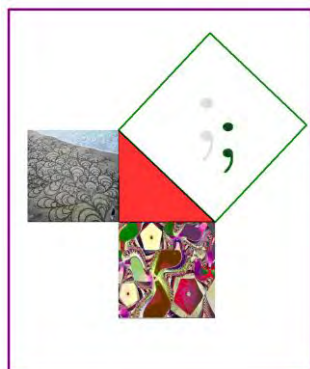


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΥ ΑΝΘΡΩΠΟΥ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«Σύγχρονα περιβάλλοντα μάθησης και παραγωγή  
διδακτικού υλικού στις θετικές επιστήμες»

ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΚΟΚΚΟΥΣ ΤΗΣ ΑΜΜΟΥ  
ΣΤΑ ΡΙΧΕΛ ΤΗΣ ΟΘΟΝΗΣ:

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ  
ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ EYCLIDRAW



ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΒΟΛΟΣ 2012

Επιβλέποντες καθηγητές:  
Χατζηκυριάκου Κωνσταντίνος (πρώτος επιβλέπων)  
Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

ΤΑ ΜΕΛΗ ΤΗΣ ΤΡΙΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ:  
ΜΑΡΚΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ  
ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ  
ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Όταν ήμουν παιδί μισούσα τη Γεωμετρία. Μου φαινόταν δαιδαλώδης και βασανιστική. Σαν ένας εφιάλτης, όπου έχεις χαθεί σ' ένα λαβύρινθο και ψάχνεις να βρεις τον δρόμο για την έξοδο, κι όλο χάνεσαι... Στο τέλος βέβαια τα κατάφερα, αλλά πώς να το κάνουμε; Δεν τη χώνευα.

Μετά πήγα στο Πανεπιστήμιο και την... ξέχασα. Εξάλλου μόνο στις δύο πρώτες τάξεις του λυκείου συναντάς την ευκλείδεια γεωμετρία. Ποτέ ξανά στη ζωή σου, εκτός κι εάν... γίνεις καθηγητής ή καθηγήτρια μαθηματικών. Όπως εγώ. Και τότε ο εφιάλτης επιστρέφει και μάλιστα χειρότερος, γιατί αυτή τη φορά θα πρέπει να τη διδάξεις!

Κάθισα λοιπόν και τη διάβασα μόνη μου, από την αρχή. Και τι περίεργο; Δεν μου φαινόταν τόσο τρομακτική πια. Αντίθετα μου άρεσε κιόλας. Άρχισα να την εκτιμώ κάθε μέρα όλο και περισσότερο. Κι ενώ πάντα ήμουν φανατική οπαδός της άλγεβρας και της ανάλυσης, σήμερα, μετά από 20 χρόνια την υποστηρίζω με πάθος ως το πολυτιμότερο μάθημα για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης σ' ένα παιδί.

Όμως τώρα καταλαβαίνω γιατί ως παιδί τη μισούσα και γιατί πολλοί μαθητές τη μισούν επίσης. Γιατί στη γεωμετρία δεν έχεις που να στηριχθείς. Δεν υπάρχουν αλγόριθμοι ή μεθοδολογίες. Δεν υπάρχει ένας δρόμος. Υπάρχουν πολλοί. Χωρίς χάρτη, παρότι σαν σε χάρτη λόγω των αναπαραστατικής της υπόστασης. Για να βρεις τη σωστή έξοδο, πρέπει να χρησιμοποιήσεις τη λογική σου και τα στοιχεία που έχεις ως δεδομένα. Δεν υπάρχουν «παρόμοια» προβλήματα. Η εμπειρία σου χρησιμεύει μόνο, όχι για να μιμηθείς κάποια παρόμοια λύση, αλλά για να μπορείς να ξεχωρίζεις τα σημαντικά από τα ασήμαντα. Η γεωμετρία έχει πολλούς θησαυρούς και πολλές ομορφιές. Αλλά δεν μπορούν να τους «δουν» όλοι. Δεν υπάρχει «εύκολος» δρόμος για τη γεωμετρία ή «βασιλική οδός» όπως ο ίδιος ο Ευκλείδης είχε πει. Είναι χωματόδρομος και μάλιστα κακοτράχαλος. Ενώ η άλγεβρα είναι σαν τα πατίνια, που άμα μάθεις να τα χειρίζεσαι, μετά μπορείς να τρέχεις στην άσφαλτο και τις πλακοστρωμένες πλατείες. Κι ο πιο άσχετος μαθητής, κάτι μπορεί να «γράψει» στην άλγεβρα,

στην γεωμετρία όμως; Αν δεν έχεις αναπτύξει στοιχειωδώς την ικανότητα για παραγωγικό συμπερασμό, δεν μπορείς ν' αρθρώσεις λέξη.

Τα παιδιά μας έχουν απαξιώσει τη γεωμετρία γιατί δεν γνωρίζουν τους θησαυρούς της. Ούτε κι εμείς που καλούμαστε να τους διδάξουμε, τους γνωρίζουμε. Γιατί κανείς δεν τους έδειξε και σε μας. Πρέπει να τους ανακαλύψουμε μόνοι μας. Η δικιά μου γενιά έχει διδαχθεί λιγότερη γεωμετρία από τις προηγούμενες και οι επόμενες θα έχουν διδαχθεί ακόμα λιγότερη ή χειρότερη. Αφού μόνο στο σχολείο θα την έχουν διδαχθεί κι αυτή από καθηγητές που θα την γνωρίζουν ελάχιστα. Όταν επέλεξα να ασχοληθώ με την ενότητα «Εμβαδά» που την θεωρώ από τα ομορφότερα κι εντυπωσιακότερα κομμάτια της σχολικής γεωμετρίας, γνώριζα τα διάφορα κομμάτια της ενότητας ή τις τεχνικές αντιμετώπισης των εμβαδών αλλά όλα αυτά τα κομμάτια ήταν ασύνδετα, χωρίς να συνθέτουν μία εικόνα. Όταν μίλησα στον κ. Χατζηκυριάκου για το θέμα που με ενδιέφερε ν' ασχοληθώ, ξετύλιξε μπροστά μου το κουβάρι του τετραγωνισμού και όλα «κούμπωσαν». Τα ισοδύναμα τρίγωνα, το πυθαγόρειο θεώρημα, οι μετρικές σχέσεις στα ορθογώνια τρίγωνα, όλα ήταν απλά τα απαραίτητα κομμάτια που συνέθεταν την τελική εικόνα που δεν ήταν άλλη από τον τετραγωνισμό. Τον «τρόπο» της ευκλείδειας γεωμετρίας να «μετράει» ένα εμβαδό. Όλα πια είχαν νόημα. Και η απορία μου ήταν εύλογη. Γιατί δεν μας είχε μιλήσει κανείς ποτέ γι' αυτό;

Η αλήθεια είναι ότι ο κυριότερος λόγος για τον οποίο διδάσκεται ακόμα η γεωμετρία στο σχολείο, είναι γιατί καλλιεργεί τον ορθό λόγο. Η έμφαση όμως σ' αυτή την πειθαρχημένη πλευρά της μπορεί να φαντάζει συναρπαστική σ' ένα «ώριμο» μυαλό, στα μάτια όμως των νεαρών μαθητών φαίνεται ως βαρετός φορμαλισμός και δεν έχει καμία τύχη (Slaughter, 1912). Κίνητρο λοιπόν για τη συγγραφή αυτής της διπλωματικής εργασίας αποτέλεσε η επιθυμία μου να μιλήσω στους μαθητές μου γι' αυτά που σ' εμάς δεν είχε μιλήσει κανείς. Το σκοπό (τι προσπαθούσαν να καταφέρουν;), τον τρόπο (πώς το κατόρθωσαν) και τη φιλοσοφία (ποιες αξίες πρέσβευαν;) της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας, στη συγκεκριμένη ενότητα.

## Ευχαριστώ

τους καθηγητές μου κ. Χατζηκυριάκου και κ. Τριανταφυλλίδη για την υποστήριξή τους και για τα εφόδια που μου έδωσαν αυτά τα δύο χρόνια της διαδρομής μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα. Τον κ. Χατζηκυριάκου για την «κοφτερή» ματιά του, τον κριτικό του λόγο και τις πολύτιμες γνώσεις του στην ιστορία που βοήθησαν σε πολλές περιπτώσεις να τοποθετήσω τα πράγματα στη θέση τους. Τον κ. Τριανταφυλλίδη γιατί μου έμαθε να κολυμπώ στον ωκεανό της διεθνούς βιβλιογραφίας και γιατί, ως παιδαγωγός, με έμαθε όχι μόνο να ενδιαφέρομαι για το πώς λειτουργεί το μυαλό ενός μαθητή αλλά και για το τι μπορεί να κρύβεται στη ψυχή του.

Την οικογένειά μου, τον σύζυγο και τα παιδιά μου, που με στήριξαν και υπέμειναν τις ατέλειωτες ώρες απουσίας μου από τη ζωή τους.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ .....	6
ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ .....	12
1.1 Η Γεωμετρία.....	12
1.2 Η διπλή φύση της γεωμετρίας και οι εφαρμογές της.....	13
1.3 Η παιδαγωγική αξία της γεωμετρίας.....	15
1.4 Πώς μαθαίνεται η Γεωμετρία; .....	17
1.5 Τα στάδια αντίληψης του χώρου κατά τον Piaget.....	18
1.6 Θεωρία Van Hiele.....	19
1.6.1 Τα επίπεδα Van Hiele .....	19
1.6.2 Οι ιδιότητες των επιπέδων .....	21
1.6.3 Η μετάβαση από ένα επίπεδο στο επόμενο.....	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.....	24
2.1 Εφαρμογή των DGE στην διδασκαλία της Γεωμετρίας.....	24
2.2 Η διαφορά πλαισίου .....	26
Από τους κόκκους της άμμου στα pixel της οθόνης.....	26
2.3 Η «απόδειξη» στα ψηφιακά περιβάλλοντα.....	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΙΣΤΟΡΙΑ .....	38
3.1 Αξιοποίηση της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών .....	38
3.2 Τα επιχειρήματα ‘υπέρ’ της Ιστορίας.....	39
3.2.1 Επιχειρήματα της άποψης « Η ιστορία είναι εργαλείο».....	39
3.2.2 Επιχειρήματα της άποψης « Η ιστορία είναι αυτοσκοπός» .....	45
3.3 Πως μπορούμε να εντάξουμε ή να εμπλέξουμε την ιστορία στη διδασκαλία των μαθηματικών.....	45
3.4 Ο Αντίλογος.....	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ & Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΑΣΘΕΝΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ.....	51
4.1 Η αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας.....	51
4.2 Η Γεωμετρική σκέψη των Ελλήνων.....	55
4.3 Παρανοήσεις των μαθητών στη μέτρηση του εμβαδού.....	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ .....	59
5.1 Ο σχεδιασμός των διδακτικών δραστηριοτήτων .....	59
5.2 Η σύνθεση και η φυσιογνωμία των ομάδων.....	64
5.3 Μεθοδολογία .....	65
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΟΙ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ .....	67
6.1 Ερωτηματολόγιο Α.....	67
6.2 Πρώτη παρέμβαση.....	72
6.2.1 Η πρώτη ιστορική παρουσίαση .....	72
6.2.2 1 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	73
6.2.3 Φύλλο αξιολόγησης .....	80
6.2.4 2 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	83
6.3 Δεύτερη παρέμβαση .....	84
6.3.1 3 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	84
6.3.2 4 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	91
6.4 Τρίτη παρέμβαση.....	102
6.5 Τέταρτη παρέμβαση.....	106
6.6 Πέμπτη παρέμβαση.....	112
6.6.1 Η δεύτερη ιστορική παρουσίαση .....	112
6.6.2 5 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	112
6.6.3 6 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	114
6.6.4 7 <sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας.....	116



6.7 Ερωτηματολόγιο Β.....	118
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	124
7.1 Ανακεφαλαίωση.....	124
7.2 Συμπεράσματα.....	125
7.2.1 Η λειτουργία των ομάδων.....	125
7.2.2 Επίτευξη των γνωστικών στόχων.....	126
7.2.3 Το δυναμικό περιβάλλον του Euclidraw ως μέσο διερεύνησης ή κατασκευής στη γεωμετρία.....	127
7.2.4 Η γεωμετρική αντίληψη των μαθητών ενός ελληνικού σχολείου, ηλικίας 16-17 χρονών και η ικανότητά τους ως προς την σύνθεση ενός παραγωγικού συμπερασμού.....	129
7.2.5 Η ανταπόκριση των μαθητών σε αυτού του είδους τη διδασκαλία σε σύγκριση με την παραδοσιακή.....	132
7.2.6 Η ιστορική πλαισίωση ως παράγοντας ενίσχυσης της κατανόησης και του ενδιαφέροντος.....	132
ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	133
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	134
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.....	135
1 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	137
1 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ.....	139
2 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	140
3 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	142
4 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	143
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ.....	146
2 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ.....	148
5 <sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	149
ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΧΩΡΙΩΝ.....	149

6ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	151
7ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	152
ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Β .....	154
Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ .....	157
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	161

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά μια σειρά παρεμβάσεων σε μία σχολική τάξη 22 μαθητών Β λυκείου, περιφερειακού λυκείου του Ν. Μαγνησίας, ηλικίας 16-17 ετών, στο μάθημα της γεωμετρίας και συγκεκριμένα στη διδακτική ενότητα Εμβαδά, με κεντρικό θέμα τον τετραγωνισμό. Η έρευνα αλλά και οι παρεμβάσεις – διδασκαλίες έγιναν από την ερευνήτρια που ήταν και η καθηγήτρια της τάξης. Οι περισσότερες διδασκαλίες έγιναν στο εργαστήριο πληροφορικής, όπου οι μαθητές, χωρισμένοι σε ομάδες, δούλεψαν στο περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας του λογισμικού EucliDraw. Στόχος αυτών των παρεμβάσεων ήταν να απαντηθούν τα ερωτήματα:

Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό, σύγχρονα περιβάλλοντα μάθησης, όπως είναι το ψηφιακό περιβάλλον ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας και η εργασία σε ομάδες, μπορούν (ή και δεν μπορούν) να βοηθήσουν τους μαθητές και τις μαθήτριες να αντιμετωπίσουν «δύσκολα», κατά γενική ομολογία, θέματα της ευκλείδειας γεωμετρίας όπως οι γεωμετρικές κατασκευές, η απόδειξη του πυθαγορείου κατά Ευκλείδη ή ο τετραγωνισμός; Πώς χειρίζονται οι μαθητές μας προβλήματα που σχετίζονται με το εμβαδόν; Με αλγεβρικό ή με γεωμετρικό τρόπο; Μπορεί η αναφορά στην ιστορία ενός πραγματικού μαθηματικού προβλήματος να κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους βοηθήσει να «δουν» το νόημα και την αναγκαιότητα της λύσης;

Πολλές έρευνες στο παρελθόν έχουν δείξει τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με το μάθημα της γεωμετρίας, ειδικά στο λύκειο και υπάρχουν κάποιοι καλοί λόγοι γι' αυτό (βλέπε λ.χ.Τουmasis, 1991). Ερευνητές και εκπαιδευτές που εστίασαν κυρίως στα προβλήματα που έχουν διαπιστωθεί σε ότι αφορά τη χωρική αντίληψη, κατέληξαν ότι μία από τις βασικές αιτίες των προβλημάτων στην μέτρηση του εμβαδού είναι η έμφαση, από νωρίς, στην χρήση τύπων (Kouba, Brown, Carpenter, Lindquist, Silver, & Swafford, 1988; Outhred & Mitchelmore, 2000). Δηλαδή, ενώ για χρόνια καλλιεργούμε στους μαθητές μας τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, φτάνοντας στο λύκειο, τους ζητάμε να αρχίσουν να σκέφτονται ενίοτε και ως γεωμέτρες. Η αποτυχία είναι

εγγυημένη. Και παρ' όλο που όλες οι εκπαιδευτικές πολιτικές τα προηγούμενα χρόνια έχουν διαφυλάξει το μάθημα της ευκλείδειας γεωμετρίας ως υπέρτατο αγαθό της εθνικής μας κληρονομιάς (Toumasis, 1990), δεν έχουν γίνει και πολλά για την καλλιέργεια αυτής της πολυπόθητης γεωμετρικής αντίληψης.

Η ευκλείδεια γεωμετρία είναι η γεωμετρία της άμμου και γι' αυτό τα εργαλεία της ήταν ο κανόνας και ο διαβήτης. Σήμερα, καλούμαστε να τη διδάξουμε στην οθόνη ενός υπολογιστή με εργαλείο το «ποντίκι». Ερευνητές και εκπαιδευτικοί, τα τελευταία χρόνια, προσπαθούν να δώσουν απάντηση στα εύλογα ερωτήματα: Μπορούμε να διδάξουμε τη γεωμετρία της άμμου στην οθόνη των pixel; Κι αν ναι, πώς; Και το ακανθώδες ερώτημα: χρειάζεται τελικά να διδάξουμε στους μαθητές του σήμερα τον ευκλείδειο τρόπο σκέψης;

Η ευκλείδεια γεωμετρία μέσα σ' αυτό το πάρτι των σύγχρονων μαθηματικών, της άλγεβρας, της αναλυτικής γεωμετρίας της ανάλυσης κ.λπ., φαντάζει σαν ένας παράταιρος επισκέπτης που όλοι τον κοιτάζουν και αναρωτιούνται ποιος τον κάλεσε. Η αμήχανη θέση της δεν είναι πρόβλημα μόνο του δικού μας αναλυτικού προγράμματος σπουδών, αλλά σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη μεταρρύθμιση των νέων μαθηματικών, με τις αντιλήψεις περί χρήσιμων μαθηματικών και με την υποβάθμιση της απόδειξης. Από την άλλη, το να βάζεις τους μαθητές του σήμερα, με εργαλείο το «ποντίκι», να κάνουν μία γεωμετρική κατασκευή, που έκανε ο γεωμέτρης του χθες με τον διαβήτη πάνω στην άμμο, μοιάζει παρωχημένο. Εκτός, ίσως... εάν τους δείξεις μαζί με αυτήν, τον λόγο και το πλαίσιο μέσα στο οποίο έγινε. Με άλλα λόγια αν τους δείξεις μαζί με αυτήν και την ιστορία της. Τότε η αναζήτηση μιας κατασκευής ή μίας λύσης, αποκτά τουλάχιστον νόημα.

Τώρα αν στην οθόνη του υπολογιστή κάνει κανείς ευκλείδεια γεωμετρία ή απλώς την προσομοιώνει είναι μια μεγάλη συζήτηση. Όμως, η εμπειρία πολλών ερευνητών και εκπαιδευτικών δείχνει ότι τα ψηφιακά περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας ίσως να είναι η ευκαιρία να επιστρέψουμε στη γεωμετρία το ρόλο που της αξίζει και να πάψουμε να τη βλέπουμε σαν ένα όμορφο, αλλά άχρηστο, διακοσμητικό μπιμπελό στο σπίτι, που δεν θέλουμε να πετάξουμε γιατί μας συνδέει με αναμνήσεις από το μακρινό παρελθόν.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

---

## 1.1 Η Γεωμετρία

### Η πτώση και η αναστήλωση

*«Οι γεωμέτρεις του 20<sup>ου</sup> αιώνα μετέφεραν τους θησαυρούς της γεωμετρίας στο μουσείο, όπου η σκόνη της ιστορίας θάμπωσε την λάμψη τους».*

E.T. Bell, *The Development of Mathematics*,  
McGraw Hill, New York, 1940, σελ. 323

Ένα πεδίο στα μαθηματικά «πεθαίνει» όταν δεν αντιμετωπίζεται πλέον ως σημαντική περιοχή για έρευνα. Υπό αυτήν την έννοια, η γεωμετρία «πέθανε» τη δεκαετία του 1920, του 1930 και του 1940 στη Β. Αμερική καθώς και σε πολλά μέρη της Ευρώπης (Whiteley, 1999).

Το 1900 στο Παρίσι, στο 2<sup>ο</sup> Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο, ο Hilbert απαρίθμησε 23 προβλήματα τα οποία θα απασχολούσαν και με αυτό τον τρόπο θα καθόριζαν, τα μαθηματικά του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Από αυτά μόνο 3 ανήκαν στην καθαρή γεωμετρία. Το 1976 διοργανώθηκε ένα διεθνές συμπόσιο για τα μαθηματικά που προέκυπταν από τα παραπάνω προβλήματα. Μία ομάδα μαθηματικών παρουσίασε 28 προβλήματα, κανένα από τα οποία δεν αφορούσε την καθαρή γεωμετρία, αν και υπήρχαν προβλήματα που σχετίζονταν με την πιο «επίκαιρη» εκδοχή της: διαφορική γεωμετρία, αλγεβρική γεωμετρία, τοπολογία κ.ά. Η καθαρή γεωμετρία δεν αποτελούσε πια πεδίο έρευνας για τους μαθηματικούς του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Το βάρος στην έρευνα έπεσε σε πιο «καυτές» περιοχές των μαθηματικών όπως π.χ. η τοπολογία, η αριθμοθεωρία κ.ά. Αυτό οδήγησε σε φθίνουσα πορεία και τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Προοδευτικά τα πανεπιστημιακά τμήματα αφαίρεσαν τα μαθήματα καθαρής γεωμετρίας από τα προγράμματα σπουδών τους. Έτσι μετά τη δεκαετία του 1980, έχουμε γενιές μαθηματικών που καλούνται να διδάξουν π.χ. ευκλείδεια γεωμετρία στο λύκειο, ενώ οι ίδιοι δεν την έχουν διδαχθεί ποτέ στο πλαίσιο των πανεπιστημιακών

σπουδών τους. Κάποιοι από αυτούς μάλιστα αναρωτιούνται γιατί να διδάσκουν κάτι που κατά τη γνώμη τους αποτελεί ένα νεκρό κομμάτι των μαθηματικών.

Στη στροφή όμως προς τον 21<sup>ο</sup> αιώνα το ενδιαφέρον για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, τουλάχιστον σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αναζωπυρώθηκε. Η εξέλιξη της τεχνολογίας και η εμφάνιση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας όπως το Cabri, το Sketchpad, το Geogebra, κ.ά. έπαιξαν καθοριστικό ρόλο σε αυτό.

### 1.2 Η διπλή φύση της γεωμετρίας και οι εφαρμογές της

*‘Ούτε 30 χρόνια ούτε 30 αιώνες  
μπορούν να επηρεάσουν την διαύγεια και  
την ομορφιά που έχουν οι γεωμετρικές  
αλήθειες’.*

Lewis Carroll

Η γεωμετρία είναι από τους μακροβιότερους κλάδους των μαθηματικών, γι’ αυτό και οι ρίζες της μπορούν να ανιχνευτούν σε πολλούς πολιτισμούς και κουλτούρες. Κατά τον 19<sup>ο</sup> και 20<sup>ο</sup> αιώνα γνώρισε, όπως και οι περισσότερες περιοχές των μαθηματικών, κατακλυσμοειδή ανάπτυξη. Έτσι, η γεωμετρία του αρχαίου κόσμου συγκεντρωμένη στα «Στοιχεία του Ευκλείδη», σήμερα δεν είναι παρά ένα υποείδος μέσα στην τεράστια οικογένεια των μαθηματικών θεωριών για το χώρο. Η σύγχρονη κατάταξη αριθμεί πάνω από 50 γεωμετρίες. Ο Felix Klein πρότεινε ότι η γεωμετρία πρέπει να ειδωθεί ως: *«η μελέτη των ιδιοτήτων του χώρου που μένουν αναλλοίωτες κάτω από ένα δεδομένο σύνολο μετασχηματισμών»* (Jones, 2000). Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό κατέστη δυνατό οι διάφορες γεωμετρίες να καταταγούν σε «οικογένειες», από την τοπολογία που είναι η πιο γενική, στην προβολική, την ομοπαράλληλική, μέχρι την Ευκλείδεια που έχει τις πιο περιορισμένες ισοδυναμίες (επειδή μένουν αναλλοίωτες περισσότερες ιδιότητες).

Η ευκλείδεια γεωμετρία έχει συνδεθεί κυρίως με τον ορθό λόγο και την καλλιέργεια της λογικής πειθαρχίας και τεκμηρίωσης. Η λογική επιχειρηματολογία είναι όμως η μία όψη της φύσης της. Η άλλη είναι η οπτική

διαίσθηση και αντίληψη (Osta, 2004). Η πρώτη όψη έχει εκτιμηθεί με περίσσεια τόσο στο παρελθόν όσο και σήμερα. Κατά τη διάρκεια του 20<sup>ου</sup> αιώνα αλλά και σήμερα, κερδίζει ολοένα και περισσότερο έδαφος στην επιχειρηματολογία υπέρ της διδασκαλίας της γεωμετρίας η δεύτερη φύση της. Σύμφωνα με τον Usiskin : *«μόνο η γεωμετρία μπορεί να συνδέσει τα μαθηματικά με τον φυσικό κόσμο και να κάνει ορατές τις ιδέες από άλλες περιοχές των μαθηματικών. Η ίδια μάλιστα αποτελεί ένα εξαιρετικό παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος, όχι μοναδικού, αλλά ίσως του πιο απλού και κατανοητού για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης»* (Usiskin, 1980: p. 418).

Έτσι ένας σύγχρονος ορισμός της γεωμετρίας, αποδίδεται στον Βρετανό μαθηματικό Sir Christopher Zeeman, ο οποίος λέει: *« Η γεωμετρία περιλαμβάνει όλους τους κλάδους των μαθηματικών οι οποίοι χρησιμοποιούν την οπτική διαίσθηση (intuition) (την ισχυρότερη των αισθήσεων) για την απομνημόνευση θεωρημάτων, για την κατανόηση αποδείξεων, για την έμπνευση μιας εικασίας, για την αντίληψη της πραγματικότητας και για μια παγκόσμια ματιά»* (στο Jones, 2000: p. 78).

Στις μέρες μας ένας μεγάλος αριθμός αναπτυσσόμενων κλάδων των μαθηματικών είναι κυρίως γεωμετρικής φύσεως. Όπως για παράδειγμα τα δυναμικά συστήματα και η γεωμετρική άλγεβρα. Ακόμη, πλήθος σύγχρονων εφαρμογών έχουν ως βασικό συστατικό τους τη γεωμετρία. Για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα εκεί, απαιτούνται ουσιαστικές γεωμετρικές γνώσεις. Μερικά παραδείγματα σύγχρονων εφαρμογών της γεωμετρίας είναι ο ψηφιακός σχεδιασμός (Computer Aided Design), η μοντελοποίηση, η ρομποτική, οι ιατρικές απεικονίσεις (π.χ. τομογραφίες), τα κινούμενα σχέδια και γενικά οι ψηφιακές αναπαραστάσεις. Γεωμετρικά προβλήματα προκύπτουν ακόμη στη Βιολογία (π.χ. ψηφιακή αναπαράσταση μιας πρωτεΐνης ή της συσσώρευσης ενός φαρμάκου στα μόρια), στη Χημεία (π.χ. σχηματισμοί μορίων) ή στα Γεωγραφικά πληροφοριακά συστήματα (GIS, GPS) (Whiteley, 1999).

### 1.3 Η παιδαγωγική αξία της γεωμετρίας

*Απ' όλες τις αποφάσεις που πρέπει να πάρει κάποιος που σέβεται τις επιλογές του και σχεδιάζει ένα σχολικό πρόγραμμα σπουδών, οι πιο αντιφατικές και οι λιγότερο υπερασπίσιμες είναι αυτές που αφορούν την γεωμετρία.*

The Chicago School Mathematics Project Staff 1971, p281

Όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω η διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας ως ανεξάρτητου και αυτόνομου μαθήματος στο λύκειο, λόγω της πίεσης των «καινούριων» μαθηματικών που έπρεπε να εισαχθούν στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών καθώς και λόγω της αποκαθήλωσής της ως μοναδικό συνεπές αξιωματικό γεωμετρικό σύστημα, απειλήθηκε και αμφισβητήθηκε κατά τη διάρκεια του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Η ευκλείδεια γεωμετρία θεωρούνταν ως το καταλληλότερο μάθημα για την καλλιέργεια και ανάπτυξη του λογικού επιχειρήματος και της λογικής. Ο 20<sup>ος</sup> αιώνας ξεκίνησε με την υπόσχεση ότι ο πειθαρχημένος και λογικά θεμελιωμένος αυτός τρόπος σκέψης που με μοναδικό τρόπο μπορούσε να καλλιεργηθεί μέσω της διδασκαλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας, θα μπορούσε να μεταφερθεί και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών. Αυτή η δυνατότητα «μεταφοράς» του λογικού επιχειρήματος, αμφισβητήθηκε από εκπαιδευτικούς και σχολικούς ψυχολόγους. Υπήρξαν μάλιστα και μαθηματικοί που υποστήριξαν ότι η γεωμετρία θα έπρεπε να ενσωματωθεί στην ύλη των «άλλων» μαθηματικών όπως π.χ. η τριγωνομετρία και να μην αποτελεί ξεχωριστό μάθημα. Παρ' όλα αυτά το μάθημα της ευκλείδειας γεωμετρίας επιβίωσε στο λύκειο. Παρ' όλες τις φωνές, ακόμα και από ανθρώπους που ανήκουν στη μαθηματική κοινότητα, που ζητούν να βγει «έξω» από το σχολικό πρόγραμμα σπουδών, υπάρχουν ισχυρά επιχειρήματα που αναδεικνύουν και αποδεικνύουν ότι καμία μαθηματική εκπαίδευση δεν μπορεί να είναι επαρκής χωρίς τη γεωμετρία.

Το πιο γνωστό και συνηθισμένο επιχείρημα για την παιδαγωγική αξία της γεωμετρίας είναι αυτό που αφορά την αξιωματική παραγωγική δομή της η οποία μπορεί να αναπτύξει τον παραγωγικό συλλογισμό, ένα επιχείρημα που κυριαρχούσε κατά τον 19<sup>ο</sup> και 20<sup>ο</sup> αιώνα, όπως έχει προηγουμένα ήδη



αναφερθεί. Όμως ήδη από τον 20<sup>ο</sup> αιώνα είχαν αρχίσει να έρχονται στην επιφάνεια και να φαίνονται και άλλοι λόγοι για τους οποίους είναι σημαντική η διδασκαλία της γεωμετρίας. Ο Patricio Herbst (Herbst & González, 2006) ταξινόμησε τα επιχειρήματα που αναπτύχθηκαν, όχι απαραίτητα ως προτάσεις αλλά περισσότερο ως τάσεις κατά τον 20<sup>ο</sup> αιώνα, σε 4 κατηγορίες.

Το *τυπικό επιχείρημα* είναι αυτό που ορίζει τη γεωμετρία ως περίπτωση λογικής τεκμηρίωσης και αποσκοπεί σε μορφωμένους πολίτες. Η απόδειξη είναι η πιο υψηλή ηθική και δημοκρατική αξία στον κόσμο και υπό αυτή την έννοια η γεωμετρία αποτελεί και ένα μάθημα ηθικής διαπαιδαγώγησης. Κάποιος ή αποδεικνύει ή δεν αποδεικνύει ένα θεώρημα. Δεν υπάρχει κάτι ενδιάμεσο. Ούτε τα ωραία λόγια, ούτε η ρητορεία ενισχύει την αλήθεια μιας λογικής τεκμηρίωσης (Protasov & Sharygin, 2004).

Το *χρηστικό επιχείρημα* είναι αυτό που λέει ότι η γεωμετρία είναι χρήσιμη ως εργαλείο για πολλά επαγγέλματα ακόμα και γι' αυτά που δεν έχουν σχέση με μαθηματικές σπουδές.

Το *μαθηματικό επιχείρημα* εδράζει στην άποψη ότι η γεωμετρία δίνει μία καλή ευκαιρία για να έχει κανείς την εμπειρία του πως δουλεύει ένας μαθηματικός. Μπορεί να εμπλέξει τους μαθητές στη μαθηματική αναζήτηση και διερεύνηση η οποία μπορεί να οδηγήσει στην διατύπωση μιας εικασίας την οποία θα πρέπει να επικυρώσουν με μία απόδειξη. Ό,τι δηλαδή κάνει κι ένας μαθηματικός σε ανώτερο επίπεδο, μόνο που η γεωμετρία είναι εκείνο το σημείο των σχολικών μαθηματικών που απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα μαθηματικά ανώτερου επιπέδου γιατί γεωμετρικά προβλήματα που είναι δύσκολα αλλά απλά διατυπωμένα, έχουν λύσεις που έχουν εξίσου απλή διατύπωση και μπορούν να γίνουν κατανοητές από μαθητές.

Το *διαισθητικό επιχείρημα* στηρίζεται στο επιχείρημα ότι η γεωμετρία παρέχει τους φακούς μέσα από τους οποίους μπορεί κανείς να βιώσει, να κατανοήσει και να μοντελοποιήσει το φυσικό κόσμο. Αναπτύσσει την ικανότητα εξεικόνισης, τη γεωμετρική διαίσθηση και τη χωρική αντίληψη (Herbst & González, 2006).

Στα παραπάνω θα μπορούσε να προσθέσει κανείς κι ένα πέμπτο,

το *πολιτισμικό επιχείρημα*. Η διδασκαλία της γεωμετρίας όπως και κάθε άλλου μαθήματος στο σχολείο αποσκοπεί στην απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων. Από την άλλη όμως η παιδεία είναι κάτι περισσότερο από αυτό. Είναι η καλλιέργεια της ψυχής, η αίσθηση της αρμονίας και της ισορροπίας, του ωραίου κ' αγαθού. Η γεωμετρία είναι ένα επίτευγμα του ανθρώπινου πολιτισμού. Κάποια γεωμετρικά θεωρήματα προϋπήρξαν της Βίβλου και είναι υψηλού επιπέδου έργα της ανθρώπινης διάνοησης. Με την ίδια λογική που δεν θεωρούμε μορφωμένο ένα άτομο που δεν έχει στοιχειώδεις γνώσεις ιστορίας ή λογοτεχνίας ή κάποιας ξένης γλώσσας, με την ίδια λογική δεν μπορούμε να θεωρούμε και μορφωμένο αυτόν που δεν μπορεί να εφαρμόσει το πυθαγόρειο θεώρημα ή δεν γνωρίζει ποιο ήταν το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Κάποιος που δεν γνωρίζει τις στοιχειώδεις αρχές της γεωμετρίας δεν είναι καλλιεργημένος (Protasov & Sharygin, 2004).

Επιπλέον, η αίσθηση της συμμετρίας, της ακρίβειας, της δομής, του σχήματος καλλιεργεί την αισθητική. Γι' αυτό και η έλλειψη σχήματος στη γλώσσα μας, ταυτίζεται με την απουσία ομορφιάς και δηλώνεται με τη λέξη *άσχημο* (Paris K. Pamfilos).

#### 1.4 Πώς μαθαίνεται η Γεωμετρία;

Το να υπάρχει όμως η Γεωμετρία ως μάθημα στο λύκειο δεν αρκεί. Θα πρέπει να αποφασίσουμε *τι* θα διδαχθεί και *πώς* θα διδαχθεί. Το *τι* αποτελεί ένα μεγάλο ζήτημα το οποίο από μόνο του αποτελεί ένα ξεχωριστό κεφάλαιο στην ιστορία της γεωμετρίας και πολύ μελάνι έχει ξοδευτεί γι' αυτό από εκπαιδευτικούς, ερευνητές και πανεπιστημιακούς. Για να δοθεί απάντηση σε καθένα από τα δύο ερωτήματα, σημαντικό θα ήταν να γνωρίζουμε το πώς μαθαίνεται η γεωμετρία. Πώς οικοδομούνται οι γεωμετρικές έννοιες και πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την γεωμετρική πραγματικότητα; Οι πιο γνωστές θεωρίες σχετικά με αυτό είναι του Piaget και των Van Hiele.

## 1.5 Τα στάδια αντίληψης του χώρου κατά τον Piaget

Σύμφωνα με τον Ελβετό γενετικό επιστημολόγο Jean Piaget (1896-1980), η νοητική αναπαράσταση του χώρου από ένα παιδί δεν είναι απλά μια αντιληπτική ανάγνωση του «τι υπάρχει γύρω του». Το παιδί χτίζει μια νοητική αναπαράσταση του χώρου κάθε φορά αναδιοργανώνοντας τις προηγούμενες εμπειρίες του αλληλεπιδρώντας με το περιβάλλον (Jones, 2000). Η θεωρητική δουλειά του Piaget σχετικά με την ανάπτυξη της γεωμετρικής αντίληψης περιλαμβάνει δύο βασικά θέματα.

Το ένα θέμα αφορά την προοδευτική αναδιοργάνωση των γεωμετρικών ιδεών. Σύμφωνα με τον Piaget, ακολουθείται μία συγκεκριμένη σειρά που είναι βιωματική (και ίσως και μαθηματικά λογική) και όχι η σειρά της ιστορικής εξέλιξης της γεωμετρίας. Αρχικά δηλαδή κατασκευάζεται μία αντίληψη για τον χώρο στηριγμένη σε πρωταρχικές σχέσεις όπως η διάταξη (μεγαλύτερο - μικρότερο), η περίφραξη (κάτι χωράει μέσα σ' ένα άλλο), η εγγύτητα (κάτι είναι κοντά στο άλλο) και ο διαχωρισμός (αριστερά/δεξιά, πάνω/κάτω, που είναι;). Αυτές οι σχέσεις είναι τοπολογικές. Έτσι στο βιβλίο «*The Child's conception of Space*», οι συγγραφείς J. Piaget και B. Inhelder, ισχυρίζονται ότι η πρώτη νοητική κατασκευή του χώρου από ένα παιδί είναι τοπολογική. Στη συνέχεια γίνεται προβολική (αναπτύσσοντας τις έννοιες γραμμικότητα-καθετότητα) και ύστερα Ευκλείδεια (αναπτύσσοντας τις έννοιες: γωνία, παραλληλία, απόσταση) (Lovell, 1959).

Το άλλο θέμα αφορά τα στάδια της νοητικής ανάπτυξης. Ο Piaget απέδειξε μέσω πειραμάτων ότι τα παιδιά σκέφτονται μέσω κάποιων λογικών προτύπων, που εμφανίζονται σε μία αμετάβλητη σειρά διαδοχής και συνιστούν τέσσερα βασικά στάδια νοητικής ανάπτυξης. Η σειρά των σταδίων δεν μεταβάλλεται και παρ' όλο που τα στάδια ανάπτυξης είναι συνυφασμένα με την ηλικία του παιδιού, η ακριβής ηλικία στην οποία εμφανίζονται κάποιες ικανότητες μπορεί να ποικίλλει από παιδί σε παιδί και από κοινωνία σε κοινωνία.

Στο πρώτο *αισθησιοκινητικό* στάδιο(0-2 χρονών), το παιδί αναγνωρίζει τον κόσμο μέσω των αισθήσεων. Για παράδειγμα αναγνωρίζει το σχήμα ενός αντικειμένου με την αφή. Στο δεύτερο *προσυλλογιστικό* στάδιο(2-7 χρονών),

αρχίζει να ταξινομεί τα αντικείμενα με βάση τις ομοιότητές τους. Η επαγωγική και παραγωγική σκέψη είναι ακόμη αδύνατες. Τα προβλήματα λύνονται κυρίως με διαισθητικό τρόπο και όχι με μία λογική αλληλουχία σκέψεων. Στο τρίτο στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών ενεργημάτων (Συλλογιστική περίοδος) (7-12 με 13χρονών), το παιδί αρχίζει να αντιλαμβάνεται σημαντικές σχέσεις μεταξύ πραγμάτων. Μπορεί να οικοδομήσει τις έννοιες του συνόλου, της ακολουθίας, της διάταξης, του μήκους, του βάρους, του εμβαδού. Δεν έχει αποκτήσει ακόμα την ικανότητα να σκέφτεται με αφηρημένο τρόπο. Στο τέταρτο και τελευταίο στάδιο των αφηρημένων ενεργημάτων (Περίοδος της αφαιρετικής σκέψης) (13 χρονών και άνω), αναπτύσσεται η αφαιρετική ικανότητα σκέψης. Ο έφηβος μπορεί να βασίζεται σε υποθέσεις, ανεξάρτητα από τα αν αυτές είναι πραγματικές και με βάση αυτές να σχηματίζει ένα συμπέρασμα (Τουμάσης, 1999).

## 1.6 Θεωρία Van Hiele

Αυτό που σήμερα είναι γνωστό ως θεωρία Van Hiele, αναπτύχθηκε από την Dina Van Hiele- Geldof και τον άντρα της Pierre Marie Van Hiele, ως ξεχωριστές διδακτορικές διατριβές στο Πανεπιστήμιο του Ουτρέχτης, το 1957. Η θεωρία έχει τρεις πτυχές: Τα επίπεδα Van Hiele, τις ιδιότητες κάθε επιπέδου και την μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο.

### 1.6.1 Τα επίπεδα Van Hiele

Σύμφωνα με τη θεωρία υπάρχουν πέντε επίπεδα κατανόησης της γεωμετρίας.

Το πρώτο επίπεδο είναι αυτό της αναγνώρισης (recognition), όπου η μορφή υπερισχύει των ιδιοτήτων. Οι μαθητές και οι μαθήτριες αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα ως ολότητες. Μπορούν να τα κατονομάσουν π.χ. τρίγωνα, τετράγωνα αλλά δεν μπορούν να διατυπώσουν τις ιδιοτήτές τους. Επιπλέον θεωρούν ότι τα σχήματα έχουν διαφορετικές ιδιότητες όταν περιστρέφονται ή αλλάζουν οι διαστάσεις τους. Για την περιγραφή των σχημάτων χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα (π.χ. αναγνωρίζουν ένα ορθογώνιο γιατί μοιάζει με πόρτα).

Στο δεύτερο επίπεδο, της *ανάλυσης (analysis)* ή της *περιγραφής (description)*, οι μαθητές και οι μαθήτριες αναγνωρίζουν τα σχήματα με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους. Μπορούν να ανακαλύψουν και να περιγράψουν τις ιδιότητες ενός σχήματος, αλλά δεν μπορούν να τις ορίσουν τυπικά. Αν τους ρωτήσουμε γιατί αυτό το σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε θα μας παραθέσουν μια σειρά από ιδιότητες του ορθογωνίου (οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες κ.τ.λ.).

Στο τρίτο επίπεδο, της *διάταξης (order)* ή του *άτυπου συλλογισμού (informal deduction)*, οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να διατάξουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους και αρχίζουν να αντιλαμβάνονται το ρόλο του ορισμού, αλλά δε λειτουργούν μέσα σε ένα μαθηματικό σύστημα (μπορεί να ακολουθηθεί απλός παραγωγικός συμπερασμός, αλλά η απόδειξη δε γίνεται κατανοητή). Μπορούν για παράδειγμα να επιλέξουν από μια λίστα ιδιοτήτων του ορθογωνίου τις ικανές συνθήκες για τον προσδιορισμό του και επίσης είναι ικανοί και ικανές να αναγνωρίσουν σχέσεις εγκλεισμού (π.χ. τα τετράγωνα είναι ορθογώνια).

Το τέταρτο επίπεδο είναι αυτό του τυπικού παραγωγικού συμπερασμού (formal deduction) ή της αφαίρεσης (abstraction), όπου ο μαθητής ή η μαθήτρια κατανοεί τη σημασία του παραγωγικού συμπερασμού και τους ρόλους των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης (οι αποδείξεις μπορούν να γραφούν με κατανόηση). Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών η ουσιαστική μελέτη της ευκλείδειας γεωμετρίας αρχίζει από αυτό το επίπεδο.

Τέλος, στο πέμπτο και τελευταίο επίπεδο της *αυστηρότητας (rigor)*, ο μαθητής κατανοεί την αναγκαιότητα για αυστηρότητα και είναι σε θέση να πραγματοποιήσει αφηρημένους παραγωγικούς συμπερασμούς. (οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες μπορεί να κατανοηθούν).

Οι Van Hiele αριθμούν τα επίπεδα από το 0 έως το 4 και όχι από το 1 έως το 5, και η Dina χαρακτήρισε τα επίπεδα 2 έως 5, κατ' αντιστοιχία, ως : *η όψη, η ουσία, η επίγνωση και τέλος η επιστημονική επίγνωση της γεωμετρίας.*

(Usiskin, 1982)

### 1.6.2 Οι ιδιότητες των επιπέδων

Η πρώτη *ιδιότητα* είναι αυτή της *σταθερής αλληλουχίας (fixed sequence)*, η οποία υπαγορεύει ότι η σειρά των επιπέδων είναι διαδοχική. Δεν μπορεί κανείς να προσπεράσει ένα επίπεδο, ό,τι είδους εκπαίδευση κι αν ακολουθήσει. Δεν μπορεί για παράδειγμα κάποιος να φτάσει στο επίπεδο 3 χωρίς να έχει περάσει από όλα τα προηγούμενα. Η δεύτερη, *της διαδοχικότητας (adjacency)*, λέει ότι σε κάθε επίπεδο συλλογισμού εκείνο που φάνταζε ξένο ή άγνωστο στο προηγούμενο επίπεδο, γίνεται εγγενές στο τωρινό επίπεδο. Η επόμενη ιδιότητα, *της διάκρισης (distinction)*, εξηγεί πως κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα και το δικό του δίκτυο σχέσεων που τα συνδέει. Τέλος, η τέταρτη και τελευταία ιδιότητα *του διαχωρισμού (separation)*, υπογραμμίζει ότι δύο άτομα που βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο, δεν μπορούν να καταλάβουν το ένα τ' άλλο. Έτσι όταν για παράδειγμα ο καθηγητής εκτελεί μία απόδειξη χρησιμοποιώντας τη γλώσσα και το συλλογισμό του επιπέδου 4 και ένας μαθητής βρίσκεται στο επίπεδο 3 ή 2, υπάρχει σαφής έλλειψη επικοινωνίας (Usiskin, 1982).

### 1.6.3 Η μετάβαση από ένα επίπεδο στο επόμενο

Σε αντίθεση με την αναπτυξιακή θεωρία του Piaget, τα επίπεδο που βρίσκεται κανείς είναι ανεξάρτητο της ηλικίας του. Μπορεί δηλαδή π.χ. ένας μαθητής λυκείου να βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με έναν μαθητή της Α' γυμνασίου ή ακόμη κι ένας ενήλικας να μην φτάσει ποτέ στο επίπεδο 2. Επιπλέον, η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν γίνεται από μόνη της, με την πάροδο του χρόνου, αλλά μόνο με τη βοήθεια συγκεκριμένης διδασκαλίας. Μάλιστα οι Van Hiele εξήγησαν λεπτομερώς πως πρέπει να λειτουργήσει ο καθηγητής προκειμένου οι μαθητές του να μεταβούν από ένα επίπεδο στο επόμενο. Περιέγραψαν πέντε φάσεις κατά τη διαδικασία μάθησης, όχι απαραίτητα με τη σειρά που αναγράφονται. Οι φάσεις είναι: *αναζήτηση/πληροφορία, καθοδηγούμενος προσανατολισμός, επεξήγηση, ελεύθερος προσανατολισμός, ολοκλήρωση.*

Η θεωρία Van Hiele (ελλείπει και κάτι καλύτερου) γενικά υποστηρίζεται από τις ερευνητικές εργασίες ως χρήσιμη για την ερμηνεία της ανάπτυξης της

γεωμετρικής αντίληψης ενός παιδιού. Επειδή αναπτύχθηκε το 1950, όταν μιλάμε για γεωμετρική αντίληψη εννοούμε κυρίως τη γεωμετρική αντίληψη του ευκλείδειου χώρου. Η καταλληλότητά της για άλλου είδους προσεγγίσεις π.χ. μέσω διανυσμάτων ή μετασχηματισμών ή για άλλου είδους γεωμετρίες όπως π.χ. η σφαιρική, είναι αβέβαιη. Σύμφωνα με τον Clements (Clements, 2001), δεν μας δίνει επαρκείς εξηγήσεις για τις νοητικές αναπαραστάσεις των γεωμετρικών εννοιών ενός παιδιού (αναφορά στο Jones, 2000). Επιπλέον διάφορα προβλήματα έχουν προκύψει σχετικά με τον προσδιορισμό των επιπέδων. Όπως για παράδειγμα ο χαρακτηρισμός του κατώτερου επιπέδου ως οπτικού ενώ η εξεικόνιση απαιτείται σε όλα τα επίπεδα ή το γεγονός ότι οι μαθητές φαίνεται να δείχνουν σημάδια συμπερασμών που ανήκουν σε περισσότερα από ένα επίπεδα ταυτόχρονα, στην ίδια ή διαφορετικές δραστηριότητες ή σε διαφορετικά θέματα (Jones, 2000). Ο λόγος που συμβαίνει αυτό μπορεί να είναι γιατί ο μαθητής ή η μαθήτρια βρίσκεται σε στάδιο μετάβασης από το ένα επίπεδο στο άλλο.

Τα προηγούμενα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα επίπεδα Van Hiele είναι δυσδιάκριτα και το να χαρακτηρίσει κανείς το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται ένας μαθητής ή μια μαθήτρια, δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση. Σε άρθρο τους, οι Gutiérrez, Jaime & Fortuny, υποστηρίζουν ότι υπάρχει συνέχεια μεταξύ των επιπέδων και η μετάβαση από ένα επίπεδο στο άλλο δεν γίνεται ακαριαία, αντίθετα μπορεί να διαρκέσει μήνες ή ακόμη και χρόνια. Επιπλέον, ακόμη και αν δεχτούμε ότι ένας μαθητής ή μία μαθήτρια έχει μεταβεί π.χ. στο επίπεδο 3, αυτό δεν σημαίνει ότι αυτομάτως αποκτά όλα τα χαρακτηριστικά αυτού του επιπέδου, όπως περιγράφονται από τη θεωρία. Οι ίδιοι μάλιστα επινόησαν μία κλίμακα μέτρησης με την οποία μετρούν τον βαθμό πρόσκτησης του επιπέδου από τον μαθητή ή τη μαθήτρια. Ένας μαθητής ή μία μαθήτρια που έχει, για παράδειγμα, χαμηλό βαθμό πρόσκτησης ενός επιπέδου, μόλις συναντήσει δυσκολίες σε κάποια δραστηριότητα αυτού του επιπέδου, επιστρέφει στην επιχειρηματολογία του προηγούμενου επιπέδου που έχει κατακτήσει. Καθώς η εμπειρία αυξάνεται, ο μαθητής ή η μαθήτρια περνούν στην περίοδο του μεσαίου βαθμού πρόσκτησης του επιπέδου. Χρησιμοποιούν τις μεθόδους αυτού του επιπέδου συχνότερα και με περισσότερη ακρίβεια. Παρ' όλα αυτά, όταν και πάλι

συναντήσουν ιδιαίτερη δυσκολία σε κάποια δραστηριότητα θα ξαναγυρίσουν στις μεθόδους του προηγούμενου επιπέδου, παρ' όλο που στη συνέχεια θα ξαναπροσπαθήσουν να δουλέψουν στο ανώτερο επίπεδο. Έτσι εξηγείται το φαινόμενο ένας μαθητής ή μία μαθήτρια να παρουσιάζουν λογικούς συμπερασμούς που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα. Κατά τους συγγραφείς του άρθρου, μετά το μεσαίο βαθμό ακολουθεί ο υψηλός βαθμός πρόσκτησης, όπου παρατηρείται μεγαλύτερη σταθερότητα στην επιχειρηματολογία αλλά δεν αποκλείεται να υπάρξει και πάλι κάποιο πισωγύρισμα και τέλος η πλήρης κατάκτηση του επιπέδου, όπου ο μαθητής ή η μαθήτρια έχουν τον πλήρη έλεγχο του τρόπου σκέψης και τον χρησιμοποιούν χωρίς δυσκολίες. (Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991).



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

---

### 2.1 Εφαρμογή των DGE στην διδασκαλία της Γεωμετρίας

*Όταν ένας αμήχανος μαθητής ρώτησε τον Felix Klein ποιο είναι το μυστικό της μαθηματικής ανακάλυψης, ο Klein του απάντησε: «Διάλεξε αποφασιστικά έναν στόχο και προχώρα κατά πάνω του. Μπορεί να μην τον φτάσεις ποτέ, αλλά θα βρεις σίγουρα κάτι ενδιαφέρον στο δρόμο» (Bell, 1937).*

Από την εποχή της αξιωματικής θεμελίωσης της ευκλείδειας γεωμετρίας έως και τα τέλη του 20<sup>ου</sup> αιώνα, τα νόμιμα αλλά και απαραίτητα εργαλεία για το σχεδιασμό μιας γεωμετρικής κατασκευής ήταν ο κανόνας και ο διαβήτης.

Στις αρχές του 1980 έκανε την εμφάνισή του το πρώτο ψηφιακό περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, το Geometric Supposer, στο οποίο μπορούσε κανείς να κάνει πλέον γεωμετρικές κατασκευές στην οθόνη του υπολογιστή. Έξι χρόνια αργότερα ακολούθησε το Cabri και το Geometer's Sketchpad (Wikipedia, 2012). Σήμερα υπάρχουν δεκάδες λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας. Από τα τέλη της δεκαετίας του 1990, η Ευρωπαϊκή Ένωση θέτει σε εφαρμογή προγράμματα που ενισχύουν την ενσωμάτωση των Τ.Π.Ε. στην εκπαίδευση και προωθεί την απόκτηση δεξιοτήτων χειρισμού των Η.Υ. Η Σύνοδος του Ευρωπαϊκού Συμβουλίου στη Λισσαβόνα, το 2000, σηματοδότησε το έτος 2010, ως ορόσημο κατά το οποίο η Ευρωπαϊκή Ένωση θα έπρεπε να καταστεί η πλέον ανταγωνιστική δύναμη διεθνώς και μέσα (μεταξύ άλλων) από το μετασχηματισμό των εκπαιδευτικών δομών (Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών/Ε.Α.Ι.Τ.Υ., 2011). Έτσι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας κερδίζουν συνεχώς έδαφος και όλο και περισσότεροι εκπαιδευτικοί καλούνται να τα χρησιμοποιήσουν στη διδασκαλία τους, όχι μόνο στο μάθημα της γεωμετρίας αλλά και της ανάλυσης, αφού αυτά τα προγράμματα παρέχουν πληθώρα εργαλείων και ευκολιών. Τα δυναμικά αυτά περιβάλλοντα έρχονται να αντικαταστήσουν τα πατροπαράδοτα μέχρι σήμερα

εργαλεία κάθε δασκάλου ή καθηγητή, το χαρτί και το μολύβι και ειδικότερα στο μάθημα της γεωμετρίας, τον κανόνα και τον διαβήτη.

Όμως η ενσωμάτωση ενός εργαλείου στη διδακτική πρακτική είναι μία μακριά διαδικασία και απαιτεί μεγάλη εξοικείωση με το εργαλείο (Laborde, 2002) ενώ η μετατροπή ενός οποιουδήποτε εργαλείου σε όργανο για τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν οδηγεί απαραίτητα σε καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών (Guin & Trouche, 1999). Τα τελευταία είκοσι χρόνια, ερευνητές εκπαιδευτικού σε όλο τον κόσμο, μελετούν το φαινόμενο της διδασκαλίας με αυτά τα μέσα και καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα: *«Τι καλύτερο ή περισσότερο μπορούν να προσφέρουν αυτά τα περιβάλλοντα στη διδασκαλία των μαθηματικών και της γεωμετρίας, που δεν μπορεί να γίνει με το χαρτί και το μολύβι;»*

Μία άποψη είναι ότι σ' αυτά τα περιβάλλοντα η πνευματική δουλειά και οι ενέργειες για τη λύση ενός προβλήματος μοιράζεται ανάμεσα στο εργαλείο και το χρήστη (Nardi & Miller, 1991). Όταν δε υπολογισμοί ή άλλες ενέργειες που ένα τέτοιο εργαλείο (π.χ. το λογισμικό) εκτελεί καλύτερα, ανατίθενται στο εργαλείο, τότε το σύνολο *χρήστης & εργαλείο* είναι αποδοτικότερο από το χρήστη και η τεχνολογία καθίσταται ένας «έξυπνος» συνεργάτης με τον οποίο μοιράζεσαι τη δουλειά (Perkins, 1993). Για παράδειγμα, η ευκολία που παρέχει στο χρήστη ένα τέτοιο περιβάλλον για την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων, τον απαλλάσσει από το άγχος του λάθους αφού εύκολα «αναιρεί» μία λανθασμένη ενέργεια κι έτσι επικεντρώνεται στην ουσία του προβλήματος, έχοντας το πλεονέκτημα να πειραματίζεται με μετασχηματισμούς, να παρατηρεί και να ελέγχει τις υποθέσεις του. Επιπλέον ενισχύεται στους μαθητές η διάθεση για πειραματισμό και χρησιμοποιούνται στρατηγικές που πριν από την εμφάνιση των δυναμικών γεωμετρικών περιβαλλόντων, ήταν αδιανόητες (Healy & Hoyles, 2001). Ερευνητές-εκπαιδευτικοί έχουν αναφέρει ότι χρησιμοποιώντας τα DGE, βελτιώθηκε το κλίμα στην τάξη, κινητοποιήθηκαν περισσότεροι μαθητές και οι ίδιοι είχαν τη δυνατότητα να δείξουν πολύ περισσότερα παραδείγματα σε πολύ λιγότερο χρόνο (Ruthven, Hennessy & Deane, 2005; Lampert, 1993). Ένας από τους παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση ενός μαθητή στα μαθηματικά είναι το γνωστικό ύψος (Αγαλιώτης, 2009). Μία

σημαντική μέριμνα λοιπόν κάθε εκπαιδευτικού είναι να μπορέσει να διαχειριστεί τα διαφορετικά στυλ μάθησης των μαθητών του. Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας είναι εποικοδομητικά περιβάλλοντα μάθησης γιατί παρέχουν μεγάλη ποικιλία εργαλείων με διαφορετική γνωστική διαφάνεια, και έτσι ο κάθε μαθητής μπορεί να εκφραστεί επιλέγοντας τα καταλληλότερα γι' αυτόν (Kordaki & Mastrogiannis, 2006).

## 2.2 Η διαφορά πλαισίου

### Από τους κόκκους της άμμου στα pixel της οθόνης

Τα εργαλεία δεν προσφέρουν απλώς μία βοήθεια στους ανθρώπους. Μερικές φορές μπορούν να διευκολύνουν ή να εξαναγκάσουν την οικοδόμηση συγκεκριμένων αντιλήψεων (Herbst & Gonzalez, 2009).

Οι αρχαίοι γεωμέτρεις προσπαθούσαν να βρουν λύσεις στα προβλήματα που αντιμετώπιζαν με τα μέσα που διέθεταν. Η γεωμετρία τους ήταν η γεωμετρία της άμμου, γιατί η άμμος ήταν ο δικός τους «πίνακας» ή το «χαρτί» ή η «οθόνη» που δεν είχαν, πάνω στην οποία μπορούσαν να σχεδιάζουν, να σβήνουν και να ξανασχεδιάζουν με σχετική ευκολία και ταχύτητα.

Το μέσο όμως καθορίζει και τα εργαλεία. Σχεδιάζεις ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην άμμο. Πώς το «μεταφέρεις» δίπλα; Πώς σχεδιάζεις πάνω στην άμμο ένα «ίσο» με αυτό τμήμα; Ο διαβαθμισμένος κανόνας έτσι όπως εμείς τον γνωρίζουμε δεν υπήρχε, και η μέτρηση, η σύγκριση δηλαδή με κάποιο κοινό μέτρο, δεν ήταν αποδεκτή και αξιόπιστη λύση. Η λύση σ' αυτό το πρόβλημα ήταν «ο κανόνας» και ο «διαβήτης». Ιδού λοιπόν τα εργαλεία.

Τα εργαλεία πάλι, επηρεάζουν και σε μεγάλο βαθμό διαμορφώνουν τον τρόπο σκέψης. Αν σχεδιάσεις ένα τρίγωνο πάνω στην άμμο, πώς μπορείς να σχεδιάσεις ένα «ίσο» τρίγωνο δίπλα; Ή πώς μπορείς συγκρίνεις δύο τρίγωνα πάνω στην άμμο και να είσαι σίγουρος ότι είναι ίσα; Ποιες είναι οι ελάχιστες απαιτούμενες ενέργειες; Δεν είναι πάνω σε χαρτί. Δεν μπορείς να τα «κόψεις», ούτε να τα «περιστρέψεις», ούτε να τα «επικολλήσεις». Να, λοιπόν γιατί η ευκλείδεια γεωμετρία θέσπισε «τα κριτήρια ισότητας» δύο τριγώνων. Πώς όμως μπορείς να σχεδιάσεις μία γωνία ίση με μία άλλη, πάνω στην άμμο; Δεν υπάρχει μοιρογνωμόνιο. Μόνο κανόνας και διαβήτης. Να γιατί υπήρξαν οι γεωμετρικές

κατασκευές. Η ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι παρά το απόσταγμα των γνώσεων που αποκτήθηκαν μέσα από την εμπειρία και την προσπάθεια να λυθούν προβλήματα και να απαντηθούν ερωτήματα, το οποίο μάζεψε και έχτισε με μεγάλη αυστηρότητα ο Ευκλείδης, θεμελιώνοντας το πάνω σε κοινές αξίες.

Στη συνέχεια ήρθε η εποχή του χαρτιού και του διαβαθμισμένου κανόνα. Το εργαλείο ή το μέσο άλλαξε όπως και ο τρόπος σκέψης. Γεννιέται το καρτεσιανό επίπεδο και η αναλυτική γεωμετρία.

Σήμερα είμαστε στην εποχή της ψηφιακής τεχνολογίας. Οι κόκκοι της άμμου αντικαταστάθηκαν από τα pixel της οθόνης. Σε κάθε αντικατάσταση το νέο μέσο ενσωματώνει τα προηγούμενα εργαλεία και προσθέτει καινούρια. Τα καινούρια εργαλεία δημιουργούν νέες δυνατότητες και παράγεται νέα γνώση. Ήδη, για παράδειγμα, με τη βοήθεια της ψηφιακής τεχνολογίας δημιουργήθηκε η γεωμετρία των fractals. Αυτή δεν θα μπορούσε να έχει δημιουργηθεί ούτε στην άμμο, ούτε στο χαρτί («άπειρος» αριθμός βημάτων, ακρίβεια του pixel)(Χατζηκυριάκου, 2004).

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, έφεραν την γεωμετρία, σε εκπαιδευτικό επίπεδο, και πάλι στο προσκήνιο. Καλούμαστε λοιπόν να διδάξουμε την ίδια γεωμετρία, τη γεωμετρία του κανόνα και του διαβήτη, χωρίς κανόνα και διαβήτη. Τα εργαλεία μας είναι η οθόνη του υπολογιστή και το «ποντίκι». Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι: *Κάνουμε πραγματικά ευκλείδεια γεωμετρία σ' αυτά τα λογισμικά;*

Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας περιλαμβάνουν εργαλεία με τα οποία μπορεί κανείς να προσομοιώσει τον παλιό τρόπο εργασίας με κανόνα και διαβήτη. Υπό αυτήν την έννοια θα μπορούσε να πει κανείς ότι μπορούμε να κάνουμε ευκλείδεια γεωμετρία. Από την άλλη όμως προσφέρουν δυνατότητες όπως η μέτρηση και ο δυναμικός μετασχηματισμός που ξεφεύγουν, ειδικά η μέτρηση, από την ευκλείδεια πρακτική και λογική. Επομένως θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η χρησιμοποίηση τέτοιων εργαλείων και μεθόδων καθιστά αυτά τα περιβάλλοντα ακατάλληλα για την διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα πολλών ερευνητών αναδεικνύουν το εξής: Παρ' όλο που η «μέτρηση» και ο δυναμικός μετασχηματισμός δεν συμβαδίζουν με την ευκλείδεια θεωρία, είναι αυτά ακριβώς που μπορούν να εξαναγκάσουν τους

μαθητές και τις μαθήτριες να καταφύγουν στην ευκλείδεια επιχειρηματολογία και πρακτική προκειμένου να επικυρώσουν μια κατασκευή ή μία λύση.

### *Ο δυναμικός μετασχηματισμός (dragging)*

Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα των περιβαλλόντων δυναμικής γεωμετρίας είναι ακριβώς αυτή η δυναμικότητά τους, δηλαδή η λειτουργία του «συρσίματος» (dragging). Σύμφωνα με τους Goldenberg & Cuoco, το «dragging» είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός σε πραγματικό χρόνο (Goldenberg & Cuoco, 1998). Είναι η δυνατότητα που σου παρέχουν αυτά τα λογισμικά, να «τραβήξεις» τις κορυφές ενός σχήματος και να το μετασχηματίσεις. Το σχήμα στο χαρτί είναι στατικό. Το στατικό σχήμα έχει μία διπλή, διαφορούμενη φύση. Από τη μια ένα στατικό σχήμα αναπαριστά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο και από την άλλη αντιπροσωπεύει γενικά χαρακτηριστικά μιας ολόκληρης κλάσης τέτοιων αντικειμένων (Mariotti, 2000). Δεν είναι καθόλου σίγουρο όμως ότι οι μαθητές το βλέπουν έτσι. Φαίνεται πως όταν αποδεικνύεται στην τάξη μία ιδιότητα ενός γεωμετρικού αντικειμένου, βάση ενός σχήματος, μερικά παιδιά νομίζουν ότι αυτό ισχύει για μία περίπτωση, αυτή που φαίνεται στο σχήμα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη (Chazan, 1993). Με το «σύρσιμο» όμως, οι μαθητές μπορούν να αλλάξουν το σχήμα και να «δουν» ποιες ιδιότητες μένουν αναλλοίωτες.

Σύμφωνα με την Laborde, όταν οι μαθητές ψάχνουν για αναλλοίωτες ιδιότητες που προκύπτουν μετά το «σύρσιμο» του σχήματος, συνδυάζουν την οπτική-πραγματιστική αντίληψη με τη θεωρητική κατανόηση των γεωμετρικών σχέσεων (Laborde, 2005). Οι δύο βασικές λειτουργίες λοιπόν, που προσφέρει το «σύρσιμο», είναι: ο «έλεγχος» (test mode) και «η διερεύνηση» (search mode). Με την πρώτη οι μαθητές «ελέγχουν» την κατασκευή για να δουν αν διατηρεί αναλλοίωτες τις ιδιότητες του ενώ με τη δεύτερη, οι μαθητές «ερευνούν» να βρουν τις ιδιότητες που μένουν αναλλοίωτες κι αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εξηγήσουν και το *γιατί* μένουν αναλλοίωτες (Hollebrands, 2007).

Η μεγαλύτερη ανησυχία των ερευνητών είναι ότι αυτή ακριβώς η διαπιστωτική λειτουργία του «συρσίματος», εξασθενεί την ανάγκη απόδειξης, βλέπε (Laborde, 2000) και οι μαθητές πέφτουν στον «αφελή εμπειρισμό» (βλέπε

Balacheff, 1988), δηλαδή παρατηρώντας κάποια ιδιότητα που μένει αναλλοίωτη μετά το «σύρσιμο», γενικεύουν με ευκολία το συμπέρασμα για *όλες* τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα, σχεδιάζοντας με τη βοήθεια του λογισμικού ένα τρίγωνο καθώς και τα ύψη του, οι μαθητές διαπιστώνουν ότι τα ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Σύροντας τις κορυφές του τριγώνου, παρατηρούν ότι τα ύψη εξακολουθούν να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Για τους μαθητές αυτό είναι μία επαρκής «απόδειξη» ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει σε *όλα τα τρίγωνα*. Επομένως μία τέτοια δραστηριότητα δεν βοηθάει τους μαθητές να μεταβούν από την απλή οπτική, πραγματιστική αντίληψη στον συνθετικό, παραγωγικό συλλογισμό. Αυτό που θα κάνει τη διαφορά, είναι ο τρόπος με τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα περιβάλλοντα. Αντί λοιπόν, να τα χρησιμοποιούμε ως μέσο επιβεβαίωσης της όποιας γεωμετρικής αλήθειας, θα πρέπει να δημιουργούμε κατάλληλες ερευνητικές δραστηριότητες που είτε θα γεννούν αμφιβολίες και αβεβαιότητα σε ισχυρισμούς που βασίστηκαν στην απλή πραγματιστική αντίληψη (Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000), είτε που θα προκαλούν την σύγκριση και την αντιπαραβολή με τρόπο ώστε να μπορεί να αναγνωστεί πιο εύκολα η σημαντικότητα μιας γεωμετρικής θέσης (βλέπε Hölzl, 2001).

### *Τα εργαλεία μέτρησης*

Το άλλο αμφισβητούμενο πεδίο στα δυναμικά περιβάλλοντα μάθησης που εγείρει ανησυχίες είναι τα εργαλεία μέτρησης. Αυτά τα λογισμικά παρέχουν εργαλεία μέτρησης με τα οποία με ένα μόνο κλικ μπορείς να μετρήσεις το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, το μέτρο μιας γωνίας, την περίμετρο ή το εμβαδό ενός πολυγώνου. Αυτό οδηγεί λοιπόν τους μαθητές στον εύκολο δρόμο της σύγκρισης δύο γεωμετρικών αντικειμένων με βάση τις μετρήσεις. Αυτό δηλαδή που δεν έκανε ο Ευκλείδης. Αν θέλει κάποιος να συγκρίνει δύο χωρία ως προς το εμβαδόν τους, δεν έχει παρά να τα μετρήσει και να διαπιστώσει ότι είναι ίσα. Γιατί να θέλει ένας μαθητής κάποια παραπάνω απόδειξη γι' αυτό;

Ερευνητές αναφέρουν ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν τις μετρήσεις με δύο τρόπους, ακριβώς όπως και στην περίπτωση του 'dragging'. Ο ένας για να διατυπώσουν μια εικασία κι ο άλλος επαληθευτικά ή ελεγκτικά για να δουν ότι

όντως η κατασκευή τους έχει τις ποθούμενες ιδιότητες (Hollebrands, 2007; Olivero & Robutti, 2007). Οι απόψεις των ερευνητών πάνω στο θέμα των μετρήσεων είναι αντιφατικές. Από τη μια ανησυχούν ότι οι μετρήσεις εμποδίζουν τους μαθητές να αναπτύξουν τον παραγωγικό συλλογισμό κι από την άλλη βλέπουν σε αυτές μία δυνατότητα. Η Laborde από τη μια σ' ένα άρθρο της αναφέρει ότι οι μετρήσεις δεν βοηθούν τους μαθητές να προχωρήσουν μπροστά στην επίλυση προβλημάτων (Laborde, 2002) κι από την άλλη σε μεταγενέστερο άρθρο διαπιστώνει ότι οι μετρήσεις βοηθούν ώστε οι μαθητές να μεταβαίνουν από το χωρο-γραφικό πεδίο στο θεωρητικό πεδίο και αντίστροφα (Laborde, 2005). Ο Herbst, παρ' όλο που αναγνωρίζει ότι η μέτρηση αντιτίθεται στον τρόπο και την φιλοσοφία της ευκλείδειας γεωμετρίας, ισχυρίζεται ότι η μέτρηση μπορεί να γίνει ο σπόρος μιας «αιτιολογημένης εικασίας» και η γέφυρα ανάμεσα στον εμπειρικό ισχυρισμό και την θεωρητική τεκμηρίωση (Herbst & Gonzalez, 2009).

Η σύγκριση δύο μεγεθών σ' ένα λογισμικό με βάση τα εργαλεία μέτρησης του ίδιου λογισμικού, μπορεί να οδηγήσει σε αντιφατικά αποτελέσματα που θα αναγκάσουν τους μαθητές να καταφύγουν σε πιο ασφαλή μέσα που είναι ο παραγωγικός συμπερασμός. Ούτε λίγο ούτε πολύ, αυτό που ισχυρίζονται οι Olivero & Robutti είναι: αφήστε τους να μετράνε! Αργά ή γρήγορα θα καταλάβουν ότι δεν μπορούν να εμπιστευτούν τις μετρήσεις ως μέσο επικύρωσης μιας αλήθειας γιατί υπόκεινται σε περιορισμούς. Στο άρθρο τους παρουσιάζουν τρεις διαφορετικές καταστάσεις, όπου τα ίδια εργαλεία που βοήθησαν τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία, τα ίδια τους την ακύρωσαν. Έτσι οι μαθητές αναγκάστηκαν να προσεγγίσουν το θέμα με μία «θεωρητική ματιά» (βλέπε Olivero & Robutti, 2007). Αυτός δεν είναι άλλωστε και ο δρόμος που ακολούθησε η ανθρώπινη σκέψη μέχρι να φτάσει στο επίπεδο της αυστηρής θεωρητικής απόδειξης; Για να οδηγήσουμε λοιπόν κι εμείς τους μαθητές μας στο σημείο όπου θα αναγνωρίσουν την αναγκαιότητα της επιβεβαίωσης ενός ισχυρισμού μέσω της λογικής, πρέπει να διαπιστώσουν μόνοι τους την ανεπάρκεια της εμπειρικής επαλήθευσης και σύγκρισης με βάση τη μέτρηση.

Η μέτρηση είναι ανεπαρκής για την σύγκριση δύο μεγεθών, σύμφωνα με την σοφία της ευκλείδειας γεωμετρίας γιατί υπόκειται σε φυσικούς περιορισμούς και είναι προσεγγιστική. Στο ευκλείδειο επίπεδο ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις, (*Σημεῖον ἔστιν, οὐ μέρος οὐθέν*) ενώ στην οθόνη του υπολογιστή ένα σημείο έχει τις ἔστω και μικρές διαστάσεις ενός pixel. Η γραμμή στο ευκλείδειο επίπεδο έχει ορισμένο μήκος (αλλά μπορεί να επεκταθεί όσο είναι αναγκαίο) και μηδενικό πλάτος (*Γραμμὴ δὲ μῆκος ἄπλατές*), ενώ στον υπολογιστή έχει μήκος τόσο όσο επιτρέπει το πλαίσιο της οθόνης και πλάτος αυτό του pixel. Οι υπολογισμοί στον υπολογιστή δεν έχουν άπειρη ακρίβεια αλλά είναι προσεγγίσεις, η ακρίβεια των οποίων περιορίζεται από τις διαστάσεις του pixel στην οθόνη. Ἐστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος της διαγωνίου ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου. Εμείς γνωρίζουμε ότι το μήκος της διαγωνίου είναι ἄρρητος αριθμός. Το εργαλείο της μέτρησης όμως θα μας δώσει μία τιμή που θα είναι μια προσέγγιση του ἄρρητου αυτού αριθμού, με ακρίβεια δεκαδικών ὅση του ἔχει επιτρέψει ο κατασκευαστής. Ὅση ακρίβεια όμως κι αν ἔχει δεν θα φτάσει ποτέ την πραγματική τιμή του μήκους. Αυτό μπορεί να οδηγήσει λοιπόν στη διαπίστωση μέσω του λογισμικού ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ἴσα, ενώ εμείς γνωρίζουμε ότι δεν είναι. Μετρήσεις βέβαια γίνονται και στο χαρτί με τη χρήση ενός χάρακα. Ὅμως εκεί οι μαθητές επειδή εκτελούν μόνοι τους τη μέτρηση και ενδεχομένως ἔχουν μεγαλύτερη συναίσθηση του σφάλματος που εμπεριέχεται στη μέτρηση σε σχέση με τη μέτρηση μέσω του Η/Υ, πράγμα που δεν αντιλαμβάνονται στο λογισμικό αφού δεν ἔχουν αυτοί τον ἔλεγχο των υπολογισμών.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνει κανείς πως τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας δεν είναι ικανά από μόνα τους να βελτιώσουν την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και ιδεών. Ούτε μπορούν από μόνα τους να αλλάξουν χρόνια εδραιωμένες διδακτικές πρακτικές. Οι καθηγητές χρειάζονται αρκετή εκπαίδευση ὥστε να μπορούν να ενσωματώσουν τα νέα αυτά τεχνολογικά εργαλεία χωρίς να διακινδυνεύεται το βάθος της γνώσης (Laborde, 2002). Οι ερευνητές πρέπει να συνεχίσουν να διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μαθαίνουν με τη χρήση των νέων εργαλείων. Από ότι φαίνεται πάντως, η εμπλοκή των μαθητών σε κατάλληλα επιλεγμένες δραστηριότητες μαζί με την



αξιοποίηση της βοήθειας και των ευκολιών που προσφέρουν αυτά τα λογισμικά μπορούν να τους βάλουν σε μία τροχιά πραγματικής μάθησης.

### 2.3 Η «απόδειξη» στα ψηφιακά περιβάλλοντα

Ο σκοπός και η σημασία της διδασκαλίας της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας στο λύκειο, έχει άλλοτε αμφισβητηθεί κι άλλοτε υποστηριχθεί από εκπαιδευτικούς και αναλυτές τα προηγούμενα χρόνια. Τη δεκαετία 1990-2000, τα σημαντικότερα περιοδικά μαθηματικής εκπαίδευσης είχαν δημοσιεύσει πάνω από εκατό αναλύσεις και έρευνες πάνω σε αυτό το θέμα. Το International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, το οποίο ο Nicolas Balacheff διατηρεί ως ιστότοπο στο διαδίκτυο από το 1997 και ενημερώνεται έξι φορές το χρόνο, είχε 5000 επισκέψεις μέσα σε τρία χρόνια. Το παραπάνω site δημοσιεύει αποτελέσματα θεωρητικών αλλά και εμπειρικών ερευνών σχετικά με την έννοια «μαθηματική απόδειξη». Τα παραπάνω δείχνουν ότι η «απόδειξη», είναι ένα προεξέχων θέμα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Hanna, 2000).

Η απόδειξη είναι η βάση της μαθηματικής πειθαρχίας αλλά και θεμελιώδες δομικό στοιχείο του πλαισίου μέσα στο οποίο αναπτύσσονται τα μαθηματικά. Είναι ο «τρόπος» με τον οποίο οι μαθηματικοί νομιμοποιούν και επικυρώνουν την «αλήθεια» μιας πρότασης. Όταν μία πρόταση έχει αποδειχθεί, τότε ξέρουμε ότι αυτή ισχύει για μια ολόκληρη κατηγορία αντικειμένων πάντα και χωρίς εξαιρέσεις. Για μια κατηγορία με άπειρο πλήθος μελών! Για παράδειγμα, από τότε που αποδείχθηκε το πυθαγόρειο θεώρημα, ξέρουμε ότι ισχύει *για όλα* τα ορθογώνια τρίγωνα του κόσμου και όχι για μερικά.

Η απόδειξη φαίνεται πως γεννήθηκε στον ελληνικό πολιτισμό πριν από 2500 χρόνια περίπου. Οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί και φιλόσοφοι διαφοροποιήθηκαν από τους Βαβυλώνιους και Αιγύπτιους, γιατί αρνήθηκαν τη *διαίσθηση* ως επαρκή νομιμοποίηση μιας μαθηματικής αλήθειας και απέρριψαν *την αριθμητική επαλήθευση* ως μέθοδο απόδειξης. Απαίτησαν λοιπόν κάτι περισσότερο: τη *θεωρητική απόδειξη* (Guedj, 1999 ).

Οι μαθητές μας όμως έχουν την ίδια αντίληψη σχετικά με την πρωταρχική σημασία και το σκοπό ύπαρξης της «θεωρητικής -αυστηρής-μαθηματικής

απόδειξης»; Η διεθνής βιβλιογραφία δείχνει πως όχι. Οι μαθητές δεν μπορούν να διακρίνουν την κρίσιμη διαφορά ανάμεσα στον εμπειρικό και στον παραγωγικό συμπερασμό και γενικά δείχνουν να προτιμούν την νομιμοποίηση μιας πρότασης μέσω παρατήρησης κάποιων παραδειγμάτων παρά μέσω της αυστηρής μαθηματικής λογικής. (Chazan, 1993; Balacheff, 1988; Martin & Harel, 1989; Porteous, 1991). Για πολλούς μάλιστα, η επαγωγική απόδειξη δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα αποδεικτικό στοιχείο για μία περίπτωση, αυτή που φαίνεται στο σχήμα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη (Chazan, 1993).

Η απόδειξη δεν γίνεται αντιληπτή ως μέρος της επίλυσης ενός προβλήματος αλλά θεωρείται ευρέως ανάμεσα στους μαθητές ως ένα άσχετο, ένα «πρόσθετο» της διαδικασίας (Hoyles & Jones, 1998). Αυτό επιβεβαιώνεται και από παρατηρήσεις που έδειξαν ότι κάποιοι μαθητές, παρ' ότι έχουν διδαχθεί την απόδειξη ενός θεωρήματος, επιζητούν την εμπειρική επαλήθευσή του, παρ' όλο που ισχυρίζονται ότι έχουν καταλάβει την απόδειξη (Fischbein, 1982). Σε αυτό συνηγορούν και οι Miyakawa και Herbst, οι οποίοι διαχωρίζουν τις έννοιες: «Αποδεικνύω ένα θεώρημα» έναντι του «Εδραιώνω ένα θεώρημα». Η αλήθεια ενός θεωρήματος, υποστηρίζουν, αντίθετα από τη συνήθη πρακτική των ερευνητών-μαθηματικών, δεν εδραιώνεται στα μάτια των μαθητών μέσα από την απόδειξη (Miyakawa & Herbst, 2007).

Οι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στο να παράγουν ολοκληρωμένες αποδείξεις (Martin & McCrone, 2003) και γενικά θα έλεγε κανείς πως οι προσπάθειες, τα προηγούμενα χρόνια, να διδάξουμε την τυπική μαθηματική απόδειξη σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (συνήθως σε περιορισμένο χρονικό διάστημα) δεν ήταν πετυχημένες (Clements & Battista, 1992).

Έτσι, από ερευνητές και εκπαιδευτικούς αμφισβητήθηκε έντονα η αναγκαιότητα ύπαρξης της τυπικής φορμαλιστικής απόδειξης στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Κάποιοι μάλιστα ισχυρίστηκαν ότι η απόδειξη είναι περισσότερο μια αγγαρεία κι ένα εμπόδιο στην κατανόηση παρά ο δρόμος που οδηγεί σε αυτή (Hanna, 2000). Στο παραπάνω άρθρο η Hanna, αναφέρει την άποψη κάποιων εκπαιδευτικών ότι: «*η στείρα απομνημόνευση μαθηματικών αποδείξεων στερείται οποιασδήποτε*

*εκπαιδευτικής αξίας*» (p. 10). Κάποιοι μαθητές αλλά και καθηγητές, δεν καταλαβαίνουν γιατί οι μαθηματικοί δίνουν τόση έμφαση στις αποδείξεις (Davis & Hersh, 1981). Αν η τυπική μαθηματική απόδειξη παρουσιάζεται ως ένας τρόπος να επιδείξουμε κάτι για το οποίο οι μαθητές έχουν ήδη πειστεί ότι ισχύει, η απόδειξη είναι πιθανό να παραμείνει ως μία ανώφελη δραστηριότητα (Hanna & Jahnke, 1993).

Όλα αυτά οδήγησαν στην υποβάθμιση έως και στην εξαφάνιση της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης από το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών κάποιων χωρών, ειδικά της γεωμετρίας. Μέχρι το 1989, η ιδέα της «απόδειξης» είχε εξαφανιστεί από το εκπαιδευτικό πρόγραμμα των Η.Π.Α. (Greeno, 1994), ή είχε ξεπέσει σε μία τελετουργία χωρίς νόημα (Wu, 1996). Τη δεκαετία του 1990 η «απόδειξη» έχασε έδαφος και στο Ηνωμένο Βασίλειο. Κάποιοι εκπαιδευτικοί πείστηκαν ότι η απόδειξη αποτελούσε εμπόδιο στην διερευνητική και δημιουργική μάθηση και ότι ήταν αντίθετη εξ' ορισμού στο πνεύμα ανακάλυψης και εξερεύνησης το οποίο διαπερνούσε το αναλυτικό πρόγραμμα στο Ηνωμένο Βασίλειο για πολλά παρελθόντα έτη (Noss, 1994). Έτσι τη θέση του συμπερασμού πήραν η αιτιολόγηση, οι ευρετικές, η ανακάλυψη, «το οφθαλμοφανές», ο εμπειρισμός, το πείραμα. Ό,τι δηλαδή είχαν απορρίψει οι αρχαίοι Έλληνες ως επαρκή νομιμοποίηση. Ξαναγυρίσαμε στην αρχή.

Απέναντι σ' αυτή την τάση πάντως, υπήρξαν και αυτοί που αντιτάθηκαν. Για παράδειγμα, η Μαθηματική Ένωση του Λονδίνου, το Ινστιτούτο Μαθηματικών Εφαρμογών καθώς και η Βασιλική Στατιστική Εταιρεία, εξέφρασαν ανοιχτά την ανησυχία τους για το τι θα σήμαινε η αλλαγή της αντίληψης για το τι είναι τα μαθηματικά, ειδικά σε ό,τι είχε να κάνει με την ουσιώδη θέση που κατέχουν η απόδειξη και η ακρίβεια. Την ανησυχία αυτή εξέφρασαν και άλλοι ερευνητές και εκπαιδευτικοί, καθώς και Πανεπιστημιακοί που άσκησαν κριτική απέναντι στο σχολείο που αδυνατούσε να προετοιμάσει επαρκώς τους μαθητές για σπουδές στα μαθηματικά σε πανεπιστημιακό επίπεδο (Hanna, 2000).

Η ανησυχία και ο φόβος σχετικά με αυτήν την τάση υπέρ της αιτιολογημένης διαισθητικής εικασίας χωρίς απόδειξη έναντι της αυστηρής

απόδειξης δεν φωλιάζει μόνο στην κοινότητα των ερευνητών εκπαιδευτικών. Υπάρχει πρωτίστως μέσα στους κόλπους των ερευνητών μαθηματικών. Οι Jaffe & Quinn, σ' ένα άρθρο τους στο *Bulletin of the American Mathematical Society*, αναγνωρίζουν αυτή την τάση και επισημαίνουν τους κινδύνους. Ομολογούν παρ' όλα αυτά ότι ίσως είναι η αρχή μιας αλλαγής εκ θεμελίων στον τρόπο οργάνωσης των μαθηματικών (Jaffe & Quinn, 1993). Η πρόκληση είναι μεγάλη. Ο ρυθμός εξέλιξης της πληροφορικής είναι ιλιγγιώδης και όλο και περισσότεροι είναι αυτοί που εγκαταλείπουν ως τρόπο νομιμοποίησης μιας θεωρίας την δοκιμασμένη μεν στην χρονική χοάνη, αλλά συντηρητική δε, αυστηρή, διαλεκτική, γραμμική, παραγωγική απόδειξη και δοκιμάζουν την ανάλυση των δεδομένων και την επικύρωσή τους στο προσομοιωμένο ψηφιακό περιβάλλον ενός υπολογιστή. Στο άρθρο ανταπαντούν δεκαπέντε διακεκριμένοι μαθηματικοί. Ανάμεσα σε αυτούς και ο Benoit B. Mandelbrot, ο οποίος με ιδιαίτερα οργισμένο ύφος χαρακτηρίζει το άρθρο των Jaffe & Quinn ανατριχιαστικό διότι θεωρεί ότι υπάρχουν προβλήματα για την επίλυση των οποίων, η μαθηματική ακρίβεια είναι τουλάχιστον ενοχλητική αν όχι διασπαστική και εκτός θέματος, ακόμη κι όταν είναι εφικτή. Συνεχίζει λέγοντας πως η συντηρητική άποψη των Jaffe & Quinn, αν επικρατήσει, θα μας στερήσει έναν μελλοντικό Poincaré ή έναν Levis (στο Atiyah et al., 1994).

Η διαμάχη ανάμεσα στους φανατικούς υποστηρικτές των νέων τεχνολογιών και τους υποστηρικτές της κλασσικής αυστηρότητας, καλά κρατεί. Νομίζω όμως πως όλοι καταλαβαίνουν ότι βρισκόμαστε στο κατώφλι μιας νέας εποχής. Η τεχνολογία είναι εδώ, λύνει προβλήματα αλλά όπως τίποτα δεν είναι αμιγώς καλό, αφού μαζί με τις νέες λύσεις φέρνει και νέα προβλήματα. Είμαστε εδώ για να τα αντιμετωπίσουμε. Δεν μπορούμε όμως να αρνηθούμε τη χρήση της ή τη βοήθειά της σαν να μην υπάρχει ή σαν να είναι ο καρπός του απαγορευμένου δέντρου. Σ' αυτό το πνεύμα ανταπαντά και ο Michael Atiyah, καθηγητής του Trinity College του Cambridge στο παραπάνω άρθρο των Jaffe & Quinn που υποστηρίζουν ότι οι γεωμέτρεις παρασύρθηκαν από την πρακτική των φυσικών επιστημών: *«Νομίζω αυτή η στάση είναι πολύ προστατευτική. Εμείς οι γεωμέτρεις αισθανόμαστε απόλυτα ικανοί να υπερασπιστούμε την αρετή μας»* (Atiyah et al., 1994: p. 179). Συντηρητισμός και προοδευτισμός μάχονται

άένα. Κανένα δεν είναι καλό χωρίς το άλλο. Τα χρειαζόμαστε και τα δύο. Στο άρθρο της η Hanna αναφέρει την σύμφωνη γνώμη πολλών μαθηματικών ερευνητών, δασκάλων και πανεπιστημιακών, ότι: *«Είναι επιτακτική η ανάγκη να κάνουμε μία σαφή διάκριση ανάμεσα στην σωστή απόδειξη και σ' ένα επιχείρημα που βασίζεται σε ευρήματα. Η εγκυρότητα και η αξιοπιστία των μαθηματικών αποτελεσμάτων τελικά βασίζεται πάνω στην απόδειξη»* (Hanna 2000, p. 12). Η άποψη αυτή δεν διαφέρει και πολύ από αυτή των Jeffe & Quinn, που πρότειναν αυτόν τον διαχωρισμό. Αλλά αν θέλει κανείς να ταξιδέψει και να ανακαλύψει νέους κόσμους, θα αφήσει αναγκαστικά την ασφάλεια του σπιτιού που με κόπο έχτισε, γνωρίζοντας πως στο δρόμο του μπορεί να συναντήσει κινδύνους πρωτόγνωρους. Ο Atiyah λέει: *«Αν τα μαθηματικά θέλουν να ανανεωθούν και να ανακαλύψουν νέα συναρπαστική γη, θα πρέπει να επιτρέψουν την εξερεύνηση με νέες ιδέες και τεχνικές που στην αρχή, στην δημιουργική τους φάση, θα είναι πιθανότατα το ίδιο αμφίβολες όσο ήταν και σε άλλες σπουδαίες εποχές στο παρελθόν»*. Και καταλήγει : *«Αυτό που συμβαίνει στα σύνορα γεωμετρίας-φυσικής, και στο οποίο είμαστε μάρτυρες, είναι ένα από τα πιο αναζωογονητικά γεγονότα στα μαθηματικά του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Οι διακλαδώσεις είναι αχανείς και την τελική φύση και έκταση αυτού τώρα αναπτύσσεται δεν μπορούμε να την διακρίνουμε παρά ελάχιστα. Μπορεί να κυριαρχήσει στα μαθηματικά του 21<sup>ου</sup> αιώνα. Δεν αμφιβάλλω πως τη νέα γενιά την έχει ήδη προσελκύσει, αλλά οι Jeffe & Quinn έχουν δίκιο να εγείρουν σήματα κινδύνου για τους μελλοντικούς μαθητές. Γι' αυτούς λοιπόν που επιδιώκουν μία στέρεη και ασφαλή θέση, αυτό το πεδίο είναι επικίνδυνο, γι' αυτούς που επιθυμούν τη δράση και την συγκίνηση, πρέπει να είναι ακαταμάχητο»*.

Παρ' όλη την περιπλάνηση ή αποπλάνηση ή παραπλάνηση, ανάλογα με το τι θέση παίρνει κανείς, ο μαθηματικός κόσμος, οι ερευνητές καθώς και η εκπαιδευτική κοινότητα δεν μπόρεσε για πολύ να αγνοήσει το γεγονός ότι η απόδειξη είναι η θεμέλια λίθος της μαθηματικής επιστήμης. Πώς θα μπορούσε λοιπόν να λείπει από τη διδασκαλία των μαθηματικών; Την αφορμή για την δυναμική της επαναφορά στην διδακτική πρακτική, την έδωσε, τι ειρωνεία, η τεχνολογία! Με την εμφάνιση των δυναμικών περιβαλλόντων μάθησης, αναζωπυρώθηκε το ενδιαφέρον για την απόδειξη και τις γεωμετρικές

κατασκευές. Στα νέα αυτά περιβάλλοντα, οι μαθητές μπορούν πλέον να σχεδιάζουν με μεγάλη ακρίβεια. Αυτό τους διευκολύνει να «δουν» τη σημασία των προτάσεων. Μπορούν επίσης να «ελέγξουν» μια εικασία εξερευνώντας τις ιδιότητες της κατασκευής που έχουν κάνει ή ακόμη και να ανακαλύψουν νέες ιδιότητες. Η γεωμετρική εξερεύνηση σ' ένα τέτοιο περιβάλλον περιλαμβάνει εξερεύνηση, επίδειξη, κατασκευή, προβληματισμό.

Από την άλλη όμως οι ίδιες ανησυχίες που εγέρθηκαν στον κόλπο των ερευνητών μαθηματικών, μεταφέρθηκαν και στην εκπαιδευτική κοινότητα. Ακριβώς επειδή αυτά λογισμικά παρέχουν πολλές ευκολίες και εργαλεία μέτρησης, η ανησυχία είναι ότι οι μαθητές ακόμα περισσότερο τώρα από ποτέ, θα «πέσουν» όπως αναφέραμε και παραπάνω στον «αφελή εμπειρισμό». Ο αφελής εμπειρισμός είναι η νομιμοποίηση της αλήθειας ενός ισχυρισμού ύστερα από την επαλήθευσή της σε μερικές περιπτώσεις (Balacheff, 1988). Ο μεγαλύτερος προέρχεται από το γεγονός ότι ακριβώς επειδή τέτοια περιβάλλοντα δίνουν στους μαθητές την ευκαιρία να «δουν» κάποιες ιδιότητες τόσο εύκολα, εξαλείφεται η ανάγκη απόδειξης (Laborde, 2000). Οι Martin και McCrone επισημαίνουν την ανάγκη να υπάρξει εκπαιδευτική έρευνα γύρω από την παιδαγωγική πλευρά της απόδειξης (Martin & McCrone, 2003). Η Hanna προτείνει πως ο καθηγητής ή η καθηγήτρια, έχει ως βασικό καθήκον να αντιληφθεί το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών και να ενισχύσει τη χρήση της μέσα στην τάξη. Οι Hadas, Herschkowitz και Schwartz προτείνουν τη δημιουργία κατάλληλα επιλεγμένων δραστηριοτήτων που γεννούν αμφιβολίες και αβεβαιότητα σε ισχυρισμούς που βασίστηκαν στην απλή πραγματιστική αντίληψη, ως μία καλή ιδέα που προωθεί την αναγκαιότητα της μαθηματικής απόδειξης (Hadas, Herschkowitz & Schwarz, 2000).

Το στοίχημα λοιπόν για τον εκπαιδευτικό στην τάξη είναι όχι να αντικαταστήσει την απόδειξη με την εξερεύνηση αλλά να χρησιμοποιήσει και τα δύο. Να διδάξει κομμάτια των κλασικών μαθηματικών με τρόπο που τα παιδιά να μπορούν να κατανοούν και να μαθαίνουν, αξιοποιώντας τη δυναμική της τεχνολογίας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΙΣΤΟΡΙΑ

---

### 3.1 Αξιοποίηση της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών

*«Μερικές φορές αναγκάζεται κανείς να πει δύσκολα πράγματα, οφείλει όμως να τα πει με τον ευκολότερο τρόπο που μπορεί».*

*G.H. Hardy*

Τα μαθηματικά συχνά θεωρούνται ως μία συλλογή αξιωμάτων, θεωρημάτων και αποδείξεων οργανωμένα με αυστηρή, παραγωγική δομή. Έτσι πολλοί καθηγητές υποθέτουν σιωπηρά πως αν τα παρουσιάσουν στους μαθητές τους με λογική σαφήνεια, οι μαθητές θα τα κατανοήσουν. Αυτή η άποψη έχει πολύ μικρή σχέση με την πραγματικότητα γι' αυτό οι σύγχρονες θεωρίες μάθησης (κονστρουκτιβισμός, κοινωνικο-γνωστικές θεωρίες) υπαγορεύουν ως απαραίτητες διαδικασίες για την κατανόηση της μαθηματικής θεωρίας, τη δοκιμή του λάθους, τη διερεύνηση, τη γνωστική σύγκρουση, κ.ά. Όμως εξίσου απαραίτητη για την κατανόηση της, είναι και η γνώση των συνθηκών και των γεγονότων που οδήγησαν αρχικά σε αυτήν (Brousseau, 1983). Πολλοί μαθητές νομίζουν ότι «*κάνω μαθηματικά*» είναι το να ακολουθεί κανείς τους κανόνες που υπαγόρευσε ο δάσκαλος και ότι «*γνωρίζω μαθηματικά*» σημαίνει ότι θυμάμαι και εφαρμόζω σωστά αυτούς τους κανόνες (Lampert, 1990). Προκειμένου να τροποποιηθούν οι αφελείς απόψεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά, οι καθηγητές θα έπρεπε να δώσουν περισσότερη σημασία και έμφαση στις «ιδέες» των μαθηματικών αλλά και στην προσπάθεια που χρειάζεται για να αυξηθεί η ικανότητα να επιλύει κάποιος προβλήματα (Mason, 2003).

Κάτω από αυτό το πρίσμα, η ιστορία των μαθηματικών ως ένα μέσο με το οποίο μπορεί να δείξει κανείς, τι σημαίνει «*κάνω μαθηματικά*», μπορεί ίσως να παίξει ένα σημαντικό ρόλο. Έτσι, τα τελευταία χρόνια υπάρχει ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον για το ρόλο αυτό στην διδασκαλία και στην μάθηση των μαθηματικών. Το 1997, το International Commission on Mathematics Instruction

(ICMI), συνέστησε μία μελέτη γι' αυτό το θέμα προκαλώντας μία διεθνή συζήτηση τα αποτελέσματα της οποίας δημοσιεύτηκαν το 2000 (Fauvel & Van Maanen, 1997; Katz, Dorier, Bekken & Sierpinska, 2000). Πολύς κόσμος σ' όλο τον κόσμο, συνεισέφερε στη συζήτηση καθώς και στην καλύτερη κατανόηση γύρω από αυτό. Τέθηκαν πολλά ερωτήματα στη βάση αυτής της συζήτησης τα οποία μπορεί κανείς να τα ταξινομήσει σε δύο βασικές κατηγορίες. Η μία αφορά το ερώτημα «*Γιατί να ανακατέψουμε την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους;*» Και η δεύτερη : «*Πώς μπορεί να γίνει αυτό;*»

Για την πρώτη ερώτηση υπάρχουν επιχειρήματα τόσο υπέρ όσο και κατά. Ο Thomas Jankvist διαχωρίζει τα θετικά επιχειρήματα υπέρ της ιστορίας πάλι σε δύο κατηγορίες. «*Η ιστορία ως εργαλείο*» και «*η ιστορία ως αυτοσκοπός*» (Jankvist, 2009). Σχετικά με την άποψη «*η ιστορία ως εργαλείο*», έχουν αναπτυχθεί στη διεθνή βιβλιογραφία τα επόμενα επιχειρήματα.

### 3.2 Τα επιχειρήματα 'υπέρ' της Ιστορίας

#### 3.2.1 Επιχειρήματα της άποψης «*Η ιστορία είναι εργαλείο*»

##### *Η ιστορία ως ενισχυτής κινήτρων ή ως πηγή έμπνευσης*

Η ιστορία μπορεί να δράσει ως διεγερτικός παράγοντας και να βοηθήσει στην συντήρηση του ενδιαφέροντος και του ενθουσιασμού για ένα θέμα (Farmaki & Paschos, 2007). Μπορεί να «*χρωματίσει*» την άποψη του ίδιου του διδάσκοντα, να τονώσει τον ενθουσιασμό του και να τον οδηγήσει σε νέες «*φωτισμένες*» πρακτικές (Russ, 1991). Μπορεί ακόμα να λειτουργήσει ως ένα απόθεμα προβλημάτων και ερωτήσεων τα οποία μπορούν να φανούν χρήσιμα είτε για το περιεχόμενό τους, είτε για τη δυνατότητά τους να κινητοποιήσουν το ενδιαφέρον και να εμπλέξουν το μαθητή (Tzanakis & Arcavi, 2000).

##### *Η ιστορία απομυθοποιεί την «ατσαλάκωτη» εικόνα των μαθηματικών.*

Διαβάζοντας την ιστορία τους, τα μαθηματικά φαίνονται λιγότερο τρομακτικά και δείχνουν ένα «*ανθρώπινο πρόσωπο*» (Russ, 1991; Furinghetti, 2009). Η ιστορική ανάπτυξη των μαθηματικών δείχνει ότι ο αυστηρός αξιωματικός τρόπος οργάνωσης της μαθηματικής πειθαρχίας, έρχεται μόνο αφού επέλθει η



ωριμότητα και γίνεται αναγκαίο να δοθεί μία εκ των υστέρων παρουσίαση της λογικής δομής και ολοκλήρωσης. Καμία μαθηματική ιδέα δεν δημοσιεύτηκε ποτέ στην μορφή που ανακαλύφθηκε. Αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές μετά τη λύση του προβλήματος που έφεραν τα πάνω κάτω στη διαδικασία επίλυσης, έτσι ώστε να μετατρέψουν την καυτή ανακάλυψη σε ψυχρή και άφθαρτη ομορφιά (Freudenthal, στο Tzanakis & Arcavi, 2000). Οι μαθητές, γνωρίζοντας την ιστορία των μαθηματικών, μαθαίνουν να μην αποθαρρύνονται από την αποτυχία, τα λάθη, την αβεβαιότητα ή τις παρανοήσεις αφού μπορούν να διαπιστώσουν ότι όλα τα παραπάνω είναι συστατικά στοιχεία της δουλειάς ακόμα και των σημαντικότερων μαθηματικών στην ιστορία (Tzanakis & Arcavi, 2000). Χαρακτηριστική είναι η στάση πολλών μαθητών οι οποίοι διαχωρίζουν τα σχολικά μαθηματικά από τα αφηρημένα μαθηματικά, για την πειθαρχημένη ανακάλυψη και δημιουργία των οποίων έχουν ακούσει, αλλά ποτέ δεν τη δοκίμασαν. Έτσι θεωρούν ότι τα προβλήματα που έχουν για το σπίτι πρέπει να λύνονται σε λίγα λεπτά. Αν όχι, τότε δεν αξίζει να σπαταλούν το χρόνο τους γιατί ποτέ δεν θα βρουν τη λύση. Συγκεκριμένα πιστεύουν ότι ένα πρόβλημα που δεν μπορεί να λυθεί το πολύ σε 12 λεπτά, είναι αδύνατο (Schoenfeld, 1989).

#### *Η ιστορία βοηθά στην αντιμετώπιση των λαθών και των παρανοήσεων των μαθητών σε συγκεκριμένες έννοιες των μαθηματικών*

Για τους δασκάλους των μαθηματικών η ιστορία μπορεί να θεωρηθεί ένας δείκτης για το βαθμό δυσκολίας κάποιων εννοιών. Έννοιες που και στο παρελθόν οι μαθηματικοί σκόνταψαν επάνω τους, είναι πολύ πιθανό ότι και σήμερα αποτελούν εμπόδιο για τους μαθητές (Bartolini Bussi & Bazzini, 2003; Bakker & Gravemeijer, 2006). Έτσι ο καθηγητής ευαισθητοποιείται σε πιθανές δυσκολίες των μαθητών του να κατανοήσουν ένα θέμα. Υπάρχουν ερευνητές που υποστηρίζουν ότι πίσω από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε κάποιο συγκεκριμένο θέμα, κρύβονται ανάλογες δυσκολίες στην ιστορία. Ένα παράδειγμα αυτού του φαινομένου είναι η δυσκολία που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές σε στοιχειώδες επίπεδο, να κάνουν τη μετάβαση από τους αριθμούς και τις λέξεις σε πιο αφηρημένα προβλήματα όπου η άγνωστη ποσότητα συμβολίζεται με γράμμα. Γνωρίζουμε ότι και ιστορικά υπήρξε

δυσκολία στην εννοιολογική αυτή αλλαγή (Katz, Dorier, Bekken & Sierpinska, 2000).

### *Η οντογένεση και η φυλογένεση*

Από τη άλλη όμως η απλούστευση ή η γενίκευση της παραπάνω άποψης προκαλεί μία μεγάλη συζήτηση γύρω από την πνευματική εξέλιξη του ανθρώπου. Στα τέλη του περασμένου αιώνα ο Δαρβίνος, γράφοντας για την εξέλιξη του ανθρώπινου είδους, διατύπωσε την άποψη ότι η ανάπτυξη οποιουδήποτε ατόμου (οντογένεση) ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου είδους (φυλογένεση). Στη συνέχεια ο γερμανός βιολόγος Ernst Haeckel μετέφερε αυτό τον νόμο της βιολογίας στο πεδίο της ψυχολογίας. Είπε πως η ψυχική ανάπτυξη ενός παιδιού δεν είναι παρά μία σύντομη επανάληψη της φυλογενετικής εξέλιξης. Η ερμηνεία αυτού σε ότι αφορά τα μαθηματικά είναι ότι για να μάθει και να κατέχει κανείς τα μαθηματικά, θα πρέπει το μυαλό του να περάσει τα ίδια στάδια από τα οποία πέρασαν τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους (Jankvist, 2009). Σε ότι αφορά την ιστορία των μαθηματικών, υιοθετώντας κανείς αυτή την άποψη οδηγείται σε μία τελεολογική ανάγνωση. Ότι δηλαδή ό,τι συνέβη, συνέβη γιατί δεν θα μπορούσε να είχε γίνει κάτι διαφορετικό. Οι Piaget και Garcia (Piaget & Garcia, 1989, p.267 αναφορά στο Radford, 2000) αμφισβήτησαν την άποψη ότι υπάρχει μία και μόνη δυνατή γραμμή εξέλιξης σε ότι αφορά την ανάπτυξη της γνώσης φέρνοντας ως παράδειγμα τη εξέλιξη της κινεζικής επιστήμης η οποία ακολούθησε ένα δρόμο τελείως διαφορετικό από το δικό μας. Παρ' όλα αυτά τράβηξαν μία διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στην κοινωνία και το άτομο. Έτσι η διάκριση που έκαναν είναι ότι η κοινωνία μπορεί να επηρεάσει τον τρόπο με τον οποίο το υποκείμενο αντιλαμβάνεται τα αντικείμενα αλλά δεν μπορεί να αλλάξει τους μηχανισμούς με τους οποίους το άτομο αποκτά τη γνώση.

Από την άλλη ο ρώσος ψυχολόγος Lev Vygotsky, που ασχολήθηκε κι αυτός με τη σχέση μεταξύ οντογένεσης και φυλογένεσης είχε διαφορετική προσέγγιση. Αντίθετα από την άποψη των Piaget και Garcia που θεώρησαν τα βασικά εργαλεία απόκτησης γνώσης να ανήκουν αποκλειστικά στη σφαίρα της βιολογίας, ο Vygotsky υποστήριξε ότι ο πολιτισμός διαμορφώνει συνολικά τη

δραστηριότητα των πνευματικών λειτουργιών μέσω της χρήσης των εργαλείων που χρησιμοποιεί, είτε αυτά είναι οι πίνακες από άργιλο στην αρχαία Μεσοποταμία, είτε οι υπολογιστές της σύγχρονης κοινωνίας είτε διαλεκτικά αντικείμενα όπως οι λέξεις ή η γλώσσα (Radford, 2000). Για παράδειγμα η θεωρία του χάους ή η γεωμετρία των φράκταλς μπόρεσε να αναπτυχθεί ακριβώς γιατί υπάρχει η ψηφιακή τεχνολογία (ο υπολογιστής ως εργαλείο). Χωρίς τη βοήθειά του δεν θα ήταν δυνατή η μελέτη τέτοιων συστημάτων. Ακόμα πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα του πως ένα εργαλείο μπορεί να αλλάξει τις πνευματικές λειτουργίες και δραστηριότητες μιας κοινωνίας είναι η περίπτωση του παγκόσμιου ιστού. Η δημιουργία του, άρρηκτα συνδεδεμένη με την εξέλιξη της ψηφιακής τεχνολογίας (το μέσο-εργαλείο) άλλαξε ριζικά την αντίληψη για την επικοινωνία και τη διακίνηση πληροφοριών και ιδεών.

### *Τα επιστημολογικά εμπόδια*

Η ιδέα των επιστημολογικών εμποδίων αναπτύχθηκε από τον G. Bachelard και αργότερα παρουσιάστηκε στη διδακτική από τον G. Brousseau τη δεκαετία του '70. Το επιστημολογικό εμπόδιο είναι η αιτία πίσω από ένα επαναλαμβανόμενο λάθος που κάνουν οι μαθητές όταν προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα. Ο Brousseau διαχωρίζει το *επιστημολογικό εμπόδιο* από άλλα εμπόδια όπως αυτό που σχετίζεται με τη γνωστική ικανότητα του μαθητή με βάση την πνευματική του ανάπτυξη (*οντολογικό εμπόδιο*), αυτό που προκύπτει ως αποτέλεσμα διδακτικών επιλογών (*διδακτικό εμπόδιο*) και αυτό που σχετίζεται με πολιτισμικούς παράγοντες (*πολιτισμικά εμπόδια*). Το επιστημολογικό εμπόδιο χαρακτηρίζεται ακριβώς από την επανεμφάνισή του τόσο στην ιστορία των μαθηματικών όσο και στην σημερινή μάθηση των μαθηματικών. Ένα επιστημολογικό εμπόδιο λοιπόν όχι μόνο δεν μπορεί αλλά και δεν πρέπει να αποφευχθεί, ακριβώς επειδή είναι το κύριο συστατικό της γνώσης στην οποία στοχεύει. Αντιθέτως, ο καθηγητής γνωρίζοντας ακριβώς τη φύση αυτού του εμποδίου θα πρέπει να επεξεργαστεί και να σχεδιάσει τέτοιες διδακτικές καταστάσεις, χτίζοντας πάνω σε προσεκτικά διαλεγμένα προβλήματα, έτσι ώστε να προκαλέσει την παλιά κι εδραιωμένη αντίληψη των μαθητών (γνωστική σύγκρουση) και να καταστήσει δυνατή την υπερπήδηση του

εμποδίου (Radford, Boero & Vasco, 2002) . Ένα παράδειγμα αποτελεί η έννοια της συνέχειας. Έχουν παρατηρηθεί ακόμα και σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος παρανοήσεις, προϋπάρχουσες αντιλήψεις ή προσωπικές ερμηνείες όμοιες με αυτές που επικρατούσαν στο Μεσαίωνα και την Αναγέννηση. Μερικές φορές μάλιστα εμφανίζονται και απόψεις που παραπέμπουν σε θεμελιώδη προβλήματα του λογισμού που πρωτοεμφανίστηκαν στην Ελλάδα. Επομένως μία διδακτική πρόταση που θα εκμεταλλευόταν την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, θα λειτουργούσε ως εργαλείο πρόβλεψης και θα βοηθούσε τους μαθητές και τους φοιτητές να αντιμετωπίσουν τα γνωστικά εμπόδια (Χρυσανθόπουλος, 2009)

*Η ιστορία εμπλουτίζει το γνωστικό και διδακτικό υπόβαθρο των καθηγητών*

Η ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γνωστικό εργαλείο για την υποστήριξη της ενεργούς μάθησης επειδή σου δίνει τη δυνατότητα μιας διαφορετικής παρουσίασης. Πολλοί συγγραφείς έχουν υποστηρίξει ότι η μελέτη της ιστορίας ενός θέματος είναι μία καλή προετοιμασία για τη διδασκαλία του. Ένα υπόβαθρο που περιλαμβάνει γενικές και ειδικές γνώσεις των πρωταρχικών ριζών των μαθηματικών, διαπερνάει ως δεύτερη φύση τη στάση και τις αντιλήψεις του καθηγητή ή του δασκάλου και επηρεάζει την εισαγωγική παρουσίαση ειδικών θεμάτων (Russ, 1991). Επιπλέον όταν οι καθηγητές γνωρίζουν ιστορία, γίνονται κοινωνοί της δημιουργικής διαδικασίας με την οποία γίνονται τα μαθηματικά, εμπλουτίζεται ο μαθηματικός τους λόγος και οι ίδιοι μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας (Jankvist, 2009). Αποκτούν στο διδακτικό τους ρεπερτόριο εξηγήσεις, παραδείγματα και εναλλακτικές προσεγγίσεις για το πώς να παρουσιάζουν ένα θέμα ή του πώς να λύνουν ένα πρόβλημα.

*Η ανάγνωση αυθεντικών ιστορικών κειμένων αποδίδει καρπούς*

Η ιστορική φαινομενολογία, κάποιον υποστηρίζουν ότι μπορεί να μας βοηθήσει να «δούμε με τα μάτια των μαθητών μας» (Arcavi & Isoda, 2007; Bakker & Gravemeijer, 2006).

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να μας προμηθεύσει με λύσεις και προσεγγίσεις προβλημάτων οι οποίες είναι πολύ διαφορετικές από τις συνήθεις σύγχρονες πρακτικές. Αυτές οι διαδικασίες επίλυσης μπορεί να αποκρύπτουν το σκεπτικό πίσω από αυτές. Θα πρέπει λοιπόν, να μπει κάποιος στο κόπο να αποκρυπτογραφήσει τη λύση προκειμένου να καταλάβει τι έγινε, για ποιο λόγο έγινε και ποιο είναι το μαθηματικό υπόστρωμα που κάνει μία λύση έγκυρη και πιθανώς γενικεύσιμη. Η ενασχόληση με μια τέτοιου τύπου δραστηριότητα φέρει κάποιες ομοιότητες με τη διαδικασία κατανόησης του τι κρύβεται πίσω από τις ιδέες και τις ενέργειες των μαθητών μας, οι οποίες συχνά επειδή διαφέρουν από τις αναμενόμενες, απορρίπτονται. Οι Arcavi και Isoda λοιπόν ισχυρίζονται ότι η ανάγνωση πρωταρχικών ιστορικών πηγών είναι μία καλή εξάσκηση στο να μάθουμε να βλέπουμε την προοπτική του άλλου και κυρίως των μαθητών (Arcavi & Isoda, 2007).

Τα μαθηματικά εκτός από το ίδιο το περιεχόμενό τους έχουν συμβολισμούς, σημειολογία, υπολογιστικές μεθόδους, τρόπους έκφρασης και αναπαράστασης. Η ιστορία βοηθάει τους μαθητές να γνωρίσουν τη μαθηματική γλώσσα και έκφραση κάποιας περιόδου και επομένως να εκτιμήσουν τα πλεονεκτήματα (ή μειονεκτήματα) της σημερινής (Jankvist, 2009).

### *Η Ιστορία φωτίζει τα μαθηματικά ως πολιτιστική κληρονομιά*

Μέσα από την ιστορία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ότι η πρόοδος στα μαθηματικά δεν επιτυγχάνεται μόνον για να καλύψει χρηστικές ανάγκες αλλά και για δικούς τους λόγους. Υποκινούνται από αισθητικά κριτήρια, διανοητική περιέργεια, πρόκληση και ευχαρίστηση, ψυχαγωγία. Είτε παρακινούμενα πάντως από χρηστικές ανάγκες είτε από άλλους πιο αγνούς σκοπούς έχουν επηρεαστεί ή ακόμα και καθοριστεί από κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες (Tzanakis & Arcavi, 2000). Έτσι τα μαθηματικά μέσω της ιστορίας τους, γίνονται πιο ελκυστικά σ' αυτούς που αρέσκονται στις ανθρωπιστικές επιστήμες (Kaye, 2010) ή στους μαθητές πιο χαμηλής επίδοσης στα μαθηματικά (Siu, 2007). Επιπλέον μέσα από την ιστορία μπορεί να δείξει κανείς διαφορετικές προσεγγίσεις ή λύσεις ή τεχνικές που αναπτύχθηκαν σε διαφορετικές κουλτούρες (Bishop, 2004 ). Σε μερικές περιπτώσεις αυτό θα

μπορούσε να βοηθήσει καθηγητές που αντιμετωπίζουν πολυπολιτισμικές τάξεις, αναπτύσσοντας την ανοχή και το σεβασμό μεταξύ μαθητών διαφορετικής εθνικότητας ή κουλτούρας.

### 3.2.2 Επιχειρήματα της άποψης « Η ιστορία είναι αυτοσκοπός»

Σ' αυτή την κατηγορία ανήκουν τα επιχειρήματα εκείνα που λένε ότι το να μάθει κανείς πλευρές της ιστορίας των μαθηματικών είναι από μόνο του ένας σκοπός. Με αυτό δεν εννοούν ότι πρέπει να μάθει κανείς την ιστορία για την ιστορία. Αλλά για να εστιάσει στην ανάπτυξη και την εξέλιξη διαφόρων πτυχών ως μέρος του μαθηματικού συστήματος. Με αυτό το σκεπτικό ένας στόχος είναι να δείξουμε στους μαθητές ότι τα μαθηματικά υπάρχουν και εξελίσσονται στο χωρόχρονο. Ότι είναι ένα σύστημα που εξελίσσεται και όχι κάτι που ήρθε από το πουθενά. Ότι άνθρωποι συμμετείχαν σε αυτή την εξέλιξη και ότι τα μαθηματικά έχουν διαμορφωθεί μέσα από διαφορετικές κουλτούρες κατά την διάρκεια της ιστορίας οι οποίες επηρέασαν τη μορφή τους αλλά και αντίστροφα. Τέλος για να δούμε ότι αυτή η εξέλιξη είναι αποτέλεσμα εσωτερικών αλλά και εξωτερικών δυνάμεων (Jankvist, 2009).

### 3.3 Πως μπορούμε να εντάξουμε ή να εμπλέξουμε την ιστορία στη διδασκαλία των μαθηματικών

Στο άρθρο τους, οι Tzanakis και Arcavi (2000) προτείνουν τους παρακάτω τρόπους.

#### 1. Ιστορικά αποσπάσματα

Τα ιστορικά αποσπάσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν με διάφορους τρόπους. Διάσπαρτα, ως υποσημειώσεις, παράλληλα ή μετά το μαθηματικό θέμα με το οποίο σχετίζονται. Βέβαια προκύπτουν ερωτήματα ως προς τη μορφή ή το περιεχόμενο. Να είναι απλώς αφηγηματικά ή να εμπλέκουν τους μαθητές σε κάποια δράση; (ένα πρόβλημα για λύση, ένας συμβολισμός προς αποκρυπτογράφηση, μία προτεινόμενη δραστηριότητα;) Τι μορφή να έχουν;

#### 2. Ερευνητικές εργασίες βασισμένες σε ιστορικά κείμενα.

#### 3. Πρωτογενείς πηγές.

Τα οφέλη από την ανάγνωση πρωτογενών πηγών αναφέρονται παραπάνω. Βέβαια η πρόσβαση σε πρωτογενείς πηγές είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί.

4. Φύλλα εργασίας σχεδιασμένα γύρω από ένα σύντομο ιστορικό απόσπασμα γύρω από ένα θέμα. Μπορεί να συνοδεύεται από ιστορικές πληροφορίες που περιγράφουν το περιεχόμενο.

#### 5. Ιστορικό πακέτο

Με αυτό οι Tzanakis & Arcavi εννοούν υλικό που θα εστιάζει σ' ένα μικρό θέμα, που σχετίζεται στενά με το σχολικό πρόγραμμα σπουδών, χρονικής διάρκειας 2-3 εβδομάδων το πολύ.

6. Παρουσίαση και ενασχόληση με α) λάθη, β) εναλλακτικές απόψεις, γ) αλλαγή προοπτικής σχετικά μ' ένα θέμα, δ) παράδοξα, αμφισβητήσεις, αναθεωρήσεις σιωπηρών παραδοχών ή εννοιών, ε) διαισθητικά επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν στην ιστορία και μπορούν να έχουν ευεργετική δράση στη διδασκαλία και τη μάθηση άμεσα είτε διδακτικά ανακατασκευασμένα.

#### 7. Ιστορικά προβλήματα

Η ιστορία των μαθηματικών βρίθει προβλημάτων που μπορεί να είναι τονωτικά και παραγωγικά και για τους μαθητές και για τους καθηγητές. Διάσημα προβλήματα χωρίς λύση ή που η λύση τους βρέθηκε μετά από πολλές δυσκολίες, προβλήματα με έξυπνες, εναλλακτικές ή υποδειγματικές λύσεις, προβλήματα που ενέπνευσαν τη δημιουργία καινούριων κλάδων των μαθηματικών ή ακόμη και προβλήματα με σκοπό την ψυχαγωγία.

#### 8. Μηχανικά μέσα

Με αυτό εννοούνται είτε κατασκευές με πραγματικά υλικά είτε ψηφιακές αναπαραστάσεις, οι οποίες έγιναν με σκοπό να απεικονίσουν μαθηματικές έννοιες ή αποδείξεις, για παράδειγμα κατασκευές για τις κωνικές τομές ή για τις λύσεις αρχαίων ελληνικών γεωμετρικών προβλημάτων.

#### 9. Πειραματικές μαθηματικές δραστηριότητες και παιχνίδια

Αυτό περιλαμβάνει την αναβίωση επιχειρημάτων, συμβολισμών, μεθόδων, παιχνιδιών ή άλλων τρόπων που γίνονταν τα μαθηματικά στο παρελθόν.

#### 10. Θεατρικά έργα

Δεν είναι μία συνηθισμένη πρακτική για μία μαθηματική αίθουσα, αλλά είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορείς να αναδείξεις τον άνθρωπο πίσω από το θεώρημα ή ένας τρόπος όχι μόνο να δεις την ανθρώπινη πλευρά αλλά να ζωντανέψεις διάσημες τοποθετήσεις και θέσεις πάνω σε μαθηματικά θέματα. Η Τ. Λημναίου αναφέρει θεατρικές βραδιές στο σχολείο με τη συμμετοχή μαθητών, καθηγητών και γονέων, όπου παρουσιάστηκαν έργα βασισμένα σε αρχαία ελληνικά κείμενα και ιστορικά σχόλια που περιλαμβάνονται στα μαθηματικά εγχειρίδια. Παρ' όλο που το εγχείρημα ήταν τονωτικό για τα παιδιά, η θέση αρκετών καθηγητών ήταν: « Αυτό δεν είναι μαθηματικά» (Hellenic Society for the History of Science and Technology, 1998). Ο Boero περιγράφει μία πειραματική δραστηριότητα που την ονομάζει «φωνές και ηχώ». Τα παιδιά ακούνε «φωνές» επιστημόνων ή φιλοσόφων του παρελθόντος (από επιλεγμένες επικοινωνιακές εκφράσεις σε ιστορικά κείμενα) που αποδίδουν με πυκνότητα σημαντικά άλματα στην εξέλιξη των μαθηματικών και της επιστήμης (π.χ. αποσπάσματα του Γαλιλαίου και του Αριστοτέλη για την πτώση των σωμάτων). Στη συνέχεια οι μαθητές παράγουν την «ηχώ» που είναι οι δικές τους αντιλήψεις, εκφράσεις ή η προσωπική τους αίσθηση για το θέμα. Ο στόχος δεν είναι τόσο να κατασκευάσουν την έννοια ή να λύσουν ένα πρόβλημα όσο να συγκρίνουν το πρώτο κείμενο με δεδομένα από την καθημερινή τους εμπειρία με σκοπό να βρουν συγκλίσεις ή αντιφάσεις. Με αυτό τον τρόπο οι συγγραφείς θεωρούν ότι ενισχύεται η μετάβαση της σκέψης σε θεωρητικό επίπεδο (Boero, Pedemonte, & Robotti, 1997)

11. Ταινίες και άλλο οπτικοακουστικό υλικό.

12. Δραστηριότητες εκτός τάξης.

Για παράδειγμα η μέτρηση ενός ψηλού αντικειμένου χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Θαλή.

13. Ο Παγκόσμιος ιστός.

Ο Παγκόσμιος ιστός μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους. Είτε ως πηγή πληροφοριών είτε ως μέσω επικοινωνίας. Μέσα από ένα forum ή ένα blog μπορεί ο καθηγητής να ανεβάσει υλικό και οι μαθητές να σχολιάζουν, να θέτουν ερωτήσεις ή να δίνουν απαντήσεις.



### 3.4 Ο Αντίλογος

Φυσικά απέναντι σε όλα τα παραπάνω επιχειρήματα ή προτάσεις υπάρχει και ο αντίλογος. Οι φωνές που υποστηρίζουν ότι η ιστορία δεν πρέπει ή δεν γίνεται να ανακατευτεί μέσα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα βασικότερα επιχειρήματα που έχουν διατυπωθεί είναι:

1. Η Ιστορία δεν είναι μαθηματικά. Δίδαξε πρώτα τα μαθηματικά και μετά την ιστορία τους.
2. Η ιστορία μπορεί να αποδειχθεί ότι δημιουργεί σύγχυση παρά διευκόλυνση.
3. Οι μαθητές έχουν μία ασταθή αντίληψη για το παρελθόν που καθιστά την ιστορική πλαισίωση των μαθηματικών αδύνατη με δεδομένο ότι οι μαθητές δεν έχουν μία ευρύτερη γνώση της ιστορίας.
4. Πολλοί μαθητές αντιπαθούν την ιστορία επομένως γιατί να τους αρέσει η ιστορία των μαθηματικών ή να είναι γι' αυτούς λιγότερο βαρετή;
5. Η πρόοδος στα μαθηματικά μετέτρεψε δύσκολα προβλήματα σε ρουτίνα οπότε γιατί να χάνουμε χρόνο γυρίζοντας πίσω;
6. Η ιστορία δίνει τροφή στον πολιτισμικό εθνικισμό και στον στενό εθνικισμό.
7. Δεν υπάρχει χρόνος για κάτι τέτοιο.
8. Υπάρχει έλλειψη πηγών ή αδυναμία πρόσβασης σε αυτές.
9. Οι καθηγητές μαθηματικών είναι ακατάλληλοι να διδάξουν την ιστορία των μαθηματικών καθώς και την εσωτερική πειθαρχία τους αφού και οι ίδιοι δεν την έχουν διδαχθεί (δεν έχει προβλεφθεί αντίστοιχο μάθημα στο πρόγραμμα σπουδών της σχολής τους). Οι περισσότεροι έχουν μικρή και ανεπαρκή γνώση της ιστορίας (Taimina & Henderson, 2003). Στην Ελλάδα η προβολή του έργου των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών ως θεμελιώδης επιλογή στην ελληνική εκπαίδευση, θεωρητικά φαίνεται ότι διαμορφώνει ένα ιδανικό περιβάλλον για την ανάπτυξη του ενδιαφέροντος για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Η πραγματικότητα όμως είναι πολύ διαφορετική. Ούτε στα ελληνικά πανεπιστήμια που προετοιμάζουν τους μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά ούτε και στο σχολείο, δεν διδάχθηκε ποτέ η ιστορία των ελληνικών μαθηματικών ως αυτόνομο θέμα. Κάποιες

εξαιρέσεις δεν μπορούν να αλλάξουν το γεγονός ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν γνωρίζουν την ιστορία των μαθηματικών αλλά ούτε και την εκπαιδευτική αξία αυτών. Αυτή η έλλειψη γνώσης είναι ίσως και ο λόγος που οι περισσότεροι καθηγητές θεωρούν τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά εγχειρίδια κάτι σαν «γέμισμα των σελίδων» και δεν ασχολούνται με το περιεχόμενό τους (Thomaidis, 1991).

10. Δεν μπορείς να την εντάξεις στην αξιολόγηση των μαθητών οπότε οι μαθητές δεν θα της δώσουν σημασία.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι οι δύο τοποθετήσεις, η μία υπέρ και η άλλη κατά της ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδασκαλία, ξεκινούν από δύο διαφορετικές φιλοσοφικές αφετηρίες για το τι είναι τα μαθηματικά. Η άποψη κατά της ενσωμάτωσης της ιστορίας εκφράζει *την επιστημολογική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης*, απόλυτα κυρίαρχη από τις αρχές του περασμένου αιώνα μέχρι σήμερα, η οποία λέει ότι η μαθηματική γνώση υπάρχει ως συστατικό στοιχείο της πραγματικότητας ή μιας πραγματικότητας «έξω» από την ανθρώπινη ύπαρξη και ο άνθρωπος απλώς την ανακαλύπτει. Στο πλαίσιο αυτό η ιστορία δεν αποτελεί συστατικό της μαθηματικής γνώσης, αφού η μαθηματική γνώση δεν αποτελεί πρώτιστα ένα ιστορικό και κοινωνικό προϊόν. Η άλλη άποψη προτάσσει τον ιστορικό και κοινωνικό χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης και θέτει υπό αμφισβήτηση το μέχρι πρότινος κυρίαρχο επιστημολογικό πρότυπο. Υποστηρίζει ότι κάθε επιστημονική γνώση είναι κοινωνική κατασκευή και επομένως υπόκειται σε ιστορικά, κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια τα οποία καθορίζουν το επίπεδο και την κατεύθυνση της ανάπτυξής της. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο η ιστορία αποτελεί συστατικό της μαθηματικής γνώσης και η ιδέα αυτή κερδίζει έδαφος στην επιστημονική και εκπαιδευτική κοινότητα (Χασάπης, 2009).

Στη χώρα μας, το ενδιαφέρον για τρόπους διδασκαλίας βασισμένους στην ιστορία αυξάνεται και αυτό αποτυπώνεται σε συνέδρια (19<sup>ο</sup> συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας: Τα Μαθηματικά διαχρονικός παράγοντας πολιτισμού, Κομοτηνή, 2002) και ημερίδες (Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο

Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης: Η Ιστορία των Μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και το Γυμνάσιο, Θεσσαλονίκη, 2002). Ενδεικτικό επίσης του ενδιαφέροντος, είναι το θέμα που τέθηκε στον πανελλήνιο διαγωνισμό πρόσληψης εκπαιδευτικών του έτους 2000 για τον κλάδο των Μαθηματικών, στην ενότητα Διδακτική Μεθοδολογία- Παιδαγωγικά Θέματα: «Να αξιολογήσετε τη σημασία των ιστορικών αναφορών στη διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών» (Διαγωνισμοί Πρόσληψης Εκπαιδευτικών χ.χ., 27, Πατσόπουλος, 2006).

Από την άλλη από μόνο του τίποτα δεν αποτελεί πανάκεια ή σωτήρια λύση για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο. Και η παγίδα που κρύβεται είναι ίδια με αυτήν που μπορεί να πέσει κάποιος στην προσπάθεια να εντάξει τους υπολογιστές στην διδασκαλία. Και τα δύο, ιστορία και υπολογιστές, είναι ελκυστικά και φαντάζουν καλές λύσεις στο θέμα της εμπλοκής των μαθητών με τα μαθηματικά. Όμως η μεταφορά τους στην αίθουσα δεν πρέπει να στηρίζεται στην αίγλη αλλά στον προσεκτικό σχεδιασμό δραστηριοτήτων και στη μεθοδολογία (Bartolini Bussi & Bazzini, 2003).

Επομένως αν το ζητούμενο είναι καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και η βελτίωση της ποιότητας της διδασκαλίας, δεν χρειάζεται να διδάξουμε την ιστορία με άμεσο και ρητό τρόπο παρουσιάζοντας όλες τις όψεις των κρίσιμων βημάτων, κάτι που απαιτεί πολύ χρόνο και εξειδίκευση. Μια άλλη άποψη είναι ότι αν καταφέρουμε να διαπεράσει την διδασκαλία μας, μπορούμε να την εισάγουμε «σιωπηρά» σε μία ανακατασκευή διατηρώντας πάντα στο μυαλό μας ότι ο τελικός διδακτικός στόχος είναι να κατανοηθούν τα μαθηματικά στη σύγχρονη μορφή τους (Πάσχος, 2009). Τότε όπως λέει και η Siu, δεν θα χρησιμοποιούμε την ιστορία αλλά θα την αφήνουμε να «διαχέεται» στην αίθουσα (Siu, 2007).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ & Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΑΣΘΕΝΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

---

## 4.1 Η αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας

*«Στα Μαθηματικά μπορεί κανείς να μάθει πώς να συλλογίζεται τα πράγματα τα οποία ούτε φαίνονται, ούτε ακούγονται, αλλά υπάρχουν μόνο στη σκέψη».*

*Αριστοτέλης*

Πριν από τη θεωρητική και λογική της θεμελίωση, η Γεωμετρία ήταν ο τρόπος μέτρησης της γης (γεω-μετρώ). Η μέτρηση δηλαδή κατά κύριο λόγο του μήκους του πλάτους, του εμβαδού. Με την εξέλιξη του πολιτισμού, καθώς η σκέψη ωρίμασε και ξέφυγε από την επίλυση των πρακτικών προβλημάτων της καθημερινότητας, αναζήτησε βαθύτερες σχέσεις και αιτίες. Ο Θαλής θεωρείται πως, ήταν ο πρώτος που αισθάνθηκε την ανάγκη να εξηγήσει κάποιες «προφανείς» ιδιότητες των σχημάτων. Ο δρόμος προς τη θεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών είχε μόλις ανοίξει.

Η γεωμετρία κατακτούσε όλο και υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης. Οι αρχαίοι Έλληνες, συνεπείς στις δημοκρατικές και φιλοσοφικές αρχές του πολιτισμού τους, απαίτησαν αυστηρότερα μέτρα για την αποδοχή ή όχι ενός ισχυρισμού. Σύμφωνα με τα κριτήρια που έθεσαν, λίγα παραδείγματα και η αίσθηση του προφανούς δεν ήταν ικανά να νομιμοποιήσουν την αλήθεια. Χρειαζόταν γι' αυτό μια «απόδειξη». Δηλαδή, η αλήθεια έπρεπε να προκύψει παραγωγικά (συμπερασματικά) από άλλες αλήθειες που έχουν αποδειχτεί νωρίτερα. Ένας μαθηματικός ισχυρισμός που αποδεικνύεται, ονομάζεται θεώρημα. Ένα θεώρημα αποδεικνύεται λοιπόν συναγόμενο από άλλα θεωρήματα. Δεν μπορούσαν όμως να πηγαίνουν προς τα πίσω επ' άπειρο. Κάπου έπρεπε να υπάρχει μια αρχή. Ο Αριστοτέλης κατάλαβε ότι ήταν αναγκαίο κάποιες αλήθειες να γίνουν αποδεκτές χωρίς απόδειξη. Έκανε μάλιστα διάκριση ανάμεσα σε αλήθειες βασικές για όλες τις παραγωγικές επιστήμες, τις οποίες

ονόμασε *κοινές έννοιες (αξιώματα)* και σε αλήθειες βασικές για την καθημιά ειδική επιστήμη, ξεχωριστά, τις οποίες είπε *ειδικές έννοιες (αιτήματα)* (Bunt, Jones, & Bedient, 1981). Ο Ευκλείδης, προσπαθώντας να μην απομακρύνεται από τις αρχές του Αριστοτέλη, άρχισε να οικοδομεί το αξιωματικό γεωμετρικό σύστημα των «Στοιχείων» του. Μία διαδεδομένη άποψη είναι ότι τα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτελούν τόσο μια περιεκτική σύνοψη και πραγματεία για ό,τι είχε ανακαλυφθεί πριν από αυτόν, όσο και μια δική του θαυμαστή και πρωτότυπη διατριβή. Ο ίδιος παρ' όλα αυτά δεν κάνει διάκριση ανάμεσα στο παλιό και στο νέο στην εργασία του (Ferguson, 2009). Μια άλλη εκδοχή είναι ότι τα Στοιχεία δεν ήταν μια συνοπτική παρουσίαση όλης της γεωμετρικής γνώσης αλλά επρόκειτο για ένα διδακτικό εγχειρίδιο που κάλυπτε όλα τα στοιχειώδη μαθηματικά, δηλαδή αριθμητική (αριθμοθεωρία), συνθετική γεωμετρία (σημείων, ευθειών, επιπέδων, κύκλων και σφαιρών) και μια μορφή γεωμετρικής άλγεβρας. Δεν περιλάμβανε την τέχνη του υπολογισμού των κωνικών τομών ή των επιπέδων καμπυλών γιατί αυτά θεωρούνταν τμήμα των ανώτερων μαθηματικών (Boyer & Merzbach, 1997). Όπως και να έχει, τα «Στοιχεία» είναι μετά τη Βίβλο ένα από τα πιο διαδεδομένα βιβλία του δυτικού κόσμου. Έχουν βεβαιωθεί πάνω από 1000 εκδόσεις του. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτελούνται από 13 βιβλία. Τα πρώτα έξι πραγματεύονται την επίπεδη γεωμετρία. Στα επόμενα τρία αναπτύσσεται η αριθμοθεωρία. Στο δέκατο μελετώνται οι ασύμμετροι λόγοι και τα τελευταία τρία ασχολούνται με την στερεομετρία.

Για πολλά χρόνια, η Ευκλείδεια γεωμετρία παρέμενε η βασίλισσα των μαθηματικών. Από τον 8ο αιώνα μ. Χ. τη σκυτάλη για τη συνέχεια και την ανάπτυξη των επιστημών, παίρνει ο μουσουλμανικός κόσμος και η Άλγεβρα μονοπωλεί το ενδιαφέρον. Στα τέλη του 16<sup>ου</sup> αιώνα και στις αρχές του 17<sup>ου</sup> αιώνα, γεωμετρία και άλγεβρα έρχονται κοντά και γεννιέται η αναλυτική γεωμετρία. Αλλά η Οδύσσεια δεν τελειώνει εδώ. Με την αξιωματική θεμελίωση της υπερβολικής γεωμετρίας του Lobachevsky, το 1823 και της γεωμετρίας του Riemann, το 1854, η ευκλείδεια γεωμετρία χάνει και τη μοναδικότητά της. Αν ένας μη-μαθηματικός κοίταζε ένα μαθηματικό κείμενο σήμερα, θα χαρακτήριζε πιθανότατα τα μαθηματικά συνολικά ως: «*όλα είναι άλγεβρα*». Αυτή η τάση

υπέρ της «αριθμητικοποίησης της γεωμετρίας» έχει ταυτίσει το «εμβαδό» ενός ορθογωνίου με το γινόμενο βάση επί ύψος. Διαβάζοντας όμως την ιστορία των μαθηματικών, είναι σαφές ότι έως και τον 2<sup>ο</sup> αιώνα π.Χ., τα «Ελληνικά Μαθηματικά» ήταν πολύ διαφορετικά και τελείως μη-αριθμητικοποιημένα (Fowler, 1987; Hartshorne, 2000). Με τη σύγχρονη αντίληψη, το εμβαδό ενός σχήματος δηλώνεται με έναν αριθμό. Ο Ευκλείδης όμως, ούτε μήκη ευθυγράμμων τμημάτων δήλωνε με αριθμούς, ούτε εμβαδά σχημάτων. Όταν ήθελε να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, αποδείκνυε ότι το ένα μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε αν κατάλληλα αναπροσαρμοστούν, να παράγουν το άλλο σχήμα. (Bunt, Jones, & Bedient, 1981) Όμως η χρήση τύπων για την μέτρηση του εμβαδού, ειδικά στις μικρές ηλικίες, έχει υποστεί κριτική και από ερευνητές, στη βάση του ότι δημιουργεί παρανοήσεις σχετικά με την μέτρηση μιας επιφάνειας. Σε σχετικές έρευνες, έχει διαπιστωθεί η δυσκολία των μαθητών να αποδώσουν ως φυσική ερμηνεία σ' έναν αριθμό, την επιφάνεια (Zacharos, 2006).

Οι Βαβυλώνιοι πάλι, τα όποια προβλήματα γεωμετρίας (μέτρηση εμβαδού, μήκος διαγωνίου κ.λπ.) τα αντιμετώπιζαν μόνο με αλγεβρικό τρόπο. Και μάλιστα δεν είχαν κανένα ενδιαφέρον στο να προσθέσουν το μήκος ενός ορθογωνίου με το εμβαδόν του. Οι Πυθαγόρειοι που επηρεάστηκαν από το Βαβυλωνιακό πολιτισμό, πίστευαν ότι ο αριθμός είναι η ουσία των όντων και του απέδιδαν δυνάμεις υπερφυσικές. Πως μετά από αυτή την παράδοση φτάσαμε στην ολοκληρωτική απάλειψη της άλγεβρας από την γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων; Γιατί ο Ευκλείδης δεν δήλωνε με αριθμό το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ή το εμβαδό ενός χωρίου; Μια απάντηση σύμφωνα με τον Van der Waerden, βρίσκεται στην ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους. Η διαγώνιος του τετραγώνου δεν είναι σύμμετρη με την πλευρά. Αυτό σημαίνει ότι αν επιλεγεί η πλευρά ως μονάδα μήκους η διαγώνιος δεν μπορεί να «μετρηθεί». Το μήκος της δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί ούτε με ακέραιο αριθμό, ούτε με κλάσμα. Οι Έλληνες γνώριζαν πολύ καλά ότι ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά είναι άρρητος, δηλαδή δεν μπορεί να εκφραστεί ως λόγος ακεραίων. Το γεγονός ότι δεν τον θεωρούσαν αριθμό δεν ήταν αποτέλεσμα άγνοιας αλλά αυστηρής εμμονής στον ορισμό του αριθμού. Η

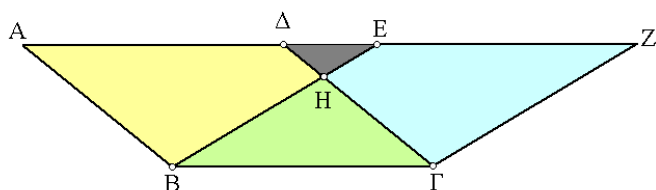
λογική τους αυστηρότητα τους επέτρεπε να χρησιμοποιούν μόνο τους ακεραίους και τους λόγους αυτών. Οι Βαβυλώνιοι αν δεν μπορούσαν να προσδιορίσουν μια τετραγωνική ρίζα, θα αρκούσαν σε μία προσέγγιση. Αυτό θα έκανε κι ένας μηχανικός ή ένας φυσικός επιστήμονας. Αλλά οι Έλληνες ενδιαφέρονταν για την ακριβή γνώση, για την «διαγώνιο καθεαυτή», λέει ο Πλάτων, όχι για μια αποδεκτή προσέγγιση (Van der Waerden, 2007). Επομένως αν θέλεις να κατασκευάσεις ένα ευθ. τμήμα με μήκος  $\sqrt{2}$ , μετρώντας το, θα πρέπει να αρκεστείς σε μία προσέγγιση. Σχεδιάζοντας όμως την διαγώνιο ενός τετραγώνου πλευράς 1, έχεις την ακριβή του αναπαράσταση. Οικοδομώντας λοιπόν τον γεωμετρικό τρόπο σκέψης ακόμα κι αν είχαν να επιλύσουν προβλήματα αλγεβρικά, οι Έλληνες, παρέκαμψαν αυτήν την «ανωμαλία» των αρρήτων και έφτιαξαν ένα πλέγμα γεωμετρικών προτάσεων με το οποίο μπορούσαν να αντιμετωπίσουν εκτός από γεωμετρικά προβλήματα και ένα μεγάλο σύνολο αλγεβρικών προβλημάτων και εξισώσεων, ανεξάρτητο όμως οποιουδήποτε συστήματος μέτρησης.

Σήμερα όμως, μετά από απλοποιήσεις, διδακτικούς μετασχηματισμούς και τροποποιήσεις που έγιναν τα προηγούμενα χρόνια, δεν διδάσκουμε πλέον τη γεωμετρία του Ευκλείδη, αλλά μία αριθμητικοποιημένη μετάλλαξή της. Ο αριθμητικοποιημένος τρόπος με τον οποίο διδάσκεται σήμερα η γεωμετρία, ως ένας παραγωγικός συμπερασμός που όμως προϋποθέτει το σύστημα αρίθμησης των πραγματικών αριθμών, όχι μόνο αποτυγχάνει να ανακατασκευάσει το νόημα των αξιωμάτων, αλλά μπορεί να οδηγήσει στην ολοκληρωτική εξαφάνιση της αναφορικής έννοιας της γεωμετρίας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα μπορούν να αναπαράγουν μόνο αποδείξεις που απαιτούν μια μηχανιστική διαδικασία ενώ αντίθετα θα αδυνατούν να καταλάβουν την βασική ιδέα μιας γεωμετρικής απόδειξης (Patronis & Thomaidis, 1997).

## 4.2 Η Γεωμετρική σκέψη των Ελλήνων

Για να γίνει κατανοητός και ξεκάθαρος ο τρόπος με τον οποίο ο Ευκλείδης χειρίζονταν προβλήματα που σχετίζονταν με τα εμβαδά, παρουσιάζεται η απόδειξη της πρότασης 35 του 1<sup>ου</sup> βιβλίου του Στοιχείων του Ευκλείδη.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 35 :** Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων ευθειών, είναι ίσα ως προς το εμβαδόν.



Απόδειξη

$$\left. \begin{array}{l} A\Delta = B\Gamma \text{ (AB}\Gamma\Delta \text{ παρ/μο)} \\ EZ = B\Gamma \text{ (B}\Gamma\text{ZE παρ/μο)} \end{array} \right\} \Rightarrow A\Delta = EZ \text{ [1]}$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABE και ΔΓΖ.

$$\left. \begin{array}{l} AE = A\Delta + \Delta E \stackrel{[1]}{=} \Delta E + EZ = \Delta Z \\ A = \Gamma \Delta Z \text{ (ως εντός εκτός κι επί τα' αυτά)} \\ AB = \Gamma\Delta \text{ (AB}\Gamma\Delta \text{ παρ/μο)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{τριγ. ABE} = \text{τριγ. }\Delta\Gamma\text{Z}$$

Ίσα τρίγωνα έχουν και ίσα εμβαδά, άρα :

$$\left. \begin{array}{l} (ABE) = (AB\text{H}\Delta) + (\text{H}\Delta E) \\ (\Delta\Gamma\text{Z}) = (\text{H}\Gamma\text{ZE}) + (\text{H}\Delta E) \\ (ABE) = (\Delta\Gamma\text{Z}) \end{array} \right\} \Rightarrow (AB\text{H}\Delta) = (\text{H}\Gamma\text{ZE})$$

Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} (AB\Gamma\Delta) = (AB\text{H}\Delta) + (B\Gamma\text{H}) \\ (B\Gamma\text{ZE}) = (\text{H}\Gamma\text{ZE}) + (B\Gamma\text{H}) \end{array} \right\} \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = (B\Gamma\text{ZE})$$



Αν δίνουμε αυτή την πρόταση σ' ένα μαθητή σήμερα, θα αποδεικνυε ότι τα δύο παρ/μα ΑΒΓΔ και ΒΓΖΕ έχουν ίδια βάση και ίδιο ύψος και επομένως και ίδιο εμβαδό. Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι σίγουρα πιο περίπλοκη, αλλά είναι πολύ αντιπροσωπευτική της γεωμετρικής λογικής που είχαν αναπτύξει, που ήταν ανεξάρτητη των αριθμών. Και μπορεί σήμερα να φαντάζει τουλάχιστον «περίεργη», όμως ο Ευκλείδης, χρησιμοποιώντας αυτήν αποδεικνύει πολύ εύκολα ότι και δύο τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος έχουν το ίδιο εμβαδό, αφού ένα τρίγωνο είναι μισό παραλληλόγραμμο. Με αυτό, θέλω να δείξω τον τρόπο με τον οποίο είχαν μάθει οι Έλληνες να συγκρίνουν τα εμβαδά των σχημάτων, χωρίς την χρήση τύπων, δηλαδή άλγεβρας, έχοντας αναπτύξει μεγάλη ευχέρεια στο μετασχηματισμό «ακανόνιστων» χωρίων σε ισοδύναμα πιο βολικά σχήματα.

Με αυτό δεν ισχυρίζομαι ότι η παραπάνω απόδειξη θα πρέπει να διδάσκεται απαραίτητα με τον τρόπο του Ευκλείδη. Η αντίληψη όμως του εμβαδού ενός χωρίου ως άθροισμα ή διαφορά άλλων χωρίων και η διατήρηση του εμβαδού, θα έπρεπε να ενισχυθεί περισσότερο ως αντίληψη από τις μικρές ακόμα τάξεις του σχολείου, ώστε να μην φτάνουν οι μαθητές στο λύκειο με εδραιωμένη πλέον την αντίληψη ότι το εμβαδό είναι *μόνο* το αποτέλεσμα της αλγεβρικής εφαρμογής ενός τύπου.

#### 4.3 Παρανοήσεις των μαθητών στη μέτρηση του εμβαδού

Η εκπαιδευτική έρευνα αποκαλύπτει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα στο πεδίο της μέτρησης του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου και ότι η κατανόηση των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται είναι μάλλον επιφανειακή και φτωχή (Zacharos, 2006). Μία από τις αιτίες είναι ο τρόπος που διδάσκεται το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, ευθύνες έχουν αποδοθεί στην έμφαση που δίνεται από νωρίς στη χρήση έτοιμων τύπων. Τα παιδιά στο δημοτικό σχολείο δεν έρχονται σε επαφή με προβλήματα διατήρησης της επιφάνειας. Εισέρχονται απευθείας στα προβλήματα μέτρησης της επιφάνειας με μονάδες που τους προτείνονται μέσα από τις ασκήσεις και σε πολύ μικρό χρόνο διδάσκονται τη χρήση των

τύπων υπολογισμού. Δηλαδή μεταφέρονται πολύ γρήγορα από την επιφάνεια στους αριθμούς. Με τον όρο διατήρηση της επιφάνειας εννοούμε ότι η τιμή του εμβαδού ενός χωρίου παραμένει αναλλοίωτη καθώς το χωρίο αλλάζει σχήμα [Piaget, Inhelder, & Szeminska στο Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011)]. Η έμφαση στη χρήση των μέτρων των πλευρών γνωστών γεωμετρικών σχημάτων για την εξαγωγή αποτελεσμάτων που αφορούν στο εμβαδό οδηγούν σε μία μηχανιστική αντιμετώπιση της λειτουργίας της μέτρησης χωρίς να επιτρέπει στο μαθητή να έρθει σε επαφή με τις έννοιες που το συνθέτουν (Κορδάκη & Πόταρη, 1997). Αυτή η τάση αριθμητικοποίησης της γεωμετρίας στο σχολείο έχει υποστεί κριτική (Patronis & Thomaidis, 1997). Έτσι, εμφανίστηκε μία εναλλακτική άποψη στο πεδίο της διδακτικής η οποία υποστηρίζει ότι η διδασκαλία σχετικά με την έννοια της μέτρησης του εμβαδού θα πρέπει να συμπεριλάβει τα *εννοιολογικά χαρακτηριστικά* της μέτρησης (Nunes, Light, & Mason, 1993; Outhred & Mitchelmore, 2000).

Γιατί όμως η μέτρηση του εμβαδού αποτελεί πρόβλημα ενώ η μέτρηση του μήκους όχι;

Ο Battista αναφέρει ότι ενώ η μέτρηση του μήκους γίνεται άμεσα με ένα χάρακα ο οποίος έχει προσημειωμένες της ενδείξεις μήκους, η μέτρηση του εμβαδού γίνεται έμμεσα. Παρ' όλο λοιπόν που η μέτρηση του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου είναι ο αριθμός των μοναδιαίων χωρίων, που έχουν επιλεγεί αυθαίρετα ως μονάδα μέτρησης, που επικαλύπτουν ακριβώς το υπό μέτρηση χωρίο, εμείς συνήθως «μετράμε» μήκη τα οποία εισάγουμε σ' ένα τύπο (Battista, 1982). Αυτό δημιουργεί μία θολή ή στρεβλή αντίληψη γύρω από την έννοια εμβαδό. Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες παρανοήσεις:

1. Μία από τις πιο γνωστές παρανοήσεις είναι αυτή μεταξύ περιμέτρου και επιφάνειας (Kouba, Brown, Carpender, Lindquist, Silver, & Swafford, 1988). Αυτή η ασθενής κατανόηση παρατηρείται όχι μόνο σε μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλά υπάρχει ακόμη και σε φοιτητές των παιδαγωγικών τμημάτων, δηλαδή των αυριανών δασκάλων (Reinke, 1997; Brougher, 1973; Lehrer, Jenkins, & Osana, 1998). Έτσι αρκετοί μαθητές προσθέτουν τις διαστάσεις ενός π.χ. ορθογωνίου για να βρουν το εμβαδόν του (Kordaki & Pottari, 1998; Moreira & Contente, 1997), συγχέουν

την περίμετρο με το εμβαδό (π.χ. στην περίπτωση του τετραγωνισμού του κύκλου προτείνουν: *γιατί δεν «τεντώνουμε» τον κύκλο να γίνει τετράγωνο;*) και γενικά θεωρούν ότι όποια μεταβολή συμβαίνει στην περίμετρο, η ίδια μεταβολή συμβαίνει και στο εμβαδό (Tsamir & Mandel, 2000). Αυτή η τάση έχει ως αποτέλεσμα πολλοί μαθητές στη γεωμετρία να θεωρούν ότι αν διπλασιάσουμε την πλευρά ενός τετραγώνου, θα διπλασιαστεί και το εμβαδόν του. Η εφαρμογή του γραμμικού ή του αναλογικού μοντέλου σε όλες τις περιπτώσεις ακόμα και σε αυτές στις οποίες δεν εφαρμόζεται, αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως: *«η αυταπάτη της γραμμικότητας»* (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004).

2. Κάποιοι μαθητές συγκρίνουν τα εμβαδά δύο χωρίων «με το μάτι». Σύμφωνα με τον Piaget, η «με το μάτι» προσέγγιση που βασίζεται κυρίως στην οπτική αντίληψη είναι η πρωταρχική προσέγγιση για το εμβαδό (Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981).
3. Τα παιδιά παρουσιάζουν δυσκολίες στο να κατανοήσουν ότι μία επιφάνεια παραμένει αμετάβλητη όταν ένα μέρος της κόβεται και μεταφέρεται σ' ένα άλλο μέρος (Duady & Perrin, 1986) ή όταν μεταβάλλονται οι διαστάσεις της προκειμένου να προκύψει ισοδύναμη επιφάνεια (Carpenter & Lewis, 1976).
4. Οι μαθητές καταλαβαίνουν τη δυνατότητα διατήρησης του εμβαδού στα παραλληλόγραμμα και τα ορθογώνια αλλά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην προσπάθεια να διατηρήσουν σταθερό το εμβαδό στα τρίγωνα και στα ακανόνιστα σχήματα (Mayer & Beattys, 1986).
5. Οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι δύο ίσα τρίγωνα είναι ισεμβαδικά αλλά δεν τους περνάει από το μυαλό ότι μπορεί δύο άνισα τρίγωνα να είναι ισεμβαδικά (Kordaki & Balomenou, 2006).
6. Ιδιαίτερη δυσκολία παρουσιάζει για τα παιδιά η αναζήτηση της διατήρησης σε επιφάνειες που δεν έχουν γνωστό γεωμετρικό σχήμα ή δεν αποτελούνται από ένωση γνωστών γεωμετρικών σχημάτων (Duady & Perrin, 1986).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΩΝ

---

### 5.1 Ο σχεδιασμός των διδακτικών δραστηριοτήτων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι παρεμβάσεις έγιναν στη διδακτική ενότητα «Εμβαδά» της γεωμετρίας της Β' λυκείου με κεντρικό θέμα τον τετραγωνισμό. Ο διδακτικός σχεδιασμός των δραστηριοτήτων αλλά και η σειρά που ακολουθήθηκε έγινε λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως σχετικά με :

- Τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια του εμβαδού και την αριθμητικοποιημένη αντίληψη που έχουν αναπτύξει σχετικά με αυτό,
- τη διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών ως εργαλείου για την τοποθέτηση των δραστηριοτήτων στο χωρικό και χρονικό πλαίσιο κατά το οποίο αναπτύχθηκαν, προβάλλοντας την αναγκαιότητά τους και τον λόγο ύπαρξής τους και φωτίζοντας τα θεωρήματα ως μέρη της πολιτιστικής μας κληρονομιάς και κουλτούρας,
- τη βοήθεια την οποία μπορεί να προσφέρει ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας είτε από την πλευρά των προσφερόμενων εργαλείων είτε ως δόκιμο περιβάλλον και
- τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν πολλοί μαθητές με την τυπική φορμαλιστική απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος.

Η σειρά με την οποία διατάχθηκαν οι δραστηριότητες έγινε με τρόπο ώστε να οικοδομηθούν προοδευτικά οι απαιτούμενες έννοιες, γνώσεις και δεξιότητες για τον τετραγωνισμό ενός πολυγωνικού χωρίου. Με την ιστορική πλαισίωση, ο τετραγωνισμός υποδεικνύεται ως τρόπος αλλά και φιλοσοφία της ευκλείδειας αντίληψης για το εμβαδόν.

- Ο γενικότερος και κρυφά φιλόδοξος στόχος κατά τον σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων στα μαθηματικά είναι πάντα ή θα έπρεπε να

είναι πάντα, η διευκόλυνση της μετάβασης από την διαίσθηση και την οπτική τεκμηρίωση στον παραγωγικό συμπερασμό. Αυτός όμως παραμένει πολλές φορές άπιαστος και οι προσπάθειές μας φαντάζουν τότε απέλπιδες. *«Ακόμα κι όταν βάζουμε τα δυνατά μας για μια διδασκαλία με νόημα, η αλήθεια είναι ότι οι περισσότερες ιδέες που διδάσκουμε καταλήγουν σε διαδικασίες επίλυσης»* (Moise, 1975). Για τη διδασκαλία όμως κάθε ξεχωριστής ενότητας στα μαθηματικά χρειαζόμαστε απλούς, συγκεκριμένους, εφικτούς στόχους τους οποίους αποκαλούμε διδακτικούς. Αναζητώντας το δρόμο για μια 'ιδανική διδασκαλία', μετράμε τις αποστάσεις μας από αυτήν. Οι διδακτικοί στόχοι που θέσαμε για τις ενότητες που διδάξαμε ήταν, οι μαθητές και οι μαθήτριες: Να γνωρίσουν τι σημαίνει τετραγωνισμός ενός χωρίου.

- Να κατανοήσουν τη διατήρηση του εμβαδού και να μπορούν να δημιουργούν άνισα αλλά ισοδύναμα παρ/μα και τρίγωνα .
- Να γνωρίσουν την ευκλείδεια αντίληψη περί μέτρησης του εμβαδού, ένα εργαλείο της οποίας ήταν ο τετραγωνισμός.
- Να υιοθετήσουν τη διαμέριση σε απλούστερα σχήματα, ως τρόπο υπολογισμού του εμβαδού ενός πολυγωνικού χωρίου.
- Παρακάμπτοντας την για πολλούς μαθητές άγωνα και δυσνόητη λεκτική συλλογιστική ανάπτυξη μιας μαθηματικής απόδειξης και αξιοποιώντας τις ευκολίες του δυναμικού περιβάλλοντος του Euclidraw, να μπορέσουν να χαρούν την διαδρομή μιας «δύσκολης» απόδειξης (συγκεκριμένα αυτής που χάραξε ο Ευκλείδης για την απόδειξη του πυθαγορείου).
- Να αντιληφθούν το πυθαγόρειο ως εργαλείο αρχικά διπλασιασμού του τετραγώνου ή γενικά ως αθροιστική μηχανή δύο τετραγώνων.
- Να αντιληφθούν τη γεωμετρική ερμηνεία των μετρικών σχέσεων στο ορθογώνιο τρίγωνο.
- Να γνωρίσουν τη γεωμετρική κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με ορθογώνιο και να αντιληφθούν ότι το νόημα μιας γεωμετρικής κατασκευής για την ευκλείδεια γεωμετρία ήταν ένας λογικός παραγωγικός συμπερασμός και όχι ένας αλγόριθμος υπολογισμών και μετρήσεων.

- Να μπορέσουν να εφαρμόσουν όσα προηγουμένως έμαθαν και να τετραγωνίσουν ένα μη-κυρτό πολύγωνο.
- Να γνωρίσουν τον τρόπο με τον οποίο απέδειξε ο Ιπποκράτης ότι κάποιοι μηνίσκοι τετραγωνίζονται.
- Να γνωρίσουν ότι τη δουλειά που κάνει το πυθαγόρειο με τα τετράγωνα, μπορεί να την κάνει και με άλλα όμοια σχήματα.
- Να καταλάβουν την προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου, σε αντιπαραβολή με τον εφικτό τετραγωνισμό ορισμένων καμπυλόγραμμων χωρίων (μηνίσκων).

Οι διδασκαλίες με θέμα τον τετραγωνισμό χωρίστηκαν σε δύο μέρη. Το Α' μέρος αφορά τη διατήρηση του εμβαδού και τον τετραγωνισμό ενός πολυγωνικού χωρίου και το Β' μέρος αφορά τα εμβαδά καμπυλόγραμμων χωρίων. Η σειρά των παρεμβάσεων ήταν η εξής:

<p><i>Πρώτη παρέμβαση:</i> (3 διδακτικές ώρες)</p> <p>Χρησιμοποιήθηκαν τα: 1<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Κατασκευή ισοδύναμων τριγώνων και παρ/μων με κοινή βάση</li> <li>■ Κατασκευή ορθογωνίου παρ/μου ισοδύναμου ενός τριγώνου.</li> <li>■ Κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου με ορθογώνιο παρ/μο.</li> </ul>	Α' ΜΕΡΟΣ
<p><i>Δεύτερη παρέμβαση:</i> (2 διδακτικές ώρες)</p> <p>Χρησιμοποιήθηκαν τα: 3<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Κατασκευή τετραγώνου με εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο άλλων τετραγώνων</li> <li>■ Απόδειξη πυθαγορείου κατά Ευκλείδη</li> </ul>	
<p><i>Τρίτη παρέμβαση:</i> (1 διδακτική ώρα)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος προς αξιολόγηση της κατανόησης των ισεμβαδικών τριγώνων</li> </ul>	
<p><i>Τέταρτη παρέμβαση-Αξιολόγηση:</i> (2 διδακτικές ώρες)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Τετραγωνισμός τυχαίου τετραπλεύρου</li> <li>■ Τετραγωνισμός ενός μη-κυρτού πολυγωνικού χωρίου</li> <li>■</li> </ul>	

<p><i>Πέμπτη παρέμβαση:</i> (2 διδακτικές ώρες) Χρησιμοποιήθηκαν τα: 5<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 6<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Υπολογισμός εμβαδού κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος</li> <li>■ Τετραγωνισμός των μηνίσκων του Ιπποκράτη</li> </ul>	<b>Β' ΜΕΡΟΣ</b>
<p><i>Αξιολόγηση</i> (2 διδακτικές ώρες) Χρησιμοποιήθηκαν τα: 7<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Β</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Τετραγωνισμός ενός μηνίσκου</li> <li>■ Συμπλήρωση ερωτηματολογίου Β</li> </ul>	

Η ιστορία επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί ως πλαισίωση ή φόντο. Πριν από την πρώτη παρέμβαση έγινε μία παρουσίαση για τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, τον ίδιο τον Ευκλείδη αλλά κυρίως για τη φιλοσοφία της αρχαιοελληνικής γεωμετρίας και τον τρόπο με τον οποίο αυτή χειριζόταν τη μέτρηση. Μία ακόμη παρουσίαση έγινε για τον τετραγωνισμό του κύκλου, την ιστορική εξέλιξη, τις προσπάθειες, την κατάληξη.

Στις διδασκαλίες χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας EucliDraw. Το EucliDraw, εν συντομία EUC, είναι ένα πρόγραμμα για το σχεδιασμό σχημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του επιπέδου που ξεκίνησε πριν το 1990 στο Πανεπιστήμιο Κρήτης και συνεχίζεται μέχρι σήμερα. Προσομοιώνει το φύλλο χαρτιού, τον κανόνα, το διαβήτη καθώς και δεκάδες άλλων ειδικών εργαλείων, επιτρέποντας το σχεδιασμό σύνθετων σχημάτων με ταχύτητα και ακρίβεια και είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιας προσπάθειας. Το δυναμικό περιβάλλον του EucliDraw χρησιμοποιήθηκε ως καταλληλότερο από άλλα λογισμικά επειδή διαθέτει την δυνατότητα διαμέρισης ενός πολυγώνου κατά μήκος ενός ευθ. τμήματος καθώς και την παραγωγή εξαρτημένων αντιγράφων ενός σχήματος, χρήσιμα κατά τις διαδικασίες της απόδειξης του πυθαγορείου και του τετραγωνισμού ενός πολυγωνικού χωρίου, αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα προηγουμένως αναφέραμε στο κεφάλαιο «Η απόδειξη στα ψηφιακά περιβάλλοντα», αναρωτήθηκα ποια αξία θα είχε για τους μαθητές να διδαχθούν, στο δυναμικό περιβάλλον του EucliDraw, την απόδειξη του γνώριμου και εμπεδωμένου πλέον πυθαγορείου θεωρήματος, έτσι όπως την

παρήγαγε ο Ευκλείδης πριν από 2400 χρόνια. Δεν θα μπορούσα βέβαια να στοχεύω στην ανακάλυψη ή τη διερεύνηση αφού το αποτέλεσμα θα ήταν εκ των προτέρων γνωστό και γνώριμο και σίγουρα μη αμφισβητούμενο.

Κατέληξα πως υπήρχαν τρεις βασικοί λόγοι. Ένας πρώτος λόγος ήταν, ο βασικός λόγος που καθιστά σημαντική τη διδασκαλία της όποιας απόδειξης σ' αυτό το επίπεδο, που είναι, όχι τόσο το να πείσει τους μαθητές ότι πράγματι ισχύει, αλλά για να εξηγήσει *γιατί ισχύει!* Η βασική ανάγκη να υπάρχει απόδειξη, πέρα από την προφανή ανάγκη νομιμοποίησης, είναι ότι τελικά αν δεν μπορείς να εξηγήσεις γιατί ισχύει κάτι, δεν μπορείς ποτέ να είσαι σίγουρος ότι θα ισχύει πάντα και σε όλες τις περιπτώσεις. Κι αυτό, είναι βασικό να κατορθώσουμε να το περάσουμε στους μαθητές μας.

Ένας δεύτερος λόγος, για την πληρότητα αυτού του διδακτικού εγχειρήματος. Θεώρησα ότι η απόδειξη του πλέον διάσημου αλλά και θεμελιώδους θεωρήματος στην ιστορία των μαθηματικών, από τον ίδιο τον Ευκλείδη, αξίζει κάτι περισσότερο από ένα ιστορικό σημείωμα στο κεφάλαιο «Εμβαδά» του σχολικού βιβλίου, για το οποίο πιθανότατα κανείς δεν θα διαθέσει χρόνο, αφού είναι εκτός εξεταστέας ύλης.

Και ο τελευταίος λόγος. Η απόδειξη του πυθαγορείου κατά Ευκλείδη, συνθέτει, κατά την γνώμη μου, σε μία θριαμβευτική παράσταση, τις βασικότερες προτάσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας για το εμβαδό αλλά και γενικότερα τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρους αντιλαμβάνονταν τη μέτρησή του. Έτσι είπα να ακολουθήσω έναν πιο ευχάριστο και «εύκολο» δρόμο, με την βοήθεια του λογισμικού, αποφεύγοντας τον καταναγκασμό στα δύσβατα για πολλούς μαθητές μονοπάτια της μαθηματικής γεωμετρικής γραφής, με απώτερο στόχο τούτον: Να καταφέρω να δείξω τη θέα και την ομορφιά της διαδρομής που ακολούθησε το εξασκημένο «μάτι» του Ευκλείδη, ελπίζοντας, για μια φορά, «μια απόδειξη» να κερδίσει το θαυμασμό τους!

Πριν από τις παρεμβάσεις διαθέσαμε δύο διδακτικές ώρες στο εργαστήριο πληροφορικής, ώστε οι μαθητές να γνωρίσουν το σχεδιαστικό περιβάλλον του EucliDRaw και να μάθουν βασικές λειτουργίες του, απαραίτητες για τη συνέχεια.

Ακόμη, συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο, με σκοπό να καταγράψουμε κάποιες ιδέες τους σχετικά με την έννοια του εμβαδού, τη μέτρησή του, τη



σημασία της έκφρασης «ο τετραγωνισμός του κύκλου» καθώς και τη γνώμη τους για την αξία της γεωμετρίας και της άλγεβρας ως μάθημα.

## 5.2 Η σύνθεση και η φυσιογνωμία των ομάδων

Οι μαθητές ήταν 22. Χωρίστηκαν σε οχτώ ομάδες των δύο ατόμων και 2 ομάδες των τριών. Οι ομάδες διαμορφώθηκαν ελεύθερα από τα παιδιά. Ο χωρισμός σε ομάδες ήταν αναπόφευκτος αφού υπήρχαν μόνο 10 διαθέσιμοι υπολογιστές στο εργαστήριο.

Τα μισά από τα 22 παιδιά ήταν μέτριοι έως καλοί και τα άλλα μισά ήταν πολύ αδύναμα στα μαθηματικά με ελάχιστα καλλιεργημένη γεωμετρική αντίληψη (αυτό θα φανεί παρακάτω από τις απαντήσεις τους στο αρχικό ερωτηματολόγιο). Η κατανομή των ομάδων, όπως διαμορφώθηκε από τα παιδιά που διαχειρίστηκαν μόνα τους το θέμα αυτό, σταθεροποιήθηκε στη δεύτερη συνάντηση και διατήρησε τη σύνθεσή της ως το τέλος αυτής της παρέμβασης. Η σύνθεση λοιπόν που διαμορφώθηκε ήταν η εξής:

Οι μέτριοι έως καλοί έφτιαξαν έξι ζευγάρια του τύπου 'ένας καλός-ένας μέτριος'.

Οι πολύ αδύναμοι χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες δημιουργώντας ένα ζευγάρι και δύο τριάδες.

Τα δύο πιο απομονωμένα παιδιά της τάξης, ο Γ. και ο Χ. καθένα με τις δικές του ιδιαιτερότητες, έγιναν ζευγάρι και ήταν η πρώτη φορά που συνεργάστηκαν και επικοινωνήσαν με κάποιο άλλο άτομο στην τάξη σχετικά με το μάθημα.

Η σύνθεση	Ζευγάρια	Τριάδες
Καλός-Μέτριος	6	0
Αδύναμος-Αδύναμος	2	2

### 5.3 Μεθοδολογία

Η ερευνήτρια ήταν η καθηγήτρια της τάξης. Οι παρεμβάσεις, όπως αναφέραμε και προηγούμενα, είχαν ως κεντρικό θέμα τον τετραγωνισμό. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να αποτελούν μια ολοκληρωμένη μέθοδο διδασκαλίας γι' αυτό το θέμα σε αντίθεση με το σχολικό εγχειρίδιο όπου υπάρχουν μεμονωμένες και ασύνδετες μεταξύ τους αναφορές οι οποίες δεν μπορούν να συνθέσουν ολόκληρη την «εικόνα» του τετραγωνισμού και τον ευκλείδειο τρόπο μέτρησης του εμβαδού. Στις περισσότερες των περιπτώσεων δεν ακολουθήθηκε η παραδοσιακή μέθοδος διδασκαλίας αλλά η μέθοδος της κατευθυνόμενης ανακάλυψης. Επομένως σύμφωνα με τους Cohen & Manion, η παρούσα έρευνα είναι ένα διδακτικό πείραμα(Cohen & Manion, 1994).

Οι τέσσερις πρώτες παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο πληροφορικής όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάστηκαν σε ομάδες των 2 ή τριών ατόμων, στο δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον του EucliDraw. Σε κάθε παρέμβαση, η καθηγήτρια-ερευνήτρια χρησιμοποιούσε ένα ή δύο φύλλα εργασίας. Τα φύλλα εργασίας προσφέρουν κάποια δεδομένα προς ανάλυση και αξιολόγηση αλλά είναι κι ένας τρόπος να διασφαλιστεί ο προσανατολισμός της κάθε δραστηριότητας. Χρησιμοποιήσαμε ακόμη δύο ερωτηματολόγια και δύο φύλλα αξιολόγησης.

Όση ώρα οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονταν στον υπολογιστή, στο περιβάλλον του EucliDraw, οι κινήσεις τους καταγράφονταν από έναν λογισμικό ψηφιακής καταγραφής οθόνης (screen-recorder), συγκεκριμένα το free screen to video, που είχε εγκαταστήσει η καθηγήτρια-ερευνήτρια σε κάθε έναν υπολογιστή από αυτούς που χρησιμοποιούσαν τα παιδιά. Οι μαθητές ήταν ενημερωμένοι και μόλις άρχιζε το μάθημα, ενεργοποιούσαν την εγγραφή οθόνης. Μετά το πέρας κάθε παρέμβασης, η καθηγήτρια έπαιρνε τα αρχεία των βίντεο που είχαν δημιουργηθεί σε κάθε υπολογιστή. Βλέποντας τα βίντεο αργότερα μπορούσε να δει ακριβώς ό,τι έκανε η κάθε ομάδα στην κάθε μία δραστηριότητα. Αυτά τα βίντεο ήταν η πολυτιμότερη πηγή δεδομένων. Η ερευνήτρια αφού ήταν και η καθηγήτρια-ερευνήτρια της τάξης, την ώρα που δίδασκε ή κατηύθυνε τις δραστηριότητες, δεν μπορούσε να παρακολουθεί τι

κάνει η κάθε ομάδα, την κάθε στιγμή. Αλλά ακόμη και εάν μπορούσε δεν θα το θυμόταν μετά από λίγο καιρό. Αντίθετα, «μελετώντας» τα βίντεο αργότερα, μπόρεσε να δει ακριβώς τον τρόπο που σκέφτηκαν και ενέργησαν τα παιδιά σε κάθε δραστηριότητα, τα λάθη, τις δοκιμές, τον τρόπο σχεδίασης των σχημάτων, κ.λπ. Επιπλέον στις τρεις από τις πέντε παρεμβάσεις, η καθηγήτρια, κατέγραψε όλο το μάθημα, με ψηφιακή συσκευή καταγραφής ήχου. Ακούγοντας αργότερα τις συνομιλίες μέσα στην τάξη και τους διαλόγους, σε συνδυασμό με αυτά που έβλεπε να κάνουν οι μαθητές στα αρχεία βίντεο, μπόρεσε να συλλέξει δεδομένα για τη συμμετοχή των παιδιών στη δράση. «Ακούγοντας» την πορεία του μαθήματος μπόρεσε για παράδειγμα, συνδυάζοντας τους χρόνους στα δύο αρχεία (στα αρχεία εικόνας και στο αρχείο ήχου καταγράφονταν η ώρα), να διακρίνει αν κάποια ενέργεια ενός μαθητή ήταν δική του πρωτοβουλία ή αποτέλεσμα πειραματισμού ή επικοινωνίας με τους υπόλοιπους μαθητές της τάξης.

Τα φύλλα εργασίας και τα φύλλα αξιολόγησης ήταν μία συμπληρωματική πηγή δεδομένων από τα οποία η καθηγήτρια έβγαλε συμπεράσματα κυρίως σχετικά με την ικανότητα των μαθητών και των μαθητριών παραγωγής ενός λογικού συμπερασμού αλλά και τον τρόπο σχεδίασης «με το χέρι».

Τέλος, τα ερωτηματολόγια προσέφεραν δεδομένα σχετικά με τις αντιλήψεις, τις στάσεις και τα συναισθήματα των μαθητών και των μαθητριών, αλλά και δεδομένα σχετικά με το βαθμό κατανόησης εννοιών που διαπραγματεύτηκαν σε αυτή τη σειρά των μαθημάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΟΙ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

### 6.1 Ερωτηματολόγιο Α

Ξενοκούμε παρουσιάζοντας τις απαντήσεις των παιδιών στο ερωτηματολόγιο που τους δώσαμε για να γίνει ορατή σ' ένα βαθμό, η γεωμετρική αντίληψη και οι απόψεις των μαθητών στους οποίους εφαρμόστηκαν οι παρεμβάσεις, σχετικά με το μάθημα.

<i>Ερώτηση 1:</i>	<i>Όταν ακούτε τη λέξη εμβαδό τι σας έρχεται στο μυαλό;</i>
αριθμός	0
επιφάνεια	21
τύπος	1

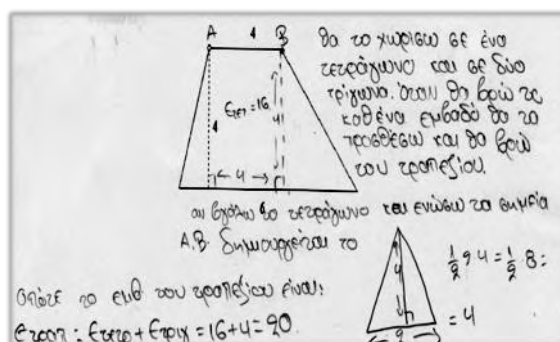
<i>Ερώτηση 2:</i>	<i>Ποιανού γεωμετρικού σχήματος το εμβαδόν σας δυσκολεύει περισσότερο από των άλλων;</i>
του παρ/μου	1
του τριγώνου	0
του τραπεζίου	6
του κύκλου	12
κανενός	3

<i>Ερώτηση 3:</i>	<i>Ποιανού γεωμετρικού σχήματος το εμβαδόν θυμάστε πάντα πώς υπολογίζεται;</i>
Του τετραγώνου	6
Του ορθογωνίου παρ/μου	1
Του παρ/μου	0
Του τριγώνου	4
Του τραπεζίου	2
Πολλαπλές απαντήσεις	4
Όλων (πρόσθετη απάντηση)	4
Κανενός (πρόσθετη απάντηση)	1

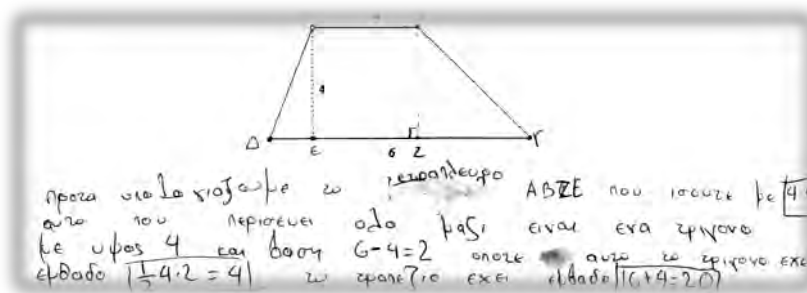
### Ερώτηση 4

Η 4<sup>η</sup> ερώτηση ζητούσε να υπολογίσουν το εμβαδό ενός τραapeζίου, χωρίς να χρησιμοποιήσουν τον έτοιμο τύπο, όταν τους δίνονταν τα μήκη των βάσεων και το ύψος. Σε γενικές γραμμές δυσκολεύτηκαν να το υπολογίσουν χωρίς τη χρήση του έτοιμου τύπου.

Επτά παιδιά είδαν ότι το τραπέζιο που είχαν, αποτελείται από ένα τετράγωνο και δύο τρίγωνα και διατύπωσαν την άποψη ότι προσθέτοντας τα επιμέρους εμβαδά, θα βρουν το συνολικό εμβαδό του τραapeζίου. Τρεις όμως από αυτούς το υπολόγισαν τελικά. Η τεχνική που ακολούθησαν είναι η εξής: αφού υπολόγισαν το τετράγωνο στη μέση, είδαν ότι αν το αφαιρέσουν, τα δύο ακριανά τρίγωνα που μένουν φτιάχνουν ένα τρίγωνο με το ίδιο ύψος και βάση το υπόλοιπο της βάσης που έμεινε.



Εικόνα E1.1



Εικόνα E1.2

Οι άλλοι τέσσερις είχαν το ίδιο σκεπτικό αλλά υπολόγισαν μόνο το εμβαδό του τετραγώνου.

Βρίσκουμε το εμβαδό του τετραγώνου  $[ΓΑ·ΓΜ] = 16$   
 επιπλέον βρίσκουμε το εμβαδό των  $\triangle ΓΜ$  και του  $\triangle ΑΒ$  και τα προσθέτουμε.

φέρουμε μια κάθετη στην πλευρά  $Β$  η οποία περνά από το  $Α$ .

Εικόνα E1.3

Υπολογίζουμε το εμβαδό του τετραγώνου που είναι 16.  
 Βρίσκουμε το εμβαδό των τριγώνων και σ'αυτά συνέχεια προσθέτουμε τα αποτελέσματα, για να βρούμε το συνολικό εμβαδό του τραπέζιου.

Εικόνα E1.5

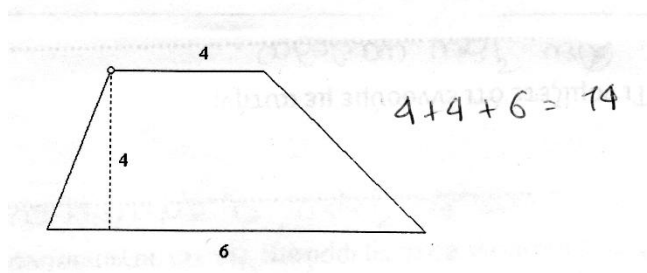
θα εβρούμε τα εμβαδά του τετραγώνου και 5 των τριγώνων 5 θα προσθέτουμε.

Εικόνα E1.6

Από τους υπόλοιπους, κάποιιοι υπολόγισαν το τετράγωνο και έμειναν εκεί, κάποιιοι πολλαπλασίασαν την κάτω βάση επί το ύψος, και υπήρξαν και τρεις που πρόσθεσαν τα μήκη που έβλεπαν!

$4 + 4 + 6 = 14 + 4 = 18$   
 $E = 18$

Εικόνα E1.6



Εικόνα Ε1.7

Κανένας από τα 22 παιδιά της τάξης δεν σκέφτηκε να χωρίσει το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα, φέρνοντας την διαγώνιο.

*Ερώτηση 5: «Έχετε ακούσει ποτέ τη φράση: να τετραγωνίσουμε τον κύκλο;»*

Όλα τα παιδιά πλην ενός, έδωσαν θετική απάντηση.

*Ερώτηση 6: «Τι νομίζετε ότι εννοούμε με αυτήν;»*

«Δεν ξέρω ή δεν το έχω καταλάβει ακόμα». (6 απαντ.)

«Μάλλον είναι το να υπολογίσουμε το εμβαδόν του κύκλου σαν να ήταν τετραγώνου». (1 απαντ.)

«Να βάλουμε τον κύκλο σ' ένα τετράγωνο». (4)

«Να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο μέσα στον κύκλο». (5)

«Το εμβαδόν του κύκλου να είναι ίδιο με ενός τετραγώνου και να έχουν και την ίδια περίμετρο (ίσως)». (1 απαντ.)

«Ένας κύκλος που θέλουμε να τον κάνουμε τετράγωνο». (2 απαντ.)

«Ένας κύκλος να γίνει τετράγωνο». (2 απαντ.)

«Να κάνουμε έναν κύκλο τετράγωνο με διαβήτη και χάρακα». (1 απαντ.)

<i>Ερώτηση 7:</i>	<i>Ποιο μάθημα σας αρέσει περισσότερο στα μαθηματικά;</i>
Η άλγεβρα	11
Η γεωμετρία	5
Κανένα	1
Όλα (πρόσθετη απάντηση)	2

<i>Ερώτηση 8:</i>	<i>Ποιο από τα δύο μαθήματα, η άλγεβρα ή η γεωμετρία σας φαίνεται πιο «χρήσιμο» για τη ζωή σας και γιατί;</i>
Η άλγεβρα	11
Η γεωμετρία	5
Και τα δύο	2
Κανένα	1

Κάποιοι από τους λόγους με τους οποίους τα παιδιά δικαιολόγησαν το γιατί η γεωμετρία ή η άλγεβρα τους είναι χρήσιμη στη ζωή τους, είναι οι εξής:

*Τα επιχειρήματα υπέρ της άλγεβρας*

*«... η άλγεβρα γιατί για όλα πρέπει να ξέρεις πράξεις ενώ δεν θα χρειαστεί να σχεδιάσεις τρίγωνο ή π.χ. να βρεις την ακτίνα κύκλου, στη ζωή σου.»*

*«... η άλγεβρα γιατί στη ζωή μας συναντάμε περισσότερο αλγεβρικούς παρά γεωμετρικούς τύπους.»*

*«... η άλγεβρα γιατί πιστεύω ότι οι πράξεις και οι αριθμοί παίζουν σημαντικό ρόλο.»*

*«Γιατί αν δεν ξέρουμε έστω να κάνουμε πράξεις με το μυαλό και αν δεν ξέρουμε τίποτα από μαθηματικά θα θεωρούμαστε «άχρηστοι».»*

*«... η άλγεβρα γιατί μας βοηθάει από τους πιο απλούς υπολογισμούς έως και τους πιο σύνθετους.»*

*Τα επιχειρήματα υπέρ της γεωμετρίας*

*«...η γεωμετρία μας χρησιμεύει και στην καθημερινή μας ζωή π.χ. όταν χτίζουμε το σπίτι μας μπορεί να μας χρειαστεί.»*

*«...η γεωμετρία γιατί μας βοηθάει να σκεφτόμαστε με διαφορετικό τρόπο.»*

*«...Η γεωμετρία είναι πιο χρήσιμη για τη ζωή γιατί είναι βασισμένη σε θεωρίες αιώνων.»*

*«... και τα δύο αλλά περισσότερο η γεωμετρία διότι μας βοηθάει να σκεφτόμαστε ελεύθερα.»*



Τα αριθμητικά αποτελέσματα των απαντήσεων 7 και 8 δημιουργούν τη ψευδή αντίληψη ότι όσα παιδιά απάντησαν ότι τους αρέσει περισσότερο η άλγεβρα, απάντησαν ότι τη θεωρούν και πιο «χρήσιμη» για τη ζωή τους. Αυτό όμως δεν είναι αληθές. Τα 11 παιδιά που απάντησαν ότι τους αρέσει περισσότερο η άλγεβρα δεν είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά τα 11 που απάντησαν ότι τη θεωρούν πιο χρήσιμη. Υπήρξαν δηλαδή μαθητές και μαθήτριες που απάντησαν ότι τους αρέσει περισσότερο η άλγεβρα αλλά στην επόμενη ερώτηση απάντησαν ότι θεωρούν για τη ζωή τους πιο «χρήσιμη» τη γεωμετρία και το αντίστροφο. Είναι σαφές ότι η άλγεβρα είναι η κερδισμένη και ως προς την προτίμηση αλλά και ως προς τις αντιλήψεις για τη «χρηστική της αξία». Παρ' όλα αυτά τα επιχειρήματα υπέρ της γεωμετρίας έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί αποκαλύπτουν περισσότερα. Αναγνωρίζουν τη διαχρονική της αξία της γεωμετρίας και την χρησιμότητά της στις τέχνες. Το πιο εντυπωσιακό όμως είναι ότι αναγνωρίζουν ότι στη γεωμετρία σκέφτεται κανείς «διαφορετικά» και πιο «ελεύθερα». Οι απόψεις τους δεν διαφέρουν επομένως πολύ από κάποια επιχειρήματα που έχουν διατυπωθεί υπέρ της από ερευνητές-εκπαιδευτικούς (βλέπε Κεφάλαιο 3, το τυπικό, το χρηστικό και το πολιτισμικό επιχείρημα).

Σχετικά με τον τετραγωνισμό είναι φανερό ότι η συντριπτική πλειοψηφία δεν γνωρίζει τη σημασία του. Πολλοί τον συγχέουν με την έννοια του «εγγράψιμου» και «περιγράψιμου» τετραγώνου και άλλοι εμφανίζουν την γνωστή παρανόηση μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου. Παρ' όλα αυτά γνωρίζουν ότι όλα τα παραπάνω θα πρέπει να γίνουν με κανόνα και διαβήτη!

## 6.2 Πρώτη παρέμβαση

(3 διδακτικές ώρες)

### 6.2.1 Η πρώτη ιστορική παρουσίαση

Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, πριν από την έναρξη της σειράς των παρεμβάσεων πάνω στη διδακτική ενότητα εμβαδά, η ερευνήτρια και καθηγήτρια της τάξης έδειξε στους μαθητές μία παρουσίαση power point με ιστορικά στοιχεία γύρω από τον Ευκλείδη, το έργο του και την ευκλείδεια

φιλοσοφία για το εμβαδόν και τη μέτρησή του. Ο σκοπός ήταν να «εισάγει» τα παιδιά στην ευκλείδεια λογική της μέτρησης του εμβαδού, που είναι διαφορετική από την σημερινή, για να μπορέσουν τα παιδιά να κατανοήσουν στη συνέχεια ότι ο τετραγωνισμός με τον οποίο θα ασχολούνταν, δεν ήταν μία «ιδιοτροπία» ή μία «εμμονή» του Ευκλείδη, αλλά ήταν ο «τρόπος» του να μετράει ένα εμβαδό.

Η ανταπόκριση των παιδιών ήταν θετική και μπορούμε να πούμε ότι όλα τα παραπάνω τα άκουσαν με ενδιαφέρον, αφού ήταν και η πρώτη φορά που άκουγαν κάτι για τα μαθηματικά εκτός από τα ίδια μαθηματικά. Από την άλλη δεν είναι καθόλου σίγουρο πόσοι και πόσο κατάλαβαν πραγματικά αυτά που άκουσαν ή πόσοι και πόσο τα θυμούνταν στη συνέχεια. Αλλά ο σκοπός, που ήταν να «στερεωθούν» οι επόμενες δραστηριότητες πάνω στον ιστορικό καμβά, ώστε ο τετραγωνισμός να μην «φανεί» στα παιδιά ως μία «άκαιρη» και «αναίτια» διαδικασία, είχε επιτευχθεί. Κανένα παιδί στις δραστηριότητες που ακολούθησαν, δεν διατύπωσε την συνηθισμένη ερώτηση: «Και γιατί τα κάνουμε τώρα εμείς αυτά;» Τα παιδιά είχαν «μπει» στο πνεύμα της ιστορίας και ακολούθησαν.

#### 6.2.2 1<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου. Υπήρχαν διαθέσιμοι εννιά υπολογιστές και το laptop ενός μαθητή. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε εννιά ομάδες των δύο ατόμων και μία ομάδα των τριών (ένας μαθητής απουσίαζε). Στους μαθητές δόθηκε φύλλο εργασίας με τρεις δραστηριότητες. Όλες οι δραστηριότητες έγιναν αρχικά στην οθόνη του υπολογιστή στο σχεδιαστικό περιβάλλον του EucliDraw και στη συνέχεια πάνω στο φύλλο εργασίας. Η όλη διαδικασία διήρκεσε τρεις συνεχόμενες διδακτικές ώρες. Υπήρξε μόνο ένα διάλλειμα στο μέσον περίπου της δεύτερης διδακτικής ώρας. Όλη η διαδικασία καταγράφηκε σε ψηφιακή συσκευή καταγραφής ήχου. Όπου θεωρήθηκε σκόπιμο για την πληρέστερη εικόνα του αναγνώστη, παρεμβάλλονται αποσπάσματα διαλόγων μεταξύ της καθηγήτριας που πραγματοποίησε τις παρεμβάσεις και τους μαθητές.

## 1<sup>η</sup> δραστηριότητα

1. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο.
2. Σχεδιάστε ένα άλλο οξυγώνιο τρίγωνο που να έχει την ίδια βάση με το αρχικό και το ίδιο εμβαδό.
3. Σχεδιάστε ακόμα, ένα αμβλυγώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο που να έχουν την ίδια βάση με το αρχικό τρίγωνο και να είναι ισοδύναμα με αυτό.

Συζητήστε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τη λύση στην τάξη. Προσπαθήστε να δώσετε λύση, η οποία δεν θα βασίζεται σε μετρήσεις.

Αρχικά η καθηγήτρια έδωσε στα παιδιά τον ορισμό της λέξης ισοδύναμα χωρία. Δύο χωρία με το ίδιο εμβαδό θα λέγονται ισοδύναμα. Στη συνέχεια άρχισε ένα διάλογο με τα παιδιά για να διερευνήσει τις απόψεις τους σχετικά με τις έννοιες ίσα τρίγωνα και ισεμβαδικά τρίγωνα.

Καθ: *Δύο τρίγωνα που είναι ίσα, είναι ισεμβαδικά;*

Οι περισσότεροι απάντησαν θετικά.

Καθ: *Δύο ισεμβαδικά τρίγωνα είναι ίσα;*

Μαθ1: Όχι. Εεεε... τι λέω; Ναι.

Μαθ2: Όχι...μμμμ, μπορεί.

Καθ: *Όχι, όχι πάντα, μπορεί, ...;*

Μαθ2: *Όχι, όχι πάντα.*

Καθ: *Δεν είσαι και πολύ σίγουρος. Να το θέσω αλλιώς. Μπορεί δύο τρίγωνα που δεν είναι ίσα να είναι ισεμβαδικά;*

Μαθ2: *Όχι, δεν γίνεται.*

Επειδή δεν απαντούν παρά μόνο δύο μαθητές, η καθηγήτρια παρακινεί και τους άλλους να απαντήσουν.

Οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους, κάποιοι λένε ναι, κάποιοι όχι δεν μπορούν να αποφασίσουν. Η καθηγήτρια, για να τους βοηθήσει να αποφασίσουν, ξαναρωτάει:

Καθ: *Αρα ισεμβαδικά είναι μόνο τα ίσα;*

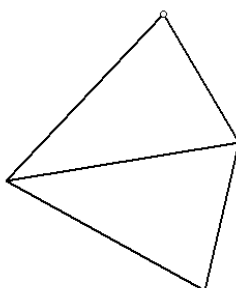
Μαθ3: *Εγώ λέω ναι.*

Μαθ4: *Εγώ λέω όχι.*

### Διάλογος 1

Η καθηγήτρια δεν απαντάει σ' αυτό. Ζητάει από τους μαθητές να φτιάξουν στο φύλλο σχεδίασης του EucliDraw στην οθόνη, ένα τρίγωνο οξυγώνιο. Στη συνέχεια να φτιάξουν ένα άλλο οξυγώνιο τρίγωνο που θα έχει την ίδια βάση με το πρώτο (μία κοινή πλευρά) και το ίδιο εμβαδό. Σ' αυτούς που δεν πιστεύουν ότι μπορεί να γίνει αυτό, η καθηγήτρια τους λέει να δοκιμάσουν. Τους υπενθυμίζει ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο μέτρησης εμβαδού, αλλά παρ' όλα αυτά θα πρέπει να δικαιολογήσουν γιατί τα εμβαδά είναι ίσα.

Όλα τα παιδιά ανεξαιρέτως αφού έφτιαξαν αρχικά ένα οξυγώνιο τρίγωνο, σχεδίασαν ένα δεύτερο κάτω από το πρώτο, διατηρώντας κοινή τη βάση.



Δηλαδή οι κορυφές βρίσκονταν εκατέρωθεν της κοινής βάσης.

Τα παιδιά χρησιμοποίησαν τις παρακάτω στρατηγικές στις διερευνήσεις τους:

1. Σχεδίασαν ένα τρίγωνο κάτω από το πρώτο που διαισθητικά τους φάνηκε ότι θα είχε το ίδιο εμβαδόν (στην ουσία έφτιαχναν το συμμετρικό του ως προς τη βάση χωρίς να το συνειδητοποιούν).
2. Ο μαθητής που είχε απαντήσει ότι δεν μπορεί δύο άνισα τρίγωνα να έχουν το ίδιο εμβαδό, παρήγαγε το ακριβές αντίγραφο του πρώτου και το 'κόλλησε' από κάτω.
3. Σχεδίασαν παραλληλόγραμμο και το χώρισαν σε δύο τρίγωνα με τη διαγώνιο.
4. Ο Κ. σχεδίασε παράλληλη από την κορυφή προς τη βάση και σχεδίασε ένα άλλο τρίγωνο που είχε κοινή βάση με το πρώτο και η κορυφή του ήταν πάνω στην παράλληλη. Όμως όταν ρωτήθηκε γιατί πιστεύει ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδό, δεν μπορούσε να απαντήσει.

Η καθηγήτρια υπενθύμισε τότε ότι αναζητούν ένα ισοδύναμο με το πρώτο τρίγωνο αλλά *όχι ίσο με αυτό*. Μετά από πέντε λεπτά κι αφού δεν φαινόταν να βρίσκουν κάποια λύση, η καθηγήτρια παρενέβη ξανά.

Καθ: *Δηλαδή, πως ψάχνετε να βρείτε τρίγωνο με το ίδιο εμβαδό; Σας λέω ότι τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση. Στα τυφλά θα ψάχνουμε, τραβώντας γραμμές στην τύχη; Από τι εξαρτάται το εμβαδό ενός τριγώνου;*

Μαθ: *Ένα δεύτερο βάση επί ύψος.*

Καθ: *Αρα από τι εξαρτάται;*

Μαθ: *Τη βάση και το ύψος.*

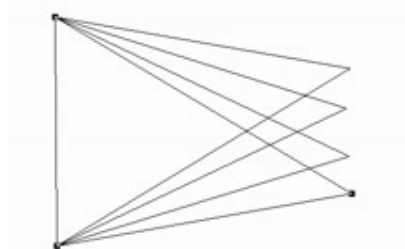
Καθ: *Τη βάση την έχετε ίδια;*

Μαθ: *Ναι.*

Καθ: *Επομένως τι άλλο θα πρέπει να έχετε ίδιο;*

#### Διάλογος 2

Επίσης τους παρότρυνε να σχεδιάσουν τρίγωνα, διατηρώντας κοινή βάση, με τις κορυφές τους να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Στη συνέχεια διατύπωσε την ερώτηση: «*Που πρέπει να βρίσκονται αυτές οι κορυφές ώστε τα τρίγωνα να έχουν το ίδιο ύψος;*» Ο Κ. τότε είπε: «*Γι' αυτό εγώ πήρα παράλληλη. Κάτι ήξερα*». Τότε λοιπόν και οι άλλες 6 ομάδες κατάλαβαν ότι έπρεπε να φέρουν παράλληλη από την κορυφή προς τη βάση. Δηλαδή συνολικά οι επτά ομάδες από τις δέκα χρειάστηκαν 13-17 λεπτά για να καταλήξουν στο παραπάνω συμπέρασμα. Οι υπόλοιπες τρεις ομάδες που αποτελούνταν από τους πιο αδύναμους μαθητές, άρχισαν να σχεδιάζουν τρίγωνα κρατώντας σταθερό το ύψος «με το μάτι».



Χρειάστηκαν ακόμη 5-8 λεπτά και μία παρέμβαση με ερωτήσεις πάνω από την κάθε ομάδα χωριστά, για να οδηγηθούν στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία που ισαπέχουν από τη βάση του τριγώνου ανήκουν σε ευθεία παράλληλη προς αυτή.

Για να οδηγηθεί όμως κανείς σε αυτό το συμπέρασμα θα πρέπει να ακολουθήσει τον εξής παραγωγικό συμπερασμό: διατηρώ σταθερό ύψος από μία βάση σημαίνει διατηρώ σταθερή απόσταση από αυτή και σταθερή απόσταση διατηρώ όταν κινούμαι παράλληλα σε αυτήν. Γιατί όμως τα περισσότερα παιδιά δεν μπόρεσαν να οδηγηθούν σε αυτό το επιχείρημα από μόνα τους;

Κατά πρώτο και κύριο λόγο, για πολλά παιδιά, φάνηκε ότι η έννοια ύψος τριγώνου δεν είναι ταυτόσημη με την έννοια της απόστασης της κορυφής από τη βάση. Ίσως και κατά ένα δεύτερο λόγο, η έννοια της παραλληλίας να μην είναι ταυτόσημη με την έννοια της σταθερής απόστασης μεταξύ δύο ευθειών.

Όσο η καθηγήτρια ασχολούνταν με τις τελευταίες ομάδες, ζήτησε από τις προηγούμενες να συνεχίσουν τη δραστηριότητα και να κατασκευάσουν ένα αμβλυγώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμα με το πρώτο. Επίσης τους είπε να τα σχεδιάσουν με μολύβι πάνω στο φύλλο εργασίας. Δύο από τους μαθητές, έκαναν γρήγορα αυτό που είχαν να κάνουν και σταθερά επωφελούνταν του χρόνου που η καθηγήτρια είχε στραμμένη την προσοχή της αλλού για να «μπαίνουν» στο facebook ή να παίζουν παιχνίδια. Το φαινόμενο επαναλήφθηκε και στη διάρκεια της δεύτερης παρέμβασης. Στην τρίτη παρέμβαση, η καθηγήτρια είχε φροντίσει να διακόψει την παροχή internet στη διάρκεια του μαθήματος.

Τελικά διατυπώθηκε το γενικό συμπέρασμα ότι: *«Δύο ή περισσότερα τρίγωνα που έχουν κοινή βάση ή κατά προέκταση ίσες βάσεις και οι κορυφές τους βρίσκονται πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση, είναι ισοδύναμα».*

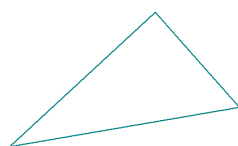
Τα παιδιά με ευκολία πλέον σχεδίασαν ένα ορθογώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ισοδύναμα με το αρχικό τρίγωνο. Παρ' όλα αυτά ένας μαθητής διατύπωσε την γνώμη ότι θα προτιμούσε να το κάνει αυτό στο χαρτί με μολύβι και όχι στην οθόνη. Την ίδια άποψη είχε διατυπώσει κι ένα από τα παιδιά της πιλοτικής. Τα παιδιά αυτά δεν ένιωθαν άνετα να πειραματιστούν πάνω στην

οθόνη γιατί συναντούσαν δυσκολίες στο σχεδιασμό, λόγω ελλιπούς εξοικείωσης με τα εργαλεία και τις λειτουργίες του λογισμικού.

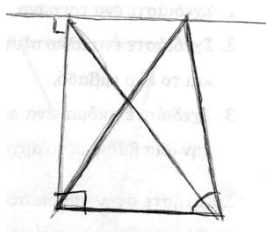
## 2η δραστηριότητα

*Σύμφωνα με ό,τι βρήκαμε προηγουμένως, μπορούμε ΠΑΝΤΑ, αν μας δώσουν ένα μη-ορθογώνιο τρίγωνο, να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμο με το αρχικό.*

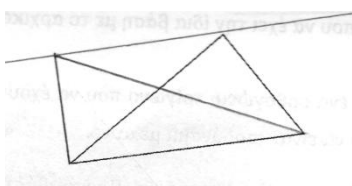
*Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμο με το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος.*



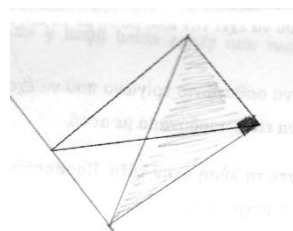
Όλα τα παιδιά σχεδίασαν πάνω στο φύλλο εργασίας το ισοδύναμο ορθογώνιο τρίγωνο χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία.



Εικόνα Φ1.1

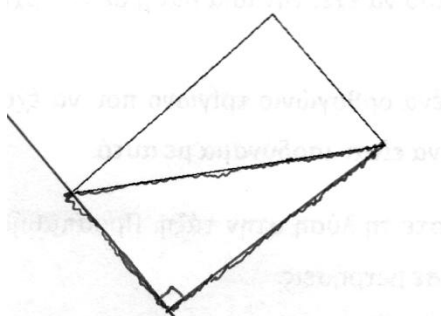


Εικόνα Φ1.2



Εικόνα Φ1.3

Παρ' όλα αυτά υπήρξε και ένας που σχεδίασε το παρακάτω:



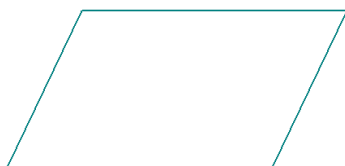
Εικόνα Φ1.4

### 3η δραστηριότητα

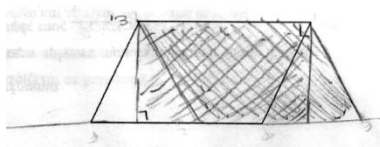
Ένα τρίγωνο είναι πάντα το μισό ενός παρ/μου. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό ενός ορθογωνίου. Επομένως, μπορούμε να επεκτείνουμε την προηγούμενη μέθοδο για τα παραλληλόγραμμα;.....

Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο. Μπορείτε να κατασκευάσετε:

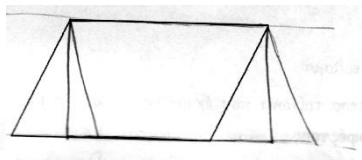
- α. ένα άλλο παρ/μο ισοδύναμο με το αρχικό;
- β. ένα ορθογώνιο παρ/μο ισοδύναμο με το αρχικό παρ/μο;



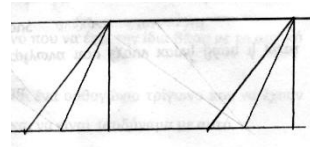
Δεν υπήρξε κάποια δυσκολία σ' αυτή τη δραστηριότητα. Πολύ ομαλά έγινε η επέκταση της προηγούμενης κατασκευής ισοδύναμων τριγώνων στα παρ/μα. Τα παιδιά σχεδίασαν και στην οθόνη του υπολογιστή και στο φύλλο εργασίας ένα ισοδύναμο παρ/μο με το αρχικό παρ/μο και ένα ισοδύναμο ορθογώνιο. Μόλις τελείωσαν με αυτή τη δραστηριότητα, τα παιδιά βγήκαν για διάλειμμα.



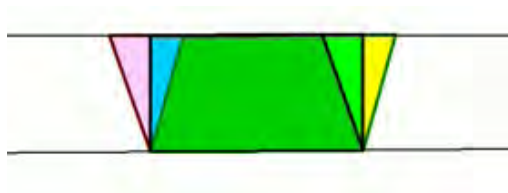
Εικόνα Φ1.5



Εικόνα Φ1.6

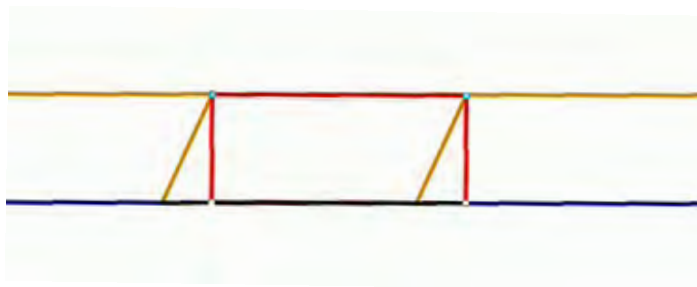


Εικόνα Φ1.7



Εικόνα Φ1.8





Εικόνα Φ1.9

Σχετικά με τον «τρόπο» σχεδίασης των σχημάτων από τα παιδιά, στα σχήματα Φ1.5 και Φ1.6 βλέπουμε ότι η σχεδίαση έγινε με το «μάτι», χωρίς τη χρήση κάποιου γνώμονα ή άλλης τεχνικής για την χάραξη παραλλήλων (π.χ. «μεταφορά των απέναντι πλευρών κατά ίσο τμήμα, ενώ στο σχήμα Φ1.7 το σχέδιο είναι πιο ακριβές, όπου φανερώνει ότι χρησιμοποιήθηκε κάποιο εργαλείο (γνώμονας ή χάρακας). Γενικότερα πάντως, σε αυτή την ηλικία δε δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην κατασκευή σχημάτων ακριβείας, αφού η έμφαση δίνεται στην υπόθεση ότι ένα τετράπλευρο είναι π.χ. παραλληλόγραμμο, ακόμα κι αν δεν «φαίνεται». Μετά το διάλλειμα στα παιδιά δόθηκε ένα φύλλο αξιολόγησης.

### 6.2.3 Φύλλο αξιολόγησης

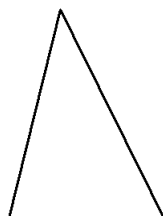
Η παρακάτω δραστηριότητα δόθηκε σε φύλλο σε όλους τους μαθητές, ήταν ατομική και έγινε αποκλειστικά πάνω στο χαρτί.

*Σχεδιάστε ένα μη-ορθογώνιο τρίγωνο.*

*Φτιάξτε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το τρίγωνο που σχεδιάσατε.*

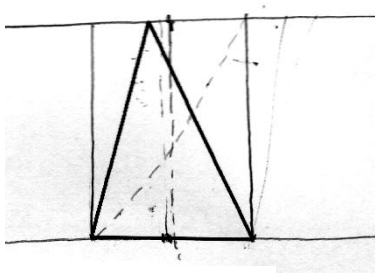
*(Θυμηθείτε: Γνωρίζετε ήδη πώς να φτιάξετε ένα ισοδύναμο ορθογώνιο τρίγωνο.*

*Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό της ορθογωνίου παραλληλογράμμου.)*

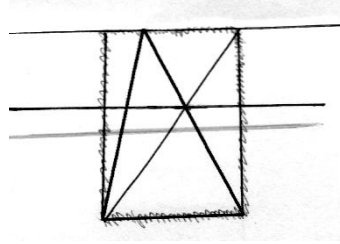


Τα παιδιά εργάστηκαν ακολουθώντας τις παρακάτω στρατηγικές:

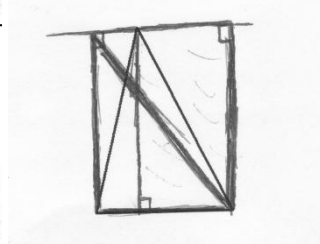
1. Επτά παιδιά σχεδίασαν αρχικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμο με αυτό που ήταν σχεδιασμένο ήδη πάνω στο χαρτί, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία. Στη συνέχεια, τα πέντε από τα επτά, σχεδίασαν το συμμετρικό του ως προς την υποτείνουσα δημιουργώντας ένα ορθογώνιο που ήταν φανερό ότι είχε διπλάσιο εμβαδόν.



Εικόνα A1.1

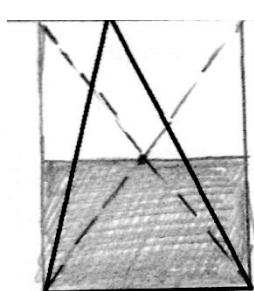


Εικόνα A1.2

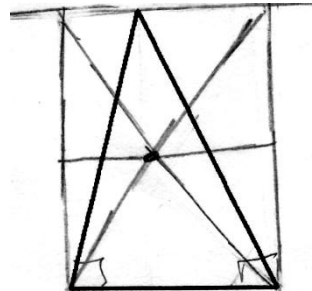


Εικόνα A1.3

Τα δύο από τα επτά, σχεδίασαν ένα δεύτερο ισοδύναμο ορθογώνιο τρίγωνο, από την άλλη πλευρά, καταλήγοντας φυσικά στο ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή στο σχεδιασμό ενός ορθογωνίου που είχε την ίδια βάση με το τρίγωνο και διπλάσιο εμβαδόν απ' αυτό.



Εικόνα A1.4



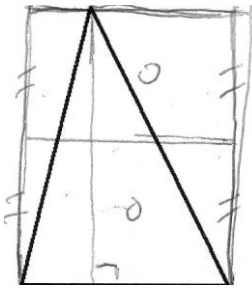
Εικόνα A1.5

Στη συνέχεια το χώρισαν κι αυτά στη μέση, σχεδιάζοντας μεσοπαράλληλη. Για όσους ακολούθησαν αυτή τη στρατηγική ήταν φανερό ότι το ορθογώνιο είχε το διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό τρίγωνο και άρα θα έπρεπε να το «κόψουν» σε δύο ισοδύναμα μέρη.

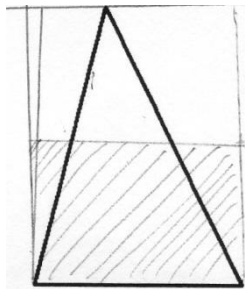
2. Δέκα μαθητές και μαθήτριες σχεδίασαν ορθογώνιο παρ/μο με την ίδια βάση. Οι περισσότεροι αρχικά θεώρησαν ότι είχαν τελειώσει. Η καθηγήτρια

παρενέβη και τους ρώτησε ποιο ήταν το εμβαδό του ορθογώνιου, ποιο του τριγώνου και ποια σχέση έχουν αυτά τα δύο μεταξύ τους. Μόνο όταν διατύπωσαν φωναχτά του τύπους :

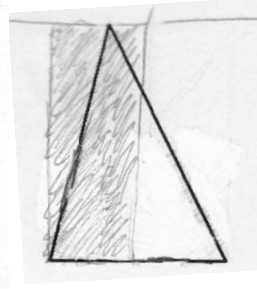
$E_{\text{ορθογώνιου}} = \beta_{\text{άση}} \cdot \upsilon_{\text{ψος}}$  ενώ  $E_{\text{τριγώνου}} = \beta_{\text{άση}} \cdot \upsilon_{\text{ψος}} / 2$ , συνειδητοποίησαν ότι το ορθογώνιο που είχαν σχεδιάσει είχε διπλάσιο εμβαδό από το αρχικό τρίγωνο και άρα θα έπρεπε να το «κόψουν» στη μέση.



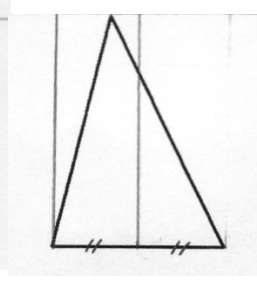
Εικόνα A1.6



Εικόνα A1.7



Εικόνα A1.8



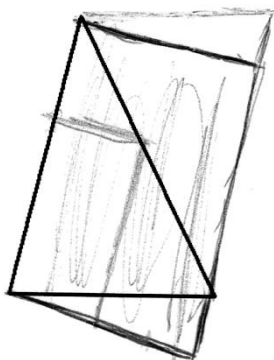
Εικόνα A1.9

3. Υπήρξε και μία περίπτωση μαθητή ο οποίος έφερε το ύψος του τριγώνου και σχεδίασε το ορθογώνιο με βάση αυτήν του ενός από τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίστηκαν φέρνοντας το ύψος. Ο μαθητής θεώρησε με αυτό τον τρόπο ότι το ύψος ήταν μεσοκάθετος και άρα ότι «έκοβε» το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Επομένως διπλασιάζοντας το ένα από τα δύο θα έφτιαχνε το ισοδύναμο ορθογώνιο. Η στρατηγική αυτή θα ήταν επιτυχής αν το αρχικό τρίγωνο ήταν ισοσκελές, κάτι που δεν είχε δοθεί ως δεδομένο.



Εικόνα A1.10

4. Ένας από τους αδύναμους μαθητές, αφού σχεδίασε το ορθογώνιο που είχε κοινή βάση με το τρίγωνο και αφού μετά την παρέμβαση της καθηγήτριας κατάλαβε ότι το ορθογώνιο που σχεδίασε είχε διπλάσιο εμβαδό από το τρίγωνο, στην προσπάθεια να υποδιπλασιάσει το εμβαδόν του ορθογωνίου, σχεδίασε ένα ορθογώνιο με πλευρές που ήταν και οι δύο υποδιπλασίες του αρχικού!



Εικόνα A1.11

#### 6.2.4 2<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

Στα παιδιά δόθηκε το 2<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας που αφορούσε τον τρόπο κατασκευής ενός τετραγώνου που θα έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με γνωστές διαστάσεις. Εδώ ακολουθήθηκε μία σχεδόν παραδοσιακή διδασκαλία όπου η σκέψη ήταν καθοδηγούμενη και η διαδικασία ήταν χωρισμένα σε λογικά βήματα που δίνονταν στο φύλλο εργασίας. Από τους μαθητές αναμενόταν να θυμηθούν προηγούμενες γνώσεις καθώς και να διατυπώσουν το συμπέρασμα. Με αυτό το φύλλο εργασίας ολοκληρώθηκε η πρώτη παρέμβαση που αφορούσε την διαδικασία τετραγωνισμού, κατά Ευκλείδη, ενός οποιουδήποτε τριγώνου.

### 6.3 Δεύτερη παρέμβαση

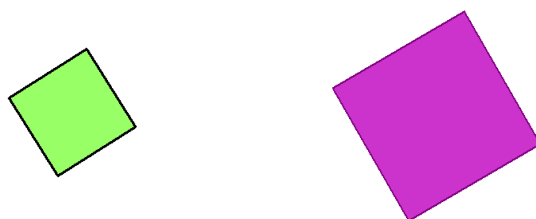
( 3 διδακτικές ώρες)

Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε και αυτή στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου. Οι μαθητές αυτή τη φορά, χωρίστηκαν σε οχτώ ομάδες των δύο ατόμων και δύο ομάδες των τριών (κανένας μαθητής δεν απουσίαζε). Στους μαθητές δόθηκε φύλλο εργασίας με δύο δραστηριότητες. Όλες οι δραστηριότητες έγιναν αρχικά στην οθόνη του υπολογιστή στο σχεδιαστικό περιβάλλον του EuclidDraw και στη συνέχεια πάνω στο φύλλο εργασίας. Η όλη διαδικασία διήρκεσε τρεις συνεχόμενες διδακτικές ώρες και καταγράφηκε σε ψηφιακή συσκευή καταγραφής ήχου. Όπου κρίνεται σκόπιμο, παρουσιάζονται αποσπάσματα διαλόγων μεταξύ της καθηγήτριας και των μαθητών.

#### 6.3.1 3<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

(1<sup>η</sup> διδακτική ώρα)

*Σχεδιάστε δύο τετράγωνα άνισα μεταξύ τους. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο που να έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων που φτιάξατε;*

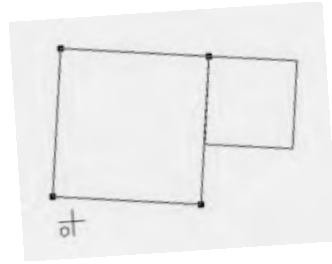


Στα παιδιά δόθηκε το παραπάνω φύλλο εργασίας με την οδηγία να κατασκευάσουν πρώτα δύο άνισα τετράγωνα και ύστερα ένα τετράγωνο που θα είχε εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών τετραγώνων. Ύστερα από περίπου 5 λεπτά, σχεδόν ταυτόχρονα, τρεις από τις δέκα ομάδες είχαν βρει τη λύση, αναγνωρίζοντας ότι το ζητούμενο τετράγωνο είναι αυτό της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές, τις πλευρές των δύο αρχικών τετραγώνων. Μετά από 2-3 λεπτά άλλες τρεις ομάδες ακολούθησαν

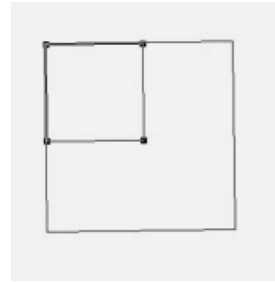
την ίδια λύση που μάλλον είχε διαρρεύσει από τις διπλανές τους ομάδες που το είχαν βρει.

### Οι προσπάθειες εξεύρεσης λύσης

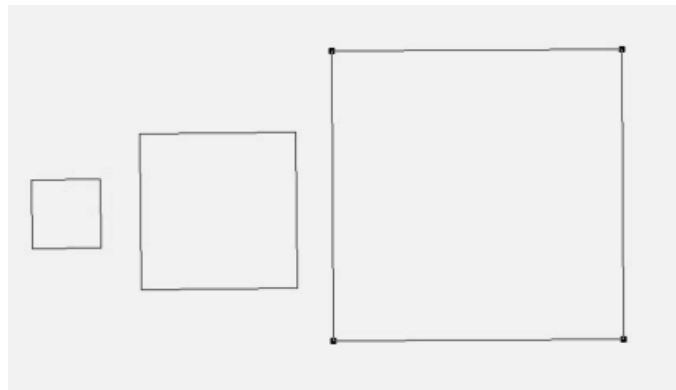
Οι περισσότεροι αρχικά τοποθετούσαν τα δύο τετράγωνα δίπλα-δίπλα, ή το ένα μέσα στο άλλο, ή κατά σειρά μεγέθους, προσπαθώντας ίσως να προσεγγίσουν με κάποιο τρόπο τη λύση.



Εικόνα Φ3.1

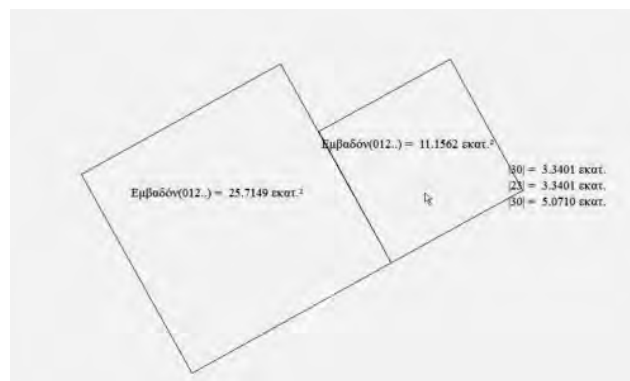


Εικόνα Φ3.2



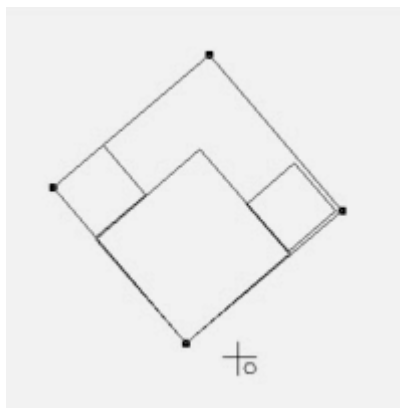
Εικόνα Φ3.3

Κάποιοι πάλι πρόσθεσαν και κάποιες μετρήσεις.



Εικόνα Φ3.4

Ένας προσπάθησε να «χτίσει» ένα καινούριο τετράγωνο με πλευρά ίση με το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών.



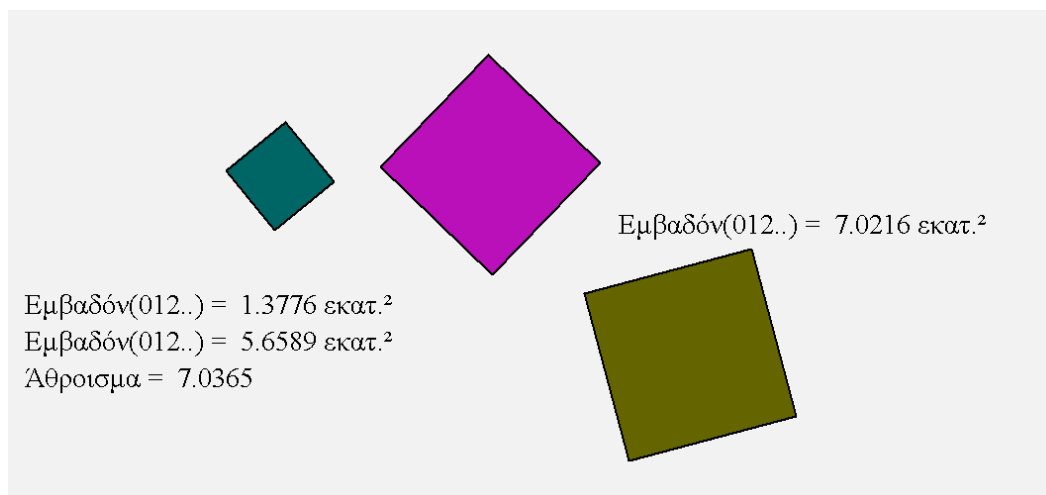
Εικόνα Φ3.5

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του Γ., ενός από τους δύο της ομάδας των πιο απομονωμένων και αδύνατων μαθητών, που ανέφερα προηγουμένα στην περιγραφή της φυσιογνωμίας των ομάδων.

Ο Γ. λοιπόν, επέδειξε μεγάλη ευρηματικότητα τόσο στο χειρισμό του προγράμματος, ανακαλύπτοντας εργαλεία και λειτουργίες που η καθηγήτρια δεν είχε αναφέρει, όσο και στη διερεύνηση λύσης.

Αξιοποιώντας το εργαλείο της μέτρησης και της πρόσθεσης, αφού σχεδίασε δύο τετράγωνα, μέτρησε τα εμβαδά τους και τα πρόσθεσε (μέσω του λογισμικού). Στη συνέχεια σχεδίασε ένα νέο τετράγωνο και μέτρησε το εμβαδόν του.

Αξιοποιώντας την δυναμικότητα του περιβάλλοντος, μεγάλωνε το νέο αυτό τετράγωνο, «τραβώντας» το από μία κορυφή του, μέχρις ότου προσεγγίσει ικανοποιητικά το ποθητό άθροισμα (εικόνα Φ3.6).



Εικόνα Φ3.6

Δυστυχώς όμως αυτή η προσέγγιση δεν έγινε έγκαιρα αντιληπτή στην τάξη από την καθηγήτρια. Ο μαθητής μόλις διατυπώθηκε η λύση του πυθαγορείου στην τάξη, φαίνεται στο βίντεο να διακόπτει κάπως απότομα την προσπάθειά του και να σπεύδει να εφαρμόσει αυτό που άκουσε. Η λύση του θα μπορούσε να αποτελέσει πολύ καλή αφορμή για συζήτηση γύρω από την αποδοχή ή όχι αυτής της λύσης ανάλογα στο πλαίσιο στο οποίο βρίσκεται. Θέλω να πω μια τέτοια λύση μπορεί να ήταν ικανοποιητική στο πλαίσιο μιας κατασκευής που βασίζεται σε προσεγγιστικές μετρήσεις αλλά δεν θα ήταν ποτέ αποδεκτή στο πλαίσιο του αυστηρά παραγωγικού συμπερασμού της ευκλείδειας γεωμετρίας. Δυστυχώς η προσπάθεια αυτή του Γ. επισκιάστηκε είτε από τους μαθητές που είχαν βρει τη λύση νωρίτερα είτε , λόγω πίεσης χρόνου, από την προσπάθεια της καθηγήτριας να βοηθήσει άλλους μαθητές να οδηγηθούν σε εύλογο χρόνο στην επιθυμητή από την πλευρά της λύση, δηλαδή αυτή του πυθαγορείου θεωρήματος, για να προχωρήσουν στην επόμενη δραστηριότητα. Η παράμετρος χρόνος που εντείνει το άγχος των εκπαιδευτικών να προλάβουν να κάνουν όλα όσα έχουν εκ των προτέρων σχεδιάσει, πόσο συχνά άραγε τους εμποδίζει να «δουν» και να «ακούσουν» μια άλλη ιδέα ;



Όπως αναφέραμε στην αρχή μέσα στα πρώτα δέκα λεπτά, οι έξι από τις δέκα ομάδες αναγνώρισαν στο πρόβλημα την γεωμετρική ερμηνεία του πυθαγορείου θεωρήματος. Όμως απέμεναν τέσσερις ομάδες που δεν είχαν ακόμη αντιληφθεί τι να κάνουν. Η καθηγήτρια παρενέβη και πραγματοποιήθηκε ο παρακάτω διάλογος αποκλειστικά με τους μαθητές που δεν είχαν βρει ακόμη τη λύση.:

Καθ.: ... ε, αυτό λέω, πως θα φτιάξουμε ένα τετράγωνο που το εμβαδόν του θα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών δύο άλλων τετραγώνων; Έχετε μάθει κάτι σχετικά με αυτό;

Μαθ.: ....

Καθ.: Έχετε μάθει ποτέ μέχρι τώρα, πότε ένα τετράγωνο ισούται με το άθροισμα δύο άλλων τετραγώνων;

Μαθ.: ..... ( οι μαθητές μουρμουρίζουν μεταξύ τους, αλλά κανείς δεν δίνει απάντηση).

Καθ.: Σε ποια περίπτωση έχετε δει ένα τετράγωνο να ισούται με το άθροισμα δύο άλλων τετραγώνων; Σας λέει κάτι αυτό;

Μαθ1.: Όχι.

Καθ.: Όχι ε; Τίποτα δε σου θυμίζει. Κανένα γνωστό σου... Καμία γνωστή πρόταση.

Μαθ1.: Το άθροισμα των δύο τετραγώνων να κάνει....

Καθ.: ... να σου κάνει ένα τρίτο τετράγωνο. Δεν σας θυμίζει τίποτα αυτό σ' εσάς εδώ; (στρέφεται σε μία άλλη ομάδα, μέλος της οποίας είναι και μία πολύ καλή μαθήτριά της τάξης)

Καθ.: Μπορείτε να μου πείτε δύο αριθμούς που το άθροισμα των τετραγώνων τους να κάνει το τετράγωνο ενός άλλου αριθμού; Αυτό μπορείτε να μου το πείτε;

Μαθ.: ...

### Διάλογος 3

Σ' αυτό το σημείο πετάγεται ένας από τους μαθητές που έχουν βρει τη λύση, λέγοντας: «να το πω;» Η καθηγήτρια του απαντάει αρνητικά και συνεχίζει:

Μαθ2.: *Τρία στο τετράγωνο και τέσσερα στο τετράγωνο μας κάνει πέντε στο τετράγωνο.* ( απαντάει μια πολύ καλή μαθήτρια)

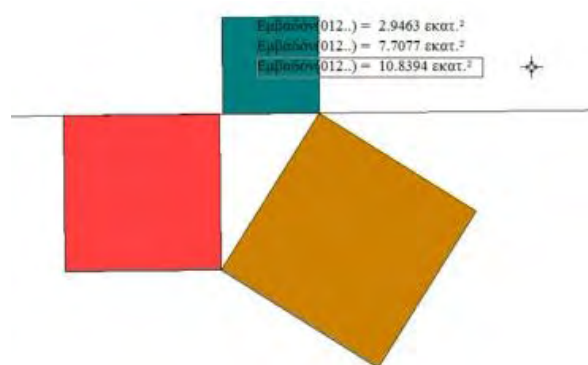
Καθ.: *Αυτή η σχέση δεν σας θυμίζει κάτι;*

Μια μαθήτρια πολύ χαμηλού προφίλ που σπάνια παίρνει τον λόγο στην τάξη, ψελλίζει: *‘Το πυθαγόρειο θεώρημα’.*

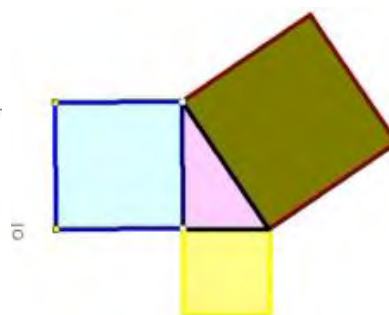
Καθ.: Το πυθαγόρειο θεώρημα. Τι λέει το πυθαγόρειο θεώρημα;

Η μαθήτρια διατυπώνει το θεώρημα. *‘Το τετράγωνο της υποτεινουσας...’* Η καθηγήτρια, περισσότερο χαρούμενη από τους ίδιους τους μαθητές που κατέληξαν στο επιθυμητό συμπέρασμα, αναφωνεί: *«Να η λύση σας λοιπόν! Αφού το λέει. Το τετράγωνο της υποτεινουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών. Τι πρέπει να κάνετε εσείς λοιπόν για να βρείτε το τετράγωνο που θα ισούται με τα δύο τετράγωνα;»*

Οι μαθητές και οι μαθήτριες μετά από κάποιες προσπάθειες να τοποθετήσουν σωστά τα τετράγωνα, σχεδιάζουν τη λύση στην οθόνη. Χαλαροί πλέον γεμίζουν με χρώματα τα τετράγωνα και πειραματίζονται με διάφορους συνδυασμούς. Κάποιοι από αυτούς *επαληθεύουν το θεώρημα μετρώντας τα εμβαδά.* Αυτό επιβεβαιώνεται και από παρατηρήσεις που έδειξαν ότι κάποιοι μαθητές παρ’ ότι έχουν διδαχθεί την απόδειξη ενός θεωρήματος, επιζητούν την εμπειρική επαλήθευσή του, παρ’ όλο που ισχυρίζονται ότι έχουν καταλάβει την απόδειξη. (Fischbein, 1982)

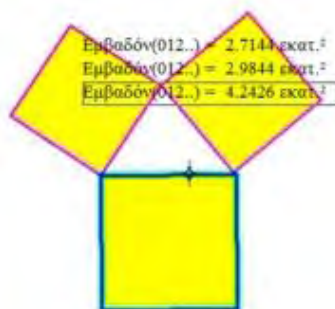


Εικόνα Φ3.7



Εικόνα Φ3.8

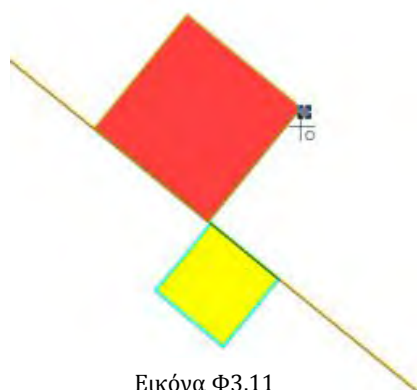
Παρ' όλα αυτά μία ομάδα τριών κοριτσιών, όλες εξαιρετικά αδύναμες στα μαθηματικά, σχεδιάζουν:



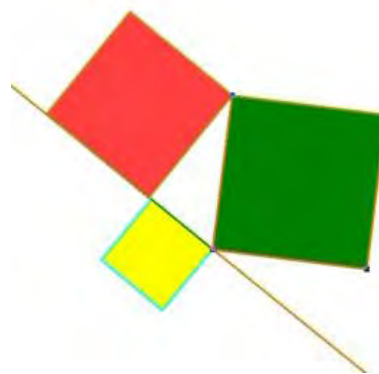
Εικόνα Φ3.9

Οι μαθήτριες δεν «βλέπουν» ότι οι πλευρές των δύο τετραγώνων **δεν** σχηματίζουν ορθή γωνία. Το πρόβλημα της αναγνώρισης της ορθής γωνίας όταν οι πλευρές της δεν είναι σε οριζόντια και κατακόρυφη θέση, έχει αναφερθεί από πολλούς ερευνητές (Gal & Linchevski, 2010; Hershkowitz, 1989(b)). *Μετράνε* τα εμβαδά και *μόνο τότε* αποφασίζουν ότι κάτι πάει στραβά με την κατασκευή τους. Την ξανασχεδιάζουν, προσέχοντας αυτή τη φορά να τοποθετήσουν τα τετράγωνα σε ορθή γωνία!

Εικόνα Φ3.10



Εικόνα Φ3.11



Εικόνα Φ3.12

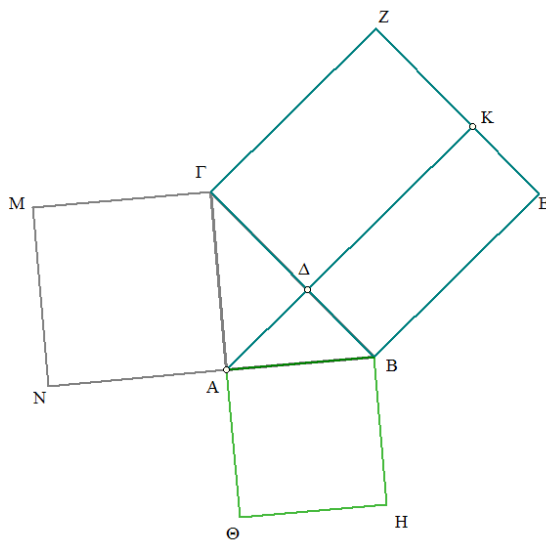
Τα παραπάνω επιβεβαιώνουν την άποψη του Schoenfeld, ότι η σχέση ανάμεσα σε μία γεωμετρική κατασκευή και στο θεώρημα που τη νομιμοποιεί, είναι περίπλοκη, και απ' ότι φαίνεται δεν γίνεται άμεσα αντιληπτή από τους μαθητές. (Schoenfeld, 1985)

### 6.3.2 4<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

#### Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΚΑΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

( 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> διδακτική ώρα)

Αρχικά η καθηγήτρια ζητάει από τους μαθητές να ανοίξουν το αρχείο με το όνομα Απόδειξη Πυθαγορείου. Ανοίγοντας το αρχείο, οι μαθητές βλέπουν στην οθόνη του EuclidDraw, την γεωμετρική αποτύπωση του Πυθαγορείου και κάποια κουμπιά βοήθειας.



Βοήθεια 1

Βοήθεια 2

Βοήθεια για το δεύτερο ορθογώνιο....

2η βοήθεια για το δεύτερο ορθογώνιο

Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε 10 ομάδες, οχτώ ζευγάρια και δύο τριάδες. Κάθε ομάδα παίρνει από ένα φύλλο εργασίας. Η καθηγήτρια ζητάει από τους μαθητές να συμπληρώσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα, σύμφωνα με το σχήμα στην οθόνη τους και να μεταφράσουν την αλγεβρική εξίσωση του Πυθαγορείου σε εξίσωση με εμβαδά χωρίων.

Γράψτε το Πυθαγόρειο θεώρημα: .....

Η σχέση μεταφρασμένη σε εμβαδά, λέει ότι:  $(BEZΓ) = ( \quad ) + ( \quad )$

Όλες οι ομάδες το έκαναν με ευκολία, χωρίς λάθη. Στο φύλλο δίνονται εξηγήσεις για τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν.

Ισχύει:  $(BEZΓ) = (BEKΔ) + (ΔKZΓ)$ , δηλαδή το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των δύο ορθογωνίων.

Εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι  $(BEZΓ) = (ABHΘ) + (ΑΓΜΝ)$ , δηλαδή ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων τετραγώνων (αυτά των καθέτων πλευρών).

Αρα, προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι το ορθογώνιο  $(BEKΔ)$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $(ABHΘ)$  και το ορθογώνιο  $(ΔKZΓ)$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $(ΑΓΜΝ)$ .

Η καθηγήτρια εξηγεί και προφορικά τη στρατηγική που ακολούθησε ο Ευκλείδης. Στους μαθητές είναι φανερό ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας  $ΓΒΕΖ$  ισούται με το άθροισμα των δύο ορθογωνίων στα οποία διαμερίζεται από το ευθ. τμήμα  $ΔΚ$ .

Καθ.: *Συμφωνείτε ότι το εμβαδό του μεγάλου τετραγώνου, του τετραγώνου της υποτείνουσας δηλαδή ισούται με το άθροισμα των δύο ορθογωνίων;*

Μαθητές: *Ναι* (Όλοι μαζί, χορωδιακά)

Καθ.: *Αν αποδείξουμε ότι κάθε ένα από τα δύο αυτά ορθογώνια είναι ισοδύναμο με ένα από τα άλλα δύο τετράγωνα, θα έχουμε τελειώσει;*

Μαθ: *Ναι* (Πάλι όλοι μαζί)

Καθ.: Αυτό λοιπόν έκανε ο Ευκλείδης. Απέδειξε ότι το ορθογώνιο  $ΒΕΚΔ$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $ΑΒΗΘ$  και το ορθογώνιο  $ΔΚΖΓ$  ότι είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $ΑΓΜΝ$ . Ο τρόπος που το έκανε είναι πηγαίνοντας διαδοχικά και αλυσιδωτά σε ισοδύναμα χωρία.

#### Διάλογος 4

Η καθηγήτρια λέει στους μαθητές να ξεκινήσουν να συμπληρώνουν το φύλλο εργασίας, στο οποίο είναι σχεδιασμένα τα βήματα που ακολούθησε ο Ευκλείδης.

1. Σχεδιάστε παρ/μο με τρεις κορυφές να είναι τα σημεία: A, B και E. Χρωματίστε το εσωτερικό του παρ/μου που φτιάξατε με χρώμα της αρεσκείας σας.

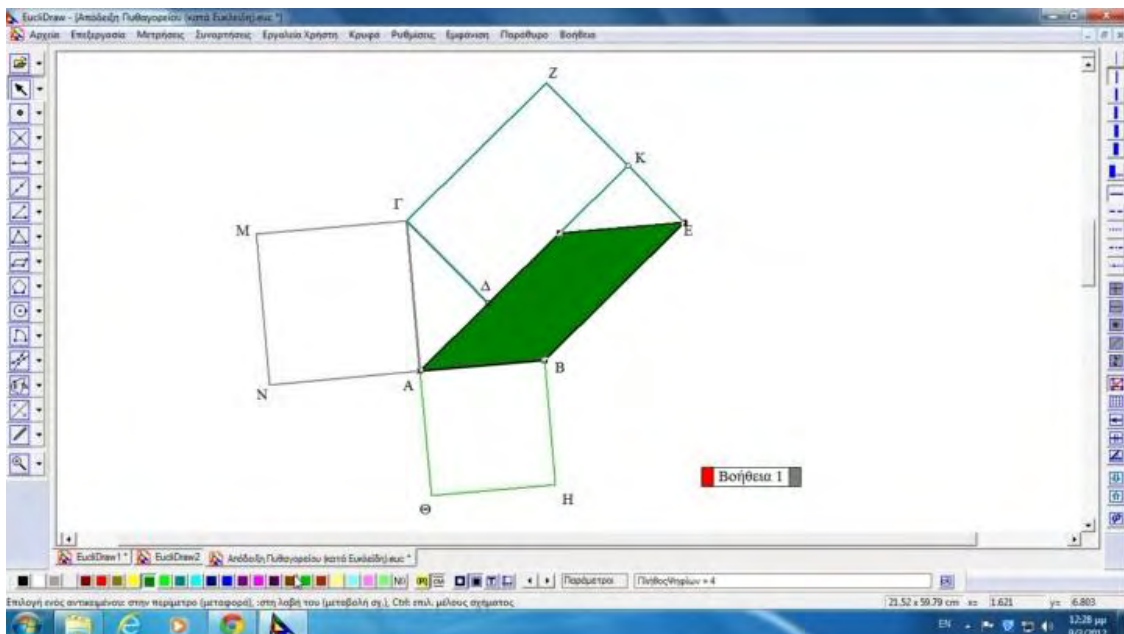
Το παραλληλόγραμμο με βάση την BE και τρίτη κορυφή το A είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ..... , γιατί .....

.....

.....

2. Χρησιμοποιήστε το εργαλείο της διαμέρισης πολυγώνου και χωρίστε το παρ/μο κατά μήκος της διαγωνίου AE.

Όλες οι ομάδες σχεδίασαν, χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες, το ισοδύναμο παραλληλόγραμμο του πρώτου ορθογωνίου BEΚΔ, το χρωμάτισαν και στη συνέχεια το διαμέρισαν κατά μήκος της διαγωνίου του ΑΕ σε δύο τρίγωνα.

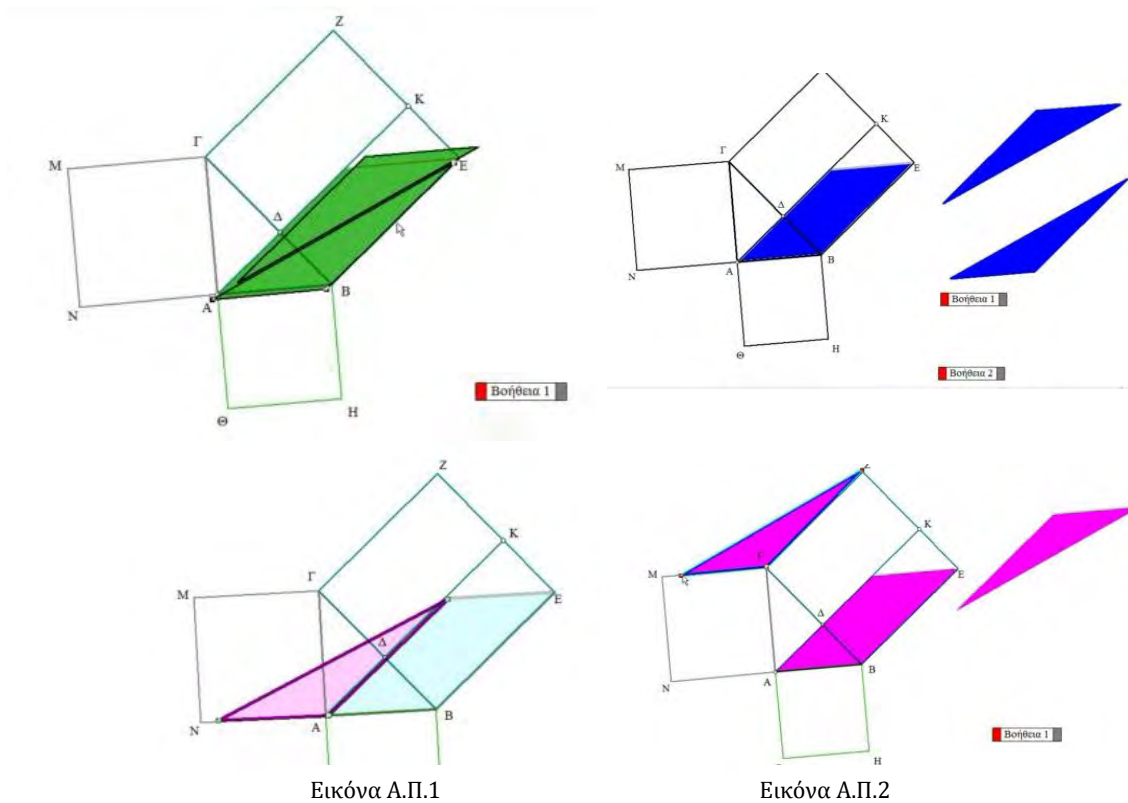


3. Πάρτε ένα από τα δύο κομμάτια (τρίγωνα) στα οποία χωρίσατε το παρ/μο . Περιστρέψτε το και τοποθετήστε το πάνω στο σχήμα, με σκοπό να βρείτε κάποιο άλλο τρίγωνο ( που μπορεί να μην είναι σχηματισμένο), ίσο με αυτό. Αιτιολογήστε ποιο κριτήριο ισότητας πληρούν τα δύο τρίγωνα.

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ABE και \_\_\_\_\_ είναι ίσα γιατί έχουν:

- A. \_\_\_\_\_
- B. \_\_\_\_\_
- Γ. \_\_\_\_\_

Στη συνέχεια, τα παιδιά άρχισαν να ‘παίζουν’ με το τρίγωνο. Το περιέστρεφαν και το μετακινούσαν ώστε να το τοποθετήσουν σε μία θέση που θα ταίριαζε. Κάποιοι το τοποθέτησαν αρχικά όπως φαίνεται στις εικόνες Α.Π.1. & Α.Π.2.



Τότε η καθηγήτρια παρενέβη και εξήγησε στους μαθητές ότι το ζητούμενο ήταν να τοποθετήσουν το τρίγωνο κάπου «μέσα στο σχήμα», με τρόπο ώστε οι και οι τρεις\_κορυφές του να συμπίπτουν με κορυφές του σχήματος. Όλες οι ομάδες, αφού «έπαιξαν» για λίγο ακόμα με το τρίγωνο, βρήκαν χωρίς δυσκολία τη θέση στην οποία «κούμπωνε». Καμία ομάδα δεν χρειάστηκε να ανοίξει τη



βοήθεια 1. Η βοήθεια 1 υπήρχε για την περίπτωση που κάποια ομάδα δεν θα μπορούσε, τελικά, να βρει τη σωστή θέση για το τρίγωνο.

### Βοήθεια 1

Τοποθετείστε το τρίγωνο (το μισό παρ/μο), έτσι ώστε η μία πλευρά του να ταυτίζεται με την πλευρά ΒΗ του τετραγώνου.

Με την ευκολία λοιπόν που παρέχουν αυτά περιβάλλοντα, τα παιδιά δεν συνάντησαν καμία δυσκολία στο να βρουν στο σχήμα τρίγωνο ίσο με το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας την περιστροφή και τη λειτουργία 'drag & drop'. Η ισότητα των τριγώνων, διαπιστώθηκε δηλαδή, με τον πρωταρχικό τρόπο που μαθαίνουν τα παιδιά την ισότητα δύο τριγώνων, όταν τη διδάσκονται για πρώτη φορά στο γυμνάσιο: «Αν δύο τρίγωνα ταυτιστούν μετά την μετατόπιση του ενός πάνω στο άλλο, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα». Η όλη διαδικασία μέχρι να τοποθετήσουν όλες οι ομάδες σωστά το τρίγωνο, διήρκεσε 4 λεπτά.

Στη συνέχεια όμως, έπρεπε να συγκρίνουν τα δύο τρίγωνα όπως θα έκαναν σ' ένα σχήμα στο χαρτί, όπου δεν υπάρχει η δυνατότητα μετακίνησης του ενός πάνω στο άλλο. Έπρεπε δηλαδή να βρουν ποιο κριτήριο ικανοποιείται και να το γράψουν σωστά.

Η καθηγήτρια παρενέβη και πάλι θυμίζοντας σε όλους τα τρία κριτήρια και οι περισσότερες ομάδες εντόπισαν γρήγορα το σωστό κριτήριο. Η συμπλήρωση όμως των στοιχείων δεν ήταν το ίδιο εύκολη για όλους. Τρεις από τις ομάδες συμπλήρωσαν σωστά το κριτήριο με επαρκή αιτιολόγηση, άλλες συμπλήρωσαν τα ίσα στοιχεία, χωρίς αιτιολόγηση και οι υπόλοιπες τέσσερις έγραψαν λάθος τα στοιχεία. Χρειάστηκαν 6 λεπτά μέχρι να συμπληρώσουν όλοι το κριτήριο.

1. Οι σωστές απαντήσεις (με αιτιολόγηση):

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΒΗ είναι ίσα γιατί έχουν:

Α.  $ΑΒ = ΒΗ$

Β.  $ΓΒ = ΒΕ$

Γ.  $ΑΒΕ = ΓΒΗ$  γιατί  $ΑΒΕ = 90 + Β$  και  $ΓΒΗ = 90 + Β$

Κείμενο 2.1



Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Gamma BH$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $\Gamma B = BE$  καθώς είναι αδελφές τετραγώνου

B.  $BH = AB$  για τον ίδιο λόγο

Γ.  $\Gamma BH = ABE$  καθώς είναι οι αδελφές γωνίες

Κείμενο 2.2

Η παραπάνω βέβαια αιτιολόγηση δεν είναι απόλυτα επαρκής, αφού για να είναι δύο γωνίες με πλευρές κάθετες ίσες, πρέπει να είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες. Οι μαθητές όμως δεν αναφέρουν τίποτα γ' αυτό, προφανώς γιατί παρασύρονται από την οπτική επιβεβαίωση. Αλλά είναι σημαντικό ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο κριτήριο που δεν είναι από τα πιο συνηθισμένα, είναι σαφές ότι γνωρίζουν τι κάνουν, οπότε το κατέταξα στις σωστές απαντήσεις με αιτιολόγηση.

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Gamma BH$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $AB = BH$  ως πλευρές του ίδιου τετραγώνου

B.  $BE = \Gamma B$  ως πλευρές του ίδιου τετραγώνου

Γ.  $\widehat{ABE} = \widehat{\Gamma BH}$  καθώς είναι οι πλευρές κάθετος

Κείμενο 2.3

## 2. Οι σωστές (χωρίς αιτιολόγηση)

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Gamma BH$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $AB = BH$  (ορθογώνιο)

B.  $BE = \Gamma B$  (ορθογώνιο)

Γ.  $\widehat{ABE} = \widehat{\Gamma BH}$

Κείμενο 2.4

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Gamma BH$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $AB = HB$

B.  $B\Gamma = BE$

Γ.  $\widehat{ABE} = \widehat{\Gamma BH}$

Κείμενο 2.5

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Gamma BH$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $\Gamma B = \Gamma B$

B.  $BA = BH$

Γ.  $\widehat{EBA} = \widehat{HBG}$

Κείμενο 2.6

### 3. Οι λανθασμένες

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ABE και  $\triangle B\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $\hat{B}$  κοινή

B.  $AE = \Gamma H$

Γ.  $AB = B\Gamma$

Κείμενο 2.7

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ABE και  $\triangle B\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $HB = AB$

B.  $\hat{\Gamma} = \hat{A}$

Γ.  $H\Gamma = AE$

Κείμενο 2.8

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ABE και  $\triangle B\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A.  $\hat{E} = \hat{B}$

B.  $BA = B\Gamma$

Γ.  $\hat{B} = \hat{B}$

Κείμενο 2.9

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ABE και  $\triangle B\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν:

A. γιατί έχω ίση των γωνιών  $\hat{E}BA$  και  $\hat{B}\Gamma H$

B. οι πλευρές BE είναι ίση με  $\Gamma A$

Γ. έχουν επικείμενη γωνία των  $\hat{B}$

Κείμενο 2.10

Στη συνέχεια, οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν την προηγούμενη εμπειρία τους με τα ισεμβαδικά τρίγωνα και να βρουν ισοδύναμα τρίγωνα με αυτό που είχαν μετακινήσει και μάλιστα εκείνο το ισοδύναμο που θα ήταν συγχρόνως το μισό από το τετράγωνο ABHΘ.

4. Κοιτάξτε προσεχτικά το σχήμα σας και βρείτε τρίγωνο ισεμβαδικό με το τρίγωνο που βρήκατε στο βήμα 3, αξιοποιώντας την εμπειρία σας με τα ισεμβαδικά τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση. Θεωρώντας ως κοινή βάση την  $BH$ , ποιο θα είναι το τρίγωνο;

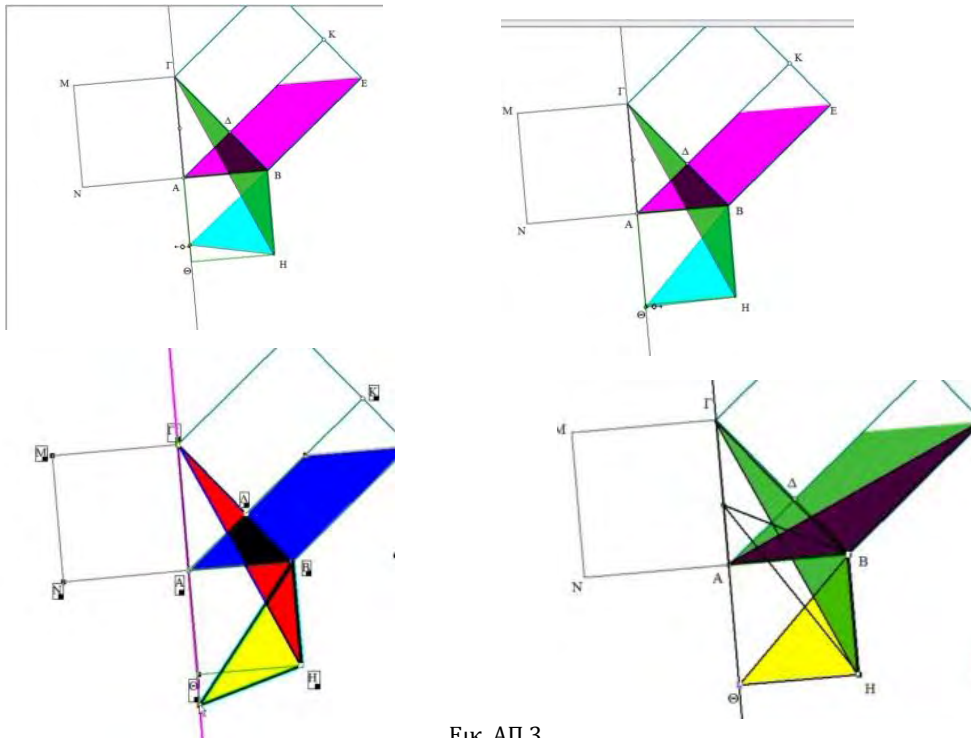
.....

5. Αν το τρίγωνο που βρήκατε στο βήμα 4 είναι το μισό του τετραγώνου  $ABH\Theta$ , τότε έχουμε αποδείξει την ισοδυναμία του ορθογωνίου ( $BEK\Delta$ ) και του τετραγώνου ( $ABH\Theta$ ). (Γιατί;)

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

Τα παιδιά έχοντας την προηγούμενη πολύ πρόσφατη εμπειρία με τα ισοδύναμα τρίγωνα, μετακινώντας την κορυφή παράλληλα προς τη βάση  $BH$ , δηλαδή πάνω στην ευθεία  $\Gamma\Theta$ , κατέληξαν στα ισοδύναμα τρίγωνα ( $BHA$ ) ή ( $BH\Theta$ ), που καθένα από αυτά είναι το μισό τετράγωνο της πλευράς  $AB$ .



Ευκ. ΑΠ.3

Καμία ομάδα δεν άνοιξε την Βοήθεια 2. Η Βοήθεια 2 υπήρχε για την περίπτωση που κάποια ομάδα δυσκολεύονταν να βρει το ισοδύναμο τρίγωνο.

## Βοήθεια 2

Ψάχνετε ένα τρίγωνο που είναι ισοδύναμο με το  $\Gamma BH$  και έχει την ίδια βάση (την  $BH$ ). Επιπλέον, είναι ισοδύναμο με το μισό του τετραγώνου  $ABH\Theta$ . Επομένως ποια θα είναι η τρίτη κορυφή;

Η καθηγήτρια ανακεφαλαίωσε τι είχαν δείξει μέχρι εκεί και τα παιδιά βγήκαν για διάλειμμα. Επιστρέφοντας, τα παιδιά έπρεπε να γράψουν αυτά που είχαν δείξει την προηγούμενη ώρα και ύστερα να επαναλάβουν με το λογισμικό, μόνοι τους, τη διαδικασία, για να αποδείξουν ότι και το άλλο ορθογώνιο  $\Delta KZ\Gamma$  ήταν ισοδύναμο με το τετράγωνο της άλλης κάθετης πλευράς  $AG$ .

Οι οχτώ από τις δέκα ομάδες ολοκλήρωσαν σωστά τη διαδικασία μέχρι τέλος, χωρίς να χρησιμοποιήσουν τις βοήθειες. Το εντυπωσιακό ήταν ότι τα κατάφεραν με άνεση και μαθητές πολύ χαμηλής επίδοσης στη γεωμετρία. Μία ομάδα (αυτή με τους δύο αδύναμους και πιο απομονωμένους μαθητές) «άνοιξε» τις βοήθειες και έφτασε μέχρι την εύρεση του ίσου τριγώνου αλλά δεν μπόρεσε να κινήσει δυναμική την τρίτη κορυφή παράλληλα προς τη βάση για να καταλήξει στο μισό τετράγωνο. Η τελευταία ομάδα (με σύνθεση μαθητριών καλή-μέτρια), έφτασε μέχρι το ίσο τρίγωνο, μετά όμως δεν «κίνησε» την τρίτη κορυφή παράλληλα προς τη βάση, παρ' όλα αυτά κατέληξε στο μισό τετράγωνο. Εδώ όμως θα πρέπει να χρεωθεί μία δυσκαμψία στο ίδιο το λογισμικό, στο οποίο η «κίνηση» ενός σημείου πάνω σε μία γραμμή δεν είναι αυτονόητη, οπότε τα παιδιά δεν μπορούσαν έτσι απλά να «κινήσουν» την κορυφή πάνω στις υπάρχουσες γραμμές του σχήματος αλλά έπρεπε να κάνουν μία σειρά από ενέργειες. Χρεώνω δηλαδή την αδυναμία των δύο ομάδων να φτάσουν στο τελικό ισοδύναμο τρίγωνο σε αυτό το γεγονός.

Στη διαδικασία όμως του να γράψουν αυτά που είχαν δείξει, υπήρξαν και πάλι πολλά προβλήματα. Οι περισσότερες ομάδες περιέγραψαν τις διαδοχικές ενέργειες που είχαν κάνει και όχι τις διαδοχικές λογικές συνεπαγωγές που προέκυπταν από αυτές. Αλλά ακόμη και όσοι προσπάθησαν να δείξουν τις διαδοχικές ισοδυναμίες που προέκυψαν, το έκαναν χρησιμοποιώντας την «καθημερινή» γλώσσα και όχι την μαθηματική. Σε καμία περίπτωση δεν υπήρξε αιτιολόγηση του γιατί δύο σχήματα ήταν ισοδύναμα. Πρέπει να πω επίσης ότι τα

παιδιά έγραψαν αυτή τη μικρή ανακεφαλαίωση, με μεγάλη απροθυμία. Καμία ομάδα δεν μπήκε στον κόπο να γράψει τι έδειξε τη δεύτερη φορά. Η αλήθεια όμως είναι ότι ο χρόνος είχε τελειώσει και είχαν πια κουραστεί. Μερικά δείγματα γραφής των παιδιών, φαίνονται στις παρακάτω εικόνες.

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ. ισοδύναμο  
 Έχουμε σχεδιάσει ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~ΒΔΚΕ~~ ~~του~~ ~~οριζ~~ ~~κομίου~~ ~~έσο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~ΑΒΕ~~, ~~Μετά~~ ~~διαμετρήσαμε~~ ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~ΑΒΕ~~ ~~σε~~ ~~2~~ ~~ισο~~ ~~μέρη~~ ~~ση~~ ~~συνέχισα~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~είναι~~ ~~μια~~ ~~και~~ ~~το~~ ~~τοποθέτησα~~ ~~με~~ ~~αύτω~~ ~~στο~~ ~~σημείο~~ ~~και~~ ~~βρήκα~~ ~~με~~ ~~ότι~~ ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~τριγωνο~~ ~~ΗΒΓ~~.  
 Μετά ~~σημεία~~ ~~δυναμικά~~ ~~σημεία~~ ~~σε~~ ~~είδη~~ ~~που~~ ~~λαμβάνει~~ ~~από~~ ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~Γ, Θ~~ ~~και~~ ~~σχεδιάσαμε~~ ~~τριγωνο~~ ~~που~~ ~~έχει~~ ~~ενα~~ ~~ίδια~~ ~~βάση~~ ~~(ΒΗ)~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~τριγωνο~~ ~~ΒΗΓ~~, ~~μετακινήσαμε~~ ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~μαζί~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~τριγωνο~~ ~~και~~ ~~βρήκα~~ ~~με~~ ~~ότι~~ ~~αυ~~ ~~μετακινήσαμε~~ ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~στο~~ ~~σημείο~~ ~~Θ~~ ~~το~~ ~~τριγωνο~~ ~~ΒΗΘ~~ ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~ΗΒΓ~~.  
 Άρα αφού το  $\triangle ΗΒΓ$  είναι το μισό του  $\triangle ΒΔΚΕ$  και το  $\triangle ΒΗΘ$  το μισό του  $\triangle ΒΗΘ$  τότε  $\triangle ΒΔΚΕ = \triangle ΒΗΘ$ .

Κείμενο 2.11

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ.  
 Απόδειξη ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~ΑΒΕ~~ ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~τριγωνο~~ ~~ΗΒΓ~~.  
 Κατασκευάζουμε ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~ΑΒΕ~~ ~~και~~ ~~το~~ ~~σημείο~~ ~~ΑΒΕ~~ ~~σε~~ ~~2~~ ~~ισο~~ ~~μέρη~~ ~~ση~~ ~~συνέχισα~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~είναι~~ ~~μια~~ ~~και~~ ~~το~~ ~~τοποθέτησα~~ ~~με~~ ~~αύτω~~ ~~στο~~ ~~σημείο~~ ~~και~~ ~~βρήκα~~ ~~με~~ ~~ότι~~ ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~τριγωνο~~ ~~ΗΒΓ~~.

Κείμενο 2.12

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ.  
 Το  $\triangle ΒΔΚΕ$  είναι ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~ΑΒΕΑ~~  
 Το  $\triangle ΑΒΕ$  είναι ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~ΗΒΓ~~  
 και έτσι το  $\triangle ΒΔΚΕ$  ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~ΑΒΕΑ~~  
 Το  $\triangle ΒΗΘ$  ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~ΗΒΓ~~ και ~~είναι~~ ~~ισοδύναμο~~ ~~με~~ ~~το~~ ~~ΑΒΕΑ~~  
 Άρα  $\triangle ΒΔΚΕ = \triangle ΒΗΘ$

Κείμενο 2.13

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ.

Ανακεφαλαιώστε το παραρτήμα που είναι  
ισοδυναμία με το ΔΑΚΕ. Το παραρτήμα το είναι από τα  
στοιχεία σε σχέση που υπάρχει ίσως στο σχέδιο και  
να ελεγχθεί κατάλληλα στο σχέδιο. Διευκρινιστεί με  
τοίχομα Ισοδυναμική με το παραρτήμα που να έχει  
κοινή βάση ΒΗ. Τέλος αναδείχθηκε ότι το τοίχομα είναι  
το ίδιο με το παραρτήμα.

Κείμενο 2.14

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ.

Το από ΔΑΚΕ είναι ίσο με το  
από ΑΒΕΑ. Το τοίχομα ΑΒΕ είναι ίσο  
με το ΗΒΓ και ίσο με το ίδιο τοίχομα  
από το ΑΒΕΑ.  
Τα τοίχομα ΒΗΘ είναι ισοδυναμικά με το  
ΗΒΓ και ίσο με το τοίχομα ΑΒΘΗ.

Κείμενο 2.15

Το από ΔΑΚΕ είναι ίσο με το από ΑΒΕΑ.  
Το τοίχομα ΑΒΕ είναι ίσο με το  
ΗΒΓ και έχει το ίδιο εμβαδό στο τοίχομα  
ΑΒΕΑ.  
Το τοίχομα ΒΗΘ είναι ισοδυναμικά με το  
ΗΒΓ και είναι ισοδυναμικά με το ΗΒΓ και  
έχει το ίδιο εμβαδό στο τοίχομα ΑΒΘΗ.

Κείμενο 2.16



## 6.4 Τρίτη παρέμβαση

### ‘ΤΟ ΣΥΝΟΡΟ’

Μια άτυπη αξιολόγηση του βαθμού κατανόησης των ισεμβαδικών τριγώνων σ’  
ένα πραγματικό πρόβλημα  
( Μία διδακτική ώρα)

Σε μία άτυπη αξιολόγηση του πόσο πραγματικά είχε εμπεδωθεί ή έννοια της διατήρησης του εμβαδού στα τρίγωνα, δόθηκε στα παιδιά, σε αρχείο Geogebra, το εξής πρόβλημα:



Τα παιδιά βρίσκονταν και πάλι χωρισμένα σε ομάδες στο εργαστήριο πληροφορικής και δούλεψαν στο δυναμικό περιβάλλον του Geo(al)gebra, αυτή τη φορά.

Από τα 22 παιδιά, *μία μόνο* μαθήτρια συνειδητοποίησε πολύ γρήγορα ότι το πρόβλημα ήταν ισοδύναμο με την εύρεση ενός ισοδύναμου τριγώνου και απέδειξε ότι η λύση που έδωσε (βλ. Εικόνα Σ. 1), διατηρεί το εμβαδόν και των δύο οικοπέδων αναλλοίωτο.



Εικόνα Σ.1

Οι υπόλοιποι κινήθηκαν πάνω κάτω με τον ίδιο τρόπο, σχεδιάζοντας την ευθεία που περνούσε από τα μέσα των δύο πλευρών ΓΑ, ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ. Θα σταθώ στη λύση που παρουσίασαν στην τάξη, δύο από τις ομάδες.

### Λύση 1



Εικόνα Σ.2

Η ομάδα των Κ & Κ, δύο αγοριών, θεώρησε όπως και πολύ άλλοι την ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. *Μέτρησαν* τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίστηκαν και διαπίστωσαν ότι το εμβαδό του τριγώνου ΓΟΠ είναι ισοδύναμο (με μικρή απόκλιση την οποία θεώρησαν αμελητέα) με το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρότερων τριγώνων. Άρα κατέληξαν ότι η ευθεία που έφεραν είναι η λύση του προβλήματος, αφού ο κάθε ιδιοκτήτης διατηρεί τα τετραγωνικά του οικοπέδου του αναλλοίωτα. (Το τρίγωνο που «χάνει» ο ιδιοκτήτης του αριστερού οικοπέδου, το ξαναπαίρνει ως εμβαδό με τα δύο άλλα τρίγωνα αλλά και αντίστροφα, αυτό που «κερδίζει» ο ιδιοκτήτης του δεξιού οικοπέδου από το



τρίγωνο ΓΟΠ, το «χάνει» από τα δύο άλλα μικρότερα τρίγωνα). Οι δύο μαθητές αισθάνονταν απόλυτα ικανοποιημένοι από τη λύση τους και το γεγονός ότι η λύση τους στηρίζονταν απλά σε μία μέτρηση μέσω ενός λογισμικού, πάνω στο συγκεκριμένο σχήμα, δεν φάνηκε να τους πτοεί ή να τους κάνει να αμφιβάλλουν. Όταν η καθηγήτρια τους ρώτησε, *γιατί συμβαίνει αυτό*, αν υποθέσουμε ότι δεχόμαστε το αποτέλεσμα της μέτρησης ως έγκυρο, τότε μόνο οι μαθητές άρχισαν να ψάχνουν να βρουν την σχέση που έχουν το ύψος και η βάση του τριγώνου ΓΟΠ με το αρχικό ΑΒΓ. Δικαιολόγησαν τα αποτελέσματα των μετρήσεων σχετικά με την ισοδυναμία των εμβαδών χρησιμοποιώντας τον τύπο βάση επί ύψος δια δύο, θεωρώντας το ύψος του τριγώνου ΟΓΠ μισό του αρχικού αλλά δεν δικαιολόγησαν το γιατί. Μόνον όταν η καθηγήτρια ανέφερε τον Θαλή, συνειδητοποίησαν ότι είχαν μπροστά τους το θεώρημά του.

## Λύση 2



Εικόνα Σ.3

Τα δύο αγόρια μιας ομάδας, έφεραν την παράλληλη από το Γ προς την βάση ΑΒ και νομίζοντας ότι οι δύο αρχικές ευθείες ήταν παράλληλες, θεώρησαν ότι το τετράπλευρο ΑΒΠΩ είναι παραλληλόγραμμο. Στη συνέχεια πήραν τα μέσα όχι των πλευρών του τριγώνου, αλλά τα μέσα των πλευρών, ΑΩ , ΒΠ του υποτιθέμενου παραλληλογράμμου. Τότε ισχυρίστηκαν, το παραλληλόγραμμο χωρίζεται σε δύο ισοδύναμα παραλληλόγραμμα. Επομένως θα πάρει ο καθένας από μισό και το πρόβλημα κατά τη γνώμη τους, λύθηκε.

Η καθηγήτρια για να εστιάσει στο ουσιαστικό λογικό λάθος του ισχυρισμού τους, αγνόησε την αυθαίρετη παραδοχή της παραλληλίας των δύο

αρχικών ευθειών και τη δέχτηκε ως αρχικό δεδομένο της υπόθεσης. Οι μαθητές για αρκετή ώρα υπερασπίζονταν τη λύση τους ως σωστή, εστιάζοντας συνεχώς στο γεγονός ότι και οι δύο ιδιοκτήτες θα μοιράζονταν στη μέση το παρ/μο άρα η λύση ήταν δίκαιη. Η καθηγήτρια τους ρώτησε: Αυτό που είχε όμως πριν ο ιδιοκτήτης A ήταν το μισό του παραλληλογράμμου; Αυτό οι μαθητές δεν μπόρεσαν να το απαντήσουν, παρ' όλο που ξεκάθαρα είχαν «δει» στις δραστηριότητες που είχαν προηγηθεί, ότι ένα τρίγωνο έχει πάντα υποδιπλάσιο εμβαδό από το ορθογώνιο βάσης του.

Τα παιδιά που έδωσαν τη λύση 1, δεν υιοθέτησαν την ευκλείδεια λογική περί ισοδύναμων τριγώνων για να αντιμετωπίσουν το παραπάνω πρόβλημα. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν είχαν καταλάβει τη θεωρία των ισεμβαδικών τριγώνων. Αλλά όπως αναφέρθηκε και για την περίπτωση των επιπέδων Van Hiele, η υιοθέτηση ενός «νέου» τρόπου σκέψης και ο, με άνεση, χειρισμός μιας «νέας» επιχειρηματολογίας, απαιτεί αρκετό χρόνο. Το μεγαλύτερο μέρος της εμπειρίας των παιδιών πάνω στα εμβαδά τριγώνων είναι στη λογική της «μέτρησης» του εμβαδού με τη χρήση του τύπου βάση επί ύψος δια δύο και όχι με τη λογική της διατήρησης του εμβαδού με βάση κάποιο μετασχηματισμό.

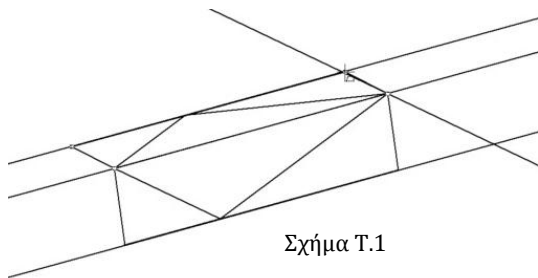
Οι μαθητές που έδωσαν τη λύση 2 φαίνεται πως έχουν προσχωρήσει περισσότερο στη λογική της σύγκρισης των εμβαδών δύο χωρίων όχι με βάση τον τύπο τους αλλά με βάση τις ισοδυναμίες. Υιοθέτησαν τη λογική που είχαν αναπτύξει στις προηγούμενες δραστηριότητες, υποδιπλασιάζοντας το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου φέρνοντας παράλληλη ευθεία από τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών αλλά η λογική τους επιχειρηματολογία ήταν αδύναμη.

## 6.5 Τέταρτη παρέμβαση

### Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΧΩΡΙΟΥ

( Δύο διδακτικές ώρες)

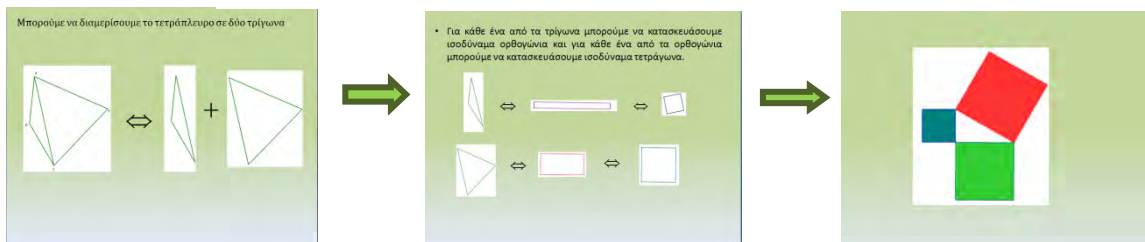
Η καθηγήτρια θύμισε στους μαθητές ότι τις προηγούμενες φορές είχαν καταφέρει να τετραγωνίσουν ένα οποιοδήποτε τρίγωνο. Πρότεινε μάλιστα να σχεδιάσουν όλοι ένα τυχόν τρίγωνο στην οθόνη του EuclidDraw και να το τετραγωνίσουν, για να θυμηθούν ό,τι είχαν μάθει έως τότε. Στη συνέχεια τους έθεσε το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός οποιοδήποτε πολυγωνικού χωρίου και για αρχή τους έδειξε ένα τετράπλευρο. Ένας πρότεινε να μετασχηματίσουν το δοσμένο τετράπλευρο σε ισοδύναμο παραλληλόγραμμο. Η καθηγήτρια του είπε να δοκιμάσει. Ο μαθητής χώρισε το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα και για κάθε τρίγωνο έφτιαξε το παρ/μο βάσης (σχήμα T.1). Αυτό που φαίνεται ότι τον προβλημάτισε ήταν ότι τελικά δεν είχε ένα παρ/μο αλλά δύο.



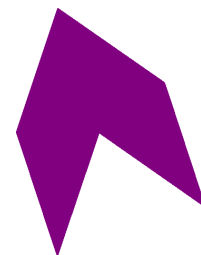
Ένας άλλος μαθητής πρότεινε: «Να το χωρίσουμε σε δύο τρίγωνα». Αφού συμφώνησαν ότι αυτό ήταν μια καλή ιδέα, η καθηγήτρια τους παρουσίασε συνοπτικά τα βήματα του τετραγωνισμού ενός τετραπλεύρου, και

κατ' επέκταση οποιοδήποτε πολυγωνικού χωρίου.

Τα βήματα για τον τετραγωνισμό ενός τετραπλεύρου



Στη συνέχεια τους είπε να ανοίξουν το αρχείο με το όνομα «Τετραγωνισμός χωρίου». Στην οθόνη τους εμφανίστηκε το διπλανό μη-κυρτό χωρίο.

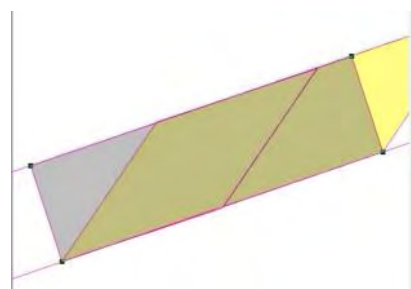
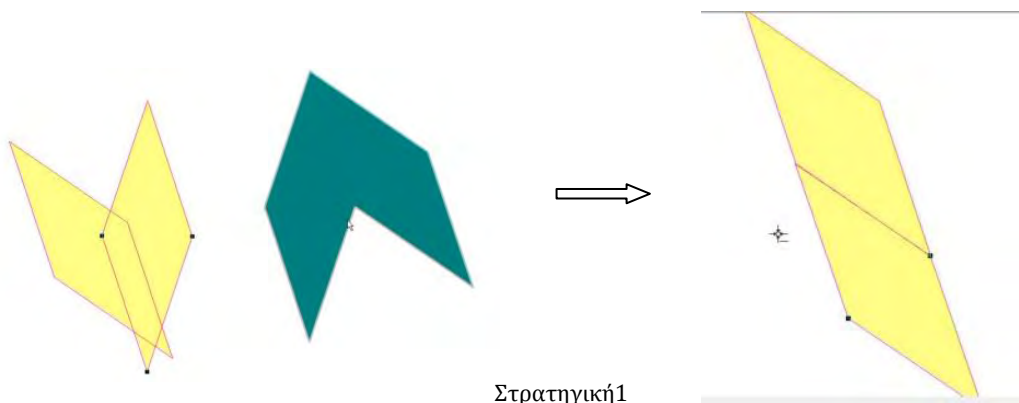


Η καθηγήτρια ζήτησε από τους μαθητές να το τετραγωνίσουν.

Οι στρατηγικές που ακολουθήθηκαν ήταν:

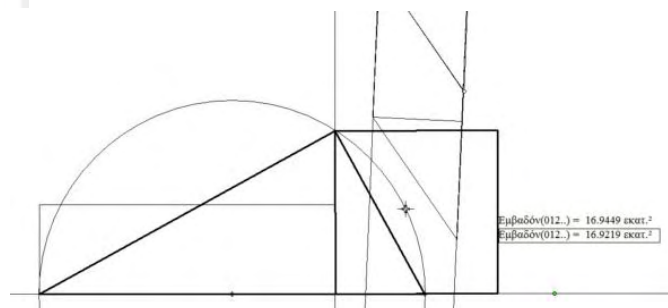
Στρατηγική 1: Διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε 2 κομμάτια-επανάκωση-τετραγωνισμός

Χώρισαν το πολύγωνο σε δύο κομμάτια, τα οποία τοποθετώντας το ένα πάνω στο άλλο διαπίστωναν ότι είναι ίσα. Ύστερα τα ένωσαν σε ένα παραλληλόγραμμο. Με αυτό τον τρόπο έπαιρναν ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το αρχικό μη-κυρτό πολύγωνο.



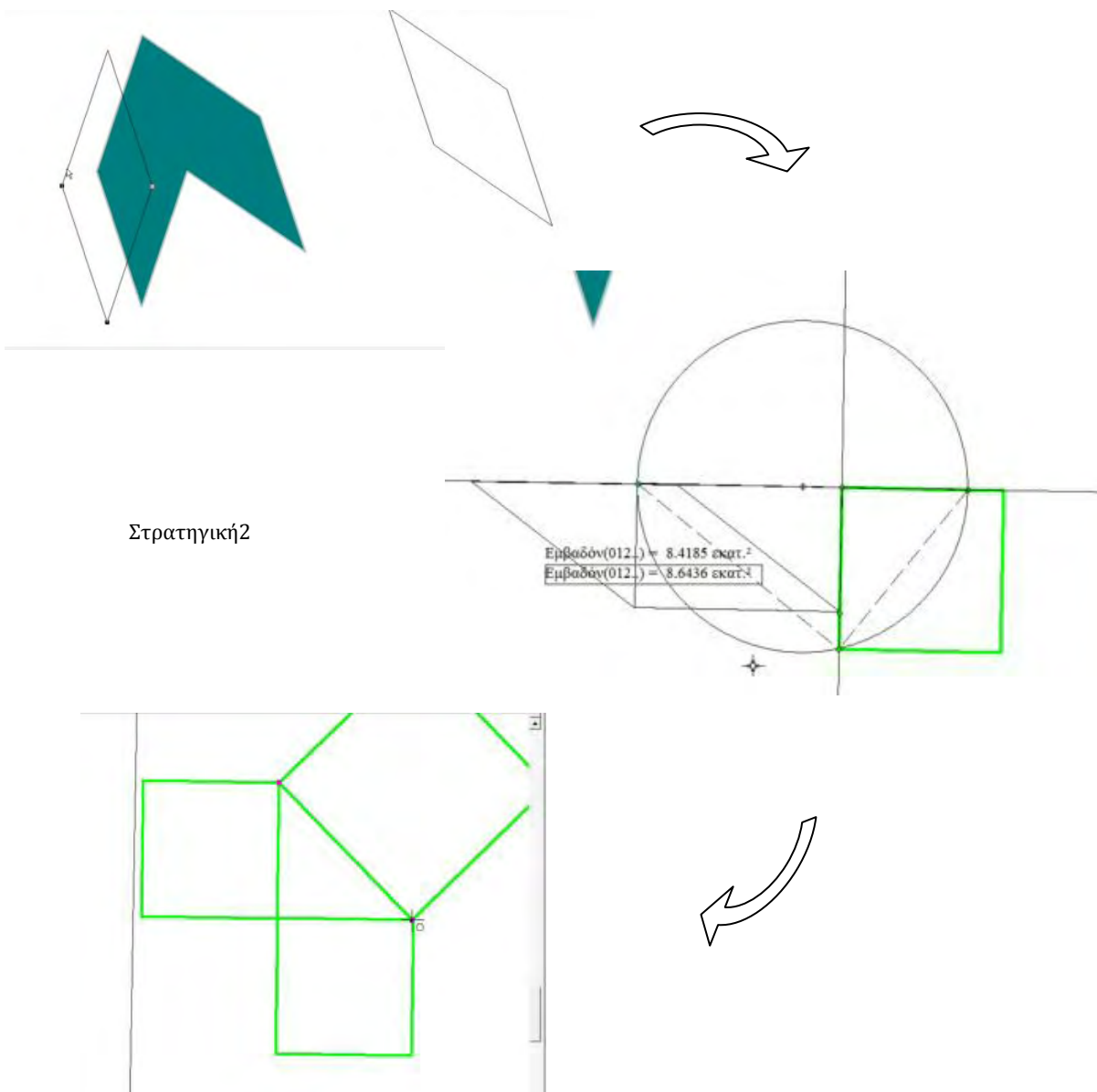
Κατασκευή του ισοδύναμου με το παραλληλόγραμμο, ορθογωνίου.

Τετραγωνισμός του ορθογωνίου



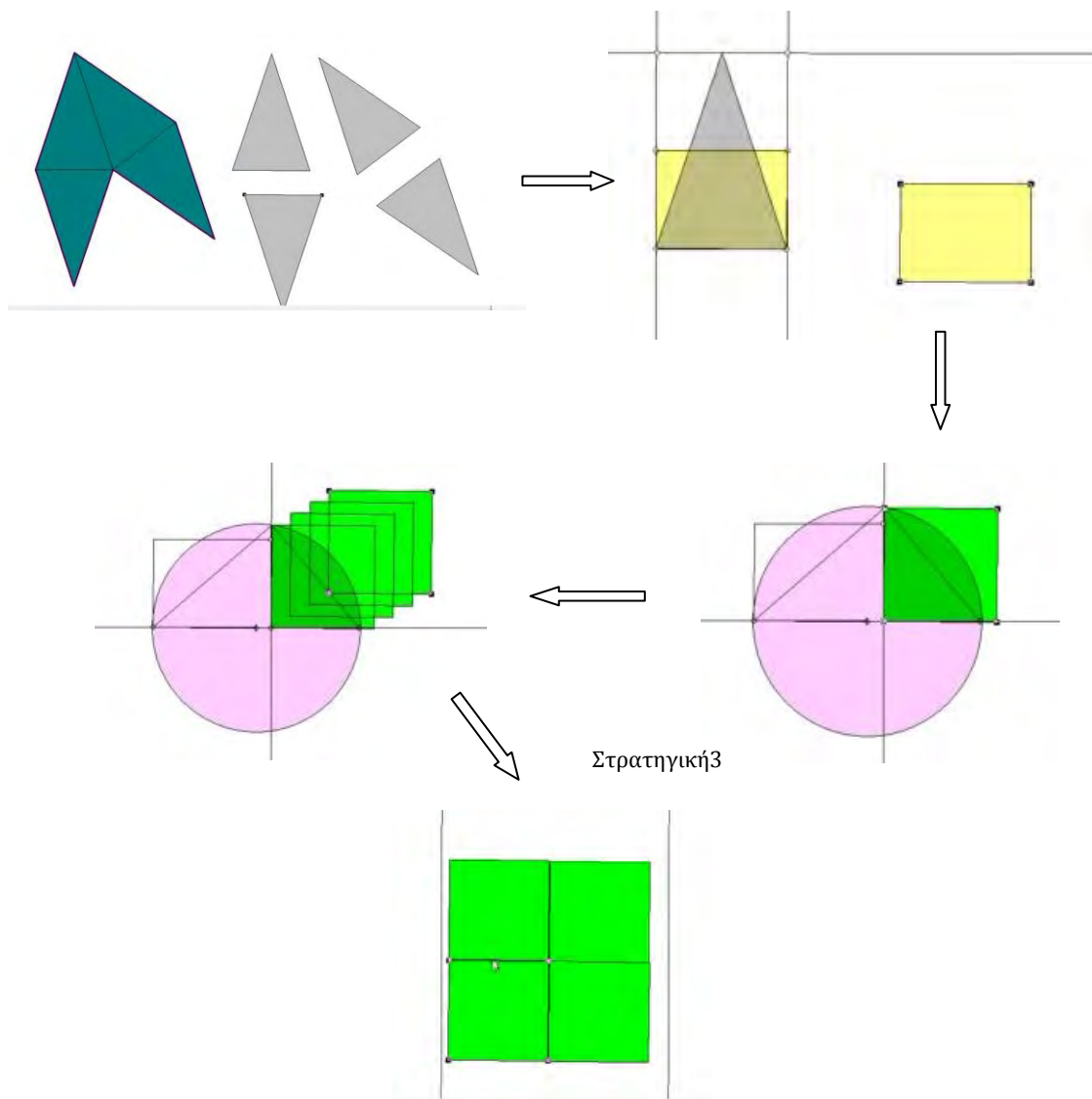
Στρατηγική 2 : Διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε 2 κομμάτια - τετραγωνισμός - Πυθαγόρειο

Χώρισαν το αρχικό πολύγωνο σε δύο κομμάτια που διαπίστωναν ότι είναι ίσα. Τετραγώνισαν το ένα. Έφτιαξαν ένα αντίγραφο. Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου, σχεδίασαν το τετράγωνο με το διπλάσιο εμβαδό.



Στρατηγική 3: Διαμέριση του αρχικού πολυγώνου σε 4 ίσα κομμάτια

Εδώ τα παιδιά διαμέρισαν το αρχικό πολύγωνο σε 4 κομμάτια που διαπίστωναν ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Τετραγώνισαν το ένα και παρήγαγαν άλλα τρία αντίγραφα. Συνέθεσαν τα τέσσερα ίσα τετράγωνα σε ένα!

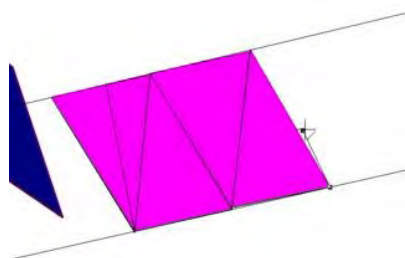


Στρατηγικές	Ομάδες που την ακολούθησαν	Ομάδες που την ολοκλήρωσαν
Στρατηγική 1	5	5
Στρατηγική 2	2	1
Στρατηγική 3	3	2

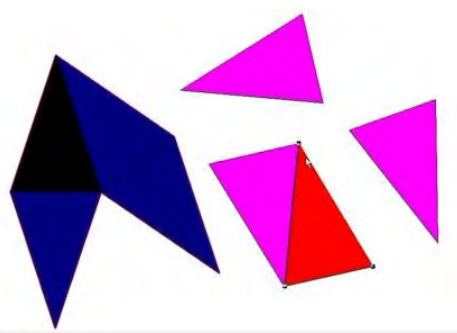
Στον πίνακα φαίνεται ότι δύο ομάδες δεν κατάφεραν να ολοκληρώσουν τον τετραγωνισμό του χωρίου. Οι δύο αυτές ομάδες ήταν δύο τριάδες κοριτσιών. Και τα έξι αυτά κορίτσια είχαν πολύ χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, παρ' όλα αυτά προσπάθησαν φιλότιμα ως το τέλος .

Η πρώτη τριάδα, αφού χώρισε το πολύγωνο σε δύο παραλληλόγραμμα, κατασκεύασε σωστά το ισοδύναμο ορθογώνιο του ενός. Στη συνέχεια άλλαξαν γνώμη και αποφάσισαν να ενώσουν τα δύο αρχικά κομμάτια. Για άγνωστο λόγο εγκατέλειψαν αυτή την ιδέα και προσπάθησαν να τετραγωνίσουν το ορθογώνιο που είχαν φτιάξει, αλλά δεν τα κατάφεραν. Επανήρθαν στο αρχικό σχήμα και το χώρισαν σε 4 κομμάτια αυτήν τη φορά. Προσπάθησαν να το τετραγωνίσουν, αλλά πάλι χωρίς αποτέλεσμα. Στο τέλος κουράστηκαν και εγκατέλειψαν.

Η δεύτερη τριάδα χώρισε αρχικά το σχήμα σε 4 κομμάτια. Τα ένωσαν και πάλι συνθέτοντας ένα παραλληλόγραμμο. Μη γνωρίζοντας προφανώς τη λειτουργία του



αντιγράφου, σχεδίασαν με



το «μάτι» ένα νέο παρ/μο , που τους φαίνονταν ίσο με αυτό που είχαν φτιάξει από το παζλ των 4 κομματιών. Στη συνέχεια προσπάθησαν να κατασκευάσουν το ισοδύναμο ορθογώνιο,

φέρνοντας κάθετες και πάλι με «το μάτι» και όχι χρησιμοποιώντας την εντολή «ευθεία κάθετη από...». Μέτρησαν τα δύο εμβαδά και είδαν ότι είχαν μεγάλη απόκλιση. Επανήρθαν στο αρχικό παραλληλόγραμμο παζλ και κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά αυτή τη φορά ένα ίσο παραλληλόγραμμο με αυτό. Εκεί σταμάτησαν.

Στην αρχή αυτής της παρέμβασης, η καθηγήτρια είχε βάλει τους μαθητές να κάνουν την κατασκευή του τετραγωνισμού του ορθογωνίου για να θυμηθούν πάλι κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες στη χρήση κάποιων εργαλείων του λογισμικού.

Το μεγάλο εμπόδιο για τις δύο ομάδες που δεν τα κατάφεραν στάθηκε ο τετραγωνισμός του ορθογωνίου. Αλλά και από τις άλλες 8 ομάδες που ολοκλήρωσαν τον τετραγωνισμό, οι 4 από αυτές χρειάστηκε να γυρίσουν πίσω, στο πρόσφατο αρχείο που είχαν ανοιχτό με τον τετραγωνισμό του ορθογωνίου για να θυμηθούν τα βήματα. Αυτό δείχνει ότι αυτή η κατασκευή δεν είχε κατακτηθεί πραγματικά από τους μαθητές. Απλά μιμούνταν τα βήματα.



## 6.6 Πέμπτη παρέμβαση

### 6.6.1 Η δεύτερη ιστορική παρουσίαση

Πριν από την έναρξη της διδασκαλίας για τον τετραγωνισμό των καμπυλόγραμμων χωρίων, όπως είχε γίνει και στην αρχή των παρεμβάσεων, η καθηγήτρια έδειξε στα παιδιά μία παρουσίαση με θέμα τον τετραγωνισμό του κύκλου, τις προσπάθειες, την ιστορική εξέλιξη, την κατάληξη. Τα παιδιά παρακολούθησαν με μεγαλύτερο ενδιαφέρον αυτά τα γεγονότα, ίσως γιατί η ιστορία του τετραγωνισμού του κύκλου έχει αίγλη (διάσημο πρόβλημα), δράση (πολλές οι προσπάθειες) αλλά και μυστήριο (τι έγινε τελικά;). Τα παιδιά γνώρισαν ότι αφού ο Ιπποκράτης απέδειξε ότι υπάρχουν καμπυλόγραμμο χωρία που τετραγωνίζονται (μηνίσκοι), ενισχύθηκε η άποψη μεταξύ των μαθηματικών ότι και ο κύκλος τετραγωνίζεται. Παρουσιάστηκαν συνοπτικά οι προσπάθειες 2000 χρόνων για τον τετραγωνισμό του αλλά και το άδοξο τέλος αυτών των προσπαθειών όταν πια ο μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν απέδειξε την υπερβατικότητα του αριθμού  $\pi$  και μαζί με αυτήν το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου με την κατασκευή πεπερασμένου αριθμού ευθειών και κύκλων, κατά τις επιταγές της ευκλείδειας γεωμετρίας. Η όλη διαδικασία αλλά και η κουβέντα γύρω από αυτό, προετοίμασε πρόσφορο έδαφος για την επόμενη φάση, που αφορούσε τον τετραγωνισμό καμπυλόγραμμων χωρίων.

### 6.6.2 5<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

#### ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

(1<sup>η</sup> διδακτική ώρα)

Σ' αυτή την παρέμβαση απουσίαζαν δύο μαθητές. Έτσι το σύνολο των μαθητών ήταν 20. Στα παιδιά μοιράστηκε το 1<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας πάνω στα εμβαδά των καμπυλόγραμμων χωρίων. Στόχος αυτής της δραστηριότητας ήταν να κατανοήσουν τη διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού ενός κυκλικού τομέα, όχι ως εφαρμογή ενός έτοιμου τύπου, αλλά ως υπολογισμού του μέρους του κυκλικού δίσκου που του αναλογεί. Τα παιδιά έπρεπε να εξάγουν μόνα τους τον τύπο που δίνεται στο σχολικό βιβλίο.

Ακολουθώντας την ευκλείδεια μέτρηση, το μέτρο μιας γωνίας ορίστηκε με μονάδα μέτρησης την ορθή γωνία. Ο κυκλικός τομέας ορίστηκε ως το σύνολο των κοινών σημείων της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας και του κυκλικού δίσκου. Έτσι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ορίστηκε ως το ανάλογο μέρος του εμβαδού του κυκλικού δίσκου. Έστω για παράδειγμα ένας τομέας που η αντίστοιχη γωνία του είναι τα  $\frac{2}{3}$  της ορθής. Η ορθή είναι το  $\frac{1}{4}$  της πλήρους γωνίας, άρα και ο τομέας θα είναι τα  $\frac{2}{3}$  του  $\frac{1}{4}$  του κυκλικού δίσκου, δηλαδή το  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$  του κυκλικού δίσκου. Επομένως και το εμβαδόν του θα είναι το  $\frac{1}{6}$  του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, άρα  $\frac{\pi R^2}{6}$ .

Λίγοι μαθητές και μαθήτριες εμφάνισαν αδυναμία στην έννοια του κλασματικού μέρους μιας κλασματικής ποσότητας, καθώς δεν ήταν πολύ σίγουροι τι μέρος του όλου είναι π.χ. το  $\frac{1}{3}$  του  $\frac{1}{4}$ . Αφού αυτό αποσαφηνίστηκε με παρέμβαση της καθηγήτριας, όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν σωστά όλες τις γραμμές του πίνακα, εκτός από την τελευταία την οποία δεν συμπλήρωσαν ή συμπλήρωσαν λάθος εννιά μαθητές και μαθήτριες. Αυτή ζητούσε να βρουν το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στα  $\frac{1}{3}$  της ορθής. Διαπιστώνεται η γνωστή δυσκολία μετάβασης από το συγκεκριμένο/αριθμητικό στο αφηρημένο/ονοματικό (Katz, Doriger, Bekken, & Sierpinska, 2000).

Δόθηκε ο ορισμός του κυκλικού τμήματος και οι μαθητές κατέληξαν πως το εμβαδόν του θα βρεθεί αν αφαιρέσουν από τον κυκλικό τομέα το τρίγωνο της χορδής.

Δόθηκε επίσης και ο ορισμός του μηνίσκου. Για τον υπολογισμό του εμβαδού του μηνίσκου αναφέρθηκε ότι θα πρέπει να καταφύγει κανείς στην αφαίρεση άλλων γνωστών χωρίων.

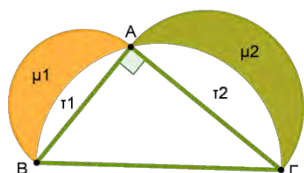
### 6.6.3 6<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

(2<sup>η</sup> διδακτική ώρα)

#### Ο τετραγωνισμός των μηνίσκων του Ιπποκράτη

Στα παιδιά δόθηκε το 2<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας, όπου ο στόχος ήταν τα παιδιά να καταλήξουν στο συμπέρασμα που κατέληξε κι ο Ιπποκράτης, ότι δηλαδή οι δύο μηνίσκοι τετραγωνίζονται. Ενδιάμεσος στόχος ήταν το να διαπιστώσουν ότι το πυθαγόρειο θεώρημα δεν ισχύει μόνο για τα τετράγωνα των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου αλλά και για άλλα σχήματα όπως π.χ. τα ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές

του ορθογωνίου.



1. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές AB, ΑΓ και ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ;

.....  
.....

2. Ποια σχέση νομίζετε ότι θα συνδέει τα εμβαδά των 3 ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ και γιατί;

.....  
.....  
.....

3. Συμπληρώστε τις ισότητες:

$$\mu_1 + \tau_1 =$$

$$\mu_2 + \tau_2 =$$

$$\tau_1 + \tau_2 + (\text{ΑΒΓ}) =$$

Αρχικά η καθηγήτρια ρώτησε τα παιδιά πόσα ημικύκλια «βλέπουν». Δεν ήταν και τα τρία ημικύκλια ορατά σε όλους. Το θέμα συζητήθηκε κι αφού όλοι είχαν «δει» τα τρία ημικύκλια, συνέχισαν με τις ερωτήσεις του φύλλου.

Όλα τα παιδιά απάντησαν σωστά στην πρώτη ερώτηση, γράφοντας την γνωστή τους σχέση :  $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ . (1)

Η καθηγήτρια τους προέτρεψε να βρουν τα εμβαδά των ημικυκλίων του σχήματος συναρτήσει των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

Συμφώνησαν να ονομάσουν Ε1 το εμβαδό του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα ΒΓ, Ε2 το ημικύκλιο με διάμετρο την πλευρά ΑΒ και Ε3 το ημικύκλιο με διάμετρο την πλευρά ΑΓ. Κατέληξαν ότι :

$$E_1 = \pi \cdot \frac{B\Gamma^2}{8}, \quad E_2 = \pi \cdot \frac{AB^2}{8} \quad \text{και} \quad E_3 = \pi \cdot \frac{A\Gamma^2}{8}. \quad (2)$$

Αυτή τη φορά τα φύλλα εργασίας ήταν ατομικά, παρ' όλο αυτά η δουλειά ως εδώ ήταν λίγο-πολύ ομαδική γιατί οι περισσότεροι διατύπωναν τις σκέψεις τους φωναχτά. Κάποιοι λοιπόν παρατήρησαν ότι αν πολλαπλασιάζαμε με  $\frac{\pi}{8}$  τη σχέση (1) θα βρίσκαμε ότι ισχύει η σχέση του πυθαγορείου θεωρήματος, όχι με τετράγωνα, αλλά με ημικύκλια. Έτσι όλοι κατέληξαν ότι με βάση τη σχέση (1) και τις σχέσεις (2), ισχύει:  $E_1 = E_2 + E_3$  (3). Στο σημείο αυτό παρενέβη η καθηγήτρια για να επεκτείνει αυτό το συλλογισμό, λέγοντας πως το πυθαγόρειο θεώρημα λοιπόν ισχύει όχι μόνο για τετράγωνα και ημικύκλια αλλά και για όμοια πολύγωνα, π.χ. ισόπλευρα τρίγωνα ή εξάγωνα.

Από εκεί και πέρα ενώ όλοι συμπλήρωσαν τις ισότητες της ερώτησης 3 σωστά μόνο ο μισός (οι 10 από τους 20), οι οποίοι ήταν όλοι μαθητές και μαθήτριες της θετικής τεχνολογικής κατεύθυνσης, μπόρεσαν να τις συνδυάσουν με την σχέση (3) και να εξαγάγουν το συμπέρασμα ότι τελικά:  $(AB\Gamma) = \mu_1 + \mu_2$ .

*Μόνο μία* μαθήτρια μπόρεσε να εξηγήσει γιατί η τελευταία αυτή σχέση αποδεικνύει ότι οι μηνίσκοι τετραγωνίζονται.

Τα παιδιά ήξεραν και είχαν βιώσει προηγούμενα την εμπειρία ότι κάθε τρίγωνο τετραγωνίζεται. Όμως ο συλλογισμός ότι οι μηνίσκοι, ως άθροισμα αφού είναι ισοδύναμοι με ένα τρίγωνο που τετραγωνίζεται, τετραγωνίζονται κι αυτοί, δεν ήταν τόσο προφανής. *Ίσως γιατί όλη η προηγούμενη εμπειρία ήταν πολύ καινούρια και η ιδέα ότι «κάθε τρίγωνο όπως και κάθε πολύγωνο τετραγωνίζεται» δεν είχε ακόμα καταχωρηθεί στην αυτόματη ανάκληση από τη μνήμη.*

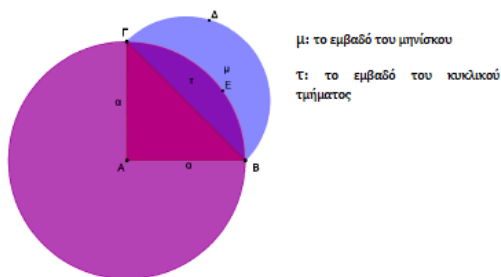
## 6.6.4 7<sup>ο</sup> Φύλλο εργασίας

(1 διδακτική ώρα)

### 7<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

#### Τετραγωνισμός ενός μηνίσκου

Κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ), με πλευρά  $\alpha$ . Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε ημικύκλιο διαμέτρου  $B\Gamma$  και κύκλο με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $AB$ . Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του μηνίσκου  $\mu$ :



$\mu$ : το εμβαδό του μηνίσκου

$\tau$ : το εμβαδό του κυκλικού τμήματος

1. Βρείτε την πλευρά  $B\Gamma$  συναρτήσει του  $\alpha$   
.....  
.....
2. Βρείτε το εμβαδό του ημικυκλίου, σε συνάρτηση με την διάμετρό του  $B\Gamma$ . Χρησιμοποιείτε αυτό που βρήκατε στην ερώτηση 1 και γράψτε το εμβαδό του ημικυκλίου σε συνάρτηση με το  $\alpha$ .  
.....  
.....
3. Βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ( $A B\Gamma$ , δηλαδή του τεταρτοκυκλίου πάντα σε συνάρτηση με το  $\alpha$ .  
.....  
.....

4. Τι παρατηρείτε;  
.....  
.....
5. Συμπληρώστε τις ισότητες:  
 $(A B\Gamma = (AB\Gamma + \underline{\hspace{2cm}})$   
Ημικύκλιο =  $\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$
6. Συνδυάστε το συμπέρασμα στην ερώτηση 3 με τις ισότητες της ερώτησης 4 και βρείτε τη σχέση που συνδέει το μηνίσκο με το ορθογώνιο τρίγωνο.  
.....  
.....  
.....
7. Επομένως δείξαμε ότι ο μηνίσκος τετραγωνίζεται. Γιατί;  
.....  
.....  
.....
8. Ποια θα είναι η πλευρά του τετραγώνου που είναι ισοδύναμο με το μηνίσκο;  
.....  
.....  
.....  
.....

Σ' αυτό το φύλλο εργασίας, οι μαθητές θα ανακάλυπταν ακόμη μία περίπτωση μηνίσκου, ενός αυτή τη φορά, που μπορούσε να τετραγωνιστεί. Οι μαθητές έπρεπε να ακολουθήσουν τον παραγωγικό συμπερασμό, όπως έκαναν στο προηγούμενο φύλλο εργασίας με καθοδηγούμενα βήματα, για να καταλήξουν στην ισοδυναμία του μηνίσκου μ' ένα τρίγωνο. Αυτό το φύλλο αποτελούσε και μία αξιολόγηση του βαθμού κατανόησης του προηγούμενου μαθήματος. Το φύλλο ήταν ατομικό. Απουσίαζε ένας μαθητής κι έτσι το σύνολο της τάξης ήταν 21 μαθητές.

Έξι από τους 20 μαθητές και μαθήτριες μπόρεσαν να εκτελέσουν σωστά όλα τα βήματα και να καταλήξουν στην ισοδυναμία του μηνίσκου με το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και άρα στην δυνατότητα τετραγωνισμού του. Οι τέσσερις ήταν θετικής/τεχνολογικής κατεύθυνση και οι δύο θεωρητικής.

Δεκατρείς από τους 20 μαθητές και μαθήτριες απάντησαν σωστά στις 3 πρώτες ερωτήσεις υπολογιστικού χαρακτήρα και συμπέραναν την ισοδυναμία του τεταρτοκυκλίου  $(A, AB)$  με το ημικόκλιο διαμέτρου ΒΓ, συμπλήρωσαν σωστά και τις ισότητες της ερώτησης 5 και σταμάτησαν εκεί. Δεν μπόρεσαν να συνδυάσουν την απάντηση στην ερώτηση 4 με τις ισότητες της ερώτησης 5 για να καταλήξουν στην ισοδυναμία του μηνίσκου με το τρίγωνο. Σε αυτό το σημείο είχαν «κολλήσει» και οι μισοί την προηγούμενη φορά. Το αξιοσημείωτο είναι ότι ακόμη και στους μισούς από αυτούς που ολοκλήρωσαν το συλλογισμό, δεν ήταν άμεσα ορατός ο συλλογισμός, ότι:

$$\text{Αν } \begin{cases} \text{Ημικόκλιο} = (A, B\Gamma) \\ (A, B\Gamma) = (AB\Gamma) + \tau \quad \text{τότε} \Rightarrow \mu = (AB\Gamma) \\ \text{Ημικόκλιο} = \mu + \tau \end{cases}$$

Παρά κατέφυγαν σε πράξεις όπως αυτές:

Handwritten derivation showing the derivation of  $\mu = \frac{1}{2}\alpha^2$  from the given conditions. The steps are:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi\alpha^2 &= \frac{1}{2}\alpha^2 + \tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{4}\pi\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\ \frac{1}{4}\pi\alpha^2 &= \mu + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow \mu = \frac{1}{4}\pi\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\ \mu &= \frac{1}{2}\alpha^2 \end{aligned}$$

εικ. Φ7.1

Έτσι κατέληξαν στο συμπέρασμα της ισοδυναμίας του μηνίσκου  $\mu$  με το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

Μία μαθήτρια συμπλήρωσε μόνο τις 4 πρώτες απαντήσεις και μία απάντησε μόνο στην ερώτηση 1, δηλαδή βρήκε μόνο την διαγώνιο ΒΓ με τη βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος.

## 6.7 Ερωτηματολόγιο Β

Στο τέλος της χρονιάς δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με μια σειρά δοκιμασιών ως μία τελική αξιολόγηση της κατανόησης κάποιων εννοιών αλλά και ως ανίχνευση των εντυπώσεών τους από τη συνολική εμπειρία αυτών των παρεμβάσεων. Η αλήθεια είναι ότι την άνοιξη, στο τέλος μιας σχολικής χρονιάς, η φύση και ο ήλιος είναι καταλυτικός για τη ψυχολογία των παιδιών και τα παιδιά είναι απολύτως απρόθυμα να γράφουν μακροσκελείς απαντήσεις κλεισμένα στους τέσσερις τοίχους. Έτσι στις ερωτήσεις όπου απαιτούνταν μία αναλυτική περιγραφή των εντυπώσεων ή των απόψεων οι περισσότεροι απάντησαν σχεδόν μονολεκτικά. Το χιούμορ πάντως δεν έλειψε. Τα ερωτηματολόγια ήταν ανώνυμα, ώστε οι μαθητές να εκφράσουν ελεύθερα τη γνώμη τους.

### *Ερωτήσεις 1-3*

Στις τρεις πρώτες ερωτήσεις που αφορούσαν τις εντυπώσεις από τη χρήση του λογισμικού γενικά αλλά και ειδικά αν τους διευκόλυνε ή τους δυσκόλεψε στις διδασκαλίες που αφορούσαν την απόδειξη του Πυθαγορείου και τον τετραγωνισμό πολυγωνικού χωρίου, δόθηκαν οι εξής απαντήσεις:

*Όλοι* οι μαθητές και οι μαθήτριες *πλην ενός*, είχαν θετικές εντυπώσεις από τη χρήση του. Κάποιοι από αυτούς ανέφεραν ότι τους άρεσε πολύ η εμπειρία με τα ισοδύναμα τρίγωνα. Ένας μαθητής ή μία μαθήτρια είπε πως δυσκολεύτηκε.

Ειδικά για την απόδειξη του Πυθαγορείου, *όλοι* αναγνώρισαν ότι είχε θετική επίδραση στην κατανόηση της.

Σχετικά με τον τετραγωνισμό, 13 μαθητές είπαν ότι το λογισμικό βοήθησε και 7 ότι δεν βοήθησε.

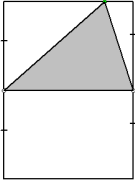
### *Ερώτηση 4: «Τι καταλάβατε ότι σημαίνει τετραγωνισμός ενός χωρίου;»*

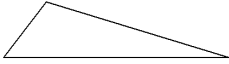
Δεκαπέντε από τους είκοσι παρόντες μαθητές απάντησαν σωστά πως είναι να κατασκευάσουμε τετράγωνο ισοδύναμο με το χωρίο. Τρεις είπαν πως δεν είχαν καταλάβει πολύ καλά και δύο δεν απάντησαν.

Ερώτηση 5: «Γιατί οι αρχαίοι γεωμέτρεις αλλά και άλλοι μεταγενέστεροι είχαν αυτή την εμμονή να τετραγωνίσουν τον κύκλο;»

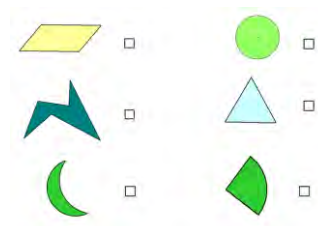
Πέντε απάντησαν σωστά ότι αυτό προέκυψε αφού είχαν ανακαλύψει ότι υπάρχουν καμπυλόγραμμα χωρία που τετραγωνίζονται και 8 δεν έδωσαν καμία απάντηση. Άλλες απαντήσεις που δόθηκαν, ήταν: γιατί δεν τους άρεσε να έχουν άλυτα προβλήματα (3), γιατί ήταν φιλόδοξοι(2), γιατί ήθελαν να το αποδείξουν(1) και ένας απάντησε με χιούμορ: 'Άμα τους βρείτε, ρωτήστε τους!'

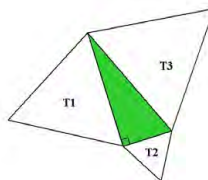
### Ερωτήσεις 6-9

Ερώτηση 6:	1. Μπορείτε να βρείτε τι μέρος από την επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου καταλαμβάνει η επιφάνεια του τριγώνου στο διπλανό σχήμα;	
Απάντησαν σωστά	15	
Δεν απάντησαν σωστά	3	
Δεν έδωσαν καμία απάντηση	2	

Ερώτηση 7:	2. Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο ισοδύναμο με το διπλανό τρίγωνο;	
Το σχεδίασαν σωστά	9	
Σχεδίασαν παραλληλόγραμμο ή ορθογώνιο με το διπλάσιο εμβαδό	3	
Σχεδίασαν ορθογώνιο με άσχετο εμβαδό	7	



<p><i>Ερώτηση 8:</i></p>	<p>3. Ποιες από τις παρακάτω επιφάνειες νομίζετε ότι τετραγωνίζονται; (Τσεκάρετε το κουτάκι)</p> 
<p>Απάντησαν σωστά</p>	<p>13</p>
<p>Τσέκαραν τον κύκλο ή τον κυκλικό τομέα</p>	<p>4</p>
<p><b>Δεν</b> τσέκαραν <b>όλες</b> τις επιφάνειες που τετραγωνίζονται</p>	<p>4</p>
<p>Τσέκαραν <b>μόνο</b> τις πολυγωνικές επιφάνειες</p>	<p>3</p>

<p><i>Ερώτηση 9:</i></p>	<p>4. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά T1, T2, T3 των ισοπλευρών τριγώνων του διπλανού σχήματος; Αιτιολογήστε.</p> 
<p>Δεν απάντησαν</p>	<p>10</p>
<p>Απάντησαν σωστά ότι <math>T_3 = T_1 + T_2</math></p>	<p>3</p>
<p>Αντιλήφθηκαν ότι ισχύει η σχέση του Πυθαγορείου αλλά αντί της σωστής σχέσης έγραψαν : <math>T_3^2 = T_1^2 + T_2^2</math></p>	<p>7</p>

*Ερώτηση 10 : «Πιστεύετε ότι είναι χρήσιμο να μαθαίνετε την ιστορία που έχει ένα θεώρημα στα μαθηματικά; Αιτιολογήστε.»*

Δεκαέξι μαθητές και μαθήτριες απάντησαν θετικά σ' αυτή την ερώτηση. Από αυτούς οι 4 απάντησαν μονολεκτικά, οι υπόλοιποι προέβαλλαν τους εξής λόγους:

*«Γιατί είναι ενδιαφέρουσες οι σκέψεις που έκαναν για να βγάλουν το θεώρημα'.*

*Για να μάθουμε πως σκέφτονταν οι αρχαίοι».*

*«Γιατί έτσι κατανοούμε περισσότερο τη σημασία και την χρησιμότητα του θεωρήματος αλλά και το πως προέκυψε»(ξεχωριστές απαντήσεις που συμπύκνωσα σε μία).*

*«Γιατί αποκτούμε νέες γνώσεις».*

*«Γιατί είναι καλό να ξέρεις πως μπόρεσαν να κάνουν τέτοια πράγματα στα μαθηματικά πριν από τόσα χρόνια».*

*«Γιατί διευρύνουμε τους ορίζοντές μας».*

Δύο μαθητές ή μαθήτριες απάντησαν ότι δεν θεωρούν ότι είναι χρήσιμο να μαθαίνουμε την ιστορία πίσω από ένα θεώρημα (μάλλον) και ένας ή μία δεν απάντησε.

*Ερώτηση 11: «Τι σας άρεσε ή σας εντυπωσίασε από αυτή τη σειρά των μαθημάτων με θέμα τον τετραγωνισμό;»*

Διάφορες απαντήσεις δόθηκαν τις οποίες όταν είναι παραπλήσιες τις εντάσσω στην πλησιέστερη πρόταση που αποδίδει το ίδιο νόημα.

*«Η απόδειξη του Πυθαγορείου» (3 απαντ.)*

*«Η προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου»(2 απαντ.)*

*«Ο τετραγωνισμός των μηνίσκων»*

*«Η κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου ενός τριγώνου»*

*«Τα ισοδύναμα τρίγωνα» (3 απαντ.)*

*«Η ευκολία με την οποία σχεδιάζαμε τα σχήματα και τα ισοδύναμα τρίγωνα» (5 απαντ.)*

*«Η δουλειά στο εργαστήριο»*

«Όλα ήταν ωραία, εντυπωσιάστηκα, ήταν κάτι διαφορετικό» (4 απαντ.)

«Τίποτα το ιδιαίτερο!»

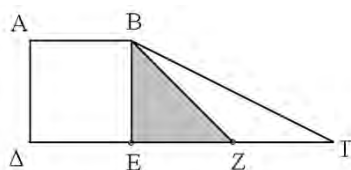
«Ο κυριούλης που ήρθε να μας δει!» (Η μαθήτριά αναφέρεται στην επίσκεψη του επιβλέποντος καθηγητή κ. Χατζηκυριάκου, ο οποίος παρακολούθησε την πρώτη παρέμβαση στο εργαστήριο)

Στις τελικές εξετάσεις του Μαΐου στο μάθημα της Γεωμετρίας, η καθηγήτρια μεταξύ άλλων, έβαλε τα παρακάτω δύο θέματα, για να δει τι «απέμεινε» στους μαθητές, δεδομένου ότι είχαν μεσολαβήσει δύο μήνες, το Πάσχα, οι εξετάσεις άλλων μαθημάτων και οι μαθητές δεν είχαν κρατημένες σημειώσεις από τις διδασκαλίες αφού τα φύλλα εργασίας τα είχε κρατήσει η ερευνήτρια. Επομένως αυτό που «απέμεινε» είναι πραγματικά ό,τι εντυπώθηκε ή εδραιώθηκε στο μυαλό των παιδιών αφού δεν μπορούσαν να ξαναδιαβάσουν ή να δουν όσα είχαν κάνει στο εργαστήριο ή στην τάξη.

### ΖΗΤΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Στο διπλανό τραπέζιο, ισχύει ότι :

$$AB=AD=DE=EZ=ZΓ \text{ και } \widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ .$$



A. Να δείξετε ότι :  $(BEG) = (ABDE)$

(9 μόρια)

B. Αν  $(ABEΔ) = α^2$ , να βρείτε σε σχέση με το α:

1. το  $(BEZ)$

(3 μόρια)

2. το  $(ABΓΔ)$

(3 μόρια)

Γ. Να σχεδιάσετε ορθογώνιο παρ/μο ισοδύναμο με το τραπέζιο

$(ABΓΔ)$

(5 μόρια)

Δ. Να σχεδιάσετε τετράγωνο ισοδύναμο με το τραπέζιο  $(ABΓΔ)$

(5 μόρια)

Στο παραπάνω ζήτημα: 12 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Α

12 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Β

11 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Γ

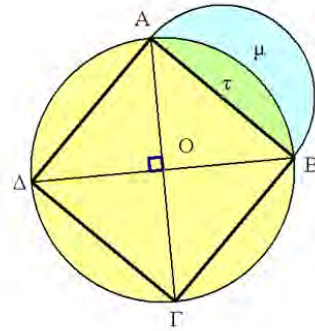
7 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Δ

#### ΖΗΤΗΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας

$\rho = 4$  cm. Να βρεθούν:

- A. η πλευρά του τετραγώνου
- B. το εμβαδό του κυκλικού τομέα  $(O, \widehat{AB})$
- Γ. το εμβαδό  $\tau$  του κυκλικού τμήματος.
- Δ. Το εμβαδό  $\epsilon$  του ημικυκλίου με διάμετρο την πλευρά AB του τετραγώνου.
- Ε. Το εμβαδό  $\mu$  του μηνίσκου που σχηματίζεται.
- ΣΤ. Να δείξετε ότι ο μηνίσκος τετραγωνίζεται



Στο ζήτημα αυτό: 8 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα A  
6 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα B  
6 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Γ  
4 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Δ  
3 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα Ε  
2 παιδιά απάντησαν σωστά στο ερώτημα ΣΤ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

---

### 7.1 Ανακεφαλαίωση

Σε 22 μαθητές ηλικίας 16-17 χρονών, ενός περιφερειακού λυκείου του Ν. Μαγνησίας, εφαρμόστηκαν μια σειρά μαθημάτων στη διδακτική ενότητα του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας, με κεντρικό θέμα τον τετραγωνισμό. Οι δραστηριότητες πλαισιώθηκαν από την ιστορία των μαθηματικών της εποχής και την εξέλιξη τους. Πολλές από αυτές έγιναν στο εργαστήριο πληροφορικής, όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονταν στο δυναμικό περιβάλλον του EucliDraw. Οι μαθητές και οι μαθήτριες στο εργαστήριο εργάστηκαν χωρισμένοι σε ομάδες των 2-3 ατόμων. Στις διδασκαλίες άλλοτε χρησιμοποιήθηκε η διερεύνηση και ο ελεύθερος προσανατολισμός και άλλοτε ο καθοδηγούμενος προσανατολισμός. Στην περίπτωση της γεωμετρικής κατασκευής τετραγώνου ισοδύναμου ενός ορθογωνίου, λόγω έλλειψης χρόνου, ακολουθήθηκε η παραδοσιακή διδασκαλία. Από τις καταγεγραμμένες ενέργειες των μαθητών στην οθόνη του υπολογιστή, τις μαγνητοφωνημένες διδασκαλίες, τα φύλλα εργασίας τα ερωτηματολόγια και τα αποτελέσματα των τελικών εξετάσεων, προκύπτουν ευρήματα που οδηγούν σε συμπεράσματα σχετικά με:

1. Την επίτευξη των γνωστικών στόχων.
2. Την λειτουργία των ομάδων.
3. Το δυναμικό περιβάλλον του EucliDraw ως μέσο διερεύνησης ή κατασκευής στη γεωμετρία.
4. Τη γεωμετρική αντίληψη των μαθητών ενός ελληνικού σχολείου, ηλικίας 16-17 χρονών και την ικανότητά τους ως προς την σύνθεση επαγωγικού συλλογισμού.
5. Την ανταπόκριση των μαθητών σε αυτού του είδους τη διδασκαλία σε σύγκριση με την παραδοσιακή.
6. Την ιστορική πλαισίωση ως παράγοντα ενίσχυσης της κατανόησης και του ενδιαφέροντος.

## 7.2 Συμπεράσματα

### 7.2.1 Η λειτουργία των ομάδων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο διδακτικό σχεδιασμό των δραστηριοτήτων αυτών των πειραμάτων, η δημιουργία των ομάδων δεν ήταν στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος αυτής της έρευνας. Παρ' όλα αυτά αξίζει ν' αναφερθούν κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τη λειτουργία τους.

Τα παιδιά είχαν λιγότερο άγχος γιατί μέσα στην ομάδα εκτίθονταν λιγότερο και βέβαια είναι πάντα καλύτερα να μοιράζεσαι μια δύσκολη δουλειά με κάποιον άλλον.

Στα ζευγάρια που το ένα μέλος υπερίσχυε σημαντικά σε γνώσεις και δεξιότητες έναντι του άλλου, το ισχυρό μέλος «καπέλωνε» όλη την προσπάθεια, έπαιρνε όλες τις πρωτοβουλίες και το πιο αδύναμο μέλος δεν συμμετείχε ενεργά, αλλά παρακολουθούσε παθητικά. Το αποτέλεσμα ήταν ότι δεν είχε την ευκαιρία να κατασκευάσει την δική του γνώση και εμπειρία. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, δυστυχώς όχι το μοναδικό αλλά ίσως το πιο ακραίο, ήταν το ζευγάρι του Κ. με τη Μ. Ο Κ., ήταν ένα ιδιαίτερα εγωκεντρικό άτομο αλλά ικανό στα μαθηματικά. Αρχικά ο Κ. ήθελε να είναι μόνος του. Όταν του είπα ότι αυτό δεν γίνεται και πρέπει να γίνει ζευγάρι με κάποιον, γιατί οι υπολογιστές δεν ήταν αρκετοί ώστε να έχει ο καθένας από έναν, επέλεξε ως ζευγάρι τη Μ. που είναι ιδιαίτερος αδύναμη στα μαθήματα, δεν παίρνει πρωτοβουλίες και δεν διεκδικεί. Επομένως ο Κ. είχε την ευκαιρία να είναι με κάποιον άλλο μεν, αλλά να δουλεύει σαν να ήταν μόνος του τελικά, αφού η Μ. λειτουργούσε ως ένας πολύ πειθήνιος ακροατής ή στην καλύτερη ως ένας βοηθός που εκτελεί οδηγίες. Αντίθετα, στα ζευγάρια που υπήρχε ισοτιμία η συνεργασία ήταν αρμονική και αποδοτική και για τα δύο μέλη. Η συμπεριφορά του Κ., αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως συμπεριφορά ατομικού προσανατολισμού (*individual task-oriented behavior*), που σημαίνει ότι το άτομο προτιμά να δουλεύει μόνο του (Gillies, 2008).

Η συνεργασία στα επόμενα πέντε ζευγάρια «ένας καλός-ένας μέτριος», ήταν αρμονική και υπήρχε ουσιαστική αλληλεπίδραση, παρ' όλο που το ένα μέλος της ομάδας σ' αυτά τα ζευγάρια ήταν πιο δυνατό στα μαθηματικά από το άλλο. Αρμονική και ουσιαστικά αλληλεπιδραστική ήταν και η συνεργασία των

ομάδων με τους αδύναμους μαθητές, αφού συμμετείχαν από κοινού στην προσπάθεια.

### 7.2.2 Επίτευξη των γνωστικών στόχων

Τα ισεμβαδικά τρίγωνα και η σχέση του εμβαδού ενός τριγώνου με το ορθογώνιο βάσης του, αποδείχθηκαν οι καλύτερα εμπεδωμένες έννοιες. Είχαν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις και στα φύλλα εργασίας και στο τελικό ερωτηματολόγιο και στις τελικές εξετάσεις. Παρ' όλα αυτά η ανάκληση αυτών των καινούριων γνώσεων σ' ένα πραγματικό πρόβλημα δεν έγινε αυτόματα από τους μαθητές παρότι ακολούθησε τις εισαγωγικές δράσεις. Η εδραίωσή τους ως τρόπος σκέψης, απαιτεί περισσότερο χρόνο και δραστηριότητες (βλέπε την τρίτη παρέμβαση- Αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος). Γι' αυτό και οι μαθητές και οι μαθήτριες κατέφυγαν στην από χρόνια εδραιωμένη πρακτική αντιμετώπισης του εμβαδού, τη υπολογιστική μέτρησή του με τη χρήση ενός τύπου.

Αρκετά καλά πήγε η εδραίωση του πυθαγορείου θεωρήματος ως αθροιστική μηχανή εμβαδών είτε τετραγώνων είτε ημικυκλίων, είτε ομοίων πολυγώνων, (αποτελέσματα τελικού ερωτηματολογίου, τελικές εξετάσεις). Πριν από αυτή την εμπειρία αρκετοί μαθητές είχαν ταυτίσει το πυθαγόρειο θεώρημα με την αλγεβρική του εξίσωση (βλέπε Διάλογο 3, σελ. 75)

Ο τετραγωνισμός ενός ορθογώνιου, αποδείχθηκε η πιο δύσκολη διαδικασία στην κατανόησή της. Το αποδίδω αυτό αφενός στον τρόπο που διδάχθηκε (παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας) μιας και οι μαθητές δεν είχαν το χρόνο να σκεφτούν, να πειραματιστούν, να κάνουν λάθος και να ξαναπροσπαθήσουν και αφετέρου στον λίγο χρόνο που της διατέθηκε (λιγότερο από μία διδακτική ώρα). Οι μαθητές δεν κατασκεύασαν αυτή τη γνώση, γι' αυτό και αρκετοί όταν χρειάστηκε να τη χρησιμοποιήσουν, προσπαθούσαν να θυμηθούν τα βήματα (βλέπε την τέταρτη παρέμβαση-τετραγωνισμός μη-κυρτού χωρίου). Είναι αυτό που αναφέρει ο Moise: *«Είναι πάντα εύκολο να μαθαίνεις στους μαθητές ένα σύνολο από αλγορίθμους και ρουτίνες από το να τους μαθαίνεις το πραγματικό νόημα και τη σημασία αυτών που τους ζητάς να κάνουν. Όταν ο χρόνος πιέζει, που συνήθως πιέζει, η ιδέα να βασιστείς σε μια*

*ρουτίνα είναι ακαταμάχητη»* (Moise, 1975: p. 473). Από την άλλη οι γεωμετρικές κατασκευές έχουν μία εγγενή δυσκολία, γιατί απαιτείται υψηλό επίπεδο παραγωγικού συμπερασμού και αφαίρεσης.

Οι μαθητές υιοθέτησαν τη διαμέριση ενός ακανόνιστου σχήματος σε γνωστά κομμάτια (π.χ. τρίγωνα), ως τρόπο μέτρησης του εμβαδού του και μάλιστα έδειξαν φαντασία και ευρηματικότητα ως προς τον τρόπο διαμέρισης και ανασύνθεσης (βλέπε τέταρτη παρέμβαση-τετραγωνισμός μη-κυρτού πολυγώνου).

Η διδασκαλία του υπολογισμού του εμβαδού του κυκλικού τομέα ως κλασματικής ποσότητας του εμβαδού του κυκλικού δίσκου δεν δημιούργησε προβλήματα στους μαθητές, αντίθετα τους απάλλαξε από το άγχος της τυφλής αποστήθισης ενός τύπου χωρίς νόημα. Γι' αυτό ο μαθητές δεν αντιμετώπισαν κάποιο πρόβλημα στον υπολογισμό του εμβαδού των κυκλικών τομέων που χρειάστηκε να υπολογίσουν στις επόμενες δραστηριότητες (βλέπε τετραγωνισμοί των μηνίσκων- έκτο & έβδομο φύλλο εργασίας).

Ο τετραγωνισμός των μηνίσκων αποδείχθηκε επίσης μια δύσκολη δραστηριότητα για πολλούς μαθητές. Το αποδίδω στο γεγονός ότι σ' αυτή τη δραστηριότητα απαιτούνταν και πάλι ικανό επίπεδο (προτασιακής) λογικής για να υποστηρίξει τον παραγωγικό συμπερασμό. Δεν υπήρχε «δράση», ούτε η δυνατότητα μέτρησης από κάποιο εργαλείο του λογισμικού.

Τα περισσότερα παιδιά (75%) στο τέλος αυτών των παρεμβάσεων μπορούσαν να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση «τι είναι ο τετραγωνισμός».

### *7.2.3 Το δυναμικό περιβάλλον του Euclidraw ως μέσο διερεύνησης ή κατασκευής στη γεωμετρία.*

Σε όλα τα παιδιά άρεσε η εμπειρία της διερεύνησης και της κατασκευής μέσα στο δυναμικό περιβάλλον του EuvliDraw. Αφού εξοικειώθηκαν αρκετά, μπορούσαν να σχεδιάζουν περίπλοκες κατασκευές με ευκολία και τους άρεσε πολύ να «γεμίζουν» με χρώμα τα διάφορα σχήματα. Υπάρχει μια δυσκολία και παρανόηση στην οπτική αντίληψη σύνθετων σχημάτων, που σχετίζεται με την εγγύτητα, τον εγκλεισμό και τη συνέχεια (Gal & Linchevski, 2010). Το χρώμα φαίνεται ότι βοηθάει στην υπερπήδηση αυτής της δυσκολίας.



Σε όλες τις δραστηριότητες όπου χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό είτε ως περιβάλλον εξερεύνησης, είτε ως σχεδιαστικό εργαλείο, οι μαθητές είχαν καλύτερες επιδόσεις από αυτές που είχαν στις δραστηριότητες που έπρεπε να αναπτύξουν στο χαρτί, λεκτικά, έναν επαγωγικό συλλογισμό.

Με τη βοήθεια του λογισμικού τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να χαρούν την κατασκευή μιας «δύσκολης» απόδειξης, όπως αυτή του Ευκλείδη για το πυθαγόρειο θεώρημα, χωρίς να τους φανεί η διαδικασία βαρετή και ανούσια (Hanna, 2000). Αντίθετα την ευχαριστήθηκαν και εντυπωσιάστηκαν από τη στρατηγική του Ευκλείδη. Επιπλέον *όλοι* οι μαθητές κατάφεραν να την ολοκληρώσουν και να την καταλάβουν (βλέπε δεύτερη παρέμβαση). Τρεις μαθητές και μαθήτριες μάλιστα την αναφέρουν ως αυτό που τους άρεσε ή τους εντυπωσίασε περισσότερο σ' αυτή τη σειρά των μαθημάτων (βλέπε ερωτηματολόγιο Β – ερώτηση 10). Έχει παρατηρηθεί εξάλλου ότι οι μαθητές μπορούν να πραγματευτούν τα γεωμετρικά προβλήματα πολύ καλύτερα, εάν τους δοθεί η ευκαιρία να εργαστούν κατ' ευθείαν με μία οπτική αντιμετώπιση του προβλήματος, παρά εάν εργαστούν με μια αφηρημένη αντιπροσώπευση του προβλήματος (Τουμάσης, 1999; Hanna, 2000).

Παρ' όλο που το λογισμικό βοήθησε πολύ στην κατανόηση της απόδειξης του Πυθαγορείου, δεν βοήθησε στη λεκτική αποτύπωση του επαγωγικού συλλογισμού που ακολουθήθηκε. Εδώ υπάρχει μεγάλο έλλειμμα από την πλευρά των μαθητών (Τουμάσης, 1991) (βλέπε δεύτερη παρέμβαση - 4<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας).

Με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού, οι μαθητές εφηύραν στρατηγικές επίλυσης που στο χαρτί πιθανότατα δεν θα τις επινοούσαν (βλέπε τέταρτη παρέμβαση-τετραγωνισμός μη-κυρτού χωρίου),(Healy & Hoyles, 2001).

Οι μαθητές επιβεβαίωναν πολύ συχνά την ορθότητα της κατασκευής τους με βάση τις μετρήσεις (Hollebrands, 2007; Olivero & Robutti, 2007; Chazan, 1993). Αυτό πάντως βοήθησε τους πιο αδύναμους να διορθώσουν το λάθος στην κατασκευή τους ή στον συμπερασμό τους, (Hölzl, 2001), (βλέπε δεύτερη παρέμβαση εικ. Φ3.10 & τέταρτη παρέμβαση- τετραγωνισμός μη-κυρτού χωρίου). Από την άλλη όμως επιβεβαιώνεται η άποψη που αναφέρεται και στη βιβλιογραφία ότι οι μετρήσεις πολλές φορές «πείθουν» τους μαθητές ότι έχουν

έτσι αποδείξει την ορθότητα μιας πρότασης (επειδή στην πραγματικότητα απλώς την επαλήθευσαν - βλέπε τρίτη παρέμβαση - Αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος). Η έμφαση εδώ από τον εκπαιδευτικό πρέπει να δίνεται στην εξήγηση και όχι στην επιβεβαίωση (*Γιατί ισχύει και όχι αν ισχύει*).

Από την άλλη, το εργαλείο της μέτρησης και η δυναμικότητα του περιβάλλοντος χρησιμοποιήθηκε με ευρηματικότητα από έναν αδύναμο μαθητή για την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο άλλων τετραγώνων (βλέπε δεύτερη παρέμβαση). Ο μαθητής σχεδίασε ένα τετράγωνο και στη συνέχεια εκμεταλλευόμενος την αυτόματη μέτρηση, το «έσυρε» έως ότου προσεγγίσει ικανοποιητικά το εμβαδό που ήθελε. Παρόμοια στρατηγική για το σχεδιασμό ισοδύναμων τριγώνων, εντοπίζεται σε άρθρο της Κορδάκη (Kordaki & Balomenou, 2006).

Η δυνατότητα «drag & drop» του λογισμικού βοήθησε πολύ στην ανακάλυψη ίσων τριγώνων κατά τη διαδικασία απόδειξης του πυθαγορείου θεωρήματος. Η λεκτική υπόδειξη της ισότητας αυτών των τριγώνων αν η απόδειξη γινόταν στο χαρτί δεν θα ήταν το ίδιο «ορατή» σε όλους τους μαθητές. Όταν απαιτείται διανοητικός μετασχηματισμός, η απόδειξη της ισότητας δύο τριγώνων γίνεται δυσκολότερη (Gal & Linchevski, 2010), (βλέπε δεύτερη παρέμβαση-Απόδειξη του πυθαγορείου).

Η ακρίβεια ή η ορθότητα μιας γεωμετρικής κατασκευής δεν θεραπεύεται αυτόματα από τα εργαλεία σχεδίασης που παρέχει το λογισμικό, αφού οι πιο αδύναμοι μαθητές αρκούνται στην κατασκευή «με το μάτι» π.χ. μιας κάθετης ή ενός ισοσκελούς τριγώνου (Mariotti, 2000), (βλέπε τέταρτη παρέμβαση-τετραγωνισμός μη-κυρτού χωρίου).

#### *7.2.4 Η γεωμετρική αντίληψη των μαθητών ενός ελληνικού σχολείου, ηλικίας 16-17 χρονών και η ικανότητά τους ως προς την σύνθεση ενός παραγωγικού συμπερασμού*

Σε πολλές περιπτώσεις, τα ευρήματα επιβεβαίωσαν γνωστές παρανοήσεις και αντιλήψεις που έχουν αναφερθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, όπως:

Οι μαθητές συχνά συγχέουν την περίμετρο με την επιφάνεια (Brougher, 1973; Reinke, 1997; Brougher, 1973; Lehrer, Jenkins & Osana, 1998). Στην

ερώτηση 4 του αρχικού ερωτηματολογίου, όπου οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το εμβαδό ενός τραapeζίου, κάποιιοι πρόσθεσαν τις διαστάσεις που έβλεπαν στο σχήμα! (βλέπε αποτελέσματα από το αρχικό ερωτηματολόγιο-εικόνα E1.6 & E1.7).

Η αυταπάτη της γραμμικότητας (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Modestou, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004) οδήγησε κάποιους άλλους μαθητές κατά την προσπάθεια κατασκευής τετραγώνου ίσου με το άθροισμα δύο άλλων τετραγώνων, να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο που η πλευρά του ισούταν με το άθροισμα των πλευρών των δύο άλλων (βλέπε δεύτερη παρέμβαση-εικ.Φ3.5) ή όταν ένας μαθητής θέλησε να σχεδιάσει ένα ορθογώνιο με υποδιπλάσιο εμβαδό από ένα άλλο, σχεδίασε ορθογώνιο που και οι δυο διαστάσεις του ήταν υποδιπλάσιες του αρχικού (Tsamir & Mandel, 2000), (βλέπε πρώτη παρέμβαση-εικ.Α1.11). Παρανόηση που μεταφέρεται και στην άλγεβρα, όπου οι μαθητές παρουσιάζουν την εδραιωμένη αντίληψη ότι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$  !

Η σκέψη των μαθητών είναι κυρίως αλγεβρική ακόμα και στη γεωμετρία. Η έννοια του εμβαδού είναι συνυφασμένη με έναν τύπο. Αυτό αναδείχθηκε σε διάφορες περιπτώσεις στα δεδομένα. Στον υπολογισμό του εμβαδού του τραapeζίου της ερώτησης 4 του αρχικού ερωτηματολογίου, όπου αρκετοί μαθητές συνάντησαν μεγάλες δυσκολίες να υπολογίσουν το εμβαδόν του χωρίς τον τύπο, στην αντιμετώπιση του πραγματικού προβλήματος όπου οι ισοδυναμίες αναζητήθηκαν θεωρώντας τα εμβαδά των τριγώνων ως το γινόμενο (βάση x ύψος)/2 (Zacharos, 2006; Battista, 1982), ακόμη και στον τετραγωνισμό του μηνίσκου (7<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας) που για να αποδείξουν και πάλι την ισοδυναμία δύο χωρίων κάποιιοι κατέφυγαν σε αλγεβρικές πράξεις όπου τα εμβαδά εκπροσωπούνταν από τον αλγεβρικό τους τύπο (7<sup>ο</sup> φύλλο εργασίας-εικόνα Φ7.1).

Τα παιδιά αρκούνται στην οπτική επιβεβαίωση σε πολλές περιπτώσεις προκειμένου να εξάγουν συμπεράσματα (Balacheff N. , 1988). Όπως για παράδειγμα ο μαθητής που θεώρησε το τρίγωνο ισοσκελές γιατί έτσι του «φάνηκε με το μάτι», χωρίς να δοθεί ως δεδομένο (βλ. πρώτη παρέμβαση-εικ. Α1.10) ή στην απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος όπου οι μαθητές δεν θεωρούν ότι πρέπει να δείξουν ότι δύο γωνίες είναι αμβλείες, αφού «το

βλέπουν» (δεύτερη παρέμβαση-κείμενο 2.2 & 2.3) ή οι μαθητές που στο πρόβλημα του συνόρου θεώρησαν ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

Σύμφωνα με τον Piaget η πρωταρχική προσέγγιση για το εμβαδόν είναι «με το μάτι» και βασίζεται στην οπτική αντίληψη. «Με το μάτι» λοιπόν, σχεδίασαν δύο κορίτσια ένα παραλληλόγραμμο που ήθελαν να είναι ισοδύναμο με κάποιο άλλο στο σχήμα (Piaget, Inhelder, & Sheminska, 1981), (βλέπε τετραγωνισμό μη-κυρτού χωρίου, σελ. 98).

Οι μαθητές δυσκολεύονται να πιστέψουν ότι δύο άνισα τρίγωνα μπορεί να είναι ισοδύναμα (Kordaki & Balomenou, 2006), (βλ. πρώτη παρέμβαση – Διάλογος 1). Επίσης, όπως φάνηκε στην ανάλυση της πρώτης παρέμβασης, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να βρουν τρίγωνα με την ίδια βάση που να είναι ισοδύναμα. Παρ' όλο που ήξεραν ότι αφού είχαν την βάση ίδια, θα έπρεπε να διατηρήσουν ίδιο και το ύψος και παρ' όλο που κάποιοι καταλάβαιναν διαισθητικά ότι οι κορυφές των τριγώνων θα κινούνται σε μία ευθεία, δεν μπορούσαν να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τη βάση. Φαίνεται λοιπόν πως η έννοια του ύψους για τους πολλούς μαθητές δεν ταυτίζεται στη συνείδησή τους με την έννοια της απόστασης της κορυφής από τη βάση, όπως και το ότι η έννοια της παραλληλίας δεν ταυτίζεται με την έννοια της σταθερής απόστασης μεταξύ δύο ευθειών.

Η διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας στο λύκειο προϋποθέτει τα τρία πρώτα επίπεδα Van Hiele και έχει ως σκοπό την κατάκτηση του τέταρτου. Η ίδια η θεωρία Van Hiele συνιστά πως αυτό είναι μια επίπονη διαδικασία η οποία απαιτεί μακροχρόνια και προσεκτικά σχεδιασμένη διδασκαλία. Εμπειρικές μελέτες που έχουν διεξαχθεί σε διάφορες χώρες δείχνουν ότι η καθιερωμένη παραδοσιακή διδασκαλία της ευκλείδειας γεωμετρίας αδυνατεί να οδηγήσει τους μαθητές στην κατάκτηση των ανώτερων επιπέδων (Θωμαΐδης & Πούλιος, 2000). Στα δεδομένα αυτής της έρευνας, η αδυναμία της διαλεκτικής και συμβολικής διατύπωσης ενός ολοκληρωμένου παραγωγικού συμπερασμού, ή η αδυναμία μετάβασης από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, εντοπίστηκε: α) στην απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος όπου πολλοί μαθητές συνάντησαν ανυπέρβλητες δυσκολίες στο να την διατυπώσουν με την συμβολική μαθηματική γλώσσα, β) στον τετραγωνισμό του μηνίσκου όπου δεν μπόρεσαν

συνθέσουν τρεις ισότητες για να εξάγουν το συμπέρασμα της ισοδυναμίας των μηνίσκων με το ορθογώνιο τρίγωνο, γ) στον τετραγωνισμό του ορθογωνίου και δ) στην αδυναμία κάποιων να βρουν το εμβαδό ενός κυκλικού τομέα του οποίου η γωνία αντιστοιχεί στα  $\mu/\nu$  της ορθής.

#### *7.2.5 Η ανταπόκριση των μαθητών σε αυτού του είδους τη διδασκαλία σε σύγκριση με την παραδοσιακή*

Η ανταπόκριση των μαθητών σε αυτού του είδους τη διδασκαλία σε σύγκριση με την παραδοσιακή ήταν θετική. Οι δραστηριότητες με τα ισοδύναμα τρίγωνα και το πυθαγόρειο θεώρημα, κινητοποίησε το ενδιαφέρον των μαθητών και παρακινήθηκαν ακόμα και οι πιο αδύναμοι ή αδιάφοροι στο μάθημα. Η διδασκαλία με δραστηριότητες σ' ένα δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον όπως αυτό του EuclidDraw, είναι κοντά στην καθημερινή πρακτική των σημερινών παιδιών (τα περισσότερα αν όχι όλα, έχουν υπολογιστή στο σπίτι), χρησιμοποιεί την «εικόνα» που είναι το ισχυρότερο μέσο πληροφορίας (Sinnett, Spence, & Soto-Faraco, 2007) και τέλος εμπλέκει όλα τα παιδιά σε μία «δράση» (όλα μπόρεσαν να κάνουν κάτι). Σίγουρα αυτό είναι λιγότερο βαρετό αν όχι πιο ενδιαφέρον, από την παθητική παρακολούθηση της λεκτικής παρουσίασης του μαθήματος από τον καθηγητή στον πίνακα κατά την οποία δεν μπορούν να έχουν όλα ενεργή συμμετοχή. Οι θετικές εντυπώσεις των παιδιών καταγράφονται στις απαντήσεις τους στο τελικό ερωτηματολόγιο.

#### *7.2.6 Η ιστορική πλαισίωση ως παράγοντας ενίσχυσης της κατανόησης και του ενδιαφέροντος*

Θετική ήταν και η ανταπόκρισή τους στα ιστορικά δεδομένα που παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν μέσα στην τάξη. Έδειξαν ενδιαφέρον και εντυπωσιάστηκαν από τις προσπάθειες τόσων χρόνων για τον τετραγωνισμό του κύκλου. Οι αντιλήψεις που ανέπτυξαν τα παιδιά σχετικά με τη χρησιμότητα να γνωρίζει κανείς την ιστορία πίσω από το θεώρημα, έτσι όπως τα ίδια τις κατέγραψαν στο τελικό ερωτηματολόγιο, εντυπωσιάζουν, αφού οι

περισσότερες προσεγγίζουν πολύ τα επιχειρήματα ερευνητών-εκπαιδευτικών υπέρ της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία.

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

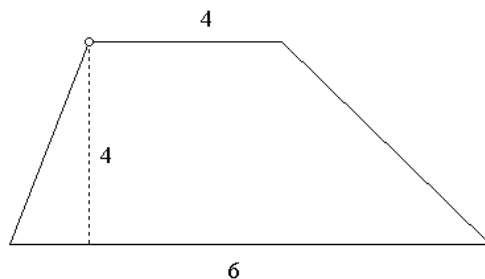
Η αλγεβρική αντίληψη στους μαθητές είναι αλήθεια ότι έχει αναπτυχθεί άνισα εις βάρος της γεωμετρικής. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διαχείριση προβλημάτων της ευκλείδειας γεωμετρίας που έχει τη δική της λογική. Η υιοθέτηση ενός γεωμετρικού τρόπου σκέψης απαιτεί χρόνο. Μια διδασκαλία 8-10 ωρών δεν μπορεί να «αλλάξει» τις εδραιωμένες πρακτικές και συνήθειες στην πλειοψηφία των μαθητών. Το γεωμετρικό δυναμικό περιβάλλον βρίσκει θετική ανταπόκριση στους μαθητές και μπορεί να βοηθήσει στην καλλιέργεια της γεωμετρικής αντίληψης. Ο εκπαιδευτικός αξίζει να καταστήσει «ορατή» την οπτική εξαπάτηση και τον «αφελή εμπειρισμό» στον οποίο μπορεί κανείς εύκολα να διολισθήσει. Η ιστορία πίσω από το θεώρημα τονώνει το ενδιαφέρον των παιδιών. Μπορεί να μην τους βοηθάει να λύνουν σωστά τις ασκήσεις, τους βοηθάει όμως στο να προσεγγίσουν, άσχετα από τις μαθηματικές τους ικανότητες, τα μαθηματικά ως κουλτούρα. Ένα περιβάλλον μάθησης μπορεί να λέγεται σύγχρονο όταν ενσωματώνει την σοφία από την εμπειρία πολλών χρόνων διδασκαλίας από εκατοντάδες εκπαιδευτικούς ερευνητές. Αυτό σημαίνει ότι περιλαμβάνει δραστηριότητες που ενισχύουν τη διερεύνηση και τον πειραματισμό, δεν δαιμονοποιεί την εμπειρική επαλήθευση, την οπτική αντίληψη ή την τεχνολογία αλλά αντίθετα τα χρησιμοποιεί ως σκαλοπάτια για να φτάσει στον παραγωγικό συμπερασμό που είναι μία ύψιστη ηθική και δημοκρατική αξία του ανθρώπινου πολιτισμού.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α

Στις παρακάτω ερωτήσεις, όπου σας ζητείται η προσωπική σας εμπειρία ή γνώμη, δεν υπάρχουν σωστές ή λάθος απαντήσεις. Απαντήστε απλώς με ειλικρίνεια.

- Όταν ακούτε τη λέξη **Εμβαδό**, τι σας έρχεται στο μυαλό:  
α. αριθμός                      β. επιφάνεια   γ. τύπος
- Ποιανού γεωμετρικού σχήματος το εμβαδό, σας δυσκολεύει περισσότερο από των άλλων;  
α. του παρ/μου   β. του τριγώνου                      γ. του τραpezίου  
δ. του κύκλου                      ε. κανενός
- Ποιανού γεωμετρικού σχήματος το εμβαδό θυμάστε πάντα πώς υπολογίζεται;  
α. του τετραγώνου                      β. του ορθογωνίου παρ/μου                      γ. του παρ/μου   δ.  
του τριγώνου                      ε. του τραpezίου
- Αν δεν θυμόσασταν τον τύπο ενός εμβαδού, π.χ. ενός τραpezίου. Τι θα κάνατε για να υπολογίσετε το εμβαδόν του;  
Βρείτε το εμβαδόν του παρακάτω τραpezίου *χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον τύπο* για το εμβαδό τραpezίου (αν το θυμάστε).





5. Έχετε ακούσει ποτέ τη φράση: 'Να τετραγωνίσουμε τον κύκλο;

.....

6. Τι νομίζετε ότι εννοούμε με αυτήν;

.....

.....

.....

7. Ποιο μάθημα σας αρέσει περισσότερο, στα μαθηματικά;

α. Η άλγεβρα

β. η γεωμετρία

γ. κανένα

8. Ποιο από τα δύο μαθήματα, η άλγεβρα ή η γεωμετρία σας φαίνεται πιο «χρήσιμο» για τη ζωή σας και γιατί;

.....

.....

.....

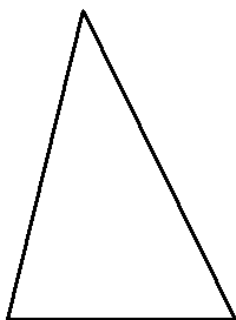
## 1<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο χωρία που έχουν το ίδιο εμβαδό, λέγονται *ισοδύναμα*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1<sup>η</sup>

4. Σχεδιάστε ένα τρίγωνο.
5. Σχεδιάστε ένα άλλο οξυγώνιο τρίγωνο που να έχει την ίδια βάση με το αρχικό και το ίδιο εμβαδό.
6. Σχεδιάστε ακόμα, ένα αμβλυγώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο που να έχουν την ίδια βάση με το αρχικό τρίγωνο και να είναι *ισοδύναμα* με αυτό.

Συζητήστε στην ομάδα σας και παρουσιάστε τη λύση στην τάξη. Προσπαθήστε να δώσετε λύση, η οποία δεν θα βασίζεται σε μετρήσεις.



Συμπληρώστε το παρακάτω συμπέρασμα

*ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ* : Δύο ή περισσότερα τρίγωνα που έχουν κοινή βάση ή κατά  
προέκταση ίσες βάσεις και οι κορυφές τους \_\_\_\_\_

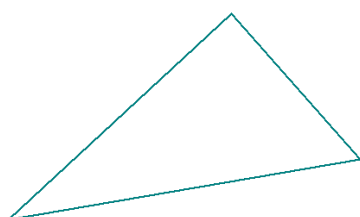
\_\_\_\_\_

θα είναι *ισοδύναμα*.

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2<sup>η</sup>

Σύμφωνα με ό,τι βρήκαμε προηγουμένως, μπορούμε ΠΑΝΤΑ, αν μας δώσουν ένα μη-ορθογώνιο τρίγωνο, να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμο με το αρχικό.

Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισοδύναμο με το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος.



### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3<sup>η</sup>

Ένα τρίγωνο είναι πάντα το μισό ενός παρ/μου. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό ενός ορθογωνίου. Επομένως, μπορούμε να επεκτείνουμε την προηγούμενη μέθοδο για τα παραλληλόγραμμα;.....

Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο. Μπορείτε να κατασκευάσετε:

- α. ένα άλλο παρ/μο ισοδύναμο με το αρχικό;
- β. ένα ορθογώνιο παρ/μο ισοδύναμο με το αρχικό παρ/μο;



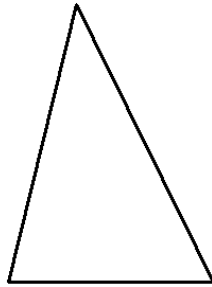
*ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στα 'Στοιχεία' του, ο Ευκλείδης ακολουθεί την ανάποδη σειρά. Πρώτα αποδεικνύει την πρόταση για το πότε δύο παρ/μα είναι ισοδύναμα και ύστερα την επεκτείνει στα τρίγωνα( ως μισά παρ/μων). Ο λόγος που το κάνει αυτό, είναι ότι για ν' αποδείξει ότι δύο σχήματα είναι ισεμβαδικά δεν χρησιμοποιεί τους τύπους εμβαδών.*

## 1<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Σχεδιάστε ένα μη-ορθογώνιο τρίγωνο.

Φτιάξτε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το τρίγωνο που σχεδιάσατε.

*(Θυμηθείτε: Γνωρίζετε ήδη πώς να φτιάξετε ένα ισοδύναμο ορθογώνιο τρίγωνο.  
Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου.)*

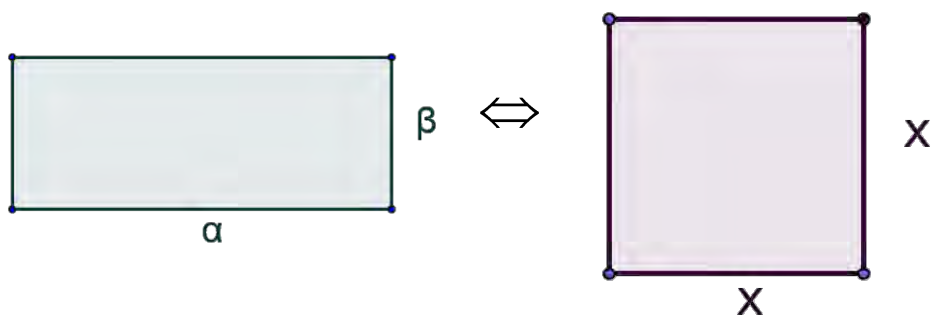


**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** Μπορούμε ΠΑΝΤΑ να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο ισοδύναμο ενός οποιουδήποτε .....

2<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡ/ΜΟ

Τετραγωνισμός

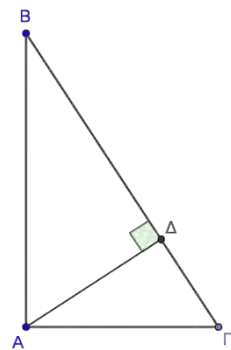


Αν το ορθογώνιο έχει διαστάσεις  $\alpha$  και  $\beta$ , το εμβαδόν του θα είναι :  $E = \dots\dots\dots$

Αν το τετράγωνο έχει πλευρά  $x$ , το εμβαδόν του θα είναι  $E = \dots\dots\dots$

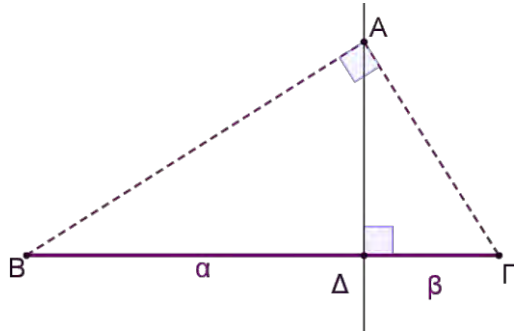
Αναζητούμε λοιπόν την γεωμετρική λύση της εξίσωσης:  $\dots\dots\dots$

Θυμηθείτε την μετρική σχέση σε ορθογώνιο τρίγωνο, όπου αν  $AB\Gamma$  είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο ( $A = \text{ορθή}$ ) και  $A\Delta$  είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, τότε ισχύει :  $A\Delta^2 = \dots\dots\dots$



Άρα αν  $B\Delta = \alpha$  και  $\Delta\Gamma = \beta$ , τότε η ζητούμενη πλευρά  $x$  θα είναι το ύψος  $A\Delta$ .

Αν λοιπόν κάνουμε διαδοχικά και συνευθειακά τμήματα τις δύο πλευρές του ορθογώνιου,



αναζητούμε ορθογώνιο τρίγωνο που θα έχει υποτείνουσα την πλευρά BΓ και κορυφή A ένα σημείο πάνω στην κάθετη στο Δ, τέτοιο όμως ώστε η γωνία BΑΓ που θα σχηματιστεί να είναι ορθή.

Πως θα εντοπίσουμε το σημείο A ώστε η γωνία  $BΑΓ$  να είναι ορθή; Σκεφτείτε αν η γωνία ήταν εγγεγραμμένη σε κύκλο, τι θα ήταν η χορδή BΓ;

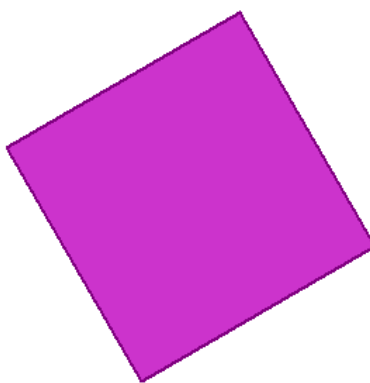
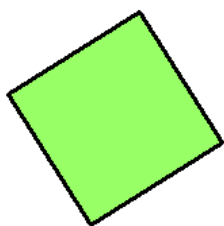
.....  
 Άρα το σημείο A θα βρεθεί ως .....

.....  
 Η πλευρά του τετραγώνου που είναι ισοδύναμο λοιπόν με το ορθογώνιο είναι η .....

### 3<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1<sup>η</sup>

Σχεδιάστε δύο τετράγωνα άνισα μεταξύ τους. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο που να έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων που φτιάξατε;



Με ποιο τρόπο λύσατε αυτό το πρόβλημα; Εξηγήστε:

.....

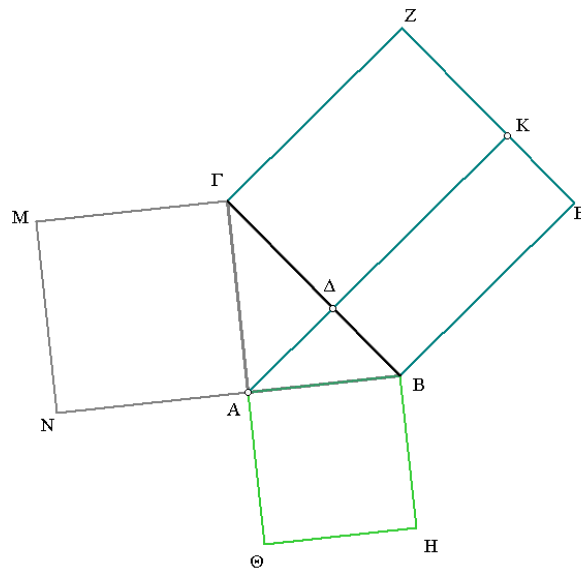
.....

.....

#### 4ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

### Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΚΑΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ανοίξτε το αρχείο με το όνομα 'Απόδειξη Πυθαγορείου κατά Ευκλείδη'. Στην οθόνη σας θα εμφανιστεί το παρακάτω σχήμα. Σέρνοντας την κορυφή Α του ορθογωνίου τριγώνου, μπορείτε ν' αλλάξετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου τριγώνου, εάν θέλετε.



Γράψτε το  
θεώρημα:

Πυθαγόρειο

.....

Η σχέση μεταφρασμένη σε εμβαδά, λέει ότι:  $(BEZΓ) = ( ) + ( )$

Ισχύει:  $(BEZΓ) = (BEKΔ) + (ΔKZΓ)$ , δηλαδή το τετράγωνο της υποτεινουσας είναι ίσο με το άθροισμα των δύο ορθογωνίων.

Εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι  $(BEZΓ) = (ABHΘ) + (ΑΓΜΝ)$ , δηλαδή ότι το τετράγωνο της υποτεινουσας ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων τετραγώνων (αυτά των καθέτων πλευρών).

Άρα, προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι το ορθογώνιο  $(BEKΔ)$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $(ABHΘ)$  και το ορθογώνιο  $(ΔKZΓ)$  είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο  $(ΑΓΜΝ)$ .



1. Σχεδιάστε παρ/μο με τρεις κορυφές να είναι τα σημεία: A, B και E. Χρωματίστε το εσωτερικό του παρ/μου που φτιάξατε με χρώμα της αρεσκείας σας.  
Το παραλληλόγραμμο με βάση την BE και τρίτη κορυφή το A είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ..... ,γιατί .....  
.....  
.....
2. Χρησιμοποιήστε το εργαλείο της διαμέρισης πολυγώνου και χωρίστε το παρ/μο κατά μήκος της διαγωνίου AE.
3. Πάρτε ένα από τα δύο κομμάτια (τρίγωνα) στα οποία χωρίσατε το παρ/μο . Περιστρέψτε το και τοποθετήστε το πάνω στο σχήμα, με σκοπό να βρείτε κάποιο άλλο τρίγωνο ( που μπορεί να μην είναι σχηματισμένο), ίσο με αυτό. Αιτιολογήστε ποιο κριτήριο ισότητας πληρούν τα δύο τρίγωνα.

Κριτήριο ισότητας: Τα τρίγωνα ABE και \_\_\_\_\_ είναι ίσα γιατί έχουν:

A. \_\_\_\_\_

B. \_\_\_\_\_

Γ. \_\_\_\_\_

4. Κοιτάξτε προσεχτικά το σχήμα σας και βρείτε τρίγωνο ισεμβαδικό με το τρίγωνο που βρήκατε στο βήμα 3, αξιοποιώντας την εμπειρία σας με τα ισεμβαδικά τρίγωνα που έχουν την ίδια βάση. Θεωρώντας ως κοινή βάση την BH, ποιο θα είναι το τρίγωνο;  
.....

5. Αν το τρίγωνο που βρήκατε στο βήμα 4 είναι το μισό του τετραγώνου ABHΘ, τότε έχουμε αποδείξει την ισοδυναμία του ορθογωνίου (BEKΔ) και του τετραγώνου (ABHΘ). (Γιατί;)

Ανακεφαλαιώστε τι έχουμε δείξει ως εδώ.  
.....  
.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για το άλλο ορθογώνιο, το ΔΚΖΓ, με σκοπό να δείξετε ότι είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο ΑΓΜΝ. Γράψτε αυτά που βρήκατε και ολοκληρώστε την απόδειξη.

α. Δημιουργήστε παρ/μο ισοδύναμο του ορθογωνίου ΓΔΚΖ .

( Ο τρεις κορυφές θα είναι τα Γ, Α, Ζ)

β. Διαμερίστε το παραπάνω παρ/μο σε δύο τρίγωνα, 'κόβοντάς' το κατά μήκος της διαγωνίου του ΑΖ.

γ. Πάρτε το ένα από τα δύο τρίγωνα και περιστρέψτε το ώστε να βρείτε τρίγωνο ίσο με αυτό.

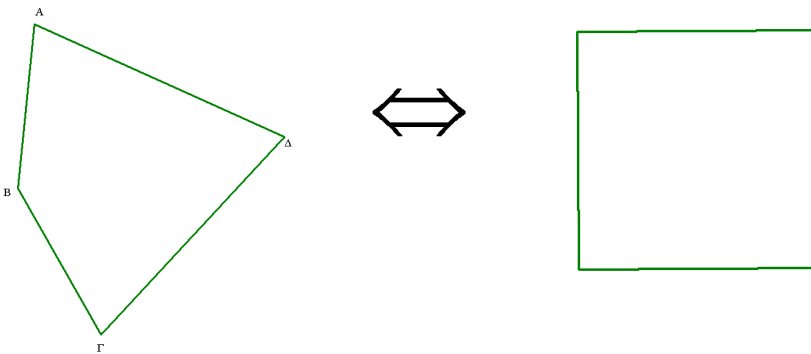
δ. Βρείτε το ισοδύναμο του τριγώνου που βρήκατε στο ερώτημα γ που είναι και ισοδύναμο του μισού τετραγώνου της πλευράς ΑΓ.

Ανακεφαλαιώστε πως δείξατε ότι το δεύτερο ορθογώνιο ΓΔΖΚ είναι ισοδύναμο του τετραγώνου της πλευράς ΑΓ.

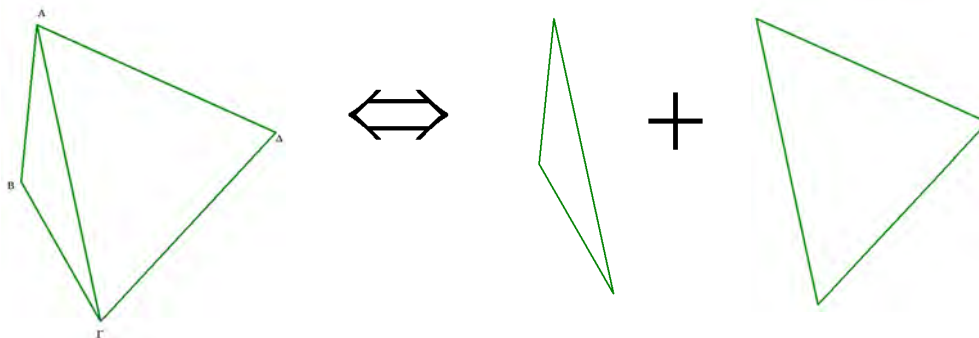
## ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

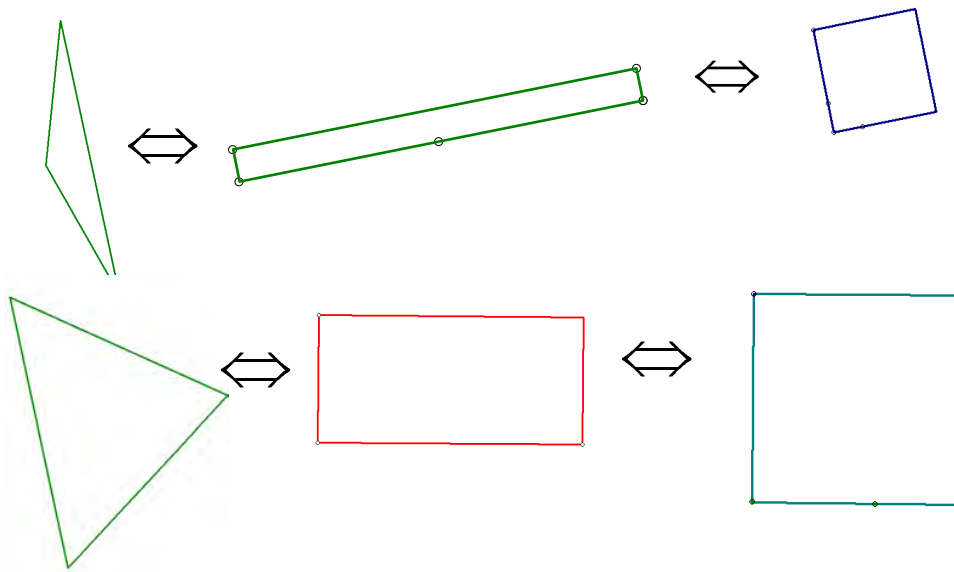
Τετραγωνισμός ενός χωρίου σημαίνει να βρω ένα τετράγωνο ισοδύναμο με το αρχικό χωρίο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τυχαίο τετράπλευρο. Το πρόβλημα που τίθεται λοιπόν είναι να βρω ένα τετράγωνο ισοδύναμο με αυτό.



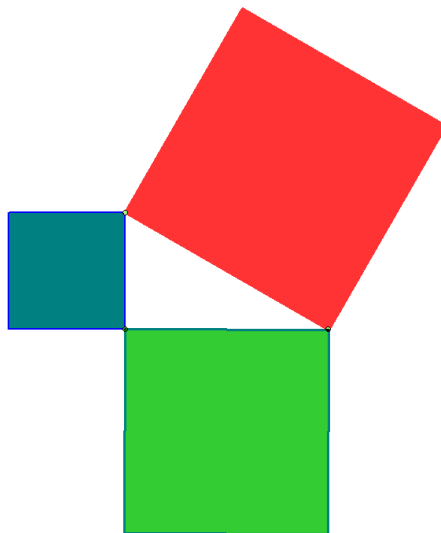
Σύμφωνα με όσα έχετε ήδη δει, φέρνοντας μία διαγώνιο μπορείτε να διαμερίσετε το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα. Για κάθε ένα από τα τρίγωνα μπορείτε να κατασκευάσετε ισοδύναμα ορθογώνια και για κάθε ένα από τα ορθογώνια μπορείτε να κατασκευάσετε ισοδύναμα τετράγωνα.





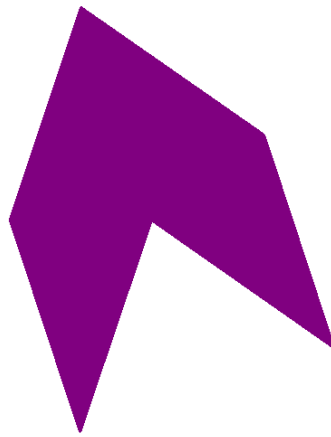
Άρα στο τέλος το πρόβλημα ανάγεται στην *εύρεση ενός τετραγώνου που θα είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων που με τη σειρά τους είναι ισοδύναμα με τα δύο αρχικά τρίγωνα στα οποία διαμερίστηκε το τετράπλευρο.*

Την τελική λύση γι' αυτό μας τη δίνει το .....



## 2<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Ανοίξτε το αρχείο ' Τετραγωνισμός χωρίου' . Στην οθόνη σας θα εμφανιστεί ένα πολύγωνο σαν το παρακάτω. Να το τετραγωνίσετε .

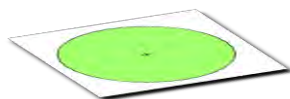


## 5<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

### ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΩΝ ΧΩΡΙΩΝ

- **Κυκλικός δίσκος**

Το εμβαδό της  
δίσκου ακτίνας R,

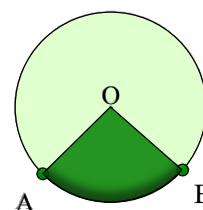


επιφάνειας ενός κυκλικού  
είναι:  $E = \underline{\hspace{2cm}}$

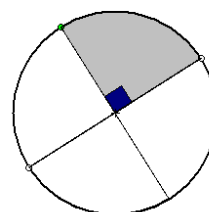
**Ορισμός:** Έστω ένας κύκλος (O,R) και μία επίκεντρη γωνία του  $\text{AOB}$ . Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας  $\text{AOB}$  και του κυκλικού δίσκου (O,R), λέγεται κυκλικός τομέας

- **Κυκλικός Τομέας**

Το εμβαδόν του είναι ένα μέρος (κομμάτι) του κυκλικού δίσκου. Άρα, το εμβαδόν του θα είναι ένα ανάλογο κομμάτι του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.



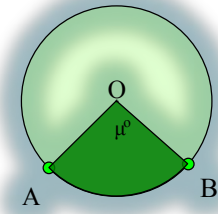
Για παράδειγμα ένας τομέας ορθής γωνίας θα είναι το  $\frac{1}{4}$  ολόκληρου του κυκλικού δίσκου. Επομένως και το εμβαδόν του, θα είναι:  $\frac{1}{4} \cdot \pi R^2$



Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα, και εξάγετε έναν γενικό τύπο υπολογισμού του εμβαδού ενός κυκλικού τομέα.

Κυκλικός Τομέας	Μέρος του κυκλικού δίσκου που καταλαμβάνει	Το εμβαδόν του
Ημικύκλιο		
2/3 της ορθής		
1/3 της ορθής		
1/2 της ορθής		
4/3 της ορθής		
μ/ν της ορθής		

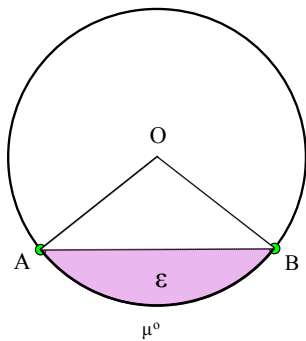
Επομένως, το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα που είναι τα  $\frac{\mu}{360}$  ενός κύκλου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ , το συμβολίζουμε με  $(OAB)$  και το βρίσκουμε από τον τύπο :



$(OAB) = \underline{\hspace{2cm}}$

Γνωρίζοντας πώς να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός κυκλικού τομέα, μπορούμε να υπολογίσουμε και το εμβαδό ενός οποιουδήποτε καμπυλόγραμμου χωρίου, διαμερίζοντας το πάντα σε χωρία των οποίων το εμβαδό ξέρουμε να υπολογίσουμε.

• **Κυκλικό τμήμα**



Κυκλικό τμήμα ονομάζεται καθένα από τα δύο μέρη που χωρίζεται ένας κυκλικός δίσκος, από μία χορδή του κύκλου.

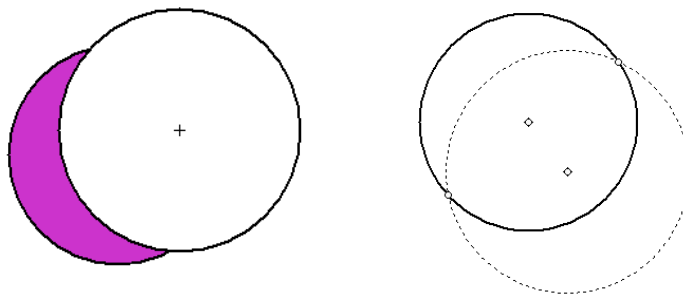
Με ποιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του;

.....

.....

.....

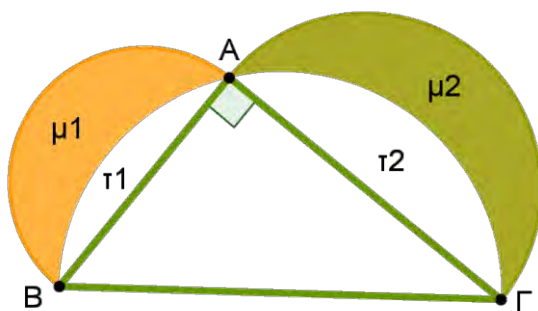
- **Μηνίσκος** λέγεται το μέρος του επιπέδου που περιορίζεται από δύο τόξα διαφορετικών κύκλων.



6<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο τετραγωνισμός των μηνίσκων του Ιπποκράτη

Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο, έχουμε σχεδιάσει **3 ημικύκλια**, ένα σε κάθε πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.



1. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ;

.....  
.....

2. Ποια σχέση νομίζετε ότι θα συνδέει τα εμβαδά των 3 ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ και γιατί;

.....  
.....  
.....

3. Συμπληρώστε τις ισότητες:

$$\mu_1 + \tau_1 =$$

$$\mu_2 + \tau_2 =$$

$$\tau_1 + \tau_2 + (ΑΒΓ) =$$

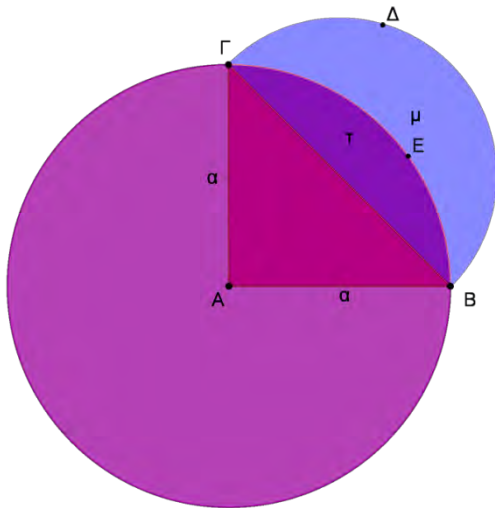
4. Συνδυάστε το συμπέρασμα που βγάλατε στην ερώτηση 3 με τις ισότητες της 4 και διαπιστώστε ότι οι δύο μηνίσκοι τετραγωνίζονται!



## 7ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

### Τετραγωνισμός ενός μηνίσκου

Κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ), με πλευρά  $\alpha$ . Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε ημικύκλιο διαμέτρου  $B\Gamma$  και κύκλο με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $AB$ . Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του μηνίσκου  $\mu$ ;



$\mu$ : το εμβαδό του μηνίσκου

$\tau$ : το εμβαδό του κυκλικού τμήματος

1. Βρείτε την πλευρά  $B\Gamma$  συναρτήσει του  $\alpha$

.....  
.....

2. Βρείτε το εμβαδό του ημικυκλίου, σε συνάρτηση με την διάμετρό του  $B\Gamma$ . Χρησιμοποιείστε αυτό που βρήκατε στην ερώτηση 1 και γράψτε το εμβαδό του ημικυκλίου σε συνάρτηση με το  $\alpha$ .

.....  
.....

3. Βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $(A, B\Gamma)$ , δηλαδή του τεταρτοκυκλίου πάντα σε συνάρτηση του  $\alpha$ .

.....  
.....  
.....  
.....

4. Τι παρατηρείτε;

.....

5. Συμπληρώστε τις ισότητες:

$$(A, B\Gamma) = (AB\Gamma) + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Ημικόκλιο} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$$

6. Συνδυάστε το συμπέρασμα στην ερώτηση 3 με τις ισότητες της ερώτησης 4 και βρείτε τη σχέση που συνδέει το μηνίσκο με το ορθογώνιο τρίγωνο.

.....

.....

.....

.....

7. Επομένως δείξαμε ότι ο μηνίσκος τετραγωνίζεται. Γιατί;

.....

.....

.....

.....

8. Ποια θα είναι η πλευρά του τετραγώνου που είναι ισοδύναμο με το μηνίσκο;

.....

.....

.....

.....

.....

## ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Β

1. Πως σας φάνηκε το σχεδιαστικό περιβάλλον του EuclidDraw; Υπήρξε κάτι που σας δυσκόλεψε ή σας άρεσε ιδιαίτερα; Υπάρχει κάτι στο οποίο το λογισμικό νομίζετε ότι έπαιξε καθοριστικό ρόλο στο να το καταλάβετε; Περιγράψτε:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Η χρήση του λογισμικού σας νομίζετε ότι σας δυσκόλεψε ή σας βοήθησε στην κατανόηση της απόδειξης του Πυθαγορείου κατά Ευκλείδη; Με ποιο τρόπο; Εξηγήστε.

.....

.....

.....

3. Η χρήση του λογισμικού νομίζετε ότι σας δυσκόλεψε ή σας βοήθησε στην κατανόηση του τετραγωνισμού ενός χωρίου; Αιτιολογήστε.

.....

.....

.....

.....

4. Τελικά, τι καταλάβατε ότι σημαίνει 'τετραγωνισμός ενός χωρίου;'

.....

.....

.....

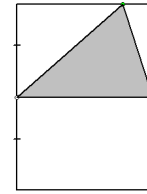
5. Γιατί οι αρχαίοι γεωμέτρεις αλλά και άλλοι μεταγενέστεροι είχαν αυτή την 'εμμονή' να τετραγωνίσουν τον κύκλο;

.....

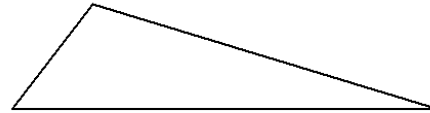
.....

.....

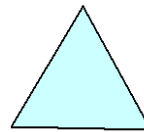
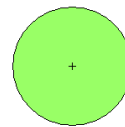
6. Μπορείτε να βρείτε τι μέρος από την επιφάνεια του ορθογώνιου παρ/μου καταλαμβάνει η επιφάνεια του τριγώνου στο διπλανό σχήμα;



7. Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο ισοδύναμο με το διπλανό τρίγωνο;



8. Ποιες από τις παρακάτω επιφάνειες νομίζετε ότι τετραγωνίζονται; (Τσεκάρετε το κουτάκι )



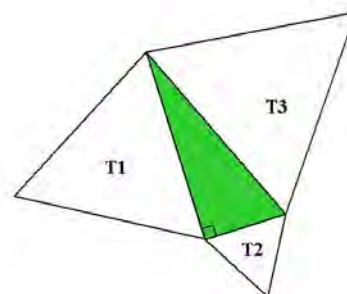
9. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά T1, T2, T3 των ισοπλεύρων τριγώνων του διπλανού σχήματος; Αιτιολογήστε.

.....

.....

.....

.....



10. Πιστεύετε ότι είναι χρήσιμο να μαθαίνετε την ιστορία που έχει ένα θεώρημα στα μαθηματικά; Αιτιολογήστε.

.....  
.....  
.....  
.....

11. Τι σας άρεσε ή σας εντυπωσίασε από αυτή τη σειρά των μαθημάτων με θέμα τον τετραγωνισμό;

.....  
.....  
.....

12. Τι δεν σας άρεσε ή σας έλλειψε από τη σειρά μαθημάτων με θέμα τον τετραγωνισμό;

.....  
.....  
.....

## Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ

### Λίγη ιστορία....



### Ευκλείδης

- Για τον ίδιο τον Ευκλείδη, λίγα είναι γνωστά. Έζησε γύρω στο 300 π.Χ., την εποχή του πρώτου Πτολεμαίου στην Αλεξάνδρεια. Δίδασκε μαθηματικά στο 'Μουσείο', διάσημο εκπαιδευτικό ίδρυμα της εποχής.
- Δεν του αποδίδονται σημαντικά δικά του εξαγόμενα, παρ' όλο που πρέπει να ήταν εξαιρετος δάσκαλος. Το περιεχόμενο του έργου του δεν ήταν πρωτότυπο, κατά το μεγαλύτερο μέρος, αλλά περιείχε προγενέστερα εξαγόμενα.

### 'Τα Στοιχεία του Ευκλείδη'

- Τα περίφημα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη αποτελούνται από 13 βιβλία.
- Τα πρώτα έξι, πραγματεύονται την επίπεδη γεωμετρία. Η ύλη στην οποία εκτείνονται, αντιστοιχεί περίπου σε αυτήν που διδάσκεται μέχρι σήμερα στο σχολείο.
- Τα επόμενα τρία ασχολούνται με την αριθμοθεωρία.
- Στο δέκατο, μελετώνται οι ασύμμετροι αριθμοί.
- Τα τελευταία τρία αφορούν την στερεομετρία.

Τα 'Στοιχεία' του Ευκλείδη είναι, μετά τη Βίβλο, ένα από τα πιο διαδεδομένα βιβλία του δυτικού κόσμου.

- Ο λόγος; Ίσως η μεγάλη τους χρησιμότητα. Παρ' όλα αυτά, όπως και με όλα τα συγγράμματα των αρχαίων Ελλήνων, το πρωτότυπο έργο χάθηκε. Έχουν γίνει αναρίθμητες αντιγραφές στις οποίες έχουν προστεθεί διάφορα σχόλια. Η Δυτική Ευρώπη γνώρισε τα 'Στοιχεία' το Μεσαίωνα, μέσω των Αράβων και των Μαυριτανών και θεμελίωσε πάνω σ' αυτά τη μαθηματική της εκπαίδευση. Έχουν βεβαιωθεί πάνω από 1000 εκδόσεις των 'Στοιχείων'.

- Το 1<sup>ο</sup> Βιβλίο των 'Στοιχείων' περιέχει 48 προτάσεις. Αυτές πραγματεύονται ιδιότητες τριγώνων, παραλληλίων ευθειών καθώς και εμβαδά. Το βιβλίο τελειώνει με το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του.
- Εμείς θα ασχοληθούμε με τις προτάσεις που αναφέρονται στα Εμβαδά.

### Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΑΝΤΙΛΗΨΗΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ

- Ο τρόπος με τον οποίο συγκρίνει ο Ευκλείδης τα εμβαδά, είναι εντελώς διαφορετικός από αυτόν που εμείς χρησιμοποιούμε για τον ίδιο σκοπό. Η σύγχρονη αντίληψη για το εμβαδό ενός σχήματος, είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα ενός τύπου. Για παράδειγμα, το εμβαδό ενός παρ/μου απεικονίζεται στον τύπο  $E = β \cdot υ$  (βάση  $\times$  ύψος). Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός, που δηλώνει σε τετραγωνικές μονάδες το εμβαδό ενός παρ/μου, είναι ίσος με το γινόμενο δύο αριθμών, που εκφράζουν σε μονάδες μήκους τη βάση και το ύψος του παρ/μου.
- **Ο Ευκλείδης όμως, ούτε μήκη τμημάτων δήλωνε με αριθμούς ούτε εμβαδά σχημάτων.**

Τι έκανε λοιπόν ο Ευκλείδης προκειμένου να μετρήσει ένα εμβαδό;

- Όταν ήθελε να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, αποδείκνυε ότι το ένα από αυτά μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε, αν κατάλληλα αναπροσαρμοστούν, μπορούν να παράγουν το άλλο σχήμα.
- Το πιο εύκολο μετρήσιμο σχήμα ως προς το εμβαδό είναι το **τετράγωνο**.
- Όταν λοιπόν ήθελε να μετρήσει το εμβαδό ενός σχήματος, έπρεπε να βρει ένα **τετράγωνο** που να έχει ίσο εμβαδό με το αρχικό του σχήμα. Με άλλα λόγια προσπαθούσε να το **τετραγωνίσει!**

- Οι προτάσεις 36 - 41 του 1<sup>ου</sup> Βιβλίου των 'Στοιχείων' του Ευκλείδη αναφέρονται στα εμβαδά. Έχοντας υπόψη μας αυτές, μπορούμε να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονταν την μέτρηση του εμβαδού οι αρχαίοι Έλληνες αλλά και τον τρόπο με τον οποίο απέδειξε ο Ευκλείδης το Πυθαγόρειο θεώρημα. Μπορεί ο τρόπος να μην είναι ο απλούστερος αλλά αντανακλά τον τρόπο σκέψης, τα εργαλεία και τις δυνατότητες μιας εποχής.



- Σήμερα έχουμε στην διάθεσή μας ποικίλα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας με τα οποία η μέτρηση του εμβαδού οποιουδήποτε σχήματος γίνεται αυτόματα, πατώντας απλώς ένα κουμπί. Ποια η χρησιμότητα λοιπόν να διδασκόμαστε τον 'τρόπο' του Ευκλείδη;
- Η απάντηση ίσως κρύβεται σ' ένα άλλο ερώτημα: 'Κατά πόσο μία, δύο ή έστω χίλιες μετρήσεις αποτελούν απόδειξη;'
- Η ακρίβεια μιας Ευκλείδιας κατασκευής ή η απόδειξη ενός θεωρήματος δεν στηρίχθηκαν ποτέ σε μετρήσεις. Το σχήμα στην Ευκλείδια γεωμετρία είναι απλώς μία ατελής και ανακριβής αναπαράσταση αυτού που ορίζει νοερά ο γεωμέτρης, ένα βοηθητικό εργαλείο του νου ώστε να διατηρείται ο ειρμός της σκέψης.

Για παράδειγμα, ο Ευκλείδης ορίζει:

- **Σημείο είναι ό,τι δεν έχει μέρος.**  
(*Σημεῖον ἔστιν, οὐ μέρος οὐθέν*)
- **Γραμμή είναι μήκος δίχως πλάτος.**  
(*Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές*)

Η γραμμή δηλαδή είναι μόνο μήκος, χωρίς πλάτος. Η φυσική αναπαράσταση όμως μιας γραμμής με κιμωλία στον πίνακα, έχει πλάτος έστω και μικρό. Αυτό όμως είναι ατέλεια του μέσου. Τον γεωμέτρη όμως αυτό, δεν τον αφορά. Ο ίδιος σκέπτεται με τα μάτια του 'νου'. Αν η γραμμή δεν έχει πλάτος αλλά είναι μία διαδοχή σημείων και το σημείο δεν έχει διαστάσεις, τότε από δύο σημεία περνάει μία και μόνο ευθεία!

*Κάθε παραγωγική επιστήμη βασίζεται πάνω σε κοινές έννοιες ή αξιώματα*

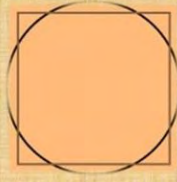
**'Αριστοτέλης'**

Ο Ευκλείδης δέχεται αυτή τη θέση του Αριστοτέλη και ξεκινάει από κοινές έννοιες.

- Κι αφού θέσει τα θεμέλια, αρχίζει να οικοδομεί το γεωμετρικό σύστημα των 'Στοιχείων', προσπαθώντας να μην απομακρύνεται από τις θέσεις του Αριστοτέλη.
- Κάθε νέα απόφαση πρέπει να αποδεικνύεται!
- Κάθε νέα έννοια πρέπει να ορίζεται. Επιπλέον η ύπαρξή της πρέπει να αποδεικνύεται.

Η μαθηματική γνώση, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, αποχτιέται μόνο με συλλογισμούς. Δεν υπάρχουν ιδιότητες που μπορούμε να τι μάθουμε από τα σχήματα. Οφείλουμε να τις αποδεικνύουμε με ακρίβεια και οι αποδείξεις μας να είναι ανεξάρτητες από τα συγκεκριμένα σχήματα που κάνουμε.

## Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

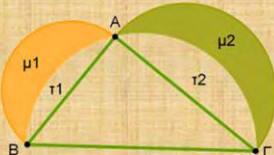


- Η μέτρηση του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από κάποιο σχήμα, ήταν σε όλους τους λαούς, από την εποχή που ακόμη η γεωμετρία ήταν εμπειρικής μορφής, βασική επιδίωξη όλων των γεωμετρών.
- Από τη στιγμή που διαλέξανε σαν μονάδα μέτρησης των εμβαδών, το τετράγωνο με πλευρά τη μονάδα μήκους, αυτόματα τέθηκε και το πρόβλημα του τετραγωνισμού των διαφόρων σχημάτων.

- Αφού κατάφεραν να τετραγωνίσουν το ορθογώνιο, το παρ/μο, το τραπέζιο αλλά και γενικά κάθε τετράπλευρο αλλά και πολύγωνο η επόμενη λογική αναζήτηση ήταν σε χωρία που δεν ήταν ευθύγραμμο αλλά καμπυλόγραμμο.
- Το πρώτο μη-ευθύγραμμο σχήμα που τετραγωνίστηκε ήταν δύο μηνίσκοι. Μηνίσκος είναι το μέρος του επιπέδου που περιορίζεται από δύο τόξα διαφορετικών κύκλων.

## Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη

- Ο Ιπποκράτης (460-380 π.Χ.) απέδειξε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων του παρακάτω σχήματος ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. Κι αφού κάθε τρίγωνο τετραγωνίζεται, τετραγωνίζονται και οι μηνίσκοι.



- Ο Ιπποκράτης κατάφερε να τετραγωνίσει και κάποιους μηνίσκους ακόμα. Στην ιστορία της Γεωμετρίας ' του Ευδήμου, διαβάζουμε:

*‘Οι τετραγωνισμοί των μηνίσκων, που λόγω της ομοιότητάς τους με τον κύκλο δεν είναι από τα απλά σχήματα, επιτεύχθηκαν πρώτα από τον Ιπποκράτη και θεωρήθηκαν ότι είναι σωστά παρουσιασμένοι’*

- Αυτό ενίσχυσε ακόμα πιο πολύ την άποψη ότι αφού υπάρχουν καμπυλόγραμμο χωρία που τετραγωνίζονται, θα τετραγωνίζεται και ο κύκλος.
- Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου είναι ένα από τα ‘τρία περίφημα μαθηματικά προβλήματα της αρχαιότητας’

Ο κύκλος είναι υψίστης σημασίας, με τους πηγαίους κοσμογόνους, επειδή γι' αυτούς, ο κύκλος αντιπροσωπεύει τον αγρό και αφησί γάρ τον πεπλήρη, ενώ το τετράγωνο το φυτό και τον κήπο. Όταν ο κύκλος και το τετράγωνο συγκρίθων την σάτυρα, το άσπερο μιν, το σφαιρικό τις διαστάσεις ή τις διάδοτους, τον μένει από το τετραγώνον.  
- Πλάτων Λόγος, διαφ. 102d  
- Γουίτνεϊ, 1982

Στα τέλη του 5<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ. το πρόβλημα αυτό ήταν πολύ δημοφιλές. Ακόμη και ο κωμικός ποιητής Αριστοφάνης έκανε αστεία με αυτό. Στους Όρνιθες, φέρνει στην σκηνή τον αστρονόμο Μέτωνα, ο οποίος λέει:

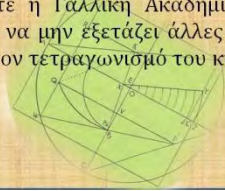
*‘...με το ορθό ραβδί αρχίζω να μετρώ, ώστε να γίνει ο κύκλος τετράγωνος για χάρη σου...’*

Αρκετοί προσπάθησαν να τετραγωνίσουν τον κύκλο. Ανάμεσα σ' αυτούς ο Αρχιμήδης, ο Νικομήδης και ο Απολλώνιος.



Τα επόμενα 2000 χρόνια που ακολούθησαν, οι επίδοξοι τετραγωνιστές του κύκλου πολλαπλασιάστηκαν.

Το 1775, ήταν πλέον τόσοι πολλοί αυτοί που ζητούσαν να κατοχυρώσουν τη μέθοδο που χρησιμοποιούσαν για να τετραγωνίσουν τον κύκλο, ώστε η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών αποφάσισε να μην εξετάζει άλλες υποτιθέμενες λύσεις για τον τετραγωνισμό του κύκλου.



### Όμως ...

- Ο τετραγωνισμός του κύκλου αποδείχθηκε ένα ανυπέβλητο εμπόδιο που κανείς δεν μπόρεσε να ξεπεράσει, τηρώντας τις δύο βασικές αρχές της Ευκλείδειας γεωμετρίας που είναι :
- *Πρώτη αρχή: 'Να λύσεις το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη'*
- *Δεύτερη αρχή: 'Η λύση πρέπει να επιτευχθεί σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων'*

- Αποδεικνύεται ότι είναι εύκολο να τετραγωνίσουμε τον κύκλο, αν άρουμε οποιονδήποτε από τους παραπάνω δύο περιορισμούς.
- Η παρουσίαση του γιατί είναι αδύνατη η γεωμετρική λύση του τετραγωνισμού του κύκλου σύμφωνα με τις παραπάνω αρχές βρίσκεται έξω τις δυνατότητες αυτής της παρουσίασης.

Γύρω στο 420 π.Χ., ο Ηλείος ανακάλυψε μια καμπύλη που ονομάζεται τετραγωνίστρια, η οποία όμως χρησιμοποιήθηκε μόλις το 335 π.Χ. από τον Ανόστρατο για την κατασκευή τετραγώνου που είχε το ίδιο εμβαδόν με έναν κύκλο. Ωστόσο αυτό δεν θεωρήθηκε γνήσιος «τετραγωνισμός του κύκλου» με την ευκλείδεια έννοια, αφού για τη δημιουργία της τετραγωνίστριας απαιτείται άπειρος αριθμός βημάτων.

- Αξίζει όμως να αναφερθεί ότι το αδύνατον της κατασκευής έχει να κάνει με το ότι το εμβαδό ενός κύκλου συνδέεται με τον αριθμό  $\pi$ . Το 1775 ο Leonard Euler εισηγήθηκε ότι ο  $\pi$  δεν είναι μόνο άρρητος, αλλά είναι και υπερβατικός!
- Ένας άρρητος δεν μπορεί να γραφεί ως λόγος δύο ακεραίων, ένας υπερβατικός δεν μπορεί να είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Το γεγονός αυτό καθιστά αδύνατη την γεωμετρική κατασκευή του με κανόνα και διαβήτη.

- Το 1882, ο μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε την υπερβατικότητα του αριθμού  $\pi$  και μαζί με αυτή το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου με την κατασκευή πεπερασμένου αριθμού ευθειών και κύκλων, κατά τις επιταγές της Ευκλείδειας γεωμετρίας!
- *Οι ελπίδες των τετραγωνιστών του κύκλου διαλύονται οριστικά!*

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, Vol.66, No.2* , σσ. 111-129.
- Atiyah et al., M. (1994, April). Responses to "Theoretical Mathematics: Towards a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics" , by A. Jaffe and F. Quinn. *Bulletin (New Series) of American Mathematical Society, Vol.30, No. 2*
- Bakker, A., & Gravemeijer, P. (2006). A historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, Vol.62, No.2* , σσ. 149-168.
- Balacheff, N. (1988). 'A study of students' proving processes at the junior high school level. *66th Annual Meeting of the National Council of teachers of Mathematics*. U.S.A.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Στο *Mathematics, teachers and children* (σσ. 216-235). Londres: Hodder& Stoughton.
- Bartolini Bussi, M. G., & Bazzini, L. (2003). Research, practice and theory in didactics of mathematics: Towards dialogue between different fields. *Educational Studies in Mathematics Vol.54, No.2-3* , σσ. 203-223.
- Battista, M. (1982, May). Understanding area and area formulas. *The Mathematics Teacher, Vol.75, No.5* , σσ. 362-368.
- Bishop, A. J. (Digitized 2004 , August). *The relationship between mathematics education and culture*. Ανάκτηση από National STEM Digital Library: [www.nsdsl.org](http://www.nsdsl.org)
- Boero, P., Pedemonte, B., & Robotti, E. (1997). *Approaching theoretical knowledge through voices from history and echoes: A Vygotskian perspective*. Ανάκτηση από Boero21.pdf: <http://www.dm.unito.it/seמידattica/2011/app/boero21.pdf>
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1997). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.

- Brougner, J. J. (1973). Discovery activities with area and perimeter. *The Arithmetic Teacher, Vol.20, No5*, σσ. 382-385.
- Brousseau, G. (1983). 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques'. *Recherche en didactique des mathématiques*, 4, σσ. 165-198.
- Bunt, L. N., Jones, P. D., & Bedient, J. D. (1981). *Οι Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.
- Carpenter, P., & Lewis, R. (1976, 7). The development of the concept of a standard unit of measure in young children. *Journal for research in Mathematics Education*, σσ. 53-58.
- Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4*, σσ. 359-287.
- Chazan, D. (1993). 'Instructional implications of students' understandings of the differences between empirical verification and mathematical proof'. In M. a. J. Schwartz, *The Geometric Supposer, What is it a case of?* (pp. 107-116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Στο *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (σσ. 420-464). New York: Mac-Millan.
- Clements, D. (2001). Teaching and learning Geometry. Στο J. M. In Kilpatrick, *Research Companion to the NCTM Standards for Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- (1994). Έρευνα - Δράση. Στο L. Cohen, & L. Manion, *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας* (σσ. 259-282). Αθήνα: Μεταίχμιο.
- Davis, P., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton-Mifflin.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics 35*, σσ. 65-83.

- Duady, R., & Perrin, M. J. (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *PME 10*, (σσ. 253-258). London.
- Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 66 (1), σσ. 83-106.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an ICMI study (1997-2000). *Educational Studies in Mathematics* 34, σσ. 255-259.
- Ferguson, K. (2009). *Η μουσική του Πυθαγόρα*. Αθήνα: εκδ. Τραυλός.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, Vol3, No2, σσ. 9-18,24.
- Fowler, D. (1987). *The mathematics of Plato's Academy*. Oxford: Clarendon Press.
- Furinghetti, F. (2009). *History and Mathematics education: a look around the world with particular reference to Italy*. Ανάκτηση από [http://cimm.ucr.ac.cr/historia de las matematicas/archivos/Fulvia Furinghetti](http://cimm.ucr.ac.cr/historia_de_las_matematicas/archivos/Fulvia_Furinghetti).
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.74, No.2, σσ. 163-183.
- Gillies, R. M. (2008). The Effects of Cooperative Learning on Junior High School Students' Behaviours, Discourse and Learning During a Science-Based Learning Activity. *School Psychology International*, 29, σσ. 328-347.
- Goldenberg, P. E., & Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic Geometry? Στο R. Lehrer, & D. (. Chazan, *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (σσ. 351-367). Mahwah, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum.
- Greeno, J. (1994). Comments on SUSanna Epp's chapter, in A. Schoenfeld (ed.). Στο *Mathematical Thinking and Problem Solving* (σσ. 270-278). Hillsdale: Laurence Erlbaum Associates.
- Guedj, D. (1999 ). *Το θεώρημα του παραγάλου, για την ελληνική γλώσσα*. Αθήνα: Πόλις.

- Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International journal of Computers for Mathematical Learning, Vol.3*, σσ. 195-227.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol.22, No.3*, σσ. 237-251.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics 44*, σσ. 127-150.
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploratinon. *Educational Studies in Mathematics, Vol.44, No.1/2, Proof in Dynamic Geometry Environments*, σσ. 5-23.
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration : An overview. *Educational Studies in Mathematics, Vol.44*, σσ. 5-23.
- Hanna, G., & Jahnke, H. (1993). Proof and Application. *Educational Studies in Mathematics, 24 (4)*, σσ. 421-438.
- Hartshorne, R. (2000, April). Teaching geometry according to Euclid. *Notices of the AMS (American Mathematical Society), Vol. 47, No.4*, σσ. 460-465.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for Geometrical Problem Solving:Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol. 6*, σσ. 235-265.
- Hellenic Society for the History of Science and Technology 1998. (n.d.). 'Report on the meeting on History of mathematics and mathematics education: a theoretical approach'. in LR.
- Herbst, P. G., & González, G. (2006). Competing Arguments for the Geometry Course:Why Were American High School Students Supposed to Study Geometry in the Twentieth Century? *The International Journal for the History of Mathematics Education*, σσ. 7-33.
- Herbst, P. G., & Gonzalez, G. (2009, October 1). Student's Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol.14, No.2*, σσ. 153-182.

- Hershkowitz, R. (1989(b)). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), σσ. 61-76.
- Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vo.38, No.2, σσ. 164-192.
- Hölzl, R. (2001). Using Dynamic Geometry Software to add contrast to Geometric Situations- A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol.6, σσ. 63-86.
- Hoyles, C. (1993). Microworlds/ schoolworlds: The transformation of an innovation. Στο C. Keitel, & K. Ruthven, *Learning from computers: Mathematics Educational Technology* (σσ. 1-17). Berlin: Springer-Verlag.
- Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in Dynamic Geometry Contexts. Στο *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century* (σσ. 121-128). Dordrecht : Kluwer: Mammana & V. Villani.
- Jaffe, A., & Quinn, F. (1993, July). "Theoretical Mathematics": Toward a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. *Bulletin( New Series) of the American Mathematical Society*, Vol. 29, No. 1 .
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, Vol.71, No.3 , σσ. 235-261.
- Jonassen, D. H. (1996). *Computers in the classroom: Mindtools for critical thinking*. Columbus, OH: Merrill/Prentice-Hall.
- Jones, K. (2000). Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. Στο *Readings in Mathematics Education* (σσ. 75-90). Auckland, New Zealand: University of Auckland: Bill Barton (Ed).
- Katz, V., Dorier, J.-L., Bekken, O., & Sierpinska, A. (2000). The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. Στο *History in Mathematics education: the ICMI study* (σσ. 149-154). Dordrecht: Kluwer: Fauvel John; Jan van Maanen (Eds).
- Kaye, D. (2010, May). *The MA web site*. Ανάκτηση από Mathematics in School: [www.m-a.org.uk](http://www.m-a.org.uk)

- Kordaki, M., & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: Exploiting the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol.11, No.1* , σσ. 99-135.
- Kordaki, M., & Mastrogiannis, A. (2006). The potential of multiple-solution tasks in e-learning environments: Exploiting the tools of Cabri\_GeometryII. *ELEARN Proceedings*, (σσ. 97-104).
- Kordaki, M., & Pottari, D. (1998). Children's approaches to area measurement through different contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 17(3)* , σσ. 303-316.
- Kospentaris, G., Spyrou, P., & Lappas, D. (2011, February 19). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational studies in Mathematics*, σσ. 105-127.
- Kouba, L. V., Brown, A. C., Carpenter, P. T., Lindquist, M. M., Silver, A. E., & Swafford, O. J. (1988). Measurement, Geometry, Data Interpretation, Attitudes and other topics. *Arithmetic teacher, 35,9*, σσ. 10-16.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics 44*, pp. 151-161.
- Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol.6, No.3*, σσ. 283-317.
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. Στο j. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose, *Meaning in Mathematics Education* (σσ. 159-179). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Lampert, M. (1993). Teacher's thinking about students' thinking about geometry: The effects of new teaching tools. Στο J. L. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson, *The geometric supposer: What is it the case of?* (σσ. 143-177). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, Vol. 27, No. 1, σσ. 29-63.
- Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal Study of Children's Reasoning about Space and Geometry. Στο R. Lehrer, & D. Chazan, *Designing Learning Environments for developing understanding of geometry and space* (σσ. 137-167). London Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Lovell, K. (1959). A follow-up study of some aspects of the work of Piaget and Innholder on the child's conception of space. *British Journal of Educational Psychology*, Vol.29, Issue 2, σσ. 104-117.
- Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational studies in Mathematics*, Vol.44, σσ. 25-53.
- Martin, T. S., & McCrone, S. S. (2003). Classrooms Factors Related to Geometric Proof Construction Ability. *The Mathematics Educator*, Vol. 7, No.1, σσ. 18-31.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), σσ. 41-51.
- Mason, L. (2003). High school students' beliefs about Maths, Mathematical problem solving and their achievement in Maths: A cross-sectional study. *Educational Psychology*, Vol.23, No.1, σσ. 73-85.
- Mayer, A., & Beattys, B. C. (1986). Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old children. *8th PME*, (σσ. 163-168).
- Miyakawa, T., & Herbst, P. (2007). The nature and role of proof when installing theorems: The perspective of geometry teachers. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Pshycology of Mathematics Education*, Vol3 (σσ. 281-288). Seoul: In Woo, J. H., Lew. H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y.
- Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: The case of area and volume of rectangular figures. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3, (σσ. 345-352). Bergen, Norway.



- Moise, E. E. (1975, October). The meaning of Euclidean geometry in school mathematics. *The Mathematics Teacher, Vol.68, No.6*, σσ. 472-477.
- Moreira, C. Q., & Contente, M. d. (1997). The role of writing to foster pupil's learning about area, 3. *Proceedings of the 21st PME International Conference* (σσ. 256-263.). In E. Pehkonen (Ed.).
- Nardi, B., & Miller, J. (1991). 'Twinkling lights and nested loops: Distributed problem solving and spreadsheet development'. *International Journal of man-machine studies, 34*, σσ. 161-184.
- Noss, R. (1994). Structure and ideology in the mathematics curriculum. *For the learning of mathematics, 14(1)*, σσ. 2-10.
- Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction, Vol.3*, σσ. 39-54.
- Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometrical environments as a tool for conjecturing and proving. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol.12, No.2*, σσ. 135-156.
- Osta, I. (2004). Teaching Geometry in a Changing World. *Proceedings of the 9th International Congress on Mathematical Education, Part 3*, (σσ. 186-7). Makuhari, Japan.
- Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000, March). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 31, No. 2*, σσ. 144-167.
- Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol.31, No.2*, σσ. 144-167.
- Paris K. Pamfilos, G. N. (n.d.). *EuclidDraw*. Ανάκτηση από [http://www.euclidraw.com/Gr\\_fls/EUC\\_greek.html](http://www.euclidraw.com/Gr_fls/EUC_greek.html).
- Patronis, T., & Thomaidis, Y. (1997). On the Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics. *Science & Education, 6*, σσ. 273-290.
- Patronis, T., & Thomaidis, y. (n.d.). On the Arithmetization of school geometry in the settings of Modern Axiomatics. *Science and Education*.

- Perkins, D. N. (1993). 'Person plus: A distributed view of thinking and learning'. Στο G. Salomon, *Distributed cognitions: Pshycological and educational considerations* (σσ. 88-110). Cambridge: Cambridge University Press.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Sheminska, A. (1981). *The childs conception of geometry*. N. York: Norton & Company.
- Porteous, K. (1991). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, 21 (2), σσ. 589-598.
- Protasov, V., & Sharygin, I. (2004). Does the school of 21st century need geometry? *The 10th International Congress on Mathematical Education* (σσ. 167-176). Copenhagen, Denmark: Institute of New Technology, Moscow, Russia.
- Radford, L. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. Στο *History in Mathematics education: the ICMI study* (σσ. 143-148). Dordrecht: Lluer: John Fauvel, Jan van Maanen (eds).
- Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2002). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. *History in Mathematics Education (New ICMI study series), Vol.6*, σσ. 162-163.
- Reinke, K. S. (1997, February). Area and Perimeter: Preservice Teachers' Confusion. *School Science and Mathematics, Vol.97, Issue2*, σσ. 75-77.
- Russ, S. (1991). The Experience of History in Mathematics Education. *For the learning of mathematics, Vol.11, No.2, Special Issue on History in Mathematics*, σ. p.7.
- Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2005). Current practice in using dynamic geometry to teach angle properties. *Micromath, Vo.21, No.1*, σσ. 9-13.
- Schoenfeld, A. H. (1989, July). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No. 4*, σσ. 338-355.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1986). 'On having and using geometric Knowledge'. Στο J. Hiedert, *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (σσ. 225-263). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Sinnett, S., Spence, C., & Soto-Faraco, S. (2007). Visual dominance and attention: The Colavita effect revisited. *Perception & Psychophysics Vol.69, No.5*, σσ. 673-686.
- Siu, M.-K. (2007). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? *Proceedings HPM2004 & ESU4 (revised edition)* (σσ. 268-277). Uppsala: Uppsala Universitet: In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.).
- Slaught, H. e. (1912). Final report of the National Committee of Fifteen on the. *The Mathematics Teacher, 5 (2)*, σσ. 46-131.
- Taimina, D., & Henderson, D. W. (2003). How to use history to clarify common confusion in geometry. *MAA notes : From calculus to computers : Using the last 200 years of mathematics history*. Amy Shell-Gellasch.
- Thomaidis, Y. (1991, June). Historical Digressions in Greek Geometry Lessons. *For the Learning of Mathematics, Vol11, no.2, Special issue on history in Mathematics Education*, σσ. 37-43.
- Toumasis, C. (1991). 'Geometry in motion': a dynamic approach to the teaching of school Euclidean geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 22, No.2*, σσ. 229-242.
- Toumasis, C. (1990). THE EPOS OF EUCLIDEAN GEOMETRY IN GREEK SECONDARY EDUCATION (1836-1985): PRESSURE FOR CHANGE AND RESISTANCE. *Educational Studies in Mathematics, Vol.21*, σσ. 491-508.
- Tsamir, P., & Mandel, N. (2000). The intuitive rule same A - same B :The case of area and perimeter. *Proceedings of the 24th PME International Conference* (σσ. 225-232). Hiroshima, Japan: T. Nakahara & M. Koyama .
- Tzanakis, K., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. Στο J. v. John Fauvel, *History in mathematics education: the ICMI study* (σσ. 201-240). Dordrecht : Kluwer.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Chicago: University of Chicago.
- Usiskin, Z. (1980, September). What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? *The mathematics teacher, 73*, σσ. 413-424.

- Van der Waerden, B. L. (2007). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Whiteley, W. (1999). The Decline and Rise of Geometry in 20th Century North America. *Proceedings of the 1999 CMESG Conference*.
- Wikipedia. (2012, July). Ανάκτηση July 25, 2012, από Τοποθεσία web της Wikimedia Foundation, Inc.: [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_interactive\\_geometry\\_software](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software)
- Wu, H. (1996). The mathematician and the mathematics education reform. *Notices of the American Mathematical Society*, 43(12), σσ. 1531-1537.
- Zacharos, K. (2006, October). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(25), σσ. 224-239.
- Αγαλιώτης, Ι. (2009). Γνωστικό ύφος και Μαθηματικά. Στο Α. Ιωάννης, *Μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά* (σσ. 68-78). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Bell, E. (1937). *Men of Mathematics*, p.419. Simon and Schuster.
- Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ε.Α.Ι.Τ.Υ.). (2011). *Επιμόρφωση εκπαιδευτικών για την αξιοποίηση και εφαρμογή των Τ.Π.Ε. στη διδακτική πράξη, Τεύχος 1 : Γενικό μέρος*. Πάτρα.
- Θωμαΐδης, Γ., & Πούλιος, Α. (2000). Το βασικό πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας* (σσ. 14-17). Θεσσαλονίκη: ΖΗΤΗ.
- Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών Πληροφορίας. Νέων Τεχνολογιών*.
- Κορδάκη, Μ., & Πόταρη, Δ. (1997). Η Έννοια της διατήρησης της επιφάνειας μέσα από ένα περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή. *ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ* (σσ. 123-132). Πάτρα: Γ.Α. Πνευματικού.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο . (n.d.). *Επιμορφωτικό υλικό γενικού μέρους του Προγράμματος Σπουδών για την εκπαίδευση των επιμορφωτών*. Ανάκτηση 2007

- Πάσχος, Θ. (2009). Σχεδιασμός διδακτικών δραστηριοτήτων εισαγωγής σε έννοιες της Ανάλυσης αξιοποιώντας την ιστορία των Μαθηματικών. Στο Ι. Θωμαΐδης, Δ. Λάμπας, Τ. Μιχαηλίδης, Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Πάσχος, Κ. Τζανάκης, και συν., *Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σσ. 221-267). Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Πατσόπουλος, Δ. (2006). Διδακτορική διατριβή. *Διδακτικές ανακατασκευές της ιστορίας των μαθηματικών*. Πάτρα: Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών.
- Τουμάσης, Μ. (1999). Η αναπτυξιακή θεωρία του Piaget. Στο Μ. Τουμάσης, *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών* (σσ. 133-144). Αθήνα: Gutenberg.
- Τουμάσης, Μ. (1999). Η διδασκαλία της γεωμετρίας. Στο Μ. Τουμάσης, *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών* (σ. 340). Αθήνα: Gutenberg.
- Χασάπης, Δ. (2009). Ιστορικά κείμενα των Μαθηματικών στη σχολική τάξη. Στο Ι. Θωμαΐδης, Δ. Λάμπας, Τ. Μιχαηλίδης, Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Πάσχος, Κ. Τζανάκης, και συν., *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (σσ. 129-159). Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
- Χατζηκυριάκου, Κ. (2004). Ιχνηλατώντας τρεις εποχές του σχήματος στα σχολικά μαθηματικά. *3ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών 12 & 13 Μαρτίου 2004* (σσ. 165-169). Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ.
- Χρυσανθόπουλος, Κ. Η. (2009). Η έννοια της "συνέχειας": Σύντομη ιστορική εξέλιξη. Στο Ι. Θωμαΐδης, Δ. Λάμπας, Τ. Μιχαηλίδης, Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Πάσχος, Κ. Τζανάκης, και συν., *Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών* (σσ. 161-192). Θεσσαλονίκη: Ζήτη.