

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου
Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής

Μαθησιακές Δυσκολίες και Μαθηματικά: Κατανόηση Κλασμάτων

Φοιτήτρια: Ελένη Ζέγλη

Επιβλέποντες καθηγητές:

Σουζάνα Παντελιάδου (Καθηγήτρια)

Βασίλειος Αργυρόπουλος (Επίκουρος Καθηγητής)

Βόλος, 2010

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Σχολή Επιστημών του Ανθρώπου
Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής

Μαθησιακές Δυσκολίες και Μαθηματικά: Κατανόηση Κλασμάτων

Φοιτήτρια: Ελένη Ζέγλη

Επιβλέποντες καθηγητές:

Σουζάνα Παντελιάδου (Καθηγήτρια)

Βασίλειος Αργυρόπουλος (Επίκουρος Καθηγητής)

Βόλος, 2010

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Λεμονίδη και την κα Γεωργαλά για την πολύτιμη βοήθειά τους στη δημιουργία των κριτηρίων αξιολόγησης «Κατανόηση Κλασμάτων» και ιδιαιτέρως την κα Παντελιάδου και τον κ. Αργυρόπουλο για τη συνεχή επιστημονική και προσωπική υποστήριξη, κατά τη διάρκεια διεξαγωγής και συγγραφής της παρούσας έρευνας.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	5
1. Θεωρητικό πλαίσιο	7
1.1 Μαθησιακές Δυσκολίες	7
1.2 Μαθησιακές Δυσκολίες και μαθηματικά	11
1.3 Μαθησιακές Δυσκολίες και κλάσματα	18
2. Μεθοδολογία	25
2.1 Κατασκευή τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος	25
2.2 Διαδικασία εξέτασης παιδιών στο τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος σε πιλοτικό επίπεδο	27
2.3 Τελική διαμόρφωση των τεστ	28
2.4 Διαδικασία εξέτασης παιδιών στο τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος	30
3. Αποτελέσματα	32
3.1 Μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες	32
3.1.1 Προσεγγίσεις κλασμάτων	32
3.1.2 Επίπεδα κατανόησης	43
3.2 Τυπικώς Αναπτυσσόμενοι μαθητές	52
3.2.1 Προσεγγίσεις κλασμάτων	52
3.2.2 Επίπεδα κατανόησης	62
3.3 Συγκριτική προσέγγιση λαθών από μαθητές με ΜΔ και ΓΑ	71
3.4 Συγκριτική προσέγγιση λαθών από μαθητές με ΜΔ και ΓΑ στα επίπεδα κατανόησης του κλάσματος	75
Συζήτηση – Συμπεράσματα	80
Κριτική Αποτίμηση	87
Βιβλιογραφία	88
Παράρτημα	92

Εισαγωγή

Τα παιδιά είναι μέρος ενός κοινωνικού περιβάλλοντος πλούσιο σε μαθηματικές εμπειρίες (Rivera, 1998). Ακούν τους ενήλικες να μετρούν ή να χρησιμοποιούν τα χρήματα, βλέπουν αριθμούς στα τηλέφωνα, στα λεωφορεία, στα σπίτια και στα τηλεοπτικά προγράμματα. Όπως αναφέρει, άλλωστε και ο Ginsburg (1989), οι άτυπες γνώσεις των μαθηματικών (informal mathematics) είναι πιο ισχυρές από τις τυπικές γνώσεις (formal mathematics) που αποκτούν στα πλαίσια της σχολικής εκπαίδευσης, καθώς τα παιδιά πριν από την εισαγωγή τους στο σχολείο μαθαίνουν να λένε την ώρα, να μοιράζονται το φαγητό τους, να υπολογίζουν τιμές προϊόντων νοερά, δηλαδή εισάγονται λίγο ή πολύ σε έννοιες όπως σύγκριση αριθμών (μεγαλύτερο, μικρότερο), πρόσθεση – αφαίρεση (παίρνω ή δίνω) και γεωμετρία (σχήμα και μέγεθος).

Με την είσοδό τους τα παιδιά στο σχολείο πρέπει να κωδικοποιήσουν τις γνώσεις τους σε σύμβολα χωρίς να έχουν συνδέσει τις ήδη υπάρχουσες άτυπες γνώσεις τους με τα σύμβολα που μαθαίνουν στο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Για το λόγο αυτό, τα μαθηματικά αποτελούν ένα δύσκολο γνωστικό αντικείμενο για το μεγαλύτερο ποσοστό των παιδιών.

Ειδικότερα, όμως, οι ποσότητες που εκφράζονται με κλάσματα, δυσκολεύουν περισσότερο τους ανθρώπους και αυτό γιατί περιέχουν τη σχέση δύο ποσοτήτων (Nunes, et al, 2006).

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η καταγραφή των δυσκολιών που εμφανίζουν τόσο οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, όσο και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, στα διάφορα επίπεδα κατανόησης του κλάσματος, όπως αυτά αναφέρονται στο θεωρητικό πλαίσιο του Kieren (1998, στο Κολέζα, 2000). Αναλυτικότερα, στην παρούσα έρευνα εξετάζονται σε βάθος, οι δεξιότητες των παιδιών να χωρίσουν μία ποσότητα σε ίσα μέρη, να αναγνωρίσουν το όλο σε μία ποσότητα, να ερμηνεύσουν τα κλασματικά σύμβολα, να αναγνωρίσουν ότι ο παρονομαστής εμπεριέχει τον αριθμητή, να αναγνωρίσουν τη σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος και τέλος να αναγνωρίσουν την αναπαράσταση των κλασματικών ποσοτήτων ανάλογα με τους διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης του κλάσματος, αλλά και πως αυτές οι δεξιότητες εξελίσσονται στο χρόνο, από τάξη σε τάξη. Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να αναφερθεί ότι

τα κλάσματα προσεγγίζονται με πέντε διαφορετικούς τρόπους, α. σχέση μέρους-όλου, β. μέτρηση σε άξονα, γ. πηλίκο, δ. λόγος και ε. τελεστής.

Ωστόσο η παρούσα εργασία εξετάζει τις δεξιότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, στο πλαίσιο των τεσσάρων πρώτων προσεγγίσεων του κλάσματος: του μέρους-όλου, της μέτρησης σε άξονα, του πηλίκου και του λόγου και αυτό γιατί ο τελεστής εισάγεται για πρώτη φορά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 139 μαθητές τυπικής ανάπτυξης και 35 μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, από 9 σχολεία διαφορετικών περιοχών της Ελλάδας, που δέχτηκαν να συνεργαστούν. Η εξέταση των μαθητών στο τεστ κατανόησης του κλάσματος πραγματοποιήθηκε τους μήνες Ιανουάριο – Μάρτιο, κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν, δημιουργήθηκαν για να εξυπηρετούν τους στόχους της παρούσας έρευνας και εξετάστηκε η λειτουργικότητά τους σε πιλοτικό επίπεδο.

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν πίνακες και γραφήματα που κατασκευάστηκαν στο excel, ενώ για τη σύγκριση των ποσοστών λάθους, που σημειώθηκαν από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και τους μαθητές τυπικής ανάπτυξης, ανά τάξη, χρησιμοποιήθηκε το SPSS11 και το t στατιστικό test.

Από την ανάλυση των ευρημάτων προέκυψε ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων δυσκολεύονται ιδιαίτερα να κατανοήσουν τα κλάσματα μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», με τα ποσοστά λάθους των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες να είναι αρκετά υψηλότερα από αυτά των μαθητών τυπικής ανάπτυξης. Σημαντική επίσης, ήταν και η παρατήρηση ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους, που σε κάθε περίπτωση παρέμενε χαμηλότερη από αυτή των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών των τεσσάρων τάξεων, που εξετάστηκαν (Γ', Δ', Ε' & Στ'). Μεγάλη εντύπωση προκαλεί, επίσης, το γεγονός ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων διευκολύνονται αλλά και δυσκολεύονται να κατανοήσουν τα κλάσματα μέσα από τους ίδιους τρόπους προσέγγισης, σε όλες τις τάξεις.

1. Θεωρητικό πλαίσιο

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται, αρχικά, ένας ορισμός των μαθησιακών δυσκολιών, και στη συνέχεια τα γενικά χαρακτηριστικά των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες. Ακολούθως περιγράφονται οι δυσκολίες των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, αναφορικά με τα χαρακτηριστικά τους και τέλος, οι δυσκολίες τους στα κλάσματα, όπως παρουσιάστηκαν μέσα από έρευνες, που διεξήχθησαν τα τελευταία χρόνια.

1.1 Μαθησιακές Δυσκολίες

Από τη στιγμή που ειπώθηκε ο όρος μαθησιακές δυσκολίες, έχει διατυπωθεί πληθώρα ορισμών. Σήμερα ο πιο αποδεκτός από την επιστημονική κοινότητα ορισμός είναι του Hammill (1990 στο Παντελιάδου, 2000)

«Οι Μαθησιακές Δυσκολίες είναι ένας γενικός όρος που αναφέρεται σε μία ανομοιογενή ομάδα διαταραχών οι οποίες εκδηλώνονται με σημαντικές δυσκολίες στην πρόσκτηση και χρήση ικανοτήτων ακρόασης, ομιλίας, ανάγνωσης, γραφής, συλλογισμού ή μαθηματικών ικανοτήτων. Οι διαταραχές αυτές είναι εγγενείς στο άτομο και αποδίδονται σε δυσλειτουργία του κεντρικού νευρικού συστήματος· μάλιστα είναι δυνατόν να υπάρχουν σε όλη τη διάρκεια της ζωής. Με τις Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να συνυπάρχουν προβλήματα σε συμπεριφορές αυτοελέγχου, κοινωνικής αντίληψης και κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Αυτά τα προβλήματα ωστόσο δεν συνιστούν από μόνα τους Μαθησιακές Δυσκολίες. Αν και οι Μαθησιακές Δυσκολίες μπορεί να εμφανίζονται μαζί με άλλες καταστάσεις μειονεξίας (π.χ. αισθητηριακή βλάβη, νοητική καθυστέρηση, σοβαρή συναισθηματική διαταραχή) ή να δέχονται την επίδραση εξωτερικών παραγόντων, όπως είναι οι πολιτισμικές διαφορές και η ανεπαρκής ή ακατάλληλη διδασκαλία, αυτές δεν είναι το άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω καταστάσεων ή εξωτερικών επιδράσεων».

Πέρα από τον ορισμό των μαθησιακών δυσκολιών, στη διάρκεια των χρόνων, έχει γίνει εκτενής λόγος για τα χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες. Ειδικότερα, αναφέρεται ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν προβλήματα σε επίπεδο αισθητηριακής αντίληψης και επεξεργασίας, σε επίπεδο μνήμης, προσοχής, μεταγνώσης, στρατηγικών και τέλος, κινήτρων.

Η οπτική και ακουστική αντίληψη και επεξεργασία των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες έχει παρατηρηθεί ότι διαφέρει από αυτήν των συνομηλίκων τους, παρόλο που

οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δεν αντιμετωπίζουν κάποια προβλήματα στην όραση ή στην ακοή. Αναφορικά με την οπτική αντίληψη και επεξεργασία των ερεθισμάτων έχει υποστηριχθεί ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν προβλήματα στην αντίληψη σχέσεων του χώρου, δηλαδή στη διάκριση δεξί – αριστερού, στην κατεύθυνση, στην εκτίμηση απόστασης και ταχύτητας (Money, 1966· Satz & Morris, 1981 στο Μπότσας & Παντελιάδου, 2007), στην οπτική διάκριση, για παράδειγμα στη διάκριση σχημάτων, αντικειμένων και χαρακτήρων που μοιάζουν (Wong, 1998), στην οπτική μνήμη, δηλαδή στην αποθήκευση και ανάκληση οπτικών ερεθισμάτων (Μπότσας & Παντελιάδου, 2007) και τέλος, στην οπτική ακολουθία αντικειμένων και γεγονότων (Wong, 1998). Σε περίπτωση αντίληψης και επεξεργασίας ακουστικών ερεθισμάτων, αναφέρονται προβλήματα στην ακουστική μνήμη και ακολουθία.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες είναι τα προβλήματα μνήμης, που αντιμετωπίζουν. Σύμφωνα με το μοντέλο της Sousa (1990 στο Bender, 2004), η μνήμη περιλαμβάνει τρία μέρη, τη βραχύχρονη, τη μακρόχρονη και την εργαζόμενη μνήμη. Ειδικότερα, αναφέρεται ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες δυσκολεύονται να διατηρήσουν και να ανακαλέσουν ακουστικές ή οπτικές πληροφορίες, καθώς μια σειρά ερευνών υπέδειξε ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν προβλήματα στην οπτική βραχύχρονη μνήμη (π.χ. Hallahan, Kauffman, & Ball, 1973; Tarver, Hallahan, Kauffman & Ball, 1976, στο Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005). Παρόλα αυτά τα προβλήματα που παρουσιάζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στη βραχύχρονη μνήμη, οφείλονται στην περιορισμένη χωρητικότητά της (Μπότσας & Παντελιάδου, 2007), στην ανεπαρκή χρήση φωνολογικού κώδικα (Wong, 1998) και στην αδυναμία χρήσης στρατηγικών, όπως αυτήν της επανάληψης (Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005).

Αρκετές έρευνες, έχουν υποστηρίξει κατά καιρούς ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στη μακρόχρονη μνήμη (Ross, 1976· Swanson, 1994· Sousa, 2001 στο Bender, 2004). Ωστόσο, σύμφωνα με την Wong (1982) τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν έλλειψη αποτελεσματικών στρατηγικών οργάνωσης και επιφανειακής επεξεργασίας των σημασιολογικών αναπαραστάσεων, καθώς επίσης και έλλειψη δεξιοτήτων αυτό – ελέγχου στην επιλογή στοιχείων για αποθήκευση ή ανάκληση (Wong, 1998). Επίσης, η Swanson (1984, 1987) υποστηρίζει ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν κάποια προβλήματα στη μακρόχρονη μνήμη, λόγω της αδυναμίας τους να ενσωματώσουν γλωσσικά και

οπτικά στοιχεία ενός οπτικού ερεθίσματος τη στιγμή της αποθήκευσης (Μπότσα & Παντελιάδου, 2007).

Αναφορικά με την εργαζόμενη μνήμη, τα προβλήματα που παρουσιάζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες είναι πιο σημαντικά από αυτά της βραχύχρονης ή μακρόχρονης μνήμης (Swanson, 1994· 1999, Swanson & Ashbaker, 2000· Swanson & Sachse – Lee, 2001). Σύμφωνα με τον Μπότσα & Παντελιάδου (2007), τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες έχουν γενικά μικρότερη ικανότητα εργαζόμενης μνήμης, χωρίς αυτή να εντοπίζεται στο πεδίο που έχουν τη μαθησιακή δυσκολία, για παράδειγμα στην ανάγνωση, ή τα μαθηματικά, αλλά να είναι γενικευμένη. Οι Swanson & Sachse – Lee (2001) διαπίστωσαν ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν προβλήματα και στην εργαζόμενη μνήμη αλλά και στην εκτελεστική επεξεργασία ανάκλησης, δηλαδή στην ικανότητα της μακρόχρονης και εργαζόμενης μνήμης να επιλέγει και να χρησιμοποιεί αλγορίθμους (Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005).

Μία ακόμη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες είναι η προσοχή στα ερεθίσματα. Σύμφωνα με τους Hunt & Marshall (2005 όπως αναφέρεται στο Μπότσα και Παντελιάδου, 2007), *προσοχή είναι η ικανότητα του ατόμου να επικεντρώνεται στην πληροφορία και στο γνωστικό έργο που έχει μπροστά του αγνοώντας δευτερεύοντα και άγνωστα στοιχεία και ερεθίσματα*. Δυστυχώς, αρκετές έρευνες (όπως Zentall, Zentall & Booth, 1978· Zentall, 1986· Bender, 1987a, όπως αναφέρεται στο Bender, 2004) υπέδειξαν ότι η ικανότητα των ατόμων με μαθησιακές δυσκολίες να εστιάσουν την προσοχή τους σε ένα έργο είναι ασυνεπής. Ειδικότερα, έχει βρεθεί ότι τα παιδιά με μαθησιακές Δυσκολίες παραμένουν στο μαθησιακό έργο για το 30 – 60% της διδακτικής ώρας, ενώ οι τυπικοί μαθητές για το 60 – 85% (Bryan & Wheeler, 1972· McKenney & Feagans, 1983 στο Bender, 2004).

Τα τελευταία χρόνια, ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει δείξει η επιστημονική κοινότητα στον τομέα της μεταγνώσης. Με τον όρο μεταγνώση αναφερόμαστε σε δύο στοιχεία, στην επίγνωση των στρατηγικών, δεξιοτήτων ή μέσων που απαιτούνται για την εκτέλεση ενός έργου, και την ικανότητα ρύθμισης λαθών κατά την εκτέλεση, ελέγχοντας και προσαρμόζοντας το έργο (Borkowski & Burke, 1996 στο Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005).

Σύμφωνα με τους Μπότσα & Παντελιάδου (2007), τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες σε μεταγνωστικό επίπεδο αφορούν:

- Στην αναγνώριση των απαιτήσεων του έργου και του σχεδιασμού του. Αδυνατούν να αναγνωρίσουν τις απαιτήσεις του έργου με το οποίο εμπλέκονται ή ερμηνεύουν λανθασμένα αυτές τις απαιτήσεις (Wong, 1998).
- Στην επιλογή και εφαρμογή στρατηγικών. Δεν γνωρίζουν που, με ποιον τρόπο και για ποιο λόγο να χρησιμοποιήσουν μια στρατηγική. Ακόμη κι όταν χρησιμοποιούν στρατηγικές, αυτές είναι απλές που δεν ταιριάζουν στην ηλικία και τις γνωστικές εμπειρίες τους (Wong, 1998)
- Στην παρακολούθηση και ρύθμιση της απόδοσης στο έργο. Σύμφωνα με την Wong (1998) αυτό μπορεί να οφείλεται σε λανθασμένη αρχική κατανόηση του έργου (Butler, 1994, 1997· Butler & Winne, 1995), στην ελλιπή επίγνωση και ενεργοποίηση προηγούμενης γνώσης (Brown, 1978· Baker & Brown, 1984· Wong, 1985), στη χρήση απλών και αναποτελεσματικών κριτηρίων ορθότητας (Baker & Brown, 1984· Van Haneyhan & Baker, 1989· Zabrucký & Moore, 1989), στην αποτυχία να εξετάζει τον εαυτό του για το αν πέτυχε (Wong & Jones, 1982· Wong, 1985), στην αποτυχία χρήσης στρατηγικών για διόρθωση τυχόν λαθών (Baker & Brown, 1984· Wong, 1985· 1986).
- Στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του γνωστικού έργου. Στόχος του μαθητή με μαθησιακές δυσκολίες είναι να ολοκληρώσει το έργο του χωρίς να εξετάζει αν το αποτέλεσμα είναι ορθό.

Ένα ακόμη πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες είναι η έλλειψη κινήτρων. Ειδικότερα προτιμούν εξωτερικούς ενισχυτές αντί για εσωτερικούς (Hallahan, Gazar, Cohen & Tarver, 1978· Short & Weissberg – Benchell, 1989· McInerney, 1999· Tabassam & Grainger, 2002, στο Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005). Η στάση προς τη μάθηση που διακρίνει αυτά τα παιδιά είναι η «μαθημένη αβοηθησία» (Sideridis, 2005 στο Μπότσας & Παντελιάδου, 2007). Σύμφωνα με τον Seligman (1992), ο όρος μαθημένη αβοηθησία αποδίδεται στην πεποίθηση των παιδιών ότι δεν θα έχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα, όση προσπάθεια και αν καταβάλουν (Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005). Επιπρόσθετα, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες προσπαθούν αν αποφύγουν κάθε σχολικό έργο, προκειμένου να μη βιώσουν για άλλη μια φορά την αποτυχία.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, συνήθως έχουν χαμηλές πεποιθήσεις αυτό-αποτελεσματικότητας (Μπότσας & Παντελιάδου, 2007). Προσπαθούν να αποφύγουν σχολικά έργα υψηλών στόχων, με αποτέλεσμα να θέτουν χαμηλούς στόχους τους οποίους ακόμη κι αν επιτύχουν, θεωρούν

ότι δεν έχουν μεγάλη αξία και δεν αλλάζουν τις πεποιθήσεις τους, περί «μαθημένης αβοηθησίας» (Shunk & Miller, 2002· Sideridis, 2005 στο Μπότσας & Παντελιάδου, 2007).

1.2 Μαθησιακές Δυσκολίες και Μαθηματικά

Τα τελευταία χρόνια έρευνες έχουν εστιάσει το ενδιαφέρον τους στο πεδίο των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά. Άλλωστε, όπως σημειώνουν κάποιες έρευνες (Geary, 2004· 2005· Murphy, Mazzocco, Hanich, & Early, 2007· Wadlington & Wadlington, 2008) το ποσοστό των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά ανέρχεται στο 5% με 8% του πληθυσμού.

Ειδικότερα παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον οι υπο-τύποι μαθησιακών δυσκολιών, όπως προτάθηκαν από τον Geary (2004, σελ 10). Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Geary (2004) υπάρχουν 3 κατηγορίες μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά, και αυτές παρουσιάζονται παρακάτω:

1. Μαθητές με προβλήματα στη χρήση διαδικασιών. Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας χρησιμοποιούν «ανώριμες» στρατηγικές που συνηθίζουν νεαρότεροι μαθητές, όπως για παράδειγμα η χρήση των δαχτύλων για να μετρούν (Bryant, Bryant & Hammil, 2000· Keeler & Swanson, 2001· Bender, 2004· Torbeyns, Verschaffel, Ghesquiere, 2004). Ενώ οι τυπικοί μαθητές εφαρμόζουν ποικίλες στρατηγικές, οι οποίες σταδιακά μεταβαίνουν από τις στρατηγικές «επιφανειακής επεξεργασίας» σε στρατηγικές «βαθιάς επεξεργασίας», οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αργοπορούν σε αυτή τη μετάβαση (Torbeyns, Verschaffel, & Ghesquiere, 2004). Χαρακτηριστικό επίσης, αυτών των μαθητών είναι τα λάθη που κάνουν στην εφαρμογή των διαδικασιών, για παράδειγμα στους αλγορίθμους, όπως αναφέρουν και οι Bryant & Bryant (2008). Αναφέρεται επίσης, ότι οι μαθητές αυτοί παρουσιάζουν φτωχή κατανόηση των εννοιών, αναφορικά με τη χρήση διαδικασιών και δυσκολίες στο να ακολουθήσουν πολλαπλά βήματα σε μία σύνθετη διαδικασία. Αναπτυξιακά οι μαθητές αυτής της κατηγορίας, εξελίσσονται όπως και οι τυπικοί μαθητές, αλλά σημειώνοντας κάποια αργοπορία. Η επίδοση αυτών των μαθητών μοιάζει με αυτή νεαρότερων μαθητών, ωστόσο σημειώνουν σημαντική βελτίωση από τάξη σε τάξη.
2. Μαθητές με προβλήματα στη σημασιολογική μνήμη. Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας παρουσιάζουν δυσκολίες στην ανάκληση βασικών αριθμητικών

δεδομένων, όπως αναφέρουν και οι Hallahan et al. (2005) και Wilson & Swanson (2001). Χαρακτηριστικά είναι τα προβλήματα στη γνώση και την ευχερή ανάκληση των αποτελεσμάτων με δύο μονοψήφιους αριθμούς (π.χ. στην πρόσθεση $2+3=?$ δεν μπορούν να ανακαλέσουν τον αριθμό 5, ενώ αντίθετα ανακαλούν τον αριθμό 4 ως ακολουθία του 2, 3). Αναπτυξιακά, σε αντίθεση με την προηγούμενη κατηγορία, οι μαθητές αυτής της κατηγορίας εξελίσσονται διαφορετικά από τους συμμαθητές τους, καθώς επίσης σημειώνουν μικρή βελτίωση από τάξη σε τάξη. Ο Geary (2004), αναφέρει επίσης, πως οι μαθητές αυτής της κατηγορίας συχνά αντιμετωπίζουν και μαθησιακές δυσκολίες στην ανάγνωση με φωνολογικά ελλείμματα, άποψη που υποστηρίζουν και οι Wilson & Swanson (2001).

3. Μαθητές με προβλήματα στην οπτικο-χωρική αντίληψη. Σε αυτήν την κατηγορία, αναφέρονται δυσκολίες στη χωρική αναπαράσταση αριθμητικών και άλλων μορφών μαθηματικών πληροφοριών και σχέσεων, καθώς επίσης και δυσκολίες στην ερμηνεία και κατανόηση χωρικών αναπαραστάσεων πληροφοριών. Αναφέρεται, επίσης, ότι μαθητές αυτής της κατηγορίας παρουσιάζουν λάθη στη διάταξη των κάθετων προσθαιρέσεων (Bryant, Bryant & Hammil, 2000) και λάθη που αφορούν στη θέση των ψηφίων (π.χ. το 4.530 μπορεί να ερμηνευθεί ή να χρησιμοποιηθεί ως 4.350) (Bryant, Bryant & Hammil, 2000; Bryant & Bryant, 2008; Wadlington & Wadlington, 2008). Αναφορικά με τα αναπτυξιακά χαρακτηριστικά των μαθητών αυτής της κατηγορίας, περιγράφονται ως ασαφή και δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια συσχέτιση με τις ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στην ανάγνωση.

Πέρα από τη διάκριση των μαθησιακών Δυσκολιών σε υπο-τύπους, όπως προτάθηκαν από τον Geary (2004), μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει, η προσοχή που δόθηκε από τις ψυχολογικές θεωρίες γνωστικής επεξεργασίας, σε αντιληπτικά ελλείμματα, δηλαδή σε ελλείμματα οπτικής και ακουστικής αντίληψης μνήμης, προσοχής, προσληπτικού και εκφραστικού λόγου, και αδυναμίες αφηρημένου συλλογισμού (Bley & Thorton, 1995; Mercer & Pullen, 2005, στο Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007).

Τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, όπως αναφέρθηκε ήδη, παρουσιάζουν δυσκολίες στην οπτική αντίληψη, αναφορικά με την αντίληψη του πλαισίου, τη διάκριση αντιληπτικών μορφών και τη χωρική οργάνωση.

- Δυσκολίες αντίληψης μορφής – πλαισίου. Τα παιδιά δεν ολοκληρώνουν τις ασκήσεις μιας σελίδας (Αγαλιώτης, 2000), καθώς επίσης, χάνουν το χώρο τους στη σελίδα, για παράδειγμα «πηδάνε» γραμμές όταν εκτελούν μία άσκηση (Bryant, Bryant & Hammil, 2000· Peterson Miller & Mercer, 1997) και διαβάζουν λάθος πολυψήφιους αριθμούς (Bryant, Bryant & Hammil, 2000).
- Δυσκολίες διάκρισης αντιληπτικών μορφών. Οι μαθητές που παρουσιάζουν αυτού του είδους τις δυσκολίες, απεικονίζουν καθρεπτικά αριθμητικά ψηφία, για παράδειγμα μπορεί να γράψουν ε αντί για 3 ή 6 αντί για 9 (Peterson Miller & Mercer, 1997· Bender, 2004) και δεν αντιγράφουν τους αριθμούς με ακρίβεια, από τον πίνακα ή το βιβλίο, δηλαδή συνήθως αντιστρέφουν τη σειρά των ψηφίων πολυψήφιων αριθμών (Bryant, Bryant & Hammil, 2000). Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2000), τα παιδιά αυτά δυσκολεύονται να πουν την ώρα σε αναλογικό ρολόι και η δυσκολία αυτή έγκειται στο ότι δεν μπορούν να διακρίνουν με ευκολία το μικρό από το μεγάλο δείκτη. Επίσης, παρατηρείται αναποτελεσματικός χειρισμός των χρημάτων, εξαιτίας του ότι δυσκολεύονται να διακρίνουν τα σχετικά μεγέθη. Τέλος, χαρακτηριστική είναι η δυσκολία αυτών των παιδιών να ερμηνεύσουν και να χειριστούν μαθηματικά σύμβολα, όπως για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιήσουν το x για πρόσθεση αντί του + (Bryant, Bryant & Hammil, 2000· Bryant & Bryant, 2008· Wadlington & Wadlington, 2008).
- Δυσκολίες χωρικής οργάνωσης. Χαρακτηριστική είναι η δυσκολία των μαθητών αυτής της κατηγορίας να γράψουν τους αριθμούς πάνω στη γραμμή του τετραδίου (Peterson Miller & Mercer, 1997· Bryant, Bryant & Hammil, 2000), καθώς επίσης και η δυσκολία διάκρισης του «πριν» και «μετά», του «δεξιά» και «αριστερά» (Αγαλιώτης, 2000). Σημαντικό είναι επίσης το γεγονός ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να διακρίνουν τα μεγέθη και τα σχήματα (Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007), και να κατανοήσουν την έννοια των κλασμάτων, πράγμα που οφείλεται, σύμφωνα με τους Butler et al. (2003), στην αδυναμία αντίληψης ισομεγεθών μερών. Οι Παντελιάδου και Πατσιοδήμου (2007) αναφέρουν επίσης ότι τα παιδιά εκτός από τη δυσκολία κατανόησης των κλασμάτων, παρουσιάζουν δυσκολίες και στη γραφή των κλασματικών αριθμών. Ένα

από τα χαρακτηριστικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν αυτά τα παιδιά είναι η μεταφορά του «κρατούμενου» σε λάθος στήλες κατά την εκτέλεση πράξεων (Αγαλιώτης 2000· Bryant, Bryant & Hammil, 2000). Τα λάθη αυτά χαρακτηρίζονται ως τυπικά, από τους εκπαιδευτικούς, κατά την εκτέλεση πράξεων και προκύπτουν από σφάλματα στο «δανεισμό» κατά την αφαίρεση και στο «κρατούμενο» κατά την πρόσθεση. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι αυτά τα παιδιά δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν αριθμητική γραμμή (Peterson Miller & Mercer, 1997· Wadlington & Wadlington, 2008), στη σύγκριση αλλά και στον υπολογισμό πολυψήφιων αριθμών (Bryant & Bryant, 2008), καθώς επίσης και στην κατασκευή και ερμηνεία γραφημάτων (Wadlington & Wadlington, 2008).

Σε αντίθεση με την οπτική αντίληψη, οι αναφορές στις δυσκολίες ακουστικής αντίληψης που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, είναι ελάχιστες. Ειδικότερα, οι Peterson Miller & Mercer (1997) αναφέρουν ότι τα παιδιά δυσκολεύονται σε προφορικές ασκήσεις, καθώς επίσης και στη μέτρηση διατηρώντας την ακολουθία των αριθμών (δηλαδή 1, 2, 3, 4...). Σημαντική είναι, επίσης, η αναφορά ότι τα παιδιά δυσκολεύονται στην επίλυση προβλημάτων που παρουσιάζονται μόνο προφορικά και στη γραφή αριθμών που υπαγορεύονται (Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν παρατηρηθεί λάθη, λόγω σύγχυσης μεταξύ όρων που μοιάζουν φωνολογικά (Αγαλιώτης, 2000). Για παράδειγμα, οι όροι τριακοστός και τριακοσιοστός μπορεί να προκαλέσουν σύγχυση σε ένα παιδί με δυσκολίες στην ακουστική διάκριση.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, οι δυσκολίες λεπτής κινητικότητας αποτελούν χαρακτηριστικό των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες. Ειδικότερα, ένα παιδί με αδυναμίες στη λεπτή κινητικότητα δυσκολεύεται να προσαρμόσει το μέγεθος των ψηφίων που γράφει στο διαθέσιμο χώρο (Peterson Miller & Mercer, 1997· Bryant, Bryant & Hammil, 2000). Συνήθως οι αριθμοί είναι πολύ μεγαλύτεροι και υπερβαίνουν τις γραμμές του τετραδίου ή του βιβλίου. Συνεπώς το παιδί γράφει σε αργούς ρυθμούς, δυσανάγνωστα και ανακριβή (Peterson Miller & Mercer, 1997· Bryant, Bryant & Hammil, 2000). Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι η ύπαρξη αδυναμιών λεπτής κινητικότητας και οπτικό – κινητικού συντονισμού, αυξάνει σε μεγάλο βαθμό το χρόνο εκτέλεσης των εργασιών, με αποτέλεσμα να επιβαρύνεται η μνήμη και να χαλαρώνει η προσοχή του παιδιού.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό πρόβλημα των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες είναι δυσκολίες μνήμης που αντιμετωπίζουν. Το πρόβλημα αυτό είναι ζωτικής σημασίας, καθώς η μνήμη αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τη μάθηση. Συγκεκριμένα, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν προβλήματα στη βραχύχρονη, στη μακρόχρονη και την εργαζόμενη μνήμη.

- Βραχύχρονη μνήμη. Τα παιδιά με προβλήματα στη βραχύχρονη μνήμη δυσκολεύονται να συγκρατήσουν νέα μαθηματικά δεδομένα, για το λόγο αυτό κάνουν λάθη κατά την εκτέλεση πράξεων και την επίλυση προβλημάτων, καθώς δυσκολεύονται να συγκρατήσουν στη μνήμη τους αριθμητικά δεδομένα της άσκησης (Peterson Miller & Mercer, 1997· Αγαλιώτης, 2000· Bender, 2004· Geary, 2005). Ένα ακόμη πρόβλημα που παρουσιάζουν τα παιδιά με αδυναμία στη βραχύχρονη μνήμη είναι ότι ξεχνούν τα βήματα που απαιτούνται για την εκτέλεση ενός αλγόριθμου (Peterson Miller & Mercer, 1997· Αγαλιώτης, 2000· Bender, 2004). Για παράδειγμα, στην πράξη του πολλαπλασιασμού το παιδί μπορεί να ξεχάσει ένα βήμα και τελικά να οδηγηθεί σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Τα προβλήματα βραχύχρονης μνήμης, ωστόσο μπορεί να δυσκολεύουν τα παιδιά και σε απλά έργα, όπως η αντιγραφή από τον πίνακα ή η εύρεση του αποτελέσματος μιας πράξης με τη βοήθεια αριθμομηχανής. Για το λόγο αυτό, ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται δραματικά, καθώς απαιτείται συνεχής έλεγχος για την ακρίβεια των ενεργειών.
- Μακρόχρονη μνήμη. Τα προβλήματα στη μακρόχρονη μνήμη επηρεάζουν περισσότερο την αυτοματοποιημένη χρήση της προπαίδειας (Αγαλιώτης, 2000). Ανάλογη εικόνα παρουσιάζεται και με τους αλγόριθμους πράξεων, καθώς τα παιδιά με προβλήματα μακρόχρονης μνήμης ξεχνούν τα βήματα ενός αλγόριθμου, ακόμη και αν έχουν κατανοήσει τον αλγόριθμο (Peterson Miller & Mercer, 1997· Αγαλιώτης, 2000· Wilson & Swanson, 2001). Χαρακτηριστικό πρόβλημα είναι επίσης, η δυσκολία ανάκλησης μαθηματικών δεδομένων (Wilson & Swanson, 2001· Bender, 2004· Geary, 2005· Bryant & Bryant, 2008). Για το λόγο αυτό, όπως αναφέρει και ο Αγαλιώτης (2000), τα παιδιά αυτά μπορεί να αποδίδουν καλά στο καθημερινό μάθημα, ενώ αντίθετα να αποτυγχάνουν σε επαναληπτικά μαθήματα και εξετάσεις ή σε περίπτωση που χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν παλιότερες γνώσεις για να συνθέσουν μία νέα.

- Εργαζόμενη μνήμη. Σύμφωνα με τον Αγαλιώτη (2000), πολλές από τις μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες απαιτούν την ικανότητα συγκράτησης αρκετών γνωστικών στοιχείων σε συγκεκριμένη σειρά. Για το λόγο αυτό, τα παιδιά με προβλήματα στην εργαζόμενη μνήμη παρουσιάζουν δυσκολίες σε δεξιότητες όπως, το να λένε την ώρα (Peterson Miller & Mercer, 1997· Bender, 2004), να μετρούν χρήματα (Αγαλιώτης, 2000) ή να επιλύουν προβλήματα και ασκήσεις με πολλά βήματα (Peterson Miller & Mercer, 1997· Bryant, Bryant & Hammil, 2000· Bender, 2004). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τα προβλήματα στην εργαζόμενη μνήμη είναι κύριο χαρακτηριστικό των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες, γεγονός που οδήγησε κάποιους επιστήμονες να το θεωρούν προβλεπτικό παράγοντα (Merphy, Mazzocco, Hanich & Early, 2007).

Βασικό πρόβλημα των παιδιών με δυσκολίες προσοχής είναι η αδυναμία διατήρησης της προσοχής σε όλα τα βήματα ενός αλγόριθμου ή επίλυσης ενός προβλήματος (Peterson Miller & Mercer, 1997· Hallahan, Lloyd, Kauffman, Weiss & Martinez, 2005). Αποτέλεσμα των δυσκολιών προσοχής είναι και η αδυναμία συγκέντρωσης σ' ένα αντικείμενο προς μάθηση, γεγονός που οδηγεί σε βραδύτερο ρυθμό προόδου.

Τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες μπορεί να παρουσιάζουν και κάποιες αδυναμίες στο λόγο, τόσο στον προσληπτικό όσο και στον εκφραστικό. Οι πιθανές αδυναμίες δυσκολεύουν τους μαθητές στο να πάρουν ή να δώσουν πληροφορίες μέσω της μαθηματικής γλώσσας (Αγαλιώτης, 2000).

- Αδυναμίες προσληπτικού λόγου. Σύμφωνα με τους Bryant, Bryant & Hammil (2000) τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν κάποια προβλήματα με τη γλώσσα των μαθηματικών. Ειδικότερα τα παιδιά δυσκολεύονται στην κατανόηση μαθηματικών όρων, όπως για παράδειγμα «συν», «υπόλοιπο», «κρατούμενο» (Peterson Miller & Mercer, 1997). Με λίγα λόγια οι αδυναμίες προσληπτικού λόγου δυσκολεύουν τα παιδιά να συνδέσουν τους μαθηματικούς όρους με το περιεχόμενό τους. Ένα ακόμη πρόβλημα που υπάρχει είναι η σύγχυση που δημιουργείται στα παιδιά, εξαιτίας της ποικιλίας όρων για μία έννοια, όπως για παράδειγμα «προσθέτων», «συν», «και», «βάζω» (Αγαλιώτης, 2000). Τέλος, εξαιτίας της αδυναμίας προσληπτικού λόγου, τα παιδιά δυσκολεύονται σε λεκτικά προβλήματα και αυτό γιατί δεν μπορούν να μεταφράσουν σε μια ικανοποιητική νοητική αναπαράσταση τις πληροφορίες που τους παρουσιάζονται λεκτικά.

- Αδυναμίες εκφραστικού λόγου. Τα παιδιά εκτός από τις αδυναμίες που μπορεί να παρουσιάζουν στον προσληπτικό λόγο, παρουσιάζουν και κάποιες αδυναμίες στον εκφραστικό λόγο. Οι Wadlington & Wadlington (2008) υποστηρίζουν πως τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, αδυνατούν να εκφράσουν προφορικά, χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους, αυτό που σκέφτονται. Επίσης, οι Παντελιάδου & Πατσιοδήμου (2007) αναφέρουν πως τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, αδυνατούν να απαντήσουν γρήγορα σε προφορικές ασκήσεις, καθώς επίσης και να περιγράψουν προφορικά τα βήματα ενός αλγόριθμου ή μιας στρατηγικής που ακολουθείται.

Μία από τις βασικότερες αδυναμίες που παρουσιάζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες είναι αυτή του αφαιρετικού συλλογισμού. Εξαιτίας αυτής της αδυναμίας τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν τα σύμβολα (>, <, =) (Bryant & Bryant, 2008), καθώς επίσης αδυνατούν να κατανοήσουν τις έννοιες που παρουσιάζονται μέσω των γραπτών συμβόλων (Αγαλιώτης, 2000). Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό γνώρισμα της δυσκολίας χειρισμού των συμβόλων είναι η χρήση των γραπτών συμβόλων για την έκφραση μαθηματικών ιδεών. Με λίγα λόγια, τα παιδιά δυσκολεύονται να μετατρέψουν γλωσσικές ή αριθμητικές πληροφορίες σε εξισώσεις. Σύμφωνα με τις Παντελιάδου & Πατσιοδήμου (2007), δυσκολίες παρατηρούνται και στην επίλυση προφορικών προβλημάτων, καθώς επίσης και στη σύγκριση μεγεθών και ποσοτήτων. Τέλος, χαρακτηριστικά της αδυναμίας αφηρημένης σκέψης είναι η δυσκολία, από μέρους των παιδιών να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων (π.χ. αντιμεταθετική ιδιότητα) και να επιλέξουν τη σωστή πράξη για την επίλυση ενός προβλήματος.

Εκτός από τα παραπάνω προβλήματα, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, παρουσιάζουν αδυναμίες και στην επίλυση προβλημάτων. Αναφορικά με την επίλυση προβλημάτων, έχει υποστηριχθεί ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά πολλές φορές έχουν προβλήματα στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας (Bryant, 2005). Αυτό συμβαίνει σε μεγαλύτερο βαθμό όταν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν και προβλήματα στην ανάγνωση (Fuchs & Fuchs, 2002). Ειδικότερα τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν ελλείμματα στην κατανόηση, στην παράφραση, στην αναπαράσταση του προβλήματος, στην υπόθεση της λύσης, στην εκτίμηση της απάντησης, στον υπολογισμό και τέλος, στον έλεγχο της λύσης και του αποτελέσματος (Montague, 2007).

Οι μεταγνωστικές στρατηγικές διαφέρουν από τις γνωστικές στρατηγικές. Οι μεταγνωστικές στρατηγικές αναφέρονται στην επίγνωση των γνωστικών στρατηγικών

που χρησιμοποιούνται ή των διαδικασιών για την επίλυση ενός προβλήματος, καθώς επίσης και τον έλεγχο αυτών για τη ρύθμιση της επίδοσης (Montague, 2007). Όπως αναφέρουν και οι Peterson – Miller & Mercer (1997), τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες δεν έχουν επίγνωση των δεξιοτήτων, στρατηγικών και μέσων που απαιτούνται για την εκτέλεση μιας εργασίας, καθώς επίσης, αποτυγχάνουν και στη χρήση μηχανισμών αυτό – ρύθμισης για να ολοκληρώσουν τη συγκεκριμένη εργασία. Τέλος, όσον αφορά τον έλεγχο της λύσης και των αποτελεσμάτων, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, παραλείπουν συστηματικά να ελέγξουν τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγουν (Parmar & Singer, 2005 στο Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007), ή χρησιμοποιούν ακατάλληλα κριτήρια για την ορθότητα των απαντήσεών τους (Hammil & Bryant, 1998 στο Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007).

1.3 Μαθησιακές Δυσκολίες και κλάσματα

Οι ποσότητες που εκφράζονται με φυσικούς αριθμούς είναι εύκολα κατανοητές, καθώς ο τρόπος αυτός χρησιμοποιείται, ως επί το πλείστον, στην καθημερινότητα. Όταν, όμως, οι ποσότητες εκφράζονται με κλάσματα τότε οι άνθρωποι δυσκολεύονται και αυτό γιατί περιέχουν τη σχέση δύο ποσοτήτων (Nunes, et al, 2006).

Σύμφωνα με τον Hiebert (1985 στο Butler, Miller, Crehan, Babbitt & Pierce, 2003), οι μαθητές δυσκολεύονται στην έννοια των κλασμάτων εξαιτίας της αδυναμίας να συνδέσουν τη μορφή (form) με την κατανόηση. Με άλλα λόγια τα παιδιά δε συνδέουν τη μορφή (form) με τις καθημερινές τους εμπειρίες, γεγονός που απαιτεί την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού (Butler et al., 2003). Αν και έχει υποστηριχθεί ότι τα παιδιά εξαρχής αντιμετωπίζουν αρνητικά την έννοια των κλασμάτων, παρόλα αυτά τα ίδια κατανοούν μόνο τους τα κλάσματα μέσα από μία άτυπη διαδικασία (Goodwin, 2008).

Έχει υποστηριχθεί, επίσης, ότι αυτή η μικρή αντίληψη των κλασμάτων διαφέρει στα παιδιά με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, ακόμη και αν τα παιδιά και των δύο ομάδων αποτυγχάνουν στους υπολογισμούς που εμπεριέχουν κλάσματα (Mazzocco & Devlin, 2008)

Ειδικότερα στην έρευνα των Mazzocco & Devlin, (2008), συμμετείχαν 147 παιδιά που φοιτούσαν στην 6^η, 7^η και 8^η τάξη. Τα παιδιά αυτά χωρίστηκαν σε 3 ομάδες (παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες, παιδιά με χαμηλές επιδόσεις και παιδιά τυπικής ανάπτυξης στα μαθηματικά), με βάση το Woodcock Johnson-Revised Calculations subtest (WJ-R-Calc).

Όλοι οι μαθητές εξετάστηκαν σε ατομική βάση κατά τη διάρκεια της άνοιξης, με το Ranking Proportions Test (RPT). Σε αυτό το τεστ περιλαμβάνονταν μία διαδικασία ανάγνωσης για ενθάρρυνση των παιδιών και 4 υποτέστ που εξέταζαν τους δεκαδικούς αριθμούς, την οπτική αναπαράσταση κλασμάτων, τη σύγκριση οπτικών κλασμάτων και τέλος το συνδυασμό των κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς.

Στη συγκεκριμένη έρευνα οι Mazzocco & Devlin (2008), βρήκαν πως τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν προβλήματα στην ανάγνωση, ερμηνεία και κατανόηση των κλασματικών αριθμών. Αναλυτικότερα, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να ονομάσουν με ακρίβεια τα κλάσματα, καθώς βρέθηκε ότι το 83,3% των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες απέτυχε να αποκωδικοποιήσει σωστά τα κλάσματα, σε αντίθεση με τα παιδιά χαμηλών επιδόσεων (38,89%) και των τυπικώς αναπτυσσόμενων παιδιών (10,5%). Τα προβλήματα αυτά δηλώνουν την αδυναμία των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στην ακουστική διάκριση.

Επιπρόσθετα, οι Mazzocco & Devlin (2008) υποστήριξαν ότι ένα μεγάλο πρόβλημα των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες είναι η αδυναμία τους να τοποθετήσουν σε σωστή σειρά τα κλάσματα, ανάλογα με την ποσότητα που εκφράζουν. Με αυτήν την άποψη συμφωνούν και οι Bley & Thorton (2001), καθώς αναφέρουν πως τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να αντιληφθούν πως το κλάσμα $\frac{1}{3}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{5}$ και αυτό γιατί δεν αναλογίζονται την ποσότητα που εκφράζει το κάθε κλάσμα.

Αναφορικά με την ισοδυναμία κλασμάτων, οι Mazzocco & Devlin (2008) υποστήριξαν ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να αναγνωρίσουν τα ισοδύναμα κλάσματα. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι στην ισοδυναμία κλασμάτων συνήθως χρησιμοποιούνται και οπτικά βοηθήματα. Παρόλα αυτά, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες καταβάλλουν μεγαλύτερη προσπάθεια στην παρουσία εικόνων σε αντίθεση με τα υπόλοιπα παιδιά τα οποία διευκολύνονταν από την παρουσία εικόνων, γεγονός που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια της έρευνας των Mazzocco & Devlin (2008).

Σε αυτό το σημείο οι Bley & Thorton (2001) συμφωνούν με τους Mazzocco & Devlin (2008), υποστηρίζοντας επιπρόσθετα, πως στην περίπτωση της ισοδυναμίας των κλασμάτων τα παιδιά θα πρέπει να γνωρίζουν γιατί είναι απαραίτητη η ισοδυναμία κλασμάτων, ποιο είναι εκείνο το ισοδύναμο κλάσμα που απαιτείται στη συγκεκριμένη περίπτωση, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο θα βρουν αυτό το κλάσμα.

Σε μία άλλη έρευνα, που διεξήχθη από τους Nunes et al. (2006) σε 8 σχολεία της Οξφόρδης και του Λονδίνου, με συμμετέχοντες 449 παιδιά ηλικίας 4 και 5, εξετάστηκαν η ισοδυναμία κλασμάτων στο μέρος – όλο, και το πηλίκο. Ειδικότερα, βρέθηκε ότι τα παιδιά δυσκολεύονται με τη γλώσσα των κλασμάτων, όταν αυτή χρησιμοποιείται σε διακριτές ποσότητες. Επιπρόσθετα σύγχυση προκαλεί και η χρήση περισσότερων από έναν τρόπους, για την απόδοση ενός νοήματος, όπως για παράδειγμα η ποσότητα $\frac{8}{6}$ μπορεί να εκφραστεί και ως $1\frac{1}{3}$ (Nunes et al., 2006). Με άλλα λόγια και τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες (Bley & Thorton, 2001), αλλά και τα τυπικώς αναπτυσσόμενα παιδιά (Nunes et al., 2006) παρουσιάζουν αδυναμίες στη χρήση ισοδύναμων κλασμάτων.

Επιπρόσθετα οι Nunes et al., (2006), υποστήριξαν πως τα τυπικώς αναπτυσσόμενα παιδιά τα καταφέρνουν καλύτερα με τα κλάσματα στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η διαίρεση, αν και τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να κατανοήσουν τη σύνδεση των κλασματικών αριθμών με τους δεκαδικούς αριθμούς, δηλαδή δεν αντιλαμβάνονται το κλάσμα ως πηλίκο (Bley & Thorton, 2001).

Επιπλέον, οι Bley & Thorton (2001), αναφέρουν ότι τα παιδιά με προβλήματα σε αντιληπτικές δεξιότητες, δεν μπορούν να γράψουν κλασματικούς αριθμούς, λόγω των προβλημάτων στην οπτική αντίληψη, αναφορικά με τη χωρική οργάνωση. Σε αυτήν την περίπτωση πιθανότατα τα παιδιά να γνωρίζουν πως γράφεται το κλάσμα που τους ζητείται, αλλά να αδυνατούν να βάλουν τα ψηφία στη σωστή θέση, για παράδειγμα να γράφουν 68 αντί για $\frac{6}{8}$.

Συν τοις άλλοις, έχει αναφερθεί ότι τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες μπορούν στο καθημερινό μάθημα να συνδέσουν σωστά αυτά που άκουσαν με τα σύμβολα, αλλά να δυσκολεύονται να τα ανακαλέσουν και να τα γράψουν σωστά. Το γεγονός αυτό, όπως αναφέρουν και οι Bley & Thorton (2001), είναι αποτέλεσμα συνδυασμού των προβλημάτων στην οπτική αντίληψη και οπτικοκινητικό συντονισμό και στον προσληπτικό λόγο.

Χαρακτηριστικό είναι το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στην οπτικοχωρική οργάνωση. Ειδικότερα, έχει διατυπωθεί ότι εξαιτίας αυτού του προβλήματος τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να κατηγοριοποιήσουν κομμάτια μιας εικόνας ή να τοποθετήσουν ένα δεκαδικό αριθμό σε μια αριθμητική γραμμή (Bley & Thorton, 2001).

Εκτός από τις αδυναμίες σε αντιληπτικές δεξιότητες, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν προβλήματα και με την αφαιρετική σκέψη (Bley & Thorton, 2001), αλλά και τη μεταγνώση (Hammil & Bryant, 1998 στο Παντελιάδου & Πατσιοδήμου, 2007· Peterson – Miller & Mercer, 1997· Montague, 2007).

Στο χώρο των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά, αν και δεν έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες, αναφορικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αυτοί, ωστόσο πολλοί ερευνητές μελετούν ποιες είναι οι καταλληλότερες μέθοδοι διδασκαλίας, για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Μία αντίστοιχη έρευνα, είναι αυτή του Butler και των συνεργατών του (2003), η οποία μελετά τις επιδόσεις των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ύστερα από τη διδασκαλία της ισοδυναμίας κλασμάτων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο concrete – representational – abstract (CRA) και τη μέθοδο representational – abstract (RA).

Οι συμμετέχοντες σε αυτήν την έρευνα ήταν μαθητές δημόσιου σχολείου μιας μεγάλης περιοχής νοτιοδυτικά των Ηνωμένων Πολιτειών. Συνολικά συμμετείχαν 50 μαθητές με ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Οι συμμετέχοντες ήταν ηλικίας 11 – 15 και χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, στη μία ομάδα πραγματοποιήθηκε διδασκαλία ισοδυναμίας κλασμάτων με τη μέθοδο CRA και στην άλλη με τη μέθοδο RA. Στην ομάδα CRA συμμετείχαν 26 μαθητές και στην ομάδα RA 24 μαθητές. Και οι δύο ομάδες συμμετείχαν σε 10 οργανωμένα μαθήματα. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων ήταν ότι στην ομάδα CRA χρησιμοποιήθηκαν απτά αντικείμενα στα 3 πρώτα μαθήματα, ενώ στην ομάδα RA αναπαραστάσεις μέσω της ζωγραφικής.

Την ομάδα ελέγχου αποτελούσαν 65 μαθητές της 8^{ης} τάξης, εκ των οποίων μόνο δύο μαθητές είχαν μαθησιακές δυσκολίες σε άλλα μαθησιακά αντικείμενα εκτός των μαθηματικών.

Στη συγκεκριμένη μελέτη για να αποφευχθεί η επίδραση της δασκάλας στις επιδόσεις των μαθητών ύστερα από τη διδασκαλία, οι δύο δάσκαλοι που συμμετείχαν στην έρευνα εκπαιδεύτηκαν κατάλληλα, καθώς επίσης και η διδασκαλία τους παρακολουθείτο για να σημειωθούν τυχόν αποκλίσεις από τη λίστα των απαιτούμενων βημάτων διδασκαλίας. Τα βήματα αυτά ήταν η χρήση εξηγήσεων, αναφορικά με τη χρήση στρατηγικών, η προσφορά κατάλληλης και συγκεκριμένης ανατροφοδότησης, καθοδηγούμενη αλλά και ελεύθερη πρακτική, τήρηση της ακολουθίας του μαθήματος

και τέλος καθορισμός συγκεκριμένου χρόνου για την ολοκλήρωση της κάθε δραστηριότητας.

Και στις δύο ομάδες παρατηρήθηκε ότι οι επιδόσεις των μαθητών αυξήθηκαν από το pretest στο posttest. Πριν την παρέμβαση οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δεν είχαν κατανοήσει την ισοδυναμία κλασμάτων, ενώ αντίθετα μετά την παρέμβαση οι μαθητές και των δύο ομάδων, ήταν ικανοί να επιλέξουν την κατάλληλη μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια της αναπαράστασης του προβλήματος γραφικά.

Επιπρόσθετα βρέθηκε ότι οι μαθητές, που διδάχθηκαν με τη CRA μέθοδο σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων από αυτούς που είχαν διδαχθεί με τη RA μέθοδο. Αν και οι διαφορές δεν ήταν στατιστικώς σημαντικές, ωστόσο προκαλεί το ενδιαφέρον, καθώς η μοναδική διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων ήταν η χρήση απτών αντικειμένων στις 3 πρώτες διδασκαλίες στη μέθοδο CRA.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μετά την παρέμβαση, οι επιδόσεις των μαθητών και των δύο ομάδων πλησιάζουν αυτές των μαθητών της ομάδας ελέγχου.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι η μικρή αντίληψη των κλασμάτων διαφέρει στους μαθητές με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, ακόμη και αν τα παιδιά και των δύο ομάδων αποτυγχάνουν στους υπολογισμούς που εμπεριέχουν κλάσματα (Mazzocco & Devlin, 2008). Επιπρόσθετα, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν προβλήματα στην ανάγνωση, ερμηνεία και κατανόηση των κλασματικών αριθμών, προβλήματα που δηλώνουν αδυναμία των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στην ακουστική διάκριση.

Μία ακόμη αδυναμία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, που έχει σημειωθεί από τους Mazzocco και Devlin (2008) είναι η αδυναμία τους να τοποθετήσουν σε σειρά ανάλογα με την ποσότητα που εκφράζουν τα κλάσματα, άποψη που υποστηρίζουν και οι Bley και Thornton (2001). Εκτός από τη διάταξη κλασμάτων, και η ισοδυναμία κλασμάτων φαίνεται να δυσκολεύει τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, καθώς οι ίδιοι αδυνατούν να αναγνωρίσουν τα ισοδύναμα κλάσματα (Bley & Thornton, 2001· Mazzocco & Devlin, 2008) και η παρουσία εικόνων να δυσκολεύει ακόμη περισσότερο (Mazzocco & Devlin, 2008). Η ισοδυναμία κλασμάτων εκτός από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, δυσκολεύει ιδιαίτερα και τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές (Nunes et al., 2006).

Επιπροσθέτως οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να κατανοήσουν τη σύνδεση των κλασματικών αριθμών με τους δεκαδικούς αριθμούς (Bley & Thornton, 2001). Μία ακόμη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες

είναι η αδυναμία να γράψουν έναν κλασματικό αριθμό και η αδυναμία τους να κατηγοριοποιήσουν κομμάτια μιας εικόνας ή να τοποθετήσουν ένα δεκαδικό αριθμό σε μια αριθμητική γραμμή (Bley & Thorton, 2001).

Παρόλα αυτά, στο χώρο των κλασμάτων δεν έχουν απαντηθεί αρκετά ερωτήματα. Ειδικότερα, είναι αναγκαίο να εξεταστούν σε βάθος, οι δεξιότητες των παιδιών να χωρίσουν μία ποσότητα σε ίσα μέρη, να αναγνωρίσουν το όλο σε μία ποσότητα, να ερμηνεύσουν τα κλασματικά σύμβολα, να αναγνωρίσουν ότι ο παρονομαστής εμπεριέχει τον αριθμητή, να αναγνωρίσουν τη σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος και τέλος να αναγνωρίσουν την αναπαράσταση των κλασματικών ποσοτήτων, αναφορικά με τις διάφορες προσεγγίσεις του κλάσματος, όπως αυτές έχουν παρουσιαστεί από τον Kieren 1988 (στο Ε. Κολεζιά, 2000) και είναι: α. η σχέση μέρους-όλου, β. η μέτρηση σε άξονα, γ. το πηλίκιο, δ. ο λόγος και ε. ο τελεστής, αλλά και πως αυτές εξελίσσονται στο χρόνο.

Σκοπός, της παρούσας έρευνας είναι να καταγράψει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, εν συγκρίσει με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, στις παραπάνω δεξιότητες, μέσα από την προσέγγιση του μέρους – όλου, της μέτρησης σε άξονα, του πηλίκου και του λόγου, δεξιότητες που έχουν διδαχθεί κατά τη διάρκεια φοίτησής τους στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, έτσι ώστε να παρουσιάσει μια πιο λεπτομερή εικόνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων.

Αναλυτικότερα τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασία είναι:

1. Ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα κλάσματα, μέσα από τους διάφορους τρόπους προσέγγισης και επιπέδου κατανόησης;
2. Ποιες είναι οι διαφορές στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα κλάσματα, μέσα από τους διάφορους τρόπους προσέγγισης
3. Ποιες είναι οι διαφορές στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα κλάσματα, μέσα από τα διάφορα επίπεδα κατανόησης
4. Υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και των μαθητών τυπικής ανάπτυξης;

αν υπάρχουν όντως διαφορές, το ερώτημα που προκύπτει είναι:

5. Ποιες είναι οι διαφορές αυτές, μέσα από τις διάφορες προσεγγίσεις του κλάσματος; και τέλος
6. Ποια είναι η εξελικτική πορεία που ακολουθούν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αναφορικά με την αντίληψη των κλασμάτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση;

2. Μεθοδολογία

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την ολοκλήρωση της παρούσας έρευνας. Αρχικά, παρατίθεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε, αλλά και η θεωρία στην οποία στηρίχθηκε η δημιουργία των τεστ. Στην συνέχεια, πραγματοποιείται παρουσίαση της διόρθωσης των ασκήσεων, ύστερα από τα ευρήματα του πιλοτικού προγράμματος, και τέλος αναφέρεται η διαδικασία συλλογής των δεδομένων.

2.1 Κατασκευή τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος

Οι ασκήσεις, που απαρτίζουν το τεστ κατανόησης των προσεγγίσεων του κλάσματος, κατασκευάστηκαν σύμφωνα με τη βιβλιογραφία και την ηλικία των παιδιών και δεν παρουσιάζονται με τον ίδιο τρόπο με αυτές των ασκήσεων των νέων βιβλίων των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου.

Ύστερα από αρκετές διορθώσεις το κριτήριο που κατασκευάστηκε περιλαμβάνει 3 τεστ. Και τα 3 τεστ εξετάζουν τις 4 από τις 5 έννοιες του κλάσματος, όπως έχουν παρουσιαστεί από τον Kieren, 1988 (όπως αναφέρεται από Ε. Κολεζά, 2000) και είναι:

1. η σχέση μέρους – όλου
2. η μέτρηση σε άξονα
3. το πηλίκιο
4. ο λόγος και,
5. ο τελεστής

Η παρούσα εργασία περιορίζεται στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, για το λόγο αυτό εξετάζονται οι 4 πρώτες έννοιες του κλάσματος. Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) της Ελλάδας, η έννοια του τελεστή δεν διδάσκεται στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Για το λόγο αυτό και δεν εξετάζεται στα τεστ που κατασκευάστηκαν.

Συγκεκριμένα, τα παιδιά για να κατανοήσουν τη σχέση μέρους – όλου, θα πρέπει να έχουν τις ικανότητες να χωρίζουν ένα αντικείμενο σε ίσα μέρη (Chinnappan, 2005· Charalambous, 2007), να αναγνωρίζουν το όλο (Chinnappan, 2005), να ερμηνεύουν σωστά τα κλασματικά σύμβολα (Wong & Evans, 2008), να κατανοούν ότι ο παρονομαστής εμπεριέχει τον αριθμητή (Charalambous, 2007), να αντιλαμβάνονται τη σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος (Charalambous, 2007), να

αναγνωρίζουν την αναπαράσταση των κλασματικών ποσοτήτων (Wong & Evans, 2008), να κατανοούν την ισοδυναμία κάποιων κλασμάτων (Maxwell, 2005) και τέλος να είναι σε θέση να διατάζουν τα κλάσματα (Maxwell, 2005).

Για την κατανόηση της μέτρησης σε άξονα, τα παιδιά θα πρέπει να έχουν τις ικανότητες να χωρίζουν ένα μέρος του άξονα σε ίσα μέρη (Chinnappan, 2005· Charalambous, 2007), να αναγνωρίζουν το όλο (Maxwell, 2005· Hannula, 2003), να αναγνωρίζουν ένα κλάσμα από σημείο (Charalambous, 2007), να αντιλαμβάνονται τη σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος (Charalambous, 2007), να αναγνωρίζουν την αναπαράσταση των κλασματικών ποσοτήτων (Wong & Evans, 2008), να κατανοούν την ισοδυναμία κάποιων κλασμάτων (Maxwell, 2005) και τέλος να είναι ικανά να διατάζουν τα κλάσματα (Maxwell, 2005), σύμφωνα με τον άξονα.

Εκτός από την κατανόηση των εννοιών, σχέση μέρους – όλου και μέτρηση σε άξονα, τα παιδιά θα πρέπει να κατανοήσουν ότι το κλάσμα σημαίνει και πηλίκο. Αυτό θα προκύψει εξετάζοντας εάν τα παιδιά έχουν τις ικανότητες να χωρίζουν σε ίσα μέρη (Chinnappan, 2005· Charalambous, 2007), να αντιλαμβάνονται τη σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος (Charalambous, 2007), να ερμηνεύουν σωστά τα κλασματικά σύμβολα (Wong & Evans, 2008), να διατάσσουν τα κλάσματα στη σειρά (Maxwell, 2005), να αντιλαμβάνονται το κλάσμα σαν διαίρεση (Charalambous, 2007· Toluk & Middleton, 2001), και ότι από τη διαίρεση προκύπτει ένας αριθμός (Toluk & Middleton, 2001), και τέλος να κατανοούν την ισοδυναμία κάποιων κλασμάτων (Maxwell, 2005).

Τέλος, για την κατανόηση της έννοιας του λόγου, τα παιδιά θα πρέπει να κατέχουν την ικανότητα να ερμηνεύουν τα κλασματικά σύμβολα (Wong & Evans, 2008), να αντιλαμβάνονται την ισοδυναμία κάποιων κλασμάτων (Maxwell, 2005), την διάταξη των κλασμάτων σε σειρά (Maxwell, 2005), να ξεχωρίζουν τα ανάλογα ποσά (Charalambous, 2007), και να κατανοούν την ιδιότητα της συνδιακύμανσης και της σταθερότητας (Charalambous, 2007).

2.2 Διαδικασία εξέτασης παιδιών στο τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος σε πιλοτικό επίπεδο

Τα τεστ σε πιλοτικό επίπεδο δοκιμάστηκαν σε μαθητές 2 διαφορετικών σχολείων του Ν. Κιλκίς, που δέχτηκαν να συνεργαστούν. Ο αριθμός των μαθητών που εξετάστηκαν καθορίστηκε σε συνεργασία με τους διευθυντές και τους εκπαιδευτικούς των τμημάτων.

Τα τεστ σε πιλοτικό επίπεδο μοιράστηκαν σε τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές. Η εξέταση των παιδιών πραγματοποιήθηκε σε ατομική βάση, προκειμένου να σημειωθούν δυσκολίες, αναφορικά με τη λειτουργία των ασκήσεων. Το επίπεδο των μαθητών διέφερε, όπως αναφέρθηκε από τους εκπαιδευτικούς. Στο δείγμα συμμετείχαν μαθητές υψηλών επιδόσεων (high achievement), μαθητές μέσου όρου και μαθητές χαμηλών επιδόσεων (low achievement). Από κάθε τάξη συμμετείχαν 10 μαθητές, με αποτέλεσμα το δείγμα σε πιλοτικό επίπεδο να φτάνει τους 40 μαθητές συνολικά. Στον πίνακα που ακολουθεί (πίνακας 1) παρουσιάζεται το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στη παρούσα έρευνα σε πιλοτικό επίπεδο:

Πίνακας 1. Συμμετέχοντες μαθητές σε πιλοτικό επίπεδο

	Γ' δημοτικού	Δ' δημοτικού	Ε' δημοτικού	Στ' δημοτικού
αγόρι	7	4	6	4
κορίτσι	3	6	4	6

Το πιλοτικό πρόγραμμα διενεργήθηκε με σκοπό να αποφευχθούν τα λάθη που πραγματοποιούνται κατά τη διαδικασία της συλλογής των δεδομένων. Ειδικότερα, στόχος ήταν να παρατηρηθούν τα λάθη του τεστ, λάθη που μπορεί να οφείλονται στη διατύπωση των ασκήσεων ή γενικότερα στον τρόπο παρουσίασής τους (Παπαδημητρίου, 2005). Σημαντικός επίσης, λόγος που διενεργήθηκε το πιλοτικό πρόγραμμα ήταν να διαμορφωθούν με τέτοιο τρόπο οι ασκήσεις του τεστ, έτσι ώστε οι μαθητές μέσα από τις απαντήσεις τους να μας δίνουν όλη την πληροφορία που κατέχουν, χωρίς να απαντούν στην τύχη (Παπαδημητρίου, 2005). Μέσα από αυτήν τη διαδικασία διαπιστώθηκε ποιες ασκήσεις έπρεπε να διατηρηθούν με κάποιες ίσως αλλαγές, και ποιες όχι προκειμένου να διαγραφούν ή να μετατραπούν σε περίπτωση που δεν υπήρχε κάποια άσκηση που να

εξετάζει τη δεξιότητα που αναζητούσαμε. Οι αλλαγές των ασκήσεων έγιναν στηριζόμενοι στην ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία (Hresko et al., 2003· Λεμονίδης).

2.3 Τελική διαμόρφωση των τεστ

Στο τεστ της Γ' δημοτικού, στο επίπεδο τους μέρους – όλου, υπήρχαν αρκετές ασκήσεις που λειτούργησαν ικανοποιητικά, αν και υπήρχαν κάποιες ασκήσεις που δυσκόλευαν τα παιδιά, ως προς τον τρόπο διατύπωσης, και οι οποίες αφαιρέθηκαν τελείως, καθώς υπήρχαν κάποιες άλλες που να εξετάζουν το ίδιο επίπεδο κατανόησης και να είναι περισσότερο κατανοητές στα παιδιά. Ωστόσο υπήρχαν και κάποιες ασκήσεις, που έπρεπε να αντικατασταθούν, καθώς δεν υπήρχαν άλλες ασκήσεις που να εξετάζουν το επιθυμητό επίπεδο κατανόησης.

Στο επίπεδο της μέτρησης σε άξονα, παρατηρήθηκε ότι όλα τα παιδιά, εκτός από τα παιδιά της Στ' δημοτικού, δεν τα κατάφεραν σε αυτές τις ασκήσεις. Για το λόγο αυτό, οι ασκήσεις που εξέταζαν την έννοια της μέτρησης σε άξονα άλλαξαν στηριζόμενοι βιβλιογραφικά στον κ. Λεμονίδη, με εξαίρεση μία άσκηση που διαγράφηκε από τη λίστα καθώς εξέταζε το ίδιο επίπεδο κατανόησης με μία άλλη άσκηση.

Στο τεστ της Ε' δημοτικού δεν έγιναν πολλές αλλαγές, παρά μόνο στην διατύπωση, έτσι ώστε να είναι πιο κατανοητή στα παιδιά και στην παρουσίαση κάποιων ασκήσεων, εκτός από μία άσκηση που άλλαξε τελείως, στηριζόμενοι στο Comprehensive Mathematical Abilities Test (Hresko et al., 2003). Επίσης, προστέθηκαν 2 ασκήσεις από το τεστ της Στ' δημοτικού.

Στο τεστ της Στ' δημοτικού, δεν έγιναν πολλές αλλαγές, παρά μόνο στη διατύπωση κάποιων ασκήσεων, και στην αφαίρεση κάποιων άλλων, καθώς υπήρχαν παραπάνω από δύο ασκήσεις που να εξετάζουν το ίδιο επίπεδο κατανόησης. Συνεπώς, κάποιες από αυτές τις ασκήσεις έπρεπε να διαγραφούν και να μείνει μία, έτσι ώστε να μην είναι πολλές και να κουράζουν τα παιδιά.

Ύστερα λοιπόν, από την ανάλυση των δεδομένων του πιλοτικού και την επεξεργασία των ασκήσεων βάσει αυτών, καταλήξαμε στη διαμόρφωση των τριών τεστ. Το τεστ της Γ' δημοτικού αποτελείται πλέον από 9 ασκήσεις, το τεστ της Ε' δημοτικού από 11 ασκήσεις και το τεστ της Στ' δημοτικού από 9 ασκήσεις. Η κάθε μία από αυτές τις ασκήσεις, όπως υποδεικνύει και ο πίνακας 2, εξετάζει ένα συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης του κλάσματος σε μία συγκεκριμένη τάξη, που απαιτείται από τα παιδιά να κατέχουν. Τα επίπεδα κατανόησης, έχουν ήδη αναφερθεί λεπτομερώς παραπάνω.

Πίνακας 2. Αντιστοίχιση ασκήσεων με επίπεδα κατανόησης του κλάσματος

Γ' δημοτικού		Ε' δημοτικού		Στ' δημοτικού	
Επίπεδα κατανόησης κλάσματος	άσκηση	Επίπεδα κατανόησης κλάσματος	άσκηση	Επίπεδα κατανόησης κλάσματος	άσκηση
Μέρος – όλο, χωρισμός σε ίσα μέρη	1α, 1β	Πηλίκιο, χωρισμός σε ίσα μέρη	1	Πηλίκιο, ισοδυναμία	2α, 2β, 2γ, 2δ,
Μέτρηση σε άξονα, χωρισμός σε ίσα μέρη	1γ, 1δ	Πηλίκιο, χωρισμός σε ίσα μέρη	1	Λόγος, ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	3α, 3β, 3γ, 3δ, 3ε, 7δ, 7ε, 7στ
Μέρος – όλο, αναγνώριση του όλου	2α, 2β	Μέρος – όλο, ισοδυναμία	3α, 3β, 3γ	Λόγος, ισοδυναμία	4α, 4γ, 4δ
Μέτρηση σε άξονα, αναγνώριση του όλου	2γ	Μέτρηση σε άξονα, ισοδυναμία	4α, 4β, 4γ	Λόγος, διάταξη	5
Μέτρηση σε άξονα, αναγνώριση ενός κλάσματος από σημείο	3α, 3β	Μέτρηση σε άξονα, διάταξη	5β	Λόγος, ανάλογα ποσά	6α, 6β, 6γ, 6δ
Μέρος – όλο, ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	4α, 4β, 4γ, 4δ, 4ε, 4στ	Μέρος – όλο διάταξη	6β	Λόγος ιδιότητα συνδιακύμανσης	7α, 7β, 7γ
Μέρος – όλο, παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή	5α, 5β, 5γ	Πηλίκιο, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	7δ	Λόγος ιδιότητα σταθερότητας	4β, 7ζ
Μέρος - όλο, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	6	Πηλίκιο, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	8δ		
Μέτρηση σε άξονα, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	7	Πηλίκιο, ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	9α, 9β, 9γ, 9δ, 9ε, 9στ		
Μέρος – όλο, αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	8α, 8β, 8γ	Πηλίκιο, διάταξη	10		
Μέτρηση σε άξονα, αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	9α, 9β, 9γ, 9δ	Το κλάσμα σαν διαίρεση	11α, 11β, 11γ		
		Η διαίρεση ως αριθμός	11δ, 11ε, 11στ		

2.4 Διαδικασία εξέτασης παιδιών στο τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος

Η εξέταση των παιδιών στο τεστ κατανόησης προσεγγίσεων του κλάσματος διενεργήθηκε τους μήνες Ιανουάριο - Μάρτιο, κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, έτσι ώστε να έχουν διδαχθεί τα παιδιά τις έννοιες του κλάσματος στις αντίστοιχες τάξεις.

Τα τεστ δόθηκαν σε 9 σχολεία διαφορετικών περιοχών της Ελλάδας, που δέχτηκαν να συνεργαστούν. Συγκεκριμένα, τα τεστ δόθηκαν σε σχολεία του Ν. Κιλκίς, Ν. Μαγνησίας, Ν. Θεσσαλονίκης, Ν. Ηρακλείου & Ν. Καρδίτσας. Ο αριθμός των μαθητών που εξετάστηκαν καθορίστηκε σε συνεργασία με τους διευθυντές και τους εκπαιδευτικούς των τμημάτων.

Η εξέταση των παιδιών γινόταν σε συλλογική βάση. Η διάρκεια της εξέτασης διέφερε ανά τάξη και τεστ. Ειδικότερα το τεστ που απευθυνόταν στην Γ' και Δ' δημοτικού διαρκούσε 1 διδακτική ώρα, δηλαδή 45 λεπτά. Η εξέταση των παιδιών της Ε' δημοτικού πραγματοποιήθηκε σε δύο αλληπάλληλες μέρες και της Στ' δημοτικού σε τρεις αλληπάλληλες μέρες, καθώς τα παιδιά της Ε' δημοτικού έπρεπε να εξεταστούν σε 2 τεστ (ένα επαναληπτικό της Γ' δημοτικού και ένα βασικό της Ε' δημοτικού) και τα παιδιά της Στ' δημοτικού σε 3 τεστ (δύο επαναληπτικά της Γ' και Ε' αντίστοιχα και ένα βασικό της Στ'). Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι τα παιδιά της Δ' δημοτικού υποβάλλονται επαναληπτικά στο τεστ της Γ' δημοτικού, καθώς στο βιβλίο των μαθηματικών της Δ' δημοτικού δεν εισάγονται νέες έννοιες των κλασμάτων. Το βασικό τεστ της Ε' δημοτικού διαρκούσε 1 διδακτική ώρα, δηλαδή 45 λεπτά, καθώς επίσης και το βασικό τεστ της Στ' δημοτικού.

Τα τεστ μοιράστηκαν σε τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές και μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες. Το επίπεδο των μαθητών διέφερε, όπως αναφέρθηκε από τους εκπαιδευτικούς. Στο δείγμα συμμετείχαν μαθητές υψηλών επιδόσεων (high achievement), μαθητές μέσου όρου και μαθητές χαμηλών επιδόσεων (low achievement).

Συνολικά συμμετείχαν 139 τυπικώς αναπτυσσόμενα παιδιά και 35 παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες. Στον πίνακα που ακολουθεί (πίνακας 3) παρουσιάζεται το δείγμα της έρευνας:

Πίνακας 3. Συμμετέχοντες μαθητές

	Γ' δημοτικού	Δ' δημοτικού	Ε' δημοτικού	Στ' δημοτικού
Τυπική ανάπτυξη	41	40	21	37
Μαθησιακές δυσκολίες	14	9	6	6

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι τα δεδομένα της παρούσας εργασίας είναι ποσοτικά. Για το λόγο αυτό, η κατηγοριοποίηση των δεδομένων έγινε με βάση δύο κατηγορίες, Σωστό=2 & Λάθος=1 και η παρουσίαση αυτών πραγματοποιείται μέσα από ιστογράμματα συχνοτήτων. Τα ιστογράμματα συχνοτήτων παρουσιάζουν το πόσο συχνά παρατηρούνται τα λάθη των παιδιών σε μία άσκηση.

Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων στην παρούσα έρευνα αξιοποιούνται κυρίως οι σχετικές συχνότητες και παρουσιάζεται το ποσοστό λαθών των μαθητών ανά τρόπο προσέγγισης του κλάσματος, αλλά και ανά επίπεδο κατανόησης.

3. Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο με τη βοήθεια πινάκων και γραφημάτων, που κατασκευάστηκαν στο excel, αρχικά, παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών, των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και στη συνέχεια τα ποσοστά των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών. Επιπρόσθετα, στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα των δύο ομάδων, με τη βοήθεια γραφημάτων, τόσο ανά προσέγγιση του κλάσματος, όσο και ανά επίπεδο κατανόησης. Για τη σύγκριση των ποσοστών της κάθε ομάδας ανά τάξη, χρησιμοποιήθηκε το SPSS11 και το t στατιστικό test. Στα επίπεδα κατανόησης, ωστόσο, δε χρησιμοποιήθηκε το t στατιστικό test, διότι το πλήθος των δεδομένων ανά επίπεδο κατανόησης (<5), δεν επέτρεπε στατιστική επεξεργασία.

6.1 Μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες

Ακολούθως, παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, ανά τρόπο προσέγγισης, αλλά και ανά επίπεδο κατανόησης των κλασμάτων, σε όλες τις τάξεις που εξετάστηκαν. Εν συνεχεία, παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, στα επίπεδα κατανόησης, τα οποία συναντώνται σε περισσότερους από έναν τρόπους προσέγγισης του κλάσματος, ανά τάξη αλλά και τρόπο προσέγγισης.

6.1.1 Προσεγγίσεις κλασμάτων:

Στο παρόν υποκεφάλαιο, παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, μέσα από τις τέσσερις προσεγγίσεις του κλάσματος, που εξετάστηκαν στην παρούσα έρευνα. Αρχικά, παρουσιάζονται τα λάθη μέσα από την προσέγγιση «Μέρος - Όλο», εν συνεχεία μέσα από τη «Μέτρηση σε άξονα», ακολούθως μέσα από το «Πηλίκιο» και εν τέλει μέσα από το «Λόγο».

➤ Μέρος - Όλο

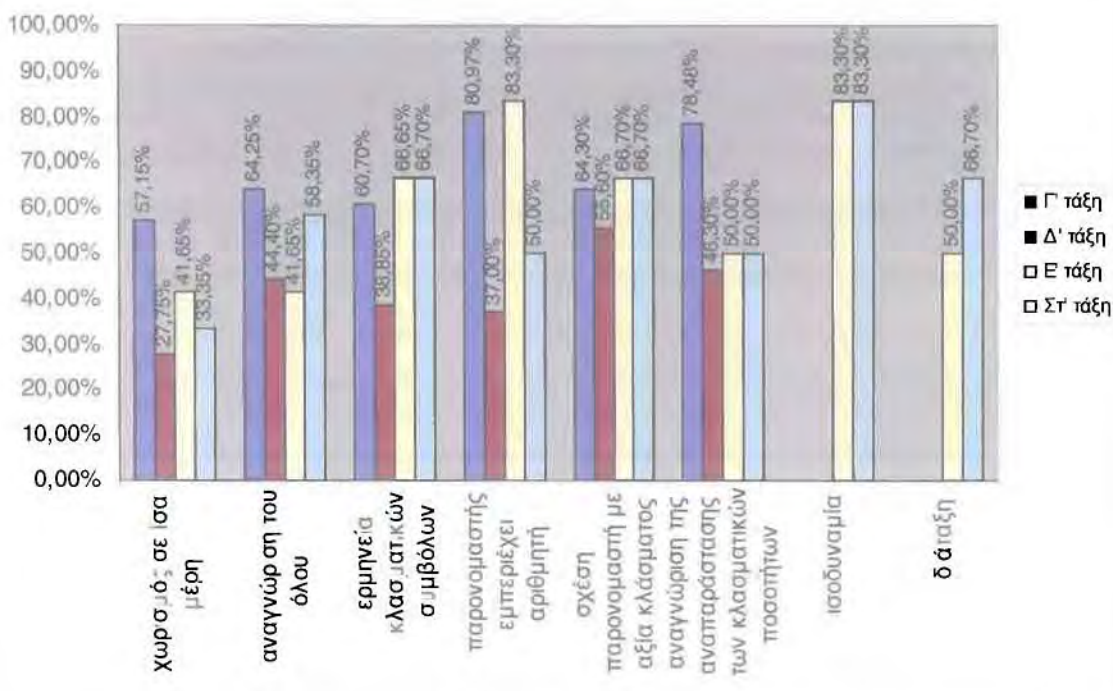
Συνολικά το ποσοστό των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στη Γ' τάξη είναι 67,64%, όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Μέρος – Όλο». Ενώ στη Δ' τάξη του δημοτικού το ποσοστό λαθών μειώνεται κατά 20 μονάδες, αγγίζοντας το 41,65%,

διαφορά στατιστικά σημαντική ($t=5,28$, $p=0,003$), στην Ε' και Στ' τάξη αυξάνεται και πάλι στο 60,41% και 59,39% αντίστοιχα (βλ. πίνακα 4).

Πίνακας 4. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος - Όλο»

Μαθησιακές Δυσκολίες					
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Γ' τάξη	Δ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Μέρος - όλο	χωρισμός σε ίσα μέρη	57,15%	27,75%	41,65%	33,35%
	αναγνώριση του όλου	64,25%	44,40%	41,65%	58,35%
	ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	60,70%	38,85%	66,65%	66,70%
	παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή	80,97%	37,00%	83,30%	50,00%
	σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	64,30%	55,60%	66,70%	66,70%
	αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	78,48%	46,30%	50,00%	50,00%
	ισοδυναμία			83,30%	83,30%
	διάταξη			50,00%	66,70%
	Σύνολο		67,64%	41,65%	60,41%

Γράφημα 1. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος - Όλο»



Αναλυτικότερα, μελετώντας τον πίνακα 4 και το γράφημα 1, προκύπτει ότι, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν περισσότερα λάθη στις ασκήσεις που εξέταζαν την «ισοδυναμία κλασμάτων» (και στην Ε' αλλά και στη Στ' τάξη είναι 83,30%). Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί πως τα επίπεδα κατανόησης «ισοδυναμία» και «διάταξη», διδάσκονται για πρώτη φορά στην Ε' τάξη. Για το λόγο αυτό τα ποσοστά των λαθών, αυτών των επιπέδων κατανόησης εξετάζονται μόνο στις τάξεις Ε' και Στ'.

Το 57,15% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης, «χώρισαν λάθος μία ποσότητα σε ίσα μέρη». Στα ίδια περίπου επίπεδα κυμαίνονται τα λάθη και στην Ε' τάξη, με ποσοστό 41,65%. Αντίθετα τα ποσοστά λαθών στο επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», είναι χαμηλότερα στη Δ' και Ε' τάξη του δημοτικού, με ποσοστά 27,75% και 33,35% αντίστοιχα.

Τα λάθη που έκαναν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στις ασκήσεις που εξέταζαν την «αναγνώριση του όλου», ήταν αυξημένα στη Γ' τάξη (64,25%) και στη Στ' τάξη (59,39%), συγκριτικά με τη Δ' τάξη (44,40%) και την Ε' τάξη (41,65%). Στην ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων οι μαθητές της Δ' τάξης έκαναν τα λιγότερα λάθη

(38,85%), ενώ το 60,70% των μαθητών της Γ' τάξης, το 66,65% της Ε' τάξης και το 66,70% της Στ' τάξης έκαναν λάθος στην «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων».

Οι ασκήσεις που εξετάζαν ότι «ο παρονομαστής εμπεριέχει τον αριθμητή», φαίνεται να δυσκόλεψαν αρκετά τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, καθώς το 80,97% της Γ' τάξης, το 83,30% της Ε' τάξης και το 50% της Στ' τάξης έκαναν λάθος σε αυτές τις ασκήσεις. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι μόνο το 37% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Δ' τάξης έκαναν λάθος στις ασκήσεις που εξετάζαν το επίπεδο κατανόησης «παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή».

Τα λάθη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και στις τέσσερις τάξεις, στην άσκηση που εξετάζει τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα (Γ' τάξη με 64,30%, Δ' τάξη με 55,60%, Ε' τάξη με 66,70% και Στ' τάξη με 66,70%, βλ. πίνακα 4 και γράφημα 1). Όπως φαίνεται και από το γράφημα 1, η «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων» δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στη Γ' τάξη του δημοτικού, καθώς το 78,48% των απαντήσεων ήταν λανθασμένες. Στις υπόλοιπες τάξεις φαίνεται οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να σημειώνουν αρκετά λιγότερα λάθη, καθώς τα ποσοστά των λαθών είναι 46,30% για τους μαθητές της Δ', 50% για τους μαθητές της Ε' και 50% για τους μαθητές της Στ' (όπως φαίνεται και στο γράφημα 1).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, εκτός από την «ισοδυναμία κλασμάτων», στην Ε' και Στ' τάξη, εξετάστηκε και η «διάταξη κλασμάτων». Στο συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, τα πηγαίνουν μετρίως καλά, καθώς το 50% των μαθητών της Ε' τάξης και το 66,70% των μαθητών της Στ' τάξης σημείωσαν λάθος στις αντίστοιχες ασκήσεις (βλ. γράφημα 1).

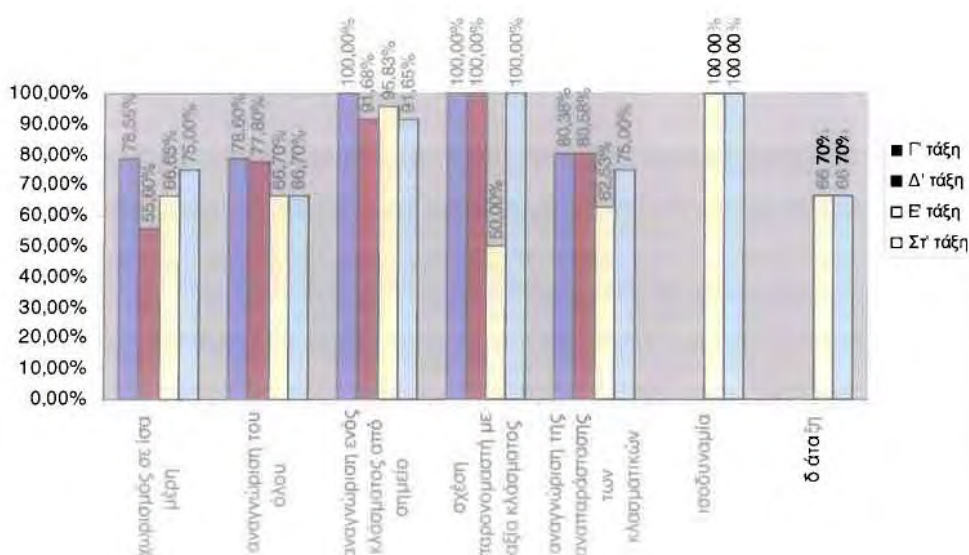
➤ Μέτρηση σε άξονα

Μελετώντας τον πίνακα 5 προκύπτει ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δυσκολεύονται ιδιαίτερα στα κλάσματα όταν αυτά προσεγγίζονται ως «Μέτρηση σε άξονα». Τα ποσοστά των λαθών που σημειώθηκαν από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στις ασκήσεις, που εξετάζαν την προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα» είναι ιδιαίτερα υψηλά, χωρίς να παρουσιάζουν κάποια στατιστικά σημαντική διαφορά. Αναλυτικότερα το 87,51% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης, το 81,13% της Δ' τάξης, το 71,63% της Ε' τάξης και το 82,15% της Στ' τάξης σημείωσαν λάθος.

Πίνακας 5. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα»

Μαθησιακές Δυσκολίες					
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Γ' τάξη	Δ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Μέτρηση σε άξονα	χωρισμός σε ίσα μέρη	78,55%	55,60%	66,65%	75,00%
	αναγνώριση του όλου	78,60%	77,80%	66,70%	66,70%
	αναγνώριση ενός κλάσματος από σημείο	100,00%	91,68%	95,83%	91,65%
	σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	100,00%	100,00%	50,00%	100,00%
	αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	80,38%	80,58%	62,53%	75,00%
	ισοδυναμία			100,00%	100,00%
	διάταξη			66,70%	66,70%
Σύνολο		87,51%	81,13%	72,63%	82,15%

Γράφημα 2. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα»



Ειδικότερα, το 78,55% των μαθητών της Γ' τάξης, το 55,60% της Δ' τάξης, το 66,65% της Ε' τάξης και το 75% της Στ' τάξης, «χώρισαν λάθος μία ποσότητα σε ίσα μέρη». Και στην «αναγνώριση του όλου», τα λάθη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα, καθώς το 78,60% της Γ' τάξης, το 77,80% της Δ' τάξης και το 66,70% της Ε' και Στ' τάξης αντίστοιχα, έκαναν λάθος στην άσκηση που εξέταζε το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης.

Τα ίδια περίπου επίπεδα λαθών, σημειώθηκαν και στο επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων». Όπως φαίνεται και από το γράφημα 2, το 80,38% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης, το 80,58% της Δ', το 62,53% της Ε' και το 75% της Στ' τάξης, σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις που εξέταζαν το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης.

Ιδιαίτερα δύσκολη φαίνεται να είναι η «αναγνώριση ενός κλάσματος από σημείο», καθώς το 100% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης, δηλαδή όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν, το 91,68% της Δ' τάξης, το 95,83% της Ε' τάξης και το 91,65% της Στ' τάξης, σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις, που εξέταζαν το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης.

Τα ίδια περίπου ποσοστά λαθών σημειώθηκαν και στο επίπεδο κατανόησης «σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος». Σύμφωνα με τον πίνακα 3, όλοι οι μαθητές της Γ' τάξης, της Δ' και της Στ' σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις, που εξεταζόταν η «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», με εξαίρεση τη Δ' τάξη, όπου το ποσοστό των λαθών πέφτει κατακόρυφα, στο 50%.

Τα επίπεδα κατανόησης, «ισοδυναμία κλασμάτων» και «διάταξη κλασμάτων», της προσέγγισης «Μέτρηση σε άξονα», εξετάζονται μόνο στις τάξεις Ε' και Στ' του δημοτικού. Και σε αυτά τα επίπεδα κατανόησης οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, απέτυχαν να απαντήσουν σωστά, όπως φαίνεται και στον πίνακα 5. Αναλυτικότερα, όλοι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (δηλαδή το 100%) απάντησαν λάθος στις ασκήσεις που εξέταζαν την «ισοδυναμία», αντίθετα μόλις το 66,70% της Ε' και της Στ' τάξης απάντησαν λάθος στη «διάταξη κλασμάτων».

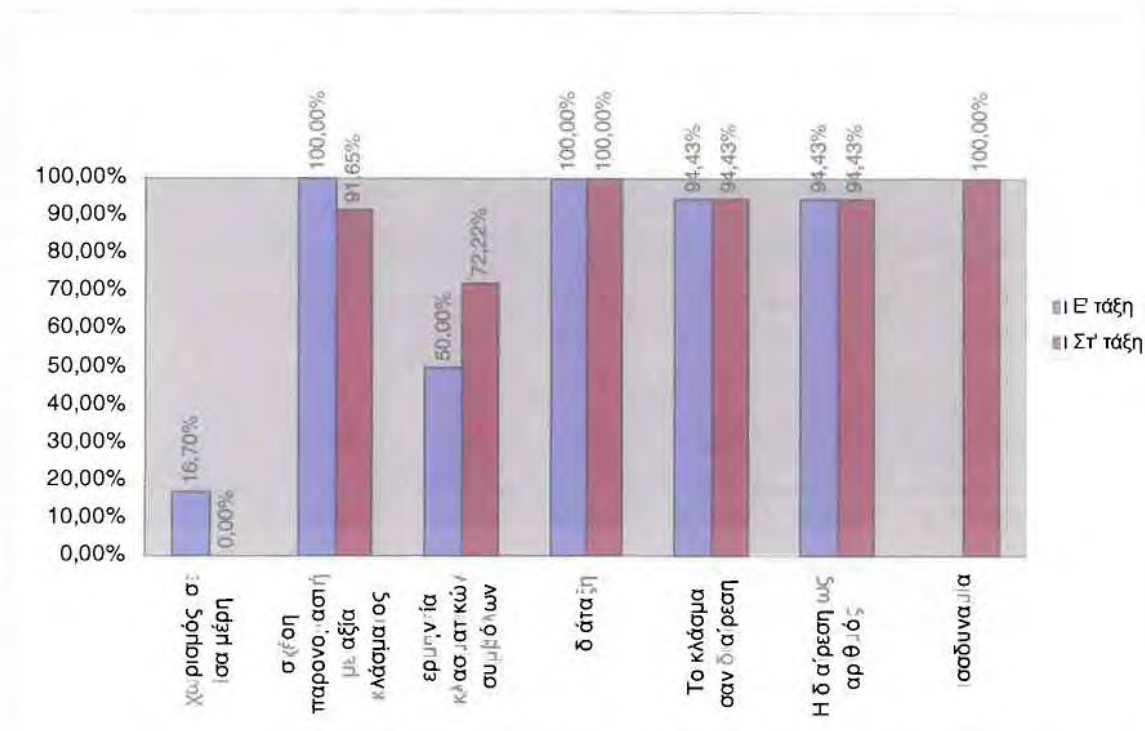
➤ **Πηλίκο**

Η προσέγγιση του κλάσματος ως «Πηλίκο», ξεκινά να διδάσκεται στην Ε' τάξη του δημοτικού. Για το λόγο αυτό στο γράφημα 3 παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών από τους μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στην Ε' τάξη και στη Στ' τάξη του δημοτικού, όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Πηλίκο». Αξιοσημείωτο στην περίπτωση του «Πηλίκου», είναι ότι τα ποσοστά των λαθών αυξήθηκαν από την Ε' τάξη (75,93%) στη Στ' τάξη (78,96%) (βλ. πίνακα 6).

Πίνακας 6. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Πηλίκο»

Μαθησιακές Δυσκολίες			
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Πηλίκο	χωρισμός σε ίσα μέρη	16,70%	0,00%
	σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	100,00%	91,65%
	ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	50,00%	72,22%
	διάταξη	100,00%	100,00%
	Το κλάσμα σαν διαίρεση	94,43%	94,43%
	Η διαίρεση ως αριθμός	94,43%	94,43%
	ισοδυναμία		100,00%
Σύνολο		75,93%	78,96%

Γράφημα 3. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Πηλίκο»



Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν υψηλά ποσοστά λαθών στα επίπεδα κατανόησης: «σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος», «διάταξη», «το κλάσμα σαν διαίρεση», «η διαίρεση ως αριθμός» και «ισοδυναμία», όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Πηλίκο».

Αναλυτικότερα, στις ασκήσεις που εξετάζαν τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», το 100% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Ε' τάξης και το 91,65% της Στ' τάξης, σημείωσαν λάθος. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι όλοι οι μαθητές, τόσο στην Ε' τάξη, όσο και στη Στ' τάξη σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις που εξετάζαν τη «διάταξη των κλασμάτων».

Τα επίπεδα κατανόησης, «το κλάσμα σαν διαίρεση» και «η διαίρεση ως αριθμός», φαίνεται να μην έχουν κατακτηθεί τόσο από τους μαθητές της Ε' τάξης, όσο και από τους μαθητές της Στ' τάξης, καθώς το ποσοστό των λαθών είναι κοινό (94,43%) και στα δύο επίπεδα αλλά και στις δύο τάξεις.

Η «ισοδυναμία» των κλασμάτων, από την προσέγγιση του «Πηλίκου», διδάσκεται για πρώτη φορά στη Στ' τάξη του δημοτικού, για το λόγο αυτό στο γράφημα

σημειώνεται μία μόνο στήλη (βλ. γράφημα 3). Και σε αυτό το επίπεδο κατανόησης, το σύνολο των μαθητών (100%) απάντησε λάθος στις αντίστοιχες ασκήσεις.

Παρόλα αυτά ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Ε' τάξης και όλοι οι μαθητές της Στ' τάξης, φαίνεται να έχουν κατακτήσει το επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», όταν προσεγγίζεται ως «Πηλίκο», καθώς μόλις το 16,70% της Ε' τάξης και το 0% της Στ' τάξης σημείωσαν λάθος στις αντίστοιχες ασκήσεις. Σχετικά χαμηλά είναι και τα ποσοστά των λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και στο επίπεδο κατανόησης: «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», εφόσον μόλις το 50% της Ε' και το 72,22% της Στ' τάξης σημείωσαν λάθος.

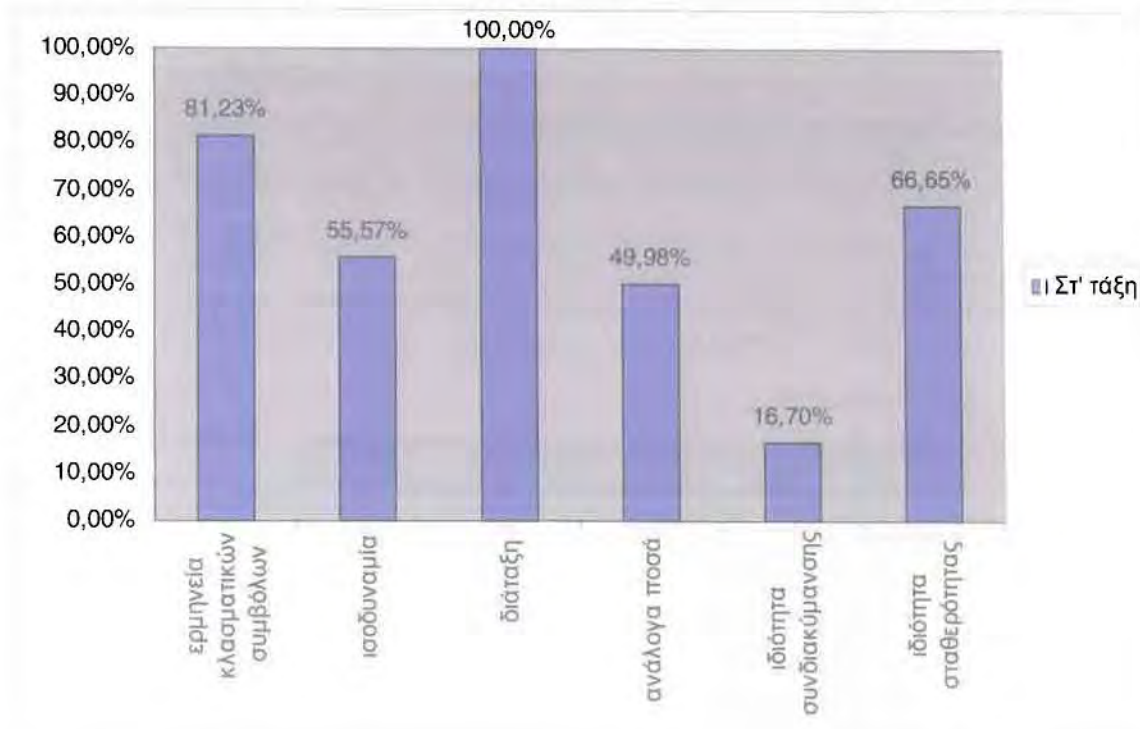
➤ Λόγος

Ο «Λόγος» στο δημοτικό διδάσκεται για πρώτη φορά στη Στ' τάξη του δημοτικού, για το λόγο αυτό τα ποσοστά των λαθών παρουσιάζονται μόνο στη Στ' τάξη (βλ. πίνακα 7, γράφημα 4). Ειδικότερα, σημειώθηκε ότι το 61,69% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες απάντησε λάθος στις ασκήσεις που εξέταζε τα κλάσματα ως «Λόγο».

Πίνακας 7. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Λόγος»

Μαθησιακές Δυσκολίες		
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Στ' τάξη
Λόγος	ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	81,23%
	ισοδυναμία	55,57%
	διάταξη	100,00%
	ανάλογα ποσά	49,98%
	ιδιότητα συνδιακύμανσης	16,70%
	ιδιότητα σταθερότητας	66,65%
Σύνολο		61,69%

Γράφημα 4. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Λόγος»



Όπως φαίνεται στον πίνακα 5, τα επίπεδα κατανόησης που δυσκολεύουν περισσότερο τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, είναι η «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων» (81,23% λάθη) και η «διάταξη κλασμάτων» (100% λάθη). Τα ποσοστά των λαθών στα επίπεδα κατανόησης: «ισοδυναμία κλασμάτων», «ανάλογα ποσά» και «ιδιότητα σταθερότητας», βρίσκονται σε μέσο επίπεδο με ποσοστά, 55,57%, 49,98% και 66,65% αντίστοιχα. Ιδιαίτερα χαμηλό ήταν το ποσοστό των λαθών που σημειώθηκαν στις ασκήσεις που εξετάζαν το επίπεδο κατανόησης «ιδιότητα συνδιακύμανσης», καθώς το ποσοστό που σημειώθηκε είναι 16,60% (βλ. γράφημα 4)

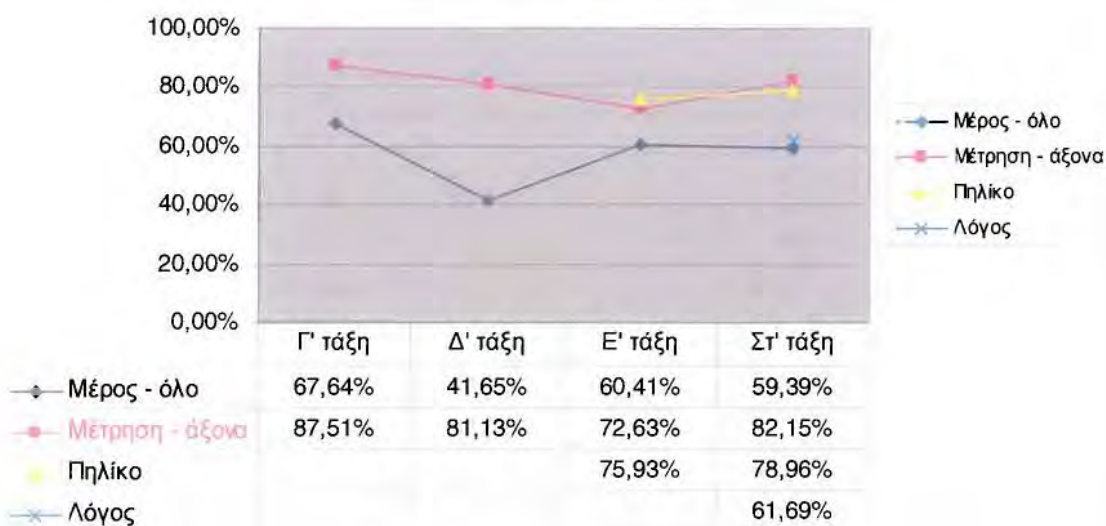
➤ Συνολική εικόνα

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες τα καταφέρνουν καλύτερα στα κλάσματα όταν αυτά προσεγγίζονται ως «Μέρος - Όλο» και ως «Λόγος». Παρόλα αυτά δε βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές για επίπεδο σημαντικότητας 0,01. Αναλυτικότερα, το 67,64% των μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις «Μέρους - Όλου», το 41,65% της Δ' τάξη, το 60,41% της Ε' τάξη και το 59,39% της Στ' τάξη. Στην προσέγγιση του

«Λόγου» το 61,69% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες απάντησαν λάθος στις αντίστοιχες ασκήσεις.

Αντίθετα, στην προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα» και «Πηλίκο», οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, δυσκολεύονται ιδιαίτερα, καθώς τα ποσοστά λαθών στη «Μέτρηση σε άξονα» στη Γ' τάξη αγγίζουν το 87,51%, στη Δ' το 81,13%, στην Ε' το 72,63% και στη Στ' 82,15% και τα ποσοστά των λαθών στο «Πηλίκο», στην Ε' τάξη αγγίζουν το 75,93% και στη Στ' το 78,96% (βλ. γράφημα 5).

Γράφημα 5. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ανά προσέγγιση κλάσματος και τάξη



Όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Μέρος - Όλο», τα υψηλότερα ποσοστά λαθών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, σημειώνονται στα επίπεδα κατανόησης «ισοδυναμία», και «αναγνώριση του όλου». Ωστόσο, στα επίπεδα κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», «παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή» και «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων», τα ποσοστά των λαθών είναι ιδιαίτερα χαμηλά.

Σε αντίθεση με την προσέγγιση «Μέρος - Όλο», η προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα» φαίνεται να δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, καθώς τα ποσοστά των λαθών είναι ιδιαίτερα υψηλά σε όλα τα επίπεδα κατανόησης, με εξαίρεση τα επίπεδα κατανόησης «αναγνώριση του όλου» και «διάταξη», όπου σημειώνονται τα χαμηλότερα ποσοστά λαθών, τα οποία όμως και πάλι ξεπερνούν το 50%.

Στις ασκήσεις που εξετάζουν το κλάσμα ως «Πηλίκο», οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν τα υψηλότερα ποσοστά λαθών, συγκριτικά με τις άλλες προσεγγίσεις του κλάσματος, σε όλα τα επίπεδα κατανόησης, με τα ποσοστά των λαθών να ξεπερνούν το 70%. Εξαίρεση αποτελεί το επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», όπου τα ποσοστά των λαθών ήταν ιδιαίτερα χαμηλά (16,70% για την Ε' τάξη και 0% για τη Στ').

Εκτός από το «Μέρος – Όλο», ως προσέγγιση του κλάσματος, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες φαίνεται να διευκολύνονται σε κάποια επίπεδα κατανόησης της προσέγγισης «Λόγος». Ειδικότερα, αν και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στα επίπεδα κατανόησης «διάταξη» και «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων» σημείωσαν υψηλά ποσοστά, στα υπόλοιπα επίπεδα κατανόησης τα ποσοστά των λαθών κυμαίνονταν περίπου στο 50%, προκαλώντας ιδιαίτερη εντύπωση τα ποσοστά λαθών στα επίπεδα κατανόησης «ιδιότητα συνδιακύμανσης» και «ανάλογα ποσά», τα οποία δεν ξεπερνούν το 50%.

6.1.2 Επίπεδα κατανόησης:

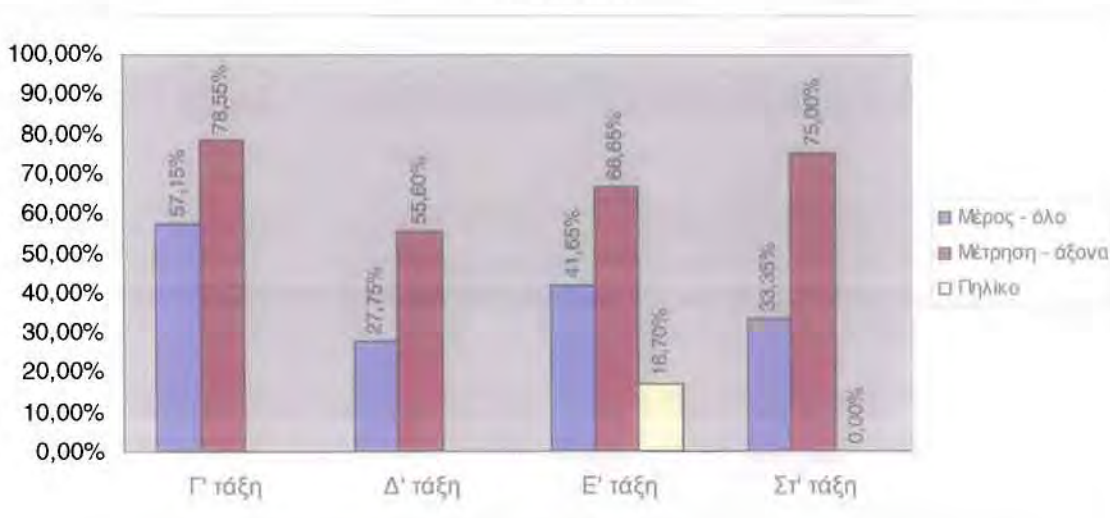
Κάποια από τα επίπεδα κατανόησης του κλάσματος εμφανίζονται σε περισσότερες από μια προσεγγίσεις, για το λόγο αυτό τα δεδομένα επεξεργάστηκαν και παρουσιάζονται στα παρακάτω γραφήματα. Τα συγκεκριμένα γραφήματα μας δείχνουν με ποια από τις προσεγγίσεις γίνονται πιο κατανοητά κάποια επίπεδα κατανόησης στους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αλλά και σε ποια τάξη.

➤ Χωρισμός σε ίσα μέρη

Το επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», όπως φαίνεται και στο γράφημα 6, εμφανίζεται σε τρεις προσεγγίσεις. Αναλυτικότερα, το «χωρισμός σε ίσα μέρη» εμφανίζεται στο «Μέρος - Όλο», στη «Μέτρηση σε άξονα» και στο «Πηλίκο». Οι μαθητές της Γ' τάξης με μαθησιακές δυσκολίες, φαίνεται να κατανοούν καλύτερα το «χωρισμό σε ίσα μέρη», όταν τα κλάσματα προσεγγίζονται ως «Μέρος - Όλο», με ποσοστό λαθών 57,15%, έναντι το 78,55% στη «Μέτρηση σε άξονα». Η εικόνα αυτή διατηρείται και στη Δ' τάξη, με τη διαφορά ότι τα ποσοστά λαθών, τόσο όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Μέρος - Όλο», όσο και όταν προσεγγίζεται ως «Μέτρηση σε άξονα», μειώνονται στα 27,75% και 55,60% αντίστοιχα. Στην Ε' και Στ' τάξη εισάγεται και η προσέγγιση του «Πηλίκου», που φαίνεται να διευκολύνει ακόμη περισσότερο τους μαθητές να κατανοήσουν το «χωρισμό σε ίσα μέρη». Συγκεκριμένα, τα ποσοστά λαθών,

όσον αφορά την προσέγγιση του «Πηλίκου», είναι 16,70% για τους μαθητές της Ε' τάξης και 0%, δηλαδή κανένα λάθος για τους μαθητές της Στ' τάξης. Αντίθετα στις προσεγγίσεις «Μέρος - Όλο» και «Μέτρηση σε άξονα», τα ποσοστά λαθών αυξάνονται συγκριτικά με αυτά της Δ' τάξης, ενώ μειώνονται συγκριτικά με αυτά της Γ' τάξης. Αναλυτικότερα, το 41,65% της Ε' τάξης σημείωσε λάθος στο «χωρισμό σε ίσα μέρη», όταν αυτό το επίπεδο παρουσιαζόταν ως «Μέρος - Όλο» και το 66,65% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, όταν παρουσιαζόταν ως «Μέτρηση σε άξονα». Στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος - Όλο» το 33,35% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Στ' τάξης «χώρισε λάθος μία ποσότητα», ενώ στην προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα», το 75%.

Γράφημα 6. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Χωρισμός σε ίσα μέρη», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος

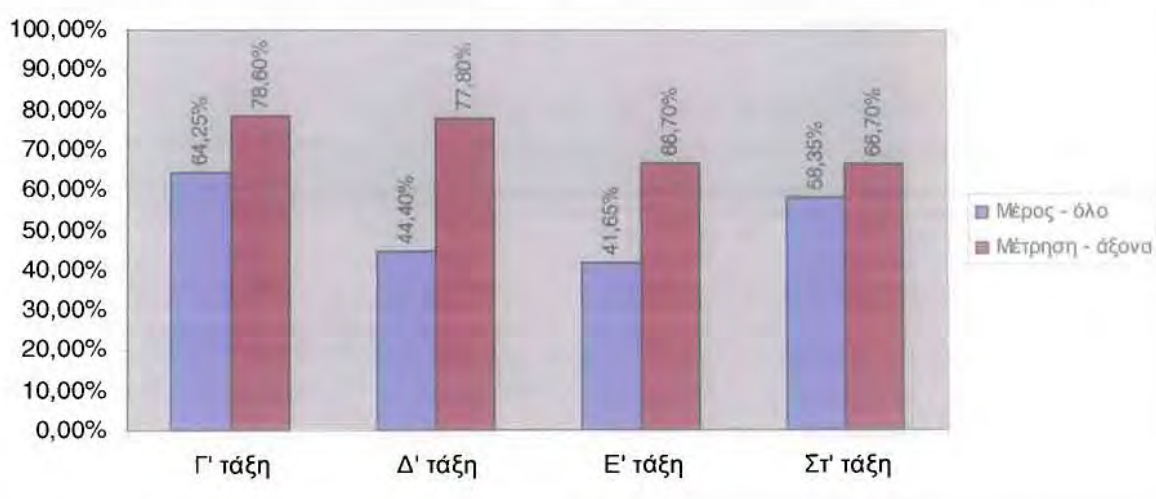


➤ Αναγνώριση του όλου

Δύο είναι οι προσεγγίσεις, όπου συναντάμε το επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση του όλου». Σύμφωνα με το γράφημα 7, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες διευκολύνονται να «αναγνωρίσουν το όλο», όταν αυτό προσεγγίζεται ως «Μέρος - Όλο». Αναλυτικότερα, το 64,25% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης, το 44,40% της Δ' τάξης, 41,65% της Ε' και το 59,39% της Στ', σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις που εξέταζαν το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης, υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», έναντι του 78,60% της Γ' τάξης, το 77,80% της Δ', 66,70% της Ε' και το 66,70% της Στ', που σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις που εξέταζαν την «αναγνώριση

του όλου», υπό την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα». Και στις τέσσερις τάξεις παρατηρείται ότι τα ποσοστά λαθών στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», όταν εξετάζεται η «αναγνώριση του όλου» είναι χαμηλότερα από τα ποσοστά στην προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα».

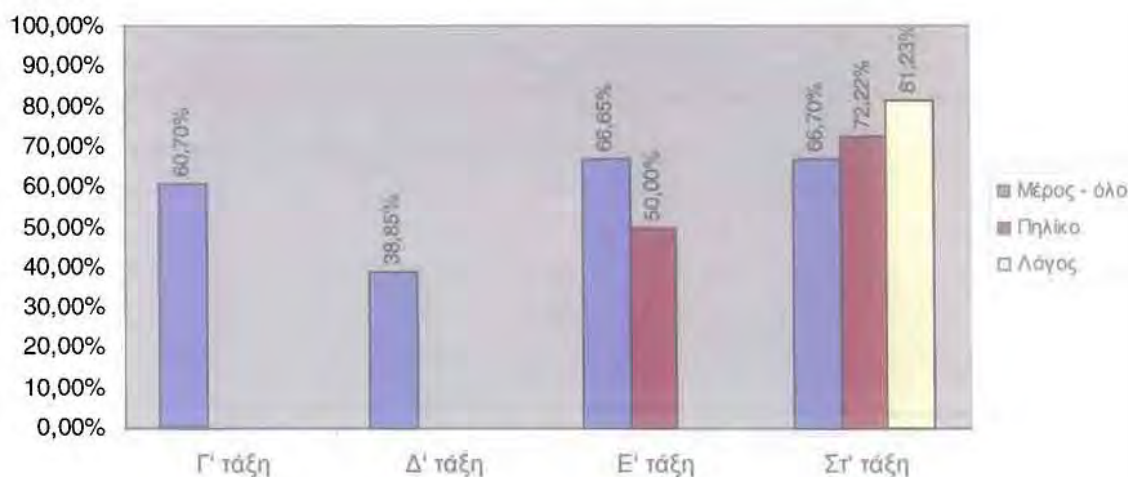
Γράφημα 7. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Αναγνώριση του όλου», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων

Στην Ε' τάξη, εξετάζοντας το επίπεδο κατανόησης «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων» (βλ. γράφημα 8), προέκυψε ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν λιγότερα λάθη, υπό την προσέγγιση του «Πηλίκου», με ποσοστό λαθών 50%, έναντι του 66,65% που ήταν το ποσοστό λαθών όταν τα κλάσματα προσεγγίζονταν ως «Μέρος - Όλο». Στη Στ' τάξη η εικόνα αλλάζει, καθώς τα λιγότερα λάθη σημειώθηκαν στις ασκήσεις που εξέταζαν την «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων» στο «Μέρος - όλο», με ποσοστό 66,70%, έναντι του 72,22% στο «Πηλίκου» και το 81,23% στο «Λόγο».

Γράφημα 8. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος

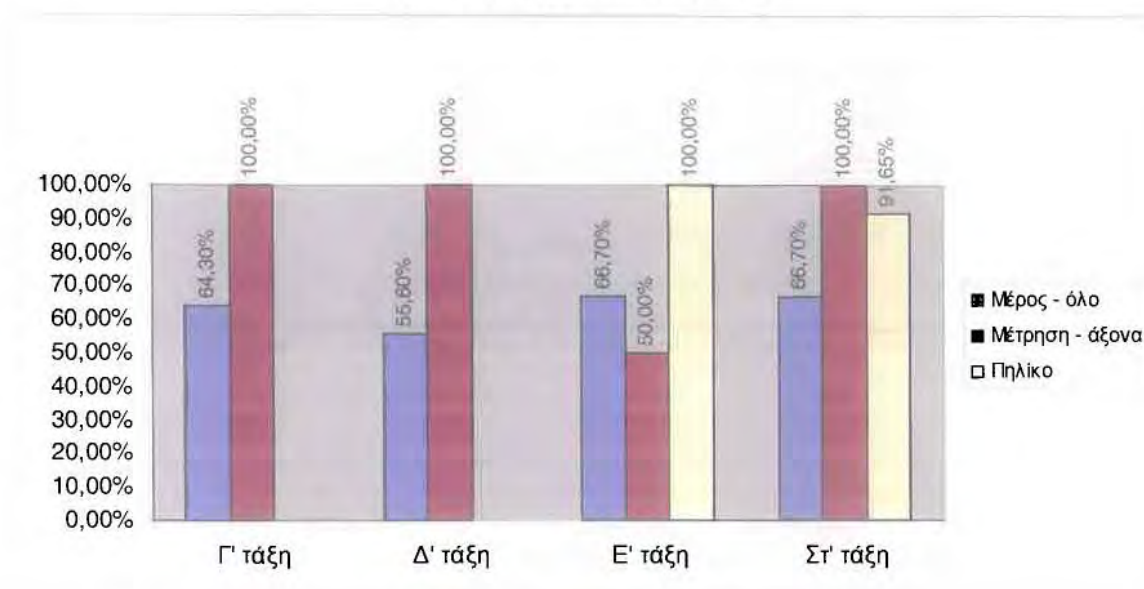


➤ **Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος**

Ένα ακόμη επίπεδο κατανόησης που εμφανίζεται σε περισσότερες από μία προσεγγίσεις είναι η «σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος». Όπως φαίνεται και στο γράφημα 9, στη Γ' και στη Δ' τάξη, τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες κατανοούν καλύτερα τη «σχέση που έχει ο παρονομαστής με την αξία του κλάσματος», μέσω του «Μέρους - Όλου», καθώς τα ποσοστά λαθών είναι 64,30% και 55,60% αντίστοιχα, έναντι της «Μέτρησης σε άξονα», όπου όλοι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν λανθασμένα στις ασκήσεις που εξέταζαν το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης. Μη αναμενόμενα είναι τα αποτελέσματα στην Ε' τάξη, αναφορικά με τη «σχέση που έχει ο παρονομαστής με την αξία του κλάσματος». Συγκεκριμένα στην Ε' τάξη τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες φαίνεται να κατανοούν καλύτερα τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», μέσω της «Μέτρησης σε άξονα», καθώς το ποσοστό των λαθών τους είναι 50%, έναντι των 66,70% και 100%, που σημειώθηκαν στις ασκήσεις που εξέταζαν το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης, υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» και του «Πηλίκου». Η εικόνα αυτή αλλάζει στη Στ' τάξη, όπου οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν και πάλι λιγότερα λάθη στο επίπεδο κατανόησης «σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος», υπό την προσέγγιση «Μέρους - Όλο», όπου το ποσοστό των λαθών είναι 66,70% ίδιο με αυτό της Ε' τάξης του δημοτικού. Αντίθετα τα ποσοστά των λαθών που σημειώθηκαν στις προσεγγίσεις

«Μέτρηση - άξονα» και «Πηλίκo», είναι αρκετά υψηλά, με ποσοστά 100% και 91,65% αντίστοιχα.

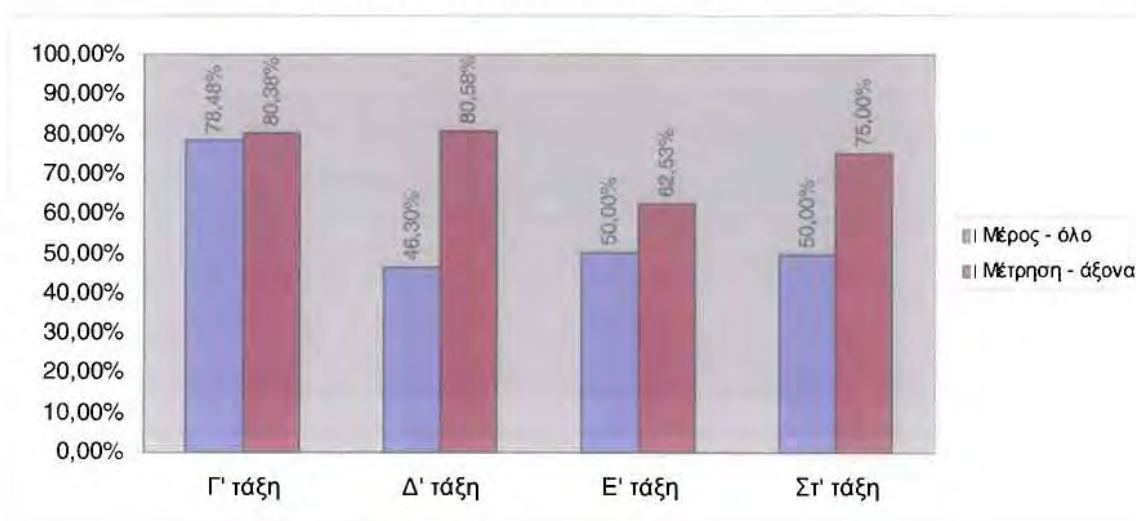
Γράφημα 9. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Αναγνώριση αναπαράστασης κλασματικών ποσοτήτων**

Οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αναγνωρίζουν τη «σωστή αναπαράσταση των κλασματικών ποσοτήτων», υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» και στις τέσσερις τάξεις του δημοτικού. Αναλυτικότερα τα ποσοστά των λαθών που σημειώθηκαν είναι 78,48% για τη Γ' τάξη, 46,30% για τη Δ', 50% για την Ε' και 50% για τη Στ', ποσοστά χαμηλότερα από αυτά που σημειώθηκαν υπό την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», όπου τα ποσοστά των λαθών ήταν 80,38% για τη Γ', 80,58% για τη Δ', 62,53% για την Ε' και 75% για τη Στ' τάξη (βλ. γράφημα 10).

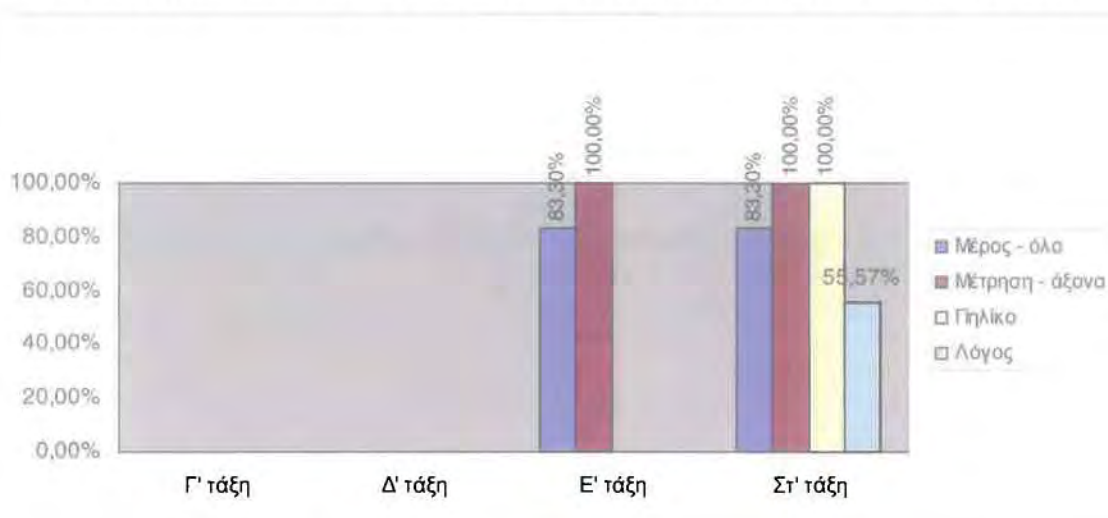
Γράφημα 10. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ Ισοδυναμία κλασμάτων

Η «ισοδυναμία κλασμάτων» διδάσκεται για πρώτη φορά στην Ε' τάξη του δημοτικού. Οι μαθητές της Ε' τάξης κατανοούν την «ισοδυναμία των κλασμάτων», υπό τις προσεγγίσεις του «Μέρους - Όλου» και της «Μέτρησης σε άξονα». Συγκεκριμένα, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες της Ε' τάξης, φαίνεται να διευκολύνονται να κατανοήσουν την «ισοδυναμία των κλασμάτων», υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», παρά υπό την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», καθώς τα ποσοστά των λαθών που σημειώθηκαν ήταν 83,30% έναντι 100% (βλ. γράφημα 11). Στη Στ' τάξη η «ισοδυναμία των κλασμάτων» μελετάται μέσω και των τεσσάρων προσεγγίσεων. Μέσω του «Λόγου» οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες φαίνεται να διευκολύνονται περισσότερο να κατανοήσουν την «ισοδυναμία κλασμάτων», εφόσον το ποσοστό των λαθών ήταν 55,57%, σε αντίθεση με αυτά του «Μέρους - Όλου» (83,30%), της «Μέτρησης σε άξονα» (100%) και του «Πηλίκου» (100%).

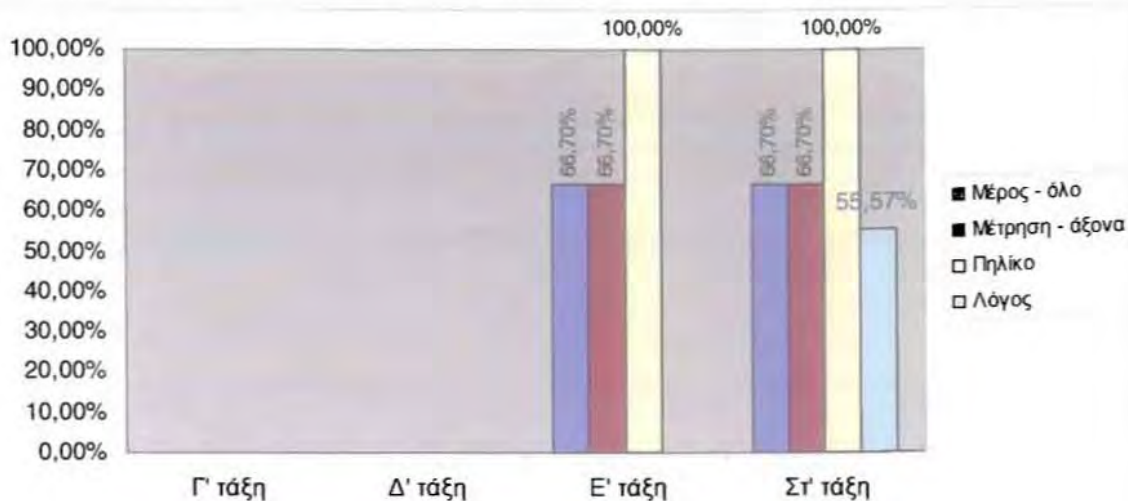
Γράφημα 11. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Ισοδιναμία», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Διάταξη κλασμάτων**

Στο επίπεδο κατανόησης «διάταξη κλασμάτων» αξίζει να αναλυθούν τα ποσοστά των λαθών στην Ε' και Στ' τάξη, όπου η «διάταξη των κλασμάτων» παρουσιάζεται μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις. Στην Ε' τάξη, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν λιγότερα λάθη, όταν η «διάταξη κλασμάτων» προσεγγίζονταν μέσω του «Μέρους - Όλου» ή της «Μέτρησης σε άξονα», έναντι του «Πηλίκου», όπου τα ποσοστά των λαθών ήταν 66,70% και 100%, αντίστοιχα για την κάθε προσέγγιση (βλ. γράφημα 12). Στη Στ' τάξη η «διάταξη κλασμάτων» εμφανίζεται μέσω και των τεσσάρων προσεγγίσεων. Αναλυτικότερα, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες της Στ' τάξης σημείωσαν εμφανώς λιγότερα λάθη στην προσέγγιση «Λόγος», όπου το ποσοστό λαθών ήταν 55,57%, από ότι στις προσεγγίσεις «Μέρους - Όλου», «Μέτρησης σε άξονα» και «Πηλίκου», όπου τα ποσοστά λαθών ήταν 66,70% και 100% αντίστοιχα.

Γράφημα 12. Ποσοστά λαθών από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «Διάταξη», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Συνολική εικόνα**

Συνοψίζοντας, λοιπόν, τα παραπάνω προκύπτει ότι σχεδόν σε όλα τα επίπεδα κατανόησης, που μελετήθηκαν (χωρισμός σε ίσα μέρη, αναγνώριση του όλου, ερμηνεία κλασματικών συμβόλων, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος, αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων, ισοδυναμία και διάταξη), οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες επωφελούνται περισσότερο μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους – Όλου» (βλ. πίνακα 8).

Εξαίρεση αποτελούν τα επίπεδα κατανόησης, «χωρισμός σε ίσα μέρη», όπου οι μαθητές της Ε' και Στ' τάξης επωφελούνται όταν το κλάσμα παρουσιάζεται ως «Πηλίκo», «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», όπου οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες επωφελούνται μέσα από το «Πηλίκo», «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», όπου οι μαθητές της Ε' επωφελούνται περισσότερο μέσω της «Μέτρησης σε άξονα» και τέλος στην «ισοδυναμία», αλλά και τη «διάταξη», η προσέγγιση «Λόγος» φαίνεται να διευκολύνει περισσότερο τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες της Στ' τάξης (βλ. πίνακα 8).

Πίνακας 8. Προτίμηση στους τρόπους προσέγγισης ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη από μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες

	Μαθησιακές Δυσκολίες			
	Γ'	Δ'	Ε'	Στ'
Χωρισμός σε ίσα μέρη	ΜΟ	ΜΟ	Π	Π
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΟ
			ΜΑ	ΜΑ
Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	ΜΟ	ΜΟ	ΜΑ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	Π
			Π	ΜΑ
Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	ΜΟ	ΜΟ	Π	ΜΟ
			ΜΟ	Π
				Λ
Αναγνώριση του όλου	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ
Αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ
Διάταξη			ΜΟ	Λ
			ΜΑ	ΜΟ
				ΜΑ
				Π
Ισοδυναμία			ΜΟ	Λ
			ΜΑ	ΜΟ
				ΜΑ
				Π
ΜΟ: Μέρος – όλο ΜΑ: Μέτρηση σε άξονα Π: Πηλίκιο Λ: Λόγος				

6.2 Τυπικώς Αναπτυσσόμενοι μαθητές

Στα επόμενα υποκεφάλαια, πραγματοποιείται μία παρουσίαση των ποσοστών των λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, ανά τρόπο προσέγγισης, αλλά και ανά επίπεδο κατανόησης των κλασμάτων, σε όλες τις τάξεις που εξετάστηκαν. Εν συνεχεία, παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών των μαθητών τυπικής ανάπτυξης, σε κάποια από τα επίπεδα κατανόησης, τα οποία συναντώνται σε περισσότερους από έναν τρόπους προσέγγισης του κλάσματος, ανά τάξη αλλά και τρόπο προσέγγισης.

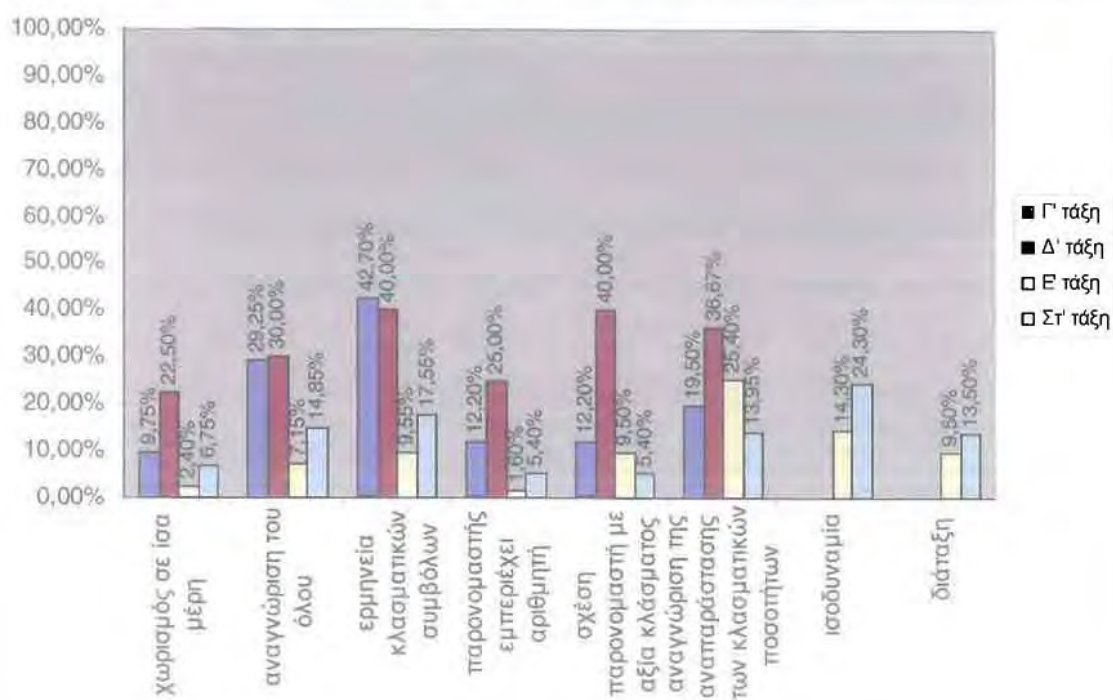
6.2.1 Προσεγγίσεις κλασμάτων:

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι προσεγγίσεις του κλάσματος, που εξετάζονται στην παρούσα έρευνα είναι το «Μέρος - Όλο», η «Μέτρηση σε άξονα», το «Πηλίκο» και ο «Λόγος». Μέσα λοιπόν, από τις τέσσερις αυτές προσεγγίσεις παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών παρακάτω.

➤ Μέρος - Όλο

Το γράφημα 13 μας δείχνει τα ποσοστά των λαθών ανά τάξη και επίπεδο κατανόησης, από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Μέρος - Όλο». Συνολικά στη Γ' τάξη τα λάθη που σημειώθηκαν είναι 20,93% και στη Δ' 32,36%. Αντίθετα στην Ε' τάξη, το ποσοστό των λαθών ήταν 9,93%, διαφορά στατιστικώς σημαντική ($t=7,877$, $p=0,001$), συγκριτικά με τη Δ' τάξη. Στατιστικώς σημαντική διαφορά σημειώθηκε και μεταξύ των ποσοστών λαθών της Δ' και της Στ' τάξης ($t=7,579$, $p=0,001$), με το ποσοστό των λαθών της Στ' τάξης να αγγίζει το 12,71%.

Γράφημα 13. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος · Όλο»



Αναλυτικότερα, σύμφωνα με τον πίνακα 9, οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές σημείωσαν χαμηλά ποσοστά λαθών στο επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη». Ειδικότερα, στη Γ' τάξη το 9,75%, στη Δ' τάξη το 22,50%, μόλις το 2,40%, στην Ε' τάξη και το 6,75% στη Στ' τάξη, των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών σημείωσαν λάθος στο «χωρισμό σε ίσα μέρη». Στο επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση του όλου», στη Γ' τάξη το 29,25%, στη Δ' τάξη το 30%, στην Ε' τάξη μόλις το 7,15 και στη Στ' τάξη το 14,85% των μαθητών σημείωσαν λάθος. Υψηλά επίπεδα λαθών σημειώθηκαν στο επίπεδο κατανόησης «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων», στις δύο πρώτες τάξεις (Γ' με 42,70% και Δ' με 40%), ενώ αντίθετα στις δύο τελευταίες τάξεις (Ε' και ΣΤ'), τα ποσοστά λαθών μειώνονται στα 9,55% και 17,55% αντίστοιχα. Στη Γ' τάξη και ενώ το ποσοστό των λαθών στο επίπεδο κατανόησης «παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή» είναι 12,20%, στη Δ' τάξη αυξάνεται στο 25%, ενώ αντίθετα στις τάξεις Ε' και Στ' μειώνεται στα ποσοστά 1,60% και 5,40% αντίστοιχα. Ίδιο ποσοστό λαθών σημείωσαν οι μαθητές της Γ' τάξης (12,20%) και της Στ' τάξης (5,40%) και στο επίπεδο κατανόησης «σχέση παρονομαστή με αξία του κλάσματος», ενώ αντίθετα οι μαθητές της Δ' τάξης (40%) και της Ε' τάξης (9,50%) σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά λαθών, συγκριτικά με

το επίπεδο κατανόησης «παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή». Αρκετά υψηλά παραμένουν τα ποσοστά λαθών και στις τέσσερις τάξεις στο επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων», καθώς στη Γ' τάξη το ποσοστό ανέρχεται στο 19,50%, στη Δ' στο 36,67%, στην Ε' στο 25,40% και στη Στ' στο 13,95%, χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές, με το μεγαλύτερο ποσοστό λαθών να συγκεντρώνεται στη Δ' τάξη του δημοτικού. Χαμηλά, επίσης είναι τα ποσοστά λαθών από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές και στα επίπεδα κατανόησης «ισοδυναμία κλασμάτων» και «διάταξη κλασμάτων». Παρόλα αυτά το αξιοσημείωτο είναι ότι τόσο στην «ισοδυναμία κλασμάτων», όσο και στη «διάταξη κλασμάτων», τα ποσοστά των λαθών από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές αυξάνονται, αναφορικά με την «ισοδυναμία κλασμάτων» από το 14,30% στην Ε' τάξη στο 24,30% στη Στ', και αναφορικά με τη «διάταξη κλασμάτων» από το 9,50% στην Ε' τάξη στο 13,50% στη Στ'.

Πίνακας 9. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος - Όλο»

Τυπικώς Αναπτυσσόμενοι					
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Γ' τάξη	Δ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Μέρος - όλο	χωρισμός σε ίσα μέρη	9,75%	22,50%	2,40%	6,75%
	αναγνώριση του όλου	29,25%	30,00%	7,15%	14,85%
	ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	42,70%	40,00%	9,55%	17,55%
	παρονομαστής εμπεριέχει αριθμητή	12,20%	25,00%	1,60%	5,40%
	σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	12,20%	40,00%	9,50%	5,40%
	αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	19,50%	36,67%	25,40%	13,95%
	ισοδυναμία			14,30%	24,30%
	διάταξη			9,50%	13,50%
	Σύνολο		20,93%	32,36%	9,93%

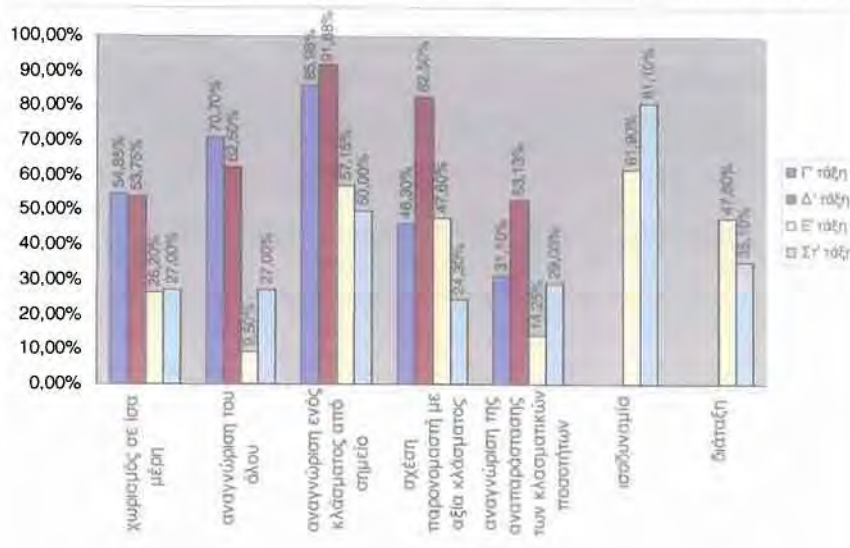
➤ **Μέτρηση σε άξονα**

Σε όλες τις τάξεις, τα ποσοστά λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών είναι υψηλότερα, όταν το κλάσμα προσεγγίζεται από τη «Μέτρηση σε άξονα» (βλ. πίνακα 10). Αναλυτικότερα, σύμφωνα με τον πίνακα 10, στη Γ' τάξη το ποσοστό των λαθών είναι 57,79%, στη Δ' τάξη 68,75%, στην Ε' τάξη 37,74% και στη Στ' τάξη 39,08%. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι η διαφορά στα ποσοστά των λαθών, τόσο μεταξύ της Δ' και Ε' τάξης ($t=8,974$, $p=0,004$), όσο και μεταξύ της Δ' και Στ' τάξης ($t=6,103$, $p=0,004$) βρέθηκε στατιστικώς σημαντική διαφορά.

Πίνακας 10. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα»

Τυπικώς Αναπτυσσόμενοι					
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Γ' τάξη	Δ' τάξη	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Μέτρηση σε άξονα	χωρισμός σε ίσα μέρη	54,85%	53,75%	26,20%	27,00%
	αναγνώριση του όλου	70,70%	62,50%	9,50%	27,00%
	αναγνώριση ενός κλάσματος από σημείο	85,98%	91,88%	57,15%	50,00%
	σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	46,30%	82,50%	47,60%	24,30%
	αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	31,10%	53,13%	14,25%	29,03%
	ισοδυναμία			61,90%	81,10%
	διάταξη			47,60%	35,10%
Σύνολο		57,79%	68,75%	37,74%	39,08%

Γράφημα 14. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα»



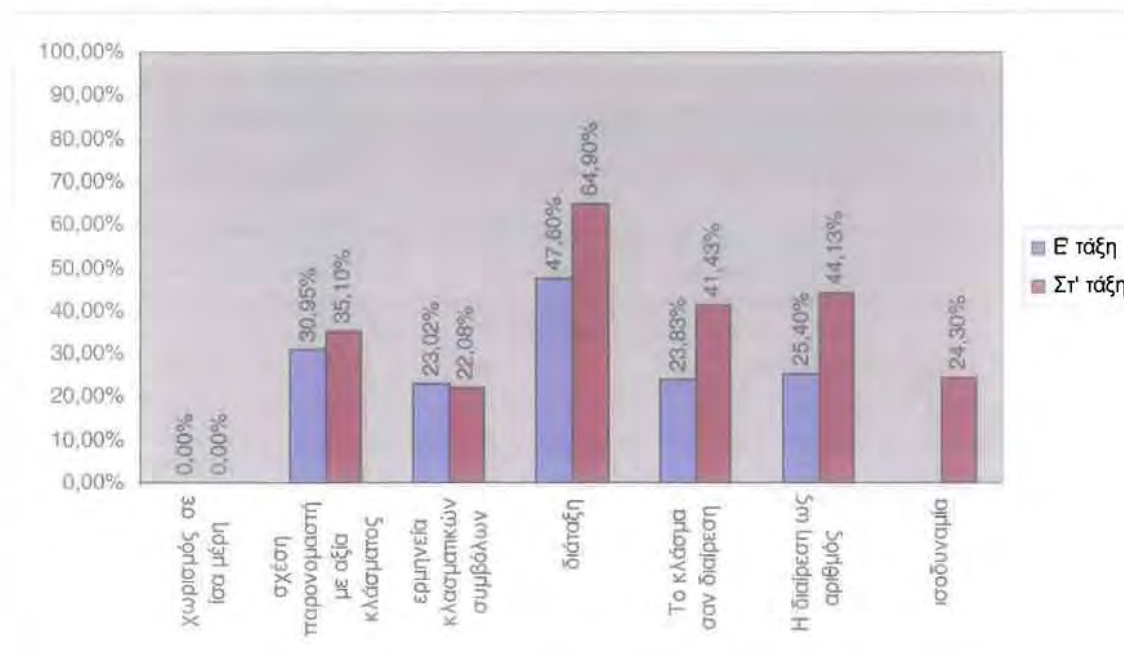
Αναλυτικότερα, η προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα», αποτελείται από 7 επίπεδα κατανόησης, όπως φαίνεται και στον πίνακα 10. Ενώ τα ποσοστά των λαθών στις ασκήσεις που εξετάζουν το επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», στις δύο πρώτες τάξεις (Γ' και Δ' τάξη) είναι 54,85% και 53,75% αντίστοιχα, στις δύο τελευταίες τάξεις (Ε' και Στ' τάξη) τα ποσοστά αυτά μειώνονται στα 26,20% και 27% αντίστοιχα. Στο επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση του όλου» οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές της Ε' τάξης σημείωσαν τα λιγότερα λάθη (9,50%), ενώ αντίθετα οι μαθητές της Γ' τάξης σημείωσαν τα περισσότερα λάθη, με ποσοστό που ανέρχεται στα 70,70%. Πολύ κοντά στο ποσοστό λαθών της Γ' τάξης βρίσκεται και το ποσοστό λαθών των μαθητών της Δ' τάξης (62,50%). Το ποσοστό λαθών της Στ' τάξης, συγκριτικά με τις δύο πρώτες τάξεις μειώνεται, ενώ συγκριτικά με αυτό της Ε' τάξης αυξάνεται στα 27%. Οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται ιδιαίτερα, όταν εξετάζεται το επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση ενός κλάσματος από σημείο», καθώς στη Γ' τάξη σημειώθηκαν 85,98% λάθη, στη Δ' τάξη 91,88%, στην Ε' τάξη 57,15% και στη Στ' τάξη 50%. Το ποσοστό των λαθών στο επίπεδο κατανόησης «σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος» είναι υψηλότερο στη Δ' τάξη (82,50%), ενώ στις τάξεις Γ' (46,30%) και Ε' (47,50%) τα ποσοστά λαθών που σημειώθηκαν βρίσκονται περίπου στα ίδια επίπεδα. Ωστόσο στη Στ' τάξη φαίνεται ότι μόλις το 24,30% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών δεν κατανοεί τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος». Σχετικά χαμηλά είναι τα ποσοστά λαθών στο επίπεδο

κατανόησης «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων» (Γ' τάξη με 31,10%, Ε' τάξη με 14,25% και Στ' τάξη με 29,03%), με εξαίρεση τη Δ' τάξη, όπου το ποσοστό των λαθών ανέρχεται στο 53,13%. Όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Μέτρηση σε άξονα», φαίνεται να δυσκολεύει ακόμη περισσότερο τους μαθητές να κατανοήσουν την «ισοδυναμία» και τη «διάταξη» των κλασμάτων. Αναφορικά με την «ισοδυναμία» των κλασμάτων, το ποσοστό των λαθών αυξάνεται από το 61,90% που είναι στην Ε' τάξη στο 81,10% που είναι στη Στ' τάξη. Διαφορετικά εικόνα προκύπτει στη «διάταξη» των κλασμάτων, όπου το ποσοστό των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών, που σημείωσε λάθος στις αντίστοιχες ασκήσεις, μειώνεται από 47,60% στο 35,10%.

➤ Πηλίκο

Η προσέγγιση του κλάσματος ως «Πηλίκο» εισάγεται στην Ε' τάξη του δημοτικού, για το λόγο αυτό στο παρακάτω γράφημα (βλ. γράφημα 15), παρουσιάζονται μόνο τα ποσοστά των λαθών στα επίπεδα κατανόησης του «Πηλίκου» στην Ε' τάξη και στη Στ' τάξη. Συνολικά στην Ε' τάξη το 25,13% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών απάντησε λάθος στις ασκήσεις, που εξέταζαν την προσέγγιση του κλάσματος «Πηλίκο», ενώ στη Στ' τάξη το ποσοστό αυξάνεται στο 33,14% (βλ. πίνακα 11). Παρατηρείται ότι και στις δύο τάξεις τα ποσοστά των λαθών κυμαίνονται περίπου στα ίδια επίπεδα.

Γράφημα 15. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Πηλίκου»



Όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Πηλίκου», απαιτούνται 7 επίπεδα κατανόησης. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές δε σημείωσαν κανένα λάθος, ούτε στην E' αλλά ούτε και στη Στ' τάξη στις ασκήσεις που εξετάζαν το «χωρισμό σε ίσα μέρη», υπό την προσέγγιση του «Πηλίκου». Σε αντίθεση με το «χωρισμό σε ίσα μέρη», στα υπόλοιπα επίπεδα κατανόησης οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές φαίνεται να δυσκολεύονται περισσότερο. Το 30,95% των μαθητών της E' τάξης και το 35,10% των μαθητών της Στ' τάξης σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις που εξετάζαν τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος». Η ίδια περίπου εικόνα επικρατεί και στο επίπεδο κατανόησης «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», μόνο που τα ποσοστά είναι χαμηλότερα (23,03% για την E' τάξη και 22,08% για τη Στ', βλ. γράφημα 8). Στα επίπεδα κατανόησης «το κλάσμα σαν διαίρεση» και «η διαίρεση ως αριθμός», τα ποσοστά των λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές αυξάνονται από την E' τάξη στη Στ' τάξη. Αναλυτικότερα, αναφορικά με το «κλάσμα σαν διαίρεση», το ποσοστό των λαθών από 22,83% αυξάνεται στο 41,43%, και αναφορικά με τη «διαίρεση ως αριθμός», από το 25,40%, που ήταν στην E' τάξη αυξάνεται στο 44,13%. Τέλος, η «ισοδυναμία κλασμάτων», υπό την προσέγγιση «Πηλίκου» διδάσκεται για πρώτη φορά στη Στ' τάξη. Οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές σημείωσαν λάθη στις ασκήσεις που

εξέταζαν την «ισοδυναμία κλασμάτων», υπό την προσέγγιση του «Πηλίκου» σε ποσοστό 24,30%.

Πίνακας 11. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Πηλίκου»

Τυπικώς Αναπτυσσόμενοι			
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Ε' τάξη	Στ' τάξη
Πηλίκου	χωρισμός σε ίσα μέρη	0,00%	0,00%
	σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	30,95%	35,10%
	ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	23,02%	22,08%
	διάταξη	47,60%	64,90%
	Το κλάσμα σαν διαίρεση	23,83%	41,43%
	Η διαίρεση ως αριθμός	25,40%	44,13%
	ισοδυναμία		24,30%
Σύνολο		25,13%	33,14%

➤ **Λόγος**

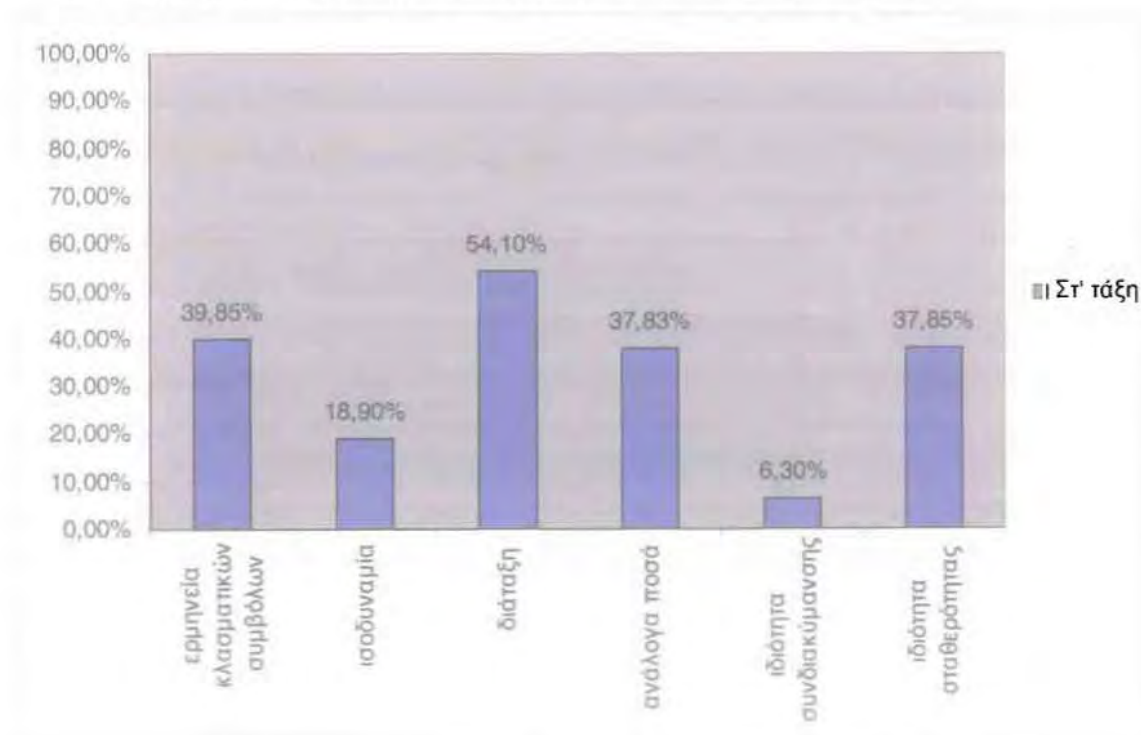
Συνολικά τα λάθη που σημειώθηκαν στην προσέγγιση «Λόγος» αγγίζουν το 32,47%. Στο παρακάτω γράφημα (βλ. γράφημα 16) παρουσιάζονται τα ποσοστά των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών της Στ' τάξης στα διάφορα επίπεδα κατανόησης του «Λόγου». Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι ο «Λόγος» διδάσκεται μόνο στη Στ' τάξη του δημοτικού, γι' αυτό το λόγο τα ποσοστά των λαθών αναφέρονται μόνο σε αυτήν την τάξη. Αναλυτικότερα, τα επίπεδα κατανόησης «ισοδυναμία κλασμάτων» και «ιδιότητα συνδιακύμανσης», συγκέντρωσαν τα λιγότερα λάθη, με ποσοστά 18,90% και 6,30% αντίστοιχα. Σχετικά υψηλά ήταν τα ποσοστά των λαθών στα επίπεδα κατανόησης «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», «ανάλογα ποσά»

και «ιδιότητα σταθερότητας», όπου τα ποσοστά των λαθών ήταν 39,85%, 37,83% και 37,85% αντίστοιχα. Ιδιαίτερα υψηλό, συγκριτικά με τα υπόλοιπα επίπεδα κατανόησης, ήταν το ποσοστό λαθών στην «διάταξη κλασμάτων», το οποίο αγγίζει το 54,10% (βλ. πίνακα 12).

Πίνακας 12. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Λόγος»

Τυπικώς Αναπτυσσόμενοι		
Τρόπος προσέγγισης κλάσματος	Επίπεδα κατανόησης	Στ' τάξη
Λόγος	ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	39,85%
	Ισοδυναμία	18,90%
	Διάταξη	54,10%
	ανάλογα ποσά	37,83%
	ιδιότητα συνδιακύμανσης	6,30%
	ιδιότητα σταθερότητας	37,85%
	Σύνολο	

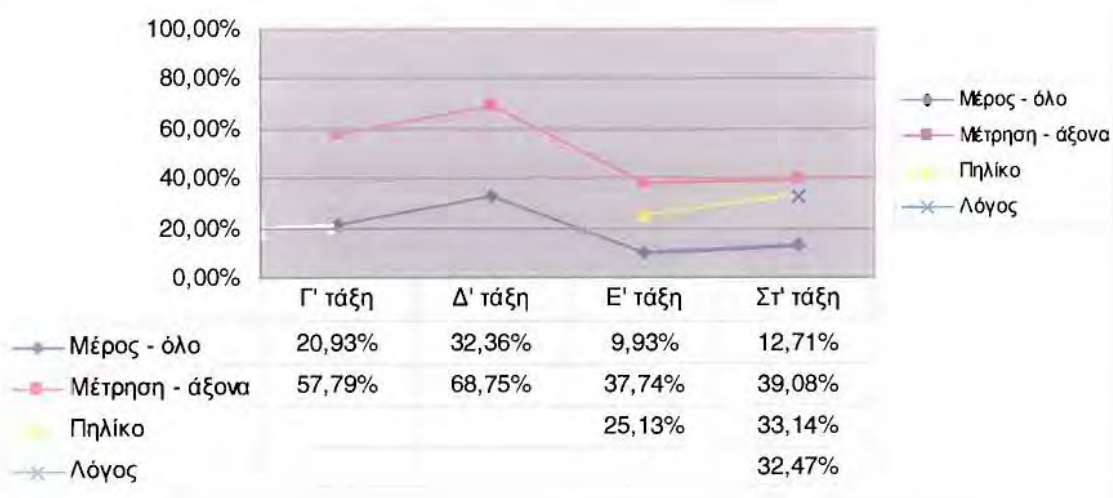
Γράφημα 16. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη στην προσέγγιση του κλάσματος «Λόγος»



➤ Συνολική εικόνα

Όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα (βλ. γράφημα 17) οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, τα καταφέρνουν καλύτερα στα κλάσματα, όταν αυτά προσεγγίζονται ως «Μέρος - Όλο», όπου συνολικά τα ποσοστά των λαθών είναι 20,93% για τη Γ' τάξη, 32,36% για τη Δ', 9,93% για την Ε' και 12,71% για τη Στ'. Αν και το ποσοστό των λαθών στο «Μέρος - Όλο» αυξάνεται στην Δ' τάξη, ωστόσο στην Ε' και Στ' τα ποσοστά μειώνονται αρκετά, διατηρώντας μία σταθερή εικόνα στις δύο αυτές τάξεις. Σε αντίθεση με την προσέγγιση «Μέρος - Όλο», στην προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα», οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα και στις τέσσερις τάξεις, με στατιστικώς σημαντική διαφορά ($t=-11,525$, $p=0,001$). Αν και τα ποσοστά είναι κατά πολύ υψηλότερα από αυτά του «Μέρους - Όλου», ωστόσο παρατηρείται η ίδια εικόνα. Με λίγα λόγια, και στη «Μέτρηση σε άξονα», οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές της Δ' τάξης σημειώνουν περισσότερα λάθη (68,75%), συγκριτικά με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές των υπόλοιπων τάξεων. Εν τέλει στην Ε' και Στ' τάξη τα ποσοστά των λαθών μειώνονται στα 37,74% και 39,08%, αντίστοιχα, διατηρώντας καθ' αυτόν τον τρόπο μία σταθερή εικόνα στις δύο τελευταίες τάξεις. Στο μέσο βρίσκονται οι προσεγγίσεις «Πηλίκιο» και «Λόγος», όπου τα ποσοστά των λαθών είναι 25,13% για την Ε' τάξη και 33,14% για τη Στ', όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Πηλίκιο» και 32,47% για τη Στ' τάξη όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Λόγος».

Γράφημα 17. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



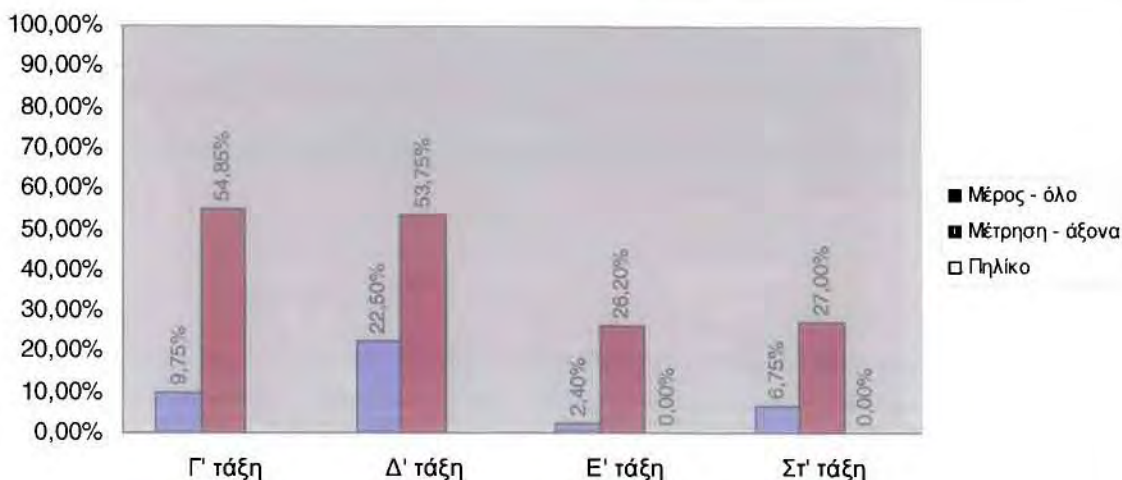
6.2.2 Επίπεδα κατανόησης:

Εξετάζοντας κάθε επίπεδο κατανόησης ξεχωριστά και ως προς τις προσεγγίσεις του κλάσματος, αλλά και ως προς τις τάξεις, προκύπτει ότι οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, σε κάποια επίπεδα κατανόησης, που εμφανίζονται σε περισσότερες από μία προσεγγίσεις, επωφελούνται περισσότερο, όταν αυτά παρουσιάζονται υπό μία συγκεκριμένη προσέγγιση.

➤ Χωρισμός σε ίσα μέρη

Οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές φαίνεται να διευκολύνονται να «χωρίσουν μία ποσότητα σε ίσα μέρη», όταν αυτή προσεγγίζεται ως «Μέρος - Όλο». Αναλυτικότερα, τα ποσοστά λαθών στις ασκήσεις του «Μέρους - Όλου» είναι 9,75% για τη Γ' τάξη, 22,50% για τη Δ' τάξη, συγκριτικά με τη Γ' τάξη αρκετά υψηλό ποσοστό, μόλις 2,40% για την Ε' τάξη και 6,75% για τη Στ' τάξη. Ωστόσο, στη Στ' τάξη η προσέγγιση του «Πηλίκου» φαίνεται να διευκολύνει ακόμη περισσότερο τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, καθώς κανένας μαθητής δε σημείωσε λάθος. Σε αντίθεση με το «Μέρος - Όλο» και το «Πηλίκου», η «Μέτρηση σε άξονα», δυσκολεύει κατά πολύ περισσότερο τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, κατά τη διάρκεια και των τεσσάρων τάξεων (βλ. γράφημα 18). Ειδικότερα, στη Γ' τάξη το ποσοστό λαθών που σημειώθηκε, αναφορικά με το «χωρισμό σε ίσα μέρη» υπό την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», ήταν 54,85%, στη Δ' 53,75%. Στην Ε' και στη Στ', συγκριτικά με τις δύο πρώτες τάξεις, σημειώθηκαν αρκετά χαμηλά ποσοστά (26,20% και 27% αντίστοιχα).

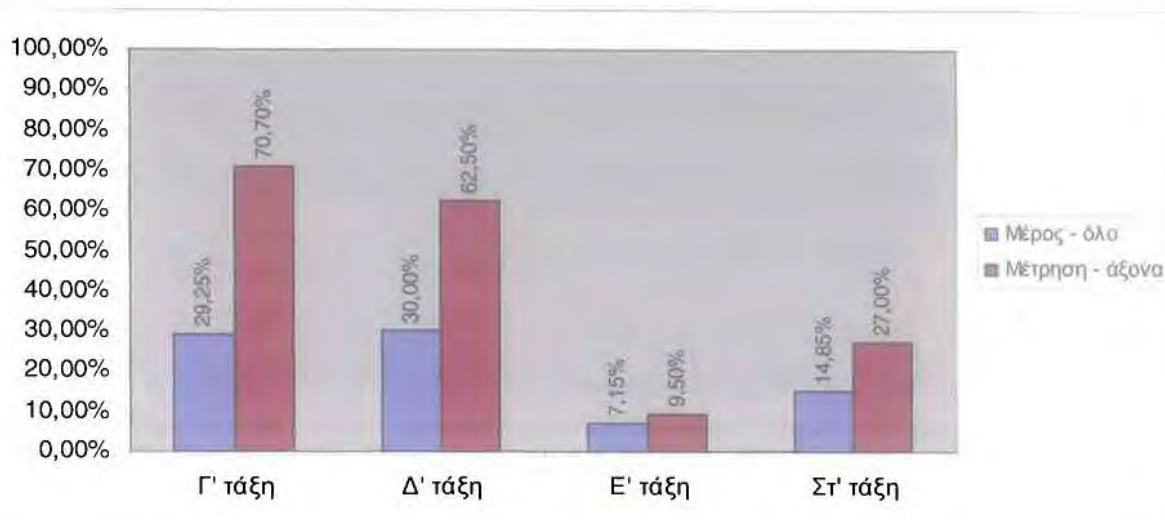
Γράφημα 18. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Χωρισμός σε ίσα μέρη», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Αναγνώριση του όλου**

Στις δύο πρώτες τάξεις (Γ' και Δ') τα ποσοστά των λαθών, από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, στο επίπεδο κατανόησης «αναγνώριση του όλου», παρουσιάζει παρόμοια εικόνα με αυτή του επιπέδου «χωρισμός σε ίσα μέρη». Αναλυτικότερα σύμφωνα με το γράφημα 19, το 29,25% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών της Γ' τάξης και το 30% της Δ' σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις που εξετάζαν το συγκεκριμένο επίπεδο κατανόησης, υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», ποσοστά πολύ χαμηλά συγκριτικά με αυτά που σημειώθηκαν στη «Μέτρηση σε άξονα» (70,70% στη Γ' και 62,50% στη Δ'). Και στις τάξεις Ε' και Στ' τα ποσοστά των λαθών, από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές ήταν χαμηλότερα στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» (7,15% στην Ε' και 14,85% στη Στ'), έναντι αυτών της «Μέτρησης σε άξονα» (9,50% στην Ε' και 27% στη Στ'), αν και τα ποσοστά και στις δύο προσεγγίσεις δε διαφέρουν πολύ.

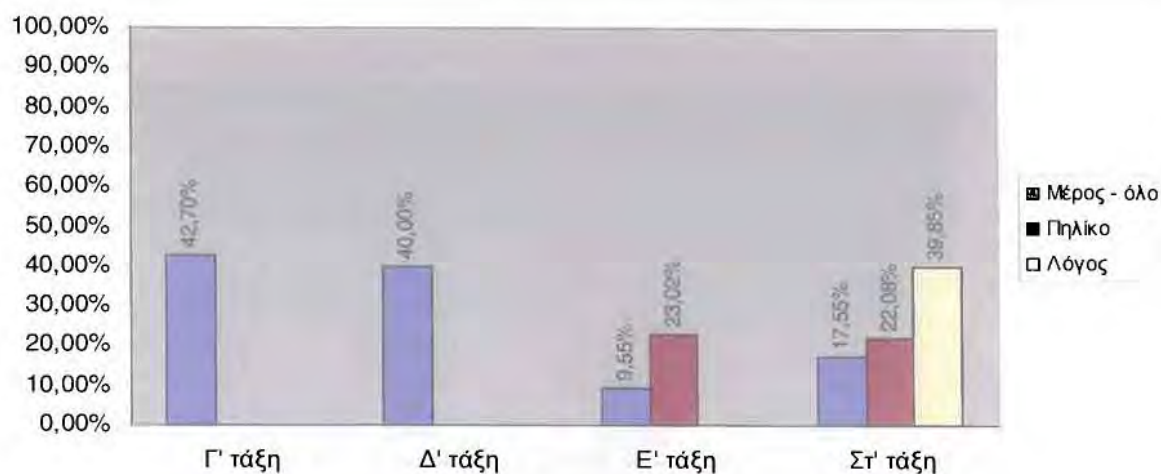
Γράφημα 19. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Αναγνώριση των όλων», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων

Η «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων» εξετάστηκε σε τρεις προσεγγίσεις, στο «Μέρος - Όλο», στο «Πηλίκιο» και στο «Λόγο». Οι τάξεις που εμφανίζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η Ε' και Στ', εφόσον σε αυτές τις δύο τάξεις η «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων» παρουσιάζεται μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις. Στην Ε' τάξη, οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές φαίνεται να «ερμηνεύουν πιο σωστά τα κλασματικά σύμβολα», όπως παρουσιάζονται στο «Μέρος - Όλο», εφόσον το ποσοστό των λαθών ήταν μόλις 9,55%, συγκριτικά με αυτό του «Πηλίκου», που αγγίζει το 23,02% (βλ. γράφημα 20). Στη Στ' τάξη τα παιδιά καλούνται να «ερμηνεύσουν τα κλασματικά σύμβολα», μέσα και από τις τρεις προσεγγίσεις. Παρόλα αυτά, και πάλι η προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», φαίνεται να διευκολύνει περισσότερο τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές (17,55%), με ελάχιστη διαφορά από την προσέγγιση του «Πηλίκου» (22,08%). Αρκετά υψηλά ήταν τα ποσοστά των λαθών, από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές της Στ' τάξης, στην «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων», όπως παρουσιάζονται στο «Λόγο» (39,85%).

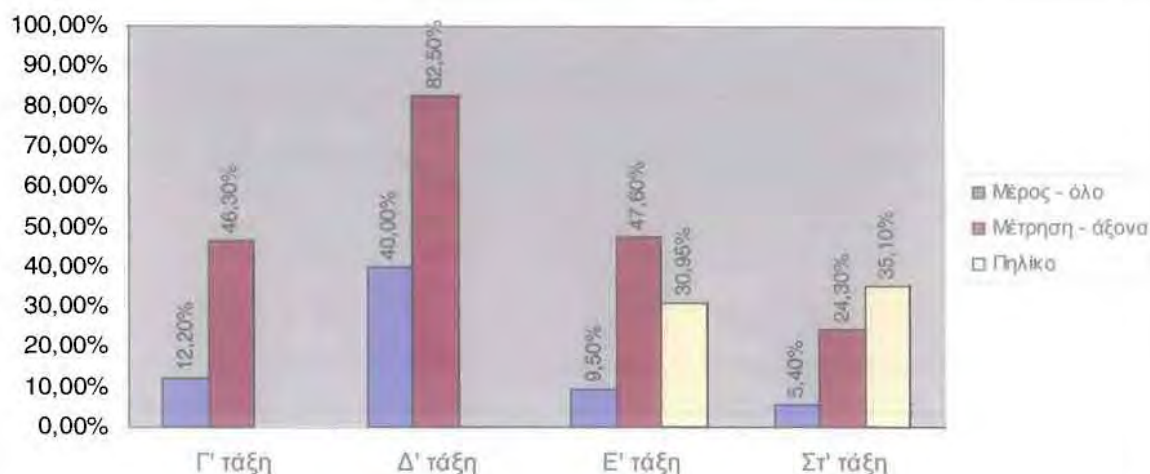
Γράφημα 20. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος**

Η «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος» φαίνεται να γίνεται περισσότερο αντιληπτή από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» και στις τέσσερις τάξεις. Όπως φαίνεται και στο γράφημα 21 το ποσοστό των λαθών είναι κατά πολύ χαμηλότερο στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», συγκριτικά με τις προσεγγίσεις «Μέτρηση σε άξονα» και «Πηλίκο». Αναλυτικότερα, η «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» δεν έγινε αντιληπτή από το 12,20% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών της Γ' τάξης, ενώ αντίθετα υπό την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα» από το 46,30%. Παρόμοια εικόνα παρουσιάζεται και στη Δ' τάξη, με τη διαφορά ότι τα ποσοστά είναι κατά πολύ υψηλότερα και στις δύο προσεγγίσεις από αυτά της Γ' τάξης (βλ. γράφημα 21). Και στις δύο τελευταίες τάξεις (Ε' και Στ'), η προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» συγκεντρώνει τα χαμηλότερα ποσοστά λαθών, αναφορικά με τη «σχέση που έχει ο παρονομαστής με την αξία του κλάσματος». Αναλυτικότερα, μόλις το 9,50% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών της Ε' τάξης και το 5,40% της Στ' σημείωσαν λάθος στις ασκήσεις, που εξέταζαν τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», υπό την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Αντίθετα τα ποσοστά των λαθών στη «Μέτρηση σε άξονα», ήταν 47,60% για τους μαθητές της Ε' τάξης και 24,30% για τους μαθητές της Στ' και στο «Πηλίκο» ήταν 30,95% για τους μαθητές της Ε' τάξης και 35,10% για τους μαθητές της Στ'.

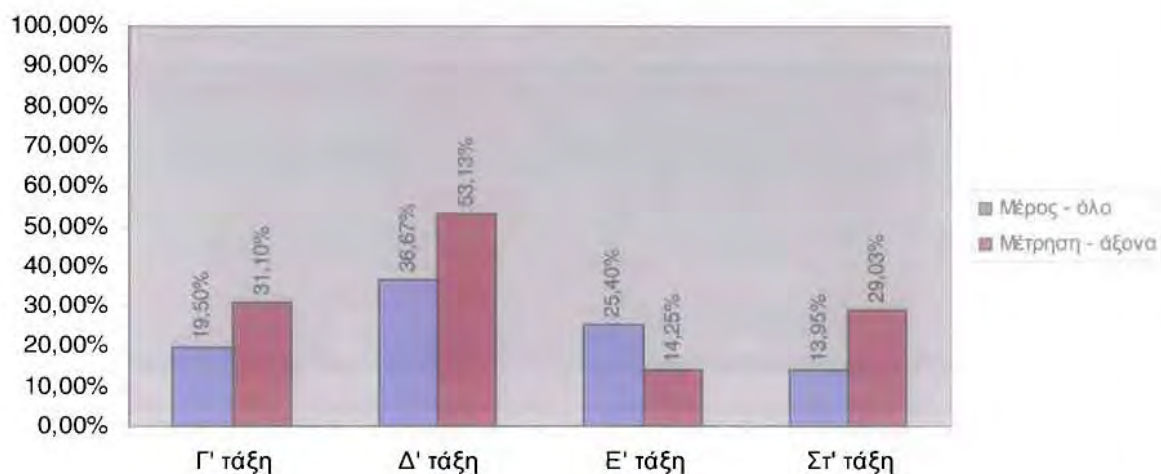
Γράφημα 21. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Αναγνώριση αναπαράστασης κλασματικών ποσοτήτων**

Στις τάξεις Γ', Δ' και Στ', οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές φαίνεται να διευκολύνονται να «αναγνωρίσουν την αναπαράσταση των κλασματικών ποσοτήτων», μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», σε αντίθεση με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές της Δ', που φαίνεται να διευκολύνονται μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα». Τα ποσοστά των λαθών, αναφορικά με την «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων», στο «Μέρος - Όλο», είναι 19,50% για τη Γ' τάξη, 36,67% για τη Δ' και 13,95% για τη Στ', με το ποσοστό της Δ' τάξης να είναι αρκετά υψηλό συγκριτικά με τις τάξεις Γ' και Στ'. Αντίθετα στη «Μέτρηση σε άξονα» τα ποσοστά των λαθών είναι 31,10% για τη Γ' τάξη, 53,14% για τη Δ' και πάλι υψηλότερο ποσοστό συγκριτικά με τις άλλες δύο τάξεις, και 19,03% για τη Στ'. Στην Ε' τάξη, παρουσιάζεται αντίθετη απολύτως εικόνα από αυτή των υπόλοιπων τριών τάξεων. Οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές της Ε' τάξης σημείωσαν κατά 10 ποσοστιαίες μονάδες λιγότερα λάθη, στην «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων», υπό την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα» (βλ. γράφημα 22).

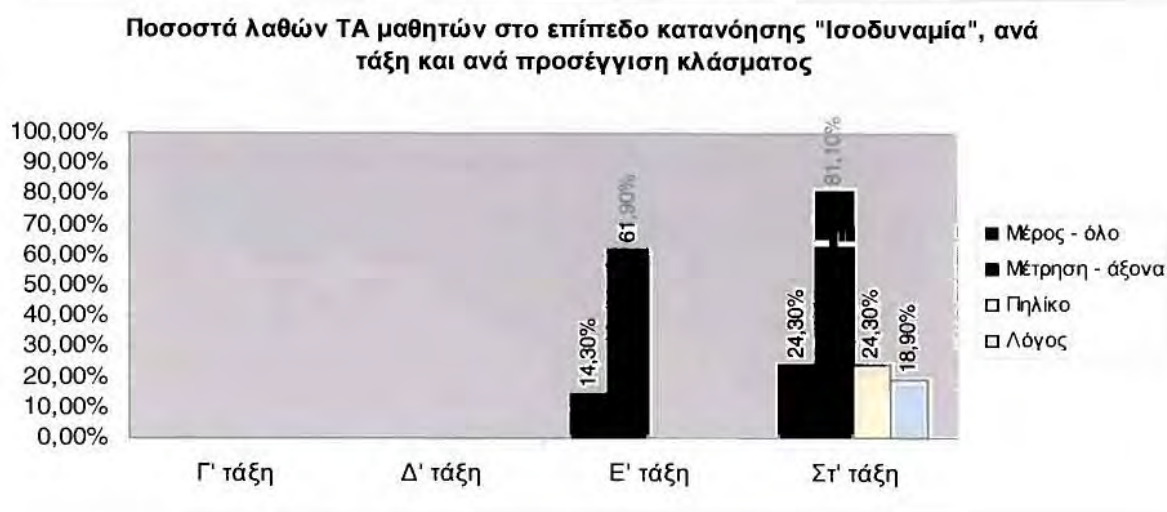
Γράφημα 22. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Αναγνώριση της αναπαράστασης κλασματικών ποσοτήτων», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ Ισοδυναμία κλασμάτων

Η «ισοδυναμία κλασμάτων» φαίνεται να δυσκολεύει πολύ τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, όταν αυτή παρουσιάζεται με την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα» και στις δύο τάξεις (στην Ε' τάξη 61,90% λάθη και Στ' 81,10%). Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι η «ισοδυναμία» κλασμάτων ξεκινά να διδάσκεται στην Ε' τάξη, για το λόγο αυτό τα ποσοστά των λαθών εντοπίζονται μόνο στις δύο τελευταίες τάξεις. Ειδικότερα, η «ισοδυναμία» των κλασμάτων στους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές της Ε' τάξης γίνεται περισσότερο κατανοητή, μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» με ποσοστό λαθών μόλις 14,30%, ενώ στη Στ' τάξη μέσα από την προσέγγιση του «Λόγου», με ποσοστό λαθών μόλις 18,90%, έναντι του 24,30% στο «Μέρος - Όλο», 81,10% στη «Μέτρηση σε άξονα», όπως αναφέρθηκε και παραπάνω και 24,30% στο «Πηλίκιο» (βλ. γράφημα 23).

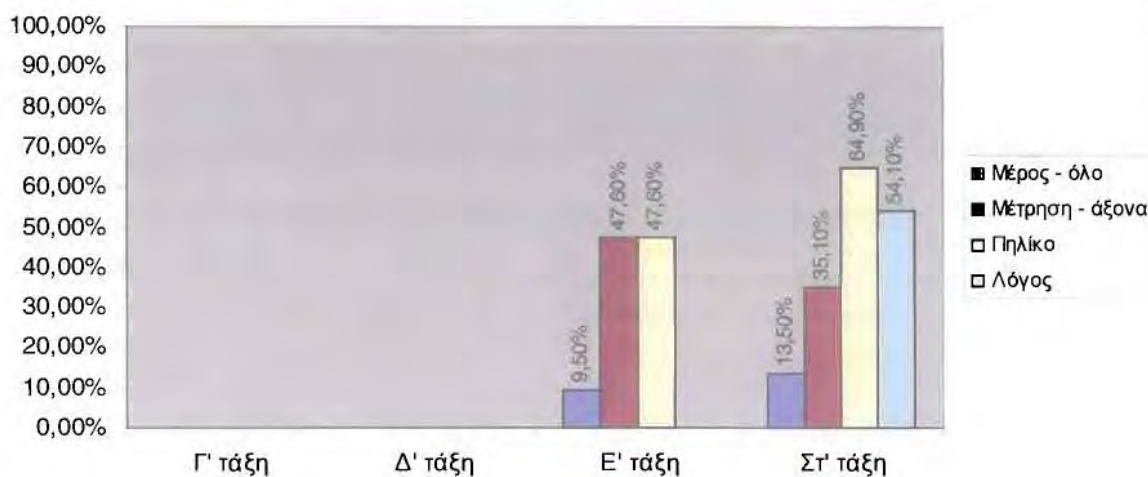
Γράφημα 23. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Ισοδυναμία», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Διάταξη κλασμάτων**

Ένα τελευταίο επίπεδο κατανόησης που διδάσκεται μόνο στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού (Ε' και Στ') είναι η «διάταξη» των κλασμάτων. Όπως η «ισοδυναμία», έτσι και η «διάταξη» των κλασμάτων γίνεται περισσότερο κατανοητή, από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές και των δύο τάξεων, μέσα από την προσέγγιση τους «Μέρους - Όλου», με μεγάλη διαφορά στα ποσοστά λαθών, συγκριτικά με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις. Αναλυτικότερα, στην Ε' τάξη, μόλις το 9,50% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών σημείωσε λάθος στις ασκήσεις που εξέταζαν τη «διάταξη» των κλασμάτων μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», ενώ τόσο την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», όσο και στην προσέγγιση του «Πηλίκου», τα ποσοστά λαθών στις αντίστοιχες ασκήσεις ήταν 47,60% (βλ. γράφημα 24). Το ποσοστό των λαθών, που σημειώθηκε στις ασκήσεις του «Μέρους - Όλου», που εξέταζαν τη «διάταξη» των κλασμάτων στη Στ' τάξη είναι μόλις, 13,50%, σε αντίθεση με τα ποσοστά των λαθών στις προσεγγίσεις «Μέτρηση σε άξονα», «Πηλίκο» και «Λόγος», που είναι 35,10%, 64,90% αρκετά υψηλό ποσοστό και 54,10% αντίστοιχα.

Γράφημα 24. Ποσοστά λαθών από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στο επίπεδο κατανόησης «Διάταξη», ανά τάξη και τρόπο προσέγγισης του κλάσματος



➤ **Συνολική εικόνα στα επίπεδα κατανόησης**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί κάποια από τα επίπεδα κατανόησης εμφανίζονται σε περισσότερους από έναν τρόπους προσέγγισης. Μελετώντας, λοιπόν, τις επιδόσεις των παιδιών τυπικής ανάπτυξης, σε αυτά τα επίπεδα κατανόησης, μέσα από τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης, προκύπτει ότι οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές διευκολύνονται ιδιαίτερα σε όλα σχεδόν τα επίπεδα κατανόησης (χωρισμός σε ίσα μέρη, αναγνώριση του όλου, ερμηνεία κλασματικών συμβόλων, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος, αναγνώριση της αναπαράστασης κλασματικών ποσοτήτων, ισοδυναμία, διάταξη), όταν αυτά προσεγγίζονται ως «Μέρος - Όλο» (βλ. πίνακα 13).

Εξαιρέση αποτελούν τα επίπεδα κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη», όπου οι μαθητές της Ε' και Στ' τάξης σημείωσαν λιγότερα λάθη στην προσέγγιση του «Πηλίκου», «αναγνώριση της αναπαράστασης κλασματικών ποσοτήτων», όπου οι μαθητές της Ε' τάξης διευκολύνθηκαν περισσότερο στην προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα», και «διάταξη», όπου η προσέγγιση του «Λόγου» φάνηκε να διευκολύνει περισσότερο τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές της Στ' τάξης.

Πίνακας 13. Προτίμηση στους τρόπους προσέγγισης ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη από τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές

	Τυπικώς Αναπτυσσόμενα			
	Γ'	Δ'	Ε'	Στ'
Χωρισμός σε ίσα μέρη	ΜΟ	ΜΟ	Π	Π
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΟ
			ΜΑ	ΜΑ
Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	Π	ΜΑ
			ΜΑ	Π
Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
			Π	Π
				Λ
Αναγνώριση του όλου	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ
Αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	ΜΟ	ΜΟ	ΜΑ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΑ
Διάταξη			ΜΟ	ΜΟ
			ΜΑ	ΜΑ
			Π	Λ
				Π
Ισοδυναμία			ΜΟ	Λ
			ΜΑ	Π
				ΜΟ
				ΜΑ

ΜΟ: Μέρος – όλο
ΜΑ: Μέτρηση σε άξονα
Π: Πηλίκιο
Λ: Λόγος

6.3 Συγκριτική προσέγγιση λαθών από μαθητές με ΜΔ και ΤΑ

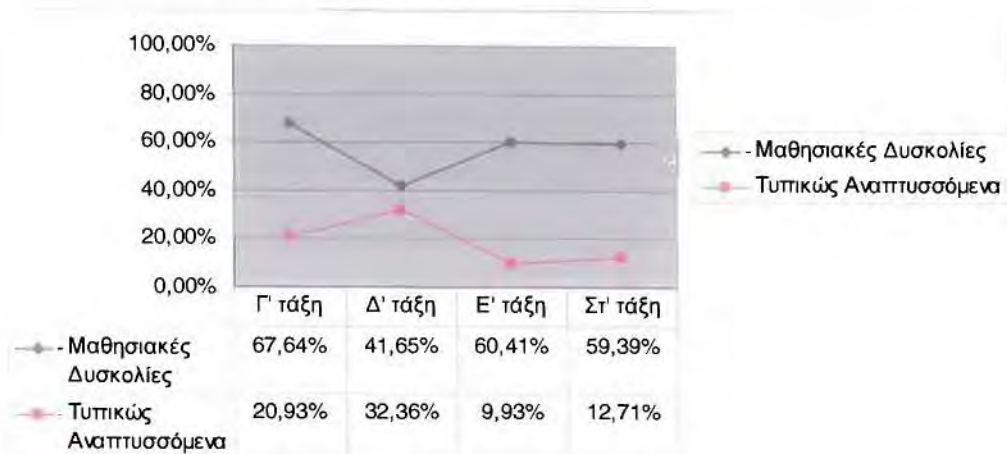
Σε αυτό το υποκεφάλαιο, με τη βοήθεια γραφημάτων, παρουσιάζονται συγκριτικά τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών, μέσα από τις τέσσερις προσεγγίσεις του κλάσματος που εξετάστηκαν, αλλά και κατά τη διάρκεια των τεσσάρων τελευταίων τάξεων της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης.

➤ Μέρος - Όλο

Όπως φαίνεται και στο γράφημα 25, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν περισσότερα λάθη από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές στις ασκήσεις που εξέταζαν την προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος - Όλο». Αν και παρατηρείται ότι η εξέλιξη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες διαφέρει από αυτή των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών. Παρόλα αυτά δε βρέθηκαν στατιστικές σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01.

Αναλυτικότερα, ενώ το 67,64% των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες της Γ' τάξης σημείωσαν λάθος, στις αντίστοιχες ασκήσεις μόλις το 20,93% των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών έκανε λάθος. Στη Δ' τάξη παρατηρείται ότι το ποσοστό των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες (41,65%), είναι πολύ κοντά με το ποσοστό των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών (32,36%), καθώς τα ποσοστά των λαθών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες μειώνονται, ενώ από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές αυξάνονται, πλησιάζοντας έτσι το ένα το άλλο. Η εικόνα αυτή αλλάζει στην Ε' τάξη, εφόσον το ποσοστό των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες αυξάνεται (από 41,65% σε 60,41%) πλησιάζοντας και πάλι το ποσοστό των λαθών της Γ' τάξης του δημοτικού. Στα ίδια επίπεδα κυμαίνονται τα λάθη και στη Στ' τάξη, καθώς το ποσοστό, με ελάχιστη μείωση αγγίζει το 59,39%. Από την άλλη πλευρά, το ποσοστό των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών μειώθηκε αρκετά (από 32,36% σε 9,93%). Ίδια παραμένουν τα επίπεδα λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών και στη Στ' τάξη, με ελάχιστη αύξηση από 9,93% σε 12,71%.

Γράφημα 25. Σύγκριση ποσοστών λάθους των δύο ομάδων στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέρος - Όλο»

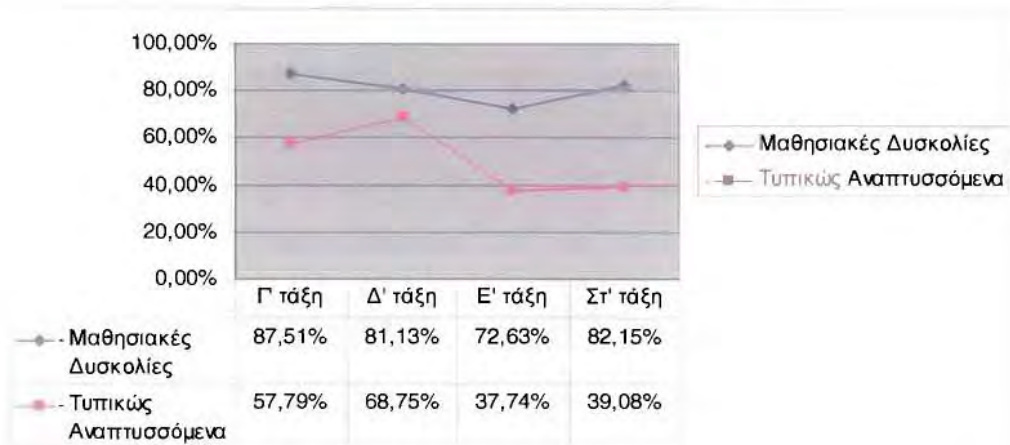


➤ Μέτρηση σε άξονα

Στην περίπτωση της προσέγγισης «Μέτρηση σε άξονα» παρατηρείται ότι το ποσοστό των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες είναι πολύ υψηλότερο από το ποσοστό των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών και στις τέσσερις τάξεις του δημοτικού (Γ', Δ', Ε' και Στ'), που εξετάστηκαν, αν και δε βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01.

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το παρακάτω γράφημα (Γράφημα 26), το ποσοστό των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στη Γ' τάξη αγγίζει το 87,51%. Ωστόσο, υψηλό είναι και το ποσοστό των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών, που φτάνει το 57,79% στη Γ' τάξη. Στις τάξεις Δ' και Ε' παρατηρείται ότι τα λάθη των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες μειώνονται ελάχιστα από 87,51% σε 81,13% στη Δ' τάξη και 72,63% στην Ε' τάξη, ενώ στη Στ' τάξη το ποσοστό των λαθών αυξάνεται και πάλι (82,15%) πλησιάζοντας αυτό της Γ' τάξης. Διαφορετική εικόνα από αυτήν των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές στην εξέλιξή τους. Στη Δ' τάξη το ποσοστό των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών, σε αντίθεση με αυτό των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, αυξάνεται από 57,79% που ήταν στη Γ' τάξη στο 68,75%. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι τα λάθη που σημειώνουν οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές στην προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα», ακολουθούν μία φθίνουσα πορεία στις τάξεις Ε' και Στ' (37,74% στην Ε' και 39,08% στη Στ'), εικόνα που δε συνάδει με αυτή των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, των οποίων τα λάθη διατηρούνται σε υψηλά επίπεδα και στις τέσσερις τάξεις.

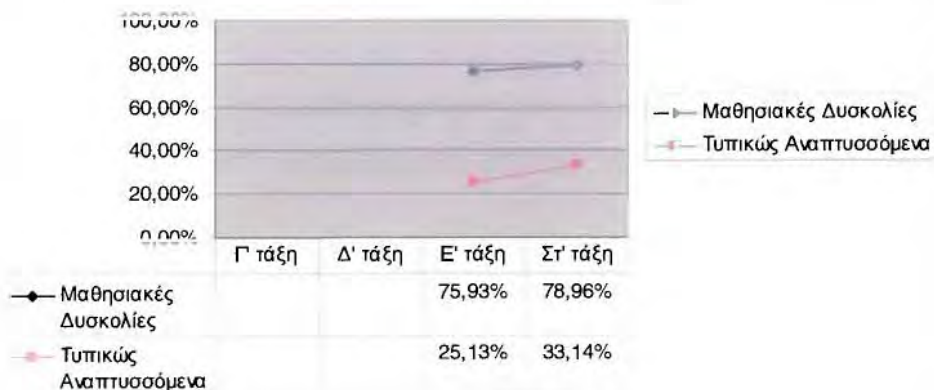
Γράφημα 26. Σύγκριση ποσοστών λάθους των δύο ομάδων στην προσέγγιση του κλάσματος «Μέτρηση σε άξονα»



➤ **Πηλίκο**

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η προσέγγιση «Πηλίκο» ξεκινά να διδάσκεται στην Ε' τάξη, γι' αυτό το λόγο στο γράφημα 27 οι γραμμές της Γ' και Δ' τάξης είναι κενές. Τόσο στην Ε' τάξη, όσο και στη Στ' τάξη οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ακολουθούν την ίδια εξελικτική πορεία, με τη διαφορά ότι τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες είναι πολύ υψηλότερα από αυτά των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών, αν και δε βρέθηκαν στατιστικώς σημαντικές διαφορές. Αναλυτικότερα, τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στην Ε' τάξη αγγίζουν το 75,93% και στη Στ' το 78,96%, αντίθετα τα ποσοστά των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών αγγίζουν το 25,13% στην Ε' τάξη και το 33,14% στη Στ'.

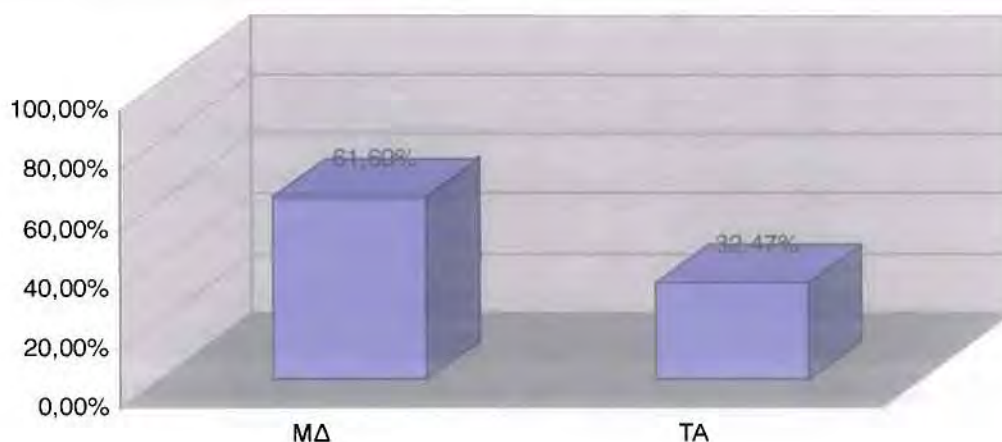
Γράφημα 27. Σύγκριση ποσοστών λάθους των δύο ομάδων στην προσέγγιση του κλάσματος «Πηλίκο»



➤ Λόγος

Η προσέγγιση των κλασμάτων «Λόγος», διδάσκεται μόνο στη Στ' τάξη του δημοτικού. Στο παρακάτω γράφημα (βλ. γράφημα 28), συγκρίνεται το ποσοστό των λαθών από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες με αυτό των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών. Από τη σύγκριση των δύο ποσοστών, προκύπτει ότι το ποσοστό των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες (61,69%) στην προσέγγιση του «Λόγους» είναι περίπου διπλάσιο από το ποσοστό των λαθών των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών (32,47%).

Γράφημα 28. Σύγκριση ποσοστών λάθους των δύο ομάδων στην προσέγγιση του κλάσματος «Λόγος»



Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, που εξετάστηκαν στη συγκριμένη έρευνα, επωφελούνται περισσότερο, όταν το κλάσμα παρουσιάζεται μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους – Όλου», σημειώνοντας χαμηλότερα ποσοστά, συγκριτικά με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις (βλ. πίνακα 14). Η μόνη διαφορά που παρατηρείται μεταξύ των δύο ομάδων είναι η σημείωση χαμηλότερων ποσοστών λαθών στην Ε' τάξη, από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, στη «Μέτρηση σε άξονα» συγκριτικά με το «Πηλίκο», εν αντιθέσει με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, οι οποίοι σημείωσαν χαμηλότερα ποσοστά λαθών στο «Πηλίκο», συγκριτικά με τη μέτρηση άξονα (βλ. πίνακα 12). Με άλλα λόγια, παρατηρείται η ίδια εικόνα ποιοτικά και στις δύο ομάδες.

Πίνακας 14. Συνολικά η προτίμηση και των δύο ομάδων στους τρόπους προσέγγισης ανά τάξη

	Μαθησιακές Δυσκολίες	Τυπικώς Αναπτυσσόμενα
Γ'	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ
Δ'	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ
Ε'	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	Π
	Π	ΜΑ
Στ'	ΜΟ	ΜΟ
	Λ	Λ
	Π	Π
	ΜΑ	ΜΑ

ΜΟ: Μέρος – όλο
ΜΑ: Μέτρηση σε άξονα
Π: Πηλίκιο
Λ: Λόγος

6.4 Συγκριτική προσέγγιση λαθών από μαθητές με ΜΔ και ΤΑ στα επίπεδα κατανόησης του κλάσματος

Στο παρόν υποκεφάλαιο παρουσιάζονται συγκριτικά τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών, στα επτά επίπεδα κατανόησης (χωρισμός σε ίσα μέρη, ανάγνωση του όλου, ερμηνεία κλασματικών συμβόλων, σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος, αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων, ισοδυναμία, διάταξη) που εμφανίζονται σε περισσότερους από έναν τρόπους προσέγγισης, με τη σειρά που αναφέρθηκαν.

➤ Χωρισμός σε ίσα μέρη

Από τα γραφήματα (βλ. γραφήματα 6 & 18) που παρουσιάστηκαν και παραπάνω, τόσο οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, όσο και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, φαίνεται να ευνοούνται, στη Γ' και Δ' δημοτικού όταν το επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη» προσεγγίζεται ως «Μέρος – Όλο» και στην Ε' και Στ' τάξη όταν προσεγγίζεται ως «Πηλίκιο». Παρόλα αυτά τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με

μαθησιακές δυσκολίες στο επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη» είναι υψηλότερα από αυτά των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών σε κάθε περίπτωση με εξαίρεση την εξέταση του «χωρισμού σε ίσα μέρη» μέσα από την προσέγγιση του «Πηλίκου» στη Στ' τάξη, όπου το ποσοστό λαθών και των δύο ομάδων να είναι 0%.

➤ Αναγνώριση του όλου

Αναφορικά με την «αναγνώριση του όλου», οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, και στις τέσσερις τάξεις ευνοούνται, όταν το συγκεκριμένο επίπεδο παρουσιάζεται μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Η εικόνα αυτή συναντάται και από τους μαθητές τυπικής ανάπτυξης, καθώς τα χαμηλότερα ποσοστά λαθών σημειώθηκαν μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - όλου».

➤ Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων

Στη Στ' τάξη, τόσο οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές όσο και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν λιγότερα λάθη στην «ερμηνεία κλασματικών συμβόλων», όταν αυτή παρουσιαζόταν μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Η διαφορά, ωστόσο, μεταξύ των δύο ομάδων είναι ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν υψηλότερα ποσοστά λαθών, συγκριτικά με αυτά των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών. Στην Ε' τάξη σύμφωνα με τα παραπάνω γραφήματα (βλ. γραφήματα 7 & 19), οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες φαίνεται να ευνοούνται όταν «ερμηνεύουν κλασματικά σύμβολα» μέσα από την προσέγγιση του «Πηλίκου», ενώ οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου».

➤ Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος

Το επίπεδο κατανόησης «σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος», στις δύο πρώτες τάξεις (Γ' και Δ'), τόσο για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, όσο και για τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, φαίνεται να γίνεται περισσότερο κατανοητό μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» (βλ. γραφήματα 8 & 20). Ωστόσο, ενώ στην Ε' δημοτικού οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αναφορικά με τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος», σημείωσαν λιγότερα λάθη στην προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές σημείωσαν λιγότερα λάθη στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Η ίδια εικόνα διατηρείται και στη Στ' τάξη για τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, όπου τα λιγότερα λάθη σημειώθηκαν στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Αντίθετα οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και

ενώ στην Ε' τάξη σημείωσαν τα λιγότερα λάθη, αναφορικά με τη «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος» στην προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», στη Στ' τάξη σημείωσαν λιγότερα λάθη στην προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Με άλλα λόγια, στη Στ' τάξη και οι δύο ομάδες φαίνεται να διευκολύνονται όταν η «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος» παρουσιάζεται μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου».

➤ Αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων

Στην «αναγνώριση των κλασματικών ποσοτήτων» οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες φαίνεται να ευνοούνται όταν παρουσιάζεται μέσα από την προσέγγιση τους «Μέρους - Όλου» και στις τέσσερις τάξεις, που εξετάστηκαν (βλ. γραφήματα 10 & 21). Την ίδια εικόνα παρουσιάζουν και οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, με εξαίρεση την Ε' τάξη, όπου τα λιγότερα λάθη σημειώθηκαν στην προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα».

➤ Ισοδυναμία

Η «ισοδυναμία κλασμάτων» τόσο για τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, όσο και για τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίας φαίνεται να γίνεται περισσότερο κατανοητή, στην Ε' τάξη μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» και στη Στ' τάξη μέσα από την προσέγγιση του «Λόγου» (βλ. γραφήματα 11 & 22).

➤ Διάταξη

Στη «διάταξη των κλασμάτων», οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες φαίνεται να ευνοούνται στην Ε' τάξη, όταν το κλάσμα προσεγγίζεται και ως «Μέρος - Όλο», αλλά και ως «Μέτρηση σε άξονα», καθώς τα ποσοστά λαθών ήταν ίδια και στις δύο προσεγγίσεις. Στη Στ' τάξη, ωστόσο οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν λιγότερα λάθη στη «διάταξη κλασμάτων», μέσα από την προσέγγιση του «Λόγου» (βλ. γραφήματα 12 & 23). Αντίθετα, οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, τόσο στην Ε' τάξη, όσο και στη Στ' σημείωσαν εμφανώς λιγότερα λάθη στις ασκήσεις που εξέταζαν τη «διάταξη κλασμάτων» μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου».

Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων, όταν τους ζητείται να «χωρίσουν μία ποσότητα σε ίσα μέρη», σημειώνουν λιγότερα λάθη μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» στη Γ' και Δ' τάξη, και μέσα από το «Πηλίκο»

στην Ε' και Στ' τάξη. Η «σχέση του παρονομαστή με την αξία του κλάσματος» γίνεται πιο κατανοητή στους μαθητές και των δύο ομάδων μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» στη Γ', Δ' και Στ' τάξη, ενώ στην Ε' τάξη οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν λιγότερα λάθη μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης προτιμούν σταθερά την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» (βλ. πίνακα 15). Η ίδια εικόνα παρατηρείται και στην «ερμηνεία των κλασματικών συμβόλων», με τη διαφορά ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στην Ε' τάξη σημείωσαν λιγότερα, όταν τους ζητήθηκε να «ερμηνεύσουν τα κλασματικά σύμβολα» μέσα από την προσέγγιση του «Πηλίκου». Η προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» φαίνεται να διευκολύνει τους μαθητές και των δύο ομάδων να «αναγνωρίσουν το όλο», και στις τέσσερις τάξεις του δημοτικού, που εξετάστηκαν. Η εικόνα διατηρείται σταθερή και στην «αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων», με τη διαφορά ότι οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης στην Ε' τάξη σημείωσαν λιγότερα λάθη μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα». Στη «διάταξη» των κλασμάτων οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες της Ε' τάξης σημείωσαν λιγότερα λάθη και μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» και μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», ενώ οι μαθητές της Στ' τάξης μέσα από την προσέγγιση του «Λόγου». Σταθερή είναι η εικόνα που παρουσιάζουν οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης και στη «διάταξη» των κλασμάτων, σημειώνοντας και πάλι λιγότερα λάθη μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου». Στην «ισοδυναμία» των κλασμάτων οι μαθητές και των δύο ομάδων επωφελούνται περισσότερο μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου» στην Ε' τάξη και μέσα από την προσέγγιση του «Λόγου» στη Στ' τάξη. Γενικότερα, μελετώντας τον πίνακα προκύπτει ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων επωφελούνται περισσότερο μέσα από την προσέγγιση του «Μέρους - Όλου», με τη μόνη διαφορά ότι ποσοτικά οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά λαθών.

Πίνακας 15. Συνολικά η προτίμηση στους τρόπους προσέγγισης ανά επίπεδο κατανόησης και τάξη από τους μαθητές και των δύο ομάδων

	Μαθησιακές Δυσκολίες				Τυπικώς Αναπτυσσόμενα			
	Γ'	Δ'	Ε'	Στ'	Γ'	Δ'	Ε'	Στ'
Χωρισμός σε ίσα μέρη	ΜΟ	ΜΟ	Π	Π	ΜΟ	ΜΟ	Π	Π
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΟ
			ΜΑ	ΜΑ			ΜΑ	ΜΑ
Σχέση παρονομαστή με αξία κλάσματος	ΜΟ	ΜΟ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	Π	ΜΑ	ΜΑ	Π	ΜΑ
			Π	ΜΑ			ΜΑ	Π
Ερμηνεία κλασματικών συμβόλων	ΜΟ	ΜΟ	Π	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
			ΜΟ	Π			Π	Π
				Λ				Λ
Αναγνώριση του όλου	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ
Αναγνώριση της αναπαράστασης των κλασματικών ποσοτήτων	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΟ	ΜΑ	ΜΟ
	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΑ	ΜΟ	ΜΑ
Διάταξη			ΜΟ	Λ			ΜΟ	ΜΟ
			ΜΑ	ΜΟ			ΜΑ	ΜΑ
			Π	ΜΑ			Π	Λ
				Π				Π
Ισοδυναμία			ΜΟ	Λ			ΜΟ	Λ
			ΜΑ	ΜΟ			ΜΑ	Π
				ΜΑ				ΜΟ
				Π				ΜΑ

ΜΟ: Μέρος – όλο
ΜΑ: Μέτρηση σε άξονα
Π: Πηλίκιο
Λ: Λόγος

Συζήτηση - Συμπεράσματα

Σκοπός, της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η καταγραφή των δυσκολιών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στην κατανόηση των κλασμάτων μέσα από την προσέγγιση του κλάσματος ως «Μέρος – Όλο», «Μέτρηση σε άξονα», «Πηλίκο» και «Λόγο». Επίσης, διερευνήθηκε αν οι επιδόσεις των μαθητών αυτών διαφέρουν αβνάλογα με τον τρόπο προσέγγισης ή το επίπεδο κατανόησης. Επιπρόσθετα, στην παρούσα διπλωματική εργασία διερευνήθηκε αν υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές στα κλάσματα, και εντοπίστηκαν αυτές οι διαφορές. Τέλος, έγινε προσπάθεια διερεύνησης της εξελικτικής πορείας που ακολουθούν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, αναφορικά με την αντίληψη των κλασμάτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση.

Από την επεξεργασία και ανάλυση των ευρημάτων, αναδείχθηκαν δύο κύρια σημεία: **α. οι δυσκολίες** τόσο των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών όσο και των μαθητών με διαγνωσμένες μαθησιακές δυσκολίες **να κατανοήσουν τα κλάσματα ιδιαίτερα μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα»**, αλλά και **η κοινή ποιοτικά εικόνα** που παρουσιάζουν οι μαθητές και των δύο ομάδων, αναφορικά με την τάση να κατανοούν τα κλάσματα μέσα από ένα συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης κάθε φορά, και, **β. η αδυναμία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους**, που για κάθε τάξη και σε κάθε περίπτωση παρέμενε χαμηλότερη από αυτή των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών των τεσσάρων τάξεων που εξετάστηκαν (Γ', Δ', Ε' & Στ'), **με εξαίρεση τη Δ' τάξη** και ιδιαίτερα μέσα από την προσέγγιση «Μέρος-όλο», όπου οι επιδόσεις τους βελτιώνονται σε όλα τα επίπεδα κατανόησης.

Παρατηρώντας την εξέλιξη των μαθητών και των δύο ομάδων διαπιστώνεται ότι η κατανόηση των κλασμάτων φαίνεται να μη διευκολύνεται μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», εφόσον σημειώθηκαν ιδιαίτερα υψηλά ποσοστά λαθών, συγκριτικά με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις που εξετάστηκαν, τόσο από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, όσο και από τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές. Ειδικότερα, στην περίπτωση που το κλάσμα εμφανίζεται μέσα από την προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες των τάξεων Γ', Δ', Ε' και Στ' δημοτικού φαίνεται να μην «αναγνωρίζουν σε ποιο κλάσμα αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο σημείο» πάνω στην αριθμητική γραμμή, με ποσοστά λαθών ιδιαίτερα υψηλά και στις τέσσερις τάξεις (ποσοστό λαθών > 90%). Η δυσκολία αυτή συμφωνεί με

τη βιβλιογραφία, η οποία αναφέρει ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν την αριθμητική γραμμή (Peterson Miller & Mercer, 1997· Wadlington & Wadlington, 2008). Εστιάζοντας μόνο στη δυσκολία των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες να αναγνωρίσουν σε ποιο κλάσμα αντιστοιχεί ένα συγκεκριμένο σημείο, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι αυτή η δυσκολία απορρέει από το γεγονός ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν προβλήματα στην οπτικοχωρική οργάνωση και αδυνατούν να τοποθετήσουν ένα δεκαδικό αριθμό σε μια αριθμητική γραμμή (Bley & Thorton, 2001). Παρόλα αυτά, όμως, και οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές σημείωσαν ιδιαίτερα υψηλά ποσοστά λαθών, όταν τους ζητήθηκε «να αναγνωρίσουν ένα κλάσμα από σημείο».

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δυσκολία στην κατανόηση των κλασμάτων μέσα από την προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα» πιθανότατα να κρύβεται πίσω από την απουσία της αριθμητικής γραμμής στην καθημερινότητα. Σε αντίθεση με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις, η προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα» απουσιάζει από την καθημερινότητα των παιδιών, με αποτέλεσμα όταν συναντάται για πρώτη φορά στα σχολικά βιβλία να μην γίνεται εύκολα κατανοητή. Η άποψη αυτή ενισχύεται ακόμη περισσότερο από το γεγονός ότι όλοι οι μαθητές (και αυτοί με Μαθησιακές Δυσκολίες) σημείωσαν χαμηλό ποσοστό λάθους στις ασκήσεις που ήταν εμπνευσμένες από προβλήματα της καθημερινότητας. Για παράδειγμα, οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες παρουσίασαν πολύ χαμηλά ποσοστά λάθους στην Ε' τάξη και μηδενικό στη Στ' τάξη, σε ένα πρόβλημα της καθημερινότητας που εξέταζε το επίπεδο κατανόησης «χωρισμός σε ίσα μέρη» μέσα από την προσέγγιση του «Πηλίκου». Και στην περίπτωση του «Λόγου», όμως, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημείωσαν σχετικά χαμηλά ποσοστά, συγκριτικά με τα υπόλοιπα επίπεδα κατανόησης, και ιδιαίτερα στα επίπεδα της «ιδιότητα συνδιακύμανσης» και των «ανάλογων ποσών». Η σημείωση χαμηλότερων ποσοστών λαθών από τους μαθητές και των δύο ομάδων στις ασκήσεις που παραπέμπουν σε προβλήματα της καθημερινότητας, αναφέρεται από τον Ginsburg (1989), ο οποίος επισημαίνει ότι τα παιδιά τα καταφέρνουν καλύτερα σε ασκήσεις που είναι βασισμένες σε καθημερινές εμπειρίες τους. Για τους παραπάνω λόγους, θα ήταν ίσως χρήσιμο κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων μέσα από την προσέγγιση «Μέτρηση σε άξονα», ο εκπαιδευτικός να συνδέσει τη χρήση των κλασμάτων μέσα από τη συγκεκριμένη προσέγγιση με παραδείγματα από την καθημερινότητα, έτσι ώστε οι μαθητές να συνδέσουν το αφηρημένο με το συγκεκριμένο.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δε σημειώνουν σχεδόν καμία πρόοδο στην προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα», διατηρώντας τα ποσοστά λαθών σε υψηλά επίπεδα και στις τέσσερις τάξεις. Αντιθέτως, οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές, χωρίς και αυτοί να φτάσουν τα ποσοστά λαθών στις άλλες προσεγγίσεις, μειώνουν τα ποσοστά λάθους, όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Μέτρηση σε άξονα», σε όλα τα επίπεδα κατανόησης, κατά 20% περίπου, με εξαίρεση την κατανόηση της «ισοδυναμίας κλασμάτων», όπου το ποσοστό λαθών αυξάνεται κατά 20 ποσοστιαίες μονάδες. Η βελτίωση των επιδόσεων των τυπικώς αναπτυσσόμενων μαθητών μπορεί να συνδέεται άμεσα με την εξοικείωση των μαθητών αυτών με την προσέγγιση του κλάσματος ως «Πηλίο», προσέγγιση που δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, μιας και τα ποσοστά των λαθών τους είναι σχεδόν στα ίδια επίπεδα με τα ποσοστά λάθους όταν τα κλάσματα προσεγγίζονται μέσα από την «Μέτρηση σε άξονα». Οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές συχνά τα καταφέρνουν καλύτερα όταν το κλάσμα προσεγγίζεται ως «Πηλίο», (Nunes και συν., 2006), ενώ αντίθετα οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να κατανοήσουν τη σύνδεση των κλασματικών αριθμών με τους δεκαδικούς αριθμούς, όπως αναφέρεται από τους Bley και Thorton (2001) και κατ' επέκταση να «αναγνωρίσουν σε ποιο κλάσμα αντιστοιχεί ένα σημείο της αριθμητικής γραμμής» αλλά και να τοποθετήσουν ένα κλάσμα πάνω στην αριθμητική γραμμή. Άλλωστε, για την κατάκτηση των παραπάνω δεξιοτήτων απαιτείται και η κατανόηση της «σχέσης που έχει ο παρονομαστής με την αξία του κλάσματος», ένα επίπεδο κατανόησης που φαίνεται πως δεν έχει κατακτηθεί ακόμη από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στις τάξεις Ε' και Στ' (ποσοστά λάθους >90%), αλλά και η «διάταξη των κλασμάτων» (ποσοστά λάθους=100% και στις δύο τάξεις Ε' & Στ'). Όπως αναφέρουν, άλλωστε, και κάποιοι ερευνητές, ένα μεγάλο πρόβλημα των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες είναι να τοποθετήσουν σε σωστή σειρά τα κλάσματα, ανάλογα με την ποσότητα που εκφράζουν (Mazzocco & Devlin, 2008· Bley & Thorton, 2001), εξαιτίας ίσως των δυσκολιών στη σύγκριση αριθμών (Bryant & Bryant, 2008). Σύμφωνα με την παραπάνω άποψη, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, μη έχοντας κατακτήσει την έννοια του κλασματικού αριθμού, δε θα είναι σε θέση να γνωρίζουν την αξία που εκφράζει, με αποτέλεσμα να αδυνατούν να τοποθετήσουν σε σωστή σειρά τα κλάσματα. Η δυσκολία αυτή ίσως θα μπορούσε να ξεπεραστεί αναπαριστώντας κάθε φορά εικονικά την ποσότητα που εκφράζει το κάθε κλάσμα, έτσι ώστε στη συνέχεια οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να μεταβούν από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, όπως συνέβη και στην έρευνα του Butler και των

συνεργατών του (2003). Ίσως ακόμα θα έπρεπε να εμπλουτιστεί η διδασκαλία της έννοιας του κλασματικού αριθμού με τη χρήση καθημερινών απτών αντικειμένων, διαδικασία που στη σχολική πρακτική χρησιμοποιείται για την κατανόηση της έννοιας του αριθμού και φαίνεται να διευκολύνει και τελικά να οδηγεί τους μαθητές στην κατάκτηση της γνώσης αυτής.

Η παρούσα έρευνα σημειώνει επιπλέον τις διαφορές ή τις ομοιότητες που παρουσιάζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες και οι μαθητές τυπικής ανάπτυξης, αναφορικά με την προτίμηση της κάθε ομάδας σε κάποιο συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης για την κατανόηση των κλασμάτων. Αναλύοντας τα ευρήματα, αρχικά προκύπτει ότι τα ποσοστά των λαθών των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες ήταν υψηλότερα από τα ποσοστά λαθών των μαθητών τυπικής ανάπτυξης για κάθε τάξη και για όλους τους τρόπους προσέγγισης, ακόμη και όταν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες προσπαθούν πολύ (Rivera, 1998). Αυτό το συμπέρασμα είναι σύμφωνο με την έρευνα των Mazzocco και Devlin (2008), όπου εξετάστηκαν οι ποσοτικές διαφορές μεταξύ των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, των μαθητών χαμηλών επιδόσεων στα μαθηματικά και των μαθητών τυπικής ανάπτυξης και βρέθηκε ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες διαφέρουν σημαντικά από τις δυσκολίες των μαθητών των άλλων δύο ομάδων.

Αν εξετάσουμε, όμως, και συνολικά την εικόνα που παρουσιάζουν οι μαθητές και των δύο ομάδων, σε σχέση με την κατανόηση των κλασμάτων μέσα από ένα συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης, τότε προκύπτει ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων παρουσιάζουν μια ομοιότητα, σημειώνοντας τα υψηλότερα ποσοστά λαθών στην προσέγγιση της «Μέτρησης σε άξονα». Αντιθέτως, η προσέγγιση που φαίνεται να διευκολύνει ιδιαίτερα τους μαθητές και των δύο ομάδων είναι η «Μέρος-όλο», όπου σημειώθηκαν τα χαμηλότερα ποσοστά λαθών και στις τέσσερις τάξεις του δημοτικού, που εξετάστηκαν. Στο ενδιάμεσο των δύο αυτών προσεγγίσεων βρίσκονται η προσέγγιση του «Πηλίκου» και του «Λόγου», με τα χαμηλότερα ποσοστά λαθών μεταξύ των δύο αυτών προσεγγίσεων να έχουν σημειωθεί από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες στο «Λόγο».

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι μαθητές και των δύο ομάδων φαίνεται να διευκολύνονται, αλλά και να δυσκολεύονται στα ίδια επίπεδα κατανόησης και στους ίδιους τρόπους προσέγγισης, με τη διαφορά ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σημειώνουν υψηλότερα ποσοστά λάθους από αυτά των μαθητών τυπικής ανάπτυξης. Η κοινή ποιοτικά εικόνα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ουσιαστικά οι μαθητές με

μαθησιακές δυσκολίες δε διαφέρουν από τους μαθητές τυπικής ανάπτυξης στον τρόπο που κατανοούν τα κλάσματα. Άρα, η διαφοροποίηση της διδασκαλίας που απαιτείται από τους εκπαιδευτικούς, δεν δυσχεραίνει την κατανόηση των υπόλοιπων τυπικών μαθητών αλλά εμπλουτίζει τη διδασκαλία.

Το δεύτερο θέμα που προκύπτει από την παρούσα έρευνα, είναι ότι οι επιδόσεις των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, στην κατανόηση των κλασμάτων μέσα από όλες τις προσεγγίσεις του κλάσματος, που εξετάστηκαν, παραμένουν περίπου στο ίδιο επίπεδο σε όλες τις τάξεις που εξετάστηκαν, με εξαίρεση τη Δ' τάξη και ιδιαίτερα μέσα από την προσέγγιση «Μέρος-όλο», όπου οι επιδόσεις τους βελτιώνονται σε όλα τα επίπεδα κατανόησης. Στο επίπεδο κατανόησης «ισοδυναμίας κλασμάτων», συναντάται σημαντική δυσκολία από μέρους των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και στις δύο τάξεις του δημοτικού που εξετάστηκαν (Ε' & Στ'). Η δυσκολία αυτή έχει σημειωθεί και από άλλους ερευνητές, σημειώνοντας ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να αναγνωρίσουν τα ισοδύναμα κλάσματα, ακόμη και με την παρουσία οπτικών βοηθημάτων (Bley & Thorton, 2001· Mazzocco & Devlin, 2008). Εφόσον, η «ισοδυναμία κλασμάτων» δεν γίνεται κατανοητή, ακόμη και με τη βοήθεια οπτικών αναπαραστάσεων, θα μπορούσε ίσως να χρησιμοποιηθούν απτά αντικείμενα αρχικά, και στη συνέχεια οπτικά βοηθήματα, έτσι ώστε οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να οδηγηθούν σταδιακά στην αφαιρετική έννοια της ισοδυναμίας. Αντίστοιχα, για την κατανόηση των κλασμάτων ο Butler και οι συνεργάτες τους (2003) σημείωσαν πως η διδασκαλία μέσα από απτά αντικείμενα αρχικά, και στη συνέχεια μέσα από οπτικά βοηθήματα, βοηθούν περισσότερο τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να κατανοήσουν τα κλάσματα αφαιρετικά. Και στην περίπτωση του «Λόγου», όμως, η «διάταξη» των κλασμάτων συνεχίζει να μην γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες (ποσοστό λάθους=100%).

Η αδυναμία βελτίωσης ,που φαίνεται να παρουσιάζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες σε όλα σχεδόν τα επίπεδα κατανόησης των κλασμάτων, όπως διαπιστώνεται και παραπάνω, πιθανά να βασίζεται σε προβλήματα στη σημασιολογική μνήμη (Geary, 2004). Σύμφωνα με τον Geary (2004, σελ. 10) οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες παρουσιάζουν δυσκολίες στην ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων και αναπτυξιακά εξελίσσονται διαφορετικά από τους συμμαθητές τους σημειώνοντας μικρή βελτίωση από τάξη σε τάξη.

Σε αντίθεση με την εικόνα, που παρουσιάζουν οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, οι τυπικώς αναπτυσσόμενοι μαθητές μειώνουν τα ποσοστά των λαθών τους

στις προσεγγίσεις «Μέρος - Όλο», και «Μέτρηση σε άξονα» από την μία τάξη στην επόμενη, με εξαίρεση τη Δ' τάξη, όπου τα ποσοστά λαθών αυξάνονται, πλησιάζοντας έτσι τις επιδόσεις των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες. Στην προσέγγιση του «Πηλίκου», παρατηρείται ότι τα ποσοστά των λαθών και των μαθητών τυπικής ανάπτυξης ακολουθούν ανοδική πορεία από την Ε' στη Στ' τάξη, αυξάνοντας έτσι το ποσοστό λαθών στη Στ' τάξη κατά 8% περίπου. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι η προσέγγιση του «Λόγου», εξετάστηκε μόνο στη Στ' τάξη, για το λόγο αυτό δεν είναι εφικτή η παρουσίαση της εξέλιξης σε καμία από τις δύο ομάδες στην προσέγγιση αυτή.

Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί η πολύ ενδιαφέρουσα εξαίρεση που εντοπίζεται στη Δ' τάξη, όπου οι επιδόσεις των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες και των τυπικώς αναπτυσσόμενων παιδιών συγκλίνουν αρκετά. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση που τα κλάσματα προσεγγίζονται ως «Μέρος - Όλο» με τα ποσοστά των δύο ομάδων να διαφέρουν λιγότερο από δέκα μονάδες, καθώς οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες βελτιώνουν αισθητά τις επιδόσεις τους σε όλα τα επίπεδα κατανόησης, σε αντίθεση με τους τυπικώς αναπτυσσόμενους μαθητές, οι οποίο φαίνεται να δυσκολεύονται σημαντικά στη Δ' τάξη, μιας και τα ποσοστά των λαθών τους πλησιάζουν σε εκείνα των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες.

Σε μια προσπάθεια αναζήτησης της αιτίας για τη σύγκλιση των επιδόσεων των μαθητών και των δύο ομάδων στη Δ' τάξη, σημειώνεται ότι σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ), οι μαθητές της Δ' τάξης έρχονται σε επαφή με την έννοια του δεκαδικού αριθμού. Υποθέτοντας ότι η μορφή των δεκαδικών αριθμών είναι πιο κοντά στη μορφή των ακεραίων, με την οποία οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες είναι περισσότερο εξοικειωμένοι, θα μπορούσε ίσως να εξηγηθεί η βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, υπόθεση που δε συμφωνεί, όμως, με την άποψη των Bley & Thorton (2001) ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αδυνατούν να κατανοήσουν τη σύνδεση των κλασματικών αριθμών με τους δεκαδικούς αριθμούς.

Περαιτέρω μελέτη των παραγόντων που οδήγησαν στη σύγκλιση των ποσοστών λάθους από τους μαθητές των δύο ομάδων στη Δ' τάξη, πιθανά να οδηγούσε στη διαφοροποίηση της διδασκαλίας των κλασμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τους παράγοντες αυτούς, έτσι ώστε οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους, σε κάθε περίπτωση και να πλησιάσουν αυτές των μαθητών τυπικής ανάπτυξης.

Η πρόταση αυτή ενισχύεται και από την άποψη των Butler και συνεργατών του (2003), οι οποίοι μελετώντας τις επιδόσεις των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ύστερα από τη διδασκαλία της

ισοδυναμίας κλασμάτων χρησιμοποιώντας δυο μεθόδους διαφοροποιημένης διδασκαλίας, παρατήρησαν πως μετά την παρέμβαση οι επιδόσεις των μαθητών και των δύο ομάδων πλησίαζαν αυτές των μαθητών της ομάδας ελέγχου.

Τα ερευνητικά δεδομένα που παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία, αποτελούν μια συνδρομή στην κατανόηση των δυσκολιών που παρουσιάζουν οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες σε μια ιδιαίτερα δύσκολη περιοχή των μαθηματικών, στα κλάσματα. Οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες δυσκολεύονται εξαιρετικά και αδυνατούν να κατανοήσουν τα κλάσματα ακόμη και στην Στ' δημοτικού, απέχοντας πολύ από τους τυπικούς συμμαθητές τους, χωρίς όμως να διαφοροποιούνται ποιοτικά από αυτούς. Το εύρημα αυτό, επιβεβαιώνει την ανάγκη στήριξης των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες και σε μη γλωσσικά γνωστικά αντικείμενα όπως τα μαθηματικά. Επιπλέον, τα ευρήματα της εργασίας, επισημαίνουν ότι υπάρχουν προνομιακές προσεγγίσεις για την υποστήριξη στην κατανόηση των κλασμάτων και ότι αυτές οι προσεγγίσεις μπορούν να βοηθήσουν όλους τους μαθητές, τυπικούς ή με μαθησιακές δυσκολίες. Παρέχεται έτσι στους εκπαιδευτικούς, η δυνατότητα διαφοροποίησης της σημερινής διδασκαλίας των κλασμάτων και ο εμπλουτισμός της με χειραπτικά υλικά, εικόνες και σχηματικές αναπαραστάσεις καθώς επίσης και η ανάγκη τροποποίησης της χρήσης του άξονα για την διδασκαλία των κλασμάτων. Τέλος, από τη συνθετική εκτίμηση των ευρημάτων αυτής της εργασίας, προκύπτουν νέα ερευνητικά ερωτήματα σχετικά με τα ειδικά προβλήματα των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες, καθώς επίσης και την εξέλιξη της κατανόησης των κλασμάτων μετά την έκτη τάξη του δημοτικού, όπου ενεργοποιούνται επιπλέον τρόποι προσέγγισης.

Κριτική αποτίμηση

Είναι χρήσιμο στο τέλος κάθε έρευνας να γίνεται απολογισμός αναζητώντας τα πιθανά λάθη που σημειώθηκαν, προκειμένου να αποφευχθούν σε επόμενες εργασίες.

Εξετάζοντας τις ασκήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο κριτήριο αξιολόγησης «Κατανόηση κλασμάτων», σημειώθηκαν κάποιες ασκήσεις, κυρίως πολλαπλής επιλογής, στις οποίες συμμετέχει και ο παράγοντας της τύχης. Συγκεκριμένα, κάποιες απαντήσεις μπορεί να μην αντιπροσωπεύουν τις γνώσεις των παιδιών, αλλά το πόσο τυχερά ήταν εκείνη τη στιγμή, καθώς μπορεί η απάντηση να μην τους ήταν γνωστή και να τη συμπλήρωσαν στην τύχη. Σε αυτό το σημείο, ωστόσο πρέπει να σημειωθεί ότι η εξέταση στα τεστ κατανόησης του κλάσματος σε ατομικό επίπεδο, όπως έγινε στην πιλοτική

εφαρμογή της παρούσας έρευνας, δε θα επέτρεπε τις απαντήσεις που πιθανό να δίνονταν στην τύχη, καθώς ο ερευνητής θα μπορεί να παρατηρεί και να καταγράφει τον τρόπο με τον οποίο ο κάθε μαθητής επιλέγει τις απαντήσεις του. Δυστυχώς, στην παρούσα εργασία ο χρόνος ήταν περιορισμένος και για το λόγο αυτό αποφασίστηκε η εξέταση στα τεστ κατανόησης του κλάσματος να πραγματοποιηθεί σε ομαδικό επίπεδο.

Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να επηρεάσει σε κάποιο βαθμό τα τελικά αποτελέσματα, δίνοντας τη δυνατότητα σε κάποιους μαθητές να προσπαθήσουν να αντιγράψουν απαντήσεις από τους συμμαθητές τους. Ωστόσο, για να εξαλειφθεί ο παράγοντας της αντιγραφής, είχαν δοθεί σαφείς οδηγίες στους εκπαιδευτικούς που συμμετείχαν για την προσεκτική παρατήρηση των αντιδράσεων των παιδιών κατά τη διάρκεια της χορήγησης των τεστ κατανόησης των κλασμάτων.

Επιπρόσθετα, πρέπει να σημειωθεί ότι, λόγω της πίεσης χρόνου που υπήρχε, αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί αρκετά μικρό δείγμα, εστιάζοντας στην κατασκευή των τεστ, ώστε να παρέχουν όλες τις απαραίτητες για την απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων πληροφορίες, αλλά και στη σωστή προετοιμασία των εκπαιδευτικών, οι οποίοι θα χορηγούσαν το τεστ, ώστε να εξασφαλιστεί η ομοιομορφία των δεδομένων. Μία μελλοντική έρευνα με μεγαλύτερο πλήθος ως δείγμα, θα έδινε την ευκαιρία να ισχυροποιηθούν ή και να επανεξεταστούν τα ευρήματα της παρούσας εργασίας.

Βιβλιογραφία

- Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά: Αιτιολογία – Αξιολόγηση – Αντιμετώπιση*. Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.
- Bender, W.N. (2004). *Learning Disabilities: Characteristics, Identification, and Teaching Strategies*. Pearson Education, Inc. Fifth edition.
- Bley, N. S. & Thorton, C. A. (2001). Rational Number: Early Concept Work with Fractions and Decimals. *Teaching Mathematics to students with Learning Disabilities*. (4th ed.). Austin, TX: Pro – ed.
- Bryant, D. P. (2005). Commentary on early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 340 – 345.
- Bryant, B. R. & Bryant, D. P. (2008). Introduction to the Special Series: Mathematics and Learning Disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 31 (1), 3 – 8.
- Bryant, D. P., Bryant, B. R. & Hammil, D. D. (2000). Characteristics Behaviors Students with LD Have Teacher – Identified Math Weaknesses. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (2), 168 – 177.
- Butler, F.M., Miller, S.P., Crehan, K., Babbitt, B. & Pierce, T. (2003). Fraction Instruction for Students with Mathematics Disabilities: Comparing Two Teaching Sequences. *Learning Disabilities Research & Practice*. 18 (2), 99 – 111.
- Charalambous, Ch.Y. (2007). Developing and testing a scale for measuring students' understanding of fractions. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (2), 105 – 112.
- Chinnappan, M. (2005). Children's Mappings of Part-Whole Construct of Fractions. *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*. MERGA Inc. 241 – 248.
- Fuch, L.S. & Fuchs, D. (2002). Mathematical Problem – Solving Profiles of Students with Mathematics Disabilities With and Without Comorbid Reading Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 35 (6), 563 – 573.
- Geary, D.C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37 (1), 4 – 15.

- Ginsburg, H.P., (1989). *Children' s Arithmetic: How they learn it and how you teach it.* (2nd ed.) pro – ed
- Goodwin, K. (2008). The impact of interactive multimedia on kindergarten students: representation of fractions. *Issues in Educational Research*, 18(2), 103-11.
- Hallahan, D.P., Lloyd, J.W., Kauffman, J.M., Weiss M.P. & Martinez, E.A. (2005). *Learning Disabilities: Foundations, Characteristics and Effective Teaching.* Pearson Education, Inc. Third edition.
- Hannula, M. S. (2003). Locating Fractions on a Number Line. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (3), 17 – 24.
- Hresko, W.P., Schlieve, P.L., Herron, S.R., Swain, C. & Sherbenou R.J. (2003). *Comprehensive Mathematical Abilities Test.* Austin: pro-ed Inc.
- Keeler, M.L. & Swanson, H. L. (2001). Does Strategy Knowledge Influence Working Memory in Children with Mathematical Disabilities? *Journal of Learning Disabilities*, 34 (5), 418 – 434.
- Κολεζά, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books
- Λεμονίδης, Χ. *Προτάσεις σε θέματα ειδικής διδακτικής, κλάσματα, δεκαδικοί, ποσοστά,* στην ιστοσελίδα: www.eled.uowm.gr/mathslife.html
- Mastropieri, M. A., Scruggs, T. E., & Chung, S. (1998). Instructional Interventions for Student with Mathematics Learning Disabilities. Edited by Wong, B. *Learning about Learning Disabilities.* Academic Press.
- Maxwell, S. (2005). Learning to line up: Handling fractional dilemmas. *The Official Journal of the Tennessee Association of Middle Schools.* 32 (6), 43 – 53.
- Mazzocco, M. M. M. & Devlin, K. T. (2008). Parts and “holes”: gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11 (5), 681 – 691.
- Montague, M. (2007). *Solve it! A practical approach to teaching mathematical problem solving skills.* Reston, VA: Exceptional Innovations, 2nd edition.
- Μπότσας Γ. & Παντελιάδου Σ. (2007). *Μαθησιακές Δυσκολίες: βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά.* Επιμέλεια Παντελιάδου, Σ. & Μπότσας, Γ. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΓΡΑΦΗΜΑ.

- Murphy, M. M., Mazzocco, M. M. M., Hanich, L. B. & Early, M. C. (2007). Cognitive Characteristics of Children with Mathematics Learning Disability (MLD). *Journal of Learning Disabilities*, 40 (5), 458 – 478.
- Nunes, T., Bryant, P., Hurry, I., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D., Gardner, S. & Wade, J. (2006). Fractions: difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Programme*, 13, στο www.tlrp.org
- Παντελιάδου, Σ. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες και εκπαιδευτική πράξη: Τι και γιατί*. Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.
- Παντελιάδου, Σ. & Πατσιοδήμου, Α. (2007). Προβλήματα στη σχολική μάθηση. *Μαθησιακές Δυσκολίες: βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά*. Επιμέλεια Παντελιάδου, Σ. & Μπότσαζ, Γ. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΓΡΑΦΗΜΑ.
- Παπαδημητρίου Γ., (2005). *Περιγραφική Στατιστική*. Αθήνα: Εκδόσεις Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδανός.
- Peterson – Miller, S. & Mercer, C. D. (1997). Educational Aspects of Mathematics Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30, 47 – 56.
- Rivera, P. D. (1998). Mathematics Education and Students with Learning Disabilities. *Mathematics Education for Students with Learning Disabilities: theory to practice*. Pro – ed.
- Swanson, H.L. & Sachse – Lee, C. (2001). Mathematical Problem Solving and Working Memory in Children with Learning Disabilities: Both Executive and Phonological Processes Are Important. *Journal of Experimental Child Psychology* 79, 294–321.
- Toluk, Z. & Middleton, J.A. (2001). The development of children's understanding of the quotient: A teaching experiment. In M. van den Heuvel – Panhuizen (ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4), 265 – 272.
- Torbeyns, J., Verschaffer, L. & Qhesquiere, P. (2004). Strategy Development in Children with Mathematical Disabilities: Insights from the Choice/No Choice Method and the Chronological – Age/Ability – Level – Math – Design. *Journal of Learning Disabilities*, 37 (2), 119 – 131.
- Wadlington, E. & Wadlington, P. L. (2008). Helping Students with Mathematical Learning Disabilities to Succeed. *Preventing School Failure*, 53 (1), 2 – 7.

- Wilson, K. M. & Swanson, H. L. (2001). Are Mathematics Disabilities Due to a Domain – General or a Domain – Specific Working Memory Deficit? *Journal of Learning Disabilities*, 34 (3), 237 – 248.
- Wong, M. & Evans, D. (2008). Fraction as a Measure. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Goos, M., Brown, R. & Makar, K. (Eds), MERGA Inc. 597 – 603.

Παράρτημα

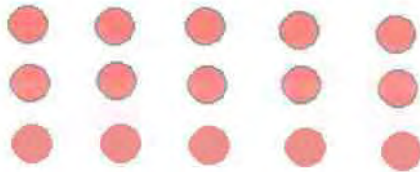
➤ Κριτήριο Γ' τάξης

1. Χωρίζω τα παρακάτω σχήματα, όπως μου ζητάει η άσκηση:

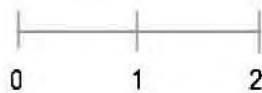
A) Χωρίζω το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε 4 ίσα μέρη:



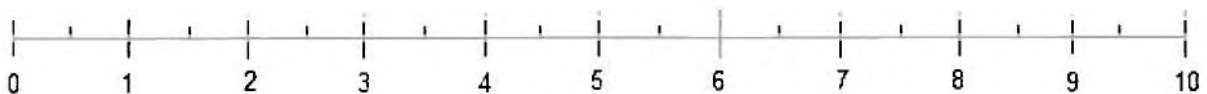
B) Χωρίζω τις παρακάτω μπίλιες σε 5 ίσα μέρη:



Γ) Χωρίζω το τμήμα του άξονα από το 0 έως το 2 σε 4 ίσα μέρη:



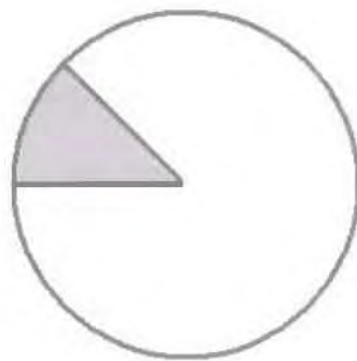
Δ) Χωρίζω το τμήμα του άξονα από το 0 έως το 10 σε 4 ίσα μέρη:



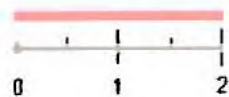
2. Α) Αν το κομμάτι που δείχνει η εικόνα είναι το $\frac{1}{4}$ ενός ορθογωνίου σχήματος, πόσα ακόμη τέτοια κομμάτια πρέπει να σχεδιάσω για να φτιάξω ολόκληρο το ορθογώνιο;



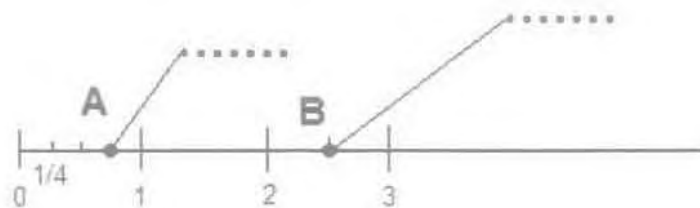
- Β) Αν το σκιασμένο κομμάτι που δείχνει η εικόνα είναι το $\frac{1}{6}$ μιας πίτσας, πόσα ακόμη τέτοια κομμάτια πρέπει να σχεδιάσω για να φτιάξω ολόκληρη την πίτσα;



- Γ) Αν το κομμάτι που δείχνει η εικόνα είναι το $\frac{1}{5}$ ενός σχοινιού, πόσα ακόμη τέτοια κομμάτια πρέπει να σχεδιάσω για να φτιάξω ολόκληρο το σχοινί; Το ζωγραφίζω και το μετρώ:



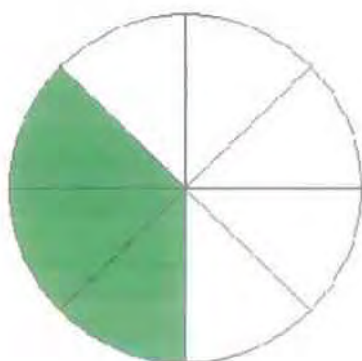
3. Α) Χρησιμοποιώντας τα σημεία του παρακάτω άξονα, σημειώνω ποια κλάσματα είναι τα σημεία Α και Β:



- Β) Χρησιμοποιώντας τα σημεία του παρακάτω άξονα τοποθετώ πάνω στον άξονα τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $1\frac{1}{2}$:

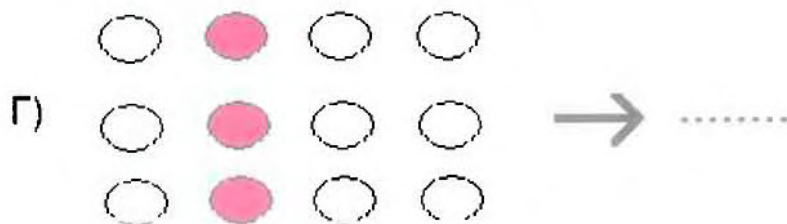
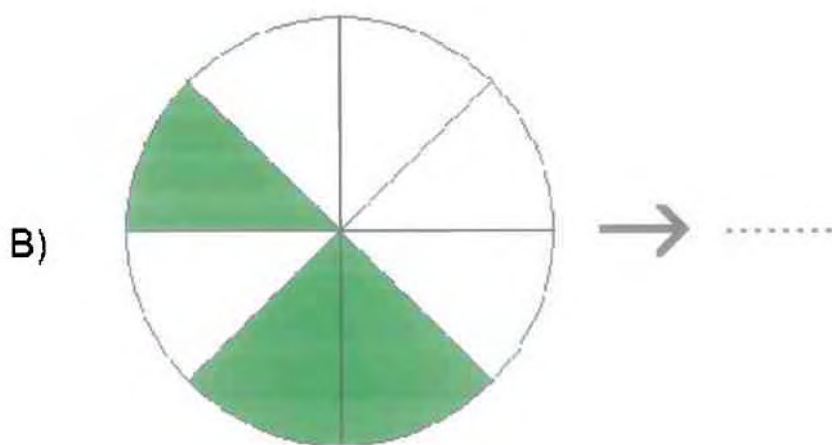
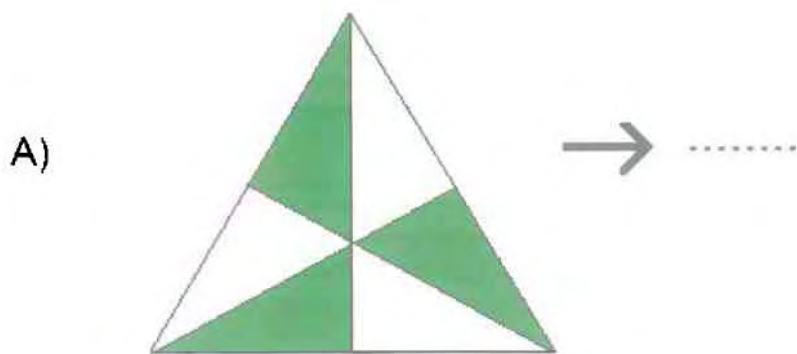


4. Αν έχω το κλάσμα $\frac{3}{8}$ όπως δείχνει η εικόνα τότε αντιστοιχίζω τα παρακάτω:



Παρονομαστής	•	•	3	•	• Μέρος
Αριθμητής	•	•	8	•	• Όλο

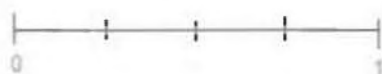
5. Τι μέρος του σχήματος είναι σκιασμένο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις; Συμπληρώνω τα κενά:



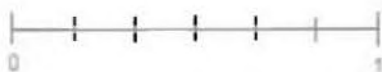
6. Επιλέγω ποιο από τα παρακάτω κλάσματα είναι μεγαλύτερο:



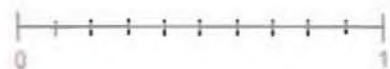
7. A) Σημειώνω το κλάσμα $\frac{2}{4}$:



B) Σημειώνω το κλάσμα $\frac{2}{6}$:

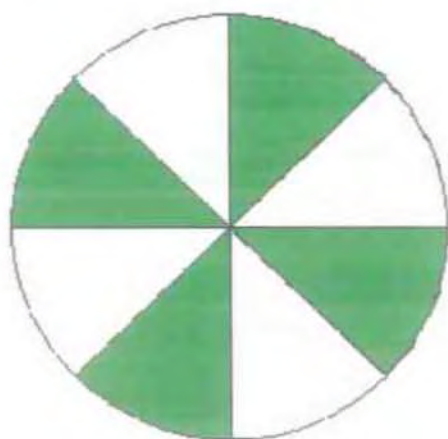


Γ) Σημειώνω το κλάσμα $\frac{2}{10}$:



Δ) Ποιο από τα παραπάνω κλάσματα είναι μεγαλύτερο;

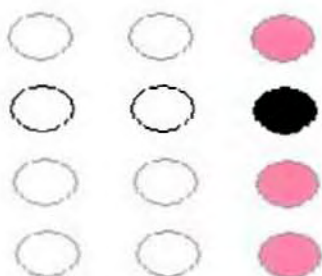
8. Αντιστοιχίζω τα κλάσματα με το σκιασμένο μέρος του σχήματος:



•

•

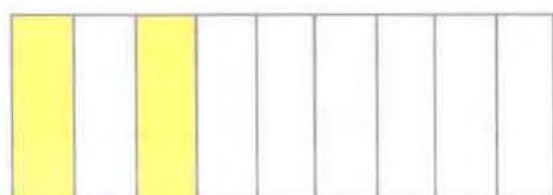
$$\frac{2}{9}$$



•

•

$$\frac{4}{8}$$



•

•

$$\frac{1}{3}$$

9. Αντιστοιχίζω τα κλάσματα με το σκιασμένο μέρος του άξονα:



•

•

$$\frac{1}{4}$$



•

•

$$\frac{1}{2}$$



•

•

$$\frac{15}{4}$$



•

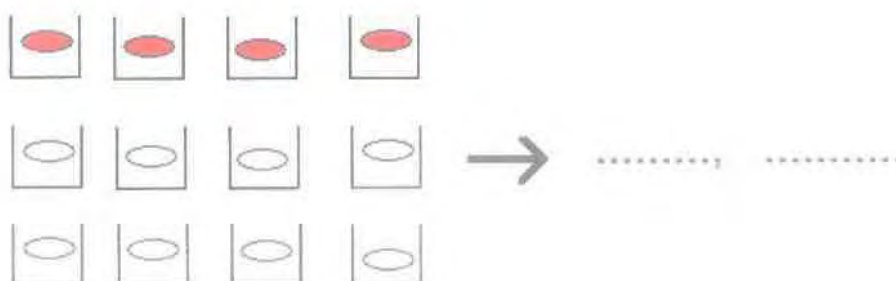
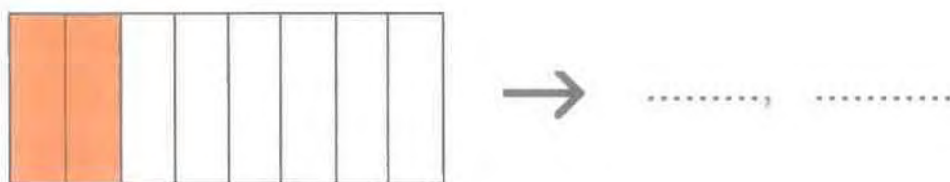
•

$$\frac{9}{2}$$

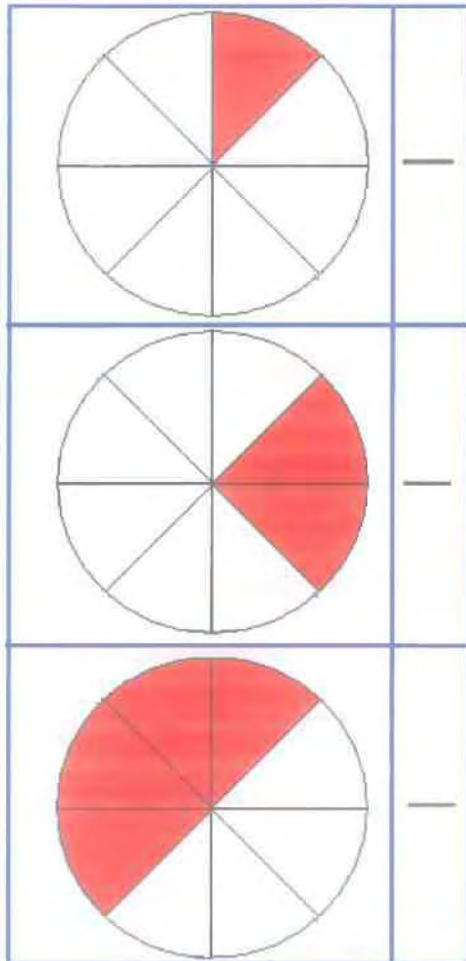
➤ **Κριτήριο Ε' τάξης**

1. Τρεις φίλοι θέλουν να μοιραστούν δίκαια μία σοκολάτα με 9 κομμάτια. Πόσα κομμάτια σοκολάτας θα πάρει ο κάθε φίλος; Τώρα γράφω την ποσότητα της σοκολάτας που θα πάρει το κάθε παιδί, με τη μορφή κλάσματος.....

2. Για κάθε εικόνα γράφω 2 ισοδύναμα κλάσματα που αντιστοιχούν στο χρωματισμένο τμήμα:



5. Συμπληρώνω το κουτάκι με το κλάσμα που δείχνει το χρωματισμένο μέρος της εικόνας και στη συνέχεια τοποθετώ στη σειρά τα κλάσματα αυτά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο:



— < — < —

6. Διαιρώ και συμπληρώνω τα κενά. Στη συνέχεια κυκλώνω το μεγαλύτερο κλάσμα από τα ακόλουθα:

$$\alpha) \frac{2}{5} = \dots\dots\dots$$

$$\beta) \frac{2}{10} = \dots\dots\dots$$

$$\gamma) \frac{2}{20} = \dots\dots\dots$$

7. Διαιρώ και συμπληρώνω τα κενά. Στη συνέχεια κυκλώνω το μικρότερο κλάσμα από τα ακόλουθα:

$$\alpha) \frac{6}{3} = \dots\dots\dots$$

$$\beta) \frac{6}{12} = \dots\dots\dots$$

$$\gamma) \frac{6}{6} = \dots\dots\dots$$

8. Στο κλάσμα $\frac{5}{8}$, τι σημαίνει ο αριθμός 5, τι σημαίνει ο αριθμός 8 και τι σημαίνει η γραμμή; Σκέφτομαι και αντιστοιχίζω:

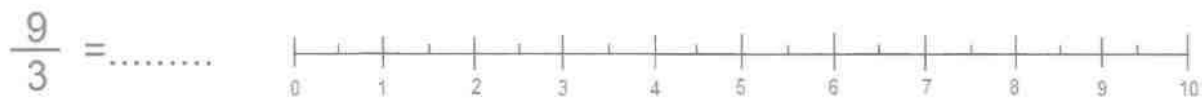
- | | | |
|---------------------|-------|--------------------------------|
| Παρονομαστής • | • 5 • | • \div (= Τελεστής Διάρεσης) |
| Αριθμητής • | • — • | • Διαιρέτης |
| Κλασματική γραμμή • | • 8 • | • Διαιρετέος |

9. Γράφω τους παρακάτω αριθμούς από το μικρότερο στο μεγαλύτερο:

$$\frac{1}{2} \quad 0.25 \quad 0.3 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{5}$$

.....

10. Διαιρώ τους όρους των κλασμάτων και συμπληρώνω τα κενά. Στη συνέχεια τοποθετώ το αποτέλεσμα στον άξονα:



➤ **Κριτήριο Στ' τάξης**

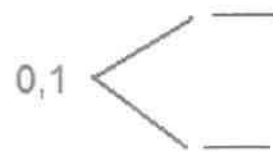
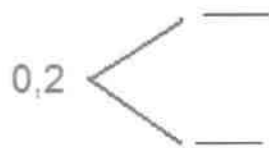
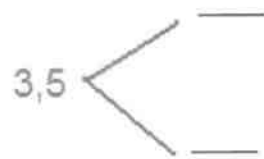
1. Σχεδιάσε πόσες πίτσες πρέπει να αγοράσει η Μαρία για να φάει μαζί με τους φίλους της:

○ το $\frac{1}{4}$

○ τα $\frac{9}{8}$

○ τα $\frac{11}{4}$

2. Για κάθε δεκαδικό αριθμό γράφω 2 ισοδύναμα κλάσματα:



3. Αν γνωρίζεις ότι ο λόγος των μαθητών προς τα θρανία είναι $\frac{28}{14}$, τότε συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

Η σχέση που συνδέει τους μαθητές με τα θρανία ονομάζεται.....

Ποια είναι η σχέση των μαθητών με τα θρανία:.....

Το μέγεθος 1 είναι

Το μέγεθος 2 είναι.....

Όταν αυξάνεται το μέγεθος 1,..... το μέγεθος 2

4. Σημειώνω αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

Σωστό Λάθος

i) Ο λόγος $\frac{\text{κακάο}}{\text{ζάχαρη}}$ στο ρόφημα είναι $\frac{1}{2}$ για μία κούπα γάλα.

Για να φτιάξουμε 3 κούπες γάλα, πρέπει να πολλαπλασιά -

σουμε και τους δύο όρους του πρώτου λόγου με το $\frac{1}{3}$.

ii) Η αναλογία εκφράζει την ισότητα δύο λόγων.

iii) Οι λόγοι $\frac{2}{9}$ και $\frac{9}{2}$ αποτελούν αναλογία.

iv) Από 10 πορτοκάλια παίρνουμε 2 ποτήρια χυμό. Από 20

πορτοκάλια παίρνουμε 4 ποτήρια χυμό. Οι λόγοι

πορτοκαλιών προς ποτήρια χυμού στις δύο περιπτώσεις

σηματίζουν αναλογία.

5. Υπολογίζω, με βάση τον πίνακα, το λόγο της ζάχαρης προς την ποσότητα του κάθε γλυκίσματος. Στη συνέχεια βάζω στη σειρά τα γλυκίσματα από το πιο γλυκό, στο λιγότερο γλυκό.

Ποσότητα ζάχαρης σε γραμμάρια	200γρ. ζάχαρη	300γρ. ζάχαρη	10γρ. ζάχαρη
Ποσότητα γλυκού σε γραμμάρια	1000γρ. κέικ	500γρ. σοκολατίνα	100γρ. μηλόπιτα

.....

6. Σημειώνω αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις:

Σωστό Λάθος

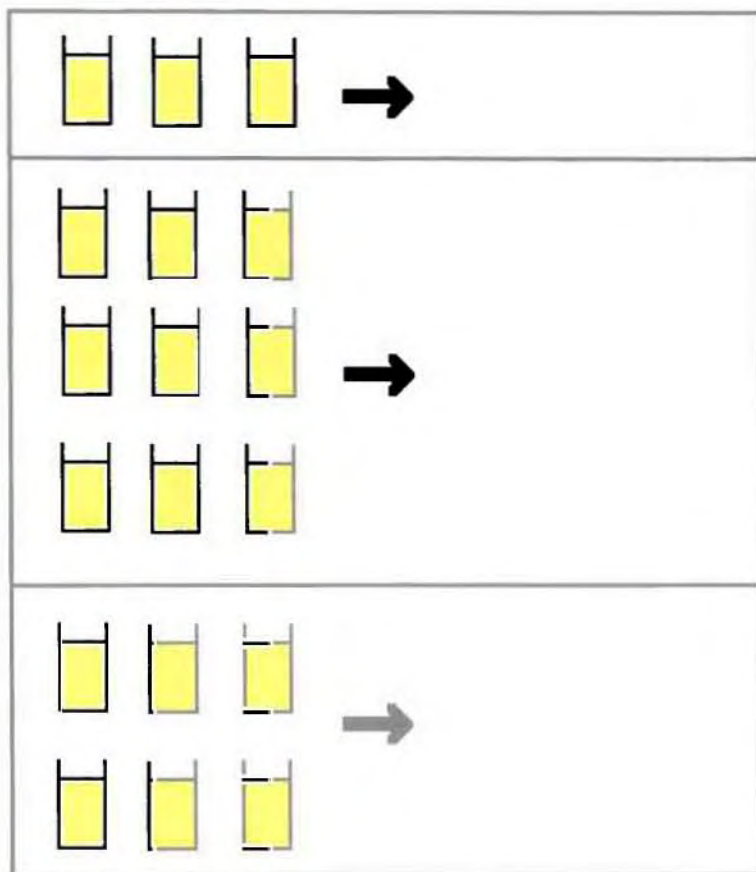
i) Τα μήλα σε κιλά είναι ποσό ανάλογο με τη τιμή σε ευρώ.

ii) Η ταχύτητα με την απόσταση που διανύεται είναι ποσά ανάλογα.

iii) Ο αριθμός των εργατών με το χρόνο που διαρκεί ένα έργο για να ολοκληρωθεί είναι ποσά ανάλογα.

iv) Το νούμερο του παπουτσιού με την ηλικία του ατόμου είναι ποσά ανάλογα.

7. Ο λόγος των ποτηριών με χυμό προς τα μπουκάλια με χυμό είναι $3/1$.
Υπολογίζω και σχεδιάζω πόσα μπουκάλια χρειάζομαι στις παρακάτω περιπτώσεις:



Τώρα γράφω τα κλάσματα που προκύπτουν από τα ποτήρια με χυμό προς τα μπουκάλια με χυμό:.....

Ο λόγος των ποτηριών με χυμό προς τα μπουκάλια με χυμό είναι $3/1$ σε κάθε περίπτωση;