

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΜΑΡΘΑ

**Ανάλυση χρονικής απόκρισης δικτύων
τροφοδοσίας ολοκληρωμένων
κυκλωμάτων με άμεσες και
επαναληπτικές μεθόδους**

Επιβλέποντες Καθηγητές:

Ευμορφόπουλος Νέστορας

Σταμούλης Γεώργιος

Σεπτέμβριος 2010

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	6
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
1.1 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ	9
1.2 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΜΕ ΔΟΜΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ	10
2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ	12
2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ	12
2.2 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	16
2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΑΚΤΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ	17
3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	21
3.1 ΜΕΘΟΔΟΣ LU	21
3.1.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	21
3.1.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	23
3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ CHOLESKY	23
3.2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	24
3.2.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	25
3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI	26
3.3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	26
3.3.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	28
3.3.3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΗΣΗΣ	28
3.4 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL	29
3.4.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	29
3.4.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	30
3.5 ΜΕΘΟΔΟΣ SOR (ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΗΣ ΥΠΕΡ – ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ)	31
3.5.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	31
3.5.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	33
3.6 ΜΕΘΟΔΟΣ GMRES (ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ)	33
3.6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	34
3.6.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	35
3.7 ΜΕΘΟΔΟΣ PCG (ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΥΓΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ)	36
3.7.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	36
3.7.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	36
4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΜΠΛΟΚ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	38

4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ TRIDIAGONAL MATRIX ALGORITHM (ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ)	38
4.1.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	38
4.1.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	42
4.1.3 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	44
4.1.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕ ΜΠΛΟΚ	44
4.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ODD EVEN REDUCTION(ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ ΖΥΓΩΝ)	45
4.2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ	46
4.2.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ	47
4.2.3 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ	50
4.2.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ ΖΥΓΩΝ ΓΙΑ ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕ ΜΠΛΟΚ	51
5. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ	53
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	64
6.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	64
6.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	64
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΚΩΔΙΚΑΣ ΜΑΤΛΑΒ	65
A. ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ	65
B. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ JACOBI	68
C. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GAUSS-SEIDEL	68
D. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SOR	69
E. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ	70
F. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ	72
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ	77

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο προορισμός του δικτύου τροφοδοσίας ισχύος είναι να διανέμει τις τάσεις τροφοδοσίας και γείωσης σε όλη τη σχεδίαση. Στις καινούργιες και χαμηλότερες τεχνολογίες, καθώς περιορίζονται οι διαστάσεις, μεγαλώνει η συχνότητα και αυξάνεται η κατανάλωση ισχύος, οδηγούμαστε σε μεγάλη ροή ρεύματος στο δίκτυο τροφοδοσίας και γείωσης, κάτι το οποίο επηρεάζει την απόδοση και την αξιοπιστία. Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ανάλυση χρονικής απόκρισης των δικτύων τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων με άμεσες και επαναληπτικές μεθόδους.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο (1^ο) κεφάλαιο περιγράφονται τα δίκτυα διανομής ισχύος και κάποια φαινόμενα που επηρεάζουν την αξιοπιστία και την απόδοση του κυκλώματος. Τα βασικά φαινόμενα που επηρεάζουν την ακεραιότητα τροφοδοσίας είναι η αυξημένη πτώση τάσης (IR-drop) και ο επαγωγικός θόρυβος, τα οποία μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα χρονισμού, ενώ η ηλεκτρομεταμόρφωση επηρεάζει την αξιοπιστία και την απόδοση του κυκλώματος.

Στο δεύτερο (2^ο) κεφάλαιο περιγράφεται το μοντέλο και μεταβατική ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας. Πιο αναλυτικά, εξαιτίας της παρουσίας των C και L στοιχείων σε ένα πλήρες μοντέλο RLC, θα χρησιμοποιηθεί η Τροποποιημένη Μέθοδος των Κόμβων (Modified Nodal Analysis) – αντί για την απλή Μέθοδο των Κόμβων – για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας. Με βάση αυτή την ανάλυση προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Επίσης δίνεται ένα παράδειγμα πρακτικού δικτύου τροφοδοσίας.

Στο τρίτο (3^ο) και τέταρτο (4^ο) κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικότερες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο αναλυτικά από τις άμεσες μεθόδους αναφέρονται οι παραγοντοποιήσεις LU και Cholesky, ενώ από τις επαναληπτικές μεθόδους αναφέρονται οι Jacobi, Gauss-Seidel, Sor, GMRES, PCG, Τριδιαγώνια Μέθοδος Πινάκων και Μέθοδος Αναγωγής Μονών – Ζυγών.

Στο πέμπτο (5^ο) κεφάλαιο παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα της ανάλυσης του δικτύου τροφοδοσίας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρονται λεπτομερώς οι

παράμετροι προσομοίωσης του δικτύου τροφοδοσίας καθώς και τα αποτελέσματα της των δοκιμαστικών εφαρμογών για διάφορα μεγέθη δικτύων.

Στο έκτο (6^ο) και τελευταίο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την προσομοίωση του δικτύου τροφοδοσίας, σχετικά με τους χρόνους που καταγράφηκαν.

Η εκπόνηση της εργασίας αυτής δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τη συμβολή και βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευμορφόπουλου Νέστορα και του καθηγητή κ. Σταμούλη Γεωργίου τους οποίους και θα ήθελα να ευχαριστήσω.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

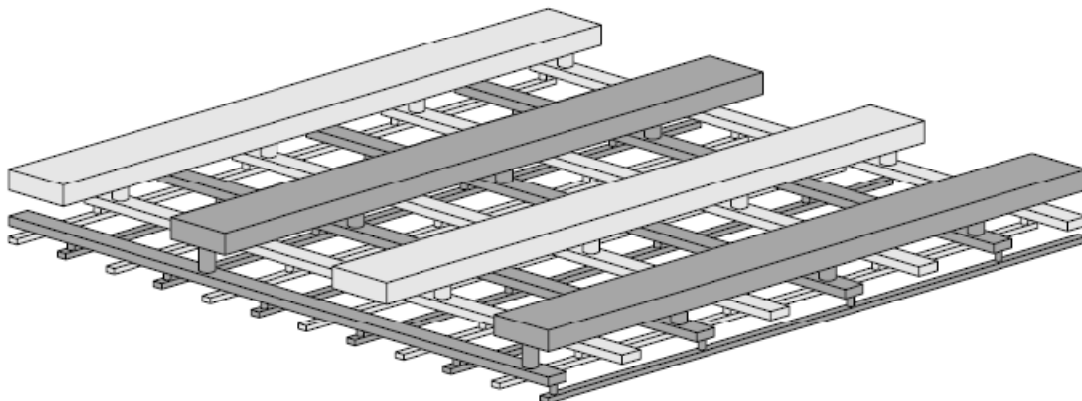
1.1 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Για τους επεξεργαστές υψηλών επιδόσεων, ο σχεδιασμός και η επαλήθευση των δικτύων διανομής ισχύος έχει δημιουργήσει κρίσιμα θέματα. Τα δίκτυα διανομής ισχύος κατανομούν τις τάσεις τροφοδοσίας και γείωσης από τη θέση του υποβάθρου έως όλα τα εξαρτήματα σε μια διάταξη. Καθώς αυτά τα εξαρτήματα διακλαδίζονται και παίρνουν ρεύμα από το δίκτυο διανομής ισχύος, αναπτύσσεται μια πτώση τάσης δια μέσω του δικτύου διανομής ισχύος εξαιτίας της αντίστασής του. Η εκτεταμένη πτώση τάσης σε σημεία διανομής διατάξεων, μπορεί να προκαλέσει προβλήματα που σχετίζονται με την απόδοση και τη λειτουργικότητα. Ένα βασικό πρόβλημα είναι το γεγονός ότι η ελαττωμένη τάση σε μια διάταξη μειώνει την οδήγηση, κατά συνέπεια την απόδοση του επεξεργαστή. Τυπικά, ένας επεξεργαστής έχει σχεδιαστεί με μια αναμενόμενη πτώση τάσης μεταξύ 5% και 10% της τάσης τροφοδοσίας. Η προσομοίωση και χρονική επαλήθευση του επεξεργαστή εκτελούνται καθώς συνυπολογίζεται αυτός ο προϋπολογισμός. Ωστόσο, αν η πτώση τάσης στο δίκτυο ισχύος υπερβεί τον προϋπολογισμό αυτό, θα επιβραδυνθούν οι διατάξεις που είναι κρίσιμες ως προς την ταχύτητα και το ολοκληρωμένο κύκλωμα δεν θα προσεγγίσει τον προτεινόμενο στόχο απόδοσης. Ένα ακόμη πρόβλημα είναι και ο θόρυβος που εισέρχεται στο ολοκληρωμένο κύκλωμα λόγω των διακυμάνσεων της τάσης στα σημεία διανομής ισχύος. Ο θόρυβος που προέρχεται από το δίκτυο ισχύος μπορεί να συγκριθεί με άλλες πηγές θορύβου, όπως ο θόρυβος που προέρχεται από τις χωρητικότητες παράλληλων πλακών, και πρέπει να ληφθούν υπ' όψη κατά την ανάλυση θορύβου στο ολοκληρωμένο κύκλωμα. Επίσης, η υψηλή μέση πυκνότητα του ρεύματος σε ένα δίκτυο διανομής ισχύος οδηγεί σε εκτεταμένη φθορά στα καλώδια μετάλλου, εξαιτίας της ηλεκτρομετανάστευσης. Αν αυτό συμβαίνει για μια αρκετά εκτεταμένη χρονική περίοδο, μπορεί να προκληθεί φθορά στα καλώδια και κατά συνέπεια να αυξήσει την πτώση τάσης στο δίκτυο τροφοδοσίας και να επιφέρει γενική απώλεια ισχύος σε συγκεκριμένα σημεία. Επειδή η ηλεκτρομετανάστευση επιφέρει ιδιαίτερα σοβαρά προβλήματα σε μονοκατευθυντικά ρεύματα, τα δίκτυα διανομής ισχύος είναι επιρρεπή σε προβλήματα αυτής της φύσεως. Ένα ακόμη θέμα που επηρεάζει την απόδοση των δικτύων διανομής ισχύος είναι η περιοδική

ταλάντευση των πηγών τροφοδοσίας που προκύπτει από τον συντονισμό της αυτεπαγωγής του πακέτου και της χωρητικότητας αποσύζευξης που βρίσκεται πάνω στο ολοκληρωμένο κύκλωμα, γεγονός που οδηγεί σε περιοδικές άνω της ονομαστικής τάσεις τροφοδοσίας. Αυτές οι τάσεις άνω του αναμενόμενου προκαλούν φθορά στις πύλες οξειδίου και αλλοιώνουν τα χαρακτηριστικά της διάταξης.

1.2 ΔΙΚΤΥΑ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΜΕ ΔΟΜΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Τα δίκτυα διανομής ισχύος με δομή πλέγματος, όπως φαίνονται στην εικόνα (1), χρησιμοποιούνται ευρέως σε ολοκληρωμένα κυκλώματα αυξημένης πολυπλοκότητας και υψηλών επιδόσεων. Κάθε επίπεδο ενός πλέγματος διανομής ισχύος αποτελείται από πολλές γραμμές ίσου μεγέθους που ισαπέχουν μεταξύ τους. Η κατεύθυνση των γραμμών ισχύος και γείωσης μέσα σε κάθε επίπεδο είναι ορθογώνια στην κατεύθυνση των γραμμών στα γειτονικά επίπεδα. Οι γραμμές ισχύος και γείωσης είναι αλληλοεμπλέκονται μέσα σε κάθε επίπεδο. Κάθε γραμμή ισχύος και γείωσης είναι συνδεδεμένη μέσω άλλων γραμμών ισχύος και γείωσης, αντίστοιχα, στα γειτονικά επίπεδα σε επικαλυπτόμενες θέσεις. Σε ένα τυπικό ολοκληρωμένο κύκλωμα όσο πιο χαμηλό είναι το επίπεδο του μετάλλου τόσο πιο μικρό είναι το μέγεθος και η κλίση των γραμμών. Η απότομη κλίση του ανώτερου επιπέδου μετάλλου βελτιώνει την χρησιμότητα των πόρων μετάλλου, κάνοντας την προσαρμογή στην κλίση των υποβάθρων εισόδου/εξόδου του πακέτου, ενώ η καλή κλίση των κατώτερων επιπέδων του πλέγματος φέρνουν την παροχή ισχύος και γείωσης σε κοντινή απόσταση από το κάθε κύκλωμα που βρίσκεται πάνω στο ολοκληρωμένο κύκλωμα, διευκολύνοντας την σύνδεση αυτών των κυκλωμάτων στη τροφοδοσία και τη γείωση. Τα δίκτυα διανομής ισχύος είναι αρκετά πιο δυνατά σε σχέση με τα δίκτυα διανομής ισχύος με δίοδο. Υπάρχουν πολλαπλά πλεονάζοντα μονοπάτια ρεύματος ανάμεσα στους ακροδέκτες τροφοδοσίας του κάθε φόρτου κυκλώματος και των υποβάθρων τροφοδοσίας. Εξαιτίας αυτής της ιδιότητας, η ευστάθεια της παροχής ρεύματος είναι λιγότερο ευαίσθητη σε αλλαγές των απαιτήσεων ισχύος του ρεύματος των ξεχωριστών ομάδα λογικών πυλών του κυκλώματος. Η αστοχία του κάθε τμήματος του πλέγματος δεν είναι κρίσιμη για τη διανομή ισχύος σε οποιοδήποτε οποιαδήποτε ομάδα λογικών πυλών.



Εικόνα 1: Ένα δίκτυο διανομής ισχύος πολλαπλών επιπέδων. Οι γραμμές γείωσης έχουν ανοιχτό γκρι χρώμα και οι γραμμές τροφοδοσίας έχουν σκούρο γκρι χρώμα. Η κλίση, το πλάτος και το πάχος των γραμμών είναι μικρότερο στα κατώτερα επίπεδα σε σχέση με τα ανώτερα.

Ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα των δικτύων διανομής ισχύος είναι η αυξημένη ακεραιότητα των σημάτων δεδομένων που είναι πάνω στο ολοκληρωμένο κύκλωμα εξαιτίας των ιδιοτήτων χωρητικής και επαγωγικής προστασίας των γραμμών τροφοδοσίας και γείωσης. Είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται ένα ποσοστό 20% ως 40% των πόρων μετάλλου για την οικοδόμηση ενός δικτύου τροφοδοσίας υψηλής πυκνότητας σε σύγχρονους επεξεργαστές υψηλών επιδόσεων.

2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

2.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

Με τον όρο power grid αναφερόμαστε σε ένα δίκτυο διανομής ισχύος, το οποίο είναι γραμμικό και συνήθως έχει τη μορφή πλήρους ή ατελούς πλέγματος στα δύο ανώτερα επίπεδα μετάλλου. Αναλυτικότερα το δίκτυο αποτελείται από έναν αριθμό b κλάδων και έναν αριθμό $q+p$ κόμβων. Οι κλάδοι (καλώδια) έχουν αντίσταση $R_j = \frac{\rho}{t} \frac{l_j}{w_j} =$

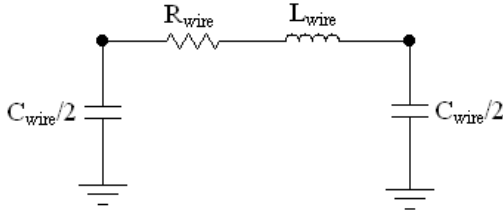
$R_{sh} \frac{l_j}{w_j}$ και αυτεπαγωγή L_j . Επίσης σε κάθε κόμβο υπάρχει χωρητικότητα προς τη γη

$$C_i = \sum_{\substack{\text{οι κλάδοι } j \\ \text{που προσπίπτουν} \\ \text{στον κόμβο } i}} \left(\frac{1}{2} \bar{C}_{pp(ar)} l_{ji} w_{ji} + \frac{1}{2} \bar{C}_{ff(per)} l_{ji} \right) + C_{decap_i} + C_{pin_i} \quad [13].$$

Επιπροσθέτως οι p από τους $q+p$ κόμβους δέχονται τάση τροφοδοσίας V_{DD} προς τη γη. Από τους υπόλοιπους q κόμβους οι n συνδέονται σε πηγές ρεύματος προς τη γη που αντιστοιχούν στις ομάδες-blocks πυλών που τροφοδοτούνται και αντλούν ενέργεια από το δίκτυο διανομής ισχύος (οι μεμονωμένες πύλες-cells εντός των blocks οι οποίες διατάσσονται σε οριζόντιες γραμμές τροφοδοσίας βλέπουν χαμηλές πτώσεις τάσης σε σχέση με τις τάσεις που δέχονται τα blocks λόγω μικρών ρευμάτων οπότε συνήθως δεν εξετάζονται).

Εξαιτίας της παρουσίας των C και L στοιχείων σε ένα πλήρες μοντέλο RLC, θα χρησιμοποιήσουμε την Τροποποιημένη Μέθοδο των Κόμβων (Modified Nodal Analysis) – αντί για την απλή Μέθοδο των Κόμβων – για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας, στο οποίο τα ρεύματα επαγωγής αποτελούν επιπρόσθετες μεταβλητές επιπλέον των τάσεων κόμβων. Ειδικά για τα πλέγματα που αναπαριστούν δίκτυα διανομής ισχύος τυπικά μοντελοποιούμε κάθε τμήμα καλωδίου (μεταξύ των δύο επαφών) ως μια αντίσταση σε σειρά με μια επαγωγή, με χωρητικότητες προς τη γη στους δύο κόμβους επαφής (εικόνα 2). Έτσι στην ανάλυση που ακολουθεί θα θεωρούμε τους b κλάδους του δικτύου ως σύνθετους ωμικούς – επαγωγικούς ($R - L$) κλάδους.

Οι νόμοι του Kirchhoff για το ρεύμα και την τάση για το γραμμικό δίκτυο έχουν ως εξής:



Εικόνα 2: Τυπικό μοντέλο τμήματος καλωδίου σε δίκτυα τροφοδοσίας

$$\text{KCL: } [\mathbf{A}_{rl} \quad \mathbf{A}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b(t) \\ \mathbf{i}_c(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}_n(t), \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{A}_{rl} \mathbf{i}_n(t) + \mathbf{i}_c(t) = \mathbf{e}_n(t) \quad (2.1)$$

$$\text{KVL: } \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rl}^T \\ \mathbf{A}_c^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_n(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b(t) \\ \mathbf{v}_c(t) \end{bmatrix}, \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{A}_{rl}^T \mathbf{v}_n(t) = \mathbf{v}_b(t) \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{v}_n(t) = \mathbf{v}_b(t) \quad (2.2b)$$

Στα παραπάνω, ο \mathbf{A}_{rl} είναι $n \times b$ πίνακας προσπτώσεων σύνθετων κλάδων R – L (τυχαίες κατευθύνσεις αναφοράς), του οποίου τα στοιχεία ορίζονται ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{όταν η διεύθυνση του κλάδου } j \text{ απέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{όταν η διεύθυνση του κλάδου } j \text{ είναι προς τον κόμβο } i \\ 0, & \text{όταν ο κλάδος } j \text{ δεν είναι προσπίπτων στον κόμβο } i \end{cases}$$

Επιπροσθέτως, τα $\mathbf{v}_n(t)$, $\mathbf{v}_b(t)$ και $\mathbf{v}_n(t) = \mathbf{v}_b(t)$ είναι μεγέθους $n \times 1$, $b \times 1$ και $b \times 1$ διανύσματα των κόμβων τάσης, κλάδων τάσης και ρεύματα κλάδων, το $\mathbf{e}_n(t)$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα των διεγέρσεων των ανεξάρτητων πηγών (είτε ρεύματος είτε τάσης) στους κόμβους, το $\mathbf{i}_c(t)$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα των ρευμάτων των επιπρόσθετων χωρητικών κλάδων τα οποία εμφανίζονται στους n κόμβους και \mathbf{A}_c είναι ο πίνακας προσπτώσεων αυτών των n κλάδων, για τους οποίους ισχύει $\mathbf{A}_c = \mathbf{I}_n$

(ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας) επειδή όλοι οι χωρητικοί κλάδοι κατευθύνονται μακριά από τους κόμβους και συνδέονται με τη γή.

Οι σχέσεις ρεύματος-τάσης των n χωρητικών κλάδων και των b σύνθετων $R - L$ κλάδων είναι οι εξής:

$$\mathbf{i}_c(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{v}'_c(t) = \mathbf{C}_n \mathbf{v}'_n(t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_b(t) = \mathbf{R}_b \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{L}_b \mathbf{i}'_b(t) \quad (2.4)$$

όπου $\mathbf{v}'_n(t)$ και $\mathbf{i}'_b(t)$ είναι οι χρονικές παράγωγοι των διανυσμάτων $\mathbf{v}_n(t)$ και $\mathbf{i}_b(t)$ αντίστοιχα, ο \mathbf{C}_n είναι ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας των χωρητικοτήτων των κόμβων και \mathbf{R}_b , \mathbf{L}_b είναι πίνακες αντιστάσεων και επαγωγών μεγέθους $b \times b$ των σύνθετων κλάδων $R - L$. Ο πίνακας \mathbf{R}_b είναι ένας διαγώνιος πίνακας, ενώ ο \mathbf{L}_b είναι είτε διαγώνιος υπάρχουν μόνο αυτεπαγωγές στους κλάδους. Υποθέτουμε ότι κάθε κλάδος $R - L$ έχει μη μηδενική αυτεπαγωγή και κάθε κόμβος έχει μη μηδενική χωρητικότητα, έτσι ώστε οι πίνακες \mathbf{L}_b και \mathbf{C}_n να είναι αντιστρέψιμοι.

Στην Τροποποιημένη Μέθοδο των Κόμβων αντικαθιστούμε την (2.3) στην (2.1) και την (2.4) στην (2.2α), έτσι ώστε να αποκτήσουμε το ακόλουθο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (με αγνώστους τα $\mathbf{v}_n(t)$ και $\mathbf{i}_b(t)$):

$$\mathbf{A}_{nl} \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{C}_n \mathbf{v}'_n(t) = \mathbf{e}_n(t) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_b \mathbf{i}_b(t) + \mathbf{L}_b \mathbf{i}'_b(t) - \mathbf{A}_{nl}^T \mathbf{v}_n(t) = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

Συνδυάζοντας τα διανύσματα μεταβλητών $\mathbf{v}_n(t)$ και $\mathbf{i}_b(t)$ στο διάνυσμα $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(t) \\ \mathbf{i}_b(t) \end{bmatrix}$ μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις (2.5) και (2.6) ως το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{e}(t) \quad (2.7)$$

$$\text{όπου } \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{r1} \\ -\mathbf{A}_{r1}^T & \mathbf{R}_b \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_b \end{bmatrix}, \mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Στο παραπάνω σύστημα το $\mathbf{v}_n(t)$ είναι το διάνυσμα των κόμβων τάσεων, αλλά το σύστημα εύκολα μπορεί να εκφραστεί ξανά λαμβάνοντας υπόψη τις πτώσεις τάσης στους κόμβους παραλείποντας τις ανεξάρτητες πηγές τάσης στο διάνυσμα διέγερσης $\mathbf{e}_n(t)$ και αντιστρέφοντας το σήμα των πηγών ρεύματος (από $-$ σε $+$). Από αυτό το σημείο και στο εξής θα δηλώνουμε με το $\mathbf{v}_n(t)$ το διάνυσμα των πτώσεων τάσης στους κόμβους.

Σύμφωνα με την διαφορική προσέγγιση Backward Euler για σταθερό χρονικό βήμα h , μπορούμε να αντικαταστήσουμε την χρονική παράγωγο $\mathbf{x}'(t)$ με τον αντίστοιχο της τύπο πεπερασμένων διαφορών $\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h)}{h}$ στην (2.8) και προκύπτει

$$\left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) \mathbf{x}(t) = \left(\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{e}(t) \text{ για } t = kh, \text{ όπου } k = 1, 2, \dots, \text{ ή:}$$

$$\mathbf{x}(kh) = \left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \mathbf{e}(kh) + \left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) \mathbf{x}((k-1)h) \quad (2.9)$$

$$\equiv \mathbf{B}_1 \mathbf{e}(kh) + \mathbf{B} \mathbf{x}((k-1)h)$$

$$\text{όπου } \mathbf{B}_1 = \left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \text{ και } \mathbf{B} = \left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right)^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right) = \mathbf{B}_1 \left(\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h} \right).$$

Η δεύτερη αναφερθείσα αναδρομική σχέση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των πτώσεων τάσης όλων των κόμβων και όλων των ρευμάτων κλάδων για συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = kh$, όπου $k = 1, 2, \dots$, βασίζεται στις πτώσεις τάσης και στα ρεύματα κλάδων όλων των προηγούμενων χρονικών στιγμών $t = (k-1)h$.

2.2 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για την κατάλληλη μετατροπή του συστήματος (2.9) αντί να αναφέρεται η εξάρτηση από την διακριτή χρονική μεταβλητή $t = kh$ θα γίνουν οι εξής συμβάσεις $\mathbf{x}(kh) \equiv \mathbf{x}^k$ και $\mathbf{e}(kh) \equiv \mathbf{e}^k$

Το σύστημα εξισώσεων (2.8) μπορεί να γραφεί:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{C}_n}{h} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^k \\ \mathbf{i}_b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{C}_n}{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{L}_n}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^{k-1} \\ \mathbf{i}_b^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{A} \mathbf{i}_b^k = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} + \mathbf{e}_n^k \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{v}_n^k + \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right) \mathbf{i}_b^k = \frac{\mathbf{L}_n}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} \Rightarrow \mathbf{i}_b^k \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_n}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n^k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^k + \mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_n}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n^k = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} + \mathbf{e}_n^k \\ \mathbf{i}_b^k = \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n^k \end{cases}$$

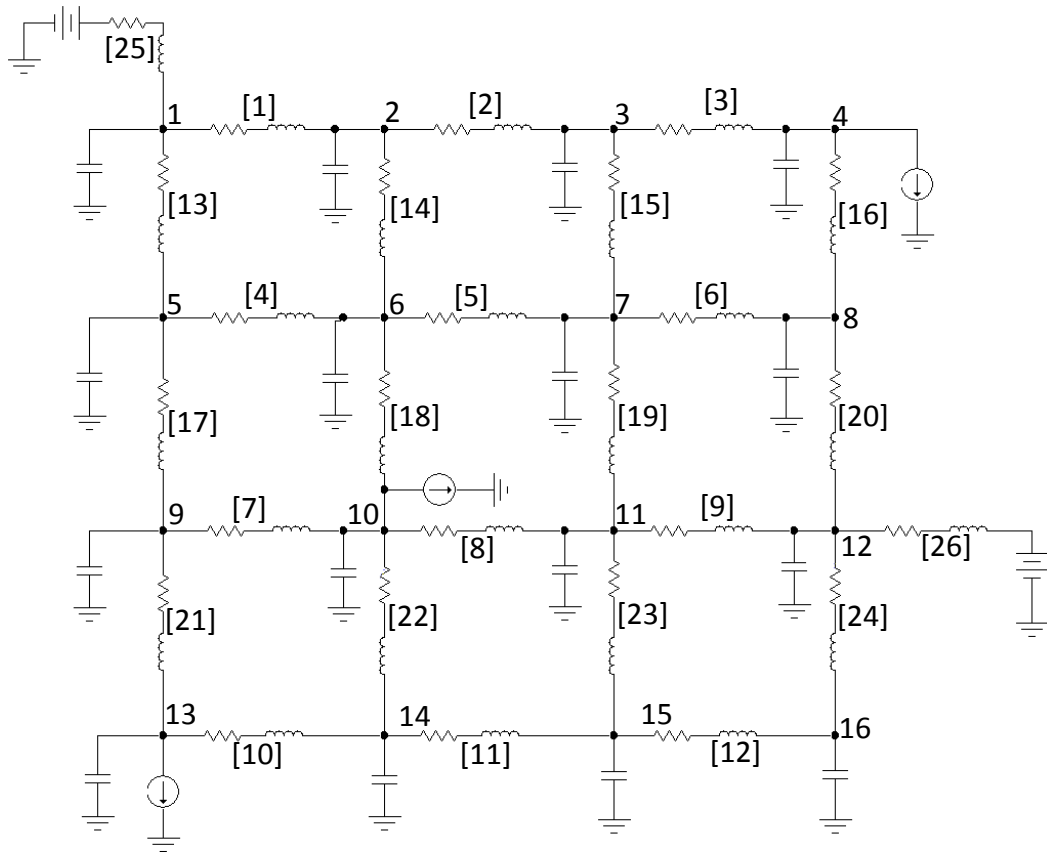
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h} \right) \mathbf{v}_n^k = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} - \mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \mathbf{e}_n^k & (2.10) \\ \mathbf{i}_b^k = \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n^k & (2.11) \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω καταλήγουμε σε δύο αναδρομικά συστήματα τα οποία για κάθε χρονική στιγμή k μπορούμε να λύσουμε το (2.10) ως προς το διάνυσμα πτώσεων τάσεως (\mathbf{v}_n^k) με δεδομένα τα διανύσματα \mathbf{v}_n^{k-1} και \mathbf{i}_b^{k-1} των πτώσεων τάσης και των ρευμάτων κλάδων της προηγούμενης χρονικής στιγμής, καθώς και των διεγέρσεων \mathbf{e}_n^k της τρέχουσας χρονικής στιγμής. Μετά από την επίλυση του πρώτου από τα 2 συστήματα μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα των ρευμάτων των κλάδων \mathbf{i}_b^k την τρέχουσα χρονική στιγμή από το δεύτερο σύστημα (2.11). Το πρώτο σύστημα (2.10) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής $\mathbf{A}\mathbf{x}$

$= \mathbf{b}$ με αγνώστους το $\mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_n^k$, πίνακα του συστήματος τον $\mathbf{A} = \left(\mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h} \right)^{-1} \mathbf{A}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h} \right)$ και $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{C}_n}{h} \mathbf{v}_n^{k-1} - \mathbf{A} \left(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_n}{h} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h} \mathbf{i}_b^{k-1} + \mathbf{e}_n^k$. Το σύστημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως η Gauss από τις άμεσες και η Jacobi ή η Gauss-Seidel από τις επαναληπτικές. Στα επόμενα κεφάλαια θα δώσουμε μια περιγραφή των γενικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων, αλλά θα επιχειρήσουμε να εκμεταλλευτούμε την ειδική μορφή που έχει ο πίνακας \mathbf{A} για τα πρακτικά δίκτυα τροφοδοσίας έτσι ώστε να αναπτύξουμε μια σειρά από πιο αποδοτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων για τη συγκεκριμένη αυτή μορφή. Η μορφή του πίνακα \mathbf{A} για τα πρακτικά δίκτυα τροφοδοσίας θα φανεί καλύτερα με το παράδειγμα που ακολουθεί.

2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΑΚΤΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

Με βάση την δομή των προηγούμενων δικτύων τροφοδοσίας όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή στην εικόνα (1) και με βάση το μοντέλο κλάδου της εικόνας (2) έχουμε το ακόλουθο μοντέλο πρακτικού δικτύου τροφοδοσίας το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τεσσάρων οριζοντίων και τεσσάρων κάθετων γραμμών. Στο παρακάτω σχήμα έχουν τοποθετηθεί πηγές τάσης και 2 κόμβοι που τροφοδοτούνται από την εξωτερική πηγή τροφοδοσίας (V_{DD}), καθώς και πηγές ρεύματος σε κόμβους από όπου ομάδες πυλών αντλούν ρεύμα από το δίκτυο τροφοδοσίας. Στους κλάδους των πηγών τάσεων έχουν τοποθετηθεί η παρασιτική αντίσταση και η παρασιτική αυτεπαγωγή του ακροδέκτη τροφοδοσίας.



Εικόνα 3: Μοντέλο RLC δικτύου τροφοδοσίας 4x4

Θεωρούμε ότι για τις τρέχουσες τεχνολογίες οι αμοιβαίες επαγωγές μεταξύ κλάδων είναι αμελητέες και ο πίνακας \mathbf{L}_b είναι διαγώνιος είτε πλήρης αν υπάρχουν αμοιβαίες επαγωγές μεταξύ των κλάδων. Στην περίπτωση μας θα υποθέσουμε την ύπαρξη μόνο αυτεπαγωγών οπότε ο \mathbf{L}_b είναι διαγώνιος και έχει μέγεθος $n \times (b+p)$. Οι πίνακες που προκύπτουν από το παραπάνω δίκτυο τροφοδοσίας είναι οι εξής:

$$\mathbf{A}_{416} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & +1 & 0 & & \\ 0 & -1 & +1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{16} = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{16})$$

$$\mathbf{L}_{26} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_{26})$$

$$\mathbf{R}_{26} = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_{16})$$

Σημείωση: Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα \mathbf{A} , πρέπει να ορίσουμε μια φορά για το ρεύμα που διαρρέει τους κλάδους. Έστω πως αυτή πρέπει να είναι από αριστερά προς τα δεξιά (\rightarrow) και από πάνω προς τα κάτω (\downarrow).

Εφόσον οι πίνακες \mathbf{L} , \mathbf{R} είναι διαγώνιοι τότε και ο $(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h})^{-1}$ είναι επίσης διαγώνιος, οπότε το γινόμενο $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h})^{-1} \mathbf{A}^T$ είναι πολύ γνωστό [1] ότι έχει τις ακόλουθες ιδιότητες (i) θετικά διαγώνια στοιχεία, (ii) μη θετικά στοιχεία εκτός διαγωνίου ($v_{ij} \leq 0$, $i, j = 1, \dots, n$), (iii) συμμετρία $v_{ij} = v_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, (iv) διαγώνια κυριαρχία και στις γραμμές και στις στήλες: δηλ. $|v_{jj}| \geq \sum_{i \neq j}^n |v_{ij}|$, $\forall j = 1, \dots, n$. Ειδικότερα, η τελευταία αυτή ιδιότητα εξασφαλίζει ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

Επίσης είναι πολύ γνωστό λοιπόν από τη θεωρία της μεθόδου των κόμβων ότι το γινόμενο ενός πίνακα πρόσπτωσης επί έναν διαγώνιο (όπως ο $(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h})^{-1}$) επί τον ανάστροφο πίνακα πρόσπτωσης έχει την εξής δομή στοιχείων [16]:

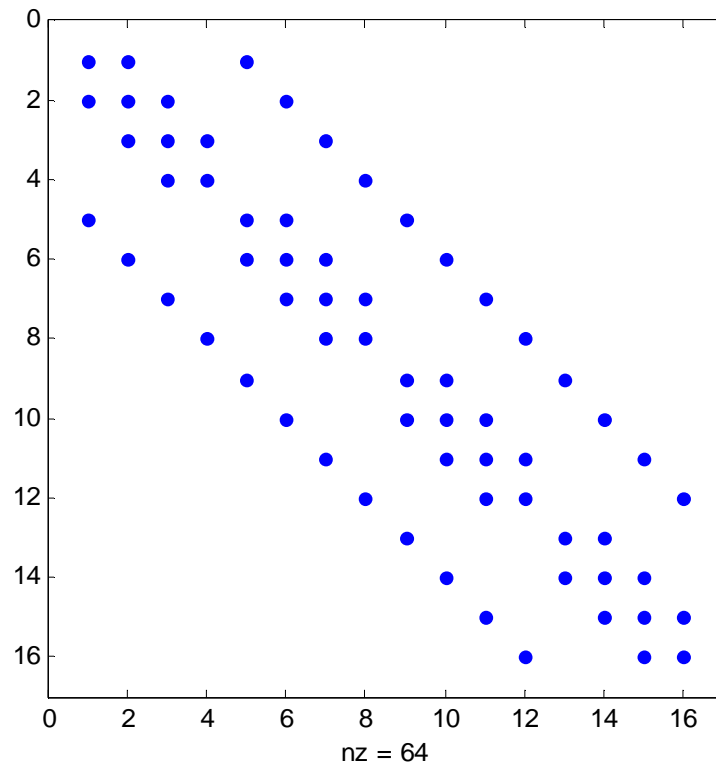
1. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου v_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) είναι το άθροισμα των στοιχείων του $(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h})^{-1}$ που αντιστοιχούν στον κόμβο i .
2. Τα στοιχεία v_{ij} ($i, j = 1, \dots, n, i \neq j$) που βρίσκονται εκτός της κύριας διαγωνίου, είναι το αντίθετο του διαγώνιου στοιχείου του $(\mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h})^{-1}$ που συνδέει τους κόμβους i και j .

Για παράδειγμα για το δίκτυο της εικόνας 3 ο πίνακας θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} g_1 + g_{13} & -g_1 & 0 & 0 & -g_{13} & \dots & 0 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_{14} & -g_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -g_2 & g_2 + g_3 + g_{15} & -g_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -g_3 & g_2 + g_3 + g_{15} & 0 & \dots & 0 \\ -g_{13} & 0 & 0 & 0 & g_2 + g_3 + g_{15} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & g_{12} + g_{24} \end{bmatrix}$$

όπου έχουμε συμβολίσει με $g_i = \frac{1}{r_i + \frac{1}{h}}$.

Τέλος παρατηρούμε ότι για δίκτυα δομής πλέγματος όπως της εικόνας 3 (τα οποία αποτελούνται από οριζόντιες και κάθετες γραμμές) και με αρίθμηση των κόμβων από αριστερά προς τα δεξιά ο πίνακας του γραμμικού συστήματος έχει την παρακάτω μορφή:



Εικόνα 4: Η μορφή του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος 25 εξισώσεων

Η μορφή της εικόνας 4 είναι μορφή ενός μπλοκ τριδιαγώνιου πίνακα (block tridiagonal) με τα διαγώνια μπλοκ να είναι απλοί τριδιαγώνιοι πίνακες ενώ τα μπλοκ εκτός διαγωνίου να είναι διαγώνιοι πίνακες.

Οι μέθοδοι που θα αναπτυχθούν στις επόμενες ενότητες επιλέχθηκαν λόγω της μορφής του πίνακα.

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

3.1 ΜΕΘΟΔΟΣ LU

Η παραγοντοποίηση LU είναι μια διάσπαση του πίνακα του συστήματος γραμμικών εξισώσεων κατά την οποία ο πίνακας αυτός μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού και ενός άνω τριγωνικού πίνακα. Το γινόμενο αυτό συνήθως περιέχει και έναν πίνακα μεταθέσεων¹.

3.1.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν ο πίνακας **A** είναι ορθογώνιος η LU ανάλυση έχει την εξής μορφή:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

όπου τα **L** και **U** είναι άνω και κάτω τριγωνικοί πίνακες (του ίδιου μεγέθους) αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι ο **L** έχει μόνο μηδενικά στοιχεία πάνω από τη διαγώνιό του και ο **U** έχει μόνο μηδενικά κάτω από τη διαγώνιό του. Για ένα πίνακα μεγέθους $n \times n$, η LU ανάλυση έχει την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Επίσης αφαιρώντας τα διαγώνια στοιχεία από τους **L** και **U**, προκύπτει ένας νέος διαγώνιος πίνακας **D** και η LU ανάλυση παίρνει την εξής μορφή:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU},$$

¹ Πίνακας μεταθέσεων λέγεται ο πίνακας του οποίου κάθε γραμμή και στήλη περιέχει ακριβώς ένα 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία μηδέν.

όπου τα L και U τριγωνικοί πίνακες με μοναδιαία στοιχεία διαγωνίου και ο D είναι διαγώνιος. Ακόμη αν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών κατά την τριγωνοποίηση η LU ανάλυση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$PA = LU$$

όπου ο πίνακας P είναι πίνακας μεταθέσεων.

Αναφορικά με τον αλγόριθμο που εφαρμόζει την ανάλυση LU , υλοποιείται ως εξής:

Ξεκινώντας με τον πίνακα $n \times n$ του συστήματος θέτουμε

$$A = (a_{i,j})$$

και ορίζουμε

$$A^{(0)} := A$$

και εν συνεχεία για $n = 1, \dots, n-1$ εκτελούμε τις παρακάτω ενέργειες:

Απαλείφουμε τα στοιχεία του πίνακα κάτω από την κύρια διαγώνιο στην n -ιοστή στήλη του $A^{(n-1)}$ προσθέτοντας στην i -ιοστή γραμμή του πίνακα την n -ιοστή γραμμή πολλαπλασιασμένη κατά

$$l_{i,n} := -\frac{a_{i,n}^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}$$

για $i = n+1, \dots, n$. Αυτό μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζοντας τον $A^{(n-1)}$ από αριστερά με τον κάτω τριγωνικό L_n

$$\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & l_{n+1,n} & \ddots \\ & & \vdots & \\ & & l_{n,n} & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Για $k = 1 : n$

$$L(k,k) = 1$$

Για $i = k + 1 : n$

$$L(i,k) = A(i,k) / A(k,k)$$

Για $j = k + 1 : n$

$$A(i,j) = A(i,j) - L(i,k) * A(k,j)$$

τέλος

τέλος

Για $j = k : n$

$$U(k,j) = A(k,j)$$

τέλος

τέλος

3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ CHOLESKY

Στην αριθμητική γραμμική άλγεβρα, η ανάλυση Cholesky ή η τριγωνοποίηση Cholesky είναι η ανάλυση ενός συμμετρικού, θετικά-ορισμένου πίνακα σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα και του συζυγούς ανάστροφου του. Αυτή η μέθοδος είχε ανακαλυφθεί από τον André-Louis Cholesky για πραγματικούς πίνακες και είναι ένα παράδειγμα για την τετραγωνική ρίζα ενός πίνακα. Όταν είναι εφαρμόσιμη, η ανάλυση Cholesky είναι περίπου δύο φορές πιο αποδοτική σε σχέση με την ανάλυση LU για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

3.2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Αν ο πίνακας \mathbf{A} έχει πραγματικά στοιχεία και είναι συμμετρικός (ή πιο γενικά Ερμιτιανός) και είναι θετικά-ορισμένος, τότε ο \mathbf{A} μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^*$$

όπου ο \mathbf{L} είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας με αυστηρά θετικά διαγώνια στοιχεία, και ο \mathbf{L}^* δηλώνει τον συζυγή ανάστροφο του \mathbf{L} . Αυτή είναι η ανάλυση Cholesky.

Η ανάλυση Cholesky είναι μοναδική διότι για έναν οποιοδήποτε Ερμιτιανό, θετικά ορισμένο πίνακα \mathbf{A} , υπάρχει μόνο ένας κάτω τριγωνικός πίνακας \mathbf{L} με αυστηρώς θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοια ώστε $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^*$. Η αντιστροφή αποδεικνύεται τετριμμένα: αν ο \mathbf{A} μπορεί να γραφεί με τη μορφή $\mathbf{L} \mathbf{L}^*$ για κάποιο αντιστρέψιμο κάτω τριγωνικό πίνακα \mathbf{L} , τότε ο \mathbf{A} είναι Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

Ο αλγόριθμος Cholesky, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πίνακα διάσπασης \mathbf{L} , είναι μια τροποποιημένη εκδοχή της απαλοιφής Gauss. Ο επαναληπτικός αλγόριθμος ξεκινά για $i:=1$ και

$$\mathbf{A}^{(1)} := \mathbf{A}.$$

Στο βήμα i , ο πίνακας $\mathbf{A}^{(i)}$ έχει την εξής μορφή:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i,i} & \mathbf{b}_i^* \\ 0 & \mathbf{b}_i & \mathbf{B}^{(i)} \end{pmatrix},$$

όπου \mathbf{I}_{i-1} δηλώνει τον ταυτοτικό πίνακα διάστασης $i-1$.

Αν ο \mathbf{L}_i δηλώνεται ως εξής:

$$\mathbf{L}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{i,i}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}} \mathbf{b}_i & \mathbf{I}_{n-i} \end{pmatrix}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε το $\mathbf{A}^{(i)}$ ως εξής

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{L}_i \mathbf{A}^{(i+1)} \mathbf{L}_i^*$$

όπου

$$\mathbf{A}^{(i+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^{(i)} - \frac{1}{a_{i,i}} b_i b_i^* \end{pmatrix}^2$$

Επαναλαμβάνουμε για i από 1 ως n . Μετά από n βήματα, λαμβάνουμε $\mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{I}$. Άρα, ο κάτω-τριγωνικός πίνακας \mathbf{L} υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{L} := \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_n.$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος απαιτεί περίπου $n^3/3$, όπου το n είναι το μέγεθος του πίνακα \mathbf{A} .

3.2.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Για $k = 1 : n$

% υπολογισμός των στοιχείων εκτός διαγωνίου

Για $i = 1 : k-1$

$s = 0$

Για $j = 1 : i-1$

$s = s + a(i,j) * a(k,j)$

τέλος

$a(k,i) = (a(k,i) - s) / a(i,i)$

² Σημείωση: Το $b_i b_i^*$ είναι εξωτερικό γινόμενο, επομένως αυτός ο αλγόριθμος ονομάζεται *έκδοση εξωτερικού γινομένου* (Golub & Van Loan)

τέλος

% υπολογισμός των διαγώνιων στοιχείων

$s = 0$

Για $j = 1 : k-1$

$$s = s + a(k,j)^2$$

τέλος

$$a(k,k) = \sqrt{a(k,k) - s}$$

τέλος

3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI

Η μέθοδος Jacobi αποτελεί τη δημοφιλέστερη επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, αρκεί τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του να μην είναι μηδενικά. Κάθε στοιχείο της διαγωνίου του επιλύεται και μια προσεγγιστική τιμή τοποθετείται. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να υπάρξει ικανοποιητική σύγκλιση.

3.3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Αναζητούμε τη λύση ενός συνόλου γραμμικών εξισώσεων έτσι όπως καθορίζονται από το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Τότε ο \mathbf{A} μπορεί να αναλυθεί σε μια διαγώνια συνιστώσα \mathbf{D} , και το υπόλοιπο \mathbf{R} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{R} \text{ όπου}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{R}) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{R} \mathbf{x}$$

Η μέθοδος Jacobi είναι μια επαναληπτική τεχνική που επιλύει την αριστερή πλευρά της παραπάνω έκφρασης ως προς \mathbf{x} , χρησιμοποιώντας προηγούμενες τιμές του \mathbf{x} στην δεξιά πλευρά της παραπάνω εξίσωσης. Η ανάλυση αυτή μπορεί να απεικονιστεί στην παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{R} \mathbf{x}^{(k)})$$

Συνεπώς ο αριθμητικός τύπος σε επίπεδο στοιχείου είναι ο παρακάτω:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Αντίθετα με την μέθοδο Gauss-Seidel, δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $x_i^{(k)}$ με το $x_i^{(k+1)}$, διότι η τιμή χρειάζεται για τους υπόλοιπους υπολογισμούς. Αυτή είναι και η πιο σημαντική διαφορά μεταξύ της Jacobi και της Gauss-Seidel μεθόδου και αποτελεί τον κυριότερο λόγο για τον οποίο η πρώτη δεν μπορεί να υλοποιηθεί ως παράλληλος αλγόριθμος [14].

3.3.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για τη λύση $x^{(0)}$

Για $k = 1, 2, \dots$

Για $i = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{x}_i = 0$$

Για $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i + a_{ij}x_j^{(k-1)}$$

τέλος

$$\bar{x}_i = \frac{(b_i - \bar{x}_i)}{a_{ii}}$$

τέλος

$$x^{(k)} = \bar{x}_i$$

τέλος

Έλεγχος σύγκλισης και τερματισμός

Τέλος

3.3.3 ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΗΣΗΣ

Η μέθοδος συγκλίνει πάντα εάν ο πίνακας \mathbf{A} έχει αυστηρά διαγώνια κυριαρχία [15]. Αυστηρή διαγώνια κυριαρχία σειρών σημαίνει ότι για κάθε σειρά, η απόλυτη τιμή του διαγώνιου όρου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των απόλυτων τιμών όλων των υπόλοιπων όρων:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Μια δεύτερη συνθήκη σύγκλισης περιέχει τη φασματική ακτίνα του πίνακα \mathbf{A} .

$$\rho(D^{-1}R) < 1$$

Η μέθοδος Jacobi μερικές φορές συγκλίνει ακόμη κι αν οι συνθήκες δεν ικανοποιούνται. Το 2009, παρουσιάστηκε μια τεχνική διπλού βρόγχου για την εξαναγκασμένη σύγκλιση της μεθόδου στη σωστή λύση ακόμη κι όταν οι συνθήκες δεν ισχύουν. Η τεχνική αυτή παράγει αποτέλεσμα είτε ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος είτε οι στήλες του πίνακα είναι ανεξάρτητες.

3.4 ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL

Μια από τις πιο διαδεδομένες επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών εξισώσεων είναι η μέθοδος Gauss-Seidel, η οποία είναι γνωστή και ως μέθοδος Liebmann ή μέθοδος διαδοχικών αντικαταστάσεων. Η ονομασία της προέρχεται από τους Γερμανούς μαθηματικούς Carl Friedrich Gauss και Philipp Ludwig von Seidel και είναι παρόμοια με μέθοδο Jacobi. Αν και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία διαγωνίου, εγγυάται σύγκλιση μόνο αν ο πίνακας έχει αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο, ή είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος [15].

3.4.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Αναζητούμε τη λύση ενός συνόλου γραμμικών εξισώσεων έτσι όπως καθορίζονται από το σύστημα $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Τότε ο \mathbf{A} μπορεί να αναλυθεί σε μια κάτω τριγωνική συνιστώσα και \mathbf{L}_* και μια αυστηρά άνω τριγωνική συνιστώσα \mathbf{U} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_* + \mathbf{U} \text{ όπου}$$

$$\mathbf{L}_* = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{L}_* \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{U} \mathbf{x}$$

Η μέθοδος Gauss-Seidel είναι μια επαναληπτική διαδικασία η οποία επιλύει τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης ως προς \mathbf{x} , χρησιμοποιώντας προηγούμενες τιμές του \mathbf{x} που έχουν προκύψει επιλύοντας την αριστερή πλευρά της σχέσης ως προς \mathbf{x} . Πιο συγκεκριμένα, η παραπάνω ανάλυση σε αριθμητική μορφή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}_*^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)})$$

Ωστόσο, αξιοποιώντας το πλεονέκτημα της τριγωνικής μορφής του \mathbf{L}_* , τα στοιχεία του $\mathbf{x}^{(k+1)}$ μπορούν διαδοχικά να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την προς τα πίσω αντικατάσταση σύμφωνα με τον τύπο:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)}),^3 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι η αλλαγή που προκύπτει από το ένα βήμα της επανάληψης στο επόμενο να είναι μικρότερη ορισμένου σφάλματος.

3.4.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για τη λύση $x^{(0)}$

Για $k = 1, 2, \dots$

Για $i = 1, 2, \dots, n$

³ Το άθροισμα μέσα στον υπολογισμό του $x_i^{(k+1)}$ απαιτεί το $\mathbf{x}^{(k)}$ εκτός από το ίδιο το $x_i^{(k)}$.

$$\sigma=0$$

Για $j = 1, 2, \dots, i-1$

$$\sigma = \sigma + \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

τέλος

Για $j = i+1, \dots, n$

$$\sigma = \sigma + \alpha_{ij} x_j^{(k-1)}$$

τέλος

$$x_i^{(k)} = (b_i - \sigma) / \alpha_{ii}$$

τέλος

Έλεγχος σύγκλισης και τερματισμός

τέλος

3.5 ΜΕΘΟΔΟΣ SOR (ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΗΣ ΥΠΕΡ - ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ)

Στη γραμμική άλγεβρα, η μέθοδος της διαδοχικής υπέρ - χαλάρωσης(SOR) είναι μια παραλλαγή της μεθόδου Gauss-Seidel για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων, η οποία συγκλίνει πιο γρήγορα. Μία τέτοια παρόμοια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε βραδέως συγκλίνουσα επαναληπτική μέθοδο. Η μέθοδος αυτή είχε επινοηθεί ταυτόχρονα από τον David M. Young και τον H. Frankel το 1950, με σκοπό την αυτόματη επίλυση γραμμικών συστημάτων σε ψηφιακούς υπολογιστές.

3.5.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Δοθέντος ενός ορθογώνιου συστήματος n γραμμικών εξισώσεων και του αγνώστου \mathbf{x} :

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{όπου}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Τότε ο A μπορεί να αναλυθεί σε μια διαγώνια συνιστώσα, μια αυστηρά κάτω τριγωνική συνιστώσα L και μια αυστηρά άνω τριγωνική συνιστώσα U :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}:$$

όπου

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})\mathbf{x} = \omega \mathbf{b} - [\omega \mathbf{U} + (\omega - 1)\mathbf{D}]\mathbf{x}$$

για $\omega > 0$ σταθερό.

Η μέθοδος της διαδοχικής υπέρ – χαλάρωσης είναι μια επαναληπτική διαδικασία που επιλύει το αριστερό μέρος της παραπάνω έκφρασης ως προς \mathbf{x} , χρησιμοποιώντας προηγούμενες τιμές του \mathbf{x} που έχουν προκύψει από τη δεξιά πλευρά αυτής της εξίσωσης [3]. Αναλυτικότερα, αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} (\omega \mathbf{b} - [\omega \mathbf{U} + (\omega - 1)\mathbf{D}]\mathbf{x}^{(k)})$$

Ωστόσο, αν εκμεταλλευτούμε τη τριγωνική μορφή της έκφρασης $(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})$, τα στοιχεία του $\mathbf{x}^{(k+1)}$ μπορούν να υπολογιστούν διαδοχικά χρησιμοποιώντας αντικατάσταση προς τα πίσω:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Η επιλογή του παράγοντα χαλάρωσης δεν είναι εύκολη και εξαρτάται από τις ιδιότητες του πίνακα του συστήματος. Για συμμετρικούς, θετικά ορισμένους πίνακες

μπορεί να αποδειχθεί ότι για $0 < \omega < 2$ υπάρχει σύγκλιση [14], όμως γενικά ενδιαφερόμαστε για την ταχύτερη σύγκλιση αντί για απλή σύγκλιση της μεθόδου.

3.5.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για τη λύση $x^{(0)}$

Για $k = 1, 2, \dots$

Για $i = 1, 2, \dots, n$

$\sigma = 0$

Για $j = 1, 2, \dots, i-1$

$$\sigma = \sigma + a_{ij} x_j^{(k)}$$

τέλος

Για $j = i+1, \dots, n$

$$\sigma = \sigma + a_{ij} x_j^{(k-1)}$$

τέλος

$$\sigma = (b_i - \sigma) / a_{ii}$$

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega(\sigma - x_i^{(k-1)})$$

τέλος

Έλεγχος σύγκλισης και τερματισμός

τέλος

3.6 ΜΕΘΟΔΟΣ GMRES (ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ)

Η μέθοδος GMRES (Generalized minimal residual method) είναι μια ακόμη επαναληπτική μέθοδος επίλυσης μη συμμετρικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων μεγάλης κλίμακας. Αποτελεί εξέλιξη του αλγορίθμου Arnoldi⁴, όμως λύνει περισσότερα προβλήματα γιατί ανήκει στους αλγορίθμους πλάγιας προβολής που

⁴ Η επανάληψη Arnoldi επινοήθηκε το 1951 από τον W. E. Arnoldi και είναι ένας αλγόριθμος που βρίσκει τα ιδιοδιανύσματα γενικών πινάκων (πιθανώς μη-Ερμητιανών) και είναι μια παραλλαγή της Gram-Schmidt για την ορθοκανονικοποίηση του χώρου Krylov $\text{span}\{r_0, A r_0, \dots, A^k r_0\}$.

απαιτούν μόνο αντιστρεψιμότητα (υπάρχουν και εξειδικεύσεις της GMRES για μη αντιστρέψιμα προβλήματα). Οι βασικές σχέσεις στο k βήμα του αλγορίθμου σε μορφή πινάκων δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{kk} + \mathbf{h}_{k+1} (\boldsymbol{\xi}^k)^T = \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1,k}$$

Στην παραπάνω σχέση ο πίνακας \mathbf{Q}_k είναι ένας $n \times k$ ορθοκανονικός πίνακας με στήλες τα ορθοκανονικά διανύσματα \mathbf{q}_k που παράγονται από τον ίδιο τον αλγόριθμο, ο πίνακας $\mathbf{H}_{k,k}$ είναι ένας $k \times k$ άνω Hessenberg⁵ πίνακας με στοιχεία τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{h}_{ij} = (\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}, \mathbf{q}_i)$, όπου \mathbf{q}_i είναι τα ορθοκανονικά διανύσματα που κατασκευάζονται από τον αλγόριθμο Arnoldi, ενώ τα $\tilde{\mathbf{q}}_{j+1}$ είναι τα ορθογώνια ανά δύο διανύσματα τα οποία κατασκευάζονται από τον ίδιο αλγόριθμο. Ο πίνακας $\mathbf{H}_{k+1,k}$ είναι ο προηγούμενος πίνακας $\mathbf{H}_{k,k}$, αυξημένος κατά μια επιπλέον γραμμή, της οποίας το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο είναι το $h_{k+1,k}$. Το στοιχείο αυτό βρίσκεται από το αλγόριθμο Arnoldi. Το διάνυσμα $\mathbf{h}_{k+1,k}$ είναι το ανάστροφο του διανύσματος-γραμμής της τελευταίας γραμμής του πίνακα $\mathbf{H}_{k+1,k}$. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\xi}^k$ είναι το γνωστό βασικό μοναδιαίο διάνυσμα διάστασης k με 1 στην k συνιστώσα.

3.6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Αναζητούμε τη λύση ενός συνόλου γραμμικών εξισώσεων έτσι όπως καθορίζονται από το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Ο πίνακας \mathbf{A} υποθέτουμε ότι είναι αναστρέψιμος και μεγέθους $m \times m$. Επιπροσθέτως, θεωρούμε ότι το \mathbf{b} είναι κανονικοποιημένο: $\|\mathbf{b}\| = 1$ ⁶. Ο n -ιστός υπόχωρος Krylov για αυτό το πρόβλημα είναι

$$\mathbf{K}_n = \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\}.$$

Η GMRES προσεγγίζει την ακριβής λύση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με το διάνυσμα $\mathbf{x}_n \in \mathbf{K}_n$ και ελαχιστοποιεί τη νόρμα του υπολοίπου $\mathbf{Ax}_n - \mathbf{b}$. Τα διανύσματα $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ είναι σχεδόν γραμμικά ανεξάρτητα, έτσι αντί για τη βάση, η επανάληψη Arnoldi

⁵ Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ καλείται άνω Hessenberg αν $a_{ij} = 0$, $i = 3, 4, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, \min\{i-2, n\}$.

⁶ Εδώ το σύμβολο $\|\cdot\|$ υποδηλώνει την Ευκλείδεια νόρμα.

χρησιμοποιείται για την εύρεση των ορθοκανονικών διανυσμάτων $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ τα οποία σχηματίζουν την βάση \mathbf{K}_n . Γι' αυτό το λόγο, το διάνυσμα $\mathbf{x}_n \in \mathbf{K}_n$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathbf{x}_n = \mathbf{Q}_n * \mathbf{y}_n$ με $\mathbf{y}_n \in \mathbf{R}^n$, όπου το \mathbf{Q}_n είναι ο $m \times m$ πίνακας που σχηματίζεται από τα $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$. Η διαδικασία Arnoldi επίσης παράγει έναν $(n-1) \times n$ άνω τριγωνικό πίνακα Hessenberg \mathbf{H}_n με

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{n+1}\tilde{\mathbf{H}}_n.$$

Επειδή ο \mathbf{Q}_n είναι ορθογώνιος, προκύπτει ότι $\|\mathbf{A}\mathbf{x}_n - \mathbf{b}\| = \|\tilde{\mathbf{H}}_n \mathbf{y}_n - \beta \mathbf{e}_1\|$, όπου το $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ είναι το πρώτο διάνυσμα στην κανονική βάση του \mathbf{R}^{n+1} , $\beta = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\|$ και το \mathbf{x}_0 είναι το πρώτο δοκιμαστικό διάνυσμα (συνήθως το μηδενικό). Γι' αυτό το λόγο, το \mathbf{x}_n μπορεί να βρεθεί ελαχιστοποιώντας τη νόρμα του υπολοίπου $\mathbf{r}_n = \tilde{\mathbf{H}}_n \mathbf{y}_n - \beta \mathbf{e}_1$. Αυτό είναι ένα πρόβλημα των γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων μεγέθους n . Αυτό παράγει την μέθοδο GMRES.

3.6.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Σε κάθε βήμα της επανάληψης:

1. Εφαρμόζεται η επανάληψη Arnoldi.
2. Υπολογίζεται το \mathbf{y}_n που ελαχιστοποιεί το $\|\mathbf{r}_n\|$.
3. Υπολογίζεται το $\mathbf{x}_n = \mathbf{Q}_n * \mathbf{y}_n$.
4. Επανάληψη των 1-3 αν το υπόλοιπο δεν είναι αρκετά μικρό.

Σε κάθε επανάληψη, πρέπει να υπολογίζεται ένα γινόμενο διανύσματος με πίνακα $\mathbf{A} * \mathbf{q}_n$. Αυτό κοστίζει περίπου $2m^2$ πράξεις κινητής υποδιαστολής για πίνακες κανονικής πυκνότητας μεγέθους m , αλλά μπορεί να μειωθεί σε $O(m)$ για αραιούς πίνακες. Επιπροσθέτως του γινομένου διανύσματος με πίνακα, πρέπει να υπολογιστούν $O(nm)$ πράξεις κινητής υποδιαστολής στην n -ιστή επανάληψη.

3.7 ΜΕΘΟΔΟΣ PCG (ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΖΥΓΩΝ ΚΛΙΣΕΩΝ)

Η PCG (preconditioned conjugate gradient method) είναι μια αρκετά σημαντική μέθοδος επίλυσης συμμετρικών και θετικά ορισμένων συστημάτων με πίνακα προρυθμιστή (preconditioner matrix)⁷. Η βασική ιδέα και περιγραφή οφείλεται στους Hestenes και Stiefel (1952) αλλά για δεκαετίες θεωρείτο μη πρακτική σε σύγκριση με την απαλοιφή Gauss και τις επαναληπτικές μεθόδους.

3.7.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Θεωρούμε ένα συμμετρικό θετικά ορισμένο γραμμικό σύστημα εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ μεγέθους $n \times n$. Η ιδέα που υλοποιεί αυτή η μέθοδος βασίζεται στο ότι αρκετές φορές ο δείκτης κατάστασης $\kappa(\mathbf{A})$ του πίνακα είναι αρκετά υψηλός (τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι καλά κατανομημένα) και εφαρμόζει τη ‘συμμετρική’ μέθοδο συζυγών κλίσεων στο τροποποιημένο σύστημα

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$$

Όπου $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$, και \mathbf{C} είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ο \mathbf{C} πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε ο $\tilde{\mathbf{A}}$ να είναι σε καλή κατάσταση ή πίνακας με συστοιχία ιδιοδιανυσμάτων.

3.7.2 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για τη λύση $x^{(0)}$

$$r_0 = b - A x_0$$

$$x_0 = C^{-1} r_0$$

$$d_0 = z_0$$

Για $k = 0, 1, 2, \dots$, μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη σύγκλισης

⁷ Πίνακας προρρύθμισης λέγεται ένας βοηθητικός πίνακας σε μια επαναληπτική μέθοδο, οποίος προσεγγίζει με κάποιο τρόπο τους συντελεστές του πίνακα ή του αντιστρόφου του.

$$\alpha_k = \frac{z_k^T r_k}{d_k^T A d_k} \quad \% \text{ μέγεθος βήματος}$$

$$x_k = x_k + \alpha_k d_k \quad \% \text{ προσεγγιστική λύση}$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k \quad \% \text{ υπόλοιπο}$$

$$z_{k+1} = C^{-1} r_{k+1} \quad \% \text{ βελτίωση τρέχοντος βήματος}$$

$$d_{k+1} = z_{k+1} + \beta_{k+1} d_k \quad \% \text{ αναζήτηση κατεύθυνσης}$$

Τέλος

4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΜΠΛΟΚ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ TRIDIAGONAL MATRIX ALGORITHM (ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ)

Στην αριθμητική γραμμική άλγεβρα, ο τριδιαγώνιος αλγόριθμος πινάκων (tridiagonal matrix algorithm) που είναι γνωστός και με την ορολογία Thomas algorithm είναι ένας απλοποιημένος τρόπος της απαλοιφής Gauss [5], ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση τριδιαγώνιων συστημάτων εξισώσεων. Ένα τριδιαγώνιο σύστημα εξισώσεων με n αγνώστους μπορεί να γραφεί με την εξής μορφή:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

όπου τα $a_1=0$ και $c_n=0$. Σε μορφή πινάκων, το σύστημα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Για τέτοια συστήματα, η λύση μπορεί να ληφθεί εντός χρόνου $O(n)$ αντί για $O(n^3)$ που απαιτεί η απαλοιφή Gauss. Το πρώτο σάρωμα αφαιρεί τα a_i 's και μετά με μια (συντομευμένη) αντικατάσταση προς τα πίσω παράγει τη λύση. Παραδείγματα τέτοιων πινάκων συνήθως προκύπτουν από τη διακριτοποίηση πρώτης τάξεως διαφορικών εξισώσεων Poisson και απλών κυβικών παρεμβολών με spline.

4.1.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Το πρώτο βήμα αποτελείται από την μετατροπή των συντελεστών ως ακολούθως, προσθέτοντας τις βοηθητικές μεταβλητές w και g

$$w_i = \begin{cases} b_1^{-1} c_1 & , i = 1 \\ (b_i^{-1} - a_i w_{i-1})^{-1} c_1 & , 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$g_i = \begin{cases} b_1^{-1} d_1 & , i = 1 \\ (b_i^{-1} - a_i w_{i-1})^{-1} (d_i - a_i g_{i-1}) & , 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Αυτή είναι η σάρωση προς τα εμπρός. Η λύση προκύπτει από την αντικατάσταση προς τα πίσω μέσω του τύπου:

$$x_i = \begin{cases} x_n = g_n & , i = n \\ x_i = g_i - w_i x_{i+1} & , 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Η προέλευση του τριδιαγώνιου αλγόριθμου πινάκων περιέχει την χειρωνακτική εφαρμογή μιας εξειδικευμένης απαλοιφής Gauss.

Υποθέτουμε ότι οι άγνωστοι είναι x_1, \dots, x_2 και οι εξισώσεις προς επίλυση είναι:

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \quad i = 1 \quad (4.1)$$

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (4.2)$$

$$a_N x_{N-1} + b_N x_N = d_N, \quad i = n \quad (4.3)$$

Τροποποιώντας την δεύτερη ($i = 2$) εξίσωση με την πρώτη εξίσωση ως ακολούθως:

$$(4.2) * b_1 - (4.1) * a_2$$

προκύπτει:

$$(a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3) b_1 - (b_1 x_1 + c_1 x_2) a_2 = d_2 b_1 - d_1 a_2$$

$$(b_2 b_1 - c_1 a_2) x_2 + c_2 b_1 x_3 = d_2 b_1 - d_1 a_2$$

και το αποτέλεσμα είναι ότι το x_1 θα αφαιρεθεί από την δεύτερη εξίσωση. Χρησιμοποιώντας μια παραπλήσια τακτική με την τροποποιημένη δεύτερη εξίσωση και την τρίτη εξίσωση προκύπτει:

$$(a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4) - (b_2 b_1 - c_1 a_2) x_2 + c_2 b_1 x_3 - a_3 = d_3(b_2 b_1 - c_1 a_2) - (b_2 b_1 - c_1 a_2) a_3$$

$$(b_3 (b_2 b_1 - c_1 a_2) - c_2 b_1 a_3) x_3 + c_3(b_2 b_1 - c_1 a_2) x_4 = d_3(b_2 b_1 - c_1 a_2) - (b_2 b_1 - c_1 a_2) a_3$$

Αυτή τη φορά έχει επαλειφθεί το x_2 . Αν αυτή η διαδικασία επαναληφθεί μέχρι την n -ιοστή γραμμή, δηλαδή την τροποποιημένη n -ιοστή εξίσωση το αποτέλεσμα θα περιέχει μόνο ένα άγνωστο το x_n . Αυτή μπορεί να λυθεί και η λύση να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση της $(n-1)$ εξίσωσης, και αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να βρεθούν όλοι οι άγνωστοι.

Αναλυτικά, οι συντελεστές στις τροποποιημένες εξισώσεις γίνονται συνεχώς πιο περίπλοκοι αν δηλωθούν ξεχωριστά. Εξετάζοντας την διαδικασία, οι τροποποιημένοι συντελεστές μπορεί να δηλωθούν περιοδικά:

$$\tilde{a}_i = 0$$

$$\tilde{b}_1 = b_1$$

$$\tilde{b}_i = b_i \tilde{b}_{i-1} - \tilde{c}_{i-1} a_i$$

$$\tilde{c}_1 = c_1$$

$$\tilde{c}_i = c_i \tilde{b}_{i-1}$$

$$\tilde{d}_1 = d_1$$

$$\tilde{d}_i = d_i \tilde{b}_{i-1} - \tilde{d}_{i-1} a_i$$

Για επιταχύνουμε περισσότερο την διαδικασία της επίλυσης, το \tilde{b}_i μπορεί να διαιρεθεί και οι καινούργιοι τροποποιημένοι συντελεστές είναι οι εξής:

$$a'_i = 0$$

$$b'_i = 1$$

$$c'_1 = \frac{c_1}{b_1}$$

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1} a_i}$$

$$d'_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$d'_i = \frac{d_i - d'_{i-1} a_i}{b_i - c'_{i-1} a_i}$$

Αυτό δίνει το παρακάτω σύστημα με τους ίδιους αγνώστους και συντελεστές ορισμένους σύμφωνα με τους παραπάνω αρχικούς συντελεστές:

$$x_i + c'_i x_{i+1} = d'_i \quad , 1 \leq i \leq n-1 \quad (4.4)$$

$$x_N = \frac{d'_n}{b'_n} \quad , i = n \quad (4.5)$$

Η τελευταία εξίσωση (4.5) περιέχει μόνο ένα άγνωστο. Επιλύοντας διαδοχικά την προηγούμενη εξίσωση (4.4) για όλους τους αγνώστους που απομένουν, τους υπολογίζουμε, μέσω αυτή της αντικατάστασης προς τα πίσω:

$$x_N = \frac{d'_n}{b_n} \quad (4.6)$$

$$x_i = \frac{d'_i - c'_i x_{i+1}}{b_i}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (4.7)$$

4.1.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για την καλύτερη κατανόηση του αλγορίθμου παρακάτω αναπτύσσεται ένα αριθμητικό παράδειγμα:

Θεωρούμε το τριδιαγώνιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οι βοηθητικοί πίνακες c και d που προκύπτουν είναι οι παρακάτω:

$$c'_1 = \frac{c_1}{b_1} = \frac{1}{-2}$$

$$c'_2 = \frac{c_2}{b_2 - c'_1 a_2} = \frac{1}{-2 - \left(\frac{1}{-2}\right) * 1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$c'_3 = \frac{c_3}{b_3 - c'_2 a_3} = \frac{1}{-2 - \left(-\frac{2}{3}\right) * 1} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

$$c'_4 = \frac{c_4}{b_4 - c'_3 a_4} = \frac{1}{-2 - \left(-\frac{3}{4}\right) * 1} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

$$d'_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$d'_2 = \frac{d_2 - d'_1 a_2}{b_2 - c'_1 a_2} = \frac{0 - 0 * 1}{-2 - \left(-\frac{1}{2}\right) * 1} = 0$$

$$d'_3 = \frac{d_3 - d'_2 a_3}{b_3 - c'_2 a_3} = \frac{-2 - 0 * 1}{-2 - \left(-\frac{2}{3}\right) * 1} = \frac{-2}{-2 + \frac{2}{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$d'_4 = \frac{d_4 - d'_3 a_4}{b_4 - c'_3 a_4} = \frac{0 - \frac{3}{2} * 1}{-2 - \left(-\frac{3}{4}\right) * 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-2 + \frac{3}{4}} = \frac{6}{5}$$

$$d'_5 = \frac{d_5 - d'_4 a_5}{b_5 - c'_4 a_5} = \frac{0 - \frac{6}{5} * 1}{-2 - \left(-\frac{4}{5}\right) * 1} = \frac{\frac{6}{5}}{2 - \frac{4}{5}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_5 = d'_5 = 1$$

$$x_4 = d'_4 - c'_4 x_5 = \frac{6}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{10}{5} = 2$$

$$x_3 = d'_3 - c'_3 x_4 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right) * 2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

$$x_2 = d'_2 - c'_2 x_3 = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) * 3 = 2$$

$$x_1 = d'_1 - c'_1 x_2 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) * 2 = 1$$

Άρα η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $\mathbf{x} = [1, 2, 3, 2, 1]$

4.1.3 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

$$w_1 = \frac{c_1}{b_1}$$

$$g_1 = \frac{k_1}{b_1}$$

% φάση αναγωγής/ελλάτωσης

Για $i = 2, \dots, n-1$

$$w_i = \frac{c_i}{b_i - a_i w_{i-1}}$$

$$g_i = \frac{k_i - a_i g_{i-1}}{b_i - a_i w_{i-1}}$$

Τέλος

$$g_n = \frac{k_n - a_n g_{n-1}}{b_n - a_n w_{n-1}}$$

% φάση αντικατάστασης προς τα πίσω (τελικής λύσης)

$$z_n = g_n$$

Για $i = 1, \dots, n-1$

$$z_i = g_i - w_i z_{i-1}$$

Τέλος

4.1.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΙΑ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕ ΜΠΛΟΚ

Σε αναλογία με την ανάλυση που έχει γίνει για τους απλούς τριδιαγώνιους πίνακες προκύπτει ο τροποποιημένος αλγόριθμος πινάκων για τριδιαγώνιους πίνακες με μπλοκ [5]. Αναλυτικότερα, το σύστημα εξισώσεων που χρησιμοποιείται έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & & & \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & \\ & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_{n-1} \\ & & & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

στο παραπάνω σχήμα τα στοιχεία του πίνακα και των διανυσμάτων συμβολίζονται με κεφαλαίο γράμμα γιατί έτσι υποδηλώνεται η ύπαρξη πινάκων στις θέσεις αυτές. Τα στοιχεία \mathbf{B}_i είναι τριδιαγώνιοι υπό-πίνακες διαστάσεων $n \times n$, τα στοιχεία \mathbf{A}_i , \mathbf{C}_i είναι διαγώνιοι υπό-πίνακες διαστάσεων $n \times n$ και τα στοιχεία \mathbf{x}_i και \mathbf{d}_i είναι διανύσματα διαστάσεων $n \times 1$. Κατ' αντιστοιχία, όλοι οι υπολογισμοί που γίνονται στη μέθοδο για τους απλούς τριδιαγώνιους πίνακες, τροποποιούνται ώστε σε όποια σημεία χρησιμοποιούνται απλές μεταβλητές στοιχείων να μετατρέπονται στους αντίστοιχους πίνακες:

$$\mathbf{W}_i = \begin{cases} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & , i=1 \\ (\mathbf{B}_i^{-1} - \mathbf{A}_i \mathbf{W}_{i-1})^{-1} \mathbf{C}_i & , 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{cases} \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{d}_1 & , i=1 \\ (\mathbf{B}_i^{-1} - \mathbf{A}_i \mathbf{W}_{i-1})^{-1} (\mathbf{d}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{G}_{i-1}) & , 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

και για το διάνυσμα της λύσης

$$\mathbf{x}_i = \begin{cases} \mathbf{x}_N = \mathbf{G}_N & , i = n \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{G}_i - \mathbf{W}_i \mathbf{x}_{i+1} & , 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

4.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ODD EVEN REDUCTION (ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ ΖΥΓΩΝ)

Θεωρούμε ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, όπου ο \mathbf{A} είναι τριδιαγώνιος πίνακας, δηλαδή για $|i - j| > 1$. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να γραφεί στη εξής μορφή

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \quad (4.8)$$

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (4.9)$$

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \quad (4.10)$$

Στην παραπάνω αναπαράσταση τα g_i είναι τα διαγώνια στοιχεία του A και τα a_i (αντίστοιχα, c_i) είναι τα υπό - διαγώνια στοιχεία (αντίστοιχα, τα υπέρ - διαγώνια στοιχεία). Αρκετές μέθοδοι που υπάρχουν για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος είναι παραλληλοποιήσιμες. Μια αρκετά αντιπροσωπευτική μέθοδος αυτού του είδους είναι η μέθοδος αναγωγής μονών-ζυγών.

4.2.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ

Η βασική ιδέα είναι ότι αν $b_i \neq 0$, η εξίσωση (4.9) μπορεί να επιλυθεί ως προς το x_i σε σχέση με το x_{i-1} και το x_{i+1} [2]. Αν εφαρμόσουμε αυτή την αλλαγή για κάθε περιττό i και αντικαταστήσουμε την έκφραση για το x_i στις υπόλοιπες εξισώσεις, θα απομείνουν οι εξισώσεις του συστήματος που περιέχουν μόνο τις μεταβλητές x_i για τις οποίες το i είναι άρτιος. Το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει είναι επίσης τριδιαγώνιο και έχει τις μισές μεταβλητές σε σχέση με το αρχικό. Η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί διαδοχικά, ώστε να προκύψει ένα σύστημα με ένα άγνωστο.

Πιο αναλυτικά, για την απλοποίηση των εξισώσεων θεωρούμε ότι $x_0 = x_{n+1} = 0$, γεγονός που επαληθεύεται από την εξίσωση (4.9) για $i = 1$ και $i = n$. Επιλύουμε την εξίσωση (4.9) ως προς x_i και προκύπτει

$$x_i = \frac{1}{b_i} (d_i - ax_{i-1} - cx_{i+1}) \quad (4.10)$$

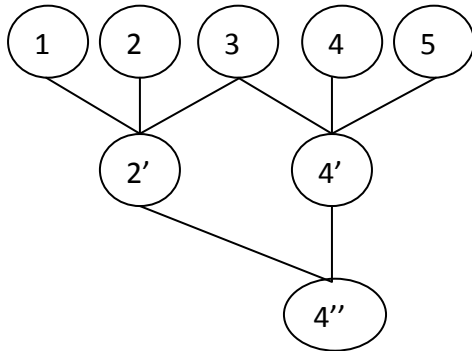
Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (4.10), όπου έχουμε αντικαταστήσει το i με $i-1$ και $i+1$, ώστε να εξαλείψουμε το x_{i-1} και το x_{i+1} από την (4.10). Από αυτό προκύπτει

$$\frac{a_i}{b_{i-1}}(d_{i-1} - a_{i-1}x_{i-2} - c_{i-1}x_i) + b_i x_i + \frac{c_i}{b_{i+1}}(d_{i+1} - a_{i+1}x_i - c_{i+1}x_{i+2}) = d_i$$

Το οποίο απλοποιείται ως εξής

$$-\left(\frac{a_i a_{i-1}}{b_{i-1}}\right)x_{i-2} + \left(d_i - \frac{c_{i-1} a_i}{b_{i-1}} - \frac{c_i a_{i+1}}{b_{i+1}}\right)x_i - \left(\frac{c_i c_{i+1}}{b_{i+1}}\right)x_{i+2} = d_i - \frac{a_i}{b_{i-1}}d_{i-1} - \frac{c_i}{b_{i+1}}d_{i+1} \quad (4.11)$$

Θεωρούμε την εξίσωση (4.11) για κάθε άρτιο δείκτη i , $1 \leq i \leq n$. Το σύστημα που δημιουργείται σύμφωνα με τους αγνώστους $x_2, \dots, x_{2(n/2)}$ είναι τριδιαγώνιο. Χρησιμοποιούμε την ίδια διαδικασία διαδοχικά, ώστε να αποκτήσουμε ένα μικρότερο σύστημα, έως ότου απομείνει μια εξίσωση με έναν άγνωστο, η οποία λύνεται απευθείας. Μετά συνεχίζουμε προς τα πίσω ώστε να πάρουμε και τις τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα [4].



Στο παράδειγμα που αναλύεται στο παραπάνω σχήμα ισχύει $n = 5$. Πιο αναλυτικά, η φάση της οπισθο-αντικατάστασης ξεκινά υπολογίζοντας το τελευταίο στοιχείο της λύσης με τους αντίστοιχους συντελεστές. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα διανύσματα της λύσης από το προτελευταίο επίπεδο έως το πρώτο και στο κάθε επίπεδο ξεκινώντας από το πιο αριστερό στοιχείο και συνεχίζοντας προς τα δεξιά. Το διάνυσμα της λύσης που υπολογίζεται στο τελευταίο στάδιο και στα ενδιάμεσα στάδια προωθείται ως το πρώτο επίπεδο γιατί αποτελεί κομμάτι της αρχικής λύσης.

4.2.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για την καλύτερη κατανόηση του αλγορίθμου παρακάτω αναπτύσσεται ένα αριθμητικό παράδειγμα:

Θεωρούμε το τριδιαγώνιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το αρχικό σύστημα ανάγεται στο νέο 3×3 σύστημα:

$$a'_2 = -\frac{1*0}{-2} = 0$$

$$b'_2 = -2 - \frac{1*1}{-2} - \frac{1*1}{-2} = -1$$

$$c'_2 = -\frac{1*1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$d'_2 = 0 - \frac{1}{-2} * 0 - \frac{1}{-2} * (-2) = -1$$

$$a'_4 = -\frac{1*1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$b'_4 = -2 - \frac{1*1}{-2} - \frac{1*1}{-2} = -1$$

$$c'_4 = -\frac{1*0}{-2} = 0$$

$$d'_4 = 0 - \frac{1}{-2} * (-2) - \frac{1}{-2} * 0 = -1$$

Άρα ο νέος πίνακας που προκύπτει είναι 2×2 και το νέο αριστερό διάνυσμα 2×1

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και παράγεται ένα στοιχείο:

$$a_4'' = -\frac{\frac{1}{2} * 0}{-1} = 0$$

$$b_4'' = -1 - \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}}{-1} - \frac{0 * 0}{0} = -\frac{3}{4}$$

$$c_4'' = -\frac{0 * 0}{0} = 0$$

$$d_4'' = -1 - \frac{\frac{1}{2}}{-1} * (-1) - \frac{0}{0} * 0 = -\frac{3}{2}$$

Τελικά λύνουμε τη μοναδική εξίσωση που έχει προκύψει σ' αυτό το τελευταίο στάδιο της απλοποίησης-αναγωγής:

$$x_4'' = \frac{d_4''}{b_4''} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

Με βάση αυτή τη λύση λύνουμε στο προηγούμενο επίπεδο τις δύο εξισώσεις που υπάρχουν με βάση τους συντελεστές που έχουν προκύψει:

$$x_2' = \frac{1}{b_2'} (d_2' - c_2' x_4'') = -1 \left(0 - \frac{1}{2} * 2 \right) = 2$$

$x_4' = x_4'' = 2$ (Αυτό ισχύει γιατί το στοιχείο έχει άρτιο δείκτη και δεν είναι το πρώτο στοιχείο στο συγκεκριμένο επίπεδο).

Συνεχίζοντας στο αρχικό πρώτο επίπεδο υπολογίζουμε και τα στοιχεία του διανύσματος της λύσης που υπολείπονται:

$$x_1 = \frac{1}{b_1} (d_1 - c_1 x_2') = \frac{1}{-2} (0 - 1 * 2) = 1$$

$$x_2 = x'_2 = 2 \quad (\text{Αυτό ισχύει γιατί το στοιχείο έχει άρτιο δείκτη}).$$

$$x_3 = \frac{1}{b_3}(d_3 - a_3x'_2 - c_3x'_4) = \frac{1}{-2}(-2 - 1 * 2 - 1 * 2) = 3$$

$$x_4 = x'_4 = 2 \quad (\text{Αυτό ισχύει γιατί το στοιχείο έχει άρτιο δείκτη}).$$

$$x_5 = \frac{1}{b_5}(d_5 - a_5x'_4) = \frac{1}{-2}(0 - 1 * 2) = 1$$

Άρα η λύση του παραπάνω συστήματος είναι $\mathbf{x} = [1, 2, 3, 2, 1]$

4.2.3 ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑΣ

$$f_i^0 = f_i, g_i^0 = g_i, h_i^0 = h_i, b_i^0 = b_i$$

% φάση αναγωγής/ελλάτωσης

Για $i = 1, 2, \dots, n-1$

Για $j = 2^i, 2 \times 2^i, \dots, 2^n - 2^i$

$$f_j^i = \frac{f_j^{i-1} f_{j-1}^{i-1}}{g_{j-1}^{i-1}}$$

$$g_j^i = \left(g_j^{i-1} - \frac{h_{j-1}^{i-1} f_j^{i-1}}{g_{j-1}^{i-1}} - \frac{h_j^{i-1} f_{j+1}^{i-1}}{g_{j+1}^{i-1}} \right)$$

$$h_j^i = \frac{h_j^{i-1} h_{j+1}^{i-1}}{g_{j+1}^{i-1}}$$

$$d_j^i = d_j^{i-1} - \frac{f_j^{i-1}}{g_{j-1}^{i-1}} d_{j-1}^{i-1} - \frac{h_j^{i-1}}{g_{j+1}^{i-1}} d_{j+1}^{i-1}$$

Τέλος

Τέλος

% φάση αντικατάστασης προς τα πίσω (τελικής λύσης)

$$x_{2^{n-1}} = \frac{g_{2^{n-1}}^{n-1}}{b_{2^{n-1}}^{n-1}}$$

Για $i = n-1, \dots, 2, 1$

Για $j = 2^i, 2 \times 2^i, \dots, 2^n - 2^i$

Αν $(j == 2^n - 2^i)$

$$x_j^i = x_j^{i-1}$$

Αν $(j \% 2 == 0)$

$$x_j^i = \frac{1}{g_j^{i-1}} (d_j^{i-1} - f_j^{i-1} x_{j-1}^{i-1})$$

Αλλιώς αν $(j \% 2 == 1)$

$$x_j^i = \frac{1}{g_j^{i-1}} (d_j^{i-1} - h_j^{i-1} x_{j+1}^{i-1})$$

Αλλιώς

$$x_j^i = \frac{1}{g_j^{i-1}} (d_j^{i-1} - f_j^{i-1} x_{j-1}^{i-1} + h_j^{i-1} x_{j+1}^{i-1})$$

Τέλος

Τέλος

Τέλος

Τέλος

4.2.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ ΖΥΓΩΝ ΓΙΑ ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕ ΜΠΛΟΚ

Κλείνοντας την παράγραφο για τη μέθοδο αναγωγής μονών ζυγών αναφέρουμε ότι μπορεί να γενικευθεί και για τριδιαγώνιους πίνακες με μπλοκ. Αναλυτικότερα, οι εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & & & \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & \\ & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mathbf{C}_{n-1} \\ & & & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix}$$

και τα στοιχεία του πίνακα και των διανυσμάτων συμβολίζονται με έντονα γράμματα γιατί έτσι υποδηλώνεται η ύπαρξη πινάκων στις θέσεις αυτές. Κάθε στοιχείο \mathbf{x}_i είναι ένα διάνυσμα μεγέθους k και κάθε \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i και \mathbf{C}_i είναι ένας πίνακας μεγέθους $k \times k$. Οι αντίστοιχες εξισώσεις έχουν τη παρακάτω μορφή:

$$-\left(\frac{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i-1}}{\mathbf{B}_{i-1}}\right) \mathbf{x}_{i-2} + \left(\mathbf{d}_i - \frac{\mathbf{C}_{i-1} \mathbf{A}_i}{\mathbf{B}_{i-1}} - \frac{\mathbf{C}_i \mathbf{A}_{i+1}}{\mathbf{B}_{i+1}}\right) \mathbf{x}_i - \left(\frac{\mathbf{C}_i \mathbf{C}_{i+1}}{\mathbf{B}_{i+1}}\right) \mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{d}_i - \frac{\mathbf{A}_i}{\mathbf{B}_{i-1}} \mathbf{d}_{i-1} - \frac{\mathbf{C}_i}{\mathbf{B}_{i+1}} \mathbf{d}_{i+1}$$

Μια ουσιαστική διαφορά, αποτελεί το γεγονός για τους τριδιαγώνιους πίνακες με μπλοκ κάθε όρος της μορφής $1/\mathbf{B}_{i-1}$ πρέπει να υπολογίζει τον αντίστροφο του πίνακα \mathbf{B}_{i-1} .

5. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

Για την καλύτερη προσομοίωση του προβλήματος αναπτύχθηκαν δίκτυα τροφοδοσίας με τις εξής παραμέτρους:

$vn=2$	αριθμός των πηγών τροφοδοσίας του δικτύου τροφοδοσίας
$rsh = 0.1$	αντίσταση οριζόντιων φύλου (σε Ohms/sq)
$rsv = 0.1$	αντίσταση κατακόρυφου φύλου (σε Ohms/sq)
$lsh = 0.2$	οριζόντια επαγωγή ανά μονάδα μήκους (σε pH/um)
$lsv=0.2$	κατακόρυφη επαγωγή ανά μονάδα μήκους (σε pH/um)
$lsv=0.2$	κατακόρυφη διάσταση του ολοκληρωμένου κυκλώματος(σε um)
$sizv=350$	κατακόρυφη διάσταση του ολοκληρωμένου κυκλώματος(σε um)
$sizh=350$	οριζόντια διάσταση του ολοκληρωμένου κυκλώματος (σε um)
$pv=sizh/(n1-1)$	αριθμός των κάθετων γραμμών
$ph=sizv/(n2-1)$	αριθμός των οριζόντιων γραμμών
$rpin=50$	αντίσταση πηγής τροφοδοσίας σε Ohms
$lpin=100$	αυτεπαγωγή πηγής τροφοδοσίας (σε pH)
$crph=1e-4$	χωρητικότητα παράλληλων πλακών στους οριζόντιους κλάδους σε pF/um ²
$crrv=1e-4$	χωρητικότητα παράλληλων πλακών στους κάθετους κλάδους σε pF/um ²
$cffh=1e-4$	πλευρική χωρητικότητα στους οριζόντιους κλάδους σε pF/um
$cffv=1e-4$	πλευρική χωρητικότητα στους κάθετους κλάδους σε pF/um
$crpin=0.01$	χωρητικότητα πηγής τροφοδοσίας σε pF
$h=10$	βήμα δειγματοληψίας (σε ps)

Τα κυκλώματα έχουν δίκτυο (grid) διαστάσεων $n1 \times n2 - vn$, όπου $n1$ ο αριθμός των οριζόντιων κόμβων, $n2$ ο αριθμός των κάθετων κόμβων και vn ο αριθμός των πηγών τροφοδοσίας. Σύμφωνα με τις διαστάσεις που έχουν δοθεί, τα δίκτυα που έχουν αναπτυχθεί έχουν $(n1 \times n2)$ κόμβους και $(n1 \times (n2-1) + (n1-1) \times n2)$ κλάδους. Οι δοκιμαστικές εκτελέσεις έγιναν για διάφορες τιμές των $n1$ και $n2$ έτσι ώστε να μελετήσουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερα δίκτυα. Η τοποθέτηση των πηγών

ρευμάτων και τροφοδοσίας είναι τυχαία. Επίσης τα χαρακτηριστικά του μηχανήματος εκτέλεσης είναι τα εξής:

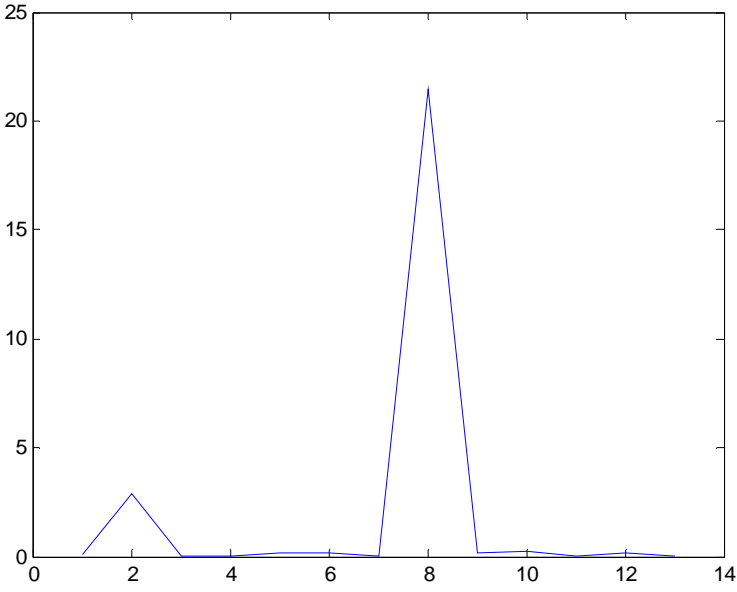
CPU: Intel Core 2Duo, 2,13 GHz

RAM: 2GB

Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται τα συνοπτικά αποτελέσματα των χρόνων εκτέλεσης για κάθε μέθοδο.

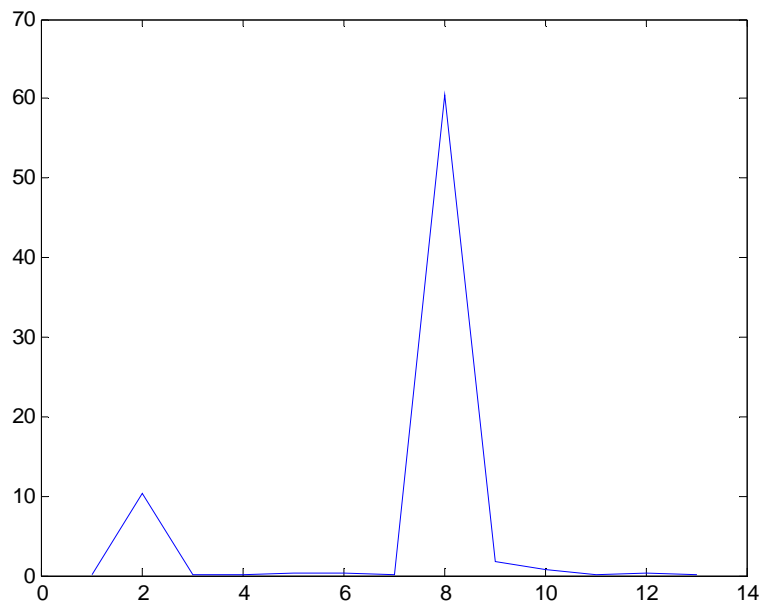
n1 = n2 = 60	
Μέθοδος LU	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 8.231046e-002
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 2.895890e+000
Μέθοδος CHOLESKY	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 1.693483e-002
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 7.566884e-003
Μέθοδος JACOBI	1.992840e-001
Μέθοδος GAUSS-SEIDEL	1.864335e-001
Μέθοδος PCG	Με προρυθμιστή από luinc και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=200: Χρόνος = 6.208610e-002 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 14
	Με προρυθμιστή τον μοναδιαίο και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=500: Χρόνος = 2.147479e+001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 425
Μέθοδος SOR	2.062502e-001
Μέθοδος ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 2.922235e-001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 1.781763e-002
Μέθοδος ΑΝΑΓΩΓΗΣ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής:

ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ	1.805486e-001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 1.453313e-002



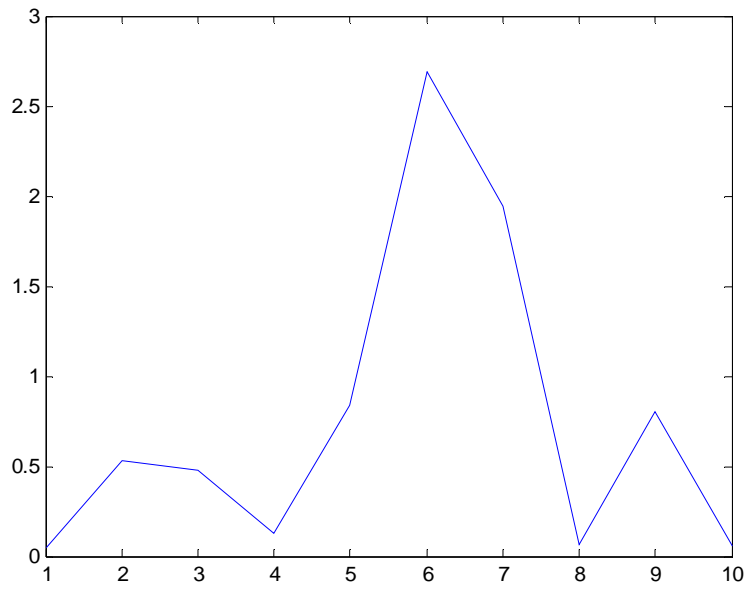
Εικόνα 5: $n_1 = n_2 = 60$

n1 = n2 = 75	
Μέθοδος LU	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 1.878666e-001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 1.031244e+001
Μέθοδος CHOLESKY	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 3.615096e-002
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 1.618250e-002
Μέθοδος JACOBI	3.943322e-001
Μέθοδος GAUSS- SEIDEL	3.020593e-001
Μέθοδος PCG	Με προρυθμιστή από luinc και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=200: Χρόνος = 1.326521e-001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 17
	Με προρυθμιστή τον μοναδιαίο και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=500: Χρόνος = 6.047045e+001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 500
Μέθοδος SOR	1.821362e+000
Μέθοδος ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 7.371236e-001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 2.987391e-002
Μέθοδος ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 4.055859e-001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 2.738365e-002



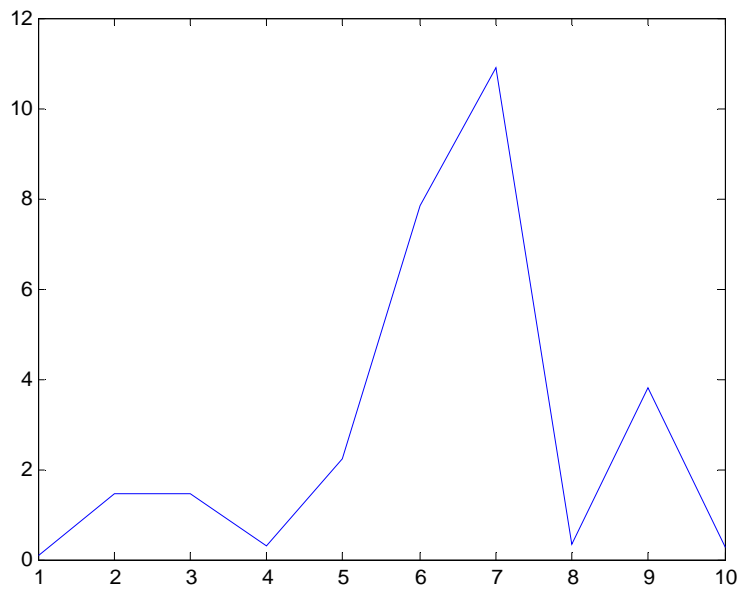
Εικόνα 6: $n_1 = n_2 = 75$

n1 = n2 = 100	
Πλήρης άμεση λύση του συστήματος	4.705011e-002
Μέθοδος JACOBI	5.282319e-001
Μέθοδος GAUSS-SEIDEL	4.820853e-001
Μέθοδος PCG	Με προρυθμιστή από luinc και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=200: Χρόνος = 1.263781e-001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 22
	Με προρυθμιστή τον μοναδιαίο και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=500: Χρόνος = 8.354766e-001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 500
Μέθοδος SOR	2.692149e+000
Μέθοδος ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 1.942392e+000
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 6.146284e-002
Μέθοδος ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 8.047073e-001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 5.397585e-002



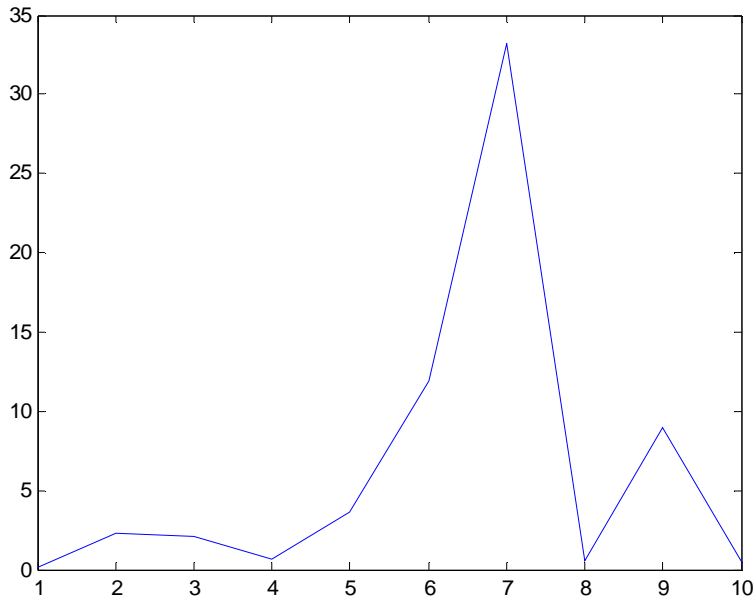
Εικόνα 7: $n_1 = n_2 = 100$

n1 = n2 = 150	
Πλήρης άμεση λύση του συστήματος	9.126216e-002
Μέθοδος JACOBI	1.462124e+000
Μέθοδος GAUSS-SEIDEL	1.441840e+000
Μέθοδος PCG	Με προρυθμιστή από luinc και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=200: Χρόνος = 2.971101e-001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 32
	Με προρυθμιστή τον μοναδιαίο και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=500: Χρόνος = 2.243574e+000 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 500
Μέθοδος SOR	7.832551e+000
Μέθοδος ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 1.088307e+001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 3.168188e-001
Μέθοδος ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 3.820711e+000
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 2.590765e-001



Εικόνα 8: $n_1 = n_2 = 150$

n1 = n2 = 200	
Πλήρης άμεση λύση του συστήματος	1.762934e-001
Μέθοδος JACOBI	2.336026e+000
Μέθοδος GAUSS-SEIDEL	2.120632e+000
Μέθοδος PCG	Με προρυθμιστή από luinc και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=200: Χρόνος = 6.396531e-001 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 41
	Με προρυθμιστή τον μοναδιαίο και μέγιστο αριθμό επαναλήψεων=500: Χρόνος = 3.645597e+000 Αριθμός επαναλήψεων σύγκλισης = 489
Μέθοδος SOR	1.189727e+001
Μέθοδος ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 3.317002e+001
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 5.189081e-001
Μέθοδος ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ	Χρόνος για τη φάση της αναγωγής: 8.909803e+000
	Χρόνος για τη φάση της οπισθοαντικατάστασης: 4.386655e-001



Εικόνα 9: $n_1 = n_2 = 200$

Πρέπει να αναφερθεί ότι για τις μεθόδους JACOBI, GAUSS-SEIDEL και SOR οι χρόνοι που προκύπτουν δεν είναι συγκρίσιμοι γιατί οι επαναλήψεις εκτέλεσης φτάνουν στο άνω όριο επαναλήψεων και οι μέθοδοι αυτές δεν συγκλίνουν. Επίσης για τις εκτελέσεις με $n_1, n_2 \geq 100$ εφαρμόστηκε ανακατανομή των γραμμών και στηλών με τον αλγόριθμο md (minimum degree) έτσι ώστε να επιτευχθούν πιο αραιοί πίνακες παραγοντοποίησης \mathbf{L} και \mathbf{L}^T .

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

6.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Η odd even reduction δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια LU παραγοντοποίηση ενός τριδιαγώνιου πίνακα (όπως και ο τριδιαγώνιος αλγόριθμος που παρουσιάστηκε πιο πριν) αλλά με κατάλληλη εναλλαγή (permutation) γραμμών και συγκεκριμένα διαχωρισμό των άρτιων και περιττών γραμμών. Σε αυτή τη μορφή της δεν παρουσιάζει κάποιο πλεονέκτημα σε σχέση με τον τριδιαγώνιο αλγόριθμο αλλά όμως έχει πολύ περισσότερες δυνατότητες παραλληλοποίησης γιατί κάθε σύνολο περιττών ή άρτιων γραμμών μπορεί να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά (παράλληλα) από τα υπόλοιπα.
2. Για την LU και την Cholesky χρησιμοποιήθηκαν οι έτοιμες ρουτίνες του Matlab. Οι χρόνοι εκτέλεσής τους είναι πολύ μικρότερες κυρίως γιατί καλείται μια προμεταφρασμένη (precompiled) ρουτίνα σε γλώσσα C, ενώ η υλοποίηση των υπόλοιπων μεθόδων γίνεται σε περιβάλλον Matlab.

6.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Σύμφωνα με τα αριθμητικά αποτελέσματα ο χρόνος της μεθόδου αναγωγής μονών ζυγών είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο της μεθόδου pcg. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν και η πρώτη εκμεταλλεύεται την ειδική μορφή του πίνακα, απαιτεί τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα σε κάθε βήμα, το οποίο είναι αρκετά χρονοβόρο. Στην ειδική περίπτωση που τα διαγώνια μπλοκ είναι ίδια όπως συμβαίνει για παράδειγμα κατά τη διακριτοποίηση μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γίνει μια παραγοντοποίησή τους που οδηγεί στην πολύ γρήγορη εκτέλεση της μεθόδου με πλήθος πράξεων της τάξης $O(n \log n)$ (όπως και ο FFT). Στην περίπτωση των δομημένων δικτύων τροφοδοσίας, όπου τα διαγώνια μπλοκ δεν είναι όμοια μεταξύ τους θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η γρήγορη εκτέλεση της μεθόδου πάνω σε ένα δίκτυο με όμοια διαγώνια μπλοκ ως προρυθμιστής (preconditioner) για μετέπειτα εκτέλεση της pcg στο γενικότερο δίκτυο με ανόμοια μπλοκ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ - ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB

A. ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ

```
n1=300;
n2=300;
vn=2; %number of voltage sources

n=n1*n2;
b=n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+vn;

nper=randperm(n);
ivn=nper(:,1:vn); %node where voltage sources are placed

rsh=0.1;
rsv=0.1;
lsh=0.2;
lsv=0.2;
sizv=350;
sizh=350;
pv=sizh/(n1-1);
ph=sizv/(n2-1);
rpin=50;
lpin=100;
cpph=1e-4;
cppv=1e-4;
cffh=1e-4;
cffv=1e-4;
cpin=0.01;

w=floor(10*rand([n2+n1 1])); %vector of widths of %horizontal
                                and vertical %lines
h=10; %sampling step (in ps)
```

```

%capacitance and incidence matrix
ch=repmat(cpph*pv*w(1:n2,:)+cffh*pv,1,n1-1); %horizontal

cv=repmat(cppv*ph*w(n2+1:n2+n1,:)+cffv*ph,1,n2-1);%vertical

C=sparse(n,n);
Al=sparse(n,b);

%enumerate horizontal branches
for i=1:n2
    for j=1:n1-1
        ni1=(i-1)*n1+j; %node indices for current branch
        ni2=ni1+1;
        ni3=(i-1)*(n1-1)+j; %branch index conversion from %2D
                                to 1D
        C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*ch(i,j);
        C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*ch(i,j);
        Al(ni1,ni3)=1;
        Al(ni2,ni3)=-1;
    end
end

%enumerate vertical branches
for i=1:n1
    for j=1:n2-1
        ni1=(j-1)*n1+i; %node indices for current branch
        ni2=ni1+n1;
        ni3=(i-1)*(n2-1)+j+n2*(n1-1); %branch index
                                %conversion from 2D
                                %to 1D
        C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*cv(i,j);
        C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*cv(i,j);
        Al(ni1,ni3)=1;
    end
end

```

```

        Al(ni2,ni3)=-1;
    end
end

%enumerate supply branches
for i=1:vn
    C(ivn(i),ivn(i))=C(ivn(i),ivn(i))+cpin;
    Al(ivn(i),n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+i)=-1;
end

%inductance matrix
lh=repmat(lsh*pv*log(150./w(1:n2,:)),1,n1-1);
lv=repmat(lsv*ph*log(150./w(n2+1:n2+n1,:)),1,n2-1);

lb=[reshape(lh',n2*(n1-1),1);reshape(lv',n1*(n2-
1),1);lpin*ones(vn,1)];

%resistance matrix
rh=repmat(rsh*pv./w(1:n2,:),1,n1-1); %horizontal branch
                                %resistances
rv=repmat(rsv*ph./w(n2+1:n2+n1,:),1,n2-1); %vertical %branch
                                %resistances

rb=[reshape(rh',n2*(n1-1),1);reshape(rv',n1*(n2-
1),1);rpin*ones(vn,1)];

%system matrix for transient analysis
RLcol=1./(rb+lb/h);
RL=spdiags(RLcol,0,b,b);
A=Al*RL*Al'+C/h;

```

B. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ JACOBI

```
function [sol, err, it, time] = jacobi(a , x0, b, eps,
maxiter)

xold = x0;
error = eps + 1;
iter = 0;

tic;

d = diag(a);
mat = - (tril(a, -1) + triu(a, 1) );

while (iter < maxiter & error > eps)
    xnew = (mat*xold + b ) ./ d ;
    error = norm(xnew - xold);
    xold = xnew;
    iter = iter + 1;
end

time = toc;

sol = xnew;
err = error;
it = min(iter, maxiter);
```

C. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GAUSS-SEIDEL

```
function [sol, err, it, time] = gs(a , x0, b, eps, maxiter)

xold = x0;
error = eps + 1;
```

```

iter = 0;

tic;

d = tril(a);
mat = d - a;

while (iter < maxiter & error > eps)
    xnew = d\(mat*xold+b);
    error = norm(xnew - xold);
    xold = xnew;
    iter = iter + 1;
end

time = toc;

sol = xnew;
err = error;
it = min(iter, maxiter);

```

D. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SOR

```

function [sol,time,it] = sor(A,b,w,x,maxit,tol)

err=tol+1;
iter=1;
oldx = x;
temp=oldx;

tic;

D=diag(diag(A));

```

```

U=-triu(A,1);
L=-tril(A,-1);      %split the matrix A

N=D-w*L;
P=(1-w)*D + w*U;

while (iter<=maxit & err>tol)
    x = N\(P*oldx + w*b);
    err=norm(oldx - x);
    iter=iter+1; oldx = x;
end

time = toc;
sol = x;
it = min(iter, maxit);

```

E. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΜΠΛΟΚ

```

function [sol, time1, time2]=blockTridiagonal(Pin,b,N)

[rows,cols]=size(Pin);
nblk=rows/N;      % Ο αριθμος των blocks
b=reshape(b,N,nblk);
sol=zeros(N,nblk);
c=sol;

tic;

A=zeros(nblk,nblk);      % Diagonal blocks
Q=A;
B=zeros(nblk,nblk-1);    % superdiagonal = subdiagonal blocks
G=B;

```

```

% Spasimo toy pinaka A se pinakes apo blocks
for k=1:nblk-1
    block=(1:N)+(k-1)*N;
    A(1:N,block)=Pin(block,block);
    B(1:N,block)=Pin(block+N,block);
end

block=(1:N)+(nblk-1)*N;
A(1:N,block)=Pin(block,block);

block=(1:N);
Q(block,block)=A(block,block);
G(block,block)=Q(block,block)\B(block,block);

for k=2:nblk-1
    block=(1:N)+(k-1)*N;
    block2=(1:N)+(k-2)*N;
    Q(1:N,block)=A(1:N,block)-B(1:N,block2)*G(1:N,block2);
    G(1:N,block)=Q(1:N,block)\B(1:N,block);
end

block=(1:N)+(nblk-1)*N;
block2=(1:N)+(nblk-2)*N;
Q(1:N,block)=A(1:N,block)-B(1:N,block2)*G(1:N,block2);

time1=toc;
clear Pin cols

%%%%%%%%%%%%The back substitution phase%%%%%%%%%%%%

tic;
c(:,1)=Q(1:N,1:N)\b(:,1);

```

```

for k=2:nblk
    block=(1:N)+(k-1)*N;
    block2=(1:N)+(k-2)*N;
    c(:,k)=Q(1:N,block)\( b(:,k)-B(1:N,block2)*c(:,k-1) );
end

sol(:,nblk)=c(:,nblk);

for k=(nblk-1):-1:1
    block=(1:N)+(k-1)*N;
    sol(:,k)=c(:,k)-G(1:N,block)*sol(:,k+1);
end

time2=toc;
% Epanafora tou pinaka ths lushs se dianusma
sol=sol(:);

```

F. ΚΩΔΙΚΑΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΜΟΝΩΝ-ΖΥΓΩΝ

```

function [sol, time1, time2]=oddEvenReduction(Pin,b,N)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%The reduction phase%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tic;
[rows,cols]=size(Pin);
nblk=rows/N;
b=reshape(b,N,nblk);
i=0;
j=1;
numBlockLevel = zeros(floor(log2(nblk))+1);

while nblk >= 1

```



```

    i=i+nblk;
    numBlockLevel(j)= nblk;
    j=j+1;
    nblk=floor(nblk/2);
end

nblk=rows/N;
G=zeros(nblk,nblk*i);
F=G;
H=F;
D=zeros(nblk,i);
sol=zeros(nblk,nblk);

for k=1:nblk-1
    block=(1:N)+(k-1)*N;
    G(1:N,block)=Pin(block,block);
    H(1:N,block)=Pin(block+N,block);
    F(1:N,(1:N)+ k*N)=Pin(block,block+N);
    D(1:N,k)=b(1:N,k);
end

block = (1:N)+(nblk-1)*N;
G(1:N,block) = Pin(block,block);
H(1:N,block) = zeros(N,N);
D(1:N,nblk)=b(1:N,nblk);

i=N+1;

for k=2: 1: floor(log2(nblk))+1

    se_d=i- numBlockLevel(k-1);
    se=(i-1- numBlockLevel(k-1))*N+(1:N);

    for j=1: numBlockLevel(k)

```

```

block=(1:N)+(i-1)*N;

if (j==numBlockLevel(k) && mod(numBlockLevel(k-
    1),2)==0)

    F(1:N,block) = - G(1:N,se)\F(1:N,se+N)*F(1:N,se);
    G(1:N,block) = - G(1:N,se)\H(1:N,se)*F(1:N,se+N) +
        G(1:N,se+N);
    H(1:N,block) = zeros(nblk,nblk);
    D(1:N,i) = D(1:N,se_d+1) -
        G(1:N,se)\F(1:N,se+N)*D(1:N,se_d);

else

    % Edw katalhgoun ola ta endoiamesa blocks

    F(1:N,block) = - G(1:N,se)\F(1:N,se+N)*F(1:N,se);
    G(1:N,block) = - G(1:N,se)\H(1:N,se)*F(1:N,se+N) +
        G(1:N,se+N) -
        G(1:N,se+2*N)\H(1:N,se+N)*F(1:N,se+2*
        N);
    H(1:N,block) = -
        G(1:N,se+2*N)\H(1:N,se+N)*H(1:N,se+2*
        N);
    D(1:N,i) = D(1:N,se_d+1) -
        G(1:N,se)\F(1:N,se+N)*D(1:N,se_d) -
        G(1:N,se+2*N)\H(1:N,se+N)*D(1:N,se_d+2);

end

    se = se + 2*N;
    se_d = se_d + 2;
    i=i+1;

end

end

```

```

time1=toc;
clear Pin b cols

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%The back substitution phase%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tic;

i=i-1;
sol(1:N,i) = G(1:N,block)\D(1:N,i);
ds = i;
i=i-numBlockLevel(k-1)-1;

for k=floor(log2(nblk)): -1: 1

    for j=1: numBlockLevel(k)
        i=i+1; %Deikths tou dianusmatos ths lushs pou
                upologizoume
        block=(1:N)+(i-1)*N;

        if mod(j,2)==0
            sol(1:N,i) = sol(1:N,ds);

        else
            if j==numBlockLevel(k)
                sol(1:N,i) = G(1:N,block)\(D(1:N,i) -
                    F(1:N,block)*sol(1:N,ds));
            elseif j==1
                sol(1:N,i) = G(1:N,block)\(D(1:N,i) -
                    H(1:N,block)*sol(1:N,ds));
            else
                sol(1:N,i) = G(1:N,block)\(D(1:N,i) -
                    F(1:N,block)*sol(1:N,ds) -
                    H(1:N,block)*sol(1:N,ds+1));
            end
        end
    end
end

```

```
        ds = ds + 1;
    end
end
end

if k>1
    i = i-numBlockLevel(k)-numBlockLevel(k-1);
    ds = ds-numBlockLevel(k)-numBlockLevel(k+1) +1;
end
end

time2 = toc;

sol = sol(1:N,1:N);
sol=sol(:);
```

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Ruehli (ed.), “*Circuit Analysis, Simulation and Design*”, North-Holland, 1986

- [2] Golub G.H., van Loan C.F., “*Matrix computations (3ed.)*”, 1996

- [3] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., “*Numerical recipes in C The Art of Scientific Computing, Second Edition*”, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1997

- [4] Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, “*Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*”, Massachusetts Institute of Technology

- [5] Richard S. Varga, “*Matrix Iterative Analysis, Second Revised and Expanded Edition*”, USA, 2000

- [6] Ibrahim N. Hajj and Stig Skelboe, “*A multilevel parallel solver for block tridiagonal and band linear systems*”, 1990

- [7] John R. Gilbert, Cleve Molery , Robert Schreiberz, “*Sparse matrices in Matlab: Design and implementation*”

- [8] Henk A. van der Vorst, “*Large tridiagonal and block linear systems on vector and parallel computers*”, 1987

- [9] Eunice E. Santos, “*Optimal tridiagonal solvers on mesh interconnection networks*”, USA

- [10] Garry H. Rodrigue, Niel K. Madsen, Jack I. Karush, “*Odd-Even Reduction for Banded Linear Equations*”, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol 26, No 1, January 1979

- [11] Yao Zhang, Jonathan Cohen, John D. Owens, “*Fast Tridiagonal Solvers on the GPU*”, 2010
- [12] Walter Gander and Gene H. Golub, “*Cyclic Reduction – History and Applications*”, March 1997, Hong Kong
- [13] Anantha Chandrakasan, William J. Bowhill, Frank Fox, “*Design of high performance microprocessor circuits*”, 2001
- [14] Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγάλης, “*Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, 5^η αναθεωρημένη έκδοση*”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004
- [15] Μιχαήλ Ν. Βραχάτης, “*Αριθμητική ανάλυση*”, Ελληνικά γράμματα, 2002
- [16] Νίκος Ι. Μάργαρης, “*Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων*”, Τόμος Α