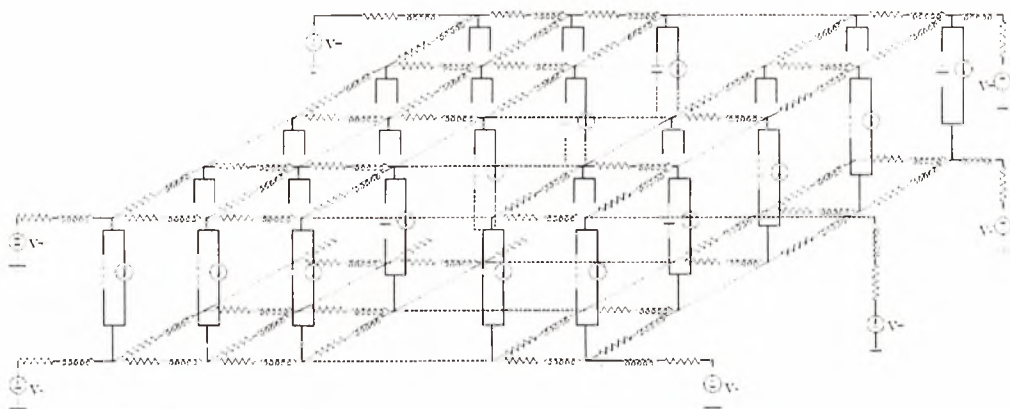


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ – ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πύρκα Αντωνία  
Ράμμου Μαρία-Αικατερίνη

## Προσδιορισμός των χειρότερων συνθηκών δυναμικής λειτουργίας του δικτύου τροφοδοσίας σε ολοκληρωμένα κυκλώματα VLSI



Εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη των:

Ευμορφόπουλου Νέστορα  
Σταμούλη Γεώργιου

Βόλος, Σεπτέμβριος 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6579/1  
Ημερ. Εισ.: 03-10-2008  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΗΥΤΔ  
2008  
ΠΥΡ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### **1. Εισαγωγή**

<b>1.1 Δικτύου διανομής ισχύος (Power grid) ολοκληρωμένων κυκλωμάτων</b> .....	6
<b>1.2 Προβλήματα του δικτύου διανομής ισχύος</b> .....	8
1.2.1 Πτώση τάσης (IR-drop).....	8
1.2.2 Επαγωγικός θόρυβος (inductive noise) .....	10
1.2.3 Ηλεκτρομετανάστευση (electromigration) .....	10
1.2.4 Βελτίωση της ακεραιότητας τροφοδοσίας.....	11
1.2.4.1 Μειώνοντας την πτώση τάσης και τον επαγωγικό θόρυβο ..	11
1.2.4.2 Μειώνοντας την ηλεκτρομετανάστευση .....	12
<b>1.3 Ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος</b> .....	12
1.3.1 Στατική ανάλυση δικτύου ισχύος .....	12
1.3.2 Δυναμική ανάλυση δικτύου ισχύος .....	13
<b>1.4 Νέα μέθοδος δυναμικής ανάλυσης του δικτύου ισχύος</b> .....	15

### **2. Ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος**

<b>2.1 Μέθοδος των κόμβων (Nodal Analysis - NA)</b> .....	17
2.1.1 Νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff.....	19
2.1.2 Σχέση ανάμεσα στις τάσεις των κόμβων και των κλάδων (έκφραση νόμου τάσεων του Kirchhoff).....	20
2.1.3 Σχέση ρεύματος - τάσης (i-v) μεταξύ των κλάδων του κυκλώματος.....	22
2.1.4 Εξισώσεις κόμβων παθητικών κυκλωμάτων .....	24
<b>2.2 Τροποποιημένη μέθοδος των κόμβων (Modified Nodal Analysis - MNA)</b> .....	26
<b>2.3 Διαμόρφωση του συστήματος της MNA ως προς τις πτώσεις της τάσης</b> .....	34

### **3. Αριθμητική επίλυση γραμμικών κυκλωμάτων στο διακριτό χρόνο**

<b>3.1 Μέθοδος των κόμβων στο διακριτό χρόνο</b> .....	37
--	----

<b>4. Προσδιορισμός των χειρότερων συνθηκών μέσης πτώσης τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού</b>	
4.1 Ανάπτυξη των τάσεων τροφοδοσίας ως συνάρτηση των διεγέρσεων ρευμάτων .....	39
4.2 Υπολογισμός της μέσης πτώσης τάσης σε ένα κύκλο ρολογιού	40
4.3 Προσδιορισμός των σημείων χειρότερης πτώσης τάσης .....	41
<b>5. Πειραματικοί έλεγχοι και αποτελέσματα .....</b>	<b>45</b>

## **Παράρτημα Α- Κώδικας MATLAB**

A.1 Δημιουργία των κυματομορφών των ρευμάτων του αρχείου εισόδου .....	58
A.2 Υπολογισμός του διανύσματος μετακίνησης και των μεγιστικών σημείων (maximal points) .....	58
A.3 Αρχικοποίηση μεταβλητών και καθορισμός των κόμβων που τοποθετούνται οι πηγές ρεύματος και οι πηγές τροφοδοσίας .....	61
A.4 Σχηματισμός του δικτύου ισχύος και ανάλυσή του .....	62

<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>69</b>
---------------------------	-----------

## Περίληψη

Ο προσδιορισμός της χειρότερης μέσης πτώσης τάσης σε ένα ψηφιακό κύκλωμα που τροφοδοτείται από ένα δίκτυο διανομής ισχύος ή δίκτυο τροφοδοσίας (power grid) αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα της σύγχρονης σχεδίασης ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία μέθοδος για τον έλεγχο της ακεραιότητας τροφοδοσίας και της ευστάθειας του δικτύου διανομής ισχύος. Αυτό σημαίνει πως η μέση πτώση τάσης του, πρέπει να είναι το πολύ 10% της τάσης τροφοδοσίας.

Η πτώση τάσης (IR-drop), ο επαγωγικός θόρυβος (inductive noise) και η ηλεκτρομετανάστευση (electromigration), αποτελούν τρία σημαντικά φαινόμενα του δικτύου διανομής ισχύος, καθώς επηρεάζουν την αξιοπιστία και την απόδοση του κυκλώματος. Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται περιγραφή αυτών των φαινομένων και των επιπτώσεων που έχουν στο κύκλωμα. Επίσης, γίνεται περιγραφή της στατικής και της δυναμικής ανάλυσης του δικτύου διανομής ισχύος.

Στο επόμενο κεφάλαιο (2<sup>ο</sup>), αρχικά γίνεται η περιγραφή της μεθόδου των κόμβων (NA). Η συγκεκριμένη μέθοδος, ανάγει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Εφαρμόζεται όμως σε κυκλώματα που περιέχουν μόνο στοιχεία R και C και όχι στοιχεία L. Γι' αυτό καταφεύγουμε σε μία τροποποίηση της μεθόδου των κόμβων, η οποία είναι πιο εύκολη στην επίλυση και την επεξεργασία της. Αυτή είναι η τροποποιημένη μέθοδος των κόμβων (MNA), η οποία αναλύεται στο ίδιο κεφάλαιο.

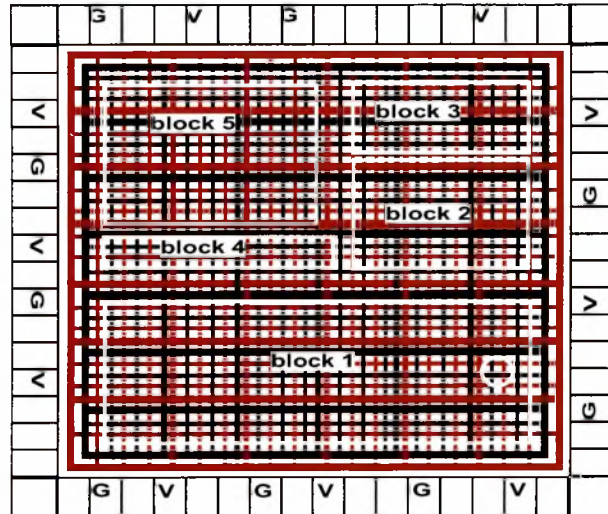
Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο, με την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων, προκύπτει ένα σύστημα δύο αναδρομικών σχέσεων (στο συνεχή χρόνο), που δίνει το διάνυμα των πτώσεων τάσης καθώς και των ρευμάτων κλάδων. Το συγκεκριμένο σύστημα, διακριτοποιείται στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, στο οποίο υπολογίζεται και η μέση πτώση τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού. Στο τέλος του ίδιου κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα μεγιστικά σημεία (maximal points), τα οποία αποτελούν τα σημεία χειρότερης μέσης πτώσης τάσης.

Τέλος, στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο, προσομοιώσαμε ορισμένα κυκλώματα εφαρμόζοντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην εργασία και για να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματά της, κάναμε στατιστική ανάλυση ακραίων τιμών.

Η εκπόνηση της εργασίας αυτής δε θα ήταν δυνατή χωρίς τη συμβολή και βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή κ. Ευμορφόπουλου Νέστορα και του καθηγητή κ. Σταμούλη Γεώργιου τους οποίους και θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε.

# 1. Εισαγωγή

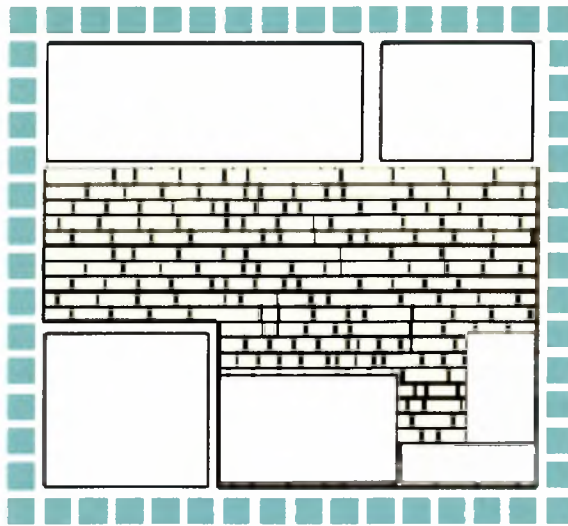
## 1.1 Δίκτυο διανομής ισχύος (Power grid) ολοκληρωμένων κυκλωμάτων



Εικόνα 1.1 Δίκτυο διανομής ισχύος

Ο προορισμός του δικτύου τροφοδοσίας είναι να διανέμει τις τάσεις τροφοδοσίας και γείωσης σε όλη τη σχεδίαση. Στις καινούριες και χαμηλότερες τεχνολογίες, καθώς συρρικνώνονται οι διαστάσεις, μεγαλώνει η συχνότητα και αυξάνεται η κατανάλωση ισχύος, οδηγούμαστε σε μεγάλη ροή ρεύματος στο δίκτυο τροφοδοσίας και γείωσης, κάτι το οποίο επηρεάζει την απόδοση και την αξιοπιστία της σχεδίασης. Ένα ευσταθές δίκτυο τροφοδοσίας είναι απαραίτητο για να εξασφαλιστεί αξιόπιστη λειτουργία στα κυκλώματα. Το δίκτυο έχει τεράστιο μέγεθος γιατί τροφοδοτεί πολλά κελιά (της τάξης του ενός δισεκατομμυρίου) και εμφανίζει πλήθος προβλημάτων όπως η πτώση τάσης, ο επαγωγικός θόρυβος και η ηλεκτρομεταμόσχευση.

Ένα τυπικό δίκτυο διανομής ισχύος (power grid) είναι αυτό που παρουσιάζεται στο μοντέλο της εικόνας 1.1.



*Εικόνα 1.2 Δίκτυο χωρισμένο σε κελιά και σε ομάδες πυλών*

Το δίκτυο διανομής ισχύος εκτείνεται σε δύο επίπεδα μετάλλων, ένα επίπεδο όπου βρίσκονται οι κάθετες διασυνδέσεις και ένα επίπεδο, όπου βρίσκονται οι οριζόντιες. Στο επίπεδο του υποστρώματος τοποθετούνται οι ομάδες των λογικών πυλών (blocks) καθώς και σειρές από τυποποιημένα κελιά (εικόνα 1.2), τα οποία συνδέονται σε ξεχωριστά σημεία τροφοδοσίας το καθένα. Το δίκτυο διανομής ισχύος μπορεί να μην είναι πλήρες (να μην υπάρχουν κάποιοι κλάδοι) και μπορεί να έχει και διαφορετικό αριθμό επιπέδων. Στη συγκεκριμένη ανάλυση μελετάμε ένα πλήρες δίκτυο διανομής ισχύος δύο επιπέδων.

Η χρήση πλέγματος (grid) πλεονεκτεί έναντι της δομής δακτυλίου (ring) που χρησιμοποιήθηκε παλαιότερα, κυρίως γιατί με το μεγάλο αριθμό μονοπατιών που υπάρχουν, το δίκτυο τροφοδοσίας είναι πιο ευσταθές και παρουσιάζει μικρότερη ευαισθησία στις μεταβολές των ρευμάτων. Επίσης, προσφέρεται για πιο άμεσους υπολογισμούς της πτώσης τάσης, του επαγωγικού θορύβου και της ηλεκτρομετανάστευσης. Άλλο ένα πλεονέκτημα είναι πως υπάρχει έτοιμη δρομολόγηση της τροφοδοσίας για τις πύλες σε soft blocks πυλών. Τέλος, οι αλλαγές στη σχεδίαση των πυλών δεν επηρεάζουν τη δομή του δικτύου.

Από την άλλη πλευρά, μειονεκτεί ως προς το μεγάλο κόστος για τους πόρους που χρειάζονται για να γίνει η διανομή της τροφοδοσίας. Ένα ακόμη μειονέκτημα είναι πως δεν είναι εύκολο να συμβιβάσουμε τα hard blocks των πυλών με την ήδη



υπάρχουσα δομή. Τέλος, το δίκτυο διανομής ισχύος συνήθως δεν είναι απαραίτητο για soft blocks πυλών.

## 1.2 Προβλήματα του δικτύου διανομής ισχύος

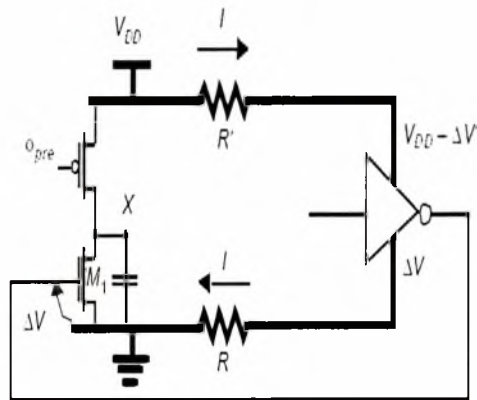
Η ακεραιότητα τροφοδοσίας (power integrity) αποτελεί μια πολύ σημαντική παράμετρο για τη σχεδίαση ενός κυκλώματος πυλών, γιατί τα θέματα που αφορούν την τροφοδοσία επηρεάζουν το χρονισμό και τη συνολική λειτουργία του κυκλώματος και μπορούν να οδηγήσουν ακόμη και στην ολοκληρωτική καταστροφή των συσκευών. Πιο συγκεκριμένα, η αυξημένη πτώση τάσης (IR-drop) και ο επαγωγικός θόρυβος (inductive noise) μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα χρονισμού και η ηλεκτρομετανάστευση (electromigration) επηρεάζει την αξιοπιστία και την απόδοση του κυκλώματος.

### 1.2.1 Πτώση τάσης (IR-drop)

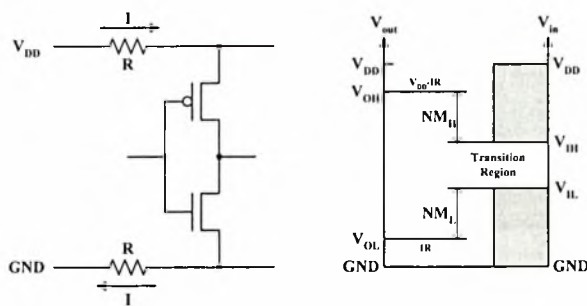
Οι αγωγοί μέσω των οποίων γίνεται η διανομή της τάσης έχουν δική τους εσωτερική αντίσταση. Αυτή μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση χαμηλότερης τάσης στο εσωτερικό του κυκλώματος από αυτή που δίνουμε αρχικά. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται πτώση τάσης (IR-drop), είναι ένα τοπικό φαινόμενο και προκαλείται από την ταυτόχρονη ενεργοποίηση (switch at once) πολλών κοντινών πυλών ή όταν η αντίσταση, σε ένα μεγάλο ποσοστό του κυκλώματος, είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη. Είναι, επίσης, ένα δυναμικό φαινόμενο καθώς επηρεάζεται από τις χρονικές μεταβολές αλλά και από τον αριθμό των πυλών που ενεργοποιούνται κάθε φορά. Καθώς «κατεβαίνουμε σε τεχνολογία» και στις σχεδιάσεις της νέας γενιάς το φαινόμενο γίνεται εντονότερο. Όσο μειώνεται η τεχνολογία της σχεδίασης, αυξάνονται οι απαιτήσεις σε ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας, κυρίως επειδή μειώνεται το πάχος του οξειδίου της πύλης (gate oxide). Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός πως οι καινούριες σχεδιάσεις αποτελούνται από περισσότερα τρανζίστορ και πύλες, αυξάνει τον αριθμό των τιμών των παρασιτικών RC (αντιστάσεων και πυκνωτών) που πρέπει να ληφθούν υπόψιν στην ανάλυση του δικτύου διανομής.

Η πτώση τάσης μπορεί να οδηγήσει σε συνολική μείωση της απόδοσης του συστήματος καθώς επηρεάζει την ισχύ του κυκλώματος. Προκαλεί μείωση της

ταχύτητας και αύξηση της συνολικής καθυστέρησής του, καθώς επηρεάζει την ικανότητα οδήγησης των πυλών. Έχει παρατηρηθεί πως ένα ποσοστό 10%-15% στην πτώση τάσης οδηγεί σε 20%-30% αύξηση στην καθυστέρηση των πυλών. Αν η πτώση τάσης γίνει πολύ μεγάλη, όχι μόνο θα προκαλέσει αύξηση στην καθυστέρηση των πυλών, αλλά στη χειρότερη περίπτωση, θα οδηγήσει σε λογικά λάθη. Επίσης, μειώνει τα περιθώρια θορύβου (εικόνες 1.3 και 1.4), κάτι το οποίο οδηγεί σε πιθανή δυσλειτουργία του κυκλώματος αν το ποσοστό μείωσής τους γίνει μεγαλύτερο του 10%.



Εικόνα 1.3 Μείωση περιθωρίων θορύβου



Εικόνα 1.4 Επιπτώσεις πτώσης τάσης στα περιθώρια θορύβου

### 1.2.2 Επαγωγικός θόρυβος (inductive noise)

Ο επαγωγικός θόρυβος είναι ένα αντίστοιχο πρόβλημα με την πτώση τάσης με τη διαφορά πως παρατηρείται όταν έχουμε ταυτόχρονη απενεργοποίηση πολλών κοντινών πυλών, μετάβαση δηλαδή από το '1' στο '0'. Το φαινόμενο του επαγωγικού θορύβου σχετίζεται με την αυτεπαγωγή και την αντίσταση της γείωσης του κυκλώματος. Πιο συγκεκριμένα, μεγάλη αντίσταση και αυτεπαγωγή οδηγούν σε αυξημένο επαγωγικό θόρυβο. Επειδή, όμως, στα κυκλώματα υπάρχουν πάντα αυτεπαγωγές και αντιστάσεις, ο επαγωγικός θόρυβος δεν μπορεί να ελαττωθεί πλήρως, παρά μόνο να περιοριστεί σε ένα επιτρεπτό επίπεδο. Κάποιοι άλλοι παράγοντες που αυξάνουν τον επαγωγικό θόρυβο, είναι η αύξηση της συχνότητας, καθώς και ο μεγάλος αριθμός των πυλών του κυκλώματος.

Ο επαγωγικός θόρυβος συχνά αναφέρεται και ως "ground bounce" και δίνεται από τον τύπο  $L \frac{dI}{dt}$ .

Λόγω της αντιστοιχίας του επαγωγικού θορύβου με την πτώση τάσης, όπως είναι αναμενόμενο, εμφανίζουν τα ίδια προβλήματα.

### 1.2.3 Ηλεκτρομετανάστευση (electromigration)

Η ηλεκτρομετανάστευση είναι ένα DC φαινόμενο που εμφανίζεται όταν μεγάλες ποσότητες ρεύματος προκαλούν ροή ηλεκτρονίων από το αρνητικά φορτισμένο άκρο ενός αγωγού διασύνδεσης στο θετικά φορτισμένο άκρο του. Αυτή η ροή ηλεκτρονίων μπορεί να προκαλέσει μεγάλες ζημιές στο κύκλωμα είτε δημιουργώντας κενά (voids) στους αγωγούς, είτε ενώσεις (extrusions) με γειτονικούς αγωγούς.

Σε κάθε επίπεδο σχεδίασης οι αγωγοί διασύνδεσης έχουν διαφορετικό μέγεθος και κατασκευάζονται από διαφορετικό υλικό και αυτό επηρεάζει το φαινόμενο της ηλεκτρομετανάστευσης. Για παράδειγμα, όταν μικραίνει το μέγεθος των αγωγών διασύνδεσης η ηλεκτρομετανάστευση γίνεται εντονότερη, επειδή αυξάνεται η κινητικότητα των ηλεκτρονίων από το ένα άκρο της διασύνδεσης στο άλλο. Τα προβλήματα που δημιουργεί η ηλεκτρομετανάστευση παρατηρούνται στην

περιφέρεια της σχεδίασης, επειδή εκεί υπάρχουν μεγαλύτερες ροές ρεύματος. Πολλές φορές όμως εμφανίζονται σε όλη τη σχεδίαση, κι όχι μόνο στην περιφέρειά της. Είναι επίσης πιθανό να εμφανιστούν και στα κατώτερα στρώματα της σχεδίασης γιατί εκεί οι αγωγοί διασύνδεσης έχουν μικρότερη διατομή. Γι' αυτό, προκειμένου να εντοπιστούν όλες οι πιθανές περιοχές που εμφανίζονται τα προβλήματα αυτά, είναι σημαντικό να τα αναζητήσουμε σε ολόκληρο το κύκλωμα κάνοντας συνολική κι όχι τοπική ανάλυση του κυκλώματος.

Το φαινόμενο της ηλεκτρομετανάστευσης προκαλεί βασικά λειτουργικά προβλήματα, κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε συνολική μείωση της ζωής ενός κυκλώματος.

#### 1.2.4 Βελτίωση της ακεραιότητας τροφοδοσίας

Για να επιτευχθεί ακεραιότητα τροφοδοσίας πρέπει να έχουμε σταθερή τάση στο κύκλωμά μας, το οποίο με τη σειρά του θα μας οδηγήσει σε αξιόπιστη λειτουργία του κυκλώματος. Αυτό μπορεί να γίνει αν αναλυθούν σωστά τα παραπάνω προβλήματα και αντιμετωπιστούν καταλλήλως.

##### 1.2.4.1 Μειώνοντας την πτώση τάσης και τον επαγωγικό θόρυβο

- ✓ Η πιο απλή λύση είναι να αυξήσουμε το πλάτος των αγωγών διασύνδεσης, καθώς αυξάνοντας το πλάτος, μειώνεται η αντίσταση άρα και η πτώση τάσης. Ωστόσο αυτό δεν είναι πάντα εφικτό, λόγω περιορισμών στη σχεδίαση.
- ✓ Χρήση πυκνωτών αποσύζευξης διάσπαρτα μεταξύ της τροφοδοσίας και της γείωσης, οι οποίοι μπορούν να μεταφέρουν κατάλληλα το απαραίτητο ρεύμα στο δίκτυο. Ο επαγωγικός θόρυβος ελαχιστοποιείται όταν τοποθετούνται πυκνωτές μεγάλης χωρητικότητας κοντά στα pins.
- ✓ Εφόσον και τα δύο φαινόμενα σχετίζονται με την ταυτόχρονη μετάβαση από '0' σε '1' και το αντίστροφο, ένας άλλος τρόπος είναι να ελέγξουμε τη μετάβαση αυτή έτσι ώστε να μην γίνεται ταυτόχρονα αλλά με μικρή χρονική διαφορά. Αυτό μπορεί να γίνει αν εισάγουμε καθυστερήσεις στα σήματα που οδηγούν τις πύλες.
- ✓ Αύξηση των στοιχείων τροφοδοσίας και γείωσης.

#### 1.2.4.2 Μειώνοντας την ηλεκτρομεταμόρφωση

Βασικός στόχος είναι να ελαττώσουμε τη μέση πυκνότητα ρεύματος που έχει ο κάθε αγωγός. Τρόποι για να το πετύχουμε αυτό είναι οι εξής:

- ✓ Η πιο απλή λύση είναι να αυξήσουμε το πλάτος των αγωγών διασύνδεσης. Ωστόσο, αυξάνοντας το πλάτος πέρα από το επιτρεπτό όριο οδηγούμαστε σε κακή σχεδίαση, το οποίο με τη σειρά του κοστίζει σε χώρο και μειώνει τη συνολική απόδοση.
- ✓ Μια άλλη προσέγγιση είναι να προσπαθήσουμε να αλλάξουμε τη ροή του ρεύματος στο δίκτυο διανομής ισχύος. Ωστόσο, πρέπει να σιγουρευτούμε πως η ανακατεύθυνση αυτή θα λύσει το πρόβλημα και δεν θα το μεταφέρει απλά σε κάποιο άλλο μέρος της σχεδίασης.

### 1.3 Ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος

Η ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος αποσκοπεί στην επιβεβαίωση της ευστάθειάς του (robustness verification), δηλαδή την επιβεβαίωση του εάν διατηρεί ένα επίπεδο τάσης εντός κάποιων ορίων ασφαλείας (π.χ. 10% της τάσης τροφοδοσίας  $V_{dd}$ ) σε όλες τις ομάδες πυλών και για όλες τις χρονικές στιγμές και περιόδους ρολογιού κατά τη λειτουργία του κυκλώματος.

#### 1.3.1 Στατική ανάλυση δικτύου ισχύος

Η προσέγγιση της στατικής ανάλυσης του δικτύου ισχύος χρησιμοποιείται για να μας παρέχει επαρκή κάλυψη χωρίς την απαίτηση για εκτενείς προσομοιώσεις κυκλωμάτων. Οι περισσότερες στατικές προσεγγίσεις γίνονται με βάση τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζονται όλες οι παρασιτικές χωρητικότητες του δικτύου.
2. Δημιουργείται ένας πίνακας αντιστάσεων για το δίκτυο.
3. Υπολογίζεται το μέσο ρεύμα για κάθε τρανζίστορ ή πύλη που συνδέεται με το δίκτυο.
4. Τα μέσα ρεύματα προστίθενται καταλλήλως στον πίνακα αντιστάσεων, σύμφωνα με την τοποθεσία των τρανζίστορ και των πυλών.

5. Σε κάθε κόμβο τροφοδοσίας εισόδου/εξόδου ( $V_{dd}$  I/O pin) τοποθετείται στον πίνακα μια πηγή τροφοδοσίας  $V_{dd}$ .
6. Τέλος, χρησιμοποιείται μια στατική επίλυση πίνακα έτσι ώστε να υπολογιστούν από τον πίνακα αντιστάσεων οι τιμές των ρευμάτων και οι πτώσεις τάσης (IR drops).

Η στατική ανάλυση διορθώνει σε κάποιο βαθμό τα προβλήματα του δικτύου ισχύος κάνοντας την υπόθεση πως οι πυκνωτές αποσύζευξης ανάμεσα στην τροφοδοσία και τη γείωση ελαχιστοποιούν την πτώση τάσης και τον επαγωγικό θόρυβο.

Το κύριο όφελος της στατικής ανάλυσης είναι πως είναι απλή στον υπολογισμό κι έχει επαρκή κάλυψη των απαιτήσεων της ανάλυσης. Αφού χρειάζεται μόνο η παρασιτική αντίσταση του δικτύου ισχύος μειώνεται το κόστος και αφού κάθε τρανζίστορ ή πύλη φορτώνεται αποτελεσματικά στο κύκλωμα η επίλυση θα είναι ικανοποιητική.

Η βασική πρόκληση της στατικής ανάλυσης είναι η ακρίβεια. Τα τοπικά δυναμικά προβλήματα καθώς και αυτά που δημιουργούνται από τις αυτεπαγωγές ( $Ldi/dt$ ), τα οποία μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλες τιμές πτώσης τάσης και επαγωγικού θορύβου, δεν λαμβάνονται υπόψιν αν δεν υπάρχει αρκετή χωρητικότητα αποσύζευξης στο δίκτυο ισχύος.

### 1.3.2 Δυναμική ανάλυση δικτύου ισχύος

Η δυναμική ανάλυση του δικτύου ισχύος απαιτεί τον υπολογισμό τόσο της αντίστασης όσο και της χωρητικότητας του δικτύου. Επίσης χρειάζεται ο δυναμικός υπολογισμός κυκλώματος ενός πίνακα αντιστάσεων. Οι περισσότερες δυναμικές αναλύσεις ενός δικτύου ισχύος γίνονται με βάση τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζεται η παρασιτική αντίσταση και χωρητικότητα του δικτύου.
2. Υπολογίζεται η παρασιτική αντίσταση και χωρητικότητα των διασυνδέσεων των πυλών.
3. Σχηματίζεται το netlist της σχεδίασης.

4. Σχηματίζεται το netlist του κυκλώματος χρησιμοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς.
5. Τέλος, εκτελείται προσομοίωση κυκλώματος, η οποία βασίζεται σε ένα σύνολο διανυσμάτων προσομοίωσης και η οποία μελετά τη δυναμική ενεργοποίηση κι απενεργοποίηση των τρανζίστορ ή των πυλών και την επιρροή αυτών των εναλλαγών στο δίκτυο.

Το κύριο όφελος της δυναμικής ανάλυσης είναι η ακρίβεια της. Αφού τα αποτελέσματα βασίζονται σε προσομοίωση κυκλώματος, οι επιπτώσεις της πτώσης τάσης και του επαγωγικού θορύβου μπορεί να έχουν μεγάλη ακρίβεια και να λάβουν υποψιν τους και τοπικά δυναμικά προβλήματα καθώς και αυτά που δημιουργούνται από τις αυτεπαγωγές.

Οι προκλήσεις της δυναμικής ανάλυσης είναι σημαντικές και φαίνονται παρακάτω:

- Οι απαιτήσεις του υπολογισμού των παρασιτικών είναι μεγάλες, επειδή χρειάζεται να υπολογίσουμε την αντίσταση και τη χωρητικότητα για το δίκτυο ισχύος καθώς και τη χωρητικότητα των διασυνδέσεων των πυλών.
- Η προσομοίωση του κυκλώματος μπορεί να περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό στοιχείων που να πρέπει να προσομοιωθούν κι αυτό την κάνει πιο δύσκολη και χρονοβόρα.
- Το σύνολο των διανυσμάτων προσομοίωσης παίζει πρωταρχικό ρόλο στον καθορισμό της ποιότητας της εξόδου. Αν δεν χρησιμοποιηθεί το σωστό διάνυσμα τα αποτελέσματα θα είναι αμφισβητήσιμα επειδή μπορεί να μην έχουν προσομοιωθεί όλα τα τμήματα του δικτύου.
- Τέλος, για ένα αριθμό στοιχείων που σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο δίκτυο, το αποτέλεσμα της δυναμικής ανάλυσης αυτού του δικτύου δεν είναι εύκολο να προσαρμοστεί σε ένα άλλο δίκτυο καθώς τα μεγέθη της σχεδίασης συνεχώς αυξάνουν.

Πολλές λύσεις που προέρχονται από δυναμική επίλυση του δικτύου ισχύος οδηγούνται σε τεχνικές ελάττωσης του πίνακα RC έτσι ώστε να μπορέσουν να χειριστούν το μεγάλο πλήθος των στοιχείων που πρέπει να προσομοιωθούν. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη βασική αρχή της δυναμικής ανάλυσης που είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η ελάττωση του πίνακα RC μπορεί να οδηγήσει σε ανακρίβειες



στην ανάλυση καθώς επίσης στο να μην αντιληφθούμε σοβαρά προβλήματα ηλεκτρομετανάστευσης.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί πως η πτώση τάσης, ο επαγωγικός θόρυβος και η ηλεκτρομετανάστευση δεν μπορούν να λυθούν ξεχωριστά. Πρέπει και τα τρία φαινόμενα να ληφθούν υπόψιν κατά τη διάρκεια της σχεδίασης και να γίνει πλήρης ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος για να ελέγξουμε κατά πόσο υπάρχει ακεραιότητα τροφοδοσίας καθώς και αν το σύστημα είναι ευσταθές.

#### **1.4 Νέα μέθοδος δυναμικής ανάλυσης του δικτύου ισχύος**

Όπως είναι προφανές από τα παραπάνω, η ανάλυση του δικτύου ισχύος είναι ένα σύνθετο και δυναμικό πρόβλημα. Σύνθετο με την έννοια ότι η πτώση τάσης στους κόμβους τροφοδοσίας των blocks πυλών εξαρτάται από τα ρεύματα που τα ίδια τα blocks αντλούν από το δίκτυο τροφοδοσίας και δυναμικό με την έννοια ότι είναι ένα φαινόμενο που μεταβάλλεται στο χρόνο.

Η κυματομορφή της τάσης τροφοδοσίας  $v(t)$  (οπότε και της πτώσης τάσης  $V_{dd} - v(t)$ ) στους κόμβους όπου συνδέονται τα blocks των πυλών με το δίκτυο τροφοδοσίας εξαρτάται από τα ρεύματα  $I(t)$  που αντλούν τα blocks των πυλών ως διεγέρσεις στο δίκτυο τροφοδοσίας. Τα ρεύματα αυτά  $I(t)$  με τη σειρά τους καθορίζονται από τον κύκλο ρολογιού στον οποίο βρισκόμαστε κατά τη λειτουργία του ψηφιακού κυκλώματος και επομένως από το ζεύγος των δυαδικών διανυσμάτων των εισόδων τα οποία έχουν εφαρμοστεί στις εισόδους του κυκλώματος, για να προκαλέσουν μεταβάσεις καταστάσεων ορισμένων πυλών και εκτέλεση της επιθυμητής λειτουργίας κατά τον τρέχοντα κύκλο. Αυτό σημαίνει ότι για την πλήρη επιβεβαίωση της ευστάθειας του δικτύου θα πρέπει να εξεταστούν όλοι οι δυνατοί διαφορετικοί κύκλοι ρολογιού, με εφαρμογή όλων των δυνατών ζευγών δυαδικών διανυσμάτων στις εισόδους του ψηφιακού κυκλώματος.

Όμως, ο αριθμός των δυνατών διαφορετικών κύκλων λειτουργίας είναι ουσιαστικά άπειρος. Συγκεκριμένα είναι  $4^r$ , όπου  $r$  είναι ο αριθμός των εισόδων του ψηφιακού κυκλώματος, ο οποίος έχει τάξη μεγέθους περίπου 200 και πάνω. Το τεράστιο αυτό

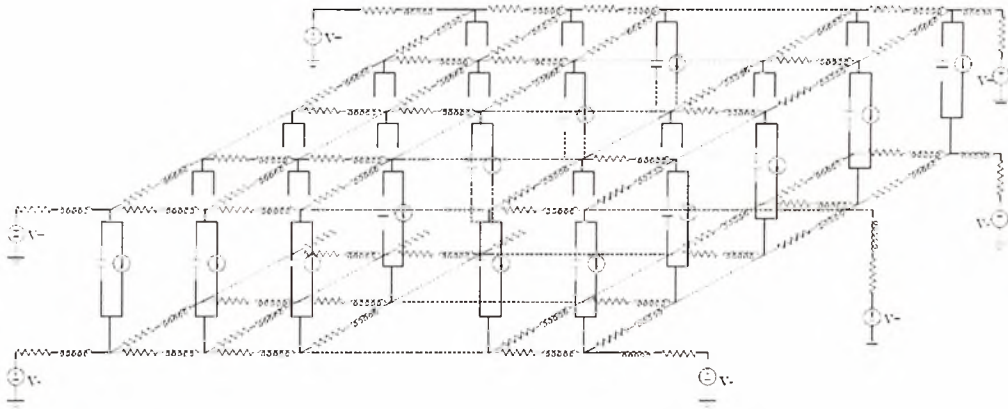


μέγεθος καθιστά αυτομάτως αδύνατη την πλήρη επιβεβαίωση της ευστάθειας του δικτύου υπό συνθήκες δυναμικής λειτουργίας. Σε αυτό το πλαίσιο, στόχος της παρούσας εργασίας είναι ο προσδιορισμός κάποιων «χειρότερων» (worst-case) κυματομορφών ρεύματος που μπορεί να αντλήσει ένα ψηφιακό κύκλωμα, για τις οποίες ελαχιστοποιείται το επίπεδο τάσης που παρέχεται από το δίκτυο τροφοδοσίας.

## 2. Ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος

### 2.1 Μέθοδος των κόμβων (Nodal Analysis - NA)

Η μεταφορά ισχύος προς τις πύλες ή τα blocks πυλών γίνεται με μεταλλικούς αγωγούς, οι οποίοι είναι μη ιδανικοί καθώς παρουσιάζουν αντίσταση (στη διέλευση του ρεύματος), χωρητικότητα (μεταξύ τους και με το υπόστρωμα) και σε μεγάλες συχνότητες φαινόμενα αυτεπαγωγής και αμοιβαίας επαγωγής (λόγω των βρόχων ρεύματος που σχηματίζονται).



Εικόνα 2.1 Μοντέλο πλήρους δικτύου διανομής ισχύος 2 επιπέδων

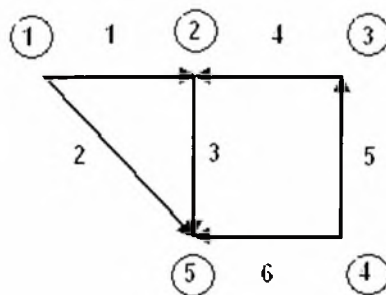
Το δίκτυο τροφοδοσίας αναπαρίσταται από ένα γραμμικό RLC μοντέλο (εικόνα 2.1) με β κλάδους R και L και χωρητικότητες προς τη γη σε κάθε κόμβο. Οι τύποι υπολογισμού των στοιχείων R, L και C είναι:

- αντίσταση κλάδου  $R_j = R_{sh} \frac{l_j}{w_j}$ , όπου  $R_{sh}$  η αντίσταση φύλλου (sheet resistance),  $l_j$  μήκος και  $w_j$  πλάτος του κλάδου j
- αυτεπαγωγή κλάδου  $L_j = l_j \frac{\mu_0}{2\pi} (\ln 8h - \ln w_j)$ , όπου  $\mu_0$  μαγνητική σταθερά του κενού και h η απόσταση από το υπόστρωμα

- χωρητικότητα προς τη γη  $C_i = \sum_j (\frac{1}{2} \bar{C}_{pp(ar)} l_{ji} w_{ji} + \frac{1}{2} \bar{C}_{ff+cp(per)} l_{ji})$ , όπου j οι κλάδοι που προσπίπτουν στον κόμβο i,  $\bar{C}_{pp(ar)}$  χωρητικότητα παραλλήλων πλακών και  $\bar{C}_{ff+cp(per)}$  περιμετρικές πλευρικές χωρητικότητες. Στους κόμβους στους οποίους βάζουμε τις πηγές τροφοδοσίας πρέπει να προσθέσουμε χωρητικότητα αποσύζευξης  $\bar{C}_{decoup}$  καθώς και χωρητικότητα ακροδεκτών  $\bar{C}_{pin}$ .

Οι κόμβοι του δικτύου, έστω n, χωρίζονται σε p κόμβους οι οποίοι δέχονται τάση τροφοδοσίας  $V_{dd}$  προς τη γη (οι κόμβοι αυτοί δεν είναι μόνο στην περιφέρεια λόγω της σύγχρονης C4 τεχνολογίας) και σε q εσωτερικούς κόμβους, από τους οποίους οι sn (με  $sn \ll q$  συνήθως) συνδέονται σε πηγές ρεύματος (προς τη γη), που αντιστοιχούν στα blocks πυλών που τροφοδοτούνται και αντλούν ρεύμα από το δίκτυο διανομής ισχύος (οι μεμονωμένες πύλες-cells εντός των blocks, οι οποίες διατάσσονται σε οριζόντιες σειρές και τροφοδοτούνται από οριζόντιες γραμμές τροφοδοσίας/γείωσης σε κάποιο χαμηλό επίπεδο μετάλλου, βλέπουν χαμηλές πτώσεις τάσης σε σχέση με τις τάσεις που δέχονται τα blocks, λόγω μικρών ρευμάτων, οπότε συνήθως δεν εξετάζονται).

Θα γίνει μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των κόμβων, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας. Η τοπολογία του κυκλώματος αναπαρίσταται με τη βοήθεια γράφων.



Εικόνα 2.2 Συνεκτικός προσανατολισμένος γράφος

### 2.1.1 Νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff

Θεωρούμε τον προσανατολισμένο συνεκτικό γράφο της εικόνας 2.2, που αποτελείται από  $n+1=5$  κόμβους (συμπεριλαμβανομένου και ενός κόμβου αναφοράς) και  $\beta=6$  κλάδους. Σύμφωνα με τον νόμο των ρευμάτων το άθροισμα όλων των στιγμιαίων ρευμάτων, που φθάνουν ή φεύγουν από κάθε κόμβο του κυκλώματος, είναι κάθε χρονική στιγμή μηδέν. Θεωρώντας θετική τη φορά των ρευμάτων που φεύγουν από κάθε κόμβο, οι εξισώσεις κόμβων του γραφήματος της εικόνας 2.2 είναι

$$\begin{aligned}
 \text{Κόμβος 1:} & \quad i_{b1}(t) + i_{b2}(t) = 0 \\
 \text{Κόμβος 2:} & \quad -i_{b1}(t) + i_{b3}(t) - i_{b4}(t) = 0 \\
 \text{Κόμβος 3:} & \quad i_{b4}(t) - i_{b5}(t) = 0 \\
 \text{Κόμβος 4:} & \quad i_{b5}(t) + i_{b6}(t) = 0 \\
 \text{Κόμβος 5:} & \quad -i_{b2}(t) - i_{b3}(t) - i_{b6}(t) = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Σε μορφή πινάκων οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{b1}(t) \\ i_{b2}(t) \\ i_{b3}(t) \\ i_{b4}(t) \\ i_{b5}(t) \\ i_{b6}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

ή σε γενική μορφή

$$\mathbf{A}^* \mathbf{i}_{\text{branches}}(t) = 0 \tag{2.3}$$

Ο πίνακας  $\mathbf{A}$  λέγεται πίνακας συνδέσεων κόμβων (node-to-branch incidence matrix) και δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι κόμβοι του κυκλώματος μεταξύ τους. Ο πίνακας  $\mathbf{A}$  έχει  $n+1$  γραμμές και  $\beta$  στήλες. Τα στοιχεία  $\mathbf{A}_{ij}$  του πίνακα ορίζονται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{όταν ο κλάδος } j \text{ φεύγει από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{όταν ο κλάδος } j \text{ φθάνει στον κόμβο } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή κάθε κλάδος του γράφου συνδέεται μόνο με δύο κόμβους, κάθε στήλη του πίνακα συνδέσεων κόμβων περιέχει ένα +1, ένα -1 και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν. Ο πίνακας συνδέσεων κόμβων είναι μια τυπική μέθοδος για την περιγραφή ενός κυκλώματος στον υπολογιστή.

Το σύστημα των Εξ.(2.3) αποτελείται από  $n+1$  εξισώσεις, που είναι γραμμικά εξαρτημένες μεταξύ τους. Από το σύνολο των  $n+1$  εξισώσεων μόνο κάθε συνδυασμός  $n$  εξισώσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν ορίσουμε τον κόμβο αναφοράς, τότε η γραμμή του πίνακα που αντιστοιχεί σ' αυτόν τον κόμβο δεν είναι απαραίτητη για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων. Η γραμμή αυτή απαλείφεται και παραμένουν μόνο οι  $n$  γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. Αν στο γράφο της εικόνας 2.2 θεωρήσουμε κόμβο αναφοράς τον κόμβο 5, τότε το σύστημα των Εξ.(2.2) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{b1}(t) \\ i_{b2}(t) \\ i_{b3}(t) \\ i_{b4}(t) \\ i_{b5}(t) \\ i_{b6}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ή σε γενική μορφή

$$\mathbf{A}_r * \mathbf{i}_{branches}(t) = 0 \quad (2.5)$$

Όπου ο πίνακας  $\mathbf{A}_r$  λέγεται ελαττωμένος πίνακας συνδέσεων κόμβων (reduced node-to-branch incidence matrix) και είναι τάξης  $(n \times (\beta + p))$ .

### 2.1.2 Σχέση ανάμεσα στις τάσεις των κόμβων και των κλάδων (έκφραση νόμου τάσεων του Kirchhoff)

Με τη μέθοδο των κόμβων προσδιορίζονται οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς. Τις τάσεις των κόμβων τις συμβολίζουμε με  $v_{nodesi}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Επειδή μας ενδιαφέρουν οι τάσεις των κλάδων  $v_{branchesk}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, \beta$ ), χρειαζόμαστε μια σχέση ανάμεσα σ' αυτές και στις τάσεις των κόμβων.

Θεωρούμε πάλι την οικογένεια κυκλωμάτων, που έχει ως γράφο αυτό της εικόνας 2.2. Είναι φανερό ότι κάθε κλάδος που συνδέεται με τον κόμβο αναφοράς θα έχει τάση κλάδου ίση με την τάση του κόμβου ή την αντίθετή της. Μ' άλλα λόγια, σ' αυτήν την περίπτωση είναι

$$v_{bk}(t) = \begin{cases} v_{ni}(t), & \text{όταν ο κλάδος } k \text{ φεύγει από τον κόμβο } i \\ -v_{ni}(t), & \text{όταν ο κλάδος } k \text{ φθάνει στον κόμβο } i \end{cases}$$

Στην περίπτωση που ο κλάδος βρίσκεται μεταξύ των κόμβων  $i$  και  $j$  έχουμε

$$v_{bk}(t) = \begin{cases} v_{ni}(t) - v_{nj}(t), & \text{όταν ο κλάδος } k \text{ φεύγει από τον κόμβο } i \\ v_{nj}(t) - v_{ni}(t), & \text{όταν ο κλάδος } k \text{ φεύγει από τον κόμβο } j \end{cases}$$

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι οι τάσεις των κλάδων  $v_{bk}(t)$  είναι γραμμικός συνδυασμός των τάσεων κόμβων  $v_{ni}(t)$ . Αναφερόμενοι στο γράφο της εικόνας 2.2 έχουμε:

$$\begin{aligned} v_{b1}(t) &= v_{n1}(t) - v_{n2}(t) \\ v_{b2}(t) &= v_{n1}(t) \\ v_{b3}(t) &= v_{n2}(t) \\ v_{b4}(t) &= v_{n3}(t) - v_{n2}(t) \\ v_{b5}(t) &= v_{n4}(t) - v_{n3}(t) \\ v_{b6}(t) &= v_{n4}(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Με μορφή πίνακα οι Εξ.(2.6) γράφονται

$$\begin{bmatrix} v_{b1}(t) \\ v_{b2}(t) \\ v_{b3}(t) \\ v_{b4}(t) \\ v_{b5}(t) \\ v_{b6}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1}(t) \\ v_{n2}(t) \\ v_{n3}(t) \\ v_{n4}(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ή σε γενική μορφή

$$\mathbf{v}_{\text{branches}}(t) = \mathbf{A}_l^T \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) \quad (2.8)$$

Η Εξ.(2.8) συνδέει τις τάσεις των κόμβων με τις τάσεις των κλάδων και αποτελεί μια ισοδύναμη έκφραση του νόμου των κόμβων, ενώ μαζί με την Εξ.(2.5) αποτελούν τις βασικές εξισώσεις της μεθόδου των κόμβων.

### 2.1.3 Σχέση ρεύματος – τάσης (i-v) μεταξύ των κλάδων του κυκλώματος

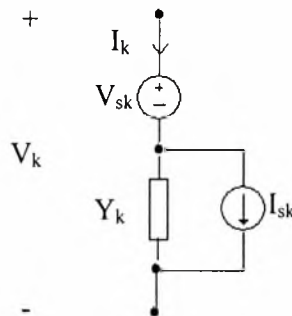
Η εξίσωση κάθε κλάδου είναι:

$$i_{bk}(t) = Y_k(D) v_{bk}(t) \quad (2.9)$$

όπου  $k=1,2,\dots,\beta$  και  $\beta$  το πλήθος των κλάδων του κυκλώματος.

$$Y_k(D) = \begin{cases} \frac{1}{R_k}, & \text{αν ο κλάδος έχει αντίσταση} \\ \frac{1}{L_k} \int_0^t \bullet dt \equiv \frac{1}{L_k} D^{-1}, & \text{αν ο κλάδος έχει αυτεπαγωγή} \\ C_k \frac{d}{dt} \bullet \equiv C_k D, & \text{αν ο κλάδος έχει χωρητικότητα} \end{cases} \quad (2.10)$$

Η γενικότητα της μεθόδου ανάλυσης, που επιχειρούμε ν' αναπτύξουμε, επιβάλλει τη θεώρηση κλάδων με όσο γίνεται γενικότερη δομή, όπως είναι η δομή που παρουσιάζεται στην εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3 Γενικός κλάδος κυκλώματος

Η εξίσωση του γενικού κλάδου της εικόνας 2.3 είναι

$$i_{bk}(t) = I_{sk}(t) - Y_k(D)V_{sk}(t) + Y_k(D) v_{bk}(t) \quad (2.11)$$

Όπου  $k = 1, 2, \dots, \beta$  και  $\beta$  το πλήθος των κλάδων του κυκλώματος.

Οι εξισώσεις των γενικών κλάδων του κυκλώματος σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα  $\beta$  εξισώσεων, που συνδέουν τα ρεύματα των κλάδων με τις τάσεις των κλάδων. Το σύστημα των εξισώσεων κλάδων έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} i_{b1}(t) &= I_{s1}(t) - Y_1(D)V_{s1}(t) + Y_1(D) v_{b1}(t) \\ i_{b2}(t) &= I_{s2}(t) - Y_2(D)V_{s2}(t) + Y_2(D) v_{b2}(t) \\ &\dots \\ i_{b\beta}(t) &= I_{s\beta}(t) - Y_\beta(D)V_{s\beta}(t) + Y_\beta(D) v_{b\beta}(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Με μορφή πινάκων οι Εξ.(2.12) γράφονται

$$\mathbf{i}_{branches}(t) = \mathbf{I}_s(t) - \mathbf{Y}_{branches}(D)\mathbf{V}_s(t) + \mathbf{Y}_{branches}(D) \mathbf{v}_{branches}(t) \quad (2.13)$$

όπου  $\mathbf{V}_s(t)$  και  $\mathbf{I}_s(t)$  είναι τα διανύσματα στήλες των πηγών διαστάσεων  $(\beta \times 1)$

$$\mathbf{V}_s(t) = [V_{s1}(t) \ V_{s2}(t) \ \dots \ V_{s\beta}(t)]^T \quad (2.14)$$

και

$$\mathbf{I}_s(t) = [I_{s1}(t) \ I_{s2}(t) \ \dots \ I_{s\beta}(t)]^T$$

$\mathbf{v}_{branches}(t)$  και  $\mathbf{i}_{branches}(t)$  είναι τα διανύσματα στήλες των τάσεων και των ρευμάτων κλάδων διαστάσεων  $(\beta \times 1)$

$$\mathbf{v}_{branches}(t) = [v_{branches1}(t) \ v_{branches2}(t) \ \dots \ v_{branches\beta}(t)]^T \quad (2.15)$$

και

$$\mathbf{i}_{branches}(t) = [i_{branches1}(t) \ i_{branches2}(t) \ \dots \ i_{branches\beta}(t)]^T$$

και  $\mathbf{Y}_{branches}(D)$  τετραγωνικός διαγώνιος πίνακας τάξης  $(\beta \times \beta)$

$$\mathbf{Y}_{branches}(D) = \text{diag}[Y_1(D) \ Y_2(D) \ \dots \ Y_\beta(D)]$$



Ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D})$ , λέγεται πίνακας σύνθετων αγωγιμοτήτων κλάδων (branch admittance matrix).

#### 2.1.4 Εξισώσεις κόμβων παθητικών κυκλωμάτων

Για να γράψουμε τις εξισώσεις κόμβων, θα χρησιμοποιήσουμε τις Εξ.(2.5), (2.8) και (2.13). Από αυτές τις εξισώσεις θ' απαλείψουμε το διάνυσμα των τάσεων κλάδων  $\mathbf{v}_{\text{branches}}(t)$  και το διάνυσμα των ρευμάτων κλάδων  $\mathbf{i}_{\text{branches}}(t)$ , ώστε να προκύψει μία εξίσωση ως προς το διάνυσμα τάσεων κόμβων  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(t)$ . Γι' αυτόν τον σκοπό, πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την Εξ.(2.13) επί τον πίνακα  $\mathbf{A}_l$ , οπότε προκύπτει

$$\mathbf{A}_l \mathbf{i}_{\text{branches}}(t) = \mathbf{A}_l \mathbf{I}_s(t) - \mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{V}_s(t) + \mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{v}_{\text{branches}}(t) \quad (2.16)$$

Λόγω της Εξ.(2.5) η Εξ.(2.16) γράφεται

$$\mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{v}_{\text{branches}}(t) = \mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{V}_s(t) - \mathbf{A}_l \mathbf{I}_s(t) \quad (2.17)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ.(2.8), η Εξ.(2.17) γίνεται

$$\mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{A}_l^T \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) = \mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{V}_s(t) - \mathbf{A}_l \mathbf{I}_s(t) \quad (2.18)$$

Τέλος, η Εξ.(2.18) γράφεται με τη γενική μορφή

$$\mathbf{Y}_{\text{nodes}}(\mathbf{D}) \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) = \mathbf{J}_s(t) \quad (2.19)$$

και

$$\mathbf{Y}_{\text{nodes}}(\mathbf{D}) = \mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{A}_l^T \quad (2.20)$$

είναι τετραγωνικός πίνακας τάξης  $(n \times n)$  και λέγεται πίνακας σύνθετων αγωγιμοτήτων κόμβων (node admittance matrix), και

$$\mathbf{J}_s(t) = \mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{V}_s(t) - \mathbf{A}_l \mathbf{I}_s(t) \quad (2.21)$$

είναι ένα διάνυσμα στήλη διαστάσεων  $(n \times 1)$ , που λέγεται διάνυσμα των πηγών ρεύματος κόμβων (node current source vector).

Οι Εξ.(2.19) λέγονται εξισώσεις κόμβων (node equations) και δίνουν το διάνυσμα των τάσεων κόμβων  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(t)$ . Στη συνέχεια, από την Εξ.(2.8) υπολογίζεται το διάνυσμα τάσεων κλάδων  $\mathbf{v}_{\text{branches}}(t)$  και από την Εξ.(2.13) το διάνυσμα των ρευμάτων κλάδων  $\mathbf{i}_{\text{branches}}(t)$ . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η μέθοδος των κόμβων οδηγεί στην πλήρη ανάλυση ενός κυκλώματος, δηλαδή στην εύρεση των τάσεων και των ρευμάτων όλων των κλάδων του κυκλώματος.

Τέλος, για τους πίνακες  $\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D})$  και  $\mathbf{Y}_{\text{nodes}}(\mathbf{D})$  έχουμε να κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις. Ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D})$  είναι διαγώνιος. Αν υπάρχει μαγνητική σύζευξη ανάμεσα στους κλάδους του κυκλώματος, όπως θα δούμε παρακάτω, ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D})$  είναι συμμετρικός, ενώ αν στο κύκλωμα υπάρχουν εξαρτημένες πηγές ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D})$  δεν είναι ούτε διαγώνιος ούτε συμμετρικός. Στην περίπτωση των παθητικών κυκλωμάτων, όπου ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D})$  είναι συμμετρικός, ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{nodes}}(\mathbf{D})$  είναι και αυτός συμμετρικός. Πράγματι, αν

$$\mathbf{Y}_{\text{branches}}^T(\mathbf{D}) = \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \quad (2.22)$$

τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\text{nodes}}^T(\mathbf{D}) &= (\mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}) \mathbf{A}_l^T)^T = (\mathbf{A}_l^T)^T (\mathbf{A}_l \mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}))^T = \mathbf{A}_l (\mathbf{Y}_{\text{branches}}(\mathbf{D}))^T \mathbf{A}_l^T = \\ &= \mathbf{Y}_{\text{nodes}}(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

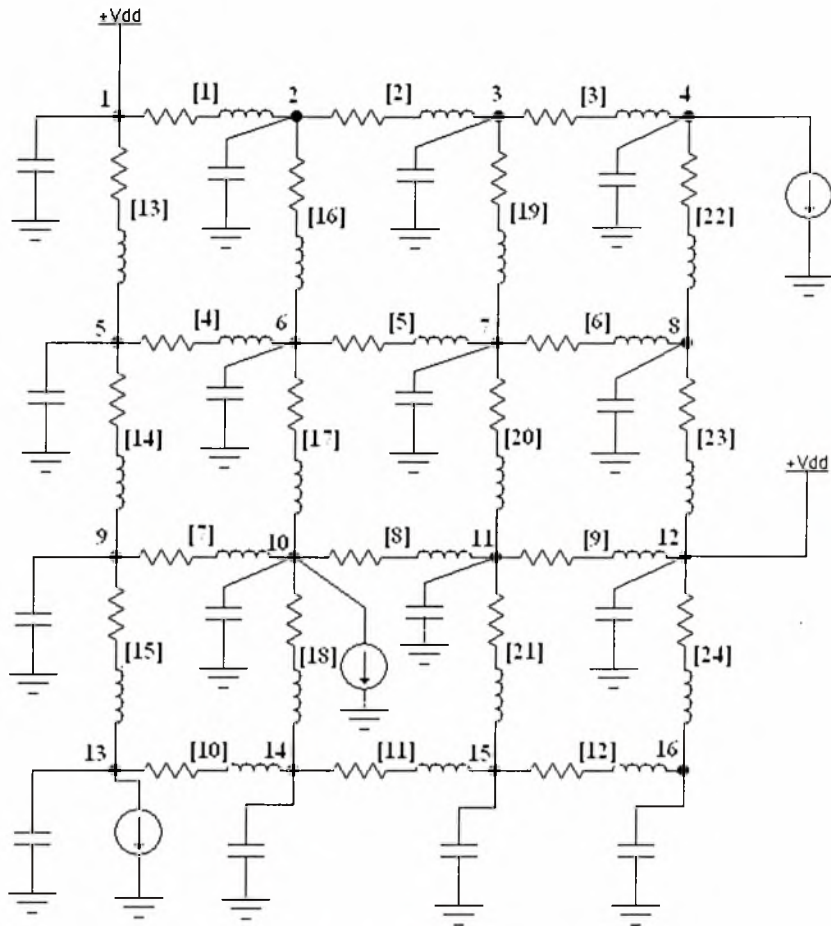
Στην περίπτωση των ενεργών κυκλωμάτων ο πίνακας  $\mathbf{Y}_{\text{nodes}}(\mathbf{D})$  δεν είναι συμμετρικός.

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε παραπάνω είναι γενική και, όπως αναφέραμε, προσφέρεται για την ανάλυση κυκλωμάτων με τη βοήθεια του υπολογιστή. Όμως, η μέθοδος αυτή είναι αρκετά κοπιαστική, αν πρέπει να εφαρμοστεί σε απλά κυκλώματα με το χέρι. Στις περιπτώσεις απλών κυκλωμάτων γράφουμε απευθείας τις εξισώσεις κόμβων, αφού προηγουμένως μετατρέψουμε τις πηγές τάσεις σε πηγές ρεύματος.

## 2.2 Τροποποιημένη μέθοδος των κόμβων (Modified Nodal Analysis - MNA)

Η μέθοδος των κόμβων δίνει στη γενική περίπτωση ένα σύστημα ολοκληρωτικο – διαφορικών εξισώσεων (ή ισοδύναμα ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης). Σημειώνεται ότι εάν οι κυματομορφές των πηγών ρεύματος αντικατασταθούν από στατικές τιμές (οπότε έχουμε ένα DC σύστημα όπου όλοι οι πυκνωτές ανοιχτοκυκλώνονται, τα πηνία βραχυκυκλώνονται και μένουν μόνο οι αντιστάσεις), τότε το σύστημα των ολοκληρωτικο-διαφορικών εξισώσεων ανάγεται σε ένα συνηθισμένο γραμμικό σύστημα και αναγόμεστε στην περίπτωση της στατικής ανάλυσης του δικτύου τροφοδοσίας.

Σε κυκλώματα που περιέχουν μόνο στοιχεία R και C δεν υπάρχουν ολοκληρωτικοί όροι και το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει από την μέθοδο των κόμβων, είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό όμως, δεν ισχύει για κυκλώματα που περιέχουν και στοιχεία L, όπου το αντίστοιχο σύστημα ολοκληρωτικο-διαφορικών εξισώσεων ανάγεται σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Σε αυτή την περίπτωση καταφεύγουμε σε μία τροποποίηση της μεθόδου των κόμβων, η οποία είναι πιο εύκολη στην επίλυση και την επεξεργασία της. Αυτή είναι η τροποποιημένη μέθοδος των κόμβων [19] (στην οποία επιπλέον μεταβλητές είναι τα ρεύματα των κλάδων, εκτός από τις τάσεις των κόμβων), η οποία επιτρέπει τη διαμόρφωση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, το οποίο μπορεί πολύ πιο εύκολα να μεταφερθεί στο διακριτό χρόνο για αριθμητική επίλυση και περαιτέρω ανάλυση συμπεριφοράς.



Εικόνα 2.4: Μοντέλο RLC δικτύου ισχύος 4x4

Θα γίνει μια σύντομη αναφορά στις εξισώσεις των RLC κυκλωμάτων που προκύπτουν χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μέθοδο των κόμβων. Το κύκλωμά μας αποτελείται από  $n$  κόμβους (εκτός του κόμβου αναφοράς - της γείωσης) και  $\beta$  κλάδους (όπου  $n=16$  και  $\beta=24$  για το κύκλωμα της εικόνας 2.4). Οι κόμβοι παριστάνονται με απλή αρίθμηση, ενώ οι κλάδοι με αρίθμηση μέσα σε αγκύλες [].

Ο ελαττωμένος πίνακας συνδέσεων κόμβων  $A_i$  ή πίνακας πρόσπτωσης (incidence matrix) για ένα γραμμικό κύκλωμα ορίζεται, όπως αναφέραμε, με τον παρακάτω τρόπο:

$$A_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{όταν ο κλάδος } j \text{ φεύγει από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{όταν ο κλάδος } j \text{ φθάνει στον κόμβο } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Κάθε σειρά του πίνακα συνδέσεων κόμβων  $\mathbf{A}_{ij}$  περιέχει μόνο δύο μη μηδενικά στοιχεία (μόνο ένα αν ο κλάδος συνδέεται με τη γη). Ο πίνακας αυτός δείχνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι κόμβοι του κυκλώματος μεταξύ τους και οι νόμοι Kirchhoff που το περιγράφουν είναι οι εξής:

$$\text{KCL :} \quad \mathbf{A}_I \mathbf{i}_{\text{branches}}(t) = \mathbf{I}_s(t), \quad \mathbf{i}_{\text{branches}}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \dots \\ i_\beta(t) \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{i}_{\text{branches}}(t)$  είναι τα ρεύματα των κλάδων και  $\mathbf{I}_s(t)$  είναι τα ρεύματα στους κόμβους που συνδέονται με τις ομάδες των πυλών (διεγέρσεις). Το σύστημα των παραπάνω  $n$  εξισώσεων (χωρίς εκείνη που αντιστοιχεί στον κόμβο αναφοράς) είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

$$\text{KVL :} \quad \mathbf{A}_V^T \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) = \mathbf{v}_{\text{branches}}(t), \quad \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{v}_{\text{branches}}(t)$  είναι οι τάσεις των κλάδων και  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(t)$  είναι οι τάσεις στους κόμβους που βάζουμε τις πηγές τάσης. Το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων αποτελείται από  $\beta - n + 1$  εξισώσεις που είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Το δίκτυο διανομής ισχύος (power grid) περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}'(t) = \mathbf{I}_s(t) \quad (2.27)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{G}}$ : πίνακας αγωγιμοτήτων του δικτύου,

$\tilde{\mathbf{C}}$ : πίνακας χωρητικοτήτων και αυτεπαγωγών,

$\mathbf{x}(t)$ : διάνυσμα τάσεων στους κόμβους και ρευμάτων διαμέσου αυτεπαγωγών,

$\mathbf{I}_s(t)$ : διάνυσμα διεγέρσεων από πηγές ρεύματος και από πηγές τάσης.

Πιο συγκεκριμένα

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{nodes} & \mathbf{A}_l \\ -\mathbf{A}_l^T & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{nodes} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{branches} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{nodes}(t) \\ \mathbf{i}_{branches}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

και

$$\mathbf{G}_{nodes} = \mathbf{A}_l \mathbf{G}_{branches} \mathbf{A}_l^T \quad (2.29)$$

Στα παραπάνω, ο πίνακας  $\mathbf{G}_{branches}$  είναι διαγώνιος με μέγεθος  $(\beta+p) \times (\beta+p)$ , ο πίνακας  $\mathbf{C}_{nodes}$  είναι διαγώνιος με μέγεθος  $n \times n$ , ο πίνακας  $\mathbf{A}_l$  έχει (ως γνωστόν) μέγεθος  $n \times (\beta+p)$ , ενώ ο πίνακας  $\mathbf{G}_{nodes}$  έχει προφανώς μέγεθος  $n \times n$ . Επίσης, ο πίνακας  $\mathbf{L}_{branches}$  με μέγεθος  $(\beta+p) \times (\beta+p)$  έχει ως διαγώνια στοιχεία τις αυτεπαγωγές των κλάδων, ενώ τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι οι αμοιβαίες επαγωγές μεταξύ διαφορετικών κλάδων (αν υπάρχουν).

Το δίκτυο διανομής ισχύος με το οποίο θα ασχοληθούμε από δω και κάτω αποτελεί μία ειδική περίπτωση ενός πλέγματος από οριζόντιους και κάθετους κλάδους με στοιχεία R και L και πυκνωτές σε όλους τους κόμβους, διεγέρσεις ρεύματος σε μερικούς κόμβους και πηγές ρεύματος σε μερικούς άλλους. Έτσι, ως παράδειγμα, το δίκτυο της εικόνας 2.4 έχει τους εξής πίνακες  $\mathbf{C}_{nodes}$ ,  $\mathbf{A}_l$ ,  $\mathbf{G}_{nodes}$  και  $\mathbf{L}_{branches}$ :











$$L_{branches} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{pin} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{pin} \end{bmatrix}$$

Σημείωση:

1. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα  $\mathbf{A}_l$ , πρέπει να ορίσουμε μία φορά για το ρεύμα που διαρρέει τους κλάδους. Έστω πως αυτή είναι από αριστερά προς τα δεξιά ( $\rightarrow$ ) και από πάνω προς τα κάτω ( $\downarrow$ ).
2. Στον πίνακα των  $\mathbf{L}_{branches}$ , η μεταβλητή  $L_{pin}$  είναι η αυτεπαγωγή που προστίθεται στους κόμβους στους οποίους υπάρχουν πηγές  $V_{dd}$ .

### 2.3 Διαμόρφωση του συστήματος της MNA ως προς τις πτώσεις τάσης

Η MNA μέθοδος υπολογίζει τις απόλυτες τιμές των τάσεων σε κάθε κόμβο του δικτύου. Εάν όμως θέλουμε τις πτώσεις τάσης (σε σχέση με την τάση τροφοδοσίας) σε κάθε κόμβο του δικτύου ενεργούμε ως εξής:

Το διάνυσμα διεγέρσεων  $\mathbf{I}_s(t)$  γράφεται  $\mathbf{I}_s(t) = -\mathbf{i}_s(t) + \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_{dd}$ , όπου  $\mathbf{i}_s(t)$  το διάνυσμα των πηγών ρεύματος και μόνο, με θετικό πρόσημο σε κάθε κόμβο,  $\mathbf{G}_0$  ένας qxp

πίνακας των αγωγιμοτήτων από τους  $q$  κόμβους του δικτύου προς τις  $p$  τάσεις τροφοδοσίας και  $V_{dd}$  ένα  $p \times 1$  διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες του ίσες με την τάση τροφοδοσίας.

Τώρα στο σύστημα  $\mathbf{G}_{nodes} \mathbf{v}_{nodes}(t) + \mathbf{C}_{nodes} \mathbf{v}'_{nodes}(t) = -\mathbf{i}_s(t) + \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_{dd}$  εάν θέσουμε όλες τις διεγέρσεις των πηγών ρεύματος  $\mathbf{i}_s(t) = 0$  θα έχουμε σε όλους τους κόμβους  $\mathbf{v}_{nodes} = \mathbf{V}_{dd}$  (καθώς σε DC όλοι οι πυκνωτές προς τη γη ανοιχτοκυκλώνονται, ενώ δεν υπάρχει κάποιο άλλο DC μονοπάτι προς τη γη), οπότε προκύπτει  $\mathbf{G}_{nodes} \mathbf{V}_{dd} = \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_{dd}$ .

Εάν αντικαταστήσουμε την τελευταία πίσω στο αρχικό σύστημα έχουμε:

$$\mathbf{G}_{nodes} \mathbf{v}_{nodes}(t) + \mathbf{G}_{nodes} \mathbf{v}'_{nodes}(t) = -\mathbf{i}_s(t) + \mathbf{V}_{dd} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{G}_{nodes} (\mathbf{V}_{dd} - \mathbf{v}_{nodes}(t)) - \mathbf{C}_{nodes} \mathbf{v}'_{nodes}(t) = \mathbf{i}_s(t) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{G}_{nodes} (\mathbf{V}_{dd} - \mathbf{v}_{nodes}(t)) + \mathbf{C}_{nodes} (\mathbf{V}_{dd} - \mathbf{v}_{nodes}(t))' = \mathbf{i}_s(t) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{G}_{nodes} \mathbf{v}_{nodesd}(t) + \mathbf{C}_{nodes} \mathbf{v}'_{nodesd}(t) = \mathbf{i}_s(t) ,$$

όπου  $\mathbf{v}_{nodesd}(t) = \mathbf{V}_{dd} - \mathbf{v}_{nodes}(t)$  το διάνυσμα των πτώσεων τάσης στους κόμβους του δικτύου.

Εφόσον από δω και πέρα θα ασχοληθούμε μόνο με το τελευταίο σύστημα το οποίο έχει διαμορφωθεί ως προς τις πτώσεις τάσης θα αναφέρουμε το διάνυσμα  $\mathbf{i}_s(t)$  των πηγών ρεύματος και μόνο, με θετικό πρόσημο σε κάθε κόμβο ως διάνυσμα διεγέρσεων  $\mathbf{I}_s(t)$ .

### 3. Αριθμητική επίλυση γραμμικών κυκλωμάτων στο διακριτό χρόνο

Επειδή οι κυματομορφές διεγέρσεων (εικόνα 3.1) δεν έχουν γνωστή αναλυτική έκφραση ως συναρτήσεις του χρόνου, αλλά υπολογίζονται μέσω προσομοίωσης του ψηφιακού κυκλώματος που τροφοδοτείται από το δίκτυο (για έναν ή περισσότερους κύκλους ρολογιού), γίνεται αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (ΔΕ) με διακριτοποίηση (discretization) της χρονικής μεταβλητής. Συγκεκριμένα, προσεγγίζουμε τη χρονική παράγωγο ως:

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \quad \text{Forward Euler (FE),}$$

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h)}{h} \quad \text{Backward Euler (BE) ή}$$

$$\mathbf{x}'(t) \approx \mathbf{x}'(t-h) + \frac{2(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h))}{h} \quad \text{Trapezoidal (TR),}$$

όπου στην περίπτωση μας,  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t)$ , και  $h$  είναι ένα σταθερό βήμα το οποίο συμπίπτει με το βήμα δειγματοληψίας των κυματομορφών διεγέρσεων σε μία περίοδο του ρολογιού  $T$ . Προφανώς τότε, κάθε χρονική στιγμή  $t$  θα είναι πολλαπλάσια του βήματος  $h$ , δηλαδή  $t = kh$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ενώ αν  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός βημάτων στα οποία χωρίζεται μία περίοδος ρολογιού  $T$ , τότε  $k = 1, \dots, N$  και  $T = Nh$ .

Σημειώνεται εδώ ότι το τελικό μας αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της επιλογής μεθόδου προσέγγισης.



Εικόνα 3.1 Κυματομορφές διεγέρσεων

### 3.1 Μέθοδος των κόμβων στο διακριτό χρόνο

Θα παρουσιάσουμε μόνο την περίπτωση που γίνεται χρήση της Backward Euler προσέγγισης.

Αντικαθιστούμε το διάνυσμα παραγώγων  $\mathbf{x}'(t)$  με τη διακριτοποιημένη του μορφή  $\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-h)}{h}$  στην Εξ.(2.27), οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left(\tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h}\right)\mathbf{x}(t) = \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h}\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{I}_s(t). \quad (3.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις Εξ. (2.28) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\left(\mathbf{G}_{nodes} + \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h}\right)\mathbf{v}_{nodes}(t) + \mathbf{A}_l \mathbf{i}_{branches}(t) = \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h}\mathbf{v}_{nodes}(t-h) + \mathbf{I}_s(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{\mathbf{L}_{branches}}{h}\mathbf{i}_{branches}(t) = \frac{\mathbf{L}_{branches}}{h}\mathbf{i}_{branches}(t-h) + \mathbf{A}_l^T \mathbf{v}_{nodes}(t) \quad (3.3)$$

Επιλύοντας την Εξ.(3.3) ως προς  $\mathbf{i}_{branches}(t)$  έχουμε:

$$\mathbf{i}_{branches}(t) = \mathbf{i}_{branches}(t-h) + h\mathbf{L}_{branches}^{-1}\mathbf{A}_l^T \mathbf{v}_{nodes}(t) \quad (3.4)$$

και αντικαθιστώντας την Εξ.(3.4) στην Εξ.(3.2) προκύπτει:

$$\left(\mathbf{G}_{nodes} + \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h} + h\mathbf{A}_l\mathbf{L}_{branches}^{-1}\mathbf{A}_l^T\right)\mathbf{v}_{nodes}(t) = \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h}\mathbf{v}_{nodes}(t-h) - \mathbf{A}_l\mathbf{i}_{branches}(t-h) + \mathbf{I}_s(t) \quad (3.5)$$

Αν επιλύσουμε την Εξ.(3.5) ως προς  $\mathbf{v}_{nodes}(t)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{nodes}(t) = & \left(\mathbf{G}_{nodes} + \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h} + h\mathbf{A}_l\mathbf{L}_{branches}^{-1}\mathbf{A}_l^T\right)^{-1} \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h}\mathbf{v}_{nodes}(t-h) - \left(\mathbf{G}_{nodes} + \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h} + \right. \\ & \left. + h\mathbf{A}_l\mathbf{L}_{branches}^{-1}\mathbf{A}_l^T\right)^{-1} \mathbf{A}_l\mathbf{i}_{branches}(t-h) + \left(\mathbf{G}_{nodes} + \frac{\mathbf{C}_{nodes}}{h} + h\mathbf{A}_l\mathbf{L}_{branches}^{-1}\mathbf{A}_l^T\right)^{-1} \mathbf{I}_s(t) \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Αν θέσουμε ως} \quad \mathbf{A} &\equiv \mathbf{hL}_{\text{branches}}^{-1} \mathbf{A}_l^T, \\
\mathbf{B} &\equiv \left( \mathbf{G}_{\text{nodes}} + \frac{\mathbf{C}_{\text{nodes}}}{h} + \mathbf{hA}_l \mathbf{L}_{\text{branches}}^{-1} \mathbf{A}_l^T \right)^{-1}, \\
\mathbf{D} &\equiv \mathbf{B} \frac{\mathbf{C}_{\text{nodes}}}{h} \text{ και} \\
\mathbf{E} &\equiv \mathbf{BA}_l
\end{aligned}$$

οι σχέσεις που μας δίνουν τα  $\mathbf{i}_{\text{branches}}(t)$  και  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(t)$  δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\mathbf{i}_{\text{branches}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) + \mathbf{i}_{\text{branches}}(t-h) \text{ και} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}_{\text{nodes}}(t) = \mathbf{D} \mathbf{v}_{\text{nodes}}(t-h) - \mathbf{E} \mathbf{i}_{\text{branches}}(t-h) + \mathbf{B} \mathbf{I}_s(t) \quad (3.8)$$

Προκύπτει ένα σύστημα δύο αναδρομικών σχέσεων που δίνει το διάνυσμα των πτώσεων τάσης καθώς και των ρευμάτων κλάδων, δεδομένου διανύσματος διεγέρσεων  $\mathbf{I}_s(t)$  στους κόμβους, σε κάθε χρονική στιγμή  $t = kh$ ,  $k = 1, \dots, N$  εντός μιας περιόδου ρολογιού  $T$ . Σε κάθε βήμα,  $t = kh$ , ο υπολογισμός των πτώσεων τάσης  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(t)$  και των ρευμάτων κλάδων  $\mathbf{i}_{\text{branches}}(t)$  εξαρτάται από τα αντίστοιχα διανύσματα που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα  $t = (k-1)h$ , καθώς και από το διάνυσμα των διεγέρσεων  $\mathbf{I}_s(t)$  στο τρέχον βήμα.

Η μέση πτώση τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού περιόδου  $T$ , θα είναι προφανώς

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{nodes}} = \frac{1}{Nh} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_{\text{nodes}}(kh) \quad (3.9)$$

Η μέση πτώση τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού είναι εκείνη που έχει σημασία για την αποτίμηση των επιπτώσεων και εκείνη που θα πρέπει να διατηρηθεί εντός ορίων ασφαλείας (συνήθως 10%) προκειμένου να χαρακτηριστεί το δίκτυο ως ευσταθές (robust).

## 4. Προσδιορισμός των χειρότερων συνθηκών μέσης πτώσης τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού

Το πρόβλημα που θα εξετάσουμε, αφού έγινε ανάλυση του δικτύου διανομής ισχύος για δοσμένη κυματομορφή, είναι ο τρόπος με τον οποίο θα βρεθεί για ένα συγκεκριμένο κύκλωμα ένα σύνολο από χειρότερες (worst case) κυματομορφές οι οποίες μεγιστοποιούν τη μέση πτώση τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού.

### 4.1 Ανάπτυξη των τάσεων τροφοδοσίας ως συνάρτηση των διεγέρσεων ρευμάτων

Παίρνουμε το διακριτοποιημένο αναδρομικό σύστημα των εξισώσεων (3.7) και (3.8) (για  $t = kh$ ,  $k = 1, \dots, N$ ) και αναπτύσσοντας τη διπλή αναδρομή για λίγα βήματα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\text{nodes}}(kh) &= \mathbf{D}\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-1)h) - \mathbf{E}\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-1)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= \mathbf{D}\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-1)h) - \mathbf{E}(\mathbf{A}\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-1)h) + \mathbf{i}_{\text{branches}}((k-2)h)) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-1)h) - \mathbf{E}\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-2)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= (\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A})(\mathbf{D}\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-2)h) - \mathbf{E}\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-2)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s((k-1)h)) - \\
 &\quad - \mathbf{E}\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-2)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= (\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-2)h) - (\mathbf{D}\mathbf{E} - \mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-2)h) + \\
 &\quad + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{I}_s((k-1)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= (\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-2)h) - (\mathbf{D}\mathbf{E} - \mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A}\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-2)h) + \\
 &\quad + \mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h)) + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{I}_s((k-1)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{E}^2\mathbf{A}^2 - \mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-2)h) - (\mathbf{D}\mathbf{E} - \mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h) + \\
 &\quad + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{I}_s((k-1)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
 &= (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{E}^2\mathbf{A}^2 - \mathbf{E}\mathbf{A})(\mathbf{D}\mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-3)h) - \mathbf{E}\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h) +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \mathbf{B}\mathbf{I}_s((k-2)h)) - (\mathbf{D}\mathbf{E} - \mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E}) \mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h) + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A}) \mathbf{I}_s((k-1)h) + \\
& + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
& = (\mathbf{D}^3 - 2\mathbf{D}^2\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{E}^2\mathbf{A}^2 - \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A}) \mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-3)h) - (\mathbf{D}^2\mathbf{E} - 2\mathbf{D}\mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E}^3\mathbf{A}^2 - \\
& - \mathbf{E}^2\mathbf{A}) \mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h) + \mathbf{B}(\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{E}^2\mathbf{A}^2 - \mathbf{E}\mathbf{A}) \mathbf{I}_s((k-2)h) - (\mathbf{D}\mathbf{E} - \\
& - \mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E}) \mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h) + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A}) \mathbf{I}_s((k-1)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \\
& = (\mathbf{D}^3 - 2\mathbf{D}^2\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{E}^2\mathbf{A}^2 - \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A}) \mathbf{v}_{\text{nodes}}((k-3)h) - (\mathbf{D}^2\mathbf{E} - 2\mathbf{D}\mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{E} + \\
& + \mathbf{E}^3\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{E}^2\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{i}_{\text{branches}}((k-3)h) + \mathbf{B}(\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{A} + \mathbf{E}^2\mathbf{A}^2 - \mathbf{E}\mathbf{A})\mathbf{I}_s((k-2)h) + \\
& + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{E}\mathbf{A}) \mathbf{I}_s((k-1)h) + \mathbf{B}\mathbf{I}_s(kh) = \dots
\end{aligned}$$

Προχωρώντας κατ' αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε σε μια σχέση για το διάνυσμα των πτώσεων τάσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(kh)$ ,  $k = 1, \dots, N$  της μορφής:

$$\mathbf{v}_{\text{nodes}}(kh) = \mathbf{M}_1 \mathbf{I}_s(kh) + \mathbf{M}_2 \mathbf{I}_s((k-1)h) + \dots + \mathbf{M}_k \mathbf{I}_s(h) + \mathbf{v}_{\text{nodes}}(0)$$

όπου  $\mathbf{M}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  πίνακες και  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(0)$  γνωστό (αρχική κατάσταση κόμβων, συνήθως  $\mathbf{v}_{\text{nodes}}(0) = 0$ , δηλαδή μηδενική πτώση τάσης στην αρχή κάθε κύκλου και όλοι οι κόμβοι φορτισμένοι σε  $V_{dd}$ ).

## 4.2 Υπολογισμός της μέσης πτώσης τάσης σε ένα κύκλο ρολογιού

Αντίστοιχα για τη μέση πτώση τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού, η σχέση υπολογισμού θα είναι:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{1}{Nh} [ \mathbf{v}(h) + \mathbf{v}(2h) + \dots + \mathbf{v}(Nh) ] = \\
&= \mathbf{M}_1 \mathbf{I}_s(Nh) + \mathbf{M}_2 \mathbf{I}_s((N-1)h) + \dots + \mathbf{M}_N \mathbf{I}_s(h) + \mathbf{v}_{\text{nodes}}(0)
\end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{M}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  πίνακες

Η τελευταία εάν θεωρηθεί ως συνάρτηση των ρευμάτων διεγέρσεων

$$[\mathbf{I}_1(h), \mathbf{I}_1(2h), \dots, \mathbf{I}_1(Nh), \mathbf{I}_2(h), \mathbf{I}_2(2h), \dots, \mathbf{I}_2(Nh), \dots, \mathbf{I}_{sn}(h), \mathbf{I}_{sn}(2h), \dots, \mathbf{I}_{sn}(Nh)]$$

στους κόμβους 1, 2, ...,  $s_n$  όπου συνδέονται και για κάθε χρονική στιγμή  $kh$ ,  $k = 1, \dots, N$ , του συνόλου τιμών των μεταβλητών είναι γραμμική συνάρτηση με θετικούς συντελεστές (γιατί ο  $\mathbf{G}_{\text{nodes}}$  και ο  $\mathbf{L}_{\text{branches}}$  είναι πίνακες συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι), η οποία όπως θα δούμε, μεγιστοποιείται σε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο σημείων στο χώρο  $\mathcal{R}^{(s_n) \times N}$  (όπου  $s_n$  ο αριθμός των πηγών ρεύματος και  $N$  ο αριθμός των σημείων δειγματοληψίας εντός του κύκλου ρολογιού), τα οποία ονομάζονται μεγιστικά σημεία (maximal points).

### 4.3 Προσδιορισμός των σημείων χειρότερης πτώσης τάσης

#### Ορισμός 1:

Ένα σημείο  $\mathbf{I}$  ονομάζεται μεγιστικό (maximal or noninferior) σημείο ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου  $D \subset \mathcal{R}^{(s_n) \times N}$  αν για κάθε  $\mathbf{I}' \in D$  η σχέση  $\mathbf{I}' \geq \mathbf{I}$  σημαίνει πως  $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$ , ή ισοδύναμα αν δεν υπάρχει κάποιο  $\mathbf{I}' \in D$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{I}' \geq \mathbf{I}$  με τουλάχιστον μια συνιστώσα  $1 \leq k \leq n$  για την οποία να ισχύει  $I_k' > I_k$ .

#### Θεώρημα 1:

Έστω πως  $V(\mathbf{I}) = \mathbf{r}^T \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{r} > 0$ , είναι μια γραμμική συνάρτηση του διανύσματος  $\mathbf{I}$  η οποία ορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο  $D \subset \mathcal{R}^{(s_n) \times N}$ . Αν το  $\mathbf{I}^*$  είναι ένα σημείο μεγίστου της συνάρτησης  $V(\mathbf{I})$ , τότε το  $\mathbf{I}^*$  είναι ένα μεγιστικό σημείο του συνόλου  $D$ .

#### Απόδειξη:

Καθώς η  $V(\mathbf{I}) = \mathbf{r}^T \mathbf{I}$  είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο, ένα σημείο μεγίστου  $\mathbf{I}^*$  υπάρχει πάντα σύμφωνα με το θεώρημα Weierstarss [11]. Υποθέτουμε πως το σημείο μεγίστου  $\mathbf{I}^*$  δεν είναι μεγιστικό σημείο του συνόλου  $D$ . Τότε θα έπρεπε να υπάρχει ένα σημείο  $\mathbf{I}' \in D$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{I}' \geq \mathbf{I}^*$  και  $I_k' > I_k$  για τουλάχιστον μια συνιστώσα  $1 \leq k \leq n$ . Αυτό σημαίνει πως  $\mathbf{r}^T \mathbf{I}' \geq \mathbf{r}^T \mathbf{I}^*$  (αφού  $\mathbf{r} > 0$ ) και άρα το  $\mathbf{I}^*$  δεν μπορεί να είναι σημείο μεγίστου της συνάρτησης  $V(\mathbf{I}) = \mathbf{r}^T \mathbf{I}$ , το οποίο μας οδηγεί σε αντίφαση-άτοπο.

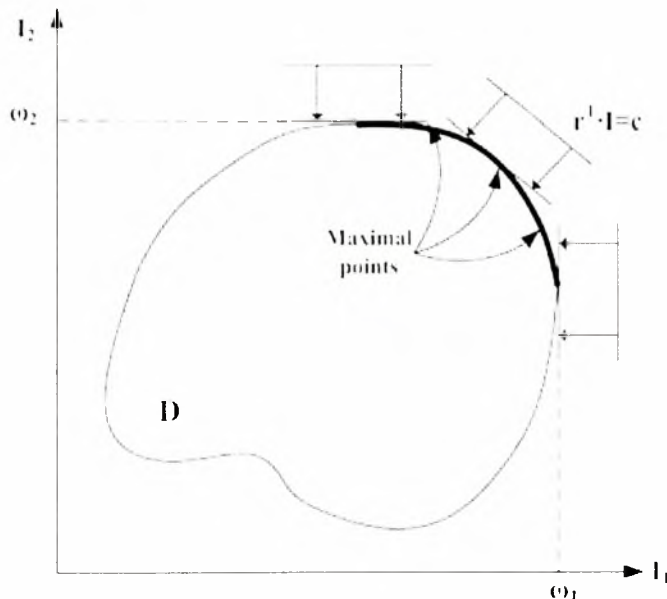
#### Θεώρημα 2:

Έστω πως  $P$  είναι το σύνολο των μεγιστικών σημείων ενός πεπερασμένου συνόλου  $D \subset \mathcal{R}^{(s_n) \times N}$ . Τότε το  $P$  είναι ένα υποσύνολο του συνόρου  $\partial D$ , δηλαδή  $P \subset \partial D$ .

### Απόδειξη:

Προφανώς, καθώς κάθε σημείο  $\mathbf{I} \in D$  το οποίο δεν ανήκει στο σύνορο  $\partial D$  είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου  $D$ , για το οποίο πάντα υπάρχει ένα  $\mathbf{I}' \in D$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{I}' \geq \mathbf{I}$  και  $I_k' > I_k$  για τουλάχιστον μια συνιστώσα  $1 \leq k \leq n$ , κάτι το οποίο σημαίνει πως το  $\mathbf{I}$  δεν μπορεί να είναι ένα μεγιστικό σημείο του συνόλου  $D$ .

Τα παραπάνω θεωρήματα αποδεικνύουν πως η μέγιστη τιμή μιας γραμμικής συνάρτησης  $V_k(\mathbf{I}_s) = \mathbf{r}_k^T \mathbf{I}_s$ ,  $\mathbf{r}_k > 0$  σε ένα πεπερασμένο σύνολο  $D \subset \mathcal{R}^{(sn) \times N}$  θα βρίσκεται σε ένα μεγιστικό σημείο του συνόρου  $\partial D$ . Αυτό φαίνεται στην εικόνα 4.1, όπου η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $\mathbf{r}_k^T \mathbf{I}_s$  είναι η ακριβής τιμή της σταθεράς  $c$  για την οποία το υπερεπίπεδο  $\mathbf{r}_k^T \mathbf{I}_s = c$  στο  $\mathcal{R}^{(sn) \times N}$  απλά αγγίζει το σύνορο του συνόλου  $D$  (ο μεγιστοποιητής  $\mathbf{I}^*$  είναι το κοινό σημείο του υπερεπιπέδου και του συνόρου  $\partial D$ ). Γίνεται επίσης εμφανές, από τα παραπάνω, πως αν  $D_k = [a_k, \omega_k] \subset \mathcal{R}$  είναι το εύρος για κάθε συνιστώσα  $I_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  (δηλαδή η προβολή του συνόλου  $D \subset \mathcal{R}^{(sn) \times N}$  στον  $k$ -άξονα), τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα μεγιστικό σημείο  $\mathbf{I}_s \in D$  για το οποίο  $I_k = \omega_k = \max_{\mathbf{I}_s \in D} I_k$ .



Εικόνα 4.1. Μεγιστικά σημεία ενός πεπερασμένου συνόλου  $D \subset \mathcal{R}^{(sn) \times N}$  και μεγιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης σε αυτό

Τα σημεία, λοιπόν, αυτά του συνόλου  $D$  αποτελούν σημεία – διανύσματα κυματομορφών χειρότερων διεγέρσεων για οποιοδήποτε δίκτυο τροφοδοτεί το συγκεκριμένο ψηφιακό κύκλωμα. Φυσικά το σύνολο  $D$  στην περίπτωση μας

αποτελείται από άπειρα ουσιαστικά σημεία (συγκεκριμένα  $4^r$ , όσα και τα δυνατά δυαδικά διανύσματα εισόδων και οι αντίστοιχοι διαφορετικοί κύκλοι ρολογιού), το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορούμε να τα ελέγξουμε όλα για να εντοπίσουμε τα μεγιστικά σημεία ανάμεσα τους. Έτσι, καταφεύγουμε σε (τυχαία) δειγματοληψία για έναν αριθμό κύκλων ρολογιού.

Από το δείγμα αυτό των κυματομορφών υπολογίζονται οι χειρότερες ανάμεσα τους διεγέρσεις ενός δικτύου τροφοδοσίας ως μεγιστικά σημεία του συνόλου του δείγματος στο χώρο  $\mathcal{R}^{(sn) \times N}$ . Ο τρόπος υπολογισμού των σημείων αυτών γίνεται βάσει του ορισμού 1. Συγκεκριμένα, για να βρούμε τα μεγιστικά σημεία του χώρου  $\Gamma_s$ , που αποτελείται από  $m$  σημεία πρέπει να συγκρίνουμε κάθε σημείο με όλα τα υπόλοιπα (για να καθορίσουμε αν ένα συγκεκριμένο σημείο δεν κυριαρχείται από κάποιο άλλο σε όλες του τις συνιστώσες), κάτι το οποίο οδηγεί σε  $m^2$  συγκρίσεις συνολικά. Ωστόσο, μπορεί να αποδειχθεί [9] πως οι συγκρίσεις που απαιτούνται μπορούν να μειωθούν το πολύ σε  $O(m(\log_2 m)^{n-2})$ , όπου  $n$  είναι η διάσταση του χώρου και των σημείων που τον απαρτίζουν. Κατόπιν, με βάση στατιστικές τεχνικές θεωρίας ακραίων τιμών (Extreme Value Theory - EVT) [1,10] το σύνολο των χειρότερων αυτών σημείων στο δείγμα μετακινείται μέσα στο χώρο  $\mathcal{R}^{(sn) \times N}$  κατά την αναμενόμενη θέση του ως χειρότερο σημείο στο πλήρες σύνολο  $D$  των  $4^r$  σημείων (εικόνα 4.2).

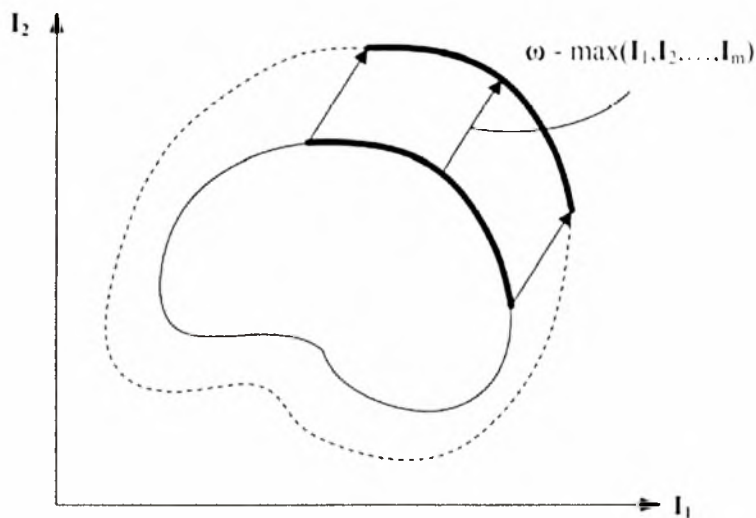
Δοθέντος ενός δείγματος πολλών μεταβλητών  $\Gamma_s$  μπορούμε να υπολογίσουμε το άνω όριο  $\omega_k$  για κάθε άξονα συντεταγμένων  $1 \leq k \leq n$  εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα που έχουμε βρει, σε κάθε ένα δείγμα  $I_s$  μιας μεταβλητής, του  $\Gamma_s$ . Πλέον το σύνολο στοιχείων  $\Gamma_s$  είναι μια εικόνα του τρέχοντος χώρου  $D$  και σχηματίζει ένα σύνορο για τα εξωτερικά στοιχεία του  $\mathcal{R}^{(sn) \times N}$ . Επίσης έχει από μόνο του ένα σύνολο από μεγιστικά σημεία. Το σύνορο του συνόλου  $\Gamma_s$ , που αποτελεί και το δειγματοχώρο μας πια, θα συμπίεστεί στο σύνορο του χώρου  $D$  και συγκεκριμένα, το σύνολο των μεγιστικών σημείων του θα προβληθεί σε κάποιο άλλο χώρο για κάθε ξεχωριστή συντεταγμένη  $1 \leq k \leq n$  (εικόνα 4.2). Μια πολύ καλή προσέγγιση αυτή της προβολής για τα μεγιστικά σημεία σαν σύνολο για κάθε  $1 \leq k \leq n$  θα ήταν το  $\omega_k - \max_{1 \leq i \leq m} I_{k,i}$  όπου

$\max_{1 \leq i \leq m} I_{k,i}$  είναι η μέγιστη τιμή για κάθε σύνολο μιας μεταβλητής  $\Gamma_k$  (δηλαδή το μέγιστο

του χώρου  $\Gamma_s$  για κάθε άξονα συντεταγμένων). Γράφοντας αυτό σε συντομία σε μορφή διανύσματος για όλες τις  $1 \leq k \leq n$  όπως παρακάτω

$$\omega - \max_{1 \leq i \leq m} I_{k,s}$$

προκύπτει ένα διάνυσμα διαφορών με το οποίο μπορούμε να μετακινήσουμε τα μεγιστικά σημεία του συνόλου  $D$  στο  $\mathcal{R}^{(sn) \times n}$ . Τα νέα, μετακινημένα πλέον, μεγιστικά σημεία θα επιλεγούν ως στατικά διανύσματα για τη DC ανάλυση με σκοπό να υπολογιστούν τα σημεία όπου έχουμε την μεγαλύτερη πτώση τάσης. Όπως είναι αναμενόμενο το σύνολο των μεγιστικών σημείων του συνόλου  $D$  θα έχει πολύ διαφορετική δομή και θα περιλαμβάνει πολλά περισσότερα σημεία σε σχέση με το σύνολο των μεγιστικών σημείων του συνόλου  $\Gamma_s$ , όμως το μέγιστο σημείο μιας γραμμικής συνάρτησης δεν επηρεάζεται από τη δομή του συνόλου των μεγιστικών σημείων αλλά εξαρτάται κυρίως από τη θέση του στο  $\mathcal{R}^{(sn) \times n}$ .



Εικόνα 4.2. Δειγματοχώρος ρευμάτων και μετακίνηση των μεγιστικών σημείων του έτσι ώστε να «συναντήσουν» τα μεγιστικά σημεία ολόκληρου του χώρου.

## 5. Πειραματικοί έλεγχοι και αποτελέσματα

Για να επιβεβαιώσουμε πως η πτώση τάσης είναι εντός των επιτρεπτών ορίων (το πολύ μέχρι 10% της τάσης τροφοδοσίας) προσομοιώσαμε τα κυκλώματα c1355\_5000, c2670\_4002 και c7552\_4002. Οι αριθμοί '5000', '4002' και '4002', αντίστοιχα, μας δείχνουν το μέγεθος των blocks στα οποία χωρίζουμε τα ρεύματα που παίρνουμε απ' το αρχείο εισόδου. Τα κυκλώματα έχουν δίκτυο (grid) διαστάσεων  $n_1 \times n_2 - n_n$ , όπου  $n_1$  ο αριθμός των οριζόντιων κόμβων,  $n_2$  ο αριθμός των κάθετων κόμβων και  $n_n$  ο αριθμός των πηγών τροφοδοσίας ( $V_{dd}$ ). Σε κάθε εκτέλεση τα  $n_1$ ,  $n_2$  και  $n_n$  αλλάζουν έτσι ώστε να μελετήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες περιπτώσεις. Είναι τυχαία η επιλογή των κόμβων στους οποίους τοποθετούνται οι πηγές ρευμάτων και οι πηγές τροφοδοσίας. Για κάθε κύκλωμα, η διαδικασία δημιουργίας του δειγματικού χώρου και η μετακίνηση των μεγιστικών σημείων αυτού, είναι ανεξάρτητη από το κύκλωμα (αριθμό κόμβων και πηγών τροφοδοσίας) και αρκεί να γίνει μόνο μια φορά, στην αρχή.

Τα κύρια βήματα αυτής της διαδικασίας συνοψίζονται παρακάτω:

- Αρχικά δημιουργούμε το  $i_{wan}$  που είναι το διάνυσμα που έχει τις κυματομορφές του ρεύματος. Αυτές προκύπτουν από τις τιμές των ρευμάτων ενός συγκεκριμένου αρχείου εισόδου λαμβάνοντας υπόψιν την περίοδο  $T$  και τον αριθμό των διατημάτων στα οποία θέλουμε να την χωρήσουμε.
- Το μέγεθος του δείγματος το οποίο επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε είναι  $nm=3000$  και είναι το ίδιο για όλα τα κυκλώματα. Προκειμένου να γίνει το μέγεθος του δείγματος ίσο με 3000, παραλείπουμε από το κάθε block τα πρώτα  $off$  στοιχεία ( $off = \text{μέγεθος του block} - nm$ ). Από το  $i_{wan}$  προκύπτει το διάνυσμα  $mvarsam$  που έχει τις κυματομορφές μόνο των εισόδων που ανήκουν στο δείγμα.
- Χωρίζουμε το κάθε δείγμα σε  $nm/n=100$  υποδείγματα μεγέθους  $n=30$ . Για κάθε  $1 \leq k \leq sn$  ( $sn$  ο αριθμός των πηγών ρεύματος και είναι ίσος με το πλήθος του μεγέθους του αρχείου εισόδου προς το μέγεθος του block του κυκλώματος που μελετάμε κάθε φορά) κατασκευάζουμε το δείγμα των μέγιστων σημείων από τα  $nm/n$  υποδείγματα.

- Από το  $mvarsam$  που όπως αναφέραμε αποτελεί το δειγματοχώρο, υπολογίζουμε τα μεγιστικά σημεία  $nmal$  (maximal points).
- Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την προβολή των μεγιστικών σημείων στο δειγματοχώρο, έτσι ώστε να τα μετακινήσουμε και να τα προβάλλουμε σε κάποιο άλλο χώρο χρησιμοποιώντας το διάνυσμα μετακίνησης  $mon$ .
- Δημιουργούμε το διάνυσμα  $ialt$  που δείχνει τις τιμές των ρευμάτων στα μεγιστικά σημεία για κάθε χρονική στιγμή  $j$ , όπου  $j=1, \dots, N$  σε έναν κύκλο ρολογιού. Το συγκεκριμένο διάνυσμα θα χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία του διανύσματος  $Is$  των διεγέρσεων.
- Κάνουμε επίλυση του δικτύου (transient ανάλυση) για καθένα από τα μεγιστικά σημεία. Από αυτή δημιουργείται ένα σύνολο κυματομορφών και μεταξύ αυτών υπολογίζεται η μέγιστη πτώση τάσης σε κάθε κόμβο.
- Τέλος, κάνουμε στατιστική ανάλυση ακραίων τιμών πάνω σ' ένα μεγάλο δείγμα (τουλάχιστον 3000 μονάδων) μέσων πτώσης τάσης σε έναν κύκλο ρολογιού.

Παρακάτω φαίνονται οι τιμές των μεγεθών που χρησιμοποιήσαμε καθώς και οι τάξεις μεγέθους τους έτσι ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο σωστά τα αποτελέσματα της προσομοίωσης των κυκλωμάτων.

- $rsh=1e-4$ , αντίσταση οριζόντιων κλάδων (σε  $k\Omega/sq$ )
- $rsv=1e-4$ , αντίσταση κάθετων κλάδων (σε  $k\Omega/sq$ )
- $lsh=2e-7$ , αυτεπαγωγή οριζόντιων κλάδων ανά μονάδα μήκους (σε  $\mu H/um$ )
- $lsv=2e-7$ , αυτεπαγωγή κάθετων κλάδων ανά μονάδα μήκους (σε  $\mu H/um$ )
- $sizv=10000$ , πλάτος του δικτύου ισχύος (σε  $um$ )
- $sizh=10000$ , μήκος του δικτύου ισχύος (σε  $um$ )
- $n1=20$ , αριθμός οριζόντιων κόμβων του δικτύου ισχύος
- $n2=20$ , αριθμός κάθετων κόμβων του δικτύου ισχύος
- με  $(n1 \times n2)$  κόμβους και  $(n1 \times (n2-1) + n2 \times (n1-1))$  κλάδους σε όλο το δίκτυο
- $vn=15$ , αριθμός πηγών τροφοδοσίας του δικτύου ισχύος
- $rpin=1$ , αντίσταση πηγής τροφοδοσίας σε  $k\Omega$
- $lpin=1e-4$ , αυτεπαγωγή πηγής τροφοδοσίας (σε  $\mu H$ )

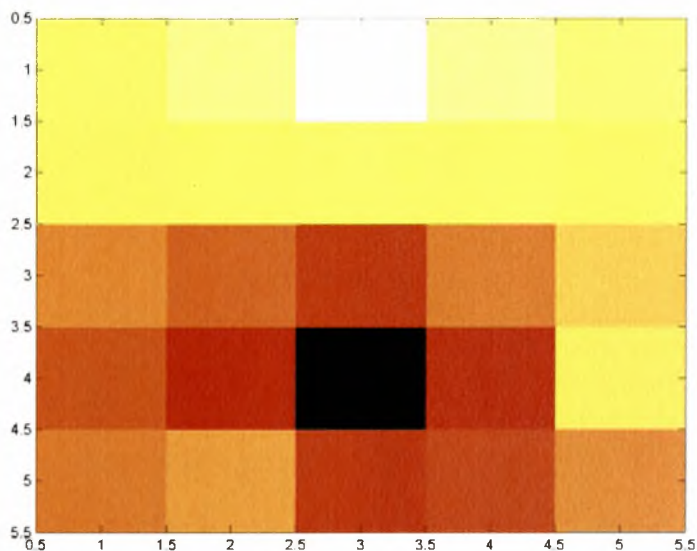
- $c_{prh}=1e-4$ , χωρητικότητα παραλλήλων πλακών στους οριζόντιους κλάδους σε  $pF/\mu m^2$
- $c_{prv}=1e-4$ , χωρητικότητα παραλλήλων πλακών στους κάθετους κλάδους σε  $pF/\mu m^2$
- $c_{ffh}=1e-4$ , πλευρική χωρητικότητα στους οριζόντιους κλάδους σε  $pF/\mu m$
- $c_{ffv}=1e-4$ , πλευρική χωρητικότητα στους κάθετους κλάδους σε  $pF/\mu m$
- $c_{pin}=10$ , χωρητικότητα πηγής τροφοδοσίας  $pF$
- $c_{decoup}=100$ , χωρητικότητα αποσύνδεσης σε  $pF$

Για να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου που παρουσιάσαμε, κάναμε στατιστική ανάλυση ακραίων τιμών πάνω σε ένα μεγάλο δείγμα (τουλάχιστον 3000 μονάδων) μέσω πτώσεων τάσης σε ένα κύκλο ρολογιού και για κάθε ψηφιακό κύκλωμα και δίκτυο τροφοδοσίας και πήραμε τα αποτελέσματα που φαίνονται στην τρίτη στήλη του κάθε πίνακα (Στατιστική εκτίμηση). Η πρώτη στήλη δείχνει το  $isn$ , δηλαδή τους κόμβους στους οποίους έχουμε τοποθετήσει τις πηγές ρεύματος και η δεύτερη το  $V_{ms}$ , δηλαδή τη μέγιστη τιμή της μέσης πτώσης τάσης (σε Volt) στους αντίστοιχους  $isn$  εντός ενός κύκλου ρολογιού. Τα αποτελέσματα για κάθε κύκλωμα φαίνονται παρακάτω:



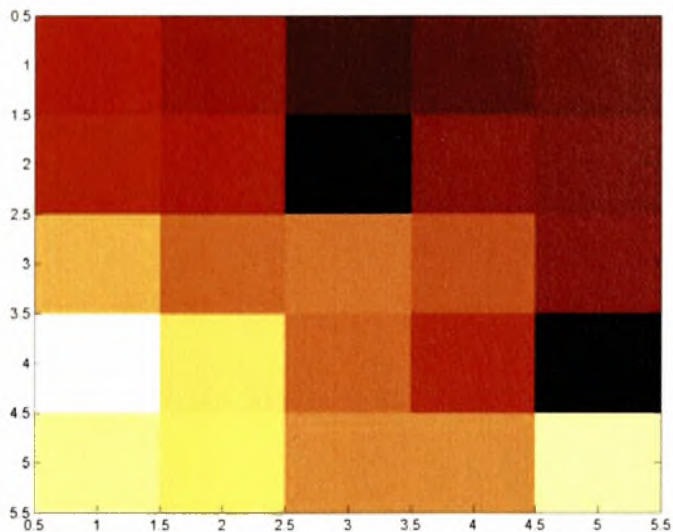
**Grid: 5x5 – 1**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
22	0.0319	0.0265(±0.0063)
18	0.0041	0.0034(±0.0015)
23	0.0258	0.0211(±0.0055)
20	0.0362	0.0298(±0.0069)
3	0.0498	0.0449(±0.0089)



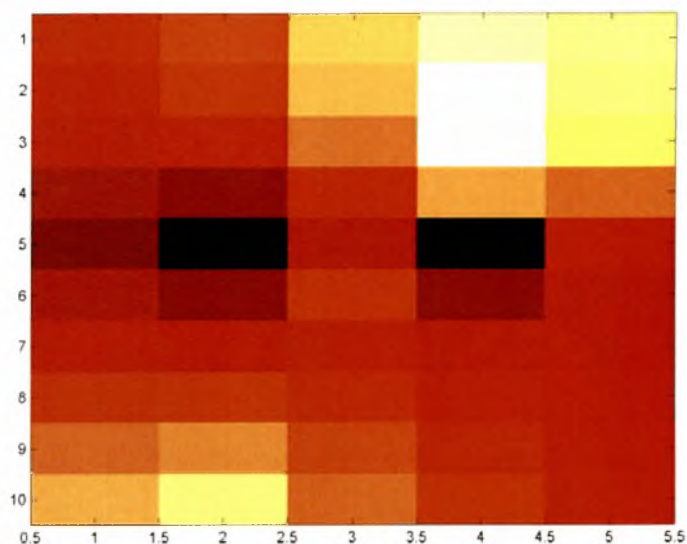
**Grid: 5x5 – 2**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
13	0.0136	0.0120(±0.0017)
8	0.0013	0.0011(±0.0003)
14	0.0125	0.0109(±0.0012)
16	0.0230	0.0210(±0.0027)
25	0.0205	0.0197(±0.0046)



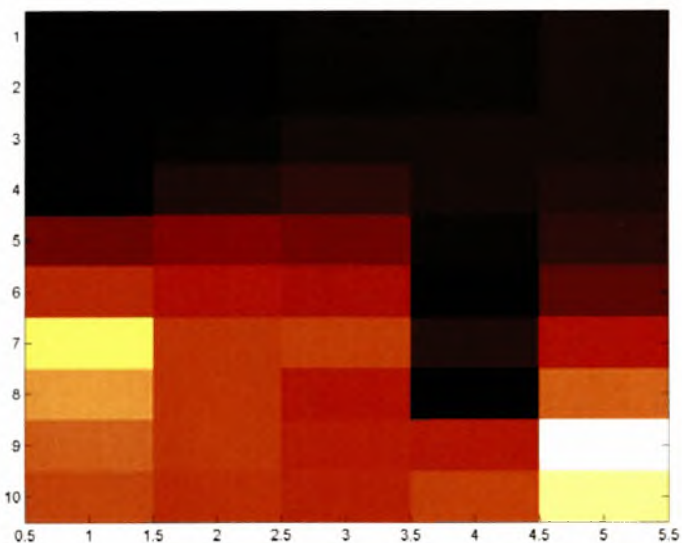
**Grid: 5x10 – 2**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
28	0.0090	0.0080(±0.0009)
9	0.0188	0.0154(±0.0032)
47	0.0156	0.0142(±0.0016)
19	0.0120	0.0097(±0.0023)
14	0.0181	0.0154(±0.0027)



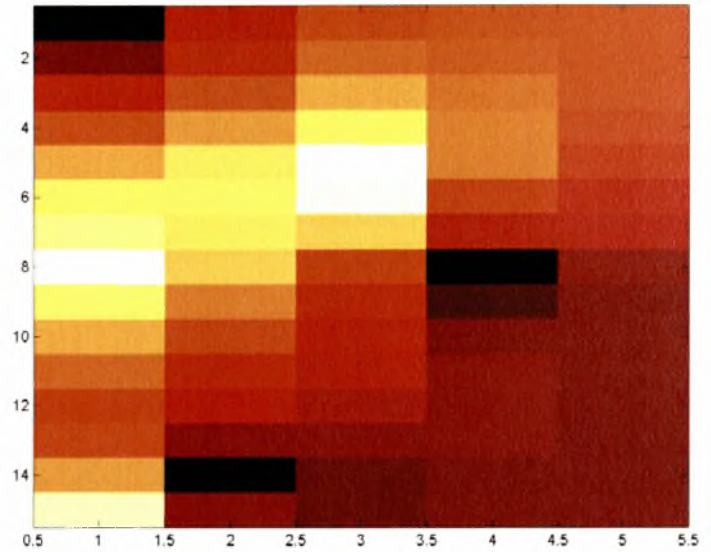
**Grid: 5x10 – 3**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
31	0.0106	0.0100(±0.0012)
39	0.0010	0.0009(±0.0001)
33	0.0072	0.0064(±0.0007)
29	0.0008	0.0007(±0.0001)
45	0.0139	0.0135(±0.0033)



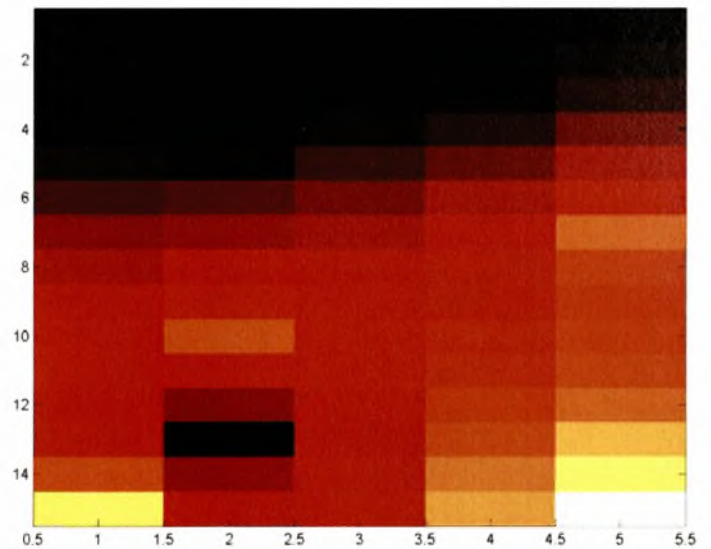
**Grid: 5x15 – 3**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
36	0.0107	0.0098( $\pm 0.0012$ )
28	0.0101	0.0089( $\pm 0.0010$ )
71	0.0096	0.0089( $\pm 0.0010$ )
23	0.0106	0.0095( $\pm 0.0011$ )
67	0.0012	0.0010( $\pm 0.0002$ )



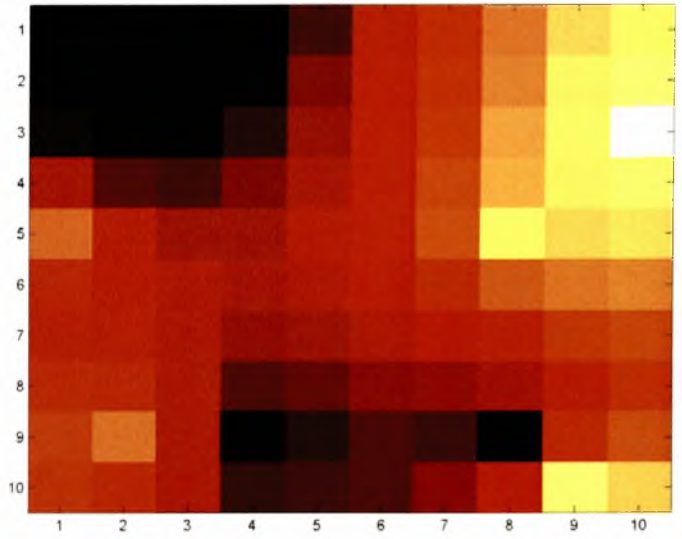
**Grid: 5x15 – 6**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
75	0.0158	0.0151( $\pm 0.0019$ )
71	0.0113	0.0107( $\pm 0.0013$ )
35	0.0088	0.0083( $\pm 0.0009$ )
47	0.0082	0.0075( $\pm 0.0009$ )
14	0.0008	0.0008( $\pm 0.0002$ )



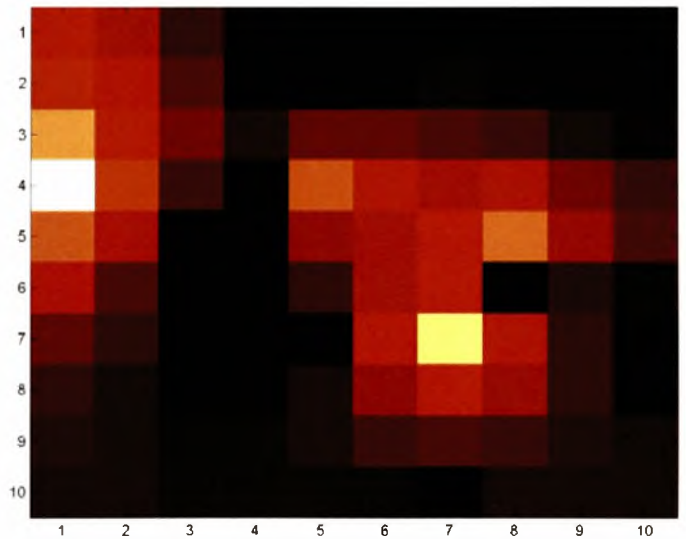
**Grid: 10x10 – 6**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
48	0.0093	0.0079(±0.0009)
82	0.0071	0.0064(±0.0008)
41	0.0068	0.0063(±0.0007)
30	0.0123	0.0114(±0.0015)
99	0.0100	0.0096(±0.0023)



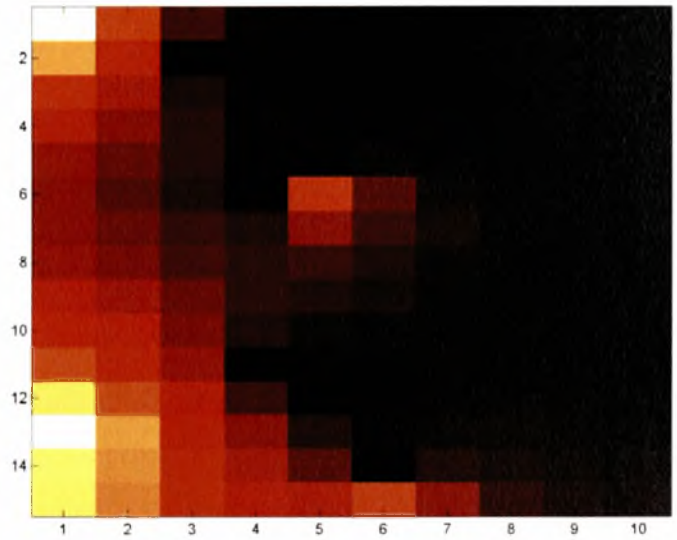
**Grid: 10x10 – 10**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
35	0.0034	0.0031(±0.0004)
48	0.0035	0.0033(±0.0004)
97	0.0005	0.0005(±0.0001)
31	0.0064	0.0063(±0.0009)
67	0.0053	0.0051(±0.0012)



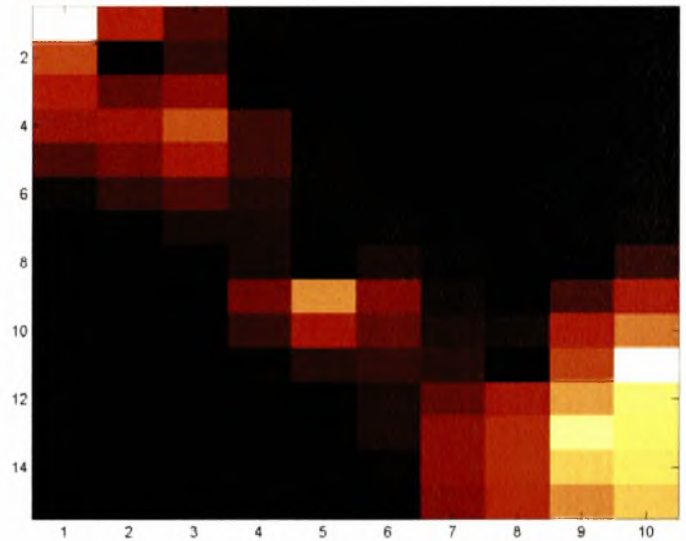
**Grid: 10x15 – 10**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
146	0.0035	0.0034( $\pm 0.0004$ )
1	0.0071	0.0070( $\pm 0.0009$ )
104	0.0005	0.0005( $\pm 0.0001$ )
121	0.0073	0.0072( $\pm 0.0010$ )
55	0.0033	0.0032( $\pm 0.0008$ )



**Grid: 10x15 – 15**

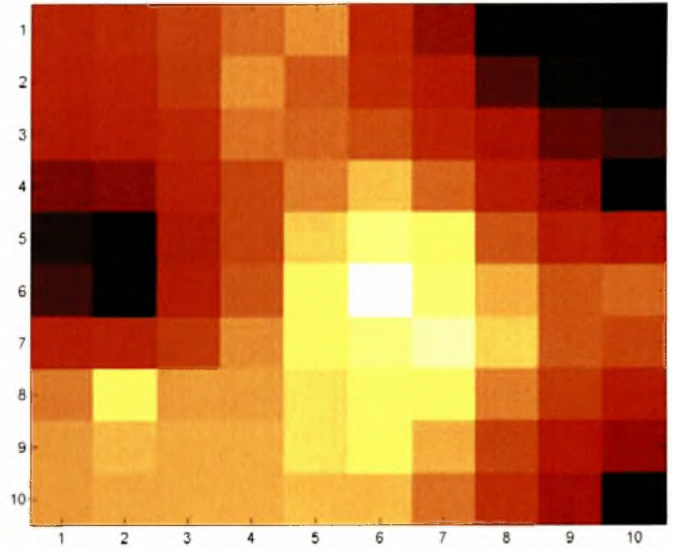
isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
33	0.0030	0.0029( $\pm 0.0004$ )
1	0.0056	0.0055( $\pm 0.0007$ )
129	0.0050	0.0047( $\pm 0.0005$ )
110	0.0058	0.0055( $\pm 0.0007$ )
85	0.0035	0.0034( $\pm 0.0008$ )





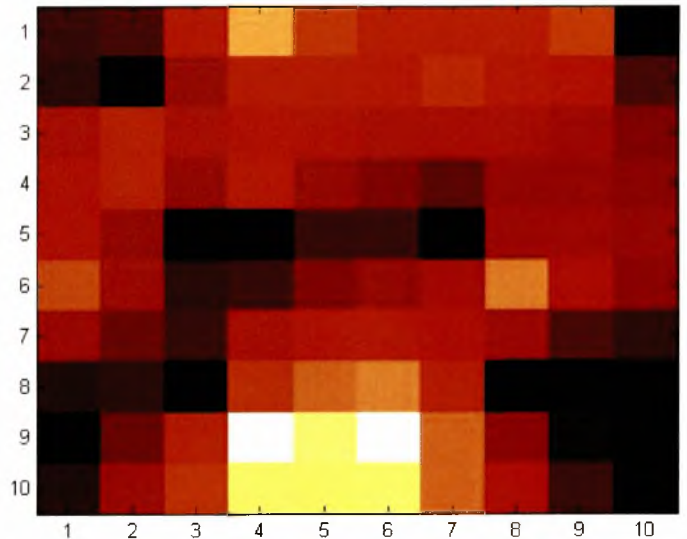
**Grid: 10x10 - 6**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
60	0.0069	0.0054(±0.0007)
5	0.0074	0.0054(±0.0006)
30	0.0025	0.0021(±0.0003)
46	0.0101	0.0073(±0.0010)
86	0.0092	0.0070(±0.0009)
24	0.0070	0.0049(±0.0006)
14	0.0074	0.0049(±0.0006)
47	0.0087	0.0061(±0.0008)
64	0.0074	0.0055(±0.0007)
36	0.0081	0.0055(±0.0007)
72	0.0091	0.0076(±0.0015)
56	0.0122	0.0095(±0.0015)
67	0.0108	0.0083(±0.0010)



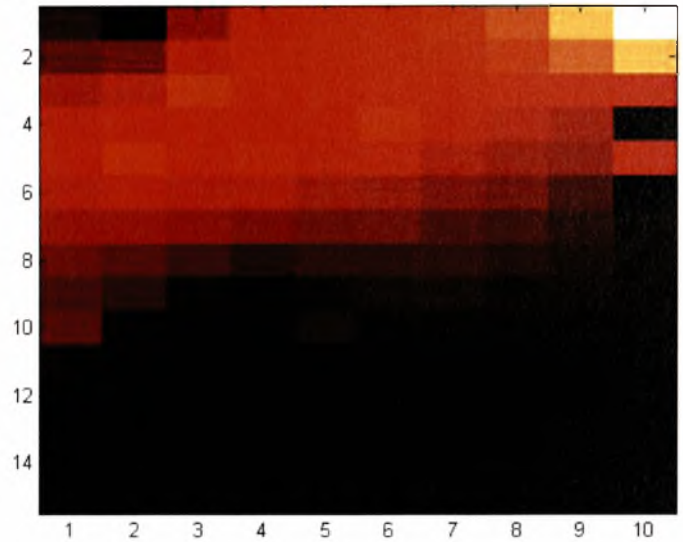
**Grid: 10x10 - 10**

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
22	0.0030	0.0024(±0.0003)
73	0.0006	0.0004(±0.0001)
4	0.0043	0.0037(±0.0005)
34	0.0026	0.0021(±0.0003)
9	0.0033	0.0031(±0.0004)
51	0.0035	0.0030(±0.0005)
32	0.0029	0.0023(±0.0003)
78	0.0004	0.0003(±0.0000)
17	0.0030	0.0024(±0.0003)
77	0.0029	0.0022(±0.0004)
86	0.0067	0.0059(±0.0013)
84	0.0065	0.0059(±0.0013)
58	0.0040	0.0036(±0.0004)



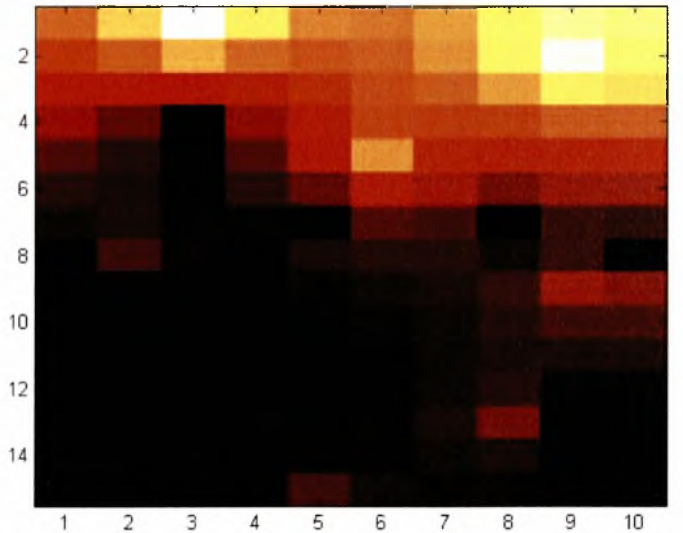
Grid: 10x15 - 10

isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
23	0.0042	0.0032(±0.0004)
40	0.0007	0.0006(±0.0001)
84	0.0004	0.0003(±0.0000)
42	0.0040	0.0032(±0.0004)
133	0.0003	0.0003(±0.0000)
36	0.0041	0.0029(±0.0004)
44	0.0039	0.0026(±0.0003)
14	0.0037	0.0026(±0.0003)
95	0.0011	0.0009(±0.0001)
91	0.0018	0.0014(±0.0002)
10	0.0093	0.0087(±0.0020)
50	0.0034	0.0031(±0.0007)
131	0.0004	0.0004(±0.0001)



Grid: 10x15 - 15

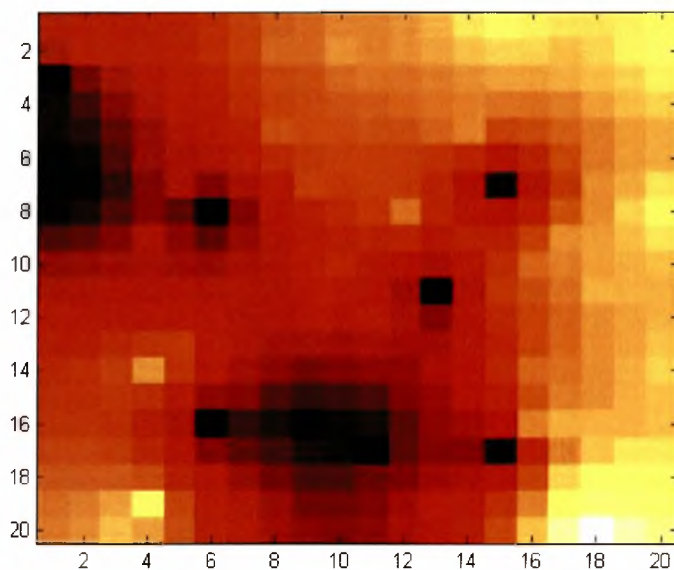
isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
128	0.0019	0.0017(±0.0003)
72	0.0014	0.0012(±0.0002)
89	0.0022	0.0019(±0.0003)
143	0.0003	0.0002(±0.0000)
65	0.0005	0.0004(±0.0000)
90	0.0020	0.0018(±0.0003)
145	0.0015	0.0014(±0.0003)
75	0.0011	0.0009(±0.0001)
124	0.0008	0.0007(±0.0001)
82	0.0002	0.0002(±0.0000)
46	0.0049	0.0043(±0.0009)
3	0.0081	0.0077(±0.0016)
19	0.0077	0.0067(±0.0009)



**Grid: 20x20 - 15**

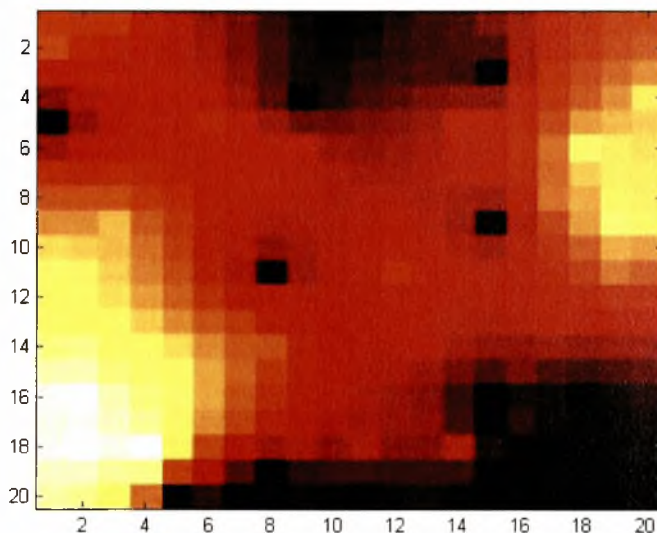
isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
21	0.0027	0.0020(±0.0003)
335	0.0011	0.0007(±0.0001)
357	0.0058	0.0041(±0.0005)
104	0.0025	0.0015(±0.0002)
24	0.0037	0.0023(±0.0003)
383	0.0057	0.0046(±0.0007)
93	0.0049	0.0029(±0.0003)
152	0.0050	0.0034(±0.0006)
22	0.0035	0.0027(±0.0004)
364	0.0062	0.0052(±0.0008)
264	0.0053	0.0041(±0.0006)
316	0.0052	0.0039(±0.0005)
398	0.0087	0.0070(±0.0010)
397	0.0075	0.0057(±0.0008)
332	0.0020	0.0013(±0.0002)
287	0.0022	0.0015(±0.0002)
212	0.0026	0.0015(±0.0002)
218	0.0055	0.0032(±0.0004)
280	0.0058	0.0038(±0.0004)
30	0.0053	0.0034(±0.0005)
265	0.0043	0.0030(±0.0004)
215	0.0043	0.0026(±0.0003)
40	0.0068	0.0045(±0.0005)
174	0.0039	0.0022(±0.0003)
28	0.0049	0.0030(±0.0004)
351	0.0021	0.0015(±0.0002)
373	0.0033	0.0023(±0.0003)
276	0.0049	0.0031(±0.0004)
138	0.0053	0.0034(±0.0004)
190	0.0038	0.0022(±0.0003)
196	0.0049	0.0031(±0.0004)
15	0.0066	0.0042(±0.0005)
164	0.0029	0.0020(±0.0003)
94	0.0051	0.0032(±0.0004)
88	0.0046	0.0028(±0.0004)
317	0.0056	0.0039(±0.0005)
245	0.0043	0.0029(±0.0004)
231	0.0034	0.0022(±0.0003)
129	0.0043	0.0027(±0.0003)

125	0.0028	0.0017(±0.0002)
177	0.0053	0.0032(±0.0004)
160	0.0065	0.0042(±0.0005)





isn	Vms	Στατιστική εκτίμηση
296	0.0018	0.0011( $\pm$ 0.0002)
174	0.0022	0.0014( $\pm$ 0.0002)
121	0.0035	0.0022( $\pm$ 0.0003)
257	0.0028	0.0018( $\pm$ 0.0002)
3	0.0035	0.0024( $\pm$ 0.0004)
172	0.0029	0.0017( $\pm$ 0.0002)
333	0.0021	0.0013( $\pm$ 0.0002)
354	0.0024	0.0020( $\pm$ 0.0005)
302	0.0075	0.0052( $\pm$ 0.0007)
344	0.0072	0.0053( $\pm$ 0.0007)
118	0.0059	0.0048( $\pm$ 0.0007)
179	0.0060	0.0046( $\pm$ 0.0007)
364	0.0063	0.0045( $\pm$ 0.0006)
228	0.0029	0.0018( $\pm$ 0.0003)
262	0.0063	0.0041( $\pm$ 0.0005)
209	0.0021	0.0013( $\pm$ 0.0002)
247	0.0038	0.0023( $\pm$ 0.0003)
107	0.0029	0.0018( $\pm$ 0.0002)
183	0.0050	0.0031( $\pm$ 0.0004)
327	0.0039	0.0024( $\pm$ 0.0003)
81	0.0006	0.0004( $\pm$ 0.0001)
94	0.0027	0.0019( $\pm$ 0.0003)
219	0.0043	0.0030( $\pm$ 0.0004)
109	0.0027	0.0017( $\pm$ 0.0002)
57	0.0034	0.0024( $\pm$ 0.0003)
80	0.0053	0.0039( $\pm$ 0.0006)
349	0.0024	0.0015( $\pm$ 0.0002)
214	0.0029	0.0019( $\pm$ 0.0002)
273	0.0028	0.0018( $\pm$ 0.0002)
157	0.0043	0.0029( $\pm$ 0.0004)
21	0.0039	0.0030( $\pm$ 0.0005)
268	0.0040	0.0026( $\pm$ 0.0003)
351	0.0024	0.0017( $\pm$ 0.0003)
336	0.0013	0.0010( $\pm$ 0.0002)
342	0.0074	0.0051( $\pm$ 0.0007)
285	0.0059	0.0039( $\pm$ 0.0005)
212	0.0034	0.0023( $\pm$ 0.0003)
163	0.0049	0.0032( $\pm$ 0.0004)
86	0.0033	0.0022( $\pm$ 0.0003)
345	0.0054	0.0038( $\pm$ 0.0005)
201	0.0059	0.0039( $\pm$ 0.0005)
305	0.0060	0.0040( $\pm$ 0.0005)



Όπως παρατηρούμε από τους πίνακες που παρατίθενται παραπάνω, τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε με την μέθοδο που περιγράφεται στη συγκεκριμένη εργασία, είναι εντός των ορίων που υπολογίζονται από την στατιστική ανάλυση.

Τελειώνοντας την εργασία, πρέπει να σημειώσουμε πως θα μπορούσαμε να έχουμε υπολογίσει κατευθείαν τη μέγιστη πτώση τάσης για όλα τα δυνατά δυαδικά διανύσματα εισόδων κάνοντας μόνο τη στατιστική ανάλυση. Αυτό όμως δεν αποτελεί καλή λύση σε σχέση με τη μέθοδο που παρουσιάσαμε πιο πάνω για δύο λόγους. Πρώτον, με τη μέθοδο που παρουσιάσαμε, γίνεται επίλυση του δικτύου μόνο στα σημεία που έχουν υπολογιστεί ως μεγιστικά και ο αριθμός τους είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με τον αριθμό του δείγματος που χρησιμοποιείται στη στατιστική ανάλυση. Επιπλέον, κάνοντας στατιστική ανάλυση, είναι πολύ πιθανό να χρειαστεί να σχεδιάσουμε διαφορετικό δίκτυο ισχύος αρκετές φορές και να κάνουμε την ανάλυσή του κάθε φορά (υπολογισμός της μέγιστης πτώσης τάσης), μέχρι να αποδειχτεί πως αυτό είναι ευσταθές και τα αποτελέσματα είναι επιθυμητά, δηλαδή η μέγιστη μέση πτώση τάσης είναι το πολύ 10% της τάσης τροφοδοσίας. Αυτός είναι ο δεύτερος και πιο σημαντικός λόγος, καθώς σε αντίθεση με την στατιστική ανάλυση, τα μεγιστικά σημεία που υπολογίζουμε με τη μέθοδο που παρουσιάζουμε, αφορούν αποκλειστικά το ψηφιακό κύκλωμα το οποίο μελετάμε κάθε φορά και δεν επηρεάζονται από αλλαγές στο δίκτυο τροφοδοσίας. Έτσι ο υπολογισμός τους γίνεται μόνο μία φορά.

## Παράρτημα Α - Κώδικας MATLAB

### A.1. Δημιουργία των κυματομορφών των ρευμάτων του αρχείου εισόδου

```
load input_c7552_4002.txt      %input data file
idc=input_c7552_4002*1e3;      %currents in mA
nms=size(idc,1);

T=1;
N=10;
h=T/N;

t1=(1:N/2)*h;    %first half of period
itri1=2*idc*t1/T;
iwav1=itri1;
t2=(N/2+1:N)*h;    %second half of period
itri2=2*idc*(N*T-T+2*t2-N*t2)/(N*T);
iwav2=itri2;
t=[t1 t2];
iwav=[iwav1 iwav2];
```

### A.2. Υπολογισμός του διανύσματος μετακίνησης και των μεγιστικών σημείων (maximal points)

```
nm=3000;
off=1002;
sn=42;

%number of sampling points (N) in a clock period must
%already be defined
```

```

%create multivariate sample (array of current waveforms
%must already exist)

mvarsam=zeros(nm,N*sn);
for i=1:sn
    mvarsam(:,N*(i-1)+1:N*i)=iwav(off+nm*(i-
1)+1:off+nm*i,:);
end

n=30;      %size of sub-samples for estimation (must be at
           %least 30)
m=nm/n;    %number of sub-samples - or size of sample of
           %maxima - for estimation (must be at least
           %100)

%+-----+%
%| Statistical maxima estimation |%
%+-----+%

xm=zeros(m,1);

eulg=0.5772; %Euler gamma constant

den=1/(1+n*sqrt(pi*log(n))*(erf(sqrt(log(n)))-1));
%denominator of estimate

stmat=zeros(2,N*sn);

for i=1:N*sn
    sam=mvarsam(:,i);
    smax=max(sam);
    for j=1:m
        xm(j)=max(sam(n*(j-1)+1:n*j)); %sample of maxima
    end
end

```

```

    bg=std(xm)*sqrt(6)/pi;
    ag=mean(xm)-bg*eulg;
    wg=ag+bg*den;           %upper endpoint estimate

    stmat(:,i)=[smax;wg];
end

mov=stmat(2,:)-stmat(1,:);   %movement vector for the
                             %sample maximal points

%+-----+%
%| Calculation of worst-case current vectors |%
%+-----+%

%locate maximal points of the sample space
mmal=[];

for i=1:nm
    mmali=mvarsam(i,:);
    comp=(repmat(mmali,nm,1)<mvarsam);
    comp2=(sum(comp,2)==N*sn);
    if sum(comp2)==0
        mmal=[mmal;mmali];
    end
end
end
nmal=size(mmal,1);

%statistically project sample maximal points into the
%whole population

iex=mmal+repmat(mov,nmal,1);

%alternative configuration of array of maximal points
ialt=zeros(nmal,N*sn);

```

```

for j=1:N
    for i=1:sn
        ialt(:,(j-1)*sn+i)=iex(:,N*(i-1)+j);
    end
end
end

```

### **A.3. Αρχικοποίηση μεταβλητών και καθορισμός των κόμβων που τοποθετούνται οι πηγές ρεύματος και οι πηγές τροφοδοσίας**

%number of current sinks (sn) must already be defined

```

rsh=1e-4;
rsv=1e-4;
lsh=2e-7;
lsv=2e-7;
sizv=10000;
sizh=10000;
n1=20;
n2=20;
% -> (n1 x n2) nodes in the grid
pv=sizh/(n1-1);
ph=sizv/(n2-1);
vn=15;
rpin=1;
lpin=1e-4;
cpph=1e-4;
cppv=1e-4;
cffh=1e-4;
cffv=1e-4;
cpin=10;
cdecoup=100;

w=ones(n2+n1,1);           %vector of widths of
                            %horizontal and vertical lines

```

```

area=10000*ones(n1*n2,n1*n2);

nper=randperm(n1*n2);
ivn=nper(:,1:vn);           %node identifiers where voltage
                             %sources are placed

nper=randperm(n1*n2);
isn=nper(:,1:sn);           %node identifiers where sinks
                             %are placed

```

#### **A.4.Σχηματισμός του δικτύου ισχύος και ανάλυσή του**

```

%capacitance matrix

ch=repmat(cpph*pv*w(1:n2,:)+cffh*pv,1,n1-1);
%horizontal branch capacitances

cv=repmat(cppv*ph*w(n2+1:n2+n1,:)+cffv*ph,1,n2-1);
%vertical branch capacitances

C=zeros(n1*n2,n1*n2);

%enumerate horizontal branches
for i=1:n2
    for j=1:n1-1
        ni1=(i-1)*n1+j; %node indices for current branch
        ni2=ni1+1;
        C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*ch(i,j);
        %diagonal entries in capacitance matrix
        C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*ch(i,j);
    end
end

%enumerate vertical branches

```

```

for i=1:n1
    for j=1:n2-1
        ni1=(j-1)*n1+i; %node indices for current branch
        ni2=ni1+n1;
        C(ni1,ni1)=C(ni1,ni1)+(1/2)*cv(i,j);
%diagonal entries in capacitance matrix
        C(ni2,ni2)=C(ni2,ni2)+(1/2)*cv(i,j);
    end
end

gind=(ivn-1)*n1*n2+ivn; %convert voltage node
                        %identifiers to matrix element
                        %serial numbers

C(gind)=C(gind)+cpin+cdecoup*area(gind);
%capacitance in Vdd nodes

%-----%

%inductance matrix

lh=repmat(lsh*pv*(log(150./w(1:n2,:))),1,n1-1);
%horizontal branch inductances

lv=repmat(lsv*ph*(log(150./w(n2+1:n2+n1,:))),1,n2-1);
%vertical branch inductances

lbranch=[reshape(lh',n2*(n1-1),1);reshape(lv',n1*(n2-
1),1);lpin*ones(vn,1)];

L=diag(lbranch);

```



```

%-----%

%adjacency matrix

Al=zeros(n1*n2,n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+vn);

%enumerate horizontal branches
for i=1:n2
    for j=1:n1-1
        ni1=(i-1)*n1+j; %node indices for current branch
        ni2=ni1+1;
        ni3=(i-1)*(n1-1)+j;
%branch index conversion from 2D to 1D
        Al(ni1,ni3)=1;
        Al(ni2,ni3)=-1;
    end
end

%enumerate vertical branches
for i=1:n1
    for j=1:n2-1
        ni1=(j-1)*n1+i; %node indices for current branch
        ni2=ni1+n1;
        ni3=(i-1)*(n2-1)+j+n2*(n1-1);
%branch index conversion from 2D to 1D
        Al(ni1,ni3)=1;
        Al(ni2,ni3)=-1;
    end
end

for i=1:vn
    Al(ivn(i),n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+i)=1;
end

```

```

%-----%

%conductance matrix

gh=repmat(w(1:n2, :)/(rsh*pv), 1, n1-1);
%horizontal branch conductances

gv=repmat(w(n2+1:n2+n1, :)/(rsv*ph), 1, n2-1);
%vertical branch conductances

gbranch=[reshape(gh', n2*(n1-1), 1); reshape(gv', n1*(n2-
1), 1); (1/rpin)*ones(vn, 1)];

G=A1*diag(gbranch)*A1';

%-----%

%transient analysis for maximal waveform excitations

A=h*inv(L)*A1';
B=inv(G+C/h+A1*A);
D=B*(C/h);
E=B*A1;

Is=zeros(n1*n2, nmal); %currents from gates
I1=zeros(n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+vn, nmal);
%currents from branches

V=zeros(n1*n2, nmal);
Vmean=zeros(n1*n2, nmal);

for j=1:N
    Is(isn, :)=ialt(:, sn*(j-1)+1:sn*j)';
    V=D*V-E*I1+B*Is;
end

```

```

        I1=A*V+I1;
        Vmean=Vmean+V;
end
Vmean=Vmean/N;

Vm=max(Vmean,[],2);           %maximum voltage drops (in V)
Vms=Vm(isn,:);                %maximum voltage drops at sinks

for i=1:n2
    for j=1:n1
        Vf(i,j)=Vm((i-1)*n1+j,1);
    end
end

imagesc(Vf);
colormap(hot);

%+-----+%
%| statistically check results |%
%+-----+%

%alternative configuration of array of excitations
ialt_ch=zeros(nm,N*sn);
for j=1:N
    for i=1:sn
        ialt_ch(:,(j-1)*sn+i)=mvarsam(:,N*(i-1)+j);
    end
end

Is_ch=zeros(n1*n2,nm);       %currents from gates
I1_ch=zeros(n1*(n2-1)+n2*(n1-1)+vn,nm);
%currents from branches

V_ch=zeros(n1*n2,nm);
Vmean_ch=zeros(n1*n2,nm);

```

```

for j=1:N
    Is_ch(isn,:)=ialt_ch(:,sn*(j-1)+1:sn*j)';
    V_ch=D*V_ch-E*I1_ch+B*Is_ch;
    I1_ch=A*V_ch+I1_ch;
    Vmean_ch=Vmean_ch+V_ch;
end
Vmean_ch=Vmean_ch(isn,:)/N;

conf=0.9999;    %confidence level
delta=1-conf;
zcrit=sqrt(2)*erfinv(2*(1-delta/2)-1);

xm=zeros(m,1);
stmat_ch=zeros(2,sn);
iner_ch=zeros(2,sn);

for i=1:sn

    sam=Vmean_ch(:,i);
    smax=max(sam);

    for j=1:m
        xm(j)=max(sam(n*(j-1)+1:n*j)); %sample of maxima
    end

    bg=std(xm)*sqrt(6)/pi;
    ag=mean(xm)-bg*eulg;
    wg=ag+bg*den; %upper endpoint estimate

    varg=(1/m)*(6*bg^2/pi^2)*((eulg-
1)^2+pi^2/6+2*den*(1-eulg)+den^2);
    %variance of the estimate

    cig=zcrit*sqrt(varg); %confidence interval

```

```
    stmat_ch(:,i)=[smax;wg];  
    iner_ch(:,i)=[cig;100*cig/wg];  
end
```

```
stmat_ch(2,:) '  
iner_ch(1,:) '
```

## Βιβλιογραφία

- [1] N. Evmorfopoulos, D. Karampatzakis and G. Stamoulis, "*Precise Identification of the Worst-Case Voltage Drop Conditions in Power Grid Verification*", ICCAD'06.
- [2] Haifeng Qian, Sani R. Nassif and Sachin S. Sapatnekar, "*Power Grid Analysis using Random Walks*", IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTER-AIDED DESIGN.
- [3] Νίκος Ι. Μάργαρης, "*Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων*", ΤόμοςΑ.
- [4] Nahi H. Abdul Ghani, Farid N. Najm, "*Handling Inductance in Early Power Grid Verification\**", Department of ECE, ICCAD'06.
- [5] Tsung-Hao Chen and Charlie Chung-Ping Chen, "*Efficient Large-Scale Power Grid Analysis Based on Preconditioned Krylov-Subspace Iterative Methods*", DAC 2001.
- [6] Zhengyong Zhu, Bo Yao, Chung-Kuan Cheng, "*Power Network Analysis Using an Adaptive Algebraic Multigrid Approach*", DAC 2003.
- [7] Jan M.Rabaey, "*Digital Integrated Circuits A Design Perspective (2<sup>nd</sup> Edition)*", 2002.
- [8] N. Evmorfopoulos, G. Stamoulis and J. Avaritsiotis, "*A Monte Carlo approach for maximum power estimation based on extreme value theory*", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol.21, pp. 415-432, 2002.
- [9] H. Kung, F. Luccio, and F. Preparata, "*On finding the maxima of a set of vectors*", *J. ACM*, vol. 22, pp. 469-476, 1975.
- [10] N.E. Evmorfopoulos, D.P. Karampatzakis, and G.I. Stamoulis, "*Voltage-Drop-Constrained Optimization of Power Distribution Network Based on Reliable Maximum Current Estimates*".

- [11] H. Royden, "*Real Analysis*", 3rd ed., Prentice-Hall, 1988.
- [12] *Reducing ground bounce in dc/dc-converter applications*, Jeff Barrow, Analog Devices -- EDN, 7/6/2006, [www.edn.com](http://www.edn.com) Electronics Design, Strategy, News
- [13] *Ground Bounce*, Lattice Semiconductor, [www.latticesemi.com](http://www.latticesemi.com)
- [14] Payam Heydari and Massoud Pedram, "*Ground Bounce in Digital VLSI Circuits*"
- [15] *Simultaneous Switching Noise and Signal Integrity*, Application Note AC263 [www.actel.com](http://www.actel.com)
- [16] *Power grid verification*, White Paper, Cadence [www.cadence.com](http://www.cadence.com)
- [17] David Stringfellow and Kevin Knapp, "*Power Planning for SoCs*", [www.synopsys.com](http://www.synopsys.com)
- [18] David Maliniak, "*Power Integrity Comes Home To Roost At 90 nm*", [electronicdesign.com](http://electronicdesign.com)
- [19] L. Pillage, R. Rohrer and C. Visweswariah, "*Electronic Circuit and System Simulation Methods*", Mc Graw-Hill, 1995.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091628



