

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
(Εαρινό Εξάμηνο ακαδ. έτους 2001-2002)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**« ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΑΒΑΘΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ
ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ
ΚΑΙ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ »**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ. ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

Αγγελική Ταταρίδου
Χημικός Μηχ/κός

Βόλος, Σεπτέμβριος 2002



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 1529/1
Ημερ. Εισ.: 29-06-2004
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιδετικός Κωδικός: Δ
537.6
ΤΑΤ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000072594

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ	III
ΚΕΦ. 1 ^ο ΦΥΣΙΚΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ	1
1.1 Οι εξισώσεις της συναγωγής	1
1.2 Βασικές έννοιες φυσικής συναγωγής	6
1.3 Παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων συναγωγής	13
1.4 Φυσική συναγωγή μεταξύ παραλλήλων τοιχωμάτων	16
ΚΕΦ. 2 ^ο ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ	21
2.1 Βασικές αρχές και έννοιες ηλεκτρομαγνητισμού	21
2.2 Ηλεκτροστατικές δυνάμεις	23
2.3 Μακροσκοπικά μεγέθη	24
2.4 Κλασική ηλεκτροδυναμική	25
2.5 Μαγνητοϋδροδυναμική	29
2.6 Παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής	34
2.7 Παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής και συναγωγής	37
2.8 Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη χωρίς εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο	42
ΚΕΦ. 3 ^ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΩΝ	45
3.1 Διάχυση με ασθενή συναγωγή	45
3.2 Ιδανική ροή πάνω από τοίχωμα με μικροατέλειες	46
3.3 Απλοϊκό οριακό στρώμα	50
ΚΕΦ. 4 ^ο ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ.....	52
4.1 Συναγωγή οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα	52
4.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος	53
4.3 Εφαρμογή της μεθόδου των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - Κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core region)	59
4.4 Επίλυση των εξισώσεων	63
4.5 Η λύση στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core solution)	70
4.6 Σχολιασμός αποτελεσμάτων	76

ΚΕΦ. 5 ^ο ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ	77
5.1 Συναγωγή οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου	77
5.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος	77
5.3 Εφαρμογή της μεθόδου των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων	82
5.4 Επίλυση των εξισώσεων	86
5.5 Η λύση στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας	99
5.6 Σχολιασμός αποτελεσμάτων	102
Βιβλιογραφία	103
Παράρτημα I	104
Παράρτημα II	109
Παράρτημα III	115

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Στην παρούσα εργασία μελετάται η μόνιμη, διδιάστατη συναγωγή που δημιουργείται μέσα σε μια αβαθή κοιλότητα από ομοιόμορφα κατανεμημένες εσωτερικές πηγές θερμότητας. Πιο συγκεκριμένα, η ροή εξετάζεται όταν τα κατακόρυφα τοιχώματα είναι ισοθερμικά και τα οριζόντια σύνορα αδιαβατικά. Για κοιλότητες μεγάλης αναλογίας διαστάσεων εύρους προς ύψος, ο προσδιορισμός της κρίσιμης περιοχής τιμών του αριθμού Rayleigh όπου κυριαρχούν μη-γραμμικά φαινόμενα συναγωγής, οδηγεί σε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της λύσης για τα πεδία ροής και θερμοκρασίας, το οποίο έχει ισχύ στο μεγαλύτερο τμήμα της κοιλότητας (core region). Η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων εφαρμόζεται και για την περίπτωση που στην ανωτέρω ροή επιδρά εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, οπότε η αλληλεπίδραση μεταξύ των αριθμών Rayleigh και Hartmann είναι αυτή που καθορίζει στην ουσία τα όρια ισχύος της ανάλυσης που ακολουθείται.

Στο 1^ο και 2^ο κεφάλαιο αναλύονται, αντίστοιχα, βασικές έννοιες φυσικής συναγωγής και ηλεκτροδυναμικής, διατυπώνονται οι εξισώσεις της συναγωγής και της μαγνητοϋδροδυναμικής και εφαρμόζονται οι εξισώσεις αυτές σε συγκεκριμένα απλούστερα παραδείγματα. Στο 3^ο κεφάλαιο εξετάζονται παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων. Οι έννοιες, τα παραδείγματα και τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που παρουσιάζονται στα ανωτέρω τρία κεφάλαια, συμβάλλουν στην κατανόηση, περιγραφή και επίλυση του προβλήματος που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και που αποτελεί κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας. Η συναγωγή η οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα, αναλύεται στο 4^ο κεφάλαιο, ενώ το ίδιο πρόβλημα αλλά υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, αποτελεί αντικείμενο μελέτης του 5^{ου} κεφαλαίου. Στο Παράρτημα I, υπολογίζονται στη Mathematica σχέσεις και επιλύονται συστήματα και εξισώσεις του 4^{ου} και 5^{ου} κεφαλαίου, ενώ τα αποτελέσματα για τις ροές που μελετώνται στο 4^ο και 5^ο κεφάλαιο, απεικονίζονται γραφικά στα Παραρτήματα II και III, αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο - ΦΥΣΙΚΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗ

1.1 Οι εξισώσεις της συναγωγής

Ο όρος *συναγωγή* αποδίδεται σε μια γενικότερη κατηγορία ροών στις οποίες εισάγονται από εξωτερική αιτία θερμοκρασιακές διακυμάνσεις, που σημαίνει, ότι οι διακυμάνσεις αυτές εισάγονται στο σύστημα με κάποια διαδικασία ανεξάρτητη από τη δυναμική της ροής. Δεν ενδιαφέρουν, επομένως, διακυμάνσεις θερμοκρασίας που προκαλούνται από τη ροή, προκύπτουν δηλαδή από εσωτερικά στο σύστημα φαινόμενα, όπως αδιαβατική μεταβολή του όγκου (διαστολή ή συμπίεση) ή ιξώδη σκέδαση. Συνήθως, οι διακυμάνσεις θερμοκρασίας εισάγονται από διαφορές θερμοκρασίας μεταξύ των συνόρων ή μεταξύ ενός συνόρου και του περιβάλλοντος ρευστού. Επίσης εισάγονται λόγω εσωτερικής παραγωγής θερμότητας που μπορεί να οφείλεται σε ποικίλα αίτια, όπως απορρόφηση θερμικής ακτινοβολίας, έκλυση λανθάνουσας θερμότητας συμπύκνωσης, κλπ. Η θέρμανση και η ψύξη είτε των συνόρων είτε εντός του ρευστού καταλήγουν σε μια συνεχή κατανομή θερμοκρασίας (η θερμοκρασία είναι μια συνεχής συνάρτηση της θέσης).

Οι θερμοκρασιακές διακυμάνσεις δίνουν αφορμή για διακυμάνσεις στις ιδιότητες του ρευστού, για παράδειγμα στην πυκνότητα και το ιξώδες. Μια ανάλυση που θα συμπεριελάμβανε όλες αυτές τις επιπτώσεις, θα ήταν αρκετά πολύπλοκη, γι' αυτό και οι εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο της συναγωγής εφαρμόζονται συνήθως σε μια προσεγγιστική μορφή (προσέγγιση Boussinesq).

Στην προσέγγιση Boussinesq, διακυμάνσεις σε οποιαδήποτε άλλη ιδιότητα του ρευστού εκτός της πυκνότητας, αγνοούνται τελείως. Οι διακυμάνσεις στην πυκνότητα επίσης αγνοούνται, εκτός στο βαθμό που αυτές δίνουν αφορμή για επίδραση στην κίνηση της δύναμης βαρύτητας. Έτσι, η εξίσωση συνέχειας χρησιμοποιείται στη μορφή σταθερής πυκνότητας ($D\rho/Dt = 0$):

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0} \quad (1-1)$$

Ομοίως, στην εξίσωση ορμής ο όρος $\rho D\underline{u}/Dt$ αντικαθίσταται από τον $\rho_o D\underline{u}/Dt$, με ρ_o μια σταθερή πυκνότητα, επιλεγμένη σε μια τυπική θέση. Ο δείκτης "ο" υποδηλώνει τιμή στο επιλεγμένο σημείο αναφοράς. Εφόσον, όμως, οι διακυμάνσεις της πυκνότητας είναι σημαντικές στον όρο της δύναμης βαρύτητας, ο όρος αυτός γράφεται ως εξής:

$$\underline{\rho g} = (\rho_o + \Delta\rho)\underline{g} \quad (1-2)$$

Οι σωματικές δυνάμεις ασκούνται στα κέντρα μάζας των σωματιδίων του ρευστού και είναι ανάλογες είτε της μάζας είτε του όγκου τους. Έστω \underline{f} η ανά μονάδα μάζας σωματική δύναμη σ' ένα ορισμένο σημείο. Σ' ένα δυναμικό ή συντηρητικό πεδίο -η συντηρητική δύναμη εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου μέσα στο πεδίο και όχι π.χ. από την ταχύτητα του σωματιδίου- η ανά μονάδα μάζας δύναμη μπορεί να γραφεί ως η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης $\Phi(x, y, z)$ που καλείται *δυναμικό ή δυναμική συνάρτηση του πεδίου*:

$$\underline{f} = \nabla\Phi \quad (1-3)$$

Αν με \underline{f}_g συμβολίσουμε την ανά μονάδα μάζας δύναμη βαρύτητας ($\underline{f}_g = d\underline{F}_g/dm$), τότε αυτή ταυτίζεται με την τοπική επιτάχυνση βαρύτητας \underline{g} . Επειδή το πεδίο βαρύτητας είναι συντηρητικό, ισχύει:

$$\underline{f}_g = \underline{g} = -\nabla\Phi \quad (1-4)$$

όπου $\Phi = -(x g_x + y g_y + z g_z)$

Ο όρος της δύναμης βαρύτητας στην εξίσωση ορμής παίρνει τη μορφή:

$$(1-2) \wedge (1-4) \Rightarrow \boxed{\rho \underline{g} = \rho_o \underline{g} + \Delta\rho \underline{g} = -\rho_o \nabla\Phi + \Delta\rho \underline{g} = -\nabla(\rho_o \Phi) + \Delta\rho \underline{g}} \quad (1-5)$$

Η εξίσωση Navier-Stokes γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \rho_o \frac{D\underline{u}}{Dt} &= -\nabla p - \nabla(\rho_o \Phi) + \Delta\rho \underline{g} + \eta \nabla^2 \underline{u} \Rightarrow \rho_o \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla(\underbrace{p + \rho_o \Phi}_P) + \Delta\rho \underline{g} + \eta \nabla^2 \underline{u} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_o \frac{D\underline{u}}{Dt} &= -\nabla P + \Delta\rho \underline{g} + \eta \nabla^2 \underline{u} \end{aligned} \quad (1-6)$$

όπου η είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού.

Αν $\Delta\rho=0$, η (1-6) είναι η Navier-Stokes εξίσωση χωρίς τη σωματική δύναμη, εκτός του ότι η πίεση P αντικαθιστά την p . Υπό τον όρο ότι η πίεση δεν εμφανίζεται ρητά στις συνοριακές συνθήκες, αυτή η αλλαγή στην πίεση δε δημιουργεί καμιά διαφορά, απλά και μόνο, θα πρέπει να γίνεται διόρθωση για την υδροστατική πίεση (τη διαφορά μεταξύ p και P) αν η πραγματική πίεση είναι αυτή που απαιτείται. Έτσι επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα ότι, αν η πυκνότητα είναι ομοιόμορφη, η δύναμη βαρύτητας δεν παίζει σημαντικό ρόλο.

Εφόσον, λόγω θερμοκρασιακών διακυμάνσεων, ενδιαφέρουν περιπτώσεις όπου $\Delta\rho \neq 0$, θα πρέπει να σημειωθεί το εξής: Ο βασικός λόγος που επιβάλλει την αντιμετώπιση της πυκνότητας ρ ως σταθεράς σε όλους τους όρους εκτός από έναν, είναι ότι αυτός ο προτελευταίος όρος στην εξίσωση (1-6) μπορεί να έχει σημαντική επίδραση ακόμα κι όταν $\Delta\rho/\rho_o \ll 1$. Αυτό

συνεπάγεται ότι όλες οι επιταχύνσεις της ροής είναι μικρές συγκρινόμενες με την τοπική επιτάχυνση βαρύτητας $|g|$ (δηλαδή $|D\underline{u}/Dt| \ll |g|$).

Η εξάρτηση της πυκνότητας από τη θερμοκρασία, προκύπτει ως εξής:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1-7)$$

όπου β είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής και V ο ειδικός όγκος του ρευστού ($V=1/\rho$).

$$\rho = \rho_o + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_o dT \quad (1-8)$$

$$(1-7) \wedge (1-8) \Rightarrow \Delta \rho = \rho - \rho_o = -\rho_o \beta \Delta T \quad [= -\rho_o \beta (T - T_o)] \quad (1-9)$$

Η δυναμική εξίσωση Boussinesq είναι:

$$(1-6) \wedge (1-9) \Rightarrow \boxed{\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_o} \nabla P - \underline{g} \beta \Delta T + \frac{\eta}{\rho_o} \nabla^2 \underline{u}} \quad (1-10)$$

Παραλείποντας το δείκτη “ο” και συμβολίζοντας την πίεση P με p , η εξίσωση (1-10) παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \underline{g} \beta \Delta T + \nu \nabla^2 \underline{u}} \quad (1-10a)$$

Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζονται ορισμένες βασικές έννοιες που αφορούν στην πίεση ρευστών σε ηρεμία και σε κίνηση και σχετίζονται με όσα αναφέρθηκαν ανωτέρω στην πορεία εξαγωγής της δυναμικής εξίσωσης. Στα ρευστά σε ηρεμία, ο δυαδικός τάσης έχει μόνο κάθετες συνιστώσες

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p, \quad (1-11)$$

όπου p είναι η στατική πίεση. Η (1-11) είναι η εξίσωση ορισμού της πίεσης των ρευστών σε στατική ισορροπία. Στα κινούμενα ρευστά, για τον ορισμό της πίεσης χρησιμοποιείται η προσεγγιστική σχέση:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = -\frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (1-12)$$

Η κατανομή της πίεσης εντός ρευστών σε ηρεμία, προκύπτει βάσει των σχέσεων: $\partial p / \partial x = 0$, $\partial p / \partial y = 0$ και $\partial p / \partial z = \rho g_z = -\rho g$, από τις οποίες συνεπάγεται ότι

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1-13)$$

όπου z είναι ο κατακόρυφος άξονας, με θετική φορά προς τα πάνω. Η εξίσωση (1-13) αποτελεί το νόμο κατανομής της πίεσης μέσα σε ρευστά που βρίσκονται σε στατική ισορροπία. Για ασυμπίεστα ρευστά ($\rho = const$), έχουμε:

$$(1-13) \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho g \underbrace{(z_2 - z_1)}_h \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho g h$$

όπου h είναι το βάθος του ρευστού κάτω από τη θέση πίεσης p_2 . Σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση, η πίεση ασυμπίεστου ρευστού σε στατική ισορροπία μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το βάθος h του ρευστού (υδροστατική κατανομή πίεσης). Αν συμβολίσουμε με p_o την πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (\equiv πίεση αναφοράς \equiv ατμοσφαιρική πίεση στις περισσότερες περιπτώσεις), τότε η πίεση σε βάθος h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια, είναι:

$$p = p_o + \rho g h \quad (1-14)$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί τη θεμελιώδη αρχή υδροστατικής και $p - p_o (= \rho g h)$ είναι η υδροστατική πίεση.

Επανερχόμενοι στις εξισώσεις που περιγράφουν τη συναγωγή, σε ό,τι αφορά την εξίσωση για τη θερμοκρασία -σύμφωνα πάντα με την προσέγγιση Boussinesq- θεωρείται ότι το ρευστό έχει σταθερή θερμοχωρητικότητα ανά μονάδα όγκου, ρc_p και ο όρος $\rho c_p DT/Dt$ δίνει το ρυθμό θέρμανσης ανά μονάδα όγκου ενός σωματιδίου ρευστού. Αυτή η θέρμανση, προκαλείται από μεταφορά θερμότητας από γειτονικά σωματίδια ρευστού με θερμική αγωγή ή λόγω εσωτερικής παραγωγής θερμότητας. Οι αντίστοιχοι όροι της θερμικής αγωγής και της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας που εμφανίζονται στην εξίσωση θερμότητας, είναι παρεμφερείς, αντιστοίχως, προς τον όρο ιξώδους και τον όρο της σωματικής δύναμης στη δυναμική εξίσωση.

Η θερμορροή όταν έχουμε μοριακή διάχυση (αγωγή), είναι:

$$\underline{H} = -k \nabla T \quad (1-15)$$

όπου k είναι η θερμική αγωγιμότητα του ρευστού.

Η εξίσωση θερμότητας γράφεται ως εξής:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \underline{H}) + J \quad (1-16)$$

όπου J είναι ο ρυθμός της εσωτερικής παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα όγκου.

Υπενθυμίζεται εδώ, ότι η απόκλιση $\nabla \cdot \underline{F}$ μιας διανυσματικής συνάρτησης \underline{F} -στην προκειμένη περίπτωση της θερμορροής \underline{H} - παριστάνει από φυσική άποψη την πυκνότητα (ή

ένταση) του ρυθμού καθαρής εκροής της ποσότητας \underline{F} από ένα “σημείο” (x, y, z) του πεδίου της ανυσματικής συνάρτησης $\underline{F}(x, y, z)$.

Λαμβάνοντας τη θερμική αγωγιμότητα του ρευστού σταθερή, η εξίσωση θερμότητας παίρνει τη μορφή:

$$(1-15)\wedge(1-16)\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{J}{\rho c_p}} \quad (1-17)$$

όπου $\kappa = k/\rho c_p$ είναι η θερμική διαχυτότητα ή -όπως αναφέρεται μερικές φορές- θερμομετρική αγωγιμότητα.

Οι εξισώσεις (1-1), (1-10α) και (1-17) αποτελούν τις βασικές εξισώσεις συναγωγής στην προσέγγιση Boussinesq. Πρόκειται για μία ανυσματική και δύο βαθμωτές εξισώσεις ως προς μία ανυσματική και δύο βαθμωτές μεταβλητές, τις \underline{u} , p και ΔT . Ο όρος $-\underline{g} \beta \Delta T$ στη δυναμική εξίσωση είναι γνωστός ως δύναμη άνωσης (buoyancy force). Η ονομασία αυτή χρησιμοποιείται ακόμα κι όταν το ΔT είναι αρνητικό και ο όρος $-\underline{g} \beta \Delta T$ αντιπροσωπεύει την τάση που εμφανίζει το βαρύ ρευστό να κατέλθει. Οι δύο όροι στο δεξί μέλος της εξίσωσης (1-17) καλούνται, αντίστοιχα, όρος αγωγής και όρος παραγωγής θερμότητας. Ο όρος $\underline{u} \cdot \nabla T$ που αναπαριστά τη μεταφορά θερμότητας λόγω της κίνησης του ρευστού, καλείται όρος συναγωγής (advection term).

Ο συνηθέστερος τύπος συνοριακών συνθηκών για τη θερμοκρασία είναι να δίνεται η τιμή της στα σύνορα. Ένας άλλος τύπος, αφορά στον καθορισμό της μεταφοράς θερμότητας διαμέσου των συνόρων (γνωστή, δηλαδή, η βαθμίδα θερμοκρασίας).

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η θερμική αγωγή παίζει ζωτικό ρόλο στη συναγωγή και αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της. Για παράδειγμα, όταν θερμότητα εισάγεται σ' ένα ρευστό με θέρμανση ενός συνοριακού τοιχώματος, δε λαμβάνει χώρα συναγωγή θερμότητας διαμέσου αυτού του συνόρου, αλλά η θερμότητα μεταφέρεται στα πρώτα στρώματα του ρευστού κοντά στην επιφάνεια μόνο με αγωγή -μακριά από το τοίχωμα η συναγωγή είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός.

Ανάλογα με τη σπουδαιότητα του ανωστικού όρου σε σχέση με τους υπόλοιπους στην εξίσωση (1-10α), παρατηρείται ένα ευρύ φάσμα δυναμικών συμπεριφορών. Οι δύο ακραίες καταστάσεις, όταν η δύναμη άνωσης είναι αμελητέα και όταν αυτή αποτελεί τη μοναδική αιτία κίνησης, ονομάζονται, αντίστοιχα, εξαναγκασμένη συναγωγή και φυσική συναγωγή. Ενδιάμεσες καταστάσεις είναι γνωστές ως μεικτή συναγωγή.

1.2 Βασικές έννοιες φυσικής συναγωγής

Ροή φυσικής συναγωγής προέρχεται από ανωστικές δυνάμεις. Εισαγωγή θερμοκρασιακών διαφορών -για παράδειγμα με διατήρηση των συνόρων σε διαφορετικές θερμοκρασίες- και οι συνεπακόλουθες διαφορές πυκνοτήτων προκαλούν κίνηση: το ζεστό ρευστό τείνει να ανυψωθεί και το κρύο να πέσει.

Σύμφωνα με την προσέγγιση Boussinesq, οι εξισώσεις της συναγωγής για μόνιμες συνθήκες, χωρίς εσωτερική παραγωγή θερμότητας, είναι:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1-1)$$

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u} - \underline{g} \beta \Delta T \quad (1-10\beta)$$

$$\underline{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (1-17\alpha)$$

Οι εξισώσεις (1-10β) και (1-17α) θα πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα, καθώς περιλαμβάνουν και οι δύο τις ταχύτητες και τη θερμοκρασία. Η κατανομή της ταχύτητας ελέγχεται από την κατανομή θερμοκρασίας, αλλά η κατανομή θερμοκρασίας εξαρτάται μέσω της συναγωγής (advection) της θερμότητας από την κατανομή των ταχυτήτων. Δεν υπάρχει πιθανότητα να καθοριστεί η μία ανεξάρτητα της άλλης, όπως στην περίπτωση της εξαναγκασμένης συναγωγής. Για το λόγο αυτό, η φυσική συναγωγή είναι δύσκολο να μελετηθεί θεωρητικά και το πλήθος των πληροφοριών προέρχεται από πειραματικές μελέτες.

Σε τέτοιες πειραματικές μελέτες χρειάζεται να είναι γνωστό πότε μπορεί να εφαρμοστεί δυναμική ομοιότητα. Από τον καθορισμό μιας κατάστασης φυσικής συναγωγής δεν παρέχεται χαρακτηριστική ταχύτητα. Έτσι, δε μπορεί να οριστεί αριθμός Reynolds χρησιμοποιώντας μόνο τις παραμέτρους που τίθενται από το πρόβλημα. Το πόσο έντονη θα είναι η κίνηση μπορεί, ωστόσο, να ελέγχεται από μια *χαρακτηριστική διαφορά θερμοκρασίας* Θ .

Εφαρμόζοντας τις μεθόδους της διαστατικής ανάλυσης στις εξισώσεις (1-1), (1-10β) και (1-17α), προκύπτει ότι η δυναμική ομοιότητα εξαρτάται από δύο αδιάστατες παραμέτρους, τους αριθμούς Grashof και Prandtl:

$$Gr = \frac{g\beta\Theta L^3}{\nu^2} \quad (1-18)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (1-19)$$

Πρόκειται για τους αδιάστατους αριθμούς που ελέγχουν τη φυσική συναγωγή. Μόνον όταν και οι δύο είναι ίδιοι σε δύο όμοιες γεωμετρικά περιπτώσεις μπορεί να αναμένεται η ίδια

μορφή ροής. Ο αριθμός Prandtl είναι μία ιδιότητα του ρευστού και, συνεπώς, η μεταφορά πληροφοριών από ένα ρευστό σε ένα άλλο είναι περιορισμένη. Για να μελετηθεί πλήρως μια δεδομένη κατάσταση φυσικής συναγωγής, απαιτείται διακύμανση του αριθμού Grashof για ρευστά διαφόρων τιμών του αριθμού Prandtl και, εκ των πραγμάτων, μια τέτοια μελέτη είναι εκτενέστερη μιας αντίστοιχης που αφορά σε μια κατάσταση, η οποία ελέγχεται από μία μόνο αδιάστατη παράμετρο, όπως ο αριθμός Reynolds.

Για δεδομένο ρευστό, ο αριθμός Grashof χαρακτηρίζει τον τύπο της ροής που αναμένεται -ποιοι δυναμικοί μηχανισμοί είναι κυρίαρχοι, αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης, κλπ.- όπως ο αριθμός Reynolds χαρακτηρίζει την εξαναγκασμένη ροή. Παρόλο που ο αριθμός Grashof δε μπορεί να εξηγηθεί γενικά και απλά σαν ο λόγος δύο δυναμικών μηχανισμών, εντούτοις -όπως θα φανεί στη συνέχεια- υποδηλώνει τη σχετική σημασία των δυνάμεων αδράνειας και των ιξωδών δυνάμεων.

Η δύναμη αδράνειας ή η ιξώδης δύναμη ή και οι δύο πρέπει να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ανωστική δύναμη. Η κίνηση μπορεί να πλησιάσει στη μόνιμη κατάσταση, μόνον όταν άλλοι όροι αντισταθμίσουν την ανωστική δύναμη. Από την άλλη πλευρά, εφόσον η ανωστική δύναμη είναι η αιτία της κίνησης, αυτοί οι άλλοι όροι δε μπορούν να γίνουν μεγάλοι συγκρινόμενοι με αυτήν.

Υποθέτουμε, αρχικά, ότι η αδρανειακή δύναμη είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ανωστική

$$|\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}| \sim |g \beta \Delta T|, \quad (1-20)$$

που σημαίνει

$$U^2/L \sim g\beta\Theta \quad (1-21)$$

Η (1-21) δίνει μια χαρακτηριστική ταχύτητα που δείχνει τυπικά πόσο γρήγορα θα κινηθεί το ρευστό σαν αποτέλεσμα των διαφορών θερμοκρασίας

$$U \sim (g\beta\Theta L)^{1/2} \quad (1-22)$$

Συγκρίνοντας τις τάξεις μεγέθους των δυνάμεων αδράνειας και των ιξωδών δυνάμεων, έχουμε:

$$\frac{|\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\nu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{UL}{\nu} \sim \left(\frac{g\beta\Theta L^3}{\nu^2} \right)^{1/2} = Gr^{1/2} \quad (1-23)$$

Από την (1-23) συμπεραίνεται ότι, όταν ο αριθμός Grashof είναι μεγάλος, η ιξώδης δύναμη είναι αμελητέα συγκρινόμενη με τις δυνάμεις άνωσης και αδράνειας. Από την άλλη πλευρά, για την περίπτωση μικρού αριθμού Grashof δε μπορεί να εξαχθεί αντίστοιχο

συμπέρασμα, καθώς η φαινομενική πρόρρηση ότι η αδρανειακή δύναμη είναι μικρή, έρχεται σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση ότι η δύναμη αδράνειας είναι συγκρίσιμη με την ανωστική.

Για να αντιμετωπισθεί η περίπτωση μικρού αριθμού Grashof, υποθέτουμε τώρα ότι η ιξώδης δύναμη είναι συγκρίσιμη με την ανωστική

$$|\nu \nabla^2 \underline{u}| \sim |g \beta \Delta T|, \quad (1-24)$$

που σημαίνει

$$U \sim g \beta \Theta L^2 / \nu \quad (1-25)$$

Συγκρίνοντας τις τάξεις μεγέθους των δυνάμεων αδράνειας και των ιξωδών δυνάμεων, έχουμε:

$$\frac{|\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\nu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{UL}{\nu} \sim \frac{g \beta \Theta L^3}{\nu^2} = Gr \quad (1-26)$$

Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι, μικρός αριθμός Grashof συνεπάγεται αμελητέες αδρανειακές δυνάμεις, αλλά δε σχετίζεται με την περίπτωση μεγάλου αριθμού Grashof.

Γενικά, ο αριθμός Grashof είναι ένα μέτρο της σχετικής σημασίας των ιξωδών και αδρανειακών επιδράσεων. Επειδή, όμως, στις σχέσεις (1-23) και (1-26) είναι υψωμένος σε διαφορετικές δυνάμεις, δε μπορεί να γραφεί μια γενική έκφραση για τον αριθμό Grashof σαν λόγο των επιδράσεων.

Σε προβλήματα συναγωγής, πρέπει να είναι γνωστό όχι μόνο ποιοι δυναμικοί μηχανισμοί είναι σημαντικοί, αλλά και ποιοι μηχανισμοί είναι σημαντικοί στον καθορισμό της κατανομής της θερμοκρασίας.

$$\frac{\text{Συναγωγή}}{\text{Αγωγή}} \sim \frac{|\underline{u} \cdot \nabla T|}{|\kappa \nabla^2 T|} \sim \frac{UL}{\kappa} \quad (1-27)$$

Όταν ο Gr είναι μεγάλος,

$$\frac{|\underline{u} \cdot \nabla T|}{|\kappa \nabla^2 T|} \sim Gr^{1/2} Pr \quad (1-28)$$

και, όταν ο Gr είναι μικρός,

$$\frac{|\underline{u} \cdot \nabla T|}{|\kappa \nabla^2 T|} \sim Gr Pr \quad (1-29)$$

Όταν ο αριθμός Prandtl είναι περίπου μονάδα -όπως για αέρια και μερικά υγρά- η επικράτηση της συναγωγής έναντι της αγωγής συμβαίνει πάντα ταυτόχρονα με την επικράτηση

των αδρανειακών έναντι των ιξωδών δυνάμεων. Όταν ο αριθμός Prandtl είναι μικρός -όπως στα υγρά μέταλλα- ή μεγάλος -όπως σε ιξώδη λάδια και πολλά άλλα υγρά- η ανωτέρω συμφωνία δεν ισχύει.

Η ποσότητα

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta \Theta L^3}{\nu \kappa} \quad (1-30)$$

που εμφανίζεται στη σχέση (1-29), ο αριθμός Rayleigh, παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη μελέτη της συναγωγής σε οριζόντια στρώματα.

Οι ποσότητες UL/ν και UL/κ που εμφανίζονται στις σχέσεις (1-23), (1-26) και (1-27), μπορούν να χαρακτηριστούν σαν ένας αριθμός Reynolds και ένας αριθμός Péclet, αντίστοιχα. Ο ρόλος τους, εντούτοις, είναι διαφορετικός από αυτόν που έχουν στις εξαναγκασμένες ροές, μιας και περιλαμβάνουν τη U που είναι ένα εξαρτημένο χαρακτηριστικό μέγεθος και όχι ανεξάρτητο. Επομένως, ο αριθμός Reynolds -ομοίως και ο Péclet- είναι εξαρτημένη αδιάστατη παράμετρος και μπορεί να γραφεί:

$$Re = f(Gr, Pr) \quad (1-31)$$

Ακόμη μία σημαντική εξαρτημένη παράμετρος είναι ο αριθμός Nusselt, που δείχνει τη μεταφορά θερμότητας όπως στην εξαναγκασμένη συναγωγή

$$Nu = \frac{HL}{k \Theta}, \quad (1-32)$$

όπου H είναι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας προς ή από το ρευστό και k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας. Η διαστατική ανάλυση δίνει:

$$Nu = f(Gr, Pr) \quad (1-33)$$

Στην ανωτέρω σχέση το Θ εμφανίζεται τόσο στον αριθμό Nu όσο και στον Gr . Ενώ στην εξαναγκασμένη συναγωγή συμπεραίνεται ότι η μεταφορά θερμότητας είναι ανάλογη της θερμοκρασιακής διαφοράς, ένα τέτοιο συμπέρασμα δε βρίσκει εφαρμογή στη φυσική συναγωγή. Ο αριθμός Nu πάντα -ή σχεδόν πάντα- αυξάνει αυξανόμενου του Gr , πράγμα που υποδηλώνει ότι, όταν όλα τα άλλα μεγέθη παραμένουν σταθερά, η μεταφορά θερμότητας αυξάνει με τη διαφορά θερμοκρασίας πιο γρήγορα απ' ό,τι θα αυξανόταν αν τα μεγέθη H και Θ ήταν ευθέως ανάλογα. Αυτό συμβαίνει λόγω του διπλού ρόλου της διαφοράς θερμοκρασίας: όσο μεγαλύτερη είναι αυτή τόσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας μιας συγκεκριμένης ταχύτητας ροής, αλλά, επίσης, όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά θερμοκρασίας τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα της ροής.

Μεγάλες τιμές του αριθμού Grashof παρατηρούνται πολύ συχνότερα απ' ό τι μικρές τιμές. Για παράδειγμα, τα σχετικά μικρά χαρακτηριστικά μεγέθη διαφοράς θερμοκρασίας και μήκους των $1^{\circ}C$ και $10^{-2}m$, αντίστοιχα, δίνουν $Gr \sim 10^3$ σε νερό και $\sim 10^2$ σε αέρα. Αυτό σχετίζεται με το γεγονός ότι, αρκετά έντονα ρεύματα συναγωγής συχνά εμφανίζονται σαν αποτέλεσμα σποραδικών διαφορών θερμοκρασίας σε οποιοδήποτε μεγάλο όγκο ρευστού που παραμένει σε ηρεμία.

Όταν ο αριθμός Grashof είναι μεγάλος (και ο αριθμός Prandtl δεν είναι πολύ μικρός), οι σχέσεις (1-23) και (1-28) συνεπάγονται την επικράτηση των αδρανειακών δυνάμεων έναντι των ιξωδών και της συναγωγής έναντι της αγωγής. Παρόλα αυτά, αυτό βασίζεται στην υπόθεση ότι το μόνο χαρακτηριστικό μήκος είναι το επιβεβλημένο, L . Αυτή η υπόθεση θα ακυρωθεί στην περίπτωση σχηματισμού οριακού στρώματος. (Στην περίπτωση αυτή, η ροή αναπτύσσει δική της κλίμακα μήκους δ , δηλαδή στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα το χαρακτηριστικό μήκος κατά τη διεύθυνση την κάθετη στο τοίχωμα είναι $\delta \ll L$ και οι ιξώδεις όροι δεν είναι αμελητέοι. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ο όρος αγωγής είναι ο μεγαλύτερης τάξης διαφορικός όρος της εξίσωσης (1-17α), ακριβώς όπως είναι ο όρος ιξώδους στην εξίσωση Navier-Stokes). Στη συνθηθέστερη περίπτωση όπου η ροή παράγεται από τη διατήρηση διαφορών θερμοκρασίας σε αδιαπέραστα σύνορα, η θερμική αγωγή ευθύνεται για την εισαγωγή θερμοκρασιακών διαφορών στο ρευστό. Χωρίς θερμική αγωγή το ρευστό δίπλα στον τοίχο θα μπορούσε να παραμένει σε διαφορετική θερμοκρασία απ' αυτή του τοίχου· μια υποθετική κατάσταση ανάλογη με τη θεωρητική πιθανότητα διαφοράς ταχύτητας ρευστού και τοίχου απουσία ιξώδους. Παραλείποντας τη δράση της αγωγιμότητας μεταθέτουμε το πρόβλημα της συναγωγής εξ' ολοκλήρου. Το σωστό συμπέρασμα όταν οι τιμές $Gr^{1/2}$ και $Gr^{1/2} Pr$ είναι μεγάλες, είναι ότι η ροή θα έχει χαρακτήρα οριακού στρώματος.

Οι ροές φυσικής συναγωγής υπόκεινται κατά κανόνα σε περιστροφή. Οι ανωστικές δυνάμεις παράγουν άμεσα στροβιλότητα (vorticity). Ως στροβιλότητα μιας ροής ορίζεται το διπλάσιο του ανύσματος της ταχύτητας περιστροφής του ρευστού. (στροβιλότητα ροής \equiv περιστροφή του ανύσματος \underline{u} της ταχύτητας). Εφαρμόζοντας τον τελεστή περιστροφής στην (1-10α), προκύπτει:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \nabla^2 \underline{\omega} + \beta \underline{g} \times \nabla (\Delta T) \quad (1-34)$$

Απόδειξη της (1-34):

Ο όρος της επιτάχυνσης μεταφοράς (convective acceleration) $(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}$ είναι στην πραγματικότητα μια ψευδο-ανυσματική έκφραση και, είναι βολικό, να γραφεί ο όρος αυτός σε πραγματική διανυσματική μορφή:

$$\boxed{(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) - \underline{u} \times (\nabla \times \underline{u})} \quad (1-35)$$

όπου u είναι το μέτρο του ανύσματος \underline{u}

Απόδειξη της (1-35):

$$\begin{aligned} \underline{u} \times (\nabla \times \underline{u}) &= (u_l \underline{e}_l) \times \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_k \right) = \varepsilon_{ijk} u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_i} (\underline{e}_l \times \underline{e}_k) = \varepsilon_{ijk} u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_i} (\varepsilon_{lkm} \underline{e}_m) = \\ &= -(\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm}) u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_m = -(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_m = \\ &= \delta_{im} \delta_{jl} u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_m - \delta_{il} \delta_{jm} u_l \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_m = u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_i - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_j = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j u_j}{2} \right) \underline{e}_i - \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u_j \underline{e}_j = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τον όρο $\nabla^2 \underline{u}$ -η εφαρμογή του διαφορικού τελεστή του Laplace σ' ένα διάνυσμα δεν είναι ίδια με την εφαρμογή του σ' ένα βαθμωτό μέγεθος- προκύπτει η εξής χρήσιμη διανυσματική ταυτότητα:

$$\boxed{\nabla^2 \underline{u} = \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{u})} \quad (1-36)$$

$$(1-10\alpha) \wedge (1-35) \wedge (1-36) \Rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \underline{u} \times \underbrace{(\nabla \times \underline{u})}_{\underline{\omega}} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left[\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{u})}_{\substack{\text{ασυμπίεστη} \\ \text{ροή}}} - \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \underline{u})}_{\underline{\omega}} \right] - \underline{g} \beta \Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \underline{u} \times \underline{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla \times \underline{\omega} - \underline{g} \beta \Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{u}) + \underbrace{\nabla \times \left[\nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]}_{\substack{\text{περιστροφή της κλίσης} \\ \text{πραγματικής συν / σης}}} - \nabla \times (\underline{u} \times \underline{\omega}) = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\nabla \times (\nabla p)}_0 - \nu \nabla \times (\nabla \times \underline{\omega}) - \beta \nabla \times (\underline{g} \Delta T) \Rightarrow$$

περιστροφή της κλίσης πραγματικής συν / σης

Η απαίτηση της σχέσης (1-38) ικανοποιείται μόνον όταν η κλίση της θερμοκρασίας $\nabla(\Delta T)$ είναι κατακόρυφη.

1.3 Παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων συναγωγής

Θεωρούμε την περίπτωση στρωτής, μεικτής συναγωγής (φυσική και εξαναγκασμένη), ανάμεσα σε δύο κατακόρυφες πλάκες. Η ροή είναι διδιάστατη, μόνιμη, και οι ιδιότητες του ρευστού σταθερές εκτός από τη μεταβολή της πυκνότητας στον ανωστικό όρο της εξίσωσης ορμής. Το ρευστό έχει ομοιόμορφη ανοδική κατανομή ταχύτητας στην είσοδο του καναλιού που σχηματίζουν οι κατακόρυφες πλάκες. Οι πλάκες θερμαίνονται σε ομοιόμορφη θερμοκρασία, αλλά οι θερμοκρασίες των πλακών εν γένει είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Θεωρούμε, επίσης, αναπτυσσόμενη ροή και, λαμβάνοντας την κύρια διεύθυνση της ροής κατά τον κατακόρυφο άξονα x (με θετική φορά του x προς τα πάνω), οι εξισώσεις οριακού στρώματος που περιγράφουν το πρόβλημα είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{συνέχεια}) \quad (1-39)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} - \rho g + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (x\text{-ορμή}) \quad (1-40)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \quad (y\text{-ορμή}) \quad (1-41)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{ενέργεια}) \quad (1-42)$$

όπου με p' συμβολίζεται η στατική πίεση. Επίσης, στις ανωτέρω εξισώσεις, έχουμε υποθέσει

ότι $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ και $\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$, ενώ έχει αγνοηθεί ο όρος των τριβών $\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ από την εξίσωση

ενέργειας.

Στην εξίσωση (1-40), ο όρος $\left(-\frac{\partial p'}{\partial x} - \rho g \right)$ γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} -\frac{dp'}{dx} - \rho g &= -\frac{dp'}{dx} - (\rho - \rho_o)g - \rho_o g \stackrel{(1-9)}{=} -\frac{dp'}{dx} - \rho_o g + \rho_o \beta (T - T_o)g = \\ &\stackrel{(1-13)}{=} -\frac{dp'}{dx} + \frac{dp''}{dx} + \rho_o \beta (T - T_o)g = -\frac{d(p' - p'')}{dx} + g\beta \rho_o (T - T_o) = -\frac{dp}{dx} + g\beta \rho_o (T - T_o) \end{aligned}$$

όπου p'' είναι η υδροστατική πίεση, η πίεση αν η θερμοκρασία ήταν T_o παντού. Ο δείκτης “ο” υποδηλώνει τιμή στην είσοδο του καναλιού, δηλαδή στη θέση $x=0$.

Παραλείποντας το δείκτη “ο” από την πυκνότητα, η εξίσωση (1-40) παίρνει τη μορφή:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + g\beta\rho(T - T_o) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{x-ορμή}) \quad (1-40\alpha)$$

Οι εξισώσεις (1-39), (1-40α), (1-41) και (1-42) μπορούν να αδιαστατοποιηθούν εισάγοντας τις ακόλουθες αδιάστατες μεταβλητές:

$$U = \frac{u}{u_o}, \quad V = \frac{vb}{v}, \quad X = \frac{x}{b\text{Re}}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad \text{Re} = \frac{u_o b}{\nu}, \quad P = \frac{p' - p''}{\rho u_o^2}, \quad \theta = \frac{T - T_o}{T_2 - T_o}$$

όπου U είναι η αδιάστατη αξονική ταχύτητα, V η αδιάστατη εγκάρσια ταχύτητα, b η απόσταση μεταξύ των πλακών και ν το κινηματικό ιξώδες. Ο δείκτης “1” υποδηλώνει τιμή στον κρύο τοίχο, δηλαδή στη θέση $y = 0$, ενώ ο δείκτης “2” υποδηλώνει τιμή στο ζεστό τοίχο, δηλαδή στη θέση $y = b$.

$$(1-39) \Rightarrow \left(\frac{u_o}{b\text{Re}} \right) \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{v}{b^2} \right) \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \left(\frac{u_o}{b} \frac{v}{u_o b} \right) \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{v}{b^2} \right) \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0} \quad (1-43)$$

$$(1-40\alpha) \Rightarrow \rho \left[\left(\frac{u_o^2}{b\text{Re}} \right) U \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{v u_o}{b^2} \right) V \frac{\partial U}{\partial Y} \right] = - \left(\frac{\rho u_o^2}{b\text{Re}} \right) \frac{\partial P}{\partial X} + g\beta\rho(T_2 - T_o)\theta + \left(\frac{\eta u_o}{b^2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$

$$\Rightarrow U \frac{\partial U}{\partial X} + \left(\frac{v\text{Re}}{u_o b} \right) V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{g\beta(T_2 - T_o)b\text{Re}}{u_o^2} \theta + \left(\frac{\eta\text{Re}}{\rho u_o b} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{g\beta(T_2 - T_o)b^3 v}{(u_o b)v^2} \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Gr}{\text{Re}} \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}} \quad (1-44)$$

$$\text{Ορίζεται η παράμετρος: } Gr = \frac{g\beta(T_2 - T_o)b^3}{\nu^2}$$

$$(1-41) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial Y} = 0} \quad (1-45)$$

$$(1-42) \Rightarrow \left[\frac{u_o(T_2 - T_o)}{b \text{Re}} \right] U \frac{\partial \theta}{\partial X} + \left[\frac{v(T_2 - T_o)}{b^2} \right] V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left[\frac{\kappa(T_2 - T_o)}{b^2} \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \Rightarrow$$

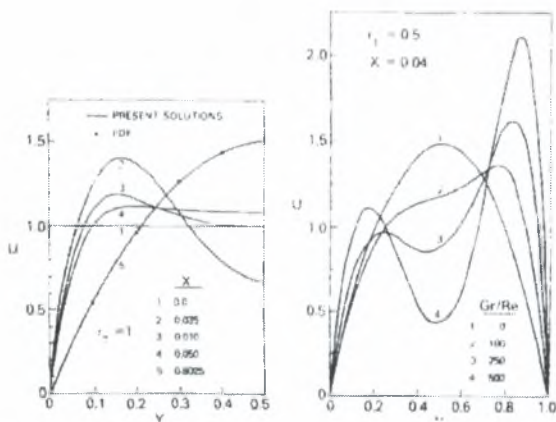
$$\frac{u_o b}{v \text{Re}} U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\kappa}{v} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \Rightarrow \boxed{U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}} \quad (1-46)$$

Οριακές συνθήκες:

Για $X=0, 0 \leq Y \leq 1$: $U=1, V=0, \theta=0, P=0$

Για $X>0, Y=0$: $U=0, V=0, \theta=r_T$, όπου $r_T=(T_1-T_o)/(T_2-T_o)$

Για $X>0, Y=1$: $U=0, V=0, \theta=1$



Σχ. 1-1 Προφίλ ταχύτητας για $r_T=1$ και $r_T=0,5$
-Εξάρτηση από την παράμετρο Gr/Re

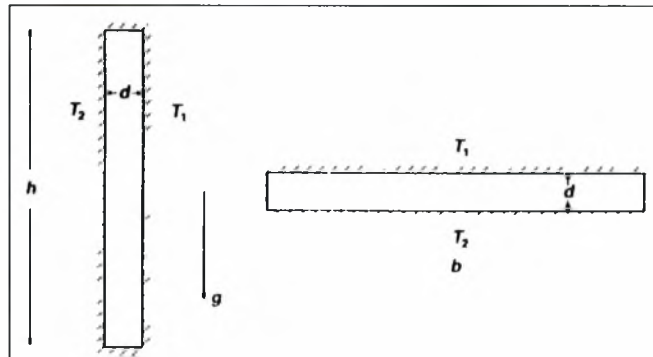
(Σχήμα 1-1).

Όταν $r_T = 1$, για οποιαδήποτε τιμή του Gr/Re , το κοίλωμα τελικά εξαφανίζεται και, σε μεγάλη απόσταση από την είσοδο, το προφίλ αποκτά το παραβολικό σχήμα το προβλεπόμενο από τη θεωρία της πλήρους ανεπτυγμένης ροής. Για ασύμμετρες θερμοκρασίες τοιχωμάτων ($r_T < 1$), το κοίλωμα ποτέ δεν εξαφανίζεται τελείως. Επίσης, το προφίλ της ταχύτητας εμφανίζει μια λοξότητα προς το ζεστό τοίχωμα ($Y = 1$), η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο λόγος των θερμοκρασιακών διαφορών των τοιχωμάτων r_T . Η παραμόρφωση στο προφίλ της ταχύτητας ελαττώνεται, ωστόσο, σε αυξημένη απόσταση X .

Οι ανωστικές επιδράσεις γίνονται αισθητές πολύ κοντά στην είσοδο του καναλιού. Η άνωση προκαλεί αυξημένη ροή μάζας κοντά στα τοιχώματα, και καθώς η συνολική ροή μάζας είναι σταθερή, οι ταχύτητες του ρευστού κοντά στον άξονα μειώνονται. Εφόσον η άνωση οδηγεί σε αυξημένες ταχύτητες κοντά στα τοιχώματα, το προφίλ της ταχύτητας αποκτά ένα κοίλο σχήμα κοντά στο κέντρο και το κοίλωμα αυτό γίνεται πιο έντονο καθώς αυξάνει ο λόγος Gr/Re

1.4 Φυσική συναγωγή μεταξύ παράλληλων τοιχωμάτων

Θεωρούμε ένα στρώμα ρευστού ανάμεσα σε παράλληλα τοιχώματα, τα οποία διατηρούνται σε διαφορετικές θερμοκρασίες, και αντιπαραβάλλουμε τις ροές που σχηματίζονται σε κατακόρυφα και οριζόντια στρώματα (Σχήμα 1-2). Το βασικό χαρακτηριστικό σ' αυτή την αντιπαράθεση είναι ότι, για το κατακόρυφο στρώμα, κίνηση θα υπάρχει πάντα -αν και δεν ξέρουμε πάντα τι μορφή θα υιοθετήσει- ενώ για το οριζόντιο στρώμα, το πρώτο ερώτημα που τίθεται είναι πότε το ρευστό κυκλοφορεί.

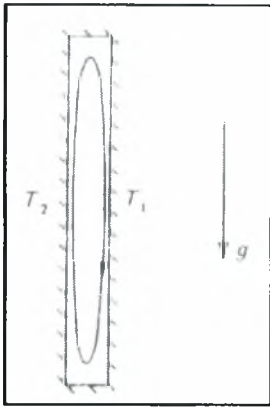


Σχ.1-2 Κατακόρυφες και οριζόντιες σχισμές (slots)

Υποθέτουμε ότι η απόσταση d μεταξύ των τοιχωμάτων που διατηρούνται σε θερμοκρασίες T_1 και T_2 είναι μικρή συγκρινόμενη με τις άλλες διαστάσεις του στρώματος. Έτσι, τα άλλα τοιχώματα θα έχουν σχετικά μικρή επίδραση σ' αυτά που συμβαίνουν στο στρώμα. Θερμότητα άγεται στο ρευστό από το θερμό τοίχωμα, μεταφέρεται μέσω του στρώματος και αποβάλλεται με αγωγή στο ψυχρό τοίχωμα. Αν αντί του ρευστού στο χώρο υπήρχε στερεό, τότε η μεταφορά θερμότητας διαμέσου του στρώματος αυτού θα γινόταν, επίσης, με αγωγή. Η θερμοκρασία θα έπεφτε γραμμικά από τη θερμή προς την ψυχρή πλάκα. Όταν ο χώρος καταλαμβάνεται από ρευστό σε κίνηση, η κατανομή θερμοκρασίας είναι περισσότερο πολύπλοκη, αλλά κι εδώ, το ρευστό κοντά στο θερμό τοίχωμα είναι θερμότερο από αυτό που βρίσκεται κοντά στο ψυχρό τοίχωμα. Συνδεδεμένες με αυτές τις θερμοκρασιακές διακυμάνσεις είναι διακυμάνσεις στην πυκνότητα -το θερμότερο ρευστό είναι ελαφρότερο- και η αιτία της κίνησης είναι η διαφορετική βαρυτική δύναμη ανά μονάδα όγκου που δρα σ' αυτές τις διαφορές πυκνότητας. Το ρευστό θα παρέμενε ακίνητο, αν $T_1 = T_2$ ή αν η πυκνότητα παρέμενε αμετάβλητη με τη θερμοκρασία ή αν δεν υπήρχε πεδίο βαρύτητας.

Ο αριθμός Rayleigh -στην περίπτωση της φυσικής συναγωγής δε μπορεί να οριστεί ένας αριθμός Reynolds μιας και δεν υπάρχει χαρακτηριστική ταχύτητα από τα δεδομένα του προβλήματος- δίνεται από τη σχέση:

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta(T_2 - T_1)d^3}{\nu\kappa} \quad (1-47)$$

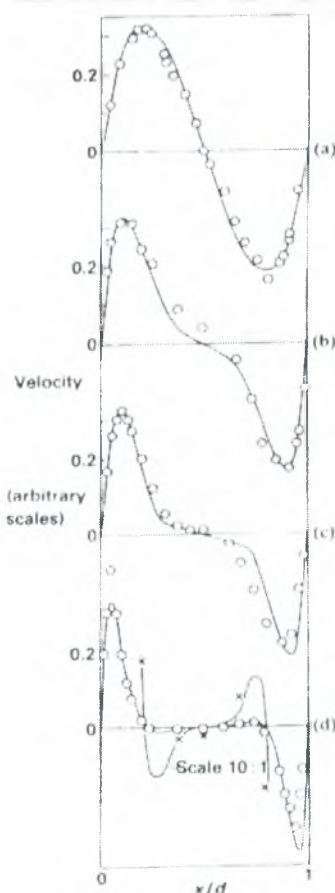


Σχ.1-3 Η απλούστερη μορφή ροής όταν έχουμε συναγωγή σε κατακόρυφη σχισμή

Σε ό,τι αφορά τη ροή όταν το στρώμα είναι κατακόρυφο και, καθώς το ρευστό στην αριστερή πλευρά είναι θερμότερο από αυτό στη δεξιά, περιμένουμε το ρευστό να ανέλθει από τα αριστερά και να κατέλθει από τα δεξιά, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δεν υπάρχει πιθανότητα το ρευστό να παραμείνει σε ακινησία όταν $T_1 \neq T_2$.

Για αρκετά χαμηλό αριθμό Rayleigh, η ροή πράγματι συνίσταται σε μια απλή κυκλοφορία, όπως αυτή στο Σχήμα 1-3. Όμως, όπως συμβαίνει με την αύξηση του αριθμού Reynolds, έτσι και η αύξηση του αριθμού Ra οδηγεί σε μια σειρά αλλαγών

στη ροή. Μια πλήρης μελέτη του φαινομένου πρέπει να γίνεται για διάφορες τιμές του αριθμού Prandtl, ενώ πρέπει να εξετάζεται και η επίδραση του λόγου h/d , καθώς μια ροή που εκτείνεται από την κορυφή μέχρι τη βάση, όπως αυτή στο Σχήμα 1-3, επηρεάζεται από το λόγο h/d , ακόμα κι όταν ο λόγος αυτός είναι μεγάλος.



Σχ.1-4 Κατανομή της κατακόρυφης ταχύτητας στο μέσον του ύψους

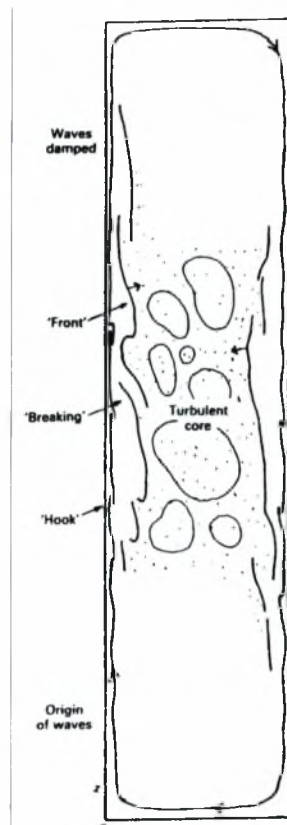
Το διπλανό σχήμα δείχνει αλλαγές στην κατανομή -εγκάρσια στη σχισμή- της κατακόρυφης ταχύτητας, ενώ συνολικά, η γεωμετρία της ροής εξακολουθεί να συνίσταται σε μία και μοναδική κυκλοφορία (όπως αυτή στο Σχήμα 1-3). Αρχικά όλο το ρευστό παίρνει μέρος στην κυκλοφορία. Καθώς ο αριθμός Rayleigh αυξάνεται, η κίνηση εστιάζεται προοδευτικά σε “οριακά στρώματα” κοντά στο θερμό και κρύο τοίχωμα, αφήνοντας σχεδόν ακίνητο ρευστό στην περιοχή κοντά στο κέντρο. Στο Σχήμα 1-4, τα προφίλ της ταχύτητας μετρήθηκαν στο μέσον του ύψους, εγκάρσια σε κατακόρυφη σχισμή που περιείχε παραφίνη, για διάφορες τιμές του αριθμού Rayleigh: (a) $3,1 \cdot 10^4$, (b) $2,95 \cdot 10^5$, (c) $6,6 \cdot 10^5$, (d) $3,6 \cdot 10^6$. Η θερμοκρασία στην περιοχή κοντά στο κέντρο ήταν σχεδόν σταθερή σε κάθε οριζόντιο επίπεδο, αλλά υψηλότερη στην κορυφή της σχισμής απ’ ότι στη βάση.

Σε επόμενο στάδιο εξέλιξης της ροής -με περαιτέρω αύξηση του αριθμού Rayleigh- αυτή η μία και μοναδική κυκλοφορία που καταλαμβάνει όλο το ύψος της σχισμής γίνεται

ασταθής και καταστρέφεται, ενώ δημιουργείται ένας αριθμός μικρότερων περιοχών κυκλοφορίας σωρευμένων κατακόρυφα η μία πάνω στην άλλη. Η κίνηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως “cellular”. Η κατεύθυνση της κυκλοφορίας είναι ίδια σε κάθε κελί - πυρήνα (cell) κι έτσι το ρευστό ανέρχεται πάντα από τη θερμή πλευρά και κατέρχεται από την ψυχρή.

Η μορφή αυτή της κίνησης προϋποθέτει μεγάλες κλίσεις ταχύτητας ανάμεσα σε γειτονικά κελιά. Σα συνέπεια αυτού, μπορεί να θεωρηθεί το αμέσως επόμενο στάδιο εξέλιξης της ροής. Μικρά κελιά αναστροφής κυκλοφορίας εμφανίζονται μεταξύ των κύριων κελιών και ενεργούν, κατά μία έννοια, ως “ενδιάμεσοι τροχοί ή γρανάζια” στις κύριες κυκλοφορίες. Τα μικρά κελιά δεν εκτείνονται προς το θερμό και ψυχρό τοίχωμα και είναι σχεδόν ισοθερμικά.

Η ροή όπως περιγράφηκε ανωτέρω, και παρότι εμφανίζεται αρκετά περίπλοκη, εντούτοις παραμένει μέχρι στιγμής μόνιμη. Για πολύ μεγάλες τιμές του αριθμού Rayleigh γίνεται μη-μόνιμη και η “cellular” γεωμετρία διαταράσσεται. Στο Σχ.1-5, απεικονίζονται σχηματικά τα κύρια χαρακτηριστικά της συναγωγής υψηλού αριθμού Rayleigh ($> \sim 10^6$) σε κατακόρυφη σχισμή.



Σχ.1-5 Κύρια χαρακτηριστικά της συναγωγής υψηλού Ra

Αν το ρευστό ανάμεσα στα τοιχώματα είναι ακίνητο, η κατανομή θερμοκρασίας είναι η γνωστή γραμμική κατανομή που δίνει η μεταφορά θερμότητας με αγωγή:

$$T = T_2 - \frac{(T_2 - T_1)z}{d} \quad (1-48)$$

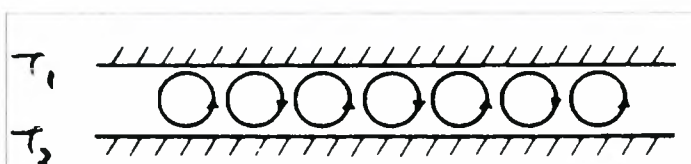
όπου z είναι η απόσταση από το τοίχωμα θερμοκρασίας T_2 .

Αν το στρώμα είναι οριζόντιο (οριζόντια σχισμή), η σχέση (1-48) δε συνεπάγεται οριζόντιες διακυμάνσεις στη θερμοκρασία και, κατ' επέκταση, στην πυκνότητα., οπότε δεν παρατηρείται η κυκλοφορία που περιγράφηκε στη συναγωγή σε κατακόρυφη σχισμή -ανοδική κίνηση ρευστού από τη θερμή πλευρά και καθοδική από την ψυχρή. Στην περίπτωση συναγωγής σε οριζόντια στρώματα, το ρευστό βρίσκεται σε ισορροπία κι αν, μάλιστα, είναι $T_2 < T_1$, όπου T_2 η θερμοκρασία στην επιφάνεια της βάσης, τότε το ρευστό θα παραμένει πάντα ακίνητο. Από την άλλη πλευρά, όταν $T_2 > T_1$, βαρύ κρύο ρευστό βρίσκεται πάνω από ελαφρύ θερμό ρευστό. Αν το πρώτο κινηθεί προς τα κάτω και το δεύτερο προς τα πάνω, απελευθερώνεται δυναμική ενέργεια και η έκλυση αυτή παρέχει κινητική ενέργεια για την κίνηση. Ενδέχεται, επομένως, η

ισορροπία στην οποία βρίσκεται το ρευστό να είναι ασταθής. Έτσι, όταν το ρευστό ρέει, αυτό δε συμβαίνει λόγω έλλειψης ισορροπίας (δηλαδή λόγω έλλειψης λύσεων των εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα με το ρευστό σε ακινησία), αλλά γιατί η ισορροπία είναι ασταθής. Η δυναμική κατάσταση ενός οριζόντιου στρώματος ρευστού θερμαινόμενου από κάτω και ψυχόμενου από πάνω είναι γνωστή με το όνομα Bénard (ή Rayleigh - Bénard).

Η ανισότητα $T_2 > T_1$ αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει κίνηση, αλλά όχι και ικανή. Στην αστάθεια αντιτίθεται η τριβική δράση του ιξώδους. Επίσης, αντίθετη είναι και η επενέργεια της θερμικής αγωγιμότητας, η οποία τείνει να εξαλείψει τη θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στις θερμές και ψυχρές ζώνες που ακολουθούν, αντίστοιχα, ανοδική και καθοδική πορεία. Κίνηση παρατηρείται, μόνον όταν η αποσταθεροποιητική επίδραση της διαφοράς θερμοκρασίας είναι αρκετά ισχυρή ώστε να υπερνικήσει τις ανωτέρω αντίθετες δράσεις και, κάτι τέτοιο συμβαίνει, όταν ο αριθμός Rayleigh είναι αρκετά μεγάλος. Σημειώνουμε εδώ, ότι οι παράγοντες που ωθούν την κίνηση -ο συνδυασμός θερμοκρασιακής διαφοράς, επακόλουθης θερμικής διαστολής και βαρύτητας- είναι στον αριθμητή του κλάσματος της εξίσωσης (1-47), ενώ οι παράγοντες που αναφέρθηκαν ανωτέρω ως αντίθετοι, είναι στον παρονομαστή.

Αστάθεια παρατηρείται, όταν ο αριθμός Rayleigh υπερβεί μια κρίσιμη τιμή γύρω στο 1700, ανεξάρτητα από τον αριθμό Prandtl. Κάτω από αυτή την τιμή το ρευστό παραμένει ακίνητο. Πάνω από την κρίσιμη τιμή, το ρευστό εμφανίζει θερμές ανυψούμενες ζώνες και ψυχρές κατερχόμενες, με οριζόντια κίνηση στην κορυφή και τη βάση για τη διατήρηση της συνέχειας, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1-6. Το ανερχόμενο ρευστό χάνει τη θερμότητά του με θερμική αγωγή, όταν φτάνει κοντά στο ψυχρό τοίχωμα της κορυφής και κινείται ξανά προς τα κάτω. Όμοια, το ψυχρό καθοδικό ρευστό θερμαίνεται κοντά στο τοίχωμα της βάσης και ανέρχεται ξανά. Όταν η ροή είναι μόνιμη, η συνεχής απελευθέρωση δυναμικής ενέργειας -που παρέχεται από τη θέρμανση στη βάση και την ψύξη στην κορυφή- αντισταθμίζεται από την ιξώδη διάχυση μηχανικής ενέργειας.



Σχ.1-6 Σχηματική απεικόνιση της συναγωγής Bénard για Ra λίγο πάνω από την κρίσιμη τιμή

Όπως με τη συναγωγή σε κατακόρυφη σχισμή, αλλαγές στη ροή παρατηρούνται όταν μεταβάλλονται οι αριθμοί Rayleigh και Prandtl. Επιπρόσθετα, η ροή είναι ευαίσθητη σε μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού -κυρίως του ιξώδους- με τη θερμοκρασία.

Για τιμές του Ra όχι πολύ πάνω από την κρίσιμη τιμή, η συναγωγή εμφανίζει πάντα μια μόνιμη ή σχεδόν μόνιμη γεωμετρία, όπως υποδηλώνεται από το Σχήμα 1-6. Τα επιμέρους χαρακτηριστικά τμήματα μιας τέτοιας γεωμετρίας είναι γνωστά ως κελιά συναγωγής (convection cells ή Bénard cells). Αύξηση του αριθμού Rayleigh έχει ως τελικό αποτέλεσμα τυρβώδη κίνηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο - ΜΑΓΝΗΤΟΎΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

2.1 Βασικές αρχές και έννοιες ηλεκτρομαγνητισμού

Υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία:

- σημειακά q (Cb), και
- χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho(\underline{r}, t)$ (Cb/m³)

Η κίνησή τους συνεπάγεται, αντίστοιχα:

- νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα i (A), και
- χωρική πυκνότητα ρεύματος \underline{J} (A/m²)

Αν το εσωτερικό γινόμενο $\underline{J} \cdot d\underline{s}$ αντιστοιχεί στα φορτία που περνούν από τη στοιχειώδη επιφάνεια ds σε χρόνο dt , τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\delta q = i \delta t \Rightarrow \delta q = \left(\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \right) \delta t \Rightarrow \delta q = \left(\oint_S \underline{J} \cdot d\underline{s} \right) \delta t$$

Δυνάμεις:

- Coulomb μεταξύ ακίνητων φορτίων ή
- Laplace μεταξύ παράλληλων νηματοειδών ρευμάτων

Ενδιάμεσα μεγέθη που διευκολύνουν (αντί των δυνάμεων):

Πεδία $\underline{E}(\underline{r}, t)$ και $\underline{B}(\underline{r}, t)$ ως ενδιάμεσα μεγέθη

\underline{E} :ένταση ηλεκτρικού πεδίου (Volt/m)

\underline{B} :πυκνότητα μαγνητικής ροής ή μαγνητική επαγωγή (Tesla=Wb/m²)

$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B})$:η δύναμη σε φορτίο q που κινείται με \underline{u}

$d\underline{F} = (\rho \underline{E} + \underline{J} \times \underline{B}) dV$:η δύναμη σε μικρό όγκο dV

Αντιστοιχίες: $q \leftrightarrow \rho dV$ και $q \underline{u} \leftrightarrow \underline{J} dV$

$$(\rho, \underline{J}) \xrightarrow{\text{Maxwell}} (\underline{E}, \underline{B}) \xrightarrow{\text{Lorentz}} \underline{F} = m \underline{\gamma} \xrightarrow{\text{εξ. κίνησης}} (\text{θέση, ταχύτητα})$$

► Αγωγή υλικά $\underline{E} \Rightarrow \underline{J}(\underline{E})$

3 συνιστώσες: $J_x(E_x, E_y, E_z)$

$$J_y(E_x, E_y, E_z)$$

$$J_z(E_x, E_y, E_z)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί την εμφάνιση ρεύματος

Μικροσκοπικός ν.Οhm: $\underline{J} = \sigma \underline{E} \leftrightarrow I = \frac{1}{R} U$

σ :ειδική αγωγιμότητα (S/m ή Ω^{-1}/m)

- ▶ Διηλεκτρικά υλικά $\underline{E} \Rightarrow$ πόλωση $\underline{P}(\underline{E})$

$$\xrightarrow{\text{μέσω της}} \underline{F} = q \underline{E}$$

$$\underline{D} = \epsilon_o \underline{E} + \underline{P}(\underline{E}) \text{ :διηλεκτρική μετατόπιση (Cb/m}^2\text{)}$$

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$$

ϵ :διηλεκτρική σταθερά ή επιτρεπτότητα (*Farad/m*)

- ▶ Μαγνητικά υλικά $\underline{B} \Rightarrow$ μαγνήτιση $\underline{M}(\underline{B})$

$$\xrightarrow{\text{μέσω της}} \underline{F} = q \underline{u} \times \underline{B}$$

σε όλα τα υλικά εκτός των σιδηρομαγνητικών (Fe, Co, Ni)

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_o} \underline{B} - \underline{M}(\underline{B}) \text{ :ένταση μαγνητικού πεδίου (A/m)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \underline{B}$$

μ :μαγνητική διαπερατότητα (*H/m*), $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Από πειράματα $\epsilon_o \mu_o = \frac{1}{c_o^2}$, $c_o \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$ (ταχ. φωτός σε κενό)

$$\epsilon_o = \frac{1}{c_o^2 \mu_o} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{D} \\ \underline{B} \\ \underline{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \mu \\ \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \\ \underline{E} \end{pmatrix}$$

(\dots/m^2) σταθερές υλικού (\dots/m)

Στα κεφάλαια 2.2 έως και 2.4 εισάγονται οι βασικές έννοιες και οι νόμοι που διέπουν την κλασική θεωρία ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Η συνοπτική παρουσίαση των εξισώσεων του Maxwell εστιάζεται στην εφαρμογή τους σε μακροσκοπικά συστήματα. Όσον αφορά δε την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων, εδώ και στη συνέχεια, θεωρείται ότι οι ταχύτητές τους είναι

μικρές σχετικά με την ταχύτητα του φωτός, ώστε η κίνησή τους να περιγράφεται ικανοποιητικά από τη Νευτώνια μηχανική χωρίς “σχετικιστικές” διορθώσεις.

2.2 Ηλεκτροστατικές Δυνάμεις

Θεωρούμε ένα σύστημα φορτισμένων σημειακών σωματιδίων τα οποία χαρακτηρίζονται από τη μάζα m_k και το ηλεκτρικό φορτίο q_k , καθώς και τα διανύσματα \underline{r}_k και \underline{u}_k που δηλώνουν, αντίστοιχα, τη θέση και την ταχύτητα του k σωματιδίου ($k=1,2,\dots$).

Στο σημείο \underline{r} του χώρου μπορούμε να ορίσουμε, χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη συνάρτηση δ του Dirac, δύο (μικροσκοπικά) μεγέθη: την πυκνότητα ρ_m του ηλεκτρικού φορτίου

$$\rho_m(\underline{r}, t) = \sum_k q_k \delta(\underline{r} - \underline{r}_k(t)) \quad (2-1)$$

και την πυκνότητα \underline{J}_m του ηλεκτρικού ρεύματος

$$\underline{J}_m(\underline{r}, t) = \sum_k q_k \underline{u}_k(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_k(t)) \quad (2-2)$$

Η διατήρηση του φορτίου συνεπάγεται την ταυτότητα:

$$\partial_t \rho_m(\underline{r}, t) + \nabla \cdot \underline{J}_m(\underline{r}, t) = 0 \quad (\text{εξίσωση της συνέχειας}) \quad (2-3)$$

Οι αλληλεπιδράσεις των φορτίων προσδιορίζονται από το νόμο του Coulomb. Συγκεκριμένα, η δύναμη $\underline{F}_q(\underline{r})$ που ασκείται σε ένα φορτίο q στη θέση \underline{r} από άλλα φορτία q_k στις θέσεις \underline{r}_k είναι:

$$\underline{F}_q(\underline{r}) = q \underline{E}_m(\underline{r}) \quad (2-4)$$

όπου το ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}_m(\underline{r})$ δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{E}_m(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k q_k \frac{(\underline{r} - \underline{r}_k)}{|\underline{r} - \underline{r}_k|^3} \quad (2-5)$$

Οι δυνάμεις είναι μακράς εμβελείας -αντιστρόφως ανάλογες της απόστασης δύο φορτίων- και ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Χρησιμοποιείται το διεθνές σύστημα μονάδων (SI) και για το λόγο αυτό εισάγεται στην (2-5) η διηλεκτρική σταθερά ή επιτρεπτότητα ϵ_0 του κενού. Σημειώνεται, ακόμη, ότι ο νόμος του Coulomb αυστηρά ισχύει για ακίνητα σωματίδια, είναι όμως πολύ καλή προσέγγιση στην περίπτωση κίνησης με μικρές ταχύτητες.

Το ηλεκτρικό πεδίο -ακριβέστερα το ηλεκτροστατικό πεδίο- είναι αστρόβιλο

$$\nabla \times \underline{E}_m(\underline{r}) = 0 \quad (2-6)$$

και, κατά συνέπεια, μπορεί να γραφεί ως η κλίση ενός βαθμωτού πεδίου, συγκεκριμένα του ηλεκτρικού δυναμικού

$$\underline{E}_m(\underline{r}) = -\nabla U_m(\underline{r}), \quad U_m(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_k \frac{q_k}{|\underline{r} - \underline{r}_k|} \quad (2-7)$$

Το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Poisson:

$$\left[\nabla^2 U_m(\underline{r}) \equiv \right] \Delta U_m(\underline{r}) = -\frac{\rho_m(\underline{r})}{\epsilon_o} \quad \left[\Leftrightarrow \nabla \cdot \underline{E}_m(\underline{r}) = \frac{\rho_m(\underline{r})}{\epsilon_o} \right] \quad (2-8)$$

2.3 Μακροσκοπικά Μεγέθη

Εάν υποθέσουμε ότι τα σημειακά φορτία της προηγούμενης ενότητας είναι ηλεκτρόνια και ιόντα και τα μεταξύ τους διαστήματα της τάξης των $10^{-10}m$ [$=1\text{\AA}$ (*angström*)], τότε σε μακροσκοπική κλίμακα ενδιαφέρει η προσέγγιση των μικροσκοπικών μεγεθών με πιο ομαλές συναρτήσεις. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται μια (θετική) συνάρτηση $K(\underline{r})$, που ουσιαστικά μηδενίζεται για $|\underline{r}| > d$ -όπου d είναι ένα εξαιρετικά μικρό διάστημα (π.χ. d της τάξης $10^{-6}m$)- το δε ολοκλήρωμά της ισούται με τη μονάδα:

$$K(\underline{r}) \geq 0, \quad \int K(\underline{r}) d\underline{r} = 1 \quad (2-9)$$

Το “μακροσκοπικό” μέγεθος $f(\underline{r})$ ορίζεται συναρτήσει του “μικροσκοπικού” μεγέθους $f_m(\underline{r})$ από τη σχέση (συνέλιξη):

$$f(\underline{r}) = \int d\underline{r}' K(\underline{r} - \underline{r}') f_m(\underline{r}') \quad (2-10)$$

Πρόκειται για ένα μέσο όρο της f_m σε έναν όγκο d^3 με κέντρο το σημείο \underline{r} .

Εφαρμόζοντας την (2-10) στην (2-3) προκύπτει η εξίσωση συνεχείας

$$\partial_t \rho(\underline{r}, t) + \nabla \cdot \underline{J}(\underline{r}, t) = 0 \quad (2-11)$$

που συνδέει τα “μακροσκοπικά” μεγέθη της (μέσης) πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου $\rho(\underline{r}, t)$ και της (μέσης) πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $\underline{J}(\underline{r}, t)$.

Επίσης, το μέσο ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(\underline{r})$ ικανοποιεί εξισώσεις αντίστοιχες των μικροσκοπικών, δηλαδή

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0} \quad (2-12)$$

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 \quad (2-13)$$

Για το ηλεκτρικό δυναμικό $U(\underline{r})$ έχουμε:

$$U(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\underline{r}' \quad \text{και} \quad (2-14)$$

$$\left[\nabla^2 U(\underline{r}) \equiv \Delta U(\underline{r}) \right] = -\frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0} \quad \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla U(\underline{r}) \quad (2-15)$$

Σημειώνεται ότι η (2-14) είναι ειδική λύση της εξίσωσης του Poisson, η γενική λύση της οποίας είναι $U(\underline{r}) + \Phi(\underline{r})$, όπου $\Phi(\underline{r})$ είναι τυχούσα λύση της εξίσωσης του Laplace $\Delta\Phi = 0$.

Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα των Gauss και Stokes, είναι δυνατόν οι εξισώσεις για το ηλεκτρικό πεδίο να διατυπωθούν σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\oint_S \underline{E} \cdot d\underline{s} \left[= \int_V \nabla \cdot \underline{E} dV \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon} Q \quad \text{και} \quad (2-16)$$

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{l} \left[= \int_S (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\underline{s} \right] = 0 \quad (2-17)$$

Στην (2-16) Q είναι το συνολικό φορτίο (αλγεβρικό άθροισμα των φορτίων) στο χώρο V που περικλείεται από την επιφάνεια S .

Υπενθυμίζεται ότι:

- απόκλιση = ροή /μονάδα όγκου
- στροβιλισμός = κυκλοφορία /μονάδα επιφάνειας

2.4 Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Στην περιοχή της ρευστομηχανικής που χαρακτηρίζεται ως *μαγνητορευστοδυναμική*, εξετάζονται, σε συνδυασμό με την *ηλεκτροδυναμική*, φαινόμενα ροής αγωγίμων ρευστών υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου. Από την αλληλεπίδραση ροής και πεδίου εμφανίζονται

ηλεκτρικά ρεύματα στο ρευστό, αναπτύσσονται ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που επηρεάζουν τη ροή και προκαλούνται μεταβολές στο μαγνητικό πεδίο.

Για την περιγραφή ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων εισάγονται τα δύο βασικά διανυσματικά μεγέθη: το ηλεκτρικό πεδίο $\underline{E}(r,t)$ και η μαγνητική επαγωγή $\underline{B}(r,t)$. Ειδικά, η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτισμένο (σημειακό) σωματίο μάζας m και φορτίου q , στη θέση \underline{r} με ταχύτητα \underline{u} είναι:

$$\underline{F}_{em} = q \underline{E}(r,t) + q \underline{u} \times \underline{B}(r,t) \quad (2-18)$$

Ο πρώτος όρος είναι η συνήθης ηλεκτροστατική δύναμη, ενώ ο δεύτερος, γνωστός ως δύναμη Lorentz, εμφανίζεται μόνο για κινούμενα σωματίδια.

Σημειώνεται ότι ο τύπος (2-18) δεν είναι απόλυτα ακριβής και ισχύει για ταχύτητες πολύ μικρότερες αυτής των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ($|\underline{u}| \ll c$).

Στη μακροσκοπική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού τα πεδία \underline{E} και \underline{B} προσδιορίζονται από την πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου $\rho_{el}(r,t)$ και την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος $\underline{J}_{el}(r,t)$ με βάση το σύστημα των (διαφορικών) εξισώσεων του Maxwell. Επειδή ενδιαφέρουν φαινόμενα σε συνεχή μέσα -και όχι στο κενό- είναι χρήσιμη η εισαγωγή των εξής διανυσματικών μεγεθών: της μετατόπισης $\underline{D}(r,t)$ και του μαγνητικού πεδίου $\underline{H}(r,t)$, τα οποία είναι συναρτήσεις των \underline{E} και \underline{B} , αντίστοιχα. Οι εξισώσεις της ηλεκτροδυναμικής γράφονται στη μορφή:

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho_{el} \quad (\text{Coulomb-Gauss}) \quad (2-19)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (\text{μη ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων}) \quad (2-20)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J}_{el} + \partial_t \underline{D} \quad (\text{Ampère-Maxwell}) \quad (2-21)$$

ηλεκτρικό ρεύμα \Rightarrow μαγνητικό πεδίο

$\partial_t \underline{D}$:όταν ηλεκτρομαγνητικά κύματα

$$\nabla \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \quad (\text{Faraday}) \quad (2-22)$$

μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο \Rightarrow ρεύμα

\underline{B} αλλάζει $\Rightarrow \underline{E} \Rightarrow \underline{J}(\underline{E})$

Από τις εξισώσεις (2-19) και (2-21) προκύπτει η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου:

$$\partial_t \rho_{el} + \nabla \cdot \underline{J}_{el} = 0 \quad (2-23)$$

Είναι συνθήκη για τη συμβατότητα των εξισώσεων της ηλεκτροδυναμικής. Μάλιστα, για την ικανοποίηση της (2-23) ο Maxwell πρότεινε την τροποποίηση του (πειραματικού) νόμου του Ampère με την προσθήκη του όρου $\partial_t \underline{D}$, του λεγομένου *ρεύματος μετατόπισης*.

Απόδειξη της (2-23):

$$(2-19) \Rightarrow \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \rho_{el} \quad (2-19\alpha)$$

$$(2-21) \Rightarrow \varepsilon_{klm} \frac{\partial H_l}{\partial x_k} \underline{e}_m = J_{el,j} \underline{e}_j + \frac{\partial D_i}{\partial t} \underline{e}_i \quad (2-21\alpha)$$

$$(2-19\alpha) \Rightarrow \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial D_i}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\stackrel{(2-21)}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\nabla \times \underline{H})_i - J_{el,i} \right] \stackrel{(2-21\alpha)}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{kli} \frac{\partial H_l}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial J_{el,i}}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} + \frac{\partial J_{el,i}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_t \rho_{el} + \nabla \cdot \underline{J}_{el} = \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_3 \partial x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_t \rho_{el} + \nabla \cdot \underline{J}_{el} = 0$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις πρέπει να συμπληρωθούν από τις “*συστατικές σχέσεις*” με τις οποίες τα μεγέθη \underline{D} και \underline{H} εκφράζονται συναρτήσει των \underline{E} και \underline{B} . Είναι πειραματικό δεδομένο ότι στο κενό

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu_0 \underline{H} \quad (2-24\alpha, \beta)$$

όπου $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ είναι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού ή διηλεκτρική σταθερά, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-17} \text{ H m}^{-1}$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} = c^2$ με c την ταχύτητα του φωτός στο κενό, $c = 299.792.458 \text{ m s}^{-1}$ ακριβώς!

Στα προβλήματα που ενδιαφέρουν εδώ, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις της μορφής (2-24) με σταθερές ε και μ που χαρακτηρίζουν το υλικό.

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} \text{ καλή προσέγγιση}$$

$$\boxed{\underline{B} = \mu \underline{H}} \text{ για μικρές ταχύτητες (σε σχέση με } c \text{)}$$

Γενικά, όμως, τα ϵ και μ είναι συναρτήσεις διαφόρων μεγεθών, ειδικά δε της συχνότητας στην περίπτωση ταλαντώσεων. (Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι ταχύτητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων).

Για τη φαινομενολογική περιγραφή των μακροσκοπικών φαινομένων σε υλικά μέσα, χρειάζεται να έχουμε τη σχέση της πυκνότητας ρεύματος \underline{J}_{el} με τα πεδία \underline{E} και \underline{B} . Θεωρούμε ότι η σχέση είναι γραμμική και δίνεται από τον (τοπικό) νόμο του Ohm:

$$\underline{J}_{el}(\underline{r}, t) = \sigma \underline{E}'(\underline{r}, t) \quad (2-25)$$

όπου σ είναι η ειδική αγωγιμότητα του υλικού και \underline{E}' το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το υλικό μέσο -στην προκειμένη περίπτωση το ρευστό- είναι (στιγμιαία) ακίνητο. Για τον προσδιορισμό του $\underline{E}'(\underline{r}, t)$ είναι αναγκαίο να μετασχηματιστούν οι εξισώσεις (2-19) έως και (2-22) σε ένα νέο σύστημα αναφοράς που κινείται ως προς το αρχικό με ταχύτητα $\underline{u}(\underline{r}, t)$, την ταχύτητα του ρευστού στη θέση \underline{r} τη χρονική στιγμή t . Το πρόβλημα αυτό δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο, αλλά χρειάζεται να διερευνηθεί με προσοχή, διότι οι εξισώσεις του Maxwell είναι συναλλοιώτες ως προς τους μετασχηματισμούς του Lorentz και όχι αυτούς του Γαλιλαίου. Προκύπτει, πάντως, ότι για μικρές ταχύτητες (μη-σχετικιστική προσέγγιση, $|\underline{u}| \ll c$) έχουμε τη σχέση $\underline{E}' = \underline{E} + \underline{u} \times \underline{B}$ και, κατά συνέπεια, ο νόμος του Ohm για κινούμενο μέσο είναι:

$$\underline{J}_{el}(\underline{r}, t) = \sigma \left[\underline{E}(\underline{r}, t) + \underline{u}(\underline{r}, t) \times \underline{B}(\underline{r}, t) \right] \quad (2-26)$$

Επισημαίνεται η ομοιότητα της εξίσωσης (2-26) με την εξίσωση (2-18) για τη δύναμη του Lorentz.

Σχετικά με εφαρμογές στη μαγνητορευστοδυναμική, επιτρέπεται συχνά η απλοποίηση των εξισώσεων της ηλεκτροδυναμικής για δύο λόγους. Ο ένας είναι ότι, σε κάθε οσοδήποτε μικρό αλλά μακροσκοπικό όγκο του αγωγίμου μέσου οι πυκνότητες θετικών και αρνητικών φορτίων είναι πρακτικά ίσες. Άρα στην εξίσωση (2-19) η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου μπορεί να θεωρηθεί μηδενική ($\rho_{el} \approx 0$, μέσο “οιονεί ουδέτερο” (quasi - neutral)). Ο δεύτερος λόγος είναι ότι, επειδή η αγωγιμότητα είναι μεγάλη, πρέπει το ηλεκτρικό πεδίο $|\underline{E}| \sim |\underline{u}| |\underline{B}|$ -δεν ενδιαφέρουν εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία- και, για μικρές ταχύτητες και ταλαντώσεις με μικρές συχνότητες, στην εξίσωση (2-21) μπορεί να παραληφθεί το ρεύμα μετατόπισης του Maxwell.

2.5 Μαγνητοϋδροδυναμική

Εξετάζεται η σχετικά απλή περίπτωση ασυμπίεστου αγώγιμου ρευστού, στο οποίο ασκούνται δυνάμεις που επάγονται από εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται ως *μαγνητοϋδροδυναμική* (*magnetohydrodynamics* - MHD), ενίοτε όμως, ο όρος χρησιμοποιείται και για συμπίεστα ρευστά. Το πεδίο της ταχύτητας $\underline{u}(\underline{r}, t)$ του ρευστού είναι *σωληνοειδές* και ικανοποιεί την εξίσωση των *Navier - Stokes* (Νευτώνειο ρευστό):

$$\nabla \cdot \underline{u}(\underline{r}, t) = 0 \quad (2-27)$$

$$\rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{u} + \underline{f}_{em} \quad (2-28)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, p η πίεση, η ο συντελεστής ιξώδους και \underline{f}_{em} η ηλεκτρομαγνητική δύναμη (ανά μονάδα όγκου). Έχουν αγνοηθεί άλλες δυνάμεις που τυχόν δρουν στο ρευστό, ειδικά δε η δύναμη της βαρύτητας που είναι γενικά αμελητέα (εκτός ορισμένων προβλημάτων αστροφυσικής).

Η έκφραση της \underline{f}_{em} προκύπτει εύκολα από την εξίσωση (2-18), διότι είναι ο μέσος όρος των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων που ασκούνται στα φορτισμένα σωμάτια σε ένα στοιχειώδη όγκο δV . Εάν $\langle a_{micr} \rangle$ συμβολίζει το μακροσκοπικό “μέσο όρο” ενός μικροσκοπικού μεγέθους, τότε οι (μακροσκοπικές) πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου και ρεύματος ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\rho_{el}(\underline{r}) \approx \left\langle \sum_k q_k \right\rangle / \delta V, \quad \underline{J}_{el}(\underline{r}) \approx \left\langle \sum_k q_k \underline{u}_k \right\rangle / \delta V \quad (2-29)$$

Τα αθροίσματα περιλαμβάνουν όλα τα σωμάτια μέσα στον όγκο δV γύρω από τη θέση που ορίζεται από το διάνυσμα \underline{r} . Προφανώς, οι σχέσεις (2-29) είναι «ακριβείς» στο όριο $\delta V \rightarrow 0$, αλλά δεν είναι αναγκαίο εδώ να διερευνηθεί αυστηρά αυτό το σημείο. Επομένως:

$$\underline{f}_{em} = \rho_{el} \underline{E} + \underline{J}_{el} \times \underline{B} \quad (= \underline{J}_{el} \times \underline{B}) \quad (2-30)$$

όπου η απαλοιφή του όρου $\rho_{el} \underline{E}$ στηρίζεται στη συνθήκη της “οιονεί ουδετερότητας” $\rho_{el} \approx 0$ του ρευστού. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ampère (εξίσωση (2-21) χωρίς το ρεύμα μετατόπισης του Maxwell), έχουμε τελικά:

$$\boxed{\underline{f} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{2} \nabla |\underline{B}|^2 - (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} \right]} \quad (2-31)$$

Απόδειξη της (2-31):

$$(2-21) \Rightarrow \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_{el} \quad (2-21\beta)$$

$$\underline{B} = \mu \underline{H} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{\mu} \underline{B} \quad (2-32)$$

$$(2-21\beta) \wedge (2-32) \Rightarrow \boxed{\underline{J}_{el} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{B}} \quad (2-33)$$

$$(2-30) \Rightarrow \underline{f} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{ijk} (\nabla \times \underline{B})_i B_j \underline{e}_k = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} \frac{\partial B_m}{\partial x_l} B_j \underline{e}_k$$

Έστω η συνιστώσα της δύναμης για $k=3$:

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{\mu} \varepsilon_{ij3} \varepsilon_{ilm} B_j \frac{\partial B_m}{\partial x_l} = \frac{1}{\mu} \left(\varepsilon_{123} \varepsilon_{123} B_2 \frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{123} \varepsilon_{132} B_2 \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \varepsilon_{213} \varepsilon_{213} B_1 \frac{\partial B_3}{\partial x_1} + \varepsilon_{213} \varepsilon_{231} B_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(B_2 \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - B_2 \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + B_1 \frac{\partial B_3}{\partial x_1} - B_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{\mu} \left(B_i \frac{\partial B_3}{\partial x_i} - B_j \frac{\partial B_j}{\partial x_3} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(B_i \frac{\partial B_3}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial (B_j B_j)}{\partial x_3} \right) = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |\underline{B}|^2}{\partial x_3} - (\underline{B} \cdot \nabla) B_3 \right) \end{aligned}$$

Η ροή όμως -πιο σωστά το ηλεκτρικό ρεύμα στο ρευστό- επηρεάζει το πεδίο. Από τους νόμους του Ohm και Ampère, εξισώσεις (2-26) και (2-21), υπολογίζουμε την περιστροφή $\nabla \times \underline{J}$

$$\nabla \times \underline{J} = \sigma [\nabla \times \underline{E} + \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B})] = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \underline{B}) \quad (2-34)$$

και χρησιμοποιώντας ταυτότητες του διανυσματικού λογισμού, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (2-27) και (2-20), έχουμε

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \underline{B} - (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{B} \quad (2-35)$$

Απόδειξη της (2-35):

$$(2-34) \Rightarrow \nabla \times \underline{E} = \frac{1}{\sigma \mu} \nabla \times (\nabla \times \underline{B}) - \nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) \quad (2-34\alpha)$$

Ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{B}) - \nabla^2 \underline{B}$$

$$\nabla \times (\underline{u} \times \underline{B}) = \underline{u}(\nabla \cdot \underline{B}) - \underline{B}(\nabla \cdot \underline{u}) + (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{B}$$

$$(2-34\alpha) \Rightarrow \nabla \times \underline{E} = \frac{1}{\sigma \mu} \left[\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \underline{B}}_{=0}) - \nabla^2 \underline{B} \right] - \left[\underline{u}(\underbrace{\nabla \cdot \underline{B}}_{=0}) - \underline{B}(\underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_{=0}) + (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{B} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \underline{B} - (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{B}$$

$$(2-28) \wedge (2-31) \Rightarrow \rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{u} - \frac{1}{2\mu} \nabla |\underline{B}|^2 + \frac{1}{\mu} (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = -\frac{1}{\rho} \left(\nabla p + \frac{1}{2\mu} \nabla |\underline{B}|^2 \right) + \nu \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{\mu \rho} (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{1}{2\mu} |\underline{B}|^2 \right) + \nu \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{\mu \rho} (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{B}$$

$$(2-22) \wedge (2-35) \Rightarrow -\partial_t \underline{B} = -\frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \underline{B} - (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_t \underline{B} = (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{B} + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \underline{B}$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής ασυμπίεστου ρευστού είναι:

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0} \quad (2-27)$$

$$\boxed{\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{\mu \rho} (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{B}} \quad (2-36)$$

$$\boxed{P = p + \frac{1}{2\mu} |\underline{B}|^2} \quad (2-37)$$

$$\boxed{\partial_t \underline{B} = (\underline{B} \cdot \nabla)\underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{B} + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \underline{B}} \quad (2-38)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{B} = 0} \quad (2-20)$$

όπου ν είναι ο συντελεστής κινηματικού ιξώδους, ρ η πυκνότητα του ρευστού, μ η μαγνητική διαπερατότητα και σ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού.

Σημειώνεται ότι το γινόμενο $(\sigma \mu)^{-1}$ καλείται συχνά *συντελεστής μαγνητικής διάχυσης*, ενώ στην εξίσωση (2-36) η συνολική πίεση P είναι το άθροισμα της πίεσης p και της λεγομένης *μαγνητικής πίεσης* $|B|^2/2\mu$. Ο λόγος της p προς τη μαγνητική πίεση $\beta = 2\mu p/|B|^2$ είναι μία βασική παράμετρος, γνωστή ως *β-αριθμός* (*β-number*), που χαρακτηρίζει τις διατάξεις μαγνητικής συγκράτησης πλάσματος.

Προκειμένου να γραφούν οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής σε αδιάστατη μορφή, έστω u_o , l_o και B_o είναι, αντίστοιχα, τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ταχύτητας, του μήκους και της μαγνητικής επαγωγής. Κατά συνέπεια, $t_o = l_o / u_o$ και $p_o = \rho u_o^2$. Τα αδιάστατα μεγέθη συμβολίζονται με αστερίσκο και είναι:

$$\underline{u}^* = \frac{u}{u_o}, \quad \underline{x}^* = \frac{x}{l_o}, \quad \underline{B}^* = \frac{B}{B_o}, \quad t^* = \frac{t}{t_o}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_o^2} \quad (2-39)$$

$$(2-27) \Rightarrow \nabla^* \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &= \frac{\partial(\underline{u}^* u_o)}{\partial(t^* t_o)} = u_o \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} = u_o \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} \frac{dt^*}{dt} = u_o \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} \frac{1}{t_o} \Rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \left(\frac{u_o}{t_o} \right) \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} \\ \nabla^2 \underline{u} &= \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_o}{l_o} \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial x_i^*} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\frac{u_o}{l_o} \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{dx^*}{dx} = \frac{u_o}{l_o} \frac{\partial^2 \underline{u}^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*} \frac{1}{l_o} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla^2 \underline{u} = \left(\frac{u_o}{l_o^2} \right) \nabla^{*2} \underline{u}^* \Rightarrow \nabla^2 \underline{u} = \left(\frac{u_o}{l_o^2} \right) \Delta^* \underline{u}^* \end{aligned}$$

$$(2-36) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{u_o}{t_o} \right) \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} + \left(\frac{u_o^2}{l_o} \right) (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* = - \left(\frac{\rho u_o^2}{\rho l_o} \right) \nabla^* P^* + \left(\frac{\nu u_o}{l_o^2} \right) \Delta^* \underline{u}^* + \left(\frac{B_o^2}{\mu \rho l_o} \right) (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) \underline{B}^* \\ &\Rightarrow \left(\frac{l_o}{t_o u_o} \right) \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} + (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* = - \nabla^* P^* + \underbrace{\left(\frac{\nu}{l_o u_o} \right)}_{\text{Re}} \Delta^* \underline{u}^* + \underbrace{\left(\frac{B_o^2}{\rho \mu u_o^2} \right)}_{R_h} (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) \underline{B}^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} + (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* = - \nabla^* P^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \underline{u}^* + R_h (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) \underline{B}^* \end{aligned} \quad (2-41)$$

$$(2-37) \Rightarrow P = \rho u_o^2 p^* + \frac{B_o^2}{2\mu} |\underline{B}^*|^2 \Rightarrow \frac{P}{\rho u_o^2} = p^* + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{B_o^2}{\rho \mu u_o^2} \right)}_{R_h} |\underline{B}^*|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P^* = p^* + \frac{R_h}{2} |\underline{B}^*|^2} \quad (2-42)$$

$$(2-38) \Rightarrow \left(\frac{B_o}{l_o} \right) \frac{\partial \underline{B}^*}{\partial t^*} = \left(\frac{B_o u_o}{l_o} \right) (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* - \left(\frac{u_o B_o}{l_o} \right) (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{B}^* + \left(\frac{B_o}{\sigma \mu l_o^2} \right) \Delta^* \underline{B}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{l_o}{t_o u_o} \right) \frac{\partial \underline{B}^*}{\partial t^*} = (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* - (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{B}^* + \frac{1}{\underbrace{(\sigma \mu l_o u_o)}_{R_m}} \Delta^* \underline{B}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{B}^*}{\partial t^*} = (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) \underline{u}^* - (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) \underline{B}^* + \frac{1}{R_m} \Delta^* \underline{B}^*} \quad (2-43)$$

$$(2-20) \Rightarrow \boxed{\nabla^* \cdot \underline{B}^* = 0} \quad (2-44)$$

Παραλείποντας τον αστερίσκο, οι εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής ασυμπίεστου ρευστού σε αδιάστατη μορφή, γράφονται ως εξής:

$$(2-40) \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0} \quad (2-45)$$

$$(2-41) \Rightarrow \boxed{\partial_i \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \underline{u} + R_h (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}} \quad (2-46)$$

$$(2-42) \Rightarrow \boxed{P = p + \frac{R_h}{2} |\underline{B}|^2} \quad (2-47)$$

$$(2-43) \Rightarrow \boxed{\partial_i \underline{B} = (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{u} - (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{B} + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \underline{B}} \quad (2-48)$$

$$(2-44) \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{B} = 0} \quad (2-49)$$

Ορίζονται οι παράμετροι:

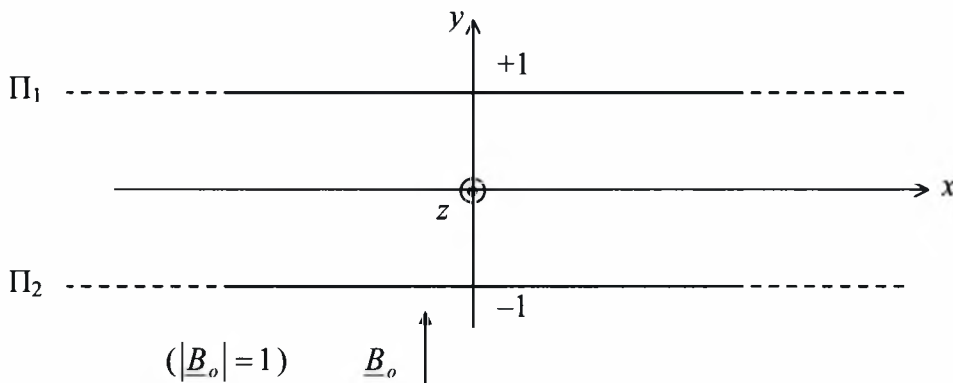
$$\text{Re} = \frac{l_o u_o}{\nu} \quad \text{αριθμός Reynolds}$$

$R_m = \sigma \mu l_o u_o$ μαγνητικός αριθμός Reynolds

$R_h = \frac{B_o^2}{\rho \mu u_o^2}$ αριθμός μαγνητικής πίεσης

2.6 Παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής

Μια απλή εφαρμογή των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής (σε αδιάστατη μορφή) είναι η περίπτωση μόνιμης ροής σε παράλληλες μονωτικές πλάκες, Π_1 και Π_2 και ομογενές εξωτερικό πεδίο \underline{B}_o . Είναι η ροή Poiseuille στην υδροδυναμική που μελετήθηκε από τον Hartmann για αγωγίμα ρευστά. Σχηματικά έχουμε τη διάταξη:



Το εξωτερικό πεδίο είναι κάθετο προς τις πλάκες και ο άξονας x είναι κατά την κατεύθυνση της ροής. Η ροή θεωρείται αναπτυσσόμενη, δηλαδή από μαθηματική άποψη οι πλάκες είναι απείρων διαστάσεων (ως προς x και z). Για λόγους συμμετρίας τα μεγέθη -που εξ' υποθέσεως δεν εξαρτώνται από το χρόνο- είναι συναρτήσεις μόνο της συντεταγμένης y , με εξαίρεση την πίεση που εξαρτάται (γραμμικά) από το x .

Για τις συνιστώσες u_y , B_y και J_y έχουμε:

$$(2-45) \Rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_y(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow u_y = C_1$$

$$(2-49) \Rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow B_y = C_2$$

$$(2-23) \Rightarrow \nabla \cdot \underline{J}_{el} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow J_y = C_3$$

Οι σταθερές C_1 , C_2 , C_3 προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες:

$$\underline{u}(y = \pm 1) = \underline{0} \Rightarrow C_1 = 0$$

$$B_y(y \geq 1) = B_o = 1 \Rightarrow C_2 = B_o = 1$$

$$J_y(y = \pm 1) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από το ότι εξετάζουμε την περίπτωση μονωτικών πλακών.

Προβάλλοντας την εξίσωση (2-46) στους τρεις άξονες, έχουμε:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 u_x}{dy^2} + R_h \frac{dB_x}{dy} \quad (2-50\alpha)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow P = P(x) \quad (2-50\beta)$$

$$0 = R_h \frac{dB_z}{dy} \quad (2-50\gamma)$$

Ομοίως από την εξίσωση (2-48):

$$0 = \frac{du_x}{dy} + \frac{1}{R_m} \frac{d^2 B_x}{dy^2} \quad (2-51\alpha)$$

$$0 = 0 \quad (2-51\beta)$$

$$0 = \frac{1}{R_m} \frac{d^2 B_z}{dy^2} \quad (2-51\gamma)$$

$$(2-50\alpha), (2-50\beta) \Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{1}{\text{Re}} C \quad (\text{σταθερά}) \quad (2-52)$$

$$(2-50\alpha) \wedge (2-52) \Rightarrow \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 u_x}{dy^2} + R_h \frac{dB_x}{dy} = \frac{1}{\text{Re}} C \quad (2-53)$$

Το πρόβλημα τελικά ανάγεται στο σύστημα ($u_x = u$, $B_x = b$):

$$(2-53) \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} + \text{Re} R_h \frac{db}{dy} = C \quad (2-54)$$

$$(2-51\alpha) \Rightarrow \frac{d^2 b}{dy^2} + R_m \frac{du}{dy} = 0 \quad (2-55)$$

Οριακές συνθήκες:

$$u(y = \pm 1) = 0, \quad b(y = \pm 1) = 0$$

Η πρώτη οριακή συνθήκη είναι η συνθήκη μη-ολίσθησης της υδροδυναμικής. Η δεύτερη, προκύπτει από το νόμο του Ampère (χωρίς το ρεύμα μετατόπισης) και το γεγονός ότι σε

μονωτικό τοίχωμα δεν έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα. (Για τα αγωγίμα -μεταλλικά- τοιχώματα το πρόβλημα των οριακών συνθηκών για το μαγνητικό πεδίο απαιτεί λεπτομερέστερη ανάλυση).

Η σταθερά C προσδιορίζεται από χαρακτηριστικό της ροής, π.χ. μέση ταχύτητα της ροής,

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy, \text{ δηλαδή τη συνολική ροή (ανά μονάδα πλάτους).}$$

Η ταχύτητα δίνεται από τη συνάρτηση:

$$u(y) = R \frac{\cosh R - \cosh(Ry)}{R \cosh R - \sinh R}$$

με $\bar{u} = 1$ και $R = Ha$, τον λεγόμενο αριθμό του Hartmann

$$R = Ha = \sqrt{\text{Re } R_h R_m}$$

Η μαγνητική επαγωγή είναι:

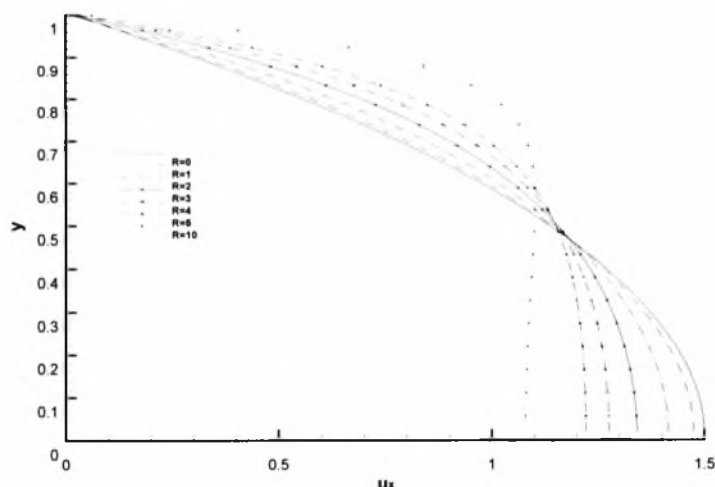
$$b(y) = \frac{1}{\text{Re } R_h} \frac{R^2 \sinh R}{R \cosh R - \sinh R} \left[-y + \frac{\sinh(Ry)}{\sinh R} \right]$$

Για $R = 0$ ($\Rightarrow \sinh R = 0$ και $\cosh R = 1$ και, εφαρμόζοντας τρεις φορές τον κανόνα του L' Hospital) η ταχύτητα είναι

$$u(y)|_{R=0} = \frac{3}{2}(1 - y^2),$$

η γνωστή παραβολική μορφή της ροής Poiseuille.

Το διάγραμμα που ακολουθεί δίνει την κατανομή ταχύτητας για διάφορες τιμές του αριθμού Hartmann, όπως αυτή υπολογίστηκε με τον κώδικα DIAN3D σε μελέτη για αναπτυσσόμενη ροή σε πεπερασμένες πλάκες.



2.7 Παράδειγμα εφαρμογής των εξισώσεων μαγνητοϋδροδυναμικής και συναγωγής

Θεωρούμε την περίπτωση μόνιμης, ασυμπίεστης και στρωτής ροής ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού (με σταθερές φυσικές ιδιότητες), το οποίο βρίσκεται μέσα σε διδιάστατη τετράγωνη κοιλότητα με μήκος πλευρών $H(=1m)$. Η πάνω και κάτω επιφάνειες της κοιλότητας είναι πλήρως μονωμένες, ενώ οι κάθετες πλευρές βρίσκονται σε σταθερές θερμοκρασίες T_H και T_C , αντίστοιχα. Εφαρμόζεται ομογενές εξωτερικό μαγνητικό πεδίο έντασης \underline{B}_o , παράλληλο προς τις μονωμένες πλευρές της κοιλότητας. Οι δυνάμεις που επιδρούν στο ρευστό είναι η δύναμη άωσης και η ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz (δύναμη υστέρησης). Το φαινόμενο Joule και η ιξώδης διάχυση θεωρούνται μηδενικά.

Η επίδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εισάγεται στις εξισώσεις της κίνησης σύμφωνα με τον όρο $\underline{J}_{el} \times \underline{B}$, το εξωτερικό γινόμενο της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος και της έντασης του μαγνητικού πεδίου (δύναμη Lorentz).

$$(2-30) \wedge (2-31) \Rightarrow \underline{J}_{el} \times \underline{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = -\nabla \left(\frac{1}{2\mu} |\underline{B}|^2 \right) + \frac{1}{\mu} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B}$$

Ο πρώτος όρος της ανωτέρω εξίσωσης μπορεί να συμπεριληφθεί στον όρο της πίεσης, ενώ λαμβάνεται υπόψη και το εσωτερικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω της κίνησης του ρευστού. Επειδή, όμως, στα προβλήματα φυσικής συναγωγής οι ταχύτητες του ρευστού είναι σχετικά μικρές, η επίδραση του επαγόμενου εσωτερικού μαγνητικού πεδίου μπορεί να παραληφθεί (μοντέλο χαμηλού R_m).

Οι εξισώσεις ροής και μεταφοράς στην κοιλότητα έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{συνέχεια}) \quad (2-27\alpha)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\mu \rho} \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (\text{x-ορμή}) \quad (2-56)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta \Delta T + \frac{1}{\mu \rho} \left(B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \quad (\text{y-ορμή}) \quad (2-57)$$

$$P = p + \frac{1}{2\mu} |\underline{B}|^2 \quad (2-37)$$

$$u \frac{\partial B_x}{\partial x} + v \frac{\partial B_x}{\partial y} = B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \right) \quad (\text{μαγνητικό πεδίο, x-δ/νση}) \quad (2-58)$$

$$u \frac{\partial B_y}{\partial x} + v \frac{\partial B_x}{\partial y} = B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sigma \mu} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \right) \quad (\text{μαγνητικό πεδίο, } \gamma\text{-}\delta/\nu\sigma) \quad (2-59)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{μη ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων}) \quad (2-20\alpha)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{ενέργεια}) \quad (2-60)$$

όπου ν είναι ο συντελεστής κινηματικού ιξώδους, ρ η πυκνότητα του ρευστού, μ η μαγνητική διαπερατότητα και σ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού.

Οι εξισώσεις ροής και μεταφοράς μπορούν να αδιαστατοποιηθούν εισάγοντας τις ακόλουθες αδιάστατες μεταβλητές:

$$x^* = \frac{x}{H}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad u^* = \frac{uH}{\nu}, \quad v^* = \frac{vH}{\nu}, \quad T^* = \frac{T - T_o}{\Theta}, \quad B_x^* = \frac{B_x}{B_o}, \quad B_y^* = \frac{B_y}{B_o}, \quad p^* = \frac{\rho H^2}{\rho \nu^2}$$

Η ανωτέρω αδιαστατοποίηση για τις συνιστώσες της ταχύτητας αποτελεί φυσική επιλογή όταν δεν υπάρχει χαρακτηριστική ταχύτητα -όπως συμβαίνει σε ροές φυσικής συναγωγής. Έτσι, για την αδιαστατοποίηση των συνιστωσών της ταχύτητας χρησιμοποιούνται το χαρακτηριστικό μήκος H και η μοριακή διαχυτότητα ορμής $\nu [=] m^2/s$. Επίσης, Θ (στην εξεταζόμενη περίπτωση $\Theta = T_H - T_o$) είναι η χαρακτηριστική διαφορά θερμοκρασίας που χρησιμοποιείται για την αδιαστατοποίηση του $\Delta T = T - T_o$.

$$(2-27\alpha) \Rightarrow \left(\frac{\nu}{H^2} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\nu}{H^2} \right) \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0} \quad (2-61)$$

$$(2-56) \Rightarrow \left[\left(\frac{\nu}{H} \right)^2 \frac{1}{H} \right] \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{1}{\rho} \left[\rho \left(\frac{\nu}{H} \right)^2 \frac{1}{H} \right] \frac{\partial P^*}{\partial x^*} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\nu}{H} \frac{1}{H^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) + \left(\frac{B_o^2}{\rho \mu H} \right) \left(B_x^* \frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial B_x^*}{\partial y^*} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\nu^2}{H^3} \right) \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \left(\frac{\nu^2}{H^3} \right) \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\nu^2}{H^3} \right) \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{B_o^2}{\rho\mu H} \right) \left(B_x^* \frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial B_x^*}{\partial y^*} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) + \underbrace{\left(\frac{B_o^2 H^2}{\rho\mu\nu^2} \right)}_{R_h} \left(B_x^* \frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial B_x^*}{\partial y^*} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \boxed{(\underline{u}^* \cdot \nabla^*) u^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \Delta^* u^* + R_h (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) B_x^*} \quad (2-62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2-57) \Rightarrow & \left[\left(\frac{\mathbf{v}}{H} \right)^2 \frac{1}{H} \right] \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{1}{\rho} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{v}}{H} \right)^2 \frac{1}{H} \right] \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \\
& + v^* \left(\frac{\mathbf{v}}{H} \frac{1}{H^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + g\beta\Theta T^* + \left(\frac{B_o^2}{\rho\mu H} \right) \left(B_x^* \frac{\partial B_y^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \left(\frac{\mathbf{v}^2}{H^3} \right) \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\left(\frac{\mathbf{v}^2}{H^3} \right) \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\mathbf{v}^2}{H^3} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \\
& + g\beta\Theta T^* + \left(\frac{B_o^2}{\rho\mu H} \right) \left(B_x^* \frac{\partial B_y^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \underbrace{\left(\frac{g\beta\Theta H^3}{\mathbf{v}^2} \right)}_{Gr} T^* + \\
& + \underbrace{\left(\frac{B_o^2 H^2}{\rho\mu\nu^2} \right)}_{R_h} \left(B_x^* \frac{\partial B_y^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \boxed{(\underline{u}^* \cdot \nabla^*) v^* = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \Delta^* v^* + Gr T^* + R_h (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) B_y^*} \quad (2-63)
\end{aligned}$$

$$(2-37) \Rightarrow P = \left[\rho \left(\frac{v}{H} \right)^2 \right] p^* + \frac{1}{2\mu} B_o^2 |\underline{B}^*|^2 \Rightarrow \frac{PH^2}{\rho v^2} = p^* + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{B_o^2 H^2}{\rho \mu v^2} \right)}_{R_h} |\underline{B}^*|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P^* = p^* + \frac{R_h}{2} |\underline{B}^*|^2} \quad (2-64)$$

$$(2-58) \Rightarrow \left(\frac{B_o v}{H^2} \right) \left(u^* \frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial B_x^*}{\partial y^*} \right) = \left(\frac{B_o v}{H^2} \right) \left(B_x^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) +$$

$$+ \left(\frac{B_o}{\sigma \mu H^2} \right) \left(\frac{\partial^2 B_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^* \frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial B_x^*}{\partial y^*} = \left(B_x^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \underbrace{\frac{1}{(\sigma \mu v)}}_{R_m} \left(\frac{\partial^2 B_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(\underline{u}^* \cdot \nabla^*) B_x^* = (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) u^* + \frac{1}{R_m} \Delta^* B_x^*} \quad (2-65)$$

$$(2-59) \Rightarrow \left(\frac{B_o v}{H^2} \right) \left(u^* \frac{\partial B_y^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} \right) = \left(\frac{B_o v}{H^2} \right) \left(B_x^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) +$$

$$+ \left(\frac{B_o}{\sigma \mu H^2} \right) \left(\frac{\partial^2 B_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^* \frac{\partial B_y^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} = \left(B_x^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + B_y^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \underbrace{\frac{1}{(\sigma \mu v)}}_{R_m} \left(\frac{\partial^2 B_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(\underline{u}^* \cdot \nabla^*) B_y^* = (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) v^* + \frac{1}{R_m} \Delta^* B_y^*} \quad (2-66)$$

$$(2-20\alpha) \Rightarrow \left(\frac{B_o}{H} \right) \left(\frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial B_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial B_y^*}{\partial y^*} \right) = 0} \quad (2-67)$$

$$(2-60) \Rightarrow \left(\frac{\nu \Theta}{H^2} \right) \left(u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = \left(\frac{\kappa \Theta}{H^2} \right) \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(u^* \cdot \nabla^*) T^* = \frac{1}{Pr} \Delta^* T^*} \quad (2-68)$$

Ορίζονται οι παράμετροι:

$$Gr = \frac{g\beta\Theta H^3}{\nu^2} \quad \text{αριθμός Grashof}$$

$$R_m = \sigma \mu \nu \quad \text{μαγνητικός αριθμός Reynolds}$$

$$R_h = \frac{B_o^2 H^2}{\rho \mu \nu^2} \quad \text{αριθμός μαγνητικής πίεσης}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{αριθμός Prandtl}$$

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta\Theta H^3}{\nu \kappa} \quad \text{αριθμός Rayleigh}$$

Ο αριθμός Gr, που αποτελεί μια σημαντική αδιάστατη ομάδα μεταβλητών στη φυσική συναγωγή, εκφράζει την επίδραση των ανωστικών δυνάμεων σε σχέση με τις δυνάμεις ιξώδους που επιδρούν στο ρευστό. Ο αριθμός Pr εκφράζεται από το λόγο του κινηματικού ιξώδους (διαχυτότητα ορμής) προς τη θερμική διαχυτότητα κ . Ο αριθμός Rayleigh που συναντάται στα φαινόμενα φυσικής συναγωγής, σχετίζεται με την εμφάνιση μιας μεταβατικής κατάστασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή, η οποία εξαρτάται από το σχετικό μέγεθος των δυνάμεων άνωσης και ιξώδους στο ρευστό. Σε προβλήματα φυσικής συναγωγής, αν ισχύει $Ra \leq 10^9$ η ροή είναι στρωτή. Οι συσχετίσεις για τυρβώδη ροή στηρίζονται κατά κανόνα σε πειραματικά αποτελέσματα.

Σε πολλές εφαρμογές η θερμοκρασιακή διαφορά Θ δεν είναι γνωστή, αλλά μπορεί να μετρηθεί η σταθερή ροή θερμότητας Q που περνάει από κάποια πηγή. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα που μελετάται το φαινόμενο της φυσικής συναγωγής γύρω από μια θερμαινόμενη γραμμική πηγή, μπορεί είτε να μετρηθεί η θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ της πηγής και του περιβάλλοντος ρευστού μακριά από αυτή, είτε να προσδιοριστεί η ποσότητα της σταθερής

θερμοροής που εκλύεται από τη γραμμική πηγή. Σε περιπτώσεις, λοιπόν, που η ροή θερμότητας του προβλήματος είναι γνωστή και, όταν η θερμοροή εκφράζει το ρυθμό θερμότητας ανά μονάδα μήκους (W/m), οι αριθμοί Ra και Gr τροποποιούνται ως εξής:

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta QH^3}{\rho c_p \nu \kappa^2}, \quad Gr = \frac{g\beta QH^3}{\rho c_p \nu^2 \kappa}$$

Όταν η θερμοροή εκφράζει το ρυθμό θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας (W/m^2), οι σχέσεις που δίνουν τους αριθμούς Ra και Gr παίρνουν τη μορφή:

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta QH^4}{\rho c_p \nu \kappa^2}, \quad Gr = \frac{g\beta QH^4}{\rho c_p \nu^2 \kappa}$$

Ο αριθμός Hartmann που συναντάται στα προβλήματα μαγνητοϋδροδυναμικής ορίζεται ως εξής:

$$Ha^2 = R_h R_m = \frac{\sigma B_o^2 H^2}{\rho \nu}$$

Έτσι, οι αδιάστατες εξισώσεις της ορμής μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας τον αριθμό Hartmann (αντί του αριθμού μαγνητικής πίεσης R_h):

$$(2-62) \Rightarrow (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) u^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \Delta^* u^* + \frac{Ha^2}{R_m} (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) B_x^* \quad (2-62a)$$

$$(2-63) \Rightarrow (\underline{u}^* \cdot \nabla^*) v^* = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \Delta^* v^* + Gr T^* + \frac{Ha^2}{R_m} (\underline{B}^* \cdot \nabla^*) B_y^* \quad (2-63a)$$

2.8 Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη χωρίς εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη (δύναμη Lorentz), δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{f}_{em} = \underline{J}_{el} \times \underline{B} \quad (2-30)$$

Από το νόμο του Ohm για κινούμενο μέσο και, θεωρώντας ότι δεν έχουμε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, προκύπτει:

$$(2-26) \Rightarrow \boxed{\underline{J}_{el} = \sigma (\underline{u} \times \underline{B})} \quad (2-26\alpha)$$

$$(2-30) \wedge (2-26\alpha) \Rightarrow \boxed{\underline{f}_{em} = \sigma (\underline{u} \times \underline{B}) \times \underline{B}} \Rightarrow \underline{f}_{em} = \sigma [(\underline{u} \cdot \underline{B}) \underline{B} - (\underline{B} \cdot \underline{B}) \underline{u}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f}_{em} = \sigma [(\underline{u} \cdot \underline{B}) \underline{B} - |\underline{B}|^2 \underline{u}] \quad (2-69)$$

Έστω $\underline{u}_{\parallel}$ και \underline{u}_{\perp} οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας \underline{u} , η παράλληλη προς το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής και η κάθετη στο \underline{B} , αντίστοιχα. Επίσης, συμβολίζουμε με \underline{e}_B το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της μαγνητικής επαγωγής.

$$(2-69) \Rightarrow \underline{f}_{em} = \sigma \left\{ \left[|\underline{B}| \underbrace{|\underline{u}| \cos(\hat{u}, \underline{B})}_{|\underline{u}_{\parallel}|} \right] \underline{B} - |\underline{B}|^2 \underline{u} \right\} \Rightarrow \underline{f}_{em} = \sigma \left[(|\underline{B}| |\underline{u}_{\parallel}|) \underline{B} - |\underline{B}|^2 \underline{u} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f}_{em} = \sigma (|\underline{B}|^2 |\underline{u}_{\parallel}| \underline{e}_B - |\underline{B}|^2 \underline{u}) \Rightarrow \underline{f}_{em} = \sigma (|\underline{B}|^2 \underline{u}_{\parallel} - |\underline{B}|^2 \underline{u}) \Rightarrow \boxed{\underline{f}_{em} = -\sigma |\underline{B}|^2 \underline{u}_{\perp}} \quad (2-70)$$

Η ανωτέρω σχέση αποτελεί εναλλακτικό τρόπο έκφρασης της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης και, είναι αυτή που θα εφαρμοστεί στη μελέτη της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου σε συναγωγή οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα.

Αν χρησιμοποιηθεί η σχέση (2-70) στο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, τότε η εξίσωση που δίνει π.χ. την y -ορμή, η (2-57), γράφεται ως εξής:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta \Delta T - \frac{1}{\rho} \sigma |\underline{B}|^2 u_{\perp,y} \quad (2-71)$$

Για την αδιαστατοποίηση της (2-71), εισάγεται επιπλέον και η ακόλουθη αδιάστατη μεταβλητή:

$$u_{\perp,y}^* = \frac{u_{\perp,y} H}{v}$$

$$(2-71) \Rightarrow \left[\left(\frac{v}{H} \right)^2 \frac{1}{H} \right] \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{1}{\rho} \left[\rho \left(\frac{v}{H} \right)^2 \frac{1}{H} \right] \frac{\partial p^*}{\partial y^*} +$$

$$+ v \left(\frac{v}{H} \frac{1}{H^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + g\beta \Theta T^* - \left(\frac{\sigma B_o^2 v}{\rho H} \right) |\underline{B}^*|^2 u_{\perp,y}^* \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{v^2}{H^3} \right) \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \left(\frac{v^2}{H^3} \right) \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left(\frac{v^2}{H^3} \right) \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \\
&\quad + g\beta \Theta T^* - \left(\frac{\sigma B_o^2 v}{\rho H} \right) |\underline{B}^*|^2 u_{\perp,y}^* \Rightarrow \\
&\Rightarrow u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \underbrace{\left(\frac{g\beta \Theta H^3}{v^2} \right)}_{Gr} T^* - \underbrace{\left(\frac{\sigma B_o^2 H^2}{\rho v} \right)}_{Ha^2} |\underline{B}^*|^2 u_{\perp,y}^* \Rightarrow \\
&\Rightarrow \boxed{(\underline{u}^* \cdot \nabla^*) v^* = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \Delta^* v^* + Gr T^* - Ha^2 |\underline{B}^*|^2 u_{\perp,y}^*} \quad (2-72)
\end{aligned}$$

Η χρησιμοποίηση της εναλλακτικής έκφρασης (2-70) βολεύει όταν εφαρμόζεται το μοντέλο χαμηλού R_m , δηλαδή όταν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται επηρεάζει τις ταχύτητες του ρευστού, άρα και τη ροή του, ενώ, αντιθέτως, οι ταχύτητες του ιονισμένου ρευστού δεν επιδρούν στη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Στην περίπτωση αυτή, η \underline{u}_{\perp} στη σχέση (2-70) είναι η συνιστώσα της ταχύτητας \underline{u} η κάθετη στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Επίσης, όταν εφαρμόζεται το μοντέλο χαμηλού R_m , η (2-72) παίρνει τη μορφή:

$$(2-72) \Rightarrow \boxed{(\underline{u}^* \cdot \nabla^*) v^* = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \Delta^* v^* + Gr T^* - Ha^2 v^*} \quad (2-73)$$

Για διδιάστατη ροή (με x και y να συμβολίζονται αντίστοιχα η οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση) και, θεωρώντας ισχυρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση $\underline{B}_o(0, B_o)$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το εσωτερικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω της κίνησης του ρευστού -σχετικά μικρές ταχύτητες ρευστού και η επίδραση του επαγόμενου εσωτερικού μαγνητικού πεδίου μπορεί να παραληφθεί- έχουμε:

$$x\text{-}\delta/v\text{ση:} \quad (2-70) \Rightarrow \boxed{f_{em,x} = -\sigma B_o^2 u} \quad (2-70\alpha)$$

$$y\text{-}\delta/v\text{ση:} \quad (2-70) \Rightarrow \boxed{f_{em,y} = 0} \quad (2-70\beta)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3⁰ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΩΝ (PERTURBATION EXPANSIONS)

3.1 Διάχυση με ασθενή συναγωγή

Πολλά προβλήματα εξαρτώνται από μικρή παράμετρο $\varepsilon \ll 1$. Το πρόβλημα της διάχυσης με ασθενή συναγωγή, στο οποίο θεωρούμε ότι ο αριθμός Peclet είναι πολύ μικρός (π.χ. σφαιρίδιο), περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla c = \mathcal{D} \nabla^2 c \Rightarrow \underline{u} \cdot \nabla c = \mathcal{D} \nabla^2 c \quad (3-1)$$

όπου c είναι η μαζική ή γραμμομοριακή συγκέντρωση και \mathcal{D} η διαχυτότητα.

Η εξίσωση (3-1) σε αδιάστατη μορφή γράφεται ως εξής:

$$Pe_m \underline{u}^* \cdot \nabla^* c^* = \nabla^{*2} c^* \quad (3-2)$$

όπου $Pe_m = \frac{UL}{\mathcal{D}} = Re Sc$

Αν στη θέση της αδιάστατης συγκέντρωσης έχουμε την αδιάστατη θερμοκρασία T^* , τότε η αντίστοιχη της (3-2) εξίσωση που θα πρέπει να επιλυθεί, είναι:

$$Pe_h \underline{u}^* \cdot \nabla^* T^* = \nabla^{*2} T^* \quad (3-3)$$

όπου $Pe_h = \frac{UL}{\kappa} = Re Pr$

Παραλείποντας τον αστερίσκο από τα αδιάστατα μεγέθη και για $\varepsilon \equiv Pe$, η (3-2) γράφεται τελικά ως εξής:

$$\boxed{\nabla^2 c = \varepsilon \underline{u} \cdot \nabla c} \quad (3-4)$$

Εφόσον $\varepsilon \equiv Pe \ll 1$, δοκιμάζουμε λύση της μορφής:

$$\boxed{c(\underline{x}) = c_0(\underline{x}) + \varepsilon c_1(\underline{x}) + \varepsilon^2 c_2(\underline{x}) + \dots} \quad (3-5)$$

όπου οι όροι $c_0(\underline{x})$, $c_1(\underline{x})$, $c_2(\underline{x})$ είναι τάξης l .

Η ιδέα είναι να βρεθεί η λύση επαναληπτικά. Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της (3-5) στην (3-4), έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla^2(c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots) &= \varepsilon \underline{u} \cdot \nabla(c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla^2 c_0 + \varepsilon \nabla^2 c_1 + \varepsilon^2 \nabla^2 c_2 + \dots &= \varepsilon \underline{u} \cdot \nabla c_0 + \varepsilon^2 \underline{u} \cdot \nabla c_1 + \dots \end{aligned} \quad (3-6)$$

Εξισώνουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = 0, 1, 2, \dots$

$$O(\varepsilon^0): \nabla^2 c_0 = 0 \quad (3-7)$$

$$O(\varepsilon^1): \nabla^2 c_1 = \underline{u} \cdot \nabla c_0 \quad (3-8)$$

$$O(\varepsilon^2): \nabla^2 c_2 = \underline{u} \cdot \nabla c_1 \quad (3-9)$$

Ακολουθεί διαδοχική επίλυση. Επιλύεται η (3-7), η λύση που προκύπτει για την $c_0(x)$ αντικαθίσταται στην (3-8) κ.ο.κ.

Ως μία γενικότερη παρατήρηση, θα πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό, ότι η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων συχνά χρειάζεται διόρθωση (ιδιόμορφα αναπτύγματα), π.χ.

- (α) όταν η μικρή παράμετρος πολλαπλασιάζει τη μεγαλύτερη παράγωγο - οριακά στρώματα,
- (β) όταν μικρές αποκλίσεις συσσωρεύονται αθροιστικά - πολλαπλά αναπτύγματα σε αργή / γρήγορη μεταβλητή.

Επίσης, σημειώνουμε εδώ, ότι η μέθοδος των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων εφαρμόζεται και για την ασυμπτωτική περιγραφή ενός συνόρου. Στην περίπτωση λεπτής “αεροτομής” διαστάσεων $h \ll L$, είναι $\varepsilon = \frac{h}{L} \ll 1$ και απλοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες αναπτύσσοντας γύρω από το βασικό σχήμα.

3.2 Ιδανική ροή πάνω από τοίχωμα με μικροατέλειες

Θεωρούμε την περίπτωση ιδανικής ροής ($\nu = 0$) πάνω από τοίχωμα με μικροατέλειες. Αν x είναι ο οριζόντιος άξονας -κύρια διεύθυνση της ροής- και y ο κατακόρυφος, τότε το τοίχωμα βρίσκεται στη θέση $y = \varepsilon h(x)$ με $\varepsilon \ll 1$, όπου $h(x)$ είναι η συνάρτηση που περιγράφει τη γεωμετρία του τοιχώματος, π.χ. $h(x) = \sin kx$

Η ροϊκή συνάρτηση $\psi(x,y)$ ορίζεται από τις σχέσεις:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{και} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3-10)$$

Στην περίπτωση ιδανικής ροής, για τη ροϊκή συνάρτηση ψ ισχύει η διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{\nabla^2 \psi = 0} \quad (3-11)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\boxed{\psi(x, y) = 0 \quad \text{για} \quad y = \varepsilon h(x) \quad \text{με} \quad \varepsilon \ll 1} \quad (\text{Σ.Σ. στο τοίχωμα}) \quad (3-12)$$

$$\boxed{\psi(x, y) = U y \quad \text{για} \quad y \rightarrow +\infty} \quad (3-13)$$

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής:

$$\boxed{\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \varepsilon \psi_1(x, y) + \varepsilon^2 \psi_2(x, y) + \dots} \quad (3-14)$$

Η συνάρτηση $\psi[x, \varepsilon h(x)]$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από τη θέση $(x, 0)$:

$$\begin{aligned} \psi[x, \varepsilon h(x)] &= \psi(x, 0) + \varepsilon h(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{\varepsilon^2 [h(x)]^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow (\psi)_{y=\varepsilon h(x)} &= (\psi)_{y=0} + \varepsilon h \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \dots \end{aligned} \quad (3-15)$$

Έτσι, η συνοριακή συνθήκη (3-12) παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{(\psi)_{y=0} + \varepsilon h \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \dots = 0} \quad (3-16)$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της (3-14) στη συνοριακή συνθήκη (3-16), έχουμε:

$$(\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2)_{y=0} + \varepsilon h \left[\frac{\partial}{\partial y} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2) \right]_{y=0} + \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2) \right]_{y=0} + \dots = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[(\psi_o)_{y=0} + \varepsilon (\psi_1)_{y=0} + \varepsilon^2 (\psi_2)_{y=0} \right] + \varepsilon h \left[\left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} \right)_{y=0} + \varepsilon \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)_{y=0} \right] + \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi_o}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right)_{y=0} \right] + \dots = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[(\psi_o)_{y=0} + \varepsilon h \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_o}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \dots \right] + \varepsilon \left[(\psi_1)_{y=0} + \varepsilon h \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} + HOT \right] + \\
&\quad + \varepsilon^2 \left[(\psi_2)_{y=0} + HOT \right] = 0 \tag{3-17}
\end{aligned}$$

Μηδενίζουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = 0, 1, 2, \dots$

$$O(\varepsilon^0): (\psi_o)_{y=0} = 0 \tag{3-18}$$

$$O(\varepsilon^1): \varepsilon h \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} \right)_{y=0} + \varepsilon (\psi_1)_{y=0} = 0 \Rightarrow (\psi_1)_{y=0} = -h \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} \right)_{y=0} \tag{3-19}$$

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^2): \frac{\varepsilon^2 h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_o}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \varepsilon^2 h \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} + \varepsilon^2 (\psi_2)_{y=0} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow (\psi_2)_{y=0} = -h \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)_{y=0} - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_o}{\partial y^2} \right)_{y=0} \tag{3-20}
\end{aligned}$$

Με βάση το ανάπτυγμα της (3-14), η συνοριακή συνθήκη (3-13) παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_o = U y \tag{3-21}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_1 = 0 \tag{3-22}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_2 = 0 \tag{3-23}$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της (3-14) στη διαφορική εξίσωση (3-11), έχουμε:

$$\nabla^2 (\psi_o + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi_o + \varepsilon \nabla^2 \psi_1 + \varepsilon^2 \nabla^2 \psi_2 + \dots = 0 \tag{3-24}$$

Εξισώνουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = 0, 1, 2, \dots$

$$O(\varepsilon^0): \nabla^2 \psi_o = 0 \tag{3-25}$$

$$O(\varepsilon^1): \nabla^2 \psi_1 = 0 \tag{3-26}$$

$$O(\varepsilon^2): \nabla^2 \psi_2 = 0 \quad (3-27)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι, με την εφαρμογή της μεθόδου των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν απλοποιείται η διαφορική εξίσωση αλλά οι συνοριακές συνθήκες. Ακολουθεί διαδοχική επίλυση. Επιλύεται το πρόβλημα (διαφορική εξίσωση (3-25) με όρους τάξης 1 και αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) για την $\psi_o(x, y)$, η λύση που προκύπτει χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος με όρους τάξης ε^1 κ.ο.κ.

$$O(\varepsilon^0): \nabla^2 \psi_o = 0 \quad (3-25)$$

$$(\psi_o)_{y=0} = 0 \quad (3-18)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_o = U y \quad (3-21)$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις δίνουν:

$$\boxed{\psi_o(x, y) = U y} \quad (3-28)$$

Απόδειξη της (3-28):

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial y} = u \Rightarrow \psi_o = u y + c \stackrel{(3-18)}{\Rightarrow} \psi_o = u y \stackrel{(3-21)}{\Rightarrow} \psi_o = U y$$

$$O(\varepsilon^1): \nabla^2 \psi_1 = 0 \quad (3-26)$$

$$(\psi_1)_{y=0} = -h \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3-19)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_1 = 0 \quad (3-22)$$

Επίλυση του συστήματος των ανωτέρω τριών εξισώσεων:

$$(3-19) \wedge (3-28) \Rightarrow (\psi_1)_{y=0} = -h(x)U \quad (3-19\alpha)$$

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής (εφαρμογή μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών):

$$\boxed{\psi_1(x, y) = U h(x) f(y)} \quad (3-29)$$

$$(3-26) \wedge (3-29) \Rightarrow U f(y) \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + U h(x) \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0 \Rightarrow \stackrel{h(x)=\sin kx}{-f(y)k^2 \sin kx + f''(y) \sin kx} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'' - k^2 f = 0 \Rightarrow f(y) = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky} \stackrel{(3-22)}{\Rightarrow} f(y) = c_2 e^{-ky} \stackrel{(3-19\alpha)}{\Rightarrow} f(y) = -e^{-ky} \quad (3-30)$$

$$(3-29) \Rightarrow \boxed{\psi_1(x, y) = -U e^{-ky} \sin kx} \quad (3-31)$$

$$(3-14) \wedge (3-28) \wedge (3-31) \Rightarrow \boxed{\psi(x, y) = U y - \varepsilon U e^{-ky} \sin kx + O(\varepsilon^2)}$$

3.3 Απλοϊκό οριακό στρώμα

Διαφορική εξίσωση με άγνωστη μεταβλητή την $y(x)$:

$$\boxed{\varepsilon y'' + y' + y = 0} \quad (3-32)$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\boxed{y(0) = 0} \quad x \in [0, 1] \quad (3-33)$$

$$\boxed{y(1) = b} \quad (3-34)$$

$$\text{Έστω } y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (3-35)$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της (3-35) στη διαφορική εξίσωση (3-32), έχουμε:

$$\varepsilon \left(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \dots \right) + \left(y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \dots \right) + \left(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \right) = 0 \quad (3-36)$$

Εξισώνουμε όρους $O(\varepsilon^0)$:

$$y_0' + y_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = c_1 e^{-x} \stackrel{(3-34)}{\Rightarrow} \boxed{y_0(x) = b e^{1-x}} \quad (3-37)$$

Δεν ικανοποιείται, όμως, η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (3-33). Το ερώτημα που τίθεται είναι: τι συμβαίνει κοντά στο $x = 0$. Αν αναπτύσσεται στο πρόβλημα χαρακτηριστικό μήκος $\delta \ll 1$, τότε η σωστή αδιάστατη x μεταβλητή θα είναι η $\xi = x/\delta$.

$$\text{Έστω } \boxed{\xi = x/\varepsilon^m} \quad (\text{όταν } \xi = O(1), x \ll 1).$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \underbrace{\left(\frac{dy}{d\xi}\right)}_{\dot{y}} \left(\frac{d\xi}{dx}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{\varepsilon^m} \dot{y} \quad (3-38)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\varepsilon^m} \dot{y} \right) \Rightarrow y'' = \frac{1}{\varepsilon^m} \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{dy}{d\xi} \right) \right] \left(\frac{d\xi}{dx} \right) \Rightarrow y'' = \frac{1}{\varepsilon^{2m}} \ddot{y} \quad (3-39)$$

Αν υπάρχει μια περιοχή (οριακό στρώμα) όπου:

$$\varepsilon y'' \sim y' \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{2m}} \ddot{y} = \frac{1}{\varepsilon^m} \dot{y} \Rightarrow \varepsilon^{1-2m} = \varepsilon^{-m} \Rightarrow m=1 \quad (\text{στη σωστή κλίμακα } \ddot{y} \sim \dot{y}), \text{ τότε σωστή εσωτερική μεταβλητή για να περιγράψουμε τι συμβαίνει στο } x=0, \text{ είναι η } \boxed{\xi = x/\varepsilon}.$$

Ξαναδιατυπώνουμε το πρόβλημα ως προς $\xi = x/\varepsilon$:

$$(3-32) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \ddot{y} + \frac{1}{\varepsilon} \dot{y} + y = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \dot{y} + \varepsilon y = 0} \quad (3-40)$$

$$y(\xi) = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \dots \quad (3-41)$$

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της (3-41) στη διαφορική εξίσωση (3-40), έχουμε:

$$(\ddot{y}_0 + \varepsilon \ddot{y}_1 + \varepsilon^2 \ddot{y}_2 \dots) + (\dot{y}_0 + \varepsilon \dot{y}_1 + \varepsilon^2 \dot{y}_2 + \dots) + \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) = 0 \quad (3-42)$$

Εξισώνουμε όρους $O(\varepsilon^0)$:

$$\ddot{y}_0 + \dot{y}_0 = 0 \Rightarrow y_0(\xi) = c_2 e^{-\xi} + c_3 \overset{y_0(0)=0}{\Rightarrow} \boxed{y_0(\xi) = c_2 (e^{-\xi} - 1)} \quad (3-43)$$

Ταίριασμα (matching) των δύο αναπτυγμάτων:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} y_0(\xi) \Rightarrow b e = -c_2 \quad (3-44)$$

$$(3-43) \wedge (3-44) \Rightarrow \boxed{y_0(x) = b e (1 - e^{-x/\varepsilon})} \quad (\text{εσωτερικό ανάπτυγμα}) \quad (3-45)$$

$$\text{Σύνθετη λύση: } \boxed{y_0(x) = b e (1 - e^{-x/\varepsilon}) + b e^{1-x} - b e}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο - ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ

4.1 Συναγωγή οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα

Η μόνιμη, διδιάστατη συναγωγή που δημιουργείται μέσα σε μια αβαθή κοιλότητα από ομοιόμορφα κατανεμημένες εσωτερικές πηγές θερμότητας, αναλύεται για την περίπτωση ισοθερμικών κατακόρυφων τοιχωμάτων (end walls) και αδιαβατικών οριζόντιων συνόρων. Οι αριθμοί Rayleigh συνυπολογίζονται για την περίπτωση όπου τα πεδία ροής και θερμοκρασίας βρίσκονται υπό την επήρεια μη-γραμμικών φαινομένων. Οι λύσεις λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συνδυασμένων ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων (matched asymptotic expansions).

Κινήσεις ρευστών οφειλόμενες σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας απαντώνται σε ποικίλες τεχνολογικές εφαρμογές στις οποίες η ροή λαμβάνει χώρα σε μια περιοχή μεγάλης οριζόντιας έκτασης και, ως ένα απλουστευμένο μοντέλο αυτού του φυσικού προβλήματος, μπορεί να θεωρηθεί η διδιάστατη ορθογώνια κοιλότητα μεγάλης αναλογίας διαστάσεων L εύρους προς ύψος (L : cavity aspect ratio = width / height). Αρκετές θεωρητικές, αριθμητικές και πειραματικές μελέτες μιας τέτοιας γεωμετρίας σχετίζονται με περιπτώσεις όπου τουλάχιστο μία από τις οριζόντιες επιφάνειες είναι ισοθερμική και παρατηρείται μια ασταθής διαστρωμάτωση (unstable stratification), η οποία για αρκετά υψηλούς αριθμούς Rayleigh ενισχύει τη “multicellular” συναγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό, όπως προαναφέρθηκε, η μόνιμη ροή η παραγόμενη από μια ομοιόμορφη κατανομή πηγών θερμότητας, εξετάζεται όταν τα κατακόρυφα τοιχώματα είναι ισοθερμικά και τα οριζόντια σύνορα αδιαβατικά. Στην περίπτωση αυτή, τα κατακόρυφα τοιχώματα (end walls) της κοιλότητας, γενικά, παίζουν ένα σημαντικό ρόλο. Σημειώνουμε, ότι έχει μελετηθεί το πρόβλημα που αφορά στο ανώτατο όριο του αριθμού Rayleigh για μια κοιλότητα πεπερασμένης αναλογίας διαστάσεων εύρους προς ύψος, όπου η ροή ελέγχεται από τα οριακά στρώματα στα κατακόρυφα τοιχώματα.

Το κύριο χαρακτηριστικό της ροής με ισοθερμικά κατακόρυφα τοιχώματα και αδιαβατικά οριζόντια σύνορα είναι μια συμμετρική double-cell κυκλοφορία, με ρευστό να ανέρχεται στο κέντρο της κοιλότητας και να ακολουθεί καθοδική πορεία κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα. Στη ροή οριακού στρώματος με κυρίαρχο μηχανισμό τη συναγωγή, η ροή στο

κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core flow) εμφανίζει κατακόρυφη διαστρωμάτωση, ενώ για αρκετά χαμηλούς αριθμούς Rayleigh αναμένεται η επικράτηση κοντά στις πλευρές της αγωγής, η οποία οδηγεί σε μια οριζόντια κατανομή στρωμάτων. Καθώς ο αριθμός Rayleigh αυξάνει, κυριαρχούν μη-γραμμικά φαινόμενα συναγωγής και τροποποιούν αυτήν την κατανομή στρωμάτων οδηγώντας σε μια οικογένεια από διαφορετικές γεωμετρικές ροής και πεδία θερμοκρασίας. Για αβαθείς κοιλότητες, αυτή η οικογένεια μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά. Ο προσδιορισμός της κρίσιμης περιοχής τιμών του αριθμού Rayleigh οδηγεί σε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της λύσης, το οποίο έχει ισχύ απ' άκρη σ' άκρη στο μεγαλύτερο τμήμα της κοιλότητας (core region), αλλά κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα θα πρέπει να αντικατασταθεί από τοπικά αναπτύγματα που περιγράφουν την κίνηση.

4.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα της μόνιμης, ασυμπίεστης, διδιάστατης ροής (με x και z να συμβολίζονται αντίστοιχα η οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση), είναι οι εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{συνέχεια}) \quad (4-1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (x\text{-ορμή}) \quad (4-2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g\beta\rho \Delta T \quad (z\text{-ορμή}) \quad (4-3)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \nabla^2 T + \Sigma \quad (\text{ενέργεια}) \quad (4-4)$$

όπου ρ είναι μια μέση πυκνότητα (mean density), η το δυναμικό ιξώδες του ρευστού, β ο συντελεστής θερμικής διαστολής (volumetric expansion coefficient), Σ ο σταθερός ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας (volumetric heat generation rate).

Από τις εξισώσεις (4-2) και (4-3) με απαλοιφή των όρων της πίεσης προκύπτουν οι εξισώσεις της στροβιλότητας και της ροϊκής συνάρτησης. Η ροϊκή συνάρτηση είναι αυτή που

ενδιαφέρει για την περιγραφή της γεωμετρίας του πεδίου ροής. Παραγωγίζοντας τις (4-2) και (4-3) ως προς z και x αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-6)$$

$$(4-5) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_0 + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Rightarrow$$

(εξ. συνέχειας)

$$\Rightarrow u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \quad (4-5a)$$

$$(4-6) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_0 + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow$$

(εξ. συνέχειας)

$$\Rightarrow u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-6a)$$

Αφαιρώντας την (4-6a) από την (4-5a) έχουμε:

$$u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) = v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} \right) - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial x} \right) - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-7)$$

Η ροϊκή συνάρτηση $\psi(x,z)$ συνδέεται εξ' ορισμού με τις συνιστώσες ταχύτητες u και v βάσει των σχέσεων:

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial z}} \quad \text{και} \quad \boxed{v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad (4-8)$$



Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες u και v στη σχέση (4-7) όπως αυτές δίνονται συναρτήσει της ψ από τις σχέσεις (4-8), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) &= v \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial x^2} \right) - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)}_{\nabla^2 \psi} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)}_{\nabla^2 \psi} &= v \underbrace{\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right)}_{\nabla^4 \psi} - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial z} = v \nabla^4 \psi - g\beta \frac{\partial T}{\partial x}} & \quad (4-9) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4-4) της ενέργειας τις ταχύτητες u και v όπως αυτές δίνονται συναρτήσει της ψ από τις σχέσεις (4-8), προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\Sigma}{\rho c_p}} \quad (4-10)$$

όπου v είναι το κινηματικό ιξώδες και κ ο συντελεστής θερμικής διαχυτότητας.

Οι εξισώσεις της ροϊκής συνάρτησης (4-9) και της ενέργειας (4-10) μπορούν να αδιαστατοποιηθούν εισάγοντας τις ακόλουθες αδιάστατες μεταβλητές:

$$X = \frac{x}{h}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\kappa}, \quad \Theta = \frac{T \rho c_p \kappa}{h^2 \Sigma}$$

όπου h είναι το ύψος της κοιλότητας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθούν τα εξής: Για την αδιαστατοποίηση των συνιστωσών της ταχύτητας θα χρησιμοποιούσαμε το χαρακτηριστικό μήκος h και τη μοριακή διαχυτότητα ορμής $\nu [=] m^2/s$. Δηλαδή, θα είχαμε: $U = \frac{u h}{\nu}$ και $V = \frac{v h}{\nu}$. Έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενες ενότητες, ότι η ανωτέρω αδιαστατοποίηση για τις συνιστώσες της ταχύτητας

αποτελεί φυσική επιλογή όταν δεν υπάρχει χαρακτηριστική ταχύτητα -όπως συμβαίνει σε ροές φυσικής συναγωγής.

$$(4-8) \Rightarrow \frac{v}{h} U = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \Rightarrow U = \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

Από την ανωτέρω σχέση συμπεραίνεται ότι, προκειμένου να αδιαστατοποιηθεί η ροϊκή συνάρτηση $\psi [=] m^2/s$, θα πρέπει να διαιρεθεί με έναν όρο, ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με το $1/v$, να δίνει μια αδιάστατη παράμετρο. Ο ζητούμενος όρος είναι ο συντελεστής θερμικής διαχυτότητας $\kappa [=] m^2/s$.

$$(4-10) \Rightarrow \frac{\kappa}{h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \frac{\kappa}{h^2} \nabla^2 T + \frac{\Sigma}{\rho c_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho c_p \kappa}{h^2 \Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \frac{\rho c_p \kappa}{h^2 \Sigma} \nabla^2 T + 1 \quad (4-11)$$

Από την ανωτέρω σχέση συμπεραίνεται ότι, προκειμένου να αδιαστατοποιηθεί η θερμοκρασία T , θα πρέπει να διαιρεθεί με τον όρο $\frac{h^2 \Sigma}{\rho c_p \kappa}$.

$$(4-11) \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \nabla^2 \Theta + 1 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Theta + 1 = \frac{\partial(\Theta, \Psi)}{\partial(X, Z)}} \quad (4-12)$$

$$(4-9) \Rightarrow \frac{\kappa^2}{h^4} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial Z} \right] = \frac{v \kappa}{h^4} \nabla^4 \Psi - g \beta \frac{h^2 \Sigma}{\rho c_p \kappa h} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\kappa}{v} \right) \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial Z} \right] = \nabla^4 \Psi - \underbrace{\left(\frac{g \beta \Sigma h^5}{\rho c_p v \kappa^2} \right)}_R \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi, \Psi)}{\partial(X, Z)} = \nabla^4 \Psi - R \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Rightarrow \boxed{\nabla^4 \Psi = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi, \Psi)}{\partial(X, Z)} + R \frac{\partial \Theta}{\partial X}} \quad (4-13)$$

όπου $\text{Pr} = \frac{v}{\kappa}$ είναι ο αριθμός Prandtl του ρευστού και $R = \frac{g \beta \Sigma h^5}{\rho c_p v \kappa^2}$ ο αριθμός Rayleigh

βασίζόμενος στο ύψος h της κοιλότητας.

Συμβολίζοντας τις αδιάστατες συντεταγμένες, την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση και την αδιάστατη θερμοκρασία με x , z , ψ και T αντίστοιχα, οι αδιάστατες εξισώσεις (4-13) του πεδίου ροής και (4-12) της ενέργειας γράφονται τελικά ως εξής:

$$\nabla^4 \psi = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\nabla^2 \psi, \psi)}{\partial(x, z)} + R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-14\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \text{Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial z} \right] + R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4-14\beta)$$

και

$$\nabla^2 T + 1 = \frac{\partial(T, \psi)}{\partial(x, z)} \quad (4-15\alpha)$$

ή

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4-15\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες στις οριζόντιες επιφάνειες είναι:

$$\psi(x, 1/2) = \psi(x, -1/2) = 0 \quad (4-16)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 1/2) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, -1/2) = 0 \quad (4-17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(x, 1/2) = \frac{\partial T}{\partial z}(x, -1/2) = 0 \quad (4-18)$$

και στα κατακόρυφα τοιχώματα:

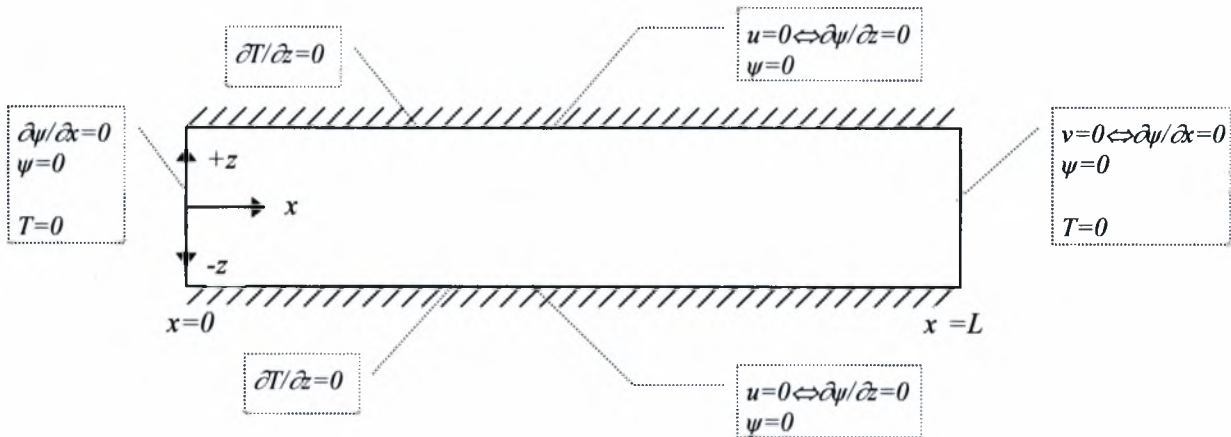
$$\psi(0, z) = \psi(L, z) = 0 \quad (4-19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, z) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, z) = 0 \quad (4-20)$$

$$T(0, z) = T(L, z) = 0 \quad (4-21)$$

όπου L είναι ο λόγος των πλευρών (εύρος / ύψος) της κοιλότητας που υποθέτουμε ότι είναι μεγάλος.

Οι ανωτέρω συνοριακές συνθήκες, καθώς και η γεωμετρία του προβλήματος φαίνονται χαρακτηριστικά, στο σχήμα που ακολουθεί.



Αναμένεται ότι οι λύσεις των εξισώσεων (4-14), (4-15) και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών (4-16) έως και (4-21) θα ικανοποιούν τις σχέσεις συμμετρίας:

$$\psi(x, z) = -\psi(L - x, z) \quad (4-22)$$

$$T(x, z) = T(L - x, z) \quad (4-23)$$

Για αρκετά μικρούς αριθμούς Rayleigh, στο πεδίο της θερμοκρασίας κυριαρχεί η αγωγή (παραμένουν οι όροι στο αριστερό μέλος της εξίσωσης ενέργειας) και η αντίστοιχη λύση που ικανοποιεί τις θερμικές συνοριακές συνθήκες

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = T(0, z) = T(L, z) = 0, \text{ είναι:}$$

$$(4-15\beta) \Rightarrow T = \frac{1}{2} x(L - x) \quad (4-24)$$

Το ερώτημα που προκύπτει αφορά στο πόσο μεγάλος πρέπει να είναι ο αριθμός Rayleigh ώστε αυτή η δευτέρου βαθμού ως προς x μορφή του πεδίου της θερμοκρασίας να τροποποιηθεί από τις επιδράσεις της συναγωγής. Η ροή που παράγεται στην κοιλότητα από τον ανωστικό όρο $R \frac{\partial T}{\partial x}$ (εξίσωση (4-14β)) έχει μια ροϊκή συνάρτηση τάξης RL , η οποία με τη σειρά της παράγει μια κατακόρυφη κλίση θερμοκρασίας τάξης RL^2 (εξίσωση (4-15β)). Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (4-15β) εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες

$$\psi \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \psi \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 0$$

στα αδιαβατικά οριζόντια σύνορα, δίνει:

$$\begin{aligned} (4-15\beta) \Rightarrow & \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dz + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz + \int_{-1/2}^{1/2} dz = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} dz - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} dz \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dz + \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_{-1/2}^{1/2} + 1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial T}{\partial x} \right) dz - \int_{-1/2}^{1/2} \psi \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} dz - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} dz \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dz + 1 = \left[\psi \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} \left(\psi \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dz + 1 = \underbrace{- \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz}_{\sim R^2 L^2} \end{aligned} \quad (4-25)$$

Το δεύτερο μέλος της ανωτέρω εξίσωσης είναι τάξης $R^2 L^2$ και, συνεπώς, όταν το R είναι τάξης L^{-1} , η δευτέρου βαθμού ως προς x μορφή του πεδίου της θερμοκρασίας παύει να ισχύει. Έτσι, στην επίλυση που ακολουθεί ο αριθμός Rayleigh είναι τάξης L^{-1} καθώς $L \rightarrow \infty$. Η παράμετρος (scaled Rayleigh number):

$$\boxed{R_1 = R L} \quad (4-26)$$

είναι τάξης 1 καθώς $L \rightarrow \infty$.

4.3 Εφαρμογή της μεθόδου των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων - Κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core region)

Η μικρή παράμετρος $\varepsilon \ll 1$ από την οποία εξαρτάται το συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι ο αντίστροφος του λόγου των πλευρών (εύρος / ύψος) της κοιλότητας, δηλαδή $\varepsilon \equiv L^{-1} \ll 1$.

Στο μεγαλύτερο τμήμα της κοιλότητας (core region), η λύση εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά μήκη (length scales):

$$\boxed{\xi = x/L}, \quad z = z \quad (4-27)$$

Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής:

$$\psi = \varepsilon^0 \psi_0(\xi, z) + \varepsilon^1 \psi_1(\xi, z) + \varepsilon^2 \psi_2(\xi, z) + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \psi_0(\xi, z) + L^{-1} \psi_1(\xi, z) + L^{-2} \psi_2(\xi, z) + \dots} \quad (4-28)$$

$$T = \varepsilon^{-2} T_0(\xi, z) + \varepsilon^{-1} T_1(\xi, z) + \varepsilon^0 T_2(\xi, z) + \varepsilon^1 T_3(\xi, z) + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = L^2 T_0(\xi, z) + L T_1(\xi, z) + T_2(\xi, z) + L^{-1} T_3(\xi, z) + \dots} \quad (4-29)$$

καθώς $L \rightarrow \infty$.

Οι όροι $\psi_0(\xi, z), \psi_1(\xi, z), \psi_2(\xi, z), T_0(\xi, z), T_1(\xi, z), T_2(\xi, z), T_3(\xi, z)$ είναι τάξης L .

Αλλαγή μεταβλητής από x σε ξ :

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \underbrace{\left(\frac{d\xi}{dx} \right)}_{L^{-1}} \Rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = L^{-1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \quad (4-30)$$

$$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[L^{-1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \right] \Rightarrow \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} = L^{-1} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} \underbrace{\left(\frac{d\xi}{dx} \right)}_{L^{-1}} \Rightarrow \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} = L^{-2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} \quad (4-31)$$

$$\frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} = L^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^3(\cdot)}{\partial x^3} \right] \Rightarrow \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} = L^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \right] \Rightarrow \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} = L^{-4} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial \xi^4} \quad (4-32)$$

$$(4-15\beta) \wedge (4-30) \wedge (4-31) \Rightarrow L^{-2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1 = L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial \xi} - L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L^{-2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1 = L^{-1} \frac{\partial(T, \psi)}{\partial(\xi, z)}} \quad (4-33)$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των σχέσεων (4-28) και (4-29) στη διαφορική εξίσωση (4-33), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & L^{-2} \left(L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + HOT \right) + \left(L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + HOT \right) + 1 = \\
 & = L^{-1} \left[L^2 \frac{\partial(T_0, \psi)}{\partial(\xi, z)} + L \frac{\partial(T_1, \psi)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 + \dots = L \frac{\partial(T_0, \psi)}{\partial(\xi, z)} + \frac{\partial(T_1, \psi)}{\partial(\xi, z)} + \dots \Rightarrow \\
 & \Rightarrow L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 + \dots = \\
 & = L \left[\frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + L^{-1} \frac{\partial(T_0, \psi_1)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] + \left[\frac{\partial(T_1, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 \right) + \dots = L \frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + \left[\frac{\partial(T_0, \psi_1)}{\partial(\xi, z)} + \frac{\partial(T_1, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{4-34}$$

Εξισώνουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = -2, -1, 0, \dots$

Όροι τάξης L^2 :

$$L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = 0} \tag{4-35}$$

$$(4-35) \Rightarrow \frac{\partial T_0}{\partial z} = c_1(\xi) \Rightarrow T_0(\xi, z) = c_1(\xi)z + c_2(\xi) \tag{4-36}$$

$$\text{Σ.Σ.: } \boxed{\left. \frac{\partial T_0}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial T_0}{\partial z} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} \Rightarrow c_1(\xi) = 0$$

$$(4-36) \Rightarrow T_0(\xi, z) = c_2(\xi) \Rightarrow \boxed{T_0 = \theta_0(\xi)} \tag{4-37}$$

όπου $\theta_0(\xi)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του ξ .

Οροι τάξης L :

$$L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = L \frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \frac{\partial T_0}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial z}} \quad (4-38)$$

Οροι τάξης l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 &= \frac{\partial(T_0, \psi_1)}{\partial(\xi, z)} + \frac{\partial(T_1, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial T_0}{\partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \frac{\partial T_1}{\partial z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -1 - \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}} & \quad (4-39) \end{aligned}$$

$$(4-14\beta) \wedge (4-30) \wedge (4-31) \wedge (4-32) \Rightarrow L^{-4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 2L^{-2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} =$$

$$= \text{Pr}^{-1} \left[L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(L^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} \left(L^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right] + R L^{-1} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L^{-4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 2L^{-2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \text{Pr}^{-1} \left[L^{-3} \frac{\partial(\partial^2 \psi / \partial \xi^2, \psi)}{\partial(\xi, z)} + L^{-1} \frac{\partial(\partial^2 \psi / \partial z^2, \psi)}{\partial(\xi, z)} \right] + R_1 L^{-2} \frac{\partial T}{\partial \xi}}$$

(4-40)

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των σχέσεων (4-28) και (4-29) στη διαφορική εξίσωση (4-40), έχουμε:

$$\begin{aligned} L^{-4} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \xi^4} + 2L^{-2} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \left(\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + L^{-1} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + HOT \right) &= \text{Pr}^{-1} L^{-3} \frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial \xi^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + \\ + \text{Pr}^{-1} L^{-1} \left[\frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial z^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] &+ R_1 L^{-2} \left(L^2 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + L \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + HOT \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots + \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + L^{-1} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + \dots = \dots + L^{-1} \left[\text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial z^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right] + R_1 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + \dots \quad (4-41)$$

Εξισώνουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = 0, 1, \dots$

Όροι τάξης 1:

$$\boxed{\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} = R_1 \frac{\partial T_0}{\partial \xi}} \quad (4-42)$$

Όροι τάξης L^{-1} :

$$L^{-1} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} = L^{-1} \left[\text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial z^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} = \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi}} \quad (4-43)$$

4.4 Επίλυση των εξισώσεων

Επίλυση ως προς $\psi_0(\xi, z)$:

$$(4-42) \Rightarrow \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} = R_1 \theta_0' \Rightarrow \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} = R_1 \theta_0' z + c_1(\xi) \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = R_1 \theta_0' \frac{z^2}{2} + c_1(\xi) z + c_2(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = R_1 \theta_0' \frac{z^3}{6} + c_1(\xi) \frac{z^2}{2} + c_2(\xi) z + c_3(\xi) \quad (4-44)$$

$$\text{Σ.Σ.:} \quad \boxed{\left. \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} \Rightarrow c_2(\xi) = -\frac{R_1 \theta_0'}{24} \quad \wedge \quad c_3(\xi) = -\frac{c_1(\xi)}{8}$$

$$(4-44) \Rightarrow \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = R_1 \theta_0' \frac{z^3}{6} + c_1(\xi) \frac{z^2}{2} - R_1 \theta_0' \frac{z}{24} - \frac{c_1(\xi)}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_0(\xi, z) = R_1 \theta_0' \frac{z^4}{24} + c_1(\xi) \frac{z^3}{6} - R_1 \theta_0' \frac{z^2}{48} - c_1(\xi) \frac{z}{8} + c_4(\xi) \quad (4-45)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\psi_0\left(\xi, \frac{1}{2}\right) = \psi_0\left(\xi, -\frac{1}{2}\right) = 0} \Rightarrow c_1(\xi) = 0 \quad \wedge \quad c_4(\xi) = \frac{R_1 \theta_0'}{384}$$

$$(4-45) \Rightarrow \psi_0(\xi, z) = R_1 \theta_0' \frac{z^4}{24} - R_1 \theta_0' \frac{z^2}{48} + R_1 \theta_0' \frac{1}{384} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_0(\xi, z) = R_1 \theta_0' \frac{1}{24} \left(z^4 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{16} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_0(\xi, z) = R_1 \theta_0' \frac{1}{24} \underbrace{\left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2}_{F(z)}} \Rightarrow \boxed{\psi_0 = R_1 \theta_0' F(z)} \quad (4-46)$$

$$\text{όπου } F(z) = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2 \quad (4-47)$$

Η συνάρτηση F είναι αυτή που δίνει στην πραγματικότητα το προφίλ της ροϊκής συνάρτησης στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core stream function profile).

Επίλυση ως προς $T_1(\xi, z)$:

$$(4-38) \Rightarrow \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \theta_0' \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \stackrel{(4-46)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = R_1 \left(\theta_0' \right)^2 \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{24} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = R_1 \left(\theta_0' \right)^2 \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^2}{48} + c_1(\xi) \right) \quad (4-48)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} \Rightarrow c_1(\xi) = \frac{1}{16 \cdot 24}$$

$$(4-48) \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = R_1 \left(\theta_0' \right)^2 \frac{1}{24} \left(z^4 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{16} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1(\xi, z) = R_1 \left(\theta_0' \right)^2 \frac{1}{24} \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{6} + \frac{z}{16} + c_2(\xi) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1(\xi, z) = R_1(\theta_0')^2 \underbrace{\frac{1}{24} \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{6} + \frac{z}{16} \right)}_{G(z)} + \theta_1(\xi) \Rightarrow T_1 = R_1(\theta_0')^2 G(z) + \theta_1(\xi) \quad (4-49)$$

όπου $\theta_1(\xi)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του ξ και

$$G(z) = \frac{1}{24} \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{6} + \frac{z}{16} \right) \quad (4-50)$$

Η περιττή συνάρτηση G είναι αυτή που δίνει στην πραγματικότητα το προφίλ της θερμοκρασίας στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core temperature profile).

Σημειώνουμε, επίσης, ότι ισχύει:

$$\dot{G}(z) = \frac{1}{24} \left(z^4 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2 = F(z) \quad (4-51)$$

Επίλυση ως προς $\psi_1(\xi, z)$:

$$\begin{aligned} (4-43) \Rightarrow \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} &= \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} = \text{Pr}^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[R_1 \theta_0' \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{24} \right) \right] \cdot R_1 \theta_0' \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{24} \right) - \frac{1}{24} R_1^2 \theta_0' \theta_0'' z \left(z^4 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{16} \right) \right\} + \\ &\quad + R_1 \left[\frac{1}{12} R_1 \theta_0' \theta_0'' \left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{6} + \frac{z}{16} \right) + \theta_1' \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} = \text{Pr}^{-1} \left[R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left(\frac{z^5}{12} - \frac{z^3}{36} + \frac{z}{576} \right) - R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left(\frac{z^5}{24} - \frac{z^3}{48} + \frac{z}{384} \right) \right] + \\ &\quad + R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left(\frac{z^5}{60} - \frac{z^3}{72} + \frac{z}{192} \right) + R_1 \theta_1' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} = R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{z^5}{24} - \frac{z^3}{144} - \frac{z}{1152} \right) + \left(\frac{z^5}{60} - \frac{z^3}{72} + \frac{z}{192} \right) \right] + R_1 \theta_1' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{z^6}{144} - \frac{z^4}{576} - \frac{z^2}{2304} \right) + \left(\frac{z^6}{360} - \frac{z^4}{288} + \frac{z^2}{384} \right) \right] + R_1 \theta_1' z + c_1(\xi) \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{z^7}{1008} - \frac{z^5}{2880} - \frac{z^3}{6912} \right) + \left(\frac{z^7}{2520} - \frac{z^5}{1440} + \frac{z^3}{1152} \right) \right] + \\
&+ R_1 \theta_1' \frac{z^2}{2} + c_1(\xi) z + c_2(\xi) \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial z} &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{z^8}{8064} - \frac{z^6}{17280} - \frac{z^4}{27648} \right) + \left(\frac{z^8}{20160} - \frac{z^6}{8640} + \frac{z^4}{4608} \right) \right] + \\
&+ R_1 \theta_1' \frac{z^3}{6} + c_1(\xi) \frac{z^2}{2} + c_2(\xi) z + c_3(\xi) \tag{4-52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma.\Sigma.: \quad \boxed{\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} &\Rightarrow c_1(\xi) = -8c_3(\xi) + R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left(\text{Pr}^{-1} \frac{83}{3870720} - \frac{370}{3870720} \right) \\
&\wedge c_2(\xi) = -\frac{R_1 \theta_1'}{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4-52) \Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial z} &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{z^8}{8064} - \frac{z^6}{17280} - \frac{z^4}{27648} + \frac{83z^2}{7741440} \right) + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{z^8}{20160} - \frac{z^6}{8640} + \frac{z^4}{4608} - \frac{185z^2}{3870720} \right) \right] + R_1 \theta_1' \frac{z^3}{6} - R_1 \theta_1' \frac{z}{24} - 4c_3(\xi) z^2 + c_3(\xi) \Rightarrow \\
\Rightarrow \psi_1(\xi, z) &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \left(\frac{z^9}{72576} - \frac{z^7}{120960} - \frac{z^5}{138240} + \frac{83z^3}{23224320} \right) + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{z^9}{181440} - \frac{z^7}{60480} + \frac{z^5}{23040} - \frac{185z^3}{11612160} \right) \right] + \\
&+ R_1 \theta_1' \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^2}{48} \right) - c_3(\xi) \frac{4z^3}{3} + c_3(\xi) z + c_4(\xi) \Rightarrow \\
\Rightarrow \psi_1(\xi, z) &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \frac{1}{3456} \left(\frac{z^9}{21} - \frac{z^7}{35} - \frac{z^5}{40} + \frac{83z^3}{6720} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{72} \left(\frac{z^9}{2520} - \frac{z^7}{840} + \frac{z^5}{320} - \frac{37z^3}{32256} \right) \Bigg] + \\
& + R_1 \theta_1' \frac{1}{24} \left(z^4 - \frac{z^2}{2} \right) - c_3(\xi) \frac{4z^3}{3} + c_3(\xi) z + c_4(\xi)
\end{aligned} \tag{4-53}$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\psi_1 \left(\xi, \frac{1}{2} \right) = \psi_1 \left(\xi, -\frac{1}{2} \right) = 0} \Rightarrow c_3(\xi) = R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left(-\frac{\text{Pr}^{-1}}{3456} \frac{17}{8960} + \frac{1}{72} \frac{1}{6144} \right)$$

$$\wedge c_4(\xi) = \frac{R_1 \theta_1'}{384}$$

$$\begin{aligned}
(4-53) \Rightarrow \psi_1(\xi, z) &= R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\text{Pr}^{-1} \frac{1}{3456} \left(\frac{z^9}{21} - \frac{z^7}{35} - \frac{z^5}{40} + \frac{83z^3}{6720} + \frac{68z^3}{26880} - \frac{17z}{8960} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{72} \left(\frac{z^9}{2520} - \frac{z^7}{840} + \frac{z^5}{320} - \frac{37z^3}{32256} - \frac{4z^3}{18432} + \frac{z}{6144} \right) \Bigg] + \\
& + R_1 \theta_1' \frac{1}{24} \left(z^4 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{16} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi_1(\xi, z) = R_1^2 \theta_0' \theta_0'' \left[\underbrace{\text{Pr}^{-1} \frac{1}{3456} \left(\frac{z^9}{21} - \frac{z^7}{35} - \frac{z^5}{40} + \frac{5z^3}{336} - \frac{17z}{8960} \right)}_{F_1(z)} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\frac{1}{72} \left(\frac{z^9}{2520} - \frac{z^7}{840} + \frac{z^5}{320} - \frac{11z^3}{8064} + \frac{z}{6144} \right)}_{G_1(z)} \right] + R_1 \theta_1' \frac{1}{24} \underbrace{\left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2}_{F(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_1 = R_1^2 \theta_0' \theta_0'' [G_1(z) + \text{Pr}^{-1} F_1(z)] + R_1 \theta_1' F(z)} \tag{4-54}$$

όπου οι περιττές συναρτήσεις G_1 και F_1 είναι

$$G_1(z) = \frac{1}{72} \left(\frac{z^9}{2520} - \frac{z^7}{840} + \frac{z^5}{320} - \frac{11z^3}{8064} + \frac{z}{6144} \right) \tag{4-55}$$

και

$$F_1(z) = \frac{1}{3456} \left(\frac{z^9}{21} - \frac{z^7}{35} - \frac{z^5}{40} + \frac{5z^3}{336} - \frac{17z}{8960} \right) \quad (4-56)$$

Ολοκλήρωση ως προς z της εξίσωσης (4-39):

$$\begin{aligned} (4-39) \Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} &= -1 - \theta_0'' + \left(2R_1 \theta_0' \theta_0'' G + \theta_1' \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \theta_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[R_1 (\theta_0')^2 \dot{G} \right] R_1 \theta_0'' F \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -\left(1 + \theta_0'' \right) + 2R_1 \theta_0' \theta_0'' G \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' \dot{G} F + \theta_1' \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \theta_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -\left(1 + \theta_0'' \right) + 2R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' G \dot{F} - R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' \dot{G} F + \theta_1' \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \theta_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \quad (4-57) \end{aligned}$$

(4-57) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial z} &= -\left(1 + \theta_0'' \right) z + R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(\int_0^z 2G \dot{F} dz - \int_0^z \dot{G} F dz \right) + \theta_1' \int_0^z \frac{\partial \psi_0}{\partial z} dz + \theta_0' \int_0^z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} dz + c_1(\xi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial z} = -\left(1 + \theta_0'' \right) z + R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(2[GF]_0^z - 2 \int_0^z \dot{G} F dz - \int_0^z \dot{G} F dz \right) + \theta_1' \psi_0 + \theta_0' \psi_1 + c_1(\xi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial z} = -\left(1 + \theta_0'' \right) z + R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(2G(z)F(z) - 3 \int_0^z \frac{\dot{G}(z)F(z)}{F(z)} dz \right) + \theta_1' \psi_0 + \theta_0' \psi_1 + c_1(\xi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial z} = -\left(1 + \theta_0'' \right) z + R_1^2 (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(2GF - 3 \int_0^z F^2 dz \right) + \theta_1' \psi_0 + \theta_0' \psi_1 + c_1(\xi) \quad (4-58) \end{aligned}$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} \quad (4-59)$$

Αντικατάσταση των τιμών που δίνουν οι ανωτέρω συνοριακές συνθήκες στην (4-58):

$$(4-58) \Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} + R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left[2G\left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{F\left(\frac{1}{2}\right)}_0 - 3 \int_0^{\frac{1}{2}} F^2 dz \right] + \theta_1' \underbrace{\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)}_0 + \theta_0' \underbrace{\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)}_0 + c_1(\xi)$$

$$\Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} - R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} F^2 dz \right) + c_1(\xi) \quad (4-60)$$

$$(4-58) \Rightarrow 0 = \left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} + R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(2G\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{F\left(-\frac{1}{2}\right)}_0 - 3 \int_0^{-\frac{1}{2}} F^2 dz \right) + \theta_1' \underbrace{\psi_0\left(-\frac{1}{2}\right)}_0 + \theta_0' \underbrace{\psi_1\left(-\frac{1}{2}\right)}_0 + c_1(\xi)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} - R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{-\frac{1}{2}} F^2 dz \right) + c_1(\xi) \quad (4-61)$$

$$(4-60) - (4-61) \Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) - R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} F^2 dz - 3 \int_0^{-\frac{1}{2}} F^2 dz \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) - R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} F^2 dz + 3 \int_{-\frac{1}{2}}^0 F^2 dz \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \left(1 + \theta_0''\right) + R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \underbrace{\left(3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F^2 dz \right)}_a \Rightarrow \boxed{\theta_0'' + a R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' + 1 = 0} \quad (4-62)$$

$$\text{όπου } a = 3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(z)^2 dz = \frac{1}{120960} \quad (\text{Παράρτημα I}) \quad (4-63)$$

Από την ολοκλήρωση ως προς z της εξίσωσης (4-39) με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (4-59), προκύπτει ότι η εξίσωση (4-39) έχει λύση μόνον αν η $\theta_0(\xi)$ ικανοποιεί τη μη-γραμμική εξίσωση

$$\theta_0'' + a R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' + 1 = 0, \quad (4-62)$$

η επίλυση της οποίας θα δώσει, τελικά, το πεδίο της θερμοκρασίας στο μεγαλύτερο τμήμα της κοιλότητας (core temperature field). Σημειώνουμε εδώ, ότι ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (4-62)

παριστά την επίδραση της συναγωγής στο πεδίο της θερμοκρασίας. Μόλις η $\theta_0(\xi)$ βρεθεί από την (4-62) με εφαρμογή των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών, ο πρωταρχικής σημασίας όρος του αναπτύγματος της ροϊκής συνάρτησης, δηλαδή ο όρος $\psi_0(\xi, z)$, θα προσδιοριστεί από την (4-46).

4.5 Η λύση στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core solution)

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\upsilon\mu\epsilon: \boxed{\theta_0' = \frac{d\theta_0}{d\xi} = \theta(\xi)} \quad (4-64)$$

$$(4-62)\wedge(4-64)\Rightarrow \boxed{\theta' + aR_1^2\theta^2\theta' + 1 = 0} \quad (4-65)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\theta(\frac{1}{2}) = 0} \quad (\text{συμμετρία}) \quad (4-66)$$

Η επίλυση του συστήματος των (4-65) και (4-66) γίνεται στη Mathematica (Παράρτημα I) και η λύση που προκύπτει για τη $\theta(\xi)$, είναι:

$$\theta(\xi) = \frac{\left\{ 3a^2(1-2\xi)R_1^4 + \sqrt{a^3R_1^6[16+9a(1-2\xi)^2R_1^2]} \right\}^{1/3}}{2^{2/3}aR_1^2} - \frac{2^{2/3}}{\left\{ 3a^2(1-2\xi)R_1^4 + \sqrt{a^3R_1^6[16+9a(1-2\xi)^2R_1^2]} \right\}^{1/3}} \quad (4-67)$$

$$(4-67)\Rightarrow \theta(\xi) = \frac{\left\{ 6a^2R_1^4\left(\frac{1}{2}-\xi\right) + a^{3/2}R_1^3\left[16+36aR_1^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2\right]^{1/2} \right\}^{1/3}}{\left(4a^3R_1^6\right)^{1/3}}$$

$$\frac{4^{1/3}}{\left\{ 6a^2R_1^4\left(\frac{1}{2}-\xi\right) + a^{3/2}R_1^3\left[16+36aR_1^2\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^2\right]^{1/2} \right\}^{1/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = \left\{ \frac{3}{2} a^{-1} R_1^{-2} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + a^{-3/2} R_1^{-3} \left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} -$$

$$- \frac{1}{\left\{ \frac{3}{2} a^2 R_1^4 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + a^{3/2} R_1^3 \left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = \left(a^{-3/2} R_1^{-3} \right)^{1/3} \left\{ \underbrace{\frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right)}_{\phi} + \underbrace{\left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}_{\omega} \right\}^{1/3} -$$

$$- \left(a^{3/2} R_1^3 \right)^{-1/3} \left\{ \underbrace{\frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right)}_{\phi} + \underbrace{\left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}_{\omega} \right\}^{-1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} (\phi + \omega)^{1/3} - a^{-1/2} R_1^{-1} (\phi + \omega)^{-1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} \left[(\phi + \omega)^{1/3} - \frac{(\phi - \omega)^{1/3}}{(\phi + \omega)^{1/3} \cdot (\phi - \omega)^{1/3}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} \left[(\phi + \omega)^{1/3} + \frac{(\phi - \omega)^{1/3}}{-(\phi^2 - \omega^2)^{1/3}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} \left((\phi + \omega)^{1/3} + \frac{(\phi - \omega)^{1/3}}{- \left\{ \left[\frac{9}{4} a R_1^2 \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2 \right] - 1 - \left[\frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\}^{1/3}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} \left[(\phi + \omega)^{1/3} + \frac{(\phi - \omega)^{1/3}}{-(-1)^{1/3}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} [(\phi + \omega)^{1/3} + (\phi - \omega)^{1/3}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} \left\{ \underbrace{\left[\frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/3}}_{F^+(\xi)} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\left[\frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/3}}_{F^-(\xi)} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a^{-1/2} R_1^{-1} [F^+(\xi) + F^-(\xi)] \Rightarrow \theta_0' = a^{-1/2} R_1^{-1} [F^+(\xi) + F^-(\xi)] \quad (4-68)$$

$$\text{όπου } F^\pm(\xi) = \left\{ \frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \pm \left[1 + \frac{9}{4} a R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \quad (4-69)$$

Η ευθεία $-\phi = \frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)$ ταυτίζεται με το υπερβολικό ημίτονο μιας μεταβλητής y , όταν η μεταβλητή αυτή παίρνει τιμές κοντά στο μηδέν. Δηλαδή για $y = O(1)$ η παράσταση $\frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)$ μπορεί να αντικατασταθεί από το υπερβολικό ημίτονο της y :

$$\sinh y = \frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow y = \sinh^{-1} \left[\frac{3}{2} a^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4-70)$$

Ολοκληρώνοντας την (4-68) και με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης από ξ σε $\sinh y$, προκύπτουν τα εξής:

$$(4-68) \Rightarrow \theta_0 = a^{-1/2} R_1^{-1} \left[\int F^+(\xi) d\xi + \int F^-(\xi) d\xi \right] + c \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1/2} R_1^{-1} \left\{ \int \left[-\sinh y + (1 + \sinh^2 y)^{1/2} \right]^{1/3} d\left(\frac{2 \sinh y}{3a^{1/2} R_1}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \int \left[-\sinh y - (1 + \sinh^2 y)^{1/2} \right]^{1/3} d\left(\frac{2 \sinh y}{3a^{1/2} R_1}\right) \right\} + c \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1/2} R_1^{-1} \left\{ \int \frac{2}{3a^{1/2} R_1} \left[-\sinh y + (1 + \sinh^2 y)^{1/2} \right]^{1/3} d(\sinh y) + \right. \\
&\quad \left. + \int \frac{2}{3a^{1/2} R_1} \left[-\sinh y - (1 + \sinh^2 y)^{1/2} \right]^{1/3} d(\sinh y) \right\} + c \quad (4-71)
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της (4-71) γίνεται στη Mathematica (Παράρτημα Ι) και η λύση που προκύπτει για τη θ_0 , είναι:

$$\begin{aligned}
(4-71) \Rightarrow \theta_0 &= a^{-1/2} R_1^{-1} \left[\frac{(\cosh y - \sinh y)^{1/3} (\cosh y + 3 \sinh y)}{4a^{1/2} R_1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-\cosh y - \sinh y)^{1/3} (\cosh y - 3 \sinh y)}{4a^{1/2} R_1} \right] + c \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1} R_1^{-2} \left[\frac{(e^{-y})^{1/3} \left(\frac{e^y + e^{-y} + 3e^y - 3e^{-y}}{2} \right)}{4} + \frac{(e^y)^{1/3} \left(\frac{e^y + e^{-y} - 3e^y + 3e^{-y}}{2} \right)}{4} \right] + c \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1} R_1^{-2} \left[\frac{(e^{-y})^{1/3} (2e^y - e^{-y})}{4} + \frac{(e^y)^{1/3} (2e^{-y} - e^y)}{4} \right] + c \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1} R_1^{-2} \left(\frac{2e^{2y/3} - e^{-4y/3} + 2e^{-2y/3} - e^{4y/3}}{4} \right) + c \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1} R_1^{-2} \left(\frac{e^{2y/3} + e^{-2y/3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{4y/3} + e^{-4y/3}}{2} \right) + c \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta_0 &= a^{-1} R_1^{-2} \left(\cosh \frac{2}{3} y - \frac{1}{2} \cosh \frac{4}{3} y \right) + c \quad (4-72)
\end{aligned}$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\theta_0|_{\xi=0} = \theta_0|_{\xi=1} = 0}$$

$$\text{Για } \xi = 1 \Rightarrow y = \underbrace{\sinh^{-1}\left(\frac{3}{4}a^{1/2}R_1\right)}_{y_0} \quad (4-72) \Rightarrow c = -a^{-1}R_1^{-2}\left(\cosh\frac{2}{3}y_0 - \frac{1}{2}\cosh\frac{4}{3}y_0\right)$$

$$(4-72) \Rightarrow \boxed{\theta_0 = a^{-1}R_1^{-2}\left(\cosh\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}\cosh\frac{4}{3}y - \cosh\frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{2}\cosh\frac{4}{3}y_0\right)} \quad (4-73)$$

$$(4-72) \Rightarrow \frac{d\theta_0}{dy} = \frac{2}{3}a^{-1}R_1^{-2}\left(\sinh\frac{2}{3}y - \sinh\frac{4}{3}y\right) \quad (4-74)$$

Υπενθυμίζεται ότι:

$$\boxed{\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \quad (4-75)$$

και

$$\boxed{\frac{d(\sinh^{-1}x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \quad (4-76)$$

$$(4-70) \Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = \frac{3a^{1/2}R_1}{2} \left[1 + \frac{9}{4}aR_1^2 \underbrace{\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2}_{\sinh^2 y} \right]^{-1/2} = \frac{3a^{1/2}R_1}{2(1 + \sinh^2 y)^{1/2}} = \frac{3a^{1/2}R_1}{2(\cosh^2 y)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = \frac{3a^{1/2}R_1}{2\cosh y} \quad (4-77)$$

$$\frac{d\theta_0}{d\xi} = \left(\frac{d\theta_0}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\xi}\right) \stackrel{(4-74)}{\Rightarrow} \stackrel{(4-77)}{\Rightarrow} \frac{d\theta_0}{d\xi} = a^{-1/2}R_1^{-1} \frac{\sinh\frac{2}{3}y - \sinh\frac{4}{3}y}{\cosh y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta_0}{d\xi} = a^{-1/2}R_1^{-1} \frac{e^{2y/3} - e^{-2y/3} - e^{4y/3} + e^{-4y/3}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta_0}{d\xi} = a^{-1/2} R_1^{-1} \frac{e^y (e^{-y/3} - e^{y/3}) + e^{-y} (e^{-y/3} - e^{y/3})}{e^y + e^{-y}} = a^{-1/2} R_1^{-1} (e^{-y/3} - e^{y/3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_0' = -2a^{-1/2} R_1^{-1} \sinh \frac{1}{3} y \quad (4-78)$$

Για τη ροϊκή συνάρτηση $\psi_0(\xi, z)$, έχουμε:

$$(4-46) \wedge (4-78) \Rightarrow \psi_0 = -2a^{-1/2} F(z) \sinh \frac{1}{3} y \quad (4-79)$$

Η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο κέντρο της κοιλότητας, είναι:

$$v_0(\xi, z) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \left(\frac{dy}{d\xi} \right) \stackrel{(4-77)}{\Rightarrow} v_0 = R_1 F(z) \frac{\cosh \frac{1}{3} y}{\cosh y} \stackrel{(4-79)}{\Rightarrow} \quad (\text{Παράρτημα 1})$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{R_1 F(z)}{-1 + 2 \cosh \frac{2y}{3}} = \frac{R_1 F(z)}{-1 + e^{2y/3} + e^{-2y/3}} = \frac{R_1 F(z)}{1 + (e^{2y/3} + e^{-2y/3} - 2)} = \frac{R_1 F(z)}{1 + (e^{y/3} - e^{-y/3})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{R_1 F(z)}{1 + 4 \sinh^2 \frac{1}{3} y} = \frac{R_1 F(z)}{1 + a R_1^2 (\theta_0')^2} \quad (4-80)$$

Στο κέντρο της κοιλότητας, όπου $\theta_0' = 0$, η v_0 είναι γραμμική συνάρτηση της παραμέτρου R_1 και δίνεται από τη σχέση: $v_0\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{R_1}{384}$. Τα προφίλ των θ_0 , ψ_0 και v_0 παρουσιάζονται, αντίστοιχα, στα Σχήματα 4-1, 4-2 και 4-3 του Παραρτήματος II.

4.6 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Μια ασυμπτωτική περιγραφή της μόνιμης ροής που παράγεται μέσα σε μια αβαθή, διδιάστατη κοιλότητα από ομοιόμορφα κατανεμημένες εσωτερικές πηγές θερμότητας, επιτυγχάνεται για αριθμούς Rayleigh R τάξης L^{-1} . Σ' αυτήν την περιοχή τιμών, στα πεδία ροής και θερμοκρασίας στην κοιλότητα, επιδρούν φαινόμενα συναγωγής που οδηγούν σε αλλαγές στο σχήμα και την ταχύτητα της κύριας double-cell κυκλοφορίας. Στα Σχήματα 4-4 του Παραρτήματος II, απεικονίζονται οι ροϊκές γραμμές (core streamlines) που λαμβάνονται από τη σχέση (4-79) για διάφορες τιμές του αριθμού $R_1 = R L$. Για μικρές τιμές του R_1 , στη ροή κυριαρχεί η αγωγή και η ταχύτητα της προς τα άνω κίνησης στο διπλό πυρήνα κυκλοφορίας είναι ουσιαστικά ανεξάρτητη της πλευρικής διεύθυνσης.

Καθώς ο αριθμός R_1 αυξάνει και η συναγωγή γίνεται πιο σημαντική, η προς τα άνω κίνηση στη διπλή κυκλοφορία γίνεται εμφανώς πιο σθεναρή προς το κέντρο της κοιλότητας -όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα 4-3 (Παράρτημα II)- ενώ παραμένει σχετικά ασθενής μακριά από το κέντρο, κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα. Τελικά, η κίνηση στο κέντρο οδηγεί σε μια νέα τοπική δομή εκεί, όταν ο αριθμός R είναι τάξης 1 (και ο R_1 τάξης L). Η εσωτερική αυτή περιοχή κοντά στο κέντρο έχει εύρος συγκρίσιμο προς το ύψος της κοιλότητας και οι τοπικές, τάξης 1 μεταβολές στη ροϊκή συνάρτηση και τη θερμοκρασία περιγράφονται από το πλήρες μη-γραμμικό σύστημα των (4-14) και (4-15). Στο εσωτερικό χαρακτηριστικό μήκος $\xi - \frac{1}{2} = O(R_1^{-1})$, η αγωγή παραμένει σημαντική.

Ανακεφαλαιώνοντας, η ανάλυση που ακολουθήθηκε μέχρι εδώ, είναι έγκυρη για μεγάλες αναλογίες διαστάσεων εύρους προς ύψος $L \gg 1$ και αριθμούς Rayleigh $R_1 \ll L$. Όταν $R_1 \sim \frac{2}{3} a^{-1/2} L \approx 232 L$ -σχέση (4-70)- σχηματίζεται ένα κεντρικό πλούμιο (central plume) σε μια περιοχή χαρακτηριστικού πλευρικού μήκους (lateral scale) $x \sim 1$, συγκρίσιμου προς το ύψος της κοιλότητας. Η ανωτέρω τάξη μεγέθους του αριθμού R_1 αποτελεί μια πρώτη ένδειξη για το άνω όριο ισχύος της προκειμένης ανάλυσης, για την περιοχή κοντά στο κέντρο της κοιλότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο - ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

5.1 Συναγωγή οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου

Η μεταφορά θερμότητας με φυσική συναγωγή μέσα σε διδιάστατη ορθογώνια κοιλότητα μεγάλης αναλογίας διαστάσεων L εύρους προς ύψος, αναλύεται για την περίπτωση ασυμπίεστου, ηλεκτρικά αγωγίμου ρευστού, υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η μόνιμη ροή η παραγόμενη από μια ομοιόμορφη κατανομή πηγών θερμότητας, εξετάζεται όταν τα κατακόρυφα τοιχώματα είναι ισοθερμικά και τα οριζόντια σύνορα αδιαβατικά. Οι λύσεις λαμβάνονται εφαρμόζοντας ασυμπτωτικά αναπτύγματα.

Θεωρείται ισχυρό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση $\underline{B}_o(0, B_o)$, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το εσωτερικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω της κίνησης του ρευστού -σχετικά μικρές ταχύτητες ρευστού και η επίδραση του επαγόμενου εσωτερικού μαγνητικού πεδίου μπορεί να παραληφθεί. Στην περίπτωση αυτή, η \underline{u}_\perp στη σχέση (2-70) που δίνει την ηλεκτρομαγνητική δύναμη (δύναμη Lorentz) όταν δεν έχουμε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, είναι η συνιστώσα της ταχύτητας η κάθετη στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

5.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Για διδιάστατη ροή (με x και z να συμβολίζονται αντίστοιχα η οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση), οι συνιστώσες της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης δίνονται από τις σχέσεις:

$$x\text{-}\delta/\nu\text{ση: } f_{em,x} = -\sigma B_o^2 u \quad (2-70\alpha)$$

$$z\text{-}\delta/\nu\text{ση: } f_{em,z} = 0 \quad (2-70\beta)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα της μόνιμης, ασυμπίεστης, διδιάστατης ροής, έχουν ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{συνέχεια}) \quad (5-1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \sigma B_o^2 u \quad (\text{x-ορμή}) \quad (5-2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g\beta\rho \Delta T \quad (\text{z-ορμή}) \quad (5-3)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \nabla^2 T + \Sigma \quad (\text{ενέργεια}) \quad (5-4)$$

όπου ρ είναι μια μέση πυκνότητα (mean density), η το δυναμικό ιξώδες του ρευστού, β ο συντελεστής θερμικής διαστολής (volumetric expansion coefficient), Σ ο σταθερός ογκομετρικός ρυθμός παραγωγής θερμότητας (volumetric heat generation rate), σ η ειδική αγωγιμότητα του ρευστού.

Από τις εξισώσεις (5-2) και (5-3) με απαλοιφή των όρων της πίεσης προκύπτουν οι εξισώσεις της στροβιλότητας και της ροϊκής συνάρτησης. Η ροϊκή συνάρτηση είναι αυτή που ενδιαφέρει για την περιγραφή της γεωμετρίας του πεδίου ροής. Παραγωγίζοντας τις (5-2) και (5-3) ως προς z και x αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-6)$$

$$(5-5) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_0 + u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow$$

(εξ.συνέχειας)

$$\Rightarrow u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5-5\alpha)$$

$$(5-6) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)}_0 + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow$$

(εξ.συνέχειας)

$$\Rightarrow u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-6\alpha)$$

Αφαιρώντας την (5-6α) από την (5-5α) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) &= v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} \right) - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \\
 \Rightarrow u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial x} \right) - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} - g\beta \frac{\partial T}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{5-7}$$

Η ροϊκή συνάρτηση $\psi(x,z)$ συνδέεται εξ' ορισμού με τις συνιστώσες ταχύτητες u και v βάσει των σχέσεων:

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial z}} \quad \text{και} \quad \boxed{v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}
 \tag{5-8}$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες u και v στη σχέση (5-7) όπως αυτές δίνονται συναρτήσει της ψ από τις σχέσεις (5-8), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) &= v \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial x^2} \right) - \\
 - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)}_{\nabla^2 \psi} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)}_{\nabla^2 \psi} &= v \underbrace{\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right)}_{\nabla^4 \psi} - \\
 - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial z} = v \nabla^4 \psi - \frac{\sigma B_o^2}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - g\beta \frac{\partial T}{\partial x}}
 \end{aligned}
 \tag{5-9}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5-4) της ενέργειας τις ταχύτητες u και v όπως αυτές δίνονται συναρτήσει της ψ από τις σχέσεις (5-8), προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \nabla^2 T + \frac{\Sigma}{\rho c_p}} \quad (5-10)$$

όπου v είναι το κινηματικό ιξώδες και κ ο συντελεστής θερμικής διαχυτότητας.

Οι εξισώσεις της ροϊκής συνάρτησης (5-9) και της ενέργειας (5-10) μπορούν να αδιαστατοποιηθούν εισάγοντας τις ακόλουθες αδιάστατες μεταβλητές:

$$X = \frac{x}{h}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\kappa}, \quad \Theta = \frac{T \rho c_p \kappa}{h^2 \Sigma} \quad (5-11)$$

όπου h είναι το ύψος της κοιλότητας.

$$\begin{aligned} (5-10) &\Rightarrow \frac{\kappa h^2 \Sigma}{\rho c_p \kappa h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \right) = \frac{\kappa h^2 \Sigma}{\rho c_p \kappa h^2} \nabla^2 \Theta + \frac{\Sigma}{\rho c_p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \nabla^2 \Theta + 1 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \Theta + 1 = \frac{\partial(\Theta, \Psi)}{\partial(X, Z)}} \end{aligned} \quad (5-12)$$

$$\begin{aligned} (5-9) &\Rightarrow \frac{\kappa^2}{h^4} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial Z} \right] = \frac{v \kappa}{h^4} \nabla^4 \Psi - \frac{\sigma B_o^2 \kappa}{\rho h^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} - g \beta \frac{h^2 \Sigma}{\rho c_p \kappa h} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\kappa}{v} \right)}_{Pr^{-1}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial Z} \right] = \nabla^4 \Psi - \underbrace{\left(\frac{\sigma B_o^2 h^2}{\rho v} \right)}_{Ha^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} - \underbrace{\left(\frac{g \beta \Sigma h^5}{\rho c_p v \kappa^2} \right)}_R \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Pr^{-1} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi, \Psi)}{\partial(X, Z)} = \nabla^4 \Psi - Ha^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} - R \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\nabla^4 \Psi = Pr^{-1} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi, \Psi)}{\partial(X, Z)} + Ha^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + R \frac{\partial \Theta}{\partial X}} \end{aligned} \quad (5-13)$$

όπου $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ είναι ο αριθμός Prandtl του ρευστού, $R = \frac{g\beta\Sigma h^5}{\rho c_p \nu \kappa^2}$ ο αριθμός Rayleigh

βασίζόμενος στο ύψος h της κοιλότητας και $Ha^2 = \frac{\sigma B_o^2 h^2}{\rho \nu}$ ο αριθμός Hartmann.

Συμβολίζοντας τις αδιάστατες συντεταγμένες, την αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση και την αδιάστατη θερμοκρασία με x , z , ψ και T αντίστοιχα, οι αδιάστατες εξισώσεις (5-13) του πεδίου ροής και (5-12) της ενέργειας γράφονται τελικά ως εξής:

$$\nabla^4 \psi = Pr^{-1} \frac{\partial(\nabla^2 \psi, \psi)}{\partial(x, z)} + Ha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-14a)$$

ή

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = Pr^{-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial z} \right] + Ha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5-14\beta)$$

και

$$\nabla^2 T + 1 = \frac{\partial(T, \psi)}{\partial(x, z)} \quad (5-15a)$$

ή

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5-15\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες στις οριζόντιες επιφάνειες είναι:

$$\psi(x, 1/2) = \psi(x, -1/2) = 0 \quad (5-16)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, 1/2) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, -1/2) = 0 \quad (5-17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(x, 1/2) = \frac{\partial T}{\partial z}(x, -1/2) = 0 \quad (5-18)$$

και στα κατακόρυφα τοιχώματα:

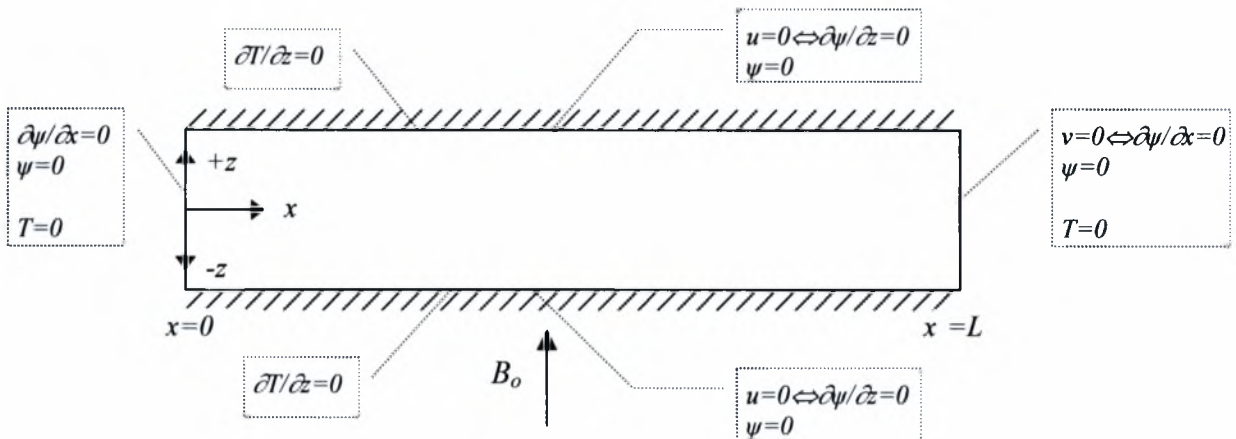
$$\psi(0, z) = \psi(L, z) = 0 \quad (5-19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, z) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, z) = 0 \quad (5-20)$$

$$T(0, z) = T(L, z) = 0 \quad (5-21)$$

όπου L είναι ο λόγος των πλευρών (εύρος / ύψος) της κοιλότητας που υποθέτουμε ότι είναι μεγάλος.

Οι ανωτέρω συνοριακές συνθήκες, καθώς και η γεωμετρία του προβλήματος φαίνονται χαρακτηριστικά, στο σχήμα που ακολουθεί.



Αναμένεται ότι οι λύσεις των εξισώσεων (5-14), (5-15) και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών (5-16) έως και (5-21) θα ικανοποιούν τις σχέσεις συμμετρίας:

$$\psi(x, z) = -\psi(L - x, z) \quad (5-22)$$

$$T(x, z) = T(L - x, z) \quad (5-23)$$

Στην επίλυση που ακολουθεί ο αριθμός Rayleigh είναι τάξης L^{-1} καθώς $L \rightarrow \infty$. Η παράμετρος $R_1 = RL$ (scaled Rayleigh number) είναι τάξης 1 καθώς $L \rightarrow \infty$, ενώ ο Ha^2 επίσης λαμβάνεται τάξης 1 .

5.3 Εφαρμογή της μεθόδου των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων

Η μικρή παράμετρος $\varepsilon \ll 1$ από την οποία εξαρτάται το συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι ο αντίστροφος του λόγου των πλευρών (εύρος / ύψος) της κοιλότητας, δηλαδή $\varepsilon \equiv L^{-1} \ll 1$.

Στο κεντρικό τμήμα της κοιλότητας (core region), η λύση εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά μήκη (length scales):

$$\xi = x/L, \quad z = z \quad (5-24)$$

Δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής:

$$\psi = \varepsilon^0 \psi_0(\xi, z) + \varepsilon^1 \psi_1(\xi, z) + \varepsilon^2 \psi_2(\xi, z) + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \psi_0(\xi, z) + L^{-1} \psi_1(\xi, z) + L^{-2} \psi_2(\xi, z) + \dots} \quad (5-25)$$

$$T = \varepsilon^{-2} T_0(\xi, z) + \varepsilon^{-1} T_1(\xi, z) + \varepsilon^0 T_2(\xi, z) + \varepsilon^1 T_3(\xi, z) + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = L^2 T_0(\xi, z) + L T_1(\xi, z) + T_2(\xi, z) + L^{-1} T_3(\xi, z) + \dots} \quad (5-26)$$

καθώς $L \rightarrow \infty$.

Οι όροι $\psi_0(\xi, z), \psi_1(\xi, z), \psi_2(\xi, z), T_0(\xi, z), T_1(\xi, z), T_2(\xi, z), T_3(\xi, z)$ είναι τάξης L .

Αλλαγή μεταβλητής από x σε ξ :

$$(5-15\beta) \Rightarrow L^{-2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1 = L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial \xi} - L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L^{-2} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 1 = L^{-1} \frac{\partial(T, \psi)}{\partial(\xi, z)}} \quad (5-27)$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των σχέσεων (5-25) και (5-26) στη διαφορική εξίσωση (5-27), έχουμε:

$$\begin{aligned} & L^{-2} \left(L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + HOT \right) + \left(L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + HOT \right) + 1 = \\ & = L^{-1} \left[L^2 \frac{\partial(T_0, \psi)}{\partial(\xi, z)} + L \frac{\partial(T_1, \psi)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 + \dots = L \frac{\partial(T_0, \psi)}{\partial(\xi, z)} + \frac{\partial(T_1, \psi)}{\partial(\xi, z)} + \dots \Rightarrow \\ & \Rightarrow L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L \left[\frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + L^{-1} \frac{\partial(T_0, \psi_1)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] + \left[\frac{\partial(T_1, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 \right) + \dots = L \frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + \left[\frac{\partial(T_0, \psi_1)}{\partial(\xi, z)} + \frac{\partial(T_1, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} \right] + \dots
\end{aligned} \tag{5-28}$$

Εξισώνουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = -2, -1, 0, \dots$

Όροι τάξης L^2 :

$$L^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = 0} \tag{5-29}$$

$$(5-29) \Rightarrow \frac{\partial T_0}{\partial z} = c_1(\xi) \Rightarrow T_0(\xi, z) = c_1(\xi)z + c_2(\xi) \tag{5-30}$$

$$\text{Σ.Σ.: } \boxed{\frac{\partial T_0}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\partial T_0}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow c_1(\xi) = 0$$

$$(5-30) \Rightarrow T_0(\xi, z) = c_2(\xi) \Rightarrow \boxed{T_0 = \theta_0(\xi)} \tag{5-31}$$

όπου $\theta_0(\xi)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του ξ .

Όροι τάξης L :

$$L \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = L \frac{\partial(T_0, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial T_0}{\partial z}}_0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial z}} \tag{5-32}$$

Όροι τάξης L :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 = \frac{\partial(T_0, \psi_1)}{\partial(\xi, z)} + \frac{\partial(T_1, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + 1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial T_0}{\partial z}}_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \frac{\partial T_1}{\partial z} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -1 - \frac{\partial^2 T_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \quad (5-33)$$

$$\begin{aligned} (5-14\beta) \Rightarrow L^{-4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 2L^{-2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \\ = \text{Pr}^{-1} \left[L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(L^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - L^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} \left(L^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right] + \\ + Ha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + R L^{-1} \frac{\partial T}{\partial \xi} \Rightarrow \\ \Rightarrow L^{-4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 2L^{-2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \text{Pr}^{-1} \left[L^{-3} \frac{\partial(\partial^2 \psi / \partial \xi^2, \psi)}{\partial(\xi, z)} + L^{-1} \frac{\partial(\partial^2 \psi / \partial z^2, \psi)}{\partial(\xi, z)} \right] + \\ + Ha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + R_1 L^{-2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (5-34) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των σχέσεων (5-25) και (5-26) στη διαφορική εξίσωση (5-34), έχουμε:

$$\begin{aligned} L^{-4} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \xi^4} + 2L^{-2} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \left(\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + L^{-1} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + HOT \right) = \text{Pr}^{-1} L^{-3} \frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial \xi^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + \\ + \text{Pr}^{-1} L^{-1} \left[\frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial z^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + HOT \right] + Ha^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + L^{-1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + HOT \right) + \\ + R_1 L^{-2} \left(L^2 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} + L \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + HOT \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dots + \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + L^{-1} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + \dots = \dots + L^{-1} \left[\text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial z^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right] + \\ + \left(Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + R_1 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \right) + \dots \quad (5-35) \end{aligned}$$

Εξισώνουμε όρους τάξης ε^k , όπου $k = 0, 1, \dots$

Όροι τάξης 1:

$$\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} = Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + R_1 \frac{\partial T_0}{\partial \xi} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} - Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = R_1 \frac{\partial T_0}{\partial \xi}} \quad (5-36)$$

Όροι τάξης L^{-1} :

$$L^{-1} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} = L^{-1} \left[\text{Pr}^{-1} \frac{\partial(\partial^2 \psi_0 / \partial z^2, \psi_0)}{\partial(\xi, z)} + Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} - Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi}} \quad (5-37)$$

5.4 Επίλυση των εξισώσεων

Επίλυση ως προς $\psi_0(\xi, z)$:

$$(5-36) \Rightarrow \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} - Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = R_1 \theta_0' \Rightarrow \psi_0^{(4)} - Ha^2 \ddot{\psi}_0 = R_1 \theta_0' \quad (5-38)$$

Γενική λύση ομογενούς: $\psi_{0,\text{hom}}(\xi, z) = A(\xi) \cosh Haz + B(\xi) \sinh Haz + C(\xi)z + D(\xi)$

Μία μερική λύση είναι: $\psi_{0,\text{sp}}(\xi, z) = -\frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \frac{z^2}{2}$

Άρα η γενική λύση της (5-38) είναι:

$$\psi_0(\xi, z) = A(\xi) \cosh Haz + B(\xi) \sinh Haz + C(\xi)z + D(\xi) - \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \frac{z^2}{2} \quad (5-39)$$

$$(5-39) \Rightarrow \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = A(\xi) Ha \sinh Haz + B(\xi) Ha \cosh Haz + C(\xi) - \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} z$$

$$\Sigma.\Sigma.: \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow A(\xi) Ha \sinh \frac{Ha}{2} + B(\xi) Ha \cosh \frac{Ha}{2} + C(\xi) - \frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^2} = 0 \quad (I)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow -A(\xi) Ha \sinh \frac{Ha}{2} + B(\xi) Ha \cosh \frac{Ha}{2} + C(\xi) + \frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^2} = 0 \quad (II)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \psi_0(\xi, \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow A(\xi) \cosh \frac{Ha}{2} + B(\xi) \sinh \frac{Ha}{2} + \frac{C(\xi)}{2} + D(\xi) - \frac{R_1 \theta_0'}{8Ha^2} = 0 \quad (III)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \psi_0(\xi, -\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow A(\xi) \cosh \frac{Ha}{2} - B(\xi) \sinh \frac{Ha}{2} - \frac{C(\xi)}{2} + D(\xi) - \frac{R_1 \theta_0'}{8Ha^2} = 0 \quad (IV)$$

$$(I)+(II) \Rightarrow C(\xi) = -B(\xi) Ha \cosh \frac{Ha}{2} \quad (V)$$

$$(I)-(II) \Rightarrow A(\xi) Ha \sinh \frac{Ha}{2} = \frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^2} \Rightarrow A(\xi) = \frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^3 \sinh \frac{Ha}{2}} \quad (VI)$$

$$(III)+(IV) \Rightarrow D(\xi) = -A(\xi) \cosh \frac{Ha}{2} + \frac{R_1 \theta_0'}{8Ha^2} \Rightarrow D(\xi) = -\frac{R_1 \theta_0' \coth \frac{Ha}{2}}{2Ha^3} + \frac{R_1 \theta_0'}{8Ha^2} \quad (VII)$$

$$(III)-(IV) \Rightarrow C(\xi) = -2B(\xi) \sinh \frac{Ha}{2} \quad (VIII)$$

$$(V) \wedge (VIII) \Rightarrow B(\xi) Ha \cosh \frac{Ha}{2} = 2B(\xi) \sinh \frac{Ha}{2} \Rightarrow B(\xi) \frac{Ha}{2} = B(\xi) \tanh \frac{Ha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(\xi) \underbrace{\left(\tanh \frac{Ha}{2} - \frac{Ha}{2} \right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B(\xi) = 0$$

$$(V) \vee (VIII) \Rightarrow C(\xi) = 0$$

$$(5-39) \Rightarrow \psi_0(\xi, z) = A(\xi) \cosh Haz + D(\xi) - \frac{R_1 \theta_0' z^2}{Ha^2 2} \quad (5-40)$$

$$(5-40) \stackrel{(VI)}{\Rightarrow} \psi_0(\xi, z) = \frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^3 \sinh \frac{Ha}{2}} \cosh Haz - \frac{R_1 \theta_0' \coth \frac{Ha}{2}}{2Ha^3} + \frac{R_1 \theta_0'}{8Ha^2} - \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \frac{z^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_0(\xi, z) = \frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^2} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_0(\xi, z) = \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right)}_{f(z)} \Rightarrow \psi_0 = \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} f(z) \quad (5-41)$$

$$\text{όπου } f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right) \quad (5-42)$$

Επίλυση ως προς $T_1(\xi, z)$:

$$(5-32) \Rightarrow \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \theta_0' \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \stackrel{(5-41)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{R_1 (\theta_0')^2}{Ha^2} \frac{df}{dz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{R_1 (\theta_0')^2}{Ha^2} \left(\frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - z \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{R_1 (\theta_0')^2}{Ha^2} \left(\frac{1}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \int \sinh Haz dz - \frac{z^2}{2} \right) + c_1(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{R_1 (\theta_0')^2}{Ha^2} \left(\frac{1}{2Ha \sinh \frac{Ha}{2}} \int \sinh(Haz) d(Haz) - \frac{z^2}{2} \right) + c_1(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{R_1(\theta_0')^2}{2Ha^2} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - z^2 \right) + c_1(\xi) \quad (5-43)$$

$$\Sigma.\Sigma.: \boxed{\frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} \Rightarrow c_1(\xi) = -\frac{R_1(\theta_0')^2}{2Ha^2} \left(\frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} - \frac{1}{4} \right)$$

$$(5-43) \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{R_1(\theta_0')^2}{2Ha^2} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - z^2 - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{R_1(\theta_0')^2}{Ha^2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right)}_{f(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1(\xi, z) = \frac{R_1(\theta_0')^2}{2Ha^2} \left(\frac{1}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} \int \cosh Haz \, dz - \frac{z \coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) + c_2(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1(\xi, z) = \frac{R_1(\theta_0')^2}{2Ha^2} \left(\frac{1}{Ha^2 \sinh \frac{Ha}{2}} \int \cosh(Haz) d(Haz) - \frac{z \coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) + c_2(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1(\xi, z) = \frac{R_1(\theta_0')^2}{Ha^2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\sinh Haz}{Ha^2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{z \coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{3} \right)}_{g(z)} + \theta_1(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{R_1(\theta_0')^2}{Ha^2} g(z) + \theta_1(\xi) \quad (5-44)$$

όπου $\theta_1(\xi)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του ξ και

$$g(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh Haz}{Ha^2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{z \coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \quad (5-45)$$

Σημειώνουμε, επίσης, ότι ισχύει:

$$\dot{g}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right) = f(z) \quad (5-46)$$

Επίλυση ως προς $\psi_1(\xi, z)$:

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} - Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \quad (5-37)$$

Παράγωγοι ως προς z της $\psi_0(\xi, z)$:

$$(5-41) \Rightarrow \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \left(\frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - z \right), \quad \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \left(\frac{Ha \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - 1 \right),$$

$$\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} = \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \left(\frac{Ha^2 \sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \right)$$

Εύρεση του παράγοντα στον όρο του γινομένου με τον Pr^{-1} :

$$\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \left(\frac{Ha \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - 1 \right) \right] \cdot \frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \left(\frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - z \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{R_1 \theta_0'}{Ha^2} \left(\frac{Ha^2 \sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{R_1 \theta_0'}{2Ha^2} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right) \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left(\frac{Ha \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - z \right) - \\
& - \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{2Ha^4} \left(\frac{Ha^2 \sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left(\frac{Ha \cosh Haz \sinh Haz}{4 \sinh^2 \frac{Ha}{2}} - \frac{Haz \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} + z \right) - \\
& - \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{2Ha^4} \left(\frac{Ha \sinh Haz \cosh Haz}{2 \sinh^2 \frac{Ha}{2}} - \frac{Ha \coth \frac{Ha}{2} \sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{Ha^2 \sinh Haz}{8 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{z^2 Ha^2 \sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left(z - \frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{Haz \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} + \right. \\
& \left. + \frac{Ha \coth \frac{Ha}{2} \sinh Haz}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{Ha^2 \sinh Haz}{16 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{Ha^2 z^2 \sinh Haz}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \\
& = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left[z - \frac{Haz \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \left(\frac{Ha \coth \frac{Ha}{2}}{2} - \frac{Ha^2}{8} - 1 + \frac{Ha^2 z^2}{2} \right) \right] \\
\end{aligned}$$

(5-47)

Υπολογισμός του τελευταίου όρου της (5-37):

$$\begin{aligned}
 (5-44) \Rightarrow R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} &= \frac{2R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^2} g(z) + R_1 \theta_1' \Rightarrow \\
 \Rightarrow R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} &= \frac{2R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh Haz}{Ha^2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{z \coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) + R_1 \theta_1' \Rightarrow \\
 \Rightarrow R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} &= \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left(\frac{\sinh Haz}{\sinh \frac{Ha}{2}} - Haz \coth \frac{Ha}{2} + \frac{Ha^2 z}{4} - \frac{Ha^2 z^3}{3} \right) + R_1 \theta_1' \Rightarrow \\
 \Rightarrow R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} &= \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left[-\frac{Ha^2 z^3}{3} - z \left(Ha \coth \frac{Ha}{2} - \frac{Ha^2}{4} \right) + \frac{\sinh Haz}{\sinh \frac{Ha}{2}} \right] + R_1 \theta_1' \quad (5-48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{B' μέλος της (5-37)} &= \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = \\
 &= \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left\{ \text{Pr}^{-1} \left[z - \frac{Haz \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \left(\frac{Ha \coth \frac{Ha}{2}}{2} - \frac{Ha^2}{8} - 1 + \frac{Ha^2 z^2}{2} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Ha^2 z^3}{3} - z \left(Ha \coth \frac{Ha}{2} - \frac{Ha^2}{4} \right) + \frac{\sinh Haz}{\sinh \frac{Ha}{2}} \right\} + R_1 \theta_1' = \\
 &= \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4} \left[-\frac{Ha^2}{3} z^3 + \left(\text{Pr}^{-1} - Ha \coth \frac{Ha}{2} + \frac{Ha^2}{4} \right) z - \frac{\text{Pr}^{-1} Haz \cosh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sinh Haz}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} \left(2 - \text{Pr}^{-1} - \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{8} + \frac{\text{Pr}^{-1} Ha \coth \frac{Ha}{2}}{2} + \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2 z^2}{2} \right) \right] + R_1 \theta_1' =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4}}_c \left[-\frac{Ha^2}{3} z^3 + \left(\text{Pr}^{-1} + \frac{Ha^2}{4} - Ha \coth \frac{Ha}{2} \right) z \right] + R_1 \theta_1' + \underbrace{\frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4}}_c \left(-\frac{\text{Pr}^{-1} Ha}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} z \right) \cosh Haz + \\
&+ \underbrace{\frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4}}_c \left[\frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} z^2 + \left(\frac{1}{\sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1}}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{16 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{\text{Pr}^{-1} Ha \coth \frac{Ha}{2}}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \right] \sinh Haz = \\
&= C \underbrace{\left[-\frac{Ha^2}{3} z^3 + \left(\text{Pr}^{-1} + \frac{Ha^2}{4} - Ha \coth \frac{Ha}{2} \right) z \right]}_{f_1} + R_1 \theta_1' + C \underbrace{\left(-\frac{\text{Pr}^{-1} Ha}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} z \right)}_{f_2} \cosh Haz + \\
&+ C \underbrace{\left[\frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} z^2 + \left(\frac{1}{\sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1}}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{16 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{\text{Pr}^{-1} Ha \coth \frac{Ha}{2}}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \right]}_{f_3} \sinh Haz \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Pr}^{-1} \left(\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \xi \partial z^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + R_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = f_1 + f_2 + f_3 \quad (5-49)$$

$$(5-37) \wedge (5-49) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} - Ha^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = f_1 + f_2 + f_3} \quad (5-50)$$

$$\Theta \acute{\epsilon}\tau\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = \psi \quad (5-51)$$

$$(5-50) \wedge (5-51) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - Ha^2 \psi = f_1 + f_2 + f_3} \quad (5-52)$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $X(k) = k^2 - Ha^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm Ha$

$$\text{Άρα γενική λύση ομογενούς της (5-52): } \boxed{\psi_{\text{hom}}(\xi, z) = A(\xi) \cosh Haz + B(\xi) \sinh Haz} \quad (5-53)$$

Εύρεση ειδικής λύσης της: $\boxed{\ddot{\psi} - Ha^2 \psi = f_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{\psi} - Ha^2 \psi = C \left[-\frac{Ha^2}{3} z^3 + \left(Pr^{-1} + \frac{Ha^2}{4} - Ha \coth \frac{Ha}{2} \right) z \right] + R_1 \theta_1' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\psi} - Ha^2 \psi = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3} \quad (5-54)$$

όπου: $b_0 = -C \frac{Ha^2}{3}$, $b_1 = 0$, $b_2 = C \left(Pr^{-1} + \frac{Ha^2}{4} - Ha \coth \frac{Ha}{2} \right)$, $b_3 = R_1 \theta_1'$,

$$C = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4}$$

Αν ο συντελεστής του ψ στην (5-54) είναι $\neq 0$, τότε η ειδική λύση της (5-54) είναι της μορφής: $\psi_{sp}^{(I)} = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ με άγνωστα τα a_0, a_1, a_2 και a_3 .

$$\dot{\psi}_{sp}^{(I)} = 3a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2$$

$$\ddot{\psi}_{sp}^{(I)} = 6a_0 z + 2a_1$$

Αντικαθιστώ στην (5-54): $\ddot{\psi}_{sp}^{(I)} - Ha^2 \psi_{sp}^{(I)} = f_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6a_0 z + 2a_1 - Ha^2 a_0 z^3 - Ha^2 a_1 z^2 - Ha^2 a_2 z - Ha^2 a_3 = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-Ha^2 a_0) z^3 + (-Ha^2 a_1) z^2 + (6a_0 - Ha^2 a_2) z + (2a_1 - Ha^2 a_3) = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 \quad (5-55)$$

$$(5-55) \Rightarrow a_0 = -\frac{b_0}{Ha^2} \Rightarrow a_0 = \frac{C}{3}$$

$$(5-55) \Rightarrow -Ha^2 a_1 = b_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$(5-55) \Rightarrow 6a_0 - Ha^2 a_2 = b_2 \Rightarrow 6\frac{C}{3} - Ha^2 a_2 = C \left(Pr^{-1} + \frac{Ha^2}{4} - Ha \coth \frac{Ha}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = C \left(-\frac{Pr^{-1}}{Ha^2} + \frac{2}{Ha^2} + \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} - \frac{1}{4} \right)$$

$$(5-55) \Rightarrow 2a_1 - Ha^2 a_3 = b_3 \Rightarrow a_3 = -\frac{R_1 \theta_1'}{Ha^2}$$

$$\text{Άρα } \psi_{sp}^{(I)} = \frac{C}{3} z^3 + C \left(-\frac{\text{Pr}^{-1}}{Ha^2} + \frac{2}{Ha^2} + \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} - \frac{1}{4} \right) z - \frac{R_1 \theta_1'}{Ha^2} \quad (5-56)$$

$$\text{Εύρεση ειδικής λύσης της: } \boxed{\ddot{\psi} - Ha^2 \psi = f_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\psi} - Ha^2 \psi = C \left(-\frac{\text{Pr}^{-1} Ha}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} z \right) \cosh Haz \Rightarrow \ddot{\psi} - Ha^2 \psi = \underbrace{b_0}_{P(z)} z \cosh Haz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\psi} - Ha^2 \psi = P(z) \cosh Haz} \quad (5-57)$$

$$\text{όπου: } b_0 = -C \frac{\text{Pr}^{-1} Ha}{2 \sinh \frac{Ha}{2}}, \quad C = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4}$$

$$(5-57) \Rightarrow \boxed{\psi_{sp}^{(II)} = -\frac{b_0}{4Ha^2} z \cosh Haz + \left(\frac{b_0}{8Ha^3} + \frac{b_0}{4Ha} z^2 \right) \sinh Haz} \quad (\text{Παράρτημα I}) \quad (5-58)$$

$$\text{Εύρεση ειδικής λύσης της: } \boxed{\ddot{\psi} - Ha^2 \psi = f_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\psi} - Ha^2 \psi = C \left[\frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} z^2 + \left(\frac{1}{\sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1}}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{16 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{\text{Pr}^{-1} Ha \coth \frac{Ha}{2}}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} \right) \right] \sinh Haz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\psi} - Ha^2 \psi = (b_0 z^2 + b_1 z + b_2) \sinh Haz \Rightarrow \ddot{\psi} - Ha^2 \psi = \underbrace{(b_0 z^2 + b_2)}_{P(z)} \sinh Haz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\psi} - Ha^2 \psi = P(z) \sinh Haz} \quad (5-59)$$

$$\text{όπου: } b_0 = C \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{4 \sinh \frac{Ha}{2}}, \quad b_2 = C \left(\frac{1}{\sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1}}{2 \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\text{Pr}^{-1} Ha^2}{16 \sinh \frac{Ha}{2}} + \frac{\text{Pr}^{-1} Ha \coth \frac{Ha}{2}}{4 \sinh \frac{Ha}{2}} \right),$$

$$C = \frac{R_1^2 \theta_0' \theta_0''}{Ha^4}$$

$$(5-59) \Rightarrow \psi_{sp}^{(III)} = \left[\frac{b_0}{6Ha} z^3 + \left(\frac{b_2}{2Ha} + \frac{b_0}{4Ha^3} \right) z \right] \cosh Haz - \frac{1}{4Ha^2} \left(b_0 z^2 + b_2 + \frac{b_0}{2Ha^2} \right) \sinh Haz$$

(Παράρτημα Ι) (5-60)

Τελικά για την ψ :

$$\psi(\xi, z) = \psi_{\text{hom}} + \psi_{sp}^{(I)} + \psi_{sp}^{(II)} + \psi_{sp}^{(III)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(\xi, z) = A(\xi) \cosh Haz + B(\xi) \sinh Haz + \frac{C}{3} z^3 + C \left(-\frac{\text{Pr}^{-1}}{Ha^2} + \frac{2}{Ha^2} + \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} - \frac{1}{4} \right) z - \frac{R_1 \theta_1'}{Ha^2} -$$

$$-\frac{b_0}{4Ha^2} z \cosh Haz + \left(\frac{b_0}{8Ha^3} + \frac{b_0}{4Ha} z^2 \right) \sinh Haz +$$

$$\left[\frac{b_0}{6Ha} z^3 + \left(\frac{b_2}{2Ha} + \frac{b_0}{4Ha^3} \right) z \right] \cosh Haz - \frac{1}{4Ha^2} \left(b_0 z^2 + b_2 + \frac{b_0}{2Ha^2} \right) \sinh Haz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(\xi, z) = A(\xi) \cosh Haz + B(\xi) \sinh Haz +}$$

$$+ \frac{C}{3} z^3 + C \left(-\frac{\text{Pr}^{-1}}{Ha^2} + \frac{2}{Ha^2} + \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} - \frac{1}{4} \right) z - \frac{R_1 \theta_1'}{Ha^2} +$$

$$+ \left[\frac{b_0}{6Ha} z^3 + \frac{1}{2Ha} \left(b_2 - \frac{b_0}{2Ha} + \frac{b_0}{2Ha^2} \right) z \right] \cosh Haz -$$

$$-\frac{1}{4Ha^2} \left[(b_0 - b_0 Ha) z^2 + \left(b_2 + \frac{b_0}{2Ha^2} - \frac{b_0}{2Ha} \right) \right] \sinh Haz$$

(5-61)

Ολοκλήρωση ως προς z της εξίσωσης (5-33):

$$\begin{aligned}
 (5-33) \wedge (5-41) \wedge (5-44) &\Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -1 - \theta_0'' + \left(\frac{2R_1}{Ha^2} \theta_0' \theta_0'' g + \theta_1' \right) \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \theta_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \\
 &\quad - \left[\frac{R_1}{Ha^2} (\theta_0')^2 \dot{g} \right] \left(\frac{R_1}{Ha^2} \theta_0'' f \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -\left(1 + \theta_0''\right) + \frac{2R_1}{Ha^2} \theta_0' \theta_0'' g \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \dot{g} f + \theta_1' \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \theta_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = -\left(1 + \theta_0''\right) + \frac{2R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' g \dot{f} - \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \dot{g} f + \theta_1' \frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \theta_0' \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{5-62}$$

(5-62) \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_2}{\partial z} &= -\left(1 + \theta_0''\right) z + \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(\int_0^z 2g \dot{f} dz - \int_0^z \dot{g} f dz \right) + \theta_1' \int_0^z \frac{\partial \psi_0}{\partial z} dz + \theta_0' \int_0^z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} dz + c_1(\xi) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial z} = -\left(1 + \theta_0''\right) z + \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(2[gf]_0^z - 2 \int_0^z \dot{g} f dz - \int_0^z \dot{g} f dz \right) + \theta_1' \psi_0 + \theta_0' \psi_1 + c_1(\xi) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial z} = -\left(1 + \theta_0''\right) z + \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \left[2g(z) f(z) - 3 \int_0^z \dot{g}(z) f(z) dz \right] + \theta_1' \psi_0 + \theta_0' \psi_1 + c_1(\xi) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T_2}{\partial z} = -\left(1 + \theta_0''\right) z + \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \left(2gf - 3 \int_0^z f^2 dz \right) + \theta_1' \psi_0 + \theta_0' \psi_1 + c_1(\xi)} \tag{5-63}
 \end{aligned}$$

$$\Sigma.\Sigma.: \quad \boxed{\left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=-\frac{1}{2}} = 0} \tag{5-64}$$

Αντικατάσταση των τιμών που δίνουν οι ανωτέρω συνοριακές συνθήκες στην (5-63):

$$0 = -\left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} + \frac{R_1^2}{Ha^4} (\theta_0')^2 \theta_0'' \left[2g\left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)}_0 - 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{f^2 dz}_0 \right] + \theta_1' \underbrace{\psi_0\left(\frac{1}{2}\right)}_0 + \theta_0' \underbrace{\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)}_0 + c_1(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} - \frac{R_1^2}{Ha^4} \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} f^2 dz\right) + c_1(\xi) \quad (5-65)$$

$$0 = \left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} + \frac{R_1^2}{Ha^4} \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left[2g\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right)}_0 - 3 \int_0^{-\frac{1}{2}} f^2 dz\right] + \theta_1' \underbrace{\psi_0\left(-\frac{1}{2}\right)}_0 + \theta_0' \underbrace{\psi_1\left(-\frac{1}{2}\right)}_0 + c_1(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \left(1 + \theta_0''\right) \frac{1}{2} - \frac{R_1^2}{Ha^4} \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} f^2 dz\right) + c_1(\xi) \quad (5-66)$$

$$(5-65)-(5-66) \Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) - \frac{R_1^2}{Ha^4} \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} f^2 dz - 3 \int_0^{-\frac{1}{2}} f^2 dz\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\left(1 + \theta_0''\right) - \frac{R_1^2}{Ha^4} \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \left(3 \int_0^{\frac{1}{2}} f^2 dz + 3 \int_{-\frac{1}{2}}^0 f^2 dz\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \left(1 + \theta_0''\right) + R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' \underbrace{\left(\frac{3}{Ha^4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^2 dz\right)}_{\alpha_m} \Rightarrow \boxed{\theta_0'' + \alpha_m R_1^2 \left(\theta_0'\right)^2 \theta_0'' + 1 = 0} \quad (5-67)$$

όπου η παράμετρος α_m είναι συνάρτηση του αριθμού Hartmann και δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_m = \frac{3}{Ha^4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z)^2 dz \Rightarrow \alpha_m = \frac{3}{Ha^4} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \left(\frac{\cosh Haz}{Ha \sinh \frac{Ha}{2}} - \frac{\coth \frac{Ha}{2}}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right)^2 dz \quad (5-68)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της (5-68) γίνεται στη Mathematica (Παράρτημα Ι),
οπότε η παράμετρος α_m είναι:

$$\alpha_m = \frac{1}{80Ha^2} \left\{ \csc h^2 \frac{Ha}{2} (240 + 60Ha^2 - Ha^4 + (-240 + 30Ha^2 + Ha^4) \cosh Ha - \right.$$

$$\left. -10Ha(-3 + Ha^2) \sinh Ha \right\} \quad (5-69)$$

$$\text{Ισχύει: } \lim_{Ha \rightarrow 0} a_m = \frac{1}{120960} = a \quad (\text{Παράρτημα I})$$

Από την ολοκλήρωση ως προς z της εξίσωσης (5-33) με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (5-64), προκύπτει ότι η εξίσωση (5-33) έχει λύση μόνον αν η $\theta_0(\xi)$ ικανοποιεί τη μη-γραμμική εξίσωση (5-67), η επίλυση της οποίας θα δώσει, τελικά, το πεδίο της θερμοκρασίας, ενώ ο όρος $\psi_0(\xi, z)$ θα προσδιοριστεί από την (5-41).

5.5 Η λύση στο κεντρικό τμήμα της κοιλάτητας

$$\text{Θέτουμε: } \boxed{\theta'_0 = \frac{d\theta_0}{d\xi} = \theta(\xi)} \quad (5-70)$$

$$(5-67) \wedge (5-70) \Rightarrow \boxed{\theta' + a_m R_1^2 \theta^2 \theta' + 1 = 0} \quad (5-71)$$

$$\text{Σ.Σ.: } \boxed{\theta(\frac{1}{2}) = 0} \quad (\text{συμμετρία}) \quad (5-72)$$

Η επίλυση του συστήματος των (5-71) και (5-72) γίνεται στη Mathematica (Παράρτημα I) και η λύση που προκύπτει για τη $\theta(\xi)$, είναι:

$$\theta(\xi) = \frac{\left\{ 3a_m^2 (1-2\xi) R_1^4 + \sqrt{a_m^3 R_1^6 [16 + 9a_m (1-2\xi)^2 R_1^2]} \right\}^{1/3}}{2^{2/3} a_m R_1^2} - \frac{2^{2/3}}{\left\{ 3a_m^2 (1-2\xi) R_1^4 + \sqrt{a_m^3 R_1^6 [16 + 9a_m (1-2\xi)^2 R_1^2]} \right\}^{1/3}} \quad (5-73)$$

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με αυτήν που περιγράφηκε στο 4^ο κεφάλαιο για το μετασχηματισμό της σχέσης (4-67), η σχέση (5-73) γράφεται, τελικά, στη μορφή:

$$\theta(\xi) = a_m^{-1/2} R_1^{-1} \left\{ \underbrace{\left[\frac{3}{2} a_m^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) + \left[1 + \frac{9}{4} a_m R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/3}}_{F_m^+(\xi)} \right\} +$$

$$\left\{ \underbrace{\left[\frac{3}{2} a_m^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) - \left[1 + \frac{9}{4} a_m R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/3}}_{F_m^-(\xi)} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\xi) = a_m^{-1/2} R_1^{-1} \left[F_m^+(\xi) + F_m^-(\xi) \right] \Rightarrow \theta_0' = a_m^{-1/2} R_1^{-1} \left[F_m^+(\xi) + F_m^-(\xi) \right] \quad (5-74)$$

$$\text{όπου } F_m^\pm(\xi) = \left\{ \frac{3}{2} a_m^{1/2} R_1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \pm \left[1 + \frac{9}{4} a_m R_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \quad (5-75)$$

Για $y_m = O(l)$ η παράσταση $\frac{3}{2} a_m^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)$ μπορεί να αντικατασταθεί από το υπερβολικό ημίτονο της y_m :

$$\sinh y_m = \frac{3}{2} a_m^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow y_m = \sinh^{-1} \left[\frac{3}{2} a_m^{1/2} R_1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5-76)$$

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με αυτήν που περιγράφηκε στο 4^ο κεφάλαιο για την ολοκλήρωση της σχέσης (4-68) και τον υπολογισμό της θ_0 , η σχέση (5-74) ολοκληρώνεται με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης από ξ σε $\sinh y_m$ και η λύση που προκύπτει τελικά για τη θ_0 , είναι:

$$\theta_0 = a_m^{-1} R_1^{-2} \left(\cosh \frac{2}{3} y_m - \frac{1}{2} \cosh \frac{4}{3} y_m - \cosh \frac{2}{3} y_{m,0} + \frac{1}{2} \cosh \frac{4}{3} y_{m,0} \right) \quad (5-77)$$

$$\text{όπου για } \xi = 1 \Rightarrow y_m = \sinh^{-1} \left(\underbrace{\frac{3}{4} a_m^{1/2} R_1}_{y_{m,0}} \right)$$

Αντίστοιχα προς τη σχέση (4-78), είναι:

$$\boxed{\theta_0' = -2 a_m^{-1/2} R_1^{-1} \sinh \frac{1}{3} y_m} \quad (5-78)$$

Για τη ροϊκή συνάρτηση $\psi_0(\xi, z)$, έχουμε:

$$(5-41) \wedge (5-78) \Rightarrow \boxed{\psi_0 = -2 \frac{a_m^{-1/2} f(z)}{Ha^2} \sinh \frac{1}{3} y_m} \quad (5-79)$$

$$\text{Ισχύει: } \lim_{Ha \rightarrow 0} \frac{f(z)}{Ha^2} = F(z) = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2 \quad (\text{Παράρτημα I})$$

Η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο κέντρο της κοιλότητας, είναι:

$$v_0(\xi, z) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{R_1 f(z)}{Ha^2 \left(1 + 4 \sinh^2 \frac{1}{3} y_m \right)} = \frac{R_1 f(z)}{Ha^2 \left[1 + a_m R_1^2 \left(\theta_0' \right)^2 \right]}} \quad (5-80)$$

Στο κέντρο της κοιλότητας, όπου $\theta_0' = 0$, η v_0 είναι γραμμική συνάρτηση της παραμέτρου R_1 και δίνεται από τη σχέση:

$$v_0 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = \frac{R_1 \left(Ha - 4 \tanh \frac{Ha}{4} \right)}{8Ha^3}, \text{ ενώ } \lim_{Ha \rightarrow 0} v_0 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = \frac{R_1}{384} \quad (\text{Παράρτημα I}).$$

Τα προφίλ των θ_0 , ψ_0 και v_0 για $Ha = 1$, παρουσιάζονται, αντίστοιχα, στα Σχήματα 5-1, 5-3 και 5-5 και για $Ha = 25$, στα Σχήματα 5-2, 5-4 και 5-6 του Παραρτήματος ΙΙΙ.

5.6 Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Μια ασυμπτωτική περιγραφή της μόνιμης ροής που παράγεται μέσα σε μια αβαθή, διδιάστατη κοιλότητα από ομοιόμορφα κατανεμημένες εσωτερικές πηγές θερμότητας και υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, επιτυγχάνεται για αριθμούς Rayleigh R τάξης L^{-1} και Ha τάξης 1 . Σ' αυτήν την περιοχή τιμών του R και σ' ό,τι αφορά την επίδραση φαινομένων συναγωγής, ισχύουν αντίστοιχα συμπεράσματα με αυτά που διατυπώθηκαν στο 4^ο κεφάλαιο, στην ενότητα 4.6 του Σχολιασμού των αποτελεσμάτων. Στα Σχήματα 5-7 και 5-8 του Παραρτήματος III, απεικονίζονται οι ροϊκές γραμμές (core streamlines) που λαμβάνονται βάσει της σχέσης (5-79) για διάφορες τιμές του αριθμού $R_1 = R L$ και για $Ha = 1$ και 25 , αντίστοιχα. Για μικρές τιμές του R_1 , στη ροή κυριαρχεί η αγωγή και η ταχύτητα της προς τα άνω κίνησης στο διπλό πυρήνα κυκλοφορίας είναι ουσιαστικά ανεξάρτητη της πλευρικής διεύθυνσης.

Καθώς ο αριθμός R_1 αυξάνει και η συναγωγή γίνεται πιο σημαντική, η προς τα άνω κίνηση στη διπλή κυκλοφορία γίνεται εμφανώς πιο σθεναρή προς το κέντρο της κοιλότητας -όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα 5-5 του Παραρτήματος III- ενώ παραμένει σχετικά ασθενής μακριά από το κέντρο, κοντά στα κατακόρυφα τοιχώματα. Επειδή το μαγνητικό πεδίο "φρενάρει" τη ροή, δηλαδή μειώνει τις ταχύτητες και επιβραδύνει τους μηχανισμούς μεταφοράς θερμότητας, η αύξηση του αριθμού Hartmann επιτρέπει τη μελέτη της ροής σε υψηλότερους αριθμούς Rayleigh (σύγκριση των διαγραμμάτων π.χ. του Σχήματος 5-5, για $Ha = 1$, με αυτά του Σχήματος 5-6, για $Ha = 25$). Υπάρχει, επομένως, αλληλεπίδραση μεταξύ του αριθμού R_1 και του αριθμού Ha .

Όταν $R_1 \sim \frac{2}{3} a_m^{-1/2} L$ -σχέση (5-76)- σχηματίζεται ένα κεντρικό πλούμιο (central plume)

σε μια περιοχή χαρακτηριστικού πλευρικού μήκους (lateral scale) $x \sim 1$, συγκρίσιμου προς το ύψος της κοιλότητας. Η ανωτέρω τάξη μεγέθους του αριθμού R_1 αποτελεί μια πρώτη ένδειξη για το άνω όριο ισχύος της προκειμένης ανάλυσης, για την περιοχή κοντά στο κέντρο της κοιλότητας. Αυτό το άνω όριο ισχύος της ακολουθούμενης ανάλυσης, αυξάνει με την αύξηση του αριθμού Ha λόγω της αντίστοιχης εκθετικής αύξησης του όρου $a_m^{-1/2}$ -η μεταβολή του αντιστρόφου της παραμέτρου a_m παριστάνεται γραφικά στο Παράρτημα I, όπου και υπολογίζεται η παράμετρος βάσει της σχέσης (5-68).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aung, W., and Worku, G., *Developing Flow and Flow Reversal in a Vertical Channel with Asymmetric Wall Temperatures*, Journal of Heat Transfer, Vol.108, p.299-304, 1986.
2. Γαλάνη, Ε., *Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση*, Αθήνα, 1988.
3. Γκραίκος, Α., *Μαγνητο-Ρευστο-Δυναμική*, Πρόχειρες Σημειώσεις, Βόλος, Ιανουάριος 2001.
4. Γκραίκος, Α., *Ηλεκτροδυναμική*, Πρόχειρες Σημειώσεις, Βόλος, Μάιος 2002.
5. Daniels, P. G., Jones, O. K., *Convection in a Shallow Rectangular Cavity due to Internal Heat Generation*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.41, p.3979-3987, 1998.
6. Hughes, W., and Gaylord, E., *Basic Equations of Engineering Science*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.
7. Μποντόζογλου, Β., *Εμβάθυνση στα Φαινόμενα Μεταφοράς*, Μέρος 1^ο, Σημειώσεις του Μαθήματος, Π.Μ.Σ. του Παν/μίου Θεσσαλίας, Βόλος, Μάρτιος 2001.
8. Μποντόζογλου, Β., *Εμβάθυνση στα Φαινόμενα Μεταφοράς*, Μέρος 2^ο, Σημειώσεις του Μαθήματος, Π.Μ.Σ. του Παν/μίου Θεσσαλίας, Βόλος, Ιούνιος 2001.
9. Παπαϊωάννου, Α., *Μηχανική των Ρευστών*, Τόμος Ι, Αθήνα, 1993.
10. Παπαϊωάννου, Α., *Μηχανική των Ρευστών*, Τόμος ΙΙ, Αθήνα, 1996.
11. Perry, R., Green, D., *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, Sixth Ed., McGraw-Hill, 1984.
12. Purcell, E., *Μαθήματα Φυσικής του Παν/μίου του Berkeley, Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός* Τόμος 2, Ελληνική Έκδοση Α. Φίλιππα, Αθήνα, 1985.
13. Tritton, D. J., *Physical Fluid Dynamics*, 2nd Ed., Oxford, Clarendon Press, 1988.
14. Χαϊνη, Ι., *Μαθήματα Ανωτέρων Μαθηματικών*, Τόμος Πρώτος, Έκτη Έκδοση, Αθήνα, 1983.
15. Χαϊνη, Ι., *Μαθήματα Ανωτέρων Μαθηματικών*, Τόμος Β₁, Αθήνα, 1989.
16. Χαϊνη, Ι., *Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων*, Έκτη Έκδοση, Αθήνα, 1989.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (4 - 63)

$$\text{In}[1] := \alpha = 3 \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2 \right)^2 dz$$

$$\text{Out}[1] = \frac{1}{120960}$$

$$\text{In}[2] := \alpha = .$$

Επίλυση του συστήματος των (4 - 65) και (4 - 66)

$$\text{In}[3] := \text{DSolve}[\{\text{Dt}[\theta[\xi], \xi] + \alpha R1^2 (\theta[\xi])^2 \text{Dt}[\theta[\xi], \xi] + 1 == 0, \theta[1/2] == 0\}, \theta, \xi];$$

$$\text{In}[4] := \theta[\xi] /. \%$$

$$\text{Out}[4] = \left\{ -\frac{6 \cdot 2^{1/3}}{\left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3} + \left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3}}, \right.$$

$$\frac{3 \cdot 2^{1/3} (1 + i \sqrt{3})}{\left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3}} - \frac{(1 - i \sqrt{3}) \left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3}}{12 \cdot 2^{1/3} \alpha R1^2},$$

$$\left. \frac{3 \cdot 2^{1/3} (1 - i \sqrt{3})}{\left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3}} - \frac{(1 + i \sqrt{3}) \left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3}}{12 \cdot 2^{1/3} \alpha R1^2} \right\}$$

$$\text{In}[5] := \%[[1]]$$

$$\text{Out}[5] = -\frac{6 \cdot 2^{1/3}}{\left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3} + \left(324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4 + \sqrt{186624 \alpha^3 R1^6 + (324 \alpha^2 R1^4 - 648 \alpha^2 \xi R1^4)^2} \right)^{1/3}}$$

In[6]:= FullSimplify[%]

$$\text{Out}[6]= -\frac{2^{2/3}}{\left(3 \alpha^2 (1 - 2 \xi) R1^4 + \sqrt{\alpha^3 R1^6 (1 + 3 \alpha (1 - 2 \xi)^2 R1^2)}\right)^{1/3}} + \frac{\left(3 \alpha^2 (1 - 2 \xi) R1^4 + \sqrt{\alpha^3 R1^6 (1 + 3 \alpha (1 - 2 \xi)^2 R1^2)}\right)^{1/3}}{2^{2/3} \alpha R1}$$

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της (4 - 71)

In[7]:= f1 = (-Sinh[y] + (1 + (Sinh[y])^2)^(1/2))^(1/3)

$$\text{Out}[7]= \left(-\text{Sinh}[y] + \sqrt{1 + \text{Sinh}[y]^2}\right)^{1/3}$$

In[8]:= Integrate[$\frac{2 f1}{3 \sqrt{a} R1}$, Sinh[y];

In[9]:= FullSimplify[%]

$$\text{Out}[9]= \frac{\left(\sqrt{\text{Cosh}[y]^2} - \text{Sinh}[y]\right)^{1/3} \left(\sqrt{\text{Cosh}[y]^2} + 3 \text{Sinh}[y]\right)}{4 \sqrt{a} R1}$$

In[10]:= f2 = (-Sinh[y] - (1 + (Sinh[y])^2)^(1/2))^(1/3)

$$\text{Out}[10]= \left(-\text{Sinh}[y] - \sqrt{1 + \text{Sinh}[y]^2}\right)^{1/3}$$

In[11]:= Integrate[$\frac{2 f2}{3 \sqrt{a} R1}$, Sinh[y];

In[12]:= FullSimplify[%]

$$\text{Out}[12]= -\frac{\left(\sqrt{\text{Cosh}[y]^2} - 3 \text{Sinh}[y]\right) \left(-\sqrt{\text{Cosh}[y]^2} - \text{Sinh}[y]\right)^{1/3}}{4 \sqrt{a} R1}$$

Επεξεργασία κλάσματος κατά την πορεία εξαγωγής της (4 - 80)

$$\text{In}[13] := \text{TrigFactor}\left[\frac{\text{Cosh}\left[\frac{1}{3} y\right]}{\text{Cosh}[y]}\right]$$

$$\text{Out}[13] = \frac{1}{-1 + 2 \text{Cosh}\left[\frac{2y}{3}\right]}$$

Εύρεση ειδικής λύσης της (5 - 57) - σχέση (5 - 58)

$$\text{In}[14] := \text{DSolve}[\text{Dt}[\psi[z], \{z, 2\}] - \text{Ha}^2 \psi[z] == b_0 (z \text{Cosh}[\text{Ha} z]), \psi, z];$$

$$\text{In}[15] := \psi[z] /. \%;$$

$$\text{In}[16] := \text{FullSimplify}[\%]$$

$$\text{Out}[16] = \left\{ e^{-\text{Ha} z} C[1] + e^{\text{Ha} z} C[2] + \frac{b_0 (\text{Sinh}[\text{Ha} z] + 2 \text{Ha} z (-\text{Cosh}[\text{Ha} z] + \text{Ha} z \text{Sinh}[\text{Ha} z]))}{8 \text{Ha}^3} \right\}$$

$$\text{In}[17] := \text{FactorTerms}\left[\frac{b_0 (\text{Sinh}[\text{Ha} z] + 2 \text{Ha} z (-\text{Cosh}[\text{Ha} z] + \text{Ha} z \text{Sinh}[\text{Ha} z]))}{8 \text{Ha}^3}\right]$$

$$\text{Out}[17] = \frac{1}{8} \left(-\frac{2 b_0 z \text{Cosh}[\text{Ha} z]}{\text{Ha}^2} + \frac{b_0 \text{Sinh}[\text{Ha} z]}{\text{Ha}^3} + \frac{2 b_0 z^2 \text{Sinh}[\text{Ha} z]}{\text{Ha}} \right)$$

Εύρεση ειδικής λύσης της (5 - 59) - σχέση (5 - 60)

$$\text{In}[18] := \text{DSolve}[\text{Dt}[\psi[z], \{z, 2\}] - \text{Ha}^2 \psi[z] == (b_0 z^2 + b_2) \text{Sinh}[\text{Ha} z], \psi, z];$$

$$\text{In}[19] := \psi[z] /. \%$$

$$\text{Out}[19] = \left\{ -\frac{e^{-\text{Ha} z} \left(-\frac{b_2 z}{2} - \frac{b_0 z^3}{6} + e^{2 \text{Ha} z} \left(\frac{b_0 + 2 b_2 \text{Ha}^2}{8 \text{Ha}^3} - \frac{b_0 z}{4 \text{Ha}^2} + \frac{b_0 z^2}{4 \text{Ha}} \right) \right)}{2 \text{Ha}} + \frac{e^{\text{Ha} z} \left(\frac{b_2 z}{2} + \frac{b_0 z^3}{6} + e^{-2 \text{Ha} z} \left(\frac{b_0 + 2 b_2 \text{Ha}^2}{8 \text{Ha}^3} + \frac{b_0 z}{4 \text{Ha}^2} + \frac{b_0 z^2}{4 \text{Ha}} \right) \right)}{2 \text{Ha}} + e^{-\text{Ha} z} C[1] + e^{\text{Ha} z} C[2] \right\}$$

$$\text{In}[20] := \text{FullSimplify}\left[-\frac{e^{-\text{Ha} z} \left(-\frac{b_2 z}{2} - \frac{b_0 z^3}{6} + e^{2 \text{Ha} z} \left(\frac{b_0 + 2 b_2 \text{Ha}^2}{8 \text{Ha}^3} - \frac{b_0 z}{4 \text{Ha}^2} + \frac{b_0 z^2}{4 \text{Ha}} \right) \right)}{2 \text{Ha}} + \frac{e^{\text{Ha} z} \left(\frac{b_2 z}{2} + \frac{b_0 z^3}{6} + e^{-2 \text{Ha} z} \left(\frac{b_0 + 2 b_2 \text{Ha}^2}{8 \text{Ha}^3} + \frac{b_0 z}{4 \text{Ha}^2} + \frac{b_0 z^2}{4 \text{Ha}} \right) \right)}{2 \text{Ha}}\right]$$

$$\text{Out}[20] = \frac{1}{24 \text{Ha}^4} (2 \text{Ha} z (6 b_2 \text{Ha}^2 + b_0 (3 + 2 \text{Ha}^2 z^2)) \text{Cosh}[\text{Ha} z] - 3 (b_0 + 2 b_2 \text{Ha}^2 + 2 b_0 \text{Ha}^2 z^2) \text{Sinh}[\text{Ha} z])$$

In[21]:= ExpToTrig[%]

$$Out[21]= \frac{b_0 z \cosh[Ha z]}{4 Ha^3} + \frac{b_2 z \cosh[Ha z]}{2 Ha} - \frac{b_0 z^3 \cosh[Ha z]}{6 Ha} - \frac{b_0 \sinh[Ha z]}{8 Ha^4} - \frac{b_2 \sinh[Ha z]}{4 Ha^2} - \frac{b_0 z \sinh[Ha z]}{4 Ha^2}$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (5 - 68)

In[22]:= FullSimplify[$\frac{1}{4} \left(\frac{\cosh[Ha z]}{Ha \sinh[\frac{Ha}{2}]} - \frac{\coth[\frac{Ha}{2}]}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right)^2$]

$$Out[22]= \frac{(Ha - 4 Ha z^2 - 4 \coth[\frac{Ha}{2}] + 4 \cosh[Ha z] \operatorname{csch}[\frac{Ha}{2}])^2}{64 Ha^2}$$

In[23]:= am = FullSimplify[$\frac{3}{Ha^4} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(Ha - 4 Ha z^2 - 4 \coth[\frac{Ha}{2}] + 4 \cosh[Ha z] \operatorname{csch}[\frac{Ha}{2}])^2}{64 Ha^2} dz$]

$$Out[23]= \frac{1}{80 Ha^8} \left(\operatorname{csch}[\frac{Ha}{2}]^2 (240 + 60 Ha^2 - Ha^4) + (240 + 30 Ha^2 + Ha^4) \cosh[Ha] - 10 Ha (-3 + Ha^2) \sinh[Ha] \right)$$

In[24]:= Limit[am, Ha -> 0]

$$Out[24]= \frac{1}{120960}$$

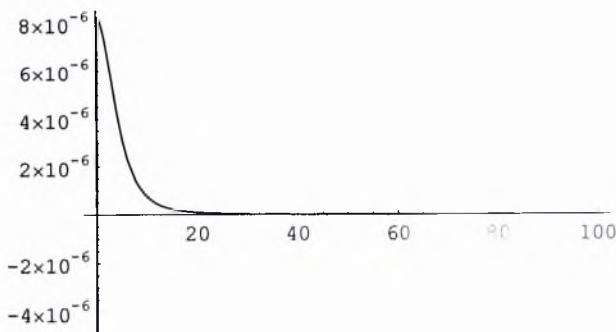
In[25]:= % // N

$$Out[25]= 8.2672 \times 10^{-6}$$

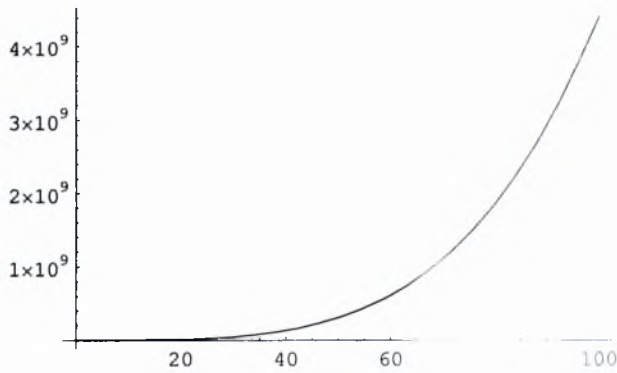
In[26]:= am /. Ha -> 1 // N

$$Out[26]= 7.8808 \times 10^{-6}$$

In[27]:= Plot[am, {Ha, 0, 100}];



In[28]:= Plot[1/αm, {Ha, 0, 100}, PlotRange -> All];



 Όριο του όρου $\frac{f[z]}{Ha^2}$ της σχέσης (5 - 79) για $Ha \rightarrow 0$

In[29]:= Limit[$\frac{1}{2 Ha^2} \left(\frac{\text{Cosh}[Ha z]}{Ha \text{Sinh}[\frac{Ha}{2}]} - \frac{\text{Coth}[\frac{Ha}{2}]}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right)$, Ha -> 0]

Out[29]= $\frac{1}{384} (1 - 4 z^2)^2$

 Όριο της $v_0(1/2, 0)$ - σχέση (5 - 80) - για $Ha \rightarrow 0$

In[30]:= FullSimplify[$\frac{1}{2 Ha^2} \left(\frac{1}{Ha \text{Sinh}[\frac{Ha}{2}]} - \frac{\text{Coth}[\frac{Ha}{2}]}{Ha} + \frac{1}{4} \right)$]

Out[30]= $\frac{Ha - 4 \text{Tanh}[\frac{Ha}{4}]}{8 Ha^3}$

In[31]:= Limit[$\frac{Ha - 4 \text{Tanh}[\frac{Ha}{4}]}{8 Ha^3}$, Ha -> 0]

Out[31]= $\frac{1}{384}$

 Προφίλ των θ_0 , ψ_0 , v_0 και ροϊκές γραμμές για συναγωγή οφειλόμενη
 σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα

$$\text{In}[1] := \mathbf{F}[z] = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{4} - z^2 \right)^2;$$

$$\text{In}[2] := \mathbf{F0} = \mathbf{F}[z] /. z \rightarrow 0$$

$$\text{Out}[2] = \frac{1}{384}$$

$$\text{In}[3] := \alpha = 3 \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{F}[z]^2 dz$$

$$\text{Out}[3] = \frac{1}{120960}$$

$$\text{In}[4] := \mathbf{y} = \text{ArcSinh}[(3/2.) \alpha^{(1/2)} \mathbf{R1} (\xi - 1/2)];$$

$$\text{In}[5] := \mathbf{y0} = \text{ArcSinh}[(3/4.) \alpha^{(1/2)} \mathbf{R1}];$$

$$\text{In}[6] := \theta_0 = \alpha^{(-1)} \mathbf{R1}^{(-2)} \\ (\text{Cosh}[(2/3) \mathbf{y}] - (1/2) \text{Cosh}[(4/3) \mathbf{y}] - \text{Cosh}[(2/3) \mathbf{y0}] + (1/2) \text{Cosh}[(4/3) \mathbf{y0}]);$$

$$\text{In}[7] := \mathbf{pl1} = \text{Plot}[\theta_0 /. \mathbf{R1} \rightarrow 1, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[8] := \mathbf{pl2} = \text{Plot}[\theta_0 /. \mathbf{R1} \rightarrow 200, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

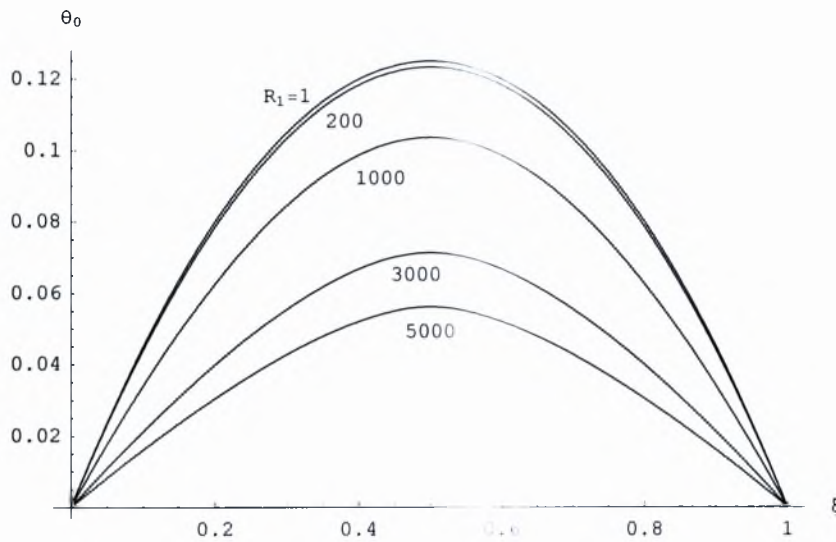
$$\text{In}[9] := \mathbf{pl3} = \text{Plot}[\theta_0 /. \mathbf{R1} \rightarrow 1000, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[10] := \mathbf{pl4} = \text{Plot}[\theta_0 /. \mathbf{R1} \rightarrow 3000, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[11] := \mathbf{pl5} = \text{Plot}[\theta_0 /. \mathbf{R1} \rightarrow 5000, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[12] := \text{Show}[\mathbf{pl1}, \mathbf{pl2}, \mathbf{pl3}, \mathbf{pl4}, \mathbf{pl5}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\xi, \theta_0\}];$$

```
In[13]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.3, 0.115}]],
Graphics[Text["200", {0.38, 0.108}]], Graphics[Text["1000", {0.43, 0.092}]],
Graphics[Text["3000", {0.48, 0.065}]], Graphics[Text["5000", {0.5, 0.049}]]];
```



Σχ.4 – 1 Προφίλ του πεδίου της θερμοκρασίας (core temperature field) θ_0 για διάφορες τιμές του R_1

```
In[14]:=  $\psi_0 = -2. \alpha^{(-1/2)} F_0 \text{Sinh}\left[\frac{Y}{3}\right];$ 
```

```
In[15]:= p11 = Plot[ψ₀ / . R1 → 1, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[16]:= p12 = Plot[ψ₀ / . R1 → 200, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

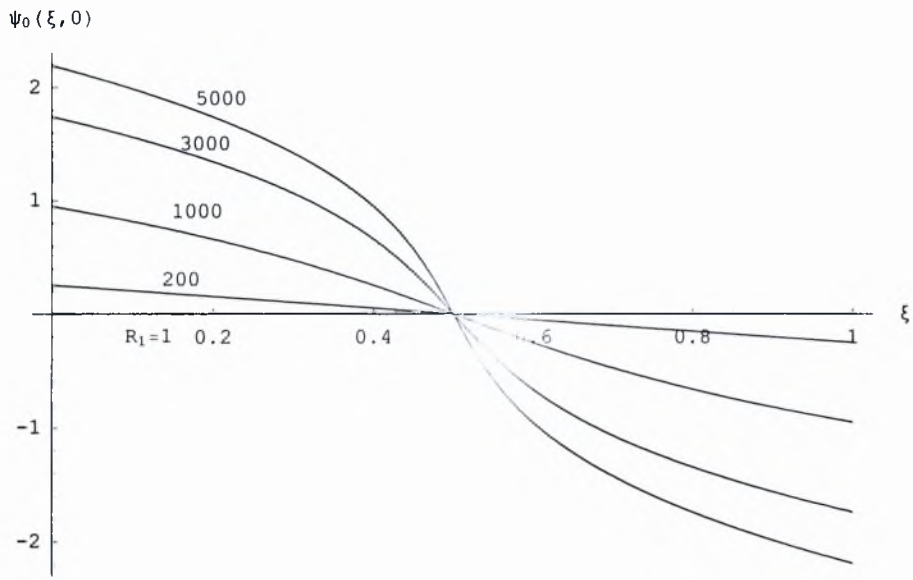
```
In[17]:= p13 = Plot[ψ₀ / . R1 → 1000, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[18]:= p14 = Plot[ψ₀ / . R1 → 3000, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[19]:= p15 = Plot[ψ₀ / . R1 → 5000, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[20]:= Show[p11, p12, p13, p14, p15, AxesLabel → {"ξ", "ψ₀(ξ,0)"}];
```

```
In[21]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.12, -0.2}]],
Graphics[Text["200", {0.16, 0.3}]], Graphics[Text["1000", {0.18, 0.9}]],
Graphics[Text["3000", {0.19, 1.5}]], Graphics[Text["5000", {0.21, 1.9}]]];
```



Σχ.4 – 2 Προφίλ του πεδίου της ροϊκής συνάρτησης (*core stream function field*) ψ_0 στο μέσον του ύψους της κοιλότητας, $z = 0$, για διάφορες τιμές του R_1

```
In[22]:= v0 =  $\frac{R_1 F_0}{1. + 4 (\text{Sinh}[\frac{\xi}{3}])^2}$ ;
```

```
In[23]:= p11 = Plot[v0 / . R1 → 1, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[24]:= p12 = Plot[v0 / . R1 → 200, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

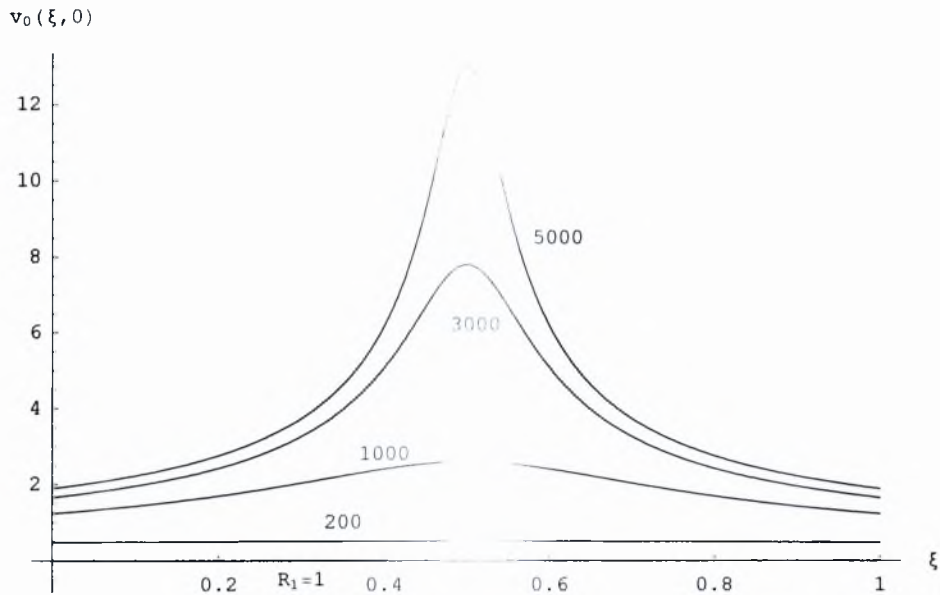
```
In[25]:= p13 = Plot[v0 / . R1 → 1000, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[26]:= p14 = Plot[v0 / . R1 → 3000, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[27]:= p15 = Plot[v0 / . R1 → 5000, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[28]:= Show[p11, p12, p13, p14, p15, AxesLabel → {"ξ", "v₀(ξ,0)"}, PlotRange → All];
```

```
In[29]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.3, -0.5}]],
Graphics[Text["200", {0.35, 1.}]], Graphics[Text["1000", {0.4, 2.8}]],
Graphics[Text["3000", {0.51, 6.2}]], Graphics[Text["5000", {0.61, 8.5}]]];
```



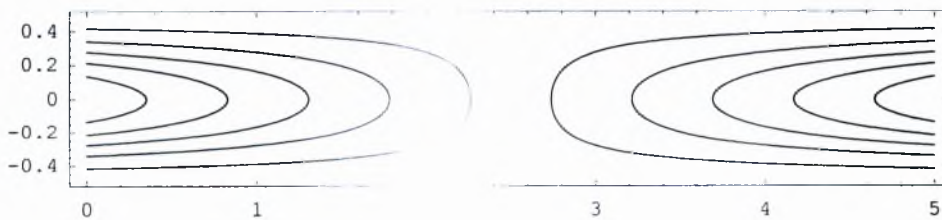
Σχ.4 – 3 Προφίλ της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας (core vertical velocity) v_0 στο μέσον του ύψους της κοιλότητας, $z = 0$, για διάφορες τιμές του R_1

```
In[30]:= y = ArcSinh[(3/2.) α^(1/2) R1 (x/5 - 1/2)];
```

```
In[31]:= ψ0 = -2. α^(-1/2) F[z] Sinh[ $\frac{y}{3}$ ];
```

```
In[32]:= ψ1 = ψ0 /. R1 → 1;
```

```
In[33]:= ContourPlot[ψ1, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```

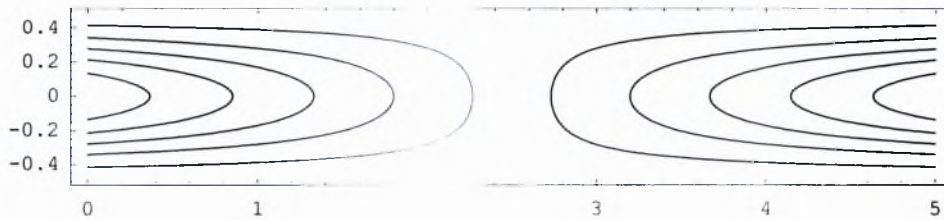


Σχ.4 – 4 α Ποικές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 1$ και $L = 5$

```
In[34]:= ψ2 = ψ0 /. R1 → 200;
```



```
In[35]:= ContourPlot[ψ2, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.4 – 4 b Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 200$ και $L = 5$

```
In[36]:= ψ3 = ψ0 /. R1 → 1000;
```

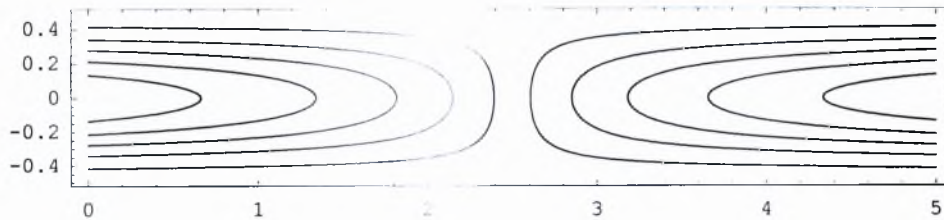
```
In[37]:= ContourPlot[ψ3, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.4 – 4 c Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 1000$ και $L = 5$

```
In[38]:= ψ4 = ψ0 /. R1 → 3000;
```

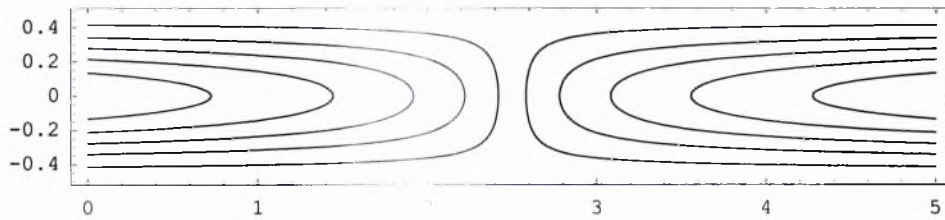
```
In[39]:= ContourPlot[ψ4, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.4 – 4 d Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 3000$ και $L = 5$

```
In[40]:= ψ5 = ψ0 /. R1 → 5000;
```

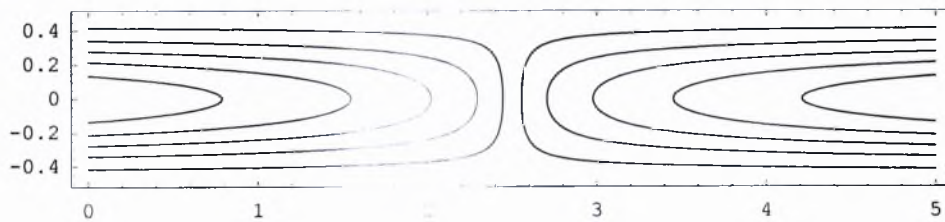
```
In[41]:= ContourPlot[ψ5, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σx.4 – 4 e Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 5000$ και $L = 5$

```
In[42]:= ψ6 = ψ0 /. R1 → 10000;
```

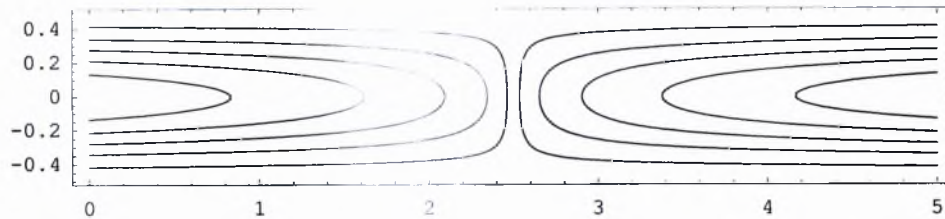
```
In[43]:= ContourPlot[ψ6, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σx.4 – 4 f Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 10000$ και $L = 5$

```
In[44]:= ψ7 = ψ0 /. R1 → 20000;
```

```
In[45]:= ContourPlot[ψ7, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σx.4 – 4 g Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 20000$ και $L = 5$

 Προφίλ των θ_0 , ψ_0 ,
 v_0 και ροϊκές γραμμές για συναγωγή οφειλόμενη σε εσωτερική παραγωγή θερμότητας
 μέσα σε αβαθή ορθογώνια κοιλότητα υπό την επίδραση εξωτερικού μαγνητικού πεδίου

$$\text{In}[1]:= f[z] = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Cosh}[Ha z]}{Ha \text{Sinh}[\frac{Ha}{2}]} - \frac{\text{Coth}[\frac{Ha}{2}]}{Ha} + \frac{1}{4} - z^2 \right);$$

$$\text{In}[2]:= \text{FullSimplify}[f[z]^2];$$

$$\text{In}[3]:= \alpha m = \text{FullSimplify}\left[\frac{3}{Ha^4} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(Ha - 4 Ha z^2 - 4 \text{Coth}[\frac{Ha}{2}] + 4 \text{Cosh}[Ha z] \text{Csch}[\frac{Ha}{2}])^2}{64 Ha^2} dz\right]$$

$$\text{Out}[3]= \frac{\text{Csch}[\frac{Ha}{2}]^2 (240 + 60 Ha^2 - Ha^4 + (-240 + 30 Ha^2 + Ha^4) \text{Cosh}[Ha] - 10 Ha (-3 + Ha^2) \text{Sinh}[Ha])}{80 Ha^8}$$

$$\text{In}[4]:= f0 = f[z] /. z -> 0$$

$$\text{Out}[4]= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\text{Coth}[\frac{Ha}{2}]}{Ha} + \frac{\text{Csch}[\frac{Ha}{2}]}{Ha} \right)$$

$$\text{In}[5]:= \text{ym} = \text{ArcSinh}[(3/2.) \alpha m^{(1/2)} R1^{(\xi - 1/2)}];$$

$$\text{In}[6]:= \text{ym0} = \text{ArcSinh}[(3/4.) \alpha m^{(1/2)} R1];$$

$$\text{In}[7]:= \theta_0 = \alpha m^{(-1)} R1^{(-2)} (\text{Cosh}[(2./3) \text{ym}] - (1/2) \text{Cosh}[(4/3) \text{ym}] - \text{Cosh}[(2/3) \text{ym0}] + (1/2) \text{Cosh}[(4/3) \text{ym0}]);$$

$$\text{In}[8]:= \text{pl1} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 1, Ha \rightarrow 1\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[9]:= \text{pl2} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 200, Ha \rightarrow 1\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[10]:= \text{pl3} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 1000, Ha \rightarrow 1\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[11]:= \text{pl4} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 3000, Ha \rightarrow 1\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[12]:= \text{pl5} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 5000, Ha \rightarrow 1\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[13]:= \text{pl10} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 1, Ha \rightarrow 25\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[14]:= \text{pl20} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 5000, Ha \rightarrow 25\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

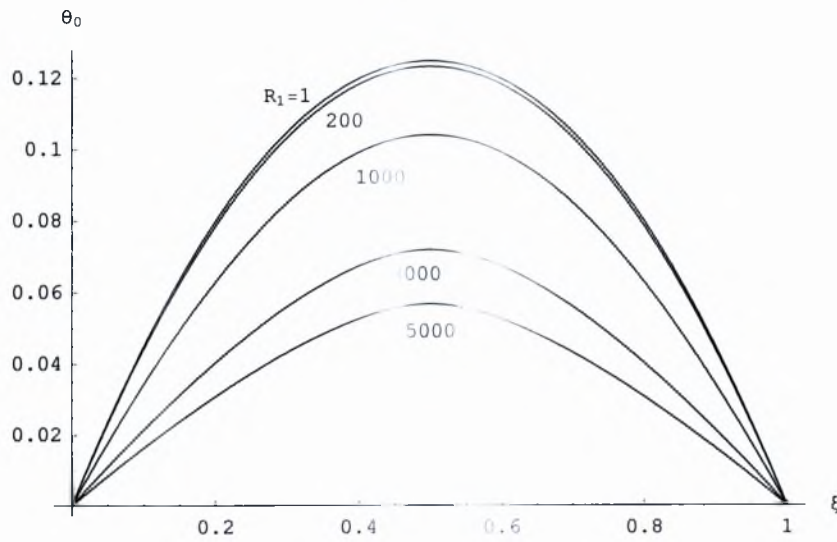
$$\text{In}[15]:= \text{pl30} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 10000, Ha \rightarrow 25\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[16]:= \text{pl40} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 30000, Ha \rightarrow 25\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[17]:= \text{pl50} = \text{Plot}[\theta_0 /. \{R1 \rightarrow 50000, Ha \rightarrow 25\}, \{\xi, 0, 1\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 600];$$

$$\text{In}[18]:= \text{Show}[\text{pl1}, \text{pl2}, \text{pl3}, \text{pl4}, \text{pl5}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\xi, \theta_0\}];$$

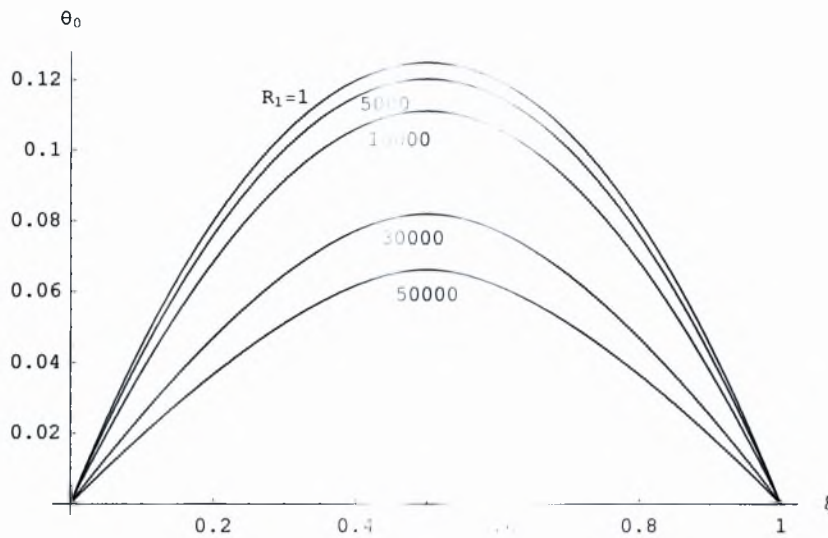
```
In[19]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.3, 0.115}]],
Graphics[Text["200", {0.38, 0.108}]], Graphics[Text["1000", {0.43, 0.092}]],
Graphics[Text["3000", {0.48, 0.065}]], Graphics[Text["5000", {0.5, 0.049}]]];
```



Σχ.5 – 1 Προφίλ του πεδίου της θερμοκρασίας (*core temperature field*) θ_0 για διάφορες τιμές του R_1 και $Ha = 1$

```
In[20]:= Show[p110, p120, p130, p140, p150, AxesLabel -> {"ξ", "θ0"}];
```

```
In[21]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.3, 0.115}]],
Graphics[Text["5000", {0.44, 0.113}]], Graphics[Text["10000", {0.46, 0.103}]],
Graphics[Text["30000", {0.48, 0.075}]], Graphics[Text["50000", {0.5, 0.059}]]];
```



Σχ.5 – 2 Προφίλ του πεδίου της θερμοκρασίας (*core temperature field*) θ_0 για διάφορες τιμές του R_1 και $Ha = 25$

```
In[22]:=  $\psi_0 = -2 \cdot \alpha_m^{(-1/2)} \frac{f_0}{Ha^2} \sinh\left[\frac{y_m}{3}\right];$ 
```

```
In[23]:= p11 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 1, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[24]:= p12 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 200, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[25]:= p13 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 1000, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[26]:= p14 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 3000, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[27]:= p15 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 5000, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[28]:= p110 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 1, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[29]:= p120 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 5000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

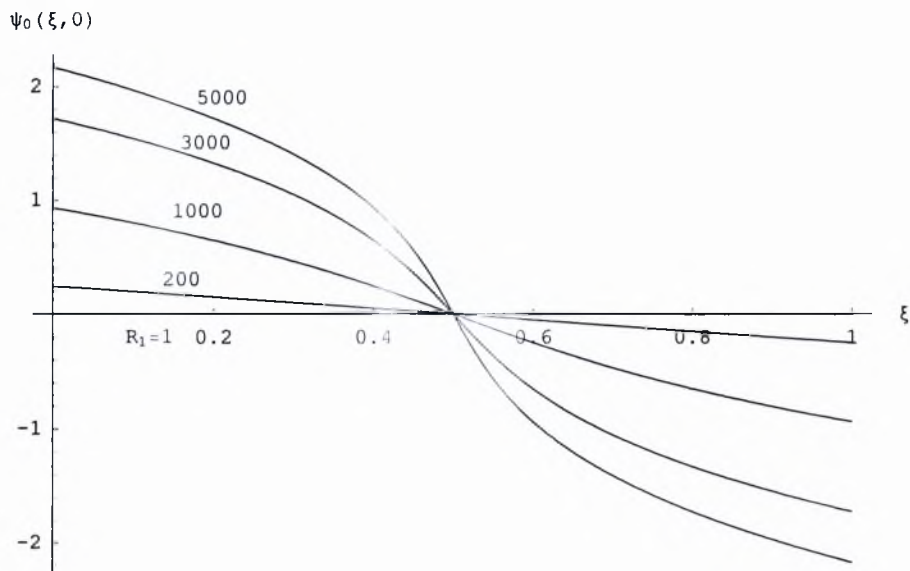
```
In[30]:= p130 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 10000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[31]:= p140 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 30000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[32]:= p150 = Plot[ $\psi_0$  /. {R1 → 50000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[33]:= Show[p11, p12, p13, p14, p15, AxesLabel → {"ξ", " $\psi_0(\xi, 0)$ "}];
```

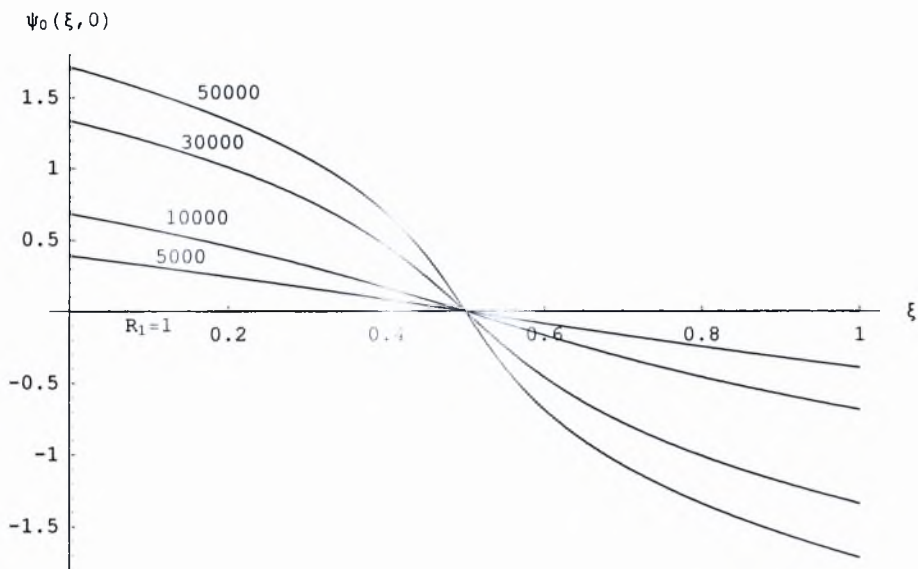
```
In[34]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.12, -0.2}]],
Graphics[Text["200", {0.16, 0.3}]], Graphics[Text["1000", {0.18, 0.9}]],
Graphics[Text["3000", {0.19, 1.5}]], Graphics[Text["5000", {0.21, 1.9}]]];
```



Σχ.5 – 3 Προφίλ του πεδίου της ροϊκής συνάρτησης (core stream function field) ψ_0 στο μέσον του ύψους της κοιλότητας, $z = 0$, για διάφορες τιμές του R_1 και $Ha = 1$

```
In[35]:= Show[p110, p120, p130, p140, p150, AxesLabel -> {"ξ", "ψ₀(ξ, 0)"}];
```

```
In[36]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.10, -0.1}]],
Graphics[Text["5000", {0.14, 0.38}]], Graphics[Text["10000", {0.16, 0.65}]],
Graphics[Text["30000", {0.18, 1.18}]], Graphics[Text["50000", {0.20, 1.53}]]];
```



Σχ.5 – 4 Προφίλ του πεδίου της ροϊκής συνάρτησης (core stream function field) ψ_0 στο μέσον του ύψους της κοιλότητας, $z = 0$, για διάφορες τιμές του R_1 και $Ha = 25$

```
In[37]:= v0 =  $\frac{R1 f0}{Ha^2 (1. + 4 (\text{Sinh}[\frac{ym}{3}])^2)}$ ;
```

```
In[38]:= p11 = Plot[v0 /. {R1 → 1, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[39]:= p12 = Plot[v0 /. {R1 → 200, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[40]:= p13 = Plot[v0 /. {R1 → 1000, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[41]:= p14 = Plot[v0 /. {R1 → 3000, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[42]:= p15 = Plot[v0 /. {R1 → 5000, Ha → 1}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[43]:= p110 = Plot[v0 /. {R1 → 1, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[44]:= p120 = Plot[v0 /. {R1 → 5000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[45]:= p130 = Plot[v0 /. {R1 → 10000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

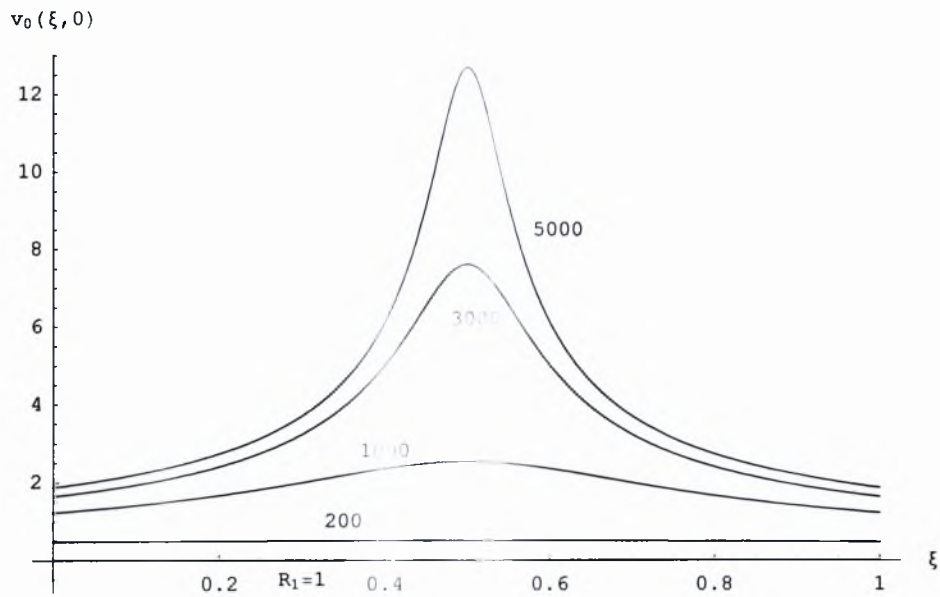
```
In[46]:= p140 = Plot[v0 /. {R1 → 30000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[47]:= p150 = Plot[v0 /. {R1 → 50000, Ha → 25}, {ξ, 0, 1}, PlotPoints → 600];
```

```
In[48]:= Show[p11, p12, p13, p14, p15, AxesLabel → {"ξ", "v₀(ξ, 0)"}, PlotRange → All];
```



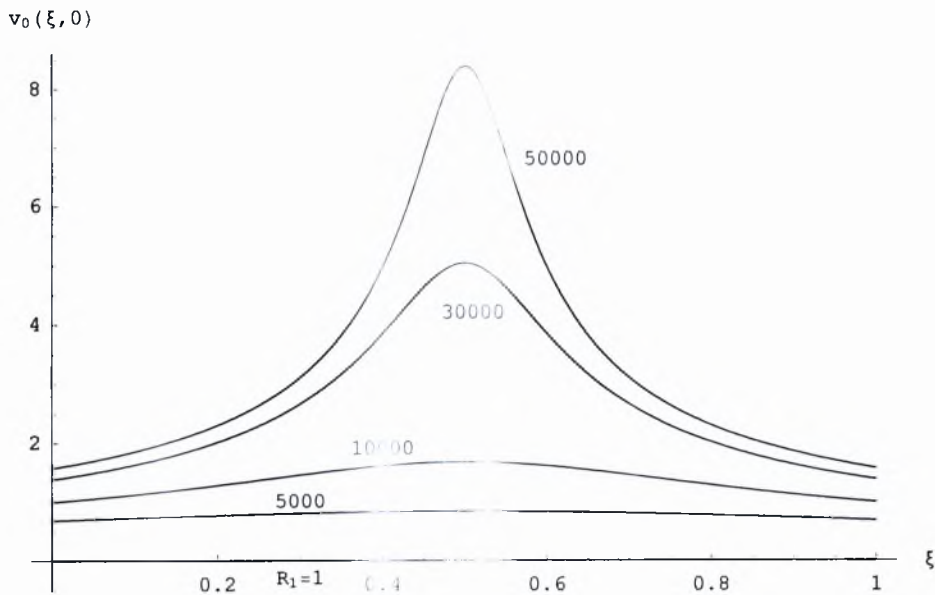
```
In[49]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.3, -0.5}]],
Graphics[Text["200", {0.35, 1.}]], Graphics[Text["1000", {0.4, 2.8}]],
Graphics[Text["3000", {0.51, 6.2}]], Graphics[Text["5000", {0.61, 8.5}]]];
```



Σχ.5 – 5 Προφίλ της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας (core vertical velocity) v_0 στο μέσον του ύψους της κοιλότητας, $z = 0$, για διάφορες τιμές του R_1 και $Ha = 1$

```
In[50]:= Show[p110, p120, p130, p140, p150, AxesLabel -> {"ξ", "v0(ξ,0)"}, PlotRange -> All];
```

```
In[51]:= Show[%, Graphics[Text["R1=1", {0.3, -0.3}]],
Graphics[Text["5000", {0.3, 1.}]], Graphics[Text["10000", {0.4, 1.9}]],
Graphics[Text["30000", {0.51, 4.2}]], Graphics[Text["50000", {0.61, 6.8}]]];
```



Σχ.5 – 6 Προφίλ της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας (core vertical velocity) v_0 στο μέσον του ύψους της κοιλότητας, $z = 0$, για διάφορες τιμές του R_1 και $Ha = 25$

```
In[52]:= ym = ArcSinh[(3/2.) am^(1/2) R1 (x/5 - 1/2)];
```

```
In[53]:= psi0 = -2. am^(-1/2) f[z] / Ha^2 Sinh[ym/3];
```

```
In[54]:= psi1 = psi0 /. {R1 -> 1, Ha -> 1};
```

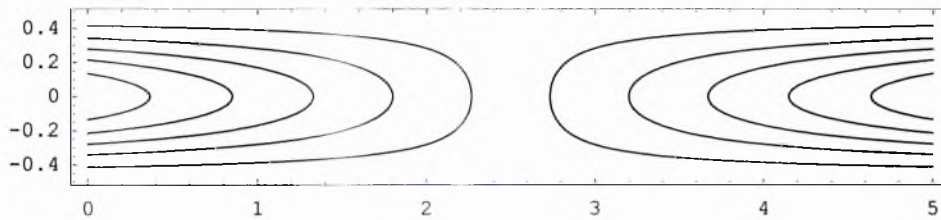
```
In[55]:= ContourPlot[psi1, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
ContourShading -> False, PlotPoints -> 400, AspectRatio -> 1/5];
```



Σχ.5 – 7 a Ποικέες γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 1$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[56]:= psi2 = psi0 /. {R1 -> 200, Ha -> 1};
```

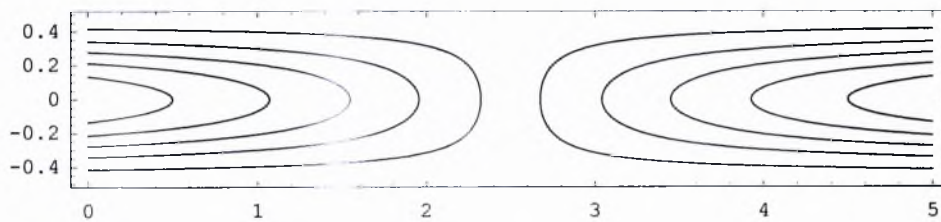
```
In[57]:= ContourPlot[ψ2, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 7 b Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 200$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[58]:= ψ3 = ψ0 /. {R1 → 1000, Ha → 1};
```

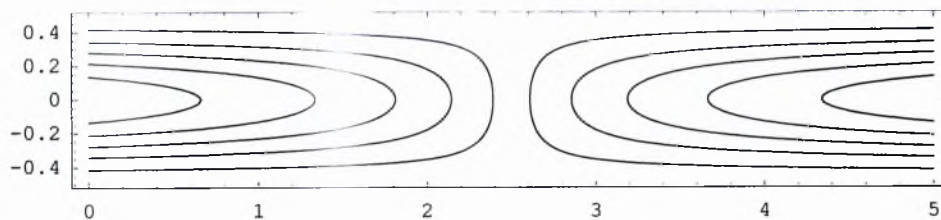
```
In[59]:= ContourPlot[ψ3, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 7 c Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 1000$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[60]:= ψ4 = ψ0 /. {R1 → 3000, Ha → 1};
```

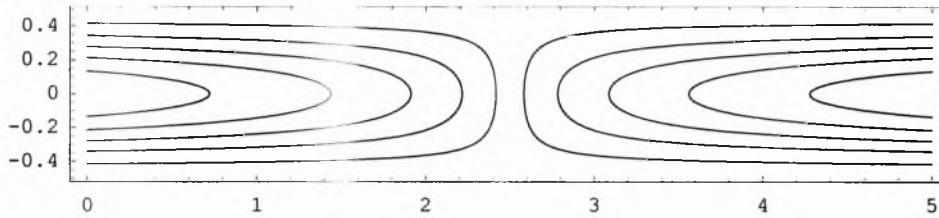
```
In[61]:= ContourPlot[ψ4, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 7 d Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 3000$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[62]:= ψ5 = ψ0 /. {R1 → 5000, Ha → 1};
```

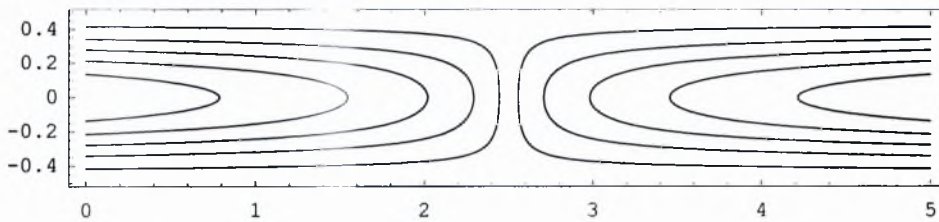
```
In[63]:= ContourPlot[ψ5, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 - 7 e Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 5000$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[64]:= ψ6 = ψ0 /. {R1 → 10000, Ha → 1};
```

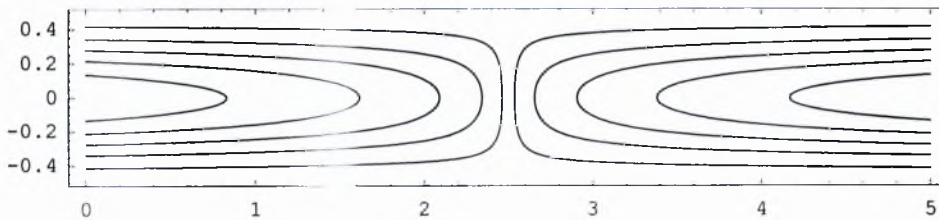
```
In[65]:= ContourPlot[ψ6, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 - 7 f Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 10000$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[66]:= ψ7 = ψ0 /. {R1 → 20000, Ha → 1};
```

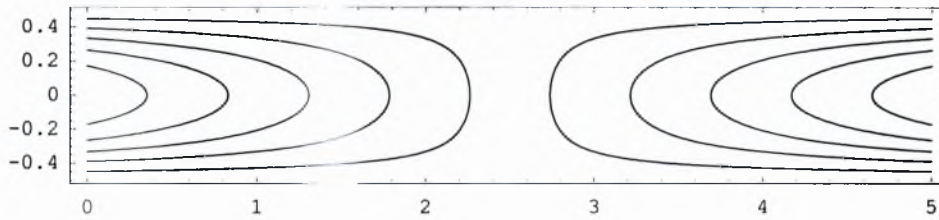
```
In[67]:= ContourPlot[ψ7, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 - 7 g Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 20000$, $Ha = 1$ και $L = 5$

```
In[69]:= ψ10 = ψ0 /. {R1 → 1, Ha → 25};
```

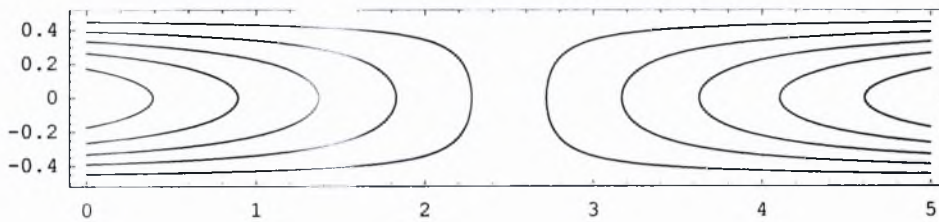
```
In[70]:= ContourPlot[ψ10, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 α Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 1$, $Ha = 25$ και $L = 5$

```
In[72]:= ψ20 = ψ0 /. {R1 → 5000, Ha → 25};
```

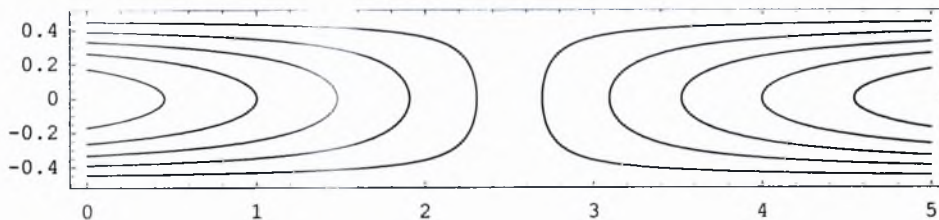
```
In[73]:= ContourPlot[ψ20, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 β Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 5000$, $Ha = 25$ και $L = 5$

```
In[75]:= ψ30 = ψ0 /. {R1 → 10000, Ha → 25};
```

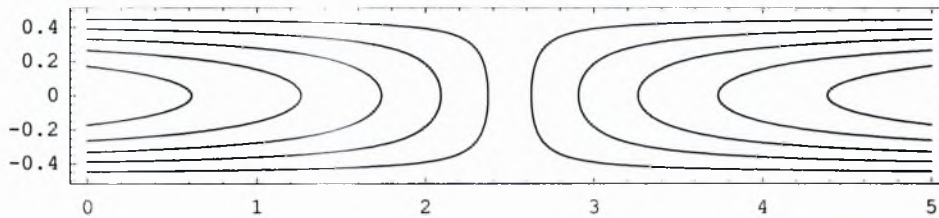
```
In[76]:= ContourPlot[ψ30, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 γ Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 10000$, $Ha = 25$ και $L = 5$

```
In[78]:= ψ40 = ψ0 /. {R1 → 30000, Ha → 25};
```

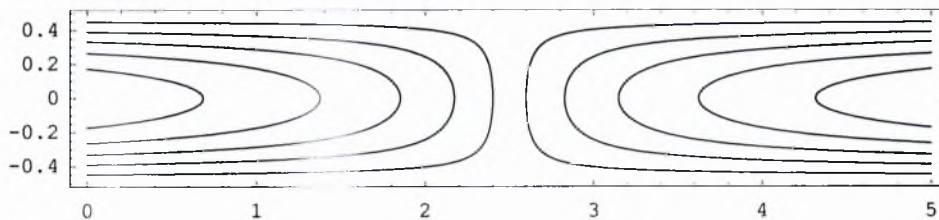
```
In[79]:= ContourPlot[ψ40, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 d Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 30000$, $Ha = 25$ και $L = 5$

```
In[81]:= ψ50 = ψ0 /. {R1 → 50000, Ha → 25};
```

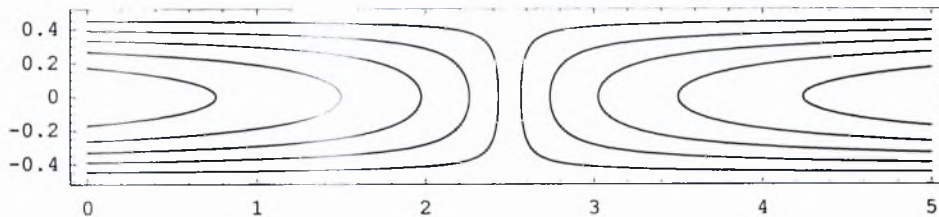
```
In[82]:= ContourPlot[ψ50, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 e Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 50000$, $Ha = 25$ και $L = 5$

```
In[84]:= ψ60 = ψ0 /. {R1 → 100000, Ha → 25};
```

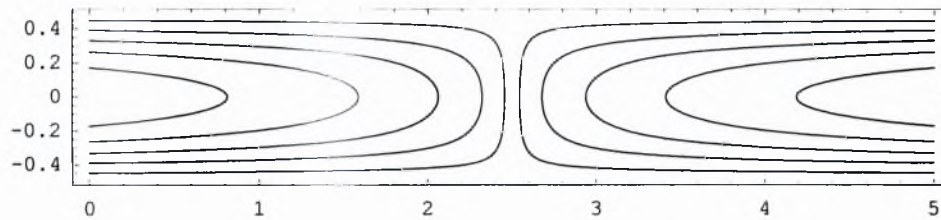
```
In[85]:= ContourPlot[ψ60, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},
  ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 f Ροϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_1 = 100000$, $Ha = 25$ και $L = 5$

```
In[87]:= ψ70 = ψ0 /. {R1 → 200000, Ha → 25};
```

```
In[88]:= ContourPlot[ψ70, {x, 0, 5}, {z, -1/2, 1/2},  
ContourShading → False, PlotPoints → 400, AspectRatio → 1/5];
```



Σχ.5 – 8 g Ποϊκές γραμμές (core streamlines) για $R_l = 200000$, $Ha = 25$ και $L = 5$

