

Μοντέλα θεωρίας παιγνίων για ανάθεση πόρων σε δίκτυα

Χατζόπουλος Δημήτρης

επιβλέποντες καθηγητές:

Κουτσόπουλος Ιορδάνης Τασιούλας Λεανδρος

5 Οκτωβρίου 2010

Περίληψη

Παραδοσιακά, τα δίκτυα σχεδιάζονταν και λειτουργούσαν σαν οντότητες με ένα συγκεκριμένο/μοναδικό στόχο. Τα συστατικά στοιχεία του δικτύου (χρήστες) ήταν παθητικά και συνεργάζονταν για το κοινό καλό του δικτύου. Πρακτικά ο κάθε χρήστης υπάκουγε στις διαταγές που δεχόταν καθώς το δίκτυο υλοποιούσε ένα καθολικό αλγόριθμο. Στις μέρες μας όμως που τα δίκτυα δικτύων (internets) είναι γεγονός, προφανώς η υπόθεση του κοινού καλού/στόχου δεν ευσταθεί καθώς σε διάφορα επίπεδα εμφανίζονται αντιχρουόμενοι στόχοι. Για παράδειγμα, στη περίπτωση της διαχείρισης δικτύων (network management) ο κάθε διαχειριστής επιθυμεί το καλό του υπο ευθύνη του δικτύου. Στη περίπτωση ενός δικτύου Ad-hoc, αποτελούμενου κυρίως από χρήστες φορητών υπολογιστών (laptops) καθένας ενδιαφέρετε για την ελαχιστοποίηση της καταναλωμένης ισχύς μπαταρίας και τη μεγιστοποίηση της ρυθμιστικής (throughput). Ένα ακόμα παράδειγμα που βρίσκεται χαμηλότερα στη σκάλα πρωτοκόλλων OSI αποτελεί ένα απλό σύστημα χρηστών 2 επι 2, όπου καθένας προσπαθεί να μεταδώσει με το μεγαλύτερο δυνατό ρυθμό εκπομπής (rate) και από τη στιγμή που δεν υπάρχει η αναγκαιότητα συγχρονισμού, αλληλοπαρεμβάλλονται με αποτέλεσμα τη μείωση του ρυθμού εκπομπής και των δύο. Όπως μπορεί να φανταστεί κανείς υπάρχουν πάρα πολλά παραδείγματα σαν τα παραπάνω, παραδείγματα στα οποία η παραδοσιακή προσέγγιση/ανάλυση αποτυγχάνει. Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης είναι αυτός που θεωρεί το δίκτυο σαν ένα μοιραζόμενο πόρο με ενεργούς χρήστες που έχουν προσωπικά συμφέροντα και συνεπώς/πιθανώς αντιχρουόμενους στόχους. Στη προσέγγιση αυτή οι χρήστες ανταγωνίζονται μεταξύ τους, αξιολογούν τη κατάσταση τους με τη βοήθεια μιας συνάρτησης οφέλους και αποφασίζουν το τρόπο δράσης, στρατηγική, τους. Σημείο κλειδί σε αυτή τη προσέγγιση είναι το κατά πόσο το όλο σύστημα θα ισορροπήσει κάπου (σημείο ισορροπίας), αν δηλαδή υπάρχει περίπτωση όλοι οι παίκτες να βρίσκονται σε μια σχετικά βέλτιστη κατάσταση, σε μια κατάσταση δηλαδή όπου σύμφωνα με τις καταστάσεις των υπολοίπων παικτών είναι αδύνατο για όλους να μετακινηθούν σε καλύτερη κατάσταση. Αυτό που εξετάζουμε επίσης είναι η ποιότητα αυτού του σημείου ισορροπίας, σε σχέση με τη βέλτιστη συνεργατική λύση. Το τμήμα της αναρχίας όπως ονομάζεται.

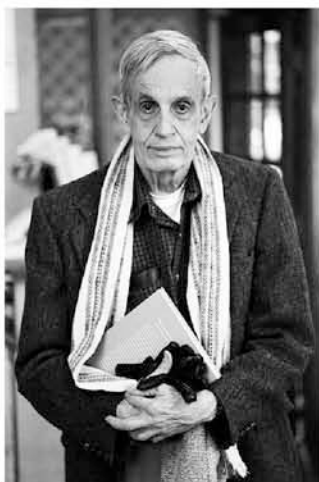
Ευχαριστίες

Επειδή αυτή η διπλωματική δεν θα έφτανε σε αυτή τη μορφή αν δεν υπήρχαν κάποιοι άνθρωποι για να με βοηθήσουν, είτε άμεσα είτε έμεσα, θα χρησιμοποιήσω αυτή τη σελίδα για να τους πώ ένα "ευχαριστώ". Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές μου Ιορδάνη Κουτσόπουλο και Λέανδρο Τασιούλα που χωρίς αυτούς μάλλον δεν θα γράφονταν αυτές οι σελίδες. Επίσης όλο το κόσμο που πήραμε μαζί τα βουνά, ήπιαμε μπύρες, είδαμε ταινίες, συζητήσαμε και φιλοσοφήσαμε τα τελευταία 5 χρόνια γιατί μου έμαθαν ότι καμία επιτυχία δεν έχει λόγο ύπαρξης αν δεν έχεις φίλους για να τη γλεντήσεις. Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το χρωστάω στην οικογένεια μου που με έμαθε να πέρνω αποφάσεις και με στηρίζει απο τότε που θυμάμαι τον εαυτό μου. Αυτές οι σελίδες είναι αφιερωμένες στην αδερφή/φίλη/συγκάτοικο μου που έχει την απίστευτη ικανότητα να με ανέχεται.

Περιεχόμενα

1	Θεωρία Παιγνίων	5
1.1	Ιστορική αναδρομή	5
1.2	ορολογία	6
1.2.1	Υπόθεση της λογικής επιλογής	6
1.2.2	Κινήσεις (actions)	6
1.2.3	Προτιμήσεις και συνάρτηση οφέλους/κόστους	6
1.2.4	Κατάταξη παικτών σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους	7
1.2.5	Προφίλ κινήσεων (action profile)	7
1.2.6	Σημείο ισορροπίας Nash (Nash equilibrium)	7
1.2.7	Στρατηγική (Strategy)	7
1.2.8	Προφίλ στρατηγικών (Strategy profile)	7
1.3	Παίγνιο (Game)	8
1.3.1	Τέλεια πληροφόρηση (Perfect information)	8
1.3.2	Αναπαράσταση παιγνίων	8
1.3.3	Κατηγοριοποίηση παιγνίων	8
1.4	Το Τμήμα της Αναρχίας (The Price of Anarchy)	9
1.5	Το Τμήμα της Σταθερότητας (The Price of Stability)	9
2	Ασύρματα Δίκτυα	10
2.1	Κανάλι (Channel)	10
2.1.1	Χωρητικότητα καναλιού(Channel Capacity)	10
2.1.2	Γκαουσιανό κανάλι(Gaussian Channel)	10
2.1.3	Ντετερμινιστικό κανάλι(Deterministic Channel)	11
2.2	Μοντέλο διάδοσης	12
2.2.1	Μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου	12
2.3	Δρομολόγηση(Routing)	12
2.4	Έλεγχος ισχύος (Power control)	12
3	Θεωρία Παιγνίων και Θεωρία πληροφορίας	13
3.1	ϵ - interference channel game	13
3.2	Θεώρημα - Χαρακτηρισμός C_{NE} για ντετερμινιστικό κανάλι	14
3.3	Θεώρημα - Χαρακτηρισμός $C_{NE}(1)$ για γκαουσιανό κανάλι	14
4	2 * 2 Interference Channel	15
4.1	Symmetric Channel	16
4.2	Non-symmetric Channel	18
4.3	Χώρος καταστάσεων	18
5	2 * 2 * 2 Interference and Routing Problem	20
5.1	Routing problem	20
5.1.1	Αλτρουιστική προσέγγιση	21
5.1.2	Εγωιστική προσέγγιση	23
5.2	Routing and Interference problem	26
5.2.1	Αλτρουιστική προσέγγιση	26
5.2.2	Εγωιστική προσέγγιση	27
6	Παράρτημα 1: Ντετερμινιστικό κανάλι	30

7	Παράρτημα 2: Απόδειξη Χωρητικότητας Ντετερμινιστικού καναλιού	33
7.1	Απόδειξη χωρητικότητας μιας ντετερμινιστικής ζεύξης	33
7.2	Απόδειξη χωρητικότητας ντετερμινιστικού δικτύου με δύο πομπούς και ένα δέκτη (superposition)	34
7.3	Υπολογισμός χωρητικότητας ντετερμινιστικού δικτύου	35



Σχήμα 1: John F.Nash

1 Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων είναι ένα μαθηματικοποιημένο εργαλείο που μας βοηθάει να μοντελοποιήσουμε και να κατανοήσουμε φαινόμενα στα οποία αλληλεπιδρούν οντότητες (παίκτες) σύμφωνα με κάποιους κανόνες.

1.1 Ιστορική αναδρομή

Κάποια στοιχεία της θεωρίας παιγνίων πρωτοεμφανίστηκαν το 18ο αιώνα, αλλά η ανάπτυξή της έγινε γύρω στο 1920 από το μαθηματικό Emile Borel (1871 - 1956) και από τον πολυμαθή John von Neumann (1903 - 1957). Ένα καθοριστικό γεγονός στην ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων ήταν η έκδοση του βιβλίου *Theory of Games and Economic Behavior* 1944 από τους von Neumann και Oskar Morgenstern, ένα βιβλίο που έθεσε τις βάσεις του πεδίου. Στις αρχές του 1950 ο John F.Nash εισήγαγε μια έννοια κλειδί μέσω της οποίας όρισε την ανάλυση της θεωρίας διαπραγματεύσεων (bargain theory), η έννοια αυτή είναι το σημείο ισορροπίας Nash. Μετά τη δουλειά του Nash μοντέλα βασισμένα στη θεωρία παιγνίων άρχισαν να χρησιμοποιούνται σε πολλούς διαφορετικούς τομείς όπως τα οικονομικά και οι πολιτικές επιστήμες. Επίσης οι ψυχολόγοι προσπάθησαν μέσω της θεωρίας παιγνίων να αναλύσουν πώς οι άνθρωποι αντιδρούν σε διάφορες πειραματικές καταστάσεις, παίγνια. Κατά τη δεκαετία του 1970 η θεωρία παιγνίων χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο στην εξελικτική βιολογία ενώ αργότερα μέθοδοι της κυριάρχησαν στη μικροοικονομία και σε πολλούς άλλους τομείς των οικονομικών και των κοινωνικών επιστημών. Το 1994 οι John C. Harsanyi (1920 - 2000), Reinhard Selten (1930 -) και John F.Nash τιμήθηκαν με το βραβείο nobel στις οικονομικές επιστήμες



Σχήμα 2: John von Neumann

1.2 ορολογία

1.2.1 Υπόθεση της λογικής επιλογής

Η θεωρία της λογικής επιλογής είναι κομμάτι πολλών μοντέλων της θεωρίας παιγνίων. Η θεωρία αυτή σχετίζεται με τη λογική που κρύβεται πίσω από τις αποφάσεις που παίρνει κάθε παίκτης και υπονοεί ότι κάθε φορά αποφασίζεται η βέλτιστη κίνηση/αντίδραση, σύμφωνα με κάποιες προσωπικές προτιμήσεις. Προσοχή, η λογική επιλογή έγκειται στη συνέπεια των αποφάσεων αναφορικά με τις προτιμήσεις και όχι με τις ίδιες τις προτιμήσεις.

1.2.2 Κινήσεις (actions)

Σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί ένα σύνολο A που εμπεριέχει όλες τις δυνατές κινήσεις/αποφάσεις που μπορεί να πάρει. Κάθε στιγμή σύμφωνα με τη κατάσταση που βρίσκεται ο παίκτης, λόγω των περιορισμών του παιχνιδιού, επιλέγει τη βέλτιστη κίνηση/απόφαση από ένα σύνολο. Υποθέτουμε ότι ο παίκτης γνωρίζει όλες τις δυνατές αποφάσεις που μπορεί να πάρει.

1.2.3 Προτιμήσεις και συνάρτηση οφέλους/κόστους

Όσον αφορά τις προτιμήσεις, υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης όταν πρέπει να αποφασίσει ανάμεσα σε 2 κινήσεις ξέρει ποιά τον συμφέρει περισσότερο και αποφασίζει αυτή. Επίσης αν η κίνηση a προτιμάτε από τη β και η β από τη γ τότε σίγουρα η a προτιμάτε από τη γ , δεν υπάρχει κανένας άλλος περιορισμός. Για το λόγο αυτό μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους παίκτες σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους. Ένα θέμα που προκύπτει είναι το πώς αναπαριστάντε οι προτιμήσεις ενός παίκτη. Ένας απλός και προφανής τρόπος είναι να δηλωθεί η προτιμητέα κίνηση για κάθε ενδεχόμενη κατάσταση, αυτός ο απλός όμως τρόπος δεν κλιμακώνει. Αυτό που γίνεται σε αυτή τη περίπτωση είναι να αναπαραστήσουμε τις προτιμήσεις χρησιμοποιώντας συναρτήσεις οφέλους/κόστους οι οποίες κάθε προτίμηση την αντιστοιχίζουν σε ένα πραγματικό αριθμό έτσι ώστε η προτιμητέα κίνηση να λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή από τις υπόλοιπες.

1.2.4 Κατάταξη παικτών σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους

Ένας τρόπος να κατηγοριοποιήσουμε τους παίκτες είναι με βάση το πόσο νοιάζονται για τους υπόλοιπους παίκτες.

Κακόβουλος : ο παίκτης που σαν στόχο έχει να βλάψει τους υπόλοιπους παίκτες.

Εγωιστής : ο παίκτης που ενδιαφέρεται μόνο για τη βελτιστοποίηση της κατάστασης του (μεγιστοποίηση του κέρδους του)

Αλτρουιστής : ο παίκτης που νοιάζεται για το κοινό καλό

β -αλτρουιστής : ο παίκτης που νοιάζεται για τον εαυτό του αλλά και β βορές για το κοινό καλό, όπου $0 < \beta < 1$

1.2.5 Προφίλ κινήσεων (action profile)

Το σύνολο που περιλαμβάνει τις καταστάσεις στις οποίες βρίσκονται όλοι οι παίκτες μια δεδομένη χρονική στιγμή.

1.2.6 Σημείο ισορροπίας Nash (Nash equilibrium)

Το σημείο ισορροπίας Nash είναι ένα προφίλ κινήσεων με την ιδιότητα ότι κανένας παίκτης δε μπορεί να αυξήσει τη συνάρτηση οφέλους του μετακινούμενος σε άλλη κατάσταση. Πολλές φορές είναι αποδοτικότερη η χρήση η-σημείου ισορροπίας Nash όπου κανένας παίκτης δε μπορεί να αυξήσει τη συνάρτηση οφέλους του παραπάνω από η.

1.2.7 Στρατηγική (Strategy)

Η στρατηγική ενός παίκτη είναι ένα πλήρες πλάνο από τις κινήσεις που κάνει σε κάθε ενδεχόμενη κατάσταση, ουσιαστικά η στρατηγική καθορίζει τη συμπεριφορά του. Υπάρχουν τρία είδη στρατηγικών:

Καθαρές (pure) : η στρατηγική που καθορίζει πλήρως (ντετερμινιστικά) το πως θα παίξει ο παίκτης. Δηλώνει δηλαδή ρητά τι κίνηση θα κάνει ο παίκτης σε κάθε περίπτωση.

Μεικτές (mixed) : η στρατηγική που αναθέτει μια πιθανότητα σε κάθε καθαρή στρατηγική. Σε αυτή τη περίπτωση ο παίκτης ακολουθεί με τυχαίο τρόπο μια καθαρή στρατηγική.

Καθ' ολοκληρίαν μεικτές (totally mixed) : η μικτή στρατηγική που αναθέτει μη μηδενική πιθανότητα σε κάθε καθαρή στρατηγική.

1.2.8 Προφίλ στρατηγικών (Strategy profile)

Το σύνολο που περιλαμβάνει τις στρατηγικές που ακολουθούν όλοι οι παίκτες μια δεδομένη χρονική στιγμή

1.3 Παίγνιο (Game)

Ένα παίγνιο αποτελείται από τα εξής:

- ένα σύνολο παικτών
- ένα σύνολο κινήσεων για κάθε παίκτη
- προτιμήσεις επί των κινήσεων του κάθε παίκτη, δηλαδή μια συνάρτηση οφέλους/κόστους για κάθε παίκτη

1.3.1 Τέλεια πληροφόρηση (Perfect information)

Ένα παίγνιο λέμε ότι έχει τέλεια πληροφόρηση αν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν όλες τις κινήσεις που έχουν γίνει.

1.3.2 Αναπαράσταση παιγνίων

κανονική (normal) : στη κανονική μορφή τα παίγνια αναπαρίστανται με ένα πίνακα που δείχνει τους παίκτες, τις στρατηγικές και τις συναρτήσεις κόστους. Σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί μια γραμμή/στήλη του πίνακα. Αυτή η αναπαράσταση χρησιμοποιείται σε παίγνια όπου οι παίκτες δρουν ταυτόχρονα, η τουλάχιστον χωρίς να ξέρει κανείς τι κίνηση αποφάσισαν οι υπόλοιποι.

επεκταμένη (extensive) : στην επεκταμένη μορφή τα παίγνια αναπαρίστανται σε μορφή δέντρου όπου κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μια απόφαση για ένα παίκτη, συνήθως το όνομα του παίκτη φαίνεται δίπλα στο κόμβο. Αυτή η αναπαράσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε σε παίγνια όπου οι παίκτες αποφασίζουν ο ένας μετά τον άλλο είτε ταυτόχρονα. Είναι επίσης κατάλληλα για παίγνια χωρίς τέλεια πληροφόρηση.

1.3.3 Κατηγοριοποίηση παιγνίων

Τα παίγνια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν με διάφορα κριτήρια σύμφωνα με κάποια χαρακτηριστικά.

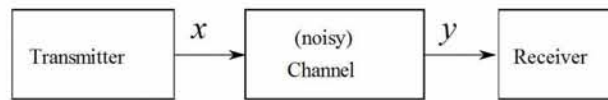
- Συνεργατικά - μη συνεργατικά (cooperative and non-cooperative)
- Συμμετρικά - μη συμμετρικά (symmetric and asymmetric)
- Ταυτόχρονα - ακολουθιακά (simultaneous and sequential)
- Τέλειας πληροφόρησης - μη τέλειας πληροφόρησης (perfect and imperfect information)
- Μηδενικού αθροίσματος - μη μηδενικού αθροίσματος (zero-sum and non-zero-sum)

1.4 Το Τίμημα της Αναρχίας (The Price of Anarchy)

Το τίμημα της αναρχίας είναι μια ιδέα αρκετά πρόσφατη και λόγος ύπαρξής της είναι η αξιολόγηση της ποιότητας των σημείων ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα το τίμημα της αναρχίας είναι ο λόγος της τιμής της συνάρτησης κόστους στο χειρότερο σημείο ισορροπίας προς τη τιμή της συνάρτησης κόστους σε περίπτωση συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Προφανώς η ιδανικότερη τιμή για το τίμημα της αναρχίας είναι το 1 και όσο αυτή μεγαλώνει τόσο εμφανέστερη γίνεται η ανάγκη για συνεργασία μεταξύ των παικτών.

1.5 Το Τίμημα της Σταθερότητας (The Price of Stability)

Ένα παίγνιο με πολλά σημεία ισορροπίας έχει μεγάλο τίμημα αναρχίας και στη περίπτωση που μόνο σε ένα από τα σημεία ισορροπίας η συνάρτηση κόστους πέρνει μεγάλη τιμή ενώ στα υπόλοιπα είναι κοντά στη βέλτιστη. Το τίμημα της σταθερότητας υπάρχει για να μπορούν να διαχωριστούν τα παίγνια με λίγα μη βέλτιστα σημεία ισορροπίας από αυτά όπου όλα τα σημεία ισορροπίας τους είναι μη βέλτιστα. Το τίμημα της σταθερότητας ισούται με το λόγο της τιμής της συνάρτησης κόστους στο καλύτερο σημείο ισορροπίας και τη τιμή της συνάρτησης κόστους σε περίπτωση συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Όπως μπορεί κανείς να δει το τίμημα της σταθερότητας ταυτίζεται με το τίμημα της αναρχίας στα παίγνια με ένα μόνο σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 3: Communication Channel

2 Ασύρματα Δίκτυα

2.1 Κανάλι (Channel)

Κανάλι: Το μέσο επικοινωνίας μεταξύ ενός πομπού και ενός δέκτη. Ο πιο συνηθισμένος διαχωρισμός των καναλιών είναι σε ενσύρματα και σε ασύρματα.

2.1.1 Χωρητικότητα καναλιού(Channel Capacity)

Χωρητικότητα Καναλιού: Ο μέγιστος ρυθμός εκπομπής (rate) πληροφορίας με ασυμπτωτικά μηδενική πιθανότητα σφάλματος.

Σε αντίθεση με τα ενσύρματα δίκτυα όπου η χωρητικότητα του καναλιού είναι εύκολα υπολογίσιμη και εξαρτάται μόνο από το είδος του σύρματος (ίνα, χαλκός , κτλ), ο υπολογισμός της χωρητικότητας ενός ασύρματου καναλιού είναι πολύπλοκο ζήτημα και εξαρτάται από φαινόμενα όπως ο θόρυβος και οι παρεμβολές από άλλους χρήστες που χρησιμοποιούν το ασύρματο μέσο.

Τη δεκαετία του 1940 ο Claude E. Shannon με τη δημοσίευση του *The mathematical Theory of Communication* θεμελίωσε τη θεωρία πληροφορίας και μέσω αυτής όρισε μαθηματικά τη χωρητικότητα ενός καναλιού ως το μέγιστο της αμοιβαίας πληροφορίας με βάση όλα τα δυνατά αλφάβητα εισόδου. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που γνωρίζουμε τη χωρητικότητα μιας ζεύξης για πάνω από 60 χρόνια ο υπολογισμός της χωρητικότητας ενός δικτύου είναι ανοιχτό πρόβλημα καθώς έχουμε καταφέρει να την υπολογίσουμε μόνο προσεγγιστικά.

Εκτός από το μέσο τα ασύρματα διαφέρουν από τα ενσύρματα δίκτυα σε δυο βασικά πράγματα. Κάθε φορά που ένας πομπός εκπέμπει ένα σήμα, αυτό δεν λαμβάνεται μόνο από τον επιθυμητό δέκτη αλλά και από όλους τους γείτονες του (broadcast) . Επίσης το λαμβανόμενο σήμα ενός δέκτη δεν αποτελείται κατ'ανάγκη μόνο από ένα σήμα αλλά μπορεί να είναι συνάρτηση των σημάτων που στέλλουν οι γείτονες του (superposition) .

2.1.2 Γκαουσιανό κανάλι(Gaussian Channel)

Σύμφωνα με το τύπο του Shannon η χωρητικότητα μιας ζεύξης από τον πομπό i στο δέκτη j είναι:

$$C_{ij} = \log\left(1 + \sum_{l \in N_j} \frac{G_{il} P_{il}}{(G_{il} P_{il}) + N}\right)$$

Όπου N_i το σύνολο των πομπών εκτός του i που ακούει ο δέκτης i , P_{ik} η ισχύς με την οποία εκπέμπει ο δέκτης k , N η ισχύς του θορύβου στο δέκτη i και G_{ik} μία πολλαπλασιαστική σταθερά (καθαρός αριθμός) που δείχνει πως αλλάζει (μειώνεται) η ισχύς λόγω του καναλιού.

2.1.3 Ντετερμινιστικό κανάλι(Deterministic Channel)

Η χωρητικότητα ενός δικτύου είναι άγνωστη ακόμα και για αρκετά απλές τοπολογίες δικτύων όπως για παράδειγμα ενός 2×2 γκαουσιανού καναλιού με δύο πομπές και δύο δέκτες. Η καλύτερη δυνατή προσέγγιση της χωρητικότητας αυτού του μοντέλου έχει βρεθεί από τους Han και Kobayashi το 1981. Ενώ στη γενικότερη περίπτωση μπορεί να υπολογιστεί μόνο όταν οι παρεμβολές είναι πολύ ισχυρές ή πολύ αδύναμες, στην ενδιάμεση περίπτωση μπορεί να υπολογιστεί μόνο προσεγγιστικά (within one bit). (Συνεπώς και το σύνολο των ζευγών των ρυθμών στα σημεία ισορροπίας nash θα υπολογιστούν προσεγγιστικά με απόκλιση ενός bit)

Για το λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί ένα νέο μοντέλο καναλιού το οποίο παρόλο που δεν αναπαρηστά καλύτερα το κανάλι είναι πιο εύχρηστο στον υπολογισμό της χωρητικότητας μιας και οι πράξεις που απαιτούνται είναι πολύ απλές υπολογιστικά.

Παρόλο που τα αποτελέσματα είναι προσεγγιστικά, το μοντέλο του ντετερμινιστικού καναλιού είναι πολύ χρήσιμο και χρησιμοποιείται ευρέως. Στο παράρτημα βρίσκεται αναλυτική περιγραφή.

2.2 Μοντέλο διάδοσης

2.2.1 Μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου

Το μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου χρησιμοποιείται για να προβλέψει την ισχύ του λαμβανόμενου σήματος όταν ο πομπός και ο δέκτης έχουν καθαρή, απρόσκοπτη διαδρομή οπτικής επαφής ανάμεσά τους. Το μοντέλο αυτό προβλέπει ότι η λαμβανόμενη ισχύς φθίνει ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ πομπού και δέκτη υψωμένη σε κάποια δύναμη. Η ισχύς ελεύθερου χώρου που λαμβάνεται από μια κεραία δέκτη, που απέχει από μια εκπέμπουσα κεραία πομπού απόσταση d , δίνεται από την εξίσωση ελεύθερου χώρου Friis,

$$P_r(d) = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2 L}$$

όπου P_t η μεταδιδόμενη ισχύς, $P_r(d)$ είναι η λαμβανόμενη ισχύς σε απόσταση d από το πομπό, G_t είναι η απολαβή κεραίας πομπού, G_r είναι η απολαβή κεραίας δέκτη, L είναι ο παράγοντας απωλειών συστήματος, που δεν σχετίζονται με τη διάδοση ($L \geq 1$) και λ είναι το μήκος κύματος σε μέτρα.

Είναι σαφές ότι η προηγούμενη εξίσωση δεν ισχύει για $d = 0$ γι' αυτό χρησιμοποιείται μια κοντινή απόσταση ως ένα γνωστό σημείο αναφοράς λαμβανόμενης ισχύος. Έτσι η λαμβανόμενη ισχύς $P_r(d)$ μπορεί να συσχετιστεί με την P_r στην d_0 ως εξής:

$$P_r(d) = P_r(d_0) \left(\frac{d_0}{d}\right)^2$$

2.3 Δρομολόγηση(Routing)

Δρομολόγηση(Routing): Η διαδικασία κατά την οποία επιλέγεται το μονοπάτι (ο δρόμος) που θα ακολουθήσουν τα δεδομένα μέσα σε ένα δίκτυο.

2.4 Έλεγχος ισχύος (Power control)

Έλεγχος ισχύος (Power control): Η διαδικασία κατά την οποία επιλέγεται η ισχύς με την οποία θα μεταδώσει ένας πομπός ούτως ώστε να πετύχει καλύτερη απόδοση. Η απόδοση μπορεί να αφορά διάφορες παραμέτρους όπως ο ρυθμός εκπομπής, οι παρεμβολές (αν έχουμε πομπούς που συνεργάζονται), ο χρόνος ζωής της μπαταρίας του πομπού, και άλλα.

3 Θεωρία Παιγνίων και Θεωρία πληροφορίας

Σε αυτή την ενότητα αναλύεται το 2*2 μοντέλο επικοινωνίας απο τη σκοπιά της θεωρίας πληροφορίας με εργαλεία της θεωρίας παιγνίων [8][9].

Στη περίπτωση του Γκαουσιανού καναλιού με δύο εκπομπούς και δύο παραλήπτες σκοπός του κάθε εκπομπού (\equiv παίκτη) είναι να στείλει ένα μήνυμα, με μικρή πιθανότητα σφάλματος, σε ένα συγκεκριμένο παραλήπτη σε όσο γίνεται λιγότερο χρόνο. (Δηλαδή με μεγάλο ρυθμό (rate))

Ο παίκτης i :

Στέλνει ένα μήνυμα $m_i = (b_{i1}^{(k)}, b_{i2}^{(k)}, \dots, b_{iL_i}^{(k)})$ κωδικοποιώντας το σε μπλόκ N_i συμβόλων. Ο εκπομπός του στέλνει στο μπλόκ k τα bits πληροφορίας $b_{i1}^{(k)}, b_{i2}^{(k)}, \dots, b_{iL_i}^{(k)}$ εκπέμποντας τη κωδικολέξη (codeword) $x_i = [x_i^{(k)}(1), x_i^{(k)}(2), \dots, x_i^{(k)}(N_i)]$

όπου $x_i^k = f_i(m_i^{(k)}, \omega_i^{(k)}) \in \mathcal{C}$. Στη συνέχεια ο δέκτης του λαμβάνει μια ακολουθία συμβόλων $y_i = [y_i^{(k)}(1), y_i^{(k)}(2), \dots, y_i^{(k)}(N_i)]$ μέσω του καναλιού και παρατηρώντας τα μέχρι τότε ληφθέντα σύμβολα $\{y_i^{(m)}\}_{m=1}^k$ τα αποκωδικοποιεί με βάση το κανόνα της μέγιστης πιθανότητας και κάνει μια εκτίμηση για κάθε bit πληροφορίας $b_{ij}^{(k)}$.

Το παραπάνω σενάριο επιτρέπει στο κάθε παίκτη να χρησιμοποιεί ότι μήκος μπλόκ θέλει καθώς ένας εγωιστικά σκεπτόμενος παίκτης μπορεί ανα πάσα στιγμή να αλλάξει το μήκος του μπλόκ του για να αυξήσει το κέρδος του.

Στρατηγική παίκτη i (s_i) :

Η στρατηγική κάθε παίκτη ορίζεται απο:

1. το πλήθος των bit πληροφορίας L_i
2. το μήκος των codewords N_i
3. το σύνολο όλων των codewords C_i
4. τη συνάρτηση κωδικοποίησης, η οποία είναι υπεύθυνη για την αντιστοίχιση (κάθε μπλόκ) του μηνύματος (bits) στο προς εκπομπή codeword $f_i = \{1, 2, \dots, 2^{L_i}\} \times \Omega_i \rightarrow C_i$
5. το ρυθμό (rate) του κώδικα $R_i(s_i) = L_i/N_i$

- πιθανότητα σφάλματος: $p_i^k := \frac{1}{L_i} \sum_{l=1}^{L_i} P(b_{il}^{(k)} \neq b_{il}^{(k)}), i = 1, 2$

- συνάρτηση οφέλους: $\pi_i(s_i, s_j) = \begin{cases} R_i(s_i), & p_i^k(s_i, s_j) \leq \epsilon \forall k; \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

3.1 ϵ - interference channel game

Για δεδομένο άνω όριο $\epsilon > 0$ της πιθανότητας σφάλματος κάθε παίκτης επιλέγει τη βέλτιστη στρατηγική του μέσω της συνάρτησης οφέλους. Ένα ζεύγος στρατηγικών (s_i, s_j) ονομάζεται $(1 - \epsilon)$ -αξιόπιστο αν και μόνο αν $p_i^k(s_i, s_j) \leq \epsilon \forall k$

Για ένα ϵ -game ένα ζεύγος στρατηγικών ονομάζεται σημείο ισορροπίας Nash αν και μόνο αν κανένας παίκτης δεν επιθυμεί να αλλάξει στρατηγική, δηλαδή η

συνάρτηση οφέλους του πέρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. Έπεκτώνοντας τη προηγούμενη ιδέα η -nash equilibrium ονομάζεται το σημείο απο το οποίο κανείς δε μπορεί να φύγει αυξάνοντας τη συνάρτηση οφέλους του παραπάνω απο η .

Ως χωρητικότητα του καναλιού C ορίζουμε το σύνολο όλων των ζευγών (R_i, R_j) τέτοιων ώστε $\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ όπου $\bar{\varepsilon} \geq 0$ υπάρχει ένα $(1 - \varepsilon)$ - αξιόπιστο ζεύγος στρατηγικών (s_i, s_j) που να πετυχαίνει αυτό το ζεύγος ρυθμών.

Ως περιοχή χωρητικότητας η -σημείων ισορροπίας Nash $C_{NE}(\eta)$ ορίζουμε το σύνολο όλων των ζευγών (R_i, R_j) εκ των οποίων προκύπτει ε -game και είναι ταυτόχρονα και σημεία ισορροπίας Nash. Προφανώς $C_{NE}(\eta) \subseteq C$.

3.2 Θεώρημα - Χαρακτηρισμός C_{NE} για ντετερμινιστικό κανάλι

Έστω το σύνολο των σημείων $\mathcal{B} = \{(R_1, R_2) : L_i \leq R_i \leq U_i, \forall i = 1, 2\}$ Όπου:

- $L_i = (n_{ii} - n_{ij})^+$
- $U_i = \begin{cases} n_{ii} - \min(L_i, n_{ij}), & n_{ij} \leq n_{ii}; \\ \min((n_{ij} - L_j)^+, n_{ii}), & n_{ij} > n_{ii}. \end{cases}$

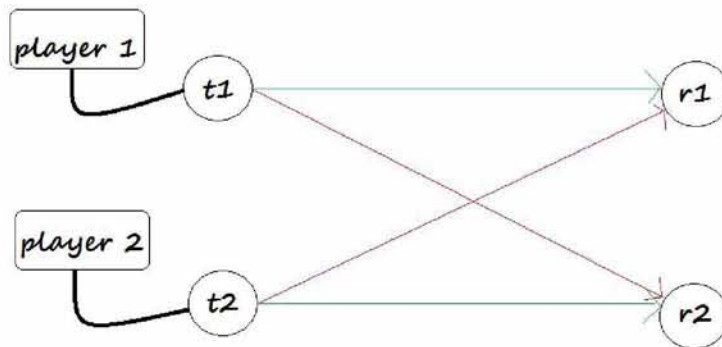
τότε $C_{NE} = C \cap \mathcal{B}$

Πάντα υπάρχει ένα βέλτιστο σημείο στο C_{NE}

3.3 Θεώρημα - Χαρακτηρισμός $C_{NE}(1)$ για γκαουσιανό κανάλι

Σε ένα συμμετρικό γκαουσιανό κανάλι το συμμετρικό σημείο που βελτιστοποιεί το άθροισμα των ρυθμών βρίσκεται παντα στο $C_{NE}(1)$ ενώ για $\alpha > \frac{2}{3}$ όλα τα σημεία που βελτιστοποιούν το άθροισμα των ρυθμών βρίσκονται στο $C_{NE}(1)$

Όπου $\alpha = \frac{\log INR}{\log SNR}$



Σχήμα 4: 2x2 interference channel model

4 2 * 2 Interference Channel

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλύσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο 2 παίκτες (\equiv 2 ζεύγη πομπού-δέκτη) προσπαθούν να μεταδώσουν πληροφορία την ίδια χρονική στιγμή και λόγω του μοιραζόμενου μέσου (αέρας) παρεμβάλλει ο ένας στον άλλο.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4 ο κάθε δέκτης λαμβάνει το άθροισμα του σήματος του πομπού που επιθυμεί να επικοινωνήσει με αυτόν συν το σήμα του άλλου πομπού συν το θόρυβο λόγω του καναλιού. Συνεπώς:

$$y_i = x_i + x_j + n_i$$

Στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το ρυθμό εκπομπής του (rate) και θεωρώντας ότι ο εκπομπός μπορεί να στείλει με το μέγιστο δυνατό ρυθμό (χωρητικότητα καναλιού) χρησιμοποιούμε το παρακάτω τύπο:

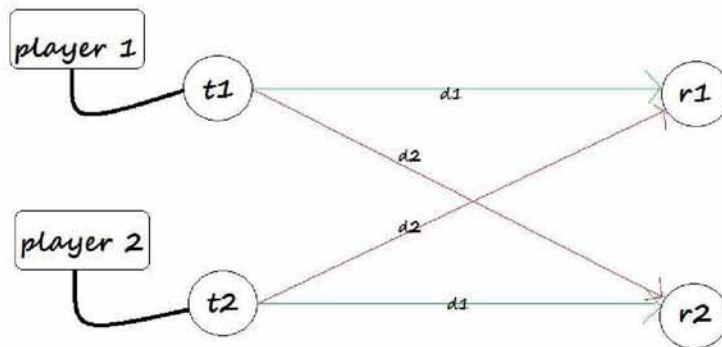
$$R_i = \log\left(1 + \frac{G_i P_{t_i}}{G_j P_{t_j} + n_i}\right)$$

Μέσω του μοντέλου διάδοσης ελεύθερου χώρου (βλ. 2.2.1):

$$R_i = \log\left(1 + \frac{\frac{P_{t_i}}{d_{ij}^2}}{\frac{P_{t_j}}{d_{ji}^2} + n_i}\right)$$

Στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει τον ρυθμό εκπομπής του, και δεδομένου ότι δεν μπορεί να κάνει κάτι για τις παρεμβολές και το θόρυβο, το μόνο που του μένει είναι να αυξήσει την ισχύ εκπομπής του. Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω τύπο ο ρυθμός εκπομπής είναι αύξουσα συνάρτηση της ισχύος εκπομπής αλλά φθίνουσα συνάρτηση των παρεμβολών, δηλαδή της ισχύος εκπομπής των υπόλοιπων παικτών. Επειδή όμως εδώ έχουμε ένα παιχνίδι στο οποίο συμμετέχουν παίκτες με αντικρουόμενα συμφέροντα και κοινή λογική είναι προφανές ότι όλοι οι παίκτες αποφασίζοντας λογικά θα αυξάνουν συνεχώς την ισχύ εκπομπής τους και συνεπώς και τις παρεμβολές στους υπόλοιπους παίκτες. Οπότε θεωρητικά ο κάθε παίκτης θα εκπέμπει με άπειρη ισχύ. Επειδή όμως αυτό δεν έχει νόημα, αλγοριθμικά αντιμετωπίστηκε με δυο διαφορετικούς τρόπους.

- Περιορίστηκε ο χώρος των δυνατών τιμών ισχύος από όλους τους πραγ-



Σχήμα 5: 2x2 Symmetric interference channel model

ματικούς αριθμούς στο σύνολο $\{ 0, \frac{P}{8}, \frac{P}{4}, \frac{P}{2}, P, 2P, 4P, 8P \}$ και όπως αναμένονταν η τιμή που επιλέχθηκε από κάθε παίκτη είναι $8P$.

- Εισήχθη ένας κανόνας σταματήματος (stopping rule) σύμφωνα με τον οποίο το παιχνίδι σταματούσε όχι όταν κάθε παίκτης δεν άλλαζε τη τιμή της ισχύος του αλλά όταν δεν την άλλαζε παραπάνω από ένα αριθμό (ή ένα ποσοστό)

Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο παραπάνω τρόποι όχι απλά έχουν νόημα αλλά και συνηθίζονται στη πράξη καθώς μια ασύρματη κάρτα δικτύου και εκπέμπει σε πολύ λίγες στάθμες ισχύος (πριν από λίγα χρόνια εξέπεμπαν μόνο σε μία) και δεν αλλάζει ισχύ εκπομπής αν πρόκειται για πολύ μικρή αλλαγή.

Μια νέα παράμετρος μελέτης του παραπάνω μοντέλου είναι το κοινωνικό/αλτρουιστικό προφίλ του παίκτη. Το πόσο δηλαδή νοιάζεται για τους υπόλοιπους παίκτες που προσπαθούν τη δεδομένη χρονική στιγμή να χρησιμοποιήσουν το κανάλι (βλ. 1.2.4). Πιο συγκεκριμένα :

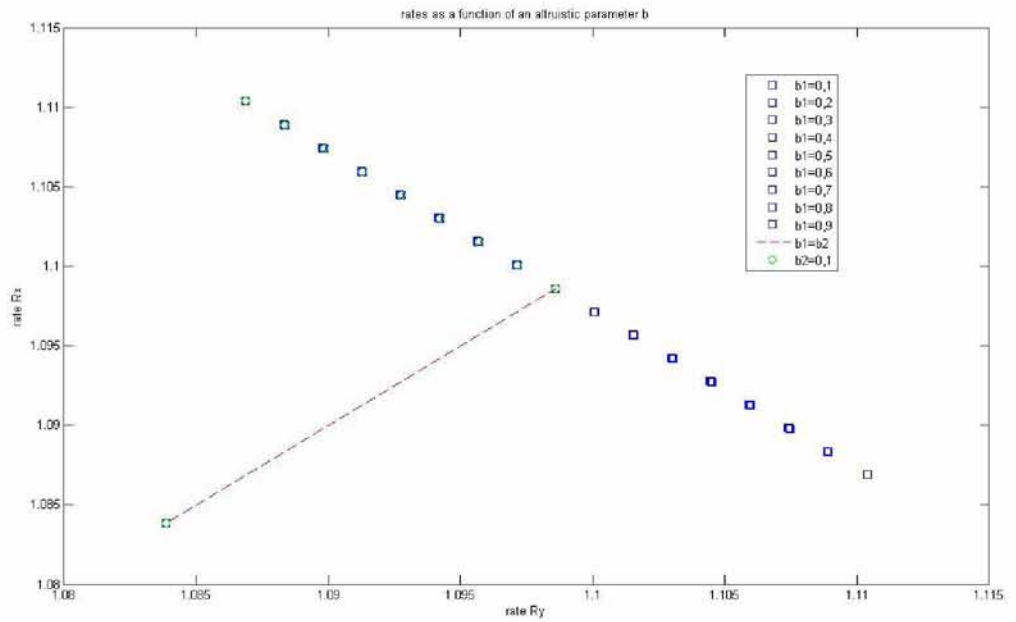
- ένας κακόβουλος παίκτης θέλει να ελαχιστοποιήσει το ρυθμό εκπομπής των άλλων παικτών $\min_{P_i} \sum_{j \neq i} R_j$
- ένας εγωιστής θέλει να μεγιστοποιήσει το δικό του ρυθμό ενώ αδιαφορεί για το ρυθμό των υπολοίπων $\max_{P_i} R_i$
- ένας αλτρουιστής θέλει να μεγιστοποιήσει το άθροισμα των ρυθμών εκπομπής όλων των παικτών $\max_{P_i} \sum_j R_j$
- ένας β-αλτρουιστής προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το ρυθμό εκπομπής του συν β φορές το άθροισμα των ρυθμών των υπολοίπων $\max_{P_i} (R_i + \beta * \sum_j R_j)$

Χωρίσαμε τη μελέτη του μοντέλου σε δύο περιπτώσεις σύμφωνα με τη τοπολογία των παικτών.

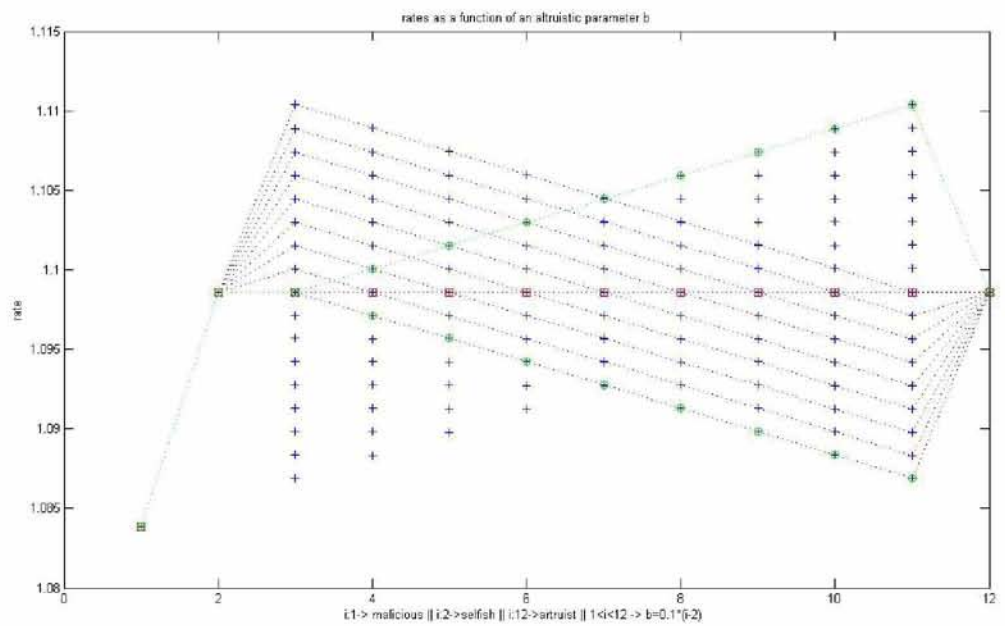
4.1 Symmetric Channel

Σε αυτή τη περίπτωση οι εκπομπές ισαπέχουν και από τους δικούς τους παραλλήλες και από τους παραλλήλες στους οποίους παρεμβάλουν (σχήμα 8).

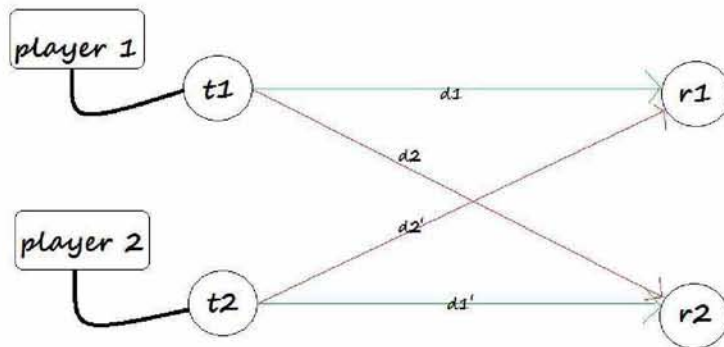
Στο σχήμα 6 φαίνεται ο χώρος όλων των δυνατών καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί το σύστημα των 2 παικτών οι οποίοι μπορεί να έχουν οποιοδήποτε από τα



Σχήμα 6: χώρος δυνατών καταστάσεων συμμετρικού καναλιού



Σχήμα 7: ρυθμοί για κάθε προφίλ στο συμμετρικό κανάλι



Σχήμα 8: 2x2 Non Symmetric interference channel model

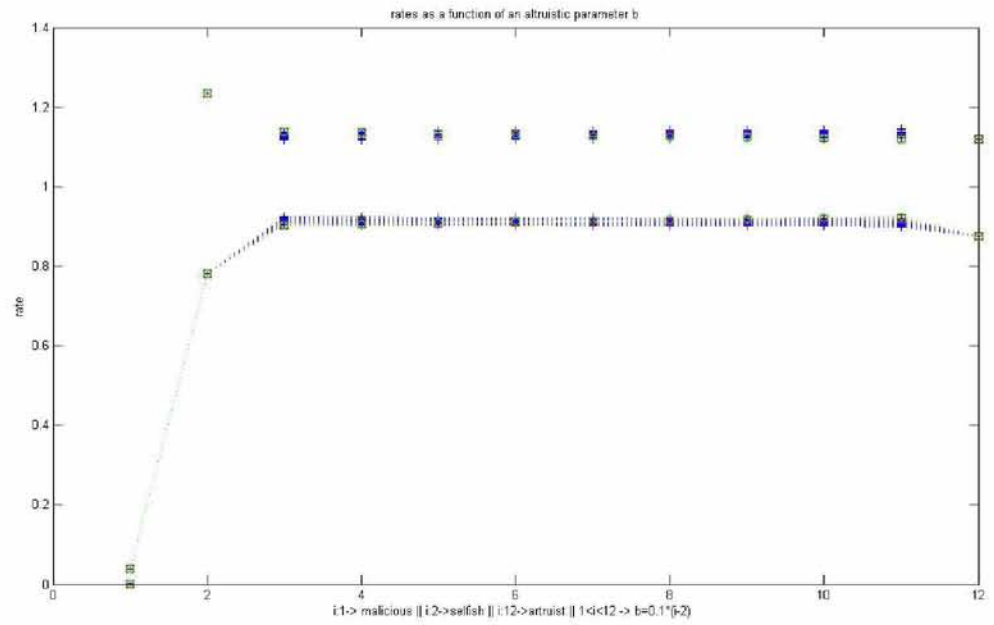
προφίλ που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όπως φαίνεται και από το σχήμα η βέλτιστη στρατηγική για το κάθε παίκτη είναι να νοιάζεται για τον άλλο παίκτη όσο και ο άλλος για αυτόν.

4.2 Non-symmetric Channel

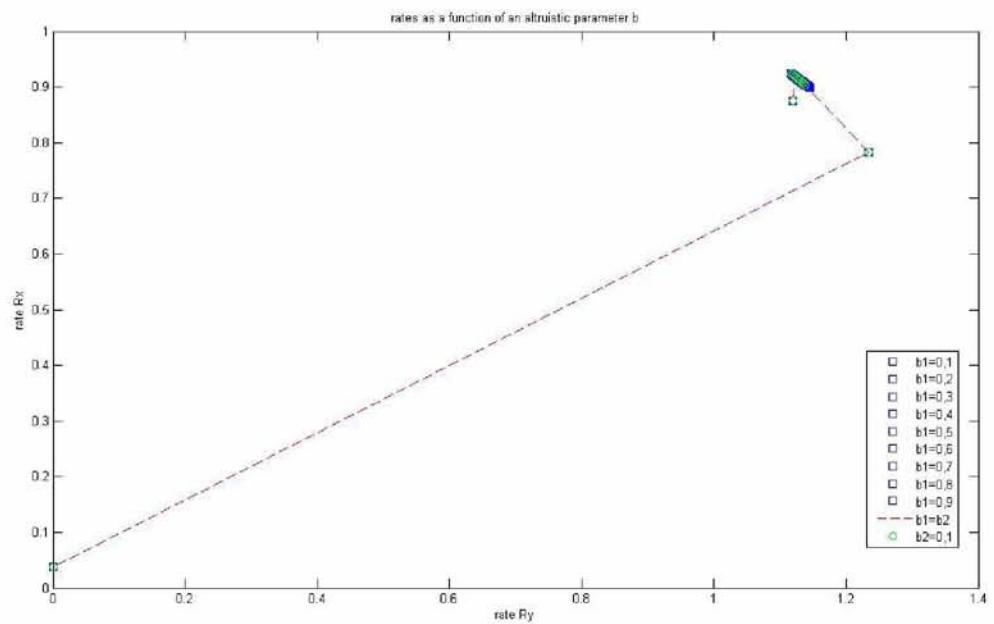
Στο μοντέλο αυτό οι αποστάσεις είναι τυχαίες και αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο παίκτης του οποίου το ζεύγος πομπού δέκτη είναι πιο κοντά να πετυχαίνει μεγαλύτερο ρυθμό εκπομπής όταν συμπεριφέρεται εγωιστικά και καθώς τείνουν και οι δύο παίκτες στο αλτρουιστικό προφίλ η διαφορά μεταξύ των ρυθμών τους μικραίνει. Η διαφορά με το συμμετρικό μοντέλο και πράκτικα ο λόγος που τα εξετάσαμε με αυτή τη σειρά είναι το γεγονός ότι σε αυτό το μοντέλο είναι βέλτιστο για κάποιον παίκτη να είναι κακόβουλος. Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τους ρυθμούς για κάθε δυνατό προφίλ όπου και φαίνεται ότι ο παίκτης που βρίσκεται πιο κοντά στον αντίπαλο δέκτη του μειώνει αποτελεσματικότερα το ρυθμό και συνεπώς αυτός απολαμβάνει το μεγαλύτερο ποσοστό της χωρητικότητας του καναλιού.

4.3 Χώρος καταστάσεων

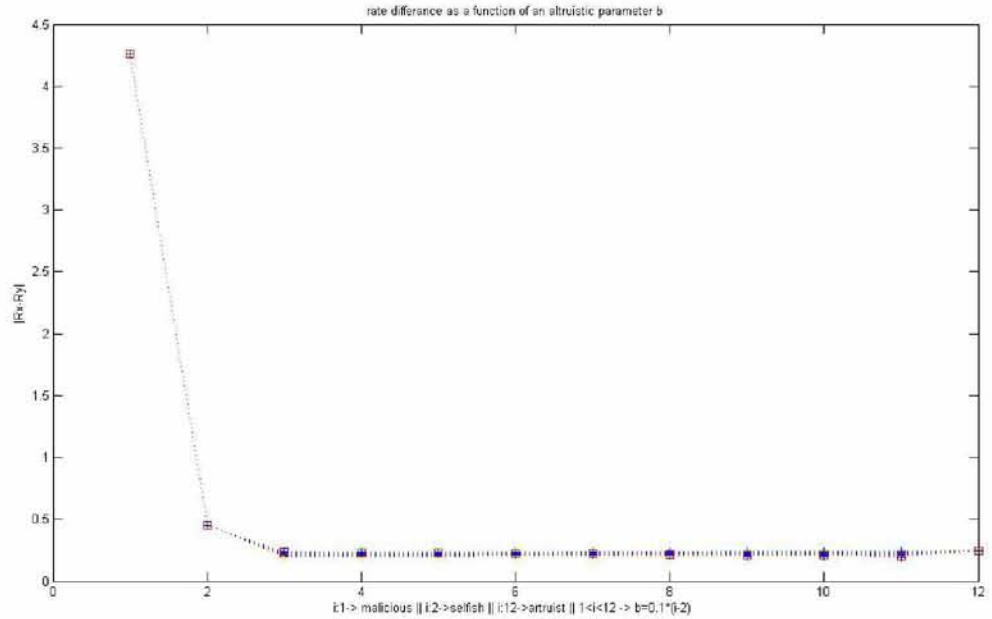
Στα σχήματα 6 και 10 φαίνονται τα διάγραμμα με το χώρο των τελικών καταστάσεων. Ουσιαστικά κάθε κατάσταση δείχνει το ρυθμό εκπομπής με τον οποίο θα επικοινωνούσε το ζεύγος πομπού-δέκτη του κάθε παίκτη για το συγκεκριμένο προφίλ. Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δύο διαγραμμάτων είναι η κατάσταση στην οποία και οι δύο παίκτες είναι κακόβουλοι. Στη περίπτωση της μη-συμμετρικής τοπολογίας φαίνεται ότι για τον ένα παίκτη η κατάσταση αυτή είναι βέλτιστη (πιο ξεκάθαρα φαίνεται στο σχήμα 11) όμως λόγω της υπόθεσης της λογικής επιλογής καθώς και της τέλει πληροφόρησης ο παίκτης του οποίου ο ρυθμός εκπομπής είναι σχεδόν μηδενικός σε αυτή τη κατάσταση, είναι ο χειρότερος σε σύγκριση με όλες τις άλλες καταστάσεις, δεν θα επιλέξει ποτέ αυτό το προφίλ ως στρατηγική. Αντίθετα η κατάσταση στην οποία και οι δύο παίκτες είναι αλτρουιστές είναι βέλτιστη και για τους δύο παίκτες και κανένας δεν έχει λόγο να αλλάξει στρατηγική. Συνεπώς η κατάσταση αυτή είναι σημείο ισοροπίας nash.



Σχήμα 9: ρυθμοί για κάθε προφίλ στο μη συμμετρικό κανάλι



Σχήμα 10: χώρος δυνατών καταστάσεων μη συμμετρικού καναλιού



Σχήμα 11: διαφορά ρυθμών για κάθε προφίλ

5 2 * 2 * 2 Interference and Routing Problem

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα μοντέλο δύο παικτών που ο καθένας κατέχει 3 κόμβους όπου ο πρώτος προσπαθεί να επικοινωνήσει με το τρίτο μέσω του δεύτερου. Οι δύο παίκτες βρίσκονται παράλληλα και συνεπώς μπορεί κάποιος από τους εκπομπούς να χρησιμοποιήσει τον ενδιάμεσο κόμβο του άλλου παίκτη για να μοιράσει τη κίνηση του (σχήμα 13).

Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές:

- P_i : η ισχύς εκπομπής του κόμβου i
- f_{ij} : ο ρυθμός εκπομπής από τον κόμβο i στο κόμβο j
- C_{ij} : η χωρητικότητα της ζεύξης από τον κόμβο i στον κόμβο j

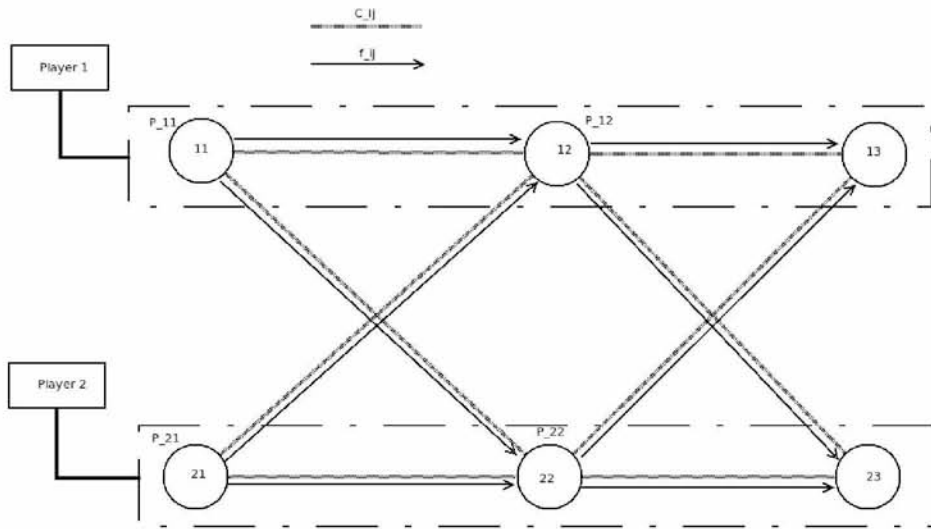
5.1 Routing problem

Αρχικά θα μελετήσουμε μόνο το πρόβλημα δρομολόγησης υποθέτοντας ότι όλοι οι κόμβοι εκπέμπουν με μια σταθερή ισχύ P .

Έστω ότι ο παίκτης i εισάγει r_i κίνηση στον πρώτο κόμβο του, η τιμή αυτή δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλη λόγω των περιορισμών της χωρητικότητας των ζεύξεων.

$$\text{Ουσιαστικά πρέπει } f_{ij} \leq C_{ij} = \log\left(1 + \frac{G_{ij}P_{ij}}{\sum_{k \neq i} G_{kj}P_{kj} + n_j}\right) = \log\left(1 + \frac{G_{ij}P}{\sum_{k \neq i} G_{kj}P + n_j}\right)$$

Επίσης ορίζουμε με k_i το ρυθμό που εξέρχεται από τον τρίτο κόμβο του παίκτη i . Προφανώς σε κάθε κόμβο όση κίνηση εισέρχεται τόση εξέρχεται, δηλαδή $\sum_i f_{ij} = \sum_k f_{jk}$



Σχήμα 12: 2x2x2 Routing And Power Control model

5.1.1 Αλτρουιστική προσέγγιση

Σε αυτή τη προσέγγιση και οι δύο παίκτες νοιάζονται για τη συνολική κίνηση που εξυπηρετείται από το δίκτυο. Η βέλτιστη λύση, οι τιμές δηλαδή των f_{ij} που μεγιστοποιούν το άθροισμα των ρυθμών που εξέρχονται από τους τρίτους κόμβους των δυο παικτών, προκύπτει από τη λύση του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\max_{f_{ij}} k_1 + k_2$$

subject to:

$$k_1 = f_{1213} + f_{2213}$$

$$k_2 = f_{1223} + f_{2223}$$

$$f_{1112} + f_{2112} = f_{1213} + f_{1223}$$

$$f_{2122} + f_{1122} = f_{2223} + f_{2213}$$

$$f_{1112} + f_{1122} = r_1$$

$$f_{2112} + f_{2122} = r_2$$

$$f_{1112} \leq C_{1112}$$

$$f_{2122} \leq C_{2122}$$

$$f_{1122} \leq C_{1122}$$

$$f_{2112} \leq C_{2112}$$

$$f_{1213} \leq C_{1213}$$

$$f_{2223} \leq C_{2223}$$

$$f_{1223} \leq C_{1223}$$

$$f_{2213} \leq C_{2213}$$

το οποίο με αντικατάσταση των 2 πρώτων εξισώσεων γίνεται:

$$\max_{f_{ij}} f_{1213} + f_{2213} + f_{1223} + f_{2223}$$

subject to:

$$\begin{aligned} f_{1112} + f_{2112} &= f_{1213} + f_{1223} \\ f_{2122} + f_{1122} &= f_{2223} + f_{2213} \\ f_{1112} + f_{1122} &= r_1 \\ f_{2112} + f_{2122} &= r_2 \\ f_{1112} &\leq C_{1112} \\ f_{2122} &\leq C_{2122} \\ f_{1122} &\leq C_{1122} \\ f_{2112} &\leq C_{2112} \\ f_{1213} &\leq C_{1213} \\ f_{2223} &\leq C_{2223} \\ f_{1223} &\leq C_{1223} \\ f_{2213} &\leq C_{2213} \end{aligned}$$

H Lagrangian $\theta\alpha$ είναι:

$$\begin{aligned} \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i) &= f_{1213} + f_{2213} + f_{1223} + f_{2223} + \lambda_1(f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223}) + \\ &\lambda_2(f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213}) + \lambda_3(f_{1112} + f_{1122} - r_1) + \lambda_4(f_{2112} + f_{2122} - r_2) + \\ &\mu_1(f_{1112} - C_{1112}) + \mu_2(f_{2122} - C_{2122}) + \mu_3(f_{1122} - C_{1122}) + \mu_4(f_{2112} - C_{2112}) + \\ &\mu_5(f_{1213} - C_{1213}) + \mu_6(f_{2223} - C_{2223}) + \mu_7(f_{1223} - C_{1223}) + \mu_8(f_{2213} - C_{2213}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f_{1213}(1 - \lambda_1 + \mu_5) + f_{2213}(1 - \lambda_2 + \mu_8) + f_{1223}(1 - \lambda_1 + \mu_7) + f_{2223}(1 - \lambda_2 + \mu_6) \\ &+ f_{1112}(\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1) + f_{2112}(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_4) + f_{1122}(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3) + f_{2122}(\lambda_2 + \lambda_4 + \mu_2) \\ &- [\lambda_3 r_1 + \lambda_4 r_2] - [\mu_1 C_{1112} + \mu_2 C_{2122} + \mu_3 C_{1122} + \mu_4 C_{2112} + \mu_5 C_{1213} + \mu_6 C_{2223} + \\ &\mu_7 C_{1223} + \mu_8 C_{2213}] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1213}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_5 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2213}} &= 1 - \lambda_2 + \mu_8 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1223}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_7 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2223}} &= 1 - \lambda_2 + \mu_6 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1112}} &= \lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2112}} &= \lambda_1 + \lambda_4 + \mu_4 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1122}} &= \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2122}} &= \lambda_2 + \lambda_4 + \mu_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_1} &= f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_2} &= f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_3} &= f_{1112} + f_{1122} - r_1 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_4} &= f_{2112} + f_{2122} - r_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_1} &= f_{1112} - C_{1112} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_2} &= f_{2122} - C_{2122} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_3} &= f_{1122} - C_{1122} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_4} &= f_{2112} - C_{2112} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_5} &= f_{1213} - C_{1213} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_6} &= f_{2223} - C_{2223} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_7} &= f_{1223} - C_{1223} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_8} &= f_{2213} - C_{2213}\end{aligned}$$

Επίσης το πρόβλημα μπορεί να γραφθεί ως εξής:

$$\max c^T f$$

subject to:

$$\begin{aligned}A_{eq}f &= b \\ 0 &\leq f \leq C\end{aligned}$$

όπου:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_{1112} \\ C_{2112} \\ C_{2122} \\ C_{1122} \\ C_{1213} \\ C_{2223} \\ C_{2213} \\ C_{1223} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f = \begin{pmatrix} f_{1112} \\ f_{2112} \\ f_{2122} \\ f_{1122} \\ f_{1213} \\ f_{2223} \\ f_{2213} \\ f_{1223} \end{pmatrix}$$

5.1.2 Εγχειριστική προσέγγιση

Σε αυτή τη προσέγγιση κάθε παίκτης νοιάζεται για τη δική του κίνηση. Η βέλτιστη λύση, οι τιμές δηλαδή των f_{ij} που μεγιστοποιούν τον ρυθμό που εξέρχεται από τον τρίτο κόμβο του παίκτη, προκύπτει από τη λύση του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης: (για τον παίκτη 1)

$$\max_{f_{ij}} k_1$$

subject to:

$$\begin{aligned}k_1 &= f_{1213} + f_{2213} \\ f_{1112} + f_{2112} &= f_{1213} + f_{1223} \\ f_{1112} + f_{1122} &= r_1 \\ f_{1112} &\leq C_{1112} \\ f_{1122} &\leq C_{1122} \\ f_{1213} &\leq C_{1213} \\ f_{2213} &\leq C_{2213}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{1223} &\leq C_{1223} \\ f_{2112} &\leq C_{2112} \end{aligned}$$

το οποίο με αντικατάσταση της πρώτης εξίσωσης γίνεται:

$$\max_{f_{ij}} f_{1213} + f_{2213}$$

subject to:

$$\begin{aligned} f_{1112} + f_{2112} &= f_{1213} + f_{1223} \\ f_{1112} + f_{1122} &= r_1 \\ f_{1112} &\leq C_{1112} \\ f_{1122} &\leq C_{1122} \\ f_{1213} &\leq C_{1213} \\ f_{2213} &\leq C_{2213} \\ f_{1223} &\leq C_{1223} \\ f_{2112} &\leq C_{2112} \end{aligned}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i) = f_{1213} + f_{2213} + \lambda_1(f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223}) + \lambda_2(f_{1112} + f_{1122} - r_1) + \mu_1(f_{1112} - C_{1112}) + \mu_2(f_{1122} - C_{1122}) + \mu_3(f_{1213} - C_{1213}) + \mu_4(f_{2213} - C_{2213}) + \mu_5(f_{1223} - C_{1223}) + \mu_6(f_{2112} - C_{2112})$$

$$= f_{1213}(1 - \lambda_1 + \mu_3) + f_{2213}(1 + \mu_4) + (-\lambda_1 + \mu_5)f_{1223} + f_{1112}(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) + (\lambda_1 + \mu_6)f_{2112} + f_{1122}(\lambda_2 + \mu_2) - \lambda_2 r_1 - [\mu_1 C_{1112} + \mu_2 C_{1122} + \mu_3 C_{1213} + \mu_4 C_{2213} + \mu_5 C_{1223} + \mu_6 C_{2112}]$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1213}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_3 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2213}} &= 1 + \mu_4 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1223}} &= -\lambda_1 + \mu_5 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1112}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2112}} &= \lambda_1 + \mu_6 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1122}} &= \lambda_2 + \mu_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_1} &= f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_2} &= f_{1112} + f_{1122} - r_1 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_1} &= f_{1112} - C_{1112} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_2} &= f_{1122} - C_{1122} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_3} &= f_{1213} - C_{1213} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_4} &= f_{2213} - C_{2213} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_5} &= f_{1223} - C_{1223} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_6} &= f_{2112} - C_{2112} \end{aligned}$$

όμοια για τον παίκτη 2

$$\max_{f_{ij}} k_2$$

subject to:

$$\begin{aligned} k_2 &= f_{1223} + f_{2223} \\ f_{2122} + f_{1122} &= f_{2223} + f_{2213} \\ f_{2112} + f_{2122} &= r_2 \\ f_{2122} &\leq C_{2122} \\ f_{2112} &\leq C_{2112} \\ f_{2223} &\leq C_{2223} \\ f_{1223} &\leq C_{1223} \\ f_{2213} &\leq C_{2213} \\ f_{1122} &\leq C_{1122} \end{aligned}$$

το οποίο με αντικατάσταση της πρώτης εξίσωσης γίνεται:

$$\max_{f_{ij}} f_{1223} + f_{2223}$$

subject to:

$$\begin{aligned} f_{2122} + f_{1122} &= f_{2223} + f_{2213} \\ f_{2112} + f_{2122} &= r_2 \\ f_{2122} &\leq C_{2122} \\ f_{2112} &\leq C_{2112} \\ f_{2223} &\leq C_{2223} \\ f_{1223} &\leq C_{1223} \\ f_{2213} &\leq C_{2213} \\ f_{1122} &\leq C_{1122} \end{aligned}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i) = f_{1223} + f_{2223} + \lambda_1(f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213}) + \lambda_2(f_{2112} + f_{2122} - r_2) + \mu_1(f_{2122} - C_{2122}) + \mu_2(f_{2112} - C_{2112}) + \mu_3(f_{2223} - C_{2223}) + \mu_4(f_{1223} - C_{1223}) + \mu_5(f_{2213} - C_{2213}) + \mu_6(f_{1122} - C_{1122})$$

$$\begin{aligned} &= f_{1223}(1 + \mu_4) + f_{2223}(1 - \lambda_1 + \mu_3) + f_{2112}(\lambda_2 + \mu_2) + f_{2122}(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) + \\ &(-\lambda_1 + \mu_5)f_{2213} + (\lambda_1 + \mu_6)f_{1122} - \lambda_2 r_2 - [\mu_1 C_{2122} + \mu_2 C_{2112} + \mu_3 C_{2223} + \mu_4 C_{1223} + \\ &\mu_5 C_{2213} + \mu_6 C_{1122}] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1223}} &= 1 + \mu_4 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2223}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_3 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2112}} &= \lambda_2 + \mu_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2122}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2213}} &= -\lambda_1 + \mu_5 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1122}} &= \lambda_1 + \mu_6 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_1} &= f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_2} &= f_{2112} + f_{2122} - r_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_1} &= f_{2122} - C_{2122} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_2} &= f_{2112} - C_{2112} \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_3} &= f_{2223} - C_{2223} \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_4} &= f_{1223} - C_{1223} \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_5} &= f_{2213} - C_{2213} \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_6} &= f_{1122} - C_{1122}
\end{aligned}$$

5.2 Routing and Interference problem

Στην ενότητα αυτή θα άρρουμε την υπόθεση της σταθερής ισχύος και θα αφήσουμε τους κόμβους να κάνουν έλεγχο ισχύος επιλέγοντας τη βέλτιστη ισχύ εκπομπής, αφήνουμε δηλαδή τον κάθε παίκτη να ορίσει την ισχύ με την οποία θα εκπέμψουν οι κόμβοι του. Συνεπώς τα προβλήματα βελτιστοποίησης θα είναι:

5.2.1 Αλτρουιστική προσέγγιση

$$\max_{f_{ij}, P_1, P_2} f_{1213} + f_{2213} + f_{1223} + f_{2223}$$

subject to:

$$\begin{aligned}
f_{1112} + f_{2112} &= f_{1213} + f_{1223} \\
f_{2122} + f_{1122} &= f_{2223} + f_{2213} \\
f_{1112} + f_{1122} &= r_1 \\
f_{2112} + f_{2122} &= r_2 \\
f_{1112} &\leq C_{1112}(P_1, P_2) \\
f_{2122} &\leq C_{2122}(P_2, P_1) \\
f_{1122} &\leq C_{1122}(P_1, P_2) \\
f_{2112} &\leq C_{2112}(P_2, P_1) \\
f_{1213} &\leq C_{1213}(P_1, P_2) \\
f_{2223} &\leq C_{2223}(P_2, P_1) \\
f_{1223} &\leq C_{1223}(P_1, P_2) \\
f_{2213} &\leq C_{2213}(P_2, P_1)
\end{aligned}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\begin{aligned}
\Lambda(f_{ij}, \lambda_i, \mu_i) &= f_{1213} + f_{2213} + f_{1223} + f_{2223} + \lambda_1(f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223}) + \\
&\lambda_2(f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213}) + \lambda_3(f_{1112} + f_{1122} - r_1) + \lambda_4(f_{2112} + f_{2122} - r_2) + \\
&\mu_1(f_{1112} - C_{1112}(P_1, P_2)) + \mu_2(f_{2122} - C_{2122}(P_2, P_1)) + \mu_3(f_{1122} - C_{1122}(P_1, P_2)) + \\
&\mu_4(f_{2112} - C_{2112}(P_2, P_1)) + \mu_5(f_{1213} - C_{1213}(P_1, P_2)) + \mu_6(f_{2223} - C_{2223}(P_2, P_1)) + \\
&\mu_7(f_{1223} - C_{1223}(P_1, P_2)) + \mu_8(f_{2213} - C_{2213}(P_2, P_1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{1213}(1 - \lambda_1 + \mu_5) + f_{2213}(1 - \lambda_2 + \mu_8) + f_{1223}(1 - \lambda_1 + \mu_7) + f_{2223}(1 - \lambda_2 + \mu_6) \\
&+ f_{1112}(\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1) + f_{2112}(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_4) + f_{1122}(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3) + f_{2122}(\lambda_2 + \\
&\lambda_4 + \mu_2) - [\lambda_3 r_1 + \lambda_4 r_2] - [\mu_1 C_{1112}(P_1, P_2) + \mu_2 C_{2122}(P_2, P_1) + \mu_3 C_{1122}(P_1, P_2) + \\
&\mu_4 C_{2112}(P_2, P_1) + \mu_5 C_{1213}(P_1, P_2) + \mu_6 C_{2223}(P_2, P_1) + \mu_7 C_{1223}(P_1, P_2) + \mu_8 C_{2213}(P_2, P_1)]
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1213}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_5 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2213}} &= 1 - \lambda_2 + \mu_8 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1223}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2223}} &= 1 - \lambda_2 + \mu_6 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1112}} &= \lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2112}} &= \lambda_1 + \lambda_4 + \mu_4 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1122}} &= \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2122}} &= \lambda_2 + \lambda_4 + \mu_2 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_1} &= f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223} \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_2} &= f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213} \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_3} &= f_{1112} + f_{1122} - r_1 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_4} &= f_{2112} + f_{2122} - r_2 \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_1} &= f_{1112} - C_{1112}(P_1, P_2) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_2} &= f_{2122} - C_{2122}(P_2, P_1) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_3} &= f_{1122} - C_{1122}(P_1, P_2) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_4} &= f_{2112} - C_{2112}(P_2, P_1) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_5} &= f_{1213} - C_{1213}(P_1, P_2) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_6} &= f_{2223} - C_{2223}(P_2, P_1) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_7} &= f_{1223} - C_{1223}(P_1, P_2) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_8} &= f_{2213} - C_{2213}(P_2, P_1) \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial P_1} &= -[\mu_1 \frac{\partial C_{1112}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_2 \frac{\partial C_{2112}(P_2, P_2)}{\partial P_1} + \mu_3 \frac{\partial C_{1122}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_4 \frac{\partial C_{2112}(P_2, P_1)}{\partial P_1} + \\
&\mu_5 \frac{\partial C_{1213}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_6 \frac{\partial C_{2223}(P_2, P_1)}{\partial P_1} + \mu_7 \frac{\partial C_{1223}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_8 \frac{\partial C_{2213}(P_2, P_1)}{\partial P_1}] \\
\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial P_2} &= -[\mu_1 \frac{\partial C_{1112}(P_1, P_2)}{\partial P_2} + \mu_2 \frac{\partial C_{2112}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \mu_3 \frac{\partial C_{1122}(P_1, P_2)}{\partial P_2} + \mu_4 \frac{\partial C_{2112}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \\
&\mu_5 \frac{\partial C_{1213}(P_1, P_2)}{\partial P_2} + \mu_6 \frac{\partial C_{2223}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \mu_7 \frac{\partial C_{1223}(P_1, P_2)}{\partial P_2} + \mu_8 \frac{\partial C_{2213}(P_2, P_1)}{\partial P_2}]
\end{aligned}$$

5.2.2 Εγλωστική προσέγγιση

(για τον παίκτη 1)

$$\max_{f_{ij}, P_1} f_{1213} + f_{2213}$$

subject to:

$$\begin{aligned}
f_{1112} + f_{2112} &= f_{1213} + f_{1223} \\
f_{1112} + f_{1122} &= r_1 \\
f_{1112} &\leq C_{1112}(P_1, P_2) \\
f_{1122} &\leq C_{1122}(P_1, P_2) \\
f_{1213} &\leq C_{1213}(P_1, P_2) \\
f_{2213} &\leq C_{2213}(P_2, P_1) \\
f_{1223} &\leq C_{1223}(P_1, P_2) \\
f_{2112} &\leq C_{2112}(P_2, P_1)
\end{aligned}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i) = f_{1213} + f_{2213} + \lambda_1(f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223}) + \lambda_2(f_{1112} +$$

$$f_{1122} - r_1) + \mu_1(f_{1112} - C_{1112}(P_1, P_2)) + \mu_2(f_{1122} - C_{1122}(P_1, P_2)) + \mu_3(f_{1213} - C_{1213}(P_1, P_2)) + \mu_4(f_{2213} - C_{2213}(P_2, P_1)) + \mu_5(f_{1223} - C_{1223}(P_1, P_2)) + \mu_6(f_{2112} - C_{2112}(P_2, P_1))$$

$$= f_{1213}(1 - \lambda_1 + \mu_3) + f_{2213}(1 + \mu_4) + (-\lambda_1 + \mu_5)f_{1223} + f_{1112}(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) + (\lambda_1 + \mu_6)f_{2112} + f_{1122}(\lambda_2 + \mu_2) - \lambda_2 r_1 - [\mu_1 C_{1112}(P_1, P_2) + \mu_2 C_{1122}(P_1, P_2) + \mu_3 C_{1213}(P_1, P_2) + \mu_4 C_{2213}(P_2, P_1) + \mu_5 C_{1223}(P_1, P_2) + \mu_6 C_{2112}(P_2, P_1)]$$

κα

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1213}} = 1 - \lambda_1 + \mu_3$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2213}} = 1 + \mu_4$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1223}} = -\lambda_1 + \mu_5$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1112}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2112}} = \lambda_1 + \mu_6$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1122}} = \lambda_2 + \mu_2$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_1} = f_{1112} + f_{2112} - f_{1213} - f_{1223}$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_2} = f_{1112} + f_{1122} - r_1$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_1} = f_{1112} - C_{1112}(P_1, P_2)$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_2} = f_{1122} - C_{1122}(P_1, P_2)$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_3} = f_{1213} - C_{1213}(P_1, P_2)$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_4} = f_{2213} - C_{2213}(P_2, P_1)$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_5} = f_{1223} - C_{1223}(P_1, P_2)$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_6} = f_{2112} - C_{2112}(P_2, P_1)$$

$$\frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_1, \lambda_i, \mu_i)}{\partial P_1} = -[\mu_1 \frac{\partial C_{1112}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_2 \frac{\partial C_{1122}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_3 \frac{\partial C_{1213}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_4 \frac{\partial C_{2213}(P_2, P_1)}{\partial P_1} + \mu_5 \frac{\partial C_{1223}(P_1, P_2)}{\partial P_1} + \mu_6 \frac{\partial C_{2112}(P_2, P_1)}{\partial P_1}]$$

όμοια για τον παράκτη 2

$$\max_{f_{ij}, P_2} f_{2223} + f_{1223}$$

subject to:

$$f_{1112} + f_{2112} = f_{1213} + f_{1223}$$

$$f_{1112} + f_{2122} = r_2$$

$$f_{2122} \leq C_{2122}(P_2, P_1)$$

$$f_{2112} \leq C_{2112}(P_2, P_1)$$

$$f_{2223} \leq C_{2223}(P_2, P_1)$$

$$f_{1223} \leq C_{1223}(P_1, P_2)$$

$$f_{2213} \leq C_{2223}(P_2, P_1)$$

$$f_{1122} \leq C_{1223}(P_1, P_2)$$

H Lagrangian θα είναι:

$$\Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i) = f_{1223} + f_{2223} + \lambda_1(f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213}) + \lambda_2(f_{2112} + f_{2122} - r_2) + \mu_1(f_{2122} - C_{2122}(P_2, P_1)) + \mu_2(f_{2112} - C_{2112}(P_1, P_1)) + \mu_3(f_{2223} -$$

$$C_{2223}(P_2, P_1) + \mu_4(f_{1223} - C_{1223}(P_1, P_2)) + \mu_5(f_{2223} - C_{2213}(P_2, P_1)) + \mu_6(f_{1122} - C_{1122}(P_1, P_2))$$

$$= f_{1223}(1 + \mu_4) + f_{2223}(1 - \lambda_1 + \mu_3) + f_{2112}(\lambda_2 + \mu_2) + f_{2122}(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) + (-\lambda_1 + \mu_5)f_{2213} + (\lambda_1 + \mu_6)f_{1122} - \lambda_2 r_2 - [\mu_1 C_{2122}(P_1, P_1) + \mu_2 C_{2112}(P_1, P_1) + \mu_3 C_{2223}(P_2, P_1) + \mu_4 C_{1223}(P_1, P_2)]$$

$\kappa\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1223}} &= 1 + \mu_4 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2223}} &= 1 - \lambda_1 + \mu_3 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2112}} &= \lambda_2 + \mu_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2122}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{2213}} &= -\lambda_1 + \mu_5 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial f_{1122}} &= \lambda_1 + \mu_6 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_1} &= f_{2122} + f_{1122} - f_{2223} - f_{2213} \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \lambda_2} &= f_{2112} + f_{2122} - r_2 \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_1} &= f_{2122} - C_{2122}(P_2, P_1) \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_2} &= f_{2112} - C_{2112}(P_1, P_1) \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_3} &= f_{2223} - C_{2223}(P_2, P_1) \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_4} &= f_{1223} - C_{1223}(P_1, P_2) \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_5} &= f_{2213} - C_{2123}(P_2, P_1) \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial \mu_6} &= f_{1122} - C_{1122}(P_1, P_2) \\ \frac{\partial \Lambda(f_{ij}, P_2, \lambda_i, \mu_i)}{\partial P_2} &= -[\mu_1 \frac{\partial C_{2122}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \mu_2 \frac{\partial C_{2112}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \mu_3 \frac{\partial C_{2223}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \mu_4 \frac{\partial C_{1223}(P_1, P_2)}{\partial P_2} + \mu_5 \frac{\partial C_{2213}(P_2, P_1)}{\partial P_2} + \mu_6 \frac{\partial C_{1122}(P_1, P_2)}{\partial P_2}] \end{aligned}$$

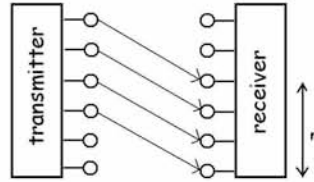


Figure 13: point to point deterministic channel

6 Παράρτημα 1: Ντετερμινιστικό κανάλι

1. **ένας πομπός ένας δέκτης (point-to-point link)** : Έστω ένα πραγματικό γκαουσιανό μοντέλο μίας σημείο προς σημείο ζεύξης. Τότε το λαμβανόμενο σήμα θα είναι: $y = hx + z$ όπου x το εκπεμπόμενο σήμα και $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ο θόρυβος. Μια συνηθισμένη και λογική υπόθεση είναι να υπάρχει περιορισμός ισχύος στο πομπό ($E[|x|] \leq 1$). Ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) είναι συνάρτηση των κερδών του καναλιού. Οπότε το h είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει το κέρδος του καναλιού για τον οποίο ισχύει: $|h| = \sqrt{SNR}$. Οι δυαδικές εκφράσεις των x, z είναι:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} \text{ και } z = \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i}$$

Συνεπώς:

$$y = \sqrt{SNR} \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \iff$$

$$y = 2^n \sum_{i=1}^n x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} [x(n+i) + z(i)]2^{-i}$$

Όπου $n = \lceil \frac{1}{2} \log(SNR) \rceil$

∴ πλήρης απόδειξη στην επόμενη ενότητα

$$y = 2^n \sum_{i=1}^n x(i)2^{-i}$$

Αν θεωρήσουμε το x ως ένα διάνυσμα q στοιχείων, βλέπουμε ότι ο δέκτης λαμβάνει τα n πρώτα, η χωρητικότητα δηλαδή του καναλιού είναι n . Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$y = S^{q-n} x$$

όπου S ο πίνακας ολίσθησης κατά ένα bit

2. **ένας πομπός δύο δέκτες (broadcast)** : Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το ντετερμινιστικό broadcast κανάλι ως εξής:

Έστω τώρα ότι υπάρχουν δύο δέκτες που λαμβάνουν το μήνυμα του πομπού. Στη γενική περίπτωση $SNR_i \neq SNR_j$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $SNR_1 \leq SNR_2$.

Σε αυτή τη περίπτωση η χωρητικότητα είναι το ελάχιστο εκ των n_i

3. **δύο πομποί ένας δέκτης (superposition)** : Σε αυτή τη περίπτωση το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης είναι συνάρτηση των εκπεμπόμενων σημάτων των δύο πομπών x_1 και x_2 με $SNR_1 > SNR_2$.

$$y = h_1 x_1 + h_2 x_2 + z$$

Όπου $h_i = \sqrt{SNR_i}$

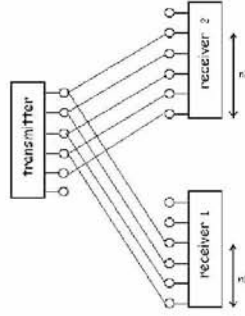


Figure 14: broadcast deterministic channel

$$y = \sqrt{SNR_1} \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i)2^{-i} + \sqrt{SNR_2} \sum_{i=1}^{\infty} x_2(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i}$$

∴ πλήρης απόδειξη στην επόμενη ενότητα

$$y = 2^{n_1} \sum_{i=1}^{n_1-n_2} x_1(i)2^{-i} + 2^{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (x_1(i+n_1+n_2) + x_2(i))2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} (x_1(i+n_1) + x_2(i+n_2) + z(i))2^{-i}$$

Στη τελευταία εξίσωση, το πρώτο άθροισμα είναι τα bits του x_1 που λαμβάνονται στα επίπεδα ισχύος που δεν υπάρχει κανένα bit του x_2 . Το δεύτερο άθροισμα αντιπροσωπεύει τα υπόλοιπα bits των x_1 και x_2 που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο του θορύβου αλλά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Τέλος στο τελευταίο άθροισμα αναπαρίσταται τα bits των x_1 και x_2 που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο του θορύβου και όπως και πριν ο δέκτης τα αγνοεί για να μπορεί να θεωρηθεί το κανάλι ντετερμινιστικό. Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$y = S^{q_1-n_1} x_1 \oplus S^{q_2-n_2} x_2$$

4. **Χωρητικότητα Ντετερμινιστικού καναλιού δύο χρηστών με παρεμβολές :** Στη περίπτωση του ντετερμινιστικού καναλιού το σήμα εισόδου ερμηνεύεται σαν επίπεδα ισχύος όπου το υψηλότερο επίπεδο αντιστοιχεί στο σημαντικότερο ψηφίο της δυαδικής αναπαράστασης της εισόδου $x = 0.b_1b_2b_3b_4b_5b_6 \dots$. Στο μοντέλο αυτό ο θόρυβος μοντελοποιείται σαν κολόβωση (τα ψηφία που βρίσκονται σε επίπεδα ισχύος χαμηλότερα από το θόρυβο χάνονται). Επίσης ορίζουμε:

- $n_{ii} = \log_2 SNR_i$
- $n_{ji} = \log_2 INR_{ji}$
- $q = \max_{ij} n_{ij}$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ντετερμινιστικού καναλιού και τους παραπάνω ορισμούς ορίζουμε το:

- $\alpha_{ij} = 2^{n_{ij}}$

ως την ολίσθηση που υφίσταται το σήμα του εκπομπού όταν το λαμβάνει ο παραλήπτης. Ένω το συνολικό σήμα (υπέρθωση όλων των σημάτων που λαμβάνει ταυτόχρονα ο παραλήπτης) είναι:

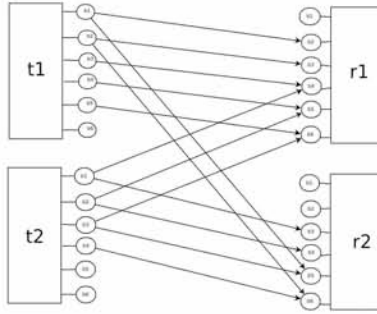


Figure 15: Two users deterministic channel

- $y_i(t) = S^{q-n_{i1}} x_1(t) + S^{q-n_{i2}} x_2(t)$

Όπου \mathcal{N}_i οι γείτονες του i και

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ο πίνακας ολίσθησης.

Η χωρητικότητα ενός ντετερμινιστικού καναλιού δυο χρηστών με παρεμβολές δίνεται απο τους μη-αρνητικούς ρυθμούς που πληρούν τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- $R_i \leq n_{ii}, i = 1, 2$
- $R_1 + R_2 \leq (n_{11} - n_{21})^+ + \max(n_{22}, n_{21})$
- $R_1 + R_2 \leq (n_{22} - n_{12})^+ + \max(n_{11}, n_{12})$
- $R_1 + R_2 \leq \max(n_{12}, (n_{11} - n_{21})^+) + \max(n_{21}, (n_{22} - n_{12})^+)$
- $2R_1 + R_2 \leq \max(n_{11}, n_{12}) + (n_{11} - n_{21})^+ + \max(n_{21}, (n_{22} - n_{12})^+)$
- $R_1 + 2R_2 \leq \max(n_{22}, n_{21}) + (n_{22} - n_{12})^+ + \max(n_{12}, (n_{11} - n_{21})^+)$

5. **Χωρητικότητα Ντετερμινιστικού δικτύου :** Στη γενικότερη περίπτωση η χωρητικότητα ενός ντετερμινιστικού δικτύου είσεται με το βαθμό του πίνακα της ελάχιστης τομής. Ο πίνακας αυτός σχετίζεται με το διμελές γράφημα που προκύπτει εξαιτίας της τομής και αποτελείται απο τους πίνακες ολίσθησης της.

στην επόμενη ενότητα γίνεται εκτενέστερη περιγραφή

7 Παράρτημα 2: Απόδειξη Χωρητικότητας Ντετερμινιστικού Καναλιού

7.1 Απόδειξη χωρητικότητας μιας ντετερμινιστικής ζεύξης

$$\begin{aligned} y &= hx + z \\ |h| &= \sqrt{SNR} \end{aligned}$$

Οι δυαδικές εκφράσεις των x, z είναι:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} \\ z &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} z(i)2^{-i} \end{aligned}$$

για απλοποίηση υποθέτουμε ότι η μέγιστη τιμή της ισχύος του θορύβου είναι 1. Συνεπώς:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i}$$

Έτσι η αρχική σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{SNR} \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \\ y &= (SNR)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \\ y &= 2^{\log(SNR)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \\ y &= 2^{\frac{1}{2} \log(SNR)} \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \\ y &= 2^n \sum_{i=1}^{\infty} x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \\ y &= 2^n \sum_{i=1}^n x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} x(n+i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i)2^{-i} \\ y &= 2^n \sum_{i=1}^n x(i)2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} [x(n+i) + z(i)]2^{-i} \end{aligned}$$

Όπου $n = \lceil \frac{1}{2} \log(SNR) \rceil$ (*)

Έστω ότι το εκπεμπόμενο σήμα είναι μια ακολουθία από bits που το καθένα εκπέμπεται σε διαφορετικό επίπεδο ισχύος με το σημαντικότερο ψηφίο να αντιστοιχίζεται στο υψηλότερο επίπεδο ισχύος και το λιγότερο σημαντικό στο χαμηλότερο. Δεδομένης τη παραπάνω πρότασης και παρατηρώντας τη (*) βλέπουμε πως ο δέκτης λαμβάνει τα n σημαντικότερα bits χωρίς θόρυβο ενώ τα υπόλοιπα με. Αν υποθέσουμε πως ο δέκτης αγνοεί όλα τα υπόλοιπα bits μπορούμε να θεωρήσουμε με ασφάλεια πως το μοντέλο είναι ντετερμινιστικό μια και δεν υπάρχει θόρυβος. Άρα τελικά:

$$y = 2^n \sum_{i=1}^n x(i)2^{-i}$$

Αν θεωρήσουμε το x ως ένα διάνυσμα q στοιχείων, γνωρίζοντας ότι ο δέκτης λαμβάνει τα n πρώτα μπορούμε να γράψουμε:

$$y = S^{q-n} x$$

όπου S ο πίνακας ολίσθησης κατά ένα bit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.2 Απόδειξη χωρητικότητας ντετερμινιστικού δικτύου με δύο πομπούς και ένα δέκτη (superposition)

$$y = h_1 x_1 + h_2 x_2 + z$$

Χρησιμοποιώντας τις δυαδικές εκφράσεις των x και z έχουμε:

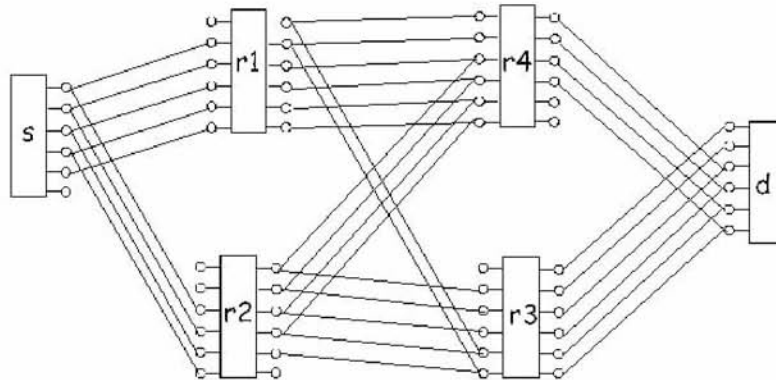
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{SNR_1} \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) 2^{-i} + \sqrt{SNR_2} \sum_{i=1}^{\infty} x_2(i) 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i) 2^{-i} \\ y &= (SNR_1)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) 2^{-i} + (SNR_2)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} x_2(i) 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i) 2^{-i} \\ y &= 2^{\log(SNR_1)} \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) 2^{-i} + 2^{\log(SNR_2)} \sum_{i=1}^{\infty} x_2(i) 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i) 2^{-i} \\ y &= 2^{\frac{1}{2} \log(SNR_1)} \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) 2^{-i} + 2^{\frac{1}{2} \log(SNR_2)} \sum_{i=1}^{\infty} x_2(i) 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i) 2^{-i} \\ y &= 2^{n_1} \sum_{i=1}^{\infty} x_1(i) 2^{-i} + 2^{n_2} \sum_{i=1}^{\infty} x_2(i) 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} z(i) 2^{-i} \\ y &= 2^{n_1} \sum_{i=1}^{n_1-n_2} x_1(i) 2^{-i} + 2^{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (x_1(i+n_1+n_2) + x_2(i)) 2^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} (x_1(i+n_1) + x_2(i+n_2) + z(i)) 2^{-i} \end{aligned}$$

Στη τελευταία εξίσωση, το πρώτο άθροισμα είναι τα bits του x_1 που λαμβάνονται στα επίπεδα ισχύος που δεν υπάρχει κανένα bit του x_2 . Το δεύτερο άθροισμα αντιπροσωπεύει τα υπόλοιπα bits των x_1 και x_2 που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο του θορύβου αλλά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Τέλος στο τελευταίο άθροισμα αναπαρίσταται τα bits των x_1 και x_2 που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο του θορύβου και όπως και πριν ο δέκτης τα αγνοεί για να μπορεί να θεωρηθεί το κανάλι ντετερμινιστικό.

Σε αυτή όμως τη περίπτωση πρέπει να ορισθεί ο τρόπος αντιμετώπισης των αλληλεπιδρώντων bit που λαμβάνονται στο ίδιο επίπεδο ισχύος. Ένας τρόπος είναι να αγνοούνται τα κρατούμενα της δυαδικής πρόσθεσης και ουσιαστικά να κρατιέται μια τιμή ενός bit. Όμοια με πριν η αλγεβρική μορφή είναι:

$$y = S^{q_1-n_1} x_1 \oplus S^{q_2-n_2} x_2$$

Κατα μια έννοια μπορούμε να παρομοιάσουμε το παραπάνω μοντέλο με το μοντέλο σύγκρουσης (collision model) όπου όταν δυο πακέτα φτάνουν ταυτόχρονα στο δέκτη απορρίπτονται, όπως στη περίπτωση μας όπου όταν δυο bits βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ισχύος απλά τα προσθέτουμε χωρίς να κρατήσουμε το κρατούμενο τους. Όμως σε αντίθεση με το μοντέλο σύγκρουσης τα bits των πρώτων $n_1 - n_2$ επιπέδων παραμένουν ανέπαφα και συνέπως ορίζεται επικοινωνία.



Σχήμα 16: Deterministic Network example

7.3 Υπολογισμός χωρητικότητας ντετερμινιστικού δικτύου

Έστω ένα ντετερμινιστικό δίκτυο με \mathcal{V} κόμβους. Η ζεύξη από το κόμβο i στο κόμβο j σχετίζεται με ένα μη αρνητικό αριθμό n_{ij} ο οποίος αντιπροσωπεύει το κέρδος του καναλιού. Κάθε χρονική στιγμή t ο κόμβος i εκπέμπει ένα διάνυσμα $x_i(t)$ σε όλους τους γείτονες του (broadcast) και λαμβάνει ένα $y_i(t)$ που είναι το αποτέλεσμα μιας ντετερμινιστικής συνάρτησης των εκπεμπόμενων σημάτων των γειτόνων του κόμβου (superposition)

$$y_j(t) = g_j(\{x_i(t)\}_{i \in \mathcal{V}})$$

$$y_j(t) = \sum_{i \in \mathcal{N}_j} S^{q-n_{ij}} x_i(t)$$

Όπου \mathcal{N}_j το σύνολο των γειτόνων του j

Μια τομή Ω σε ένα δίκτυο G με μια πηγή S και ένα προορισμό D είναι ένας διαχωρισμός των κορυφών του δικτύου σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα Ω και Ω^c . Για κάθε τομή ορίζεται ένας πίνακας G_{Ω, Ω^c} ο οποίος σχετίζεται με το διμελές γράφημα που προκύπτει λόγω της τομής. Ο πίνακας αυτός αποτελείται από τους πίνακες ολίσθησης των ζεύξεων. Ο G_{Ω, Ω^c} μπορεί να θεωρηθεί ως ο πίνακας μετάβασης από το διάνυσμα που περιέχει όλα τα εκπεμπόμενα σήματα στο διάνυσμα των ληφθέντων για τη συγκεκριμένη τομή.

Κατάλογος Σχημάτων

1	John F.Nash	5
2	John von.Neumann	6
3	Communication Channel	10
4	2x2 interference channel model	15
5	2x2 Symmetric interference channel model	16
6	χώρος δυνατών καταστάσεων συμμετρικού καναλιού	17
7	ρυθμοί για κάθε προφίλ στο συμμετρικό κανάλι	17
8	2x2 Non Symmetric interference channel model	18
9	ρυθμοί για κάθε προφίλ στο μη συμμετρικό κανάλι	19
10	χώρος δυνατών καταστάσεων μη συμμετρικού καναλιού	19
11	διαφορά ρυθμών για κάθε προφίλ	20
12	2x2x2 Routing And Power Control model	21
13	point to point deterministic channel	30
14	broadcast deterministic channel	31
15	Two users deterministic channel	32
16	Deterministic Network example	35

Αναφορές

- [1] Martin J.Osborne, *An Introduction to Game Theory*
- [2] Drew Fudenberg and Jean Tirole, *Game Theory*
- [3] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos and Vijay V.Vazirani, *Algorithmic Game Theory*
- [4] Allen B. MacKenzie and Luiz A.Dasilva, *Game Theory for Wireless Engineers*
- [5] Andrea Goldsmith, *Wireless Communications*
- [6] D.Tse and Pramod Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communications*
- [7] Theodore S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*
- [8] R.Berry and D.Tse, *Information Theoretic Games on Interference Channel*
- [9] R.Berry and D.Tse, *Information Theory meets Game Theory on the Interference Channel*
- [10] A.S.Avestimehr, S.N.Diggavi and D.Tse, *Wireless Network Information Flow*
- [11] A.S.Avestimehr, S.N.Diggavi and D.Tse, *A Deterministic Approach to Wireless Relay Networks*
- [12] A.S.Avestimehr, S.N.Diggavi and D.Tse, *Wireless Network Information Flow: A Deterministic Approach*
- [13] Lavy Libman and Ariel Orda, *Atomic Resource Sharing in Noncooperative Networks*
- [14] Ariel Orda, Raphael Rom and Nahum Shimkin, *Cooperative Routing in Multi-User Communication Networks*
- [15] Tim Roughgarden and Eva Tardos, *How Bad is Selfish Routing?*
- [16] Christos H. Papadimitriou, *Algorithms, Games, and the Internet*
- [17] Erik G. Larsson and Eduard A. Jorswieck, *Competition Versus Cooperation on the MISO Interference Channel*
- [18] Amar Prakash Azad, Eitan Altman and Rachid El-Azouzi, *Routing Games: From Egoism to Altruism*