ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΥΕΛΙΚΤΟΥ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΣΕ ΣΕΙΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

υπό

ΑΓΓΕΛΟΥ ΞΗΡΟΠΑΙΔΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΥΕΛΙΚΤΟΥ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΣΕ ΣΕΙΡΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

υπό

ΑΓΓΕΛΟΥ ΞΗΡΟΠΑΙΔΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Δημήτριος Παντελής Διδάσκοντας ΠΔ 407/80, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Λυμπερόπουλος Γεώργιος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Κοζανίδης Γεώργιος Λέκτορας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ’ όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Διδάσκοντα ΠΔ 407/80 κ. Δημήτριο Παντελή , για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο και Γεώργιο Κοζανίδη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Οφείλω ευχαριστίες στον φίλο μου Βασίλη για την πολύτιμη βοήθεια του στην κατάστρωση του προγράμματος Fortran. Ευχαριστώ τους φίλους μου Πέτρο, Διονύση, Θοδωρή, Σπήλιο, Αντώνη για την ηθική υποστήριξή τους. Πάνω απ’ όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Βασίλη και Άννα Ξηροπαίδη για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Άγγελος Ξηροπαίδης

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΣΕ ΕΥΕΛΙΚΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΑΓΓΕΛΟΣ ΞΗΡΟΠΑΙΔΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2006

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Νικολόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια ο πολύ μεγάλος παγκόσμιος ανταγωνισμός έχει αναγκάσει τις βιομηχανίες να επενδύσουν πολλά χρήματα στην έρευνα που αφορά τη βέλτιστη χρήση ευέλικτων εργατών σε μονάδες παραγωγής με σκοπό τη μείωση του συνολικού κόστους.

Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε με τον τρόπο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας επιπλέον ευέλικτος εργάτης σε ένα σύστημα 2 και 3^{ων} σταδίων αντίστοιχα.

Ουσιαστικά βασιζόμενοι σε κάποιες έρευνες που έχουν γίνει για τη βέλτιστη χρήση ενός επιπλέον εργάτη σε πρόβλημα 2 σταδίων στη σειρά θέλουμε να δούμε πως αυτό μπορεί να έχει εφαρμογή και σε πρόβλημα 3^{ων} σταδίων στη σειρά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενική περιγραφή του προβλήματος

Στην συγκεκριμένη εργασία θα γίνει η μελέτη ενός συγκεκριμένου μοντέλου γραμμής παραγωγής σε ότι αφορά τη χρήση κάποιων διατιθέμενων μέσων του ώστε να έχουμε το βέλτιστο δυνατό αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να απασχοληθεί ένας επιπλέον ευέλικτος εργάτης σε ένα από τα στάδια ενός συστήματος στα οποία απασχολούνται μονίμως άλλοι εργάτες. Το ζήτημα που θα μας απασχολήσει ως επί το πλείστον είναι σε ποιο στάδιο μας συμφέρει κάθε φορά να δουλεύει ο επιπλέον εργάτης έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος του συστήματος. Ως κόστος θεωρούμε το κόστος αποθήκευσης (holding cost) σε κάθε στάδιο που μπορεί να είναι διαφορετικό από στάδιο σε στάδιο.

Στη συνέχεια θα γίνει υπολογισμός και παρουσίαση των εξισώσεων κόστους του συστήματος και με τη βοήθεια ενός υπολογιστικού προγράμματος θα μπορούμε κάθε φορά και για συγκεκριμένες μεταβλητές να βλέπουμε σε ποιο στάδιο μας συμφέρει να τοποθετείται ο επιπλέον εργάτης και ποιο είναι και το αντίστοιχο συνολικό κόστος. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε πως στη παρούσα εργασία θα μελετήσουμε δύο ειδών συστήματα, ένα με δύο στάδια στη σειρά και ένα με τρία στάδια στη σειρά.

Τέλος θα δείξουμε με ποιόν τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα από το σύστημα των δύο σταδίων στη σειρά στο σύστημα των τριών σταδίων στη σειρά και κατά πόσο αυτή η τεχνική είναι σχετικά αποδοτική και μπορεί όντως να εφαρμοστεί.

Όλα αυτά θα έχουν σαν επίτευξη τη βέλτιστη χρήση προσωπικού σε διάφορα συστήματα παραγωγής ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος, ή να μειώνονται τα έξοδα λειτουργίας, αλλά, πιο μακροπρόθεσμα ίσως, ακόμη και το έναυσμα με την ενασχόληση άλλων συναδέλφων με τη μελέτη ακόμη πιο πολύπλοκων συστημάτων παραγωγής.

Για την επιλογή του προβλήματος μας είχαμε ως κίνητρο διάφορες εφαρμογές όπου ορισμένοι πόροι πολλαπλών χρήσεων (π.χ. εργάτες πολλαπλών δυνατοτήτων χρήσης) χρησιμοποιούνται παράλληλα με άλλους δεδομένους πόρους με σκοπό την επίτευξη ενός βέλτιστου αποτελέσματος σε συγκεκριμένες απαιτήσεις. Γενικότερα η παρούσα έρευνα που έχει γίνει πάνω σε τέτοια συστήματα ουρών με ευέλικτους πόρους εστιάζει το ενδιαφέρον σε συστήματα με δύο στάδια όπου τα τεμάχια απαιτούν εξυπηρέτηση και στα δύο στάδια υποχρεωτικά . Ο Farrar ([1] στη Βιβλιογραφία) ανέλυσε ένα πρόβλημα δύο σταδίων με περιορισμούς και συνεργάσιμους servers και απέδειξε τη βέλτιστη πολιτική. Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής του Farrar μελετάμε και εμείς και προσπαθούμε να δούμε αν μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και σε ένα σύστημα με τρία στάδια με σκοπό να βρούμε τις πολιτικές των οποίων το κόστος δεν απέχει πολύ από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής.

1.2 Γενικότητες περί ευέλικτων συστημάτων

Οι περισσότερες μελέτες που έχουν γίνει για την παραγωγή έχουν εστιάσει σε στατικά συστήματα στα οποία το εργατικό δυναμικό μπορεί να απασχολείται σε συγκεκριμένες μονάδες παραγωγής και για συγκεκριμένες δουλειές. Αυτό είναι και φυσιολογικό αφού από την βιομηχανική επανάσταση και μετά το εργατικό δυναμικό συνηθίζεται να χωρίζεται σε τέτοιου είδους στατικά συστήματα στα οποία ο κάθε εργαζόμενος περιορίζεται σε μια συγκεκριμένη θέση και απασχολείται για συγκεκριμένες δουλειές. Τα διάφορα μαθηματικά και υπολογιστικά μοντέλα που υπάρχουν για την παραγωγή είναι αρκετά περίπλοκα ακόμα και για τέτοιου είδους στατικά συστήματα. Οπότε για συστήματα με ευέλικτους εργάτες οι οποίοι μπορούν με δυναμικό τρόπο να τοποθετούνται σε διάφορες μονάδες παραγωγής αυτά τα μαθηματικά μοντέλα γίνονται αυτόματα πολύ πιο περίπλοκα.

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες ο πολύ μεγάλος παγκόσμιος ανταγωνισμός επέφερε σημαντικές αλλαγές στον τρόπο αξιοποίησης του εργατικού δυναμικού. Στην πραγματικότητα αυτός ο τεράστιος ανταγωνισμός έχει στρέψει το ενδιαφέρον από την μελέτη της απόδοσης ξεχωριστών μονάδων παραγωγής στην μελέτη της ταχύτητας και της ευελιξίας της ροής της εργασίας στο σύνολό της. Τα τελευταία λοιπόν χρόνια έχουν γίνει κάποιες μελέτες και έχουν σχεδιαστεί κάποια μοντέλα στα οποία οι εργάτες δεν είναι συνδεδεμένοι σε συγκεκριμένες μονάδες παραγωγής αλλά είναι εκπαιδευμένοι με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μπορούν να κινούνται μεταξύ διαφόρων δουλειών και να είναι ικανοί να ακολουθούν τον φόρτο εργασίας. Σε τέτοια ευέλικτα συστήματα μεγαλύτερη σημασία έχει ο εργάτης να έχει πολλές και διαφορετικού τύπου ικανότητες παρά να είναι αποδοτικός σε μια μόνο συγκεκριμένη δουλειά.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να πετύχεις ευέλικτα συστήματα σε μια παραγωγική διαδικασία. Μερικά παραδείγματα που έχουν παρατηρηθεί μέσα στη βιομηχανία είναι τα εξής. Η εταιρία John Deere σε ένα αγροτικό εργοστάσιο συναρμολογήσεως, επιτρέπει στους εργάτες να μετακινούνται στα διάφορα κατασκευαστικά μέρη και στο τέλος αφού ο φόρτος εργασίας έχει διαταχθεί να συγκεντρώνεται ο καθένας στον δικό του τομέα παραγωγής. Η American Steel Foundries επιτρέπει στους εργάτες να αλλάζουν δουλειές και να μετακινούνται δυναμικά από τον ένα σταθμό στον άλλο έτσι ώστε να επιτύχουν ροή εργασίας. Η IBM σε ένα εργοστάσιό της ηλεκτρικών κυκλωμάτων εξουσιοδοτούσε μια ομάδα εργατών να αντικαθιστά μια άλλη ομάδα εργατών κατά τη διάρκεια του φαγητού έτσι ώστε να αυξάνεται η παραγωγή ακόμα και την ώρα του φαγητού όπου φυσιολογικά έχουμε πτώση της.

Τα διάφορα ερευνητικά μοντέλα μπορούν να υποστηρίξουν τα ευέλικτα συστήματα με δύο τρόπους. Πρώτον τα περιγραφικά μοντέλα μας βοηθούν να κατανοήσουμε πως αυτά τα συστήματα συμπεριφέρονται και ποιοι παράγοντες μας οδηγούν στην εκτέλεση. Δεύτερον τα εντεταλμένα μοντέλα μας βοηθούν να καταλάβουμε ποια είδη από πολιτικές είναι αποδοτικές σε διαφορετικά περιβάλλοντα παραγωγής. Με ένα τέτοιου είδους μοντέλου ασχολούμαστε και στην εργασία μας.

Ο τρόπος με τον οποίο ένα ευέλικτο σύστημα κατασκευάζεται εξαρτάται από την φύση του περιβάλλοντος παραγωγής. Μια πολύ σημαντική παράμετρος είναι αν η δουλειά που μελετάμε επιτρέπει τις συνεργασίες ή όχι. Αν επιτρέπει τις συνεργασίες τότε μπορούν δύο εργάτες την ίδια στιγμή να απασχολούνται με την ίδια δουλειά διαφορετικά την ίδια στιγμή με μια συγκεκριμένη δουλειά μπορεί να απασχολείται μόνο ένας εργάτης. Οφείλουμε να επισημάνουμε πως στη δική μας εργασία απασχολούμαστε με μοντέλο το οποίο επιτρέπει τις συνεργασίες.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Διάφορες μελέτες έχουν γίνει και πολλά papers έχουν δημοσιευτεί γύρω από ευέλικτα συστήματα παραγωγής. Οι Hopp, W.J& Van Oyen, M.P. προτείνουν διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εργάτες σε μια επιχείρηση έτσι ώστε να αυξηθεί η συνολική παραγωγή σε ευέλικτα σειριακά συστήματα παραγωγής. Οι Hopp, W.J., Tekin, E.,& Van Oyen, M.P και οι Iravani, SM., Van Oyen, M.P., & Sims, K.T. προτείνουν διάφορους τρόπους τοποθέτησης των εργατών σε συστήματα με πολλά στάδια και γίνεται αξιολόγηση ως προς τον ρυθμό παραγωγής. Οι Van Oyen, M.P., Gel, E.S.,& Hopp, W.J. μελετούν βέλτιστες πολιτικές για την μεγιστοποίηση του ρυθμού παραγωγής.

Έχουμε και κάποια paper τα οποία αφορούν και τη δική μας εργασία που έχουν σαν στόχο σε ευέλικτα συστήματα παραγωγής να ελαχιστοποιήσουν το κόστος αποθήκευσης(holding cost). Έτσι λοιπόν ο Farrar, T αναλύει την βέλτιστη πολιτική για 2 στάδια στη σειρά. Τέλος οι Wu, C.H., Lewis, M.E., & Veatch, M και οι Wu, Down, Lewis μελετούν και αυτοί την βέλτιστη πολιτική για 2 στάδια στην σειρά με την διαφορά όμως ότι οι εργάτες είναι αναξιόπιστοι(δεν είναι διαθέσιμοι συνέχεια).

1.4 Οργάνωση Διπλωματικής Εργασίας

1.4.1 Καθορισμός βέλτιστης πολιτικής για 2 στάδια

Εδώ έχουμε να αναλύσουμε το μοντέλο το οποίο αποτελείται από δύο στάδια στη σειρά. Σκοπός μας είναι να δούμε σε ποίο από τα δύο στάδια μας συμφέρει να τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη κάθε φορά με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος του συστήματος.

Κάθε φορά μελετάμε το μοντέλο θεωρώντας ότι ξεκινάμε από x_1, x_2 προϊόντα μέχρι το σύστημα να αδειάσει. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζουμε και αναλύουμε τις εξισώσεις κόστους αυτού του μοντέλου μέσω των οποίων γίνονται οι κατάλληλες συγκρίσεις και οι κατάλληλοι υπολογισμοί και έτσι καθορίζεται η βέλτιστη πολιτική.

Αναλυτικά πρέπει να επισημάνουμε πως για κάθε στάδιο υπάρχει και ένα αντίστοιχο κόστος. Εμείς λοιπόν για κάθε x_1, x_2 βλέπουμε ποιανού σταδίου το κόστος είναι κάθε φορά μικρότερο και εκεί τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη. Αυτό όπως είπαμε και πριν γίνεται μέχρι το σύστημα να αδειάσει και όλες αυτές οι συγκρίσεις και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί κόστους για όλους αυτούς τους συνδυασμούς x_1, x_2 γίνονται από ένα υπολογιστικό πρόγραμμα.

Περιγραφικά λοιπόν έτσι καθορίζουμε τη βέλτιστη πολιτική για 2 στάδια. Εδώ πρέπει να πούμε πως στις εργασίες του Farrar ([1] στη Βιβλιογραφία) έχει δειχτεί πως για κάθε x_1 υπάρχει πάντα μια τιμή ενός x_2, έστω x_{12}, από την οποία για κάθε x_2 μεγαλύτερο αυτής της τιμής η βέλτιστη πολιτική είναι να τοποθετείται ο επιπλέον εργάτης στο 2^o στάδιο. Αντίστοιχα για κάθε x_2 μικρότερο ή ίσο αυτής της τιμής η βέλτιστη πολιτική είναι να τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 1^o στάδιο.

1.4.2 Χρήση βέλτιστης πολιτικής για 2 στάδια σε πρόβλημα 3 σταδίων

Εδώ έχουμε να αναλύσουμε το μοντέλο το οποίο αποτελείται από 3 στάδια στη σειρά. Όπως και στο μοντέλο των 2 σταδίων και εδώ σκοπός μας είναι να δούμε σε ποίο από τα 3 στάδια μας συμφέρει να τοποθετήσουμε τον επιπλέον εργάτη έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος του συστήματος.

Σύμφωνα και με το paper των Wu, Down, Lewis ([7] στη Βιβλιογραφία) σε μοντέλο 3 σταδίων έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη βέλτιστη πολιτική για 2 στάδια που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και με βάση αυτή την πολιτική να αποφασίζουμε κάθε φορά που μας συμφέρει να τοποθετείται ο επιπλέον εργάτης. Αναλυτικά την χρησιμοποίηση της βέλτιστης πολιτικής για 2 στάδια σε μοντέλο 3 σταδίων θα την αναλύσουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Αρχικά αρχίζουμε να συγκρίνουμε το κόστος του 1^{ου} και του 2^{ου} σταδίου. Αν δούμε πως το κόστος στο 1^{ο} στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 2^{ο} στάδιο τότε τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 1^{ο} στάδιο και θεωρούμε πως αυτή είναι η βέλτιστη πολιτική για τα 3 στάδια. Σε περίπτωση που το κόστος στο 1^{ο} στάδιο είναι μεγαλύτερο από το κόστος στο 2^{ο} στάδιο τότε συγκρίνουμε το 2^{ο} με το 3^{ο} στάδιο. Αν σε αυτή την σύγκριση το κόστος στο 2^{ο} στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 3^{ο} στάδιο τότε τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 2^{ο} στάδιο και θεωρούμε αυτή σαν βέλτιστη πολιτική μας διαφορετικά στην αντίθετη περίπτωση τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 3^{ο} στάδιο και θεωρούμε αυτή σαν βέλτιστη πολιτική μας.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε πως υπάρχει και η αντίστροφη πολιτική από αυτή που αναλύσαμε στη προηγούμενη παράγραφο. Πιο συγκεκριμένα με αυτή την πολιτική αρχίζουμε τις ανά 2 συγκρίσεις από το τέλος προς την αρχή. Αρχικά συγκρίνουμε το κόστος του 3^{ου} σταδίου με το κόστος του 2^{ου} σταδίου και αν το κόστος στο 3^{ο} στάδιο είναι μικρότερο από το 2^{ο} στάδιο τότε τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 3^{ο} στάδιο. Στην αντίθετη περίπτωση συγκρίνουμε το κόστος στο 2^{ο} στάδιο με το κόστος στο 1^{ο} στάδιο και αν το κόστος στο 2^{ο} στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 1^{ο} στάδιο τότε τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 2^{ο} στάδιο και θεωρούμε αυτή σαν βέλτιστη πολιτική διαφορετικά στην αντίθετη περίπτωση τοποθετούμε τον επιπλέον εργάτη στο 1^{ο} στάδιο και θεωρούμε αυτή σαν βέλτιστη πολιτική. Πρέπει να επισημάνουμε πως όλες αυτές οι ανά δύο συγκρίσεις που απαιτεί αυτή η τεχνική γίνονται με τις ίδιες εξισώσεις κόστους που χρησιμοποιούμε και στο πρόβλημα των 2 σταδίων.

1.4.3 Σύγκριση με κόστος βέλτιστης πολιτικής για 3 στάδια

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε χρησιμοποιώντας την βέλτιστη πολιτική για 2 στάδια να καθορίσουμε και την πολιτική μας σε πρόβλημα 3 σταδίων. Πρέπει να πούμε πως όταν έχουμε 3 στάδια στη σειρά τότε υπάρχουν και οι αντίστοιχες εξισώσεις κόστους τις οποίες παρουσιάζουμε και αναλύουμε στο επόμενο κεφάλαιο οι οποίες συγκρίνουν και υπολογίζουν τα αντίστοιχα κόστη και για τα 3 στάδια συγχρόνως και έτσι με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε την βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα των 3^{ων} σταδίων.

Βασικός σκοπός μας σε αυτή την εργασία είναι να δούμε κατά πόσο σε πρόβλημα 3^{ων} σταδίων η πολιτική που ακολουθούμε με τις ανά 2 συγκρίσεις προσεγγίζει την βέλτιστη πολιτική για 3 στάδια. Σε κάθε μία από τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου είτε σε αυτή που ξεκινούσαμε τις ανά δύο συγκρίσεις από το 1^{ο} στάδιο είτε σε αυτή που ξεκινούσαμε τις συγκρίσεις από το τέλος του συστήματος δηλαδή από το 3^{ο} στάδιο με την βοήθεια ενός υπολογιστικού προγράμματος βρίσκουμε το συνολικό κόστος του συστήματος για την κάθε μία μέθοδο. Επίσης με την βοήθεια αυτού του υπολογιστικού προγράμματος βρίσκουμε το συνολικό κόστος και για την βέλτιστη πολιτική για 3 στάδια στην οποία χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κόστους για πρόβλημα 3^{ων} σταδίων. Εμείς λοιπόν θέλουμε να συγκρίνουμε αυτά τα κόστη μεταξύ τους και στο τέλος να δούμε αν το κόστος της τεχνικής των ανά 2 συγκρίσεων είναι κοντά στο κόστος της βέλτιστης πολιτικής για 3 στάδια. Τέλος βλέπουμε και ποια από τις δύο μεθόδους των ανά δύο συγκρίσεων μας δίνει το μικρότερο κόστος.

Πρέπει να πούμε πως όλες αυτές οι συγκρίσεις που κάνουμε είναι ιδιαιτέρως σημαντικές καθώς αν δούμε πως το συνολικό κόστος με τις ανά 2 συγκρίσεις είναι κοντά στο κόστος της βέλτιστης πολιτικής για 3 στάδια τότε θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτή την τεχνική των ανά 2 συγκρίσεων και για να καθορίζουμε τη βέλτιστη πολιτική μας και για προβλήματα με ακόμα περισσότερα στάδια. Αυτό είναι ιδιαιτέρως σημαντικό καθώς αν έχουμε πολλά στάδια στη σειρά οι εξισώσεις κόστους του συστήματος είναι πολύ περίπλοκες και πολύ δύσκολες στο να υπολογιστούν σε αντίθεση με το πρόβλημα των 2 σταδίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ΚΑΙ 3 ΣΤΑΔΙΩΝ

2.1 Παράμετροι – μεταβλητές του μοντέλου

Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε και θα ορίσουμε κάποιες από τις πιο βασικές μεταβλητές των δύο μοντέλων και κάποιες υποθέσεις που έχουμε κάνει για αυτές :

c_n : Είναι το κόστος αναμονής ενός προϊόντος στο στάδιο n ανά μονάδα χρόνου, αφού διαιρεθεί με το άθροισμα ($M_1 + ... + M_n + M$) *.

x_n : Είναι η ποσότητα των προϊόντων που βρίσκονται στο στάδιο n.

μ_n : Είναι ο κανονικοποιημένος * ρυθμός εξυπηρέτησης του εργάτη στο στάδιο n.

μ : Είναι ο κανονικοποιημένος * ρυθμός εξυπηρέτησης του επιπλέον εργάτη.

*Αν οι αντίστοιχοι παράμετροι των εκθετικών κατανομών εξυπηρέτησης είναι $M_1,...,M_n$ και M θα ισχύουν : $\mu_n = \dfrac{M_n}{M_1 + ... + M_n + M}$, $\mu = \dfrac{M}{M_1 + ... + M_n + M}$. Οι ρυθμοί αυτοί είναι κανονικοποιημένες τιμές των πραγματικών ρυθμών εξυπηρέτησης έτσι ώστε οι αναλογίες των μεταξύ τους τιμών να παραμένουν ίδιες και ταυτόχρονα να ισχύει : $\mu + \mu_1 + ... + \mu_n = 1$. Κάτι παρόμοιο γίνεται και στα κόστη αναμονής για λόγους υπολογιστικούς.

Δηλαδή πάντα θα ισχύει : $\mu + \mu_1 + ... + \mu_n = 1$ (2.1.1)

2.2 *Μοντέλο 2 σταδίων*

2.2.1 Παρουσίαση και ανάλυση των εξισώσεων κόστους

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε το μοντέλο κατά το οποίο έχουμε δύο στάδια παραγωγής στη σειρά και μπορούμε να βάλουμε τον επιπλέον εργάτη να δουλεύει είτε στο πρώτο είτε στο δεύτερο στάδιο παραγωγής. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε και θα αναλύσουμε τις εξισώσεις αυτού του μοντέλου και στο τέλος θα κάνουμε και κάποια αναφορά για την βέλτιστη πολιτική του συγκεκριμένου παραδείγματος. Σκοπός μας είναι να βρούμε το ελάχιστο συνολικό κόστος μέχρι το σύστημα να αδειάσει.

Για το συγκεκριμένο μοντέλο έχουμε τις εξής εξισώσεις :

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο πρώτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση που εκφράζει το κόστος του συστήματος :

Για $x_1,\ x_2 \geq 1$

$$V_1(x_1, x_2) = (c_1 x_1 + c_2 x_2)\cdot dt + (\mu_1 + \mu)\cdot dt\,[V(x_1-1, x_2+1)] + \mu_2\cdot dt V(x_1, x_2-1) + [1-(\mu_1+\mu+\mu_2)\cdot dt]V(x_1, x_2)$$

Ο όρος $(c_1 x_1 + c_2 x_2)\cdot dt$ εκφράζει το κόστος στο σύστημα για τα πρώτα dt.

Οι υπόλοιποι όροι εκφράζουν το κόστος μετά τα πρώτα dt :

Ο όρος $(\mu_1 + \mu)\cdot dt\,[V(x_1-1, x_2+1)]$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το πρώτο στάδιο παραγωγής.

Ο όρος $\mu_2 \cdot dtV(x_1, x_2\text{-}1)$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το δεύτερο στάδιο παραγωγής.

Ο όρος $[1\text{-} (\mu_1 + \mu + \mu_2)\cdot dt]V(x_1, x_2)$ εκφράζει το να μην γίνει τίποτα από τα προηγούμενα.

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο δεύτερο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση που μας δίνει το κόστος του συστήματος :

$$V_2(x_1, x_2) = (c_1 x_1 + c_2 x_2)\cdot dt + \mu_1 \cdot dt\, V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1) + (\mu + \mu_2)\cdot dt\, V(x_1, x_2\text{-}1) + [1\text{-} (\mu_1 + \mu + \mu_2)\cdot dt]V(x_1, x_2)$$

Αντίστοιχα όπως και πριν ο κάθε όρος εκφράζει τα εξής :

Ο όρος $(c_1 x_1 + c_2 x_2)\cdot dt$ εκφράζει το κόστος στο σύστημα για τα πρώτα dt.

Οι υπόλοιποι όροι εκφράζουν το κόστος μετά τα πρώτα dt :

Ο όρος $\mu_1 \cdot dt\, V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1)$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το πρώτο στάδιο παραγωγής.

Ο όρος $(\mu + \mu_2)\cdot dt\, V(x_1, x_2\text{-}1)$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το δεύτερο στάδιο παραγωγής.

Ο όρος $[1\text{-} (\mu_1 + \mu + \mu_2)\cdot dt]V(x_1, x_2)$ εκφράζει το να μην γίνει τίποτα από τα προηγούμενα.

Από τις παραπάνω σχέσεις θα προκύψει ότι το ελάχιστο δυνατό κόστος του συστήματος στην κατάσταση (x_1, x_2) θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$V(x_1, x_2) = \min\{ V_1(x_1, x_2),\ V_2(x_1, x_2)\} =$$

$= (c_1 x_1 + c_2 x_2)\cdot dt + \mu_1 \cdot dt\, V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 \cdot dt V(x_1, x_2 - 1) + [1 - (\mu_1 + \mu + \mu_2)\cdot dt] V(x_1, x_2) + \min\{ \mu \cdot dt [V(x_1 - 1, x_2 + 1), V(x_1, x_2 - 1)]\} \Rightarrow$

Θεωρώντας ότι $\mu_1 + \mu_2 + \mu = 1$

$$V(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \mu_1 \cdot V(x_1 - 1, x_2 + 1) + \mu_2 \cdot V(x_1, x_2 - 1) + \mu \cdot \min\{ V(x_1 - 1, x_2 + 1), V(x_1, x_2 - 1)\} \quad (2.2.1)$$

Τώρα για $x_2 = 0$ και λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες μετάπτωσης στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του συστήματός μας θα ισχύει ότι:

$$V(x_1, 0) = \min\{ \frac{c_1 x_1}{\mu_1 + \mu}, \frac{c_1 x_1}{\mu_1} \} + V(x_1 - 1, 1) \Rightarrow$$

$$V(x_1, 0) = \frac{c_1 x_1}{\mu_1 + \mu} + V(x_1 - 1, 1) \quad (2.2.2)$$

Αντίστοιχα για $x_1 = 0$ θα ισχύει:

$$V(0, x_2) = \min\{ \frac{c_2 x_2}{\mu_2 + \mu}, \frac{c_2 x_2}{\mu_2} \} + V(0, x_2 - 1) \Rightarrow$$

$$V(0, x_2) = \frac{c_2 x_2}{\mu_2 + \mu} + V(0, x_2 - 1) \quad (2.2.3)$$

2.2.2 Δομή βέλτιστης πολιτικής

Για την βέλτιστη πολιτική σε μοντέλο δύο σταδίων στη σειρά έχουν γίνει διάφορες μελέτες και εμείς βασιζόμενοι στις εργασίες του Farrar μπορούμε να παρουσιάσουμε πράγματα που έχουν αποδειχτεί για το συγκεκριμένο μοντέλο.

Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος του συστήματος από τη στιγμή που βρισκόμαστε στην κατάσταση όπου όλα τα προϊόντα βρίσκονται ακόμα στην αρχή της ουράς μέχρι να αδειάσει όλο το σύστημα. Αν λοιπόν τα προϊόντα στην αρχή είναι ίσα έστω με (x_1, x_2) τότε ψάχνουμε το κόστος από την κατάσταση $V(x_1, x_2)$ μέχρι την κατάσταση V(0,0).Θεωρούμε ότι όταν το σύστημα έχει αδειάσει το κόστος V(0,0)=0.

Η εξίσωση που εκφράζει το συνολικό κόστος του συστήματος είναι η εξίσωση (2.2.1) :
Για $x_1, x_2 \geq 1$

$$V(x_1, x_2) = c_1\, x_1 + c_2 x_2 + \mu_1 \cdot V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1) + \mu_2 \cdot V(x_1,\ x_2\text{-}1) + \mu \cdot \min\{ V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1)\ ,\ V(x_1,\ x_2\text{-}1)\}$$

Ο κάθε όρος αυτής της εξίσωσης εκφράζει τα εξής :

Ο όρος $c_1\, x_1 + c_2 x_2$ εκφράζει το κόστος αναμονής για τα προϊόντα στο πρώτο και στο δεύτερο στάδιο.

Ο όρος $\mu_1 \cdot V(x_{1\text{-}1}, x_{2+1})$ εκφράζει το κόστος του προϊόντος όταν βρίσκεται στο πρώτο στάδιο.

Ο όρος $\mu_2 \cdot V(x_1,\ x_{2\text{-}1})$ εκφράζει το κόστος του προϊόντος όταν βρίσκεται στο δεύτερο στάδιο.

Τέλος εμφανίζεται και ο όρος $\mu \cdot \min\{ V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1)$, $V(x_1, x_2\text{-}1)\}$ από τον οποίον εξαρτάται και η βέλτιστη πολιτική για μοντέλο 2 σταδίων. Αυτός ο όρος μας δείχνει αν ο επιπλέον εργάτης πηγαίνει στο πρώτο ή στο δεύτερο στάδιο και υπολογίζει το αντίστοιχο κόστος. Από την εξίσωση βλέπουμε πως ο επιπλέον εργάτης κάθε φορά πηγαίνει στο στάδιο με το μικρότερο κόστος. Ουσιαστικά λοιπόν χρειαζόμαστε ένα υπολογιστικό πρόγραμμα το οποίο για κάθε ζεύγος τιμών (x_1, x_2) να βρίσκει το αντίστοιχο κόστος στο πρώτο και στο δεύτερο στάδιο και έτσι να καθορίζουμε τη βέλτιστη πολιτική μας τοποθετώντας τον επιπλέον εργάτη στο στάδιο με το μικρότερο κόστος.

Για κάθε λοιπόν (x_1, x_2) γίνεται η σύγκριση του $V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1)$ με το $V(x_1, x_2\text{-}1)$. Όσες φορές $V(x_1\text{-}1, x_2\text{+}1) < V(x_1, x_2\text{-}1)$ τότε ο επιπλέον εργάτης πηγαίνει στο πρώτο στάδιο διαφορετικά πηγαίνει στο δεύτερο στάδιο. Στις εργασίες του Farrar που έχω μελετήσει βλέπουμε πως για κάθε x_1 υπάρχει μια τιμή του x_2, έστω x_{12}, για την οποία ισχύει ότι η βέλτιστη πολιτική απασχολεί τον επιπλέον εργάτη στο 2^o στάδιο όταν το x_2 είναι μεγαλύτερο από το x_{12}. Από αυτό το x_{12} και πάνω η βέλτιστη πολιτική δεν αλλάζει. Για κάθε λοιπόν x_1 υπάρχει και ένα αντίστοιχο x_{12} στο οποίο εμφανίζεται η αλλαγή αυτή της πολιτικής κατά την οποία παίρνουμε τον επιπλέον εργάτη από το πρώτο στάδιο και τον τοποθετούμε στο δεύτερο. Αν κάνουμε ένα διάγραμμα με αρκετές τιμές x_1 και τις αντίστοιχες τιμές αλλαγής x_{12} θα δούμε πως τις τιμές αυτές x_{12} μπορούμε να τις ενώσουμε με μια ευθεία. Στις εργασίες του Farrar έχουν υπολογιστεί πολλές τέτοιες τιμές και με διάφορες παραμέτρους και πάντα τα συγκεκριμένα σημεία x_{12} μπορούμε να τα ενώνουμε με ευθείες οι οποίες έχουν κάθε φορά βέβαια διαφορετική κλίση.

2.3 Μοντέλο 3 σταδίων

2.3.1 Παρουσίαση και ανάλυση των εξισώσεων κόστους

Όταν έχουμε τρία στάδια παραγωγής στη σειρά διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο πρώτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση που εκφράζει το κόστος του συστήματος :

Για $x_1, x_2, x_3 \geq 1$

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = (\mu_1+\mu)dtV(x_1-1, x_2+1, x_3) + \mu_2\, dtV(x_1, x_2-1, x_3+1) + \mu_3\, dtV(x_1, x_2, x_3-1) + [1-(\mu_1+\mu+\mu_2+\mu_3)\,dt]\, V(x_1, x_2, x_3) + (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)dt$$

Ο όρος $(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)dt$ εκφράζει το κόστος στο σύστημα για τα πρώτα dt.

Οι υπόλοιποι όροι εκφράζουν το κόστος μετά τα πρώτα dt :

Ο όρος $(\mu_1+\mu)dtV(x_1-1, x_2+1, x_3)$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το πρώτο στάδιο.

Ο όρος $\mu_2\, dtV(x_1, x_2-1, x_3+1)$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το δεύτερο στάδιο.

Ο όρος $\mu_3\, dtV(x_1, x_2, x_3-1)$ εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία ένα προϊόν φεύγει από το τρίτο στάδιο.

Ο όρος $[1-(\mu_1+\mu+\mu_2+\mu_3)\,dt]\, V(x_1, x_2, x_3)$ εκφράζει το να μην γίνει τίποτα από τα παραπάνω.

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο δεύτερο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση:

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)dt + \mu_1 \, dtV(x_1 -1, x_2 +1, x_3) + (\mu + \mu_2) \, dtV(x_1, x_2 -1, x_3 +1) + \mu_3 \, dtV(x_1, x_2, x_3 -1) + [1 - (\mu_1 + \mu + \mu_2 + \mu_3)\, dt] \, V(x_1, x_2, x_3)$$

Αντίστοιχα ο κάθε όρος αυτής της εξίσωσης εκφράζει ότι και ο κάθε όρος της παραπάνω.

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο τρίτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση:

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)dt + \mu_1 \, dtV(x_1 -1, x_2 +1, x_3) + \mu_2 \, dtV(x_1, x_2 -1, x_3 +1) + (\mu_3 + \mu) \, dtV(x_1, x_2, x_3 -1) + [1 - (\mu_1 + \mu + \mu_2 + \mu_3)\, dt] \, V(x_1, x_2, x_3)$$

Αντίστοιχα ο κάθε όρος αυτής της εξίσωσης εκφράζει ότι και ο κάθε όρος της παραπάνω.

Από τις παραπάνω σχέσεις θα προκύψει ότι το ελάχιστο δυνατό κόστος του συστήματος στην κατάσταση (χ_1, χ_2, x_3) θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$V(x_1, x_2, x_3) = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)dt + \mu_1 \, dtV(x_1 -1, x_2 +1, x_3) + \mu_2 \, dtV(x_1, x_2 -1, x_3 +1) + \mu_3 \, dtV(x_1, x_2, x_3 -1) + [1 - (\mu_1 + \mu + \mu_2 + \mu_3)\, dt] \, V(x_1, x_2, x_3) + \mu dt \min[V(x_1 -1, x_2 +1, x_3), V(x_1, x_2 -1, x_3 +1), V(x_1, x_2, x_3 -1)] \Rightarrow$$

Θεωρώντας ότι $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu = 1$

$$V(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \mu_1 V(x_1\text{-}1, x_2+1, x_3) + \mu_2 V(x_1, x_2\text{-}1, x_3+1)$$
$$+\mu_3 V(x_1, x_2, x_3\text{-}1) + \mu \min[V(x_1\text{-}1, x_2+1, x_3), V(x_1, x_2\text{-}1, x_3+1), V(x_1, x_2, x_3\text{-}1)] \quad (2.3.1)$$

Τώρα για x_1=0 και x_2=0 και λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες μετάπτωσης στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του συστήματός μας θα ισχύει ότι:

$$V(0,0, x_3) = \frac{c_3 x_3}{\mu_3+\mu} + V(0,0, x_3\text{-}1) \quad (2.3.2)$$

Τώρα για x_1=0 και x_3= 0 και λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες μετάπτωσης στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του συστήματός μας θα ισχύει ότι:

$$V(0, x_2, 0) = \frac{c_2 x_2}{\mu_2+\mu} + V(0, x_2\text{-}1, 1) \quad (2.3.3)$$

Τώρα για x_2=0 και x_3= 0 και λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανότητες μετάπτωσης στη Μαρκοβιανή αλυσίδα του συστήματός μας θα ισχύει ότι:

$$V(x_1, 0, 0) = \frac{c_1 x_1}{\mu_1+\mu} + V(x_1\text{-}1, 1, 0) \quad (2.3.4)$$

Για x_1 =0 έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο δεύτερο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$V_2(0,x_2,x_3) = (c_2x_2+c_3x_3)dt + (\mu+\mu_2)\,dtV(0, x_2-1, x_3+1) + \mu_3 dtV(0, x_2, x_3-1)$$
$$+ [1-(\mu_2+\mu+\mu_3)dt]V(0,x_2,x_3)$$

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο τρίτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$V_3(0,x_2,x_3) = (c_2x_2+c_3x_3)dt + \mu_2 dtV(0,x_2-1,x_3+1) +$$

$$(\mu_3+\mu)dtV(0\,x_2,x_3-1) + [1-(\mu_2+\mu+\mu_3)dt]V(0,x_2,x_3)$$

Η τελική μας λοιπόν εξίσωση θα προκύψει ως εξής :

$$V(0,x_2,x_3)=\min\{V_2,V_3\} = (c_2x_2 + c_3x_3)dt + \mu_2 dtV(0,x_2-1,x_3+1) + \mu_3 dtV(0,x_2,x_3-1)$$
$$[1-(\mu_2+\mu+\mu_3)dt]V(0,x_2,x_3) + \mu dt\min\{V(0,x_2-1,x_3+1), V(0,x_2,x_3-1)\} \Rightarrow$$

$$V(0,x_2,x_3)=\frac{c_2x_2 + c_3x_3 + \mu_2 V(0,x_2-1,x_3+1) + \mu_3 V(0,x_2,x_3-1) + \mu\min\{V(0,x_2-1,x_3+1),V(0,x_2,x_3-1)\}}{1-\mu_1}$$

(2.3.5)

Στην παραπάνω εξίσωση απλοποιήσαμε θεωρώντας ότι : $\mu_2+\mu+\mu_3 = 1-\mu_1$

Αντίστοιχα για x_2 =0 και με την ίδια ακριβώς λογική έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο πρώτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση :

$$V_1(x_1,0,x_3) = (c_1x_1 + c_3x_3)dt + (\mu_1 + \mu)dtV(x_1\text{-}1,1,x_3) + \mu_3 dtV(x_1,0,x_3\text{-}1) + [1\text{-}(\mu_1 + \mu + \mu_3)dt]V(x_1,0,x_3)$$

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο τρίτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση :

$$V_3(x_1,0,x_3) = (c_1x_1 + c_3x_3)dt + \mu_1 dtV(x_1\text{-}1,1,x_3) + (\mu_3 + \mu)dtV(x_1,0,x_3\text{-}1) + [1\text{-}(\mu_1 + \mu + \mu_3)dt]V(x_1,0,x_3)$$

Η τελική μας λοιπόν εξίσωση θα προκύψει ως εξής :

$$V(x_1,0,x_3) = (c_1x_1 + c_3x_3)dt + \mu_1 dtV(x_1\text{-}1,1,x_3) + \mu_3 dtV(x_1,0,x_3\text{-}1) \quad [1\text{-}(\mu_1 + \mu + \mu_3)dt]V(x_1,0,x_3) + \mu dt\min\{V(x_1\text{-}1,1,x_3), V(x_1,0,x_3\text{-}1)\} \Rightarrow$$

$$V(x_1,0,x_3) = \frac{c_1x_1 + c_3x_3 + \mu_1 V(x_1\text{-}1,1,x_3) + \mu_3 V(x_1,0,x_3\text{-}1) + \mu\min\{V(x_1\text{-}1,1,x_3), V(x_1,0,x_3\text{-}1)\}}{1\text{-}\mu_2} \tag{2.3.6}$$

Στην παραπάνω εξίσωση απλοποιήσαμε θεωρώντας ότι: $\mu_1 + \mu + \mu_3 = 1 - \mu_2$

Αντίστοιχα για $x_3 = 0$ και με την ίδια ακριβώς λογική έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο πρώτο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση :

$$V_1(x_1,x_2,0) = (c_1x_1 + c_2x_2)dt + (\mu_1 + \mu)dtV(x_1\text{-}1,x_2 + 1,0) + \mu_2 dtV(x_1,x_2\text{-}1,1) + [1\text{-}(\mu_1 + \mu_2 + \mu)dt]V(x_1,x_2,0)\,]$$

Όταν ο επιπλέον εργάτης εργάζεται στο δεύτερο στάδιο παραγωγής τότε έχουμε την εξής εξίσωση :

$$V_2(x_1, x_2, 0) = (c_1x_1 + c_2x_2)dt + \mu_1 dt V(x_1 - 1, x_2 + 1, 0) + (\mu_2 + \mu)dt V(x_1, x_2 - 1, 1) + [1 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu)dt] V(x_1, x_2, 0)]$$

Η τελική μας λοιπόν εξίσωση θα προκύψει ως εξής :

$$V(x_1, x_2, 0) = (c_1x_1 + c_2x_2)dt + \mu_1 dt V(x_1 - 1, x_2 + 1, 0) + \mu_2 dt V(x_1, x_2 - 1, 1) + [1 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu)dt] V(x_1, x_2, 0)] + \mu dt \min\{V(x_1 - 1, x_2 + 1, 0), V(x_1, x_2 - 1, 1)\} \Rightarrow$$

$$V(x_1, x_2, 0) = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1, 0) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1, 1) + \mu \min\{V(x_1 - 1, x_2 + 1, 0), V(x_1, x_2 - 1, 1)\}}{1 - \mu_3} \qquad (2.3.7)$$

2.3.2 Περιγραφή μεθόδων (1,2)-(3,2) και (3,2)-(1,2) με αντίστοιχες εξισώσεις για το κόστος τους

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το συνολικό κόστος του συστήματος για 3 στάδια στη σειρά έχουν αναλυθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Με αυτές τις εξισώσεις σε αυτή τη διπλωματική εργασία έχουμε δημιουργήσει ένα υπολογιστικό πρόγραμμα με το οποίο υπολογίζουμε το συνολικό κόστος της βέλτιστης πολιτικής του συστήματος για διάφορες παραμέτρους όταν έχουμε 3 στάδια στη σειρά.

Όταν έχουμε τρία στάδια στη σειρά υπάρχουν και κάποιες άλλες εναλλακτικές μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε ένα συνολικό κόστος του συστήματος το οποίο ελπίζουμε ότι προσεγγίζει το συνολικό κόστος της βέλτιστης πολιτικής.. Αναφορά και ανάλυση αυτών των μεθόδων υπάρχει στο paper των Wu, Down και Lewis([7] στη Βιβλιογραφία). Σε αυτά τα paper προτείνεται η μεθοδολογία όταν έχουμε τρία και παραπάνω στάδια στη σειρά αντί να προσπαθούμε μέσω κάποιων πολλές φορές περίπλοκων εξισώσεων να υπολογίζουμε άμεσα το συνολικό κόστος της βέλτιστης πολιτικής, για μεγαλύτερη ευκολία , με τη μεθοδολογία των ανά δύο συγκρίσεων να βρίσκουμε κάποιο κόστος το οποίο θεωρούμε ότι είναι αρκετά κοντά σε αυτό της βέλτιστης πολιτικής

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο σε αυτή τη διπλωματική εργασία έχουμε ασχοληθεί με την μεθοδολογία που ξεκινά με τη σύγκριση $1^{ου}$ με $2^{ου}$ σταδίου αλλά και με την ανάποδη διαδικασία η οποία ξεκινά πρώτα με την σύγκριση $3^{ου}$ με $2^{ου}$ σταδίου. Σε αυτό λοιπόν το κεφάλαιο θα αναλύσουμε αυτές τις δύο μεθόδους παραθέτοντας και τις αντίστοιχες εξισώσεις.

Στην πρώτη μας λοιπόν μέθοδο [(1,2)-(2,3)] ξεκινάμε τις ανά δύο συγκρίσεις συγκρίνοντας το κόστος του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ σταδίου. Όπως είδη γνωρίζουμε η εξίσωση (2.2.1) μας δίνει το κόστος για δύο στάδια στη σειρά και είναι η εξής :

$$V(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \mu_1 \cdot V(x_1-1, x_2+1) + \mu_2 \cdot V(x_1, x_2-1) + \mu \cdot \min\{ V(x_1-1, x_2+1), V(x_1, x_2-1)\}$$

Όταν λοιπόν . $V(x_1-1, x_2+1) < V(x_1, x_2-1)\}$ τότε ο επιπλέον εργάτης πάει στο 1^o στάδιο και αυτή είναι και η βέλτιστη πολιτική. Στην περίπτωση όμως που το κόστος στο 2^o στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 1^o στάδιο δηλαδή όταν ισχύει ότι $V(x_1, x_2-1) < V(x_1-1, x_2+1)$ τότε πάμε στη σύγκριση του $2^{ου}$ με του $3^{ου}$ σταδίου. Η εξίσωση που μας δίνει το κόστος σε αυτή την περίπτωση είναι η εξής :

$$V(x_2, x_3) = c_2 x_2 + c_3 x_3 + \mu_2 V(x_2-1, x_3+1) + \mu_3 V(x_2, x_3-1) + \mu \cdot \min\{ V(x_2-1, x_3+1), V(x_2, x_3-1)\}$$

Ουσιαστικά είναι η εξίσωση (2.2.1) εφαρμοσμένη για το 2^o και το 3^o στάδιο.

Όταν λοιπόν $V(x_2-1, x_3+1) < V(x_2, x_3-1)$ τότε ο επιπλέον εργάτης πάει στο 2^o στάδιο και αυτή είναι και η βέλτιστη πολιτική. Όταν όμως το κόστος στο 3^o στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 2^o στάδιο όταν δηλαδή ισχύει ότι $V(x_2, x_3-1) < V(x_2-1, x_3+1)$ τότε ο επιπλέον εργάτης πάει στο 3^o στάδιο και αυτή είναι και η βέλτιστη πολιτική.

Έχουμε και τη δεύτερη μέθοδο [(3,2)-(2,1)] κατά την οποία ξεκινάμε τις ανά δύο συγκρίσεις ανάποδα. Αρχικά συγκρίνουμε το κόστος του 3^{ου} σταδίου με το κόστος του 2^{ου} σταδίου. Όταν λοιπόν $V(x_2,\ x_3\text{-}1) < V(x_2\text{-}1, x_3+1)$ τότε ο επιπλέον εργάτης πάει στο 3° στάδιο και αυτό είναι και η βέλτιστη πολιτική. Όταν όμως το κόστος στο 2° στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 3° στάδιο δηλαδή όταν ισχύει ότι $V(x_2\text{-}1, x_3+1) < V(x_2,\ x_3\text{-}1)$ τότε κάνουμε τη σύγκριση του 2^{ου} με του 1^{ου} σταδίου. Σε αυτή την περίπτωση όταν το κόστος στο 2° στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 1° στάδιο δηλαδή όταν ισχύει ότι $V(x_1,\ x_2\text{-}1) < V(x_1\text{-}1, x_2+1)$ τότε ο επιπλέον εργάτης πάει στο 2° στάδιο και αυτό είναι και η βέλτιστη πολιτική. Στην περίπτωση όμως που το κόστος στο 1° στάδιο είναι μικρότερο από το κόστος στο 2° στάδιο δηλαδή όταν ισχύει ότι $V(x_1\text{-}1, x_2+1) < V(x_1,\ x_2\text{-}1)$ τότε ο επιπλέον εργάτης πάει στο 1° στάδιο και αυτή είναι και η βέλτιστη πολιτική.

Με αυτές τις δύο λοιπόν μεθόδους αποφασίζουμε για την βέλτιστη πολιτική μας. Έτσι λοιπόν η βέλτιστη πολιτική μας θα είναι είτε τοποθετώντας τον επιπλέον εργάτη στο 1° στάδιο, είτε στο 2° στάδιο είτε στο 3° στάδιο.

Αν καταλήξουμε στην απόφαση να τοποθετήσουμε τον επιπλέον εργάτη στο 1° στάδιο τότε η εξίσωση κόστους του συστήματος θα είναι η εξής :

$$V(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \mu_1 V(x_1\text{-}1, x_2+1, x_3) + \mu_2 V(x_1, x_2\text{-}1, x_3+1) + \mu_3 V(x_1, x_2, x_3\text{-}1) + \mu V(x_1\text{-}1, x_2+1, x_3)$$

Αντίστοιχα αν καταλήξουμε στην απόφαση να τοποθετήσουμε τον επιπλέον εργάτη στο 2° στάδιο τότε η εξίσωση κόστους του συστήματος θα είναι η εξής :

$$V(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1, x_3) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1, x_3 + 1) + \mu_3 V(x_1, x_2, x_3 - 1) + \mu V(x_1, x_2 - 1, x_3 + 1)$$

Τέλος αν αποφασίσουμε να τοποθετήσουμε τον επιπλέον εργάτη στο 3^o στάδιο τότε η εξίσωση κόστους του συστήματος θα είναι η εξής :

$$V(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \mu_1 V(x_1 - 1, x_2 + 1, x_3) + \mu_2 V(x_1, x_2 - 1, x_3 + 1) + \mu_3 V(x_1, x_2, x_3 - 1) + \mu V(x_1, x_2, x_3 - 1)$$

Και οι 3 προηγούμενες εξισώσεις προέρχονται από την εξίσωση (2.3.1) με τον τελευταίο όρο να αλλάζει κάθε φορά ανάλογα με την πολιτική που ακολουθούμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα διάφορα αποτελέσματα που έχουμε πάρει, για διάφορες παραμέτρους από το υπολογιστικό πρόγραμμα. Ουσιαστικά θα συγκρίνουμε τα κόστη που υπολογίζει το πρόγραμμα για το πρόβλημα των $3^{ων}$ σταδίων στη σειρά για την περίπτωση της βέλτιστης πολιτικής και για την περίπτωση των ανά 2 συγκρίσεων (1,2)-(2,3) και (3,2)-(2,1).

Στη συνέχεια τα κόστη που θα παρουσιάσουμε αφορούν την περίπτωση που ξεκινάμε από την κατάσταση $(x,0,0)$ μέχρι το σύστημα να αδειάσει. Τις παραμέτρους του προβλήματος επηρεαζόμενοι από το paper των Wu, Down, Lewis τις επιλέξαμε ως εξής : Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης του κάθε εργάτη θεωρούμε ότι κυμαίνονται ως εξής : $5 < \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu < 10$ και τα κόστη αναμονής ενός προϊόντος ως εξής : $1 < c_1, c_2, c_3 < 4$. ‘Εχουμε επίσης κάνει μια μελέτη θεωρώντας τα κόστη αναμονής ως εξής : $1 < c_1 < 3$, $1{,}5 < c_2 < 3{,}5$ και $2 < c_3 < 4$ με την προϋπόθεση να ισχύει πάντα ότι $c_1 < c_2 < c_3$.

Τα κόστη λοιπόν που θα παρουσιάσουμε υπακούν στις πιο πάνω παραμέτρους και έχουμε πάρει αποτελέσματα για χ=30, χ=60 και χ=90 προϊόντα.

Για χ=30 έχουμε τα εξής αποτελέσματα :

Στην περίπτωση όπου $1 < c_1, c_2, c_3 < 4$ *έχουμε ότι* :

Η μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\text{Max}\left(\frac{V_{12}}{V_{\beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau o}}\right) = 1{,}2980$$

Βλέπουμε πως υπάρχει περίπτωση όπου η μέθοδος (1,2) έχει κόστος κατά 29,8% μεγαλύτερο από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα κόστη αποθήκευσης έχουν της εξής τιμές : c_1=1,1894 , c_2= 1,0752 , c_3= 3,5179.

Επειδή λοιπόν το κόστος αποθήκευσης στο 3^{o} στάδιο είναι ιδιαίτερα αυξημένο για αυτό το λόγο η μέθοδος (1,2) έχει πολύ μεγαλύτερο κόστος από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Στην συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση έχουμε ότι :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau o}} = 1{,}0175$$

Έχουμε λοιπόν πως με την μέθοδο (3,2) το κόστος είναι για μόλις 1,75% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής.

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\text{Min}\left(\frac{V_{12}}{V_{\beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau o}}\right) = 1{,}0004$$

Βλέπουμε λοιπόν πως το κόστος της μεθόδου (1,2) είναι μόλις κατά 0,04% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό αν δούμε πως για τα κόστη αποθήκευσης έχουμε ότι c_1=3,7615 , c_2= 1,0638 , c_3= 1,0721. Έχομε λοιπόν πολύ μεγαλύτερο κόστος αποθήκευσης στο 1^{o} στάδιο οπότε η μέθοδος (1,2) συμπίπτει ουσιαστικά με την βέλτιστη πολιτική. Για την συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση έχουμε ότι :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau o}} = 1{,}1436$$

Έχουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει κατά 14,36% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (1,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\iota\sigma\tau o}} = 1{,}0224$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (1,2) υστερεί της βέλτιστης πολιτικής για μόλις 2,24% μια διαφορά που μας επιτρέπει να πούμε πως για τις συγκεκριμένες παραμέτρους μπορούμε με σχεδόν μηδενική επιβάρυνση στο κόστος να χρησιμοποιούμε αυτή την εναλλακτική μέθοδο (1,2) αντί της βέλτιστης πολιτικής.

Τέλος παραθέτουμε πως έχουμε τυπική απόκλιση = 0,0192 που σημαίνει πως έχουμε πολύ λίγες περιπτώσεις που ξεφεύγουν από τον μέσο όρο.

Η μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Max}\left(\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}}\right) = 1{,}1570$$

Βλέπουμε λοιπόν πως έχουμε κατά 15,7% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Η μεγάλη αυτή διαφορά οφείλεται πως έχουμε πολύ μεγάλο κόστος αποθήκευσης στο 1^{o} στάδιο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε : c_1=3,8495 , c_2= 1,0937 , c_3= 1,2011. Μάλιστα βλέπουμε πως με την μέθοδο (1,2) το κόστος είναι μόλις κατά 0,1% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}001$$

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Min}\left(\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}}\right) = 1{,}0058$$

Βλέπουμε λοιπόν πως έχουμε μόλις 0,58% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα κόστη αποθήκευσης είναι ως εξής : c_1=1,4593, c_2= 2,1467 , c_3= 3,4970. Βλέπουμε λοιπόν πως το κόστος αποθήκευσης είναι πολύ μεγάλο στο 3^{o} στάδιο και για αυτό το λόγο η μέθοδος (3,2) συμπίπτει σχεδόν με την βέλτιστη πολιτική. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το κόστος στη μέθοδο (1,2) είναι κατά 8,01% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής :

$$\frac{V_{12}}{V_{βέλτιστο}} = 1,081 = 1,0801$$

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{32}}{V_{βέλτιστο}} = 1,0446$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει 4,46% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό το γεγονός φυσικά την κάνει μια πολύ καλή εναλλακτική μέθοδο.

Τέλος παρουσιάζει και η παρακάτω τυπική απόκλιση :

Τυπική απόκλιση = 0,0204

Η συγκεκριμένη τυπική απόκλιση δείχνει ότι πολύ λίγες περιπτώσεις ξεφεύγουν από τον μέσο όρο.

Σαν γενικότερο συμπέρασμα μπορούμε να πούμε πως και οι δύο μέθοδοι είναι πολύ καλές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί της βέλτιστης πολιτικής με μικρή επιβάρυνση στο συνολικό κόστος. Τέλος παρατηρούμε από τα αποτελέσματα κυρίως των μέσων όρων ότι η μέθοδος (1,2) είναι ελαφρώς καλύτερη από τη μέθοδο (3,2).

Για χ=60 έχουμε τα εξής αποτελέσματα :

Η μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Max}\left(\frac{V_{12}}{V_{βέλτιστο}}\right) = 1,3691$$

Βλέπουμε πως υπάρχει περίπτωση όπου η μέθοδος (1,2) έχει κόστος κατά 36,91% μεγαλύτερο από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα κόστη αποθήκευσης έχουν της εξής τιμές : c_1=1,1894 , c_2 = 1,0752 , c_3 = 3,5179.

Επειδή λοιπόν το κόστος αποθήκευσης στο 3ο στάδιο είναι ιδιαίτερα αυξημένο για αυτό το λόγο η μέθοδος (1,2) έχει πολύ μεγαλύτερο κόστος από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Στην συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση έχουμε ότι :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0313$$

Έχουμε λοιπόν πως με την μέθοδο (3,2) το κόστος είναι για μόλις 3,13% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής κάτι απόλυτα φυσιολογικό αφού έχουμε πολύ μεγάλο κόστος αποθήκευσης στο 3ο στάδιο.

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Min}\left(\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}}\right) = 1{,}0003$$

Βλέπουμε λοιπόν πως το κόστος της μεθόδου (1,2) είναι μόλις κατά 0,03% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό αν δούμε πως για τα κόστη αποθήκευσης έχουμε ότι c_1=3,7615 , c_2= 1,0638 , c_3= 1,0721. Έχομε λοιπόν πολύ μεγαλύτερο κόστος αποθήκευσης στο 1ο στάδιο οπότε η μέθοδος (1,2) συμπίπτει ουσιαστικά με την βέλτιστη πολιτική. Για την συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση έχουμε ότι :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}1484$$

Έχουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει κατά 14,84% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (1,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0234$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (1,2) υστερεί της βέλτιστης πολιτικής για μόλις 2,34% μια διαφορά που μας επιτρέπει να πούμε πως για τις συγκεκριμένες παραμέτρους μπορούμε με σχεδόν μηδενική επιβάρυνση στο κόστος να χρησιμοποιούμε αυτή την εναλλακτική μέθοδο (1,2) αντί της βέλτιστης πολιτικής.

Τέλος παραθέτουμε πως έχουμε τυπική απόκλιση = 0,0204 που σημαίνει πως έχουμε πολύ λίγες περιπτώσεις που ξεφεύγουν από τον μέσο όρο.

Η μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Max}\left(\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}}\right) = 1{,}1818$$

Βλέπουμε λοιπόν πως έχουμε κατά 18,18% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Η μεγάλη αυτή διαφορά οφείλεται πως έχουμε πολύ μεγάλο κόστος αποθήκευσης στο 1^{o} στάδιο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε : c_1=3,8495 , c_2= 1,0937 , c_3= 1,2011. Μάλιστα βλέπουμε πως με την μέθοδο (1,2) το κόστος είναι μόλις κατά 0,08% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0008$$

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Min}\left(\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}}\right) = 1{,}0082$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε της εξής παραμέτρους για το κόστος :

c_1=2,118 , c_2= 3,1341 , c_3= 1,4018.

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0104$$

Στο συγκεκριμένο λοιπόν παράδειγμα βλέπουμε πως το κόστος για την πολιτική (3,2) είναι μόλις 0,82% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής αλλά έχουμε και το αξιοπερίεργο και το κόστος της πολιτικής (1,2) να είναι και αυτό μόλις για 1,04% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης. Αυτό συμβαίνει γιατί το αυξημένο κόστος αποθήκευσης παρουσιάζεται στο 2^o στάδιο οπότε και οι δύο εναλλακτικές μέθοδοι είναι πολύ κοντά στη βέλτιστη πολιτική.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0562$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει 5,62% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό το γεγονός φυσικά την κάνει μια πολύ καλή εναλλακτική μέθοδο.

Τέλος παρουσιάζει και η παρακάτω τυπική απόκλιση :

Τυπική απόκλιση = 0,0238

Η συγκεκριμένη τυπική απόκλιση δείχνει ότι πολύ λίγες περιπτώσεις ξεφεύγουν από τον μέσο όρο.

Σαν γενικότερο συμπέρασμα μπορούμε να πούμε πως και οι δύο μέθοδοι είναι πολύ καλές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί της βέλτιστης πολιτικής με μικρή επιβάρυνση στο συνολικό κόστος. Τέλος παρατηρούμε από τα αποτελέσματα κυρίως των μέσων όρων ότι η μέθοδος (1,2) είναι ελαφρώς καλύτερη από τη μέθοδο (3,2).

Για χ=90 έχουμε τα εξής αποτελέσματα :

Η μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\text{Max}\left(\frac{V_{12}}{V_{\text{βέλτιστο}}}\right) = 1{,}4123$$

Βλέπουμε πως υπάρχει περίπτωση όπου η μέθοδος (1,2) έχει κόστος κατά 41,23% μεγαλύτερο από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα κόστη αποθήκευσης έχουν της εξής τιμές : c_1=1,1894 , c_2= 1,0752 , c_3= 3,5179.

Επειδή λοιπόν το κόστος αποθήκευσης στο 3^o στάδιο είναι ιδιαίτερα αυξημένο για αυτό το λόγο η μέθοδος (1,2) έχει πολύ μεγαλύτερο κόστος από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Στην συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση έχουμε ότι :

$$\frac{V_{32}}{V_{\text{βέλτιστο}}} = 1{,}0418$$

Έχουμε λοιπόν πως με την μέθοδο (3,2) το κόστος είναι για μόλις 4,18% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής κάτι απόλυτα φυσιολογικό αφού έχουμε πολύ μεγάλο κόστος αποθήκευσης στο 3^o στάδιο.

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\text{Min}\left(\frac{V_{12}}{V_{\text{βέλτιστο}}}\right) = 1{,}0002$$

Βλέπουμε λοιπόν πως το κόστος της μεθόδου (1,2) είναι μόλις κατά 0,02% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό αν δούμε πως για τα κόστη αποθήκευσης έχουμε ότι c_1=3,7615 , c_2= 1,0638 , c_3= 1,0721. Έχουμε λοιπόν πολύ μεγαλύτερο κόστος αποθήκευσης στο 1^o στάδιο οπότε η μέθοδος (1,2) συμπίπτει ουσιαστικά με την βέλτιστη πολιτική. Για την συγκεκριμένη μάλιστα περίπτωση έχουμε ότι :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1,1451$$

Έχουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει κατά 14,51% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (1,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1,0239$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (1,2) υστερεί της βέλτιστης πολιτικής για μόλις 2,39% μια διαφορά που μας επιτρέπει να πούμε πως για τις συγκεκριμένες παραμέτρους μπορούμε με σχεδόν μηδενική επιβάρυνση στο κόστος να χρησιμοποιούμε αυτή την εναλλακτική μέθοδο (1,2) αντί της βέλτιστης πολιτικής.

Τέλος παραθέτουμε πως έχουμε τυπική απόκλιση = 0,0212 που σημαίνει πως έχουμε πολύ λίγες περιπτώσεις που ξεφεύγουν από τον μέσο όρο.

Η μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Max}\left(\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}}\right) = 1,1918$$

Βλέπουμε λοιπόν πως έχουμε κατά 19,18% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Η μεγάλη αυτή διαφορά οφείλεται πως έχουμε πολύ μεγάλο κόστος αποθήκευσης στο 1^o στάδιο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε : c_1=3,8495 , c_2=

1,0937 , c_3= 1,2011. Μάλιστα βλέπουμε πως με την μέθοδο (1,2) το κόστος είναι μόλις κατά 0,08% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής :

$$\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0008$$

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Min}(\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}}) = 1{,}007$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε της εξής παραμέτρους για το κόστος :

c_1=2,118 , c_2= 3,1341 , c_3= 1,4018.

Η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (1,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$\mathrm{Min}(\frac{V_{12}}{V_{\beta έλτιστο}}) = 1{,}008$$

Στο συγκεκριμένο λοιπόν παράδειγμα βλέπουμε πως το κόστος για την πολιτική (3,2) είναι μόλις 0,7% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής αλλά έχουμε και το αξιοπερίεργο και το κόστος της πολιτικής (1,2) να είναι και αυτό μόλις για 0,8% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης. Αυτό συμβαίνει γιατί το αυξημένο κόστος αποθήκευσης παρουσιάζεται στο 2^o στάδιο οπότε και οι δύο εναλλακτικές μέθοδοι είναι πολύ κοντά στη βέλτιστη πολιτική.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0613$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει 6,13% μεγαλύτερο κόστος από αυτό της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό το γεγονός φυσικά την κάνει μια πολύ καλή εναλλακτική μέθοδο.

Τέλος παρουσιάζει και η παρακάτω τυπική απόκλιση :

$$\text{Τυπική απόκλιση} = 0{,}0261$$

Η συγκεκριμένη τυπική απόκλιση δείχνει ότι πολύ λίγες περιπτώσεις ξεφεύγουν από τον μέσο όρο.

Σαν γενικότερο συμπέρασμα μπορούμε να πούμε πως και οι δύο μέθοδοι είναι πολύ καλές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί της βέλτιστης πολιτικής με μικρή επιβάρυνση στο συνολικό κόστος. Τέλος παρατηρούμε από τα αποτελέσματα κυρίως των μέσων όρων ότι η μέθοδος (1,2) είναι ελαφρώς καλύτερη από τη μέθοδο (3,2).

Στην περίπτωση όπου $1< c_1 <3$, $1{,}5< c_2 <3{,}5$ *και* $2< c_3 <4$ *με την προϋπόθεση να ισχύει πάντα ότι* $c_1 < c_2 < c_3$, *για* $\chi=30$ *έχουμε* :

$$0{,}934 \leq \frac{V_{12}}{V_{32}} \leq 1{,}2422$$

Αυτό δείχνει την μικρότερη και μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την μέθοδο (1,2). Βλέπουμε πως υπάρχει περίπτωση όπου η μέθοδος (1,2) έχει κόστος κατά 24,22 % μεγαλύτερο από την μέθοδο (3,2) .

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (1,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{12}}{V_{32}} = 1{,}0018$$

Ουσιαστικά βλέπουμε πως η μέθοδος (1,2) έχει για μόλις 0,18 % μεγαλύτερο κόστος από τη μέθοδο (3,2). Το συμπέρασμα είναι πως καμία μέθοδος δεν μπορούμε να πούμε πως υπερτερεί έναντι της άλλης.

Η μεγαλύτερη και η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$1{,}0047 \leq \frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} \leq 1{,}0873$$

Βλέπουμε λοιπόν πως υπάρχει περίπτωση όπου το κόστος της μεθόδου (3,2) είναι κατά 8,73 % μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{\mathrm{V}_{32}}{\mathrm{V}_{\beta έλτιστο}} = 1{,}0343$$

Ουσιαστικά βλέπουμε πως η μέθοδος (3,2) έχει κόστος κατά 3,43 % μεγαλύτερο από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Αυτό είναι μια πολύ μικρή διαφορά οπότε μπορούμε να πούμε πως αν συνδυάσουμε και το αποτέλεσμα (3.6) στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιούμε τις εναλλακτικές μεθόδους (1,2) και (3,2) έναντι της βέλτιστης πολιτικής με μια πολύ μικρή επιβάρυνση στο κόστος.

Τέλος μελετάμε και την περίπτωση που έχουμε υπολογίσει τα κόστη ξεκινώντας από την κατάσταση $(\frac{x}{3}, \frac{\mathrm{x}}{3}, \frac{\mathrm{x}}{3})$ *μέχρι και το σύστημα να αδειάσει. Οι παράμετροι που μελετάμε το πρόβλημα είναι οι ίδιες με τις προηγούμενες.*

Για χ=30 έχουμε τα εξής αποτελέσματα :

Στην περίπτωση όπου $1< c_1, c_2, c_3 <4$ *έχουμε ότι* :

$$0,829 \leq \frac{V_{32}}{V_{12}} \leq 1,0914$$

Αυτό δείχνει την μικρότερη και μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την μέθοδο (1,2). Βλέπουμε πως υπάρχει περίπτωση όπου το κόστος της μεθόδου (3,2) είναι κατά 9,14 % μεγαλύτερο από το κόστος της μεθόδου (1,2).

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (1,2) έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{32}}{V_{12}} = 0,995$$

Ουσιαστικά βλέπουμε πως η μέθοδος (1,2) έχει για μόλις 0, 5 % μεγαλύτερο κόστος από τη μέθοδο (3,2). Το συμπέρασμα είναι πως καμία μέθοδος δεν μπορούμε να πούμε πως υπερτερεί έναντι της άλλης.

Η μεγαλύτερη και η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$1 \leq \frac{V_{32}}{V_{\text{βέλτιστο}}} \leq 1,0018$$

Βλέπουμε λοιπόν πως υπάρχει περίπτωση όπου το κόστος της μεθόδου (3,2) είναι κατά 0,18% μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έ\lambda\tau\iota\sigma\tau o}} = 1{,}0018$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η μέθοδος (3,2) έχει μόλις 0,18% μεγαλύτερο κόστος από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για αυτή την περίπτωση μπορούμε με μηδαμινή επιβάρυνση του κόστους να χρησιμοποιούμε τις εναλλακτικές μεθόδους (1,2) και (3,2) αντί για την βέλτιστη πολιτική.

Στην περίπτωση όπου $1< c_1<3$, $1{,}5< c_2<3{,}5$ *και* $2< c_3<4$ *με την προϋπόθεση να ισχύει πάντα ότι* $c_1 < c_2 < c_3$ *έχουμε* :

$$0.999 \le \frac{V_{12}}{V_{32}} \le 1{,}0503$$

Αυτό δείχνει την μικρότερη και μεγαλύτερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την μέθοδο (1,2). Βλέπουμε πως υπάρχει περίπτωση όπου η μέθοδος (1,2) έχει κόστος κατά 5,03% μεγαλύτερο από τη μέθοδο (3,2).

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (1,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{12}}{V_{32}} = 1{,}0039$$

Ουσιαστικά βλέπουμε πως η μέθοδος (1,2) έχει για μόλις 0,39% μεγαλύτερο κόστος από τη μέθοδο (3,2). Βλέπουμε λοιπόν πως καμία μέθοδος δεν υπερτερεί έναντι της άλλης.

Η μεγαλύτερη και η μικρότερη διαφορά που παρουσιάζεται ανάμεσα στα κόστη για την μέθοδο (3,2) και για την βέλτιστη πολιτική είναι η εξής :

$$1 \le \frac{V_{32}}{V_{\beta έ\lambda\tau\iota\sigma\tau o}} \le 1{,}0047$$

Βλέπουμε λοιπόν πως υπάρχει περίπτωση όπου το κόστος της μεθόδου (3,2) είναι κατά 8,73 % μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης πολιτικής και περίπτωση να είναι απολύτως ίσα.

Στην περίπτωση που διαιρέσουμε το μέσο όρο για τα κόστη στην μέθοδο (3,2) με τον μέσο όρο για τα κόστη στην βέλτιστη μέθοδο έχουμε το εξής αποτέλεσμα :

$$\frac{V_{32}}{V_{\beta έλτιστο}} = 1,0007$$

Ουσιαστικά βλέπουμε πως η μέθοδος (3,2) έχει κόστος κατά 0,07% μεγαλύτερο από το κόστος της βέλτιστης πολιτικής. Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι για αυτή την περίπτωση μπορούμε με μηδαμινή επιβάρυνση του κόστους να χρησιμοποιούμε τις εναλλακτικές μεθόδους (1,2) και (3,2) αντί για την βέλτιστη πολιτική

ΣΥΝΟΨΗ

Μετά από όλα τα παραπάνω μπορούμε να πούμε πως κάναμε μια προσπάθεια προσέγγισης της χρήσης προσωπικού σε ευέλικτα συστήματα παραγωγής με γνώμονα κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των συστημάτων.

Ειδικότερα δώσαμε απάντηση στο πρόβλημα της χρήσης ενός ευέλικτου εργάτη σε ένα σύστημα 3^{ων} σταδίων και προτείναμε εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης αυτού του προβλήματος οι οποίες είδαμε ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί της βέλτιστης πολιτικής.

Κατόπιν όλων των ανωτέρων, ελπίζουμε αυτή η μελέτη να αποτελέσει, πέρα από χρήσιμο εργαλείο σε συστήματα παραγωγής και ένα έναυσμα για περαιτέρω μελέτη του τομέα, ώστε να βρεθούν νέοι τρόποι βέλτιστης διαχείρισης πόρων στη βιομηχανία και όχι μόνο.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
program mixanes
integer:: i,j,k,x,y,h
integer :: flag
integer, allocatable:: c12(:), c23(:)
double   precision::c1,c2,c3,m,m1,m2,m3,CC1,CC2,CC3,MM1,MM2,MM3,MM,rand

double precision,allocatable:: a(:,:)
integer, allocatable:: b(:,:)
integer*4 timeArray(3)

call itime(timeArray)
i= rand(timeArray(1)+timeArray(2)+timeArray(3))



x=30



do h=1, 500

allocate(a(x,x),c12(x),c23(x), b(x,x))

CC1=1.0 + 3.0*rand(0)
CC2=1.0 + 3.0*rand(0)
CC3=1.0 + 3.0*rand(0)

!CC1=1.0 + 2.0*rand(0)
!CC2=max(CC1,1.5) + (3.5-max(CC1,1.5))*rand(0)
!CC3=max(CC2,2.0) + (4-max(CC2,2.0))*rand(0)

MM=5+5*rand(0)
MM1=5+5*rand(0)
MM2=5+5*rand(0)
MM3=5+5*rand(0)
a(1,1)=0


! Ypologismos tou kathetou aksonon tou pinaka

c1=CC1/(MM1+MM2+MM)
c2=CC2/(MM1+MM2+MM)
m1=MM1/(MM1+MM2+MM)
m2=MM2/(MM1+MM2+MM)
m=MM/(MM1+MM2+MM)
```

```
do i=2,x
a(1,i)=(c2*(i-1))/(m2+m) + a(1,i-1)

end do


do j=2,x
!       flag=0
        do i=1,x-j+1
        if (i==1) then
        a(j,1)=(c1*(j-1))/(m1+m) + a(j-1,2)
        else
        a(j,i)=c1*(j-1)+c2*(i-1)+m1*a(j-1,i+1)+m2*a(j,i-1)  +  m*min(a(j-1,i+1),a(j,i-
1))
                if (a(j-1,i+1)<a(j,i-1)) then
                b(j,i)=1
                c12(j)=i

!               if (flag==0) then
!                       flag=1
!                       c12(j)=i
!               endif

                else
                b(j,i)=2
                endif
        endif
        enddo
enddo


! Ypologismos tou kathetou aksonon tou pinaka
c2=CC2/(MM2+MM3+MM)
c3=CC3/(MM2+MM3+MM)
m2=MM2/(MM2+MM3+MM)
m3=MM3/(MM2+MM3+MM)
m=MM/(MM2+MM3+MM)

do i=2,x
a(1,i)=(c2*(i-1))/(m3+m) + a(1,i-1)

end do


do j=2,x
!       flag=0
        do i=1,x-j+1
        if (i==1) then
```

```
          a(j,1)=(c2*(j-1))/(m2+m) + a(j-1,2)
          else
          a(j,i)=c2*(j-1)+c3*(i-1)+m2*a(j-1,i+1)+m3*a(j,i-1)  +  m*min(a(j-1,i+1),a(j,i-
1))
                    if (a(j-1,i+1)<a(j,i-1)) then
                    b(j,i)=1
                    c23(j)=i



!                   if (flag==0) then
!                             flag=1
!                             c23(j)=i
!                   endif

                    else
                    b(j,i)=2
                    endif
          endif
          enddo
enddo


!do i=1,x
!write (*,'(i4,\)') c12(i)
!enddo




!do i=1,x
!write (*,'(i4,\)') c23(i)
!enddo

call trisdiastato(c12,c23,x,CC1,CC2,CC3,MM1,MM2,MM3,MM)

call veltisto(CC1,CC2,CC3,MM,MM1,MM2,MM3,x)



deallocate(a,c12,c23,b)

enddo

end program


subroutine trisdiastato(c12,c23,x,CC1,CC2,CC3,MM1,MM2,MM3,MM)
integer::x
integer::c12(x), c23(x)
```

```
integer:: x1,x2,x3,i,j,k,d
double                                                          precision::
c3,c2,c1,m3,m2,m1,m,min,parag,nparag,CC1,CC2,CC3,MM1,MM2,MM3,MM
double precision, allocatable::v(:,:,:),vnew(:,:,:)

d=x

allocate(v(d,d,d),vnew(d,d,d))

open (unit=4, file='cccmach.txt', status='old', access='append')
open (unit=5, file='vnewmach.txt', status='old', access='append')


v(1,1,1)=0
vnew(1,1,1)=0

c1=CC1/(MM1+MM2+MM3+MM)
c2=CC2/(MM1+MM2+MM3+MM)
c3=CC3/(MM1+MM2+MM3+MM)
m1=MM1/(MM1+MM2+MM3+MM)
m2=MM2/(MM1+MM2+MM3+MM)
m3=MM3/(MM1+MM2+MM3+MM)
m=MM/(MM1+MM2+MM3+MM)

! Ypologismos Aksona x3
do x3=2,d
v(1,1,x3)= ((c3*(x3-1))/(m3+m)) + v(1,1,x3-1)
vnew(1,1,x3)= ((c3*(x3-1))/(m3+m)) + vnew(1,1,x3-1)
end do

! Ypologismos Aksona x2
do x2=2,d
v(1,x2,1)= ((c2*(x2-1))/(m2+m)) +v(1,x2-1,2)
vnew(1,x2,1)= ((c2*(x2-1))/(m2+m)) +vnew(1,x2-1,2)


! Ypologismos epipedou x3,x2
do x3=2,d-x2+1
        if (x3<=c23(x2)) then
        parag=v(1,x2-1,x3+1)
        nparag=vnew(1,x2-1,x3+1)
        else
        parag=v(1,x2,x3-1)
        nparag=vnew(1,x2,x3-1)
        endif
        v(1,x2,x3)=(c2*(x2-1)+c3*(x3-1)+m2*v(1,x2-1,x3+1)+m3*v(1,x2,x3-
1)+m*parag)/(1-m1)
        vnew(1,x2,x3)=(c2*(x2-1)+c3*(x3-1)+m2*vnew(1,x2-
1,x3+1)+m3*vnew(1,x2,x3-1)+m*nparag)/(1-m1)
        enddo
```

```
enddo



! Ypologismos Aksona x1
do x1=2,d
        v(x1,1,1)= (c1*(x1-1))/(m1+m) +v(x1-1,2,1)
        vnew(x1,1,1)= (c1*(x1-1))/(m1+m) +vnew(x1-1,2,1)
        do x3=2,d-x1+1
                v(x1,1,x3)=(c1*(x1-1)+c3*(x3-1)+m1*v(x1-1,2,x3)+m3*v(x1,1,x3-
1)+m* v(x1,1,x3-1))/(1-m2)
                vnew(x1,1,x3)=(c1*(x1-1)+c3*(x3-1)+m1*vnew(x1-
1,2,x3)+m3*vnew(x1,1,x3-1)+m* vnew(x1-1,2,x3))/(1-m2)
        enddo
        do x2=2,d-x1+1
                if(x2<=c12(x1)) then
                parag=v(x1-1,x2+1,1)
                nparag=vnew(x1-1,x2+1,1)
                else
                parag=v(x1,x2-1,2)
                nparag=vnew(x1,x2-1,2)
                endif

                v(x1,x2,1)=(c1*(x1-1)+c2*(x2-1)+m1*v(x1-1,x2+1,1)+m2*v(x1,x2-
1,2)+m*parag)/(1-m3)
                vnew(x1,x2,1)=(c1*(x1-1)+c2*(x2-1)+m1*vnew(x1-
1,x2+1,1)+m2*vnew(x1,x2-1,2)+m*nparag)/(1-m3)


                do x3=2,d-x1+2-x2

                if (x3>c23(x2)) then
                parag=v(x1,x2,x3-1)
                else
                        if (x2<=c12(x1)) then
                        parag=v(x1-1,x2+1,x3)
                        else
                                parag=v(x1,x2-1,x3+1)
                        endif
                endif

                if (x2<=c12(x1)) then
                nparag=vnew(x1-1,x2+1,x3)
                else
                        if (x3<=c23(x2)) then
                        nparag=vnew(x1,x2-1,x3+1)
                        else
                                nparag=vnew(x1,x2,x3-1)
                        endif
```

```
                endif

                        v(x1,x2,x3)=c1*(x1-1)+c2*(x2-1)+c3*(x3-1)+m1*v(x1-
1,x2+1,x3)+m2*v(x1,x2-1,x3+1)+m3*v(x1,x2,x3-1)+m*parag
                        vnew(x1,x2,x3)=c1*(x1-1)+c2*(x2-1)+c3*(x3-
1)+m1*vnew(x1-1,x2+1,x3)+m2*vnew(x1,x2-1,x3+1)+m3*vnew(x1,x2,x3-
1)+m*nparag

                enddo
        enddo
enddo


!do k=1,d
!
!write (4,'(A,/)') ""
!write (4,'(A,i3,/)') "x1=",k
!write (4,'(A,/)') ""
!do i=d,1,-1
!       do j=1,d
!               write(4,'(f9.1,\)') v(k,i,j)
!       enddo
!write (4,'(A,/)') ""
!enddo

!enddo

write (4,'(8F8.3)') v(d,1,1), CC1,CC2,CC3,MM,MM1,MM2,MM3
write (5,'(2F10.3)') v(d,1,1), vnew(d,1,1)

deallocate(v)


endsubroutine



!-------------------------------------------------------------------------------------------

subroutine veltisto(CC1,CC2,CC3,MM,MM1,MM2,MM3,d)

integer:: x1,x2,x3,i,j,k,d
double precision:: c3,c2,c1,m3,m2,m1,m,min,CC1,CC2,CC3,MM1,MM2,MM3,MM
double precision, allocatable::v(:,:,:)


allocate(v(d,d,d))

open (unit=4, file='cccveltisto.txt',status='old', access='append')
```

```
v(1,1,1)=0

c1=CC1/(MM1+MM2+MM3+MM)
c2=CC2/(MM1+MM2+MM3+MM)
c3=CC3/(MM1+MM2+MM3+MM)
m1=MM1/(MM1+MM2+MM3+MM)
m2=MM2/(MM1+MM2+MM3+MM)
m3=MM3/(MM1+MM2+MM3+MM)
m=MM/(MM1+MM2+MM3+MM)



! Ypologismos Aksona x3
do x3=2,d
v(1,1,x3)= ((c3*(x3-1))/(m3+m)) + v(1,1,x3-1)
end do

! Ypologismos Aksona x2
do x2=2,d
v(1,x2,1)= ((c2*(x2-1))/(m2+m)) +v(1,x2-1,2)

! Ypologismos epipedou x3,x2
do x3=2,d-x2+1
        v(1,x2,x3)=(c2*(x2-1)+c3*(x3-1)+m2*v(1,x2-1,x3+1)+m3*v(1,x2,x3-
1)+m*min(v(1,x2-1,x3+1),v(1,x2,x3-1)))/(1-m1)

        enddo
enddo




! Ypologismos Aksona x1
do x1=2,d
        v(x1,1,1)= (c1*(x1-1))/(m1+m) +v(x1-1,2,1)
        do x3=2,d-x1+1
                v(x1,1,x3)=(c1*(x1-1)+c3*(x3-1)+m1*v(x1-1,2,x3)+m3*v(x1,1,x3-
1)+m*min(v(x1-1,2,x3),v(x1,1,x3-1)))/(1-m2)
        enddo
        do x2=2,d-x1+1
                v(x1,x2,1)=(c1*(x1-1)+c2*(x2-1)+m1*v(x1-1,x2+1,1)+m2*v(x1,x2-
1,2)+m*min(v(x1-1,x2+1,1),v(x1,x2-1,2)))/(1-m3)


                do x3=2,d-x1+2-x2
                        v(x1,x2,x3)=c1*(x1-1)+c2*(x2-1)+c3*(x3-1)+m1*v(x1-
1,x2+1,x3)+m2*v(x1,x2-1,x3+1)+m3*v(x1,x2,x3-1)+m*min(v(x1-
1,x2+1,x3),v(x1,x2-1,x3+1),v(x1,x2,x3-1))
```

```
                    enddo
          enddo
enddo

!
!do k=1,d
!
!write (4,'(A,/)') ""
!write (4,'(A,i3,/)') "x1=",k
!write (4,'(A,/)') ""
!do i=d,1,-1
!         do j=1,d
!                   write(4,'(f9.1,\)') v(k,i,j)
!         enddo
!write (4,'(A,/)') ""
!enddo


!enddo

write (4,'(8F10.3)') v(d,1,1), CC1, CC2, CC3, MM, MM1, MM2, MM3




deallocate(v)
end subroutine
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Farrar, T . (1993). Optimal use of an extra server in a two station tandem queuing network.
IEEE Transactions on Automatic Control 38 : 1296-1299

2. Hopp, W.J., Tekin, E.,& Van Oyen, M.P.(2004). Benefits of skill-chaining in production lines with cross-trained workers. Management Science 50 : 83-98

3. Hopp, W.J., Tekin, E.,& Van Oyen, M.P.(2004). Agile workforce evaluation : a framework for cross-training and coordination. IIE Transactions 36 :919-940

4. Iravani, SM., Van Oyen, M.P., & Sims, K.T. (2005). Structural flexibility : a new perspective on the design of manufacturing and service operations. Management Science 51 : 151-166

5. Van Oyen, M.P., Gel, E.S.,& Hopp, W.J. (2001). Performance opportunity for workforce agility in collaborative and noncollaborative work systems. IIE Transactions 33 : 761-777

6. Wu, C.H., Lewis, M.E., & Veatch, M. (2006). Dynamic allocation of reconfigurable resources in a two-stage tandem queueing system with reliability considerations. IEEE Transactions on Automatic Control 51 : 309-314

7. Wu, Down, Lewis (2006). Heuristics for Allocations of Reconfigurable Resources in a serial Line with Reliability Considerations, προδημοσίευση.