

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ & ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΕΩΡΓΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΝΑΣ ΜΥΩΠΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ KNAPSACK ΜΕ
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ ΚΑΙ
ΔΥΟ ΚΡΙΤΗΡΙΑ: ΚΕΡΔΟΣ ΚΑΙ ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗ



ΒΟΛΟΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2005



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 2408/1
Ημερ. Εισ.: 03-03-2005
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2005
ΓΕΩ

*Στους Γονείς μου
Φώτη και Ελισάβετ*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΕΙΣΑΓΩΓΗ	Σελ.
1.1 Έναυσμα για την υλοποίηση της διπλωματικής	8
1.2 Περιγραφή και προέλευση του εξεταζόμενου προβλήματος	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	
2.1 Εισαγωγή στο μαθηματικό μοντέλο	12
2.2 Βιβλιογραφική επισκόπηση	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	
3.1 Υπόβαθρο και ορολογία	17
3.2 Σημαντικές ιδιότητες του προβλήματος	20
3.3 Διαδικασία επίλυσης	24
3.4 Χρήση του αλγόριθμου για την εύρεση συγκεκριμένων λύσεων	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ	
4.1 Γενικά	34
4.2 Ανάλυση πολυπλοκότητας αλγόριθμου	34
4.3 Υπολογιστικά πειράματα	35
4.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων	37
4.4 Το μοντέλο AMPL του προβλήματος	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΕΠΙΛΟΓΟΣ	
5.1 Συμπεράσματα	55
5.2 Μελλοντική έρευνα	55
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	57

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

	Σελ.
Πίνακας 1: Χρόνοι εκτέλεσης του αλγόριθμου για προβλήματα τύπου A	40
Πίνακας 2: Μεταβολή του f μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου A	41
Πίνακας 3: Μεταβολή του κέρδους μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου A	42
Πίνακας 4: Κατανομή του συνολικού αριθμού επαναλήψεων μεταξύ των 5 επιλογών για προβλήματα τύπου A	43
Πίνακας 5: Χρόνοι εκτέλεσης του αλγόριθμου για προβλήματα τύπου B	44
Πίνακας 6: Μεταβολή του f μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου B	45
Πίνακας 7: Μεταβολή του κέρδους μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου B	46
Πίνακας 8: Κατανομή του συνολικού αριθμού επαναλήψεων μεταξύ των 5 επιλογών για προβλήματα τύπου B	47
Πίνακας 9: Το μοντέλο AMPL του προβλήματος	51
Πίνακας 10: Το αρχείο δεδομένων AMPL του προβλήματος	52

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

	Σελ.
Σχήμα 1: Μεταβλητές απόφασης ενός συνόλου πολλαπλών επιλογών	18
Σχήμα 2: Εξαλείφοντας μεταβλητές στο Πρόβλημα BLMCK	24
Σχήμα 3: Οι πέντε επιλογές μείωσης του f	25
Σχήμα 4: Καθορίζοντας αν μια λύση είναι Pareto βέλτιστη	25
Διάγραμμα 1: Το διάγραμμα $P - f$ για ένα πρόβλημα τύπου A	48
Διάγραμμα 2: Το διάγραμμα $P - f$ για ένα πρόβλημα τύπου B	49

© 2005 Γεώργας Ιωάννης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Γεώργιος Κοζανίδης Διδάσκων ΠΔ 407/80, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Γεώργιος Λυμπερόπουλος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Αθανάσιος Ζηλιασκόπουλος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Κεφάλαιο 1:

Εισαγωγή

1.1 Έναυσμα για την υλοποίηση της διπλωματικής

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζουμε ένα μυωπικό αλγόριθμο για την επίλυση του Γραμμικού Προβλήματος Knapsack με περιορισμούς πολλαπλών επιλογών και δύο κριτήρια: κέρδος και ισοκατανομή. Το βασικό πλεονέκτημα του αλγόριθμου είναι ότι παρέχει το πλήρες μέτωπο (frontier) των Pareto βέλτιστων λύσεων του προβλήματος και όχι μόνο ένα υποσύνολο αυτού, όπως γίνεται συνήθως σε παρόμοια προβλήματα πολυκριτήριας βελτιστοποίησης. Παράλληλα, η υπολογιστική απόδοση του αλγόριθμου είναι εξαιρετική, όπως αποδεικνύεται και από τα αποτελέσματα των πειραμάτων που διεξήχθησαν. Όπως προκύπτει από την ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών, τα πλεονεκτήματα από τη χρήση του αλγόριθμου αυξάνονται καθώς τα μεγέθη των επιλυμένων προβλημάτων μεγαλώνουν.

Η ταχεία πρόοδος στην περιοχή της βέλτιστης κατανομής περιορισμένων πόρων οφείλεται κατά ένα μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη και ανάλυση μιας μεγάλης συλλογής προβλημάτων τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μορφοποίηση τέτοιων προβλημάτων, τα λεγόμενα προβλήματα Knapsack. Ο όρος knapsack (σακίδιο) έχει υιοθετηθεί, επειδή μία από τις πιο παλιές εφαρμογές του προβλήματος είναι η μεγιστοποίηση της αξίας ενός συνόλου αντικειμένων που θα μπουν σε ένα σακίδιο περιορισμένης χωρητικότητας (π.χ. όγκου ή βάρους). Επειδή αυτό είναι ουσιαστικά το πρόβλημα φόρτωσης ενός μέσου μεταφοράς περιορισμένης χωρητικότητας με το φορτίο μέγιστης αξίας, στην ελληνική βιβλιογραφία (Βασιλείου, 2001), το πρόβλημα απαντάται επίσης ως πρόβλημα βέλτιστου φόρτου.

Το πρόβλημα που εξετάζουμε σε αυτή τη διπλωματική διαφέρει από το κλασσικό πρόβλημα knapsack στους περιορισμούς πολλαπλών επιλογών και στην ύπαρξη δύο κριτηρίων αντί ενός. Οι περιορισμοί πολλαπλών επιλογών εισάγονται για να ληφθούν υπόψη οι αλληλεπιδράσεις που προκύπτουν μεταξύ διαφορετικών δραστηριοτήτων. Τα δύο κριτήρια που χρησιμοποιούνται είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους που προκύπτει από την εφαρμογή των επιλεγμένων δραστηριοτήτων και η ελαχιστοποίηση της μέγιστης διαφοράς ανάμεσα στις ποσότητες του διαθέσιμου πόρου που κατανέμονται σε δύο οποιαδήποτε σύνολα δραστηριοτήτων.

1.2 Περιγραφή και προέλευση του εξεταζόμενου προβλήματος

Το πρόβλημα που εξετάζουμε έχει εφαρμογή στη βέλτιστη κατανομή πόρων μεταξύ διακριτών συνόλων με συνεχείς δραστηριότητες. Σκοπός είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους που απορρέει από την εφαρμογή των εξεταζόμενων δραστηριοτήτων, ενώ παράλληλα γίνεται προσπάθεια να υπάρχει μία όσο το δυνατόν πιο ισορροπημένη κατανομή του διαθέσιμου πόρου μεταξύ των συνόλων των δραστηριοτήτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το πρόβλημα προέκυψε από μία εφαρμογή στη διοίκηση μεταφορών για βέλτιστη κατανομή κονδυλίων για προγραμματισμό βελτιώσεων ασφαλείας σε αυτοκινητόδρομους.

Ο προγραμματισμός βελτιώσεων ασφαλείας σε αυτοκινητόδρομους είναι ένα από τα θέματα μεγάλης σπουδαιότητας για όλους αυτούς που είναι επιφορτισμένοι με τη λήψη αποφάσεων στην περιοχή των μεταφορών. Η διακύβευση ανθρώπινων ζωών δίνει στο ζήτημα αυτό ύψιστη σημασία που καθιστά απαραίτητη την ειδική προσοχή. Σαν αποτέλεσμα, ένα μεγάλο μέρος των κρατικών χρηματοδοτήσεων προορίζεται για την εφαρμογή βελτιώσεων ασφαλείας σε αυτοκινητόδρομους, σε μια προσπάθεια να μειωθούν οι πιθανές απώλειες και να αυξηθεί το επίπεδο ασφαλείας.

Η βέλτιστη κατανομή κονδυλίων για την εφαρμογή βελτιώσεων ασφαλείας σε αυτοκινητόδρομους είναι ένα πολύπλοκο και επίπονο πρόβλημα. Ο μεγάλος αριθμός των ανταγωνιζόμενων εναλλακτικών επιλογών απαιτεί μια μεθοδολογία για την αξιολόγησή τους, έτσι ώστε το κέρδος από την αξιοποίηση ενός περιορισμένου προϋπολογισμού να είναι το μέγιστο δυνατό. Παρά τις πολυάριθμες προσεγγίσεις που έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία, η πολυπλοκότητα του προβλήματος σε συνδυασμό με τη δυσκολία στην εκτίμηση των κύριων παραμέτρων του οδηγούν πολύ συχνά στη λήψη μη βέλτιστων αποφάσεων (Donaldson, 1988). Η ανάγκη για την εύρεση μιας ορθολογικής μεθόδου για την αντιμετώπιση του προβλήματος γίνεται επιτακτική, όπως γίνεται αντιληπτό από την ταχύτατη αύξηση των οχημάτων που κυκλοφορούν αλλά και την αναπόφευκτη φθορά των αυτοκινητόδρομων.

Η παρούσα διπλωματική δομείται ως εξής. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το μαθηματικό μοντέλο και τη βιβλιογραφική επισκόπηση του προβλήματος. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε για την επίλυση του προβλήματος.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την ανάλυση υπολογιστικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου καθώς και την ανάλυση των πειραμάτων που προέκυψαν από τα πειράματα που διεξήχθησαν. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο συνοψίζουμε τα κύρια σημεία της παρούσας διπλωματικής, καταγράφοντας τα κύρια συμπεράσματα που προέκυψαν και προτείνοντας κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2:

Περιγραφή Μαθηματικού Μοντέλου

2.1 Εισαγωγή στο μαθηματικό μοντέλο

Θεωρούμε ένα σύνολο τμημάτων αυτοκινητόδρομων και ένα σύνολο από προτεινόμενες συνεχείς βελτιώσεις για κάθε τμήμα. Μία βελτίωση θεωρείται συνεχής εάν μπορεί να υλοποιηθεί συνεχώς σε οποιοδήποτε από τα εξεταζόμενα τμήματα. Για παράδειγμα, συνεχής βελτίωση είναι η εγκατάσταση κολώνων φωτισμού καθώς μπορεί να εφαρμοστεί συνεχώς σε οποιοδήποτε τμήμα ενός αυτοκινητόδρομου. Κάθε συνεχής βελτίωση παριστάνεται από μία συνεχή μεταβλητή. Για οποιοδήποτε τμήμα, υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής μιας ή περισσότερων βελτιώσεων με πιθανή αλληλοκάλυψη. Για κάθε συνεχή βελτίωση, υπάρχουν δύο συντελεστές p_{ki} και c_{ki} , που παριστάνουν το ανά μονάδα μήκους κέρδος και κόστος, αντίστοιχα, που απορρέει από την υλοποίηση της βελτίωσης i στο τμήμα k . Ένας από τους περιορισμούς του προβλήματος είναι ότι το συνολικό κόστος που προκύπτει από την εφαρμογή των επιλεγμένων βελτιώσεων δεν πρέπει να υπερβαίνει το διαθέσιμο προϋπολογισμό b . Το πρώτο κριτήριο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους που απορρέει από την εφαρμογή των επιλεγμένων βελτιώσεων. Το δεύτερο κριτήριο είναι η ελαχιστοποίηση της μέγιστης διαφοράς μεταξύ των χρηματικών ποσών που κατανέμονται σε δύο οποιαδήποτε διαφορετικά τμήματα αυτοκινητόδρομων. Στόχος της εισαγωγής του δεύτερου κριτηρίου είναι η εξισορροπημένη κατανομή των διαθέσιμων κονδυλίων στα διάφορα τμήματα των αυτοκινητόδρομων. Με βάση αυτή την ανάλυση, το πρόβλημα, για το οποίο χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία BLMCK (Biobjective Linear Multiple Choice Knapsack), μορφοποιείται ως εξής:

$$\text{Max} \sum_{k \in S} \sum_{i \in R_k} p_{ki} x_{ki} \quad (1)$$

$$\text{Min} f \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in S} \sum_{i \in R_k} c_{ki} x_{ki} \leq b \quad (3)$$

$$\sum_{i \in R_k} x_{ki} \leq l_k, \forall k \in S \quad (4)$$

$$L \leq \sum_{i \in R_k} c_{ki} x_{ki} \leq U, \forall k \in S \quad (5)$$

$$U - L \leq f \quad (6)$$

$$x_{ki} \geq 0, i \in R_k, \forall k \in S \quad (7)$$

Σε αυτή τη μορφοποίηση, S είναι το σύνολο των τμημάτων των αυτοκινητόδρομων και x_{ki} η μεταβλητή που παριστάνει το μήκος του τμήματος k στο οποίο θα εφαρμοστεί η βελτίωση i . Για συγκεκριμένο k που ανήκει στο S , R_k είναι το σύνολο των προτεινόμενων βελτιώσεων για το αντίστοιχο τμήμα k . Η αντικειμενική συνάρτηση (1) μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος, ενώ ο περιορισμός (3) εξασφαλίζει ότι το συνολικό κόστος δε θα υπερβαίνει το διαθέσιμο προϋπολογισμό, b . Οι περιορισμοί (5) ορίζουν τις βοηθητικές μεταβλητές απόφασης L, U με τέτοιο τρόπο ώστε το συνολικό ποσό που κατανέμεται σε κάθε τμήμα k , να ανήκει στο διάστημα $[L, U]$. Το μήκος αυτού του διαστήματος ορίζεται από τον περιορισμό (6) και ελαχιστοποιείται από την αντικειμενική συνάρτηση (2). Οι περιορισμοί (7) εξασφαλίζουν τη μη αρνητικότητα των μεταβλητών απόφασης.

Στην παραπάνω μορφοποίηση όλες οι μεταβλητές p_{ki} και c_{ki} θεωρούνται μη αρνητικές. Αν αφαιρεθεί το δεύτερο κριτήριο, δηλαδή οι (2) (5) και (6), προκύπτει το πρόβλημα LMCK (Linear Multiple Choice Knapsack). Έχει αποδειχθεί (Johnson and Padberg, 1981) πως οποιοδήποτε πρόβλημα LMCK με αρνητικούς κάποιους από αυτούς τους συντελεστές μπορεί να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα LMCK με θετικούς συντελεστές. Η μεταβλητή b (budget) είναι επίσης μία θετική ποσότητα που μας δείχνει το ύψος του προϋπολογισμού που είναι διαθέσιμο για την υλοποίηση των προτεινόμενων βελτιώσεων. Τέλος, με l_k συμβολίζουμε το μήκος του τμήματος k .

Οι περιορισμοί (3) ονομάζονται περιορισμοί πολλαπλών επιλογών (multiple-choice constraints). Σύμφωνα με αυτούς τους περιορισμούς, το συνολικό μήκος όλων των βελτιώσεων που θα υλοποιηθούν στο τμήμα k , δεν μπορεί να υπερβαίνει το μήκος του τμήματος k . Οι περιορισμοί αυτοί εισάγονται για να ληφθούν υπόψη οι αλληλεξαρτήσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή δύο ή περισσότερων διαφορετικών βελτιώσεων στο ίδιο κομμάτι ενός αυτοκινητόδρομου. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται αναλυτικά από τους Melachrinoudis and Kozanidis (2002).

2.2 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Το Πρόβλημα LMCK μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χαλάρωση του Προβλήματος BMCK (Binary Multiple Choice Knapsack) που προκύπτει όταν επιπροσθέτως οι μεταβλητές απόφασης περιορίζονται σε δυαδικές τιμές και $l_k = 1$ για όλα τα k . Το πρόβλημα BMCK μπορεί να θεωρηθεί ως το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνολικής αξίας n αντικειμένων που εισάγονται σε ένα σακίδιο χωρητικότητας b , με τον επιπρόσθετο περιορισμό ότι τα αντικείμενα χωρίζονται σε $|S|$ διακριτά σύνολα και από κάθε σύνολο μπορεί να επιλεγεί το πολύ ένα αντικείμενο. Αυτό το πρόβλημα απαντάται σε πολλές εφαρμογές όπως χρονικό προγραμματισμό και εξισορρόπηση γραμμής παραγωγής (Lin, 1998).

Το πρόβλημα LMCK έχει μελετηθεί ευρέως (Lin, 1998). Παραδείγματα τεχνικών επίλυσης που έχουν αναπτυχθεί είναι δυικές μέθοδοι (Glover and Klingman, 1979; Witzgall, 1980; Dyer, 1984; Dudzinski and Walukiewicz, 1984; Zemel, 1984; Gass and Shao, 1985; Sarin and Karwan, 1989), μέθοδοι μείωσης και μετασχηματισμού (Zemel, 1980) και γενικευμένες μέθοδοι Dantzig (Johnson and Padberg, 1981).

Διάφορες παραλλαγές του προβλήματος LMCK έχουν εξεταστεί και τα αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Μία επέκταση ως πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού έχει εξεταστεί και η ανάλυση αυτή μαζί με έναν αποτελεσματικό Branch and Bound αλγόριθμο επίλυσης έχει παρουσιαστεί από τους Kozanidis and Melachrinoudis (2004). Επίσης, η παραλλαγή του παρόντος προβλήματος στην οποία το δεύτερο κριτήριο αντικαθίσταται από έναν περιορισμό που περιορίζει το μήκος του διαστήματος $[L, U]$ σε μια μέγιστη γνωστή τιμή έχει εξεταστεί και ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος επίλυσης έχει προταθεί από τους Kozanidis et al. (2005).

Η γενίκευση του κλασσικού προβλήματος knapsack, στην οποία κάθε αντικείμενο έχει διάφορους συντελεστές κέρδους και σκοπός είναι η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση πολλών αντικειμενικών συναρτήσεων κέρδους έχει επίσης ερευνηθεί εις βάθος στη διεθνή βιβλιογραφία (Eben-Chaime, 1996; Klamroth and Wiecek, 2000; Erlebach et al., 2002). Η παρούσα επέκταση του προβλήματος πάντως, όπου βελτιστοποιούνται δύο

κριτήρια (κέρδος και ισοκατανομή) για το Γραμμικό Πρόβλημα Knapsack με Περιορισμούς Πολλαπλών Επιλογών δεν έχει εξεταστεί στο παρελθόν, τουλάχιστον εξ' όσων μας είναι γνωστό. Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας πηγάζει από τη μεθοδολογική και υπολογιστική εξέταση αυτού του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσουμε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος και αποδεικνύουμε ότι αυτή η δομή έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Αυτές οι ιδιότητες μας επιτρέπουν στη συνέχεια την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικού αλγόριθμου επίλυσης που λαμβάνει το πλήρες μέτωπο των Pareto βέλτιστων λύσεων.

Κεφάλαιο 3:

Μεθοδολογία Επίλυσης

3.1 Υπόβαθρο και Ορολογία

Παρόλο που τα Προβλήματα LMCK και BLMCK παρουσιάζουν πολλές διαφορές, έχουν και αρκετές ομοιότητες. Ο αλγόριθμος που προτείνουμε για την επίλυση του Προβλήματος BLMCK χωρίζεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, το δεύτερο κριτήριο αγνοείται και λαμβάνεται η βέλτιστη λύση του Προβλήματος LMCK. Ξεκινώντας από αυτή την λύση στη δεύτερη φάση, το κριτήριο ισοκατανομής εισάγεται και πάλι και λαμβάνεται το πλήρες Pareto μέτωπο του προβλήματος. Για την επίλυση του Προβλήματος LMCK στην Φάση I, χρησιμοποιούμε τον Αλγόριθμο LMCK (Kozanidis and Melachrinoudis, 2004). Αυτός ο αλγόριθμος είναι μια τροποποίηση του αλγόριθμου που ανέπτυξαν οι Jonhson and Padberg (1981) που μας παρέχει πολύτιμες πληροφορίες τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την λήψη του πλήρους Pareto μετώπου στη Φάση II. Δύο πολύ χρήσιμες ιδιότητες για το πρόβλημα LMCK είναι οι εξής :

Ιδιότητα 1: Εάν για κάποιο k υπάρχουν δύο διακριτές μεταβλητές x_{kf} και x_{kg} , τέτοιες

ώστε $\frac{p_{kf}}{c_{kf}} \geq \frac{p_{kg}}{c_{kg}}$ και $p_{kf} \geq p_{kg}$, τότε η μεταβλητή x_{kg} μπορεί να εξαλειφθεί, επειδή

υπάρχει μια βέλτιστη λύση με $x_{kg} = 0$.

Ιδιότητα 2: Εάν για κάποιο k υπάρχουν τρεις διακριτές μεταβλητές x_{kf} , x_{kg} και x_{kh}

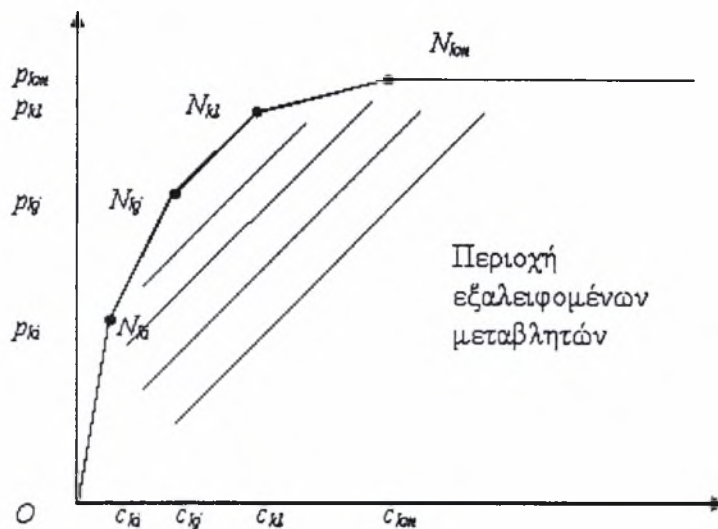
τέτοιες ώστε $p_{kf} \leq p_{kg} \leq p_{kh}$, $c_{kf} < c_{kg} < c_{kh}$, $(p_{kg} - p_{kf}) / (c_{kg} - c_{kf}) \leq (p_{kh} - p_{kg}) / (c_{kh} - c_{kg})$,

τότε η μεταβλητή x_{kg} μπορεί να εξαλειφθεί, επειδή υπάρχει μια βέλτιστη λύση με $x_{kg} =$

0.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών έχουν παρουσιαστεί από τους Chandra et al. (1976) και Sinha and Zoltners (1979). Εφαρμόζοντας τα κριτήρια απαλοιφής που προκύπτουν από τις Ιδιότητες 1 και 2, ο αλγόριθμος εξαλείφει πρώτα τις αντίστοιχες μεταβλητές σε κάθε σύνολο πολλαπλών επιλογών. Οι μεταβλητές που παραμένουν, οι οποίες σχηματίζουν το αριστερό upper hull του αντίστοιχου συνόλου (βλέπε Σχήμα 1), ταξινομούνται σε μια λίστα πολλαπλών επιλογών κατά αύξουσα σειρά του κόστους και του κέρδους τους. Κάθε μεταβλητή σχετίζεται με έναν λόγο (σχετική κλίση), ο οποίος ισούται με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τη συγκεκριμένη

μεταβλητή με τη μεταβλητή που αμέσως προηγείται στην αντίστοιχη λίστα πολλαπλών επιλογών. Κατόπιν, οι μεταβλητές από όλες τις λίστες συγχωνεύονται σε μια κύρια λίστα κατά φθίνουσα σειρά των σχετικών τους κλίσεων. Έπειτα, το ποσό του προϋπολογισμού b κατανέμεται διαδοχικά στις μεταβλητές αποφάσεων σύμφωνα με τη σειρά που έχουν στην κύρια λίστα, μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση.



Σχήμα 1: Μεταβλητές απόφασης ενός συνόλου πολλαπλών επιλογών

Έστω μία εφικτή λύση του προβλήματος LMCK. Το ύψος του προϋπολογισμού που κατανέμεται στο τμήμα k βάσει αυτής της λύσης ονομάζεται **κόστος** του συνόλου k . Οι όροι **maxcost** και **mincost** χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το μέγιστο και ελάχιστο, αντίστοιχα, τέτοιο κόστος μεταξύ όλων των τμημάτων. Κάθε σύνολο του οποίου το κόστος είναι διαφορετικό από maxcost και mincost ονομάζεται **εσωτερικό**. Ένα σύνολο του οποίου το κόστος είναι ίσο με maxcost ή mincost ονομάζεται **ανώτατο** ή **κατώτατο**, αντίστοιχα.

Έστω ένα συγκεκριμένο σύνολο, k . Η παράμετρος l_k ονομάζεται **μήκος** του συνόλου k . Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης στο σύνολο k ονομάζονται **μερική λύση** του συνόλου k . Κάθε μερική λύση περιλαμβάνει το πολύ δύο θετικές μεταβλητές απόφασης (Sinha and Zoltners, 1979). Αν περιλαμβάνει ακριβώς μία θετική μεταβλητή απόφασης με τιμή ίση με το μήκος του συνόλου αυτού ονομάζεται **στρογγυλοποιημένη** μερική λύση. Αν όχι και περιλαμβάνει μία ή δύο θετικές μεταβλητές απόφασης ονομάζεται **κλασματική** μερική λύση.

Χρησιμοποιούμε τους όρους **αύξον** και **φθίνον** για να χαρακτηρίσουμε ένα **σύνολο πολλαπλών επιλογών** καθώς και τους όρους **αύξουσα** και **φθίνουσα** για να χαρακτηρίσουμε τη σχετική του **κλίση**. Η αύξουσα και η φθίνουσα κλίση ενός συνόλου πολλαπλών επιλογών k ορίζεται ως εξής: Εάν η μερική λύση του συνόλου αυτού είναι στρογγυλοποιημένη με $x_{km} = l_k$, τότε η αύξουσα κλίση του συγκεκριμένου συνόλου, $\frac{p_{kn} - p_{km}}{c_{kn} - c_{km}}$, είναι η σχετική κλίση της αμέσως επόμενης μεταβλητής x_{kn} , στη λίστα μεταβλητών του συνόλου πολλαπλών επιλογών k . Εάν η x_{km} είναι η τελευταία μεταβλητή στη λίστα αυτή, τότε η αύξουσα κλίση αυτού του συνόλου δεν υφίσταται. Εάν η μερική λύση του συνόλου είναι κλασματική, τότε η αύξουσα κλίση αυτού του συνόλου είναι η σχετική κλίση αυτής της κλασματικής μεταβλητής (εάν υπάρχουν δύο, παίρνουμε αυτή η οποία διαδέχεται την άλλη στη αντίστοιχη λίστα k). Η **αύξουσα κλίση** ενός συνόλου αντιπροσωπεύει την αύξηση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα του προϋπολογισμού που επιπρόσθετα κατανέμεται σε αυτό το σύνολο. Η **φθίνουσα κλίση** ενός συνόλου ισούται πάντα με τη σχετική κλίση της θετικής μεταβλητής απόφασης (όπως και πριν, θεωρούμε τη δεύτερη μεταβλητή εάν υπάρχουν δύο θετικές). Για ένα σύνολο του οποίου το κόστος ισούται με 0, η φθίνουσα κλίση δεν ορίζεται. Η φθίνουσα κλίση ενός συνόλου αντιπροσωπεύει τη μείωση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα προϋπολογισμού που αφαιρείται από αυτό το σύνολο.

Η λίστα πολλαπλών επιλογών ορίζει τη σειρά με την οποία οι μεταβλητές σε ένα σύνολο πολλαπλών επιλογών πρέπει να αυξηθούν (ή να μειωθούν), όταν περισσότερες (ή λιγότερες) μονάδες προϋπολογισμού κατανέμονται σε αυτό το σύνολο. Κάθε μερική λύση ενός συνόλου πολλαπλών επιλογών αντιστοιχεί σε ένα σημείο το οποίο ανήκει στο upper hull του αντίστοιχου διαγράμματος. Κατανέμοντας περισσότερες ή λιγότερες μονάδες προϋπολογισμού σε ένα σύνολο, απλά μετακινούμαστε σε γειτονικά σημεία, ενώ ταυτόχρονα παραμένουμε συνεχώς επάνω σε αυτό το σύνορο. Η **σχετική κλίση** μίας μεταβλητής αντιπροσωπεύει την αύξηση του συνολικού κέρδους ανά επιπρόσθετη μονάδα πόρου που καταναλώνεται όταν η μεταβλητή αυτή αυξάνεται. Όταν το κόστος ενός συνόλου αυξάνεται, μπορούμε να βρούμε την καινούργια μερική λύση που προκύπτει χρησιμοποιώντας τη σειρά των μεταβλητών στη αντίστοιχη λίστα πολλαπλών επιλογών. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει την εκτέλεση των αναγκαίων επαναλήψεων του Αλγόριθμου LMCK για να χρησιμοποιηθεί το επιπρόσθετο ποσό του

προϋπολογισμού. Ομοίως, όταν το ποσό του προϋπολογισμού το οποίο κατανέμεται σε ένα σύνολο μειώνεται, μπορούμε να βρούμε τη νέα μερική λύση ακολουθώντας την αντίστροφη σειρά των μεταβλητών σε αυτή τη λίστα. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το κόστος του συγκεκριμένου συνόλου να μειωθεί στην επιθυμητή τιμή.

Η **φθίνουσα κλίση** ενός συνόλου ορίζεται πάντοτε, υποθέτοντας ότι το ποσό του προϋπολογισμού που έχει κατανεμηθεί σε αυτό το σύνολο είναι θετικό. Η **αύξουσα κλίση** όμως, μπορεί να μην υφίσταται. Αυτό συμβαίνει για ένα σύνολο πολλαπλών επιλογών του οποίου η μερική λύση περιλαμβάνει μία στρογγυλοποιημένη μεταβλητή και αυτή η μεταβλητή τυγχάνει να είναι η τελευταία στη σχετική λίστα πολλαπλών επιλογών. Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να κατανείμουμε επιπρόσθετες μονάδες προϋπολογισμού σε αυτό το σύνολο, επειδή δεν υπάρχει διαδοχική μεταβλητή υποψήφια για αύξηση. Όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, για το BLMCK πρόβλημα και η αύξουσα και η φθίνουσα κλίση ενός συνόλου μπορούν να πάρουν θετικές, αρνητικές ή μηδενικές τιμές.

Επίσης, χρησιμοποιούμε τους όρους **αύξον** και **φθίνον** για να χαρακτηρίσουμε ένα σύνολο. Αν αποφασίσουμε να κατανείμουμε επιπρόσθετες μονάδες προϋπολογισμού σε ένα σύνολο, τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **αύξον σύνολο** επειδή τα κονδύλια που κατανέμονται σε αυτό αυξάνονται. Ομοίως, αν αποφασίσουμε να μειώσουμε το ύψος των κονδυλίων που θα κατανεμηθούν σε ένα σύνολο, τότε το ονομάζουμε **φθίνον σύνολο**.

3.2 Σημαντικές Ιδιότητες του Προβλήματος

Μία σημαντική διαφορά μεταξύ των προβλημάτων LMCK και BLMCK είναι ότι οι μεταβλητές που μπορούν να εξαλειφθούν σύμφωνα με την Ιδιότητα 1, αλλά ανήκουν στο δεξί upper hull του αντίστοιχου συνόλου πολλαπλών επιλογών, μπορούν να πάρουν θετική τιμή σε μια λύση που ανήκει στο μέτωπο Pareto του προβλήματος BLMCK. Για να γίνει κατανοητό πώς μπορεί να προκύψει κάτι τέτοιο, θεωρούμε το ακόλουθο παράδειγμα :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } 5x_{11} + 3x_{12} + 10x_{21} \\
 & \text{Min } f \\
 & \text{s.t. } 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{21} \leq 9 \\
 & \quad x_{11} + x_{12} \leq 1 \\
 & \quad x_{21} \leq 1 \\
 & \quad L \leq 2x_{11} + 4x_{12} \leq U \\
 & \quad L \leq 5x_{21} \leq U \\
 & \quad U - L \leq f \\
 & \quad x_{11}, x_{12}, x_{21} \geq 0
 \end{aligned}$$

Το πρόβλημα έχει δύο σύνολα πολλαπλών επιλογών. Το πρώτο αποτελείται από τις μεταβλητές x_{11} και x_{12} και το δεύτερο από τη μεταβλητή x_{21} . Όταν αγνοήσουμε το δεύτερο κριτήριο, η βέλτιστη LMCK λύση είναι $x_{11} = 1$, $x_{12} = 0$ και $x_{21} = 1$. Όταν λάβουμε υπόψη το δεύτερο κριτήριο, μια Pareto βέλτιστη λύση με $f = 1$ είναι η $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$ και $x_{21} = 1$. Επισημαίνουμε πως παρά το ότι η μεταβλητή x_{21} εξαλείφεται από τη μεταβλητή x_{11} βάσει της Ιδιότητας 1 ($p_{12}/c_{12} < p_{11}/c_{11}$ και $p_{12} < p_{11}$), έχει θετική τιμή στη λύση αυτή. Αυτό συμβαίνει επειδή η μεταβλητή x_{12} διευρύνει το εύρος της περιοχής από την οποία παίρνει τιμές το κόστος του πρώτου συνόλου πολλαπλών επιλογών. Εάν μόνο η μεταβλητή x_{11} θεωρηθεί στο πρώτο σύνολο πολλαπλών επιλογών και η μεταβλητή x_{12} εξαλειφθεί, για $f = 1$ το πολύ τρεις μονάδες του προϋπολογισμού μπορούν να κατανεμηθούν στο δεύτερο σύνολο πολλαπλών επιλογών. Αυτό συμβαίνει επειδή το μέγιστο ποσό του προϋπολογισμού το οποίο μπορεί να κατανεμηθεί στο πρώτο σύνολο πολλαπλών επιλογών ισούται με 2, το κόστος δηλαδή της μεταβλητής x_{11} , και επιπλέον, η διαφορά μεταξύ του κόστους των δύο συνόλων δεν μπορεί να ξεπεράσει τη μία μονάδα. Από την άλλη, όταν η μεταβλητή x_{12} δεν εξαλειφθεί, μπορούν να κατανεμηθούν στο δεύτερο σύνολο πολλαπλών επιλογών μέχρι και 5 μονάδες, αφού $c_{14} = 4$. Βάσει της παραπάνω ανάλυσης, μεταβλητές οι οποίες διευρύνουν την περιοχή από την οποία παίρνει τιμές

το κόστος του αντίστοιχου συνόλου δεν πρέπει να εξαλείφονται για το BLMCK πρόβλημα ακόμα κι αν ισχύει η Ιδιότητα 1.

Ο αλγόριθμος που προτείνουμε για την απόκτηση του πλήρους Pareto μετώπου για το Πρόβλημα BLMCK χρησιμοποιεί τις λίστες μεταβλητών που δημιουργούνται από τον Αλγόριθμο LMCK. Η δημιουργία αυτών των λιστών πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα για να λάβει υπόψη τη διαφορά μεταξύ του BLMCK και του LMCK η οποία αναφέρθηκε παραπάνω. Επομένως, στα πλαίσια του BLMCK, οι μεταβλητές που ανήκουν στο δεξί upper hull πρέπει να προστεθούν στο σύνολο των μεταβλητών που λαμβάνονται από τον Αλγόριθμο LMCK. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να λάβουμε υπόψη όχι μόνο το αριστερό upper hull μέχρι το σημείο με το υψηλότερο κέρδος, αλλά το πλήρες upper hull μέχρι το σημείο με το υψηλότερο κόστος. Αυτό εξηγεί γιατί η αύξουσα (ή η φθίνουσα) κλίση ενός συνόλου πολλαπλών επιλογών μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Παραδείγματος χάριν, όταν αυξάνεται μια μεταβλητή από το δεξί upper hull κάποιου συνόλου, τότε η αύξουσα και η φθίνουσα κλίση του συγκεκριμένου συνόλου γίνονται αρνητικές.

Ας εξετάσουμε τώρα τις μεταβλητές που καθορίζουν το πλήρες upper hull ενός συνόλου πολλαπλών επιλογών και μια μεταβλητή x_{kg} , η οποία δεν ανήκει στο upper hull, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Θεωρούμε δύο μεταβλητές x_{kf} και x_{kh} από το upper hull τέτοιες ώστε $c_{kf} \leq c_{kg} \leq c_{kh}$. Σημειώνεται ότι αυτές οι μεταβλητές ορίζονται πάντα, αν και η x_{kf} μπορεί να πρέπει να οριστεί ως η αρχή των αξόνων με $c_{kf} = p_{kf} = 0$. Για μεταβλητές όπως η x_{kg} , ισχύει το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 1: Οι μεταβλητές που δεν ανήκουν στο upper hull του αντίστοιχου συνόλου πολλαπλών επιλογών μπορούν να εξαλειφθούν για το Πρόβλημα BLMCK επειδή δεν μπορούν να πάρουν θετικές τιμές σε καμία Pareto βέλτιστη λύση.

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή x_{kg} λαμβάνει θετική τιμή σε μια Pareto βέλτιστη λύση του BLMCK προβλήματος και $c_{kf} \leq c_{kg} \leq c_{kh}$. Έστω

$$z = \frac{c_{kg} - c_{kh}}{c_{kf} - c_{kh}} x_{kg} = \left(1 - \frac{c_{kg} - c_{kf}}{c_{kh} - c_{kf}}\right) x_{kg} \quad \text{και} \quad w = \frac{c_{kg} - c_{kf}}{c_{kh} - c_{kf}} x_{kg} = \left(1 - \frac{c_{kg} - c_{kh}}{c_{kf} - c_{kh}}\right) x_{kg}. \quad \text{Εξετάζουμε}$$



την εναλλακτική λύση που προκύπτει όταν $x'_{kf} = x_{kf} + z$, $x'_{kh} = x_{kh} + w$ και $x'_{kg} = 0$, ενώ οι τιμές όλων των άλλων μεταβλητών παραμένουν οι ίδιες. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το κόστος του συνόλου k παραμένει ίδιο μετά από αυτόν τον μετασχηματισμό. Επομένως, ο περιορισμός για τον προϋπολογισμό εξακολουθεί να ισχύει και η τιμή του δεύτερου κριτηρίου παραμένει αμετάβλητη. Επιπλέον, $z + w = x_{kg}$ και επομένως οι περιορισμοί πολλαπλών επιλογών εξακολουθούν να ισχύουν, ομοίως και οι περιορισμοί μη αρνητικότητας αφού $0 < \frac{c_{kg} - c_{kh}}{c_{kf} - c_{kh}} < 1$. Από $p_{kf}z + p_{kh}w > p_{kg}x_{kg}$

παίρνουμε ισοδύναμα $\frac{c_{kg} - c_{kh}}{c_{kf} - c_{kh}}(p_{kf} - p_{kh}) > (p_{kg} - p_{kh})$. Αυτή η έκφραση είναι

ισοδύναμη της $\frac{p_{kf} - p_{kh}}{c_{kf} - c_{kh}} < \frac{p_{kg} - p_{kh}}{c_{kg} - c_{kh}}$ ή $\frac{p_{kh} - p_{kf}}{c_{kh} - c_{kf}} < \frac{p_{kh} - p_{kg}}{c_{kh} - c_{kg}}$. Όταν η x_{kf} ανήκει στο

αριστερό upper hull αυτό ισχύει πάντα, δεδομένου ότι η κλίση που σχηματίζεται από τις x_{kf} και x_{kh} είναι πάντα μικρότερη από την κλίση που σχηματίζεται από τις x_{kg} και x_{kh} (βλέπε Σχήμα 2). Ομοίως, παίρνουμε

$p_{kf}z + p_{kh}w > p_{kg}x_{kg} \Leftrightarrow \frac{c_{kg} - c_{kf}}{c_{kh} - c_{kf}}(p_{kh} - p_{kf}) > (p_{kg} - p_{kf})$, το οποίο είναι ισοδύναμο με

$\frac{p_{kh} - p_{kf}}{c_{kh} - c_{kf}} > \frac{p_{kg} - p_{kf}}{c_{kg} - c_{kf}}$ ή $\frac{p_{kf} - p_{kh}}{c_{kh} - c_{kf}} < \frac{p_{kf} - p_{kg}}{c_{kg} - c_{kf}}$. Όταν η x_{kh} ανήκει στο δεξί upper hull

αυτό ισχύει επίσης πάντα, δεδομένου ότι η κλίση που σχηματίζεται από τις x_{kh} και x_{kf} είναι πάντα μικρότερη από την κλίση που σχηματίζεται από τις x_{kg} και x_{kf} (βλέπε Σχήμα 2). Επομένως, με την παραπάνω αντικατάσταση μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή του πρώτου κριτηρίου, χωρίς την παραβίαση οποιουδήποτε από τους περιορισμούς ή την αλλαγή της τιμής του δεύτερου κριτηρίου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι η παρούσα λύση είναι Pareto βέλτιστη. Εάν $c_{kg} = c_{kf}$ ή $c_{kg} = c_{kh}$, το πρώτο κριτήριο μπορεί να βελτιωθεί με άμεση αντικατάσταση της μεταβλητής x_{kg} με την μεταβλητή που ανήκει στο upper hull και έχει το ίδιο κόστος (x_{kf} ή x_{kh}). Κατά συνέπεια, η x_{kg} πρέπει να πάρει μηδενική τιμή σε αυτήν την Pareto βέλτιστη λύση του προβλήματος. Επομένως, οι μεταβλητές που εσωκλείονται στο (πλήρες) upper hull του

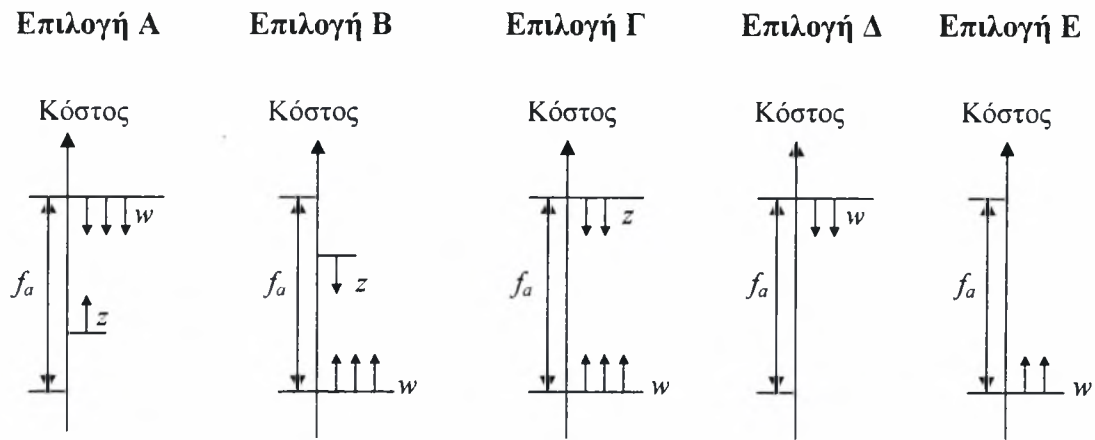
αντίστοιχου συνόλου πολλαπλών επιλογών μπορούν πάντα να εξαλειφθούν στο BLMCK πρόβλημα. \square



Σχήμα 2: Εξαλείφοντας μεταβλητές στο Πρόβλημα BLMCK

3.3 Ο Αλγόριθμος Επίλυσης

Ας υποθέσουμε ότι το δεύτερο κριτήριο αγνοείται και το LMCK το οποίο προκύπτει επιλύεται χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο LMCK. Στη λύση που παίρνουμε, το f ισούται με τη μέγιστη διαφορά που παρατηρείται μεταξύ του κόστους δύο οποιωνδήποτε συνόλων (maxcost-mincost) και αυτή η τιμή ελαχιστοποιείται από το δεύτερο κριτήριο. Υπάρχουν πέντε διαφορετικές επιλογές για τη μείωση της τιμής του f , οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 3. Από αυτές τις επιλογές, αυτή που επιλέγεται θα πρέπει να είναι αυτή που μας δίνει την ελάχιστη μείωση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα μείωσης του f . Έστω ΔP και Δf οι διαφορές στο συνολικό κέρδος και στο f , αντίστοιχα, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της καλύτερης επιλογής. Σημειώνεται ότι, εκ κατασκευής, η τιμή του ΔP είναι μη θετική, ενώ η τιμή του Δf αυστηρά αρνητική. Η ακόλουθη πρόταση είναι πολύ σημαντική για την ανάπτυξη του αλγόριθμου για το πρόβλημα BLMCK.

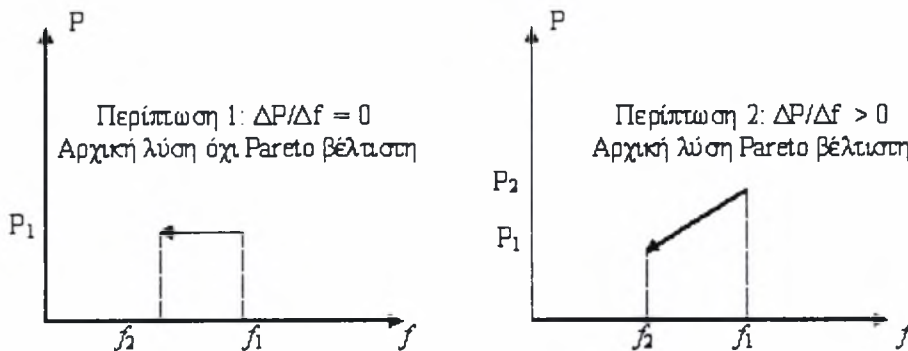


Σχήμα 3: Οι πέντε επιλογές μείωσης του f .

Πρόταση 2: Η αρχική λύση που λαμβάνεται χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο LMCK, είναι Pareto βέλτιστη για το πρόβλημα BLMCK αν και μόνο αν $\frac{\Delta P}{\Delta f} > 0$.

Απόδειξη: Δεδομένου ότι αυτή η λύση είναι βέλτιστη για το πρόβλημα του ενός κριτηρίου, το αποτέλεσμα προκύπτει από τον ορισμό της Pareto βελτιστότητας. □

Η κατάσταση απεικονίζεται στο Σχήμα 4, όπου φαίνεται η μετάβαση από μία αρχική σε μία τελική λύση μέσω της εφαρμογής μιας επιλεγμένης κίνησης. Στην πρώτη περίπτωση, η αρχική μαζί με όλες τις ενδιάμεσες λύσεις κυριαρχείται από την τελευταία λύση (όλες έχουν $P = P_1$). Στη δεύτερη περίπτωση, η αρχική και όλες οι ενδιάμεσες λύσεις είναι Pareto βέλτιστες, δεδομένου ότι το P μειώνεται αυστηρά καθώς το f μειώνεται.



Σχήμα 4: Καθορίζοντας αν μια λύση είναι Pareto βέλτιστη.

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνει σε κάθε επανάληψη την ακόλουθη διαδικασία. Αρχικά, επιλέγει την κίνηση για την οποία το $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ είναι ελάχιστο. Χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο τερματισμού, καθορίζει έως ποιο σημείο αυτή η επανάληψη πρέπει να εφαρμοστεί. Η επανάληψη τερματίζεται είτε όταν ένας ή περισσότεροι από τους λόγους $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ για τις πέντε επιλογές αλλάζει, είτε όταν το f γίνεται ίσο με 0. Στην τελευταία περίπτωση, ο αλγόριθμος τερματίζει επειδή σε εκείνο το σημείο το πλήρες Pareto μέτωπο του προβλήματος BLMCK έχει αποκτηθεί. Στην προηγούμενη περίπτωση, ο αλγόριθμος τερματίζει επειδή νέοι λόγοι $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ πρέπει να υπολογιστούν σε εκείνο το σημείο και να συγκριθούν για τις πέντε επιλογές. Ο υπολογισμός των $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ και οι συνθήκες τερματισμού για κάθε μια από τις πέντε επιλογές περιγράφονται παρακάτω. Οι ακόλουθοι πρόσθετοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται :

m = αριθμός ανώτερων συνόλων,

n = αριθμός κατώτερων συνόλων,

a = άθροισμα φθίνουσων κλίσεων των ανώτερων συνόλων,

e = άθροισμα αύξουσων κλίσεων των κατώτερων συνόλων,

u = φθίνουσα κλίση του φθίνοντος συνόλου,

o = αύξουσα κλίση του αύξοντος συνόλου.

Επιλογή Α: Μείωση του κόστους όλων των ανώτερων συνόλων και αναδιανομή του ανακτημένου ποσού στο εσωτερικό ή στο κατώτερο σύνολο με την μέγιστη αύξουσα κλίση (αύξον σύνολο).

Έστω w η τιμή κατά την οποία το κόστος κάθε ενός από τα ανώτερα σύνολα θα μειωθεί και z η τιμή κατά την οποία το κόστος του αυξανόμενου συνόλου θα αυξηθεί.

Τότε, έχουμε: $mw = z$. Η τιμή κατά την οποία το f θα μειωθεί είναι ίση με w . Η τιμή

του ΔP είναι $oz - aw = omw - aw = (a - om)\Delta f$. Επομένως, $\frac{\Delta P}{\Delta f} = a - om$.

Υπάρχουν τέσσερα κριτήρια τερματισμού σε αυτή την περίπτωση. Το πρώτο είναι όταν η φθίνουσα κλίση του ενός από τα φθίνοντα σύνολα αλλάζει. Το δεύτερο υπεισέρχεται όταν η αύξουσα κλίση του αύξοντος συνόλου αλλάζει. Το τρίτο κριτήριο είναι όταν το

κόστος των φθίνοντων ανώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος του αύξοντος συνόλου. Το τέταρτο εφαρμόζεται όταν το κόστος των φθίνοντων ανώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος ενός από τα εσωτερικά σύνολα. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, αν συνεχίσουμε την επανάληψη, το f δεν θα μειωθεί περαιτέρω από την τιμή που έχει ήδη.

Επιλογή Β: Μείωση του κόστους του εσωτερικού ή ανώτερου συνόλου με την ελάχιστη φθίνουσα κλίση (φθίνον σύνολο) και αναδιανομή του ανακτημένου ποσού στα κατώτερα σύνολα.

Έστω w η τιμή κατά την οποία το κόστος για κάθε ένα από τα κατώτερα σύνολα θα αυξηθεί και z η τιμή κατά την οποία το κόστος του φθίνοντος συνόλου θα μειωθεί. Τότε, έχουμε: $nw = z$. Η τιμή κατά την οποία το f θα μειωθεί είναι ίση με w . Η τιμή του ΔP είναι ίση με $ew - uz = ew - unw = (un - e)\Delta f$. Επομένως, $\frac{\Delta P}{\Delta f} = un - e$.

Υπάρχουν επίσης τέσσερα κριτήρια τερματισμού για αυτήν την επιλογή, συμμετρικά με αυτά για την Επιλογή Α. Συγκεκριμένα, το πρώτο: όταν η αύξουσα κλίση ενός από τα αύξοντα κατώτερα σύνολα αλλάζει. Το δεύτερο: όταν η φθίνουσα κλίση του φθίνοντος συνόλου αλλάζει. Το τρίτο: όταν το κόστος του αύξοντος συνόλου γίνεται ίσο με το κόστος του φθίνοντος συνόλου. Το τελευταίο κριτήριο: όταν το κόστος των αύξοντων κατώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος ενός από τα εσωτερικά σύνολα.

Επιλογή Γ : Μείωση του κόστους όλων των ανώτερων συνόλων και αναδιανομή του ανακτημένου ποσού στα κατώτερα σύνολα.

Έστω w η τιμή κατά την οποία το κόστος των κατώτερων συνόλων θα αυξηθεί και z η τιμή κατά την οποία το κόστος των ανώτερων συνόλων θα μειωθεί. Τότε, η τιμή κατά την οποία το f θα μειωθεί είναι ίση με $z + w$. Επίσης, έχουμε $mz = nw$. Η τιμή του ΔP για αυτήν την επιλογή είναι $ew - az = \frac{na - me}{m + n}\Delta f$. Επομένως, $\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{na - me}{m + n}$.

Υπάρχουν πέντε κριτήρια τερματισμού σε αυτή την περίπτωση. Το πρώτο: όταν η αύξουσα κλίση ενός από τα αύξοντα ανώτερα σύνολα αλλάζει. Το δεύτερο: όταν η φθίνουσα κλίση ενός από τα φθίνοντα ανώτερα σύνολα αλλάζει. Το τρίτο: όταν το κόστος των αύξοντων κατώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος ενός από τα εσωτερικά σύνολα. Το τέταρτο: όταν το κόστος των φθίνοντων ανώτερων συνόλων

γίνεται ίσο με το κόστος ενός από τα εσωτερικά σύνολα. Το τελευταίο κριτήριο: όταν το κόστος των φθίνοντων ανώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος των αύξοντων κατώτερων συνόλων.

Επιλογή Δ: Μείωση του κόστους όλων των ανώτερων συνόλων .

Έστω w η τιμή κατά την οποία το κόστος των ανώτερων συνόλων θα μειωθεί. Η τιμή του ΔP για αυτή την περίπτωση είναι $-aw = a\Delta f$. Επομένως, $\frac{\Delta P}{\Delta f} = a$. Συγχρόνως, το υπόλοιπο του προϋπολογισμού αυξάνεται κατά mw .

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν μόνο δύο κριτήρια τερματισμού. Το πρώτο εφαρμόζεται όταν η φθίνουσα κλίση ενός από τα φθίνοντα ανώτερα σύνολα αλλάζει και το δεύτερο όταν το κόστος των φθίνοντων ανώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος ενός από τα εσωτερικά σύνολα.

Επιλογή Ε : Αύξηση του κόστους όλων των κατώτερων συνόλων (εξεταζόμενο μόνο εάν ένα θετικό υπόλοιπο προϋπολογισμού είναι διαθέσιμο).

Έστω w η τιμή κατά την οποία το κόστος των κατώτερων συνόλων θα αυξηθεί. Η τιμή του ΔP για αυτή την περίπτωση είναι $ew = -e\Delta f$. Επομένως $\frac{\Delta P}{\Delta f} = -e$. Συγχρόνως, το

υπόλοιπο του προϋπολογισμού μειώνεται κατά mw .

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν τρία κριτήρια. Το πρώτο εφαρμόζεται όταν η αύξουσα κλίση ενός από τα αύξοντα κατώτερα σύνολα αλλάζει. Το δεύτερο συναντάται όταν το κόστος των αύξοντων κατώτερων συνόλων γίνεται ίσο με το κόστος ενός εσωτερικού συνόλου. Το τρίτο κριτήριο υπεισέρχεται όταν το υπόλοιπο του προϋπολογισμού μειώνεται σε 0.

Η Επιλογή Α είναι ουσιαστικά ίδια με την Επιλογή Γ όταν το αύξον σύνολο είναι το μοναδικό κατώτερο σύνολο. Ομοίως, η Επιλογή Β είναι ίδια με την Επιλογή Γ όταν το φθίνον σύνολο είναι το μοναδικό ανώτερο σύνολο. Η Επιλογή Δ είναι μια ειδική περίπτωση κατά την οποία το ποσό του προϋπολογισμού που ανακτάται από ένα σύνολο δεν αναδιανέμεται πουθενά αλλά κρατείται για μελλοντική χρήση. Μια περίπτωση κατά την οποία είναι προτιμότερη η διατήρηση του προϋπολογισμού που ανακτάται από ένα φθίνον σύνολο παρά η αναδιανομή του, είναι όταν οι αύξουσες κλίσεις όλων των κατώτερων και των εσωτερικών συνόλων είναι αρνητικές. Ομοίως, η

Επιλογή E είναι μια ειδική επιλογή που μπορεί να εφαρμοστεί μόνο εάν ένα αυστηρώς θετικό υπόλοιπο προϋπολογισμού είναι διαθέσιμο.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω κριτήρια τερματισμού είμαστε σε θέση να καθορίσουμε την έκταση της τρέχουσας επανάληψης. Κάθε ένα από αυτά καθορίζει την τιμή του $|\Delta f|$ κατά την οποία το f μπορεί να μειωθεί έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο αυτό. Η ελάχιστη από αυτές τις τιμές καθορίζει το πέρας της τρέχουσας επανάληψης. Κατόπιν, οι λόγοι των πέντε επιλογών υπολογίζονται εκ νέου και μια νέα επανάληψη εφαρμόζεται. Επεξηγούμε παρακάτω πώς το $|\Delta f|$ υπολογίζεται για την Επιλογή A. Για κάθε μία από τις άλλες επιλογές, ο υπολογισμός είναι παρόμοιος.

Για κάθε ένα από τα ανώτερα σύνολα του οποίου το κόστος μειώνεται, το πρώτο κριτήριο συναντάται όταν η αμέσως προηγούμενη μεταβλητή της μεταβλητής που τελευταία αυξήθηκε στη μερική λύση του συνόλου αυτού λαμβάνει τιμή ίση με το μήκος εκείνου του συνόλου. Εάν b_k είναι το κόστος αυτού του συνόλου στην τρέχουσα λύση και c_{ki} το κόστος αυτής της μεταβλητής τότε η τιμή του $|\Delta f|$ για αυτό το σύνολο είναι ίση με $b_k - c_{ki}l_k$. Φυσικά, εάν καμία τέτοια μεταβλητή δεν υπάρχει, τότε μόνο η πρώτη μεταβλητή αυτής της λίστας έχει αυξηθεί και επομένως το πρώτο κριτήριο συναντάται όταν το κόστος του συγκεκριμένου συνόλου μειωθεί σε 0, δηλαδή $|\Delta f| = b_k$. Το πρώτο κριτήριο τερματισμού καθορίζεται από το ελάχιστο των $|\Delta f|$ τιμών υπολογισμένο με αυτόν τον τρόπο για κάθε ένα από τα m ανώτερα σύνολα. Η τιμή του $|\Delta f|$ για το δεύτερο κριτήριο τερματισμού καθορίζεται όταν η μεταβλητή που αυξάνεται σε ένα αύξον σύνολο παίρνει τιμή ίση με το μήκος αυτού του συνόλου. Εάν b_k είναι το κόστος του συνόλου στην τρέχουσα λύση και c_{kj} το κόστος αυτής της μεταβλητής, τότε η τιμή του $|\Delta f|$ που καθορίζεται από το δεύτερο κριτήριο είναι ίση με $\frac{c_{kj}l_k - b_k}{m}$.

Για το τρίτο κριτήριο, θεωρούμε τα b_u και b_l κόστη των ανώτερων συνόλων και του αύξοντος συνόλου αντίστοιχα, στην τρέχουσα λύση του προβλήματος. Το τρίτο κριτήριο συναντάται όταν $b_u - w = b_l + z$ ή όταν $b_u - |\Delta f| = b_l + m|\Delta f| \Rightarrow |\Delta f| = \frac{b_u - b_l}{m + 1}$.

Τέλος, αν b_o είναι το μέγιστο κόστος ενός εσωτερικού συνόλου, διαφορετικό από το

αύξον σύνολο, τότε η τιμή του $|\Delta f|$ που καθορίζεται από το τέταρτο κριτήριο τερματισμού είναι $b_u - b_o$.

Σε κάθε επανάληψη, αφού γίνει η καλύτερη επιλογή, η τιμή του $|\Delta f|$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ανωτέρω διαδικασία και η νέα λύση που προκύπτει από την επανάληψη βρίσκεται. Ο αλγόριθμος τερματίζει με το πλήρες Pareto μέτωπο όταν το f μηδενιστεί. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος για το Πρόβλημα BLMCK που μελετάμε παρουσιάζεται αναλυτικά.

Αλγόριθμος BLMCK

Φάση I (Βέλτιστη λύση του Προβλήματος LMCK)

Βήμα 0 (Κατασκευή των λιστών πολλαπλών επιλογών)

Για κάθε σύνολο πολλαπλών επιλογών k , κατασκεύασε μία λίστα μεταβλητών L_k ως εξής: Αναγνώρισε τις μεταβλητές που δεν εξαλείφονται σε αυτό το σύνολο και διάταξέ τις κατά αύξον κόστος. Όρισε τη σχετική κλίση της πρώτης μεταβλητής x_{ki} σε κάθε λίστα k πολλαπλών επιλογών ως το λόγο $\frac{P_{ki}}{c_{ki}}$. Για κάθε επόμενη μεταβλητή x_{kj} στη

λίστα, όρισε την σχετική της κλίση $\frac{P_{kj} - P_{ki}}{c_{kj} - c_{ki}}$, όπου x_{ki} η αμέσως προηγούμενη

μεταβλητή της x_{kj} στη λίστα L_k . Διατηρώντας όλες τις λίστες πολλαπλών επιλογών, κατασκεύασε μία κύρια λίστα, ML , συγχωνεύοντας τις μεταβλητές όλων των λιστών πολλαπλών επιλογών κατά φθίνουσα σειρά των σχετικών τους κλίσεων. Όρισε την αρχική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 0 και το υπόλοιπο του προϋπολογισμού, b_{res} , σε b .

Βήμα I (Επανάληψη)

while ($b_{res} > 0$ & η επόμενη μεταβλητή από τη λίστα ML υπάρχει & η σχετική κλίση αυτής της μεταβλητής είναι > 0) do {

εφάρμοσε Βήμα 1 του Αλγόριθμου LMCK στην επόμενη μεταβλητή από την ML

}end while

Βήμα II (Επίλυση του BLMCK)

while ($f > 0$) do {

επέλεξε κίνηση που να ελαχιστοποιεί το λόγο $\frac{\Delta P}{\Delta f}$

βρες το κριτήριο τερματισμού και υπολόγισε το $|\Delta f|$

επανάλαβε, ενημέρωσε τη λύση και βρες νέα τιμή του f

αν $\frac{\Delta P}{\Delta f} > 0$, πρόσθεσε την αρχική και όλες τις ενδιάμεσες

λύσεις αυτής της επανάληψης στο Pareto μέτωπο του προβλήματος.

}end while

Όταν συναντάται η πρώτη μεταβλητή με μη θετική σχετική κλίση, το Βήμα 1 της Φάσης I του Αλγόριθμου BLMCK τερματίζεται επειδή περαιτέρω επανάληψη δεν θα αυξήσει το συνολικό κέρδος. Σημειώνεται ότι κάθε φορά που εφαρμόζεται μια επανάληψη, ο αλγόριθμος έμμεσα επισκέπτεται έναν άπειρο αριθμό ενδιάμεσων λύσεων που αντιστοιχούν σε έναν άπειρο αριθμό ενδιάμεσων τιμών τις οποίες παίρνει το f μεταξύ της αρχικής και τελικής λύσης. Η Πρόταση 2 σαφώς επεκτείνεται σε κάθε μια από αυτές τις επαναλήψεις. Ως εκ τούτου, υπάρχουν δύο διακριτές περιπτώσεις.

Εάν $\frac{\Delta P}{\Delta f} = 0$, τότε η αρχική και όλες οι ενδιάμεσες λύσεις θα κυριαρχούνται από την

λύση που θα βρεθεί στο τέλος της τρέχουσας επανάληψης. Αν όχι, όλες εκτός από την τελευταία λύση θα είναι Pareto βέλτιστες. Εάν η τελευταία λύση είναι Pareto βέλτιστη

ή όχι εξαρτάται από την τιμή του $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ που θα υπολογιστεί στην επόμενη επανάληψη,

ομοίως όπως ανωτέρω. Για τη λύση με $f=0$ που λαμβάνεται μετά τον τερματισμό του αλγόριθμου, το ακόλουθο αποτέλεσμα ισχύει, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να βελτιώσουμε κανένα από τα 2 κριτήρια χωρίς να επιδεινώσουμε το άλλο :

Πόρισμα 1: Η λύση που λαμβάνεται από τον Αλγόριθμο BLMCK όταν το f μηδενίζεται είναι Pareto βέλτιστη.

Σε αυτό το σημείο το πλήρες Pareto μέτωπο του προβλήματος έχει βρεθεί από τον αλγόριθμο. Η ορθότητα του ανωτέρω αλγόριθμου συνοψίζεται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3 : Ο Αλγόριθμος BLMCK λαμβάνει σωστά το πλήρες Pareto μέτωπο για το Πρόβλημα BLMCK.

Απόδειξη : Η ανωτέρω τροποποίηση του Αλγόριθμου LMCK στη Φάση I του αλγόριθμου τερματίζει με μια έγκυρη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα LMCK. Από τις πέντε επιλογές που εξετάζονται σε κάθε επανάληψη στη Φάση II του Αλγόριθμου BLMCK, αυτή που επιλέγεται καταλήγει στη μικρότερη μείωση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα μείωσης στο f . Κατά την διάρκεια οποιασδήποτε επανάληψης, οι λόγοι $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ αυτών των επιλογών δεν αλλάζουν. Κατά συνέπεια, μετά το πέρας μιας επανάληψης, το πρώτο κριτήριο στην ληφθείσα λύση έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή για την τρέχουσα τιμή του δεύτερου κριτηρίου. Αυτό σημαίνει ότι η βελτιστότητα διατηρείται συνεχώς για το πρώτο κριτήριο, και επομένως, μόλις η τιμή του f γίνει ίση με 0, το πλήρες Pareto μέτωπο του προβλήματος BLMCK έχει ληφθεί.

3.4 Χρήση του αλγόριθμου για την εύρεση συγκεκριμένων λύσεων

Μία από τις πολλές περιπτώσεις που το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι η ακόλουθη. Υποθέτουμε ότι για μια δεδομένη εφαρμογή υπάρχει ένα άνω αποδεκτό όριο, f , στη μέγιστη διαφορά κόστους μεταξύ δύο οποιωνδήποτε συνόλων δραστηριοτήτων. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ανώτερο αλγόριθμο για να βρούμε την Pareto βέλτιστη λύση η οποία ικανοποιεί αυτόν τον περιορισμό και επιτυγχάνει το μέγιστο δυνατό κέρδος. Για να το πετύχουμε αυτό, εκτελούμε τον ανώτερο αλγόριθμο μέχρι να βρούμε την λύση για την οποία η τιμή του δεύτερου κριτηρίου είναι ίση με f . Σε εκείνο το σημείο, υπάρχουν μόνο δύο διακριτές περιπτώσεις: Εάν $\frac{\Delta P}{\Delta f} = 0$, συνεχίζουμε μέχρι να ληφθεί η πρώτη λύση με $\frac{\Delta P}{\Delta f} < 0$. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε τη λύση με το μέγιστο δυνατό κέρδος και την ελάχιστη τιμή για το f που ικανοποιεί τον δοθέντα περιορισμό. Εάν $\frac{\Delta P}{\Delta f} < 0$ τότε η παρούσα λύση είναι η ζητούμενη, επειδή αν εφαρμόσουμε άλλη επανάληψη, θα μειωθεί και η τιμή του πρώτου κριτηρίου. Με άλλα λόγια, αν στο συγκεκριμένο σημείο η κλίση του Pareto μετώπου προς τα αριστερά είναι οριζόντια, συνεχίζουμε μέχρι να λάβουμε το πρώτο σημείο το οποίο έχει απόλυτα αρνητική κλίση στα αριστερά του.

Κεφάλαιο 4:

Υπολογιστική Εμπειρία

4.1 Γενικά

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε την πολυπλοκότητα του Αλγόριθμου BLMCK και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των υπολογιστικών πειραμάτων που διεξήχθησαν. Εκθέτουμε επίσης τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από την ανάλυση αυτών των αποτελεσμάτων.

4.2 Ανάλυση Πολυπλοκότητας

Για να αναλύσουμε την πολυπλοκότητα του αλγόριθμου που παρουσιάζουμε, θεωρούμε κάθε μια από τις δύο φάσεις χωριστά. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μεταβλητές που δεν εξαλείφονται σχηματίζουν το upper hull του αντίστοιχου συνόλου πολλαπλών επιλογών. Προκειμένου αυτές να βρεθούν, $O(n \log n)$ convex hull αλγόριθμοι δύο διαστάσεων υπάρχουν που επιπρόσθετα διατάσσουν τις μεταβλητές (Graham 1972). Επομένως, εάν N_k είναι ο αριθμός των μεταβλητών στο σύνολο k πολλαπλών επιλογών, $N = \sum_{k \in S} N_k$ και $N_{\max} = \max_{k \in S} N_k$, ο χρόνος που χρειάζεται για την κατασκευή των λιστών πολλαπλών επιλογών στο Βήμα 0 του Αλγόριθμου BLMCK είναι $O(\sum_k N_k \log N_k) = O(N \log N_{\max})$. Ο χρόνος που χρειάζεται για την συγχώνευση των μεμονωμένων λιστών πολλαπλών επιλογών για να αποκτήσουμε την κύρια λίστα ML , είναι $O(N \log r)$ (βλέπε Cormen et al., 2001). Ο χρόνος που απαιτείται στο Βήμα 0 της Φάσης I του αλγόριθμου BLMCK κυριαρχεί το χρόνο που απαιτείται για την αύξηση των μεταβλητών απόφασης στο Βήμα 1, ο οποίος είναι γραμμικός επί του συνολικού αριθμού μεταβλητών. Επομένως, στη χειρότερη περίπτωση η πολυπλοκότητα της Φάσης I είναι $O(N \log N_{\max}) + O(N \log r) = O(N \log m)$, όπου $m = \max(N_{\max}, r)$. Ας εξετάσουμε τώρα την Φάση II του αλγόριθμου. Ο χρόνος που απαιτείται σε κάθε επανάληψη για να υπολογιστούν οι λόγοι $\frac{\Delta P}{\Delta f}$ για τις πέντε επιλογές, να βρεθεί η βέλτιστη τιμή του Δf , και να επικαιροποιήσουμε τη νέα λύση που προκύπτει είναι $O(r)$. Ο αριθμός των επαναλήψεων της Φάσης II εξαρτάται από το πόσες φορές τα κριτήρια τερματισμού εφαρμόζονται. Στη συνέχεια, η μέση απόδοση του αλγόριθμου εξετάζεται αναλύοντας τα υπολογιστικά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν.

4.3 Υπολογιστικά Πειράματα

Ο αλγόριθμος BLMCK κωδικοποιήθηκε σε C/C++ και δοκιμάστηκε σε έναν επεξεργαστή Pentium IV/2.53MHz. Τα αποτελέσματα που πήραμε παρουσιάζονται στους πίνακες 1-8. Σε αυτούς τους πίνακες, το r συμβολίζει τον αριθμό των συνόλων πολλαπλών επιλογών και το N_k συμβολίζει τον αριθμό των μεταβλητών στο σύνολο k που υποθέτουμε ότι είναι ο ίδιος για όλα τα k .

Δύο τύποι προβλημάτων εξετάστηκαν. Τα προβλήματα τύπου A, περιείχαν και μεταβλητές που εξαλείφονταν βάσει των Ιδιοτήτων 1 και 2. Προβλήματα αυτού του τύπου έχουν πολλές ομοιότητες με προβλήματα που προκύπτουν σε πραγματικές εφαρμογές. Στα προβλήματα τύπου B, οι συντελεστές των μεταβλητών δημιουργήθηκαν τυχαία έτσι ώστε να εξασφαλιστεί ότι δεν υπήρχαν μεταβλητές που έπρεπε να εξαλειφθούν. Προβλήματα αυτού του τύπου παρέχουν βαθιά γνώση στην απόδοση του αλγόριθμου, αν και σπανίως προκύπτουν στην πράξη.

Για τα προβλήματα τύπου A, οι παράμετροι p_{ki} και c_{ki} δημιουργήθηκαν τυχαία και ακολουθούσαν ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 0 και N_k . Το ποσό προϋπολογισμού b

τέθηκε ίσο με $\frac{1}{2} \sum_{k \in S} (\min_{i \in R_k} c_{ki} + \max_{i \in R_k} c_{ki})$ το οποίο είναι ίσο με $0.5(rN_k)$ κατά μέσο όρο. Η

τιμή του l_k τέθηκε ίση με 1 για όλα τα k . Η ανωτέρω διαδικασία για την κατασκευή τυχαίων προβλημάτων βασίζεται στην διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε από τους Sinha και Zoltners (1979) για να εξετάσουν το Πρόβλημα Knapsack Πολλαπλών Επιλογών. Πιο πρόσφατες εργασίες που εξετάζουν το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιούν μια παρόμοια διαδικασία κατασκευής τυχαίων προβλημάτων. Φυσικά, αυτή η διαδικασία προσαρμόστηκε κατάλληλα για να ταιριάζει στη δομή του προβλήματος που εξετάζεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

Ο αλγόριθμος επιδεικνύει υψηλή μεταβλητότητα για τα προβλήματα τύπου A. Ο υπολογιστικός χρόνος για διαφορετικά προβλήματα ίδιου μεγέθους ποικίλλει σημαντικά και για την Φάση I και για την Φάση II. Ως αποτέλεσμα, 50 τυχαία προβλήματα επιλύθηκαν για κάθε διαφορετικό μέγεθος. Τα αποτελέσματα που

αναφέρονται στις στήλες 3-6 του Πίνακα 1 είναι ο μέσος και ο μέγιστος χρόνος σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκε για την ολοκλήρωση της Φάσης I και τον τερματισμό του αλγόριθμου; αντίστοιχα. Η τελευταία στήλη του πίνακα αυτού παρουσιάζει το ποσοστό των μεταβλητών που εξαλείφθηκαν. Γίνεται σαφές από τη στήλη αυτή ότι η μεγάλη πλειοψηφία των αρχικών μεταβλητών εξαλείφεται.

Οι πίνακες 2 και 3 παρουσιάζουν την πρόοδο του αλγόριθμου μεταξύ των Φάσεων I και II για τα προβλήματα τύπου A. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουν τη μέση και τη μέγιστη μείωση στις τιμές των f και P μεταξύ των φάσεων I και II, αμφότερες εκφρασμένες ως ποσοστό και ως απόλυτη τιμή. Οι στήλες 3-12 του Πίνακα 4 παρουσιάζουν τον μέσο και τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων που εφαρμόστηκαν χρησιμοποιώντας κάθε μία από τις πέντε επιλογές. Οι δύο τελευταίες στήλες του ίδιου πίνακα παρουσιάζουν τον μέσο και τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων της Φάσης II οι οποίες ξεκίνησαν με Pareto βέλτιστη λύση.

Οι πίνακες 5-8 παρουσιάζουν τα ίδια αποτελέσματα με τους πίνακες 1-4 για τα προβλήματα τύπου B. Η μεταβλητότητα που παρουσιάζεται για προβλήματα ίδιου μεγέθους είναι μικρότερη σε αυτή την περίπτωση και ως αποτέλεσμα μόνο 30 προβλήματα επλύθηκαν για κάθε μέγεθος. Η δημιουργία των τυχαίων αριθμών εξασφαλίζει ότι όλες οι μεταβλητές ανήκουν στο upper hull του αντίστοιχου συνόλου. Κανονικοποίηση έλαβε χώρα για να εξασφαλιστεί ότι οι συντελεστές παίρνουν τιμές στο ίδιο εύρος όπως στα προβλήματα τύπου A. Η διαδικασία για τον προσδιορισμό της τιμής του b είναι η ίδια όπως και στα προβλήματα τύπου A, ενώ η τιμή του l_k επίσης παραμένει ίση με τη μονάδα.

4.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Η υψηλή μεταβλητότητα των προβλημάτων τύπου A φαίνεται καθαρά από τα αποτελέσματα του Πίνακα 1. Παρατηρούμε ότι για πολλά μεγέθη του προβλήματος, ο μέσος χρόνος που απαιτείται για τον τερματισμό της Φάσης I ή και των δύο φάσεων είναι σχεδόν 50% της αντίστοιχης μέγιστης τιμής. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την υψηλή μεταβλητότητα του προβλήματος και δικαιολογούν την εκτέλεση περισσότερων πειραμάτων. Από την άλλη, όπως φαίνεται από τον Πίνακα 5, τα προβλήματα τύπου B παρουσιάζουν πολύ χαμηλότερη μεταβλητότητα. Αυτό συμβαίνει επειδή για αυτά τα προβλήματα υπάρχει ένας πολύ μεγαλύτερος αριθμός μεταβλητών που δεν εξαλείφεται σε κάθε σύνολο πολλαπλών επιλογών με άμεση συνέπεια ένα μεγάλο αριθμό εναλλακτικών για κάθε σύνολο. Ως εκ τούτου, τα σύνολα μοιάζουν μεταξύ τους και η συνολική υπολογιστική προσπάθεια δεν διαφέρει πολύ για διαφορετικές περιπτώσεις προβλημάτων ίδιου μεγέθους.

Για τα προβλήματα τύπου A και συγκεκριμένο N_k , το ποσοστό του συνολικού χρόνου εκτέλεσης που απαιτείται για την Φάση II φαίνεται να αυξάνεται καθώς ο συνολικός αριθμός συνόλων αυξάνεται. Από την άλλη, για σταθερό r το ποσοστό του συνολικού χρόνου εκτέλεσης που απαιτείται για την Φάση I φαίνεται να αυξάνει καθώς αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών σε κάθε σύνολο. Την ίδια συμπεριφορά παρατηρούμε και για τα προβλήματα τύπου B. Επομένως, ο αριθμός των μεταβλητών σε κάθε σύνολο έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στην υπολογιστική προσπάθεια της Φάσης I, ενώ ο αριθμός των συνόλων στην υπολογιστική προσπάθεια της Φάσης II. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού η κυρίαρχη λειτουργία στην Φάση I είναι η κατάταξη των μεταβλητών, ενώ στη Φάση II, η ρύθμιση των συνόλων.

Μία ακόμη ενδιαφέρουσα παρατήρηση αφορά τον τρόπο με τον οποίο ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος αλλάζει όταν ο ίδιος αριθμός μεταβλητών απόφασης κατανέμεται σε περισσότερα σύνολα πολλαπλών επιλογών. Για τον ίδιο συνολικό αριθμό μεταβλητών, ο συνολικός χρόνος υπολογιστικής προσπάθειας αυξάνεται καθώς ο αριθμός των συνόλων αυξάνεται. Αυτό είναι πιο εμφανές στα προβλήματα τύπου A όπου η αύξηση του r οδηγεί σε μία αύξηση των μεταβλητών οι οποίες αναμένεται να μην εξαλειφθούν (Sinha and Zoltners 1979). Από την άλλη, για σταθερό r ο αριθμός

των μεταβλητών που δεν εξαλείφονται δεν αυξάνεται σημαντικά, ακόμα και όταν η τιμή του N_k αυξάνεται από 150 σε 600. Γι' αυτό, ο αριθμός των συνόλων είναι πιο σημαντικός στην υπολογιστική προσπάθεια που καταβάλλεται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης από ότι ο αριθμός των μεταβλητών σε κάθε σύνολο.

Καθώς η Φάση II προχωρά, ο αλγόριθμος σαρώνει έναν αυξανόμενο αριθμό συνόλων σε μια προσπάθεια να φέρει τα άκρα του διαστήματος που περιέχει τα κόστη τους πιο κοντά. Αυτό επαληθεύθηκε εμπειρικά καθώς ο συνολικός αριθμός των ανώτερων και κατώτερων συνόλων γενικά αυξανόταν καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων αυξανόταν, αν και όχι απαραίτητα μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών επαναλήψεων. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα με 50 σύνολα, ο συνολικός αριθμός των ανώτερων και κατώτερων συνόλων ήταν 2 μετά τον τερματισμό της Φάσης I, 22 μετά από 30 επαναλήψεις της Φάσης II, 37 μετά από 60 επαναλήψεις, 43 μετά από 90 επαναλήψεις και 49 μετά από 106 επαναλήψεις της Φάσης II.

Όσον αφορά τους Πίνακες 3 και 7, παρατηρούμε ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν αλλάζει σημαντικά μεταξύ των Φάσεων I και II. Αυτό ισχύει για προβλήματα και των δύο τύπων, καθώς αυτή η αλλαγή είναι σχεδόν πάντα ένα μικρό ποσοστό της αρχικής τιμής του συνολικού κέρδους. Από την άλλη, γίνεται σαφές μέσω του Πίνακα 2 ότι, για τα προβλήματα τύπου A, η αρχική τιμή του f μετά την ολοκλήρωση της Φάσης I (άρα και η αντίστοιχη μείωση) σχεδόν πάντα λαμβάνει τιμή η οποία είναι πολύ κοντά στην μέγιστη τιμή την οποία μπορεί να έχει. Αυτή η τιμή ισούται με N_k όπως καθορίζεται από τον τρόπο με τον οποίο η γεννήτρια τυχαίων αριθμών έχει σχεδιαστεί. Για τα προβλήματα τύπου B, είναι ξεκάθαρο από τον Πίνακα 6 ότι αυτή η τιμή (άρα και η αντίστοιχη μείωση) είναι αρκετά μικρότερη. Και αυτό το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί παρατηρώντας ότι τα διάφορα σύνολα στα προβλήματα τύπου B μοιάζουν περισσότερο μεταξύ τους από ότι στα προβλήματα τύπου A.

Στον Πίνακα 4, παρατηρούμε ότι για τα προβλήματα τύπου A το πόσες φορές η κάθε μια από τις 5 επιλογές χρησιμοποιείται κατά μέσο όρο για το ίδιο μέγεθος προβλήματος ποικίλλει σημαντικά. Αυτός ο αριθμός φαίνεται να αυξάνεται όταν το r αυξάνεται αλλά δεν υπάρχουν ισχυρές αποδείξεις ότι αλλάζει όταν το N_k αυξάνεται. Επίσης είναι πολύ ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι στον Πίνακα 8 οι επιλογές A, B και Γ χρησιμοποιούνται σπάνια για την μείωση της τιμής του f στα προβλήματα τύπου B. Στην πραγματικότητα

με ελάχιστες εξαιρέσεις, όλη η μείωση στην τιμή του f γίνεται αποκλειστικά με χρήση των επιλογών Δ και Ε. Για αυτά τα προβλήματα, η μεταβλητότητα του αριθμού που αυτές οι δύο επιλογές χρησιμοποιούνται φαίνεται να είναι αρκετά μικρότερη.

Οι τελευταίες δύο στήλες των Πινάκων 4 και 8 δείχνουν τον αριθμό των επαναλήψεων της Φάση II που ξεκίνησαν με μία Pareto βέλτιστη λύση. Αυτός ο αριθμός παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα στα προβλήματα τύπου Α απ' ό τι στα προβλήματα τύπου Β. Πρέπει να σημειώσουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, όλες οι επαναλήψεις της Φάσης II ξεκίνησαν με μια Pareto βέλτιστη λύση. Αυτό σημαίνει ότι το συνολικό κέρδος ήταν μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του f για όλες τις τιμές του f σε αυτό το πεδίο.

Συγκρίνοντας την υπολογιστική προσπάθεια που χρειαζόμαστε για την επίλυση των προβλημάτων τύπου Α με αυτή των προβλημάτων τύπου Β για το ίδιο μέγεθος, παρατηρούμε ότι είναι μικρότερη για τα προβλήματα τύπου Α. Παρόλο ότι η μείωση που πρέπει να επιτευχθεί στο f είναι μεγαλύτερη για αυτά τα προβλήματα, αυτό οφείλεται περισσότερο στο γεγονός ότι στα προβλήματα τύπου Β καμία μεταβλητή δεν εξαλείφεται με αποτέλεσμα να απαιτείται μεγαλύτερη υπολογιστική προσπάθεια στη Φάση I για την κατασκευή των λιστών πολλαπλών επιλογών. Από την άλλη, όταν συγκρίνουμε τον καθαρό χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση της Φάσης II είναι πολύ μικρότερος στα προβλήματα τύπου Β απ' ό τι στα προβλήματα τύπου Α ίδιου μεγέθους.

Για να αποκτήσουμε βαθύτερη γνώση του τρόπου με τον οποίο το συνολικό κέρδος αλλάζει καθώς το f αλλάζει έχουμε κατασκευάσει τα Διαγράμματα 1 και 2 (το πρώτο για προβλήματα τύπου Α και το δεύτερο για προβλήματα τύπου Β). Για μέγεθος προβλήματος 150x150 έχουμε σχεδιάσει ένα διάγραμμα διασποράς με τα ζεύγη (P, f) για όλες τις επαναλήψεις της Φάσης II. Κάθε ζεύγος σημείων ενώνεται με μια ευθεία γραμμή, επειδή η μεταβολή του συνολικού κέρδους είναι γραμμική συνάρτηση της μεταβολής του f . Στην γενική περίπτωση το P είναι μια αύξουσα συνάρτηση του f , αλλά στην περίπτωσή μας, όπως φαίνεται και από τα δύο διαγράμματα είναι γνησίως αύξουσα. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η συνάρτηση μπορεί να είναι σε ορισμένα τμήματα κοίλη ενώ σε άλλα κυρτή. Αυτό φυσικά προκύπτει και εξαρτάται από τις παραμέτρους που ορίζουν την γραμμική σχέση των P και f .

Πίνακας 1 : Χρόνοι εκτέλεσης του αλγόριθμου για προβλήματα τύπου A

		Φάση I		Συνολικός Χρόνος		Ποσοστό εξαλειφόμενων μεταβλητών
<i>r</i>	<i>N_k</i>	Avg	Max	Avg	Max	
150	150	0.02002	0.040	0.04750	0.090	95.2%
150	300	0.03502	0.041	0.06528	0.101	97.3%
150	450	0.05390	0.100	0.08270	0.130	98.1%
150	600	0.06974	0.100	0.10114	0.141	98.4%
300	150	0.04064	0.060	0.28426	0.561	95.3%
300	300	0.07486	0.110	0.28992	0.631	97.3%
300	450	0.10914	0.150	0.35974	0.681	98.1%
300	600	0.14280	0.200	0.39756	0.942	98.5%
450	150	0.06108	0.101	0.98578	2.573	95.1%
450	300	0.11324	0.171	1.38052	3.204	97.3%
450	450	0.16804	0.221	1.22900	3.415	98.0%
450	600	0.21972	0.291	1.49870	6.059	98.5%
600	150	0.08288	0.120	2.43124	6.409	95.1%
600	300	0.15386	0.211	2.88496	10.786	97.3%
600	450	0.22058	0.291	2.99664	8.833	98.1%
600	600	0.29382	0.380	3.33722	9.654	98.5%

Πίνακας 2 : Μεταβολή του f μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου A

r	N_k	Μέση Απόλυτη Μείωση f	Μέγιστη Απόλυτη Μείωση f
150	150	148,292	149,872
150	300	295,935	299,689
150	450	443,732	449,506
150	600	593,777	599,432
300	150	149,100	149,881
300	300	298,211	299,991
300	450	447,075	449,588
300	600	596,251	599,414
450	150	149,328	149,968
450	300	298,735	299,881
450	450	447,864	449,835
450	600	596,951	599,670
600	150	149,482	149,991
600	300	299,198	299,918
600	450	448,501	449,863
600	600	598,422	599,908

Πίνακας 3 : Μεταβολή του Κέρδους μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου A

		Ποσοστιαία Μείωση του κέρδους		Απόλυτη Μείωση του κέρδους	
r	N_k	Avg	Max	Avg	Max
150	150	0,55%	0,67%	122,115	148,731
150	300	0,28%	0,33%	123,621	150,149
150	450	0,18%	0,22%	121,656	144,991
150	600	0,14%	0,16%	123,905	148,248
300	150	0,55%	0,61%	248,085	274,566
300	300	0,28%	0,31%	248,163	274,667
300	450	0,18%	0,22%	248,710	293,937
300	600	0,14%	0,16%	249,575	294,815
450	150	0,55%	0,65%	371,540	436,670
450	300	0,28%	0,31%	372,556	416,350
450	450	0,18%	0,20%	368,501	407,494
450	600	0,14%	0,15%	369,981	413,310
600	150	0,55%	0,61%	494,355	546,055
600	300	0,28%	0,30%	497,670	546,508
600	450	0,19%	0,20%	501,038	546,678
600	600	0,14%	0,16%	498,245	567,991

Πίνακας 4 : Κατανομή του συνολικού αριθμού επαναλήψεων μεταξύ των 5 επιλογών για προβλήματα τύπου A

		A		B		Γ		Δ		E		Αριθμός επαναλήψεων	
<i>r</i>	<i>N_k</i>	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max
150	150	34	305	43	315	19	94	22	92	24	92	142	568
150	300	40	279	56	445	23	118	17	92	18	95	155	766
150	450	33	267	49	349	20	94	21	90	22	95	144	648
150	600	43	249	67	335	27	146	14	85	15	89	167	580
300	150	98	621	138	976	39	183	40	168	42	184	357	1517
300	300	77	628	114	928	35	197	46	181	46	187	318	1539
300	450	87	575	154	1121	38	210	43	176	46	185	368	1594
300	600	93	865	152	1775	37	184	43	176	45	186	371	2371
450	150	131	1786	216	2130	47	320	75	266	77	270	546	2942
450	300	228	1302	330	2464	60	317	60	263	62	266	740	3675
450	450	151	1315	258	2611	46	286	78	267	81	275	613	4053
450	600	241	1711	330	4588	63	294	61	262	64	263	759	6409
600	150	163	1687	243	2245	45	358	124	347	126	349	702	3719
600	300	217	2318	350	4909	55	391	107	342	111	364	842	7454
600	450	216	1587	365	2903	64	348	99	346	100	353	844	4971
600	600	285	2905	350	3146	68	385	98	339	102	362	903	5569

Πίνακας 5 : Χρόνοι εκτέλεσης του αλγόριθμου για προβλήματα τύπου B

		Φάση I		Συνολικός Χρόνος	
<i>r</i>	<i>N_k</i>	Avg	Max	Avg	Max
150	150	0.11847	0.160	0.13480	0.180
150	300	0.32083	0.331	0.33817	0.341
150	450	0.64423	0.751	0.65893	0.761
150	600	1.03803	1.162	1.05607	1.182
300	150	0.26263	0.350	0.39693	0.511
300	300	0.73273	0.872	0.87617	1.002
300	450	1.39070	1.503	1.52767	1.662
300	600	2.26900	2.384	2.42580	2.544
450	150	0.40063	0.471	0.88970	1.011
450	300	1.16713	1.282	1.68743	1.852
450	450	2.27997	2.364	2.79707	2.874
450	600	3.80067	3.925	4.39387	4.537
600	150	0.58820	0.701	1.82340	1.963
600	300	1.72463	1.813	3.00337	3.144
600	450	3.47400	4.287	4.79493	6.520
600	600	6.96337	9.754	8.69147	11.106

Πίνακας 6 : Μεταβολή του f μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου B

r	N_k	Μέση Απόλυτη Μείωση f	Μέγιστη Απόλυτη Μείωση f
150	150	9,753	12,600
150	300	13,480	15,669
150	450	16,802	21,748
150	600	19,351	23,716
300	150	10,108	12,695
300	300	14,584	19,763
300	450	17,636	22,214
300	600	20,484	23,114
450	150	10,635	13,919
450	300	14,755	18,350
450	450	18,107	20,183
450	600	21,546	25,796
600	150	10,814	12,975
600	300	14,923	18,217
600	450	18,099	20,572
600	600	22,043	25,630

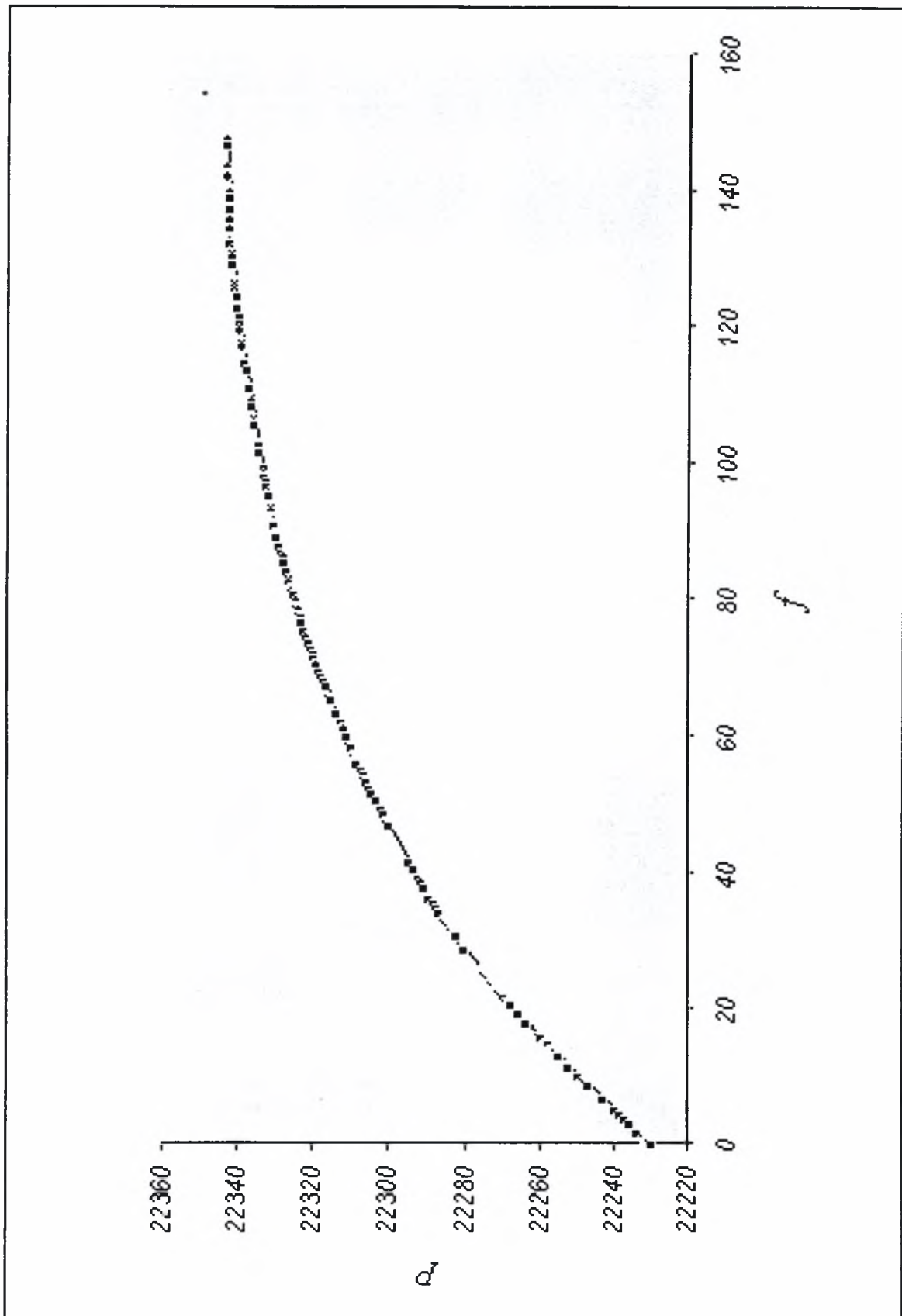
Πίνακας 7 : Μεταβολή του κέρδους μεταξύ των Φάσεων I και II για προβλήματα τύπου B

		Ποσοστιαία Μείωση		Απόλυτη Μείωση	
r	N_k	Avg	Max	Avg	Max
150	150	0,20%	0,26%	7,059	9,376
150	300	0,08%	0,10%	5,055	6,681
150	450	0,05%	0,07%	4,173	6,534
150	600	0,03%	0,04%	3,516	4,701
300	150	0,15%	0,26%	10,648	18,483
300	300	0,08%	0,13%	10,399	16,195
300	450	0,05%	0,07%	8,590	12,827
300	600	0,03%	0,04%	7,546	9,334
450	150	0,20%	0,24%	21,448	26,472
450	300	0,08%	0,11%	15,435	20,377
450	450	0,05%	0,06%	13,132	15,238
450	600	0,04%	0,05%	11,757	15,415
600	150	0,20%	0,25%	28,652	34,857
600	300	0,08%	0,10%	20,603	25,165
600	450	0,05%	0,06%	17,156	20,285
600	600	0,04%	0,04%	15,760	19,996

Πίνακας 8 : Κατανομή του συνολικού αριθμού επαναλήψεων μεταξύ των 5 επιλογών για προβλήματα τύπου Β

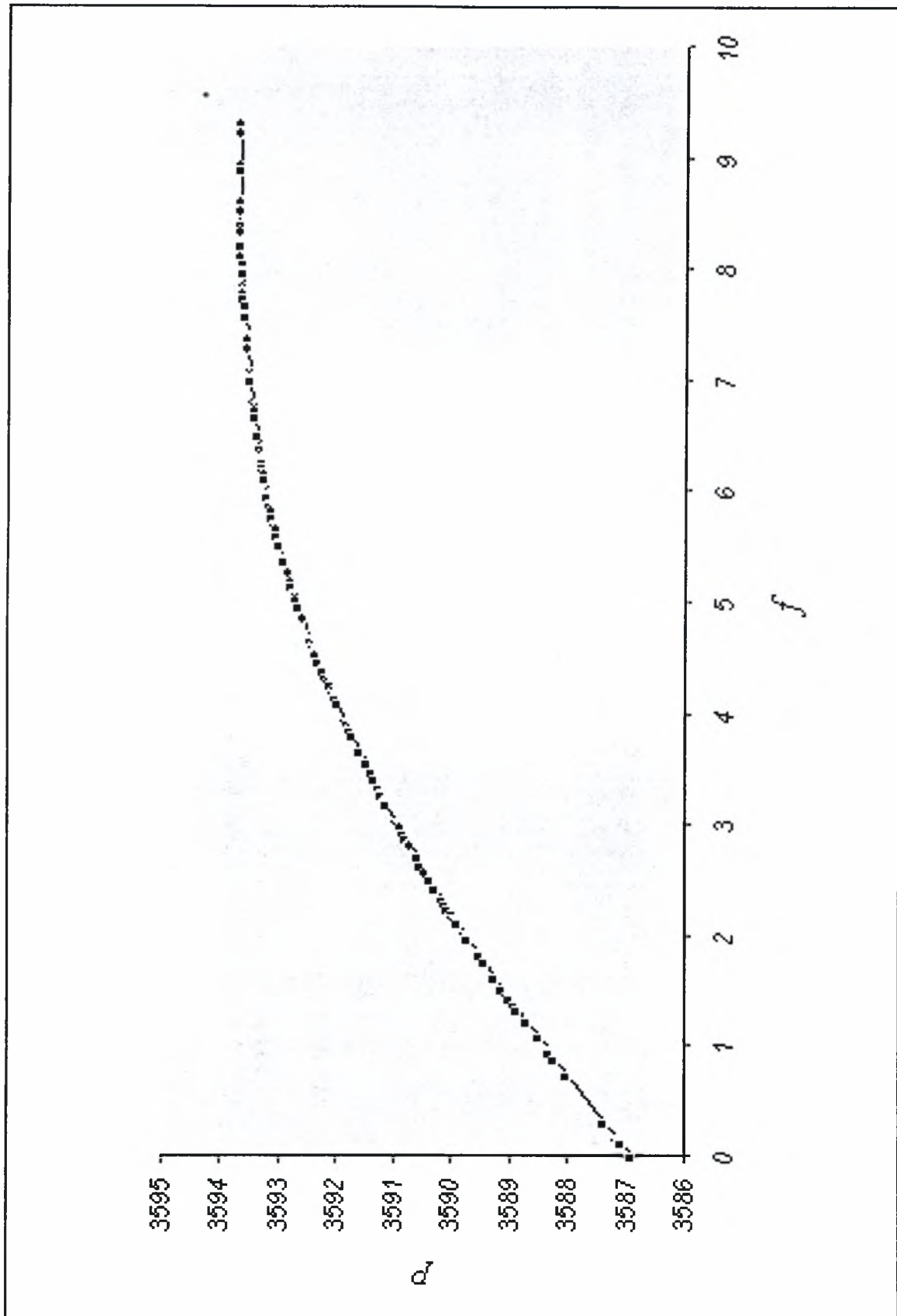
(*) : Τα στοιχεία αυτά δεν είναι ακριβώς 0 αλλά γίνονται 0 μετά τη στρογγυλοποίηση

		Α		Β		Γ		Δ		Ε		Αριθμός επαναλήψεων	
<i>r</i>	<i>N_k</i>	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max	Avg	Max
150	150	0	0	0	0	0	0	24	35	152	160	177	192
150	300	0	0	0*	1	0	0	21	30	153	163	173	193
150	450	0	0	0	0	0	0	19	30	153	159	172	188
150	600	0	0	0	0	0	0	15	23	152	157	167	178
300	150	2	56	0	0	0	0	50	63	305	322	357	378
300	300	0	0	0	0	0	0	47	67	307	314	354	374
300	450	0	0	0	0	0	0	42	60	308	314	349	372
300	600	2	46	0	0	0	0	34	54	307	344	343	390
450	150	0	0	0	0	0	0	80	94	457	469	537	556
450	300	0	0	0	0	0	0	70	92	460	471	530	553
450	450	2	59	0*	1	0	0	62	87	461	483	525	549
450	600	2	51	0	0	0	0	60	83	462	490	524	543
600	150	0	0	0	0	0	0	106	126	611	625	717	740
600	300	5	82	0*	1	0	0	86	124	614	640	705	740
600	450	0	0	0	0	0	0	86	113	614	628	699	740
600	600	5	75	0*	1	0	0	80	104	618	663	703	734



Διάγραμμα 1 :

Το διάγραμμα P - f για ένα πρόβλημα τύπου A



Διάγραμμα 2 :

Το διάγραμμα $P-f$ για ένα πρόβλημα τύπου B

4.5 Το μοντέλο AMPL του προβλήματος

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας, αναπτύχθηκε και το αντίστοιχο μοντέλο AMPL για το πρόβλημα που εξετάζεται. Φυσικά, επειδή η AMPL δε έχει τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης με πολλαπλά κριτήρια, το πρόβλημα μετασχηματίστηκε σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα με ένα κριτήριο. Για να γίνει αυτό, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος e-constraint (Steuer, 1986), η οποία μετατρέπει κάποιο από τα κριτήρια σε ένα αντίστοιχο περιορισμό. Αν και στη γενική περίπτωση δεν εξασφαλίζεται ότι η λύση που θα πάρουμε με αυτό τον τρόπο θα είναι Pareto βέλτιστη, στη δική μας περίπτωση αυτό εξασφαλίστηκε κάνοντας χρήση του Πορίσματος 1. Πιο συγκεκριμένα, το δεύτερο κριτήριο (2) αφαιρέθηκε από το μοντέλο και δόθηκε η τιμή 0 στην μεταβλητή f του περιορισμού (6). Σαν αποτέλεσμα, η λύση που λαμβάνεται μετά από αυτό το μετασχηματισμό είναι Pareto βέλτιστη. Φυσικά θα πρέπει να τονιστεί ότι με αυτό τον τρόπο, η AMPL καταφέρνει να πάρει μία μόνο Pareto βέλτιστη λύση, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο BLMCK που κατορθώνει να βρει το πλήρες Pareto μέτωπο του προβλήματος. Το μοντέλο AMPL που χρησιμοποιήθηκε, το οποίο λαμβάνεται σαν έτοιμο εξαγόμενο από την εκτέλεση του Αλγόριθμου BLMCK παρουσιάζεται στον Πίνακα 9. Το αντίστοιχο αρχείο δεδομένων παράγεται επίσης έτοιμο από την εκτέλεση του Αλγόριθμου BLMCK. Ένα παράδειγμα της μορφής αυτού του αρχείου για κάποιο τυχαίο πρόβλημα φαίνεται στον Πίνακα 10.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αποτελεσματικότητα του Αλγόριθμου BLMCK προκύπτει ξεκάθαρα από τη σύγκριση με την AMPL, καθώς για όλα τα προβλήματα που εξετάστηκαν, ο χρόνος που χρειάστηκε ο αλγόριθμος για να τερματίσει ήταν σημαντικά μικρότερος από τον αντίστοιχο χρόνο που χρειάστηκε η AMPL.

Πίνακας 9 : Το μοντέλο AMPL του προβλήματος

```

# Διαστάσεις Πινάκων
set K;                                     # Δείκτης δρόμων
set I;                                     # Δείκτης βελτιώσεων

# Πίνακες Δεδομένων
#param Length {K} >= 0;                   # Μήκος δρόμων
param Budget > 0;                          # Budget
param Profit {K,I} ;                      # Profits
param Cost {K,I} ;                        # Costs
param f >= 0;                              # maximum allowable difference

# Μεταβλητές
var X {K,I}>=0 ;                            # Βελτιώσεις
var Upper >=0;                             # Upper Boundary
var Lower >=0;                             # Lower Boundary

# Αντικειμενική Συνάρτηση
maximize objective_function: sum {k in K,i in I} Profit[k,i] * X[k,i];

# Περιορισμοί - Constraints
subject to BigBudget : sum {k in K,i in I} Cost[k,i] * X[k,i] <= Budget;
subject to MC {k in K} : sum {i in I} X[k,i] <= 1;
subject to equity_up {k in K} : sum {i in I} Cost[k,i] * X[k,i] <= Upper;
subject to equity_2 {k in K} : sum {i in I} Cost[k,i] * X[k,i] >= Lower;
subject to fdiff : (Upper-Lower) <= f;

```

Πίνακας 10 : Το αρχείο δεδομένων AMPL του προβλήματος

```
set I:= i1 i2 i3 i4 ;
set K:= k1 k2 k3 k4 ;
param Budget:= 8.418470;
param f:= 0.000000;
```

```
param Profit:
```

```
i1
i2
i3
i4
:=
k1
0.146489
1.358318
3.265114
3.182714
k2
1.725150
3.585314
2.423292
0.011231
k3
0.868801
3.647938
2.605182
3.801019
k4
0.157353
2.817347
2.968474
2.167058
;
```

```
param Cost:
```

```
i1
i2
i3
i4
:=
k1
3.481063
3.213477
1.780328
0.426283
k2
0.531877
0.832545
```

1.834773
3.847896
k3
0.551775
2.802210
3.188818
1.942076
k4
3.964476
2.986908
0.844752
1.914853
;

Κεφάλαιο 5:

Επίλογος

5.1 Συμπεράσματα

Στη διπλωματική αυτή, παρουσιάσαμε μία επέκταση του Γραμμικού Προβλήματος Knapsack με Πολλαπλές Επιλογές, που ενσωματώνει ένα δεύτερο κριτήριο, το οποίο αναζητά μία ισοδίκαιη κατανομή του διαθέσιμου πόρου. Παρουσιάσαμε τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος και αποδείξαμε ότι η δομή του εμφανίζει διάφορες θεμελιώδεις ιδιότητες. Αυτές χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη ενός βέλτιστου μωπικού αλγόριθμου δύο-φάσεων, ο οποίος είναι ικανός να λαμβάνει το πλήρες Pareto μέτωπο του προβλήματος. Στην Φάση I, ο αλγόριθμος παραβλέπει αρχικά το δεύτερο κριτήριο και επεκτείνει έναν υπάρχον αλγόριθμο του Γραμμικού Προβλήματος Knapsack Πολλαπλών Επιλογών για να βρει μια αρχική λύση. Στη Φάση II, ενσωματώνει και το δεύτερο κριτήριο και κάνει χρήση του γεγονότος ότι όλες οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει αυτό το κριτήριο είναι γνωστές. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν όλες αυτές οι τιμές του δεύτερου κριτηρίου έχουν ληφθεί.

Τα υπολογιστικά μας αποτελέσματα παρουσιάζουν την αποτελεσματικότητα του αλγόριθμου. Ξεπερνά σε απόδοση οποιοδήποτε εμπορικό πακέτο γραμμικού προγραμματισμού της αγοράς και η αποτελεσματικότητά του αυτή αυξάνεται με την αύξηση του μεγέθους του προβλήματος. Ο αλγόριθμος αποδίδει πολύ καλά επειδή εκμεταλλεύεται την ειδική δομή του προβλήματος. Εστιάζει σε σύνολα πολλαπλών επιλογών αντί σε μεμονωμένες μεταβλητές αποφάσεων. Εάν προσθέσουμε και το γεγονός ότι μπορεί και βρίσκει το πλήρες Pareto μέτωπο, τότε τα πολλαπλά πλεονεκτήματά του γίνονται προφανή.

5.2 Μελλοντική Έρευνα

Η παρούσα εργασία μπορεί να επεκταθεί στο μέλλον με πάρα πολλούς τρόπους. Ακόμα πιο πολύπλοκα μοντέλα μπορούν να αναπτυχθούν επεκτείνοντας την υπάρχουσα δουλειά. Μία ενδιαφέρουσα επέκταση προκύπτει όταν κάθε σύνολο μεταβλητών αποτελείται από συνεχείς και διακριτές μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα γίνεται συνδυαστικό και ο παρών μωπικός αλγόριθμος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του Pareto μετώπου του προβλήματος.

Πιστεύουμε ότι η βαθιά γνώση που αποκτήθηκε από αυτή τη δομή του προβλήματος και τα πλεονεκτήματα του αλγόριθμου θα αποδειχθούν χρήσιμα σε πραγματικές εφαρμογές οι οποίες περιλαμβάνουν έναν μεγάλο αριθμό μεταβλητών αποφάσεων. Η διατύπωση προέκυψε από μια εφαρμογή στη διοίκηση μεταφορών για την κατανομή κονδυλίων για βελτιώσεις αυτοκινητόδρομων. Αυτό είναι ένα μόνο από τα πολλά προβλήματα που ασχολούνται με την ισοδίκαιη κατανομή περιορισμένων πόρων που καταναλώνουν διαφορετικές ομάδες δραστηριοτήτων και μπορούν να προσεγγιστούν με τη χρήση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Βασιλείου,** (2001). "Εφαρμοσμένος μαθηματικός Προγραμματισμός". Εκδόσεις Ζήτη.
- Chandra, A.K., D.S. Hirschberg and C.K. Wong.** (1976). "Approximate algorithms for some generalized knapsack problems". *Theoretical Computer Science* 3 293-304.
- Cormen, T.H., C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C.Stein.** (2001). Introduction to algorithms. The MIT Press, Cambridge MA.
- Donaldson, G.A.**(1988). Safety spending : usually begrudged, often misallocated, In: *Proceedings of the ASCE Conference on Highway Safety at the Crossroads*, San Antonio, TX, pp. 140-150.
- Dudzinski, K. and S. Walukiewicz.** (1984). *A fast algorithm for the linear multiple-choice knapsack problem*. *Operations Research Letters* 3 205-209.
- Dyer, M.E.** (1984). *An $O(n)$ algorithm for the multiple-choice knapsack linear program*. *Mathematical Programming* 29 57-63.
- Eben-Chaïme M.,** (1996). "Parametric Solution for Linear Bicriteria Knapsack Models", *Management Science* **42**, 1565-1575.
- Erlebach T., Kellerer H. and Pferschy U.,** (2002). "Approximating Multiobjective Knapsack Problems", *Management Science* **48** (12), 1603-1612.
- Gass, S.I. and Jr S.P. Shao.** (1985). *On the solution of special generalized upper-bounded problems: The LP/GUB knapsack problem and the λ -form separable convex objective function problem*. *Mathematical Programming Study* 24 104-115.
- Glover, F. and D. Klingman.** (1979). *An $O(n \log n)$ algorithm for LP knapsacks with GUB constraints*. *Mathematical Programming* 17 345-361.

Graham, R.L. (1972). An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Information Processing Letters* 1 132-133.

Johnson, E.L., Padberg, M.W., (1981). A note on the knapsack problem with special ordered sets. *Operations Research Letters* 1, 18-22.

Kozanidis, G. and Melachrinoudis, E (2004) A Branch & Bound Algorithm for the 0-1 Mixed Integer Knapsack Problem with Linear Multiple Choice Constraints. *Computers & Operations Research* , 31, 695-711.

Kozanidis, G., Melachrinoudis E. and Solomon M., (2005) The Linear Multiple Choice Knapsack Problem with Equity Constraints. *International Journal of Operations Research*, δεκτό προς δημοσίευση.

Klamroth K. and Wiecek M.M., (2000). "Dynamic Programming Approaches to the Multiple Criteria Knapsack Problem", *Naval Research Logistics* 47 (1), 57-76.

Lin, E.Y.-H. (1998). A bibliographical survey on some well known non-standard knapsack problems. *INFOR* 36, 274-317.

Melachrinoudis, E and Kozanidis, G.(2002) A Mixed Integer Knapsack Model for Allocating Funds to Highway Safety Improvements. *Transportation Research Part A : Policy and Practice*, 36, 789-803.

Sarin, S. and M.H. Karwan. (1989). *The linear multiple choice knapsack problem.* *Operations Research Letters* 8 95-100.

Sinha, P. and Zolthens, A. A. (1979) The Multiple Choice Knapsack Problem. *Operations Research* ,27,503-515.

Steuer R.E (1985) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application.* John Wiley & Sons, New York, NY.

Witzgall, C. (1980). On one-row linear programs. In: Fiacco AV, Kortane KO editors. Ext. *Methods and Systems Anal.*, Berlin: Springer, 384-414.

Zemel, E. (1984). *An $O(n)$ algorithm for the linear multiple choice knapsack problem and related problems.* Information Processing Letters 18 123-128.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074710

