Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ»

Διπλωματική εργασία

" Η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα μέσα από την επίλυση προβλήματος"

Μαρία Εμβαλωτή

Επιβλέποντες: Κώστας Χατζηκυριάκου
Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης
Χαρά Σταθοπούλου

ΒΟΛΟΣ 2012

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για τους περισσότερους μαθητές η εκμάθηση της άλγεβρας είναι μια διαφορετική εμπειρία από την εκμάθηση της αριθμητικής και βρίσκουν τη μετάβαση αυτή δύσκολη. Στην πραγματικότητα η άλγεβρα χτίζεται στην αριθμητική και την αναπτύσσει περισσότερο (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Σε τι συνίσταται η διαφορά της άλγεβρας από την αριθμητική; Γιατί οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στην άλγεβρα; Ποιες είναι αυτές οι δυσκολίες; Με ποιους τρόπους θα ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες; Αυτά είναι κάποια από τα βασικότερα θέματα, σχετικά με τη μετάβαση από τον αριθμητικό στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, που απασχόλησαν τα τελευταία χρόνια τους ερευνητές (Kieran C. , 1992, Bednarz & Janvier, 1996, Breiteig & Grevholm, 2006, Dekker & Dolk, 2011).

Ενώ η αριθμητική ασχολείται με αριθμητικές διαδικασίες (υπολογισμούς μεταξύ αριθμών), η άλγεβρα περιγράφει σχέσεις μεταξύ μεταβλητών ποσοτήτων. Συγκεκριμένα η σχολική άλγεβρα έχει δύο όψεις, που σχετίζονται με το είδος των δεξιοτήτων που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές : α) Είναι η γλώσσα της γενίκευσης. Είναι ένας συστηματικός τρόπος να εκφράζουμε γενικεύσεις, πρότυπα, μοτίβα, γενικευμένες αριθμητικές ιδιότητες. Μπορούμε με μια αλγεβρική παράσταση να αναπαραστήσουμε κάποιον αλγόριθμο ή ακόμα κι ένα πρόβλημα ή μια κατάσταση. β) Απ' την άλλη, παρέχει ένα σύνολο κανόνων που δίνουν τη δυνατότητα χειρισμού των συμβόλων και των αλγεβρικών παραστάσεων έτσι ώστε να οδηγούμαστε σε ισοδύναμους μετασχηματισμούς (επίλυση εξισώσεων, παραγοντοποίηση, κτλ.) (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Παλιότερες έρευνες είχαν δείξει ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δουν από μόνοι τους τους σωστούς μετασχηματισμούς (Pimm, 1995). Για τον λόγο αυτό μέχρι τη δεκαετία του '60, όπως αναφέρει η Kieran, είχε δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στους κανόνες που πρέπει να ακολουθήσουν οι μαθητές για τον μετασχηματισμό των αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων και λιγότερο στο να δώσουν νόημα στους χειρισμούς αυτών των εκφράσεων (Kieran C. , 2004). Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να ευνοηθεί η εξοικείωση με μια άλγεβρα χωρίς ενδιαφέρον, εξαιρετικά συμβολοποιημένη, και να δοθεί έμφαση στη μελέτη της αλγεβρικής γλώσσας και στο χειρισμό των συμβόλων.

Στη δεκαετία 70-80, έγιναν πολλές έρευνες που μελετούσαν τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές όταν έρχονταν σε επαφή με την άλγεβρα. Στα τέλη της δεκαετίας του '80, κάποιοι μεταρρυθμιστές μελετητές υποστήριξαν ότι αν εισάγουμε κάποια στοιχεία άλγεβρας πολύ νωρίτερα θα έχουμε καλύτερα αποτελέσματα. Έτσι αναπτύχθηκε ένα νέο ρεύμα, η «πρώιμη Άλγεβρα», που έχει ως κύριο στόχο την ανάδειξη του αλγεβρικού χαρακτήρα της αριθμητικής και ενοποιεί τους δύο χώρους (Lins & Kaput, 2004). Στην προσπάθεια να αποκτήσει νόημα η άλγεβρα για τους μαθητές, σε ορισμένες χώρες η σχολική άλγεβρα προσεγγίστηκε σε πρώιμο στάδιο (στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση) με νέες δραστηριότητες, χρησιμοποιώντας νέες τεχνικές και καταργώντας τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας (Kieran C. , 2004). Για παράδειγμα, δραστηριότητες όπου περιγράφονται αριθμητικά ή γεωμετρικά μοτίβα αντικατέστησαν τις δραστηριότητες μετασχηματισμού. Δόθηκε μεγαλύτερη έμφαση στην ανάδειξη της αλγεβρικής σκέψης. Σύμφωνα με την άποψη του Usiskin η άλγεβρα εμφανίζεται σε πέντε βασικά πλαίσια: Αγνώστους, τύπους, γενικευμένα μοτίβα, μεταβλητές και σχέσεις. Κάθε στιγμή που κάποιο από αυτά απασχολεί τους μαθητές από το νηπιαγωγείο και μετά, υπάρχει η ευκαιρία να εισαχθεί η αλγεβρική γλώσσα (Usiskin, 1997).

Κι ενώ περίμεναν τα αποτελέσματα να είναι πιο καλά, αυτό δεν έγινε. Παραμελήθηκε η εκμάθηση των κανόνων μετασχηματισμού (Brown & Drouhard, 2004). Απ' την άλλη, μια ομάδα ερευνητών από τη Γαλλία με επικεφαλής τη Michele Artigue, μετά από έρευνες κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η εκμάθηση των αλγεβρικών χειρισμών δεν οδηγεί μόνο στην εύρεση της λύσης αλλά και στην καλύτερη κατανόηση των αλγεβρικών αντικειμένων και των σχέσεών τους (Artigue, 2003). Το εκπληκτικό είναι ότι η βαθύτερη κατανόηση της τεχνικής και των χειρισμών έχει προκύψει μέσα από έρευνες με χρήση υπολογιστών (Stacey & Chick, 2000). Μετά από τέτοιες έρευνες, που δείχνουν πώς το περιβάλλον του υπολογιστή (π.χ. spreadsheet) βοηθάει να αναδυθεί η αλγεβρική σκέψη των μαθητών, μια αφελής άποψη θα ήταν ότι οι υπολογιστές θα μπορούσαν να μας απαλλάξουν από την ανάγκη των μετασχηματιστικών δραστηριοτήτων ώστε τα παιδιά να επικεντρωθούν στη νοητική εργασία. Όμως η έρευνα και η εμπειρία έχουν δείξει ότι ο χειρισμός των μετασχηματισμών είναι επίσης νοητική διεργασία (Artigue, 2003). Η χρήση των νέων τεχνολογιών δεν σημαίνει ότι θα πρέπει να ξεχαστούν οι αλγεβρικοί χειρισμοί με χαρτί και μολύβι, ούτε ο σημαντικός ρόλος του δασκάλου στη διδασκαλία (Drijvers, Boon, & Van Reeuwijk, 2010). Το πιο σωστό είναι να δίνεται έμφαση εξίσου και στις αλγεβρικές σχέσεις και στον χειρισμό τους, προτείνει η Kieran (Kieran C. , 2004).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Το πρώτο μεγάλο εμπόδιο για την ομαλή εισαγωγή της άλγεβρας στους μαθητές αποτελεί η πολύπλοκη φύση της ίδιας της άλγεβρας. Η άλγεβρα, στο αναλυτικό πρόγραμμα του σχολείου, προβάλλεται ως γενίκευση της αριθμητικής κι από αυτό το σημείο εμφανίζονται και οι πρώτες δυσκολίες. Η διδακτική πρακτική που ακολουθείται συνήθως, όταν εισάγεται μια νέα αλγεβρική έννοια, είναι η αναφορά σε σχετικές προηγούμενες αριθμητικές εμπειρίες των μαθητών και η προσπάθεια μέσα απ' αυτές να αναδυθεί η νέα γνώση. Στο επόμενο βήμα, οι μαθητές ασκούνται εκτεταμένα στον χειρισμό και μετασχηματισμό των αλγεβρικών εκφράσεων, κάνοντας χρήση συγκεκριμένων κανόνων. Κι εκεί αφιερώνουν τον περισσότερο χρόνο. Αυτή η προσέγγιση στηρίζεται στην πεποίθηση ότι, αφού η αριθμητική και η άλγεβρα αφορούν σε αριθμούς και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των αριθμών και τις πράξεις μ' αυτούς, πολύ λίγος κόπος χρειάζεται ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να προσεγγίσουν τις αλγεβρικές ιδέες. Ωστόσο αυτό δε συμβαίνει τελικά. Αν και η άλγεβρα στηρίζεται στην αριθμητική, οι αλγεβρικές έννοιες και ο τρόπος σκέψης προκύπτουν με διαδικασίες αφαίρεσης και επομένως αποτελούν μια πολύπλοκη και απαιτητική διαδικασία, πιο απαιτητική απ' ότι θα περίμενε κανείς (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006). Η άλγεβρα είναι πολύ περισσότερο από ένα συμβολικό σύστημα ή ένας τρόπος λογισμού ή ακόμα ένα σύστημα αναπαράστασης (Charbonneau, 1996). Η άλγεβρα δεν σχετίζεται μόνο με την αριθμητική αλλά εξίσου και με τη γεωμετρία. Η γεωμετρία χρησιμοποιείται στην απόδειξη αλγεβρικών κανόνων και η άλγεβρα χρησιμοποιείται στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Radford, 1996). Συνεπώς, η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης απαιτεί μεγάλες εννοιολογικές αλλαγές από τη μεριά των μαθητών. Οι Herscovics & Linchevski θεωρούν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα εννοιολογικό χάσμα κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (Herscovics & Linchevski, 1994). Μέσα από την εμπειρία και έρευνα προκύπτει ότι οι μαθητές τείνουν να μεταφέρουν τους κανόνες της αριθμητικής στο αλγεβρικό πεδίο χωρίς προσαρμογή κι αυτό τους δυσκολεύει (Bednarz, Radford, Janvier, & Lepage, 1992). Αλλά και ιστορικά το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα αντιμετώπισε αντίστοιχες δυσκολίες.

Ένας άλλος παράγοντας που φαίνεται να ευθύνεται σημαντικά για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα είναι η εκτεταμένη χρήση συμβόλων. Τα σύμβολα αυτά η άλγεβρα τα δανείζεται από την αριθμητική, χρησιμοποιούνται όμως με διαφορετικό τρόπο και έχουν διαφορετικό νόημα στις αλγεβρικές εκφράσεις. Για παράδειγμα, πολλές φορές το « = » στην αριθμητική γίνεται αντιληπτό από τους μαθητές σαν την εντολή «βρες το αποτέλεσμα», ενώ στην άλγεβρα δηλώνει την ισότητα δύο ποσοτήτων (Kieran C. , 1981). Υπάρχουν όμως και κάποια σύμβολα, τα γράμματα, που δεν χρησιμοποιούνται στην αριθμητική παρά μόνο για να δηλώσουν μονάδες μέτρησης. Στη χρήση των γραμμάτων επικεντρώνονται οι περισσότερες παρανοήσεις των μαθητών. Τα γράμματα χρησιμοποιούνται με τρεις τρόπους στην άλγεβρα: ως άγνωστοι, ως μεταβλητές και ως παράμετροι (Bloedy-Vinner, 2001). Αυτές οι τρεις έννοιες έχουν και ομοιότητες (π.χ. ακολουθούν τον ίδιο «αλγεβρικό» λογισμό, που στηρίζεται στη θεωρία της αριθμητικής) αλλά και διαφορές στις οποίες οφείλονται κυρίως οι δυσκολίες των παιδιών. Ενώ ο άγνωστος παριστάνει έναν άγνωστο αλλά σταθερό αριθμό, η μεταβλητή παριστάνει μια ποσότητα της οποίας η αξία μπορεί να αλλάξει, αλλά παίρνει τιμές από συγκεκριμένο σύνολο, και η παράμετρος είναι μια ψευδομεταβλητή, που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Οι άγνωστοι εμφανίζονται κυρίως στις εξισώσεις και στην επίλυση προβλημάτων, όπου για να επιλύσουμε το πρόβλημα πρέπει να βρούμε τον άγνωστο, ενώ η μεταβλητή εμφανίζεται σε δραστηριότητες γενίκευσης, συναρτήσεις και παραστάσεις (Radford, 1996). Την παράμετρο τη συναντούν τα παιδιά στο Λύκειο στις παραμετρικές εξισώσεις, όπου διερευνούν τις λύσεις της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου. Έτσι οι μαθητές, όταν εισάγονται στην άλγεβρα, οδηγούνται πολύ γρήγορα στον χειρισμό κάποιων συμβόλων, έχοντας μικρή εξοικείωση μ' αυτά, χωρίς παράλληλη εστίαση στα αλγεβρικά νοήματα που αναπαριστούν και κατά συνέπεια αντιμετωπίζουν δυσκολίες.

Και μια τρίτη βασική πηγή προβλημάτων για τους μαθητές είναι η ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιεί η άλγεβρα. Η δυσκολία των μαθητών στην άλγεβρα εντοπίζεται στη δυσκολία τους να συσχετίσουν τη συμβολική γλώσσα της άλγεβρας με τις πραγματικές σχέσεις και νοήματα που αναπαριστούν (Arzarello, Bazzini, & Chiappini, 2001). Τα παιδιά δεν κατανοούν τα σύμβολα τα οποία έχουν μάθει τυπικά (Kieran C. , 1992). Από την άλλη, κάποιοι μαθητές, ακόμα κι αν είναι πολύ καλοί στους αλγεβρικούς υπολογισμούς, δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν την άλγεβρα σαν εργαλείο για να κατανοήσουν γενικεύσεις, δομικές συσχετίσεις και σαν εργαλείο απόδειξης στα μαθηματικά (Laborde, 1990). Η ορολογία και οι εκφράσεις, που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα, φαίνονται αυθαίρετες στους μαθητές, χωρίς λογική (Pimm, 1987). Αυτό σε συνδυασμό με το αναλυτικό πρόγραμμα, που επιβάλει γρήγορους ρυθμούς μάθησης, δεν δίνει αρκετό χρόνο στους μαθητές να αφομοιώσουν τις σχετικές ιδέες και να οικειοποιηθούν τη γλωσσική τους έκφραση (Δραμαλίδης & Σακονίδης, 2006).

Βέβαια στην κατανόηση της άλγεβρας από τους μαθητές έρχεται να προστεθεί και ο ρόλος των εκπαιδευτικών καθώς και του αναλυτικού προγράμματος. Έρευνες έχουν δείξει ότι πολλοί εκπαιδευτικοί δεν έχουν κατανοήσει επαρκώς θεμελιώδεις έννοιες τις άλγεβρας, όπως για παράδειγμα η έννοια της συνάρτησης. Η βαθιά γνώση του αντικειμένου που διδάσκει ο εκπαιδευτικός και η γνώση της σκέψης, αλλά και των παρανοήσεων των παιδιών είναι απαραίτητες προϋποθέσεις για μια σωστή διδασκαλία.

Καθώς κάποιοι εκπαιδευτικοί δεν ξέρουν καν τις προηγούμενες γνώσεις των παιδιών δεν μπορούν να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τις ερμηνείες και τις απόψεις τους (Stacey & Chick, 2004). Σημαντικός παράγοντας εδώ είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει μια συνέχεια μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα παιδιά που έρχονται στην Α' Γυμνασίου πρέπει να καλύψουν κενά του Δημοτικού και να εξασκηθούν σε δεξιότητες που έμαθαν στην πρωτοβάθμια αλλά ταυτόχρονα πρέπει να εμβαθύνουν σ' αυτές τις δεξιότητες, ώστε να προετοιμαστούν για την εισαγωγή τους στην άλγεβρα, που θα γίνει στο τέλος της χρονιάς. Οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας μερικές φορές κάνουν ανεπαρκή χρήση της μαθηματικής γνώσης των μαθητών τους (Dekker & Dolk, 2011) και τελικά τα παιδιά εισάγονται απότομα στην άλγεβρα χωρίς κάποιο μεταβατικό στάδιο.

1.2 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΛΑΘΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Η πολυδιάστατη φύση της άλγεβρας ώθησε τους ερευνητές στο να προσπαθήσουν να κατηγοριοποιήσουν τις αλγεβρικές δραστηριότητες, με σκοπό να μελετήσουν τα βασικά χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης σε καθεμιά απ' αυτές τις προσεγγίσεις. Η Kieran το 1996 πρόσφερε ένα πλαίσιο για την οργάνωση των σχολικών δραστηριοτήτων. Ο πυρήνας των αλγεβρικών δραστηριοτήτων, σύμφωνα με την Kieran περιέχει: α) Δραστηριότητες αναπαράστασης, β) μετασχηματιστικές δραστηριότητες και γ) γενικευτικές δραστηριότητες, όπου η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο (Kieran C. , 1996). Παρακάτω γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστούν τα λάθη-παρανοήσεις των μαθητών, που έχουν εντοπιστεί από τους ερευνητές, όταν η άλγεβρα εισάγεται στα παιδιά με κάποια από τις παραπάνω δραστηριότητες μέσα στο πλαίσιο των αντίστοιχων δραστηριοτήτων.

1.2.1 Οι δραστηριότητες αναπαράστασης

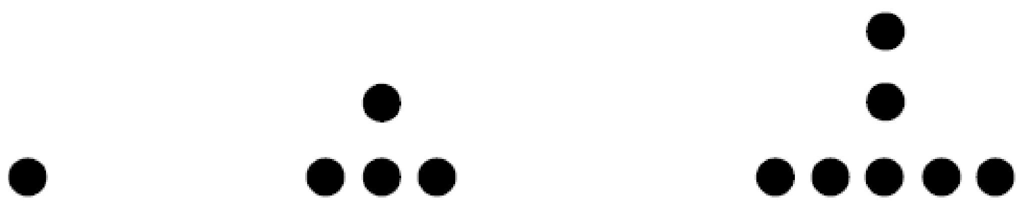
Περιλαμβάνουν τη διαμόρφωση αλγεβρικών εκφράσεων (ισοτήτων, ανισοτήτων, παραστάσεων) που αναπαριστούν καταστάσεις, ιδιότητες, μοτίβα και σχέσεις ποσοτήτων. Παραδείγματα τέτοιων εκφράσεων είναι ισότητες με έναν ή περισσότερους αγνώστους που αναπαριστούν προβλήματα, γενικευμένες εκφράσεις που προκύπτουν από μοτίβα (γεωμετρικά ή αριθμητικά) ή εκφράσεις κανόνων που διέπουν τις αριθμητικές σχέσεις. Οι παραστάσεις, οι εξισώσεις και οι συναρτήσεις περιέχουν μεταβλητές και αγνώστους και περιλαμβάνονται στις δραστηριότητες αναπαράστασης της άλγεβρας. Τέτοιες δραστηριότητες εμπεριέχουν εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, χειρισμών και σχέσεων, καθώς και στρατηγικές δημιουργίας και αναπαράστασης αυτών των σχέσεων με αλγεβρικές εξισώσεις, παραστάσεις ή συναρτήσεις.

Οι Schoenfeld & Arcavi (1988) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής είναι η βάση για τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Ωστόσο η έννοια της μεταβλητής είναι πιο πολύπλοκη απ' όσο αναμένουν οι εκπαιδευτικοί και συχνά γίνεται εμπόδιο στην κατανόηση της άλγεβρας από τους μαθητές (Leitzel, 1989).

Κάποια παραδείγματα με δραστηριότητες αναπαράστασης παρουσιάζονται παρακάτω. Καθεμία από αυτές τις προτάσεις μπορούν να μεταφραστούν στη γλώσσα της άλγεβρας:

(i) Υπάρχουν 3 σωροί από πέτρες. Ο πρώτος έχει 5 πέτρες λιγότερες απ' τον τρίτο και ο δεύτερος 15 περισσότερες απ' τον τρίτο. Βρείτε πόσες πέτρες έχει κάθε σωρός αν όλες οι πέτρες μαζί είναι 31.(Bell, 1995)

(ii) Σκέψου τι βλέπεις στην παρακάτω ακολουθία σχημάτων. Βρες έναν κανόνα που να δίνει τον αριθμό από τα τετραγωνάκια σε οποιοδήποτε σχήμα της ακολουθίας. (Lee & Wheeler, 1987)



(iii) Το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών είναι περιττός. (Mason, 1996)

Η Hava Bloedy-Vinner υποστηρίζει ότι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές στην άλγεβρα σχετίζονται με το πώς αντιλαμβάνονται τις παραμέτρους και τις μεταβλητές και πώς ερμηνεύουν τα νέα αυτά αντικείμενα (Bloedy-Vinner, 2001). Οι μαθητές συγχέουν το νόημα των γραμμάτων: μεταβλητή ή άγνωστος; Στην άλγεβρα, όταν οι μαθητές βλέπουν x, υπάρχει μια φυσική επιθυμία να βρουν ποιος αριθμός είναι αυτός ο « x ».

Για παράδειγμα στην ερώτηση για ποιο x ισχύει η ισότητα x+x=2x, πολλοί μαθητές απαντούν x=1 χωρίς να ψάξουν να βρουν άλλη λύση ή να σκεφτούν ότι ενδεχομένως ισχύει για κάθε x. Επίσης ποιος μαθητής εξοικειωμένος με την αριθμητική, στην ερώτηση «βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς με άθροισμα 10», θα απαντούσε $x-x+10$; Η απάντηση που αναμένουμε είναι 5+2+3 ή 8+1+1. Η χρήση του γράμματος ως μεταβλητή είναι σπάνια σε μαθητές που μόλις εισάγονται στην άλγεβρα. Τις περισσότερες φορές το γράμμα αντιπροσωπεύει τον άγνωστο που έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή και επαληθεύει την εξίσωση (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις μεταβλητές ως αντικείμενα που συμβολίζουν συγκεκριμένες, μοναδικές τιμές και διαφορετικά γράμματα παριστάνουν διαφορετικές τιμές. Για παράδειγμα δεν μπορούν να καταλάβουν ότι στην εξίσωση x+y=4 είναι δυνατόν οι τιμές των μεταβλητών να είναι x=2 και y=2 ή οι εκφράσεις x+y+z και x+b+a μπορεί να είναι ισοδύναμες (Booth, 1988).

Μερικές φορές οι μαθητές αγνοούν εντελώς τα γράμματα. Για παράδειγμα, αν προσθέσουμε 3 στο x+4 θα πάρουμε 7. Αυτό γίνεται γιατί οι μαθητές διαισθάνονται ότι πρέπει να γίνει πρόσθεση αλλά δεν ξέρουν πώς. Δεν καταλαβαίνουν ότι πρέπει να δώσουν έμφαση στην έκφραση (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Στην αριθμητική και στην άλγεβρα τα γράμματα χρησιμοποιούνται με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα το 6m στην αριθμητική σημαίνει 6 μέτρα ενώ στην άλγεβρα μπορεί να σημαίνει και 6 ·m (Booth, 1988).

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναπαράσταση ενός προβλήματος με μια εξίσωση. Για παράδειγμα ο αριθμός των μαθητών Μ είναι εξαπλάσιος από τον αριθμό των καθηγητών Κ, γράφουν 6Μ=Κ (αντί το σωστό Μ=6Κ) μεταφράζοντας λέξη προς λέξη (εξαπλάσιοι μαθητές ισούνται με τους καθηγητές) (Clement, Lochhead, & Monk, 1981).

Η αριθμητική και η άλγεβρα χρησιμοποιούν τα ίδια σύμβολα αλλά τα ερμηνεύουν διαφορετικά. Για παράδειγμα το «ίσον» στην αριθμητική συνήθως ερμηνεύεται ως «Βρες το αποτέλεσμα» ενώ στην άλγεβρα «Υπάρχει σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο ποσοτήτων» (Kieran C. , 1981, Booth, 1988). Επομένως επιδέχεται πολλές παρανοήσεις από τους μαθητές. Στην αριθμητική, το «=» είναι το σύμβολο που χωρίζει το πρόβλημα από τη λύση του. Έτσι οι μαθητές, όταν μεταβαίνουν από την αριθμητική στην άλγεβρα, ερμηνεύουν το ίσον σαν εντολή μιας πράξης κι όχι ως σύμβολο αναπαράστασης μιας σχέσης.

I. Όταν λοιπόν καλούνται οι μαθητές να συμπληρώσουν το κενό στην ισότητα $8+5=\square+9$ γράφουν 13 αντί για 4.

II. Όταν λύνουν το παρακάτω πρόβλημα:

Όταν ο Λεωνίδας επισκέφτηκε τη γιαγιά του, του έδωσε 1,50 €. Έπειτα αγόρασε ένα βιβλίο με 3,20 €. Αν του έμειναν 2,30 €, πόσα χρήματα είχε πριν επισκεφτεί τη γιαγιά;

γράφουν: 2,30+3,20=5,50-1,50=4,00

(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)

Σε ένα ακόμα σύμβολο που αντιμετωπίζουν δυσκολίες οι μαθητές είναι η παρένθεση. Δεν ξέρουν πότε είναι απαραίτητη μια παρένθεση και πότε όχι.

Όπως προκύπτει απ' τα παραπάνω, οι μαθητές λειτουργώντας σ' ένα αριθμητικό πλαίσιο αναφοράς τείνουν να μην μπορούν να αντιληφτούν τη σχέση των στοιχείων μιας κατάστασης. Εστιάζουν στον υπολογισμό, όπως γίνεται στην αριθμητική. Η Kieran προτείνει:

α) Μια εστίαση στις σχέσεις κι όχι απλά στον υπολογισμό.

β) Μια έμφαση στις ενέργειες και αντίστροφα στη συσχετιζόμενη δράση του ενεργώ-αναιρώ την ενέργεια.

γ) Μια έμφαση από κοινού στην αναπαράσταση και επίλυση προβλήματος κι όχι απλά στην επίλυση.

δ) Μια έμφαση από κοινού στους αριθμούς και τα γράμματα κι όχι απλά στους αριθμούς.

Αυτό θα γίνει με δραστηριότητες, όπως:

(i) Εργασία με γράμματα που μπορεί να είναι άγνωστοι, μεταβλητές παράμετροι.
(ii) Εφαρμογές ώστε να αποδεχτούν ανοιχτές προτάσεις ως απαντήσεις
(iii) Εκφράσεις με ισότητες βασισμένες πιο πολύ σε ιδιότητες κι όχι σε αριθμητικές απαντήσεις. (Kieran C. , 2004)

1.2.2 Μετασχηματιστικές δραστηριότητες

Ο δεύτερος τύπος αλγεβρικών δραστηριοτήτων, οι μετασχηματιστικές, βασίζονται σε κανόνες και περιλαμβάνουν χειρισμούς των αλγεβρικών εκφράσεων και αλλαγή της μορφής τους έτσι ώστε να προκύψουν ισοδύναμες εκφράσεις. Μετασχηματιστικές δραστηριότητες είναι η επίλυση εξισώσεων, η παραγοντοποίηση, η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και οι δυνάμεις πολυωνύμων, η απλοποίηση κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων κ.τ.λ. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλά προβλήματα στους χειρισμούς των αλγεβρικών παραστάσεων. Γι' αυτό άλλωστε τα προηγούμενα χρόνια είχε δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στην εκμάθηση αυτών των χειρισμών.

Η βαθιά κατανόηση των αλγεβρικών χειρισμών στηρίζεται στην εξοικείωση και ικανότητα που έχουν οι μαθητές με τους αριθμητικούς χειρισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σε συνδυασμό με τις αντίθετές τους πράξεις, την αφαίρεση και τη διαίρεση. Για παράδειγμα η επίλυση της εξίσωσης $x+29=75$ στηρίζεται στη γνώση που έχουν τα παιδιά από το Δημοτικό ότι για να βρούμε έναν από τους δυο προσθετέους που δίνουν άθροισμα 75, όταν ο ένας είναι 29, πρέπει να κάνουμε την αφαίρεση $75-29$, δηλ. $x=75-29$. Στη διάρκεια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, διδάσκονται τη στενή σχέση που έχουν οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Για παράδειγμα διδάσκονται ότι η δοκιμή της πρόσθεσης είναι η αφαίρεση και αντίστροφα ή ότι όταν ισχύει η σχέση 32+25=57 τότε θα ισχύει και 32=57-25. Όμως αποδεικνύεται ότι έχουν μια δυσκολία οι μαθητές όταν γράφουν τέτοιες σχέσεις οριζόντια. Αυτή η δυσκολία φαίνεται και σε λάθη που κάνουν όταν λύνουν εξισώσεις (Kieran C. , 1982), όπως:

$x+21=53$ ισοδύναμο με $x=21+53$

ή

$x+21=53$ ισοδύναμο με $x+21-10=53+10$

Οι μαθητές θεωρούν ότι η εκμάθηση της άλγεβρας ισοδυναμεί με εκμάθηση των αλγεβρικών μετασχηματισμών που τους μαθαίνουν συνήθως μηχανικά χωρίς τη βαθιά κατανόησή τους (English & Halford, 1995). Εδώ έρχεται να προστεθεί και η αρνητική συμβολή των δασκάλων που τείνουν προς αυτή την κατεύθυνση. Παλιότερες έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές συνηθίζουν σε αριθμητικούς υπολογισμούς ή σε τυποποιημένους αλγεβρικούς χειρισμούς χωρίς νόημα γι' αυτούς. Όπως για παράδειγμα, αν ζητηθεί:

Είναι ισοδύναμες ή όχι οι αριθμητικές εκφράσεις;

632-328+515, 515+328-632 και 515-328+632

θα κάνουν τις πράξεις (Chaiklin & Lesgold, 1984).

Το ίδιο θα κάνουν αν τους ζητηθεί να συμπληρώσουν το κενό:

$$21+\square+37-15=21+37$$

Το ίδιο σημαντική με την έννοια της ισότητας είναι και η έννοια της ισοδυναμίας για τους μετασχηματισμούς. Συγκεκριμένα στην έννοια της ισοδυναμίας στηρίζεται και η επίλυση εξίσωσης, αφού κάνοντας τις ίδιες πράξεις στα δύο μέλη της εξίσωσης, προκύπτουν ισοδύναμες εξισώσεις. Όμως υπάρχουν κι άλλες άτυπες μέθοδοι για να λυθεί μια εξίσωση. Έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές, που χρησιμοποιούν ταυτόχρονα κι άλλες μεθόδους επίλυσης μιας εξίσωσης, κατανοούν καλύτερα την τυπική μέθοδο και κάνουν λιγότερα λάθη. Για να λύσουν ένα πρόβλημα κάνουν την αντίθετη πράξη και δεν εστιάζουν στο να εκφράσουν τις σχέσεις των ποσοτήτων σε μια αλγεβρική έκφραση. Όμως, συγκεκριμένα, η μέθοδος του «κάνω την αντίθετη πράξη» δρα αρνητικά στην κατανόηση της τυπικής μεθόδου. Οι μαθητές που για να λύσουν την εξίσωση 2x-3=9 κάνουν τις αντίθετες πράξεις $x=\frac{9+3}{2}$, δεν μπορούν να καταλάβουν γιατί όταν μετασχηματίζουν μια ισότητα πρέπει να κάνουν τις ίδιες πράξεις και στα δύο μέλη.

Δεν κατανοούν ότι μια αλγεβρική παράσταση, ως εντολή διαδοχικών υπολογισμών, μπορεί να θεωρηθεί απάντηση σε ένα πρόβλημα. Στην έκφραση x+3 διαισθάνονται ότι πρέπει να γίνει πρόσθεση αλλά δεν ξέρουν πώς. Δεν καταλαβαίνουν ότι πρέπει να δώσουν έμφαση στην έκφραση.

Γενικά οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με τους μετασχηματισμούς. Όμως, η πρακτική εξάσκηση με τους μετασχηματισμούς βελτιώνει την επίδοσή τους (Linchevski & Vinner, 1990).

1.2.3 Γενικευτικές δραστηριότητες

Και τέλος υπάρχουν οι γενικευτικές δραστηριότητες, στις οποίες η άλγεβρα χρησιμοποιείται ως εργαλείο γενίκευσης, αιτιολόγησης και πρόβλεψης. Περιλαμβάνουν επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση, παρατήρηση της δομής, μελέτη της μεταβολής, ανάλυση σχέσεων, δικαιολόγηση και απόδειξη. Δραστηριότητες που θα μπορούσαν να γίνουν χωρίς καθόλου άλγεβρα. Χρησιμοποιούν όμως τη γλώσσα και τα εργαλεία της άλγεβρας. Για παράδειγμα, στην πρόταση: Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι περιττός, ανακαλύπτουμε πώς η άλγεβρα χρησιμοποιείται για να γενικεύσει και να αιτιολογήσει. Η αριθμητική μπορεί να χρησιμοποιηθεί με πολλά παραδείγματα για να δείξει την πρόταση (3+4=7, 12+13=25, κ.τ.λ.) Αλλά η αναπαράσταση με άλγεβρα και στη συνέχεια οι μετασχηματιστικές ιδιότητες της άλγεβρας μπορούν να αιτιολογήσουν ότι το άθροισμα είναι περιττός. Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια της άλγεβρας $x+(x+1)$, όπου το x παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό. Αυτή η έκφραση μπορεί να μετασχηματιστεί στην ισοδύναμή της $2x+1$ που παριστάνει έναν περιττό.

Παρακάτω δίνονται δύο ακόμα παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων.

I. Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 5 και μετά προσθέτουμε 12 και αφαιρούμε τον αρχικό αριθμό. Έπειτα το αποτέλεσμα το διαιρούμε με 4 και παίρνουμε αποτέλεσμα μεγαλύτερο από τον αρχικό αριθμό κατά 3. Μπορείτε χρησιμοποιώντας άλγεβρα να δείξετε ότι αυτό ισχύει απ' οποιονδήποτε αριθμό κι αν αρχίσουμε;

II. Οι τρίγωνοι αριθμοί δημιουργούνται με τον παρακάτω τρόπο

- Προβλέψτε τον αριθμό απ' τις τελείες στο 20ό τρίγωνο
- Δώστε έναν κανόνα που να προβλέπει οποιονδήποτε τρίγωνο αριθμό. (Lee & Wheeler, 1987)

Γενικά παρατηρούμε ότι αυτό το τελευταίο είδος εμπλέκει και τα άλλα δύο είδη δραστηριοτήτων, έτσι ώστε να υπάρχει αλληλεξάρτηση μ' αυτά (Brown & Drouhard, 2004). Επομένως οι μαθητές εμφανίζουν τα ίδια λάθη που αναφέραμε παραπάνω. Υπάρχει όμως και μια επιπλέον δυσκολία δεδομένου ότι αυτές οι δραστηριότητες είναι πιο πολύπλοκες αφού εμπεριέχουν αναπαραστατικές και μετασχηματιστικές ικανότητες. Ακόμα κι αν μερικοί μαθητές χρησιμοποιούν με επιτυχία τους αλγεβρικούς χειρισμούς της δεν μπορούν να δουν την άλγεβρα ως εργαλείο που περιγράφει γενικά την επίλυση ενός προβλήματος (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Αυτό δεν είναι παράλογο αν σκεφτούμε ότι η ανάγκη να αναπτυχθεί η αλγεβρική σκέψη δεν προκύπτει τόσο φυσικά όπως η ανάγκη ανάπτυξης της αριθμητικής. Στην πλειοψηφία τους οι άνθρωποι ζουν κι επιβιώνουν χωρίς να χρησιμοποιούν άλγεβρα, ακόμα κι αν είναι εξοικειωμένοι με τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Λύνουν προβλήματα με περισσότερη επιτυχία χωρίς άλγεβρα και δεν κατανοούν τη χρησιμότητα της άλγεβρας. (Stacey K. , 2008)

1.3 ΕΙΔΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Η Kieran πιστεύει ότι για να αναπτυχθεί η αλγεβρική σκέψη των μαθητών πρέπει να δίνεται έμφαση εξίσου στην κατανόηση των σχέσεων των αλγεβρικών ποσοτήτων και στο χειρισμό τους (Kieran C. , 1992). Επίσης η Rojano πιστεύει ότι η ανάπτυξη της ικανότητας χειρισμού των εξισώσεων και χρησιμοποίησής τους για επίλυση προβλημάτων ή σε άλλες δραστηριότητες είναι δύο αλληλένδετες κατευθύνσεις προς την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Rojano, 1996). Άρα κατάλληλες δραστηριότητες ώστε να αναπτυχθεί ισομερώς η αλγεβρική σκέψη των μαθητών είναι οι γενικευτικές δραστηριότητες όπου η άλγεβρα χρησιμοποιείται σαν εργαλείο και εμπεριέχει και δραστηριότητες αναπαράστασης και μετασχηματιστικές. Οι γενικευτικές δραστηριότητες επιτρέπουν βελτίωση στους μετασχηματιστικούς χειρισμούς, όπου εμφανίζουν τις περισσότερες παρανοήσεις οι μαθητές, με έναν φυσικό τρόπο χωρίς οι μετασχηματισμοί αυτοί να χάνουν το νόημά τους στο πλαίσιο της δραστηριότητας (Brown & Drouhard, 2004). Τι είδους είναι όμως αυτές οι δραστηριότητες;

Πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι οι δυσκολίες των μαθητών που σχετίζονται με τις αλγεβρικές έννοιες εξαρτώνται από τον τρόπο εισαγωγής της άλγεβρας. Στη διεθνή κοινότητα, η διδασκαλία και η μάθηση της άλγεβρας έχουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον και προτείνονται διαφορετικές προσεγγίσεις για την εισαγωγή στην άλγεβρα. Η Bednarz προτείνει τέσσερις διαφορετικές προσεγγίσεις για το ξεκίνημα της άλγεβρας (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996).

Α) Προσέγγιση της άλγεβρας με γενικεύσεις

Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν αριθμητικά ή γεωμετρικά μοτίβα, ιδιότητες που ισχύουν στην αριθμητική, όπως η αντιμεταθετική ιδιότητα, η προσεταιριστική ή η επιμεριστική. Η γενίκευση δεν είναι ο στόχος των μαθηματικών όπως πιστεύουν πολλοί. Η γενίκευση είναι μια φυσική διαδικασία και υπάρχει παντού (Mason, 1996).

Μια εξάσκηση των μαθητών με εκφράσεις δικών τους γενικεύσεων θα ήταν μια πολύ καλή αρχή για εισαγωγή στην άλγεβρα, προτείνει ο Mason.

Δραστηριότητες με αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα χρησιμοποιήθηκαν σε μεγάλη έκταση τα τελευταία χρόνια, κυρίως στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση με σκοπό να εισάγουν τα παιδιά στην αλγεβρική σκέψη. Μελέτες σχετικά με μοτίβα έχουν γίνει πολλές τα τελευταία χρόνια. Ο David Kirshner υποστηρίζει ότι αντί να δίνουν οι εκπαιδευτικοί άπειρους κανόνες και τύπους θα έπρεπε να δίνουν την ευκαιρία στα παιδιά να πειραματίζονται με δραστηριότητες (π.χ. patterns) (Kirshner, 2001). Όμως οι μαθητές προτιμούν να γενικεύουν χρησιμοποιώντας ρητορική άλγεβρα κι όχι συμβολική. (Breiteig & Grevholm, 2006). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η έρευνα των Stacey & Macgregor που δείχνει ότι τα παιδιά που διδάχτηκαν τις συναρτήσεις μέσα από τα μοτίβα, δεν είχαν καλύτερες επιδόσεις από τα παιδιά που διδάχτηκαν με παραδοσιακό τρόπο. Ίσως όμως αυτό οφείλονταν στη μη σωστή επιλογή του προβλήματος (Stacey & Macgregor, 2001).

Β) Προσέγγιση με συναρτήσεις

Η προσέγγιση αυτή στοχεύει όχι απλά στη μελέτη της συνάρτησης αλλά στην επίλυση προβλήματος με εργαλείο τις συναρτησιακές σχέσεις των δεδομένων του προβλήματος (Kieran, Boileau, & Garancon, 1996). Η Heid προτείνει ενασχόληση με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου εμπλέκοντας την έννοια της συνάρτησης και ταυτόχρονα κάποιες έννοιες που σχετίζονται με αυτήν όπως η οικογένεια συναρτήσεων (π.χ. γραμμικές), η εξίσωση, η ανίσωση, τα συστήματα εξισώσεων και οι ισοδυναμίες (Heid, 1996). Η προσέγγιση αυτή γίνεται με χρήση πολλών αναπαραστάσεων της συνάρτησης (τύπος συνάρτησης, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση) (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). Στόχος είναι μια εστίαση περισσότερο στη σύγκριση των διαφορετικών αναπαραστάσεων και λιγότερο στο συμβολισμό και τις μετασχηματιστικές διαδικασίες και τις στρατηγικές αλγεβρικών χειρισμών. Έτσι, ενώ οι μαθητές στην παραδοσιακή τάξη ερμηνεύουν το γράμμα ως έναν άγνωστο αριθμό, οι μαθητές που είχαν εισαχθεί στην άλγεβρα με συναρτησιακή προσέγγιση ανέπτυξαν για το γράμμα την έννοια του μεταβλητού αριθμού (μεταβλητή). Στην ίδια έρευνα στην επίδοση των μαθητών στους αλγεβρικούς χειρισμούς δεν υπήρχε διαφορά (Heid, 1996).

Γ) Προσέγγιση της άλγεβρας με επίλυση προβλήματος

Ιστορικά η επίλυση προβλημάτων συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της άλγεβρας. Τα έργα του Διόφαντου, του Αλ Κβαρίσμι, του Cardano, του Viete θεωρούνται σημαντικές πηγές της αλγεβρικής σκέψης στην ιστορία των Μαθηματικών. Η επίλυση προβλημάτων είχε επίσης σημαντική συνεισφορά στη διδασκαλία της άλγεβρας. Για αρκετούς αιώνες η διδασκαλία της άλγεβρας βασίστηκε στην επίλυση προβλημάτων για τα οποία αριθμητική και άλγεβρα πρότειναν διαφορετικές μεθόδους. Η άλγεβρα τότε παρουσιαζόταν ως ένα νέο πιο αποτελεσματικό εργαλείο (Bednarz & Janvier, 1996).

Ενώ η αριθμητική επίλυση προβλημάτων στηρίζεται σε άτυπες μεθόδους και διαφορετικές τεχνικές (π.χ. αναγωγή στη μονάδα, προς τα πίσω ενέργειες, κ.λ.π.), η αλγεβρική επίλυση προβλημάτων στηρίζεται στην εύρεση μιας εξίσωσης που αναπαριστά το πρόβλημα και στην επίλυση αυτής της εξίσωσης. Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί μια δραστηριότητα που εμπλέκει τους μαθητές στην άλγεβρα χρησιμοποιώντας ιδέες και καταστάσεις που τους είναι οικείες και έχουν νόημα. Οι μαθητές έχουν ένα αριθμητικό παρελθόν και έχουν ασχοληθεί με την επίλυση προβλημάτων στην αριθμητική. Άλλωστε η άλγεβρα χτίζεται σ' ένα καλά ορισμένο αριθμητικό σύστημα. Άρα η επίλυση προβλημάτων εξακολουθεί να θεωρείται ως ένα πλαίσιο κατάλληλο για την εννοιολογική αλλαγή κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα, αλλά και μία καλή προσέγγιση για την εισαγωγή στην άλγεβρα. Άλλωστε έχει την κύρωση της ιστορίας κι έναν αιώνα διδακτικής παράδοσης (Wheeler, 1996).

Δ) Προσέγγιση της άλγεβρας με μοντελοποίηση

Η μοντελοποίηση είναι μια διαδικασία κατά την οποία δημιουργείται ένα μοντέλο (π.χ. γράφημα, τύπος, εξισώσεις ή σύστημα εξισώσεων) που περιγράφει μια μαθηματική ή φυσική κατάσταση και ταυτόχρονα γίνεται έλεγχος. Το μοντέλο είναι ανεξάρτητο από την πραγματικότητα που αντιπροσωπεύει και ταυτόχρονα περιγράφει αντικείμενα ή σχέσεις που μπορούν να μετρηθούν (Wheeler, 1996). Μοντέλα για παράδειγμα είναι οι τύποι της Φυσικής ή της Βιολογίας. Μια προσέγγιση με μοντελοποίηση είναι μια δραστηριότητα με διαγράμματα. Προβλήματα του πραγματικού κόσμου εμπλέκουν τους μαθητές στην προσέγγιση νέων μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιώντας ιδέες και καταστάσεις που είναι οικείες σ' αυτούς και δίνουν νόημα σ' αυτές τις έννοιες (Nemirovsky, 1996).

Η εισαγωγή στην άλγεβρα μέσω μοντελοποίησης, παρά του ότι εμφανίζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, δεν εφαρμόζεται εύκολα και παραμένει μια ιδέα. Ο λόγος που αυτή η προσέγγιση προτείνεται είναι περισσότερο ιδεολογικός παρά μαθηματικός ή παιδαγωγικός, γιατί συνδέει τον πραγματικό κόσμο (Φυσική, Βιολογία) με τα αφηρημένα μαθηματικά (Wheeler, 1996).

Κάθε προσέγγιση περιέχει ένα ευρύ φάσμα δυνατοτήτων και πρέπει τα παιδιά που εισάγονται στην άλγεβρα να έρχονται σε επαφή με όλες αυτές τις προσεγγίσεις (Stacey, Chick, & Kendal, 2004).

Στην παρούσα εργασία, η πρόταση διδασκαλίας σχετίζεται με την επίλυση προβλήματος. Παρακάτω γίνεται μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας σχετικά με την προσέγγιση της άλγεβρας μέσω επίλυσης προβλήματος.

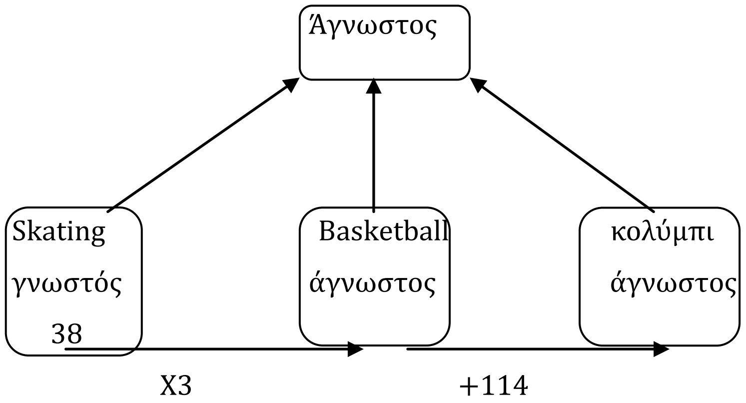
1.4 ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στην αριθμητική οι μαθητές αναπτύσσουν άτυπες στρατηγικές και πεποιθήσεις, που χρησιμοποιούν στη λύση των προβλημάτων, που τις φέρνουν μαζί τους όταν έρχονται αντιμέτωποι με την άλγεβρα. Οι συγκρούσεις και τα εμπόδια που προκύπτουν όταν μαθαίνουν τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης προβλημάτων είναι πολλά. Οι πεποιθήσεις των μαθητών από το αριθμητικό τους παρελθόν θα αποτελέσουν το σημείο εκκίνησης της νέας γνώσης. Αυτές οι πεποιθήσεις μπορούν να είναι η γέφυρα στην κατασκευή της νέας γνώσης, σε μερικές όμως περιπτώσεις στέκονται εμπόδιο σ’ αυτή. Η απόκτηση, δηλαδή, της νέας γνώσης αφορά τόσο στην επέκταση της προηγούμενης όσο και σε μια ρήξη με το παρελθόν. Ο Wheeler θεωρεί ότι η μετάβαση των μαθητών από την αριθμητική στην άλγεβρα δεν σημαίνει κατά ανάγκη ότι θα πρέπει να υπάρχει σύνδεση των παλιών ιδεών με τις νέες (Wheeler, 1996).

Η Stacey εντοπίζει τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με την άλγεβρα. Η άλγεβρα που χρησιμοποιούν οι μαθητές μοιάζει μ΄αυτή των δασκάλων αλλά δεν δίνει τις ίδιες ερμηνείες. Λύνουν προβλήματα με περισσότερη επιτυχία χωρίς άλγεβρα και δεν κατανοούν τη χρησιμότητα της άλγεβρας (Stacey, Chick, & Kendal, 2004). Γι’ αυτό προτείνεται κατά την εισαγωγή στην άλγεβρα να μην δίνονται προβλήματα στα παιδιά που μπορούν να λυθούν με αριθμητικό τρόπο (Bednarz & Janvier, 1996, Balacheff, 2000). Η αριθμητική οδηγεί στην άλγεβρα αλλά το μονοπάτι δεν είναι και τόσο ομαλό (Stacey & Macgregor, 2001).

Οι Bednarz & Janvier κατατάσουν τα προβλήματα σε αριθμητικά, αυτά που είναι πιο εύκολο να λυθούν με αριθμητική, και σε αλγεβρικά, αυτά που λύνονται συνήθως με άλγεβρα, αφού δεχτούμε βέβαια ότι όλα τα προβλήματα λύνονται και με αριθμητική και με άλγεβρα (Bednarz & Janvier, 1996). Στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων οι μαθητές ξεκινούν από τη γνωστή ποσότητα και με διαδοχικές πράξεις βρίσκουν τον άγνωστο. Το παρακάτω είναι ένα αριθμητικό πρόβλημα σύμφωνα με τις Bednarz & Janvier.

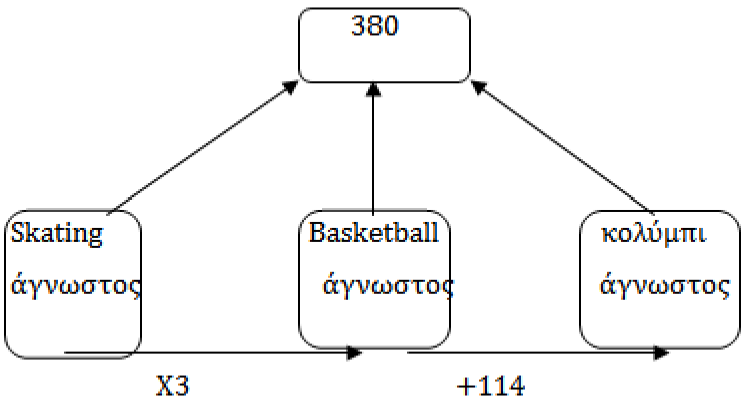
Οι μαθητές ενός σχολείου ασχολήθηκαν με τρεις αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μιας σχολικής περιόδου. Το Basketball είχε τριπλάσιο αριθμό μαθητών από το skatingκαι το κολύμπι είχε 114 μαθητές περισσότερους από το Basketball. Αν οι μαθητές που ασχολήθηκαν με το skatingήταν 38, πόσοι ήταν οι μαθητές του σχολείου;



Στο παραπάνω αριθμητικό πρόβλημα το δεδομένο του προβλήματος σχετίζεται με τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε με διαδοχικές πράξεις να βρούμε το ζητούμενο.

Όμως σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα δεν είναι δυνατό κάποια άγνωστη ποσότητα να συσχετιστεί με τη γνωστή, ώστε να βρεθεί κάνοντας κάποιες πράξεις. Παρακάτω δίνεται ένα τέτοιο πρόβλημα :

Οι 380 μαθητές ενός σχολείου ασχολήθηκαν με τρεις αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μιας σχολικής περιόδου. Το Basketball είχε τριπλάσιο αριθμό μαθητών από το skatingκαι το κολύμπι είχε 114 μαθητές περισσότερους από το Basketball. Πόσοι ήταν οι μαθητές που ασχολήθηκαν με το skating;



Στο παραπάνω αλγεβρικό πρόβλημα, κάθε άγνωστη ποσότητα δεν συνδέεται με τη γνωστή και πρέπει ο μαθητής να ασχοληθεί με όλες τις ποσότητες, γνωστές και άγνωστες ταυτόχρονα. Βασικός στόχος είναι να βρεθεί μια σχέση που να συνδέει αυτές τις ποσότητες. Η σχέση αυτή παριστάνεται με εξίσωση με έναν άγνωστο, την εξίσωση του προβλήματος. Λύνοντας αυτή την εξίσωση ο μαθητής βρίσκει τη λύση του προβλήματος.

Όμως η επίλυση της εξίσωσης δεν είναι εύκολη υπόθεση. Οι μαθητές μαθαίνουν συνήθως μηχανικά τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς χωρίς τη βαθιά κατανόησή τους (English & Halford, 1995).

Ο Balacheff διακρίνει μια ακόμα διαφορά ανάμεσα στον αριθμητικό τρόπο επιλυσης ενός προβλήματος και στον αλγεβρικό (Balacheff, 2000). Τα παιδιά μπορούν να ερμηνεύσουν τα ενδιάμεσα αποτελέσματα ενός προβλήματος όταν λύνουν το πρόβλημα αριθμητικά. Όμως, κατά την αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, απαιτείται αρχικά πολύ καλή κατανόηση των ποσοτήτων του προβλήματος και της αναπαράστασής τους με αλγεβρικά σύμβολα, ώστε να μπορέσουν να γράψουν σωστά την εξίσωση που αναπαριστά το πρόβλημα και έπειτα έναν σωστό χειρισμό αυτών των συμβόλων ανεξάρτητα απ' το τι εκφράζουν. Κατά την επίλυση της εξίσωσης, δηλαδή, τα ενδιάμεσα αποτελέσματα δεν χρειάζεται να ερμηνευτούν.

Η Stacey συγκέντρωσε τις διαφορές στην αριθμητική και την αλγεβρική σκέψη κατά την επίλυση προβλημάτων στον παρακάτω πίνακα (Stacey K. , 2008):

○ Δουλεύεις από τους γνωστούς στους αγνώστους	○ Δουλεύεις με γνωστούς και αγνώστους μαζί
○ Οι άγνωστοι αλλάζουν μέσα στο πρόβλημα	○ Σταθερός άγνωστος
○ Η εξίσωση χρησιμοποιείται σαν τύπος για να βρεις τους αγνώστους	○ Η εξίσωση περιγράφει σχέσεις
○ Διαδοχικοί υπολογισμοί	○ Διαδοχικές ισότητες
○ Κάνω την αντίθετη πράξη για να βρω τον άγνωστο	○ Κάνω την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της ισότητας για να βρω τη λύση
○ Τα ενδιάμεσα αποτελέσματα μπορούν να ερμηνευτούν στα πλαίσια του προβλήματος	○ Τα ενδιάμεσα αποτελέσματα δεν μπορούν να ερμηνευτούν στα πλαίσια του προβλήματος

Βλέπουμε την άποψη του Balacheff να αποτελεί την τελευταία διαφορά μεταξύ της αριθμητικής και της αλγεβρικής επίλυσης ενός προβλήματος. Αυτή είναι και η αιτία στην οποία οφείλεται το ότι οι μαθητές μαθαίνουν μηχανικά τους κανόνες μετασχηματισμού για την επίλυση μιας εξίσωσης. Αν τα ενδιάμεσα αποτελέσματα μπορούσαν να ερμηνευτούν στα πλαίσια του προβλήματος, τότε θα αποκτούσαν νόημα οι μετασχηματισμοί της εξίσωσης. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με μία κατά αντιπαράθεση αριθμητική και αλγεβρική επίλυση του ίδιου προβλήματος.
Ας δούμε το παρακάτω παλιό πρόβλημα από το βιβλίο του George Polya (Polya, 2001):

Ένας αγρότης εκτρέφει κότες και κουνέλια. Αυτά έχουν συνολικά 50 κεφάλια και 140 πόδια. Πόσα είναι τα κουνέλια και πόσες οι κότες;

Αριθμητική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση
	Έστω x τα κουνέλια
Αν όλα τα ζώα ήταν δίποδα θα είχαν 2·50= 100 πόδια	4x+2(50-x)=140
	4x+100-2x=140
Τώρα έχουμε 140-100=40 πόδια παραπάνω →	4x-2x=140-100=40
Τα 40 επιπλέον πόδια προέρχονται από τα κουνέλια (κάθε κουνέλι θα έχει 2 επιπλέον πόδια) →	2x=40
Άρα τα κουνέλια είναι 40:2=20 →	x=40:2=20

Παρατηρούμε ότι η αιτιολόγηση στο πλαίσιο της αριθμητικής επίλυσης μπορεί να ερμηνεύσει, ως ένα σημείο, τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς κατά την αλγεβρική επίλυση.
Ας δούμε ένα ακόμα πρόβλημα (Bednarz & Janvier, 1996) και πώς μπορεί η αιτιολόγηση στην αριθμητική επίλυση να δώσει νόημα στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς.

Οι 380 μαθητές ενός σχολείου ασχολήθηκαν με τρεις αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μιας σχολικής περιόδου. Το Basketball είχε τριπλάσιο αριθμό μαθητών από το skating και το κολύμπι είχε 114 μαθητές περισσότερους από το Basketball. Πόσοι ήταν οι μαθητές που ασχολήθηκαν με το skating;

Αριθμητική επίλυση	Αλγεβρική επίλυση
Αν οι μαθητές που ασχολούνταν με το κολύμπι ήταν όσοι και με το Basketball, τότε το σύνολο των μαθητών θα ήταν 380-114=266	Έστω x οι μαθητές του skating x+3x+3x+144=380 x+3x+3x=380-144=266
Με το skating ασχολούνται το 1/7 των μαθητών άρα 266:7=38	7x=266 x=266:7=38

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος μετασχηματισμός κατά την αλγεβρική επίλυση x+3x+3x=380-144 στηρίζεται αρχικά στην αριθμητική αντίληψη: όταν το άθροισμα μιας ποσότητας με τον αριθμό 144 είναι 380 τότε η ποσότητα ισούται με 380-144. Αυτός ο μετασχηματισμός δεν ερμηνεύεται στο πλαίσιο του προβλήματος. Όταν όμως ταυτόχρανα το πρόβλημα λυθεί και αριθμητικά, βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός έχει νόημα και το αποτέλεσμα της πράξης μπορεί να ερμηνευτεί ως ποσότητα του προβλήματος, π.χ. το 266 σημαίνει το σύνολο των μαθητών που θα ήταν αν οι μαθητές που ασχολούνταν με το κολύμπι ήταν όσοι και με το Basketball. Αυτή βέβαια η νοητική αντιστοίχιση, ανάμεσα στο μετασχηματισμό της αλγεβρικής επίλυσης και την ερμηνεία του αποτελέσματος με βάση την αριθμητική επίλυση, προϋποθέτει καλή γνώση της αριθμητικής επίλυσης.

Βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα ότι οι μετασχηματισμοί στην αλγεβρική επίλυση της εξίσωσης οδηγούν σε πράξεις ίδιες με την αριθμητική επίλυση. Αφού η αριθμητική επίλυση δίνει ερμηνείες στα ενδιάμεσα αποτελέσματα του προβλήματος και οι πράξεις στην αλγεβρική επίλυση είναι ίδιες, άρα οι ενδιάμεσοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί θα μπορούσαν να αποκτήσουν νόημα με τη βοήθεια της αριθμητικής επίλυσης. Αυτή η παρατήρηση θα αποτελέσει τη βάση της παρούσας εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Η ΕΡΕΥΝΑ

Σύμφωνα με θεωρίες, που θέλουν η διδασκαλία της άλγεβρας να ακολουθεί την ιστορική εξέλιξή της, είναι σαφές ότι η εισαγωγή στην άλγεβρα πρέπει να ακολουθήσει την προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων και να επικεντρωθεί στην λύση των εξισώσεων (Wheeler, 1996). Η διδακτική παρέμβαση που προτείνεται παρακάτω αφορά την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα μέσα από την επίλυση προβλημάτων. Η αριθμητική επίλυση προβλήματος είναι μια δραστηριότητα γνωστή στα παιδιά του Δημοτικού. Με αφετηρία, λοιπόν, την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων θα γίνει η μετάβαση των μαθητών στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης και στην αλγεβρική επίλυσή τους. Αυτό όμως προϋποθέτει, σύμφωνα με τις διαφορές που εντόπισε η Stacey ανάμεσα στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων και στην αλγεβρική, μια επανεξέταση των εννοιών που έχουν διαφορετική αντιμετώπιση στις δύο προσεγγίσεις. Αυτές οι έννοιες είναι:

α) Οι γνωστές και οι άγνωστες ποσότητες και η σχέση που τις συνδέει

β) Ο άγνωστος x

γ) Η εξίσωση

δ) Οι πράξεις και η ερμηνεία τους στα ενδιάμεσα στάδια της επίλυσης

Έτσι σχεδιάσαμε μια διδασκαλία η οποία περιλαμβάνει την επίλυση προβλημάτων με δύο τρόπους. Κάθε πρόβλημα λύνεται αρχικά με αριθμητική, με καθοδηγητικές ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, έτσι ώστε η κάθε απάντηση να ερμηνεύεται ξεκάθαρα στο πλαίσιο του προβλήματος. Η αριθμητική επίλυση καθοδηγείται έτσι ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν στην κατάλληλη αριθμητική μέθοδο που θα τους βοηθήσει στην αλγεβρική επίλυση. Στη συνέχεια κάθε πρόβλημα λύνεται αλγεβρικά. Για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών σχετικά με την αναπαράσταση του προβλήματος με μια εξίσωση, όπως αυτές αναφέρθηκαν παραπάνω, δίνονται ξανά καθοδηγητικές ερωτήσεις. Αρχικά ο μαθητής οδηγείται στον σχηματισμό της εξίσωσης και έπειτα αφήνεται μόνος του να επιλύσει την εξίσωση. Αναμένουμε ότι οι μαθητές θα κάνουν μόνοι τους τη συσχέτιση με την αριθμητική επίλυση και θα χρησιμοποιήσουν τους σωστούς αλγεβρικούς μετασχηματισμούς.

Μια κατά αντιπαράθεση επίλυση του προβλήματος, και με τους δύο τρόπους: αριθμητικό και αλγεβρικό, θεωρούμε ότι θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να προβληματιστούν και να επανεξετάσουν τις προηγούμενες έννοιες, που εντόπισε η Stacey, και ταυτόχρονα να γνωρίσουν τον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος. Μέσα όμως από τη μετάβαση αυτή των μαθητών μπορούμε να διερευνήσουμε τα στάδια αυτής της μετάβασης, τις αντιλήψεις που αναπτύσσουν για τις διάφορες έννοιες καθώς και τις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να γίνει αυτή η μετάβαση.

Όμως η επίλυση του προβλήματος και με τους δύο τρόπους έχει ως στόχο να προσφέρει κάτι ακόμα, πολύ πιο σημαντικό, στους μαθητές: την ερμηνεία των ενδιάμεσων μετασχηματισμών της εξίσωσης στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος. Μ' αυτό τον τρόπο οι μετασχηματισμοί θα προκύπτουν αυθόρμητα, θα αποκτήσουν νόημα για τους μαθητές και δεν θα τους μαθαίνουν μηχανικά. Δηλαδή τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν με τη φιλοσοφία ότι οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί για την επίλυση μιας εξίσωσης, που αναπαριστά ένα πρόβλημα, εξηγούνται και αποκτούν νόημα με την ερμηνεία που παρέχει η αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

Έτσι τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν σε αυτήν την έρευνα είναι:

α) Η ερμηνεία των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων, που δίνει η αριθμητική επίλυση του προβλήματος, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στους μετασχηματισμούς κατά την επίλυση της εξίσωσης, που αναπαριστά το ίδιο πρόβλημα;

β) Μπορούν τα φύλλα εργασίας που σχεδιάστηκαν με βάση την παραπάνω συζήτηση να αποτελέσουν ένα χρήσιμο εργαλείο για την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα;

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε τη σχολική χρονιά 2011 –2012 σε δύο τμήματα της Α΄ Γυμνασίου που αποτελούνταν από 43 μαθητές. Χρησιμοποιήθηκαν φύλλα εργασίας τα οποία παράξαμε εμείς. Η διδασκαλία, που έγινε, αφορά την εισαγωγή των μαθητών στην αλγεβρική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, με τη χρήση εξίσωσης. Επιχειρήθηκε μια προσέγγιση της αλγεβρικής μεθόδου επίλυσης ενός προβλήματος, με τη δημιουργία και επίλυση μιας εξίσωσης, περνώντας μέσα από τον αριθμητικό τρόπο σκέψης. Η έρευνα, που ακολούθησε, στηρίχτηκε στα φύλλα εργασίας, αλλά και σε δύο τεστ, που δόθηκαν ένα πριν και ένα μετά την παρέμβασή μας. Σκοπός της έρευνας είναι η ανάλυση του τρόπου που τα παιδιά προσεγγίζουν και ανταποκρίνονται σε λεκτικά προβλήματα, του τρόπου σκέψης τους και της εξέλιξης του τρόπου σκέψης τους όταν αυτά αντιμετωπίζουν προβλήματα, που σχετίζονται με την πραγματικότητα, και προσπαθούν να τα λύσουν με αριθμητικές ή αλγεβρικές μεθόδους. Η έρευνα στηρίχτηκε επίσης και στις παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού που υλοποίησε τη διδασκαλία. Είναι μια έρευνα που δανείζεται μεθοδολογικά στοιχεία από την έρευνα δράσης.

Αρχικά δόθηκε ένα τεστ με 4 προβλήματα. Στη συνέχεια ακολούθησε διδακτική παρέμβαση με φύλλα εργασίας. Η διδασκαλία αρχικά προγραμματίστηκε για 4 διδακτικές ώρες. Κάθε διδακτική ώρα περιλάμβανε την αριθμητική και στη συνέχεια την αλγεβρική επίλυση ενός προβλήματος. Τα προβλήματα ήταν τα ίδια με αυτά που είχαν δοθεί στο τεστ. Μετά τα δύο πρώτα προβλήματα κρίθηκε σκόπιμο να δοθεί ένα ακόμα πρόβλημα, που δεν είχε δοθεί στο διαγνωστικό τεστ και μετά δόθηκαν και τα άλλα δύο. Συνολικά χρειάστηκαν 6 διδακτικές ώρες για τα 5 φύλλα εργασίας (Το τελευταίο φύλλο εργασίας χρειάστηκε 2 διδακτικές ώρες). Στο τέλος δόθηκε ένα τεστ αξιολόγησης με 4 προβλήματα, παρόμοια με τα αρχικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας στηρίχτηκαν στην αξιολόγηση των τεστ και φύλλων εργασίας καθώς και στις παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Η επιλογή των προβλημάτων, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στη διδασκαλία, στηρίχτηκε στην ύλη των μαθηματικών που είχαν διδαχθεί οι συγκεκριμένοι μαθητές έως τότε, στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ακόμα και μαθητές Λυκείου στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων, όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία και την εμπειρία, αλλά και στην πλούσια συλλογή λεκτικών προβλημάτων, που υπάρχουν στη βιβλιογραφία (έρευνες, ιστορικά μαθηματικά κείμενα). Τα προβλήματα, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν, είναι πιο απαιτητικά και πιο δύσκολα σε σχέση μ' αυτά που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές στο Δημοτικό. Καθένα απ' αυτά αποτελεί ένα διαφορετικό πλαίσιο που παρουσιάζει ποικιλία στον τρόπο σκέψης και στις διαφορετικές προσεγγίσεις και σε αριθμητικό και σε αλγεβρικό επίπεδο. Έτσι καθεμιά από τις δραστηριότητες έχει και διδακτικό και ερευνητικό ενδιαφέρον.

2.3 ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ-ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΘΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Σε κάθε διδακτική ώρα δίνεται στα παιδιά ένα φύλλο εργασίας που περιέχει ένα πρόβλημα. Το ίδιο πρόβλημα καλούνται να το λύσουν οι μαθητές με δύο τρόπους, αριθμητικά και αλγεβρικά, έτσι ώστε να δουν κατ' αντιπαράθεση και την αριθμητική επίλυση και την αλγεβρική επίλυση του ίδιου προβλήματος και να τις συγκρίνουν. Οι ενέργειες των παιδιών καθοδηγούνται με κατάλληλες ερωτήσεις στο φύλλο εργασίας. Βοήθεια από την εκπαιδευτικό προς τα παιδιά δεν υπάρχει εκτός από κάποιες διευκρινήσεις στην ερμηνεία των εκφράσεων που χρησιμοποιούνται στο πρόβλημα και σε βασικές μαθηματικές γνώσεις (π.χ. πράξεις κλασμάτων, κ.τ.λ.). Αφού τα παιδιά συμπληρώσουν το φύλλο εργασίας, το δίνουν στην εκπαιδευτικό για ερευνητική χρήση και το πρόβλημα λύνεται στον πίνακα με τη συμμετοχή όλης της τάξης με αριθμητική μέθοδο και στη συνέχεια με αλγεβρική, με βάση τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας και με ανάλυση σε βάθος από την εκπαιδευτικό. Δηλαδή τα φύλλα εργασίας θα τα συμπληρώνουν μόνοι τους οι μαθητές χωρίς βοήθεια, οπότε αυτά θα αποτελέσουν στοιχεία για την έρευνα. Η διδασκαλία στηρίχτηκε στην αλληλεπίδραση των μαθητών μεταξύ τους αλλά και μαθητών-εκπαιδευτικού.

Βασικός στόχος ήταν τα παιδιά να αντιληφθούν ότι η αλγεβρική επίλυση των προβλημάτων στηρίζεται στην ίδια και μοναδική πρακτική: τη δημιουργία εξίσωσης, σε αντίθεση με την αριθμητική επίλυση που σε κάθε περίπτωση η μεθοδολογία είναι διαφορετική (π.χ. αναγωγή στη μονάδα, λύση του προβλήματος από το τέλος προς την αρχή κάνοντας τις αντίστροφες πράξεις). Ωστόσο η προσέγγισή μας είχε σαν στόχο να αντιληφθούν τα παιδιά τη βαθύτερη ισοδυναμία των δύο μεθόδων επίλυσης προβλημάτων, αφού οι πράξεις και κατά την αριθμητική επίλυση και κατά την επίλυση της εξίσωσης με την αλγεβρική μέθοδο είναι τελικά ίδιες.

2.3.1 Πρώτη διδακτική παρέμβαση

Οι διδακτικοί στόχοι της συγκεκριμένης παρέμβασης είναι οι μαθητές:

- Να θυμηθούν ποιο μέρος ενός ποσού αντιπροσωπεύει ένα καταχρηστικό κλάσμα.
- Να χρησιμοποιήσουν το κλάσμα ως τελεστή, για να βρουν το μέρος ενός ποσού.
- Να διδαχτούν πώς μεταφράζουμε λεκτικές εκφράσεις σε μαθηματικές αλγεβρικές εκφράσεις εμπλέκοντας αγνώστους και ενέργειες (κυρίως προς τα εμπρός ενέργειες) .
- Να διδαχτούν πώς καταστρώνουμε την εξίσωση που αναπαριστά το πρόβλημα χρησιμοποιώντας αλγεβρικές εκφράσεις.
- Να εφαρμόσουν τις στρατηγικές επίλυσης απλής εξίσωσης που έχουν διδαχτεί.
- Να διδαχθούν τη μέθοδο της αλγεβρικής επίλυσης ενός προβλήματος.
- Να συνδέσουν τις δύο μεθόδους, δηλ. την αριθμητική με την αλγεβρική επίλυση.

Οι στόχοι θα υλοποιηθούν με τις καθοδηγητικές ερωτήσεις του φύλλου εργασίας, αλλά κυρίως με την αλληλεπίδραση μαθητών μεταξύ τους αλλά και με την εκπαιδευτικό όταν το πρόβλημα θα λυθεί στον πίνακα.

Οι ερευνητικοί στόχοι είναι:

- Να διερευνήσουμε αν οι μαθητές συνδέουν την αριθμητική μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα με τη μέθοδο του πολλαπλασιασμού του κλάσματος με το ποσό, για να βρουν το μέρος ενός ποσού.
- Να διερευνήσουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούν την παραπάνω μέθοδο να τη μεταφέρουν σε μια αλγεβρική έκφραση, χρησιμοποιώντας το x.
- Να διερευνήσουμε πώς αντιλαμβάνονται την έννοια της μεταβλητής.
- Να διερευνήσουμε πώς αντιλαμβάνονται την έννοια της αλγεβρικής έκφρασης.
- Να διερευνήσουμε πώς αντιλαμβάνονται την έννοια της εξίσωσης.

Το πρόβλημα που δόθηκε στην 1η διδακτική παρέμβαση ήταν το παρακάτω:

Μια γιαγιά φίλεψε τα 7 εγγόνια της δίνοντάς τους χαρτζιλίκι ίδιου ποσού. Αν τα 4 παιδιά μαζί πήραν 240 ευρώ, πόσα ευρώ ήταν όλο το ποσό που έδωσε η γιαγιά στα 7 παιδιά;

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί ένα πλαίσιο με το οποίο οι μαθητές του Δημοτικού είναι εξοικειωμένοι. Έχουν συνηθίσει να χειρίζονται τέτοιου είδους προβλήματα με αναγωγή στη μονάδα. Έχουν διδαχθεί επίσης, σε προηγούμενο κεφάλαιο της Α' Γυμνασίου, τη στρατηγική με την οποία για να βρεις μέρος ενός ποσού πολλαπλασιάζεις το κλάσμα με το ποσό. Έχουν διδαχτεί δηλ. και την έννοια του κλάσματος ως τελεστή, που είναι μία από τις πολλές εννοιολογικές μορφές με τις οποίες συναντώνται τα κλάσματα σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Kieren, 1980), (Behr M. , Lesh, Post, & Harel, 1993) , (Marshall, 1993). Υπάρχουν δύο αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης του παραπάνω προβλήματος.

α) Η αναγωγή στη μονάδα : Το ένα από τα 4 παιδιά θα πάρει 240:4=60 ευρώ.

Τα 7 παιδιά θα πάρουν 60·7=420 ευρώ

β) Η χρήση του κλάσματος ως τελεστή: $\frac{7}{4}\cdot 240=\frac{1680}{4}=420$ ευρώ

Τα παιδιά έχουν διδαχτεί και τις δυο μεθόδους. Όμως η αριθμητική επίλυση, από τις δύο παραπάνω, που είναι πιο κοντά στην αλγεβρική μέθοδο, στην οποία θέλουμε να εισάγουμε τους μαθητές, είναι η δεύτερη. Αν τα παιδιά έχουν συνειδητοποιήσει ότι ο πολλαπλασιασμός $\frac{7}{4}\cdot 240$ είναι ισοδύναμος και δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα θα μπορέσουν να κατανοήσουν την αλγεβρική έκφραση

$\frac{7}{4} \cdot x$. Η κατανόηση αυτής ακριβώς της τεχνικής αποτελεί ένα ισχυρό εφόδιο στην πορεία τους προς την άλγεβρα και την ανάλυση.

Αρχικά, προτρέπονται τα παιδιά να λύσουν το πρόβλημα με όποιο τρόπο θέλουν. Αναμένεται να προτιμήσουν την αναγωγή στη μονάδα.

Λύσε το πρόβλημα:

………

………

………

………

Έπειτα, μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις οδηγούνται να λύσουν το πρόβλημα με τη δεύτερη μέθοδο, κάνοντας δηλ. ένα πολλαπλασιασμό (κλάσμα **x** ποσό):

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. **Γράψε την κλασματική μονάδα που εκφράζει ποιο μέρος των 240 ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά.**
2. **Πόσα ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά;**
3. **Σε πόσες κλασματικές μονάδες αντιστοιχεί το ποσό που πήραν και τα 7 παιδιά μαζί;**
4. **Πόσα ευρώ επομένως πήραν και τα 7 παιδιά μαζί;**

5 **Μπορείς να βρεις το ίδιο αποτέλεσμα κάνοντας μόνο έναν πολλαπλασιασμό; (Χρησιμοποίησε το κλάσμα της ερώτησης 3 που εκφράζει το ποσό που πήραν τα 7 παιδιά μαζί)**

Στη συνέχεια με συγκεκριμένες οδηγίες λύνουν το πρόβλημα αλγεβρικά. Δίνεται αρκετή βοήθεια στην κατάστρωση της εξίσωσης, ενώ οι μαθητές αφήνονται εντελώς ελεύθεροι να προβληματιστούν με την επίλυση της εξίσωσης. (Βέβαια γνωρίζουν από το Δημοτικό τι σημαίνει επίλυση εξίσωσης και γνωρίζουν τη διαδικασία επίλυσης μιας απλής εξίσωσης π.χ. της μορφής $x+α=β$, $x-α=β$,$α-x=β$, $αx=β$, $α:x=β$, $x:α=β$.)

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. **Αν συμβολίσουμε με x τα χρήματα που η γιαγιά έδωσε και στα 7 εγγόνια, γράψε μια κλασματική αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει το ποσό που πήρε καθένα από τα 7 παιδιά.**

2. **Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το ίδιο x) που να δίνει το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά;**

3. **Χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην προηγούμενη ερώτηση, μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά είναι 240 ευρώ.**

4. **Λύσε την εξίσωση.**

Στο τέλος δίνεται η ευκαιρία στα παιδιά να αναστοχαστούν, να σκεφτούν δηλαδή ξανά τις δύο μεθόδους επίλυσης του προβλήματος και να γράψουν τις σκέψεις τους.

Αναστοχασμός

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου

……
……
……
……

2.3.2 Δεύτερη διδακτική παρέμβαση

Οι διδακτικοί στόχοι της συγκεκριμένης παρέμβασης είναι:

- Να εμβαθύνουν στην αριθμητική μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα σε προβλήματα όπου η μονάδα δεν είναι προφανής.
- Να χρησιμοποιήσουν σε πλαίσιο προβλήματος τη γνώση ότι το κλάσμα εκφράζει το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης.
- Να θυμηθούν προβλήματα με κόστος, τιμή πώλησης και κέρδος.
- Να θυμηθούν πότε κάνουμε διαίρεση μερισμού.
- Να μεταφέρουν όλες τις παραπάνω αριθμητικές αντιλήψεις στο πλαίσιο της άλγεβρας.
- Να εμβαθύνουν στην αναγωγή ομοίων όρων όταν έχουμε κλασματικούς συντελεστές.

Όμως παράλληλα υπάρχουν και ερευνητικοί στόχοι. Οι ερευνητικοί στόχοι είναι:

- Να διερευνήσουμε αν οι μαθητές μπορούν να εφαρμόζουν τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα σε προβλήματα όπου η μονάδα δεν είναι προφανής.
- Να διερευνήσουμε το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια του κλάσματος ως πηλίκο.
- Να διερευνήσουμε την αντίληψη των μαθητών για το αλγεβρικό κλάσμα.
- Να διερευνήσουμε την αντίληψη των μαθητών για την αλγεβρική έκφραση.
- Να διερευνήσουμε την αντίληψη των μαθητών για την εξίσωση που αναπαριστά ένα πρόβλημα.
- Να μελετήσουμε το είδος των λαθών των μαθητών κατά το σχηματισμό αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων.
- Να διερευνήσουμε πώς οι μαθητές συνδέουν την αριθμητική και την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης ενός προβλήματος.

Το πρόβλημα που δόθηκε κατά τη δεύτερη διδακτική παρέμβαση είναι το παρακάτω:

Το σούπερ μάρκετ της γειτονιάς αγόρασε αυγά από έναν ορνιθοτρόφο προς 1 ευρώ την επτάδα και τα πούλησε όλα σε πελάτες προς 1 ευρώ την πεντάδα. Το καθαρό κέρδος του σούπερ μάρκετ ήταν 12 ευρώ. Πόσα αυγά είχε αγοράσει;

Το παραπάνω είναι ένα ασυνήθιστο πρόβλημα αλλά παράλληλα και ελκυστικό. Οι μαθητές έχουν ασχοληθεί στο Δημοτικό με προβλήματα κόστους-κέρδους και διαίρεσης μερισμού, οπότε το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί ένα γνωστό πλαίσιο. Από την άλλη, ενώ έχουν διδαχτεί την έννοια του κλάσματος ως πηλίκο δεν έχουν συνηθίσει να θεωρούν ως απάντηση τις εκφράσεις 1/7 ευρώ, 2/3 κιλά ή 5/7 λίτρα. Δεν θεωρούν το κλάσμα, δηλαδή, αριθμό. Συνήθως θεωρούν ότι το 1/7 ευρώ, τα2/3 κιλά ή τα 5/7 λίτρα, πρέπει να τα υπολογίσουν. Οπότε κάνουν τη διαίρεση και, παρότι η διαίρεση δεν βγαίνει ακριβώς, δίνουν ως απάντηση το δεκαδικό αριθμό 0,14 ευρώ ή 0,666 κιλά ή 0,715 λίτρα ή χρησιμοποιούν υποδιαιρέσεις 14 λεπτά ή 666 γραμμάρια ή 715 λίτρα. Παρακάτω παρατίθενται κάποιες αριθμητικές λύσεις του προβλήματος:

α) με αναγωγή στη μονάδα: Το σούπερ μάρκετ αγόρασε το 1 αυγό 1/7 ευρώ

και πούλησε το 1 αυγό 1/5 ευρώ

Το κέρδος από 1 αυγό είναι 1/5 - 1/7 =2/35 ευρώ

Άρα τα αυγά είναι 12 : 2/35 = 210

β) άλλη αριθμητική επίλυση (μέθοδος Regula-Falsi)

Ο αριθμός των αυγών είναι κοινό πολλαπλάσιο των 5 και 7, δηλ. πολλαπλάσιο του 35.

Αν ο αριθμός των αυγών ήταν 35, το κέρδος θα ήταν 7-5=2 ευρώ

Όμως το κέρδος είναι 12 ευρώ, δηλ. εξαπλάσιο του 2, άρα ο αριθμός των

αυγών θα είναι εξαπλάσιο του 35: 35·6=210 αυγά

γ) άλλη αριθμητική μέθοδος: με κάθε ευρώ, που εισπράττει το σούπερ μάρκετ από κάθε πεντάδα αυγών, ξεχρεώνει μια επτάδα και του μένουν και 2 αυγά κέρδος.

Τα 12 ευρώ τα κερδίζει το σούπερ μάρκετ από 12·5=60 αυγά επιπλέον.

Δηλ. τα επιπλέον αυγά είναι 30 δυάδες(κάθε ζευγάρι προέρχεται από 1 επτάδα)

Άρα ο αριθμός των αυγών είναι 30 επτάδες, δηλ. 30·7=210 αυγά.

Εκείνη η αριθμητική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος, από τις παραπάνω, που θα βοηθήσει τους μαθητές να εφαρμόσουν την αλγεβρική μέθοδο για να λύσουν το πρόβλημα, είναι η αναγωγή στη μονάδα. Με δεδομένο ότι οι μαθητές χειρίζονται πολύ καλά την αναγωγή στη μονάδα και άρα θα κατορθώσουν να λύσουν αριθμητικά το πρόβλημα, ενώ οι άλλες αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες, το συγκεκριμένο πρόβλημα φαίνεται ικανό να γεφυρώσει την αριθμητική με την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης. Παρακάτω δίνονται δύο αλγεβρικές λύσεις που αναμένεται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν:

α) 1/5 x-1/7 x=12
(1/5 – 1/7)x=12
2/35 x=12
x=12 :2/35
x=210

β) x/5 – x/7 =12
7x/35 -5x/35 = 12
2x/35 =12
2x= 35·12
2x=420
x= 420:2=210

Παρατηρούμε ότι στους δύο παραπάνω τρόπους αλγεβρικής επίλυσης υπάρχουν κάποια σημεία που απαιτούν από τους μαθητές χειρισμούς υψηλότερου επιπέδου, όπως αναγωγή ομοίων όρων με συντελεστές κλασματικούς (στον πρώτο τρόπο επίλυσης). Όμως τα παιδιά της Α’ Γυμνασίου, ενώ έχουν διδαχτεί την επιμεριστική ιδιότητα, δεν έχουν ασχοληθεί με εφαρμογές της επιμεριστικής ιδιότητας στην άλγεβρα όπως : 2(x+3)=2·x+6 ή 2·x+3·x=5·x, οπότε αναμένεται να δυσκολευτούν.

Επίσης στο δεύτερο τρόπο επίλυσης χρησιμοποιείται η έννοια του αλγεβρικού κλάσματος και πράξεις (αφαίρεση) με αλγεβρικά κλάσματα, που οι μαθητές δεν έχουν διδαχτεί. Θα ήταν όμως ενδιαφέρον να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις των παιδιών για όλα αυτά.

Αρχικά, προτρέπονται τα παιδιά να λύσουν το πρόβλημα με όποιο τρόπο θέλουν. Αναμένεται τα παιδιά να δυσκολευτούν. Οι μαθητές χειρίζονται την αναγωγή στη μονάδα, αλλά στο συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει ο μαθητής να εντοπίσει ποια είναι η μονάδα (το 1 ευρώ, το 1 αυγό, η 1 επτάδα ή η 1 πεντάδα).

Λύσε το πρόβλημα:

………

………

………

………

Έπειτα μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις καθοδηγούνται τα παιδιά να λύσουν το πρόβλημα αριθμητικά, εστιάζοντας στο ένα αυγό.

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. **Βρες πόσο αγόρασε το ένα αυγό;**
2. **Βρες πόσο πούλησε το ένα αυγό;**
3. **Βρες πόσο είναι το καθαρό κέρδος από το κάθε αυγό;**
4. **Χρησιμοποιώντας το συνολικό καθαρό κέρδος και το καθαρό κέρδος από το κάθε αυγό, βρες πόσα ήταν τα αυγά;**

Στη συνέχεια κατάλληλες ερωτήσεις τους οδηγούν στην κατασκευή της εξίσωσης. Χρησιμοποιείται η έννοια του κλάσματος ως τελεστή, που είχαμε ξανασυναντήσει στο προηγούμενο πρόβλημα, προκειμένου να κατασκευαστεί η αλγεβρική έκφραση που δίνει τα χρήματα που κοστίζουν στο σούπερ μάρκετ τα χ αυγά ($1/7 \cdot x$). Για την ίδια αλγεβρική έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η έννοια του κλάσματος ως πηλίκο που έχει διδαχτεί και προκύπτει το αλγεβρικό κλάσμα $x/7$. Και τελικά αφήνονται τα παιδιά να προβληματιστούν μόνα τους στην επίλυση της εξίσωσης. Χειρίζονται την αναγωγή ομοίων όρων αλλά όχι με κλασματικούς συντελεστές, γι' αυτό αναμένεται να δυσκολευτούν αρκετά.

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ήταν x τα αυγά. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει πόσες επτάδες ήταν τα x αυγά.
2. Επομένως, πόσα χρήματα έδωσε το σούπερ μάρκετ για να αγοράσει τα x αυγά;
3. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει πόσες πεντάδες ήταν τα x αυγά.
4. Επομένως, πόσα χρήματα πήρε το σούπερ μάρκετ όταν πούλησε τα x αυγά;
5. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το καθαρό κέρδος από τα x αυγά.
6. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: το καθαρό κέρδος από τα x αυγά ήταν 12 ευρώ.
7. Λύσε την εξίσωση.

Στη συνέχεια, προκειμένου να καταλάβουμε πώς συνδέουν οι μαθητές στο μυαλό τους την αριθμητική και την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος, τους δίνουμε την ευκαιρία του αναστοχασμού.

Αναστοχασμός

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου

……
……
……
……
……

Μετά τα δύο πρώτα προβλήματα, τα παιδιά φάνηκαν να βρίσκονται σε σύγχυση τόσο για τη διαδικασία κατάστρωσης της εξίσωσης ενός προβλήματος (αντιμετώπισαν δυσκολία στα κλάσματα) όσο και για την αναγκαιότητα της αλγεβρικής επίλυσης του προβλήματος στην πράξη, αφού τα προηγούμενα προβλήματα λύνονταν πολύ πιο εύκολα με αριθμητικές μεθόδους. Ιδίως ο τελευταίος λόγος θεωρήθηκε σημαντικός ώστε να τροποποιήσουμε την πορεία της διδασκαλίας προσθέτοντας ένα ακόμα πρόβλημα, το οποίο δεν θα είχε σαν προϋπόθεση οι μαθητές να έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια του κλάσματος και ταυτόχρονα θα αναδείκνυε την αλγεβρική επίλυση ως τον πιο εύκολο τρόπο επίλυσης του. Έτσι κατά τη διάρκεια της τρίτης διδακτικής ώρας δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

2.3.3 Τρίτη διδακτική παρέμβαση

Οι διδακτικοί στόχοι της συγκεκριμένης εφαρμογής, με δεδομένο ότι η αριθμητική επίλυση του προβλήματος είναι ιδιαίτερα απλή, επικεντρώνονται στη διδασκαλία της αλγεβρικής επίλυσης και συγκεκριμένα είναι:

- Η κατανόηση από τους μαθητές της αλγεβρικής αναπαράστασης των διαφόρων ποσοτήτων του προβλήματος.
- Η διδασκαλία των βημάτων της κατάστρωσης μιας εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα.
- Η σύνδεση της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος και της επίλυσης της εξίσωσης που σχηματίστηκε κατά την αλγεβρική επίλυση.
- Η αυθόρμητη διαπίστωση από τους μαθητές το πόσο ισχυρό εργαλείο αποτελεί η εξίσωση για την επίλυση ενός προβλήματος.

Οι ερευνητικοί στόχοι επικεντρώνονται κι αυτοί σε συγκεκριμένη κατεύθυνση: στον τρόπο μετάβασης των μαθητών από τον αριθμητικό στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Συγκεκριμένα είναι:

- Να διερευνηθεί η αντίληψη των μαθητών για την έννοια της μεταβλητής.
- Να διερευνηθεί ο τρόπος που χειρίζονται οι μαθητές τη μεταβλητή για να αναπαραστήσουν αλγεβρικά διάφορες εκφράσεις του προβλήματος.
- Να διερευνηθούν οι χειρισμοί των παιδιών για την κατάστρωση της εξίσωσης του προβλήματος.
- Να διερευνηθεί η αντίληψη των μαθητών για τις έννοιες αλγεβρική έκφραση-αλγεβρική εξίσωση.
- Να διερευνηθούν οι πρακτικές χειρισμού των μαθητών για την επίλυση μιας εξίσωσης.
- Να μελετηθούν και να κατηγοριοποιηθούν τα λάθη των μαθητών κατά την κατάστρωση της εξίσωσης που αναπαριστά αλγεβρικά το πρόβλημα.

- Να διερευνηθεί ο συσχετισμός που αποδίδουν οι μαθητές στην αριθμητική και στην αλγεβρική επίλυση ενός προβλήματος.

Το πρόβλημα που δόθηκε στην τρίτη διδακτική παρέμβαση ήταν:

Οι 105 μαθητές της Α’ Γυμνασίου ασχολούνται με δύο αθλήματα: ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν με το μπάσκετ ασχολούνται 17 μαθητές παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με κάθε άθλημα;

Το παραπάνω είναι ένα εύκολο αριθμητικό πρόβλημα. Επίσης για την αλγεβρική του επίλυση, η αναπαράσταση των ποσοτήτων του προβλήματος είναι απλή γιατί στηρίζεται σε προσθετικές σχέσεις και μόνο:

x οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο

x+17 οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ

x+x+17 οι μαθητές που παίζουν και μπάσκετ και ποδόσφαιρο

Αναμενόμενο είναι οι περισσότεροι μαθητές να καταφέρουν να λύσουν αριθμητικά το πρόβλημα κάνοντας μια αφαίρεση και μια διαίρεση.

Λύσε το πρόβλημα:

………
………
………
………

Κάποιοι όμως ίσως δεν τα καταφέρουν. Τότε με κατάλληλες ερωτήσεις θα οδηγηθούν στην αριθμητική επίλυση.

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. **Αν δεν υπήρχαν οι 17 επιπλέον μαθητές στο ένα άθλημα, τότε οι μαθητές του ποδοσφαίρου και του μπάσκετ θα ήταν ισάριθμοι. Βρες πόσοι θα ήταν σ’ αυτή την περίπτωση όλοι οι μαθητές;**

2. **Βρες πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο;**

3. **Βρες πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ;**

Στη συνέχεια με κατευθυνόμενες ερωτήσεις θα οδηγηθούν στο σχηματισμό εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα και θα προσπαθήσουν να τη λύσουν.

<u>Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος</u>

1. **Έστω ότι x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. Χρησιμοποίησε το δεδομένο ότι οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ είναι 17 παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο και γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που παίζουν μπάσκετ.**

2. **Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το συνολικό αριθμό των μαθητών (και αυτούς που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτούς που παίζουν μπάσκετ).**

3. **Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: ο συνολικός αριθμός των μαθητών είναι 105.**

4. **Λύσε την εξίσωση.**

Στο τέλος με τον αναστοχασμό, θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να συγκρίνουν τις δυο μεθόδους επίλυσης και να διακρίνουν πιο εύκολα τις ομοιότητες αφού πρόκειται για απλούστερη εξίσωση και πιο απλές πράξεις.

<u>Αναστοχασμός</u>

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου……………………………………………………………………………………….
……
……
……

2.3.4 Τέταρτη διδακτική παρέμβαση

Οι επιπλέον διδακτικοί στόχοι της ενότητας είναι οι μαθητές:

- Να εμβαθύνουν στην αναπαράσταση διαφόρων ποσοτήτων του προβλήματος με αλγεβρικές εκφράσεις.
- Να εφαρμόσουν την πρώτη στρατηγική κατασκευής αλγεβρικής έκφρασης, που διδάχτηκαν στα προηγούμενα προβλήματα και στηρίζεται σε ενέργειες προς τα εμπρός. (π.χ. ο αριθμός των τροχών των x αυτοκινήτων είναι 4x)

- Να διδαχτούν μια δεύτερη στρατηγική κατασκευής αλγεβρικής έκφρασης που στηρίζεται σε ενέργειες προς τα πίσω. (π.χ. ο αριθμός των μοτοσικλετών, αν τα αυτοκίνητα είναι x σε σύνολο 50 οχημάτων, είναι 50-x)
- Να αντιληφθούν τη χρησιμότητα των παρενθέσεων σε αλγεβρικές εκφράσεις.
- Να κατανοήσουν πότε χρησιμοποιούμε παρενθέσεις σε αλγεβρικές εκφράσεις.
- Να εφαρμόσουν την επιμεριστική ιδιότητα στην προσπάθειά τους να απλοποιήσουν αλγεβρικές εκφράσεις με παρενθέσεις.
- Να συνδέσουν την αριθμητική επίλυση με την επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης.

Οι ερευνητικοί στόχοι είναι:

- Να διερευνηθεί πώς αντιλαμβάνονται τα παιδιά την αλγεβρική αναπαράσταση ποσοτήτων που βασίζεται σε ενέργειες προς τα πίσω.
- Να διερευνηθεί η αντίληψή τους για το ρόλο της παρένθεσης σε μια αλγεβρική έκφραση.
- Να διερευνηθεί αν μπορούν να εφαρμόζουν συνειδητά την επιμεριστική ιδιότητα.
- Να διερευνηθεί πώς χειρίζονται τις μεθόδους που έχουν διδαχτεί για την επίλυση πιο σύνθετης εξίσωσης (με παρενθέσεις).
- Να διερευνηθεί αν έγινε αντιληπτή η χρησιμότητα της αλγεβρικής μεθόδου της επίλυση ενός προβλήματος.

Το πρόβλημα της τέταρτης διδακτικής παρέμβασης είναι:

Σε ένα πάρκιγκ έχουν παρκάρει 50 οχήματα (αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες). Αν το σύνολο των τροχών των οχημάτων είναι 140, πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες;

Το παραπάνω είναι ένα πρόβλημα, που είναι αρκετά δύσκολο για μαθητές της Α’ Γυμνασίου ώστε να λυθεί με αριθμητικό τρόπο. Παρακάτω δίνονται δύο αριθμητικοί τρόποι επίλυσης του προβλήματος:

α) Εύρεση προφανούς λύσης (δοκιμή – λάθος)

Δοκιμάζουμε διάφορα ζευγάρια τιμών μέχρι να βρούμε το σωστό

αυτοκίνητα	μοτοσικλέτες	τροχοί	επαλήθευση
50	0	200	200›140
0	50	100	100‹140
25	25	150	150›140
20	30	140	140=140

β) Πρακτικός τρόπος

Αν όλα τα οχήματα ήταν μοτοσικλέτες θα είχαν 2·50=100 ρόδες

Υπάρχουν όμως 40 ρόδες παραπάνω, δηλαδή 20 ζευγάρια ρόδες.

Αυτά τα 20 ζευγάρια υπάρχουν γιατί έχουμε 20 αυτοκίνητα (κάθε αυτοκίνητα έχει 1 ζευγάρι ρόδες παραπάνω απ' τη μοτοσικλέτα).

άρα υπάρχουν 30 μοτοσικλέτες και 20 αυτοκίνητα.

Οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με καμία από τις δύο προηγούμενες λύσεις, γι' αυτό δεν αναμένουμε να λύσουν αριθμητικά το πρόβλημα. Αποτελεί λοιπόν μια ευκαιρία να αναδειχτεί η χρησιμότητα της αλγεβρικής επίλυσης του προβλήματος. Αλγεβρικά μπορεί να λυθεί με σύστημα δύο εξισώσεων. Μετατρέποντας, όμως, τη μία εξίσωση σε αλγεβρική έκφραση, μπορούμε τελικά να το λύσουμε με τη δημιουργία μιας και μόνο εξίσωσης. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί, λοιπόν, ένα πλαίσιο πλούσιο και από ερευνητική και από διδακτική άποψη. Παρακάτω δίνονται δύο τρόποι κατασκευής της εξίσωσης:

α) Με σύστημα δύο εξισώσεων

Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι: ο αριθμός των αυτοκινήτων x και ο αριθμός των μοτοσικλετών y. Άρα οι εξισώσεις που αναπαριστούν το πρόβλημα είναι:

$x+y=50$ Το άθροισμα αυτοκινήτων και μοτοσικλετών είναι 50

$4x+2y=140$ Το άθροισμα των τροχών των οχημάτων είναι 140

Με μετασχηματισμό της πρώτης εξίσωσης και αντικατάσταση στη δεύτερη αυτές μετατρέπονται σε:

$y=50-x$

4x+2(50-x)=140

Η τελευταία είναι η εξίσωση που αναπαριστά το πρόβλημα

β) Με χρήση μιας μόνο μεταβλητής

Θα χρησιμοποιηθεί μια μόνο μεταβλητή για να παραστήσουμε αλγεβρικά όλες τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος:

Έστω x ο αριθμός των αυτοκινήτων

50-x ο αριθμός των μοτοσικλετών

4x ο αριθμός των τροχών των x αυτοκινήτων

2(50-x) ο αριθμός των τροχών των 50-x μοτοσικλετών

4x+2(50-x) ο συνολικός αριθμός των τροχών των οχημάτων

4x+2(50-x)=140 ο συνολικός αριθμός των τροχών των οχημάτων είναι 140

Η τελευταία είναι η εξίσωση του προβλήματος.

Παρατηρούμε ότι για την κατασκευή της εξίσωσης απαιτείται από τους μαθητές ικανότητα στο να εκφράζουν με αλγεβρικό τρόπο διάφορες ποσότητες του προβλήματος, χρησιμοποιώντας την ίδια μεταβλητή και να αντικαθιστούν αυτές τις εκφράσεις σε πιο σύνθετες αλγεβρικές εκφράσεις. Αυτό το έχουν συναντήσει και στα προηγούμενα προβλήματα και είδαμε ότι αντιμετώπισαν ιδιαίτερες δυσκολίες. Υπάρχει τώρα κάποια βελτίωση; Υπάρχει και μια αλγεβρική έκφραση που για το σχηματισμό της απαιτεί μια διαφορετική αντιμετώπιση από τους μαθητές. Την αλγεβρική έκφραση του αριθμού των μοτοσικλετών 50-x, για να τη σχηματίσει ο μαθητής πρέπει να χρησιμοποιήσει ενέργειες προς τα πίσω (Αφού το άθροισμα των οχημάτων είναι 50, για να βρω τις μοτοσικλέτες πρέπει να σχηματίσω τη διαφορά 50-x).

Η νέα έννοια, που εμφανίζεται σ’ αυτό το πρόβλημα είναι η παρένθεση και η χρήση της σε αλγεβρικές εκφράσεις. Οι μαθητές έχουν ξανασυναντήσει την έννοια της παρένθεσης στην αριθμητική. Ξέρουν ότι η παρένθεση δηλώνει προτεραιότητα πράξης. Θα μπορέσουν να μεταφέρουν την αριθμητική αυτή ιδιότητα στο περιβάλλον της άλγεβρας;

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για να λυθεί αυτή η εξίσωση χρειάζεται η εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας. Την επιμεριστική ιδιότητα τα παιδιά την έχουν διδαχτεί σε αριθμητικό πλαίσιο. Δεν έχουν ασχοληθεί με εφαρμογές της επιμεριστικής ιδιότητας στην άλγεβρα όπως : $2(x+3)=2x+6$ ή $2x+3x=5x$

Τη δεύτερη εφαρμογή τη συνάντησαν στο 2ο φύλλο εργασίας. Τώρα θα δούμε πώς αντιλαμβάνονται και την πρώτη εφαρμογή.

Παρότι αναμένεται οι μαθητές να μην μπορέσουν να λύσουν το πρόβλημα, τους δίνεται αρχικά η ευκαιρία να το λύσουν με τη σκέψη ότι θα δοθεί παρότρυνση για εύρεση μιας προφανούς λύσης:

Λύσε το πρόβλημα:

……

……

……

……

Στη συνέχεια, με διαδοχικά βήματα οδηγούνται στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, που παρουσιάζει πολλές δυσκολίες στην κατανόησή της από μαθητές αυτού του επιπέδου. Παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον στο θέμα της εσωτερικής αναπαράστασης του προβλήματος από τους μαθητές (ένα βήμα που προηγείται της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος).

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. **Αν τα 50 οχήματα ήταν μοτοσικλέτες, πόσες θα ήταν οι ρόδες τους;**
2. **Όμως οι ρόδες των οχημάτων που υπάρχουν στο πάρκιγκ είναι 140. Βρες πόσες είναι οι επιπλέον ρόδες.**

   Που οφείλεται αυτό; ……………………………………………………………………………..
3. **Απ' τις επιπλέον ρόδες, ποια οχήματα μπορείς να υπολογίσεις; Υπολόγισέ τα.**
4. **Πόσες είναι οι μοτοσικλέτες και πόσα τα αυτοκίνητα;**

Στη συνέχεια τα παιδιά οδηγούνται στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, αφού σχηματίσουν μια εξίσωση πιο πολύπλοκη από τις προηγούμενες (με παρενθέσεις). Άρα σ' αυτή τη δραστηριότητα προκύπτουν κάποιοι επιπλέον διδακτικοί και ερευνητικοί στόχοι.

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι είναι x τα αυτοκίνητα. Να εκφράσεις με αλγεβρικό τρόπο (χρησιμοποιώντας το x) τον αριθμό των μοτοσικλετών.
2. Πόσες ρόδες έχουν τα x αυτοκίνητα;
3. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των τροχών που έχουν οι μοτοσικλέτες, αν αυτές είναι τόσες όσες λέει η έκφραση που έγραψες στην ερώτηση 1.
4. Δώσε μια αλγεβρική έκφραση, χρησιμοποιώντας το x, που να δίνει τις συνολικές ρόδες των οχημάτων.
5. Να εκφράσεις με μια εξίσωση την πρόταση: Οι συνολικές ρόδες των οχημάτων είναι 140.
6. Λύσε την εξίσωση.

Στο τέλος δίνεται πάντα η δυνατότητα του αναστοχασμού.

Αναστοχασμός

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου…………………………………………………………. ……………………………………. …… …… ……

2.3.5 Πέμπτη διδακτική παρέμβαση

Σ' αυτή τη διδακτική παρέμβαση θα δοθεί ένα πρόβλημα, που αποτελεί ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές θα μπορέσουν να εμβαθύνουν στο σχηματισμό εξισώσεων με παρενθέσεις και στην επίλυση τέτοιων εξισώσεων. Συγκεκριμένα οι διδακτικοί στόχοι είναι:

- Να επαναλάβουν τα παιδιά πότε χρησιμοποιούμε παρενθέσεις στις αλγεβρικές εκφράσεις.
- Να αναπτύξουν δεξιότητες στην κατάστρωση μιας εξίσωσης με παρενθέσεις.

- Να χρησιμοποιήσουν τις μέχρι τώρα γνώσεις τους (π.χ. επιμεριστική ιδιότητα) και τον αριθμητικό τρόπο σκέψεις τους και να ανακαλύψουν δεξιότητες επίλυσης μιας εξίσωσης με παρενθέσεις.

Ταυτόχρονα υπάρχουν και τα ερευνητικά ερωτήματα που μπαίνουν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και είναι:

- Η διερεύνηση της αντίληψης που έχουν τα παιδιά για τη χρήση της παρένθεσης.
- Η διερεύνηση του τρόπου που επιδρά η αντίληψη αυτή στην επίλυση της εξίσωσης.
- Ποιον τρόπο προτιμούν τα παιδιά για την επίλυση μιας εξίσωσης με παρενθέσεις.
- Ποια είναι τα λάθη στα οποία επιμένουν οι μαθητές.
- Πώς επιδρά η αριθμητική τους αντίληψη στην επίλυση εξισώσεων.

Το πρόβλημα που δόθηκε είναι:

Ένας επενδυτής βάζει τα χρήματά του στο χρηματιστήριο. Την πρώτη εβδομάδα, αρχικά, διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά μετά χάνει 30 χιλ. ευρώ. Τη δεύτερη εβδομάδα, αρχικά τριπλασιάζει τα χρήματα που του έμειναν, αλλά μετά χάνει 54 χιλ. ευρώ από αυτά. Την τρίτη εβδομάδα, τετραπλασιάζει τα χρήματά της προηγούμενης εβδομάδας και μετά χάνει 72 χιλ. ευρώ από αυτά. Τελικά μένει με 48 χιλ. ευρώ. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

Το παραπάνω είναι ένα πρόβλημα που στην αριθμητική λύνεται με ενέργειες προς τα πίσω. Τα παιδιά είναι εξοικειωμένα με τη συγκεκριμένη πρακτική. Από την άλλη, η αλγεβρική επίλυση του προβλήματος προϋποθέτει τη δημιουργία μιας εξίσωσης με πολλές παρενθέσεις και την επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης. Η συγκεκριμένη εφαρμογή αποτελεί ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές θα μπορέσουν να εμβαθύνουν στο σχηματισμό εξισώσεων με παρενθέσεις και στην επίλυση τέτοιων εξισώσεων.

Η εξίσωση που πρέπει να σχηματίσουν οι μαθητές είναι: $4(3(2x-30)-54)-72=48$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα για απαλοιφή παρενθέσεων

$4(3(2x-30)-54)-72=48$

$4(6x-90-54)-72=48$

$24x-576-72=48$

$24x=576+48+72$

$24x=696$

$x=696:24=29$

β) Κάνοντας αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που στηρίζονται σε αριθμητική σκέψη:

$4(3(2x-30)-54)-72=48$

$4(3(2x-30)-54)=72+48$ δηλ. $4(3(2x-30)-54)=120$

$3(2x-30)-54=120:4$ δηλ. $3(2x-30)-54=30$

$3(2x-30)=54+30$ δηλ. $3(2x-30)=84$

$2x-30=84:3$ δηλ. $2x-30=28$

$2x=30+28$ δηλ. $2x=58$

$x=58:2$ δηλ. $x=29$

Αρχικά δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να λύσουν μόνοι τους το πρόβλημα

Λύσε το πρόβλημα:

....

....

....

....

Αναμένεται πολλοί μαθητές να λύσουν το πρόβλημα, κάποιοι όμως όχι. Γι' αυτό στη συνέχεια τους δίνονται οδηγίες ώστε να μπορέσουν να λύσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας προς τα πίσω ενέργειες.

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. **Αν την τρίτη εβδομάδα ο επενδυτής δεν είχε χάσει τίποτα στο χρηματιστήριο, πόσα χρήματα θα είχε;**
2. **Τι σχέση έχει το ποσό της προηγούμενης απάντησης με το ποσό των χρημάτων στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας;**

………………………………………………………………………………………………………..

3. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη απάντηση βρες πόσα χρήματα είχε στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας;
4. Αν τη δεύτερη εβδομάδα δεν είχε χάσει καθόλου χρήματα, πόσα χρήματα θα είχε;
5. Τι σχέση έχει το ποσό της προηγούμενης απάντησης με το ποσό των χρημάτων στο τέλος της πρώτης εβδομάδας;

   ………………………………………………………………………………………………………

6. Στο τέλος της πρώτης εβδομάδας πόσα χρήματα είχε;
7. Αν δεν είχε χάσει τις 30 χιλ. ευρώ, πόσα χρήματα θα είχε την πρώτη εβδομάδα;
8. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

Στη συνέχεια τα παιδιά καθοδηγούνται έτσι ώστε να καταστρώσουν την εξίσωση, που αναπαριστά το πρόβλημα, και αφήνονται να εφαρμόσουν δικές τους στρατηγικές για την επίλυση της εξίσωσης.

<u>Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος</u>

1. Έστω ότι ο επενδυτής ξεκίνησε με x ποσό στο χρηματιστήριο. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας το x) την πρόταση: Την πρώτη εβδομάδα διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 30 χιλ. ευρώ.

<u>Στο τέλος της 1ης εβδομάδας</u>:

2. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 1) την πρόταση: Τη δεύτερη εβδομάδα τριπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 54 χιλ. ευρώ.

<u>Στο τέλος της 2ης εβδομάδας</u>:

3. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 2) την πρόταση: Την τρίτη εβδομάδα τετραπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 72 χιλ. ευρώ.

Στο τέλος της 3ης εβδομάδας:

4. **Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**
5. **Λύσε την εξίσωση.**

Και στο τέλος ακολουθεί ο αναστοχασμός, που ενδεχομένως θα δώσει την ευκαιρία στους μαθητές να συγκρίνουν τον τρόπο που σκέφτηκαν στις δυο περιπτώσεις επίλυσης του προβλήματος, αλγεβρική και αριθμητική.

Αναστοχασμός

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου………………………………………………………… ……………………………………. ……… ……… ………

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με πολύ προσοχή και καθορισμένους από την αρχή στόχους. Όμως, όσο εξελισσόταν οι διδακτικές παρεμβάσεις γινόταν όλο και περισσότερο κατανοητό γιατί η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Παρατηρήθηκαν περισσότερες από τις αναμενόμενες παρανοήσεις, καταγράφηκαν και αναλύθηκαν.

3.1.1 *Πρώτο φύλλο εργασίας*

Τα παιδιά μαθαίνουν τα κλάσματα και εξοικειώνονται μ’ αυτά τέσσερα χρόνια πριν μπουν στο Γυμνάσιο. Επίσης και σε προηγούμενο κεφάλαιο της ύλης της Α’ Γυμνασίου, που έχουν διδαχτεί, έχουν ξανασυναντήσει τα κλάσματα και μάλιστα όλες τις μορφές με τις οποίες εμφανίζονται αυτά. Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία το κλάσμα εμφανίζεται με τις εξής μορφές: α) ως μέρος-όλου, β) ως μέτρο, γ) ως λόγος, δ) ως πηλίκο, ε) ως τελεστής (Kieren, 1980, Behr M. , Lesh, Post, & Harel, 1993, Marshall, 1993). Θα περίμενε λοιπόν κανείς να μην αντιμετωπίσουν ιδιαίτερες δυσκολίες στο πρώτο πρόβλημα, που έχει να κάνει με τη μορφή του κλάσματος ως μέρος-όλου και ως τελεστή, δηλ. ως πολλαπλασιαστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η αρχική ποσότητα και δίνει μια τελική ποσότητα μικρότερη αλλά και μεγαλύτερη. Όμως αυτό δεν έγινε. Αντίθετα βγήκαν στην επιφάνεια πολλές ελλείψεις και πολλά κενά που σχετίζονται με τα κλάσματα και όπως ήταν φυσικό αυτά τα κενά θα δυσκόλευαν τη μετάβαση των μαθητών από τον αριθμητικό στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Άλλωστε οι κλασματικοί αριθμοί αποτελούν το θεμέλιο πάνω στο οποίο στηρίζονται οι στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις (Behr M. , Lesh, Post, & Silver, 1983).

Το πρόβλημα που τους δόθηκε στο πρώτο φύλλο εργασίας ήταν το παρακάτω:

Μια γιαγιά φίλεψε τα 7 εγγόνια της δίνοντάς τους χαρτζιλίκι ίδιου ποσού. Αν τα 4 παιδιά μαζί πήραν 240 ευρώ, πόσα ευρώ ήταν όλο το ποσό που έδωσε η γιαγιά στα 7 παιδιά;

Όλα τα παιδιά χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, χωρίς δυσκολία, όταν τους ζητήθηκε να λύσουν το πρόβλημα.

Δηλ. $240:4=60$ και $60\cdot 7=420$

Αυτό σημαίνει ότι έχουν κατακτήσει τις δεξιότητες εκείνες που τους επιτρέπουν να χειρίζονται τις τέσσερις πράξεις για να λύσουν προβλήματα μέρους-όλου.

Όταν όμως, με τη βοήθεια του φύλλου εργασίας, έγινε προσπάθεια να οδηγηθούν στο δεύτερο τρόπο αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος, χρησιμοποιώντας το κλάσμα ως τελεστή αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες. Στις αναπαραστάσεις μέρους ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων με κλάσμα, μεγάλο ποσοστό μαθητών αντιμετωπίζει πρόβλημα κι αυτό φάνηκε αμέσως. Αρκετά παιδιά, παρότι και στην αρχή της Α' γυμνασίου διδάσκονται ξανά τα κλάσματα, αδυνατούν να απαντήσουν σε ερωτήσεις του τύπου: ποιο κλάσμα εκφράζει το τάδε ποσό. Συγκεκριμένα η ερώτηση που δόθηκε ήταν: Γράψε την κλασματική μονάδα που εκφράζει ποιο μέρος των 240 ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά.

Η απάντηση 1/4 δεν βγήκε αυθόρμητα. Υπήρξε προβληματισμός. Φάνηκε να τους μπερδεύει ο αριθμός 240, πράγμα που σημαίνει ότι η διαδικασία της κλασματικής αναπαράστασης δε γίνεται συνειδητά.

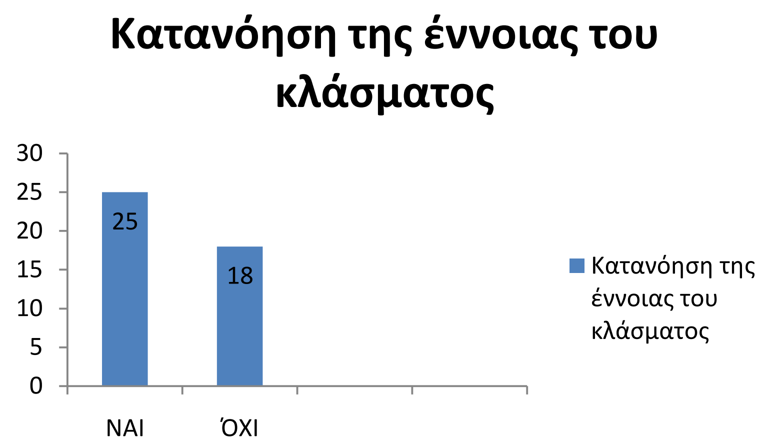
Ενδιαφέρον, αν και σωστή, παρουσιάζει η απάντηση 60/240. (Εδώ χρειάστηκε να επαναλάβουμε τι είναι κλασματική μονάδα.)

Τέλος κάποια παιδιά απλώς χρησιμοποίησαν τους αριθμούς που τους δίνονταν (ακόμα χειρότερο) κι έγραψαν 4/240 ή 240/4.

Συγκεκριμένα από τα 43 παιδιά τα 25 έδωσαν τη σωστή απάντηση (ενώ 4 απ' τα 25 έδωσαν την απάντηση 60/240) και τα υπόλοιπα 18 (απρόβλεπτα μεγάλο ποσοστό) απάντησαν λάθος χρησιμοποιώντας στην τύχη αριθμούς του προβλήματος.

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις θα μπορούσαμε, από τις απαντήσεις των παιδιών στη συγκεκριμένη ερώτηση, να διαπιστώσουμε ποια από τα παιδιά κατανοούν την έννοια του κλάσματος ως μέρους-όλου και ποια όχι.

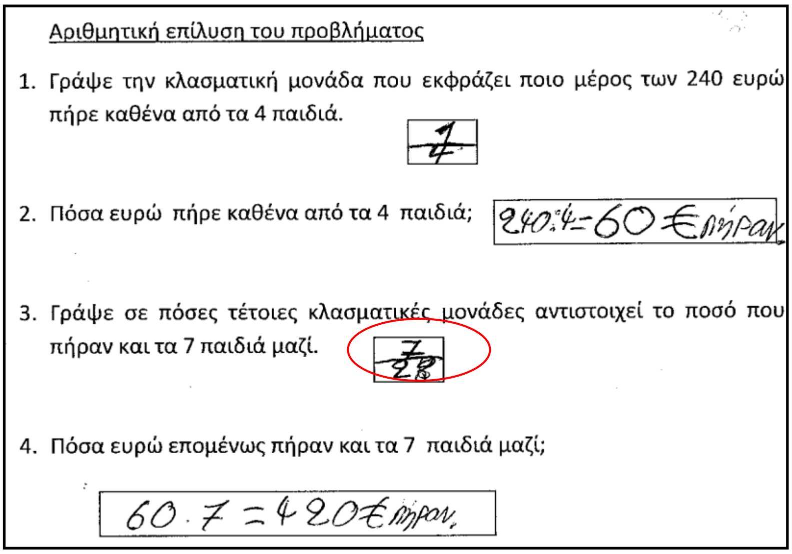
Κατανόηση της έννοιας του κλάσματος	Αριθμός παιδιών
ΝΑΙ	25
ΟΧΙ	18
Σύνολο	43



Πίνακας 1. Κατανόηση της έννοιας του κλάσματος

Βέβαια το παραπάνω αποτέλεσμα δεν έρχεται σε αντίθεση με προηγούμενες έρευνες αφού έχει βρεθεί ότι τα παιδιά αντιλαμβάνονται την έννοια του κλάσματος καλύτερα ως μέρος ενός συνόλου (Hart, 1980)και μάλιστα καλύτερα ως μέρος μιας επιφάνειας παρά ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων (Pitkethly & Hunting, 1996).

Ένα λάθος που δείχνει ότι τα παιδιά δεν έχουν κατανοήσει την έννοια του κλάσματος και κάνουν λάθος στις πράξεις με κλάσματα είναι το παρακάτω (7 παιδιά έκαναν το συγκεκριμένο λάθος):



Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

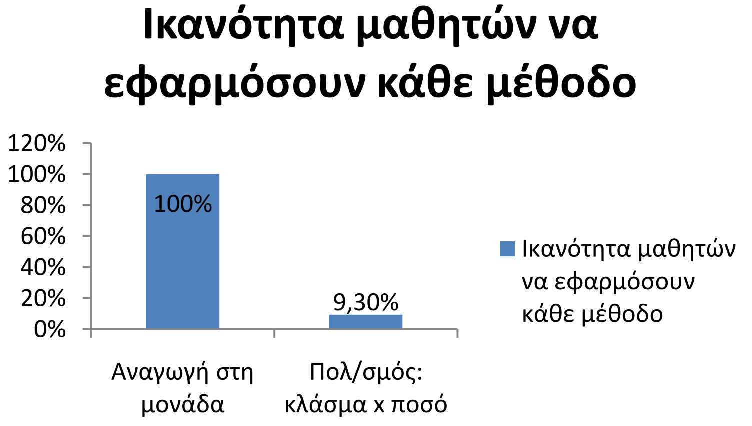
1. Γράψε την κλασματική μονάδα που εκφράζει ποιο μέρος των 240 ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά. $\frac{1}{4}$
2. Πόσα ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά; 240:4=60 € πήραν
3. Γράψε σε πόσες τέτοιες κλασματικές μονάδες αντιστοιχεί το ποσό που πήραν και τα 7 παιδιά μαζί. $\frac{7}{28}$
4. Πόσα ευρώ επομένως πήραν και τα 7 παιδιά μαζί; 60·7=420€ πήραν.

Εικόνα 1

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και το εξής: ενώ οι μαθητές χειρίζονται αυθόρμητα την αναγωγή στη μονάδα, μεγάλη δυσκολία αντιμετωπίζουν στο να κατανοήσουν ότι το ίδιο πετυχαίνουν απλά με έναν πολλαπλασιασμό του κλάσματος με το ποσό, δηλ. στην έννοια του κλάσματος ως τελεστή. Όμως αυτή ακριβώς η τεχνική συνδέει την αριθμητική με την άλγεβρα. Αν κατακτήσουν αυτή ακριβώς τη γνώση θα μπορέσουν να προχωρήσουν στο σχηματισμό αλγεβρικών εκφράσεων.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όλοι οι μαθητές χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα, βρήκαν το συνολικό ποσό που μοιράζει η γιαγιά. Όταν όμως ζητήθηκε από τα παιδιά να βρουν τη λύση χρησιμοποιώντας κλάσματα και κάνοντας μόνο έναν πολλαπλασιασμό, μόνο 4 από τα παιδιά κατάφεραν να το βρουν. Αξίζει να σημειωθεί ότι και τα 4 παιδιά απάντησαν σωστά στην πρώτη ερώτηση, που ελέγχει την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος. Η κατανόηση του κλάσματος ως μέρος-όλου είναι βασική προϋπόθεση για τη μάθηση των υπολοίπων ερμηνειών (Behr M. , Lesh, Post, & Silver, 1983). Τελικά οι μαθητές δε συνδέουν την αριθμητική μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα με τη χρήση του κλάσματος ως τελεστή, για να βρουν το μέρος ενός ποσού, παρότι το έχουν διδαχτεί. Επιμένουν στη μέθοδο που τους είναι πιο οικεία ακόμα κι όταν τους κατευθύνεις προς την άλλη μέθοδο.

Μέθοδος επίλυσης του προβλήματος	**Αριθμός μαθητών**
Αναγωγή στη μονάδα	43
Χρήση του κλάσματος ως τελεστή	4

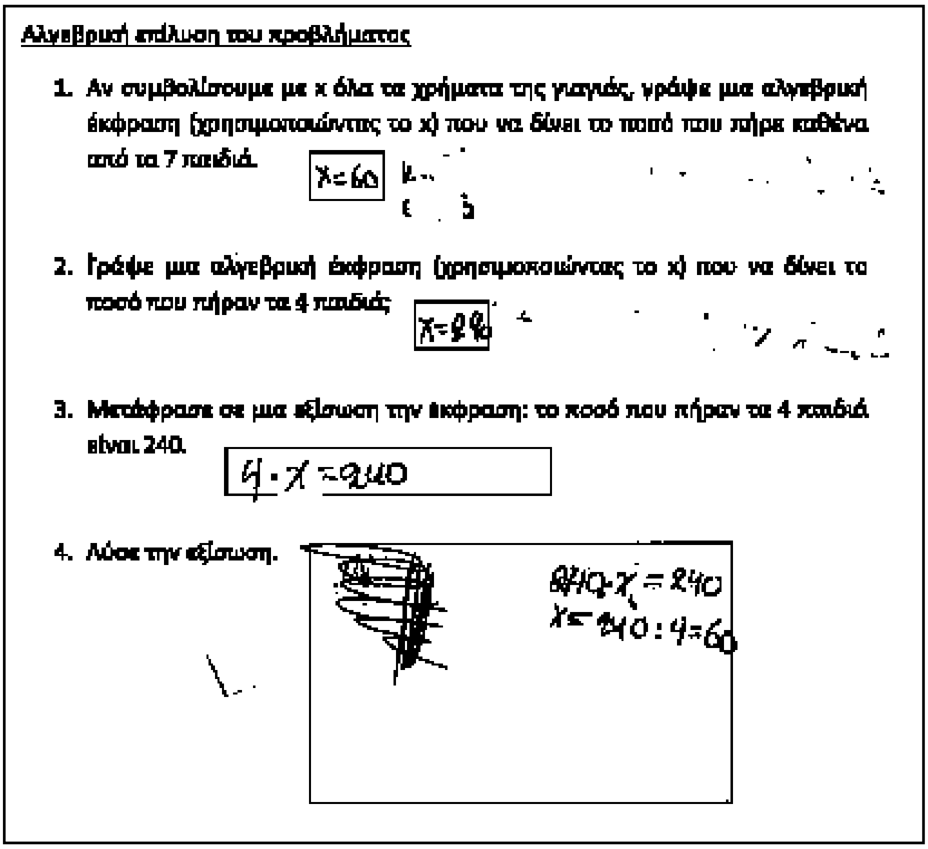


Πίνακας 2. Ικανότητα μαθητών να εφαρμόσουν κάθε μέθοδο

Όπως φαίνεται η ικανότητα των μαθητών να εφαρμόσουν τη δεύτερη μέθοδο είναι περιορισμένη, πράγμα που αποτελεί έναν από τους παράγοντες που τους εμποδίζει να σχηματίσουν την εξίσωση του προβλήματος και να το λύσουν αλγεβρικά. Φάνηκε ότι για να προχωρήσουν στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, τα παιδιά έπρεπε να κατανοήσουν πρώτα την έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλου, και σε συνεχές σύνολο και σε σύνολο διακριτών αντικειμένων, και έπειτα να αντιληφθούν την έννοια του κλάσματος ως τελεστή.

Στο τέλος μόνο 4 μαθητές κατόρθωσαν να λύσουν αριθμητικά το πρόβλημα με τις οδηγίες του φύλλου εργασίας , χρησιμοποιώντας δηλ. το κλάσμα ως τελεστή, ενώ κανένας δεν μπόρεσε να σχηματίσει την εξίσωση.

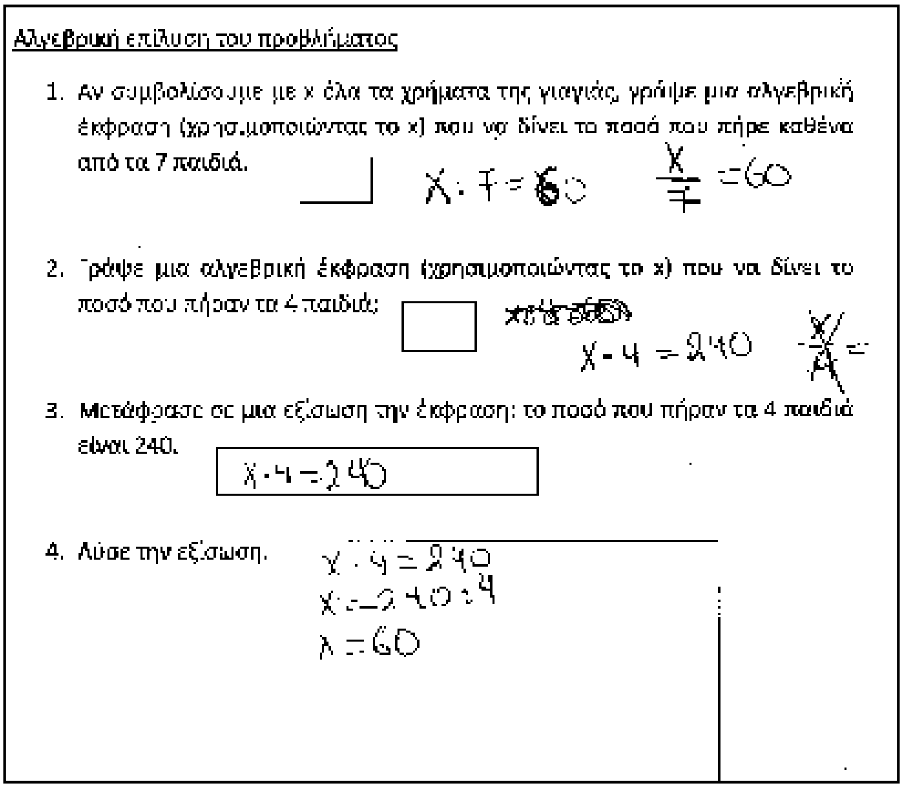
Όμως υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που τελικά κανένας μαθητής δεν κατόρθωσε να σχηματίσει την εξίσωση. Όσον αφορά στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί με την έννοια της μεταβλητής. Χρησιμοποιούν το x για να εκφράσουν οποιοδήποτε ποσό ανάλογα με την περίσταση κι όχι ένα συγκεκριμένο άγνωστο ποσό. Αυτός ο χειρισμός έχει τις ρίζες του στην αριθμητική (Stacey K. , 2008) και φαίνεται από τις παρακάτω απαντήσεις ενός μαθητή:


Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Αν συμβολίσουμε με x όλα τα χρήματα της γιαγιάς, γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει το ποσό που πήρε καθένα από τα 7 παιδιά. $x=60$
2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά; $x=24$
3. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά είναι 240. $4 \cdot x = 240$
4. Λύσε την εξίσωση. $240 \cdot x = 240$ $x = 240 : 4 = 60$

Εικόνα 2

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, που έχει προηγηθεί η αριθμητική επίλυση, τα παιδιά ξέρουν τις λύσεις και τις χρησιμοποιούν στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος κι αυτό τους μπερδεύει. Δεν θεωρούν ότι μια αλγεβρική παράσταση, ως εντολή διαδοχικών υπολογισμών, μπορεί να θεωρηθεί απάντηση σε μια ερώτηση (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) και αισθάνονται την ανάγκη να προσδιορίσουν αριθμητικά την απάντηση:


Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Αν συμβολίσουμε με x όλα τα χρήματα της γιαγιάς, γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει το ποσό που πήρε καθένα από τα 7 παιδιά.

$X : 7 = 60$ $\quad \frac{X}{7} = 60$

2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά;

$X \cdot 4 = 240$

3. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά είναι 240.

$\boxed{x \cdot 4 = 240}$

4. Λύσε την εξίσωση.

$x \cdot 4 = 240$

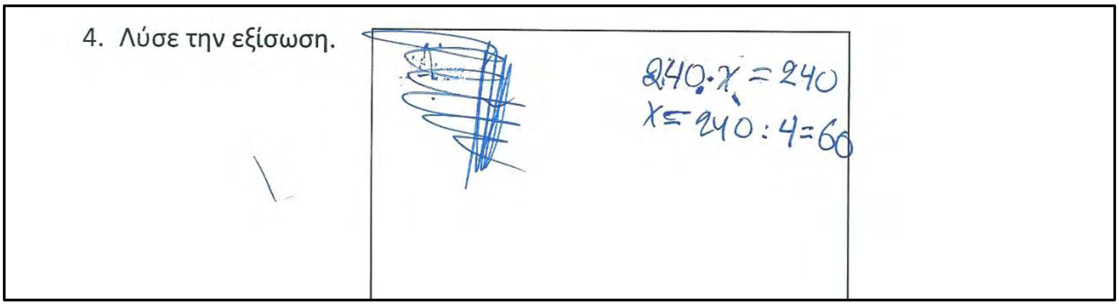
$x = 240 : 4$

$x = 60$

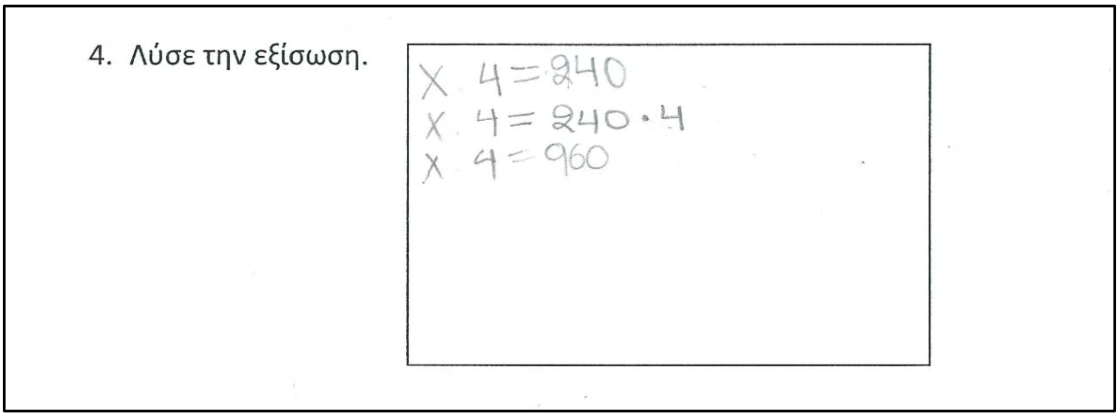
Εικόνα 3

Στην επίλυση της εξίσωσης (που σε όλες τις περιπτώσεις ήταν λανθασμένη εξαιτίας των παραπάνω παρανοήσεων) προχώρησαν 18 μαθητές. Υπήρξε μια τάση από τους μαθητές, αλλάζοντας τον άγνωστο, να σχηματίζουν μια εξίσωση, απλούστερη από τη σωστή. Στη συνέχεια έλυναν την απλή αυτή εξίσωση εύκολα, χρησιμοποιώντας σωστούς αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, που ολοφάνερα βασίζονταν στον αριθμητικό τρόπο σκέψης και βρίσκονταν σε πλήρη αντιστοιχία με την αριθμητική επίλυση. Την παραπάνω πρακτική ακολούθησαν 13 μαθητές ενώ οι υπόλοιποι 5 μαθητές, που προσπάθησαν να λύσουν την εξίσωση με αλγεβρικό λογισμό, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την ερμηνεία που δίνει η αριθμητική επίλυση, δεν έλυσαν σωστά την εξίσωση.

Παρακάτω δίνονται δύο παραδείγματα μαθητών που ακολουθούν τις δύο αυτούς χειρισμούς στην επίλυση της εξίσωσης:



Εικόνα 4



Εικόνα 5

Τελικά οι μαθητές δεν πείστηκαν γιατί έπρεπε να δυσκολευτούν τόσο για να λύσουν ένα πρόβλημα με αλγεβρικό τρόπο αφού μπορούν να το λύσουν με έναν απλούστερο και σίγουρο τρόπο, δηλαδή αριθμητικά. Η φύση του προβλήματος είναι τέτοια που δεν τους οδηγεί αναγκαστικά στην αλγεβρική μέθοδο επίλυσής του.

3.1.2 *Δεύτερο φύλλο εργασίας*

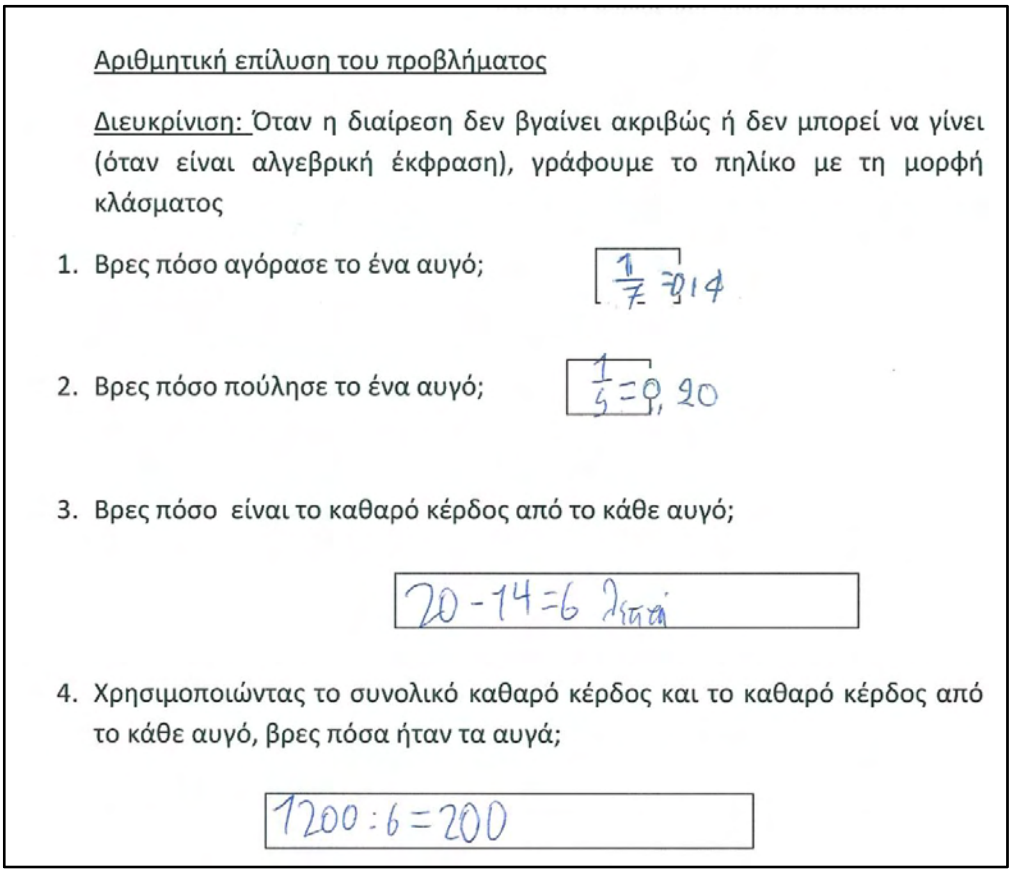
Δύο από τις έννοιες τις οποίες έχει ένα κλάσμα είναι ότι α)εκφράζει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή και β)εκφράζει αριθμητικό μέτρο, δηλ. έναν αριθμό. Κατά συνέπεια είναι δυνατή η χρήση του κλάσματος για να δηλωθεί το πηλίκο μιας διαίρεσης όταν η διαίρεση δεν μπορεί να γίνει (π.χ. σε αλγεβρικό κλάσμα x/7) ή όταν η διαίρεση δεν βγαίνει ακριβώς (π.χ. 2/3). Αυτές οι δύο έννοιες του κλάσματος (ως πηλίκο και ως αριθμός-μέτρο) αποτελούν βασικό στοιχείο του 2^{ου} προβλήματος. Σύμφωνα με έρευνες η μετάβαση των μαθητών από τους φυσικούς στην αντίληψη του κλάσματος ως αριθμού δεν είναι απλή διαδικασία (Charalambous & Pitta-Pandazi, 2007). Γι’ αυτό στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν αναμενόμενο οι μαθητές να αντιμετωπίσουν ιδιαίτερες δυσκολίες τόσο κατά την αριθμητική επίλυση όσο και κατά την αλγεβρική επίλυση κι έτσι έγινε.

Το πρόβλημα που δόθηκε στα παιδιά στο δεύτερο φύλλο εργασίας ήταν το παρακάτω:

Το σούπερ μάρκετ της γειτονιάς αγόρασε αυγά από έναν ορνιθοτρόφο προς 1 ευρώ την επτάδα και τα πούλησε όλα σε πελάτες προς 1 ευρώ την πεντάδα. Το καθαρό κέρδος του σούπερ μάρκετ ήταν 12 ευρώ. Πόσα αυγά είχε αγοράσει;

Το πρόβλημα δυσκόλεψε τα παιδιά. Δεν το έλυσε κανένας μόνος του. Δυο προσπάθησαν να βρουν το κέρδος από την πεντάδα και 6 είπαν ότι τα αυγά είναι 12 πεντάδες δηλ. 60. Βέβαια, εκ των υστέρων, υπάρχει η σκέψη ότι τα παιδιά αυτής της ηλικίας συγχέουν τις έννοιες κόστος, είσπραξη, καθαρό κέρδος και θεωρούν ότι το κέρδος είναι η τιμή πώλησης και παρότι έγινε εγκαίρως διευκρίνηση δεν μπόρεσαν να διαχωρίσουν αυτές τις έννοιες. Κάποιοι έκαναν τυχαία πράξεις με τους αριθμούς του προβλήματος 5,7,12. Δεν σκέφτηκε κανένας να βρει πόσο κοστίζει και πόσο πουλιέται το ένα αυγό. Δεν έκαναν αναγωγή στη μονάδα γιατί θεώρησαν ότι μονάδα είναι το 1 ευρώ. Συμπερασματικά τα παιδιά της Α’ Γυμνασίου δεν μπορούν να εφαρμόζουν τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα σε προβλήματα όπου η μονάδα δεν είναι προφανής.

Στην αριθμητική επίλυση υπήρχε πάλι πρόβλημα με τα κλάσματα και συγκεκριμένα φάνηκε ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δεχτούν την ιδιότητα του κλάσματος ως αριθμό. Π.χ. Το 1/7 ευρώ, χρησιμοποιώντας την έννοια του κλάσματος ως πηλίκο και κάνοντας τη διαίρεση 1:7, το μεταφράζουν σε 0,14 ευρώ. Ακόμα κι όταν στο 2º τμήμα προσαρμόστηκαν οι εκφωνήσεις και δόθηκαν περισσότερες διευκρινήσεις κάποιοι δεν μπόρεσαν να το ξεπεράσουν αυτό (δηλαδή να δεχτούν ως τιμή του αυγού το 1/7 ευρώ). Η θεώρηση του κλάσματος ως αριθμό οφείλεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο (Behr & Post, 1992). Όμως έχει βρεθεί ότι η ερμηνεία του ρητού ως μέτρο είναι η πιο ισχυρή μεταξύ των πέντε ερμηνειών για την ανάπτυξη της έννοιας των ρητών (Lamon, 2001) και κατά συνέπεια αποτελεί την εννοιολογική βάση για τη μετάβαση των μαθητών στην άλγεβρα. Η δυσκολία των μαθητών να δεχτούν το κλάσμα ως αριθμό φαίνεται από την παρακάτω απάντηση, απάντηση η οποία δόθηκε από πολλούς μαθητές.



Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

Διευκρίνιση: Όταν η διαίρεση δεν βγαίνει ακριβώς ή δεν μπορεί να γίνει (όταν είναι αλγεβρική έκφραση), γράφουμε το πηλίκο με τη μορφή κλάσματος

1. Βρες πόσο αγόρασε το ένα αυγό; $\boxed{\frac{1}{7}} = 0,14$
2. Βρες πόσο πούλησε το ένα αυγό; $\boxed{\frac{1}{5}} = 0,20$
3. Βρες πόσο είναι το καθαρό κέρδος από το κάθε αυγό;

   20 - 14 = 6 λεπτά

4. Χρησιμοποιώντας το συνολικό καθαρό κέρδος και το καθαρό κέρδος από το κάθε αυγό, βρες πόσα ήταν τα αυγά;

   1200 : 6 = 200

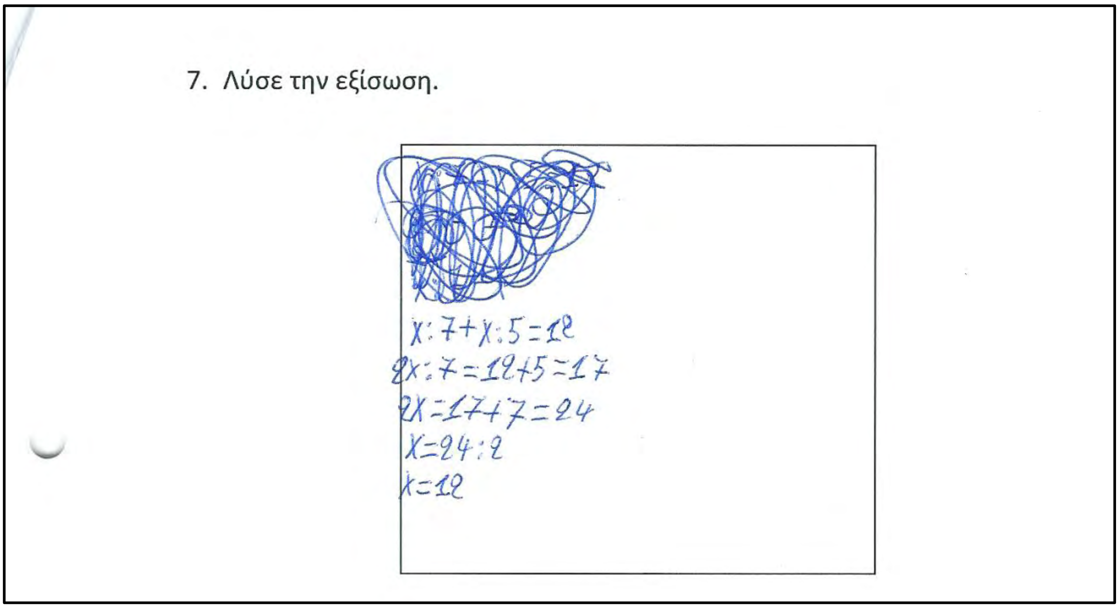
Εικόνα 6

Συγκεκριμένα από τους 43 μαθητές, παρά τις διευκρινήσεις, μόνο οι 16 φαίνεται ότι δέχονται την έννοια του κλάσματος ως αριθμό δίνοντας σαν απάντηση μόνο κλασματικούς αριθμούς, οι 7 δίνουν σαν απάντηση μόνο δεκαδικούς αριθμούς ενώ οι υπόλοιποι (20 μαθητές) απαντούν με κλάσματα, αλλά επειδή δεν τους ικανοποιεί η απάντηση βρίσκουν και το αποτέλεσμα της διαίρεσης.

	Αριθμός μαθητών	Ποσοστά %
Μαθητές που απάντησαν ότι το κόστος και η τιμή πώλησης του αυγού είναι 1/7 και 1/5 (με κλάσμα)	16	37,21
Μαθητές που απάντησαν ότι το κόστος και η τιμή πώλησης του αυγού είναι 0,14 και 0,20 (με δεκαδικό)	7	16,28
Μαθητές που απάντησαν και με κλάσμα και με δεκαδικό	20	46,51

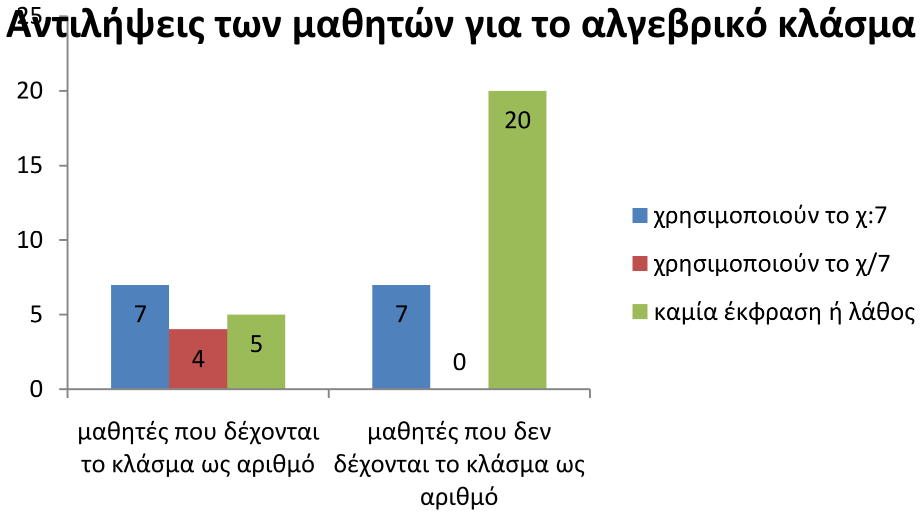
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτοί που απάντησαν με κλασματικό αριθμό δέχονται την έννοια του κλάσματος ως αριθμό (μέτρο), αφού δέχονται ότι το ένα αυγό κοστίζει 1/7ευρώ. Βεβαίως δεν μπορούμε να πούμε ότι οι υπόλοιποι δεν αντιλαμβάνονται ότι ένα κλάσμα αποτελεί έναν αριθμό από τη στιγμή που το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ασυνήθιστο στους μαθητές και η εμπειρία τους σε προβλήματα μαθηματικών, μέχρι αυτή την ηλικία, δεν τους επιτρέπει να δεχτούν κλασματικό αριθμό ως τιμή ενός προϊόντος. Όμως σίγουρα αντιμετωπίζουν δυσκολία ως προς την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος ως μέτρο, που αποτελεί θεμελιώδη έννοια για την άλγεβρα. Επίσης από τα παραπάνω δεδομένα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αρκετά μεγάλο ποσοστό μαθητών ξέρει ότι το κλάσμα εκφράζει διαίρεση (46,51% - 83,72%). Τελικά 9 μαθητές πλησίασαν στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, πολλοί απ' αυτούς χρησιμοποιώντας δεκαδικούς.

Αυτή η αντιμετώπιση για την έννοια του κλάσματος, ότι δηλ. το κλάσμα δεν εκφράζει μέτρο, είχε ως συνέπεια να μην μπορέσουν να μεταβούν στην έννοια του αλγεβρικού κλάσματος και αντί για την έκφραση x/7 να προτιμούν την έκφραση x:7, η οποία έκφραση όμως δεν διευκολύνει την επίλυση της εξίσωσης, δηλαδή την αλγεβρική επίλυση του προβλήματος.



Εικόνα 7

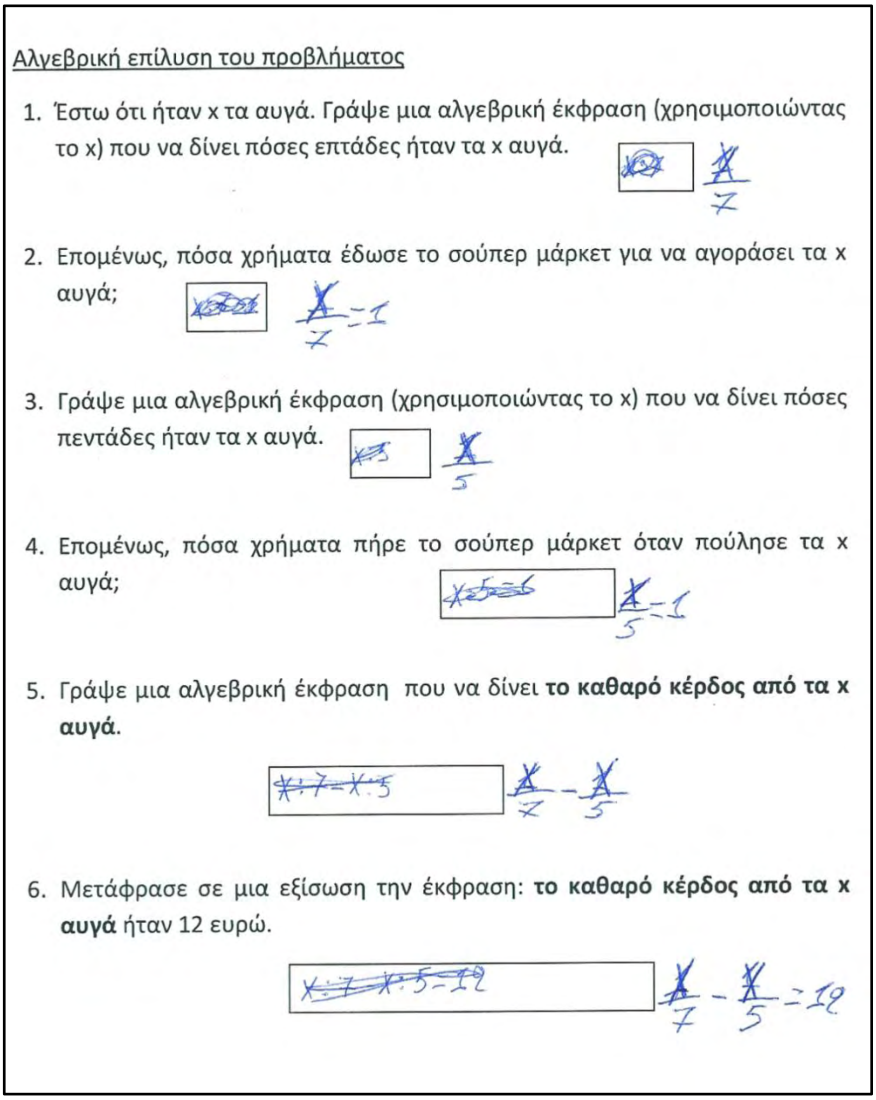
Απ' αυτούς που δέχονται την έννοια του κλάσματος ως αριθμό μόνο οι 4 δέχονται την έννοια του αλγεβρικού κλάσματος (δηλ. της ρητής αλγεβρικής παράστασης) ως το πηλίκο διαίρεσης. Από τους 27 μαθητές που δεν μπόρεσαν να δεχτούν ότι το ένα αυγό κοστίζει 1/7 και μετέφρασαν το κλάσμα στο δεκαδικό 0,14 κανένας δεν χρησιμοποίησε την έκφραση x/7 αλλά τη διαίρεση x:7 (8 μαθητές) ενώ οι υπόλοιποι δεν χρησιμοποίησαν καθόλου αλγεβρική έκφραση. Αυτό δείχνει τη δυσκολία να δεχτούν το αλγεβρικό κλάσμα, ένα κλάσμα δηλαδή που ένας ή και οι δύο του όροι δίνονται ως αλγεβρική έκφραση του x. Προτιμούν την έκφραση x:7. Η συγκεκριμένη βέβαια ενέργεια συνδέεται και με την έννοια του κλάσματος ως πηλίκο. Βέβαια δεν μπορούμε να πούμε ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται την έννοια του κλάσματος ως πηλίκο αφού στο προηγούμενο διάγραμμα φαίνεται ότι μεγάλο ποσοστό μαθητών ξέρει ότι το κλάσμα εκφράζει διαίρεση (46,51% - 83,72%) .



Πίνακας 3. Αντιλήψεις των μαθητών για το αλγεβρικό κλάσμα

Τα παραπάνω δεδομένα δείχνουν την άμεση σχέση των αντιλήψεων για το κλάσμα και για το αλγεβρικό κλάσμα αλλά ταυτόχρονα και ότι το αλγεβρικό κλάσμα είναι πιο σύνθετη έννοια απ' το απλό κλάσμα. Παρατηρούμε ότι τα περισσότερα παιδιά που δεν έδωσαν την κατάλληλη αλγεβρική έκφραση χρησιμοποιώντας αλγεβρικό κλάσμα δεν θεωρούν ότι το κλάσμα αποτελεί μέτρο, ενώ μόνο από τους μαθητές που δέχονται το κλάσμα ως αριθμό χρησιμοποιούν αλγεβρικό κλάσμα για να δηλώσουν μια αλγεβρική διαίρεση. Βλέπουμε για άλλη μια φορά ότι οι περιορισμένες αριθμητικές αντιλήψεις για τα κλάσματα εμποδίζουν την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών.

Στην αλγεβρική επίλυση υπάρχουν κάποιες παρατηρήσεις που σχετίζονται με την αντίληψη των μαθητών για τις αλγεβρικές εκφράσεις. Στην πλειοψηφία τους ξέρουν ότι μια αλγεβρική έκφραση περιέχει το x. Συγκεκριμένα από τους 43 μαθητές οι 24 έδωσαν αλγεβρική έκφραση χρησιμοποιώντας το x, οι 18 δεν απάντησαν καθόλου και μόνο ένας αντί για αλγεβρική έκφραση απάντησε με αριθμό. Παρατηρείται επίσης ότι υπάρχει πάντα ανάγκη να προσδιορίσουν τον άγνωστο με οποιοδήποτε τρόπο, χρησιμοποιώντας αυθαίρετα την ισότητα. Π.χ. δεν δέχονται την έκφραση x/7 αλλά γράφουν x/7=1 ή 7· x=1 θέλοντας να πουν ότι τα 7 αυγά κοστίζουν 1 ευρώ. Από τα 43 παιδιά τα 12 χρησιμοποίησαν με λάθος τρόπο το ίσον στις αλγεβρικές εκφράσεις και τα 23 δεν χρησιμοποίησαν καθόλου ισότητα στις αλγεβρικές εκφράσεις. Τελικά μόνο οι 5 κατόρθωσαν να κατασκευάσουν μια εξίσωση, είτε χρησιμοποιώντας την έκφραση x/7 ή την έκφραση x:7, που όμως δεν την έλυσε κανένας. Το ενδιαφέρον είναι ότι και τα 5 παιδιά είχαν λύσει αριθμητικά το πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα τόσο σχηματισμός της εξίσωσης όσο και η επίλυσή της σχετίζονται με την αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

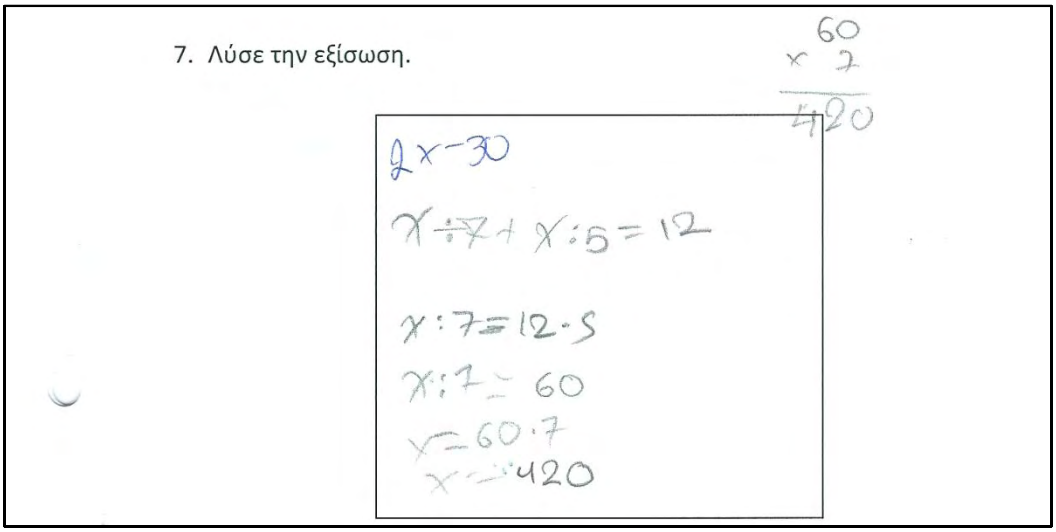


Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ήταν x τα αυγά. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει πόσες επτάδες ήταν τα x αυγά. $\frac{x}{7}$
2. Επομένως, πόσα χρήματα έδωσε το σούπερ μάρκετ για να αγοράσει τα x αυγά; $\frac{x}{7} \cdot 1$
3. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει πόσες πεντάδες ήταν τα x αυγά. ~~x:5~~ $\frac{x}{5}$
4. Επομένως, πόσα χρήματα πήρε το σούπερ μάρκετ όταν πούλησε τα x αυγά; $\frac{x}{5} \cdot 1$
5. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει **το καθαρό κέρδος από τα x αυγά**. ~~x:7 - x:5~~ $\frac{x}{7} - \frac{x}{5}$
6. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **το καθαρό κέρδος από τα x αυγά** ήταν 12 ευρώ. ~~x:7 - x:5 = 12~~ $\frac{x}{7} - \frac{x}{5} = 12$

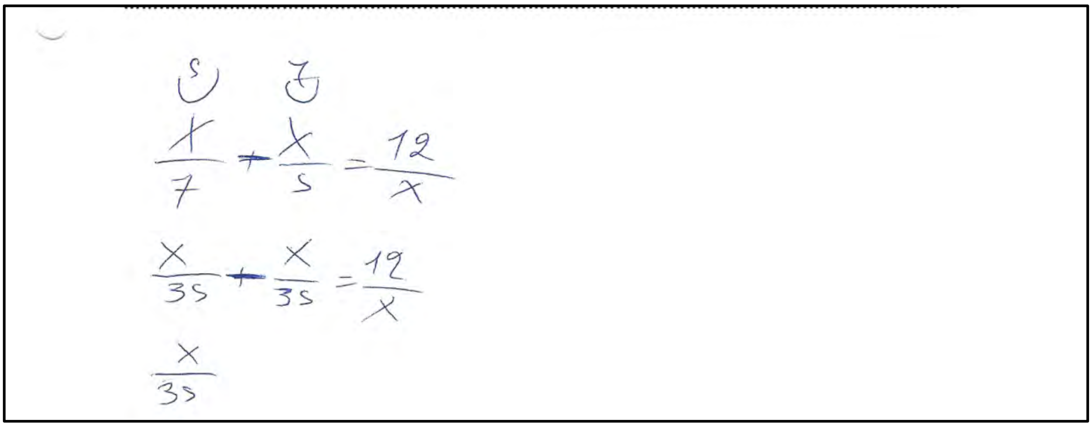
Εικόνα 8

Ας δούμε πώς τα 5 παιδιά, που κατάφεραν να σχηματίσουν εξίσωση, επιχείρησαν να λύσουν την εξίσωση. Οι 2 δεν προχώρησαν στη λύση της εξίσωσης. Οι 2 χρησιμοποίησαν λανθασμένους μετασχηματισμούς χωρίς να λάβουν υπόψη την αριθμητική επίλυση. Μια τέτοια απάντηση δίνεται παρακάτω.



Εικόνα 9

Μόνο ένας μαθητής επιχειρεί τελικά να επιλύσει την εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη την αριθμητική λύση του προβλήματος.



Εικόνα 10

Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος μαθητής αρχικά προσπαθεί να λύσει την εξίσωση ανεξάρτητα από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος και δεν καταφέρνει τίποτα, αλλά έπειτα φαίνεται η προσπάθειά του να λάβει υπόψη του την αριθμητική επίλυση. Δεν μπορεί βέβαια να ολοκληρώσει τη λύση της εξίσωσης αφού δεν έχει ολοκληρώσει την αριθμητική επίλυση του προβλήματος

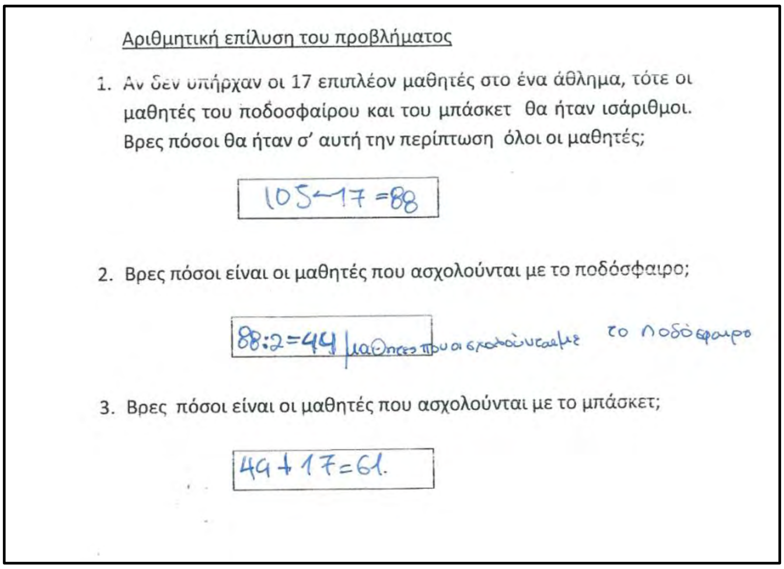
Τα δύο προηγούμενα προβλήματα ανέδειξαν κάποιες έννοιες από την αριθμητική των κλασμάτων, που η κατανόησή τους βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση της αλγεβρικής επίλυσης του προβλήματος και συγκεκριμένα στην κατάστρωση της εξίσωσης που αναπαριστά ένα πρόβλημα. Η βασικότερη είναι η έννοια του κλάσματος ως τελεστή. Η κατανόηση αυτής της μορφής του κλάσματος βοηθάει τα παιδιά να εκφράσουν αλγεβρικά το μέρος μιας ποσότητας (π.χ. $\frac{2}{3}\cdot x$, $\frac{5}{3}\cdot x$), όπως ακριβώς εκφράζουν το πολλαπλάσιο μιας ποσότητας (π.χ. το 2x, 3x….). Μια αντίληψη, που πρέπει να έχουν οι μαθητές κατά την κατάστρωση μιας εξίσωσης, είναι ότι τη διαίρεση αλγεβρικών ποσοτήτων την εκφράζουμε ως κλάσμα (αλγεβρικό κλάσμα). Αυτή ακριβώς η αντίληψη στην άλγεβρα προκύπτει από τις αντίστοιχες αριθμητικές ιδιότητες των κλασμάτων, ως πηλίκο και ως μέτρο. Στα φύλλα εργασίας είδαμε ότι αρκετά παιδιά δεν είχαν ξεκαθαρίσει μέσα τους τις έννοιες αυτές των κλασμάτων(συμπέρασμα που συμφωνεί με τη βιβλιογραφία (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987) και δεν μπόρεσαν να σχηματίσουν την εξίσωση του προβλήματος.

3.1.3 *Τρίτο φύλλο εργασίας*

Στο τρίτο φύλλο εργασίας δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

Οι 105 μαθητές της Α' Γυμνασίου ασχολούνται με δύο αθλήματα: ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν με το μπάσκετ ασχολούνται 17 μαθητές παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με κάθε άθλημα;

Σχεδόν όλοι οι μαθητές έλυσαν αριθμητικά το πρόβλημα. Παρακάτω δίνεται ενδεικτικά μια από τις λύσεις των μαθητών:


Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

1. Αν δεν υπήρχαν οι 17 επιπλέον μαθητές στο ένα άθλημα, τότε οι μαθητές του ποδοσφαίρου και του μπάσκετ θα ήταν ισάριθμοι. Βρες πόσοι θα ήταν σ' αυτή την περίπτωση όλοι οι μαθητές;

105-17=88

2. Βρες πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο;

88:2=44 μαθητες που ασχολουνται με το ποδοσφαιρο

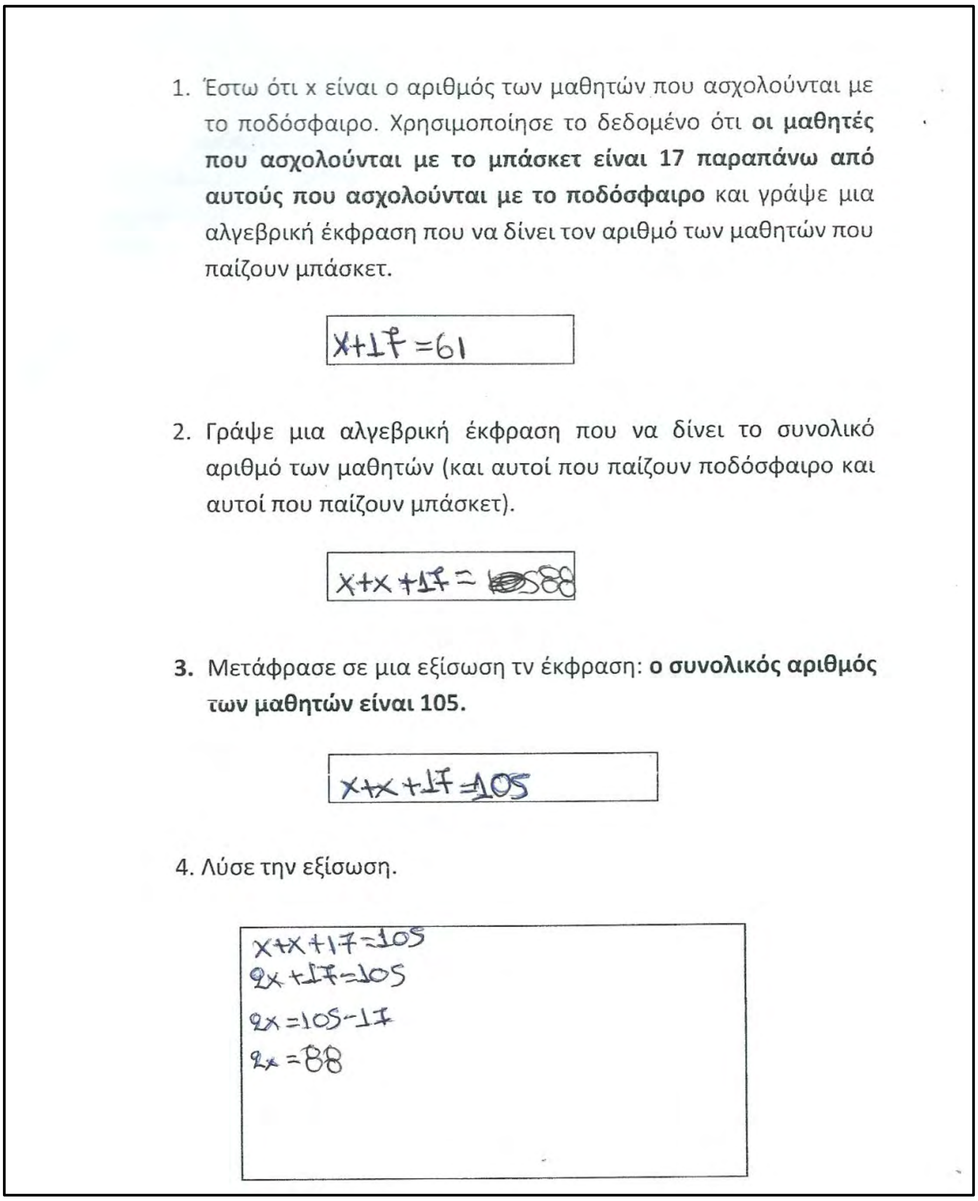
3. Βρες πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ;

44+17=61.

Εικόνα 11

Συγκεκριμένα από τους 43 μαθητές οι 37 μαθητές έλυσαν το πρόβλημα με τον αριθμητικό τρόπο που προτείνεται στο φύλλο εργασίας και μόνο 6 δεν κατάφεραν να το λύσουν. Απ' αυτούς ο ένας το έλυσε μόνος του με διαφορετικό τρόπο αλλά δεν ολοκλήρωσε τη λύση, ένας έγραψε τυχαίους αριθμούς χωρίς λογική κι έτσι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πώς σκέφτηκε, ενώ 4 έκαναν λάθος πράξεις. Στην πλειοψηφία τους, λοιπόν, οι μαθητές γνωρίζουν καλά τη δομή του προβλήματος. Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα, από τη στιγμή που τα περισσότερα παιδιά έχουν προχωρήσει στην αλγεβρική επίλυση, να εξάγουμε συμπεράσματα για τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης των μαθητών και πώς αυτός συνδέεται με τον αριθμητικό τρόπο σκέψης τους. Θα μελετήσουμε τις αντιλήψεις των παιδιών σχετικά με τη μεταβλητή, την αλγεβρική έκφραση και την εξίσωση, καθώς και τους χειρισμούς των μαθητών κατά την επίλυση μιας εξίσωσης.

Μια πρώτη εικόνα από τα φύλλα εργασίας των παιδιών είναι ότι πολλά παιδιά, ενώ εκφράζουν με αλγεβρικό τρόπο διάφορες ποσότητες του προβλήματος, δεν θεωρούν ότι αυτές οι ποσότητες είναι καλά προσδιορισμένες και αισθάνονται την ανάγκη να τις προσδιορίσουν γράφοντας τον αριθμό με τον οποίο αυτές ισούνται. Σ' αυτό βέβαια βοηθάει και το γεγονός ότι έχουν υπολογίσει τις ποσότητες του προβλήματος αφού ήδη το έχουν λύσει αριθμητικά. Αυτή η ενέργεια φανερώνει ότι αυτοί οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις αλγεβρικές παραστάσεις ως ενέργειες αλλά όχι ως ποσότητες. Βέβαια, μια αλγεβρική έκφραση δηλώνει ενέργεια, αφού περιγράφει τη σχέση μεταξύ γνωστών και άγνωστων ποσοτήτων (με ποια πράξη δηλαδή προκύπτει μια ποσότητα από κάποιες άλλες ποσότητες γνωστές ή άγνωστες), παράλληλα όμως αποτελεί και αντικείμενο δηλώνοντας μια πολύ καλά ορισμένη αλγεβρική ποσότητα (Sfard, 1991, KieranC. , 1992, Κούρκουλος, 1995). Η αιτία του προβλήματος βρίσκεται στην αριθμητική η οποία τείνει να δίνει απαντήσεις και δεν επικεντρώνεται στην αναπαράσταση των σχέσεων όπως επιβάλει η αλγεβρική σκέψη ((Kieran C. , 1981, Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Οι μαθητές λειτουργώντας σε ένα αριθμητικό πλαίσιο αναφοράς δεν μπορούν να δουν τις σχέσεις των ποσοτήτων και εστιάζουν στον υπολογισμό (Kieran, 2004).



1. Έστω ότι x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. Χρησιμοποίησε το δεδομένο ότι **οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ είναι 17 παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο** και γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που παίζουν μπάσκετ.

$x+17=61$

2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το συνολικό αριθμό των μαθητών (και αυτοί που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτοί που παίζουν μπάσκετ).

$x+x+17=88$

3. Μετάφρασε σε μια εξίσωση τν έκφραση: **ο συνολικός αριθμός των μαθητών είναι 105.**

$x+x+17=105$

4. Λύσε την εξίσωση.

$x+x+17=105$
$2x+17=105$
$2x=105-17$
$2x=88$

Εικόνα 12

Αυτή η αντιμετώπιση προς τις αλγεβρικές εκφράσεις παρατηρήθηκε και στα προηγούμενα φύλλα εργασίας. Από τη στιγμή που στο τρίτο φύλλο εργασίας οι μαθητές ασχολήθηκαν στην πλειοψηφία τους με την αλγεβρική επίλυση έχουμε τη δυνατότητα να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με το αν αποδέχονται την ιδιότητα της αλγεβρικής έκφρασης ως ποσότητα.

Συγκεκριμένα από τους 43 μαθητές οι 3 δεν επιχείρησαν καθόλου να λύσουν αλγεβρικά το πρόβλημα και από τους υπόλοιπους 40 οι 19 χρησιμοποίησαν αλγεβρικές εκφράσεις, τις οποίες προσδιόριζαν ακριβώς χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές ποσότητες που είχαν βρει κατά την αριθμητική επίλυση του προβλήματος, ένας χρησιμοποιεί το x αλλά εμμένει στην αριθμητική λύση του προβλήματος και οι 20 φαίνεται να αποδέχονται την ιδιότητα της αλγεβρικής έκφρασης ως ποσότητα (αντικείμενο).

Πίνακας 4. Κατά πόσο αντιλαμβάνονται οι μαθητές την αλγεβρική έκφραση ως ποσότητα

Πολλές είναι και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αναπαράσταση των ποσοτήτων του προβλήματος με αλγεβρικά σύμβολα (x, =, +, -, /, *). Οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας που ελέγχουν την ικανότητα των μαθητών να σχηματίζουν αλγεβρικές εκφράσεις είναι δύο:

Έστω ότι x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. Χρησιμοποίησε το δεδομένο ότι οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ είναι 17 παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο και γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που παίζουν μπάσκετ.

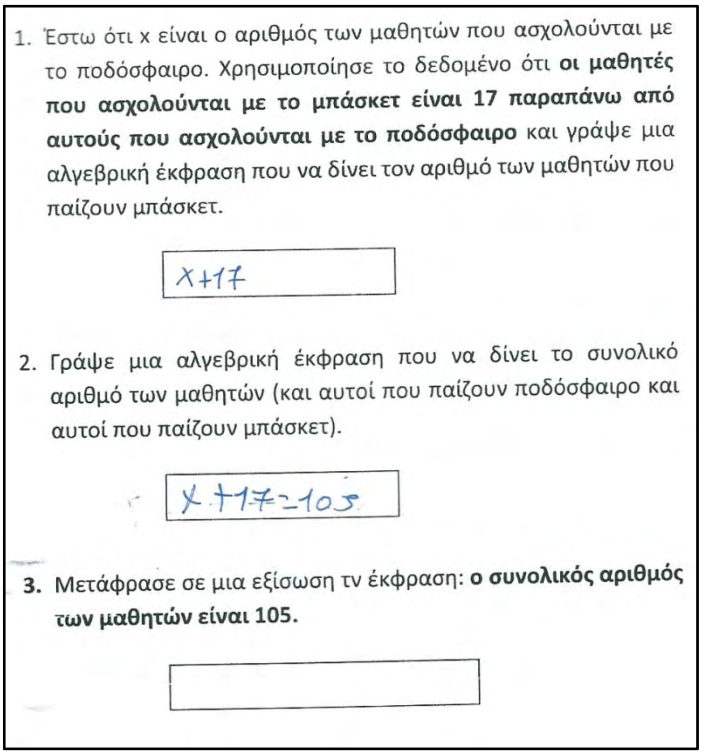
Η απάντηση που πρέπει να δώσει ο μαθητής είναι : x+17 (περιέχει μια γνωστή και μια άγνωστη ποσότητα)

Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το συνολικό αριθμό των μαθητών (και αυτούς που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτούς που παίζουν μπάσκετ).

Η σωστή απάντηση είναι: x+x+17 (περιέχει δύο άγνωστες ποσότητες)

Οι αριθμητικοί χειρισμοί που εμπλέκονται στη δεύτερη αναπαράσταση, σύμφωνα με τους Filloy, Rojanoκαι Solares, είναι η μεταβατική ιδιότητα στην ισότητα και η αριθμητική αντικατάσταση (Filloy, Rojano, & Solares, 2004). Για πολλούς θεωρείται δεδομένο ότι οι μαθητές μεταφέρουν αυθόρμητα αυτές τις αριθμητικές ιδιότητες στο περιβάλλον της άλγεβρας και συνεπώς, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, δεν θα ήταν δύσκολο να σκεφτούν ότι αφού x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο και x+17 είναι ο αριθμός των μαθητών που παίζουν μπάσκετ, τότε ο συνολικός αριθμός των μαθητών (και αυτοί που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτοί που παίζουν μπάσκετ) είναι x+x+17. Όμως αυτό δεν ήταν και τόσο απλό, όπως φάνηκε.

Παρακάτω δίνονται ενδεικτικά δύο απαντήσεις μαθητών:



1. Έστω ότι x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. Χρησιμοποίησε το δεδομένο ότι **οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ είναι 17 παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο** και γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που παίζουν μπάσκετ.

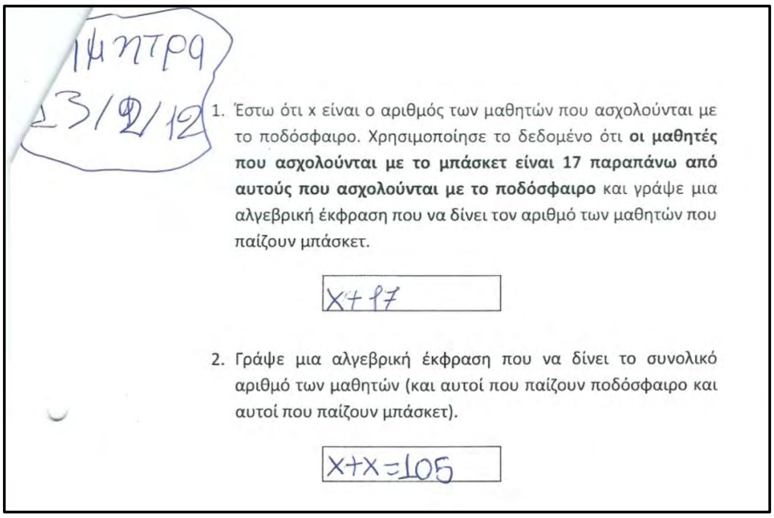
   x+17

2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το συνολικό αριθμό των μαθητών (και αυτοί που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτοί που παίζουν μπάσκετ).

   x+17=105

3. Μετάφρασε σε μια εξίσωση τν έκφραση: **ο συνολικός αριθμός των μαθητών είναι 105.**

Εικόνα 13



1. Έστω ότι x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. Χρησιμοποίησε το δεδομένο ότι **οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ είναι 17 παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο** και γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που παίζουν μπάσκετ.

   x+17

2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το συνολικό αριθμό των μαθητών (και αυτοί που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτοί που παίζουν μπάσκετ).

   x+x=105

Εικόνα 14

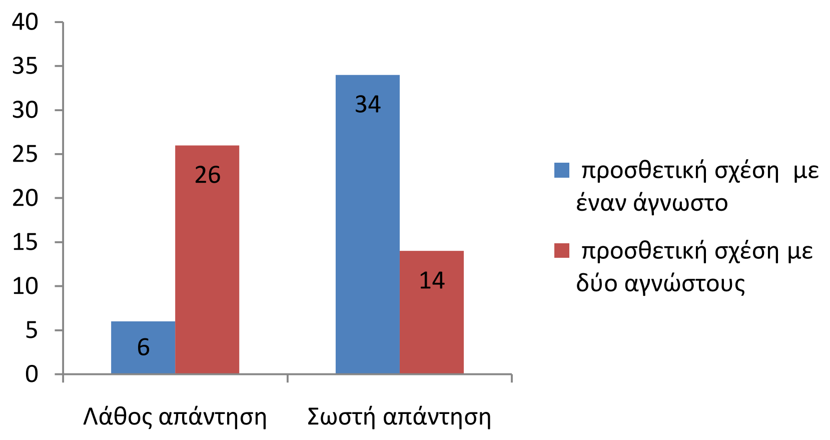
Παρατηρούμε ότι, ενώ μπορούν να εκφράσουν αλγεβρικά μια ποσότητα που προκύπτει από προσθετική σχέση μιας άγνωστης και μιας γνωστής ποσότητας (π.χ. x+17), δυσκολεύονται πάρα πολύ να εκφράσουν αλγεβρικά μια ποσότητα που προκύπτει από προσθετική σχέση δύο άγνωστων αλγεβρικών ποσοτήτων (π.χ. x+x+17) και δίνουν σαν απάντηση x+17 ή x+x.

Συγκεκριμένα από τα 40 παιδιά που επιχείρησαν να επιλύσουν αλγεβρικά το πρόβλημα οι 34 έγραψαν σωστά την αλγεβρική έκφραση x+ 17 και οι 6 λάθος, ενώ, όσον αφορά τη δεύτερη ερώτηση, οι 6 δεν προσπάθησαν καθόλου να εκφράσουν αλγεβρικά το άθροισμα των αλγεβρικών ποσοτήτων x καιx+17, οι 8 έγραψαν x +x, οι 6 έγραψαν x+17 , οι 6 χρησιμοποίησαν αριθμητικές εκφράσεις και οι υπόλοιποι 14 χρησιμοποίησαν τη σωστή έκφραση x+x+17.

Ερώτηση	Λάθος απάντηση	Σωστή απάντηση
1η ερώτηση	6	34

2η ερώτηση	Λάθος απάντηση				Σωστή απάντηση
	Δεν έδωσαν απάντηση	x+x	x+17	Αριθμητική απάντηση	
	6	8	6	6	14

Πώς οι μαθητές χειρίζονται αλγεβρικές εκφράσεις που προκύπτουν από προσθετική σχέση

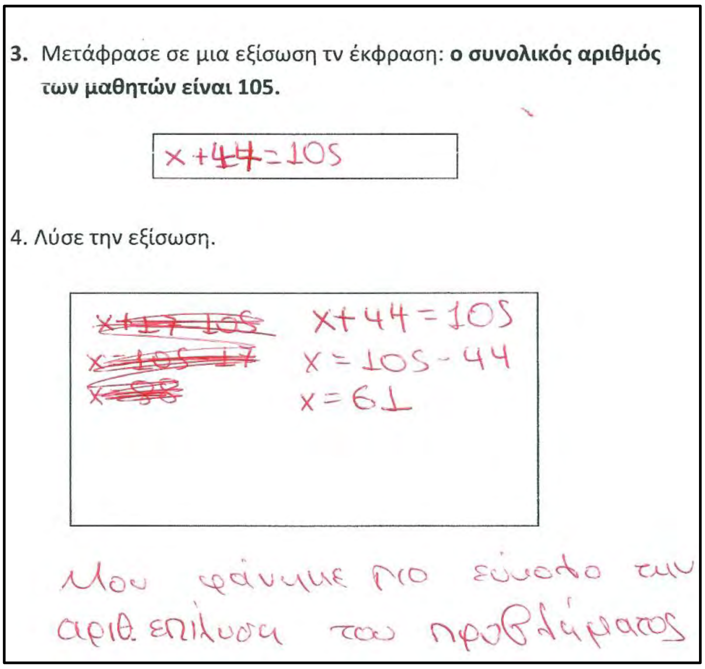


Πίνακας 5. Πώς οι μαθητές χειρίζονται αλγεβρικές εκφράσεις που προκύπτουν από προσθετική σχέση

Στην έρευνα των Filloy, Rojano και Solares βρέθηκε ότι οι μαθητές που εμπλέκονται σε λεκτικά προβλήματα με δύο άγνωστες ποσότητες χρειάζεται να επαναπροσδιορίσουν τις παρακάτω έννοιες α) την έννοια του άγνωστου, β) την έννοια της αλγεβρικής ισότητας και την γ) έννοια της αντικατάστασης ενός αγνώστου από μία ισοδύναμη αλγεβρική έκφραση (Filloy, Rojano, & Solares, 2004).

Τελικά από τους 40 μαθητές που προσπάθησαν να συνεχίσουν στην αλγεβρική επίλυση του προβλήματος, οι 21 κατάφεραν να σχηματίσουν σωστά την εξίσωση του προβλήματος (παρότι απ' αυτούς οι 7 αντιμετώπισαν κάποια δυσκολία στην αναπαράσταση του αθροίσματος των μαθητών που ασχολούνται με τα δύο αγωνίσματα). Οι υπόλοιποι είτε χρησιμοποιούσαν άγνωστες και γνωστές ποσότητες (από την αριθμητική επίλυση) (π.χ. x+44=105) είτε δεν μπόρεσαν να χειριστούν τις δύο άγνωστες αλγεβρικές ποσότητες, όπως αναλύσαμε παραπάνω.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι 21 μαθητές επιχείρησαν να επιλύσουν την εξίσωση. Η πρώτη σημαντική παρατήρηση, που είναι ολοφάνερη και στα 21 φύλλα εργασίας που ολοκληρώθηκε η επίλυση της εξίσωσης, αλλά και σε 13, που δεν ολοκληρώθηκε, και σε ακόμα 5 που ήταν λάθος, είναι ότι οι μαθητές προσπαθούσαν να δώσουν νόημα στους υπολογισμούς. Η επίλυση της εξίσωσης βρίσκονταν σε συμφωνία με την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Παρακάτω δίνονται ενδεικτικά κάποιες απαντήσεις μαθητών (όμως κάνουν λάθη αναπαράστασης):


3. Μετάφρασε σε μια εξίσωση τν έκφραση: **ο συνολικός αριθμός των μαθητών είναι 105.**

x+44=105

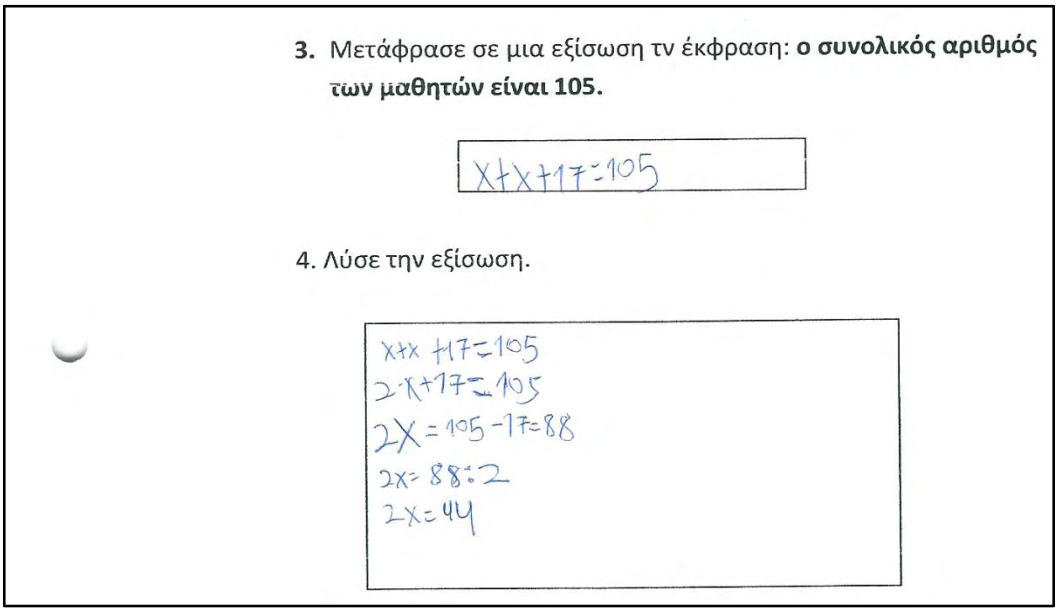
4. Λύσε την εξίσωση.

~~x+17=105~~
~~x=105-17~~
~~x=88~~

x+44=105
x=105-44
x=61

Μου φάνηκε πιο εύκολο την αριθ. επίλυση του προβλήματος

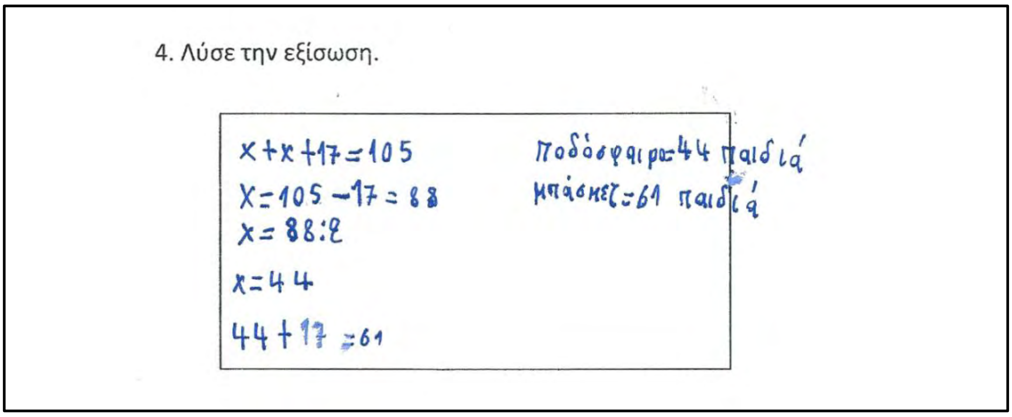
Εικόνα 15



Εικόνα 16

Το σημαντικό είναι ότι όλοι είχαν λύσει το πρόβλημα αριθμητικά με την καθοδήγηση του φύλλου εργασίας. Αυτό σημαίνει ότι η αριθμητική επίλυση βοήθησε τους μαθητές στην επίλυση της εξίσωσης και για πρώτη φορά όλοι οι μαθητές προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα με αλγεβρικό τρόπο. Όμως παρατηρήθηκαν κάποιες παραλήψεις και λάθη. Ενώ τελικά όλοι έλυσαν την εξίσωση κάνοντας τις σωστές πράξεις, αντιμετώπισαν πρόβλημα στο να συμβολίσουν τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς με σωστές αλγεβρικές εκφράσεις. Συγκεκριμένα τρεις μαθητές δεν χρησιμοποίησαν καθόλου x κατά την επίλυση της εξίσωσης, 16 μαθητές χρησιμοποίησαν το x για να εκφράσουν την ποσότητα που υπολόγιζαν σε κάθε βήμα, μην κρατώντας δηλ. σταθερή την ποσότητα που αντιπροσώπευε το x (Stacey K. , 2008), και μόνο δύο κατάφεραν να αναπαραστήσουν σωστά τους ενδιάμεσους μετασχηματισμούς.

Παρακάτω φαίνεται η επίλυση της εξίσωσης έτσι όπως την έγραψε ένας μαθητής:



Εικόνα 17

Προσπαθώντας να κατανοήσουμε τον τρόπο σκέψης των παιδιών, μπορούμε να πούμε ότι οι 21 μαθητές που έλυσαν σωστά την εξίσωση εστίασαν στους υπολογισμούς και στη νοηματοδότηση αυτών κι όχι στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Το αποτέλεσμα ήταν να γίνουν σωστά οι πράξεις για την επίλυση της εξίσωσης. Όμως παραμελήθηκε η αναπαράσταση στα ενδιάμεσα στάδια της επίλυσης με αποτέλεσμα να γίνουν λάθη αναπαράστασης. Ίσως θα έπρεπε οι μετασχηματισμοί για την επίλυση της εξίσωσης και η αιτιολογία αυτών των μετασχηματισμών, που βασίζεται στην αριθμητική πραγματικότητα του προβλήματος, να γίνονται ταυτόχρονα. Δηλ.

$x+x+17=105$ οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτοί που παίζουν μπάσκετ=105

$2x+17=105$ οι διπλάσιοι απ’ αυτούς που παίζουν ποδόσφαιρο και 17 ακόμα είναι 105

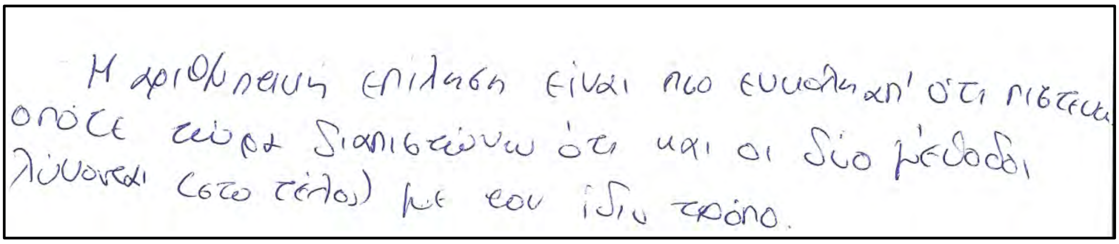
$2x=105-17$ οι διπλάσιοι απ’ αυτούς που παίζουν ποδόσφαιρο είναι 105-17 δηλ. 88

$2x=88$

$x=88:2$ αυτοί που παίζουν ποδόσφαιρο είναι 88:2=44

$x=44$

Αντί για αυτό όμως, οι μαθητές πρώτα υπολογίζουν αριθμητικά κι έπειτα προσπαθούν να το γράψουν με αλγεβρικό τρόπο, ξεχνώντας ότι το x παριστάνει πάντα τους μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο. Παρατηρούμε λοιπόν μια επιμονή στον αριθμητικό τρόπο σκέψης. Πώς θα καταφέρουμε τα παιδιά να περάσουν στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης; Χαρακτηριστική είναι η παρατήρηση, μιας μόνο μαθήτριας, που δείχνει ότι κατάλαβε και συσχέτισε την αριθμητική με την αλγεβρική επίλυση του προβλήματος:


Η αριθμητική επίλυση είναι πιο ευκολη απ' ότι πιστευα οπότε τώρα διαπιστώνω ότι και οι δύο μέθοδοι λύνονται (στο τέλος) με τον ίδιο τρόπο.

Εικόνα 18

Πρέπει να αναφερθεί ακόμα ότι οι μαθητές, μετά από αυτή τη δραστηριότητα, δεν κατανόησαν τη χρησιμότητα της άλγεβρας, όπως αναμενόταν, γιατί η αριθμητική επίλυση του προβλήματος ήταν πολύ πιο εύκολη από την αλγεβρική. Γι’ αυτό η επόμενη δραστηριότητα, που έχει δύσκολη αριθμητική επίλυση, αναμένεται να οδηγήσει στην ανάδειξη της άλγεβρας ως χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων.

3.1.4 *Τέταρτο φύλλο εργασίας*

Στο 4ο φύλλο εργασίας δόθηκε το πρόβλημα:

Σε ένα πάρκιγκ έχουν παρκάρει 50 οχήματα (αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες). Αν το σύνολο των τροχών των οχημάτων είναι 140, πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες;

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα από τα αλγεβρικά προβλήματα, κατά τις Bednarz & Janvier (Bednarz & Janvier, 1996), που είναι δύσκολο να λυθεί αριθμητικά. Οι μαθητές όταν προσπάθησαν να το λύσουν μόνοι τους είπαν ότι το πρόβλημα δεν λύνεται και μόνο μετά από παρότρυνση κάποιοι προσπάθησαν να δοκιμάσουν διάφορες τιμές για να βρουν τους σωστούς αριθμούς αυτοκινήτων και μοτοσικλετών. Από τους 43 μαθητές οι 13 βρήκαν με δοκιμή τον αριθμό των αυτοκινήτων και των μοτοσικλετών, οι 3 προσπάθησαν να το λύσουν με δοκιμές και δεν τα κατάφεραν, οι 6 προσπάθησαν να το λύσουν με άλλους τρόπους (αριθμητικούς) και δεν τα κατάφεραν και οι υπόλοιποι 21 δεν έκαναν καμιά προσπάθεια. Το σημαντικό είναι ότι ακόμα κι αυτοί που βρήκαν με δοκιμή τη λύση δεν θεωρούν ότι η δοκιμή είναι τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος. Αυτή η αντίληψη βέβαια προέρχεται από τη μαθηματική εμπειρία των παιδιών, όπου τη δοκιμή τη δεχόμαστε ως μια μέθοδο επαλήθευσης κι όχι απόδειξης.

Στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος οι περισσότεροι μαθητές αντιμετώπισαν πρόβλημα στο να υπολογίσουν από τις επιπλέον ρόδες τον αριθμό των αυτοκινήτων. Θεώρησαν ότι οι 40 επιπλέον τροχοί προέρχονται από 10 τετράδες τροχών αυτοκινήτων, άρα τα αυτοκίνητα είναι 10. Χαρακτηριστική είναι η παρακάτω απάντηση μαθητή:

Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

1. Αν τα 50 οχήματα ήταν μοτοσικλέτες, πόσες θα ήταν οι ρόδες τους;

   $\boxed{2 \cdot 50 = 100}$

2. Όμως οι ρόδες των οχημάτων που υπάρχουν στο πάρκιγκ είναι 140. Βρες πόσες είναι οι επιπλέον ρόδες.

   $\boxed{140 - 100 = 40}$

   Που οφείλεται αυτό; Αυτό οφείλεται στα αυτοκίνητα

3. Απ' τις επιπλέον ρόδες, ποια οχήματα μπορείς να υπολογίσεις; Υπολόγισέ τα.

   $\boxed{40 : 4 = 10}$

4. Πόσες είναι οι μοτοσικλέτες και πόσα τα αυτοκίνητα;

   Αυτοκίνητα $\boxed{10}$ μοτοσικλέτες $\boxed{40}$

Εικόνα 19

Απ' τα 43 παιδιά τα 19 απάντησαν με αυτόν τον τρόπο, όταν όμως οι αριθμοί που βρήκαν δεν επαληθεύονταν μερικοί άλλαξαν τα αποτελέσματα, τα 11 δεν απάντησαν σ' αυτή την ερώτηση και τα 13 απάντησαν σωστά.

Μένει να δούμε τώρα πώς αντιμετώπισαν την αλγεβρική επίλυση και συγκεκριμένα α) το σχηματισμό της εξίσωσης και β) την επίλυση της εξίσωσης. Η εξίσωση που αναπαριστά το πρόβλημα περιέχει τέσσερις αλγεβρικές εκφράσεις με μια διαβάθμιση δυσκολίας από την απλή προς την πιο πολύπλοκη. Θα εξετάσουμε πώς αντιμετώπισαν καθεμία από τις εκφράσεις αυτές.

Πρώτα θα δούμε πώς αντιμετώπισαν την ερώτηση:

1. Έστω ότι είναι x τα αυτοκίνητα. Να εκφράσεις με αλγεβρικό τρόπο (χρησιμοποιώντας το x) τον αριθμό των μοτοσικλετών.

Απάντηση: 50-x

Παρόλο που την αλγεβρική έκφραση του αριθμού των μοτοσικλετών 50-x, για να τη σχηματίσει ο μαθητής πρέπει να χρησιμοποιήσει ενέργειες προς τα πίσω (Αφού το άθροισμα των οχημάτων είναι 50, για να βρω τις μοτοσικλέτες πρέπει να σχηματίσω τη διαφορά 50-x), δεν φάνηκε να την αντιμετωπίζουν διαφορετικά απ' ότι μια οποιαδήποτε προσθετική σχέση. Συγκεκριμένα από τους 13 μαθητές που έλυσαν αριθμητικά το πρόβλημα οι 12 απάντησαν σωστά σ' αυτή την ερώτηση , ενώ από τους 30 μαθητές που απάντησαν λάθος στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 20 απάντησαν σωστά στην 1η ερώτηση.

Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που προκύπτει από αφαίρεση(την έκφραση 50-x)

	Σωστά	Λάθος
Λάθος αριθμητική λύση	12	1
Λάθος αριθμητική λύση	20	10
Σύνολο	32	11

Πίνακας 6. Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που προκύπτει από αφαίρεση (την έκφραση 50-x)

Η 2η ερώτηση αφορά σε μια αλγεβρική έκφραση που προκύπτει από πολλαπλασιασμό:

2. **Πόσες ρόδες έχουν τα x αυτοκίνητα;**

Απάντηση: 4x

Από τους 13 μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 12 απάντησαν σωστά σ' αυτή την ερώτηση, ενώ από τους 30 μαθητές που απάντησαν λάθος στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 19 απάντησαν σωστά στην 2η ερώτηση. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι αυτοί που δεν απάντησαν σωστά στην 1η ερώτηση δεν απάντησαν σωστά ούτε στη δεύτερη εκτός από 1, που ενώ απάντησε λάθος στην 1η απάντησε σωστά στη 2η.

Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που προκύπτει από πολλαπλασιασμό (την έκφραση 4x)

	Σωστά	Λάθος
Σωστή αριθμητική λύση	12	1
Λάθος αριθμητική λύση	19	11
Σύνολο	31	12

Πίνακας 7. Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που προκύπτει από πολλαπλασιασμό (την έκφραση 4x)

Η τρίτη ερώτηση έχει ως απάντηση μια αλγεβρική έκφραση με παρένθεση:

3. **Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των τροχών που έχουν οι μοτοσικλέτες, αν αυτές είναι τόσες όσες λέει η έκφραση που έγραψες στην ερώτηση 1.**

   Απάντηση: 2(50-x)

Σ' αυτό το σημείο θα μπορέσουμε να δούμε τις αντιλήψεις των παιδιών για την παρένθεση. Από τους 13 μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 10 απάντησαν σωστά σ' αυτή την ερώτηση, ενώ από τους 30 μαθητές που απάντησαν λάθος στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 16 απάντησαν σωστά στην 3η ερώτηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τους 26 μαθητές που έγραψαν σωστά τη συγκεκριμένη αλγεβρική έκφραση οι 8 δεν χρησιμοποίησαν παρένθεση.

Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που περιέχει παρένθεση (την έκφραση 2(50-x))

	Σωστά	Λάθος
Σωστή αριθμητική λύση	10	3
Λάθος αριθμητική λύση	16	14
Σύνολο	26	17

Πίνακας 8. Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που περιέχει παρένθεση

Παρατηρούμε ότι τα λάθη αυξάνονται. Αυτή η αλγεβρική έκφραση, σύμφωνα με τους Filloy, Rojano, & Solares, προϋποθέτει την αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια αλγεβρική έκφραση και είναι πιο πολύπλοκη (Filloy, Rojano, & Solares, 2004).

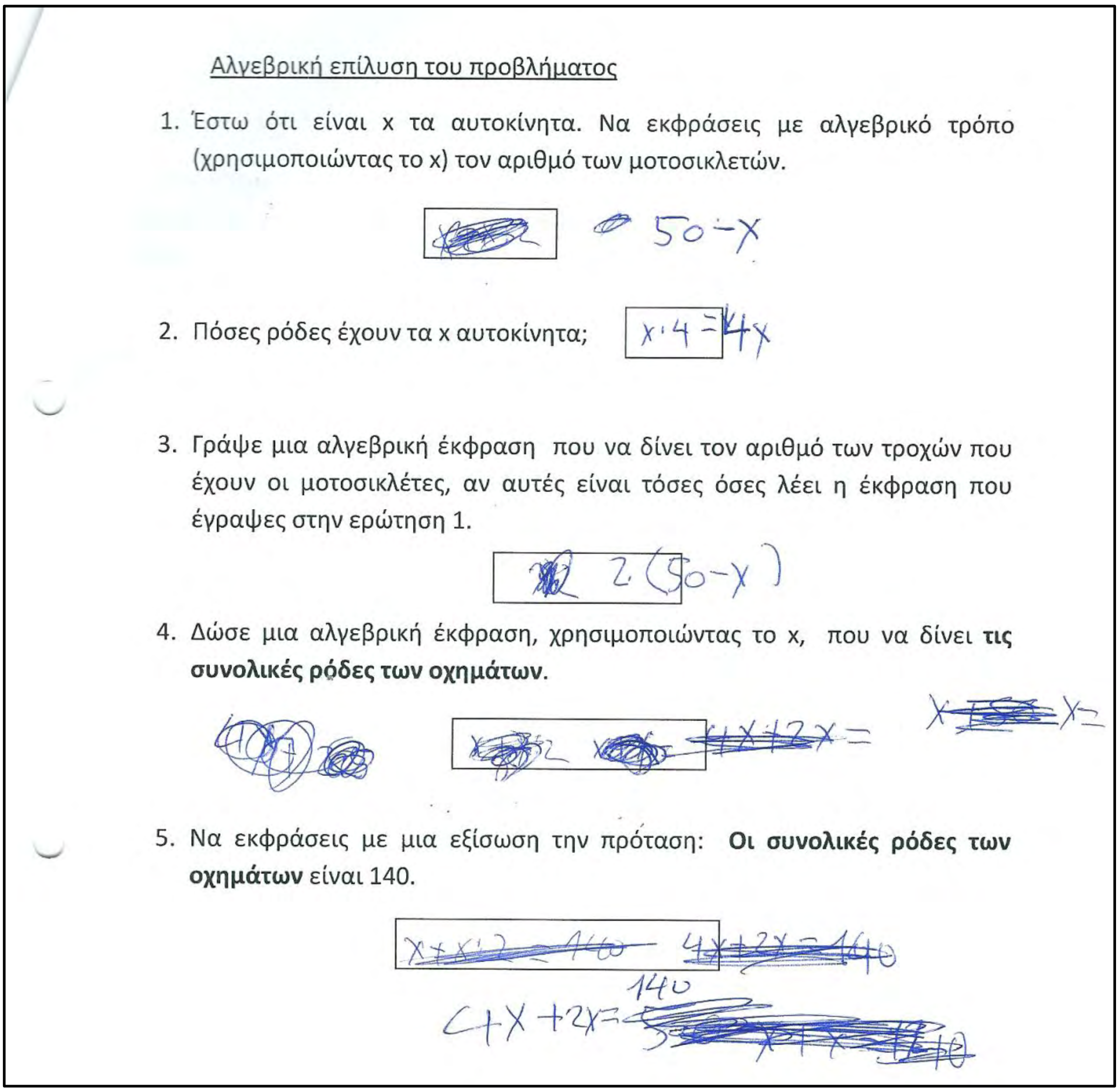
Γενικά από τους 26 μαθητές που έδωσαν σωστή αλγεβρική έκφραση 2(50-x) προκειμένου να παραστήσουν τις ρόδες των μοτοσικλετών οι 11 δεν έβαλαν παρένθεση.

Στην 4η ερώτηση πρέπει οι μαθητές να δώσουν σαν απάντηση μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το άθροισμα των δύο προηγούμενων εκφράσεων:

4. **Δώσε μια αλγεβρική έκφραση, χρησιμοποιώντας το x, που να δίνει τις συνολικές ρόδες των οχημάτων.**

   Απάντηση:2(50-x)+4 x

Εδώ τα λάθη αυξήθηκαν. Κάποιοι ενώ έγραψαν σωστά τις προηγούμενες αλγεβρικές εκφράσεις, το άθροισμα των εκφράσεων τους φάνηκε πολύπλοκο και το απλοποίησαν με λάθος τρόπο, όπως ο μαθητής παρακάτω:



Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι είναι x τα αυτοκίνητα. Να εκφράσεις με αλγεβρικό τρόπο (χρησιμοποιώντας το x) τον αριθμό των μοτοσικλετών.

   50-x

2. Πόσες ρόδες έχουν τα x αυτοκίνητα; x·4=4x

3. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των τροχών που έχουν οι μοτοσικλέτες, αν αυτές είναι τόσες όσες λέει η έκφραση που έγραψες στην ερώτηση 1.

   2(50-x)

4. Δώσε μια αλγεβρική έκφραση, χρησιμοποιώντας το x, που να δίνει **τις συνολικές ρόδες των οχημάτων**.

5. Να εκφράσεις με μια εξίσωση την πρόταση: **Οι συνολικές ρόδες των οχημάτων** είναι 140.

   C+X+2x=140

Εικόνα 20

Από τους 13 μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 6 απάντησαν σωστά σ’ αυτή την ερώτηση, ενώ από τους 30 μαθητές που απάντησαν λάθος στην αριθμητική λύση του προβλήματος οι 8 απάντησαν σωστά στην 4η ερώτησης.

Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που περιέχει άθροισμα αλγεβρικών εκφράσεων (την έκφραση 2(50-x)+4x)

	Σωστά	Λάθος
Σωστή αριθμητική λύση	6	7
Λάθος αριθμητική λύση	8	22
Σύνολο	14	29

Πίνακας 9. Πώς χειρίζονται οι μαθητές μια αλγεβρική έκφραση που περιέχει άθροισμα αλγεβρικών εκφράσεων

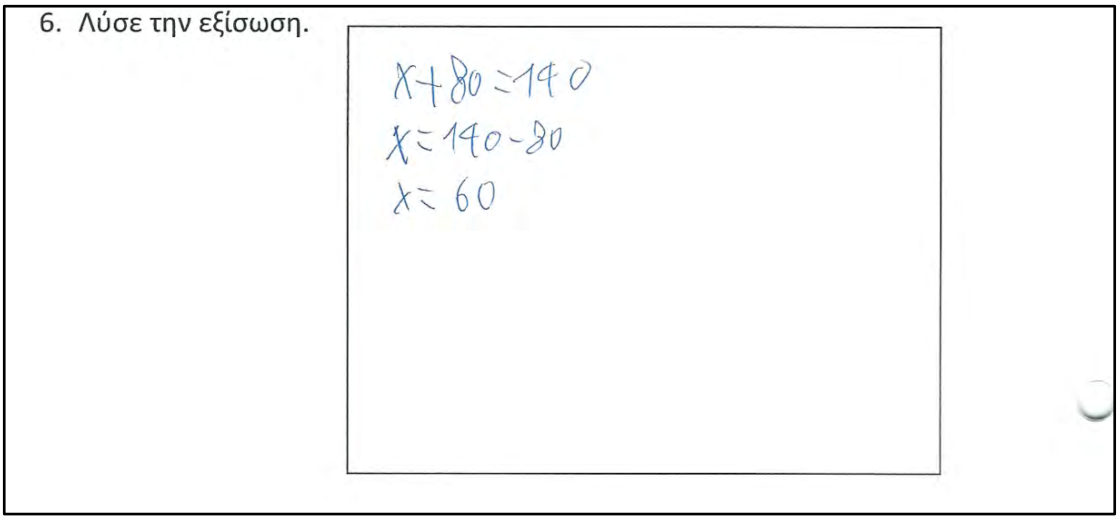
Παρατηρούμε μια αύξηση των λαθών στις αναπαραστάσεις των ποσοτήτων του προβλήματος με αλγεβρικές εκφράσεις καθώς οι αλγεβρικές εκφράσεις γίνονται πιο πολύπλοκες. Παρατηρούμε επίσης ότι περισσότερα λάθη τείνουν να κάνουν μαθητές που δεν είχαν καταφέρει να επιλύσουν το πρόβλημα αριθμητικά. Αυτό μάλλον οφείλεται γενικά στο μαθησιακό επίπεδο και στο αριθμητικό υπόβαθρο των παιδιών κι όχι στη συγκεκριμένη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη χρήση της παρένθεσης. Ενώ μπορούν να παραστήσουν με σωστή αλγεβρική έκφραση ένα ποσό, δε βάζουν παρενθέσεις ακόμα κι αν έχουν κατανοήσει πλήρως τη σχέση των ποσοτήτων.

Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα από τη μελέτη του 4ου φύλλου εργασίας μπορούμε να τα συγκεντρώσουμε σε ένα γράφημα ώστε να φαίνεται το ποσοστό των μαθητών που χειρίζονται σωστά καθεμιά από τις διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις:

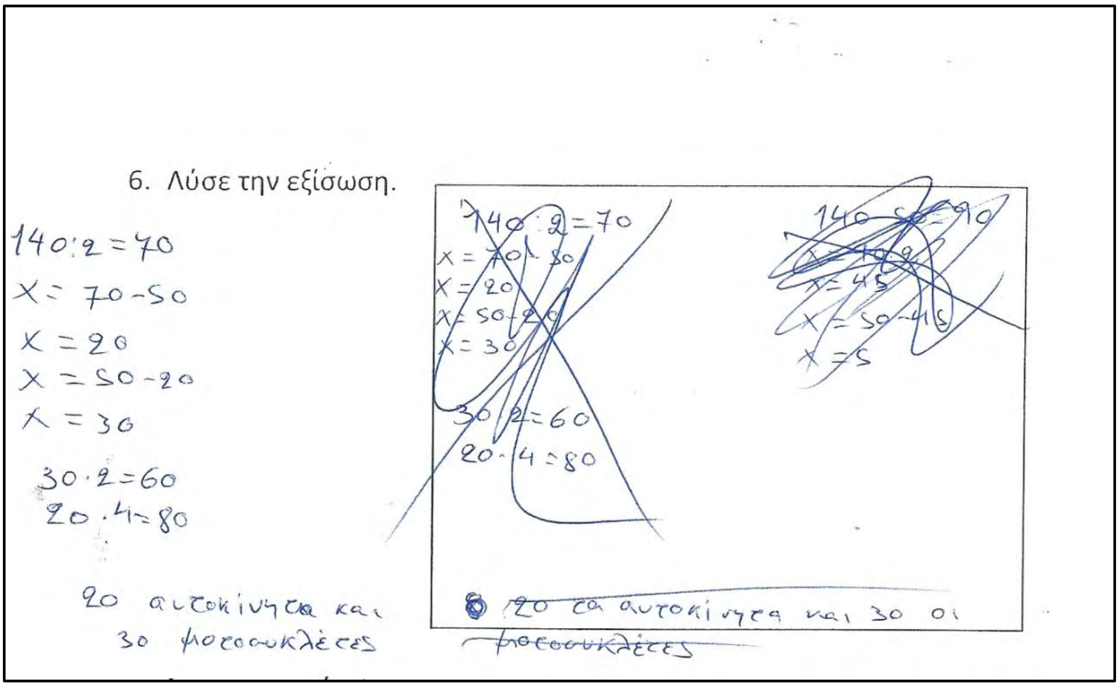
Πίνακας 10. Πώς οι μαθητές χειρίζονται τις διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις

Στη συνέχεια οι μαθητές που κατάφεραν να εκφράσουν σωστά με αλγεβρικό τρόπο το άθροισμα των τροχών όλων των οχημάτων σχημάτισαν και την εξίσωση. Από τους 14 μαθητές που σχημάτισαν την εξίσωση οι 11 προσπάθησαν να τη λύσουν. Ας δούμε πώς προσπάθησαν να επιλύσουν την εξίσωση και σε ποιο βαθμό τους βοήθησε η αριθμητική επίλυση που είχε προηγηθεί.

Παρατηρούμε ότι αρχικά όλα τα παιδιά, ακόμα κι εκείνα που δεν έγραψαν σωστά την εξίσωση, επιζήτησαν, σε αριθμητικούς χειρισμούς, ένα νόημα για τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που θα ακολουθούσαν. Όμως τελικά δεν τα κατάφεραν, γιατί όπως είδαμε η αριθμητική επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτούσε δύσκολες, για το επίπεδο των παιδιών, νοητικές διεργασίες.

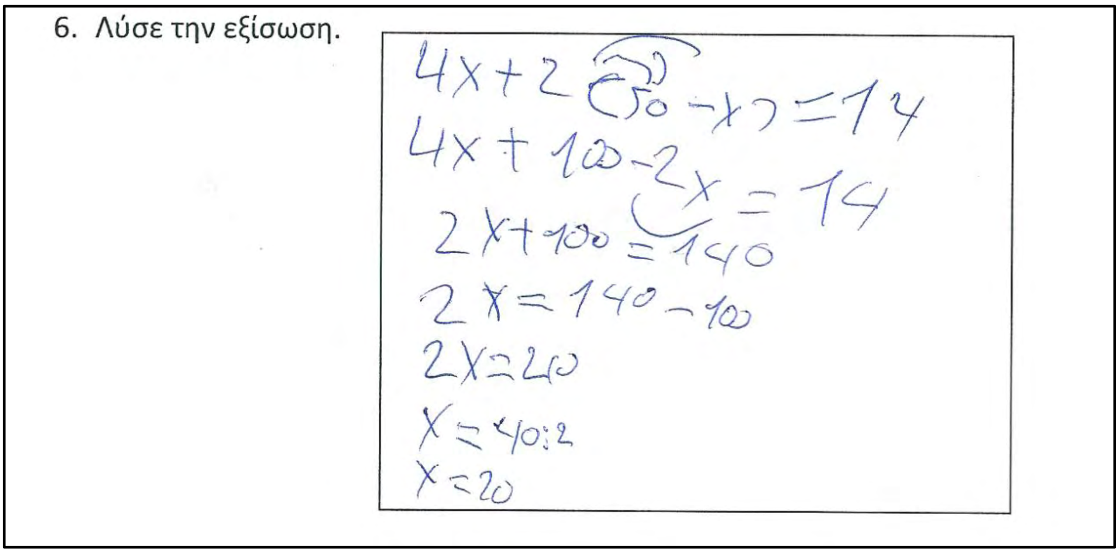


Εικόνα 21



Εικόνα 22

Τελικά κάποια παιδιά προσπάθησαν να τη λύσουν με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που είχαν διδαχτεί στο 1ο κεφάλαιο (π.χ. επιμεριστική ιδιότητα). Τελικά 8 μαθητές έλυσαν την εξίσωση. Χρησιμοποίησαν επιμεριστική ιδιότητα για να βγάλουν την παρένθεση κι από κει και πέρα οι υπόλοιποι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί συσχετίστηκαν με την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Παρακάτω δίνεται μια απάντηση μαθητή.


6. Λύσε την εξίσωση.

$4x+2(50-x)=14$
$4x+100-2x=14$
$2x+100=140$
$2x=140-100$
$2x=40$
$x=40:2$
$x=20$

Εικόνα 23

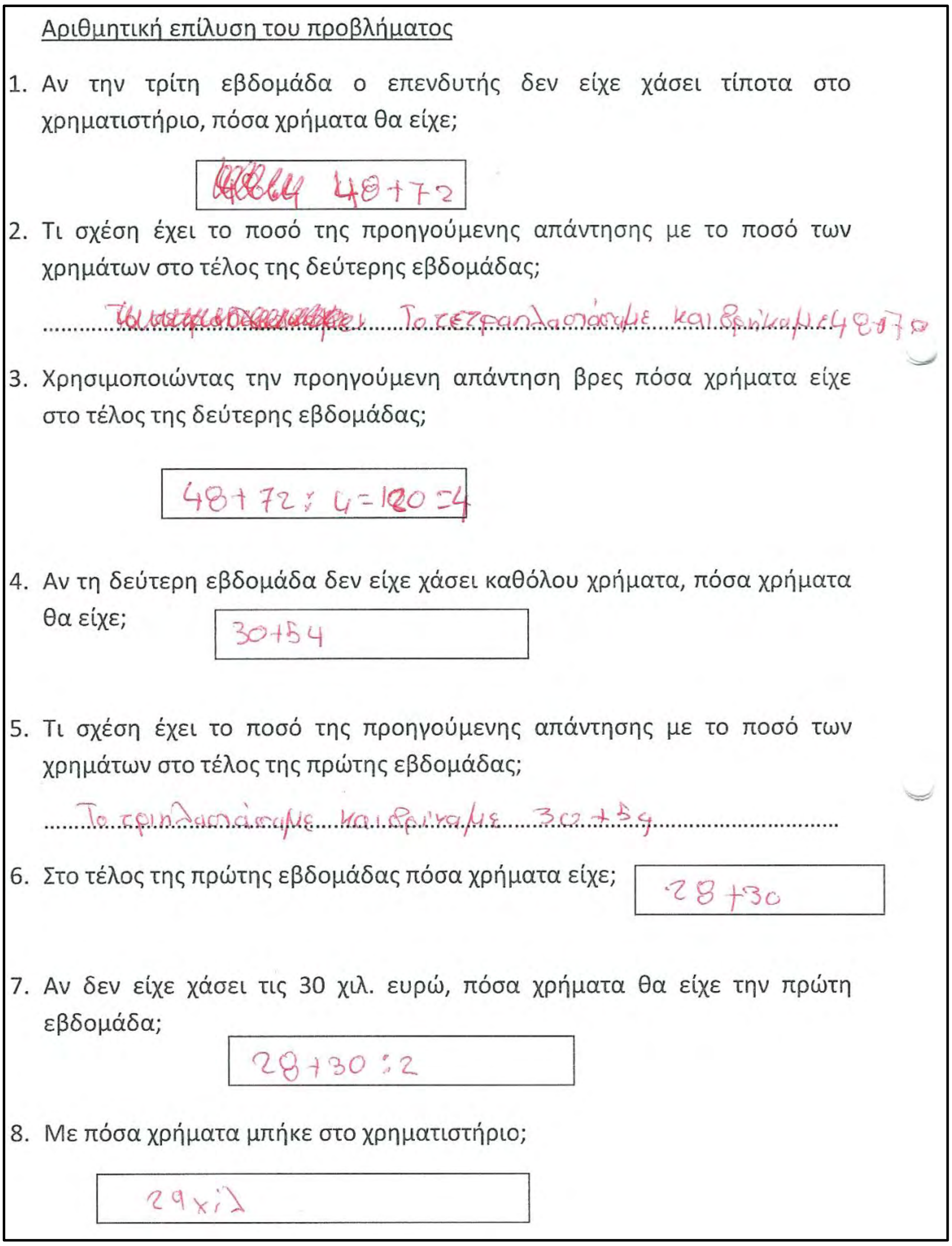
3.1.5 *Πέμπτο φύλλο εργασίας*

Στο 5ο φύλλο εργασίας δόθηκε το πρόβλημα:

Ένας επενδυτής βάζει τα χρήματά του στο χρηματιστήριο. Την πρώτη εβδομάδα, αρχικά, διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά μετά χάνει 30 χιλ. ευρώ. Τη δεύτερη εβδομάδα, αρχικά τριπλασιάζει τα χρήματα που του έμειναν, αλλά μετά χάνει 54 χιλ. ευρώ από αυτά. Την τρίτη εβδομάδα, τετραπλασιάζει τα χρήματά της προηγούμενης εβδομάδας και μετά χάνει 72 χιλ. ευρώ από αυτά. Τελικά μένει με 48 χιλ. ευρώ. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

Από τα 43 παιδιά έλυσαν μόνα τους το πρόβλημα τα 12, χρησιμοποιώντας ενέργειες προς τα πίσω, ξεκινώντας δηλαδή από τα τελευταία δεδομένα του προβλήματος και κάνοντας αντίθετες ενέργειες μέχρι να φτάσουν στο ζητούμενο. Τα υπόλοιπα παιδιά ή έκαναν τυχαίες πράξεις ή ξεκίνησαν από την αρχή χρησιμοποιώντας έναν τυχαίο αριθμό ενεργώντας προς τα εμπρός, δηλαδή εκτελώντας τις ενέργειες έτσι όπως περιγράφονταν στο πρόβλημα, και δύο μαθητές προσπάθησαν να λύσουν αλγεβρικά το πρόβλημα αλλά δεν τα κατάφεραν.

Στη συνέχεια οι 15 απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας για την αριθμητική επίλυση. Κάποια από τα παιδιά, που απάντησαν σωστά στην αριθμητική επίλυση, χρησιμοποίησαν αριθμητικές παραστάσεις χωρίς παρενθέσεις για να απαντήσουν στις ερωτήσεις, όπως παρακάτω:


Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

1. Αν την τρίτη εβδομάδα ο επενδυτής δεν είχε χάσει τίποτα στο χρηματιστήριο, πόσα χρήματα θα είχε;

~~64~~ 48+72

2. Τι σχέση έχει το ποσό της προηγούμενης απάντησης με το ποσό των χρημάτων στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας;

~~[illegible]~~ Το τετραπλασιάσαμε και βρήκαμε 48+72

3. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη απάντηση βρες πόσα χρήματα είχε στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας;

48+72 : 4=120 : 4

4. Αν τη δεύτερη εβδομάδα δεν είχε χάσει καθόλου χρήματα, πόσα χρήματα θα είχε;

30+54

5. Τι σχέση έχει το ποσό της προηγούμενης απάντησης με το ποσό των χρημάτων στο τέλος της πρώτης εβδομάδας;

Το τριπλασιάσαμε και βρήκαμε 30+54

6. Στο τέλος της πρώτης εβδομάδας πόσα χρήματα είχε; 28+30

7. Αν δεν είχε χάσει τις 30 χιλ. ευρώ, πόσα χρήματα θα είχε την πρώτη εβδομάδα;

28+30 : 2

8. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

29χιλ

Εικόνα 24

Μια παρατήρηση, που δείχνει πώς κάποιες λανθασμένες αριθμητικές αντιλήψεις οδηγούν σε εσφαλμένες αλγεβρικές παραστάσεις, είναι ότι τα παιδιά που δεν χρησιμοποίησαν παρενθέσεις στην αριθμητική παράσταση δεν χρησιμοποίησαν σωστά τις παρενθέσεις στην αλγεβρική παράσταση:

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ο επενδυτής ξεκίνησε με x ποσό στο χρηματιστήριο. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας το x) την πρόταση: Την πρώτη εβδομάδα **διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 30 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της 1ης εβδομάδας: $x \cdot 2 - 30$

2. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 1) την πρόταση: Τη δεύτερη εβδομάδα **τριπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 54 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της 2ης εβδομάδας: $(x \cdot 2 - 30) - 3 = 54$

3. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 2) την πρόταση: Την τρίτη εβδομάδα **τετραπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 72 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της 3ης εβδομάδας: $(x \cdot 2 - 30) \cdot 3 - 54 \cdot 4 - 72$

4. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**

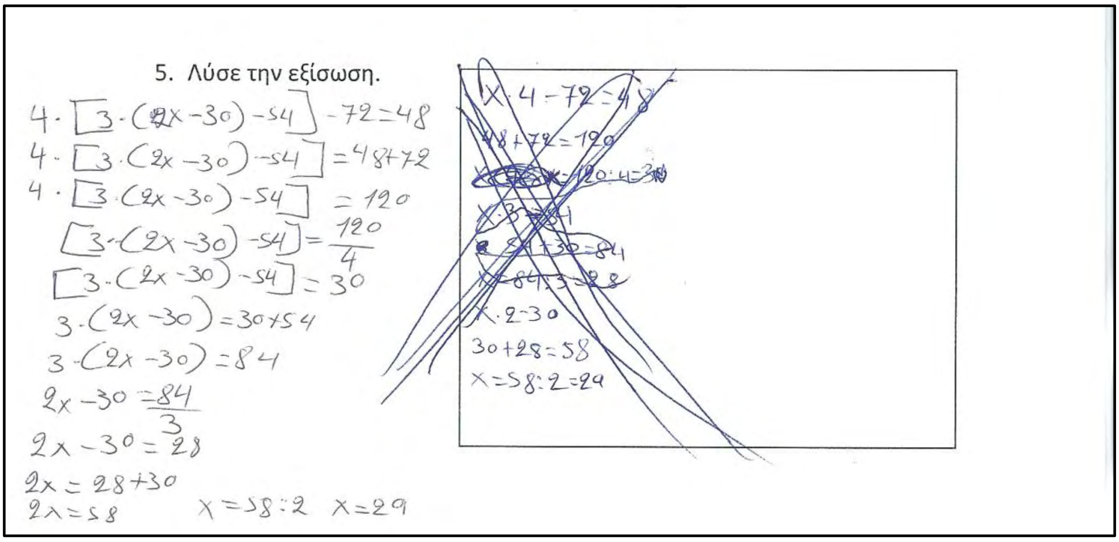
   $(x \cdot 2 - 30) \cdot 3 - 54 \cdot 4 - 72 = 48$

5. Λύσε την εξίσωση.

   $(x \cdot 2 - 30) \cdot 3 - 54 \cdot 4 - 72 = 48$
   $48 + 72 = 120$
   $120 : 4 = 30$
   $30 + 54 = 84$
   $84 : 3 = 28$
   $28 + 30 = 58$
   $52 : 2 = 29.$

Εικόνα 25

Το σημαντικό είναι ότι υπήρξαν παιδιά που δεν έλυσαν το πρόβλημα με αριθμητικό τρόπο, αλλά κατάφεραν ή πλησίασαν το σχηματισμό της εξίσωσης. Αυτό είναι μια απόδειξη του ότι ο σχηματισμός της εξίσωσης του προβλήματος δεν εξαρτάται από την αριθμητική του επίλυση. Όμως η επίλυση της εξίσωσης έγινε μόνο από παιδιά που είχαν λύσει αριθμητικά το πρόβλημα και μάλιστα με τρόπο που πλησιάζει στην αριθμητική επίλυση:



Εικόνα 26

Αυτός ο τρόπος επίλυσης της εξίσωσης, μιας εξίσωσης πολύπλοκης, φαίνεται καθαρά ότι βασίζεται στην ερμηνεία που προσφέρει η αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

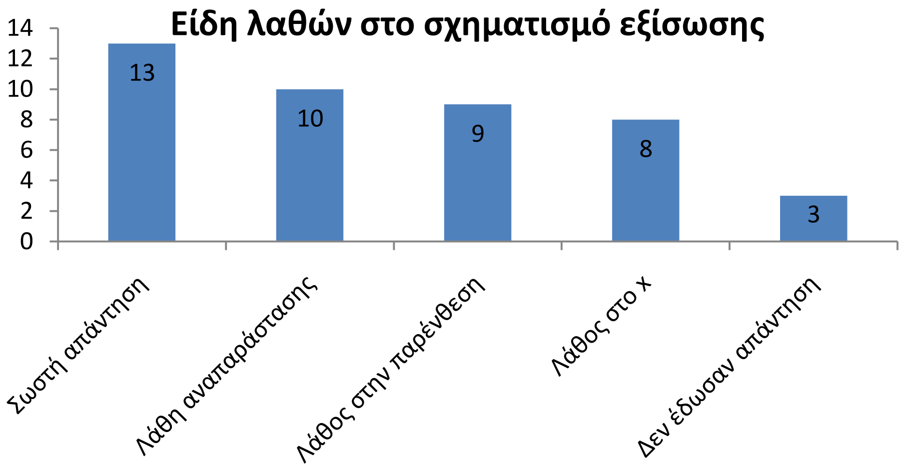
Τα λάθη που παρατηρήθηκαν στην αλγεβρική επίλυση αυτού του προβλήματος ήταν:

α) Η μη σωστή χρήση της παρένθεσης είτε γιατί ο μαθητής δεν ξέρει πότε βάζουμε παρένθεση είτε γιατί αγνοεί πότε βάζουμε διπλή παρένθεση ή αγκύλη:

β) Η αντίληψη για τη μη σταθερή αξία του άγνωστου x, που σχετίζεται με τις αριθμητικές αντιλήψεις των μαθητών (Stacey K. , 2008):

γ) Η λανθασμένη μετάφραση του προβλήματος σε αλγεβρική γλώσσα (Arzarello, Bazzini, & Chiappini, 2001):

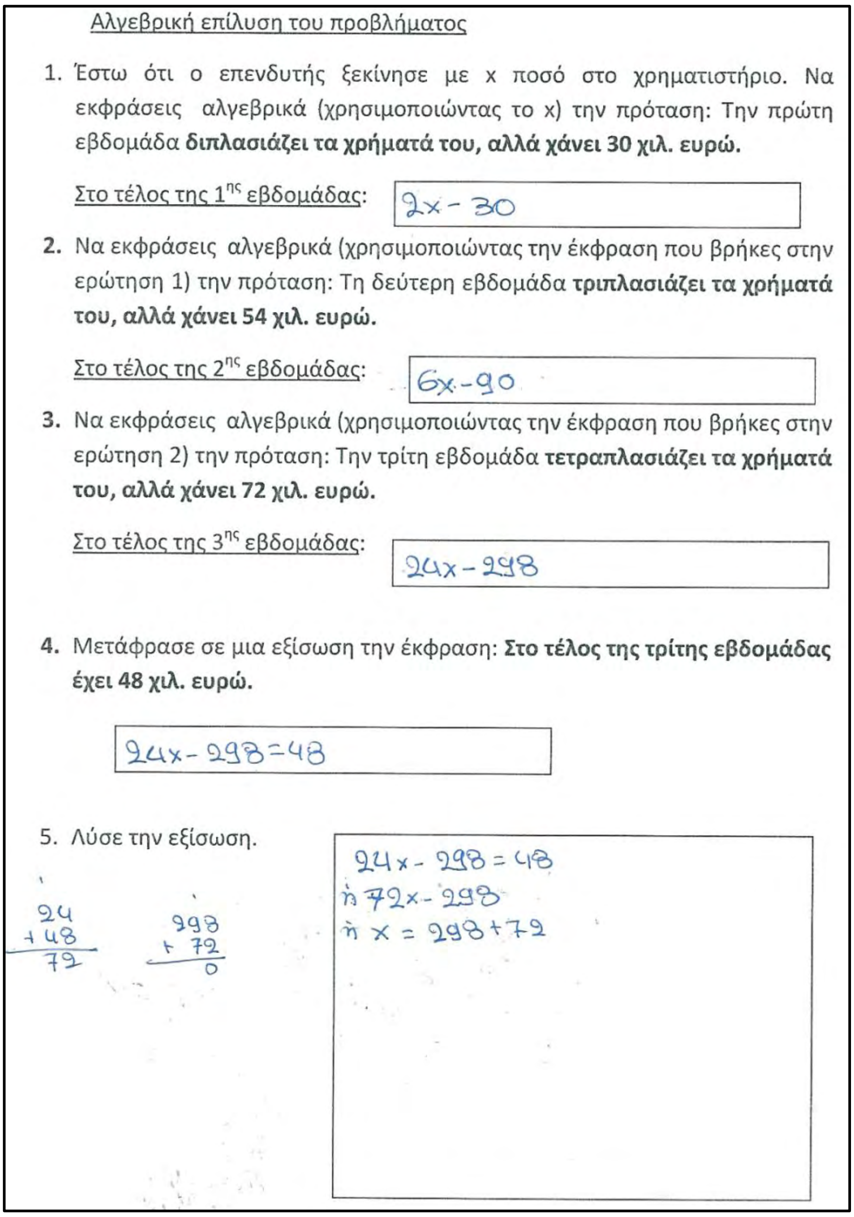
Από τα 43 παιδιά τα 13 έγραψαν σωστά την εξίσωση, τα 8 δεν κράτησαν σταθερό το x, τα 9 δεν έβαλαν σωστά παρενθέσεις (δηλ. παρέλειψαν την εσωτερική παρένθεση ή όλες τις παρενθέσεις), τα 10 έκαναν διάφορα άλλα λάθη αναπαράστασης, όπως χρησιμοποίησαν το ίσον ή κάποια παρένθεση χωρίς να χρειάζεται, και τα υπόλοιπα 3 δεν έλυσαν αλγεβρικά το πρόβλημα.



Πίνακας 11. Είδη λαθών στο σχηματισμό εξίσωσης

Αξίζει να σημειωθεί ότι 23 από τα 43 παιδιά έγραψαν σωστά την αλγεβρική έκφραση που περιέχει μία παρένθεση, δηλαδή μία αντικατάσταση, ποσοστό που συμφωνεί με τα ευρήματα από το προηγούμενο φύλλο εργασίας.

Επίσης ο σχηματισμός της εξίσωσης από μια μαθήτρια χωρίς να χρησιμοποιήσει παρένθεση δείχνει πόσο επηρεάζει η βαθιά κατανόηση του προβλήματος την αναπαράστασή του με εξίσωση:



Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ο επενδυτής ξεκίνησε με x ποσό στο χρηματιστήριο. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας το x) την πρόταση: Την πρώτη εβδομάδα **διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 30 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της $1^{ης}$ εβδομάδας: $2x-30$

2. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 1) την πρόταση: Τη δεύτερη εβδομάδα **τριπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 54 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας: $6x-90$

3. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 2) την πρόταση: Την τρίτη εβδομάδα **τετραπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 72 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της $3^{ης}$ εβδομάδας: $24x-298$

4. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**

   $24x-298=48$

5. Λύσε την εξίσωση.

$24 + 48 = 72$

$298 + 72 = 0$

$24x - 298 = 48$

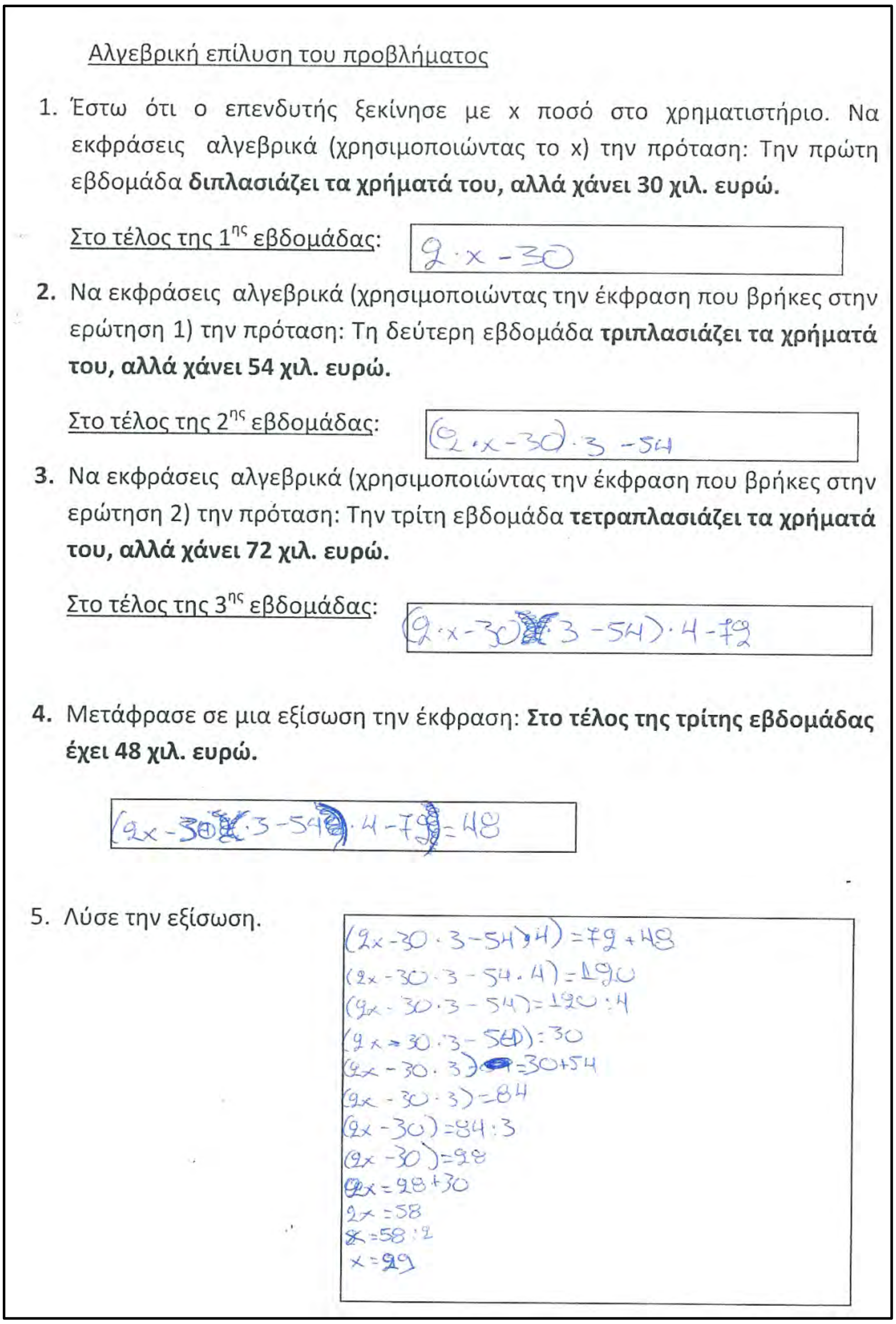
ή $72x - 298$

ή $x = 298 + 72$

Εικόνα 27

Αξίζει να πούμε ότι αυτή ήταν η μόνη μαθήτρια που μπόρεσε σε επόμενα μαθήματα να εφαρμόσει αυθόρμητα όσα μάθαμε και να επιλύσει αλγεβρικά ένα πρόβλημα με ποσοστά.

Όσον αφορά στην επίλυση της εξίσωσης οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που στηρίζονταν σε αριθμητικούς χειρισμούς. Έτσι, ενώ κάποιοι είχαν κάνει λάθος στην εξίσωση βάζοντας λάθος παρένθεση, τελικά την έλυσαν σωστά, αφού είχαν σωστή αναπαράσταση στο μυαλό τους. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές τα καταφέρνουν καλύτερα στην επίλυση της εξίσωσης όταν ερμηνεύουν αριθμητικά στα πλαίσια του προβλήματος τους ενδιάμεσους μετασχηματισμούς:



Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ο επενδυτής ξεκίνησε με x ποσό στο χρηματιστήριο. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας το x) την πρόταση: Την πρώτη εβδομάδα **διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 30 χιλ. ευρώ.**

Στο τέλος της 1ης εβδομάδας: 2·x − 30

2. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 1) την πρόταση: Τη δεύτερη εβδομάδα **τριπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 54 χιλ. ευρώ.**

Στο τέλος της 2ης εβδομάδας: (2·x − 30)·3 − 54

3. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 2) την πρόταση: Την τρίτη εβδομάδα **τετραπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 72 χιλ. ευρώ.**

Στο τέλος της 3ης εβδομάδας: (2·x − 30)·3 − 54)·4 − 72

4. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**

(2x − 30)·3 − 54)·4 − 72) = 48

5. Λύσε την εξίσωση.

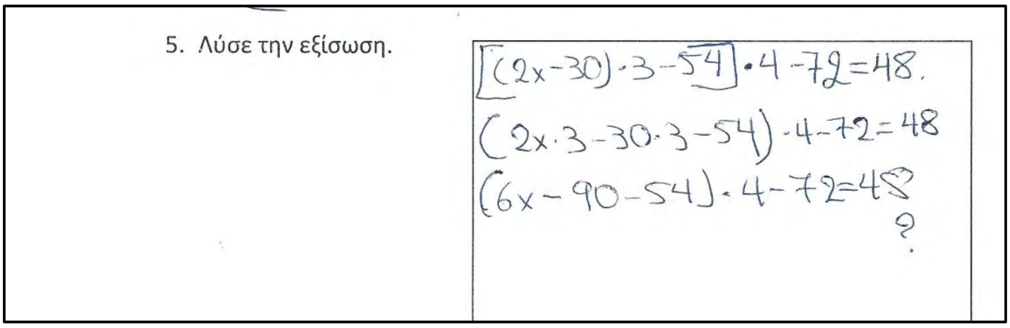
(2x − 30 · 3 − 54)·4) = 72 + 48
(2x − 30 · 3 − 54 · 4) = 120
(2x − 30 · 3 − 54) = 120 : 4
(2x − 30 · 3 − 54) = 30
(2x − 30 · 3) = 30 + 54
(2x − 30 · 3) = 84
(2x − 30) = 84 : 3
(2x − 30) = 28
2x = 28 + 30
2x = 58
x = 58 : 2
x = 29

Εικόνα 28

Ο παραπάνω μαθητής στηρίζεται στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος και λύνει σωστά μια πολύ δύσκολη εξίσωση, που δεν θα μπορούσε να λύσει χρησιμοποιώντας τους χωρίς νόημα αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Βέβαια παρουσιάζει πρόβλημα στην αναπαράσταση αφού δεν χρησιμοποιεί παρενθέσεις.

Γενικά τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην αναπαράσταση με αλγεβρικές εκφράσεις.

Από τους 43 μαθητές οι 5 προσπάθησαν να λύσουν την εξίσωση κάνοντας απαλοιφή παρενθέσεων με επιμεριστική ιδιότητα και δεν τα κατάφεραν, 5 προσπάθησαν να κάνουν αλγεβρικούς μετασχηματισμούς χρησιμοποιώντας αριθμητικούς χειρισμούς και τα κατάφεραν 2, 4 την έλυσαν με αριθμητικούς καθαρά χειρισμούς χωρίς καν να χρησιμοποιήσουν x και 2 προσπάθησαν να τη λύσουν με αριθμητική και δεν τα κατάφεραν και οι υπόλοιποι 27 δεν προσπάθησαν να τη λύσουν. Παρακάτω δίνονται οι απαντήσεις μαθητών σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις:


5. Λύσε την εξίσωση.

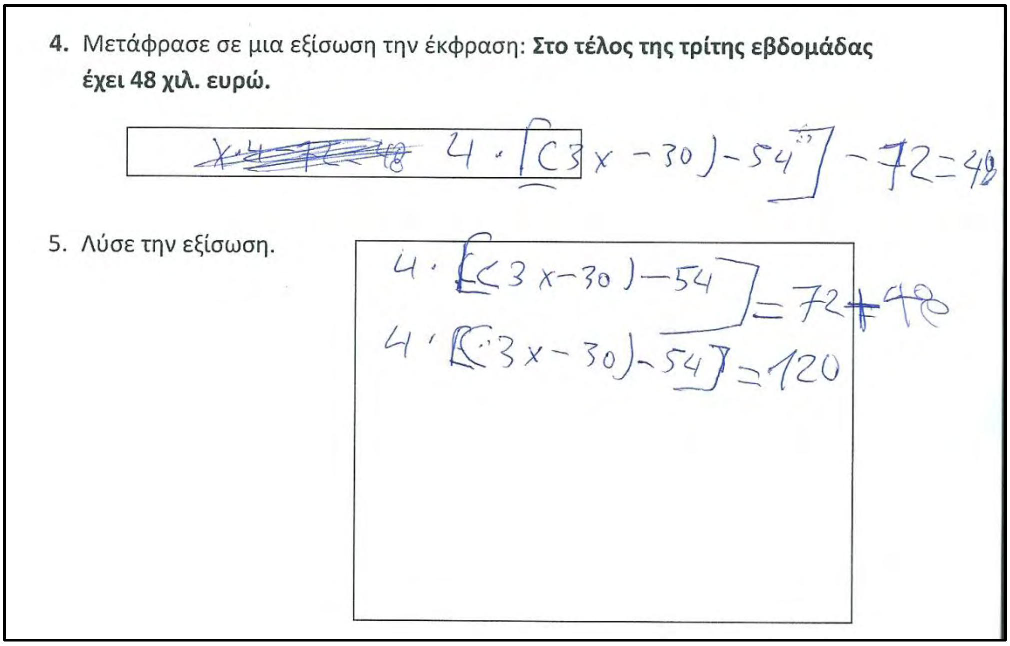
$[(2x-30)\cdot 3-54]\cdot 4-72=48.$

$(2x\cdot 3-30\cdot 3-54)\cdot 4-72=48$

$(6x-90-54)\cdot 4-72=48$

?

Εικόνα 29


4. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**

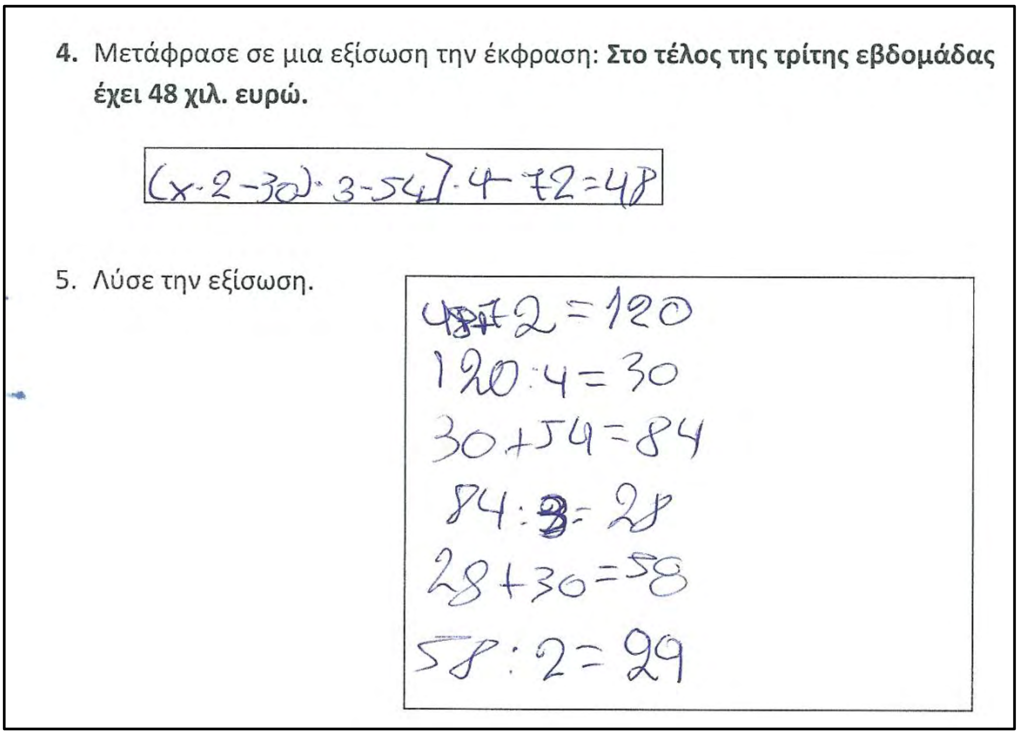
~~x·4−72=48~~ $4\cdot[(3x-30)-54]-72=48$

5. Λύσε την εξίσωση.

$4\cdot[(3x-30)-54]=72+48$

$4\cdot[(3x-30)-54]=120$

Εικόνα 30



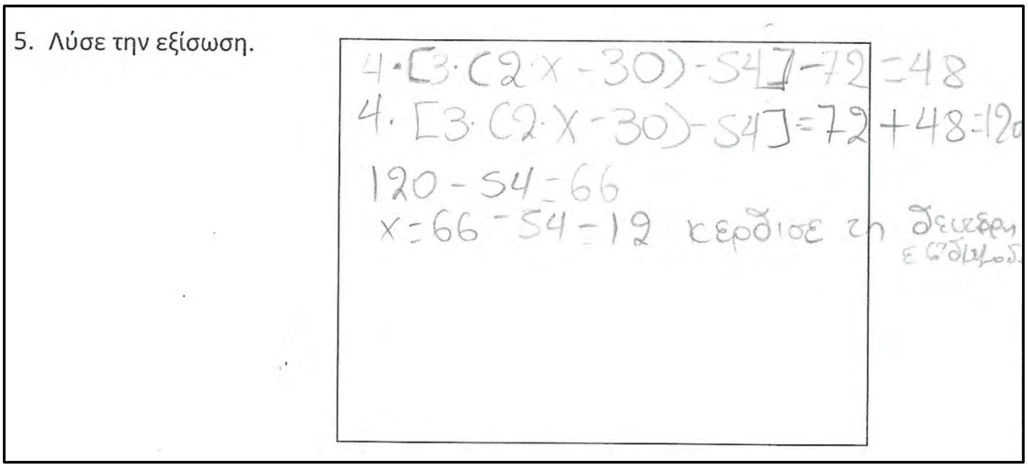
4. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**

(x·2−30)·3−54]·4−72=48

5. Λύσε την εξίσωση.

48+72=120
120:4=30
30+54=84
84:3=28
28+30=58
58:2=29

Εικόνα 31



5. Λύσε την εξίσωση.

4·[3·(2·x−30)−54]−72=48
4·[3·(2·x−30)−54]=72+48=120
120−54=66
x=66−54=12 κέρδισε τη δεύτερη εβδομάδα

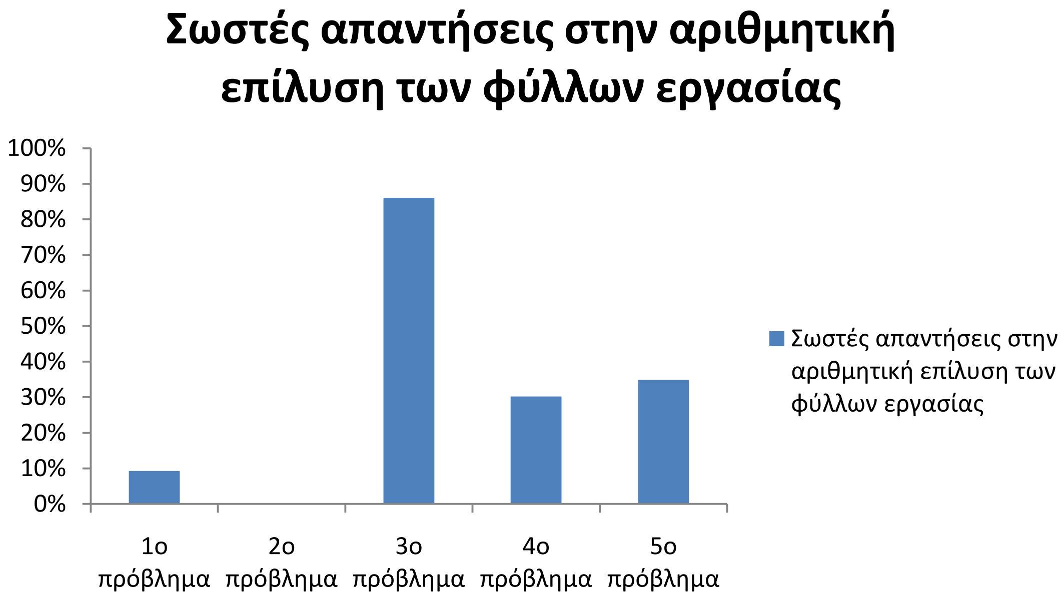
Εικόνα 32

Γενικά παρατηρήσαμε ότι από τους 43 μαθητές οι 5 στράφηκαν προς την αλγεβρική επίλυση με απαλοιφή παρενθέσεων, οι 11 στράφηκαν προς την αλγεβρική επίλυση χρησιμοποιώντας αριθμητικούς χειρισμούς και οι 27 δεν προσπάθησαν να τη λύσουν. Τα παιδιά σ’ αυτό το στάδιο επιμένουν σ’ ένα αριθμητικό πλαίσιο επίλυσης της εξίσωσης που τους προσφέρει πολλά αφού ελαχιστοποιεί τα λάθη στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Αυτό προϋποθέτει βέβαια αναπτυγμένη αριθμητική σκέψη του μαθητή.

Πίνακας 12. Ποια μέθοδο προτιμούν οι μαθητές για την επίλυση εξίσωσης

3.1.6 *Συνοπτικά αποτελέσματα από την ανάλυση των φύλλων εργασίας*

Σ' αυτή την ενότητα θα συνοψίσουμε τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους από την αριθμητική στην άλγεβρα, αλλά κυρίως τα οφέλη που αποκόμισαν με τη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο από το αναμενόμενο στην αριθμητική επίλυση των προβλημάτων (εκτός από το τρίτο πρόβλημα που τους φάνηκε εύκολο). Αυτό οφείλεται κυρίως στο χαμηλό αριθμητικό υπόβαθρο των μαθητών. Οι μαθητές δεν μπορούν να επιλύουν με αριθμητικό τρόπο προβλήματα και έχουν πολλά κενά σε διάφορες αριθμητικές έννοιες όπως τα κλάσματα. Αυτό είχε σαν συνέπεια να μην μπορέσουν να ανταποκριθούν ακόμα και στην αριθμητική επίλυση που τους οδηγούσαν οι ερωτήσεις των φύλλων εργασίας και αυτό τους επηρέασε και στην κατανόηση της αλγεβρικής επίλυσης. Η ικανότητά τους στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων φαίνεται παρακάτω:

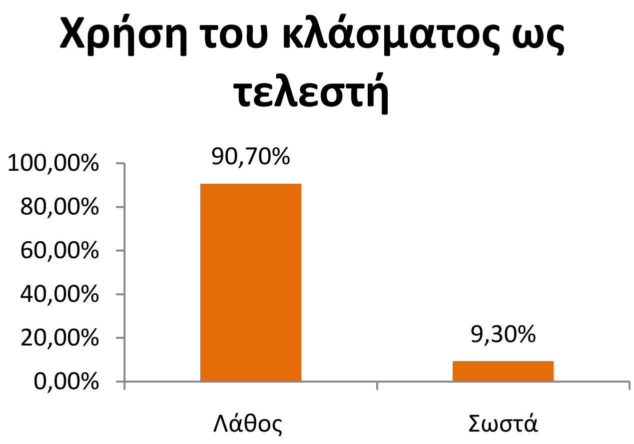


Πίνακας 13. Σωστές απαντήσεις στην αριθμητική επίλυση των φύλλων εργασίας

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που ήταν ικανοί να λύσουν αριθμητικά ένα πρόβλημα ήταν λίγοι. Το 3ο πρόβλημα μόνο έλυσαν αρκετοί μαθητές. Ήταν ένα πρόβλημα, όμως, εξαιρετικά εύκολο και ήταν αυτό που κρίθηκε σκόπιμο να δοθεί στους μαθητές ενώ δεν είχε σχεδιαστεί αρχικά, με σκοπό να ξεπεραστεί γρήγορα και εύκολα η αριθμητική επίλυση του ώστε τα παιδιά να προχωρήσουν στην αλγεβρική. Πρέπει να τονιστεί ξανά ότι το 1ο πρόβλημα, που το έλυσαν όλοι οι μαθητές μόνοι τους με αναγωγή στη μονάδα, ελάχιστοι κατάφεραν να το λύσουν χρησιμοποιώντας το κλάσμα ως τελεστή, έτσι όπως τους οδηγούσαν οι ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

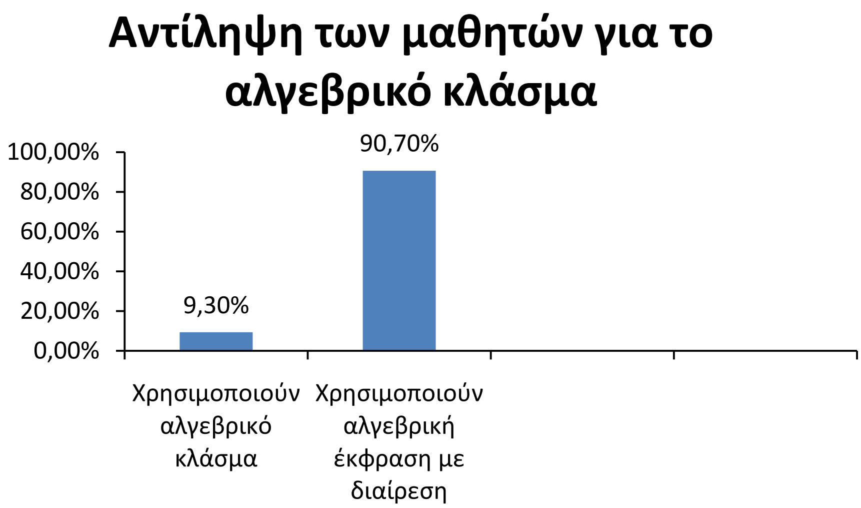
Στην αλγεβρική επίλυση αντιμετώπισαν περισσότερες δυσκολίες στο σχηματισμό της εξίσωσης. Οι δυσκολίες αυτές σχετίζονται με την αναπαράσταση και είναι οι εξής:

α) Τα παιδιά δυσκολεύονται να σχηματίσουν αλγεβρική έκφραση όπου χρησιμοποιείται το κλάσμα ως τελεστής.



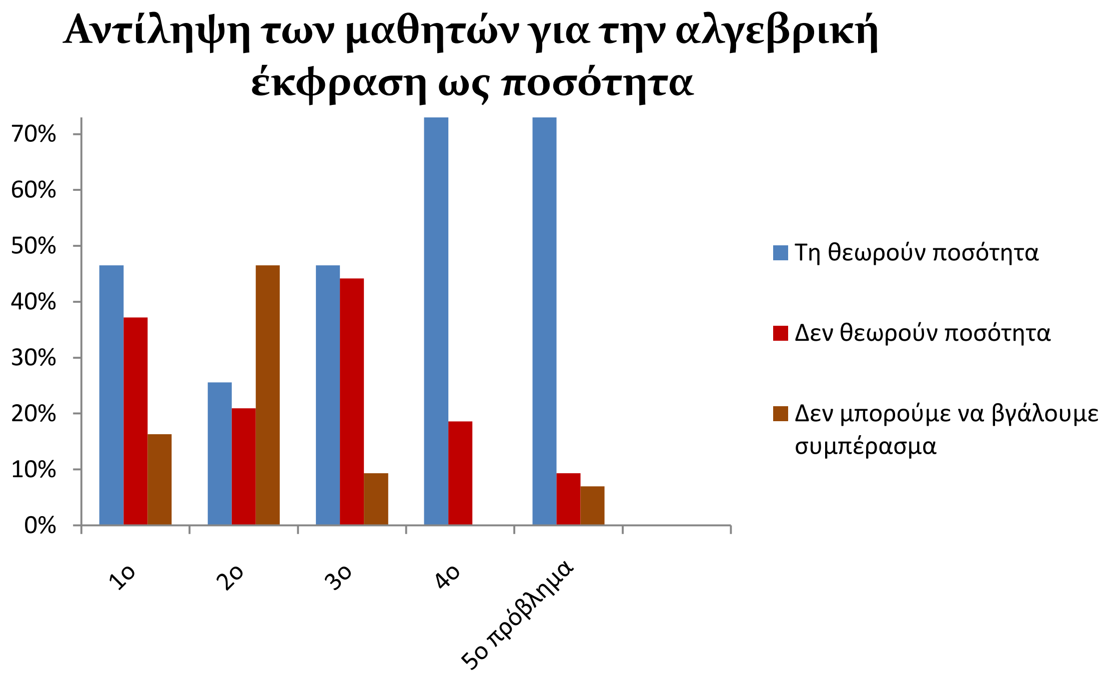
Πίνακας 13. Χρήση του κλάσματος ως τελεστής

β) Δεν χρησιμοποιούν αλγεβρικό κλάσμα για να δηλώσουν μια διαίρεση.



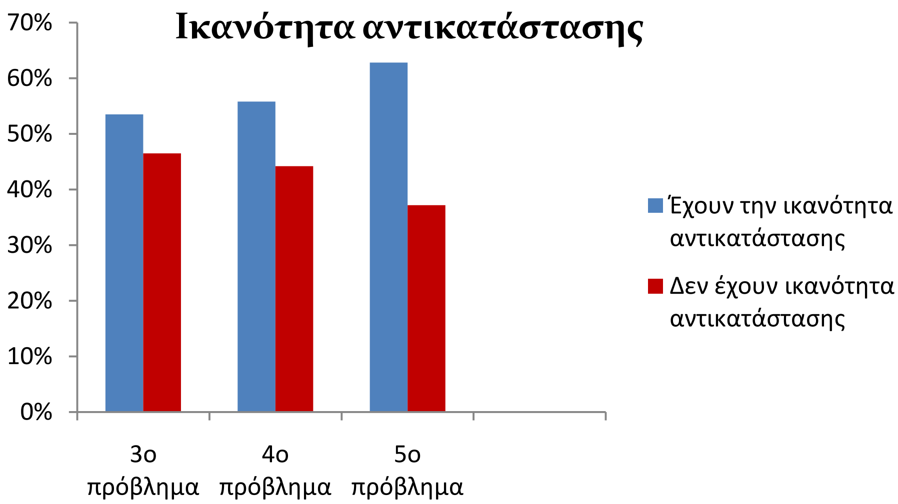
Πίνακας 14. Αντίληψη των μαθητών για το αλγεβρικό κλάσμα

γ) Αντιλαμβάνονται τις αλγεβρικές παραστάσεις ως ενέργειες αλλά όχι ως ποσότητες.



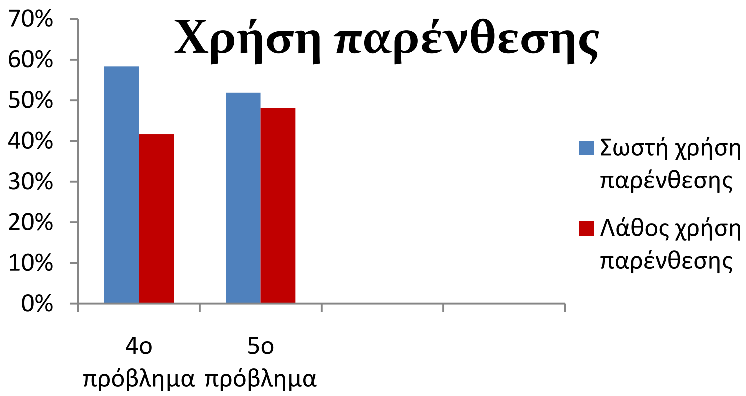
Πίνακας 15. Αντίληψη των μαθητών για την αλγεβρική έκφραση ως ποσότητα

δ) Τους δυσκολεύει η έννοια της αντικατάστασης ενός αγνώστου από μία ισοδύναμη αλγεβρική έκφραση.



Πίνακας 16. Ικανότητα αντικατάστασης

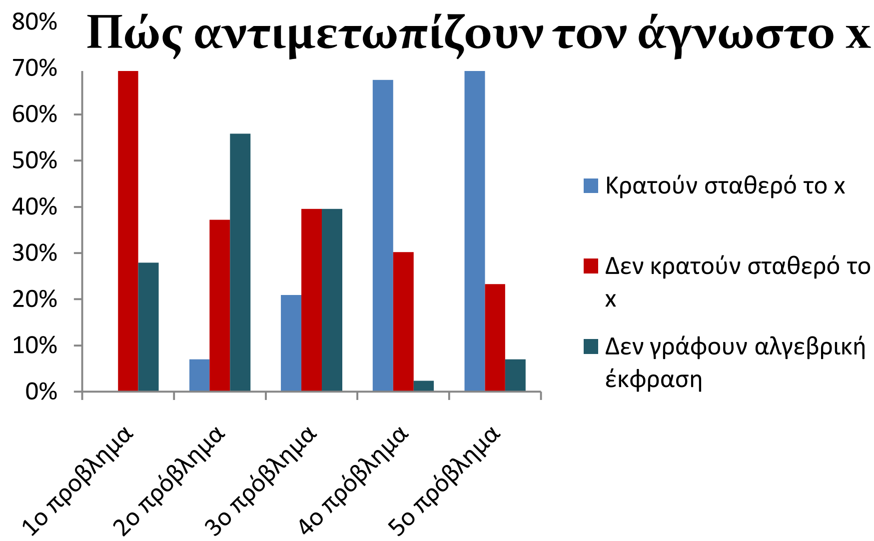
ε) Αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη χρήση της παρένθεσης.



Πίνακας 17. Χρήση παρένθεσης

Στην επίλυση της εξίσωσης οι δυσκολίες εστιάστηκαν:

α) Στην αντίληψη για τη σταθερή αξία του άγνωστου x, κατά την επίλυση της εξίσωσης



Πίνακας 18.Πώς αντιμετωπίζουν τον άγνωστο x

β) Σε αριθμητικές ικανότητες των μαθητών, δηλαδή στην ικανότητά τους να επιλύουν αριθμητικά ένα πρόβλημα. Δηλαδή μαθητές που υστερούσαν σε αριθμητικούς χειρισμούς δυσκολεύτηκαν και να σχηματίσουν εξίσωση και να επιλύσουν αυτή την εξίσωση.

Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω παρατηρήθηκε μια μεταβολή στον τρόπο σκέψης των μαθητών προς την άλγεβρα. Στα φύλλα εργασίας παρατηρήθηκε έντονα το γεγονός ότι οι μαθητές που είχαν καταστρώσει την εξίσωση και ήταν ικανοί στους αριθμητικούς χειρισμούς έλυσαν με ευκολία την εξίσωση, είτε αριθμητικά (χωρίς να χρησιμοποιούν δηλαδή x) είτε αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας αλγεβρικές εκφράσεις), ακόμα κι αν δεν χρησιμοποιούσαν παρένθεση ή δεν κρατούσαν σταθερό το x. Δηλαδή τα κατάφεραν πολύ καλύτερα στην επίλυση της εξίσωσης όταν μπόρεσαν να ερμηνεύσουν αριθμητικά στα πλαίσια του προβλήματος τους ενδιάμεσους μετασχηματισμούς.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν από την άλγεβρα την εξίσωση, η οποία τους πρόσφερε μια πλήρη κατανόηση των σχέσεων των ποσοτήτων του προβλήματος, και από την αριθμητική τον τρόπο σκέψης για να λύσουν αυτή την εξίσωση. Δηλαδή τα παιδιά δεν χρειάστηκαν κανόνες μετασχηματισμού για να λύσουν την εξίσωση. Χρησιμοποίησαν την ερμηνεία των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων από την αριθμητική επίλυση και έλυσαν την εξίσωση. Σε μερικές μάλιστα περιπτώσεις, παρότι είχαν κάνει λάθη αναπαράστασης (π.χ. δεν έβαλαν σωστά τις παρενθέσεις) χρησιμοποίησαν σωστούς μετασχηματισμούς για να λύσουν την εξίσωση. Αυτό δεν είναι δυνατό να συμβεί όταν η εξίσωση λύνεται με κανόνες μετασχηματισμού (αν γίνει κάποιο λάθος σε παρένθεση το αποτέλεσμα δεν βγαίνει σωστό). Βέβαια όλοι οι μαθητές που αντιμετώπισαν μ’ αυτό τον τρόπο την αλγεβρική επίλυση είχαν προηγουμένως λύσει αριθμητικά το πρόβλημα και είχαν κατανοήσει την αριθμητική του επίλυση. Ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης, με την εξίσωση που παρέχει, βοηθάει το μαθητή να συσχετίσει όλες τις ποσότητες του προβλήματος και να λύσει το πρόβλημα.

3.2 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στην προσπάθειά μας να αξιολογήσουμε τη διδακτική παρέμβασή μας θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από τη μελέτη των φύλλων εργασίας που αναλύθηκαν στην προηγούμενη ενότητα αλλά και τα τεστ: το διαγνωστικό τεστ, που δόθηκε στα παιδιά και περιείχε τα τέσσερα από τα πέντε προβλήματα της διδασκαλίας, και το τεστ αποτίμησης που περιείχε μια παραλλαγή των ίδιων προβλημάτων και δόθηκε στους μαθητές ένα μήνα μετά το τέλος της παρέμβασής μας. Θέλουμε να ερευνήσουμε αν τα παιδιά, μετά την εισαγωγή τους στην άλγεβρα και την εκμάθηση της αλγεβρικής επίλυσης ενός προβλήματος μέσα από τη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση, χρησιμοποιούν την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης στα προβλήματα και στην περίπτωση που τη χρησιμοποιούν, αν τη χρησιμοποιούν σωστά. Θέλουμε να δούμε αν οι μαθητές μεταφράζουν τις ποσότητες του προβλήματος σε αλγεβρικές εκφράσεις (απλές ή σύνθετες), αν σχηματίζουν την εξίσωση του προβλήματος και πώς τη λύνουν. Θα εξετάσουμε την άποψή τους για τη σταθερότητα του άγνωστου x, την αντίληψή τους για την έννοια της αλγεβρικής έκφρασης ως ποσότητας, την ικανότητά τους στην αντικατάσταση μιας ποσότητας με μια αλγεβρική έκφραση, τους χειρισμούς τους για την επίλυση της εξίσωσης.

Ήδη, από τη μελέτη των φύλλων εργασίας φαίνεται καθαρά ότι, κατά την εξέλιξη των διδακτικών παρεμβάσεων, ενισχύεται η αντίληψη των παιδιών για την αλγεβρική έκφραση ως ποσότητα (Πίνακας 15) και εγκαταλείπεται η τάση που έχουν τα παιδιά να μην θεωρούν ως ποσότητα μια αλγεβρική έκφραση αλλά να την προσδιορίζουν με έναν αριθμό. Επίσης παρατηρούμε (στον πίνακα 16) ότι η ικανότητα των μαθητών να αντικαθιστούν έναν άγνωστο με μια αλγεβρική έκφραση βελτιώνεται από το 3^{ο} φύλλο εργασίας προς το 5^{ο} φύλλο εργασίας. Αντίθετα στη χρήση της παρένθεσης δεν βλέπουμε να υπάρχει βελτίωση ανάμεσα στο 4^{ο} και στο 5^{ο} πρόβλημα, πράγμα που οφείλεται στην πολυπλοκότητα του 5^{ου} προβλήματος που απαιτεί και παρένθεση και αγκύλη (Πίνακας 17). Και τέλος η τάση, που παρουσίασαν αρχικά τα παιδιά, να μην κρατούν σταθερό το x κατά τη διάρκεια της αλγεβρικής επίλυσης και να αναπαριστούν με x οποιονδήποτε άγνωστο, εγκαταλείφτηκε σταδιακά (Πίνακας 18).

Ας δούμε τα αποτελέσματα από το διαγνωστικό τεστ. Από τα 4 προβλήματα μόνο το πρώτο έλυσαν με ευκολία οι περισσότεροι μαθητές και μάλιστα χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα. Συγκεκριμένα τα 39 παιδιά έλυσαν το πρόβλημα και 4 έκαναν λάθος πράξεις.

Στο δεύτερο πρόβλημα δυσκολεύτηκαν περισσότερο απ’ όλα. Δυο μαθητές προσπάθησαν να βρουν το κέρδος από την πεντάδα και 6 είπαν ότι τα αυγά είναι 12 πεντάδες δηλ. 60. Κάποιοι έκαναν τυχαία πράξεις με τους αριθμούς του προβλήματος 5,7,12. Ένας μόνο σκέφτηκε να βρει το κέρδος από το ένα αυγό, αλλά με δεκαδικό αριθμό.

Τα τρίτο πρόβλημα του διαγνωστικού τεστ δόθηκε στο τέταρτο φύλλο εργασίας. Οι μαθητές, όταν προσπάθησαν να λύσουν το τρίτο πρόβλημα μόνοι τους, είπαν ότι το πρόβλημα δεν λύνεται και μόνο μετά από παρότρυνση κάποιοι προσπάθησαν να δοκιμάσουν διάφορες τιμές για να βρουν τους σωστούς αριθμούς αυτοκινήτων και μοτοσικλετών. Από τους 43 μαθητές οι 13 βρήκαν με δοκιμή τον αριθμό των αυτοκινήτων και των μοτοσικλετών, οι 3 προσπάθησαν να το λύσουν με δοκιμές και δεν τα κατάφεραν, οι 6 προσπάθησαν να το λύσουν με άλλους τρόπους (αριθμητικούς) και δεν τα κατάφεραν και οι υπόλοιποι 21 δεν έκαναν καμιά προσπάθεια. Το σημαντικό είναι ότι ακόμα κι αυτοί που βρήκαν με δοκιμή τη λύση δεν θεωρούν ότι η δοκιμή είναι τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος.

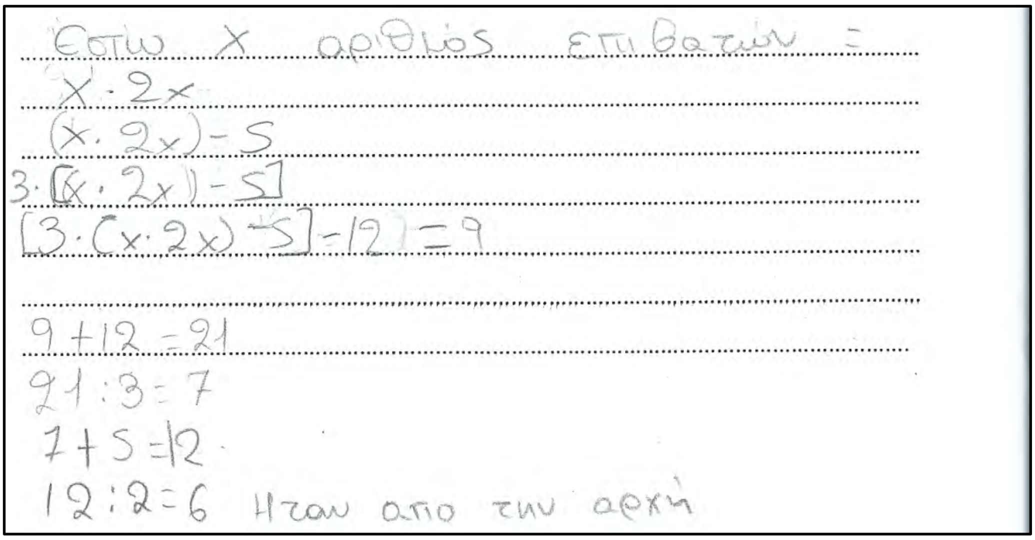
Από τα 43 παιδιά, έλυσαν μόνα τους το τέταρτο πρόβλημα τα 2, χρησιμοποιώντας ενέργειες προς τα πίσω, ξεκινώντας δηλαδή από τα τελευταία δεδομένα του προβλήματος και κάνοντας αντίθετες ενέργειες μέχρι να φτάσουν στο ζητούμενο. Τα υπόλοιπα παιδιά ή έκαναν τυχαίες πράξεις ή ξεκίνησαν από την αρχή χρησιμοποιώντας έναν τυχαίο αριθμό ενεργώντας προς τα εμπρός, δηλαδή εκτελώντας τις ενέργειες έτσι όπως περιγράφονταν στο πρόβλημα.

Ας δούμε πώς ανταποκρίθηκαν οι μαθητές στο τεστ αποτίμησης. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι όλοι οι μαθητές προσπάθησαν να λύσουν με αριθμητικό τρόπο όλα τα προβλήματα εκτός από το δεύτερο. Αυτό συμφωνεί με τη βιβλιογραφία. Έχει αποδειχτεί ότι οι μαθητές, ακόμα κι αν έχουν διδαχτεί την αλγεβρική μέθοδο επίλυσης ενός προβλήματος θα συνεχίσουν να χρησιμοποιούν αριθμητικές διαδικασίες επίλυσής του(Vargas&Guzmán, 2006). Εξαίρεση ήταν τέσσερις μαθητές που προσπάθησαν να λύσουν με την αλγεβρική μέθοδο και το τέταρτο πρόβλημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτοί οι μαθητές δεν κατάφεραν να λύσουν αριθμητικά το πρόβλημα ούτε με την καθοδήγηση του φύλλου εργασίας που σημαίνει ότι θεώρησαν την αλγεβρική μέθοδο πιο εύκολη. Απ' αυτούς μόνο ένας κατάφερε και να σχηματίσει την εξίσωση και να τη λύσει (με αριθμητικό τρόπο):

Πρόβλημα 4

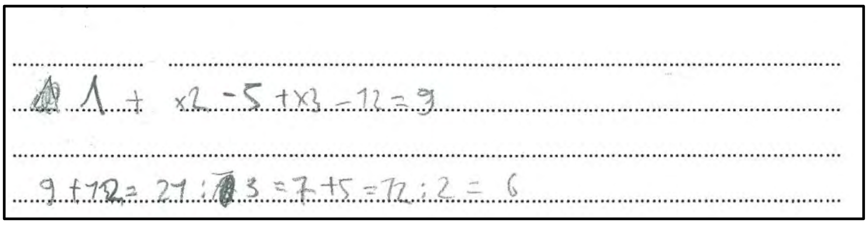
Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με κάποιον αριθμό επιβατών. Στην πρώτη στάση, δεν κατεβαίνει κανείς, αλλά ανεβαίνουν κι άλλοι επιβάτες οπότε ο αρχικός αριθμός των επιβατών διπλασιάζεται. Στη δεύτερη στάση κατεβαίνουν από το λεωφορείο 5 επιβάτες και δεν ανεβαίνει κανείς. Στην τρίτη στάση, δεν κατεβαίνει κανείς, αλλά ανεβαίνουν επιβάτες, οπότε τριπλασιάζεται ο αριθμός των επιβατών που ήταν στο λεωφορείο πριν την τρίτη στάση. Στην τέταρτη στάση κατεβαίνουν 12 και έτσι μένουν στο λεωφορείο μόνον 9 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες ξεκίνησε το λεωφορείο;

Εικόνα 33



Εικόνα 34

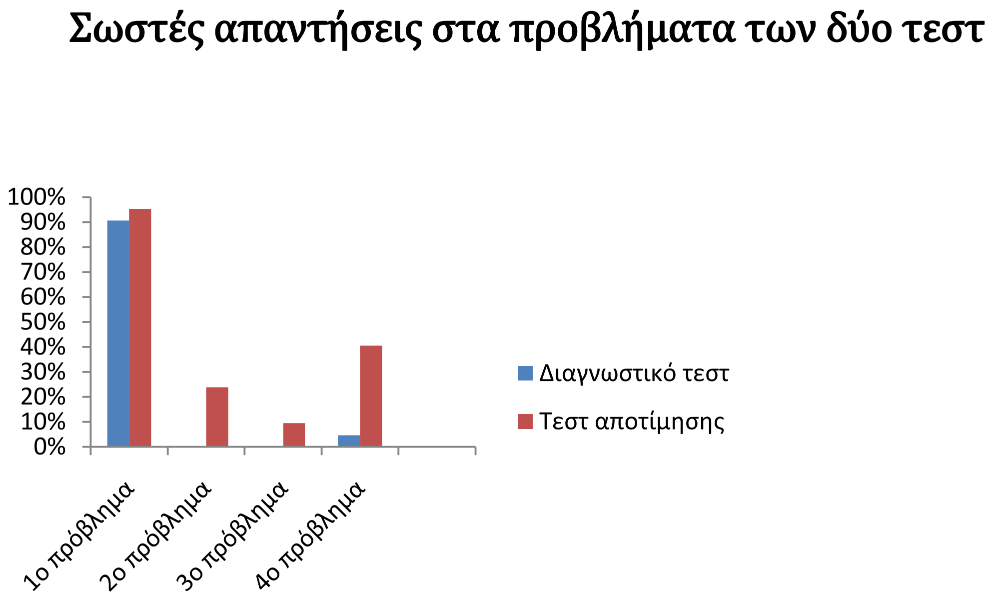
Ένας άλλος μαθητής δεν χρησιμοποίησε εξίσωση, αλλά συσχέτισε τις ποσότητες του προβλήματος με αλγεβρικό τρόπο σκέψης ανάλογο με αυτόν που απαιτείται για το σχηματισμό εξίσωσης.



Εικόνα 35

Ειδικότερα στο τεστ αποτίμησης το πρώτο πρόβλημα το έλυσαν 40 παιδιά και 2 δεν το έλυσαν. Το δεύτερο πρόβλημα το έλυσαν 10 παιδιά με αριθμητική επίλυση και 32 δεν το έλυσαν. Το τρίτο πρόβλημα το έλυσαν σωστά 4 μαθητές και δεν το έλυσαν 38. Το τέταρτο πρόβλημα το έλυσαν σωστά 17 μαθητές και δεν το έλυσαν 26.

Τα αποτελέσματα από το διαγνωστικό τεστ και το τεστ αποτίμησης φαίνονται στο παρακάτω γράφημα. Πρέπει να σημειωθεί ότι το γράφημα απεικονίζει τις σωστές απαντήσεις των μαθητών ανεξάρτητα από το ποια μέθοδο ακολούθησαν, αριθμητική ή αλγεβρική. Εξάλλου, όπως φάνηκε παραπάνω, η αλγεβρική σκέψη βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν τις σχέσεις των ποσοτήτων του προβλήματος και να λύσουν το πρόβλημα στη συνέχεια με αριθμητική :



Πίνακας 19. Σωστές απαντήσεις στα δύο τεστ

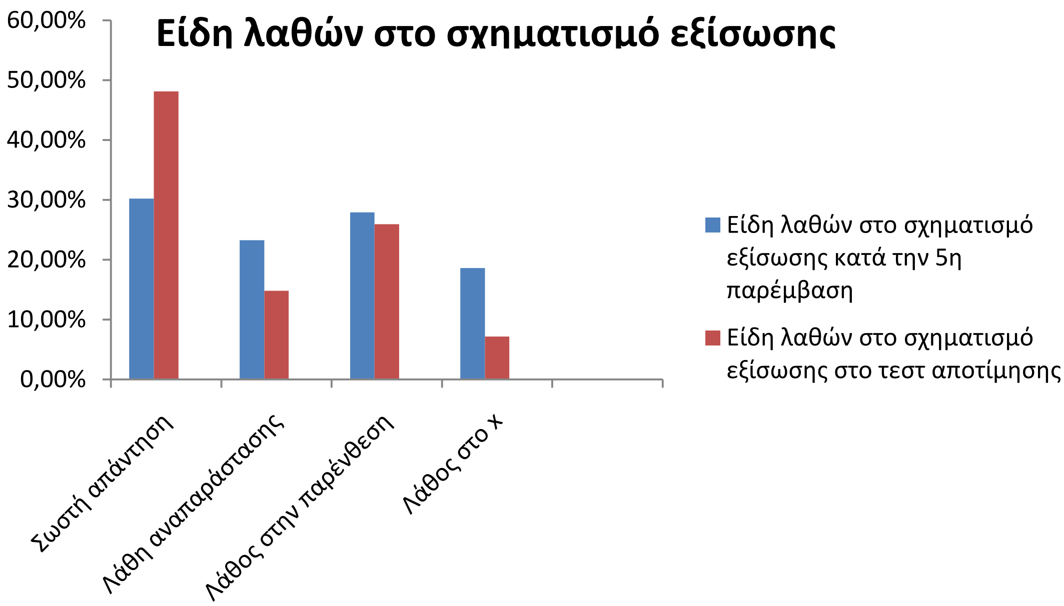
Παρατηρώντας το γράφημα μπορούμε να πούμε ότι υπήρξε βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών.

Επειδή οι μαθητές χρησιμοποίησαν στην πλειοψηφία τους εξίσωση στο τρίτο πρόβλημα του τεστ αποτίμησης, η μελέτη λοιπόν του τρόπου που οι μαθητές σχηματίζουν εξίσωση για να λύσουν ένα πρόβλημα θα εστιαστεί στο τρίτο πρόβλημα του τεστ αποτίμησης:

Ένας αγρότης εκτρέφει κότες και κουνέλια. Αν όλα τα ζώα μαζί είναι 80 και αν όλα μαζί έχουν 290 πόδια, πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια;

Από τα 42 παιδιά τα 5 δεν προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα, τα 11 το έλυσαν με αριθμητικό τρόπο (9 με δοκιμή και 2 με άλλο τρόπο) και τα υπόλοιπα 26 προσπάθησαν να το λύσουν με αλγεβρικό τρόπο. Από τους 26 που εφάρμοσαν την αλγεβρική μέθοδο οι 3 χρησιμοποίησαν λάθος αλγεβρικές εκφράσεις, οι 3 δεν κράτησαν σταθερό το x, οι 20 μπόρεσαν να εκφράσουν αλγεβρικά μια έκφραση με μία πράξη, οι 13 κατάφεραν να σχηματίσουν μια αλγεβρική έκφραση με μια αντικατάσταση (μια παρένθεση) και 9 κατάφεραν να σχηματίσουν την εξίσωση (2 όμως την έλυσαν σωστά).

Για να μπορέσουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το πόσο βοήθησε η διδακτική παρέμβαση τους μαθητές στο να χειρίζονται τις διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις θα συγκρίνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα με αυτά της πέμπτης διδακτικής παρέμβασης:



Πίνακας 20. Είδη λαθών στο σχηματισμό εξίσωσης

Παρατηρούμε μια αύξηση των παιδιών που έλυσαν σωστά τα προβλήματα και μια μικρή μείωση των λαθών. Η μικρή μείωση των λαθών οφείλεται στο ότι οι εσφαλμένες αντιλήψεις των παιδιών για την παρένθεση, τη σταθερότητα του x και την αντικατάσταση είναι τόσο ισχυρές που δεν αρκούν μόνο έξι διδακτικές ώρες ώστε να αλλάξουν.

3.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η αρχική σκέψη και προσδοκία για τη διδακτική παρέμβαση που σχεδιάσαμε ήταν οι μαθητές να χειριστούν τους μετασχηματισμούς κατά την επίλυση μιας εξίσωσης, χωρίς να γνωρίζουν κανόνες μετασχηματισμού, χρησιμοποιώντας την ερμηνεία των ενδιάμεσων αποτελεσμάτων που τους παρέχει η αριθμητική επίλυση. Αυτό επιτεύχθηκε και είδαμε μαθητές να λύνουν εξισώσεις χρησιμοποιώντας αριθμητικούς χειρισμούς χωρίς να τους είναι απαραίτητοι οι χωρίς νόημα αλγεβρικοί κανόνες μετασχηματισμού, που συνήθως τα παιδιά μαθαίνουν μηχανικά. Δηλαδή είδαμε μαθητές να λύνουν εξισώσεις χωρίς να χρησιμοποιούν άλγεβρα ή, για να είμαστε πιο ακριβείς, να κάνουν άλγεβρα χρησιμοποιώντας την αριθμητική. Όμως, από την άλγεβρα, αναδείχθηκε η αξία της εξίσωσης, όταν αυτή χρησιμοποιείται ως εργαλείο συσχέτισης των δεδομένων του προβλήματος. Έτσι οι μαθητές χρησιμοποίησαν τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης για να βρουν τη σχέση που συνδέει τις ποσότητες του προβλήματος και σχημάτισαν εξίσωση ή απλά κατανόησαν τη σχέση των ποσοτήτων νοητικά και στη συνέχεια έλυσαν το πρόβλημα, είτε με εξίσωση είτε αριθμητικά. Η βελτίωση στην επίδοση των παιδιών φάνηκε καθαρά στο τεστ αποτίμησης (Πίνακας 19). Τα αποτελέσματα θα μπορούσε να είναι πιο καλά αν οι επιδόσεις των παιδιών στην αριθμητική ήταν καλύτερες. Η διδασκαλία της αλγεβρικής επίλυσης είχε σχεδιαστεί ώστε να στηριχτεί στο αριθμητικό υπόβαθρο των παιδιών. Όμως η ικανότητα των παιδιών στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων ήταν πολύ μικρή, ακόμα κι όταν δόθηκαν καθοδηγητικές ερωτήσεις (Πίνακας 13).

Παρατηρήθηκαν επίσης πολλά λάθη αναπαράστασης οπότε στην πορεία μελετήσαμε κι αυτά τα λάθη καθώς και την εξέλιξή τους κατά τη διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων. Τα λάθη αναπαράστασης που κάνουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή τους στον αλγεβρικό τρόπο επίλυσης προβλημάτων οφείλονται τόσο στη μη κατανόηση βασικών εννοιών της αριθμητικής όσο και στην αδυναμία τους να επανεξετάσουν και να αναπροσαρμόσουν κάποιες έννοιες της αριθμητικής στην άλγεβρα. Κάθε έννοια της αριθμητικής και κάθε αριθμητική διαδικασία και κανόνας είναι απαραίτητη για τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Στη συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση, παρατηρήθηκαν κάποιες μεμονωμένες περιπτώσεις έλλειψης κατανόησης σε βασικές αριθμητικές έννοιες, όπως στην έννοια των κλασμάτων, στην έννοια της παρένθεσης, στις πράξεις και τις προϋποθέσεις τους, που εμπόδισαν τους μαθητές στον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Πιο έντονη όμως ήταν η μη κατανόηση δύο εννοιών, γεγονός που δεν εκπλήσσει αφού αυτές οι έννοιες έχουν παραμεληθεί κατά τη διδασκαλία της αριθμητικής: η έννοια του κλάσματος ως τελεστής και η έννοια του κλάσματος ως αριθμός.

Το δεύτερο είδος λαθών που παρατηρείται στους μαθητές οφείλεται σε έννοιες που δεν εμφανίζονται καθόλου ή εμφανίζονται με διαφορετικό τρόπο στην αριθμητική και διαφορετικό στην άλγεβρα και γι' αυτές τις έννοιες απαιτείται επανεξέταση από τους μαθητές. Τέτοιες έννοιες είναι η έννοια του αγνώστου x, η έννοια της πράξης – αλγεβρικής έκφρασης, η έννοια της ισότητας, η έννοια της αντικατάστασης και η έννοια της παρένθεσης. Ο άγνωστος στην αριθμητική είναι ο αριθμός που ψάχνουμε κάθε φορά και αλλάζει σε κάθε βήμα επίλυσης του ίδιου του προβλήματος. Στην άλγεβρα όμως ο άγνωστος x παραμένει σταθερός και εκφράζει την ίδια άγνωστη ποσότητα κατά την επίλυση του προβλήματος. Οι μαθητές τείνουν να εφαρμόζουν την αριθμητική αντίληψη κατά την αλγεβρική επίλυση ενός προβλήματος και να θέτουν σαν x διαφορετική άγνωστη ποσότητα κάθε φορά. Αυτή η αντιμετώπιση των μαθητών φάνηκε πολλές φορές στα φύλλα εργασίας και συμφωνεί με τη βιβλιογραφία (Stacey K., 2008). Η πράξη στην αριθμητική δηλώνει ενέργεια που θα εκτελεστεί για να βρεθεί το αποτέλεσμα, που είναι ένα ποσό. Η πράξη στην άλγεβρα (αλγεβρική έκφραση) εκτός από ενέργεια δηλώνει και το αποτέλεσμα της πράξης, δηλαδή μια ποσότητα(Sfard, 1991). Οι μαθητές τείνουν να μην μπορούν να δεχτούν μια αλγεβρική έκφραση, που αποτελείται από ένα σύνολο πράξεων μεταξύ γνωστών και αγνώστων, σαν ποσότητα (KieranC. , 1992). Υπάρχουν απλές αλγεβρικές εκφράσεις, που δίνονται με μία μόνο πράξη και σ' αυτές τα παιδιά δεν συναντούν ιδιαίτερες δυσκολίες, αλλά και πιο σύνθετες αλγεβρικές εκφράσεις με περισσότερες πράξεις. Στην έννοια της αλγεβρικής έκφρασης εμπλέκονται και οι έννοιες της ισότητας και της αντικατάστασης (Filloy, Rojano, &Solares, 2004). Το ίσον στην αριθμητική δίνει εντολή για πράξεις ενώ στην άλγεβρα, που έχουμε γνωστούς και αγνώστους και δεν μπορούμε να κάνουμε πάντα πράξεις, δίνει τη σχέση των ποσοτήτων (γνωστών, αγνώστων, αλγεβρικών εκφράσεων) (KieranC. , 1981). Η αντικατάσταση στην αριθμητική είναι μια πάρα πολύ απλή διαδικασία: Στη θέση ενός αριθμού βάζουμε έναν άλλον. Στην άλγεβρα όμως είναι πιο σύνθετη διαδικασία αφού στη θέση ενός αγνώστου ίσως χρειαστεί να βάλουμε ολόκληρη αλγεβρική έκφραση, οπότε ίσως χρειαστεί και η παρένθεση. Τα περισσότερα λάθη στις αλγεβρικές εκφράσεις στα φύλλα εργασίας σχετίζονταν με την αντικατάσταση μιας άγνωστης ποσότητας από αλγεβρική έκφραση (Άλλοι μαθητές έβαζαν x στη θέση της οποιασδήποτε άγνωστης ποσότητας και άλλοι δεν έβαζαν παρένθεση). Τελικά, όμως, η διδακτική παρέμβαση ωφέλησε τα παιδιά, ως προς τις αντιλήψεις τους για τις παραπάνω έννοιες, όπως φαίνεται από τη μελέτη των φύλλων εργασίας (πίνακες 15-18) και του τεστ αποτίμησης (πίνακας 20).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M. (2003). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical andConceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* , σσ. 245-274.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. Στο R. Lins, T. Rojano, A. Bell, & R. Sutherland, *Perspectives on School Algebra.*

Balacheff, N. (2000). Symbolic Arithmetic vs. Algebra The Core of a Didactical Dilemma. Στο R. Sutherland, *Perspectives on School Algebra* (σσ. 249-260). Boston.: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 107-114). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 3-14). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., & Lepage, A. (1992). Arithmetic and algebraic thinking in problem-solving. Στο W. G. Graham, *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Τόμ. 1, σσ. 65-72). Durham N. Hampshire: Program Committee.

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. Στο T. Post, *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (σσ. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Harel, G. (1993). Rational number:Towards a semantic analysis-emphasis on the operator construct. Στο T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, *Rational number: An integration of Research.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. Στο R. Lesh, & M. Lindau, *Acquisition of mathematical concepts and processes* (σσ. 91-125). New York: Academic Press.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior* (14), σσ. 41-73.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond Unknowns and Variables - Parameters and Dummy Variables in High School Algebra. Στο R. Lins, T. Rojano, A. Bell, & R. Sutherland, *Perspectives on School Algebra.*

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning Algebra. Στο A. Coxford, & A. Shulte, *The Ideas of Algebra, K–12.* Reston (VA): NCTM.

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. Στο J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova, *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (σσ. 225-232). PME.

Brown, L., & Drouhard, J.-P. (2004). Responses to "The Core of Algebra. *The future of the teaching and learning of algebra 12th ICMI study* (σσ. 35-44). New York: Kluwer Academic Publishers.

Cai, J., & Moyer, J. C. (2007). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades:Some Insights from International Comparative Studies. Στο *NCTM Yearbook.*

Chaiklin, S., & Lesgold, S. (1984). Prealgebra students’ knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions. *the meeting of the American Educational Research Association.* New Orleans: ERIC Document Reproduction.

Charalambous, Y., & Pitta-Pandazi, D. (2007). Drawing on theoretical model to study students' understanting of fractions. *Educational Studies in Mathematics* (64), σσ. 293-316.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descarte: Algebra and its relation to Geometry. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Prespectives for research and teaching* (σσ. 15-38). Netherland: Kluwer Academic Pablishers.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. (1981, April). Translation Difficulties in Learning Mathematics. *American Mathematical Monthly , 88* (4), σσ. 286-290.

Dekker, T., & Dolk, M. (2011). From arithmetic to algebra. Στο P. Drijvers, *Secondary Algebra Education* (σσ. 69-88). Rotterdam / Boston/ Taipei: Sense Publishers.

Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk, M. (2010). Algebra and technology. Στο P. Drijvers, *Secondary Algebra Education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. Στο C. Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale: NJ:Lawrence Erlbaum.

English, L., & Halford, G. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes.* Mahwah(NJ): LEA.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics* , σσ. 19-25.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2004). Arithmetical/Algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group For the Psychology of Mathematics Education* (σσ. 391-398). Cinvestav Mexico: 2004.

Goodson-Espy, T. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: Transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics* , σσ. 219-245.

Gutierrez, A., & Boero, P. (2006). *Handbook of Resarch on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Hart, K. (1980). Secondary school children's understanding of mathematics – research monograph (a report of the mathematics component of the concepts in secondary mathematics and science programme). *Chelsea College, University of London.*

Heid, M. K. (1996). Technology- intensive functional approach to the emergence algebraic thinking. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 239-256). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* , σσ. 59-78.

Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., και συν. (2002). Mathematics Curriculum Development for Computerized Environments: A Designer–Researcher–Teacher–LearnerActivity. Στο L. D. English, *Handbook of International Research in Mathematics Education.* Mahwah, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Kieran. (1996). The changing face of school algebra. Στο C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Perez, *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (σσ. 271-290). Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator , 8* (1), σσ. 139 - 151.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* (12), σσ. 317-326.

Kieran, C. (2006). Research on the Teaching and Learning of Algebra. Στο A. Gutierrez, & P. Boero, *The Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (σσ. 11-50). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflection on its main activities. Στο K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study* (σσ. 21-33). Melbourne: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school Algebra. Στο Grouws, *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (σσ. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1982). The learning of algebra: A teaching experiment. *The meeting of the American Educational Research Association.* New York.

Kieran, C., Boileau, A., & Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology - supported, fuctional approach. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 257-294). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kieren, T. (1980). The rational numberconstruct-Its elements and mechanics. Στο T. Kieren, *Recent research on number learning.* Colubus, Ohio: OH:ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kirshner, D. (2001). The Structural Algebra Option Revisited. Στο R. Lins, T. Rojano, A. Bell, & R. Sutherland, *Perspectives on School Algebra.*

Laborde, C. (1990). Language and mathematics. Στο P. Nesher, & J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge Univercity Press.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. Στο A. Cuoco, *The roles of represation in school mathematics* (σσ. 146-165). Reston: VANCTM.

Lee, L., & Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalisation and justification.* Montréal, QC: Concordia University, Mathematics Department.

Linchevski, L., & Vinner, S. (1990). Embedded figures and the structures of algebraic expressions. Στο G. Booker, P. Cobb, & d. Mendicuti, *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Oaxtepec, Mexico: PME Program Committee.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. Στο K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (σσ. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.

Malisani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics , 71*, σσ. 19-41.

Marshall, S. (1993). Assesment of Rational Number Understanting: A Schema-Based Approach. Στο T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, *Rational number: An integration of Research.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinez, M. (2007). Research perspectives on the teaching and learning of algebra. *TUFTS UNIVERSITY* .

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Nemirovsky, R. (1996). Functional approach to algebra - Two issues that emerge. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 295-316). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* London: Routledge Kegan & Paul.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* London: Routledge.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction consept. *Educational Studies in Mathematics* (30), σσ. 5-38.

Polya, G. (2001). *Η Μαθηματική Ανακάλυψη.* Αθήνα: Κάτοπτρο.

Radford, L. (1996). The role of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 39-54). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. (1996). Development algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra-prespectives for research and teaching.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rojano, T. (2004). Local Theoritical models in Algebra Learning: a Meeting point in Mathematic Education. Στο D. MacDougal, *Psychology of Mathematics Education* (σσ. 37-56). Toronto.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *Mathematics Teacher* (81), σσ. 420-442.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as diferent sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* (22), σσ. 1-36.

Stacey, K. (2008, 8 12). *The transition from arithmetic thinking to algebraic thinking.* Ανάκτηση από Melbourne Graduate School of Education: http://staff.edfac.unimelb.edu.au/

Stacey, K., & Chick, H. (2000). Discussion document for the twelfth ICMI study: The future of the teaching and learnihg of algebra. *Educational studies in mathematics* (42), σσ. 215-224.

Stacey, K., & Chick, H. (2004). Solving the Problem with Algebra. Στο K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study 2004* (σσ. 1-20). Melbourne: Kluwer Academic Publishers.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and aproaches to algebra. Στο R. Lins, T. Rojano, A. Bell, & R. Sutherland, *Perspectives on School Algebra.*

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study.* Melburne: The 12 th ICMI Study.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics* (3), σσ. 346-356.

Vargas, V., & Guzmán, J. (2006). Ariyhmetical procedures in the solution of a problem involving velocity. *Proceedings 30th Conference of internacional Group for the Psychology of Mathematics Education.* Prague: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N.

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 317-326). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wheeler, D. (1996). Rough or smooth? The transition from arithmetic to algebra in problem solving. Στο N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Aproaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (σσ. 147-150). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Winicki, G. The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers. Στο V. Katz, *Using History to Teach Mathematics.*

Δραμαλίδης, Α., & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 13-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων* , σσ. 100-114.

Κούρκουλος, Μ. (1995). Ένα δίκτυο διδασκαλίας για την κατάστρωση εξισώσεωνπρωτοβάθμιων προβλημάτων που αναφέρονται σε φυσικές ποσότητες. *12ο πανελλήνιο συνέδριο μαθηματικής παιδείας* .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΙΑΓΝΩΣΤΙΚΟ ΤΕΣΤ

ΟΝΟΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Να λύσετε τα προβλήματα:

<u>Πρόβλημα 1</u>

Μια γιαγιά έδωσε σε καθένα από τα 7 εγγόνια της το ίδιο ποσό χρημάτων . Αν τα 4 παιδιά μαζί πήραν 240 ευρώ, πόσα ευρώ ήταν όλο το ποσό που έδωσε η γιαγιά;

………

………

………

………

………

<u>Πρόβλημα 2</u>

Το σούπερ μάρκετ της γειτονιάς αγόρασε αυγά από έναν ορνιθοτρόφο προς ένα ευρώ την επτάδα και τα μεταπούλησε πουλώντας τα ένα ευρώ την πεντάδα. Το κέρδος του ήταν 12 ευρώ. Πόσα αυγά είχε αγοράσει;

………

………

………

………

………

<u>Πρόβλημα 3</u>

Σε ένα πάρκιγκ έχουν παρκάρει 50 οχήματα (αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες). Αν το σύνολο των τροχών των οχημάτων είναι 140, πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες;

………

………

………

………

………

………

<u>Πρόβλημα 4</u>

Ένας επενδυτής βάζει τα χρήματά του στο χρηματιστήριο. Την πρώτη εβδομάδα διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά μετά χάνει 30 χιλ. ευρώ από αυτά. Τη δεύτερη τριπλασιάζει τα χρήματά που είχε στο τέλος της πρώτης εβδομάδας, αλλά μετά χάνει 54 χιλ. ευρώ από αυτά. Την τρίτη τετραπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά μετά χάνει 72 χιλ. ευρώ από αυτά. Τελικά μένει με 48 χιλ. ευρώ. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

………

………

………

………

………

………

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1</u>

Μια γιαγιά φίλεψε τα 7 εγγόνια της δίνοντάς τους χαρτζιλίκι ίδιου ποσού. Αν τα 4 παιδιά μαζί πήραν 240 ευρώ, πόσα ευρώ ήταν όλο το ποσό που έδωσε η γιαγιά στα 7 παιδιά;

Λύσε το πρόβλημα:

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. Γράψε την κλασματική μονάδα που εκφράζει **ποιο μέρος των 240 ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά**.

2. Πόσα ευρώ πήρε καθένα από τα 4 παιδιά;

3. Σε πόσες κλασματικές μονάδες αντιστοιχεί **το ποσό που πήραν και τα 7 παιδιά μαζί**;

4. Πόσα ευρώ επομένως πήραν και τα 7 παιδιά μαζί;

5. Μπορείς να βρεις το ίδιο αποτέλεσμα κάνοντας μόνο έναν πολλαπλασιασμό; (Χρησιμοποίησε το κλάσμα της ερώτησης 3 που εκφράζει το ποσό που πήραν τα 7 παιδιά μαζί)

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Αν συμβολίσουμε με x τα χρήματα που η γιαγιά έδωσε και στα 7 εγγόνια, γράψε μια κλασματική αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει το ποσό που πήρε καθένα από τα 7 παιδιά.

2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το ίδιο x) που να δίνει το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά;

3. Χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην προηγούμενη ερώτηση, μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: το ποσό που πήραν τα 4 παιδιά είναι 240.

4. Λύσε την εξίσωση.

Αναστοχασμός

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου………………………………………….. ……………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2</u>

Το σούπερ μάρκετ της γειτονιάς αγόρασε αυγά από έναν ορνιθοτρόφο προς 1 ευρώ την επτάδα και τα πούλησε όλα σε πελάτες προς 1 ευρώ την πεντάδα. Το καθαρό κέρδος του σούπερ μάρκετ ήταν 12 ευρώ. Πόσα αυγά είχε αγοράσει;

Λύσε το πρόβλημα:

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

<u>Διευκρίνιση:</u> Όταν η διαίρεση δεν βγαίνει ακριβώς ή δεν μπορεί να γίνει (όταν είναι αλγεβρική έκφραση), γράφουμε το πηλίκο με τη μορφή κλάσματος

1. Βρες πόσο αγόρασε το ένα αυγό;

2. Βρες πόσο πούλησε το ένα αυγό;

3. Βρες πόσο είναι το καθαρό κέρδος από το κάθε αυγό;

4. Χρησιμοποιώντας το συνολικό καθαρό κέρδος και το καθαρό κέρδος από το κάθε αυγό, βρες πόσα ήταν τα αυγά;

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ήταν x τα αυγά. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει πόσες επτάδες ήταν τα x αυγά.

2. Επομένως, πόσα χρήματα έδωσε το σούπερ μάρκετ για να αγοράσει τα x αυγά;

3. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση (χρησιμοποιώντας το x) που να δίνει πόσες πεντάδες ήταν τα x αυγά.

4. Επομένως, πόσα χρήματα πήρε το σούπερ μάρκετ όταν πούλησε τα x αυγά;

5. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει **το καθαρό κέρδος από τα x αυγά**.

6. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **το καθαρό κέρδος από τα x αυγά** ήταν 12 ευρώ.

7. Λύσε την εξίσωση.

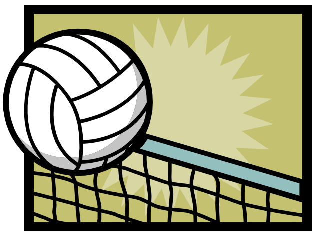
<u>Αναστοχασμός</u>

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου …………………………………………………………………………
………
………
………
………

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3</u>

Οι 105 μαθητές της Α’ Γυμνασίου ασχολούνται με δύο αθλήματα: ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν με το μπάσκετ ασχολούνται 17 μαθητές παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με κάθε άθλημα;

Λύσε το πρόβλημα:



………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. Αν δεν υπήρχαν οι 17 επιπλέον μαθητές στο ένα άθλημα, τότε οι μαθητές του ποδοσφαίρου και του μπάσκετ θα ήταν ισάριθμοι. Βρες πόσοι θα ήταν σ’ αυτή την περίπτωση όλοι οι μαθητές;

2. Βρες πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο;

3. Βρες πόσοι είναι οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ;

<u>Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος</u>

1. Έστω ότι x είναι ο αριθμός των μαθητών που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο. Χρησιμοποίησε το δεδομένο ότι **οι μαθητές που ασχολούνται με το μπάσκετ είναι 17 παραπάνω από αυτούς που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο** και γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που παίζουν μπάσκετ.

2. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει το συνολικό αριθμό των μαθητών (και αυτοί που παίζουν ποδόσφαιρο και αυτοί που παίζουν μπάσκετ).

3. Μετάφρασε σε μια εξίσωση τν έκφραση: **ο συνολικός αριθμός των μαθητών είναι 105.**

4. Λύσε την εξίσωση.

<u>**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4**</u>

<u>**Πρόβλημα 4**</u>

Σε ένα πάρκιγκ έχουν παρκάρει 50 οχήματα (αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες). Αν το σύνολο των τροχών των οχημάτων είναι 140, πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες;

Λύσε το πρόβλημα:

……
……
……
……
……
……..

<u>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος</u>

1. Αν τα 50 οχήματα ήταν μοτοσικλέτες, πόσες θα ήταν οι ρόδες τους;

2. Όμως οι ρόδες των οχημάτων που υπάρχουν στο πάρκιγκ είναι 140. Βρες πόσες είναι οι επιπλέον ρόδες.

3. Που οφείλεται αυτό; ……………………………………………………………………………

4. Απ' τις επιπλέον ρόδες, ποια οχήματα μπορείς να υπολογίσεις; Υπολόγισέ τα.

5. Πόσες είναι οι μοτοσικλέτες και πόσα τα αυτοκίνητα;

Αυτοκίνητα ☐ μοτοσικλέτες ☐

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι είναι x τα αυτοκίνητα. Να εκφράσεις με αλγεβρικό τρόπο (χρησιμοποιώντας το x) τον αριθμό των μοτοσικλετών.

2. Πόσες ρόδες έχουν τα x αυτοκίνητα;

3. Γράψε μια αλγεβρική έκφραση που να δίνει τον αριθμό των τροχών που έχουν οι μοτοσικλέτες, αν αυτές είναι τόσες όσες λέει η έκφραση που έγραψες στην ερώτηση 1.

4. Δώσε μια αλγεβρική έκφραση, χρησιμοποιώντας το x, που να δίνει **τις συνολικές ρόδες των οχημάτων**.

5. Να εκφράσεις με μια εξίσωση την πρόταση: **Οι συνολικές ρόδες των οχημάτων** είναι140.

6. Λύσε την εξίσωση.

Αναστοχασμός

Σύγκρινε τους δύο προηγούμενους τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Γράψε τις παρατηρήσεις σου ……………………………………………………………………

………

………

………

………

<u>ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5</u>

Ένας επενδυτής βάζει τα χρήματά του στο χρηματιστήριο. Την πρώτη εβδομάδα, αρχικά, διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά μετά χάνει 30 χιλ. ευρώ. Τη δεύτερη εβδομάδα, αρχικά τριπλασιάζει τα χρήματα που του έμειναν, αλλά μετά χάνει 54 χιλ. ευρώ από αυτά. Την τρίτη εβδομάδα, τετραπλασιάζει τα χρήματά της προηγούμενης εβδομάδας και μετά χάνει 72 χιλ. ευρώ από αυτά. Τελικά μένει με 48 χιλ. ευρώ. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

Λύσε το πρόβλημα:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Αριθμητική επίλυση του προβλήματος

1. Αν την τρίτη εβδομάδα ο επενδυτής δεν είχε χάσει τίποτα στο χρηματιστήριο, πόσα χρήματα θα είχε;

2. Τι σχέση έχει το ποσό της προηγούμενης απάντησης με το ποσό των χρημάτων στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας;

   ……

3. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη απάντηση βρες πόσα χρήματα είχε στο τέλος της δεύτερης εβδομάδας;

4. Αν τη δεύτερη εβδομάδα δεν είχε χάσει καθόλου χρήματα, πόσα χρήματα θα είχε;

5. Τι σχέση έχει το ποσό της προηγούμενης απάντησης με το ποσό των χρημάτων στο τέλος της πρώτης εβδομάδας;

   ………

6. Στο τέλος της πρώτης εβδομάδας πόσα χρήματα είχε;

7. Αν δεν είχε χάσει τις 30 χιλ. ευρώ, πόσα χρήματα θα είχε την πρώτη εβδομάδα;

8. Με πόσα χρήματα μπήκε στο χρηματιστήριο;

Αλγεβρική επίλυση του προβλήματος

1. Έστω ότι ο επενδυτής ξεκίνησε με x ποσό στο χρηματιστήριο. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας το x) την πρόταση: Την πρώτη εβδομάδα **διπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 30 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της 1ης εβδομάδας:

2. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 1) την πρόταση: Τη δεύτερη εβδομάδα **τριπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 54 χιλ. ευρώ.**

   Στο τέλος της 2ης εβδομάδας:

3. Να εκφράσεις αλγεβρικά (χρησιμοποιώντας την έκφραση που βρήκες στην ερώτηση 2) την πρόταση: Την τρίτη εβδομάδα **τετραπλασιάζει τα χρήματά του, αλλά χάνει 72 χιλ. ευρώ.**

   a. Στο τέλος της 3ης εβδομάδας:

4. Μετάφρασε σε μια εξίσωση την έκφραση: **Στο τέλος της τρίτης εβδομάδας έχει 48 χιλ. ευρώ.**

5. Λύσε την εξίσωση.

ΟΝΟΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΤΕΣΤ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ

Να λύσετε τα προβλήματα:

<u>Πρόβλημα 1</u>

Τα 18 παιδιά μιας τάξης μοιράστηκαν ένα κουτί σοκολατάκια. Όλα έφαγαν τον ίδιο αριθμό και δεν περίσσεψε κανένα. Αν τα 12 από τα παιδιά έφαγαν όλα μαζί 36 σοκολατάκια, πόσα σοκολατάκια είχε το κουτί;

……

……

……

……

……

<u>Πρόβλημα 2</u>

Ένας ανθοπώλης αγόρασε τριαντάφυλλα από ένα γεωπόνο προς ένα ευρώ την πεντάδα και ταπούλησε όλα σε πελάτες προς ένα ευρώ τα τρία. Το κέρδος του ήταν 20 ευρώ. Πόσα ήταν τα τριαντάφυλλα;

……

……

……

……

……

……

……

<u>Πρόβλημα 3</u>

Ένας αγρότης εκτρέφει κότες και κουνέλια. Αν όλα τα ζώα μαζί είναι 80 και αν όλα μαζί έχουν 290 πόδια, πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια;

………

………

………

………

………

………

………

<u>Πρόβλημα 4</u>

Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με κάποιον αριθμό επιβατών. Στην πρώτη στάση, δεν κατεβαίνει κανείς, αλλά ανεβαίνουν κι άλλοι επιβάτες οπότε ο αρχικός αριθμός των επιβατών διπλασιάζεται. Στη δεύτερη στάση κατεβαίνουν από το λεωφορείο 5 επιβάτες και δεν ανεβαίνει κανείς. Στην τρίτη στάση, δεν κατεβαίνει κανείς, αλλά ανεβαίνουν επιβάτες, οπότε τριπλασιάζεται ο αριθμός των επιβατών που ήταν στο λεωφορείο πριν την τρίτη στάση. Στην τέταρτη στάση κατεβαίνουν 12 και έτσι μένουν στο λεωφορείο μόνον 9 επιβάτες. Με πόσους επιβάτες ξεκίνησε το λεωφορείο;

………

………

………

………

………

………

………