



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Πολυτεχνική σχολή

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων

Διπλωματική εργασία

*"Μοντελοποίηση και προσομοίωση αμοιβαίας
επαγωγής σε δίκτυα τροφοδοσίας
ολοκληρωμένων κυκλωμάτων"*

*"Modeling and simulation of mutual
induction in power delivery networks of
Integrated Circuits"*

Γιάκα Χρυσούλα
Τσαμαρδού Ηλιάννα

Επιβλέποντες καθηγητές:

Νέστωρ Ευμορφόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Π.Θ.

Γεώργιος Σταμούλης
Καθηγητής Π.Θ.

Βόλος 2013

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση Διπλώματος Μηχανικού
Ηλεκτρονικών Υπολογιστών Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων του Πανεπιστημίου
Θεσσαλίας, στα Πλαίσια του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών του
Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου
Θεσσαλίας.

Copyright © Giaka Chrysoula, 2013
Copyright © Tsamardou Iliana, 2013
All rights reserved.

Ευχαριστίες

Με το πέρας της διπλωματικής θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον καθηγητή μας κ. Ευμορφόπουλο Νέστορα για την εμπιστοσύνη που μας έδειξε, την άριστη συνεργασία και τη βοήθεια που μας προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης.

Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ στις οικογένειες μας και τους φίλους μας για την στήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μας.

Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες	3
1. Εισαγωγή.....	5
2. Μοντελοποίηση υψίσυχνων κυκλωμάτων τροφοδοσίας με αμοιβαίες επαγωγές ..	7
2.1 Η μεθοδολογία για την ανάλυση των δικτύων τροφοδοσίας	7
2.2 Φυσική ερμηνεία και ιδιότητες του πίνακα K	11
I. Φυσική ερμηνεία του νέου κυκλωματικού στοιχείου K.....	11
II. Τοπικότητα και σταθερότητα του πίνακα K.....	13
3. Προσομοίωση υψίσυχνων κυκλωμάτων τροφοδοσίας με αμοιβαίες επαγωγές ...	17
4. Υλοποίηση	20
5. Πειραματικά Αποτελέσματα	26
6. Παράρτημα –Κώδικας.....	35
6.1 Πίνακας αμοιβαίων επαγωγών L	35
6.2 Κώδικας για οριζόντια αρίθμηση	38
6.3 Κώδικας για κάθετη αρίθμηση	47
7. Βιβλιογραφία	48

1. Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση της επίδρασης της επαγωγής στην on-chip καλωδίωση γίνεται ολοένα και πιο σημαντική, καθώς οι ταχύτητες του ρολογιού αυξάνονται και χρησιμοποιούνται όλο και λιγότερες γραμμές αντιστάσεων για τη βελτίωση του σήματος της ταχύτητας διάδοσης.

Για να μοντελοποιήσουμε την επαγωγή μιας γενικής 3D διασύνδεσης στην οποία το μονοπάτι επιστροφής ρεύματος δεν είναι γνωστό απαιτείται να χρησιμοποιηθούν στοιχεία επιμέρους επαγωγών. Η αντίληψη της μερικής επαγωγής, η οποία έχει αναπτυχθεί από το Rosa πριν από περίπου έναν αιώνα [1], έχει εισαχθεί στο σχεδιασμό του κυκλώματος από το Ruehli το 1972 [2]. Οι επιμέρους επαγωγές μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν στο πλαίσιο της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων (MNA) και χρησιμοποιούνται εσωτερικά σε προσομοιωτές κυκλώματος όπως το SPICE. Η προσέγγιση της μερικής επαγωγής αποφεύγει το πρόβλημα του άγνωστου βρόχου υποθέτοντας έναν εικονικό βρόχο ο οποίος τείνει στο άπειρο. Εξαιτίας αυτού, αντί της σύζευξης μεταξύ όλων των βρόχων, υπάρχει τώρα σύζευξη ανάμεσα σε όλα τα τμήματα σύρματος. Αυτό αντιστοιχεί σε έναν εξαιρετικά μεγάλο, πυκνό (dense) πίνακα επιμέρους επαγωγής L. Επειδή είναι δύσκολο να αντιστραφεί ένας τέτοιος πίνακας, συχνά σε ένα κύκλωμα προσομοίωσης είναι επιθυμητό να μετατρέπουμε τον πίνακα μερικής επαγωγής σε αραιό (sparse). Μια απλή προσέγγιση για να γίνει αυτό είναι απλά να απορρίψουμε τους όρους αμοιβαίας σύζευξης του πίνακα μερικής επαγωγής οι οποίοι είναι κάτω από ένα ορισμένο όριο. Ωστόσο υιοθετώντας αυτή την προσέγγιση, δηλαδή μη λαμβάνοντας υπόψιν μας τις πολύ μικρές τιμές μερικής επαγωγής μπορεί να οδηγηθούμε σε έναν πίνακα μερικής επαγωγής ο οποίος δεν θα είναι θετικά ορισμένος και άρα ασταθής σε μια κυκλωματική ανάλυση.

Πρόσφατα εισήχθη ένα νέο στοιχείο κυκλώματος για να αντιπροσωπεύσει την επίδραση της επαγωγής διατηρώντας ταυτόχρονα την τοπικότητα του. Αυτό το νέο κυκλωματικό στοιχείο, K, είναι βασικά το αντίστροφο της επιμέρους επαγωγής

$$[K]=[L]^{-1}.$$

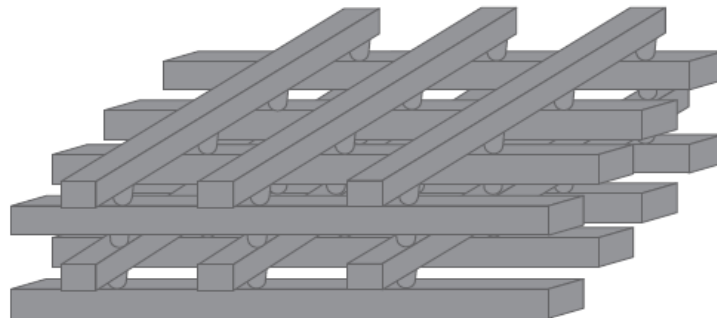
Προτάθηκε μάλιστα προκειμένου να συλληφθεί η επίδραση της επαγωγής, να εξαχθεί και να προσομοιωθεί απευθείας το K, αντί του L. Βασιζόμενοι στη φυσική ερμηνεία του K και εξαιτίας της τοπικότητας του, η οποία εξηγείται και αποδεικνύεται στην Ενότητα 2.2 αγνοούμε τις μακρινές αμοιβαίες επαγωγές του K. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο πίνακας K που προκύπτει να είναι θετικά ορισμένος (ιδιότητα σταθερότητας). Συνεπώς μαζί με ένα RKC κυκλωματικό μοντέλο, η τοπικότητα και η σταθερότητα μας δίνουν τη δυνατότητα να προσομοιώσουμε το RKC κύκλωμα άμεσα και αποτελεσματικά για πραγματικά κυκλώματα.

Στην παρούσα εργασία, περιγράφουμε αρχικά τη μοντελοποίηση ενός γενικού δικτύου τροφοδοσίας τύπου RLC . Έπειτα, αφού παραθέσουμε τη φυσική ερμηνεία του πίνακα K και αποδείξουμε τις ιδιότητες του, δίνουμε έμφαση στην ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας στον τομέα του χρόνου, χρησιμοποιώντας σαν πίνακα συστήματος την πρώτη φορά τον L και τη δεύτερη τον K . Συγκρίνουμε γραφικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής και αποδεικνύουμε πως οι τιμές που προκύπτουν και από τις δύο περιπτώσεις είναι σχεδόν ίδιες, γεγονός που επιβεβαιώνει πως η επίδραση της αμοιβαίας επαγωγής μπορεί να αντιπροσωπευθεί άμεσα από τον K .

2. Μοντελοποίηση υψίσυχνων κυκλωμάτων τροφοδοσίας με αμοιβαίες επαγωγές

2.1 Η μεθοδολογία για την ανάλυση των δικτύων τροφοδοσίας

Πρακτικά τα κυκλώματα τροφοδοσίας δημιουργούνται σαν ορθογώνια πλέγματα καλωδίων με πολύ συνηθισμένες χωρικές γεωμετρίες και με πιθανόν κάποιες παρατυπίες, οι οποίες οφείλονται σε σχεδιαστικούς περιορισμούς (π.χ. μερικές συνδέσεις που λείπουν μεταξύ διαδοχικών κόμβων). Τοποθετούνται σε λίγα –τυπικά 2 έως 6- μεταλλικά στρώματα εναλλασσόμενων κατευθύνσεων δρομολόγησης (κάθετες κι οριζόντιες) όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1, όπου απεικονίζεται ένα 3D δίκτυο τροφοδοσίας τεσσάρων επιπέδων με $m=4$ οριζόντιες και $n=3$ κάθετες ράβδους. Οι οριζόντιοι και κατακόρυφοι δίαυλοι χωρίζονται σε τμήματα (segments) ακριβώς στα σημεία των περασμάτων (νίας). Εξαιτίας της παρουσίας οπών ανάμεσα στα διαδοχικά μεταλλικά επίπεδα, το πραγματικό κύκλωμα έχει τη δομή ενός 3D πλέγματος, με πολύ λίγα επίπεδα κατά μήκος της τρίτης διάστασης. Όμως, όπως έχει παρατηρηθεί στο [3] οι ηλεκτρικές αντιστάσεις των οπών είναι συνήθως πολύ μικρότερες από τις αντιστάσεις του καλωδίου, οδηγώντας σε πτώσεις τάσης πολύ μικρότερες από 1mV. Επιπλέον, τα δεδομένα στο [4] δείχνουν ότι σχεδόν όλα τα στοιχεία του κυκλώματος (κυρίως οι αντιστάσεις) σε κάθε μεταλλικό επίπεδο έχουν τις ίδιες τιμές (με μικρές διαφορές εξαιτίας των ανωμαλιών).



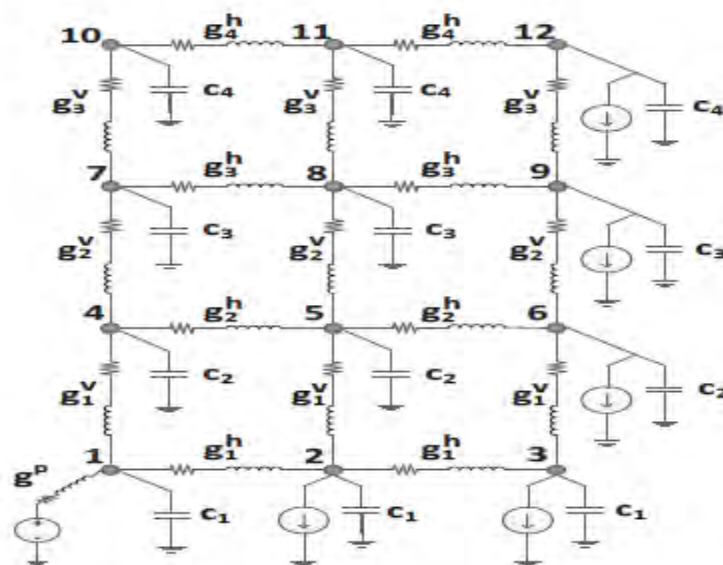
Εικόνα 2.1 Γεωμετρική κατασκευή ενός 3D πλέγματος τροφοδοσίας με 4 επίπεδα. Τα περάσματα (νίας) αναπαριστούν συνδέσεις μεταξύ των διαδοχικών μεταλλικών επιπέδων.

Βασιζόμενοι σε αυτές τις παρατηρήσεις, προσεγγίσαμε τον πίνακα συστήματος του κυκλώματος τροφοδοσίας με μια διαδικασία «κανονικοποίησης» του 3D πλέγματος τροφοδοσίας σε ένα κανονικό 2D

πλέγμα. Τα βήματα που ακολουθήσαμε είναι τα εξής:

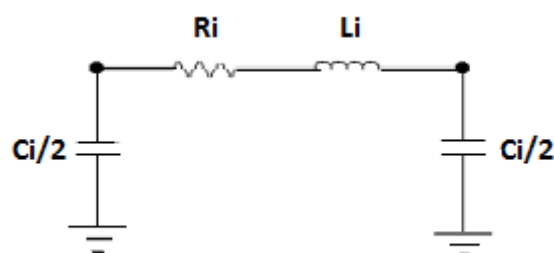
- 1) Λάβαμε υπόψιν μας τις διακριτές συντεταγμένες x και y όλων των κόμβων στα διαφορετικά επίπεδα του 3D πλέγματος και πήραμε το καρτεσιανό γινόμενο για να εντοπίσουμε τη θέση των κόμβων σε ένα κανονικό 2D πλέγμα.
- 2) Αγνοώντας τις αντιστάσεις μεταξύ των επιπέδων μετατρέψαμε το 3D πλέγμα σε ένα κανονικό 2D πλέγμα, προσθέτοντας όλες τις οριζόντιες αγωγιμότητες κλάδων $g^h \equiv \frac{1}{r^h + \frac{l^h}{h^k}}$, συνδεδεμένες παράλληλα ανάμεσα σε διαδοχικούς κόμβους, στην x κατεύθυνση του 2D πλέγματος και όλες τις κάθετες αγωγιμότητες κλάδων $g^v \equiv \frac{1}{r^v + \frac{l^v}{h^k}}$, συνδεδεμένες παράλληλα ανάμεσα σε διαδοχικούς κόμβους, στην y κατεύθυνση του 2D πλέγματος (όπου r^h, l^h υποδηλώνουν την αντίσταση και την επαγωγή των οριζόντιων κλάδων - οι επαγωγές μπορεί να μην είναι παρούσες στο μοντέλο).
- 3) Στο κανονικοποιημένο 2D πλέγμα αντικαταστήσαμε τις οριζόντιες αγωγιμότητες κλάδων με τη μέση τιμή σε κάθε οριζόντια ράβδο (rail) και τις κάθετες αγωγιμότητες κλάδων με τη μέση τιμή σε κάθε οριζόντιο κομμάτι (slice), το οποίο βρίσκεται ανάμεσα σε δυο διαδοχικές οριζόντιες ράβδους. Τέλος αντικαταστήσαμε και τις χωρητικότητες των κόμβων σε κάθε οριζόντια ράβδο με τη μέση τιμή.

Στην Εικόνα 2.2 φαίνεται το 2D κανονικοποιημένο πλέγμα που προκύπτει από την προηγούμενη διαδικασία κανονικοποίησης.



Εικόνα 2.2: Κανονικοποιημένο 2D πλέγμα μετά τη διαδικασία κανονικοποίησης.

Με βάση το παραπάνω πλήρες RLC μοντέλο ενός πλέγματος τροφοδοσίας, υποθέσαμε ότι το πλέγμα αποτελείται από b κλάδους και $n+r$ κόμβους, εκ των οποίων οι r κόμβοι είναι συνδεδεμένοι με εξωτερικά δίκτυα τροφοδοσίας. Χωρίσαμε τους εναπομείναντες n κόμβους σε m sink κόμβους (με τις πηγές ρεύματος συνδεδεμένες σε ένα εξωτερικό κόμβο γείωσης) και σε $n-m$ εσωτερικούς κόμβους. Ειδικά για τα δίκτυα που αναπαριστούν κυκλώματα τροφοδοσίας μοντελοποιήσαμε τυπικά κάθε τμήμα καλωδίου (μεταξύ δύο επαφών) σαν μια αντίσταση σε σειρά με μια επαγωγή, με γειωμένες χωρητικότητες στους δυο κόμβους επαφής. (Εικόνα 2.3). Έτσι στην ανάλυση που ακολούθησε θεωρήσαμε τους b κλάδους του πλέγματος σαν σύνθετους κλάδους αντίστασης-επαγωγής (R-L).



Εικόνα 2.3 Τυπικό μοντέλο ενός τμήματος καλωδίου σε συστήματα τροφοδοσίας.

Στη συνέχεια αναφέρουμε σύντομα το πλαίσιο της Τροποποιημένης Ανάλυσης Κόμβων (Modified Nodal Analysis - MNA) για την ανάλυση των RLC κυκλωμάτων τροφοδοσίας [5], στο οποίο τα επαγωγικά ρεύματα αποτελούν πρόσθετες μεταβλητές κατά μήκος των κόμβων τάσης. Οι νόμοι ρευμάτων και τάσης του Kirchhoff για το γραμμικό δίκτυο που αναπαριστά ένα πλέγμα τροφοδοσίας είναι:

$$\mathbf{A}_{r1} \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{i}_c(t) = \mathbf{e}_n(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_{r1}^T \mathbf{v}_n(t) = \mathbf{v}_b(t) \quad (2)$$

όπου ο \mathbf{A}_{r1} είναι ο $n \times b$ πίνακας πρόσπτωσης του κατευθυνόμενου σύνθετου R-L κλάδου (με στοιχεία $a_{ij} = \pm 1$ ή $a_{ij} = 0$ ανάλογα με το αν ο κλάδος j εξέρχεται/εισέρχεται ή δεν προσπίπτει στον κόμβο i), $\mathbf{v}_n(t)$, $\mathbf{v}_b(t)$, και $\mathbf{i}_b(t)$ είναι τα $n \times 1$, $b \times 1$ και $b \times 1$ διανύσματα των τάσεων κόμβων, τάσεων κλάδων και ρευμάτων κλάδων αντίστοιχα, $\mathbf{i}_c(t)$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα των ρευμάτων των πρόσθετων χωρητικότητων κλάδων που εμφανίζονται στους n κόμβους και $\mathbf{e}_n(t)$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα των διεγέρσεων από ανεξάρτητες πηγές (είτε ρεύματος είτε τάσης) στους κόμβους.

Οι σχέσεις ρεύματος- τάσης των n κλάδων χωρητικότητας και των b σύνθετων R-L κλάδων είναι οι εξής:

$$\mathbf{i}_c(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{v}_n'(t) \quad (3)$$

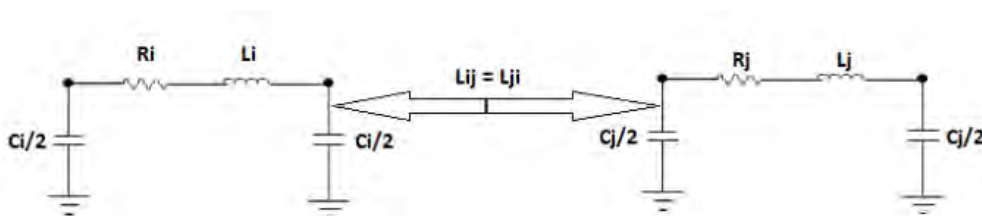
$$\mathbf{v}_b = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{L}_b \mathbf{i}_b'(t) \quad (4)$$

όπου $\mathbf{v}_n'(t)$ και $\mathbf{i}_b'(t)$ είναι οι παράγωγοι ως προς το χρόνο των διανυσμάτων $\mathbf{v}_n(t)$ και $\mathbf{i}_b(t)$ αντίστοιχα, \mathbf{C}_n είναι ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας των χωρητικοτήτων κόμβων και \mathbf{R}_n είναι ένας $b \times b$ διαγώνιος πίνακας των αντιστάσεων των σύνθετων R-L κλάδων. Τέλος ο \mathbf{L}_b είναι ένας $b \times b$ πίνακας αυτεπαγωγών κλάδων ο οποίος είναι διαγώνιος αν υπάρχουν αυτεπαγωγές μόνο στους κλάδους, αλλιώς αν υπάρχουν και αμοιβαίες επαγωγές ανάμεσα στους κλάδους, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.5 είναι πλήρης. Επιπλέον, επειδή $L_{ij} = L_{ji}$ εκτός από πλήρης θα είναι και συμμετρικός, δηλαδή θα είναι της μορφής :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 & L_{12} & \dots & L_{1b} \\ L_{12} & L_2 & \dots & L_{2b} \\ & & \ddots & \\ L_{1b} & L_2 & \dots & L_b \end{pmatrix}$$

Εικόνα 2.4: Πλήρης πίνακας αμοιβαίων επαγωγών \mathbf{L}

Υποθέτουμε ότι κάθε κλάδος R-L έχει μη μηδενική αυτεπαγωγή και κάθε κόμβος μη μηδενική χωρητικότητα έτσι ώστε οι πίνακες \mathbf{L}_b και \mathbf{C}_n να είναι αντιστρέψιμοι.



Εικόνα 2.5: Γενικό RLC κύκλωμα με αμοιβαίες επαγωγές ανάμεσα στους κλάδους.

Στο ΜΝΑ αντικαθιστούμε την (3) στην (1) και την (4) στην (2) και συνδυάζουμε τα δύο συστήματα διαφορικών εξισώσεων που προέκυψαν στο παρακάτω σύστημα:

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t)' = \mathbf{e}(t) \quad (5)$$

Όπου:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{nl} \\ -\mathbf{A}_{nl}^T & \mathbf{R}_b \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n(t) \\ \mathbf{i}_b(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Στο παραπάνω σύστημα το $\mathbf{v}_n(t)$ είναι το διάνυσμα των τάσεων των κόμβων. Μπορούμε όμως να επαναδιατυπώσουμε το σύστημα σε βόμνοι την πτώση τάσης στους κόμβους, παραλείποντας τις ανεξάρτητες πηγές τάσης στο διάνυσμα $\mathbf{e}_n(t)$ και αντιστρέφοντας το πρόσημο των πηγών ρεύματος (από - σε +). Από τώρα και στο εξής μπορούμε να αναφερόμαστε στο $\mathbf{v}_n(t)$ σαν το διάνυσμα των τάσεων κόμβων ως προς τη γη ή αλλιώς το διάνυσμα των πτώσεων τάσης των κόμβων.

2.2 Φυσική ερμηνεία και ιδιότητες του πίνακα K

I. Φυσική ερμηνεία του νέου κυκλωματικού στοιχείου K

Ο αρχικός ορισμός του K είναι ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα μερικής επαγωγής

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}]^{-1}. \quad (6)$$

Στη μαγνητοστατική τα στοιχεία του πίνακα L έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi a_i a_j} \left(\int_{a_i} \int_{a_j} \int_{l_i} \int_{l_j} \frac{dl_i dl_j}{r_{ij}} da_i da_j \right) \quad (7)$$

όπου a_i και a_j είναι εγκάρσιες διατομές του τμήματος i και j αντίστοιχα και r_{ij} είναι η γεωμετρική απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο τμήμα i και j .

Ο πίνακας μερικών επαγωγών για ένα σύνολο από n αγωγούς είναι ένας $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα δίνεται

από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots \\ L_{21} & L_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & L_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_1} \int A_{1i} dI_1 da_1 \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_n} \int A_{ni} dI_n da_n \right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

όπου A_{ij} είναι το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό κατά μήκος του τμήματος 1 εξαιτίας του ρεύματος I_i στο τμήμα i . Γι' αυτό ο K ικανοποιεί τις ακόλουθες γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots \\ K_{21} & K_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_1} \int A_{1i} dI_1 da_1 \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_n} \int A_{ni} dI_n da_n \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

Από την εξίσωση (9), παρατηρούμε ότι ο K είναι καλύτερα κατανοητός στους όρους όπου το κανονικοποιημένο ρεύμα επάγεται από την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος ενός συνόλου τμήματος αγωγών. Ωστόσο, σε αντίθεση με την εξαγωγή της μερικής επαγωγής, στην οποία μπορούμε απευθείας να υπολογίσουμε το L_{ij} χρησιμοποιώντας τον αναλυτικό τύπο, ο K δεν έχει τέτοια απλή διατύπωση. Ο υπολογισμός του κάθε στοιχείου του πίνακα K περιλαμβάνει την επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Αν θέσουμε την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος του αγωγού τμήματος j σε 1 και την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος όλων των άλλων αγωγών τμημάτων σε 0, τότε μπορούμε να λύσουμε το ρεύμα που επάγεται σε κάθε τμήμα αγωγού, δεδομένου της σχέσης μεταξύ της πτώσης του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού και του ρεύματος:

$$A_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi a_j} \int_{\alpha_j} \int_{l_j} \frac{I_j}{r_{ij}} dI_j da_j \quad (10)$$

Από την εξίσωση (9) μπορούμε να δούμε ότι το ρεύμα που επάγεται σε κάθε ένα τμήμα του αγωγού στην περίπτωση αυτή είναι ίσο με κάθε στοιχείο της στήλης j του πίνακα K . Γι' αυτό μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε το στοιχείο του πίνακα ως εξής: το στοιχείο K_{ij} είναι το ρεύμα που ρέει μέσω του i αγωγού όταν η πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος όλων των αγωγών εκτός του j -οστού έχει τεθεί σε 0 και η πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος του j -οστού αγωγού

αυξάνεται στο δυναμικό μονάδας.

Ο ορισμός αυτός απεικονίζει τόσο τη φυσική έννοια του K πίνακα όσο και το πώς μπορεί να υπολογιστεί αυτό. Δηλαδή, αναθέτοντας επαναληπτικά την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος τμήματος του αγωγού l ($i = 1, 2, \dots, n$) σε 1, ενώ την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος όλων των διανυσματικών τμημάτων σε 0, μπορούμε να λάβουμε κάθε στήλη i του πίνακα K υπολογίζοντας το ρεύμα που προκαλείται σε κάθε τμήμα αγωγού. Στην πραγματικότητα αυτό το σύστημα μοιάζει με τον υπολογισμό χωρητικότητας στην ηλεκτροστατική. Στην συνέχεια θα εισάγουμε περαιτέρω τις ιδιότητες του πίνακα K , όπως η τοπικότητα και η σταθερότητα.

II. Τοπικότητα και σταθερότητα του πίνακα K

Στην πραγματικότητα, ο ορισμός και η φυσική επεξήγηση του πίνακα K είναι παρόμοια με εκείνη του πίνακα χωρητικότητας, όπου η πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος ενός τμήματος αγωγού μοιάζει με την πτώση τάσης, και το ρεύμα στο τμήμα αγωγού μοιάζει με το φορτίο στην επιφάνεια του αγωγού. Μπορούμε να αναμένουμε ότι το K έχει παρόμοιες C -ιδιότητες. Η απόδειξη για τη σταθερότητα του πίνακα K μοιάζει επίσης με την απόδειξη για τον πίνακα της χωρητικότητας που αναφέρεται στο [16].

Επειδή οι ορθογώνιοι αγωγοί δεν είναι μαγνητικά ζευγάρι, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο πίνακας της μερικής επαγωγής και ο K πίνακας να είναι block διαγώνιων πινάκων. Γι αυτό στην ακόλουθη απόδειξη θα χρειαστεί να εξετάσουμε μόνο μια σειρά από παράλληλους αγωγούς. Η απόδειξη μπορεί επίσης πολύ εύκολα να επεκταθεί σε δομές με αδύνατους (lean) αγωγούς το οποίο μπορεί εδώ να παραληφθεί λόγω περιορισμού χώρου.

A. Τοπικότητα (Locality)

Παρά το γεγονός ότι ο υπολογισμός του πίνακα K περιλαμβάνει την επίλυση γραμμικών συστημάτων, είναι δυνατόν να μάθουμε πολλά για τον πίνακα K και τα στοιχεία του προσφεύγοντας σε απλές αρχές φυσικής. Μέσα από την εφαρμογή του θεωρήματος Green μπορεί να αποδειχθεί ότι ο πίνακας K είναι συμμετρικός:

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (11)$$

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι στην πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος του i -οστού αγωγού έχει εκχωρηθεί κάποια θετική τιμή, και η πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος όλων των άλλων αγωγών διατηρείται στο μηδέν. Προκειμένου η πτώση του διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος του i -οστού αγωγού να είναι θετική, θα

πρέπει να φέρουμε ένα ρεύμα στην ίδια κατεύθυνση με την πτώση του δυναμικού φορέα. Έτσι θα πρέπει να είναι:

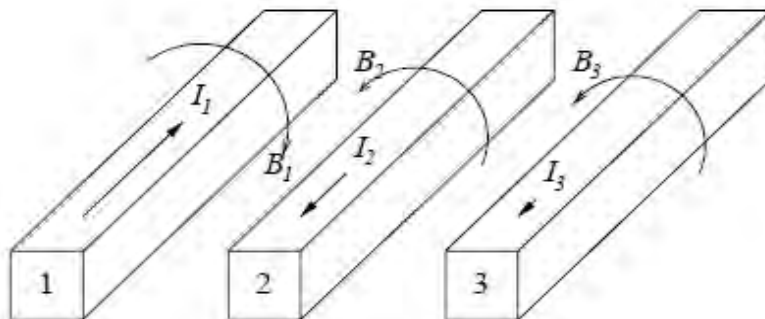
$$K_{ii} > 0 \quad (12)$$

Επιπλέον, προκειμένου η πτώση του διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος των άλλων αγωγών να παραμείνει στο μηδέν, θα πρέπει να φέρουμε τα ρεύματα στην αντίθετη κατεύθυνση από την πτώση του διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος του i -οστού αγωγού. Ως εκ τούτου,

$$K_{ij} < 0 \quad i \neq j \quad (13)$$

Κάποιος μπορεί να αμφιβάλει πως μπορεί το ρεύμα να ρέει σε αντίθετες κατευθύνσεις σε διαφορετικά τμήματα του ίδιου αγωγού, όταν ένας μακρύς αγωγός σπάει σε πολλά τμήματα και βρίσκεται υπό εξέταση. Σε αυτή τη περίπτωση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειρα λεπτά κενά μεταξύ οποιονδήποτε δυο γειτονικών τμημάτων, τα οποία δεν θα αλλάξουν τον πίνακα μερικής επαγωγής ή τον πίνακα K , ενώ αφήνουν την κατεύθυνση ρεύματος σε κάθε τμήμα απροσδιόριστη.

Γι αυτό, εάν έχουμε αναθέσει κάποια θετική τιμή στην πτώση μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος ενός επιτιθέμενου αγωγού και διατηρώντας την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος όλων των γειτονικών αγωγών στο μηδέν, όπως δείξαμε παραπάνω, το ρεύμα που επάγεται στους γείτονες βρίσκεται σε αντίθεση κατεύθυνση από το επαγόμενο ρεύμα που προκαλείται στον επιτιθέμενο αγωγό. Το ίδιο ισχύει για το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από τα ρεύματα. Επομένως, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από κάθε γείτονα ακυρώνει μέρος του πεδίου που προκλήθηκε στην επιτιθέμενη γραμμή και προστατεύει το πεδίο που προκλήθηκε στην επιτιθέμενη γραμμή από το να προχωρήσει παρακάτω, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.6 . Αυτό είναι και η φυσική εξήγηση της τοπικότητας του πίνακα K .



Εικόνα 2.6: Παράδειγμα με τρεις παράλληλους διαύλους.

Δεδομένου ότι το K έχει C -τοπικότητα, το μόνο που πρέπει να εξετάσουμε είναι ένας μικρός αριθμός γειτόνων στη K -based μέθοδο, κατά τη λήψη επίδρασης επαγωγής στη διασύνδεση του τσιπ. Η K -based μέθοδος μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

- Υπολογίζουμε τον πίνακα μερικής επαγωγής L από μια μικρή δομή η οποία περικλείεται σε ένα μικρό παράθυρο.
- Υπολογίζουμε το μικρό πίνακα K αντιστρέφοντας τον αντίστοιχο πίνακα L .
- Συνθέτουμε το μεγάλο πίνακα K_{all} , από τη στήλη του κάθε μικρού πίνακα K , το οποίο αντιστοιχεί στον επιτιθέμενο, όπως οι γενικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην εξαγωγή χωρητικότητας.
- Προσομοιώνουμε το επακόλουθο RKC ισοδύναμο κύκλωμα.

Γι αυτό για ένα μεγαλύτερο σύστημα, αυτή η προσέγγιση στη μετέπειτα προσομοίωση κυκλώματος θα δημιουργήσει ένα πολύ αραιό πίνακα K . Στο επόμενο βήμα, θα χρειαστεί να αποδείξουμε τη σταθερότητα του αραιού πίνακα αυτού του συστήματος.

B. Σταθερότητα (stability)

Εξετάζουμε την κατάσταση στην οποία η πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού για όλους τους n αγωγούς αυξάνεται στο μοναδιαίο (θετικό) δυναμικό στην ίδια κατεύθυνση. Στη συνέχεια η ροή, Φ , μέσω του βρόχου που αποτελείται από κάθε ζευγάρι αγωγών είναι μηδέν. Σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό του βρόχου της επαγωγής έχουμε:

$$\Phi = L_{loop} I \quad (14)$$

Όπου το I είναι η ροή ρεύματος μέσω του βρόχου. Μπορούμε να δούμε ότι το ρεύμα το οποίο ρέει μέσω του βρόχου που αποτελείται από κάθε ζευγάρι αγωγών είναι επίσης μηδέν ακόμα και αν το L_{loop} δεν είναι μηδέν. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση δεν προκαλείται κανένα ρεύμα σε έναν αγωγό που επιστρέφει μέσω ενός άλλου αγωγού. Έτσι, όλα τα ρεύματα που προκαλούνται από την πτώση του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού πρέπει να επιστρέψουν από το άπειρο (ή στην πραγματικότητα επιστρέφουν από άλλες θύρες ή τερματικά). Ως εκ τούτου, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ρεύμα που προκαλείται (επάγεται) σε κάθε αγωγό έχει την ίδια κατεύθυνση με τη πτώση δυναμικού. Από την εξίσωση (9) με:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{a_i} \int A_{ij} dI_j da_i \right) = 1$$

Για $i=1, 2, \dots, n$ έχουμε:

$$|K_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |K_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

Εάν $K_{ii} > 0$, και $K_{ij} < 0$ για $i \neq j$, αυτό που προκύπτει από την εξίσωση του (15) είναι:

$$K_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |K_{ij}| \quad (16)$$

το οποίο είναι η ιδιότητα γνωστή ως αυστηρή διαγώνια κυρίαρχία.

Σύμφωνα με το θεώρημα Gersgorin Circle, κάθε ιδιοτιμή ενός τετραγωνικού πίνακα, $A=(\alpha_{ij})$ της τάξης n είναι τουλάχιστον μια από τους δίσκους στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\{z: |z - \alpha_{ii}| \leq R_i\}, \quad R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{ij}| \quad \text{για } i=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

Δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές βρίσκονται στο σύνολο των δίσκων, όπου α_{ii} είναι το διαγώνιο στοιχείο που βρίσκεται στο κέντρο, με ακτίνα ίση με το άθροισμα της απόλυτης τιμής των εκτός διαγωνίου στοιχείων στη γραμμή $i=1, 2, \dots, n$. Εάν ο A είναι αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος,

$$R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{ij}| < |\alpha_{ii}|, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (18)$$

και $|\alpha_{ii}| > 0$, μπορούμε να γνωρίζουμε ότι όλοι οι δίσκοι του πίνακα A βρίσκονται στη δεξιά πλευρά του μιγαδικού επιπέδου, επομένως και οι ιδιοτιμές. Γι αυτό ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος εάν ο A είναι αυστηρά κυρίαρχα διαγώνιος και όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι θετικά. Η ιδιότητα του κυρίαρχου αυστηρά διαγώνιου κατέχει την εξαγωγή του K για οποιονδήποτε αριθμό αγωγών και οποιοδήποτε είναι το μέγεθος του παραθύρου. Ως εκ τούτου, κάθε μικρός πίνακας K είναι αυστηρά κυρίαρχα διαγώνιος. Χρησιμοποιώντας την K -based μέθοδο ο αραιός K_{all} πίνακας για όλα τα συστήματα είναι ακόμα κυρίαρχα αυστηρά διαγώνιος, καθώς κάθε στήλη του K_{all} πίνακα αποτελείται από την αντίστοιχη στήλη του μικρού πίνακα K και μερικά μηδενικά για συμπλήρωμα. Μαζί με την ιδιότητα της εξίσωσης (12) μπορούμε να εγγυηθούμε τη θετική οριστικότητα ή τη σταθερότητα του αραιού πίνακα K_{all} .

3. Προσομοίωση υψίσυχνων κυκλωμάτων τροφοδοσίας με αμοιβαίες επαγωγές

Σύμφωνα με τη παραπάνω μοντελοποίηση καταλήξαμε στους πίνακες

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{rl} \\ -\mathbf{A}_{rl}^T & \mathbf{R}_b \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n(t) \\ \mathbf{i}_b(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n(t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

και σε συνδυασμό με την προσέγγιση Backward Euler για ένα σταθερό χρονικό βήμα h αντικαταστήσαμε το διάνυσμα $\mathbf{x}(t)$ στη σχέση (5) της Ενότητας 2.1 με την πεπερασμένη διαφορική σχέση $\dot{\mathbf{x}}(t) \approx [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h)]/h$. Έτσι οδηγηθήκαμε στη σχέση $(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{C}}/h)\mathbf{x}(t) = (\tilde{\mathbf{C}}/h)\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{e}(t)$ για $t = kh, k=1,2,\dots$ όπου:

$$\left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{1}{h}\tilde{\mathbf{C}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h}\mathbf{C}_n & \mathbf{A}_{rl} \\ -\mathbf{A}_{rl}^T & \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(kh) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n(kh) \\ \mathbf{i}_b(kh) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}(kh) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n(kh) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Άρα σε κάθε χρονικό βήμα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h}\mathbf{C}_n & \mathbf{A}_{rl} \\ -\mathbf{A}_{rl}^T & \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n(kh) \\ \mathbf{i}_b(kh) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_n(kh) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{h}\mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{h}\mathbf{L}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n((k-1)h) \\ \mathbf{i}_b((k-1)h) \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια εκτελέσαμε τις πράξεις μεταξύ των παραπάνω blocks και καταλήξαμε στις εξής σχέσεις:

$$\frac{1}{h}\mathbf{C}_n \mathbf{v}_k + \mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_k = \mathbf{e}_k + \frac{1}{h}\mathbf{C}_n \mathbf{v}_{k-1} \quad (1)$$

$$-\mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_k + \left(\mathbf{R}_b + \frac{1}{h}\mathbf{L}_b\right) \mathbf{i}_k = \frac{1}{h}\mathbf{L}_b \mathbf{i}_{k-1} \quad (2)$$

Όπου $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_n(kh)$, $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_b(kh)$, $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_n(kh)$, $\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{v}_n((k-1)h)$, $\mathbf{i}_{k-1} = \mathbf{i}_b((k-1)h)$.

Για την επίλυση των παραπάνω σχέσεων πήραμε δύο περιπτώσεις.

Για την πρώτη περίπτωση, στην οποία αναφερόμαστε και ως «λύση ως προς ρεύματα» λύσαμε την εξίσωση (2) ως προς \mathbf{i}_k , δηλαδή

$$\mathbf{i}_k = (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1} (\mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_k + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b \mathbf{i}_{k-1}) \quad (3)$$

έπειτα αντικαταστήσαμε την (3) στην (1)

$$\frac{1}{h} \mathbf{C}_n \mathbf{v}_k + \mathbf{A}_{rl} (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1} (\mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_k + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b \mathbf{i}_{k-1}) = \mathbf{e}_k + \frac{1}{h} \mathbf{C}_n \mathbf{v}_{k-1} \Rightarrow$$

$$[\mathbf{A}_{rl} (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T + \frac{1}{h} \mathbf{C}_n] \mathbf{v}_k = \mathbf{e}_k + \frac{1}{h} \mathbf{C}_n \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{A}_{rl} (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1} \frac{1}{h} \mathbf{L}_b \mathbf{i}_{k-1} \quad (4)$$

και κατόπιν αντικαταστήσαμε την (4) στην (3). Σαν αποτέλεσμα προέκυψαν τα παρακάτω ρεύματα :

$$\mathbf{i}_k = (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1} \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_k + (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1} \mathbf{i}_{k-1}. \quad (5)$$

Για τη δεύτερη περίπτωση, στην οποία αναφερόμαστε και ως «λύση ως προς τάσεις» λύσαμε την εξίσωση (1) ως προς \mathbf{v}_k , δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &= h \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{e}_k + \frac{1}{h} \mathbf{C}_n \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_k) \\ &= h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{e}_k + \mathbf{v}_{k-1} - h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_k \quad (6) \end{aligned}$$

έπειτα αντικαταστήσαμε την (6) στην (2)

$$-\mathbf{A}_{rl}^T (h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{e}_k + \mathbf{v}_{k-1} - h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_k) + (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b) \mathbf{i}_k = \frac{1}{h} \mathbf{L}_b \mathbf{i}_{k-1} \Rightarrow$$

$$[(\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b) + h \mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_{rl}] \mathbf{i}_k = \mathbf{A}_{rl} h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{e}_k + \mathbf{v}_{k-1} + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b \mathbf{i}_{k-1} \quad (7)$$

και κατόπιν αντικαταστήσαμε την (7) στην (6). Σαν αποτέλεσμα προέκυψαν οι παρακάτω τάσεις :

$$\mathbf{v}_k = h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{e}_k + \mathbf{v}_{k-1} - h \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_k \quad (8)$$

Για την παραπάνω ανάλυση στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιήσαμε τον

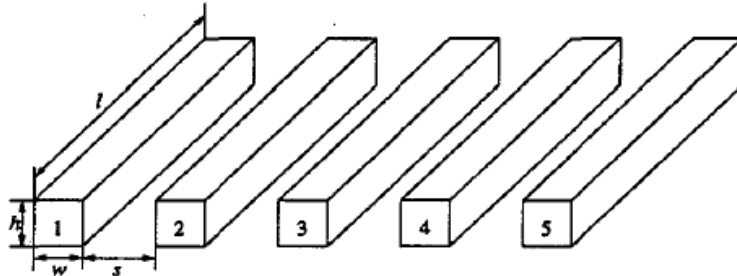
πλήρη και πυκνό πίνακα αμοιβαίων επαγωγών $\mathbf{K} = (\mathbf{R}_b + \frac{1}{h} \mathbf{L}_b)^{-1}$. Αν

αντικαταστήσουμε τον \mathbf{K} με τον τριδιαγώνιο του, τον \mathbf{K}_1 , ο οποίος προκύπτει από τον \mathbf{K} έχοντας αγνοήσει τις μακρινές αμοιβαίες επαγωγές, μπορούμε να υλοποιήσουμε για δεύτερη φορά τη μεταβατική ανάλυση, χρησιμοποιώντας όμως τώρα έναν αραιό πίνακα για την αναπαράσταση των αμοιβαίων

επαγωγών. Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω αναλύσεων στο πεδίο του χρόνου και να αποφανθούμε για το ποια είναι η πιο αποδοτική.

4. Υλοποίηση

Για την υλοποίηση μας θεωρήσαμε ένα παράδειγμα με πέντε παράλληλους διαύλους, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Το μήκος όλων των διαύλων είναι 20μm, η διατομή τους είναι 2x2μm και το κενό μεταξύ τους είναι 5μm.



Εικόνα 4.1: Παράδειγμα με 5 παράλληλους διαύλους.

Υπολογίσαμε τον πίνακα των μερικών επαγωγών L χρησιμοποιώντας FastHenry[6],

$$[L] = \begin{bmatrix} 11.4 & 4.26 & 2.54 & 1.79 & 1.38 \\ 4.26 & 11.4 & 4.26 & 2.54 & 1.79 \\ 2.54 & 4.26 & 11.4 & 4.26 & 2.54 \\ 1.79 & 2.54 & 4.26 & 11.4 & 4.26 \\ 1.38 & 1.79 & 2.54 & 4.26 & 11.4 \end{bmatrix} pH,$$

Εικόνα 4.2: Πίνακας μερικών επαγωγών L για 5 παράλληλους διαύλους.

ο οποίος περιέχει τις μερικές επαγωγές μεταξύ όλων των διαύλων. Για το παράδειγμα μας οι δίαυλοι θα έχουν οπλισμό μήκος και θα χωρίζονται μεταξύ τους μέσω περασμάτων (vias). Για ένα πλέγμα λοιπόν τροφοδοσίας μεγέθους 6x6 ο L χρειάζεται διεύρυνση προκειμένου να περιέχει τις αμοιβαίες επαγωγές όλων των επιπρόσθετων κλάδων. Επομένως, αφού το νέο πλέγμα τροφοδοσίας έχει 36 κόμβους (6 x 6), θα έχουμε 60 κλάδους, εκ των οποίων οι 30 είναι κάθετοι και οι υπόλοιποι 30 οριζόντιοι. Άρα ο νέος L θα έχει μέγεθος 60x60. Κάθε τιμή του αντιστοιχεί στην αμοιβαία επαγωγή ενός κλάδου με κάποιον άλλο και προκύπτει από την μεταξύ τους απόσταση. Για παράδειγμα, ένας κλάδος με τον εαυτό του έχει αυτεπαγωγή 11.4pH, με έναν γειτονικό του σε απόσταση ένα έχει αμοιβαία επαγωγή 4.26pH, σε απόσταση δύο 2.54pH, σε απόσταση τρία 1.79pH, σε απόσταση τέσσερα 1.38pH, ενώ σε απόσταση μεγαλύτερη από πέντε η αμοιβαία επαγωγή θεωρείται μηδενική. Με άλλα λόγια ο κλάδος (1) με τον κλάδο (2) που έχουν απόσταση ίση με ένα έχει αμοιβαία επαγωγή 4.26pH, ενώ με τον κλάδο (6)

που έχει απόσταση μεγαλύτερη από πέντε έχει αμοιβαία επαγωγή μηδέν (βλ. Εικόνα 4.5).

Επιπλέον, λάβαμε υπ' όψιν μας μόνο τις αμοιβαίες επαγωγές που δημιουργούνται μεταξύ κλάδων της ίδιας τοπολογίας, δηλαδή επαγωγές οριζόντιων με οριζόντιους κλάδους και κάθετων με κάθετους. Αντιθέτως, σε αυτές που δημιουργούνται μεταξύ κάθετων και οριζόντιων τις δώσαμε μηδενική τιμή. Άρα για παράδειγμα ο κλάδος (1) με τον κλάδο (36) έχουν αμοιβαία επαγωγή μηδέν (βλ. Εικόνα 4.5).

Τέλος θεωρήσαμε ότι το κύκλωμα μας τροφοδοτείται από δύο σταθερές πηγές τάσης V_{dd} , με τιμή 100V η κάθε μία, γεγονός που μας οδήγησε στην περαιτέρω διεύρυνση του L κατά δύο στήλες και δύο γραμμές. Σαν αποτέλεσμα λοιπόν, δημιουργήθηκε ένας πλήρης και συμμετρικός πίνακας αμοιβαίων επαγωγών L , 62X62, ο οποίος στις δύο τελευταίες γραμμές και στις δύο τελευταίες στήλες φέρει παντού μηδενικά, εκτός από τις θέσεις των διαγώνιων στοιχείων τους, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις σταθερές πηγές τάσης, οπότε και έχουν την τιμή 100. (Εικόνες 6.1(α) και 6.1(β)).

Στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε ένα αρχείο που περιέχει πιθανές τιμές διεγέρσεων για διάφορες χρονικές στιγμές, οι οποίες προέκυψαν από προσομοίωση του κυκλώματος αναφοράς (benchmark) C1355. Πιο συγκεκριμένα δηλαδή, αντιστοιχίσαμε τις διεγέρσεις αυτές σε 5 κόμβους του κυκλώματος, τους οποίους τους επιλέξαμε τυχαία (κόμβοι: 1, 8, 15, 22, 29). Επομένως, σε κάθε ένα κόμβο από αυτούς αναλογούν 4700 ρεύματα διεγέρσεων (Ενότητα 6.2: Σειρές 8-13).

Κατά την υλοποίηση του συγκεκριμένου συστήματος τροφοδοσίας χρησιμοποιήσαμε τα εξής χαρακτηριστικά κυκλώματος με τις αντίστοιχες τιμές:

Οριζόντια αντίσταση φύλλου: 0.1 Ohms/sq

Κατακόρυφη αντίσταση φύλλου: 0.1 Ohms/sq

Παρασιτική αντίσταση των πηγών τάσης: 50 Ohms/sq

Παρασιτική αυτεπαγωγή των πηγών τάσης: 100 pH

Παρασιτική χωρητικότητα των πηγών τάσης: 0.01 pF

Οριζόντια χωρητικότητα παράλληλων πλακών: $1e-04$ pF/um²

Πλευρική χωρητικότητα παράλληλων πλακών: $1e-04$ pF/um²

(Βλ. Ενότητα 6.2:Σειρές 22-38)

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω χαρακτηριστικά προέκυψαν οι παρακάτω διαγώνιοι πίνακες:

Διαγώνιος πίνακας αντιστάσεων κλάδων R (Ενότητα 6.2: Σειρές 77-83):

diag(R) =

0.7000
0.7000
0.7000
0.7000
0.7000
2.3333
2.3333
2.3333
2.3333
2.3333
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
0.8750
1.7500
1.7500
1.7500
1.7500
1.7500
1.7500
1.1667
1.1667
1.1667
1.1667
1.1667
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
7.0000
1.1667

Εικόνα 4.3: Διαγώνιος πίνακας αντιστάσεων κλάδων R

1.1667
 1.1667
 1.1667
 1.1667
 0.8750
 0.8750
 0.8750
 0.8750
 0.8750
 0.7000
 0.7000
 0.7000
 0.7000
 0.7000
 0.7000
 3.5000
 3.5000
 3.5000
 3.5000
 3.5000
 50.0000
 50.0000

Διαγώνιος πίνακας χωρητικότητας κόμβων C (Ενότητα 6.2: Σειρές 40-45, 53,54,66, 67,74):

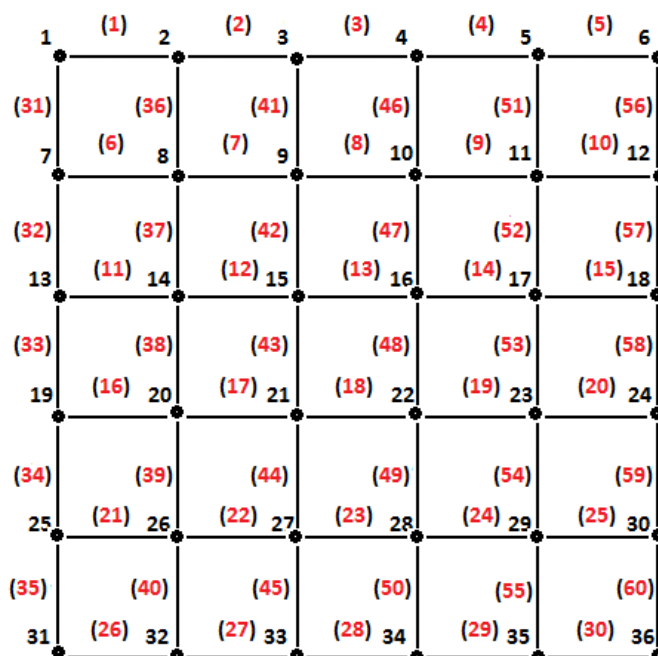
C =

(1,1)	0.0455
(2,2)	0.0840
(3,3)	0.1015
(4,4)	0.1085
(5,5)	0.1155
(6,6)	0.0490
(7,7)	0.0380
(8,8)	0.0420
(9,9)	0.0770
(10,10)	0.0910
(11,11)	0.1050
(12,12)	0.0350
(13,13)	0.0455
(14,14)	0.0770
(15,15)	0.1120
(16,16)	0.1260
(17,17)	0.1400
(18,18)	0.0525

Εικόνα 4.4: Διαγώνιος πίνακας χωρητικότητας κόμβων C

(19,19)	0.0455
(20,20)	0.0870
(21,21)	0.1120
(22,22)	0.1260
(23,23)	0.1400
(24,24)	0.0525
(25,25)	0.0315
(26,26)	0.0490
(27,27)	0.0840
(28,28)	0.0980
(29,29)	0.1120
(30,30)	0.0385
(31,31)	0.0315
(32,32)	0.0560
(33,33)	0.0735
(34,34)	0.0805
(35,35)	0.0875
(36,36)	0.0350

Παράλληλα με τη δημιουργία του πίνακα C υλοποιήσαμε τον πίνακα πρόσπτωσης AI. Αριθμήσαμε τους κλάδους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Εικόνα 4.5: Πλέγμα τροφοδοσίας 6X6 με οριζόντια αρίθμηση κλάδων.

Ανάλογα με το αν ο εκάστοτε κλάδος εισέρχεται ή εξέρχεται από ένα κόμβο δώσαμε τιμή 1 ή -1 αντίστοιχα στην ανάλογη θέση του πίνακα AI. Ξεκινήσαμε υπολογίζοντας πρώτα τις τιμές για τους οριζόντιους κλάδους και τους κάθετους, όπως ακριβώς φαίνεται στην Εικόνα 4.2 και στη συνέχεια για τους αυτούς που συνδέονται άμεσα με τις σταθερές πηγές τάσης (Ενότητα 6.2: Σειρές 46-76).

Για τη δημιουργία του πίνακα συστήματος A και σύμφωνα με τις πράξεις μεταξύ των blocks (block operations) που αναπτύξαμε στην Ενότητα 3 έπρεπε πρώτα να αναπτύξουμε τον πίνακα K του συστήματος. Για τη δημιουργία του K αρχικά διαιρέσαμε τον L με το βήμα δειγματοληψίας $h=10$, προσθέσαμε το διαγώνιο πίνακα των αντιστάσεων R (Εικόνα 4.3) και έπειτα αντιστρέψαμε αυτό το αποτέλεσμα (Ενότητα 6.2: Σειρά 84). Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον K σε συνδυασμό με τους πίνακες πρόσπτωσης AI και χωρητικότητας C δημιουργήσαμε τον A (Ενότητα 6.2: Σειρά 87).

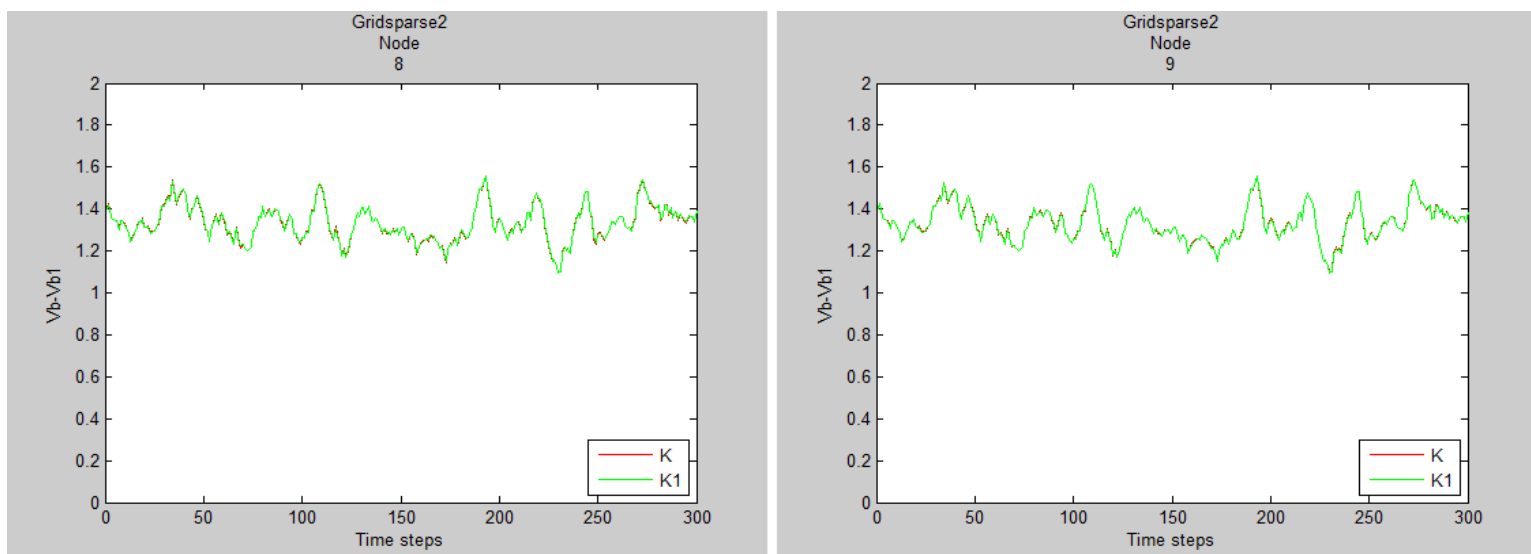
Στη συνέχεια δημιουργήσαμε τον τριδιαγώνιο του K, τον K1 (Ενότητα 6.2: Σειρές 85, 86) , με μέγεθος 62×62 και με μη-μηδενικά στοιχεία μόνο στις 3 κύριες διαγώνιους του. Το γεγονός αυτό τον κατέστησε έναν αραιό πίνακα, σε αντίθεση με τον K που ήταν πυκνός. Έτσι χρησιμοποιώντας τον K1 όπως χρησιμοποιήσαμε πριν τον K προέκυψε ένας δεύτερος πίνακας συστήματος, ο A1 (Ενότητα 6.2: Σειρά 88).

Έχοντας υπολογίσει λοιπόν όλα τα παραπάνω υλοποιήσαμε τη μεταβατική ανάλυση δύο φορές για όλα τα πιθανά ρεύματα διέγερσης. Την πρώτη φορά επιλέξαμε τον πλήρη πίνακα αμοιβαίων επαγωγών K και τη δεύτερη φορά τον τριδιαγώνιο του, τον K1 (Ενότητα 6.2: Σειρές 89-95).

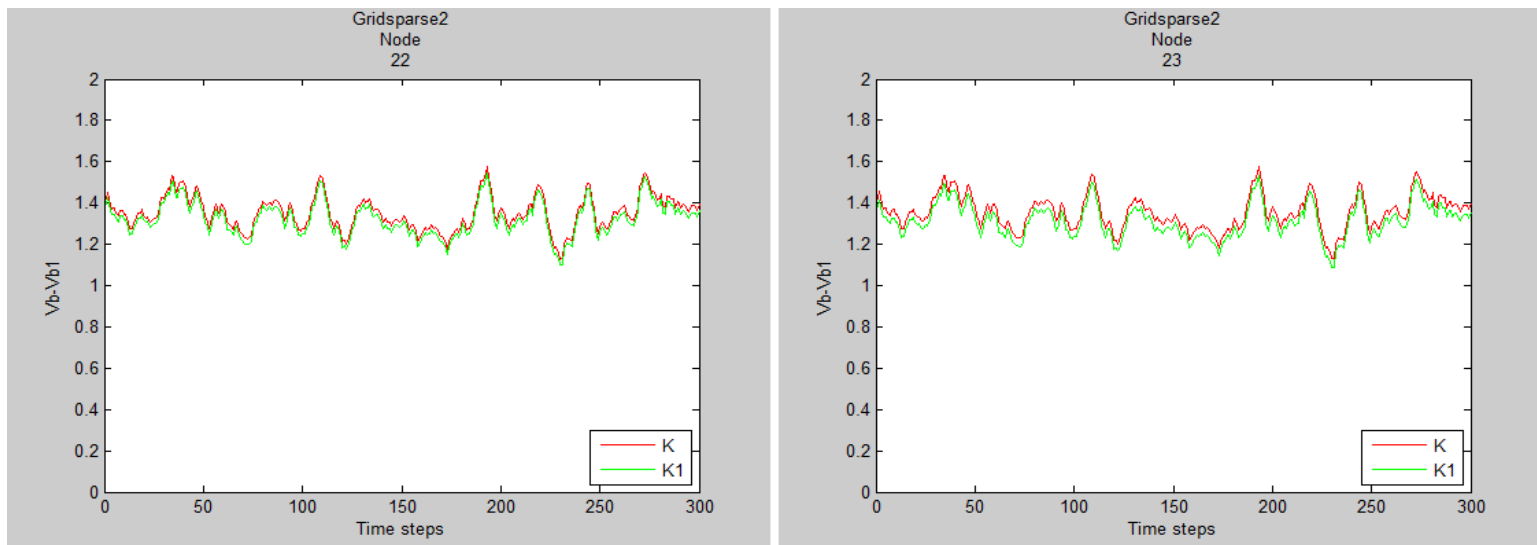
5. Πειραματικά Αποτελέσματα

Για να αποδείξουμε την ακρίβεια αλλά και την εγκυρότητα της μεθοδολογίας μας για την ανάλυση των συστημάτων τροφοδοσίας, χρησιμοποιήσαμε το παράδειγμα με τους 5 διαύλους που φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Πιο συγκεκριμένα, υλοποιήσαμε τη μεταβατική ανάλυση για όλα τα πιθανά ρεύματα διέγερσης που περιέχονται στο αρχείο «currents25000.txt» (βλ Ενότητα 6.2: Σειρά 1), χρησιμοποιώντας μια τον K και μια τον K1. Σαν αποτέλεσμα, προέκυψαν οι αντίστοιχες τιμές τάσεων V_b και V_{b1} , τις οποίες και συγκρίναμε για κάθε ένα κόμβο από τους 36 του συστήματος. Έπειτα απεικονίσαμε γραφικά τη σύγκριση αυτή για το χρονικό διάστημα 1-4700sec. Ο κώδικας για την αναπαράσταση αυτή βρίσκεται στην Ενότητα 6.2: Σειρές 96-109. Για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων εξάγαμε γραφικές παραστάσεις για τα χρονικά υποδιαστήματα 1300-1600, 2800-3000, 4400-4700 sec.

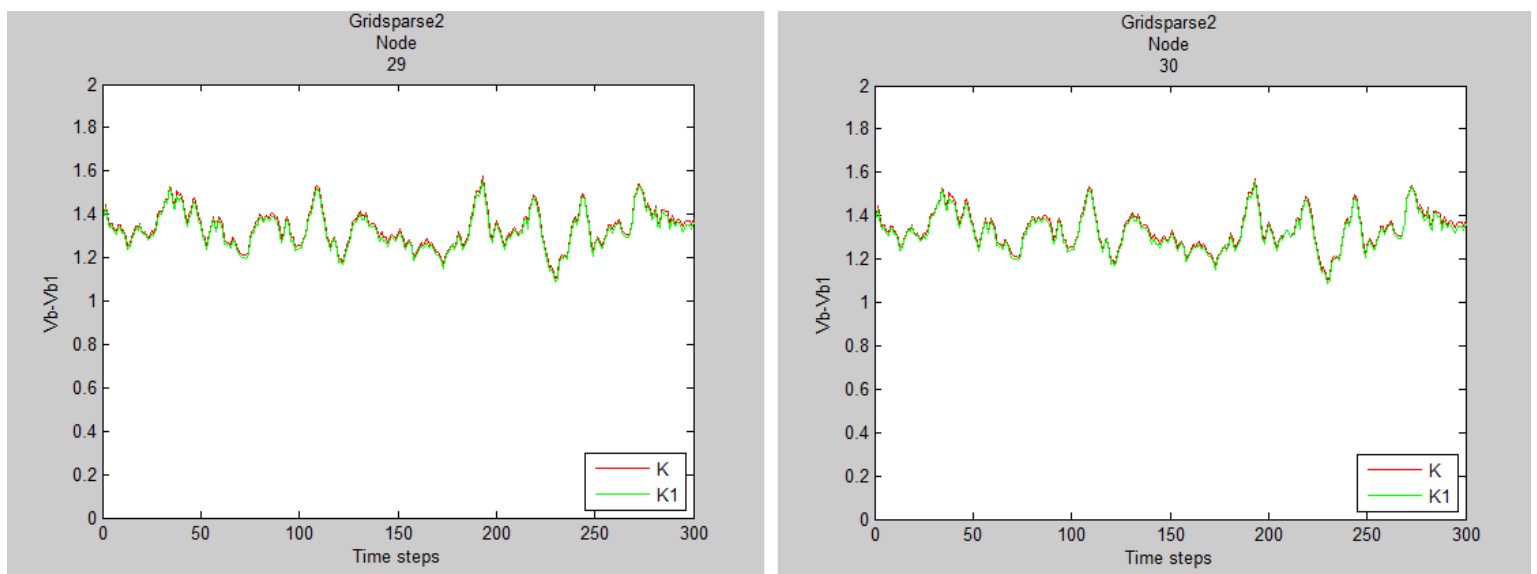
❖ Για το χρονικό διάστημα 1300-1600



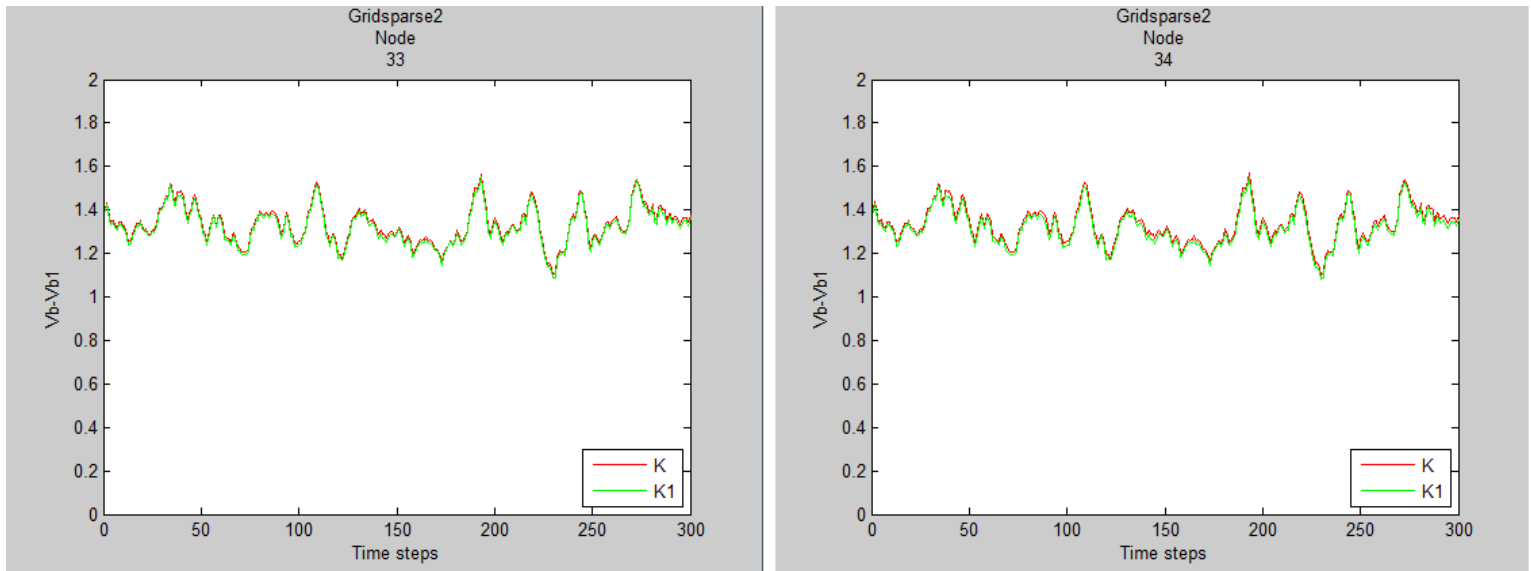
Εικόνα 5.1: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 8 και 9.



Εικόνα 5.2: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 22 και 23.

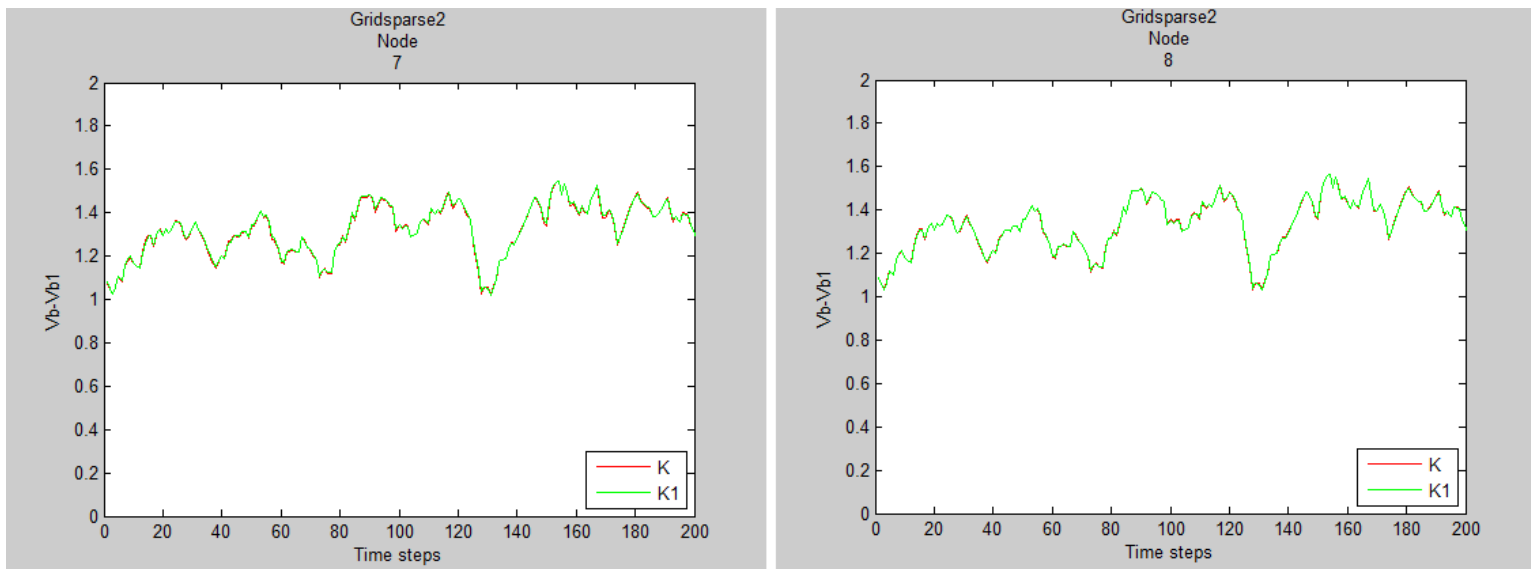


Εικόνα 5.3: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 29 και 30.

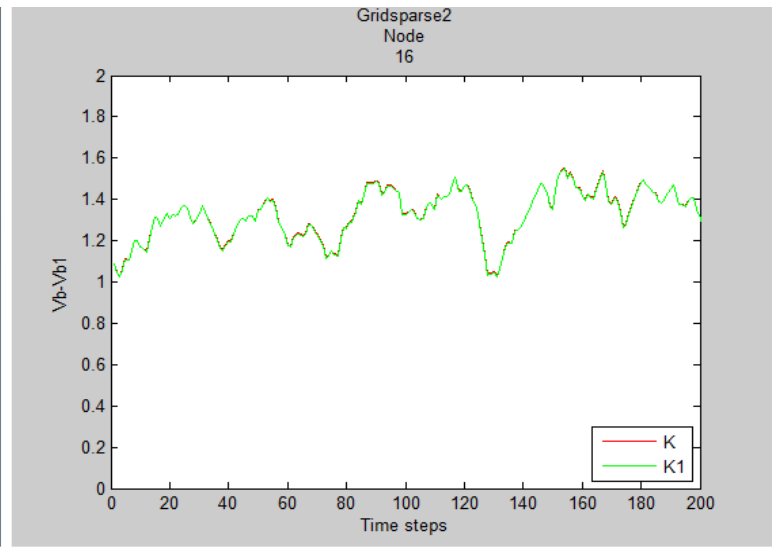
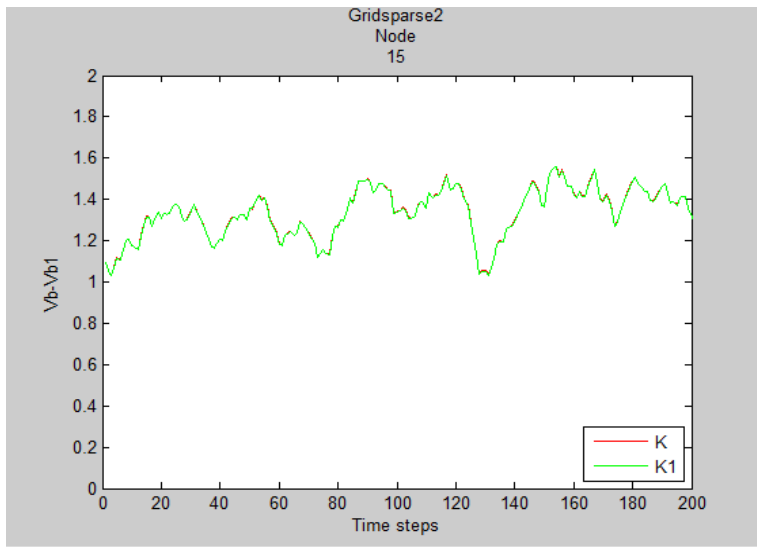


Εικόνα 5.4: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 33 και 34.

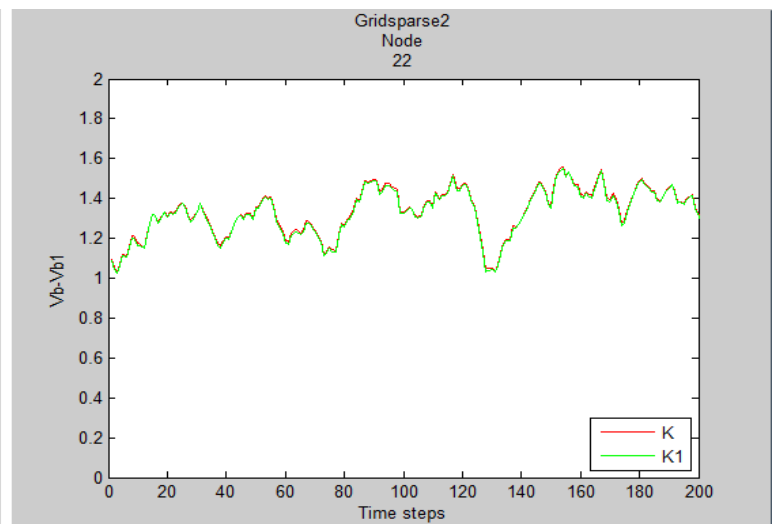
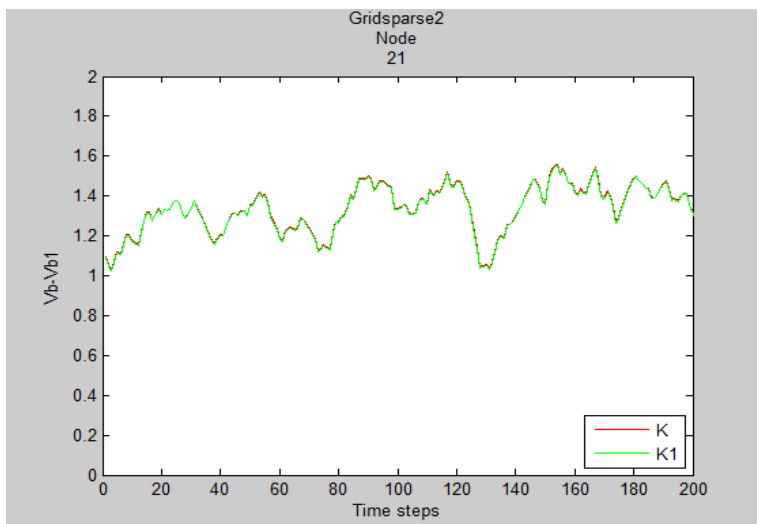
❖ Για το χρονικό διάστημα 2800-3000



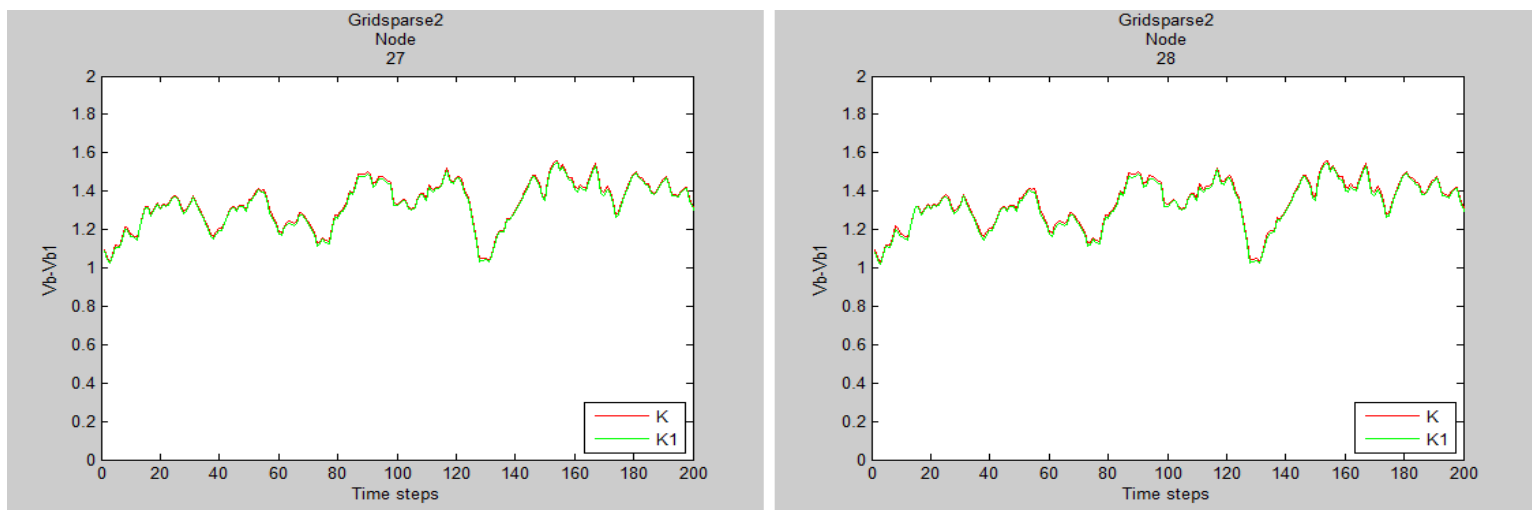
Εικόνα 5.5: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 7 και 8.



Εικόνα 5.6: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 15 και 16.

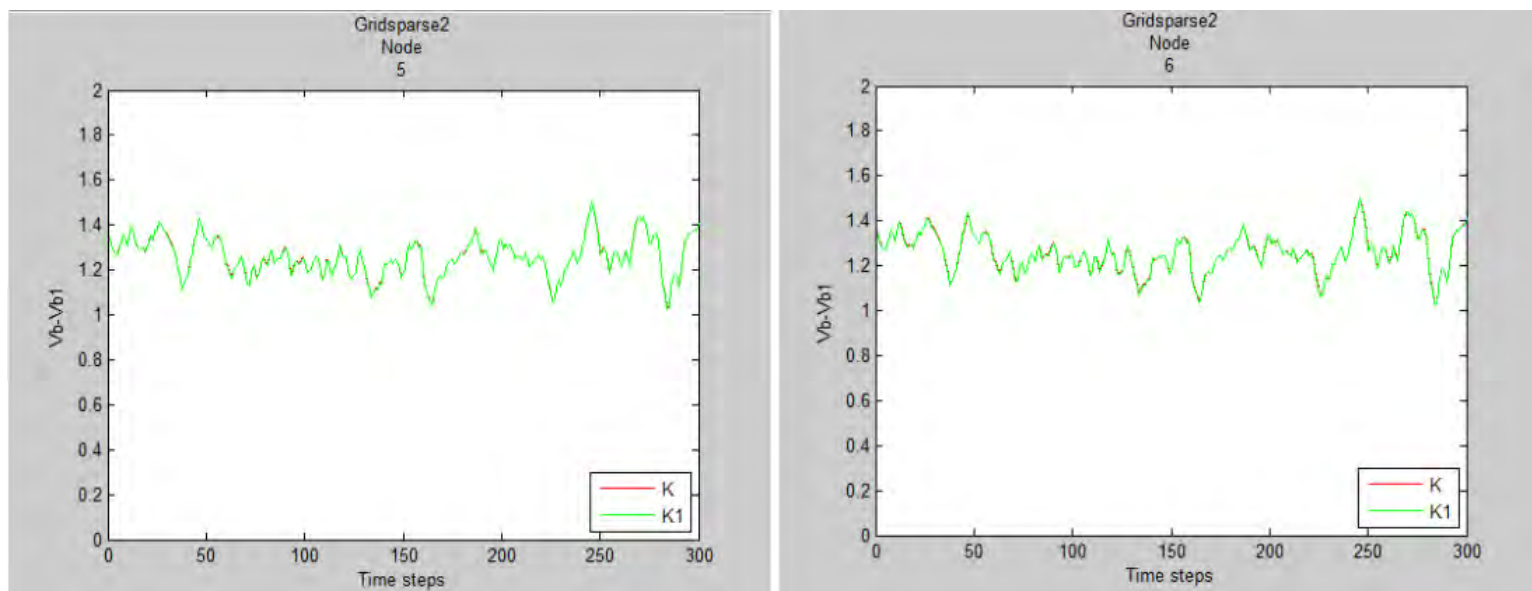


Εικόνα 5.7: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 21 και 22.

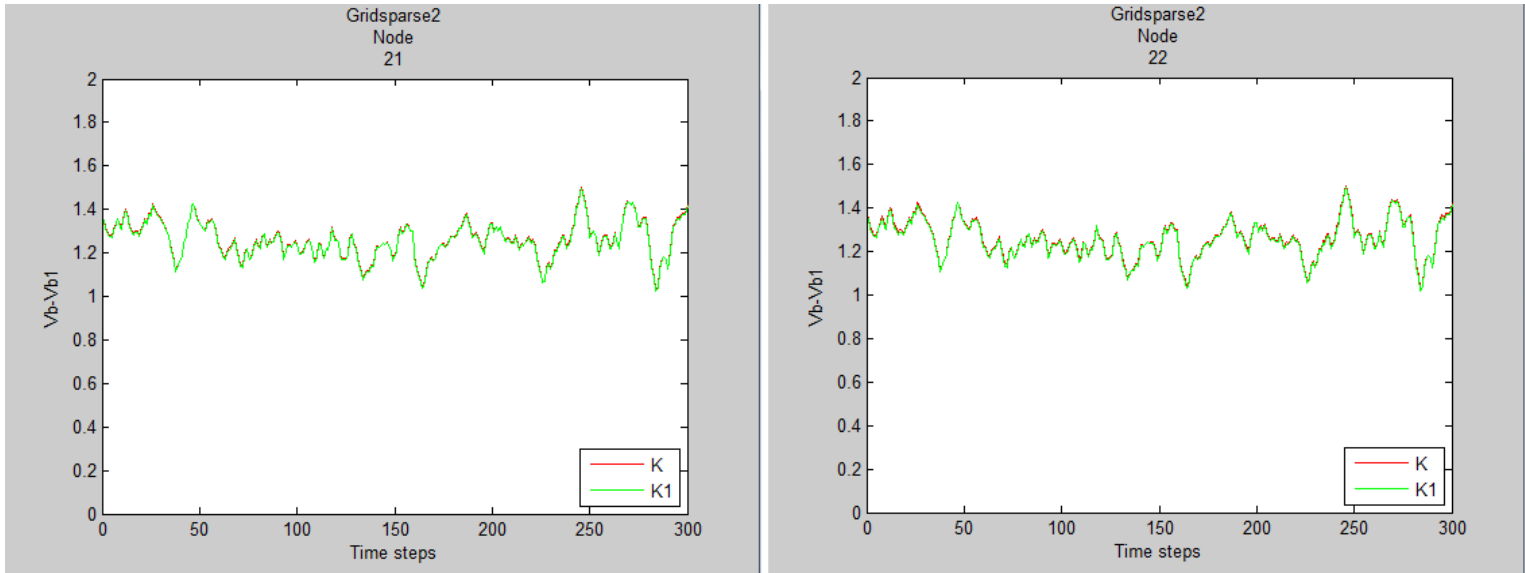


Εικόνα 5.8: Γραφική απεικόνιση των τάσεων V_b-V_{b1} για τους κόμβους 27 και 28.

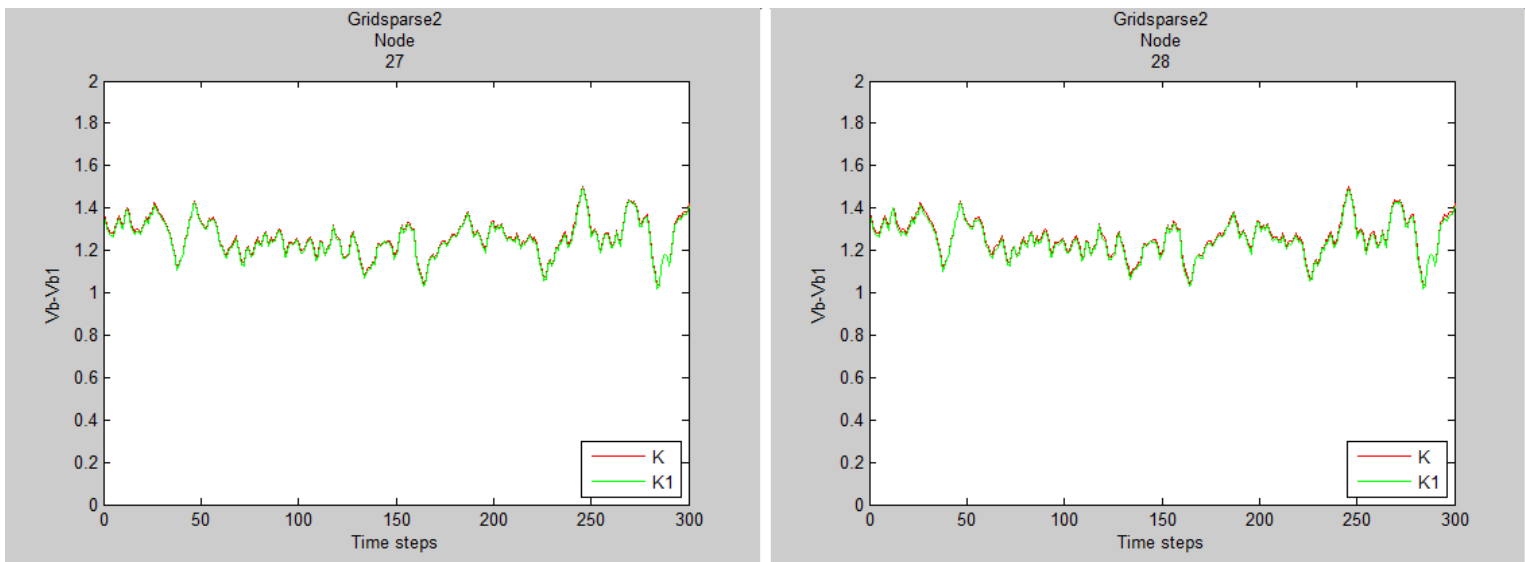
❖ Για το χρονικό διάστημα 4400-4700



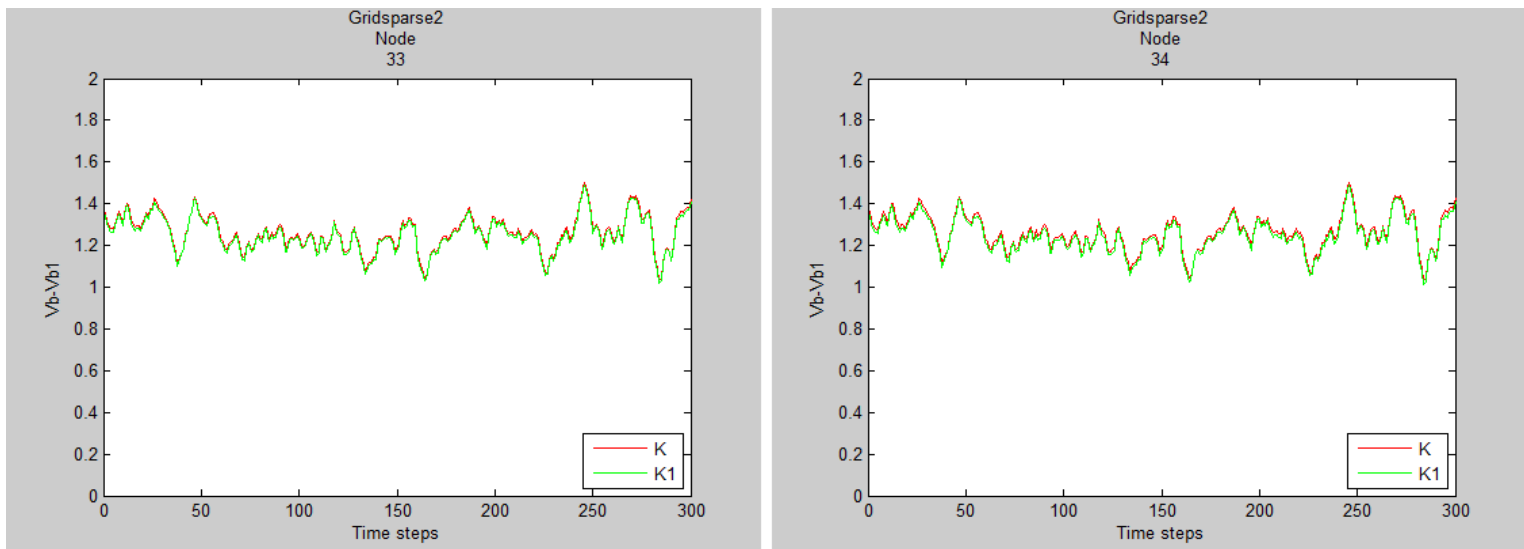
Εικόνα 5.9: Γραφική απεικόνιση των τάσεων V_b-V_{b1} για τους κόμβους 5 και 6.



Εικόνα 5.10: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 21 και 22.



Εικόνα 5.11: Γραφική απεικόνιση των τάσεων $V_b - V_{b1}$ για τους κόμβους 27 και 28.



Εικόνα 5.12: Γραφική απεικόνιση των τάσεων V_b-V_{b1} για τους κόμβους 33 και 34.

Παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη και μάλιστα σε αρκετά χρονικά διαστήματα συμπίπτουν. Επομένως, οι τιμές των V_b , V_{b1} είναι σχεδόν ίδιες, γεγονός που αποδεικνύει πως είτε χρησιμοποιήσουμε τον K είτε τον K1 στη μεταβατική ανάλυση, τα αποτελέσματα διαφέρουν ελάχιστα.

Το συμπέρασμα αυτό σε συνδυασμό με τις ιδιότητες του K1 καθιστά τον K1 έναν αρκετά χρήσιμο πίνακα για την προσομοίωση της αμοιβαίας επαγωγής σε κυκλώματα τροφοδοσίας. Πιο συγκεκριμένα, επειδή είναι διαγώνια κυρίαρχος δεν χρειάζεται να λάβουμε υπ' όψιν μας όλους τους κόμβους του συστήματος, παρά μόνο ένα μικρό αριθμό από τους γειτονικούς, με αποτέλεσμα να είναι ένας αραιός πίνακας. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας τον αντί του K για την προσομοίωση της αμοιβαίας επαγωγής, εξοικονομούμε ένα μεγάλο ποσό του χρόνου της CPU και της χρήσης της μνήμης. Αυτή η νέα ιδέα επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα της παραπάνω προσομοίωσης και παρουσιάζει εκτός από υψηλή αποδοτικότητα και αξιοσημείωτη ακρίβεια, με ένα αρκετά μικρό μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Ο κώδικας για τον υπολογισμό του σφάλματος αυτού βρίσκεται στην Ενότητα 6.2: Σειρές 110-115, ενώ το διάγραμμα των σφαλμάτων που προκύπτει είναι το εξής:

total_error =

1.2922

1.7925

2.4349

3.1594

3.6018

3.5229

0.5789

1.0268

1.8398

2.7053

3.3187

3.6154

0.8552

0.3099

1.3352

2.3093

3.1469

3.7368

1.6246

0.4555

0.8806

1.9610

2.8771

3.6537

1.7635

0.7173

0.7680

1.8216

2.6990

3.4341

1.5664

0.6357

0.7034

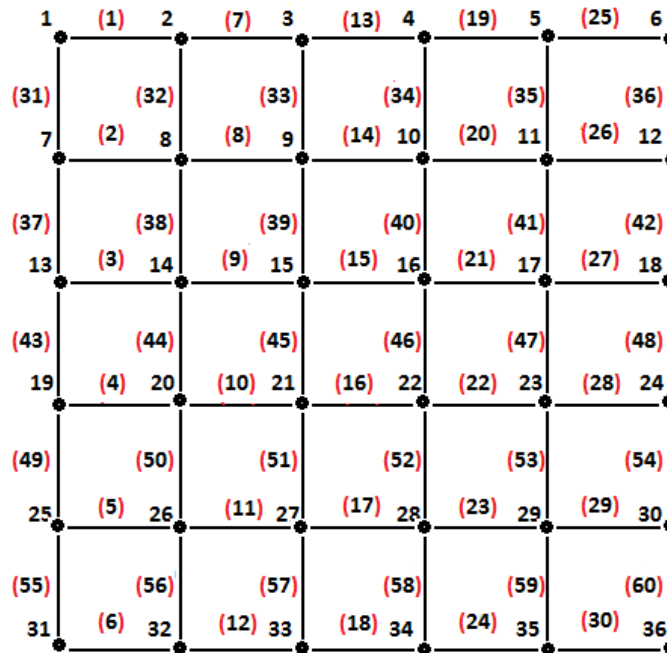
1.6788

2.5308

3.0974

Εικόνα 5.13: Συνολικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα που προκύπτει από τη μεταβατική ανάλυση

Στην προσπάθεια μας να αποδείξουμε ότι η χρήση του K είναι πιο αποδοτική σε σχέση με τη χρήση του L για την προσομοίωση της αμοιβαίας επαγωγής σε κυκλώματα τροφοδοσίας, δοκιμάσαμε μια διαφορετική υλοποίηση για την αρίθμηση του πίνακα πρόσπτωσης. Αντί να αριθμήσουμε τους κλάδους οριζόντια όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.5, προτιμήσαμε την κάθετη αρίθμηση όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 5.14: Πλέγμα τροφοδοσίας 6X6 με κάθετη αρίθμηση κλάδων.

Ο κώδικας για την κάθετη αρίθμηση βρίσκεται στην Ενότητα 6.3. Ωστόσο, παρατηρήσαμε πως αν και η απόσταση μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων μετά τη μεταβατική ανάλυση είναι αρκετά μικρή, δεν είναι μικρότερη από αυτή που προέκυψε από την οριζόντια αρίθμηση των κλάδων. Για το λόγο αυτό προτιμήσαμε την οριζόντια αρίθμηση όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.5.

Η ακριβής συγγραφή του κώδικα και η γραφική απεικόνιση των παραπάνω αποτελεσμάτων έγιναν σε MATLAB, ενώ ολόκληρος ο κώδικας βρίσκεται στην Ενότητα 6.2.

6. Παράρτημα –Κώδικας

6.1 Πίνακας αμοιβαίων επαγωγών L

6.2 Κώδικας για οριζόντια αρίθμηση

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προτεινόμενη μεθοδολογία είναι ο εξής:

```

1. load currents25000.txt      %file with possible current excitations
2. N=size(currents25000);
3. n1=6;          %number of vertical lines in the grid
4. n2=6;          %number of horizontal lines in the grid
5. vn=2;          %number of voltage sources
6. n=n1*n2;      %number of nodes
7. b=n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+vn; %number of branches
8. Is=zeros(n1*n2,4700);    %current excitations from gates
9. Is(1,:)=currents25000(1:4700);
10. Is(8,:)=currents25000(4701:9400);
11. Is(15,:)=currents25000(9401:14100);
12. Is(22,:)=currents25000(14101:18800);
13. Is(29,:)=currents25000(18801:23500);

14. Ib=zeros(b,1);
15. Vb=zeros(n1*n2,5000);
16. Ibl=zeros(b,1);
17. Vbl=zeros(n1*n2,5000);

18. %inductance matrix
L=[11.4 4.26 2.54 1.79 1.38 4.26 2.54 1.79 1.38 0 2.54 1.79 1.38 0 0
1.79 1.38 0 0 0 1.38 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4.26 11.4 4.26 2.54 1.79 2.54 4.26 2.54 1.79 1.38 1.79 2.54 1.79 1.38 0
1.38 1.79 1.38 0 0 1.38 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2.54 4.26 11.4 4.26 2.54 1.79 2.54 4.26 2.54 1.79 1.38 1.79 2.54 1.79
1.38 0 1.38 1.79 1.38 0 0 1.38 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1.79 2.54 4.26 11.4 4.26 1.38 1.79 2.54 4.26 2.54 0 1.38 1.79 2.54
1.79 0 0 1.38 1.79 1.38 0 0 0 1.38 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1.38 1.79 2.54 4.26 11.4 0 1.38 1.79 2.54 4.26 0 0 1.38 1.79
2.54 0 0 0 1.38 1.79 0 0 0 0 1.38 0 0 0

```


0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0	
1.38	1.79	1.38	0	0	0	1.38	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.54	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0
1.38	1.79	1.38	0	0	0	1.38	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	0	1.38	1.79	2.54	1.79	0
0	1.38	1.79	1.38	0	0	0	1.38	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	1.79	2.54	4.26	11.4	0	1.38	1.79	2.54	4.26	0	0	1.38	1.79	2.54	0
0	0	1.38	1.79	0	0	0	0	1.38	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.26	2.54	1.79	1.38	0	11.4	4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	2.54	1.79	1.38	0	
2.54	1.79	1.38	0	0	1.79	1.38	0	0	0	1.38	0	0	0	0	
0	0														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	
1.79	2.54	1.79	1.38	0	1.38	1.79	1.38	0	0	0	1.38	0	0	0	
0	0														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	
1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0	1.38	1.79	1.38	0	0	0	1.38	0	0	
0	0														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	1.79	2.54	4.26	1.38	1.79	2.54	4.26	11.4	0	1.38	1.79	2.54	4.26	0	0
1.38	1.79	2.54	0	0	0	1.38	1.79	0	0	0	0	1.38	0	0	
0	0														
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.54	1.79	1.38	0	0	4.26	2.54	1.79	1.38	0	11.4	4.26	2.54	1.79	1.38	

4.26	2.54	1.79	1.38	0	2.54	1.79	1.38	0	0	1.79	1.38	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.79	2.54	1.79	1.38	0	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79
2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0	1.38	1.79	1.38	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	2.54
1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0	1.38	1.79	1.38	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	1.38
1.79	2.54	4.26	2.54	0	1.38	1.79	2.54	1.79	0	0	1.38	1.79	1.38	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.38	1.79	2.54	0	1.38	1.79	2.54	4.26	1.38	1.79	2.54	4.26	11.4	0
1.38	1.79	2.54	4.26	0	0	1.38	1.79	2.54	0	0	0	1.38	1.79	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.79	1.38	0	0	0	2.54	1.79	1.38	0	0	4.26	2.54	1.79	1.38	0
11.4	4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	2.54	1.79	1.38	0	2.54	1.79	1.38	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	1.79	1.38	0	0	1.79	2.54	1.79	1.38	0	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38
4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.38	1.79	1.38	0	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79
2.54	4.26	11.4	4.26	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	0	1.38	1.79	2.54	1.79	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.38	1.79	0	0	1.38	1.79	2.54	0	1.38	1.79	2.54	4.26	1.38
1.79	2.54	4.26	11.4	0	1.38	1.79	2.54	4.26	0	0	1.38	1.79	2.54	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	0	0	0	0	1.79	1.38	0	0	0	2.54	1.79	1.38	0	0	0
4.26	2.54	1.79	1.38	0	11.4	4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	2.54	1.79	1.38	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.38	0	0	0	1.38	1.79	1.38	0	0	1.79	2.54	1.79	1.38	0	2.54	0
4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.38	0	0	0	1.38	1.79	1.38	0	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	1.79	0
2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.38	0	0	0	1.38	1.79	1.38	0	1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	0
1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.38	0	0	0	1.38	1.79	0	0	1.38	1.79	2.54	0	0
1.38	1.79	2.54	4.26	1.38	1.79	2.54	4.26	11.4	0	1.38	1.79	2.54	4.26	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1.38	0	0	0	0	1.79	1.38	0	0	0	0	0
2.54	1.79	1.38	0	0	4.26	2.54	1.79	1.38	0	11.4	4.26	2.54	1.79	1.38	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1.38	0	0	0	1.38	1.79	1.38	0	0	0	0
1.79	2.54	1.79	1.38	0	2.54	4.26	2.54	1.79	1.38	4.26	11.4	4.26	2.54	1.79	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1.38	0	0	0	1.38	1.79	1.38	0	0
1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1.38	0	0	0	1.38	1.79	1.38	0	0
1.38	1.79	2.54	1.79	1.38	1.79	2.54	4.26	2.54	1.79	2.54	4.26	11.4	4.26	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

```

0 0 0 0 0 0 0 0 1.38 0 0 0 1.38 1.79 0
0 1.38 1.79 2.54 0 1.38 1.79 2.54 4.26 1.38 1.79 2.54 4.26 11.4 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 100 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
100];

```

```

19. nper=randperm(n);
20. ivn=nper(:,1:vn);           %node identifiers (random) where
21.                               %voltage sources are placed

22. rsh=0.1;                   %horizontal sheet resistance (in Ohms/sq)
23. rsv=0.1;                   %vertical sheet resistance (in Ohms/sq)
24. lsh=0.2;                   %horizontal inductance per unit length (in pH/um)
25. lsv=0.2;                   %vertical inductance per unit length (in pH/um)
26. sizv=350;                  %vertical size of chip (in um)
27. sizh=350;                  %horizontal size of chip (in um)
28. pv=sizh/(n1-1);           %pitch of vertical lines
29. ph=sizv/(n2-1);           %pitch of horizontal lines
30. rpin=50;                   %Vdd pin resistance in Ohms
31. lpin=100;                  %pin inductance (in pH)
32. cpph=1e-4;                 %horizontal cpp capacitance in pF/um^2
33. cppv=1e-4;                 %vertical cpp capacitance in pF/um^2
34. cffh=1e-4;                 %horizontal cff capacitance in pF/um
35. cffv=1e-4;                 %vertical cff capacitance in pF/um
36. cpin=0.01;                 %pin capacitance in pF
37. w=ceil(10*rand([n2+n1 1])); %ones(n2+n1,1); %vector of widths
38.                               %of horizontal and vertical lines

39. h=10;                       %sampling step (in ps)

40. %capacitance and incidence matrix

41. ch= repmat(cpph*pv*w(1:n2, :)+cffh*pv, 1, n1-1); %horizontal branch
42. %capacitances
43. cv= repmat(cppv*ph*w(n2+1:n2+n1, :)+cffv*ph, 1, n2-1); %vertical branch

```

```

44. %capacitances
45. C=sparse(n,n);
46. A1=sparse(n,b);

47. %enumerate horizontal branches
48. for i=1:n2
49.     for j=1:n1-1
50.         ni1=(i-1)*n1+j;           %node indices for current branch
51.         ni2=ni1+1;
52.         ni3=(i-1)*(n1-1)+j;     %branch index conversion from 2D to 1D
53.         C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*ch(i,j);
54.         C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*ch(i,j);
55.         A1(ni1,ni3)=1;
56.         A1(ni2,ni3)=-1;
57.     end
58. end

59. %enumerate vertical branches
60. for i=1:n1
61.     for j=1:n2-1
62.         ni1=(j-1)*n1+i;           %node indices for current branch
63.         ni2=ni1+n1;
64.         ni3=(i-1)*(n2-1)+j+n2*(n1-1); %branch index conversion from
65.                                         %2D to 1D
66.         C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*cv(i,j);
67.         C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*cv(i,j);
68.         A1(ni1,ni3)=1;
69.         A1(ni2,ni3)=-1;
70.     end
71. end

72. %enumerate supply branches
73. for i=1:vn
74.     C(ivn(i),ivn(i))=C(ivn(i),ivn(i))+cpin;
75.     A1(ivn(i),n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+i)=-1;
76. end

77. %resistance matrix
78. rh=repmat(rsh*pv./w(1:n2,:),1,n1-1); %horizontal branch
79. %resistances
80. rv=repmat(rsv*ph./w(n2+1:n2+n1,:),1,n2-1); %vertical branch

```

```

81. %resistances
82. rb=[ reshape(rh',n2*(n1-1),1); reshape(rv',n1*(n2-1),1); rpin*ones(vn,1)];

83. R=diag(rb);

84. K= inv(L/h+R);           % matrix(R+L/h)^-1
85. Ktriu=triu(K,-1);       % conversion of K1 to triangular
86. K1=tril(Ktriu,1);

87. A=(A1*K*A1'+C/h);       %incidence matrix
88. A1=(A1*K1*A1'+C/h);

89. %system matrix for transient analysis
90. for m= 2:4700
91.     Vb(:,m) = A\ (Is(:,m)+(C/h)*Vb(:,m-1)-A1*K*(L/h*Ib));
92.     Ib = K*A1'*Vb(:,m)+K*(L/h)*Ib;

93.     Vb1(:,m) = A1\ (Is(:,m)+(C/h)*Vb1(:,m-1)-A1*K1*(L/h*Ib1));
94.     Ib1 = K1*A1'*Vb1(:,m)+K1*(L/h)*Ib1;
95. end

96. %plot for transient analysis
97.     for il=1:36
98.         figure;
99.         plot(Vb(il,1:200),'r')
100.        axis([300 500 0 2.0])
101.        hold on
102.        plot(Vb1(il,1:200),'g')
103.        axis([300 500 0 2.0])
104.        xlabel('Time steps')
105.        ylabel(' Vb-Vb1 ')
106.        title({'Gridsparse2';'Node';il})
107.        legend ('K','K1',4)
108.        hold off
109.    end

110. %calculation of Mean Square Error
111. sum=zeros(n1*n2,1);
112. for i2=1:4700
113.     sum=sum+(Vb1(:,i2)-Vb(:,i2)).^2;
114. end

```

```
115. total_error=sqrt(sum);
```

6.3 Κώδικας για κάθετη αρίθμηση

Ο κώδικας για την κάθετη αρίθμηση είναι ίδιος με αυτόν της οριζόντιας αρίθμησης εκτός από τις γραμμές 47-76. Για αυτό το λόγο παραθέτουμε μόνο τον κώδικα που διαφέρει, ο οποίος είναι ο εξής:

```
%enumerate horizontal branches
for i=1:n1-1
    for j=1:n2
        ni1=(j-1)*n1+i;    %node indices for current branch
        ni2=ni1+1;
        ni3=(i-1)*n2+j;    %branch index conversion from 2D to 1D
        C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*ch(j,i);
        C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*ch(j,i);
        Al(ni1,ni3)=1;
        Al(ni2,ni3)=-1;

    end
end

%enumerate vertical branches
for i=1:n2-1
    for j=1:n1
        ni1=(i-1)*n1+j;    %node indices for current branch
        ni2=ni1+n1;
        ni3=(i-1)*n1+j+n2*(n1-1); %branch index conversion from 2D to 1D
        C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*cv(j,i);
        C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*cv(j,i);
        Al(ni1,ni3)=1;
        Al(ni2,ni3)=-1;

    end
end

%enumerate supply branches
for i=1:vn
    C(ivn(i),ivn(i))=C(ivn(i),ivn(i))+cpin;
    Al(ivn(i),n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+i)=-1;
end
```


7. Βιβλιογραφία

- [1] E. B. Rosa. “ The self and mutual inductance of linear conductors “. *Bulletin of the National Bureau of Standards.*, pages 301 344, 1908.
- [2] A. E. Ruehli. “ Inductance calculations in a complex integrated circuit environment”, *IBM Journal of Research and Development.*, pages 470 481 , September 1972.
- [3] Z. Feng, Z. Zeng, and P. Li, “ Parallel On-Chip Power Distribution Network Analysis on Multi-Core-Multi-GPU Platforms, ” *IEEE Trans. VLSI Syst.*, vol. 19, no. 10, pp. 1823–1836, 2011.
- [4] J. Shi, Y. Cai, S. X.-D. Tan, J. Fan, and X. Hong, “ Pattern-Based Iterative Method for Extreme Large Power/Ground Analysis,” *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 26, no. 4, pp. 680–692, 2007.
- [5] A. Ruehli (ed.), *Circuit Analysis, Simulation and Design*, North-Holland, 1986.
- [6] M. Kamon. M. J. Tsuk and J. K. White “ FASTHENRY: A multipole-accelerated 3-D inductance extraction program, ” *IEEE Trans. On MTT*, pp. 216-220, Sept 1994.
- [7] H. Ji. A. Devgan, and W. Dai, “ KSim: A stable and efficient RKC simulator for capturing on chip inductance effect ”, *UCSC Technique Report*, UCSC-CRL 00010, Apr. 2000.
- [8] A. Devgan, H. Ji, and W. Dai, “ How to efficiently capture on-chip inductance effect: Introducing a new circuit element K, ” in Proc. IEEE International Conference on Computer Aided Design, pp. 150–155, Nov. 2000.
- [9] K. Daloukas, N. Evmorfopoulos, G. Drasidis, M. Tsiampas, P. Tsompanopoulou, G. I. Stamoulis “Fast Transform-Based Preconditioners for Large-Scale Power Grid Analysis on Massively Parallel Architectures”, Department of Computer and Communications Engineering, University of Thessaly, Volos, Greece , 2012.
- [10] N. Evmorfopoulos, M. Rammou, G. Stamoulis, J. Moondanos, “Characterization of the Worst-Case Current Waveform Excitations in General RLC-Model Power Grid Analysis”, Department of Computer and Communications Engineering, University of Thessaly, Volos, Greece, 2010.
- [11] Y. Du, W. Dai, “ Partial Reluctance Based Circuit Simulation Is Efficient and Stable ”, School of Engineering, U.C. Santa Cruz, Santa Cruz, CA95064 , 2005.
- [12] T.-H. Chen, C. Luk, H. Kim, and C. C.-P. Chen. “ Inductwise: Inductance-wise interconnect simulator and extractor”, ICCAD, Nov 2002.

- [13] Y. Tanji, T. Watanabe, H. Asai, " Generating Stable and Sparse Reluctance/Inductance Matrix under Insufficient Conditions ", IEEE, 2008.
- [14] M. W. Beattie, L. T. Pillegi, " On-chip Induction Modelling: Basics and Advanced Methods ", IEEE Trans. on very large scale integration (VLSI) Systems, vol.10 , no.6, December 2002.
- [15] R. Jiang, C. Chung-Ping Chen, " SCORE:SPICE COmpatible Reluctance Extraction", National Science Council of Tailwan, R.O.C,2004.
- [16] D. D. Ling and A. E. Ruehli, " *Circuit Analysis, Simulation and Design—Advances in CAD for VLSI*", Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V., 1987.
- [17] D. J. Griffiths (ed), " Introduction to Electrodynamics ", Second Edition, Prentice-Hall, International, 1989-1997.