



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**  
*ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ*  
*ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ*

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΘΕΜΑ :**  
**“ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΙΩΝ ΜΕ ΡΩΓΜΕΣ”**

**ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΣΠΥΡΟΥ**

**Εξεταστική Επιτροπή**

**ΚαΘ. Αράβας Νικόλαος (Επιβλέπων)**

**ΚαΘ. Γιαννακόπουλος Αντώνης**

**ΚαΘ. Χαϊδεμενόπουλος Γρηγόρης**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4021/1  
Ημερ. Εισ.: 15-10-2004  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2004  
ΣΠΥ

## Σημείωμα του συγγραφέα

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Ν. Αράβα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθώς και για τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Η συμβολή του ήταν καταλυτική ώστε να αποκτήσω σημαντικές γνώσεις και ένα ιδιαίτερο τρόπο σκέψης.

Θερμές ευχαριστίες στους φίλους και συμφοιτητές μου για την επικοινωνιακή συνεργασία και την δημιουργία ενός ιδιαίτερα ευχάριστου κλίματος κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις ευχαριστίες προς την οικογένειά μου για την συμπαράστασή τους και τον σπουδαίο τρόπο σκέψης που μου έχουν μεταδώσει.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. Εισαγωγή</b>	
Περίληψη.....	1
<b>2. Ελαστική ανάλυση ρωγμής</b>	
2.1 Ανάπτυξη ελαστικών εξισώσεων.....	3
2.2 Το ολοκλήρωμα J.....	8
<b>3. Εφαρμογές στην ελαστικότητα</b>	
3.1 Ασυμπτωτική ελαστική λύση και πεπερασμένα στοιχεία.....	11
<b>4. Ελαστοπλαστική ανάλυση ρωγμής</b>	
4.1 Ανάπτυξη ελαστοπλαστικών εξισώσεων.....	20
4.2 Αριθμητική επίλυση της ασυμπτωτικής λύσης HRR.....	23
<b>5. Εφαρμογές στην ελαστοπλαστικότητα</b>	
5.1 Ασυμπτωτική λύση HRR και πεπερασμένα στοιχεία.....	31
<b>6. Συμπεράσματα</b>	
Περίληψη.....	49

### Παράρτημα Α

Αρχεία δημιουργίας καννάβων

### Παράρτημα Β

Η uhard υπορουτίνα uhard.f

### Παράρτημα Γ

Ο κώδικας για την επίλυση των εξισώσεων HRR model.f

### Βιβλιογραφία - Αναφορές



## 1. Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την ανάλυση προβλημάτων που αφορούν δοκίμια με ρωγμές. Η ανάλυση θα αφορά τρία δοκίμια με διαφορετικού μεγέθους ρωγμές, μία μικρή ρωγμή  $a/w = 0.1$ , μία πιο βαθιά ρωγμή  $a/w = 0.5$  και μια βαθύτερη ρωγμή  $a/w = 0.9$  όπου  $a/w$  είναι η αναλογία του μεγέθους της ρωγμής με το συνολικό πλάτος του δοκιμίου. Συνολικά θα αναλύσουμε δύο προβλήματα :

- 1) το ελαστικό πρόβλημα της ρωγμής
- 2) το ελαστοπλαστικό πρόβλημα της ρωγμής

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε αρχικά με την ανάπτυξη των εξισώσεων που διέπουν το ελαστικό πρόβλημα της ρωγμής. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περιγραφή του «ολοκληρώματος J» και την χρησιμότητά του στη μηχανική της θραύσης. Κάνοντας μια σύντομη εισαγωγή μπορούμε να πούμε ότι το «ολοκλήρωμα J» είναι ο πλαστικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων και έχει την ίδια έννοια με τον συντελεστή K που εμφανίζεται στην ελαστική λύση.

Στο τρίτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε την ασυμπτωτική λύση του ελαστικού προβλήματος της ρωγμής στα τρία δοκίμια που περιγράψαμε παραπάνω. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ασυμπτωτική λύση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση του προβλήματος με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων και υπολογίζουμε την περιοχή σύγκλισής τους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ανάπτυξη των εξισώσεων που διέπουν το ελαστοπλαστικό πρόβλημα της ρωγμής. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση της ασυμπτωτικής λύσης HRR του ελαστοπλαστικού προβλήματος της ρωγμής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η επίλυση γίνεται από υπορουτίνα σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN.

Στο πέμπτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε την ασυμπτωτική λύση του ελαστοπλαστικού προβλήματος της ρωγμής στα τρία δοκίμια που περιγράψαμε παραπάνω. Παράλληλα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ασυμπτωτική λύση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση του

προβλήματος με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων και υπολογίζουμε την περιοχή σύγκλισής τους.

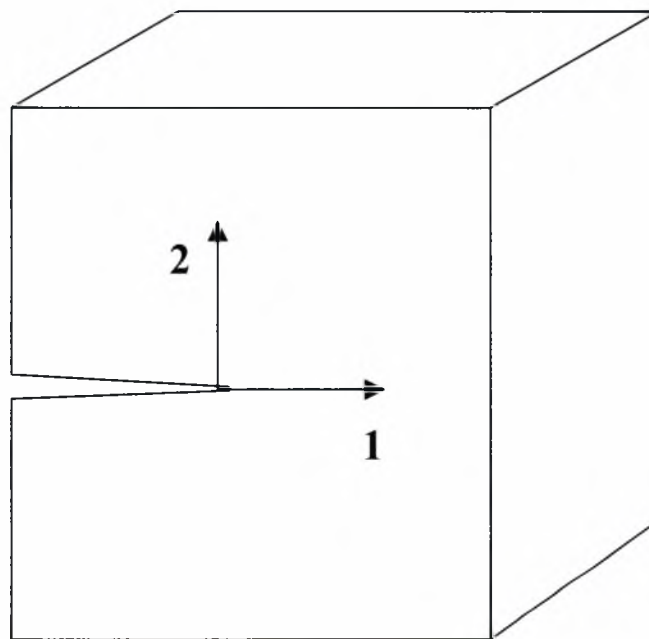
Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας παραθέτουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την συνολική ανάλυσή μας.

## 2. Ελαστική ανάλυση ρωγμής

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις που αφορούν το ελαστικό πρόβλημα της ρωγμής. Αναπτύσσονται οι σχέσεις που περιγράφουν τα πεδία των τάσεων και των μετατοπίσεων σε ελαστικά προβλήματα με ρωγμές. Πραγματοποιείται περιγραφή του ολοκληρώματος J, των ιδιοτήτων του και της χρησιμότητάς του.

### 2.1 Ανάπτυξη ελαστικών εξισώσεων

Ο Williams(1957) ήταν ο πρώτος που παρουσίασε την καθολική ύπαρξη του όρου  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  στα ελαστικά προβλήματα με ρωγμές (Σχήμα1).



Σχήμα 1: Δοκίμιο με ρωγμή σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης

Η απόδειξή του βασίστηκε στην ασυμπτωτική επίλυση της διαρμονικής εξίσωσης καθώς  $r \rightarrow 0$ :

$$\nabla^4 U = 0 \quad (2.1)$$

όπου  $U$  μια τασική συνάρτηση Airy της μορφής

$$U = r^{\lambda+1} f(\theta) \quad (2.2)$$

Από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) προκύπτει η εξίσωση για την συνάρτηση  $f$  :

$$r^{\lambda-3} \left[ \frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2(\lambda^2 + 1) \frac{d^2 f}{d\theta^2} + (\lambda^2 - 1)^2 f \right] = 0 \quad (2.3)$$

Από την επίλυση της εξίσωσης (2.3) προκύπτει η συνάρτηση  $f$ . Για  $\lambda \neq 0, \pm 1$  ισχύει:

$$f(\theta) = a \sin(\lambda + 1)\theta + b \cos(\lambda + 1)\theta + c \sin(\lambda - 1)\theta + d \cos(\lambda - 1)\theta \quad (2.4)$$

Για  $\lambda = \pm 1$  ισχύει :

$$f(\theta) = a \sin(2\theta) + b \cos(2\theta) + c\theta + d \quad (2.5)$$

Για  $\lambda = 0$  ισχύει :

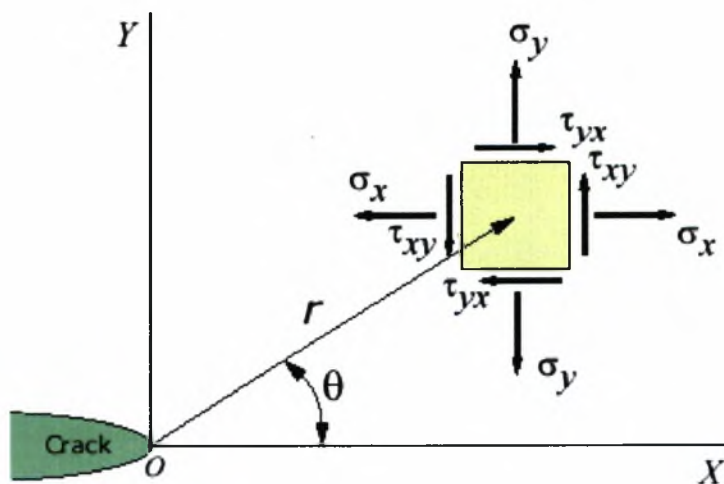
$$f(\theta) = (a + b\theta) \sin(\theta) + (c\theta + d) \cos(\theta) \quad (2.6)$$

όπου οι ιδιοτιμές  $\lambda$  προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες.

Έτσι έχουμε την εξίσωση για την τασική συνάρτηση Airy :

$$U(r, \theta) = \sum_i r^{\lambda_i+1} f_i(\theta, \lambda_i) \quad (2.7)$$

Θεωρούμε πολικό σύστημα συντεταγμένων για την ανάλυση των εξισώσεων του συστήματος (Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Πολικό σύστημα συντεταγμένων στην ακμή της ρωγμής



Οι σχέσεις που αφορούν τις τάσεις σε πολικό σύστημα συντεταγμένων είναι :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad (2.9)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (2.10)$$

Οι σχέσεις  $\sigma - \varepsilon$  και  $\varepsilon - u$  για το πρόβλημα είναι :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{8G} \left[ (1+\kappa)\sigma_{rr} - (3-\kappa)\sigma_{\theta\theta} \right] \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{8G} \left[ (1+\kappa)\sigma_{\theta\theta} - (3-\kappa)\sigma_{rr} \right] \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2G} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (2.16)$$

όπου  $G$  το μέτρο διάτμησης και  $\kappa = \begin{cases} 3-4\nu \rightarrow \text{επιπεδη} - \varepsilon \\ 3-\nu \\ 1+\nu \rightarrow \text{επιπεδη} - \sigma \end{cases}$  με  $\nu$  το λόγο του

Poisson.

Οι σχέσεις (2.8), (2.9) και (2.10) χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.7) γίνονται για  $\lambda \neq -1$ :

$$\sigma_{rr} = \sum_i r^{\lambda_i-1} \left[ f_i''(\theta) + (\lambda_i+1)f_i(\theta) \right] \quad (2.17)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_i r^{\lambda_i-1} \lambda_i (\lambda_i+1) f_i(\theta) \quad (2.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\sum_i r^{\lambda_i-1} \lambda_i f_i'(\theta) \quad (2.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.11), (2.12) και (2.13) με βάση τις σχέσεις (2.17), (2.18) και (2.19) και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (2.14), (2.15) και (2.16) ως προς την μετατόπιση βρίσκουμε ότι για τις μετατοπίσεις και για  $\lambda \neq 0, \pm 1$  ισχύει :

$$u_r = \frac{1}{2G} \sum_i r^{\lambda_i} [ -(\lambda_i + 1) f + (1 + \kappa) [ c_i \sin(\lambda_i - 1)\theta + d_i \cos(\lambda_i - 1)\theta ] ] \quad (2.20)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2G} \sum_i r^{\lambda_i} [ -f' - (1 + \kappa) [ c_i \cos(\lambda_i - 1)\theta - d_i \sin(\lambda_i - 1)\theta ] ] \quad (2.21)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές  $\lambda$ . Οι συνοριακές συνθήκες βασίζονται στη θεώρηση ότι οι επιφάνειες της ρωγμής είναι αφόρτιστες. Οπότε προκύπτει ότι :

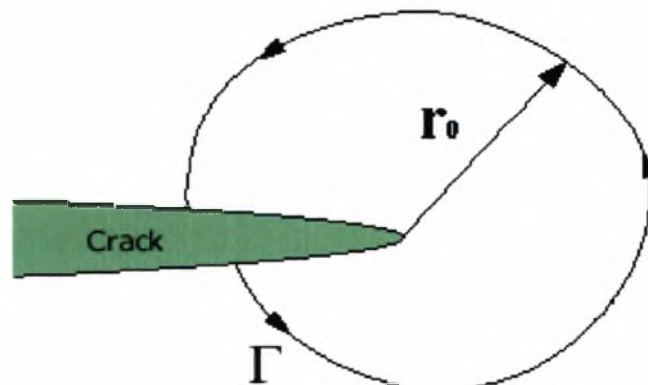
$$\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) = \sigma_{r\theta}(r, \pm\pi) = 0 \quad (2.22)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις που αφορούν τις συνοριακές συνθήκες με τη βοήθεια των σχέσεων (2.18) και (2.19) βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του  $\lambda$  είναι

$$\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ και } \lambda = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$$

(Σημείωση : Για τις ιδιοτιμές  $\lambda = 0, \pm 1$  η συνάρτηση  $f$  είναι διαφορετική και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι διαφορετικά)

Στη συνέχεια θεωρούμε την συνολική ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης σε μια περιοχή κοντά στην ακμή της ρωγμής (Σχήμα 3) :



Σχήμα 3 : Περιοχή ακτίνας  $r_0$  κοντά στην ακμή της ρωγμής

$$W = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = B \int_A \frac{1}{2} \sigma_{ij} M_{ijkl} \sigma_{kl} dA \sim \int_A \sigma^2 dA \Rightarrow$$

$$W = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r_0} \sigma^2 r dr d\theta \sim \int_0^{r_0} r^{2\lambda-1} dr = \frac{1}{2\lambda} r_0^{2\lambda} \quad (2.23)$$

Πρέπει  $W \rightarrow 0$  καθώς  $r \rightarrow 0$  οπότε πρέπει  $\lambda > 0$ . Άρα οι ιδιοτιμές που είναι αποδεκτές είναι μόνο θετικές  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$  και  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Έτσι οι τελικές σχέσεις για τις τάσεις και τις μετατοπίσεις που αφορούν το ελαστικό πρόβλημα της ρωγμής είναι :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right) + T + 0 \left( r^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.24)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0 \left( r^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.25)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + 0 \left( r^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.26)$$

$$u_x = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( K_I \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) \right) + \frac{Tr}{8G} (\kappa + 1) \cos \theta + 0 \left( r^{\frac{3}{2}} \right) \quad (2.27)$$

$$u_y = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( K_I \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) \right) - \frac{Tr}{8G} (3 - \kappa) \sin \theta + 0 \left( r^{\frac{3}{2}} \right) \quad (2.28)$$

Στη μελέτη που θα ακολουθήσει παρακάτω για το ελαστικό πρόβλημα της ρωγμής σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης θεωρούμε ότι τα δοκίμια φορτίζονται μόνο σε εφελκυσμό οπότε  $K_{II} = 0$  όπου  $K_{II}$  είναι ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων που αφορά την διάτμηση (mode-II). Επίσης θεωρούμε την τάση T (T stress), που εξαρτάται από τη φόρτιση και τη γεωμετρία του σώματος, αμελητέα και δεν τη λαμβάνουμε υπόψη στη μελέτη μας. Άρα οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε τελικά για τις τάσεις και τις μετατοπίσεις είναι :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.29)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.30)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.31)$$

$$\sigma_e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right]} \quad (2.32)$$

$$u_x = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (2.33)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (2.34)$$

## 2.1 Το ολοκλήρωμα J

Οι Rice και Drucker(1967) απέδειξαν ότι κατά την επέκταση ρωγμών “απελευθερώνεται” δυναμική ενέργεια. Απέδειξαν δηλαδή ότι  $\Pi^2 < \Pi^1$  όπου  $\Pi^1$  η δυναμική ενέργεια σε ένα σώμα με ρωγμές μεγέθους  $A_1$  και  $\Pi^2$  η δυναμική ενέργεια σε ένα σώμα με ρωγμές μεγέθους  $A_2$  όταν  $A_2 > A_1$ . Η δυναμική ενέργεια που αναπτύσσεται σε ένα σώμα με ρωγμή είναι συνάρτηση των φορτίων και του μεγέθους της ρωγμής. Πολύ σημαντικό μέγεθος για την περαιτέρω μελέτη μας είναι ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας (energy release rate). Ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας συμβολίζεται με  $\mathcal{G}$  και ισούται με  $\mathcal{G} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial a}$  όπου  $a$  είναι το μέγεθος της ρωγμής και  $B$  το πάχος του σώματος.

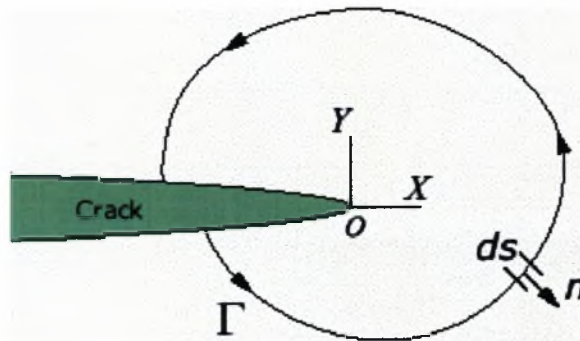
Ο Irwin(1957) απέδειξε ότι :

$$\mathcal{G} = \frac{1}{H} K_I^2 \quad (2.35)$$

$$\text{όπου } \frac{1}{H} = \frac{1+\kappa}{8G} = \begin{cases} \frac{1}{E} \rightarrow \text{επιπεδη} - \sigma \\ \frac{1-\nu^2}{E} \rightarrow \text{επιπεδη} - \varepsilon \end{cases} \quad \text{με } \nu \text{ το λόγο του Poisson και } E \text{ το}$$

μέτρο ελαστικότητας.

Ο Rice(1968) στη συνέχεια ανέπτυξε μια παράμετρο για να χαρακτηρίσει την μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού μπροστά από μια ρωγμή. Ο Rice εξιδανικεύοντας την ύπαρξη πλαστικότητας με μη-γραμμική ελαστικότητα κατάφερε να συνδέσει τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας με τα μη-γραμμικά υλικά. Απέδειξε ότι αυτός ο μη-γραμμικός ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός ολοκληρώματος, το οποίο ονόμασε «ολοκλήρωμα J» και υπολογίζεται μέσω ενός δρόμου ολοκλήρωσης γύρω από τη ρωγμή (Σχήμα 4).



Σχήμα 4: Δρόμος ολοκλήρωσης Γ γύρω από την ακμή της ρωγμής

Έτσι αποδείχθη ότι :

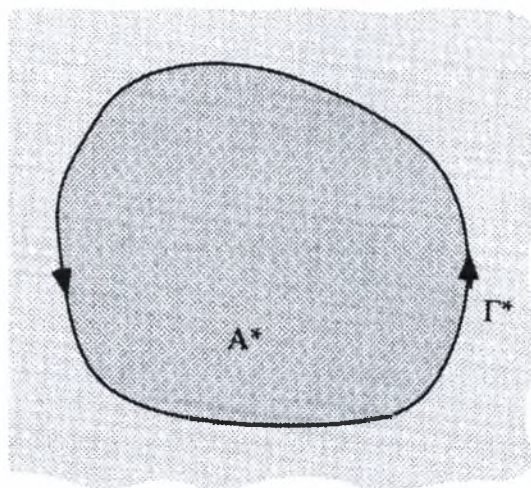
$$J = \mathcal{G} = -\frac{1}{B} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \quad (2.36)$$

Παράλληλα αποδείχθη ότι το ολοκλήρωμα J είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης (path independent). Αποδεικνύεται ότι για το ολοκλήρωμα J ισχύει :

$$J = \int_{\Gamma} \left( \bar{U} n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds \quad (2.37)$$

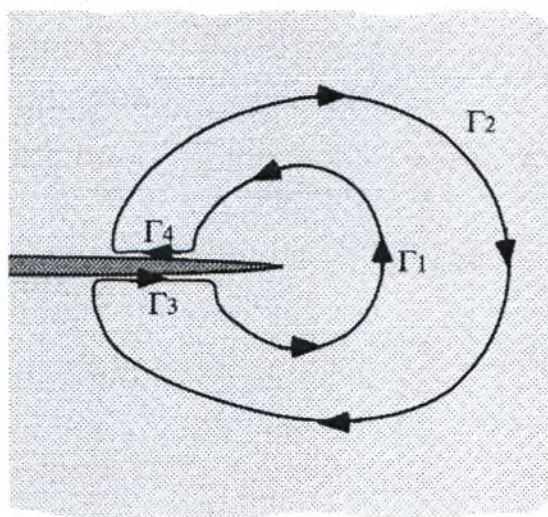
όπου  $\bar{U}$  η ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου,  $n_1$  το κάθετο διάνυσμα στο δρόμο Γ στην x-διεύθυνση (Σχήμα 4) και  $\sigma_{ij} n_j$  το διάνυσμα της τάσης στην καμπύλη Γ.

Για μια κλειστή καμπύλη  $\Gamma^*$  (Σχήμα 5) αποδεικνύεται ότι  $J=0$ .



Σχήμα 5 : Κλειστή καμπύλη  $\Gamma^*$

Έτσι για την κλειστή καμπύλη του Σχήματος 6 ισχύει  $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$ . Όμως  $J_3 = J_4 = 0$  γιατί  $n_1 = 0$  και  $\sigma_{ij}n_j = 0$  στους δρόμους 3 και 4. Και επειδή λόγω της φοράς ισχύει ότι  $J_1 = -J_2$  αποδεικνύεται τελικά ότι το ολοκλήρωμα  $J$  είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.



Σχήμα 6 : Κλειστή καμπύλη  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$

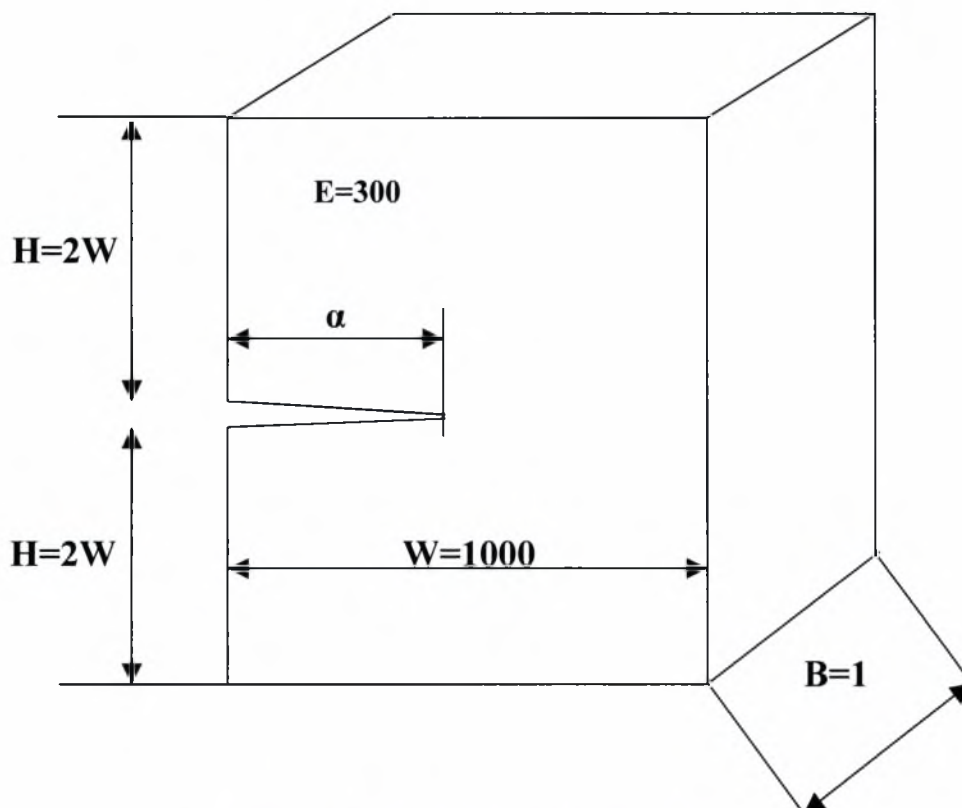


### 3. Εφαρμογές στην ελαστικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του ελαστικού προβλήματος της ρωγμής. Πραγματοποιείται σύγκριση αποτελεσμάτων, που αφορούν την ισοδύναμη τάση κατά von Mises  $\sigma_e$ , μεταξύ της ασυμπτωτικής λύσης και της λύσης που παίρνουμε από τα πεπερασμένα στοιχεία. Υπολογίζεται η περιοχή όπου το ποσοστό απόκλισης των αποτελεσμάτων της αναλυτικής λύσης και των τιμών που παίρνουμε αριθμητικά είναι μικρότερο ή ίσο του 10%.

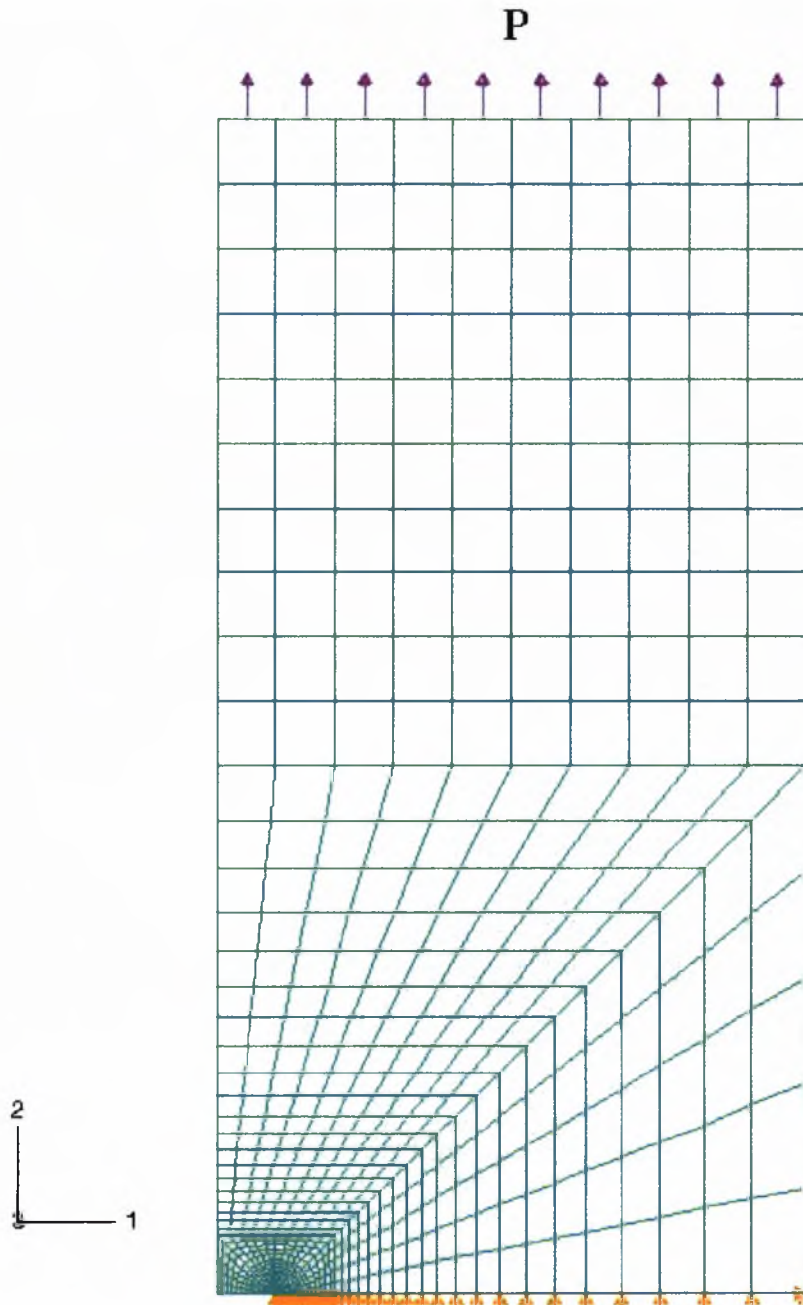
#### 3.1 Ασυμπτωτική ελαστική λύση και πεπερασμένα στοιχεία

Για τις εφαρμογές που παρουσιάζουμε παρακάτω έχει χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS. Η μελέτη μας αφορά τρία δοκίμια με τις ίδιες ιδιότητες υλικού και διαφορετικού μεγέθους ρωγμές (Σχήμα 7). Οι ιδιότητες του υλικού που χρησιμοποιούμε είναι  $E/\sigma_0 = 300$ ,  $\nu = 0.3$ , όπου  $\sigma_0$  είναι μια «τάση αναφοράς». Κάθε δοκίμιο περιέχει ρωγμή με μέγεθος  $a/w = 0.1$ ,  $a/w = 0.5$ ,  $a/w = 0.9$  αντίστοιχα. Το πάχος των δοκιμίων είναι  $B$  και το ύψος  $H=2W$ . Υποθέτουμε επίσης συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.



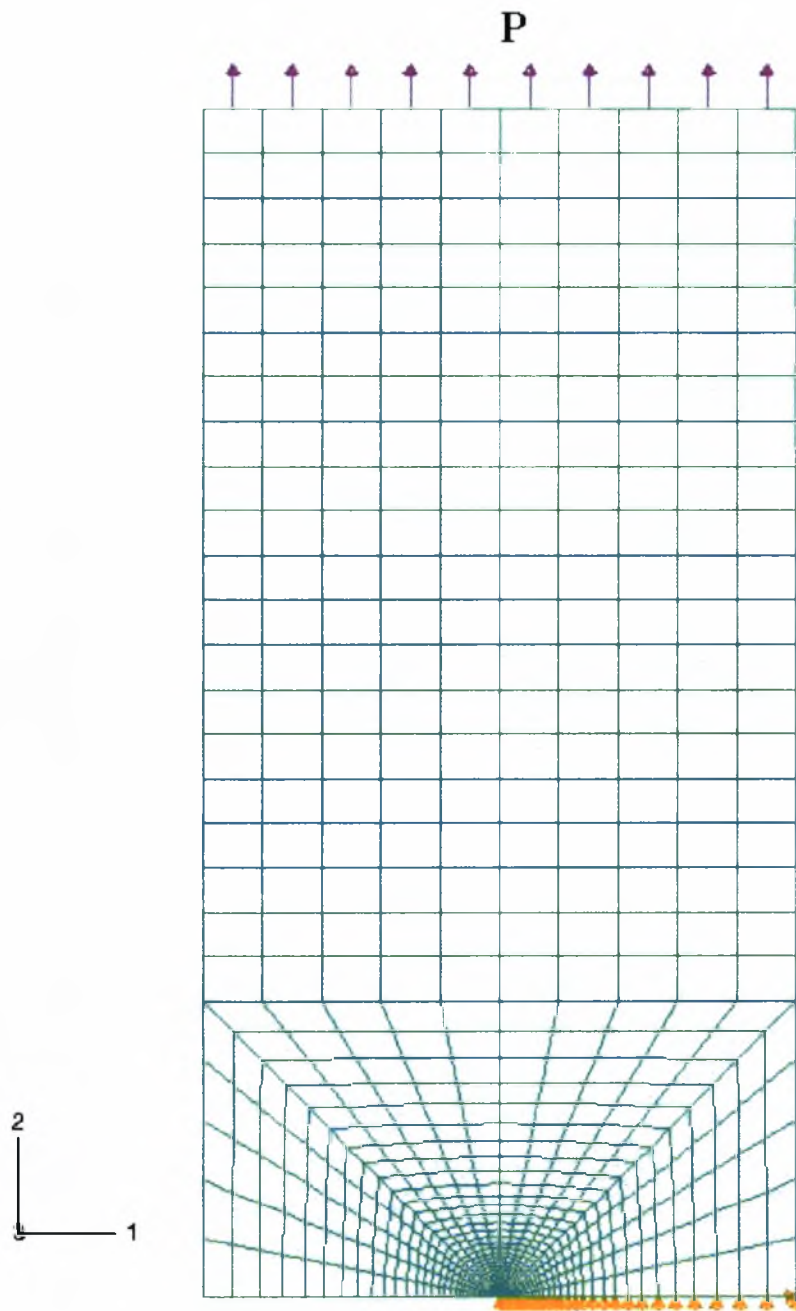
Σχήμα 7 : Δοκίμιο με ρωγμή μεγέθους  $a/w$

Οι κάρναβοι<sup>1</sup> που χρησιμοποιήθηκαν μαζί με τη φόρτιση και τις στηρίξεις που εφαρμόζονται φαίνονται στα Σχήματα 8,9,10.

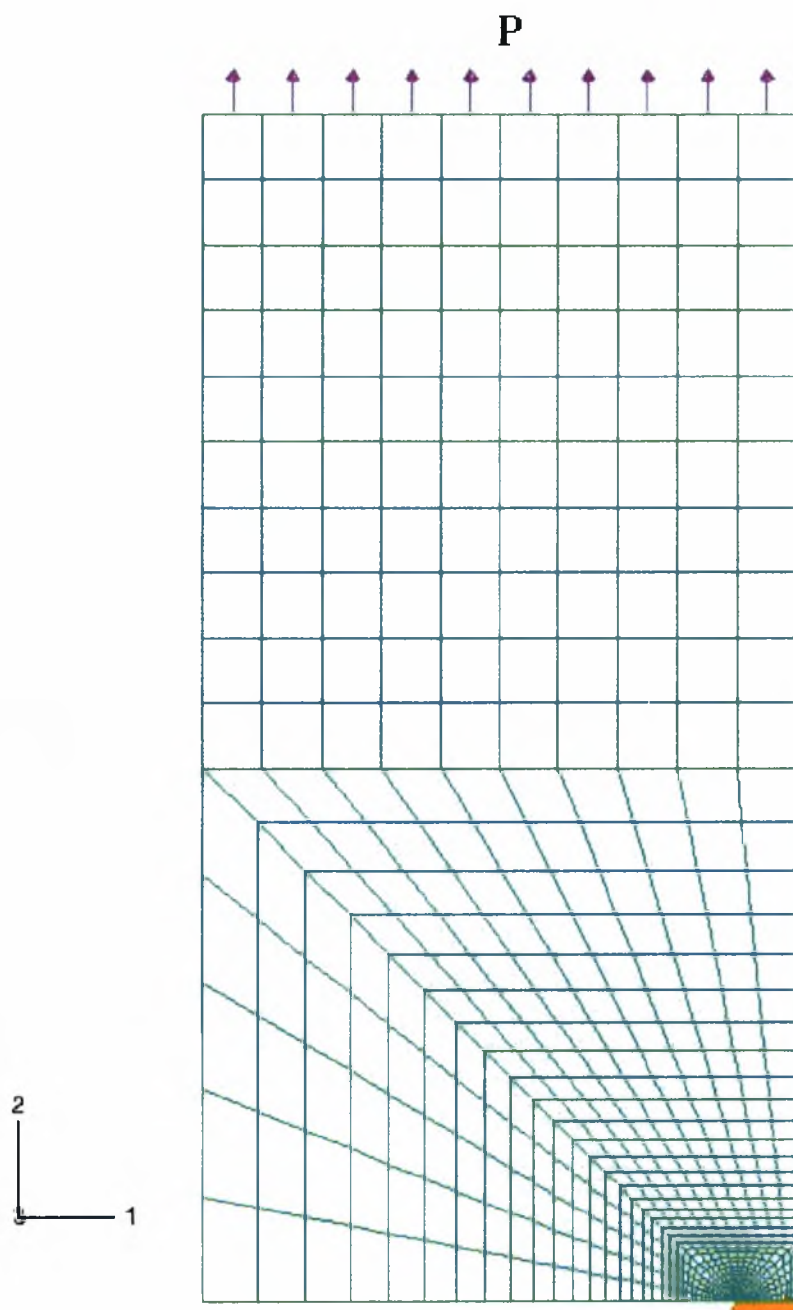


Σχήμα 8 : Κάρναβος όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.1$

<sup>1</sup> Τα αρχεία δημιουργίας των κάρναβων για τις τρεις περιπτώσεις που μελετάμε ( $a/w=0.1$ ,  $a/w=0.5$ ,  $a/w=0.9$ ) παρέχονται στο Παράρτημα Α



Σχήμα 9 : Κάνναβος όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.5$



Σχήμα 10 : Κάνναβος όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.9$

Στην άνω επιφάνεια κάθε σχήματος βλέπουμε την ομοιόμορφη εφελκυστική φόρτιση που εφαρμόζεται. Στην κάτω δεξιά επιφάνεια έχουμε οριακές συνθήκες συμμετρίας σε σχέση με το άλλο μισό κομμάτι του δοκιμίου ενώ η κάτω αριστερά επιφάνεια αποτελεί την ελεύθερη επιφάνεια της ρωγμής και δεν εφαρμόζονται οριακές συνθήκες.

Η ασυμπτωτική λύση του ελαστικού προβλήματος με την ύπαρξη ρωγμής που αφορά την ισοδύναμη τάση  $\sigma_e$  υπενθυμίζουμε ότι είναι :

$$\sigma_e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1-2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right]} \quad (3.1)$$

Για τη σχέση (3.1) χρειάζεται ο υπολογισμός του συντελεστή εντάσεως των τάσεων  $K_I$  (stress intensity factor). Τον συντελεστή εντάσεως των τάσεων τον υπολογίζουμε μέσω του ολοκληρώματος  $J$ . Το ολοκλήρωμα  $J$  γνωρίζουμε ήδη ότι ισούται με το ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας  $\mathcal{G}$  (Σχέση (2.36)) και ο ρυθμός με τη σειρά του συνδέεται άμεσα με το συντελεστή εντάσεως των τάσεων  $K_I$  (Σχέση (2.35)). Έτσι προκύπτει τελικά ότι το ολοκλήρωμα  $J$  και ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων  $K_I$  συνδέονται έμμεσα μεταξύ τους :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (3.2)$$

Το ολοκλήρωμα  $J$  το υπολογίζουμε μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS για 10 διαφορετικούς δρόμους ολοκλήρωσης. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται για τα τρία δοκίμια με ρωγμές  $a/w=0.1, a/w=0.5, a/w=0.9$ . (Πίνακες 1,2,3) όπου παρουσιάζονται αδιαστατοποιημένες τιμές του  $J$  που είναι

$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$  όπου  $\sigma_0$  είναι μια «τάση αναφοράς» και  $w$  το πλάτος του δοκιμίου (Σχήμα 7).

Path	J-integral
1	1,231
2	1,322
3	1,340
4	1,343
5	1,343
6	1,344
7	1,343
8	1,343
9	1,343
10	1,343

Πίνακας 1: Ρωγμή  $a/w=0.1$

Path	J-integral
1	1,382
2	1,483
3	1,503
4	1,506
5	1,507
6	1,507
7	1,507
8	1,507
9	1,507
10	1,506

Πίνακας 2: Ρωγμή  $a/w=0.5$

Path	J-integral
1	1,334
2	1,431
3	1,450
4	1,453
5	1,454
6	1,454
7	1,454
8	1,454
9	1,453
10	1,453

Πίνακας 3: Ρωγμή  $a/w=0.9$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ολοκληρώματος J σε όλες τις περιπτώσεις είναι περίπου οι ίδιες και έτσι αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα J είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Επίσης αναφέρουμε ότι οι πολύ μικρές διαφορές που υπάρχουν στις τιμές του J δεν επηρεάζουν την ανάλυση που ακολουθούμε.

Θεωρώντας τις τιμές του J που αφορούν τον τελευταίο δρόμο ολοκλήρωσης προκύπτουν οι εξής αδιαστατοποιημένες τιμές για τους συντελεστές εντάσεως των τάσεων  $K_I$  που είναι  $\frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{w}} 10^{3/2}$  (Πίνακας 4). Στον ίδιο πίνακα φαίνονται οι αδιαστατοποιημένες τιμές των ανάλογων φορτίων που είναι  $P/\sigma_0$ .

$a/w$	$\frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{w}} 10^{3/2}$	Φορτίο $P/\sigma_0$
<b>0,1</b>	<b>21,0416</b>	<b>1</b>
<b>0,5</b>	<b>22,2819</b>	<b>0,2</b>
<b>0,9</b>	<b>21,8863</b>	<b>0,012</b>

Πίνακας 4: Δεδομένα για τα φορτία και τα αντίστοιχα  $K_I$

Ο Tada(1973) παρουσίασε μια προσεγγιστική μέθοδο για τον υπολογισμό του συντελεστή εντάσεως των τάσεων :

$$K_I = P\sqrt{\pi\alpha}F(\alpha/w) \quad (3.3)$$



όπου

$$F(\alpha/w) = \sqrt{\frac{2w}{\pi\alpha} \tan \frac{\pi\alpha}{2w}} \frac{0.752 + 2.02 \left(\frac{\alpha}{w}\right) + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi\alpha}{2w}\right)^3}{\cos \frac{\pi\alpha}{2w}} \quad (3.4)$$

Τα μεγέθη  $\alpha$  και  $w$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.

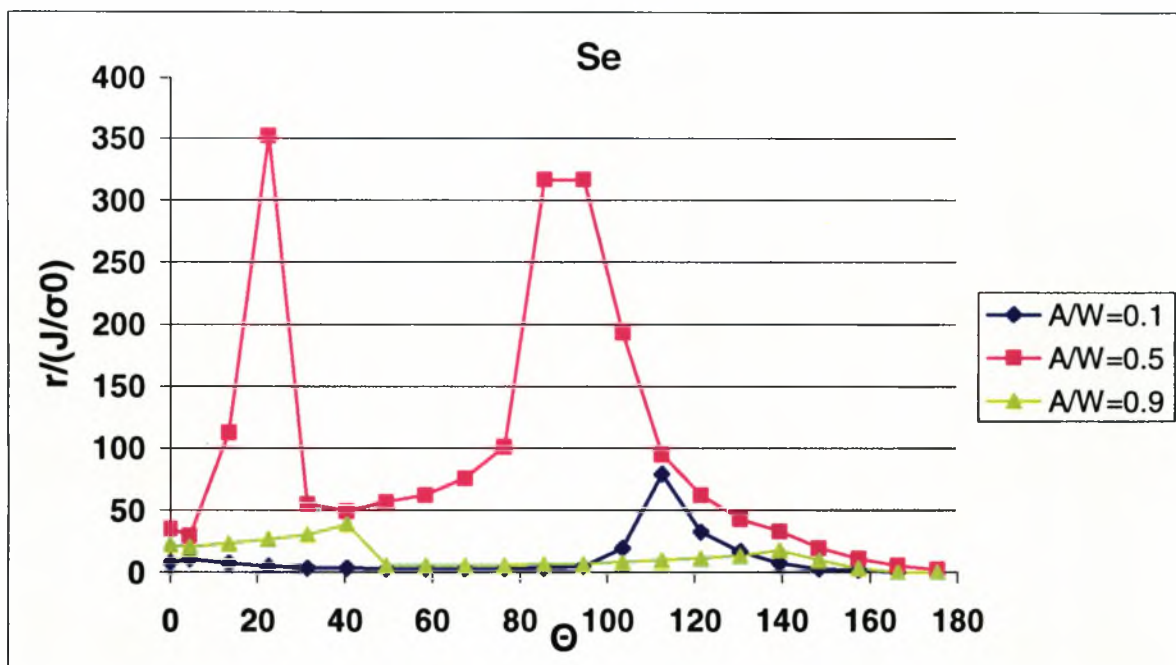
Οι τιμές του συντελεστή εντάσεως των τάσεων από την εμπειρική σχέση και από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS μέσω του ολοκληρώματος J συγκρίνονται (Πίνακας 5) και παρατηρούμε ότι είναι πολύ κοντά μεταξύ τους.

$a/w$	$K_I$ (ABAQUS)	$K_I$ (προσεγγιστικό)
0,1	21,0416	21,1932
0,5	22,2819	22,4053
0,9	21,8863	22,1534

Πίνακας 5 : Σύγκριση των  $K_I$

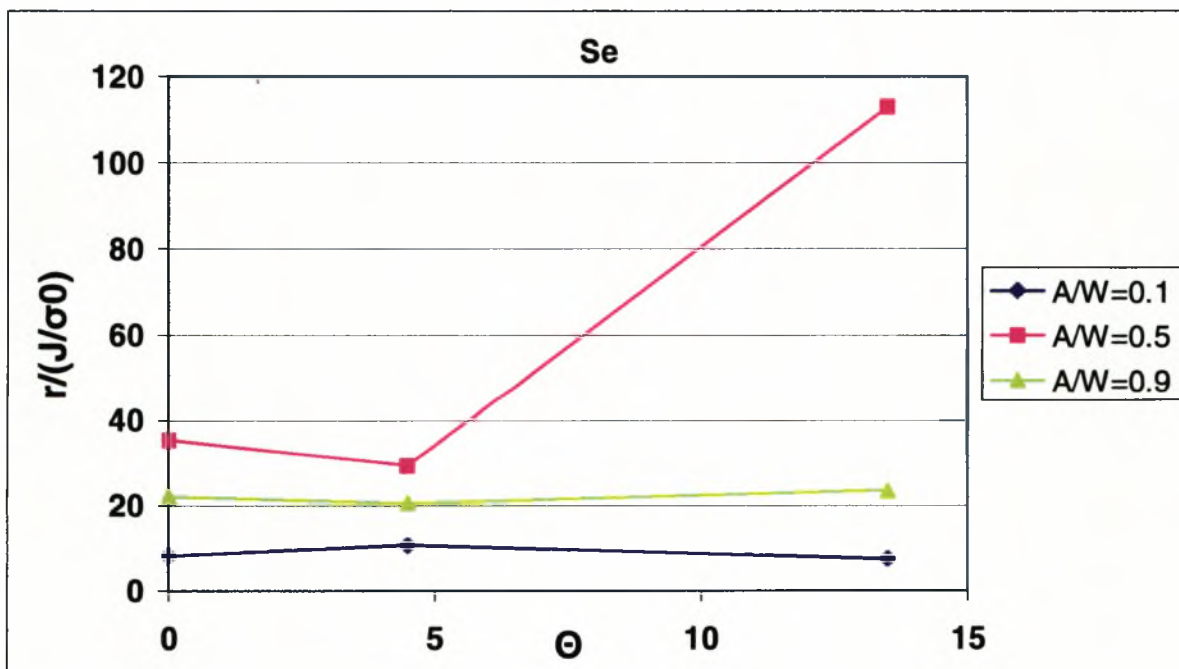
Τις τιμές αυτές του  $K_I$  χρησιμοποιούμε στη σχέση (3.1) και έχουμε τελικά την αναλυτική λύση του ελαστικού προβλήματος με ρωγή για την ισοδύναμη τάση  $\sigma_e$  για κάθε γωνία  $\theta$  και για κάθε απόσταση  $r$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε γραφικές παραστάσεις όπου απεικονίζεται η περιοχή αποτελεσμάτων της ισοδύναμης τάσης κατά von Mises όπου το ποσοστό απόκλισης της ασυμπτωτικής λύσης και των τιμών που παίρνουμε από το υπολογιστικό πρόγραμμα ABAQUS είναι μικρότερο ή ίσο του 10% (Διαγράμματα 1,2). Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις στον x-άξονα απεικονίζεται η γωνία  $\Theta$  που σαρώνει την περιοχή γύρω από τη ρωγή και στον y-άξονα η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων που αφορούν την ισοδύναμη τάση κατά von Mises. Σε κάθε διάγραμμα παρουσιάζεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δοκιμίων με διαφορετικού μεγέθους ρωγμές.



Διάγραμμα 1: Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises για  $0^\circ < \theta < 180^\circ$

Παρουσιάζουμε επίσης την περιοχή σύγκλισης για γωνίες  $0 < \theta < 15^\circ$  :



Διάγραμμα 2 : Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises για  $0^\circ < \theta < 15^\circ$

Παρατηρούμε ότι στο δοκίμιο όπου ισχύει  $a/w=0.5$  η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη περιοχή στα δοκίμια  $a/w=0.9$  και  $a/w=0.1$ . Επίσης φαίνεται ότι η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων στο δοκίμιο όπου ισχύει  $a/w=0.9$  είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη περιοχή του δοκιμίου όπου ισχύει  $a/w=0.1$ . Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι σε περιπτώσεις που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε ένα πείραμα σε δοκίμιο με ρωγή θα ήταν προτιμότερο να επιλέξουμε ένα δοκίμιο με βαθιά ρωγή που να ισχύει  $a/w=0.5$ .

## 4. Ελαστοπλαστική ανάλυση ρωγμής

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις που αφορούν το ελαστοπλαστικό πρόβλημα της ρωγμής. Αναπτύσσονται οι σχέσεις που περιγράφουν τα πεδία των τάσεων και των μετατοπίσεων σε ελαστοπλαστικά προβλήματα με ρωγμές.

### 4.1 Ανάπτυξη ελαστοπλαστικών εξισώσεων

Οι Hutchinson (1968) και Rice και Rosengren (1968) ανέπτυξαν την ελαστοπλαστική ασυμπτωτική ανάλυση στην ακμή ρωγμής σε ομογενές υλικό και έδειξαν ότι ο πρώτος όρος της λύσης αυτής εξαρτάται από το ολοκλήρωμα J, τον πλαστικό συντελεστή εντάσεως των τάσεων.

Η ανάλυση βασίζεται στη θεώρηση μιας τασικής συνάρτησης Airy  $\Phi$  την οποία ο Hutchinson, για το πρόβλημα της ρωγμής σε εφελκυσμό (mode-I), παρουσίασε σε όρους ασυμπτωτικού αναπτύγματος της μορφής :

$$\Phi = C_1(\theta)r^s + C_2(\theta)r^t + \dots \quad (4.1)$$

όπου  $C_1, C_2$  συναρτήσεις της γωνίας  $\Theta$ .

Αν  $s < t$  και  $t$  μικρότερο από όλους τους εκθέτες που μπορεί να εμφανιστούν σε δύναμη του  $r$  τότε ο πρώτος όρος της σχέσης (4.1) υπερτερεί καθώς  $r \rightarrow 0$ . Αν η ανάλυση αφορά την περιοχή κοντά στην ακμή της ρωγμής τότε η τασική συνάρτηση είναι :

$$\Phi = \kappa \sigma_0 r^s \tilde{\Phi}(\theta) \quad (4.2)$$

όπου  $\kappa$  μια σταθερά που εκφράζει το μέτρο της τασικής συνάρτησης και  $\tilde{\Phi}$  μια σταθερή ποσότητα που είναι συνάρτηση της γωνίας  $\Theta$ .

Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που προκύπτουν στην ακμή της ρωγμής είναι :

$$\sigma_{rr} = \kappa \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta, n) = \kappa \sigma_0 r^{s-2} (s \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}''') \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \kappa \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta, n) = \kappa \sigma_0 r^{s-2} s(s-1) \tilde{\Phi} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = \kappa \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta, n) = \kappa \sigma_0 r^{s-2} (1-s) \tilde{\Phi}' \quad (4.5)$$

$$\sigma_e = \kappa \sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_e(\theta, n) = \kappa \sigma_0 r^{s-2} \sqrt{\tilde{\sigma}_{rr}^2 + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2 - \tilde{\sigma}_{rr} \tilde{\sigma}_{\theta\theta} + 3 \tilde{\sigma}_{r\theta}^2} \quad (4.6)$$

$$u_r = \alpha \varepsilon_0 \kappa^n r^{n(s-2)+1} \tilde{u}_r(\theta, n) \quad (4.7)$$

$$u_{\theta} = \alpha \varepsilon_0 \kappa^n r^{n(s-2)+1} \tilde{u}_{\theta}(\theta, n) \quad (4.8)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι :

$$\tilde{\Phi}(\pm\pi) = \tilde{\Phi}'(\pm\pi) = 0 \quad (4.9)$$

Επίσης γνωρίζουμε τις σχέσεις για τις παραμορφώσεις και την ενέργεια :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{\kappa\kappa} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (4.10)$$

$$\bar{U} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}^2 + \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{E} \left( \frac{\sigma_{\kappa\kappa}}{3} \right)^2 + \frac{n}{n+1} \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (4.11)$$

Έχοντας υποθέσει ότι οι τάσεις είναι της τάξης  $\left( \frac{1}{r} \right)^{2-s}$  καθώς  $r \rightarrow 0$  τότε οι

παραμορφώσεις θα είναι της τάξης  $\left( \frac{1}{r} \right)^{n(2-s)}$  και η ενέργεια της τάξης  $\left( \frac{1}{r} \right)^{(n+1)(2-s)}$ .

Στη συνέχεια θεωρούμε κύκλο ακτίνας  $r$  και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα  $J$  :

$$J = \int_{\Gamma} \left( \bar{U} n_1 - n_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \bar{U} \cos \theta - n_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) r d\theta \quad (4.12)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο το  $J$  είναι της τάξης  $\left( \frac{1}{r} \right)^{(n+1)(2-s)}$ . Όμως το  $J$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης και επομένως παίρνει την ίδια τιμή και όταν το  $r \rightarrow 0$ . Άρα πρέπει να ισχύει ότι  $(n+1)(2-s) = 1 \Rightarrow s = \frac{2n+1}{n+1}$ .

Επομένως προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για τις τάσεις, τις παραμορφώσεις, τις μετατοπίσεις και την ενέργεια :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \kappa \sigma_0 \left( \frac{1}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \alpha \varepsilon_0 \kappa^n \left( \frac{1}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (4.14)$$

$$u_i(r, \theta) = \alpha \varepsilon_0 \kappa^n r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (4.15)$$

$$\bar{U}(r, \theta) = \frac{n}{n+1} \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \kappa^{n+1} r^{-1} \tilde{\sigma}_e^{n+1}(\theta, n) \quad (4.16)$$

Αντικαθιστώ τις παραπάνω εξισώσεις στον ορισμό του J (4.12) και καταλήγω να έχω ότι :

$$\kappa = \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.17)$$

όπου

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{n+1}(\theta, n) - n_i \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \left( \frac{1}{n+1} \tilde{u}_j(\theta, n) \cos \theta - \frac{\partial \tilde{u}_j(\theta, n)}{\partial \theta} \sin \theta \right) \right] d\theta$$

Οι εξισώσεις για τις τάσεις, τις παραμορφώσεις και τις μετατοπίσεις που προέκυψαν για εφελκυστική φόρτιση (τύπου mode-I) είναι οι παρακάτω :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (4.19)$$

$$u_i = \alpha \varepsilon_0 r^{\frac{1}{n+1}} \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (4.20)$$

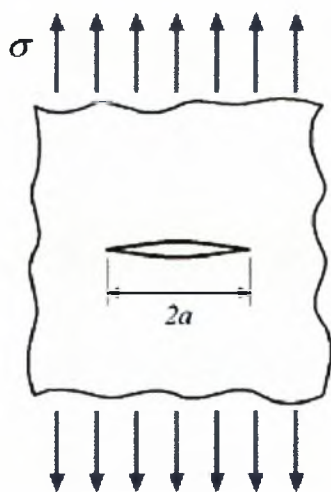
όπου  $\sigma$  ο τανυστής της τάσης,  $\varepsilon$  ο τανυστής της παραμόρφωσης,  $u$  το διάνυσμα της μετατόπισης και  $\sigma_0$  το όριο διαρροής του υλικού,  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$  με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $n$  ο εκθέτης σκλήρυνσης,  $I_n$  ένα ολοκλήρωμα που η τιμή του εξαρτάται από τον εκθέτη  $n$ ,  $\alpha$  μια σταθερά του υλικού,  $J$  ο πλαστικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων,  $r$  η απόσταση από την ακμή της ρωγμής. Οι ποσότητες  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$  και  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  είναι άγνωστες και τις υπολογίζουμε για να



γνωρίσουμε τελικά τα πεδία των τάσεων, παραμορφώσεων και μετατοπίσεων στην ακμή της ρωγμής.

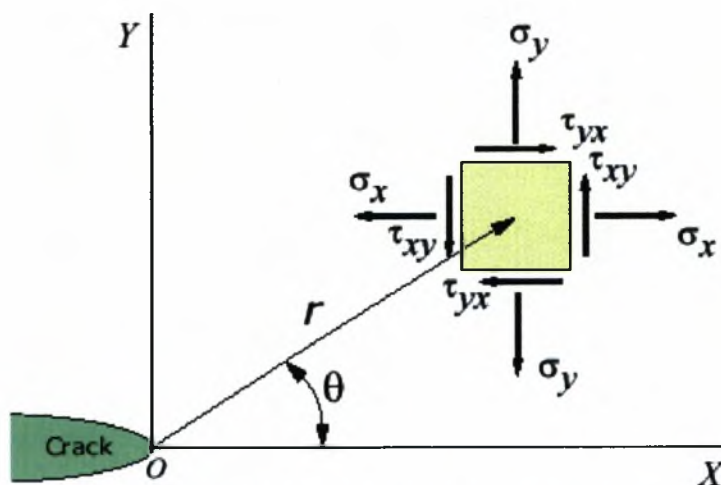
## 4.2 Αριθμητική επίλυση της ασυμπτωτικής λύσης HRR

Θεωρούμε το διδιάστατο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης μιας ρωγμής σε ένα ομογενές, ισότροπο, ελαστοπλαστικό υλικό. Η ρωγμή βρίσκεται υπό την επίδραση ομοιόμορφα κατανεμημένου εφελκυστικού φορτίου (mode-I) (Σχήμα 11).



Σχήμα 11: Φόρτιση τύπου mode-I σε επιφάνεια με ρωγμή

Επίσης, θεωρούμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων για την ανάλυση των εξισώσεων του συστήματος (Σχήμα 12).



Σχήμα 12: Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στην ακμή της ρωγμής

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω θεωρήσεις είναι :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (4.22)$$

Θεωρώντας το διδιάστατο πρόβλημα της ρωγμής οι τάσεις και παραμορφώσεις που σχετίζονται με την τρίτη διάσταση εξαφανίζονται, δηλαδή  $\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$  και  $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$  όπου z η κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο x-y.

Οι εξισώσεις συμβιβαστού του συστήματος είναι :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (4.24)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (4.25)$$

όπου  $u_r, u_\theta$  οι συνιστώσες της μετατόπισης.

Οι καταστατικές εξισώσεις προκύπτουν από την θεωρία “von Mises and Prandtl Reuss” ή αλλιώς  $J_2$  deformation theory of plasticity. Η συνολική παραμόρφωση περιλαμβάνει την συμμετοχή της ελαστικής παραμόρφωσης ( $\varepsilon_{ij}^e$ ) και την συμμετοχή της πλαστικής παραμόρφωσης ( $\varepsilon_{ij}^p$ ). Οι εξισώσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις ( $\varepsilon - \sigma$ ) σε τανυστική μορφή είναι :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (4.26)$$

όπου 
$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (4.28)$$

και  $\sigma$  ο τανυστής της τάσης,  $\varepsilon$  ο τανυστής της παραμόρφωσης,  $S$  ο αποκλίνων τανυστής της τάσης,  $\delta_{ij}$  το δέλτα του Kronecker,  $E$  το μέτρο του Young,  $\nu$  ο λόγος του Poisson,  $\alpha$  μια σταθερά του υλικού,  $n$  ο εκθέτης σκλήρυνσης ( $1 \leq n \leq \infty$ ),  $\sigma_0$  το όριο διαρροής του υλικού,  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ ,  $\sigma_{\kappa\kappa} = 3p$  όπου  $p$  η υδροστατική πίεση και  $\sigma_e$  η ισοδύναμη τάση Mises

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (4.29)$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι τάσεις στον ελαστικό όρο της συνολικής παραμόρφωσης είναι της τάξης  $\left(\frac{1}{r}\right)^s$  τότε οι τάσεις στον πλαστικό όρο της συνολικής παραμόρφωσης είναι της τάξης  $\left(\frac{1}{r}\right)^{sn}$  με  $1 \leq n \leq \infty$  οπότε παρατηρούμε ότι ο πλαστικός όρος επικρατεί του ελαστικού και στην περαιτέρω ανάλυση που ακολουθεί θεωρούμε την συνολική παραμόρφωση ( $J_2$  deformation theory) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (4.30)$$

Άρα οι καταστατικές εξισώσεις του συστήματος είναι :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{rr}}{\sigma_0} \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{\theta\theta}}{\sigma_0} \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{r\theta}}{\sigma_0} \quad (4.33)$$

Η μελέτη μας αφορά την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης γεγονός που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον αποκλίνων τανυστή  $S$ . Έτσι έχουμε :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{zz}}{\sigma_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.34)$$

$$s_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.35)$$

$$\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.36)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} \quad (4.37)$$

Επίσης για την υδροστατική πίεση ισχύει :

$$p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{3} \quad (4.38)$$

Από τις σχέσεις (4.37) και (4.38) προκύπτει για την υδροστατική πίεση ότι :

$$p = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} = \sigma_{zz} \quad (4.39)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.39) έχουμε τελικά για τα αποκλίνοντα μέρη των τάσεων  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  και  $\sigma_{r\theta}$  τις εξής μορφές :

$$s_{rr} = \sigma_{rr} - p = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \quad (4.40)$$

$$s_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} - p = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{2} \quad (4.41)$$

$$s_{r\theta} = \sigma_{r\theta} \quad (4.42)$$

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε περαιτέρω επεξεργασία και ανάλυση των παραπάνω εξισώσεων του προβλήματος ώστε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων και να υπολογίσουμε τις άγνωστες ποσότητες  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$  και  $\tilde{u}_i(\theta, n)$ . Έτσι αρχικά αντικαθιστούμε τις τάσεις  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{r\theta}$  από τη σχέση (4.18) στις εξισώσεις ισορροπίας (4.21) και (4.22) αντίστοιχα με αποτέλεσμα να προκύπτει :

$$\frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}'_{rr} - \tilde{\sigma}'_{\theta\theta} + \tilde{\sigma}'_{r\theta} = 0 \quad (4.43)$$

$$\tilde{\sigma}'_{\theta\theta} + \frac{2n+1}{n+1} \tilde{\sigma}'_{r\theta} = 0 \quad (4.44)$$

Με τον ίδιο τρόπο αντικαθιστούμε τις παραμορφώσεις και τις μετατοπίσεις  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\varepsilon_{r\theta}$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  από τις σχέσεις (4.19) και (4.20) στις εξισώσεις

συμβιβαστού του συστήματος (4.23) , (4.24) , (4.25) αντίστοιχα με αποτέλεσμα να προκύπτει :

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \frac{1}{n+1} \tilde{u}_r \quad (4.45)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = \tilde{u}_r + \tilde{u}'_{\theta} \quad (4.46)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \tilde{u}'_r - \frac{n}{n+1} \tilde{u}_{\theta} \right) \quad (4.47)$$

Αντίστοιχα αντικαθιστούμε τις παραμορφώσεις  $\varepsilon_{rr}$  ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  ,  $\varepsilon_{r\theta}$  από τη σχέση (4.19) στις καταστατικές εξισώσεις (4.31) , (4.32) ,(4.33) και προκύπτει :

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{s}_{rr} \quad (4.48)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{s}_{\theta\theta} \quad (4.49)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{s}_{r\theta} \quad (4.50)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.45) με (4.48) , (4.46) με (4.49) και (4.47) με (4.50) αντίστοιχα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$\frac{1}{n+1} \tilde{u}_r = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{s}_{rr} \quad (4.51)$$

$$\tilde{u}_r + \tilde{u}'_{\theta} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{s}_{\theta\theta} \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{2} \left( \tilde{u}'_r - \frac{n}{n+1} \tilde{u}_{\theta} \right) = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{s}_{r\theta} \quad (4.53)$$

Τελικά αντικαθιστώντας τα αποκλίνοντα μέρη  $\tilde{s}_{rr}$  ,  $\tilde{s}_{\theta\theta}$  ,  $\tilde{s}_{r\theta}$  από τις σχέσεις (4.40) , (4.41) , (4.42) στις σχέσεις (4.51) , (4.52) , (4.53) αντίστοιχα προκύπτει :

$$\frac{1}{n+1} \tilde{u}_r = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}}{2} \quad (4.54)$$

$$\tilde{u}_r + \tilde{u}'_{\theta} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{2} \left( \tilde{u}'_r - \frac{n}{n+1} \tilde{u}_{\theta} \right) = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{\sigma}_{r\theta} \quad (4.56)$$

Συνοψίζοντας τις εξισώσεις που έχουμε στη διάθεσή μας μετά την επεξεργασία που προηγήθηκε προκύπτει :

$$\frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta} + \tilde{\sigma}'_{r\theta} = 0 \quad (4.57)$$

$$\tilde{\sigma}'_{\theta\theta} + \frac{2n+1}{n+1} \tilde{\sigma}'_{r\theta} = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{n+1} \tilde{u}_r - \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}}{2} = 0 \quad (4.59)$$

$$\tilde{u}_r + \tilde{u}'_{\theta} - \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{1}{2} \left( \tilde{u}'_r - \frac{n}{n+1} \tilde{u}'_{\theta} \right) - \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{\sigma}_{r\theta} = 0 \quad (4.61)$$

Έτσι προκύπτει ένα σύστημα 5 ομογενών μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με 5 αγνώστους (5x5) τις ποσότητες  $\tilde{u}_r$ ,  $\tilde{u}_{\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}_{rr}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  και  $\tilde{\sigma}_{r\theta}$  που επιλύεται σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος :

$$\tilde{u}_{\theta}(r, 0) = 0 \quad (4.62)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\theta}(r, 0) = 0 \quad (4.63)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r, \pi) = 0 \quad (4.64)$$

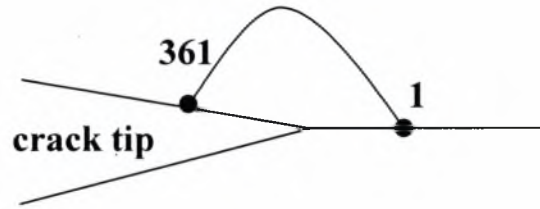
$$\tilde{\sigma}_{r\theta}(r, \pi) = 0 \quad (4.65)$$

Η επίλυση του συστήματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (μέθοδος Galerkin). Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε μονοδιάστατα και δικομβικά ισοπαραμετρικά στοιχεία με 2 σημεία ολοκλήρωσης κατά Gauss (Σχήμα 13) που σαρώνουν την περιοχή γύρω από τη ρωγμή (Σχήμα 14) με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε κόμβο να αντιστοιχεί γωνία  $0.5^\circ$ .



Σχήμα 13: Μονοδιάστατο στοιχείο δύο κόμβων





Σχήμα 14: Περιοχή σάρωσης των στοιχείων (κόμβος 1-361)

Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν 5 βαθμοί ελευθερίας, οι ποσότητες  $\tilde{u}_r$ ,  $\tilde{u}_\theta$ ,  $\tilde{\sigma}_{rr}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  και  $\tilde{\sigma}_{r\theta}$  και κατά συνέπεια έχουμε 10 βαθμούς ελευθερίας ανά στοιχείο. Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης για γραμμική διακριτοποίηση προκύπτει για κάθε στοιχείο :

$$\theta = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 \quad (4.66)$$

όπου  $N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$  και  $N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$  οι συναρτήσεις βάσης και

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\xi \quad \text{έτσι ώστε } \theta(-1) = \theta_1 \text{ και } \theta(1) = \theta_2. \text{ Επίσης}$$

$$\text{ορίζουμε } J = \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1).$$

Για τις άγνωστες ποσότητες προκύπτουν οι εξισώσεις μετά την διακριτοποίηση :

$$\tilde{u}_r = N_1\tilde{u}_r^1 + N_2\tilde{u}_r^2 \quad (4.67)$$

$$\tilde{u}_\theta = N_1\tilde{u}_\theta^1 + N_2\tilde{u}_\theta^2 \quad (4.68)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr} = N_1\tilde{\sigma}_{rr}^1 + N_2\tilde{\sigma}_{rr}^2 \quad (4.69)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = N_1\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^1 + N_2\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2 \quad (4.70)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\theta} = N_1\tilde{\sigma}_{r\theta}^1 + N_2\tilde{\sigma}_{r\theta}^2 \quad (4.71)$$

Έτσι θεωρώντας την ασθενή μορφή του προβλήματος προκύπτει ένα σύστημα από 10 μη-γραμμικές ομογενείς αλγεβρικές εξισώσεις για κάθε στοιχείο που επιλύονται με τη μέθοδο του Newton (για  $i=1,2$ ) :

$$F_1 = \int_{-1}^1 N_i \left( \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta} + \tilde{\sigma}'_{r\theta} \right) J d\xi = 0 \quad (4.72)$$



$$F_2 = \int_{-1}^1 N_i \left( \tilde{\sigma}'_{\theta\theta} + \frac{2n+1}{n+1} \tilde{\sigma}'_{r\theta} \right) J d\xi = 0 \quad (4.73)$$

$$F_3 = \int_{-1}^1 N_i \left( \frac{1}{n+1} \tilde{u}'_r - \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}}{2} \right) J d\xi = 0 \quad (4.74)$$

$$F_4 = \int_{-1}^1 N_i \left( \tilde{u}'_r + \tilde{u}'_\theta - \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \tilde{\sigma}_{rr}}{2} \right) J d\xi = 0 \quad (4.75)$$

$$F_5 = \int_{-1}^1 N_i \left( \frac{1}{2} \left( \tilde{u}'_r - \frac{n}{n+1} \tilde{u}'_\theta \right) - \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{n-1} \tilde{\sigma}_{r\theta} \right) J d\xi = 0 \quad (4.76)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα που χρειάζεται για τον υπολογισμό του μητρώου παραμορφώσεως παραγωγίζοντας κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις με τις άγνωστες ποσότητες, δηλαδή :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{u}_r^1}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{u}_r^2}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{u}_\theta^1}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{u}_\theta^2}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\sigma}_{rr}^1}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\sigma}_{rr}^2}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^1}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\sigma}_{r\theta}^1}, \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{\sigma}_{r\theta}^2} \text{ και}$$

αντίστοιχα για τις υπόλοιπες εξισώσεις. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται στην υπορουτίνα STIF. Ακολουθεί ο υπολογισμός του μητρώου στιβαρότητας και του μητρώου που περιλαμβάνει τη φόρτιση επίσης στην υπορουτίνα STIF. Τα μητρώα αυτά αποκτούν την τελική μορφή τους πριν την επίλυση στην υπορουτίνα KASSEMB. Στην υπορουτίνα STIF έχουμε εφαρμόσει και τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος :

Η τελική λύση περιλαμβάνει ένα αυθαίρετο πολλαπλασιαστή (SCALING CONSTANT C) ο οποίος προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$\begin{aligned} \max(\tilde{\sigma}_e(\theta)) &= 1 \\ \theta &\in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (4.77)$$

Έτσι οδηγούμαστε στην επίλυση του συστήματος και αποκτούμε τιμές για τις ποσότητες  $\tilde{u}_r$ ,  $\tilde{u}_\theta$ ,  $\tilde{\sigma}_{rr}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}_e$  σε κάθε γωνία  $0 < \theta < 180$  στην ακμή της ρωγμής.

Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran (model.f)<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Ο κώδικας model.f για τον υπολογισμό των άγνωστων ποσοτήτων που περιέχονται στις σχέσεις HRR παρέχεται στο Παράρτημα Γ

## 5. Εφαρμογές στην ελαστοπλαστικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του ελαστοπλαστικού προβλήματος της ρωγμής. Πραγματοποιείται σύγκριση αποτελεσμάτων, που αφορούν την ισοδύναμη τάση κατά von Mises  $\sigma_e$ , μεταξύ της ασυμπτωτικής λύσης και της λύσης που παίρνουμε από τα πεπερασμένα στοιχεία. Υπολογίζεται η περιοχή όπου το ποσοστό απόκλισης των αποτελεσμάτων της ασυμπτωτικής λύσης και των τιμών που παίρνουμε με τη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων είναι μικρότερο ή ίσο του 10%.

### 5.1 Ασυμπτωτική λύση HRR και πεπερασμένα στοιχεία

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε σύγκριση αποτελεσμάτων μεταξύ της HRR ασυμπτωτικής λύσης και της λύσης που προκύπτει από τη χρήση προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων (ABAQUS). Για τη σύγκριση που ακολουθεί χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη τάση κατά von Mises  $\sigma_e$ . Υπενθυμίζουμε ότι η ισοδύναμη τάση της HRR ασυμπτωτικής λύσης είναι :

$$\sigma_e = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \epsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_e(\theta, n) \quad (5.1)$$

και έχουμε ήδη υπολογίσει την ποσότητα  $\tilde{\sigma}_e$  με τη χρήση του κώδικα mode-I.f

Την ίδια τάση υπολογίζουμε και με τη χρήση του προγράμματος ABAQUS. Για την ελαστοπλαστική ανάλυση μέσω του ABAQUS χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιοι τύποι δοκιμίων που χρησιμοποιήθηκαν και στην ανάλυση της ελαστικότητας. Επίσης έγινε επεξεργασία αποτελεσμάτων για 3 διαφορετικούς συντελεστές κράτυνσης  $n=3$ ,  $n=5$ ,  $n=10$ . Τα δοκίμια φορτίζονται ομοιόμορφα σε απλό εφελκυσμό (mode-I).

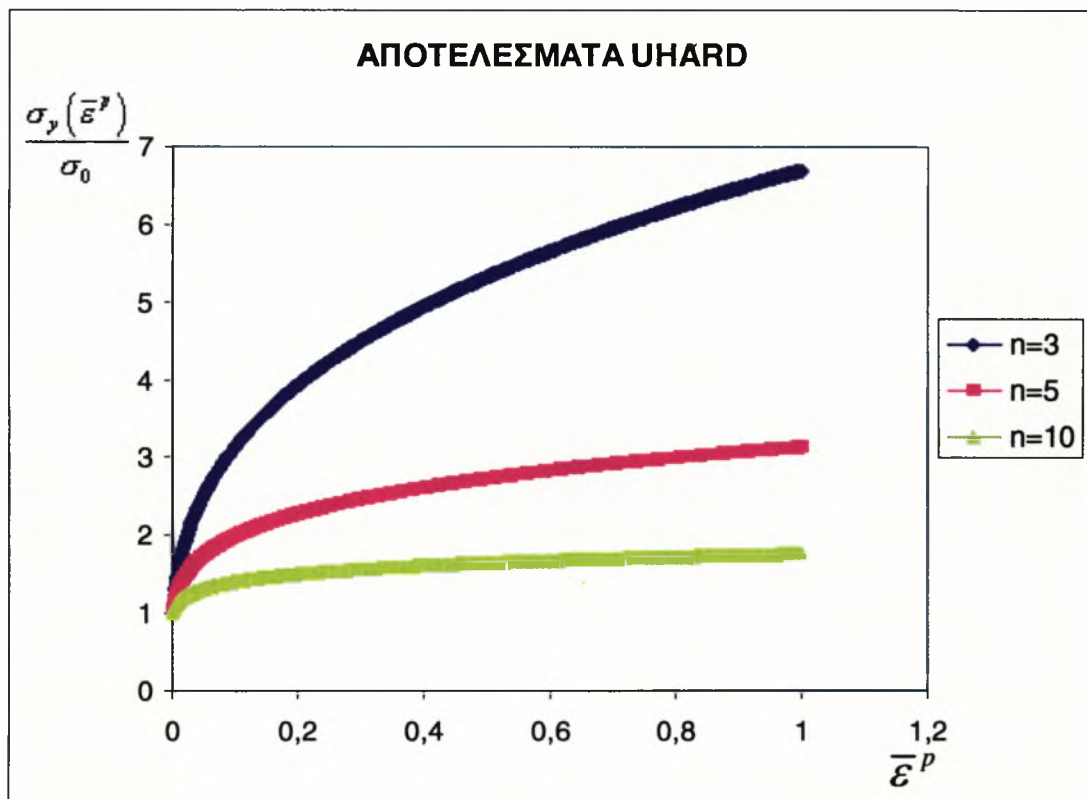
Έχουμε 3 κώδικες που χρησιμοποιούμε στην επεξεργασία μέσω του ABAQUS αντίστοιχα για 3 δοκίμια με διαφορετικού μεγέθους ρωγμές. Οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού των δοκιμίων είναι όμοιες και αποτελούνται από  $E/\sigma_0 = 300$ ,  $\nu = 0.3$ , όπου  $\sigma_0$  το όριο διαρροής του υλικού,  $E$  το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  ο λόγος του Poisson. Στην πλαστικότητα εφαρμόζουμε το κριτήριο διαρροής κατά “von Mises” και τις εξισώσεις πλαστικής διαρροής “Prandtl-Reuss” ή αλλιώς “ $J_2$  flow theory of plasticity”.

Η πλαστική- μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (5.2)$$

όπου  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$  με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $n$  ο εκθέτης σκλήρυνσης και  $\bar{\varepsilon}^p$  η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση.

Η μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού παρέχεται για την επεξεργασία στο ABAQUS μέσω μιας υπορουτίνας UHARD<sup>3</sup>. Τα αποτελέσματα της υπορουτίνας UHARD για συντελεστές κράτνωσης  $n=3$ ,  $n=5$  και  $n=10$  παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 3.



Διάγραμμα 3: Μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού για συντελεστές κράτνωσης  $n=3,5,10$

Παράλληλα για τη σχέση (5.1) χρειάζεται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος  $J$ . Το ολοκλήρωμα  $J$  το υπολογίζουμε μέσω του προγράμματος ABAQUS για 10 διαφορετικούς δρόμους ολοκλήρωσης. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται για τα 3

<sup>3</sup> Η υπορουτίνα UHARD για τον ορισμό της μη-γραμμικότητας του υλικού παρέχεται στο Παράρτημα Β

δοκίμια ( $a/w=0.1$ ,  $a/w=0.5$ ,  $a/w=0.9$ ) και για 3 συντελεστές κράτυνσης στο καθένα (Πίνακες 6,7,8,9,10,11,12,13,14) όπου παρουσιάζονται αδιαστατοποιημένες τιμές του  $J$  που είναι  $\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$  όπου  $\sigma_0$  το όριο διαρροής του υλικού και  $w$  το πλάτος του δοκιμίου (Σχήμα 7).

Path	J-integral
1	2,610
2	2,808
3	2,835
4	2,805
5	2,773
6	2,742
7	2,713
8	2,684
9	2,657
10	2,629

Πίνακας 6:  $a/w=0.1$  και  $n=3$

Path	J-integral
1	3,092
2	3,419
3	3,473
4	3,435
5	3,393
6	3,352
7	3,311
8	3,271
9	3,230
10	3,189

Πίνακας 7:  $a/w=0.1$  και  $n=5$

Path	J-integral
1	4,198
2	4,789
3	4,936
4	4,897
5	4,842
6	4,784
7	4,723
8	4,662
9	4,601
10	4,539

Πίνακας 8:  $a/w=0.1$  και  $n=10$

Path	J-integral
1	2,446
2	2,652
3	2,699
4	2,692
5	2,679
6	2,669
7	2,659
8	2,650
9	2,641
10	2,633

Πίνακας 9:  $a/w=0.5$  και  $n=3$

Path	J-integral
1	2,877
2	3,207
3	3,281
4	3,275
5	3,260
6	3,247
7	3,233
8	3,220
9	3,206
10	3,192

Πίνακας 10:  $a/w=0.5$  και  $n=5$

Path	J-integral
1	4,025
2	4,603
3	4,727
4	4,709
5	4,682
6	4,656
7	4,630
8	4,605
9	4,579
10	4,553

Πίνακας 11:  $a/w=0.5$  και  $n=10$

Path	J-integral
1	2,636
2	2,836
3	2,871
4	2,851
5	2,827
6	2,803
7	2,780
8	2,759
9	2,738
10	2,719

Πίνακας 12:  $a/w=0.9$  και  $n=3$

Path	J-integral
1	3,142
2	3,457
3	3,496
4	3,457
5	3,413
6	3,372
7	3,332
8	3,294
9	3,260
10	3,231

Πίνακας 13:  $a/w=0.9$  και  $n=5$

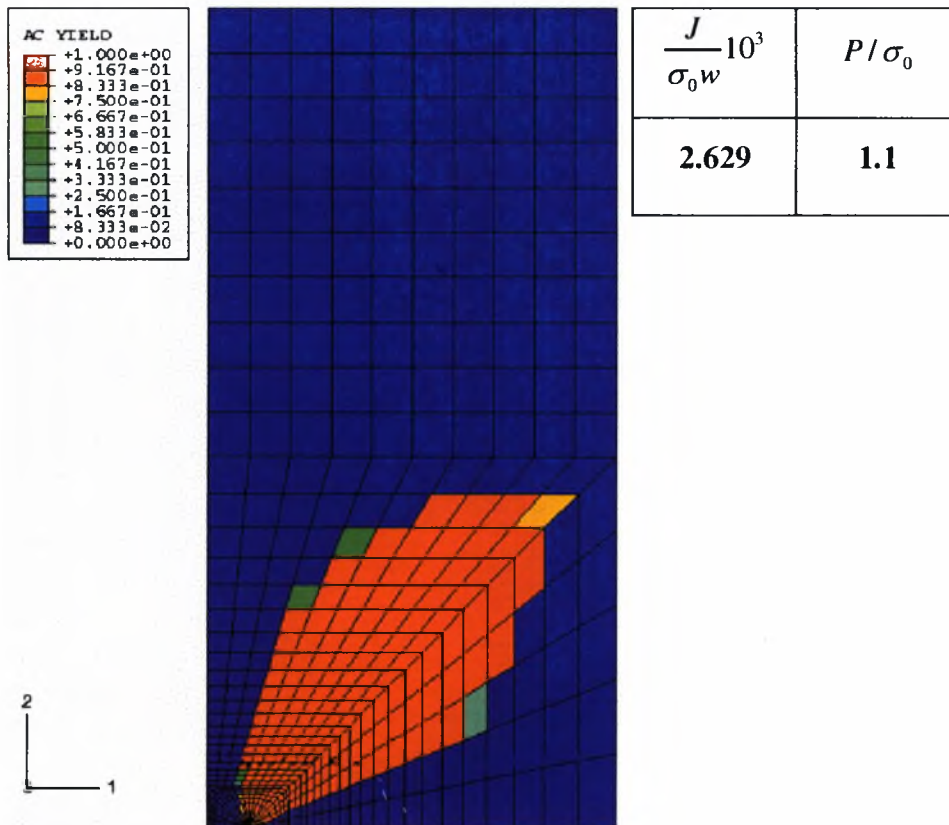
Path	J-integral
1	4,170
2	4,778
3	4,883
4	4,837
5	4,788
6	4,743
7	4,706
8	4,675
9	4,650
10	4,630

Πίνακας 14:  $a/w=0.9$  και  $n=10$

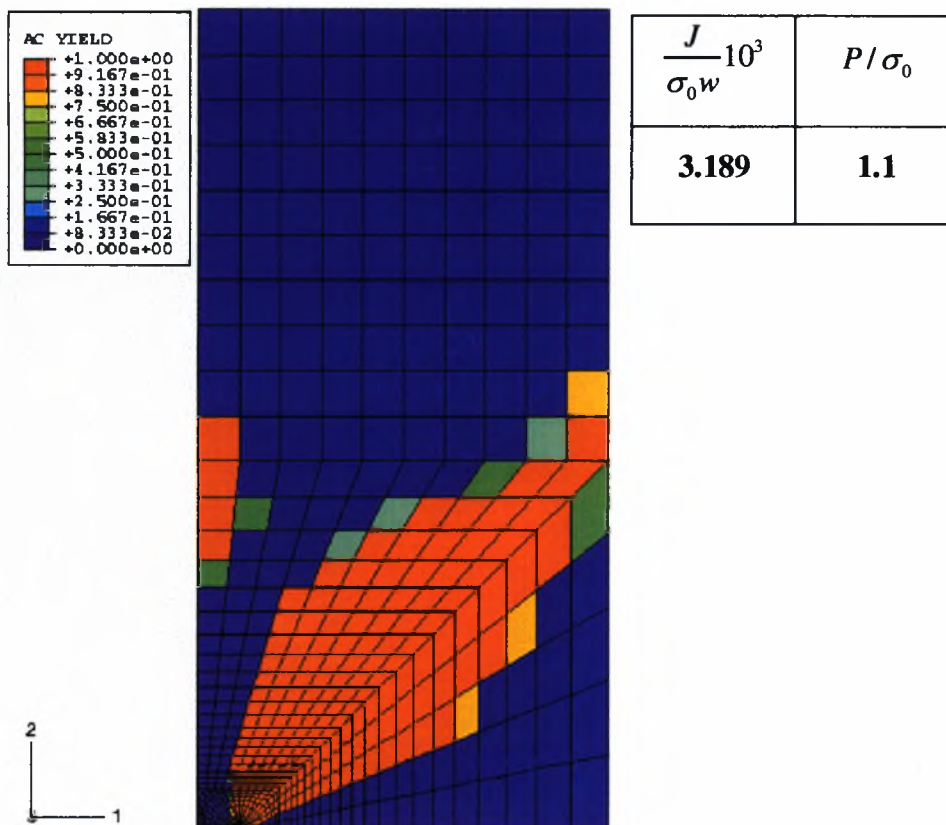
Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ολοκληρώματος  $J$  σε όλες τις περιπτώσεις είναι περίπου οι ίδιες και έτσι αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα  $J$  είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Επίσης αναφέρουμε ότι οι πολύ μικρές διαφορές που υπάρχουν στις τιμές του  $J$  δεν επηρεάζουν την ανάλυση που ακολουθούμε.

Την τιμή αυτή του  $J$  μαζί με την τιμή της ποσότητας  $\tilde{\sigma}_e(\theta, n)$  που υπολογίσαμε μέσω του κώδικα mode-I.f, για τις διάφορες τιμές του συντελεστή κράτνσης και τις διάφορες γωνίες, χρησιμοποιούμε στη σχέση (5.1) και έχουμε τελικά την αναλυτική λύση HRR για την ισοδύναμη τάση κατά von Mises. Παράλληλα παίρνουμε αποτελέσματα από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS για την ισοδύναμη τάση κατά von Mises για κάθε ένα από τα δοκίμια που μελετάμε και για 3 διαφορετικούς συντελεστές κράτνσης στο καθένα ( $n=3, n=5, n=10$ ). Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι για μια επιτυχημένη σύγκριση αποτελεσμάτων πρέπει κάθε δοκίμιο ανάλογα με το μέγεθος της ρωγμής και το συντελεστή κράτνσης να “βλέπει” στην ακμή της ρωγμής του παρόμοια ένταση των τάσεων, δηλαδή στα 3 δοκίμια για κάθε συντελεστή κράτνσης να υπολογίζουμε στην ακμή της ρωγμής παρόμοια τιμή του ολοκληρώματος  $J$ . Με βάση τον κανόνα αυτό που ακολουθούμε παρατάσσουμε παρακάτω κάθε δοκίμιο για τους 3 συντελεστές κράτνσης που μελετούμε με τις πλαστικές ζώνες που αναπτύσσονται κατά τη φόρτιση, τα αντίστοιχα μεγέθη των φορτίσεων που προκαλούν αυτές τις πλαστικές ζώνες (φορτίο  $P$ ) και τις αντίστοιχες τιμές του ολοκληρώματος  $J$  (Σχήματα 15,16,17,18,19,20,21,22,23).

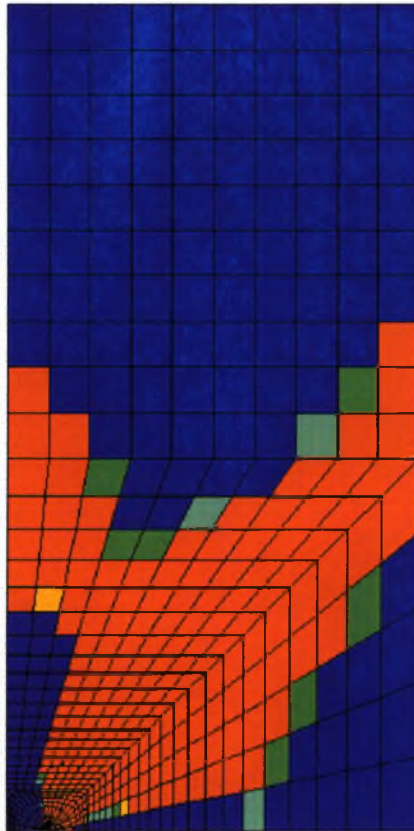
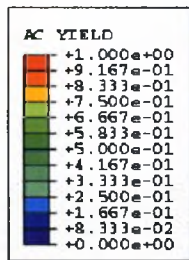




Σχήμα 15: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.1$  και για συντελεστή κράτυνσης  $n=3$

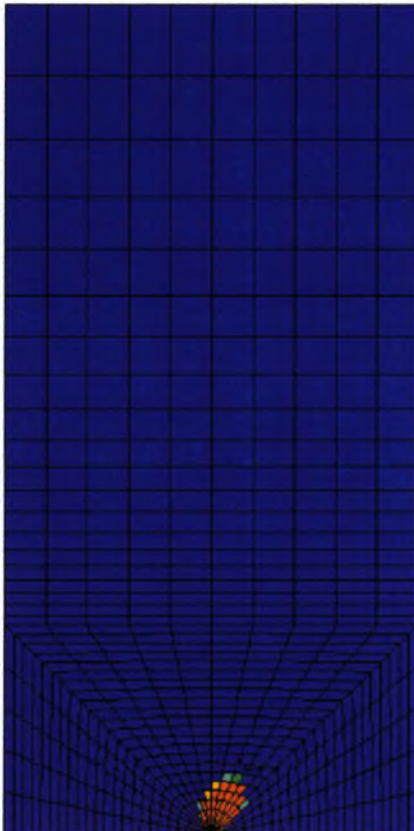
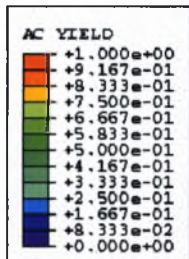


Σχήμα 16: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.1$  και για συντελεστή κράτυνσης  $n=5$



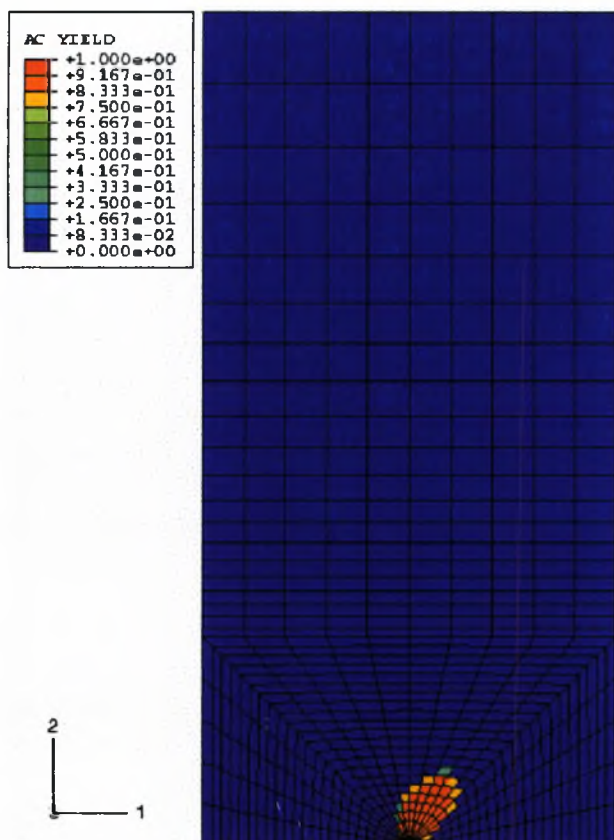
$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$	$P/\sigma_0$
4.539	1.1

Σχήμα 17: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.1$  και για συντελεστή κράτνσης  $n=10$



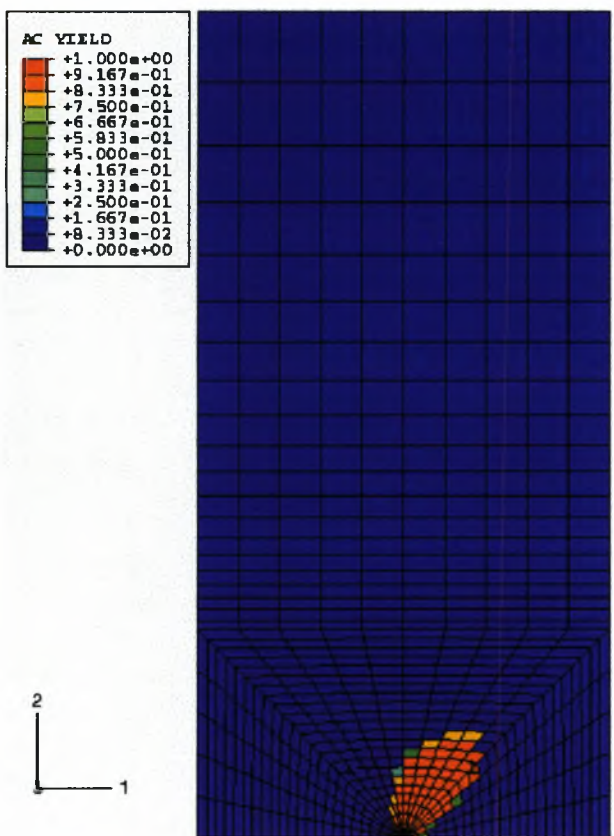
$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$	$P/\sigma_0$
2.633	0.253

Σχήμα 18: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.5$  και για συντελεστή κράτνσης  $n=3$



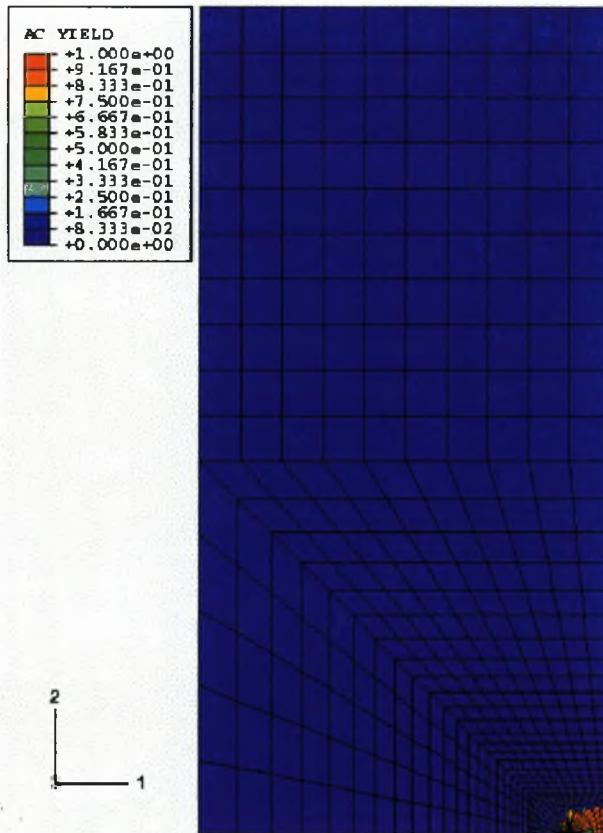
$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$	$P/\sigma_0$
3.192	0.253

Σχήμα 19: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.5$  και για συντελεστή κράτνσης  $n=5$



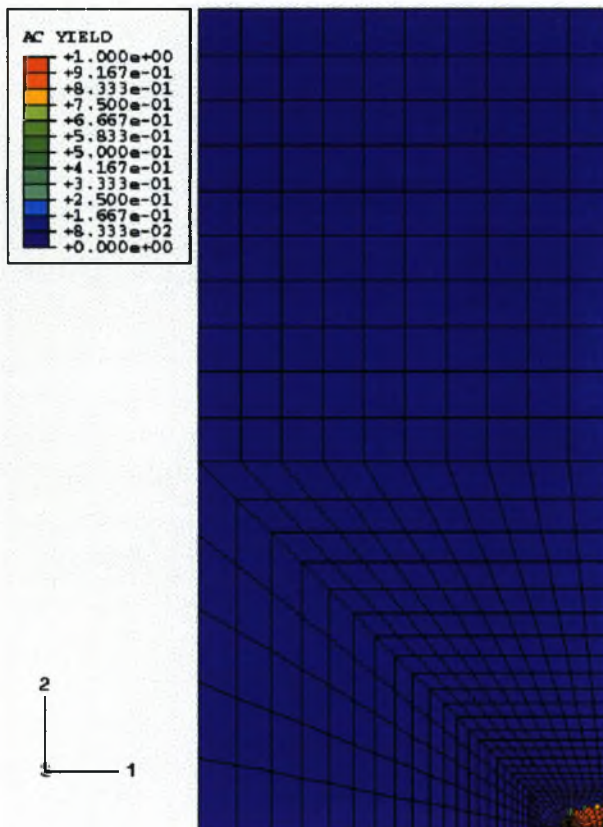
$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$	$P/\sigma_0$
4.553	0.253

Σχήμα 20: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.5$  και για συντελεστή κράτνσης  $n=10$



$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$	$P/\sigma_0$
<b>2.719</b>	<b>0.012</b>

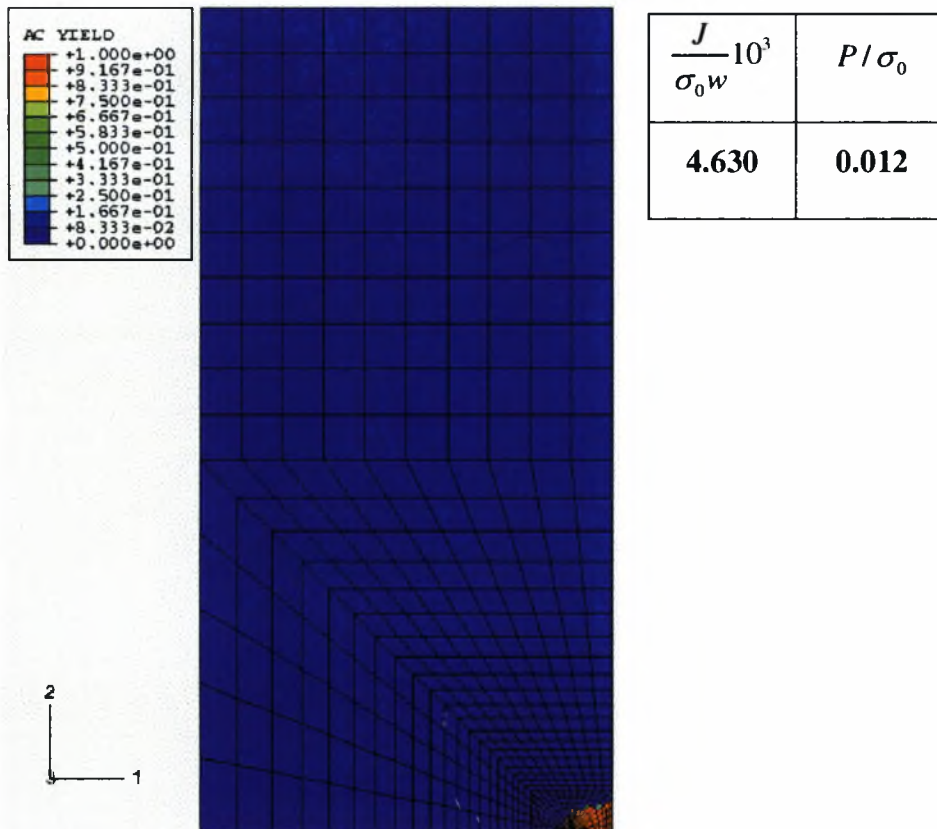
Σχήμα 21: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.9$  και για συντελεστή κράτνυσης  $n=3$



$\frac{J}{\sigma_0 w} 10^3$	$P/\sigma_0$
<b>3.231</b>	<b>0.012</b>

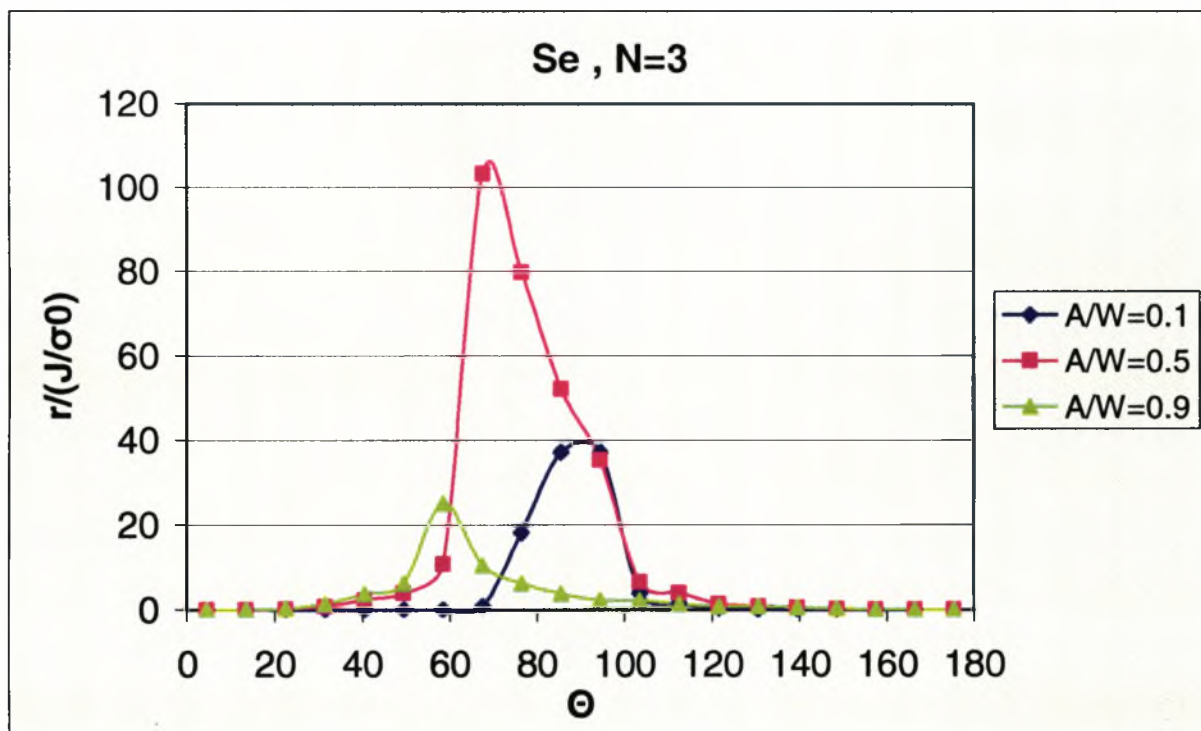
Σχήμα 22: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.9$  και για συντελεστή κράτνυσης  $n=5$



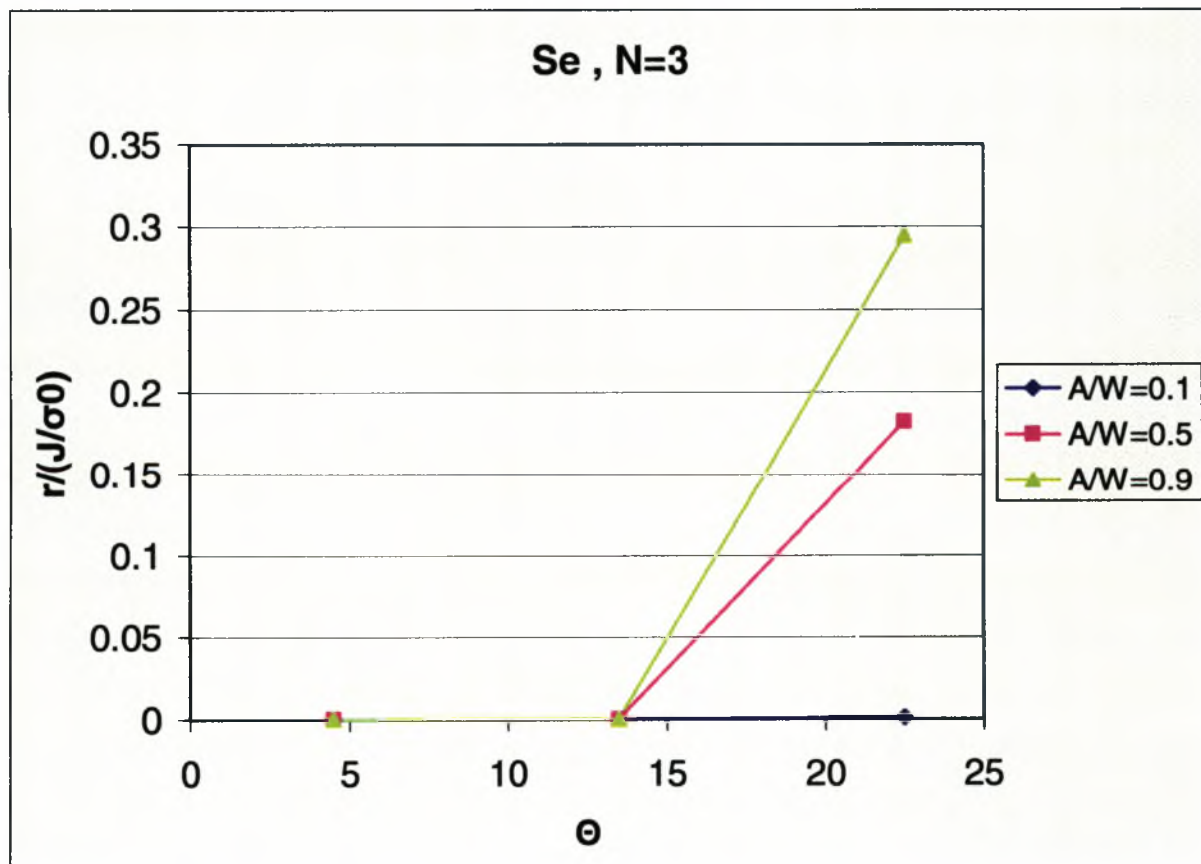


Σχήμα 23: Πλαστική ζώνη σε δοκίμιο όπου  $a/w=0.9$  και για συντελεστή κράτνυσης  $n=10$

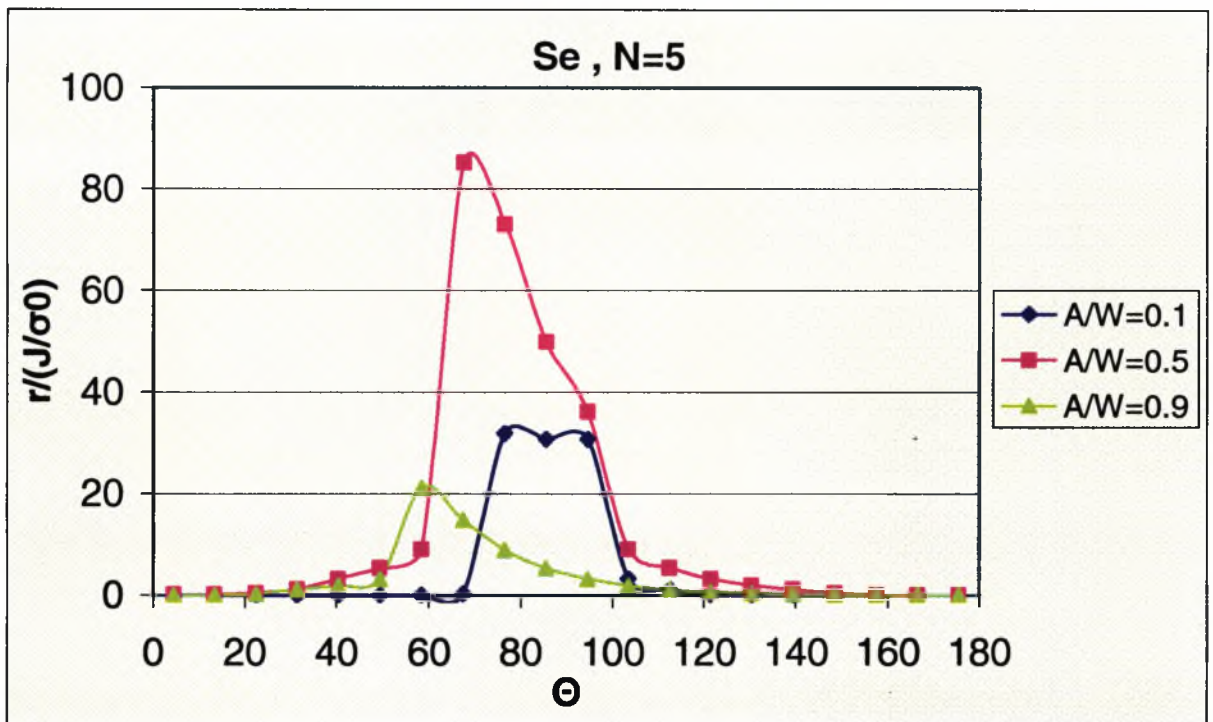
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε γραφικές παραστάσεις όπου απεικονίζεται η περιοχή αποτελεσμάτων της ισοδύναμης τάσης κατά von Mises όπου το ποσοστό απόκλισης της ασυμπτωτικής λύσης HRR και των τιμών που παίρνουμε από το υπολογιστικό πρόγραμμα ABAQUS είναι μικρότερο ή ίσο του 10% (Διαγράμματα 4,5,6,7,8,9). Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις στον x-άξονα απεικονίζεται η γωνία  $\Theta$  που σαρώνει την περιοχή γύρω από τη ρωγμή και στον y-άξονα η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων που αφορούν την ισοδύναμη τάση κατά von Mises. Επίσης σε κάθε διάγραμμα παρουσιάζεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δοκιμίων με διαφορετικού μεγέθους ρωγμές και κάθε διάγραμμα αφορά αντίστοιχα τους συντελεστές κράτνυσης  $n=3$ ,  $n=5$  και  $n=10$ .



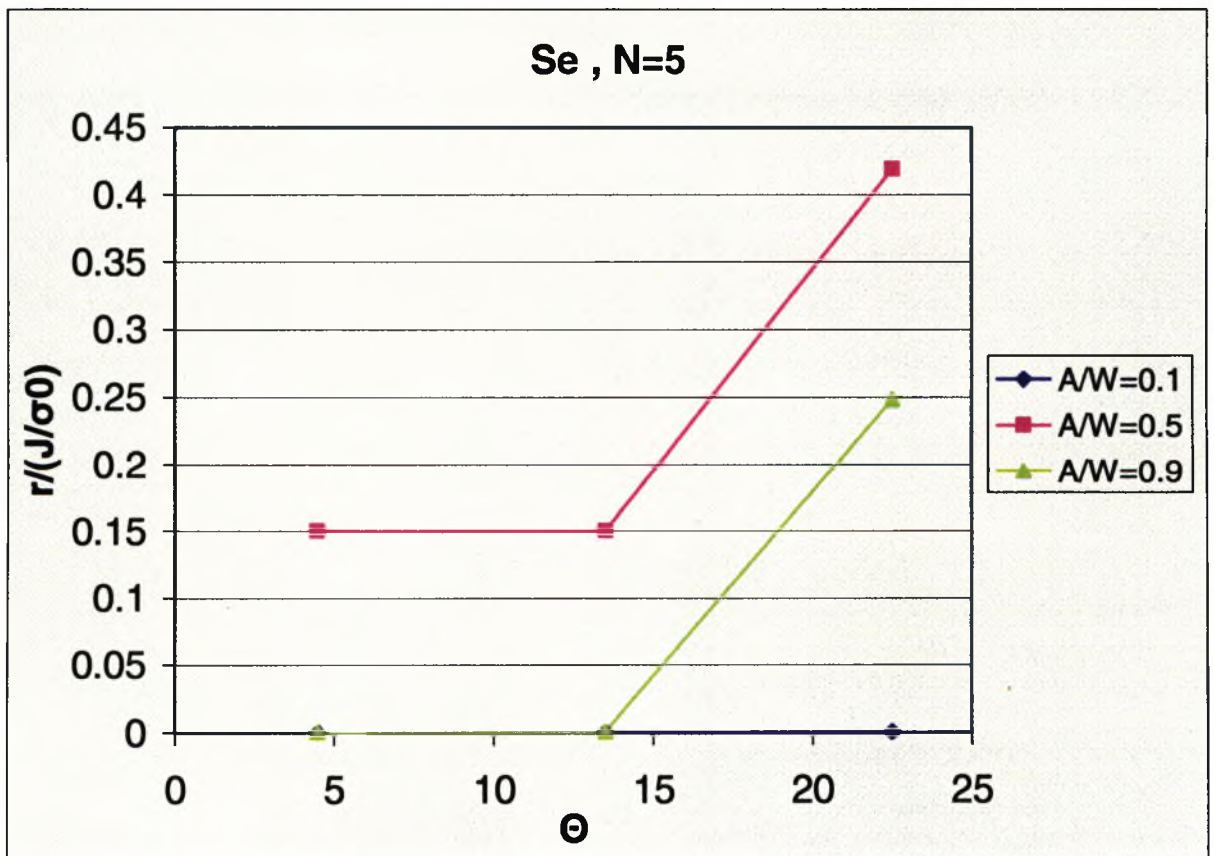
Διάγραμμα 4: Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises όταν  $n=3$  για  $0^\circ < \Theta < 180^\circ$



Διάγραμμα 5: Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises όταν  $n=3$  για  $0^\circ < \Theta < 25^\circ$

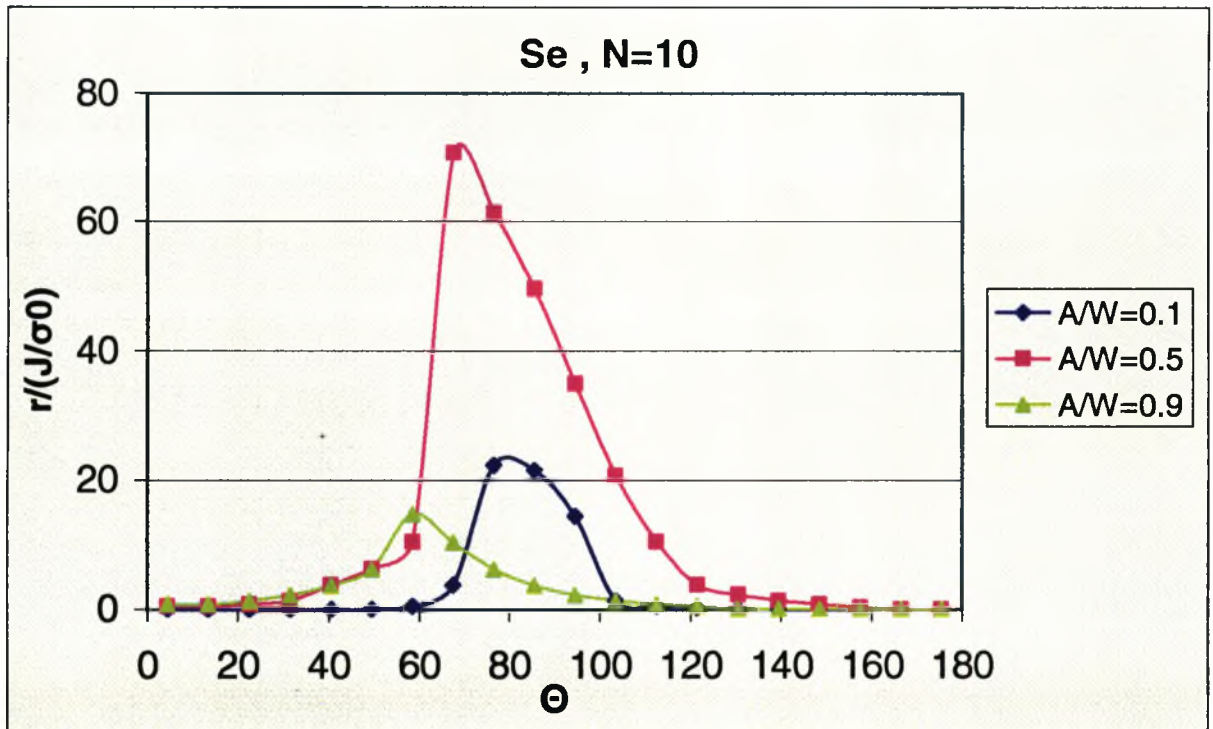


Διάγραμμα 6: Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises όταν  $n=5$  για  $0^\circ < \Theta < 180^\circ$

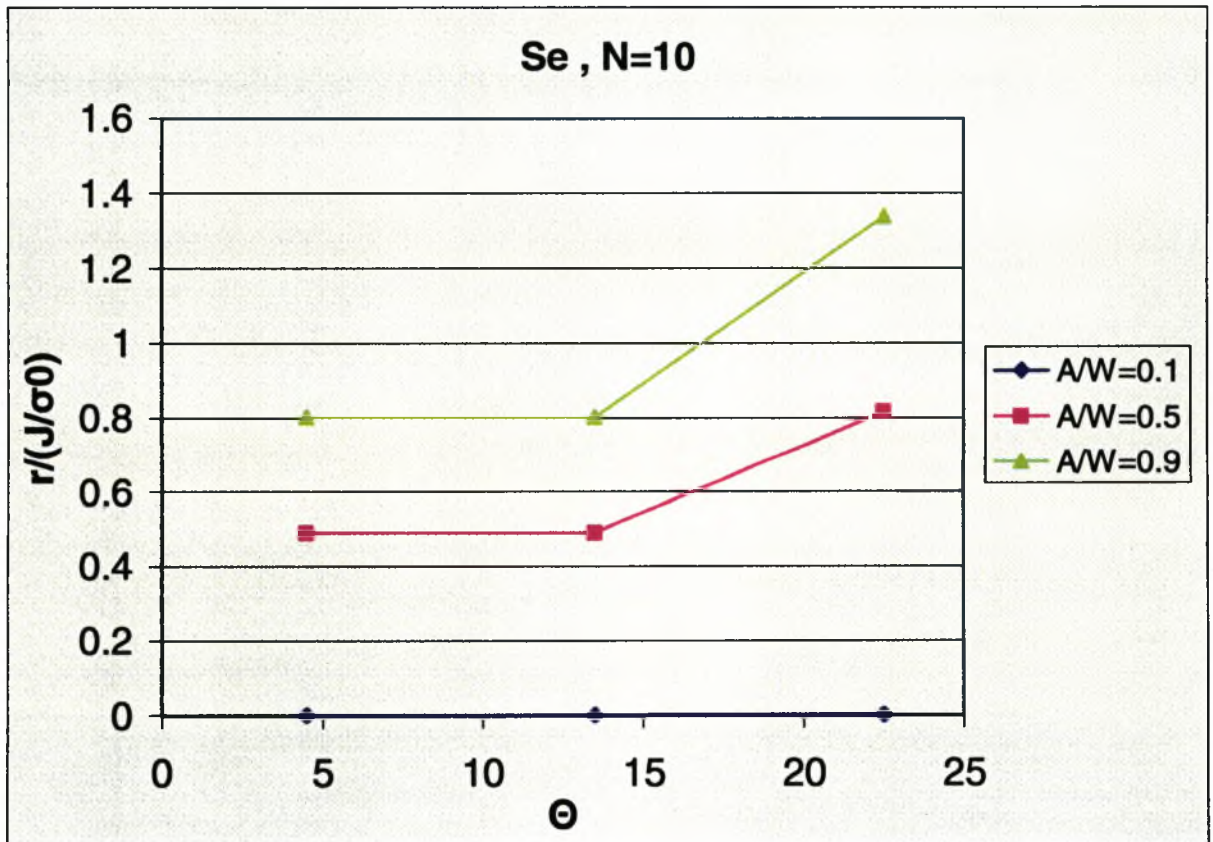


Διάγραμμα 7: Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises όταν  $n=5$  για  $0^\circ < \Theta < 25^\circ$





Διάγραμμα 8: Περιοχή σύγκλισης για την ισοδύναμη τάση Mises όταν  $n=10$  για  $0^\circ < \Theta < 180^\circ$



Παρατηρούμε ότι στο δοκίμιο όπου ισχύει  $a/w=0.5$  η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη περιοχή στα δοκίμια  $a/w=0.9$  και  $a/w=0.1$ . Επίσης φαίνεται ότι η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων στο δοκίμιο όπου ισχύει  $a/w=0.9$  είναι λίγο μεγαλύτερη από τα αντίστοιχα του δοκίμιου όπου ισχύει  $a/w=0.1$ . Λαμβάνοντας υπόψη τις μέγιστες τιμές σύγκλισης για όλα τα δοκίμια, που είναι για το δοκίμιο  $a/w=0.1$  στη γωνία  $58.5^\circ$ , για το δοκίμιο  $a/w=0.5$  στη γωνία  $67.5^\circ$  και για το δοκίμιο  $a/w=0.9$  στη γωνία  $85.5^\circ$ , παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει ο συντελεστής κράτυνσης τόσο μειώνονται και οι μέγιστες τιμές.

Παράλληλα στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζουμε και τις τιμές από τις οποίες προκύπτουν τα παραπάνω διαγράμματα και αποδεικνύουμε έτσι ότι και για τα σημεία των διαγραμμάτων που φαίνεται να έχουν μηδενική τιμή, στην πραγματικότητα υπάρχει μια περιοχή σύγκλισης αποτελεσμάτων, η οποία είναι πολύ μικρότερη βέβαια από την εντυπωσιακά μεγάλη περιοχή που παρατηρούμε μεταξύ των γωνιών  $60^\circ$  και  $120^\circ$  ( $60^\circ \leq \Theta \leq 120^\circ$ ) (Πίνακες 15,16,17).

Se , N=3					
A/W=0.1		A/W=0.5		A/W=0.9	
$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$	$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$	$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$
4,5	0	4,5	0	4,5	0
13,5	0	13,5	0,000277	13,5	0,000268
22,5	0,001017	22,5	0,182317	22,5	0,294812
31,5	0,002249	31,5	0,847107	31,5	1,367759
40,5	0,004303	40,5	2,354437	40,5	3,800796
49,5	0,007726	49,5	3,924939	49,5	6,336389
58,5	0,022942	58,5	10,90395	58,5	25,18042
67,5	0,848526	67,5	103,2727	67,5	10,55792
76,5	18,20158	76,5	79,7643	76,5	6,335373
85,5	37,1878	85,5	52,13874	85,5	3,799876
94,5	37,1878	94,5	35,3257	94,5	2,28029
103,5	3,9313	103,5	6,542302	103,5	2,279971
112,5	1,41461	112,5	3,925072	112,5	1,367785
121,5	0,304908	121,5	1,412433	121,5	0,820314
130,5	0,065211	130,5	0,847208	130,5	0,820411
139,5	0,022942	139,5	0,507954	139,5	0,491888
148,5	0,007727	148,5	0,182312	148,5	0,294815
157,5	0	157,5	0,065115	157,5	0,105613
166,5	0	166,5	0,013412	166,5	0,022182
175,5	0	175,5	0,004297	175,5	0,004161

Πίνακας 15: Αποτελέσματα της σύγκρισης της ισοδύναμης τάσης Mises για  $n=3$

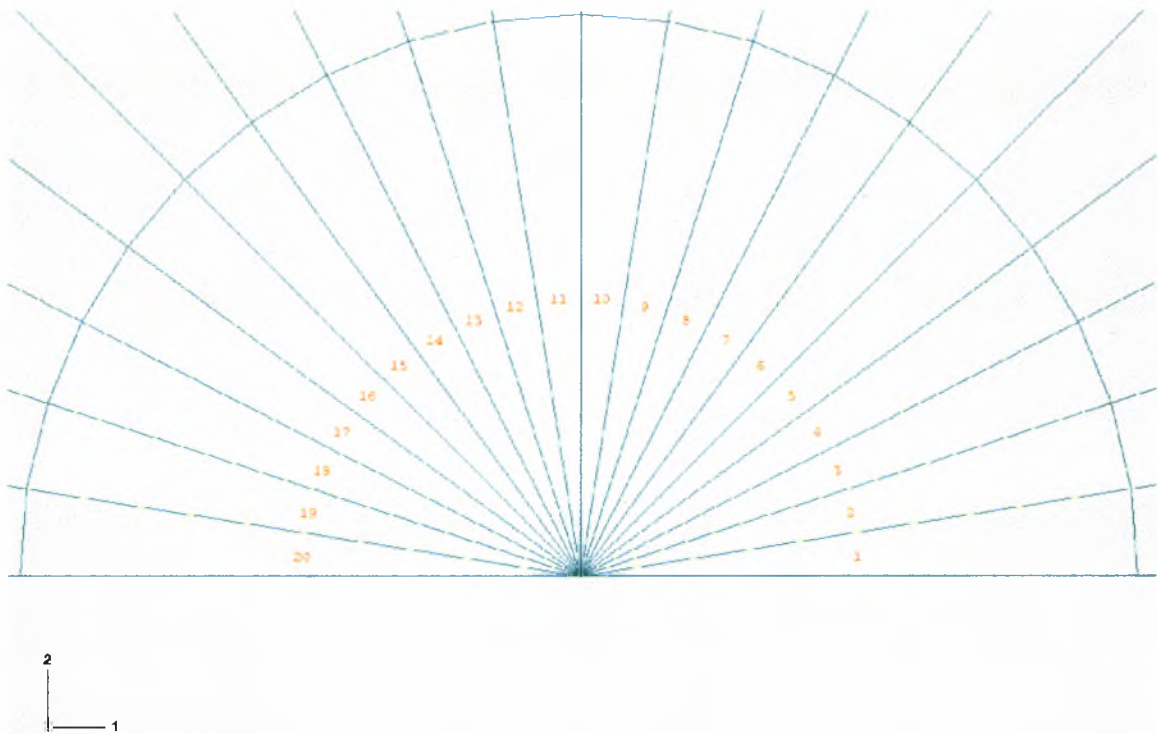
<b>Se , N=5</b>					
<b>A/W=0.1</b>		<b>A/W=0.5</b>		<b>A/W=0.9</b>	
$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$	$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$	$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$
4,5	0,000229	4,5	0,150401	4,5	0,000226
13,5	0,000229	13,5	0,150398	13,5	0,000827
22,5	0,000229	22,5	0,419102	22,5	0,248095
31,5	0,001854	31,5	1,16508	31,5	1,151017
40,5	0,003548	40,5	3,237583	40,5	1,918673
49,5	0,00637	49,5	5,397444	49,5	3,198504
58,5	0,018913	58,5	8,994395	58,5	21,1902
67,5	0,251362	67,5	85,18703	67,5	14,81017
76,5	31,79727	76,5	73,03841	76,5	8,886759
85,5	30,65749	85,5	49,9364	85,5	5,330569
94,5	30,65749	94,5	36,07986	94,5	3,197729
103,5	3,240949	103,5	8,995338	103,5	1,918676
112,5	1,166199	112,5	5,39523	112,5	1,151039
121,5	0,150526	121,5	3,237501	121,5	0,690323
130,5	0,05376	130,5	1,942115	130,5	0,413941
139,5	0,018913	139,5	1,165052	139,5	0,248087
148,5	0,00637	148,5	0,418901	148,5	0,14857
157,5	0	157,5	0,089963	157,5	0,053063
166,5	0,000838	166,5	0,011063	166,5	0,003501
175,5	0	175,5	0,000837	175,5	0,000827

Πίνακας 16: Αποτελέσματα της σύγκρισης της ισοδύναμης τάσης Mises για n=5

<b>Se , N=10</b>					
<b>A/W=0.1</b>		<b>A/W=0.5</b>		<b>A/W=0.9</b>	
$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$	$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$	$\Theta$	$r/(J/\sigma_0)$
4,5	0,000589	4,5	0,489979	4,5	0,803125
13,5	0,000589	13,5	0,489924	13,5	0,803189
22,5	0,001303	22,5	0,816826	22,5	1,339112
31,5	0,00778	31,5	1,361614	31,5	2,231988
40,5	0,022468	40,5	3,78402	40,5	3,721089
49,5	0,063273	49,5	6,306143	49,5	6,201268
58,5	0,491393	58,5	10,50959	58,5	14,78738
67,5	3,794134	67,5	70,67351	67,5	10,33513
76,5	22,34005	76,5	61,34037	76,5	6,201538
85,5	21,53926	85,5	49,60312	85,5	3,719885
94,5	14,42734	94,5	35,00922	94,5	2,231504
103,5	1,365772	103,5	20,74349	103,5	1,338929
112,5	0,491468	112,5	10,50992	112,5	0,803242
121,5	0,176603	121,5	3,783829	121,5	0,481735
130,5	0,063273	130,5	2,269793	130,5	0,173125
139,5	0,022468	139,5	1,361571	139,5	0,103682
148,5	0,004475	148,5	0,81681	148,5	0,037031
157,5	0,000589	157,5	0,293822	157,5	0,007627
166,5	0,000589	166,5	0,007756	166,5	0,000577
175,5	0	175,5	0,000587	175,5	0,000577

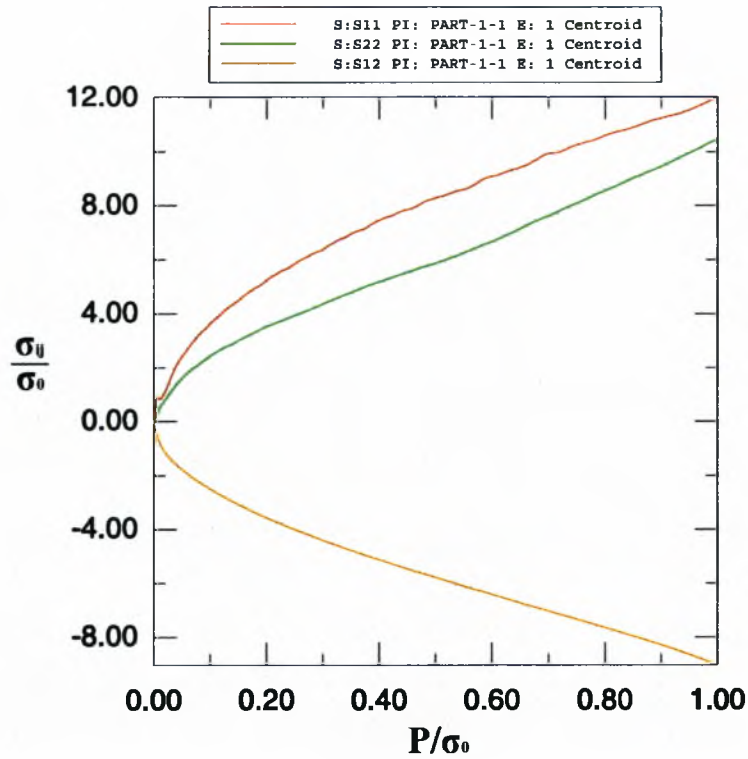
Πίνακας 17: Αποτελέσματα της σύγκρισης της ισοδύναμης τάσης Mises για n=10

Τέλος παρουσιάζουμε διαγράμματα που αφορούν την ανάπτυξη των τάσεων  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  στα τρία δοκίμια με ρωγμές ( $a/w=0.1$ ,  $a/w=0.5$ ,  $a/w=0.9$ ) σε σχέση με τα increments που πραγματοποιήθηκαν κατά τη φόρτιση, το χρόνο δηλαδή στον οποίο εξελίχθηκε η φόρτιση (Διαγράμματα 10,11,12,13,14,15). Για κάθε δοκίμιο με ρωγή αντιστοιχούν δύο διαγράμματα. Στο πρώτο διάγραμμα παρακολουθούμε ένα στοιχείο αριστερά της ακμής της ρωγμής και στο δεύτερο διάγραμμα ένα στοιχείο δεξιά της ακμής της ρωγμής (Σχήμα 24). Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η φόρτιση έχει εξελιχθεί με ομαλό τρόπο.

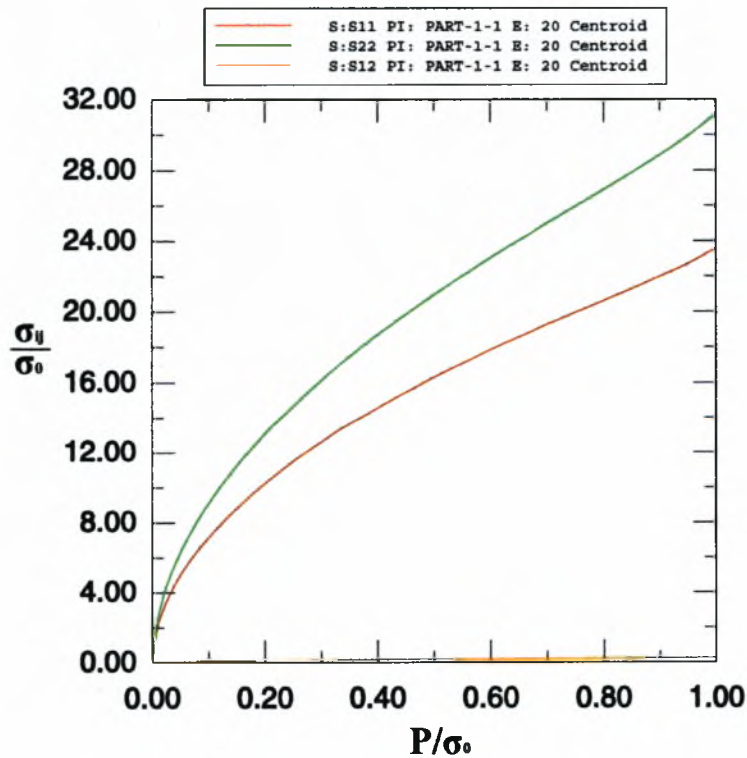


Σχήμα 24: Στοιχείο 1-Δεξιά της ακμής της ρωγμής και Στοιχείο 20-Αριστερά της

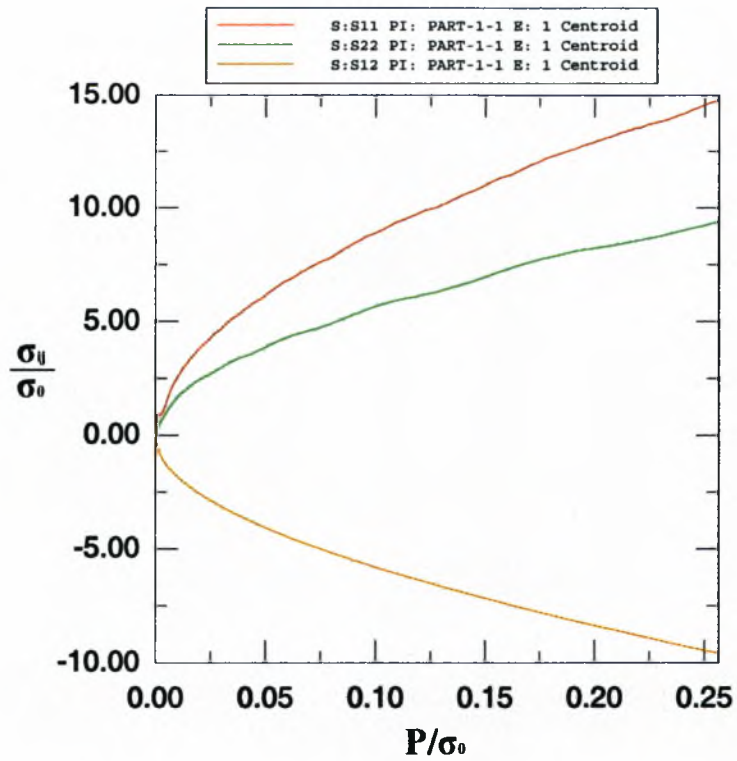




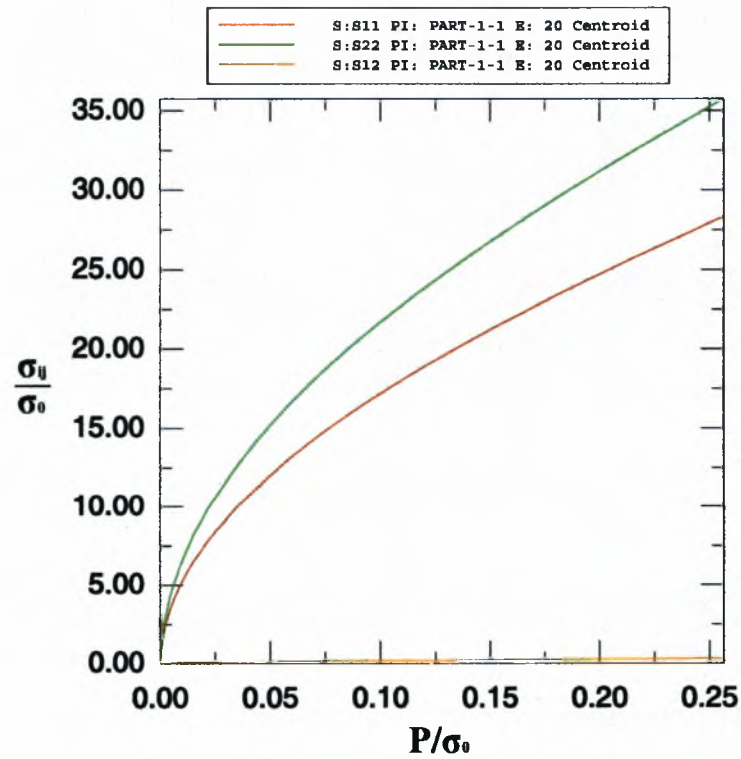
Διάγραμμα 10: Στοιχείο αριστερά της ακμής της ρωγμής όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.1$  για  $n=3$



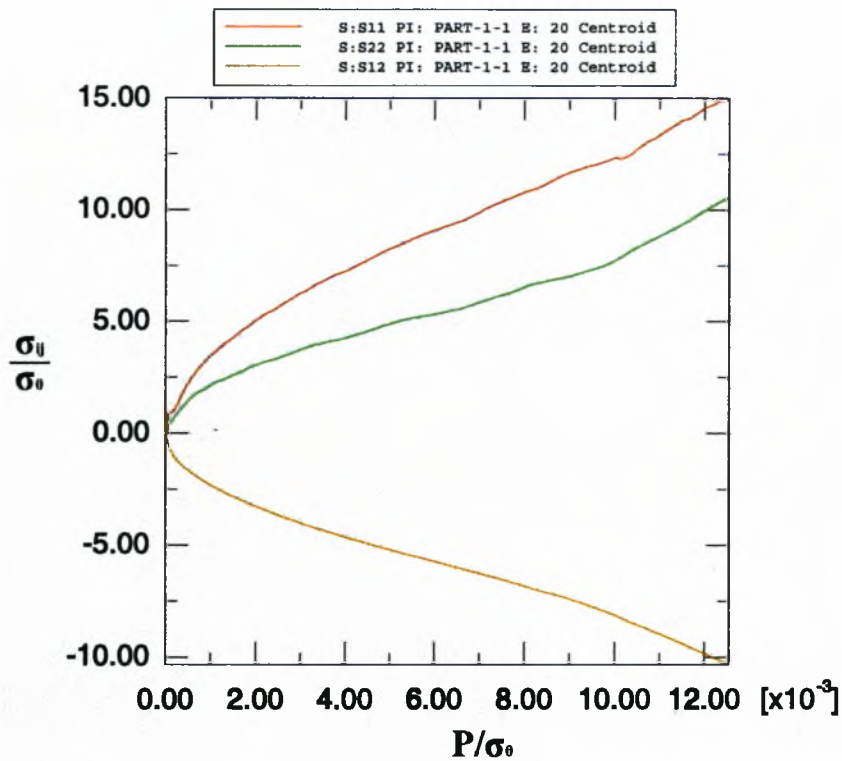
Διάγραμμα 11: Στοιχείο δεξιά της ακμής της ρωγμής όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.1$  για  $n=3$



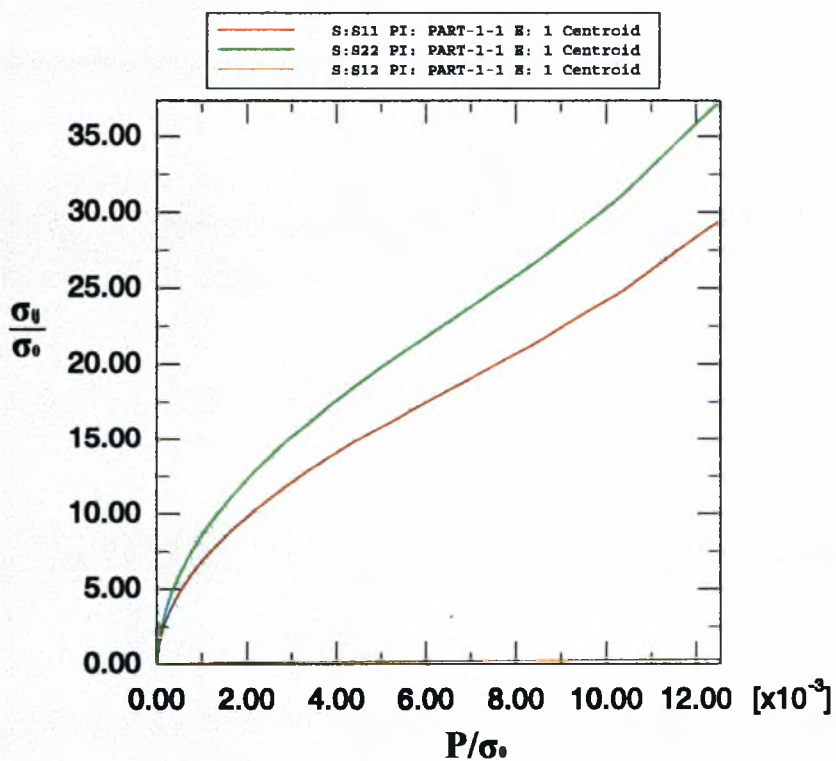
Διάγραμμα 12: Στοιχείο αριστερά της ακμής της ρωγμής όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.5$  για  $n=3$



Διάγραμμα 13: Στοιχείο δεξιά της ακμής της ρωγμής όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.5$  για  $n=3$



Διάγραμμα 14: Στοιχείο αριστερά της ακμής της ρωγμής όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.9$  για  $n=3$



Διάγραμμα 15: Στοιχείο δεξιά της ακμής της ρωγμής όταν η ρωγμή είναι  $a/w=0.9$  για  $n=3$

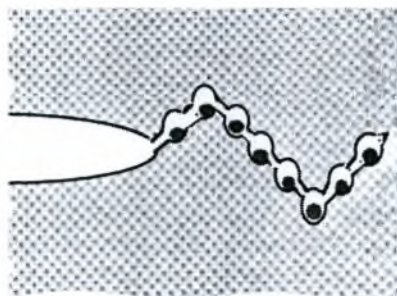


## 6. Συμπεράσματα

- ❖ Παρατηρούμε από την ανάλυση αφενός του ελαστικού προβλήματος και αφετέρου του ελαστοπλαστικού προβλήματος (Διαγράμματα 1,2,4,5,6,7,8,9) ότι η περιοχή σύγκλισης των αποτελεσμάτων που προκύπτει για το δοκίμιο με μέγεθος ρωγμής  $a/w=0.5$  είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη περιοχή που προκύπτει για τα δοκίμια με ρωγμές  $a/w=0.1$  και  $a/w=0.9$ . Επίσης παρατηρούμε ότι η περιοχή σύγκλισης που αφορά το δοκίμιο με ρωγμή  $a/w=0.9$  είναι αρκετά μεγαλύτερη για το ελαστικό πρόβλημα και για το ελαστοπλαστικό πρόβλημα για γωνίες  $0^\circ < \Theta < 60^\circ$  σε σχέση με την περιοχή σύγκλισης που προκύπτει για το δοκίμιο με ρωγμή  $a/w=0.1$ . Παράλληλα, στα ίδια Διαγράμματα, θεωρώντας ως βάση τις μέγιστες τιμές σύγκλισης αποτελεσμάτων για κάθε ρωγμή ( $a/w=0.1, a/w=0.5, a/w=0.9$ ) και κάθε συντελεστή κράτνσης ( $n=3, n=5, n=10$ ) παρατηρούμε ότι όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής κράτνσης τόσο μεγαλύτερες είναι οι μέγιστες τιμές σύγκλισης π.χ. για τη ρωγμή  $a/w=0.5$  και συντελεστή κράτνσης  $n=3$  η μέγιστη τιμή σύγκλισης που αντιστοιχεί σε γωνία  $67.5^\circ$  ξεπερνά την τιμή  $R/(J/\sigma_0)=100$ . Για την ίδια ρωγμή και συντελεστή κράτνσης  $n=5$  η μέγιστη τιμή σύγκλισης που αντιστοιχεί στην ίδια γωνία κυμαίνεται από  $80 < R/(J/\sigma_0) < 100$  και για συντελεστή κράτνσης  $n=10$  η τιμή αυτή κυμαίνεται από  $60 < R/(J/\sigma_0) < 80$ . Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τις ρωγμές  $a/w=0.1, a/w=0.9$ . Τέλος στα διαγράμματα που αφορούν την σύγκριση στην περίπτωση της ελαστοπλαστικότητας παρατηρούμε ότι στις μικρές γωνίες κοντά στην ρωγμή η σύγκλιση των αποτελεσμάτων είναι πολύ μικρή. Το φαινόμενο αυτό είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι στην ανάλυσή μας έχουμε λάβει υπόψη μόνο τον πρώτο όρο της ασυμπτωτικής λύσης HRR. Με την χρήση και του δεύτερου όρου της λύσης είναι πολύ πιθανό να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα σε μικρές γωνίες στο επίπεδο της ρωγμής.
- ❖ Από τα Διαγράμματα παρατηρούμε ότι για μια γωνία περίπου στις  $70^\circ$  έχουμε πάρα πολύ καλή περιοχή σύγκλισης αποτελεσμάτων για όλους τους εκθέτες σκλήρυνσης και για όλα τα μεγέθη ρωγμών. Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να θεωρήσουμε σε περιπτώσεις πειραματικών μετρήσεων, ως πιο κατάλληλη

περιοχή για την πραγματοποίησή τους, την περιοχή υπό γωνία περίπου στις  $70^\circ$  από την ακμή της ρωγμής. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε αξιόπιστες πειραματικές μετρήσεις που θα συμβαδίζουν με τα αριθμητικά αποτελέσματα χωρίς να παρεμβαίνουμε στην γεμάτη εντάσεις και μη-γραμμικότητες περιοχή κοντά στην ακμή της ρωγμής, με ό,τι αυτό συνεπάγεται.

- ❖ Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που απορρέει από τη μελέτη μας είναι ότι οι μεγαλύτερες περιοχές σύγκλισης αποτελεσμάτων παρουσιάζονται σε γωνίες όμοιες με αυτές που αναπτύσσονται οι πλαστικές ζώνες. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να συνδυαστεί με το μηχανισμό της διάδοσης μιας ρωγμής σε συνθήκες όλκιμης θραύσης. Όταν σε μια επιφάνεια η ρωγμή διαδίδεται μέσω της πυρήνωσης και ανάπτυξης των μικροοπών του υλικού, η διάδοση φαίνεται να είναι ιδιαίτερα ομαλή σε ευθυγράμμιση με την ήδη υπάρχουσα ρωγμή, αλλά μια πιο βαθιά εξέταση του φαινομένου αποκαλύπτει μια πιο σύνθετη θραύση. Για μια ρωγμή σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και εφελκυστικής φόρτισης (mode-I) η μέγιστη πλαστική παραμόρφωση παρουσιάζεται σε  $45^\circ$  από το επίπεδο της ρωγμής (Σχήμα 25). Σε τοπικό επίπεδο κοντά στην ακμή της ρωγμής αυτή η γωνία είναι ο προτιμητέος δρόμος για την πυρήνωση και ανάπτυξη των πόρων αλλά σε συνολικό επίπεδο η διάδοση της ρωγμής παραμένει στο αρχικό ευθύγραμμο επίπεδο στις  $0^\circ$ . Ένας τρόπος για να συνδυαστούν οι δύο αυτοί δρόμοι είναι η ρωγμή να αναπτυχθεί και να φαίνεται με μια μορφή  $\pm 45^\circ$  από τη διεύθυνση της ευθύγραμμης διάδοσης της ρωγμής όταν την παρατηρούμε από πολύ κοντά. Στο συνολικό δοκίμιο η ρωγμή εμφανίζεται ομαλή και ευθύγραμμη.



Σχήμα 25: Ανάπτυξη πόρων με μορφή  $\pm 45^\circ$  από την ακμή της ρωγμής

# **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α**

Αρχεία δημιουργίας καννάβων

1

Αρχείο δημιουργίας καννάβου για δοκίμιο με ρωγή  
 $a/w = 0.1$

```

*HEADING
CRACK1
*PREPRINT,ECHO=YES,MODEL=YES
**RESTART,WRITE,FREQ=1
**
*NODE
1, 0.,0.
21,0.,0.
*NGEN,NSET=TIP
1,21,1
*NODE,SYSTEM=C
441,60.,0.
421,60.,180.
*NGEN, NSET=OUT,LINE=C
421,441,1,,,,,0.,0.,-1.
*NFILL,BIAS=0.9
TIP,OUT,20,21
**
**
*NODE
526, -100.,0.
531, -100.,100.
536, 0.,100.
541, 100.,100.
546, 100.,0.
866, 900.,0.
861, 900.,900.
851,-100.,900.
1011,-100.,2000.
1021,900.,2000.
*NGEN,NSET=OUTLINE
526,531,1
531,541,1
541,546,1
*NFILL,NSET=IN
OUT,OUTLINE,5,21
**
**
*NGEN,NSET=OUTLINE4
531,541,1
541,546,1
*NGEN,NSET=OUTLINE5
851,861,1
861,866,1
*NFILL,NSET=IN2,BIAS=0.9
OUTLINE4,OUTLINE5,20,16
**
**
*NGEN,NSET=OUTLINE6
851,861,1
*NGEN,NSET=OUTLINE7
1011,1021,1
*NFILL,NSET=IN3
OUTLINE6,OUTLINE7,10,16
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
1,1,23,22,2
*ELGEN,ELSET=ALLE1
1,20,1,1,1,21,20
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
21,22,23,44,43
*ELGEN,ELSET=ALLE2
21,20,1,1,24,21,20
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H

```

```
501,531,532,548,547
*ELGEN,ELSET=ALLE3
501,15,1,1,20,16,15
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
801,851,852,868,867
*ELGEN,ELSET=ALLE4
801,10,1,1,10,16,10
**
*ELSET,ELSET=ALLE
ALLE1,ALLE2,ALLE3,ALLE4
*ELSET,ELSET=TH1,GENERATE
20,500,20
*ELSET,ELSET=TH2,GENERATE
19,499,20
*ELSET,ELSET=TH3,GENERATE
18,498,20
*ELSET,ELSET=TH4,GENERATE
17,497,20
*ELSET,ELSET=TH5,GENERATE
16,496,20
*ELSET,ELSET=TH6,GENERATE
15,495,20
*ELSET,ELSET=TH7,GENERATE
14,494,20
*ELSET,ELSET=TH8,GENERATE
13,493,20
*ELSET,ELSET=TH9,GENERATE
12,492,20
*ELSET,ELSET=TH10,GENERATE
11,491,20
*ELSET,ELSET=TH11,GENERATE
10,490,20
*ELSET,ELSET=TH12,GENERATE
9,489,20
*ELSET,ELSET=TH13,GENERATE
8,488,20
*ELSET,ELSET=TH14,GENERATE
7,487,20
*ELSET,ELSET=TH15,GENERATE
6,486,20
*ELSET,ELSET=TH16,GENERATE
5,485,20
*ELSET,ELSET=TH17,GENERATE
4,484,20
*ELSET,ELSET=TH18,GENERATE
3,483,20
*ELSET,ELSET=TH19,GENERATE
2,482,20
*ELSET,ELSET=TH20,GENERATE
1,481,20
**
*MPC
TIE,2,1
TIE,3,1
TIE,4,1
TIE,5,1
TIE,6,1
TIE,7,1
TIE,8,1
TIE,9,1
TIE,10,1
TIE,11,1
TIE,12,1
TIE,13,1
TIE,14,1
```

```

TIE,15,1
TIE,16,1
TIE,17,1
TIE,18,1
TIE,19,1
TIE,20,1
TIE,21,1
**
**BOUNDARY CONDITIONS**
**
*NSET,NSET=XAXIS1,GENERATE
42,546,21
*NSET,NSET=XAXIS2,GENERATE
562,866,16
*ELSET,ELSET=YAXIS
891,892,893,894,895,896,897,898,899,900
*BOUNDARY
1,2,2
XAXIS1,2,2
XAXIS2,2,2
866,1,1
**
**
*SOLID SECTION,ELSET=ALLE,MATERIAL=ONE
*MATERIAL,NAME=ONE
*ELASTIC
300.,0.3
*PLASTIC,HARDENING=USER
**
**
*STEP,INC=2000
*STATIC
0.005,1.,,0.005
*DLOAD
YAXIS,P3,-1.0
*CONTOUR INTEGRAL,CONTOURS=10,SYMM,OUTPUT=BOTH
TIP,1.,0.
*EL PRINT,ELSET=TH1,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH2,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH3,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH4,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH5,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH6,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH7,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH8,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH9,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH10,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH11,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH12,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH13,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH14,POSITION=CENTROIDAL
COORD,MISES,
*EL PRINT,ELSET=TH15,POSITION=CENTROIDAL

```



```
COORD,MISES,  
*EL PRINT,ELSET=TH16,POSITION=CENTROIDAL  
COORD,MISES,  
*EL PRINT,ELSET=TH17,POSITION=CENTROIDAL  
COORD,MISES,  
*EL PRINT,ELSET=TH18,POSITION=CENTROIDAL  
COORD,MISES,  
*EL PRINT,ELSET=TH19,POSITION=CENTROIDAL  
COORD,MISES,  
*EL PRINT,ELSET=TH20,POSITION=CENTROIDAL  
COORD,MISES,  
**  
**  
*OUTPUT, FIELD, VARIABLE=PRESELECT  
S,E  
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=ALLE  
S,E,PE  
*NODE OUTPUT  
U  
*OUTPUT,HISTORY,FREQ=1  
*END STEP
```

2

Αρχείο δημιουργίας καννάβου για δοκίμιο με ρωγή  
 $a/w = 0.5$

```

*HEADING
CRACK2
*PREPRINT,ECHO=YES,MODEL=YES
*RESTART,WRITE,FREQ=2
**
*NODE
1, 0., 0.
21, 0., 0.
*NGEN,NSET=TIP
1, 21, 1
*NODE,SYSTEM=C
441, 60., 0.
421, 60., 180.
*NGEN, NSET=OUT,LINE=C
421, 441, 1, , , , 0., 0., -1.
*NFILL,BIAS=0.6
TIP,OUT,20,21
**
**
*NODE
841, -500., 0.
846, -500., 500.
851, 0., 500.
856, 500., 500.
861, 500., 0.
1166, -500., 2000.
1176, 500., 2000.
*NGEN,NSET=OUTLINE
841, 846, 1
846, 856, 1
856, 861, 1
*NFILL,NSET=IN,BIAS=1.0
OUT,OUTLINE,20,21
**
**
*NGEN,NSET=OUTLINE6
846, 856, 1
*NGEN,NSET=OUTLINE7
1166, 1176, 1
*NFILL,NSET=IN3,BIAS=0.9
OUTLINE6,OUTLINE7,20,16
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
1, 1, 23, 22, 2
*ELGEN,ELSET=ALLE1
1, 20, 1, 1, 1, 21, 20
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
21, 22, 23, 44, 43
*ELGEN,ELSET=ALLE2
21, 20, 1, 1, 39, 21, 20
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
801, 846, 847, 863, 862
*ELGEN,ELSET=ALLE3
801, 10, 1, 1, 20, 16, 10
**
*ELSET,ELSET=ALLE
ALLE1,ALLE2,ALLE3
*ELSET,ELSET=TH1,GENERATE
20, 800, 20
*ELSET,ELSET=TH2,GENERATE
19, 799, 20
*ELSET,ELSET=TH3,GENERATE
18, 798, 20
*ELSET,ELSET=TH4,GENERATE

```

```
17,797,20
*ELSET,ELSET=TH5,GENERATE
16,796,20
*ELSET,ELSET=TH6,GENERATE
15,795,20
*ELSET,ELSET=TH7,GENERATE
14,794,20
*ELSET,ELSET=TH8,GENERATE
13,793,20
*ELSET,ELSET=TH9,GENERATE
12,792,20
*ELSET,ELSET=TH10,GENERATE
11,791,20
*ELSET,ELSET=TH11,GENERATE
10,790,20
*ELSET,ELSET=TH12,GENERATE
9,789,20
*ELSET,ELSET=TH13,GENERATE
8,788,20
*ELSET,ELSET=TH14,GENERATE
7,787,20
*ELSET,ELSET=TH15,GENERATE
6,786,20
*ELSET,ELSET=TH16,GENERATE
5,785,20
*ELSET,ELSET=TH17,GENERATE
4,784,20
*ELSET,ELSET=TH18,GENERATE
3,783,20
*ELSET,ELSET=TH19,GENERATE
2,782,20
*ELSET,ELSET=TH20,GENERATE
1,781,20
**
*MPC
TIE,2,1
TIE,3,1
TIE,4,1
TIE,5,1
TIE,6,1
TIE,7,1
TIE,8,1
TIE,9,1
TIE,10,1
TIE,11,1
TIE,12,1
TIE,13,1
TIE,14,1
TIE,15,1
TIE,16,1
TIE,17,1
TIE,18,1
TIE,19,1
TIE,20,1
TIE,21,1
**
**BOUNDARY CONDITIONS**
**
**
*NSET,NSET=ROGMI1,GENERATE
11,851,21
*NSET,NSET=XAXIS1,GENERATE
42,861,21
*ELSET,ELSET=YAXIS
991,992,993,994,995,996,997,998,999,1000
*BOUNDARY
```

```
1, 2, 2
XAXIS1, 2, 2
861, 1, 1
**
**
*SOLID SECTION, ELSET=ALLE, MATERIAL=ONE
*MATERIAL, NAME=ONE
*ELASTIC
  300., 0.3
*PLASTIC, HARDENING=USER
**
**
*STEP, INC=2000
*STATIC
  0.00025, 0.5, , 0.00025
*DLOAD
  YAXIS, P3, -0.5
*CONTROLS, PARAMETERS=FIELD, FIELD=DISPLACEMENT
  1.D-3
*CONTOUR INTEGRAL, CONTOURS=10, SYMM, OUTPUT=BOTH
  TIP, 1., 0.
*EL PRINT, ELSET=TH1, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH2, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH3, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH4, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH5, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH6, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH7, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH8, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH9, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH10, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH11, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH12, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH13, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH14, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH15, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH16, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH17, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH18, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH19, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH20, POSITION=CENTROIDAL
  COORD, MISES,
**
**
*OUTPUT, FIELD, VARIABLE=PRESELECT
  S, E
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=ALLE
```

```
S,E,PE
*NODE OUTPUT
U
*OUTPUT, HISTORY, FREQ=1
*END STEP
```

3

Αρχείο δημιουργίας καννάβου για δοκίμιο με ρωγή  
 $a/w = 0.9$



```

*HEADING
CRACK3
*PREPRINT,ECHO=YES,MODEL=YES
*RESTART,WRITE,FREQ=100
**
*NODE
1, 0.,0.
21,0.,0.
*NGEN,NSET=TIP
1,21,1
*NODE,SYSTEM=C
421,60.,0.
441,60.,180.
*NGEN, NSET=OUT,LINE=C
421,441,1,,,,,0.,0.,1.
*NFILL,BIAS=0.6
TIP,OUT,20,21
**
**
*NODE
526, 100.,0.
531, 100.,100.
536, 0.,100.
541, -100.,100.
546, -100.,0.
866, -900.,0.
861, -900.,900.
851, 100.,900.
1011,100.,2000.
1021,-900.,2000.
*NGEN,NSET=OUTLINE
526,531,1
531,541,1
541,546,1
*NFILL,NSET=IN,BIAS=1.2
OUT,OUTLINE,5,21
**
**
*NGEN,NSET=OUTLINE4
531,541,1
541,546,1
*NGEN,NSET=OUTLINE5
851,861,1
861,866,1
*NFILL,NSET=IN2,BIAS=0.9
OUTLINE4,OUTLINE5,20,16
**
**
*NGEN,NSET=OUTLINE6
851,861,1
*NGEN,NSET=OUTLINE7
1011,1021,1
*NFILL,NSET=IN3
OUTLINE6,OUTLINE7,10,16
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
1,1,22,23,2
*ELGEN,ELSET=ALLE1
1,20,1,1,25,21,20
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
501,532,531,547,548
*ELGEN,ELSET=ALLE2
501,15,1,1,20,16,15
**
*ELEMENT,TYPE=CPE4H
801,852,851,867,868

```

```
*ELGEN, ELSET=ALLE3
  801, 10, 1, 1, 10, 16, 10
**
*ELSET, ELSET=ALLE
  ALLE1, ALLE2, ALLE3
*ELSET, ELSET=TH1, GENERATE
  1, 481, 20
*ELSET, ELSET=TH2, GENERATE
  2, 482, 20
*ELSET, ELSET=TH3, GENERATE
  3, 483, 20
*ELSET, ELSET=TH4, GENERATE
  4, 484, 20
*ELSET, ELSET=TH5, GENERATE
  5, 485, 20
*ELSET, ELSET=TH6, GENERATE
  6, 486, 20
*ELSET, ELSET=TH7, GENERATE
  7, 487, 20
*ELSET, ELSET=TH8, GENERATE
  8, 488, 20
*ELSET, ELSET=TH9, GENERATE
  9, 489, 20
*ELSET, ELSET=TH10, GENERATE
  10, 490, 20
*ELSET, ELSET=TH11, GENERATE
  11, 491, 20
*ELSET, ELSET=TH12, GENERATE
  12, 492, 20
*ELSET, ELSET=TH13, GENERATE
  13, 493, 20
*ELSET, ELSET=TH14, GENERATE
  14, 494, 20
*ELSET, ELSET=TH15, GENERATE
  15, 495, 20
*ELSET, ELSET=TH16, GENERATE
  16, 496, 20
*ELSET, ELSET=TH17, GENERATE
  17, 497, 20
*ELSET, ELSET=TH18, GENERATE
  18, 498, 20
*ELSET, ELSET=TH19, GENERATE
  19, 499, 20
*ELSET, ELSET=TH20, GENERATE
  20, 500, 20
**
*MPC
  TIE, 2, 1
  TIE, 3, 1
  TIE, 4, 1
  TIE, 5, 1
  TIE, 6, 1
  TIE, 7, 1
  TIE, 8, 1
  TIE, 9, 1
  TIE, 10, 1
  TIE, 11, 1
  TIE, 12, 1
  TIE, 13, 1
  TIE, 14, 1
  TIE, 15, 1
  TIE, 16, 1
  TIE, 17, 1
  TIE, 18, 1
  TIE, 19, 1
  TIE, 20, 1
```

```

TIE, 21, 1
**
**BOUNDARY CONDITIONS**
**
**
*NSET, NSET=XAXIS1, GENERATE
22, 526, 21
*ELSET, ELSET=YAXIS
891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900
*BOUNDARY
1, 2, 2
XAXIS1, 2, 2
526, 1, 1
**
**
*SOLID SECTION, ELSET=ALLE, MATERIAL=ONE
*MATERIAL, NAME=ONE
*ELASTIC
300., 0.3
*PLASTIC, HARDENING=USER
**
**
*STEP, INC=2000
*STATIC
0.00005, 0.1, , 0.00005
*DLOAD
YAXIS, P3, -0.1
*CONTROLS, PARAMETERS=FIELD, FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
*CONTOUR INTEGRAL, CONTOURS=10, SYMM, OUTPUT=BOTH
TIP, 1., 0.
*EL PRINT, ELSET=TH1, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH2, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH3, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH4, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH5, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH6, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH7, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH8, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH9, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH10, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH11, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH12, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH13, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH14, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH15, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH16, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH17, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60
COORD, MISES,
*EL PRINT, ELSET=TH18, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60

```

```
COORD, MISES,  
*EL PRINT, ELSET=TH19, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60  
COORD, MISES,  
*EL PRINT, ELSET=TH20, POSITION=CENTROIDAL, FREQ=60  
COORD, MISES,  
**  
**  
*OUTPUT, FIELD, VARIABLE=PRESELECT  
S, E  
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=ALLE  
S, E, PE  
*NODE OUTPUT  
U  
*OUTPUT, HISTORY, FREQ=1  
*END STEP
```

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β**

Η uhard υπορουτίνα uhard.f

```

SUBROUTINE UHARD(SYIELD,HARD,EQPLAS,EQPLASRT,TIME,DTIME,TEMP,
+   DTEMP,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC,
+   CMNAME,NSTATV,STATEV,NUMFIELDV,
+   PREDEF,DPRED,NUMPROPS,PROPS)
C
  INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
  CHARACTER*80 CMNAME
  DIMENSION HARD(3),STATEV(NSTATV),TIME(1),
+   PREDEF(NUMFIELDV),DPRED(1),PROPS(1)
C
  E=300.D0
  SIG0=1.D0
  EXPO=3.D0
  E0=SIG0/E
C
  EBAR=EQPLAS
C
  CALL YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
C
  SYIELD=YIELD
  HARD(1)=H
C
  RETURN
  END
C
C*****
***
C
  SUBROUTINE YCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
  IF(EXPO.GT.50.D0) THEN
    YIELD=SIG0
    H=0.D0
  ELSE
    YIELD=SIG0*(EBAR/E0+1.D0)**(1.D0/EXPO)
    H=YIELD/(EXPO*(E0+EBAR))
  END IF
  RETURN
  END

```

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ**

Ο κώδικας για την επίλυση των εξισώσεων HRR model.f



```

PROGRAM modeI
C
C***  MODE-I HRR SOLUTIONS
C***  Program for the leading-order mode-I HRR solutions
C
C
C***  To compile and link to LAPACK type f77 mixed.f -
lcomplib.sgimath
C
C
PARAMETER (MELEM=360, MNODE=2, MDOFN=5, MGAUS=2, MLCA=9,
+ MPOIN=MELEM+1, MEVAB=MNODE*MDOFN, MTOTV=MPOIN*MDOFN,
+ MBAND=MLCA+MLCA+1, kl=mlca, ku=mlca, ldab=2*kl+ku+1)
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
DIMENSION WEIGP (2), POSGP (2), ESTIF (10, 10), ELOAD (10)
DIMENSION LNODS (MELEM, MNODE), COORD (MPOIN), GSTIF
(kl+MBAND, MTOTV),
+ F1 (MTOTV), UN (MTOTV), WORK (MTOTV), STRESS (MPOIN, 7), DISP (MPOIN, 2),
+ STRAIN (MPOIN, 3), FAC ((2*MLCA+MLCA+1)*MTOTV), IPVT (MTOTV), X1
(MTOTV),
+ STRESS1 (MPOIN, 7), DISP1 (MPOIN, 2), FAC1 ((2*MLCA+MLCA+1), MTOTV)
DIMENSION EXPON (500)
C
COMMON /ONE/ NPOIN, NELEM, NNODE, NDOFN, NGAUS, NEVAB, NTOTV, NBAND
C
OPEN (UNIT=7, STATUS='UNKNOWN', FILE='modeI.out')
OPEN (UNIT=8, STATUS='UNKNOWN', FILE='modeI.un',
+ FORM='UNFORMATTED')
OPEN (UNIT=9, STATUS='UNKNOWN', FILE='modeIn3.un',
+ FORM='UNFORMATTED')
OPEN (UNIT=10, STATUS='UNKNOWN', FILE='modeIexp.out')
C
WRITE (7, *) 'EIGENVALUES AND EIGENVECTORS FOR '
WRITE (7, *) 'MODE-I SOLUTIONS'
C
WRITE (10, *) ' MODE-I SOLUTIONS'
WRITE (10, *) ' Second Stress Exponent'
C
NELEM=MELEM
NNODE=MNODE
NDOFN=MDOFN
NGAUS=MGAUS
NLCA=MLCA
NPOIN=MPOIN
NEVAB=MEVAB
NTOTV=MTOTV
NBAND=MBAND
C
ALPHA=1.D0
ANU=0.3D0
C
ANFINAL=3.D0
DAN=0.1D0
NAN=(ANFINAL-1.D0)/DAN
AN=1.D0
IRES=0
IWR=0
NITER=20
C
NAN=20
IWRINC=5
TOLER=1.D-8
C
WRITE (7, *) ' NELEM'
WRITE (7, 1003) NELEM

```

```

C
    PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
    DO 100 IELEM=1,NELEM
        LNODS (IELEM,1)=IELEM
100    LNODS (IELEM,2)=IELEM+1
        IF (IWR.NE.0) WRITE (7,*) ' LNODS '
        IF (IWR.NE.0) WRITE (7,1003) ((LNODS (I,J),J=1,NNODE),I=1,NELEM)
C
        DT=PI/NELEM
        TH0=0.d0
        IF (IWR.NE.0) WRITE (7,*) ' COORD '
        DO 200 INODE=1,NPOIN
            COORD (INODE)=TH0+(INODE-1)*DT
            IF (IWR.NE.0) WRITE (7,1002) INODE,COORD (INODE)
200    CONTINUE
C
        CALL GAUSS (WEIGP, POSGP, NGAUS)
C
        CALL INITIA (UN, NTOTV)
        CALL UNINI (UN, DT, AMPL)
C
        IF (IRES.NE.0) THEN
C
            REWIND 9
            DO 251 I=1,2
                READ (9) AN,UN
251    CONTINUE
C
            ELSE
                END IF
C
            IF (IWR.NE.0) WRITE (7,*) ' INITIAL GUESS UN :
UR,UT,SRR,STT,SRT '
            DO 260 I=1,NPOIN
                J=(I-1)*NDOFN+1
                IF (IWR.NE.0) WRITE (7,1002) I, UN (J), UN (J+1), UN (J+2), UN (J+3), UN (J+
4)
260    CONTINUE
C
C
C
C
C
C
C
        DO 2000 IAN=1,NAN
C
            AN=AN+DAN
            WRITE (7,*) ' '
            WRITE (7,*) ' '
            WRITE (7,*) ' '
            WRITE (7,*) ' AN '
            WRITE (7,1001) AN
C
            DO 999 ITER=1,NITER
C
                WRITE (7,*) ' '
                WRITE (7,*) ' ITER '
                WRITE (7,1002) ITER
C
                CALL INITIA (GSTIF, (k1+NBAND)*NTOTV)
                CALL INITIA (F1,NTOTV)
                CALL INITIA (X1,NTOTV)
C
            DO 400 IELEM=1,NELEM
                CALL STIF (IELEM, ESTIF, WEIGP, POSGP, UN, LNODS, COORD, AN, ELOAD, IWR)

```

```

        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,*) ' ESTIF'
        DO 390 I=1,NEVAB
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,1001) (ESTIF(I,J),J=1,NEVAB)
390    CONTINUE
C
        IF(IWR.NE.0) WRITE(7,*) ' ELOAD '
        IF(IWR.NE.0) WRITE(7,1001) (ELOAD(K),K=1,NEVAB)
C
        CALL KASSEMB(GSTIF,ESTIF,IELEM,LNODS,NTOTV,NEVAB,NELEM,
+ NNODE,NDOFN,KU,KL,LDAB,F1,ELOAD,1)
400    CONTINUE
C
C*** REMOVE INDETERMINACY ( on theta=0, set Stt=1 )
C
        NODE=1
        I=(NODE-1)*NDOFN+4
        IA=KL+KU+1
        DO J=MAX(1,I-KL),MIN(NTOTV,I+KU)
            II=IA+I-J
            GSTIF(II,J)=0.D0
        END DO
        GSTIF(IA,I)=1.D0
        F1(I)=UN(I)-1.D0
C
C
C
C
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,*) 'GSTIF '
        DO 407 I=1,NBAND
        IF(IWR.NE.0) WRITE(7,1001) (GSTIF(kl+I,J),J=1,NTOTV)
407    CONTINUE
C
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,*) ' F1'
        DO 410 I=1,NTOTV
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,1002) I,F1(I)
410    CONTINUE
C
        RES=0.D0
        DO 450 I=1,NTOTV
        IF(DABS(RES).GT.DABS(F1(I))) GOTO 450
        RES=F1(I)
        IRES=I
450    CONTINUE
        WRITE(7,*) ' NODE, RES'
        WRITE(7,1002) IRES,RES
        IF (DABS(RES).LT.TOLER) GOTO 901
C
C*** IMSL CALL
C    CALL DL2ARB(NTOTV,GSTIF,NBAND,NLCA,NLCA,F1,1,X1,FAC,IPVT,WORK)
C
        CALL ACOPY(F1,X1,NTOTV)
        N=NTOTV
        NRHS=1
        LDB=NTOTV
C*** LAPACK CALL
        CALL DGBSV(N,KL,KU,NRHS,GSTIF,LDAB,IPVT,X1,LDB,INFO)
C
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,*) ' DU'
        DO 475 I=1,NTOTV
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,1002) I,X1(I)
475    CONTINUE
C
C*** CHECK FOR CONVERGENCE
C
        DNORM=0.D0
        DO 490 I=1,NTOTV

```

```

        DNORM=DMAX1(DNORM,DABS(X1(I)))
        IF (DNORM.EQ.DABS(X1(I))) INO=I
490    CONTINUE
        WRITE(7,*) ' NODE, U, MAX ABS(DU) '
        WRITE(7,1002) INO,UN(INO),X1(INO)
C
        DNORM=0.D0
        DO 495 I=1,NTOTV
        AUX=0.D0
        IF (DABS(UN(I)).GT.1.D-6) AUX=DABS(X1(I)/UN(I))
        DNORM=DMAX1(DNORM,AUX)
        IF (DNORM.EQ.AUX) INO=I
495    CONTINUE
        WRITE(7,*) ' NODE, U, DU, MAX PER CENT DU '
        WRITE(7,1002) INO,UN(INO),X1(INO),DNORM
C
        DO 500 I=1,NTOTV
500    UN(I)=UN(I)-X1(I)
C
999    CONTINUE
C
        WRITE(7,*) ' *** TOO MANY ITERATIONS *** '
        WRITE(7,*) ' SOLUTION IS STILL ACCEPTED '
C
        STOP
901    CONTINUE
C
C
C
C*** CALCULATE NODAL STRESSES AND DISPLACEMENTS
C
        IAUX=(IAN/IWRINC)*IWRINC
        IWR1=0
        IF (IAUX.EQ.IAN.OR.IAN.EQ.NAN) IWR1=1
C
        DO 600 INODE=1,NPOIN
C
        IL=NDOFN*(INODE-1)+1
        UR=UN(IL)
        UT=UN(IL+1)
        SRR=UN(IL+2)
        STT=UN(IL+3)
        SRT=UN(IL+4)
        PRESS=(SRR+STT)/2.D0
        SBAR=DSQRT(0.75D0*(SRR-STT)*(SRR-STT)+3.D0*SRT*SRT)
        SRRDEV=0.5D0*(SRR-STT)
        STTDEV=0.5D0*(STT-SRR)
C
        STRESS(INODE,1)=SRR
        STRESS(INODE,2)=STT
        STRESS(INODE,3)=SRT
        STRESS(INODE,4)=SRRDEV
        STRESS(INODE,5)=STTDEV
        STRESS(INODE,6)=PRESS
        STRESS(INODE,7)=SBAR
C
        AUX=1.5D0*SBAR** (AN-1.D0)
        STRAIN(INODE,1)=AUX*SRRDEV
        STRAIN(INODE,2)=AUX*STTDEV
        STRAIN(INODE,3)=AUX*SRT
C
        DISP(INODE,1)=UR
        DISP(INODE,2)=UT
C
600    CONTINUE
C
        CALL NORM(STRESS,C)

```

```

        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,*) ' SCALING CONSTANT C'
        IF (IWR.NE.0) WRITE(7,1001) C
C
        DO 700 INODE=1,NPOIN
        DO 650 J=1,6
650     STRESS(INODE,J)=C*STRESS(INODE,J)
        STRESS(INODE,7)=C*STRESS(INODE,7)
        DO 660 J=1,3
660     STRAIN(INODE,J)=C**AN*STRAIN(INODE,J)
        DO 670 J=1,2
670     DISP(INODE,J)=C**AN*DISP(INODE,J)
700     CONTINUE
C
        IF (IWR1.NE.0) THEN
C
        WRITE(7,*) ' STRESS : SRR, STT, SRT, SRRD, STTD, PRESS, SBAR'
        DO 750 INODE=1,NPOIN
750     WRITE(7,1002) INODE, (STRESS(INODE,J),J=1,7)
        WRITE(7,*) ' STRAIN : ERR , ETT, ERT'
        DO 760 INODE=1,NPOIN
760     WRITE(7,1002) INODE, (STRAIN(INODE,J),J=1,3)
        WRITE(7,*) ' DISPLACEMENTS : UR, UT'
        DO 770 INODE=1,NPOIN
770     WRITE(7,1002) INODE, (DISP(INODE,J),J=1,2)
C
        CALL FINDIN(AN,STRESS,DISP,LNODS,COORD,WEIGP,POSGP,AIN)
        ain=ain*2.d0
        WRITE(7,*) ' IN'
        WRITE(7,1001) AIN
C
        END IF
C
        IF (IWR1.NE.0) then
            WRITE(8) AN,UN
            WRITE(7,1004) AN
        END IF
C
2000 CONTINUE
C
        STOP
1001 FORMAT(2X,8E14.5)
1002 FORMAT(2X,I5,3X,8E14.5)
1003 FORMAT(2I5)
1004 FORMAT(/,2X,'Restart File Written at N=',F4.1)
        END
C
C*****
**
C
        SUBROUTINE GAUSS(WEIGP,POSGP,NGAUS)
C
        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
        DIMENSION WEIGP(NGAUS),POSGP(NGAUS)
C
        WEIGP(1)=1.D0
        WEIGP(2)=1.D0
C
        POSGP(1)=-1.D0/DSQRT(3.D0)
        POSGP(2)=-POSGP(1)
C
        RETURN
        END
C
C*****
**

```

```

C      SUBROUTINE STIF (IELEM, ESTIF, WEIGP, POSGP, UN, LNODS, COORD, AN,
+      ELOAD, IWR)
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
C      DIMENSION ESTIF (NEVAB, NEVAB), WEIGP (NGAUS), POSGP (NGAUS), UN
(NTOTV),
+      LNODS (NELEM, NNODE), COORD (NPOIN), ELOAD (NEVAB)
      DIMENSION UNE (10), TH (2)
C
C      COMMON /ONE/ NPOIN, NELEM, NNODE, NDOFN, NGAUS, NEVAB, NTOTV, NBAND
C
C      DO 100 INODE=1, NNODE
      NODE=LNODS (IELEM, INODE)
      TH (INODE)=COORD (NODE)
      DO 100 IDOF=1, NDOFN
      UNE ((INODE-1)*NDOFN+IDOF)=UN ((NODE-1)*NDOFN+IDOF)
100  CONTINUE
C
C      IF (IWR.NE.0) WRITE (7, *) ' IELEM'
      IF (IWR.NE.0) WRITE (7, 1002) IELEM
      IF (IWR.NE.0) WRITE (7, *) ' UNE'
      IF (IWR.NE.0) WRITE (7, 1001) (UNE (M), M=1, NEVAB)
101  CONTINUE
C
      CALL INITIA (ESTIF, NEVAB*NEVAB)
      CALL INITIA (ELOAD, NEVAB)
      DTH=TH (2)-TH (1)
      AJ=DTH/2.D0
C
C      DO 900 IG=1, NGAUS
C
C      IF (IWR.NE.0) WRITE (7, *) ' GAUSS POINT'
      IF (IWR.NE.0) WRITE (7, 1002) IG
C
      XI=POSGP (IG)
      SH1=0.5D0*(1.D0-XI)
      SH2=0.5D0*(1.D0+XI)
      DER1=-0.5D0
      DER2=0.5D0
C
      UR =SH1*UNE (1)+SH2*UNE (6)
      UT =SH1*UNE (2)+SH2*UNE (7)
      SRR=SH1*UNE (3)+SH2*UNE (8)
      STT=SH1*UNE (4)+SH2*UNE (9)
      SRT=SH1*UNE (5)+SH2*UNE (10)
      SBAR=DSQRT (0.75D0*(SRR-STT)*(SRR-STT)+3.D0*SRT*SRT)
      SRDEV=0.5D0*(SRR-STT)
      STDEV=0.5D0*(STT-SRR)
      DSDRR=1.5D0*SRDEV/SBAR
      DSDTT=1.5D0*STDEV/SBAR
      DSDRT=3.D0*SRT/SBAR
C
      URDER =(DER1*UNE (1)+DER2*UNE (6))/AJ
      UTDER =(DER1*UNE (2)+DER2*UNE (7))/AJ
      SRRDER=(DER1*UNE (3)+DER2*UNE (8))/AJ
      STTDER=(DER1*UNE (4)+DER2*UNE (9))/AJ
      SRTDER=(DER1*UNE (5)+DER2*UNE (10))/AJ
C
      SH11=SH1*SH1
      SH12=SH1*SH2
      SH21=SH12
      SH22=SH2*SH2
C
C**** JACOBIAN

```



```

C
AUX=AJ/(AN+1.D0)
ESTIF(3,1)=ESTIF(3,1)+SH11*AUX
ESTIF(3,6)=ESTIF(3,6)+SH12*AUX
ESTIF(8,1)=ESTIF(8,1)+SH21*AUX
ESTIF(8,6)=ESTIF(8,6)+SH22*AUX
C
AUX=-0.75D0*SBAR**(AN-1.D0)*((AN-1.D0)*DSDRR*SRDEV*2.D0/SBAR+
$ 1.D0)*AJ
ESTIF(3,3)=ESTIF(3,3)+SH11*AUX
ESTIF(3,8)=ESTIF(3,8)+SH12*AUX
ESTIF(8,3)=ESTIF(8,3)+SH21*AUX
ESTIF(8,8)=ESTIF(8,8)+SH22*AUX
C
AUX=-0.75D0*SBAR**(AN-1.D0)*((AN-1.D0)*DSDTT*SRDEV*2.D0/SBAR-
$ 1.D0)*AJ
ESTIF(3,4)=ESTIF(3,4)+SH11*AUX
ESTIF(3,9)=ESTIF(3,9)+SH12*AUX
ESTIF(8,4)=ESTIF(8,4)+SH21*AUX
ESTIF(8,9)=ESTIF(8,9)+SH22*AUX
C
AUX=-0.75D0*(AN-1.D0)*SBAR**(AN-2.D0)*DSDRT*SRDEV*2.D0*AJ
ESTIF(3,5)=ESTIF(3,5)+SH11*AUX
ESTIF(3,10)=ESTIF(3,10)+SH12*AUX
ESTIF(8,5)=ESTIF(8,5)+SH21*AUX
ESTIF(8,10)=ESTIF(8,10)+SH22*AUX
C
ESTIF(2,1)=ESTIF(2,1)+SH11*AJ
ESTIF(2,6)=ESTIF(2,6)+SH12*AJ
ESTIF(7,1)=ESTIF(7,1)+SH21*AJ
ESTIF(7,6)=ESTIF(7,6)+SH22*AJ
C
ESTIF(2,2)=ESTIF(2,2)+SH1*DER1
ESTIF(2,7)=ESTIF(2,7)+SH1*DER2
ESTIF(7,2)=ESTIF(7,2)+SH2*DER1
ESTIF(7,7)=ESTIF(7,7)+SH2*DER2
C
AUX=-0.75D0*SBAR**(AN-1.D0)*((AN-1.D0)*DSDRR*STDEV*2.D0/SBAR-
$ 1.D0)*AJ
ESTIF(2,3)=ESTIF(2,3)+SH11*AUX
ESTIF(2,8)=ESTIF(2,8)+SH12*AUX
ESTIF(7,3)=ESTIF(7,3)+SH21*AUX
ESTIF(7,8)=ESTIF(7,8)+SH22*AUX
C
AUX=-0.75D0*SBAR**(AN-1.D0)*((AN-1.D0)*DSDTT*STDEV*2.D0/SBAR+
$ 1.D0)*AJ
ESTIF(2,4)=ESTIF(2,4)+SH11*AUX
ESTIF(2,9)=ESTIF(2,9)+SH12*AUX
ESTIF(7,4)=ESTIF(7,4)+SH21*AUX
ESTIF(7,9)=ESTIF(7,9)+SH22*AUX
C
AUX=-0.75D0*(AN-1.D0)*SBAR**(AN-2.D0)*DSDRT*STDEV*2.D0*AJ
ESTIF(2,5)=ESTIF(2,5)+SH11*AUX
ESTIF(2,10)=ESTIF(2,10)+SH12*AUX
ESTIF(7,5)=ESTIF(7,5)+SH21*AUX
ESTIF(7,10)=ESTIF(7,10)+SH22*AUX
C
ESTIF(1,1)=ESTIF(1,1)+SH1*DER1
ESTIF(1,6)=ESTIF(1,6)+SH1*DER2
ESTIF(6,1)=ESTIF(6,1)+SH2*DER1
ESTIF(6,6)=ESTIF(6,6)+SH2*DER2
C
AUX=-AN*AJ/(AN+1.D0)
ESTIF(1,2)=ESTIF(1,2)+SH11*AUX
ESTIF(1,7)=ESTIF(1,7)+SH12*AUX
ESTIF(6,2)=ESTIF(6,2)+SH21*AUX

```

```

ESTIF(6,7)=ESTIF(6,7)+SH22*AUX
C
AUX=-3.D0*(AN-1.D0)*SBAR**(AN-2.D0)*DSDRR*SRT*AJ
ESTIF(1,3)=ESTIF(1,3)+SH11*AUX
ESTIF(1,8)=ESTIF(1,8)+SH12*AUX
ESTIF(6,3)=ESTIF(6,3)+SH21*AUX
ESTIF(6,8)=ESTIF(6,8)+SH22*AUX
C
AUX=-3.D0*(AN-1.D0)*SBAR**(AN-2.D0)*DSDTT*SRT*AJ
ESTIF(1,4)=ESTIF(1,4)+SH11*AUX
ESTIF(1,9)=ESTIF(1,9)+SH12*AUX
ESTIF(6,4)=ESTIF(6,4)+SH21*AUX
ESTIF(6,9)=ESTIF(6,9)+SH22*AUX
C
AUX=-3.D0*SBAR**(AN-1.D0)*((AN-1.D0)*DSDRT*SRT/SBAR+1.D0)*AJ
ESTIF(1,5)=ESTIF(1,5)+SH11*AUX
ESTIF(1,10)=ESTIF(1,10)+SH12*AUX
ESTIF(6,5)=ESTIF(6,5)+SH21*AUX
ESTIF(6,10)=ESTIF(6,10)+SH22*AUX
C
AUX=AN*AJ/(AN+1.D0)
ESTIF(5,3)=ESTIF(5,3)+SH11*AUX
ESTIF(5,8)=ESTIF(5,8)+SH12*AUX
ESTIF(10,3)=ESTIF(10,3)+SH21*AUX
ESTIF(10,8)=ESTIF(10,8)+SH22*AUX
C
ESTIF(5,4)=ESTIF(5,4)-SH11*AJ
ESTIF(5,9)=ESTIF(5,9)-SH12*AJ
ESTIF(10,4)=ESTIF(10,4)-SH21*AJ
ESTIF(10,9)=ESTIF(10,9)-SH22*AJ
C
ESTIF(5,5)=ESTIF(5,5)+SH1*DER1
ESTIF(5,10)=ESTIF(5,10)+SH1*DER2
ESTIF(10,5)=ESTIF(10,5)+SH2*DER1
ESTIF(10,10)=ESTIF(10,10)+SH2*DER2
C
ESTIF(4,4)=ESTIF(4,4)+SH1*DER1
ESTIF(4,9)=ESTIF(4,9)+SH1*DER2
ESTIF(9,4)=ESTIF(9,4)+SH2*DER1
ESTIF(9,9)=ESTIF(9,9)+SH2*DER2
C
AUX=(2.D0*AN+1.D0)*AJ/(AN+1.D0)
ESTIF(4,5)=ESTIF(4,5)+SH11*AUX
ESTIF(4,10)=ESTIF(4,10)+SH12*AUX
ESTIF(9,5)=ESTIF(9,5)+SH21*AUX
ESTIF(9,10)=ESTIF(9,10)+SH22*AUX
C
C*** LOAD VECTOR
C
AUX=(UR/(AN+1.D0)-0.75D0*SBAR**(AN-1.D0)*SRDEV*2.D0)*AJ
ELOAD(3)=ELOAD(3)+SH1*AUX
ELOAD(8)=ELOAD(8)+SH2*AUX
C
AUX=(UR+UTDER-0.75D0*SBAR**(AN-1.D0)*STDEV*2.D0)*AJ
ELOAD(2)=ELOAD(2)+SH1*AUX
ELOAD(7)=ELOAD(7)+SH2*AUX
C
AUX=(-AN*UT/(AN+1.D0)+URDER-3.D0*SBAR**(AN-1.D0)*SRT)*AJ
ELOAD(1)=ELOAD(1)+SH1*AUX
ELOAD(6)=ELOAD(6)+SH2*AUX
C
AUX=(AN*SRR/(AN+1.D0)-STT+SRTDER)*AJ
ELOAD(5)=ELOAD(5)+SH1*AUX
ELOAD(10)=ELOAD(10)+SH2*AUX
C
AUX=(STTDER+(2.D0*AN+1.D0)*SRT/(AN+1.D0))*AJ

```

```

      ELOAD(4)=ELOAD(4)+SH1*AUX
      ELOAD(9)=ELOAD(9)+SH2*AUX
C
  900 CONTINUE
C
C*** IMPOSE BOUNDARY CONDITIONS
C
      IF (IELEM.EQ.1) GOTO 910
      IF (IELEM.EQ.NELEM) GOTO 950
      GOTO 990
C
C*** On theta=0: srt=0, ut=0
C
  910 CONTINUE
      DO 912 J=1,NEVAB
      ESTIF(2,J)=0.D0
      ESTIF(5,J)=0.D0
C
  912 CONTINUE
      ESTIF(2,2)=1.D0
      ESTIF(5,5)=1.D0
C
      ELOAD(2)=UNE(2)
      ELOAD(5)=UNE(5)
C
      GOTO 990
C
C*** On theta=pi: stt=srt=0
C
  950 CONTINUE
      DO 952 J=1,NEVAB
      ESTIF( 9,J)=0.D0
      ESTIF(10,J)=0.D0
  952 CONTINUE
      ESTIF( 9, 9)=1.D0
      ESTIF(10,10)=1.D0
C
      ELOAD( 9)=UNE( 9)
      ELOAD(10)=UNE(10)
C
      GOTO 990
C
  990 CONTINUE
C
      RETURN
  1001 FORMAT(2X,8E14.5)
  1002 FORMAT(2X,15,3X,8E14.5)
C
      END
C
C*****
**
C
      SUBROUTINE KASSEMB(GSTIF,ESTIF,IELEM,LNODS,NTOTV,NEVAB,NELEM,
+ NNODE,NDOFN,KU,KL,LDAB,GLOAD,ELOAD,IFLAG)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION GSTIF(LDAB,NTOTV),ESTIF(NEVAB,NEVAB),
+ LNODS(NELEM,NNODE),KK(100),GLOAD(NTOTV),ELOAD(NEVAB)
C
      DO INODE=1,NNODE
      II=(INODE-1)*NDOFN
      NODE=LNODS(IELEM,INODE)
      DO IDOF=1,NDOFN
      KK(II+IDOF)=(NODE-1)*NDOFN+IDOF
      END DO

```

```

      END DO
C
C*** assemble stiffness matrix
C
      DO IEVAB=1,NEVAB
        I=KK(IEVAB)
        DO JEVAB=1,NEVAB
          J=KK(JEVAB)
          II=KU+1+I-J+KL
          GSTIF(II,J)=GSTIF(II,J)+ESTIF(IEVAB,JEVAB)
        END DO
      END DO
      IF (IFLAG.EQ.0) GOTO 999
C
C*** assemble load vector
C
      DO IEVAB=1,NEVAB
        I=KK(IEVAB)
        GLOAD(I)=GLOAD(I)+ELOAD(IEVAB)
      END DO
C
999  CONTINUE
      RETURN
      END
C
C*****
**
C
      SUBROUTINE NORM(STRESS,C)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      DIMENSION STRESS(NPOIN,7)
C
      COMMON/ONE/NPOIN,NELEM,NNODE,NDOFN,NGAUS,NEVAB,NTOTV,NBAND
C
      SMAX=0.D0
      DO 10 INODE=1,NPOIN
        SMAX=DMAX1(SMAX,STRESS(INODE,7))
10    CONTINUE
      C=1.D0/SMAX
C
      RETURN
      END
C
C*****
**
C
      SUBROUTINE INITIA(A,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N)
      DO 10 I=1,N
10    A(I)=0.D0
      RETURN
      END
C
C*****
**
C
      SUBROUTINE ACOPY(A,B,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(N),B(N)
      DO 10 I=1,N
10    B(I)=A(I)
      RETURN
      END

```

```

C
C*****
**
C
SUBROUTINE MULT (A, B, C, L, M, N)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION A (L, M), B (M, N), C (L, N)

C
DO 20 I=1, L
DO 20 J=1, N
C (I, J)=0. D0
DO 10 K=1, M
10 C (I, J)=C (I, J)+A (I, K) *B (K, J)
20 CONTINUE

C
RETURN
END

C
C*****
**
C
SUBROUTINE UNINI (UN, DT, AMPL)

C
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION UN (NTOTV)

C
COMMON/ONE/NPOIN, NELEM, NNODE, NDOFN, NGAUS, NEVAB, NTOTV, NBAND

C** STRESS TRANSFORMATION (XY TO POLAR)
C
      b1 (s1, s2, s12, t)=0. 5d0* (s1+s2)+0. 5d0* (s1-s2) *dcos (2. d0*t)+
      $                               s12*dsin (2. d0*t)
      b2 (s1, s2, s12, t)=0. 5d0* (s1+s2)-0. 5d0* (s1-s2) *dcos (2. d0*t)-
      $                               s12*dsin (2. d0*t)
      b12 (s1, s2, s12, t)=-0. 5d0* (s1-s2) *dsin (2. d0*t)+s12*dcos (2. d0*t)
      bur (u1, u2, t)=u1*dcos (t)+u2*dsin (t)
      but (u1, u2, t)=-u1*dsin (t)+u2*dcos (t)

C
C*** mode-I solution (sxx, syy, sxy, ux, uy)
C
      F1 (T)=DCOS (0. 5D0*T) * (1. D0-DSIN (0. 5D0*T) *DSIN (1. 5D0*T) )
      F2 (T)=DCOS (0. 5D0*T) * (1. D0+DSIN (0. 5D0*T) *DSIN (1. 5D0*T) )
      F3 (T)=DCOS (0. 5D0*T) *DSIN (0. 5D0*T) *DCOS (1. 5D0*T)
      F4 (T)=DCOS (0. 5D0*T) * (1. D0-DCOS (T) ) *1. 5D0
      F5 (T)=DSIN (0. 5D0*T) * (1. D0-DCOS (T) ) *1. 5D0

C
C
C
      T0=0. d0
      DO 20 NODE=1, NPOIN
      I= (NODE-1) *NDOFN+1
      T=T0+ (NODE-1) *DT

C
      SXX=F1 (T)
      SYY=F2 (T)
      SXY=F3 (T)
      UX =F4 (T)
      UY =F5 (T)

C
      SRR=B1 (SXX, SYY, SXY, T)
      STT=B2 (SXX, SYY, SXY, T)
      SRT=B12 (SXX, SYY, SXY, T)
      UR=BUR (UX, UY, T)
      UT=BUT (UX, UY, T)

C
      UN (I)= UR

```

```

        UN(I+1)=UT
        UN(I+2)=SRR
        UN(I+3)=STT
        UN(I+4)=SRT
C
C 20 CONTINUE
C
C*** Normalize solution ( on theta=0, set Stt=1 )
        INODE=1
        ILOC=(INODE-1)*NDOFN+4
        ANORM=1.DO/UN(ILOC)
C
        DO 30 I=1,NTOTV
        UN(I)=ANORM*UN(I)
30 CONTINUE
C
        RETURN
        END
C
C*****
**
C
        SUBROUTINE FINDIN(AN, STRESS, DISP, LNODS, COORD, WEIGP, POSGP, AIN)
C
        IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
        DIMENSION LNODS (NELEM, NNODE) , COORD (NPOIN) , WEIGP (NGAUS) ,
+POSGP (NGAUS) , STRESS (NPOIN, 7) , DISP (NPOIN, 2)
C
        COMMON/ONE/NPOIN, NELEM, NNODE, NDOFN, NGAUS, NEVAB, NTOTV, NBAND
C
        AIN=0.DO
C
        DO 900 IELEM=1, NELEM
C
        NODE1=LNODS (IELEM, 1)
        NODE2=LNODS (IELEM, 2)
        TH1=COORD (NODE1)
        TH2=COORD (NODE2)
        AJ=0.5D0* (TH2-TH1)
        UR1=DISP (NODE1, 1)
        UR2=DISP (NODE2, 1)
        UT1=DISP (NODE1, 2)
        UT2=DISP (NODE2, 2)
        SRR1=STRESS (NODE1, 1)
        SRR2=STRESS (NODE2, 1)
        STT1=STRESS (NODE1, 2)
        STT2=STRESS (NODE2, 2)
        SRT1=STRESS (NODE1, 3)
        SRT2=STRESS (NODE2, 3)
C
        DO 800 IG=1, NGAUS
C
        XI=POSGP (IG)
C
        SH1=0.5D0* (1.DO-XI)
        SH2=0.5D0* (1.DO+XI)
        DER1=-0.5D0
        DER2=0.5D0
C
        TH=SH1*TH1+SH2*TH2
        UR=SH1*UR1+SH2*UR2
        UT=SH1*UT1+SH2*UT2
        SRR=SH1*SRR1+SH2*SRR2
        STT=SH1*STT1+SH2*STT2
        SRT=SH1*SRT1+SH2*SRT2

```



```

      SBAR=DSQRT (0.75D0* (SRR-STT) * (SRR-STT) +3.D0*SRT*SRT)
C
      URDER= (DER1*UR1+DER2*UR2) /AJ
      UTDER= (DER1*UT1+DER2*UT2) /AJ
C
      AIN=AIN+WEIGP (IG) *AJ* (AN*SBAR** (AN+1.D0) *DCOS (TH) / (AN+1.D0) -
+ ( (SRR* (UT-URDER) -SRT* (UR+UTDER) ) *DSIN (TH) + (SRR*UR+SRT*UT) *
+DCOS (TH) / (AN+1.D0) ) )
C
      800  CONTINUE
C
      900  CONTINUE
C
      RETURN
      END

```

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] J. R. Rice and G. F. Rosengren, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.16, page 1, 1968
  
- [2] J. W. Hutchinson, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.16, page 13, 1968
  
- [3] J. R. Rice, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.35, page 379, 1968
  
- [4] J. R. Rice and Drucker, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol.3, page 19, 1967
  
- [5] G. R. Irwin, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.24, page 361, 1957
  
- [6] C. F. Shih, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.21, page 305, 1981
  
- [7] M. L. Williams, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol.49, page 199, 1959
  
- [8] M. F. Kanninen and C. H. Popelar, “*Advanced Fracture Mechanics*”, Academic Press, 1985
  
- [9] D. Broek, “*Elementary Engineering Fracture Mechanics*”, Martinus Nijhoff Publishers, 1982 (3<sup>rd</sup> edition)
  
- [10] K. Hellan, “*Introduction to Fracture Mechanics*”, McGraw-Hill, 1984

[11] J. F. Knoff, "*Fundamentals of Fracture Mechanics*", Halsted Press, 1974

[12] A. G. Atkins and Y-W. Mai, "*Elastic and Plastic Fracture*", Ellis Horwood Ltd, 1985

[13] V. Z. Parton and E. M. Morozov, "*Elastic-Plastic Fracture Mechanics*", MIR Publishers, 1978

[14] H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irwin, "*The stress analysis of cracks handbook*", Del Research Corp., Hellertown, PA, 1973

[15] G. C. Sih, "*Handbook of stress intensity factors*", Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, 1973



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074077

