

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

*ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ  
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ – ΜΑΖΑΣ ΥΓΡΩΝ ΥΜΕΝΩΝ ΠΛΑΝΩ ΣΕ  
ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ*

**ΜΠΟΥΚΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**

***ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΔΡ. Β. ΜΠΟΝΤΟΖΟΓΛΟΥ***

**ΒΟΛΟΣ , ΙΟΥΛΙΟΣ 2000**



900/900 17A

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000062099



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 2321/1

Ημερ. Εισ.: \_\_\_\_\_

Δωρεά: Συγγραφέα

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ

2000

ΜΠΟ



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	<u>Σελ.</u>
<b>Περιεχόμενα</b>	
<b>Περίληψη</b>	3
<b><u>Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή</u></b>	5
<b><u>Κεφάλαιο 2 : Βιβλιογραφική ανασκόπηση</u></b>	7
<b><u>Κεφάλαιο 3 : Πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας και μάζας σε επίπεδο τοίχωμα</u></b>	
- 3.1 Ορισμός του προβλήματος	17
- 3.2 Υπολογισμός της κατανομής της ταχύτητας	18
- 3.3 Κατάστρωση της εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης	20
- 3.4 Αναλυτική λύση	21
- 3.5 Υπολογιστικές τεχνικές	22
- 3.6 Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης με την αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών Leonard	24
- 3.7 Αδιαστατοποίηση της εξίσωσης	26
- 3.8 Φαινόμενα μεταφοράς μάζας	28
<b><u>Κεφάλαιο 4 : Πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας και μάζας σε κυματοειδές τοίχωμα</u></b>	
- 4.1 Ορισμός του προβλήματος	29
- 4.2 Θεωρητική ανάλυση	30

- 4.3	Επέκταση σε μεγάλα πλάτη τοιχώματος	33
- 4.4	Κατάστρωση της εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης	36
- 4.5	Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων και μετατροπή της εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης	37
- 4.6	Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης με την αριθμητική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών Leonard	38
- 4.7	Υπολογισμός των παραγώγων ( $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, \xi_{xx}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{yy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xy}, \chi_{yx}, \chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xy}, \chi_{yx}$ )	43
- 4.8	Εύρεση των συντεταγμένων $x, y$ των σημείων των κόμβων	45

### **Κεφάλαιο 5 : Αποτελέσματα**

- 5.1	Εισαγωγή	51
- 5.2	Στο επίπεδο τοίχωμα	51
- 5.3	Στο κυματοειδές τοίχωμα	64
- 5.3.1	Για αδιάστατο πλάτος 0.05	67
- 5.3.2	Για αδιάστατο πλάτος 0.1	74
- 5.3.3	Για αδιάστατο πλάτος 0.15	81
- 5.3.4	Για αδιάστατο πλάτος 0.3	88
- 5.3.5	Για αδιάστατο πλάτος 0.5	99
- 5.4	Σύγκριση συνολικής θερμορροής	107

### **Κεφάλαιο 6 : Συμπεράσματα – προτάσεις**

- 6.1	Συμπεράσματα	109
- 6.2	Προτάσεις	111

**Βιβλιογραφία** 112

**Παράρτημα Α** 113

**Παράρτημα Β** 119

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μελετήθηκε υπολογιστικά η μετάδοση θερμότητας σε λεπτό υμένα υγρού πάνω από επίπεδες και περιοδικές επιφάνειες . Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερης σημασίας , καθώς συναντάται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές , όπως στα συστήματα ψύξης με απορρόφηση , στους κάθετους εξατμιστήρες και στη συμπύκνωση με άμεση επαφή ενός καθαρού ατμού σε ένα υπόψυκτο υγρό . Η σύγκριση των ρυθμών μετάδοσης θερμότητας και μάζας σε επίπεδα και περιοδικά τοιχώματα θα αποτελούσε χρήσιμη συνιστώσα στη μεγιστοποίηση της απόδοσης αυτών των συσκευών .

Καταστρώθηκε η εξίσωση συναγωγής - διάχυσης και συντάχθηκε κώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών , για την επίλυση της . Για την περίπτωση κυματοειδούς τοιχώματος , η επίλυση πραγματοποιήθηκε μετατρέποντας το στρεβλωμένο πλέγμα - που δημιουργήθηκε στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων λόγω της μορφής του τοιχώματος και της ελεύθερης επιφάνειας - σε ορθογώνιο πλέγμα με τη χρήση καμπυλόγραμμων συντεταγμένων .

Το πρόγραμμα ολοκληρώθηκε και ελέγχθηκε τόσο με βιβλιογραφικά αποτελέσματα όσο και με την ασυμπτωτική λύση που δίνει ορθά αποτελέσματα για μία μικρή περιοχή στην αρχή του τοιχώματος . Στη συνέχεια εξετάστηκαν για το επίπεδο τοίχωμα τα θερμοκρασιακά πεδία για σταθερή θερμοκρασία εισόδου του ρευστού 0 °C και σταθερή θερμοκρασία τοιχώματος 100 °C . Ερευνήθηκαν ροές με αριθμό Reynolds 10 και 180 , για μεγάλο και μηδενικό (αδιαβατική ελεύθερη επιφάνεια) συντελεστή συναγωγής του αερίου που περιβάλλει τον υγρό υμένα και για μήκος 10 και 60 cm , ώστε να είναι εμφανής η επίδραση της μεταφοράς θερμότητας από το τοίχωμα προς το ρευστό . Επίσης , εξετάστηκε η περίπτωση σταθερής θερμοκρασίας στην επιφάνεια του υγρού υμένα , καθώς η περίπτωση αυτή εμφανίζεται στη συμπύκνωση με άμεση επαφή .

Στο κυματοειδές τοίχωμα , για μήκος κύματος 2 mm , μελετήθηκαν τα αδιάστατα πλάτη ( $\hat{\alpha} = \alpha \frac{2\pi}{L}$  , όπου  $\hat{\alpha}$  το αδιάστατο πλάτος,  $\alpha$  το διαστατικό πλάτος και  $L$  το μήκος κύματος) : 0.05 , 0.1 , 0.15 , 0.3 και 0.5 και οι παρακάτω αντιπροσωπευτικοί αριθμοί Reynolds : 80, 180 , 220 , 300 . Δημιουργήθηκαν διαγράμματα ισοθερμοκρασιακών καμπύλων για όλες τις περιπτώσεις του

κυματοειδούς τοιχώματος με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB , ενώ όλα τα υπόλοιπα διαγράμματα , που παρατίθενται σε αυτή τη διπλωματική εργασία , επιτελέστηκαν με το πρόγραμμα EXCEL .

Η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι ρυθμοί μετάδοσης θερμότητας μειώνονται όταν αντί για επίπεδο τοίχωμα υπάρχει κυματοειδές τοίχωμα . Η μείωση αυτή γίνεται πιο σημαντική όσο αυξάνεται το πλάτος κύματος του τοιχώματος , ενώ η σύγκριση ανάμεσα στους αριθμούς Reynolds οδήγησε στο συμπέρασμα πως σε μικρότερους αριθμούς Reynolds έχουμε μεγαλύτερους ρυθμούς μετάδοσης θερμότητας για το ίδιο πλάτος τοιχώματος .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 :

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ροή ενός λεπτού υγρού υμένας σ' ένα στέρεο τοίχωμα μπορεί συχνά να παρατηρηθεί στην καθημερινή ζωή , όπως όταν το νερό της βροχής ρέει στο τζάμι του παραθύρου . Είναι επίσης ένα αντικείμενο έντονης βιομηχανικής σημασίας σε συσκευές όπου λαμβάνει χώρα μεταφορά θερμότητας και μάζας , τυπικά παραδείγματα των οποίων αποτελούν ο υμένας που ψύχει τα πτερύγια μιας τουρμπίνας και η απορρόφηση αερίου σε στήλες με υγρά τοιχώματα .

Η ικανότητα των υγρών υμένων να μεταφέρουν μεγάλα ποσά θερμότητας ή μάζας με χαμηλή υδραυλική αντίσταση έχει οδηγήσει στην χρήσή τους σε μια ευρεία ποικιλία βιομηχανικών διαδικασιών . Για λειτουργία συσκευής , στην οποία η υγρή φάση κατανέμεται ως υμένας , οι ρυθμοί μάζας που επιτυγχάνονται είναι συχνά καθορισμένοι από την αντίσταση στη μεταφορά που προβάλλει η υγρή φάση : οι κλίνες λεπτής ροής και οι αντιδραστήρες ροής υμένων, οι απορροφητές με υγρά τοιχώματα και οι κάθετοι εξατμιστήρες αποτελούν ορισμένες τέτοιες συσκευές . Ρέοντας σε μια στερεή επιφάνεια , οι υγροί υμένες αναπτύσσουν μια πολύπλοκη δομή επιφανειακών κυμάτων , των οποίων τα πλάτη ποικίλουν από πολύ μικρότερα ως πολύ μεγαλύτερα σε σχέση με το μέσο πάχος . Αυτή η συμπεριφορά , που οφείλεται στη βαρύτητα , παρατηρείται για όλους τους ρυθμούς ροής που χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία , ακόμη και σε απουσία διατμητικών τάσεων στη διεπιφάνεια αερίου – υγρού λόγω της παρακείμενης ροής του αερίου .

Ένα παράδειγμα – το οποίο συμπεριλαμβάνει και μεταφορά μάζας – είναι η διάλυση μικρής ποσότητας ενός διαλυτού αερίου σε ένα ακόρεστο υγρό , που έχει εφαρμογές στο σχεδιασμό εξοπλισμού απορρόφησης για τη χημική βιομηχανία καθώς κι εξοπλισμού για τη μείωση της αέριας μόλυνσης . Επίσης , χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί και η άμεση επαφή στη συμπύκνωση ενός καθαρού ατμού σε ένα υπόψυκτο υγρό , ένα πρόβλημα που συναντάται στη ψύξη ενός πυρηνικού αντιδραστήρα και στο σχεδιασμό εξοπλισμού για αποτελεσματική μετάδοση θερμότητας .

Στα συστήματα ψύξης με απορρόφηση , ο απορροφητής έχει αναγνωριστεί ως η πιο σημαντική και κρίσιμη συνιστώσα . Σε μια ευρέως χρησιμοποιούμενη κατηγορία συσκευών , ένας λεπτός υμένας διαλυτή ρέει ελεύθερα πάνω σε μια δέσμη από οριζόντιους ή κάθετους σωλήνες ή πάνω από ψυχόμενους δίσκους . Οι συσκευές αυτές κατορθώνουν να επιτύχουν υψηλή αποτελεσματικότητα λόγω της λεπτότητας της ροής του διαλύτη , η οποία μεγιστοποιεί το λόγο της επιφάνειας προς τη ροή μάζας και μειώνει το μήκος διεύθυνσης , βοηθώντας με αυτό τον τρόπο τη διαδικασία και της μεταφοράς (απαγωγής) θερμότητας και της μεταφοράς μάζας με την απορρόφηση των ατμών του ψυκτικού στο διαλύτη .

Ροή υγρού υμένα σε ένα κεκλιμένο τοίχωμα με μεταφορά θερμότητας συναντάται επίσης , σε στήλες απορρόφησης με πληρωτικό υλικό , και ειδικά υπό συνθήκες χωρίς πλημμυρισμό , όπου η τάση που προκαλείται από την αντιροή του αερίου μπορεί να αμεληθεί .

Μία εκδοχή αυτού του προβλήματος , που όμως έχει μελετηθεί πολύ λιγότερο, αναμιγνύει ροή κατά μήκος ενός περιοδικού κυματοειδούς – αντί για επίπεδου – τοιχώματος . Το κύριο πρακτικό ενδιαφέρον έγκειται στις προσπάθειες που καταβάλλονται ώστε να αυξηθούν οι ρυθμοί μετάδοσης θερμότητας μέσω τροποποιήσεων του βασικού πεδίου ροής που δημιουργείται από τους κυματισμούς του τοιχώματος . Τυπικά παραδείγματα είναι οι συμπτυγμένες , σε κυματοειδείς πτυχές , επιφάνειες που συναντώνται σε συμπυκνωτές κι εξατμιστήρες και διαρθρωμένα περιβλήματα (αποτελούμενα από συμπτυγμένα , σε κυματοειδείς πτυχές, μεταλλικά ελάσματα) που χρησιμοποιούνται σε στήλες απορρόφησης και δίσκους απόσταξης .

Σε αυτή την εργασία στόχος θα είναι η μελέτη της ροής των λεπτών υμένων πάνω από επίπεδο και περιοδικό κυματοειδές τοίχωμα , ο υπολογισμός των ρυθμών μετάδοσης θερμότητας και μάζας με αριθμητικές μεθόδους , όπως και η προσπάθεια σύγκρισης αυτών των ρυθμών σε επίπεδα και περιοδικά τοιχώματα ώστε να εξαχθούν κάποια χρήσιμα συμπεράσματα για τη μορφή του τοιχώματος που θα μπορούσε να αποτελέσει τη βέλτιστη λύση στις διαδικασίες μεταφοράς θερμότητας και μάζας .



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 :

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Υπάρχει μια καλή βιβλιογραφία διαθέσιμη σχετικά με τη φύση των κυμάτων σε περιπτώσεις ροής υμένων . Έχοντας μελετήσει φωτογραφικά την κίνηση των κυμάτων , οι Stainthorp και Allen (1965) συμπέραναν ότι τα χαρακτηριστικά των κυμάτων εξαρτώνται από το ρυθμό ροής , τις φυσικές ιδιότητες του υγρού , όπως επίσης και από την απόσταση από την κύρια πλευρά . Χρησιμοποιώντας τεχνικές laser , οι Salazar και Marshall (1978) παρατήρησαν ότι τα κύματα είναι πρωταρχικά δύο διαστάσεων για αριθμό Reynolds ,  $Re = 375$  . Η έρευνα των Rotem και Neilson (1969) υποδηλώνει την ύπαρξη ευδιάκριτων περιοχών ροής υμένα , εξαρτώμενων από τον αριθμό Reynolds :

λεπτή ροή χωρίς σχηματισμό μικρών κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια για  $Re < 7$  , λεπτή ροή με σχηματισμό μικρών κυμάτων (κυματοειδής) για  $7 < Re < 250$  και τυρβώδης ροή για  $Re > 250$  .

Έχουν υπάρξει μελέτες για ροή υμένων λόγω βαρύτητας εδώ και μερικές δεκαετίες . Μία από τις πρώτες από αυτές είναι αυτή του Nusselt (1916) , που αναφέρεται σε σταθερή λεπτή ροή σε ένα ομαλό συμπύκνωμα υμένα που ρέει σ' ένα κάθετο τοίχωμα υπό την επίδραση της βαρύτητας . Ο Nusselt κατέληξε στις παρακάτω εκφράσεις για το πάχος του υμένα ( $\delta$ ) , τη μέση ταχύτητα του υγρού ( $u_a$ ) και το μέσο συντελεστή μετάδοσης θερμότητας ( $\lambda$ ) σε σχέση με το  $Q$  , τον ογκομετρικό ρυθμό ροής του υγρού ανά μονάδα υγρής περιμέτρου :

$$\delta = \left[ \frac{3\nu}{g} \right]^{1/3} Q^{1/3} = \left[ \frac{3\nu^2}{g} \right]^{1/3} Re^{1/3} \quad (2.1)$$

$$u_a = \left[ \frac{g}{3\nu} \right]^{1/3} Q^{1/3} = \left[ \frac{\nu g}{3} \right]^{1/3} Re^{1/3} \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{k}{\delta} = \left[ \frac{k^3 g}{3\nu} \right]^{1/3} Q^{-1/3} = \left[ \frac{k^3 g}{3\nu^2} \right]^{1/3} Re^{-1/3} \quad (2.3)$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας ,  $k$  είναι η θερμική αγωγιμότητα του υγρού,  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες και  $Re$  ο αριθμός Reynolds ορισμένος ως  $u_a \delta / \nu$  .

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για στρωτή ροή . Όμως , είναι γνωστό (δες για παράδειγμα , την ανασκόπηση του Fulford (1964)) ότι τα κύματα σχηματίζονται στην επιφάνεια του υμένα , ακόμη και για μικρούς ρυθμούς ροής του υγρού . Οι αναλύσεις της γραμμικής ευστάθειας από διάφορους ερευνητές έχουν δείξει ότι μια στρωτή ροή είναι ασταθής για αριθμούς Reynolds μεγαλύτερους από μια κρίσιμη τιμή . Για την ελεύθερη ροή νερού σε ένα κάθετο τοίχωμα , η κρίσιμη τιμή έχει οριστεί σε περίπου 6 από τον Kapitza (1948 και 1964) , ενώ ο Benjamin (1957) βρήκε ότι η κάθετη ροή υμένα ήταν πάντα ασταθής , παρόλο που η αστάθεια μπορεί να μην εκδηλώνεται φυσικά σε πολύ χαμηλούς αριθμούς Reynolds . Οι αναλύσεις και άλλων μελετητών οδηγούν επίσης στο ίδιο συμπέρασμα . Η αστάθεια του ομαλού υμένα έχει , επίσης , επιβεβαιωθεί πειραματικά από διάφορους ερευνητές , οι οποίοι ανέφεραν την έναρξη κυματοειδούς κίνησης για αριθμούς Reynolds μικρότερους των 10 . Τα σχέδια των κυμάτων σε υμένες που ρέουν κάθετα είναι πολλά και ποικίλα κι έχουν μελετηθεί για αρκετές δεκαετίες (χρήσιμες ανασκοπήσεις είναι αυτές στους Duckler και Bergelin (1952) και Fulford(1964)) . Τα κύρια αποτελέσματα από αυτές τις μελέτες παρατίθενται παρακάτω . Κάτω από τον κρίσιμο αριθμό Reynolds για την έναρξη κυματισμών , η επιφάνεια του υμένα είναι εντελώς ομαλή . Σε αριθμούς Reynolds ελαφρώς υψηλότερους , μικρά , συμμετρικά κύματα κάνουν την εμφάνισή τους . Σε ακόμη υψηλότερους ρυθμούς ροής , τα κανονικά , συμμετρικά κύματα γίνονται ασύμμετρα και απότομα μπροστά κι έχουν μια ελαφρώς επικλινή ουρά . Αυτά τα κυλιόμενα κύματα , στα οποία το πλάτος ποικίλει από δύο ως πέντε φορές το πάχος του υποστρώματος , δεν είναι κανονικά και μπορούν να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους . Φέρνουν ένα μεγάλο λόγο της συνολικής υγρής μάζας και είναι υπεύθυνα για τους ρυθμούς μεταφοράς μάζας και θερμότητας . Είναι δυνατό να υπάρχουν και μικρότερα τριχοειδή κύματα ανάμεσα σε διαδοχικά κυλιόμενα κύματα . Σε υψηλότερους , ακόμη , ρυθμούς ροής το σχήμα του κύματος γίνεται χαστικό και η ροή εμφανίζεται να είναι τυρβώδης . Αυτό συμβαίνει σε ένα αριθμό Reynolds που κυμαίνεται σε μια περιοχή 250 – 400 , παρόλο που έχουν αναφερθεί πολύ υψηλότερες τιμές για αυτή τη μετάβαση . Σε ένα τυπικό υμένα που ρέει κάθετα , η διεπιφάνεια θα είναι ομαλή για μια μικρή απόσταση από την είσοδο , ακολουθούμενη από την έναρξη και τη γρήγορη ανάπτυξη ημιτονοειδών κυμάτων , γεγονός που οδηγεί στο σχηματισμό των ακανόνιστων κυλιόμενων κυμάτων . Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των κυμάτων αυτών έχουν αναφερθεί , μεταξύ άλλων , από τον Duckler και τους συνεργάτες του (1970,1974 και 1975) , και πιο πρόσφατα από τους Karapantsios *et al.* (1989) .

Στις εφαρμογές της ψύξης με απορρόφηση είναι σχεδόν αδύνατο οι τιμές για τον αριθμό Reynolds να υπερβαίνουν το 300 και συνεπώς είναι πιο πιθανές οι περιπτώσεις λεπτής κυματοειδούς ροής . Προηγούμενοι ερευνητές παρατήρησαν τη σημαντική βελτίωση στη μεταφορά μάζας και θερμότητας λόγω της παρουσίας κυματισμών στις περιπτώσεις λεπτής ροής υμένα . Με επαρκώς υψηλό αριθμό Reynolds , η βελτίωση στη μεταφορά μάζας και θερμότητας είναι αποτέλεσμα της ανάμικτης επίδρασης αυτών των κυμάτων . Σε χαμηλούς αριθμούς Reynolds , όμως , όπου οι μικτές επιδράσεις είναι πολύ μικρότερες ή δεν υπάρχουν , περαιτέρω επεξήγηση για τη βελτίωση αυτή είναι απαραίτητη . Υποθέτοντας ότι για χαμηλούς αριθμούς Re τα κύματα θα είναι κανονικά και δύο διαστάσεων , οι Penev *et al.* (1968) έλυσαν την εξίσωση Navier – Stokes για υγρό υμένα που ρέει λόγω της βαρύτητας . Ανακάλυψαν ότι υπό τέτοιες συνθήκες τα υγρά στοιχεία ταξιδεύουν κατά μήκος ανοικτών τροχιών , με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ανανέωση στην επιφάνεια (ανάμιξη) και η βελτίωση στη μεταφορά μάζας να οφείλεται πρωταρχικά στην κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ροής ως αποτέλεσμα της διάχυσης . Αυτή η συνιστώσα , η οποία δεν υπάρχει όταν έχουμε στρωτή ροή , προκαλεί τη μεταφορά του ατμού στη διεπιφάνεια ατμού – υγρού αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο το ρυθμό μεταφοράς και είναι τάξης ανάλογης με το λόγο της διαχυτότητας προς το πάχος του υμένα . Η συνιστώσα της ταχύτητας , η παράλληλη στη ροή εξαιτίας της συναγωγής , είναι της τάξης της μέσης ταχύτητας του υμένα . Ερευνώντας ένα πρόβλημα μεταφοράς μάζας, οι Beschkon και Boyadjiev (1982) χρησιμοποίησαν μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών , με την οποία έλυσαν την εξίσωση διάχυσης του ατμού σε ένα λεπτό υγρό υμένα , ο οποίος ρέει σχηματίζοντας μικρούς κυματισμούς . Χρησιμοποίησαν τιμές , οι οποίες υπολογίστηκαν από τους Penev *et al.* (1968) για το προφίλ των ταχυτήτων (θεωρώντας ότι δεν υπάρχει ανάμιξη) και τα χαρακτηριστικά κυμάτων , και πήραν αποτελέσματα σχετικά με τη μεταφορά μάζας που συμφωνούσαν με τη δική τους πειραματική δουλειά . Ο Ibrahim (1991) πρότεινε ότι για ροές με  $Re < 100$  , ένα μοντέλο με κανονικά χαρακτηριστικά κυμάτων και χωρίς ανάμιξη , θα έπρεπε να εφαρμοστεί ώστε να υπολογιστεί η βελτίωση στη μεταφορά μάζας και θερμότητας .

Υπήρχε η αίσθηση ότι η απόδοση της βελτίωσης των διαδικασιών μεταφοράς μάζας και θερμότητας μόνο στην ύπαρξη της κάθετης συνιστώσας δεν ήταν καλά κατανοητή και φαινόταν να έχει γίνει λίγη δουλειά σε προβλήματα που συνδύαζαν μεταφορά μάζας και θερμότητας σε λεπτές κυματοειδείς ροές με χαμηλούς αριθμούς Re . Τα δεδομένα των Penev *et al.* (1968) , οι οποίοι επινόησαν ένα προφίλ

ταχυτήτων αποκλείοντας την περίπτωση ανάμιξης , χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα από τους Sabir , Suen και Vinnicombe (1994) για τον υπολογισμό των διαδικασιών μεταφοράς μάζας και θερμότητας με απορρόφηση ατμού νερού σε ένα λεπτό κυματοειδή υμένα διαλύματος LiBr που ρέει κάθετα υπό την επίδραση της βαρύτητας. Παρατηρήθηκε από τα αποτελέσματα ότι η βελτίωση είναι μεγαλύτερη στη συγκέντρωση από ό,τι στη θερμότητα , γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με τις δημοσιευμένες έρευνες . Αυτό οφείλεται στο ό,τι η μάζα μεταφέρεται κατά μήκος της διεπιφάνειας αερίου - υγρού όπου τα κύματα έχουν μεγαλύτερη επίδραση , ενώ αντίθετα η θερμότητα κατά μήκος του στερεού τοιχώματος από το διάλυμα προς το ψυχρότερο μέσο , δηλαδή σε περιοχή όπου τα κύματα έχουν τη μικρότερη επίδραση . Οι καμπύλες της συγκέντρωσης αυξάνονται βαθμιαία μέχρι το σημείο ισορροπίας , ενώ οι καμπύλες της θερμοκρασίας αυξάνονται απότομα στην αρχή λόγω της ταχύτατης απορρόφησης και της απελευθέρωσης θερμότητας που προκύπτει και στη συνέχεια βαθμιαία πέφτουν μέχρι το δικό τους σημείο ισορροπίας .

Η μεταφορά μάζας στα υγρά χαρακτηρίζεται από πολύ μεγάλες κλίμακες χρόνου για μοριακή διάχυση . Ο ρυθμός της θερμικής προς τη μοριακή διάχυση στα υγρά είναι γενικά μεγαλύτερος του 100 , θεωρώντας ότι οι ρυθμοί μεταφοράς μάζας αντανακλούν σε διακυμάνσεις στο πεδίο ροής σε μια μεγαλύτερη έκταση από τους ρυθμούς μεταφοράς θερμότητας . Αυτή η εικασία έχει επιβεβαιωθεί από πειραματικές μελέτες (Seban και Faghri (1978) , Henstock και Hanratty (1979)) .

Η πρόβλεψη της αύξησης των ρυθμών μεταφοράς εξαιτίας της κυματοειδούς διεπιφάνειας έχει προκαλέσει πολλές μελέτες πάνω στην υδροδυναμική των υμένων . Από τους πρώτους που κινήθηκαν σε αυτό τον τομέα , τους Kapitza και Kapitza (1949) , οι μελέτες της γραμμικοποιημένης υδροδυναμικής μέσα σε κυματοειδείς υμένες έχουν ακόμη να προβλέψουν την ευρεία ποικιλία των σχημάτων , των μεγεθών και των ταχυτήτων που παρατηρήθηκαν πειραματικά . Αριθμητικές μελέτες του προβλήματος είναι περιορισμένες . Οι Bach και Villadsen (1984) πέτυχαν να προβλέψουν τα προφίλ των ταχυτήτων σε κύματα χρησιμοποιώντας τεχνική πεπερασμένων στοιχείων , αλλά τα αποτελέσματά τους ήταν περιορισμένα για αριθμό

Reynolds μικρότερο του 100 , με τον αριθμό Reynolds ορισμένο ως  $Re = \frac{4Q}{v}$  (2.4) ,

όπου Q είναι ο ρυθμός ροής μάζας ανά μονάδα περιμέτρου και v είναι το κινηματικό ιξώδες . Πρόσφατες αριθμητικές μελέτες της υδροδυναμικής σε μονωμένα και αλληλεπιδρώντα μεγάλα κύματα για αριθμό Reynolds 880 (Wasden και Duckler

(1989)) έχουν δώσει πληροφορίες για τα πεδία ροής που υπάρχουν σε αυτά τα κύματα. Οι υδροδυναμικές μελέτες προβλέπουν περιοχές μεγάλης επιτάχυνσης της ροής στα κύματα όπως και σε ζώνες ανακυκλοφορίας. Ανάλογα είναι και τα αποτελέσματα για μεγάλα κύματα σε χαμηλούς ρυθμούς ροής (Nakaya (1989)).

Παρόλο που μερικά αεροδυναμικά σχήματα και προφίλ ταχυτήτων είναι γνωστά και οι πειραματικές μελέτες έχουν δείξει ότι οι διαδικασίες μεταφοράς είναι στενά συνδεδεμένες με την παρουσία των κυμάτων, ειδικά για κυλιόμενα κύματα, η επίδραση των κυμάτων στη μεταφορά μάζας και θερμότητας δεν έχει συστηματικά ερευνηθεί. Για παράδειγμα, ο Kirkbride (1934) ανέφερε μια αύξηση 25–50% στο συντελεστή μεταφοράς θερμότητας σε σχέση με αυτό που προέβλεπε η θεωρία ομαλού υμένα του Nusselt. Παρόμοια οι Bays και McAdams (1937) ανέφεραν μια αύξηση 20 – 30 % στο συντελεστή μετάδοσης θερμότητας για τη θέρμανση υγρών που ρέουν κάθετα σε πύργους. Πιο πρόσφατα, οι Kuteladze και Gorgonin (1979) και Chun και Seban (1971) παρουσίασαν δεδομένα για δύο περιπτώσεις επιβεβαιώνοντας ότι ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας για κυματοειδή λεπτή ροή είναι υψηλότερος από αυτόν που προβλέφτηκε από την εξίσωση Nusselt. Η περίπτωση για την επίδραση κύματος στη μεταφορά μάζας έχει επίσης ερευνηθεί από διάφορους ερευνητές, συμπεριλαμβανομένων και των Emmert και Pigford (1954) και Stirba και Hurt (1955), οι οποίοι ανέφεραν μια πολλαπλάσια αύξηση (σε σχέση με τη θεωρία ομαλού υμένα) του συντελεστή συναγωγής για κυματοειδείς υμένες. Πιο εμπειριστατωμένη απόδειξη παρουσιάζεται από Brauner και Maron (1982), οι οποίοι μέτρησαν τις τοπικές στιγμιαίες τιμές του πάχους του υμένα και του ρυθμού μεταφοράς μάζας για ροή υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο.

Ενώ η αύξηση του συντελεστή μεταφοράς μάζας και θερμότητας από την επιφάνεια στη διεπιφάνεια είναι επομένως δεδομένη, ο λόγος γιατί και πως αυτό συμβαίνει δεν είναι ξεκάθαρος. Έχει θεωρηθεί ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει εξαιτίας της αύξησης της διεπιφάνειας λόγω του σχηματισμού μικρών κυματισμών, αλλά αυτή η πιθανότητα έχει αποκλειστεί από τα πειραματικά αποτελέσματα των Portalski και Clegg (1971). Άλλοι λόγοι, όπως η αυξημένη αναμιγμένη μάζα από τα κύματα και η λεπτότητα του υμένα εξαιτίας των κυματισμών, έχουν επίσης προταθεί για να αιτιολογηθεί η αύξηση στο συντελεστή μεταφοράς θερμότητας υπό κυματοειδείς συνθήκες ροής. Ο ρόλος της έντονης τύρβης, που εμφανίζεται κάτω από τη διεπιφάνεια, οδηγεί στην ανταλλαγή και αναδιανομή της ενέργειας της ροής του αέρα ανάμεσα στα κύματα – επιδρώντας αμοιβαία μεταξύ τους και με τη μέση ροή –

μέσω μηχανισμών , οι οποίοι είναι λίγο πολύ κατανοητοί και είναι επίσης αντικείμενο έντονης έρευνας .

Πειραματική απόδειξη για το διακριτό ρόλο των διακυμάνσεων λόγω των κυμάτων στη διαδικασία μεταφοράς έχει πρόσφατα δοθεί από τους Wolff και Hanratty (1994) . Χρησιμοποίησαν μια τεχνική laser φθορισμού στη μέτρηση τοπικών , στιγμιαίων ρυθμών απορρόφησης οξυγόνου σε ομορροές αέρα – νερού . Αυτοί μέτρησαν ότι η μεταβολή του χρόνου με ομαλή κλίση συγκέντρωσης στη διεπιφάνεια είναι εκπληκτικά συνεπής , με την άποψη ότι η απορρόφηση εξαρτάται από την τύρβη.

Ο ρόλος των κυμάτων στη μεταφορά στη διεπιφάνεια έχει επίσης ερευνηθεί από ένα συνδυασμό αριθμητικής προσομοίωσης και πειραματικών δεδομένων . Αντιπροσωπευτικές προσπάθειες προσομοίωσης σε αυτή την κατεύθυνση είναι οι αριθμητικές μελέτες των Back και McCready (1988) και Wasden και Duckler (1990) . Οι πρώτοι συγγραφείς προβλέπουν το προφίλ των ταχυτήτων κάτω από τα κύματα μιας σίγουρης πειραματικής πραγματοποίησης χρησιμοποιώντας φασματικές μετρήσεις των κυμάτων και λύσεις της εξίσωσης Orr – Sommerfeld . Οι τελευταίοι υπολόγισαν αριθμητικά και το προφίλ ταχυτήτων για ένα χαρακτηριστικό , πειραματικά καθορισμένο , σχήμα κύματος και ανάλογη φάση ταχύτητας . Πρόσφατα, οι Jayanti και Hewitt (1997) χρησιμοποίησαν ένα κώδικα CFD προκειμένου να παρατηρήσουν την επίδραση της διαταραχής των κυμάτων στη μεταφορά θερμότητας .

Με βάση τα παραπάνω είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί αν η περιοδική διαμόρφωση του τοιχώματος οδηγεί σε διαταραχές της ροής (π.χ. με τη δημιουργία συνιστώσας κάθετης στη μέση ροή) τέτοια ώστε να ενισχύει τους ρυθμούς μεταφοράς θερμότητας και μάζας . Μελέτες της ροής σε κεκλιμένα , περιοδικά τοιχώματα είναι σχετικά περιορισμένες . Ο Wang (1981) παρουσίασε μία ασυμπτωτική ανάλυση για ημιτονοειδές τοίχωμα με μικρού πλάτους διαταραχές . Οι Dassori *et al.* (1984) επέκτειναν την ανάλυση για χωριστή ροή δύο ρευστών διαμέσου ενός ημιτονοειδούς καναλιού . Ο Pozrikidis (1988) χρησιμοποιώντας μία μέθοδο boundary – integral , κατάλληλη για έρπουσα ροή , υπολόγισε αριθμητικά αποτελέσματα για διαταραχές τοιχώματος αυθαίρετου πλάτους και σχήματος .

Οι Shetty και Cerro (1993) απέδειξαν (με μια ασυμπτωτική ανάλυση έγκυρη στο όριο για αμελητέα αδράνεια και τριχοειδείς επιδράσεις) ότι η ροή ιξώδους υγρού σε μια κυματοειδή επιφάνεια ακολουθεί μία τοπική λύση Nusselt με συνεχώς

μεταβαλλόμενη κλίση , όταν το πάχος του υμένα είναι πολύ μικρότερο από το πλάτος και το μήκος κύματος των κυμάτων στο τοίχωμα . Η συμφωνία με τις μετρήσεις , που πήραν οι Zhao και Cerro (1992) , ήταν περισσότερο ή λιγότερο ικανοποιητική ανάλογα με την εγκυρότητα των παραπάνω υποθέσεων .

Όλες οι προαναφερθείσες εργασίες είναι εφαρμόσιμες σε ροή με αριθμό Re ίσο με μηδέν , δηλαδή αμελώντας αδρανειακές επιδράσεις και με κοινό αποτέλεσμα ότι το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας έχει διαφορά φάσης σχετική με το τοίχωμα κι ένα πλάτος το οποίο είναι πάντα μικρότερο ή ίσο με αυτό των διαταραχών του τοιχώματος .

Το συμπληρωματικό πρόβλημα της αδρανειακής επικρατούσας ροής πάνω από ένα κυματοειδές τοίχωμα έχει να κάνει με την ατριβή θεωρία . Θεωρήθηκε οριζόντια , ομοιόμορφη ροή και τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν κυρίως ως δεδομένα για τους υπολογισμούς μεταφοράς ιζήματος στους ποταμούς και τη διασπορά Bragg των επιφανειακών κυμάτων (Kennedy (1963) , Mei (1969) , Miles (1986) , Bontozoglou *et al.* (1991) , Sammarco *et al.* (1994)) .

Η ροή πάνω από κυματοειδή κλίνη έχει μελετηθεί διεξοδικά σε όρους θεωρίας ιδανικών ρευστών (Kennedy (1963)) , υποκινούμενη από φαινόμενα σχηματισμού αμμόλοφου κατά τη μεταφορά ιζήματος σε ποταμούς και διασποράς Bragg της επιφάνειας των κυμάτων σε λιμάνια .

Η γραμμική ατριβής θεωρία προβλέπει ότι για γραμμική ταχύτητα ,  $U$  , ίση με

$$U = (g/k)\tanh(kh) \quad (2.5) ,$$

λαμβάνει χώρα συντονισμός που οδηγεί σε στατικά επιφανειακά κύματα και η διαταραχή του τοιχώματος προκαλεί πλάτος ελεύθερης επιφάνειας θεωρητικά μεγαλύτερο από αυτό του τοιχώματος . Οι όροι  $h$  και  $k$  είναι το πάχος του υμένα και ο κυματαριθμός αντίστοιχα . Δεν είναι ακόμη γνωστό – και είναι πολύ σημαντικό – αν η συμπεριφορά είναι ανάλογη σε ιζώδη ροή λεπτών υμένων και αν επικρατεί σε ροές με κλίση ως προς τον ορίζοντα .

Αδύναμες μη – γραμμικές λύσεις έχουν υπολογιστεί (Mei (1969)) και η γραμμική ευστάθεια τους (Miles (1986)) και η εξέλιξή τους (Sammarco , Mei και Trulsen (1994)) έχουν ερευνηθεί . Αριθμητικά αποτελέσματα για το πλήρες μη – γραμμικό πρόβλημα (Bontozoglou , Kaliadasis και Karabelas (1991)) έχουν δώσει ένδειξη για υποαρμονικούς συντονισμούς , όπου ο επικρατών κυματισμός της επιφάνειας είναι το μισό και το ένα τρίτο του κυματισμού της κλίνης .

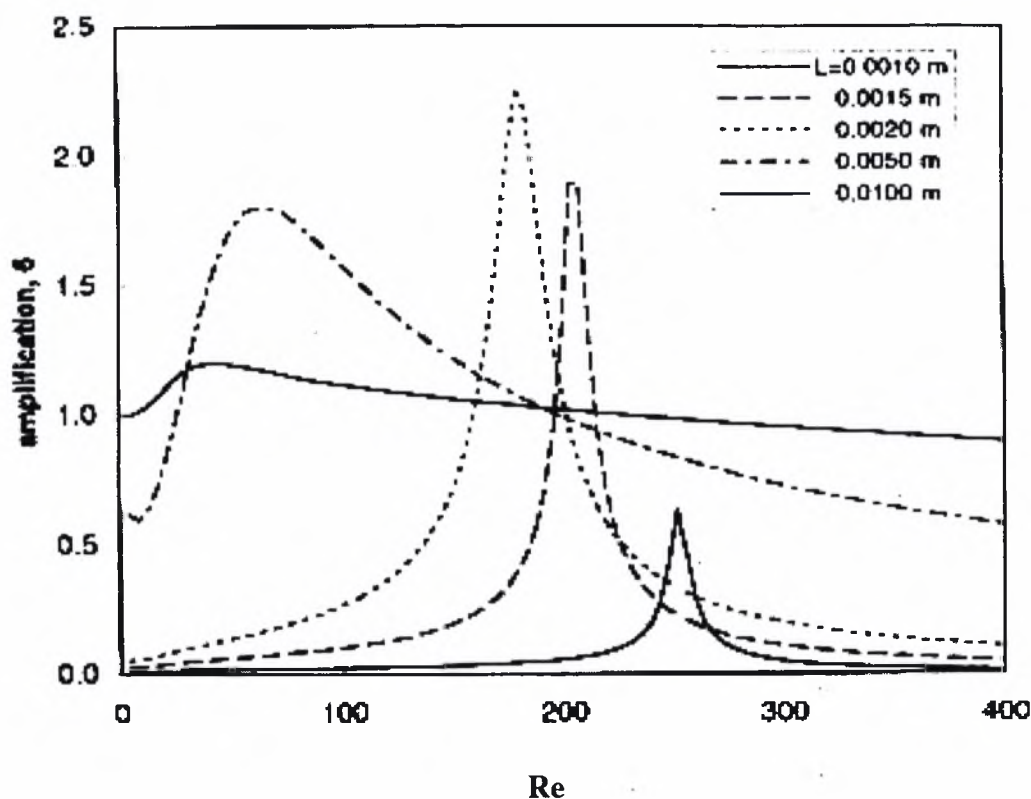
Τα αποτελέσματα της θεωρίας ιδανικών ρευστών δεν είναι εφαρμόσιμα σε λεπτή ροή λεπτών υμένων , καθώς δεν υπολογίζουν την επίδραση της βαρύτητας στην κατεύθυνση της ροής και την επίδραση του ιξώδους , η οποία αναμένεται να είναι σημαντική για μικρή γεωμετρική κλίμακα του προβλήματος ροής υμένα . Όμως, είναι ενδιαφέρον να τονιστεί ότι η αντίληψη του συντονισμού τοιχώματος / ελεύθερης επιφάνειας είναι ένα κοινό χαρακτηριστικό των δύο μοντέλων .

Πέρα από τις ασυμπτωτικές και αριθμητικές αναλύσεις στο όριο της έρπουσας ροής (Wang (1981) , Pozrikidis (1988) , Shetty και Cerro (1993) , Kang και Chen (1995)) , έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες για γραμμική ανάλυση του πεπερασμένου αριθμού  $Re$  για ροή στο όριο των κυματώσεων με σχεδόν μηδενικό πλάτος (Bontozoglou και Paparolymerou (1997)) καθώς και δύο μόνο αριθμητικοί υπολογισμοί πεπερασμένου  $Re$  για ροή κατά μήκος μεγάλων διαταραχών (Trifonov (1998) , Malamataris και Bontozoglou (1999)) . Υπάρχει επίσης κάποια δραστηριότητα για ανάλογο πρόβλημα ροής υμένα μέσα σε κυλινδρικό τοίχωμα με περιοδικές διαμορφώσεις της διαμέτρου (Kouris και Tsamopoulos (1998)) . Πειραματικά αποτελέσματα για τέτοιες ροές είναι διαθέσιμα μόνο για υψηλού ιξώδους υγρά και πολύ χαμηλούς αριθμούς  $Re$  (Zhao και Cerro (1992) , Shetty και Cerro (1993)) .

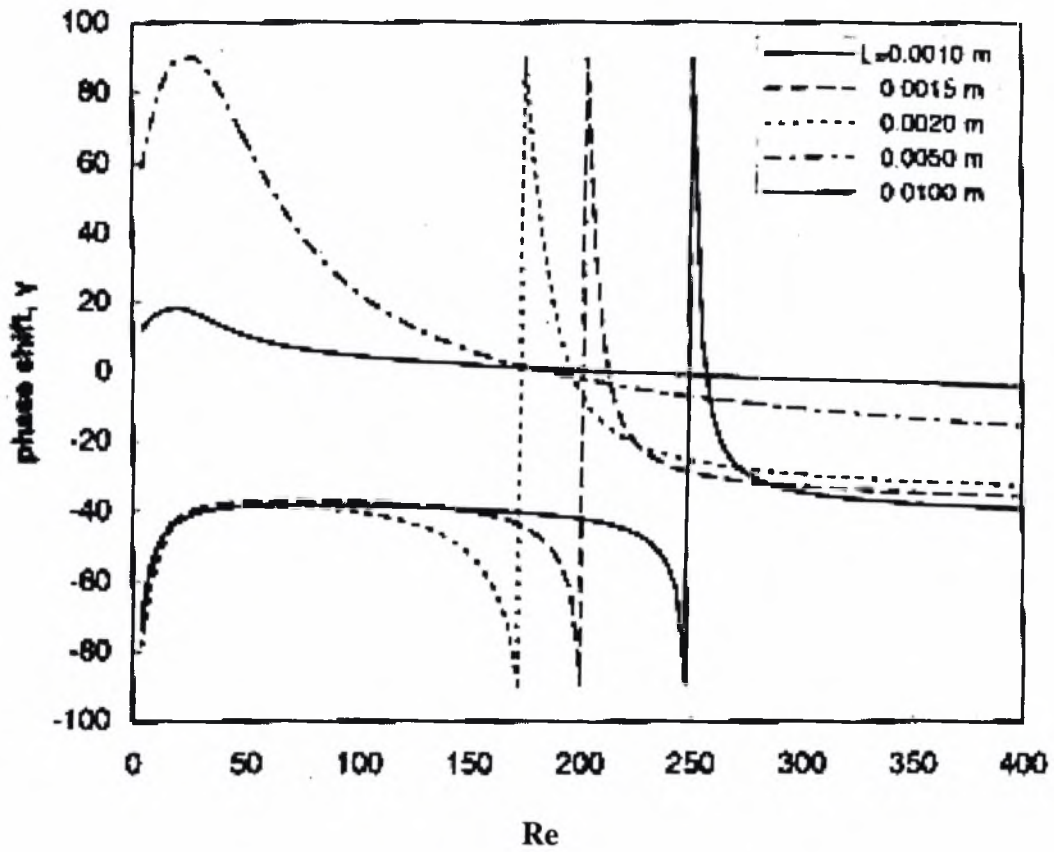
Υπάρχουν μερικές ενδείξεις από τις παραπάνω μελέτες ότι σημαντικές τροποποιήσεις της ροής συμβαίνουν όταν οι αδρανειακές δυνάμεις γίνονται μεγάλες . Οι Bontozoglou και Paparolymerou (1997) έχουν προβλέψει μια ασθενή συντονιστική αλληλεπίδραση που έχει ως αποτέλεσμα στατικά , στην ελεύθερη επιφάνεια , κύματα με πλάτος μεγαλύτερο από δύο φορές τη διαταραχή του τοιχώματος , για κυματώσεις στο τοίχωμα με μήκος κύματος περίπου  $2\text{mm}$  και  $Re$  από  $180 - 200$  . Αυτός ο συντονισμός έχει επιβεβαιωθεί και υπολογιστικά με πεπερασμένα στοιχεία για τη σταθερή , αναπτύσσουσα ροή πάνω από ένα ημιτονοειδές τοίχωμα με μεγάλο πλάτος (Malamataris και Bontozoglou (1999)) . Ο Trifonov (1998) υπολογίζοντας με φασματική μέθοδο για ροή πάνω από ημιτονοειδή τοιχώματα με μήκος  $L = 1.57\text{ mm}$  και ύψος  $H = 0.175\text{ mm}$  , προέβλεψε την ύπαρξη μιας ζώνης ανακυκλοφορίας στο κοίλο του κύματος στο τοίχωμα . Αυτή η ζώνη εξαφανίζεται σε ένα ενδιάμεσο εύρος του αριθμού  $Re$  ( $130 - 290$ ) και στο ίδιο εύρος το ύψος της διαταραχής στην ελεύθερη επιφάνεια υπερβαίνει αυτό του τοιχώματος .



Στη συνέχεια θα γίνει μια προσπάθεια να υπολογιστούν με αριθμητικές μεθόδους αυτοί οι ρυθμοί μετάδοσης θερμότητας και μάζας σε ροές υγρών υμένων πάνω από επίπεδες και περιοδικές επιφάνειες, να συγκριθούν για διαφορετικά πλάτη του συνημιτονοειδούς τοιχώματος όπως και με το επίπεδο τοίχωμα και να ερμηνευθούν φυσικά οι τάσεις, οι οποίες θα προκύψουν από τα αποτελέσματα. Θα θεωρηθεί ως μήκος κύματος του περιοδικού αυτού τοιχώματος τα 2mm, που όπως προαναφέρθηκε αλλά και φαίνεται και από τα διαγράμματα των Σχημάτων 2.1 και 2.2 της εργασίας των Bontozoglou και Paparolymerou (1996) και σύμφωνα και με τη γραμμική θεωρία, οδηγεί στην εντονότερη αλληλεπίδραση μεταξύ του μήκους του τοιχώματος και του πλάτους και της αλλαγής φάσης των κυμάτων.



Σχήμα 2.1 : Το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας ως συνάρτηση του αριθμού  $Re$ , για πέντε διαφορετικά μήκη κύματος.



Σχήμα 2.2 : Η αλλαγή φάσης της ελεύθερης επιφάνειας ως συνάρτηση του αριθμού  $Re$  , για πέντε διαφορετικά μήκη κόματος .

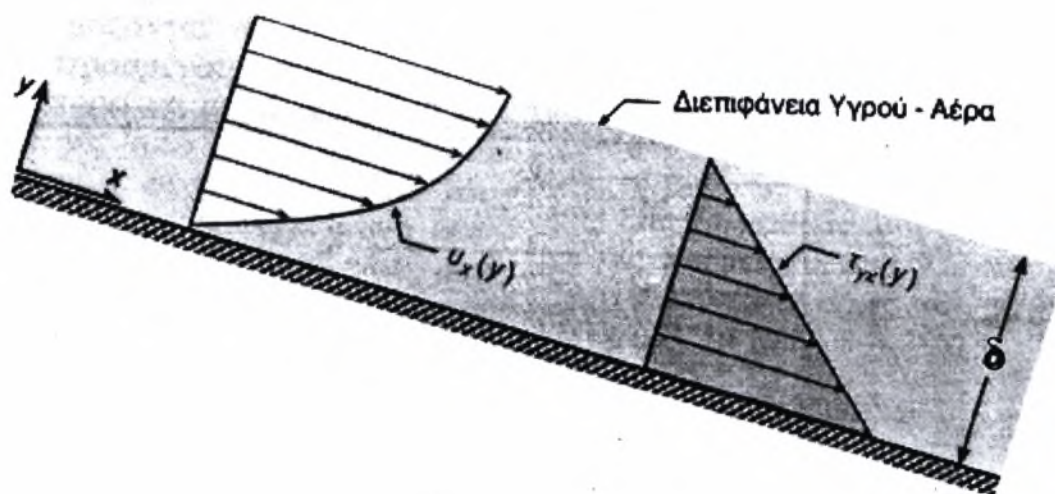
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 :

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ

#### 3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το πρόβλημά μας περιγράφεται ως εξής :

Υπολογισμός του θερμοκρασιακού προφίλ ενός ασυμπίεστου ρευστού , αρχικής θερμοκρασίας  $T_0$  , σταθερού ιξώδους , που ρέει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο τοίχωμα σταθερής θερμοκρασίας  $T_w$  , υπό την επίδραση της βαρύτητας, σχηματίζοντας πάνω σε αυτό ένα στρώμα ομοιόμορφου πάχους  $\delta$  , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1.1 . Η ροή του ρευστού θεωρείται στρωτή και μόνιμη .



Σχήμα 3.1.1 : Ροή υμένα πάνω από κεκλιμένο επίπεδο τοίχωμα .

### 3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Η διαφορική εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι η εξής :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1).$$

Επειδή το ρευστό κινείται μόνο κατά τη διεύθυνση  $x$ , οι συνιστώσες  $u_y$  και  $u_z$  της ταχύτητας είναι μηδέν :

$$u_y = u_z = 0 \quad (3.2)$$

οπότε η εξίσωση συνέχειας λαμβάνει τη μορφή :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (3.3) .$$

Δηλαδή η ταχύτητα  $u_x$  δε μεταβάλλεται κατά τη διεύθυνση  $x$ . Συνεπώς εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $y$  από την επιφάνεια του τοιχώματος (δεδομένου ότι κατά τη διεύθυνση  $z$ , την κάθετη στο επίπεδο  $xy$ , δεν παρατηρείται καμιά μεταβολή των μεταβλητών του πεδίου ροής), δηλαδή :

$$u_x = u_x(y) \quad (3.4) .$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τις συνιστώσες της τύπου Euler διαφορικής εξίσωσης των Navier – Stokes κατά τις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  (αφού το πεδίο ροής είναι δισδιάστατο) :

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (3.5\alpha)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \quad (3.5\beta) .$$

(Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συνιστώσα της επιτάχυνσης της βαρύτητας στον άξονα  $y$  είναι αρνητική και γι' αυτό στην εξίσωση (3.5β) έχει αρνητικό πρόσημο .)

Δεδομένου ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής τους (νευτωνικό ρευστό, ασυμπίεστη ροή, σταθερό ιξώδες) και λόγω των εξισώσεων (3.2), (3.3) και (3.4) οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται στις μορφές :

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (3.6\alpha) ,$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \quad (3.6\beta) .$$

κι επειδή η ροή είναι μόνιμη έχουμε :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (3.7\alpha),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g_y \quad (3.7\beta).$$

Συνεπώς η πίεση  $p$  εξαρτάται και από το  $x$  και από το  $y$  :

$$p = p(x, y) \quad (3.8).$$

Όμως στη διεπιφάνεια υγρού - αέρα η πίεση είναι σταθερή , ίση με την ατμοσφαιρική. Επομένως η πίεση  $p$  δεν εξαρτάται από το  $x$  , δηλαδή :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

με αποτέλεσμα η εξίσωση (3.7α) γράφεται :

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\rho g_x$$

και λόγω της (3.4) :

$$\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = -\rho g_x \quad (3.10).$$

Από την ολοκλήρωση αυτής της εξίσωσης προκύπτει ότι :

$$u_x = -\frac{\rho g_x}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (3.11),$$

όπου  $c_1$  ,  $c_2$  είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης . Για τον υπολογισμό των σταθερών αυτών χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες :

$$u_x(y=0) = 0 \quad (3.12\alpha),$$

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0 \quad (3.12\beta),$$

οπότε προκύπτουν :

$$c_2 = 0 \quad (3.13\alpha),$$

$$c_1 = \frac{\rho g_x \delta}{\mu} \quad (3.13\beta).$$

Συνεπώς :

$$u_x = \frac{\rho g_x \delta^2}{\mu} \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (3.14).$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού είναι παραβολική. Εξετάζοντας την εξίσωση, παρατηρούμε ότι η ταχύτητα  $u_x$  είναι μηδέν στην επιφάνεια του τοιχώματος (στη θέση  $y = 0$ ) και μέγιστη στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού (στη θέση  $y = \delta$ ). Η μέγιστη τιμή  $u_m$  της ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση :

$$u_m = \frac{\rho g_x \delta^2}{2\mu} \quad (3.15).$$

### 3.3 ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ - ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Η εξίσωση συναγωγής – διάχυσης είναι η ακόλουθη :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.16),$$

όπου ο πρώτος όρος αποτελεί τον όρο της συσσώρευσης, οι δύο όροι, που έχουν συντελεστές τις συνιστώσες της ταχύτητας, αποτελούν τους όρους της συναγωγής (convection) και τέλος ο όρος με τη θερμοδιαχυτότητα ως συντελεστή είναι ο όρος της διάχυσης (diffusion). Επειδή η ροή είναι μόνιμη (ο όρος της συσσώρευσης μηδενίζεται) και η συνιστώσα της ταχύτητας ως προς τον άξονα  $y$ ,  $v$ , όπως αναφέρθηκε είναι μηδέν, η εξίσωση (3.16) απλοποιείται :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.17)$$

όπου  $u$  όπως υπολογίζεται από την εξίσωση (3.14) :

$$u = \frac{\rho g_x \delta^2}{\mu} \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

και

$$g_x = g \sin \varphi \quad (3.18).$$

### 3.4 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Η αναλυτική λύση θεωρεί, ότι για υμένα πάχους  $\delta$  και υγρό σταθερών ιδιοτήτων  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\eta$  παραβολική κατανομή της ταχύτητας πολύ κοντά στο τοίχωμα (για μικρό  $y$ , δηλαδή) μπορεί να προσεγγιστεί από τη γραμμική σχέση :

$$u = \frac{\rho g \delta}{\mu} y \quad (3.19).$$

Κάνοντας τις παραδοχές ότι η ροή είναι μόνιμη και ότι ο όρος της συναγωγής ως προς την κατεύθυνση  $y$  καθώς και ο όρος της διάχυσης ως προς την κατεύθυνση  $x$  είναι αμελητέοι, το ισοζύγιο ενέργειας για την αναλυτική λύση μπορεί να γραφεί τελικά ως :

$$y \frac{\partial T}{\partial x} = \left( \frac{\mu k}{\rho^2 C_p g \delta} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.20).$$

Χρησιμοποιώντας τις εξής μεταβλητές :

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt[3]{9\beta x}},$$

θα προκύψει η εξής λύση για την εξίσωση :

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \int_0^\infty \exp(-\eta^3) d\eta \quad (3.21),$$

όπου η συνάρτηση  $\Gamma$  είναι η :

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty w^{k-1} \exp(-w) dw \quad (3.22),$$

που έχει την ιδιότητα  $\Gamma(k+1) = \Gamma(k)$ .

Τέλος, η μέση θερμοροή από το τοίχωμα προς το υγρό, σύμφωνα με την αναλυτική λύση, μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο :

$$q_{avg} = \frac{3}{2} k (T_s - T_0) \frac{(9\beta L)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \quad (3.23).$$

### 3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

Για την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης υπάρχουν πολλές υπολογιστικές τεχνικές . Οι πιο γνωστές είναι αυτές των πεπερασμένων στοιχείων , των πεπερασμένων διαφορών και των πεπερασμένων όγκων . Σ' αυτή την εργασία έχει χρησιμοποιηθεί η τεχνική των πεπερασμένων διαφορών . Με τη σειρά τους οι πεπερασμένες διαφορές χωρίζονται σε διάφορες αριθμητικές μεθόδους που , ανάλογα με την ακρίβεια και την υπολογιστική τους ευστάθεια , προσφέρουν αξιόπιστα ή όχι αποτελέσματα . Ενδεικτικές αριθμητικές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών είναι η μέθοδος των κεντρικών διαφορών ( $2^{ns}$  τάξης) , η πρώτης τάξης upwind μέθοδος (μέθοδος , δηλαδή , η οποία δίνει τη μεγαλύτερη σημασία προς την κατεύθυνση από την οποία έρχεται η ροή ) , η μέθοδος Leonard , η μέθοδος DuFort – Frankel , οι μέθοδοι τύπου Lax-Wendroff κ.α . Αφού αναφερόμαστε σε ροή μόνιμη , δηλαδή χωρίς την ανάμιξη του παράγοντα του χρόνου, προτιμήθηκε η μέθοδος Leonard . Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί , upwind μέθοδος  $3^{ns}$  τάξης ακρίβειας στην πρώτη παράγωγο της θερμοκρασίας ως προς x και κεντρικές διαφορές  $2^{ns}$  τάξης στις δεύτερες παραγώγους της θερμοκρασίας ως προς x και y . Η μέθοδος Leonard εφαρμόζεται στην εξίσωση συναγωγής – διάχυσης όπως φαίνεται παρακάτω :

$$u \frac{2T_{i+1,j} + 3T_{i,j} - 6T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{6\Delta x} = \alpha \left[ \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] \quad (3.24)$$

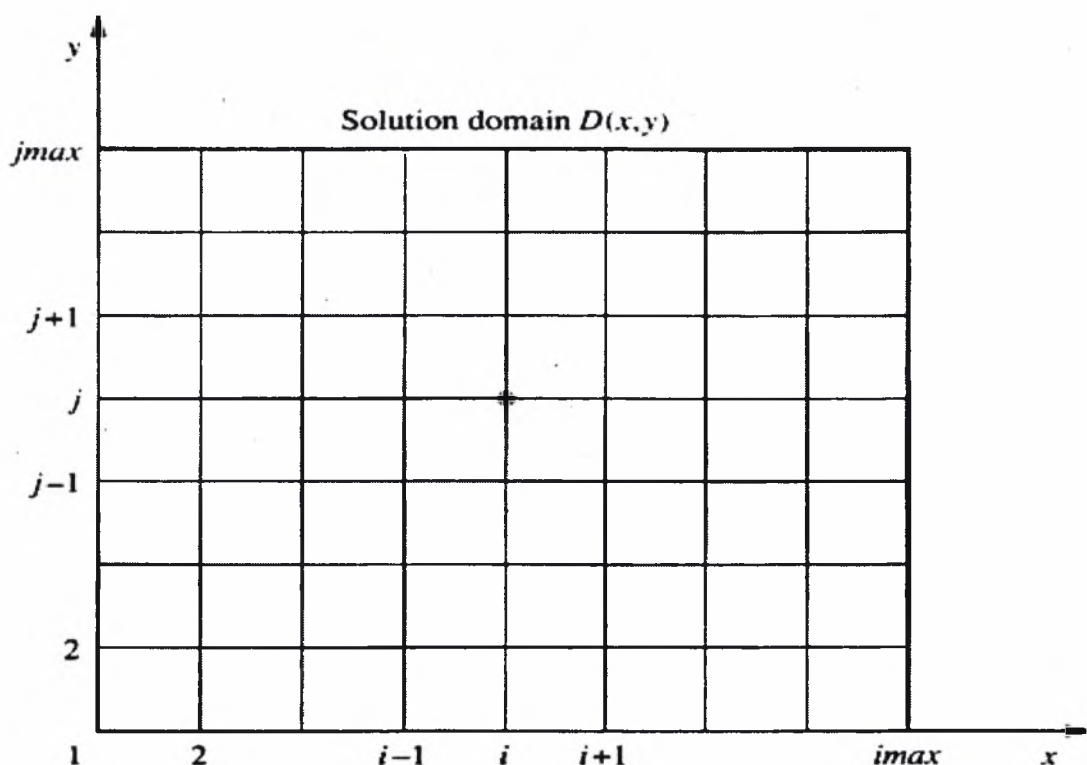
ή ύστερα από πράξεις :

$$T_{i,j} = \frac{1}{3u\Delta x\Delta y^2 + 12\alpha\Delta y^2 + 12\alpha\Delta x^2} [-u\Delta x\Delta y^2 T_{i-2,j} + (6\alpha\Delta y^2 + 6u\Delta x\Delta y^2) T_{i-1,j} + 6\alpha\Delta x^2 T_{i,j-1} + (6\alpha\Delta y^2 - 2u\Delta x\Delta y^2) T_{i+1,j} + 6\alpha\Delta x^2 T_{i,j+1}] \quad (3.25) ,$$

όπου  $T_{i,j}$  είναι η θερμοκρασία σε ένα τυχαίο κόμβο του πλέγματος που σχηματίζεται (χαρακτηριστικό παράδειγμα ορθογώνιου πλέγματος φαίνεται στο Σχήμα 3.5.1) και οι υπόλοιπες θερμοκρασίες της εξίσωσης είναι οι θερμοκρασίες των γειτονικών κόμβων ως προς αυτό το σημείο . Προφανώς , επειδή η θερμοκρασία αυτού του κόμβου εξαρτάται και από θερμοκρασίες σημείων ( $T_{i+1,j}$  ,  $T_{i,j+1}$ ) , οι οποίες δεν είναι δυνατό να έχουν υπολογιστεί εκ των προτέρων , η εξίσωση αυτή μας οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων με πλήθος εξισώσεων και αγνώστων ίσο με το πλήθος των κόμβων του



πλέγματος . Η επίλυση αυτή του συστήματος θα πραγματοποιηθεί υπολογιστικά με τη μέθοδο Gauss.



Σχήμα 3.5.1 : Παράδειγμα ορθογώνιου πλέγματος .

Ο βασικός λόγος για τον οποίο χρησιμοποιήθηκε αυτή η μέθοδος είναι εκτός του εύκολου σχετικά προγραμματισμού της και η μεγάλη ακρίβεια και αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που προσφέρει συγκρίνοντας την με τις άλλες μεθόδους . Για τη σύγκριση αυτή χρησιμοποιείται ένα γενικό κριτήριο ακρίβειας των μεθόδων , που είναι ο αριθμός κελιού Peclet (ή Reynolds) του οποίου ο τύπος είναι ο ακόλουθος :

$$R = \frac{u\Delta x}{\alpha} \quad (3.26)$$

και ο οποίος συσχετίζεται με τον αριθμό Peclet ως εξής :

$$R = P \frac{\Delta x}{L} \quad (3.27) ,$$

όπου  $u$  η ταχύτητα του ρευστού ,  $\Delta x$  η απόσταση μεταξύ των γειτονικών κόμβων ,  $\alpha$  η θερμοδιαχυτότητα και  $P$  ο αριθμός Peclet . Αυτός ο αριθμός , σύμφωνα με βιβλιογραφικές αναφορές πρέπει να είναι μικρότερος από 2 , χωρίς όμως αυτό να αποτελεί και κανόνα , αφού υπάρχουν περιπτώσεις μεθόδων , όπως στην upwind

μέθοδο 1<sup>ης</sup> τάξης , όπου για αριθμούς κελιού Peclet / Reynolds πάνω από 1 εμφανίζονται σημαντικές αποκλίσεις στα αποτελέσματα σε σχέση με τις πραγματικές τιμές . Αυτό οφείλεται κυρίως λόγω της σημαντικής αριθμητικής διάχυσης που εμφανίζεται καθώς σε αυτή τη μέθοδο αποκόπτεται η δεύτερη παράγωγος .

### 3.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ - ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ LEONARD

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Leonard (εξίσωση (3.25) ) . Σ' αυτή την ενότητα θα δοθεί μια αναλυτική περιγραφή για τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώθηκε η μέθοδος αυτή ανάλογα με τις οριακές συνθήκες. Για τις πρώτες δύο στήλες κόμβων του πλέγματος ισχύει ότι :

$$T_{i-2,j} = T_0 \quad (3.28) ,$$

όπου  $T_0$  είναι η θερμοκρασία εισόδου του ρευστού , ενώ επίσης και για την πρώτη στήλη έχουμε :

$$T_{i-1,j} = T_0 \quad (3.29) .$$

Επίσης για όλα τα σημεία που είναι γειτονικά στο τοίχωμα , δηλαδή την πρώτη γραμμή του πλέγματος , ισχύει :

$$T_{i,j-1} = T_w \quad (3.30) ,$$

όπου  $T_w$  είναι η θερμοκρασία του τοιχώματος .

Για τα σημεία της επιφάνειας του ρευστού υμένα χρησιμοποιούμε την εξής οριακή συνθήκη :

$$-k \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} = h(T_{i,j} - T_\infty) \quad (3.31) ,$$

συνθήκη που προκύπτει από τη μετάδοση θερμότητας λόγω συναγωγής με το αέριο που περιβάλλει τον υγρό υμένα . Η εξίσωση αυτή ύστερα από πράξεις τροποποιείται ως εξής :

$$T_{i,j+1} = T_{i,j-1} - 2 \frac{\Delta y h}{k} T_{i,j} + 2 \frac{\Delta y h}{k} T_\infty \quad (3.32) .$$

Την καινούρια αυτή εξίσωση μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση συναγωγής - διάχυσης όπως έχει διαμορφωθεί από τη μέθοδο Leonard και να πάρουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$T_{i,j} = \frac{1}{3u\Delta x\Delta y^2 + 12\alpha\Delta y^2 + 12\alpha\Delta x^2 + 12\frac{\alpha\Delta x^2\Delta y h}{k}} [-u\Delta x\Delta y^2 T_{i-2,j} + (6\alpha\Delta y^2 + 6u\Delta x\Delta y^2) T_{i-1,j} + 12\alpha\Delta x^2 T_{i,j-1} + (6\alpha\Delta y^2 - 2u\Delta x\Delta y^2) T_{i+1,j} + 12\frac{\alpha\Delta y\Delta x^2 h}{k} T_{\infty}] \quad (3.33)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για όλα τα σημεία που βρίσκονται στην επιφάνεια του ρευστού υμένα εκτός του σημείου που ανήκει στην τελευταία στήλη . Στην τελευταία στήλη του πλέγματος κάνουμε μια τροποποίηση στη μέθοδο Leonard χρησιμοποιώντας στις μερικές παραγώγους της θερμοκρασίας ως προς το x (πρώτη και δεύτερη παράγωγος) οπίσθιες διαφορές (backward differences) 2<sup>ου</sup> βαθμού ακρίβειας . Δηλαδή , η εξίσωση που περιγράφει τις θερμοκρασίες στα σημεία της τελευταίας στήλης είναι η :

$$u \frac{T_{i-2,j} - 4T_{i-1,j} + 3T_{i,j}}{2\Delta x} = \alpha \left[ \frac{-T_{i-3,j} + 4T_{i-2,j} - 5T_{i-1,j} + 2T_{i,j}}{(\Delta x^2)} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y^2)} \right] \quad (3.34)$$

ή ύστερα από πράξεις :

$$T_{i,j} = \frac{1}{3u\Delta x\Delta y^2 - 4\alpha\Delta y^2 + 4\alpha\Delta x^2} [-2\alpha\Delta y^2 T_{i-3,j} + (8\alpha\Delta y^2 - u\Delta x\Delta y^2) T_{i-2,j} + (4u\Delta x\Delta y^2 - 10\alpha\Delta y^2) T_{i-1,j} + 2\alpha\Delta x^2 T_{i,j-1} + 2\alpha\Delta x^2 T_{i,j+1}] \quad (3.35)$$

Για το τελευταίο σημείο του πλέγματος που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού υμένα ισχύει και γι' αυτό η οριακή συνθήκη που αναφέρθηκε προηγουμένως (εξίσωση 3.31) για τα υπόλοιπα σημεία της διεπιφάνειας . Δηλαδή :

$$-k \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} = h(T_{i,j} - T_{\infty})$$

ή :

$$T_{i,j+1} = T_{i,j-1} - 2\frac{\Delta y h}{k} T_{i,j} + 2\frac{\Delta y h}{k} T_{\infty}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση αυτή στην εξίσωση συναγωγής – διάχυσης, που ισχύει για τα σημεία της τελευταίας στήλης θα έχουμε την περιγραφή της θερμοκρασίας για τον τελευταίο κόμβο :

$$T_{i,j} = \frac{1}{3u\Delta x\Delta y^2 - 4\alpha\Delta y^2 + 4\alpha\Delta x^2 + 4\frac{\alpha\Delta x^2\Delta y h}{k}} [-2\alpha\Delta y^2 T_{i-3,j} + (8\alpha\Delta y^2 - u\Delta x\Delta y^2) T_{i-2,j} + (4u\Delta x\Delta y^2 - 10\alpha\Delta y^2) T_{i-1,j} + 4\alpha\Delta x^2 T_{i,j-1} + 4\frac{\alpha\Delta x^2\Delta y h}{k} T_{\infty}]$$

(3.36)

### 3.7 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Μπορούμε να αδιαστατοποιήσουμε την εξίσωση συναγωγής – διάχυσης του προβλήματος :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

θεωρώντας τα αδιάστατα μεγέθη :

$$\hat{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \hat{x} = \frac{x}{\delta}, \quad \hat{T} = \frac{T}{\Delta T}, \quad \hat{u} = \frac{u}{U}, \quad \text{όπου :}$$

$\Delta T = T_w - T_o$  (μέγιστη διαφορά θερμοκρασίας),

$U$ , η ταχύτητα του ρευστού στην επιφάνεια του υγρού υμένα (μέγιστη τιμή ταχύτητας) και

$\delta$ , το πάχος του υμένα .

Τότε οι παράγωγοι θα γίνουν :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial(\hat{T} \cdot \Delta T)}{\partial(\hat{x} \cdot L)} = \frac{\Delta T}{L} \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \quad (3.37),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial(\hat{x} \cdot L)} \frac{\partial(\hat{T} \cdot \Delta T)}{\partial(\hat{x} \cdot L)} = \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \quad (3.38),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial(\hat{y} \cdot \delta)} \frac{\partial(\hat{T} \cdot \Delta T)}{\partial(\hat{y} \cdot \delta)} = \frac{\Delta T}{\delta^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \quad (3.39)$$

και άρα η εξίσωση συναγωγής – διάχυσης μετατρέπεται ως εξής :

$$\hat{u}U \frac{\Delta T}{L} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \alpha \left( \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \right)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{L \cdot \alpha}{U} \cdot \frac{1}{L^2 \delta^2} \left( \delta^2 \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + L^2 \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \right)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{\alpha}{UL\delta^2} \left( \delta^2 \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + L^2 \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (3.40)$$

κι επειδή ο αδιάστατος αριθμός Peclet ορίζεται ως :

$$Pe = \frac{U \cdot L}{\alpha} \quad (3.41),$$

η εξίσωση μπορεί να πάρει την τελική μορφή :

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (3.42).$$

Η αδιάστατη αυτή η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με την ίδια διαδικασία που αναλύθηκε προηγουμένως για τη διαστατική εξίσωση της συναγωγής – διάχυσης (με διαφορετικούς συντελεστές στις επιμέρους εξισώσεις) και η επίλυσή της θα οδηγήσει στα ίδια αποτελέσματα .

### 3.8 ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΜΑΖΑΣ

Πρέπει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα της μεταφοράς θερμότητας , που εξετάσαμε προηγουμένως , είναι παρόμοιο με το πρόβλημα της μεταφοράς μάζας . Η ουσιώδης διαφορά είναι ότι , ενώ στο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας , η μεταφορά θερμότητας συντελείται στο μεγαλύτερο βαθμό ανάμεσα στο τοίχωμα και το υγρό , στο πρόβλημα μεταφοράς μάζας , η κύρια μεταφοράς μάζας συμβαίνει ανάμεσα στο υγρό και το αέριο που περιβάλλει τον υγρό υμένα . Οι εξισώσεις που περιγράφουν κι επιλύουν αυτό το πρόβλημα είναι οι ίδιες αν αντικαταστήσουμε όπου τη θερμοκρασία  $T$  , τη συγκέντρωση  $c$  , μόνο που θα πρέπει να αλλάξουν και οι οριακές συνθήκες, αφού για το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν υπάρχει μεταφορά μάζας ανάμεσα στο τοίχωμα και το υγρό παρά μεταξύ αέρα και υγρού , ενώ ως οριακή συνθήκη , αντίστοιχη της σταθερής θερμοκρασίας του τοιχώματος που είχαμε στο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας , μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συγκέντρωση που υπάρχει στο αέριο περιβάλλον .

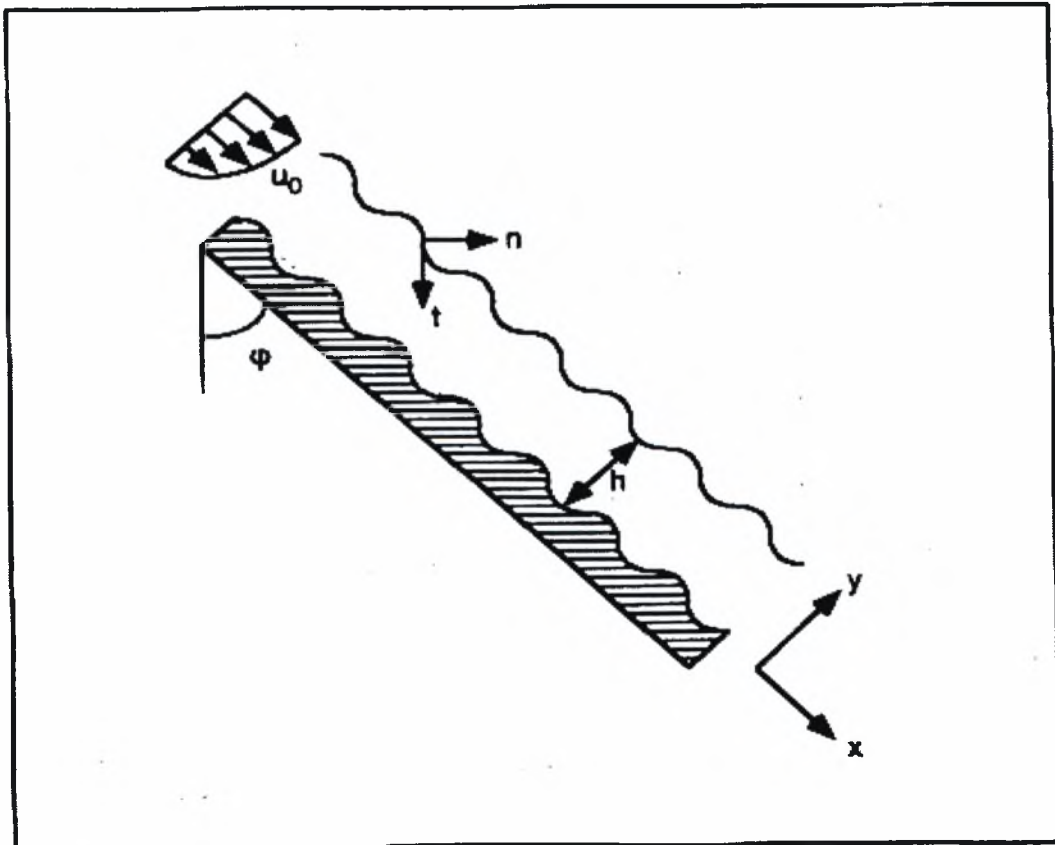
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 :

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΚΥΜΑΤΟΕΙΔΕΣ ΤΟΙΧΩΜΑ

#### 4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το πρόβλημά μας περιγράφεται ως εξής :

Υπολογισμός του θερμοκρασιακού προφίλ ενός ασυμπίεστου ρευστού σταθερού ιξώδους που ρέει σε ένα κεκλιμένο , κυματοειδούς μορφής , τοίχωμα υπό την επίδραση της βαρύτητας , σχηματίζοντας πάνω σε αυτό ένα στρώμα μεταβαλλόμενου πάχους  $h$  , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.1 . Η ροή του ρευστού θεωρείται στρωτή και μόνιμη .



Σχήμα 4.1.1 : Ροή υμένα πάνω από κεκλιμένο κυματοειδές τοίχωμα .

## 4.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρείται δισδιάστατη ροή σε ένα κεκλιμένο τοίχωμα με γωνία  $\varphi$  ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση. Το τοίχωμα αποτελείται από μικρού πλάτους ημιτονοειδείς διαταραχές σε ορθές γωνίες ως προς την κατεύθυνση της ροής. Η ροή περιγράφεται από ένα  $x, y$  σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα  $y$  κάθετο στην κατεύθυνση της μέσης ροής. Η αρχή του άξονα  $y$  ορίζεται στο μέσο ύψος του τοιχώματος και οι διαταραχές περιγράφονται από τη σχέση:

$$b(x) = a \cos kx \quad (4.1),$$

όπου  $k$  ο κυμαριθμός και ισούται με  $k = 2\pi/L$  ( $L$  το μήκος κύματος των κυματισμών). Το μέσο πάχος του υμένα είναι ίσο με  $\bar{h}$  και η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού τοποθετείται σε:

$$\eta(x) = \bar{h} + f(x) \quad (4.2).$$

Το σχήμα της σταθερής ελεύθερης επιφάνειας είναι πρώτης τάξης και περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση:

$$f(x) = \beta a e^{ikx} \quad (4.3),$$

όπου  $\beta$  είναι η αύξηση (amplification) των διαταραχών του τοιχώματος (wall corrugations) και είναι γενικά μιγαδικός αριθμός. Αυτή η έκφραση ανταποκρίνεται σε κύματα με το ίδιο μήκος κύματος με αυτό των διαταραχών αλλά αυθαίρετου πλάτους και φάσης ως προς το τοίχωμα.

Τα μοναδιαία διανύσματα  $\underline{n}$  και  $\underline{t}$ , το κάθετο και το εφαπτόμενο στην ελεύθερη επιφάνεια αντίστοιχα, είναι ορισμένα σε όρους της εφαπτομένης της ελεύθερης επιφάνειας,  $f'(x)$ , από τις εκφράσεις:

$$\underline{t} = (1, f') / \sqrt{1 + f'^2} \quad (4.4\alpha)$$

$$\underline{n} = (f', -1) / \sqrt{1 + f'^2} \quad (4.4\beta).$$

Η ροή περιγράφεται από την εξίσωση της συνέχειας και τις εξισώσεις Navier – Stokes εφόσον πρόκειται για ασυμπιεστή ροή νευτωνικού ρευστού, σταθερού ιξώδους.



**Εξίσωση συνέχειας :**

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

**Εξισώσεις Navier – Stokes (κατά τις διευθύνσεις x,y) :**

$$\rho \left( \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \cdot g_x + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \quad (4.6\alpha)$$

$$\rho \left( \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho \cdot g_y + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \right) \quad (4.6\beta)$$

Επειδή η ροή είναι μόνιμη και δισδιάστατη ισχύει ότι :

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = 0, \frac{\partial U_x}{\partial t} = 0, U_z = 0 .$$

Οπότε οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοποιούνται στις εξής :

$$\rho \left( U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \cdot g_x + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right) \quad (4.7\alpha)$$

$$\rho \left( U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho \cdot g_y + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right) \quad (4.7\beta)$$

Μία από τις οριακές συνθήκες είναι η μη ολίσθηση στο τοίχωμα , η οποία περιγράφεται ως :

$$u = v = 0 \quad (4.8) \quad \text{για } y = b(x) .$$

Επίσης , η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ως προς τη σταθερή ελεύθερη επιφάνεια είναι μηδέν :

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad (4.9) \quad \text{στο } y = \eta(x)$$

όπου  $\underline{u} = (u, v)$  . Η ισορροπία των δυνάμεων στην ελεύθερη επιφάνεια δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις :

$$(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t} = 0 \quad (4.10\alpha)$$

$$(\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = -p_0 + s \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} \quad (4.10\beta) .$$

Ο όρος  $p_0$  είναι η πίεση του περιβάλλοντος ,  $s$  η επιφανειακή τάση και  $\underline{\sigma}$  ο ταυσιτής των τάσεων , ορισμένος από το ρυθμό του ταυσιτή παραμορφώσεων ,  $\underline{e}$ , και Kronecker  $\underline{\delta}$  ως :

$$\underline{\sigma} = -p\underline{\delta} + 2\mu\underline{e} \quad (4.11) .$$

Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα που εμφανίζεται βασίζεται σε μια μικρή μεταβλητή,  $\epsilon$ , η οποία ορίζεται ως :

$$\epsilon = \alpha/h \quad (4.12) .$$

Συνεπώς, αυτό προϋποθέτει ότι το πλάτος των κυματοειδών διαταραχών του τοιχώματος είναι πολύ μικρότερο από το πάχος του υμένα. Σύμφωνα με τους Bontozoglou και Parapolymereou (1997), η ροϊκή συνάρτηση,  $\Psi$ , είναι ορισμένη και αναπτυγμένη σε ασυμπτωτικές σειρές ως εξής :

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \epsilon \cdot \Psi^{(1)} + \epsilon^2 \cdot \Psi^{(2)} + \dots \quad (4.13) .$$

Το μηδενικής - τάξης πρόβλημα ανταποκρίνεται σε λεπτή ροή πάνω από επίπεδο υμένα, με τη γνωστή λύση Nusselt :

$$\Psi^{(0)}(y) = \frac{\rho g_x}{\mu} \left( \frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \quad (4.14)$$

ή

$$u^{(0)}(y) = \frac{\rho g_x}{\mu} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad (4.15) ,$$

όπου  $g_x = g \cos \phi$  είναι η συνιστώσα της βαρύτητας κατά μήκος του άξονα  $x$ . Σύμφωνα με τη γραμμική θεώρηση της εξίσωσης (4.3), ο πρώτος όρος της ροϊκής συνάρτησης μπορεί να εκφραστεί ως :

$$\Psi^{(1)}(x,y) = \psi(y) \cdot e^{ikx} \quad (4.16) .$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.16) στις εξισώσεις Navier-Stokes (4.7α) και (4.7β), οι οποίες στη συνέχεια συνδυάζονται ώστε να εξαλειφθεί η πίεση, καταλήγει σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Οι μεταβλητές γίνονται αδιάστατες χρησιμοποιώντας το μέσο πάχος του υμένα  $\bar{h}$ , ως το χαρακτηριστικό μέγεθος, τον ρυθμό του όγκου ροής ανά χρονική μονάδα,  $q$ , ως τη χαρακτηριστική τιμή για τη ροϊκή συνάρτηση και  $q/\bar{h}$ , ως τη χαρακτηριστική ταχύτητα. Η αδιάστατη εξίσωση στην οποία καταλήγουμε είναι η :

$$\left( \frac{1}{ik Re} \right) (D^2 - k^2)^2 \psi = u_0 (D^2 - k^2) \psi - u_0'' \psi \quad (4.17) ,$$

όπου  $Re$  είναι ο αριθμός Reynolds, ορισμένος ως :

$$Re = \frac{\rho q}{\mu} = \frac{\rho^2 g_x h^3}{3\mu^2} \quad (4.18).$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι παρόμοια με αυτή της εξίσωσης Orr - Sommerfeld της γραμμικής ευστάθειας χωρίς τη παράμετρο της φάσης της ταχύτητας. Ωστόσο, το υπάρχον πρόβλημα δεν είναι πρόβλημα ιδιοτιμής, καθώς δεν είναι όλες οι συνοριακές συνθήκες ομογενείς.

Σύμφωνα με μια γνωστή τεχνική, οι οριακές συνθήκες κατά μήκος του τοιχώματος και της ελεύθερης επιφάνειας, αναπτύσσονται σε σειρές Taylor γύρω από τα αντίστοιχα μέσα επίπεδα ( $y=0$  και  $y=1$ ). Οι τελικές εκφράσεις είναι :

$$\psi(0) = 0 \quad (4.19)$$

$$\psi'(0) = -3 \quad (4.20)$$

$$\psi(1) = -3\beta/2 \quad (4.21)$$

$$\psi''(1) - k^2\psi(1) = 3\beta \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2} Re \psi'(1) + \frac{i}{3k} \psi'''(1) - ik \psi'(1) = -\beta \left( \frac{sk^2}{\rho g_x} + \frac{g_y}{g_x} \right) \quad (4.23).$$

### 4.3 ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕ ΜΕΓΑΛΑ ΠΛΑΤΗ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ

Η ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου οδήγησε τους Bontozoglou & Parapolymetou (1997) στο συμπέρασμα, ότι περιοδικές διαταραχές του τοιχώματος με μήκος κύματος της τάξης των χιλιοστών οδηγούν σε ανάπτυξη των μέγιστων στατικών κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια. Είναι συνεπώς λογικό να υποθέσει κανείς, ότι οι συνθήκες αυτές θα είναι βέλτιστες και για φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας / μάζας. Κατά κύριο λόγο αναμένεται έντονη επίδραση στη διεπιφάνεια, αλλά είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί και το κατά πόσον η διαταραχή αυτή επηρεάζει αισθητά τις συνθήκες ροής κοντά στο στερεό τοίχωμα, και συνεπώς τη μεταφορά θερμότητας μεταξύ τοιχώματος και υγρού.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν αυστηρά για διαταραχές τοιχώματος με μηδενικό ύψος. Για την επέκταση των αποτελεσμάτων σε πραγματικές συνθήκες, όπου η περιοδική διαμόρφωση έχει πεπερασμένο ύψος, θα χρησιμοποιηθεί

υπολογιστική μελέτη (Bontozoglou 2000), από την οποία θα ληφθεί το πεδίο ταχυτήτων που θα χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας.

Η υπολογιστική διαδικασία εφαρμόζεται με χρήση της ροϊκής συνάρτησης,  $\psi$ , με βάση την οποία οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις σχέσεις

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.24\alpha) \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.24\beta)$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις Navier-Stokes (4.6α,β), παραγωγίζοντας και αφαιρώντας κατά μέλη για να απαλειφεί ο όρος της πίεσης, προκύπτει η εξίσωση :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 \psi)}{\partial x} = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \quad (4.25) ,$$

η οποία λύνεται σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες (4.8) , (4.9) και (4.10α,β).

Επειδή η ελεύθερη επιφάνεια,  $y = f(x)$ , είναι άγνωστη και θα προκύψει ως μέρος της λύσης, χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός  $(x,y) \rightarrow (x,w)$  όπου

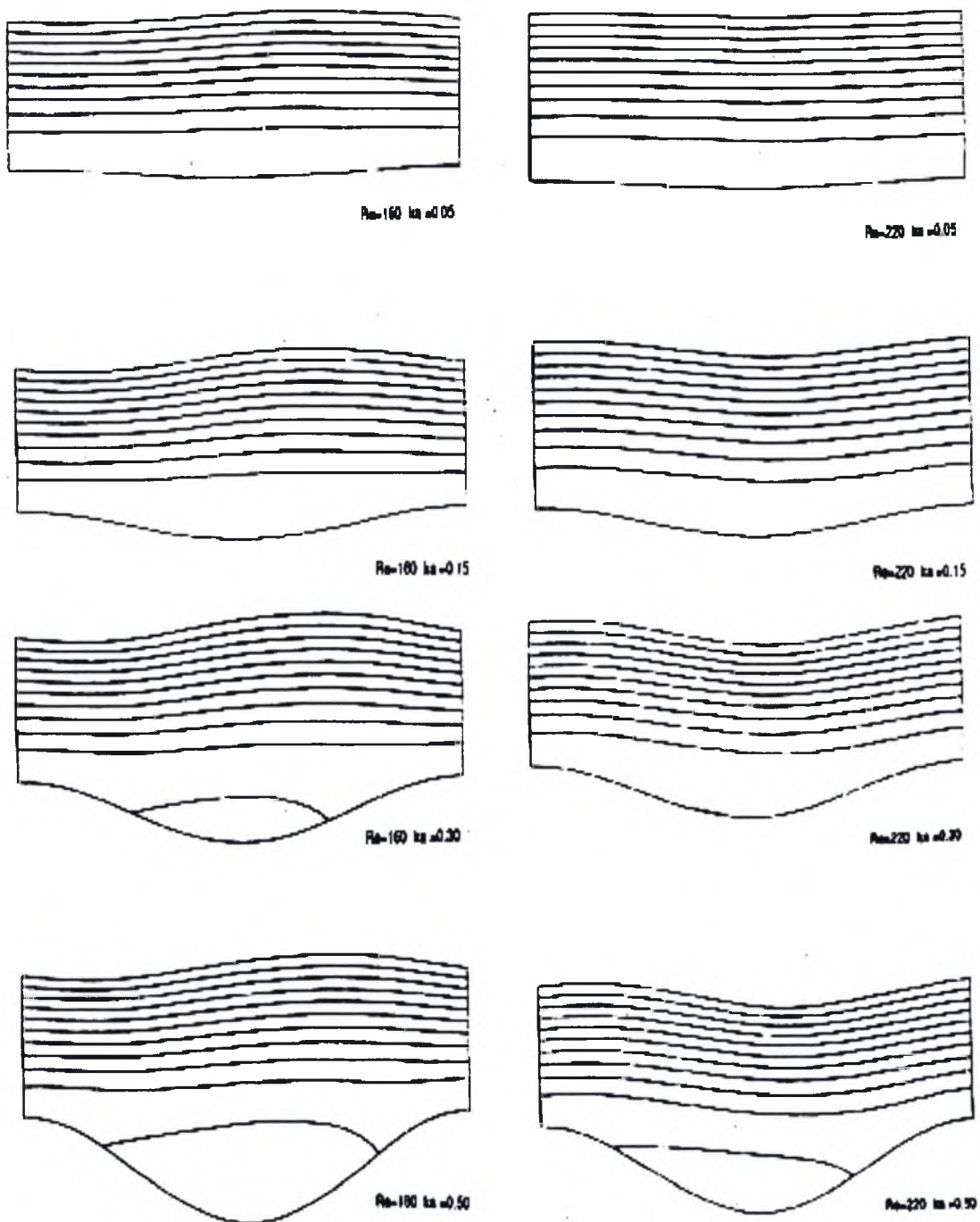
$$w = \frac{y - b(x)}{f(x) - b(x)} = \frac{y - b(x)}{h(x)} \quad (4.26)$$

Η ροϊκή συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά Fourier κατά την  $x$ -διεύθυνση και σε σειρά πολωνύμων Chebyshev κατά την  $w$  διεύθυνση. Αντίστοιχα, το πάχος ,  $h(x)$ , του υγρού υμένα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Η μορφή των αναπτυγμάτων είναι η εξής:

$$\Psi(x, w) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \left\{ a_{jk} \cos(kx) + b_{jk} \sin(kx) \right\} T_j(w) \quad (4.27)$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) \quad (4.28)$$

Με αντικατάσταση των (4.27) και (4.28) στην (4.25) και ικανοποίηση της τελευταίας σε ένα πλέγμα σημείων, προκύπτει σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων ως προς τους άγνωστους συντελεστές των αναπτυγμάτων. Το σύστημα λύνεται με την μέθοδο Newton. Ενδεικτικά διαγράμματα ροϊκών γραμμών για ορισμένους αριθμούς  $Re$  και πλάτη τοιχώματος παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3.1 .



Σχήμα 4.3.1 : Διαγράμματα ροϊκών γραμμών για ορισμένους αριθμούς Re και πλάτη τοιχώματος .

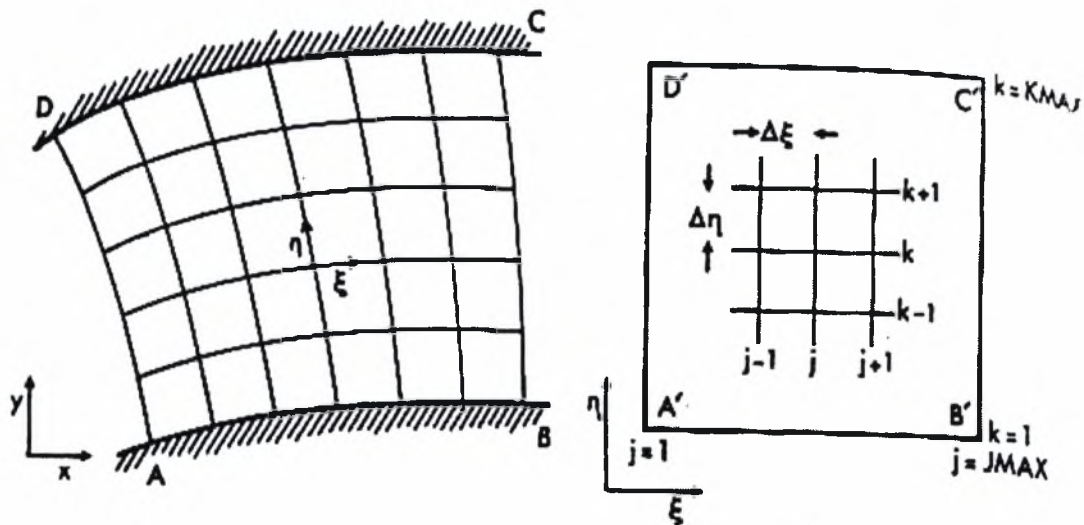
**4.4 ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ – ΔΙΑΧΥΣΗΣ**

Η εξίσωση συναγωγής – διάχυσης για μόνιμη ροή είναι :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \text{ή}$$

$$uT_x + vT_y = \alpha(T_{xx} + T_{yy}) \quad (4.29) .$$

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4.29) θα οδηγηθούμε σε αλλαγή συντεταγμένων από το σύστημα  $x, y$  σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $\xi, \eta$ , όπου το στρεβλωμένο πλέγμα όπως εμφανίζεται στο σύστημα συντεταγμένων  $x, y$  θα μετατραπεί σε ορθογώνιο στο σύστημα συντεταγμένων  $\xi, \eta$ . Η αλλαγή αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4.1. και πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τον Fletcher (1991), όπως φαίνεται στα ακόλουθα κεφάλαια.



Σχήμα 4.3.1 : Απεικόνιση της αλλαγής συστήματος συντεταγμένων .

## 4.5 ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ - ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Οι παράγωγοι της εξίσωσης συναγωγής – διάχυσης θα γίνουν με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων ως εξής :

$$T_x = T_\xi \xi_x + T_\eta \eta_x \quad (4.30\alpha)$$

$$T_y = T_\xi \xi_y + T_\eta \eta_y \quad (4.30\beta)$$

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} (T_\xi \xi_x + T_\eta \eta_x) = (T_{\xi\xi} \xi_x + T_{\xi\eta} \eta_x) \xi_x + T_\xi \xi_{xx} + (T_{\xi\eta} \xi_x + T_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x + T_\eta \eta_{xx} = \\ &= T_{\xi\xi} \xi_x^2 + T_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2T_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + T_\xi \xi_{xx} + T_\eta \eta_{xx} \end{aligned} \quad (4.31\alpha)$$

$$\begin{aligned} T_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} (T_\xi \xi_y + T_\eta \eta_y) = (T_{\xi\xi} \xi_y + T_{\xi\eta} \eta_y) \xi_y + T_\xi \xi_{yy} + (T_{\xi\eta} \xi_y + T_{\eta\eta} \eta_y) \eta_y + T_\eta \eta_{yy} = \\ &= T_{\xi\xi} \xi_y^2 + T_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2T_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + T_\xi \xi_{yy} + T_\eta \eta_{yy} \end{aligned} \quad (4.31\beta)$$

Συνεπώς η εξίσωση συναγωγής – διάχυσης γίνεται :

$$uT_x + vT_y = \alpha(T_{xx} + T_{yy}) \Rightarrow$$

$$u(T_\xi \xi_x + T_\eta \eta_x) + v(T_\xi \xi_y + T_\eta \eta_y) = \alpha [T_{\xi\xi} (\xi_x^2 + \xi_y^2) + T_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2T_{\xi\eta} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) + T_\xi (\xi_{xx} + \xi_{yy}) + T_\eta (\eta_{xx} + \eta_{yy})]$$

ή

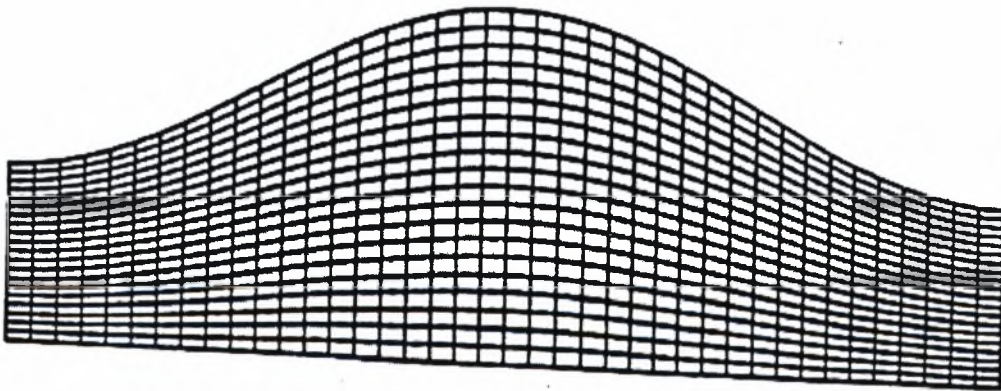
$$\begin{aligned} [u\xi_x + v\xi_y - \alpha(\xi_{xx} + \xi_{yy})]T_\xi + [u\eta_x + v\eta_y - \alpha(\eta_{xx} + \eta_{yy})]T_\eta &= \alpha[(\xi_x^2 + \xi_y^2)T_{\xi\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2)T_{\eta\eta} + \\ &= 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)T_{\xi\eta}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 4.6 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ - ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ LEONARD

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Leonard όπως και στο πρώτο πρόβλημα :

$$\begin{aligned}
 & \left[ u\xi_x + v\xi_y - \alpha(\xi_{xx} + \xi_{yy}) \right] \frac{2T_{i+1,j} + 3T_{i,j} - 6T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{6\Delta\xi} + \\
 & + \left[ u\eta_x + v\eta_y - \alpha(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \right] \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\eta} = \alpha[(\xi_x^2 + \xi_y^2) \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} + \\
 & + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} + 2(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} - T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} ]
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

Επειδή η ροή ως προς τον άξονα η δεν έχει μονοσήμαντη διεύθυνση (σε άλλα σημεία κατευθύνεται προς την ελεύθερη επιφάνεια και σε άλλα προς το τοίχωμα) θεωρήθηκε πιο σωστό και πιο ευσταθές για την αριθμητική μέθοδο, για την πρώτη παράγωγο της θερμοκρασίας ως προς η να χρησιμοποιηθεί (αντί για την οπίσθια διαφορά 3<sup>ου</sup> βαθμού που χρησιμοποιεί η μέθοδος Leonard στην πρώτη παράγωγο της θερμοκρασίας ως προς ξ) κεντρική διαφορά 2<sup>ου</sup> βαθμού.



**Σχήμα 4.6.1 :** Παράδειγμα στρεβλωμένου πλέγματος για επίπεδο τοίχωμα με κυματισμό της ελεύθερης επιφάνειας .



Αν όπου :

$$\alpha^* = u\xi_x + v\xi_y - \alpha(\xi_{xx} + \xi_{yy}) \quad (4.34\alpha)$$

$$\beta^* = u\eta_x + v\eta_y - \alpha(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \quad (4.34\beta)$$

$$\gamma^* = \alpha(\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad (4.34\gamma)$$

$$\delta^* = \alpha(\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (4.34\delta) \text{ και}$$

$$\varepsilon^* = \alpha(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) \quad (4.34\varepsilon)$$

τότε :

$$\alpha^* \Delta\eta \frac{2T_{i+1,j} + 3T_{i,j} - 6T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{6\Delta\xi\Delta\eta} + 3\beta^* \Delta\xi \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{6\Delta\xi\Delta\eta} = 2\gamma^* \Delta\eta^2 \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{2\Delta\xi^2\Delta\eta^2} +$$

$$+ 2\delta^* \Delta\xi^2 \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{2\Delta\xi^2\Delta\eta^2} + \varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1} - T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j-1}}{2\Delta\xi^2\Delta\eta^2} \Rightarrow$$

$$(3\alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2 + 12\gamma^* \Delta\eta^2 + 12\delta^* \Delta\xi^2)T_{i,j} = 3\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i-1,j-1} - \alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2 T_{i-2,j} +$$

$$+ (6\alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2 + 6\gamma^* \Delta\eta^2)T_{i-1,j} + (3\beta^* \Delta\xi^2\Delta\eta + 6\delta^* \Delta\xi^2)T_{i,j-1} - 3\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i+1,j-1} -$$

$$- 3\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i-1,j+1} + (6\gamma^* \Delta\eta^2 - 2\alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2)T_{i+1,j} + (6\delta^* \Delta\xi^2 - 3\beta^* \Delta\xi^2\Delta\eta)T_{i,j+1} +$$

$$+ 3\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i+1,j+1}$$

(4.35)

Για τις δύο πρώτες στήλες του πλέγματος ισχύει ότι :

$$T_{i-2,j} = T_0 \quad (4.36) ,$$

όπου  $T_0$  είναι η θερμοκρασία εισόδου του ρευστού , ενώ και για την πρώτη μόνο :

$$T_{i-1,j} = T_0 \quad (4.37) \text{ και}$$

$$T_{i-1,j+1} = T_0 \quad (4.38) .$$

Για τα σημεία που βρίσκονται στην πρώτη γραμμή του πλέγματος , τα διπλανά , δηλαδή , στο τοίχωμα ισχύει :

$$T_{i-1,j-1} = T_w \quad (4.39) ,$$

$$T_{i,j-1} = T_w \quad (4.40) \text{ και}$$

$$T_{i+1,j-1} = T_w \quad (4.41) .$$

Για τα σημεία της επιφάνειας του ρευστού υμένα η θερμορροή προς τον αέρα υπολογίζεται ως εξής :

$$q_\eta = \underline{q} \cdot \underline{\eta} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \underline{j} \right) \cdot \left( \frac{-f'}{\sqrt{1+f'^2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \underline{j} \right) \quad (4.42) .$$

Αν  $\underline{t}$  το μοναδιαίο διάνυσμα , το κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα  $\underline{\eta}$  , τότε επειδή :

$$\underline{t} \cdot \underline{\eta} = 0 \quad (4.43) ,$$

θα είναι και :

$$\underline{t} = \frac{(1, f')}{\sqrt{1+f'^2}} \Rightarrow \underline{\eta} = \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1+f'^2}} \quad (4.44) .$$

Συνεπώς :

$$q = \frac{kf'}{\sqrt{1+f'^2}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{k}{\sqrt{1+f'^2}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = h(T - T_\infty) \quad (4.45) .$$

Αν όπου :

$$a = \frac{kf'}{\sqrt{1+f'^2}} \quad (4.46\alpha) \text{ και}$$

$$b = \frac{k}{\sqrt{1+f'^2}} \quad (4.46\beta) ,$$

η εξίσωση (4.45) γίνεται :

$$a(T_\xi \xi_x + T_\eta \eta_x) - b(T_\xi \xi_y + T_\eta \eta_y) = h(T - T_\infty) \Rightarrow$$

$$(a\xi_x - b\xi_y) \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + (a\eta_x - b\eta_y) \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\eta} = h(T_{i,j} - T_\infty) \quad (4.47) .$$

Αν όπου :

$$A_i = \frac{a\xi_x - b\xi_y}{2\Delta\xi} = \frac{kf'}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{\xi_x}{2\Delta\xi} - \frac{k}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{\xi_y}{2\Delta\xi} \quad (4.48\alpha) \text{ και}$$

$$B_i = \frac{a\eta_x - b\eta_y}{2\Delta\eta} = \frac{kf'}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{\eta_x}{2\Delta\eta} - \frac{k}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{\eta_y}{2\Delta\eta} \quad (4.48\beta),$$

θα έχουμε αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.47) :

$$\begin{aligned} A_i (T_{i+1,j} - T_{i-1,j}) + B_i (T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) &= h(T_{i,j} - T_{\infty}) \Rightarrow \\ T_{i,j+1} &= T_{i,j-1} + \frac{h(T_{i,j} - T_{\infty}) - A_i (T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{B_i} \Rightarrow \\ T_{i,j+1} &= T_{i,j-1} + \left(\frac{h}{B_i}\right) T_{i,j} - \left(\frac{A_i}{B_i}\right) T_{i+1,j} + \left(\frac{A_i}{B_i}\right) T_{i-1,j} - \frac{hT_{\infty}}{B_i} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Αυτή η εξίσωση δημιουργεί μια επιπλέον σειρά σημείων , που βρίσκονται πάνω από την επιφάνεια του ρευστού υμένα , σε απόσταση από αυτόν ορισμένη ίση με την απόσταση , που έχει το σημείο , που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του υγρού υμένα από το αμέσως προηγούμενο σημείο . Με την προσθήκη της εξίσωσης για την επίλυση της παραπάνω σειράς σημείων και τα σημεία της επιφάνειας του ρευστού υμένα , όπως και τα υπόλοιπα εσωτερικά σημεία , λύνονται με τη γενική εξίσωση . Τα σημεία αυτά απλώς βοηθούν στην επίλυση του συστήματος εξισώσεων όπου σε ένα  $M*N$  πλήθος κόμβων (όπου  $M$  το πλήθος των κόμβων στον άξονα  $\xi$  και  $N$  το πλήθος των κόμβων στον άξονα  $\eta$ ) έχουμε  $M*(N+1)$  εξισώσεις για  $M*(N+1)$  αγνώστους .

Αυτές οι εξισώσεις δεν ισχύουν για την τελευταία στήλη του πλέγματος . Στην τελευταία στήλη του πλέγματος , δηλαδή στην έξοδο του ρευστού , κάνουμε μια τροποποίηση στη μέθοδο Leonard χρησιμοποιώντας στις μερικές παραγώγους της θερμοκρασίας ως προς το  $x$  (πρώτη και δεύτερη παράγωγος) οπίσθιες διαφορές (backward differences) 2<sup>ου</sup> βαθμού ακρίβειας . Δηλαδή η εξίσωση που περιγράφει τις θερμοκρασίες στα σημεία της τελευταίας στήλης είναι η :

$$\alpha^* \frac{T_{i-2,j} - 4T_{i-1,j} + 3T_{i,j}}{2\Delta\xi} + \beta^* \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\eta} = \gamma^* \frac{2T_{i,j} - 5T_{i-1,j} + 4T_{i-2,j} - T_{i-3,j}}{\Delta\xi^2} +$$

$$+ \delta^* \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} + \varepsilon^* \frac{T_{i-2,j+1} - T_{i-2,j-1} - 4T_{i-1,j+1} + 4T_{i-1,j-1} + 3T_{i,j+1} - 3T_{i,j-1}}{2\Delta\xi\Delta\eta} \Rightarrow$$

$$(9\alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2 - 12\gamma^* \Delta\eta^2 + 12\delta^* \Delta\xi^2)T_{i,j} = -6\gamma^* \Delta\eta^2 T_{i-3,j} - 3\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i-2,j-1} +$$

$$+ (24\gamma^* \Delta\eta^2 - 3\alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2)T_{i-2,j} + 3\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i-2,j+1} + 12\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i-1,j-1} +$$

$$+ (12\alpha^* \Delta\xi\Delta\eta^2 - 30\gamma^* \Delta\eta^2)T_{i-1,j} + (3\beta^* \Delta\xi^2\Delta\eta + 6\delta^* \Delta\xi^2 - 9\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta)T_{i,j-1} - 12\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta T_{i-1,j+1} +$$

$$+ (6\delta^* \Delta\xi^2 - 3\beta^* \Delta\xi^2\Delta\eta + 9\varepsilon^* \Delta\xi\Delta\eta)T_{i,j+1} \quad (4.50)$$

Αυτή η εξίσωση χρησιμοποιείται για όλα τα σημεία της τελευταίας στήλης εκτός από το σημείο που βρίσκεται στην επιπλέον σειρά που δημιουργήσαμε . Για την εξίσωση που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε οπίσθια διαφορά 2<sup>ου</sup> βαθμού στη παράγωγο ως προς x αντί για κεντρική διαφορά και η εξίσωση (4.49) μορφοποιείται ως εξής :

$$A_i (3T_{i,j} - 4T_{i-1,j} + T_{i-2,j}) + B_i (T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) = h(T_{i,j} - T_{\infty}) \Rightarrow$$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j-1} + \frac{h(T_{i,j} - T_{\infty}) - A_i (3T_{i,j} - 4T_{i-1,j} + T_{i-2,j})}{B_i} \Rightarrow$$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j-1} + \left( \frac{h - 3A_i}{B_i} \right) T_{i,j} + \left( \frac{4A_i}{B_i} \right) T_{i-1,j} - \left( \frac{A_i}{B_i} \right) T_{i-2,j} - \frac{hT_{\infty}}{B_i} \quad (4.51)$$

### 4.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ( $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, \xi_{xx}, \xi_{yy},$

$\eta_{xx}, \eta_{yy}, X_\xi, Y_\xi, X_\eta, Y_\eta, X_{\xi\xi}, Y_{\xi\xi}, X_{\eta\eta}, Y_{\eta\eta}, X_{\xi\eta}, Y_{\xi\eta}$ )

Οι παράγωγοι που παρουσιάζονται στις εξισώσεις υπολογίζονται ως εξής :

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{|J^{-1}|} \quad (4.52\alpha), \quad \xi_y = \frac{-x_\eta}{|J^{-1}|} \quad (4.52\beta),$$

$$\eta_x = \frac{-y_\xi}{|J^{-1}|} \quad (4.52\gamma), \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{|J^{-1}|} \quad (4.52\delta),$$

όπου :

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (4.53).$$

Είναι καλύτερα για τον πιο εύκολο υπολογισμό τους, οι πρώτες παράγωγοι  $\xi$  και  $\eta$  ως προς  $x, y$  να περιγράφονται ως παράγωγοι  $x$  και  $y$  ως προς  $\xi, \eta$ , διότι οι αποστάσεις  $\Delta\xi$  και  $\Delta\eta$  που εμφανίζονται με αυτό τον τρόπο είναι σταθερές και ορισμένες, σε αντίθεση με τις αποστάσεις  $\Delta x$  και  $\Delta y$ . Επίσης για τις δεύτερες παραγώγους έχουμε :

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= \left( \frac{y_\eta}{|J^{-1}|} \right)_x = \left( \frac{y_\eta}{|J^{-1}|} \right)_\xi \xi_x + \left( \frac{y_\eta}{|J^{-1}|} \right)_\eta \eta_x = \\ &= \frac{y_{\eta\xi} J^{-1} - y_\eta J_\xi^{-1}}{(J^{-1})^2} \xi_x + \frac{y_{\eta\eta} J^{-1} - y_\eta J_\eta^{-1}}{(J^{-1})^2} \eta_x = \\ &= \frac{\xi_x y_{\eta\xi} + \eta_x y_{\eta\eta}}{J^{-1}} - \frac{y_\eta \xi_x J_\xi^{-1} + y_\eta \eta_x J_\eta^{-1}}{J^{-1}} = \\ &= \frac{\xi_x y_{\eta\xi} + \eta_x y_{\eta\eta}}{J^{-1}} - \frac{\xi_x^2 J_\xi^{-1} + \xi_x \eta_x J_\eta^{-1}}{J^{-1}} \quad (4.54\alpha) \end{aligned}$$

Ομοίως :

$$\xi_{yy} = -\frac{\xi_y x_{\eta\xi} + \eta_y x_{\eta\eta}}{J^{-1}} - \frac{\xi_y^2 J_\xi^{-1} + \xi_y \eta_y J_\eta^{-1}}{J^{-1}} \quad (4.54\beta),$$

$$\eta_{xx} = -\frac{\xi_x y_{\xi\xi} + \eta_x y_{\xi\eta}}{J^{-1}} - \frac{\xi_x \eta_x J_\xi^{-1} + \eta_x^2 J_\eta^{-1}}{J^{-1}} \quad (4.54\gamma) \text{ και}$$

$$\eta_{yy} = \frac{\xi_y x_{\xi\xi} + \eta_y x_{\xi\eta}}{J^{-1}} - \frac{\xi_y \eta_y J_\xi^{-1} + \eta_y^2 J_\eta^{-1}}{J^{-1}} \quad (4.54\delta).$$

Για τα εσωτερικά σημεία , θα χρησιμοποιήσουμε κεντρικές διαφορές για τις παραγώγους . Οι παράγωγοι της εξίσωσης της παραπάνω σειράς σημείων αναφέρονται στις παραγώγους που ορίζονται στην επιφάνεια του ρευστού υμένα .

Έτσι :

$$x_{\xi} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (4.55\alpha) , \quad x_{\eta} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (4.55\beta) ,$$

$$y_{\xi} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (4.55\gamma) , \quad y_{\eta} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (4.55\delta) ,$$

$$x_{\xi\xi} = \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} \quad (4.56\alpha) , \quad x_{\eta\eta} = \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \quad (4.56\beta) ,$$

$$y_{\xi\xi} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} \quad (4.56\gamma) , \quad y_{\eta\eta} = \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \quad (4.56\delta) ,$$

$$x_{\xi\eta} = \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (4.56\epsilon) ,$$

$$y_{\xi\eta} = \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (4.56\sigma) .$$

Για την τελευταία στήλη θα χρησιμοποιήσουμε οπίσθια διαφορά 2<sup>ου</sup> βαθμού στις παραγώγους ως προς  $\xi$  , ενώ δε θα αλλάξουμε τους τύπους για τις παραγώγους ως προς  $\eta$  .

$$x_{\xi} = \frac{3x_{i,j} - 4x_{i-1,j} + x_{i-2,j}}{2\Delta\xi} \quad (4.57\alpha) , \quad y_{\xi} = \frac{3y_{i,j} - 4y_{i-1,j} + y_{i-2,j}}{2\Delta\xi} \quad (4.57\beta) ,$$

$$x_{\xi\xi} = \frac{2x_{i,j} - 5x_{i-1,j} + 4x_{i-2,j} - x_{i-3,j}}{\Delta\xi^2} \quad (4.58\alpha) ,$$

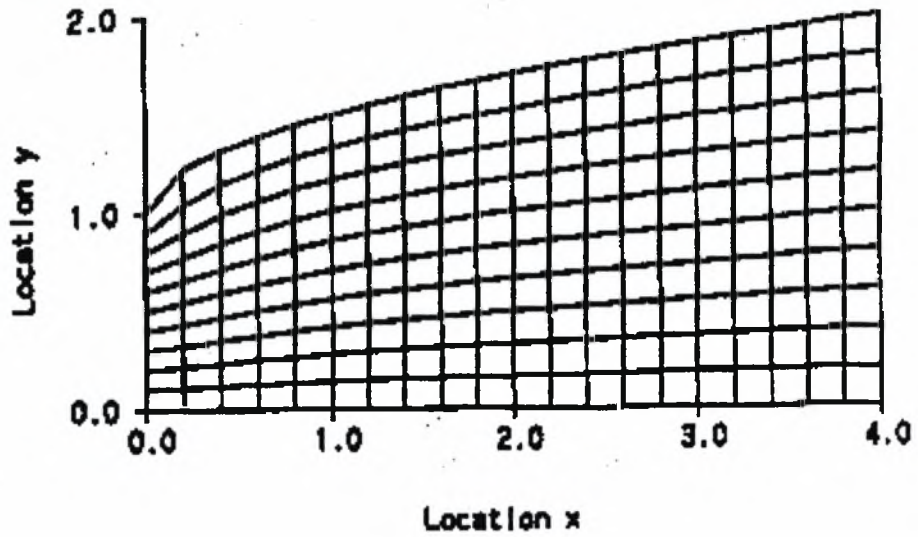
$$y_{\xi\xi} = \frac{2y_{i,j} - 5y_{i-1,j} + 4y_{i-2,j} - y_{i-3,j}}{\Delta\xi^2} \quad (4.58\beta),$$

$$x_{\xi\eta} = \frac{3x_{i,j+1} - 3x_{i,j-1} - 4x_{i-1,j+1} + 4x_{i-1,j-1} + x_{i-2,j+1} - x_{i-2,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (4.58\gamma),$$

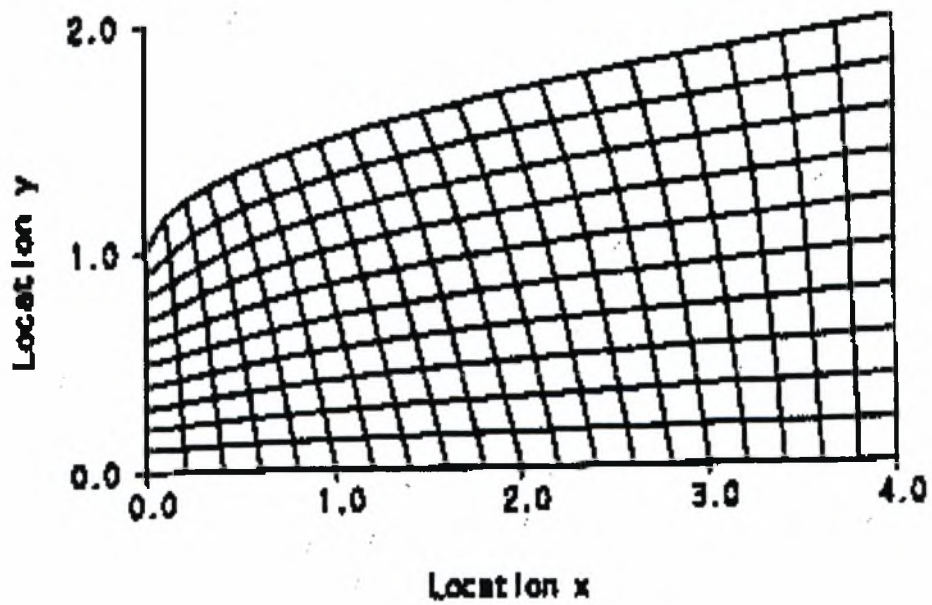
$$y_{\xi\eta} = \frac{3y_{i,j+1} - 3y_{i,j-1} - 4y_{i-1,j+1} + 4y_{i-1,j-1} + y_{i-2,j+1} - y_{i-2,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (4.58\delta).$$

#### **4.8 ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ $x, y$ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ**

Όπως προαναφέρθηκε γίνεται μια αλλαγή συντεταγμένων από το σύστημα  $x, y$  στο σύστημα συντεταγμένων  $\xi, \eta$ , όπου το πλέγμα από τη στρεβλωμένη μορφή που έχει, μετατρέπεται σε ορθογώνιο. Για τον υπολογισμό, όμως των παραπάνω παραγώγων είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες στο σύστημα συντεταγμένων  $x, y$ . Σε αυτό το σημείο υπάρχει η δυνατότητα, μέσω της κατανομής των σημείων, να δώσουμε έμφαση σε κάποιο συγκεκριμένο μέρος του πλέγματος όπου θέλουμε να εστιάσουμε τις παρατηρήσεις μας σχετικά με τις διακυμάνσεις της θερμοκρασίας, συμπυκνώνοντας προς αυτό το σημείο τις γραμμές του πλέγματος. Αυτό γίνεται φανερό και από τα Σχήματα 4.8.1, 4.8.2 και 4.8.3 όπου στο πρώτο Σχήμα υπάρχει ίση κατανομή μεταξύ των κόμβων του πλέγματος (Σχ.4.8.1), στο δεύτερο υπάρχει μια πύκνωση των γραμμών του πλέγματος προς την πάνω αριστερή γωνία (Σχ.4.8.2), ενώ στο τρίτο η πύκνωση υπάρχει και για την πάνω δεξιά γωνία του πλέγματος (Σχ.4.8.3).

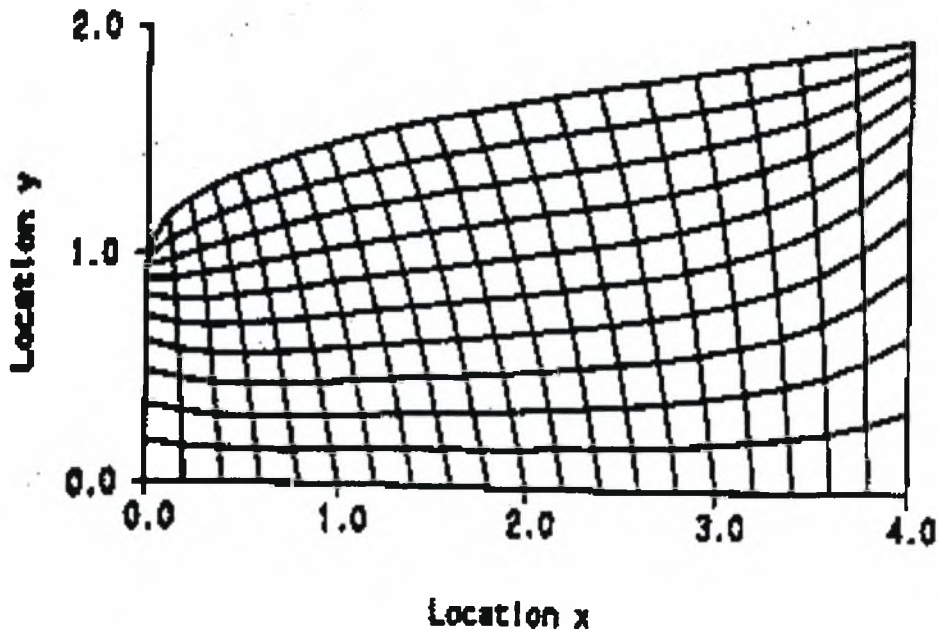


Σχήμα 4.8.1 : Ίση κατανομή των κόμβων .



Σχήμα 4.8.2 : Πύκνωση του πλέγματος στην πάνω αριστερή γωνία .





Σχήμα 4.8.3 : Πόκνωση των γραμμών του πλέγματος στις πάνω γωνίες .

Η κατανομή των σημείων βάσει της οποίας βρίσκουμε τα  $x$  και  $y$  των σημείων για τον υπολογισμό των παραγώγων πραγματοποιείται ως εξής :

- Δημιουργούμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $\eta_1^*$ ,  $\eta_2^*$  και τις ορίζουμε :

$$\eta_1^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_D - \eta_A} \quad (4.59\alpha) \quad \text{και} \quad \eta_2^* = \frac{\eta - \eta_B}{\eta_C - \eta_B} \quad (4.59\beta) ,$$

που είναι ουσιαστικά οι λόγοι των αποστάσεων των διαφόρων σημείων πάνω στις πλευρές AD και BC του πλέγματος αντίστοιχα (Σχ.4.3.1) .

- Στη συνέχεια σχηματίζουμε τις stretching συναρτήσεις (τις συναρτήσεις κατανομής των σημείων) στις δύο αυτές πλευρές του πλέγματος .

$$s_{AD} = P \cdot \eta_1^* + (1 - P) \left( 1 - \frac{\tanh[Q(1 - \eta_1^*)]}{\tanh Q} \right) \quad (4.60\alpha) \quad \text{και}$$

$$s_{BC} = P \cdot \eta_2^* + (1 - P) \left( 1 - \frac{\tanh[Q(1 - \eta_2^*)]}{\tanh Q} \right) \quad (4.60\beta) ,$$

όπου  $P$  και  $Q$  , παράμετροι που παρέχουν έλεγχο στο σχηματισμό του πλέγματος και στην ουσία είναι οι μεταβλητές , με τις οποίες μπορούμε να συμπυκνώσουμε ή να αραιώσουμε τις γραμμές του πλέγματος , ανάλογα με τη πλευρά του πλέγματος

που θέλουμε να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας (συνήθως  $Q = 2.0$ ) . Για ισοκατανομή σημείων  $P = 1.0$  .

- Η stretching συνάρτηση για όλα τα εσωτερικά σημεία του πλέγματος δίνεται από τον τύπο :

$$s = s_{AD} + \xi_1^* (s_{BC} - s_{AD}) \quad (4.61) ,$$

όπου  $\xi_1^*$  , είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή ορισμένη όπως και οι  $\eta_1^*$  ,  $\eta_2^*$  για την πλευρά AB του πλέγματος .

Δηλαδή :

$$\xi_1^* = \frac{\xi - \xi_A}{\xi_B - \xi_A} \quad (4.62) .$$

- Συνεπώς , οι συντεταγμένες κάθε σημείου εσωτερικού στο πλέγμα στο σύστημα συντεταγμένων  $x$  ,  $y$  μπορούν να υπολογιστούν από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$x(\xi, \eta) = (1-s)x_{AB}(r_{AB}) + sx_{DC}(r_{DC}) \quad (4.63\alpha) \text{ και}$$

$$y(\xi, \eta) = (1-s)y_{AB}(r_{AB}) + sy_{DC}(r_{DC}) \quad (4.63\beta) ,$$

όπου  $x_{AB}(r_{AB})$  ,  $y_{AB}(r_{AB})$  ,  $x_{DC}(r_{DC})$  και  $y_{DC}(r_{DC})$  είναι οι συντεταγμένες των σημείων στις πλευρές AB και DC του πλέγματος και  $r_{AB}$  και  $r_{DC}$  είναι οι stretching συναρτήσεις των σημείων γι' αυτές τις πλευρές αντίστοιχα .

- Οι stretching συναρτήσεις  $r_{AB}$  και  $r_{DC}$  υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο , που υπολογίζονται οι αντίστοιχες συναρτήσεις  $s_{AD}$  και  $s_{BC}$  για τις πλευρές AD και BC του πλέγματος . Θέτουμε πέρα από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $\xi_1^*$  που ορίσαμε στην εξίσωση (4.62) και άλλη μία ανεξάρτητη μεταβλητή  $\xi_2^*$  ορισμένη ως :

$$\xi_2^* = \frac{\xi - \xi_D}{\xi_C - \xi_D} \quad (4.64) ,$$

που είναι οι λόγοι των αποστάσεων των διαφόρων σημείων πάνω στις πλευρές AB και DC του πλέγματος αντίστοιχα . Επομένως , οι stretching συναρτήσεις υπολογίζονται :

$$r_{AB} = P \cdot \xi_1^* + (1-P) \left( 1 - \frac{\tanh[Q(1-\xi_1^*)]}{\tanh Q} \right) \quad (4.65\alpha) \text{ και}$$

$$r_{DC} = P \cdot \xi_2^* + (1-P) \left( 1 - \frac{\tanh[Q(1-\xi_2^*)]}{\tanh Q} \right) \quad (4.65\beta) .$$

- Οι συντεταγμένες  $x_{AB}$ ,  $y_{AB}$ ,  $x_{DC}$ ,  $y_{DC}$  βρίσκονται με τον ακόλουθο τρόπο :

Για το τοίχωμα :

Υπολογίζουμε το μήκος τόξου , που είναι η απόσταση από το ένα σημείο ως το άλλο πάνω στην καμπύλη της συνάρτησης του τοιχώματος . Θεωρώντας  $L$  το συνολικό μήκος του τοιχώματος τότε το απαραίτητο μήκος τόξου θα είναι για κάθε σημείο :

$$l_i = \int_{x_0}^{x_i} \sqrt{1+f'^2} dx \quad (4.66) ,$$

όπου :

$x_0$  , το σημείο  $A$  ,

$x_i$  , το τυχαίο σημείο ,

$l_i$  , η απόσταση του τυχαίου σημείου από το σημείο  $A$  και

$f'$  , η παράγωγος της συνάρτησης μορφής του τοιχώματος .

Το μήκος τόξου ορίζεται επίσης ως :

$$l_i = L \cdot r_{AB} \quad (4.67) .$$

Το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται υπολογιστικά με τον κανόνα Simpson , όπου αν

$$g(x) = \sqrt{1+f'^2} \quad (4.68) \quad \text{τότε :}$$

$$S(g) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} h_i \left[ g(x_i) + 4g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + g(x_{i+1}) \right] \quad (4.69) .$$

$$\left( \text{θέτουμε : } h_i = \frac{x_i - x_0}{10000} \right)$$

Με τη μέθοδο Secant μπορούμε να προσεγγίσουμε τα διάφορα  $x_{AB}$  όπως περιγράφεται παρακάτω . Αν θέσουμε :

$$h(a) = L \cdot r_{AB} - \int_{x_0}^{x_i} \sqrt{1+f'^2} dx = 0 \quad (4.70) ,$$

τότε η κάθε προσέγγιση του  $x_{AB}$  γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h(a) - h(x_n)}{g'(x_n)} \quad (4.71) ,$$

όπου :

$$g'(x_n) = \frac{h(x_n) - h(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (4.72) .$$

Για τη χρησιμοποίηση χρειάζονται δύο πρώτες εκτιμήσεις του  $x_{AB}$  :

$$x_1 = x_A + (x_B - x_A)r_{AB} \quad (4.73\alpha) \text{ και}$$

$$x_2 = x_1 + 0.1 \left( \frac{L}{m} \right) \quad (4.73\beta) ,$$

όπου  $m$  , είναι το πλήθος των κόμβων στην πλευρά  $AB$  .

Με συνεχείς επαναλήψεις προσεγγίζουμε το τελικό  $x_{AB}$  και η διαδικασία συνεχίζεται και για τα υπόλοιπα σημεία που βρίσκονται πάνω στο τοίχωμα . Τα ανάλογα  $y_{AB}$  υπολογίζονται από τη συνάρτηση μορφής του τοιχώματος :

$$y_{AB} = f(x_{AB}) \quad (4.74) .$$

Ο ίδιος τρόπος χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό των συντεταγμένων  $x_{DC}$  ,  $y_{DC}$  στην επιφάνεια της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού υμένα .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 :

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

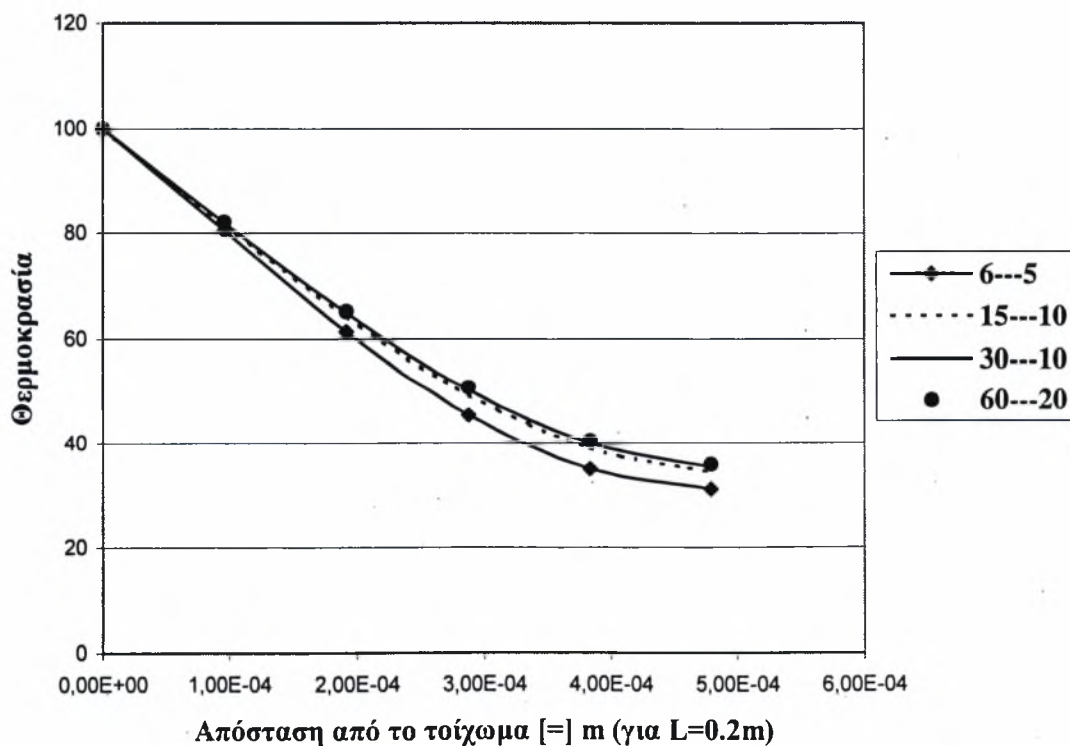
#### 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για την εκτέλεση των προγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε Η/Υ PC Pentium 366 MMX με 64 MB RAM .Οι φυσικές ιδιότητες του ρευστού που ήταν για όλες τις περιπτώσεις σταθερές , ανταποκρίνονται σε νερό στους 25 °C . Θεωρήθηκε ότι το ρευστό εισέρχεται με μια σταθερή θερμοκρασία 0 °C , ενώ το τοίχωμα βρίσκεται σε μια σταθερή θερμοκρασία 100 °C και ο αέρας που περιβάλλει το ρευστό στους 25°C . Το κεκλιμένο τοίχωμα σχηματίζει γωνία με τον ορίζοντα που ανέρχεται στις 30°.

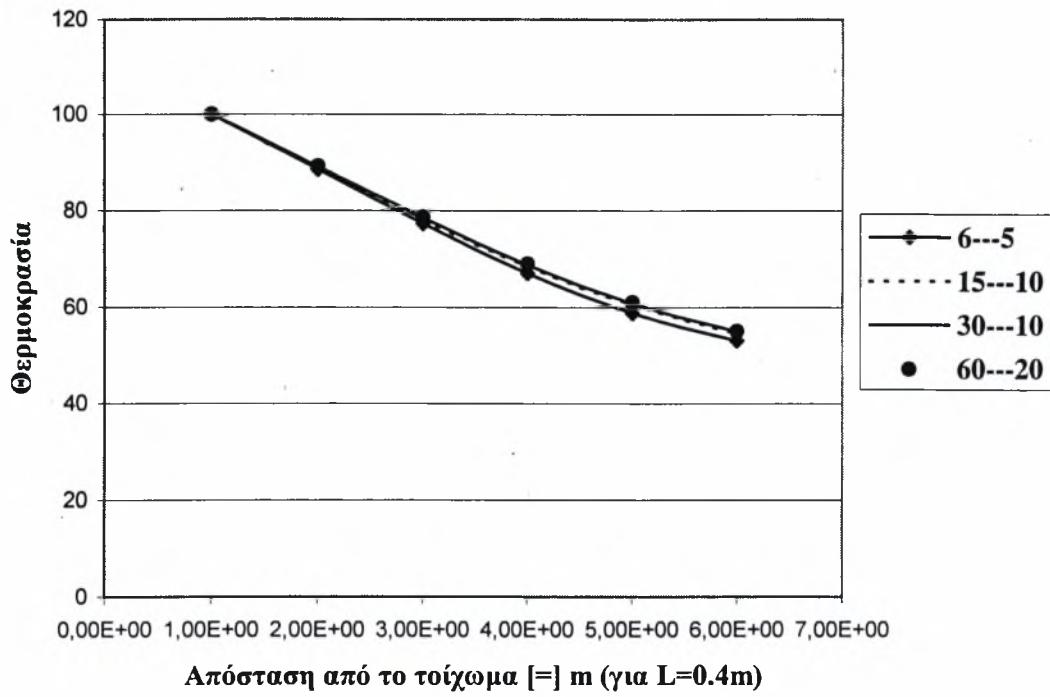
#### 5.2 ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε αναφέρεται στο παράρτημα Α και τα αποτελέσματα είναι για αριθμό Reynolds 180 . Για το επίπεδο τοίχωμα , τέθηκε πρώτα από όλα το πρόβλημα της διακριτοποίησης , ποιος είναι , δηλαδή , ο απαραίτητος αριθμός κόμβων για ένα συγκεκριμένο μήκος τοιχώματος ώστε τα αποτελέσματα που προκύπτουν να μην εμφανίζουν σφάλματα που έχουν να κάνουν με τον περιορισμένο αριθμό σημείων . Έτσι , θεωρήθηκε τοίχωμα μήκους 60 cm , με ένα μεγάλο συντελεστή συναγωγής για τον αέρα ( $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ ) , στο οποίο πραγματοποιήσαμε 4 εκτελέσεις του προγράμματος για 4 διαφορετικές διακριτοποιήσεις . Στην πρώτη εκτέλεση χωρίσαμε το μήκος του τοιχώματος σε 6 ίσα διαστήματα , ενώ το πάχος του υμένα σε 5 ίσα διαστήματα (30 κόμβοι) , στη δεύτερη το μήκος του τοιχώματος σε 15 ίσα διαστήματα και το πάχος του υμένα σε 10 ίσα διαστήματα (150 κόμβοι) , στην επόμενη σε 30 και 10 αντίστοιχα (300 κόμβοι) και στην τελευταία σε 60 και 20 αντίστοιχα (1200 κόμβοι) . Ο χρόνος που χρειάστηκε για την εκτέλεση του προγράμματος με την τελευταία διακριτοποίηση ήταν περίπου 7-8 λεπτά . Η σύγκριση έγινε από την κατανομή της θερμοκρασίας ως προς τον άξονα y για τρία διαφορετικά μήκη : για 20 cm , για 40 cm και για 60 cm , όπως φαίνεται και

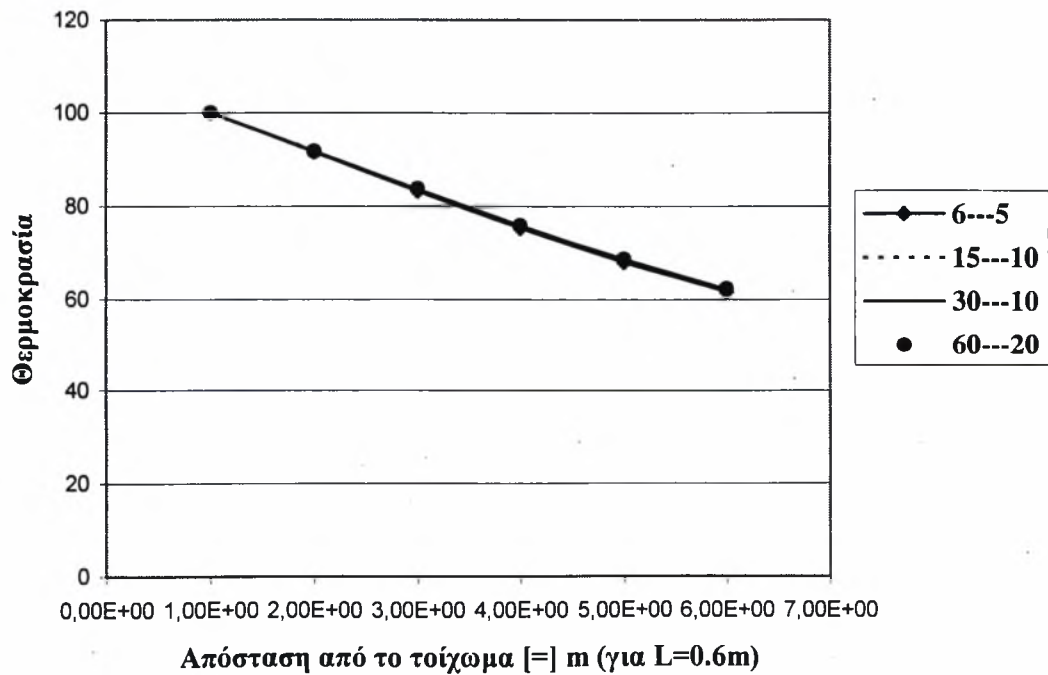
στα διαγράμματα των Σχημάτων 5.2.1 , 5.2.2 και 5.2.3 . Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί , ότι υπάρχει μια σχετική απόκλιση στα 20 cm (Σχ.5.2.1) συγκρίνοντας την πρώτη με την τελευταία διακριτοποίηση , η οποία απόκλιση φτάνει περίπου τους 5 °C για το τελευταίο σημείο. Παρουσιάζεται , όμως , μια σύγκλιση στα υπόλοιπα δύο διαγράμματα (Σχ.5.2.2 και 5.2.3) και ιδίως σε αυτό των 60 cm , που σημαίνει ότι η διακριτοποίηση παίζει το σημαντικότερο ρόλο στην αρχή του πλέγματος , όπου έχει σημασία ο αριθμός των βημάτων τα οποία έχουν προηγηθεί για τον υπολογισμό των σημείων στα 20 cm (για την πρώτη διακριτοποίηση έχει προηγηθεί μόνο ένα βήμα) . Σύγκριση σε μικρότερα μήκη θα εμφάνιζε απόκλιση όχι μόνο στην πρώτη αλλά και ανάμεσα στις υπόλοιπες διακριτοποιήσεις . Αυξάνοντας , όμως , τη διακριτοποίηση , αυξάνεται και ο χρόνος υπολογισμού των θερμοκρασιών και συνεπώς θεωρώντας λογικό το χρόνο που χρειάζεται για την εκτέλεση του προγράμματος για την τελευταία διακριτοποίηση καθώς και τα αποτελέσματα ικανοποιητικά , αφού μεγαλύτερη διακριτοποίηση θα συνέισφερε αμελητέα στην σύγκλιση των θερμοκρασιών , αποφασίστηκε για εκτελέσεις του προγράμματος σε μήκος τοιχώματος 60 cm να χρησιμοποιείται διακριτοποίηση 60 ίσων διαστημάτων ως προς τον άξονα x και 20 ίσων διαστημάτων ως προς τον άξονα y .



**Σχήμα 5.2.1 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για μήκος τοιχώματος 20 cm .**



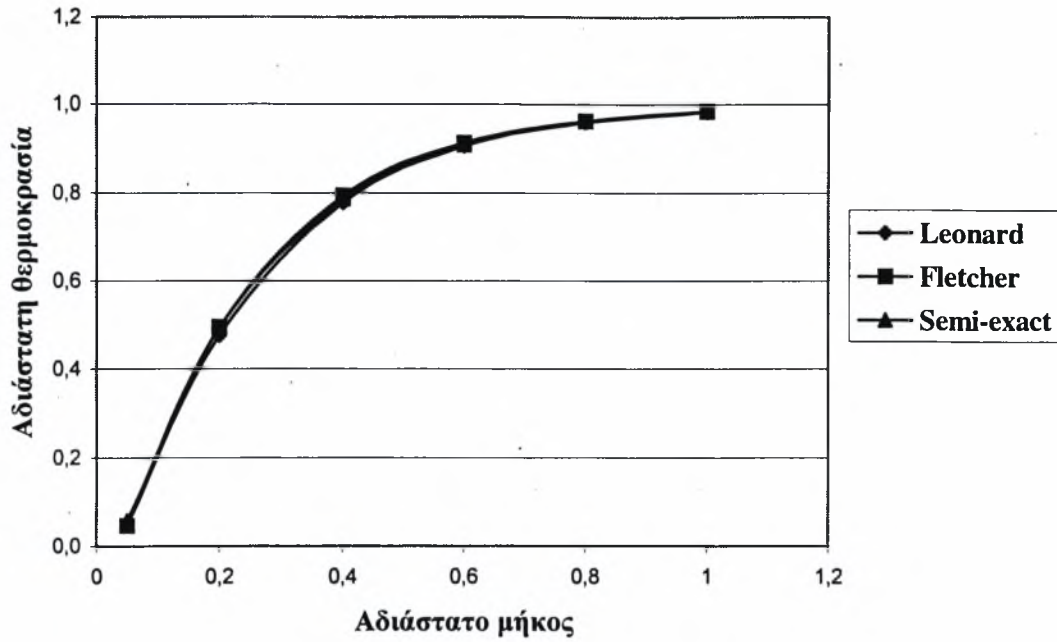
Σχήμα 5.2.2 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για μήκος τοιχώματος 40 cm .



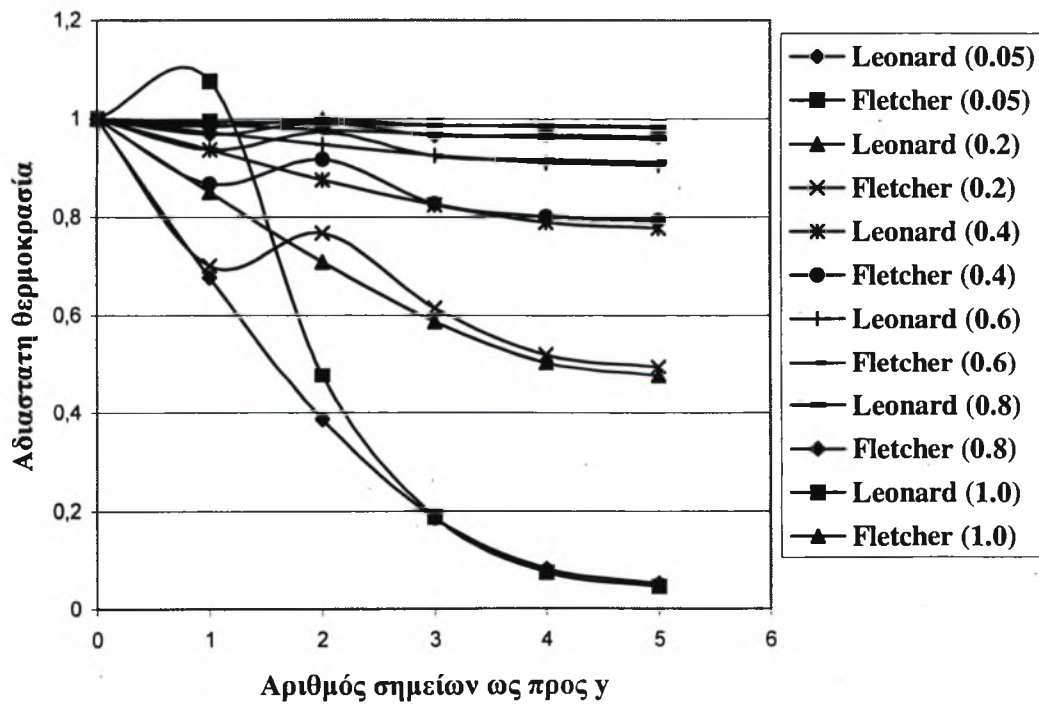
Σχήμα 5.2.3 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για μήκος τοιχώματος 60 cm .

Στη συνέχεια έγινε προσπάθεια να εξεταστεί η ακρίβεια της μεθόδου σε σύγκριση με αποτελέσματα από την υπάρχουσα βιβλιογραφία για ανάλογο πρόβλημα. Η σύγκριση πραγματοποιήθηκε με αποτελέσματα του Fletcher (1991) για ροή ρευστού ανάμεσα σε δύο τοιχώματα , από το οποίο πήραμε την κατανομή των θερμοκρασιών για τη μισή απόσταση των τοιχωμάτων , αλλά και με μία ημιαναλυτική λύση του Brown (1960) και θεωρώντας με τη μέθοδο Leonard ως αδιαβατική την ελεύθερη επιφάνεια του υμένα . Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.4 έχουμε τη σύγκριση στις θερμοκρασίες της επιφάνειας του υμένα ως προς το μήκος , ανάμεσα στη μέθοδο Leonard , τη λύση που δίνει ο Fletcher και την ημιαναλυτική λύση του Brown (1960). Τα μεγέθη που αναφέρονται τόσο στο διάγραμμα αυτό , όσο και στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.5 , είναι σε αδιάστατη μορφή . Παρατηρείται , λοιπόν , μια σχεδόν απόλυτη ταύτιση των αποτελεσμάτων και των τριών λύσεων που συνηγορεί στην ορθότητα της μεθόδου Leonard . Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.5 έχουμε την κατανομή των θερμοκρασιών ως προς τον άξονα  $y$  της μεθόδου Leonard και του Fletcher σε ορισμένα αδιάστατα μήκη που αναφέρονται στο υπόμνημα μέσα στις παρενθέσεις . Γίνεται αντιληπτή η αστάθεια που εμφανίζεται στα αποτελέσματα του Fletcher για τα πρώτα σημεία ως προς το  $y$  για αδιάστατο μήκος μέχρι και 0.6 , σε αντίθεση με τη μέθοδο Leonard η οποία δεν παρουσιάζει κανένα τέτοιο πρόβλημα αστάθειας σε κανένα σημείο . Αυτή η αστάθεια του Fletcher βέβαια διορθώνεται μετά από το δεύτερο σημείο σε κάθε αδιάστατο μήκος και δεν υπάρχει για αδιάστατο μήκος 0.8 και πάνω , κι επίσης , φαίνεται η λύση του , μόλις ξεπερνάει τα σημεία όπου εμφανίζεται η αστάθεια , να συγκλίνει σε μεγάλο βαθμό με τη λύση της μεθόδου Leonard , γεγονότα που αποδεικνύουν όχι μόνο την ορθότητα της μεθόδου Leonard αλλά και την ευστάθεια της .





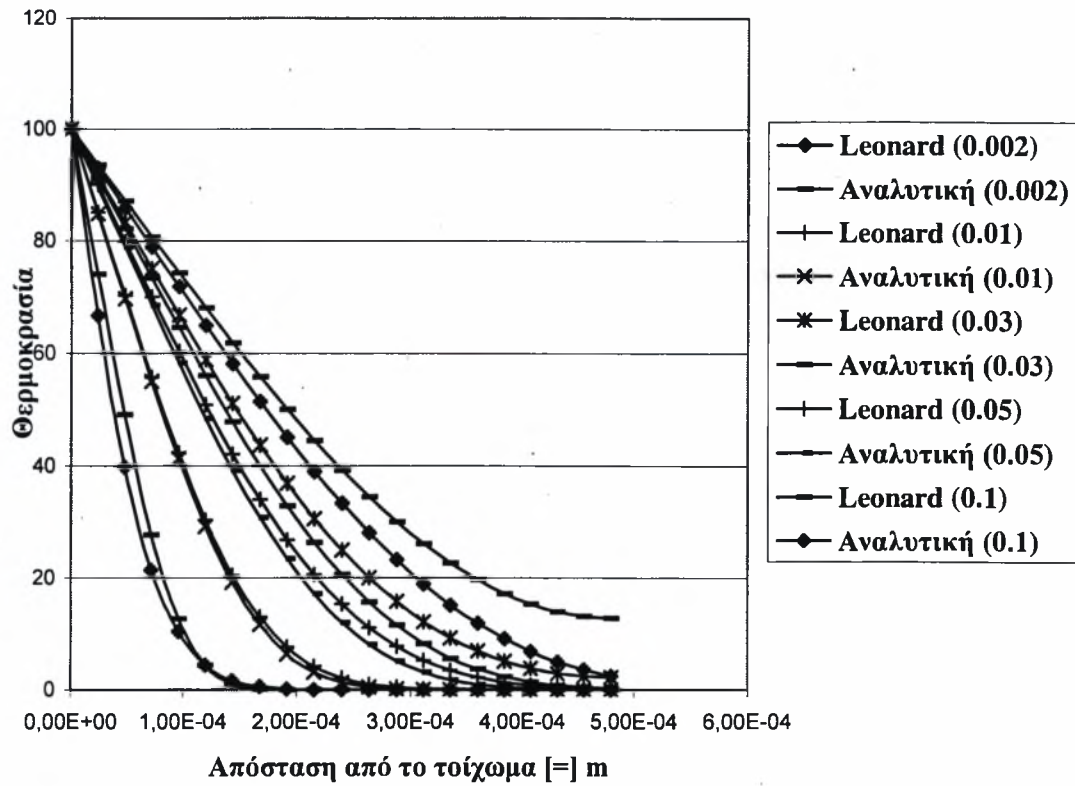
Σχήμα 5.2.4 : Αδιάστατη θερμοκρασία στην επιφάνεια του υμένα ως προς το αδιάστατο μήκος .



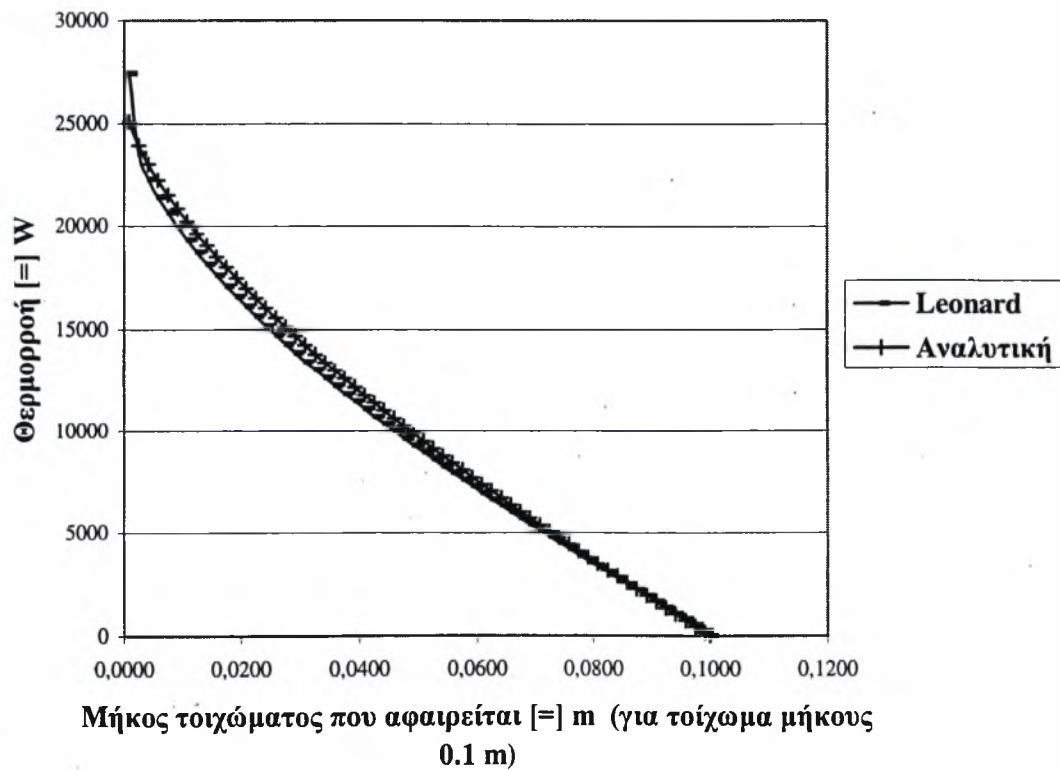
Σχήμα 5.2.5 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για διάφορα αδιάστατα μήκη .



Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.6 γίνεται μια σύγκριση της αναλυτικής λύσης με τη λύση που προκύπτει από τη μέθοδο Leonard για αδιαβατική επιφάνεια υμένα , τοίχωμα μήκους 10 cm και διακριτοποίηση 50 ίσων διαστημάτων στον άξονα  $x$  και 20 στον άξονα  $y$  . Παρατηρείται , λοιπόν , στο πρώτο διάστημα μια μικρή απόκλιση της λύσης με τη μέθοδο Leonard σε σχέση με την αναλυτική λύση , γεγονός που οφείλεται στην αστάθεια του πρώτου βήματος που παρουσιάζουν όλες οι αριθμητικές μέθοδοι , λόγω του ορισμού των οριακών συνθηκών , καθώς η θερμοκρασία στο τοίχωμα , κατά την είσοδο του ρευστού που έχει  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  , είναι στους  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  . Στα αμέσως επόμενα διαστήματα υπάρχει σύγκλιση , ενώ για ακόμη μεγαλύτερα  $x$  εμφανίζεται πάλι απόκλιση που οφείλεται στο ό,τι η αναλυτική λύση έχει βγει έξω από τα όρια της περιοχής στην οποία ικανοποιούνται οι παραδοχές , όπως αναφέρθηκαν στο 3ο κεφάλαιο , με συνέπεια τα αποτελέσματα που δίνει να μη θεωρούνται αξιόπιστα και συγκρίσιμα με τα αποτελέσματα της μεθόδου Leonard . Η αστάθεια του πρώτου βήματος φαίνεται σαφέστερα στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.7 όπου έχουμε τη θερμοροή για τοίχωμα μήκους 10 cm αφαιρώντας κάθε φορά μήκος ίσο με την απόσταση των γειτονικών κόμβων κατά τον άξονα  $x$  από την αρχή του τοιχώματος , προσπαθώντας με αυτό τον τρόπο να παρατηρήσουμε την επίδραση του πρώτου διαστήματος στη συνολική θερμοροή . Έτσι , μπορεί να σημειωθεί ότι για το πρώτο σημείο που αναφέρεται στη θερμοροή σε όλο το τοίχωμα υπάρχει απόκλιση εξαιτίας του λόγου που προαναφέρθηκε ενώ στα υπόλοιπα σημεία που έχει αφαιρεθεί η επίδραση διαδοχικά από το πρώτο διάστημα ως και το τελευταίο υπάρχει σχεδόν πλήρης ταύτιση . Πρέπει να επισημανθεί σε αυτό το σημείο πως αυξάνοντας τη διακριτοποίηση , μειώνοντας , δηλαδή , το μήκος του πρώτου διαστήματος αυτή η απόκλιση θα τείνει να εξαλειφθεί και να υπάρχει απόλυτη συμφωνία στα όρια που ισχύει η αναλυτική λύση .

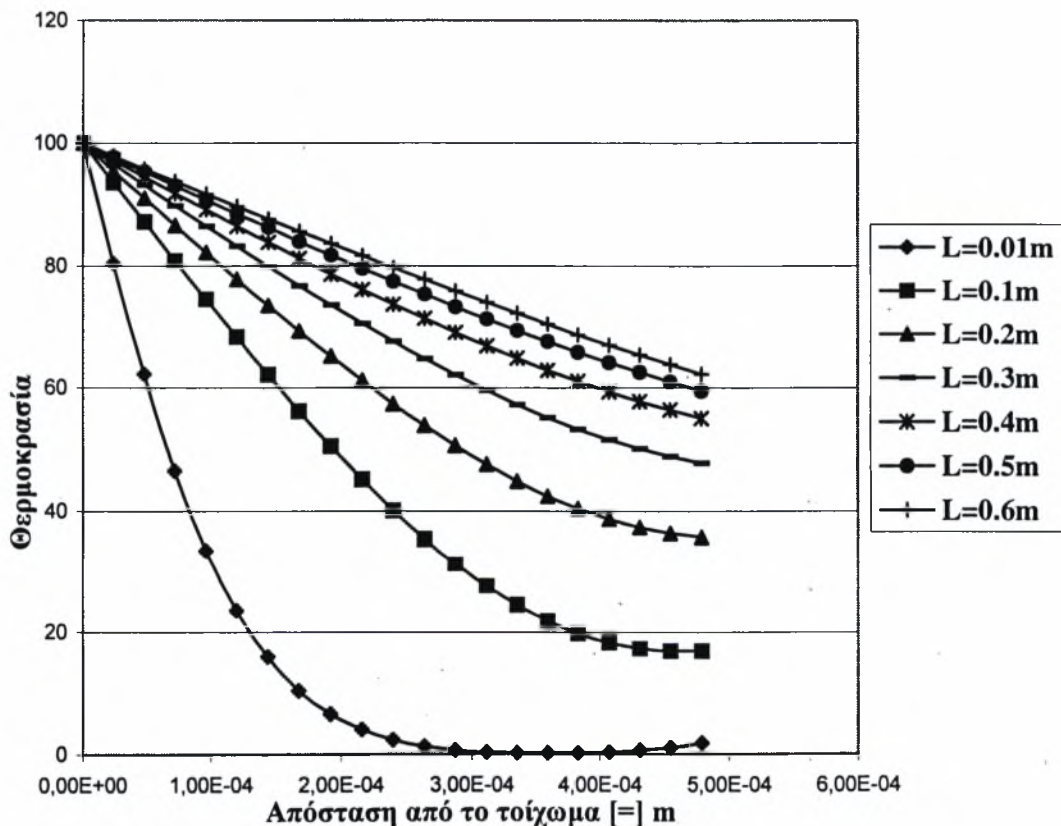


Σχήμα 5.2.6 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για διάφορα μήκη .



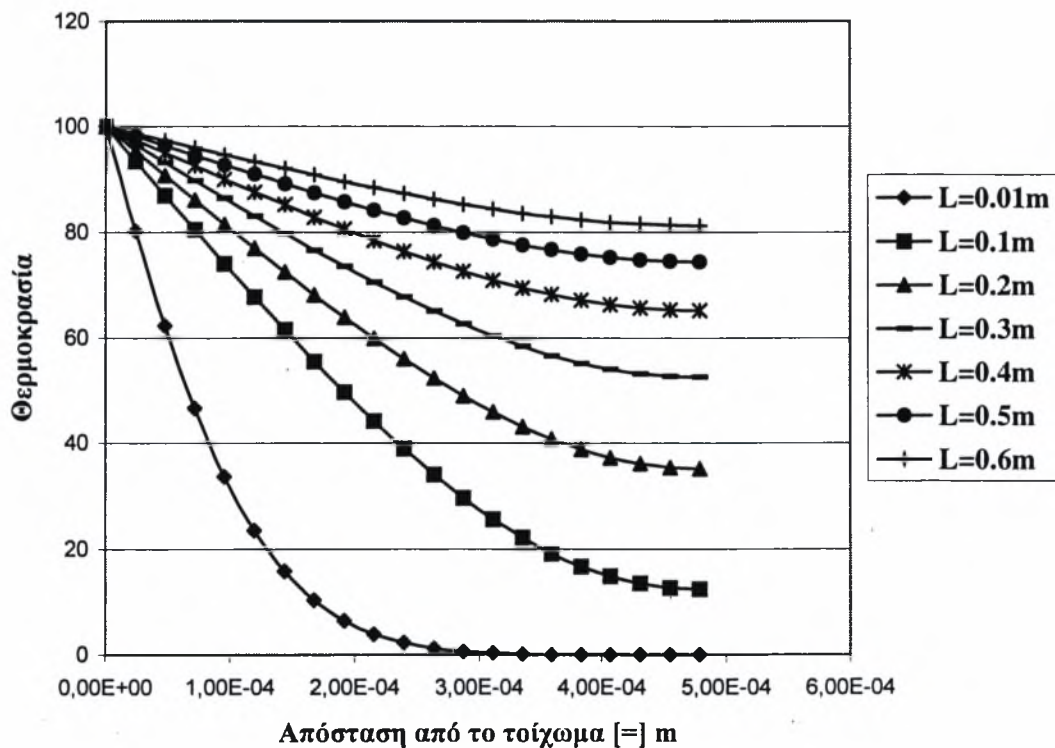
Σχήμα 5.2.7 : Θερμορροή ως προς μήκος τοιχώματος που αφαιρείται .

Επιβεβαιώνοντας, λοιπόν, ότι οι θερμοκρασίες που προκύπτουν με τη μέθοδο Leonard είναι συνεπείς και χωρίς να παρουσιάζονται αστάθειες αριθμητικές, εξετάσαμε αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις ροής υμένων σε επίπεδο κεκλιμένο τοίχωμα. Η πρώτη είναι για μεγάλο μήκος τοιχώματος (60 cm) και μεγάλο συντελεστή συναγωγής ( $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ ), που στην ουσία αντιστοιχεί σε κίνηση του αέρα που περιβάλλει τον υμένα (π.χ. φύσημα πάνω από τον υμένα). Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.8 έχουμε την κατανομή των θερμοκρασιών ως προς  $y$  για ορισμένα μήκη. Παρατηρούμε ότι ενώ η κατανομή των θερμοκρασιών στην αρχή έχει ασυμπτωτική μορφή, στη συνέχεια αυτή η μορφή γίνεται γραμμική, χωρίς να τείνει να αποκτήσει όλος ο υμένας μια ομοιόμορφη θερμοκρασία, εξαιτίας της θερμότητας που απάγεται από τον αέρα. Βρίσκεται, δηλαδή, στο τέλος του τοιχώματος, ο υμένας σε μια σταθερή κατάσταση στην οποία όλη σχεδόν η θερμότητα που λαμβάνει από το τοίχωμα φεύγει στο περιβάλλον.



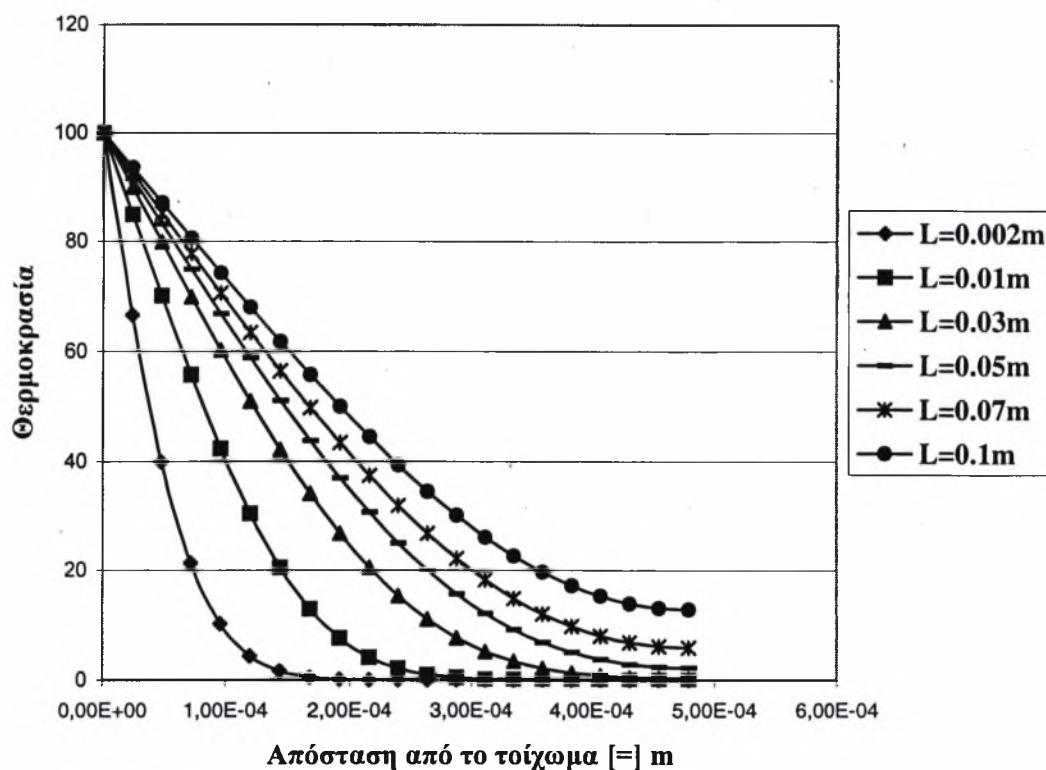
Σχήμα 5.2.8 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα  $y$  για  $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Για το ίδιο μήκος τοιχώματος, αλλά θεωρώντας αδιαβατική την επιφάνεια του υμένα ( $h = 0 \text{ W/m}^2\text{K}$ ), δηλαδή χωρίς απαγωγή θερμότητας από το περιβάλλον γίνεται αναφορά στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.9. Σε αυτή την περίπτωση είναι προφανές ότι ο υμένας θα αποκτήσει υψηλότερη θερμοκρασία για τα αντίστοιχα μήκη από ό,τι στην προηγούμενη περίπτωση αφού δε φεύγει θερμότητα προς το περιβάλλον, ενώ προς το τέλος του τοιχώματος μπορεί να δει κανείς ότι οι θερμοκρασίες στους κόμβους, που βρίσκονται πιο κοντά στην επιφάνεια του υμένα, έχουν την τάση να αποκτήσουν μια σταθερή τιμή.



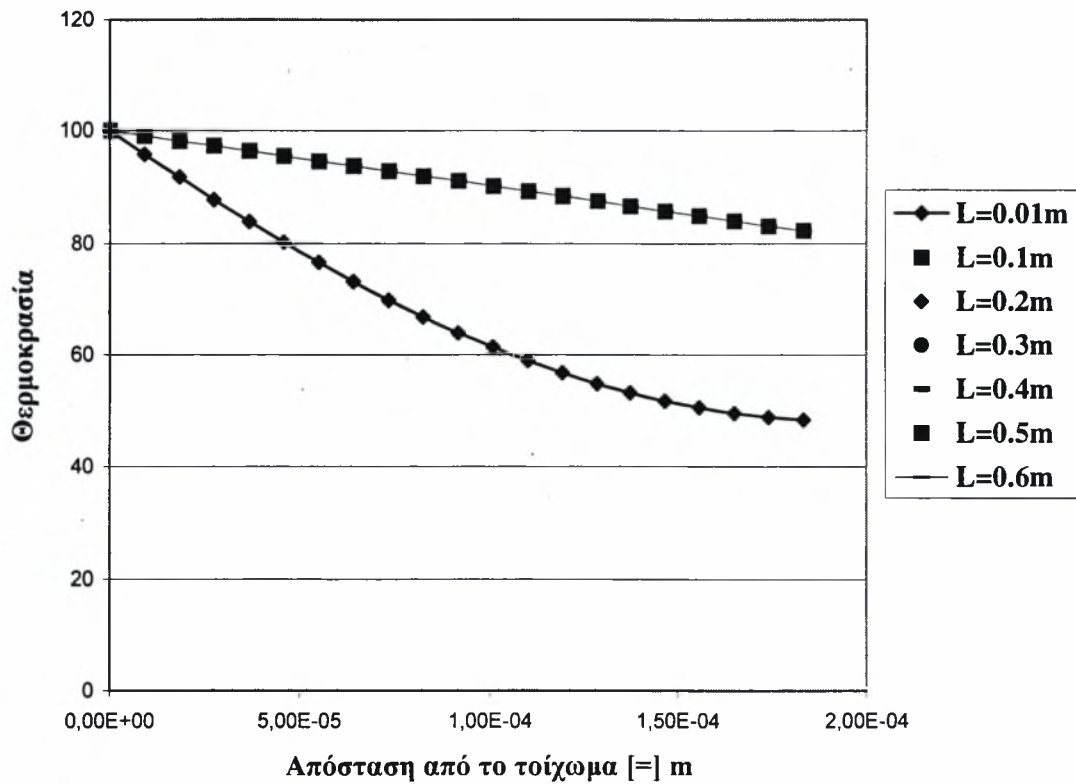
Σχήμα 5.2.9 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για  $h = 0 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στην αρχή του τοιχώματος για το ίδιο πρόβλημα αδιαβατικής επιφάνειας του υμένα, λαμβάνουμε την κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για μήκη μικρότερα των 10 cm, όπου είναι εμφανής η ασυμπτωτική μορφή που σχηματίζουν οι θερμοκρασίες σε σχέση με την απόσταση από το τοίχωμα.

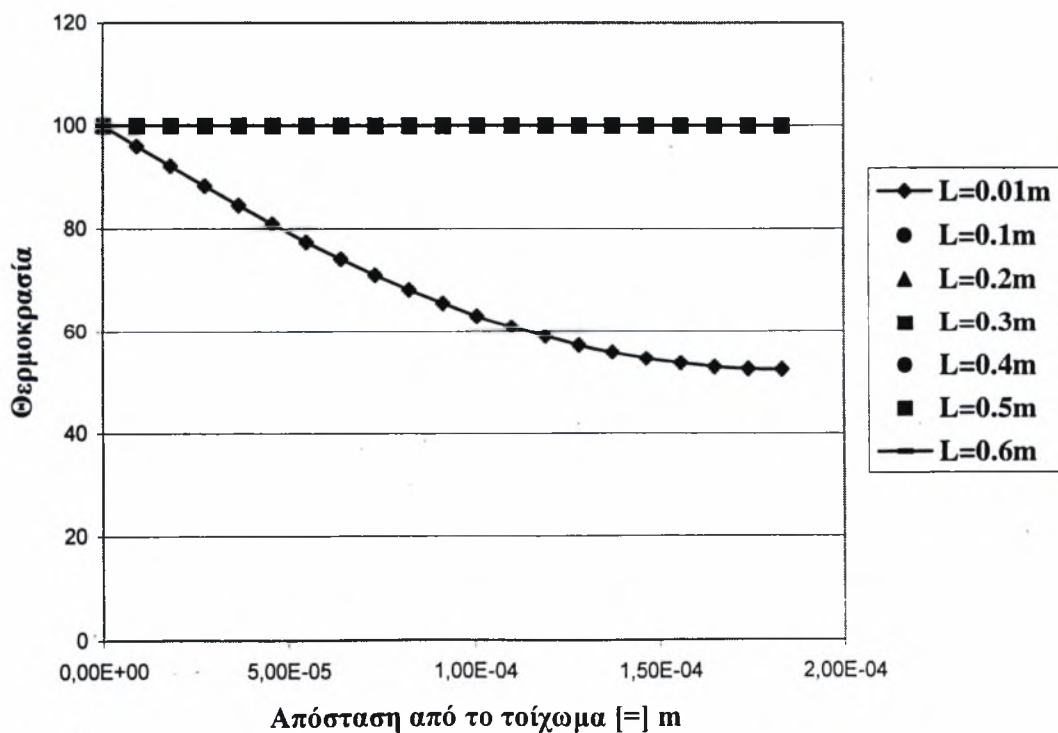


Σχήμα 5.2.10 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για  $h = 0 \text{ W/m}^2\text{K}$  .

Οι παραπάνω περιπτώσεις αναφέρονταν σε αριθμό Reynolds 180 . Δημιουργώντας τα διαγράμματα των Σχημάτων 5.2.11 και 5.2.12 κατανομής θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y , για μήκος τοιχώματος 60 cm , συντελεστή συναγωγής  $1000 \text{ W/m}^2\text{K}$  και  $0 \text{ W/m}^2\text{K}$  αντίστοιχα αλλά για αριθμό Reynolds 10 παρατηρούμε συγκρίνοντας με τα αντίστοιχα διαγράμματα των Σχημάτων 5.2.8 και 5.2.9 , ότι το ρευστό έρχεται πολύ πιο γρήγορα (από τα 10 cm κιόλας) σε μια σταθερή κατάσταση . Λόγω της χαμηλής ταχύτητας της ροής , το υγρό αποκτάει την τελική θερμοκρασία σχεδόν αμέσως , με αποτέλεσμα μετά τα πρώτα λίγα εκατοστά η θερμοκρασία του υγρού είτε να αποκτήσει ομοιόμορφη γραμμική κατανομή θερμοκρασίας ως προς τον άξονα y στην περίπτωση του μεγάλου συντελεστή συναγωγής του διαγράμματος του Σχήματος 5.2.11 (το ίδιο ποσό θερμότητας που παραλαμβάνει το ρευστό από το τοίχωμα απάγεται από τον αέρα που το περιβάλλει) , είτε να αποκτήσει μια σταθερή τιμή για όλο τον υμένα (τη τιμή της θερμοκρασίας του τοιχώματος) στην περίπτωση της αδιαβατικής επιφάνειας του διαγράμματος του Σχήματος 5.2.12 .

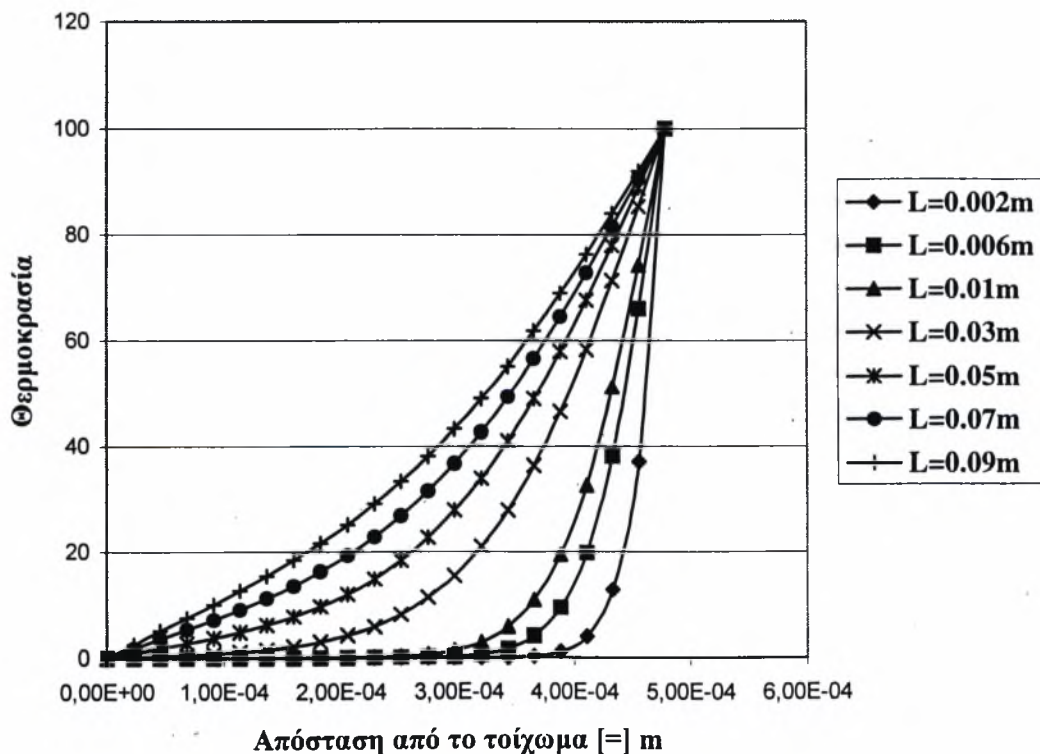


Σχήμα 5.2.11 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για  $h=1000$   $W/m^2K$ .



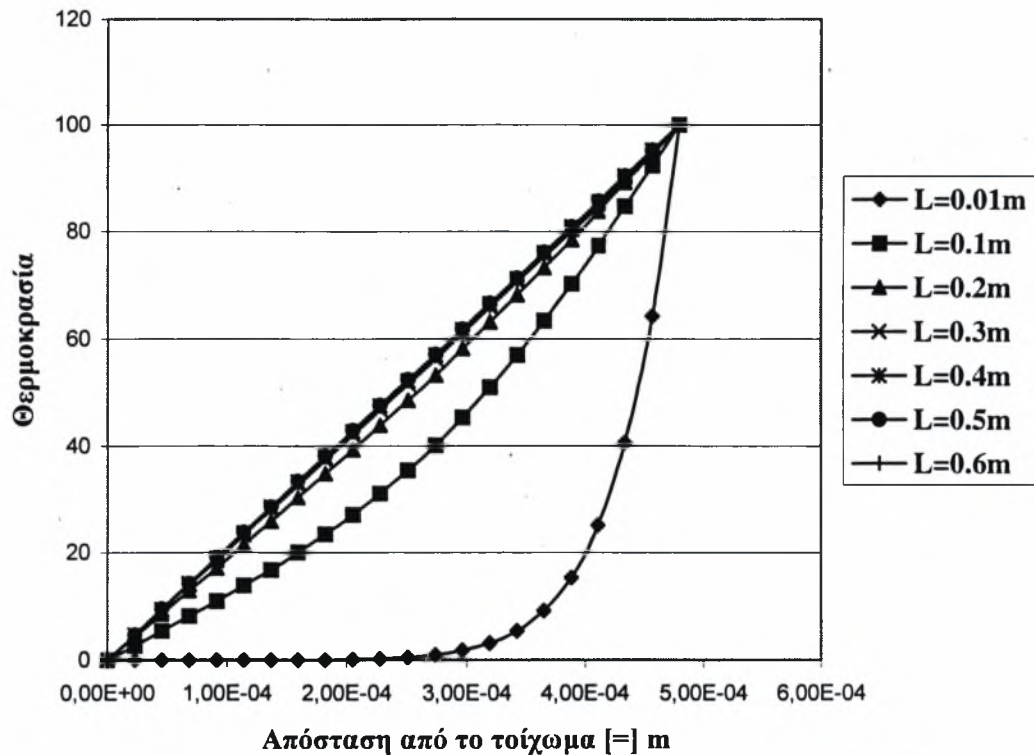
Σχήμα 5.2.12 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y για  $h = 0$   $W/m^2K$ .

Μια περίπτωση με πρακτική σημασία είναι όταν έχουμε στην επιφάνεια του ρευστού υμένα αντί για συναγωγή με κάποιο αέριο σταθερή θερμοκρασία. Αυτή η περίπτωση συναντάται έντονα στη συμπύκνωση με άμεση επαφή. Τα διαγράμματα των Σχημάτων 5.2.13 και 5.2.14 αναπαριστούν την κατανομή των θερμοκρασιών ως προς  $y$  για αριθμό Reynolds 180, ενώ η θερμοκρασία εισόδου του ρευστού είναι  $0^\circ\text{C}$ , το τοίχωμα έχει κι αυτό σταθερή θερμοκρασία  $0^\circ\text{C}$  και η επιφάνεια του υγρού υμένα σταθερή θερμοκρασία  $100^\circ\text{C}$ . Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.13 δίνεται έμφαση στα πρώτα εκατοστά (μέχρι 10 cm), ενώ στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2.14 η κατανομή των θερμοκρασιών παρουσιάζεται για ένα συνολικό μήκος τοιχώματος 60 cm. Παρατηρούμε ότι, ενώ στα πρώτα εκατοστά η κατανομή θερμοκρασιών έχει μια ασυμπτωτική μορφή, για τα επόμενα εκατοστά (από τα 20 cm) αποκτάει γραμμική μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι ο υμένας έχει φτάσει σε μια σταθερή κατάσταση, όπου δε σημειώνεται καμιά περαιτέρω αλλαγή στις τιμές των θερμοκρασιών με την αύξηση του μήκους του τοιχώματος.



Σχήμα 5.2.13 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα  $y$ .



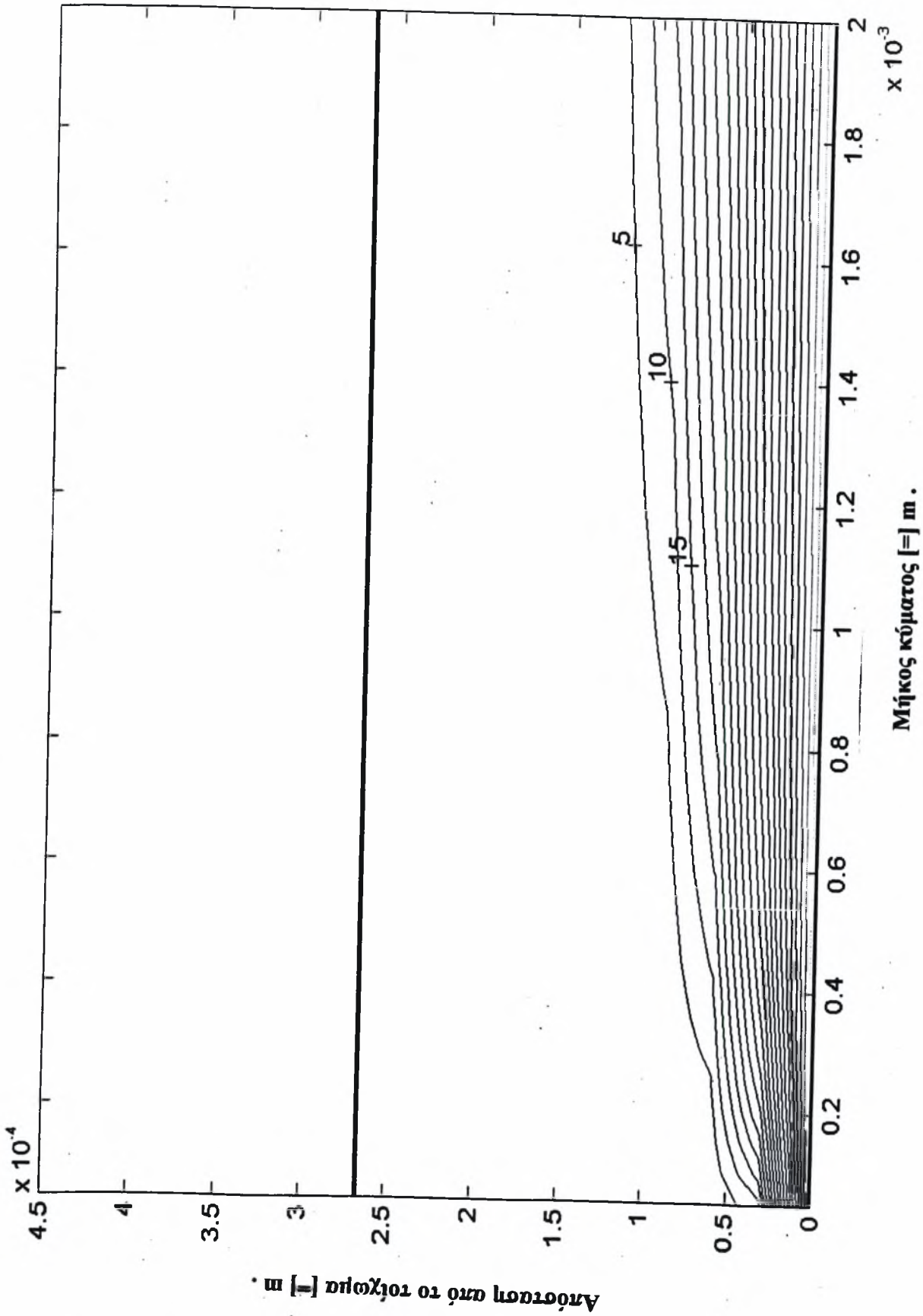


Σχήμα 5.2.14 : Κατανομή θερμοκρασιών ως προς τον άξονα y .

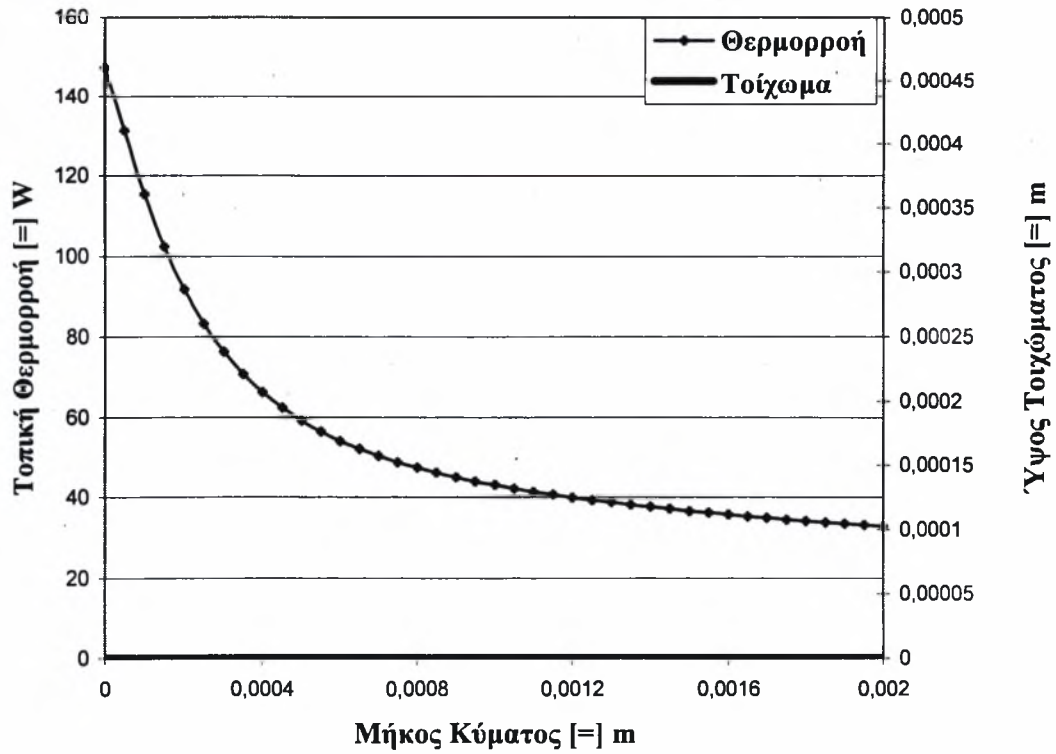
Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα που αποτελεί παραλλαγή του παραπάνω είναι η μεταφορά μάζας από τη διεπιφάνεια προς το εσωτερικό του υμένα . Τέτοια φαινόμενα λαμβάνουν χώρα μετά την απορρόφηση αερίων σε υγρούς διαλύτες , όπως σε συσκευές καθαρισμού απαερίων και σε κύκλα ψύξης που λειτουργούν με απορρόφηση . Τα διαγράμματα για τη μεταφορά μάζας θα είναι σχεδόν παρόμοιας μορφής , με τη διαφορά ότι , λόγω του γεγονότος ότι η διαχυτότητα μάζας είναι δύο τάξεις μικρότερη από τη θερμοδιαχυτότητα , το οριακό στρώμα θα είναι αρκετά στενό . Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να απαιτείται μεγαλύτερο μήκος τοιχώματος ώστε να παρατηρηθούν αξιοσημείωτες αλλαγές στις συγκεντρώσεις .

### 5.3 ΣΤΟ ΚΥΜΑΤΟΕΙΔΕΣ ΤΟΙΧΩΜΑ

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του θερμοκρασιακού προφίλ στο κυματοειδές τοίχωμα παρατίθεται στο παράρτημα Β (το πρόγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για επίπεδο τοίχωμα) . Το μήκος κύματος του τοιχώματος είναι 2 mm κατά τον άξονα x και η διακριτοποίηση που ακολουθήθηκε είναι 40 ίσα διαστήματα κατά μήκος του τοιχώματος και 16 ίσα διαστήματα ως προς το πάχος του υμένα . Ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος για αυτή τη διακριτοποίηση υπολογίστηκε σε περίπου 3 λεπτά . Για αυτό το τοίχωμα τα αποτελέσματα παριστάνονται σε διαγράμματα με ισοθερμοκρασιακές καμπύλες και διαγράμματα που παρουσιάζουν τη μεταβολή της τοπικής θερμορροής ανάλογα με το μήκος του τοιχώματος . Στις ισοθερμοκρασιακές καμπύλες εμφανίζονται επίσης , με έντονες γραμμές και οι μορφές του τοιχώματος και της ελεύθερης επιφάνειας , η οποία , όμως , είναι ελαφρώς μετατοπισμένη πιο χαμηλά για να διακρίνονται καλύτερα οι ισοθερμοκρασιακές καμπύλες . Στα διαγράμματα της τοπικής θερμορροής παρουσιάζεται μόνο η καμπύλη της επιφάνειας του τοιχώματος και ταυτόχρονα παρατίθεται η καμπύλη της τοπικής θερμορροής για επίπεδο τοίχωμα στον ίδιο αριθμό Reynolds , που γίνεται αναφορά , ώστε να γίνεται μια άμεση σύγκριση ανάμεσα στο επίπεδο και το κυματοειδές τοίχωμα στους ρυθμούς μετάδοσης θερμότητας . Θεωρήθηκαν τα εξής πλάτη για το κύμα του τοιχώματος (σε αδιάστατους αριθμούς  $\hat{\alpha} = \alpha \frac{2\pi}{L}$  , όπου  $\hat{\alpha}$  το αδιάστατο πλάτος ,  $\alpha$  το διαστατικό πλάτος και L το μήκος κύματος) : 0.05 , 0.1 , 0.15 , 0.3 , 0.5 και οι παρακάτω αντιπροσωπευτικοί αριθμοί Reynolds : 80, 180 , 220 , 300 . Τα δεδομένα που χρειάζονταν για την επίλυση του πεδίου των ταχυτήτων καθώς και για τη μορφή της κυματοειδούς επιφάνειας του υμένα δόθηκαν από την υπολογιστική μελέτη του Bontozoglou (2000) . Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα διαφορετικά πλάτη τοιχώματος και τους διαφορετικούς αριθμούς Reynolds συγκρίνονται όχι μόνο μεταξύ τους αλλά και με επίπεδο τοίχωμα για το οποίο η ροή του υμένα έχει αριθμό Reynolds 180 (Σχ.5.3.1) .



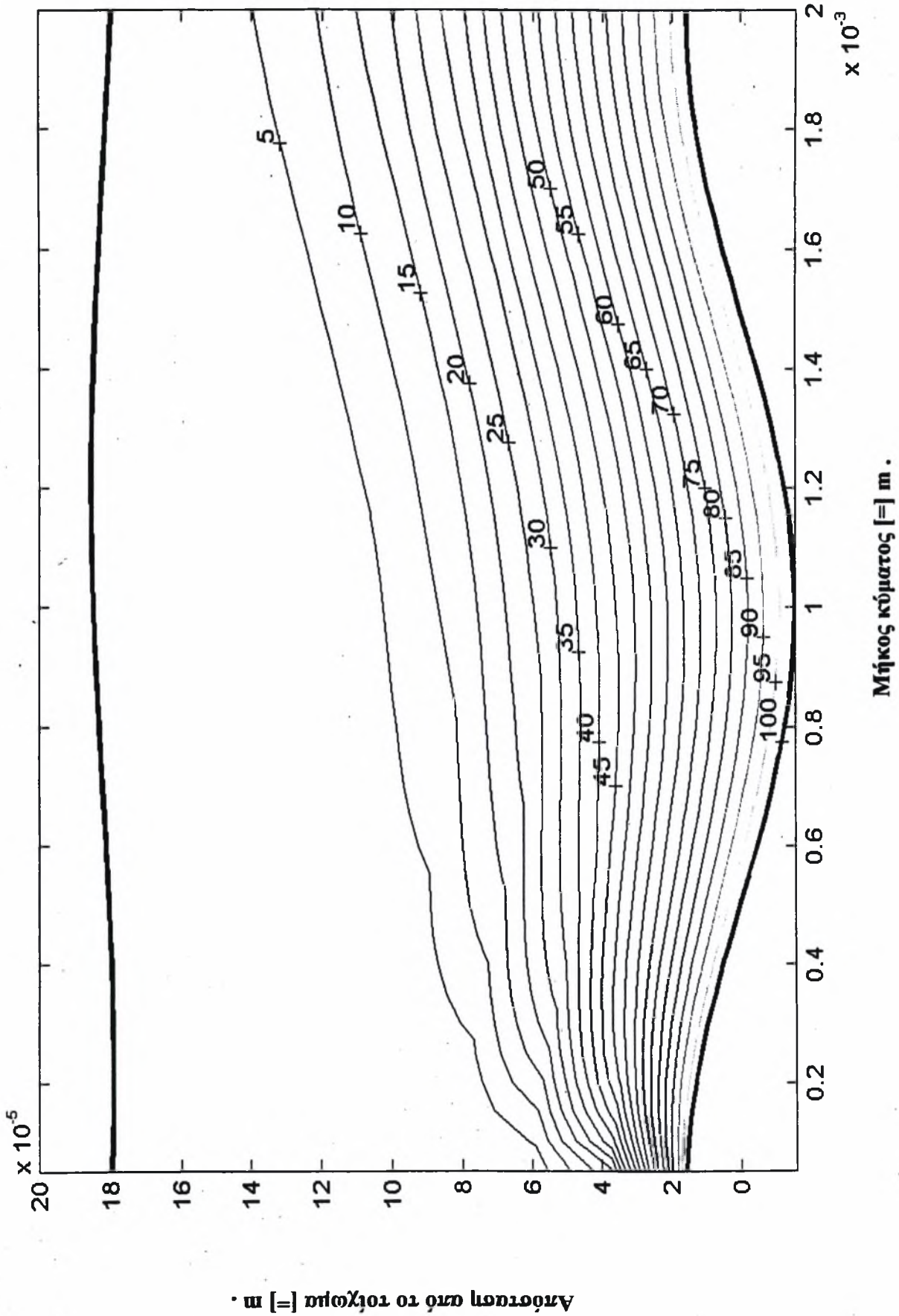
Σχήμα 5.3.1 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για επίπεδο τοίχωμα και  $Re = 180$ .



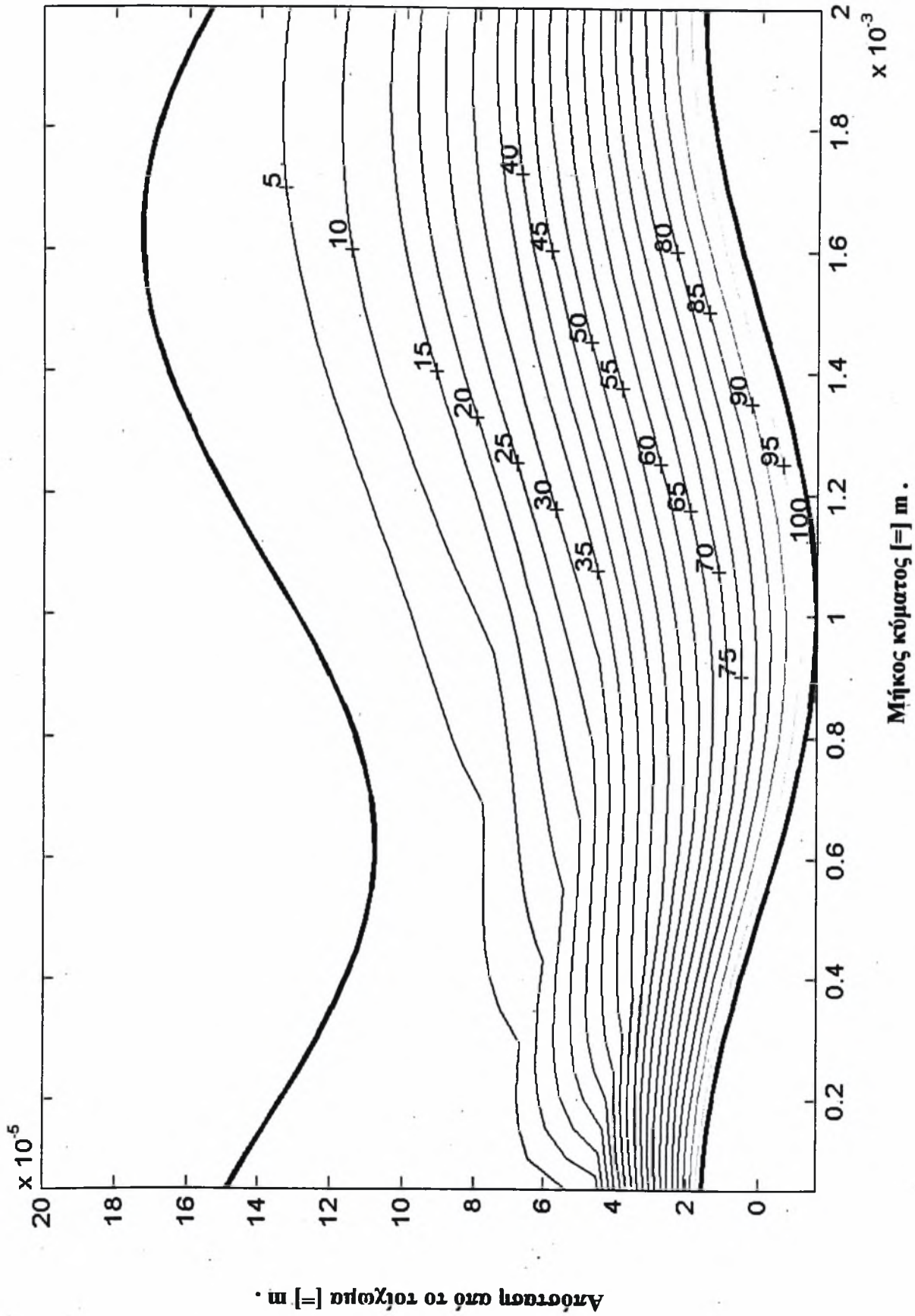
Σχήμα 5.3.2 : Τοπική θερμορροή για επίπεδο τοίχωμα και  $Re = 180$  .

### 5.3.1 ΓΙΑ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΛΑΤΟΣ 0.05

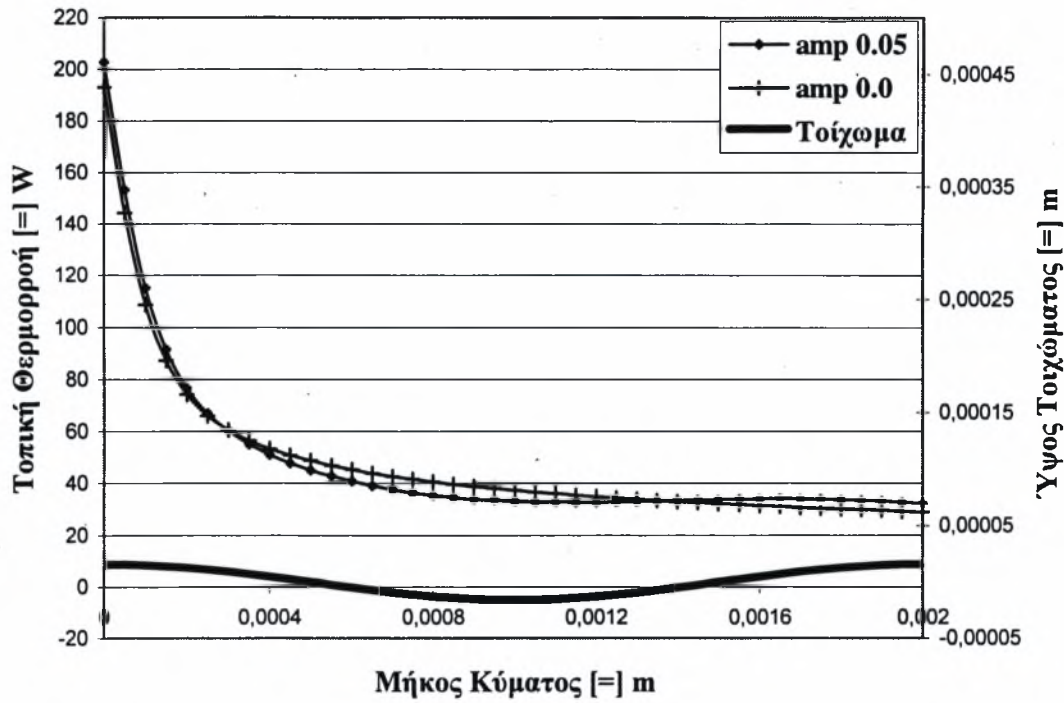
Σε αυτό το πλάτος που το τοίχωμα έχει μορφή πολύ κοντινή σε αυτή του επίπεδου τοιχώματος παρατηρούμε , τόσο από τα διαγράμματα με τις ισοθερμοκρασιακές καμπύλες , όσο και από τα διαγράμματα της τοπικής θερμορροής για διαφορετικούς αριθμούς Reynolds , ότι υπάρχει ομοιότητα όχι μόνο μεταξύ τους αλλά και συγκρινόμενα με το διάγραμμα του Σχήματος 5.3.1 για το επίπεδο τοίχωμα . Λόγω χαμηλών ταχυτήτων για αριθμό Reynolds 80 , η επίδραση της μεταφοράς θερμότητας από το τοίχωμα προς το ρευστό , όπως φαίνεται από το διάγραμμα του Σχήματος 5.3.3 είναι πιο έντονη έχοντας διεισδύσει στις ισοθερμοκρασιακές καμπύλες σε μεγαλύτερο βαθμό από τα αντίστοιχα διαγράμματα των άλλων αριθμών Reynolds (Σχ.5.3.4 , 5.3.7 και 5.3.8) . Η διείσδυση της θερμότητας στο ρευστό μπορεί να υπολογιστεί αφαιρώντας, στο διάγραμμα των ισοθερμοκρασιακών καμπυλών , το ύψος της πρώτης ισοθερμοκρασιακής καμπύλης ( $5^{\circ}\text{C}$ ) από το ύψος του τοιχώματος . Για αριθμό Reynolds 180 η επίδραση του κύματος του τοιχώματος είναι αμελητέα συγκρινόμενο το διάγραμμα του Σχήματος 5.3.4 με το διάγραμμα του Σχήματος 5.3.1. Σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds , η μείωση στη διείσδυση της μεταφοράς θερμότητας δε είναι εύκολα αντιληπτή . Οι ίδιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για τα διαγράμματα της τοπικής θερμορροής (Σχ.5.3.5 , 5.3.6 , 5.3.9 και 5.3.10) όπου με εξαίρεση το διάγραμμα για αριθμό Reynolds 80 (Σχ.5.3.5) (όπου φαίνεται η ισχυρότερη επίδραση στη μεταφορά θερμότητας στην αρχή του τοιχώματος) δεν εμφανίζονται μεγάλες διαφορές συγκρίνοντας τις καμπύλες για το επίπεδο τοίχωμα με τις αντίστοιχες για το κυματοειδές τοίχωμα (Σχ.5.3.6 , 5.3.9 και 5.3.10) . Πρέπει να γίνει η επισήμανση ότι η καμπύλη της τοπικής θερμορροής παρουσιάζει μια πτώση σε όλα τα σχετικά διαγράμματα που οφείλεται στο γεγονός ότι καθώς το ρευστό κινείται πάνω από το τοίχωμα θερμαίνεται , με αποτέλεσμα το ποσό της θερμότητας που λαμβάνει από το τοίχωμα να μειώνεται όσο το ρευστό προχωράει .



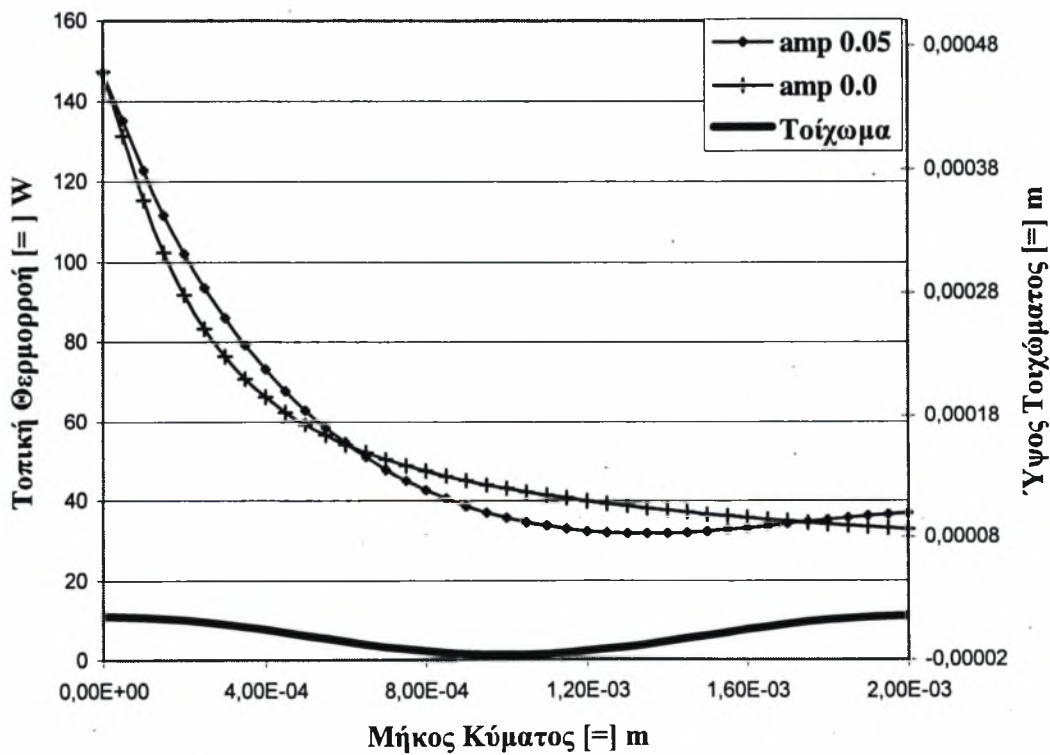
Σχήμα 5.3.3 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 80$ .



Σχήμα 5.3.4 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 180$ .

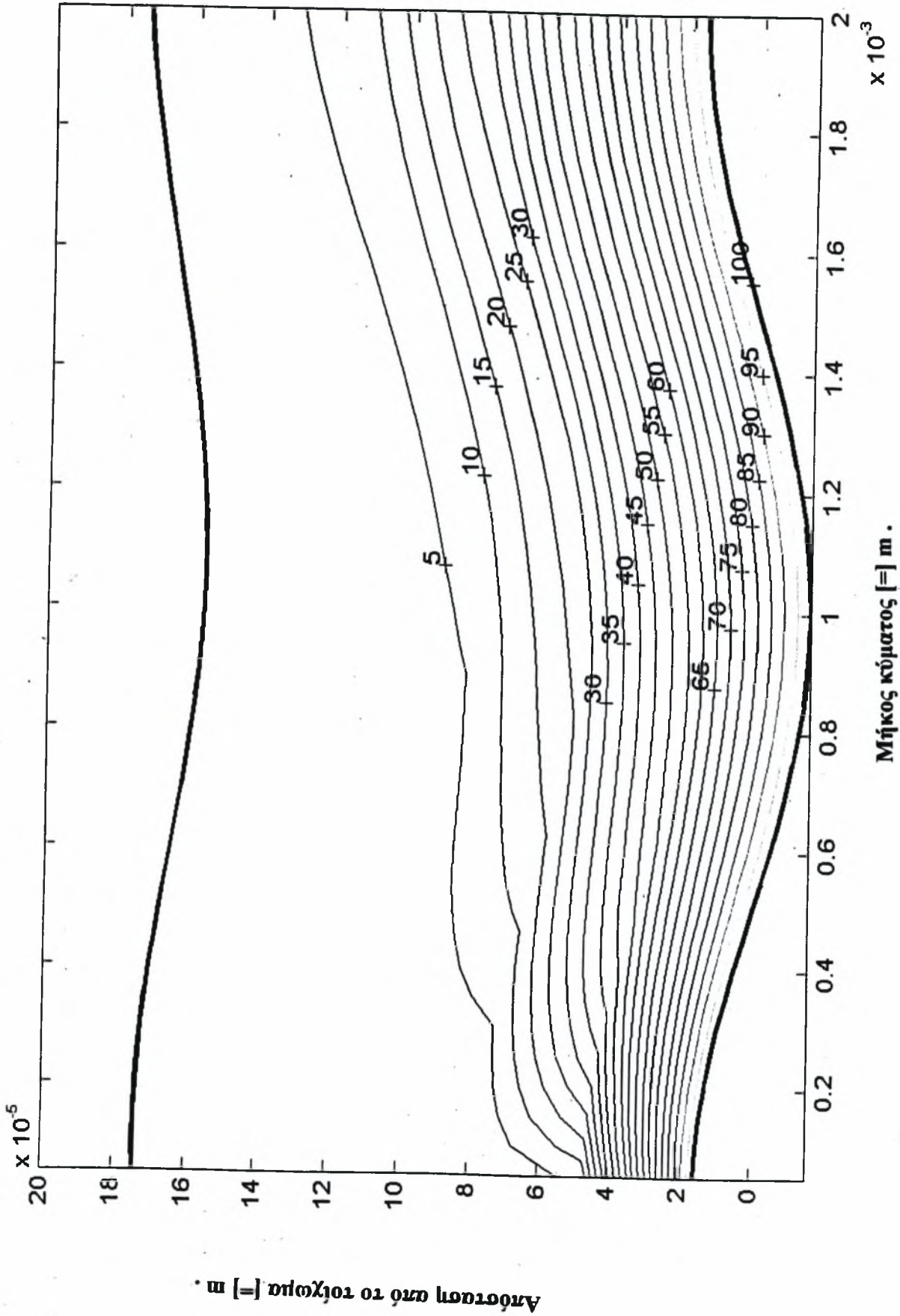


Σχήμα 5.3.5 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 80$ .

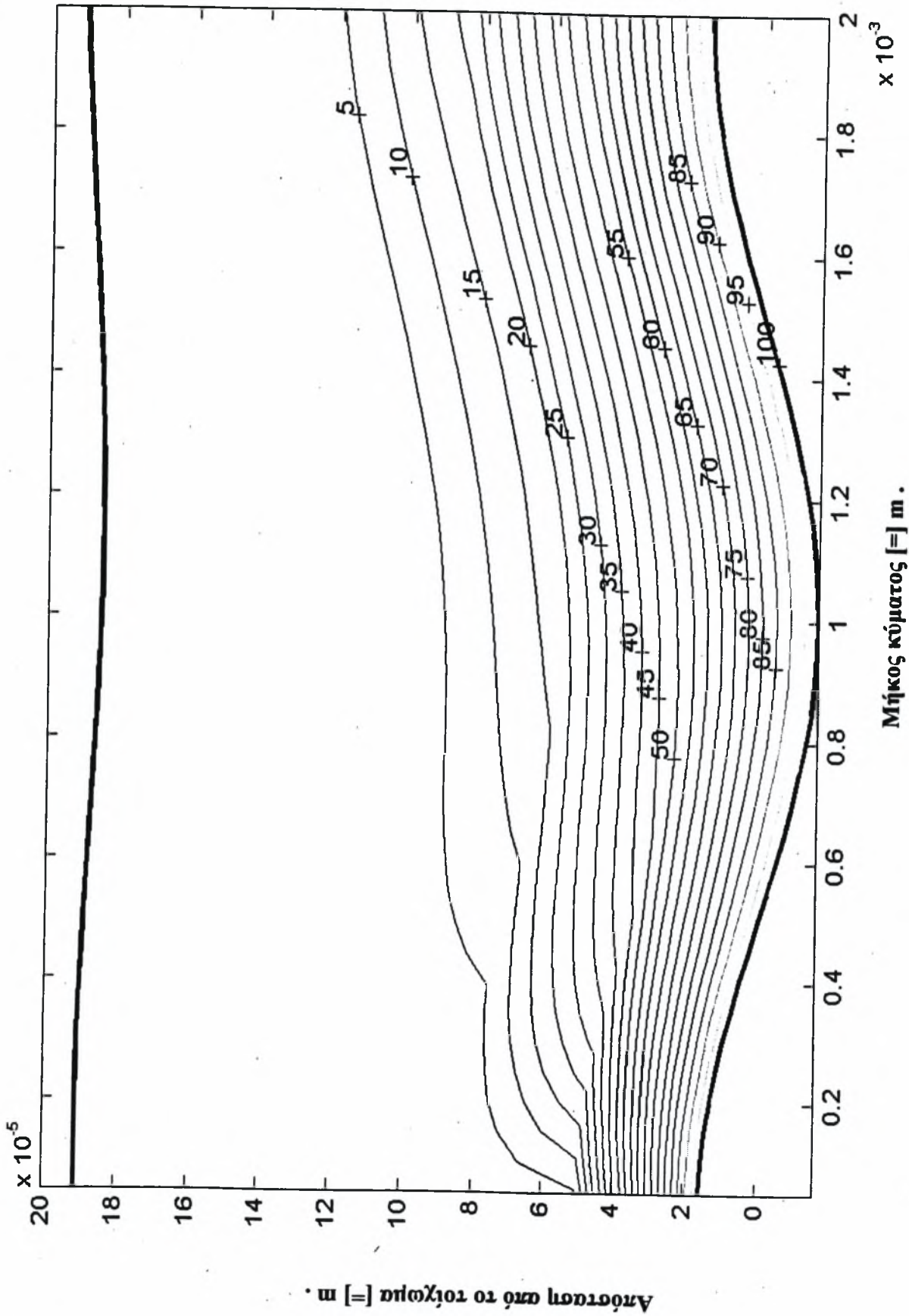


Σχήμα 5.3.6 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 180$ .

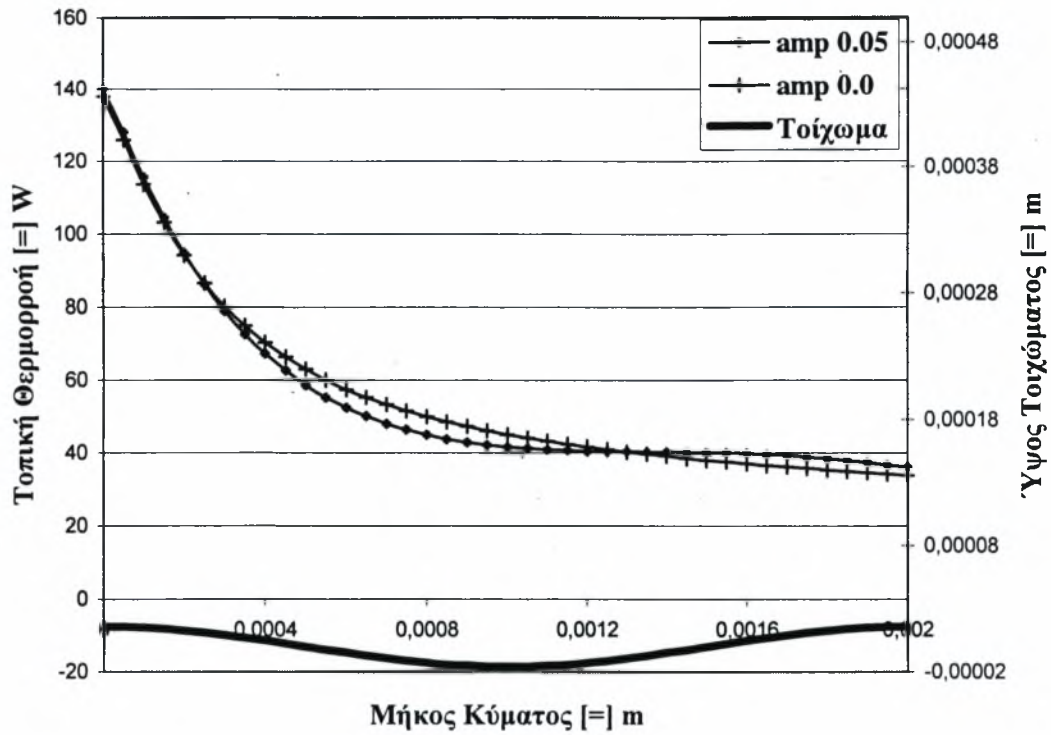




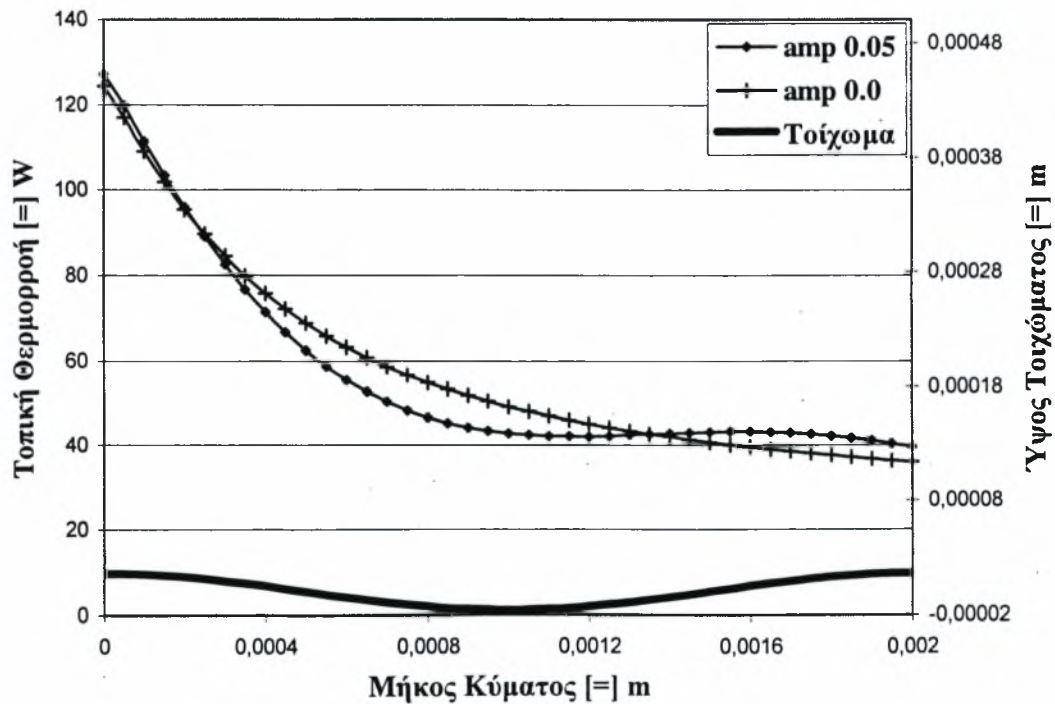
Σχήμα 5.3.7 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 220$ .



Σχήμα 5.3.8 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 300$ .



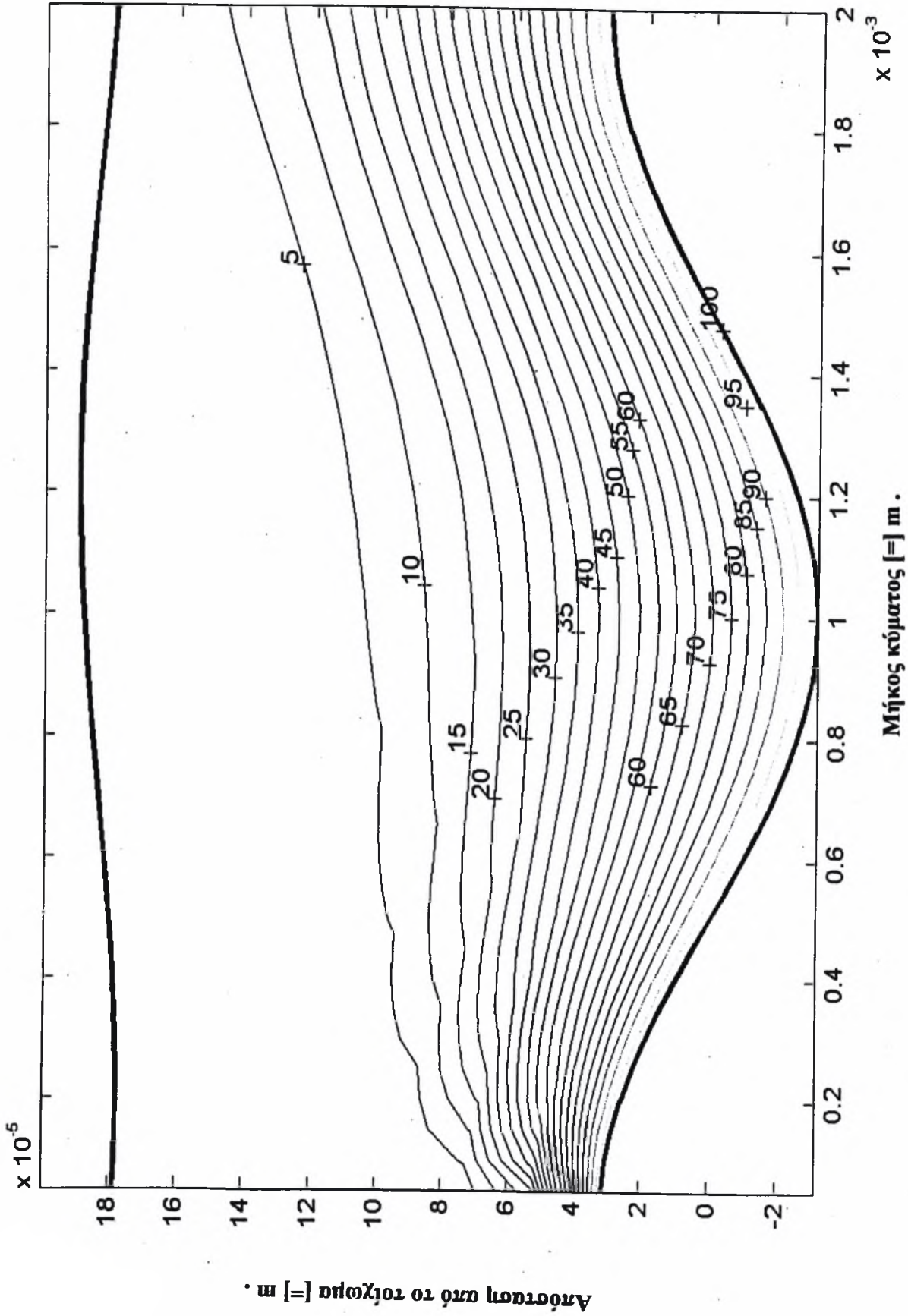
Σχήμα 5.3.9 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 220$ .



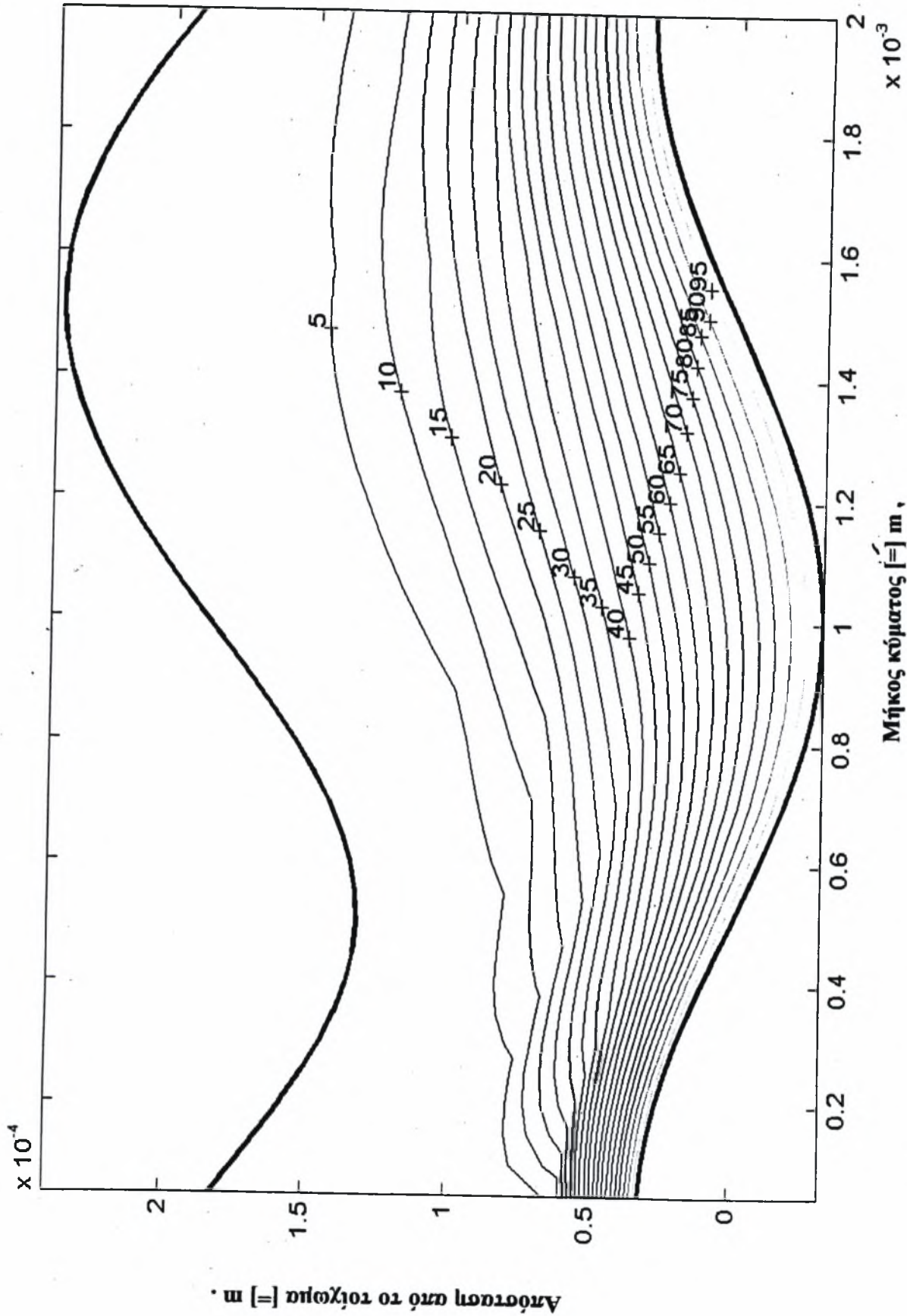
Σχήμα 5.3.10 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.05 και  $Re = 300$ .

### 5.3.2 ΓΙΑ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΛΑΤΟΣ 0.1

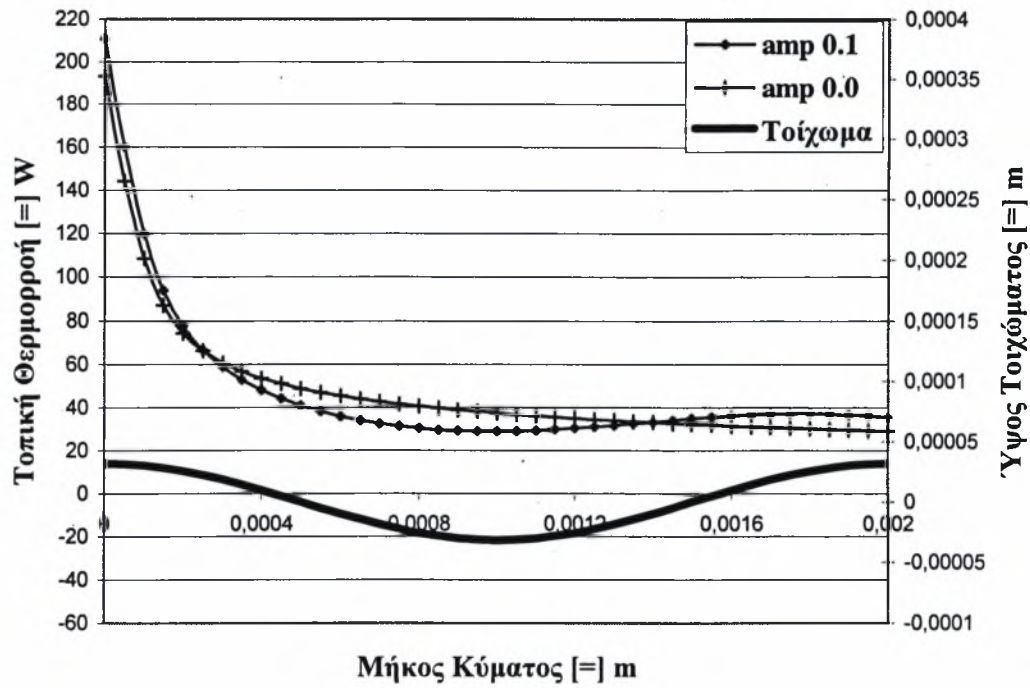
Για αυτή την περίπτωση παρατηρείται στα διαγράμματα των ισοθερμοκρασιακών καμπυλών (Σχ.5.3.11 , 5.3.12 , 5.3.15 και 5.3.16) μια ελάχιστη μείωση στη διείδυση της θερμότητας σε στρώματα του υμένα , τα οποία για πλάτος 0.05 είχαν υψηλότερη θερμοκρασία σε όλους τους αριθμούς Reynolds . Αυτή η μείωση όσο ανεβαίνει ο αριθμός Reynolds τόσο πιο δυσδιάκριτη γίνεται . Ο πιο σημαντικός λόγος για αυτή τη συμπεριφορά του θερμοκρασιακού πεδίου σε κυματοειδές τοίχωμα είναι η μεγαλύτερη ποσότητα του ρευστού στο κοίλο του τοιχώματος , επειδή στο κοίλο το πάχος του υμένα αυξάνει , και συνεπώς αυτό το γεγονός λειτουργεί ανασταλτικά για τα φαινόμενα μεταφοράς . Στις καμπύλες των διαγραμμάτων της τοπικής θερμορροής (Σχ.5.3.13 , 5.3.14 , 5.3.17 και 5.3.18) δε διακρίνεται καμμία ουσιαστική διαφορά εκτός από το γεγονός , ότι οι αποκλίσεις ανάμεσα στις καμπύλες που αναφέρονται στο επίπεδο τοίχωμα με τις καμπύλες , τις σχετικές με το κυματοειδές τοίχωμα , αποκτούν υψηλότερες τιμές .



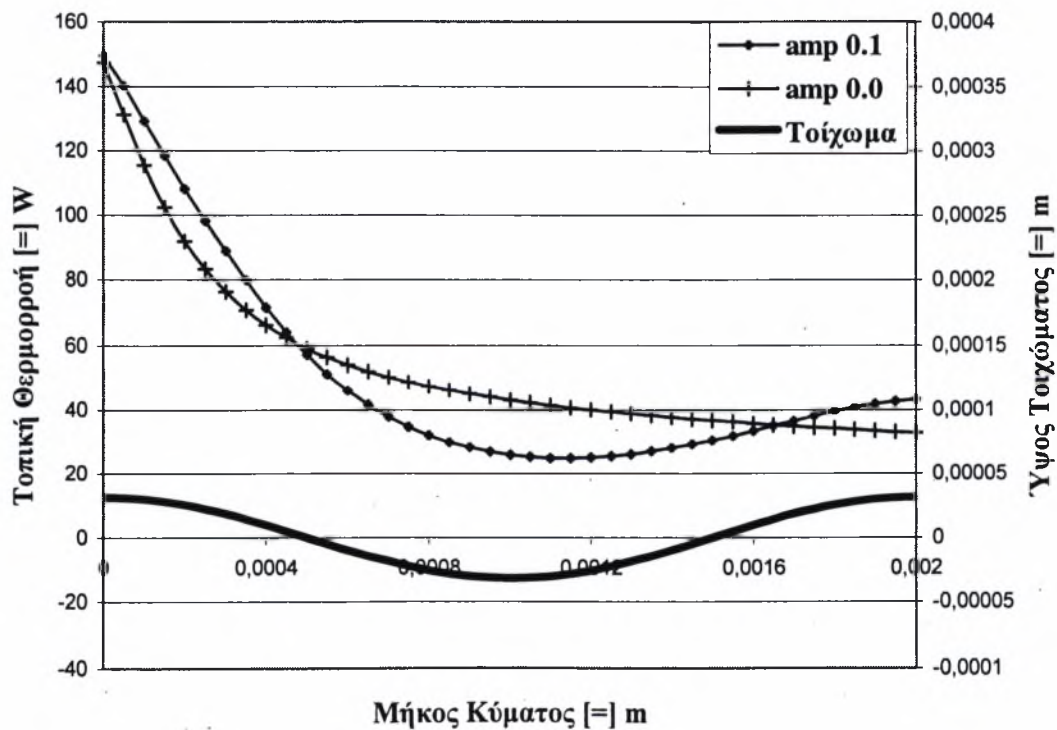
Σχήμα 5.3.11 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 80$ .



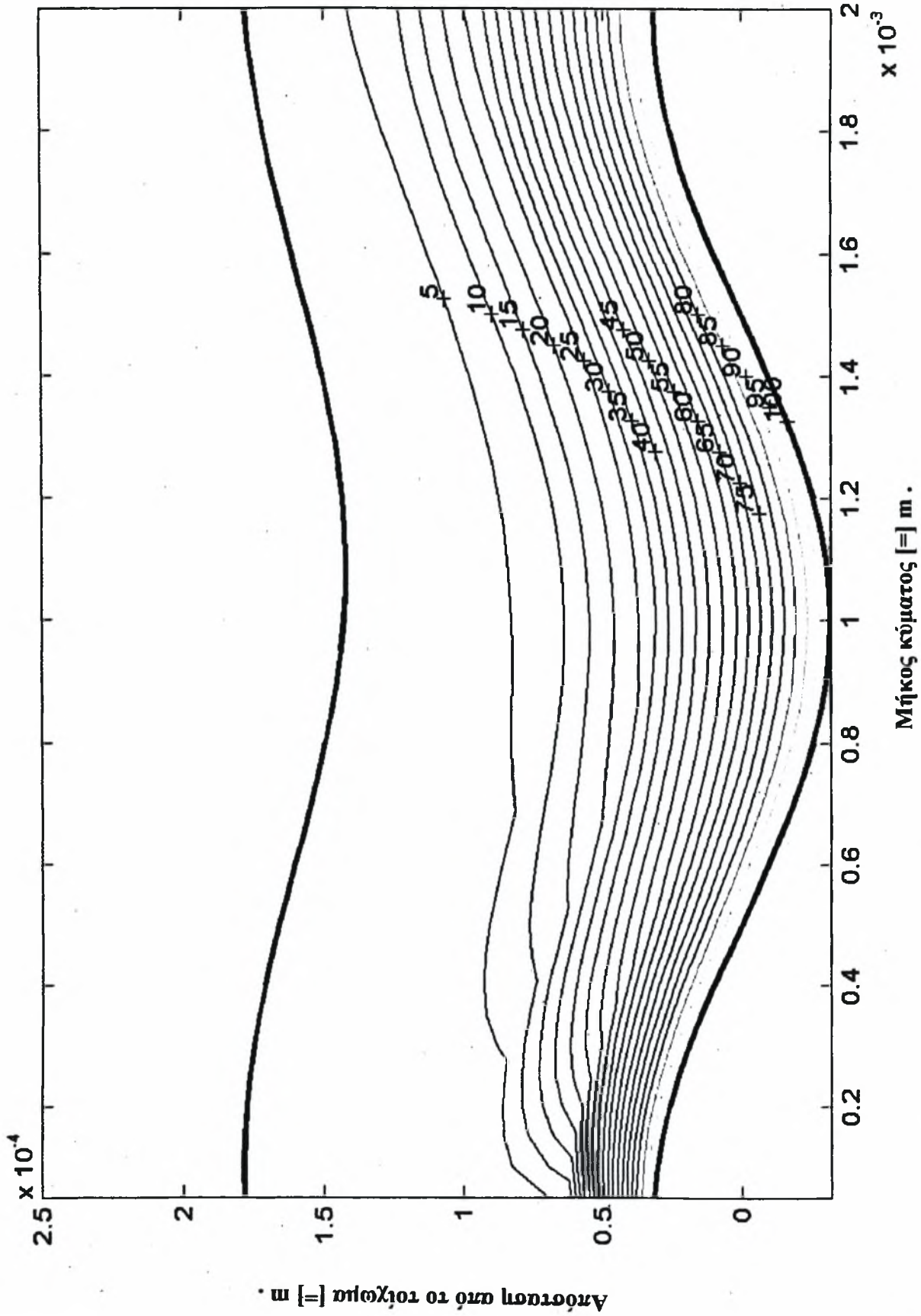
Σχήμα 5.3.12 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 180$ .



Σχήμα 5.3.13 : Τοπική θερμότητα για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 80$ .

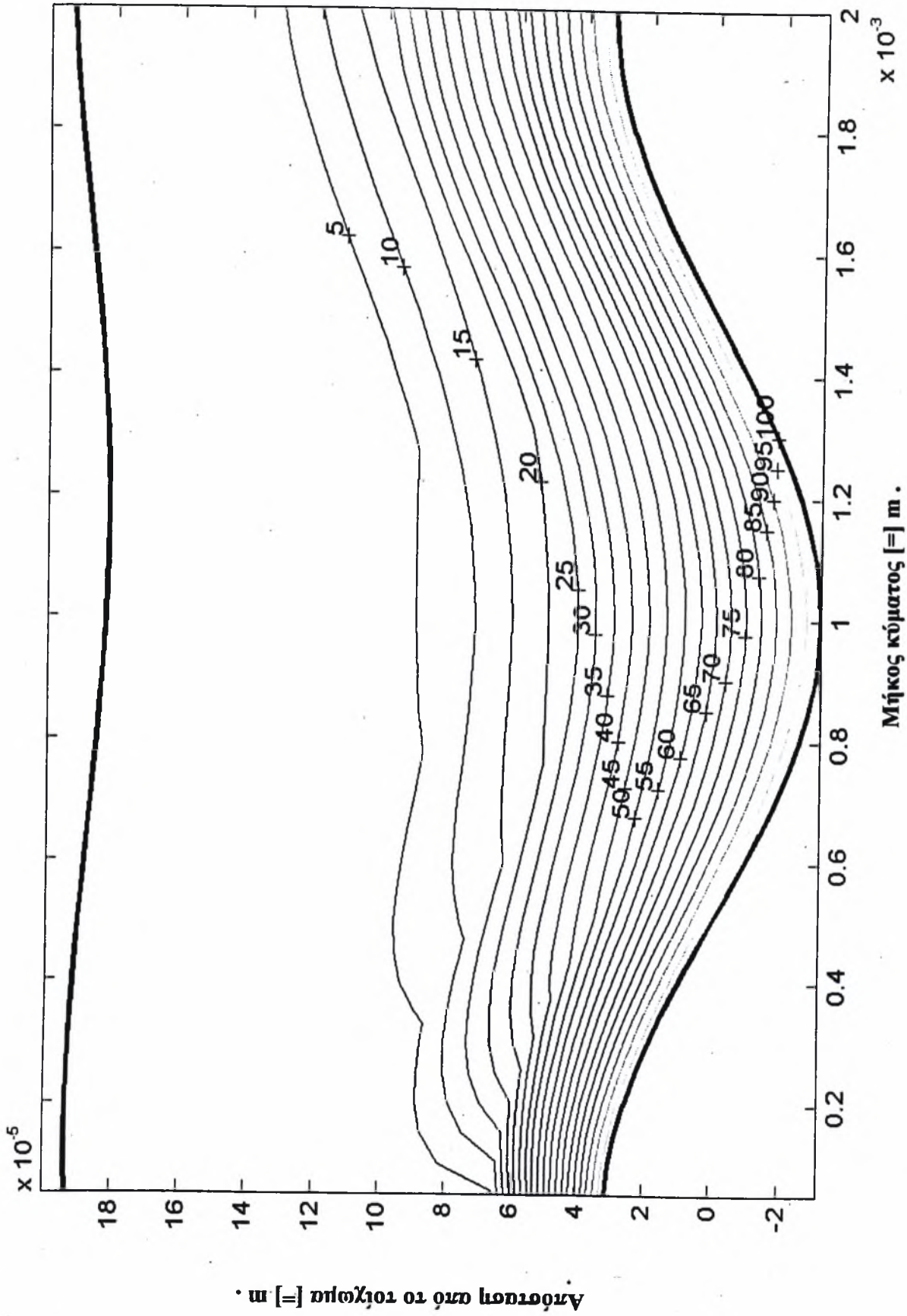


Σχήμα 5.3.14 : Τοπική θερμότητα για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 180$ .

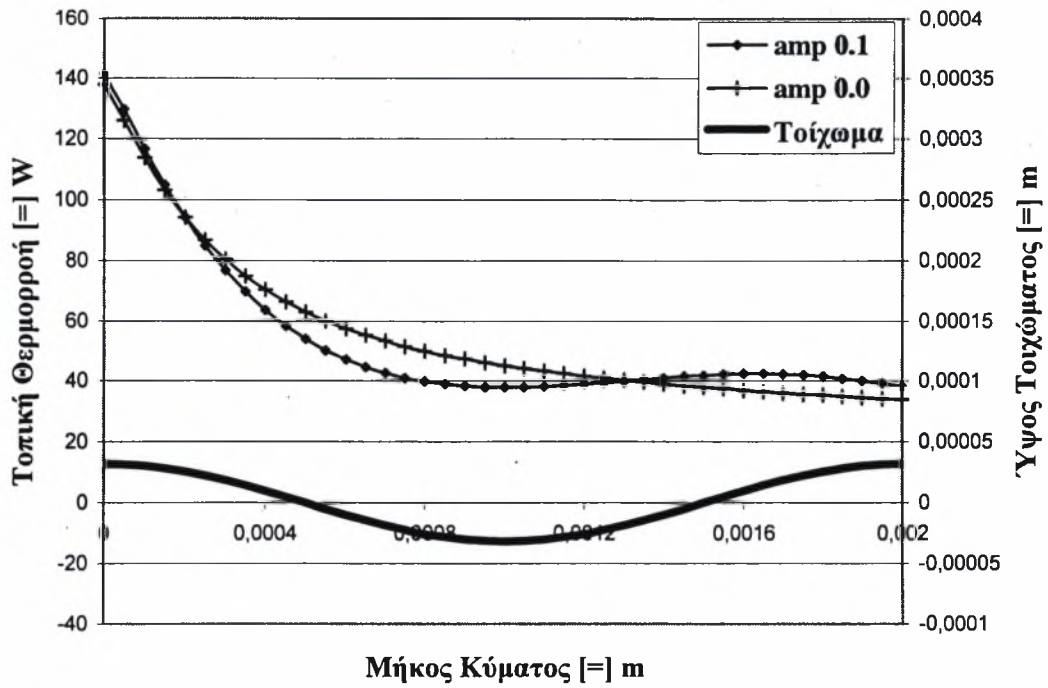


Σχήμα 5.3.15 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 220$ .

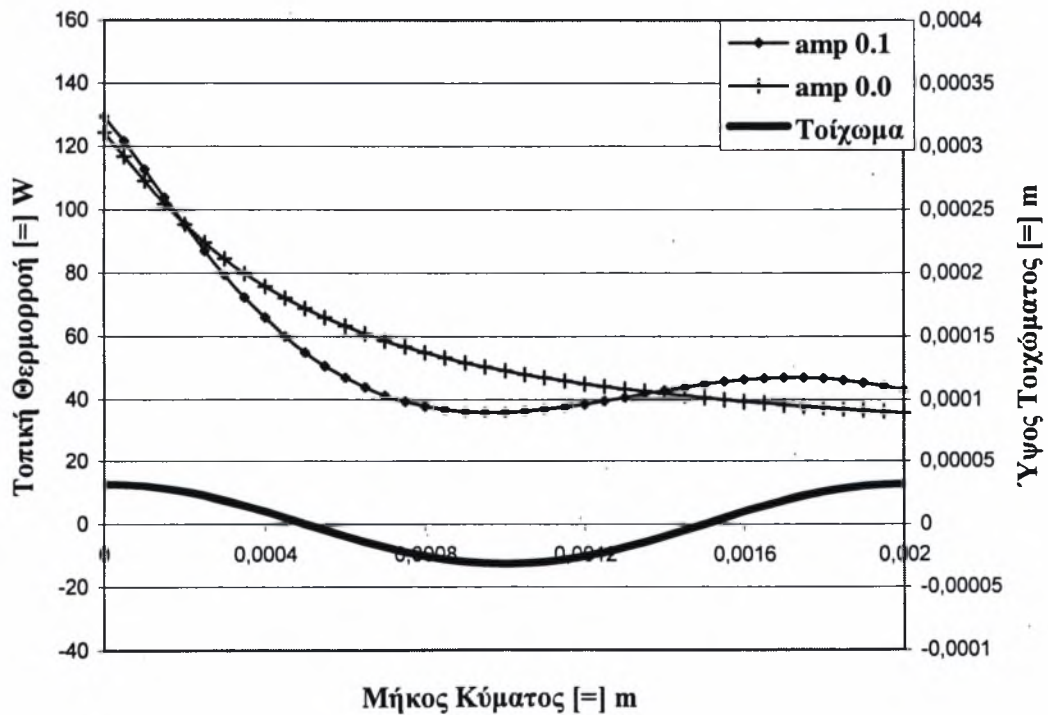




Σχήμα 5.3.16 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 300$ .



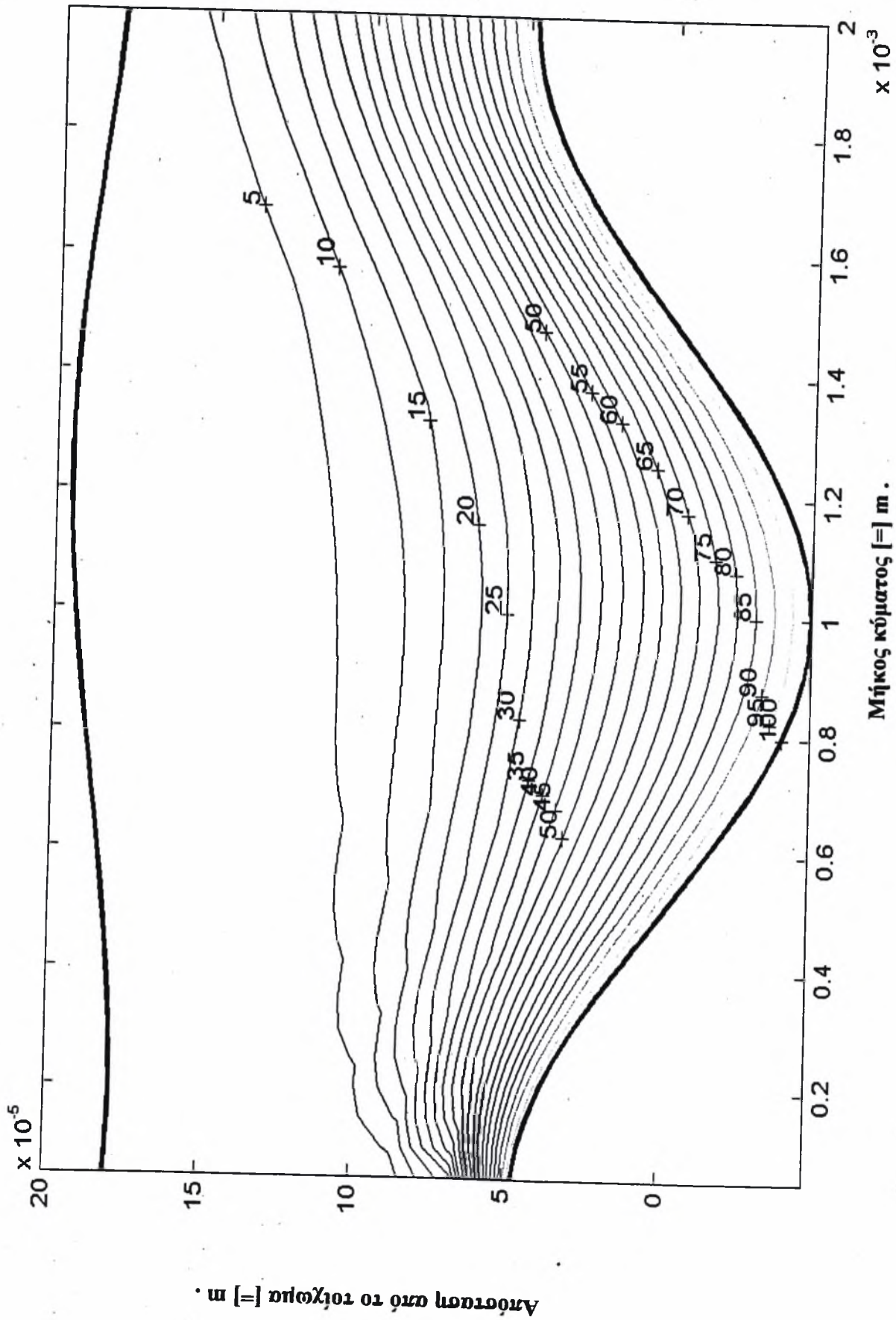
Σχήμα 5.3.17 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 220$  .



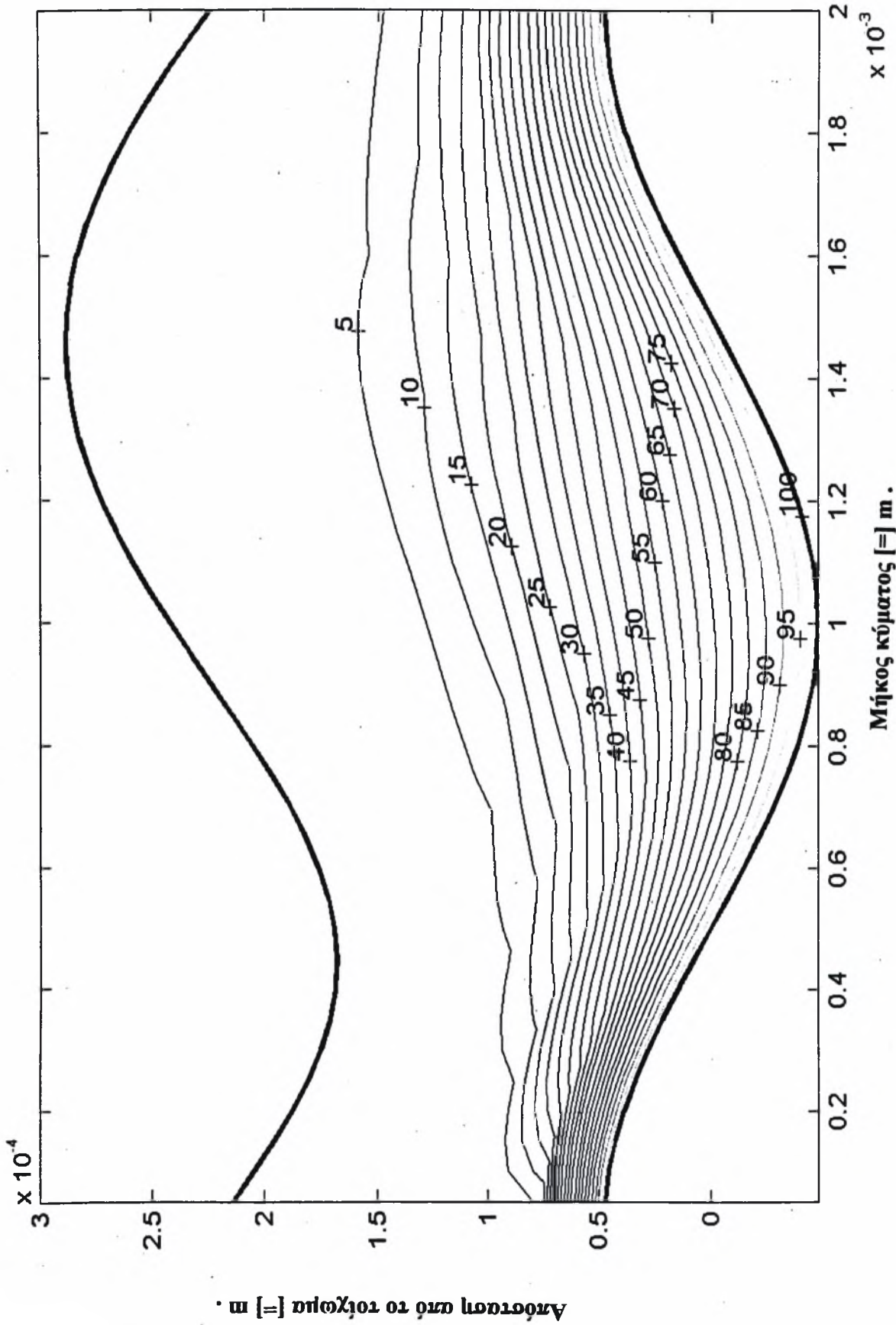
Σχήμα 5.3.18 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.1 και  $Re = 300$  .

### **5.3.3 ΓΙΑ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΛΑΤΟΣ 0.15**

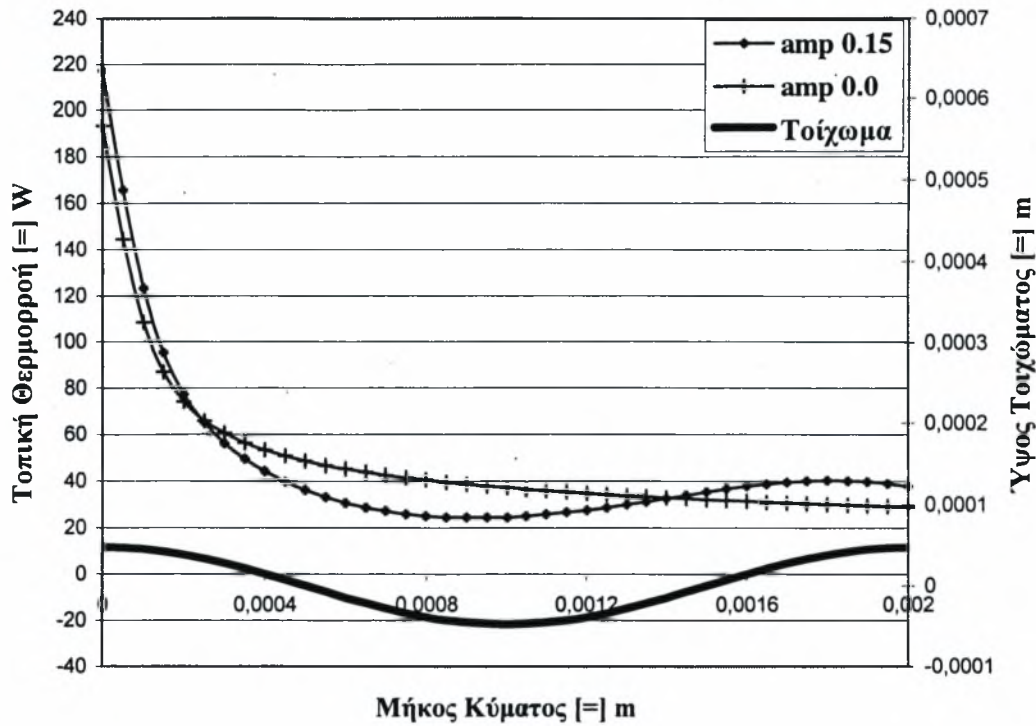
Για αυτό το πλάτος και για όλους τους αριθμούς Reynolds , η διείσδυση είναι ακόμα μικρότερη και υψηλότερα στρώματα του υμένα , που είχαν δεχτεί την επίδραση της μεταφοράς θερμότητας από το τοίχωμα , φαίνεται τώρα να έχουν επηρεαστεί σε μικρότερο βαθμό , όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς και από τη σύγκριση των ισοθερμοκρασιακών καμπυλών (Σχ.5.3.19 , 5.3.20 , 5.3.23 και 5.3.24) με τις αντίστοιχες καμπύλες για μικρότερα πλάτη κύματος του τοιχώματος . Στα διαγράμματα των τοπικών θερμοροών (Σχ.5.3.21 , 5.3.22 , 5.3.25 και 5.3.26) , οι μορφές των καμπύλων είναι παρόμοιες με αυτές για τα άλλα πλάτη , με τη διαφορά ότι αρχίζει να φαίνεται πιο καθαρά ότι η καμπύλη ακολουθεί κατά κάποιο τρόπο την καμπύλη του τοιχώματος , εμφανίζοντας ελάχιστο όπου έχει ελάχιστο και η καμπύλη του τοιχώματος , αφού αυτό είναι το σημείο , στο οποίο ο υμένας έχει το μέγιστο πάχος , ενώ στη συνέχεια , όπου το πάχος του υμένα μειώνεται και το πλήθος των ισοθερμοκρασιακών καμπύλων πυκνώνει , η τοπική θερμοροή αυξάνεται .



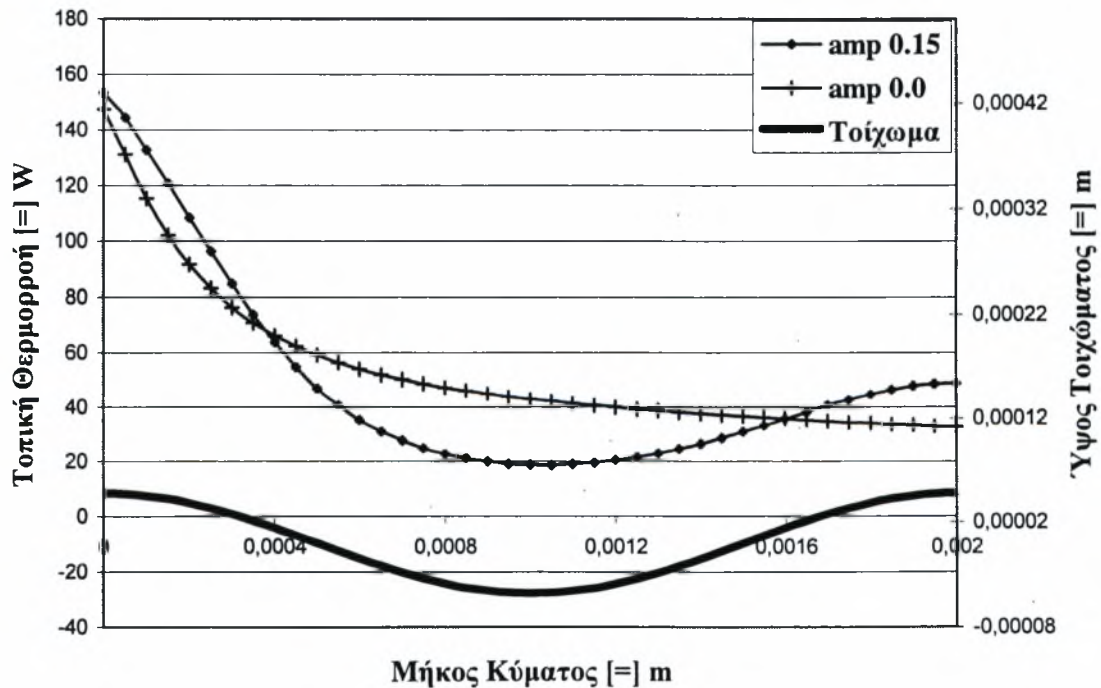
Σχήμα 5.3.19 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 80$ .



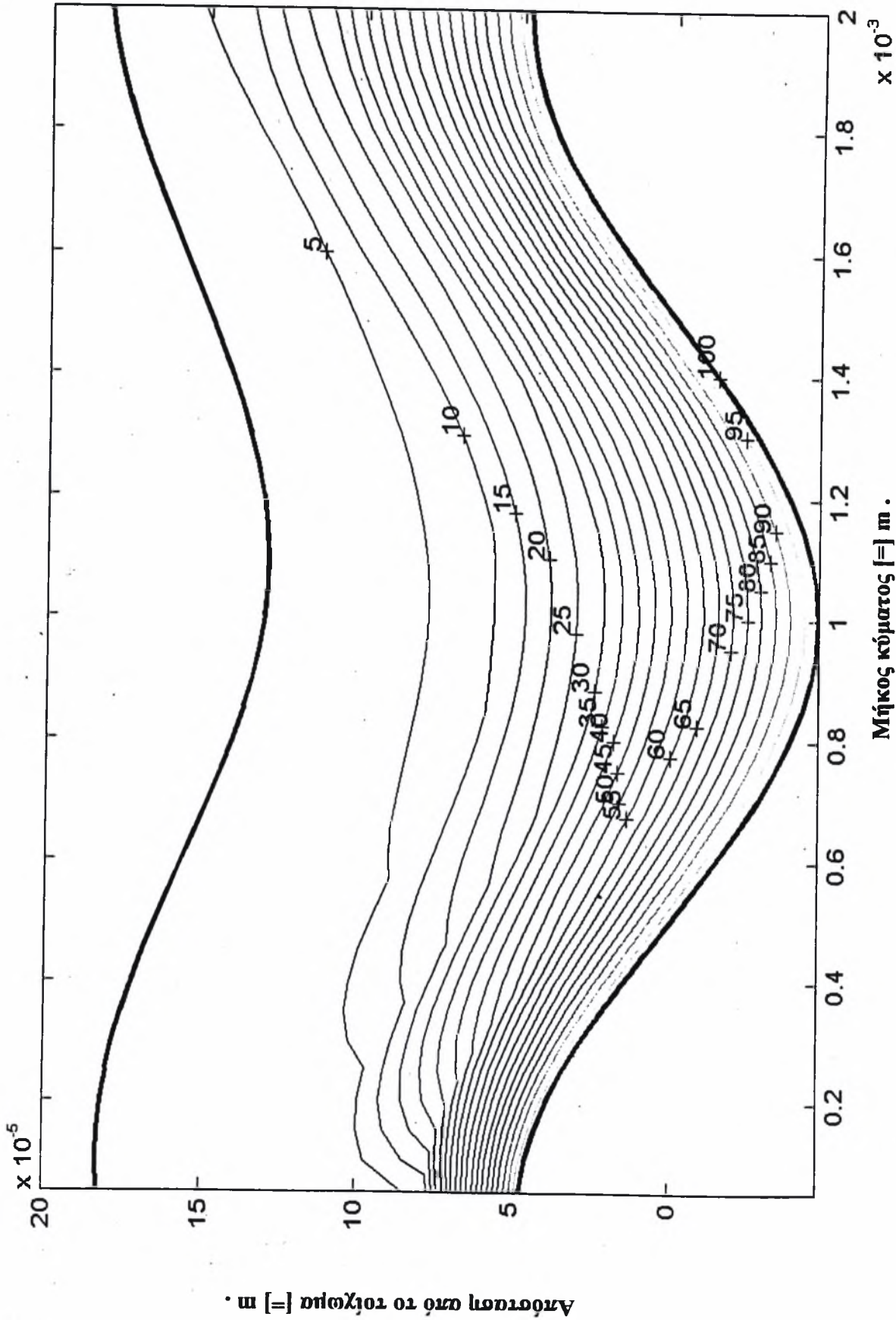
Σχήμα 5.3.20 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 180$  .



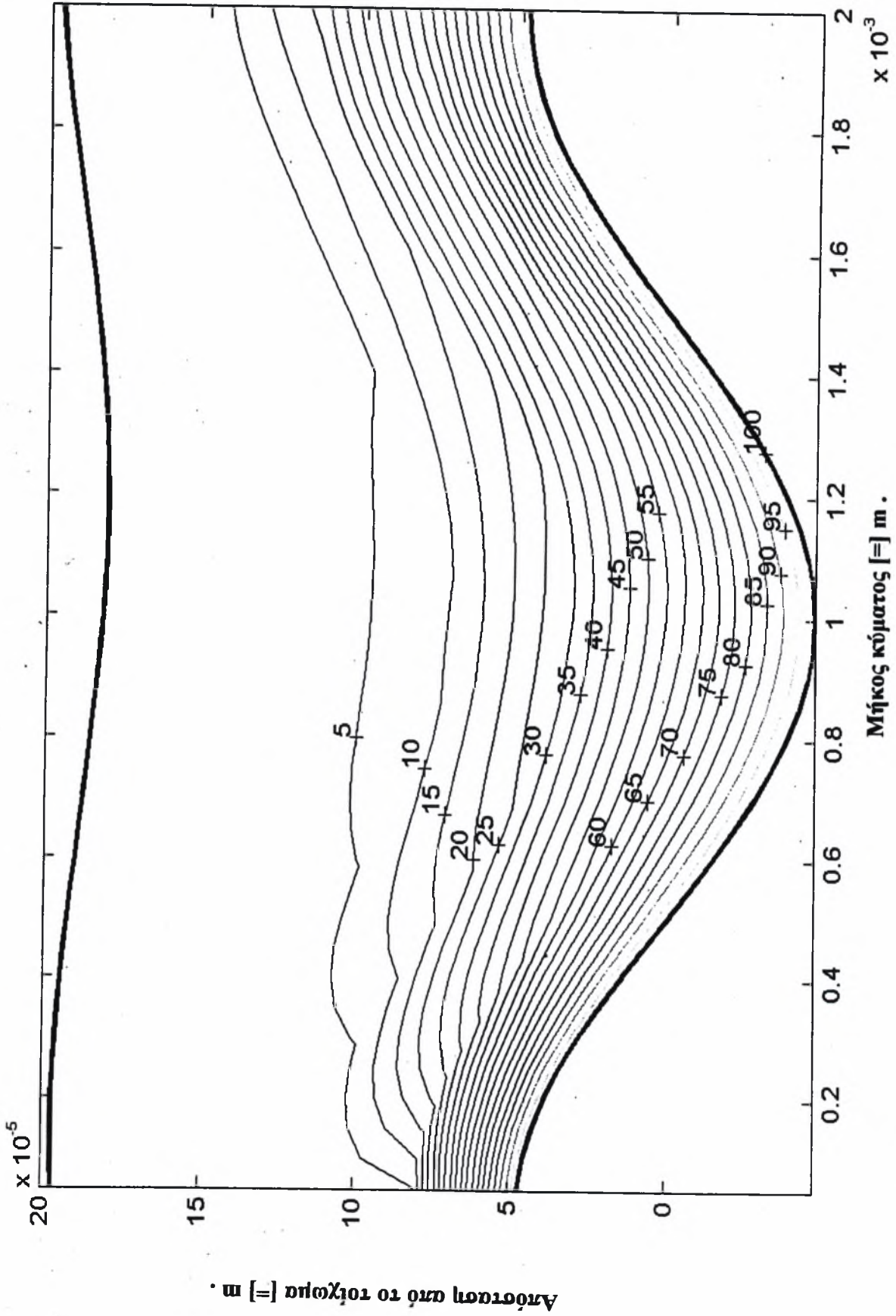
Σχήμα 5.3.21 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 80$ .



Σχήμα 5.3.22 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 180$ .

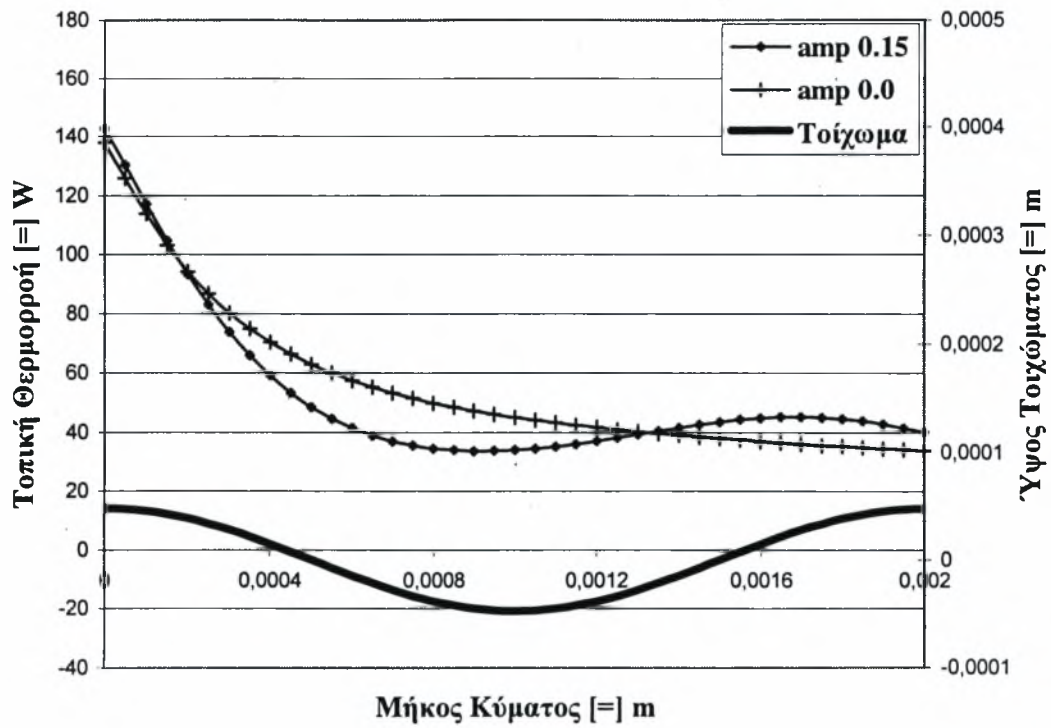


Σχήμα 5.3.23 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 220$ .

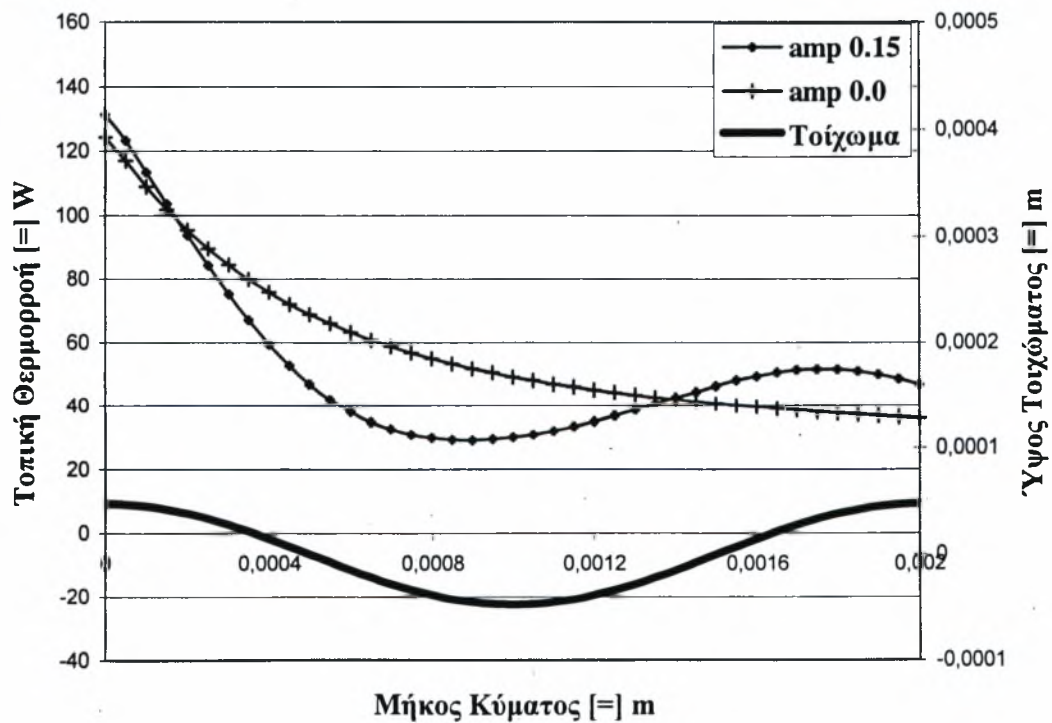


Σχήμα 5.3.24 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 300$ .





Σχήμα 5.3.25 : Τοπική θερμότητα για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 220$ .



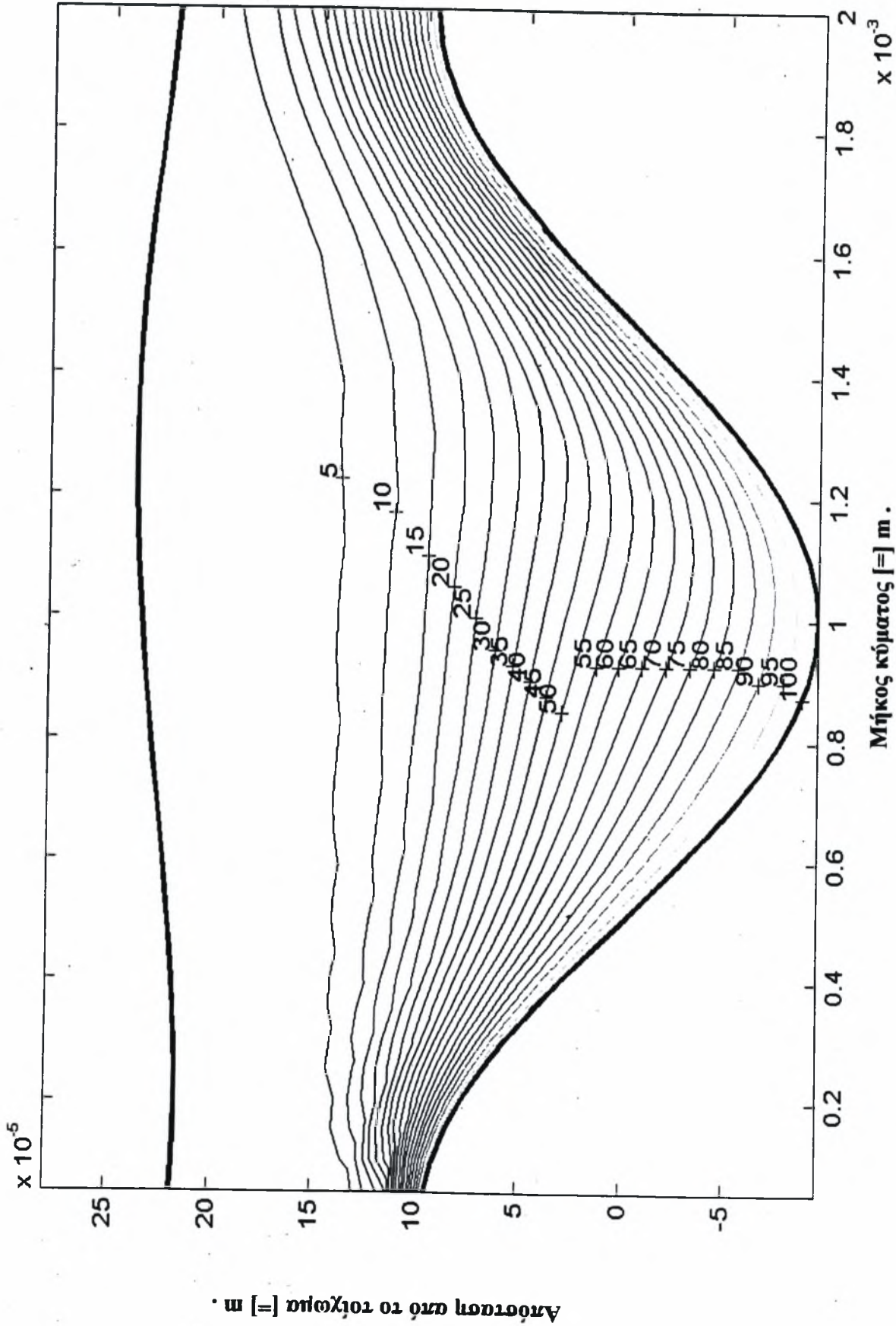
Σχήμα 5.3.26 : Τοπική θερμότητα για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.15 και  $Re = 300$ .

### 5.3.4 ΓΙΑ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΛΑΤΟΣ 0.3

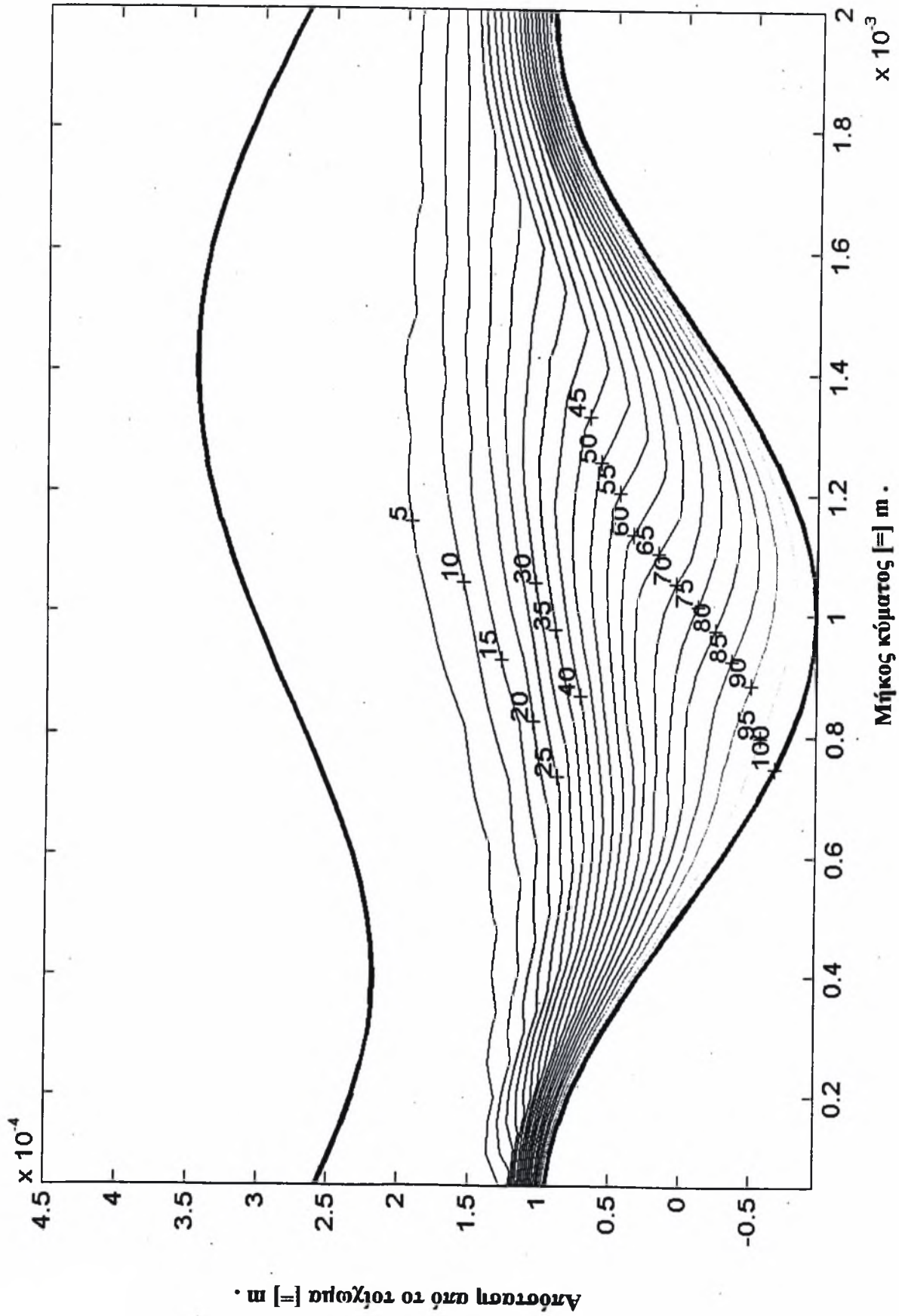
Σε αυτό το πλάτος και για αριθμό Reynolds 220 , η υπολογιστική μελέτη του Bontozoglou (2000) σύγκλινε σε δύο διαφορετικές σειρές δεδομένων , με αποτέλεσμα να προκύψουν δύο διαφορετικά θερμοκρασιακά πεδία , τα οποία παρατίθενται και τα δύο . Για αριθμό Reynolds 80 , η διείδυση της θερμότητας μειώνεται ακόμη περισσότερο , ενώ τα διαγράμματα των ισοθερμοκρασιακών καμπυλών (Σχ.5.3.27) και της τοπικής θερμορροής (Σχ.5.3.29) δεν αλλάζουν μορφή . Σε αριθμό Reynolds 180 είναι εμφανές , τόσο από τις ισοθερμοκρασιακές καμπύλες του διαγράμματος (Σχ.5.3.28) από το αραίωμα μεταξύ τους στο κοίλο του τοιχώματος , όσο και από το διάγραμμα για την τοπική θερμορροή (Σχ.5.3.30) , όπου αυτό το ελάχιστο που υπάρχει στην καμπύλη είναι πολύ πιο έντονο , ότι αρχίζει να παρουσιάζεται αποκόλληση του υγρού υμένα . Αυτό σημαίνει , ότι ένα μέρος του ρευστού (αυτό που βρίσκεται πάνω από το τοίχωμα, στο κοίλο του τοιχώματος) αντί να ακολουθήσει την υπόλοιπη ροή , επιστρέφει πίσω δημιουργώντας ζώνες ανακυκλοφορίας . Το ρευστό που επιστρέφει πίσω είναι πιο θερμό από ό,τι αρχικά , με αποτέλεσμα το τοίχωμα να μην προσφέρει το ίδιο ποσό θερμότητας σε σχέση με προηγούμενες περιπτώσεις και για αυτό το λόγο η καμπύλη της τοπικής θερμορροής σε αυτό το σημείο πέφτει . Η θερμοκρασία του , όμως , παρόλο που το τοίχωμα δεν προσφέρει τα ίδια ποσά θερμότητας , συνεχώς αυξάνεται , για να αποκτήσει τη μέγιστη κοντά στην αρχή του κοίλου του τοιχώματος , κι έτσι το τοίχωμα σε αυτό το σημείο έχει τη μικρότερη επίδραση στη μεταφορά θερμότητας , γεγονός που φαίνεται από το διάγραμμα της τοπικής θερμορροής (Σχ.5.3.30) , αφού το ελάχιστο δε βρίσκεται ακριβώς στο ελάχιστο του κοίλου του τοιχώματος , αλλά μετατοπισμένο προς την αρχή του κοίλου. Το κομμάτι αυτό του ρευστού , που επιστρέφει στην αρχή του κοίλου , όπου το πάχος του υμένα μικραίνει , έρχεται σε επαφή και με ψυχρότερα στρώματα που βρίσκονται πάνω από αυτό , ασκώντας έντονη επίδραση στη μεταφορά θερμότητας και συνεπώς ψύχεται . Στη συνέχεια , εξαιτίας της ψύξης του , ακολουθεί την κατεύθυνση της ροής για να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία . Οι ζώνες ανακυκλοφορίας , όπως γίνεται αντιληπτό , επιδρούν ανασταλτικά στη μεταφορά θερμότητας από το τοίχωμα και θα ήταν προτιμότερο να αποφεύγονται στις πρακτικές εφαρμογές . Πρέπει να επισημανθεί σε αυτό το σημείο , ότι μετά το ελάχιστο που παρουσιάζει η καμπύλη του διαγράμματος της τοπικής θερμορροής

(Σχ.5.3.30) και είναι μικρότερο από το ελάχιστο , που έχουν οι αντίστοιχες καμπύλες για τα υπόλοιπα πλάτη κύματος του τοιχώματος , όπου δεν έχουμε ζώνες ανακυκλοφορίας , στη συνέχεια η τοπική θερμορροή αυξάνεται για να φτάσει σε τιμές , προς το τέλος του μήκους κύματος , που είναι υψηλότερες από τις αντίστοιχες τιμές για τα άλλα πλάτη του τοιχώματος . Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα , πως η δημιουργία της αποκόλλησης , προστατεύοντας στην ουσία το ρευστό από το να παραλάβει μεγαλύτερα ποσά θερμότητας από το τοίχωμα , αναγκάζει το ρευστό να έχει μικρότερη θερμοκρασία μετά το τέλος της αποκόλλησης , σε σχέση με την αντίστοιχη θερμοκρασία για τις υπόλοιπες περιπτώσεις , γεγονός που εξηγεί αυτή την αύξηση στην τοπική θερμορροή που σημειώνεται στη συνέχεια , καθώς το ρευστό δέχεται πια περισσότερη θερμότητα από το τοίχωμα . Για αριθμό Reynolds 220 (Σχ.5.3.31α , 5.3.31β, 5.3.32α και 5.3.32β) , σε κανένα θερμοκρασιακό προφίλ από τα δύο , δεν εμφανίζεται κάποια τέτοια ζώνη ανακυκλοφορίας , απλώς παρατηρείται στο πρώτο θερμοκρασιακό πεδίο (Σχ.5.3.31α) ότι αυτή η μείωση στα ποσά θερμότητας , τα οποία λαμβάνει το ρευστό από το τοίχωμα και που έχει σημειωθεί για όλους τους άλλους αριθμούς Reynolds καθώς και για το δεύτερο θερμοκρασιακό προφίλ (Σχ.5.3.31β) , δε φαίνεται να υπάρχει . Συγκρίνοντας με το διάγραμμα του Σχήματος 5.3.23 για αδιάστατο πλάτος 0.15 και αριθμό Reynolds 220 , η διείσδυση της θερμότητας είναι σχεδόν η ίδια . Επίσης , παρατηρείται μία διαφορετική συμπεριφορά στη μορφή καμπύλης στο διάγραμμα τοπικής θερμορροής για το πρώτο θερμοκρασιακό πεδίο (Σχ.5.3.32α) , που δε μειώνεται με τον ίδιο ρυθμό , όπως σε όλα τα άλλα αντίστοιχα διαγράμματα , ίσως λόγω της μορφής της επιφάνειας που παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις (στενώσεις και ανοίγματα) . Σε αριθμό Reynolds 300 (Σχ.5.3.33 και 5.3.34α) , εμφανίζεται πάλι μια ζώνη ανακυκλοφορίας , που , όμως, δεν είναι τόσο έντονη , όπως στην περίπτωση για αριθμό Reynolds 180 . Η απουσία αυτή της αποκόλλησης για αριθμό Reynolds 220 μπορεί να δικαιολογηθεί αν λάβουμε υπόψη το συντονισμό , ο οποίος για μικρότερα πλάτη τοιχώματος υπάρχει σε μικρότερους αριθμούς Reynolds , αυξάνοντας , όμως , το πλάτος του κύματος του τοιχώματος , παρουσιάζεται σε υψηλότερους αριθμούς Reynolds (περίπου 220) και ο οποίος συντονισμός οδηγεί σε στατικά επιφανειακά κύματα και τελικά η διαταραχή του τοιχώματος προκαλεί πλάτος ελεύθερης επιφάνειας θεωρητικά μεγαλύτερο από αυτό του τοιχώματος . Λόγω , λοιπόν , του συντονισμού , η ζώνη ανακυκλοφορίας του ρευστού παύει να υφίσταται για αριθμό Reynolds 220 , αλλά αρχίζει να αναπτύσσεται και πάλι για μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds , όπως φαίνεται

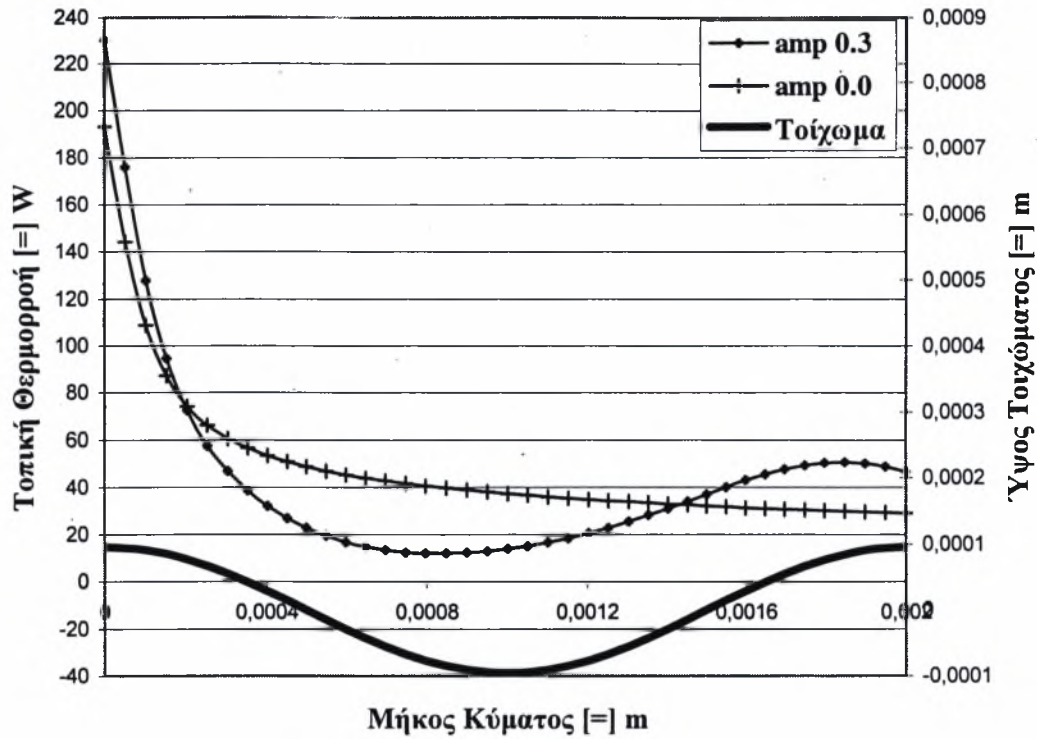
άλλωστε και στα διαγράμματα των Σχημάτων 5.3.33 και 5.3.34α για αριθμό Reynolds 300 . Στο Σχήμα 5.3.34β με το διάγραμμα τοπικής θερμορροής μελετήθηκε , για την περίπτωση αδιάστατου πλάτους κύματος του τοιχώματος 0.3 και αριθμό Reynolds 300 , η επίδραση του τοιχώματος στα φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας για το δεύτερο μήκος κύματος του τοιχώματος (από 0.002 m ως 0.004 m) . Παρατηρείται ότι η τοπική θερμορροή για το επίπεδο τοίχωμα συνεχίζει να μειώνεται και μάλιστα σχεδόν με γραμμικό τρόπο , ενώ η καμπύλη της τοπικής θερμορροής για το κυματοειδές τοίχωμα ακολουθεί τη μορφή του τοιχώματος όπως έκανε και στο πρώτο μήκος κύματος , με τη διαφορά ότι οι τιμές που παίρνει είναι μικρότερες . Αυτό είναι λογικό , αφού είναι μεγαλύτερη η ποσότητα του υγρού , που έχει επηρεαστεί από τη μετάδοση θερμότητας του τοιχώματος , ενώ και το υγρό που βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα έχει μεγαλύτερη θερμοκρασία από ό,τι είχε στο πρώτο μήκος κύματος , με αποτέλεσμα όλο και μικρότερο ποσό θερμότητας δέχεται το ρευστό από το τοίχωμα . Φαίνεται πως αυτό επηρεάζει και το φαινόμενο της ζώνης ανακυκλοφορίας , που εμφανίζεται σε πολύ μικρότερη ένταση για το δεύτερο μήκος κύματος από ό,τι στο πρώτο μήκος κύματος και μάλιστα τείνει να εξαλειφθεί , καθώς οι θερμοκρασιακές διαφορές , που υπάρχουν στο πρώτο μήκος κύματος ανάμεσα στα ίδια σημεία , μικραίνουν στη συνέχεια .



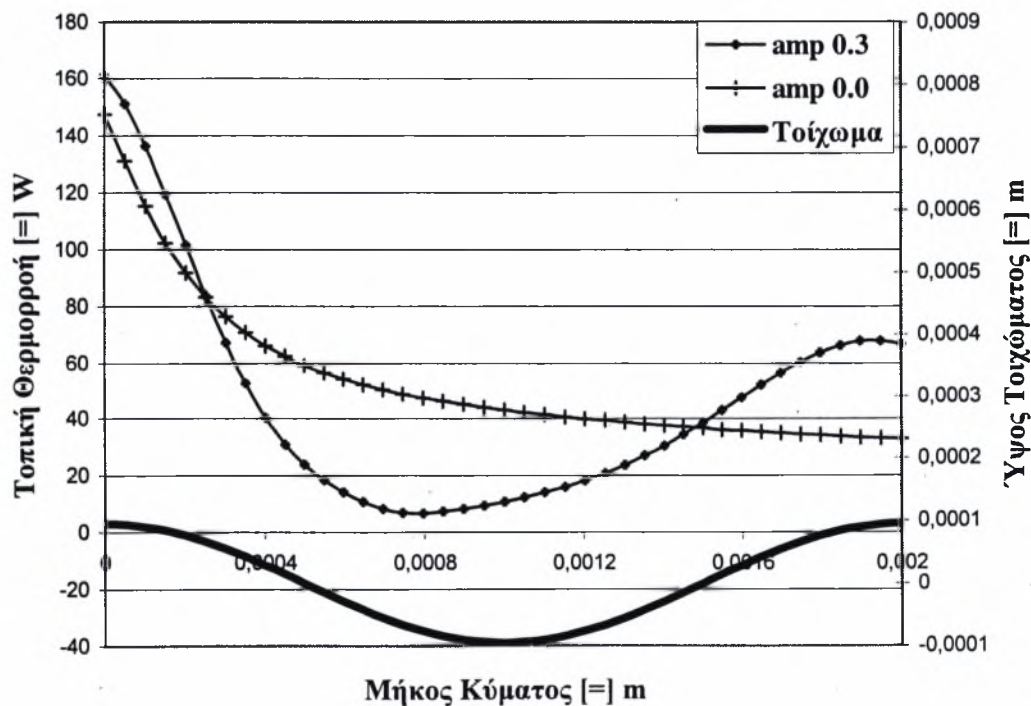
Σχήμα 5.3.27 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 80$ .



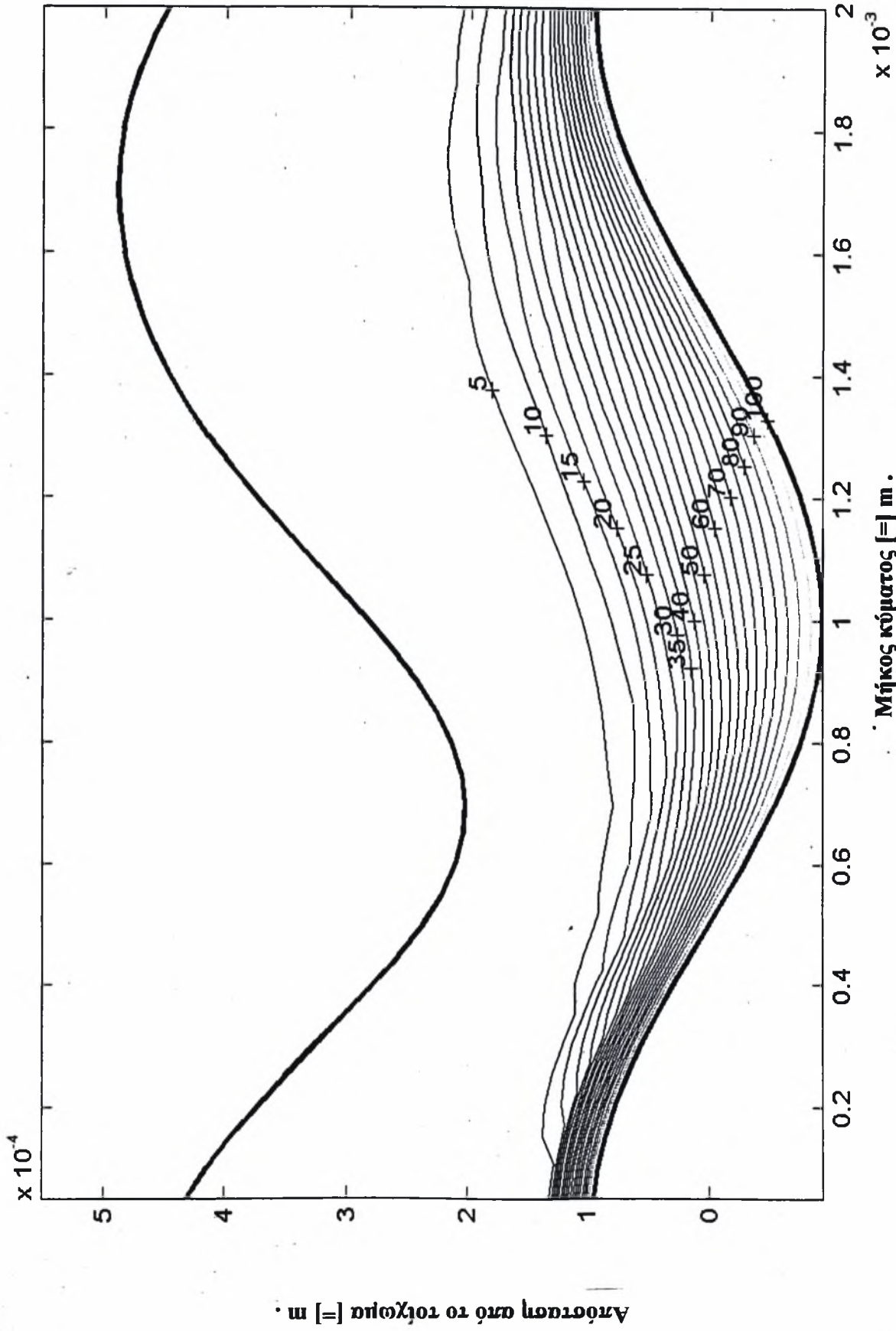
Σχήμα 5.3.28 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 180$ .



Σχήμα 5.3.29 : Τοπική θερμότητα για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 80$ .

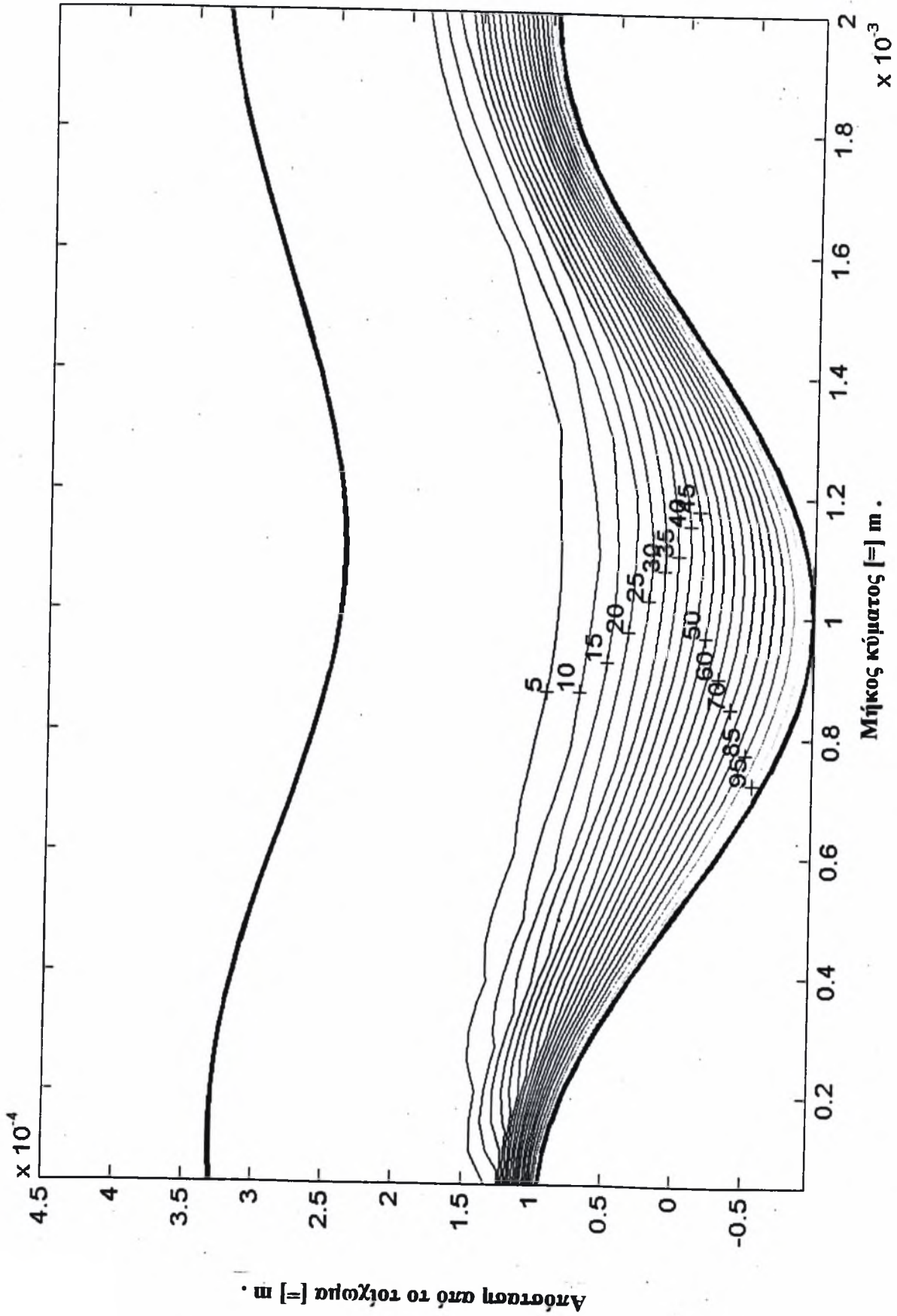


Σχήμα 5.3.30 : Τοπική θερμότητα για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 180$ .

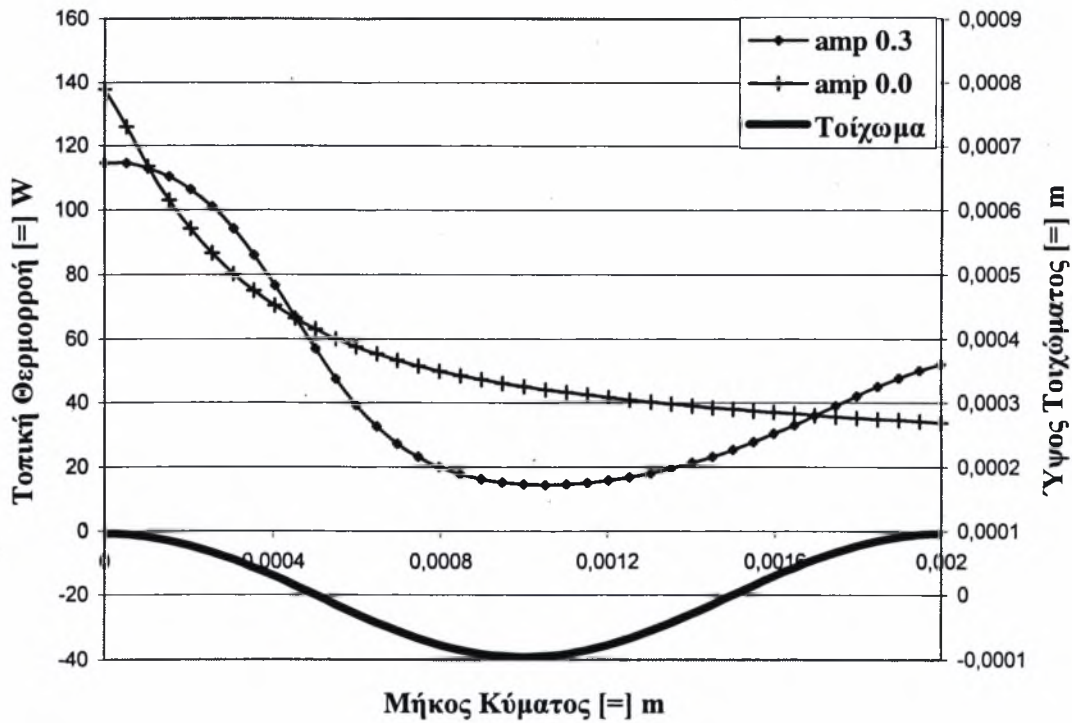


Σχήμα 5.3.31α : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 220$ .

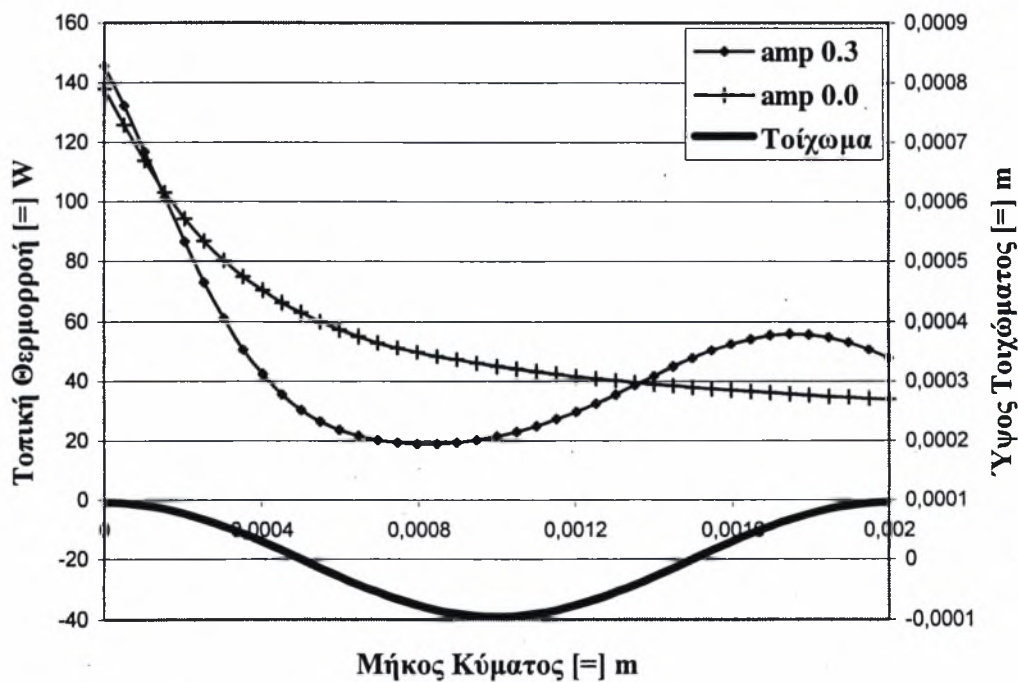




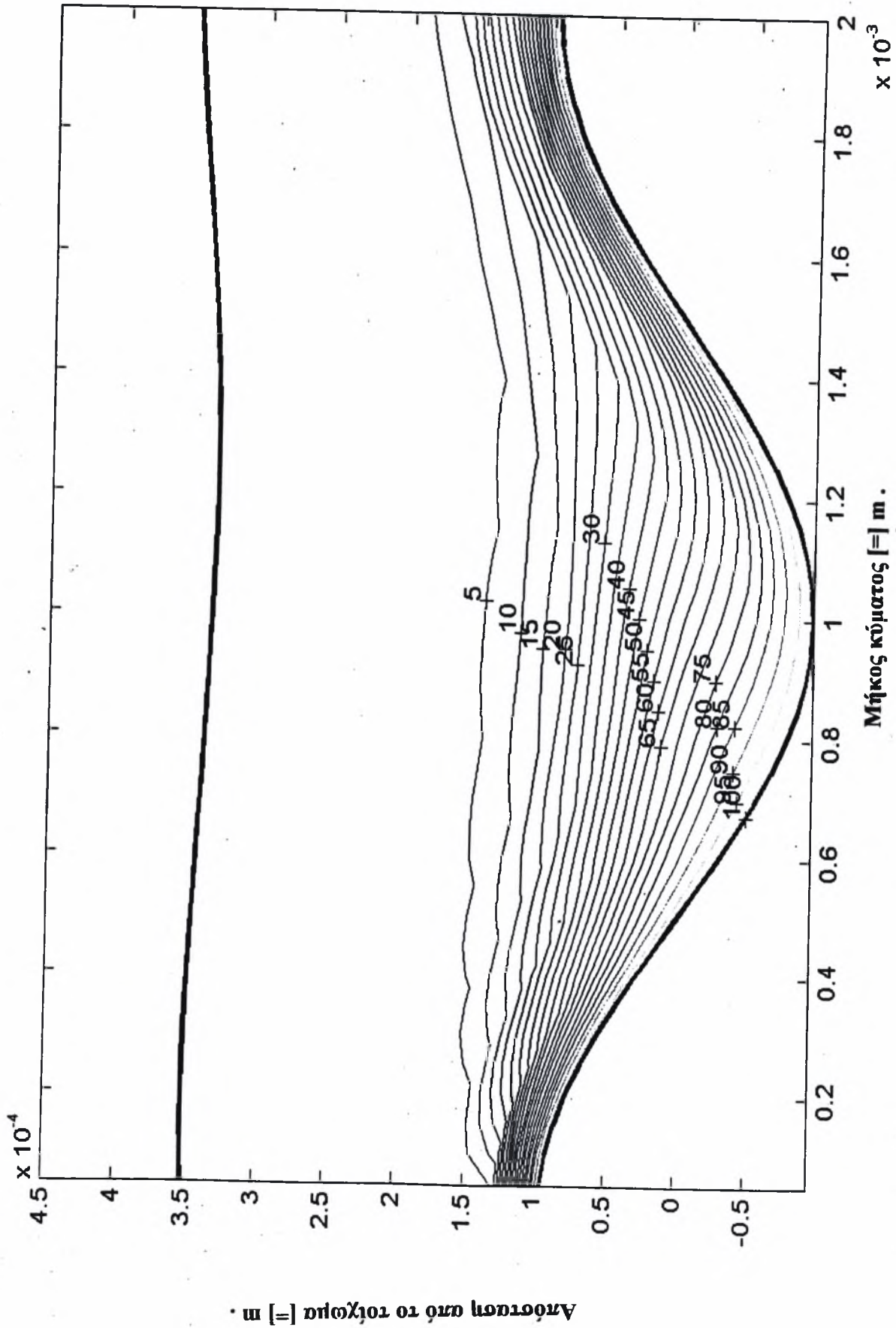
Σχήμα 5.3.31β : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 220$ .



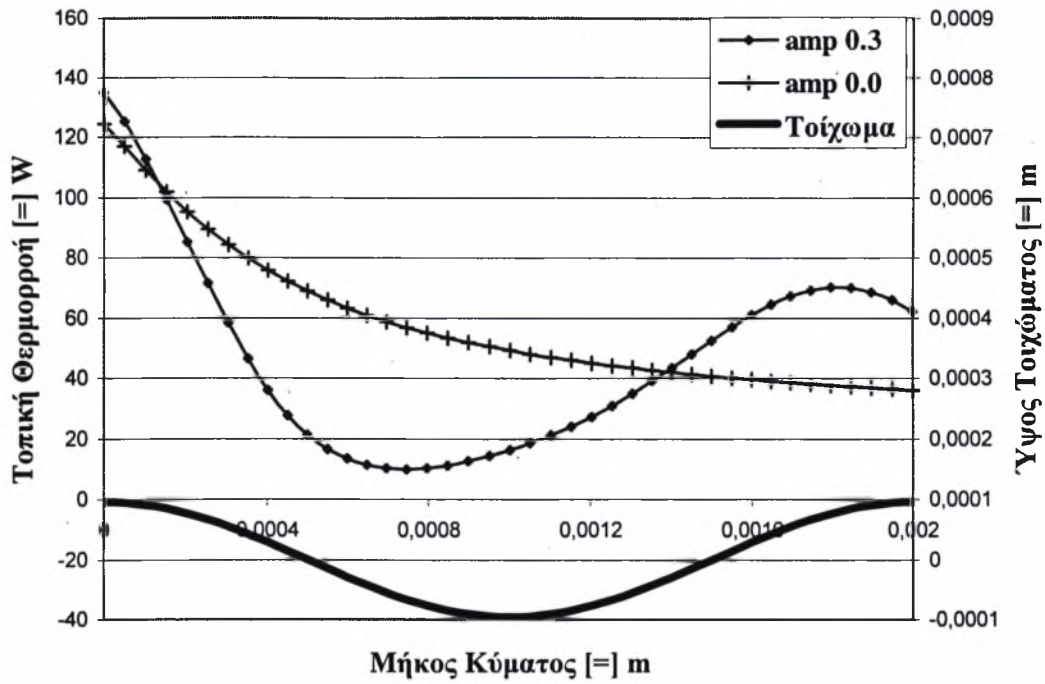
Σχήμα 5.3.32α : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 220$ .



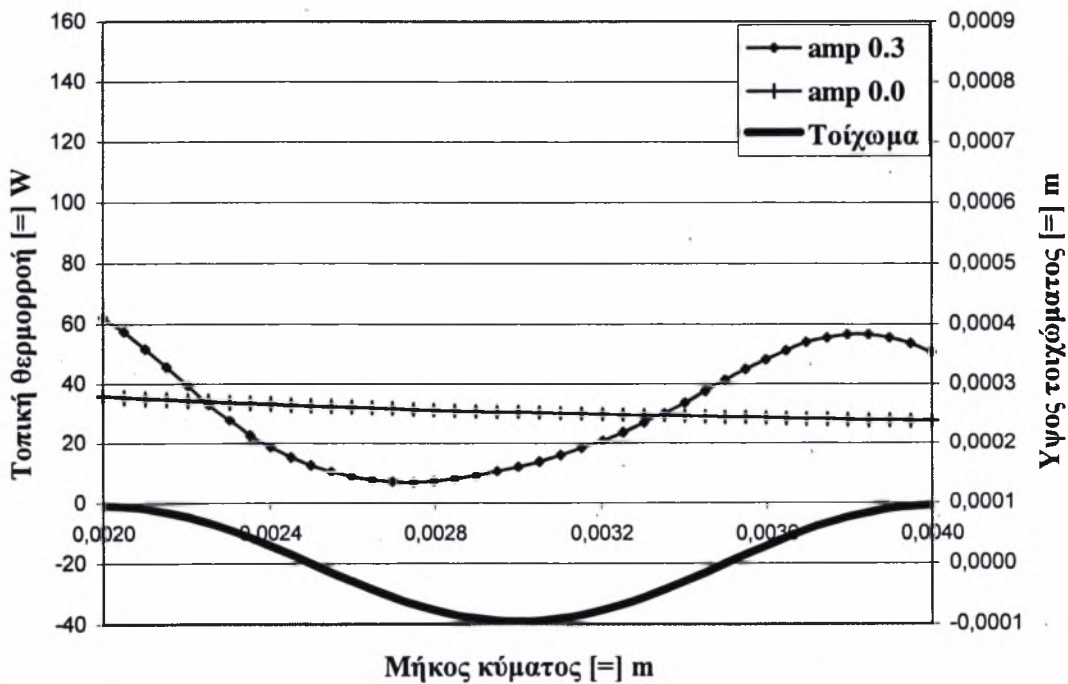
Σχήμα 5.3.32β : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 220$ .



Σχήμα 5.3.33 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 300$ .



Σχήμα 5.3.34α : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 300$  (πρώτο μήκος κύματος : 0.0 - 0.002 m) .

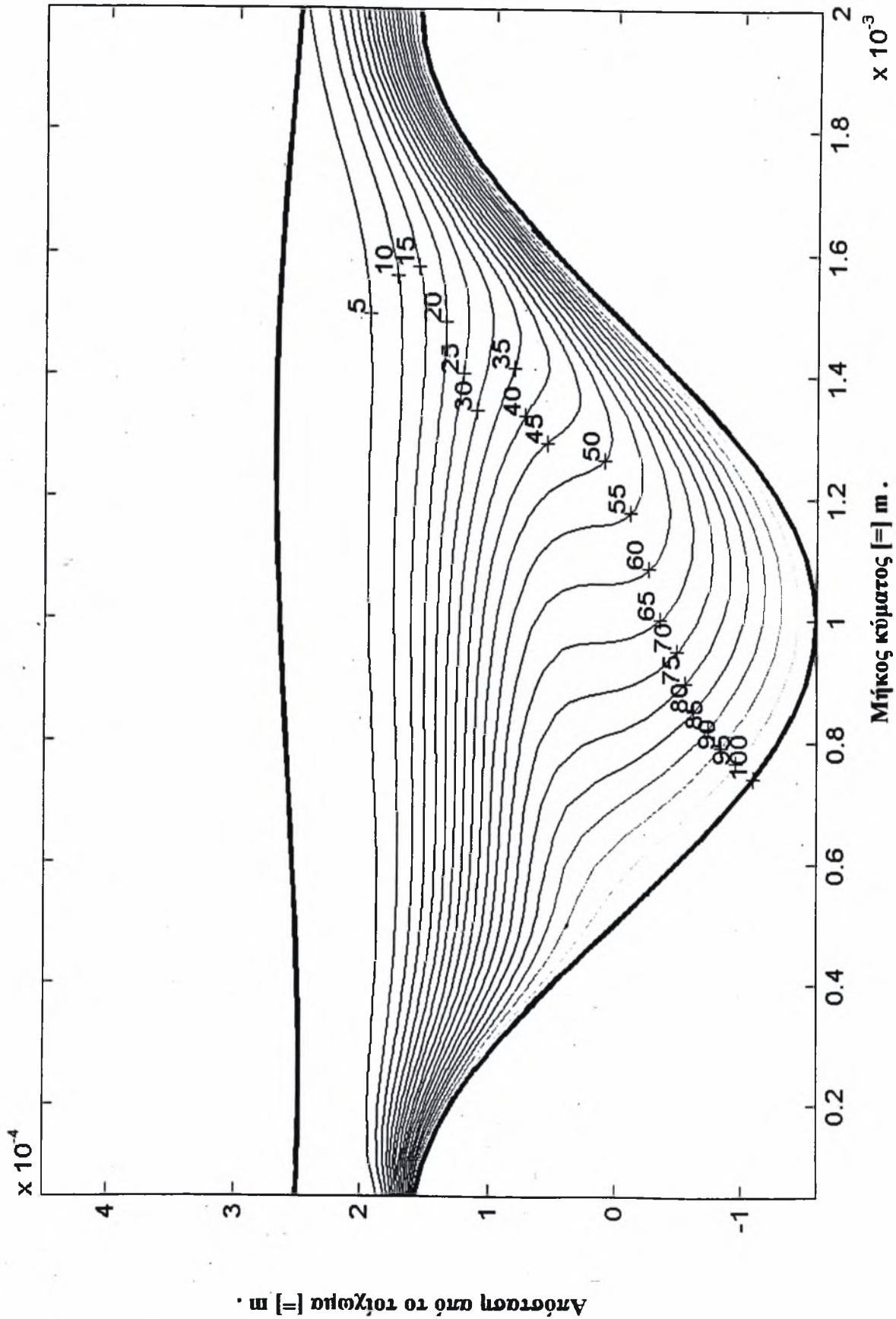


Σχήμα 5.3.34β : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.3 και  $Re = 300$  (δεύτερο μήκος κύματος : 0.002 - 0.004 m) .

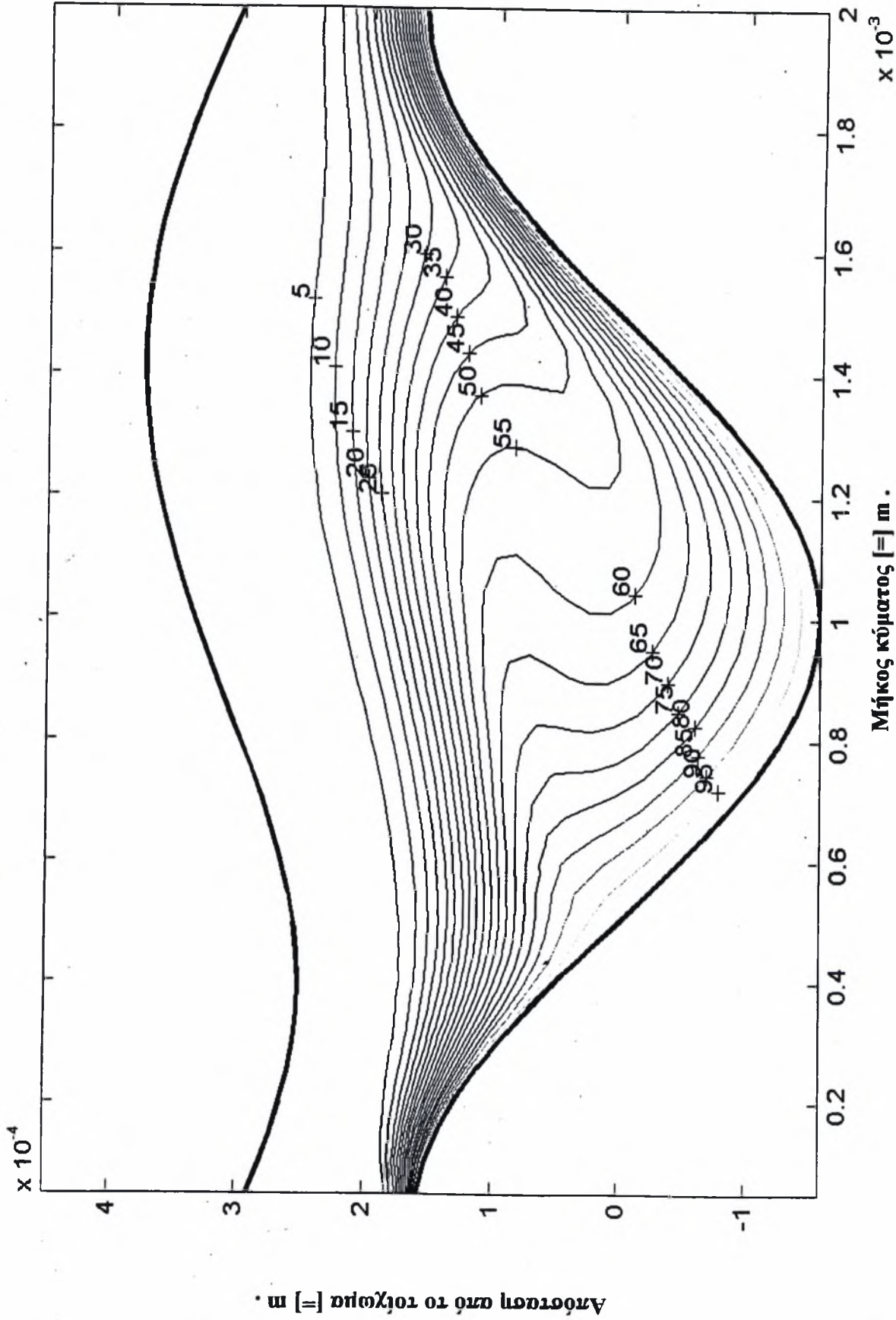
### 5.3.5 ΓΙΑ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΛΑΤΟΣ 0.5

Για αυτή την περίπτωση παρατηρήθηκε μια αστάθεια ιδίως στις καμπύλες των διαγραμμάτων της τοπικής θερμοροής για αριθμούς Reynolds 180 και 300 . Όποτε προτιμήθηκε να αυξηθεί η διακριτοποίηση ως προς το πάχος του υμένα από 16 ίσα διαστήματα σε 48 ίσα διαστήματα . Για αυτή τη διακριτοποίηση , ο χρόνος που χρειάστηκε για την εκτέλεση του προγράμματος ήταν περίπου 45 λεπτά , ενώ η μέγιστη απόκλιση που σημειώθηκε λόγω διαφορετικής διακριτοποίησης ανάμεσα στα αποτελέσματα για 16 ίσα διαστήματα και τα αποτελέσματα για 48 ίσα διαστήματα ως προς το πάχος του υμένα ήταν περίπου 4 °C και σε σημεία που βρίσκονταν πολύ κοντά στο τοίχωμα (σφάλμα περίπου 6%) . Για λόγους μεγάλου υπολογιστικού χρόνου και θεωρώντας ότι η ακρίβεια που έχουμε με τα 16 ίσα διαστήματα είναι ικανοποιητική , δεν κρίθηκε σκόπιμο για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων και τη διαμόρφωση των τάσεων που ακολουθούν τα θερμοκρασιακά πεδία για τα διαφορετικά πλάτη και τους διαφορετικούς αριθμούς Reynolds , η αύξηση της διακριτοποίησης και στα υπόλοιπα διαγράμματα . Είναι προφανής , πάντως η βελτίωση στη μορφή των διαγραμμάτων των ισοθερμοκρασιακών καμπύλων , καθώς ομαλοποιούνται οι ισοθερμοκρασιακές καμπύλες που αναφέρονταν σε χαμηλές θερμοκρασίες (μέχρι 15 °C) , λόγω της μεγαλύτερης ακρίβειας , χωρίς , όμως , αυτό το γεγονός να σημαίνει και την αλλαγή της συμπεριφοράς των θερμοκρασιακών πεδίων , όπως σχολιάστηκε προηγουμένως . Για αυτό το μεγάλο πλάτος κύματος του τοιχώματος παρουσιάζεται η ζώνη ανακυκλοφορίας από μικρό αριθμό Reynolds 80 (Σχ.5.3.35 και 5.3.37) , για να γίνει πιο μεγάλο το εύρος της για αριθμό Reynolds 180 (Σχ.5.3.36 και 5.3.38) και να μειωθεί για αριθμό Reynolds 220 (Σχ.5.3.39 και 5.3.41) . Το φαινόμενο της αποκόλλησης ακόμη και για αριθμό Reynolds 80 είναι πιο εκτεταμένο , συγκρινόμενο με αυτό που παρουσιάστηκε για αδιάστατο πλάτος 0.3 και αριθμό Reynolds 180 . Για αριθμό Reynolds 300 (Σχ. 5.3.40 και 5.3.42) εμφανίζεται πρώτα από όλα μια εντονότερη ζώνη ανακυκλοφορίας , από ό,τι στην περίπτωση για αριθμό Reynolds 220 , αλλά φαίνεται , επίσης , και μια περίεργη μορφή στο διάγραμμα των ισοθερμοκρασιακών καμπύλων που μπορεί να οφείλεται είτε στην αδυναμία του προγράμματος , με το οποίο έγινε η επεξεργασία των αποτελεσμάτων (MATLAB) να απεικονίσει σωστά τις ισοθερμοκρασιακές καμπύλες λόγω του περίεργου σχήματος που έχουν , είτε σε αστάθεια που οφείλεται στο πρόγραμμα .

Αυτό το περίεργο εμφανίζεται και στο διάγραμμα για την τοπική θερμορροή και βρίσκεται υπό διερεύνηση .

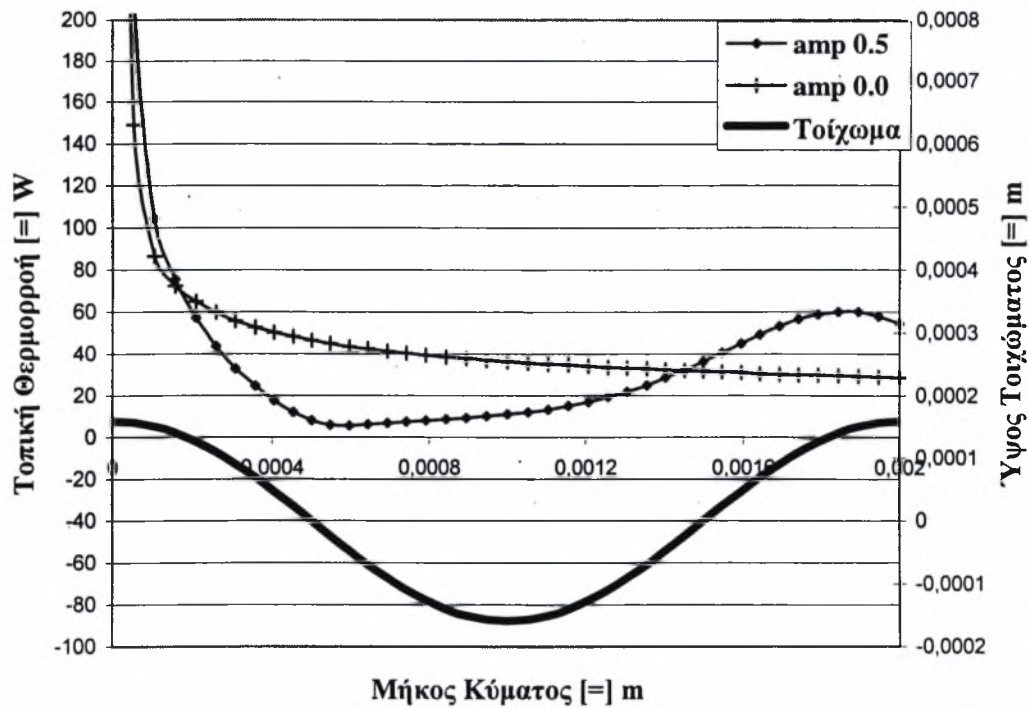


Σχήμα 5.3.35 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 80$ .

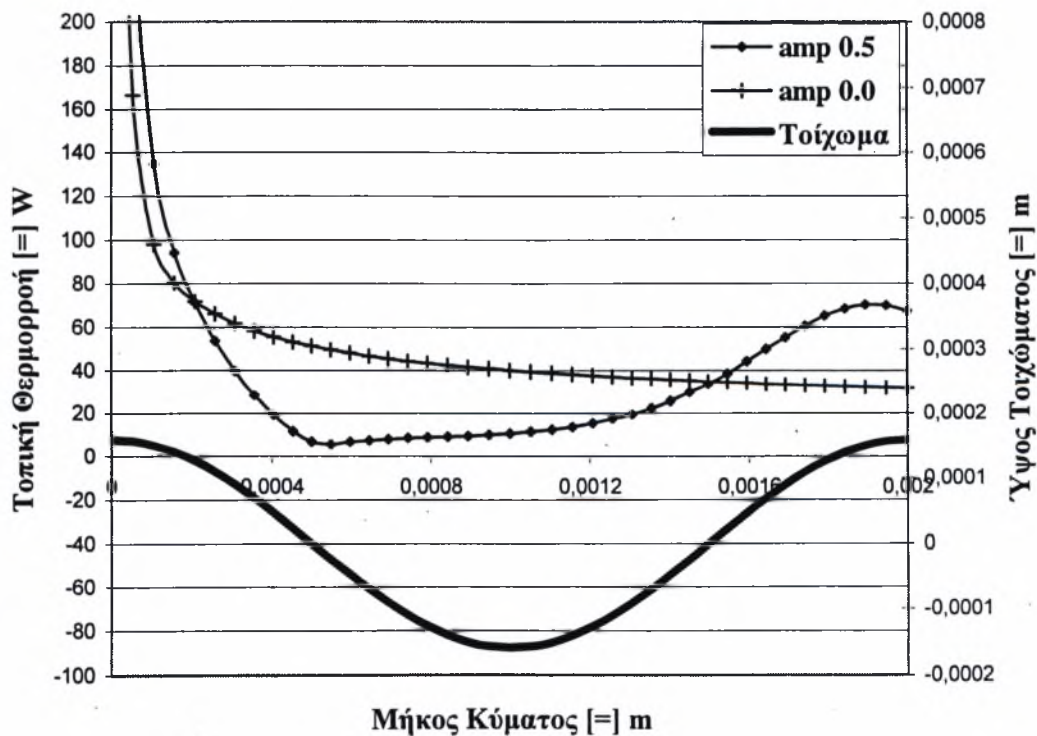


Σχήμα 5.3.36 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 180$ .

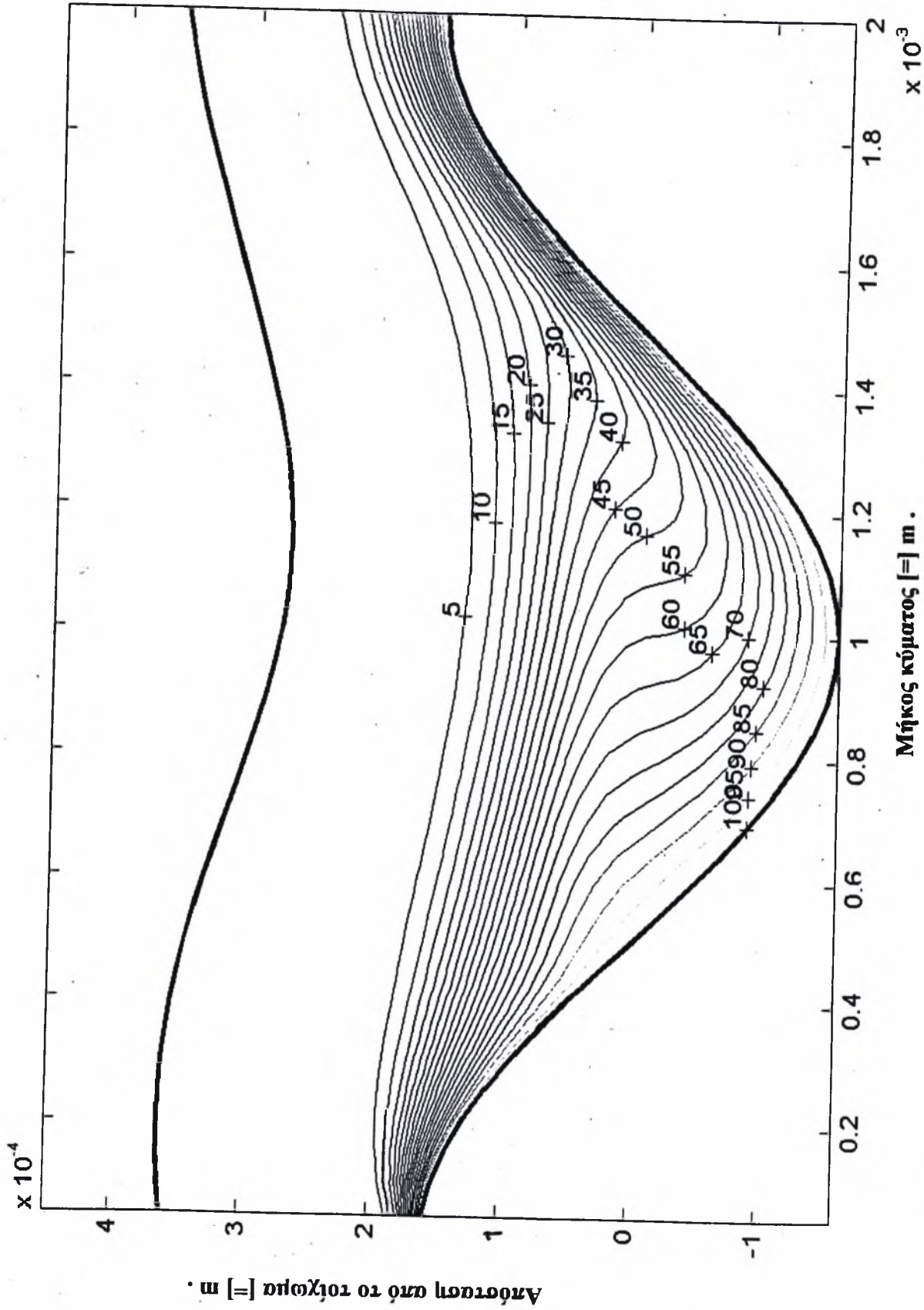




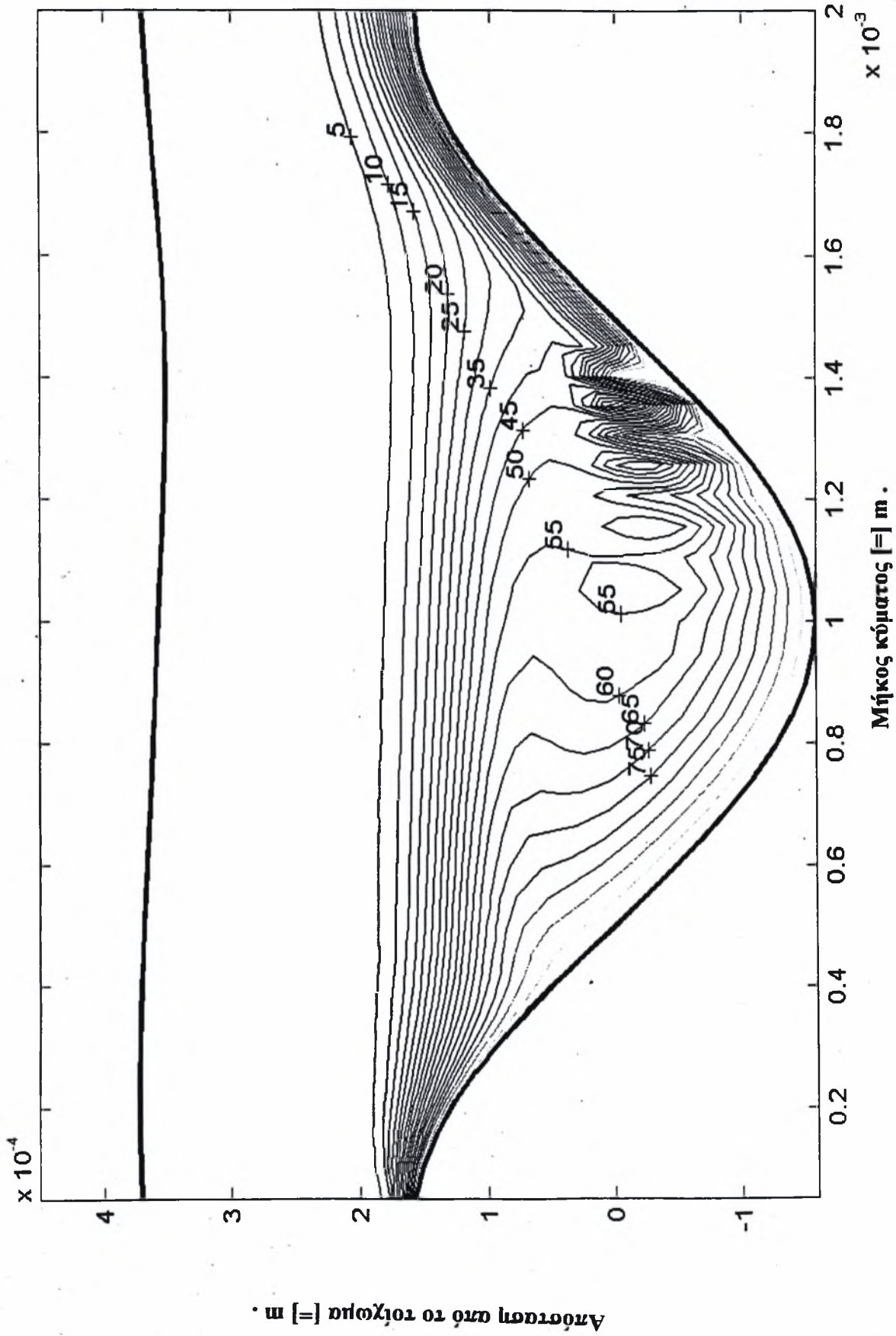
Σχήμα 5.3.37 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 80$ .



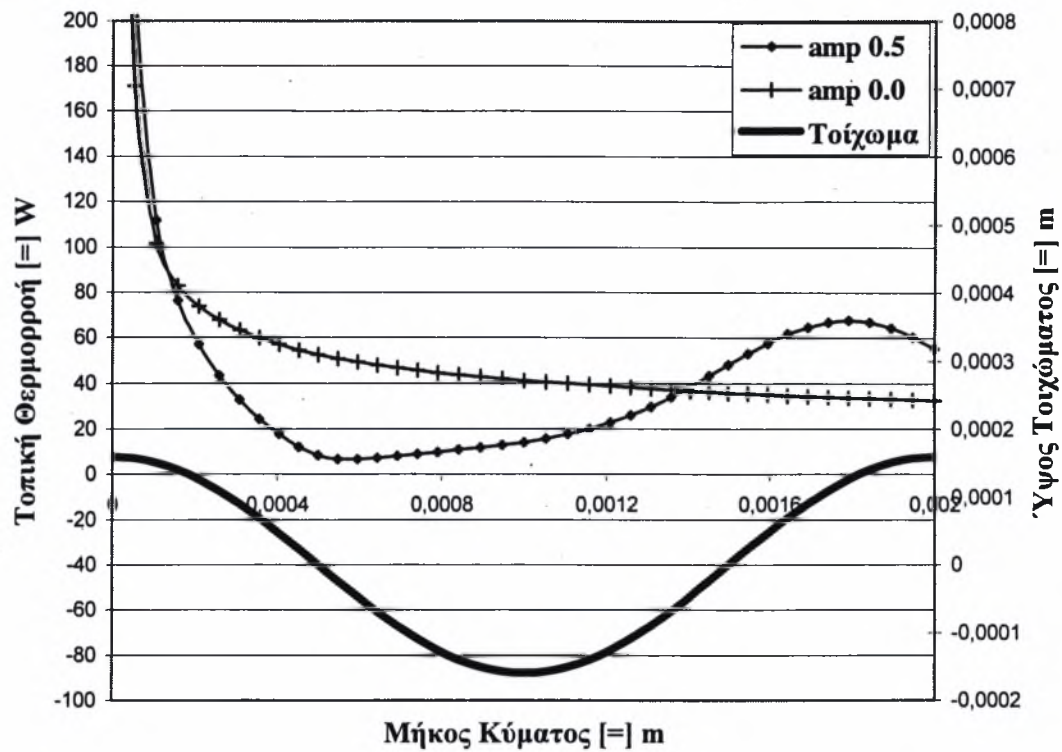
Σχήμα 5.3.38 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 180$ .



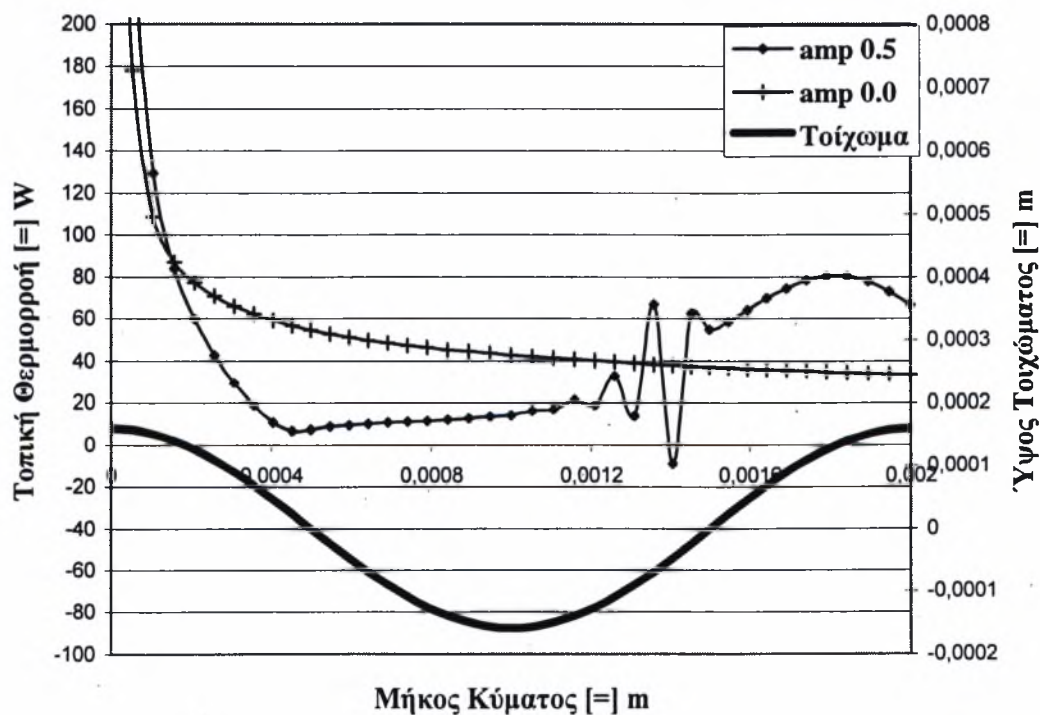
Σχήμα 5.3.39 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 220$ .



Σχήμα 5.3.40 : Ισοθερμοκρασιακές καμπύλες για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 300$ .



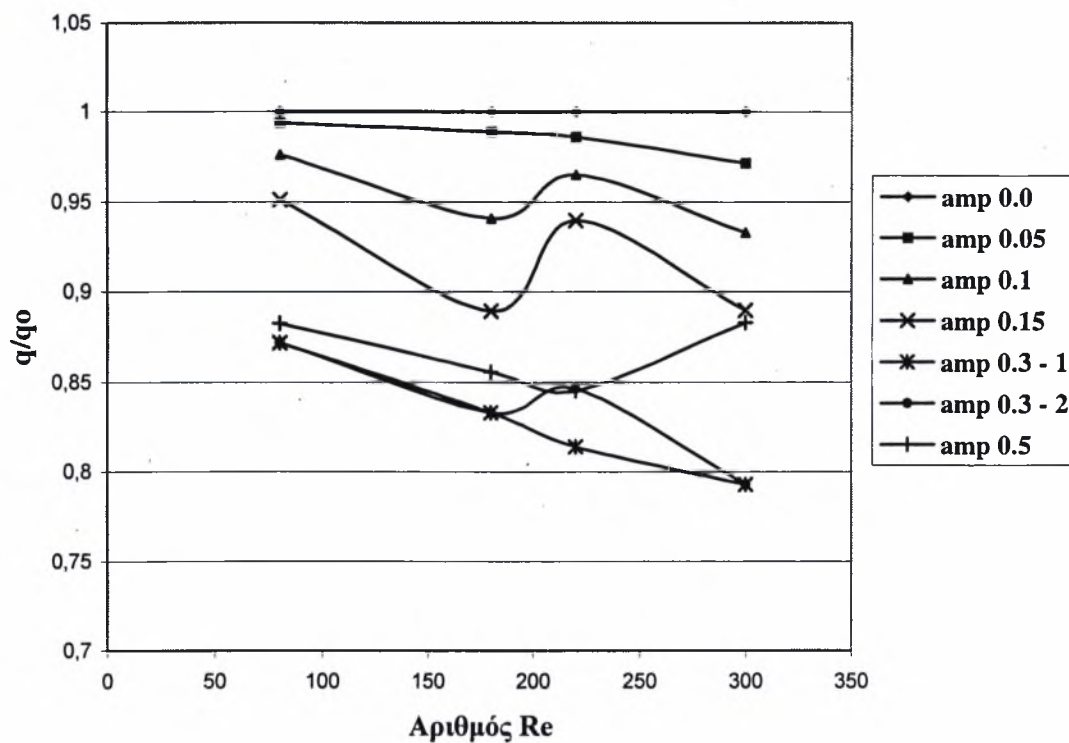
Σχήμα 5.3.41 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 220$ .



Σχήμα 5.3.42 : Τοπική θερμορροή για αδιάστατο πλάτος τοιχώματος 0.5 και  $Re = 300$ .

## 5.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΡΡΟΗΣ

Στο διάγραμμα του σχήματος 5.3.43 παρατίθεται μια σύγκριση των συνολικών θερμορροών για τα διαφορετικά πλάτη και τους διαφορετικούς Reynolds , που εξετάστηκαν προηγουμένως . Στον άξονα Y έχουμε το πηλίκό της συνολικής θερμορροής για κάθε πλάτος κυματοειδούς τοιχώματος προς τη συνολική θερμορροή του επίπεδου τοιχώματος , ενώ στον άξονα X έχουμε τον αριθμό Reynolds . Παρατηρείται από αυτό το διάγραμμα ότι όλες οι περιπτώσεις έχουν τελικά μικρότερη συνολική θερμορροή σε σχέση με το επίπεδο τοίχωμα , καθώς το πηλίκο είναι για όλες μικρότερο της μονάδας . Ιδιαίτερης σημασίας αποτελεί το γεγονός , ότι μεγαλώνοντας το αδιάστατο πλάτος του κύματος του τοιχώματος , η συνολική θερμορροή μικραίνει (εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση για το αδιάστατο πλάτος 0.5 που εμφανίζει μεγαλύτερη συνολική θερμορροή από το αδιάστατο πλάτος 0.3 και για τα δύο διαφορετικά θερμοκρασιακά πεδία που λήφθηκαν υπόψη στον αριθμό Reynolds 220) . Έτσι , επιβεβαιώνεται η τάση που είχαμε διαπιστώσει από τα διαγράμματα των ισοθερμοκρασιακών καμπύλων , ότι τα κυματοειδή τοιχώματα , δηλαδή , λειτουργούν ανασταλτικά στα φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας και ιδίως σε περιπτώσεις όπου έχουμε αποκόλληση του ρευστού και σχηματίζονται ζώνες ανακυκλοφορίας . Ακόμη και στις περιπτώσεις που έχουμε τον ασθενή συντονισμό, δηλαδή για αδιάστατο πλάτος από 0.1 ως 0.3 και αριθμό Reynolds ίσο περίπου με 220, η αύξηση στους ρυθμούς μεταφοράς θερμότητας , δεν είναι τέτοια ώστε να ξεπεράσει τη μείωση που επιδέχονται οι ρυθμοί αυτοί λόγω του παχύτερου υμένα υγρού που σχηματίζεται , σε σύγκριση με το πάχος του υγρού υμένα που σχηματίζεται για το επίπεδο τοίχωμα . Συνεπώς , η ύπαρξη του κοίλου στο τοίχωμα με κύμα , θα μπορούσε να ειπωθεί ότι λειτουργεί ως μία εν μέρει μόνωση για το ρευστό , αφού το ρευστό δέχεται μικρότερα ποσά θερμότητας από το τοίχωμα συγκρίνοντας με τα ποσά θερμότητας που λαμβάνει το ρευστό στην περίπτωση του επίπεδου τοιχώματος .



Σχήμα 5.4.1 : Σύγκριση συνολικής θερμορροής για τα διάφορα τοιχώματα ως προς τον αριθμό Re .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 :

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

#### 6.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Για το επίπεδο τοίχωμα μελετήθηκε η επίδραση της διακριτοποίησης στη σύγκλιση και ορθότητα των αποτελεσμάτων και διαπιστώθηκε ότι ανάλογα και με το μήκος του τοιχώματος , όσο μειώνεται η διακριτοποίηση , τόσο μεγαλώνει η απόκλιση και ιδίως στα πρώτα βήματα . Αυτό οφείλεται , κατά κύριο λόγο , στον αριθμό κελιού Peclet ((3.26) και (3.27)) , όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 3 . Στη συνέχεια εξετάστηκε η ορθότητα της μεθόδου Leonard με αποτελέσματα από τον Fletcher (1991) για παρόμοιο πρόβλημα και με την ημιαναλυτική λύση του Brown (1960) και παρατηρήθηκε , πέρα από τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων και στις δύο συγκρίσεις, ότι δεν εμφανίζει και την υπολογιστική αστάθεια που έχει η λύση του Fletcher . Δηλαδή , πρόκειται για μια μέθοδο που είναι ευσταθής και δίνει σωστά αποτελέσματα . Έγινε σύγκριση και με την αναλυτική λύση που ισχύει μόνο για μια μικρή περιοχή στην αρχή του τοιχώματος κι εκτός από την απόκλιση που παρουσιάζεται στο πρώτο βήμα (που είναι αναμενόμενη και την εμφανίζουν όλες οι υπολογιστικές μέθοδοι , λόγω της ασυνέχειας των οριακών συνθηκών) , υπάρχει σχεδόν πλήρης ταύτιση .

Έπειτα , μελετήθηκε το θερμοκρασιακό επίπεδο για διάφορες περιπτώσεις με οριακές συνθήκες τη σταθερή θερμοκρασία εισόδου του υγρού υμένα , τη σταθερή θερμοκρασία του τοιχώματος και τη μετάδοση θερμότητας λόγω συναγωγής από το ρευστό προς το αέριο περιβάλλον . Για ένα αρκετά μεγάλο μήκος τοιχώματος , για μεγάλο συντελεστή συναγωγής και για αριθμό Reynolds 180 , αποδείχτηκε ότι η θερμοκρασία αποκτάει τελικά μια σταθερή γραμμική κατανομή από το τοίχωμα μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια , ενώ για μηδενικό συντελεστή συναγωγής (αδιαβατική ελεύθερη επιφάνεια) σημειώθηκε η τάση για μια σταθερή θερμοκρασία στα σημεία που είναι γειτονικά στην ελεύθερη επιφάνεια . Οι ίδιες συνθήκες ερευνήθηκαν και για το μικρό αριθμό Reynolds 10 , όπου διαπιστώθηκε ότι το ρευστό έφτασε σε τελική

κατάσταση πολύ πιο γρήγορα (για την περίπτωση της αδιαβατικής ελεύθερης επιφάνειας όλο το ρευστό απέκτησε τη θερμοκρασία του τοιχώματος) . Τέλος , έγινε αναφορά και σε μια περίπτωση που συναντάται στη συμπύκνωση με άμεση επαφή , όπου αντί για συναγωγή με κάποιο αέριο , η ελεύθερη επιφάνεια έχει σταθερή θερμοκρασία . Το θερμοκρασιακό προφίλ για αυτές τις συνθήκες είχε ασυμπτωτική μορφή στην αρχή του τοιχώματος για να καταλήξει προς το τέλος να αποκτήσει γραμμική σχέση με το ύψος από το τοίχωμα .

Στο κυματοειδές τοίχωμα μελετήθηκε συστηματικά , με τη δημιουργία ισοθερμοκρασιακών καμπυλών και διαγραμμάτων τοπικής θερμορροής - η επίδραση του πλάτους του κύματος του τοιχώματος και του αριθμού Reynolds στα φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας . Από την έρευνα αυτή επιβεβαιώθηκε το συμπέρασμα που είχε εξαχθεί για το επίπεδο τοίχωμα, ότι , δηλαδή , όσο μικρότερος είναι ο αριθμός Reynolds τόσο μεγαλύτεροι είναι οι ρυθμοί μετάδοσης θερμότητας , ενώ συγκρίνοντας τα διαφορετικά πλάτη τοιχώματος , προέκυψε ότι η αύξηση του πλάτους του τοιχώματος λειτουργεί ανασταλτικά στη μετάδοση θερμότητας από το τοίχωμα προς το ρευστό . Οι ρυθμοί αυτοί μετάδοσης θερμότητας είναι για όλα τα πλάτη τοιχώματος μικρότεροι από αυτούς που έχουμε για το επίπεδο τοίχωμα , και γίνονται ακόμη μικρότεροι , όταν στο κυματοειδές τοίχωμα εμφανίζονται φαινόμενα αποκόλλησης του ρευστού και συνεπώς ζώνες ανακυκλοφορίας . Η ύπαρξη του ασθενούς συντονισμού στην περιοχή αριθμού Reynolds ίσο περίπου με 220 (για αδιάστατα πλάτη τοιχώματος από 0.1 ως 0.3) βελτιώνει κάπως τη μεταφορά θερμότητας . Όμως , η βελτίωση αυτή δεν επαρκεί για την εξισορρόπηση της αρνητικής επίδρασης του παχύτερου υμένα υγρού που σχηματίζεται στον ίδιο αριθμό Reynolds στο κυματοειδές σε σχέση με το επίπεδο τοίχωμα . Επομένως , η ύπαρξη κυματισμών στο τοίχωμα λειτουργεί ως μερική μόνωση για το ρευστό και πολύ περισσότερο όταν εμφανίζονται ζώνες ανακυκλοφορίας .



## 6.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Για ένα τομέα της έρευνας που έχει μελετηθεί τόσο λίγο , είναι πολλές οι προτάσεις που θα μπορούσαν να γίνουν , ώστε να αποσαφηνιστούν και να εξηγηθούν σε μεγαλύτερο βάθος τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αυτή τη διπλωματική εργασία . Παρακάτω παρατίθενται ορισμένες :

- Μελέτη των ρυθμών μετάδοσης θερμότητας σε περισσότερα μήκη κύματος και για άλλα πλάτη κύματος του τοιχώματος και άλλου αριθμούς Reynolds .
- Εξέταση της επίδρασης του παράγοντα της βαρύτητας (για διαφορετικές γωνίες κλίσης του τοιχώματος) στη μεταφορά θερμότητας .
- Θα μπορούσε να δοθεί έμφαση μέσω των συναρτήσεων κατανομής των σημείων (stretching functions) σε κάποιο κομμάτι του πλέγματος και ιδίως κοντά στο τοίχωμα ώστε να κατανοηθούν καλύτερα τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα (π.χ. μέσα στο κοίλο του τοιχώματος για τις περιπτώσεις που εμφανίζεται το φαινόμενο της αποκόλλησης) .
- Αντίστοιχη έρευνα και για τα φαινόμενα μεταφοράς μάζας σε επίπεδο και κυματοειδές τοίχωμα . Στην περίπτωση αυτή , η κρίσιμη περιοχή είναι κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια .
- Θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστούν τα φαινόμενα μεταφοράς μάζας και θερμότητας και σε τοιχώματα άλλης μορφής (π.χ. τριγωνικής ή παλμοειδούς μορφής) .

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. H. Sabir , K. O. Suen and G.A. Vinnicombe , Investigation of effects of wave motion on the performance of a falling film absorber , *J. Heat Mass Transfer* , vol.39 , no. 12 , pp 2463-2472 (1996) .
2. Frederic K. Wasden and A. E. Dukler , A Numerical Study of Mass Transfer in Free Falling Wavy Films , *AIChE Journal* , vol. 36 , no. 9 , pp 1379-1390 (1990) .
3. S. Jayanti and G. F. Hewitt , Hydrodynamics and heat transfer of wavy thin film flow , *J. Heat Mass Transfer* , vol. 40 , no. 1 , pp 179-190 , (1997) .
4. D. D. Back and M. J. McCready , Theoretical Study of Interfacial Transport in Gas – Liquid Flows , *AIChE Journal* , vol. 34 , no. 11 , pp 1789-1802 (1988) .
5. V. Bontozoglou , A numerical study of interfacial transport to a gas – sheared wavy liquid , *J. Heat Mass Transfer* , vol. 41 , no. 15 , pp 2297-2305 , (1998) .
6. V. Bontozoglou and G. Papapolymerou , Laminar Film Flow Down a Wavy Incline , *J. Multiphase Flow* , vol. 23 , no. 1 , pp 69-79 , (1997) .
7. V. Bontozoglou , Laminar Film Flow Along a Periodic Wall , *CMES* , vol. 1 , no. 2 , pp 129-138 , (2000) .
8. C. A. J. Fletcher , Computational Techniques for Fluid Dynamics , *Springer – Verlag* , (1991) .
9. Byron Bird , Warren E. Stewart and Edwin N. Lightfoot , Transport Phenomena , *John Wiley and Sons* , (1960) .
10. Pozrikidis C. , Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Oxford University Press , (1997) .
11. Joe D. Hoffman , Numerical methods for engineers and scientists , *McGraw – Hill* , (1992) .
12. Άγγελου Θ. Παπαϊωάννου , Μηχανική των ρευστών , *Α. Θ. Παπαϊωάννου* , (1993) .
13. J. M. Smith and H. C. Van Ness , Εισαγωγή στη Θερμοδυναμική , *Α. Τζιόλα Ε.* , (1990) .

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

```
program epipedo
```

```
-----  
c  
c  
c   Επίλυση του θερμοκρασιακού πεδίου σε επίπεδο τοίχωμα .  
c  
-----  
  
parameter (mm=100,nn=50)  
double precision dy,dx,gx,g,d,m1,a,f,r,l,k,h,to,too,tw  
double precision u(mm*nn),t(mm*nn,mm*nn),b(mm*nn),x(mm*nn)  
double precision q1(mm+1),sum  
double precision dx1,dyl,re  
integer s,m,n  
-----  
c  
c  
c   Όπου :  
c   dy , dx η απόσταση ανάμεσα στους κόμβους στους άξονες y  
c           και x αντίστοιχα [m] ,  
c   m , n   ο αριθμός των κόμβων στους άξονες ,  
c   m1      το δυναμικό ιξώδες [kg/msec] ,  
c   g       η επιτάχυνση της βαρύτητας [m/sec2] ,  
c   gx      η επιτάχυνση της βαρύτητας στον άξονα x [m/sec2] ,  
c   a       ο συντελεστής της θερμοδιαχυτότητας [m2/sec] ,  
c   f       η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου ,  
c   r       η πυκνότητα [kg/m3] ,  
c   k       η θερμική αγωγιμότητα [W/mK] ,  
c   l       το μήκος του τοιχώματος [m] ,  
c   d       το πάχος του υμένα [m] ,  
c   Re      ο αριθμός Reynolds ,  
c   to      η θερμοκρασία του ρευστού στην είσοδο ,  
c   tw      η θερμοκρασία του τοιχώματος ,  
c   too     η θερμοκρασία του αερίου που περιβάλλει τον υμένα  
c   q1      η τοπική θερμοροή .  
c   x       η θερμοκρασία κάθε σημείου .  
c  
-----  
  
c  
c   Το αρχείο input.txt είναι το αρχείο με τα δεδομένα του προγράμματος ,  
c   ενώ τα αρχεία output1.txt και output2.txt είναι τα αρχεία με τα  
c   αποτελέσματα .  
c  
c   open (19,file='input.txt')  
c   open (21,file='output1.txt')  
c   open (22,file='output2.txt')  
c  
c   Ανάγνωση των δεδομένων .  
c  
c  
c   read (19,*) ; ;  
c   read (19,*) m,n  
c   read (19,*)  
c   read (19,*)  
c   read (19,*) to,too,tw  
c   read (19,*)
```

```

read (19,*)
read (19,*) g,a,m1
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) r,k,f,h
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) re,l
gx = g*sind(f)
d = (3.*re*(m1**2)/((r**2)*gx))**0.33333333
dx = l/m
dy = d/n
do 10 i=1,m*n
    u(i) = 0.0
    b(i) = 0.0
    x(i) = 0.0
    do 20 j=1,m*n
        t(i,j) = 0.0
20    continue
10    continue
c
c    Υπολογισμός των ταχυτήτων u .
c
c    call pinu(dy,r,gx,d,m1,m,n,u)
c
c    Δημιουργία του πίνακα των άγνωστων θερμοκρασιών .
c
c    call pint(dy,dx,a,k,h,m,n,u,t)
c
c    Δημιουργία του πίνακα των γνωστών μεταβλητών .
c
c    call pinb(m,n,dy,dx,to,too,tw,h,k,a,u,b)
c
c    Επίλυση του συστήματος των εξισώσεων .
c
c    call gauss(n,m,t,b,x)
c
c    Υπολογισμός της τοπικής θερμορροής .
c
q1(1) = -k*((-to+4.0*to-3.0*tw)/(2.0*dy))*(dx/2.0)
s = 1
dxl = dx/2.0
do 30 i=1,(m-2)*n+1
    if (i.eq.(s-1)*n+1) then
        dxl = dxl+dx
        q1(s+1) = -k*((-x(i+1)+4.0*x(i)-3.0*tw)/(2.0*dy))*dx
        s = s+1
        goto 30
    endif
30    continue
c
c    Εγγραφή των αποτελεσμάτων στα αρχεία .
c
c
i = (m-1)*n+1
dxl = dxl+(dx/2.0)
q1(m+1) = -k*((-x(i+1)+4.0*x(i)-3.0*tw)/(2.0*dy))*(dx/2.0)
do 31 i=1,m+1
    write (22,*) i,q1(i)
31    continue
s = 1
dxl = 0.0

```

```

do 32 i=1,m*n
  if (i.eq.(s-1)*n+1) then
    dx1 = dx1+dx
    dyl = 0.0
    write (21,*) i+s-1,dx1,dyl,tw
    dyl = dyl+dy
    write (21,*) i+s,dx1,dyl,x(i)
    s = s+1
    goto 32
  endif
  dyl = dyl+dy
  write (21,*) i+s-1,dx1,dyl,x(i)
32 continue
stop
end

```

```

c-----
c
c  Υπολογισμός του προφίλ των ταχυτήτων .
c
c-----

```

```

subroutine pinu(dy,r,gx,d,m1,m,n,u)
integer s,m,n
double precision y,dy,r,gx,d,m1
double precision u(m*n)
y = dy
s = 1
do 40 i=1,m*n
  u(i)=((r*gx*(d**2.0))/m1)*((y/d)-((1.0/2.0)*((y/d)**2.0)))
  y = y + dy
  if (i.eq.s*n) then
    y = dy
    s = s + 1
  endif
40 continue
return
end

```

```

c-----
c
c  Υπολογισμός στην εξίσωση  $Tx = b$  του πίνακα T.
c
c-----

```

```

subroutine pint(dy,dx,a,k,h,m,n,u,t)
integer s,m,n
double precision dy,dx,a,k,h
double precision u(m*n),t(m*n,m*n)
c
c  Για την πρώτη στήλη του πλέγματος .
c
do 50 i=1,n
  t(i,i+n) = -6.0*a*(dy**2.0) + 2.0*u(i)*dx*(dy**2.0)
  if (i.ne.n) then
    t(i,i) = 3.0*u(i)*dx*(dy**2.0) + 12.0*a*(dy**2.0) + 12.0*
+      a*(dx**2.0)

```

```

        t(i,i+1) = -6.0*a*(dx**2.0)
        if (i.ne.1) then
            t(i,i-1) = -6.0*a*(dx**2.0)
        endif
    else
        t(i,i) = 3.0*u(i)*dx*(dy**2.0) + 12.0*a*(dy**2.0) + 12.0*
+         a*(dx**2.0) + 12.0*a*(dx**2.0)*dy*h/k

        t(i,i-1) = -12.0*a*(dx**2.0)
    endif
50  continue
c
c  Για τα εσωτερικά σημεία του πλέγματος .
c
    s = 2
    do 90 i=n+1,(m-1)*n
        t(i,i-n) = -6.0*a*(dy**2.0) - 6.0*u(i)*dx*(dy**2.0)
        t(i,i+n) = -6.0*a*(dy**2.0) + 2.0*u(i)*dx*(dy**2.0)
        if (i.ge.2*n+1) then
            t(i,i-2.0*n) = u(i)*dx*(dy**2.0)
        endif
        if (i.eq.s*n) then
            t(i,i) = 3.0*u(i)*dx*(dy**2.0) + 12.0*a*(dy**2.0) + 12.0*
+         a*(dx**2.0) + 12.0*a*(dx**2.0)*dy*h/k
            t(i,i-1) = -12.0*a*(dx**2.0)
            s = s + 1
            goto 90
        endif
        t(i,i) = 3.0*u(i)*dx*(dy**2.0) + 12.0*a*(dy**2.0) + 12.0*
+         a*(dx**2.0)
        t(i,i+1) = -6.0*a*(dx**2.0)
        if (i.eq.(s-1)*n+1) then
            goto 90
        else
            t(i,i-1) = -6.0*a*(dx**2.0)
        endif
90  continue
c
c  Για τα σημεία του πλέγματος που βρίσκονται στην τελευταία στήλη .
c
    do 110 i=(m-1)*n+1,m*n
        t(i,i-3.0*n) = 2.0*a*(dy**2.0)
        t(i,i-2.0*n) = -8.0*a*(dy**2.0)+u(i)*dx*(dy**2.0)
        t(i,i-n) = -4.0*u(i)*dx*(dy**2.0)+10.0*a*(dy**2.0)
        if (i.ne.m*n) then
            t(i,i+1) = -2.0*a*(dx**2.0)
            t(i,i) = 3.0*u(i)*dx*(dy**2.0)-4.0*a*(dy**2.0)+
+             4.0*a*(dx**2.0)
        endif
        if (i.eq.(m-1)*n+1) then
            goto 110
        else
            if (i.ne.m*n) then
                t(i,i-1) = -2.0*a*(dx**2.0)
            else
                t(i,i-1) = -4.0*a*(dx**2.0)
                t(i,i) = 3.0*u(i)*dx*(dy**2.0)-4.0*a*(dy**2.0)+
+                 4.0*a*(dx**2.0)+4.0*a*(dx**2.0)*dy*h/k
            endif
        endif
110  continue

```

```
return
end
```

```
-----
c
c
c   Υπολογισμός στην εξίσωση  $Tx = b$  του πίνακα  $b$  .
c
c
c-----
```

```
subroutine pinb(m,n,dy,dx,to,too,tw,h,k,a,u,b)
integer m,n
double precision a,h,dy,dx,to,too,tw,k
double precision u(m*n),b(m*n)
b(1) = (6.0*a*(dy**2.0) + 5.0*u(1)*dx*(dy**2.0))*to +
+      6.0*a*(dx**2.0)*tw
do 130 i=2,n-1
  b(i) = (6.0*a*(dy**2.0) + 5.0*u(i)*dx*(dy**2.0))*to
130 continue
b(n) = (6.0*a*(dy**2.0) + 5.0*u(n)*dx*(dy**2.0))*to +
+      12.0*a*(dx**2.0)*dy*h*too/k
b(n+1) = -u(n+1)*dx*(dy**2.0)*to + 6.0*a*(dx**2.0)*tw
do 140 i=n+2,2*n-1
  b(i) = -u(i)*dx*(dy**2.0)*to
140 continue
do 150 i=2.0*n,(m-1)*n,n
  if (i.eq.2.0*n) then
    b(i) = -u(i)*dx*(dy**2.0)*to + 12.0*a*(dx**2.0)*dy*h*too/k
  else
    b(i) = 12.0*a*(dx**2.0)*dy*h*too/k
  endif
  if (i.eq.(m-1)*n) then
    b(i+1) = 2.0*a*(dx**2.0)*tw
  else
    b(i+1) = 6.0*a*(dx**2.0)*tw
  endif
150 continue
b(m*n) = 4.0*a*(dx**2.0)*dy*h*too/k
return
end
```

```
-----
c
c
c   Υπορουτίνα επίλυσης με τη μέθοδο Gauss της εξίσωσης  $Tx = b$  .
c   ( Gaussian elimination with scaled row pivoting . )
c
c
c-----
```

```
subroutine gauss(n,m,a,b,x)
integer m,n
integer p(m*n)
double precision a(m*n,m*n),s(m*n),b(m*n),x(m*n)
double precision smax,r,rmax
do 160 i=1,m*n
  p(i) = i
  smax = 0.0
  do 170 j=1,m*n
    smax = dmax1(smax,abs(a(i,j)))
```

```

170   continue
      s(i) = smax
160   continue
do 180 k=1,m*n-1
      rmax = 0.0
      do 190 i=k,m*n
          r = abs(a(p(i),k))/s(p(i))
          if (r.gt.rmax) then
              j = i
              rmax = r
          endif
190   continue
      pk = p(j)
      p(j) = p(k)
      p(k) = pk
      do 200 i=k+1,m*n
          z = a(p(i),k)/a(p(k),k)
          a(p(i),k) = z
          do 210 j=k+1,m*n
              a(p(i),j) = a(p(i),j) - z*a(p(k),j)
210   continue
200   continue
180   continue

```

```

c-----
c
c   Οπίσθια αντικατάσταση .
c
c-----

```

```

do 220 k=1,m*n-1
      do 230 i=k+1,m*n
          b(p(i)) = b(p(i)) - a(p(i),k)*b(p(k))
230   continue
220   continue
do 240 i=m*n,1,-1
      sum = b(p(i))
      do 250 j=i+1,m*n
          sum = sum - a(p(i),j)*x(j)
250   continue
      x(i) = sum/a(p(i),i)
240   continue
return
end

```



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

program kyma

```
-----  
c  
c  
c      Επίλυση του θερμοκρασιακού πεδίου σε κυματοειδές τοίχωμα .  
c  
-----  
  
parameter (mmm=100,nnn=50)  
implicit double precision(a-h,o-z)  
parameter (nk=30,mk=30,nktot=992)  
dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),  
+         asurf(0:nk),bsurf(0:nk)  
double precision dks,dh,gx,g,d,m1,a,f,r,k,h,to,too,tw,p,q,pi  
double precision u(mmm*(nnn+1)),v(mmm*(nnn+1)),sten  
double precision t(mmm*(nnn+1),mmm*(nnn+1)),b(mmm*(nnn+1))  
double precision x(mmm*(nnn+1)),y(mmm*(nnn+1)),xab(mmm)  
double precision yab(mmm),xdc(mmm),ydc(mmm),xks(mmm*(nnn+1))  
double precision yks(mmm*(nnn+1)),xh(mmm*(nnn+1)),yh(mmm*(nnn+1))  
double precision xksks(mmm*(nnn+1)),yksks(mmm*(nnn+1))  
double precision xhh(mmm*(nnn+1)),yhh(mmm*(nnn+1))  
double precision xksh(mmm*(nnn+1)),yksh(mmm*(nnn+1))  
double precision ksx(mmm*(nnn+1)),ksy(mmm*(nnn+1)),hx(mmm*(nnn+1))  
  
double precision hy(mmm*(nnn+1)),ksxx(mmm*(nnn+1))  
double precision ksy(mmm*(nnn+1)),hxx(mmm*(nnn+1))  
double precision hyy(mmm*(nnn+1)),a1(mmm*(nnn+1)),b1(mmm*(nnn+1))  
double precision c1(mmm*(nnn+1)),d1(mmm*(nnn+1)),e1(mmm*(nnn+1))  
double precision a2(mmm*(nnn+1)),b2(mmm*(nnn+1))  
double precision tfinal(mmm*(nnn+1)),xabo1,yabo1,xdco1,ydco1, trig  
double precision xad(nnn),yad(nnn),x1,y1,u1,v1,xx1,x1,flx,hx1,hy1  
double precision amp,re,sum,b3(mmm*(nnn+1));tokso(mmm+1),b31  
double precision xks1,yks1,xh1,yh1,jant1,qth(mmm+1),qall,q1  
integer m,n,s,c,m,n  
  
-----  
c  
c  
c      Όπου :  
c      m , n   ο αριθμός των κόμβων στους άξονες ,  
c      m1      το δυναμικό ιξώδες [kg/msec] ,  
c      g       η επιτάχυνση της βαρύτητας [m/sec2] ,  
c      gx      η επιτάχυνση της βαρύτητας στον άξονα x [m/sec2] ,  
c      a       ο συντελεστής της θερμοδιαχυσιμότητας [m2/sec] ,  
c      f       η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου ,  
c      sten    επιφανειακή τάση [N/m] ,  
c      amp     το αδιάστατο πλάτος του κύματος του τοιχώματος ,  
c      trig    ο τριγωνομετρικός αριθμός για τη γωνία του κεκλιμένου τοιχώματος ,  
c      r       η πυκνότητα [kg/m3] ,  
c      k       η θερμική αγωγιμότητα [W/mK] ,  
c      xx1     το μήκος κύματος του τοιχώματος [m] ,  
c      x1      το συνολικό μήκος του τοιχώματος [m] ,  
c      c       ο αριθμός των κυμάτων ,  
c      Re      ο αριθμός Reynolds ,  
c      to      η θερμοκρασία του ρευστού στην είσοδο ,
```

```

c      tw      η θερμοκρασία του τοιχώματος ,
c      too     η θερμοκρασία του αερίου που περιβάλλει τον υμένα
c      tfinal  η θερμοκρασία κάθε σημείου ,
c      qth     η τοπική θερμορροή .
c

```

```

c-----
c
c      Στα αρχεία data.txt και amp0.3-Re300 (αρχείο από την υπολογιστική
c      μελέτη του Bontozoflou (2000) βρίσκονται τα δεδομένα που χρειάζονται
c      για το πρόγραμμα , ενώ τα αποτελέσματα αποθηκεύονται στα αρχεία
c      results1.txt και results2.txt .
c

```

```

open (19,file='data.txt')
open (11,file='amp0.3-Re300')
open (21,file='results1.txt')
open (22,file='results2.txt')

```

```

c
c      Ανάγνωση των δεδομένων .
c

```

```

read (19,*)
read (19,*) m,n
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) to,too,tw
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) g,a,m1
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) r,k,f,h
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) sten,p,q
read (19,*)
read (19,*)
read (19,*) c

read (11,*)
read (11,*) mm,nn,amp,Re,xx1
read (11,*) ((acoef(j,k1),k1=0,nn),j=0,mm)
read (11,*) ((bcoef(j,k1),k1=1,nn),j=0,mm)
read (11,*) (asurf(k1),k1=0,nn)
read (11,*) (bsurf(k1),k1=0,nn)

```

```

x1 = c*xx1
q1 = re*m1/r
pi = 4.*datan(1.d0)
trig = dsind(f)

```

```

gx = g*dsind(f)
do 10 i=1,m*n
  u(i) = 0.0
  b(i) = 0.0
  x(i) = 0.0
  do 20 j=1,m*n
    t(i,j) = 0.0

```

```

20    continue

```

```

10    continue

```

```

c
c      Υπολογισμός των σημείων x,y στο πλέγμα .

```

```

c
call stretch(m,n,trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,xl,p,q,xab,yab,xdc,ydc,
+          xab01,yab01,xdcol,ydcol,dks,dh,x,y,xad,yad,mm,nn,amp,
+          re,acoef,bcoef,asurf,bsurf,tokso)
do 132 i=1,m*(n+1)
    x(i) = (xxl*x(i))/(2.0*pi)
    y(i) = (xxl*y(i))/(2.0*pi)
132 continue
do 133 i=1,m
    yab(i) = (xxl*yab(i))/(2.0*pi)
133 continue
do 134 i=1,n
    yad(i) = (xxl*yad(i))/(2.0*pi)
134 continue
c
c
c Υπολογισμός των παραγώγων xξ,γξ,κη,γη,xξξ,γξξ,κηη,
c γηη,xξη,γξη,ξx,ξy,ηx,ηy,ξxx,ξyy,ηxx,ηyy .
c
call parag(m,n,dks,dh,xab,yab,xad,yad,x,y,xks,yks,xh,yh,xksks,
+          yksks,xhh,yhh,xksh,yksh,ksx,ksy,hx,hy,ksxx,ksyy,hxx,
+          hyy)
c
c Υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων .
c
s = 1
do 9 i=1,m*(n+1)
    if (i.eq.s*(n+1)) then
        s = s+1
        goto 9
    endif
    x1 = (2.0*pi*x(i))/xxl
    y1 = (2.0*pi*y(i))/xxl
    call velocities(trig,g,r,m1,h,x1,y1,u1,v1,mm,nn,amp,re,xxl,
+          acoef,bcoef,asurf,bsurf)
    u(i) = (2.0*pi*q1*u1)/xxl
    v(i) = (2.0*pi*q1*v1)/xxl
9 continue
c
c Υπολογισμός των συντελεστών της εξίσωσης συναγωγής - διάχυσης .
c
call syntel(m,n,trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,x,a,k,u,v,dks,dh,ksx,ksy,
+          ksxx,ksyy,hx,hy,hxx,hyy,mm,nn,amp,re,acoef,bcoef,
+          asurf,bsurf,a1,b1,c1,d1,e1,a2,b2,b3)
c
c Δημιουργία του πίνακα T της εξίσωσης Tx = b .
c
call pint(m,n,h,dks,dh,a1,b1,c1,d1,e1,a2,b2,t)
c
c Δημιουργία του πίνακα b της εξίσωσης Tx = b .
c
call pinb(m,n,h,dks,dh,to,too,tw,a1,b1,c1,d1,e1,a2,b)
c
c Επίλυση της εξίσωσης Tx = b .
c
call gauss(n,m,t,b,tfinal)
write(21,*) amp,Re
write(22,*) amp,Re
c
c Υπολογισμός της τοπικής θερμορροής .
c
q1 = 0.0

```

```

sum = 0.0
yab01 = (xx1*yab01)/(2.0*pi)
xks1 = (-xab(2)+4.0*xab(1)-3.0*xab01)/(2.0*dks)
yks1 = (-yab(2)+4.0*yab(1)-3.0*yab01)/(2.0*dks)
xh1 = (-xad(2)+4.0*xad(1)-3.0*xab01)/(2.0*dks)
yh1 = (-yad(2)+4.0*yad(1)-3.0*yab01)/(2.0*dks)
jant1 = xks1*yh1-xh1*yks1
hx1 = -yks1/jant1
hy1 = xks1/jant1
x1 = (2.0*pi*0.0)/xx1
call toixvma(x1,amp,y1,flx)
b31 = (k*flx*hx1-k*hy1)/(2.0*sqrt(1.0+(flx**2.0))*dh)
qth(1) = b31*(-to+4.0*to-3.0*tw)*tokso(1)
qall = qth(1)
s = 1
do 31 i=1,m*(n+1)
  if (i.eq.(s-1)*(n+1)+1) then
    qth(s+1) = b31*(-tfinal(i+1)+4.0*tfinal(i)-3.0*tw)*
*           tokso(s+1)
    qall = qall+qth(s+1)
    s = s+1
  endif
31 continue
c
c Εγγραφή των δεδομένων .
c
do 33 i=1,m+1
  if (i.eq.1) then
    write (22,*) xab01,yab01,qth(1)
    goto 33
  endif
  write(22,*) xab(i-1),yab(i-1),qth(i)
33 continue
s = 1
do 30 i=1,m*(n+1)
  if (i.eq.(s-1)*(n+1)+1) then
    write(21,*) xab(s),yab(s),tw
  endif
  if (i.eq.s*(n+1)) then
    s = s+1
    goto 30
  endif
  write(21,*) x(i),y(i),tfinal(i)
30 continue
stop
end

c
c Υπορουτίνα που υπολογίζει το stretching του πλέγματος .
c
c
subroutine stretch(m,n,trig,g,r,m1,sten,pi,xx1,x1,p,q,xab,yab,xdc,
+           ydc,xab01,yab01,xdc01,ydc01,dks,dh,x,y,xad,yad,
+           mm,nn,amp,re,acoef,bcoef,asurf,bsurf,tokso)
implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=30,mk=30,nktot=992)
dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),
+         asurf(0:nk),bsurf(0:nk)
double precision p,q,ha,hb,ksa,hal(n),hb1(n),ksa1(m),h1(n),h2(n)
double precision xab(m),xdc(m),yab(m),ydc(m),x(m*(n+1)),y(m*(n+1))
double precision ks1(m),sad(n),sbc(n),xad(n),yad(n),s(m*(n+1))

```

```

double precision xab01,yab01,xdc01,dks,dh,xabm,yabm,xdcm,ydc,m,ksd
double precision ydc01,xab1,xdc1,yab1,ydc1,trig,g,r,m1,pi,sten
double precision x1,dy_toix,dy_surf,xx1,amp,re,xl
integer m,n,ksb,ksc,hd,hc,j,k,mm,nn
double precision lab(m),ldc(m),tokso(m+1)
c
c Δίνονται οι συνθήκες για τις μεταβλητές ξ,η στα άκρα του πλέγματος
c στο σύστημα συντεταγμένων ξ,η .
c
ha = 0.0
hd = n
hb = 0.0
hc = n
ksa = 0.0
ksb = m
ksd = 0.0
ksc = m
c
c Δίνονται οι συνθήκες για τις μεταβλητες x,y στα άκρα του πλέγματος
c στο σύστημα συντεταγμένων x,y . Αυτές οι τιμές είναι γνωστές από
c τις συναρτήσεις στο τοίχωμα και στην ελεύθερη επιφάνεια .
c
xab01 = 0.0
xdc01 = 0.0
xab(m) = xl
xdc(m) = xl
xabm = xab(m)
xdcm = xdc(m)
x1 = (2.0*pi*xab01)/xx1
call toixvma(x1,amp,yab01,dy_toix)
x1 = (2.0*pi*xabm)/xx1
call toixvma(x1,amp,yabm,dy_toix)
yab(m) = yabm
x1 = (2.0*pi*xdc01)/xx1
call surface (trig,g,r,m1,sten,x1,ydc01,dy_surf,mm,nn,amp,re,xx1,
+ acoef,bcoef,asurf,bsurf)
x1 = (2.0*pi*xdcm)/xx1
call surface (trig,g,r,m1,sten,x1,ydcm,dy_surf,mm,nn,amp,re,xx1,
+ acoef,bcoef,asurf,bsurf)
ydc(m) = ydcm
c
c Ορίζονται οι τιμές των ξ,η στα όρια του πλέγματος θέτοντας ως
c τιμές την αρίθμηση των κόμβων από 1 ως m κατά τον άξονα ξ και από
c 1 ως n κατά τον άξονα η .
c
do 401 i=1,n
    hal(i) = i
    hbl(i) = i
401 continue
do 402 i=1,m
    ksal(i) = i
402 continue
c
c Ορίζονται οι τιμές των Δξ και Δη .
c
dks = (ksb-ksa)/m
dh = (hd-ha)/n
c
c Εύρεση των σημείων στην αρχή του πλέγματος για το σύστημα
c συντεταγμένων x,y .
c

```

```

do 403 i=1,n
  h1(i) = (ha1(i)-ha)/(hd-ha)
  h2(i) = (hb1(i)-hb)/(hc-hb)
  sad(i) = p*h1(i)+(1.0-p)*(1.0-(dtanh(q*(1-h1(i)))/dtanh(q)))
  sbc(i) = p*h2(i)+(1.0-p)*(1.0-(dtanh(q*(1-h2(i)))/dtanh(q)))
  xad(i) = xabo1+sad(i)*(xdc01-xabo1)
  yad(i) = yabo1+sad(i)*(ydc01-yabo1)
403 continue
do 404 i=1,m
  ks1(i) = (ksa1(i)-ksa)/(ksb-ksa)
404 continue
call pinxab(m,n,amp,pi,xxl,p,q,ksa,ksb,xabm,xabo1,xab,lab,tokso)
call pinxdc(m,n,trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,p,q,ksd,ksc,xdcm,xdc01,
+ xdc,mm,nn,amp,re,acoef,bcoef,asurf,bsurf,ldc)
do 413 i = 1,m-1
  xdc1 = (2.0*pi*xdc(i))/xxl
  call surface (trig,g,r,m1,sten,xdc1,ydc1,dy_surf,mm,nn,amp,re,
+ xxl,acoef,bcoef,asurf,bsurf)
  ydc(i) = ydc1
413 continue
do 414 i = 1,m-1
  xab1 = (2.0*pi*xab(i))/xxl
  call toixvma(xab1,amp,yab1,dy_toix)
  yab(i) = yab1
414 continue
c
c Διαδικασία του stretching και των σημείων x,y σε όλο το πλέγμα .
c
  j = 1
  k = 1
do 405 i=1,m*(n+1)
  if (i.eq.k*(n+1)-1) then
    x(i) = xdc(k)
    y(i) = ydc(k)
    x(i)=(2.0*pi*x(i))/xxl
    goto 405
  endif
  if (i.eq.k*(n+1)) then
    x(i) = x(i-1)+(x(i-1)-x(i-2))
    y(i) = y(i-1)+(y(i-1)-y(i-2))
    j = 1
    k = k+1
    goto 405
  endif
  s(i) = sad(j)+ks1(k)*(sbc(j)-sad(j))
  x(i) = (1.0-s(i))*xab(k)+s(i)*xdc(k)
  y(i) = (1.0-s(i))*yab(k)+s(i)*ydc(k)
  x(i)=(2.0*pi*x(i))/xxl
  j = j+1
405 continue
return
end

c
c Εύρεση των σημείων x,y πάνω στο τοίχωμα .
c
subroutine pinxab(m,n,amp,pi,xxl,p,q,ksa,ksb,xabm,xabo1,xab,lab,
+ tokso)
double precision p,q,l1,ksa,xabm,xabo1,xab(m),xabo(m),xab1(m),x1
double precision ksa1(m),ks1(m),rab(m),fo,f1,gx1,so,s1,pi,xxl
double precision sf,lab(m),tokso(m+1),amp

```

```

integer m,n,ksb

c
c  Θέτουμε τα γνωστά σημεία στην αρχη και στο τέλος του πλέγματος για
c  το τοίχωμα .
c
xabl(1) = xabm
xabo(1) = xabo1
do 501 i=1,m
    ksal(i) = i
501  continue
    do 502 i = 1,m
        ks1(i) = (ksal(i)-ksa)/(ksb-ksa)
        rab(i) = p*ks1(i)+(1.0-p)*(1.0-(dtanh(q*(1-ks1(i)))/dtanh(q)))
502  continue
    call olok11(pi,xxl,amp,xabl,xabo,l1)

c
c  Ορίζουμε δύο πρώτες τιμές για το πρώτο σημείο και με τη μέθοδο
c  SECANT υπολογίζουμε αυτό το σημείο . Την ίδια διαδικασία
c  χρησιμοποιούμε και για τα υπολειπόμενα άγνωστα σημεία . Για την
c  μέθοδο αυτή υπολογίζεται το απαιτούμενο τόξο που είναι στην ουσία
c  η απόσταση του σημείου που θέλουμε να βρούμε από την κάτω γωνία
c  του πλέγματος που έχει γνωστές συντεταγμένες .
c
do 503 i=1,m-1
    xabo(i) = xabo1+(xabm-xabo1)*rab(i)
    xabl(i) = xabo(i)+0.1*(l1/m)
504  x1 = xabl(i)
    call olok11(pi,xxl,amp,x1,xabo1,s1)
    f1 = l1*rab(i) - s1
    x1 = xabo(i)
    call olok11(pi,xxl,amp,x1,xabo1,so)
    fo = l1*rab(i) - so
    gx1 = (f1-fo)/(xabl(i)-xabo(i))
    xab(i) = xabl(i) - (f1/gx1)
    if (abs(xab(i)-xabl(i)).lt.0.000000001) then
        x1 = xab(i)
        call olok11(pi,xxl,amp,x1,xabo1,sf)
        lab(i) = sf
        goto 503
    else
        xabo(i) = xabl(i)
        xabl(i) = xab(i)
        goto 504
    endif
503  continue
tokso(1) = lab(1)/2.0
do 505 i=2,m
    if (i.eq.2) then
        tokso(i) = (lab(i)-lab(i-1))/2.0+lab(i-1)/2.0
        goto 505
    endif
    if (i.eq.m) then
        tokso(i) = (l1-lab(i-1))/2.0+(lab(i-1)-lab(i-2))/2.0
        goto 505
    endif
    tokso(i) = (lab(i)-lab(i-1))/2.0+(lab(i-1)-lab(i-2))/2.0
505  continue
tokso(m+1) = (l1-lab(m-1))/2.0
return
end

```

```

c
c  Υπορουτίνα εύρεσης του τόξου για τη συνάρτηση του τοιχώματος .
c
subroutine olok11(pi,xxl,amp,xab1,xabo,s)
double precision i,xabo,xab1,pi,xxl,q,s,sum,x1,y1,flx1,flx2,flx3
double precision amp
s = 0.0
q = (xab1-xabo)/10000.0
do 601 i=xabo,xab1,q
  x1 = (2.0*pi*i)/xxl
  call toixvma (x1,amp,y1,flx1)
  x1 = (2.0*pi*((i+(i+q))/2.0))/xxl
  call toixvma (x1,amp,y1,flx2)
  x1 = (2.0*pi*(i+q))/xxl
  call toixvma (x1,amp,y1,flx3)
  sum = (1.0/6.0)*q*(sqrt(1.0+(flx1**2.0))+
+      4.0*sqrt(1.0+(flx2**2.0))+sqrt(1.0+(flx3**2.0)))
  s = s+sum
601 continue
return
end

c
c  Υπορουτίνα ανάλογη της υπορουτίνας pinxab για την ελεύθερη
c  επιφάνεια του ρευστού .
c
subroutine pinxdc(m,n,trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,p,q,ksd,ksc,xdc,
+      xdc1,xdco,mm,nn,amp,re,acoef,bcoef,asurf,bsurf,
+ldc)
implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=30,mk=30,nktot=992)
dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),
+      asurf(0:nk),bsurf(0:nk)
double precision p,q,l2,ksd,xdc,xdco1,xdco(m),xdco(m),xdco1(m),x1
double precision ksd1(m),ks1(m),rdc(m),fo,f1,gx1,so,s1
double precision trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,amp,re
double precision sf,ldc(m)
integer m,n,ksc,mm,nn
xdco1(1) = xdc
xdco(1) = xdc1
do 701 i=1,m
  ksd1(i) = i
701 continue
do 702 i = 1,m
  ks1(i) = (ksd1(i)-ksd)/(ksc-ksd)
  rdc(i) = p*ks1(i)+(1.0-p)*(1.0-(dtanh(q*(1-ks1(i)))/dtanh(q)))
702 continue
call olok12(trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,xdco1,xdco,l2,mm,nn,amp,re,
+      acoef,bcoef,asurf,bsurf)
do 703 i=1,m-1
  xdco(i) = xdco1+(xdc-xdco1)*rdc(i)
  xdco1(i) = xdco(i)+0.1*(l2/m)
704 x1 = xdco1(i)
call olok12(trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,x1,xdco1,s1,mm,nn,amp,re,
+      acoef,bcoef,asurf,bsurf)
  f1 = l2*rdc(i) - s1
  x1 = xdco(i)
call olok12(trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,x1,xdco1,so,mm,nn,amp,re,
+      acoef,bcoef,asurf,bsurf)
  fo = l2*rdc(i) - so

```



```

    gx1 = (f1-fo)/(xdc1(i)-xdc0(i))
    xdc(i) = xdc1(i) - (f1/gx1)
    if (abs(xdc(i)-xdc1(i)).lt.0.000000001) then
        x1 = xdc(i)
        call olok12(trig,g,r,m1,sten,pi,xx1,x1,xdc01,sf,mm,nn,amp,re,
+           acoef,bcoef,asurf,bsurf)
        ldc(i) = sf
        goto 703
    else
        xdc0(i) = xdc1(i)
        xdc1(i) = xdc(i)
        goto 704
    endif
703 continue
return
end

c
c Υπορουτίνα υπολογισμού του τόξου για τη συνάρτηση της ελεύθερης
c επιφάνειας .
c
subroutine olok12(trig,g,r,m1,sten,pi,xx1,xdc1,xdc0,s,mm,nn,amp,
+           re,acoef,bcoef,asurf,bsurf)
implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=30,mk=30,nktot=992)
dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),
+           asurf(0:nk),bsurf(0:nk)
double precision i,xdc0,xdc1,q,s,sum,trig,g,r,m1,sten,pi,xx1
double precision x1,y1,f2x1,f2x2,f2x3,amp,re
integer mm,nn
s = 0.0
q = (xdc1-xdc0)/10000.0
do 801 i=xdc0,xdc1,q
    x1 = (2.0*pi*i)/xx1
    call surface (trig,g,r,m1,sten,x1,ydc01,dy_surf,mm,nn,amp,re,xx1,
+           acoef,bcoef,asurf,bsurf)
    x1 = (2.0*pi*((i+(i+q))/2.0))/xx1
    call surface (trig,g,r,m1,sten,x1,ydc01,dy_surf,mm,nn,amp,re,xx1,
+           acoef,bcoef,asurf,bsurf)
    x1 = (2.0*pi*(i+q))/xx1
    call surface (trig,g,r,m1,sten,x1,ydc01,dy_surf,mm,nn,amp,re,xx1,
+           acoef,bcoef,asurf,bsurf)
    sum = (1.0/6.0)*q*(sqrt(1.0+(f2x1**2.0))+
+           4.0*sqrt(1.0+(f2x2**2.0))+sqrt(1.0+(f2x3**2.0)))
    s = s+sum
801 continue
return
end

c
c Υπορουτίνα που υπολογίζει τις παραγώγους xξ,yξ,xη,yη,xξξ,yξξ,xηη,
c yηη,xξη,yξη,ξx,ξy,ηx,ηy,ξxx,ξyy,ηxx,ηyy οι οποίες είναι
c απαραίτητες για τον ορισμό των εξισώσεων . (Για τον υπολογισμό
c τους χρησιμοποιούμε κεντρικές διαφορές εκτός από την τελευταία
c στήλη του πλέγματος όπου χρησιμοποιούμε backward difference .
c
subroutine parag(m,n,dks,dh,xab,yab,xad,yad,x,y,xks,yks,xh,yh,
+           xksks,yksks,xhh,yhh,xksh,yksh,ksx,ksy,hx,hy,ksxx,
+           ksy,y,hxx,hyy)
double precision x(m*(n+1)),y(m*(n+1)),xks(m*(n+1)),yks(m*(n+1))

```

```

double precision xh(m*(n+1)),yh(m*(n+1)),jant(m*(n+1))
double precision xksks(m*(n+1)),yksks(m*(n+1)),xhh(m*(n+1))
double precision yhh(m*(n+1)),xksh(m*(n+1)),yksh(m*(n+1))
double precision ksx(m*(n+1)),ksy(m*(n+1)),hx(m*(n+1)),hy(m*(n+1))
double precision jantks(m*(n+1)),janth(m*(n+1)),ksxx(m*(n+1))
double precision ksyx(m*(n+1)),hxx(m*(n+1)),hyy(m*(n+1))
double precision xab(m),yab(m),xad(n),yad(n),dks,dh
integer s

```

c  
c Υπολογισμός των παραγώγων  $x\xi, y\xi, x\xi\xi, y\xi\xi$  .  
c

```

s = 1
do 102 i=1,(m-1)*(n+1)
  if (i.eq.s*(n+1)) then
    s = s+1
    goto 102
  endif
  if (i.lt.n+1) then
    xks(i) = (x(i+(n+1))-xad(i))/(2.0*dks)
    yks(i) = (y(i+(n+1))-yad(i))/(2.0*dks)
    xksks(i) = (x(i+(n+1))-2.0*x(i)+xad(i))/(dks**2.0)
    yksks(i) = (y(i+(n+1))-2.0*y(i)+yad(i))/(dks**2.0)
    goto 102
  endif
  xks(i) = (x(i+(n+1))-x(i-(n+1)))/(2.0*dks)
  yks(i) = (y(i+(n+1))-y(i-(n+1)))/(2.0*dks)
  xksks(i) = (x(i+(n+1))-2.0*x(i)+x(i-(n+1)))/(dks**2.0)
  yksks(i) = (y(i+(n+1))-2.0*y(i)+y(i-(n+1)))/(dks**2.0)

```

102 continue  
do 103 i=(m-1)\*(n+1)+1,m\*(n+1)-1  
xks(i) = (3.0\*x(i)-4.0\*x(i-(n+1))+x(i-2.0\*(n+1)))/(2.0\*dks)  
yks(i) = (3.0\*y(i)-4.0\*y(i-(n+1))+y(i-2.0\*(n+1)))/(2.0\*dks)  
xksks(i) = (2.0\*x(i)-5.0\*x(i-(n+1))+4.0\*x(i-2.0\*(n+1))-  
- x(i-3.0\*(n+1)))/(dks\*\*2.0)  
yksks(i) = (2.0\*y(i)-5.0\*y(i-(n+1))+4.0\*y(i-2.0\*(n+1))-  
- y(i-3.0\*(n+1)))/(dks\*\*2.0)

103 continue  
c  
c Υπολογισμός των παραγώγων  $x\eta, y\eta, x\eta\eta, y\eta\eta$  .  
c

```

s = 1
do 105 i=1,m*(n+1)
  if (i.eq.s*(n+1)) then
    s = s+1
    goto 105
  endif
  if (i.eq.(s-1)*(n+1)+1) then
    xh(i) = (x(i+1)-xab(s))/(2.0*dh)
    yh(i) = (y(i+1)-yab(s))/(2.0*dh)
    xhh(i) = (x(i+1)-2.0*x(i)+xab(s))/(dh**2.0)
    yhh(i) = (y(i+1)-2.0*y(i)+yab(s))/(dh**2.0)
    goto 105
  endif
  xh(i) = (x(i+1)-x(i-1))/(2.0*dh)
  yh(i) = (y(i+1)-y(i-1))/(2.0*dh)
  xhh(i) = (x(i+1)-2.0*x(i)+x(i-1))/(dh**2.0)
  yhh(i) = (y(i+1)-2.0*y(i)+y(i-1))/(dh**2.0)

```

105 continue  
c  
c Υπολογισμός των παραγώγων  $x\xi\eta, y\xi\eta$  .  
c

```

s = 1
do 109 i=1,(m-1)*(n+1)
  if (i.eq.s*(n+1)) then
    s = s+1
    goto 109
  endif
  if (i.eq.1) then
    xksh(i) = (x(i+(n+1)+1)-xab(s+1)-xad(i+1)+xabo1)/(4.0*dks*dh)
    yksh(i) = (y(i+(n+1)+1)-yab(s+1)-yad(i+1)+yabo1)/(4.0*dks*dh)
    goto 109
  endif
  if (i.ne.1.and.i.lt.n) then
    xksh(i) = (x(i+(n+1)+1)-x(i+(n+1)-1)-xad(i+1)+xad(i-1))/
/      (4.0*dks*dh)
    yksh(i) = (y(i+(n+1)+1)-y(i+(n+1)-1)-yad(i+1)+yad(i-1))/
/      (4.0*dks*dh)
    goto 109
  endif
  if (i.eq.n) then
    xksh(i) = (x(i+(n+1)+1)-x(i+(n+1)-1)-(xad(i)+
+      (xad(i)-xad(i-1)))+xad(i-1))/(4.0*dks*dh)
    yksh(i) = (y(i+(n+1)+1)-y(i+(n+1)-1)-(yad(i)+
+      (yad(i)-yad(i-1)))+yad(i-1))/(4.0*dks*dh)
    goto 109
  endif
  if (i.eq.(s-1)*(n+1)+1) then
    xksh(i) = (x(i+(n+1)+1)-xab(s+1)-x(i-(n+1)+1)+xab(s-1))/
/      (4.0*dks*dh)
    yksh(i) = (y(i+(n+1)+1)-yab(s+1)-y(i-(n+1)+1)+yab(s-1))/
/      (4.0*dks*dh)
    goto 109
  endif
  xksh(i) = (x(i+(n+1)+1)-x(i+(n+1)-1)-x(i-(n+1)+1)+
+      x(i-(n+1)-1))/(4.0*dks*dh)
  yksh(i) = (y(i+(n+1)+1)-y(i+(n+1)-1)-y(i-(n+1)+1)+
+      y(i-(n+1)-1))/(4.0*dks*dh)
109 continue
s = m
do 110 i=(m-1)*(n+1)+1,m*(n+1)-1
  if (i.eq.(m-1)*(n+1)+1) then
    xksh(i) = (3.0*x(i+1)-3.0*xab(s)-4.0*x(i-(n+1)+1)+
+      4.0*xab(s-1)+x(i-2.0*(n+1)+1)-xab(s-2))/(4.0*dks*dh)
    yksh(i) = (3.0*y(i+1)-3.0*yab(s)-4.0*y(i-(n+1)+1)+
+      4.0*yab(s-1)+y(i-2.0*(n+1)+1)-yab(s-2))/(4.0*dks*dh)
    goto 110
  endif
  xksh(i) = (3.0*x(i+1)-3.0*x(i-1)-4.0*x(i-(n+1)+1)+
+      4.0*x(i-(n+1)-1)+x(i-2.0*(n+1)+1)-x(i-2.0*(n+1)-1))/
/      (4.0*dks*dh)
  yksh(i) = (3.0*y(i+1)-3.0*y(i-1)-4.0*y(i-(n+1)+1)+
+      4.0*y(i-(n+1)-1)+y(i-2.0*(n+1)+1)-y(i-2.0*(n+1)-1))/
/      (4.0*dks*dh)
110 continue
c
c
c Υπολογισμός της αντιστρόφου της ορίζουσας J-1 , καθώς και των
c παραγώγων της ως προς ξ και η (J-1)ξ, (J-1)η .
c
s = 1
do 112 i=1,m*(n+1)
  if (i.eq.s*(n+1)) then
    s = s+1

```

```

        goto 112
    endif
    jant(i) = xks(i)*yh(i)-xh(i)*yks(i)
    jantks(i) = xksks(i)*yh(i)+xks(i)*yksh(i)-xksh(i)*yks(i)-
-       xh(i)*yksks(i)
-   janth(i) = xksh(i)*yh(i)+xks(i)*yhh(i)-xhh(i)*yks(i)-
-       xh(i)*yksh(i)
112  continue
c
c   Υπολογισμός των παραγώγων ξx, ξy, ηx, ηy, ξxx, ξyy, ηxx, ηyy .
c
    s = 1
    do 113 i=1,m*(n+1)
        if (i.eq.s*(n+1)) then
            s = s+1
            goto 113
        endif
        ksx(i) = yh(i)/jant(i)
        ksy(i) = -xh(i)/jant(i)
        hx(i) = -yks(i)/jant(i)
        hy(i) = xks(i)/jant(i)
        ksxx(i) = (ksx(i)*yksh(i)+hx(i)*yhh(i)-((ksx(i)**2.0)*
*       jantks(i)+ksx(i)*hx(i)*janth(i)))/jant(i)
        ksyy(i) = (-ksy(i)*xksh(i)+hy(i)*xhh(i)-((ksy(i)**2.0)*
*       jantks(i)+ksy(i)*hy(i)*janth(i)))/jant(i)
        hxx(i) = (-ksx(i)*yksks(i)+hx(i)*yksh(i)-(ksx(i)*hx(i)*
*       jantks(i)+(hx(i)**2.0)*janth(i)))/jant(i)
        hyy(i) = (ksy(i)*xksks(i)+hy(i)*xksh(i)-(ksy(i)*hy(i)*
*       jantks(i)+(hy(i)**2.0)*janth(i)))/jant(i)
113  continue
    return
    end

c
c   Υπολογισμός των συντελεστών a1,b1,c1,d1,e1,a2,b2 οι οποίοι
c   χρησιμοποιούνται στον ορισμό των εξισώσεων .
c
    subroutine syntel(m,n,trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,x,a,k,u,v,dks,dh,
+       ksx,ksy,ksxx,ksyy,hx,hy,hxx,hyy,mm,nn,amp,re,
+       acoef,bcoef,asurf,bsurf,a1,b1,c1,d1,e1,a2,b2,
+       b3)
    implicit double precision(a-h,o-z)
    parameter (nk=30,mk=30,nktot=992)
    dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),
+       asurf(0:nk),bsurf(0:nk)
    double precision a,k,u(m*(n+1)),v(m*(n+1)),ksx(m*(n+1)),x1,y1,f2x
    double precision ksy(m*(n+1)),ksxx(m*(n+1)),ksyy(m*(n+1))
    double precision hx(m*(n+1)),hy(m*(n+1)),hxx(m*(n+1)),hyy(m*(n+1))
    double precision a1(m*(n+1)),b1(m*(n+1)),c1(m*(n+1)),d1(m*(n+1))
    double precision e1(m*(n+1)),a2(m*(n+1)),b2(m*(n+1)),x(m*(n+1))
    double precision b3(m*(n+1)),flx
    double precision dks,dh,trig,g,r,m1,sten,pi,xxl,amp,re
    integer m,n,s,mm,nn
    s = 1
    do 114 i=1,m*(n+1)
        if (i.eq.s*(n+1)) then
            s = s+1
            goto 114
        endif
        a1(i) = u(i)*ksx(i)+v(i)*ksy(i)-a*(ksxx(i)+ksyy(i))
        b1(i) = u(i)*hx(i)+v(i)*hy(i)-a*(hxx(i)+hyy(i))

```

```

c1(i) = a*((ksx(i)**2.0)+(ksy(i)**2.0))
d1(i) = a*((hx(i)**2.0)+(hy(i)**2.0))
e1(i) = a*(ksx(i)*hx(i)+ksy(i)*hy(i))
x1 = (2.0*pi*x(i))/xxl
call surface (trig,g,r,m1,sten,x1,y1,f2x,mm,nn,amp,re,xxl,acoef,
+           bcoef,asurf,bsurf)
a2(i) = (k*f2x*ksx(i)-k*ksy(i))/(2.0*sqrt(1.0+(f2x**2.0))*dks)
b2(i) = (k*f2x*hx(i)-k*hy(i))/(2.0*sqrt(1.0+(f2x**2.0))*dh)
x1 = (2.0*pi*x(i))/xxl
call toixvma(x1,amp,y1,flx)
b3(i) = (k*flx*hx(i)-k*hy(i))/(2.0*sqrt(1.0+(flx**2.0))*dh)
114 continue
return
end

```

c  
c Υπολογισμός του πίνακα T της εξίσωσης  $Tx = b$  .  
c

```

subroutine pint(m,n,h,dks,dh,a1,b1,c1,d1,e1,a2,b2,t)
double precision h,dks,dh,a1(m*(n+1)),b1(m*(n+1)),c1(m*(n+1))
double precision d1(m*(n+1)),e1(m*(n+1)),a2(m*(n+1)),b2(m*(n+1))
double precision t(m*(n+1),m*(n+1))
integer m,n,s,i

```

c  
c Για την πρώτη στήλη .  
c

```

do 201 i=1,n
t(i,i+(n+1)) = -6.0*c1(i)*(dh**2.0)+2.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)
t(i,i+(n+1)+1) = -3.0*e1(i)*dks*dh
t(i,i) = 3.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)+12.0*c1(i)*(dh**2.0)+
+       12.0*d1(i)*(dks**2.0)
t(i,i+1) = -6.0*d1(i)*(dks**2.0)+3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh
if (i.ne.1) then
t(i,i-1) = -3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh-6.0*d1(i)*(dks**2.0)
t(i,i+(n+1)-1) = 3.0*e1(i)*dks*dh
endif

```

201 continue

c  
c Χρησιμοποιούμε μια επιπλέον εξίσωση για μια επιπλέον γραμμή που  
c βρίσκεται έξω από το πλέγμα και προκύπτει από την οριακή συνθήκη  
c της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού .  
c

```

do 202 i=n+1,(m-1)*(n+1),n+1
t(i,i) = b2(i-1)
t(i,i-1.0) = -h
t(i,i-2.0) = -b2(i-1)
t(i,i+(n+1.0)-1.0) = a2(i-1)
if (i.ne.n+1) then
t(i,i-(n+1.0)-1.0) = -a2(i-1)
endif

```

202 continue

c  
c Για τα ενδιάμεσα σημεία του πλέγματος .  
c

```

s = 2
do 203 i=n+1+1,(m-1)*(n+1)-1
if (i.eq.s*(n+1)) then
s = s + 1
goto 203
endif
t(i,i+(n+1)) = -6.0*c1(i)*(dh**2.0)+2.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)

```

```

t(i,i+(n+1)+1) = -3.0*e1(i)*dks*dh
t(i,i-(n+1)) = -6.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)-6.0*c1(i)*(dh**2.0)
t(i,i-(n+1)+1) = 3.0*e1(i)*dks*dh
if (i.gt.2.0*(n+1)) then
  t(i,i-2.0*(n+1)) = a1(i)*dks*(dh**2.0)
endif
t(i,i) = 3.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)+12.0*c1(i)*(dh**2.0)+
+ 12.0*d1(i)*(dks**2.0)
t(i,i+1) = -6.0*d1(i)*(dks**2.0)+3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh
if (i.ne.(s-1)*(n+1)+1) then
  t(i,i-1) = -3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh-6.0*d1(i)*(dks**2.0)
  t(i,i-(n+1)-1) = -3.0*e1(i)*dks*dh
  t(i,i+(n+1)-1) = 3.0*e1(i)*dks*dh
endif
203 continue
c
c Για την τελευταία στήλη του πλέγματος .
c
do 204 i=(m-1)*(n+1)+1,m*(n+1)-1
  t(i,i-3.0*(n+1.0)) = 6.0*c1(i)*(dh**2.0)
  t(i,i-2.0*(n+1)) = -24.0*c1(i)*(dh**2.0)+3.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)
  t(i,i-2.0*(n+1)+1) = -3.0*e1(i)*dks*dh
  t(i,i-(n+1)+1) = 12.0*e1(i)*dks*dh
  t(i,i-(n+1)) = -12.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)+30.0*c1(i)*(dh**2.0)
  t(i,i) = 9.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)-12.0*c1(i)*(dh**2.0)+
+ 12.0*d1(i)*(dks**2.0)
  t(i,i+1) = -6.0*d1(i)*(dks**2.0)+3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh-
- 9.0*e1(i)*dks*dh
  if (i.ne.(m-1)*(n+1)+1) then
    t(i,i-2.0*(n+1)-1) = 3.0*e1(i)*dks*dh
    t(i,i-(n+1)-1) = -12.0*e1(i)*dks*dh
    t(i,i-1) = -3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh-6.0*d1(i)*(dks**2.0)+
+ 9.0*e1(i)*dks*dh
  endif
204 continue
c
c Τελευταίο σημείο της παραπάνω γραμμής .
c
i = m*(n+1)
t(i,i) = b2(i-1)
t(i,i-1.0) = -h+3.0*a2(i-1)
t(i,i-2.0) = -b2(i-1)
t(i,i-(n+1.0)-1.0) = -4.0*a2(i-1)
t(i,i-2.0*(n+1.0)-1.0) = a2(i-1)
return
end

c
c Υπολογισμός του πίνακα b της εξίσωσης Tx = b .
c
subroutine pinb(m,n,h,dks,dh,to,too,tw,a1,b1,c1,d1,e1,a2,b)
double precision h,dks,dh,to,too,tw,b(m*(n+1))
double precision a1(m*(n+1)),b1(m*(n+1)),c1(m*(n+1)),d1(m*(n+1))
double precision e1(m*(n+1)),a2(m*(n+1)),b2(m*(n+1))
integer m,n

c
c Για την πρώτη στήλη .
c
do 301 i=1,n
  if (i.eq.1.0) then
    b(i) = (-a1(i)*dks*(dh**2.0)+6.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)+

```

```

+          6.0*c1(i)*(dh**2.0)-3.0*e1(i)*dks*dh)*to+
+          (3.0*e1(i)*dks*dh+3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh+
+          6.0*d1(i)*(dks**2.0)-3.0*e1(i)*dks*dh)*tw

endif
if (i.eq.2.0) then
  b(i) = (3.0*e1(i)*dks*dh-a1(i)*dks*(dh**2.0)+
+        6.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)+6.0*c1(i)*(dh**2.0)-
-        3.0*e1(i)*dks*dh)*to
endif
if (i.gt.2.0) then
  b(i) = (3.0*e1(i)*dks*dh-a1(i)*dks*(dh**2.0)+
+        6.0*a1(i)*dks*(dh**2.0)+6.0*c1(i)*(dh**2.0)-
-        3.0*e1(i)*dks*dh)*to
endif
301 continue
b(n+1) = a2(n)*to-h*too
c
c  Για τη δεύτερη στήλη .
c
do 302 i=n+1+1,2.0*(n+1)-1
  if (i.eq.n+1+1) then
    b(i) = -a1(i)*dks*(dh**2.0)*to+
+          (3.0*e1(i)*dks*dh+3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh+
+          6.0*d1(i)*(dks**2.0)-3.0*e1(i)*dks*dh)*tw
  endif
  if (i.eq.n+1+2) then
    b(i) = -a1(i)*dks*(dh**2.0)*to
  endif
  if (i.gt.n+1+2) then
    b(i) = -a1(i)*dks*(dh**2.0)*to
  endif
302 continue
c
c  Για την επιπλέον γραμμή που βρίσκεται έξω από το πλέγμα καθώς και
c  για τα σημεία που γειτονεύουν με το τοίχωμα .
c
do 303 i=2*(n+1),(m-1)*(n+1),n+1
  b(i) = -h*too
  if (i.eq.(m-1)*(n+1)) then
    goto 303
  endif
  b(i+1) = (3.0*e1(i+1)*dks*dh+3.0*b1(i+1)*(dks**2.0)*dh+
+          6.0*d1(i+1)*(dks**2.0)-3.0*e1(i+1)*dks*dh)*tw
303 continue
c
c  Για την τελευταία στήλη .
c
do 304 i=(m-1)*(n+1)+1,m*(n+1)-1
  if (i.eq.(m-1)*(n+1)+1) then
    b(i) = (-3.0*e1(i)*dks*dh+12.0*e1(i)*dks*dh+
+          3.0*b1(i)*(dks**2.0)*dh+6.0*d1(i)*(dks**2.0)-
-          9.0*e1(i)*dks*dh)*tw
  endif
304 continue
c
c  Τελευταίο σημείο της παραπάνω γραμμής .
c
b(m*(n+1)) = -h*too
return
end

```

```

-----
c
c
c   Υπορουτίνα επίλυσης με τη μέθοδο Gauss της εξίσωσης Tx = b .
c   ( Gaussian elimination with scaled row pivoting . )
c
-----

subroutine gauss(n1,m,a,b,x)
double precision a(m*(n1+1),m*(n1+1)),s(m*(n1+1)),b(m*(n1+1))
double precision x(m*(n1+1)),smax,r,rmax
integer m,n,n1,q,p(m*(n1+1))
n = n1+1
do 160 i=1,m*n
  p(i) = i
  smax = 0.0
  do 170 j=1,m*n
    smax = dmax1(smax,abs(a(i,j)))
170  continue
  s(i) = smax
160  continue
do 180 k=1,m*n-1
  rmax = 0.0
  do 190 i=k,m*n
    r = abs(a(p(i),k))/s(p(i))
    if (r.gt.rmax) then
      j = i
      rmax = r
    endif
190  continue
  pk = p(j)
  p(j) = p(k)
  p(k) = pk
  do 200 i=k+1,m*n
    z = a(p(i),k)/a(p(k),k)
    a(p(i),k) = z
    do 210 j=k+1,m*n
      a(p(i),j) = a(p(i),j) - z*a(p(k),j)
210  continue
200  continue
180  continue

-----
c
c
c   Οπίσθια αντικατάσταση .
c
-----

do 220 k=1,m*n-1
  do 230 i=k+1,m*n
    b(p(i)) = b(p(i)) - a(p(i),k)*b(p(k))
230  continue
220  continue
do 240 i=m*n,1,-1
  sum = b(p(i))
  do 250 j=i+1,m*n
    sum = sum - a(p(i),j)*x(j)
250  continue
  x(i) = sum/a(p(i),i)

```



```
240 continue
    return
    end
```

```
c
c
c Υπορουτίνα υπολογισμού του σχήματος της ελεύθερης επιφάνειας .
c
```

```
subroutine surface (trig,grav,dens,visc,sten,x,y_surf,dy_surf,m,
+                 n,amp,re,xl,acoef,bcoef,asurf,bsurf)
implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=30,mk=30,nktot=992)
dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),
+         asurf(0:nk),bsurf(0:nk)
double precision trig,grav,dens,visc,x,y_surf,dy_surf,amp,re,xl
integer m,n
pi = 4.*datan(1.d0)
ntot = (m+2)*(2*n+1)
phi = dacos(trig)
height = (3.*Re*(visc**2)/((dens**2)*grav*trig))**0.33333333
xkh = 2.*pi*height/xL
Qflow = Re*visc/dens
x_surf = x
call waveh(asurf,bsurf,n,amp,x_surf,y_surf,dy_surf)
99 return
end
```

```
c
c Computation of Fourier approximation to a function
c given the coefficients a(n) and b(n)
```

```
c
function four(a,b,n,x)
implicit double precision(a-b,d-h,o-z), complex*16(c)
parameter (nk=15)
dimension a(0:nk),b(0:nk)
c
b(0) = 0.d0
ci = (0.d0,1.d0)
c1 = exp(ci*x)
c2 = exp(-ci*x)
c
cfa = a(n)+ci*b(n)
do 3 j=n,1,-1
    cfa = cfa*c2+a(j-1)+ci*b(j-1)
3 continue
cfb = a(n)-ci*b(n)
do 4 j=n,1,-1
    cfb = cfb*c1+a(j-1)-ci*b(j-1)
4 continue
four = 0.5*(cfa+cfb)
return
end
```

```
c
c
c Computation of free-surface height
```

```
c
subroutine waveh(a,b,n,amp,x_surf,y_surf,dy_surf)
```

```

implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=15)
dimension a(0:nk),b(0:nk),as(0:nk),bs(0:nk)
c
pi = 4.*datan(1.d0)
a(1) = a(1)+amp
do 2 k=0,n
    as(k) = a(k)
    bs(k) = b(k)
2 continue
c
y_surf = four(a,b,n,x_surf)
call fder1(as,bs,n)
dy_surf = four(as,bs,n,x_surf)
a(1) = a(1)-amp
return
end
c
c
subroutine fder1(a,b,n)
implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=15)
dimension a(0:nk),b(0:nk)
do 2 j=0,n
    temp = a(j)
    a(j) = j*b(j)

    b(j) = -j*temp
2 continue
return
end
c
c
Υπορουτίνα υπολογισμού της συνάρτησης τοιχώματος .
c
subroutine toixvma(x,amp,y_toix,dy_toix)
double precision amp,x,y_toix,dy_toix
y_toix = amp*cos(x)
dy_toix = -amp*sin(x)
return
end
c
c
Υπορουτίνα υπολογισμού του πεδίου ταχυτήτων .
c
c
subroutine velocities(trig,grav,dens,visc,sten,x,y,u1,v1,m,
+
n,amp,re,xl,acoef,bcoef,asurf,bsurf)
implicit double precision(a-h,o-z)
parameter (nk=15,mk=30,nktot=992)
dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),
+
asurf(0:nk),bsurf(0:nk)
double precision trig,grav,dens,visc,sten,x,y,u1,v1,amp,re,xl
integer m,n
pi=4.*datan(1.d0)
phi = dacos(trig)
height = (3.*Re*(visc**2)/((dens**2)*grav*trig))**0.33333333
xkh = 2.*pi*height/xL
Qflow = Re*visc/dens
Fr = 8.*((pi/xL)**3)*(Qflow**2)/grav

```

```

do 2 j=0,m
  bcoef(j,0)=0.d0
2  continue
  call deriv(amp,acoef,bcoef,asurf,bsurf,m,n,x,y,psix,psiy)
  u1 = psiy
  v1 = -psix

99  return
  end

c
c  Computation of derivatives of streamfunction
c
  subroutine deriv(amp,acoef,bcoef,asurf,bsurf,m,n,x,y,psix,psiy)
  implicit double precision(a-h,o-z)
  parameter (nk=15,mk=30,nktot=992)
  dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),a(0:nk),
+          b(0:nk),c(0:mk),cder(0:mk),as0(0:nk),bs0(0:nk),
+          asurf(0:nk),bsurf(0:nk),der(0:4,0:4),wder(0:4,0:1),
+          ac0(0:mk,0:nk),bc0(0:mk,0:nk)

  pi = 4.*datan(1.d0)

c
c  Shape and slope of wall
c
  b0 = amp*dcos(x)
  b1 = -amp*dsin(x)
  do 3 j=0,m
    do 4 k=0,n
      ac0(j,k) = acoef(j,k)
      bc0(j,k) = bcoef(j,k)
      a(k) = ac0(j,k)
      b(k) = bc0(j,k)
4    continue
    c(j) = four(a,b,n,x)
3  continue
  do 41 k=0,n
    as0(k) = asurf(k)
    bs0(k) = bsurf(k)
41  continue

c
c  Computation of derivatives of h(x)
c
  hs = four(as0,bs0,n,x)
  call fder1(as0,bs0,n)
  hsx = four(as0,bs0,n,x)

c
  w = (y-b0)/hs

c
  call chder(c,cder,m)
  der(0,1) = cheb(cder,m,w)

c
  call fder(ac0,bc0,m,n)
  der(1,0) = stream(ac0,bc0,m,n,x,w)

c
c  Computation of derivatives of w(x,y)
c
c
  wder(1,0) = -b1/hs-(y-b0)*hsx/(hs**2)
  wder(0,1) = 1./hs

c
  psix = der(1,0)+der(0,1)*wder(1,0)

```

```

    psiy = der(0,1)*wder(0,1)
    return
end
c
c
c Computation of stream function
c
    function stream(acoef,bcoef,m,n,x,w)
    implicit double precision(a-h,o-z)
    parameter (nk=15,mk=30,nktot=992)
    dimension acoef(0:mk,0:nk),bcoef(0:mk,0:nk),a(0:nk),
+           b(0:nk),c(0:mk)
    do 3 j=0,m
        do 4 k=0,n
            a(k) = acoef(j,k)
            b(k) = bcoef(j,k)
4        continue
        c(j) = four(a,b,n,x)
3    continue
    stream = cheb(c,m,w)
    return
end
c
c
c Computation of Chebyshev approximation to a function
c given the coefficients, c(k) of the expansion (from Numerical Recipes)
c Variable x belongs in [0,1] and is mapped to y [-1,1]
c
    function cheb(c,m,x)
    implicit double precision(a-h,o-z)
    parameter (mk=30)
    dimension c(0:mk)
c
c Transformation of [0,1] to [-1,1]
c
    y = 2.*x-1.
    y2 = 2.*y
    d=0.
    dd=0.
    do 3 j=m,1,-1
        st = d
        d = y2*d-dd+c(j)
        dd = st
3    continue
    cheb = y*d-dd+c(0)
    return
end
c
c
c Computation of derivative of a Chebyshev expansion
c
    subroutine chder(c,cder,m)
    implicit double precision(a-h,o-z)
    parameter (mk=30)
    dimension c(0:mk),cder(0:mk)
    cder(m) = 0.
    cder(m-1) = 2.*m*c(m)
    if(m.ge.2) then
        do 3 j=m-2,0,-1
            cder(j) = cder(j+2)+2.*(j+1)*c(j+1)

```

```
3   continue
   endif
c
c   Correction for transformation
c   Term c(0) is half of the others
c
   do 4 j=1,m-1
       cder(j) = 2.*cder(j)
4   continue
   return
   end

c
c
c   Computation of derivative of m Fourier series
c
   subroutine fder(a,b,m,n)
   implicit double precision(a-h,o-z)
   parameter (nk=15,mk=30)
   dimension a(0:mk,0:nk),b(0:mk,0:nk)
   do 2 j=0,m
       do 3 k=0,n
           temp = a(j,k)
           a(j,k) = k*b(j,k)
           b(j,k) = -k*temp
3   continue
2   continue
   return
   end
```