ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης και Παραγωγή Διδακτικού Υλικού
στις Θετικές Επιστήμες

Διπλωματική εργασία

Η γεωμετρική έννοια του τριγώνου στην πρώτη τάξη του γυμνασίου: αντιλήψεις των παιδιών και διδακτική προσέγγιση με χρήση χειραπτικών υλικών και νέων τεχνολογιών

Βασιλική Χρυσικού

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:

Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης

Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου

Χρήστος Μαρκόπουλος

Βόλος, 2010

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η διερεύνηση των αρχικών αντιλήψεων 39 μαθητών και μαθητριών δύο τμημάτων πρώτης τάξης γυμνασίου, ηλικίας 12-13 ετών, σχετικά με τη γεωμετρική έννοια του τριγώνου. Οι ελλιπείς κατανοήσεις των παιδιών του δείγματος αλλά και οι δυσκολίες που συναντούν τα παιδιά όπως προέκυψαν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση προγενέστερων ερευνών λήφθηκαν υπόψη για το σχεδιασμό μιας πεντάωρης διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε στο πρώτο τμήμα του δείγματος. Η διδακτική παρέμβαση στηρίχθηκε στη θεωρία του εποικοδομητισμού και τη συνεργατική μάθηση, με στόχο τη διερεύνηση και τον έλεγχο ενός εναλλακτικού τρόπου προσέγγισης της έννοιας του τριγώνου, και, ειδικότερα, των μαθησιακών αποτελεσμάτων της χρήσης των γεωπινάκων και του λογισμικού GeoGebra, σε σύγκριση με τον παραδοσιακό τρόπο με τον οποίο διδάχτηκε παράλληλα το δεύτερο τμήμα από το μαθηματικό του τμήματος. Με τη χρησιμοποίηση αρχικού ερωτηματολογίου μελετήθηκαν οι προϋπάρχουσες ιδέες των παιδιών για την έννοια του τριγώνου, ενώ για τον έλεγχο επίτευξης των διδακτικών στόχων και τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων διδασκαλίας συμπληρώθηκε το τελικό ερωτηματολόγιο μετά από τη διδακτική διαδικασία.

Τα αποτελέσματα της έρευνας ανέδειξαν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι μαθήτριες του δείγματος σχετικά με την οπτική αναγνώριση ενός τριγώνου, τις σχέσεις που συνδέουν τις πλευρές ή τις γωνίες ενός τριγώνου, τους όρους οξυγώνιο, αμβλυγώνιο, ορθογώνιο, ισοσκελές και ισόπλευρο τρίγωνο αλλά και τη σχεδίαση των τριγώνων αυτών και των υψών τους. Οι δυσκολίες που εντοπίστηκαν συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση άλλων ερευνών. Διαπιστώθηκε ότι, το διαμορφωμένο μαθησιακό περιβάλλον της διδακτικής παρέμβασης είχε ως αποτέλεσμα, όχι μόνο την επίτευξη των γνωστικών στόχων αλλά και την ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων και δεξιοτήτων σχεδίασης με τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Θετικά συνέβαλε η χρήση των χειραπτικών υλικών και των νέων τεχνολογιών, αλλά και η αλληλεπίδραση και ο διάλογος μεταξύ της ερευνήτριας και των παιδιών ή και ανάμεσα στα παιδιά. Με βάση τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης διατυπώνονται προτάσεις για μελλοντικές διδακτικές και ερευνητικές προσεγγίσεις.

Λέξεις - κλειδιά: τρίγωνο, εποικοδομητισμός, προϋπάρχουσες αντιλήψεις παιδιών πρώτης τάξης γυμνασίου, διδακτική παρέμβαση, GeoGebra, γεωπίνακες

Ευχαριστίες

Θεωρώ υποχρέωσή μου πριν από την παρουσίαση της παρούσας ερευνητικής εργασίας να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που βοήθησαν ώστε να ολοκληρωθεί αυτή η προσπάθεια. Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον κύριο επιβλέποντα της εργασίας, καθηγητή του τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κ. Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη για την ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφερε με την άψογη συνεργασία, τις πολύτιμες συμβουλές και την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της πραγματοποίησης αυτής της έρευνας. Ακόμη, ευχαριστώ και τους συνεπιβλέποντες καθηγητές της εργασίας, τον καθηγητή του τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κ. Κωνσταντίνο Χατζηκυριάκου και τον καθηγητή του τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Χρήστο Μαρκόπουλο, για τις τελικές παρατηρήσεις και διορθώσεις.

Σημαντικές και διαφωτιστικές ήταν, επίσης, οι συζητήσεις με τους μαθηματικούς/ διδάσκοντες των δύο τμημάτων που μου παραχώρησαν τους μαθητές και τις μαθήτριές τους, δίνοντάς μου παράλληλα πρακτικές συμβουλές (π.χ. ενημέρωση για το προφίλ κάποιων παιδιών) και αντιμετωπίζοντας πολύ θετικά την ιδέα της έρευνας. Ευχαριστώ και τους λοιπούς εκπαιδευτικούς του σχολείου που μου έδωσαν χρόνο από τα δικά τους μαθήματα και μου επέτρεψαν να κάνω την παρούσα έρευνα. Πάνω απ’ όλα όμως, ευχαριστώ τους μαθητές και τις μαθήτριες που συμμετείχαν στην έρευνα αποτελώντας αναπόσπαστο κομμάτι αυτής της εργασίας.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ στο θείο μου Δημήτρη Χρυσικό με τη βοήθεια του οποίου κατάφερα να έχω πρόσβαση στις δύο σχολικές τάξεις και να πραγματοποιήσω την έρευνα στο συγκεκριμένο δείγμα. Σημαντική ήταν η βοήθεια της φίλης και συναδέλφου Ρούλας Κίτσιου, η οποία μοιράστηκε μαζί μου την αγωνία της διδασκαλίας παρατηρώντας την εργασία των παιδιών και απαθανατίζοντας με το φωτογραφικό φακό τις ξεχωριστές αυτές στιγμές της διδακτικής εμπειρίας. Συμπληρωματικά, σημαντική ήταν και η βοήθειά της, καθώς και της Σπυριδούλας Χρυσικού και του Στέργιου Σκόδρα, στο πλαίσιο συζητήσεων σχετικά με προβληματισμούς που προέκυπταν σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας εργασίας. Τέλος, στήριγμα σε αυτή τη διαδικασία αποτέλεσαν η οικογένειά μου και ο φίλος μου Σπύρος. Τους ευχαριστώ πολύ για την υπομονή και την υποστήριξή τους όλο αυτόν τον καιρό που επέτρεψαν την επιτυχή διεκπεραίωση των σπουδών μου.

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Οι δυσκολίες των μαθητών και των μαθητριών[1] στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών και η απαλοιφή τους αποτελεί αντικείμενο της Διδακτικής των μαθηματικών τα τελευταία 30 χρόνια. Η κοινή επιστημονική γνώμη είναι ότι η γνώση δεν μπορεί απλά να μεταβιβαστεί από το γονιό στο παιδί ή από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή, αλλά πρέπει να κατασκευαστεί σταδιακά και ενεργά από το παιδί στο δικό του μυαλό (Von Glasersfeld, 2002). Σύμφωνα με την προσέγγιση του εποικοδομητισμού, κάθε μαθητής έχει ορισμένες προϋπάρχουσες αντιλήψεις για διάφορες μαθηματικές έννοιες, οι οποίες μπορεί να μην είναι επιστημονικά αποδεκτές. Ο εποικοδομητισμός, λοιπόν, προτείνει να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός ως αφετηρία αυτές τις προϋπάρχουσες ή αρχικές αντιλήψεις ή παρανοήσεις ή ελλιπείς κατανοήσεις (misconceptions) των παιδιών και να σχεδιάσει τη διδακτική πρακτική με στόχο την αναδιαμόρφωσή τους (Brousseau, 1997; Ernest, 1994; Steffe, 2002).

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκαν αρχικά οι προϋπάρχουσες ιδέες 39 παιδιών, ηλικίας 12-13 ετών, που έχουν ολοκληρώσει τη φοίτησή τους στο δημοτικό, σχετικά με τη γεωμετρική έννοια του τριγώνου. Οι ιδέες των παιδιών ανιχνεύτηκαν στις απαντήσεις που έδωσαν στο αρχικό ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε και στις συνεντεύξεις που ακολούθησαν για την καλύτερη κατανόηση και ερμηνεία των γραπτών απαντήσεών τους από την ερευνήτρια. Έπειτα, πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση πέντε διδακτικών ωρών στους 19 μαθητές του δείγματος, η οποία βασίστηκε στην εποικοδομητική θεωρία και τη συνεργατική μάθηση λαμβάνοντας υπόψη τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των παιδιών, ενώ στόχο της αποτέλεσε η αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών «γεωπίνακες» και του εκπαιδευτικού λογισμικού GeoGebra με τη χρήση φυλλαδίων εργασίας για τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου. Η διδασκαλία των υπόλοιπων 20 μαθητών βασίστηκε στη δασκαλοκεντρική προσέγγιση της μάθησης με κύρια εργαλεία το διδακτικό εγχειρίδιο και το σχολικό πίνακα. Τέλος, πραγματοποιήθηκε σύγκριση των μαθησιακών αποτελεσμάτων της διδασκαλίας που βασίστηκε στις προτάσεις των σύγχρονων θεωριών μάθησης, με εκείνα της παραδοσιακής διδασκαλίας της έννοιας του τριγώνου, με βάση τις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στο τελικό ερωτηματολόγιο.

[1] Για την αποφυγή των διπλών τύπων μαθητής ή μαθήτρια και δάσκαλος ή δασκάλα που ενδεχομένως να είναι κουραστική, στο κείμενο οι λέξεις «μαθητής» και «δάσκαλος» θα αναφέρονται και στα δύο γένη.

Ειδικότερα, το πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας αποτελεί το θεωρητικό πλαίσιο και περιλαμβάνει τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο έχει ως αντικείμενο τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης και τις εφαρμογές που έχουν στη διδασκαλία των μαθηματικών, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα μαθησιακά περιβάλλοντα που αναπτύσσονται με βάση τη θεωρία του εποικοδομητισμού. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αρχικά μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση της επιστήμης της Γεωμετρίας και έπειτα περιγράφονται οι στόχοι της σχολικής γεωμετρίας, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στη μάθηση των γεωμετρικών εννοιών, το διδακτικό μοντέλο van Hieles που έχει αναπτυχθεί για την αντιμετώπισή τους και τα υλικά που χρησιμοποιούνται στη διδακτική πράξη. Το τρίτο κεφάλαιο που ολοκληρώνει το θεωρητικό πλαίσιο, περιλαμβάνει τη γεωμετρική έννοια του τριγώνου και τον τρόπο με τον οποίο αυτή διδάσκεται στο σχολικό περιβάλλον, αλλά και τα συμπεράσματα ερευνών που αφορούν τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για τη συγκεκριμένη έννοια.

Το δεύτερο μέρος αποτελείται από τρία κεφάλαια που περιγράφουν την έρευνα που πραγματοποιήθηκε για το σκοπό της παρούσας εργασίας. Έτσι, στο τέταρτο κεφάλαιο περιέχονται τα ερωτήματα, οι υποθέσεις και οι στόχοι της έρευνας, παρουσιάζεται το δείγμα, τα ερευνητικά εργαλεία και η μέθοδος επεξεργασίας τους, τα διδακτικά υλικά και έργα που αφορούν τη διδακτική παρέμβαση και τέλος περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε. Το πέμπτο κεφάλαιο αποτελείται από τα αποτελέσματα των απαντήσεων των παιδιών στο αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν τα παιδιά πριν και μετά τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου. Στο έκτο κεφάλαιο περιγράφεται η διδακτική διαδικασία με δεδομένα που συλλέχθηκαν από τη φωτογράφηση και τη μαγνητοφώνηση των παιδιών με σκοπό την παρατήρηση κυρίως της συνεργασίας τους και του τρόπου έκφρασής τους.

Έπειτα, περιγράφονται και αναλύονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ερευνητική και τη διδακτική διαδικασία καθώς και κάποιες προτάσεις για τη διαμόρφωση των μαθησιακών περιβαλλόντων, ενώ παράλληλα αναφέρονται και ζητήματα με μελλοντικές ερευνητικές προεκτάσεις. Ακολουθεί η ελληνική και ξένη βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για να πλαισιώσει όσα αναφέρονται στο κείμενο. Στο τέλος, παρατίθενται δύο παραρτήματα με το αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο και τα δύο φυλλάδια εργασίας, καθώς και ένα CD που περιλαμβάνει τις εφαρμογές που σχεδιάστηκαν στο λογισμικό GeoGebra.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ:

Θεωρητικό πλαίσιο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών

1.1 Θεωρητικές αρχές μάθησης

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1960 κεντρικό σημείο της έρευνας σε παγκόσμιο επίπεδο αποτελεί ο τρόπος που μαθαίνουν οι μαθητές. Στα τέλη της δεκαετίας, ο Ελβετός γενετικός επιστημολόγος Jean Piaget (1896-1980) υποστήριξε ότι, αν και η νοητική ανάπτυξη είναι συνεχής, ωστόσο υπάρχουν κάποια νοητικά χαρακτηριστικά και νοητικές ικανότητες που τείνουν να εμφανίζονται σε συγκεκριμένες βαθμίδες εξέλιξης. Διαπίστωσε ότι ενώ η ηλικία στην οποία εμφανίζονται κάποιες γνωστικές δομές μπορεί να ποικίλει από παιδί σε παιδί ή από κοινωνία σε κοινωνία, η σειρά με την οποία εμφανίζονται δεν μεταβάλλεται και ακολουθεί τα παρακάτω στάδια:

1. *Αισθησιοκινητικό στάδιο (0-2 ετών).* Το παιδί εξερευνά τον κόσμο χρησιμοποιώντας τις αισθήσεις του.
2. *Προσυλλογιστικό στάδιο (2-7 ετών).* Το παιδί αρχίζει να σχηματίζει στοιχειώδεις έννοιες και να δημιουργεί απλές ταξινομήσεις αντικειμένων σε μικρές ομάδες με βάση τις ομοιότητές τους.
3. *Στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών λειτουργιών (7-12 ετών).* Η σκέψη του παιδιού γίνεται πιο συστηματική και πιο λογική.
4. *Στάδιο των αφηρημένων νοητικών λειτουργιών (από 12 ετών).* Αναπτύσσεται η αφαιρετική ικανότητα σκέψης και το παιδί μπορεί να σκέφτεται πια χωρίς την ανάγκη της συγκεκριμένης εποπτείας (Τουμάσης, 2004).

Σημαντική ήταν η επίδραση των απόψεων του Piaget για τη μάθηση και τη διδασκαλία στους μεταγενέστερους ψυχολόγους και παιδαγωγούς. Η θεωρία του είχε ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση από τις συμπεριφοριστικές θεωρίες μάθησης (behaviorism) προς τις διάφορες θεωρίες δόμησης της γνώσης (structuralism) και γνωστικής ανάπτυξης (cognitivism). Στην τελευταία αυτή κατηγορία ανήκει η θεωρία οικοδόμησης της γνώσης (εποικοδομητισμός ή κονστρουκτιβισμός) (constructivism), η οποία αποτελεί την επικρατέστερη προσέγγιση με σημαντική επίδραση στην παιδαγωγική επιστήμη.

Προτού γίνει αναφορά στις βασικές αρχές του εποικοδομητισμού θα πρέπει να ξεκαθαριστεί ότι πρόκειται για μια θεωρία απόκτησης της μαθηματικής γνώσης, αλλά και οποιασδήποτε γνώσης γενικότερα. Υπό αυτή την έννοια δεν έχει ασχοληθεί άμεσα με το ζήτημα της διδασκαλίας και δεν έχει περιγράψει σαφείς διδακτικές στρατηγικές (Noddings, 1990). Παρόλα αυτά, η προσέγγιση που προτείνει για τη μάθηση και την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών συνεπάγεται ένα νέο σύνολο σκοπών και επιδιώξεων σχετικά με τη διδασκαλία (Τουμάσης, 2004).

Η θεωρία οικοδόμησης της γνώσης στηρίζεται στις παρακάτω δύο γενικές αρχές (Kilpatrick στο Lerman, 1989):

- Η γνώση, είτε είναι καινούρια, είτε διευρύνει κάποια προϋπάρχουσα, κατασκευάζεται δυναμικά από το άτομο και δεν προσλαμβάνεται παθητικά από το περιβάλλον.
- Η μάθηση έχει προσαρμοστικό χαρακτήρα, δηλαδή το άτομο οργανώνει τον εμπειρικό του κόσμο, και δεν ανακαλύπτει μια προϋπάρχουσα πραγματικότητα που είναι ανεξάρτητη από τη δική του.

Ο εποικοδομητισμός παρέχει στέγαστρο για πολλές και ποικίλες θεωρίες, όπως ο ριζοσπαστικός εποικοδομητισμός (radical constructivism), με κύριο εκπρόσωπό του τον Ernst Von Glasersfeld, που θεωρεί τη μάθηση μια ατομική κατασκευαστική διαδικασία και στηρίζεται στη γνωστική σύγκρουση που μπορεί να επέλθει αν η νέα γνώση δεν μπορεί να αφομοιωθεί από το άτομο διότι βρίσκεται σε αντιπαράθεση με κάποια υπάρχουσα γνωστική δομή του. Ο κοινωνικός τώρα εποικοδομητισμός (social constructivism) είναι ένα «παρακλάδι» του ριζοσπαστικού, με τον Heinrich Bauersfeld ως ένα από τους εκπροσώπους αυτής της τάσης. Η κοινωνιολογική (social) άποψη που προτείνεται διαφέρει από την ψυχολογική (radical) στην καταγραφή και κατανόηση των φαινομένων που παρατηρούνται στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Η πηγή της μαθηματικής γνώσης θεωρείται τώρα η κοινωνική αλληλεπίδραση. Ο Bauersfeld (1995) τονίζει ότι αυτό που παρατηρούμε στη σχολική τάξη (μαθηματικοποίηση) είναι μια κοινωνική πρακτική. Μέσα από την αλληλεπίδραση μεταξύ των δασκάλων και των μαθητών και μεταξύ των μαθητών στη σχολική τάξη αναπτύσσονται συγκεκριμένες πρακτικές και νόρμες σχετικά με τον τρόπο που επικοινωνούν, ενεργούν και πραγματεύονται τις μαθηματικές έννοιες.

Άλλη όψη του εποικοδομητισμού αποτελεί ο εγκατεστημένος εποικοδομητισμός. Ο Μακράκης (2000) υποστηρίζει πως ίσως η πιο σημαντική θέση του εποικοδομητισμού είναι η εγκατεστημένη νόηση ή γνώση (situated cognition), όπως την ονομάζουν οι Brown, Collins και Duguid (1989). Σύμφωνα με το θεωρητικό αυτό μοντέλο η μάθηση δεν αποτελεί ατομική λειτουργία του κάθε παιδιού, όπως και η γνώση δεν είναι θεωρητικά ανεξάρτητη από τις καταστάσεις μέσα στις οποίες λαμβάνει χώρα και χρησιμοποιείται (Κόμης, 2004), αντίθετα εξαρτάται από το πλαίσιο στο οποίο συντελείται (Jonassen στο Μακράκης, 2000). Η προσπάθεια για την αντιμετώπιση της αδρανούς γνώσης και την κατασκευή λειτουργικής γνώσης δεν μπορεί να είναι αποτελεσματική παρά μόνο μέσα σε περιβάλλοντα μάθησης που επικεντρώνονται σε αυθεντικές δραστηριότητες (authentic activities), οι οποίες σχετίζονται με τα βιώματα των παιδιών και αναπαριστούν πραγματικές καταστάσεις (Roth στο Σολομωνίδου, 1999).

1.2 Μαθησιακά εποικοδομητικά περιβάλλοντα

Οι θεωρητικές αρχές που περιγράφηκαν παραπάνω έχουν συνέπειες τόσο στη μελέτη της γνωστικής ανάπτυξης και μάθησης των μαθητών όσο και στη διδασκαλία, περιγράφοντας διακριτές μαθησιακές θέσεις παρά μια ενιαία θεώρηση. Όπως αναφέρει ο Τουμάσης (2004), πρακτικές που έχουν ως σκοπό να ενεργοποιήσουν τα παιδιά μέσω πειραματισμών, εξερευνήσεων, ομαδικής εργασίας και χειρισμού συγκεκριμένων αντικειμένων συνηθίζεται, τα τελευταία χρόνια, να χαρακτηρίζονται ως «κονστρουκτιβιστική διδασκαλία». Άλλοι ερευνητές (Τζεκάκη, 2003) προτιμούν να μιλούν απλώς για διδασκαλία των μαθηματικών που έχει επηρεαστεί από τις αρχές της θεωρίας οικοδόμησης της γνώσης.

Οι βασικές ιδέες του εποικοδομητισμού, σύμφωνα με τον Τουμάση (2004), είναι: α) τα παιδιά επινοούν και κατασκευάζουν τις δικές τους μεθόδους για να λύσουν μαθηματικά προβλήματα με βάση τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις τους, β) η μάθηση των μαθηματικών είναι μια δραστηριότητα επίλυσης αυθεντικών προβλημάτων, και γ) σημαντικό ρόλο παίζει η επικοινωνία ανάμεσα στους μαθητές και τον εκπαιδευτικό, αλλά και μεταξύ των ίδιων των μαθητών κατά τη διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών. Προτού όμως αναπτυχθούν οι τρεις αυτές βασικές ιδέες της προσέγγισης της οικοδόμησης της γνώσης, θα περιγραφούν ο ρόλος του μαθητή και του δασκάλου στη σύγχρονη τάξη των μαθηματικών.

1.2.1 Ρόλος του μαθητή και του εκπαιδευτικού

Στην παραδοσιακή διδακτική, η μαθηματική γνώση προσφέρεται έτοιμη στο παιδί, το οποίο απλώς καλείται να την κατανοήσει και να την απομνημονεύσει. Αντίθετα, ο βασικός στόχος της διδασκαλίας μέσα από το πρίσμα του εποικοδομητισμού είναι η παροχή ευκαιριών και η καλλιέργεια των κινήτρων για να κατασκευάσει ο μαθητής μόνος του τις θεμελιώδεις μαθηματικές ιδέες (Confrey, 1990; Τζεκάκη, 2003; Τουμάσης, 2004). Τα παιδιά δεν είναι πλέον παθητικοί δέκτες που λαμβάνουν τη γνώση έτοιμη, αλλά αυτόνομα και υπεύθυνα άτομα που συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία της μάθησης (Μακράκης, 2000).

Η σύγχρονη τάξη των μαθηματικών θέλει το μαθητή να αναλαμβάνει πρωτοβουλία, να ερευνά, να ανταλλάσσει γνώμες με τους συμμαθητές, να συζητάει πιθανούς τρόπους αντιμετώπισης των προβλημάτων, να δοκιμάζει ιδέες, να ελέγχει τα συμπεράσματά του και να τα τεκμηριώνει, προσπαθώντας να αποδείξει την ορθότητά τους (Confrey, 1990). Παράλληλα, σύμφωνα με τους Herrera και Owens (2001), τα παιδιά θα πρέπει να επεξεργάζονται διάφορα μαθηματικά υλικά, περιλαμβάνοντας φυσικά μοντέλα και διαγράμματα ή άλλες αναπαραστάσεις, με σκοπό να βοηθηθούν στην κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών ιδεών.

Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις, ο στόχος των σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας είναι η ανατροπή του παθητικού χαρακτήρα του μαθητή. Σύμφωνα με αυτήν την αντίληψη κρίνεται αναγκαίο να αλλάξει και ο ρόλος του εκπαιδευτικού μέσα στην τάξη. Ο δάσκαλος των μαθηματικών δεν είναι πλέον ο αφηγητής, αλλά ο δημιουργός του πλαισίου μέσα στο οποίο θα αναπτυχθεί η ερευνητική δραστηριότητα των παιδιών. Αναγνωρίζει ότι δεν «διδάσκει» ως ο αποκλειστικός φορέας της γνώσης, αλλά το πρώτο μέλημά του είναι η ενθάρρυνση των παιδιών να δραστηριοποιηθούν για να αντιμετωπίσουν τις καταστάσεις και τα προβλήματα που τους προτείνονται.

Ο δάσκαλος συντονίζει, συζητάει, κατευθύνει, δεν περιορίζεται στη θέση της έδρας αλλά επισκέπτεται τους μαθητές καθώς προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα, τους υποδεικνύει διεξόδους, αλλά κυρίως αποδέχεται τις προσωπικές λύσεις των παιδιών, ακόμη κι αν βρίσκονται έξω από το πλαίσιο των επιλογών του. Ο εκπαιδευτικός υποστηρίζει την ενεργή πράξη των μαθητών και παρακολουθεί τα λάθη τους που υποδηλώνουν με ποιον τρόπο τα παιδιά αντιλαμβάνονται το έργο και τις έννοιες που αντιμετωπίζουν (Τουμάσης, 2004). Σύμφωνα με τον Paour (1994), ο δάσκαλος κρίνεται αναγκαίο να έχει την ευελιξία να προσαρμόζει σε διαφορετικές περιπτώσεις την έννοια ή τις έννοιες που προσπαθεί να μεταβιβάσει και να εδραιώσει στη σκέψη των παιδιών.

Σημαντικός αριθμός ερευνών έχει επικεντρωθεί στους τρόπους με τους οποίους ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει για να στηρίξει ή να καθοδηγήσει την κατασκευή της γνώσης των παιδιών (Τζεκάκη, 2003; Steinbring, 2005), αποδεικνύοντας ότι είτε παρέχουν πρόωρα τη γνώση είτε τις στρατηγικές επίλυσης. Τα αποτελέσματα άλλων ερευνών (Καλδρυμίδου, Σακονίδης & Τζεκάκη, 2005; Τζεκάκη, 2003) δείχνουν την αντίσταση των εκπαιδευτικών να παραχωρήσουν την ευθύνη στους μαθητές, διότι συνεχίζουν να πιστεύουν ότι εκείνοι κατέχουν το ρόλο της μεταφοράς της γνώσης. Αντίθετα με τους τελευταίους, άλλοι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν με εποικοδομητική προσέγγιση, έχοντας το φόβο «μην πουν πολλά», παραμένουν σιωπηλοί (laissez-faire) με αποτέλεσμα τα παιδιά να μπερδεύονται και τελικά να απογοητεύονται (Cobb, Wood & Yackel, 1990; Confrey, 1990). Η χρυσή τομή βρίσκεται ενδεχομένως στα λόγια του Brousseau (1997), ο οποίος πρότεινε ότι *«όσο περισσότερο ο εκπαιδευτικός λέει στο μαθητή τι πρέπει να κάνει τόσο περισσότερο κινδυνεύει να χάσει την ευκαιρία για τη μάθηση στην οποία τελικά στοχεύει»*.

1.2.2 Αντιλήψεις των παιδιών

Σύμφωνα με την προσέγγιση του εποικοδομητισμού, στη μαθησιακή διαδικασία συχνά υπεισέρχονται κάποιες παράμετροι που δεν είναι εμφανείς για το δάσκαλο και μπορούν να στεγαστούν κάτω από τον όρο «αντιλήψεις» των παιδιών. Το μυαλό του παιδιού δεν θεωρείται πλέον «άγραφος χάρτης» (tabula rasa), αντίθετα υποστηρίζεται ότι το κάθε άτομο έχει τις δικές του αντιλήψεις, ιδέες και εμπειρίες. Αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε ελλιπή ή εσφαλμένη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ή διαδικασιών, σχηματίζοντας νοητικά εμπόδια τα οποία συχνά είναι πολύ δύσκολο να ανατραπούν από τη διδασκαλία. Σχετικά, η θεωρία του εποικοδομητισμού προτείνει οι εκπαιδευτικοί να ενημερωθούν πρώτα για τις συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών κι έπειτα να οργανώσουν τη διδασκαλία τους με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις των παιδιών (Baroody & Ginsburg, 1990; Confrey, 1990).

Η καταγραφή των αντιλήψεων των παιδιών αποτέλεσε το αντικείμενο μελέτης πλήθους ερευνών. Τα κυριότερα συμπεράσματα, κοινά σε μεγάλο αριθμό ερευνών (βλ. για π.χ. Driver, Guesne & Tiberghien, 1993; Goulding, 1999; Ryan & Williams, 2007), είναι τα εξής:

- Οι μαθητές πριν έρθουν στο σχολείο, έχουν διαμορφώσει αντιλήψεις με βάση τις αισθητηριακές τους εμπειρίες από το φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον, για διάφορες έννοιες και φαινόμενα. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών διαφέρουν από τις απόψεις της επιστημονικής γνώσης.

- Οι αντιλήψεις των παιδιών συχνά αντιστέκονται σε οποιαδήποτε προσπάθεια τροποποίησής τους και τους ακολουθούν μέχρι την ενηλικίωσή τους, ενώ ελάχιστα επηρεάζονται από την παραδοσιακή διδασκαλία και συνήθως το οποιοδήποτε μαθησιακό αποτέλεσμα δεν έχει χρονική διάρκεια.
- Ορισμένες αντιλήψεις που καταγράφονται από την έρευνα φαίνεται να είναι αρκετά διαδεδομένες ανάμεσα στους μαθητές.
- Σε ορισμένες περιπτώσεις τα παιδιά μπορεί να διατηρούν μετά τη διδασκαλία τόσο την εξήγηση του εκπαιδευτικού, όσο και τις δικές τους προϋπάρχουσες αντιλήψεις.
- Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αντιλήψεων των παιδιών παίζει το πολιτιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο ζουν και κυρίως η γλώσσα μέσω της οποίας επικοινωνούν.

Η μάθηση συντελείται όταν η εξερεύνηση του παιδιού αποκαλύπτει ανακολουθίες μεταξύ της ισχύουσας για αυτό αναπαράστασης της γνώσης και της εμπειρίας του (γνωστική σύγκρουση) (Ράπτης & Ράπτη, 2003). Έτσι, το κάθε άτομο δημιουργεί τις δικές του αναπαραστάσεις οικοδομώντας τις δικές του εμπειρίες και άρα δεν υπάρχει μοναδική «σωστή» αναπαράσταση της γνώσης (Μακράκης, 2000; Ράπτης & Ράπτη, 2003). Επομένως, το λάθος απενοχοποιείται αφού εκλαμβάνεται απλά ως ένα γνωστικό σχήμα ή μια «θεωρία» του μαθητή (Ράπτης & Ράπτη, 2003). Δεν θεωρείται αμάρτημα αλλά ένα φυσιολογικό συστατικό της ανθρώπινης σκέψης, που η ανάλυση και διερεύνησή του οδηγεί σε νέες εξερευνήσεις της μαθηματικής γνώσης (Τουμάσης, 2004).

Ο Brousseau (1997) τονίζει ότι *«το λάθος δεν είναι αποκλειστικά αποτέλεσμα άγνοιας, ανασφάλειας ή τύχης, αλλά το αποτέλεσμα μιας προηγούμενης γνώσης που κάποτε είχε ενδιαφέρον και επιτυχία, αλλά στη συγκεκριμένη κατάσταση είναι ανεπαρκής ή μη προσαρμόσιμη»*. Σύμφωνα με τον ίδιο, το λάθος αναδεικνύει την ύπαρξη εμποδίων στο σύστημα των γνώσεων του παιδιού, τα οποία εμπόδια κατατάσσονται σε δύο γενικές κατηγορίες, α) τα διδακτικά εμπόδια, τα οποία επηρεάζονται από τον τρόπο με τον οποίο διδάχθηκε το παιδί μια έννοια στο παρελθόν, σχετίζονται δηλαδή με την εκπαιδευτική διαδικασία, και β) τα επιστημολογικά εμπόδια, τα οποία συνδέονται με τις δυσκολίες που συνάντησε στην ιστορική της εξέλιξη μια επιστημολογική έννοια.

Οι οπαδοί του εποικοδομητισμού διαφωνούν με την άποψη της παραδοσιακής διδασκαλίας, και πιστεύουν ότι ο εκπαιδευτικός δεν πρέπει να δείχνει στο μαθητή τον τρόπο επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, ακόμη και όταν έχει βρεθεί σε λάθος μονοπάτι (όσον αφορά τη μαθηματική γνώση) (Davis, Maher & Noddings, 1990; Paour, 1994). Και σε αυτή την περίπτωση γίνεται αναφορά σε ασθενής ή ισχυρές κατασκευές παρά σε πράξεις που δεν περιέχουν κατασκευή (Noddings, 1990). Οι Maher και Davis (1990) προτείνουν ο εκπαιδευτικός να προσπαθήσει να κατανοήσει τί κάνουν οι μαθητές και γιατί, και μετά να τους δώσει τη δυνατότητα να δουν τη λανθασμένη τους εξήγηση. Όπως αναφέρει ο Simon (1995), για να μπορέσει να βοηθήσει ο εκπαιδευτικός τα παιδιά δεν αρκεί να γνωρίζει ότι οι ιδέες τους αλλάζουν συνεχώς, αλλά θα πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζει τόσο τις κατασκευαστικές δομές των μαθητών που προϋπάρχουν της διδασκαλίας των μαθηματικών, όσο και αυτές που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια.

1.2.3 Η μάθηση των μαθηματικών ως μια δραστηριότητα επίλυσης αυθεντικών προβλημάτων

Πρόβλημα είναι μια κατάσταση όπου κάποια θέλει να κάνει κάτι αλλά δεν ξέρει πώς να το κάνει, δηλαδή, όταν επιδιώκει ένα σκοπό, αλλά δεν ξέρει πώς να τον επιτύχει (Πόρποδας, 2003). Ένας αρκετά σύγχρονος ορισμός για την επίλυση προβλήματος παρουσιάζεται στην έκθεση του προγράμματος για τη διεθνή αξιολόγηση των μαθητών (PISA, 2003), όπου ορίζεται ως: *«η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες, να αντιμετωπίσουν και να επιλύσουν πραγματικές καταστάσεις με αλληλοεξαρτώμενους περιορισμούς, όπου η πορεία της λύσης δεν είναι άμεσα ορατή και όπου οι εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δεν κατατάσσονται σε μία και μοναδική περιοχή των μαθηματικών, της επιστήμης ή της ανάγνωσης».*

Βασικά στοιχεία κάθε είδους προβλήματος και προϋποθέσεις για την επίλυσή του είναι τα εξής: 1) η αρχική κατάσταση: οι προσφερόμενες πληροφορίες για το πρόβλημα, 2) η επίτευξη του στόχου: ο στόχος ή οι στόχοι πρέπει να είναι σαφής, 3) οι διαθέσιμοι ή αναγκαίοι χειρισμοί: οι ενέργειες που μπορεί να κάνει το παιδί προκειμένου να πετύχει το στόχο, και 4) οι περιορισμοί ή τα εμπόδια: οι παράγοντες που προσδιορίζουν ή εμποδίζουν την πορεία ενεργειών του παιδιού (Κολιάδης, 2002).

Πιο συγκεκριμένα, στο μάθημα των μαθηματικών ορίζονται ως προβλήματα οι μαθηματικές δραστηριότητες που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας, για την εξάσκηση και μέτρηση του επιπέδου ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων (Schoenfeld, 1992). Ο συγγραφέας, διακρίνει τα προβλήματα σε «προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις» και σε «προβληματικές καταστάσεις ή πρωτότυπα προβλήματα». Τα προβλήματα ρουτίνας είναι σαφώς προσδιορισμένα (καλά δομημένα), δηλαδή, δίνονται στο μαθητή όλα τα παραπάνω βασικά στοιχεία του προβλήματος που χρειάζονται για να λυθεί το πρόβλημα. Αντίθετα, τα πρωτότυπα προβλήματα είναι ασαφώς προσδιορισμένα (κακώς δομημένα), στα οποία δίνονται στο μαθητή λίγες ή καθόλου πληροφορίες για τα βασικά στοιχεία του προβλήματος (Kahney, 1997).

Πρώτος ασχολήθηκε με τις τεχνικές επίλυσης προβλήματος ο George Polya (1886-1985), τις οποίες προτείνει το 1945 στο βιβλίο του *How to solve it* (Πώς να το λύσω). Παρόλα αυτά ιδιαίτερη έμφαση στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος ως επίκεντρο της διδασκαλίας των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δόθηκε τη δεκαετία του 1980 από το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών στις Η.Π.Α. (N.C.T.M., 1980). Υπάρχουν πολλοί λόγοι που ενισχύουν την έμφαση στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος στο σχολείο, καθώς τα προβλήματα αυτά αποτελούν μια σημαντική γέφυρα ανάμεσα στη μεμονωμένη ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων και στη χρησιμοποίηση υπολογιστικών δεξιοτήτων στα πλαίσια της πραγματικής καθημερινής ζωής. Διαμέσου της επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές βιώνουν και μαθαίνουν να εκτιμούν τη δύναμη και τη χρησιμότητα των μαθηματικών.

Έχει αποδειχθεί ότι ο μαθητής δραστηριοποιείται περισσότερο όταν οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες είναι δανεισμένες από την καθημερινότητά του (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003). Η αντίληψη αυτή απαιτεί μια βιωματική προσέγγιση της γνώσης, όπου το παιδί ανακαλύπτει τη γνώση μέσα από διάφορες διαδικασίες κατά τις οποίες κατανοεί το φυσικό περιβάλλον με την παρατήρηση, περιγραφή και μέτρηση, και αναζητάει λύσεις σε προβλήματα της καθημερινής του ζωής. Μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο τα μαθηματικά μαθαίνονται ως τμήμα του κοινωνικού και πολιτισμικού γίγνεσθαι και οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν την αξία χρήσης μαθηματικών στην επίλυση πρακτικών και καθημερινών προβλημάτων. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να επιλέξει δραστηριότητες και προβλήματα που να βασίζονται σε πραγματικές εμπειρίες ή μαθηματικά αντικείμενα που να προκαλούν τους μαθητές, με αποτέλεσμα να τους διευκολύνει να οικοδομήσουν τις νέες γνώσεις πάνω στις ήδη ενυπάρχουσες μαθηματικές δομές (Brousseau, 1997; Ernest, 1994; Von Glasersfeld, 2002).

Οι εξελίξεις στο χώρο των ερευνών τις τελευταίες δεκαετίες είχαν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία διάφορων διδακτικών προσεγγίσεων. Η Ρεαλιστική Μαθηματική

Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education - RME) είναι μια διδακτική μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Ινστιτούτο Freudenthal της πόλης Utrecht της Ολλανδίας περίπου το 1970. Ο Freudenthal υποστήριξε ότι για να έχουν σημασία τα μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα, να συμφωνούν με τα ενδιαφέροντα των παιδιών και να έχουν σχέση με την κοινωνία. Οι βασικές αρχές της διδακτικής προσέγγισης των ρεαλιστικών μαθηματικών στην Ολλανδία είναι (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005):

- τα μαθηματικά πρέπει να έχουν νόημα και χρησιμότητα,
- το νόημα προηγείται της τυποποίησης,
- είναι σημαντικό οι μαθητές να περνούν από πολλά επίπεδα κατανόησης, από την άτυπη και συγκεκριμένη στην τυπική και αφηρημένη, και
- ο δάσκαλος καθοδηγεί τους μαθητές σε αυτή τη διαδικασία.

Αρκετές έρευνες πραγματοποιήθηκαν τα τελευταία χρόνια για να εξεταστεί η σχέση των μαθηματικών που εφαρμόζονται στην καθημερινή ζωή και των μαθηματικών που διδάσκονται στη σχολική τάξη (Carraher & Schliemann, 2002; Kelly, 2004; McNair, 2000; Moschkovich, 2002; Nunes, Schliemann & Carraher, 1993; Winter, Salway, Yee & Hughes, 2004). Από τα αποτελέσματά τους προέκυψε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν με διαφορετικό τρόπο τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή τους σε σχέση με τις μαθηματικές μεθόδους που εφαρμόζουν στο σχολείο. Πραγματοποιήθηκαν επίσης έρευνες για να ελεγχθεί πώς αντιμετωπίζουν οι μαθητές τα ρεαλιστικά προβλήματα όταν αυτά τους δίνονται στη σχολική τάξη (Ανδρέου, Μενελάου & Λεμονίδης, 2007; Καγκουρά, Γαγάτσης, Μονογυιού & Ήλια, 2007; Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994; Wyndhamn & Saljo, 1997; Yoshida, Verschaffel & De Corte, 1997). Βρέθηκε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες και δίνουν μη ρεαλιστικές απαντήσεις, είτε τα προβλήματα δίνονται χωρίς ή με νύξη. Διαπιστώθηκε ακόμη η ισχυρή πεποίθηση των μαθητών ότι τα αριθμητικά λεκτικά προβλήματα έχουν μοναδική λύση που προκύπτει από την εκτέλεση πράξεων μεταξύ των δοθέντων αριθμών.

1.2.4 Επικοινωνία στη σχολική τάξη των μαθηματικών

Το μοντέλο της παραδοσιακής διδασκαλίας είναι μετωπικό, δηλαδή κυρίαρχη θέση κατέχει ο εκπαιδευτικός, ενώ οι μαθητές εργάζονται ατομικά. Στην εποικοδομητική διδασκαλία το επίκεντρο είναι οι μαθητές, οι οποίοι εμπλέκονται ενεργά κατά τη διάρκεια του μαθήματος. Ένας τρόπος να αυξηθεί η συμμετοχή των παιδιών είναι η εργασία σε μικρές ομάδες, όπου τους δίνεται η δυνατότητα να ανταλλάσουν απόψεις με τους συμμαθητές τους (Cobb, Wood & Yackel, 1990). Η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων που προσφέρει η συνεργασία, οδήγησε στην υιοθέτηση της συνεργατικής μάθησης (collaborative learning) σαν μια νέα διδακτική προσέγγιση.

Σύμφωνα με την προσέγγιση της συνεργατικής μάθησης, εκτός από την ατομική κατασκευή εξίσου σημαντική είναι και η κοινωνική κατασκευή της γνώσης από την ομάδα ή τις ομάδες στις οποίες ανήκει ο μαθητής. Βασίζεται, δηλαδή, στις σύγχρονες θεωρίες που υποστηρίζουν ότι η μάθηση είναι ή μπορεί να βελτιωθεί μέσα από μια κοινωνική διαδικασία. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η συνεργατική μάθηση πλεονεκτεί έναντι της ατομικής μάθησης (Crook, 1998; Johnson & Johnson, 1999). Η συνεργατική μάθηση ενθαρρύνει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παιδιών στο πλαίσιο μιας ομάδας, οι οποίες είναι προσεκτικά δομημένες ώστε να επιτρέπουν τη θετική αλληλεξάρτηση, την ατομική και τη συλλογική υπευθυνότητα των μελών της (Johnson & Johnson, 1999). Η θετική αλληλεξάρτηση αναπτύσσεται όταν τα μέλη της ομάδας συνειδητοποιήσουν ότι η επιτυχία του έργου της ομάδας εξαρτάται από την ατομική συμμετοχή των μελών της. Η ατομική ευθύνη υπάρχει όταν το κάθε μέλος της ομάδας αισθάνεται τη δέσμευση να συνεισφέρει με την προσωπική του εργασία, ενώ η συλλογική ευθύνη είναι η υποχρέωση της ομάδας να αξιοποιεί τις δυνατότητες όλων των μελών της και να προσφέρει βοήθεια στα μέλη που δυσκολεύονται (Johnson & Johnson στο Αναγνωστοπούλου, 2007).

Ομάδες διαφορετικού μεγέθους, σύστασης ή λειτουργίας εργάζονται για να αναπτύξουν ικανότητα κατανόησης του γύρω κόσμου, για να είναι σε θέση να επικοινωνούν μεταξύ τους και να προωθούν τους σκοπούς της ομάδας. Αυτές οι κοινωνικές ομάδες είναι ταυτόχρονες και αλληλένδετες (Τουμάσης, 2004). Ερευνητές από το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών διατυπώνουν την άποψη ότι τα προγράμματα συνεργατικής διδασκαλίας με ανομοιογενείς ομάδες και τα διδακτικά σχήματα που συνδυάζουν στοιχεία άμεσης και συνεργατικής διδασκαλίας αποτελούν τη μοναδική λύση για τους αδύναμους μαθητές στο πλαίσιο της κανονικής τάξης (Ματσαγγούρας, 2004).

Η κατάκτηση και οικοδόμηση της γνώσης από τους μαθητές επιτυγχάνεται καλύτερα μέσα σε ένα περιβάλλον που έχει σχεδιαστεί με γνώμονα την ενίσχυση της επικοινωνίας, της αλληλεπίδρασης και της συνεργασίας ανάμεσα σε εκπαιδευτικούς και μαθητές, ή και ανάμεσα στους ίδιους τους μαθητές (Μακράκης, 2000). Δηλαδή, η ομαδική διδασκαλία εξασφαλίζει τη βελτίωση της ικανότητας για μάθηση στον ακαδημαϊκό τομέα διότι επιτρέπει την ανταλλαγή απόψεων μέσω διαλόγου, οι οποίες οδηγούν σε κοινωνικογνωστικές συγκρούσεις (Ματσαγγούρας, 2004). Αυτό επιτυγχάνεται όταν οι διάφορες ιδέες της ομάδας τίθενται υπό διαπραγμάτευση και κάθε μέλος της ομάδας συνειδητοποιεί τη διαφορά των αντιλήψεών του από τους άλλους με αποτέλεσμα την αναδιοργάνωση της προηγούμενης γνώσης μέσα σε ένα κλίμα επικοινωνίας και συνεργασίας (Τουμάσης, 2004).

Η ομαδική διδασκαλία έχει κι άλλα πλεονεκτήματα μεταξύ των οποίων η καλλιέργεια και η ωρίμανση κοινωνικών δεξιοτήτων, αλλά και η ανάπτυξη θετικών στοιχείων στην προσωπικότητα και την αλλαγή στάσεων και συμπεριφορών (Αναγνωστοπούλου, 2001). Οι μαθητές, μέσω της συνεργατικής μάθησης, έχουν ευκαιρίες διατομικής επικοινωνίας, δημιουργούν πνεύμα αλληλοβοήθειας και εξασκούνται στη δημοκρατική συμπεριφορά. Τα στοιχεία αυτά βοηθούν στην κοινωνικοποίηση των μαθητών που αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους του σχολείου. Ακόμη, η λεκτική επικοινωνία διευκολύνει τα παιδιά που δυσκολεύονται στη χρήση της γλώσσας (π.χ. παιδιά μειονοτήτων, αλλοδαπών) να εκφραστούν και να διατυπώσουν τις απόψεις τους (Meyer, 1987). Σημαντική είναι επίσης η επίδραση της συνεργασίας και στην ανάπτυξη της προσωπικότητας του παιδιού μειώνοντας το άγχος και το φόβο του και αυξάνοντας την αυτοεκτίμησή του (Καψάλης, 2007; Slavin, 1995). Τέλος, στα πλεονεκτήματα της ομαδικής εργασίας συγκαταλέγονται και τα επιπλέον κίνητρα για μάθηση που προσφέρονται στους μαθητές μέσω της αύξησης της επιθυμίας τους για την επίτευξη των κοινών στόχων της ομάδας (Αναγνωστοπούλου, 2007).

Η ομαδική εργασία όμως δεν αποτελεί πανάκεια, σύμφωνα με τη Noddings (1990). Δεν είναι βέβαιο ότι όλοι τα παιδιά θα συμμετέχουν πρόθυμα και θα βρουν ενδιαφέρον, ούτε ότι σέβονται πάντα το ένα την άποψη του άλλου. Έτσι κάποια παιδιά μπορεί να γίνουν αγενή ή να ασκήσουν βία. Για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων, θα πρέπει να έχουν εξασκηθεί στην ομαδική εργασία από νωρίς. Έρευνες αποδεικνύουν ότι συχνά οι μαθητές αποτυγχάνουν να εργαστούν ομαδικά (Kapp, 2009; Pfaff & Huddleston, 2003; Slavin, 1999). Οι συνήθεις προβληματικές καταστάσεις που προκύπτουν κατά την ομαδική διδασκαλία είναι, ένα ή περισσότερα παιδιά να μην δίνουν τον καλύτερό τους εαυτό και να βασίζονται στην εκτέλεση του έργου από τα υπόλοιπα, αλλά και να αναλαμβάνει ένα παιδί επιθετικά τον πλήρη έλεγχο αποθαρρύνοντας τη συμμετοχή των υπόλοιπων μελών της ομάδας.

Ο εκπαιδευτικός οφείλει να διανέμει στους μαθητές ρόλους που θα διατηρούν την προσοχή τους, κρατώντας εκείνος το ρόλο του παρατηρητή για να διασφαλίζει την μαθηματική σύνθεση των ομάδων. Συμβουλεύει και καθοδηγεί τους μαθητές, χωρίς να παρεμβαίνει άμεσα όταν δημιουργείται κάποιο πρόβλημα αλλά τους ενθαρρύνει να συνεργαστούν και να διαχειριστούν τις μεταξύ τους αντιπαραθέσεις (Dishon & O'Leary, 1984).

1.2.5 Διδακτικά μέσα

α) Χειραπτικά υλικά

Μια συνηθισμένη εποικοδομητική πρόταση για τη διδασκαλία των μαθηματικών είναι η χρήση χειραπτικών υλικών (manipulatives). Ο ορισμός του όρου χειραπτικό υλικό είναι μέχρι και σήμερα προβληματικός. Η Moyer (2001) αναφέρει ότι πρόκειται για υλικά που έχουν σχεδιαστεί για να αντιπροσωπεύσουν ρητά και συγκεκριμένα μαθηματικές ιδέες που είναι αφηρημένες. Σε πρόσφατη έρευνά τους οι Swan και Marshall (2010) με σκοπό να διαχωρίσουν τον όρο από τη χειραπτική δραστηριότητα (hands-on activity) υιοθετούν έναν καινούριο ορισμό, σύμφωνα με τον οποίο *«ένα μαθηματικό χειραπτικό υλικό είναι ένα αντικείμενο το οποίο μπορεί να μεταχειριστεί από ένα άτομο με τρόπο αισθητηριακό, κατά τη διάρκεια της οποίας καλλιεργείται συνειδητή και ασυνείδητη μαθηματική σκέψη»*.

Στην παρούσα εργασία ο όρος χειραπτικό υλικό θα αναφέρεται σε οποιοδήποτε αισθητό/ αντιληπτό αντικείμενο, εργαλείο, ή μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καταδείξει σαφώς βάθος στην κατανόηση μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας. Τέτοια αντικείμενα είναι οι γεωπίνακες, τα τάνγκραμ, οι ράβδοι Cuisenaire, οι άβακες, τα σχεδιαγράμματα, κ.ά. Τα αντικείμενα αυτά είναι ενδεικτικά και κάθε εκπαιδευτικός στην τάξη μπορεί να δημιουργήσει κι άλλα.

Αρκετές έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν χειραπτικά υλικά κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης υπερτερούν σε σχέση με εκείνους που δεν τα χρησιμοποιούν (Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989). Όπως αναφέρουν οι Πατσιοδήμου και Γεωργαλά (2008), έρευνες υποστηρίζουν ότι η χρήση αντικειμένων, φυσικά με τις απαραίτητες κατευθύνσεις από τον εκπαιδευτικό και με σταδιακή εικονική και αφηρημένη αναπαράσταση, βοηθά τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση γεωμετρικών και αλγεβρικών εννοιών, αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων γενίκευσης.

Τα χειραπτικά υλικά όμως δεν μεταφέρουν μαθηματικές έννοιες ούτε είναι διορατικά (Bauersfeld, 1995). Ο Papert, το 1980 τα χαρακτήρισε ως «αντικείμενα για να σκεφτείς» (objects to think with). Ο Markopoulos και η Potari (στο Γεωργιάδου-Καμπουρίδη & Μαρκόπουλος, 2007) τονίζουν ότι «*οι φυσικές ενέργειες των παιδιών πάνω σε αυτά, η αλληλεπίδραση μεταξύ τους αλλά και οι αναστοχαστικοί συλλογισμοί πάνω στις ενέργειες αυτές συμβάλλουν στην κατασκευή ή και ανακατασκευή νοητικών σχημάτων και λειτουργιών των παιδιών*». Η κατανόηση των μαθηματικών νοημάτων προκύπτει ύστερα από τη χρήση τους, όπως αναφέρει ο Meira (1998), και δεν είναι βέβαιο ότι οι μαθητές θα δουν τον ίδιο βαθμό διαφάνειας (transparency) στα υλικά αυτά σε σχέση με τους εκπαιδευτικούς ή τους κατασκευαστές. Σύμφωνα με την Kelly (2006), η προετοιμασία των μαθητών στη χρήση των χειραπτικών υλικών συχνά παραβλέπεται από τους εκπαιδευτικούς, παρότι αποτελεί θεμελιώδες συστατικό για την εισαγωγή τους στη διδασκαλία. Άλλο εμπόδιο στη χρήση τους από τους εκπαιδευτικούς είναι η έλλειψη επαρκούς πλήθους εργαλείων και ο διδακτικός χρόνος που απαιτείται (Lindroth, 2005).

Οι δάσκαλοι κατέχουν καθοριστικό ρόλο, καθότι οφείλουν να δημιουργήσουν ένα κατάλληλο μαθηματικό περιβάλλον ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τη μαθηματική τους σκέψη. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Clements (1999), τα χειραπτικά υλικά από μόνα τους δεν αρκούν, πρέπει να χρησιμοποιηθούν σε κατάλληλα προετοιμασμένες εκπαιδευτικές συνθήκες από τους δασκάλους, τονίζοντας για μια ακόμη φορά το σημαντικό ρόλο που έχουν οι δάσκαλοι στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αλλά ακόμη και τότε, σύμφωνα με τους Kamii, Lewis και Kirkland (2001), είναι πιθανόν για κάποιους μαθητές τα συγκεκριμένα υλικά να θεωρηθούν πολύ εύκολα και να χάσουν την αξία τους, και τότε η παρέμβαση του δασκάλου είναι κρίσιμη. Η Kelly (2006) περιγράφει δέκα βασικά βήματα που θα βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό στην εισαγωγή των χειραπτικών υλικών στη διδασκαλία:

1. *Να θέσει σαφώς τις αναμενόμενες από τη χρήση των χειραπτικών υλικών συμπεριφορές των παιδιών.* Τα παιδιά πρέπει να καθοδηγηθούν κατάλληλα στη χρήση των υλικών αυτών ώστε η χρήση τους να αποκτήσει νόημα.
2. *Να θέσει και να περιγράψει σαφώς το στόχο της εισαγωγής των χειραπτικών υλικών στο μάθημα.* Το βήμα αυτό είναι πολύ σημαντικό για δύο λόγους: πρώτον γιατί έτσι είναι πιο πιθανό να επιτευχθούν οι στόχοι του μαθήματος από τα παιδιά και δεύτερον για να αποφευχθεί η σύγχυσή τους με τα «παιχνίδια», όπως συνηθίζουν να τα διαφημίζουν οι κατασκευαστές (Moyer, 2001).
3. *Να διευκολύνει την ομαδική εργασία για να αυξήσει τη χρήση της μαθηματικής γλώσσας.* Η χρήση των χειραπτικών υλικών προωθεί όχι μόνο την αλληλεπίδραση με τα υλικά αυτά αλλά και μεταξύ των παιδιών.

4. *Να επιτρέψει στα παιδιά να εξερευνήσουν ελεύθερα τα υλικά πριν τη διδασκαλία.* Μόλις προσδιοριστούν ο στόχος και οι αναμενόμενες συμπεριφορές των παιδιών κρίνεται αναγκαίο να τους δοθεί η ευκαιρία να εξοικειωθούν με τα υλικά.
5. *Να μοντελοποιήσει σαφώς και συχνά τα χειραπτικά υλικά.* Η μοντελοποίηση και η χρήση διαφορετικών εργαλείων θα βοηθήσει τα παιδιά να δουν πώς ένα συγκεκριμένο υλικό μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση μιας έννοιας.
6. *Να ενσωματώσει μια ποικιλία διαφορετικών τρόπων χρήσης του κάθε χειραπτικού υλικού.* Κάτι τέτοιο θα βοηθήσει τα παιδιά να αυξήσουν την καθημερινή τους χρήση και κατανόηση των μαθηματικών.
7. *Να υποστηρίζει και να σέβεται τη χρήση των χειραπτικών υλικών από όλα τα παιδιά.* Η χρήση των υλικών από τον εκπαιδευτικό ενισχύει τη χρήση τους και από τα παιδιά.
8. *Να είναι τα χειραπτικά υλικά διαθέσιμα και προσιτά.* Τα υλικά θα πρέπει να είναι σε πληθώρα, τοποθετημένα σε σημείο όπου θα μπορούν να έχουν πρόσβαση τα παιδιά και με σαφείς οδηγίες χρήσης.
9. *Να υποστηρίζει τη δοκιμή και την εφευρετικότητα των παιδιών αλλά και των συναδέλφων του.* Αυτό οδηγεί τα παιδιά στο να προσπαθήσουν να απαντήσουν σε ερωτήσεις δείχνοντας δημιουργικότητα.
10. *Να δημιουργήσει μια διαδικασία αξιολόγησης βασισμένη στην επίδοση των παιδιών.* Για να καταλάβει ο δάσκαλος στο τέλος του μαθήματος τι γνωρίζουν τα παιδιά θα πρέπει να έχει αυξημένες ικανότητες παρατήρησης και να θέσει ένα σύνολο κριτηρίων με τα αναμενόμενα αποτελέσματα.

β) Νέες Διδακτικές Τεχνολογίες

Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) είναι ένα από τα πολλά εργαλεία, όπως και τα χειραπτικά υλικά, που προσφέρουν πλήθος ερεθισμάτων και κινήτρων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπτύξουν τη μαθηματική σκέψη των παιδιών. Η θετική, ευχάριστη και σημαντική εμπειρία των μαθηματικών από τα πρώτα χρόνια μπορεί να ασκήσει μόνιμη επίδραση στην εμπιστοσύνη των παιδιών και τον ενθουσιασμό τους για τα μαθηματικά. Ένα προσεκτικά σχεδιασμένο εκπαιδευτικό λογισμικό καθώς και δικτυακοί τόποι με κατάλληλο υλικό μπορούν να υποστηρίξουν τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών με έναν τρόπο πιο ελκυστικό και αποτελεσματικό. Ενώ το λογισμικό δεν πρέπει να αντικαταστήσει όλες τις πλούσιες μαθηματικές δραστηριότητες μακριά από τον υπολογιστή, μπορεί να παρέχει όμως μαθηματικά προβλήματα, ασκήσεις και παιχνίδια, με τρόπο τέτοιο που δίνουν τη δυνατότητα και τα ερεθίσματα για προβληματισμό, σκέψη και εμπέδωση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών σε ένα ασφαλές και ενθαρρυντικό περιβάλλον (Fraser στο Ζακόπουλος & Τερζίδης, 2007).

Η χρήση του υπολογιστή κατά την εκπαιδευτική διαδικασία έχει πολλά πλεονεκτήματα, τα πιο σημαντικά από τα οποία αναφέρονται παρακάτω. Σύμφωνα με τη Σολομωνίδου (1999), δύο από τις πιο σημαντικές δυνατότητες του υπολογιστή είναι η προσομοίωση τους και η μοντελοποίηση εναλλακτικών κόσμων. Η χρήση του κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού εποικοδομητικού τύπου μπορεί να βοηθήσει, μέσω της πολλαπλότητας των ερμηνευτικών προσεγγίσεων της πραγματικότητας, στο να παρουσιαστεί ένα κεντρικό γεγονός ή μια κατάσταση προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε μαθητές και εκπαιδευτικοί σε συνεργασία να ανασύρουν την προϋπάρχουσα γνώση ή/ και να οικοδομήσουν νέα, επιτρέποντας τη διαδικασία δοκιμής-λάθους. Σε αντίθεση, λοιπόν, με τις παραδοσιακές μορφές διδασκαλίας, όπου ο εκπαιδευτικός κατά κανόνα ανατρέχει σε θεωρητικά διδακτικά μοντέλα βάσει των οποίων η μάθηση μεταβιβάζεται με μορφή μετωπικής διδασκαλίας, τεστ και γραπτών εξετάσεων, οι μαθησιακές διαδικασίες μέσα από την εφαρμογή των ΤΠΕ ταυτίζονται με ερευνητικές, διαδραστικές και συμμετοχικές διαδικασίες (Σολομωνίδου, 2001).

Μια βασική αρχή στην οποία βασίζεται η παιδαγωγική αξιοποίηση των ΤΠΕ είναι αυτή της συνεργατικής μάθησης (Σολομωνίδου, 2001). Η τάξη που «δουλεύει» με εκπαιδευτικό λογισμικό συνήθως συμπεριλαμβάνει μαθητές οργανωμένους σε ομάδες με κοινό μαθησιακό στόχο, πρακτική που στοχεύει στη διερεύνηση των εννοιών και την ανακάλυψη της γνώσης μέσα από συζήτηση. Τα συνεργατικά περιβάλλοντα μάθησης με υπολογιστές (computer supported collaborative learning) ενισχύουν την εμπλοκή των παιδιών στην κατασκευαστική γνώση μέσα από ανακαλυπτικές, διαλογικές, συνεργατικές και συμμετοχικές διαδικασίες, με σκοπό την αυτόνομη μάθηση και αυτοαξιολόγησή τους (Κόμης, 2004; Μακράκης, 2000). Η προσέγγιση αυτή ενισχύει την ανάπτυξη επικοινωνιακών δεξιοτήτων, ικανοτήτων δόμησης της συνεργασίας, αναζήτησης έκφρασης, ανταλλαγής απόψεων και ιδεών, με αποτέλεσμα το παιδί να κερδίζει και σε μαθησιακό αλλά και σε κοινωνικό επίπεδο.

Η ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στη σχολική τάξη των μαθηματικών και ιδιαίτερα η φύση και τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί έχει αποτελέσει εδώ και χρόνια κεντρικό σημείο αιχμής των ερευνών (Hoyles, 2001; Kynigos, 2007). Ο σχετικός διάλογος έχει οδηγήσει στην ιδέα οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες για τα μαθηματικά με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων να δομούνται με την μορφή σεναρίων. Ένα σενάριο αποτελεί ένα «σύνθετο» εργαλείο και όχι ένα απλό κομμάτι αναλυτικού προγράμματος που μπορεί να περιγράφει τη διδασκαλία μιας ή περισσότερων εννοιών συνδυάζοντας διάφορα εκπαιδευτικά βοηθήματα, όπως π.χ. περισσότερα του ενός λογισμικά, σημειώσεις, ιστοσελίδες, όργανα (π.χ. πίνακας, διαβήτης), προκειμένου να επιτευχθεί ένα μαθησιακό αποτέλεσμα. Στο σενάριο περιγράφονται οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν και η διαδικασία εφαρμογής τους, αλλά και οι δράσεις των μαθητών, ο ρόλος του διδάσκοντα και η χωροχρονική οργάνωση του μαθήματος (Μακρή, Αράπογλου, Φράγκου & Κυνηγός, 2006). Η υλοποίηση του σεναρίου περιλαμβάνει την εφαρμογή των δραστηριοτήτων στην τάξη, οι οποίες μπορεί να εξειδικεύονται σε φυλλάδια εργασίας στους μαθητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
Διδακτική της Γεωμετρίας

2.1 Σύντομη ιστορική ανασκόπηση

Η Γεωμετρία είναι η επιστήμη, στο πλαίσιο της οποίας οι άνθρωποι προσπαθούν να κατανοήσουν και να επεξηγήσουν τον περιβάλλοντα χώρο τους. Λόγω των άμεσων πρακτικών της εφαρμογών, η γεωμετρία ήταν ανάμεσα στους πρώτους ιστορικά κλάδους των μαθηματικών. Πολλοί λαοί είχαν αποκτήσει γεωμετρικές και αριθμητικές γνώσεις για τις ανάγκες της ζωής τους (Βαβυλώνιοι, Αιγύπτιοι, Ινδοί, Κινέζοι και άλλοι), κάποιοι από αυτούς μάλιστα περίπου την 4-3^{η} χιλιετηρίδα προ Χριστού. Κανείς όμως από τους λαούς αυτούς δεν κατάφερε να επινοήσει την απόδειξη, τη διαδικασία δηλαδή παραγωγής νέων μαθηματικών αληθειών από αυτές που υπήρχαν. Την απόδειξη την ανακάλυψαν οι Έλληνες σοφοί, με πρωτοστάτη το Θαλή το Μιλήσιο περίπου το 600 π.Χ. (Τσιμπουράκης, 2004).

Οι αρχαίοι έλληνες θεωρώντας τα μαθηματικά ως καθαρά και διαυγή δημιουργήματα του πνεύματος, ανεξάρτητα αν αυτά θα έβρισκαν πρακτική εφαρμογή ή όχι, οδηγήθηκαν στη θεμελίωση του πρώτου αξιωματικού συστήματος των μαθηματικών (Τάσου, 1998). Ο πρώτος κλάδος των μαθηματικών που τοποθετήθηκε σε αξιωματική βάση ήταν η γεωμετρία, από τον Ευκλείδη περίπου το 300 π.Χ. με το βιβλίο του «Στοιχεία» που το αποτελούν 13 τόμοι (Bunt, Jones & Bedient, 1981). Το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη, το αξίωμα της παραλληλίας, σύμφωνα με το οποίο από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη με δοσμένη, γεγονός που ισχύει αξιωματικά χωρίς να χρειάζεται απόδειξη (Struik, 1982). Το αντικείμενο της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι η μελέτη του χώρου και των σχημάτων που μπορούν να νοηθούν μέσα σε αυτόν, διακρίνοντας γενικά τα σημεία (χωρίς διάσταση), τις γραμμές (με μία διάσταση) και τις επιφάνειες (με δύο διαστάσεις).

Στους αιώνες που ακολούθησαν, τα «Στοιχεία» διδάσκονταν σε όλα τα σχολεία του κόσμου με τον ένδοξο, για τον αλεξανδρινό γεωμέτρη, τίτλο «Ευκλείδειος Γεωμετρία». Η εκτύπωση των «Στοιχείων» έγινε για πρώτη φορά το 1482 μ.Χ. και έκτοτε οι εκδόσεις και μεταφράσεις του βιβλίου πλησίασαν σε πλήθος τις αντίστοιχες της Αγίας Γραφής (Τσιμπουράκης, 2004).

Το Νοέμβριο του 1959, στο σεμινάριο του Reyaumont για τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης με διοργανωτή τον Ο.Ο.Σ.Α., ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne (1906-1992) είχε εκφράσει με τον πιο ακραίο τρόπο το πνεύμα εκείνης της μεταρρύθμισης, εκφωνώντας την περίφημη ρήση *«Να φύγει ο Ευκλείδης!»*. Η μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» κατάφερε τελικά τον εκτοπισμό της ευκλείδειας γεωμετρίας από τα αναλυτικά προγράμματα των περισσότερων χωρών. Σήμερα, η κατάσταση στο χώρο της διδακτικής της γεωμετρίας δεν είναι ξεκάθαρη και μπορεί να περιγραφεί από τη φράση του Άγγλου μαθηματικού και παιδαγωγού Douglas Quadling *«Ο Ευκλείδης έχει φύγει αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί χάος»* (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000).

Η διδασκαλία της γεωμετρίας στην Ελλάδα, για προφανείς ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους, ήταν πάντα στενά συνδεδεμένη με το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000). Κατά τη δεκαετία του 1980 έγινε μια προσπάθεια εισαγωγής των νέων μαθηματικών της σχολής των Bourbaki αλλά η μεταρρύθμιση αυτή δεν επηρέασε ποτέ τη διδασκαλία της γεωμετρίας.

2.2 Διδασκαλία της γεωμετρίας

2.2.1 Το μάθημα της γεωμετρίας στο δημοτικό και το γυμνάσιο

Καταρχάς στο δημοτικό σχολείο η διάταξη της ύλης του πλαισίου σπουδών ακολουθεί το σπειροειδές μοντέλο, έτσι ώστε να δίνεται η δυνατότητα επανόδου στις ίδιες έννοιες σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα και σε προωθημένο κάθε φορά επίπεδο και έκταση. Με τη διάταξη αυτή υλοποιείται μια πολύ βασική παιδαγωγική αρχή, σύμφωνα με την οποία η μάθηση επιτυγχάνεται μέσα από τη διαμόρφωση «γνωστικών σχημάτων», τα οποία εμπλουτίζονται και επεκτείνονται, αναδιαμορφώνονται και αποκτούν προοδευτικά περισσότερες διασυνδέσεις. Η σπειροειδής οργάνωση της ύλης δεν αναμένεται να διαχωρίζει τα περιεχόμενο σε θεματικές ενότητες, π.χ. αριθμητική-γεωμετρία-στατιστική, αλλά αντίθετα επιδιώκει τη μέγιστη δυνατή διαπλοκή και σύνδεση των διαφόρων θεματικών ενοτήτων ώστε να προκύπτει ένα ενιαίο και συνεκτικό σύνολο μαθηματικών (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003).

Σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), με τη διδασκαλία των γεωμετρικών ενοτήτων σε κάθε τάξη του δημοτικού σχολείου επιδιώκεται οι μαθητές:

- *Α΄ δημοτικού:* Να εξασκούνται στον προσανατολισμό στο χώρο, στη σχεδίαση, αναπαραγωγή, αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση σχημάτων. Να διακρίνουν τα στερεά: τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τον κύλινδρο και τη σφαίρα. Να παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα.
- *Β΄ δημοτικού:* Να εξασκούνται στη σχεδίαση, αναπαραγωγή σχημάτων και να αναγνωρίζουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων αυτών. Να καθορίζουν σημεία και να σχεδιάζουν ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες. Να αναγνωρίζουν εμπειρικά τις παράλληλες και κάθετες ευθείες. Να διακρίνουν τα στερεά: τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τον κύλινδρο και τη σφαίρα. Να παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας και να συμπληρώνουν το συμμετρικό ενός σχήματος.
- *Γ΄ δημοτικού:* Να εξασκούνται στην περιγραφή, αναπαραγωγή και σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σωμάτων καθώς και στην εφαρμογή τεχνικών σχεδίασης κάθετων ευθειών με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων. Να γνωρίσουν τις έννοιες, κορυφή, ακμή, ορθή γωνία και έδρα. Να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα.
- *Δ΄ δημοτικού:* Να εξασκούνται με τη βοήθεια οργάνων στη χάραξη παράλληλων και κάθετων ευθειών και στο σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων. Επίσης στον υπολογισμό περιμέτρου απλών σχημάτων. Να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού. Να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί.
- *Ε΄ δημοτικού:* Να χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Να υπολογίζουν τις περιμέτρους και τα εμβαδά βασικών γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και το μήκος ενός κύκλου. Να γνωρίζουν την ονομασία γωνιών και τριγώνων, να τα ταξινομούν και να τα κατασκευάζουν. Να εξασκούνται στην κατασκευή αναπτυγμάτων απλών στερεών.
- *Στ΄ δημοτικού:* Να εξασκούνται στο σχεδιασμό ευθύγραμμων σχημάτων και κύκλων με κανόνα (χάρακα) και διαβήτη. Να υπολογίζουν το μήκος κύκλου και εμβαδόν κυκλικού δίσκου, τα εμβαδά και τους όγκους βασικών στερεών σχημάτων. Να αναπαράγουν, να κατασκευάζουν και να συγκρίνουν γωνίες. Να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα και να διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις.

Στα σχολικά βιβλία των τριών τάξεων του γυμνασίου διασφαλίζεται η αυτονομία της γεωμετρίας ως αντικείμενο. Ο διαχωρισμός της άλγεβρας και της γεωμετρίας ήρθε με τα νέα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου το 2007 (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος, 2007; Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007; Αργυράκης, Βουργάνας, Μεντής, Χρυσοβέργης & Τσικοπούλου, 2007). Η διδασκαλία της άλγεβρας και της γεωμετρίας σε κάθε τάξη γίνεται από τον ίδιο διδάσκοντα και μάλιστα παράλληλα, με άξονα αναφοράς τις δύο ώρες διδασκαλίας εβδομαδιαίως για την άλγεβρα και τις δύο ώρες διδασκαλίας εβδομαδιαίως για τη γεωμετρία (δυνατότητα τροποποίησης σε τρεις ώρες για την άλγεβρα και μία ώρα για τη γεωμετρία). Με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται η οριζόντια διασύνδεση των εννοιών των δύο μερών του βιβλίου (Δ.Ε.Π.Π.Σ., 2003). Αντιδράσεις προκλήθηκαν σχετικά με το διαχωρισμό των δύο κλάδων απ' τη μια πλευρά και τη μέγιστη δυνατή διασύνδεσή τους από την άλλη (Βερύκιος, 2007).

Στο γυμνάσιο, με το οποίο και ολοκληρώνεται η υποχρεωτική εκπαίδευση, με τη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας επιδιώκεται οι μαθητές:

- *Α΄ γυμνασίου:* Α) Να γνωρίσουν τις βασικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο, ευθύγραμμα τμήματα, γωνία, ευθύγραμμα σχήματα, κύκλος, τόξο, επίκεντρη γωνία, κτλ. και να κατανοήσουν τη σημασία τους στην ανάπτυξη της γεωμετρίας. Να γνωρίσουν τις έννοιες της καθετότητας, της παραλληλίας και της συμμετρίας ως προς κέντρο και ως προς άξονα και να τις χρησιμοποιούν στην ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων (π.χ. χαρακτηριστικές ιδιότητες τριγώνου, παραλληλογράμμου, κτλ.). Β) Να κατανοήσουν τις έννοιες: μήκος ευθύγραμμου τμήματος και μέτρο γωνίας και τόξου, να γνωρίσουν τις μονάδες μέτρησης αυτών και να μπορούν να υπολογίσουν το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και το μέτρο μιας γωνίας και ενός τόξου.
- *Β΄ Γυμνασίου:* Α) Να γνωρίσουν τις έννοιες της εγγεγραμμένης γωνίας, του κανονικού πολυγώνου και να κατανοήσουν τη σημασία των εννοιών αυτών στον υπολογισμό του μήκους κύκλου και του εμβαδού κυκλικού δίσκου. Να γνωρίσουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά (πρίσμα, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος και σφαίρα) και τις χαρακτηριστικές ιδιότητές τους. Β) Να γνωρίσουν τις μονάδες μέτρησης επιφανείας και όγκου και να μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν επιπέδων σχημάτων και των επιφανειών βασικών στερεών, καθώς επίσης και τον όγκο των βασικών στερεών (πρίσμα, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος και σφαίρα). Γ) Να γνωρίσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Να γνωρίσουν την έννοια του διανύσματος,

να προσθέτουν και να αφαιρούν διανύσματα και να αναλύουν ένα διάνυσμα σε δυο κάθετες συνιστώσες.

- *Γ΄ γυμνασίου:* Α) Να γνωρίσουν την έννοια της ισότητας δύο σχημάτων και ειδικότερα την έννοια της ισότητας δύο τριγώνων και να χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων στη επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Να γνωρίσουν την έννοια του λόγου ευθυγράμμων τμημάτων, το θεώρημα του Θαλή, την έννοια της ομοιότητας δύο σχημάτων και ειδικότερα την έννοια της ομοιότητας δύο τριγώνων και να τα χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Β) Να γνωρίσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας φ, με $0^o < φ < 360°$, τις σχέσεις που τους συνδέει, τους νόμους των ημίτονων και των συνημίτονων και να μπορούν να τους εφαρμόζουν στον υπολογισμό των πλευρών και των γωνιών τριγώνου.

Γενικότερα με το μάθημα της γεωμετρίας στο γυμνάσιο επιδιώκεται: α) η αναγνώριση και ταξινόμηση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων, β) η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με χρήση αβαθμολόγητου κανόνα και διαβήτη, γ) η μελέτη των σχέσεων της ισότητας, της παραλληλίας και της ομοιότητας, και δ) ο υπολογισμός εμβαδών και όγκων. Ενώ με τη διδασκαλία της γεωμετρίας στις δύο πρώτες τάξεις του λυκείου επιδιώκεται: α) η ανάπτυξη και χρήση των ιδιοτήτων των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου, β) η εξοικείωση με την αποδεικτική διαδικασία, και γ) η χρήση γεωμετρικών μοντέλων στην επίλυση προβλημάτων.

Σύμφωνα με τον Τουμάση (2004), η αξία της διδασκαλίας της γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι αδιαμφισβήτητη για τους εξής λόγους:

- βοηθάει στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου,
- καλλιεργεί την ικανότητα νοερής σύλληψης των αντικειμένων,
- συνδέει άμεσα τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο,
- βοηθάει στην κατανόηση άλλων αφηρημένων μαθηματικών ιδεών από άλλες περιοχές των μαθηματικών, μέσω της δημιουργίας γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας, και
- αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος, στην πραγματικότητα, του πιο απλού και κατανοητού για τους μαθητές.

2.2.2 Δυσκολίες στη μάθηση των γεωμετρικών εννοιών

Σε αντίθεση με την παιδαγωγική της αξία, η διδασκαλία της γεωμετρίας συχνά παρουσιάζει μεγάλα προβλήματα και δυσκολίες (Robinson, 1976). Στις μικρότερες τάξεις, όπου διδάσκεται η περιγραφική ή πρακτική γεωμετρία (μη αποδεικτική γεωμετρία), οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές, συχνά εμφανίζουν δυσκολίες ακόμη και σε βασικές γεωμετρικές έννοιες όπως η γωνία, το τρίγωνο ή το τετράγωνο (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998; Pyshkalo στο Wirszup, 1976), ενώ δυσκολεύονται και στη μάθηση των ιδιοτήτων αυτών των σχημάτων (Τουμάσης, 2004). Κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας αναπτύσσεται στη σχολική τάξη μια ειδική ορολογία για την περιγραφή των γεωμετρικών εννοιών, η οποία προκαλεί δυσκολίες στην κατανόηση των εννοιών αυτών από τους περισσότερους μαθητές (Pyshkalo στο Wirszup, 1976; Τουμάσης, 2004; Τρούλης, 1991).

Στη διδασκαλία της γεωμετρίας παρατηρείται πολύ συχνά το διδακτικό εμπόδιο του «φαίνεσθαι». Για παράδειγμα τα παιδιά υποστηρίζουν ότι «η γωνία αυτή είναι ορθή γιατί φαίνεται (ορθή)» ή «το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές γιατί φαίνεται (ισοσκελές)», θεωρώντας περιττή τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές δεν θεωρούν αναγκαίο να αποδείξουν κάτι το οποίο βλέπουν προφανές (Chazan, 1993; Williams στο Τουμάσης, 2004). Τα περισσότερα παιδιά δεν μπορούν να κατανοήσουν τόσο τη σημασία της απόδειξης όσο και τη διαδικασία εκτέλεσής της. Ο Τουμάσης (2004) υποστηρίζει ότι, το μεγαλύτερο ίσως πρόβλημα που εμφανίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας είναι η έννοια της απόδειξης, η οποία δημιουργεί πολλές φορές αξεπέραστες δυσκολίες. Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται αρχικά στη Γ' γυμνασίου όταν τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τις αυστηρές αποδεικτικές διαδικασίες και γίνεται ιδιαίτερα έντονο στην Α' λυκείου όπου η γεωμετρία είναι ανεξάρτητο μάθημα και θεμελιώνεται αξιωματικά. Πολλά παιδιά προτιμούν να ασχοληθούν με μια αρκετά δύσκολη άσκηση άλγεβρας παρά με μια σχετικά απλούστερη άσκηση γεωμετρίας.

Ένα ακόμη πρόβλημα είναι η ανεπάρκεια σύνδεσης που παρατηρείται στην επεξεργασία των γεωμετρικών εννοιών από τη μια βαθμίδα στην άλλη (Sdrolias & Triandafillidis, 2007). Σε όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση επίσης, οι μαθητές δυσκολεύονται να εφαρμόσουν τη θεωρία για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. Έχει αποδειχθεί ότι τα παιδιά μπορούν να διαπραγματευθούν τα γεωμετρικά προβλήματα πολύ καλύτερα αν τους δοθεί η ευκαιρία να εργαστούν κατευθείαν με μια οπτική αντιμετώπιση του προβλήματος, παρά εάν εργαστούν με μια αφηρημένη αντιπροσώπευση του προβλήματος. Για παράδειγμα, όταν σε παιδιά ηλικίας 13 ετών δόθηκαν διάφορες τριάδες ευθύγραμμων τμημάτων και τους ζητήθηκε να επιλέξουν τις τριάδες που μπορούν να αποτελέσουν πλευρές ενός τριγώνου, τα δύο τρίτα αυτών μπόρεσαν να απαντήσουν σωστά, ενώ όταν τους ζητήθηκε να κάνουν το ίδιο με αριθμητικές τριάδες, σχεδόν το 90% απέτυχε να απαντήσει (Carpenter, et al. στο Τουμάσης, 2004).

Η διδακτική μέθοδος της γεωμετρίας που ακολουθεί ο δάσκαλος θεωρείται κρίσιμος παράγοντας για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών. Οι Clements και Battista (1992) υποστηρίζουν ότι ένας από τους βασικούς λόγους για τους οποίους οι μαθητές έχουν δυσκολίες στην κατανόηση της γεωμετρίας είναι η μέθοδος διδασκαλίας που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί. Ο Holt (1995) αναφέρει ότι τα παιδιά ίσως θέλουν να προβληματιστούν, να ανακαλύψουν, να συζητήσουν, να μάθουν και όχι να διδαχθούν. Ο Cemen (στο Dimakos, Nikoloudakis, Ferentinos & Choustoulakis, 2007) υπογραμμίζει ότι οι δυσκολίες στη γεωμετρία και τα μαθηματικά γενικότερα, εμφανίζονται όχι μόνο εξαιτίας της συσσωρευτικής φύσης της μάθησης, αλλά και εξαιτίας της διδακτικής προσέγγισης που επιλέγεται από το δάσκαλο. Ο τρόπος που διδάσκεται η γεωμετρία στα σχολεία (ορισμός-θεώρημα-απόδειξη) συχνά είναι η αιτία που τελικά οι μαθητές μένουν στην άγνοιά τους (Κολέζα & Ντζιαχρήστος, 1990).

2.2.3 Το διδακτικό μοντέλο van Hieles

Η Κολέζα (2000) αναφέρεται σχετικά με την έρευνα γύρω από τη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας, σε μία βασική διάκριση δύο προσεγγίσεων. Σύμφωνα με την πρώτη προσέγγιση, η έρευνα προσανατολίζεται καταρχήν στη διατύπωση μιας θεωρίας, η οποία στη συνέχεια θα επιβεβαιωθεί ή θα απορριφθεί με βάση τα ερευνητικά δεδομένα. Σε αυτή την προσέγγιση, οι γεωμετρικές δραστηριότητες επιλέγονται έτσι ώστε να ταιριάζουν στο θεωρητικό μοντέλο και δεν αντανακλούν απαραίτητα την πραγματικότητα των παιδιών. Κύριος στόχος της δεύτερης προσέγγισης είναι η κατανόηση και ερμηνεία των δυνατοτήτων των μαθητών και των διαδικασιών που ακολουθούν. Η θεωρία σε αυτή την περίπτωση δεν αποτελεί τη βάση για το σχεδιασμό της έρευνας, αλλά χρησιμοποιείται ως εργαλείο για να εξηγήσει καταστάσεις και αποτελέσματα που προκύπτουν από την έρευνα. Η έρευνα οδηγεί στη βελτίωση των ήδη υπαρχουσών θεωριών ή στη διατύπωση νέων θεωριών. Οι σύγχρονες έρευνες στο χώρο της διδακτικής της γεωμετρίας ακολουθούν κυρίως τη δεύτερη προσέγγιση και χρησιμοποιούν ως εργαλείο ανάλυσης των παρατηρήσεων τη θεωρία των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των van Hieles.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1950 δύο Ολλανδοί καθηγητές μαθηματικών, ο Pierre Marie van Hiele και η σύζυγός του Dina van Hiele-Geldof, προβληματίζονταν με τις δυσκολίες των μαθητών τους στη γεωμετρία. Μελετώντας τις εργασίες του Piaget συνειδητοποίησαν ότι, όπως ακριβώς συμβαίνει με τα γνωστικά στάδια του Piaget, αν η διδασκαλία λαμβάνει χώρα σε επίπεδο πάνω από αυτό του μαθητή τότε η διδασκόμενη ύλη δεν αφομοιώνεται σωστά και δεν συγκρατείται μακροπρόθεσμα. Όπως είπε και ο Freudenthal, *«όσο το παιδί δεν μπορεί να αναλογιστεί πάνω στις ίδιες του τις δραστηριότητες, δεν μπορεί να φτάσει στο επόμενο επίπεδο»* (Streefland, 2000).

Οι van Hieles κατέληξαν στη διατύπωση ενός μοντέλου που αποτελείται από πέντε επίπεδα κατανόησης και περιγράφει τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Πολλοί δάσκαλοι μαθηματικών έμαθαν για το μοντέλο αυτό στις αρχές της δεκαετίας του 1970 από τις προσπάθειες του Wirszup (1976). Τα πέντε αυτά επίπεδα, όπως τροποποιήθηκαν από τον Hoffer το 1981 με τις περιγραφές της Dina van Hiele, διαμορφώθηκαν ως εξής (Burger & Shaughnessy, 1986):

- *Επίπεδο 0 (Οπτικοποίησης - Visualization).* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα ως ολότητα, με βάση τη μορφή τους και δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι αποτελούνται από διάφορα μέρη (πλευρές, γωνίες, κτλ.), ούτε ότι έχουν κάποιες ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν.
- *Επίπεδο 1 (Ανάλυσης - Analysis).* Οι μαθητές μέσω παρατήρησης και πειραματισμού αρχίζουν να αναγνωρίζουν τα συστατικά στοιχεία των σχημάτων και να περιγράφουν τις ιδιότητές τους, με ταυτόχρονη ανάπτυξη του κατάλληλου λεξιλογίου.
- *Επίπεδο 2 (Άτυπης αφαίρεσης - Abstraction).* Οι μαθητές μπορούν να διατάσσουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, να αντιληφθούν το ρόλο των ορισμών τους και να αναγνωρίσουν κλάσεις (π.χ. το τετράγωνο αναγνωρίζεται ως ειδική περίπτωση του ορθογωνίου).
- *Επίπεδο 3 (Τυπικής αφαίρεσης - Deduction).* Οι μαθητές κατανοούν το ρόλο των απροσδιόριστων (αρχικών) όρων, των αξιωμάτων, των ορισμών, των θεωρημάτων και της συσχέτισης των ικανών και αναγκαίων συνθηκών, ενώ χρησιμοποιούν αποδεικτικές μεθόδους όπως η εις άτοπον απαγωγή.

- *Επίπεδο 4 (Αυστηρότητας - Rigor).* Οι μαθητές κατανοούν τη σημασία και τη διαδικασία οικοδόμησης ενός αξιωματικού μαθηματικού συστήματος και τις σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα. Το ανώτερο αυτό επίπεδο γεωμετρικής σκέψης δεν έχει αναπτυχθεί στις αρχικές εργασίες των van Hieles καθώς η σχολική γεωμετρία διδάσκεται συνήθως στα τέσσερα πρώτα επίπεδα (Τουμάσης, 2004).

Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι ότι οι μαθητές περνούν διαδοχικά από το ένα επίπεδο στο άλλο χωρίς να είναι δυνατή η υπερπήδησή τους. Η ωρίμανση και η μετάβαση σε ανώτερο επίπεδο δεν αποτελούν μόνο μια φυσική αυτο-εκπληρούμενη διαδικασία που είναι συνάρτηση της ηλικίας, αλλά συνιστούν περισσότερο μια εξέλιξη που σχετίζεται με την οργάνωση, τα υλικά, το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας (Κολέζα, 2000). Οι van Hieles στην προσπάθειά τους να μελετήσουν αυτά τα ζητήματα πρότειναν πέντε διαδοχικές φάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας (Κολέζα, 2000; Τουμάσης, 2004):

- *Πληροφόρησης (information).* Γίνονται παρατηρήσεις, συζήτηση, απευθύνονται ερωτήσεις και εισάγεται η κατάλληλη ορολογία με σκοπό να εξοικειωθούν οι μαθητές με τα αντικείμενα και ο δάσκαλος να πληροφορηθεί για τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών.
- *Κατευθυνόμενος προσανατολισμός (directed orientation).* Οι μαθητές εξερευνούν τα αντικείμενα και έρχονται σε επαφή με δραστηριότητες και υλικά που ο δάσκαλος έχει επιλέξει και ταξινομήσει προσεκτικά με σκοπό την ανακάλυψη των εννοιών που είναι χαρακτηριστικές για το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται.
- *Επεξήγησης (explanation).* Οι μαθητές εκφράζουν και ανταλλάσσουν απόψεις και ο δάσκαλος τους βοηθάει να αναπτύξουν την κατάλληλη γλώσσα για την περιγραφή των σχέσεων που υπάρχουν.
- *Ελεύθερος προσανατολισμός (free orientation).* Οι μαθητές ασχολούνται με πιο σύνθετες εργασίες εξερευνώντας τις δραστηριότητες ελεύθερα με το δικό τους προσωπικό τρόπο.
- *Ενοποίησης (integration).* Οι μαθητές συνοψίζουν ό,τι έχουν μάθει με σκοπό τη δημιουργία μιας σφαιρικής άποψης για το νέο πλέγμα σχέσεων που προκύπτει.

Ταυτόχρονα με την ανάπτυξη των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης λειτουργούν και καλλιεργούνται ορισμένες γεωμετρικές δεξιότητες χρήσιμες για την ομαλή εξέλιξη των μαθητών στα επίπεδα αυτά: α) οπτικές δεξιότητες, β) λεκτικές δεξιότητες, γ) σχεδιαστικές δεξιότητες, δ) λογικές δεξιότητες (ανάπτυξη της κριτικής σκέψης), και ε) δεξιότητες εφαρμογής. Οι δεξιότητες αυτές κρίνονται βασικές και η έλλειψή τους εμποδίζει σοβαρά τη μάθηση της γεωμετρίας (Τουμάσης, 2004).

Πλήθος ερευνών έχουν πραγματοποιηθεί για να υποστηρίξουν το μοντέλο van Hieles δίνοντας έμφαση στο επίπεδο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Pegg & Davey, 1989; Senk, 1989; Τζίφας, 2005; Usiskin, 1982; Wu & Ma, 2005, 2006). Η ιεραρχία των επίπεδων van Hieles επαληθεύτηκε από αρκετές έρευνες (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Mayberry, 1983; Wu & Ma, 2006), ενώ άλλες συμφώνησαν ότι υπάρχει δυσκολία να προσδιοριστεί το επίπεδο van Hieles κάποιων μαθητών που βρίσκονται στη διαδικασία μετάβασης από το ένα επίπεδο στο άλλο, αναδεικνύοντας έτσι το δυναμικό και συνεχή χαρακτήρα των επιπέδων (Burger & Shaughnessy, 1986; Mayberry, 1983; Senk, 1989; Usiskin, 1982). Σύμφωνα με τις έρευνες των Wu και Ma (2006) και Pyshkalo (στο Wirszup, 1976), αρκετοί μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται να ξεπεράσουν το επίπεδο 0 της οπτικοποίησης και συνεχίζουν μέχρι την ηλικία των 12 ετών να αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως ολότητες.

Έρευνες αποδεικνύουν τα χαμηλά επίπεδα γεωμετρικής σκέψης και των υπαρχόντων και των μελλοντικών εκπαιδευτικών (Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Mason & Schell, 1988; Mayberry, 1983; Swafford, Jones & Thornton, 1997). Τα αποτελέσματα των ερευνών για τους δασκάλους δεν διαφέρουν από αυτά των μαθητών, με την πλειοψηφία των δασκάλων να βρίσκονται στα δύο πρώτα επίπεδα των van Hieles. Σύμφωνα με τους Swafford, Jones και Thornton (1997), προγράμματα παρέμβασης που ενισχύουν τη γεωμετρική γνώση και κατανόηση των δασκάλων και την ενημέρωσή τους σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας, μπορούν να επηρεάσουν θετικά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Τα θεμελιώδη επιστημολογικά χαρακτηριστικά της ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως είναι η παραγωγική οργάνωση του περιεχομένου, η αποδεικτική διαδικασία και η έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές, αναφέρονται συνήθως ως ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Με βάση το μοντέλο van Hieles είναι φανερό ότι η διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας στο λύκειο προϋποθέτει την κατάκτηση των δύο πρώτων επιπέδων και έχει ως κύριο σκοπό την κατάκτηση των δύο επόμενων (για το πέμπτο δεν μπορεί να γίνεται λόγος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση) (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000). Έρευνες επιβεβαιώνουν το συμπέρασμα ότι οι μαθητές που ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους στην Α΄ λυκείου και ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας, δεν έχουν ξεπεράσει ακόμη το δεύτερο επίπεδο της ανάλυσης, ενώ με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα θα έπρεπε να έχουν κατακτήσει τουλάχιστον το τρίτο επίπεδο άτυπης αφαίρεσης και να είναι ικανοί να παράγουν δικές τους αποδείξεις (Burger & Shaughnessy, 1986; Θωμαΐδης & Πούλος, 2000; Senk, 1989). Γενικότερα οι περισσότεροι μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκονται στα επίπεδα 0 και 1 της θεωρίας των van Hieles (Τζίφας, 2005; Usiskin, 1982). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι μόνη λύση των μαθητών είναι η απομνημόνευση των αποδείξεων των γεωμετρικών θεωρημάτων (Burger & Shaughnessy, 1986).

2.2.4 Διδακτικά μέσα στο μάθημα της γεωμετρίας

Τα εκπαιδευτικά μέσα που χρησιμοποιούνται συνήθως για τη διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών περιορίζονται κυρίως σε σχέδια σχημάτων καθώς και σε όργανα μέτρησης, όπως είναι ο κανόνας, ο διαβήτης ή το μοιρογνωμόνιο.

Έρευνες δείχνουν ότι η χρήση χειραπτικών υλικών ενισχύει την ανάπτυξη της γεωμετρικής και της χωρικής σκέψης των μαθητών (Clements & McMillen, 1996; Sowell, 1989). Υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν τη χρήση χειραπτικών υλικών και σε μεγαλύτερα παιδιά, ειδικά σε όσα βρίσκονται σε χαμηλά επίπεδα γεωμετρικής σκέψης κατά van Hieles (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Τα γεωμετρικά σχήματα και οι ιδιότητές τους μπορούν να οπτικοποιηθούν με τα υλικά αυτά. Οι μαθητές που βρίσκονται στα επίπεδα 0, 1 και 2 κατά van Hieles χρειάζεται να χρησιμοποιούν γεωπίνακες, ισομετρικά φύλλα, γεωμετρικές ράβδους, κ.ά. για να βοηθηθούν στην κατασκευή των γεωμετρικών ιδεών, χωρίς αυτό να σημαίνει πως η χρήση τους αποτελεί εγγύηση για το αποτέλεσμα (Clements & McMillen, 1996). Τα χειραπτικά υλικά υπάρχουν και σε εικονική μορφή (virtual manipulatives) στο διαδίκτυο ως εφαρμογές (applets) παρέχοντας επιπλέον διαδραστικότητα (Moyer & Bolyard, 2002).

Οι ψηφιακές τεχνολογίες που μέχρι τώρα έχουν αναπτυχθεί για τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες. Στην πρώτη ανήκουν τα λογισμικά της δυναμικής γεωμετρίας, όπως το Cabri II, το Sketchpad και το GeoGebra. Ο όρος δυναμική γεωμετρία τονίζει το βασικό χαρακτηριστικό των λογισμικών της κατηγορίας αυτής που είναι ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων που συχνά αποκαλείται «σύρσιμο».

Δηλαδή, αφού τα παιδιά κάνουν μια κατασκευή μπορούν να κινήσουν ορισμένα στοιχεία του σχήματος ελεύθερα για να παρατηρήσουν άλλα στοιχεία του σχήματος πώς αποκρίνονται δυναμικά σε αυτές τις αλλαγές. Το περιβάλλον εργασίας τους προσομοιώνει κατά κάποιο τρόπο την αξιωματική της ευκλείδειας γεωμετρίας και έτσι θεωρούνται κατάλληλα εργαλεία για τη διδασκαλία της.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα λογισμικά της συμβολικής έκφρασης, όπως ο Χελωνόκοσμος, που κατά κύριο λόγο είναι λογισμικά που βασίζονται στη γλώσσα προγραμματισμού «Logo» και στη μαθηματική οντότητα «χελώνα», όπως την ονόμασε ο Seymour Papert (1991). Η συνύπαρξη αυτή συνδέει στενά τον προγραμματισμό με τη γεωμετρία καθώς οι διαδικασίες που ορίζονται στη Logo, όταν εκτελούνται έχουν ως γραφικό αποτέλεσμα από την κίνηση της χελώνας ένα γεωμετρικό σχήμα.

Ο Τουμάσης (2003) τονίζει τη σημασία χρήσης των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία της γεωμετρίας λέγοντας χαρακτηριστικά ότι *«το δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό που έχει αναπτυχθεί πρόσφατα αποτελεί την πιο σημαντική εξέλιξη στη γεωμετρία από την εποχή του Ευκλείδη»*. Το ερευνητικό ενδιαφέρον που παρουσιάστηκε με επίκεντρο την ευκλείδεια γεωμετρία αναζωογόνησε τη διδασκαλία της σε πολλές χώρες όπου κινδύνευε να είναι παρελθόν (Davis, 1995). Πλήθος ερευνών στην προσπάθειά τους να διερευνήσουν εάν η χρήση δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού βοηθάει τη μετάβαση σε επόμενο επίπεδο van Hieles σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία, κατέληξαν σε ενίσχυση της αρχικής τους υπόθεσης (Choi-Koh, 1999; Idris, 2009; Ντζιαχρήστος & Ζαράνης, 2001; Olkun, Sinoplu & Deryakulu, 2005; Patsiomitou & Emvalotis, 2010).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Η γεωμετρική έννοια του τριγώνου

3.1 Το τρίγωνο και η διδασκαλία του

Τρίγωνο είναι ένα γεωμετρικό σχήμα με το οποίο τα παιδιά έρχονται από πολύ νωρίς σε επαφή μέσα από δραστηριότητες και παιχνίδια. Είναι ένα πολύγωνο με τρεις πλευρές και τρεις γωνίες και αποτελεί ένα από τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που παρουσιάζονται στους μαθητές μαζί με το τετράγωνο και τον κύκλο. Ωστόσο το ότι ένα παιδί από 2 χρονών μπορεί να ξεχωρίσει ένα τρίγωνο από ένα τετράγωνο ή ότι μπορεί να σχεδιάσει ένα τρίγωνο στην ηλικία των 4 ετών, δεν σημαίνει πως έχει κατανοήσει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της εν λόγω έννοιας. Η διαδικασία αυτή είναι προοδευτική και εξαρτάται από τις μαθησιακές εμπειρίες των παιδιών, την οργάνωση, τα υλικά, το περιεχόμενο και τις μεθόδους διδασκαλίας που επιλέγονται (Botson & Deliege, 1998).

Η πρώτη επαφή των μαθητών με την έννοια του τριγώνου στη σχολική τάξη συμβαίνει πολύ νωρίς στο νηπιαγωγείο και την Α΄ τάξη δημοτικού. Με τη μελέτη του $40^{ου}$ κεφαλαίου του βιβλίου της Α΄ τάξης δημοτικού, τα παιδιά αναγνωρίζουν τις μορφές και ονομάζουν τα γεωμετρικά σχήματα: τον κύκλο, το τρίγωνο, το ορθογώνιο και το τετράγωνο (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης & Πνευματικός, 2007). Στα κεφάλαια 14 και 15 του βιβλίου της Β΄ τάξης δημοτικού, με προαπαιτούμενη γνώση τον αριθμό των πλευρών ενός τριγώνου, μαθαίνουν: α) ότι το τρίγωνο (γεωμετρικό σχήμα) συσχετίζεται με την πυραμίδα (γεωμετρικό στερεό), β) να ακολουθούν οδηγίες ώστε να κατασκευάσουν ένα γεωμετρικό σχήμα με προϋποθέσεις, και γ) να αναγνωρίζουν διαισθητικά με το γνώμονα την ορθή γωνία στο ορθογώνιο τρίγωνο (Καργιωτάκης, Μαραγκού, Μπελίτσου & Σοφού, 2007). Στο $51^{ο}$ κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου οι μαθητές αναγνωρίζουν κάθετα ευθύγραμμα τμήματα σε γεωμετρικά σχήματα και αναγνωρίζουν με το γνώμονα την ορθή γωνία.

Στο $16^{ο}$ κεφάλαιο του βιβλίου της Γ΄ τάξης δημοτικού τα παιδιά ασκούνται για ακόμη μία φορά στη χρήση του γνώμονα, προκειμένου να διαπιστώνουν αν μία γωνία είναι ορθή και να χαράζουν σε μία ευθεία την κάθετή της (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Νικολαντωνάκης, Παναγάκος & Σπανακά, 2007). Στο $5^{ο}$ κεφάλαιο του βιβλίου της Δ΄ τάξης δημοτικού τα παιδιά μαθαίνουν ότι πολύγωνο είναι μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή, κατατάσσουν τα πολύγωνα με βάση το πλήθος των πλευρών- γωνιών τους και χρησιμοποιούν ορολογία για να στηρίξουν με επιχειρήματα μια άποψή τους (Βαμβακούση, Καργιωτάκης, Μπομποτίνου & Σαΐτης, 2007). Στο 28^{ο} κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου τα παιδιά ασκούνται στην κατασκευή κάθετης ευθείας σε δοσμένη ευθεία με τη χρήση του γνώμονα ή του μοιρογνωμονίου και του χάρακα, καθώς και στη χάραξη της απόστασης σημείου από ευθεία.

Στην Ε΄ τάξη δημοτικού και στο 24^{ο} κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου οι μαθητές μαθαίνουν να αναγνωρίζουν πλευρές, κορυφές και γωνίες ως επιμέρους στοιχεία ενός γεωμετρικού σχήματος (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης & Χρονοπούλου, 2007). Ενώ στο 41^{ο} κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου ασχολούνται με τις γωνίες, μαθαίνουν να τις μετρούν με το μοιρογνωμόνιο και τις κατατάσσουν σε τρεις κατηγορίες (ορθές, οξείες, αμβλείες). Στο επόμενο κεφάλαιο κατατάσσουν τα τρίγωνα με βάση τις γωνίες τους σε ορθογώνια, οξυγώνια ή αμβλυγώνια, μαθαίνουν τα είδη των γωνιών που περιέχονται σε κάθε διαφορετικό είδος τριγώνου και συμπεραίνουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Στο 43^{ο} κεφάλαιο μαθαίνουν το δεύτερο κριτήριο κατάταξης τριγώνων με βάση τις πλευρές τους (ισόπλευρα, ισοσκελή ή σκαληνά) και υπολογίζουν ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις ίσες γωνίες των 60°. Τέλος, στο κεφάλαιο που ακολουθεί, αρχίζοντας από την απόσταση σημείου από ευθεία, γνωρίζουν την έννοια του ύψους τριγώνου ως την απόσταση μιας κορυφής από την απέναντι πλευρά και μαθαίνουν να χαράζουν τα ύψη τριγώνου με τη χρήση του γνώμονα. Στην Στ΄ τάξη δημοτικού κάνουν επανάληψη την έννοια του τριγώνου, τις ιδιότητες, τις γωνίες και τα ύψη του (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2007).

Στην Α΄ τάξη του γυμνασίου οι μαθητές μαθαίνουν τα βασικά και τα δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου, τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων, ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180° και τις ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου. Στις επόμενες δύο τάξεις του γυμνασίου οι μαθητές, σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), εισάγονται στο Πυθαγόρειο Θεώρημα, τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και άλλες σχέσεις. Στην Α΄ λυκείου γίνεται αρχικά μια επανάληψη των όσων έχουν διδαχθεί οι μαθητές στην υποχρεωτική εκπαίδευση και έπειτα προχωρούν σε πιο δύσκολες σχέσεις και ιδιότητες των τριγώνων, όπως η τριγωνική ανισότητα, μέχρι τη Β΄ λυκείου όπου ολοκληρώνεται η διδασκαλία της γεωμετρίας.

3.2 Ερευνητικά δεδομένα

Κατά το σχεδιασμό μιας διδακτικής παρέμβασης ο εκπαιδευτικός είναι απαραίτητο όχι μόνο να εξετάζει τη δομή του αντικειμένου αλλά να λαμβάνει υπόψη του και τις ιδέες των μαθητών. Η γνώση των αρχικών αντιλήψεων των παιδιών είναι πολύ σημαντική στο σχεδιασμό των ειδικών μαθητικών δραστηριοτήτων. Πλήθος ερευνών (Cooper & Krainer, 1990; Hannibal, 1999; Hasegawa, 1997; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Keazer, 2004; Marchini & Rinaldi, 2005; Robinson, 1976; Usiskin, 1982; Wu & Ma, 2005) έχουν αναδείξει μια σειρά από προϋπάρχουσες ιδέες, παρανοήσεις ή ελλιπείς κατανοήσεις των παιδιών για την έννοια του τριγώνου.

Έρευνες αποδεικνύουν ότι συχνά οι μαθητές πρωτοβάθμιας (Hannibal, 1999; Hasegawa, 1997; Vighi, 2003; Wu & Ma, 2005) αλλά και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Burger & Shaughnessy, 1986; Usiskin, 1982) έχουν δυσκολίες στην οπτική αναγνώριση τριγώνων. Μπορεί να μην αναγνωρίσουν ένα σχήμα ως τρίγωνο επειδή είναι μακρύ και στενό ή «πολύ μυτερό», ενώ μπορεί να συμπεριλάβουν στα τρίγωνα σχήματα που έχουν τρία μυτερά σημεία και κυρτές πλευρές. Παρατηρήθηκε επίσης ότι πολλοί μαθητές έχουν πρόβλημα με την αναγνώριση αλληλοεπικαλυπτόμενων τριγώνων, γεγονός που δημιουργεί αργότερα πρόβλημα στην αναγνώριση ζεύγους ίσων ή όμοιων τριγώνων (Robinson, 1976).

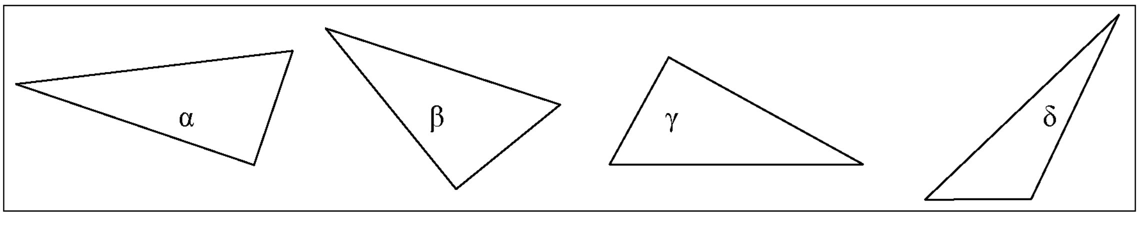
Στην Taiwan περίπου οι μισοί μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης βρέθηκαν στο επίπεδο 0 κατά van Hieles σε ερωτήσεις σχετικές με την έννοια του τριγώνου, το 29% των μαθητών βρέθηκαν στο επίπεδο 1, το 5% βρέθηκαν στο επίπεδο 2, ενώ περίπου το 20% των μαθητών ήταν κάτω από το αρχικό επίπεδο γεωμετρικής σκέψης (Wu & Ma, 2006). Πιο συγκεκριμένα, οι περισσότεροι μαθητές της πρώτης τάξης δημοτικού βρέθηκαν κάτω από το αρχικό επίπεδο, οι μαθητές των τριών επόμενων τάξεων στο επίπεδο 0 και οι μαθητές των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού στο επίπεδο 1 κατά van Hieles.

Σύμφωνα με την έρευνα της Keazer (2004), οι μαθητές της έκτης τάξης, ηλικίας 11-12 χρονών, αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν τους ζητηθεί να αναφέρουν εάν ένα δοσμένο (αμβλυγώνιο) τρίγωνο στο οποίο αναφέρονται τα μέτρα των γωνιών του, είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο. Μόλις οι μισοί μαθητές είναι σε θέση να δώσουν σωστή απάντηση ενώ από αυτές αρκετές δεν μπορούν να αιτιολογήσουν την απάντησή τους και άλλες μπερδεύονται κατά τη διάρκεια της αιτιολόγησης γιατί παρατηρούν ότι το τρίγωνο έχει μία αμβλεία και δύο οξείες γωνίες.

Η θέση και ο προσανατολισμός του σχήματος, στην ευκλείδεια γεωμετρία, πάνω στο επίπεδο του χαρτιού είναι ένας ανεξάρτητος παράγοντας που δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του σχήματος. Μια κλασική παρατήρηση για τη διδασκαλία είναι ότι τα περισσότερα σχήματα που περιέχονται στα σχολικά βιβλία αλλά και αυτά που σχεδιάζουν οι δάσκαλοι έχουν έναν «κανονικό», αναμενόμενο ή προτυπικό προσανατολισμό στο επίπεδο σχεδίασης. Δηλαδή οι βασικές γραμμές ή ο συνολικός προσανατολισμός των σχημάτων είναι παράλληλος και κάθετος στις γραμμές σχεδίασης (φύλλο χαρτιού, οθόνη υπολογιστή, πίνακας, κλπ). Άμεση συνέπεια είναι οι μαθητές να αποκτούν περιορισμένη αντίληψη σε διάφορες έννοιες μεταξύ των οποίων το ορθογώνιο και το ισοσκελές τρίγωνο (Cooper & Krainer, 1990; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Marchini & Rinaldi, 2005; Robinson, 1976; Ryan & Williams, 2007). Το πρόβλημα διατηρείται σε μεγάλο βαθμό εξαιτίας της καθημερινής πραγματικότητας όπου κυριαρχούν η οριζόντια και η κατακόρυφη διεύθυνση στα διάφορα αντικείμενα (π.χ. τοίχος, θρανίο, σκεπή, κ.ά.).

Η καθετότητα αποτελεί μια έννοια που συνήθως διδάσκεται στα παιδιά στην κατακόρυφη και την οριζόντια διεύθυνση, τόσο στην τάξη όσο και στο σχολικό βιβλίο. Οι δυσκολίες που επιφέρει η περιορισμένη αντίληψη της έννοιας της καθετότητας ως σχέσης κατακόρυφου-οριζόντιου, γίνονται φανερές στην αναγνώριση μιας γωνίας σε πλάγια θέση ως ορθή, στην κατασκευή των υψών ενός τριγώνου, αλλά και στη συμμετρία όταν ο άξονας είναι τοποθετημένος σε πλάγια ως προς το τετράδιο θέση. Το διδακτικό αυτό εμπόδιο βρίσκει εφαρμογή στα ορθογώνια τρίγωνα αλλά και στη σχεδίαση του ύψους ενός τριγώνου (Cooper & Krainer, 1990; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Vinner & Hershkowitz στο Τουμάσης, 2004).

Στην έρευνα των Vinner και Hershkowitz (στο Τουμάσης, 2004) λιγότεροι από το 70% των μαθητών, ηλικίας 11, 12 και 13 ετών, αναγνώρισαν τα παρακάτω τρίγωνα α και β ως ορθογώνια, ενώ το 40% των μαθητών αναγνώρισε το τρίγωνο γ. Όταν τους ζητήθηκε να φέρουν το ύψος σε διάφορα τρίγωνα, μόνο το 10% των μαθητών κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά το ύψος στο αμβλυγώνιο τρίγωνο δ.



Η έρευνα των Hershkowitz, Bruckheimer και Vinner (1987) σε μαθητές, ηλικίας 5 έως 8 ετών, αλλά και δασκάλες στο Ισραήλ έδειξε, όπως αναμενόταν, υπεροχή των δασκάλων στην επιλογή των ορθογωνίων τριγώνων από μία λίστα με διάφορα τρίγωνα. Παρόλα αυτά φαίνεται να δυσκολεύονται στην ίδια μορφή τριγώνων με τα παιδιά. Έτσι, η επιτυχία τους είναι μεγαλύτερη στο ορθογώνιο τρίγωνο που βρίσκεται σε μια κατακόρυφη θέση, δηλαδή όπως σχεδιάζεται συνήθως, μικραίνει όταν το τρίγωνο έχει περιστραφεί περίπου 45°, και μικραίνει σημαντικά όταν η ορθή γωνία είναι «από επάνω». Ενώ, μαθητές και δάσκαλοι φάνηκαν απρόθυμοι να χαράξουν τα εξωτερικά ύψη σε αμβλυγώνια τρίγωνα.

Οι μαθητές, ηλικίας 7-8 ετών, της έρευνας των Cooper και Krainer (1990) αναγνώρισαν πιο εύκολα ως ορθογώνια, τα τρίγωνα που οι κάθετες πλευρές τους είχαν κάθετο-οριζόντιο προσανατολισμό. Από αυτά έκαναν τα λιγότερα λάθη στα τρίγωνα που η μικρότερη από τις δύο κάθετες πλευρές τους βρισκόταν σε οριζόντια θέση. Η επόμενη κατηγορία με τα λιγότερα λάθη περιέχει τα τρίγωνα με καμία πλευρά σε οριζόντιο-κάθετο προσανατολισμό, με πιο αναγνωρίσιμα τα τρίγωνα που έχουν την μικρότερη γωνία πιο ψηλά σε σύγκριση με εκείνα που βρίσκεται πιο χαμηλά. Στην τελευταία κατηγορία, που αναγνωρίζουν ελάχιστα παιδιά, ανήκουν τα τρίγωνα που έχουν την υποτείνουσα σε κάθετη ή οριζόντια θέση.

Οι Marchini και Rinaldi (2005) μελέτησαν την επίδραση του συνήθη «κανονικού» προσανατολισμού ενός ισοσκελούς τριγώνου στην αναγνώρισή του. Ως «κανονικός» προσανατολισμός νοείται εκείνος όπου η άνιση πλευρά του ισοσκελούς τριγώνου βρίσκεται στον οριζόντιο ή τον κάθετο άξονα έχοντας τη μορφή της στέγης και της σημαίας αντίστοιχα. Οι μαθητές, ηλικίας 8-9 ετών, αναγνώρισαν πιο εύκολα από μια λίστα με διάφορα τρίγωνα, τα ισοσκελή τρίγωνα που έμοιαζαν με τη στέγη ή τη σημαία και εκείνα που είχαν περιστραφεί περίπου 45°. Παρόμοια συμπεράσματα είχε και η έρευνα των Hershkowitz, Bruckheimer και Vinner (1987), όπου μαθητές και δάσκαλοι αναγνώρισαν ευκολότερα τα ισοσκελή τρίγωνα που «κάθονται όρθια στη βάση τους» σε σύγκριση με αυτά που έχουν περιστραφεί.

Σε σχέση με τα ισοσκελή τρίγωνα στις έρευνες των Usiskin (1982) στις ΗΠΑ και Τζίφα (2005) στην Ελλάδα, παρατηρήθηκε ότι το ένα τρίτο των μαθητών του δείγματος δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν γνωρίζουν ότι τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν δύο ίσες γωνίες. Από την έρευνα του Τζίφα (2005) προέκυψε ακόμη, ότι περίπου το 21% των μαθητών θεωρεί ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι και ισοσκελές, γεγονός που αποδεικνύει πρόβλημα συμπερίληψης κλάσης σύμφωνα με το μοντέλο των van Hieles.

Σύμφωνα με την έρευνα του Robinson (1976), άλλες κοινές παρανοήσεις των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη γεωμετρία είναι οι εξής:

- τα μεγάλα τρίγωνα έχουν μεγαλύτερες γωνίες σε σύγκριση με τα μικρά τρίγωνα,
- η διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου διχοτομεί και την απέναντι πλευρά του,
- η διάμεσος μιας πλευράς τριγώνου διχοτομεί πάντα την απέναντι γωνία του,
- το ύψος σε μια πλευρά ενός τριγώνου διχοτομεί πάντα την πλευρά αυτή,
- είναι πάντα δυνατόν να σχεδιαστεί μια ευθεία που να διχοτομεί μια γωνία ενός τριγώνου και να είναι μεσοκάθετος της απέναντι πλευράς της.

Πολλές είναι οι παρανοήσεις που εμφανίζονται εκτός από τους μαθητές και στους δασκάλους. Έρευνες σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αναδεικνύουν τις δυσκολίες που έχουν στην εκτέλεση δραστηριοτήτων που αφορούν την έννοια του ύψους τριγώνου (Blanco, 2001; Gutierrez & Jaime, 1999; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Πιο συγκεκριμένα, προκύπτει ότι συχνά συγχέουν την έννοια του ύψους με την έννοια της μεσοκαθέτου ή της διαμέσου, ταυτίζουν το ύψος με μια πλευρά του τριγώνου, δυσκολεύονται να σχεδιάσουν ένα εξωτερικό ύψος, δεν υπολογίζουν το μήκος του ύψους που σχεδιάζουν, ή δεν μπορούν να σχεδιάσουν το ύψος που τους ζητείται.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ:

Η έρευνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Μεθοδολογία της έρευνας

4.1 Ερευνητικά ερωτήματα και στόχοι της έρευνας

Το τρίγωνο αποτελεί ένα από τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, η σημασία των οποίων είναι αδιαμφισβήτητη. Για να είναι οι μαθητές σε θέση να αναπτύξουν τη γεωμετρική σκέψη τους θα πρέπει προηγουμένως να έχουν κατανοήσει την κεντρική έννοια του τριγώνου. Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι οι μαθητές σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του τριγώνου και των ιδιοτήτων του. Για το λόγο αυτό, δημιουργούνται κάποια κρίσιμα ερωτήματα:

- Τα παιδιά που έχουν ολοκληρώσει τη φοίτησή τους στο δημοτικό σχολείο είναι ικανά να αναγνωρίσουν ένα τρίγωνο;
- Η γεωμετρική σκέψη των μαθητών της Α΄ τάξης γυμνασίου βρίσκεται μόλις στα επίπεδα 0 και 1 κατά van Hieles;
- Επηρεάζει ο προσανατολισμός του σχήματος την αναγνώρισή του από τους μαθητές;
- Ποιες είναι οι συνήθεις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά τη σχεδίαση του ύψους τριγώνου;
- Επηρεάζει η μέθοδος διδασκαλίας που επιλέγει ο εκπαιδευτικός για την έννοια του τριγώνου τα μαθησιακά αποτελέσματα των παιδιών;
- Μια διδασκαλία που βασίζεται στις προτάσεις των σύγχρονων θεωριών μάθησης και την παιδαγωγική αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών και των νέων τεχνολογιών έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αναπτύξουν κοινωνικές δεξιότητες, για παράδειγμα της συνεργασίας;

Για να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα επιλέχθηκε ως ερευνητική μέθοδος η μελέτη περίπτωσης, η οποία αποτελεί μία από τις πλέον αποτελεσματικές προσεγγίσεις διερεύνησης της εκπαιδευτικής έρευνας. Η ερευνήτρια παρατήρησε και ανέλυσε τα χαρακτηριστικά μιας ομάδας, με σκοπό να κάνει γενικεύσεις σχετικά με τον ευρύτερο πληθυσμό στον οποίο ανήκει η ομάδα αυτή. Όποιο κι αν είναι το πρόβλημα ή η προσέγγιση, κεντρικό ρόλο σε κάθε μελέτη περίπτωσης κατέχει μια μέθοδος παρατήρησης (Cohen & Manion, 1997). Στην παρούσα προσέγγιση η ερευνήτρια επέλεξε τη συμμετοχική παρατήρηση έτσι ώστε, να μπορέσει να αναπτύξει μια μορφή επικοινωνίας με τους μαθητές και να κατανοήσει καλύτερα τη συνεχιζόμενη συμπεριφορά τους, λεκτική και μη-λεκτική, ενόσω αυτή συμβαίνει.

Η προβληματική που προηγήθηκε και τα ερωτήματα που δημιουργήθηκαν για την έννοια του τριγώνου οδήγησαν στη διατύπωση των ακόλουθων υποθέσεων εργασίας: ($1^η$) ολοκληρώνοντας οι μαθητές το δημοτικό σχολείο παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του τριγώνου που συμφωνούν με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση προηγούμενων ερευνών, και ($2^η$) οι μαθητές της Α΄ τάξης γυμνασίου που συμμετέχουν σε ένα διαμορφωμένο μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο λαμβάνει υπόψη τα ερευνητικά δεδομένα για τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των παιδιών για την έννοια του τριγώνου και βασίζεται στις διδακτικές προτάσεις των σύγχρονων θεωριών μάθησης (εποικοδομητισμός, συνεργατική μάθηση, παιδαγωγική αξιοποίηση χειραπτικών υλικών και νέων τεχνολογιών, κλπ.), έχουν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Για το λόγο αυτό η ερευνήτρια πραγματοποίησε διδακτικό πείραμα στους μαθητές μιας σχολικής τάξης (Steffe, 2002).

Με βάση την προβληματική, τα ερωτήματα και τις υποθέσεις που αναπτύχθηκαν οι ερευνητικοί στόχοι της παρούσας διπλωματικής εργασίας που αφορούν την έννοια του τριγώνου είναι οι εξής:

- να καταγραφούν και να μελετηθούν οι προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών Α΄ τάξης γυμνασίου για την έννοια αυτή,
- να ελεγχθεί η επίτευξη των γνωστικών στόχων και η ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων από τους μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση που βασίζεται στις αρχικές ιδέες των μαθητών, τη συνεργατική μάθηση, κ.ά. και αξιοποιεί παιδαγωγικά τα χειραπτικά υλικά και τις νέες τεχνολογίες,
- να συγκριθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα της διδασκαλίας που βασίζεται στις προτάσεις των σύγχρονων θεωριών μάθησης με την παραδοσιακή διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου.

4.2 Δείγμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη συνεργασία 39 μαθητών και μαθητριών, ηλικίας 12-13 ετών, δύο τμημάτων της Α΄ τάξης Γυμνασίου της Νέας Ιωνίας Μαγνησίας. Πιο συγκεκριμένα από το τμήμα στο οποίο πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση από την ερευνήτρια (τμήμα παρέμβασης) συμμετείχαν 8 μαθητές και 11 μαθήτριες, ενώ από το τμήμα που διδάχθηκε με τον παραδοσιακό τρόπο από το μαθηματικό της τάξης (τμήμα ελέγχου) έλαβαν μέρος 8 μαθήτριες και 12 μαθητές. Η επιλογή του δείγματος έγινε ύστερα από συνεννόηση της ερευνήτριας με τους μαθηματικούς που διδάσκουν στα δύο τμήματα, χωρίς παρόλα αυτά να επηρεάζεται η έρευνα, η οποία στηρίζεται σε μελέτη περίπτωσης. Οι μαθητές του δείγματος είχαν διδαχθεί με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας την έννοια του τριγώνου στο δημοτικό σχολείο με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Όλα τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης είναι εξοικειωμένα με τη χρήση του υπολογιστή. Τέσσερις από τους μαθητές δεν έχουν την ελληνική ως πρώτη γλώσσα, αλλά το επίπεδο κατανόησης και χρήσης της είναι ικανοποιητικό.

4.3 Εργαλεία συλλογής ερευνητικών δεδομένων και μέθοδος επεξεργασίας τους

Για να ανιχνευθούν οι αρχικές αντιλήψεις των μαθητών του δείγματος για την έννοια του τριγώνου συντάχθηκε ειδικό ερωτηματολόγιο, με βάση τις παρανοήσεις των παιδιών όπως προέκυψαν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας. Το αρχικό ερωτηματολόγιο (pre-test) αποτελείται από δώδεκα ερωτήσεις, μέσω των οποίων η ερευνήτρια ήθελε από τους μαθητές να αναλύσουν τις πληροφορίες που τους δίνονται και να περιγράψουν τη σκέψη που τους οδήγησε στην απάντηση (βλ. Παράρτημα Α).

Η πρώτη ερώτηση σχετίζεται με το τρίγωνο ως γεωμετρικό σχήμα και την οπτική αναγνώρισή του. Παρουσιάζονται στους μαθητές δέκα σχήματα και τους ζητείται να επιλέξουν εκείνα που δεν είναι τρίγωνα αιτιολογώντας ταυτόχρονα την απάντησή τους. Στόχος της ερώτησης είναι οι μαθητές να αναγνωρίσουν τα τρίγωνα ανάμεσα σε ανοιχτά ή κλειστά σχήματα, κυρτά ή κοίλα, αλλά και τρίγωνα με διαφορετικό προσανατολισμό ή μέγεθος και να εξηγήσουν για ποιο λόγο απέρριψαν ορισμένα σχήματα.

Η δεύτερη ερώτηση αφορά την τριγωνική ανισότητα και στοχεύει στον προβληματισμό των παιδιών σχετικά με τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου. Δίνονται στους μαθητές δύο διαφορετικές τριάδες ευθύγραμμων τμημάτων και τους ζητείται να απαντήσουν εάν αυτές μπορούν να σχηματίσουν τρίγωνα. Με την ερώτηση αυτή διερευνάται εάν οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα ή εάν πρέπει να πληρούν κάποια προϋπόθεση ώστε να σχηματίσουν τρίγωνο.

Στην επόμενη ερώτηση τα παιδιά καλούνται να ταξινομήσουν οκτώ τρίγωνα που τους δίνονται. Μπορούν να δημιουργήσουν όσες ομάδες θέλουν από τρίγωνα που κατά τη γνώμη τους μοιάζουν με κάποιον τρόπο. Στόχος της συγκεκριμένης ερώτησης είναι να αναδειχθούν οι ιδιότητες με βάση τις οποίες οι μαθητές ταξινομούν διαφορετικά τρίγωνα.

Στην τέταρτη ερώτηση παρουσιάζεται ένα τρίγωνο στους μαθητές με δοσμένα τα μέτρα των γωνιών του και τους ζητείται να το χαρακτηρίσουν ως οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο. Βασικό στοιχείο της συγκεκριμένης ερώτησης, όπως και των προηγούμενων, είναι η περιγραφή της σκέψης των παιδιών που τους ζητείται με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση της απάντησής τους.

Η πέμπτη και η έκτη ερώτηση αφορούν δύο συγκεκριμένες κατηγορίες τριγώνων, τα ισοσκελή και τα ορθογώνια αντίστοιχα. Οι μαθητές καλούνται είτε εποπτικά είτε με τη χρήση χάρακα και μοιρογνωμονίου να τα επιλέξουν από ένα πλήθος τριγώνων. Ένα από τα τρίγωνα της τέταρτης ερώτησης είναι ισόπλευρο οπότε τίθεται θέμα συμπερίληψης κλάσης. Στην ίδια ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντηση που έδωσαν, ενώ στην πέμπτη ερώτηση η βαθύτερη κατανόηση της απάντησής τους επιτυγχάνεται ζητώντας τους να σχεδιάσουν σε κάθε περίπτωση την ορθή γωνία.

Η έβδομη ερώτηση στοχεύει στην εκμαίευση όσο το δυνατόν περισσότερων επιχειρημάτων από τη μεριά των μαθητών για τις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα σε δύο δοσμένα τρίγωνα. Το ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο και το άλλο ισοσκελές, χωρίς αυτή να θεωρείται η μόνη διαφορετική ιδιότητα των δύο τριγώνων και άρα η σωστή/ αναμενόμενη απάντηση από τους μαθητές. Στόχος είναι να συγκρίνουν τα τρίγωνα και να αναφέρουν όλες τις ιδιότητες που κατά τη γνώμη τους έχουν.

Η όγδοη ερώτηση αποτελεί την πρώτη σχεδιαστική άσκηση. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικά όργανα για να σχεδιάσουν τέσσερα τρίγωνα, κάθε ένα διαφορετικό από τα προηγούμενα. Αυτή η ερώτηση ερευνά τις ιδιότητες που τα παιδιά διαφοροποιούν κάθε φορά για να φτιάξουν ένα «άλλο» τρίγωνο και εξετάζει εάν οι μαθητές θεωρούν ότι ο αριθμός των πιθανών διαφορετικών τριγώνων είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

Με την ένατη ερώτηση διερευνάται εάν οι μαθητές είναι ικανοί να σχεδιάσουν δύο οξυγώνια, δύο αμβλυγώνια και δύο ορθογώνια τρίγωνα. Στη συγκεκριμένη ερώτηση δηλαδή, εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν διαφορετικά τρίγωνα με την ίδια ιδιότητα που τους δίνεται κάθε φορά.

Η επόμενη ερώτηση έχει σχέση με την έννοια του ύψους ενός τριγώνου. Επιχειρείται η ανάδειξη των παρανοήσεων των μαθητών για την έννοια του ύψους τριγώνου που σχεδιάζεται σε συγκεκριμένη πλευρά του. Τα τρίγωνα που δίνονται είναι πέντε και καλύπτουν αρκετές διαφορετικές περιπτώσεις. Δηλαδή, έχουν οριζόντιο, κάθετο ή διαφορετικό προσανατολισμό, και είναι οξυγώνια, ορθογώνια ή αμβλυγώνια.

Στην ενδέκατη ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν εάν θα μπορούσαν να σχεδιάσουν τρίγωνα που να έχουν δύο συγκεκριμένες ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για τρίγωνο που να έχει δύο ορθές γωνίες, ή να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, ή ορθογώνιο και ισόπλευρο, ή ισοσκελές και οξυγώνιο, ή ισοσκελές και αμβλυγώνιο. Σε κάθε περίπτωση εάν ένα τρίγωνο δεν υπάρχει τους ζητείται να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Τέλος, σε αρκετές έννοιες της γεωμετρίας, και όχι μόνο, κρίνεται αναγκαίο οι μαθητές να έχουν κάποιες προαπαιτούμενες γνώσεις. Με τη δωδέκατη ερώτηση επιχειρείται να ερευνηθούν οι αντιλήψεις των παιδιών για την έννοια της διχοτόμου γωνίας που έχουν διδαχθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο στην Α΄ τάξη γυμνασίου. Η ερώτηση αυτή έχει μεγάλη σημασία για να εντοπιστούν οι δυσκολίες τους στη διχοτόμο γωνίας ώστε να σχεδιαστεί αργότερα κατάλληλο υλικό για τη διδασκαλία της έννοιας. Για το λόγο αυτό δίνονται στους μαθητές πέντε γωνίες, εκ των οποίων μία ορθή και μία ευθεία, και τους ζητείται να σχεδιάσουν τη διχοτόμο τους.

Οι προηγούμενες δώδεκα ερωτήσεις αποτελούν το αρχικό ερωτηματολόγιο της έρευνας. Μετά τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου δόθηκε στους μαθητές των δύο τμημάτων το τελικό ερωτηματολόγιο (post-test) που είχε σχεδιαστεί (βλ. Παράρτημα Α). Αποτελείται από δώδεκα ερωτήσεις, κάποιες από τις οποίες είναι παρόμοιες με τις ερωτήσεις του αρχικού ερωτηματολογίου, ενώ κάποιες άλλες διαφορετικές. Η λογική που διέπει το τελικό ερωτηματολόγιο είναι ίδια με το αρχικό, καθώς οι μαθητές καλούνται να αναλύσουν τις πληροφορίες που τους δίνονται και να περιγράψουν τη σκέψη που τους οδήγησε κάθε φορά στην απάντηση.

Η πρώτη ερώτηση παραμένει ίδια με το αρχικό ερωτηματολόγιο και ερευνά την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν οπτικά ένα τρίγωνο. Τους δίνονται οκτώ σχήματα που είναι ίδια με κάποια από το αρχικό ερωτηματολόγιο αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό με σκοπό να εξεταστεί εάν κάποια που αναγνωρίστηκαν την πρώτη φορά ως τρίγωνα τώρα δεν αναγνωρίζονται. Οι μαθητές πρέπει να αιτιολογήσουν τα σχήματα που απέρριψαν ώστε να επιτευχθεί βαθύτερη κατανόηση της επιλογής τους.

Η δεύτερη ερώτηση για την τριγωνική ανισότητα παρέμεινε ίδια με το αρχικό ερωτηματολόγιο, με σκοπό να υπάρχει η δυνατότητα σύγκρισης των αντιλήψεων των μαθητών πριν και μετά τη διδασκαλία. Αντίθετα στην τρίτη ερώτηση, η οποία δεν περιέχεται στο αρχικό ερωτηματολόγιο, δίνονται στα παιδιά δύο διαφορετικές τριάδες γωνιών και τους ζητείται να απαντήσουν εάν αυτές μπορούν να σχηματίσουν τρίγωνα. Δηλαδή, διερευνάται εάν οι μαθητές πιστεύουν ότι οι γωνίες ενός τριγώνου μπορούν να έχουν τυχαία και ανεξάρτητα μεταξύ τους μέτρα ή αν πρέπει να πληρούν κάποια προϋπόθεση για να σχηματιστεί τρίγωνο.

Με την τέταρτη και την πέμπτη ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα ισοσκελή και τα ορθογώνια τρίγωνα αντίστοιχα. Τα τρίγωνα που δίνονται είναι τα ίδια με εκείνα των ερωτήσεων πέντε και έξι του αρχικού ερωτηματολογίου, με διαφορετικό προσανατολισμό και μέγεθος εν γένει. Παρόμοια, οι επόμενες τρεις ερωτήσεις είναι ίδιες με τις ερωτήσεις επτά, εννιά και έντεκα του αρχικού ερωτηματολογίου.

Η ένατη ερώτηση ζητάει από τα παιδιά να χαρακτηρίσουν πέντε τρίγωνα που τους δίνονται με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων. Δηλαδή, να αναφέρουν εάν είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο, και σκαληνό, ισοσκελές ή ισόπλευρο. Η ερώτηση αυτή στοχεύει στην ανάδειξη των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με τις βασικές ιδιότητες ενός τριγώνου.

Στις επόμενες τρεις ερωτήσεις δίνονται στους μαθητές από τέσσερα τρίγωνα και τους ζητείται να σχεδιάσουν το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο αντίστοιχα, σε μια συγκεκριμένη πλευρά ή γωνία κάθε φορά. Η ερώτηση με τα ύψη είναι ίδια με τη δέκατη ερώτηση του αρχικού ερωτηματολογίου, με τη διαφορά ότι κάποια από τα τρίγωνα έχουν διαφορετικό προσανατολισμό. Με τις σχεδιαστικές αυτές ερωτήσεις ολοκληρώνεται το τελικό ερωτηματολόγιο της παρούσας έρευνας.

Ως μέθοδος επεξεργασίας των ερευνητικών δεδομένων που συλλέχθηκαν χρησιμοποιήθηκε η ποιοτική προσέγγιση. Κατά τη διάρκεια αυτής της προσέγγισης, τα δεδομένα αντιμετωπίζονται και αναλύονται ολιστικά με στόχο να δομηθεί μια συνολική εικόνα. Σκοπός είναι να διερευνηθούν οι διαδικασίες που βρίσκονται πίσω από τις παρατηρούμενες συσχετίσεις, να χαρτογραφηθούν οι ατομικές απαντήσεις και να αναζητηθούν η σημασία και το πλαίσιο μέσα στο οποίο εκδηλώνεται η παρατηρούμενη συμπεριφορά των μαθητών.

Τα συμπεράσματα για τις αντιλήψεις των παιδιών που στηρίζονται αποκλειστικά στην ανάλυση των γραπτών απαντήσεών τους στο αρχικό ερωτηματολόγιο πιθανόν να είναι μια εικασία από τη μεριά της ερευνήτριας, δεδομένης της ποικιλίας των αιτιών που ενδέχεται να προκάλεσαν τις απαντήσεις αυτές (Clements, 1980). Για να εκθέσουν τον τρόπο σκέψης και ενέργειάς τους και να αναγνωριστούν σταθερά πρότυπα παρανοήσεων κρίθηκε αναγκαίο να γίνουν συνεντεύξεις με τους μαθητές. Έτσι, επιλέχθηκε η μη δομημένη συνέντευξη, η οποία επιτρέπει μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας και ευελιξίας. Στόχος των συνεντεύξεων είναι η βαθύτερη εξέταση ορισμένων γραπτών απαντήσεων που έδωσαν οι μαθητές στο αρχικό ερωτηματολόγιο. Για το λόγο αυτό ζητήθηκε από τα παιδιά σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων να εκθέσουν τον τρόπο σκέψης τους σε εκείνες τις ερωτήσεις που κρίθηκε αναγκαίο από την ερευνήτρια. Έτσι, οι διευκρινήσεις που έδωσαν οι μαθητές για τις ελλιπώς απαντημένες ερωτήσεις τους, λήφθηκαν υπόψη κατά την επεξεργασία των γραπτών απαντήσεων που έδωσαν.

Εκτός όμως από τις παραπάνω μεθόδους συλλογής ερευνητικών δεδομένων που αφορούν στους γνωστικούς στόχους, στη διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκε η φωτογράφηση και η μαγνητοφώνηση των παιδιών για να παρατηρηθεί κυρίως η συνεργασία και ο τρόπος έκφρασής τους. Η χρήση των δύο αυτών μεθόδων στοχεύει στην επεξήγηση και την υποστήριξη των ποιοτικών αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τη διδακτική διαδικασία.

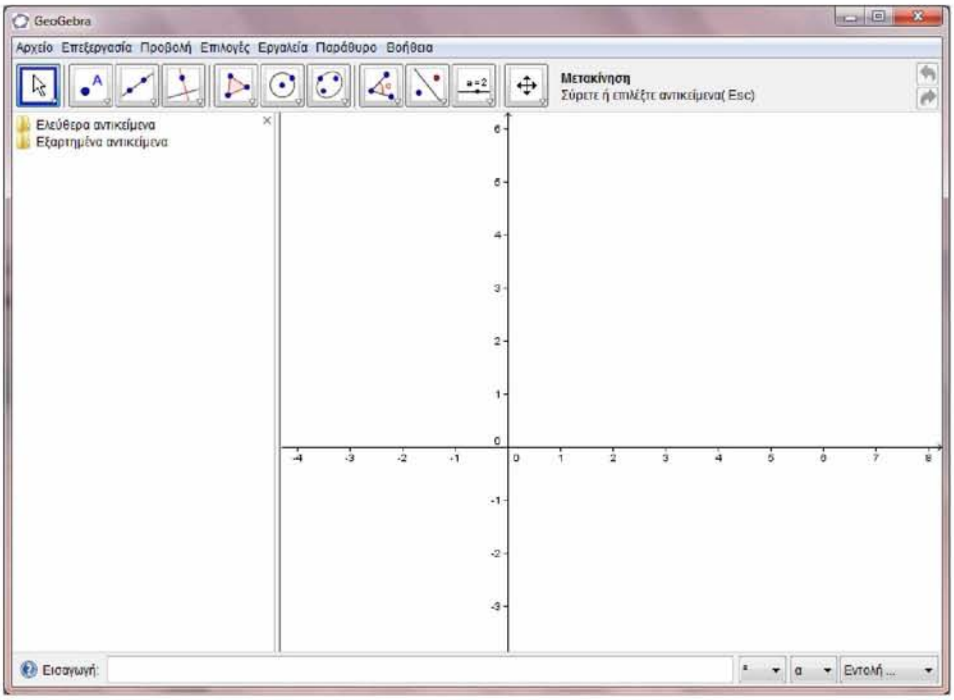
4.4 Διδακτικά υλικά και έργα

Η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε είχε ως διδακτικούς στόχους οι μαθητές: α) να μπορούν να διακρίνουν ένα τρίγωνο και να γνωρίζουν τα βασικά στοιχεία ενός τριγώνου (κορυφές, γωνίες, πλευρές), β) να γνωρίζουν την τριγωνική ανισότητα, γ) να γνωρίζουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°, δ) να γνωρίζουν τα είδη των τριγώνων (οξυγώνιο, ορθογώνιο, αμβλυγώνιο, σκαληνό, ισοσκελές, ισόπλευρο), ε) να γνωρίζουν τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) και να μπορούν να τα σχεδιάσουν στα τρία είδη τριγώνων (οξυγώνιο, αμβλυγώνιο, ορθογώνιο), και τέλος, στ) να γνωρίζουν τις ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου. Εκτός από τους γνωστικούς στόχους όμως, η παρούσα παρέμβαση επικεντρώνεται και στην ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων, και ειδικότερα της συνεργασίας, της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στο πλαίσιο της ομαδικής εργασίας των μαθητών.

Η μέθοδος διδασκαλίας που χρησιμοποίησε η ερευνήτρια για το τμήμα παρέμβασης τηρεί ορισμένες γενικές αρχές, όπως οι ρεαλιστικοί και ιεραρχημένοι στόχοι, ο διάλογος/συζήτηση, ο σεβασμός των τρόπων αναπαράστασης της μαθηματικής γνώσης, η ενεργή συμμετοχή των παιδιών, η παροχή άμεσης ανατροφοδότησης στα παιδιά, η έμφαση στη διδασκαλία της γλώσσας των μαθηματικών, η διδακτική αξιοποίηση των λαθών των παιδιών αλλά και διαφόρων διδακτικών μέσων. Γίνεται προσπάθεια, δηλαδή, να αξιοποιηθούν τα περισσότερα στοιχεία των σύγχρονων θεωριών μάθησης (π.χ. σύνδεση των μαθηματικών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής, έμφαση στην επίλυση προβλημάτων, χρήση της προηγούμενης γνώσης των παιδιών στην οικοδόμηση της νέας γνώσης, κλπ.).

Η ποιοτική-ερμηνευτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο αρχικό ερωτηματολόγιο και στη συνέντευξη κατεύθυνε την ερευνήτρια στη διαμόρφωση των δραστηριοτήτων και των ερωτήσεων των φυλλαδίων εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν αργότερα στη διδακτική παρέμβαση. Προτού όμως αναλυθούν οι δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν για να πλαισιώσουν τη διδασκαλία, γίνεται μια περιγραφή των βασικών διδακτικών μέσων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρέμβαση, τα οποία είναι το λογισμικό GeoGebra και οι γεωπίνακες (geoboards).

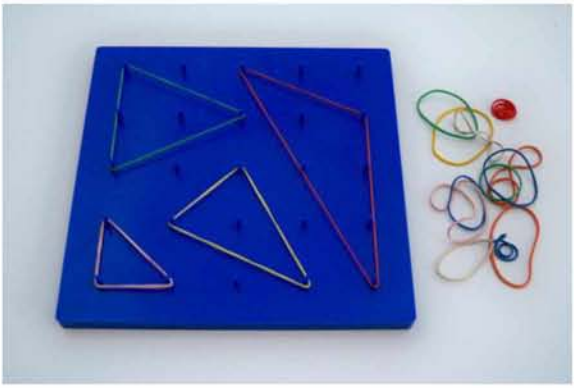
Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας GeoGebra αποτελεί την πτυχιακή εργασία του Markus Hohenwarter στο Πανεπιστήμιο του Salzburg το 2002. Πρόκειται για μια προσπάθεια συνδυασμού διάφορων λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας με υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας σε ένα απλό και εύκολο στη χρήση πρόγραμμα. Η εφαρμογή χαρακτηρίζεται από ένα λιτό αλλά λειτουργικό περιβάλλον εργασίας (βλ. Εικόνα 1).



Εικόνα 1. GeoGebra

Το πρόγραμμα παρέχει στο μαθητή ορισμένα αρχικά αντικείμενα (π.χ. σημείο, ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, κύκλο τόξο, πολύγωνο) για να σχεδιάζει τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα, μερικά βασικά γεωμετρικά εργαλεία (π.χ. σχεδίαση κάθετης/ παράλληλης από σημείο σε ευθεία, σχεδίαση διχοτόμου γωνίας, σχεδίαση μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος) με τα οποία μπορεί να σχεδιάζει σύνθετα σχήματα, και εργαλεία μέτρησης (π.χ. μέτρηση απόστασης, μέτρηση εμβαδού, μέτρηση κλίσης ευθείας) με τα οποία μπορεί να μετρά μέρη του σχήματος και να παρατηρεί τις μεταβολές τους κατά το σύρσιμό του. Παρέχει ακόμα εργαλεία μετασχηματισμών (π.χ. συμμετρίες, περιστροφή) για διάφορους μετασχηματισμούς σχημάτων καθώς και εργαλεία εμφάνισης των γεωμετρικών αντικειμένων στην επιφάνεια εργασίας (π.χ. επιλογή χρώματος, πάχους γραμμών, απόκρυψης αντικειμένων) με τα οποία ο μαθητής διευκολύνεται να εστιάζει σε ορισμένες πτυχές του σχήματος που έχει κατασκευάσει.

Ο γεωπίνακας κατασκευάστηκε από τον Άγγλο μαθηματικό και παιδαγωγό Caleb Gattegno (1911-1988) ως ένα χειραπτικό υλικό για τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Η χρήση του γεωπίνακα είναι τόσο εύκολη ώστε μπορεί να αποτελέσει ένα εξαιρετικό βοήθημα για πειραματισμό και δημιουργική εξερεύνηση στην πρακτική γεωμετρία (Τουμάσης, 2004). Από παιδαγωγική άποψη, δίνει πολλές ευκαιρίες για να εφαρμοστούν οι αρχές του εποικοδομητισμού στη διδακτική πράξη. Αποτελείται από μια τετράγωνη βάση (ξύλινη, πλαστική ή από άλλο υλικό) πάνω στην οποία είναι τοποθετημένα μικρά «καρφάκια» διατεταγμένα έτσι ώστε να σχηματίζουν διάφορους σχηματισμούς με βάση το τετράγωνο, το τρίγωνο ή τον κύκλο. Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιούνται γεωπίνακες με βάση το τετράγωνο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.



Εικόνα 2. Γεωπίνακας

Τα λαστιχάκια διαφορετικών χρωμάτων που συνοδεύουν την πλάκα με τα καρφάκια, χρησιμεύουν στο να δημιουργούνται με σχετική ευκολία γεωμετρικά σχήματα και να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να πειραματίζονται με μήκη, γεωμετρικά σχήματα, περιμέτρους και εμβαδά, και να μυούνται σε τεχνικές μετρήσεων και υπολογισμών, αλλά και ανακάλυψης διαφόρων ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

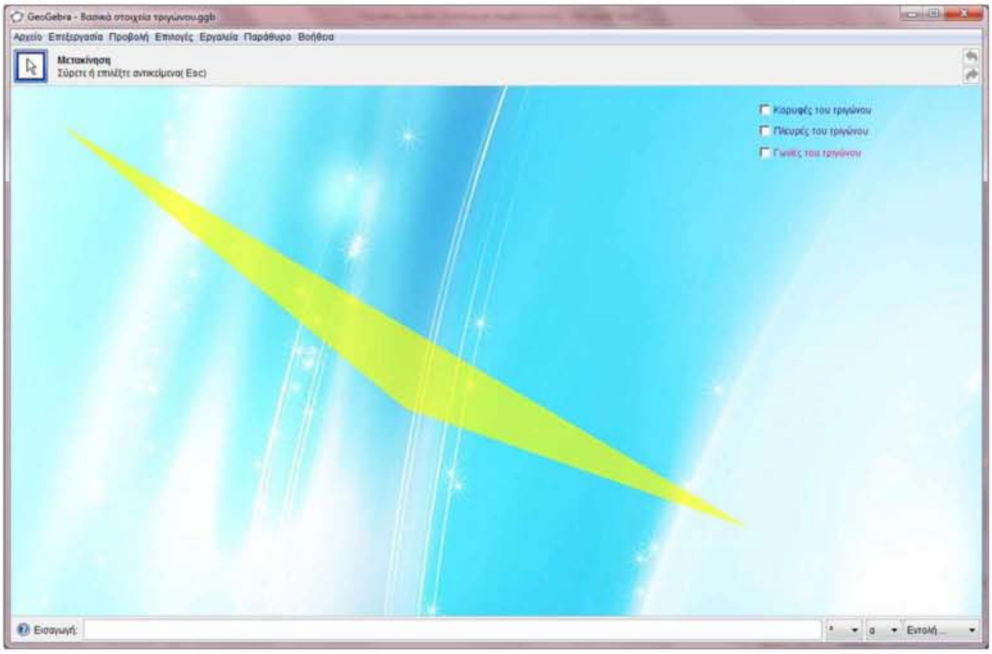
Για το σκοπό της διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια συντάχθηκαν δύο φυλλάδια εργασίας (βλ. Παράρτημα Β). Το πρώτο φυλλάδιο εργασίας αποτελείται από τέσσερις δραστηριότητες, με τις οποίες επιδιώκεται οι μαθητές να πετύχουν τους τέσσερις πρώτους διδακτικούς στόχους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Αντίστοιχα, το δεύτερο φυλλάδιο εργασίας περιλαμβάνει πέντε δραστηριότητες για την κάλυψη των υπόλοιπων δύο διδακτικών στόχων της παρέμβασης. Όλες οι ερωτήσεις κατασκευάστηκαν λαμβάνοντας υπόψη τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών, όπως προέκυψαν από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και τις απαντήσεις που δόθηκαν στο αρχικό ερωτηματολόγιο. Προτού περιγραφούν οι δραστηριότητες που περιλαμβάνει κάθε φυλλάδιο εργασίας, θα γίνει μια αναφορά στις γενικές αρχές σχεδίασής τους.

Στην αρχή της κάθε δραστηριότητας τα παιδιά εργάζονται ομαδικά, συζητώντας και ανταλλάσσοντας απόψεις, για να αντιμετωπίσουν τις πρώτες ερωτήσεις της δραστηριότητας. Στη φάση αυτή, η ερευνήτρια παρακολουθεί την πορεία των ομάδων, προσφέρει βοήθεια και ενίσχυση ιδιαίτερα στους αδύναμους μαθητές και συντονίζει τα περιθώρια του διαθέσιμου χρόνου. Το πέρασμα όμως από την ασαφή και εξειδικευμένη μαθηματική γνώση, που κατέκτησαν οι μαθητές αντιμετωπίζοντας τις αρχικές ερωτήσεις των δραστηριοτήτων, στη συστηματική και συγκεκριμένη μαθηματική γνώση που ζητείται από αυτούς, είναι το κρισιμότερο σημείο. Τα πορίσματα της εργασίας των παιδιών πρέπει να ολοκληρωθούν μέσα από μια συνεχή συζήτηση στην τάξη και να μετασχηματιστούν σε μαθηματικά συμπεράσματα, σε μαθηματική «θεωρία». Βασικό εργαλείο στη συγκεκριμένη φάση είναι ο συνεχής διάλογος μεταξύ των παιδιών και της διδάσκουσας, η οποία πρέπει να ενθαρρύνει την αντιπαράθεση, τις ερωτήσεις και γενικά την ελεύθερη έκφραση των παιδιών. Η τελευταία φάση της κάθε δραστηριότητας αποτελείται από ερωτήσεις που στοχεύουν στην πρακτική εργασία των παιδιών για την εμπέδωση και την εφαρμογή των δεξιοτήτων που απέκτησαν. Καμιά θεωρία μάθησης δεν απορρίπτει το γεγονός ότι η πρακτική άσκηση βοηθάει στην κατανόηση και ενισχύει τη διατήρηση της μαθηματικής γνώσης στη μνήμη του παιδιού, αντίθετα, είναι απαραίτητη στο σημείο εκείνο που κάθε φορά κρίνεται θεμελιώδες. Τέλος, οι απαντήσεις ή τυχόν απορίες των παιδιών από τη φάση αυτή συζητούνται στην τάξη, με στόχο τον έλεγχο εμπέδωσης ή μη της μαθηματικής γνώσης. Σημαντικό ρόλο σε όλη τη διδακτική παρέμβαση έχει η αλληλεπίδραση μεταξύ της διδάσκουσας και των παιδιών, αλλά και ανάμεσα στους ίδιους τους μαθητές.

Στην αρχή του πρώτου φυλλαδίου εργασίας περιγράφεται μια προβληματική κατάσταση η οποία έχει σχέση με τις εμπειρίες και το περιβάλλον των μαθητών, με σκοπό να διεγερθεί το ενδιαφέρον και να επιτευχθεί η κινητοποίηση των μαθητών ώστε να λάβουν μέρος στη διαδικασία μάθησης. Πρόκειται για μια εισαγωγική ιστορία (σενάριο) η οποία στοχεύει στον προβληματισμό των παιδιών αλλά και τη σύνδεση της έννοιας που πρόκειται να ακολουθήσει με τα βιώματα τους. Μέσω του σεναρίου αναδεικνύεται ένα χαρακτηριστικό του τριγώνου που δεν είναι κοινό με κανένα άλλο πολύγωνο: το τρίγωνο είναι σταθερό και άκαμπτο. Όταν εφαρμόζεται δύναμη στην επάνω πλευρά ή κορυφή οποιουδήποτε άλλου πολυγώνου τα μέτρα των γωνιών του αλλάζουν. Σε αντίθεση, η δύναμη που εφαρμόζεται στην κορυφή ενός τριγώνου εκτρέπεται κάτω στις πλευρές του χωρίς να αλλάζει τα μέτρα των γωνιών του και συνεπώς το σχήμα του. Αυτή η ιδιότητα κάνει τα τρίγωνα πολύ χρήσιμα στην κατασκευή γεφυρών και σκεπών. Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα τρίγωνα είναι σταθερά σχήματα που διατηρούν το σχήμα τους κάτω από πίεση, χρησιμοποιούνται τα χειραπτικά υλικά polystrips (βλ. Εικόνα 3).

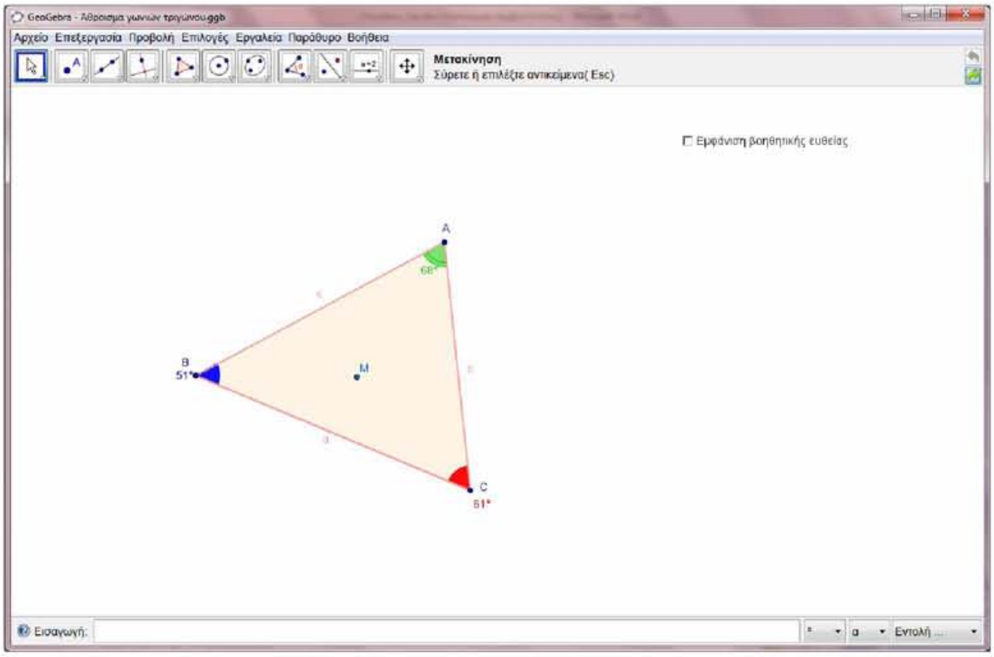
Εικόνα 3. Polystrips

Η πρώτη δραστηριότητα έχει ως στόχο οι μαθητές να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν οπτικά ένα τρίγωνο και να μάθουν τα βασικά στοιχεία ενός τριγώνου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται μια εφαρμογή στο GeoGebra που σχεδιάστηκε από την ερευνήτρια, στην οποία οι μαθητές πειραματίζονται μετασχηματίζοντας ένα δοσμένο τρίγωνο ώστε να πάρει τις μορφές που παρουσιάζονται στο φυλλάδιο εργασίας (βλ. Εικόνα 4). Στο πάνω δεξιά μέρος της οθόνης υπάρχουν τρία κουμπιά, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να εμφανίσουν και να αποκρύψουν τα βασικά στοιχεία του τριγώνου που μεταβάλλονται δυναμικά όταν αλλάζει το τρίγωνο.



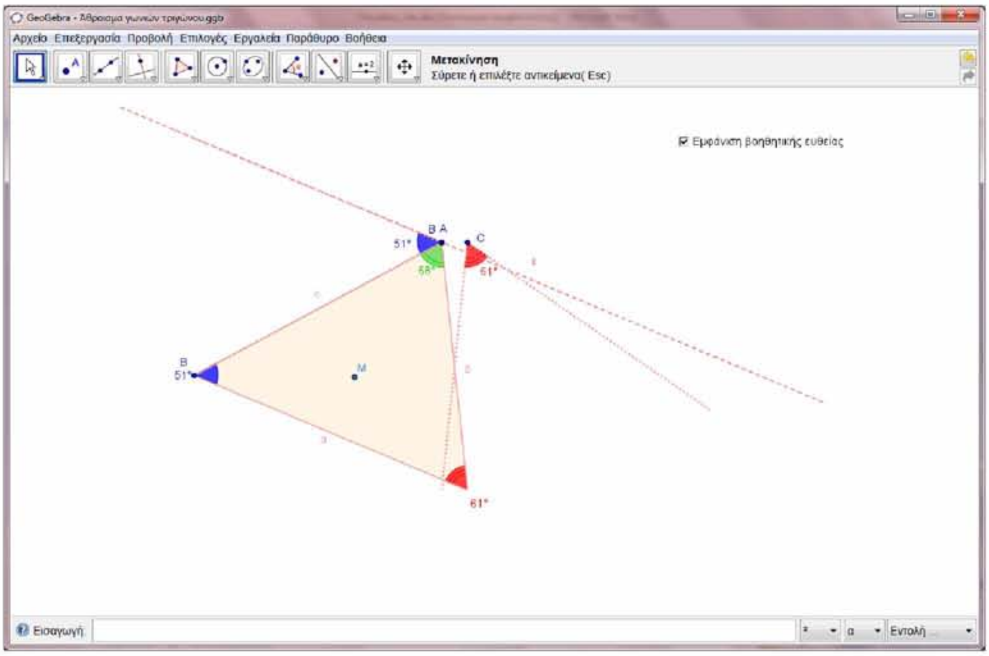
Εικόνα 4. Βασικά στοιχεία τριγώνου

Η δεύτερη δραστηριότητα στοχεύει στην ανακάλυψη από τους μαθητές της σχέσης που συνδέει τις γωνίες ενός τριγώνου μέσω μιας εφαρμογής που δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα GeoGebra. Μετακινώντας τα σημεία Α και Μ (βλ. Εικόνα 5) αλλάζει το τρίγωνο που παρουσιάζεται στην οθόνη και άρα τα μέτρα των γωνιών του.



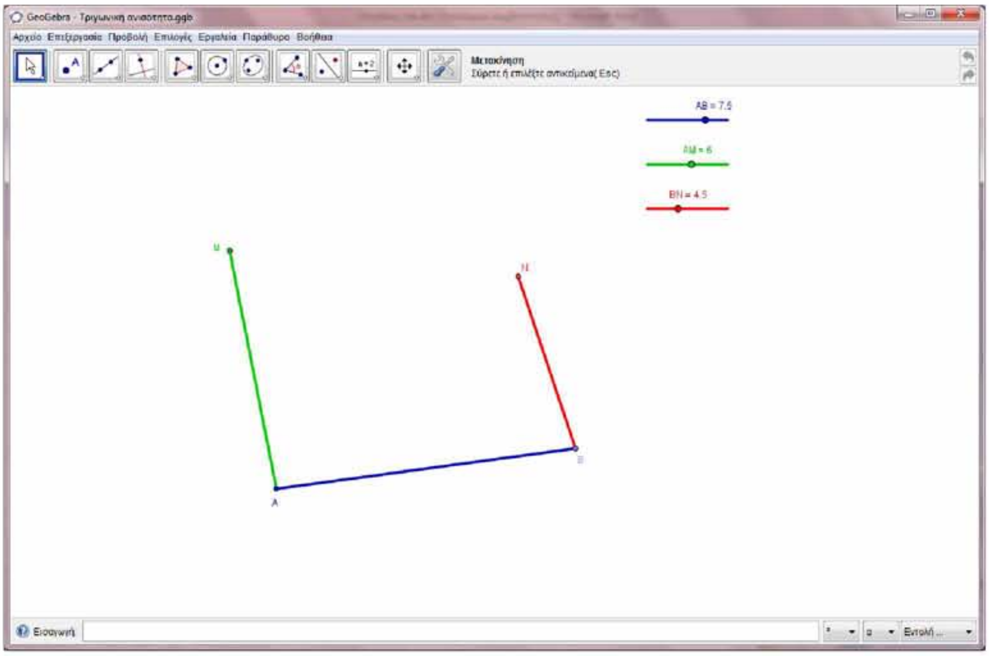
Εικόνα 5. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν τις γωνίες Β και C και να ανακαλύψουν ότι το άθροισμα των τριών γωνιών είναι μια ευθεία γωνία, έχοντας στη διάθεσή τους τη δυνατότητα να εμφανίσουν μια βοηθητική ευθεία που περνάει απ' το σημείο Α και είναι παράλληλη στην πλευρά BC (βλ. Εικόνα 6). Οι ερωτήσεις 4, 5 και 6 στοχεύουν στην εφαρμογή και εμπέδωση της νέας σχέσης από τους μαθητές.



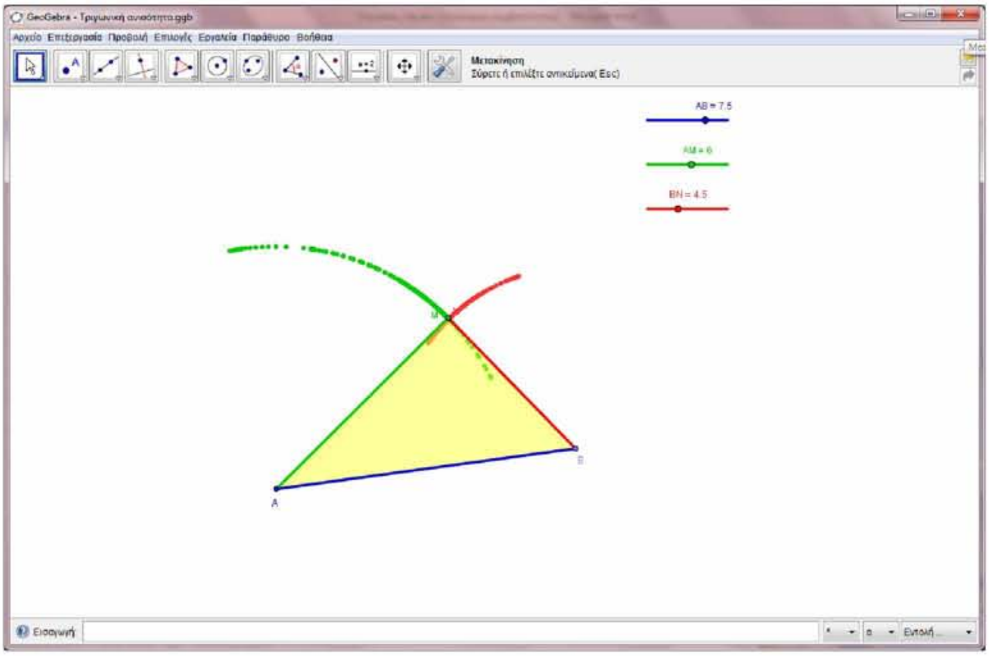
Εικόνα 6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Με την τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές ανακαλύπτουν την τριγωνική ανισότητα που συνδέει τις πλευρές ενός τριγώνου, χρησιμοποιώντας μια εφαρμογή που σχεδιάστηκε στο GeoGebra, η οποία παρουσιάζεται στην Εικόνα 7. Οι τρεις δρομείς που βρίσκονται πάνω δεξιά της οθόνης χρησιμοποιούνται για να μπορούν οι μαθητές να αλλάξουν τα μήκη των πλευρών AB, AM και BN.



Εικόνα 7. Τριγωνική ανισότητα

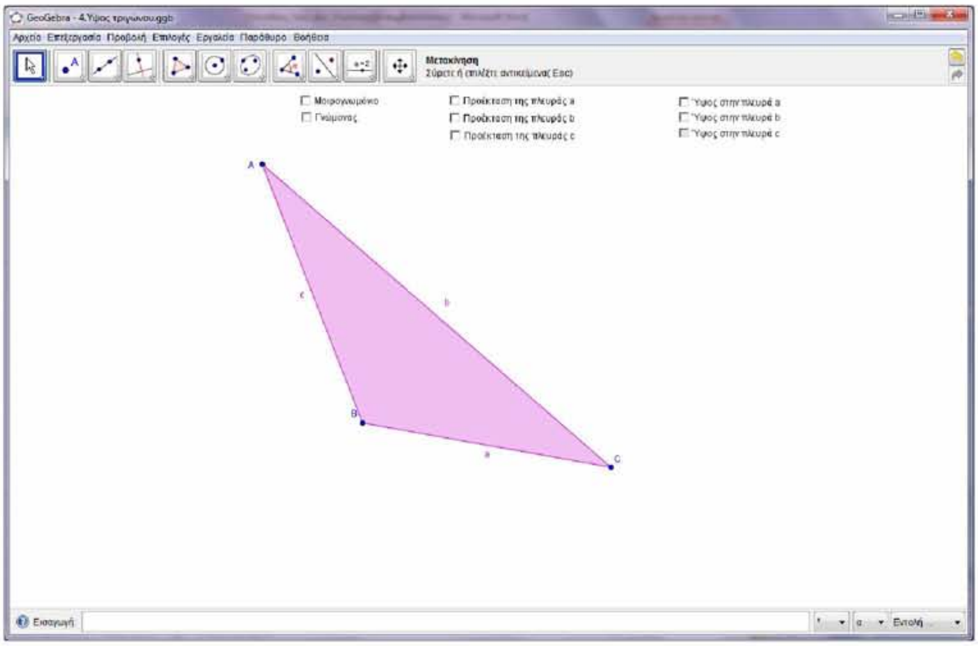
Μετακινώντας τα σημεία Μ και Ν και παρατηρώντας τα ίχνη τους που σχεδιάζονται, οι μαθητές ελέγχουν εάν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με τα επιλεγμένα κάθε φορά μήκη πλευρών (βλ. Εικόνα 8). Οι μαθητές καλούνται να δοκιμάσουν 10 τουλάχιστον διαφορετικούς συνδυασμούς και να σκεφτούν γιατί κάποιοι σχηματίζουν τρίγωνα ενώ κάποιοι άλλοι όχι. Ο στόχος των ερωτήσεων 10 και 11 είναι η πρακτική άσκηση των μαθητών στην τριγωνική ανισότητα.



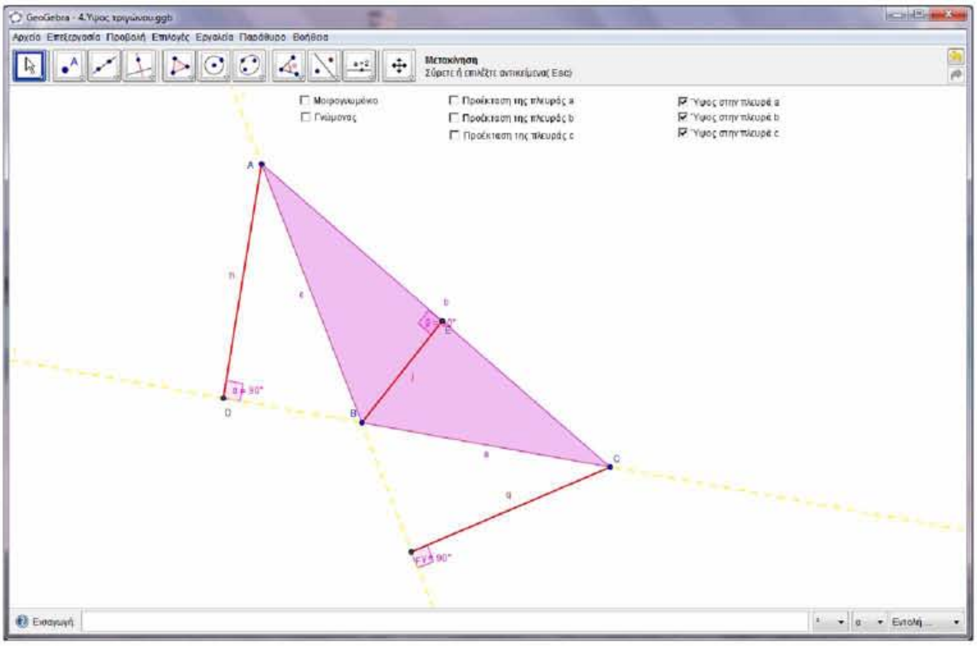
Εικόνα 8. Τριγωνική ανισότητα

Στην τέταρτη και τελευταία δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας οι μαθητές χρησιμοποιούν τους γεωπίνακες για να σχηματίσουν όσο περισσότερα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν. Στόχος της δραστηριότητας είναι μέσω της συζήτησης των μαθητών σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους μοιάζουν ή διαφέρουν τα τρίγωνα, να ανακαλύψουν τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων. Επίσης, αναμένεται οι μαθητές να είναι σε θέση να χαρακτηρίσουν ένα τρίγωνο με βάση και τα δύο κριτήρια κατάταξης τριγώνων.

Οι πρώτες τρεις δραστηριότητες του δεύτερου φυλλαδίου εργασίας σχετίζονται με τα δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου. Για τις δραστηριότητες αυτές σχεδιάστηκαν τρεις διαφορετικές εφαρμογές στο GeoGebra. Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές πειραματίζονται αρχικά με την κατασκευή του ύψους σε οξυγώνιο τρίγωνο, έπειτα σε ορθογώνιο και τέλος σε αμβλυγώνιο τρίγωνο (βλ. Εικόνα 9). Οι μαθητές μπορούν είτε να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του προγράμματος και να σχεδιάσουν τα ύψη μόνοι τους στον υπολογιστή είτε να εκμεταλλευτούν τα κουμπιά εμφάνισης των υψών που βρίσκονται δεξιά της οθόνης (βλ. Εικόνα 10). Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές έχουν το περιθώριο του πειραματισμού με όποιον τρόπο επιθυμούν.

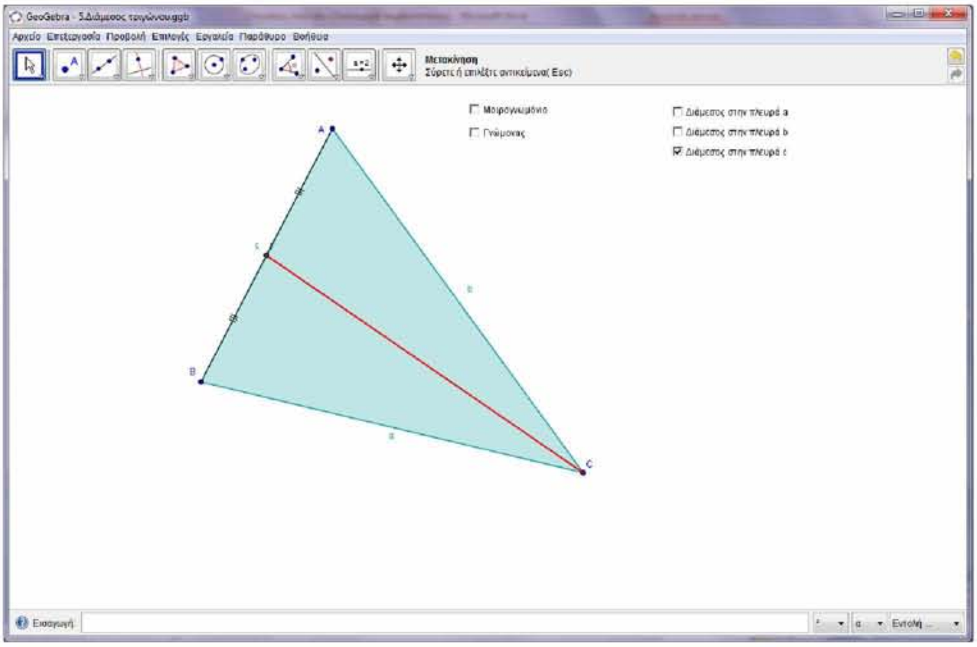


Εικόνα 9. Ύψος τριγώνου

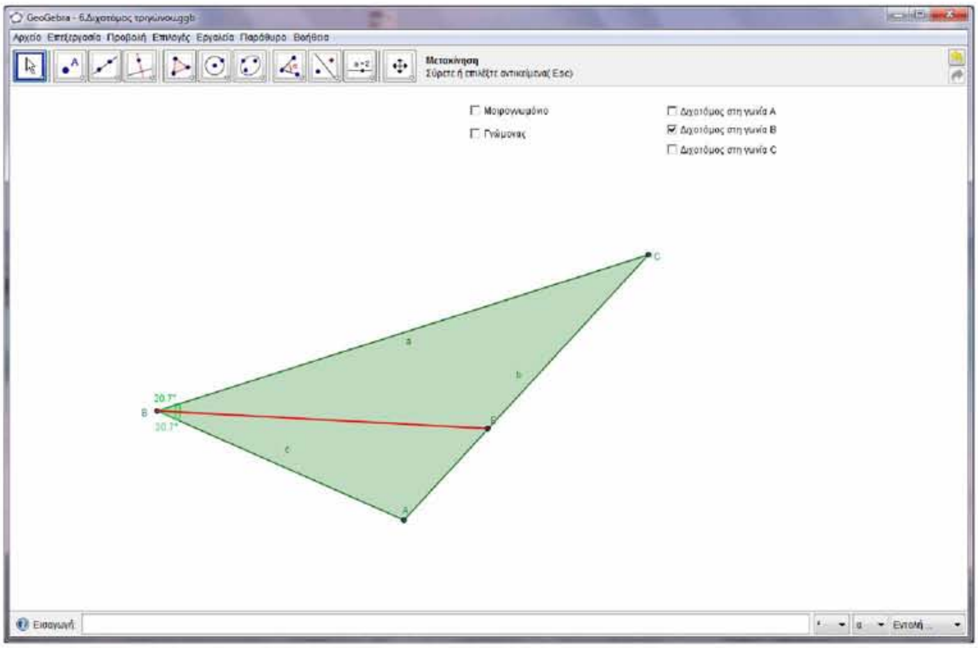


Εικόνα 10. Ύψος τριγώνου

Η δεύτερη δραστηριότητα αφορά τη διάμεσο (βλ. Εικόνα 11), ενώ η τρίτη τη διχοτόμο τριγώνου (βλ. Εικόνα 12). Στις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με όποιο τρίγωνο επιθυμούν, καθώς το είδος του τριγώνου δεν επηρεάζει την κατασκευή της διαμέσου ή της διχοτόμου.

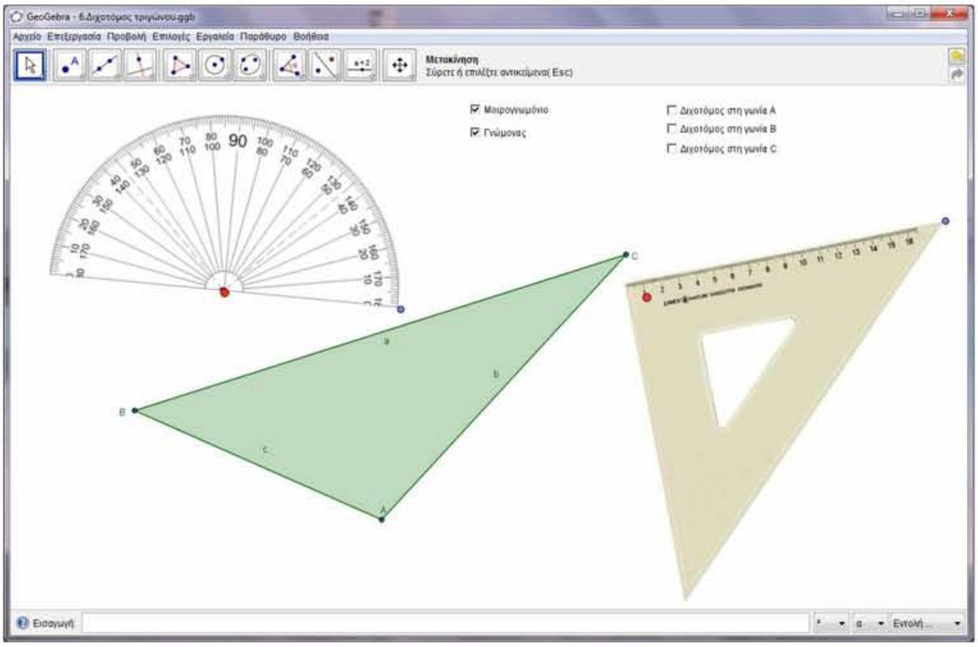


Εικόνα 11. Διάμεσος τριγώνου



Εικόνα 12. Διχοτόμος τριγώνου

Κοινό χαρακτηριστικό των τριών εφαρμογών είναι τα εικονικά γεωμετρικά όργανα (μοιρογνωμόνιο και γνώμονας) που μπορούν οι μαθητές να εμφανίσουν στην οθόνη και να τα χρησιμοποιήσουν με τον ίδιο τρόπο όπως τα φυσικά γεωμετρικά όργανα (βλ. Εικόνα 13).



Εικόνα 13. Γεωμετρικά όργανα

Το δεύτερο φυλλάδιο εργασίας ολοκληρώνεται με την τέταρτη και την πέμπτη δραστηριότητα, όπου οι μαθητές αναμένεται να μάθουν τις βασικές ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου. Για την επίτευξη των στόχων αυτών, χρησιμοποιούνται τρία ισοσκελή και ένα ισόπλευρο τρίγωνο σχεδιασμένα σε ριζόχαρτο μεγέθους Α4 (βλ. Παράρτημα Β). Η σχεδίαση των τριγώνων σε ριζόχαρτο χρησιμεύει ώστε, τοποθετώντας τα ίσα τρίγωνα το ένα πίσω από το άλλο, να μπορούν οι μαθητές να συγκρίνουν τα δευτερεύοντα στοιχεία του κάθε τριγώνου, παρατηρώντας ότι στο ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος που αντιστοιχούν στην άνιση πλευρά του ταυτίζονται, ενώ στο ισόπλευρο τρίγωνο η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος που αντιστοιχούν σε μια πλευρά του ταυτίζονται.

4.5 Διαδικασία

Η παρούσα έρευνα διήρκησε συνολικά περίπου τρεις μήνες, ενώ χρειάστηκαν δεκατρείς διδακτικές ώρες για να πραγματοποιηθεί. Η ερευνήτρια, μη έχοντας εύκολη πρόσβαση σε δείγμα, ήρθε σε επαφή, με τη βοήθεια συγγενικού προσώπου της, με δύο διδάσκοντες μαθηματικών Γυμνασίου της Νέας Ιωνίας Μαγνησίας στις 8/2/2010. Στην αρχική συζήτηση που πραγματοποιήθηκε οι εκπαιδευτικοί αυτοί, δύο τμημάτων Α΄ τάξης γυμνασίου, δέχθηκαν να συμμετέχουν στην έρευνα. Σε επόμενη συνάντηση, στις 12/3/2010, η ερευνήτρια ενημέρωσε τους διδάσκοντες για την πορεία διεξαγωγής της έρευνας και αποφασίστηκε η πρώτη επαφή της ερευνήτριας με τους μαθητές των τμημάτων A_1 και A_4 να γίνει στις 19/3/2010. Την ημέρα εκείνη η ερευνήτρια επισκέφτηκε τους μαθητές, γνωρίστηκε μαζί τους, τους ενημέρωσε για το σκοπό της έρευνας και συζήτησαν σχετικά με ό,τι πρόκειται να ακολουθήσει.

Συγχρόνως, συντάχθηκαν οι ερωτήσεις του αρχικού ερωτηματολογίου, όπως περιγράφηκαν παραπάνω. Για να προληφθούν τυχόν παρερμηνείες στη διατύπωση των ερωτήσεων πραγματοποιήθηκε πιλοτική συμπλήρωση από τρία παιδιά Α΄ τάξης γυμνασίου που δεν συμμετείχαν στο δείγμα, εκτός του σχολικού περιβάλλοντος. Μετά τις διορθώσεις που προέκυψαν, το επόμενο βήμα ήταν η συμπλήρωση των αρχικών ερωτηματολογίων από τους μαθητές των δύο τμημάτων, αφού πρώτα ενημερώθηκαν για ακόμη μια φορά ότι δεν πρόκειται για τεστ στο οποίο θα βαθμολογηθούν. Η διαδικασία αυτή διήρκησε μία διδακτική ώρα για την κάθε ομάδα και πραγματοποιήθηκε στις 22/3/2010. Για τη σχεδίαση των γεωμετρικών σχημάτων που απαιτούνταν τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους χάρακα και μοιρογνωμόνιο. Στο τέλος, οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης ενημερώθηκαν για την ημερομηνία της επόμενης συνάντησής τους και τους ζητήθηκε να έχουν μαζί τους φορητούς υπολογιστές τους[2].

Για να πραγματοποιηθεί όσο πιο ολοκληρωμένα γίνεται η ποιοτική-ερμηνευτική ανάλυση των απαντήσεων των παιδιών στο αρχικό ερωτηματολόγιο κρίθηκε αναγκαίο να γίνουν συνεντεύξεις με τους μαθητές και των δύο ομάδων. Οι μαθητές εξέθεσαν τις απόψεις τους στην ερευνήτρια με σκοπό την αποσαφήνιση ορισμένων απαντήσεών τους. Για τη διαδικασία των συνεντεύξεων χρησιμοποιήθηκαν δύο διδακτικές ώρες για κάθε τμήμα και πραγματοποιήθηκαν στις 16, 19 και 20/4/2010. Η βαθύτερη εξέταση των απαντήσεων των παιδιών κατεύθυνε την ερευνήτρια στην διαμόρφωση των δραστηριοτήτων και των ερωτήσεων των φυλλαδίων εργασίας της διδακτικής παρέμβασης. Πριν χρησιμοποιηθούν τα φυλλάδια εργασίας στη διδακτική παρέμβαση δόθηκαν πιλοτικά στα ίδια τρία παιδιά που δόθηκαν και τα αρχικά ερωτηματολόγια, ώστε να μπορέσει η ερευνήτρια να διατυπώσει, όπου ήταν αναγκαίο, τις οδηγίες και τις ερωτήσεις με μεγαλύτερη σαφήνεια.

Η διδακτική παρέμβαση στο τμήμα A_4 πραγματοποιήθηκε στις 5/5/2010 για δύο διδακτικές ώρες, και στις 6/5/2010 για τρεις διδακτικές ώρες, και παρόντες ήταν η

[2] Για τη σχολική χρονιά 2009-2010 το υπουργείο Οικονομίας σε συνεργασία με το υπουργείο Παιδείας χορήγησαν επιδότηση για φορητούς ηλεκτρονικούς υπολογιστές σε όλους τους μαθητές που φοιτούν στην Α΄ τάξη γυμνασίου.

ερευνήτρια και φιλικό της πρόσωπο που είχε το ρόλο του παρατηρητή. Πριν ξεκινήσει η διδασκαλία ήταν αναγκαίο να εγκατασταθούν στους υπολογιστές των παιδιών το πρόγραμμα GeoGebra και η γλώσσα προγραμματισμού Java, διαδικασία που πραγματοποιήθηκε στο διάλειμμα πριν την έναρξη της παρέμβασης. Ορισμένοι από τους μαθητές είχαν ήδη εγκατεστημένο το λογισμικό στον προσωπικό φορητό υπολογιστή τους με αποτέλεσμα να επιτευχθεί η γρήγορη εγκατάσταση του προγράμματος στους υπόλοιπους υπολογιστές. Μόλις προσήλθαν όλα τα παιδιά στην αίθουσα ενημερώθηκαν για το διδακτικό μοντέλο που θα χρησιμοποιούνταν και εξέφρασαν την απουσία χρήσης του στο παρελθόν από προηγούμενους δασκάλους.

Σύμφωνα με την Αναγνωστοπούλου (2007), για την εξοικείωση των παιδιών με τις βασικές αρχές της συνεργασίας προτείνεται η επιλογή της δυαδικής ομάδας. Έτσι, τα παιδιά χωρίστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων με βάση κυρίως τις φιλίες τους. Κάθε παιδί παρέλαβε ένα αυτοκόλλητο χαρτάκι στο οποίο έγραψε το όνομά του για να διευκολυνθεί, στην αρχή τουλάχιστον, η συζήτηση και η επικοινωνία. Η αρχική αυτή φάση της προσαρμογής περιελάμβανε τη διανομή του πρώτου φυλλαδίου εργασίας ανά ομάδα παιδιών, για το οποίο ενημερώθηκαν ότι πρέπει να αποφασίζουν και τα δύο μέλη της ομάδας για την απάντηση που θα δώσουν κάθε φορά. Τέλος, η γράφουσα προέτρεψε τους μαθητές να κρατήσουν μόνο έναν υπολογιστή σε κάθε ομάδα, ενθαρρύνοντας με αυτόν τον τρόπο το συνεργατικό κλίμα.

Για την ομάδα ελέγχου η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών από το διδάσκοντα/μαθηματικό του τμήματος. Η μέθοδος διδασκαλίας που χρησιμοποιήθηκε ήταν η δασκαλοκεντρική μετωπική προσέγγιση με βασικά εργαλεία το σχολικό βιβλίο (Βανδουλάκης, Καλλιγάς, Μαρκάκης & Φερεντίνος, 2007) και τον πίνακα της τάξης.

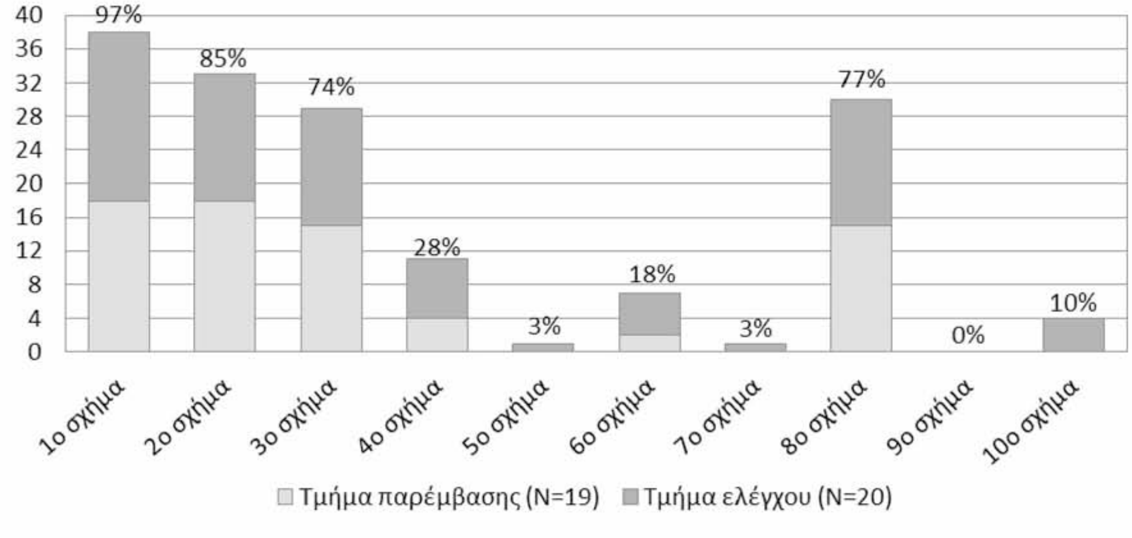
Η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια ολοκληρώθηκε στις 6/5/2010, ενώ ο μαθηματικός του τμήματος ελέγχου πραγματοποίησε τη διδασκαλία τέσσερις ημέρες πριν. Έτσι, στις 6/5/2010 δόθηκαν στους μαθητές του τμήματος ελέγχου τα τελικά ερωτηματολόγια που συμπληρώθηκαν σε μία διδακτική ώρα. Η ολοκλήρωση της ερευνητικής διαδικασίας ήταν στις 10/5/2010, με τη συμπλήρωση των τελικών ερωτηματολογίων από τους μαθητές του τμήματος παρέμβασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Αποτελέσματα

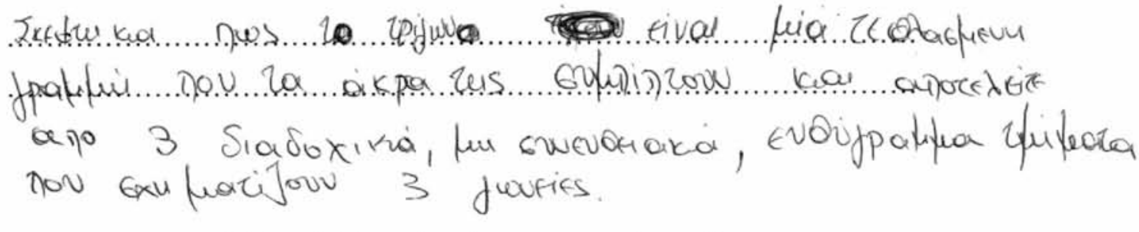
5.1 Αρχικό ερωτηματολόγιο (pre-test)

Οι ερωτήσεις που αναλύονται στην ενότητα αυτή έχουν ως στόχο να αναδείξουν τις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών του δείγματος για θέματα που σχετίζονται με τα τρίγωνα.

Στην πρώτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν από δέκα σχήματα εκείνα που δεν είναι τρίγωνα, περιγράφοντας τον τρόπο σκέψης τους. Όπως προκύπτει από το Διάγραμμα 1, περίπου το 75% των μαθητών επέλεξαν σωστά ως σχήματα που δεν είναι τρίγωνα τα 1, 2, 3 και 8. Το 28% των μαθητών δεν αναγνώρισαν ότι το σχήμα 4 είναι ένα τρίγωνο, σε αντίθεση με το 18% που μπερδεύτηκαν με το τρίγωνο 6. Δηλαδή, ένα στα τέσσερα παιδιά φάνηκε να μην είναι ικανό να αναγνωρίσει ένα μακρύ και στενό τρίγωνο. Σημασία έχει όμως η αιτιολόγηση της απάντησης που έδωσαν οι μαθητές. Έτσι, κάποια από τα παιδιά ανέφεραν ότι τα σχήματα που επέλεξαν «δεν μοιάζουν ή δεν θυμίζουν τρίγωνα», ενώ οι περισσότεροι μαθητές αιτιολόγησαν την απάντησή τους λέγοντας ότι τα σχήματα αυτά δεν έχουν τρεις γωνίες ή τρεις πλευρές ή και τις δύο ιδιότητες μαζί. Ορισμένα παιδιά ανέφεραν ότι ένα τρίγωνο έχει τρεις ίσιες ή ευθείες γραμμές που ενώνονται ή συμπίπτουν. Στην Εικόνα 14 παρουσιάζεται μια ενδιαφέρουσα απάντηση που δόθηκε στην ερώτηση αυτή.



Διάγραμμα 1. Ποια σχήματα <u>δεν</u> είναι τρίγωνα;


Σχέδιο και πως το τρίγωνο είναι μία τεθλασμένη γραμμή που τα άκρα της ενώνονται και αποτελείται από 3 διαδοχικά, μη συνευθειακά, ευθύγραμμα τμήματα που σχηματίζουν 3 γωνίες.

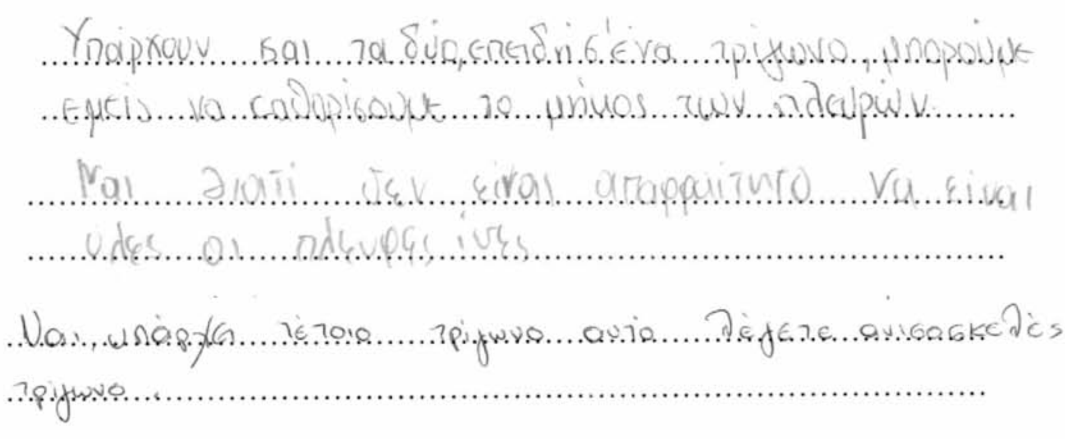
Εικόνα 14. Τυπική απάντηση στην πρώτη ερώτηση του pre-test.

Στη δεύτερη ερώτηση τα παιδιά κλήθηκαν να σκεφτούν εάν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 3cm, 5cm και 9cm ή τρίγωνο με 4cm, 5cm και 9cm. Οι απαντήσεις που δόθηκαν είναι ίδιες και για τις δύο τριάδες ευθυγράμμων τμημάτων και περιγράφονται στον Πίνακα 1.

	Τμήμα παρέμβασης (N=19)	Τμήμα ελέγχου (N=20)	Σύνολο (N=39)
	με σχήμα / χωρίς σχήμα		
δεν σχηματίζεται τρίγωνο	3(16%) / 2(11%)	3(15%) / 7(35%)	6(15%) / 9(23%)
σχηματίζεται τρίγωνο	0(0%) / 11(58%)	0(0%) / 5(25%)	0(0%)/ 16(41%)
δεν ξέρω/ δεν απαντώ	3(16%)	5(25%)	8(21%)

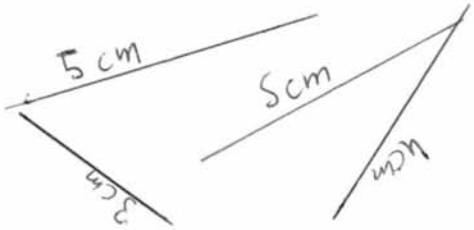
Πίνακας 1. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 3cm, 5cm και 9cm
ή τρίγωνο με 4cm, 5cm και 9cm;

Αρχικά, το 41% των μαθητών απάντησαν ότι τα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζουν τρίγωνα και αιτιολόγησαν την άποψή τους αναφέροντας ότι «δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός» ή ότι «οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου δε χρειάζεται να είναι ίσες» (βλ. Εικόνα 15).


Υπάρχουν και τα δύο, επειδή σε ένα τρίγωνο μπορούμε εμείς να καθορίσουμε το μήκος των πλευρών.
Και διότι δεν είναι απαραίτητο να είναι όλες οι πλευρές ίσες
Ναι, υπάρχει τέτοια τρίγωνα αυτά λέγεται ανισοσκελές τρίγωνο

Εικόνα 15. Τυπικές απαντήσεις στη δεύτερη ερώτηση του pre-test.

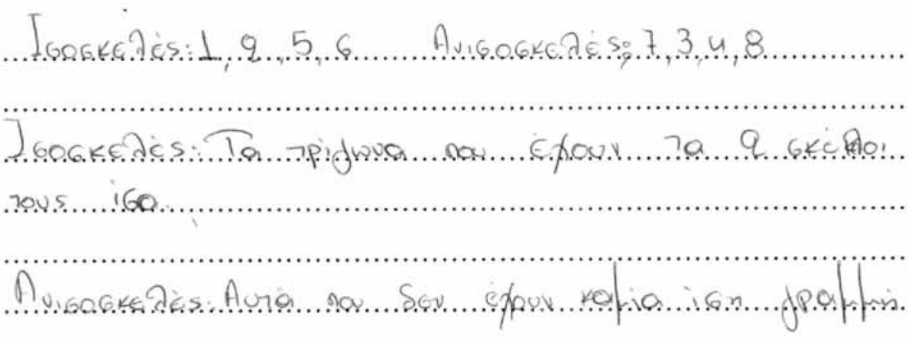
Αντίθετα, τα παιδιά που υποστήριξαν ότι δεν υπάρχουν τα δύο τρίγωνα, ανέφεραν ότι «οι πλευρές πρέπει να είναι περίπου ίσες» (ποσοστό 15%) ή ότι στην προσπάθειά τους να τα σχεδιάσουν «οι πλευρές δεν ενώνονται» (ποσοστό 23%). Γενικά, τα περισσότερα παιδιά (N=25) δεν έκαναν κάποιο σχήμα για να υποστηρίξουν την απάντησή τους. Όσοι προσπάθησαν να σχεδιάσουν τα δοσμένα μήκη για να ελέγξουν εάν σχηματίζεται τρίγωνο έκαναν μόνο μια προσπάθεια στο χαρτί και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν τα δύο τρίγωνα (βλ. Εικόνα 16).



Εικόνα 16. Τυπική απάντηση στη δεύτερη ερώτηση του pre-test.

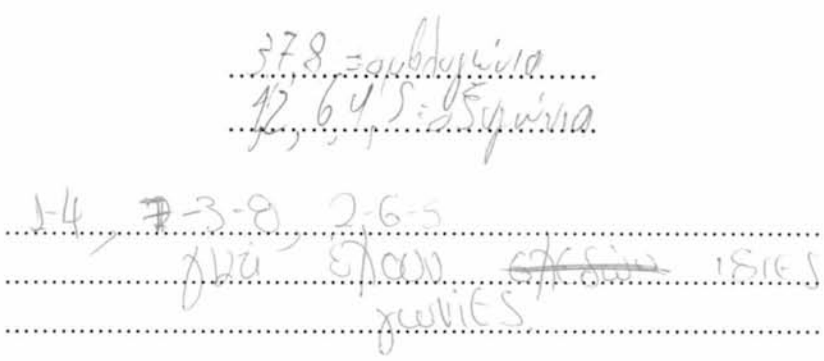
Στη συνέντευξη που πραγματοποιήθηκε με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση των απαντήσεων των παιδιών, ζητήθηκε από όσους μαθητές δεν είχαν κάνει κάποιο σχήμα στη συγκεκριμένη ερώτηση να προσπαθήσουν να φτιάξουν ώστε να ελέγξουν την απάντηση που έδωσαν. Τα σχήματα που έκαναν οι μαθητές και οι απαντήσεις που έδωσαν στη συνέντευξη συμφωνούν με εκείνα των μαθητών που ανέφεραν ότι «οι πλευρές δεν ενώνονται» έχοντας κάνει μόνο μία προσπάθεια στο χαρτί. Γενικότερα, όλες οι απαντήσεις των παιδιών προσεγγίζονται εμπειρικά και δεν υπάρχει απάντηση αποδεκτή με βάση την επιστημονική άποψη, δηλαδή της τριγωνικής ανισότητας.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να ταξινομήσουν κάποια τρίγωνα σε ομάδες με βάση όποια ιδιότητα ή χαρακτηριστικό κρίνουν οι ίδιοι. Μια ομάδα τριγώνων που έκαναν αρκετοί μαθητές (ποσοστό 26%) είναι τα ισοσκελή τρίγωνα 1, 2, 5 και 6, πραγματοποιώντας όμως λάθη ή παραλείψεις (βλ. Εικόνα 17).



Εικόνα 17. Τυπική απάντηση στην τρίτη ερώτηση του pre-test.

Τα τρίγωνα 3, 7 και 8 ή τα τρίγωνα 1, 2, 4, 5 και 6 ή συνδυασμοί ανά δύο αυτών, αποτέλεσαν μια συχνή επιλογή των παιδιών, με ποσοστά 51% και 36% αντίστοιχα. Τα περισσότερα από τα παιδιά αυτά εξήγησαν ότι «με κάποιον τρόπο μοιάζουν», ενώ πέντε παιδιά τα χώρισαν σε αμβλυγώνια και οξυγώνια (βλ. Εικόνα 18).

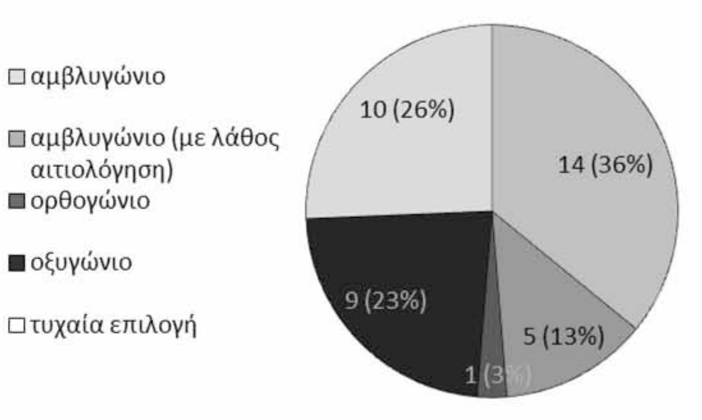


Εικόνα 18. Τυπικές απαντήσεις στην τρίτη ερώτηση του pre-test.

Επτά ακόμη μαθητές έκαναν ομάδες με βάση τις γωνίες των τριγώνων, χωρίς όμως να τοποθετούν σε κάθε ομάδα τα σωστά τρίγωνα (βλ. Εικόνα 19). Γενικότερα, η αιτιολόγηση που έδιναν συνήθως οι μαθητές για την επιλογή τους ήταν οπτική, όπως για παράδειγμα «μοιάζουν», «έχουν παρόμοιο σχήμα», «είναι ίσα τρίγωνα», ή «έχουν το ίδιο ύψος».

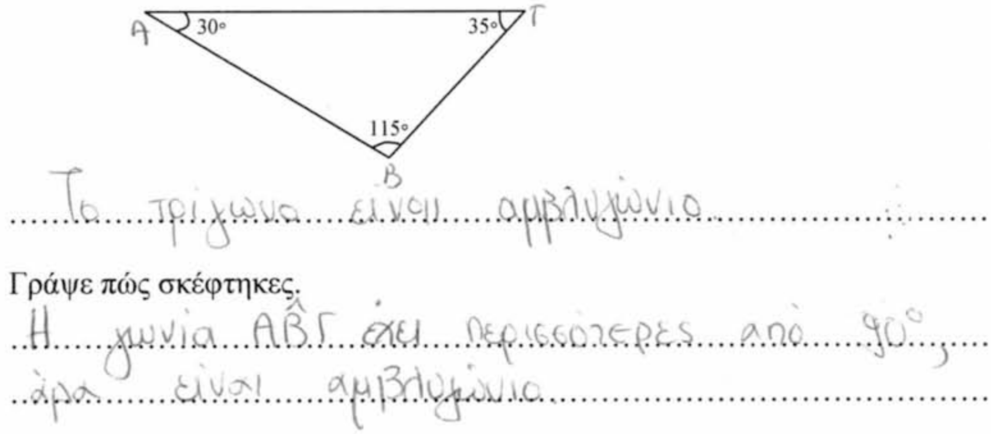
Εικόνα 19. Τυπικές απαντήσεις στην τρίτη ερώτηση του pre-test.

Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές έπρεπε να χαρακτηρίσουν ένα τρίγωνο με δοσμένα τα μέτρα των γωνιών του ως οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο. Οι απαντήσεις των παιδιών περιγράφονται στο Διάγραμμα 2, στο σύνολο των δύο τμημάτων.



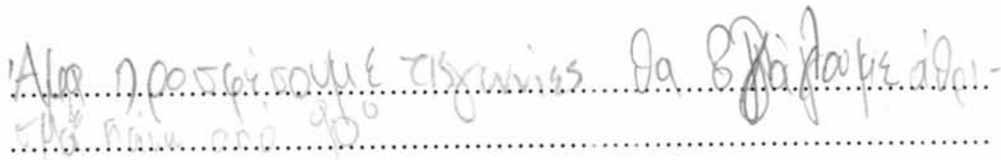
Διάγραμμα 2. Το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο;

Όπως φαίνεται οι μισοί μαθητές απάντησαν σωστά ότι πρόκειται για αμβλυγώνιο τρίγωνο. Όταν όμως προσπάθησαν να περιγράψουν τον τρόπο σκέψης τους μόνο το 36% των παιδιών ανέφεραν ότι έχει «μια αμβλεία γωνία» ή «μια μεγάλη γωνία» ή «μια γωνία πάνω από 90◦» (βλ. Εικόνα 20).

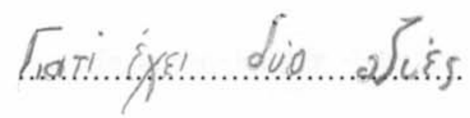


Εικόνα 20. Τυπική απάντηση στην τέταρτη ερώτηση του pre-test.

Οι υπόλοιποι μαθητές αιτιολόγησαν την απάντησή τους αναφέροντας ότι το άθροισμα των γωνιών του είναι 180◦ (βλ. Εικόνα 21). Ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών (23%) χαρακτήρισαν το τρίγωνο ως οξυγώνιο αναφέροντας ότι έχει δύο οξείες γωνίες (βλ. Εικόνα 22). Ενώ αρκετοί ήταν εκείνοι που απάντησαν στην τύχη λέγοντας ότι δεν τα θυμούνται πολύ καλά, παρόλο που την ώρα που δόθηκαν τα ερωτηματολόγια έγινε μια επανάληψη των όρων οξεία, ορθή και αμβλεία γωνία.

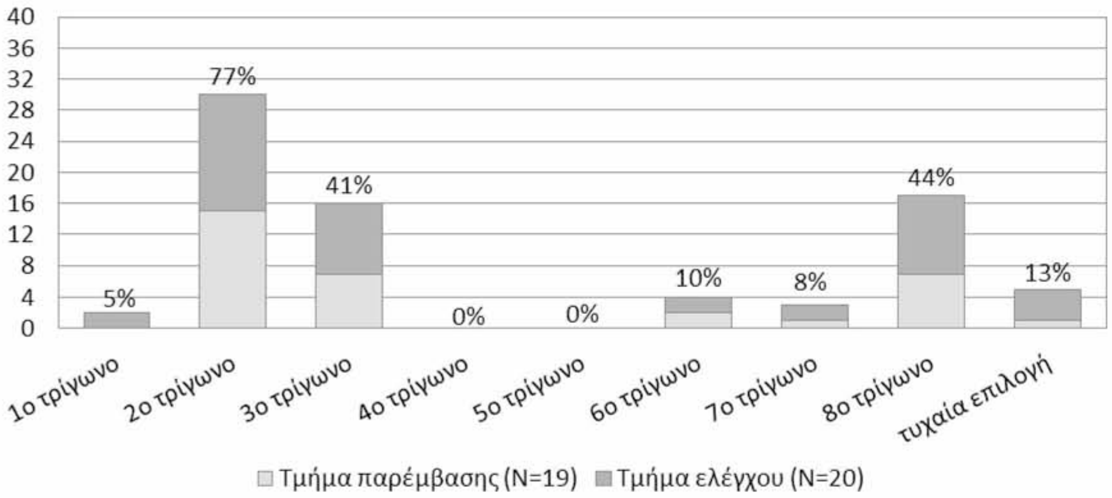


Εικόνα 21. Τυπική απάντηση στην τέταρτη ερώτηση του pre-test.



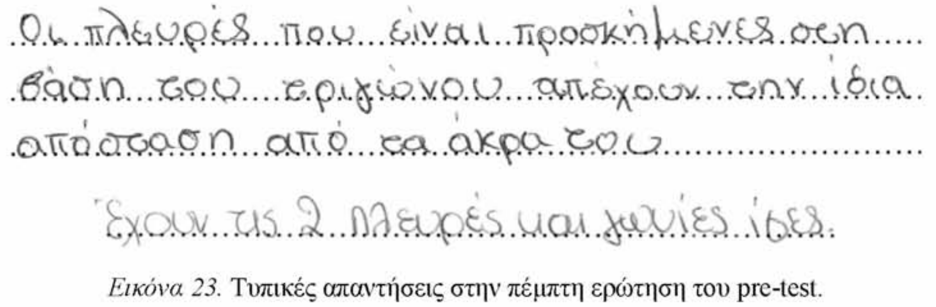
Εικόνα 22. Τυπική απάντηση στην τέταρτη ερώτηση του pre-test.

Στην πέμπτη ερώτηση ζητήθηκε από τα παιδιά να αναγνωρίσουν τα ισοσκελή τρίγωνα και να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται ξεχωριστά για τα δύο τμήματα στο Διάγραμμα 3.



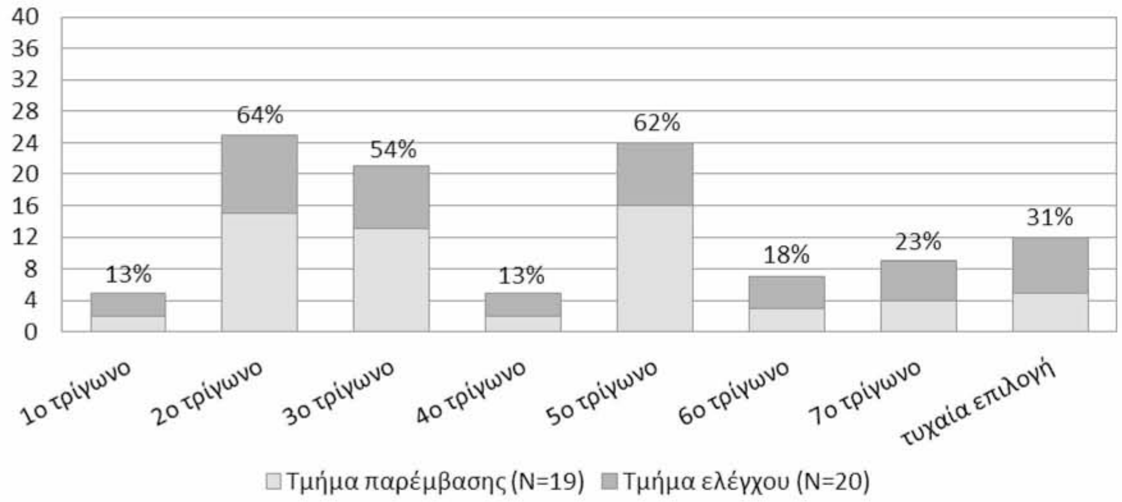
Διάγραμμα 3. Ποια τρίγωνα είναι ισοσκελή;

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, το 77% των μαθητών επέλεξαν το 2^{ο} τρίγωνο ως ισοσκελές. Από τα τριάντα παιδιά τα δεκατέσσερα επέλεξαν μόνο αυτό ονομάζοντας ισοσκελές τρίγωνο εκείνο που έχει τρεις ίσες πλευρές (ισόπλευρο). Αντίθετα, δύο μαθητές επέλεξαν τα τρίγωνα 3 και 8 ως ισοσκελή με αιτιολόγηση ότι οι δύο πλευρές τους είναι ίσες, ενώ δεν επέλεξαν το 2^{ο} τρίγωνο. Γενικά τα ισοσκελή τρίγωνα 3 και 8 δεν επιλέχθηκαν από την πλειοψηφία των μαθητών, αλλά από το 41% και 44% των μαθητών αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι δύο παιδιά αιτιολόγησαν την απάντησή τους λέγοντας πως έχουν δύο ίσες πλευρές και δύο ίσες γωνίες (βλ. Εικόνα 23). Ακόμη, το 10% των μαθητών υποστήριξαν ότι το 6^{ο} τρίγωνο είναι ισοσκελές, το 8% ότι είναι το 7^{ο} τρίγωνο και 5% ότι είναι το 1^{ο} τρίγωνο.



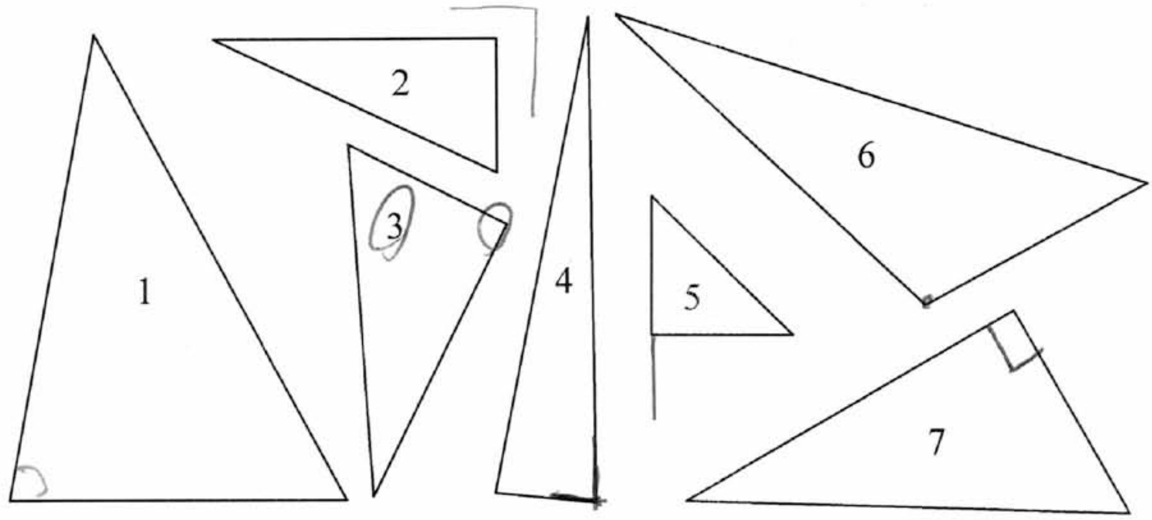
Εικόνα 23. Τυπικές απαντήσεις στην πέμπτη ερώτηση του pre-test.

Στην επόμενη ερώτηση ζητήθηκε από τα παιδιά να επιλέξουν από επτά τρίγωνα όσα είναι ορθογώνια και να σχεδιάσουν σε κάθε τρίγωνο την ορθή γωνία. Όπως προκύπτει από το Διάγραμμα 4, το 64% των μαθητών επέλεξαν σωστά το 2^{ο} τρίγωνο, το 62% το 5^{ο} τρίγωνο, το 54% το 3^{ο} τρίγωνο, ενώ μόλις το 23% των μαθητών επέλεξαν το 7^{ο} τρίγωνο.



Διάγραμμα 4. Ποια τρίγωνα είναι ορθογώνια;

Ο τρόπος με τον οποίο σημείωσαν την ορθή γωνία δεν ήταν ίδιος για όλα τα παιδιά, καθώς δεκατρείς μαθητές χρησιμοποίησαν την κλασική απεικόνιση της ορθής γωνίας, εννιά παιδιά την σημείωσαν ως γωνία και επτά παιδιά έκαναν διάφορα άλλα σχήματα (βλ. Εικόνα 24).



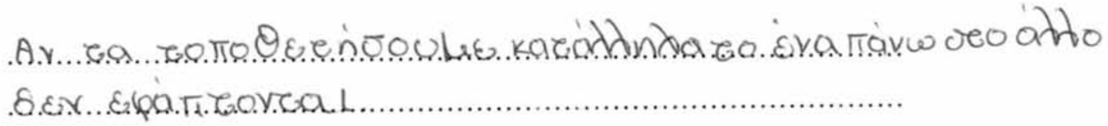
Εικόνα 24. Τυπικές απαντήσεις στην έκτη ερώτηση του pre-test.

Στη συνέχεια δόθηκαν δύο τρίγωνα στους μαθητές, ένα ισόπλευρο και ένα ισοσκελές, και τους ζητήθηκε να περιγράψουν με ποιον τρόπο τα δύο σχήματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Η πιο συχνή απάντηση των μαθητών (46%), όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, είναι ότι το 1^{o} τρίγωνο έχει μεγαλύτερες πλευρές από το 2^{o} τρίγωνο.

	Τμήμα παρέμβασης (N=19)	Τμήμα ελέγχου (N=20)	Σύνολο (N=39)
τα τρίγωνα έχουν διαφορετικό μέγεθος	6 (32%)	8 (40%)	14 (36%)
η βάση έχει διαφορετικό μήκος	6 (32%)	7 (35%)	13 (33%)
οι πλευρές έχουν διαφορετικό μήκος	7 (37%)	11 (55%)	18 (46%)
οι γωνίες έχουν διαφορετικά μέτρα	3 (16%)	3 (15%)	6 (15%)
το 1ο τρίγωνο είναι ισοσκελές	3 (16%)	1 (5%)	4 (10%)
το 1ο τρίγωνο έχει 3 ίσες πλευρές ενώ το 2ο δύο	2 (11%)	2 (10%)	4 (10%)
δεν ξέρω / δεν απαντώ	0 (0%)	1 (5%)	1 (3%)

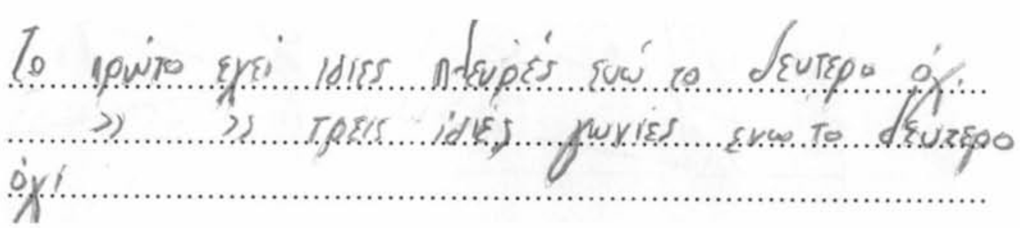
Πίνακας 2. Με ποιον τρόπο τα δύο τρίγωνα είναι διαφορετικά μεταξύ τους;

Το 36% των παιδιών ανέφεραν ότι τα δύο τρίγωνα έχουν διαφορετικό μέγεθος, ανάμεσα στα οποία δύο μαθητές είπαν συγκεκριμένα ότι έχουν διαφορετικό εμβαδόν και ένας ότι αν τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο δεν εφάπτονται (βλ. Εικόνα 25).



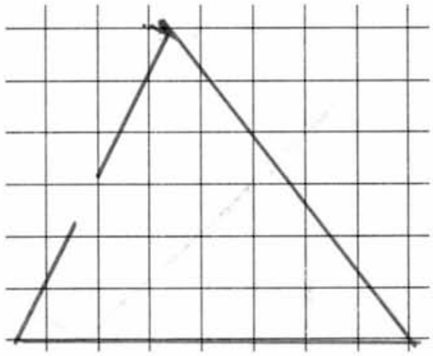
Εικόνα 25. Τυπική απάντηση στην έβδομη ερώτηση του pre-test.

Σημαντικό πλήθος μαθητών (33%) διαπίστωσαν ότι στο 1ο τρίγωνο η οριζόντια πλευρά είναι μεγαλύτερη από του 2ου τριγώνου. Τέσσερις μαθητές, οι οποίοι μπέρδεψαν το ισοσκελές με το ισόπλευρο τρίγωνο, ανέφεραν ότι το 1ο τρίγωνο είναι ισοσκελές. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι από τα τέσσερα παιδιά που υποστήριξαν ότι το 1ο τρίγωνο έχει τρεις ίσες πλευρές ενώ το 2ο μόνο δύο, το ένα έγραψε επίσης ότι το ένα τρίγωνο έχει και τρεις ίσες γωνίες (βλ. Εικόνα 26).



Εικόνα 26. Τυπική απάντηση στην έβδομη ερώτηση του pre-test.

Στην όγδοη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τέσσερα τρίγωνα, το κάθε ένα διαφορετικό από τα προηγούμενα. Από τους μαθητές του τμήματος ελέγχου, τρία παιδιά σχεδίασαν μόνο τρία τρίγωνα, ενώ ένα παιδί έκανε το σχήμα της Εικόνας 27.



Εικόνα 27. Τυπική απάντηση στην όγδοη ερώτηση του pre-test.

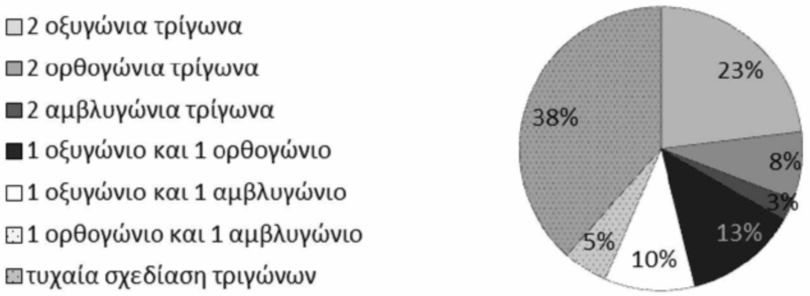
Οι κατηγορίες στις οποίες ανήκουν τα τρίγωνα που σχεδίασαν οι μαθητές περιγράφονται στον Πίνακα 3. Από τα 41 ισοσκελή οξυγώνια τρίγωνα, οκτώ μαθητές σχεδίασαν από δύο τρίγωνα της κατηγορίας, δύο μαθητές σχεδίασαν τρία τρίγωνα και ένας μαθητής σχεδίασε τέσσερα ισοσκελή οξυγώνια τρίγωνα. Αντίστοιχα από τα 40 σκαληνά οξυγώνια τρίγωνα, τρία παιδιά σχεδίασαν από δύο τρίγωνα, τέσσερα παιδιά από τρία τρίγωνα και δύο παιδιά σχεδίασαν μόνο σκαληνά οξυγώνια τρίγωνα. Ένα παιδί έκανε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, ενώ τέσσερα παιδιά έκαναν δύο σκαληνά ορθογώνια τρίγωνα. Επίσης, έξι μαθητές σχεδίασαν από δύο ισοσκελή αμβλυγώνια τρίγωνα ο καθένας. Τέλος, κρίνεται αναγκαίο να αναφερθεί ότι από τα 152 τρίγωνα που σχεδίασαν οι μαθητές στην ερώτηση αυτή τα 116, δηλαδή ποσοστό 76%, ήταν τρίγωνα που η μία πλευρά τους είναι οριζόντια, ενώ 10 ακόμη ήταν τρίγωνα με την μία πλευρά τους κάθετη[3].

	Ισόπλευρο	Ισοσκελές	Σκαληνό
	Τμήμα παρέμβασης / Τμήμα ελέγχου		
Οξυγώνιο	2 / 4	17 / 24	21 / 19
Ορθογώνιο	-	4 / 6	15 / 9
Αμβλυγώνιο	-	2 / 2	14 / 13

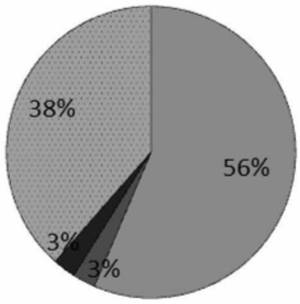
Πίνακας 3. Σχεδιάστε τέσσερα διαφορετικά τρίγωνα.

[3] Ορθογώνια τρίγωνα με την μία πλευρά οριζόντια και την άλλη κάθετη υπολογίστηκαν στα τρίγωνα που έχουν την μία πλευρά τους οριζόντια.

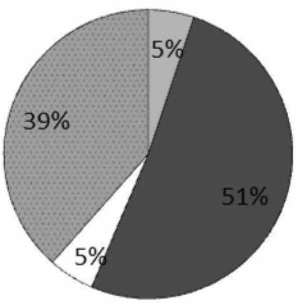
Ζητήθηκε, επίσης, από τους μαθητές να σχεδιάσουν δύο οξυγώνια, δύο αμβλυγώνια και δύο ορθογώνια τρίγωνα. Στην ερώτηση αυτή αρκετά παιδιά (Ν=15) σχεδίασαν διάφορα τρίγωνα τυχαία και οι απαντήσεις τους δεν λήφθηκαν υπόψη στα αποτελέσματα. Από το Διάγραμμα 5 προκύπτει ότι το 23% των μαθητών σχεδίασαν δύο οξυγώνια τρίγωνα, ενώ αρκετοί σχεδίασαν ένα οξυγώνιο και ένα ορθογώνιο ή ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Αντίθετα, οι περισσότεροι μαθητές σχεδίασαν τα δύο ορθογώνια (56%) και τα δύο αμβλυγώνια τρίγωνα (51%) που τους ζητήθηκαν (βλ. Διαγράμματα 6 και 7). Αναφορικά με τον προσανατολισμό του σχήματος, από τα 144 τρίγωνα που σχεδίασαν οι μαθητές τα 115 (ποσοστό 80%) έχουν μία πλευρά οριζόντια και 4 έχουν μία πλευρά κάθετη.



Διάγραμμα 5. Σχεδιάστε 2 οξυγώνια τρίγωνα.



Διάγραμμα 6. Σχεδιάστε 2 ορθογώνια τρίγωνα.

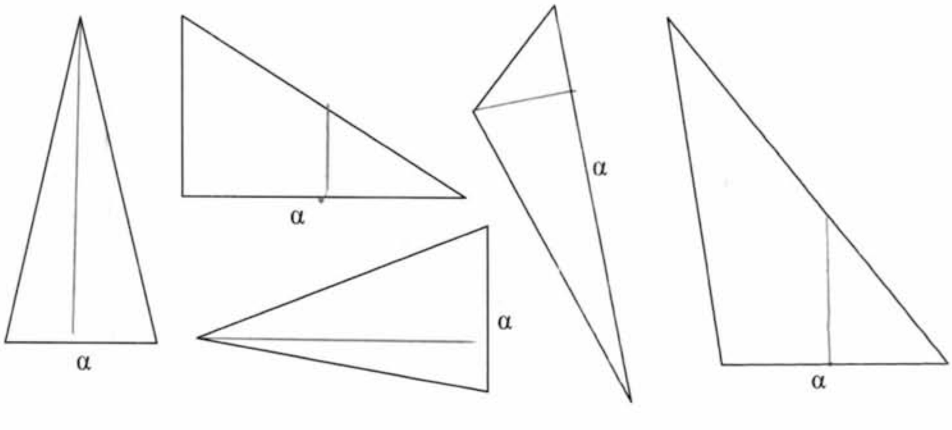


Διάγραμμα 7. Σχεδιάστε 2 αμβλυγώνια τρίγωνα.

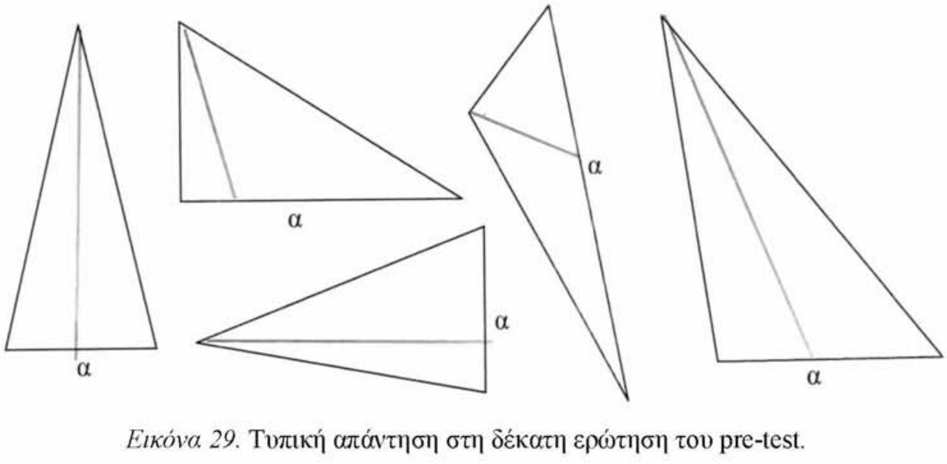
Στη δέκατη ερώτηση οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν το ύψος πέντε τριγώνων σε μια συγκεκριμένη πλευρά τους. Οι απαντήσεις των μαθητών περιγράφονται στον Πίνακα 4. Μόνο δύο παιδιά κατάφεραν να σχεδιάσουν το ύψος στην πλευρά α σε όλα τα τρίγωνα, ενώ τρία παιδιά δεν μπόρεσαν να σχεδιάσουν το ύψος στο ορθογώνιο και το αμβλυγώνιο τρίγωνο. Το 23% των μαθητών έχουν μερική εικόνα της έννοιας του ύψους που είναι επηρεασμένη από την έννοια της μεσοκαθέτου (βλ. Εικόνα 28). Εννιά παιδιά ταύτισαν το ύψος των τριγώνων με μία πλευρά τους, κάποιες φορές με την ίδια την πλευρά α (Ν=6) ενώ άλλες φορές με μία άλλη πλευρά του τριγώνου. Τέλος, οι απαντήσεις πέντε παιδιών έδειξαν ότι θεωρούν ύψος στην πλευρά α ένα ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει απ' την απέναντι κορυφή της αλλά δεν άγεται κάθετα στην πλευρά αυτή (βλ. Εικόνα 29).

	Τμήμα παρέμβασης (N=19)	Τμήμα ελέγχου (N=20)	Σύνολο (N=39)
ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας του ύψους	2 (11%)	0 (0%)	2 (5%)
μερική εικόνα της έννοιας του ύψους που αποκλείει τα εξωτερικά ύψη	2 (11%)	1 (5%)	3 (8%)
μερική εικόνα της έννοιας του ύψους επηρεασμένη από την έννοια της μεσοκαθέτου	5 (26%)	4 (20%)	9 (23%)
μερική εικόνα της έννοιας του ύψους που άγεται από το ένα άκρο της πλευράς α κάθετα ως το ύψος της απέναντι κορυφής	2 (11%)	0 (0%)	2 (5%)
ένα ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την απέναντι κορυφή αλλά δεν άγεται κάθετα στην πλευρά α	3 (16%)	2 (10%)	5 (13%)
το ύψος ταυτίζεται με μία πλευρά του τριγώνου	4 (21%)	5 (25%)	9 (23%)
το ψηλότερο σημείο του τριγώνου στο χαρτί	0 (0%)	2 (10%)	2 (5%)
δεν ξέρω / δεν απαντώ	1 (5%)	6 (30%)	7 (18%)

Πίνακας 4. Σχεδιάστε το ύψος των τριγώνων στην πλευρά που έχει το γράμμα α.



Εικόνα 28. Τυπική απάντηση στη δέκατη ερώτηση του pre-test.



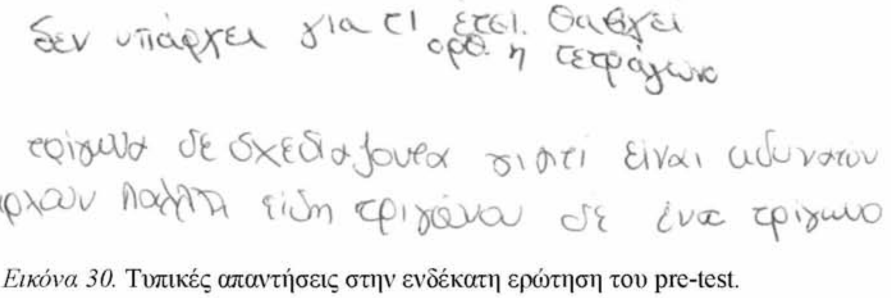
Εικόνα 29. Τυπική απάντηση στη δέκατη ερώτηση του pre-test.

Στην επόμενη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν εάν θα μπορούσαν να σχεδιάσουν κάποια τρίγωνα με δύο συγκεκριμένες ιδιότητες. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στον Πίνακα 5, οι περισσότερες σωστές απαντήσεις (33%) δόθηκαν στο εάν μπορεί να κατασκευαστεί τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες, ενώ μόνο το 8% των μαθητών μπόρεσαν να σχεδιάσουν ένα ισοσκελές αμβλυγώνιο ή ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Μεγαλύτερα είναι τα ποσοστά των μαθητών που απάντησαν ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο ισόπλευρο τρίγωνο (15%), αλλά και εκείνων που σχεδίασαν ένα ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο (23%).

	Τμήμα παρέμβασης (N=19)/ Τμήμα ελέγχου (N=20)				
	α	β	γ	δ	ε
σωστή αναπαράσταση του τριγώνου	-	1 / 2 (8%)	-	3 / 6 (23%)	0 / 3 (8%)
λάθος αναπαράσταση του τριγώνου	2 / 0 (5%)	6 / 0 (15%)	3 / 4 (18%)	2 / 0 (5%)	5 / 1 (15%)
δεν υπάρχει το τρίγωνο	5 / 8 (33%)	0 / 5 (13%)	2 / 4 (15%)	1 / 0 (3%)	2 / 2 (10%)
δεν ξέρω/ δεν απαντώ	12 / 12 (62%)	12 / 13 (64%)	14 / 12 (67%)	13 / 14 (69%)	12 / 14 (67%)

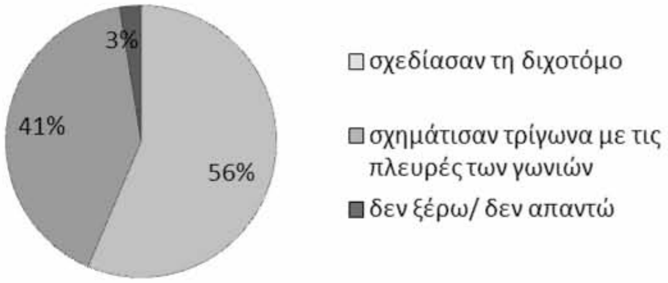
Πίνακας 5. Ποια από τα τρίγωνα μπορείτε να σχεδιάσετε: α) με δύο ορθές γωνίες, β) ορθογώνιο ισοσκελές, γ) ορθογώνιο ισόπλευρο, δ) ισοσκελές οξυγώνιο, ε) ισοσκελές αμβλυγώνιο;

Συνήθως οι μαθητές δεν αιτιολογούσαν τις απαντήσεις τους στη συγκεκριμένη ερώτηση ή προσπαθούσαν να δώσουν μια δική τους εξήγηση (βλ. Εικόνα 30). Σε σχέση με τον προσανατολισμό των σχημάτων, τα 35 από τα 38 τρίγωνα που σχεδίασαν οι μαθητές, δηλαδή το 92% των τριγώνων, είχαν την μία πλευρά του οριζόντια.



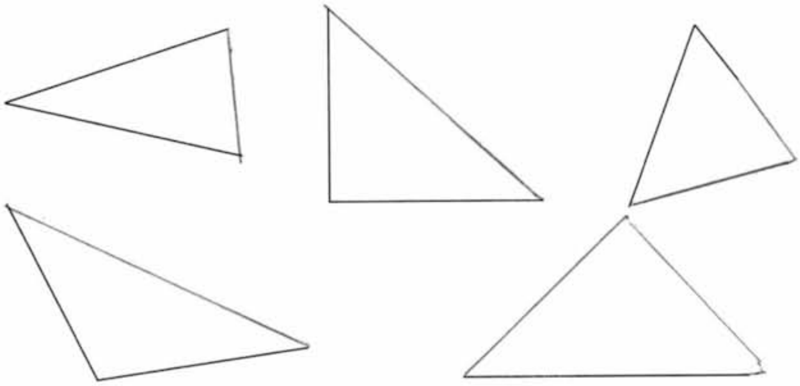
Εικόνα 30. Τυπικές απαντήσεις στην ενδέκατη ερώτηση του pre-test.

Με την τελευταία ερώτηση διερευνήθηκε εάν οι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν τη διχοτόμο γωνίας. Από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 8 προκύπτει ότι τα περισσότερα παιδιά σχεδίασαν σωστά τη διχοτόμο των γωνιών, με εξαίρεση δύο μαθητές που δεν σχεδίασαν τη διχοτόμο της ευθείας γωνίας.



Διάγραμμα 8. Σχεδιάστε τη διχοτόμο των γωνιών.

Ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών (41%) φάνηκαν να μην γνωρίζουν την έννοια της διχοτόμου, σχηματίζοντας απλώς τρίγωνα με τις δοσμένες πλευρές των γωνιών, ακόμη και με την ευθεία γωνία (βλ. Εικόνα 31). Μάλιστα, ένα από τα παιδιά αυτά σχεδίασε και ένα τετράγωνο με τη δεύτερη γωνία.

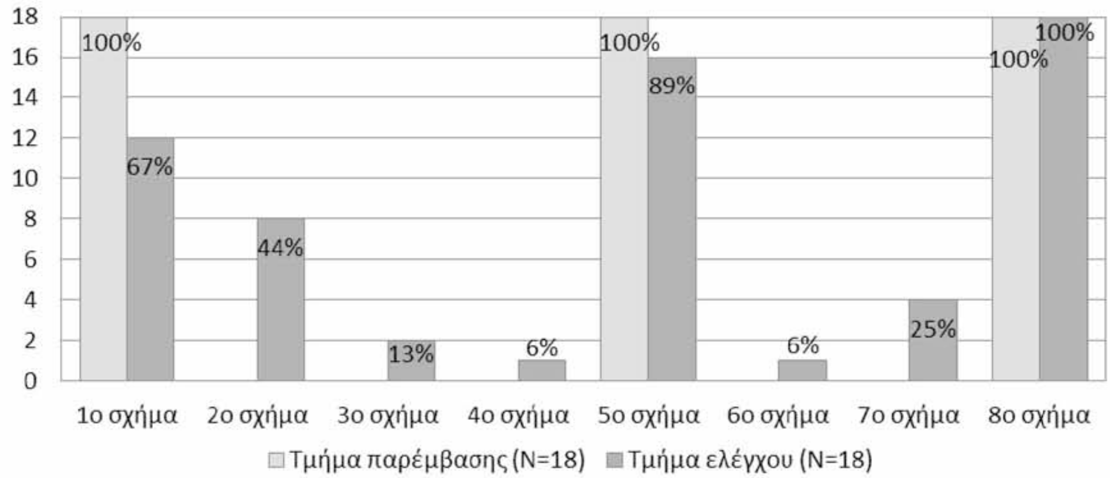


Εικόνα 31. Τυπική απάντηση στη δωδέκατη ερώτηση του pre-test.

5.2 Τελικό ερωτηματολόγιο (post-test)

Μετά τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου οι μαθητές των δύο τμημάτων της Α΄ τάξης γυμνασίου συμπλήρωσαν το τελικό ερωτηματολόγιο. Οι απαντήσεις τους περιγράφονται στην παρούσα ενότητα με σκοπό τη μελέτη των αντιλήψεών τους για θέματα σχετικά με το τρίγωνο ύστερα από τη διδακτική παρέμβαση.

Στην πρώτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές του δείγματος να επιλέξουν ανάμεσα σε οκτώ σχήματα εκείνα που δεν είναι τρίγωνα αιτιολογώντας την απάντησή τους. Όπως φαίνεται από το Διάγραμμα 9 όλα τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης επέλεξαν σωστά το 1^o, το 5^o και το 8^o σχήμα ενώ από τους μαθητές του τμήματος ελέγχου οι δεκαοκτώ επέλεξαν το 8^o σχήμα, οι δεκαέξι το 5^o και μόνο δώδεκα παιδιά ανέφεραν ότι το 1^o σχήμα δεν είναι τρίγωνο. Το 44% των μαθητών του τμήματος ελέγχου θεωρούν ότι ένα μακρύ και στενό τρίγωνο, όπως το 2^o σχήμα, δεν είναι τρίγωνο.



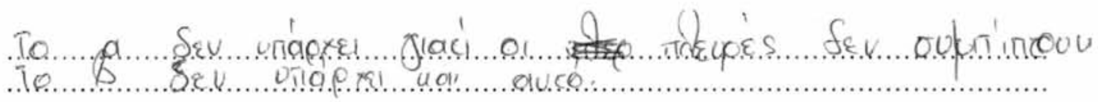
Διάγραμμα 9. Ποια σχήματα <u>δεν</u> είναι τρίγωνα;

Στη δεύτερη ερώτηση τα παιδιά απάντησαν εάν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 3cm, 5cm και 9cm ή τρίγωνο με 4cm, 5cm και 9cm. Οι απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 6 και για τα δύο τμήματα.

	Τμήμα παρέμβασης (N=18)	Τμήμα ελέγχου (N=18)	Σύνολο (N=36)
	επιστημονικά αποδεκτή απάντηση / εμπειρική προσέγγιση		
δεν σχηματίζονται τρίγωνα	8(44%) / 7(39%)	0(0%) / 11(61%)	8(22%) / 18(50%)
σχηματίζονται τρίγωνα	0(0%)	5(28%)	5(14%)
το α) δεν σχηματίζεται, ενώ το β) σχηματίζεται	2(11%)	2(11%)	4(11%)
δεν ξέρω/ δεν απαντώ	1(6%)	2(11%)	3(8%)

Πίνακας 6. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α) 3cm, 5cm και 9cm, ή β) 4cm, 5cm και 9cm;

Το 50% των μαθητών απάντησαν εμπειρικά, είτε κάνοντας κάποιο σχήμα (19%) είτε χωρίς σχήμα (31%), ότι δεν σχηματίζονται τρίγωνα με τα δοσμένα μήκη πλευρών (βλ. Εικόνα 32). Το 44% των μαθητών του τμήματος παρέμβασης απάντησαν ότι δεν σχηματίζονται τρίγωνα αιτιολογώντας την απάντηση με επιστημονικά αποδεκτό τρόπο (βλ. Εικόνα 33).



Εικόνα 32. Τυπική απάντηση στη δεύτερη ερώτηση του post-test.

Δεν υπάρχει κανένα από τα 2, γιατι και στα 2
το άθροισμα των 2 πλευρών βγαίνει μικρότερα από την 3η
πλευρα

Εικόνα 33. Τυπική απάντηση στη δεύτερη ερώτηση του post-test.

Στην επόμενη ερώτηση ζητήθηκε από τα παιδιά να απαντήσουν εάν σχηματίζεται τρίγωνο με γωνίες 10°, 85° και 90°, ή με γωνίες 50°, 50° και 70°. Οι απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται στον Πίνακα 7 και για τα δύο τμήματα.

	Τμήμα παρέμβασης (N=18)	Τμήμα ελέγχου (N=18)	Σύνολο (N=36)
	επιστημονικά αποδεκτή απάντηση / εμπειρική προσέγγιση		
δεν σχηματίζονται τρίγωνα	16(89%) / 1(6%)	6(33%) / 1(6%)	22(61%) / 2(6%)
σχηματίζονται τρίγωνα	0(0%)	2(11%)	2(6%)
το α) δεν σχηματίζεται, ενώ το β) σχηματίζεται	1(6%)	3(17%)	4(11%)
δεν ξέρω/ δεν απαντώ	0(0%)	6(33%)	6(17%)

Πίνακας 7. Υπάρχει τρίγωνο με γωνίες α) 10°, 85° και 90°, ή β) 50°, 50° και 70°;

Από τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης το 89% έδωσαν επιστημονικά αποδεκτή απάντηση, ενώ από το τμήμα ελέγχου μόνο το 33% των παιδιών είπαν ότι ένα τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών 180° (βλ. Εικόνα 34).

όχι δεν υπάρχουν
Γιατί το άθροισμα των γωνιών ενώς τριγώνου πρέπει να είναι
180° μοίρες ενώ το άθροισμα των α) και του β) που
μου δίνονται δεν βγάζουν 180° άλλα τα ένα 185° και το
άλλο 170°

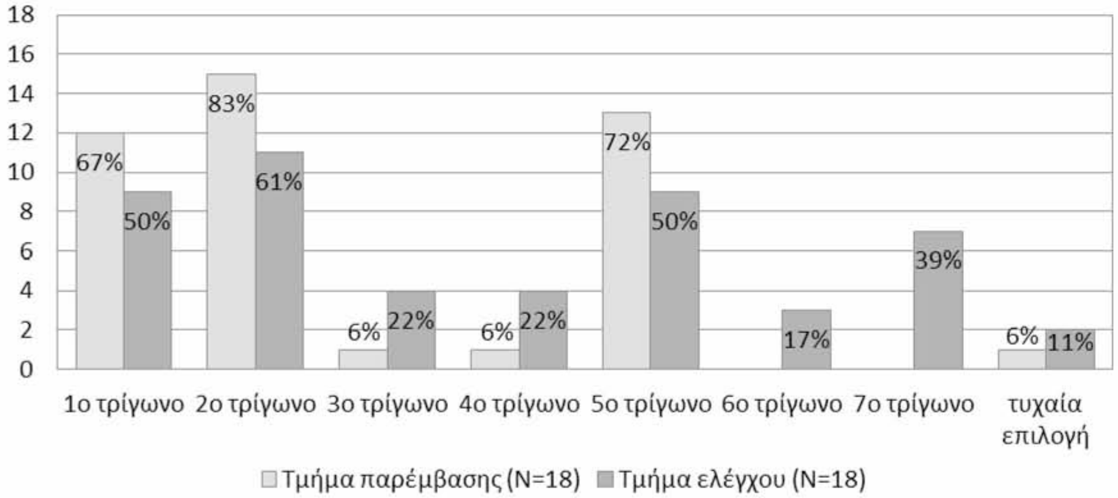
Εικόνα 34. Τυπική απάντηση στην τρίτη ερώτηση του post-test.

Ακόμη, τέσσερις μαθητές ανέφεραν ότι τα πρώτα τρία μέτρα γωνιών δεν σχηματίζουν τρίγωνο, ενώ υπάρχει τρίγωνο με γωνίες 50°, 50° και 70° και είναι ισοσκελές ή έχει τις δύο πλευρές του ίσες (βλ. Εικόνα 35).

Ναι το β) είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο.

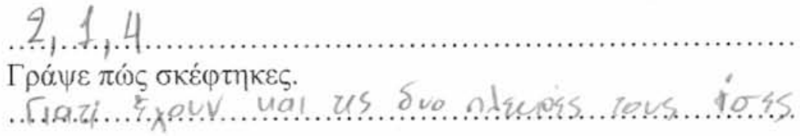
Εικόνα 35. Τυπική απάντηση στην τρίτη ερώτηση του post-test.

Στην τέταρτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα ισοσκελή τρίγωνα. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στο Διάγραμμα 10, το 72% των μαθητών είπαν ότι το 2^{ο} τρίγωνο είναι ισοσκελές, ενώ το 58% και το 61% των παιδιών αναγνώρισαν το 1^{ο} και το 5^{ο} τρίγωνο αντίστοιχα. Σε γενικές γραμμές, οι επιστημονικά αποδεκτές απαντήσεις των παιδιών του τμήματος παρέμβασης είναι περισσότερες από αυτές των παιδιών του τμήματος ελέγχου.



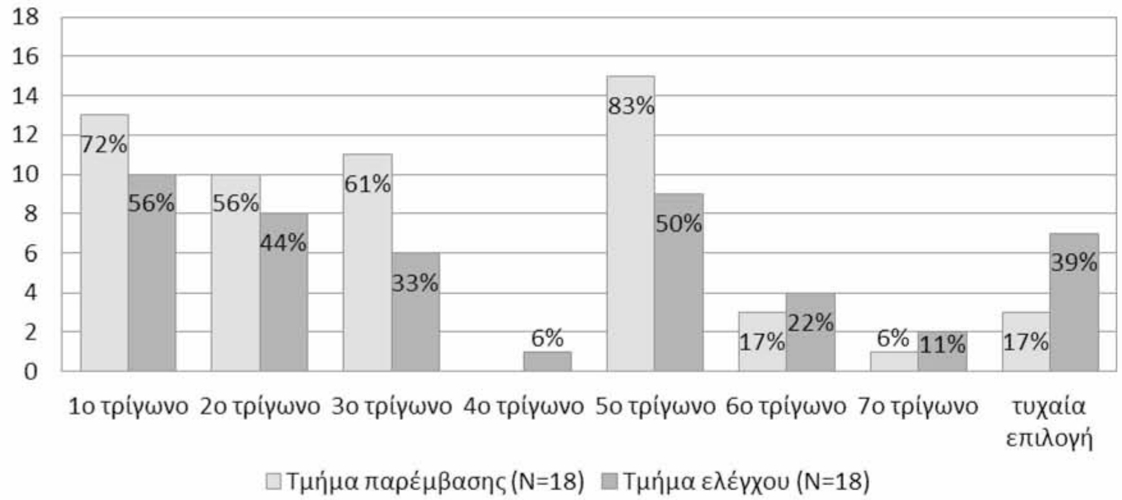
Διάγραμμα 10. Ποια τρίγωνα είναι ισοσκελή;

Οι περισσότεροι μαθητές αιτιολόγησαν την απάντησή τους αναφέροντας ότι ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει δύο ίσες πλευρές, ακόμη και εάν επέλεξαν κάποιο σκαληνό τρίγωνο ως ισοσκελές (βλ. Εικόνα 36).



Εικόνα 36. Τυπική απάντηση στην τέταρτη ερώτηση του post-test.

Η επόμενη ερώτηση έχει ως στόχο να διερευνηθεί εάν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν τα ορθογώνια τρίγωνα και να σχεδιάσουν σ' αυτά την ορθή γωνία. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 11, οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν ως ορθογώνια τρίγωνα το 5^{ο} (67%) και το 1^{ο} τρίγωνο (64%). Ενώ λιγότεροι αναγνώρισαν τα ορθογώνια τρίγωνα 2 και 3, με ποσοστά 50% και 47% αντίστοιχα. Εκτός από το να επιλέξουν τα ορθογώνια τρίγωνα οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν και την ορθή γωνία στα τρίγωνα. Έτσι, δεκαεννιά παιδιά έκαναν σωστή αναπαράσταση της ορθής γωνίας, πέντε παιδιά έκαναν το σχήμα μιας απλής γωνίας και δύο παιδιά τη σχεδίασαν με άλλους τρόπους.

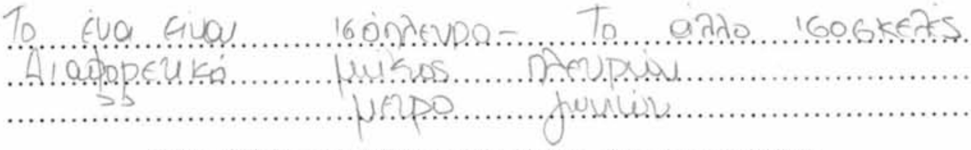


Διάγραμμα 11. Ποια τρίγωνα είναι ορθογώνια;

Στην έκτη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν με ποιον τρόπο δύο δοσμένα τρίγωνα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται στον Πίνακα 8, από τον οποίο προκύπτει ότι το 56% των μαθητών του τμήματος παρέμβασης και το 28% των μαθητών του τμήματος ελέγχου διαπίστωσαν ότι το πρώτο τρίγωνο είναι ισόπλευρο και το δεύτερο ισοσκελές. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών (39%) παρατήρησαν ότι τα δύο τρίγωνα έχουν διαφορετικά μήκη πλευρών. Κάποια παιδιά ανέφεραν αρκετές διαφορές των τριγώνων αποδεικνύοντας ότι είναι ικανά να συγκρίνουν τα δύο τρίγωνα με διάφορους τρόπους (βλ. Εικόνα 37).

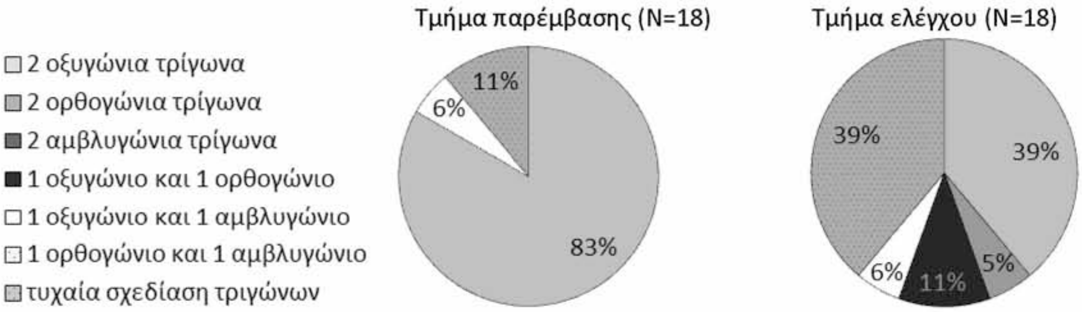
	Τμήμα παρέμβασης (N=18)	Τμήμα ελέγχου (N=18)	Σύνολο (N=36)
το 1ο τρίγωνο είναι ισόπλευρο ενώ το 2ο είναι ισοσκελές	10 (56%)	5 (28%)	15 (42%)
το 1ο τρίγωνο έχει 3 ίσες πλευρές ενώ το 2ο δύο	1 (6%)	2 (11%)	3 (17%)
η βάση έχει διαφορετικό μήκος	3 (17%)	4 (22%)	7 (39%)
οι πλευρές έχουν διαφορετικό μήκος	7 (39%)	7 (39%)	14 (39%)
οι γωνίες έχουν διαφορετικά μέτρα	3 (17%)	4 (22%)	7 (39%)
τα τρίγωνα έχουν διαφορετικό μέγεθος	1 (6%)	7 (39%)	8 (22%)

Πίνακας 8. Με ποιον τρόπο τα δύο τρίγωνα είναι διαφορετικά μεταξύ τους;



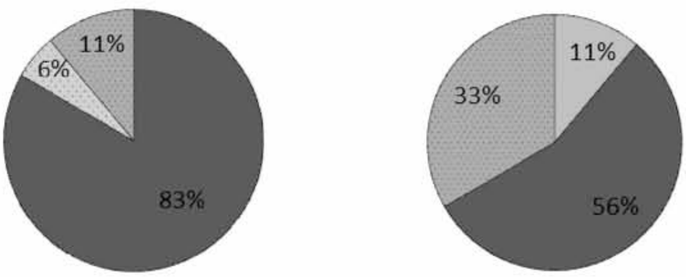
Εικόνα 37. Τυπική απάντηση στην έκτη ερώτηση του post-test.

Με την έβδομη ερώτηση μελετήθηκε εάν οι μαθητές είναι ικανοί να σχεδιάσουν δύο οξυγώνια, δύο ορθογώνια και δύο αμβλυγώνια τρίγωνα. Στο Διάγραμμα 12 παρουσιάζονται τα τρίγωνα που σχεδίασαν τα παιδιά του τμήματος παρέμβασης και του τμήματος ελέγχου όταν τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν δύο οξυγώνια τρίγωνα. Έτσι, το 83% των μαθητών του τμήματος παρέμβασης και το 39% του τμήματος ελέγχου σχεδίασαν πράγματι δύο οξυγώνια τρίγωνα, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές σχεδίασαν διάφορα άλλα τρίγωνα. Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 13, οι περισσότεροι μαθητές του τμήματος παρέμβασης (83%) και τα μισά παιδιά του τμήματος ελέγχου σχεδίασαν δύο ορθογώνια τρίγωνα όταν τους ζητήθηκε. Από το Διάγραμμα 14 προκύπτει ότι η πλειοψηφία των μαθητών των δύο τμημάτων είναι ικανοί να αναπαραστήσουν επαρκώς δύο αμβλυγώνια τρίγωνα.



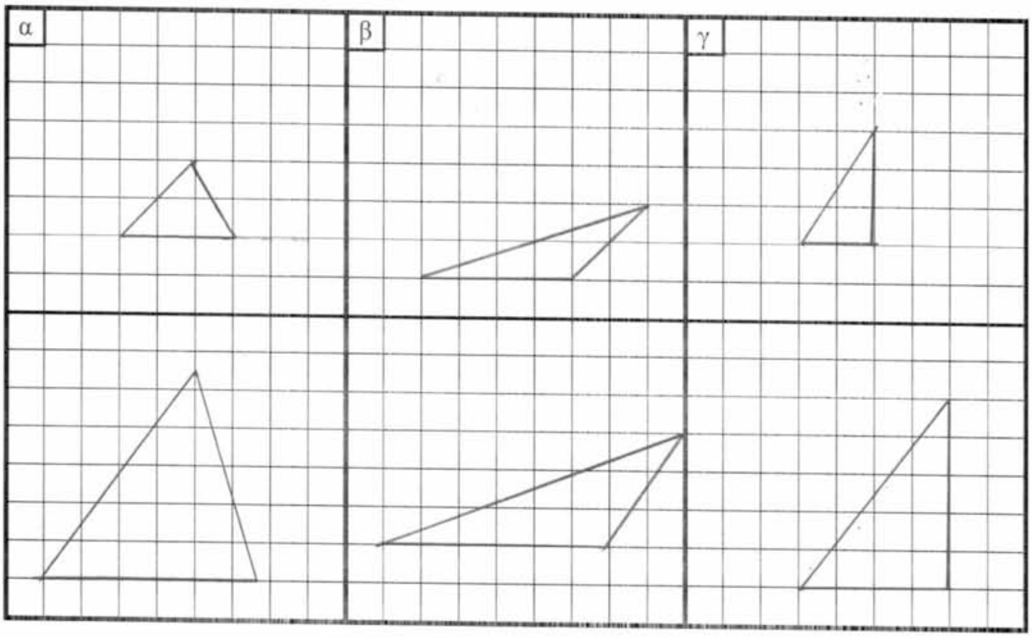
Διάγραμμα 12. Σχεδιάστε 2 οξυγώνια τρίγωνα.

Διάγραμμα 13. Σχεδιάστε 2 ορθογώνια τρίγωνα.



Διάγραμμα 14. Σχεδιάστε 2 αμβλυγώνια τρίγωνα.

Το 69% των τριγώνων που σχεδίασαν οι μαθητές των δύο τμημάτων έχουν την μία πλευρά τους οριζόντια (βλ. Εικόνα 38).



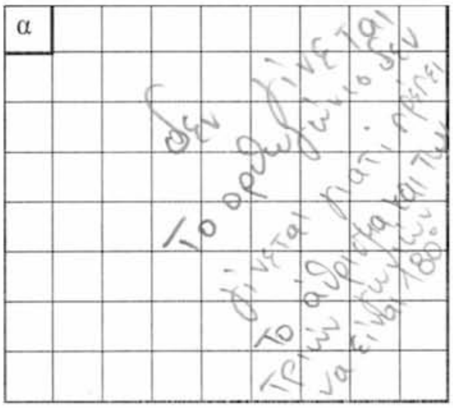
Εικόνα 38. Τυπική απάντηση στην έβδομη ερώτηση του post-test.

Στην ογδόη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να σκεφτούν εάν υπάρχει τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες, που να είναι ορθογώνιο ισοσκελές, ορθογώνιο ισόπλευρο ή ισοσκελές αμβλυγώνιο. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 9, οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύτηκαν να σχεδιάσουν ένα ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο, μόνο το 22% των παιδιών έκαναν σωστή αναπαράσταση. Επίσης, το 39% των μαθητών ανέφεραν ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο ισόπλευρο τρίγωνο, χωρίς όμως να δώσουν μια επιστημονικά αποδεκτή αιτιολόγηση, και το 44% σχεδίασαν ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

	Τμήμα παρέμβασης (N=18)/ Τμήμα ελέγχου (N=18)			
	α	β	γ	Δ
σωστή αναπαράσταση του τριγώνου	-	10 / 6 (44%)	-	6 / 2 (22%)
λάθος αναπαράσταση του τριγώνου	0 / 3 (8%)	5 / 3 (22%)	3 / 5 (22%)	4 / 4 (22%)
δεν υπάρχει το τρίγωνο	11 / 8 (53%)	0 / 2 (6%)	8 / 6 (39%)	2 / 5 (19%)
δεν ξέρω/ δεν απαντώ	7 / 7 (39%)	3 / 7 (28%)	7 / 7 (39%)	6 /7 (36%)

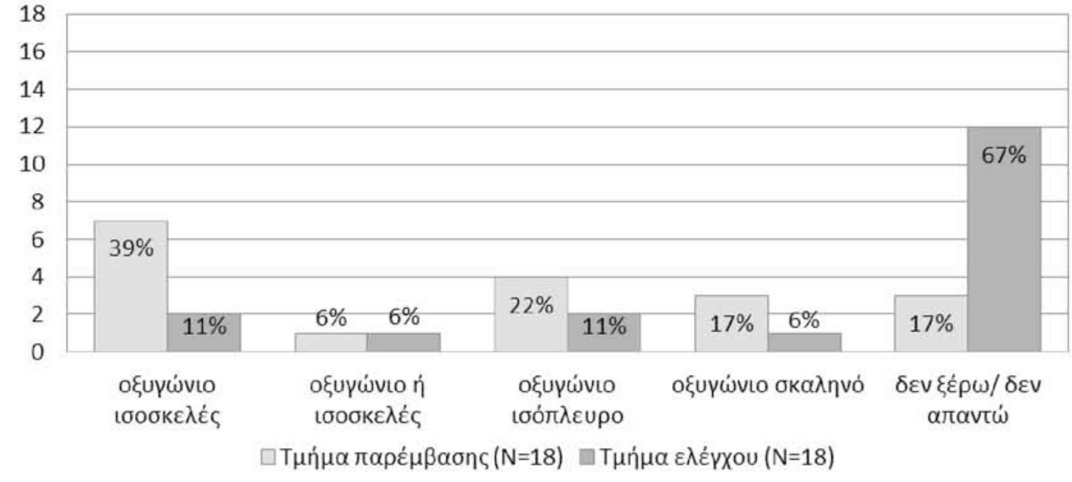
Πίνακας 9. Ποια από τα τρίγωνα μπορείτε να σχεδιάσετε: α) με δύο ορθές γωνίες, β) ορθογώνιο ισοσκελές, γ) ορθογώνιο ισόπλευρο, δ) ισοσκελές αμβλυγώνιο;

Περισσότεροι ήταν οι μαθητές που υποστήριξαν ότι δεν υπάρχει τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες (53%), με χαρακτηριστική αιτιολόγηση αυτήν που παρουσιάζεται στην Εικόνα 39. Σχετικά με τον προσανατολισμό των σχημάτων, τα 39 από τα 45 τρίγωνα (87%) που σχεδίασαν οι μαθητές έχουν την μία πλευρά τους οριζόντια.

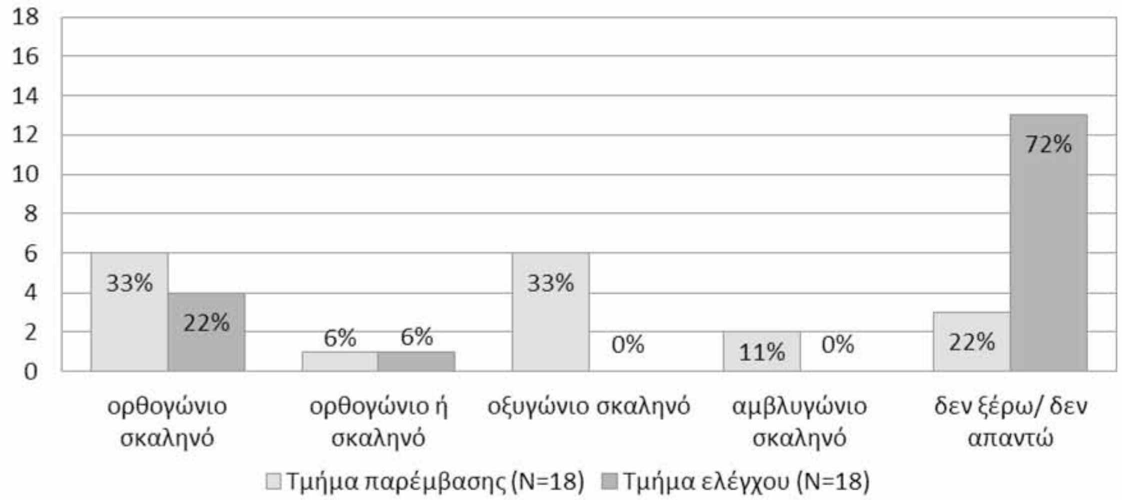


Εικόνα 39. Τυπική απάντηση στην όγδοη ερώτηση του post-test.

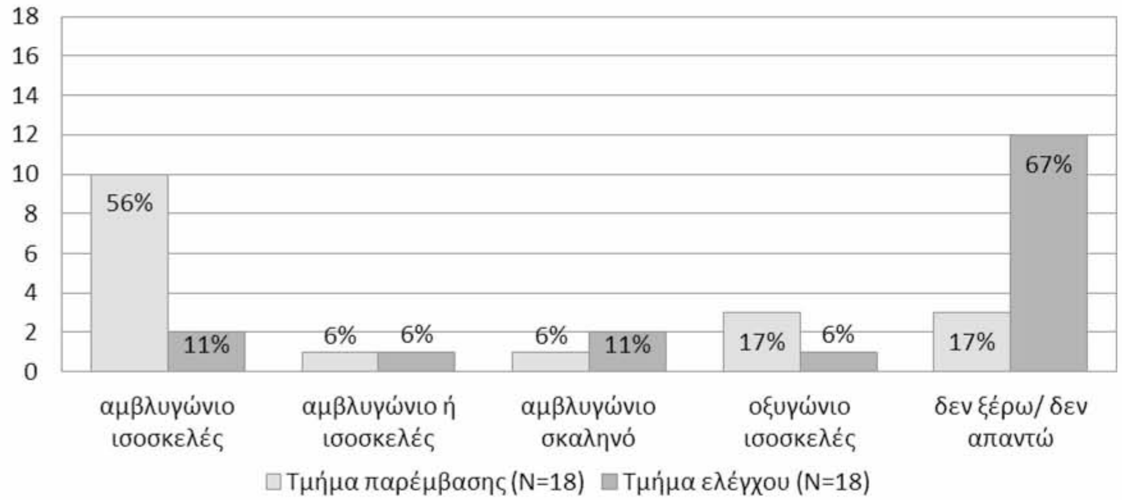
Στην ένατη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν πέντε τρίγωνα με βάση και τα δύο κριτήρια κατάταξης τριγώνων. Οι απαντήσεις των μαθητών περιγράφονται για κάθε τρίγωνο ξεχωριστά στα Διαγράμματα 15, 16, 17, 18 και 19. Αρκετά είναι τα παιδιά του τμήματος ελέγχου (67%) που δεν έδωσαν κάποια απάντηση στη συγκεκριμένη ερώτηση. Το τρίγωνο που χαρακτηρίστηκε σωστά από τα περισσότερα παιδιά (47%) είναι το τελευταίο, οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο (βλ. Διάγραμμα 19). Επίσης, αρκετοί μαθητές αναγνώρισαν το τρίτο και το τέταρτο τρίγωνο με ποσοστά 33% και 31% αντίστοιχα. Σχετικά με το πρώτο τρίγωνο, έξι μαθητές θεώρησαν ότι πρόκειται για ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ άλλοι έξι μαθητές δεν αναγνώρισαν την ορθή γωνία στο δεύτερο τρίγωνο και το χαρακτήρισαν ως οξυγώνιο.



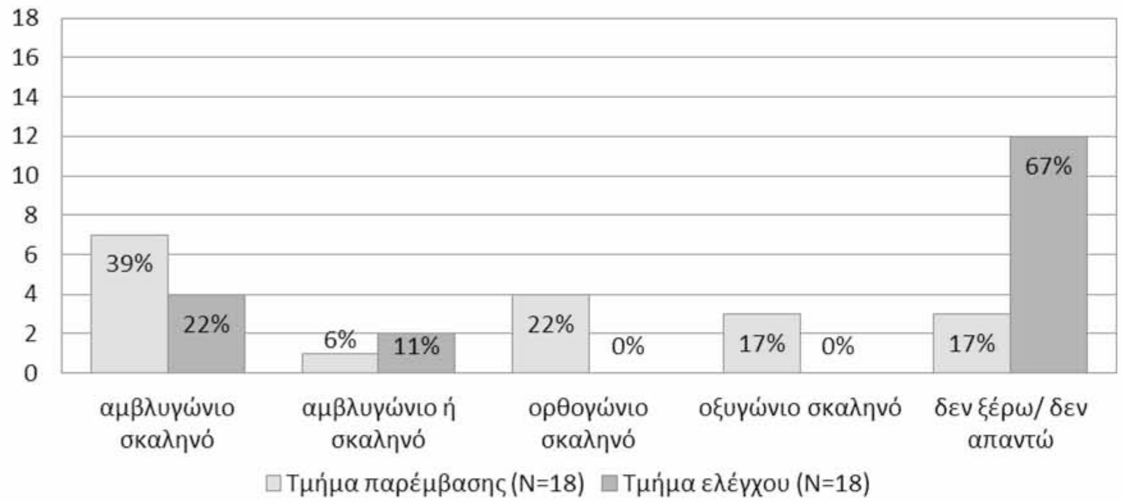
Διάγραμμα 15. Τι είδους τρίγωνο είναι το πρώτο με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων;



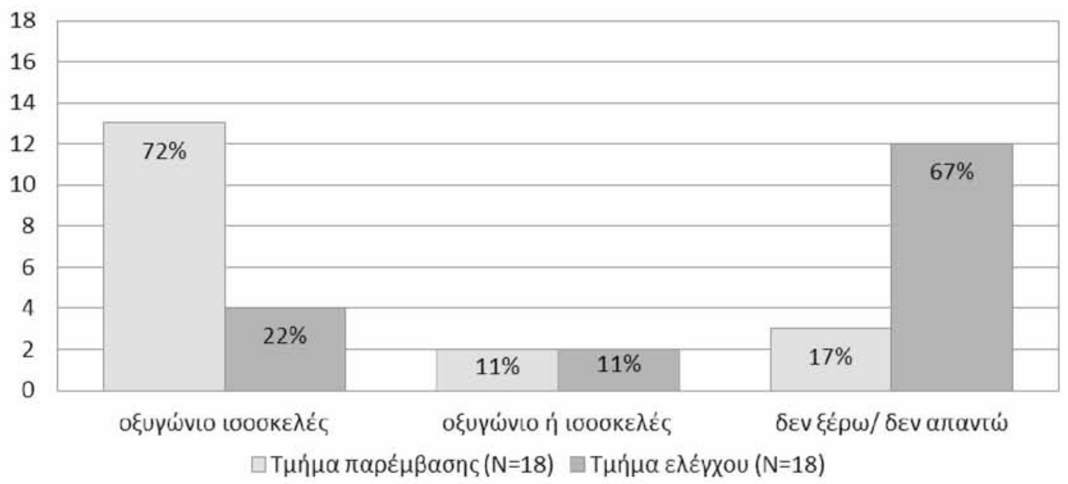
Διάγραμμα 16. Τι είδους τρίγωνο είναι το δεύτερο με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων;



Διάγραμμα 17. Τι είδους τρίγωνο είναι το τρίτο με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων;



Διάγραμμα 18. Τι είδους τρίγωνο είναι το τέταρτο με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων;



Διάγραμμα 19. Τι είδους τρίγωνο είναι το πέμπτο με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων;

Με τη δέκατη ερώτηση διερευνήθηκε η κατανόηση της έννοιας του ύψους από τους μαθητές, οι απαντήσεις των οποίων περιγράφονται στον Πίνακα 10. Όπως προκύπτει, έξι μαθητές από το τμήμα παρέμβασης και ένας μαθητής από το τμήμα ελέγχου έχουν ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας του ύψους. Αντίθετα αρκετοί μαθητές (31%) σχεδίασαν ως ύψος ένα ευθύγραμμο τμήμα με αρχή την απέναντι κορυφή και τέλος ένα σημείο της πλευράς α (όχι κάθετα). Το 17% των μαθητών έχουν μερική εικόνα της έννοιας του ύψους που είναι επηρεασμένη από την έννοια της μεσοκαθέτου. Ενώ πέντε παιδιά του τμήματος ελέγχου ανέφεραν ότι το ζητούμενο ύψος ταυτίζεται με μία πλευρά του τριγώνου.

	Τμήμα παρέμβασης (N=18)	Τμήμα ελέγχου (N=18)	Σύνολο (N=36)
ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας του ύψους	6 (33%)	1 (6%)	7 (19%)
μερική εικόνα της έννοιας του ύψους που αποκλείει τα εξωτερικά ύψη	0 (0%)	1 (6%)	1 (3%)
μερική εικόνα της έννοιας του ύψους επηρεασμένη από την έννοια της μεσοκαθέτου	4 (22%)	2 (11%)	6 (17%)
ένα ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την απέναντι κορυφή αλλά δεν άγεται κάθετα στην πλευρά α	7 (39%)	4 (22%)	11 (31%)
το ύψος ταυτίζεται με μία πλευρά του τριγώνου	0 (0%)	5 (28%)	5 (14%)
δεν ξέρω / δεν απαντώ	1 (6%)	5 (28%)	6 (17%)

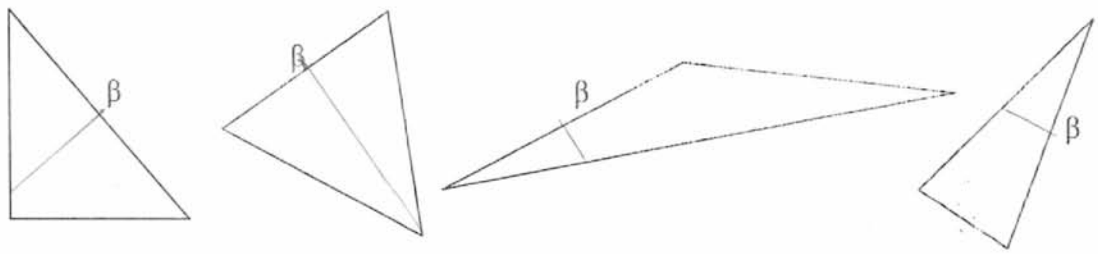
Πίνακας 10. Σχεδιάστε το ύψος των τριγώνων στην πλευρά που έχει το γράμμα α.

Στην επόμενη ερώτηση ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τη διάμεσο τεσσάρων τριγώνων στην πλευρά με το γράμμα β. Οι απαντήσεις που δόθηκαν περιγράφονται στον Πίνακα 11, απ' όπου προκύπτει ότι το 39% των μαθητών έχουν ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της διαμέσου.

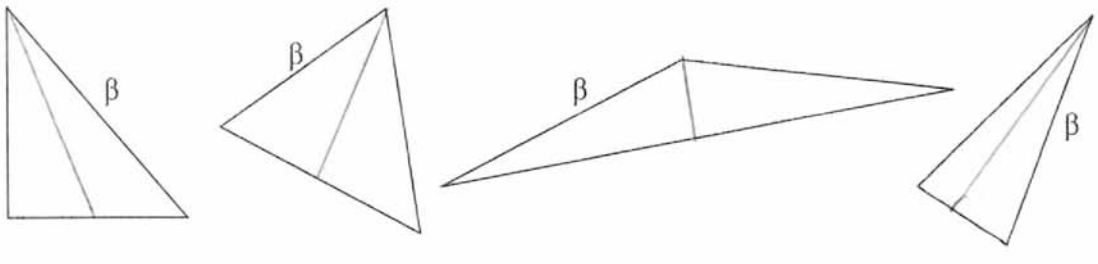
	Τμήμα παρέμβασης (N=18)	Τμήμα ελέγχου (N=18)	Σύνολο (N=36)
ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της διαμέσου	10 (56%)	4 (22%)	14 (39%)
σύγχυση της πλευράς στην οποία ζητείται η διάμεσος	3 (17%)	3 (17%)	6 (17%)
μερική εικόνα της έννοιας που δεν υπολογίζει το μήκος της διαμέσου	1 (6%)	0 (0%)	1 (3%)
μερική εικόνα της έννοιας της διαμέσου που περνάει από το μέσο της πλευράς αλλά όχι από την απέναντι κορυφή	3 (17%)	7 (39%)	10 (28%)
δεν ξέρω / δεν απαντώ	1 (6%)	4 (22%)	5 (14%)

Πίνακας 11. Σχεδιάστε τη διάμεσο των τριγώνων στην πλευρά που έχει το γράμμα β.

Πολλά είναι τα παιδιά (28%) που σχεδίασαν ως διάμεσο ένα ευθύγραμμο τμήμα που περνάει από το μέσο της πλευράς β αλλά όχι από την απέναντι κορυφή της (βλ. Εικόνα 40). Τέλος, έξι από τους μαθητές δεν έλαβαν υπόψη την πλευρά στην οποία τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν τη διάμεσο (βλ. Εικόνα 41).



Εικόνα 40. Τυπική απάντηση στην ενδέκατη ερώτηση του post-test.



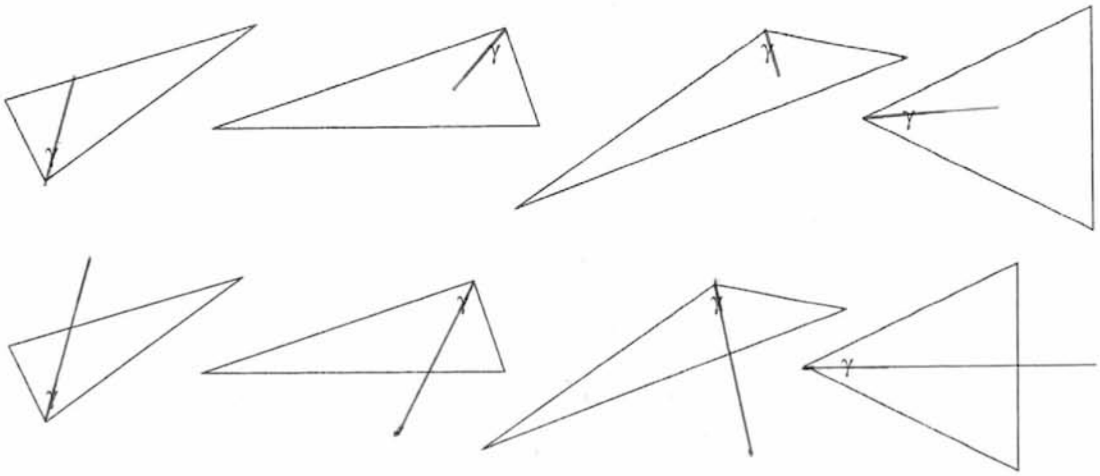
Εικόνα 41. Τυπική απάντηση στην ενδέκατη ερώτηση του post-test.

Στη δωδέκατη και τελευταία ερώτηση οι μαθητές έπρεπε να σχεδιάσουν τη διχοτόμο τεσσάρων τριγώνων στη γωνία που έχει το γράμμα γ. Από τον Πίνακα 12 φαίνεται ότι η πλειοψηφία των μαθητών, με ποσοστό 58%, έχουν ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της διχοτόμου.

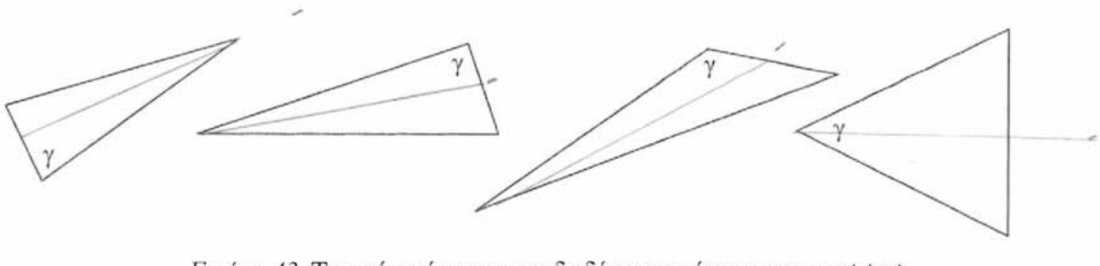
	Τμήμα παρέμβασης (N=18)	Τμήμα ελέγχου (N=18)	Σύνολο (N=36)
ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της διχοτόμου	15 (83%)	6 (33%)	21 (58%)
σύγχυση της γωνίας στην οποία ζητείται η διχοτόμος	1 (6%)	2 (11%)	3 (8%)
μερική εικόνα της έννοιας που δεν υπολογίζει το μήκος της διχοτόμου	2 (11%)	3 (17%)	5 (14%)
δεν ξέρω / δεν απαντώ	0 (0%)	7 (39%)	7 (19%)

Πίνακας 12. Σχεδιάστε τη διχοτόμο των τριγώνων στη γωνία που έχει το γράμμα γ.

Το 14% των μαθητών έχουν μερική εικόνα της έννοιας που δεν υπολογίζει το μήκος της διχοτόμου (βλ. Εικόνα 42). Ενώ, τρεις μαθητές σε κάποια τρίγωνα σχεδίασαν τη διχοτόμο σε διαφορετική γωνία από αυτή που τους ζητήθηκε στην εκφώνηση της ερώτησης (βλ. Εικόνα 43).



Εικόνα 42. Τυπικές απαντήσεις στη δωδέκατη ερώτηση του post-test.



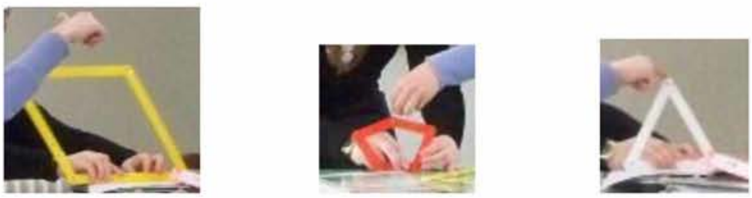
Εικόνα 43. Τυπική απάντηση στη δωδέκατη ερώτηση του post-test.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Περιγραφή της διδακτικής διαδικασίας

Σύμφωνα με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας κυρίαρχη θέση στη σχολική τάξη και τη μαθησιακή διαδικασία κατέχει ο εκπαιδευτικός με κύρια εργαλεία το διδακτικό εγχειρίδιο και το σχολικό πίνακα. Η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε για το σκοπό αυτής της εργασίας, βασίστηκε στις αρχές των σύγχρονων θεωριών μάθησης μέσα σε ένα συνεργατικό περιβάλλον με υπολογιστές, στο οποίο τον κυρίαρχο ρόλο είχαν οι μαθητές. Βασικά εργαλεία της διδασκαλίας αποτέλεσαν οι υπολογιστές και τα χειραπτικά υλικά. Ειδικότερα, σε κάποιες δραστηριότητες τα παιδιά εργάστηκαν με το λογισμικό GeoGebra και σε άλλες με τους γεωπίνακες. Με τη χρήση των εργαλείων αυτών δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές να δοκιμάσουν όσες φορές θέλουν την άποψή τους χωρίς να φοβούνται την πιθανότητα να κάνουν λάθη (απενοχοποίηση του λάθους), να εντοπίσουν τυχόν αποκλίνοντα επιστημονικά γνωστικά σχήματα στη διαδικασία σκέψης τους και να αναπτύξουν νέες στρατηγικές για την επιτυχή ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.

Το σενάριο που χρησιμοποιήθηκε στην αρχή του πρώτου φυλλαδίου εργασίας προκάλεσε την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών, ώστε να εισαχθούν ενεργητικά στις δραστηριότητες και να εμπλακούν στη διαδικασία της μάθησης. Για να ελεγχθεί η σταθερότητα και η ακαμψία διάφορων σχημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα χειραπτικά υλικά polystrips, με τα οποία κατασκευάστηκαν διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Στη συνέχεια έγινε παραδειγματική εφαρμογή στην ολομέλεια της τάξης από μία μαθήτρια που προσφέρθηκε να πειραματιστεί με το σχήμα ως προς τη σταθερότητά του εφαρμόζοντας δύναμη στο επάνω μέρος τους, όπως φαίνεται και στις παρακάτω εικόνες (βλ. Εικόνα 44).



Εικόνα 44. Έλεγχος της σταθερότητας και της ακαμψίας διάφορων γεωμετρικών σχημάτων.

Κατά τη διερεύνηση της σταθερότητας των σχημάτων τα παιδιά έφτασαν και στην περίπτωση του τριγώνου. Ένας μαθητής εξέφρασε την άποψη ότι όμοιο τρίγωνο με αυτό που κατασκευάστηκε αλλά με μεγαλύτερες πλευρές δεν θα είχε τις ίδιες ιδιότητες (βλ. Απόσπασμα 1). Για το λόγο αυτό ο συγκεκριμένος μαθητής κατασκεύασε άλλο τρίγωνο και δοκίμασε να εφαρμόσει δύναμη στην επάνω κορυφή του παρατηρώντας ότι δεν αλλάζει το σχήμα του.

Απόσπασμα 1. Διάλογος στο σενάριο του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

Ε: *Για να δούμε και το τρίγωνο… Τι παρατηρείτε παιδιά;*

Μ1: *Δεν πέφτει.*

Μ2: *Δεν αλλάζει το σχήμα του.*

Μ3: *Έχει μικρές πλευρές γι' αυτό.*

Ε: *Τι εννοείς Ιάκωβε;*

Μ3: *Αν είχε μεγαλύτερες πλευρές μπορεί να άλλαζε το σχήμα του.*

Ε: *Πολύ ωραία παρατήρηση Ιάκωβε. Θέλεις να φτιάξεις ένα τρίγωνο με μεγαλύτερες πλευρές και να το δοκιμάσεις;*

Μ3: *Ναι… (μετά από λίγη ώρα)… Τελικά κι έτσι ίδιο μένει.*

Ε: *Ωραία, γιατί λοιπόν τα τρίγωνα χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουμε γέφυρες;*

Μ4: *Γιατί όταν περνάνε τα αυτοκίνητα από πάνω τους δεν αλλάζει το σχήμα από τα τρίγωνα και δεν πέφτουν οι γέφυρες.*

Με την υπόδειξη της ερευνήτριας οι μαθητές, χωρισμένοι σε ζευγάρια, προχώρησαν στην ενασχόληση με την πρώτη δραστηριότητα χρησιμοποιώντας τους υπολογιστές και την πρώτη εφαρμογή του GeoGebra που σχεδιάστηκε για την οπτική αναγνώριση ενός τριγώνου και των βασικών στοιχείων του. Οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν προβλήματα κατά την περιήγησή τους στο πρόγραμμα καθώς δεν ήταν η πρώτη φορά που το χρησιμοποιούσαν. Η πρώτη εφαρμογή του GeoGebra κράτησε την προσοχή των παιδιών αμείωτη και επέτρεψε την αποδοτική συνεργασία τους (βλ. Εικόνα 45).

Εικόνα 45. Τα παιδιά εργάζονται στην εφαρμογή GeoGebra της πρώτης δραστηριότητας του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

Στη συζήτηση που ακολούθησε μετά την ομαδική εργασία, δόθηκε η ευκαιρία σε αρκετά παιδιά να μιλήσουν εξηγώντας αν κάποιο από τα επτά σχήματα είναι τρίγωνο και γιατί (βλ. Απόσπασμα 2).

Απόσπασμα 2. Διάλογος στην πρώτη δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

> Ε: *Είναι το τρίτο σχήμα τρίγωνο;*
> M1: *Ναι.*
> M2: *Είναι μυτερό.*
> Ε: *Δηλαδή δεν είναι τρίγωνο;*
> M2: *Δεν... ξέρω.*
> Ε: *Μπορέσατε να το σχηματίσετε στον υπολογιστή;*
> M2: *Ναι... Είναι τρίγωνο.*
> Ε: *Γιατί είναι τρίγωνο;*
> M2: *(δείχνει στον υπολογιστή) Γιατί έχει 3 πλευρές και 3 γωνίες.*
> Ε: *Πολύ ωραία, μπράβο.*

Στην αρχή της δεύτερης δραστηριότητας τα παιδιά εργάστηκαν ομαδικά για να ανακαλύψουν μέσα από δοκιμές με την εφαρμογή του GeoGebra τη σχέση που συνδέει τις γωνίες ενός τριγώνου. Οι μαθητές συνεργάστηκαν πολύ καλά στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, ανταλλάσσοντας απόψεις για να ολοκληρώσουν τη δραστηριότητα (βλ. Απόσπασμα 3).

Απόσπασμα 3. Διάλογος παιδιών στη δεύτερη δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

> M1: *Η γωνία Α είναι 58,8°, η γωνία Β 62° και η Γ 59,2°. (ο δεύτερος μαθητής σημειώνει τα μέτρα των γωνιών στο φυλλάδιο εργασίας)... Ποια σχέση συνδέει τις γωνιές του τριγώνου...;*
> M2: *Αν τις προσθέσουμε; (κάνει την πρόσθεση)... Βγαίνει 180°.*
> M1: *Αυτό είναι. Κάτσε να κάνουμε κι άλλο τρίγωνο... (σχεδιάζει ένα άλλο τρίγωνο στον υπολογιστή και λέει στο δεύτερο μαθητή τα μέτρα των γωνιών του)... Η Α είναι 24,5°, 138° και 24,7°.*
> M2: *(κάνει την πρόσθεση) Ναι, 180°.*

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης, η διδάσκουσα έκοψε με ψαλίδι τις γωνίες ενός τριγώνου που είχε σχεδιασμένο σε ένα χαρτόνι επιχειρώντας να δείξει στους μαθητές πώς προκύπτει το άθροισμα των γωνιών του να είναι 180°, όπως φαίνεται στην Εικόνα 46. Ορισμένα παιδιά εξέφρασαν απορίες και τότε τους ζητήθηκε να μετακινήσουν τα σημεία B και C του τριγώνου που είναι στον υπολογιστή (βλ. Διδακτικά υλικά και έργα, Εικόνα 6) και να παρατηρήσουν ότι σχηματίζεται μια ευθεία γωνία.

Εικόνα 46. Ελέγχεται εάν οι γωνίες ενός τριγώνου σχηματίζουν ευθεία γωνία.

Κάποια παιδιά δεν γνώριζαν ότι το μέτρο μιας ευθείας γωνίας είναι 180°, γεγονός που εμπόδισε την ανακάλυψη της σχέσης που συνδέει τις γωνίες ενός τριγώνου. Πριν την πρακτική άσκηση των παιδιών μέσω των ερωτήσεων 4 και 5, παρεμβλήθηκε μια ακόμη άσκηση εμπέδωσης της νέας σχέσης. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια έγραψε στον πίνακα διάφορες τριάδες μέτρων γωνιών και ρωτούσε ξεχωριστά την κάθε ομάδα αν μπορούν να αποτελέσουν γωνίες ενός τριγώνου, ζητώντας τους παράλληλα να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Στην τρίτη δραστηριότητα τα παιδιά εργάστηκαν ομαδικά με την αντίστοιχη εφαρμογή του GeoGebra, με στόχο την ανακάλυψη της τριγωνικής ανισότητας, της σχέσης δηλαδή που συνδέει τις πλευρές ενός τριγώνου. Τα παιδιά έδειξαν μεγάλη προσήλωση στην ενασχόλησή τους με την εφαρμογή (βλ. Εικόνα 47) και μάλιστα μία μαθήτρια ανέφερε ότι περιστρέφοντας τα σημεία Μ και Ν σχηματίζονται κύκλοι.

Εικόνα 47. Τα παιδιά εργάζονται στην εφαρμογή GeoGebra της τρίτης δραστηριότητας του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

Όπως φάνηκε από τις απαντήσεις τους στο φυλλάδιο εργασίας, τα παιδιά κατάφεραν να βρουν διάφορες τριάδες ευθύγραμμων τμημάτων που αποτελούν ή δεν αποτελούν πλευρές ενός τριγώνου, χωρίς όμως να μπορέσουν να ανακαλύψουν τη σχέση της τριγωνικής ανισότητας, δηλαδή τη «θεωρία». Έτσι, το γεγονός ότι αντιμετώπισαν αρκετές δυσκολίες στην απάντηση της ένατης ερώτησης, οδήγησε την ερευνήτρια σε σύνθεση συζήτησης με σκοπό να λυθούν οι απορίες των παιδιών. Η διδάσκουσα σημείωσε στον πίνακα διάφορες τριάδες με μήκη ευθύγραμμων τμημάτων και ζήτησε από τα παιδιά να ελέγξουν με το λογισμικό εάν κάθε μία από αυτές σχηματίζουν τρίγωνο. Η δραστηριότητα αυτή βοήθησε τα παιδιά να φτάσουν μέσω του πειραματισμού στο πλαίσιο των ομάδων τους και της συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης, στην ανακάλυψη της ζητούμενης σχέσης.

Στην τέταρτη δραστηριότητα δόθηκαν στα παιδιά οι γεωπίνακες και λίγος χρόνος για να επεξεργαστούν τα υλικά αυτά. Οι μαθητές ενθουσιάστηκαν με τη χρήση τους και χαρακτηριστικά μια μαθήτρια γύρισε το γεωπίνακα απ' την πίσω πλευρά και ανέφερε ότι *«Μόνο εδώ γίνεται κύκλος!»*[4], ενώ ένας μαθητής είπε στο συμμαθητή του *«Τώρα μου αρέσουν τα μαθηματικά περισσότερο έτσι όπως γίνονται!»*. Αρχικά ζητήθηκε από τα παιδιά να φτιάξουν στο γεωπίνακα όσο περισσότερα τρίγωνα μπορούν. Με την παρουσίαση των τριγώνων αυτών στην τάξη, έγινε συζήτηση σχετικά με τα χαρακτηριστικά που είναι κοινά ή διαφέρουν στα τρίγωνα, με αποτέλεσμα να προκύψουν τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων. Έπειτα, η ερευνήτρια τοποθέτησε τρία σχοινιά στον πίνακα και έγραψε δίπλα τους «ισόπλευρο», «ισοσκελές» και «σκαληνό» αντίστοιχα, ενώ ταυτόχρονα ζητήθηκε από τα παιδιά να φτιάξουν μόνο ένα τρίγωνο στο γεωπίνακα. Με τη σειρά, ένα μέλος από κάθε ομάδα σηκώθηκε στον πίνακα και τοποθέτησε το γεωπίνακα στην κατηγορία που ανήκει αιτιολογώντας την επιλογή της ομάδας (βλ. Εικόνα 48). Η ίδια διαδικασία πραγματοποιήθηκε δημιουργώντας τις κατηγορίες «οξυγώνιο», «ορθογώνιο» και «αμβλυγώνιο» αντίστοιχα.

Εικόνα 48. Τα παιδιά εργάζονται στην τέταρτη δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

[4] Απ' την μια πλευρά του γεωπίνακα τα καρφάκια ήταν διατεταγμένα με βάση το τετράγωνο ενώ από την πίσω πλευρά με βάση ένα κανονικό δωδεκάγωνο που έδινε την αίσθηση κύκλου.

Η τελευταία αυτή δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας δεν ολοκληρώθηκε, όπως αρχικά είχε σχεδιαστεί, τη δεύτερη διδακτική ώρα, αλλά συνεχίστηκε και την τρίτη διδακτική ώρα. Έτσι, η δεύτερη μέρα της διδακτικής παρέμβασης ξεκίνησε με τα παιδιά να χρησιμοποιούν τους γεωπίνακες και να προσπαθούν να απαντήσουν στη 13η ερώτηση του πρώτου φυλλαδίου εργασίας. Πειραματίστηκαν κατασκευάζοντας αρχικά τρίγωνα με συγκεκριμένες ιδιότητες στο γεωπίνακα και έπειτα τα σχεδίασαν στο φυλλάδιο εργασίας (βλ. Εικόνα 49). Η άσκηση αυτή φάνηκε αρκετά δύσκολη σε πολλά παιδιά, αφού δεν κατάφεραν να κατασκευάσουν τρίγωνα με τις συγκεκριμένες ιδιότητες.

Εικόνα 49. Τα παιδιά εργάζονται στην τέταρτη δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας.

Η τρίτη διδακτική ώρα συνεχίστηκε με τους μαθητές να εργάζονται ομαδικά με την αντίστοιχη εφαρμογή του GeoGebra της πρώτης δραστηριότητας του δεύτερου φυλλαδίου εργασίας που αφορά την έννοια του ύψους τριγώνου. Αρκετοί μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας και φάνηκαν να μην έχουν τις απαραίτητες προαπαιτούμενες γνώσεις για να αφομοιώσουν τη νέα γνώση. Πιο συγκεκριμένα αρκετά παιδιά δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν την απέναντι κορυφή μιας πλευράς (βλ. Απόσπασμα 4), ή δεν γνώριζαν πώς φέρουμε κάθετη από σημείο σε ευθεία, αλλά συνάντησαν και αρκετές δυσκολίες στο χειρισμό των γεωμετρικών οργάνων, και πιο πολύ του γνώμονα.

Απόσπασμα 4. Διάλογος στην πρώτη δραστηριότητα του δεύτερου φυλλαδίου εργασίας.

Ε: *Εσείς παιδιά, πώς πάτε;*

Μ1: *Δεν ξέρουμε πώς να το κάνουμε.*

Ε: *Εντάξει, έχετε σχεδιάσει ένα οξυγώνιο τρίγωνο.*

M1: *Ναι.*

E: *Θέλουμε να σχεδιάσουμε το ύψος του τριγώνου στην πλευρά α. Ποια είναι η πλευρά α;*

M1: *Αυτή εδώ (δείχνει την πλευρά α και σημειώνει το γράμμα α).*

E: *Τώρα πρέπει να βρούμε την κορυφή του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά α. ... (οι μαθητές δεν απαντάνε) ... Έχουμε την πλευρά α, ποια κορυφή βρίσκεται απέναντί της;*

M2: *... Η Α;*

E: *Γιώργο, συμφωνείς;*

M1: *... Δεν ξέρω κυρία.*

E: *Λοιπόν, Αλέξανδρε, σχεδίασε ένα οξυγώνιο τρίγωνο και ονόμασε τις κορυφές του Α, Β και Γ. (ο μαθητής το σχεδιάζει ολοκληρωμένα)*
Γιώργο, δείξε μας την κορυφή Α. Η απέναντι πλευρά από την κορυφή Α είναι εκείνη που το σημείο Α δεν ανήκει σ' αυτήν.

M1: *Είναι αυτή (δείχνει την πλευρά α).*

E: *Αλέξανδρε;*

M2: *Ναι, αυτή.*

E: *Μπράβο παιδιά, πολύ σωστά! Έτσι λοιπόν, αυτή είναι η κορυφή Α και αυτή η πλευρά που βρίσκεται απέναντί της είναι η α. Πάμε τώρα στο τρίγωνο αυτό (το αρχικό). Γιώργο, απάντησε σωστά πριν ο Αλέξανδρος;*

M1: *Ναι, το Α είναι.*

Εξαιτίας αυτών των δυσκολιών, η διδάσκουσα χρειάστηκε να αφιερώσει αρκετό χρόνο στην κατανόηση της έννοιας από την κάθε ομάδα, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 50.

Εικόνα 50. Τα παιδιά εργάζονται στην πρώτη δραστηριότητα του δεύτερου φυλλαδίου εργασίας.

Ανασταλτικός παράγοντας της όλης προσπάθειας ήταν η ελλιπής αυτοσυγκέντρωση των παιδιών για την εξερεύνηση της έννοιας, καθώς την ίδια ώρα κάποιες αθλητικές εκδηλώσεις συνέβαιναν στο γυμναστήριο του σχολείου και ο θόρυβος αποσπούσε την προσοχή τους. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας η διδάσκουσα έκρινε αναγκαίο να ζητήσει από κάποια παιδιά να σχεδιάσουν τα ύψη σε κάποια τρίγωνα στον πίνακα.

Προτού οι μαθητές ασχοληθούν με τη δεύτερη δραστηριότητα, τους έγινε μια εισαγωγική ερώτηση για τη σημασία του όρου διάμεσος (βλ. Απόσπασμα 5).

Απόσπασμα 5. Διάλογος στη δεύτερη δραστηριότητα του δεύτερου φυλλαδίου εργασίας.

> Ε: *Τώρα θα μιλήσουμε για τη διάμεσο ενός τριγώνου. Τι πιστεύετε ότι μπορεί να σημαίνει η λέξη διάμεσος;*
>
> Μ1: *Έχει σχέση με το μέσο;*
>
> Ε: *Ναι…*
>
> Μ2: *Στη μέση.*
>
> Ε: *Δηλαδή;*
>
> Μ2: *Στη μέση της πλευράς.*
>
> Μ3: *Ξεκινάμε από την κορυφή που θέλουμε και σχεδιάζουμε μια γραμμή μέχρι τη μέση της απέναντι πλευράς.*

Έπειτα οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά με την εφαρμογή του GeoGebra που σχεδιάστηκε για τη δεύτερη δραστηριότητα. Όπως φάνηκε από τις απαντήσεις τους στο φυλλάδιο εργασίας, η έννοια της διαμέσου δεν δυσκόλεψε ιδιαίτερα τους μαθητές.

Στην τρίτη δραστηριότητα τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με την έννοια της διχοτόμου τριγώνου μέσα από την αντίστοιχη εφαρμογή του GeoGebra. Οι μαθητές, όπως προέκυψε από τις απαντήσεις τους στο αρχικό ερωτηματολόγιο, είχαν ελλιπή κατανόηση της έννοιας της διχοτόμου γωνίας. Έτσι, χρειάστηκε να γίνει μια επαναληπτική δραστηριότητα για τη διχοτόμο γωνίας, όπου οι μαθητές σχεδίασαν στον πίνακα τη διχοτόμο σε διάφορες γωνίες. Από τη δραστηριότητα αυτή φάνηκε ότι κάποια παιδιά δεν γνώριζαν πώς να χρησιμοποιούν το μοιρογνωμόνιο, οπότε και τους δόθηκε σχετική βοήθεια από τη διδάσκουσα. Κατά τη διάρκεια της ομαδικής τους εργασίας οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν προβλήματα και συνεργάστηκαν αρκετά καλά συζητώντας και ανταλλάσσοντας απόψεις μεταξύ τους (βλ. Απόσπασμα 6).

Απόσπασμα 6. Διάλογος παιδιών στην τρίτη δραστηριότητα του δεύτερου φυλλαδίου εργασίας.

> Μ1: *(ο πρώτος μαθητής έχει σχεδιάσει ένα τρίγωνο) Σε ποια πλευρά λέει;*
>
> Μ2: *Όχι, στη γωνία C λέει.*
>
> Μ1: *(τοποθετεί το μοιρογνωμόνιο λίγο στραβά)*
>
> Μ2: *Βάλ' το καλά, δεν ακουμπάει εδώ (εννοεί στην μια πλευρά της γωνίας C).*
>
> Μ1: *Εντάξει, είναι 55,… Περίπου 55°. Πόσο είναι το μισό;*

M2: *(κάνει την πράξη 55/2) 22,5.*

M1: *(βρίσκει και σημειώνει στο 22,5◦) (σχεδιάζει τη διχοτόμο στη γωνία C). Σωστά;*

M2: *Ναι!*

Στο τέλος της δραστηριότητας, η ερευνήτρια συνέθεσε συζήτηση για να συγκριθούν οι απαντήσεις των παιδιών στις ερωτήσεις εμπέδωσης των τριών δραστηριοτήτων (βλ. ερωτήσεις 4, 5, 7, 8, 10 και 11). Σκοπός ήταν οι μαθητές να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι το ύψος, σε αντίθεση με τη διάμεσο και τη διχοτόμο τριγώνου, δεν βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου, συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν με σχετική ευκολία.

Το δεύτερο φυλλάδιο εργασίας ολοκληρώθηκε με την τέταρτη και την πέμπτη δραστηριότητα, με στόχο τη συνειδητοποίηση από τους μαθητές των βασικών ιδιοτήτων του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου. Πιο συγκεκριμένα, στην τέταρτη δραστηριότητα οι μαθητές προβληματίστηκαν αρχικά για τις σχέσεις που ισχύουν ανάμεσα στις πλευρές ή τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου. Έπειτα, μοιράστηκαν στους μαθητές τρία διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα κατασκευασμένα σε ριζόχαρτο μεγέθους A4 και ζητήθηκε από κάθε ομάδα παιδιών να σχεδιάσουν ένα διαφορετικό δευτερεύον στοιχείο των τριγώνων στην πλευρά α (άνιση πλευρά), ώστε σε κάθε ένα από τα τρία τρίγωνα να έχουν σχεδιαστεί το ύψος, η διάμεσος και η διχοτόμος του που αντιστοιχούν στην άνιση πλευρά τους. Τοποθετώντας στο τέλος όλες τις κόλλες ριζόχαρτου μαζί για κάθε τρίγωνο, όπως φαίνεται στην Εικόνα 51, διαπιστώθηκε ότι τα τρία αυτά στοιχεία ταυτίζονται. Η δραστηριότητα αυτή ολοκληρώθηκε με τους μαθητές να συνεργάζονται για να διπλώσουν τις κόλλες και να ανακαλύψουν τον άξονα συμμετρίας ενός ισοσκελούς τριγώνου.

Εικόνα 51. Ελέγχεται εάν το ύψος, η διάμεσος και η διχοτόμος που αντιστοιχούν στην άνιση πλευρά ενός ισοσκελούς τριγώνου ταυτίζονται.

Στην πέμπτη δραστηριότητα μοιράστηκε σε όλους τους μαθητές ένα ίδιο ισόπλευρο τρίγωνο σχεδιασμένο σε ριζόχαρτο μεγέθους Α4. Ζητήθηκε από κάθε ζευγάρι μαθητών να σχεδιάσουν ένα διαφορετικό δευτερεύον στοιχείο που να αντιστοιχεί σε διαφορετική πλευρά του τριγώνου, ώστε στο τέλος να συγκριθούν τα τρία ύψη, διάμεσοι και διχοτόμοι του τριγώνου. Η διδακτική παρέμβαση ολοκληρώθηκε με τους μαθητές να ανακαλύπτουν ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις άξονες συμμετρίας.

Συμπεράσματα – Προτάσεις

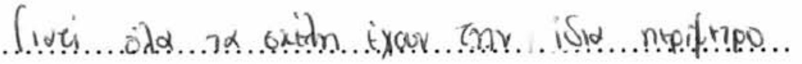
Με βάση την πρώτη ερευνητική υπόθεση της παρούσας εργασίας οι μαθητές ολοκληρώνοντας το δημοτικό σχολείο παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του τριγώνου. Από τη μελέτη των απαντήσεων των μαθητών του δείγματος στο αρχικό ερωτηματολόγιο προέκυψαν ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Παρακάτω συγκρίνονται οι αρχικές αυτές αντιλήψεις των μαθητών του δείγματος για την γεωμετρική έννοια του τριγώνου με εκείνες που προέκυψαν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση άλλων ερευνών.

Στην έρευνα των Wu και Ma (2005) το 34% των μαθητών δημοτικού σχολείου δεν αναγνώρισαν τα «πολύ οξυγώνια» τρίγωνα. Στην παρούσα έρευνα περίπου το 23% των μαθητών φάνηκαν να μην αναγνωρίζουν ένα μακρύ και στενό ή «πολύ μυτερό» τρίγωνο. Αρκετά παιδιά, στην προσπάθειά τους να αιτιολογήσουν την επιλογή τους, ανέφεραν ότι «δεν μοιάζουν ή δεν θυμίζουν τρίγωνα», γεγονός που αποδεικνύει ότι αντιλαμβάνονται τα τρίγωνα με βάση τη μορφή τους, δηλαδή ως ολότητες, και δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι αποτελούνται από διάφορα μέρη (πλευρές, γωνίες, κορυφές), ούτε ότι έχουν κάποιες ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν.

Στην έρευνα της Keazer (2004), όταν δόθηκε σε μαθητές, ηλικίας 11-12 χρονών, ένα (αμβλυγώνιο) τρίγωνο με τα μέτρα των γωνιών του, και τους ζητήθηκε να το χαρακτηρίσουν ως οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο, μόνο το 44% των μαθητών απάντησαν σωστά, ενώ οι μισοί από αυτούς ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Στην παρούσα έρευνα, σε παρόμοια ερώτηση, το 36% των μαθητών έδωσαν επιστημονικά αποδεκτή απάντηση και αιτιολόγηση, ενώ αρκετά παιδιά (23%) μπερδεύτηκαν κατά τη διάρκεια της αιτιολόγησης παρατηρώντας ότι το τρίγωνο έχει μία αμβλεία και δύο οξείες γωνίες και το χαρακτήρισαν ως οξυγώνιο τρίγωνο. Από τις απαντήσεις των παιδιών στην ερώτηση αυτή αλλά και απ' όταν τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν δύο αμβλυγώνια τρίγωνα, όπου οι μισοί περίπου (51%) έκαναν σωστή αναπαράσταση των τριγώνων αυτών, προκύπτει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες με την έννοια του αμβλυγώνιου τριγώνου.

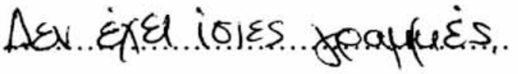
Εκτός όμως από τα αμβλυγώνια τρίγωνα, ελέγχθηκε εάν οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες και με τους όρους οξυγώνιο, ορθογώνιο, ισοσκελές και ισόπλευρο τρίγωνο. Τα δεκατέσσερα από τα τριάντα εννιά παιδιά (36%) που συμπλήρωσαν το αρχικό ερωτηματολόγιο ονόμασαν ισοσκελές τρίγωνο εκείνο που έχει τρεις ίσες πλευρές ή σκέλη, δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι δύο μαθητές του δείγματος όρισαν ως ισοσκελή τρίγωνα όσα έχουν δύο πλευρές ίσες, αλλά δεν συμπεριέλαβαν το ισόπλευρο τρίγωνο σε αυτά. Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές φάνηκαν να μπορούν να αναγνωρίσουν αλλά και να σχεδιάσουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Αντίθετα, μόνο το 23% των μαθητών μπόρεσαν να σχεδιάσουν δύο οξυγώνια τρίγωνα ή ένα ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο, αποδεικνύοντας ότι η έννοια αυτή παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες για τους μαθητές.

Η γραπτή διατύπωση της σκέψης των παιδιών και η χρήση της ορολογίας δημιούργησαν αρκετά ερωτήματα, τα οποία οδήγησαν στις συνεντεύξεις των παιδιών για τις απαντήσεις τους στο αρχικό ερωτηματολόγιο. Οι μαθητές συχνά χρησιμοποίησαν λανθασμένα επιστημονικές εκφράσεις ή κατέφυγαν σε καθημερινές εκφράσεις για να εξηγήσουν την απάντησή τους. Για παράδειγμα, ένας μαθητής ανέφερε στην πέμπτη ερώτηση του αρχικού ερωτηματολογίου ότι ισοσκελές είναι το τρίγωνο που όλα τα σκέλη του έχουν την ίδια περίμετρο (βλ. Εικόνα 52), διευκρινίζοντας στη συνέντευξη που ακολούθησε ότι ισοσκελές είναι το ισόπλευρο τρίγωνο που όλα τα σκέλη του έχουν ίδιο μήκος.



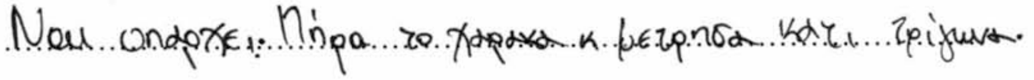
Εικόνα 52. Τυπική απάντηση στην πέμπτη ερώτηση του pre-test.

Αρκετές φορές οι μαθητές χρησιμοποίησαν οπτικά στοιχεία για να αναγνωρίσουν ένα τρίγωνο, περιγράφοντας ότι κάποια σχήματα δεν είναι τρίγωνα γιατί έχουν καμπυλωτή, διακεκομμένη ή ίσια γραμμή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 53.



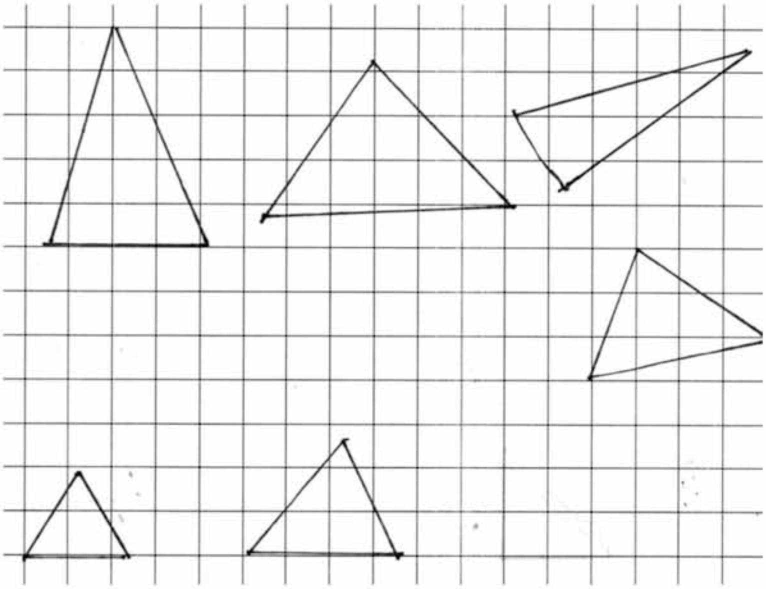
Εικόνα 53. Τυπική απάντηση στην πρώτη ερώτηση του pre-test.

Κι άλλες φορές όμως, η αιτιολόγηση που έδωσαν οι μαθητές δημιούργησε ερωτήματα. Για παράδειγμα οι απαντήσεις των μαθητών στη δεύτερη ερώτηση ήταν πολλές και διαφορετικές (βλ. Εικόνα 54), με αποτέλεσμα η ερώτηση αυτή να απασχολήσει τους περισσότερους μαθητές και στη συνέντευξη.



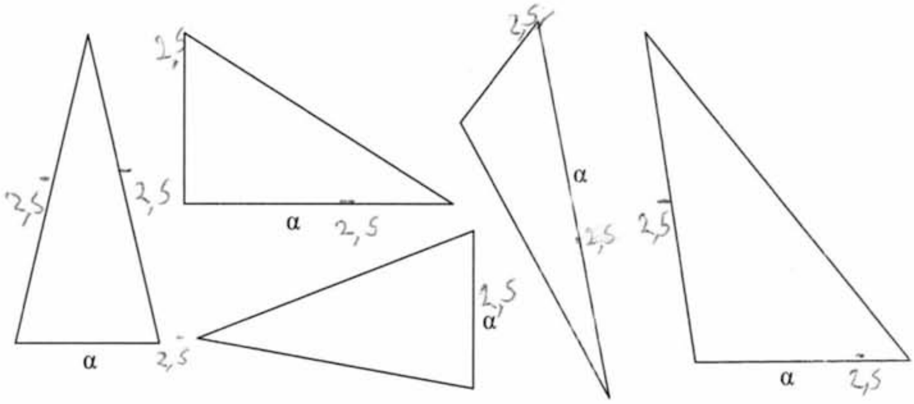
Εικόνα 54. Τυπική απάντηση στη δεύτερη ερώτηση του pre-test.

Η ένατη και η δέκατη ερώτηση αποτελούν δύο ακόμη ερωτήσεις που οι απαντήσεις των μαθητών έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αποδεικνύουν τις ελλιπείς κατανοήσεις των αναφερόμενων εννοιών από τα παιδιά. Στην ένατη ερώτηση αρκετοί μαθητές σχεδίασαν διάφορα τρίγωνα τυχαία, χωρίς να πληρούν τις προϋποθέσεις της εκφώνησης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 59.



Εικόνα 55. Τυπική απάντηση στην ένατη ερώτηση του pre-test.

Παρόμοια και στη δέκατη ερώτηση πολλοί μαθητές σχεδίασαν ευθύγραμμα τμήματα ή μέτρησαν πλευρές ενώ τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν το ύψος των τριγώνων (βλ. Εικόνα 56).



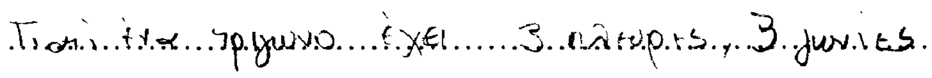
Εικόνα 56. Τυπική απάντηση στη δέκατη ερώτηση του pre-test.

Οι μαθητές του δείγματος είχαν αρκετές παρανοήσεις σχετικά με την έννοια του ύψους τριγώνου, οι οποίες συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τη βιβλιογραφική ανασκόπηση άλλων ερευνών (Blanco, 2001; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Gutierrez & Jaime, 1999; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987). Έτσι, το 23% των μαθητών είχαν μερική εικόνα της έννοιας του ύψους που είναι επηρεασμένη από την έννοια της μεσοκαθέτου και το ίδιο ποσοστό μαθητών ταύτισαν το ύψος με μία πλευρά του τριγώνου, ενώ αρκετοί ήταν οι μαθητές (18%) που άφησαν αναπάντητο το συγκεκριμένο ερώτημα. Τέλος, μόνο το 5% των μαθητών κατάφεραν να σχεδιάσουν τα εσωτερικά και τα εξωτερικά ύψη που τους ζητήθηκαν, όπως και στην έρευνα των Vinner και Hershkowitz (στο Τουμάσης, 2004).

Από τον τρόπο που οι μαθητές απάντησαν στις ερωτήσεις του αρχικού ερωτηματολογίου μπορεί να αναλυθεί η γεωμετρική τους σκέψη χρησιμοποιώντας τα επίπεδα van Hieles. Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω φαίνεται ότι οι μαθητές που ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους στο δημοτικό σχολείο δυσκολεύονται να ξεπεράσουν τα επίπεδα 0 και 1 κατά van Hieles. Ακόμα και όταν οι μαθητές αναλύουν ιδιότητες σχημάτων, βρίσκονται δηλαδή στο επίπεδο 1, ο τρόπος με τον οποίο διατυπώνουν τις απόψεις τους επηρεάζεται από την οπτική τους αντίληψη για τα σχήματα. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και άλλες έρευνες (Burger & Shaughnessy, 1986; Pyshkalo στο Wirszup, 1976; Wu & Ma, 2006), σύμφωνα με τις οποίες η γεωμετρική σκέψη των περισσότερων μαθητών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκεται στο επίπεδο 0 της οπτικοποίησης ή στο επίπεδο 1 της ανάλυσης.

Σύμφωνα με τη δεύτερη ερευνητική υπόθεση της παρούσας εργασίας, οι μαθητές της Α΄ τάξης γυμνασίου που συμμετέχουν σε ένα διαμορφωμένο μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο λαμβάνει υπόψη τα ερευνητικά δεδομένα για τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του τριγώνου και βασίζεται στις διδακτικές προτάσεις των σύγχρονων θεωριών μάθησης (εποικοδομητισμός, συνεργατική μάθηση, αξιοποίηση χειραπτικών υλικών και νέων τεχνολογιών, κ.ά.), έχουν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Η ερευνητική αυτή υπόθεση επαληθεύτηκε με βάση τις απαντήσεις των παιδιών του τμήματος ελέγχου και των παιδιών του τμήματος παρέμβασης στο τελικό ερωτηματολόγιο.

Μετά τη διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου αρκετοί ήταν οι μαθητές από το τμήμα ελέγχου (44%) που δεν αναγνώρισαν ένα «αρκετά οξυγώνιο» και σκαληνό τρίγωνο. Αντίθετα, όλα τα παιδιά από το τμήμα παρέμβασης (100%) φάνηκαν ικανά να αναγνωρίσουν ένα οποιοδήποτε τρίγωνο. Προς την κατεύθυνση αυτή φαίνεται να βοήθησαν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις του τριγώνου που προσφέρθηκαν στους μαθητές μέσω της χρήσης του λογισμικού GeoGebra με την πρώτη εφαρμογή που σχεδιάστηκε. Επιπλέον, η αιτιολόγηση των απαντήσεων των περισσότερων μαθητών του τμήματος παρέμβασης δείχνει ότι σταματούν να αντιλαμβάνονται τα τρίγωνα με βάση τη μορφή τους, δηλαδή ως ολότητες, και αρχίζουν να σκέφτονται ότι αποτελούνται από διάφορα μέρη (βλ. Εικόνα 57).



Εικόνα 57. Τυπική απάντηση στην πρώτη ερώτηση του post-test.

Οι μαθητές στο δημοτικό σχολείο δεν διδάσκονται την τριγωνική ανισότητα και έτσι ήταν αναμενόμενο στο αρχικό ερωτηματολόγιο να μην υπάρχει απάντηση κάποιου παιδιού με επιστημονικά αποδεκτή αιτιολόγηση. Εντύπωση προκάλεσε όμως ότι, όταν ζητήθηκε στο αρχικό ερωτηματολόγιο από τους μαθητές να σχεδιάσουν τα δοσμένα μήκη ευθύγραμμων τμημάτων για να ελέγξουν εάν σχηματίζουν τρίγωνο, όλοι οι μαθητές έκαναν μόνο μία προσπάθεια στο χαρτί, με τα ευθύγραμμα τμήματα να σχηματίζουν γωνίες με μεγάλα μέτρα. Μετά τη διδασκαλία, το 44% των μαθητών του τμήματος παρέμβασης αιτιολόγησαν την απάντησή τους με βάση την τριγωνική ανισότητα, καθώς, όπως φάνηκε και από τη διδακτική παρέμβαση αρκετοί μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες κατά την ενασχόλησή τους με την τρίτη δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας και δυσκολεύτηκαν να οικοδομήσουν την έννοια της τριγωνικής ανισότητας. Αντίθετα, κανένα παιδί του τμήματος ελέγχου δεν αιτιολόγησε την απάντησή του με επιστημονικά αποδεκτό τρόπο και οι μισοί μαθητές απάντησαν εμπειρικά στη συγκεκριμένη ερώτηση.

Σημαντικά μεγαλύτερο είναι το πλήθος των μαθητών του τμήματος παρέμβασης (89%) σε σύγκριση με τους μαθητές του τμήματος ελέγχου (33%) που φάνηκαν να γνωρίζουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180°. Φαίνεται πως οι πολλαπλές αναπαραστάσεις που προσφέρθηκαν στους μαθητές του τμήματος παρέμβασης κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας (εφαρμογή στο GeoGebra, έλεγχος εάν οι γωνίες ενός τριγώνου σχηματίζουν ευθεία γωνία, έλεγχος εάν διάφορες τριάδες μέτρων γωνιών σχηματίζουν τρίγωνο) βοήθησαν τους μαθητές να κατανοήσουν τη ζητούμενη σχέση.

Σε γενικές γραμμές, οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης αναγνώρισαν πιο εύκολα τα ισοσκελή και τα ορθογώνια τρίγωνα από τους μαθητές του τμήματος ελέγχου. Επίσης, το 56% των μαθητών του τμήματος παρέμβασης αναγνώρισαν ένα ισόπλευρο και ένα ισοσκελές τρίγωνο που τους δόθηκαν σε αντίθεση με το 28% των μαθητών από το τμήμα ελέγχου. Προς την κατεύθυνση αυτή φαίνεται να συνέβαλε η δραστηριότητα με τους γεωπίνακες που πραγματοποιήθηκε στο τμήμα παρέμβασης.

Αρκετοί από τους μαθητές του τμήματος ελέγχου ολοκληρώνοντας τη φοίτησή τους στην Α΄ τάξη γυμνασίου φάνηκαν να μην είναι ικανοί να ξεπεράσουν το επίπεδο 0 της οπτικοποίησης κατά van Hieles. Μετά τη διδασκαλία της γεωμετρικής έννοιας του τριγώνου η γεωμετρική σκέψη κάποιων μαθητών του τμήματος ελέγχου και των περισσότερων μαθητών του τμήματος παρέμβασης φαίνεται να βρίσκεται στο επίπεδο 1 της ανάλυσης με βάση το μοντέλο van Hieles.

Το παραπάνω συμπέρασμα επαληθεύεται ως ένα σημείο από τις απαντήσεις των μαθητών στις δύο ερωτήσεις του τελικού ερωτηματολογίου που τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν τρίγωνα με συγκεκριμένες ιδιότητες. Με τις ερωτήσεις αυτές ελέγχθηκαν οι σχεδιαστικές δεξιότητες των μαθητών που είναι χρήσιμες για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης επιπέδου 1 κατά van Hieles. Οι περισσότεροι μαθητές του τμήματος παρέμβασης (83%) είναι ικανοί να αναπαραστήσουν σωστά δύο οξυγώνια, δύο ορθογώνια και δύο αμβλυγώνια τρίγωνα. Ενώ, από τους μαθητές του τμήματος ελέγχου οι μισοί καλλιέργησαν σχεδιαστικές δεξιότητες και μπόρεσαν να κατασκευάσουν δύο ορθογώνια και δύο αμβλυγώνια τρίγωνα και μόνο το 39% των μαθητών σχεδίασαν δύο οξυγώνια τρίγωνα. Η όγδοη ερώτηση του τελικού ερωτηματολογίου απαιτούσε συνδυαστική σκέψη από τα παιδιά και φαίνεται πως τα δυσκόλεψε αρκετά με βάση τις απαντήσεις που έδωσαν, αποδεικνύοντας ότι παραμένει δύσκολο για εκείνα να κατασκευάσουν τρίγωνα με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Σημαντικές δυσκολίες φαίνεται πως αντιμετώπισαν οι μαθητές και στην ένατη ερώτηση, στην οποία τους ζητήθηκε να χαρακτηρίσουν κάποια τρίγωνα με βάση τα δύο κριτήρια κατάταξης τριγώνων. Το πλήθος των μαθητών του τμήματος ελέγχου που κατάφεραν να χαρακτηρίσουν σωστά κάποιο τρίγωνο δεν ξεπέρασε τους τέσσερις. Περισσότεροι ήταν οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης που απάντησαν ολοκληρωμένα, με το 72% των μαθητών αυτών να αναγνωρίζει ένα ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο. Πολύ πιθανόν η τέταρτη δραστηριότητα του πρώτου φυλλαδίου εργασίας με τους γεωπίνακες να βοήθησε τους μαθητές του τμήματος παρέμβασης να οικοδομήσουν τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων.

Όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν το ύψος σε διάφορα τρίγωνα διαπιστώθηκε πόσο βαθιά ριζωμένες είναι οι παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του ύψους. Μόνο έξι μαθητές του τμήματος παρέμβασης (33%) και ένα παιδί του τμήματος ελέγχου (6%) είχαν ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας του ύψους τριγώνου. Περισσότεροι είναι οι μαθητές, δέκα (56%) και τέσσερις (22%) αντίστοιχα, που σχεδίασαν σωστά τις ζητούμενες διαμέσους, ενώ δεκαπέντε μαθητές του τμήματος παρέμβασης (83%) και έξι μαθητές του τμήματος ελέγχου (33%) είχαν ολοκληρωμένη εικόνα της έννοιας της διχοτόμου τριγώνου. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην οικοδόμηση της έννοιας του ύψους τριγώνου φάνηκαν και στη διδακτική παρέμβαση, με τους μαθητές να έχουν αρκετές ελλείψεις σε προαπαιτούμενες γνώσεις.

Παρόλο που η θέση και ο προσανατολισμός του σχήματος δεν επηρεάζουν τις ιδιότητές του, τα περισσότερα σχήματα που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί, τα σχολικά βιβλία και κατά συνέπεια αυτά που σχεδιάζουν οι μαθητές έχουν «κανονικό προσανατολισμό», δηλαδή οριζόντια ή κατακόρυφη διεύθυνση. Στην παρούσα έρευνα οι μαθητές χρειάστηκε να σχεδιάσουν αρκετά τρίγωνα στο αρχικό και το τελικό ερωτηματολόγιο, το 77% των οποίων έχουν τη μία πλευρά τους οριζόντια ή κάθετη με βάση τις γραμμές σχεδίασης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της σημασίας του προσανατολισμού του σχήματος για τους μαθητές αποτελεί η αιτιολόγηση ενός παιδιού που έδωσε συνέντευξη για την τέταρτη ερώτηση του αρχικού ερωτηματολογίου. Ο διάλογος που πραγματοποιήθηκε ανάμεσα στην ερευνήτρια και τη μαθήτρια αυτή παρουσιάζεται στο Απόσπασμα 7.

Απόσπασμα 7. Διάλογος στην τέταρτη ερώτηση του pre-test.

> Ε: *Το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο, οξυγώνιο, ή ορθογώνιο;*
> Μ: *Αμβλυγώνιο.*
> Ε: *Γιατί είναι αμβλυγώνιο λες;*
> Μ: *Γιατί η κύρια μύτη, αυτή εδώ πέρα (δείχνει την αμβλεία γωνία), είναι 115.*
> Ε: *Αν μπορούσα να το στρίψω το τρίγωνο δε θα ήταν πια αυτή;*
> Μ: *Αν το γυρίσουμε θα είναι οξυγώνιο.*

Ο «κανονικός» προσανατολισμός του σχήματος έχει ως άμεση συνέπεια, όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μαθητές να αποκτούν περιορισμένη αντίληψη σε διάφορες γεωμετρικές έννοιες. Τα αποτελέσματα προγενέστερων ερευνών (Cooper & Krainer, 1990; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Vinner & Hershkowitz στο Τουμάσης, 2004) συμφωνούν με τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας σχετικά με την επίδραση του προσανατολισμού στην αναγνώριση ενός ορθογωνίου τριγώνου. Οι περισσότεροι μαθητές αναγνώρισαν πιο εύκολα ένα ορθογώνιο τρίγωνο που έχει τις κάθετες πλευρές στον οριζόντιο και κάθετο άξονα και δυσκολότερα τα τρίγωνα εκείνα που η ορθή γωνία βρίσκεται «από πάνω». Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και για την επίδραση του προσανατολισμού στην αναγνώριση ενός ισοσκελούς τριγώνου, τα οποία συμφωνούν με προηγούμενες έρευνες (Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Marchini & Rinaldi, 2005). Χαρακτηριστικά, ένα παιδί ανέφερε στην τέταρτη ερώτηση του αρχικού ερωτηματολογίου ότι τα τρίγωνα που επέλεξε είναι ισοσκελή γιατί μετακίνησε κάπως το φύλλο και το κατάλαβε (βλ. Εικόνα 58).

Γιατί εαν το προσέξεις και μετακινήσεις.
πλάγια το φύλλο το καταλαβαίνεις.

Εικόνα 58. Τυπική απάντηση στην τέταρτη ερώτηση του pre-test.

Από τις απαντήσεις των μαθητών στα φυλλάδια εργασίας και τα τελικά ερωτηματολόγια προκύπτει ότι οι στόχοι της διδακτικής παρέμβασης επιτεύχθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Φαίνεται πως η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε είχε ως αποτέλεσμα τη σταδιακή αναθεώρηση των αρχικών αντιλήψεών τους και την οικοδόμηση νοητικών κατασκευών που συγκλίνουν στο επιστημονικά αποδεκτό πρότυπο. Οι μαθητές του τμήματος παρέμβασης είχαν την ευκαιρία μέσα από πραγματικές καταστάσεις να γνωρίσουν το τρίγωνο ως μια φυσική έννοια, και όχι ως ένα ακόμη αφηρημένο μαθηματικό σχήμα. Με αυτό τον τρόπο μπόρεσαν να οικοδομήσουν την γεωμετρική έννοια του τριγώνου σε μεγάλο βαθμό σε σύγκριση με το τμήμα ελέγχου και να αποφύγουν όσο το δυνατόν τη δημιουργία εμποδίων που οφείλονται στο πλήθος των ιδιοτήτων που έχει.

Με το νέο συνεργατικό περιβάλλον μάθησης, το οποίο προωθεί την χρήση των ΤΠΕ και των χειραπτικών υλικών, οι μαθητές φάνηκαν να διασκεδάζουν και να απολαμβάνουν τη διαδικασία. Χαρακτηριστικά, στο τέλος της διδακτικής παρέμβασης ζήτησαν από την ερευνήτρια να πραγματοποιήσουν κι άλλο μάθημα στην αρχή της επόμενης σχολικής χρονιάς. Με τον τρόπο αυτό αλλά και με τις αντιδράσεις τους και τη συμμετοχή όλων κατά τη διδασκαλία έδειξαν τον ενθουσιασμό τους για την έκβαση του μαθήματος (βλ. Εικόνα 59).

Εικόνα 59. Συμμετοχή των παιδιών στη διδακτική διαδικασία.

Ενδιαφέρον προκάλεσε ότι οι μαθητές που δεν πρόλαβαν να συμπληρώσουν κάτι στο φυλλάδιο εργασίας ή ήθελαν να περιηγηθούν για λίγη ώρα ακόμη με το λογισμικό ζήτησαν άδεια να παραμείνουν και στο διάλειμμα στην αίθουσα ώστε να ολοκληρώσουν την εργασία τους. Μια τέτοια συμπεριφορά από την πλευρά των μαθητών θεωρείται εύλογη και αναμενόμενη αφού οι δυνατότητες που προσφέρει ένα λογισμικό ή ένα χειραπτικό υλικό (εικόνες, εφέ, ήχο, κίνηση, οπτική αναπαράσταση διάφορων εννοιών κ.ά.), κρατάει αμείωτο το ενδιαφέρον και την προσοχή των παιδιών σε σύγκριση με το σχολικό βιβλίο το οποίο χαρακτηρίζεται από στατικότητα. Η εναλλαγή των δραστηριοτήτων, αλλά και οι μικρής διάρκειας δραστηριότητες φαίνεται να βοήθησαν προς την κατεύθυνση αυτή.

Οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τη χρήση των χειραπτικών υλικών και του λογισμικού GeoGebra πολύ γρήγορα, αναπτύσσοντας τις κατάλληλες δεξιότητες. Η παρατήρηση των ομάδων έδειξε ότι κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές κατάφεραν να αναπτύξουν και κοινωνικές δεξιότητες, και ειδικότερα της συνεργασίας, της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης στο πλαίσιο της ομαδικής εργασίας. Μια παιδαγωγική αρχή στην οποία βασίζεται η αξιοποίηση των χειραπτικών υλικών και των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία είναι η συνεργατική μάθηση, μια πρακτική που στοχεύει στην ανακάλυψη των ιδεών από τους μαθητές μέσω της συζήτησης. Η επικοινωνία και η αλληλεπίδραση των μαθητών ενισχύθηκε από τη συζήτηση που γινόταν σε κάθε δραστηριότητα, όπου οι απόψεις των μαθητών εναλλάσσονταν διαρκώς επιτρέποντας όσο περισσότερα παιδιά να εκφραστούν. Στο τέλος της συγκεκριμένης διαδικασίας οι μαθητές επανέρχονταν με μεγάλη προθυμία στην ομαδική εργασία και τη συνέχιση και ολοκλήρωση του φυλλαδίου εργασίας.

Θα ήταν υπερβολή όμως ο ισχυρισμός πως πρόκειται για μια διδασκαλία χωρίς προβλήματα. Αντίθετα, υποστηρίζεται πως υπάρχουν δυνατότητες βελτίωσης της παραπάνω διδακτικής παρέμβασης. Το τμήμα παρέμβασης ήταν εξοικειωμένο με δασκαλοκεντρικές διδακτικές μεθόδους, γεγονός που κάποιες φορές παρεμπόδισε το κλίμα συνεργασίας και επικοινωνίας ανάμεσα στους μαθητές, με κάποια παιδιά να αναλαμβάνουν να απαντήσουν στις ερωτήσεις ατομικά και όχι ομαδικά, όπως τους είχε ζητηθεί. Τότε η ερευνήτρια χρειάστηκε να παρέμβει και να δώσει έμφαση στην αλληλοσυμπληρωματική εργασία των ζευγαριών, με αποτέλεσμα να αποφευχθούν τα όποια προβλήματα. Σίγουρα όμως, οι μαθητές μελλοντικά θα πρέπει να εξασκηθούν στις συνεργατικές δεξιότητες για να μπορούν να εργαστούν ομαδικά.

Σε περίπτωση επανάληψης της παρούσας διδακτικής παρέμβασης η γράφουσα θα αφιέρωνε περισσότερο χρόνο στην εξερεύνηση των βασικών ιδιοτήτων ενός τριγώνου που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του, καθώς και σε συνδυαστικές ασκήσεις αυτών. Οι μαθητές φάνηκαν να έχουν αρκετές ελλιπείς κατανοήσεις από το δημοτικό σε βασικές έννοιες που σχετίζονται με το τρίγωνο, αλλά και στον τρόπο χειρισμού των βασικών γεωμετρικών εργαλείων (χάρακας, γνώμονας, μοιρογνωμόνιο). Έτσι, προτείνεται να διαμορφωθεί κατάλληλα το μαθησιακό περιβάλλον από την αρχή της Α΄ τάξης γυμνασίου δίνοντας έμφαση στον πειραματισμό των παιδιών με τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων και στη σταδιακή αναθεώρηση των παρανοήσεών τους σε βασικές γεωμετρικές έννοιες.

Επίσης, προέκυψε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες στην κατανόηση και τη σχεδίαση του ύψους τριγώνου. Έτσι, θα ήταν αναγκαίο να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στη διδασκαλία της έννοιας αυτής τόσο σχετικά με τον ίδιο τον όρο ύψος όσο και με τον τρόπο σχεδίασης χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά όργανα με σκοπό την ανάπτυξη της αντίστοιχης δεξιότητας από τους μαθητές. Για το λόγο αυτό, προτείνεται να ξεκινήσουν οι μαθητές από τη σχεδίαση κάθετης ευθείας σε δοσμένη ευθεία, να συνεχίσουν με τη σχεδίαση ύψους από σημείο σε ευθεία, έπειτα να μάθουν να αναγνωρίζουν την απέναντι κορυφή μιας πλευράς ενός τριγώνου και τέλος να σχεδιάζουν το ύψος τριγώνου σε μια πλευρά του. Γενικότερα, για να είναι πιο στέρεα τα αποτελέσματα της μάθησης της γεωμετρικής έννοιας του τριγώνου, θα ήταν χρήσιμο να γίνει μια πρόσθετη επαναληπτική διδασκαλία στην αρχή της καινούριας σχολικής χρονιάς.

Στη διδακτική πράξη υπεισέρχονται δύο παράγοντες με τους οποίους η επιστημολογία δεν ασχολείται: η ύλη και ο χρόνος. Τόσο η ομαδική εργασία, η χρήση των χειραπτικών υλικών και η προσωπική κατασκευή των μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές, όσο και η ύλη του Αναλυτικού Προγράμματος που πρέπει να καλυφθεί απαιτούν διδακτικό χρόνο. Αυτές οι συνθήκες της σχολικής τάξης είναι που αναγκάζουν τους εκπαιδευτικούς να σκέφτονται για εκπαιδευτικές οικονομίες (instructional economies), όπως τις αναφέρει η Noddings (1990). Επίσης, η χρήση των υπολογιστών στην παρούσα διδακτική παρέμβαση ήταν εφικτή γιατί σε όλα τα παιδιά είχαν χορηγηθεί φορητοί ηλεκτρονικοί υπολογιστές, τους οποίους και έφεραν μαζί τους. Εάν όμως ο εκπαιδευτικός άλλης τάξης ή της ίδιας σχολικής τάξης σε επόμενη χρονιά θελήσει να χρησιμοποιήσει ηλεκτρονικούς υπολογιστές στη διδασκαλία, τότε θα πρέπει να μεταφέρει τα παιδιά στην αίθουσα υπολογιστών. Για ευνόητους λόγους κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα εφικτό να συμβεί. Τέλος, η χρήση των χειραπτικών υλικών προϋποθέτει την πρόσβαση της εκπαιδευτικού στα υλικά αυτά. Στο σχολικό περιβάλλον του γυμνασίου συνήθως δεν υπάρχουν διαθέσιμα για τα παιδιά και τους δασκάλους χειραπτικά υλικά, αναστέλλοντας τη χρήση τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Η διδασκαλία της έννοιας του τριγώνου πραγματοποιείται στο τέλος της σχολικής χρονιάς, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μην έχουν την απαιτούμενη μαθησιακή συγκέντρωση για την εξερεύνηση της έννοιας αυτής. Επίσης, τις τελευταίες εβδομάδες της σχολικής χρονιάς συνήθως πραγματοποιούνται αθλητικές ή πολιτιστικές εκδηλώσεις, εκδρομές ή επαναλήψεις της ύλης επαναλήψεις, με αποτέλεσμα την πιο χαλαρή ροή της διδασκαλίας που δεν επιτρέπει την επίτευξη των μαθησιακών στόχων με συστηματικό τρόπο. Για το λόγο αυτό προτείνεται από την ερευνήτρια η διδασκαλία του 3ου Κεφαλαίου «Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια» να μεταφερθεί στην αρχή της Β΄ τάξης γυμνασίου έτσι, ώστε να αποφεύγεται η αποσπασματική μελέτη του.

Αντί επιλόγου

Σε επίπεδο διδασκαλίας, θεωρείται σημαντικό και ουσιαστικό να αλλάξει η διδακτική μεθοδολογία στο μάθημα των μαθηματικών γενικότερα. Θα πρέπει να υιοθετηθεί η χρήση ενεργητικών μεθόδων και σε ατομικό αλλά και σε ομαδικό πλαίσιο, καθώς και η χρήση διδακτικών μέσων ή εργαλείων, ξεφεύγοντας έτσι από τον παραδοσιακό ρόλο της ουδέτερης μετάδοσης της γνώσης. Είναι αναγκαίο να πραγματοποιηθεί η μετάβαση από την αφηγηματική παράθεση στην ενεργητική αναζήτηση και οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές σε ατομικό αλλά και σε συλλογικό επίπεδο. Η διδακτική αξιοποίηση των σύγχρονων θεωριών μάθησης θα πρέπει να προβληματίσει όλους τους εκπαιδευτικούς αρμόδιους φορείς ώστε η εκπαίδευση των σημερινών μαθητών να ανταποκρίνεται στις πραγματικές ανάγκες τους. Θα είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον εάν όλοι οι εμπλεκόμενοι φορείς επικέντρωναν την προσοχή τους στη δημιουργία ενός γόνιμου, εποικοδομητικού, αλληλεπιδραστικού και ποιοτικού περιβάλλοντος μάθησης για τους μαθητές ώστε κάθε γνωστικό αντικείμενο να μπορέσει να ανθίσει.

Προτείνεται λοιπόν, οι μελλοντικές διδακτικές προσεγγίσεις καθώς και οι εκπαιδευτικοί αρμόδιοι φορείς του αναλυτικού προγράμματος να λάβουν υπόψη τους ότι οι περισσότεροι μαθητές που ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους στο δημοτικό σχολείο δυσκολεύονται να ξεπεράσουν το επίπεδο 0 κατά van Hieles. Θα ήταν χρήσιμο να αλλάξουν αρκετά πράγματα, από τις μεθόδους διδασκαλίας, την οργάνωση και τα εποπτικά υλικά μέχρι και το περιεχόμενο της ύλης που διδάσκεται σε κάθε βαθμίδα της εκπαίδευσης. Ενθαρρυντικό είναι το γεγονός ότι με βάση τις οδηγίες του υπουργείου παιδείας για το 2010-2011 μειώνεται η ύλη της άλγεβρας της Α΄ τάξης γυμνασίου έτσι, ώστε να παρέχεται περισσότερος χρόνος για την ολοκλήρωση των υπόλοιπων κεφαλαίων, άρα και του τελευταίου κεφαλαίου της γεωμετρίας που περιλαμβάνει και τα τρίγωνα. Η μείωση της ύλης όμως, δεν αρκεί για την επίτευξη καλύτερων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Θα μπορούσαν να σχεδιαστούν εφαρμογές στα διαθέσιμα λογισμικά προγράμματα, οι οποίες να χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς στην τάξη, ώστε να διαμεσολαβούν υποστηρικτικά στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών. Ακόμη, θα ήταν χρήσιμο, τουλάχιστον για τις πρώτες τάξεις του γυμνασίου, να υπάρχουν διαθέσιμα διάφορα χειραπτικά υλικά αλλά και δραστηριότητες ώστε να μπορούν οι εκπαιδευτικοί να τα αξιοποιούν όσο το δυνατόν περισσότερο στην τάξη.

Σε επίπεδο έρευνας, τα παραπάνω αποτελέσματα θα πρέπει να επαληθευτούν και από άλλες έρευνες καθώς προέκυψαν από μια ποιοτική μελέτη ενός μικρού αριθμού παιδιών που επιλέχθηκαν με βάση την προσβασιμότητα της ερευνήτριας. Ενώ λοιπόν, τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας δεν μπορούν ενδεχομένως να γενικευτούν, μπορούν να δώσουν μια αξιόπιστη εικόνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά, ηλικίας 12-13 ετών, στην κατανόηση της γεωμετρικής έννοιας του τριγώνου, καθώς και προτάσεις για τη διαμόρφωση των μαθησιακών περιβαλλόντων που θα οδηγούσαν τους μαθητές σε ισχυρότερες, μαθηματικά, αντιλήψεις για τη συγκεκριμένη έννοια.

Ένα σημαντικό ερευνητικό ζήτημα με βάση τα όσα προέκυψαν είναι κατά πόσο θεωρείται ρεαλιστικός και επιτεύξιμος ο στόχος του Δ.Ε.Π.Π.Σ. (2003), σύμφωνα με τον οποίο οι μαθητές Α΄ τάξης γυμνασίου σε χρονικό διάστημα τεσσάρων διδακτικών ωρών θα έχουν κατανοήσει τις βασικές ιδιότητες του τριγώνου και επιπλέον έννοιες πιο δύσκολες όπως το ύψος, η διάμεσος και η διχοτόμος τριγώνου. Έτσι, προτείνεται να γίνει έρευνα σε μεγάλο δείγμα μαθητών από διάφορες περιοχές της Ελλάδας που ολοκληρώνουν τη φοίτησή τους στο δημοτικό, ώστε να ελεγχθεί το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης τους με βάση το μοντέλο van Hieles και να αποτελέσει έναυσμα για μια πιθανή αναδιαμόρφωση των γνωστικών στόχων του μαθήματος της γεωμετρίας στο γυμνάσιο.

Ερευνητική προέκταση αποτελεί η συγκέντρωση δεδομένων κι από άλλες έρευνες για τις προϋπάρχουσες ιδέες ή παρανοήσεις των μαθητών για διάφορα θέματα των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να ενημερώνονται και να λαμβάνουν υπόψη τους τις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας ώστε οι δραστηριότητες που σχεδιάζονται να καλύπτουν όσο το δυνατόν περισσότερο τις ανάγκες των μαθητών. Χρήσιμο είναι επίσης, σχετικά με τη βασική γεωμετρική έννοια του τριγώνου, να μελετηθεί πως αναπτύσσεται η σκέψη των μαθητών στις επόμενες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2007). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Αναγνωστοπούλου, Μ. (2001). *Η ομαδική διδασκαλία στην εκπαίδευση: Μια θεωρητική και εμπειρική προσέγγιση.* Αθήνα: Αφοί Κυριακίδη.

Αναγνωστοπούλου, Μ. (2007). Προτάσεις για την εφαρμογή της ομαδικής διδασκαλίας στο σύγχρονο σχολείο. Στο Ε. Μακρή – Μπότσαρη (Επιμ.), *Θέματα εισαγωγικής επιμόρφωσης για νεοδιόριστους εκπαιδευτικούς* (σελ. 37-47). Αθήνα: Υ.Π.Ε.Π.Θ./ Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Ανδρέου, Ξ, Μενελάου, Α., & Λεμονίδης, Χ. (2007). Αντιμετώπιση ρεαλιστικών προβλημάτων από μαθητές Ε΄ δημοτικού. Στο *Πρακτικά του 9ου Παγκύπριου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης*, Πάφος. Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από www.eled.uowm.gr/mathslife/arxeia%20selidas/PDF/44.pdf.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α. - Δ., & Σαΐτης, Α. (2007). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βερύκιος, Π. Γ. (2007). Τα νέα σχολικά βιβλία των μαθηματικών του γυμνασίου: Θεωρία και πράξη. Στο Σ. Παπασταυρίδης (Επιμ.), *Πρακτικά του 24ου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας με διεθνή συμμετοχή με θέμα «Η μαθηματική παιδεία σήμερα: Θεωρία και πράξη»* (σελ. 103-113). Κοζάνη: ΕΜΕ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Baroody, A., & Ginsburg, H. (1990) Chapter 4: Children’s mathematical learning: A cognitive view. Στο R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4* (pp. 51-64). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: Development and function of mathematizing as a social practice. Στο L. P. Steffe, & J. Gale (Eds.), Constructivism in education (pp. 137-158). Hillsdale, LJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanco, L. J. (2001). Errors in the teaching/ learning of the basic concepts of geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/lberrgeo.pdf.

Botson, C., & Deliege, M. (1998). *Οι προμαθηματικές διαδικασίες και έννοιες – Συμβολή στην κατανόηση της γνωστικής ψυχολογίας του Piaget* (Επιμ. Γ. Μ. Τρούλης). Αθήνα: Gutenberg.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Brown, J., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-42.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S., & Bedient, J. D. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών* (Μετ. Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου). Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικός.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48.

Γεωργιάδου-Καμπουρίδη, Β., & Μαρκόπουλος, Χ. (2007). *Μαθηματικά, Μεθοδολογικές Οδηγίες για τη δημιουργική χρήση των βιβλίων του μαθητή στα τμήματα ενισχυτικής διδασκαλίας Α΄, Β΄, Γ΄, Βιβλίο του δασκάλου.* Αθήνα: Επτάλοφος Α.Β.Ε.Ε.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? Στο M. E. Brenner, & J. N. Moschkovich (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 11* (pp. 131-153). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Choi-Koh, S. (1999). A student's learning of geometry using the computer. *Journal of Educational Research, 92*(5), 301-311.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 1-21.

Clements, D. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Στο D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

Clements, D. H., & McMillen, S. (1996). Rethinking “concrete” manipulatives. *Teaching Children Mathematics, 2*(5), 270-279.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). Chapter 9: Classrooms as learning environments for teachers and researchers. Στο R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4* (pp. 124-146). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Cohen, L., & Manion, L. (1997). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας* (Μετ. Χ. Μητσοπούλου, & Μ. Φιλοπούλου). Αθήνα: Εκδόσεις Έκφραση.

Confrey, J. (1990). Chapter 8: What constructivism implies for teaching. Στο R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4* (pp. 107-122). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Cooper, M., & Krainer, K. (1990). Children’s recognition of right-angled triangles in unlearned positions. Στο G. Booker, B. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference, Vol. 2* (pp. 227-234). Mexico: PME.

Crook, C. (1998). Children as computer users: the case of collaborative learning. *Computers and Education*, *30*(3/4), 237-247.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) (2003). *ΥΠΕΠΘ – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.* Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από www.pi-schools.gr.

Davis, P. J. (1995). The rise, fall, and possible transfiguration of triangle geometry: A mini-history. *The American Mathematical Monthly, 102*(3), 204-214.

Davis, R. B., Maher C. A., & Noddings, N. (1990). Chapter 12: Suggestions for the improvement of mathematics education. Στο R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics.*

Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4 (pp. 186-191). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S., & Choustoulakis, E. (2007). Developing a proof-writing tool for novice lyceum geometry students. *The Teaching of Mathematics, X*(2), 87-106.

Dishon, D., & O'Leary, P. W. (1984). *A guidebook for cooperative learning: A technique for creating more effective schools.* Florida: Learning Publications, Inc.

Driver, R., Guesne, E., & Tibergien, A. (1993). Οι ιδέες των παιδιών στις φυσικές επιστήμες (Μετ. Θ. Κρητικός, Β. Σπηλιωτοπούλου - Παπαντωνίου, & Α. Σταυρόπουλος). Αθήνα: Ένωση Ελλήνων Φυσικών & Τροχαλία.

Ernest, P. (1994). *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education*. London/Washington: Falmer Press.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph, 3*, i-196.

Ζακόπουλος, Β., & Τερζίδης, Σ. (2007). Η χρήση των μοτίβων στη μαθηματική διαδικασία: Μια διδακτική πρόταση με χρήση ΤΠΕ στο δημοτικό σχολείο. Στο *Πρακτικά του 4ου Συνέδριου ΤΠΕ στην Εκπαίδευση, Σύρος*. Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από epyna.gr/~agialama/synedrio_syros_4/daskaloi_nipiagogoi/129_ok_Zakopoulos_Terzides.pdf.

Goulding, M. (1999). Pupils learning mathematics. Στο S. Johnston-Wilder, P. Johnston-Wilder, D. Pimm, & J. Westwell (Eds.), *Learning to teach mathematics in the secondary school A companion to school experience* (pp. 37-52). USA/ Canada: Routledge.

Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(3), 253-275.

Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

Hannibal, M. A. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 353-357.

Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 157-179.

Herrera, T., Owens, D. (2001). The "new new math"?: Two reform movements in mathematics education. *Theory Into Practice*, *40*(2): 84-92.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. Στο M. M. Lindquist, & A. P. Shutle (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 222-135). Reston, VA: NCTM.

Holt, J. (1995). *Γιατί αποτυγχάνουν τα παιδιά* (Μετ. Δ. Τσαρμακλή). Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.

Hoyles, C. (2001) From describing to designing mathematical activity: The next step in developing the social approach to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 273-286.

Θωμαΐδης, Γ., & Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της ευκλείδειας γεωμετρίας.* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Idris, N. (2009). The impact of using Geometers' Sketchpad on Malaysian students' achievement and van Hiele geometric thinking. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 94-107.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1999). Making cooperative learning work. *Theory Into Practice, 38*(2), 67-73.

Καγκουρά, Θ., Γαγάτσης, Α., Μονογυιού, Α., & Ήλια, Ι. (2007). *Επίλυση ασυνήθιστων προβλημάτων και πεποιθήσεις των μαθητών δημοτικού και γυμνασίου Ελλάδας για τα μαθηματικά.* Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από http://epa-web.soe.ucy.ac.cy/courses/EPA678/15.%20kagoura%20all%202.pdf.

Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2007). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Καλδρυμίδου, Μ., Σακονίδης, Χ., & Τζεκάκη, Μ. (2005). Η διαχείριση των μαθηματικών νοημάτων στη σχολική τάξη. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τζανάκης, & Γ. Τρούλης (Επιμ.), *Πρακτικά της 4ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 134-146). Ρέθυμνο: ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Καργιωτάκης, Γ., Μαραγκού, Α., Μπελίτσου, Ν., & Σοφού, Β. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Δημοτικού, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Π. (2007). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Καψάλης, Α. (2007). *Παιδαγωγική ψυχολογία.* Αθήνα: Αφοί Κυριακίδη.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Κολέζα, Ε., & Ντζιαχρήστος, Β. (1990). Η διδασκαλία της γεωμετρίας στα σχολεία: Επίπεδα P. M. van Hiele. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 37*, 11-23.

Κολιάδης, Ε. (2002). *Γνωστική ψυχολογία, γνωστική νευροεπιστήμη και εκπαιδευτική πράξη.* Αθήνα: Ιδιωτική Έκδοση.

Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των τεχνολογιών της πληροφορίας και των επικοινωνιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Kahney, H. (1997). *Λύση προβλημάτων.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful? *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 21-31.

Kapp, E. (2009). Improving student teamwork in a collaborative project-based course. *College Teaching, 57*(3), 139-143.

Keazer, L. (2004). Students' misconceptions in middle school mathematics. *B.S. Undergraduate Mathematics Exchange, 2*(1). Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από http://www.bsu.edu/web/math/exchange/02-01/keazer.pdf.

Kelly, P. (2004). Children's experiences of mathematics. *Research in Mathematics Education, 6*(1), 37-57.

Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(2), 184-193.

Kynigos, C. (2007). Half-baked Microworlds in use in challenging teacher educators' knowing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(2), 87-111.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Καψάλης, Α., & Πνευματικός, Δ. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Δημοτικού, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι., & Σπανακά, Α. (2007). *Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού, Βιβλία μαθητή και εκπαιδευτικού.* Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137–167). Mahwah: Erlbaum.

Lerman, S. (1989). Constructivism, mathematics, and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 211-223.

Lindroth, L. (2005). How to… find online math manipulatives. *Teaching Pre K-8, 35*(4), 24-26.

Μακράκης, Β. (2000). *Υπερμέσα στην εκπαίδευση: μια κοινωνικο-εποικοδομιστική προσέγγιση*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Μακρή, Α., Αράπογλου, Α., Φράγκου, Ο., & Κυνηγός, Χ. (2006). Ο σχεδιασμός πλαισίων εκπαιδευτικών σεναρίων ως διαδικασία αναστοχασμού κατά την επιμόρφωση εκπαιδευτικών. Στο Δ. Ψύλλος, & Β. Δαγδιλέλης (Επιμ.), *Πρακτικά του 5ου Συνεδρίου της ΕΤΠΕ με θέμα «Οι τεχνολογίες της πληροφορίας και των επικοινωνιών στην εκπαίδευση»* (σελ.10-18). Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης και Πανεπιστήμιο Μακεδονίας. Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από etpe.gr/files/proceedings/22/1234427589_5%20etpe%2010-17.pdf.

Ματσαγγούρας, Η. (2004). *Ομαδοσυνεργατική διδασκαλία και μάθηση*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρης.

Maher, C. A., & Davis, R. B. (1990). Chapter 6: Building representations of children’s meanings. Στο R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4* (pp. 79-90). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Marchini, C., & Rinaldi, M. G. (2005). Geometrical pre-conceptions of 8 years old pupils. *Proceedings of CERME 4*, *Group 7* (pp. 748-755). Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG7.pdf.

Mason, M. M., & Schell, V. (1988). Geometric understanding and misconceptions among preservice and inservice mathematics teachers. Στο M. J. Behr, C. B. Lacampagne, & M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 290-296). DeCalb: Nothern Illinois University.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58-69.

McNair, R. E. (2000). Life outside the mathematics classroom: Implications for mathematics teaching reform. *Urban Education, 34*, 550-570.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal of Research in Mathematics Education*, *29*(2), 121-142.

Meyer, E. (1987). *Ομαδική διδασκαλία: Θεμελίωση και παραδείγματα* (Μετ. Λ. Κουτσούκης). Θεσσαλονίκη: Αφοί Κυριακίδη.

Moschkovich, J. N. (2002). An introduction to examining everyday and academic mathematical practices. Στο M. E. Brenner, & J. N. Moschkovich (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 11* (pp. 1-11). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 175-197.

Moyer, P. S., & Bolyard, J. J. (2002). Exploring representation in the middle grades: Investigations in geometry with virtual manipulatives. *The Australian Mathematics Teacher, 58*(1), 19-25.

Ντζιαχρήστος, Β., & Ζαράνης, Ν. (2001), Η αξιοποίηση της θεωρίας van Hiele στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών της Α΄ Γυμνασίου με τη βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 56*, 55-74.

National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) (1980). *An agenda for action.* N.C.T.M.: Reston Virginia.

Noddings, N. (1990). Chapter 1: Constructivism in mathematics education. Στο R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4* (pp. 7-18). Reston, Va: National Council of Teaching of Mathematics.

Nunes, T., Schliemann, A. D, & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge/ New York/ Oakleigh: Cambridge University Press.

Olkun, S., Sinoplu, N. B., & Deryakulu, D. (2005). Geometric exploration with dynamic geometry applications based on van Hiele levels. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Ανακτήθηκε στις 3 Αυγούστου, 2010, από http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/olkun.pdf.

Πατσιοδήμου, Α., & Γεωργαλά, Γ. (2008). Ενίσχυση των μαθηματικών δεξιοτήτων και σκέψης. Στο Σ. Παντελιάδου, & Φ. Αντωνίου (Επιμ.), *Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες* (σελ. 57-69). Θεσσαλονίκη: Γράφημα.

Πόρποδας, Κ. Δ. (2003). *Η μάθηση και οι δυσκολίες της (Γνωστική Προσέγγιση).* Πάτρα: Ελληνικά Γράμματα.

Paour, J. (1994). Ο Πιαζετικός εποικοδομισμός και η έννοια της διαμεσολαβημένης μαθησιακής εμπειρίας. Στο Γ. Παπαμιχαήλ (Επιμ.), *Κοινωνιο-γνωστική προσέγγιση και διδακτικές διαδικασίες της μάθησης των φυσικών και λογικο-μαθηματικών εννοιών στο σχολείο* (σελ. 79-108). Αθήνα: Gutenberg.

Papert, S. (1991). Νοητικές θύελλες: Παιδιά, ηλεκτρονικοί υπολογιστές και δυναμικές ιδέες (Επιμ. Γ. Κωτσάνης, Μετ. Α. Σταματίου). Αθήνα: Εκδόσεις Οδυσσέας.

Patsiomitou, S., & Emvalotis, A. (2010). Students movement through van Hiele levels in a dynamic geometry guided reinvention progress. *Journal of Mathematics and Technology*, 18-48.

Pegg, J., & Davey, G. (1989). Clarifying levels descriptors for children's understanding of some basic 2-D geometry shapes. *Mathematics Education Research Journal, 1*(1), 16-27.

Program for International Student Assessment (PISA) (2003). *Problem solving for tomorrow's world: First measures of cross-curricular competencies.* Organization for Economic Co-operation and Development.

Pfaff, E., & Huddleston, P. (2003). Does it matter if I hate teamwork? What impacts student attitudes toward teamwork. *Journal of Marketing Education, 25*(1), 37-45.

Ράπτης, Α., & Ράπτη, Α. (2003). *Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας: Ολιστική προσέγγιση, Τόμος Α΄.* Αθήνα: Εκδόσεις Αριστοτέλης Ράπτης.

Raphael, D., & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(2), 173- 190.

Robinson, E. (1976). Mathematical foundations of the development of spatial and geometrical concepts. Στο J. L. Martin, & D. A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry*. Columbus, Ohio: ERIC.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions*. England: Open University Press.

Σολομωνίδου, Χ. (1999). *Εκπαιδευτική τεχνολογία: Μέσα, υλικά, διδακτική χρήση και αξιοποίηση*. Αθήνα: Εκδόσεις Καστανιώτη.

Σολομωνίδου, Χ. (2001). *Σύγχρονη εκπαιδευτική τεχνολογία: Υπολογιστές και μάθηση στην κοινωνία της γνώσης*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κώδικας.

Schoenfeld, H. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. Στο D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-368). New York: Macmillan.

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2007). The transition to secondary school geometry: Can there be a "chain of school mathematics"? *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 159-169.

Senk, S. L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 309-321.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education. 26*(2), 114-145.

Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning theory* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Slavin, R. E. (1999). Comprehensive approaches to cooperative learning. *Theory Into Practice, 38*(2), 74-79.

Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 498-505.

Steffe, L. (2002). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. Στο E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 177-194). New York/ Boston/ Dordrecht/ London/ Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Steinbring, H. (Ed.) (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. USA: Springer.

Streefland, L. (2000). *Ρεαλιστικά μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση* (Επιμ. Ε. Κολέζα). Αθήνα: Leader Books.

Struik, D. J. (1982). *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών* (Μετ. Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου). Αθήνα: Ι. Ζαχαρόπουλος.

Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(4), 467-483.

Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom, 15*(2), 13-19.

Τάσου, Α. (1998). *Αριθμοί και άλλα....* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη - Χ. Βαφειάδης.

Τζεκάκη, Μ. (2003). Η εκχώρηση του μαθηματικού προβλήματος: Μια σημαντική φάση στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Μ. Κούρκουλος, Κ. Τζανάκης, & Γ. Τρούλης (Επιμ.), *Πρακτικά της 4ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 163-171). Ρέθυμνο: ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Τζίφας, Ν. (2005). *Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: Επίπεδα van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού.* Διπλωματική εργασία Διαπανεπιστημιακού – Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών με τίτλο «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Πανεπιστήμιο Αθηνών και Κύπρου, Αθήνα.

Τουμάσης, Μ. (2003). Το γεωμετρικό πρόβλημα: Κίνητρα για απόδειξη σε ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον. Στο *Πρακτικά του 20ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας με θέμα «Η διαδρομή του παιδιού στα μαθηματικά από την προσχολική ηλικία μέχρι την ενηλικίωση»* (σελ. 135-144). Βέροια: ΕΜΕ.

Τουμάσης, Μ. (2004). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών.* Αθήνα: Gutenberg.

Τρούλης, Μ. Γ. (1991). Πόσο ξέρουν οι μαθητές της έκτης τάξης τη γλώσσα των μαθηματικών. *Ευκλείδης Γ΄, 29*, 67-91.

Τσιμπουράκης, Δ. (2004). *Η γεωμετρία στην Αρχαία Ελλάδα.* Αθήνα: Ατραπός.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project)*. Chicago: University of Chicago, Department of Education. Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από http://eric.ed.gov/PDFS/ED220288.pdf.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(4), 287-307.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273-294.

Vighi, P. (2003). The triangle as a mathematical object. Στο *Proceedings of CERME 3, Group 7*. Ανακτήθηκε στις 22 Σεπτεμβρίου, 2010, από http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_list.html.

Von Glasersfeld, E. (Ed.) (2002). *Radical constructivism in mathematics education*. New York/ Boston/ Dordrecht/ London/ Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Winter, J., Salway, L., Yee, W. C., & Hughes, M. (2004). Linking home and school mathematics: The home school knowledge exchange project. *Research in Mathematics Education, 6*(1), 59-75.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. Στο J. L. Martin, & D. A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry*. Columbus, Ohio: ERIC.

Wu, D. B., & Ma, H. L. (2005). A study of the geometric concepts of the elementary school students at the van Hiele level one. Στο H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 329-336). Melbourne: PME.

Wu, D. B., & Ma, H. L. (2006). The distributions of van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. Στο J. Novotna, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 5* (pp. 409-416). Prague: PME.

Wyndhamn, J., & Saljo, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning - A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction, 7*(4), 361-382.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction, 7*(4), 329-338.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:

Ερωτηματολόγια

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

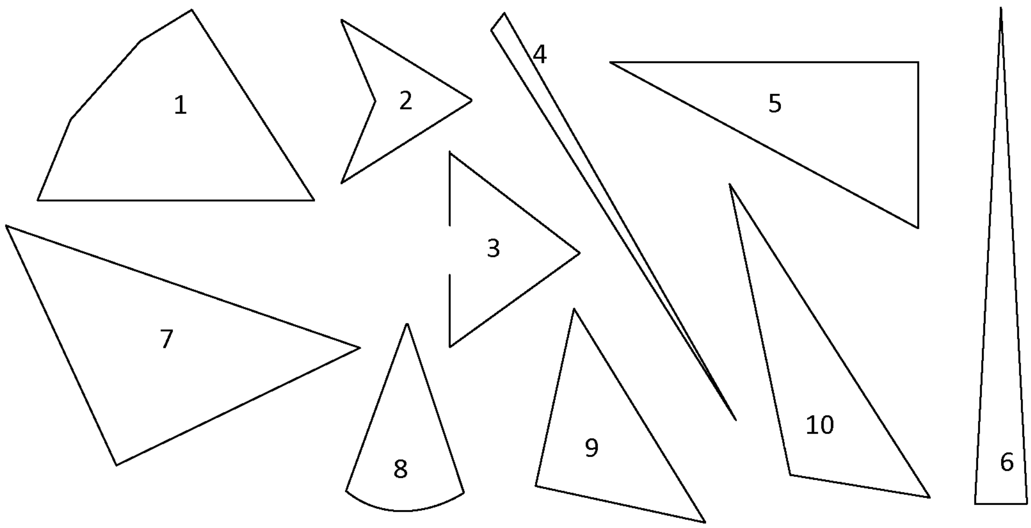
Ονοματεπώνυμο: ……………………… Τμήμα: …… Ημερομηνία: … / … / 2010

Αρχικό ερωτηματολόγιο

Αγαπητέ φίλε μαθητή ή αγαπητή φίλη μαθήτρια, σε παρακαλώ να συμπληρώσεις αυτό το ερωτηματολόγιο, με το οποίο δεν επιθυμώ να αξιολογήσω τις γνώσεις σου, ούτε να βαθμολογήσω το πόσο καλά απάντησες στις ερωτήσεις. Με ενδιαφέρει, απλώς, να δω τις απόψεις που εσύ έχεις για κάποια θέματα των Μαθηματικών που σχετίζονται με τα τρίγωνα, με σκοπό να γίνει το μάθημα καλύτερο και πιο ευχάριστο για σένα.

Ευχαριστώ, Βάσω Χρυσικού

1) Ποια από τα παρακάτω σχήματα <u>δεν</u> είναι τρίγωνα;



………………………………………………………………………………………

Γράψε πώς σκέφτηκες.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

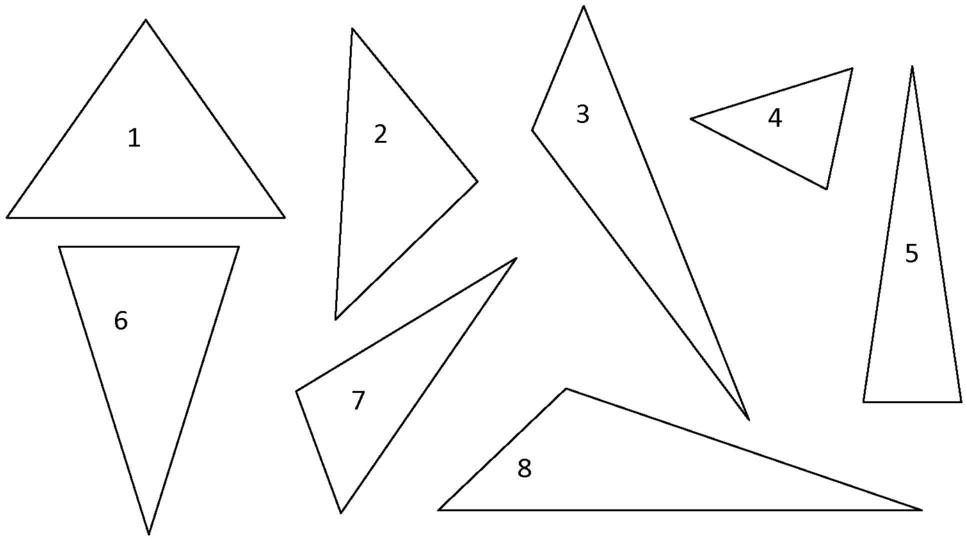
2) Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 3cm, 5cm και 9cm ή τρίγωνο με πλευρές 4cm, 5cm και 9cm. Γράψε πώς σκέφτηκες.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3) Σχημάτισε ομάδες με τα παρακάτω τρίγωνα και γράψε για κάθε ομάδα με ποιον τρόπο ταιριάζουν.



………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

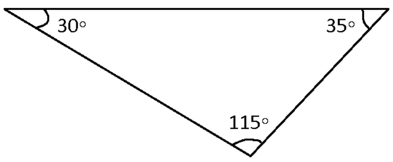
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

4) Το παρακάτω τρίγωνο είναι ορθογώνιο, οξυγώνιο ή αμβλυγώνιο;



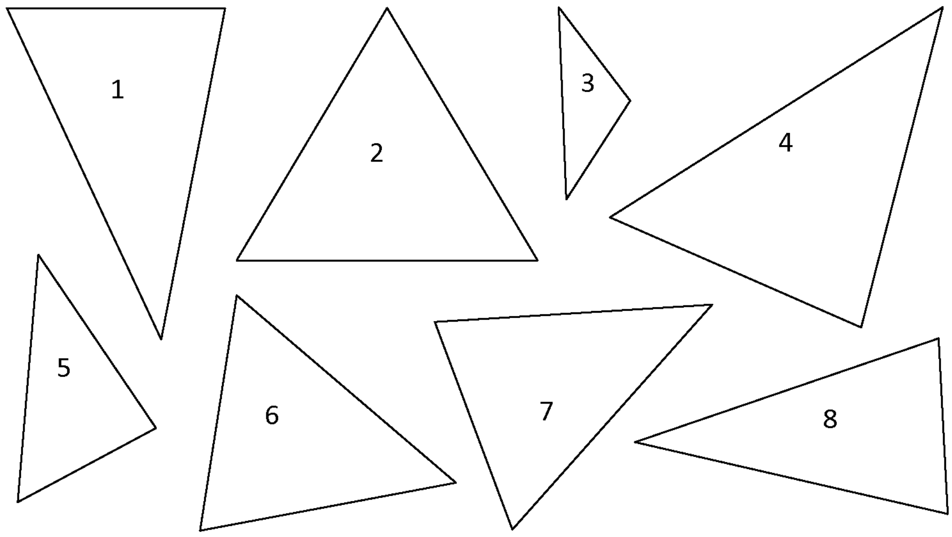
………………………………………………………………………………………

Γράψε πώς σκέφτηκες.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

5) Ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ισοσκελή;

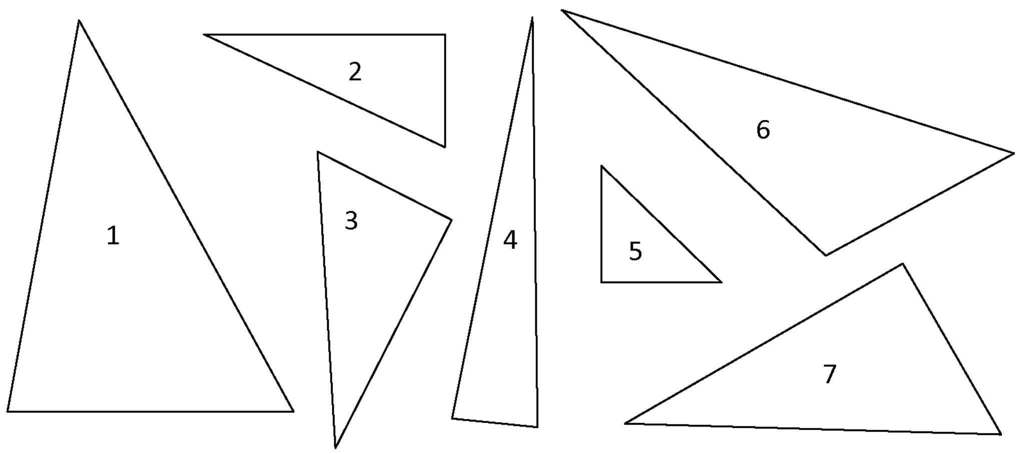


……………………………………………………………………………………

Γράψε πώς σκέφτηκες.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

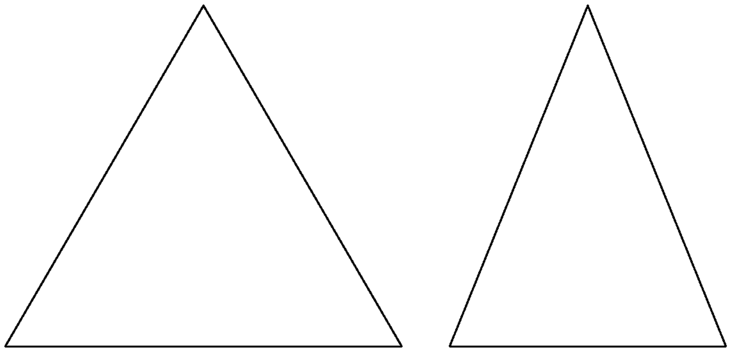
6) Ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια;



……………………………………………………………………………………

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο σημείωσε στο σχήμα την ορθή γωνία.

7) Με ποιον τρόπο τα παρακάτω δύο σχήματα είναι διαφορετικά μεταξύ τους; Γράψε όσους περισσότερους τρόπους μπορείς.



……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

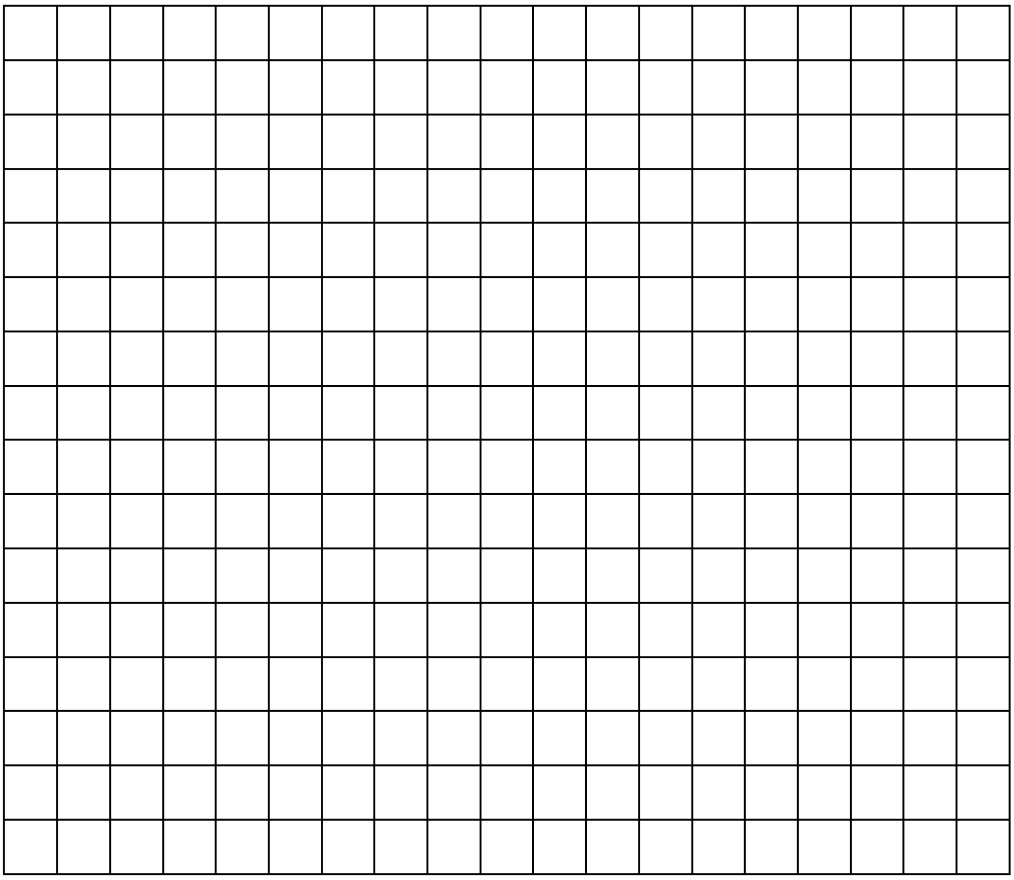
……………………………………………………………………………………………

8) Σχεδίασε ένα τρίγωνο.

Σχεδίασε ένα διαφορετικό τρίγωνο.

Σχεδίασε άλλο ένα διαφορετικό από τα προηγούμενα τρίγωνο.

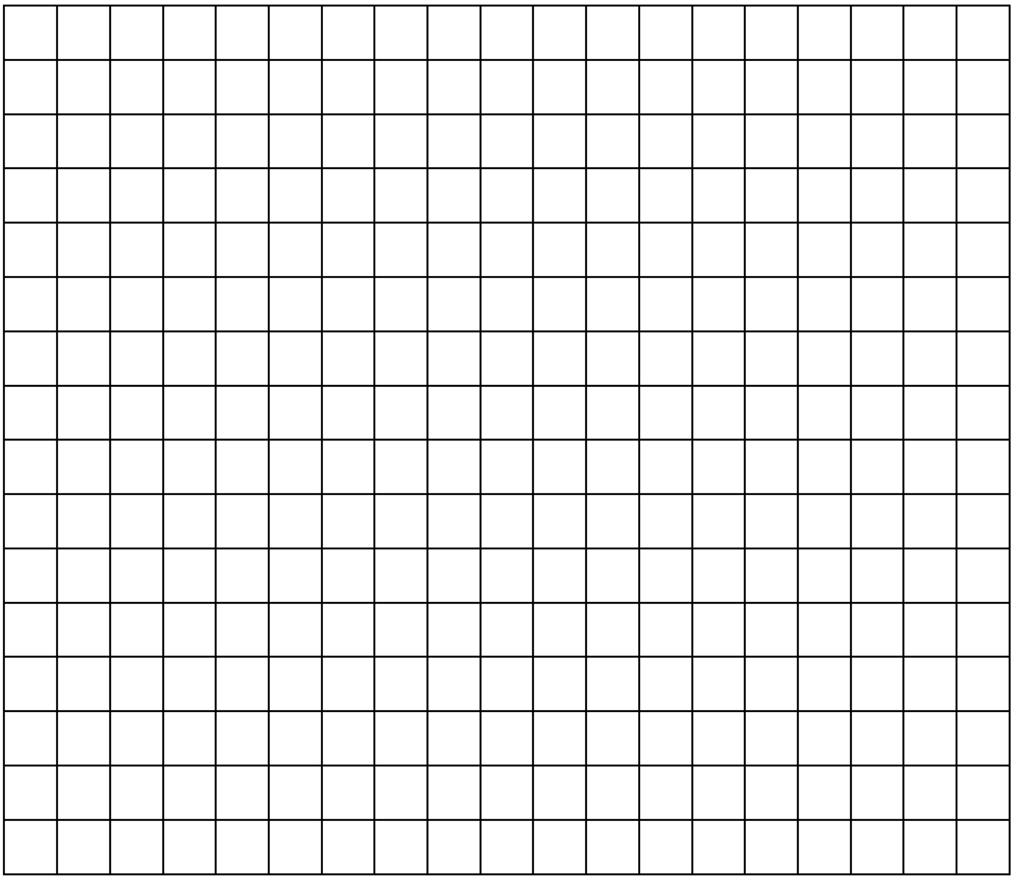
Σχεδίασε άλλο ένα διαφορετικό από όλα τα προηγούμενα τρίγωνο.



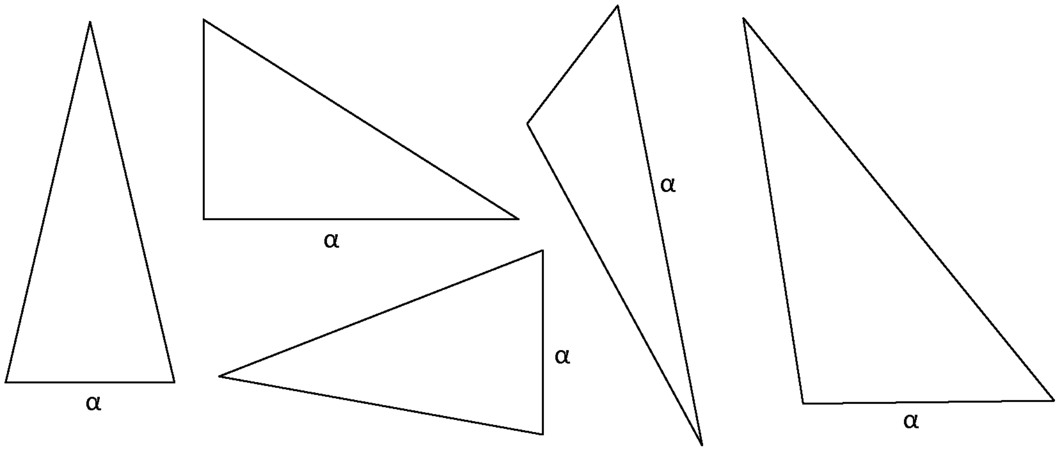
9) Σχεδίασε 2 οξυγώνια τρίγωνα.

Σχεδίασε 2 αμβλυγώνια τρίγωνα.

Σχεδίασε 2 ορθογώνια τρίγωνα.



10) Σε καθένα από τα επόμενα τρίγωνα σχεδίασε το ύψος στην πλευρά που έχει το γράμμα α.



11) Ποια από τα παρακάτω θα μπορούσες να σχεδιάσεις:

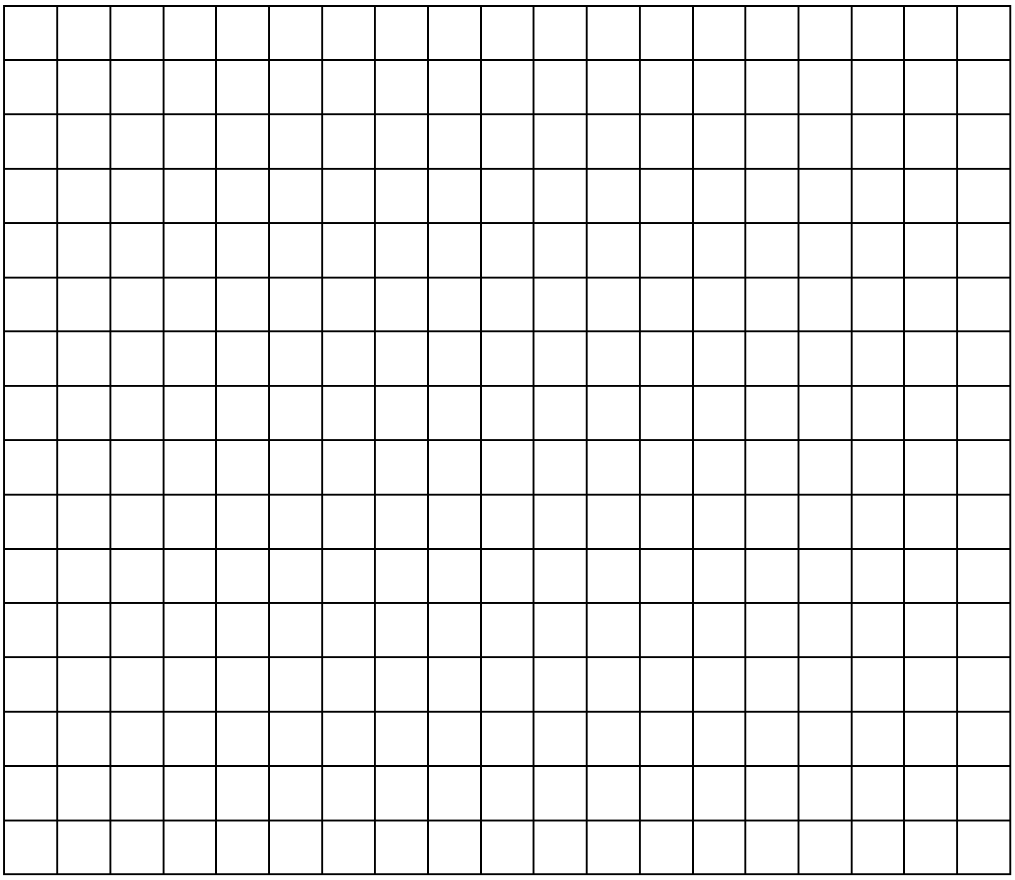
α) Ένα τρίγωνο που να έχει δύο ορθές γωνίες.

β) Ένα τρίγωνο που να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

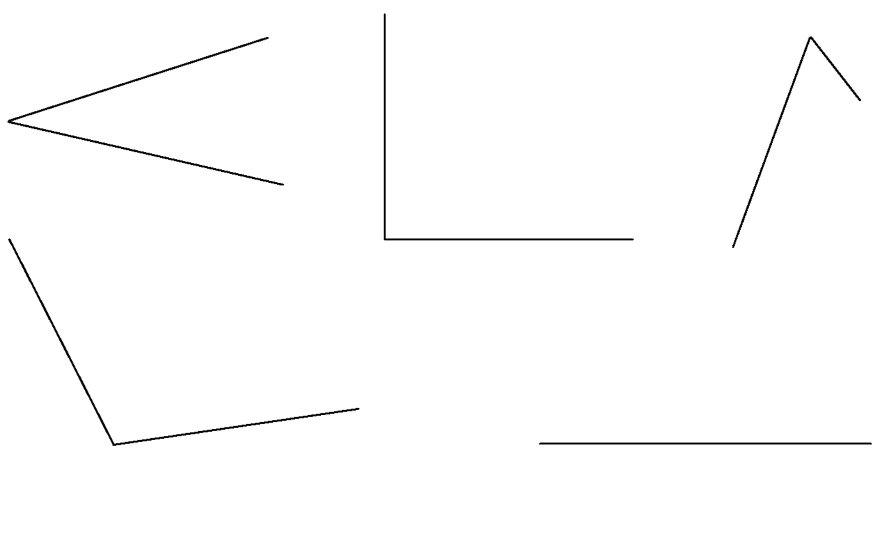
γ) Ένα τρίγωνο που να είναι ορθογώνιο και ισόπλευρο.

δ) Ένα τρίγωνο που να είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.

ε) Ένα τρίγωνο που να είναι ισοσκελές και αμβλυγώνιο.



12) Σχεδίασε τη διχοτόμο σε καθεμία από τις επόμενες γωνίες.



Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

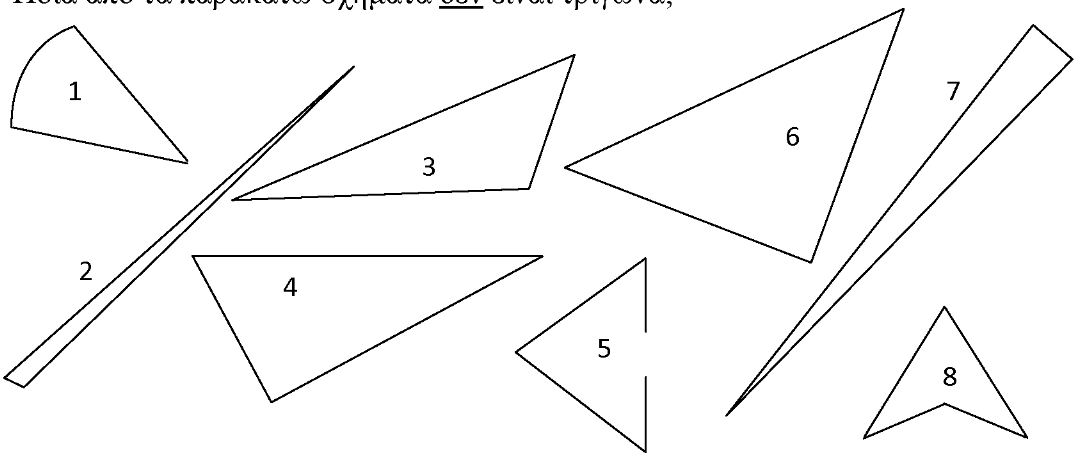
Ονοματεπώνυμο: ……………………… Τμήμα: …… Ημερομηνία: … / … / 2010

Τελικό ερωτηματολόγιο

Αγαπητέ φίλε μαθητή ή αγαπητή φίλη μαθήτρια, σε παρακαλώ να συμπληρώσεις αυτό το ερωτηματολόγιο, με το οποίο δεν επιθυμώ να αξιολογήσω τις γνώσεις σου, ούτε να βαθμολογήσω το πόσο καλά απάντησες στις ερωτήσεις. Με ενδιαφέρει, απλώς, να δω τις απόψεις που εσύ έχεις για κάποια θέματα των Μαθηματικών που σχετίζονται με τα τρίγωνα, ύστερα από τη διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε.

Ευχαριστώ, Βάσω Χρυσικού

1) Ποια από τα παρακάτω σχήματα <u>δεν</u> είναι τρίγωνα;



………………………………………………………………………………………

Γράψε πώς σκέφτηκες.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2) Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές: α) 3cm, 5cm και 9cm, ή β) 4cm, 5cm και 9cm;

Γράψε πώς σκέφτηκες.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3) Υπάρχει τρίγωνο με γωνίες: α) 10°, 85° και 90°, ή β) 50°, 50° και 70°;

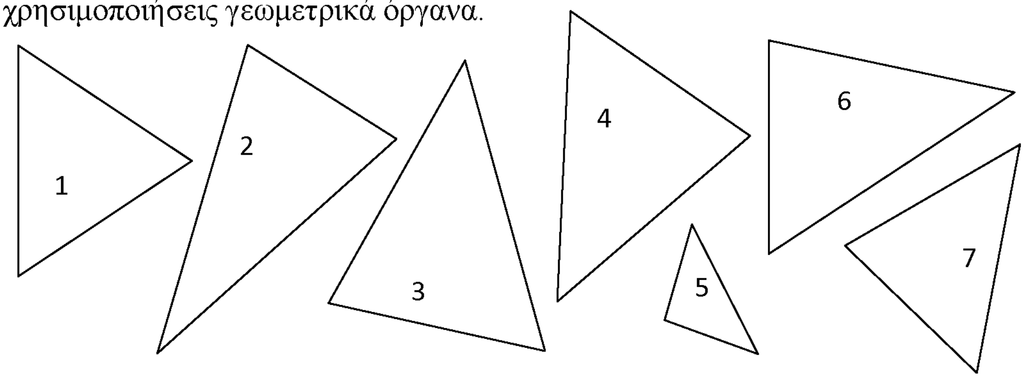
Γράψε πώς σκέφτηκες.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4) Ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ισοσκελή; Αν θέλεις μπορείς να χρησιμοποιήσεις γεωμετρικά όργανα.



……………………………………………………………………………………

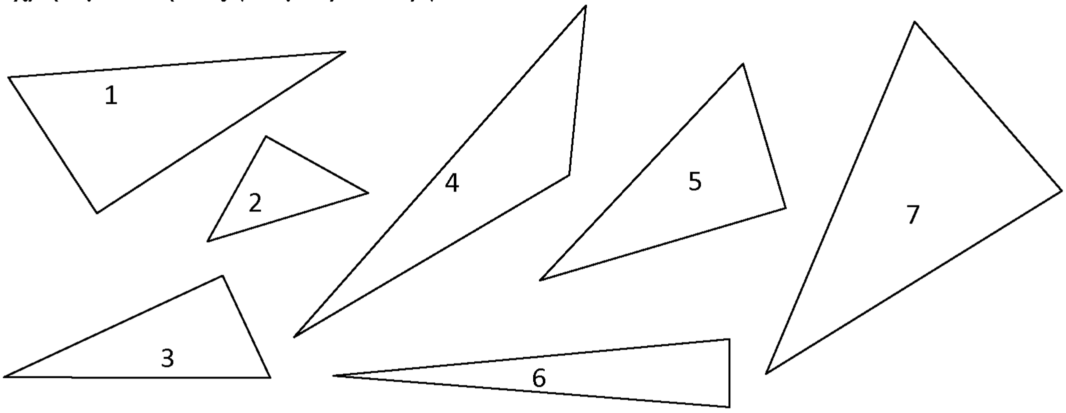
Γράψε πώς σκέφτηκες.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

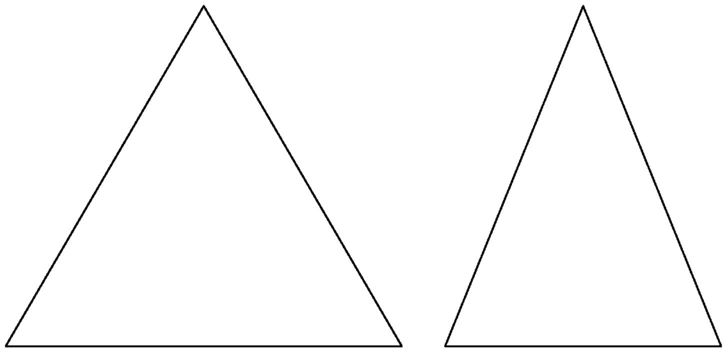
5) Ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια; Αν θέλεις μπορείς να χρησιμοποιήσεις γεωμετρικά όργανα.



……………………………………………………………………………………

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο σημείωσε στο σχήμα την ορθή γωνία.

6) Με ποιον τρόπο τα παρακάτω δύο τρίγωνα είναι διαφορετικά μεταξύ τους; Γράψε όσους περισσότερους τρόπους μπορείς.



………………………………………………………………………………………

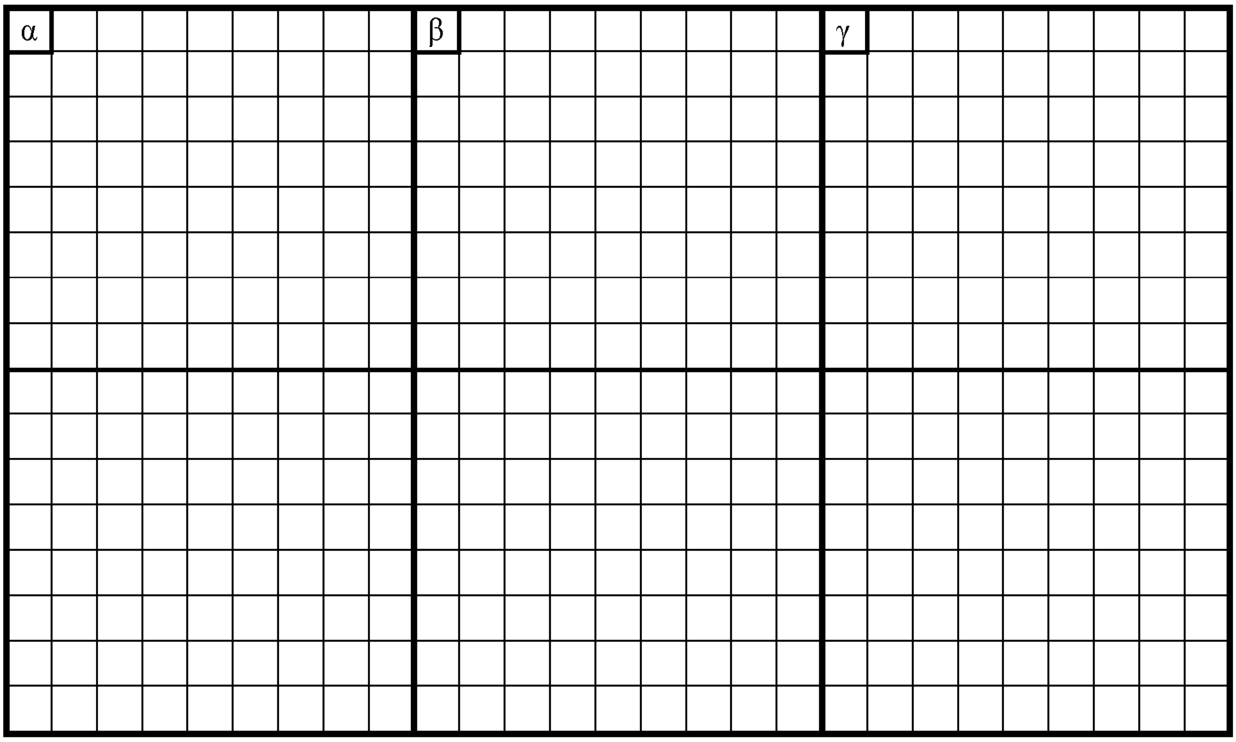
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

7) Σχεδίασε α) 2 οξυγώνια τρίγωνα,

β) 2 αμβλυγώνια τρίγωνα, και

γ) 2 ορθογώνια τρίγωνα.



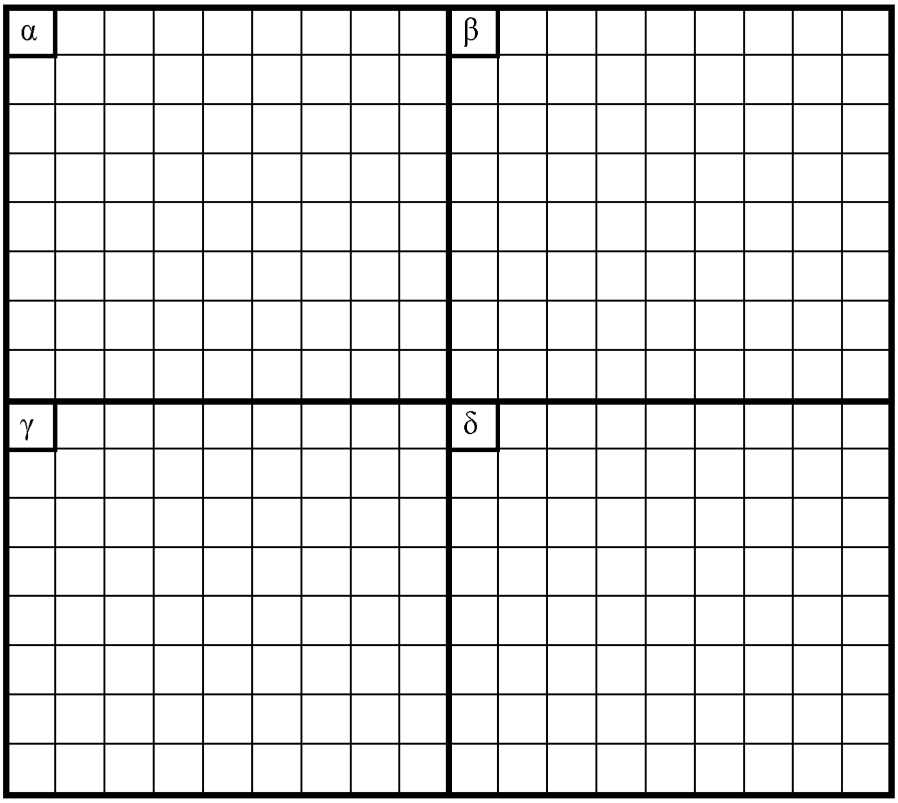
8) Ποια από τα παρακάτω θα μπορούσες να σχεδιάσεις:

α) Ένα τρίγωνο που να έχει δύο ορθές γωνίες.

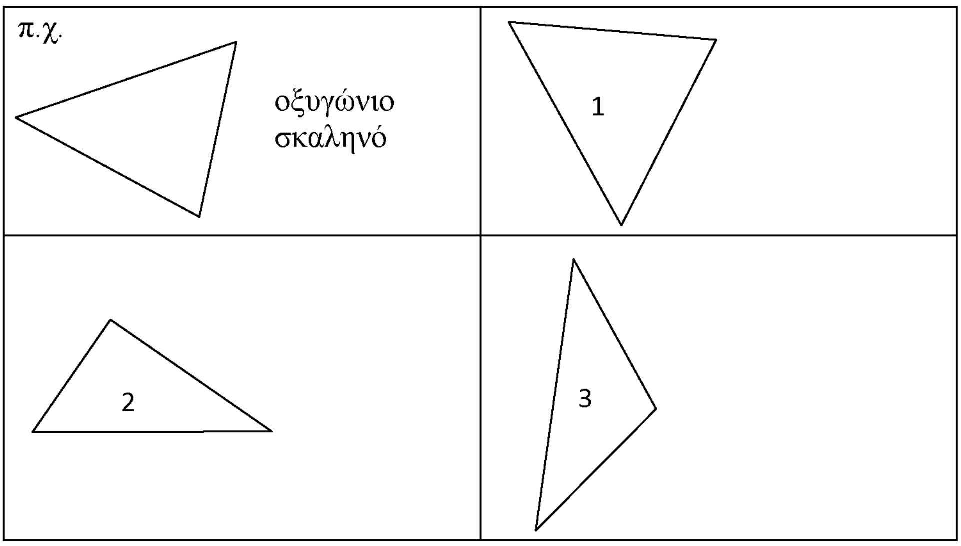
β) Ένα τρίγωνο που να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

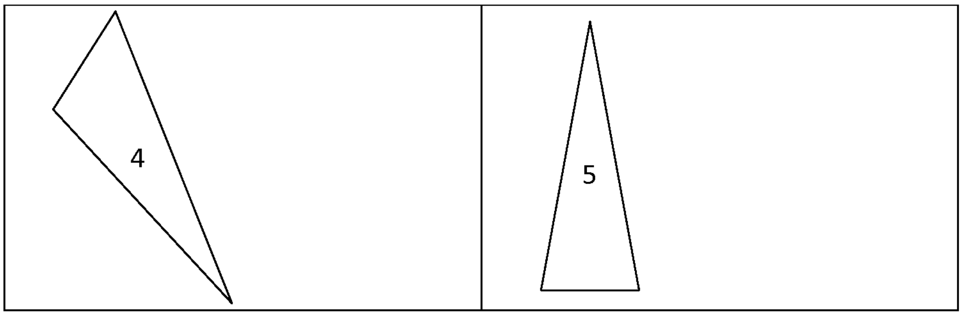
γ) Ένα τρίγωνο που να είναι ορθογώνιο και ισόπλευρο.

δ) Ένα τρίγωνο που να είναι ισοσκελές και αμβλυγώνιο.

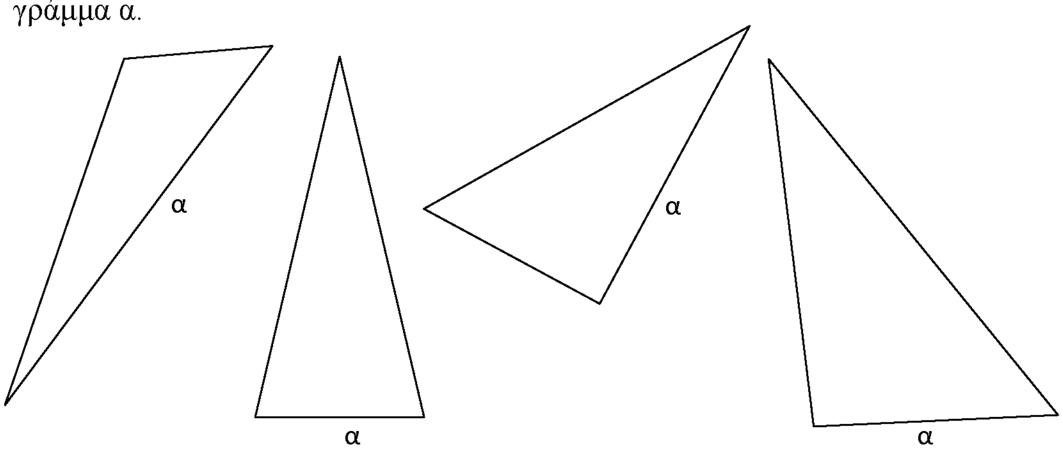


9) Σημείωσε σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα τι είδους τρίγωνα είναι με βάση τα κριτήρια κατάταξης τριγώνων.

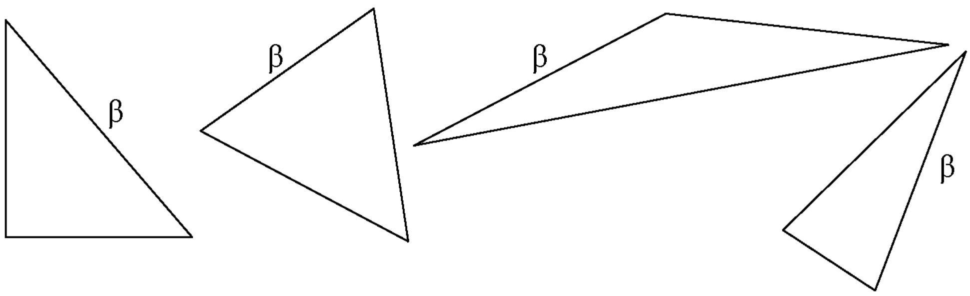




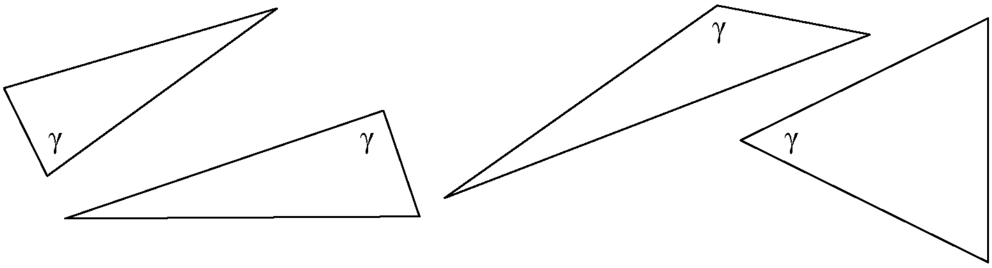
10) Σε καθένα από τα επόμενα τρίγωνα σχεδίασε το ύψος στην πλευρά που έχει το γράμμα α.



11) Σε καθένα από τα επόμενα τρίγωνα σχεδίασε τη διάμεσο στην πλευρά που έχει το γράμμα β.



12) Σε καθένα από τα επόμενα τρίγωνα σχεδίασε τη διχοτόμο στη γωνία που έχει το γράμμα γ.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β:

Φυλλάδια εργασίας

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ - ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ - ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ - ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Ημερομηνία: … /… / 2010

Ονοματεπώνυμο μαθητών: 1) ………………………………………………

2) ………………………………………………

1ο Φυλλάδιο εργασίας

Σενάριο

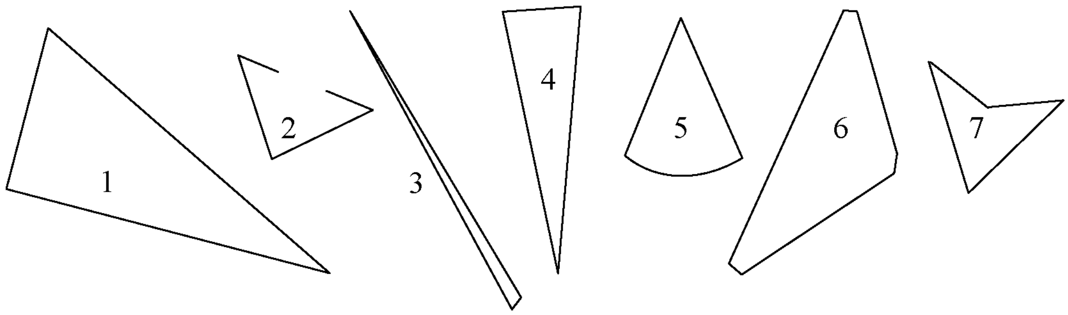
Το 1ο Γυμνάσιο Λαμίας οργάνωσε εκδρομή στην Πελοπόννησο και οι μαθητές είχαν τη μοναδική ευκαιρία να θαυμάσουν μία από τις μεγαλύτερες σε μήκος κρεμαστές γέφυρες του κόσμου. Πρόκειται για τη γέφυρα που συνδέει το Ρίο με το Αντίρριο και ονομάζεται Γέφυρα «Χαρίλαος Τρικούπης». Τα παιδιά εντυπωσιάστηκαν από την καλωδιωτή γέφυρα που κατασκευάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνει τη διέλευση των πλοίων. Η Ανθή και ο Νικόλας διαπίστωσαν ότι η γέφυρα αποτελείται από πολλά διαφορετικά τρίγωνα. Δε γνώριζαν ότι τα τρίγωνα χρησιμοποιούνται για την κατασκευή γεφυρών!

Ο Νικόλας και η Ανθή δε θυμούνται πολύ καλά τι είχαν πει στο σχολείο για τα τρίγωνα. Βοηθήστε τα παιδιά να καταλάβουν γιατί είναι τόσο σημαντική η έννοια του τριγώνου.

1Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Βασικά στοιχεία τριγώνου» που βρίσκεται στην Επιφάνεια εργασίας. Μπορείτε να αλλάξετε το μέγεθός του τριγώνου που βλέπετε επιλέγοντας κάποια από τις κορυφές του.

1. Μετασχηματίστε το τρίγωνο που σας δίνεται ώστε να πάρει τις παρακάτω μορφές.



Ποια από τα παραπάνω σχήματα δεν μπορείτε να φτιάξετε; Σκεφτείτε ομαδικά και εξηγήστε γιατί.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

2. Ποια είναι τα βασικά στοιχεία που έχει ένα τρίγωνο;

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Άθροισμα γωνιών τριγώνου» που βρίσκεται στην Επιφάνεια εργασίας.

3. Μετακινώντας τα σημεία Α και Μ μετασχηματίστε το τρίγωνο που βλέπετε στον υπολογιστή σε 3 διαφορετικά τρίγωνα και σημειώστε για καθένα από αυτά το μέγεθος των γωνιών τους. Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες των τριγώνων αυτών;

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

4. Υπάρχει τρίγωνο που να έχει 2 ορθές γωνίες; Εάν υπάρχει σχεδιάστε το, αλλιώς εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

5. Υπάρχει τρίγωνο που να έχει 2 αμβλείες γωνίες; Εάν υπάρχει σχεδιάστε το, αλλιώς εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

6. Υπάρχει τρίγωνο με γωνίες 40°, 60° και 90°;

....

....

3Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Τριγωνική ανισότητα» που βρίσκεται στην Επιφάνεια εργασίας. Χρησιμοποιήστε τις ράβδους που βρίσκονται δεξιά της οθόνης για να αλλάξετε το μέγεθος των ΑΒ, ΑΜ, ΒΝ. Προσπαθήστε να φτιάξετε τρίγωνα με διάφορα μήκη πλευρών, ενώνοντας τα σημεία Μ και Ν. Δοκιμάστε 10 τουλάχιστον διαφορετικούς συνδυασμούς από 3 πλευρές.

7. Κάντε μια λίστα από συνδυασμούς που σχηματίζουν τρίγωνα.

....

....

....

8. Κάντε μια λίστα από συνδυασμούς που <u>δε</u> σχηματίζουν τρίγωνα.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

9. Σκεφτείτε ομαδικά και απαντήστε γιατί κάποιοι συνδυασμοί σχηματίζουν τρίγωνα, ενώ κάποιοι άλλοι όχι.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

10. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 6cm, 3cm και 2cm; Εάν υπάρχει σχεδιάστε το, αλλιώς εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

11. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 6cm, 3cm και 3cm; Εάν υπάρχει σχεδιάστε το, αλλιώς εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

4Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Χρησιμοποιήστε το γεωπίνακα για να φτιάξετε όσα περισσότερα διαφορετικά τρίγωνα μπορείτε.

12. Ποια είναι τα δύο κριτήρια με βάση τα οποία κατατάσσουμε τα τρίγωνα;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

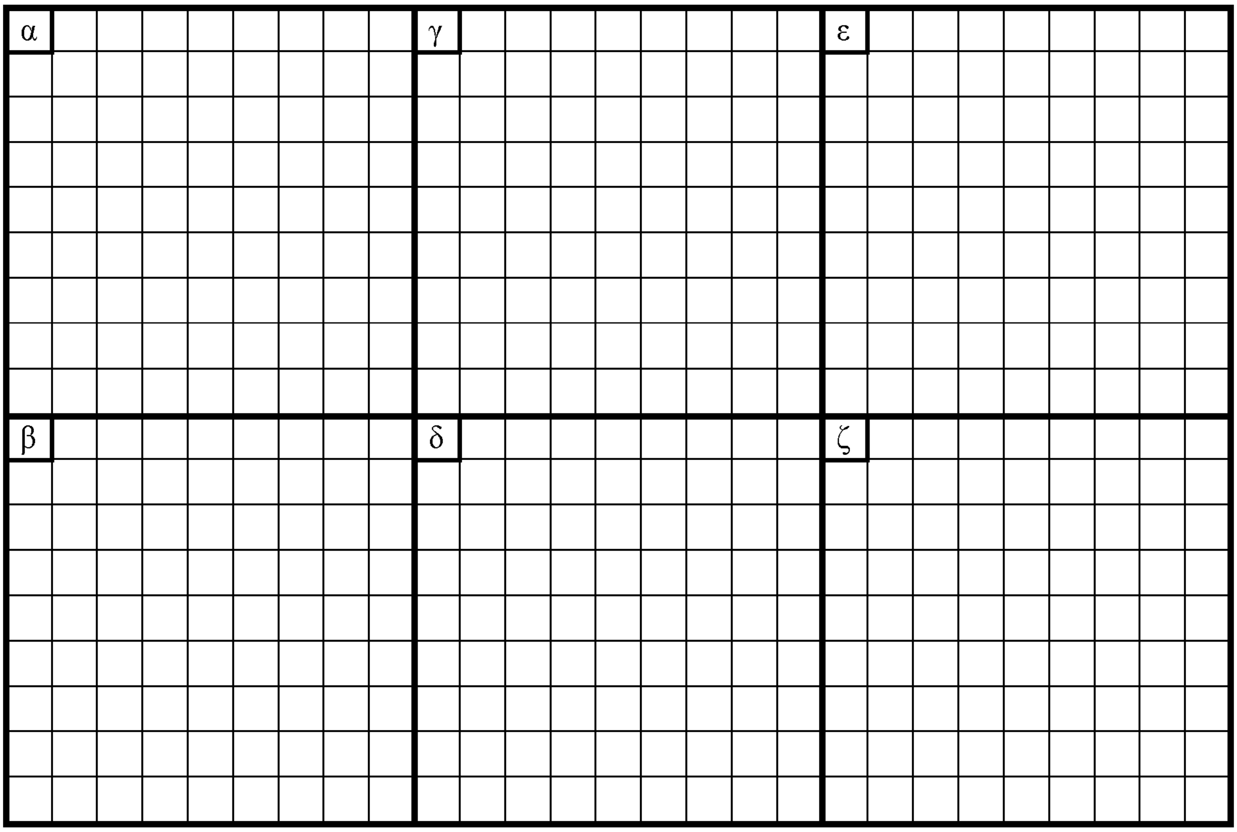
Συνεργαστείτε και απαντήστε στην επόμενη ερώτηση:

13. Ένα τρίγωνο μπορεί να ανήκει σε δύο ομάδες με βάση τα κριτήρια κατάταξης, π.χ. οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο. Συνεργαστείτε για να δημιουργήσετε στο γεωπίνακα τα ακόλουθα τρίγωνα. Έπειτα σχεδιάστε τα στο παρακάτω πλαίσιο.

α) οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο, **β)** οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο,

γ) ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο, **δ)** ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο,

ε) αμβλυγώνιο σκαληνό τρίγωνο, **ζ)** αμβλυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο.



ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ – ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ – ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Τάξη: Α΄ Γυμνασίου

Ημερομηνία: … /… / 2010

Ονοματεπώνυμο μαθητών: 1) …………………………………………………

2) …………………………………………………

2ο Φυλλάδιο εργασίας

1Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Ύψος τριγώνου» που βρίσκεται στην Επιφάνεια εργασίας. Μπορείτε να επιλέξετε τα εργαλεία που βρίσκονται στη γραμμή εντολών για να σχεδιάσετε κάποιο αντικείμενο.

1. Μετασχηματίστε το τρίγωνο που βλέπετε στον υπολογιστή ώστε να είναι οξυγώνιο. Σχεδιάστε το τρίγωνο αυτό στο παρακάτω πλαίσιο και το ύψος του στην πλευρά a.

2. Μετασχηματίστε το τρίγωνο που βλέπετε στον υπολογιστή ώστε να είναι ορθογώνιο, με ορθή τη γωνία Α. Σχεδιάστε το τρίγωνο αυτό στο παρακάτω πλαίσιο και το ύψος του στην πλευρά b.

3. Μετασχηματίστε το τρίγωνο που βλέπετε στον υπολογιστή ώστε να είναι αμβλυγώνιο, με αμβλεία τη γωνία Β. Σχεδιάστε το τρίγωνο αυτό στο παρακάτω πλαίσιο και το ύψος του στην πλευρά c.

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

4. Πόσα ύψη έχει ένα τρίγωνο;

……………………………………………………………………………………

5. Το ύψος ενός τριγώνου βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου;

……………………………………………………………………………………

2Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Διάμεσος τριγώνου» που βρίσκεται στην Επιφάνεια εργασίας. Μπορείτε να επιλέξετε τα εργαλεία που βρίσκονται στη γραμμή εντολών για να σχεδιάσετε κάποιο αντικείμενο.

6. Μετασχηματίστε το τρίγωνο που βλέπετε στον υπολογιστή σε ένα άλλο τρίγωνο. Σχεδιάστε το τρίγωνο αυτό στο παρακάτω πλαίσιο και τη διάμεσό του στην πλευρά b.

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

7. Πόσες διαμέσους έχει ένα τρίγωνο;

…………………………………………………………………………………………

8. Η διάμεσος ενός τριγώνου βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου;

…………………………………………………………………………………………

3Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κάντε διπλό κλικ στο εικονίδιο «Διχοτόμος τριγώνου» που βρίσκεται στην Επιφάνεια εργασίας. Μπορείτε να επιλέξετε τα εργαλεία που βρίσκονται στη γραμμή εντολών για να σχεδιάσετε κάποιο αντικείμενο.

9. Μετασχηματίστε το τρίγωνο που βλέπετε στον υπολογιστή σε ένα άλλο τρίγωνο. Σχεδιάστε το τρίγωνο αυτό στο παρακάτω πλαίσιο και τη διχοτόμο του στη γωνία C.

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

10. Πόσες διχοτόμους έχει ένα τρίγωνο;

…………………………………………………………………………………………

11. Η διχοτόμος ενός τριγώνου βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του τριγώνου;

…………………………………………………………………………………………

4Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

12. Ποια σχέση ισχύει για τις πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου;

…………………………………………………………………………………………

13. Ποια σχέση ισχύει για τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

14. Στο τρίγωνο που σας δόθηκε σχεδιάστε τη διάμεσό του που αντιστοιχεί στην πλευρά α.

Τι ισχύει για τη διάμεσο, τη διχοτόμο και το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στη βάση του;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

15. Το ισοσκελές τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Συνεργαστείτε και απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις:

16. Ποια σχέση ισχύει για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

17. Ποια σχέση ισχύει για τις γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

18. Στο τρίγωνο που σας δόθηκε σχεδιάστε το ύψος του που αντιστοιχεί στην πλευρά β.

Τι ισχύει για κάθε διάμεσο, διχοτόμο και ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου;

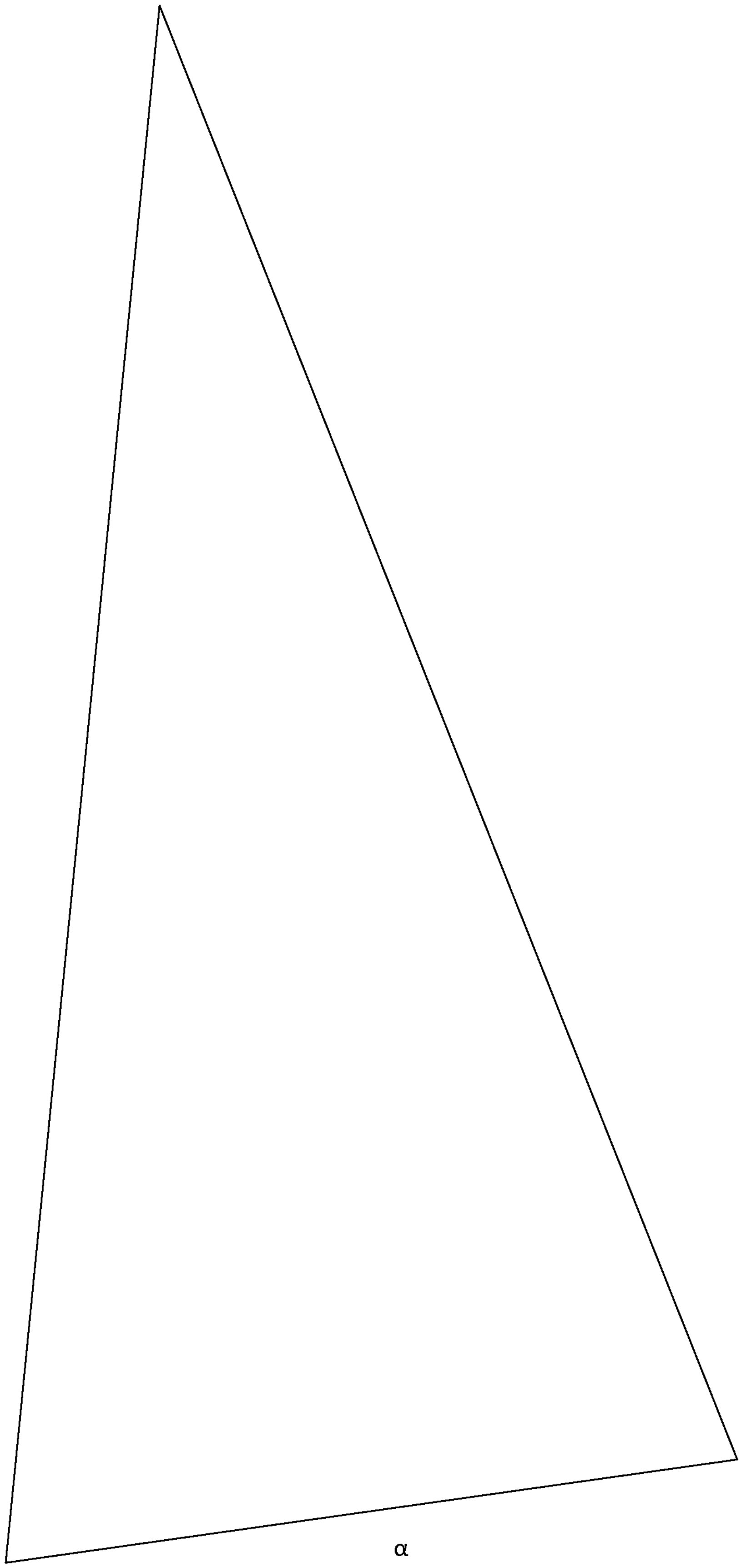
……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

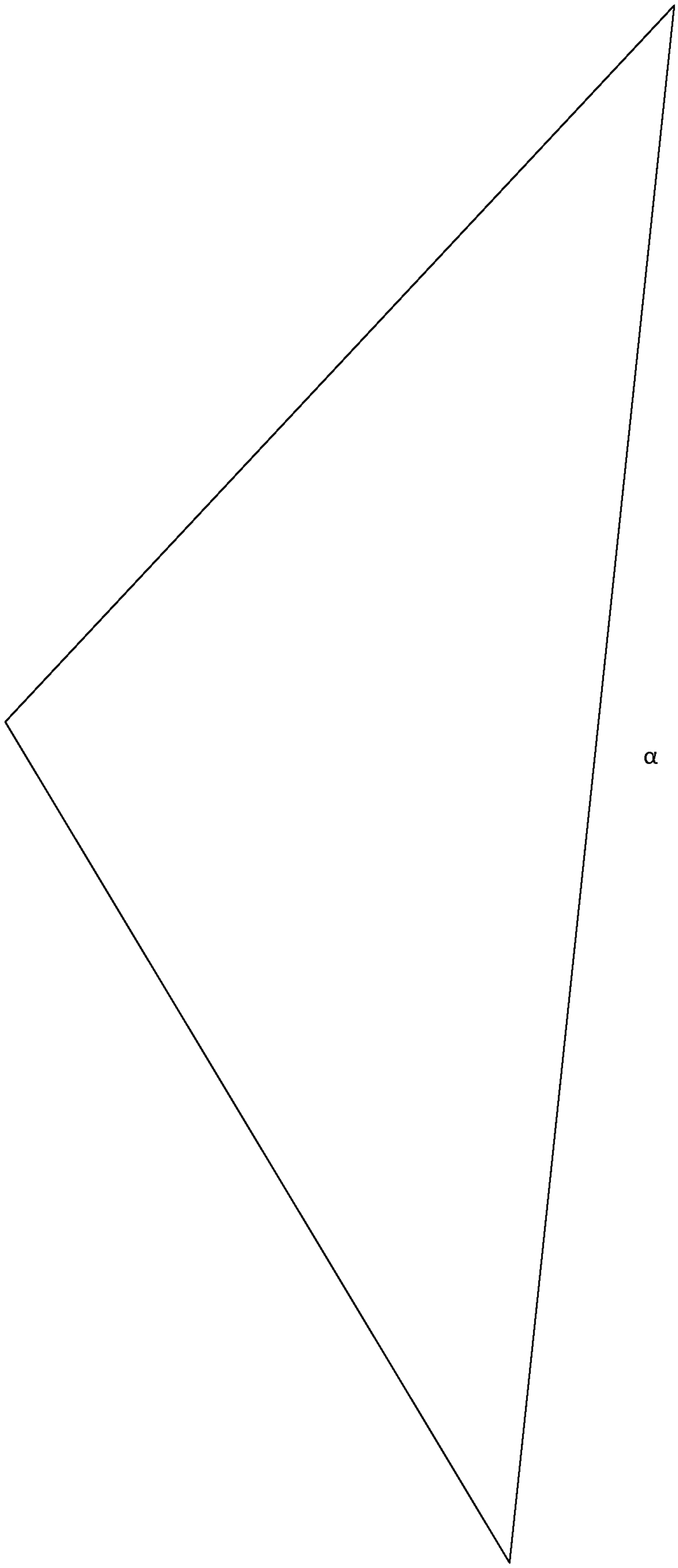
19. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας;

……………………………………………………………………………………………

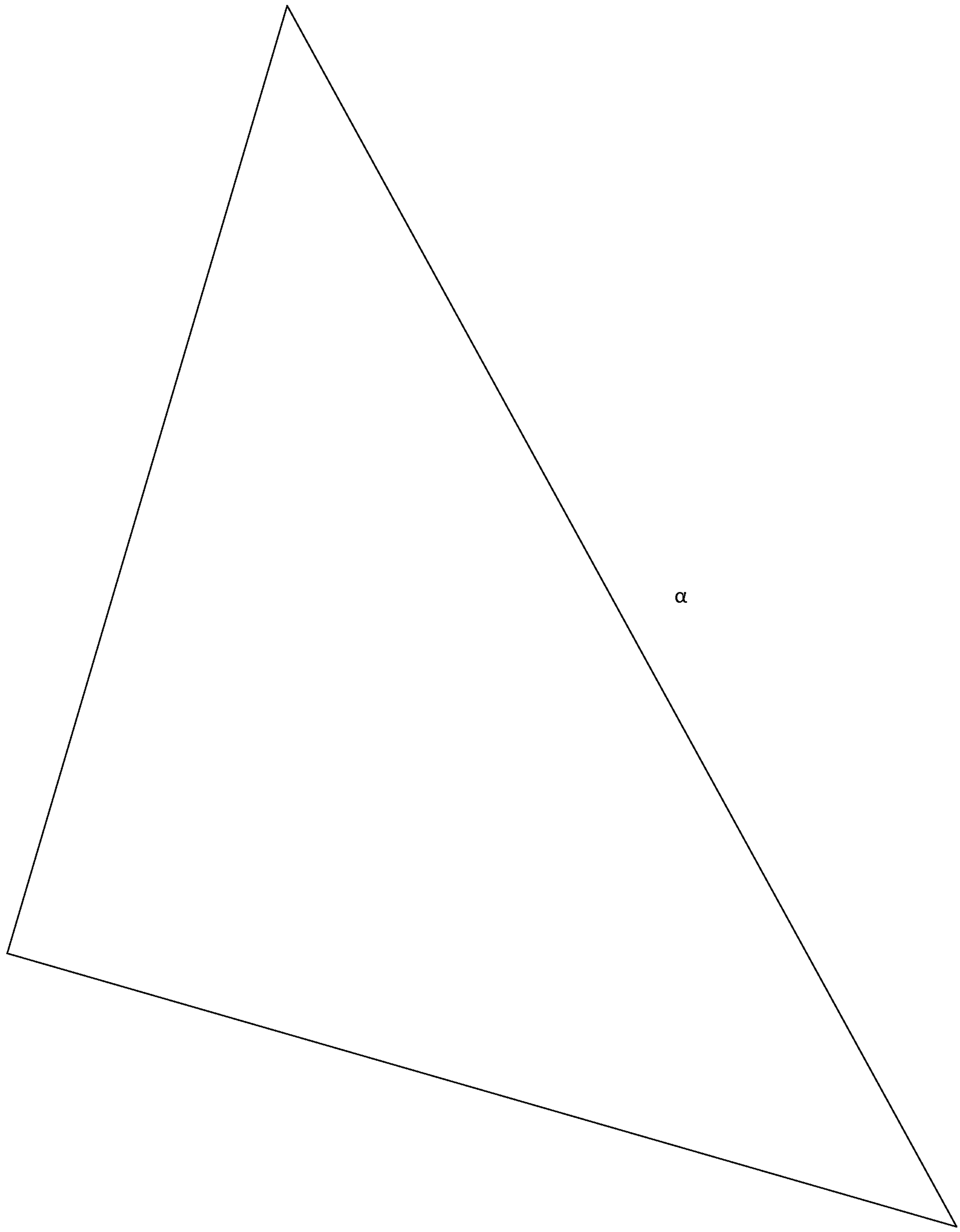
……………………………………………………………………………………………



(Ισοσκελές τρίγωνο που δόθηκε στα παιδιά σχεδιασμένο σε ριζόχαρτο μεγέθους Α4 στην τέταρτη δραστηριότητα)

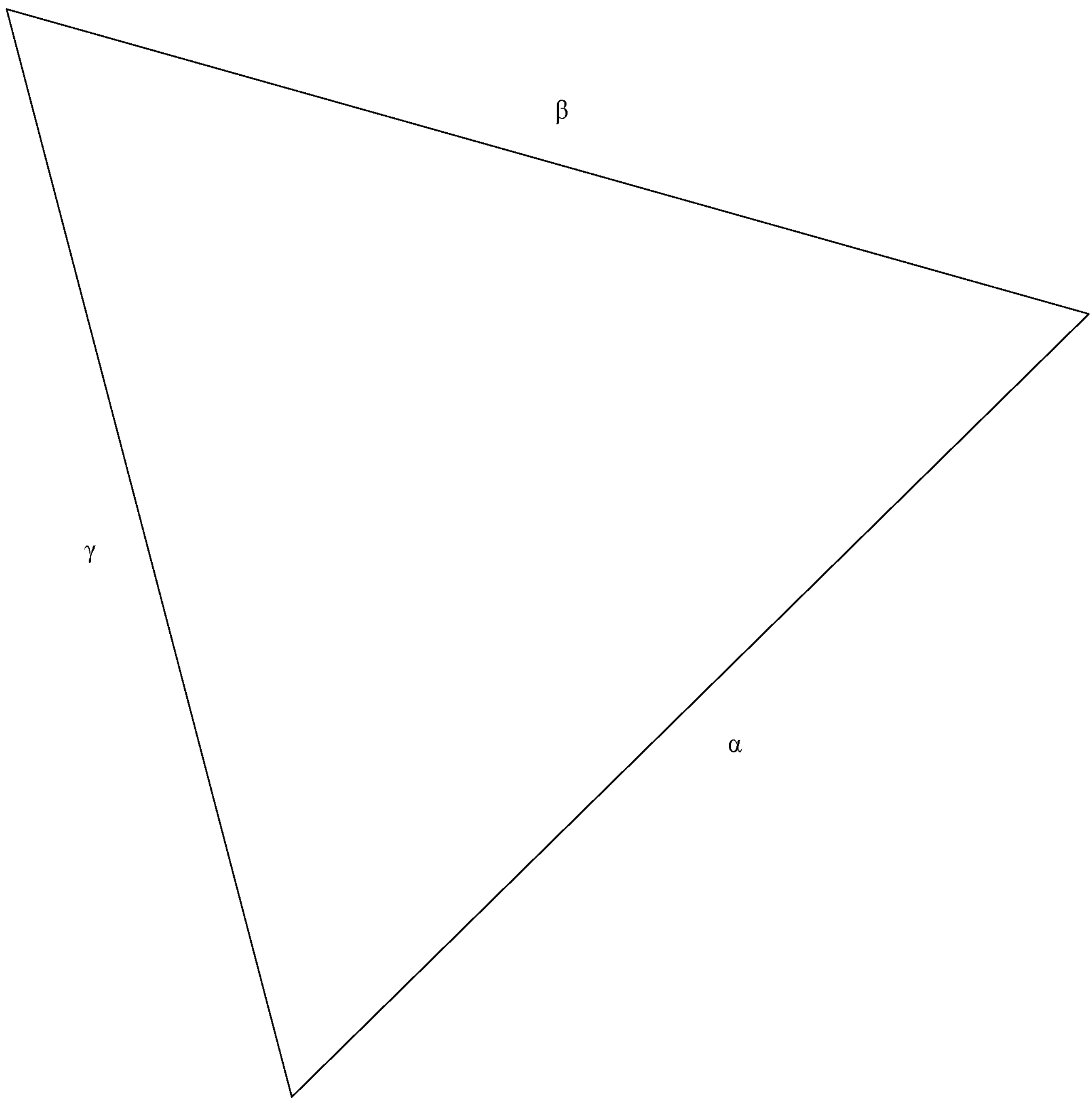


(Ισοσκελές τρίγωνο που δόθηκε στα παιδιά σχεδιασμένο σε ριζόχαρτο μεγέθους Α4 στην τέταρτη δραστηριότητα)



(Ισοσκελές τρίγωνο που δόθηκε στα παιδιά σχεδιασμένο

σε ριζόχαρτο μεγέθους Α4 στην τέταρτη δραστηριότητα)



(Ισόπλευρο τρίγωνο που δόθηκε στα παιδιά σχεδιασμένο σε ριζόχαρτο μεγέθους Α4 στην πέμπτη δραστηριότητα)