
Εικόνα 2.13: Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος



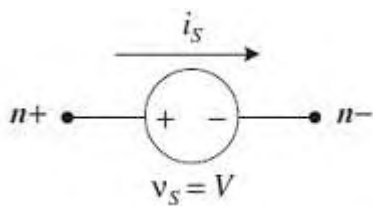
Εικόνα 2.14: Αποτύπωμα Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος στην ομάδα 1



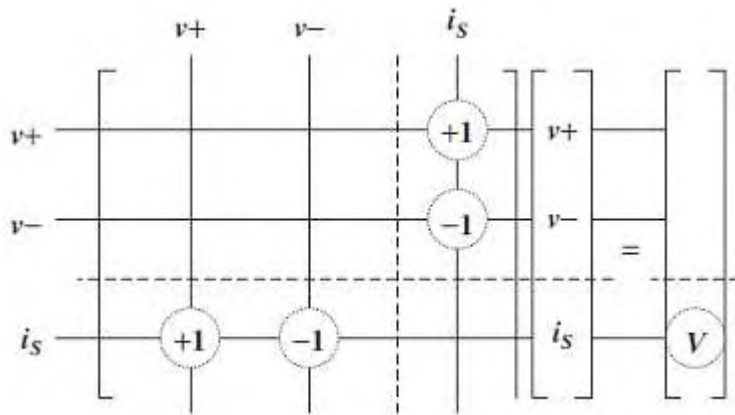
Εικόνα 2.15: Αποτύπωμα Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος στην ομάδα 2



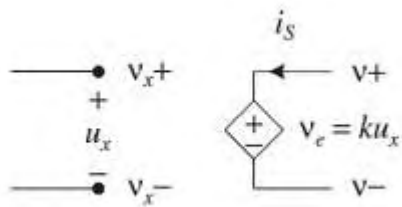
Εικόνα 2.16: Ανεξάρτητη πηγή τάσης



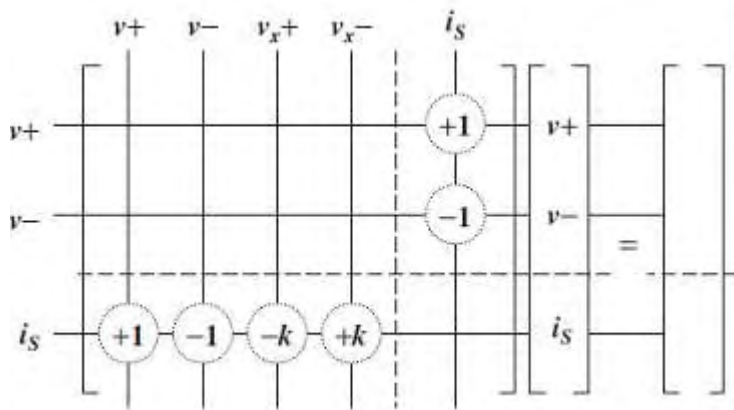
Εικόνα 2.17: Αποτύπωμα ανεξάρτητη πηγή τάσης



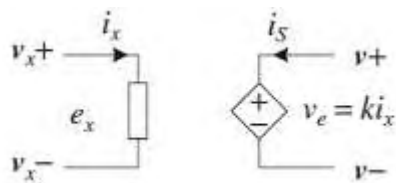
Εικόνα 2.18: Εξαρτημένης πηγή τάσης από τάση



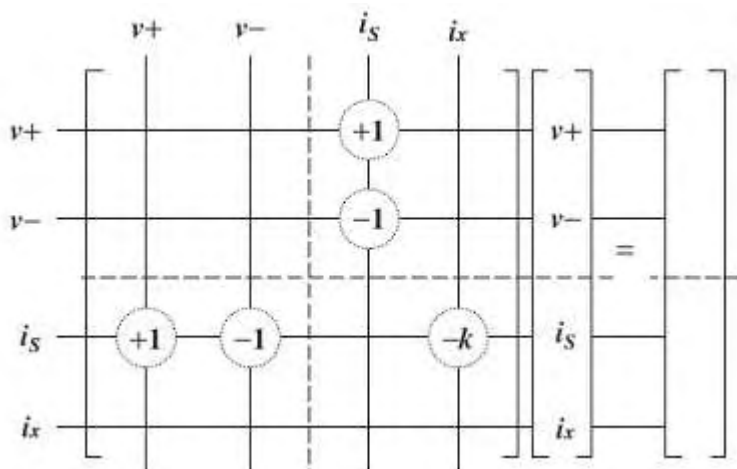
Εικόνα 2.19: Αποτύπωμα εξαρτημένης πηγή τάσης από τάση



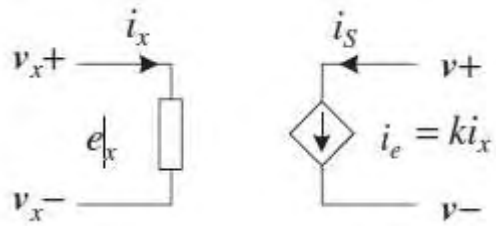
Εικόνα 2.20: Εξαρτημένη πηγή τάσης από ρεύμα



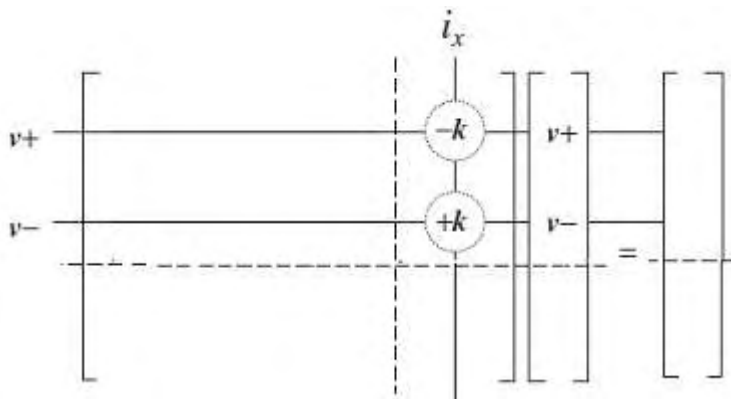
Εικόνα 2.21: Αποτύπωμα εξαρτημένης πηγή τάσης από ρεύμα



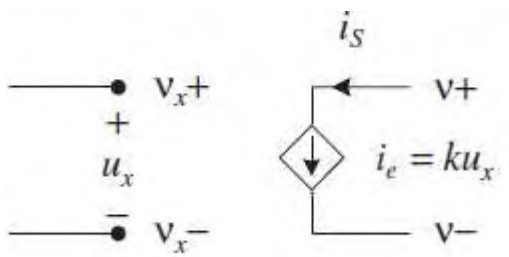
Εικόνα 2.22: Εξαρτημένη πηγή ρεύματος από ρεύμα



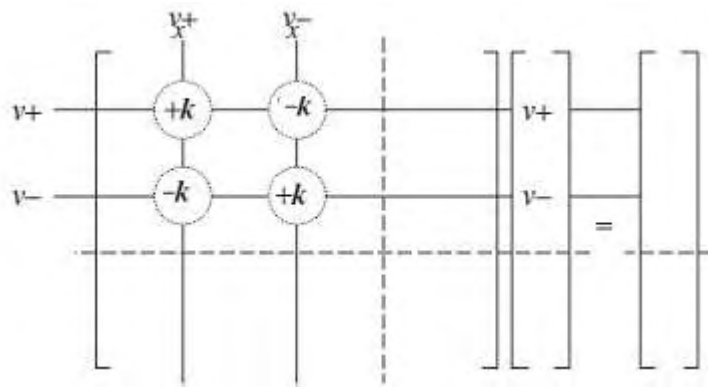
Εικόνα 2.23: Αποτύπωμα εξαρτημένης πηγής ρεύματος από ρεύμα



Εικόνα 2.24: Εξαρτημένη πηγή ρεύματος από τάση



Εικόνα 2.25: Αποτύπωμα εξαρτημένης πηγής ρεύματος από τάση



Κεφάλαιο 3

Επίλυση μη γραμμικών ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Με την παρουσία των μη γραμμικών ηλεκτρικών συσκευών, οι εξισώσεις του δικτύου μπορούν να διαμορφωθούν ως ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων. Η επίλυση τέτοιων συστημάτων στην πραγματικότητα, είναι πολύ πιο δύσκολη από ό,τι τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων. Η πρακτική προσέγγιση για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων είναι η συνεχής γραμμοποίηση και η λύση του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος. Σε γενικές γραμμές, τα μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων μπορούν να έχουν μια μοναδική λύση, καμία λύση, πολλαπλές λύσεις, ή άπειρες λύσεις. Με τις πρακτικές μεθόδους για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων μπορούμε μόνο να ελπίζουμε για την παροχή μίας κατά προσέγγιση λύσης, αν όχι καμίας λύσης.

3.1 Μη γραμμικές συσκευές

Οι μη γραμμικές συσκευές έχουν τρεις μορφές:

- 1) Μη γραμμικές αντιστάσεις, $v = f(i)$ και $i = f(v)$. Όπου i είναι το ρεύμα και όπου v η τάση της συσκευής.
- 2) Μη γραμμικοί πυκνωτές, $C(v)$ και μη γραμμικά πηνία, $L(i)$, όπου v είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή και i το ρεύμα στο πηνίο.
- 3) Μη γραμμικές ελεγχόμενες πηγές, με εξίσωση $i = f(x)$ ή $v = f(x)$. Σε γενικές γραμμές, το x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών στο σύστημα MNA.

Η κάλυψη των μη γραμμικών πυκνωτών και πηνίων δεν θα καλυφθεί. Έτσι, θα μελετηθεί η κατασκευή μη γραμμικών εξισώσεων χωρείς τα δυναμικά στοιχεία. Οι εξισώσεις θα είναι μόνο αλγεβρικές και όχι διαφορικές.

Για τις μη γραμμικές ελεγχόμενες πηγές, υποθέτονται πάντα τα ακόλουθα. Δοθέντος, της εξίσωσης της συσκευής με μορφή $y = f(x)$, όπου x είναι η μεταβλητή του MNA συστήματος, και το y είναι και αυτό μία μεταβλητή του, (το οποίο μπορεί μερικές φορές να συμβαίνει) η $f(\cdot)$ δεν εξαρτάται από το y μέσω του x . **Με άλλα λόγια, η $f(x)$ δεν εξαρτάται από το στοιχείο του διανύσματος x που αντιστοιχεί στο y . Αυτό απαιτείται προκειμένου να εξασφαλίζει ότι το y στην εξίσωση της συσκευής μπορεί πάντα να αποτιμάται, δεδομένης της τιμής του x , από την αποτίμηση της συνάρτησης $f(\cdot)$.**

Συχνά οι μη γραμμικές ελεγχόμενες πηγές μπορούν να αντικατασταθούν με υπο-κυκλώματα που αποτελούνται από μια μη γραμμική αντίσταση και από γραμμικά ελεγχόμενες πηγές. Ωστόσο, σύνθετες ελεγχόμενες πηγές δεν μπορούν απλοποιηθούν με αυτό τον τρόπο. Από την άλλη πλευρά, είναι πάντα δυνατή η αντικατάσταση μιας μη γραμμικής αντίστασης από μια μη γραμμική ελεγχόμενη πηγή. Έτσι, σε όλες τις περιπτώσεις, μπορεί κανείς να διατυπώσει τις εξισώσεις του δικτύου κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα μη γραμμικά στοιχεία να είναι μόνο μη γραμμικές ελεγχόμενες πηγές. Ως εκ τούτου, σε γενικές γραμμές, και αυτή είναι η προσέγγιση που θα υιοθετηθεί, αρκεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν μόνο δύο είδη μη γραμμικών συσκευών με αντίσταση (resistive):

- 1) Εκείνες οι συσκευές των οποίων το ρεύμα μπορεί να γραφτεί ως ρητή συνάρτηση των άλλων μεταβλητών, με εξίσωση $i = f(x)$, όπου x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών στο σύστημα MNA. Αυτές οι συσκευές θα αναφέρονται, ελεγχόμενες πηγές ρεύματος (*controlled current sources, CCS*).
- 2) Εκείνες οι συσκευές των οποίων το ρεύμα μπορεί να γραφτεί ως ρητή συνάρτηση των άλλων μεταβλητών, με εξίσωση $v = f(x)$, όπου x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών στο σύστημα MNA. Αυτές οι συσκευές θα αναφέρονται, ελεγχόμενες πηγές τάσης (*controlled voltage sources, CVS*).

3.2. Σχηματισμός μη γραμμικών εξισώσεων με συσκευές δύο ακροδεκτών

Τώρα θα ξαναδημιουργήσουμε το MNA σύστημα εισάγοντας στις εξισώσεις την μη γραμμική, με αντίσταση (resistive) συσκευή.

Ο KCL πάλι γράφεται:

$$A_1 * i_1 + A_2 * i_2 = 0 \quad (30)$$

Και ο KVL:

$$u_1 = A_1^T * v \quad (31)$$

$$u_2 = A_2^T * v \quad (32)$$

Στην γραμμική περίπτωση, υπενθυμίζεται ότι τα στοιχεία στην ομάδα 1 ήταν τέτοια ώστε τα ρεύμα τους μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει άλλων μεταβλητών. Έτσι, θα μπορούσαν μόνο να είναι (γραμμικές) αντιστάσεις, ανεξάρτητες πηγές ρεύματος, και ελεγχόμενες από ρεύμα ή τάση πηγές ρεύματος. Σε αυτόν τον κατάλογο, προσθέτουμε τώρα μη γραμμικές ελεγχόμενες πηγές ρεύματος $i = f(v, i_2)$. Ως αποτέλεσμα, η εξισώσεις για τα στοιχεία της ομάδας 1 μπορούν να εκφραστούν ως ακολούθως:

$$i_1 + Z_{12} * i_2 - Y_{11} * u_1 - Y_{12} * u_2 - a(v, i_2) = s_1 \quad (33)$$

όπου $a(v, i_2)$ είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων του MNA συστήματος, στο οποίο το $a_j(v, i_2)$ είναι είτε 0 ή η μη γραμμική συνάρτηση της αντίστοιχης μη γραμμικής ελεγχόμενης πηγής ρεύματος. Γράφοντας τον KCL και αντικαθιστώντας σε αυτόν το i_1 από την γενική εξίσωση των στοιχείων της ομάδας 1 μαζί με τον KVL, το πάνω μέρος του συστήματος είναι:

$$(A_1 Y_{11} A_1^T + A_1 Y_{12} A_1^T) * v + (A_2 - A_1 Z_{12}) * i_2 + A_1 * a(v, i_2) = -A_1 s_1 \quad (34)$$

Όσο για τις μη γραμμικές ελεγχόμενες πηγές τάσης, ανήκουν στην ομάδα 2, και η γενική μορφή των εξισώσεων είναι:

$$\beta(v, i_2) + Z_{22} * i_2 - Y_{21} * u_1 - Y_{22} * u_2 = s_2 \quad (35)$$

όπου $\beta(v, i_2)$ είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων του MNA συστήματος, στο οποίο το $\beta_j(v, i_2)$ είναι είτε 0 ή η μη γραμμική συνάρτηση της αντίστοιχης μη γραμμικής ελεγχόμενης πηγής τάσης. Σε γενικές γραμμές, για να επιτραπεί επίσης η συμπερίληψη των μη γραμμικών ελεγχόμενων πηγών ρεύματος στην ομάδα 2, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\beta(v, i_2) + Z_{22} * i_2 - Y_{21} * u_1 - Y_{22} * u_2 - \gamma(v, i_2) = s_2 \quad (36)$$

όπου $\gamma(v, i_2)$ είναι ένα διάνυσμα συναρτήσεων του MNA συστήματος, στο οποίο το $\gamma_j(v, i_2)$ είναι είτε 0 ή η μη γραμμική συνάρτηση της αντίστοιχης μη γραμμικής ελεγχόμενης πηγής ρεύματος. Έτσι το κάτω μέρος του συστήματος γίνεται:

$$-(Y_{21} A_1^T + Y_{22} A_2^T) * v + Z_{22} * i_2 + \beta(v, i_2) - \gamma(v, i_2) = s_2 \quad (37)$$

Και το συνολικό σύστημα χωρίς τις δυναμικές συσκευές είναι:

$$\begin{bmatrix} (A_1 Y_{11} A_1^T + A_1 Y_{12} A_1^T) & A_2 - A_1 Z_{12} \\ -(Y_{21} A_1^T + Y_{22} A_2^T) A_2^T & Z_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 * a(v, i_2) \\ \beta(v, i_2) - \gamma(v, i_2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -A_1 s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Αν θέσουμε $x = \begin{bmatrix} v \\ i_2 \end{bmatrix}$, $s = \begin{bmatrix} -A_1 s_1 \\ s_1 \end{bmatrix}$ και το σύστημα που πολλαπλασιάζεται με το x , ίσον με G , τότε έχουμε:

$$G * x + \begin{bmatrix} A_1 * \alpha(v, i_2) \\ \beta(v, i_2) - \gamma(v, i_2) \end{bmatrix} = s \quad (39)$$

Στη συνέχεια, επειδή ο A_1 είναι ο πίνακας πρόσπτωσης, παρατηρείται ότι η κάθε καταχώρηση του μη γραμμικού διανύσματος συναρτήσεων $\begin{bmatrix} A_1 * \alpha(v, i_2) \\ \beta(v, i_2) - \gamma(v, i_2) \end{bmatrix}$ είναι είτε 0, ή όσον αφορά την ομάδα 2 η μία μη γραμμική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μία ελεγχόμενη πηγή τάσης ή ρεύματος και όσον αφορά την ομάδα 1 ένας γραμμικός συνδυασμός μη γραμμικών συναρτήσεων.

Στη συνέχεια, για την περαιτέρω απλοποίηση, έστω $g(x)$ ένα διάνυσμα του οποίου κάθε είσοδος $g_i(x)$ είναι η μη γραμμική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μία μη γραμμική συσκευή. Σημείωση, ο αριθμός των καταχωρίσεων στο $g(x)$ είναι ίσος με το συνολικό αριθμό των μη γραμμικών στοιχείων στο δίκτυο. Στη συνέχεια, το σύστημα MNA μπορεί να εκφραστεί ως:

$$G * x + H * g(x) = s \quad (40)$$

όπου το H είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι είτε 0 ή 1. Τέλος ορίζουμε:

$$f(x) = G * x + H * g(x) - s \quad (41)$$

Και

$$f(x) = 0 \quad (42)$$

το μη γραμμικό σύστημα προς επίλυση.

3.2.1. Σχηματισμός μη γραμμικών εξισώσεων με συσκευές πολλών ακροδεκτών

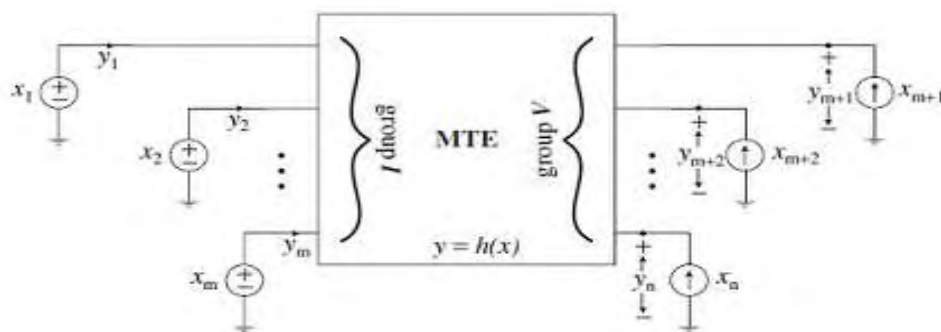
Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι οι ακροδέκτες χωρίζονται σε δύο ομάδες, την ομάδα I και την ομάδα V , έτσι ώστε, αν το διάνυσμα χαρακτηρίζεται από τα σήματα τάσης των ακροδεκτών της ομάδας I και τα σήματα ρεύματος των ακροδεκτών της ομάδας V , και το διάνυσμα Y αποτελείται

από σήματα ρεύματος των ακροδεκτών της ομάδας I και τα σήματα τάσης των ακροδεκτών της ομάδας V , τότε τα χαρακτηριστικά της συσκευής με πολλούς ακροδέκτες μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή $y = h(x)$, όπου $h()$ είναι γενικές, πιθανόν μη γραμμικές, διανυσματικές συναρτήσεις. (Εικόνα 3.1) Γενικά, οι πιο πολλές ημιαγωγές συσκευές, μπορούν να μοντελοποιηθούν έτσι ώστε όλοι οι ακροδέκτες να ανήκουν στην ομάδα I , και χαρακτηρίζονται από την χρήση του $i = h(v)$.

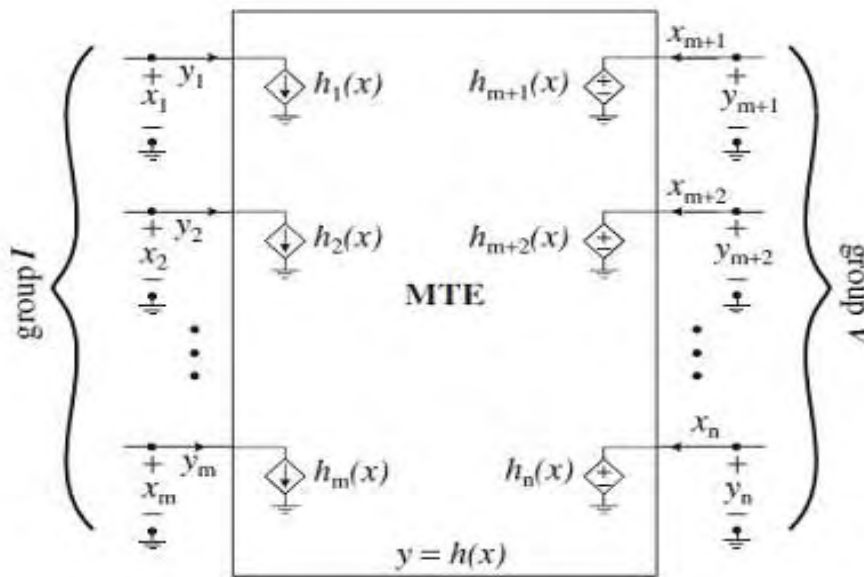
Δοθέντος της παραπάνω υπόθεσης, είναι φανερό ότι κάθε συσκευή με πολλούς ακροδέκτες μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύστημα που αποτελείται εσωτερικά από συσκευές δύο τερματικών. Η κάθε συσκευή μπορεί να είναι μία, πιθανώς μη γραμμική, ελεγχόμενη πηγή ρεύματος η τάσης με τον ένα ακροδέκτη στην γείωση. (Εικόνα 3.1) Συνεπώς, μία συσκευή με πολλούς ακροδέκτες μπορεί πλέον να πάρει την θέση της στο σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων. Επίσης να σημειωθεί, ότι κάθε ελεγχόμενη πηγή ρεύματος η τάσης μπορεί να κατηγοριοποιηθεί στην ομάδα 1 ή 2 στο σύστημα εξισώσεων:

$$G * x + H * g(x) = s \tag{43}$$

Εικόνα 3.1: Γενικό μοντέλο συσκευής με πολλούς ακροδέκτες



Εικόνα 3.2: Ισοδύναμο κύκλωμα για συσκευή με πολλούς ακροδέκτες



3.3. Προετοιμασία του συστήματος για DC ανάλυση

Στην γενικότερη περίπτωση, αν το δίκτυο έχει και δυναμικά στοιχεία θα είναι της μορφής:

$$G * x(t) + H * g(x(t)) + D(x) * x'(t) = s(t) \quad (44)$$

όπου $D(x)$ είναι ένας πίνακας που αποτελείται από, πιθανόν μη γραμμικούς, πυκνωτές και πηνία.

Για να προετοιμαστεί το παραπάνω σύστημα για DC ανάλυση, θα πρέπει να αφαιρεθούν όλες οι δυναμικές συσκευές, καθότι δεν υπάρχει χρονική μεταβολή. Αυτό είναι εφικτό, θεωρώντας κατά την δημιουργία του συστήματος, ότι ο πυκνωτής αποτελεί ανοιχτοκύκλωμα, οπότε και δεν λαμβάνεται υπόψη στον σχηματισμό εξισώσεων και το πηνίο αποτελεί βραχυκύκλωμα, όπου και μοντελοποιείται ως μία πηγή τάσης με μηδενική διάφορα τάσης. Μετά τις αλλαγές το προκύπτον σύστημα προς κατασκευή είναι:

$$G * x(t) + H * g(x(t)) = s \quad (45)$$

Ωστόσο, η παραπάνω προσέγγιση μπορεί να είναι προβληματική, γιατί κάποιοι κόμβοι μπορεί να μείνουν απομονωμένοι και μπορεί να δημιουργηθεί πρόβλημα με την κατασκευή του Ιακωβιανού πίνακα (θα εξηγηθεί αργότερα). Για να αντιμετωπιστεί αυτή η κατάσταση θα πρέπει να

συνδεθεί από κάθε κόμβο στην γείωση μία μεγάλη αντίσταση, της τάξεως 100 MΩ. Με αυτή την αντιμετώπιση το σύστημα είναι τυπικά επιλύσιμο με μικρά η καθόλου αριθμητικά προβλήματα. Επιπρόσθετα, με την εισαγωγή των αντιστάσεων, δίνεται μεγαλύτερη δόση ρεαλισμού στο κύκλωμα, μιας και με αυτόν τον τρόπο μοντελοποιούνται κάποιες διαρροές ρεύματος στο κύκλωμα.

3.4. Μέθοδοι επίλυσης

3.4.1. Επαναληπτικές μέθοδοι και σύγκλιση

Πρακτικές μέθοδοι για την επίλυση της $f(x) = 0$ μπορούν να παρέχουν προσεγγιστική τιμή της λύσης. Δεν μπορούν να δώσουν απάντηση σε ζητήματα που αφορούν την ύπαρξη ή την μοναδικότητα των λύσεων. Μια προσεγγιστική λύση είτε βρίσκεται εντός του προβλεπόμενου χρόνου, ή όχι. Πρακτικές προσεγγίσεις τυπικά αποτελούνται από μία επαναληπτική μέθοδος που παράγει μια αλληλουχία $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ υποψήφια λύσεων. Η επαναληπτική μέθοδος αρχίζει με μια αρχική υποψήφια λύση $x^{(0)}$ και σταματά όταν η ακολουθία συγκλίνει σε μια λύση, η οποία συμβολίζουμε ως x^* .

Ένα σημαντικό ερώτημα, είναι πόσο γρήγορα μία ακολουθία συγκλίνει; Αυτό το ερώτημα είναι σημαντικό, γιατί ψάχνουμε επαναληπτικές μεθόδους που η ακολουθία λύσεων έχει την ιδιότητα να συγκλίνει γρήγορα.

Έστω η ακολουθία $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο x^* , με $x^k \neq x^*$ για όλα τα k . Λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει γραμμικά (q-linearly) στο x^* , αν υπάρχει ένας αριθμός $c \in (0,1)$ τέτοιος ώστε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|} = c \quad (46)$$

Και το c λέγεται ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος (asymptotic error constant). Αν το c είναι 0 τότε η ακολουθία συγκλίνει υπερ-γραμμικά (q-superlinearly). Ένας εναλλακτικός ορισμός της γραμμικής σύγκλισης είναι να πούμε ότι υπάρχει $\sigma \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \sigma \|x^{(k)} - x^*\| \quad (47)$$

για όλα τα k επαρκώς μεγάλα, με το σ να λέγεται παράγοντας q (q factor).

Αν η ακολουθία συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει ούτε γραμμικά ούτε υπερ-γραμμικά, τότε λέγεται ότι συγκλίνει υπο-γραμμικά (q-sublinearly). Όταν η σύγκλιση είναι υπερ-γραμμική, τότε υπάρχει ακόμα ένας διαχωρισμός για τους διαφορετικούς ρυθμούς σύγκλισης, που λέγεται **τάξη σύγκλισης**.

Λέμε, ότι η σειρά συγκλίνει υπεργραμμικά με τάξη α , αν υπάρχει $\alpha > 1$ και $c > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^\alpha} = c \quad (48)$$

ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει $\sigma > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \sigma \|x^{(k)} - x^*\|^\alpha \quad (49)$$

για όλα τα k επαρκώς μεγάλα.

Αυτό που ισχύει είναι, ότι η ακολουθία με μεγαλύτερη τάξη σύγκλισης, συγκλίνει γρηγορότερα.

- 1) Η ασυμπτωτικές σταθερές, c ή σ , επηρεάζουν την ταχύτητα της σύγκλισης, αλλά δεν είναι τόσο σημαντικό όσο η τάξη.
- 2) Μία υπερ-γραμμικά ακολουθία είναι επίσης γραμμικά συγκλίνουσα με για κάθε $\sigma \in (0,1)$
- 3) Κατά τη σύγκριση των επαναληπτικών μεθόδων, κάποιος πρέπει να μελετήσει όχι μόνο τη τάξη της σύγκλισης, αλλά και το κόστος της κάθε επανάληψης.
- 4) Με μια μέθοδο q-τετραγωνική, ο αριθμός των σωστών σημαντικών ψηφίων διπλασιάζεται περίπου με κάθε επανάληψη.

3.4.2. Μέθοδος του Νεύτωνα (Newton method)

Η μέθοδος Νεύτωνα, είναι μια επαναληπτική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος:

$$f(x) = 0 \text{ με } x \in R^n \text{ και } f : R^n \rightarrow R^n \quad (50)$$

Η περιγραφή είναι πολύ απλή :

Είσοδος: συνάρτηση $f(\cdot)$ και αρχική μαντεψιά x

Έξοδος: μία τιμή του χ για την οποία $f(\chi) \cong 0$
 όσο (όχι($f(\chi) \cong 0$)) κάνε

$$\text{Λύσε} : J(\chi) * \delta = -f(\chi)$$

$$x = x + \delta$$

όπου $J(\chi)$ είναι ο Ιακοβιανός (Jacobian) πίνακας της $f(\cdot)$ υπολογισμένος στο χ

$$J(\chi)_{ij} \triangleq \frac{df_i}{dx_j} \tag{51}$$

Η θεωρία της σύγκλισης για τη μέθοδο του Νεύτωνα είναι τοπική, δηλαδή, εξαρτάται από το αν η αρχική υποψήφια λύση $\chi^{(0)}$ είναι αρκετά κοντά στην πραγματική λύση χ^* . Συγκεκριμένα, τρεις είναι οι προϋποθέσεις που απαιτούνται, οι οποίες είναι επαρκής για τη σύγκλιση.

Πρώτον, η συνάρτηση $f(\chi)$ πρέπει να έχει λύση χ^* , και η $f(\chi)$ πρέπει να είναι συνεχώς διαφορίσιμη κοντά στο χ^* .

Δεύτερον, ο Ιακοβιανός (Jacobian) $J(\chi)$ πίνακας πρέπει να είναι Lipschitz συνεχής (*Lipschitz continuous*) κοντά στο χ^* , δηλ., πρέπει να υπάρχει ένα $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, y αρκετά κοντά χ^* να ισχύει:

$$\|J(x) - J(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \tag{52}$$

Το γ ονομάζεται σταθερά Lipschitz (Lipschitz constant).

Μία επαρκής συνθήκη για να είναι ο Ιακοβιανός πίνακας Lipschitz συνεχής, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι, ότι όλες οι δεύτερες παράγωγοι της f πρέπει να είναι συνεχής και φραγμένες.

Τρίτον, ο Ιακοβιανός πίνακας που αποτιμάται στην πραγματική συνθήκη χ^* πρέπει να είναι αντιστρέψιμος.

Με δεδομένες αυτές τις τρεις προϋποθέσεις, αν το $\chi^{(0)}$ είναι αρκετά κοντά στο χ^* , μπορεί να αποδειχθεί ότι η $J(\chi^k)$ είναι αντιστρέψιμος, για κάθε K , και ο αλγόριθμος συγκλίνει υπεργραμμικά και τετραγωνικά στο χ^* .

3.4.3. Εφαρμογή της Μεθόδου του Νεύτωνα στην μία διάσταση

Δεδομένου ότι εργαζόμαστε σε μία διάσταση, θα απλοποιηθεί ο συμβολισμός και οι διαδοχικές υποψήφιας λύσεις θα σημειώνονται ως: $\chi_0 \chi_1 \chi_2$ κλπ. Έστω χ_k είναι η τρέχουσα υποψήφια λύση, και ας υποθέσουμε ότι το χ_k είναι αρκετά κοντά στην πραγματική λύση χ^* . Σε μία μικρή γειτονιά γύρω από το χ_k που περιλαμβάνει χ^* μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με ένα τοπικό γραμμικοποιημένο μοντέλο. Για να κατασκευαστεί θα χρησιμοποιηθεί η σειρά Taylor για την συνάρτηση $f(x)$ γύρω από το χ_k .

$$f(x) = f(\chi_k) + (x - \chi_k) * f'(\chi_k) + \frac{(x - \chi_k)^2}{2} * f''(\xi) \quad (53)$$

Για κάποιο ξ ανάμεσα στο χ και στο χ_k .

Σε μία μικρή γύρω από το χ_k ο τρίτος όρος γίνεται πολύ μικρός, εξαιτίας του τετραγώνου, και μπορεί να παραλειφθεί.

$$M_k(x) = f(\chi_k) + (x - \chi_k) * f'(\chi_k) \quad (54)$$

Στο βαθμό που αυτό το μοντέλο, είναι μία καλή προσέγγιση της $f(x)$, μπορεί να λυθεί πλέον η $M_k(x) = 0$, αντί για $f(x) = 0$. Θέτοντας $M_k(x) = 0$, συνεπάγεται:

$$x = \chi_k - \frac{f(\chi_k)}{f'(\chi_k)} \quad (55)$$

Υποθέτοντας ότι $f'(\chi_k) \neq 0$. Δεν αναμένεται αυτή η τιμή του x να είναι η πραγματική λύση του χ^* , επειδή είναι ένα προσεγγιστικό μοντέλο. Ωστόσο, αναμένεται να είναι μία καλύτερη υποψήφια λύση και έτσι η μέθοδος Newton περιγράφεται από την σχέση :

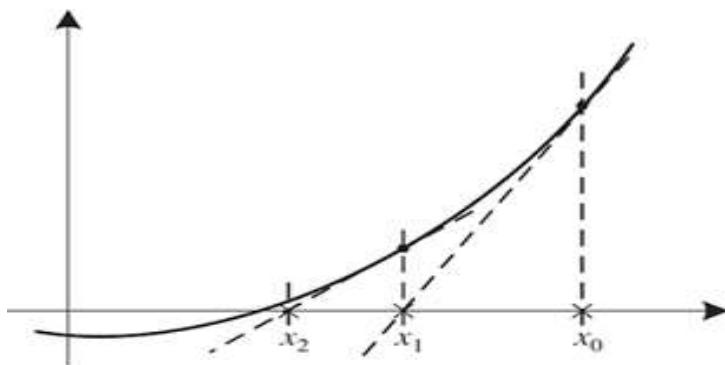
$$x_{k+1} = \chi_k - \frac{f(\chi_k)}{f'(\chi_k)} \text{ με } f'(\chi_k) \neq 0 \quad (56)$$

Με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της παραπάνω εξίσωσης (Εικόνα 3.3), ως διόρθωση της υποψήφιας λύσης, αναμένεται η λύση να κινείται όλο και πιο κοντά στην πραγματική χ^* .

Θεώρημα: Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα D που περιέχει την λύση x^* . Έστω η f' είναι Lipschitz συνεχής στο D , και έστω ότι υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $|f'(x)| \geq \rho$ για κάθε x που ανήκει στο D . Τότε, αν x_0 είναι επαρκώς κοντά στο x^* , συνεπάγεται ότι $f'(x^{(k)}) \neq 0$, για κάθε k και η ακολουθία $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ υπάρχει και συγκλίνει τετραγωνικά στην λύση x^* .

Ακόμα και αν $f'(x^*) = 0$, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει, αλλά μόνο γραμμικά.

Εικόνα 3.3.: Γραφική απεικόνιση της μεθόδου του Νεύτωνα.



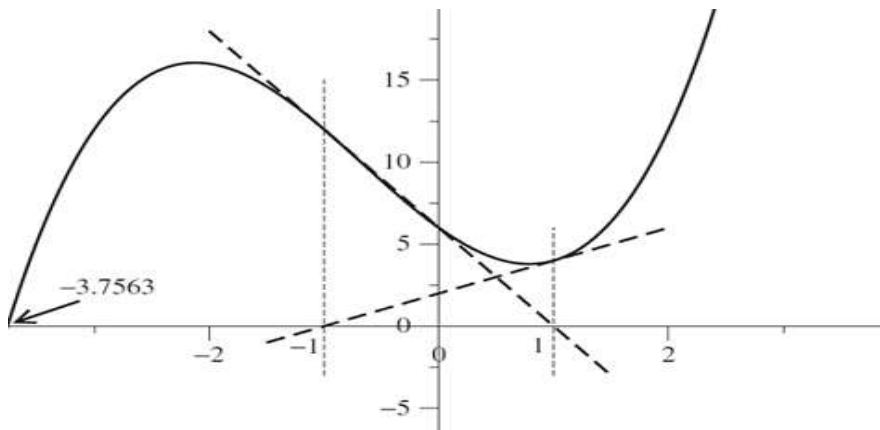
3.4.3.1 Προβλήματα κατά την εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα

Όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα ένα πρόβλημα που μπορεί να προκύψει κατά την εφαρμογή της μεθόδου του Newton, είναι η χωρίς νόημα διορθώσεις της υποψήφιας λύσης. Η πραγματική ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, είναι το -3.7563 , μία εκτίμηση της υποψήφιας λύσης είναι το $x = -1$, η οποία είναι και μακριά από την πραγματική. Η εφαπτομένη στο σημείο αυτό θα μας οδηγήσει στην επόμενη λύση $x = 1$ και οι υπολογισμοί είναι αρκετά απλοί, οπότε δεν αναμένεται λάθος λόγω στρογγυλοποίησης. Στο επόμενο βήμα η εφαπτομένη στο σημείο αυτό θα μας επιστρέψει πάλι στο προηγούμενο. Αυτό μπορεί να συνεχίζεται επ' αόριστον με αποτέλεσμα να μην υπάρξει σύγκλιση στην πραγματική λύση. Σε ένα καλύτερο σενάριο η κάθε λύση θα μπορούσε να παράγει ένα μικρό αριθμητικό σφάλμα και μετά από πολλές επαναλήψεις η λύση να απομακρυνθεί από αυτήν την **ταλάντωση**.

Αυτό το πρόβλημα προκύπτει κυρίως κατά την διάρκεια της συνεχούς ρεύματος ανάλυσης (DC analysis), γιατί δεν είναι πάντα εφικτό η πρώτη υποψήφια λύση να είναι αρκετά κοντά στην πραγματική. Από την άλλη μεριά δεν συμβαίνει τόσο συχνά στην μεταβατική ανάλυση (Transient

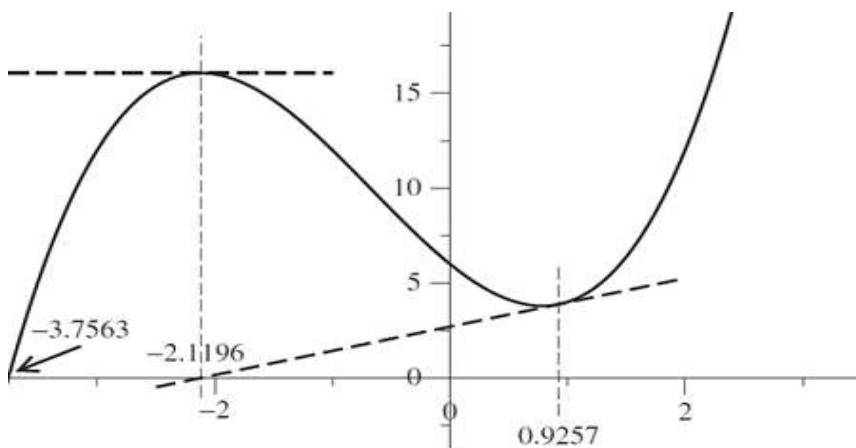
analysis) γιατί με ένα αρκετά μικρό χρονικό βήμα, υπάρχει μια καλή αρχική συνθήκη, η οποία είναι η λύση της προηγούμενης χρονικής στιγμής. Βέβαια αν οι αλλαγές των διαφορών μεταβλητών του κυκλώματος είναι πολύ απότομες, όπως στα ψηφιακά κυκλώματα, τότε μπορεί να προκύψει το ίδιο πρόβλημα.

Εικόνα 3.4: Ταλάντωση στην μέθοδο του Νεύτωνα



Από την άλλη μεριά αν τύχαινε η υποψήφια λύση να φτάσει το 0.9257 , όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, τότε είναι φανερό ότι θα προέκυπτε ένα ακόμα πρόβλημα . Σε αυτό το σημείο , η κλίση της καμπύλης είναι άπειρο ή μία πολύ μεγάλη τιμή. Σε κάθε περίπτωση η καινούργια υποψήφια λύση θα βρισκόταν πλέον πολύ μακριά από την πραγματική και δεν είναι σίγουρο αν θα μπορούσε πλέον να ξανά συγκλίνει στην πραγματική λύση.

Εικόνα 3.5.: Απόκλιση στην μέθοδο του Νεύτωνα



3.4.4. Εφαρμογή της Μεθόδου του Νεύτωνα (Newton) σε πολλές διαστάσεις

Σε πολλές διαστάσεις, μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Νεύτωνα ξεκινώντας πάλι από την σειρά Taylor. Σε μια μικρή γειτονιά γύρω από x_k που περιλαμβάνει x^* , μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ από ένα τοπικό γραμμικοποιημένο μοντέλο. **Η Μέθοδος του Νεύτωνα γρησιμοποιεί το εφαπτομενικό υπερεπίπεδο στην επιφάνεια $y = f(x)$ στο $x^{(k)}$, σαν ένα τοπικό γραμμικοποιημένο μοντέλο γύρω από το $x^{(k)}$.**

Για να κατασκευαστεί ένα τοπικό γραμμικοποιημένο μοντέλο, έστω μια σειρά Taylor της $f(x)$ γύρω από το x_k , για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \left. \frac{df_i}{dx_1} \right|_{x^{(k)}} * (x_1 - x_1^{(k)}) + \left. \frac{df_i}{dx_2} \right|_{x^{(k)}} * (x_2 - x_2^{(k)}) + \dots + \left. \frac{df_i}{dx_n} \right|_{x^{(k)}} * (x_n - x_n^{(k)}) + \text{υψηλότερης τάξης όροι που περιέχουν } (x_i - x_i^{(k)})^m \quad (57)$$

όπου $m \geq 2$.

Σε μια μικρή γειτονιά γύρω από $x^{(k)}$, θα περιμέναμε οι υψηλότερης τάξης όροι να είναι μικροί και, ως εκ τούτου, το τοπικό γραμμικοποιημένο μοντέλο είναι:

$$M_k(x) = f(x^{(k)}) + \begin{bmatrix} \left. \frac{df_1}{dx_1} \right|_{x^{(k)}} & \left. \frac{df_1}{dx_2} \right|_{x^{(k)}} & \dots & \left. \frac{df_1}{dx_n} \right|_{x^{(k)}} \\ \left. \frac{df_2}{dx_1} \right|_{x^{(k)}} & \left. \frac{df_2}{dx_2} \right|_{x^{(k)}} & \dots & \left. \frac{df_2}{dx_n} \right|_{x^{(k)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{df_n}{dx_1} \right|_{x^{(k)}} & \left. \frac{df_n}{dx_2} \right|_{x^{(k)}} & \dots & \left. \frac{df_n}{dx_n} \right|_{x^{(k)}} \end{bmatrix} * (x - x^{(k)}) \quad (58)$$

Η

$$M_k(x) = J(x^{(k)}) * (x - x^{(k)}) + f(x^{(k)}) \quad (59)$$

Θέτοντας $M_k(x) = 0$ έχουμε:

$$x = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} * f(x^{(k)}) \quad (60)$$

Δεν αναμένεται ότι αυτή η τιμή του x είναι ίση με το πραγματική λύση του x^* , επειδή το μοντέλο είναι φυσικά μία προσέγγιση.

Ωστόσο, ελπίζουμε ότι αυτό είναι μια καλύτερη υποψήφια λύση από εκείνη που είχαμε στο παρελθόν, και αυτό οδηγεί σε:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} * f(x^{(k)}) \quad (61)$$

Με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της παραπάνω “διόρθωσης” στην υποψήφια λύση, ελπίζουμε να προχωρήσουμε επαναληπτικά πιο κοντά στην αληθινή, x^* , λύση.

Θεώρημα : Εστώ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό κυρτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει την λύση x^* . Έστω ότι η $J(x)$ είναι Lipschitz συνεχής στο D , και έστω $J(x^*)$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε, αν x_0 είναι επαρκώς κοντά στο x^* , συνεπάγεται ότι ο $J(x^{(k)})^{-1}$ υπάρχει για κάθε k και η σειρά $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ υπάρχει και συγκλίνει τετραγωνικά στην λύση x^*

3.4.5. Τερματισμός μεθόδου Νεύτωνα (Newton)

Είναι δελεαστικό να τερματίζει η μέθοδος όταν η διορθώσεις $\delta \triangleq \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ γίνονται αρκετά μικρές! Αλλά πόσο μικρές; Δεν υπάρχει τέλεια απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Η απάντηση εξαρτάται από την το συγκεκριμένο πρόβλημα. Όμως, είναι καλή πρακτική να ελέγχεται το σχετικό μέγεθος $\frac{\delta}{\|x_{nom}\|}$ αν είναι μικρό, όπου x_{nom} είναι κάποια ονομαστική τιμή του x που, ιδανικά, πρέπει να είναι αντιπροσωπευτική των «τυπικών» τιμών του x στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο του προβλήματος. Τυπικά, μπορεί να γίνει μία επιλογή μίας τιμής κατωφλίου της σχετικής ανοχής (relative tolerance), T_{rel} , έστω $T_{rel} = 0.1\%$, και να τερματίζεται ο αλγόριθμος όταν $\frac{\delta}{\|x_{nom}\|} < T_{rel}$. Απομένει να εξεταστεί ποια πρέπει να είναι η τιμή της x_{nom} και πως μπορεί να εξαχθεί από το στιγμιότυπο του προβλήματος.

Μία προσέγγιση, και αυτό χρησιμοποιείται συχνά, είναι να τεθεί $x_{nom} \|x_{nom}\| = x^{(0)}$, έτσι ώστε η μέθοδος του Νεύτωνα τερματίζεται όταν το $x^{(0)}$ έχει “βελτιωθεί” σε ένα αρκετά υψηλό βαθμό. Έτσι, το κριτήριο γίνεται αν όταν $\frac{\delta}{\|x^{(0)}\|} \leq T_{rel}$. Αλλά, αν $x^{(0)}$ είναι πολύ μικρό, τότε μπορεί να είναι υπερβολή να τεθεί ως στόχος $\delta \leq T_{rel} * x^{(0)}$, έτσι αυτός ο έλεγχος ενισχύεται συχνά με ένα απόλυτο όριο ανοχής (absolute tolerance), $T_{abs} > 0$ και η προσέγγιση γίνεται:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq T_{rel} * \|x^{(0)}\| + T_{abs} \quad (62)$$

Επιπλέον, αν ο $J(x^{(k)})$ γίνεται σχεδόν μη αντιστρέψιμος, τότε οι διορθώσεις $\delta \triangleq \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ προσεγγίζουν το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή, εάν παρακολουθείται μόνο το μέγεθος του βήματος, τότε μπορεί να βγει ψευδώς το συμπέρασμα ότι έχει επιτευχθεί η σύγκλιση. Στην μία διάσταση, αυτό είναι η περίπτωση όταν η κλίση της καμπύλης γίνεται πολύ μεγάλη, έτσι ώστε η εφαπτομένη είναι σχεδόν κάθετη. Έτσι, θα πρέπει επίσης να ελεγχθεί και το μέτρο $\|f(x^{(k)}) - 0\|$. Έτσι προστίθεται και ο περιορισμός:

$$\|f(x^{(k)})\| \leq T_{rel} * \|f(x^{(0)})\| + T_{abs} \quad (63)$$

3.5. Μέθοδος Κουασί – Νεύτωνα (Quasi -Newton)

3.5.1.Συνολική στρατηγική (Global strategies)

Το διάνυσμα $s^{(k)} \triangleq \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$, είναι το βήμα που πρόκειται να ληφθεί σε κάθε βήμα, και πλήρες βήμα της μεθόδου του Νεύτωνα (full Newton step) είναι το πραγματικό βήμα της μεθόδου $s^{(k)}_N = J(x^{(k)})^{-1} * f(x^{(k)})$.

Ένα καλό στοιχείο κάθε συνολικής στρατηγικής (Global strategies) είναι τα βήματα να λαμβάνονται, προς την κατεύθυνση της μεθόδου του Νεύτωνα, με το βήμα να είναι μικρότερο από το πλήρες βήμα του Νεύτωνα. Αυτό γίνεται όταν η υποψήφια λύση βρίσκεται μακριά από την πραγματική λύση, γιατί αλλιώς μπορεί κανείς να υπερ-πηδήσει την περιοχή της λύσης, ή να δημιουργηθούν προβλήματα υπερχειλίσης. Όταν η υποψήφια λύση είναι πιο κοντά στην πραγματική λύση, τα πλήρη βήματα της μεθόδου του Νεύτωνα σίγουρα λαμβάνονται, έτσι ώστε να επωφεληθούν από τον τετραγωνικό ρυθμό σύγκλισης. Αυτές οι στρατηγικές ονομάζονται βηματικές στρατηγικές (stepping strategies).

3.6. Εφαρμογή των μεθόδων επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων στην Προσομοίωση κυκλωμάτων

Οπλισμένοι, με ειδικευμένη γνώση πάνω στο πρόβλημα, μπορεί κανείς να βελτιώσει το γενικό τρόπο εφαρμογής των μεθόδων του Νεύτωνα και Κουασί - Νεύτωνα. Κατά την εφαρμογή τους στην προσομοίωση κυκλωμάτων θα ερευνηθούν τρεις τομείς βελτιώσεις:

- 1) Ο Ιακοβιανός πίνακας μπορεί να κατασκευαστεί από την επιθεώρηση του κυκλώματος, γραμμικοποιώντας κάθε μη γραμμική συσκευή γύρω από το τρέχον σημείο λειτουργίας.
- 2) Ισοδύναμα γραμμικά κυκλωματικά μοντέλα, μπορούν να αναπτυχθούν για πολύπλοκες συσκευές, με σταθερή τοπολογία, τα οποία βοηθούν στη μείωση του μεγέθους του συστήματος.
- 3) Βηματικές στρατηγικές, για την υλοποίηση των μεθόδων Κουασί - Νεύτωνα.

3.6.1. Γραμμικοποίηση και αντίστοιχο γραμμικό μοντέλο (*companion model*)

Η νικητήρια προσέγγιση για την επίλυση μη γραμμικών κυκλωμάτων δεν είναι να λυθούν οι μη γραμμικές εξισώσεις άμεσα, αλλά, αντ' αυτού, να γραμμικοποιηθούν τα κυκλώματα, μέσω της γραμμικοποίησης των συσκευών και εξαγωγής αντίστοιχου γραμμικού μοντέλου, και να χτιστούν οι αντίστοιχες γραμμικές εξισώσεις, να λυθούν, και να επαναληφθεί η διαδικασία μέχρι τη σύγκλιση.

Η γραμμικοποίηση κάθε συσκευής, γίνεται με το ανάπτυγμα της σειράς Taylor γύρω από ένα σημείο x , πάνω στην εξίσωσή που περιγράφει την λειτουργία της. Το αποτέλεσμα είναι, η προσέγγιση της λειτουργίας της συσκευής στο σημείο x μέσω ενός εφαπτόμενου υπερεπιπέδου. Τέλος, η περιγραφή του υπερεπιπέδου ανάγεται σε ένα αντίστοιχο κυκλωματικό μοντέλο⁴.

Η συνθήκη για την ύπαρξη ενός εφαπτόμενου υπερεπιπέδου, στην μία διάσταση, είναι να είναι διαφορίσιμη, στο σημείο που εφαρμόζεται η μέθοδος του Taylor, η συνάρτηση της συσκευής. Όσον αφορά τις περισσότερες διαστάσεις, η συνθήκη είναι, να υπάρχουν οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της συνάρτησης της συσκευής, πάλι, στο σημείο που εφαρμόζεται η μέθοδος του Taylor.

⁴ Η διαδικασία θα αποσαφηνιστεί στις επόμενες παραγράφους.

3.6.2. Γενίκευση της μεθόδου του Νεύτωνα στις εξισώσεις του κυκλώματος.

Όπως επισημάνθηκε στην ενότητα 3.2, η μορφή του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων είναι:

$$G * x + H * g(x) = s \quad (64)$$

όπου G, H είναι σταθεροί πίνακες που βρίσκονται με απλή επιθεώρηση του κυκλώματος. Το σύστημα προς επίλυση είναι:

$$f(x) = G * x + H * g(x) - s \quad (65)$$

Εφαρμόζοντας σε αυτό την μέθοδο του Νεύτωνα, προκύπτει το σύστημα:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_f(x^{(k)})^{-1} * f(x^{(k)}) \quad (66)$$

όπου J_f , είναι ο Ιακοβιανός πίνακας της f και αυτό οδηγεί στο:

$$J_f(x^{(k)}) * (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + f(x^{(k)}) = 0 \quad (67)$$

που δείχνει ότι ψάχνουμε ένα μηδενικό στην γραμμική προσέγγιση της f στο $x^{(k)}$.

Επειδή, οι πίνακες G και H είναι σταθεροί, ο Ιακοβιανός πίνακας της f είναι:

$$J_f(x^{(k)}) = G + H * J_g(x^{(k)}) \quad (68)$$

όπου J_g , είναι ο Ιακοβιανός πίνακας του g .

Έτσι κ-οστή επανάληψη της μεθόδου του Νεύτωνα γίνεται:

$$(G + H * J_g(x^{(k)})) * (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + G * x^{(k)} + H * g(x^{(k)}) - s = 0 \quad (69)$$

Η

$$G * x^{(k+1)} + H * \{J_g(x^{(k)}) * (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + g(x^{(k)})\} = s \quad (70)$$

αλλά, ο όρος μέσα στις παρενθέσεις είναι η προσέγγιση, με την μέθοδο του Νεύτωνα, του g , έτσι έχουμε:

$$G * x^{(k+1)} + H * \hat{g}_{x^{(k)}}(x^{(k+1)}) = s \quad (71)$$

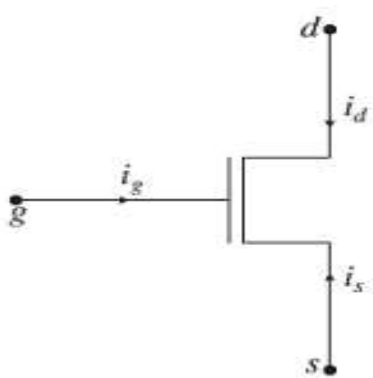
το οποίο σημαίνει ότι κ-οστη επανάληψη της μεθόδου του Νεύτωνα μπορεί να λυθεί αν αντικαταστήσουμε τον πίνακα g με την προσέγγιση του.

Η προσέγγιση του διανύσματος g επιτυγχάνεται αν η κάθε μία από καταχωρήσεις του αντικατασταθεί από την γραμμική προσέγγιση του. Και αυτό, με τη σειρά του, επιτυγχάνεται αν αντικαταστήσουμε κάθε μη γραμμικό στοιχείο στο αρχικό κύκλωμα με το αντίστοιχο γραμμικό προσεγγιστικό μοντέλο. Αυτό αποδεικνύει ουσιαστικά ότι η επίλυση των μη γραμμικών κυκλωμάτων μπορεί να γίνει με την αντικατάσταση όλων των μη γραμμικών στοιχείων με το αντίστοιχο γραμμικό στο $x^{(k)}$ και λύνοντας το προκύπτον γραμμικό κύκλωμα για $x^{(k+1)}$, μέχρι τη σύγκλιση.

3.6.3. Γραμμικοποίηση συσκευών με δύο και με πολλούς ακροδέκτες

3.6.3.1. Γραμμικό μοντέλο για την συσκευή Mosfet

Εικόνα 3.6: Σύμβολο για την συσκευή Mosfet



Έστω το n-Mosfet (Εικόνα 3.6) t με την συνάρτηση που το περιγράφει:

$$i_d = \begin{cases} 0 & , v_{gs} \leq V_t \\ \beta \left((v_{gs} - V_t) * v_{ds} - 1/2 * v_{ds}^2 \right) * (1 + \lambda * v_{ds}) & , 0 \leq v_{ds} \leq v_{gs} - V_t \\ \frac{\beta}{2} * (v_{gs} - V_t)^2 * (1 + \lambda * v_{ds}) & , 0 \leq v_{gs} - V_t \leq v_{ds} \end{cases} \quad (72)$$

Και

$$i_s = -i_d , i_g = 0 \quad (73)$$

επειδή οι εξισώσεις αυτές είναι ως προς v_{gs} και v_{ds} , μπορούμε να ορίσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα ως προς αυτές και όχι ως προς v_g , v_s , v_d (με απλό θέσιμο)

$$G_{ds} = \frac{di_d}{dv_{ds}} \begin{cases} 0 & , v_{gs} \leq V_t \\ \frac{\beta}{2} * \lambda * v_{ds}^2 + \beta * (v_{gs} - V_t - v_{ds}) * (1 + 2 * \lambda * v_{ds}) & , 0 \leq v_{ds} \leq v_{gs} - V_t \\ \frac{\beta}{2} * \lambda * (v_{gs} - V_t)^2 & , 0 \leq v_{gs} - V_t \leq v_{ds} \end{cases} \quad (74)$$

$$g_m = \frac{di_d}{dv_{gs}} \begin{cases} 0 & , v_{gs} \leq V_t \\ \beta * v_{ds} * (1 + \lambda * v_{ds}) & , 0 \leq v_{ds} \leq v_{gs} - V_t \\ \beta * (v_{gs} - V_t) * (1 + \lambda * v_{ds}) & , 0 \leq v_{gs} - V_t \leq v_{ds} \end{cases} \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_d \\ \hat{i}_s \\ \hat{i}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ds}^{(k)} & g_m^{(k)} \\ G_{ds}^{(k)} & g_m^{(k)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} \hat{v}_{ds} \\ \hat{v}_{gs} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{ds}^{(k)} \\ v_{gs}^{(k)} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} i_d^{(k)} \\ i_s^{(k)} \\ i_g^{(k)} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Τότε η γραμμική προσέγγιση για τον κάθε ακροδέκτη (Εικόνα 3.7 , 3.8) είναι:

$$\hat{i}_d = G_{ds}^{(k)} * \hat{v}_{ds} + g_m^{(k)} * \hat{v}_{gs} + I_{eq}^{(k)} \quad (77)$$

$$\hat{i}_s = -\hat{i}_d \quad (78)$$

$$\hat{i}_g = 0 \quad (79)$$

όπου:

$$I_{eq}^{(k)} = i_d^{(k)} - G_{ds}^{(k)} * v_{ds}^{(k)} - g_m^{(k)} * v_{gs}^{(k)} \quad (80)$$

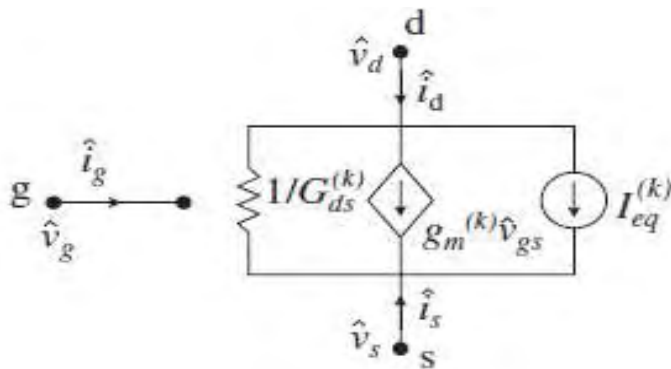
και όπου:

$$i_d^{(k)} = \begin{cases} 0 & , v_{gs}^{(k)} \leq V_t \\ \beta \left((v_{gs}^{(k)} - V_t) * v_{ds}^{(k)} - 1/2 * v_{ds}^{(k)2} \right) * (1 + \lambda * v_{ds}^{(k)}) & , 0 \leq v_{ds} \leq v_{gs}^{(k)} - V_t \\ \frac{\beta}{2} * (v_{gs}^{(k)} - V_t)^2 * (1 + \lambda * v_{ds}^{(k)}) & , 0 \leq v_{gs}^{(k)} - V_t \leq v_{ds}^{(k)} \end{cases} \quad (81)$$

Εικόνα 3.7: Αποτύπωμα της συσκευής n-Mosfet

	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>g</i>		RHS
	⋮	⋮	⋮		⋮
<i>d</i> ⋯	$G_{ds}^{(k)}$	$-(G_{ds}^{(k)} + g_m^{(k)})$	$g_m^{(k)}$		$-I_{eq}^{(k)}$
<i>s</i> ⋯	$-G_{ds}^{(k)}$	$(G_{ds}^{(k)} + g_m^{(k)})$	$-g_m^{(k)}$		$I_{eq}^{(k)}$
<i>g</i> ⋯	0	0	0		0

Εικόνα 3.8: Ισοδύναμο κυκλωματικό μοντέλο, με την μέθοδο του Νεύτωνα, της συσκευής n-Mosfet



3.6.4 Συνολική διαδικασία επίλυσης μη γραμμικών κυκλωμάτων

Η εύρεση του γραμμικού συστήματος προς επίλυση ξεκινάει από την εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα σε πολλές διαστάσεις.

$$J_f(x^k)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)}) \quad (82)$$

H

$$J_f(x^k) * x^{(k+1)} = J_f(x^k) * x^{(k)} - f(x^{(k)}) \quad (83)$$

όπου χρησιμοποιώντας ότι $J_f(x^k) = [G + H * J_g(x^k)]$ συνεπάγεται:

$$J_f(x^k) * x^{(k+1)} = H * J_g(x^{(k)}) * x^{(k)} - H * g(x^k) + s \quad (84)$$

H

$$J_f(x^{(k)}) * x^{(k+1)} = s^{(k)} \quad (85)$$

Παρατηρήσεις :

- 1) Αν δεν υπάρχουν οι μη γραμμικές συσκευές, οι παραπάνω εξίσωση μεταμορφώνεται σε $G * x^{(k+1)} = s$
- 2) Ο πίνακας $J_f(x^k) = [G + H * J_g(x^k)]$ στην αριστερή μεριά, είναι ο πίνακας που θα δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας την στάμπα των συσκευών.
- 3) Το διάνυσμα της δεξιάς πλευράς $s^{(k)} = [H * J_g(x^{(k)}) * x^{(k)} - H * g(x^k) + s]$ είναι ένα ακόμα διάνυσμα που για να δημιουργηθεί θα χρησιμοποιηθούν οι στάμπες των συσκευών.
- 4) Οι μη γραμμικές συσκευές συνεισφέρουν μέσω της στάμπας τους στο $[G + H * J_g(x^k)]$ μέσω του $J_g(x^k)$, και στο διάνυσμα της δεξιάς πλευράς μέσω $J_g(x^{(k)}) * x^{(k)} - g(x^k)$.
- 5) Μόλις το σύστημα δημιουργηθεί, τυπικές μέθοδοι, όπως η LU παραγοντοποίηση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να λυθεί.
- 6) Η καινούργια λύση μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί εκ νέου για την δημιουργία του συστήματος, αν δεν έχει επέλθει η σύγκλιση.

Για να ελεγχθεί αν πρέπει να τερματιστεί η μέθοδος του Νεύτωνα, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη το μέγεθος του βήματος $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ όπως και το μέγεθος της $\|f(x^{(k)})\|$, με $f(x) = G * x + H * g(x) - s$. Αυτό σημαίνει ότι η πίνακες G , H , και $g(x^k)$ θα πρέπει να αποτιμώνται κατά την διάρκεια της προσομοίωσης.

3.6.5. Κουασί – Νεύτωνα μέθοδοι (Quasi -Newton) στην προσομοίωση των κυκλωμάτων

Όπως αναφέρθηκε, η μέθοδος του Νεύτωνα, είναι μία καλή τοπική στρατηγική, και πρέπει να ενισχυθεί με μία πιο γενική στρατηγική που θα διασφαλίζει, κατά το δυνατόν, την σύγκλιση. Οι Μέθοδοι που υλοποιούν μία τέτοια στρατηγική ονομάζονται Κουασί – Νεύτων μέθοδοι (Quasi – Newton methods).*

Στις μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών κυκλωμάτων, τα προβλήματα σύγκλισης μπορεί να κατηγοριοποιηθούν σε δύο τύπους:

- 1) Μη σύγκλιση εξαιτίας της λήψης πολύ μεγάλου βήματος της μεθόδου του Νεύτων, η οποία μπορεί να προκύψει τόσο κατά τη διάρκεια της σταθερού ρεύματος Ανάλυσης (DC analysis) όσο και κατά τη διάρκεια της Μεταβατικής Ανάλυσης (Transient analysis).
- 2) Μη σύγκλιση, εξαιτίας της χρήσης αρχικής λύσης, που είναι πολύ μακριά από την πραγματική, η οποία προκύπτει κυρίως κατά τη διάρκεια της σταθερού ρεύματος Ανάλυσης (DC analysis).

Ο δεύτερος τύπος προβλήματος, είναι πολύ πιο προβληματικός από τον πρώτο και απαιτεί πολύ πιο δραστικά μέτρα. Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω, λύσεις για την λύση του προβλήματος της μη σύγκλισης, εμπίπτουν σε δύο κατηγορίες.

- 1) Μέθοδοι για τον περιορισμό του μεγέθους του βήματος, για να αποφευχθούν τα επικίνδυνα μεγάλα βήματα. Μερικές φορές, αυτές οι μέθοδοι αναφέρονται μέθοδοι απόσβεσης (damping methods).
- 2) Ευρεστικές μέθοδοι, για να ξεπεραστούν τα σημαντικά προβλήματα που συναντώνται κατά την διάρκεια της σταθερού ρεύματος Ανάλυσης (DC analysis).

3.6.5.1 Μέθοδοι περιορισμού του βήματος της Μεθόδου του Νεύτωνα.

Μια γενική στρατηγική, έξω από κάθε συγκεκριμένο τομέα εφαρμογής, είναι να διασφαλιστεί ότι το μέτρο της συνάρτησης, $\|f(x)\|$, μειώνεται σε κάθε επανάληψη της μεθόδου. Ένα πιθανό βήμα που θα βρεθεί να αυξήσει τη νόρμα απορρίπτεται. Αντ' αυτού, ένα μικρότερο βήμα θα ληφθεί, προς στην ίδια κατεύθυνση.

Μία γενική βηματική στρατηγική, είναι:

$$s^{(k)} = \frac{\gamma}{\kappa} * \text{sgn} \left(s_N^{(k)} \right) * \ln \left(1 + \kappa * \left| s_N^{(k)} \right| \right) \quad (86)$$

όπου $\text{sgn}(a) \in \{-1, 1\}$ και δίνει το πρόσημο του $a \in \mathbb{R}$, $s_N^{(k)} = x_i^{\wedge} - x_i^{(k)}$ και $s^{(k)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$

όπου $x_i^{(k)}$ είναι η υποψήφια λύση της μεθόδου στο βήμα k .

όπου x_i^{\wedge} , είναι η υποψήφια λύση της μεθόδου στο βήμα $k + 1$.

όπου $x_i^{(k+1)}$, είναι η υποψήφια λύση για το βήμα $k + 1$, που προκύπτει όμως από την λογαριθμική έκφραση, δηλαδή από τον περιορισμό του βήματος.

όπου γ είναι μία εμπειρική σταθερά και ισχύει $1 < \gamma < 1.5$

όπου κ για τα Mosfet 2 – 5 (εμπειρικές τιμές)

Γενικά μπορεί κάποιος να πειραματιστεί με τις τιμές του κ και του γ . Μεγαλύτερο κ σημαίνει απλά μεγαλύτερος ψαλιδισμός στο βήμα που προκύπτει με την μέθοδο του Νεύτωνα. Επίσης, το κ μπορεί να μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της διαδικασίας, όπου αρχικά θα επιβάλλονται αυστηρότεροι περιορισμοί, όντας μακριά από την λύση και εν συνεχεία, οι περιορισμοί να χαλαρώνουν δηλαδή μικρότερο κ .

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η διατήρηση της κατεύθυνσης του βήματος, είναι μία καλή στρατηγική για την ελάττωση της του μέτρου της συνάρτησης $\|f(x)\|$. Δεν παύουν όμως να υπάρχουν και άλλες μέθοδοι όπου, κάποιες ή όλες οι καταχωρήσεις του διανύσματος της υποψήφιας λύσης, μπορούν να κινηθούν προς την αντίθετη κατεύθυνση.

3.6.5.2 Εύρεσης αρχικής λύσης με την μέθοδο της μεταβολής πηγών (Source Stepping)

Αν και δεν είναι και η πιο αποδοτική, είναι μια αρκετά δημοφιλής μέθοδος. Χρησιμοποιείται, όταν η DC Ανάλυση αποτύχει. Η βασική ιδέα, έρχεται από την παρατήρηση, ότι για τα περισσότερα κυκλώματα ισχύει ότι όταν απενεργοποιηθούν οι πηγές, τότε η $x_0 = 0$ είναι μία λύση του συστήματος αφού όλα το ρεύμα και οι τάσεις όλων των κλάδων μηδενίζεται.

Για κυκλώματα με αυτήν την ιδιότητα, η μέθοδος αποτελείται από την απενεργοποίηση όλων των ανεξάρτητων πηγών, έτσι ώστε η $x = 0$ να γίνει μια λύση και αυξάνοντάς τις τιμές των πηγών, σταδιακά και με μικρά βήματα (τα βήματα μπορεί να είναι ίδια η διαφορετικά για κάθε πηγή), μέχρι την πραγματική τους τιμή, ενώ γίνεται η επίλυση του DC συστήματος σε κάθε στάδιο. Η λύση του κυκλώματος μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Νεύτωνα με την λύση από την προηγούμενη επίλυση του συστήματος να χρησιμοποιείται ως αρχική λύση. Χρησιμοποιώντας αρκετά μικρά βήματα στην αύξηση των τιμών των πηγών, αναμένεται ότι η σύγκλιση του Νεύτωνα θα επιτευχθεί σε κάθε στάδιο, αφού οι μεταβολές της λύσης αναμένεται να

είναι μικρές κάθε φορά. Αν υπάρξει αποτυχία στην σύγκλιση, τότε μπορεί να ξαναδοκιμαστεί η ίδια μέθοδος αλλά με διαφορετικούς ρυθμούς αύξησης των τιμών των πηγών .

Πρόταση: Για κάθε κύκλωμα της μορφής $G * x + H * g(x) = s$, έτσι όπως έχει περιγραφεί στις παραπάνω παραγράφους, ισχύει ότι, αν όλες οι ανεξάρτητες πηγές απενεργοποιηθούν τότε λύση του κυκλώματος αποτελεί η $x = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω, $f(x) = G * x + H * g(x) - s$ έτσι ώστε το σύστημα προς επίλυση στην τυπική μορφή του είναι $f(x) = 0$. Όταν $x = 0$, το σύστημα αποτιμάται σε $f(0) = H * g(0) - s$.Γι' αυτό αν $s = 0$ **και** $g(0) = 0$ το $x_0 = 0$ είναι μία έγκυρη λύση. Άρα για να είναι το $x_0 = 0$ όταν το $s = 0$ μία έγκυρη λύση, θα πρέπει κάθε μη γραμμική ελεγχόμενη πηγή τάσης(CVS) η ρεύματος (CCS) να αποτιμάται σε 0 όταν όλες οι μεταβλητές που τις ελέγχουν (τάσεις και ρεύματα του συστήματος εξισώσεων), τίθενται σε 0.

Για την i-οστη μη γραμμική συσκευή , θα αναφέρεται ως $g_i(0)$, η μετατόπιση της συσκευής όταν όλες οι μεταβλητές που την ελέγχουν μηδενίζονται .

Έτσι, για κάθε μη γραμμική συσκευή, ισχύει $g(x) = g(0) + g^-(x)$, όπου $g(0)$ η μετατόπιση. Είναι ξεκάθαρο, ότι είναι εφικτό να προεργαστεί το κύκλωμα και να αντικατασταθεί η μετατόπιση με μία ανεξάρτητη πηγή. Άρα το σύστημα μετασχηματίζεται σε $G * x + H * g^-(x) = s - g(0)$ και όλα τα μη γραμμικά στοιχεία έχουν πλέον μετατόπιση μηδέν. Έτσι, μπορούμε πλέον να λύσουμε το σύστημα $G * x + H * g^-(x) = \lambda(s - g(0))$ για λ απο 0 μέχρι 1 και φυσικά για $\lambda = 0$ είναι πλέον μία αρχική λύση το $x_0 = 0$.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι όλες οι παραπάνω μέθοδοι δεν αντιμετωπίζουν την ταλάντωση της λύσης, η οποία συμβαίνει αρκετά συχνά κατά την διάρκεια της Dc ανάλυσης. Ωστόσο, υπάρχουν άλλες μέθοδοι που προσπαθούν να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα.

Κεφάλαιο 4

Επίλυση διαφορικών κυκλωματικών εξισώσεων

Με την παρουσία των δυναμικών συσκευών, πυκνωτές και πηνία, οι εξισώσεις του δικτύου μπορούν να διατυπωθούν ως ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η επίλυση των συστημάτων αυτών δεν είναι εύκολη, και γίνεται πιο δύσκολη όταν τα δυναμικά στοιχεία είναι μη γραμμικά. Όπως θα γίνει φανερό, η πρακτική προσέγγιση για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι η κατ'επανάληψη διακριτοποίησή τους και η λύση των αντίστοιχων αλγεβρικών εξισώσεων.

4.1. Σύστημα εξισώσεων με δυναμικά στοιχεία

Σε προηγούμενα κεφάλαια, έχει δείχτει ότι το σύστημα εξισώσεων στην γραμμική περίπτωση μπορεί να γραφεί ως:

$$G * x(t) + D * x'(t) = s(t) \quad (87)$$

όπου D είναι η συνεισφορά των γραμμικών δυναμικών στοιχείων (πυκνωτές και πηνία).

Επίσης, έχει αναφερθεί, ότι στην περίπτωση των DC μη γραμμικών κυκλωμάτων το σύστημα εξισώσεων είναι:

$$G * x(t) + H * g(x) = s \quad (88)$$

συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, το σύστημα γίνεται :

$$G * x(t) + H * g(x) + D * x'(t) = s(t) \quad (89)$$

Στην περίπτωση των μη γραμμικών δυναμικών συσκευών το σύστημα μετασχηματίζεται σε:

$$G * x(t) + H * g(x) + D(x) * x'(t) = s(t) \quad (90)$$

4.2. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και (Σ.Δ.Ε) και διαφορικές αλγεβρικές εξισώσεις (Δ.Α.Ε)

Μία εξίσωση της μορφής $x'(t) = f(x, t)$, όπου $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ονομάζεται πρώτης τάξης συνήθης διαφορική εξίσωση (first-order ordinary differential equation, ODE). Η εξίσωση ονομάζεται συνήθης γιατί, παράγωγός είναι συνήθης , σε αντιδιαστολή με την μερική παράγωγο. Είναι πρώτης τάξης, επειδή περιλαμβάνει μόνο την πρώτη παράγωγο. Όταν το x και f είναι διανύσματα τότε η εξίσωση μετατρέπεται πλέον σε ένα σύννηθες διαφορικό σύστημα. Από την άλλη μεριά, οποιαδήποτε άλλη μορφή εξίσωσης, που περιέχει παραγώγους, ονομάζεται διαφορική αλγεβρική εξίσωση (differential algebraic equation, DAE).

Οι Σ.Δ.Ε έχουν πλούσια ιστορία, με τις πρώτες τεχνικές για την επίλυση τους να χρονολογούνται πίσω στο 1900. Δυστυχώς όμως, πολλές φορές τα συστήματα που προκύπτουν δεν είναι Σ.Δ. Στην γενική περίπτωση, τα συστήματα είναι Δ.Α, όπου σε αντίθεση με τις Σ.Δ.Ε, δεν υπάρχει γενικό θεώρημα που εγγυάται την ύπαρξη και την μοναδικότητα λύσης.

Στην γενικότερη περίπτωση, υπάρχουν μέθοδοι για την μετατροπή συστημάτων από ΣΔ σε ΔΑ, με τον μέγιστο αριθμό παραγωγίσεων για την μετατροπή σε ΣΔ να ονομάζεται δείκτης του Δ.Α.Ε (index of DAE). Δυστυχώς όμως δεν υπάρχει καμία γενική συστηματική μέθοδος για αυτήν την μετατροπή. Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν κάποιες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση Σ.Δ.Ε σε Δ.Α.Ε, και αυτό συμβαίνει συχνά στην πράξη, αλλά δεν υπάρχουν εγγυήσεις. Πολλές από τις ελκυστικές ιδιότητες (ακρίβεια, σταθερότητα) που έχουν οι μέθοδοι για τις Σ.Δ.Ε. χάνονται όταν εφαρμόζονται σε Δ.Α.Ε. Υπάρχουν στην πραγματικότητα Δ.Α.Ε για τα οποία ακόμη και οι πιο γνωστές μέθοδοι για Σ.Δ.Ε οδηγούν σε ασταθή συμπεριφορά. Σε γενικές γραμμές , όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης του Δ.Α.Ε τόσο πιο 'δύσκολο' είναι να λυθεί το σύστημα. Μία τέτοια στρατηγική (της προσαρμογής των μεθόδων λύσης των Σ.Δ.Ε σε Δ.Α.Ε) ονομάζεται άμεση διακριτοποίηση (direct discretization), και είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην προσομοίωση κυκλωμάτων, καθώς και σε πολλούς άλλους τομείς όπου προκύπτουν Δ.Α.Ε.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί, ότι ο δείκτης του γενικού συστήματος εξισώσεων που έχει μελετηθεί μέχρι τώρα είναι συχνά 0 ή 1 αλλά γενικά, μπορεί να είναι παραπάνω (αφού εξαρτάται από το είδος του κυκλώματος) και ότι η μέθοδος της διακριτοποίησης έχει καλά αποτελέσματα για δείκτη 1 ή 2.

Κατά την διάρκεια της ανάλυσης θα υποθεθεί ότι το σύστημα είναι τέτοιο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης διακριτοποίησης.

4.3. Συστήματα Σ.Δ.Ε και Βασικά Θεωρήματα

Ένα πρώτης τάξης Σ.Δ.Ε σύστημα είναι το m -διάστατο σύστημα :

$$x'(t) = f(x, t) \quad (91)$$

όπου $t \in \mathbb{R}$, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Η γενική λύση του οποίου περιέχει m τυχαίες σταθερές (c_1, c_2, \dots, c_m) .

Για παράδειγμα έστω:

$$x_1' = \frac{x_1}{t} + t * x_2 \quad (92)$$

$$x_2' = (x_2^2 - 1) * \frac{t}{x_1} \quad (93)$$

Με λύση :

$$x_1(t) = \frac{t}{c_1} * \cos(c_1 * t + c_2) \quad (94)$$

$$x_2(t) = -\sin(c_1 * t + c_2) \quad (95)$$

c_1, c_2 τυχαίες μεταβλητές.

Αν υπάρξει ένα επιπρόσθετο σύνολο από m συνθήκες , τότε οι σταθερές μπορούν να αποκτήσουν συγκεκριμένη τιμή. Αν, αυτές οι m συνθήκες, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ λαμβάνουν τιμές που δίνονται στο ίδιο αρχικό χρονικό σημείο t_0 , τότε το προκύπτον πρόβλημα καλείται πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) (initial value problem, IVP):

$$x'(t) = f(x, t) \quad (96)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (97)$$

Ας σημειωθεί, ότι δεν έχουν όλα τα Π.Α.Τ μοναδική λύση . Για την ακρίβεια μπορούν να μην έχουν και καθόλου λύση.

Ορισμός: Έστω $(\delta(t), \delta_0)$ και $(\delta^*(t), \delta_0^*)$ είναι δύο οποιεσδήποτε διαταραχές του Π.Α.Τ $x'(t) = f(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ και έστω $\hat{\chi}(t)$ και $\hat{\chi}^*(t)$ είναι η προκύπτουσες διαταραγμένες λύσεις. Αν υπάρχει ένα $S > 0$ τέτοιο ώστε , για όλα τα $t \in [t_0, t_f]$, έχουμε:

$$\|\hat{\chi}(t) - \chi^*(t)\| \leq S * \varepsilon \text{ οποτεδήποτε } \|\delta(t) - \delta^*(t)\| \leq \varepsilon \text{ και } \|\delta_0 - \delta_0^*\| \leq \varepsilon \quad (98)$$

Τότε το Π.Α.Τ λέγεται **απόλυτα σταθερό (totally stable)** ή **καλώς ορισμένο (well-posed.)** Έτσι, χαλαρά μιλώντας, ένα πρόβλημα είναι εντελώς σταθερό εάν μικρές διαταραχές στα δεδομένα παράγουν αντίστοιχα μικρές διαταραχές στην λύση. Ας σημειωθεί ότι, αυτό είναι μια ιδιότητα του προβλήματος και όχι από οποιαδήποτε αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του. Αν ένα πρόβλημα δεν είναι καλώς ορισμένο, δηλαδή, δεν είναι απόλυτα σταθερό, τότε οποιαδήποτε αριθμητική λύση για αυτό είναι εντελώς αναξιόπιστη.

Για να μπορούν να εφαρμοστούν αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση του Π.Α.Τ πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες δύο προτάσεις:

- 1) Το πρόβλημα πρέπει να είναι απόλυτα σταθερό
- 2) Το πρόβλημα Π.Α.Τ έχει μία και μοναδική λύση

Θεώρημα: (standard theorem) Έστω , $D = \{(x, t) | t_0 \leq t \leq t_f \text{ και } x \in \mathbb{R}^m\}$, όπου t_0 και t_f είναι πεπερασμένα, και έστω $f(x, t)$ είναι συνεχής στο t στο D και *Lipschitz* συνεχής στο x στο D . Τότε, για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει μοναδική λύση $x(t)$ του Π.Α.Τ $x'(t) = f(x, t)$, $x(t_0) = x_0$, όπου $x(t)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη στο D . Ακόμα , το Π.Α.Τ είναι καλώς ορισμένο.

Σε όλες τις υπόλοιπες παραγράφους, θα υποθεθεί, ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει.

4.4. Μέθοδος Επίλυσης Σ.Δ.Ε Forward Euler (FE)

Για την επίλυση των Σ.Δ.Ε υπάρχουν δύο κλάσεις μεθόδων:

- 1) Η πρώτη κλάση είναι οι γραμμικές πολύ-βηματικές μέθοδοι (leniar multistep methods, LMS), όπου γίνεται χρήση των λύσεων, στις προηγούμενες χρονικές στιγμές για τον υπολογισμό της λύσης την τρέχουσα χρονική στιγμή. Σε αυτήν την κλάση ανήκει η μέθοδος FE.
- 2) Η δεύτερη κλάση είναι οι μονό-βηματικές μέθοδοι , με την ονομασία Runge-Kutta, και γίνεται χρήση, μόνο, της λύσης στην προηγούμενη χρονική στιγμή για τον υπολογισμό της λύσης την τρέχουσα χρονική στιγμή.

Για την μέθοδο FE , στην μία διάσταση , μπορεί να γραφεί η ακολουθία Taylor στην χρονική στιγμή t_n ως εξής:

$$x(t) = x(t_n) + (t - t_n) * x'(t_n) + \frac{(t-t_n)^2}{2} * x''(\xi) \quad (99)$$

Για κάποιο ξ ανάμεσα στο t_n και t . Τότε στο $t = t_{n+1} = t_n + h$, συνεπάγεται:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h * x'(t_n) + \frac{h^2}{2} * x''(\xi) \quad (100)$$

ή στην m διάσταση

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h * x'(t_n) + O(h^2) \quad (101)$$

Έτσι αν $x' = f(x, t)$, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$x_{n+1} = x_n + h * f(x_n, t_n) \quad (102)$$

ή απλούστερα

$$x_{n+1} = x_n + h * f_n \quad (103)$$

Με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση Πρώτης τάξης Σ.Δ.Ε, αναμένεται να εισάγεται ένα σφάλμα σε κάθε βήμα, εξαιτίας της αποκοπής του τελευταίου όρου, στο ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης. Αυτό το σφάλμα ονομάζεται τοπικό σφάλμα περικοπής (Τ.Σ.Π) (Local truncation error) και το βασικό πρόβλημα είναι ότι παρ' ότι μπορεί να είναι μικρό, μπορεί να συσσωρεύεται και να οδηγήσει σε ένα παγκόσμιο σφάλμα (Global error). Ακόμα ένας παράγοντας σφάλματος είναι το σφάλμα μηχανής που μπορεί να εισαχθεί από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας της αριθμητικής του. Οι παραπάνω δυσκολίες, είναι μόνο ένα μέρος των δυσκολιών που προκύπτουν κατά την εφαρμογή των μεθόδων στην πράξη, όπου άλλες δεν επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την τελική λύση και άλλες την επηρεάζουν και απαιτείται λήψη δραστικότερων μέτρων. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί, ότι οποιαδήποτε λύση προκύπτει από την εφαρμογή οποιασδήποτε αριθμητικής μεθόδου είναι προσεγγιστική.

4.5. Εφαρμογή στην προσομοίωση κυκλωμάτων

4.5.1 Γενίκευση της μεθόδου άμεσης διακριτοποίησης στις εξισώσεις του κυκλώματος

Για την γενίκευση της μεθόδου άμεσης διακριτοποίησης, θα επισημανθεί αρχικά το σύνολο των εξισώσεων που λαμβάνουν μέρος για το σχηματισμό του συστήματος της τροποποιημένης κομβικής ανάλυσης:

- 1) Σύμφωνα με τον νόμο ρευμάτων (KCL) $A * i = 0$, όπου i είναι το διάνυσμα των ρευμάτων των συσκευών
- 2) Σύμφωνα με τον νόμο τάσεων (KVL) $A^T * v = u$, όπου u είναι το διάνυσμα των τάσεων της κάθε συσκευής και όπου v , είναι το διάνυσμα των δυναμικών στον κάθε κόμβο.
- 3) Οι εξισώσεις για τις συσκευές με αντίσταση (resistive) και γραμμικές ή μη είναι:

$$E_r * \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = g(x) \quad (104)$$

όπου, x είναι το διάνυσμα των μεταβλητών της τροποποιημένης κομβικής ανάλυσης. Όπου E_r , είναι ένας διαγώνιος πίνακας που οι καταχωρήσεις του είναι 0 ή 1 και $g(x)$ είναι το διάνυσμα των συναρτήσεων , των με αντίσταση (resistive) και πιθανώς μη γραμμικών συσκευών.

- 4) Οι εξισώσεις για τις δυναμικές συσκευές , έχουν την μορφή :

$$E_d * \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = D(x) * x'(t) \quad (105)$$

όπου, E_r είναι ένας διαγώνιος πίνακας που οι καταχωρήσεις του είναι 0 ή 1. Όπου x , είναι το διάνυσμα των μεταβλητών της τροποποιημένης κομβικής ανάλυσης. Όπου $D(x)$, είναι ο πίνακας που αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανώς μη γραμμικές δυναμικές συσκευές.

Η ιδέα είναι, ότι αντί να εφαρμοστεί η άμεση διακριτοποίηση κατευθείαν στο σύστημα Δ.Α.Ε, μπορεί να εφαρμοστεί στις τέσσερεις παραπάνω εξισώσεις. Από αυτές, μόνο στην τελευταία μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της άμεσης διακριτοποίησης. Αυτήν η προσέγγιση οδηγεί κατευθείαν στην έννοια του αντίστοιχου κυκλωματικού μοντέλου της συσκευής (companion model).

4.5.2. Εξαγωγή ισοδύναμου κυκλωματικού μοντέλου με την μέθοδο FE

Η εξαγωγή του ισοδύναμου κυκλωματικού μοντέλου είναι αρκετά απλή. Αν θεωρήσουμε $i(t)$ και $u(t)$, το ρεύμα και την τάση, αντίστοιχα, της δυναμικής συσκευής, τότε μπορούμε να γράψουμε για τον πυκνωτή και το πηνίο:

$$i(t_n) = C(u(t_n)) * u'(t_n) \text{ και } u(t_n) = L(i(t_n)) * i'(t_n) \quad (106)$$

Τότε , χρησιμοποιώντας ότι $i_n \cong i(t_n)$ και $u_n \cong u(t_n)$ συνεπάγεται:

$$i_n \cong C(u(t_n)) * u'(t_n) \text{ και } u_n \cong L(i(t_n)) * i'(t_n) \quad (107)$$

Και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το ανάπτυγμα της σειράς Taylor:

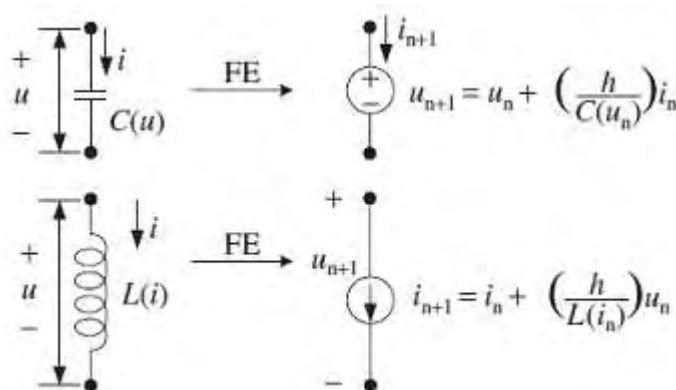
$$i_n \cong C(u(t_n)) * \left(\frac{u_{n+1}-u_n}{h}\right) \text{ και } u_n \cong L(i(t_n)) * \left(\frac{i_{n+1}-i_n}{h}\right) \quad (108)$$

Οδηγώντας στην εξίσωση:

$$u_{n+1} = u_n + \left(\frac{h}{C(u_n)}\right) * i_n \text{ και } i_{n+1} = i_n + \left(\frac{h}{L(i_n)}\right) * u_n \quad (109)$$

Έτσι σύμφωνα με την παραπάνω μορφή των εξισώσεων μπορούν να εξαχθούν τα ισοδύναμα κυκλωματικά μοντέλα της εικόνας 4.1, με τα αποτυπώματα της συσκευής να είναι τα ίδια με μίας ανεξάρτητης πηγής ρεύματος και τάσης.

Εικόνα 4.1: Ισοδύναμα κυκλωματικά μοντέλα για ένα πυκνωτή και ένα πηνίο με την μέθοδο Forward Euler



4.5.3. Συνολικός αλγόριθμος για την εκτέλεση μεταβατικής ανάλυσης

Αφού όλα τα δυναμικά στοιχεία έχουν αντικατασταθεί από το αντίστοιχο κυκλωματικό μοντέλο, το υπόλοιπο του κυκλώματος είναι ωμικό, πιθανώς μη γραμμικό, και μπορεί να λυθεί, τυπικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Νεύτωνα, στο οποίο κάθε επανάληψη απαιτεί λύση της γνωστού γραμμικού συστήματος:

$$J(x^{(k)}) * x^{(k+1)} = s^{(k)} \quad (110)$$

Εισοδος : Αρχική συνθήκη x_0 στην χρονική στιγμή t_0

for($n = 0$; $t_n \leq T$; $n = n + 1$)do

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$k = 0; x_{n+1}^{(0)} = x_n$$

while (OXI (ΣΥΓΚΛΙΣΗ)do {Μέθοδος Νευτωνα}

Ανανέωσε τις σταμπες των συσκευών

και του Ιακοβιανού.

$$\text{Λύσε } J_{n+1}^{(k)} * x_{n+1}^{(k+1)} = s_{n+1}^{(k)}$$

$$k = k + 1$$

$$x_{n+1} = x_{n+1}^{(k)}$$

Κεφάλαιο 5

Αρχιτεκτονική και αλγόριθμοι προσομοιωτή ηλεκτρονικών κυκλωμάτων

5.1. Αρχιτεκτονική προσομοιωτή ηλεκτρονικών κυκλωμάτων

Οι βασικές λειτουργίες ενός προσομοιωτή κυκλωμάτων είναι:

- 1) Συντακτική ανάλυση
- 2) Δημιουργία και Επίλυση εξισώσεων
- 3) Γραφική απεικόνιση

Οι κάθε μία από αυτές τις λειτουργίες αποτελεί και ένα ξεχωριστό υποσύστημα μιας και η μία εργασία είναι ανεξάρτητη από την άλλη. Στην πραγματικότητα το κάθε υποσύστημα δημιουργεί δεδομένα για το επόμενο με τελικό αποδέκτη το υποσύστημα γραφικής απεικόνισης. Έτσι, αρχικά καλείται ο συντακτικός αναλυτής, με είσοδο το αρχείο που περιγράφει την λειτουργία του κυκλώματος, σε μία γλώσσα περιγραφής υλικού. Το αρχείο ελέγχεται για την συντακτική του ορθότητα και παράγεται ένα σύνολο από δεδομένα που περιγράφουν την διάταξη του κυκλώματος και το είδος της ανάλυσης που ζητείται π.χ. μεταβατική ανάλυση. Στην συνέχεια, με αυτά τα δεδομένα, δημιουργείται το σύστημα εξισώσεων και επιτελείται η ζητούμενη ανάλυση από το υποσύστημα Δημιουργίας και επίλυσης εξισώσεων, εν συνέχεια τα αποτελέσματά της ανάλυσης δίνονται ως είσοδος στο υποσύστημα γραφικής απεικόνισης όπου και εμφανίζονται. (Διάγραμμα 5.1.)

Διάγραμμα 5.1: Διάγραμμα ροής της επεξεργασίας ενός αρχείου που περιγράφει την συνδεσμολογία και το είδος της ανάλυσης που απαιτείται.



5.2 Συντακτικός αναλυτής

Για τους σκοπούς της διπλωματικής δεν θα περιγραφεί η διαδικασία υλοποίησης του συντακτικού αναλυτή. Απλά αναφέρεται ότι η έξοδος του είναι ένα σύνολο από λίστες, μία για κάθε κυκλωματικό στοιχείο και ένα σύνολο από μεταβλητές κατάστασης, που περιγράφουν το είδος της ανάλυσης που απαιτείται να εφαρμοστεί στο κύκλωμα. Η κάθε κόμβος της λίστας περιέχει τα χαρακτηριστικά της κάθε συσκευής, π.χ. για τον πυκνωτή είναι η χωρητικότητά του και όπου χρειάζεται πληροφορία σχετικά με την θέση της συσκευής στο σύστημα των εξισώσεων. Η σύνταξη των εντολών για την περιγραφή του κυκλώματος και των αναλύσεων είναι η εξής:

- 1) Αντίσταση, R <όνομα> <+> <-> <τιμή>
- 2) Πυκνωτής, C <όνομα> <+> <-> <τιμή>
- 3) Πηνίο, L <όνομα> <+> <-> <τιμή>
- 4) Τρανζίστορ Mosfet Τύπου n, Mn <όνομα> <D> <G> <S> L=<τιμή> W=<τιμή>
K=<τιμή> Vt=<τιμή>
- 5) Τρανζίστορ Mosfet Τύπου p, Mp<όνομα> <D> <G> <S> L=<τιμή> W=<τιμή>
K=<τιμή> Vt=<τιμή>
- 6) όπου <+> ή <-> το όνομα του θετικού και του αρνητικού κόμβου αντίστοιχα, όπου <D> <G> <S> είναι το όνομα του ακροδέκτη της υποδοχής, την πύλης, της πηγής και του σώματος του τρανζίστορ αντίστοιχα, όπου L=<τιμή> W=<τιμή> είναι το μήκος και το πλάτος του καναλιού του τρανζίστορ αντίστοιχα, όπου Vt=<τιμή> είναι η τάση κατωφλίου
- 7) όπου K=<τιμή> είναι κατασκευαστική παράμετρος διαγωγιμότητας
- 8) .Tran < χρονικό βήμα> <χρόνος τερματισμού>
- 9) περιγράφει το βήμα και την διάρκεια της μεταβατικής ανάλυσης.
- 10) .print V(<όνομα κόμβου>).... V(<όνομα κόμβου>)
- 11) Αυτήν η εντολή τυπώνει τα τιμές των τάσεων το κόμβων που ανφέρονται σε ένα αρχείο και στην
- 12) έξοδο γραφικών.
- 13) .Dc <όνομα κόμβου> <αρχική τιμή> <τελική τιμή> <βήμα>
- 14) Περιγράφει την DC Sweep ανάλυση , όπου το <όνομα κόμβου> είναι μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται η ανάλυση.

5.3 Γραφική απεικόνιση

Για την γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται το πρόγραμμα GNUPLOT. Για την επικοινωνία του προσομοιωτή με το πρόγραμμα γραφικής απεικόνισης χρησιμοποιείται ένα Pipe (unix) και μέσω αυτού γίνεται η επικοινωνία. Στο σύστημα γραφικής απεικόνισης δίνεται ως είσοδος ένα αρχείο με τα δεδομένα προς απεικόνιση σε στήλες. Η πρώτη στήλη αποτελεί τα δεδομένα ως προς τα οποία γίνεται η γραφική απεικόνιση (Εξαρτημένη μεταβλητή) και οι υπόλοιπες είναι τα δεδομένα που θα αποτελέσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή. Κάθε στήλη μετά την πρώτη είναι και μία καινούργια κυματομορφή. Μία ενδεικτική υλοποίηση είναι η παρακάτω:

```
// struct Plot * HeadList -> Αυτήν η λίστα διατηρεί όλες τις μεταβλητές του
κυκλώματος που πρόκειται να αναπαρασταθούν στην έξοδο γραφικών.
//char * Name -> Όνομα του αρχείου από το οποίο θα διαβάζονται τα δεδομένα

void GNUPlotFile ( char * Name , struct Plot * HeadList )
{

    struct Plot * Node ;

    int i = 2 ;
    char Command1 [100] ;
    char Command2 [100] ;
    char String[10] ;

    //άνοιξε ένα pipe με το πρόγραμμα gnu-plot
    FILE * gnuplotPipe = popen ("gnuplot -persistent", "w");

    for ( Node = HeadList -> NxtNode ; Node != NULL ; Node = Node -> NxtNode )
    {

        //εντολή 1->Άνοιξε ένα παράθυρο με αναγνωριστικό i
        strcpy ( Command1, "set term wxt " ) ;
        sprintf (String , "%d" , i) ;
        strcat (Command1 , String ) ;
        strcat (Command1 ,Command3);
        strcat (Command1 , "\n" ) ;
    }
}
```

```

//εντολή2 -> σχεδίαση την κυματομορφή χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της
//πρώτης στήλης σε συνάρτηση με την i
sprintf (String , "%d" , i) ;
strcpy ( Command2, "plot \"\" ) ;
strcat (Command2 , Name ) ;
strcat(Command2 , "\" using 1:") ;
strcat (Command2 , String ) ;

strcat(Command2 , Node ->Node) ;
strcat(Command2 , " with lines \n") ;

//γράψε τις εντολές στο pipe
fprintf(gnuplotPipe, "%s \n", Command1);
fprintf(gnuplotPipe, "%s \n", Command2);

fflush(gnuplotPipe);

i++;
}

fprintf(gnuplotPipe,"exit \n");
pclose(gnuplotPipe);
}

```

5.4 Δημιουργία και επίλυση συστήματος

Η δημιουργία του συστήματος είναι μία ευθεία διαδικασία κατά την οποία το αποτύπωμα κάθε συσκευής αποτιμάται ανάλογα με την κατηγορία στην οποία ανήκει. Από την άλλη μεριά η επίλυση του συστήματος είναι μία πιο πολύπλοκη διαδικασία. Μία ενδεικτική υλοποίηση επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων για ανάλυση σταθερού ρεύματος(Dc analysis) βρίσκεται στο APPENDIX κεφάλαιο 3.

Μία εναλλακτική υλοποίηση θα μπορούσε να είναι, η δημιουργία του πίνακα με τα γραμμικά στοιχεία έξω από την μέθοδο του Νεύτωνα, μία φορά και να προστίθεται με τον πίνακα που έχει το αποτύπωμα των μη γραμμικών στοιχείων μέσα στην μέθοδο του Νεύτωνα.

Όσον αφορά την μεταβατική ανάλυση η μέθοδος του Νεύτωνα παραμένει η ίδια με την

διάφορα ότι πλέον το αποτύπωμα των δυναμικών συσκευών πρέπει να αποτιμάται με την μέθοδο Forward Euler και να παραμένει ίδιο καθόλη την διάρκεια της επίλυσης του συστήματος.

5.5. Παρατηρήσεις και Παραδείγματα χρήσης

Όσον αφορά την μέθοδο του Νεύτωνα σημαντικό ρόλο παίζουν οι συνθήκες τερματισμού. Η πρώτη συνθήκη τερματισμού, όπως έχει επισημανθεί στο τρίτο κεφάλαιο, παράγραφος 3.4.5, είναι $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq T_{rel} * \|x^{(0)}\| + T_{abs}$. Μία καλή τιμή για το T_{rel} είναι 0.001 και για το T_{abs} 0.001 για τις τάσεις και 0.000001 για το ρεύμα. Η μορφή της δεύτερης συνθήκης είναι $\|f(x^{(k)})\| \leq T_{rel} * \|f(x^{(0)})\| + T_{abs}$ με τις τιμές για το T_{rel} και T_{abs} να είναι οι ίδιες με πριν.

Η σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι δύο συνθήκες είναι πολύ σημαντική. Πρώτα εφαρμόζεται η συνθήκη τερματισμού που κάνει έλεγχο του μεγέθους του βήματος και μετά η συνθήκη που κάνει έλεγχο του κατά πόσο κοντά είναι η λύση σε σχέση με την πραγματική. Θα μπορούσε να χρησιμοποιείται μόνο η πρώτη συνθήκη, αλλά το να έχει γίνει το μέγεθος του βήματος αρκετά μικρό μπορεί να σημαίνει στην μία διάσταση ότι η κλίση της συνάρτησης είναι σχεδόν κάθετη και όχι απαραίτητα ότι βρέθηκε η λύση, γι'αυτό χρησιμοποιείται και η άλλη συνθήκη, η οποία μπορεί να επιβεβαιώσει η να απορρίψει την υποψήφια λύση.

Ένα πολύ σημαντικό θέμα, είναι η ταλάντωση (oscillation) κατά την διάρκεια της εφαρμογής της μεθόδου του Νεύτωνα (οι λόγοι που συμβαίνει έχουν εξηγηθεί στην παράγραφο 3.4.3.1). Πρώτα απ' όλα το φαινόμενο της ταλάντωσης είναι ένα τυχαίο γεγονός. Δεύτερον είναι αρκετά συχνό φαινόμενο κατά την διάρκεια της DC ανάλυσης και τόσο σημαντικό, έτσι ώστε συχνά να παρεμποδίζει την σύγκλιση της μεθόδου. Η ταλάντωση μπορεί να συμβαίνει γύρω από το σημείο της λύσης ή γύρω από ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο. Μπορεί να είναι μεγάλη σε σχέση με την πρώτη συνθήκη τερματισμού ή μικρή.

Είναι λογικό να υποθέσουμε, ότι αν η ταλάντωση συμβαίνει μέσα στα όρια της πρώτης συνθήκης και ικανοποιεί και την δεύτερη, τότε μπορεί κατά την διάρκεια της DCsweep ανάλυσης να παρουσιάζεται ένας κυματισμός στην χαρακτηριστική καμπύλη μεταφοράς.

Αυτό που παρατήρησα, κοιτάζοντας έναν περιορισμένο αριθμό από διαφορετικά παραδείγματα αλλά δοκιμασμένο για πολλές διαφορετικές τιμές εισόδου, είναι ότι στις διαδοχικές λύσεις που μου δίνει η μέθοδος, σπάνια τυχαίνει η ταλάντωση να είναι εντός ορίων με βάση πάντα τους περιορισμούς που περιγράφηκαν στην πρώτη παράγραφο. Οι πιθανότητες σύγκλισης μπορούν να βελτιωθούν χαλαρώνοντας τους περιορισμούς στις συνθήκες τερματισμού, με αντάλλαγμα βέβαια

την ακρίβεια της λύσης. Να πω όμως ότι, σε καμία περίπτωση η παραπάνω παρατήρηση δεν αντικαθιστά εξειδικευμένες μεθόδους αντιμετώπισης του φαινομένου της ταλάντωσης. Μια ακόμα διαισθητική παρατήρηση βασίζεται στην υπόθεση ότι εφόσον με μία αυστηρή βηματική στρατηγική η απόσταση ανάμεσα στις διαδοχικές λύσεις είναι μικρή τότε και η απόσταση ανάμεσα στις διαδοχικές λύσεις μία ταλάντωσης είναι και αυτήν μικρή. Βέβαια το αντίτιμο είναι ότι έτσι δεν εκμεταλλευόμαστε τον τετραγωνικό ρυθμό σύγκλισης της μεθόδου.

Ακόμα είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι κατά την διάρκεια της DcSweep ανάλυσης χρησιμοποιείται ως μαντεψιά η λύση στο προηγούμενο βήμα, αλλά, **δεν υπάρχει συσσώρευση σφάλματος**, καθώς η κάθε λύση εξετάζεται για την ορθότητά της σε σχέση με την πραγματική λύση. Τέλος να πω ότι η ιδιαιτερότητα στην υλοποίηση της επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων, είναι ότι αν δεν συγκλίνει σε μία λύση η μέθοδος του Νεύτωνα, μπορεί να σημαίνει ότι πραγματικά δεν συγκλίνει ή ότι υπάρχει προγραμματιστικό λάθος. Έτσι πρέπει να δοκιμάζονται αρκετά διαφορετικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1:

```
VIN 1 0 5
VDD 3 0 5
MN1 2 1 0 0 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.02 Vt = 0.6
Mp2 2 1 3 3 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.01 Vt = -0.6
.Method LU
.print V(2)
```

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται βηματική στρατηγική και οι συνθήκες τερματισμού είναι όπως αναφέρθηκε παραπάνω και με αρχική συνθήκη 0 τότε οι διαδοχικές λύσεις για την εύρεση της τελικής λύσης είναι:

```
-0.34471481902383993567
-0.04843817410622290598
0.24367326666694993920
-0.15613462303498190642
0.03888781046699420207
-0.06775680567692553280
0.04858045119569420062
```

```
-0.04353568143519169487
0.03284322522232694525
-0.02703867428588172667
0.02041977310903435316
-0.01563721999648659891
0.01120269242803395397
-0.00578597513651655116
-0.00001264410257549476
-0.00000152271312859019
```

Στην περίπτωση όπου δεν χρησιμοποιείται βηματική στρατηγική το αποτέλεσμα είναι:

```
-10.00000000000000000000
-3.83790364170806608257
-0.97517293268696847441
-0.09618444462484897206
-0.00112750749360118340
-0.00000867747938909029
-0.00000152271103148839
```

Σε αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι υπάρχει επιτυχία σύγκλισης, και δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της ταλάντωσης. Επίσης το αποτέλεσμα στις δύο περιπτώσεις αλλάζει μετά από εντέκατο ψηφίο μετά την υποδιαστολή, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι το αποτέλεσμα είναι μία προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Να πούμε ότι έχουν ληφθεί υπόψη και τυχόν διαρροές στο κύκλωμα συνδέοντας από τον κάθε κόμβο στην γείωση μία μεγάλη αντίσταση (παράγραφος 3.3).

Παράδειγμα 2:

```
VIN 1 0 2
VDD 3 0 5
MN1 2 1 0 0 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.02 Vt = 0.6
Mp2 2 1 3 3 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.01 Vt = -0.6
.Method LU
.print V(2)
```

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται βηματική στρατηγική και οι συνθήκες τερματισμού είναι όπως αναφέρθηκε παραπάνω και με αρχική συνθήκη 0 τότε οι διαδοχικές λύσεις σε πλήθος 10000000000 επαναλήψεων για την εύρεση της τελικής λύσης είναι:

4.72097399992285726711
4.80651347535324191540
4.69812215781613762289
4.86624687553869694767
4.72097399992285726711
4.80651347535324191540
4.69812215781613762289
4.86624687553869694767
4.72097399992285726711
4.80651347535324191540
4.69812215781613762289
4.86624687553869694767
4.72097399992285726711
4.80651347535324191540
4.69812215781613762289
4.86624687553869694767
4.72097399992285726711
4.80651347535324191540

Στην περίπτωση όπου δεν χρησιμοποιείται βηματική στρατηγική το αποτέλεσμα είναι:

-5.74684157784484561660
-1.56924835915046245738
1.63175816195509426620
210.48338221718674390104
-127.36192236397118904279
-77.14913144748011575302
-44.93719878976938275628
-24.85181664672171564234
-12.77966945123858266697
-5.74684157784484561660
-1.56924835915046245738
1.63175816195509426620

210.48338221718674390104
-127.36192236397118904279
-77.14913144748011575302
-44.93719878976938275628
-24.85181664672171564234
-12.77966945123858266697
-5.74684157784484561660

Στην ίδια περίπτωση με την πρώτη, με την διαφορά ότι για την πρώτη συνθήκη βάζουμε $T_{abs}=0.1$ και για την δεύτερη $T_{abs} = 0.01$ επιτυγχάνεται σύγκλιση.

-0.32166939287458096164
-0.64030324958506590338
-0.40636291014916792186
-0.19279943226985968296
-0.02922656876527540346
0.03070976369395442968
-0.02225518118669869011
0.01200214817193476918
0.05552155598858801722
0.16038003748196721920
0.29250275124920827041
0.45192672307845882518
0.64261174786373342904
0.86897480629774181971
1.13477086592453835223
1.45824371398192664806
1.98265256297165448629
2.51257892757256051652
3.04608732386089631206
3.41268188246670867159
3.73899971981710699254
4.03641679845355838552
4.30546148238661263719
6.09127320149016959761
5.81077204139232073032

```
5.54270577079098636375
5.29036586696562594057
5.05915565354528418140
4.85929083337892020467
4.71733740364934917011
4.81595157885319746782
```

Σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμαι την ύπαρξη ταλάντωσης. Στην πρώτη περίπτωση η ταλάντωση είναι μικρή αλλά δεν επαρκεί για να περάσει την πρώτη συνθήκη τερματισμού. Στην δεύτερη περίπτωση με την απουσία βηματικής στρατηγικής οι ταλάντωση γίνεται απαγορευτικά μεγάλη. Στην Τρίτη περίπτωση, η οποία είναι η πρώτη με την διαφορά ότι χαλαρώσαμε τις συνθήκες τερματισμού, η υποψήφια λύση πέρασε αυτήν την φορά τον πρώτο έλεγχο και στον δεύτερο έλεγχο επαληθεύτηκε πλέον ότι αυτήν η λύση είναι αρκετά κοντά στην πραγματική. Βέβαια αυτό δεν είναι μία πρόταση αντιμετώπισης, γιατί μπορούν να υπάρξουν έτσι σοβαρά προβλήματα ακρίβειας. Η επίδειξη έγινε περισσότερο για λόγους κατανόησης της λειτουργίας της μεθόδου και για την επισήμανση του προβλήματος της ταλάντωσης. Είναι επίσης σημαντικό να πω ότι το ίδιο ακριβώς φαινόμενο μπορεί να βρεθεί και κατά την διάρκεια της Dcsweep ανάλυσης. Η διαφορά όμως στην πιθανότητα σύγκλισης, έγκειται στο γεγονός ότι σε κάθε βήμα χρησιμοποιείται ως αρχική μαντεψιά η λύση στο προηγούμενο βήμα. Αυτό από μόνο του εγγυάται ότι η αρχική μαντεψιά θα είναι πολύ κοντά στην πραγματική λύση, όταν το βήμα είναι αρκούντως μικρό και η συνάρτηση μεταφοράς δεν αλλάζει απότομα τιμή. Τέλος να πούμε ότι η ίδια παρατήρηση ισχύει και για την μεταβατική ανάλυση.

Παράδειγμα 3

```
VIN 1 0 4.2
VDD 3 0 5
MN1 2 1 0 0 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.02 Vt = 0.6
Mp2 2 1 3 3 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.01 Vt = -0.6
.Method LU
.print V(2) V(1) V(3)
```

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται βηματική στρατηγική και οι συνθήκες τερματισμού είναι όπως αναφέρθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας και με αρχική συνθήκη εσκεμμένα απομακρυσμένη της τάξεως του 10 , η λύση δεν συγκλίνει.

Αν για την ίδια περίπτωση χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των μεταβολών πηγών η λύση είναι:

```
# CIRCUIT SIMULATOR : CHILLY PEPPER :)

# DC Analysis results are :

#V( 3 )          V( 1 )          V( 2 )
5.00E+00         4.200E+00         4.4249743573E-02
```

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί αρχική συνθήκη 0 η μέθοδος πλέον συγκλίνει και το αποτέλεσμα είναι:

```
# CIRCUIT SIMULATOR : CHILLY PEPPER :)

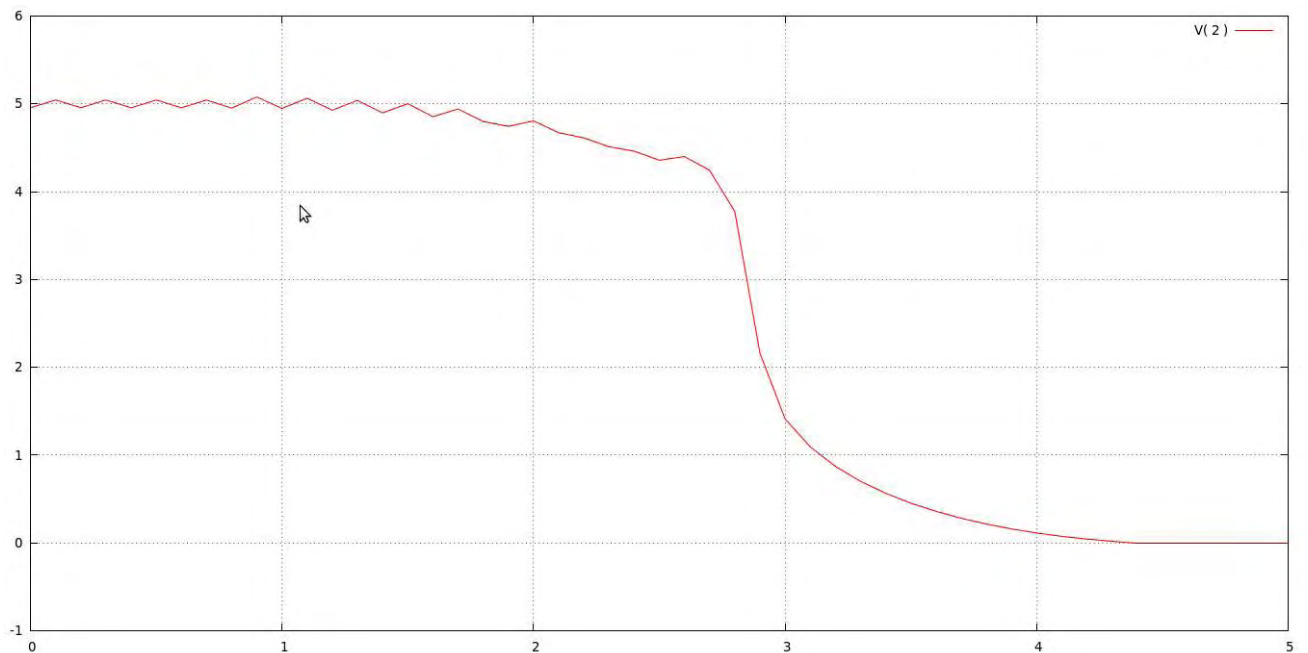
# DC Analysis results are :

#V( 3 )          V( 1 )          V( 2 )
5.0000112969E+00  4.2000175569E+00  4.4246863432E-02
```

Παράδειγμα 4

```
VIN 1 0 2
VDD 3 0 5
MN1 2 1 0 0 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.02 Vt = 0.6
Mp2 2 1 3 3 L = 0.000015 W = 0.000002 K = 0.01 Vt = -0.6
.Method LU
.Dc VIN 0.0 5 0.001
.print V(2)
```

Διάγραμμα 5.2: Βήμα DcSweep 0.1, με βηματική στρατηγική και με μέθοδο μεταβολής πηγών



Στο διάγραμμα 5.2 παρότι υπάρχει αποτυχία σύγκλισης φαίνεται μία ταλάντωση από το 0 μέχρι το 2. Αυτήν η ταλάντωση είναι γύρω από την πραγματική λύση αλλά δεν είναι αρκούντως μικρή έτσι ώστε να είναι μέσα στα πλαίσια των ελέγχων και έτσι έχουμε αποτυχία σύγκλισης. Θα μπορούσε κάλλιστα αυτήν η ταλάντωση (σε ένα άλλο παράδειγμα) που παρατηρείται να μην είναι εκτός των συνθηκών τερματισμού.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

6.1 Συμπεράσματα

Συμπερασματικά, για να μπορεί να λυθεί ένα σύστημα κυκλωματικών εξισώσεων, θα πρέπει το σύστημα να πλήρη συγκεκριμένες προϋποθέσεις, έτσι ώστε, σε πρώτη φάση να μπορούν να εφαρμοστούν αριθμητικές μέθοδοι. Οι προϋποθέσεις αυτές, έχουν ως βασική αρχή την ύπαρξη λύσης και αφορούν του είδος του συστήματος εξισώσεων. Ένα ακόμα σημαντικό σημείο, είναι ότι, εφόσον μπορούν να εφαρμοστούν αριθμητικές μέθοδοι, δημιουργούνται προβλήματα κατά την εφαρμογή τους. Τα προβλήματα αυτά, αφορούν, την ακρίβεια της λύσης και την εύρεση της, εφόσον υπάρχει. Για αυτά τα προβλήματα έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι αντιμετώπισης. Όσον αφορά τα μη γραμμικά συστήματα και όχι τα διαφορικά, αυτό που εγγυώνται οι μέθοδοι αντιμετώπισης, είναι μία καλύτερη πιθανότητα εύρεσης μιας προσεγγιστικής λύσης.

6.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Ο προσομοιωτής που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, θα μπορούσε μελλοντικά να υποστηρίξει κι' άλλες μεθόδους αντιμετώπισης προβλημάτων που προκύπτουν κατά την εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων, όπως επίσης, θα μπορούσε να υποστηρίξει και παράλληλους αλγορίθμους για διάφορες αρχιτεκτονικές, με σκοπό την επιτάχυνση των υπολογισμών.

Βιβλιογραφία

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

FARID N. NAJM .*Circuit simulation*, εκδόσεις WILEY

ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

http://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_design_automation

http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

<http://www.gnuplot.info/>

<http://flex.sourceforge.net/>

Παράρτημα Α

Δομές δεδομένων

```
#ifndef DATA_TYPES_H
#define DATA_TYPES_H

//Data structure for Resistor Capacitor and L circuit compnents
struct ComponentRLC
{
    char * Name ; //Name of circuit component
    char * PosNode ; //Name of positive Node
    char * NegNode ; //Name of Negative Node
    int PosMap ; //map positive node name to an integer
    int NegMap ; //map negative node name to an integer
    int Kapa ; //Parameter for the coordinates of the component in the matix system
    double Value ; //value of circuit component
    struct ComponentRLC * NxtNode ;
} ;

//Mosfet
struct ComponentM
{
    char * Name ; //Name of circuit component
    char * DNode ; //Name of Dnode
    char * GNode ; //Name of GNode
    char * SNode ; //Name of Snode
    char * BNode ; //Name of BNode
    double L ; // Mosfet parameter
    double W ; //Mosfet parameter
    double K ; //mosfet parameter Mn * C0x
    double Vt ; // mosfet parameter
    int Map[4] ;//Maps Names of Nodes to integers
    struct ComponentM * NxtNode ;
} ;

//Data structure for Voltage and current Sources
struct ComponentVI
```

```

{
    char *Name ; //Name of circuit components
    char *PosNode ; //Name of positive Node
    char *NegNode ; //Name of Negative Node
    int PosMap ; //Maps Name of PosNode to an integer
    int NegMap ; //Maps Name of NegNode to an integer
    int Kapa ; //Parameter for the coordinates of the component in the matix system
    double Value ; //Value of the compnent
    double DcSweepValue ; //for dcsweep algorithm
    double TransSpec[3] ; //Square Pulse Parameter ,if any
    struct ComponentVI * NxtNode ;
} ;

//Data structure for which node to be plotted
struct Plot
{
    char * Node ; //Name of Node or circuit component to be plotted
    int Map ; //Mapping number of node to be plotted
    int VOri ; // distinguish between voltage node and current of circuit ellement
    struct Plot * NxtNode ;
} ;

#endif

```

Λίστες

```

struct ComponentRLC * HeadR ; //Head pointer for Resistors
struct ComponentRLC * HeadL ; //Head pointer for inductors
struct ComponentRLC * HeadC ; //Head pointer for capacitors

struct ComponentM * HeadM ; //Head pointer for Mosfet

struct ComponentVI * HeadVIDc ; //Head pointer for voltage and current sources
//without transient options ,only dc options
struct ComponentVI * HeadVITrans ; //Head pointer for voltage and current sources
with Dc and transient options

struct Plot * HeadPlot ; // list of nodes to be plotted in screen

```

```
struct Plot * HeadPrint ; // list of nodes to be plotted in file
```

Μέθοδος του Νεύτωνα

Βηματική στρατηγική

```
void QuasiNewtonDamping (double * Xsol , double * Xk , double dim)
{
    int i = 0 ;
    double Si , Gamma = 1.3 , Kappa = 20;

    for ( i = 0 ; i < dim ; i++)
    {
        Si = (Gamma / Kappa ) * log ( 1 + Kappa * fabs ( Xsol [ i ] - Xk [ i ] ) ) ;

        if( ( Xsol [ i ] - Xk [ i ] ) < 0 )
        {
            Si = Si * (- 1 ) ;
        }

        Xsol [ i ] = Si + Xk [ i ] ;
    }
}
```

Συνθήκες τερματισμού

```
//NormFx(Volt or Curr)->Norm of the system evaluated at the current candidate so-
lution
//NormFx0(Volt or Curr)->Norm of the system evaluated at the initial guess
int NewtonLoopCheckCondNormFxV2( double NormFxCurr ,

double NormFx0Volt , double NormFx0Curr , double Trel , double TabsVolt ,

double TabsCurr )
{

    if ( ( NormFxCurr <= ( Trel * NormFx0Curr + TabsCurr ) ) && ( NormFx0Volt <=
( Trel * NormFx0Volt + TabsVolt ) ) )
    {
```

```

        return ( 1 ) ;
    }
    else
    {
        return( 0 ) ;
    }
}

//Size of step condition
//NormXnom(Volt or Curr)-> Norm of the initial guess
int NewtonLoopCheckStepCondV2 ( double * Xk1 , double * Xk , double NormXNomVolt ,
double NormXNomCurr , double Trel , double TabsVolt , double TabsCurr ,
int NumOfNodes , int dim )
{
    int i ;
    double DeltaVolt = 0.0 , DeltaCurr = 0.0 ;

    for ( i = 0 ; i < NumOfNodes ; i++ )
    {
        DeltaVolt += ( Xk1 [ i ] - Xk [ i ] ) * ( Xk1 [ i ] - Xk [ i ] ) ;
    }

    DeltaVolt = sqrt(DeltaVolt);

    for ( i = NumOfNodes ; i < dim ; i++ )
    {
        DeltaCurr += ( Xk1 [ i ] - Xk [ i ] ) * ( Xk1 [ i ] - Xk [ i ] ) ;
    }

    DeltaCurr = sqrt(DeltaCurr);

    if ( ( DeltaVolt <= Trel * NormXNomVolt + TabsVolt ) && ( DeltaCurr <= Trel *
        NormXNomCurr + TabsVolt ) )
    {
        return ( 1 ) ;
    }
    return ( 0 ) ;
}

```

```

}
//evaluate norm of the system at double * X
double EvalNormFxV2( double ** G , double * Hg , double * RhsVector , double * X
, int dim , int start , int stop )
{
    double NormFx = 0.0 ;
    double Tmp = 0.0 ;
    int i , j ;

    for ( i = start ; i < stop ; i++)
    {
        for ( j = 0 ; j < dim ; j++ )
        {
            Tmp += G [ i ] [ j ] * X [ j ] ;
        }

        Tmp = Tmp + Hg [ i ] - RhsVector [ i ] ;
        Tmp = Tmp * Tmp ;
        NormFx = NormFx + Tmp ;
        Tmp = 0.0 ;
    }

    return ( sqrt ( NormFx ) ) ;
}

```

Μέθοδος του Νεύτωνα

```

//int Counter -> maximum number of iterations
//Hg-> vector with nonleniar elements
//RhsVector -> Right hand side vector
//dim dimation of the system
int NewtonLoop ( double * Hg , double * XGuess , double ** MatrixSystem ,
double * X , double * RhsVector , int Counter , int dim )
{
    double NormFx0Volt=0.0 , NormFx0Curr =0.0, NormFxVolt=0.0 , NormFxCurr=0.0 ;
    int i , j ;
    double NormXNomVolt , NormXNomCurr ;

```

```

double NormFxCurrOld , NormFxCurrOld ;

//calculate Norm of XGuess
NormXNomVolt = 0.0 ;
NormXNomCurr = 0.0 ;
for ( i = 0 ; i < NumOfNodes ; i++ )
{
NormXNomVolt += XGuess [ i ] * XGuess [ i ] ;
}

NormXNomVolt = sqrt ( NormXNomVolt ) ;

for ( i = NumOfNodes ; i < dim ; i++ )
{
NormXNomCurr += XGuess [ i ] * XGuess [ i ] ;
}
NormXNomCurr = sqrt ( NormXNomCurr ) ;

//Create G Matrix
CreateElementStampR ( MatrixSystem , HeadR ) ;
CreateDcElementStampL ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes , NumOfV , HeadL ) ;
CreateElementStampVoltCurntSource ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes , HeadVIDc
, 0 , 0 ) ;
CreateElementStampVoltCurntSource ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes ,
HeadVITrans , 0 , 0 ) ;
//Connect from every node to ground a huge resistor
for ( i = 0 ; i < NumOfNodes ; i++ )
{
for ( j = 0 ; j < NumOfNodes ; j++ )
{
MatrixSystem [ i ] [ j ] += 0.00000001 ;
}
}
//Create Hg Matrix
CreareElementStampHg ( Hg , XGuess , HeadM ) ;

NormFx0Volt = EvalNormFxV2 ( MatrixSystem , Hg , RhsVector , XGuess , dim ,
0 , NumOfNodes ) ;
NormFx0Curr = EvalNormFxV2 ( MatrixSystem , Hg , RhsVector , XGuess , dim ,
NumOfNodes , dim ) ;

```



```

NormFxFxOld = NormFxFx0 ;
NormFxCurrOld = NormFxCurr0 ;

//internal LU Initialisation
AllocateMemoryForPYVectors ( dim ) ;

while (Counter >= 0)
{

CreateElementStampMOSFET( MatrixSystem , RhsVector , XGuess , HeadM ) ;

InitialisePYVectors( dim ) ;
SetVectorToZero ( X , dim ) ;
SetVectorToZero ( Hg , dim ) ;

LU_Decomposition ( MatrixSystem , dim ) ;
forward_substitution ( MatrixSystem , RhsVector , dim ) ;
backward_substitution ( MatrixSystem , X , dim ) ;

InitialisePYVectors( dim ) ;
SetMatrixToZero ( MatrixSystem , dim ) ;
SetVectorToZero ( RhsVector , dim ) ;

//create G
CreateElementStampR ( MatrixSystem , HeadR ) ;
CreateElementStampVoltageSource ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes ,
    HeadVIDc , 0 , 0 ) ;
CreateElementStampVoltageSource ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes ,
    HeadVITrans , 0 , 0 ) ;
//Connect from every node to ground a huge resistor
for ( i = 0 ; i < NumOfNodes ; i++ )
{
    for ( j = 0 ; j < NumOfNodes ; j++ )
    {
        MatrixSystem [ i ] [ j ] += 0.00000001 ;
    }
}
//Create Hg Matrix

```

```

CreateElementStampHg ( Hg , X , HeadM ) ;
//calculate NormFx
NormFxCurr = EvalNormFxCV2 ( MatrixSystem , Hg , RhsVector , X , dim , 0 ,
    NumOfNodes ) ;
NormFxCurr = EvalNormFxCV2 ( MatrixSystem , Hg , RhsVector , X , dim ,
    NumOfNodes , dim ) ;

if ( (NormFxCurr > NormFxCurrOld) || (NormFxCurr > NormFxCurrOld) )
{
    SetMatrixToZero ( MatrixSystem , dim ) ;
    SetVectorToZero ( RhsVector , dim ) ;
    SetVectorToZero ( Hg , dim ) ;

    QuasiNewtonDamping ( X , XGuess , dim ) ;
    //create G
    CreateElementStampR ( MatrixSystem , HeadR ) ;
    CreateElementStampV2CurntSource ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes
        , HeadVIDc , 0 , 0 ) ;
    CreateElementStampV2CurntSource ( MatrixSystem , RhsVector , NumOfNodes
        , HeadVITrans , 0 , 0 ) ;
    //Connect from every node to ground a huge resistor
    for ( i = 0 ; i < NumOfNodes ; i++ )
    {
        for ( j = 0 ; j < NumOfNodes ; j++ )
        {
            MatrixSystem [ i ] [ j ] += 0.00000001 ;
        }
    }
    //Create Hg Matrix
    CreateElementStampHg ( Hg , X , HeadM ) ;
    //calculate NormFx
    NormFxCurr = EvalNormFxCV2 ( MatrixSystem , Hg , RhsVector , X , dim , 0 ,
        NumOfNodes ) ;
    NormFxCurr = EvalNormFxCV2 ( MatrixSystem , Hg , RhsVector , X , dim ,
        NumOfNodes , dim ) ;

}

if( NewtonLoopCheckStepCondV2 ( X , XGuess , NormXNomVolt , NormXNomCurr ,
    0.001 , 0.001 , 0.0000001 , NumOfNodes , dim ) )

```

```

{
    if( NewtonLoopCheckCondNormFxV2 ( NormFxVolt , NormFxCurr , NormFx0Volt ,
        NormFx0Curr , 0.001 , 0.001 , 0.0000001 ) )
    {
        break ;
    }
}

NormFxVoltOld = NormFxVolt ;
NormFxCurrOld = NormFxCurr ;

for( i = 0 ; i < dim ; i ++ )
{
    XGuess [ i ] = X [ i ] ;
}

Counter -- ;

}

//Free Lu Variables
FreeMemForPYVectors() ;
//Check for convergence
if( Counter < 0 )
{
    return ( 0 ) ;
}

return ( 1 ) ;
}

```

DcSweep ανάλυση

```

//DcSweepNode is a pointer to the list of voltage and current sources that is going to
//'Sweeped'
void DcSweepSource (FILE * f1 , double DcSweepStart , double DcSweepStop ,

double DcSweepInc , struct ComponentVI * DcSweepNode , double ** MatrixSystem ,

```

```

double * X , double * RhsVector , int NumOfNodes , double dim )
{
    double * Hg , * XGuess , * XGuessPrev ;
    int i , j ;
    double DeviceValue ;//keeps the value of the voltage source that is going to
                        //be 'sweepled'
    double DcSweepCounter ;
    int Converged ;
    int k = 0 ;
    double DcSweepIncOld = DcSweepInc ;//keeps the standard DcSweep step

    Hg = ( double * ) malloc ( sizeof ( double ) * dim ) ;
    XGuess = ( double * ) malloc ( sizeof ( double ) * dim ) ;
    XGuessPrev = ( double * ) malloc ( sizeof ( double ) * dim ) ;

    for ( i = 0 ; i < dim ; i++ )
    {
        Hg [ i ] = 0.0 ;
        XGuess [ i ] = 0.0 ;
        XGuessPrev [ i ] = 0.0 ;
    }

    DeviceValue = DcSweepNode -> Value ;

    for ( DcSweepCounter = DcSweepStart ; DcSweepCounter <= DcSweepStop ;
          DcSweepCounter += DcSweepInc)
    {
        for ( i = 0 ; i < dim ; i++ )
        {
            Hg [ i ] = 0.0 ;
            RhsVector [ i ] = 0.0 ;
            X [ i ] = 0.0 ;
            for ( j = 0 ; j < dim ; j++)
            {
                MatrixSystem [ i ] [ j ] = 0.0 ;
            }
        }

        for ( i = 0 ; i < dim ; i++ )
        {

```

```

        XGuessPrev [ i ] = XGuess [ i ] ;
    }

    DcSweepNode -> Value = DcSweepCounter ;
    Converged = NewtonLoop ( Hg , XGuess , MatrixSystem , X , RhsVector , 1000 ,
        dim ) ;

    if( Converged == 0 )
    {
        k= k + 1 ;

        //if there is convergence problem limit the size of the step
        if(DcSweepCounter != DcSweepStart )
        {
            printf ( " During Dc sweep Newton Loop Failed to converge , %.40f\n
                ", DcSweepCounter ) ;
            DcSweepCounter -= DcSweepInc;
            DcSweepInc = DcSweepInc/2 ;
        }
        //if it is the tenth time that the step is reduced try TotalDcSweep Method
        if(k == 10)
        {
            k = 0;
            Converged = TotalDcSweep ( MatrixSystem , X , RhsVector , NumOfNodes
                , dim ) ;
            if ( Converged == 0 )
            {
                printf ( " During TotalDcsweep Newton Method Failed to converge\n " ) ;
                exit(0);
            }
        }
    }

    if( Converged == 1 )
    {
        DcSweepInc = DcSweepIncOld ;
        PrintSolutionToFile ( f1 , X , RhsVector , NumOfNodes , HeadPrint ,
            DcSweepCounter ) ;

        for( i = 0 ; i < dim ; i ++ )

```

```

        {
            XGuess [ i ] = X [ i ] ;
        }
    }else
    {
        for ( i = 0 ; i < dim ; i++ )
        {
            XGuess [ i ] = XGuessPrev [ i ] ;
        }
    }

    }

    DcSweepNode -> Value = DeviceValue ;
    free(Hg) ;
    free(XGuess) ;
}

```

Μεταβατική ανάλυση

```

void TransientAnalysis ( FILE * f1 , double FinTime , double TimeStep ,

double ** MatrixSystem , double * RhsVector , double * XGuess , int dim ,
struct Plot * HeadList )
{
    int i , j ;
    double Time ;
    double * Hg , * X ;
    int Converged ;

    Hg = ( double * ) malloc ( sizeof ( double ) * dim ) ;
    X = ( double * ) malloc ( sizeof ( double ) * dim ) ;

    for ( Time = 0 ; Time <= FinTime ; Time += TimeStep )
    {

```

```

for ( i = 0 ; i < dim ; i ++ )
{

    RhsVector [ i ] = 0.0 ;
    X [ i ] = 0.0 ;
    Hg [ i ] = 0.0 ;
    for ( j = 0 ; j < dim ; j++ )
    {
        MatrixSystem [ i ] [ j ] = 0.0 ;
    }
}

if( Time == 0 )
{
    //first time element stamps for capacitors and inductors are calculated
    // differently
    Converged = NewtonLoopTransient ( Hg , XGuess , MatrixSystem , X ,
    RhsVector , 1000 , dim , Time , 1 ) ;
}
else
{
    Converged = NewtonLoopTransient ( Hg , XGuess , MatrixSystem , X ,
    RhsVector , 1000 , dim , Time , 0 ) ;
}

if ( Converged == 0 )
{
    printf ( " Newton Loop Failed To Converge During Transient Analysis %.40f
    \n",Time ) ;
    exit(0);
}

PrintSolutionToFile ( f1 , X , RhsVector , NumOfNodes , HeadList , Time ) ;

for( i = 0 ; i < dim ; i ++ )
{
    XGuess [ i ] = X [ i ] ;
}

}

```

```
    free(X) ;  
}
```