

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΡΟΗΣ ΜΕ
ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ**

ΣΑΡΑΝΤΗΣ ΠΑΝΤΑΖΗΣ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2007



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5584/1
Ημερ. Εισ.: 24-07-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιδετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2007
ΠΑΝ

Copyright © Πανταζής Σαράντης, 2007

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Δημήτρης Βαλουγεώργης
(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Βλάχος
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος κ. Δημήτρη Βαλουγεώργη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου, καθώς και για την κατανόηση και ανοχή που επέδειξε καθ' όλο το διάστημα της συνεργασίας μας. Επίσης, τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κ. Νικόλαο Βλάχο και κ. Νικόλαο Πελεκάση για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Επιπλέον, ευχαριστώ τους υποψήφιους διδάκτορες Στέλιο Βαρούτη και Σεραφείμ Μισδανίτη για τις συμβουλές τους. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου για την υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Σαράντης Πανταζής

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΡΟΗΣ ΜΕ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ

ΣΑΡΑΝΤΗΣ ΠΑΝΤΑΖΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2007

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Δημήτρης Βαλουγεώργης, Αναπληρωτής Καθηγητής Αναλυτικών και
Υπολογιστικών Μεθόδων Μεσοκλίμακας σε Φαινόμενα Μεταφοράς

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με πρότυπες ροές στην περιοχή ολίσθησης επιλύοντας τις κλασσικές ρευστοδυναμικές εξισώσεις συζευγμένες με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ολίσθησης. Όπως είναι γνωστό η περιοχή ολίσθησης της ροής ορίζεται με βάση τον αριθμό Knudsen και συγκεκριμένα για $10^{-3} \leq Kn \leq 10^{-1}$.

Αρχικά εξετάζεται η ροή σε αγωγό ορθογώνιας διατομής με χρήση των εξισώσεων συνέχειας και Navier – Stokes με συνοριακές συνθήκες τύπου Maxwell και Deissler που είναι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης αντίστοιχα. Ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης στην συνοριακή συνθήκη Maxwell προσεγγίζεται με δύο διαφορετικές εκτιμήσεις. Η πρώτη εκτίμηση είναι αυτή του Maxwell, ενώ η δεύτερη είναι αυτή που προκύπτει από την πλήρη επίλυση του αντίστοιχου κινητικού προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα πειραματικά που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία και αποδεικνύεται ότι οι οριακές συνθήκες Maxwell σε συνδιασμό με τον υπολογισμό του συντελεστή ολίσθησης με βάση την κινητική θεωρία αποτελούν την καλύτερη υπολογιστική προσέγγιση.

Στη συνέχεια εξετάζονται οι ροές με ολίσθηση σε κοιλότητα, σε κανάλι με περιοδικές αυλακώσεις και σε βηματική γεωμετρία. Τα προβλήματα είναι δύο διαστάσεων και επιλύονται με βάση το σύστημα εξισώσεων στροβιλότητας – ροϊκής συνάρτησης σε συνδιασμό με οριακές συνθήκες 1^{ης} τάξης που εφαρμόζονται στις αντίστοιχες άγνωστες ποσότητες. Εξετάζονται ροές για μεγάλο εύρος του αριθμού Reynolds ($0 \leq Re \leq 10^3$) και για $Kn \leq 10^{-1}$. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσεται πηγαίος κώδικας σε Fortran. Για $Kn=0$, γίνεται συστηματική σύγκριση των αποτελεσμάτων του πηγαίου κώδικα με ένα σημαντικό αριθμό άρθρων και επιβεβαιώνεται η αξιοπιστία του κώδικα. Τα αποτελέσματα περιλαμβάνουν ολοκληρωμένες ποσότητες όπως παροχές και συντελεστές αντίστασης, αλλά και κατανομές ταχυτήτων και ροϊκές γραμμές. Σε όλες τις

περιπτώσεις εξετάζεται συστηματικά η επίδραση του αριθμού Knudsen καθώς απομακρυνόμαστε από το υδροδυναμικό όριο ($Kn = 0$).

Στην κοιλότητα, η αύξηση του Kn μειώνει ραγδαία την παροχή της κύριας δίνης ανακυκλοφορίας και την τριβή στα τοιχώματα.

Στο κανάλι με περιοδικές αυλακώσεις οι αντιστάσεις μειώνονται ραγδαία με την αύξηση του Kn . Σημαντική επίδραση έχουν και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως το πλάτος ή το βάθος των αυλακώσεων.

Στη βηματική γεωμετρία το μήκος επανακόλλησης αυξάνεται με την αύξηση του Re . Επίσης, καθώς ο Kn αυξάνεται, παρατηρούμε ελάττωση του μήκους επανακόλλησης για $Re = 0$ και αύξηση του για $Re \geq 100$.

Περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση των φαινομένων που παρουσιάζονται στις συγκεκριμένες ροές κρίνεται αναγκαία. Οι ροές που εξετάζονται μπορούν να επιλυθούν εφαρμόζοντας κινητικές εξισώσεις ώστε να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα που δίδονται εδώ. Επίσης, οι πηγαίοι κώδικες που δίδονται θα μπορούσαν να επεκταθούν ώστε να περιλαμβάνουν την περίπτωση ροής μιγμάτων και τη ροή λόγω βαθμίδας θερμοκρασίας ή συγκέντρωσης του μίγματος.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1	Εισαγωγή	9
1.2	Συνοριακές Συνθήκες	11
1.3	Ολίσθηση σε αγωγούς	14
1.4	Αντικείμενο διπλωματικής	15

2. ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

2.1	Περιγραφή του προβλήματος	19
2.2	Συνοριακές Συνθήκες	20
2.3	Αριθμητικό Σχήμα	21
2.4	Σχέσεις αδιάστατης παροχής και πίεσης	22
2.5	Αποτελέσματα	24

3. ΡΟΗ ΣΕ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

3.1	Εισαγωγή - Περιγραφή του προβλήματος	39
3.2	Διατύπωση εξισώσεων	40
3.3	Συνοριακές συνθήκες	42
3.4	Αριθμητικό σχήμα	44
3.5	Αποτελέσματα	
3.5.1	Πιστοποίηση του κώδικα	46
3.5.2	Αποτελέσματα για ροή με ολίσθηση	50

4. ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΑΥΛΑΚΩΣΕΙΣ

4.1	Εισαγωγή - Περιγραφή του προβλήματος	69
4.2	Διατύπωση εξισώσεων - Συνοριακές συνθήκες	70
4.3	Αριθμητικό σχήμα	74
4.4	Αποτελέσματα	76

5. ΡΟΗ ΣΕ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	
5.1 Εισαγωγή - Περιγραφή του προβλήματος	96
5.2 Διατύπωση εξισώσεων - Συνοριακές συνθήκες	96
5.3 Αριθμητικό σχήμα	99
5.4 Αποτελέσματα	100
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	107
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	109
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΚΩΔΙΚΕΣ	
Π.1.1 Διαγράμματα 2.3 και 2.4	114
Π.1.2 Διαγράμματα των πειραμάτων του κεφαλαίου 2	122
Π.1.3 Αδιάστατο διάγραμμα 2.12	127
Π.1.4 Πρόβλημα κοιλότητας με τον αλγόριθμο της διαρμονικής	132
Π.1.5 Πρόβλημα κοιλότητας με τον αλγόριθμο ροϊκής συνάρτησης - στροβιλότητας	136
Π.1.6 Πρόβλημα καναλιού με περιοδικές αυλακώσεις	142
Π.1.7 Πρόβλημα βηματικής γεωμετρίας	149
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: ΘΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΤΩΝ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ	158

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

1.1 Εισαγωγή

Μια από τις ανεξερεύνητες ακόμα περιοχές της μηχανικής των ρευστών είναι η μελέτη ροών μακριά από τη θερμοδυναμική ισορροπία. Τα αποτελέσματα της εκτεταμένης έρευνας που εκτελείται στο συγκεκριμένο θέμα παγκοσμίως βρίσκουν εφαρμογή σε περιοχές όπως αεροδυναμική μεγάλων υψομέτρων [19] για την κατασκευή αεροπλάνων που θα εκτελούν διηπειρωτικά ταξίδια, ή την κατασκευή αντλιών κενού σε συστήματα και διατάξεις που λειτουργούν σε πιέσεις πολύ χαμηλότερες της ατμοσφαιρικής [23]. Επίσης χρησιμοποιούνται ευρέως στη δημιουργία μικροηλεκτρονικών-μηχανικών συστημάτων (MEMS) τα οποία μπορούν να περιλαμβάνουν μικροαντλίες, μικροτουρμπίνες και άλλες συσκευές στην κλίμακα του μικρομέτρου. Οι διατάξεις αυτές έχουν ευρεία εφαρμογή σε βιοϊατρικά συστήματα, όπως για παράδειγμα μικροβαλβίδες ευαίσθητες στη γλυκόζη για παροχή ινσουλίνης σε διαβητικούς ασθενείς [28] και βελτίωση των τεχνικών τεχνητής γονιμοποίησης [26], καθώς και σε πολλές άλλες περιπτώσεις [9].

Σε καθημερινές εφαρμογές ροής όπως π.χ. ροή αέρα γύρω από αυτοκίνητα χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις μεταφοράς ορμής Navier – Stokes. Οι εξισώσεις αυτές βασίζονται στην παραδοχή του συνεχούς μέσου και στις καταστατικές εξισώσεις Newton – Fourier. Σε πολύ αραιοποιημένες ροές όμως τα μόρια συγκρούονται λιγότερο συχνά μεταξύ τους με αποτέλεσμα να μην εξισώνονται οι ενέργειες τους [19] και να παρατηρούνται φαινόμενα τα οποία δεν εμφανίζονται υπό φυσιολογικές συνθήκες, όπως η ολίσθηση ενός αερίου στα τοιχώματα του αγωγού στον οποίο ρέει (velocity slip) ή το θερμοκρασιακό άλμα στα τοιχώματα (temperature jump) όπου η θερμοκρασία του αερίου στο τοίχωμα είναι διαφορετική από αυτή του τοιχώματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις η συνήθης μεθοδολογία δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι εξαγωγής μακροσκοπικών μεγεθών σε τέτοιου είδους ροές. Η βέλτιστη επιλογή εξαρτάται από τον αριθμό Knudsen, μια αδιάστατη ποσότητα η οποία ορίζεται ως

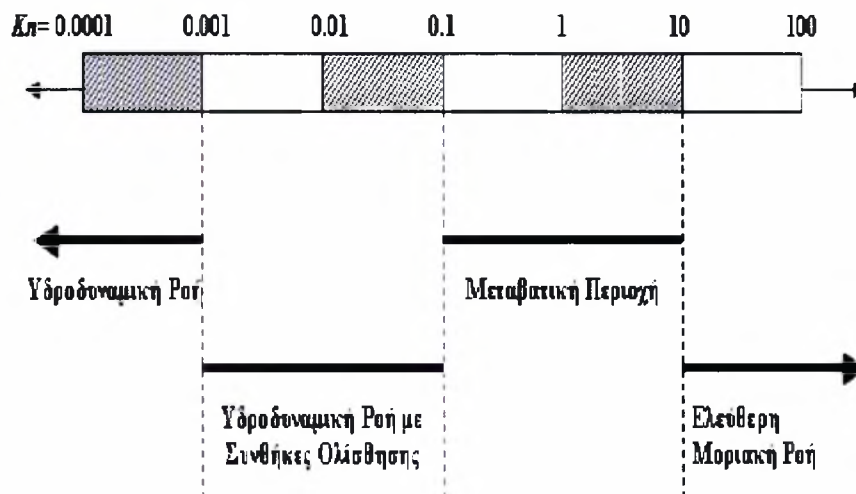
$$Kn = \frac{l}{L} = \frac{\mu}{LP} \left(\frac{\pi RT}{2} \right)^{1/2} = \frac{\mu v_0}{PL} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (1.1.1)$$

όπου l είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων, L μια χαρακτηριστική διάσταση της ροής, μ το δυναμικό ιξώδες του αερίου σε θερμοκρασία T , P η πίεση του, R η σταθερά του αερίου και v_0 η πιο πιθανή ταχύτητα των μορίων. Ο Kn δίνει ένα μέτρο της αραιοποίησης (rarefaction) του αερίου και μας οδηγεί στην επιλογή μιας συγκεκριμένης μεθοδολογίας για την αντιμετώπιση των προβλημάτων. Συχνά, στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και η παράμετρος αραιοποίησης η οποία ορίζεται ως

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} \quad (1.1.2)$$

Παρακάτω αναφέρονται οι περιοχές ροής οι οποίες διακρίνονται με βάση τον αριθμό Kn και οι διαθέσιμες μεθοδολογίες επίλυσης προβλημάτων για την κάθε περιοχή [7]:

- a) $Kn < 10^{-3}$: Περιοχή υδροδυναμικής ροής. Εδώ οι εξισώσεις Navier – Stokes δίνουν καλά αποτελέσματα. Επίσης οι εξισώσεις Euler μπορούν να χρησιμοποιηθούν μακριά από στερεά όρια όταν ο Kn είναι ακόμα χαμηλότερος.[19]
- b) $10^{-3} < Kn < 0.1$: Περιοχή ολίσθησης (slip regime). Εδώ χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier – Stokes με οριακές συνθήκες ολίσθησης και άλματος (slip and jump boundary conditions) καθώς και η Κινητική Θεωρία.
- c) $0.1 < Kn < 10$: Μεταβατική περιοχή (transition regime). Η Κινητική Θεωρία και η μέθοδος Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.
- d) $10 < Kn$: Περιοχή ελεύθερης μοριακής ροής (free molecular flow regime). Χρησιμοποιείται η Κινητική Θεωρία και, σε περιπτώσεις πολύ αραιοποιημένου ρευστού, η Μοριακή Δυναμική (Molecular Dynamics).



Σχήμα 1.1: Οι περιοχές ροής ανάλογα με τον αριθμό Kn

Παρουσιάζεται μια σύντομη περιγραφή των παραπάνω μεθόδων που εφαρμόζονται για $Kn > 10^{-3}$:

- i. Navier – Stokes (N-S) με οριακές συνθήκες ολίσθησης και άλματος: Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις N-S επιβάλλοντας όμως διαφορετικές συνοριακές συνθήκες οι οποίες οδηγούν σε μη μηδενική σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο ρευστό και στα τοιχώματα, όπως επίσης και ασυνέχεια ανάμεσα στη θερμοκρασία του ρευστού και του τοιχώματος. Εφαρμόζεται ευρέως τα τελευταία χρόνια. Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα της συγκαταλέγεται το σχετικά μικρό υπολογιστικό της κόστος και το γεγονός ότι αποτελεί επέκταση της συνήθους μεθοδολογίας με αποτέλεσμα να μπορεί να εφαρμοστεί σε ροές όπως το πεδίο ροής γύρω από ένα υπερηχητικό αεροσκάφος [19].

- ii. Direct Simulation Monte Carlo (DSMC): Εξετάζονται οι μοριακές συγκρούσεις χρησιμοποιώντας στοχαστικές διαδικασίες και διάφορα μοντέλα συγκρούσεων (όπως π.χ. των σκληρών σφαιρών). Είναι πολύ αξιόπιστη μέθοδος για περιπτώσεις υπερηχητικών ροών, ενώ εφαρμόζεται και στη μικρορευστομηχανική. Έχει όμως σημαντικό υπολογιστικό κόστος (ανάλογο του αριθμού των σωματιδίων) το οποίο γίνεται απαγορευτικό για τις υποηχητικές ροές όπου αντιμετωπίζει προβλήματα. Μια εναλλακτική πρόταση είναι υβριδικά σχήματα με N-S τα οποία μειώνουν σημαντικά τον υπολογιστικό χρόνο [19].
- iii. Κινητική Θεωρία: Χρησιμοποιείται η εξίσωση Boltzmann, όπου ο βασικός άγνωστος είναι η συνάρτηση κατανομής των σωματιδίων. Εναλλακτικά, ο όρος των συγκρούσεων αντικαθίσταται όπως ορίζει κάποιο από τα κινητικά μοντέλα (π.χ. BGK, S, Ellipsoidal, McCormack) λόγω της πολυπλοκότητας και της μη-γραμμικότητας του [11]. Σημειώνεται ότι η επίλυση κινητικών εξισώσεων είναι επίπονη αλλά τα αποτελέσματα ισχύουν σε όλο το εύρος του αριθμού Kn.
- iv. Μοριακή Δυναμική: Προσομοιώνει την κίνηση πολλών μορίων και αυτό έχει ως αποτέλεσμα απαγορευτικό υπολογιστικό κόστος (ανάλογο του τετραγώνου των σωματιδίων) για μεγάλο αριθμό μορίων και μεγάλο χρονικό διάστημα [7].

Στις τρεις τελευταίες μεθοδολογίες οι μακροσκοπικές ποσότητες όπως η πυκνότητα, η θερμοκρασία ή η μακροσκοπική ταχύτητα βρίσκονται μέσω των ροών των μοριακών ταχυτήτων που προκύπτουν. Τα μεγαλύτερα προβλήματα εμφανίζονται στη μεταβατική περιοχή, όπου το αέριο είναι πολύ αραιοποιημένο για να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις N-S αλλά και πολύ πυκνό για να χρησιμοποιηθεί η μοριακή δυναμική. Γίνονται προσπάθειες να επεκταθεί η εφαρμογή των N-S με τη χρήση διαφορετικών συνοριακών συνθηκών ώστε να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα μέσα σε μικρό χρόνο.

Εδώ θα ασχοληθούμε με την πρώτη μεθοδολογία. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται περισσότερο για τις υπόλοιπες μπορεί να μελετήσει τις αναφορές [19], [11] και [7].

1.2 Συνοριακές Συνθήκες

Οι εξισώσεις που βασίζονται στην υπόθεση του συνεχούς μέσου απαιτούν συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια των τοιχωμάτων ώστε να δώσουν σωστά αποτελέσματα. Στην περίπτωση ιδανικού ρευστού (χωρίς τριβές) η χρήση συνθηκών μη διείσδυσης, ο μηδενισμός δηλαδή της ταχύτητας κάθετα στα τοιχώματα, είναι επαρκής. Όταν λάβουμε υπ' όψιν μας και το ιξώδες του ρευστού πρέπει να ορίσουμε και την ταχύτητα παράλληλα με τα τοιχώματα. Όσον αφορά τη θερμοκρασία επιβάλλεται ισότητα της θερμοκρασίας στο τοίχωμα και στο ρευστό. Η εμπειρία έχει

δείξει ότι αυτού του είδους οι συνθήκες δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα σε εφαρμογές με χαμηλό Kn , κάτω του 10^{-3} .

Καθώς απομακρυνόμαστε από τη θερμοδυναμική ισορροπία τα παραπάνω δεν ισχύουν αφού έχουμε πλέον ολίσθηση του ρευστού και θερμοκρασιακό άλμα ανάμεσα στο ρευστό και το τοίχωμα. Η ολίσθηση επάνω στο τοίχωμα έχει πλέον τη μορφή [24]

$$u_{gas} - u_{wall} = A_p \frac{\partial u_t}{\partial x_n}, \quad (1.2.1)$$

όπου με x_n συμβολίζεται η διεύθυνση κάθετα στο τοίχωμα. Ο συντελεστής A_p προκύπτει από τη σχέση

$$A_p = \frac{2l}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \quad (1.2.2)$$

όπου με σ_p συμβολίζεται ο αδιάστατος συντελεστής ιξώδους ολίσθησης. Η μέση ελεύθερη διαδρομή ισούται με

$$l = \frac{\sqrt{\pi} \mu}{2P} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi} \mu}{2P} \sqrt{2RT} = \frac{\mu v_0}{P} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (1.2.3)$$

όπου k_B η σταθερά του Boltzmann και m η μοριακή μάζα. Είναι φανερό ότι για πολύ μικρές τιμές του l (και επομένως πολύ μικρές τιμές του Kn) η σχέση (1.2.1) ταυτίζεται με την συνθήκη μη ολίσθησης.

Ο Maxwell το 1879 όρισε για πρώτη φορά τον συντελεστή σ_p

$$\sigma_p^{Maxwell} = \frac{2-a}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1.2.4)$$

όπου a ο συντελεστής προσαρμογής εφαπτομενικής ορμής (tangential momentum accommodation coefficient), ο οποίος εκφράζει το ποσοστό των μορίων τα οποία καθώς συγκρούονται με το τοίχωμα χάνουν την εφαπτομενική τους ορμή και επανέρχονται στο ρευστό με μια τυχαία γωνία (diffuse reflection). Τα υπόλοιπα αναπηδούν διατηρώντας την εφαπτομενική τους ορμή και επομένως δεν ασκούν διατμητική τάση (specular reflection). Η σχέση του Maxwell μετά την αδιαστατοποίηση δίνει

$$\hat{u}_{gas} - \hat{u}_{wall} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial \hat{x}_n} \quad (1.2.5)$$

Η συνθήκη (1.2.1) έρχεται σε ασυμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα όταν το ρευστό είναι πολύ αραιοποιημένο. Για το λόγο αυτό έχουν προταθεί και άλλες συνοριακές συνθήκες, δεύτερης τάξης ως προς τον αριθμό Kn , οι οποίες επεκτείνουν το πεδίο εφαρμογής αυτής της μεθοδολογίας. Μια από αυτές είναι η σχέση

$$\hat{u}_{gas} - \hat{u}_{wall} = \frac{2-a}{a} \left[Kn \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial \hat{x}_n} \Big|_{wall} + \frac{Kn^2}{2!} \frac{\partial^2 \hat{u}_t}{\partial \hat{x}_n^2} \Big|_{wall} + \dots \right] \quad (1.2.6)$$

την οποία προτείνουν οι Karniadakis & Beskok [12]. Επειδή είναι δύσκολο να υπολογιστούν οι παράγωγοι ανώτερης τάξης κοντά στο τοίχωμα, στην ίδια αναφορά προτείνεται και μια εναλλακτική συνοριακή:

$$\hat{u}_{gas} - \hat{u}_{wall} = \frac{2-a}{a} \frac{Kn}{1-bKn} \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial \hat{x}_n} \Big|_{wall}, \quad (1.2.7)$$

όπου b ένας συντελεστής που μπορεί να βρεθεί από τη λύση του προβλήματος χωρίς ολίσθηση.

Ο Deissler [5] προτείνει μια συνθήκη δεύτερης τάξης της μορφής

$$\hat{u}_{gas} - \hat{u}_{wall} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}_n} \Big|_{wall} + \frac{9}{16} Kn^2 \left(2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_n^2} \Big|_{wall} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_{t1}^2} \Big|_{wall} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_{t2}^2} \Big|_{wall} \right) \quad (1.2.8)$$

όπου με τους δείκτες t_1 και t_2 συμβολίζονται οι δύο παράλληλες κατευθύνσεις στο τοίχωμα. Η συνθήκη αυτή εφαρμόζεται από τον Colin και τους συνεργάτες του [3,4].

Οι Lockerby & Reese [13] προτείνουν τη χρήση συνοριακών συνθηκών 2^{ης} τάξης αλλά και αλλαγή της σχέσης διατμητικής τάσης-ρυθμού διάτμησης σε μια μη-γραμμική σχέση:

$$u_{slip} = A_1 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\tau}{\mu} \left[1 + \Psi_1(\hat{x}) + k \Psi_2(\hat{x}) \right] \quad (1.2.10)$$

όπου με \hat{x} συμβολίζεται η κάθετη απόσταση από το τοίχωμα αδιαστατοποιημένη με το l ενώ οι υπόλοιπες ποσότητες ισούνται με

$$\Psi_i(\hat{x}) = a_i \hat{x}^{b_i} e^{c_i \hat{x}} \quad (1.2.11)$$

$$k = \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{d\hat{x}} \quad (1.2.12)$$

Η προσέγγιση αυτή δίνει αποτελέσματα σε συμφωνία με το μοντέλο BGK ακόμα και για $Kn \leq 2$.

Στη βιβλιογραφία [24] αναφέρεται ένας άλλος αδιάστατος συντελεστής ιξώδους ολίσθησης ο οποίος προκύπτει από το κινητικό μοντέλο S αλλά και απ' ευθείας από την εξίσωση Boltzmann.

Για διαχυτική ανάκλαση παίρνουμε την τιμή

$$\sigma_p^{kinetic} (a=1) = 1.018. \quad (1.2.13)$$

Στην περίπτωση της κατοπτρικής-διαχυτικής ανάκλασης προκύπτει από τη σχέση

$$\sigma_p^{kinetic} = \frac{2-a}{a} \left[\sigma_p^{kinetic} (1) - 0.1211(1-a) \right] \quad (1.2.14)$$

Τα αποτελέσματα αυτά είναι πολύ κοντά στις τιμές που προκύπτουν και από το μοντέλο BGK.

Συνοριακές συνθήκες υπάρχουν και για το φαινόμενο του thermal creep, της κίνησης του ρευστού δηλαδή λόγω διαφοράς θερμοκρασίας και μάλιστα με αφετηρία την περιοχή χαμηλής θερμοκρασίας. Στο φαινόμενο αυτό βασίζεται και η λειτουργία της αντλίας Knudsen, η οποία δεν έχει κινητά μέρη και η άντληση του ρευστού οφείλεται σε θερμοκρασιακές διαφορές. Σημειώνεται ότι η ροή λόγω thermal creep μηδενίζεται καθώς ο Kn τείνει στο μηδέν. Στο [7] η συνθήκη ολίσθησης της ταχύτητας στο τοίχωμα δίνεται με τη μορφή

$$u_{gas} - u_{wall} = \frac{3}{4} \frac{\text{Pr}(\gamma - 1)}{\gamma \rho R T_{gas}} (-q_x)_w = \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T_{gas}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \quad (1.2.15)$$

ή σε αδιάστατη μορφή

$$\hat{u}_{gas} - \hat{u}_{wall} = \frac{3}{2\pi} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{Kn^2 \text{Re}}{Ec} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right)_w, \quad (1.2.16)$$

όπου $\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu}$, $\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{k}$ και $Ec = \frac{u^2}{C_p \Delta T}$. Με D συμβολίζεται κάποια χαρακτηριστική διάσταση του προβλήματος, u είναι η ταχύτητα του ρευστού, ρ η πυκνότητα του, μ το δυναμικό ιξώδες, C_p η θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, k η θερμική αγωγιμότητα και ΔT η διαφορά θερμοκρασίας.

Με βάση τις αδιάστατες ποσότητες που χρησιμοποιούνται στην κινητική θεωρία η συνθήκη ολίσθησης στο πρόβλημα «thermal creep» γράφεται στη μορφή [24]

$$\hat{u}_{gas} - \hat{u}_{wall} = \frac{\sigma_T}{2\delta}. \quad (1.2.17)$$

Το σ_T παίρνει την τιμή $\sigma_T = 1.125$ με χρήση των μοντέλων BGK και S. Δεν είναι συνάρτηση του συντελεστή προσαρμογής a . Προσεγγιστικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τιμή $\sigma_T \cong 1$.

Τέλος, υπάρχουν και οι συνοριακές συνθήκες θερμοκρασιακού άλματος με τις οποίες δεν θα ασχοληθούμε εδώ. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τη μελέτη τους παραπέμπεται στα άρθρα [12] και [7].

1.3 Ολίσθηση σε αγωγούς

Έχει μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον να μελετηθεί η περίπτωση πλήρους ανεπτυγμένης ροής λόγω διαφοράς πίεσης σε αγωγούς μικρών διαστάσεων και διαφόρων σχημάτων. Προς αυτήν την κατεύθυνση έχουν γίνει σημαντικά βήματα τις τελευταίες δεκαετίες. Αναλυτικές λύσεις έχουν προταθεί για τη κατανομή της ταχύτητας για ορθογώνια και δακτυλιοειδή διατομή στα άρθρα [6] και [14]. Χρησιμοποιούνται όμως συνοριακές συνθήκες πρώτης τάξης με αποτέλεσμα να μην έχουν μεγάλο εύρος εφαρμογής ως προς τον αριθμό Kn.

Στο άρθρο [4], όπου χρησιμοποιούνται συνοριακές συνθήκες τύπου Deissler, παρατηρείται διαφορά στις παροχές μέχρι 13% ανάμεσα στο μοντέλο συνθηκών πρώτης και δεύτερης τάξης για Kn εξόδου 0.1, λόγο πιέσεων εισόδου-εξόδου $\Pi = 1.1$ και τετραγωνική διατομή. Για την περίπτωση παράλληλων πλακών η αντίστοιχη διαφορά είναι 7%. Η απόκλιση των πιέσεων παίρνει την μέγιστη τιμή για τετραγωνική διατομή (25%) για τον ίδιο Kn εξόδου και λόγο πιέσεων $\Pi = 2.5$ με το μοντέλο πρώτης τάξης να δίνει μεγαλύτερες τιμές πίεσης από το μοντέλο δεύτερης τάξης. Γίνονται επίσης συγκρίσεις με πειραματικά δεδομένα, οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις δίνουν μη ρεαλιστικές τιμές του a . Οι τιμές αυτές είναι μεγαλύτερες της μονάδας (1.1 και 1.35) και στερούνται θεωρητικής βάσης.

Στο άρθρο [3] παρουσιάζονται πειραματικά και υπολογιστικά αποτελέσματα για αγωγούς ορθογώνιας διατομής και για ροή ηλίου και αζώτου. Χρησιμοποιούνται συνοριακές συνθήκες Deissler 2^{ης} τάξης οι οποίες δίνουν ακριβή αποτελέσματα ακόμα και για $Kn = 0.25$. Τα πειραματικά δεδομένα προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια όταν ο συντελεστής προσαρμογής a παίρνει την τιμή 0.93. Περιγράφεται συνοπτικά η πειραματική διαδικασία και προτείνεται μια τεχνική με στόχο τη βελτίωση της ακρίβειας κατά τη μέτρηση των διαστάσεων των αγωγών.

Στο άρθρο [15] παρουσιάζονται αποτελέσματα για ροή 2 αερίων σε αγωγό που έχουν προκύψει με κινητική θεωρία χρησιμοποιώντας το μοντέλο McCormack και μια επιταχυνόμενη μέθοδο διακριτών ταχυτήτων. Οι συγκεντρώσεις, ο λόγος πλευρών και η παράμετρος αραιοποίησης παίρνουν διάφορες τιμές και τα αποτελέσματα που αναφέρονται σε όλο το εύρος του αριθμού Kn διαφέρουν σημαντικά από αυτά της υδροδυναμικής περιοχής.

Εκτός από τους αγωγούς ορθογώνιας διατομής, έχουν μελετηθεί σε μικρότερο βαθμό και αγωγοί με διατομή ισόπλευρου τριγώνου. Πρόκειται για πλήρως ανεπτυγμένη, μόνιμη ροή σε ισόθερμο αγωγό. Έχει βρεθεί ακριβής λύση για συνοριακές συνθήκες μη ολίσθησης αλλά και τύπου Maxwell [27]. Στο άρθρο [16] η ροή ερευνάται με το μοντέλο BGK και τη μέθοδο διακριτών ταχυτήτων σε όλο το εύρος του αριθμού Kn . Η συγκεκριμένη εργασία δεν περιορίζεται στο ισόπλευρο τρίγωνο αλλά περιλαμβάνει επίσης ένα ορθογώνιο και ένα σκαληνό.

1.4 Αντικείμενο της διπλωματικής

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη κλασικών προβλημάτων ρευστομηχανικής όπως οι ροές σε α) αγωγό ορθογώνιας διατομής, β) σε κοιλότητα, γ) σε κανάλι με περιοδικές αυλακώσεις και δ) σε βηματική γεωμετρία εφαρμόζοντας οριακές συνθήκες ολίσθησης έτσι ώστε οι λύσεις να ισχύουν και για τιμές του $Kn > 0$. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα συγκριθούν αποτελέσματα για αγωγό ορθογώνιας διατομής με συνοριακές συνθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης με τις τιμές του συντελεστή ιξώδους ολίσθησης που προκύπτουν από τον Maxwell και από την κινητική θεωρία. Στο τρίτο κεφάλαιο επιλύεται η ροή σε ορθογωνική κοιλότητα

χρησιμοποιώντας το σύστημα εξισώσεων ροϊκής συνάρτησης - στροβιλότητας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες με τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης της κινητικής θεωρίας. Στο τέταρτο και στο πέμπτο κεφάλαιο επιλύονται η ροή σε κανάλι με αυλακώσεις και η ροή σε βηματική γεωμετρία αντίστοιχα. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται συμπεράσματα και δυνατότητες επέκτασης της διπλωματικής.

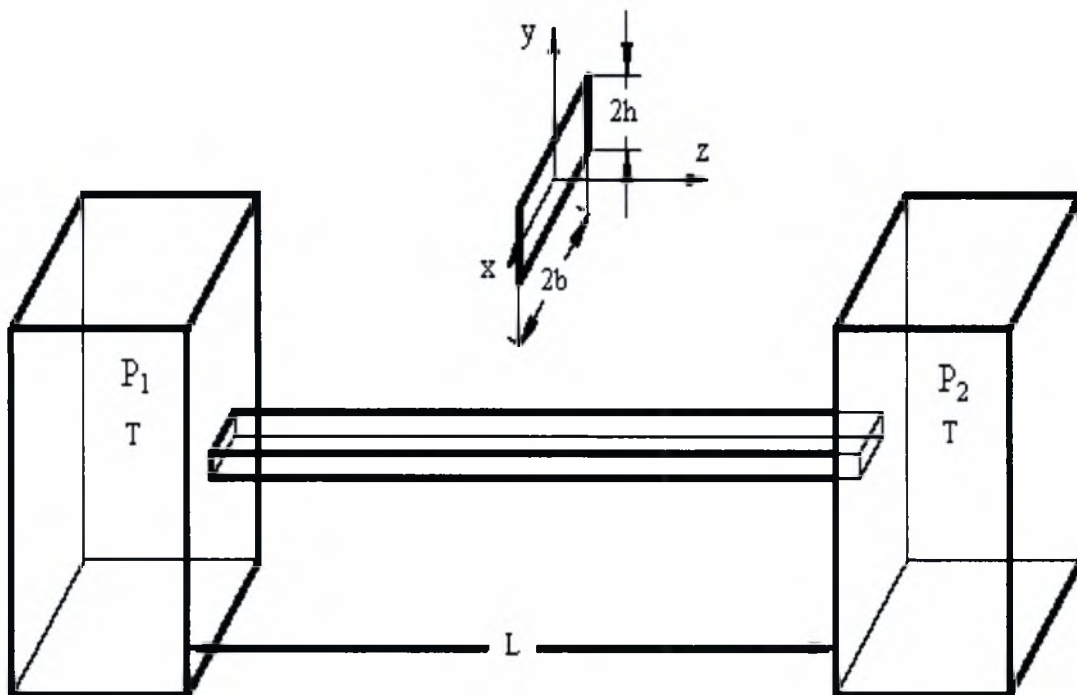
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

2.1 Περιγραφή του προβλήματος

Εξετάζεται η μόνιμη, πλήρως ανεπτυγμένη, ισόθερμη ροή σε αγωγό ορθογώνιας διατομής με αριθμό Kn που πλησιάζει ή και ξεπερνά σε λίγες περιπτώσεις το 10^{-1} . Στόχος του κεφαλαίου είναι η σύγκριση αποτελεσμάτων που αποκτήθηκαν χρησιμοποιώντας συνοριακές συνθήκες

- i. μη ολίσθησης
- ii. ολίσθησης 1ης τάξης με συντελεστή ιξώδους ολίσθησης κατά Maxwell
- iii. ολίσθησης 1ης τάξης με τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης από κινητική θεωρία και
- iv. ολίσθησης 2ης τάξης, όπως διατυπώθηκαν από τον Deissler.



Σχήμα 2.1: Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε αγωγό τετραγωνικής διατομής ($h/b = 1$).

Θα χρησιμοποιηθεί το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο σχήμα 2.1. Οι διαστάσεις του αγωγού παίρνουν τιμές στο διάστημα $[-b, b]$ στον άξονα x , στο διάστημα $[-h, h]$ στον άξονα y και στο $[0, L]$ στον άξονα z . Οι διαστάσεις h και b είναι πολύ μικρότερες του L . Ο λόγος των πλευρών h/b καθορίζει την γεωμετρία του αγωγού και κυμαίνεται ανάμεσα σε μηδέν (ροή ανάμεσα σε δύο πλάκες) και ένα (τετραγωνική διατομή).

Οι αρχές διατήρησης μάζας και ορμής δίνουν τις εξισώσεις

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1.1)$$

και

$$\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = - \frac{dP}{dz}, \quad (2.1.2)$$

όπου με w συμβολίζεται η ταχύτητα στην διεύθυνση z .

Εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες

$$y^* = \frac{y}{h}, \quad x^* = \frac{x}{b}, \quad w^* = \frac{w}{w_0}, \quad w_0 = - \frac{h^2}{\mu} \frac{dP}{dz}, \quad (2.1.3)$$

όπου $-1 \leq x^*, y^* \leq 1$. Παρακάτω, για απλούστευση των συμβολισμών θα χρησιμοποιούνται τα σύμβολα x και y αντί των x^* και y^* .

Η αδιαστατοποίηση δίνει την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -1 \quad (2.1.4)$$

Είναι φανερό ότι για αγωγό τετραγωνικής διατομής η (2.1.4) ταυτίζεται με την εξίσωση Poisson. Επιλέγοντας δύο χαρακτηριστικά μήκη διατηρούμε σταθερό το μέγεθος του πλέγματος ανεξάρτητα του λόγου των πλευρών.

Ο αριθμός Kn ορίζεται από τη σχέση

$$Kn = \frac{l}{2h}. \quad (2.1.5)$$

2.2 Συνοριακές Συνθήκες

Θα χρησιμοποιηθούν συνοριακές συνθήκες πρώτης τάξης, τύπου Maxwell

$$w|_{y=1} = - \frac{2-a}{a} 2Kn \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=1} \quad (2.2.1)$$

$$w|_{x=1} = - \frac{2-a}{a} 2 \frac{h}{b} Kn \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1}. \quad (2.2.2)$$

Ο συντελεστής 2 μπροστά από τον Kn οφείλεται στον ορισμό (2.1.5). Επίσης, θα χρησιμοποιηθούν συνοριακές συνθήκες δεύτερης τάξης, τύπου Deissler

$$w|_{y=h} = - \frac{2-a}{a} \lambda \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h} - \frac{9}{16} \lambda^2 \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=h} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{y=h} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{y=h} \right) \quad (2.2.3)$$

$$w|_{x=b} = - \frac{2-a}{a} \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=b} - \frac{9}{16} \lambda^2 \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=b} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=b} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{x=b} \right) \quad (2.2.4)$$

οι οποίες μετά την αδιαστατοποίηση και με χρήση των εξισώσεων (2.1.1) και (2.1.2) δίνουν

$$w|_{y=1} = - \frac{2-a}{a} 2Kn \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=1} - \frac{9}{4} Kn^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=1} - 1 \right) \quad (2.2.5)$$

$$w|_{x=1} = -\frac{2-a}{a} 2 \frac{h}{b} Kn \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1} - \frac{9}{4} Kn^2 \left[\left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} - 1 \right]. \quad (2.2.6)$$

Τέλος, θα χρησιμοποιηθούν και συνοριακές συνθήκες που περιλαμβάνουν τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης της κινητικής θεωρίας

$$w|_{y=1} = -\sigma_p \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2Kn \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=1} \quad (2.2.7)$$

$$w|_{x=1} = -\sigma_p \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2 \frac{h}{b} Kn \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1} \quad (2.2.8)$$

Ο συντελεστής ιξώδους ολίσθησης σ_p παίρνει τιμές σύμφωνα με τις σχέσεις (1.2.13) και (1.2.14)

Λόγω συμμετρίας δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ταχύτητες παντού, αρκεί να μελετήσουμε ένα τεταρτημόριο. Η πρακτική αυτή μειώνει τις απαραίτητες πράξεις. Στο κέντρο θα ισχύουν συνθήκες συμμετρίας, δηλαδή

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (2.2.5)$$

2.3 Αριθμητικό Σχήμα

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Gauss - Seidel με κεντρώες πεπερασμένες διαφορές για τους εσωτερικούς κόμβους.

$$\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{\Delta x^2} = -1 \quad (2.3.1)$$

Στο κέντρο θα χρησιμοποιούμε μια επιπλέον σειρά και μια στήλη φανταστικών κόμβων (Σχήμα 2.2). Στους φανταστικούς κόμβους εφαρμόζουμε τις συνθήκες συμμετρίας.

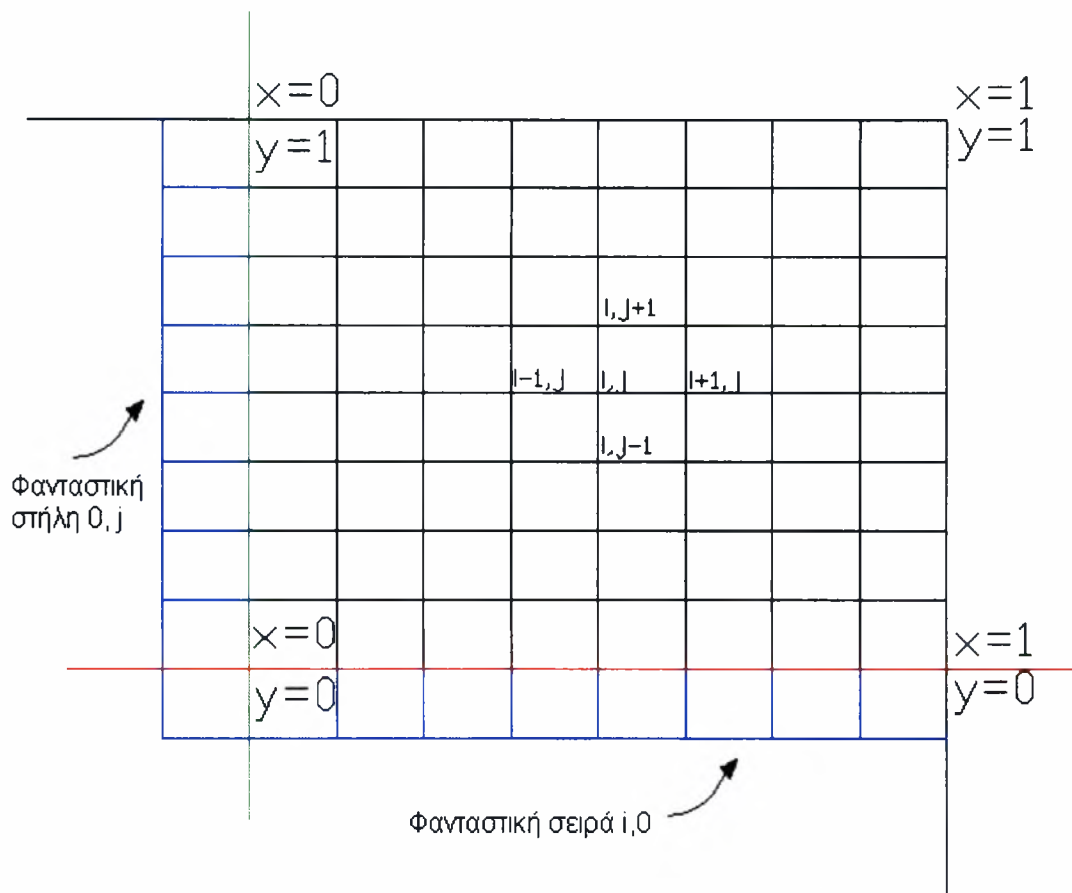
$$w_{i,0} = w_{i,2} \quad (2.3.2)$$

$$w_{0,j} = w_{2,j} \quad (2.3.3)$$

Για τα τοιχώματα χρησιμοποιήθηκαν ανάντι πεπερασμένες διαφορές 2^{ης} τάξης. Εκεί, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος στις συνοριακές συνθήκες αντικαταστάθηκαν με τις εκφράσεις

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-3w_j + 4w_{j-1} - w_{j-2}}{-2\Delta y} \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{2w_j - 5w_{j-1} + 4w_{j-2} - w_{j-3}}{\Delta y^2}. \quad (2.3.5)$$



Σχήμα 2.2: Υπολογιστικό πλέγμα ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$).

2.4 Σχέσεις αδιάστατης παροχής και πίεσης

Η παροχή μάζας του αγωγού \dot{M} υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \int_{-h}^h \int_{-b}^b \rho W dx dy = \rho W_0 hb \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W^* dx^* dy^* = \\ &= -\frac{P}{RT} \frac{h^2}{\mu} \frac{dP}{dz} hb \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W^* dx^* dy^* = -\frac{P}{RT} \frac{h^2}{\mu} \frac{dP}{dz} 4hb \int_0^1 \int_0^1 W^* dx^* dy^* \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Έχοντας ικανοποιητικό αριθμό αποτελεσμάτων μπορούμε έπειτα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με ένα πολυώνυμο δεύτερης τάξης ως προς τον αριθμό Kn:

$$\dot{M} = -\frac{P}{RT} \frac{h^2}{\mu} \frac{dP}{dz} 4hb \left(a_1 + a_2 Kn + a_3 Kn^2 \right) \quad (2.4.2)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την σχέση $Kn \times P = Kn_o \times P_o$, όπου ο δείκτης «ο» συμβολίζει την έξοδο ξαναγράφουμε την σχέση (2.4.2) στη μορφή

$$\dot{M} = -4hb \frac{h^2}{\mu} \frac{dP}{dz} \frac{P}{RT} \left[a_1 + a_2 Kn_o \frac{P_o}{P} + a_3 Kn_o^2 \left(\frac{P_o}{P} \right)^2 \right]$$

Ολοκληρώνοντας κατά μήκος του αγωγού και εισάγοντας τον λόγο των πιέσεων $\Pi = P_i / P_o$, όπου P_i η πίεση εισόδου έχουμε

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^L \dot{M} dz &= -\frac{4h^3 b}{\mu RTL} \int_{P_i}^{P_o} \left(a_1 P + a_2 Kn_o P_o + a_3 Kn_o^2 \frac{P_o^2}{P} \right) dP \\ \rightarrow \dot{M}_{average} &= -\frac{4h^3 b}{\mu RTL} \left[a_1 \frac{P^2}{2} + a_2 Kn_o P_o P + a_3 Kn_o^2 P_o^2 \ln P \right]_{P_i}^{P_o} \\ \rightarrow \dot{M}_{average} &= \frac{4h^3 b P_o^2}{\mu RTL} \left[a_1 \frac{(\Pi^2 - 1)}{2} + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi \right] \end{aligned}$$

Τέλος, ορίζουμε ως αδιάστατη παροχή τον λόγο της μέσης τιμής της παροχής ως προς την αντίστοιχη χωρίς ολίσθηση:

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{M}^* &= \frac{\dot{M}_{average}}{\dot{M}_{ns}} = \frac{a_1 \frac{(\Pi^2 - 1)}{2} + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi}{a_1 \frac{(\Pi^2 - 1)}{2}} \\ \rightarrow \dot{M}^* &= 1 + 2 \frac{a_2}{a_1} Kn_o \frac{1}{(\Pi + 1)} + 2 \frac{a_3}{a_1} Kn_o^2 \frac{\ln \Pi}{(\Pi^2 - 1)} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Οι τιμές των συντελεστών παρεμβολής a_1, a_2, a_3 για $a = 0.9, 1.0, 1.1$ και $(h/b) = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ μπορούν να βρεθούν στο άρθρο [4].

Μπορούμε να βρούμε επίσης μια έκφραση για την κατανομή της πίεσης στην αξονική διεύθυνση. Η μέση τιμή της παροχής \dot{M} σε μήκος z θα πρέπει να ισούται με τη μέση τιμή της σε μήκος L . Επομένως γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \int_0^z \dot{M} dz &= \frac{1}{L} \int_0^L \dot{M} dz \\ \rightarrow \frac{1}{z} \left\{ \left[\frac{a_1}{2} \left(\left(\frac{P}{P_o} \right)^2 - 1 \right) + a_2 Kn_o \left(\frac{P}{P_o} - 1 \right) + a_3 Kn_o^2 \ln \frac{P}{P_o} \right] - \left[\frac{a_1}{2} (\Pi^2 - 1) + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi \right] \right\} &= \\ = \frac{1}{L} \left\{ \left[\frac{a_1}{2} (1^2 - 1) + a_2 Kn_o (1 - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln 1 \right] - \left[\frac{a_1}{2} (\Pi^2 - 1) + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi \right] \right\} &= \\ \rightarrow \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{P}{P_o} \right)^2 - 1 \right] + a_2 Kn_o \left(\frac{P}{P_o} - 1 \right) + a_3 Kn_o^2 \ln \frac{P}{P_o} &= \left(1 - \frac{z}{L} \right) \left[\frac{a_1}{2} (\Pi^2 - 1) + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi \right] \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Αντίστοιχα σχηματίζουμε μια έκφραση για την αδιάστατη πίεση κατά μήκος του αγωγού. Με $P_{ns}(z^*)$ συμβολίζεται η πίεση του ρευστού που θα είχαμε στο ίδιο σημείο χωρίς ολίσθηση και εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες

$$z^* = \frac{z}{L} \quad P^* = \frac{P(z^*)}{P_{ns}(z^*)}$$

Συνεχίζοντας την επεξεργασία στην (2.4.4) βρίσκουμε για $Kn_0 = 0$

$$\xrightarrow{(2.4.4)} \frac{Kn_0=0}{2} \left[\left(\frac{P_{ns}}{P_o} \right)^2 - 1 \right] = (1-z^*) \left[\frac{a_1}{2} (\Pi^2 - 1) \right] \rightarrow \left(\frac{P_{ns}}{P_o} \right)^2 = (1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1 \rightarrow P_o = \frac{P_{ns}}{\sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1)}}$$

ενώ για $Kn_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{(2.4.4)} \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{P}{P_{ns}} \sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1} \right)^2 - 1 \right] + a_2 Kn_0 \left(\frac{P}{P_{ns}} \sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1} - 1 \right) \\ &+ a_3 Kn_0^2 \ln \left(\frac{P}{P_{ns}} \sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1} \right) = (1-z^*) \left[\frac{a_1}{2} (\Pi^2 - 1) + a_2 Kn_0 (\Pi - 1) + a_3 Kn_0^2 \ln \Pi \right] \\ &\rightarrow \frac{a_1}{2} \left[\left(P^* \sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1} \right)^2 - 1 \right] + a_2 Kn_0 \left(P^* \sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1} - 1 \right) \\ &+ a_3 Kn_0^2 \ln \left(P^* \sqrt{(1-z^*) (\Pi^2 - 1) + 1} \right) = (1-z^*) \left[\frac{a_1}{2} (\Pi^2 - 1) + a_2 Kn_0 (\Pi - 1) + a_3 Kn_0^2 \ln \Pi \right] \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Η έκφραση (2.4.5) χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί αριθμητικά η αδιάστατη πίεση P^* συναρτήσει του αδιάστατου μήκους z^* .

2.5 Αποτελέσματα

Αρχικά αναπαράγονται και ελέγχονται τα γραφήματα των άρθρων [3] και [4] και στη συνέχεια δίδονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης που προκύπτει από την κινητική θεωρία.

Στο άρθρο [4] εμφανίζονται αποτελέσματα σύγκρισης πειραματικών δεδομένων με αριθμητικά αποτελέσματα που εξήχθησαν με συνοριακές συνθήκες:

- i. μη ολίσθησης, **(NS)**
- ii. πρώτης τάξης του Maxwell, σχέσεις (2.2.1) και (2.2.2), **(M)**
- iii. δεύτερης τάξης του Deissler, σχέσεις (2.2.5) και (2.2.6), **(D)**
- iv. πρώτης τάξης με συντελεστή ιξώδους ολίσθησης που προκύπτει μέσω της κινητικής θεωρίας, σχέσεις (2.2.7) και (2.2.8), **(K)**

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες (NS), (M) και (D) δεν είναι καινούριες, ενώ οι συνθήκες (K) χρησιμοποιούνται για πρώτη φορά. Τα αποτελέσματα τους παρουσιάζουν ποιοτική

ομοιότητα αλλά ποσοτική απόκλιση. Για την αξιολόγηση τους θα συγκριθούν με πειραματικά δεδομένα.

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται η αδιάστατη παροχή συναρτήσει του λόγου πιέσεων $\Pi = P_{in} / P_{out}$. Πρόκειται για ροή με $Kn_o = 0.1$ στην έξοδο (εκεί αναμένεται να έχει την μέγιστη τιμή καθώς είναι αντιστρόφως ανάλογος της πίεσης), ενώ ο συντελεστής προσαρμογής a έχει την τιμή 1. Πρόκειται δηλαδή για ροή στα όρια της περιοχής ολίσθησης. Εξετάζεται η ροή σε τετραγωνική ($h/b = 1$) και ορθογώνια ($h/b = 0.1$) διατομή αγωγού. Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν από τη σχέση (2.4.3).

Παρατηρούμε ότι η παροχή πάντα υποεκτιμάται όταν χρησιμοποιούνται οι συνοριακές (M) σε σχέση με τις (D). Η διαφορά φτάνει ακόμα και το 13% σε τετραγωνική γεωμετρία, $\Pi = 1.1$. Οι (K) δίνουν επίσης μικρότερη παροχή έως και 8% σε σχέση με τις (D) στην τετραγωνική διατομή, ενώ για χαμηλό λόγο πλευρών η παροχή βρίσκεται περίπου στα ίδια επίπεδα με τις (D). Γενικά στην τετραγωνική διατομή παίζει μεγαλύτερο ρόλο η επιλογή των συνοριακών καθώς παρατηρούνται μεγαλύτερες αποκλίσεις από ότι σε μικρότερους λόγους πλευρών. Η αντίστοιχη διαφορά των (M) - (K) είναι 7.4% ενώ των (K) - (D) είναι 2.5% για λόγο πλευρών 0.1. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε τον λόγο πιέσεων τόσο μειώνεται η διαφορά ανάμεσα στις (K) - (D). Για λόγο πλευρών 0.1 οι παροχές τους εξισώνονται και για ακόμη μεγαλύτερες τιμές οι (K) παρουσιάζουν μεγαλύτερες παροχές. Για λόγο πλευρών 1 έχουμε την ίδια τάση.

Στο Σχήμα 2.4 εμφανίζεται η αδιάστατη πίεση κατά μήκος του αγωγού. Πρόκειται για το λόγο της πίεσης σε κάποια διατομή με συνθήκες ολίσθησης προς την πίεση που θα υπήρχε χωρίς ολίσθηση. Όπως και προηγουμένως, $Kn_o = 0.1$ στην έξοδο και $a = 1$. Ο λόγος των πιέσεων είναι σταθερός και ίσος με $\Pi = 2.5$ ενώ εξετάζονται οι δύο γεωμετρίες που είδαμε και παραπάνω. Τα αποτελέσματα προκύπτουν από τη σχέση (2.4.5).

Οι τιμές της αδιάστατης πίεσης είναι μικρότερες της μονάδας παντού εκτός των ορίων, πράγμα το οποίο είναι αναμενόμενο αφού η ολίσθηση συνεπάγεται μικρότερες αντιστάσεις στη ροή του αερίου. Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (D) δίνουν τη χαμηλότερη αδιάστατη πίεση, ενώ ακολουθούν με υψηλότερες τιμές οι (K) και οι (M). Η σειρά αυτή παραμένει ίδια καθώς αλλάζει ο λόγος των πλευρών.

Επίσης, τα τρία είδη συνοριακών συνθηκών (χωρίς τις NS) για κάθε γεωμετρία δίνουν ελάχιστη τιμή της πίεσης στο σημείο $z = 0.78L$. Εκεί παρατηρείται και η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των τριών, η οποία όμως παίρνει πολύ μικρές τιμές (κάτω από 1.5%) και επομένως δεν είναι δυνατόν να συγκριθεί με πειραματικά δεδομένα αφού ο παράγοντας του πειραματικού σφάλματος είναι της ίδιας τάξης.

Τα επόμενα δύο διαγράμματα (2.5) και (2.6) δείχνουν τη σύγκριση των τεσσάρων περιπτώσεων με τα πειραματικά δεδομένα των Arkilic et al. [1] και των Shih et al. [25] αντίστοιχα. Στον Πίνακα (2.1) συνοψίζονται τα δεδομένα των πειραμάτων και οι συντελεστές προσαρμογής a που προκύπτουν για τα τρία μοντέλα ολίσθησης. Πρόκειται για ροή ηλίου μέσα σε αγωγούς με μικρούς λόγους πλευρών. Ο αριθμός Kn δεν περιορίζεται πλέον στην περιοχή ολίσθησης αλλά φτάνει στο 0.165.

Πίνακας 2.1: Δεδομένα των πειραμάτων των άρθρων [1] και [25]

Gas :	$2h$	$2b$	T	Kn_m	Kn_{out}	h/b	a	a	a
Helium	(μm)	(μm)	(K)				(M)	(D)	(K)
Πείραμα [1]	1.33	52.25	314	0.06	0.165	0.02545	1.00	1.10	1.04
Πείραμα [25]	1.2	40	293	0.07	0.16	0.03	1.19	1.35	1.27

Τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 αναφέρονται στο άρθρο [4]. Πρέπει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο άρθρο τα μήκη των καναλιών δεν δίνονται, ενώ δεν ήταν επίσης δυνατόν να βρεθούν τα άρθρα [1] και [25]. Για το λόγο αυτό τα μήκη πήραν τέτοιες τιμές ώστε να συμφωνούν με τα αριθμητικά αποτελέσματα του [4]. Έτσι, το μήκος του καναλιού του [1] θεωρήθηκε ίσο με 6.6 mm και το μήκος του καναλιού του [25] ίσο με 3.77mm. Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι στο [12] αναφέρεται το άρθρο [1] και δίνεται ότι το μήκος είναι ίσο με 7.5mm. Για την τιμή αυτή παίρνουμε πιο ρεαλιστικές τιμές του a . Συγκεκριμένα βρίσκουμε 0.84 για συνθήκες τύπου (M), 0.92 για συνθήκες τύπου (D) και 0.9 για συνθήκες τύπου (K). Θα μπορούσε δηλαδή να υπάρχει κάποιο υπολογιστικό λάθος στα αποτελέσματα του [4].

Παρατηρείται ότι με τις συνθήκες (K) παίρνουμε πιο ρεαλιστικές τιμές του a σε σχέση με τις (D), παίρνουμε δηλαδή τιμές πιο κοντά στη μονάδα (η οποία είναι ουσιαστικά το άνω όριο του αριθμού a , αφού το a συμβολίζει ένα ποσοστό σωματιδίων). Οι υψηλές τιμές του a μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι είναι πιθανό να υπήρξαν σημαντικά σφάλματα κατά τη διάρκεια των πειραμάτων, όπως αναφέρεται και στο [4]. Τα σφάλματα αυτά μπορεί να οφείλονται σε μη ακριβείς μετρήσεις της παροχής ή των διαστάσεων αλλά και σε αλλαγή των διαστάσεων λόγω της συγκόλλησης που γίνεται για να καλυφθεί το κανάλι. Δεν προκαλεί έκπληξη η ύπαρξη σφαλμάτων καθώς ο συντελεστής a είναι πολύ ευαίσθητος στην αλλαγή των διαστάσεων [4]. Στο ίδιο άρθρο αναφέρεται ότι αλλαγή του βάθους του καναλιού $2h$ κατά 1,5% έχει αποτελέσματα συγκρίσιμα με αλλαγή του a κατά 10%.

Επίσης έγινε σύγκριση των συνοριακών συνθηκών και στα πειραματικά δεδομένα των Colin et al. (2004) [3]. Εκεί εξετάζεται η ροή ηλίου και αζώτου σε κανάλια με διαστάσεις της τάξεως μερικών μικρομέτρων.

Κάθε κανάλι έχει μήκος 5 mm. Ο αριθμός Kn φτάνει μέχρι το 0.1 περίπου, στα όρια της περιοχής ολίσθησης. Ο λόγος των πλευρών εδώ παίρνει τιμές μεγαλύτερες σε σχέση με το [4], συγκεκριμένα 0.087 και 0.055. Τα υπόλοιπα δεδομένα εμφανίζονται στους πίνακες 2.2 και 2.3 οι οποίοι αναφέρονται σε ροή αζώτου και ηλίου αντίστοιχα.

Πίνακας 2.2: Δεδομένα των πειραμάτων με άζωτο του άρθρου [3]

Gas :	$2h$	$2b$	T	Kn_m	Kn_{out}	P_o	h/b	a	a	a
Nitrogen	(μm)	(μm)	(K)			(Pa)		(M)	(D)	(K)
Σχήμα 2.7	4.48	51.6	294	0.002 0.005	0.008 0.018	$1.9 \cdot 10^5$ $0.82 \cdot 10^5$	0.087	0.93	0.93	0.99
Σχήμα 2.8	1.88	21.2	294	0.010 0.027	0.017 0.053	$2 \cdot 10^5$ $0.65 \cdot 10^5$	0.087	0.92 0.90	0.93	0.98 0.95
Σχήμα 2.10	1.16	21	294	0.016 0.040	0.029 0.085	$1.9 \cdot 10^5$ $0.65 \cdot 10^5$	0.055	0.92 0.88	0.93	0.97 0.94

Πίνακας 2.3: Δεδομένα των πειραμάτων με ήλιο του άρθρου [3]

Gas :	$2h$	$2b$	T	Kn_m	Kn_{out}	P_o	h/b	a	a	a
Helium	(μm)	(μm)	(K)			(Pa)		(M)	(D)	(K)
Σχήμα 2.9	1.88	21.2	294	0.029 0.050	0.053 0.100	$1.9 \cdot 10^5$ $1.026 \cdot 10^5$	0.087	0.90 0.88	0.93	0.95 0.94
Σχήμα 2.11	1.16	21	294	0.050 - *	0.087 0.132*	$1.9 \cdot 10^5$ $1.25 \cdot 10^5$ *	0.055	0.88 0.87	0.93	0.94 0.91

Οι ποσότητες με τους αστερίσκους στην τελευταία σειρά του Πίνακα 2.3 είναι αυτές που έδωσαν αποτελέσματα τα οποία συμφωνούν με το αντίστοιχο σχήμα στο άρθρο [3]. Οι τιμές αυτές βρέθηκαν θεωρώντας στο πρόγραμμα τον Kn_{out} ως συνάρτηση του P_o και δοκιμάζοντας διάφορες τιμές του P_o . Οι τιμές που αναφέρονται στο άρθρο δεν συμφωνούν με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Ο Kn_m δεν μπορεί να βρεθεί με κάποιον τρόπο.

Στο σχήμα 2.7 βλέπουμε ροή αζώτου στο πρώτο κανάλι που κατασκευάστηκε από τους συγγραφείς του [3]. Η διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω σχήμα εντοπίζεται στην πίεση

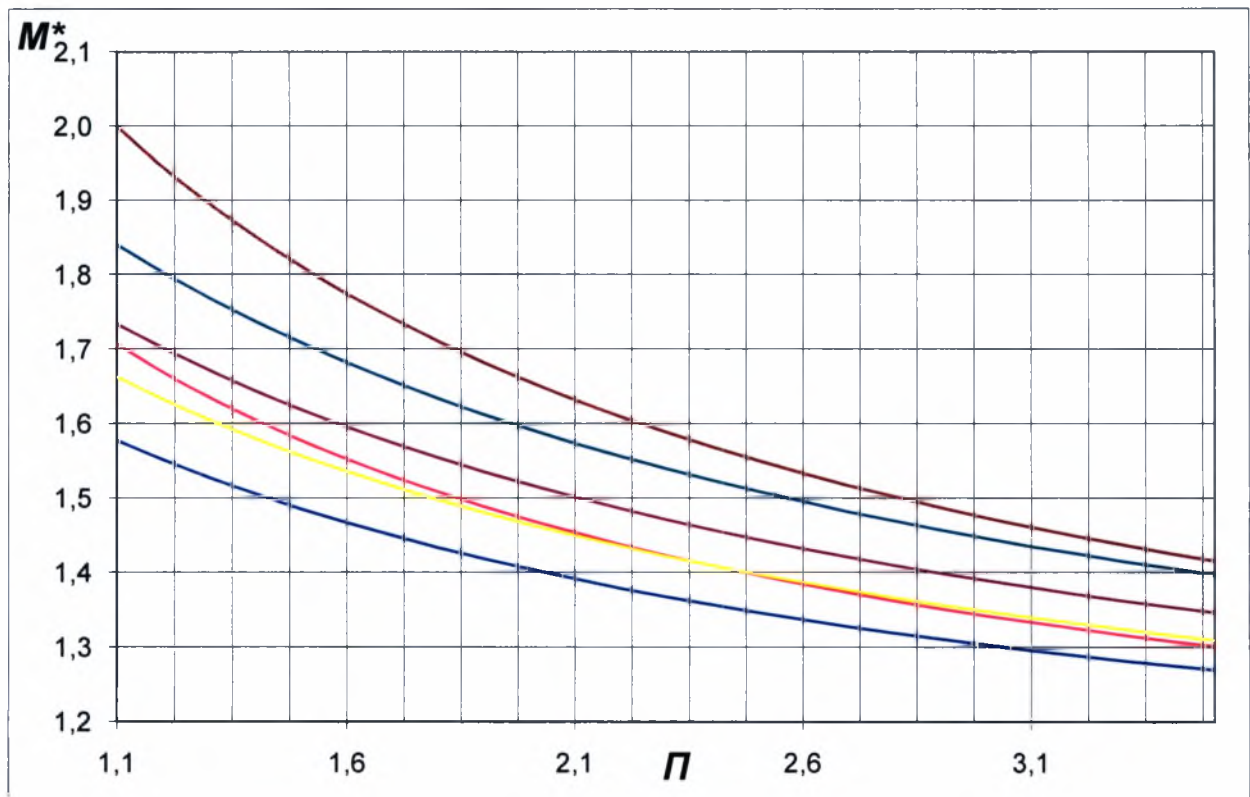
εξόδου (και επομένως και στον Kn_{out}). Είναι φανερό ότι επάνω οι διαφορές μεταξύ των (M), (D) και (K) είναι αμελητέες. Το (NS) δίνει χαμηλότερη παροχή όπως είναι αναμενόμενο, πράγμα το οποίο ισχύει και για όλα τα υπόλοιπα διαγράμματα. Επίσης, η επίδραση του a είναι πολύ μικρή, αφού για τιμές 0.93-0.99 και συνθήκες τύπου (M), (D) και (K) οι καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται. Η κατάσταση είναι περίπου η ίδια στο κάτω σχήμα με λίγο μεγαλύτερη διαφορά ανάμεσα στο (NS) και τα υπόλοιπα.

Τα διαγράμματα 2.8 και 2.9 αφορούν το δεύτερο κανάλι, το οποίο έχει μικρότερες διαστάσεις αλλά τον ίδιο λόγο πλευρών. Ο Kn_{out} παίρνει τιμές μέχρι και 0.1. Στο 2.8 έχουμε ροή αζώτου ενώ στο 2.9 έχουμε ροή ηλίου. Το 2.8(i) επιβεβαιώνει τα προηγούμενα συμπεράσματα αφού ο Kn κυμαίνεται στα ίδια περίπου επίπεδα. Στα επόμενα όμως υπάρχουν σημαντικές διαφορές. Οι συνθήκες (M) δίνουν χαμηλότερες παροχές από τις (D) και για αυτόν το λόγο προκύπτει μικρότερος ο συντελεστής προσαρμογής που χρειάζεται για να ταυτίζονται οι καμπύλες τους. Τα δεδομένα προσεγγίζονται καλά από τις συνθήκες (D) με έναν συντελεστή προσαρμογής a ίσο με 0.93 και για τα δύο αέρια, οι συνθήκες (M) προσεγγίζουν τα δεδομένα με τιμές του a στο διάστημα 0.92 - 0.88 ενώ με χρήση του συντελεστή της κινητικής θεωρίας το a παίρνει τιμές στο διάστημα 0.98 - 0.94.

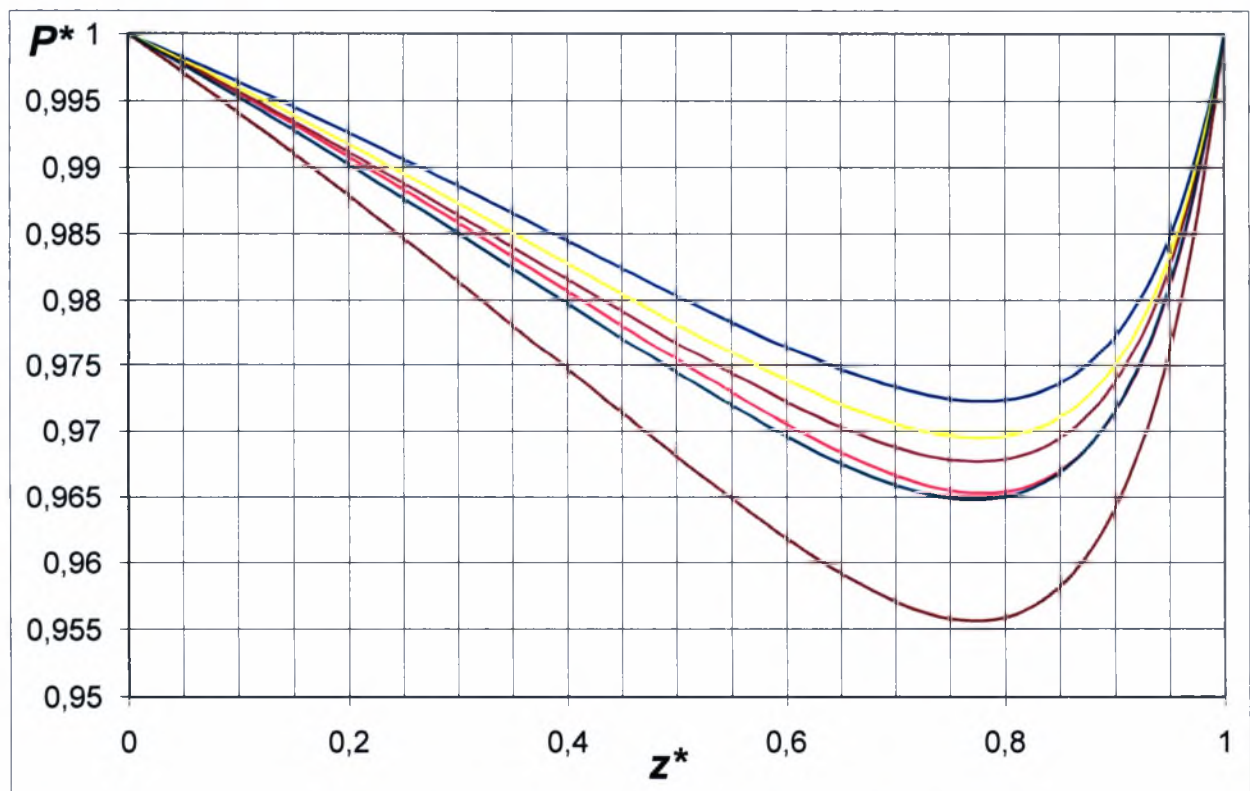
Στα διαγράμματα 2.10 και 2.11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του τρίτου πειράματος. Στο 2.10 έχουμε N_2 ενώ στο 2.11 έχουμε He . Κι εδώ το πρώτο σχήμα αφορά ροή με χαμηλό αριθμό Kn και επομένως καταλήγουμε στα ίδια περίπου συμπεράσματα με αυτά των προηγούμενων σχημάτων. Καθώς η τιμή του Kn ανεβαίνει παρατηρείται ραγδαία πτώση του συντελεστή προσαρμογής για τις συνθήκες τύπου (M) και (K). Τα πειραματικά δεδομένα προσεγγίζονται ικανοποιητικά με τις (M) με a από 0.92 έως και 0.87, με τις (D) για $a = 0.93$, ενώ οι (K) δίνουν τιμές του a από 0.97 έως και 0.91.

Το τελευταίο σχήμα 2.12 δίνει την αντίστροφη αδιάστατη παροχή συναρτήσει του Kn_{out} . Σε αυτό εμφανίζονται καμπύλες για $a = 0.93$ (M) και (D), καθώς και για $a = 0.93, 0.89, 0.83$ (K). Αν συγκρίνουμε το γράφημα με τα πειραματικά δεδομένα βλέπουμε ότι:

- Οι (M) παύουν να ισχύουν πολύ σύντομα, για $Kn_o > 0.05$
- Οι (D) δεν ισχύουν για $Kn_o > 0.25$
- Όσον αφορά τις (K) το a το οποίο προσεγγίζει καλύτερα τα δεδομένα εξαρτάται από τον Kn . Για $Kn_o < 0.1$ θα έχουμε $a = 0.93$. Για $0.12 < Kn_o < 0.2$ $a = 0.89$ ενώ για $Kn_o > 0.2$ θα έχουμε $a = 0.83$

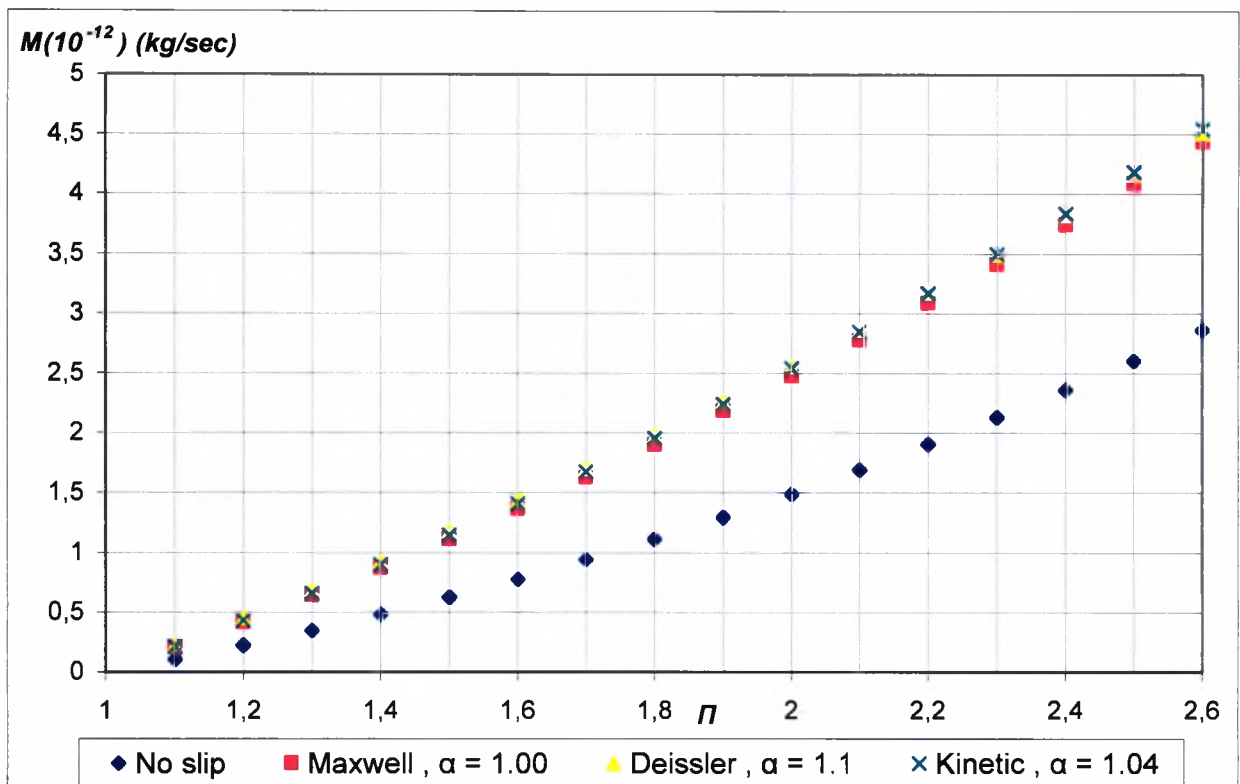


Σχήμα 2.3: Αδιάστατη παροχή συναρτήσει του λόγου πιέσεων

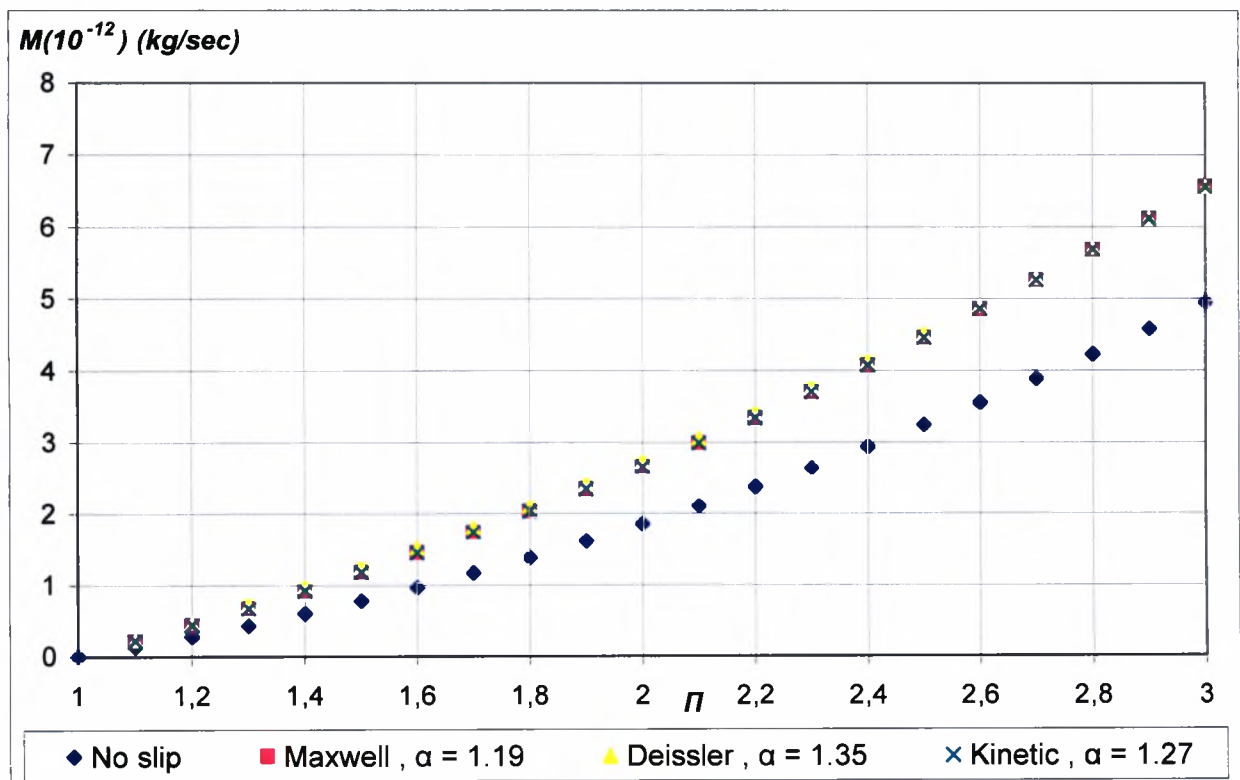


Σχήμα 2.4: Αδιάστατη πίεση συναρτήσει του z^*

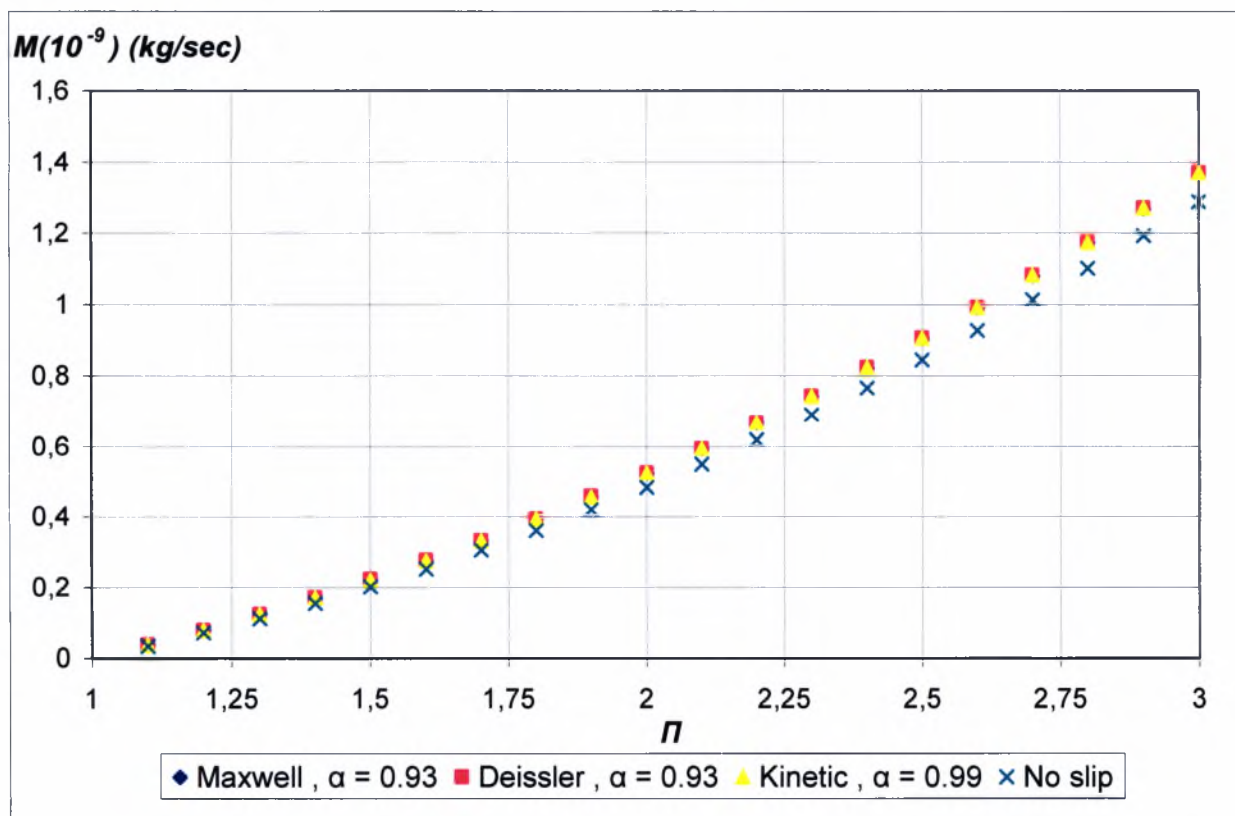
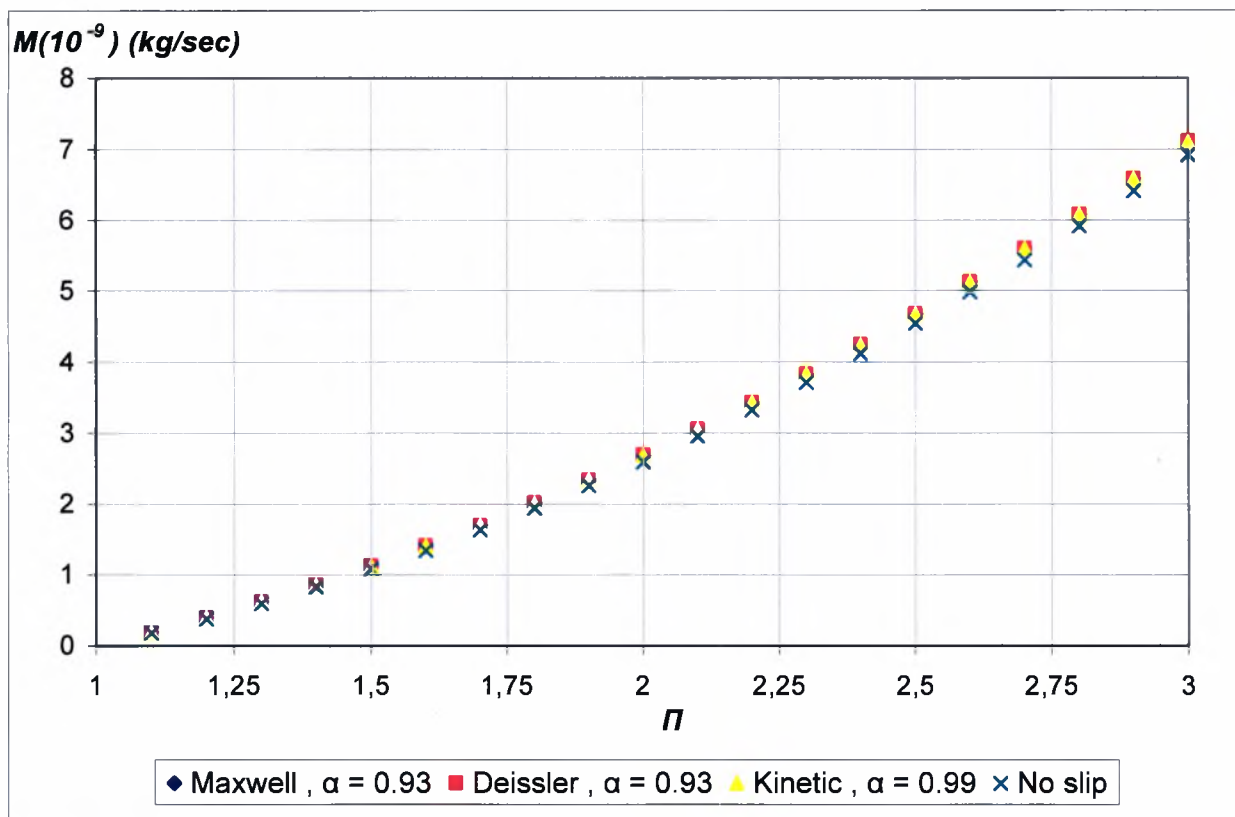
Maxwell	($h/b = 0.1$ — blue — , $h/b = 1$ — red —)
Deissler	($h/b = 0.1$ — pink — , $h/b = 1$ — dark red —)
Kinetic	($h/b = 0.1$ — yellow — , $h/b = 1$ — teal —)



Σχήμα 2.5: Σύγκριση πειραματικών [1] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α .

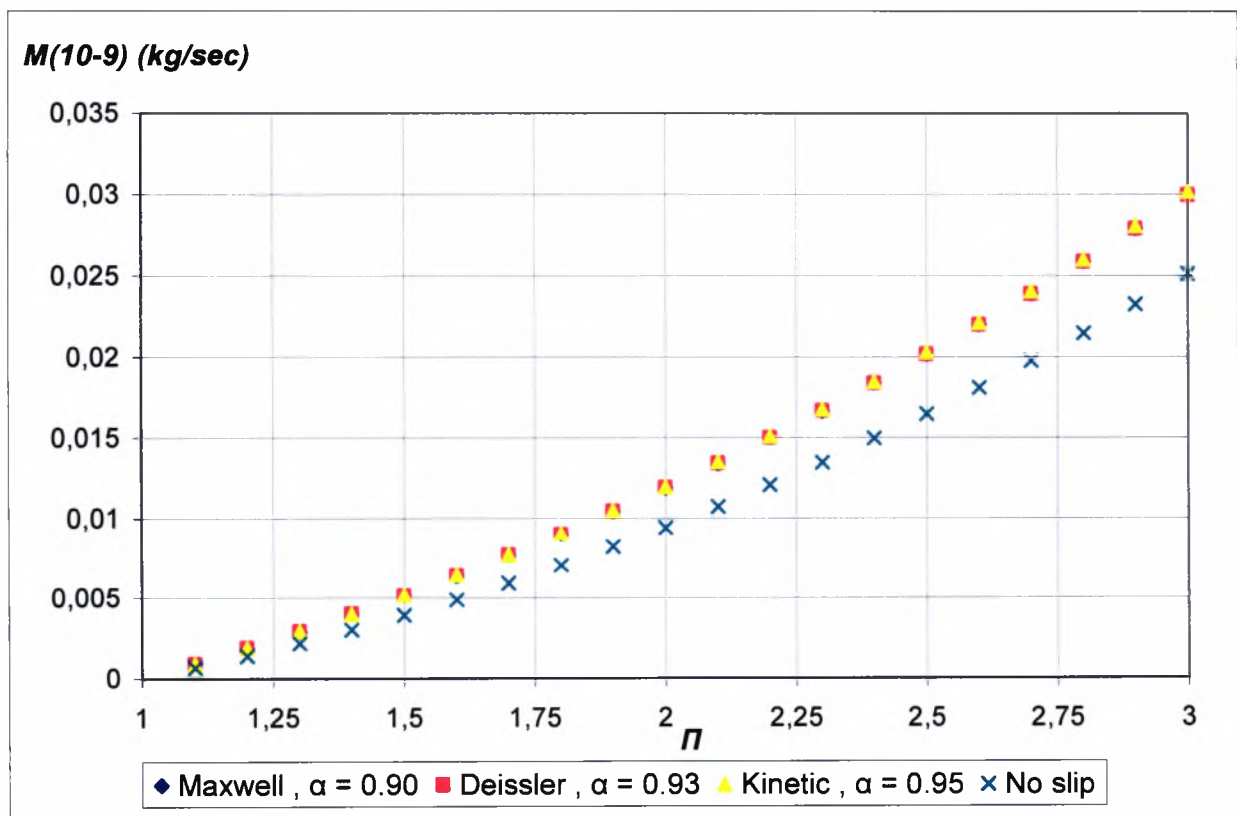
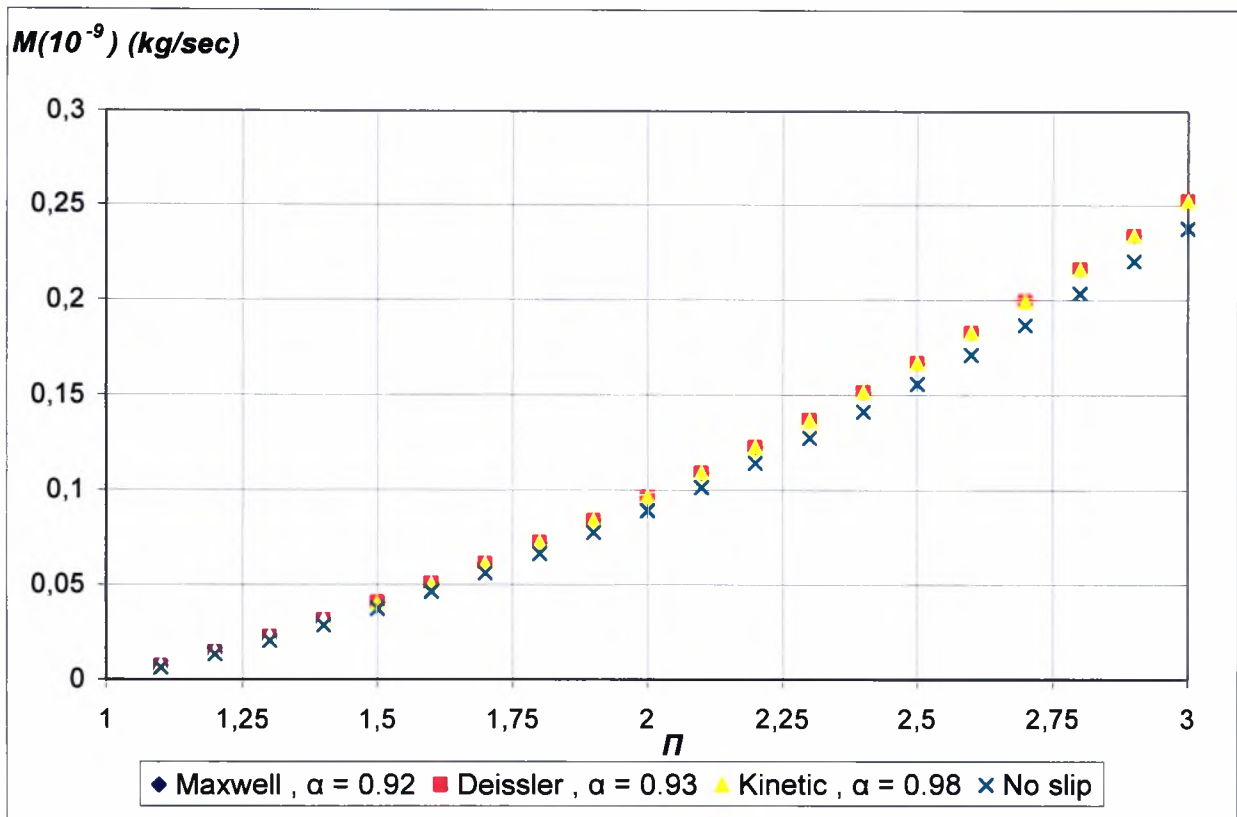


Σχήμα 2.6: Σύγκριση πειραματικών [25] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α .

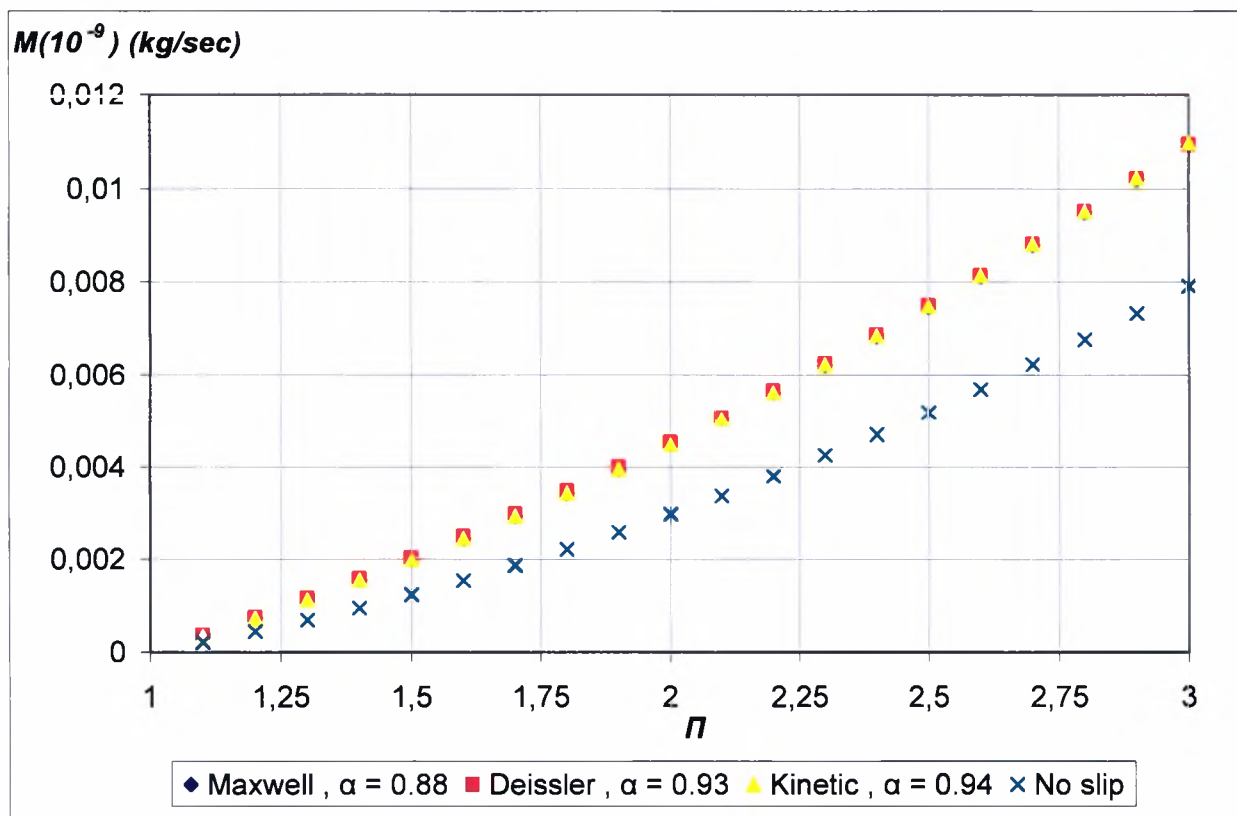
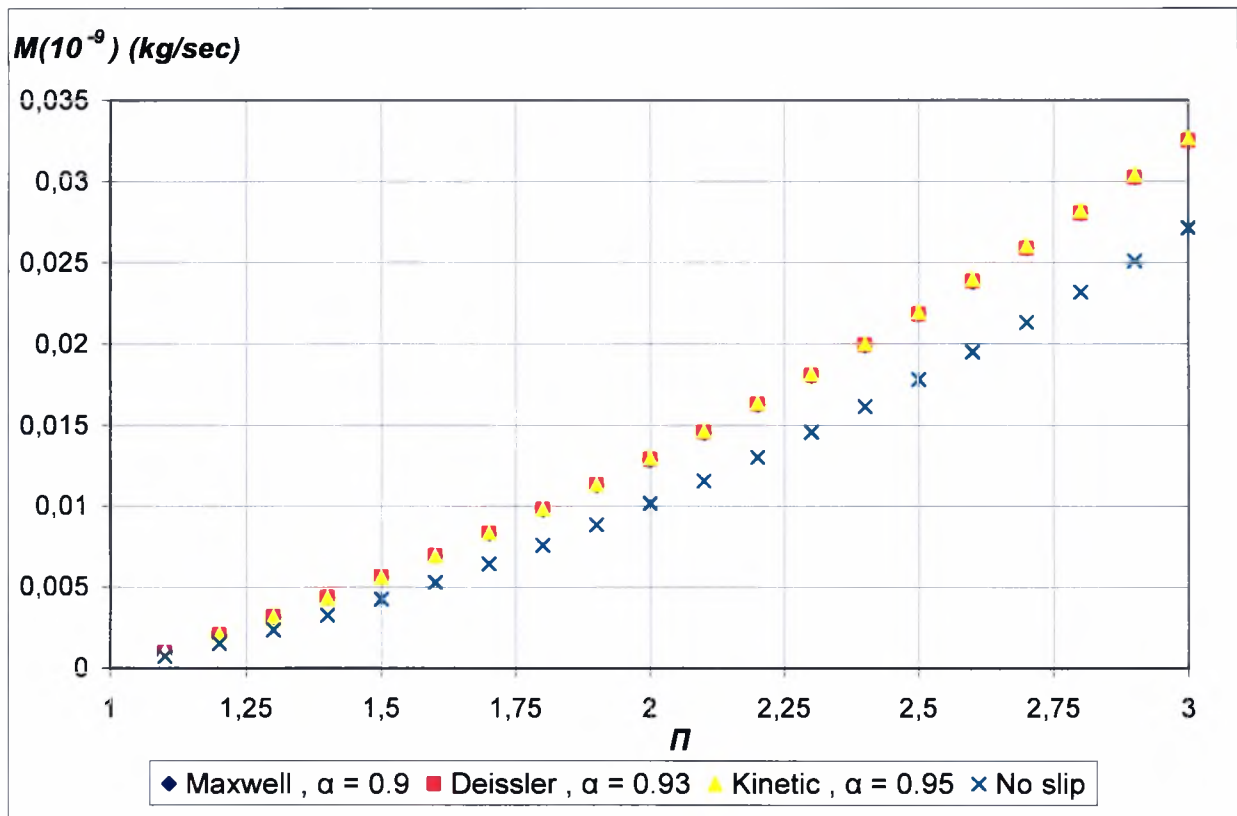


Σχήμα 2.7: Σύγκριση πειραματικών [3] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α .

Ροή αζώτου στο κανάλι 1 για $Kn_{out} = 0.008$ (επάνω) και $Kn_{out} = 0.018$ (κάτω).

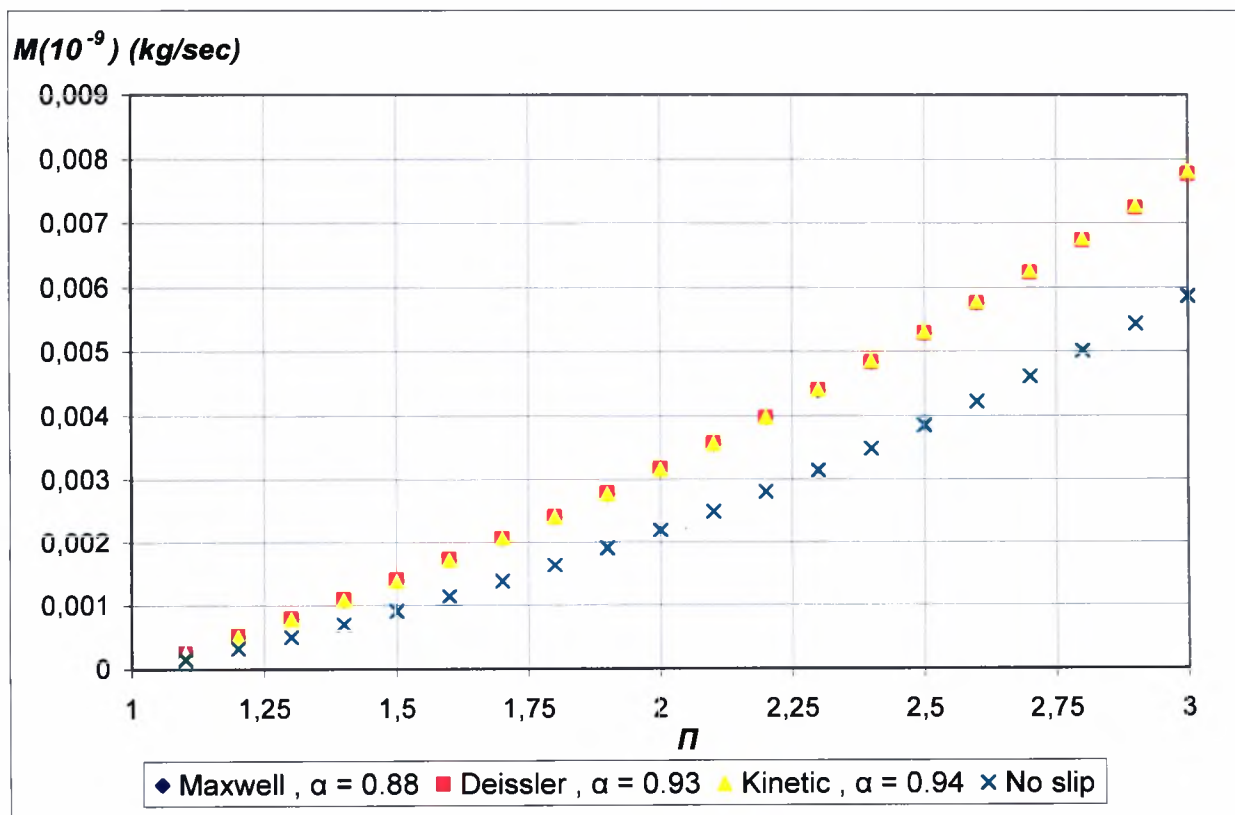
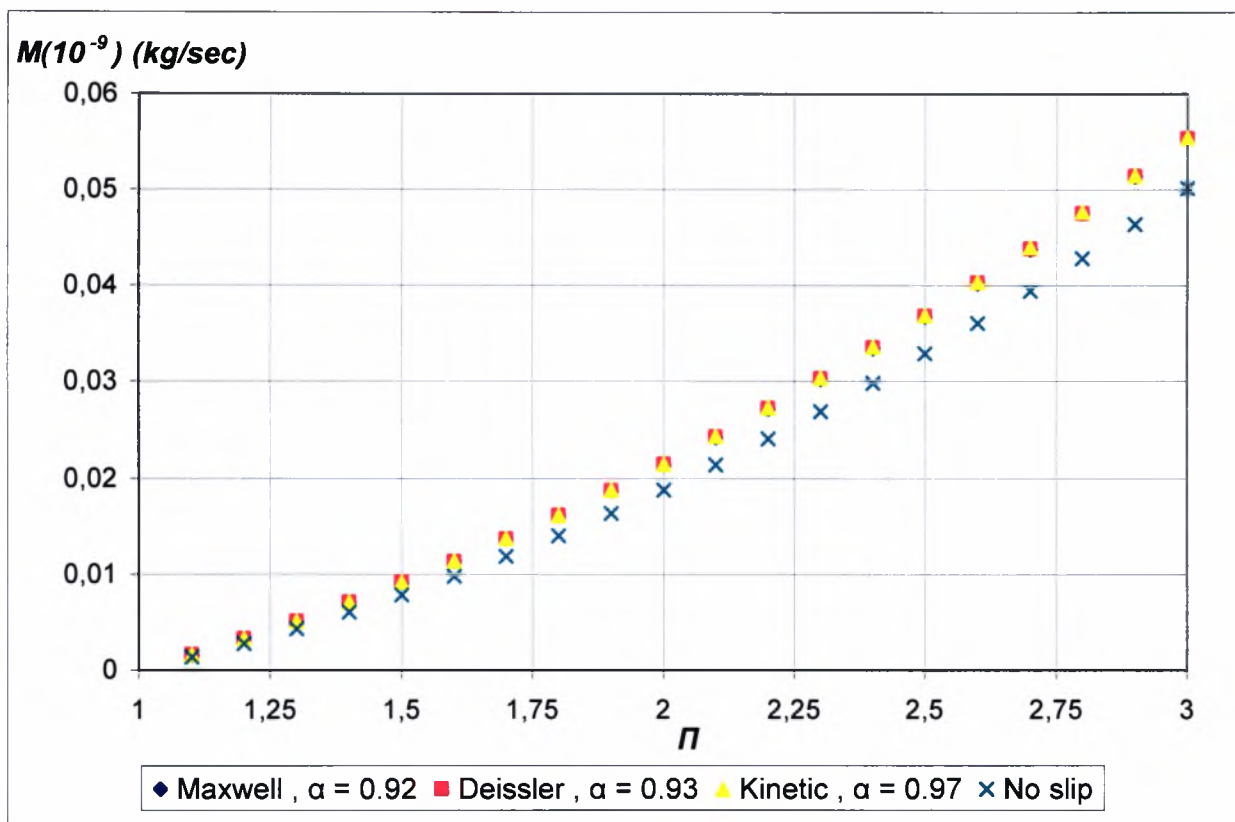


Σχήμα 2.8: Σύγκριση πειραματικών [3] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α . Ροή αζώτου στο κανάλι 2 για $Kn_{out} = 0.017$ (επάνω) και $Kn_{out} = 0.053$ (κάτω).

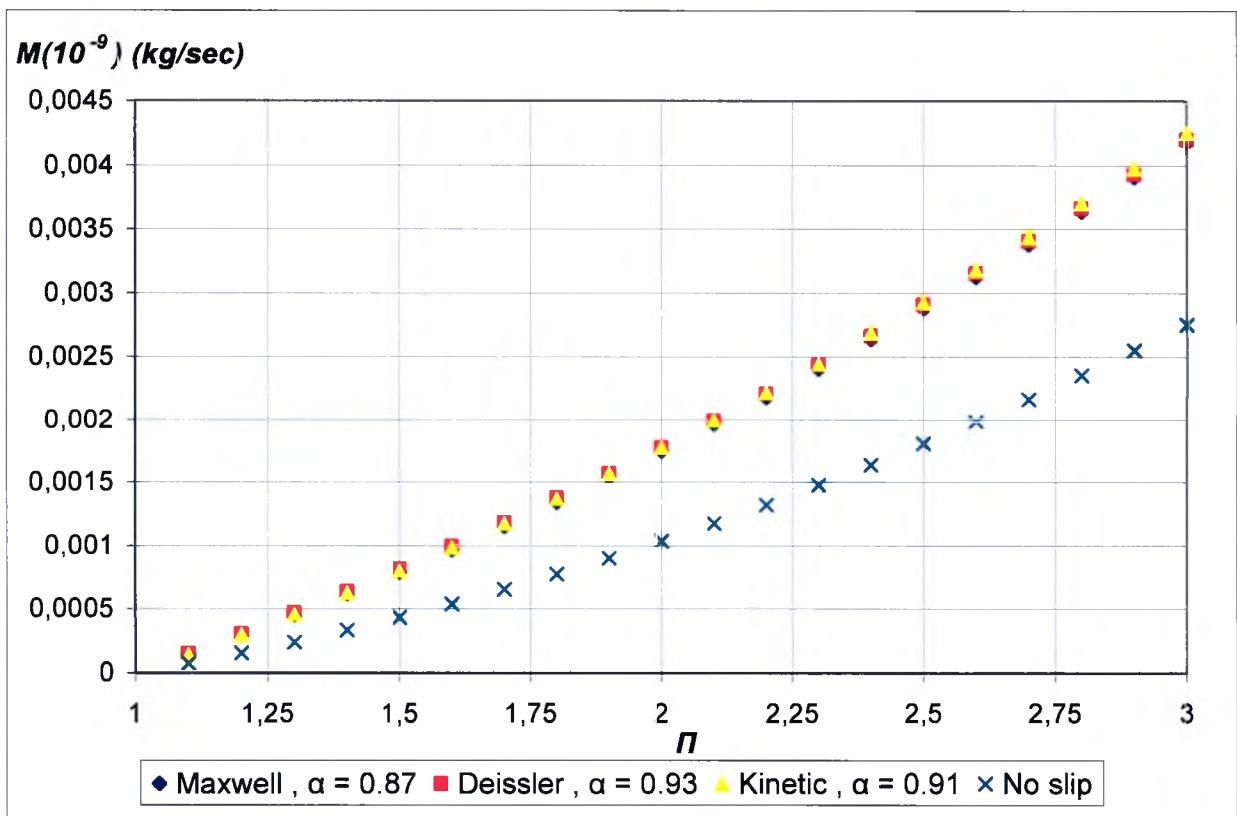
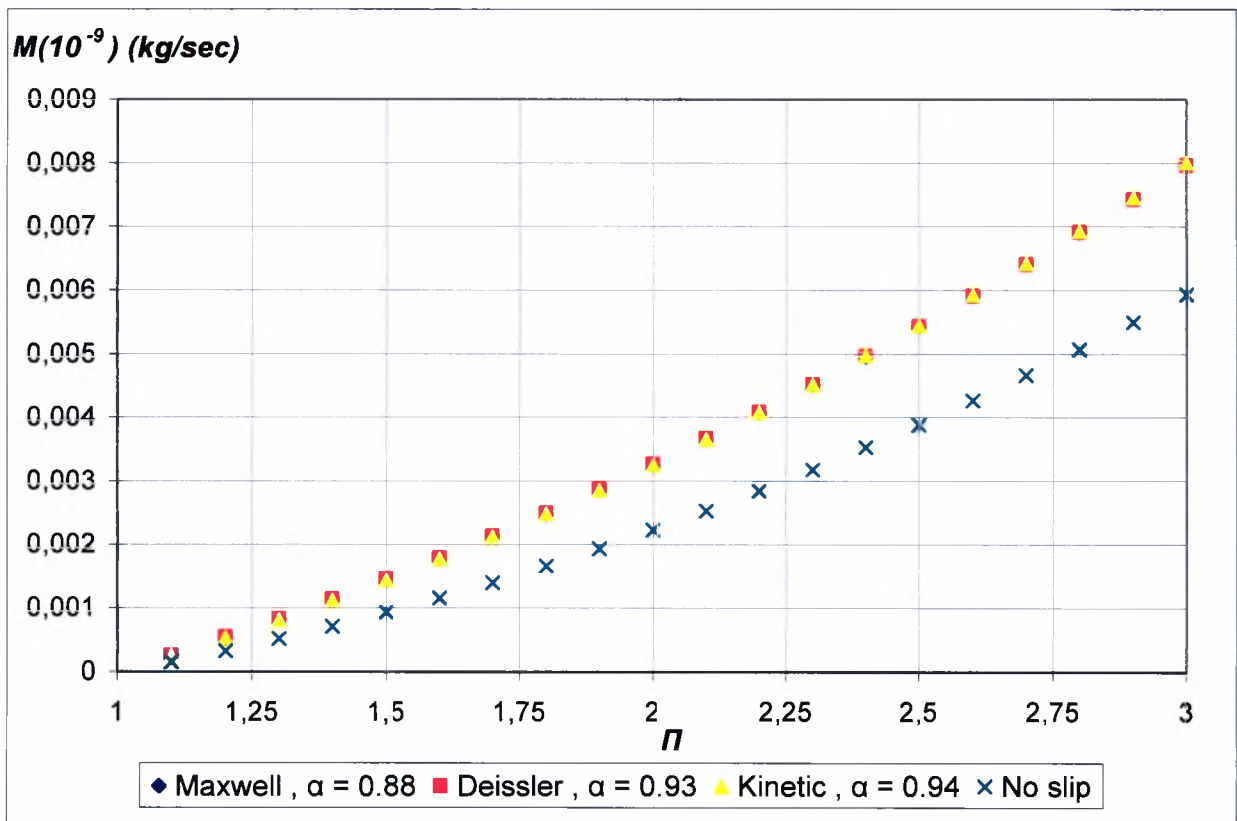


Σχήμα 2.9: Σύγκριση πειραματικών [3] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α .

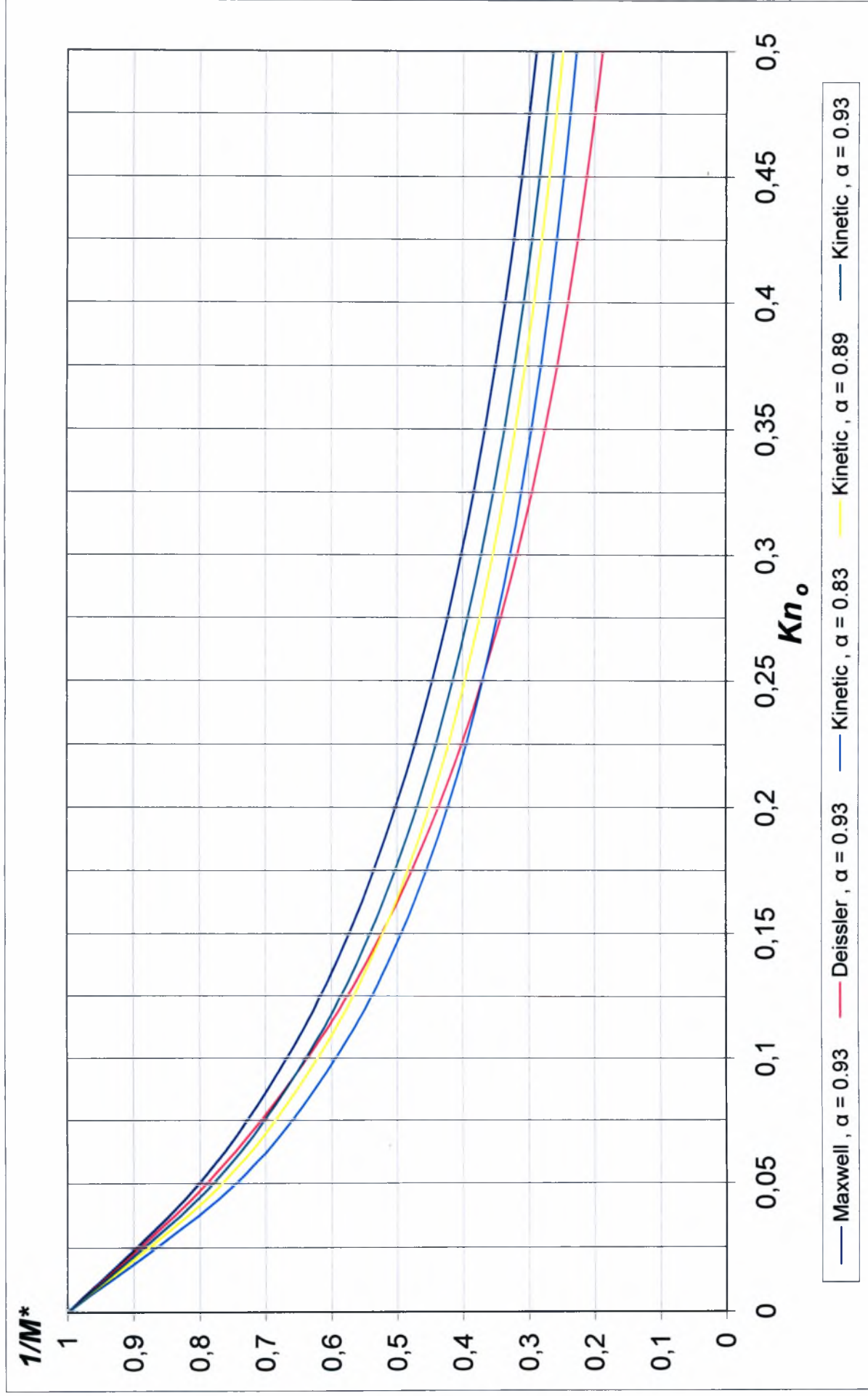
Ροή ηλίου στο κανάλι 2 για $Kn_{out} = 0.053$ (επάνω) και $Kn_{out} = 0.100$ (κάτω).



Σχήμα 2.10: Σύγκριση πειραματικών [3] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α Ροή αζώτου στο κανάλι 3 για $Kn_{out} = 0.029$ (επάνω) και $Kn_{out} = 0.085$ (κάτω).



Σχήμα 2.11: Σύγκριση πειραματικών [3] και αριθμητικών αποτελεσμάτων με κατάλληλη επιλογή του α Ροή ηλίου στο κανάλι 3 για $Kn_{out} = 0.090$ (επάνω) και $Kn_{out} = 0.132$ (κάτω).



Σχήμα 2.12: Αντίστροφη αδιάστατη παροχή συναρτήσει του αριθμού Kn της εξόδου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΡΟΗ ΣΕ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

3.1 Εισαγωγή - Περιγραφή του προβλήματος

Μια περίπτωση εσωτερικής ροής που εξετάζεται συχνά με θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον είναι η ροή σε κοιλότητα (cavity flow). Η εύρεση του πεδίου ταχυτήτων βρίσκει εφαρμογή σε αρκετά πρακτικά προβλήματα (στο άρθρο [22] αναφέρονται εφαρμογές όπως παραγωγή χαρτιού υψηλής ποιότητας ή φωτογραφικού φιλμ, κατασκευή μικροκρυσταλλικών υλικών, κ.α.) αλλά ταυτόχρονα παρουσιάζει και μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον αφού εκεί μπορούν να παρατηρηθούν πολλά φαινόμενα της μηχανικής ρευστών σε μια απλή γεωμετρία. Συχνά αποτελεί δοκιμασία μετρήσεων (benchmark) για τους διάφορους κώδικες επίλυσης ροών.

Πρόκειται για διδιάστατη ορθογώνια κοιλότητα με δυνατότητα κίνησης της άνω πλευράς με σταθερή ταχύτητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση του ρευστού που περιέχει και τον σχηματισμό ενός ή περισσοτέρων δινών, ανάλογα με το βάθος της. Στην περιοχή υδροδυναμικής ροής το πρόβλημα έχει μελετηθεί λεπτομερώς και κάποια αποτελέσματα έχουν δοθεί από τους Shankar και Deshpande [22]. Στο ίδιο άρθρο αναφέρεται ότι στην περίπτωση $Re \rightarrow 0$ (Stokes flow) η ροή επιλύεται μέσω της $\nabla^4 \psi = 0$, όπου ψ η ροϊκή συνάρτηση (stream function) κι επομένως είναι δυνατόν να πάρουμε μια λύση σε μορφή αθροίσματος στοιχειωδών διαχωριζόμενων λύσεων της διαρμονικής εξίσωσης. Αναφέρονται συγκρίσεις ανάμεσα στα αριθμητικά και τα αναλυτικά αποτελέσματα σχετικά με τη θέση των κέντρων των δινών.

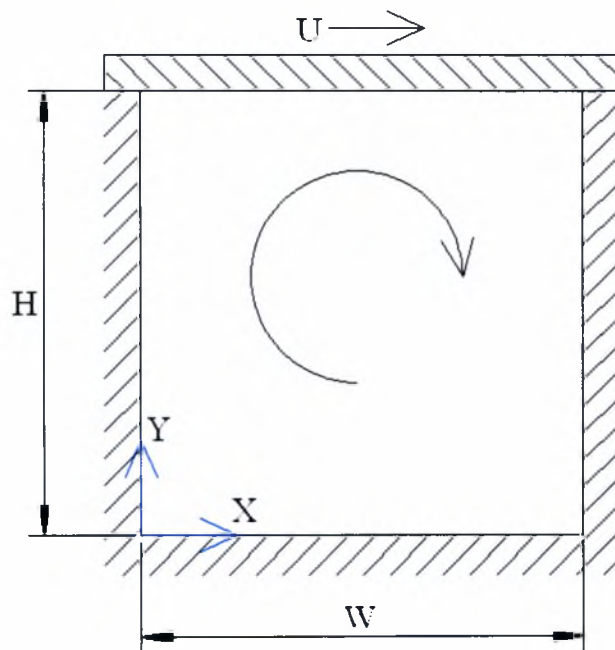
Έχουν γίνει επίσης κάποιες προσπάθειες για την προσομοίωση τριδιάστατων κοιλοτήτων [22]. Στην περίπτωση αυτή η επίλυση είναι πιο δύσκολη και τα αποτελέσματα παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές από το δισδιάστατο πρόβλημα. Προκύπτει ότι η φυσική επέκταση της διδιάστατης ορθογώνιας κοιλότητας στις τρεις διαστάσεις είναι ένας κύλινδρος παρά ένα παραλληλεπίπεδο.

Τα τελευταία χρόνια γίνεται έρευνα και στην περιοχή ολίσθησης. Στο άρθρο [18] η ροή επιλύεται μέσω της κινητικής θεωρίας με το κινητικό μοντέλο BGK να αντικαθιστά τον όρο των συγκρούσεων, με χρήση της μεθόδου των διακριτών ταχυτήτων, για όλο το εύρος του αριθμού Kn και διάφορες τιμές του A . Εκεί παρατηρείται ότι στις γωνίες δημιουργούνται μικρές δίνες οι οποίες ενώνονται καθώς το A μεγαλώνει, ενώ οι αρχικές δίνες μετατοπίζονται ελαφρώς προς τα πάνω. Επίσης, καθώς το δ μειώνεται, εμφανίζονται λιγότερες δίνες για το ίδιο A (ή καθώς το δ μειώνεται, το κρίσιμο A , στο οποίο οι πρώτες γωνιακές δίνες ενώνονται, αυξάνεται).

Οι Beskok και Karniadakis [12] δίνουν συνοπτικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν μέσω της μεθόδου Lattice Boltzmann για πολύ μικρούς αριθμούς Re και $Ma (< 10^{-3})$ ενώ ο Kn παίρνει τις τιμές 0.00485 (υδροδυναμική περιοχή) και 0.388 (περιοχή ολίσθησης). Όπως παρατηρείται, η αραιοποίηση ωθεί το κέντρο της δίνης προς το κινούμενο τοίχωμα μέχρι κάποια τιμή του Kn

($Kn \geq 0.3$) όπου η θέση του σταθεροποιείται. Η παροχή μάζας αυξάνεται αρχικά, έπειτα όμως μειώνεται πάλι και σταθεροποιείται για τον ίδιο Kn .

Η κοιλότητα (σχήμα 3.1) έχει ύψος H και πλάτος W και αποτελείται από τρία σταθερά τοιχώματα στις θέσεις $x^* = 0$, $y^* = 0$ και $x^* = W$ και ένα τοίχωμα το οποίο κινείται με ταχύτητα U στη θέση $y^* = H$ (οι αστερίσκοι υποδηλώνουν διαστατικές ποσότητες). Θεωρώντας το πλάτος W ως το χαρακτηριστικό μήκος ορίζονται τα αδιάστατα μεγέθη $x = \frac{x^*}{W}$ και $y = \frac{y^*}{W}$, όπου $x \in [0, A]$, $A = \frac{H}{W}$ και $y \in [0, 1]$. Ο λόγος των πλευρών είναι αρκετός για να περιγράψει την κοιλότητα. Στη διεύθυνση z^* η γεωμετρία δεν μεταβάλλεται κι έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα δισδιάστατο. Επίσης η ροή δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, έχει δηλαδή φτάσει πλέον σε μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 3.1: Η γεωμετρία της κοιλότητας

3.2 Διατύπωση εξισώσεων

Οι διαστατικές εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes για μόνιμη κατάσταση είναι οι

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.2.2)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \bar{v} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.2.3)$$

όπου με \bar{v} συμβολίζεται το κινηματικό ιξώδες. Πολλαπλασιάζοντας με ρ και αδιαστατοποιώντας

(για την πίεση θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $P = \frac{P^*}{\rho U^2}$, ενώ για τις ταχύτητες $u = \frac{u^*}{U}, v = \frac{v^*}{U}$)

έχουμε

$$\frac{U}{W} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\rho \frac{U^2}{W} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\rho U^2}{W} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu U}{W^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.5)$$

$$\rho \frac{U^2}{W} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\rho U^2}{W} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu U}{W^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.6)$$

όπου $\mu = \bar{v} \rho$ είναι το δυναμικό ιξώδες. Τέλος, αντικαθιστώντας τον αριθμό Reynolds $Re = \frac{\rho U W}{\mu}$

προκύπτει η ομάδα εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2.7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.9)$$

Εκτός από τις εξισώσεις Navier – Stokes μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και έναν άλλο τρόπο για την επίλυση του ροϊκού πεδίου. Παραγωγίζουμε την εξίσωση της x-ορμής ως προς y και την εξίσωση της y-ορμής ως προς x και αφαιρώντας την δεύτερη από την πρώτη έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ \rightarrow u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \rightarrow u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Εισάγοντας τη στροβιλότητα $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ προκύπτει η εξίσωση στροβιλότητας

$$\xrightarrow{\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}} u \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + v \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \rightarrow u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.11)$$

Επίσης, η ροϊκή συνάρτηση ψ $\left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$ συνδέεται με τη στροβιλότητα ζ με την σχέση

$$\zeta = -\nabla^2 \psi. \quad (3.2.12)$$

Το σύστημα (3.2.11) - (3.2.12) είναι μη-γραμμικό όπως αναφέρει ο Roache [20], αλλά είναι ευκολότερο στην επίλυση του από το σύστημα εξισώσεων (3.2.7-9) αφού δεν απαιτούνται τεχνικές όπως το πάγωμα των συντελεστών.

Το σύστημα (3.2.11) - (3.2.12) μπορεί να αντικαταστήσει τις εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes, δηλαδή το σύστημα (3.2.7-9). Η επίλυση των προβλημάτων σε αυτήν την εργασία βασίζεται στην επίλυση των εξισώσεων στροβιλότητας και ροϊκής συνάρτησης.

Σημειώνεται ότι για $\text{Re} = 0$ το σύστημα ανάγεται στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \nabla^2 \zeta &= 0 \\ \nabla^2 \psi &= -\zeta \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Άρα για $\text{Re} = 0$ το σύστημα είναι γραμμικό όπως και το αρχικό πρόβλημα (πρόβλημα Stokes). Τέλος, οι εξισώσεις (3.2.13) συνδυάζονται και παίρνουμε την διαρμονική εξίσωση $\nabla^4 \psi = 0$.

3.3 Συνοριακές συνθήκες

Για $Kn \rightarrow 0$ οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται στα σταθερά τοιχώματα είναι

$$u = 0 \text{ και } v = 0 \quad (3.3.1)$$

και στο κινούμενο τοίχωμα

$$u = 1 \text{ και } v = 0 \quad (3.3.2)$$

Έχουμε τις γνωστές συνθήκες μη-διείσδυσης και μη-ολίσθησης. Στο σύστημα $\zeta - \psi$ και με βάση τις οριακές συνθήκες (3.3.1-2) προκύπτουν στα σταθερά τοιχώματα οι οριακές συνθήκες

$$\psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.3.3)$$

και στο κινούμενο τοίχωμα

$$\psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 1 \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.3.4)$$

Οι δείκτες n και t υποδηλώνουν τις κατευθύνσεις κάθετα και παράλληλα στο τοίχωμα αντίστοιχα.

Η ταχύτητα που είναι παράλληλη στο τοίχωμα σχετίζεται με το $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ ενώ η ταχύτητα που είναι

κάθετη στο τοίχωμα με το $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Με αυτόν τον τρόπο ικανοποιούνται οι συνθήκες μη-διείσδυσης και μη-ολίσθησης. Το $\psi = 0$ στα τοιχώματα είναι συνηθισμένη πρακτική καθώς το ψ προσδιορίζεται με τη βοήθεια μιας αυθαίρετης σταθεράς.

Στην περίπτωση που υπάρχει ολίσθηση στα τοιχώματα η ταχύτητα παράλληλα με τα τοιχώματα θα αλλάζει. Αν χρησιμοποιήσουμε συνοριακές συνθήκες πρώτης τάξης στα σταθερά τοιχώματα έχουμε

$$u_{slip} = \sigma_P^{Maxwell} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial u}{\partial n} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{wall} = \pm \frac{2-a}{a} Kn \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right|_{wall} \quad (3.3.5)$$

και στα κινούμενα τοιχώματα

$$\rightarrow \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{wall} = 1 \pm \frac{2-a}{a} Kn \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right|_{wall} \quad (3.3.6)$$

Όπως έχει αναφερθεί ήδη στο κεφάλαιο 1, οι οριακές συνθήκες του Maxwell είναι προσεγγιστικές. Για το λόγο αυτό αντικαθίστανται από συνοριακές συνθήκες που περιέχουν τον συντελεστή εξόδου ολίσθησης που υπολογίζεται απ' ευθείας από την κινητική θεωρία από τις σχέσεις (1.2.13) και (1.2.14). Στα σταθερά τοιχώματα έχουμε:

$$u_{slip} = \sigma_P^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn \frac{\partial u}{\partial n} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{wall} = \sigma_P^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right|_{wall} \quad (3.3.7)$$

και στο κινούμενο τοίχωμα

$$\rightarrow \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{wall} = 1 - \sigma_P^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right|_{wall} \quad (3.3.8)$$

Τα πρόσημα εξαρτώνται από το τοίχωμα στο οποίο εφαρμόζεται η συνθήκη και βρίσκονται λαμβάνοντας υπ' όψη την κατεύθυνση που θα έχει η ταχύτητα ολίσθησης.

Επάνω κινούμενο τοίχωμα ($y = A$)

$$\left. \begin{array}{l} u_{slip} < 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_{slip} = -\frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 1 - \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (3.3.9)$$

$$\psi = 0 \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}$$

Δεξιό τοίχωμα ($x = 1$)

$$\left. \begin{array}{l} u_{slip} < 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_{slip} = -\frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial v}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (3.3.10)$$

$$\psi = 0 \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}$$

Κάτω τοίχωμα ($y = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} u_{slip} < 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} < 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_{slip} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (3.3.11)$$

$$\psi = 0 \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}$$

Αριστερό τοίχωμα ($x = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} u_{slip} > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow u_{slip} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial v}{\partial x} \quad \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{2-a}{a} Kn \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \quad (3.3.12)$$

$$\psi = 0 \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}$$

3.4 Αριθμητικό σχήμα

Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις (3.2.11) και (3.2.12) με κεντρώες πεπερασμένες διαφορές και στα δύο μέλη και το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει επιλύεται με κλασσικές επαναληπτικές μεθόδους.

$$(3.2.11) \rightarrow \text{Re} \left[u_{i,j} \frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta y} \right] = \frac{\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\xrightarrow{\Delta x = \Delta y = h} \text{Re} h \left[u_{i,j} (\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) + v_{i,j} (\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}) \right] = 2(\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}) + 2(\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1})$$

$$\rightarrow \zeta_{i,j} = \frac{\zeta_{i+1,j} (2 - \text{Re} h u_{i,j}) + \zeta_{i-1,j} (2 + \text{Re} h u_{i,j}) + \zeta_{i,j+1} (2 - \text{Re} h v_{i,j}) + \zeta_{i,j-1} (2 + \text{Re} h v_{i,j})}{8}$$

$$\rightarrow \zeta_{i,j} = \frac{1}{4} \left[\zeta_{i+1,j} \left(1 - \frac{\text{Re} h u_{i,j}}{2} \right) + \zeta_{i-1,j} \left(1 + \frac{\text{Re} h u_{i,j}}{2} \right) + \zeta_{i,j+1} \left(1 - \frac{\text{Re} h v_{i,j}}{2} \right) + \zeta_{i,j-1} \left(1 + \frac{\text{Re} h v_{i,j}}{2} \right) \right] \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{h^2} = -\zeta_{i,j} \quad (3.4.2)$$

Δεν χρησιμοποιούμε την μέθοδο SOR γιατί αποκλίνει σε μεγάλες τιμές του αριθμού Re, καθώς αν οι νέες τιμές της στροβιλότητας των τοιχωμάτων υπολογίζονται από τις πιο πρόσφατες τιμές της ροϊκής συνάρτησης οι τιμές της θα μεγαθύνονται συνεχώς. Το γεγονός αυτό είναι γνωστό και στους συγγραφείς του [2] οι οποίοι το έχουν συναντήσει και σε κάποιες από τις αναφορές τους. Για το λόγο αυτό επιλέγεται η μέθοδος Gauss-Seidel και η χρήση μιας παραμέτρου ω ($0 < \omega < 1$)

στην στροβιλότητα ώστε η νέα τιμή ($\zeta_{i,j}^{new}$) να καθορίζεται κατά ένα μέρος από την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών ($\zeta_{i,j}^{FDE}$) και κατά το υπόλοιπο από την παλιά τιμή ($\zeta_{i,j}^{old}$)

$$\zeta_{i,j}^{(k+1)} = \omega \zeta_{i,j}^{(k+1)} + (1 - \omega) \zeta_{i,j}^{(k)} \quad (3.4.3)$$

Πρόκειται για υποχαλάρωση, δηλαδή την αντίθετη διαδικασία από αυτήν που ακολουθεί η μέθοδος SOR. Η τεχνική αυτή, η οποία προτείνεται και στο άρθρο [2], είναι απαραίτητη για την ευστάθεια όταν ο Re παίρνει μεγάλες τιμές. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για το πρόβλημα της ροής σε κοιλότητα και πλέγμα 151x151, η μέθοδος συγκλίνει για Re 400 με $\omega = 0.8$ και για Re 1000 με $\omega = 0.6$.

Οι τιμές του Re που μελετήθηκαν είναι: 0, 40, 100, 400 και 1000. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι σε κάθε επανάληψη οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών εφαρμόζονται στους εσωτερικούς κόμβους δύο φορές, μια από πάνω προς τα κάτω και μια κατά την αντίθετη φορά, έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των απαραίτητων επαναλήψεων. Το κριτήριο τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας που επιλέγεται εξαρτάται από το πλέγμα και κυμαίνεται από 10^{-10} για μικρά πλέγματα ως 10^{-12} για $A=5$ ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια στην εύρεση των ταχυτήτων των δινών που βρίσκονται χαμηλότερα.

Για την επίλυση της διαρμονικής

$$\nabla^4 \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.4.4)$$

χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κεντρώων πεπερασμένων διαφορών

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right|_{i,j} &= \frac{6\psi_{i,j} - 4(\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j}) + (\psi_{i-2,j} + \psi_{i+2,j})}{\Delta x^4} \\ \left. \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right|_{i,j} &= \frac{6\psi_{i,j} - 4(\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) + (\psi_{i,j-2} + \psi_{i,j+2})}{\Delta y^4} \\ \left. \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} &= \frac{4\psi_{i,j} - 2(\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j}) + (\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j-1})}{\Delta x^2 \Delta y^2} \\ \xrightarrow{\Delta x = \Delta y} \psi_{i,j} &= \frac{1}{20} \left[8(\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j}) \right. \\ &\quad \left. - 2(\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}) - (\psi_{i,j-2} + \psi_{i,j+2} + \psi_{i-2,j} + \psi_{i+2,j}) \right] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κι εδώ τη μέθοδο Gauss - Seidel.

Οι συνοριακές συνθήκες διακριτοποιούνται επίσης με κεντρώα σχήματα και με τη βοήθεια φανταστικών κόμβων. Ενδεικτικά για το τοίχωμα στο $x=1$ έχουμε

$$\frac{\psi_{n_x+1,j} - \psi_{n_x-1,j}}{2\Delta x} = -\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn \frac{\psi_{n_x+1,j} - 2\psi_{n_x,j} + \psi_{n_x-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\rightarrow \psi_{n_x+1,j} = \psi_{n_x-1,j} \frac{\Delta x - 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn}{\Delta x + 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn} \quad (3.4.6)$$

$$\zeta_{n_x,j} = -\frac{\psi_{n_x+1,j} - 2\psi_{n_x,j} + \psi_{n_x-1,j}}{\Delta x^2} = -\frac{\psi_{n_x-1,j}}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{\Delta x - 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn}{\Delta x + 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn} \right) \quad (3.4.7)$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $\psi_{n_x,j} = 0$ λόγω της συνθήκης (3.3.3). Για το κινούμενο τοίχωμα:

$$\frac{\psi_{i,n_y+1} - \psi_{i,n_y-1}}{2\Delta y} = -\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn \frac{\psi_{i,n_y+1} - 2\psi_{i,n_y} + \psi_{i,n_y-1}}{\Delta y^2} + 1$$

$$\rightarrow \psi_{i,n_y+1} = \psi_{i,n_y-1} \frac{\Delta y - 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn}{\Delta y + 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn} + \frac{2\Delta y^2}{\Delta y + 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn} \quad (3.4.8)$$

$$\zeta_{i,n_y} = -\frac{\psi_{i,n_y+1} - 2\psi_{i,n_y} + \psi_{i,n_y-1}}{\Delta y^2} = -\frac{\psi_{i,n_y-1}}{\Delta y^2} \left(1 + \frac{\Delta y - 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn}{\Delta y + 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn} \right) - \frac{2}{\Delta y + 2\sigma_p^{kinetic} \frac{2}{\sqrt{\pi}} Kn} \quad (3.4.9)$$

Έχει γίνει επίσης προσπάθεια να χρησιμοποιηθούν ανάντι/κατάντι πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης όπως αυτές που εμφανίζονται στο κεφάλαιο 2, όπως και συνδυασμοί κεντρώων με ανάντι/κατάντι διαφορών. Τα αποτελέσματα που δίνουν διαφέρουν ελάχιστα, το σχήμα που επιλέχθηκε όμως φαίνεται να είναι το ταχύτερο γιατί χρησιμοποιεί μόνο ένα εσωτερικό σημείο κι επομένως απαιτεί την ανάγνωση λιγότερων τιμών από τη μνήμη και μικρότερο χρόνο ανά επανάληψη. Τέλος, για την επίλυση της διαρμονικής χρησιμοποιούνται οι ίδιες συνοριακές συνθήκες στο ψ .

3.5 Αποτελέσματα

Στην παράγραφο 3.5.1 γίνεται πιστοποίηση του αλγορίθμου και του προγράμματος συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του πηγαίου κώδικα με αντίστοιχα της βιβλιογραφίας και στην παράγραφο 3.5.2 παρουσιάζονται νέα αποτελέσματα στην περιοχή ολίσθησης.

3.5.1 Πιστοποίηση του κώδικα

Χρησιμοποιούμε τις εξής δύο ποσότητες για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων:

- Την παροχή G του ρευστού ανάμεσα στην κινούμενη πλάκα και το κέντρο της δίνης. Η συγκεκριμένη ποσότητα ισούται με την τιμή της ροϊκής συνάρτησης ψ στο κέντρο της

δίνης αφού η διαφορά των ψ ανάμεσα σε δύο σημεία ισούται με την παροχή ανάμεσα τους. Υπενθυμίζουμε ότι στο τοίχωμα έχουμε $\psi = 0$.

- Τον συντελεστή αντίστασης \mathcal{D} που ασκείται στο κινούμενο τοίχωμα που υπολογίζεται μέσω του τύπου:

$$Drag = \int \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} dy \quad (3.5.1)$$

Η παράγωγος υπολογίζεται με ανάντι πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,n_y} = \frac{-3u_{i,n_y} + 4u_{i,n_y-1} - u_{i,n_y-2}}{-2\Delta y} \quad (3.5.2)$$

και η ολοκλήρωση γίνεται αριθμητικά με τον κανόνα του τραπεζίου.

Η αξιοπιστία του κώδικα ελέγχθηκε μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων του για $Re = 0$ με τα αποτελέσματα του κώδικα που επιλύει το πρόβλημα της διαρμονικής. Επειδή η σύγκλιση ήταν πολύ αργή για τον δεύτερο κώδικα η σύγκριση έγινε μόνο για πλέγματα 51×101 ($A = 0.5$), 101×101 ($A = 1$) και 101×201 ($A = 2$). Όπως βλέπουμε στις παροχές και στις αντιστάσεις που εμφανίζονται στον Πίνακα 3.1 η συμφωνία είναι πολύ καλή ανάμεσα στους δύο κώδικες (η διαφορά στις παροχές φτάνει μέχρι περίπου 1,4% ενώ στις αντιστάσεις μέχρι 0,29%). Επίσης, στο σχήμα 3.2 φαίνονται οι ροϊκές γραμμές που προέκυψαν από τον αλγόριθμο της διαρμονικής σε σύγκριση με τις ροϊκές γραμμές από τον αλγόριθμο στροβιλότητας-ροϊκής συνάρτησης.

Πίνακας 3.1: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ αλγορίθμων α) διαρμονικής και β) στροβιλότητας-ροϊκής συνάρτησης.

A	Διαρμονική		Στροβιλότητα- Ροϊκή συν.	
	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G
0,5	20,0392	0,0733	20,0590	0,0731
1	18,9448	0,1013	18,9969	0,1000
2	18,9251	0,1023	18,9803	0,1009

Στο άρθρο [10] (Hou et al.), το πρόβλημα της ροής σε κοιλότητα επιλύεται με τη μέθοδο Lattice Boltzmann (LBM), όπου περιέχονται γραφήματα και πίνακες που αφορούν ροή σε κοιλότητα για $Kn = 0$ και $Re = 10, 100, 400, 1000$. Στους πίνακες 3.2 – 3.4 γίνεται σύγκριση των θέσεων των δινών καθώς και των τιμών του ψ στα κέντρα των δινών για τα άρθρα [8] και [10]. Για την κατασκευή τους έχει χρησιμοποιηθεί το ίδιο πλέγμα με το άρθρο [10] (256×256) κατ' εξαίρεση ώστε να μπορούν να συγκριθούν καλύτερα. Στο [8] χρησιμοποιούνται πλέγματα 129×129 και 257×257 . Παρατηρούμε ότι οι διαφορές με τα δύο άρθρα είναι πολύ μικρές.

Πίνακας 3.2: Σύγκριση θέσης πρωτεύουσας δίνης

Primary Vortex	Hou et al.			Ghia et al.			Παρών αλγόριθμος		
	x	y	ψ	x	y	ψ	x	y	ψ
Re 100	0,6196	0,7373	-0,103	0,6172	0,7344	-0,1034	0,6157	0,7373	-0,1035
Re 400	0,5608	0,6078	-0,1121	0,5547	0,6055	-0,1139	0,5529	0,6039	-0,1137
Re 1000	0,5333	0,5647	-0,1178	0,5313	0,5625	-0,1179	0,5294	0,5647	-0,1181

Πίνακας 3.3: Σύγκριση θέσης κάτω δεξιάς δίνης

Lower Right Vortex	Hou et al.			Ghia et al.			Παρών αλγόριθμος		
	x	y	ψ	x	y	ψ	x	y	ψ
Re 100	0,9451	0,0627	1,22E-05	0,9453	0,0625	1,25E-05	0,9412	0,0627	1,28E-05
Re 400	0,8902	0,1255	6,19E-04	0,8906	0,125	6,42E-04	0,8863	0,1216	6,44E-04
Re 1000	0,8667	0,1137	1,69E-03	0,8594	0,1094	1,75E-03	0,8627	0,1098	1,72E-03

Πίνακας 3.4: Σύγκριση θέσης κάτω αριστερής δίνης

Lower Left Vortex	Hou et al.			Ghia et al.			Παρών αλγόριθμος		
	x	y	ψ	x	y	ψ	x	y	ψ
Re 100	0,0392	0,0353	1,72E-06	0,0313	0,0391	1,75E-06	0,0353	0,0353	1,85E-06
Re 400	0,0549	0,051	1,30E-05	0,0508	0,0469	1,42E-05	0,0510	0,0471	1,44E-05
Re 1000	0,0902	0,0784	2,22E-04	0,0859	0,0781	2,31E-04	0,0824	0,0784	2,29E-04

Στο [8] και στο [10] εμφανίζονται επίσης διαγράμματα οριζόντιων και κάθετων ταχυτήτων στο κέντρο της κοιλότητας (0.5,0.5A). Ο πηγαίος κώδικας που αναπτύχθηκε δίνει αποτελέσματα σε πολύ καλή συμφωνία με τα διαγράμματα για $Re = 400$ και $Re = 1000$. Για χαμηλότερα Re υπάρχει καλή συμφωνία με το [8] αλλά όχι με το [10], το οποίο φαίνεται να έχει εσφαλμένα αποτελέσματα για $Re = 100$. Στα σχήματα 3.3 και 3.4 δίνονται οι κατανομές οριζόντιας και κάθετης ταχύτητας αντίστοιχα για αυτές τις τρεις τιμές του Re . Η τιμή που εμφανίζεται ξεχωριστά από τις άλλες στο διάγραμμα κάθετων ταχυτήτων για $Re = 400$ (σχήμα 3.4, κέντρο) είναι πολύ πιθανόν να οφείλεται σε τυπογραφικό λάθος, καθώς έχει την τιμή -0,23827 ενώ θα ταίριαζε απόλυτα στα δεδομένα αν είχε την τιμή -0,3827.

Η πιστοποίηση του πηγαίου κώδικα ολοκληρώνεται με μια σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα του άρθρου [22] (Shankar et al.). Παρουσιάζεται το κέντρο της δίνης που βρίσκεται κάτω αριστερά και η τιμή της ροϊκής συνάρτησης ψ στο κέντρο της δίνης για λόγο πλευρών διάφορο του 1. Εξετάζεται ο λόγος $A = 1.6295$ (όπως σωστά αναγράφεται στο κείμενο του άρθρου και όχι 1.6925 όπως αναφέρεται στο σχήμα του άρθρου) όπου οι δύο δίνες δεν έρχονται σε επαφή, ο λόγος 1.7 όπου έχουν αρχίσει να ενώνονται αλλά οι δύο κορυφές ακόμα ξεχωρίζουν και ο λόγος 1.8 όπου πλέον διακρίνεται μόνο μια δίνη. Στο σχήμα 3.5 βλέπουμε τις ροϊκές γραμμές

για αυτές τις τρεις περιπτώσεις. Τα γραφήματα αυτά σχηματίστηκαν με πλέγμα 151x151 και βλέπουμε ότι σχεδόν ταυτίζονται με αυτά που δίνει το άρθρο. Στον Πίνακα 3.5 βλέπουμε τις θέσεις της κάτω αριστερά δίνης και την τιμή του ψ στο κέντρο της δίνης. Παρατηρούμε ότι βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τα αποτελέσματα του [22].

Πίνακας 3.5: Θέση της κάτω αριστερά δίνης και σύγκριση της τιμής της ροϊκής συνάρτησης στο κέντρο της δίνης με τις τιμές που δίνονται στο άρθρο [22]

	Κόμβος στο x	Κόμβος στο y	x	y	ψ	Shankar et al.
A = 1,6295	23	24	0,1467	0,1533	1,3041E-05	1,3460E-05
A = 1,7	34	29	0,2200	0,1867	3,0646E-05	3,0700E-05
A = 1,8	76	37	0,5000	0,2400	8,7698E-05	8,7850E-05

Στο [21] δίνεται πίνακας με τα κέντρα των δινών, την τιμή του ψ και τη στροβιλότητα εκεί, καθώς και το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε. Για τον ίδιο αριθμό κόμβων, τα αποτελέσματα που δίνει ο κώδικας που αναπτύχθηκε (εμφανίζονται στους Πίνακες 3.6 - 3.8), ταυτίζονται με αυτά του [21] όσον αφορά την πρωτεύουσα δίνη και είναι σε καλή συμφωνία και στις άλλες δίνες. Οι μικρές διαφορές που παρατηρούμε μπορεί να οφείλονται σε άλλους λόγους όπως το αν χρησιμοποιήθηκε απλή ή διπλή ακρίβεια, το κριτήριο τερματισμού, κλπ. Η υπόθεση αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι στο συγκεκριμένο άρθρο οι τιμές του ψ και του ζ καταλήγουν πάντοτε σε μηδενικά όταν οι τιμές τους είναι αρκετά χαμηλές, όπως στις μικρές δίνες.

Πίνακας 3.6 Κύρια δίνη

Re	Πλέγμα	x	y	κόμβοι		ψ	ζ
1	121	0,50000	0,76667	61	93	0,100060	-3,231946
40	121	0,56667	0,75833	69	92	0,100600	-3,221857
100	121	0,61667	0,74167	75	90	0,103296	-3,182796
400	141	0,55714	0,60714	79	86	0,112974	-2,281225
1000	141	0,52857	0,56429	75	80	0,116034	-2,026782

Πίνακας 3.7: Κάτω δεξιά δίνη

Re	Πλέγμα	x	y	Κόμβοι		ψ	ζ
1	121	0,96667	0,04167	117	6	0,000002	0,014439
40	121	0,95833	0,04167	116	6	0,000004	0,016909
100	121	0,94167	0,05833	114	8	0,000013	0,032886
400	141	0,88571	0,12143	125	18	0,000644	0,434241
1000	141	0,86429	0,11429	122	17	0,001699	1,086656

Πίνακας 3.8: Κάτω αριστερή δίνη

Re	Πλέγμα	x	y	Κόμβοι		ψ	ζ
1	121	0,03333	0,04167	5	6	0,000002	0,014557
40	121	0,03333	0,04167	5	6	0,000002	0,016385
100	121	0,03333	0,03333	5	5	0,000002	0,013502
400	141	0,05000	0,05000	8	8	0,000015	0,061006
1000	141	0,08571	0,07857	13	12	0,000217	0,354838

3.5.2 Αποτελέσματα για ροή με ολίσθηση

Μετά την επιβεβαίωση του, ο κώδικας χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών της ροής με αριθμό K_n διάφορο του μηδέν. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στους Πίνακες 3.9 - 3.12, στους οποίους καταγράφονται οι παροχές και οι συντελεστές αντίστασης, ενώ στο Παράρτημα 2 δίνονται και τα κέντρα των δινών.

Μελετώντας τα αποτελέσματα στους πίνακες και στα σχήματα παρατηρούμε τα εξής:

Χαμηλά Re:

- Η παροχή και η αντίσταση που προβάλλει το ρευστό τείνουν μονοτονικά σε συγκεκριμένες τιμές, ανάλογα με τον Re και τον K_n , καθώς αυξάνεται το βάθος. Πιο συγκεκριμένα, οι παροχές αυξάνονται προς μια τιμή ενώ οι αντιστάσεις μειώνονται.

Υψηλά Re:

- Η τάση της παροχής και της αντίστασης σε συγκεκριμένες τιμές καθώς αυξάνουμε το βάθος δεν γίνεται πλέον μονοτονικά. Αυτό είναι περισσότερο εμφανές για $Re=1000$ και K_n 0,05 ή 0,1.
- Σε κάποιες περιπτώσεις η αύξηση του βάθους έχει διαφορετική επίδραση ανάλογα με την περιοχή στην οποία βρισκόμαστε. Πχ για $Re=1000$ η αντίσταση μειώνεται στην υδροδυναμική περιοχή ενώ αυξάνεται για K_n 0,05 ή 0,1.

Ανεξάρτητα του Re:

- Η αύξηση του K_n πάντοτε μειώνει ραγδαία την παροχή και τις τριβές.
- Η μείωση του a έχει τις ίδιες συνέπειες, αφού οδηγεί σε περισσότερη ολίσθηση.
- Η αύξηση του Re οδηγεί σε αύξηση της αντίστασης
- Δεν ισχύει το ίδιο για τις παροχές. Αυτό θα μπορούσε να οφείλεται σε μεγέθυνση των δευτερευουσών δινών και δέσμευση του ρευστού εκεί.

Επίσης, παρατηρώντας τα κέντρα των δινών που δίνονται στο Παράρτημα 2 μπορούμε να καταλήξουμε σε επιπλέον συμπεράσματα.

Χαμηλά Re :

- Επιβεβαιώνεται ο κανόνας της απόστασης των δινών που αναφέρει ο Shankar (απόσταση περίπου 1,396 ανάμεσα στα κέντρα των δινών για κοιλότητα απείρου μήκους) για $A=5.0$.

Ανεξάρτητα του Re :

- Με την αύξηση του Kn οι δίνες ενώνονται, μετατοπίζονται προς τα κάτω και καταλαμβάνουν μεγαλύτερο μέρος της κοιλότητας.
- Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και με την μείωση του a .
- Η αύξηση του Re δημιουργεί νέες δίνες και μεγαλώνει τις ήδη υπάρχουσες.

Στα σχήματα 3.11 - 3.13 παρατηρούμε την επίδραση της αραιοποίησης στις ταχύτητες στο κέντρο κοιλότητας με $A=1$ για Re 0, 100 και 1000. Η ολίσθηση αυξάνεται με την αύξηση του Kn και τη μείωση του a . Εδώ όμως, σε αντίθεση με τα προηγούμενα αποτελέσματα, η επίδραση του a φαίνεται να είναι σχετικά μικρή. Επηρεάζει δηλαδή περισσότερο τα αθροιστικά αποτελέσματα όπως η παροχή και η αντίσταση παρά τα τοπικά, όπως τα παραπάνω διαγράμματα. Τέλος, στα σχήματα 3.14 - 3.25 εμφανίζονται οι ροϊκές γραμμές για $A=1$, $Re=100$, για $A=0.5$, $Re=1000$ και $A=5$, $Re=0$ σε σύγκριση με την υδροδυναμική λύση.

Πίνακας 3.9: Παροχές και συντελεστές αντίστασης για $Re = 0$

Re=0	Kn							
a=1	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0731	21,7955	0,0681	13,2521	0,0537	7,1647	0,0428	4,8726
1,0	0,1001	20,7328	0,0945	12,3644	0,0775	6,6642	0,0636	4,5746
2,0	0,1009	20,7163	0,0954	12,3485	0,0786	6,6508	0,0648	4,5640
5,0	0,1009	20,7163	0,0954	12,3485	0,0786	6,6508	0,0648	4,5640
a=0,85	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0731	21,7955	0,0666	12,1764	0,0495	6,1777	0,0378	4,0618
1,0	0,1001	20,7328	0,0928	11,3364	0,0723	5,7632	0,0570	3,8346
2,0	0,1009	20,7163	0,0937	11,3206	0,0734	5,7508	0,0582	3,8255
5,0	0,1009	20,7163	0,0937	11,3206	0,0734	5,7508	0,0582	3,8255
a=0,7	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0731	21,7955	0,0646	11,0301	0,0447	5,2100	0,0325	3,3063
1,0	0,1001	20,7328	0,0906	10,2505	0,0660	4,8819	0,0498	3,1417
2,0	0,1009	20,7163	0,0915	10,2351	0,0672	4,8708	0,0510	3,1342
5,0	0,1009	20,7163	0,0915	10,2351	0,0672	4,8708	0,0510	3,1342

Πίνακας 3.10: Παροχές και συντελεστές αντίστασης για $Re = 100$

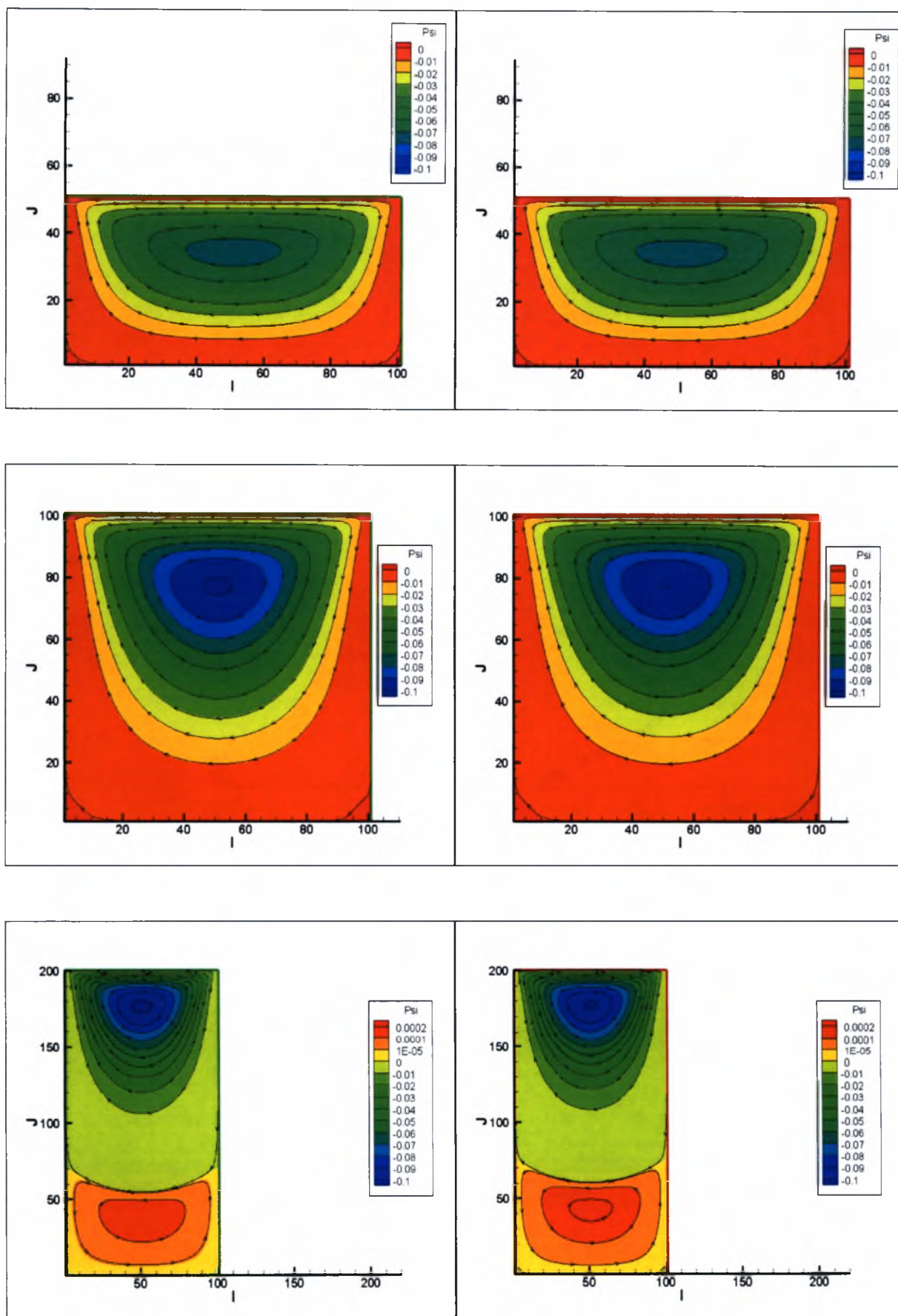
Re=100	Kn							
a=1	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0762	22,6717	0,0701	13,9065	0,0540	7,4219	0,0426	4,9765
1,0	0,1034	22,0134	0,0954	13,3578	0,0753	7,1127	0,0613	4,7835
2,0	0,1041	22,0274	0,0961	13,3685	0,0762	7,1170	0,0622	4,7841
5,0	0,1041	22,0274	0,0961	13,3685	0,0762	7,1170	0,0622	4,7841
a=0,85	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0762	22,6717	0,0684	12,7763	0,0496	6,3639	0,0376	4,1252
1,0	0,1034	22,0134	0,0931	12,2577	0,0699	6,1046	0,0549	3,9721
2,0	0,1041	22,0274	0,0939	12,2676	0,0708	6,1074	0,0559	3,9715
5,0	0,1041	22,0274	0,0939	12,2676	0,0708	6,1074	0,0559	3,9715
a=0,7	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0762	22,6717	0,0661	11,5630	0,0445	5,3334	0,0323	3,3410
1,0	0,1034	22,0134	0,0902	11,0827	0,0637	5,1234	0,0481	3,2241
2,0	0,1041	22,0274	0,0910	11,0916	0,0646	5,1246	0,0491	3,2225
5,0	0,1041	22,0274	0,0910	11,0916	0,0646	5,1246	0,0491	3,2225

Πίνακας 3.11: Παροχές και συντελεστές αντίστασης για $Re = 400$

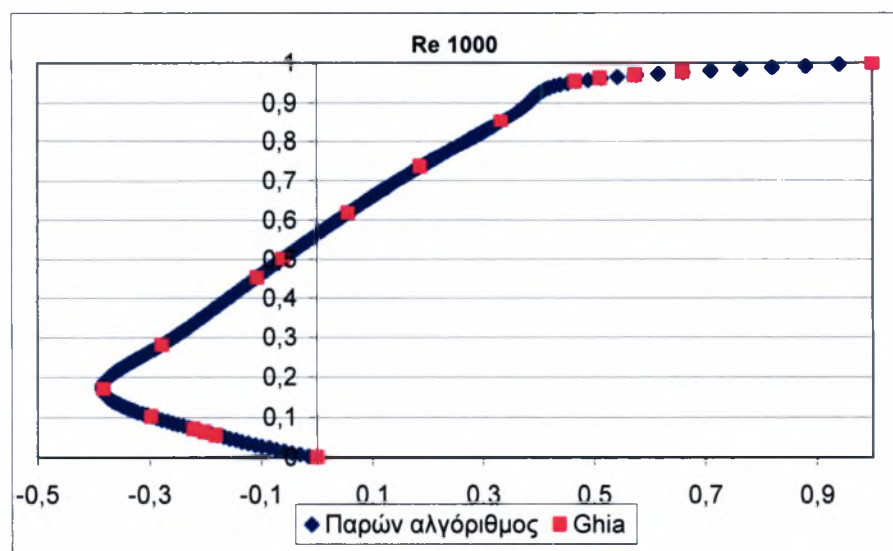
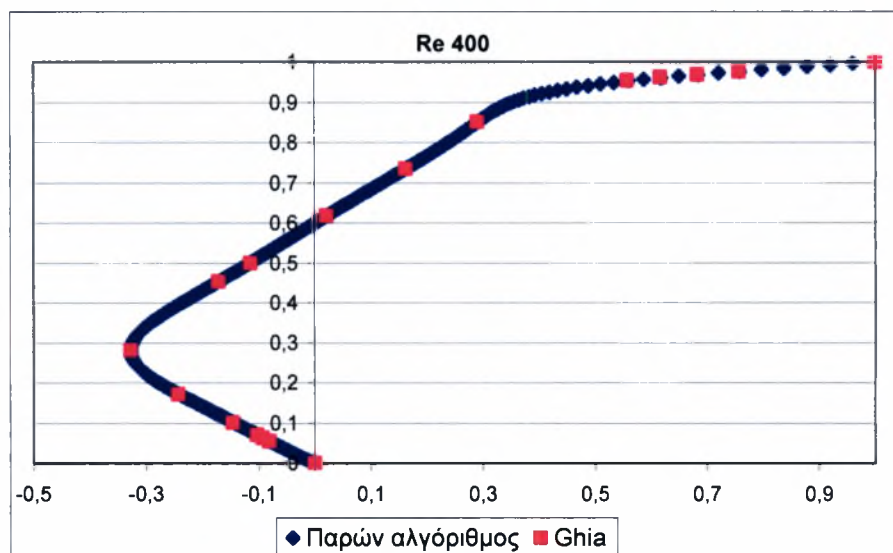
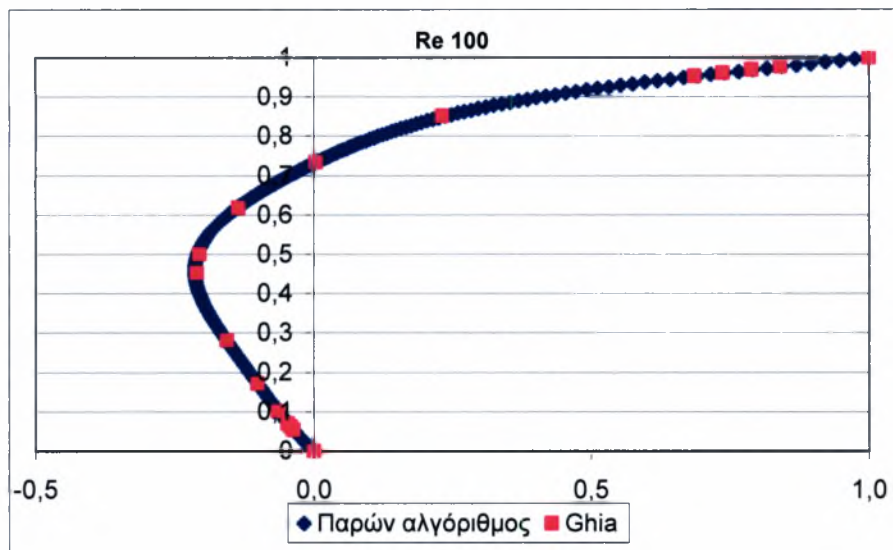
Re=400	Kn							
a=1	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0818	28.1010	0,0718	17,4408	0,0525	8,5905	0,0411	5,4596
1,0	0,1131	27,8138	0,0981	17,1840	0,0715	8,5100	0,0567	5,4237
2,0	0,1134	27,7696	0,0985	17,1986	0,0707	8,6014	0,0549	5,4909
5,0	0,1134	27,7697	0,0985	17,1987	0,0707	8,6011	0,0550	5,4906
a=0,85	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0818	28.1010	0,0693	15,9212	0,0479	7,2037	0,0362	4,4367
1,0	0,1131	27,8138	0,0946	15,6865	0,0655	7,1473	0,0505	4,4077
2,0	0,1134	27,7696	0,0949	15,7183	0,0643	7,2329	0,0487	4,4590
5,0	0,1134	27,7697	0,0949	15,7183	0,0643	7,2326	0,0487	4,4589
a=0,7	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0818	28.1010	0,0662	14,2618	0,0430	5,8994	0,0311	3,5281
1,0	0,1131	27,8138	0,0903	14,0574	0,0591	5,8595	0,0441	3,5032
2,0	0,1134	27,7696	0,0905	14,1090	0,0575	5,9324	0,0424	3,5386
5,0	0,1134	27,7697	0,0905	14,1090	0,0575	5,9321	0,0424	3,5386

Πίνακας 3.12: Παροχές και συντελεστές αντίστασης για $Re = 1000$

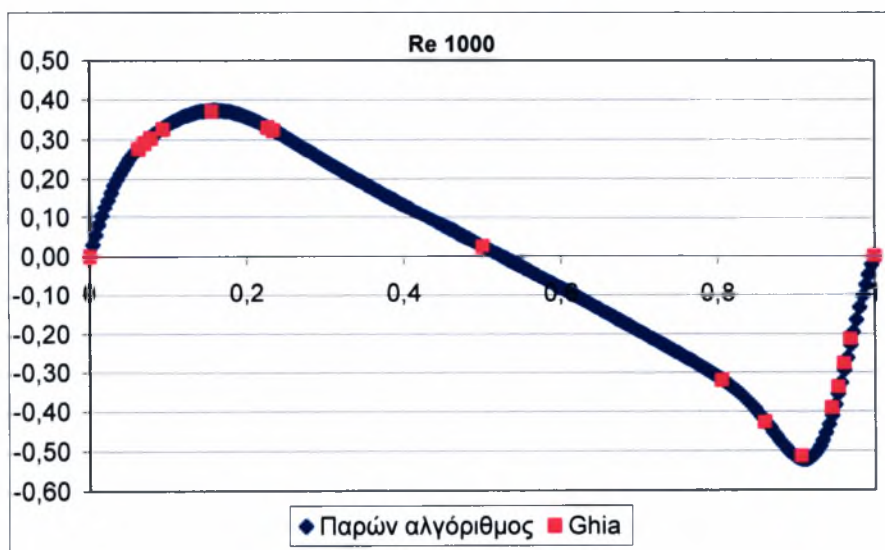
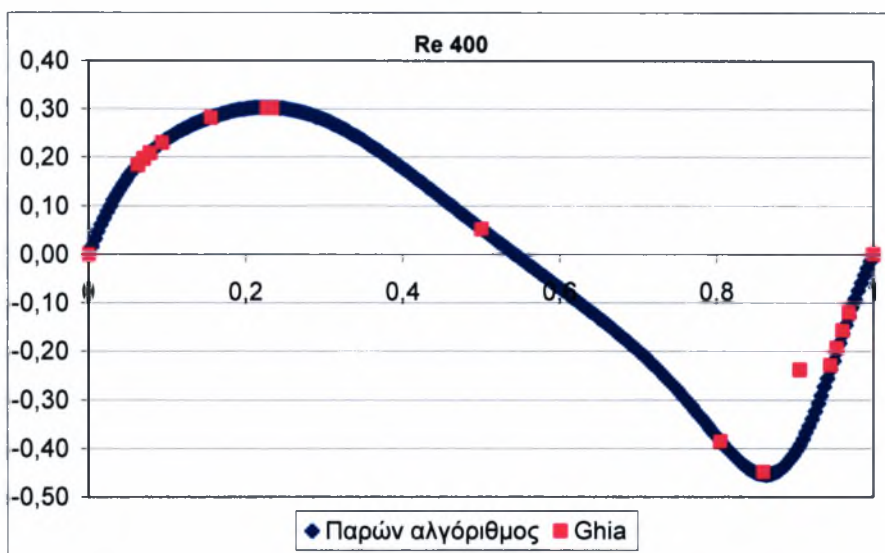
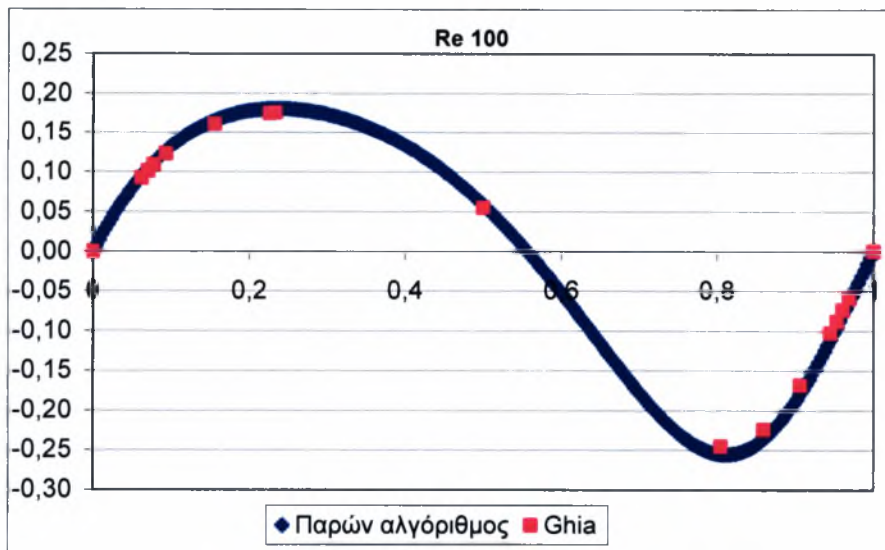
Re=1000	Kn							
a=1	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0799	37,4324	0,0669	22,2593	0,0485	9,7160	0,0387	5,8534
1,0	0,1164	36,7158	0,0955	21,7819	0,0665	9,7165	0,0526	5,9126
2,0	0,1172	36,4418	0,0963	21,8077	0,0627	9,9539	0,0460	6,0756
5,0	0,1172	36,4422	0,0962	21,8085	0,0628	9,9531	0,0462	6,0737
a=0,85	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0799	37,4324	0,0641	20,0088	0,0447	7,9534	0,0343	4,6841
1,0	0,1164	36,7158	0,0912	19,6065	0,0608	7,9983	0,0470	4,7302
2,0	0,1172	36,4418	0,0917	19,7035	0,0557	8,2110	0,0400	4,8556
5,0	0,1172	36,4422	0,0917	19,7043	0,0558	8,2094	0,0402	4,8548
a=0,7	0		0,01		0,05		0,1	
A	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}	G	\mathcal{D}
0,5	0,0799	37,4324	0,0609	17,5753	0,0404	6,3701	0,0297	3,6799
1,0	0,1164	36,7158	0,0862	17,2647	0,0548	6,4304	0,0412	3,7074
2,0	0,1172	36,4418	0,0862	17,4308	0,0486	6,6078	0,0346	3,7962
5,0	0,1172	36,4422	0,0862	17,4316	0,0487	6,6058	0,0344	3,7969



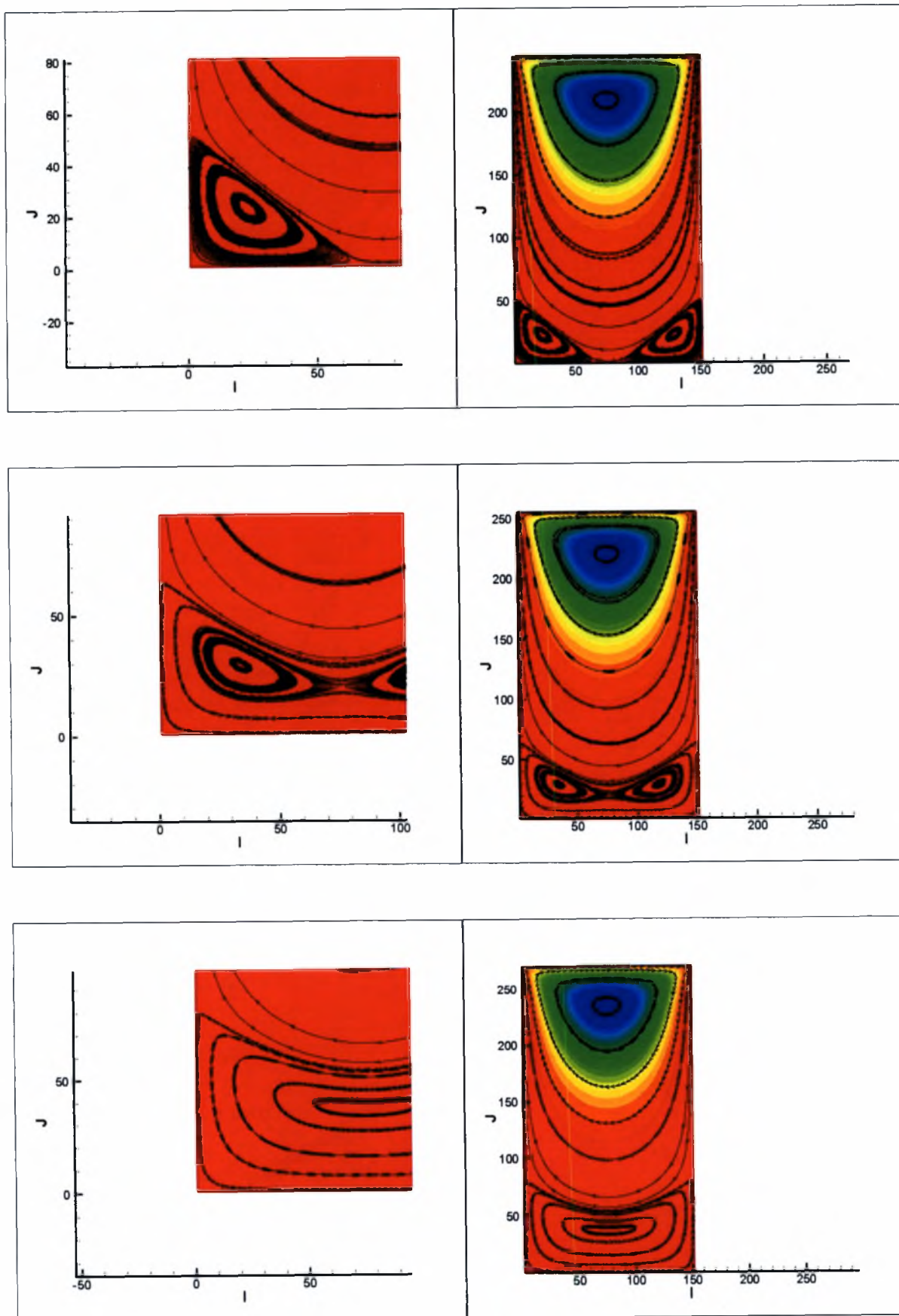
Σχήμα 3.2: Σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ αλγορίθμων α) διαρμονικής (αριστερά) και β) στροβιλότητας ροϊκής συνάρτησης (δεξιά) για κοιλότητες με $A=0.5$ (επάνω), $A=1$ (κέντρο) και $A=2$ (κάτω).



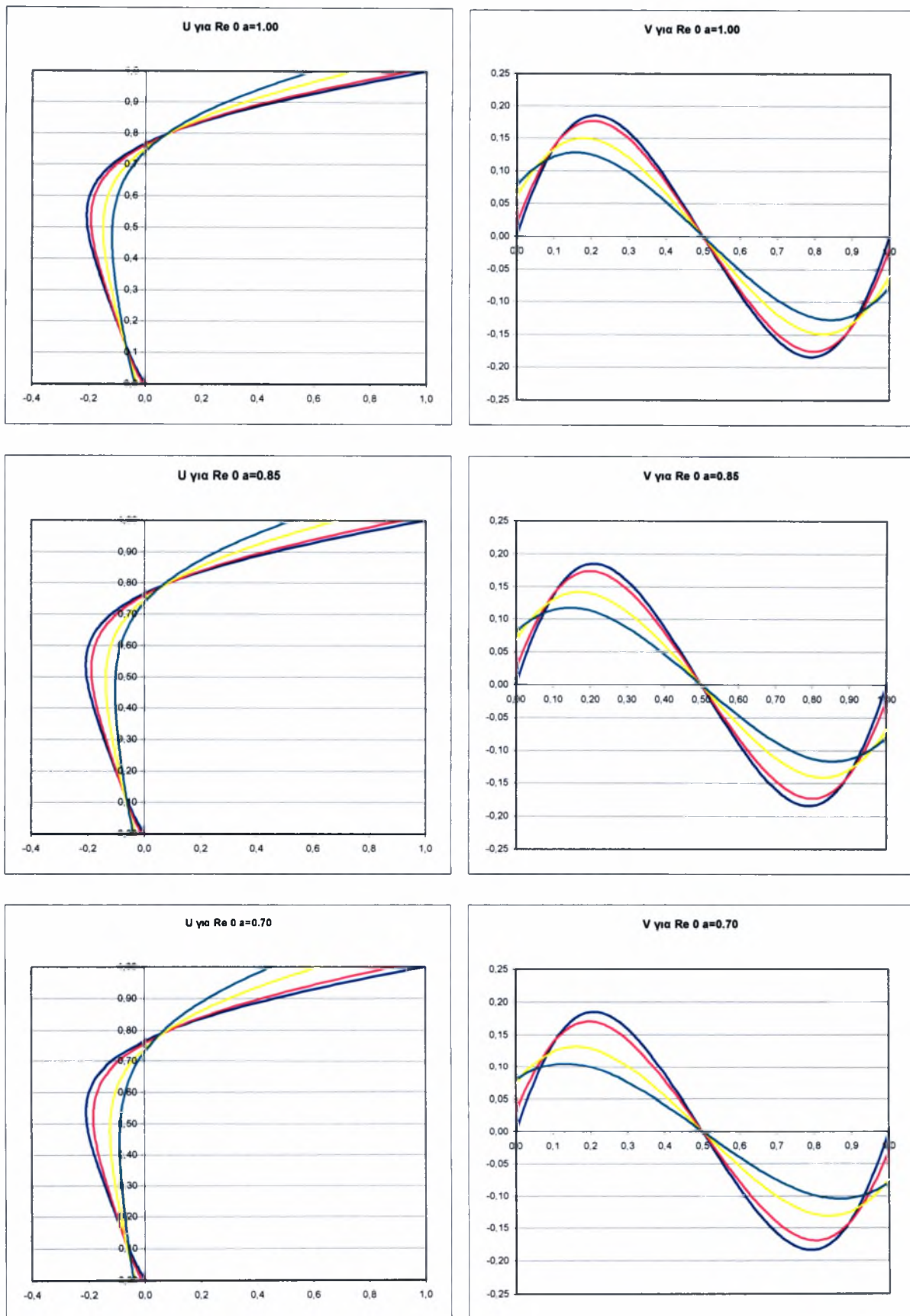
Σχήμα 3.3: Οριζόντια ταχύτητα στο κέντρο για $Re=100$ (επάνω), $Re=400$ (κέντρο) και $Re=1000$ (κάτω)



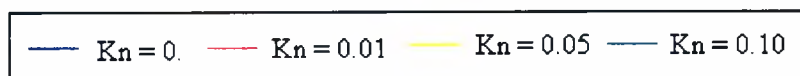
Σχήμα 3.4: Κάθετη ταχύτητα στο κέντρο για $Re=100$ (επάνω), $Re=400$ (κέντρο) και $Re=1000$ (κάτω).

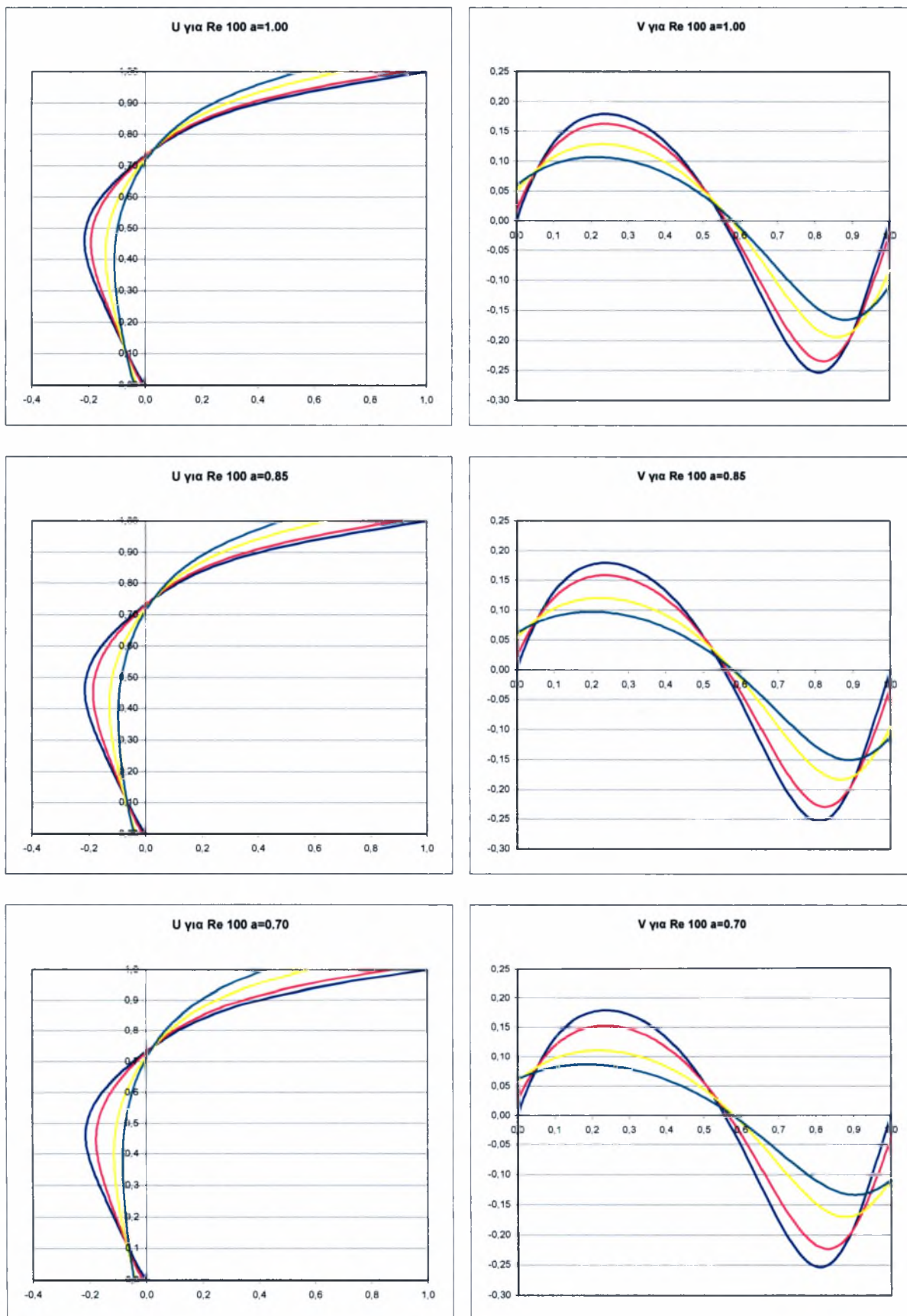


Σχήμα 3.10: Κέντρο της κάτω αριστερής δίνης για $A=1.6295$ (επάνω), 1.7 (στο κέντρο) και 1.8 (κάτω).

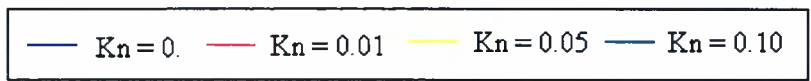


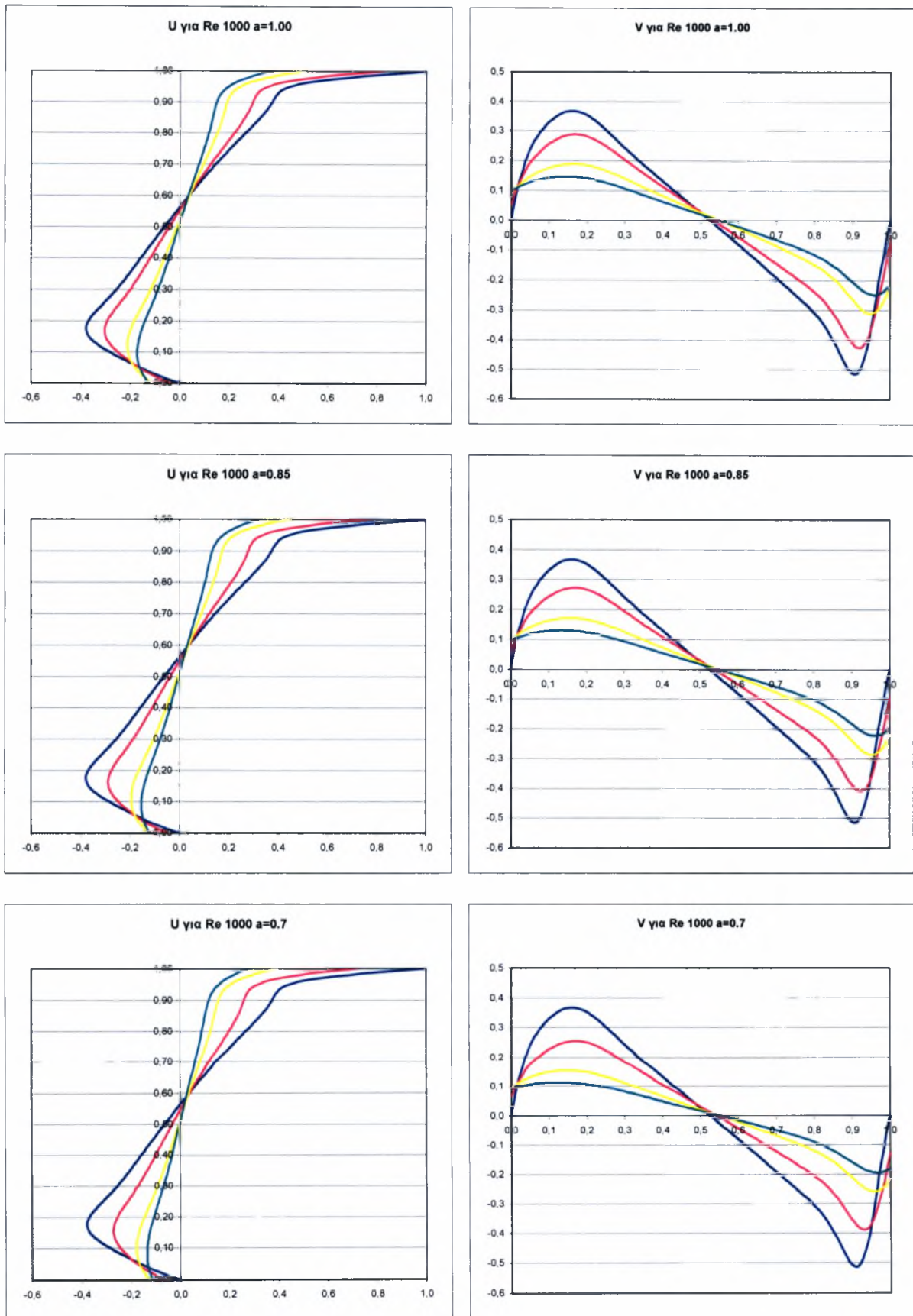
Σχήμα 3.11 : Διαγράμματα οριζόντιας (αριστερά) και κάθετης ταχύτητας (δεξιά) στο κέντρο κοιλότητας με $A = 1$, $Re = 0$ και $\alpha = 1$ (επάνω), $\alpha = 0.85$ (στο κέντρο) και $\alpha = 0.70$ (κάτω).





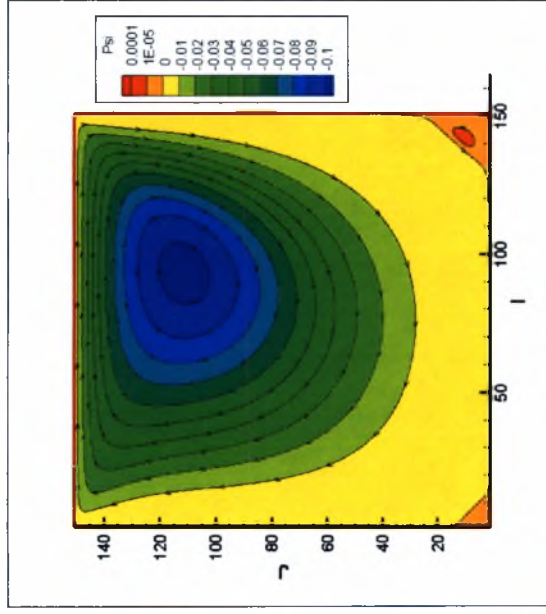
Σχήμα 3.12 : Διαγράμματα οριζόντιας (αριστερά) και κάθετης ταχύτητας (δεξιά) στο κέντρο κοιλότητας με $A=1$, $Re=100$ και $\alpha = 1$ (επάνω), $\alpha = 0.85$ (στο κέντρο) και $\alpha = 0.70$ (κάτω).



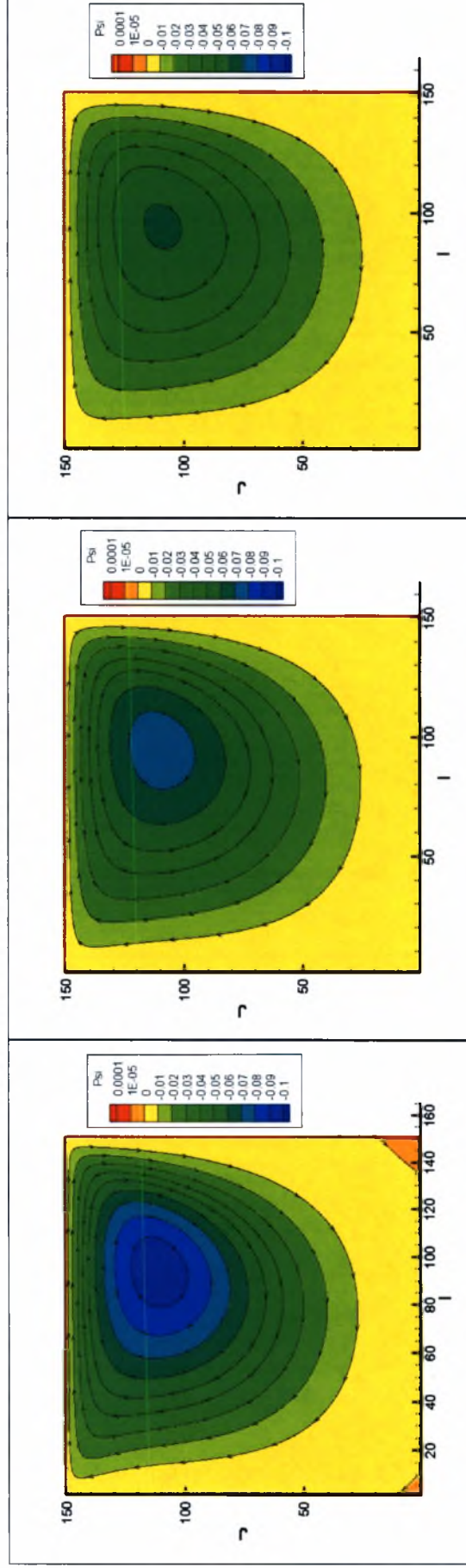


Σχήμα 3.13 : Διαγράμματα οριζόντιας (αριστερά) και κάθετης ταχύτητας (δεξιά) στο κέντρο κοιλότητας με $A=1$, $Re=1000$ και $\alpha = 1$ (επάνω), $\alpha = 0.85$ (στο κέντρο) και $\alpha = 0.70$ (κάτω).

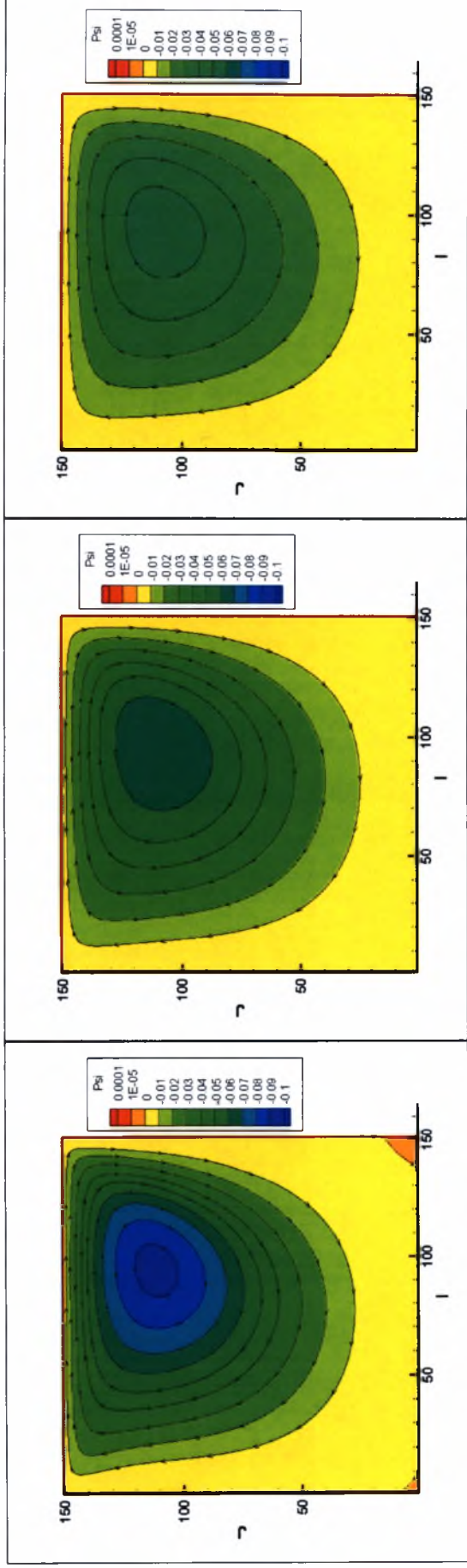
— $Kn = 0$ — $Kn = 0.01$ — $Kn = 0.05$ — $Kn = 0.10$



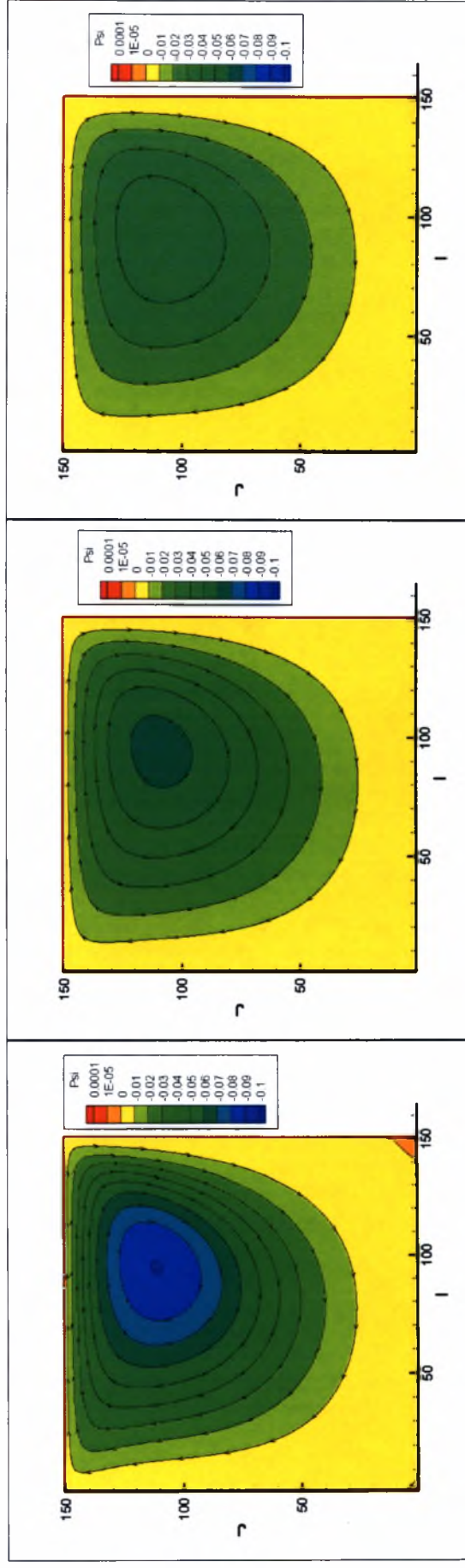
Σχήμα 3.14: Ροϊκές γραμμές για $Re = 100$, $A = 1.0$, $Kn = 0$.



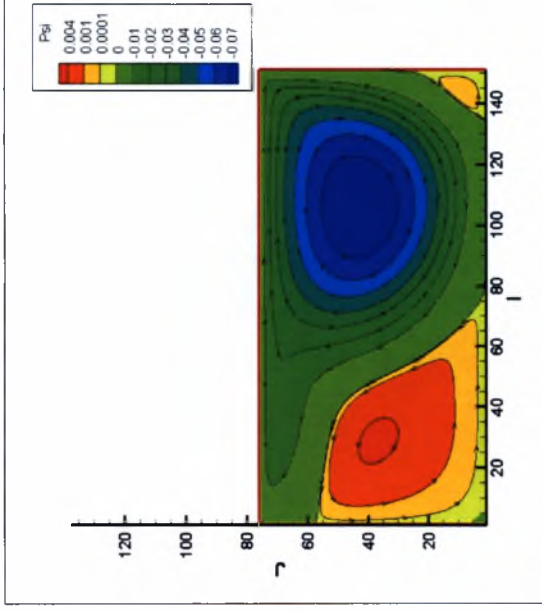
Σχήμα 3.15: Ροϊκές γραμμές για $Re = 100$, $A = 1.0$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



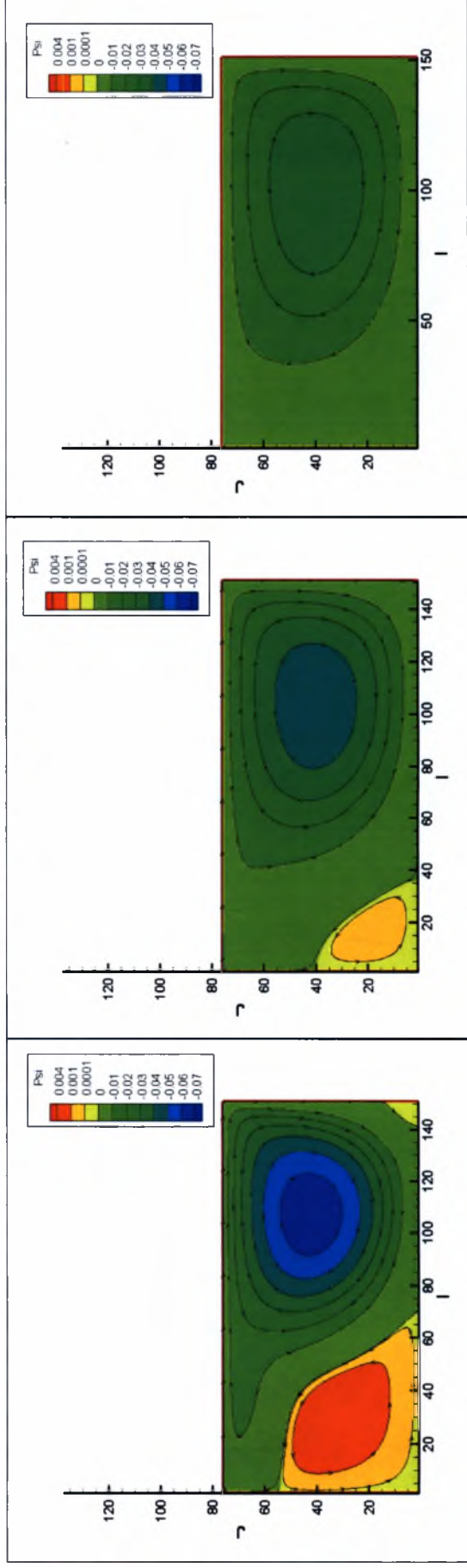
Σχήμα 3.16: Ροϊκές γραμμές για $Re = 100$, $A = 1.0$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



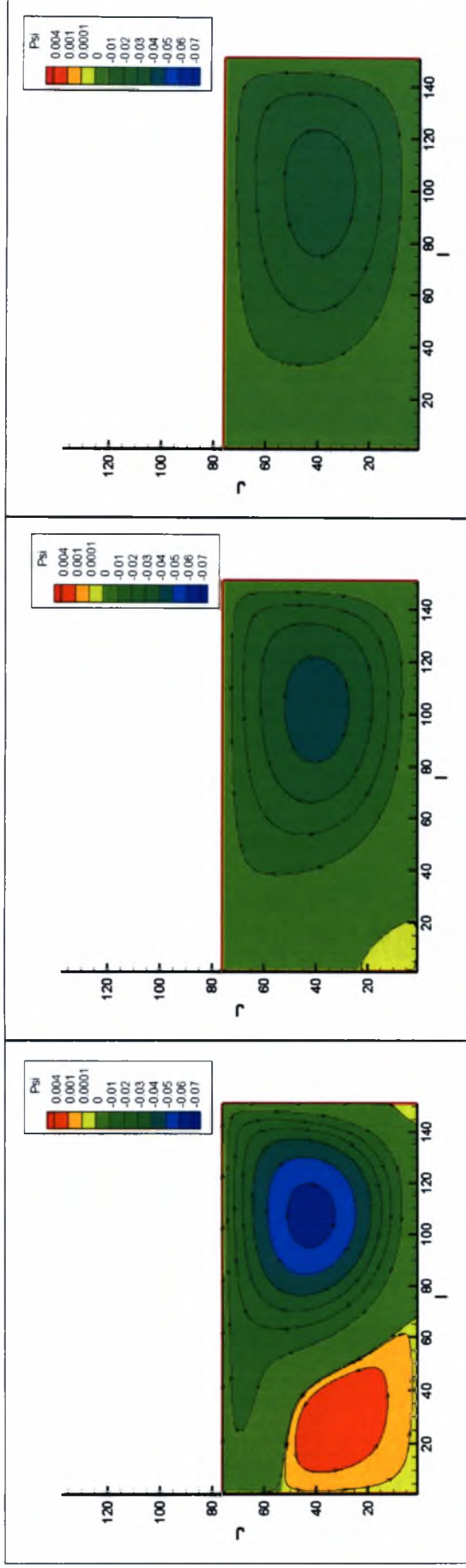
Σχήμα 3.17: Ροϊκές γραμμές για $Re = 100$, $A = 1.0$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



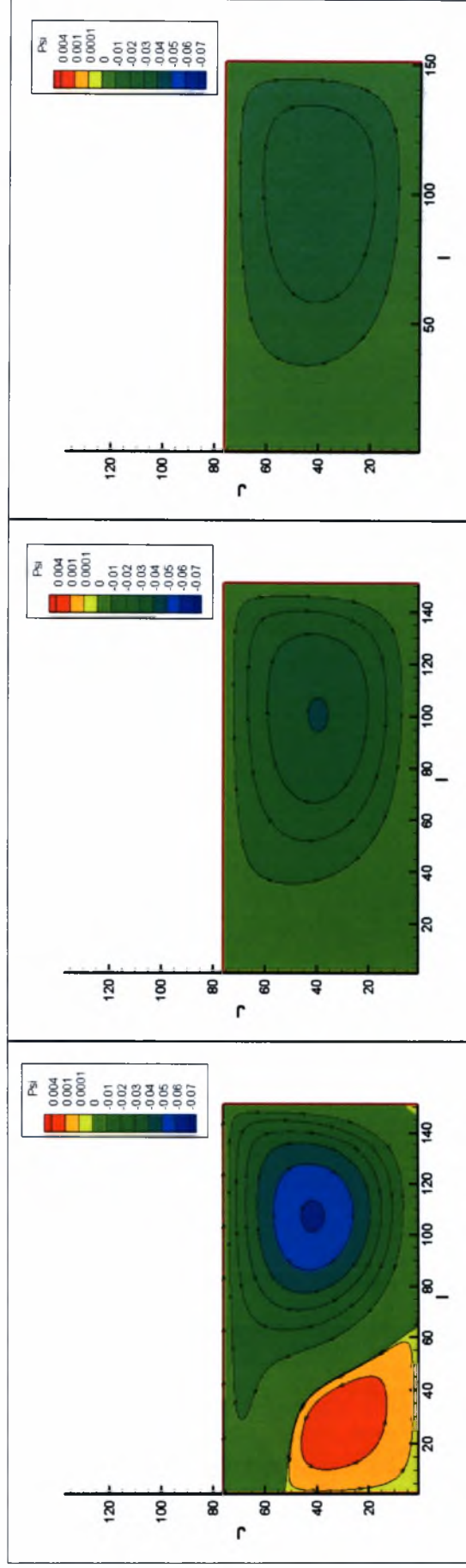
Σχήμα 3.18: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $A = 0.5$, $Kn = 0$.



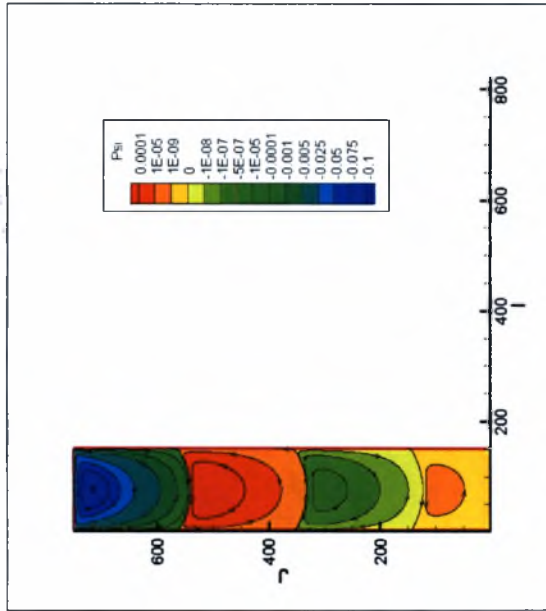
Σχήμα 3.19: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $A = 0.5$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



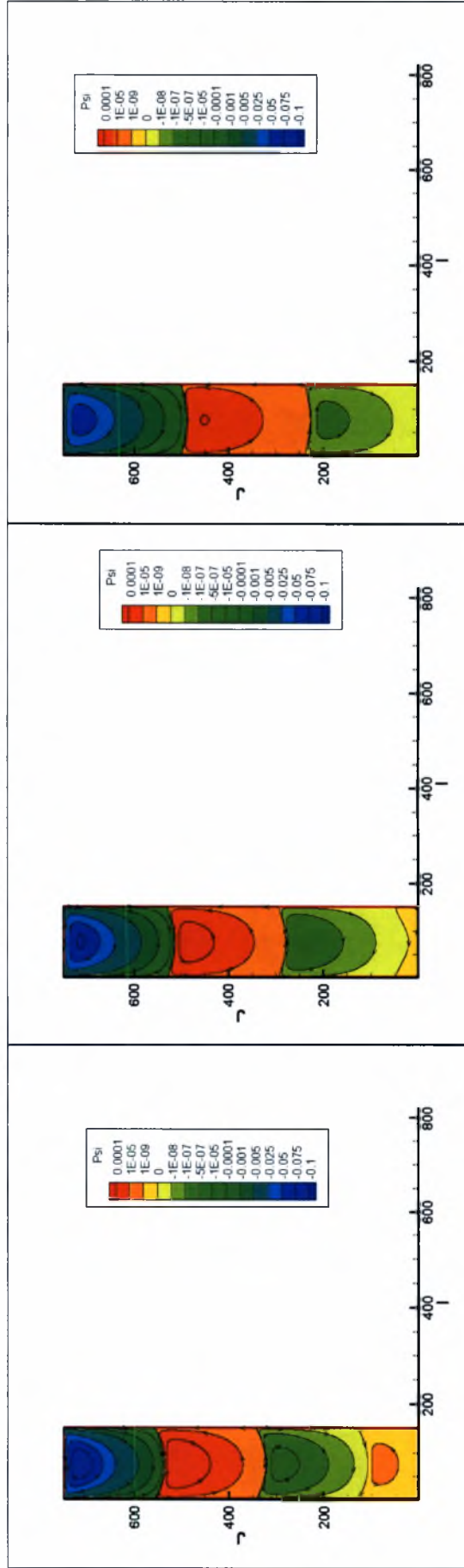
Σχήμα 3.20: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $A = 0.5$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



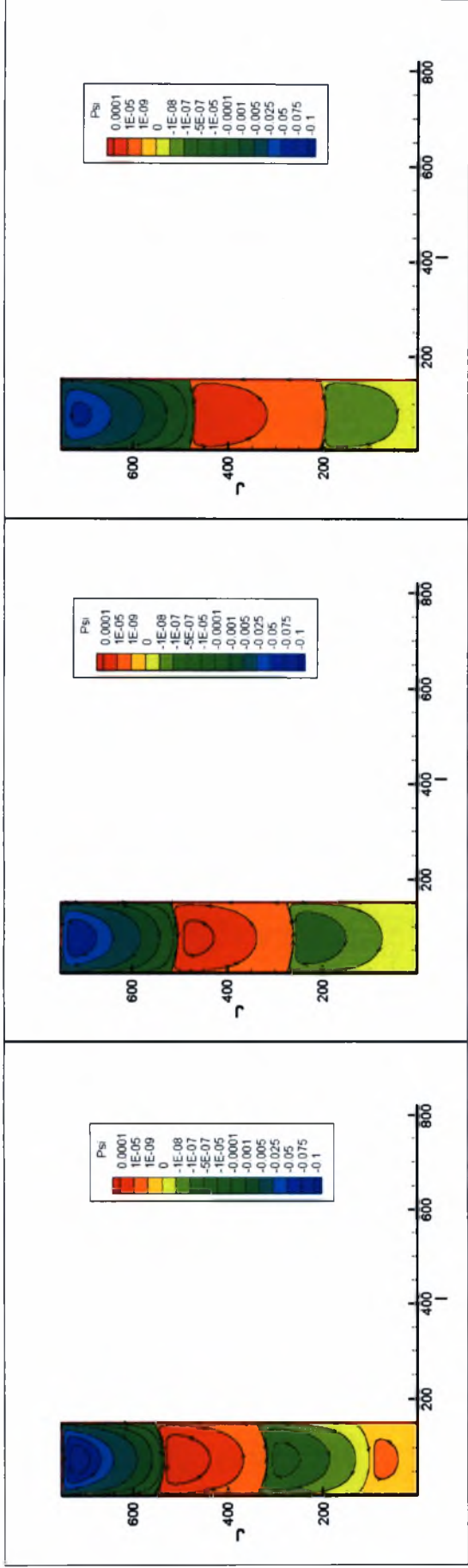
Σχήμα 3.21: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $A = 0.5$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



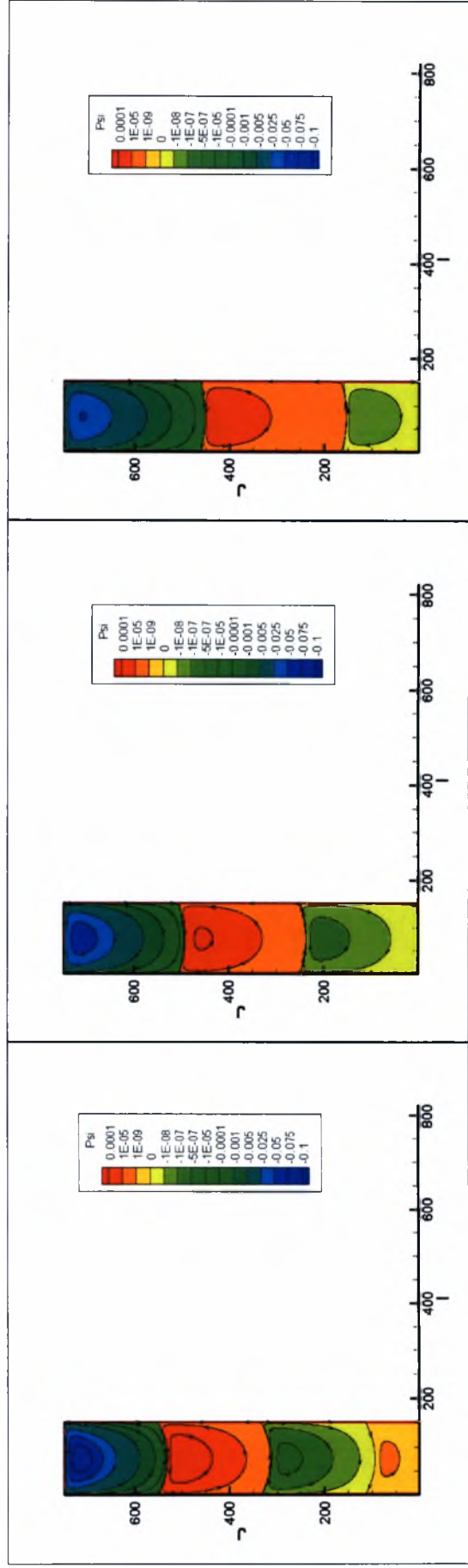
Σχήμα 3.22: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $A = 5.0$, $Kn = 0$.



Σχήμα 3.23: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $A = 5.0$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



Σχήμα 3.24: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $A = 5.0$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



Σχήμα 3.25: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $A = 5.0$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΡΟΗ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΑΥΛΑΚΩΣΕΙΣ

4.1 Εισαγωγή - Περιγραφή του προβλήματος

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα ρευστομηχανικής είναι η ροή ανάμεσα σε πλάκες, εκ των οποίων στη μια έχουν χαραχθεί κοιλότητες σε περιοδικά διαστήματα (grooved channel flow). Η ροή οφείλεται στην κίνηση του επάνω τοιχώματος ενώ το κάτω τοίχωμα το οποίο έχει και τις κοιλότητες παραμένει σταθερό. Κάποιες εφαρμογές της αναφέρονται στο [17]. Ανάμεσα τους συγκαταλέγονται η ψύξη κυκλωμάτων και η ενίσχυση της ανάμειξης σε μικροκανάλια, ενώ στο άρθρο [23] αναλύεται η ροή σε αντλία κενού που περιλαμβάνει τέτοιου είδους κανάλια.

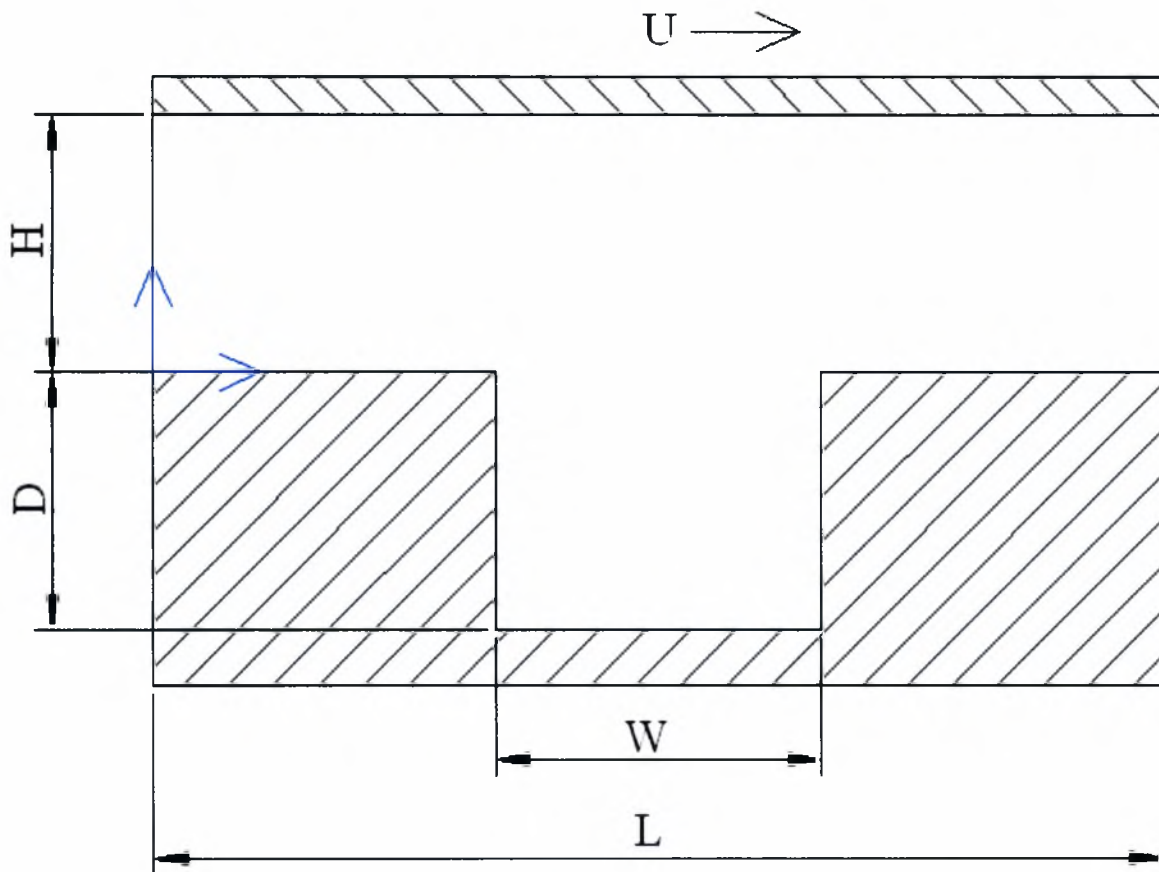
Στο άρθρο [17] ερευνάται η ροή αερίου σε όλο το εύρος του αριθμού Kn και για διάφορες τιμές των γεωμετρικών παραμέτρων μέσω της κινητικής θεωρίας (μοντέλα BGK και S) με τη μέθοδο των διακριτών ταχυτήτων. Παρουσιάζονται διαγράμματα πίεσης, θερμοκρασίας, πυκνότητας, ταχυτήτων και διατμητικών τάσεων. Για μηδενικό βάθος τα αποτελέσματα ταυτίζονται με αυτά της ροής Couette. Όταν αυτό αυξάνεται η ταύτιση δεν ισχύει πλέον και το γεγονός αυτό είναι πιο έντονο στις τιμές $0.3 < D/H < 0.5$ (για $W/H = 1$) όπου παρατηρείται και ο σχηματισμός της πρώτης μεγάλης δίνης, καθώς και όταν το δ μειώνεται. Πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου αραιοποίησης ($\delta = 10^{-3}$) έχουν και κάποια μη αναμενόμενα αποτελέσματα όπως την εμφάνιση υψηλότερων ταχυτήτων στο βάθος της κοιλότητας από ότι στο επάνω τοίχωμα. Από τις τρεις παραμέτρους, το πλάτος έχει τη μεγαλύτερη επίδραση, ενώ ακολουθούν το βάθος και το μήκος περιοδικότητας.

Οι Beskok και Karniadakis [12] δίνουν συνοπτικά αποτελέσματα για $Re = 5$ σταθερό και $T = 300K$ στα τοιχώματα. Οι συγγραφείς αλλάζουν τον Kn μεταβάλλοντας τις διαστάσεις του καναλιού και την ταχύτητα του επάνω τοιχώματος U_∞ . Συγκρίνονται προσομοιώσεις συμπιεστής και ασυμπίεστης ροής και παρατηρείται μειωμένη παροχή στο ασυμπίεστο μοντέλο λόγω της ανικανότητας του να προβλέψει διακυμάνσεις στην πυκνότητα. Παρατηρείται μείωση της αντίστασης όσο μειώνεται η παράμετρος αραιοποίησης δ . Τέλος, εμφανίζεται αύξηση της θερμοκρασίας στο κέντρο του καναλιού η οποία οφείλεται στις υψηλές διατμητικές τάσεις. Το φαινόμενο αυτό είναι λιγότερο έντονο όταν ο Kn παίρνει μεγάλες τιμές λόγω των μείωσης των τάσεων. Οι διαφορές στην τιμή της θερμοκρασίας δεν είναι μεγάλες, δημιουργούνται όμως μεγάλες κλίσεις στη θερμοκρασία λόγω του μικρού μεγέθους του καναλιού.

Η ροή προκαλείται από την κίνηση του επάνω τοιχώματος με ταχύτητα U . Εδώ, για την περιγραφή της γεωμετρίας απαιτούνται περισσότερες από μια μεταβλητές: την απόσταση μεταξύ των δύο πλακών (H), το βάθος των κοιλοτήτων (D), το πλάτος τους (W) και την απόσταση κατά την οποία η γεωμετρία επαναλαμβάνεται (L) (Σχήμα 4.1). Θεωρώντας το H ως χαρακτηριστικό

μήκος ορίζονται τα αδιάστατα μεγέθη $x = \frac{x^*}{H}$ και $y = \frac{y^*}{H}$, όπου $x \in \left[0, \frac{L}{H}\right]$ και $y \in [-D, 1]$. Για να

περιγραφεί η γεωμετρία απαιτούνται οι λόγοι D/H , W/H και L/H (θεωρούμε ότι η κοιλότητα βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο του L/H). Όπως και πριν θεωρείται ότι τα τοιχώματα έχουν άπειρο μήκος στον άξονα z και η ροή είναι μόνιμη, αγνοούνται δηλαδή τα φαινόμενα εισόδου-εξόδου και τα μεταβατικά φαινόμενα. Τα δύο τοιχώματα διατηρούνται στην ίδια θερμοκρασία.



Σχήμα 4.1: Γεωμετρία προβλήματος

4.2 Διατύπωση εξισώσεων – Συνοριακές συνθήκες

Όπως και πριν, θα χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις (3.2.11) και (3.2.12). Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ ο αριθμός Reynolds ορίζεται ως:

$$Re = \frac{\rho U H}{\mu} \quad (4.2.1)$$

Η δυσκολία του προβλήματος βρίσκεται κυρίως στις συνοριακές συνθήκες εισόδου - εξόδου. Θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης της κινητικής θεωρίας (σχέσεις (1.2.13) και (1.2.14)). Ο συμβολισμός αλλάζει από $\sigma_p^{kinetic}$ σε σ_p χάριν απλότητας. Στην είσοδο και στην έξοδο έχουμε περιοδικότητα, επομένως το προφίλ των ταχυτήτων θα είναι το ίδιο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι εδώ επιβάλλονται διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στην είσοδο από τα άρθρα που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή. Το προφίλ ταχυτήτων εισόδου και εξόδου προκύπτει από την επίλυση της ροής Couette που μοντελοποιείται από τις σχέσεις

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad \text{με} \quad u(0) = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} \quad \text{και} \quad u(1) = 1 - Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{du}{dy} \Big|_{y=1}$$

Τα μήκη και οι ταχύτητες είναι ήδη αδιαστατοποιημένα με το H και το U αντίστοιχα. Η γενική λύση είναι

$$u = c_1 y + c_2$$

ενώ οι άγνωστοι συντελεστές προκύπτουν εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες:

$$y=0: \quad Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = c_2$$

$$y=1: \quad 1 - Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{du}{dy} \Big|_{y=1} = c_1 + c_2$$

Το $\frac{du}{dy}$ όμως μπορεί να αντικατασταθεί με c_1 .

$$\left. \begin{aligned} Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p c_1 &= c_2 \\ 1 - Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p c_1 &= c_1 + c_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 - Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p c_1 = c_1 + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p c_1 \rightarrow c_1 = \frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}$$

$$c_2 = \frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}$$

Επομένως, η λύση είναι

$$\rightarrow u = y \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) \quad (4.2.2)$$

Είναι φανερό ότι η (4.2.2) ισχύει και για $Kn \rightarrow 0$ (υδροδυναμική περιοχή). Παρατηρούμε επίσης ότι η σχέση (4.2.2) μπορεί να γραφτεί και σαν άθροισμα της ταχύτητας που θα είχαμε με οριακές συνθήκες μη-ολίσθησης και της ταχύτητας ολίσθησης, η οποία είναι ανάλογη του Kn .

$$u = u^{(h)} + \sigma_p u^{(s)} = (y) + \sigma_p \left[\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 - 2y)}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right] \quad (4.2.3)$$

Τελικά οι οριακές συνθήκες του προβλήματος που θα εξετάσουμε διαμορφώνονται ως εξής:

- Είσοδος ($x = 0, 0 < y < 1$)

$$u = y \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right), \quad v = 0 \quad (4.2.4)$$

- Έξοδος ($x = \frac{L}{H}, 0 < y < 1$)

$$u = u(x = 0, 0 < y < 1) = y \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) \quad (4.2.5)$$

$$v = v(x = 0, 0 < y < 1) = 0$$

- Επάνω ($0 < x < \frac{L}{H}, y = 1$):

$$u = 1 - Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = 0 \quad (4.2.6)$$

- Κάτω ($\frac{1}{2H}(L - W) < x < \frac{1}{2H}(L + W), y = -\frac{D}{H}$):

$$u = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = 0 \quad (4.2.7)$$

- Κάτω αριστερά ($x = \frac{1}{2H}(L - W), -\frac{D}{H} < y < 0$):

$$u = 0, \quad v = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2.8)$$

- Κάτω δεξιά ($x = \frac{1}{2H}(L + W), -\frac{D}{H} < y < 0$):

$$u = 0, \quad v = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2.9)$$

- Κέντρο αριστερά ($0 < x < \frac{1}{2H}(L - W), y = 0$):

$$u = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = 0 \quad (4.2.10)$$

- Κέντρο δεξιά ($\frac{1}{2H}(L + W) < x < \frac{L}{H}, y = 0$):

$$u = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = 0 \quad (4.2.11)$$

Οι παραπάνω συνθήκες θα χρησιμοποιηθούν αφού πρώτα τροποποιηθούν σύμφωνα με το σύστημα εξισώσεων ψ και ζ . Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $u = \partial\psi/\partial y$ και $v = -\partial\psi/\partial x$. Για τις συνθήκες εισόδου η σχέση του ψ προκύπτει απλά ολοκληρώνοντας το προφίλ των ταχυτήτων ως προς το y από το 0 ως το τυχαίο y .

- Είσοδος ($x = 0, 0 < y < 1$):

$$\psi = \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + y \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) \quad (4.2.12)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \zeta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

- Έξοδος ($x = \frac{L}{H}, 0 < y < 1$)

$$\psi = \psi(x = 0, 0 < y < 1) = \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + y \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) \quad (4.2.13)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \zeta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

- Επάνω ($0 < x < \frac{L}{H}, y = 1$):

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 - Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \psi = 0.5, \zeta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad (4.2.14)$$

- Κάτω ($\frac{1}{2H}(L - W) < x < \frac{1}{2H}(L + W), y = -\frac{D}{H}$):

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \psi = 0, \zeta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad (4.2.15)$$

- Κάτω αριστερά ($x = \frac{1}{2H}(L - W), -\frac{D}{H} < y < 0$):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \psi = 0, \zeta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (4.2.16)$$

- Κάτω δεξιά ($x = \frac{1}{2H}(L + W), -\frac{D}{H} < y < 0$):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \psi = 0, \zeta = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (4.2.17)$$

- Κέντρο αριστερά $\left(0 < x < \frac{1}{2H}(L-W), y=0\right)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \psi = 0, \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.2.18)$$

- Κέντρο δεξιά $\left(\frac{1}{2H}(L+W) < x < \frac{L}{H}, y=0\right)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \psi = 0, \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.2.19)$$

4.3 Αριθμητικό σχήμα

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών με το κεφάλαιο 3, δηλαδή τις (3.4.1) και (3.4.2). Κι εδώ θα έχουμε επιπλέον φανταστικές σειρές και στήλες κι επομένως οι συνοριακές συνθήκες θα είναι σχεδόν παντού ανάλογες με τις (3.4.6) και (3.4.7). Εξαιρέση αποτελεί το επάνω τοίχωμα, όπου το ψ δεν είναι μηδέν, και οι συνθήκες εισόδου και εξόδου.

- Επάνω $\left(0 < x < \frac{L}{H}, y=1\right)$:

$$\psi_{i,n_y+1} = \frac{2h^2 + \psi_{i,n_y} \left(Kn \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \right) + \psi_{i,n_y-1} \left(h - 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \right)}{h + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \quad (4.3.1)$$

$$\zeta_{i,n_y} = -\frac{\psi_{i,n_y+1} - 2\psi_{i,n_y} + \psi_{i,n_y-1}}{h^2}$$

- Είσοδος $(x=0, 0 < y < 1)$:

$$\psi_{1,j} = \frac{y_{1,j}^2}{2} \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + y_{1,j} \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) \quad (4.3.2)$$

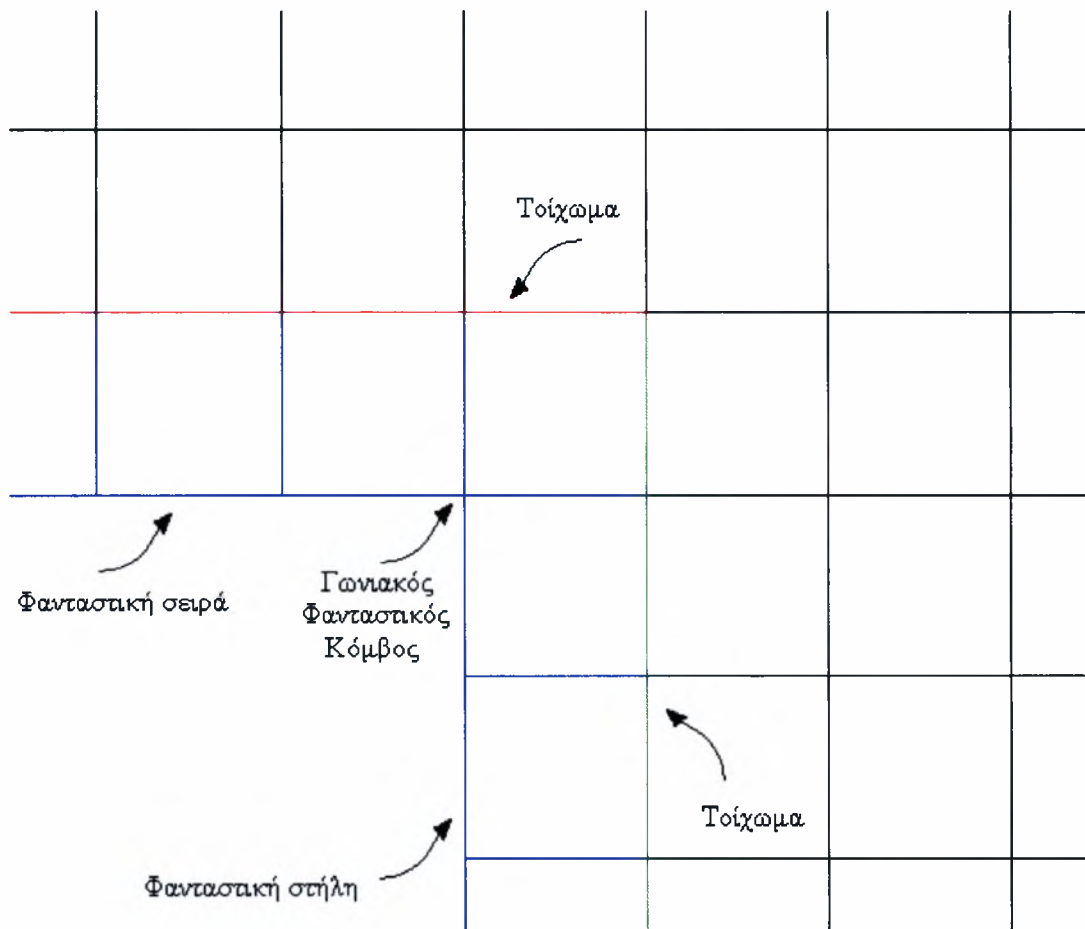
$$\psi_{0,j} = \psi_{2,j}, \zeta_{1,j} = -\frac{\psi_{1,j+1} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1,j-1}}{h^2}$$

- Έξοδος $\left(x = \frac{L}{H}, 0 < y < 1\right)$

$$\psi_{n_x,j} = \frac{y_{n_x,j}^2}{2} \left(\frac{1}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) + y_{n_x,j} \left(\frac{Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} \right) \quad (4.3.3)$$

$$\psi_{n_x+1,j} = \psi_{n_x-1,j}, \zeta_{n_x,j} = -\frac{\psi_{n_x,j+1} - 2\psi_{n_x,j} + \psi_{n_x,j-1}}{h^2}$$

Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι στις εσωτερικές γωνίες θα υπάρχουν προβλήματα στους φανταστικούς γωνιακούς κόμβους (Σχήμα 4.2). Εκεί η τιμή τους θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να πετυχαίνεται σωστή ταχύτητα και στις δύο πλευρές της γωνίας, πράγμα το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό. Μια μέθοδος που θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε είναι να αποθηκεύουμε δύο τιμές του ψ για αυτά τα δύο σημεία. Το σφάλμα όμως είναι μικρό, αφού καταφύγαμε σε πολύ πυκνή διακριτοποίηση, κι έτσι δεν θα καταφύγουμε σε αυτήν την τεχνική. Εδώ δώθηκε προτεραιότητα στην οριζόντια ταχύτητα των κεντρικών τοιχωμάτων.



Σχήμα 4.2: Ο γωνιακός φανταστικός κόμβος στη συμβολή των τοιχωμάτων

Ακόμη πρέπει να τονιστεί ότι στις εσωτερικές γωνίες το ζ πρέπει να υπολογιστεί μέσω της (3.2.12) χρησιμοποιώντας και τις δύο παραγώγους αφού εκεί είναι και οι δύο μη μηδενικές.

Η παράμετρος ω που εμφανίζεται στην (3.4.3) εδώ θα πάρει πιο μικρές τιμές, αφού το σχήμα αποκλίνει πιο εύκολα καθώς αυξάνουμε τον Re. Συγκεκριμένα, για πλέγματα 151x601 και 201x601 χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω τιμές:

- $Re < 20$ \rightarrow $\omega = 1$
- $20 < Re < 50$ \rightarrow $\omega = 0.5$
- $50 < Re < 100$ \rightarrow $\omega = 0.2$
- $100 < Re < 400$ \rightarrow $\omega = 0.05$
- $400 < Re < 1000$ \rightarrow $\omega = 0.01$

Αυτό οδηγεί σε πολύ αργή σύγκλιση για μεγάλους Re.

4.4 Αποτελέσματα

Η απόσταση H , που μετά την αδιαστατοποίηση έχει την τιμή 1, διακριτοποιήθηκε με 101 κόμβους. Έτσι, ανάλογα με το βάθος θα έχουμε πλέγμα 151x601 ή 201x601. Η επιλογή αυτού του μεγέθους έγινε μετά από τη σύγκριση διαφόρων τιμών. Το κριτήριο τερματισμού ήταν ίσο με 10^{-10} . Ο κώδικας χρησιμοποιήθηκε για διάφορες γεωμετρίες και αριθμούς Re και Kn. Στον Πίνακα 4.1 συνοψίζονται οι διάφορες τιμές οι οποίες μελετήθηκαν.

Πίνακας 4.1: Οι παράμετροι που μελετήθηκαν

Re	0, 100, 400, 1000
Kn	0, 0.01, 0.05, 0.10
α	1.00, 0.85, 0.70
D/H	0.5, 1.0
W/H	1.0, 2.0
L/H	6.

Στον Πίνακα 4.2 βλέπουμε την τιμή του συντελεστή αντίστασης για 41,61,81 και 101 κόμβους, $Re = 0$, $Kn = 0$ και $Kn = 0.1$, $\alpha = 1.00$.

Πίνακας 4.2: Μεταβολή στον συντελεστή αντίστασης λόγω μεταβολής στο πλέγμα

Διαστήματα	$Kn = 0$	$Kn = 0.10$
40	6.1415	4.8759
60	6.1391	4.8727
80	6.1379	4.8710
100	6.1373	4.8698

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές είναι αμελητέες. Θα μπορούσε δηλαδή κάποιος να χρησιμοποιήσει πλέγμα με 41 κόμβους και να έχει σχετικό σφάλμα περίπου 0,07 % για $Kn = 0$ και 0,13 % για $Kn = 0.10$.

Στους πίνακες 4.3 - 4.7 έχουμε τον συντελεστή αντίστασης (\mathcal{D}) για όλες τις περιπτώσεις του πίνακα 4.1.

Γενικά :

- Με την αύξηση του Re παρατηρούμε μείωση της αντίστασης. Αν αναλογιστεί κανείς ότι η συγκεκριμένη μορφή καναλιών χρησιμοποιείται και για την προσομοίωση της τραχύτητας, το φαινόμενο αυτό είναι αναμενόμενο αφού θυμίζει το διάγραμμα Moody. Η διαφορά είναι σχετικά μικρή (η μέγιστη τιμή της είναι περίπου 5 %) και μικραίνει γρήγορα καθώς αυξάνεται ο Kn και μικραίνει το α .
- Με την αύξηση του Kn οι αντιστάσεις μειώνονται ραγδαία.
- Το ίδιο συμβαίνει και με τη μείωση του α , αν και σε μικρότερο βαθμό.
- Σε σπάνιες περιπτώσεις, για μεγάλους Re και Kn , η αύξηση του Re προκαλεί αύξηση της αντίστασης.
- Η αύξηση του πλάτους από 1.0 σε 2.0 οδηγεί σε περισσότερη αντίσταση.
- Το ίδιο συμβαίνει και με τη μείωση του βάθους από 1.0 σε 0.5.

Στα σχήματα 4.3 - 4.11 παρουσιάζονται τα διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H=1$, $W/H=1$ στα σημεία $x=0$ (στην είσοδο), $x=2.5$ (δηλαδή στην είσοδο της κοιλότητας) και στο $x=3$ (δηλαδή στο κέντρο της κοιλότητας). Τέλος, στα σχήματα 4.12 - 4.19 εμφανίζονται οι ροϊκές γραμμές για $D/H=1$, $W/H=1$, $Re=1000$ και $D/H=0.5$, $W/H=2$, $Re=0$ σε σύγκριση με την υδροδυναμική λύση.

Πίνακας 4.3: Οι συντελεστές αντίστασης για $Re = 0$

Re=0	a=1	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,1367	5,9842	5,4326	4,8682
0,5	2,0	6,4451	6,2734	5,6598	5,0417
1,0	1,0	6,1373	5,9849	5,4338	4,8698
1,0	2,0	6,3969	6,2281	5,6228	5,0110

Re=0	a=0,85	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,1367	5,9351	5,2332	4,5568
0,5	2,0	6,4451	6,2184	5,4404	4,7045
1,0	1,0	6,1373	5,9358	5,2346	4,5586
1,0	2,0	6,3969	6,1739	5,4059	4,6764

Re=0	a=0,7	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,1367	5,8673	4,9764	4,1813
0,5	2,0	6,4451	6,1424	5,1594	4,3010
1,0	1,0	6,1373	5,8681	4,9779	4,1832
1,0	2,0	6,3969	6,0991	5,1277	4,2757

Πίνακας 4.4: Οι συντελεστές αντίστασης για $Re = 10$

Re=10	a=1	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,1340	5,9817	5,4311	4,8671
0,5	2,0	6,4342	6,2625	5,6488	5,0306
1,0	1,0	6,1345	5,9824	5,4323	4,8688
1,0	2,0	6,3849	6,2161	5,6106	4,9984

Re=10	a=0,85	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,1340	5,9327	5,2319	4,5558
0,5	2,0	6,4342	6,2075	5,4294	4,6933
1,0	1,0	6,1345	5,9335	5,2333	4,5577
1,0	2,0	6,3849	6,1619	5,3935	4,6638

Re=10	a=0,7	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,1340	5,8650	4,9752	4,1803
0,5	2,0	6,4342	6,1316	5,1483	4,2898
1,0	1,0	6,1345	5,8658	4,9768	4,1823
1,0	2,0	6,3849	6,0870	5,1152	4,2631

Πίνακας 4.5: Οι συντελεστές αντίστασης για $Re = 100$

Re=100	a=1	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,0975	5,9490	5,4108	4,8595
0,5	2,0	6,2774	6,1133	5,5244	4,9334
1,0	1,0	6,0982	5,9498	5,4120	4,8608
1,0	2,0	6,2430	6,0801	5,4949	4,9070

Re=100	a=0,85	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,0975	5,9012	5,2160	4,5556
0,5	2,0	6,2774	6,0606	5,3142	4,6126
1,0	1,0	6,0982	5,9021	5,2172	4,5571
1,0	2,0	6,2430	6,0277	5,2858	4,5877

Re=100	a=0,7	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,0975	5,8351	4,9651	4,1893
0,5	2,0	6,2774	5,9878	5,0457	4,2298
1,0	1,0	6,0982	5,8360	4,9664	4,1908
1,0	2,0	6,2430	5,9554	5,0188	4,2064

Πίνακας 4.6: Οι συντελεστές αντίστασης για $Re = 400$

Re=400	a=1	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,0654	5,9192	5,3922	4,8580
0,5	2,0	6,1602	6,0020	5,4375	4,8799
1,0	1,0	6,0667	5,9205	5,3934	4,8591
1,0	2,0	6,1487	5,9903	5,4262	4,8698

Re=400	a=0,85	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,0654	5,8722	5,2030	4,5641
0,5	2,0	6,1602	5,9511	5,2386	4,5775
1,0	1,0	6,0667	5,8735	5,2042	4,5653
1,0	2,0	6,1487	5,9393	5,2277	4,5681

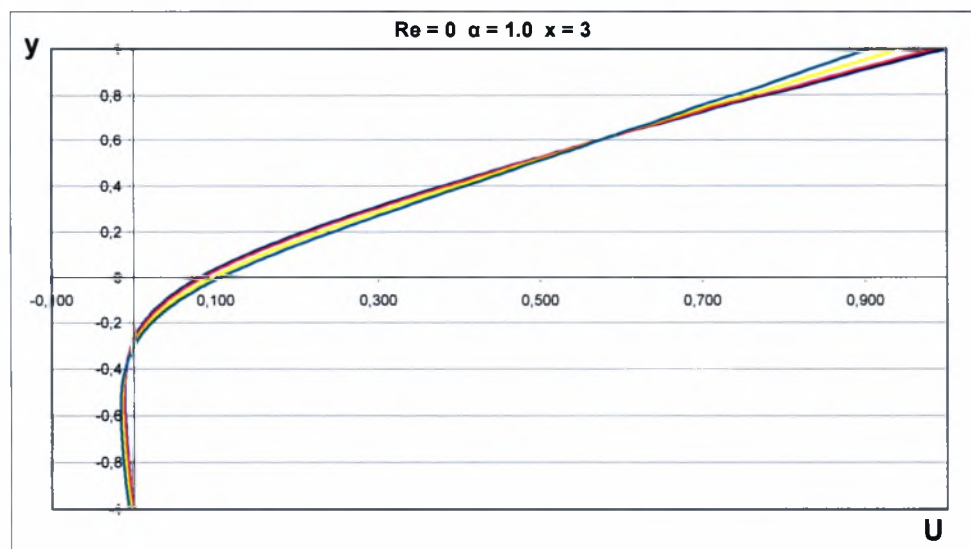
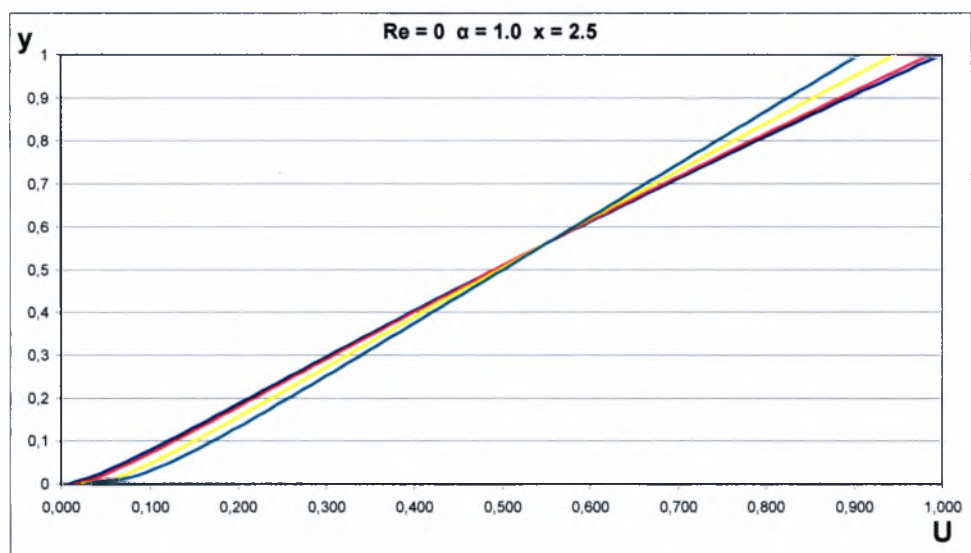
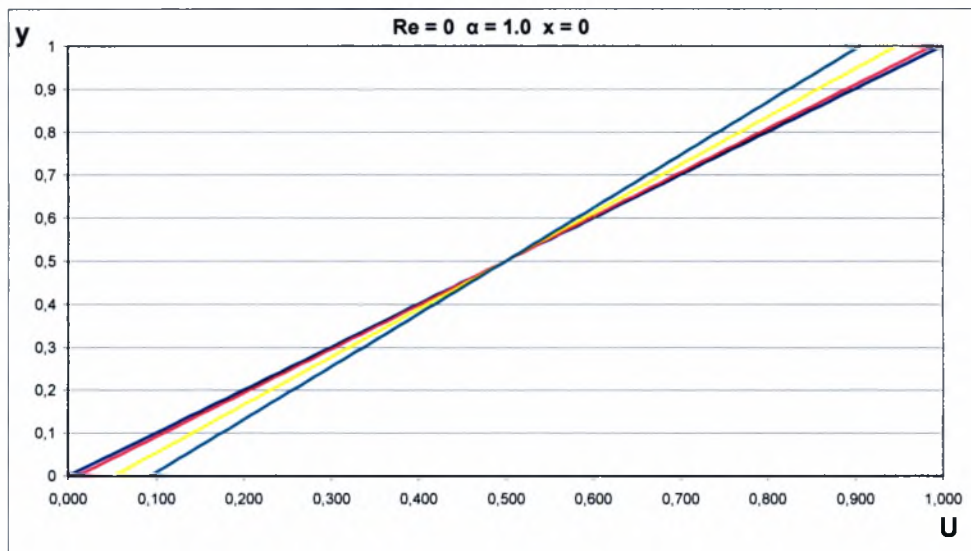
Re=400	a=0,7	Kn			
D/H	W/H	0	0,01	0,05	0,1
0,5	1,0	6,0654	5,8072	4,9601	4,2089
0,5	2,0	6,1602	5,8808	4,9856	4,2148
1,0	1,0	6,0667	5,8084	4,9613	4,2100
1,0	2,0	6,1487	5,8690	4,9753	4,2062

Πίνακας 4.7: Οι συντελεστές αντίστασης για $Re = 1000$

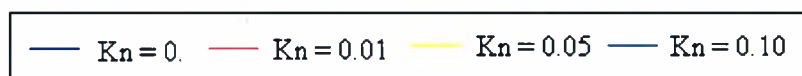
Re=1000	a=1	Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
D/H	W/H				
0,5	1,0	6,0523	5,9062	5,3840	4,8590
0,5	2,0	6,1155	5,9577	5,4043	4,8644
1,0	1,0	6,0540	5,9077	5,3851	4,8600
1,0	2,0	6,1131	5,9546	5,4006	4,8610

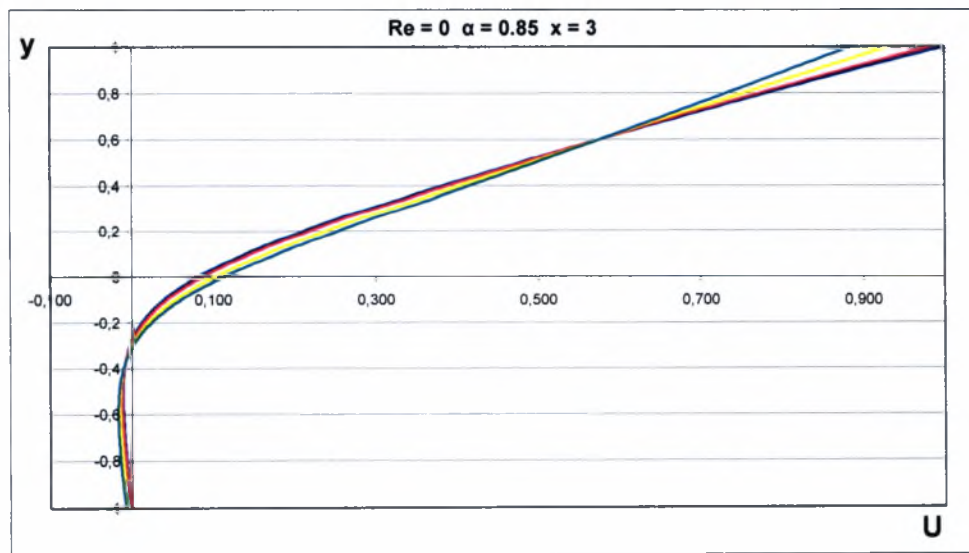
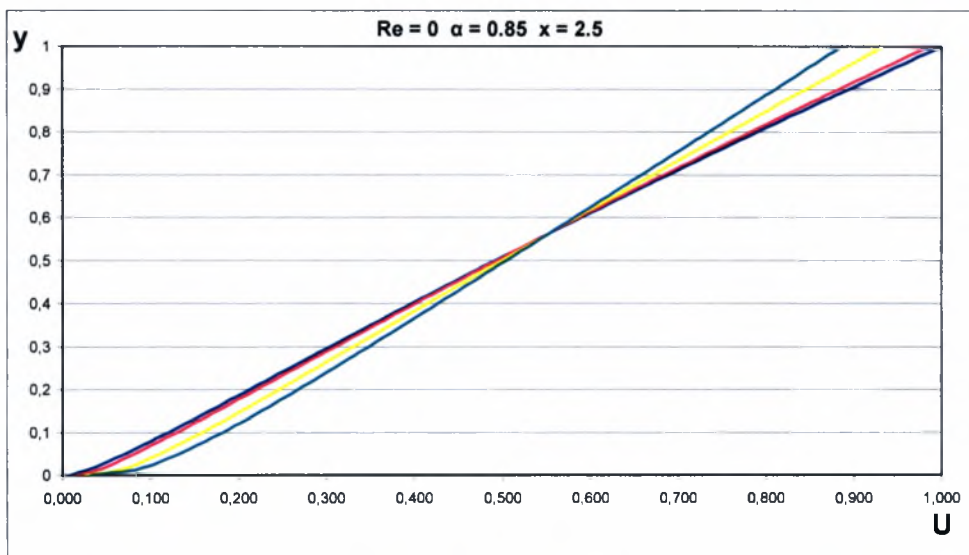
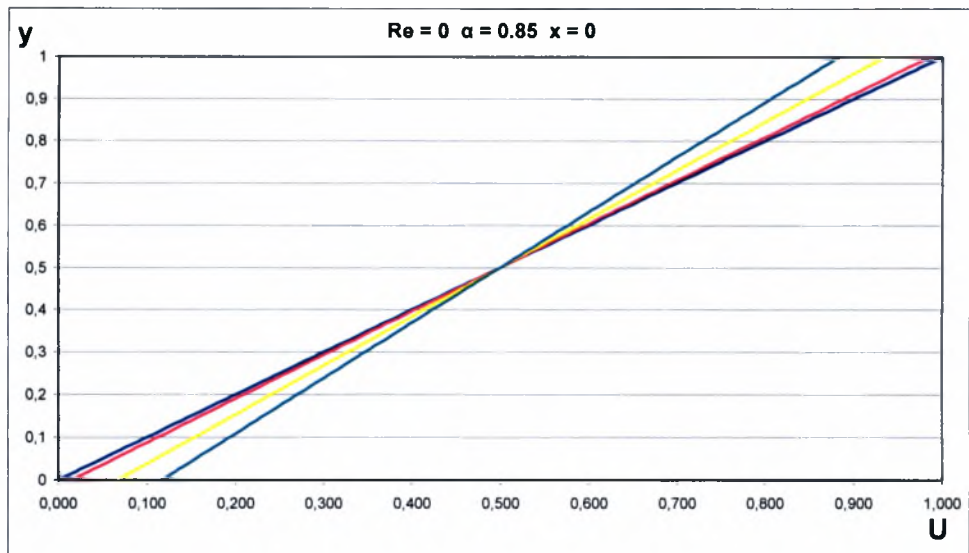
Re=1000	a=0,85	Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
D/H	W/H				
0,5	1,0	6,0523	5,8592	5,1980	4,5696
0,5	2,0	6,1155	5,9070	5,2118	4,5703
1,0	1,0	6,0540	5,8607	5,1991	4,5706
1,0	2,0	6,1131	5,9037	5,2082	4,5670

Re=1000	a=0,7	Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
D/H	W/H				
0,5	1,0	6,0523	5,7943	4,9594	4,2189
0,5	2,0	6,1155	5,8373	4,9669	4,2155
1,0	1,0	6,0540	5,7958	4,9604	4,2198
1,0	2,0	6,1131	5,8338	4,9635	4,2121

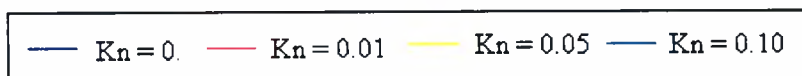


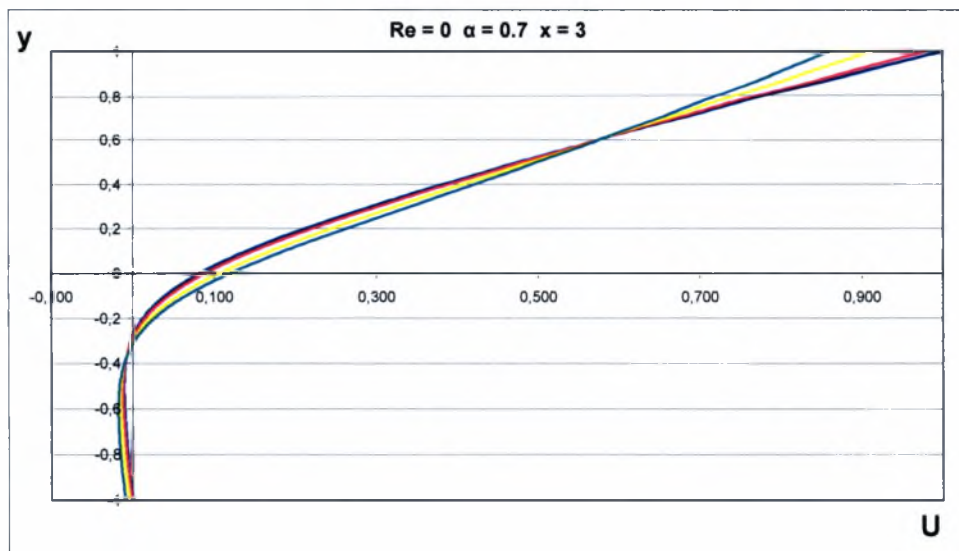
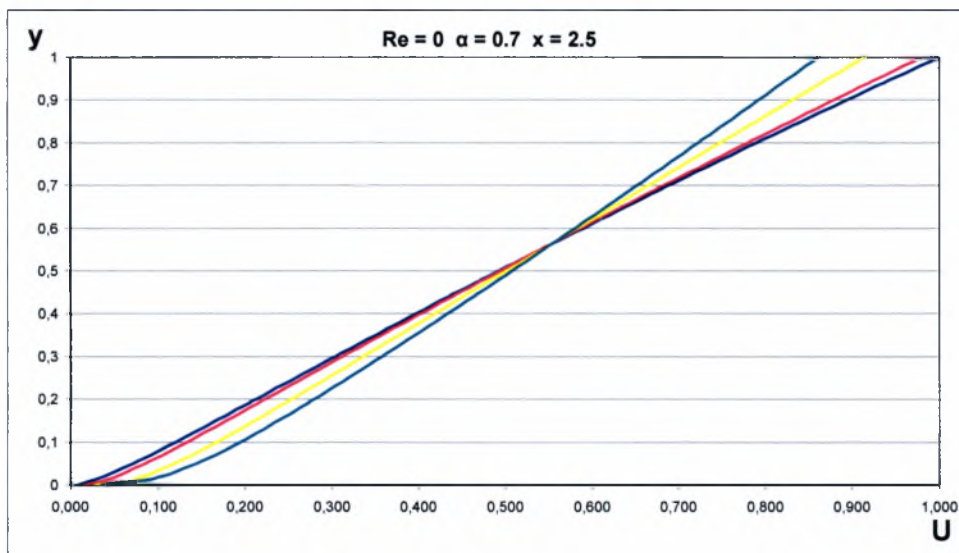
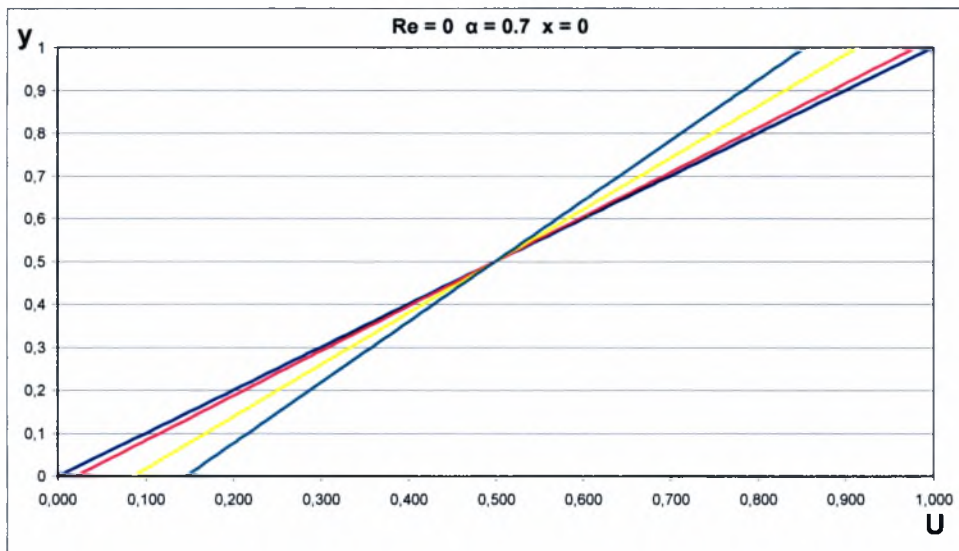
Σχήμα 4.3: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 0$, $\alpha = 1.00$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



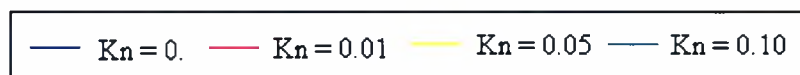


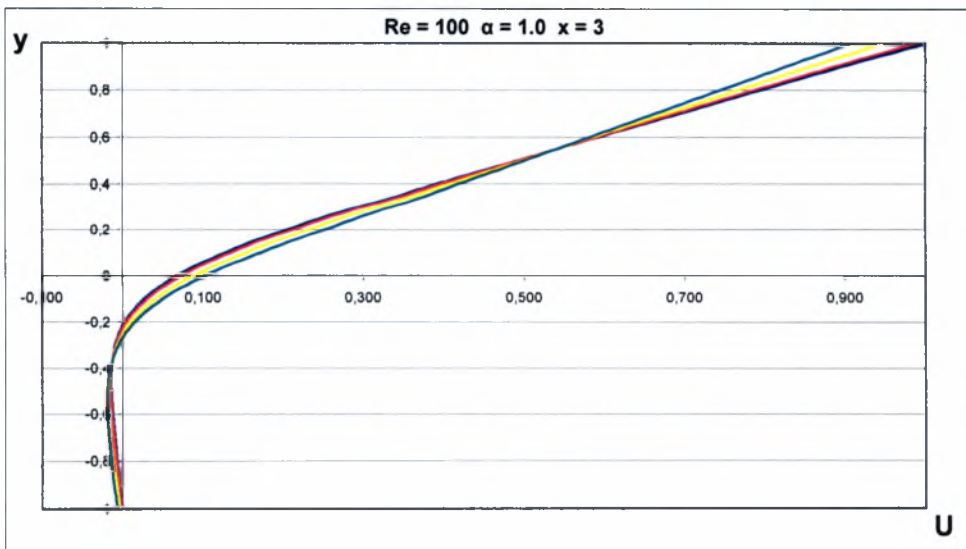
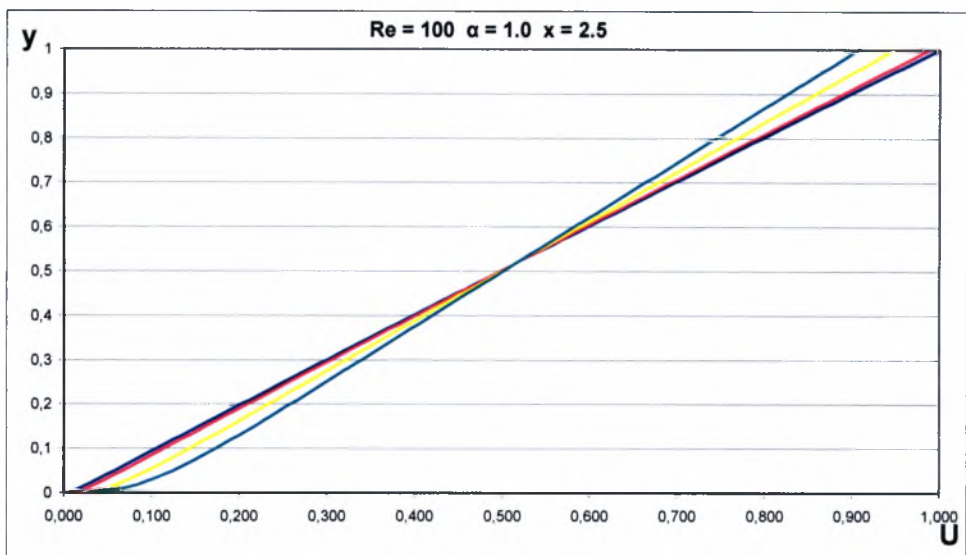
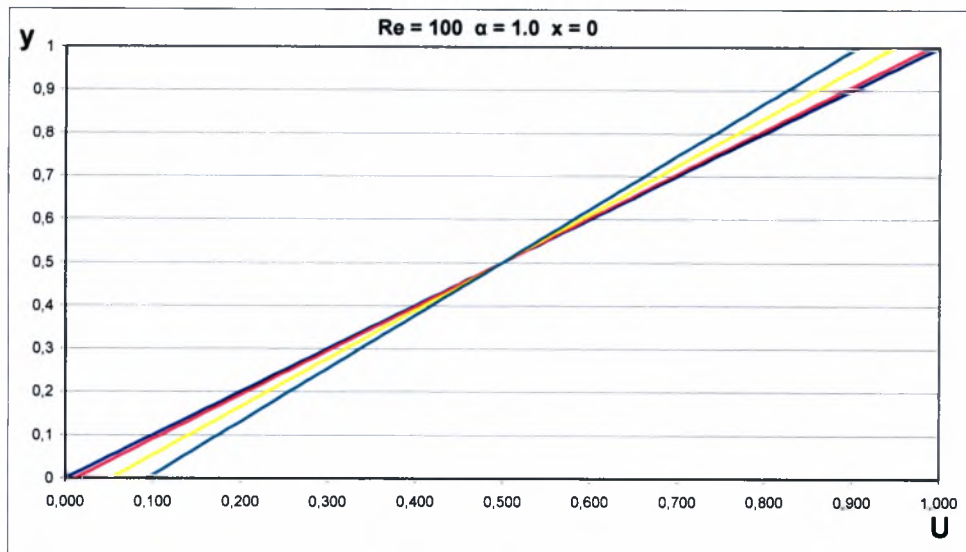
Σχήμα 4.4: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 0$, $\alpha = 0.85$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



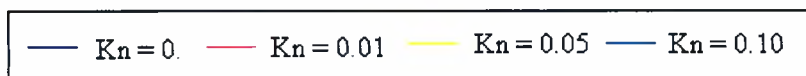


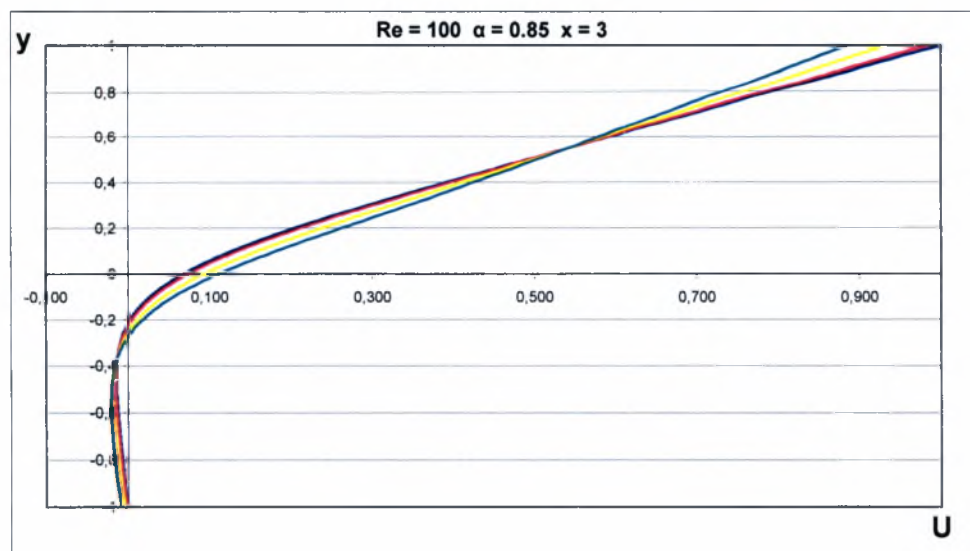
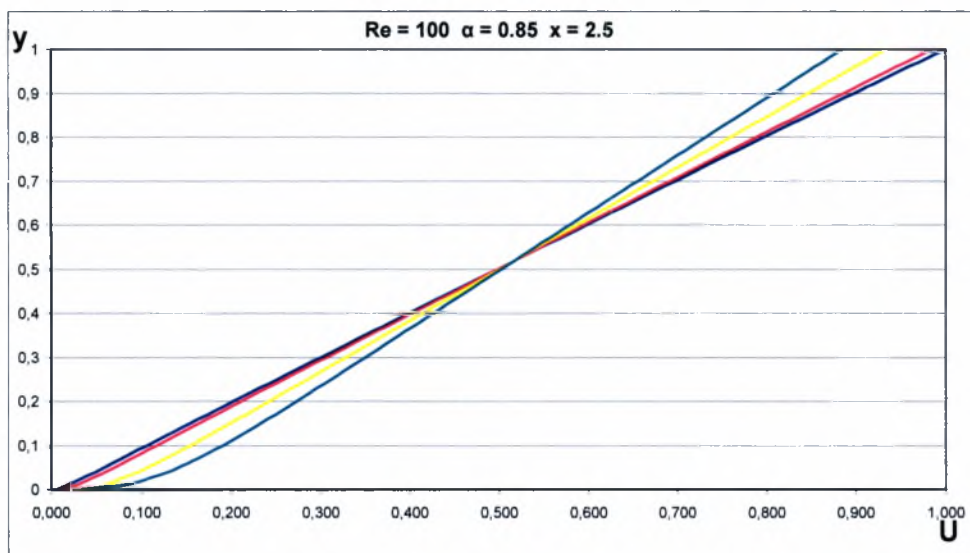
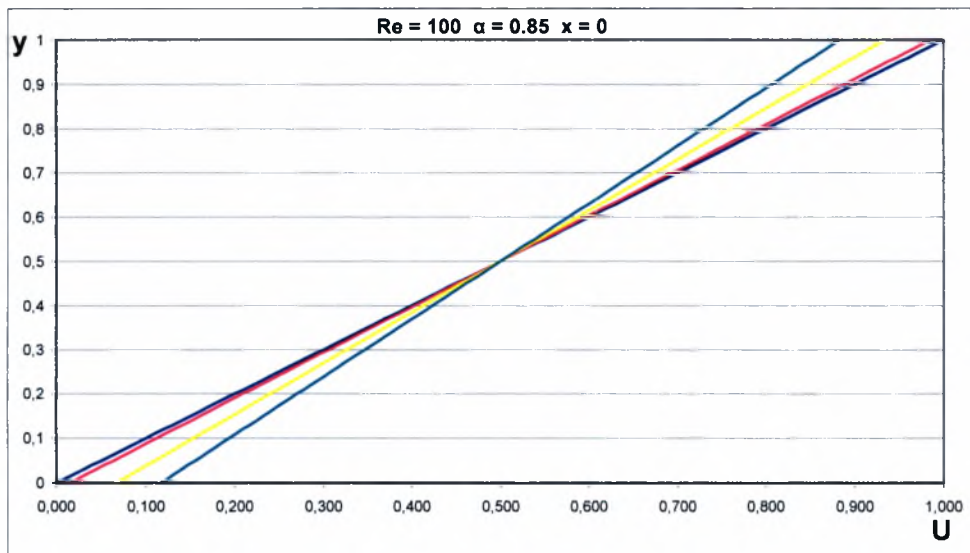
Σχήμα 4.5: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 0$, $\alpha = 0.7$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



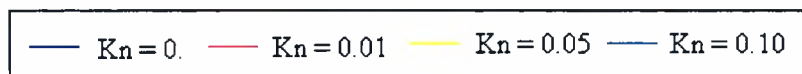


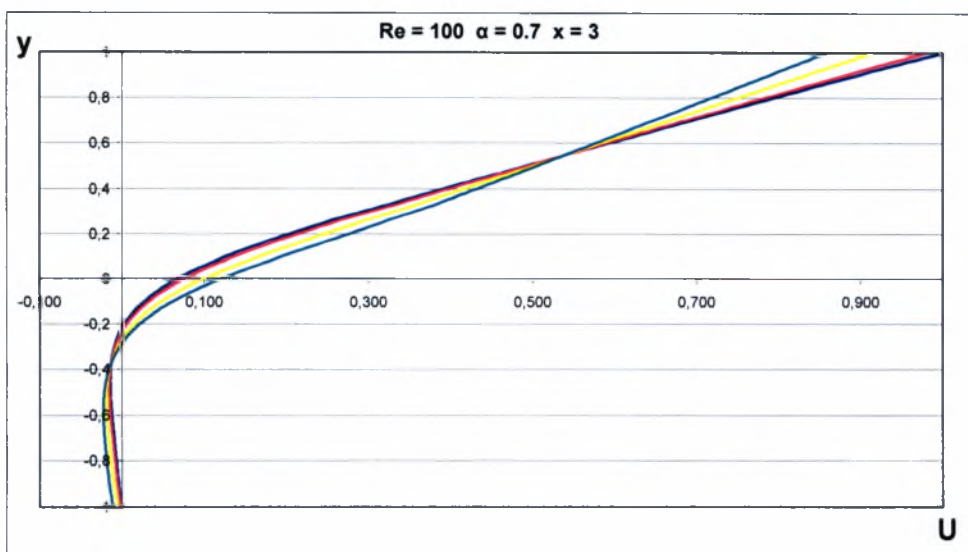
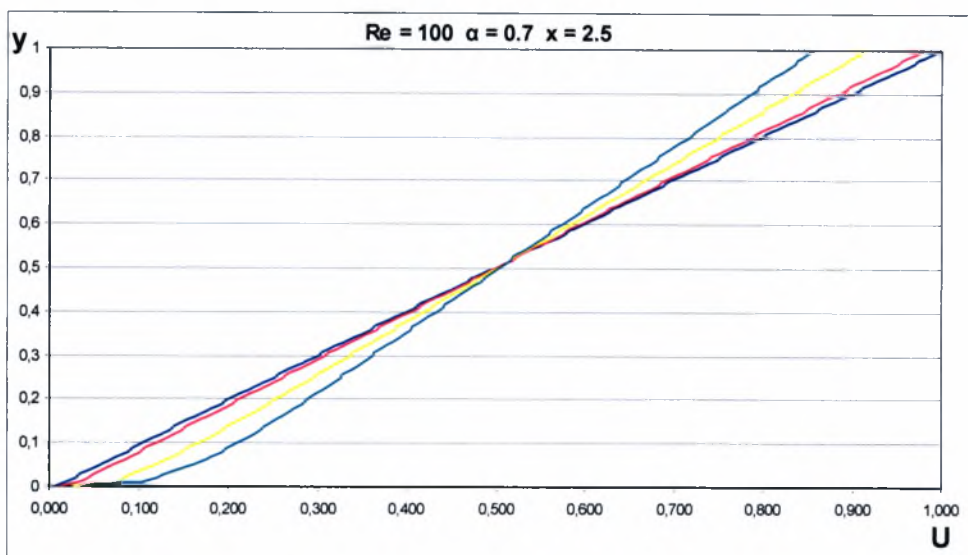
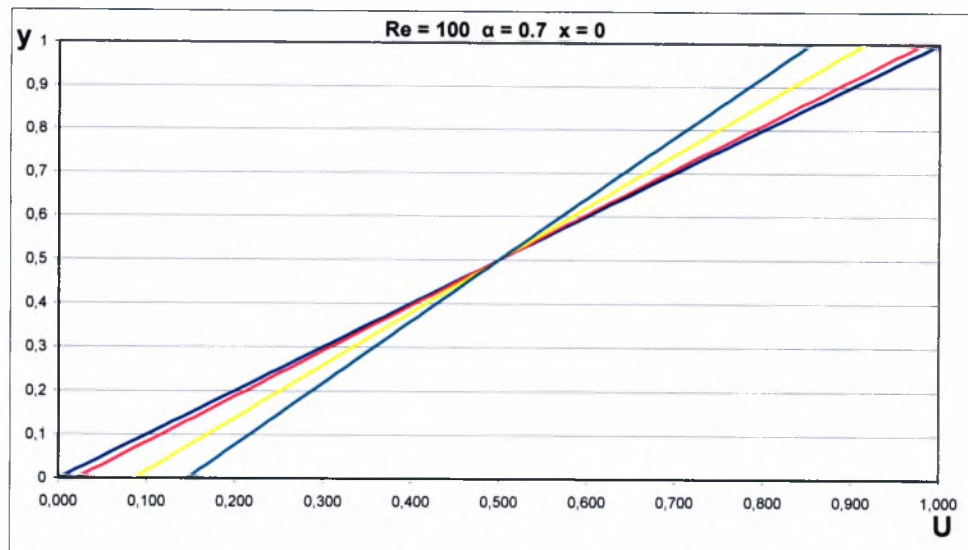
Σχήμα 4.6: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 100$, $\alpha = 1.00$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



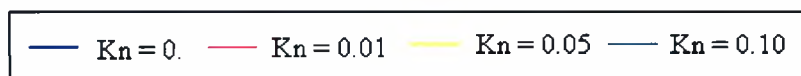


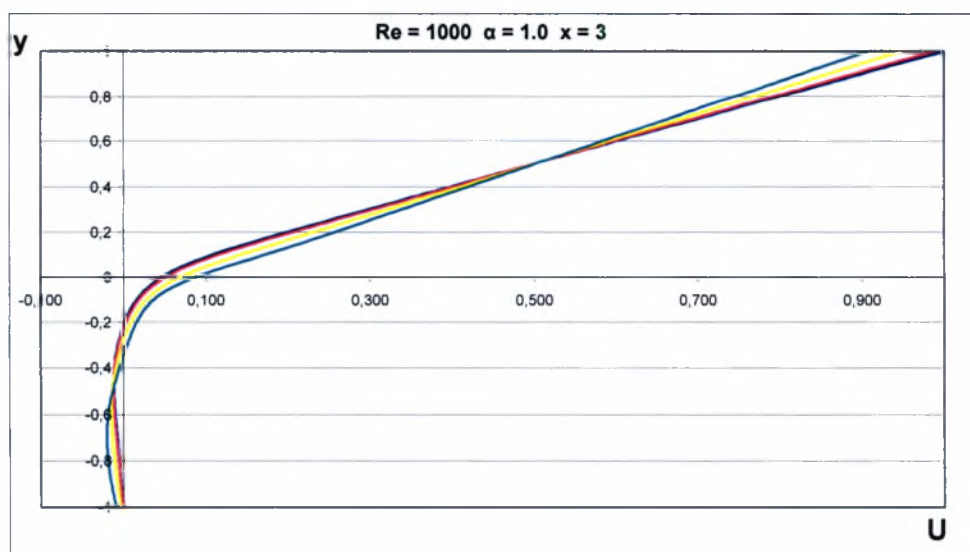
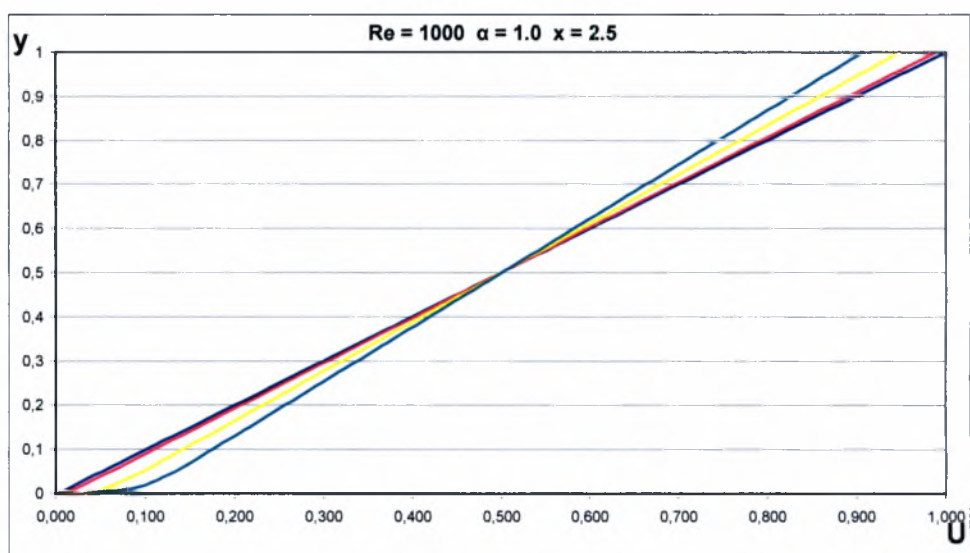
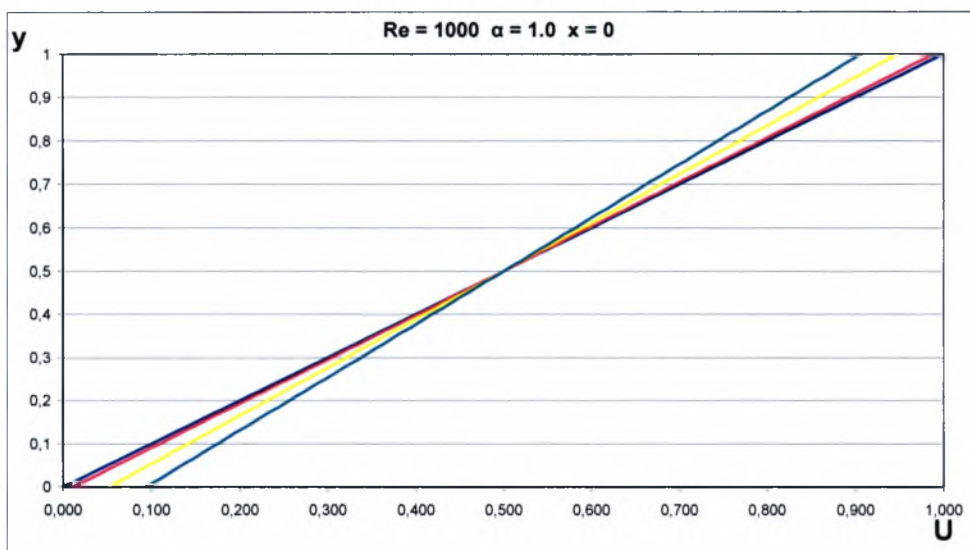
Σχήμα 4.7: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 100$, $\alpha = 0.85$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



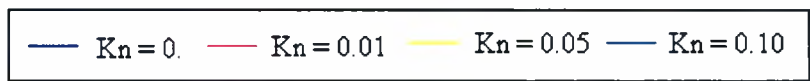


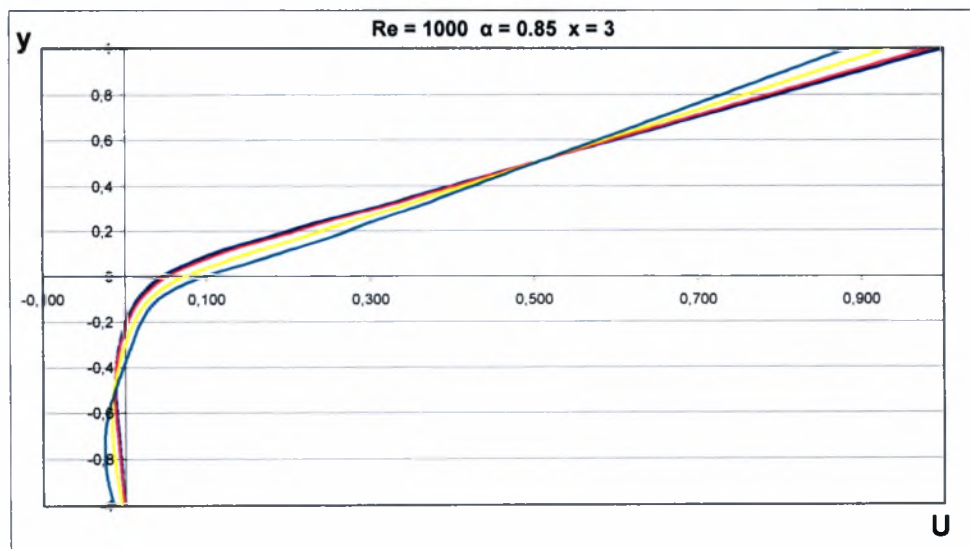
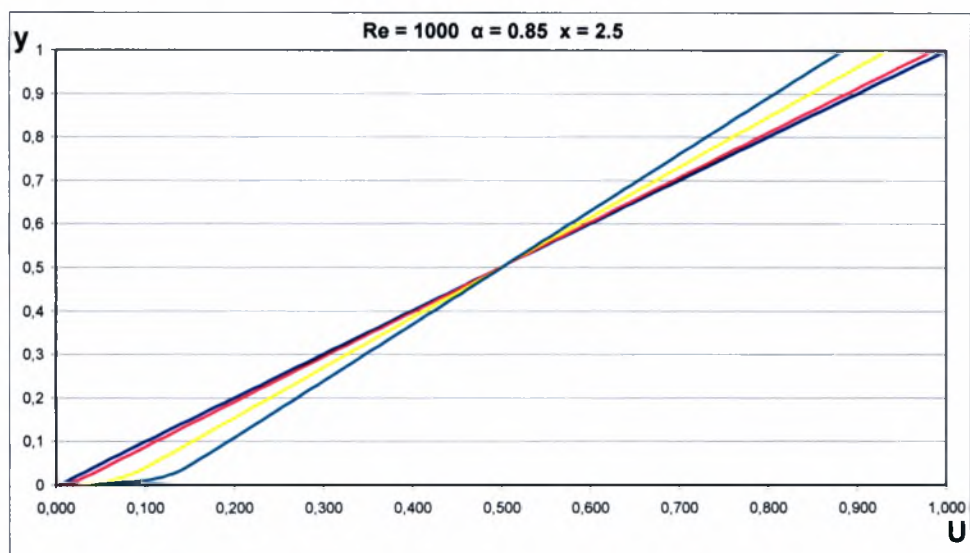
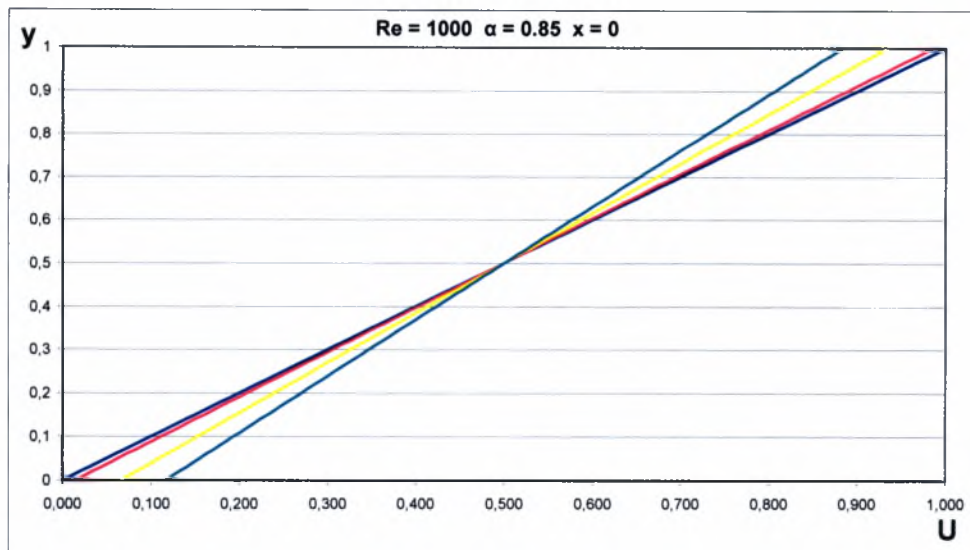
Σχήμα 4.8: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 100$, $\alpha = 0.7$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



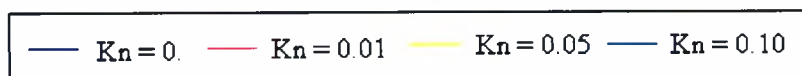


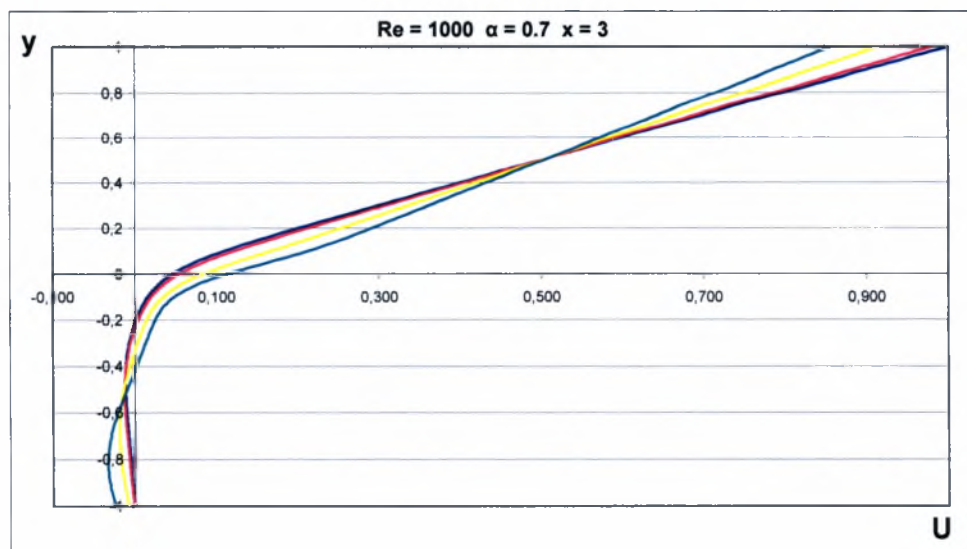
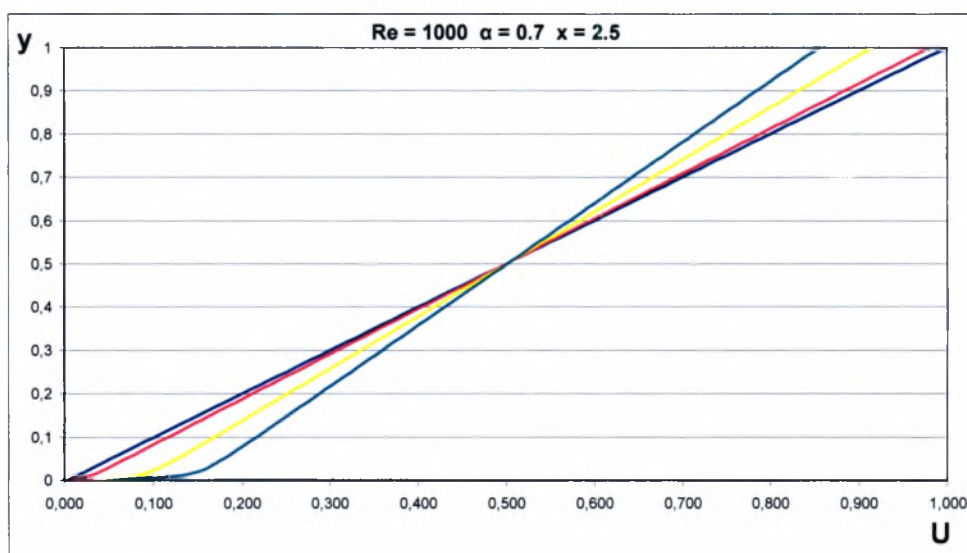
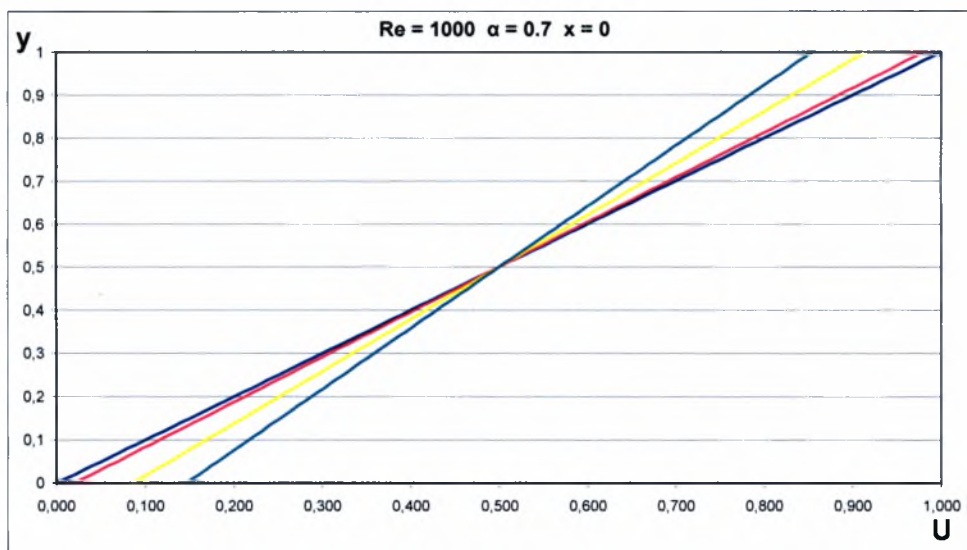
Σχήμα 4.9: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 1000$, $\alpha = 1.00$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



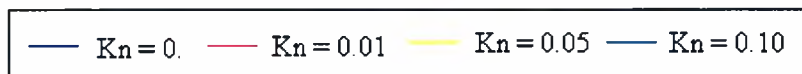


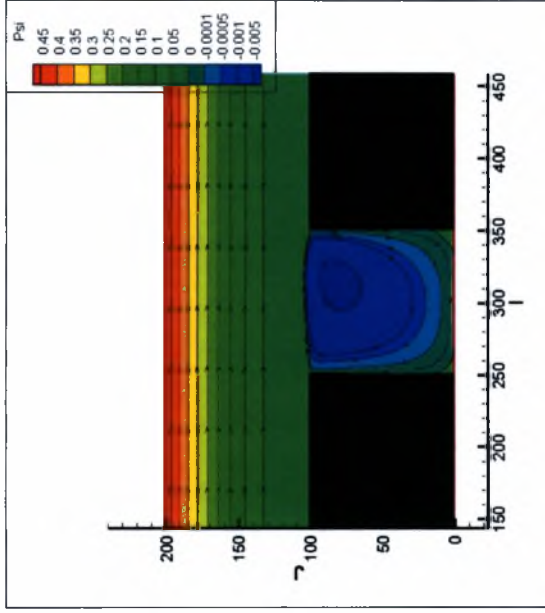
Σχήμα 4.10: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 1000$, $\alpha = 0.85$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)



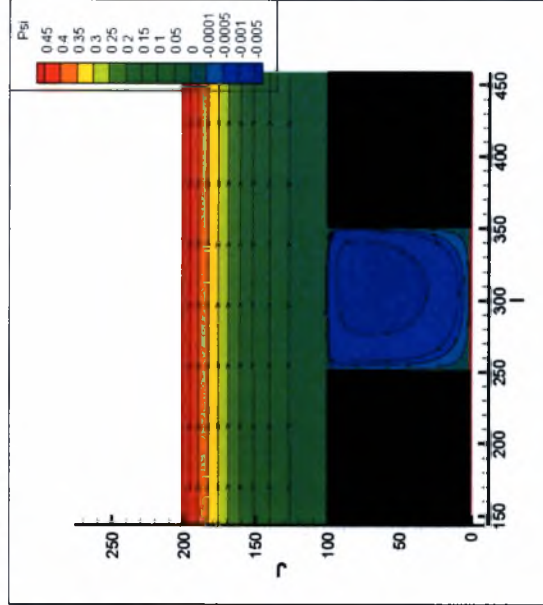
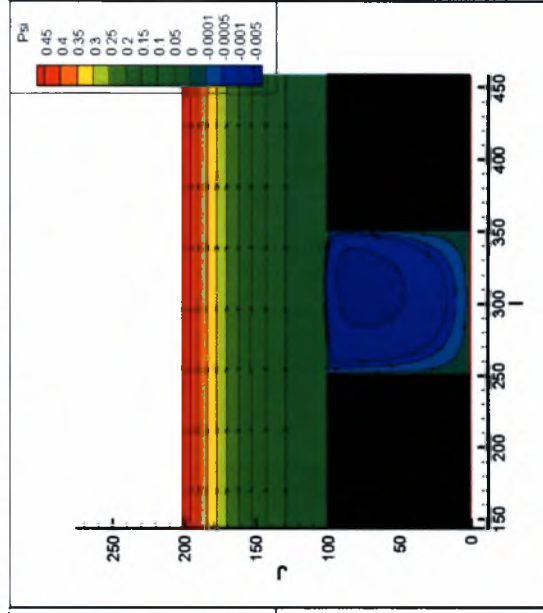
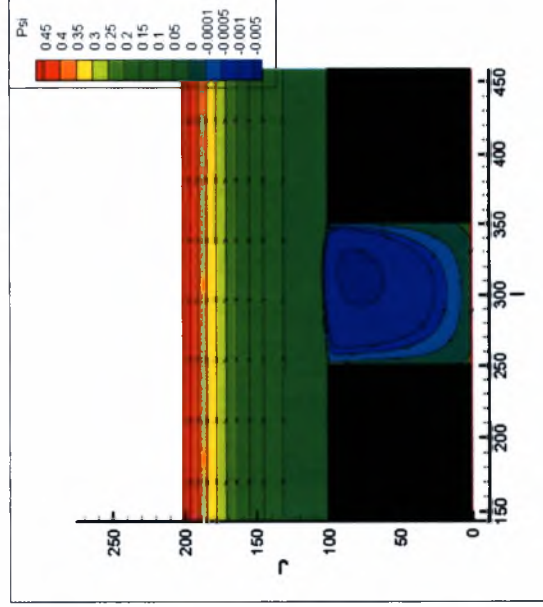


Σχήμα 4.11: Διαγράμματα οριζόντιας ταχύτητας για $D/H = 1$, $W/H = 1$, $Re = 1000$, $\alpha = 0.7$ στις θέσεις $x = 0$ (επάνω), $x = 2.5$ (κέντρο) και $x = 3$ (κάτω)

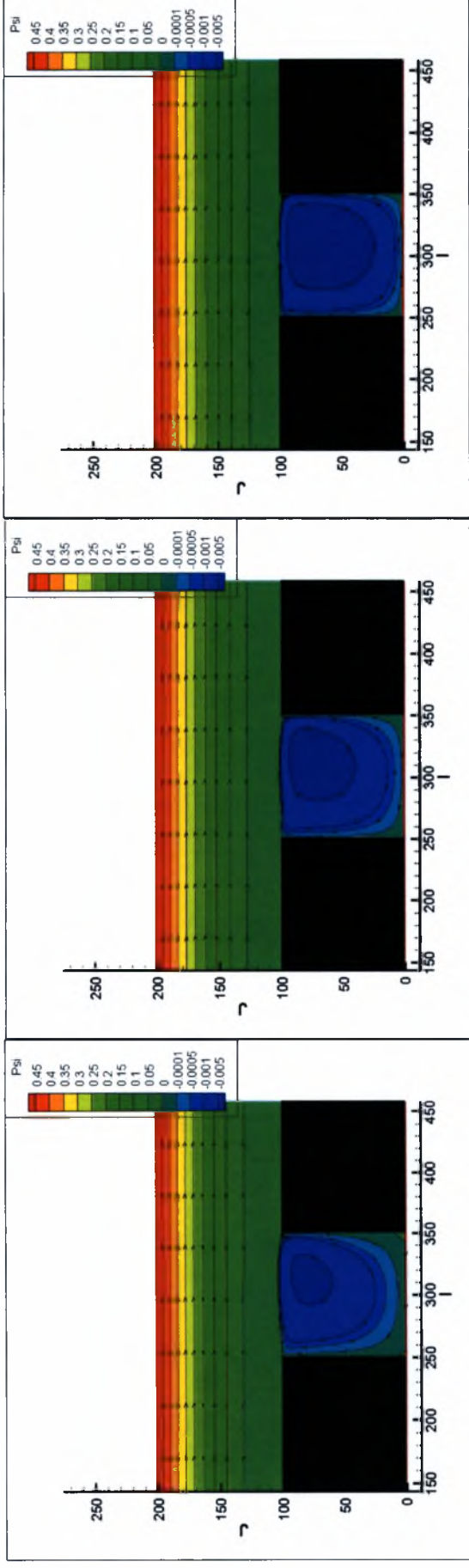




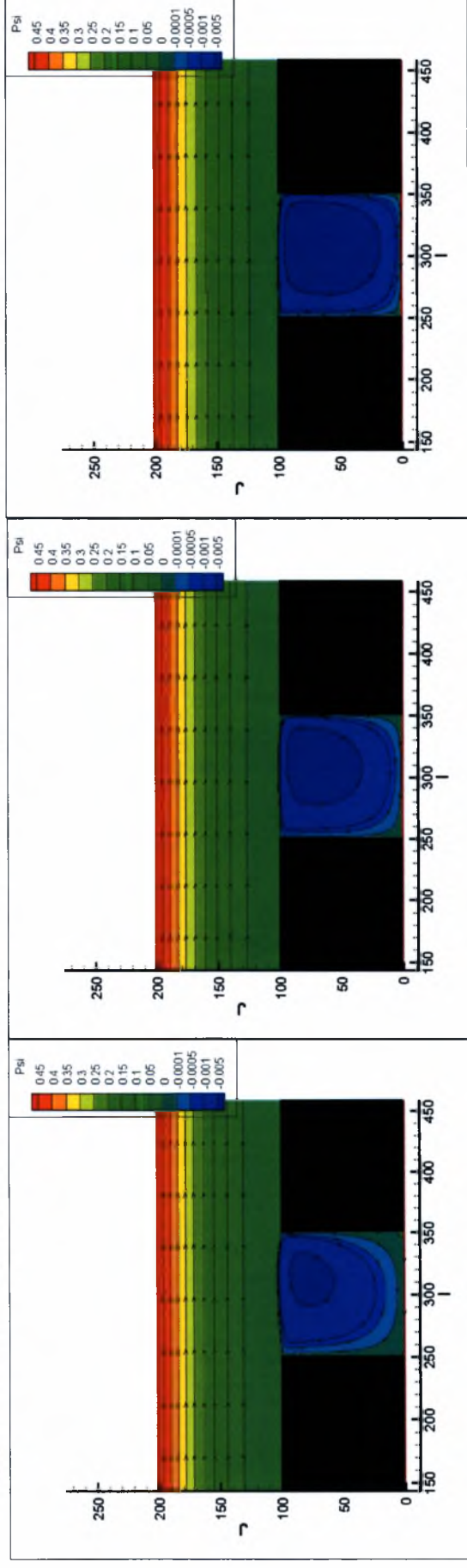
Σχήμα 4.12: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $D/H = 1.0$, $W/H = 1.0$, $Kn = 0$.



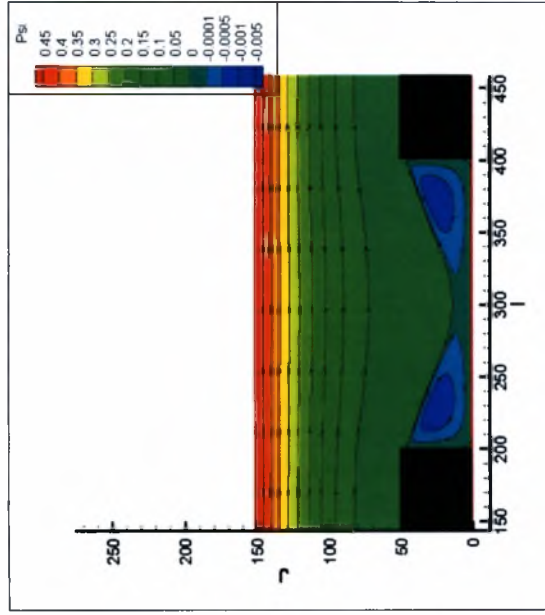
Σχήμα 4.13: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $D/H = 1.0$, $W/H = 1.0$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



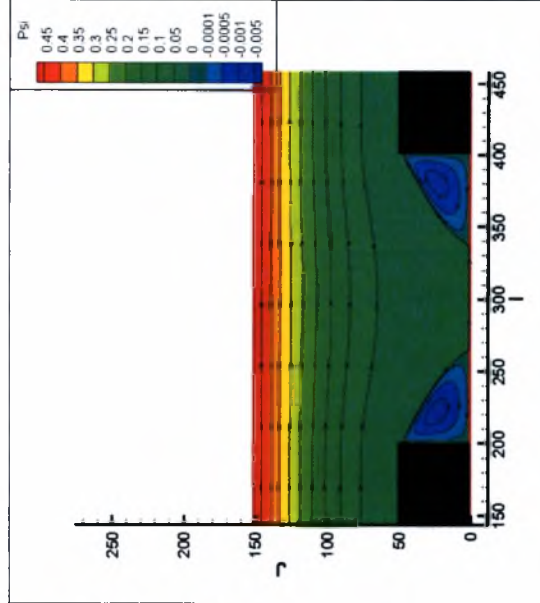
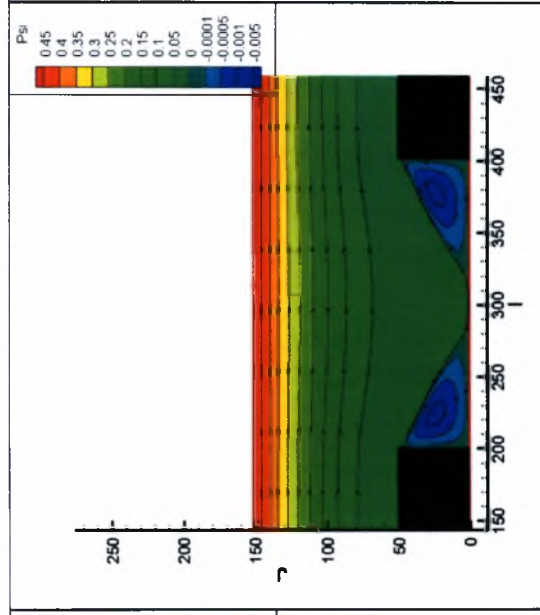
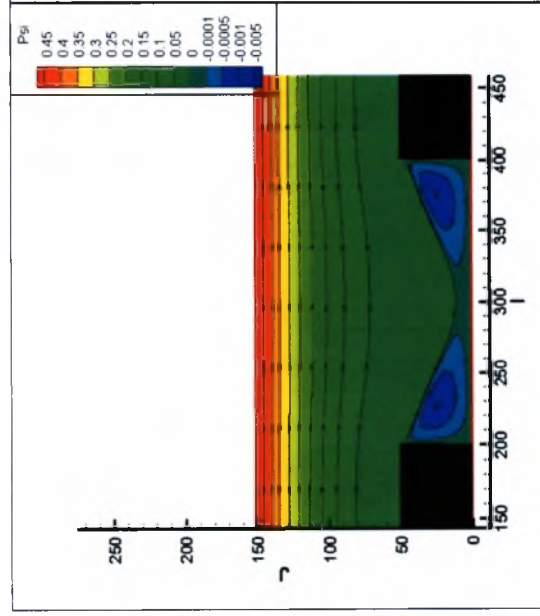
Σχήμα 4.14: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $D/H = 1.0$, $W/H = 1.0$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



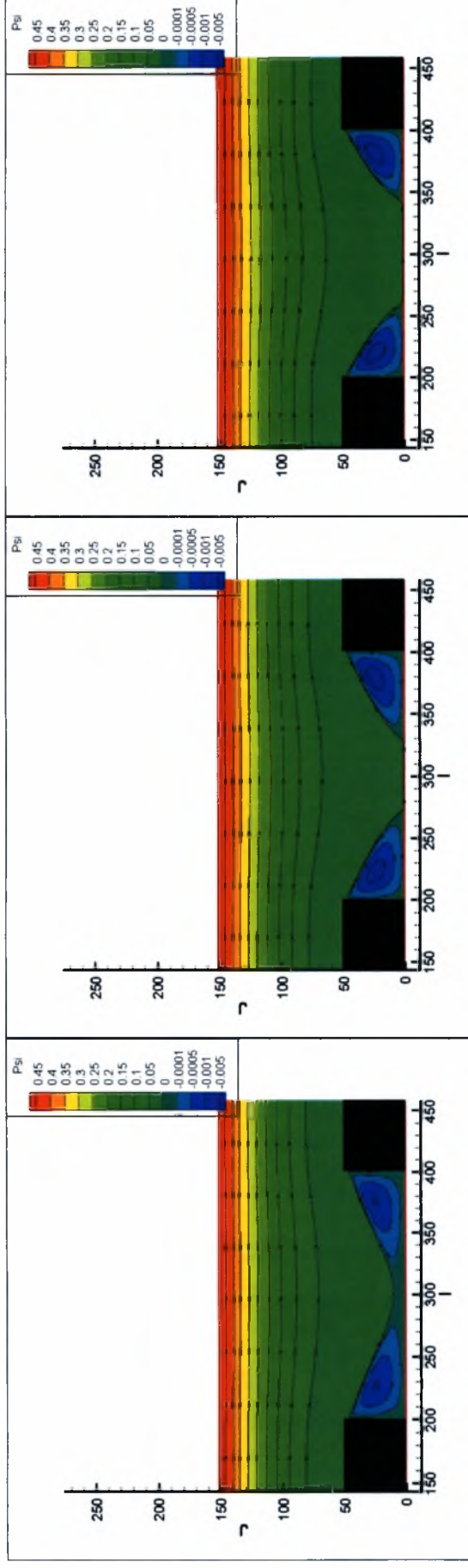
Σχήμα 4.15: Ροϊκές γραμμές για $Re = 1000$, $D/H = 1.0$, $W/H = 1.0$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



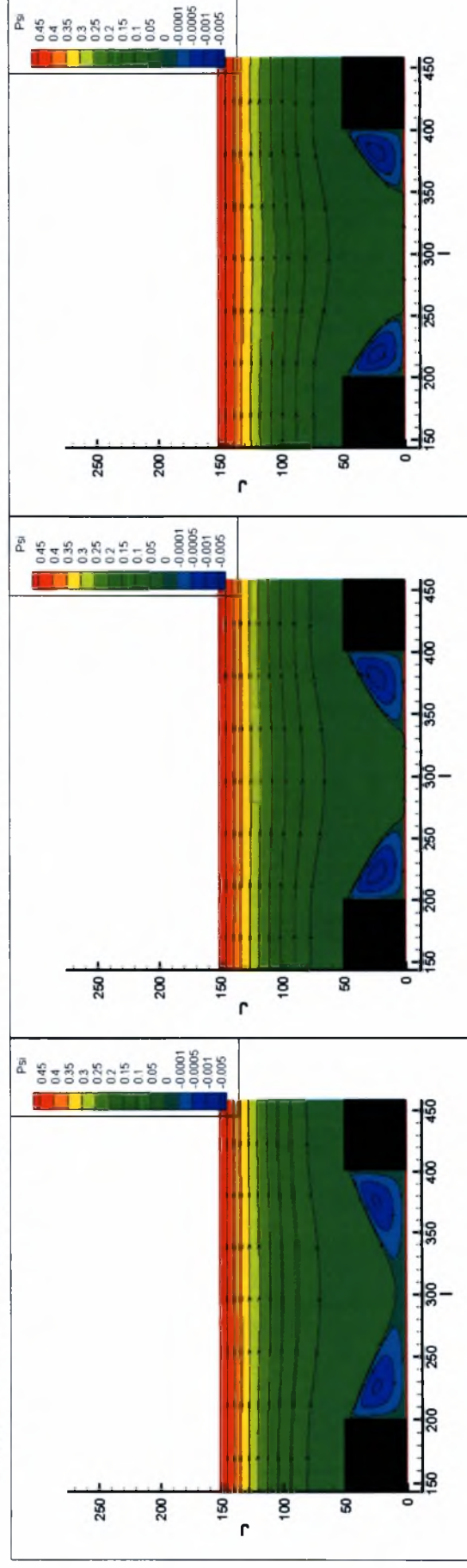
Σχήμα 4.16: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 0.5$, $W/H = 2.0$, $Kn = 0$.



Σχήμα 4.17: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 0.5$, $W/H = 2.0$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



Σχήμα 4.18: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 0.5$, $W/H = 2.0$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



Σχήμα 4.19: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 0.5$, $W/H = 2.0$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΡΟΗ ΣΕ ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

5.1 Εισαγωγή - Περιγραφή του προβλήματος

Η βηματική γεωμετρία αντιμετωπίζεται συχνά σε δίκτυα μικροκαναλιών, όπου η ροή αναγκάζεται να εξαπλωθεί από ένα μικρό κανάλι σε ένα μεγαλύτερο (step flow). Εδώ, σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα προβλήματα, η ροή προκαλείται από διαφορά πίεσης. Παρουσιάζει ενδιαφέρον το μήκος επανακόλλησης, το οποίο ορίζεται ως το μήκος της δίνης. Θεωρείται κι αυτό ως ένα κλασικό πρόβλημα της ρευστοδυναμικής και έχει μελετηθεί στην υδροδυναμική περιοχή [20].

Στο βιβλίο των Beskok και Καρνιαδάκη [12] υπάρχει διάγραμμα παροχής για το συγκεκριμένο πρόβλημα όπου συγκρίνονται αποτελέσματα η ασυμπίεστη ροή, η συμπιεστή ροή και η ροή με ολίσθηση. Η συμπιεστή ροή με ολίσθηση φαίνεται να έχει μικρότερο μήκος εισόδου σε σύγκριση με την συμπιεστή ροή χωρίς ολίσθηση και ακόμα πιο μικρό σε σύγκριση με την ασυμπίεστη ροή. Γίνεται επίσης προσομοίωση με DSMC και τον κώδικα μFlow που έχουν κατασκευάσει οι συγγραφείς, με άζωτο σε θερμοκρασία 330K (ενώ τα τοιχώματα διατηρούνται σε θερμοκρασία 300K) $Ma = 0.45$, $Re = 80$, $Kn_{outlet} = 0.04$ και $Pr = 0.7$. Παρατηρείται μεγάλη ομοιότητα ανάμεσα στα αποτελέσματα των δύο μεθόδων. Οι θερμοκρασίες εμφανίζονται ανεβασμένες κοντά στην περιοχή ανακυκλοφορίας λόγω των όρων σκέδασης. Στο σημείο της εξάπλωσης της ροής οι ταχύτητες βρίσκονται στη διηχητική περιοχή ενώ στο κέντρο του καναλιού στην έξοδο η ροή είναι υπερηχητική.

Η διάταξη περιλαμβάνει δύο πλάκες άπειρου πλάτους στον άξονα z των οποίων η απόσταση μεταβάλλεται απότομα λόγω της μορφής της κάτω πλάκας (σχήμα 5.1). Για την περιγραφή της γεωμετρίας είναι αρκετό να γνωρίζουμε την απόσταση μεταξύ των δύο πλακών στην είσοδο (H), το βάθος (D), το μήκος εισόδου (E) και το μήκος της υπόλοιπης διάταξης (L). Επιλέγοντας ως χαρακτηριστική διάσταση την απόσταση H οι απαραίτητες παράμετροι θα είναι το D/H , το E/H και το L/H .

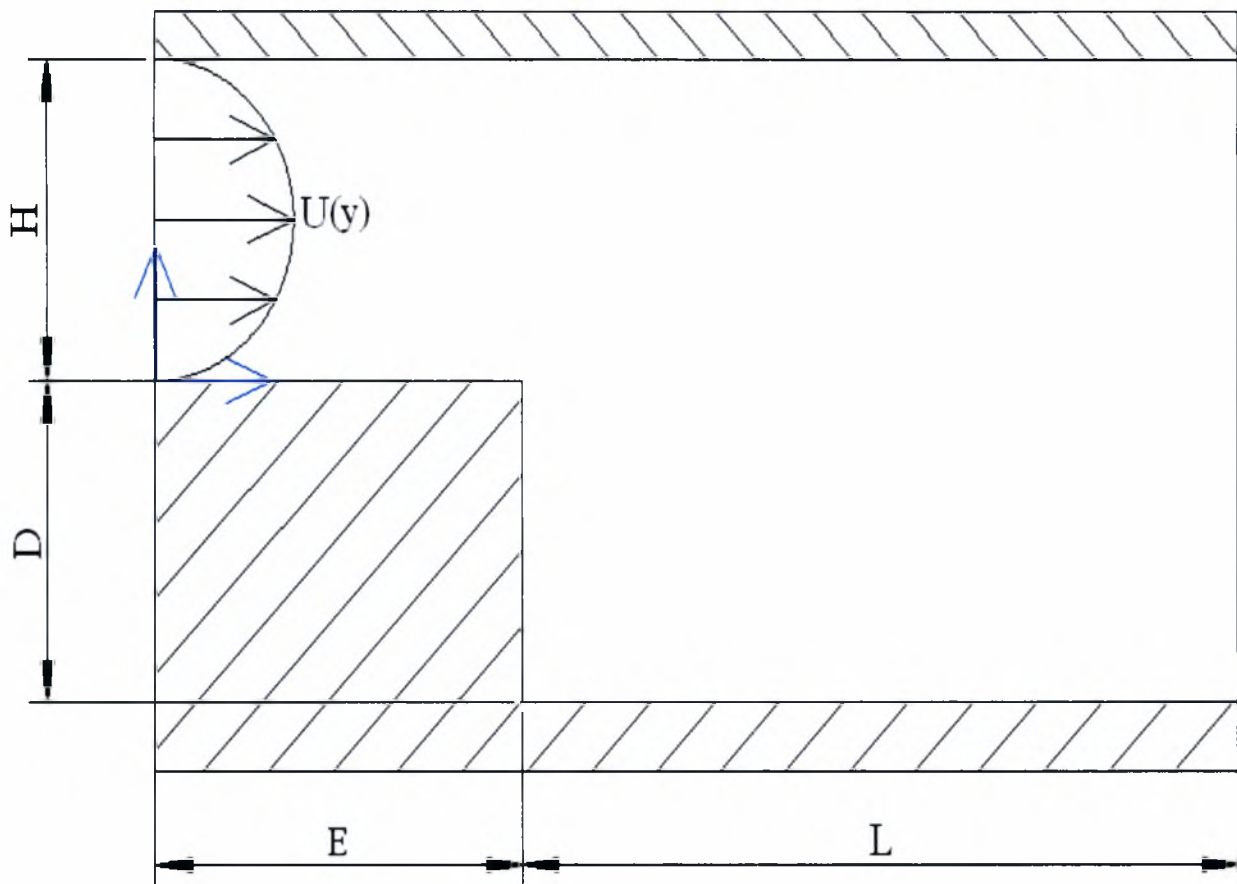
5.2 Διατύπωση εξισώσεων – Συνοριακές συνθήκες

Η επίλυση του συστήματος θα γίνει κι εδώ με το σύστημα εξισώσεων (3.2.11) - (3.2.12). Ο Re ορίζεται ίσος με

$$Re = \frac{\rho U H}{\mu} \quad (5.2.1)$$

όπου H η απόσταση ανάμεσα στις πλάκες στην είσοδο και U η ταχύτητα αναφοράς που ισούται με

$$U = -\frac{H^2}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (5.2.2)$$



Σχήμα 5.1: Η γεωμετρία του προβλήματος

Αυτές είναι και οι ποσότητες με τις οποίες έγινε η αδιαστατοποίηση. Η ταχύτητα U πήρε αυτήν την τιμή ώστε να αδιαστατοποιεί και το πρόβλημα της ροής Poiseuille, αφού θα την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε αναλυτικά το προφίλ ταχυτήτων στην είσοδο. Η ροή Poiseuille μοντελοποιείται από τις σχέσεις

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -1 \quad \text{με} \quad u(0) = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} \quad \text{και} \quad u(1) = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{du}{dy} \Big|_{y=1}$$

Τα μήκη και οι ταχύτητες είναι ήδη αδιαστατοποιημένα με το H και το U αντίστοιχα. Η γενική λύση είναι

$$u(y) = -\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

ενώ οι άγνωστοι συντελεστές προκύπτουν εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες:

$$c_2 = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p c_1$$

$$-\frac{1}{2} + c_1 + c_2 = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p (-1 + c_1)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} + c_1 + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p c_1 = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p (-1 + c_1)$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow c_1 \left(1 + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \right) &= \frac{1}{2} + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \\
\rightarrow c_1 &= \frac{\frac{1}{2} + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p}{1 + 2Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p} = \frac{1}{2} \\
\rightarrow c_2 &= Kn \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \\
\rightarrow u(y) &= -\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + Kn \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \tag{5.2.1}
\end{aligned}$$

Κι εδώ η λύση αποτελείται από το υδροδυναμικό μέρος και την ταχύτητα λόγω ολίσθησης.

$$u(y) = u^{(h)} + \sigma_p u^{(s)} = \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) + \sigma_p \left(Kn \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \tag{5.2.2}$$

Η εξίσωση (5.2.1) θα ολοκληρωθεί ως προς y και θα μας δώσει την συνοριακή συνθήκη για το ψ στο σύστημα $\psi - \zeta$. Η τιμή του ψ στο επάνω τοίχωμα στην είσοδο θα διατηρηθεί σταθερή σε όλο το μήκος του καναλιού (συμβολίζεται με ψ_m). Στην έξοδο θα χρησιμοποιηθεί μια συνθήκη η οποία δεν θα επιβάλλει ένα προφίλ ταχυτήτων αλλά είναι λιγότερο περιοριστική [20].

Τελικά οι οριακές συνθήκες του προβλήματος που θα εξετάσουμε διαμορφώνονται ως εξής:

- Είσοδος ($x = 0, 0 < y < 1$)

$$u = -\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + Kn \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \quad \rightarrow \quad \psi = -\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{4} + Kn \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_p y \tag{5.2.3}$$

$$v = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Επάνω $\left(0 < x < \frac{1}{H}(E+L), y = 1 \right)$

$$u = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{5.2.4}$$

$$v = 0 \quad \psi = \psi_m \quad \text{και} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Κάτω $\left(\frac{E}{H} < x < \frac{1}{H}(E+L), y = -D \right)$

$$u = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{5.2.5}$$

$$v = 0 \quad \psi = 0 \quad \text{και} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Κέντρο αριστερά $\left(0 < x < \frac{E}{H}, y = 0\right)$

$$u = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (5.2.6)$$

$$v = 0 \quad \psi = 0 \quad \text{και} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- Κάτω αριστερά $\left(x = \frac{E}{H}, -D < y < 0\right)$

$$u = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.2.7)$$

$$v = Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \frac{\partial v}{\partial x} \quad \psi = 0 \quad \text{και} \quad \zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

- Έξοδος $\left(x = \frac{1}{H}(E+L), -\frac{D}{H} < y < 1\right)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (5.2.8)$$

5.3 Αριθμητικό σχήμα

Για ακόμη μια φορά θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (3.4.1) και (3.4.2) σε πλέγμα με επιπλέον φανταστικές σειρές και στήλες. Γενικά, οι συνοριακές συνθήκες θα έχουν παρόμοια μορφή με αυτές των προηγούμενων κεφαλαίων.

- Είσοδος $(x = 0, 0 < y < 1)$

$$\psi_{1,j} = -\frac{y_{1,j}^3}{6} + \frac{y_{1,j}^2}{4} + Kn \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_p y_{1,j} \quad (5.3.1)$$

$$\psi_{0,j} = \psi_{2,j} \quad \text{και} \quad \zeta_{1,j} = -\frac{\psi_{1,j+1} - 2\psi_{1,j} + \psi_{1,j-1}}{h^2}$$

- Επάνω $\left(0 < x < \frac{1}{H}(E+L), y = 1\right)$

$$\psi_{i,n_y+1} = \frac{1}{\left(h + Kn \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_p\right)} \left[\psi_{i,n_y} \left(Kn \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \right) + \psi_{i,n_y-1} \left(h - Kn \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_p \right) \right] \quad (5.3.2)$$

$$\psi_{i,n_y} = \psi_{1,n_y} \quad \text{και} \quad \zeta = -\frac{\psi_{i,n_y+1} - 2\psi_{i,n_y} + \psi_{i,n_y-1}}{h^2}$$

- Έξοδος $\left(x = \frac{1}{H}(E+L), -\frac{D}{H} < y < 1 \right)$

$$\psi_{n_x+1,j} = 2\psi_{n_x,j} - \psi_{n_x-1,j} \quad \text{και} \quad \zeta_{n_x+1,j} = 2\zeta_{n_x,j} - \zeta_{n_x-1,j} \quad (5.3.3)$$

Κι εδώ ο εσωτερικός γωνιακός κόμβος παρουσιάζει την ίδια προβληματική συμπεριφορά με αυτήν που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το ζ εκεί υπολογίζεται και πάλι χρησιμοποιώντας και τις δύο παραγώγους μέσω της (3.2.12).

Η παράμετρος ω θα πάρει τις τιμές

- $Re < 50 \quad \rightarrow \quad \omega = 1$
- $50 < Re < 100 \quad \rightarrow \quad \omega = 0.7$
- $100 < Re < 400 \quad \rightarrow \quad \omega = 0.23$
- $400 < Re < 1000 \quad \rightarrow \quad \omega = 0.09$

5.4 Αποτελέσματα

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα που αναπτύχθηκε παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Το αδιάστατο μήκος L/H άλλαξε σύμφωνα με τον αριθμό Re ώστε στην έξοδο να λαμβάνουμε ένα προφίλ ταχυτήτων το οποίο δεν θα άλλαζε σημαντικά αν εξετάζαμε μεγαλύτερο μήκος. Έτσι, για $Re = 0$ επιλέγουμε μήκος ίσο με 8., για $Re = 100$ επιλέγουμε μήκος 11., για $Re = 400$ επιλέγουμε μήκος 13. και για $Re = 1000$ επιλέγουμε μήκος 30.

Πίνακας 5.1: Οι παράμετροι που μελετήθηκαν

Re	0, 100, 400, 1000
Kn	0, 0.01, 0.05, 0.10
α	1.00, 0.85, 0.70
D/H	0.5, 1.0
E/H	2.
L/H	8., 11., 13., 30.

Χρησιμοποιήθηκε πλέγμα με 41 κόμβους στη διάσταση H . Δηλαδή αν είχαμε για παράδειγμα τις τιμές των παραμέτρων $D/H = 1.$, $E/H = 2.$, $L/H = 8$, τότε το πλέγμα μας θα ήταν μεγέθους 81×401 . Το κριτήριο τερματισμού ήταν ίσο με 10^{-10} .

Στον Πίνακα 5.2 δίνονται τα μήκη επανακόλλησης της δίνης αδιαστατοποιημένα με το H . Επίσης, στα σχήματα 5.2 - 5.9 βλέπουμε τις ροϊκές γραμμές για $D/H = 1$, $Re = 0$ και $D/H = 1$, $Re = 400$ σε σύγκριση με την υδροδυναμική λύση. Παρατηρούμε ότι το μέγεθος της δίνης (και κατ' επέκταση το μήκος επανακόλλησης) μικραίνει όσο αυξάνεται ο Kn (ή ελαττώνεται το α) για

μικρούς Re. Η αντίθετη συμπεριφορά παρατηρείται για μεγάλους Re. Πρέπει λοιπόν να υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός Re (ανάμεσα στις τιμές 0 και 100 για αυτά τα δύο D/H που εξετάστηκαν) στον οποίον να αλλάζει αυτή η συμπεριφορά.

Πίνακας 5.2: Τα μήκη επανακόλλησης της δίνης για D/H = 1.

$\alpha = 1,00$		Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
Re	0	0,350	0,350	0,275	0,175
	100	0,775	0,825	1,000	1,200
	400	2,100	2,250	2,700	3,300
	1000	4,275	4,525	5,400	6,725

$\alpha = 0,85$		Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
Re	0	0,350	0,350	0,225	0,125
	100	0,775	0,850	1,050	1,350
	400	2,100	2,275	2,900	3,700
	1000	4,275	4,600	5,800	7,750

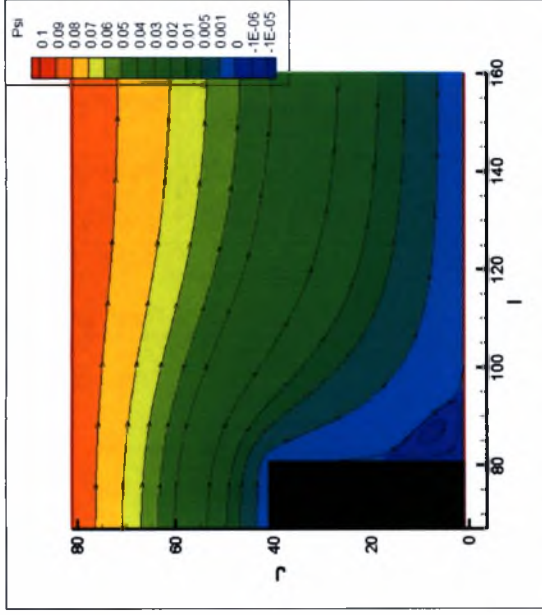
$\alpha = 0,70$		Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
Re	0	0,350	0,325	0,200	0,000
	100	0,775	0,850	1,150	1,550
	400	2,100	2,325	3,175	4,325
	1000	4,275	4,700	6,425	9,350

Πίνακας 5.2: Τα μήκη επανακόλλησης της δίνης για D/H = 0.5

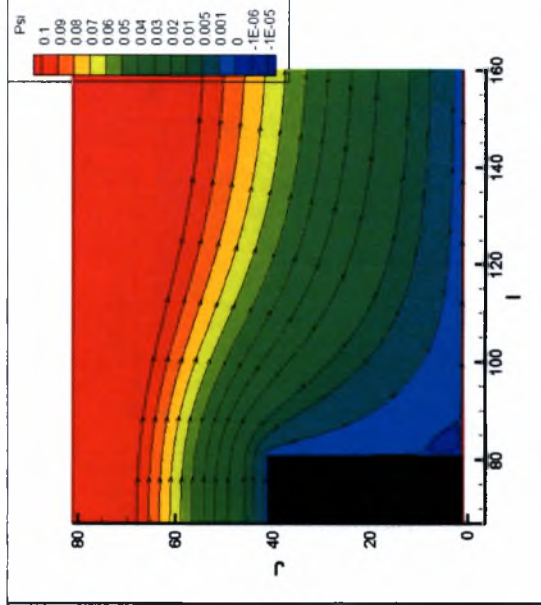
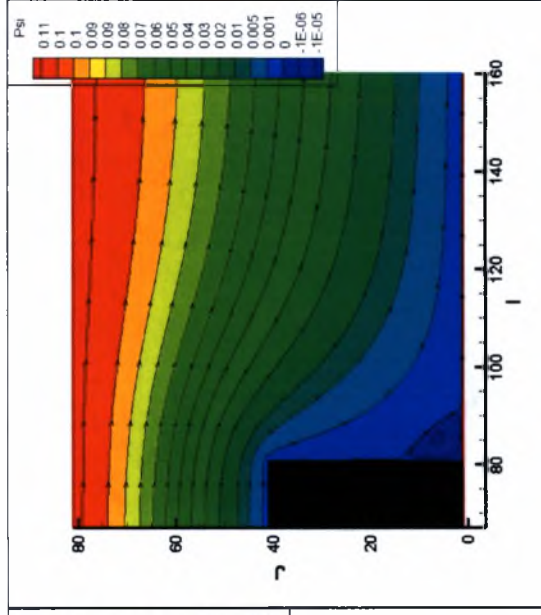
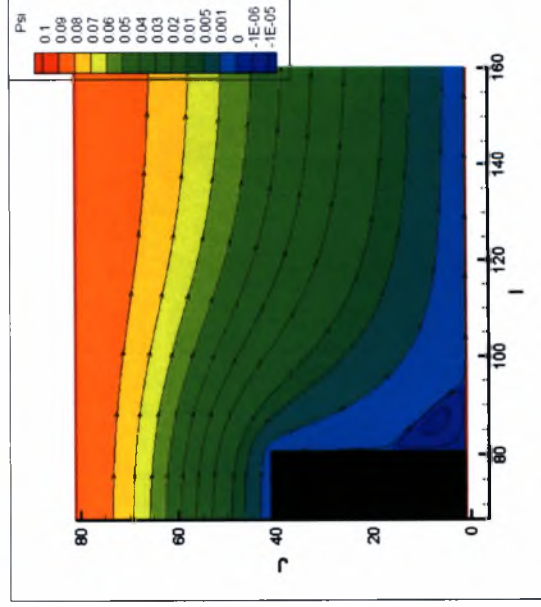
$\alpha = 1,00$		Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
Re	0	0,225	0,225	0,225	0,225
	100	0,375	0,425	0,450	0,525
	400	0,850	0,925	1,075	1,250
	1000	1,650	1,750	2,025	2,375

$\alpha = 0,85$		Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
Re	0	0,225	0,175	0,150	0,125
	100	0,375	0,425	0,475	0,575
	400	0,850	0,925	1,125	1,375
	1000	1,650	1,775	2,125	2,600

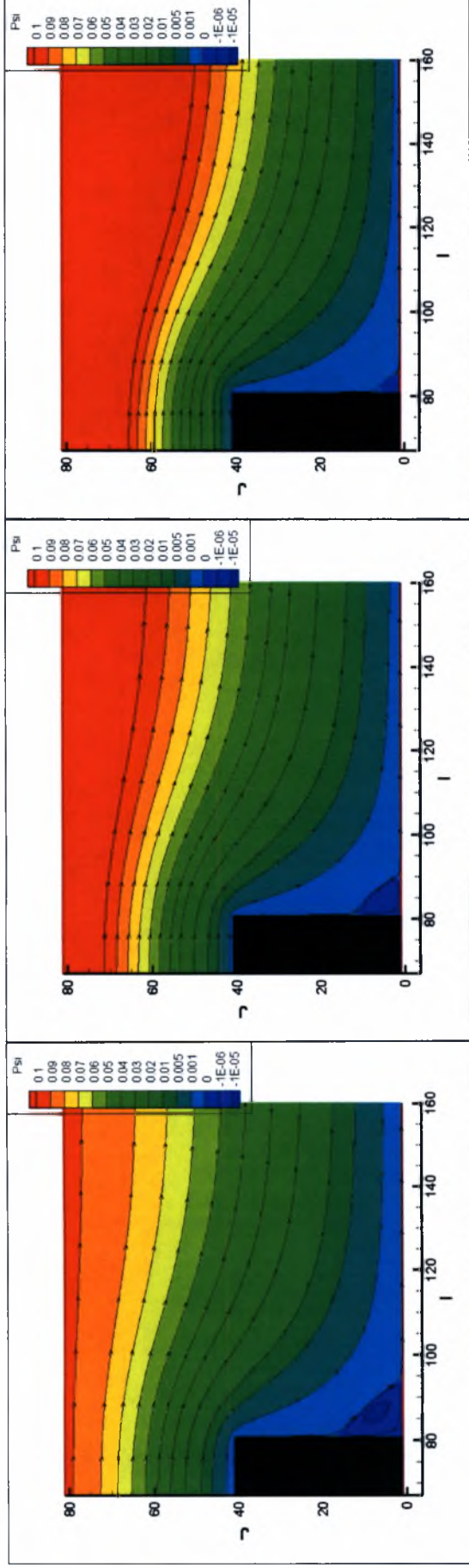
$\alpha = 0,70$		Kn			
		0	0,01	0,05	0,1
Re	0	0,225	0,125	0,100	0,050
	100	0,375	0,425	0,500	0,625
	400	0,850	0,950	1,225	1,525
	1000	1,650	1,800	2,300	2,950



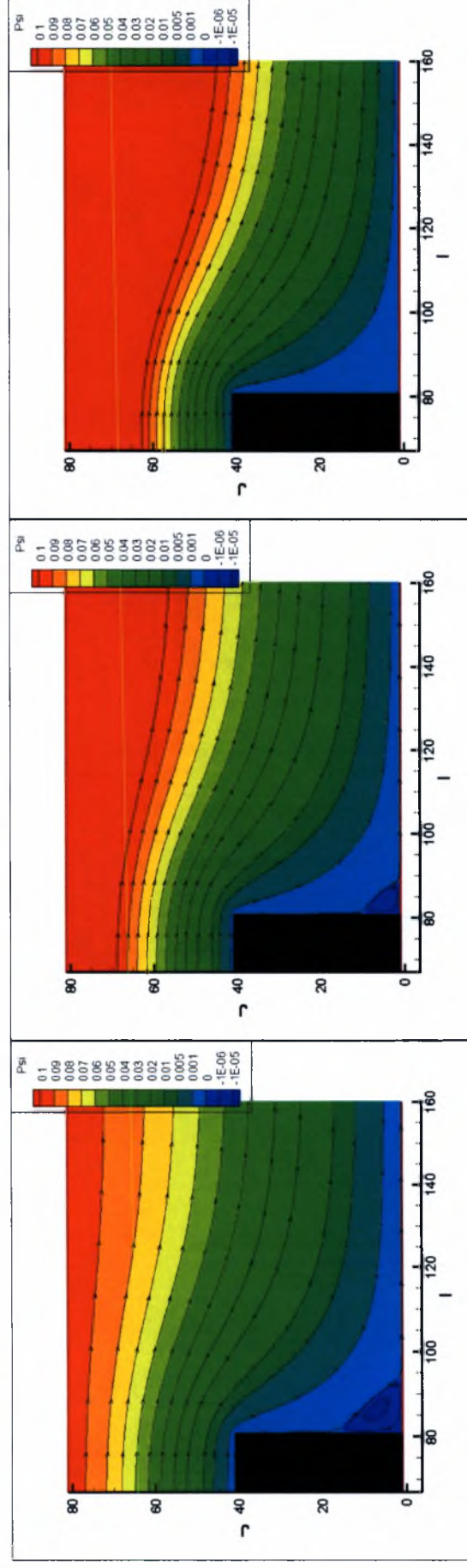
Σχήμα 5.2: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 1.0$, $Kn = 0$.



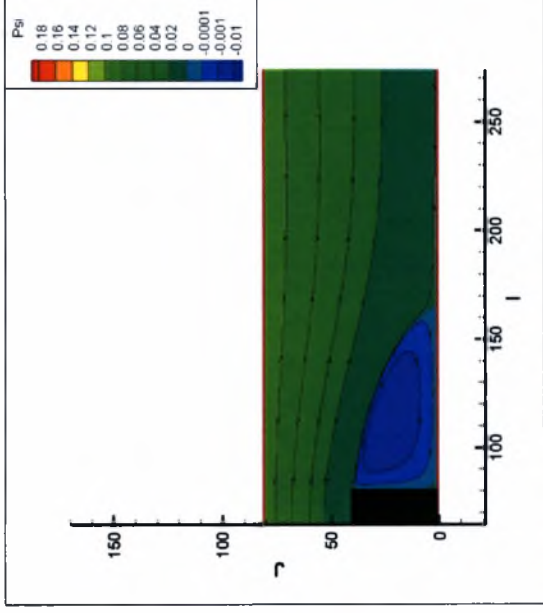
Σχήμα 5.3: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 1.0$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



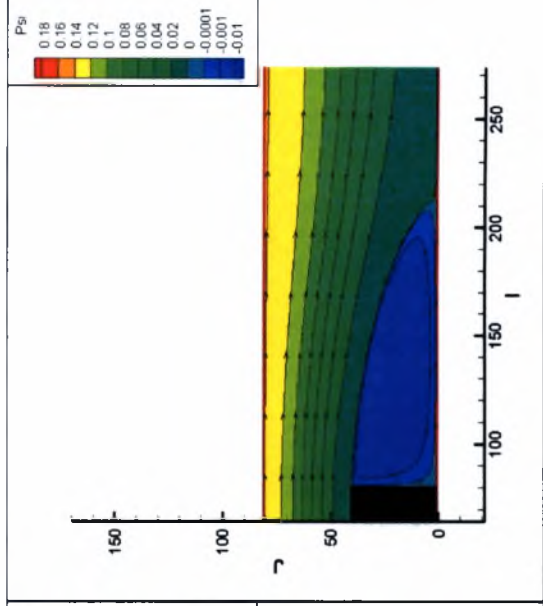
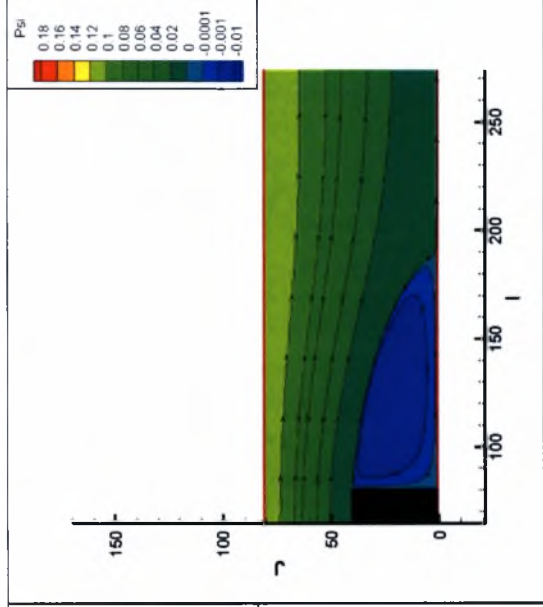
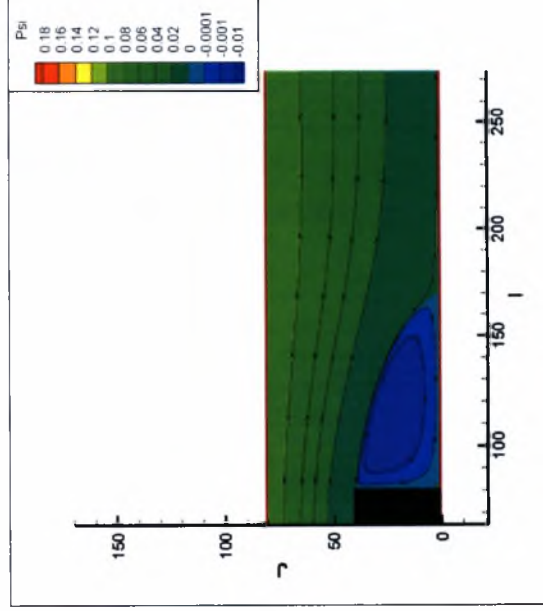
Σχήμα 5.4: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 1.0$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



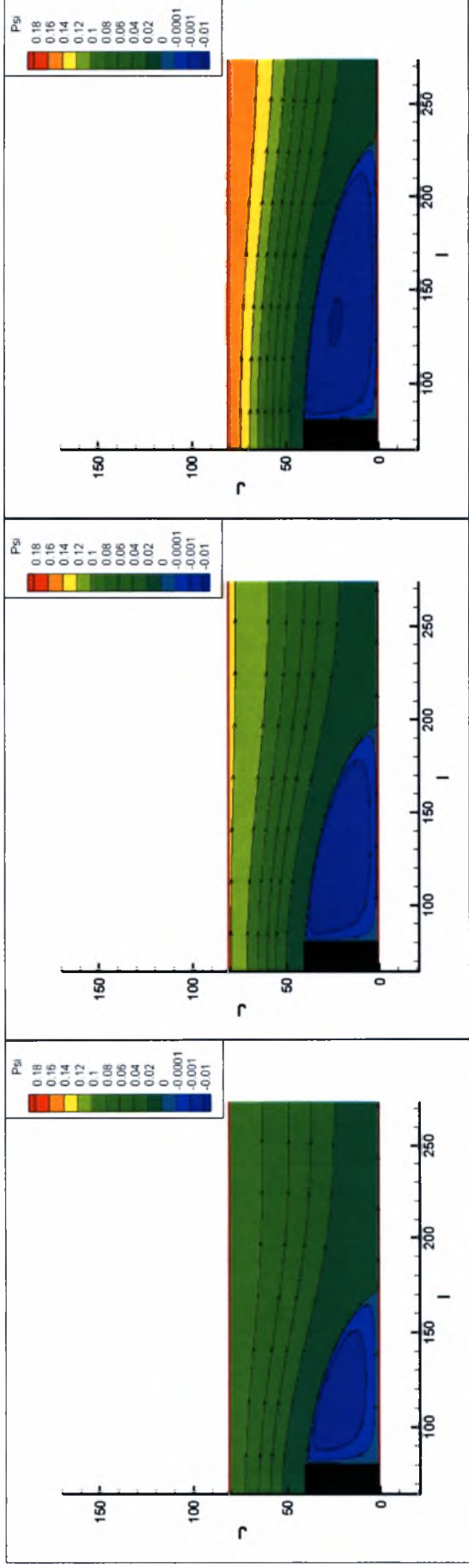
Σχήμα 5.5: Ροϊκές γραμμές για $Re = 0$, $D/H = 1.0$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



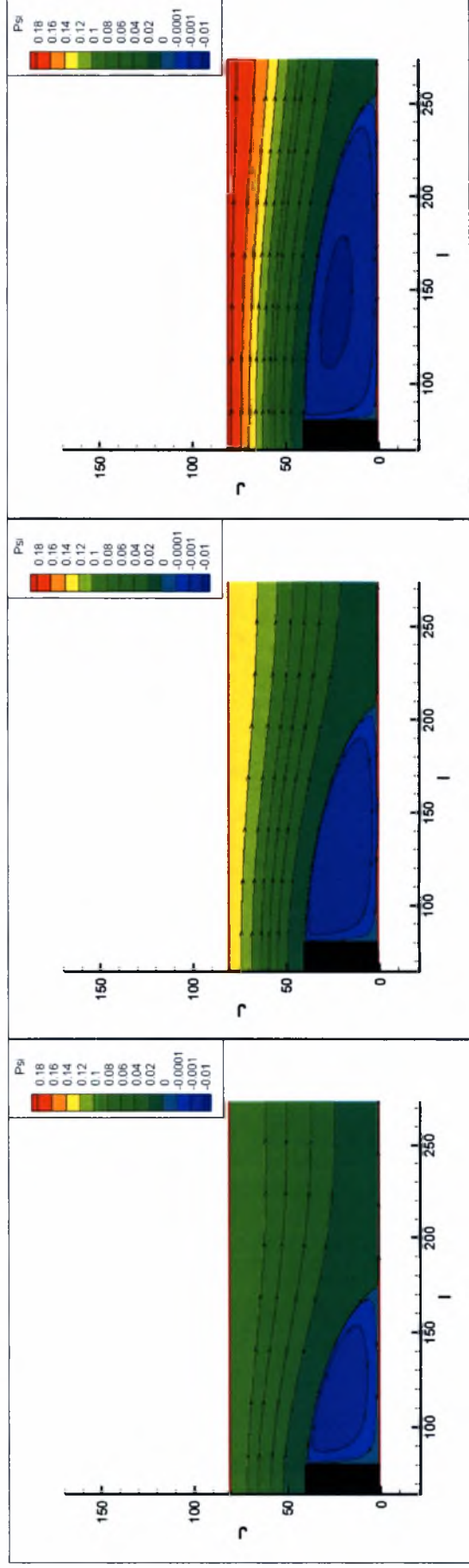
Σχήμα 5.6: Ροϊκές γραμμές για $Re = 400$, $D/H = 1.0$, $Kn = 0$.



Σχήμα 5.7: Ροϊκές γραμμές για $Re = 400$, $D/H = 1.0$, $\alpha = 1$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



Σχήμα 5.8: Ροϊκές γραμμές για $Re = 400$, $D/H = 1.0$, $\alpha = 0.85$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$



Σχήμα 5.9: Ροϊκές γραμμές για $Re = 400$, $D/H = 1.0$, $\alpha = 0.7$ και (i) $Kn = 0.01$ (ii) $Kn = 0.05$ (iii) $Kn = 0.10$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιλύθηκαν κλασσικά προβλήματα της ρευστομηχανικής στην υδροδυναμική περιοχή και στην περιοχή ολίσθησης. Οι μέθοδοι που ακολουθήθηκαν βασίζονται στις εξισώσεις συνέχειας και Navier - Stokes, οι οποίες σε γενικές γραμμές είναι αρκετά ταχύτερες από τις άλλες διαθέσιμες μεθόδους. Η ολίσθηση στα τοιχώματα υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας συνοριακές συνθήκες τύπου Maxwell, Deissler και χρησιμοποιώντας για πρώτη φορά οριακές συνθήκες ολίσθησης με τον συντελεστή ιξώδους ολίσθησης που προβλέπει η κινητική θεωρία. Τα αποτελέσματα που έδωσαν συγκρίθηκαν μεταξύ τους και με πειραματικά δεδομένα. Και οι τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών δίνουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά που θα είχαμε με οριακές συνθήκες μη ολίσθησης. Ποιοτικά, η μορφή των καμπυλών που δίνουν οι τρεις τύποι συνοριακών είναι παρόμοια, προσεγγίζουν, όμως, τα πειραματικά αποτελέσματα με συντελεστές προσαρμογής α οι οποίοι μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους μέχρι και περίπου 6%.

Επίσης, για πρώτη φορά επιλύθηκαν τα προβλήματα της ροής σε κοιλότητα, της ροής σε κανάλι με αυλακώσεις και της ροής σε βηματική γεωμετρία με το σύστημα ροϊκής συνάρτησης - στροβιλότητας και αντίστοιχες οριακές συνθήκες ολίσθησης, αφού πρώτα επιβεβαιώθηκε ότι ο κώδικας δίνει σωστά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα είναι σε καλή συμφωνία με τα άρθρα [17] και [18] και δείχνουν ότι η αύξηση του Knudsen ή η μείωση του συντελεστή προσαρμογής α προκαλούν την ένωση των γειτονικών δινών ή την εξαφάνιση τους αν είναι πολύ μικρές.

Καθώς ο Knudsen αυξάνεται (ή ο συντελεστής προσαρμογής μειώνεται), παρατηρούμε μείωση του συντελεστή αντίστασης στα προβλήματα της κοιλότητας και του καναλιού με αυλακώσεις και μείωση των παροχών στο πρόβλημα της κοιλότητας. Τέλος, παρατηρούμε ότι μεταβάλλοντας αναλόγως τη ροή στη βηματική γεωμετρία η δίνη μπορεί να μικραίνει ή να μεγαλώνει ανάλογα με τον αριθμο Re για τα συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εξετάστηκαν.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σύγκριση με αποτελέσματα που προκύπτουν με χρήση της κινητικής θεωρίας. Επίσης, θα μπορούσαν να επιλυθούν ροές σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες και σε προβλήματα με μίγματα αερίων με επέκταση των μεθόδων που ακολουθήθηκαν. Τέλος, η περαιτέρω μελέτη θα μπορούσε να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των φαινομένων που σχετίζονται με την αραιοποίηση των ρευστών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Arkilic E. B., Breuer K. S. & Schmidt M. A., 1994 *Gaseous Flow in Microchannels* in Application of Microfabrication to Fluid Mechanics, FED-Vol. 197, pp. 57-66, ASME, New York
- [2] Bozeman J. D. & Dalton C. 1973 *Numerical study of viscous flow in a cavity*, Journal of computational physics 12, 348-363
- [3] Colin S., Lalonde P. & Caen R. 2004 *Validation of a second order slip flow model in rectangular microchannels*, Heat transfer engineering 25(3):23-30
- [4] Colin S. & Aubert C. 2001 *High-Order Boundary Conditions for gaseous flows in rectangular Microducts*, Microscale Thermophysical Engineering 1089-3954/01
- [5] Deissler R.G., 1964 *An analysis of Second order slip flow and temperature jump boundary conditions for rarefied gases*, Int.J HeatMassTransfer. Vol. 7. pp. 681--694. Pergamon Press1964.
- [6] Ebert W.A. & Sparrow E.M., 1965 *Slip flow in rectangular and annular ducts*, J. Basic Eng. Vol 87 pp 1018-1024
- [7] Gad-el-Hak M., 2002 *The MEMS Handbook*, CRC Press LLC
- [8] Ghia, U., Ghia, K. N. & Shin, C.T. 1982 *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*, Journal of computational physics 48, 387-411
- [9] Ho C. M. & Tai Y.C. 1998 *Micro-electro-mechanical-systems (MEMS) and fluid flows*. Annu. Rev. Fluid Mech. 30, 579-612.
- [10] Hou S., Zou Q., Chen S., Doolen G. & Cogley A.C. 1995 *Simulation of cavity flow by the Lattice Boltzmann Method*, Journal of computational physics 118, 329-347
- [11] Huang K., 1987 *Statistical Mechanics*, John Wiley & sons
- [12] Karniadakis G. E. & Beskok A. 2002 *Micro Flows-Fundamentals and simulation*, Springer-Verlag, New York, Inc.

- [13] Lockerby D.A. & Reese J.M. 2007 *Near Wall scaling of the Navier-Stokes constitutive relations for accurate micro gas flow simulations*, Proceedings of ASME ICNMM2007, 5th International Conference on Nanochannels, Microchannels and Minichannels, June 18-20, Puebla, Mexico
- [14] Morini G.L. & Spiga M. 1998, *Slip flow in rectangular microtubes*, Microscale Thermophys. Eng., vol 2, pp 273-282
- [15] Naris S., Valougeorgis D., Kalempa D. & Sharipov F., 2005 *Flow of gaseous mixtures through rectangular microchannels driven by pressure, temperature and concentration gradients*, Physics of fluids 17, 100607
- [16] Naris S. & Valougeorgis D., *Non-equilibrium gas flow in a triangular duct*
- [17] Naris S. & Valougeorgis D., 2007 *Boundary driven non-equilibrium gas flow in a grooved channel via kinetic theory*, Physics Of Fluids 19, 067103
- [18] Naris S. & Valougeorgis D. 2005 *The driven cavity flow over the whole range of the Knudsen number*, Physics Of Fluids 17, 097106
- [19] Reese J. M., Gallis M. A. & Lockerby D. A. 2003 *New directions in fluid dynamics: non-equilibrium aerodynamic and microsystem flows*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 361, 2967-2988
- [20] Roache, J. 1972 *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque, N. Mex.
- [21] Schreiber R. & Keller H. B. 1983 *Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques*, Journal of computational physics 49, 310-333
- [22] Shankar P. N. & Deshpande M. D. 2000 *Fluid Mechanics in the Driven Cavity*, Annu. Rev. Fluid Mech. 32:93–136
- [23] Sharipov F., Fahrenbach P. & Zipp A., 2005 *Numerical modeling of the Holweck pump*, J. Vac. Sci. Technol. A 23(5), September/October

- [24] Sharipov F. & Seleznev V., 1998 *Data on internal rarefied gas flows*, American institute of physics and American Chemical society
- [25] Shih J. C., Ho C.-M., Liu J. and Tai Y.-C., *Monatomic and Polyatomic Gas Flow through Uniform Microchannels*, DSC-Vol. 59, pp. 197-203, ASME, New York, 1996
- [26] Suh R.S., Phadke N., Ohl D.A., Takayama S. & Smith G.D. 2003 *Rethinking gamete/embryo isolation and culture with microfluidics*, Human Reproduction Update, Vol.9, No.5 pp. 451±461
- [27] Wang C.Y. 2003 *Slip flow in a triangular duct-An exact solution*, Z. Angew. Math. Mech. 83, No.9 629-631
- [28] Ziaie B., Baldi A., Lei M., Gu Y. & Siegel R.A., 2004 *Hard and soft micromachining for BioMEMS: review of techniques and examples of applications in microfluidics and drug delivery*, Advanced Drug Delivery Reviews 56 145– 172
- [29] Τζενετίδης Παντελής 2005 *Επίλυση κλασσικών προβλημάτων κινητικής θεωρίας με εφαρμογή στη μικρορευστοδυναμική*, Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ΚΩΔΙΚΕΣ

Π.1.1 Διαγράμματα 2.3 και 2.4

```
Program duct1
Use temn
Use leastsquares
Implicit None

Real(8),allocatable::w(:,,:),wold(:, :)
Real(8)::a,alpha(5),s,sp,Kn,h,paroxi,X(3),Kno,z,P,err,error
Integer::i,j,k,n,order

Open(33,file='pieseis.txt')
Open(50,file='m.txt')
Open(77,file='sintelestes.txt')
Open(99,file='tetartimorio.txt')

n=51           !Arithmos komvwn se kathe dieuthinsi gia to tetartimorio pou
               !eksetazetai
h=1. / (n-1)   !Thewroume isa diastimata stis dieuthinseis x kai y (dx=dy=h)
err=1e-10      !Kritirio termatismou
Kno=0.1        !Knudsen eksodou tou agwgou (xreiazetai gia ta diagrammata
               !      adiaastatis piesis kai paroxis)

alpha=(/0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1./)

!Me tin metavliti order simvolizontai oi treis diaforetikoi typoi synoriakwn
!Otan auti pairnei tin timi 1 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes typou Maxwell
!Otan auti pairnei tin timi 2 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes typou Deissler
!Otan auti pairnei tin timi 3 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes me ton syntelesti
!      ikswdous olisthisis tis kinitikis thewrias
!
!H metavliti a einai o logos twn pleurwn, ypsos / platos
!Pairnei times apo ton pinaka alpha diadoxika

Do order=1,3           !order loop
Do k=1,5               !alpha loop
Do s=0.9, 1.1, 0.1    !accommodation coefficient loop

a=alpha(k)
write(*,100) order,a,s
write(99,100) order,a,s

Do Kn=0.01,0.1,0.01   !Knudsen loop

sp=(2-s)/s *(1.018-0.1211*(1-s))
```

```

Allocate( w(n+1,0:n), wold(n+1,0:n) )

w=0.
wold=0.
error=1.      !Vazoume mia megali timi sto error gia na mpei stin epanalipsi

Do while(error>err)

    wold=w

    !#####
    !Oriakes sinthikes,ananti paragwgiseis
    !#####

    !Deksia pleura
    If(order==1) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-(2-s)/s *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) ) / &
                (1+ 3./h*a*Kn*(2.-s)/s)
        End do

    ElseIf(order==2) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-(2-s)/s *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) &
                - 9./4.*Kn**2*(a**2*(-5*w(i,n-1)+4*w(i,n-2)-w(i,n-3))/h**2 - 1)) &
                / (1 + (2-s)/s*a*Kn*3./h + 9./4.*Kn**2*a**2*2./h**2)
        End do

    ElseIf(order==3) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-sp*(2./sqrt(3.141592)) *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) ) / &
                (1+ 3./h*a*Kn*sp*(2./sqrt(3.141592)))
        End do

    End If

    !Epanw pleura
    If(order==1) then

        Do j=1,n
            w(1,j)= (-(2-s)/s *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) ) / (1+ 3./h*Kn*(2.-s)/s)
        End do

    ElseIf(order==2) then

```

```

Do j=1,n
    w(1,j)= (-(2-s)/s *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) &
        - 9./4.*Kn**2*((-5*w(2,j)+4*w(3,j)-w(4,j))/(h**2) - 1)) &
        / (1 + (2-s)/s*Kn*3./h + 9./4.*Kn**2*2./h**2)
End do

ElseIf(order==3) then

Do j=1,n
    w(1,j)= (-sp*(2./sqrt(3.141592)) *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) ) / &
        (1+ 3./h*Kn*sp*(2./sqrt(3.141592)))
End do

End if

!Aristeri pleura
Do i=1,n+1
    w(i,0)= w(i,2)
End do

!Katw pleura
Do j=0,n
    w(n+1,j)= w(n-1,j)
End do

#####
!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn
#####

Do i=2,n
    Do j=1,n-1
        w(i,j)=(w(i-1,j) + w(i+1,j) + a**2*w(i,j-1) &
            + a**2*w(i,j+1) + h**2) / (2 + 2*a**2)
    End do
End do

#####
!Athroisma apolytwn sfalmatwn, xrisimopieitai sto kritirio termatismou
#####

error=0.
Do i=1,n
    Do j=1,n
        error = error + abs( wold(i,j)-w(i,j) )
    End do
End do

```

```

End do

#####
!Ypologismos paroxis sto tetartimorio pou eksetazetai
#####

!Gia ton ypologismo tis olikis paroxis mporoume aplws na pollaplasiasoume
!      ta apotelesmata me ton syntelesti 4
!Ta apotelesmata dinontai sto arxeio 'tetartimorio.txt'

paroxi=w(1,1)+w(n,n)+w(n,1)+w(1,n)

Do i=2,n-1
    paroxi=paroxi + 2*w(1,i) + 2*w(n,i) + 2*w(i,1) + 2*w(i,n)
End do

Do i=2,n-1
    Do j=2,n-1
        paroxi=paroxi + 4*w(i,j)
    End do
End do

Paroxi=paroxi * ((h**2)/4.)

write(99,'(f8.6,2x,f8.6)') Kn,paroxi

Deallocate(w,wold)

End do                                     !Knudsen loop

#####
!Syntelestes elaxistwn tetragwnwn
#####

!Gia kathe 10 Knudsen pairnoume treis sintelestes xrisimopoiwntas
!      methodo elaxistwn tetragwnwn
!Oi sintelestes autoi gia synoriakes sinthikes typou Deissler
!      apothikeuontai sto arxeio 'sintelestes.txt' gia sigkrisi me tous
!      sintelestes pou dinontai apo ton Colin (2001)

call lsq(X)
write(99,*)

If (order==2) then
    write(77,200) a,s,x

```

```

End if

#####
!Diagrammata adiaastatis paroxis
#####

!Gia logo pleurwn 1 i 0.1 kai gia accomodation coefficient iso me 1
!   dinei tin adiaastati paroxi sinartisei tou logou piesewn eisodou / eksodou P
!Ta apotelesmata dinontai sto arxeio 'm.txt'

If( ((a==0.1).or.(a==1.)).and.( abs(s-1.)<1e-6. ) )then

    write(50,300) a,order
    write(50,*) '   logos piesewn           adiaastati paroxi'

    Do P=1.1,3.6,0.1
        write(50,'(8x,f3.1,18x,f8.6)') P, 1 + 2*X(2)/X(1) * Kno/(P+1) &
            + 2*X(3)/X(1) * (Kno**2) *Log(P) / (P**2-1)
    End do

    write(50,*)

End if

#####
!Diagrammata adiaastatis piesis
#####

!Gia logo pleurwn 1 i 0.1 kai gia accomodation coefficient iso me 1
!   dinei tin adiaastati piesi sinartisei tou adiaastatou mikous z
!Ta apotelesmata dinontai sto arxeio 'pieseis.txt'

If ( ((a==0.1).or.(a==1.)).and.( abs(s-1.)<1e-6. ) )then

    write(33,300) a,order
    write(33,*) '   adiaastato z           adiaastati piesi'

    Do z=0, 1, 0.01
        call temnousa(Kno,X,z,P)
        Write(33,'(6x,f4.2,18x,f8.6)') z, P
    End do

    write(33,*)

End if

```

```

End do                                !accomodation coefficient loop
End do                                !alpha loop
End do                                !order loop

```

```

Close(33)
Close(50)
Close(77)
Close(99)

```

```

100 Format(' order = ',I1,' a = ',f4.2,' s = ',f4.2)
200 Format(' a = ',f4.2,' s = ',f4.2,' x = ',f6.4,2x,f6.4,2x,f6.4)
300 Format(' a = ',f4.2,' order = ',I1)

```

```

End Program

```

```

Module leastsquares

```

```

Implicit None

```

```

!#####
!Methodos elaxistwn tetragwnwn
!#####

```

```

Contains

```

```

Subroutine lsq(X)

```

```

Integer::i,j,k

```

```

Real(8)::A(3,3),B(3),X(3),xi(10),yi(10),xold(3),sfalma(3),sum

```

```

!Diavazoume tis teleutaies 10 grammes tou arxeiou 'tetartimorio.txt'

```

```

Do i=1,10

```

```

    Backspace(99)

```

```

End do

```

```

Do i=1,10

```

```

    Read(99,'(2(f8.6,2x))') xi(i),yi(i)

```

```

End do

```

```

Do i=1,3

```

```

    Do j=1,3

```

```

        Sum=0

```



```

        Do k=1,10
            Sum=sum+xi(k)**(i+j-2)
        End do
        A(i,j)=Sum
    End do
End do

Do i=1,3
    Sum=0
    Do k=1,10
        sum=sum+yi(k)*xi(k)**(i-1)
    End do
    B(i)=sum
End do

!Epilisi tou sistimatos
sfalma=1
Do while(maxval(sfalma)>1e-10)
    xold=x

    Do i=1,3
        x(i)=b(i)
        Do j=1,3
            If(i/=j) x(i)=x(i)-A(i,j)*x(j)
        End do
        x(i)=x(i)/A(i,i)
    end do

    Do i=1,3
        sfalma(i)=abs(xold(i)-x(i))
    End do

end do

End Subroutine

End module

Module temn
implicit none

!#####

```

```
!Methodos temnousas
!#####
!
!Xrisimopoeitai gia tin epilysi tis eksiswsis tis adiaastatis piesis
!
```

Contains

```
subroutine temnousa(Kno,X,z,P)
real(8)::x0,x1,x2,fx0,fx1,fx2,X(3),Kno,z,P
```

```

x0=2
x1=1.5
fx0=f(Kno,X,z,x0)
fx1=f(Kno,X,z,x1)
```

```

Do
    x2=x1-fx1*(x0-x1)/(fx0-fx1)
    fx2=f(Kno,X,z,x2)
    if (abs(x2-x1)/x2<1e-8) exit
    x0=x1
    x1=x2
    x2=0.
    fx0=fx1
    fx1=fx2
```

```
end do
```

```
P=x2
```

```
end subroutine
```

```
Real Function f(Kno,X,z,Pstar)
```

```
real(8)::X(3),z,Kno,Pstar,P
```

```

P=2.5
f=X(1)/2. * ((Pstar*sqrt((1-z)*(P**2-1)+1))**2-1) + &
X(2)*Kno*( Pstar*sqrt((1-z)*(P**2-1)+1)-1)&
+X(3)*Kno**2*Log(Pstar*sqrt((1-z)*(P**2-1)+1)) &
- (1-z)*( X(1)/2.*(P**2-1) + X(2)*Kno*(P-1)&
+X(3)*Kno**2*Log(P) )
```

```
end function
```

```
end module
```

Π.1.2 Διαγράμματα των πειραμάτων του κεφαλαίου 2

```
Program duct2
Use leastsquares
Implicit None

Real(8),allocatable::w(:,,:),wold(:,,:)
Real(8)::a,s,sp,Kn,Kno,h,paroxi,X(3),pi,ypsos,Po,ikswdes,P,R,T,L,err,error
Integer::i,j,k,n,order

Open(99,file='tetartimorio.txt')
Open(50,file='peirama.txt')

n=51                !Arithmos komvwn se kathe dieuthinsi gia to tetartimorio pou
                   !eksetazetai
h=1. / (n-1)        !Thewroume isa diastimata stis dieuthinseis x kai y (dx=dy=h)
err=1e-10           !Kritirio termatismou
pi=3.141592         !To gnwsto pi=3.14

a=0.087             !H metavliti a einai o logos twn pleurwn, ypsos / platos
ypsos=1.88e-6 / 2.  !Ypsos tou agwgou / 2.
ikswdes=1.732e-5    !Ikswdes
R=296.8             !H stathera tou aeriou
T=294.2             !Thermokrasia
L=0.005             !Mikos tou agwgou
Po= 2e+5            !Piesi eksodou
Kno= ikswdes / ( 2.*ypsos*Po) &
    * sqrt( pi*R*T / 2.)  !Arithmos Knudsen stin eksodo,ypologizetai
                           !apo tin Po

Write(*,*) Kno

!Me tin metavliti order simvolizontai oi treis diaforetikoi typoi synoriakwn
!Otan auti pairnei tin timi 1 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes typou Maxwell
!Otan auti pairnei tin timi 2 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes typou Deissler
!Otan auti pairnei tin timi 3 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes me ton syntelesti
!    ikswdous olisthisis tis kinitikis thewrias

Do k=1,3                !loop periptwsewn

Select Case (k)
  Case(1)
    order = 1
    s = 0.92
  Case(2)
    order = 2
    s = 0.93
  Case(3)
```

```

        order = 3
        s = 0.98
End Select

write(*,100) order,a,s
write(99,100) order,a,s

Do Kn=0.01,0.1,0.01                                !Knudsen loop

sp=(2-s)/s *(1.018-0.1211*(1-s))

Allocate( w(n+1,0:n), wold(n+1,0:n) )

w=0.
wold=0.
error=1.      !Vazoume mia megali timi sto error gia na mpei stin epanalipsi

Do while(error>err)

    wold=w

    !#####
    !Oriakes sinthikes,ananti paragwgiseis
    !#####

    !Deksia pleura
    If(order==1) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-(2-s)/s *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) ) &
                / (1+ 3./h*a*Kn*(2.-s)/s)
        End do

    ElseIf(order==2) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-(2-s)/s *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) &
                - 9./4.*Kn**2*(a**2*(-5*w(i,n-1)+4*w(i,n-2)-w(i,n-3))/h**2 - 1)) &
                / (1 + (2-s)/s*a*Kn*3./h + 9./4.*Kn**2*a**2*2./h**2)
        End do

    ElseIf(order==3) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-sp*(2./sqrt(3.141592)) *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) ) / &

```

```

(1+ 3./h*a*Kn*sp*(2./sqrt(3.141592)))
End do

End If

!Epanw pleura
If(order==1) then

Do j=1,n
w(1,j)= (-(2-s)/s *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) ) &
/ (1+ 3./h*Kn*(2.-s)/s)
End do

ElseIf(order==2) then

Do j=1,n
w(1,j)= (-(2-s)/s *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) &
- 9./4.*Kn**2*((-5*w(2,j)+4*w(3,j)-w(4,j))/(h**2) - 1)) &
/ (1 + (2-s)/s*Kn*3./h + 9./4.*Kn**2*2./h**2)
End do

ElseIf(order==3) then

Do j=1,n
w(1,j)= (-sp*(2./sqrt(3.141592)) *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) ) / &
(1+ 3./h*Kn*sp*(2./sqrt(3.141592)))
End do

End if

!Aristeri pleura
Do i=1,n+1
w(i,0)= w(i,2)
End do

!Katw pleura
Do j=0,n
w(n+1,j)= w(n-1,j)
End do

#####
!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn
#####

Do i=2,n
Do j=1,n-1
w(i,j)=(w(i-1,j) + w(i+1,j) + a**2*w(i,j-1) &

```

```

+ a**2*w(i,j+1) + h**2) / (2 + 2*a**2)

End do
End do

#####
!Athroisma apolytwn sfalmatwn, xrisimopieitai sto kritirio termatismou
#####

error=0.
Do i=1,n
  Do j=1,n
    error = error + abs( wold(i,j)-w(i,j) )
  End do
End do

End do

#####
!Ypologismos paroxis sto tetartimorio pou eksetazetai
#####

!Gia ton ypologismo tis olikis paroxis mporoume aplws na pollaplasiasoume
! ta apotelesmata me ton syntelesti 4
!Ta apotelesmata dinontai sto arxeio 'tetartimorio.txt'

paroxi=w(1,1)+w(n,n)+w(n,1)+w(1,n)

Do i=2,n-1
  paroxi=paroxi + 2*w(1,i) + 2*w(n,i) + 2*w(i,1) + 2*w(i,n)
End do

Do i=2,n-1
  Do j=2,n-1
    paroxi=paroxi + 4*w(i,j)
  End do
End do

Paroxi=paroxi * ((h**2)/4.)

write(99,'(2(f8.6,2x))') Kn,paroxi

Deallocate(w,wold)

End do
!Knudsen loop

```

```

#####
!Syntelestes elaxistwn tetragwnwn
#####

!Gia kathe 10 Knudsen pairnoume treis sintelestes xrisimopoiwntas
!      methodo elaxistwn tetragwnwn

call lsq(X)
write(99,*)

#####
!Paroxi sinartisei tou logou piesewn
#####
!H adiastrati paroxi mporei na ekfrastei sinartisei tou logou piesewn
!eisodou / eksodou P
!Ta apotelesmata apothikeuontai sto arxeio 'peirama.txt'

write(50,100) order,a,s
write(50,*) ' logos piesewn          adiastrati paroxi'

Do P=1.1,3.1,0.1

    write(50,200) P, ( 4* (ypsos**4) * Po**2 ) / ( a * ikswdes * R * T * L ) &
        * ( x(1) * (P**2-1) / 2. + x(2) * Kno * (P-1) + x(3) * (Kno**2) * &
        Log(P) ) * 1e+9

End do

write(50,*)

If (order==2) Then

    write(50,*) 'NO SLIP'
    write(50,*) ' logos piesewn          adiastrati paroxi'

    Do P=1.1,3.1,0.1

        write(50,200) P, ( 4* (ypsos**4) * Po**2 ) / ( a * ikswdes * R * T * L ) &
            * x(1) * (P**2-1) / 2. * 1e+9

    End do

write(50,*)

```

```

End If

End do                                     !loop periptwsewn

Close(50)
Close(99)

100 Format(' order = ',I1,' a = ',f7.5,' s = ',f4.2)
200 Format(7x,f4.2,18x,f8.6)

End Program

```

Π.1.3 Αδιάστατο διάγραμμα 2.12

```

Program duct3
Use leastsquares
Implicit None

Real(8),allocatable::w(:,:),wold(:,:)
Real(8)::a,s,sp,Kn,Kno,h,paroxi,X(3),pi,P,err,error
Integer::i,j,k,n,order

Open(99,file='tetartimorio.txt')
Open(50,file='peirama.txt')

n=51                                     !Arithmos komvwn se kathe dieuthinsi gia to tetartimorio pou
                                       !eksetazetai
h=1. / (n-1)                             !Thewroume isa diastimata stis dieuthinseis x kai y (dx=dy=h)
err=1e-10                                 !Kritirio termatismou
pi=3.141592                               !To gnwsto pi=3.14

a=0.1                                     !H metavliti a einai o logos twn pleurwn, ypsos / platos

!Me tin metavliti order simvolizontai oi treis diaforetikoi typoi synoriakwn
!Otan auti pairnei tin timi 1 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes typou Maxwell
!Otan auti pairnei tin timi 2 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes typou Deissler
!Otan auti pairnei tin timi 3 xrisimopoiountai synoriakes sinthikes me ton syntelesti
!      ikswdous olisthisis tis kinitikis thewrias

Do k=1,5                                 !loop periptwsewn

Select Case (k)
  Case(1)
    order = 1
    s = 0.93

```



```

Case(2)
    order = 2
    s = 0.93
Case(3)
    order = 3
    s = 0.83
Case(4)
    order = 3
    s = 0.89
Case(5)
    order = 3
    s = 0.93
End Select

write(*,100) order,a,s
write(99,100) order,a,s

Do Kn=0.01,0.1,0.01                                !Knudsen loop

sp=(2-s)/s *(1.018-0.1211*(1-s))

Allocate( w(n+1,0:n), wold(n+1,0:n) )

w=0.
wold=0.
error=1.      !Vazoume mia megali timi sto error gia na mpei stin epanalipsi

Do while(error>err)

    wold=w

    !#####
    !Oriakes sinthikes,ananti paragwgiseis
    !#####

    !Deksia pleura
    If(order==1) then

        Do i=1,n
            w(i,n)= (-(2-s)/s *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) ) &
                / (1+ 3./h*a*Kn*(2.-s)/s)
        End do

    ElseIf(order==2) then

```

```

Do i=1,n
    w(i,n)= (-(2-s)/s *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) &
    - 9./4.*Kn**2*(a**2*(-5*w(i,n-1)+4*w(i,n-2)-w(i,n-3))/h**2 - 1)) &
    / (1 + (2-s)/s*a*Kn*3./h + 9./4.*Kn**2*a**2*2./h**2)
End do

ElseIf(order==3) then

    Do i=1,n
        w(i,n)= (-sp*(2./sqrt(3.141592)) *a*Kn* (4*w(i,n-1)-w(i,n-2)))/(-h) ) / &
        (1+ 3./h*a*Kn*sp*(2./sqrt(3.141592)))
    End do

End If

!Epanw pleura
If(order==1) then

    Do j=1,n
        w(1,j)= (-(2-s)/s *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) ) / (1+ 3./h*Kn*(2.-s)/s)
    End do

ElseIf(order==2) then

    Do j=1,n
        w(1,j)= (-(2-s)/s *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) &
        - 9./4.*Kn**2*((-5*w(2,j)+4*w(3,j)-w(4,j))/h**2) - 1)) &
        / (1 + (2-s)/s*Kn*3./h + 9./4.*Kn**2*2./h**2)
    End do

ElseIf(order==3) then

    Do j=1,n
        w(1,j)= (-sp*(2./sqrt(3.141592)) *Kn* (4*w(2,j)-w(3,j)))/(-h) ) / &
        (1+ 3./h*Kn*sp*(2./sqrt(3.141592)))
    End do

End if

!Aristeri pleura
Do i=1,n+1
    w(i,0)= w(i,2)
End do

!Katw pleura
Do j=0,n

```

```

        w(n+1,j)= w(n-1,j)
End do

#####
!Eksiswsi peperasmewn diaforwn
#####

Do i=2,n
    Do j=1,n-1
        w(i,j)=(w(i-1,j) + w(i+1,j) + a**2*w(i,j-1) &
                + a**2*w(i,j+1) + h**2) / (2 + 2*a**2)
    End do
End do

#####
!Athroisma apolytwn sfalmatwn, xrisimopoitai sto kritirio termatismou
#####

error=0.
Do i=1,n
    Do j=1,n
        error = error + abs( wold(i,j)-w(i,j) )
    End do
End do

End do

#####
!Ypologismos paroxis sto tetartimorio pou eksetazetai
#####

!Gia ton ypologismo tis olikis paroxis mporoume aplws na pollaplasiasoume
! ta apotelesmata me ton syntelesti 4
!Ta apotelesmata dinontai sto arxeio 'tetartimorio.txt'

paroxi=w(1,1)+w(n,n)+w(n,1)+w(1,n)

Do i=2,n-1
    paroxi=paroxi + 2*w(1,i) + 2*w(n,i) + 2*w(i,1) + 2*w(i,n)
End do

Do i=2,n-1
    Do j=2,n-1
        paroxi=paroxi + 4*w(i,j)
    End do

```

```

End do

Paroxi=paroxi * ((h**2)/4.)

write(99,'(2(f8.6,2x))') Kn,paroxi

Deallocate(w,wold)

End do                                     !Knudsen loop

!#####
!Syntelestes elaxistwn tetragwnwn
!#####

!Gia kathe 10 Knudsen pairnoume treis sintelestes xrisimopoiwntas
!      methodo elaxistwn tetragwnwn

call lsq(X)
write(99,*)

write(50,100) order,a,s
write(50,*) ' Knudsen eksodou          1. / adiastrati paroxi'

P=1.8
Do Kno=0,0.55,0.05
    write(50,200) Kno, 1./(1. + 2*X(2)/X(1)*Kno/(P+1) + 2*X(3)/X(1) * Kno**2 &
        *Log(P)/ (P**2-1) )
End do

write(50,*)

End do                                     !loop periptwsewn

Close(50)
Close(99)

100 Format(' order = ',I1,' a = ',f7.5,' s = ',f4.2)
200 Format(8x,f4.2,20x,f10.8)

End Program

```

Π.1.4 Πρόβλημα κοιλότητας με τον αλγόριθμο της διαρμονικής

```
Program cavity_diarmoniki
Implicit None

Real(8),allocatable::psi(:,,:),psiold(:,,:),u(:,,:),v(:,,:)
Real(8)::h,err,errorpsi,Re,Kn,s,D,drag
Integer::i,j,nx,ny,epanalipsi

Open(20,file='psi.dat')
Open(50,file='results.txt')
Open(70,file='ukentriko.txt')
Open(80,file='vkentriko.txt')

err=1e-10                                !kritirio termatismou

D=0.5                                     !Logos pleurwn, H / W
nx=101                                    !Arithmos komvwn stin kateuthinsi x
Re=0.                                     !O Reynolds einai panta 0. sti diarmtoniki
Kn=0.                                     !Arithmos Knudsen
s=1.                                      !Accomodation coefficient

Write(*,500) D,nx,Re,Kn
Write(*,*)
Write(50,500) D,nx,Re,Kn
Write(50,*)

ny = (nx-1)*D + 1                        !Arithmos komvwn stin kateythinsi y pou prokypetei
                                         !xrisimopoiwntas dx=dy=h

Allocate(psi(0:ny+1,0:nx+1),psiold(0:ny+1,0:nx+1),u(ny,nx),v(ny,nx))

epanalipsi=0                             !arithmos epanalipsis
psi=0.
u=0.
v=0.
h=1. / (nx-1)                            !dx=dy=h

errorpsi=1.                              !Vazoume mia megali timi gia na mpei stin epanalipsi

Do while(errorpsi>err)

    epanalipsi=epanalipsi+1
    psiold=psi

    !Synoriakes synthikes aristera & deksia
```

```

Do i=1,ny

    psi(i,0)=psi(i,2) * (h - 2*(2.-s)/s*Kn) / (h + 2*(2.-s)/s*Kn)
    psi(i,nx+1)=psi(i,nx-1) * (h - 2*(2.-s)/s*Kn) / (h + 2*(2.-s)/s*Kn)

End do

!Synoriakes synthikes katw & panw
Do j=1,nx

    psi(0,j)=psi(2,j) * (h - 2*(2.-s)/s*Kn) / (h + 2*(2.-s)/s*Kn)
    psi(ny+1,j)=psi(ny-1,j) * (h - 2*(2.-s)/s*Kn) / (h + 2*(2.-s)/s*Kn) &
        + 2.*(h**2) / (h + 2*(2.-s)/s*Kn)

End do

!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn
!Sarwma tou plegmatos apo panw pros ta katw
Do i=ny-1,2,-1
    Do j=2,nx-1

        psi(i,j)= (1./ 20) * ( 8*psi(i-1,j) - psi(i-2,j) + 8*psi(i+1,j) &
            -psi(i+2,j) - 2*psi(i-1,j+1) - 2*psi(i+1,j+1) - 2*psi(i+1,j-1) - &
            2*psi(i-1,j-1) + 8*psi(i,j-1) - psi(i,j-2) + 8*psi(i,j+1) &
            - psi(i,j+2) )

    End do
End do

!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn
!Sarwma tou plegmatos apo katw pros ta panw
Do i=2,ny-1
    Do j=nx-1,2,-1

        psi(i,j)= (1./ 20) * ( 8*psi(i-1,j) - psi(i-2,j) + 8*psi(i+1,j) &
            -psi(i+2,j) - 2*psi(i-1,j+1) - 2*psi(i+1,j+1) - 2*psi(i+1,j-1) - &
            2*psi(i-1,j-1) + 8*psi(i,j-1) - psi(i,j-2) + 8*psi(i,j+1) &
            - psi(i,j+2) )

    End do
End do

errorpsi=0.

!Athroizoume ta apolita sfalmata
Do i=2,ny-1

```

```

        Do j=2,nx-1

                errorpsi=errorpsi + abs(psiold(i,j)-psi(i,j))

        End do
End do

If (mod(epanalipsi,5000)==0) write(*,*) epanalipsi,errorpsi

End do

!Ypologismos taxititwn
Do i=1,ny
    Do j=1,nx

        u(i,j)=( psi(i+1,j)-psi(i-1,j) ) / (2*h)
        v(i,j)= -( psi(i,j+1)-psi(i,j-1) ) / (2*h)

    End do
End do

Write(20,*) 'TITLE = "Results"'
Write(20,100)
Write(20,200) 100000,ny,nx

Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(20,300) j,i,psi(i,j),u(i,j),v(i,j)
    End do
End do

write(*,*)

!Apothikeusi kathetwn taxititwn sto kentro tis koiilotitas
Do j=1,nx
    write(80,*) v(ny/2+1,j)
End do
write(80,*)

!Apothikeusi orizontiwn taxititwn sto kentro tis koiilotitas
Do i=ny,1,-1
    write(70,*) u(i,nx/2+1)
End do
write(70,*)

```

```

!Syntelestis olisthisis
drag=(-3*u(ny,1) + 4*u(ny-1,1) - u(ny-2,1)) / (-2*h)
Do j=2,nx-1
    drag=drag + 2*(-3*u(ny,j) + 4*u(ny-1,j) - u(ny-2,j)) / (-2*h)
End do
drag=drag + (-3*u(ny,nx) + 4*u(ny-1,nx) - u(ny-2,nx)) / (-2*h)
drag=drag*h/2.

write(*,*) 'drag=',drag
write(*,*)
write(50,*) 'drag=',drag

!Euresi tou elaxistou psi to opoio isoutai me tin paroxi
write(*,*) 'minval=', minval(psi)
write(50,*) 'minval=', minval(psi)

!Kataxwrisi tw'n psi, u, v me tin morfi pou anagnwrizetai apo to TECPLOT
Write(20,*) 'TITLE = "Results"'
Write(20,100)
Write(20,200) 100000,ny,nx

Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(20,300) j,i,psi(i,j),u(i,j),v(i,j)
    End do
End do

Deallocate(psi,psiold,u,v)

Close(20)
Close(50)
Close(70)
Close(80)

100 Format('VARIABLES = "I","J","Psi","U","V"')
200 Format('ZONE T="'I8'", J='I4', I='I4', F=POINT ')
300 Format(1X,2(I4),3(F19.14))
500 Format('D='f3.1', nx='I3', Re='f5.1', Kn='f4.2' ')

End Program

```


Π.1.5 Πρόβλημα κοιλότητας με τον αλγόριθμο ροϊκής συνάρτησης – στροβιλότητας

```
Program cavity
Implicit None

Real(8),allocatable::psi(:,,:),psiold(:,,:),zita(:,,:),zitaold(:,,:),u(:,,:),v(:,,:)
Real(8)::h,err,errorpsi,errorzita,omega,Re,Kn,s,sp,D,drag,Vort(10),pi
Integer::i,j,nx,ny,epanalipsi,Vortx(8),Vorty(8),k,m,smaller,greater,o,p
Character(14)::filename

err=1e-10                                !kritirio termatismou
pi=3.1415926536                           !To gnwsto pi=3.14
nx=101                                    !Arithmos komvwn stin kateuthinsi x
s=1.                                       !Accomodation coefficient
Re=0.                                       !Arithmos Reynolds

!Me D symvolizoume ton logo pleurwn, H / W
!Kn = arithmos Knudsen

Do k=1,3                                   !loop periptwsewn

Select Case(k)
  Case(1)
    D=1.
    Kn=0.
  Case(2)
    D=1.
    Kn=0.1
  Case(3)
    D=0.5
    Kn=0.1
  Case(4)
  Case(5)
  Case(6)
  Case(7)
  Case(8)
  Case(9)
  Case Default
End Select

!Edw anoigoume ta arxeia. O kw dikas autos dinei diaforetiko onoma
!sto arxeio analoga me tin periptwsi stin opoia vriskomaste.
filename='psi'//Char(47+k)//'.dat'
Open(20,file=filename)
```

```

filename='vorticity'//Char(47+k)//'.txt'
Open(30,file=filename)

filename='results'//Char(47+k)//'.txt'
Open(50,file=filename)

filename='ukentriko'//Char(47+k)//'.txt'
Open(70,file=filename)

filename='vkentriko'//Char(47+k)//'.txt'
Open(80,file=filename)

sp= (2.-s)/s * ( 1.018-0.1211*(1.-s) )

Write(*,500) D,nx,Re,Kn
Write(*,*)

ny = nint((nx-1)*D + 1)           !Arithmos komvwv stin katythisi y pou prokypetei
                                !xrisimopoiwntas dx=dy=h

Allocate(psi(0:ny+1,0:nx+1),psiold(0:ny+1,0:nx+1),zita(ny,nx),zitaold(ny,nx),u(ny,nx)&
        ,v(ny,nx))

epanalipsi=0
psi=0.
zita=0.
u=0.
v=0.
h=1. / (nx-1)                   !dx=dy=h

!Gia tin eustatheia tou sistimatos einai aparaitito
!na oristei to omega gia kathe arithmo Reynolds

If (Re<400.) Then
    omega=1.
Else If (Re==400.) Then
    omega=0.8
Else
    omega=0.6
End If

errorpsi=1.                     !Vazoume mia megali timi gia na mpei stin epanalipsi

Do while (errorpsi>err)

```

```

epanalipsi=epanalipsi + 1
zitaold=zita
psiold=psi

!Synoriakes synthikes aristera & deksia
Do i=1,ny

    psi(i,0)=psi(i,2) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
    psi(i,nx+1)=psi(i,nx-1) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) &
        / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)

    zita(i,1)= - psi(i,2) * (1 + (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
        (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) ) / (h**2)
    zita(i,nx)= - psi(i,nx-1) * (1 + (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
        (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) ) / (h**2)

End do

!Synoriakes synthikes katw & panw
Do j=1,nx

    psi(0,j)=psi(2,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
    psi(ny+1,j)=psi(ny-1,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
        (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) + 2.*(h**2) / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)

    zita(1,j)= - psi(2,j) * (1 + (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
        (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) ) / (h**2)
    zita(ny,j)= - psi(ny-1,j) * (1 + (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
        (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) ) / (h**2) - 2. / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)

End do

!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn
!Sarwma tou plegmatos apo panw pros ta katw
Do i=ny-1,2,-1
    Do j=2,nx-1

        zita(i,j)= omega* 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
            zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
            (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
            + (1-omega)*zitaold(i,j)
        psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
            + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

    End do
End do

```

```

!Eksiswsi peperasmewn diaforwn
!Sarwma tou plegmatos apo katw pros ta panw
Do i=2,ny-1
  Do j=2,nx-1

    zita(i,j)= omega* 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
      zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
      (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
      + (1-omega)*zitaold(i,j)
    psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
      + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

  End do
End do

!Ypologismos apolitwn sfalmatwn
errorzita=0.
errorpsi=0.

Do i=2,ny-1
  Do j=2,nx-1

    errorzita=errorzita + abs(zita(i,j)-zitaold(i,j))
    errorpsi=errorpsi + abs(psiold(i,j)-psi(i,j))

  End do
End do

!Ypologismos taxititwn entos tis epanalipsis
!giati xreiazetai na ananewnontai, emfanizontai mesa stin
!eksiswsi peperasmewn diaforwn
Do i=1,ny
  Do j=1,nx

    u(i,j) = ( psi(i+1,j) - psi(i-1,j) ) / (2*h)
    v(i,j) = - ( psi(i,j+1) - psi(i,j-1) ) / (2*h)

  End do
End do

If ( mod(epanalipsi,10000)==0) write(*,*) epanalipsi,errorpsi,errorzita

End do

```

```

write(*,*)

!Syntelestis olisthisis
drag=(-3*u(ny,1) + 4*u(ny-1,1) - u(ny-2,1)) / (-2*h)
Do j=2,nx-1
    drag=drag + 2*(-3*u(ny,j) + 4*u(ny-1,j) - u(ny-2,j)) / (-2*h)
End do
drag=drag + (-3*u(ny,nx) + 4*u(ny-1,nx) - u(ny-2,nx)) / (-2*h)
drag=drag*h/2.
write(*,*) 'drag=',drag
write(*,*)

```

```

!Kentra dinwn
!O parakatw kwdikas elegxei an ena simeio einai kentro dinis
!sigkrinontas to me ta girw tou. An i timi tou psi ekei einai
!megaliteri apo auti twn girw tou i an einai mikroteri tote
!prokeitai gia dini kai kataxwreitai.
Vort=0.
Vortx=0
Vorty=0
m=1
Do i=2,ny-1
    Do j=2,nx-1

        greater=0
        smaller=0

        Do o=-1,1
            Do p=-1,1

                If ( psi(i,j)>psi(i+o,j+p) ) then
                    greater=greater + 1
                Else If ( psi(i,j)<psi(i+o,j+p) ) Then
                    smaller=smaller + 1
                End If

            End Do

        End Do

    End Do

    If ((smaller==0).or.(greater==0)) Then
        Vort(m)=psi(i,j)
        Vortx(m)=j
        Vorty(m)=i
        m=m+1
    End If

```

```

        End Do
End Do

!Kataxwrisi tw n psi, u, v me tin morfi pou anagnwrizetai apo to TECPLOT
Write(20,*) 'TITLE = "Results"'
Write(20,100)
Write(20,200) 100000,ny,nx

Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(20,300) j,i,psi(i,j),u(i,j),v(i,j)
    End do
End do

!Apothikeusi kathetwn taxititwn sto kentro tis koilotitas
Do j=1,nx
    write(80,*) v(ny/2+1,j)
End do

!Apothikeusi orizontiwn taxititwn sto kentro tis koilotitas
Do i=ny,1,-1
    write(70,*) u(i,nx/2+1)
End do

write(50,*) 'drag=',drag

!Kataxwrisi tw n dinwn
Do i=1,m-1
    write(50,600) Vort(i), (Vortx(i)-1.)/(nx-1.), (Vorty(i)-1.)/(nx-1.), &
        zita(Vorty(i),Vortx(i))
End do

!Kataxwrisi tis strovilotitas
Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(30,400) j,i,zita(i,j)
    End do
End do

Close(20)
Close(30)
Close(50)

```

```

Close(70)
Close(80)

Deallocate(psi,psiold,zita,zitaold,u,v)
Write(*,*)

End do                                !loop periptwsewn

100 Format('VARIABLES = "I","J","Psi","U","V"')
200 Format('ZONE T="'I8"', J='I4', I='I4', F=POINT ')
300 Format(1X,2(I4),3(F19.14))
400 Format(1X,2(I4),(F19.14))
500 Format('D='f3.1', nx='I3', Re='f6.1', Kn='f4.2' ')
600 Format('Psi value 'f12.9' at x='f7.5' and y='f7.5'. Vorticity ='f12.9' ')

End Program

```

Π.1.6 Πρόβλημα καναλιού με περιοδικές αυλακώσεις

```

Program Groove
Implicit None

Real(8),allocatable::psi(:,,:),psiold(:,,:),zita(:,,:),zitaold(:,,:),u(:,,:),v(:,,:)
Real(8)::h,err,errorpsi,errorzita,omega,Re,Kn,s,D,W,L,drag,sp,pi
Integer::i,j,nx,ny,epanalipsi,k,n,Depth,Width,Length,Rest
Character(14)::filename

err=1e-10                                !kritirio termatismou
pi=3.1415926536                           !To gnwsto pi=3.14
n=100                                     !Arithmos diastimatwn metaksi tw n plakwn
                                           !stin eisodo (H)
D=1.                                       !Logos vathous koilotitas / H
W=2.                                       !Logos platous koilotitas / H
L=6.                                       !Logos mikous / H
Kn=0.05                                   !Arithmos Knudsen

!Me Re simvolizetai o arithmos Reynolds
!Me s simvolizetai o accommodation coefficient

Do k=1,3                                  !loop periptwsewn

Select Case(k)
  Case(1)
    Re=10.
    s=1.

```

```

Case(2)
    Re=1000.
    s=1.
Case(3)
    Re=10.
    s=0.85
Case(4)
Case(5)
Case(6)
Case(7)
Case(8)
Case(9)
Case Default
End Select

```

```

!Edw anoigoume ta arxeia. O kw dikas autos dinei diaforetiko onoma
!sto arxeio analoga me tin periptwsi stin opoia vriskomaste.

```

```

filename='psi'//Char(47+k)//'.dat'
Open(20,file=filename)

```

```

filename='vorticity'//Char(47+k)//'.txt'
Open(30,file=filename)

```

```

filename='results'//Char(47+k)//'.txt'
Open(50,file=filename)

```

```

filename='ukentriko'//Char(47+k)//'.txt'
Open(70,file=filename)

```

```

sp= (2.-s)/s * ( 1.018-0.1211*(1.-s) )
Depth=nint(D*n)           !Arithmos komvwn sto vathos tis koilotitas
Width=nint(W*n)           !Arithmos komvwn sto platos tis koilotitas
Length=nint(L*n)          !Arithmos komvwn sto mikos tis diataksis
nx=L*n + 1                !Arithmos komvwn stis kateuthinseis x kai y
ny=n + D*n + 1            !opws prokypetei apo to n
Rest=(nx - (Width+1))/2   !(Mikos - Platos koilotitas) / 2,
                           !diladi ta kommatia aristera kai deksia

```

```

Write(*,500) D,W,n,Re,Kn,s
Write(*,*)

```

```

Allocate(psi(0:ny+1,0:nx+1),psiold(0:ny+1,0:nx+1),zita(ny,nx),zitaold(ny,nx),u(ny,nx), &
        v(ny,nx))

```

```

epanalipsi=0
psi=0.

```



```

psi(ny,:)= 0.5                                !Epanw to psi einai stathero kai iso me 0.5
zita=0.
u=0.
v=0.
h=1. / n                                       !dx=dy=h to opoio eksartatai apo to n

!Gia tin eustatheia tou sistimatos einai aparaitito
!na oristei to omega gia kathe arithmo Reynolds

If (Re<20.) Then
    omega=1.
Else If (Re<=50.) Then
    omega=0.5
Else If (Re<=100.) Then
    omega=0.2
Else If (Re<=400.) Then
    omega=0.05
Else
    omega=0.01
End If

errorpsi=1.

Do while (errorpsi>err)

    epanalipsi=epanalipsi + 1
    zitaold=zita
    psiold=psi

    !Synoriakes synthikes katw aristera & katw deksia
    Do i=1,Depth

        psi(i,Rest)=psi(i,Rest+2) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
            (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
        psi(i,Rest+Width+2)=psi(i,Rest+Width) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
            (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)

        zita(i,Rest+1)= - ( psi(i,Rest) - 2*psi(i,Rest+1) + psi(i,Rest+2) ) &
            / (h**2)
        zita(i,Rest+Width+1)= - ( psi(i,Rest+Width) - 2*psi(i,Rest+Width+1) &
            + psi(i,Rest+Width+2) ) / (h**2)

    End do

    !Synoriakes synthikes katw
    Do j=Rest,Rest+Width+2

```

```

psi(0,j)=psi(2,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
zita(1,j)= - ( psi(0,j) - 2*psi(1,j) + psi(2,j) ) / (h**2)

End do

!Synoriakes synthikes epanw
Do j=1,nx

psi(ny+1,j)= ( 2*(h**2) + psi(ny,j)*(8./sqrt(pi)*sp*Kn) + psi(ny-1,j)* &
              (h - 4./sqrt(pi)*sp*Kn) ) / (h + 4./sqrt(pi)*sp*Kn)
zita(ny,j)= - ( psi(ny+1,j) - 2*psi(ny,j) + psi(ny-1,j) ) / (h**2)

End do

!Synoriakes synthikes kentro aristera
Do j=1,Rest

psi(Depth,j)=psi(Depth+2,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
              (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
zita(Depth+1,j)= - ( psi(Depth,j) - 2*psi(Depth+1,j) + psi(Depth+2,j) ) &
                  / (h**2)

End do

zita(Depth+1,Rest+1)= - ( psi(Depth,Rest+1) - 2*psi(Depth+1,Rest+1) * &
                          + psi(Depth+2,Rest+1) ) / (h**2) - ( psi(Depth+1,Rest) &
                          - 2*psi(Depth+1,Rest+1) + psi(Depth+1,Rest+2) ) / (h**2)

!Synoriakes synthikes kentro deksia
Do j=Rest+Width+2,nx

psi(Depth,j)=psi(Depth+2,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
              (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
zita(Depth+1,j)= - ( psi(Depth,j) - 2*psi(Depth+1,j) + psi(Depth+2,j) ) &
                  / (h**2)

End do

zita(Depth+1,Rest+Width+1)= - ( psi(Depth,Rest+Width+1) - &
                               2*psi(Depth+1,Rest+Width+1) + psi(Depth+2,Rest+Width+1) ) / (h**2) - &
                              ( psi(Depth+1,Rest+Width) - 2*psi(Depth+1,Rest+Width+1) + &
                              psi(Depth+1,Rest+Width+2) ) / (h**2)

!Synoriakes synthikes eisodou kai eksodou
Do i=Depth+1,ny

```

```

psi(i,1)=((i-Depth-1)*h)**2 / 2. * ( 1./ (1. + 2*sp*Kn*2. /(sqrt(pi))) ) + &
      ((i-Depth-1)*h) * ( sp*Kn*2./(sqrt(pi)) ) / &
      ( 1 + 2.*sp*Kn*2./(sqrt(pi)) )
psi(i,nx)=psi(i,1)
psi(i,0)=psi(i,2)
psi(i,nx+1)=psi(i,nx-1)
zita(i,1)= - ( psi(i-1,1) - 2*psi(i,1) + psi(i+1,1) ) / (h**2)
zita(i,nx)= - ( psi(i-1,nx) - 2*psi(i,nx) + psi(i+1,nx) ) / (h**2)
End do

```

```

!Eksiswsi peperasmewnwn diaforwn
!Sarwma tou plegmatos apo panw pros ta katw
Do i=ny-1,Depth+2,-1
  Do j=2,nx-1

```

```

      zita(i,j)= omega* 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
      zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
      (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
      + (1-omega)*zita(i,j)
      psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
      + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

```

```

      End do
    End do

```

```

Do i=Depth+1,2,-1
  Do j=Rest+2,Rest+Width

```

```

      zita(i,j)= omega* 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
      zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
      (1 - Re*h*u(i,j)/2.)+ zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
      + (1-omega)*zita(i,j)
      psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
      + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

```

```

      End do
    End do

```

```

!Eksiswsi peperasmewnwn diaforwn
!Sarwma tou plegmatos apo katw pros ta panw
Do i=2,Depth+1
  Do j=Rest+2,Rest+Width

```

```

zita(i,j)= omega* 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
(1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
+ (1-omega)*zita(i,j)
psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
+ psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

End do
End do

Do i=Depth+2,ny-1
  Do j=2,nx-1

zita(i,j)= omega* 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
(1 - Re*h*u(i,j)/2.)+ zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
+ (1-omega)*zita(i,j)
psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
+ psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

End do
End do

!Ypologismos apolitwn sfalmatwn
errorzita=0.
errorpsi=0.

Do i=2,ny-1
  Do j=2,nx-1

errorzita=errorzita + abs(zita(i,j)-zitaold(i,j))
errorpsi=errorpsi + abs(psiold(i,j)-psi(i,j))

End do
End do

!Ypologismos taxititwn entos tis epanalipsis
!giati xreiazetai na ananewnontai, emfanizontai mesa stin
!eksiswsi peperasmenwn diaforwn
Do i=ny,Depth+1,-1
  Do j=1,nx

u(i,j) = ( psi(i+1,j) - psi(i-1,j) ) / (2*h)

```

```

                v(i,j) = - ( psi(i,j+1) - psi(i,j-1) ) / (2*h)

                End do
            End do

            Do i=Depth,1,-1
                Do j=Rest+1,Rest+Width+1

                    u(i,j) = ( psi(i+1,j) - psi(i-1,j) ) / (2*h)
                    v(i,j) = - ( psi(i,j+1) - psi(i,j-1) ) / (2*h)

                End do
            End do

            If ( mod(epanalipsi,1000)==0) write(*,*) epanalipsi,errorpsi,errorzita

        End do

        write(*,*)

        !Syntelestis olisthisis
        drag=(-3*u(ny,1) + 4*u(ny-1,1) - u(ny-2,1)) / (-2*h)
        Do j=2,nx-1
            drag=drag + 2*(-3*u(ny,j) + 4*u(ny-1,j) - u(ny-2,j)) / (-2*h)
        End do
        drag=drag + (-3*u(ny,nx) + 4*u(ny-1,nx) - u(ny-2,nx)) / (-2*h)
        drag=drag*h/2.
        write(*,*) 'drag=',drag
        write(*,*)
        write(50,*) 'drag=',drag

        !Kataxwrisi tw n psi, u, v me tin morfi pou anagnwrizetai apo to TECPLOT
        Write(20,*) 'TITLE = "Results"'
        Write(20,100)
        Write(20,200) 100000,ny,nx

        Do i=1,ny
            Do j=1,nx
                Write(20,300) j,i,psi(i,j),u(i,j),v(i,j)
            End do
        End do

        !Kataxwrisi tw n orizontiwn taxititwn stin eisodo, ligo prin tin koiilotita

```

```

!kai sto kentro tis koilotitas
Do i=ny,1,-1
    write(70,*) u(i,1),u(i,Rest+1),u(i,nx/2+1)
End do

!Kataxwrisi tis strovilotitas me tin morfi pou anagnwrizetai apo to TECPLOT
Write(30,*) 'TITLE = "Results"'
Write(30,600)
Write(30,200) 100000,ny,nx

Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(30,400) j,i,zita(i,j)
    End do
End do

Close(20)
Close(30)
Close(50)
Close(70)

Deallocate(psi,psiold,zita,zitaold,u,v)
Write(*,*)

End do                                !loop periptwsewn

100 Format('VARIABLES = "I","J","Psi","U","V"')
200 Format('ZONE T="'I8'", J='I4', I='I4', F=POINT ')
300 Format(1X,2(I4),3(F19.14))
400 Format(1X,2(I4),(F19.14))
500 Format('D='f3.1', W='f3.1', n='I3', Re='f6.1', Kn='f4.2', s='f4.2' ')
600 Format('VARIABLES = "I","J","Zita"')

End Program

Real(8),allocatable::psi(:,,:),psiold(:,,:),zita(:,,:),zitaold(:,,:),u(:,,:),v(:,,:)

```

Π.1.7 Πρόβλημα βηματικής γεωμετρίας

```

Program Step
Implicit None

```

```

Real(8),allocatable::psi(:,,:),psiold(:,,:),zita(:,,:),zitaold(:,,:),u(:,,:),v(:,,:)

```

```
Real(8)::h,err,errorpsi,errorzita,omega,Re,Kn,s,D,L,E,drag,sp,pi
Integer::i,j,nx,ny,epanalipsi,k,n,Depth,Length,Entrance
Character(14)::filename
```

```
err=1e-10          !kritirio termatismou
pi=3.1415926536    !To gnwsto pi=3.14
n=40              !Arithmos diastimatwn metaksi tw n plakwn stin eisodo (H)
E=2.              !Logos mikous eisodou / H
Kn=0.             !Arithmos Knudsen
s=1.              !Accommodation coefficient
```

```
!Me Re simvolizetai o arithmos Reynolds
!Me L simvolizetai o logos mikous meta tin eisodo / H
!Me D simvolizetai o logos vathous tou step / H
```

```
Do k=1,5          !loop periptwsewn
```

```
Select Case(k)
```

```
  Case(1)
```

```
    D=1.
    Re=1000.
    L=30.
```

```
  Case(2)
```

```
    D=0.5
    Re=0.
    L=8.
```

```
  Case(3)
```

```
    D=0.5
    Re=100.
    L=11.
```

```
  Case(4)
```

```
    D=0.5
    Re=400.
    L=13.
```

```
  Case(5)
```

```
    D=0.5
    Re=1000.
    L=30.
```

```
  Case(6)
```

```
  Case(7)
```

```
  Case(8)
```

```
  Case(9)
```

```
  Case Default
```

```
End Select
```

```
!Edw anoigoume ta arxeia. O kwdikas autos dinei diaforetiko onoma
!sto arxeio analoga me tin periptwsi stin opoia vriskomaste.
```

```

filename='psi'//Char(47+k)//'.dat'
Open(20,file=filename)

filename='vorticity'//Char(47+k)//'.txt'
Open(30,file=filename)

filename='results'//Char(47+k)//'.txt'
Open(50,file=filename)

filename='u'//Char(47+k)//'.txt'
Open(70,file=filename)

Write(50,500) D,n,Re,Kn,s
Write(70,500) D,n,Re,Kn,s
Write(50,*)
Write(70,*)

sp= (2.-s)/s * ( 1.018-0.1211*(1.-s) )
nx=E*n + L*n + 1           !Arithmos komvwn stis kateuthinseis x kai y
ny=n + D*n + 1           !opws prokypetei apo to n
Depth=nint(D*n)          !Arithmos komvwn sto vathos tis koilotitas
Length=nint(L*n)         !Arithmos komvwn sto mikos meta to step
Entrance=nint(E*n)       !Arithmos komvwn stin eisodo tis koilotitas

Write(*,500) D,n,Re,Kn,s
Write(*,*)

Allocate(psi(0:ny+1,0:nx+1),psiold(0:ny+1,0:nx+1),zita(ny,nx+1),zitaold(ny,nx+1), &
        u(ny,nx),v(ny,nx))

epanalipsi=0
psi=0.
zita=0.
u=0.
v=0.
h=1. / n                !dx=dy=h to opoio eksartatai apo to n

!Gia tin eustatheia tou sistimatos einai aparaitito
!na oristei to omega gia kathe arithmo Reynolds

If (Re<=50.) Then
    omega=1.
Else If (Re<=100.) Then
    omega=0.7
Else If (Re<=400.) Then
    omega=0.23

```



```

Else
    omega=0.09
End If

errorpsi=1.

Do while (errorpsi>err)

    epanalipsi=epanalipsi + 1
    zitaold=zita
    psiold=psi

    !Synoriakes synthikes aristera
    Do i=Depth+1,ny

        psi(i,0)=psi(i,2)
        psi(i,1)= - ((i-Depth-1)*h)**3 / 6. + ((i-Depth-1)*h)**2 / 4. &
            + 1./sqrt(pi)*sp*Kn * ((i-Depth-1)*h)
        zita(i,1)= - ( psi(i+1,1) - 2*psi(i,1) + psi(i-1,1) ) / (h**2)

    End do

    !Synoriakes synthikes epanw
    Do j=1,nx

        psi(ny+1,j)= ( psi(ny,j)*(8./sqrt(pi)*sp*Kn) + &
            psi(ny-1,j)*(h - 4./sqrt(pi)*sp*Kn) ) / (h + 4./sqrt(pi)*sp*Kn)
        psi(ny,j) = psi(ny,1)
        zita(ny,j)= - ( psi(ny+1,j) - 2*psi(ny,j) + psi(ny-1,j) ) / (h**2)

    End do

    !Synoriakes synthikes step
    Do i=Depth,1,-1

        psi(i,Entrance)=psi(i,Entrance+2) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
            (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
        zita(i,Entrance+1)= - ( psi(i,Entrance) - 2*psi(i,Entrance+1) &
            + psi(i,Entrance+2) ) / (h**2)

    End do

    !Synoriakes synthikes aristera sto orizontio kommati

```

Do j=2,Entrance

```
psi(Depth,j)=psi(Depth+2,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / &
    (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
zita(Depth+1,j)= - ( psi(Depth,j) - 2*psi(Depth+1,j) + psi(Depth+2,j) ) &
    / (h**2)
```

End do

```
zita(Depth+1,Entrance+1)= - ( psi(Depth,Entrance+1) - 2*psi(Depth+1,Entrance+1) &
    + psi(Depth+2,Entrance+1) ) / (h**2) - ( psi(Depth+1,Entrance) &
    - 2*psi(Depth+1,Entrance+1) + psi(Depth+1,Entrance+2) ) / (h**2)
```

!Synoriakes synthikes katw

Do j=Entrance+1,nx

```
psi(0,j)=psi(2,j) * (h - 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn) / (h + 2*2./sqrt(pi)*sp*Kn)
zita(1,j)= - ( psi(0,j) - 2*psi(1,j) + psi(2,j) ) / (h**2)
```

End do

!Synoriakes synthikes deksia

Do i=1,ny

```
zita(i,nx+1)= 2*zita(i,nx) - zita(i,nx-1)
psi(i,nx+1)= 2*psi(i,nx) - psi(i,nx-1)
```

End do

!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn

!Sarwma tou plegmatos apo panw pros ta katw

!epanw kommati

Do i=ny-1,Depth+2,-1

Do j=2,nx

```
zita(i,j)=omega * 0.25 * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
    zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
    (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
    + (1-omega)*zita(i,j)
psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
    + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )
```

End do

```

End do

!katw kommati
Do i=Depth+1,2,-1
    Do j=Entrance+2,nx

        zita(i,j)=omega * 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
            zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
            (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
            + (1-omega)*zita(i,j)
        psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
            + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

    End do
End do

```

!Eksiswsi peperasmenwn diaforwn

!Sarwma tou plegmatos apo katw pros ta panw

```

!katw kommati
Do i=2,Depth+1
    Do j=Entrance+2,nx

        zita(i,j)=omega * 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
            zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
            (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
            + (1-omega)*zita(i,j)
        psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
            + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

    End do
End do

```

!epanw kommati

Do i=Depth+2,ny-1

Do j=2,nx

```

        zita(i,j)=omega * 0.25      * ( zita(i,j-1) * (1 + Re*h*u(i,j)/2.) + &
            zita(i-1,j) * (1 + Re*h*v(i,j)/2.) + zita(i,j+1) * &
            (1 - Re*h*u(i,j)/2.) + zita(i+1,j) * (1 - Re*h*v(i,j)/2.) ) &
            + (1-omega)*zita(i,j)
        psi(i,j)=0.25 * ( psi(i,j-1) + psi(i,j+1) + psi(i-1,j)&
            + psi(i+1,j) + (h**2)*zita(i,j) )

```

End do

End do

```

!Ypologismos apolitwn sfalmatwn
errorzita=0.
errorpsi=0.

Do i=2,ny-1
  Do j=2,nx

      errorzita=errorzita + abs(zita(i,j)-zitaold(i,j))
      errorpsi=errorpsi + abs(psiold(i,j)-psi(i,j))

  End do
End do

!Ypologismos taxititwn entos tis epanalipsis
!giati xreiazetai na ananewnontai, emfanizontai mesa stin
!eksiswsi peperasmenwn diaforwn
Do i=ny,Depth+1,-1
  Do j=1,nx

      u(i,j) = ( psi(i+1,j) - psi(i-1,j) ) / (2*h)
      v(i,j) = - ( psi(i,j+1) - psi(i,j-1) ) / (2*h)

  End do
End do

Do i=Depth,1,-1
  Do j=Entrance+1,nx

      u(i,j) = ( psi(i+1,j) - psi(i-1,j) ) / (2*h)
      v(i,j) = - ( psi(i,j+1) - psi(i,j-1) ) / (2*h)

  End do
End do

If ( mod(epanalipsi,1000)==0) write(*,*) epanalipsi,errorpsi,errorzita

End do

write(*,*)

!Apothikeusi tw n orizontiwn taxititwn meta to step ana n komvous

```

```

Do i=1,ny
    Write(70,'(15(f9.6,x))') (u(i,j),j=(E+1)*n+1,nx,n)
End do

!Kataxwrisi tw n psi, u, v me tin morfi pou anagnwrizetai apo to TECPLOT
Write(20,*) 'TITLE = "Results"'
Write(20,100)
Write(20,200) 100000,ny,nx

Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(20,300) j,i,psi(i,j),u(i,j),v(i,j)
    End do
End do

!Kataxwrisi tw n reattachment lengths
Do j= nx, E*n + 1, -1
    If (Kn==0.) Then
        If (u(2,j)<=0.) Then
            Write(50,*) 'Reattachment Length: L =', Real(j - E*n) / n
            Exit
        End If
    Else
        If (u(1,j)<=0.) Then
            Write(50,*) 'Reattachment Length: L =', Real(j - E*n) / n
            Exit
        End If
    End If
End do

!Kataxwrisi tis strovilotitas me tin morfi pou anagnwrizetai apo to TECPLOT
Write(30,*) 'TITLE = "Results"'
Write(30,600)
Write(30,200) 100000,ny,nx

Do i=1,ny
    Do j=1,nx
        Write(30,400) j,i,zita(i,j)
    End do
End do

Close(20)
Close(30)
Close(50)

```

```

Close(70)

Deallocate(psi,psiold,zita,zitaold,u,v)
Write(*,*)

End do                                !loop periptwsewn

100 Format('VARIABLES = "I","J","Psi","U","V')
200 Format('ZONE T="'I8'", J='I4', I='I4', F=POINT ')
300 Format(1X,2(I4),3(F19.14))
400 Format(1X,2(I4),(F19.14))
500 Format('D='f3.1', n='I3', Re='f6.1', Kn='f4.2', s='f4.2' ')
600 Format('VARIABLES = "I","J","Zita')

End Program

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΘΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΤΩΝ ΔΙΝΩΝ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ

Re=0	a=1	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,5000	0,3333	0,5000	0,3333	0,5000	0,3267	0,5000	0,3200
	LL	0,0200	0,0200	0,0067	0,0067	-	-	-	-
	LR	0,9800	0,0200	0,9933	0,0067	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5000	0,7667	0,5000	0,7600	0,5000	0,7467	0,5000	0,7400
	LL	0,0400	0,0400	0,0267	0,0267	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9733	0,0267	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5000	1,7600	0,5000	1,7600	0,5000	1,7467	0,5000	1,7333
	PV2	0,5000	0,4200	0,5000	0,3867	0,5000	0,2400	-	-
	LL	0,9733	0,0267	0,0667	0,0133	-	-	0,1400	0,1067
	LR	0,0267	0,0267	0,9933	0,0133	-	-	0,8600	0,1067
A=5,0	PV	0,5000	4,7600	0,5000	4,7600	0,5000	4,7467	0,5000	4,7333
	PV2	0,5000	3,3867	0,5000	3,3467	0,5000	3,1867	0,5000	3,0000
	PV3	0,5000	1,9933	0,5000	1,9200	0,5000	1,6133	0,5000	1,2533
	PV4	0,5000	0,6067	0,5000	0,5067	-	-	-	-
	LL	0,0333	0,0333	0,0133	0,0133	0,1867	0,1467	-	-
	LR	0,9667	0,0333	0,9867	0,0133	0,8133	0,1467	-	-

Re=0	a=0,85	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,5000	0,3333	0,5000	0,3333	0,5000	0,3200	0,5000	0,3133
	LL	0,0200	0,0200	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9800	0,0200	-	-	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5000	0,7667	0,5000	0,7600	0,5000	0,7467	0,5000	0,7333
	LL	0,0400	0,0400	0,0200	0,0200	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9800	0,0200	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5000	1,7600	0,5000	1,7600	0,5000	1,7400	0,5000	1,7267
	PV2	0,5000	0,4200	0,5000	0,3733	-	-	-	-
	LL	0,9733	0,0267	-	-	0,3800	0,1867	-	-
	LR	0,0267	0,0267	-	-	0,6200	0,1867	-	-
A=5,0	PV	0,5000	4,7600	0,5000	4,7600	0,5000	4,7400	0,5000	4,7267
	PV2	0,5000	3,3867	0,5000	3,3333	0,5000	3,1200	0,5000	2,8867
	PV3	0,5000	1,9933	0,5000	1,8933	0,5000	1,4933	0,5000	1,0333
	PV4	0,5000	0,6067	0,5000	0,4733	-	-	-	-
	LL	0,0333	0,0333	0,0067	0,0067	0,2667	0,0200	-	-
	LR	0,9667	0,0333	0,9933	0,0067	0,9733	0,0200	-	-

Re=0	a=0,7	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,5000	0,3333	0,5000	0,3333	0,5000	0,3200	0,5000	0,3133
	LL	0,0200	0,0200	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9800	0,0200	-	-	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5000	0,7667	0,5000	0,7600	0,5000	0,7400	0,5000	0,7333
	LL	0,0400	0,0400	0,0133	0,0133	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9867	0,0133	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5000	1,7600	0,5000	1,7533	0,5000	1,7333	0,5000	1,7200
	PV2	0,5000	0,4200	0,5000	0,3533	-	-	-	-
	LL	0,9733	0,0267	-	-	0,1933	0,1333	-	-
	LR	0,0267	0,0267	-	-	0,8067	0,1333	-	-
A=5,0	PV	0,5000	4,7600	0,5000	4,7533	0,5000	4,7333	0,5000	4,7200
	PV2	0,5000	3,3867	0,5000	3,3133	0,5000	3,0333	0,5000	2,7400
	PV3	0,5000	1,9933	0,5000	1,8600	0,5000	1,3267	0,5000	0,7533
	PV4	0,5000	0,6067	0,5000	0,4333	-	-	-	-
	LL	0,0333	0,0333	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9667	0,0333	-	-	-	-	-	-

Re=100	a=1	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,6667	0,3267	0,6667	0,3267	0,6667	0,3200	0,6533	0,3133
	LL	0,0267	0,0267	0,0133	0,0133	-	-	-	-
	LR	0,9800	0,0200	0,9933	0,0067	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,6133	0,7400	0,6200	0,7400	0,6267	0,7267	0,6267	0,7200
	LL	0,0333	0,0333	0,0200	0,0200	-	-	-	-
	LR	0,9400	0,0600	0,9600	0,0467	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,6133	1,7333	0,6200	1,7333	0,6267	1,7200	0,6267	1,7133
	PV2	0,5400	0,5933	0,5400	0,5400	0,5667	0,3333	-	-
	LL	0,0267	0,0333	0,0133	0,0133	-	-	0,1600	0,1067
	LR	0,9667	0,0333	0,9867	0,0200	-	-	0,8133	0,1400
A=5,0	PV	0,6133	4,7333	0,6200	4,7333	0,6267	4,7200	0,6267	4,7133
	PV2	0,5267	3,5800	0,5267	3,5200	0,5200	3,2800	0,5067	3,0200
	PV3	0,5000	2,1800	0,5000	2,0867	0,5000	1,7000	0,5000	1,2800
	PV4	0,5000	0,7867	0,5000	0,6667	-	-	-	-
	LL	0,0400	0,0400	0,0200	0,0200	0,3600	0,2000	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9800	0,0200	0,6400	0,2000	-	-

Re=100	a=0,85	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,6667	0,3267	0,6667	0,3267	0,6600	0,3200	0,6400	0,3133
	LL	0,0267	0,0267	0,0067	0,0067	-	-	-	-
	LR	0,9800	0,0200	-	-	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,6133	0,7400	0,6267	0,7400	0,6267	0,7267	0,6200	0,7200
	LL	0,0333	0,0333	0,0200	0,0133	-	-	-	-
	LR	0,9400	0,0600	0,9667	0,0400	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,6133	1,7333	0,6267	1,7333	0,6267	1,7200	0,6200	1,7067
	PV2	0,5400	0,5933	0,5400	0,5200	0,6200	0,2600	-	-
	LL	0,0267	0,0333	0,0067	0,0067	-	-	-	-
	LR	0,9667	0,0333	0,9933	0,0133	-	-	-	-
A=5,0	PV	0,6133	4,7333	0,6267	4,7333	0,6267	4,7200	0,6200	4,7067
	PV2	0,5267	3,5800	0,5267	3,5000	0,5133	3,1867	0,5067	2,8867
	PV3	0,5000	2,1800	0,5000	2,0600	0,5000	1,5533	0,5000	1,0333
	PV4	0,5000	0,7867	0,5000	0,6267	-	-	-	-
	LL	0,0400	0,0400	0,0133	0,0133	0,0733	0,0667	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9867	0,0133	0,9267	0,0667	-	-

Re=100	a=0,7	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,6667	0,3267	0,6667	0,3267	0,6533	0,3133	0,6267	0,3133
	LL	0,0267	0,0267	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9800	0,0200	-	-	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,6133	0,7400	0,6267	0,7333	0,6267	0,7200	0,6133	0,7133
	LL	0,0333	0,0333	0,0067	0,0067	-	-	-	-
	LR	0,9400	0,0600	0,9733	0,0267	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,6133	1,7333	0,6267	1,7333	0,6267	1,7133	0,6133	1,7067
	PV2	0,5400	0,5933	0,5400	0,5000	-	-	-	-
	LL	0,0267	0,0333	-	-	0,3000	0,1333	-	-
	LR	0,9667	0,0333	-	-	0,7533	0,1800	-	-
A=5,0	PV	0,6133	4,7333	0,6267	4,7333	0,6267	4,7133	0,6133	4,7067
	PV2	0,5267	3,5800	0,5267	3,4733	0,5133	3,0733	0,5067	2,7200
	PV3	0,5000	2,1800	0,5000	2,0133	0,5000	1,3600	0,5000	0,7333
	PV4	0,5000	0,7867	0,5000	0,5667	-	-	-	-
	LL	0,0400	0,0400	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0400	-	-	-	-	-	-

Re=400	a=1	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,7000	0,2933	0,7133	0,2867	0,7200	0,2800	0,7200	0,2800
	LL	0,1400	0,1067	0,1133	0,0867	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9667	0,0400	0,9867	0,0200	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5533	0,6067	0,5667	0,6000	0,5867	0,5733	0,6000	0,5600
	LL	0,0533	0,0467	0,0333	0,0333	-	-	-	-
	LR	0,8867	0,1267	0,9067	0,1067	-	-	-	-
	LR2	0,9933	0,0067	-	-	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5533	1,6067	0,5600	1,5933	0,5800	1,5133	0,5867	1,4600
	PV2	0,4200	0,8467	0,4400	0,7933	0,5067	0,5067	0,6867	0,2467
	LL	0,0467	0,0467	0,0267	0,0267	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0467	0,9800	0,0267	-	-	-	-
A=5,0	PV	0,5533	4,6067	0,5600	4,5933	0,5800	4,5133	0,5867	4,4600
	PV2	0,4200	3,8467	0,4400	3,7933	0,4933	3,4867	0,5200	3,1400
	PV3	0,4933	2,4867	0,4933	2,3867	0,5000	1,9133	0,5000	1,3933
	PV4	0,5000	1,0933	0,5000	0,9600	0,5000	0,3800	-	-
	LL	0,0533	0,0600	0,0333	0,0333	-	-	-	-
	LR	0,9467	0,0600	0,9667	0,0333	-	-	-	-

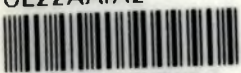
Re=400	a=0,85	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,7000	0,2933	0,7133	0,2867	0,7200	0,2800	0,7200	0,2800
	LL	0,1400	0,1067	0,1067	0,0800	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9667	0,0400	0,9933	0,0133	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5533	0,6067	0,5667	0,6000	0,5933	0,5667	0,6067	0,5600
	LL	0,0533	0,0467	0,0333	0,0267	-	-	-	-
	LR	0,8867	0,1267	0,9133	0,0933	-	-	-	-
	LR2	0,9933	0,0067	-	-	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5533	1,6067	0,5667	1,5867	0,5800	1,4867	0,5933	1,4533
	PV2	0,4200	0,8467	0,4467	0,7733	0,5400	0,4133	-	-
	LL	0,0467	0,0467	0,0200	0,0200	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0467	0,9800	0,0200	-	-	0,8800	0,1067
A=5,0	PV	0,5533	4,6067	0,5667	4,5867	0,5800	4,4867	0,5933	4,4533
	PV2	0,4200	3,8467	0,4467	3,7667	0,5067	3,3667	0,5200	2,9333
	PV3	0,4933	2,4867	0,4933	2,3467	0,5000	1,7333	0,5000	1,0800
	PV4	0,5000	1,0933	0,5000	0,9067	-	-	-	-
	LL	0,0533	0,0600	0,0267	0,0267	0,3067	0,1800	-	-
	LR	0,9467	0,0600	0,9733	0,0267	0,6933	0,1800	-	-

Re=400	a=0,7	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,7000	0,2933	0,7200	0,2867	0,7200	0,2800	0,7200	0,2800
	LL	0,1400	0,1067	0,0933	0,0667	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9667	0,0400	-	-	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5533	0,6067	0,5733	0,5933	0,6000	0,5600	0,6133	0,5667
	LL	0,0533	0,0467	0,0200	0,0200	-	-	-	-
	LR	0,8867	0,1267	0,9267	0,0800	-	-	-	-
	LR2	0,9933	0,0067	-	-	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5533	1,6067	0,5667	1,5800	0,5867	1,4667	0,6000	1,4533
	PV2	0,4200	0,8467	0,4533	0,7400	0,6267	0,2933	-	-
	LL	0,0467	0,0467	0,0133	0,0133	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0467	0,9933	0,0067	-	-	-	-
A=5,0	PV	0,5533	4,6067	0,5667	4,5800	0,5867	4,4667	0,6000	4,4533
	PV2	0,4200	3,8467	0,4533	3,7333	0,5200	3,2133	0,5200	2,6733
	PV3	0,4933	2,4867	0,4933	2,2933	0,5000	1,4933	0,5000	0,6867
	PV4	0,5000	1,0933	0,5000	0,8333	-	-	-	-
	LL	0,0533	0,0600	0,0133	0,0133	-	-	-	-
	LR	0,9467	0,0600	0,9867	0,0133	-	-	-	-

Re=1000	a=1	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,7000	0,2800	0,7067	0,2733	0,6867	0,2600	0,6600	0,2533
	PV2	0,1867	0,2400	0,1867	0,2200	0,1067	0,1200	-	-
	LL	0,0133	0,0133	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9533	0,0533	0,9733	0,0333	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5333	0,5667	0,5400	0,5600	0,5533	0,5267	0,5467	0,5133
	LL	0,0800	0,0800	0,0733	0,0600	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,8667	0,1133	0,8933	0,1000	-	-	-	-
A=2,0	LR2	0,9933	0,0067	-	-	-	-	-	-
	PV	0,5333	1,5800	0,5333	1,5533	0,5400	1,3800	0,5400	1,2333
	PV2	0,3400	0,8400	0,3400	0,7867	0,4000	0,4200	0,7733	0,1667
	LL	0,1000	0,1200	0,0533	0,0533	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
A=5,0	LR	0,9600	0,0400	0,9800	0,0267	-	-	-	-
	PV	0,5333	4,5800	0,5333	4,5533	0,5400	4,3800	0,5400	4,2400
	PV2	0,3400	3,8400	0,3467	3,7800	0,4067	3,3800	0,4600	3,0200
	PV3	0,4600	2,8200	0,4667	2,5933	0,4933	1,8467	0,5000	1,2733
	PV4	0,5000	1,4133	0,5000	1,1600	0,5000	0,3200	-	-
	LL	0,1467	0,1533	0,0467	0,0533	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0133	-	-	-	-	-	-
	LR	0,8533	0,1533	0,9533	0,0533	-	-	-	-
LR2	0,9933	0,0133	-	-	-	-	-	-	

Re=1000	a=0,85	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,7000	0,2800	0,7067	0,2733	0,6733	0,2600	0,6600	0,2533
	PV2	0,1867	0,2400	0,1800	0,2200	-	-	-	-
	LL	0,0133	0,0133	-	-	0,0667	0,0667	-	-
	LR	0,9533	0,0533	0,9800	0,0267	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5333	0,5667	0,5400	0,5533	0,5533	0,5200	0,5467	0,5133
	LL	0,0800	0,0800	0,0667	0,0600	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,8667	0,1133	0,9067	0,0933	-	-	-	-
	LR2	0,9933	0,0067	-	-	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5333	1,5800	0,5400	1,5400	0,5400	1,3200	0,5467	1,1733
	PV2	0,3400	0,8400	0,3467	0,7533	0,4467	0,3067	-	-
	LL	0,1000	0,1200	0,0400	0,0400	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9800	0,0133	-	-	0,9600	0,0400
A=5,0	PV	0,5333	4,5800	0,5400	4,5400	0,5400	4,3267	0,5467	4,1800
	PV2	0,3400	3,8400	0,3467	3,7467	0,4267	3,2467	0,4867	2,8267
	PV3	0,4600	2,8200	0,4733	2,5133	0,4933	1,6333	0,5000	0,9800
	PV4	0,5000	1,4133	0,5000	1,0667	-	-	-	-
	LL	0,1467	0,1533	0,0333	0,0400	0,1400	0,1200	-	-
	LL2	0,0067	0,0133	-	-	-	-	-	-
	LR	0,8533	0,1533	0,9667	0,0400	0,8600	0,1200	-	-
	LR2	0,9933	0,0133	-	-	-	-	-	-
Re=1000	a=0,7	Kn							
		0		0,01		0,05		0,1	
		x	y	x	y	x	y	x	y
A=0,5	PV	0,7000	0,2800	0,7067	0,2733	0,6667	0,2533	0,6600	0,2533
	PV2	0,1867	0,2400	0,1733	0,2067	-	-	-	-
	LL	0,0133	0,0133	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9533	0,0533	0,9867	0,0133	-	-	-	-
A=1,0	PV	0,5333	0,5667	0,5467	0,5467	0,5533	0,5200	0,5467	0,5067
	LL	0,0800	0,0800	0,0600	0,0533	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,8667	0,1133	0,9200	0,0800	-	-	-	-
	LR2	0,9933	0,0067	-	-	-	-	-	-
A=2,0	PV	0,5333	1,5800	0,5400	1,5133	0,5400	1,2533	0,5467	1,1333
	PV2	0,3400	0,8400	0,3533	0,7067	0,6933	0,2067	-	-
	LL	0,1000	0,1200	0,0200	0,0200	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0067	-	-	-	-	-	-
	LR	0,9600	0,0400	0,9933	0,0067	-	-	-	-
A=5,0	PV	0,5333	4,5800	0,5400	4,5133	0,5400	4,2600	0,5467	4,1267
	PV2	0,3400	3,8400	0,3533	3,7000	0,4533	3,0867	0,5067	2,5933
	PV3	0,4600	2,8200	0,4800	2,4067	0,5000	1,3800	0,5000	0,6133
	PV4	0,5000	1,4133	0,5000	0,9467	-	-	-	-
	LL	0,1467	0,1533	0,0200	0,0200	-	-	-	-
	LL2	0,0067	0,0133	-	-	-	-	-	-
	LR	0,8533	0,1533	0,9800	0,0200	-	-	-	-
	LR2	0,9933	0,0133	-	-	-	-	-	-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085856