

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ**

**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ**

**ΚΥΡΙΑΚΟΣ Κ. ΠΕΡΡΟΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΩΣΤΑΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ**

**ΣΥΝΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΑΜΒΑΤΣΙΚΟΣ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας  
2004



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 3953/1  
Ημερ. Εισ.: 01-10-2004  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2004  
ΠΕΡ

*Στους γονείς μου*

*Κωνσταντίνο και Κατερίνα*

© 2004 ΚΥΡΙΑΚΟΣ Κ. ΠΕΡΡΟΣ

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής

(Επιβλέπων)

Δρ. Κώστας Παπαδημητρίου

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων

Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

Δρ. Σπύρος Καραμάνος

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Κ. Παπαδημητρίου για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του κατά τη διάρκεια της εργασίας μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον συνεπιβλέποντα μεταδιδακτορικό ερευνητή κ. Δ. Βαμβάτσικο για την υπερπολύτιμη βοήθεια που μου έδωσε πρόθυμα όποτε του τη ζήτησα.

Κυριάκος Πέρρος

## Περίληψη

Η ανάλυση μη γραμμικών φαινομένων σε κατασκευές μεγάλης κλίμακας είναι αναμφισβήτητα μια δύσκολη, αλλά παράλληλα ενδιαφέρουσα διαδικασία. Η δυσκολία των αναλύσεων αυτών έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις στη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων αυτών, αλλά και στο γεγονός ότι η προσομοίωση τους σε υπολογιστικά μοντέλα πολλών βαθμών ελευθερίας προϋποθέτει πολύ μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη απλών μοντέλων, λίγων βαθμών ελευθερίας, με στόχο την ανάλυση μη γραμμικών φαινομένων τα οποία παρουσιάζονται σε πραγματικές κατασκευές, όπως είναι τα συστήματα ανάρτησης οχημάτων και οι γέφυρες.

Αρχικά γίνεται μια καθαρά γραμμική δυναμική ανάλυση μοντέλων πολλών βαθμών ελευθερίας με τη μέθοδο των ιδιομορφών. Για τον σκοπό χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS. Στη συνέχεια πραγματοποιείται δυναμική ανάλυση σε ένα γραμμικό μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας, σε ένα μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας με τμηματικά γραμμική ακαμψία και τέλος σε ένα σύστημα τριών βαθμών ελευθερίας με μη γραμμική απόσβεση. Για την αριθμητική ανάλυση αυτών των συστημάτων χρησιμοποιήθηκαν το υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων OpenSees καθώς και το λογισμικό MATLAB.

Η πρώτη ανάλυση αφορά σε μορφική ανάλυση και σε δυναμική ανάλυση χρονικής ιστορίας. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για αυτή την ανάλυση είναι: η πολλαπλών ανοιγμάτων γέφυρα της Καβάλας και η κρεμαστή γέφυρα της Χαλκίδας. Στο πρώτο στάδιο υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές των κατασκευών. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες αυτές γίνεται μια δυναμική ανάλυση χρονικής ιστορίας, και συγκεκριμένα γίνεται ανάλυση απόκρισης σε σεισμική διέγερση για τα δυο αυτά μοντέλα.

Η δεύτερη ανάλυση των μικρών μοντέλων αφορά σε δυναμική ανάλυση χρονικής ιστορίας υπό σεισμική διέγερση, αλλά και υπό περιοδική διέγερση και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με τη μορφή φασμάτων μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων, καθώς και δυνάμεων στα διάφορα στοιχεία του εκάστοτε μοντέλου. Το πρώτο μοντέλο είναι γραμμικό, ενός βαθμού ελευθερίας και η ανάλυση αυτή πραγματοποιήθηκε για τον έλεγχο των μεθόδων και των υπολογιστικών πακέτων που

χρησιμοποιήθηκαν, αφού τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής είναι γνωστά από τη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια το γραμμικό αυτό σύστημα μετατράπηκε σε σύστημα με τμηματικά γραμμική ακαμψία με τη προσθήκη ενός περιοριστή της κίνησης της μάζας. Ο λόγος για τον οποίον έγινε αυτό είναι η μοντελοποίηση μη γραμμικών φαινομένων τα οποία παρουσιάζονται σε πραγματικές κατασκευές όπως είναι τα συστήματα ανάρτησης οχημάτων και οι γέφυρες (πχ γέφυρα Καβάλας). Στην περίπτωση της προσομοίωσης αναρτήσεων οχημάτων η δυναμική ανάλυση υπό σεισμική διέγερση έχει νόημα, καθώς η σεισμική διέγερση θα μπορούσε να παραλληλιστεί με το προφίλ οδοστρώματος.

Τέλος στο γραμμικό μοντέλο προστέθηκαν δυο αποσβεστήρες με μη γραμμική απόσβεση. Ανάλογες τεχνικές χρησιμοποιούνται και σε γέφυρες (πχ γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου), αλλά προφανώς και σε αναρτήσεις οχημάτων για την απόσβεση των μετατοπίσεων και των κραδασμών. Και για αυτό το απλουστευμένο σύστημα έγινε δυναμική ανάλυση υπό περιοδική διέγερση και υπό σεισμική διέγερση.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## Κεφάλαιο 1: Μορφική ανάλυση

1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Περιγραφή του συστήματος	2
1.3	Το πρόβλημα των ιδιοτιμών	2
1.4	Η μέθοδος Subspace Iteration	5
1.5	Η μέθοδος Householder	6
1.6	Ανάλυση ιδιομορφών	10
1.7	Εξισώσεις κίνησης με διέγερση βάσης	12
1.8	Εφαρμογές μορφικής ανάλυσης	14
	Εφαρμογή 1: Γέφυρα Καβάλας	14
	Εφαρμογή 2: Γέφυρα Χαλκίδας	22

## Κεφάλαιο 2: Ταλάντωση γραμμικού συστήματος

2.1	Περιγραφή του μοντέλου	29
2.2	Εξίσωση κίνησης	31
2.3	Αριθμητική επίλυση εξισώσεων κίνησης – Αποτελέσματα	32
2.3.1	Απόκριση σε περιοδική διέγερση	32
2.3.2	Απόκριση σε σεισμική διέγερση	36
2.3.3	Σχόλια – Παρατηρήσεις	42



## Κεφάλαιο 3: Ταλάντωση συστήματος με τμηματικά γραμμική ακαμψία

3.1	Περιγραφή του μοντέλου	43
3.2	Εξίσωση κίνησης	45
3.3	Ιδιοσυχνότητες	49
3.4	Ολοκλήρωση εξισώσεων κίνησης – Αποτελέσματα	50
3.4.1	Περιοδική διέγερση	50
3.4.2	Σχόλια – Παρατηρήσεις	55
3.4.3	Σεισμική διέγερση	57
3.4.3.1	Συμμετρικό Σύστημα	57
3.4.3.2	Σχόλια – Παρατηρήσεις	63
3.4.3.3	Ασύμμετρο Σύστημα	63
3.4.3.4	Σχόλια – Παρατηρήσεις	68

## Κεφάλαιο 4: Ταλάντωση συστήματος με μη γραμμική απόσβεση

4.1	Περιγραφή του μοντέλου	69
4.2	Εξίσωση κίνησης	71
4.3	Ολοκλήρωση εξισώσεων κίνησης – Αποτελέσματα	74
4.3.1	Περιοδική διέγερση	74
4.3.2	Σχόλια – Παρατηρήσεις	82
4.3.3	Σεισμική διέγερση	83
4.3.3.1	Συμμετρικό σύστημα	83
4.3.3.2	Σχόλια-Παρατηρήσεις	91
4.3.3.3	Ασύμμετρο σύστημα	90
4.3.3.4	Σχόλια-Παρατηρήσεις	96

## Κεφάλαιο 5: Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

97

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

#### 1.1 Εισαγωγή

Η γραμμική δυναμική ανάλυση με τη χρήση της μεθόδου της υπέρθεσης των ιδιομορφών ενός συστήματος είναι υπολογιστικά ανέξοδη, ενώ παράλληλα μπορεί να δώσει πολύ χρήσιμα στοιχεία για τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Με τις σύγχρονες μεθόδους υπολογισμού ιδιοτιμών - ιδιοσυχνοτήτων, το υπολογιστικό κόστος για την απόκτηση μιας επαρκούς βάσης ιδιολύσεων δεν είναι υπερβολικό. Επίσης το υπολογιστικό κόστος για την απόκτηση της υπόλοιπης δυναμικής ανάλυσης είναι σχετικά μικρό, ιδιαίτερα αν συγκριθεί με το υπολογιστικό κόστος των μεθόδων απευθείας ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης που χρησιμοποιούνται για γενικά μη γραμμικά προβλήματα.

Η βασική ιδέα της υπέρθεσης ιδιομορφών είναι η έκφραση της απόκρισης του συστήματος συναρτήσει ενός μικρού σχετικά αριθμού ιδιομορφών. Η ορθογωνικότητα των ιδιομορφών δημιουργεί ένα μη συζευγμένο σύστημα. Επίσης συνήθως μόνο λίγες ιδιοσυχνότητες μας ενδιαφέρουν κάθε φορά. Η μέθοδος αυτή μπορεί να έχει μια περιορισμένη επέκταση σε μη γραμμικά προβλήματα, αλλά η ορθογωνικότητα και η υπέρθεση ισχύουν μόνο για γραμμικά προβλήματα.

Με τη μέθοδο αυτή μπορούν να γίνουν οι παρακάτω αναλύσεις:

- Δυναμική μορφική ανάλυση χρονικής ιστορίας (Modal Dynamic)
- Ανάλυση φάσματος απόκρισης (Response Spectrum)
- Ανάλυση αρμονικής απόκρισης μόνιμης κατάστασης
- Ανάλυση στοχαστικής απόκρισης

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την πρώτη ανάλυση.

## 1.2 Περιγραφή του συστήματος

Η γενική εξίσωση η οποία περιγράφει την κίνηση ενός διακριτού συστήματος πολλών βαθμών ελευθερίας είναι η εξής (π.χ. Chopra 1995, ABAQUS 2002, Νατσιάβας 2001):

$$\mathbf{M} \underline{\ddot{y}} + \mathbf{C} \underline{\dot{y}} + \mathbf{K} \underline{y} = \underline{f}(t) \quad (1.1)$$

Όπου  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας αντίστοιχα,  $\underline{y}$  είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος,  $\underline{\dot{y}}$  το διάνυσμα των ταχυτήτων,  $\underline{\ddot{y}}$  το διάνυσμα των επιταχύνσεων, και  $\underline{f}$  είναι το διάνυσμα της διέγερσης. Τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας είναι συμμετρικά, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \mathbf{K} = \mathbf{K}^T$$

Στην ειδική περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση, άρα το διάνυσμα της διέγερσης μηδενίζεται, ενώ το αίτιο της ταλάντωσης προέρχεται από τις αρχικές συνθήκες  $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$  και  $\underline{\dot{y}}(0) = \underline{v}_0$ .

## 1.3 Το πρόβλημα των ιδιοτιμών

Ας εξετάσουμε την περίπτωση της μορφικής ανάλυσης σε συστήματα χωρίς απόσβεση. Η εξισώσεις κίνησης γίνονται τώρα:

$$\mathbf{M} \underline{\ddot{y}} + \mathbf{K} \underline{y} = \underline{f}(t) \quad (1.2)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των ιδιομορφών, θεωρείται ότι  $\underline{f}(t) = \underline{0}$ . Έτσι επιλύουμε το ιδιοπρόβλημα που αντιστοιχεί στη εξίσωση:

$$\mathbf{M} \underline{\ddot{y}} + \mathbf{K} \underline{y} = \underline{0} \quad (1.3)$$

Η εξίσωση (1.3) αποτελεί ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, της οποίας η λύση έχει τη μορφή:

$$\underline{y}(t) = \underline{\phi} \cos(\omega t - \theta) \quad (1.4)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1.4) στην σχέση (1.3) έχουμε:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \underline{\phi} \cos(\omega t - \theta) = \underline{0} \quad (1.5)$$

Άρα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \underline{\phi} = \underline{0}$$

Η οποία αντιπροσωπεύει το λεγόμενο ιδιοπρόβλημα,  $\underline{\phi}$  είναι οι ιδιομορφές του προβλήματος και  $\omega$  οι ιδιοσυχνότητες. Για να έχει το παραπάνω σύστημα μη μηδενική λύση πρέπει να ισχύει:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (1.6)$$

Από την τελευταία σχέση, αναπτύσσοντας την ορίζουσα, προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, του οποίου οι ρίζες είναι οι ιδιοσυχνότητες του προβλήματος. Εν συνεχεία για κάθε μια ιδιοσυχνότητα μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη ιδιόμορφη.

Οι ιδιομορφές μπορούν να δοθούν και σε μητρική μορφή, όπως και οι ιδιοσυχνότητες:

$$\Phi = \left[ \begin{array}{cccc} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_n \end{array} \right]$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Έτσι το ιδιοπρόβλημα γίνεται σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega^2$$

Επίσης για τις ιδιομορφές ισχύουν συνθήκες ορθογωνικότητας:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2$$

## 1.4 Η μέθοδος Subspace Iteration

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία βασίζεται η μέθοδος subspace iteration είναι η ‘simultaneous inverse power iteration’ (ABAQUS 2002). Δημιουργείται ένας μικρός αριθμός διανυσμάτων βάσης ορίζοντας έναν ‘υποχώρο’, ο οποίος μετασχηματίζεται μέσω των επαναλήψεων στον διανυσματικό χώρο των πρώτων ιδιομορφών του συστήματος. Υποθέτουμε ότι στην  $i$  επανάληψη έχουμε  $m$  διανύσματα  $\mathbf{v}_i^n$ ,  $n=1,2,\dots,m$ , όπου το  $m$  είναι μικρότερο από τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου. Αυτά τα διανύσματα είναι τα διανύσματα βάσης τα οποία δημιουργούν έναν  $m$ -διάστατο υποχώρο και τοποθετούνται στο μητρώο  $\mathbf{V}_i$ .

Στο πρώτο βήμα της μεθόδου δημιουργούνται νέα διανύσματα βάσης λύνοντας την εξίσωση:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{V}}_{i+1} = \mathbf{M} \mathbf{V}_i \quad (1.7)$$

Εν συνεχεία τα μητρώα ακαμψίας και μάζας της κατασκευής προβάλλονται στον διανυσματικό υποχώρο:

$$\mathbf{K}^* = \hat{\mathbf{V}}_{i+1}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{V}}_{i+1}$$

$$\mathbf{M}^* = \hat{\mathbf{V}}_{i+1}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{V}}_{i+1}$$

καθορίζοντας έτσι τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}^*$  και ακαμψίας  $\mathbf{K}^*$  στον υποχώρο αυτόν. Στη συνέχεια επιλύεται το ιδιοπρόβλημα:

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M}^*) \Phi = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

εξολοκλήρου στον υποχώρο χρησιμοποιώντας την μέθοδο ‘Householder’ (Ακριβής και Δουγαλής 1997), η οποία αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Τώρα, αφού τα ιδιοδιανύσματα έχουν οριστεί στον υποχώρο, μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε ιδιοδιανύσματα του πραγματικού χώρου για να προσδιορίσουμε το μητρώο  $V$  για την επόμενη επανάληψη:

$$V_{i+1} = \hat{V}_{i+1} \Phi$$

Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών σε περιορισμένο διανυσματικό χώρο, κάτι που επιταχύνει ραγδαία τη σύγκλιση των ιδιοδιανυσμάτων σε ολόκληρο τον διανυσματικό χώρο. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης και η αρχική τους εκτίμηση είναι πολύ σημαντική για μια γρήγορη επίλυση. Ο ρυθμός σύγκλισης της εκάστοτε ιδιοτιμής είναι ανάλογος του  $\frac{\omega_i^2}{\omega_{m+1}^2}$ , όπου  $\omega_{m+1}^2$  είναι η ιδιοτιμή του ιδιοδιανύσματος μετά τα  $m$  πρώτα που δημιουργούν τον υποχώρο.

## 1.5 Η μέθοδος Householder

Η μέθοδος ‘Householder’ (Ακριβής και Δουγαλής 1996) χρησιμοποιείται για να μετατρέψει ένα μητρώο σε έναν συμμετρικό τριδιαγώνιο πίνακα. Το πρώτο βήμα είναι να μετατραπεί η εξίσωση (1.8) στη μορφή:

$$(A - \omega^2 I)\Phi = 0$$

Αυτό γίνεται κάνοντας ανάλυση Cholesky στο μητρώο  $M^*$  και πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και από αριστερά το μητρώο  $K^*$  με το αντίστροφο του κάτω τριγωνικού πίνακα που παίρνουμε:

$$A = [L^{-1}]K^*[L^T]^{-1}$$

όπου

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{M}^*$$

Για να διατηρηθεί η συμμετρία του μητρώου  $\mathbf{M}^*$  είναι απαραίτητο η ανάλυση του να δίνει δυο μητρώα τα οποία να το ένα ανάστροφο του άλλου. Η ανάλυση Cholesky παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα, αλλά εισάγει και την απαίτηση το μητρώο  $\mathbf{M}^*$  να είναι θετικά ορισμένο. Το μητρώο  $\mathbf{M}^*$  πρέπει πάντα να είναι θετικά ορισμένο (διότι και το μητρώο  $\mathbf{M}$  είναι θετικά ορισμένο στις περιπτώσεις που εξετάζουμε) αν τα διανύσματα βάσης που δημιουργούν τον υποχώρο είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Στην πράξη η επιλογή της αρχικής εκτίμησης για τα διανύσματα βάσης συνήθως ικανοποιούν αυτή την απαίτηση, αν και υπάρχουν περιπτώσεις που αυτό δεν ισχύει. Σε αυτήν την περίπτωση μειώνουμε τις διαστάσεις του υποχώρου για να δημιουργήσουμε ένα θετικά ορισμένο μητρώο  $\mathbf{M}^*$ .

Ο μετασχηματισμός ‘Householder’ ξεκινά με τον πίνακα  $\mathbf{A}$  και μηδενίζει τα μη τριδιαγώνια στοιχεία σύμφωνα με τον μετασχηματισμό:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{U}_1^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{U}_1 \quad (1.9)$$

Το μητρώο  $\mathbf{U}$  είναι της μορφής:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & [\mathbf{H}] \end{bmatrix}$$



Για τον πρώτο μετασχηματισμό το μητρώο  $\mathbf{H}$  είναι της ίδιας τάξης με τα μητρώα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{U}$ , δηλαδή  $m \times m$ , οι διαστάσεις του υποχώρου. Μετά από κάθε μετασχηματισμό όμως, η τάξη του μητρώου  $\mathbf{H}$  μειώνεται κατά ένα, και τα υπόλοιπα στοιχεία του  $\mathbf{U}$  γίνονται μονάδα στη διαγώνιο, ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία μηδενίζονται.

Το μητρώο  $\mathbf{H}$  δημιουργείται σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Στην  $k$  επανάληψη γράψε την  $k$  στήλη του  $\mathbf{A}$  κάτω από την διαγώνιο ως εξής:

$$\underline{X} = [a_{k+1,k}, a_{k+2,k}, \dots, a_{n,k}]^T$$

2. Υπολόγισε τη νόρμα:  $|\underline{X}| = \sqrt{\underline{X}^T \cdot \underline{X}}$

3. Όρισε το διάνυσμα:

$$\underline{V} = [a_{k+1,k}] + |\underline{X}| [a_{k+1,k}, \dots, a_{n,k}]^T$$

4. Δημιούργησε το μητρώο  $\mathbf{H}$ :

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{I}] - 2 \frac{1}{\underline{V}^T \cdot \underline{V}} \underline{V}^T \cdot \underline{V}$$

Η μέθοδος ‘Householder’ δημιουργεί έναν συμμετρικό τριδιαγώνιο πίνακα, ο οποίος έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον αρχικό πίνακα, διότι ο μετασχηματισμός (1.9) δεν αλλάζει τις ιδιοτιμές.

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του τριδιαγώνιου πίνακα που δημιουργήθηκε. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μέθοδο Q-R. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, το μητρώο  $\mathbf{A}$  (το οποίο κάναμε τριδιαγώνιο αν και κάτι τέτοιο δεν προαπαιτείται για τη μέθοδο) παραγοντοποιείται στα μητρώα  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ , όπου το μητρώο  $\mathbf{Q}$  είναι ορθοκανονικό, δηλαδή  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , ενώ το μητρώο  $\mathbf{R}$  είναι άνω τριγωνικό.

Το επόμενο μητρώο στην επανάληψη δημιουργείται πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και από δεξιά το μητρώο  $\mathbf{A}$  με το  $\mathbf{Q}$ :

$$[\mathbf{A}]_{i+1} = [\mathbf{Q}]_i^T [\mathbf{A}]_i [\mathbf{Q}]_i = [\mathbf{Q}]_i^T [\mathbf{Q}]_i [\mathbf{R}]_i [\mathbf{Q}]_i = [\mathbf{R}]_i [\mathbf{Q}]_i$$

Επειδή το  $\mathbf{Q}$  είναι ορθοκανονικό, δεν επηρεάζονται οι ιδιοτιμές. Με αυτή τη διαδικασία τα μη διαγώνια στοιχεία του  $\mathbf{A}$  τείνουν να μηδενιστούν και τα διαγώνια στοιχεία τείνουν να ταυτιστούν με τις ιδιοτιμές. Για να επιταχυνθεί η σύγκλιση, εισάγεται η μέθοδος της μετάθεσης. Έτσι ακολουθείται η παρακάτω επαναληπτική διαδικασία:

$$[\mathbf{B}]_i = [\mathbf{A}]_i - a_i [\mathbf{I}]$$

$$[\mathbf{Q}]_i [\mathbf{R}]_i = [\mathbf{B}]_i$$

$$[\mathbf{B}]_{i+1} = [\mathbf{R}]_i [\mathbf{Q}]_i$$

$$[\mathbf{A}]_{i+1} = [\mathbf{B}]_{i+1} + a_i [\mathbf{I}]$$

Η μετάθεση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέχρι η επανάληψη να συγκλίνει σε μια ιδιοτιμή. Όταν αρχίσει να συγκλίνει, τότε η παράμετρος  $a$  μπορεί να τεθεί ίση με την αναμενόμενη ιδιοτιμή. Αυτό θα οδηγήσει σε σημαντική αύξηση του ρυθμού σύγκλισης της όλης διαδικασίας. Αν όμως η μετάθεση γίνει πολύ σύντομα, με μια τιμή της παραμέτρου  $a$  η οποία δεν είναι αρκετά κοντά στην ιδιοτιμή, τότε είναι πολύ πιθανό η διαδικασία να συγκλίνει σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Η μέθοδος Q-R συγκλίνει στις ιδιοτιμές με αύξουσα σειρά. Μόλις υπολογιστεί μια ιδιοτιμή η τάξη του μητρώου μπορεί να ελαττωθεί κατά ένα.

Το τελικό βήμα, αφού έχουν υπολογιστεί οι ιδιοτιμές είναι να υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα χρησιμοποιώντας την μέθοδο 'inverse power'. Δεδομένου οποιουδήποτε διανύσματος στο δεξί μέλος:

$$[[\mathbf{K}^*] - \lambda[\mathbf{M}^*]]\underline{\phi} = \underline{V}$$

όπου  $\lambda$  είναι η εκάστοτε ιδιοτιμή και  $V$  είναι οποιοδήποτε διάνυσμα.

## 1.6 Ανάλυση ιδιομορφών

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές του μοντέλου, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση μετατόπισης με τον εξής μετασχηματισμό:

$$\underline{y}(t) = \sum_{r=1}^m \underline{\phi}_r \xi_r(t) = \mathbf{\Phi} \underline{\xi}(t) \quad (1.10)$$

όπου  $\xi_r(t)$  είναι οι μορφικές συντεταγμένες, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθεί ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο δεν είναι συζευγμένο. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.9) στην εξίσωση (1.1) έχουμε:

$$\underline{\ddot{\xi}}(t) + \mathbf{C}^* \underline{\dot{\xi}}(t) + \mathbf{\Omega}^2 \underline{\xi}(t) = \mathbf{\Phi}^T \underline{f}(t) \quad (1.11)$$

Όπου ο  $\mathbf{C}^*$  είναι γενικά ένα μη διαγώνιο μητρώο:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi}$$

Στην γενική περίπτωση που το μητρώο  $\mathbf{C}^*$  δεν είναι διαγώνιο, τότε το σύστημα των εξισώσεων παραμένει συζευγμένο ως προς τις μορφικές ταχύτητες  $\underline{\xi}(t)$ . Αν υποθέσουμε ότι το μητρώο  $\mathbf{C}^*$  είναι διαγώνιο και στο μοντέλο υπάρχει κλασική

απόσβεση (π.χ. Chopra 1995), τότε μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα πλήρως μη συζευγμένο σύστημα εξισώσεων:

$$\mathbf{C}^* = \frac{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\zeta_m \omega_m \end{bmatrix}$$

όπου:

$$\zeta_r = \frac{C_r}{2M_r \omega_r} \text{ το ποσοστό απόσβεσης της } r \text{ ιδιομορφής}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K_r}{M_r}} \text{ η ιδιοσυχνότητα που αντιστοιχεί στην } r \text{ ιδιομορφή}$$

Έτσι καταλήγουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων, όπου κάθε εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ξεχωριστά. Η  $r$ -μορφική εξίσωση ( $r=1,2,\dots,m$ ) έχει την μορφή:

$$\ddot{\xi}_r(t) + 2\zeta_r \omega_r \dot{\xi}_r(t) + \omega_r^2 \xi_r(t) = \underline{\phi}_r^T \underline{f}(t) \quad (1.12)$$

## 1.7 Εξισώσεις κίνησης με διέγερση βάσης

Στην περίπτωση που μια γραμμικά ελαστική κατασκευή στηρίζεται σε περισσότερα από ένα σημεία και υπόκειται σε διαφορετικές διεγέρσεις, η διατύπωση της απόκρισης σε κάθε σημείο εξαρτάται από το γεγονός ότι οι πολλαπλές στηρίξεις κινούνται ανεξάρτητα η μια από την άλλη, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ημιστατικές παραμορφώσεις, οι οποίες πρέπει να συνυπολογιστούν στην ήδη υπάρχουσα δυναμική απόκριση.

Για να καταστρώσουμε τις εξισώσεις κίνησης στην περίπτωση διέγερσης της βάσης της κατασκευής, πρέπει να διαχωρίσουμε το διάνυσμα της μετατόπισης ως εξής:

$$\underline{y} = \begin{Bmatrix} \underline{y}_s \\ \underline{y}_g \end{Bmatrix}$$

όπου  $\underline{y}_s$  είναι το διάνυσμα της άγνωστης μετατόπισης και  $\underline{y}_g$  είναι η γνωστή μετατόπιση στις βάσεις. Σε περίπτωση σεισμικής διέγερσης, για παράδειγμα, το διάνυσμα  $\underline{y}_g$  αποτελείται από τις γνωστές μετατοπίσεις στις στηρίξεις της κατασκευής.

Έτσι οι εξισώσεις κίνησης γίνονται τώρα:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sg} \\ \mathbf{M}_{gs} & \mathbf{M}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{y}}_s(t) \\ \underline{\ddot{y}}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{y}}_s(t) \\ \underline{\dot{y}}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sg} \\ \mathbf{K}_{gs} & \mathbf{K}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{y}_s(t) \\ \underline{y}_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

όπου οι εξωτερικές δυνάμεις θεωρούνται μηδέν. Η εξίσωση που αναπαριστά τη κίνηση των βαθμών ελευθερίας, εκτός αυτών της βάσης, μπορεί να δοθεί:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{y}}_s(t) \\ \underline{\ddot{y}}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{y}}_s(t) \\ \underline{\dot{y}}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{y}_s(t) \\ \underline{y}_g(t) \end{Bmatrix} = \underline{0} \quad (1.14)$$

Μια έκφραση για την περίπτωση της σεισμικής διέγερσης σε μια κατασκευή δημιουργείται αν διαχωρίσουμε την απόκριση της βάσης σε αυτή τη διέγερση, από την απόκριση των υπόλοιπων βαθμών ελευθερίας. Έτσι η εξίσωση κίνησης της κατασκευής που διεγείρεται στην βάση της είναι:

$$\mathbf{M}_{ss} \ddot{\underline{y}}_s + \mathbf{C}_{ss} \dot{\underline{y}}_s + \mathbf{K}_{ss} \underline{y}_s = -\mathbf{M}_{sg} \ddot{\underline{z}}_g - \mathbf{C}_{sg} \dot{\underline{z}}_g - \mathbf{K}_{sg} \underline{z}_g \quad (1.15)$$

όπου  $\mathbf{M}_{ss}$ ,  $\mathbf{C}_{ss}$ ,  $\mathbf{K}_{ss}$  είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας του συστήματος,  $\underline{y}_s \equiv \underline{y}$  είναι το διάνυσμα της μετατόπισης στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος,  $\underline{z}_g \equiv \underline{z}$  το διάνυσμα της δεδομένης μετατόπισης της βάσης, και  $\mathbf{M}_{sg}$ ,  $\mathbf{C}_{sg}$ ,  $\mathbf{K}_{sg}$  τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και ακαμψίας που συνδέουν τους βαθμούς ελευθερίας της βάσης με τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

Η επίλυση αυτού του συστήματος μπορεί να απλοποιηθεί αν η συνολική απόκριση εκφραστεί σαν έναν συνδυασμό του διανύσματος των ημιστατικών μετατοπίσεων  $\underline{s}$  και του διανύσματος της δυναμικής απόκρισης  $\underline{x}$ :

$$\underline{y}_s = \underline{s} + \underline{x} \quad (1.16)$$

Η ψευδοστατική απόκριση αναπαριστά τη στατική συνεισφορά της ανεξάρτητης κίνησης της βάσης στην απόκριση του συστήματος και μπορούμε να την υπολογίσουμε θέτοντας όλες τις χρονικές παραγώγους στην εξίσωση (1.14) ίσες με το μηδέν και θεωρώντας ότι οι ολικές μετατοπίσεις ταυτίζονται με τις ημιστατικές ( $\underline{y} = \underline{s}$ ):

$$\underline{s} = \mathbf{R} \underline{z}$$

όπου  $\mathbf{R}$  είναι ο ψευδοστατικός πίνακας, ο οποίος εκφράζει την απόκριση σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας λόγω μοναδιαίας κίνησης της βάσης και δίδεται από τη σχέση:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_{sf}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την σχέση (1.15) στην εξίσωση κίνησης (1.14) μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση κίνησης για την δυναμική απόκριση  $\underline{x}$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{x}} + \mathbf{C} \dot{\underline{x}} + \mathbf{K} \underline{x} = -(\mathbf{M} \mathbf{R} + \mathbf{M}_{sg}) \ddot{\underline{z}} - (\mathbf{C} \mathbf{R} + \mathbf{C}_{sg}) \dot{\underline{z}} \quad (1.17)$$

## 1.8 Εφαρμογές μορφικής ανάλυσης

### Εφαρμογή 1: Γέφυρα Καβάλας

Η γέφυρα αυτή είναι μια κατασκευή που αποτελείται από δυο κλάδους από μπετόν, το μήκος της φτάνει τα 180 μέτρα, ενώ το πλάτος κάθε κλάδου φτάνει τα 13 μέτρα και αποτελείται από τέσσερα ανοίγματα. Οι τρεις κολώνες είναι τετραγωνικής διατομής και το ύψος τους είναι 52 μέτρα για την κεντρική και 30 για τις άλλες δυο. Ένα χαρακτηριστικό σημείο της κατασκευής αυτής είναι το γεγονός ότι το κατάστρωμα δεν συνδέεται άμεσα με τις κολώνες και τα ακρόβαθρα, αλλά 'πατάει' πάνω σε ειδικά ελαστομερή εφέδρανα τετραγωνικής διατομής.



**Σχήμα 1.1:** Η γέφυρα της Καβάλας

Για να γίνει μορφική ανάλυση αυτής της κατασκευής δημιουργήθηκε ένα τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (Παπαδόπουλος, 2001) για το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS (<http://www.abaqus.com/>). Για την προσομοίωση των διάφορων στοιχείων της γέφυρας χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα γραμμικά στοιχεία δοκών. Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι οι κολώνες και τα εφόδρανα στις άκρες του καταστρώματος είναι πακτωμένες στο έδαφος.

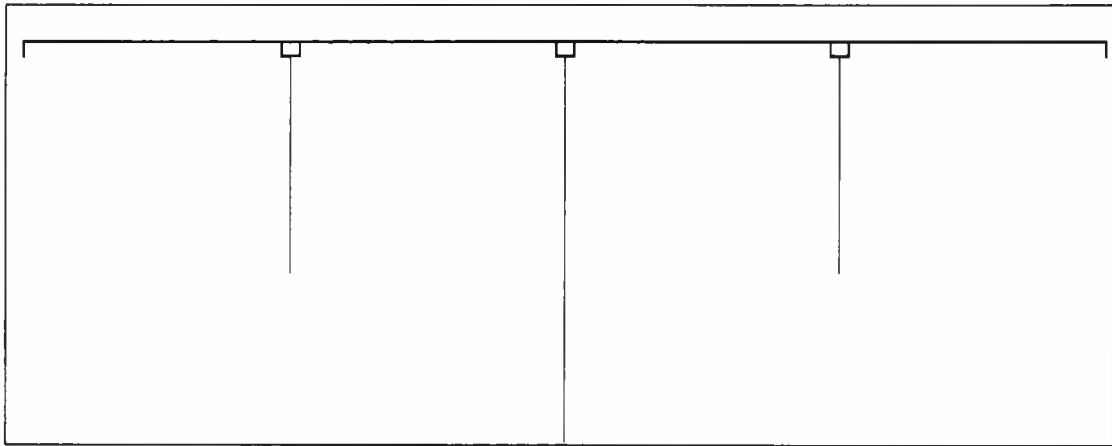
Η δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής μελετήθηκε υπολογιστικά κάνοντας ανάλυση ιδιοτιμών με τη μέθοδο Subspace Iteration στο υπολογιστικό πακέτο ABAQUS. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής και συγκεκριμένα οι 30 πρώτες ιδιοσυχνότητες της κατασκευής:



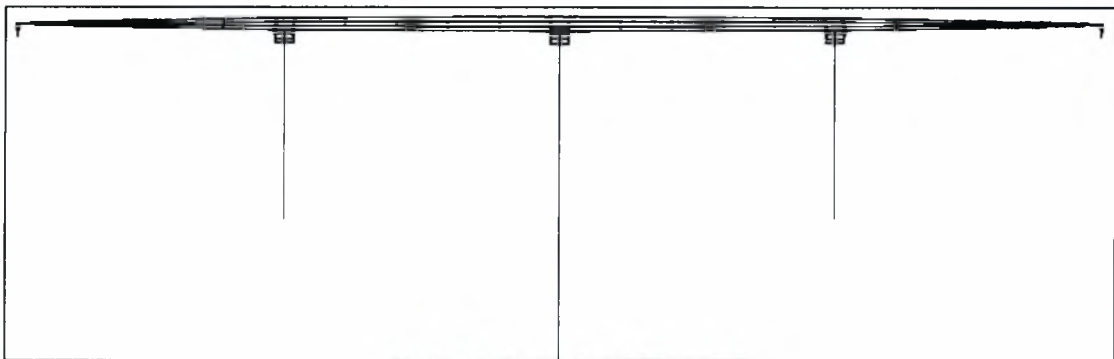
**Πίνακας 1.1:** Ιδιοσυχνότητες του προσομοιώματος της γέφυρας της Καβάλας

ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ	ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (RAD/SEC)	ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (Hz)
1	3,8	0,61
2	4,5	0,72
3	5,2	0,83
4	7,9	1,26
5	12,7	2,02
6	13,2	2,10
7	13,7	2,18
8	16,3	2,60
9	16,4	2,62
10	18,4	2,93
11	19,1	3,04
12	20,9	3,33
13	26,5	4,22
14	27,8	4,42
15	30,9	4,92
16	31,7	5,05
17	31,8	5,07
18	33,8	5,38
19	37,1	5,91
20	37,7	6,00
21	38,9	6,19
22	42,6	6,78
23	42,8	6,80
24	44,9	7,14
25	46,8	7,45
26	47,3	7,53
27	48,9	7,79
28	49,9	7,93
29	50,8	8,08
30	52,2	8,30

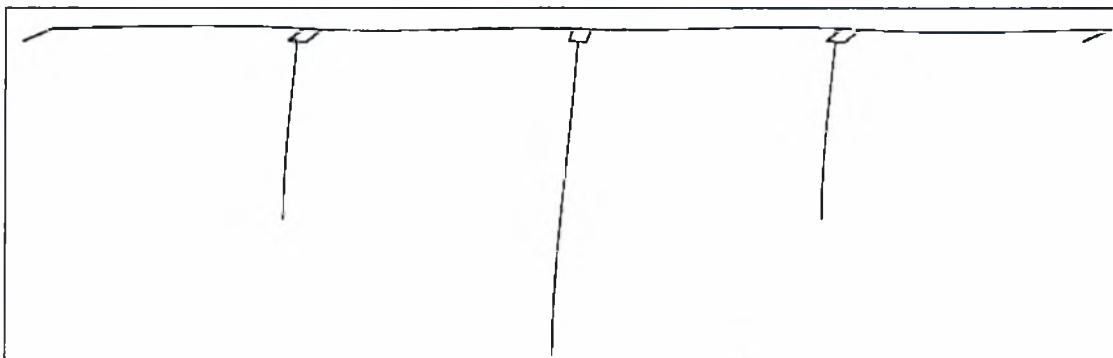
Στα Σχήματα 1.2 έως 1.12 φαίνονται η πλάγια όψη του μοντέλου της γέφυρας της Καβάλας και οι δέκα πρώτες ιδιομορφές.



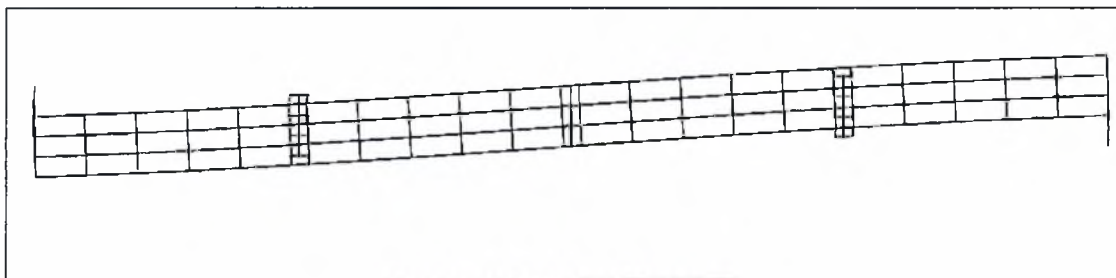
Σχήμα 1.2: Πλάγια όψη του μοντέλου της γέφυρας της Καβάλας



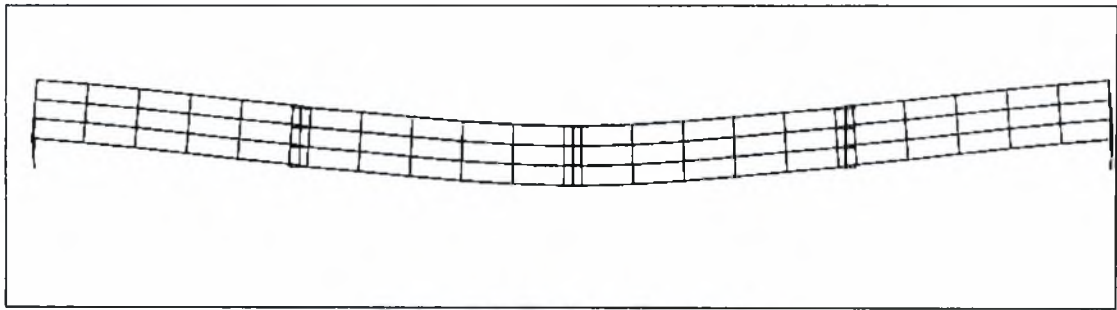
Σχήμα 1.3: Πρώτη ιδιομορφή



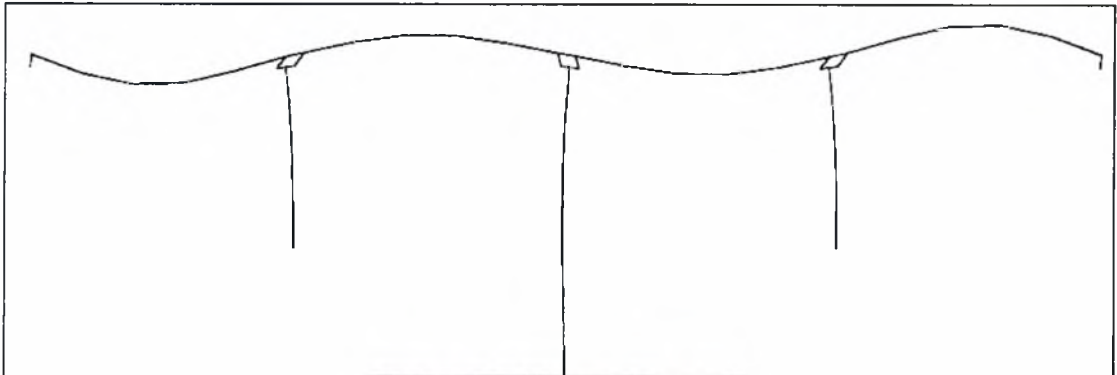
Σχήμα 1.4: Δεύτερη ιδιομορφή



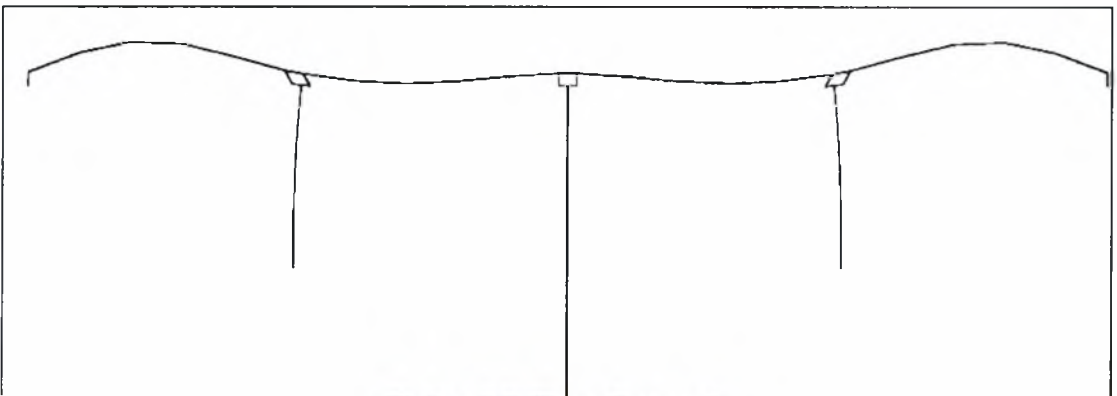
Σχήμα 1.5: Τρίτη ιδιομορφή



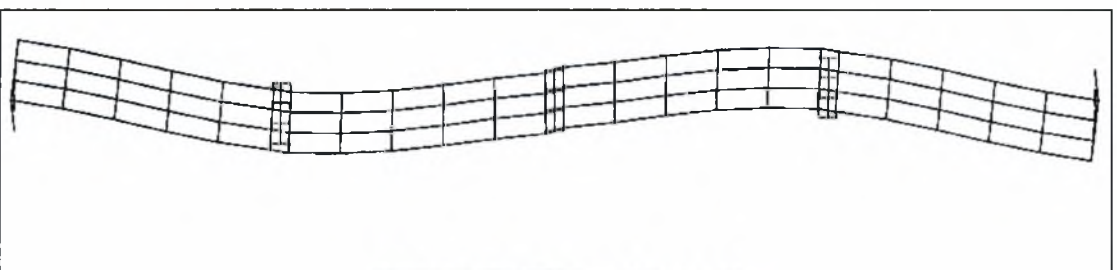
Σχήμα 1.6: Τετάρτη ιδιομορφή



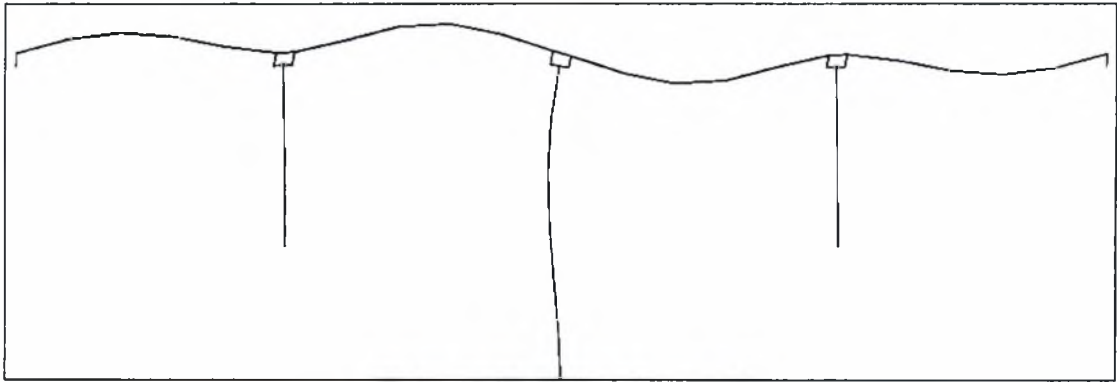
Σχήμα 1.7: Πέμπτη ιδιομορφή



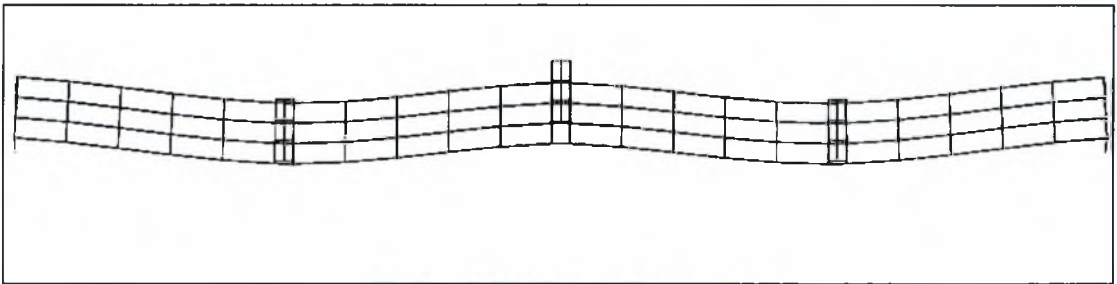
Σχήμα 1.8: Έκτη ιδιομορφή



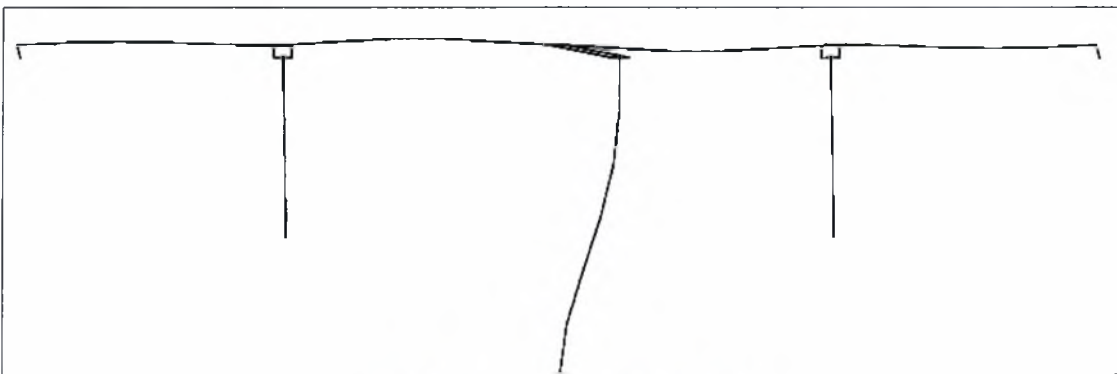
Σχήμα 1.9: Έβδομη ιδιομορφή



Σχήμα 1.10: Ογδοη ιδιομορφή

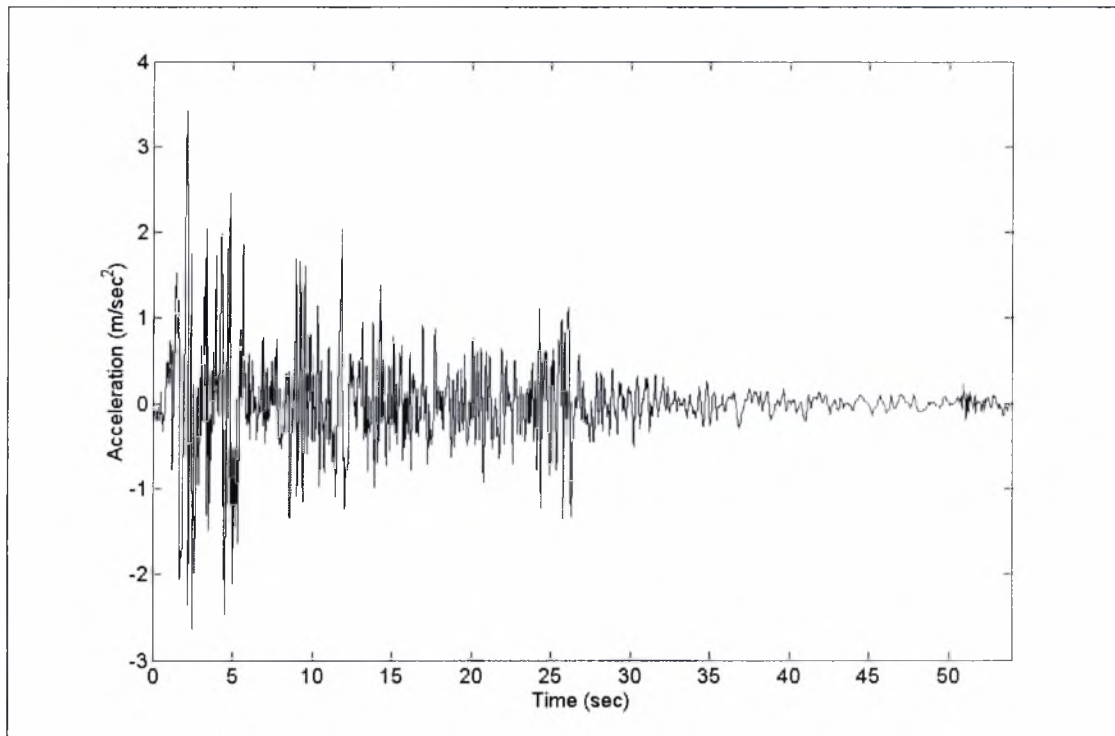


Σχήμα 1.11: Ένατη ιδιομορφή



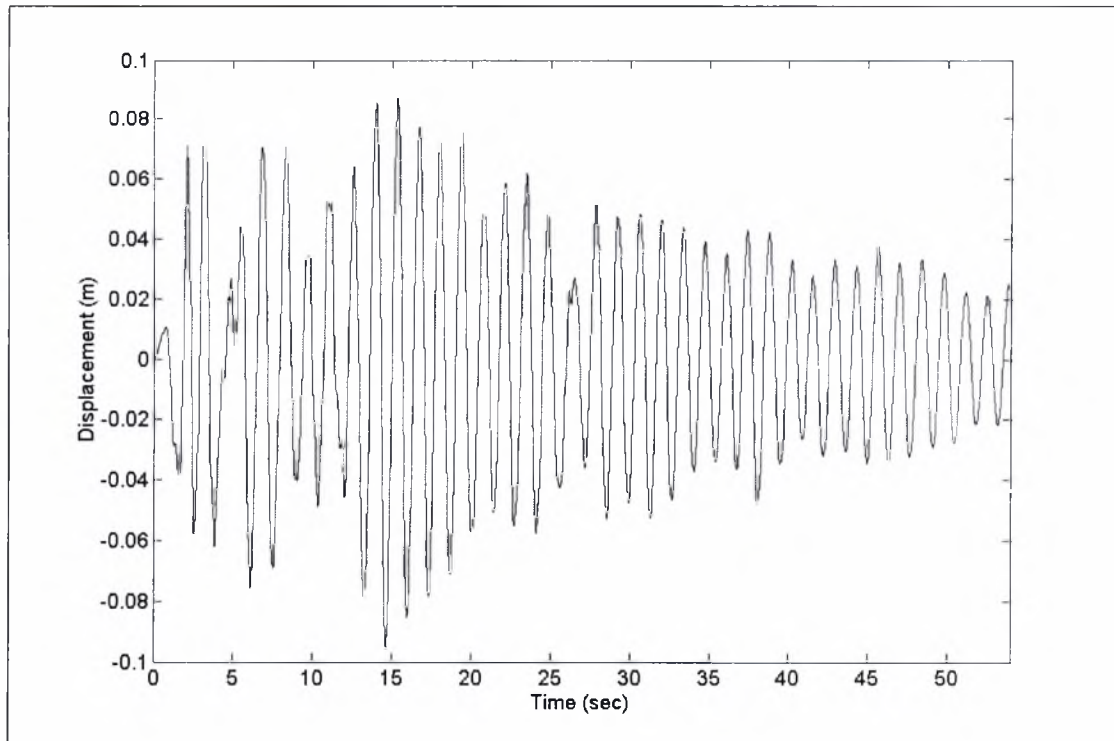
Σχήμα 1.12: Δέκατη ιδιομορφή

Στη συνέχεια έγινε δυναμική μορφική ανάλυση χρονικής ιστορίας. Μελετήθηκε η δυναμική απόκριση της κατασκευής κατά τη διάρκεια ενός σεισμικού φαινομένου. Έτσι χρησιμοποιήθηκε σαν διέγερση βάσης ο σεισμός του El Centro (1940) του οποίου το επιταχυνσιογράφημα φαίνεται στο Σχήμα 1.12.

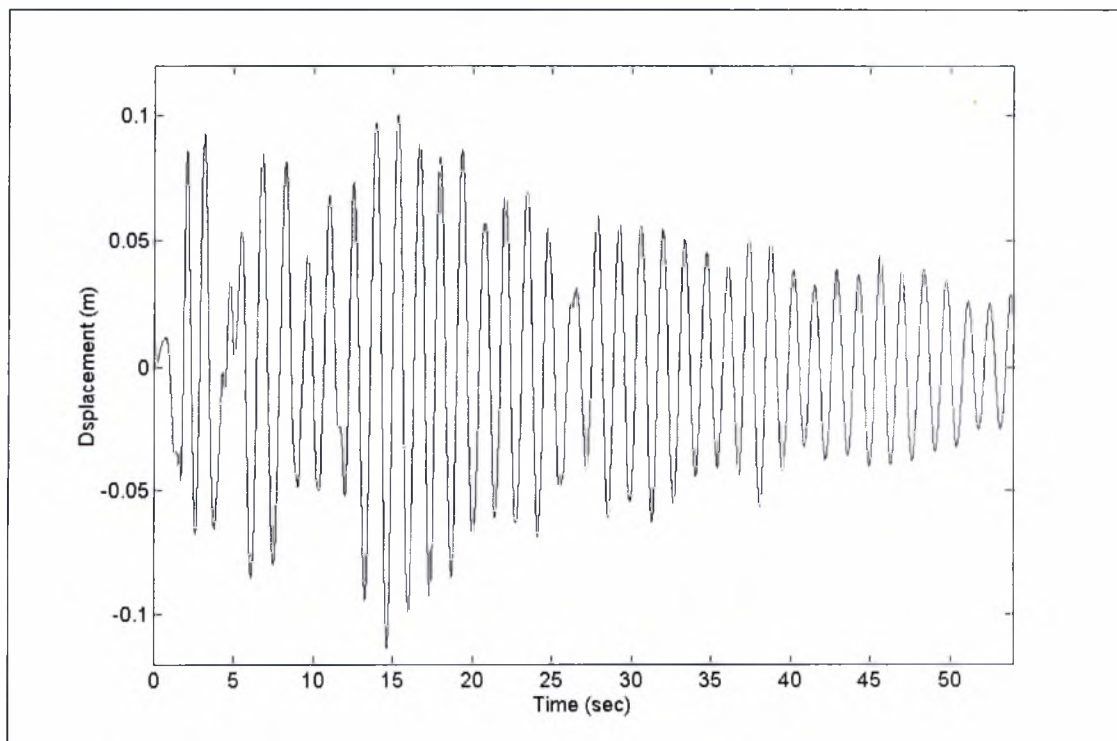


Σχήμα 1.13: Επιταχυνσιογράφημα El Centro

Για την ανάλυση αυτή χρησιμοποιήθηκαν και οι τριάντα ιδιομορφές που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα, αριθμός που θεωρείται ικανοποιητικός για την εξαγωγή ακριβών αποτελεσμάτων. Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται η απόκριση της κορυφής της μεσαίας κολώνας κατά τη διάρκεια της σεισμικής διέγερσης (Σχήμα 1.13), καθώς και η απόκριση ενός κεντρικού σημείου στο κατάστρωμα της γέφυρας (Σχήμα 1.14). Όπως προκύπτει από την ανάλυση του φαινομένου, η μέγιστη μετατόπιση της κορυφής της μεσαίας κολώνας είναι 9.6 εκατοστά, ενώ στο κέντρο του καταστρώματος φτάνει τα 11.4 εκατοστά. Αυτή η διάφορα οφείλεται στην απελευθέρωση της κίνησης του καταστρώματος σε σχέση με την κίνηση της κολώνας, λόγω της παρουσίας των ελαστικών εφεδράνων ανάμεσα τους.



Σχήμα 1.14: Μετατόπιση κορυφής μεσαίας κολώνας



Σχήμα 1.15: Μετατόπιση κεντρικού σημείου καταστρώματος

## Εφαρμογή 2: Γέφυρα Χαλκίδας

Η γέφυρα της Χαλκίδας ενώνει την περιοχή Στενό που βρίσκεται στη Βοιωτική ακτή με τη χερσόνησο Μπαταριά που βρίσκεται στην Ευβοϊκή ακτή. Έχει συνολικό μήκος 694.5 μέτρα και πλάτος 13.5 μέτρα. Το κεντρικό τμήμα της γέφυρας έχει μήκος 395 μέτρα και στηρίζεται από προεντεταμένα καλώδια, ενώ το τμήμα ανάμεσα στους δυο πυλώνες έχει μήκος 215 μέτρα. Το ύψος των πυλώνων φτάνει τα 90 μέτρα και το πάχος του καταστρώματος είναι 45 εκατοστά.



**Σχήμα 1.16:** Η γέφυρα της Χαλκίδας

Και για αυτή τη κατασκευή δημιουργήθηκε ένα τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων μοντέλο για το ABAQUS (<http://www.abaqus.com/>). Για την προσομοίωση των πυλώνων και των καλωδίων χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα γραμμικά στοιχεία δοκού δυο κόμβων, ενώ για το κατάστρωμα χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά γραμμικά στοιχεία κελύφους. Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι οι πυλώνες και οι άκρες του καταστρώματος είναι πακτωμένοι στο έδαφος.

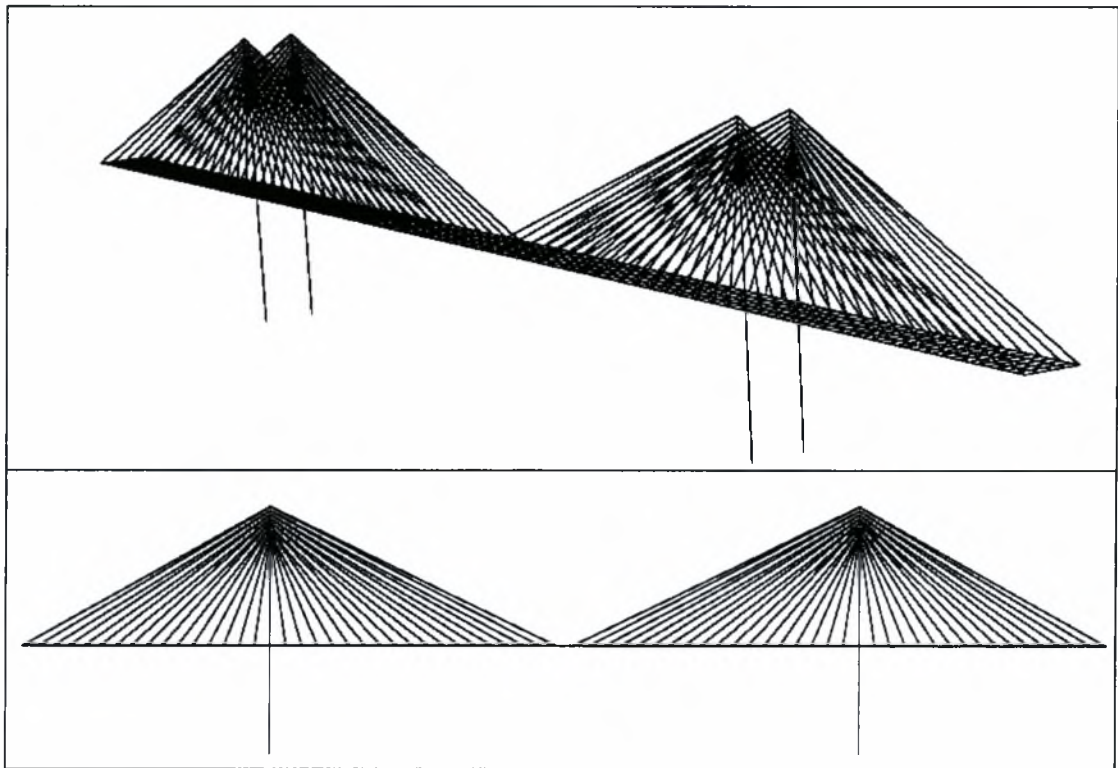
Η δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής μελετήθηκε υπολογιστικά κάνοντας ανάλυση ιδιοτιμών με τη μέθοδο Subspace Iteration στο υπολογιστικό πακέτο ABAQUS. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1.2) φαίνονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής και συγκεκριμένα οι 30 πρώτες ιδιοσυχνότητες της κατασκευής:

**Πίνακας 1.2:** Ιδιοσυχνότητες του προσομοιώματος της γέφυρας της Χαλκίδας.

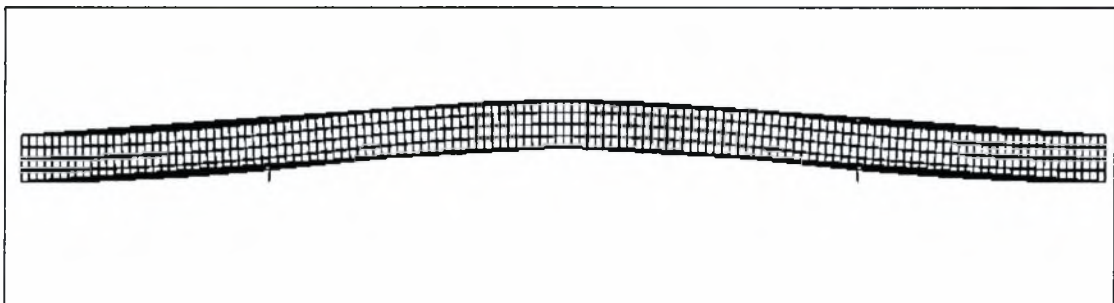
ΙΔΙΟΜΟΡΦΗ	ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
	(RAD/SEC)	(Hz)
1	2,5	0,40
2	2,7	0,42
3	3,0	0,48
4	4,3	0,69
5	4,8	0,76
6	5,7	0,91
7	5,8	0,92
8	6,2	0,98
9	6,4	1,01
10	6,6	1,05
11	7,1	1,14
12	7,3	1,17
13	7,9	1,25
14	8,2	1,30
15	8,4	1,33
16	9,1	1,45
17	9,3	1,48
18	9,8	1,57
19	10,0	1,58
20	10,2	1,62
21	10,2	1,63
22	11,0	1,74
23	11,2	1,78
24	11,5	1,83
25	12,5	1,99
26	12,5	1,99
27	12,5	1,99
28	13,1	2,08
29	13,1	2,08
30	13,9	2,22

Στα Σχήματα 1.17 έως 1.27 φαίνονται η πλάγια όψη του μοντέλου της γέφυρας της Χαλκίδας και οι δέκα πρώτες ιδιομορφές:

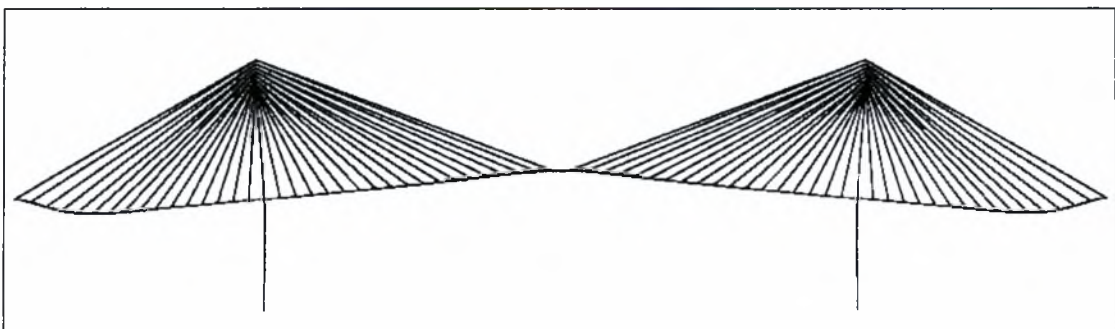




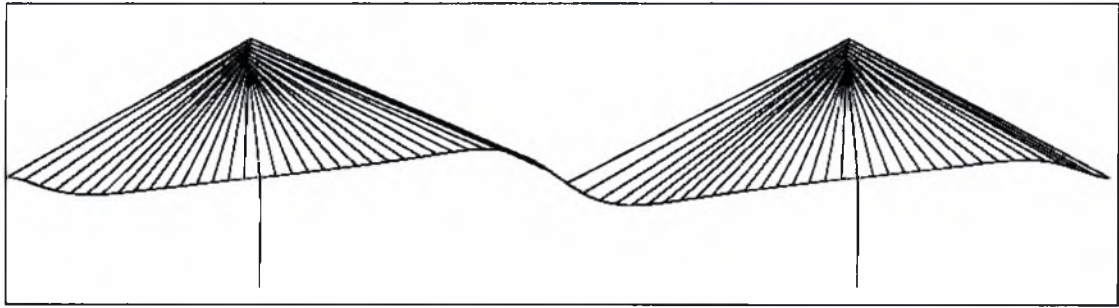
Σχήμα 1.17: Προοπτική άποψη και πλάγια όψη του μοντέλου της γέφυρας της Χαλκίδας



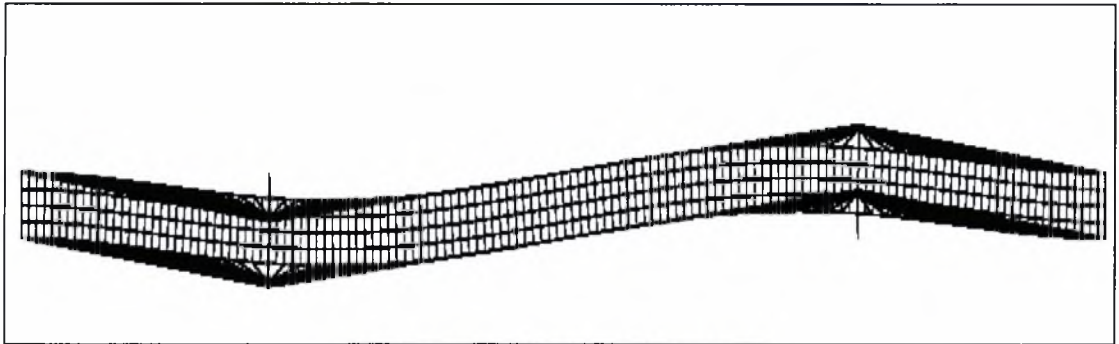
Σχήμα 1.18: Πρώτη ιδιομορφή



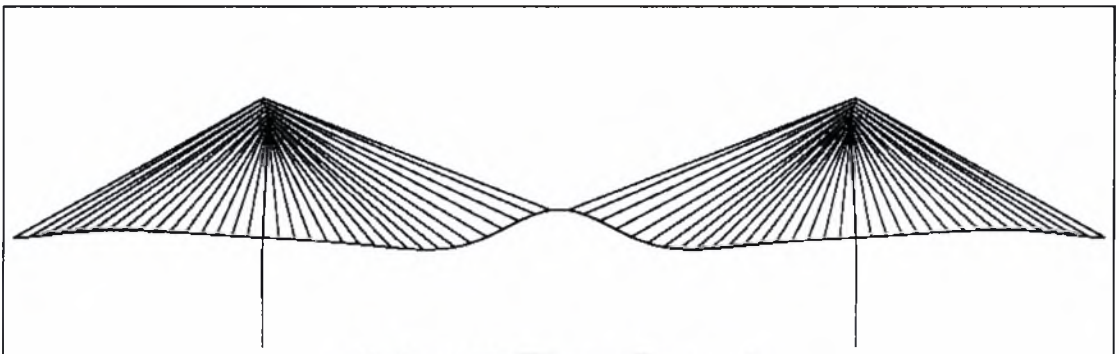
Σχήμα 1.19: Δεύτερη ιδιομορφή



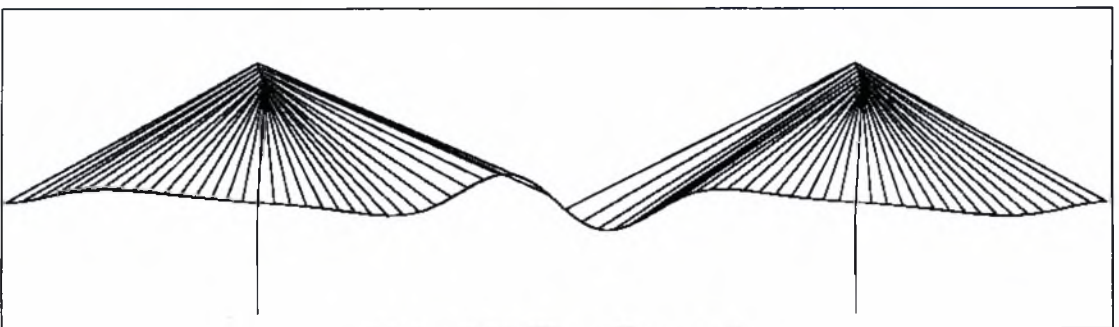
Σχήμα 1.20: Τρίτη ιδιομορφή



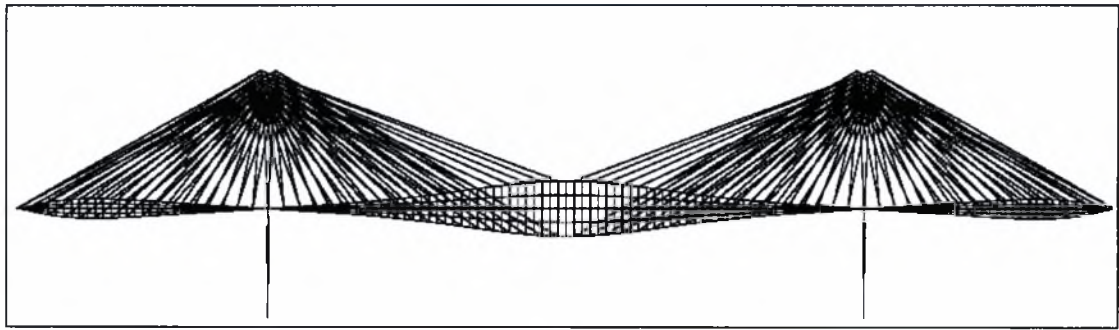
Σχήμα 1.21: Τετάρτη ιδιομορφή



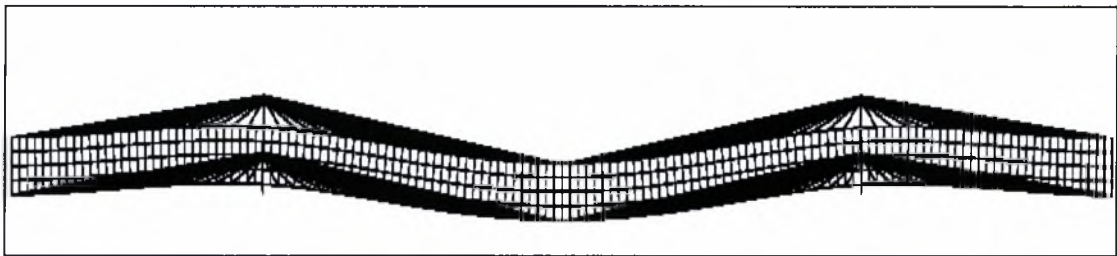
Σχήμα 1.22: Πέμπτη ιδιομορφή



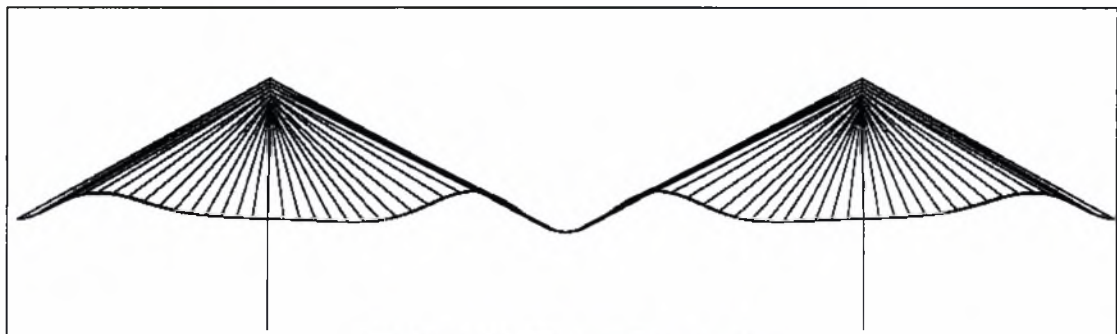
Σχήμα 1.23: Έκτη ιδιομορφή



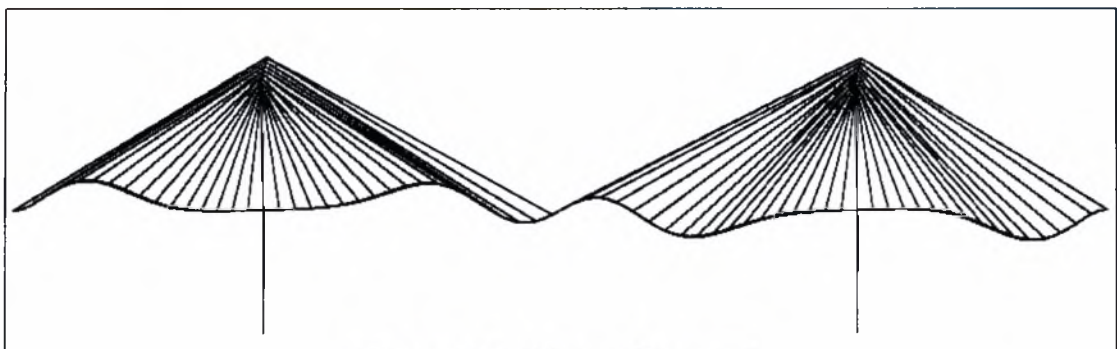
Σχήμα 1.24: ἑβδομη ιδιομορφή



Σχήμα 1.25: ὄγδοη ιδιομορφή



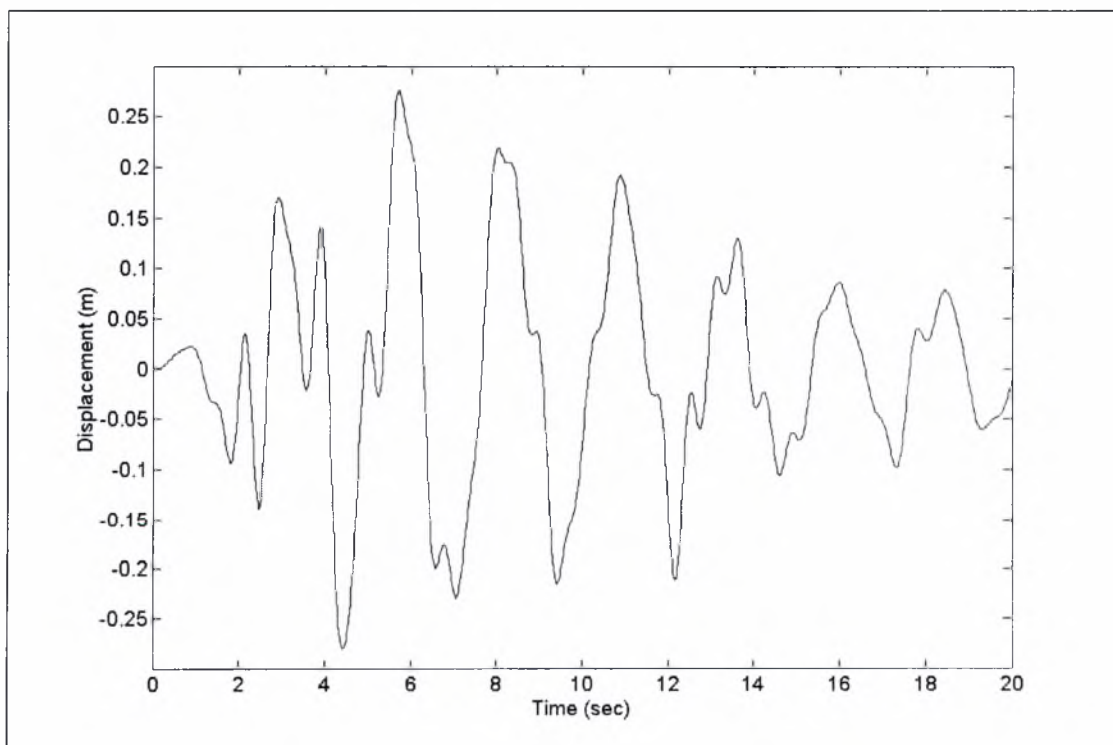
Σχήμα 1.26: ἑνατη ιδιομορφή



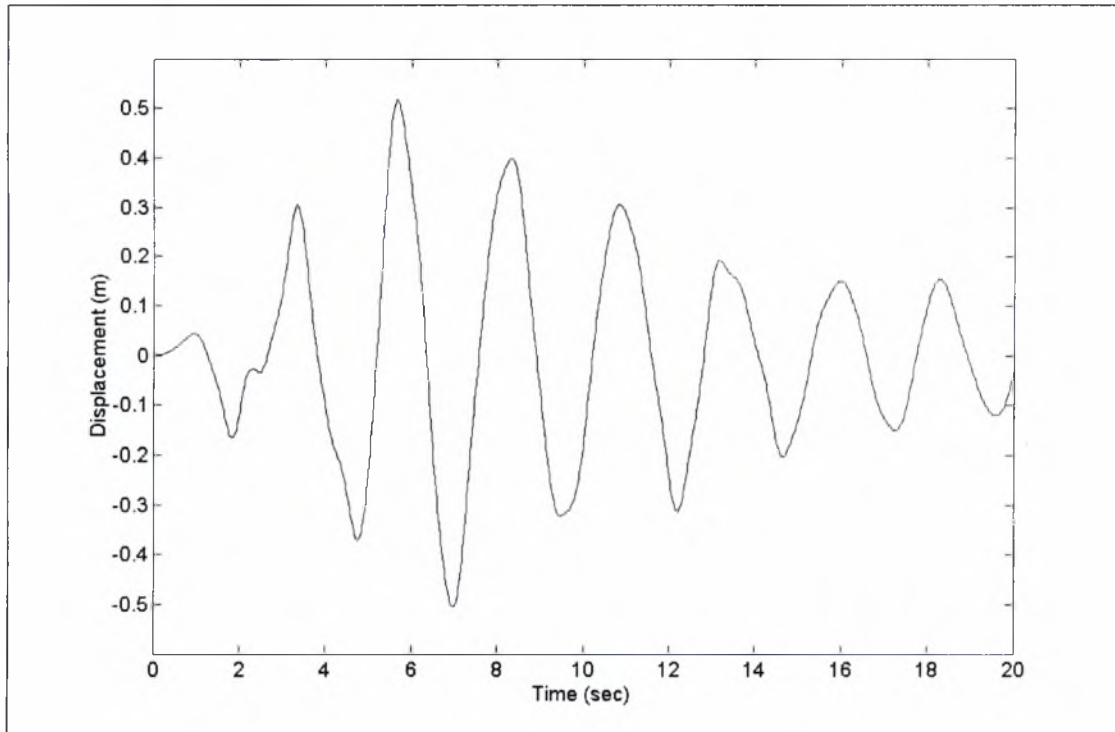
Σχήμα 1.27: δέκατη ιδιομορφή

Και για αυτή τη κατασκευή έγινε δυναμική μορφική ανάλυση χρονικής ιστορίας. Σαν διέγερση βάσης χρησιμοποιήθηκε και πάλι η σεισμική διέγερση του El Centro (1940), αλλά μόνο για τα είκοσι πρώτα δευτερόλεπτα. Χρησιμοποιήθηκαν και πάλι οι τριάντα πρώτες ιδιομορφές της κατασκευής, που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα, αριθμός ο οποίος όπως προείπαμε θεωρείται ικανοποιητικός για αυτού του είδους την ανάλυση.

Στα παρακάτω γραφήματα φαίνεται η απόκριση της κορυφής του ενός πυλώνα (Σχήμα 1.28), ενώ στο επόμενο Σχήμα (Σχήμα 1.29) φαίνεται η απόκριση ενός κεντρικού σημείου του καταστρώματος της γέφυρας. Όπως προκύπτει από την ανάλυση, η μέγιστη μετατόπιση της κορυφής του πυλώνα είναι 28 εκατοστά, ενώ η μετατόπιση του κεντρικού σημείου του καταστρώματος φτάνει τα 51 εκατοστά. Φαίνεται πως αυτή η περιοχή είναι η πλέον ευαίσθητη της κατασκευής



Σχήμα 1.28: Μετατόπιση κορυφής πυλώνα



Σχήμα 1.29: Μετατόπιση κέντρου καταστρώματος

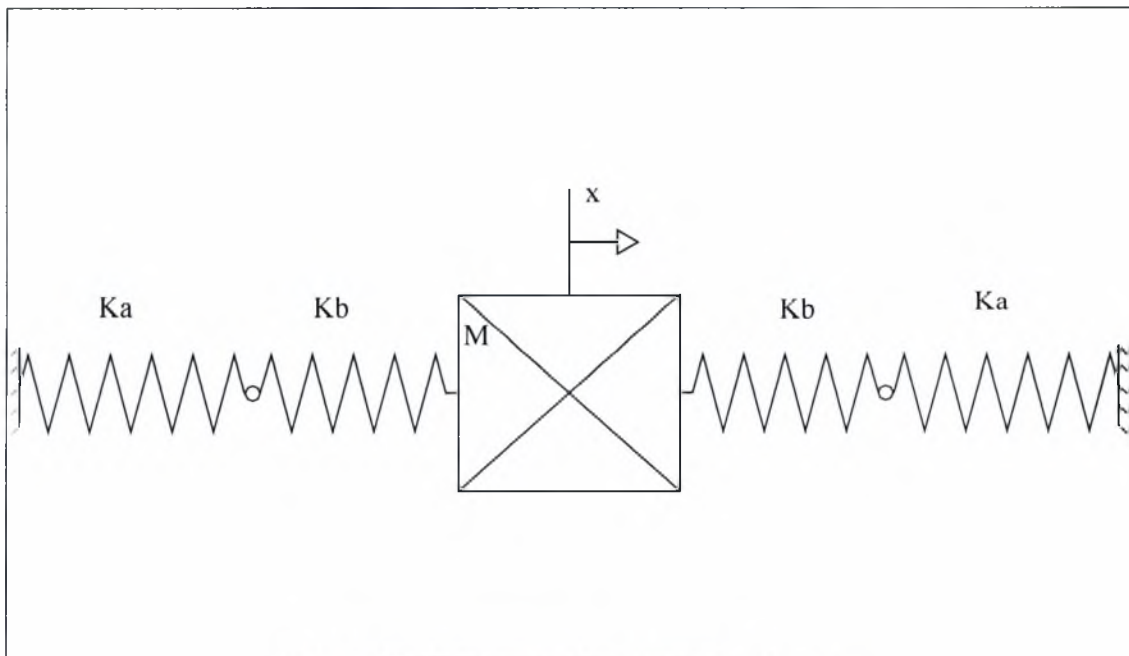
## Κεφάλαιο 2

### Ταλάντωση γραμμικού συστήματος

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μορφική ανάλυση είναι μια αξιόπιστη και υπολογιστικά ανέξοδη μέθοδος για την ανάλυση γραμμικών συστημάτων, ακόμα και με μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Προχωρώντας όμως σε μη γραμμικά φαινόμενα η μέθοδος των ιδιομορφών δεν έχει πλέον ισχύ, ενώ οι μέθοδοι απευθείας ολοκλήρωσης μη γραμμικών συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας απαιτούν πολύ χρόνο και μεγάλη υπολογιστική ισχύ.

Για τον λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να αναπτύξουμε απλά μοντέλα τα οποία συμπεριφέρονται ανάλογα με τα μοντέλα πολλών βαθμών ελευθερίας, όπως αυτά που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αρχικά θα εξετάσουμε ένα γραμμικό μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας και στη συνέχεια θα εισάγουμε μη γραμμικά στοιχεία στο απλό αυτό μοντέλο.

#### 2.1 Περιγραφή του μοντέλου



Σχήμα 2.1: Απλουστευμένο γραμμικό σύστημα

Το μοντέλο του συστήματος που εξετάζεται (Σχήμα 2.1) αποτελείται από μια μάζα  $M$  η οποία συνδέεται σε δυο ελατήρια τα οποία έχουν ακαμψία ίση με  $K_b$ . Τα ελατήρια αυτά συνδέονται με τη σειρά τους σε δυο άλλα ελατήρια με ακαμψία  $K_a$ , με το  $K_a$  να είναι πολύ μεγαλύτερο από το  $K_b$ . Το σύστημα αυτό είναι ένα μοντέλο ταλαντωτή ενός βαθμού ελευθερίας, του οποίου τα χαρακτηριστικά είναι γραμμικά.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το μοντέλο αυτό αποτελεί μια προσομοίωση του τι συμβαίνει σε μια πραγματική γέφυρα, και συγκεκριμένα στο σημείο όπου συνδέεται το κατάστρωμα με κάποια κολώνα ή ακρόβαθρο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει με τη γέφυρα της Καβάλας στο σημείο όπου το κατάστρωμα συνδέεται με τις κολώνες ή τα ακρόβαθρα της γέφυρας. Ανάμεσα στα δυο αυτά στοιχεία της γέφυρας παρεμβάλλεται ένας σύνδεσμος από μαλακό υλικό (εφέδρανο), ο οποίος 'απελευθερώνει' την κίνηση του καταστρώματος σε σχέση με την κίνηση της κολώνας.

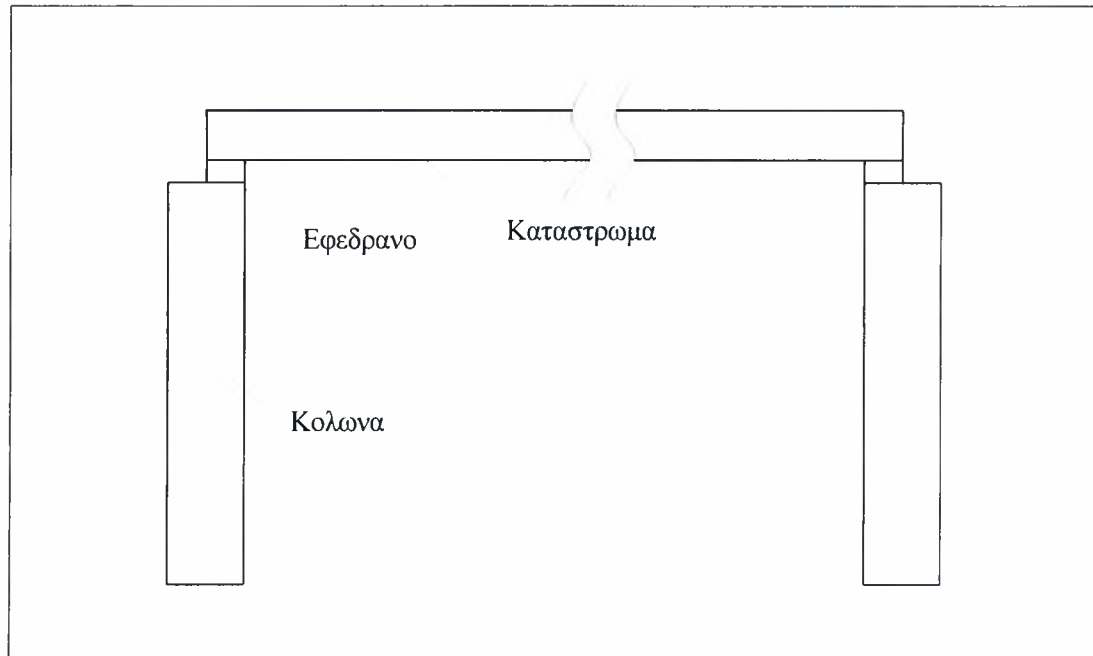
Έτσι μπορούμε να έχουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στο μοντέλο του Σχήματος 2.1 και σε κάποια πραγματική γέφυρα ως εξής: το ελατήριο  $K_b$  αντιστοιχεί στην κολώνα της κατασκευής, το ελατήριο  $K_a$  στο εφέδρανο και η μάζα  $M$  αντιστοιχεί στο κατάστρωμα της γέφυρας.

Η ακαμψία των ελατηρίων  $K_a$  επιλέγεται ως εξής (Θ. Κερμανίδης 1983, Γ.Ι. Τσαμασφύρος 1990):

$$K_a = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (2.1)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κολώνας,  $I$  η ροπή αδρανείας της και  $L$  το ύψος της κολώνας. Επίσης η ακαμψία  $K_b$  ισούται με την διατμητική ακαμψία των εφεδράνων.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα χαρακτηριστικά του βασικού αυτού συστήματος έχουν επιλεγεί ως εξής:  $K_a=42000$  KN,  $K_b=2332$  KN,  $M=1000$  tn και  $z=0.05$ .



Σχήμα 2.2: Σχέδιο γέφυρας η οποία μπορεί να προσομοιωθεί με το απλουστευμένο μοντέλο

## 2.2 Εξίσωση κίνησης

Η κίνηση της μάζας  $M$  περιγράφεται από την εξίσωση:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{a} \quad (2.2)$$

όπου  $M$  είναι η μάζα του σώματος,  $C$  η απόσβεση,  $K$  η ακαμψία,  $x$  η μετατόπιση,  $\dot{x}$  η ταχύτητα,  $\ddot{x}$  η επιτάχυνση και  $\ddot{a}$  η επιβαλλόμενη επιτάχυνση στα άκρα της κατασκευής.



Για να υπολογίσουμε την ισοδύναμη ακαμψία των τεσσάρων ελατήριων θεωρούμε ότι τα ελατήρια  $K_a$  και  $K_b$  είναι συνδεδεμένα σε σειρά και τα ελατήρια που προκύπτουν είναι συνδεδεμένα παράλληλα. Τότε η ισοδύναμη ακαμψία είναι:

$$K = \frac{2 \cdot K_a \cdot K_b}{K_a + K_b}$$

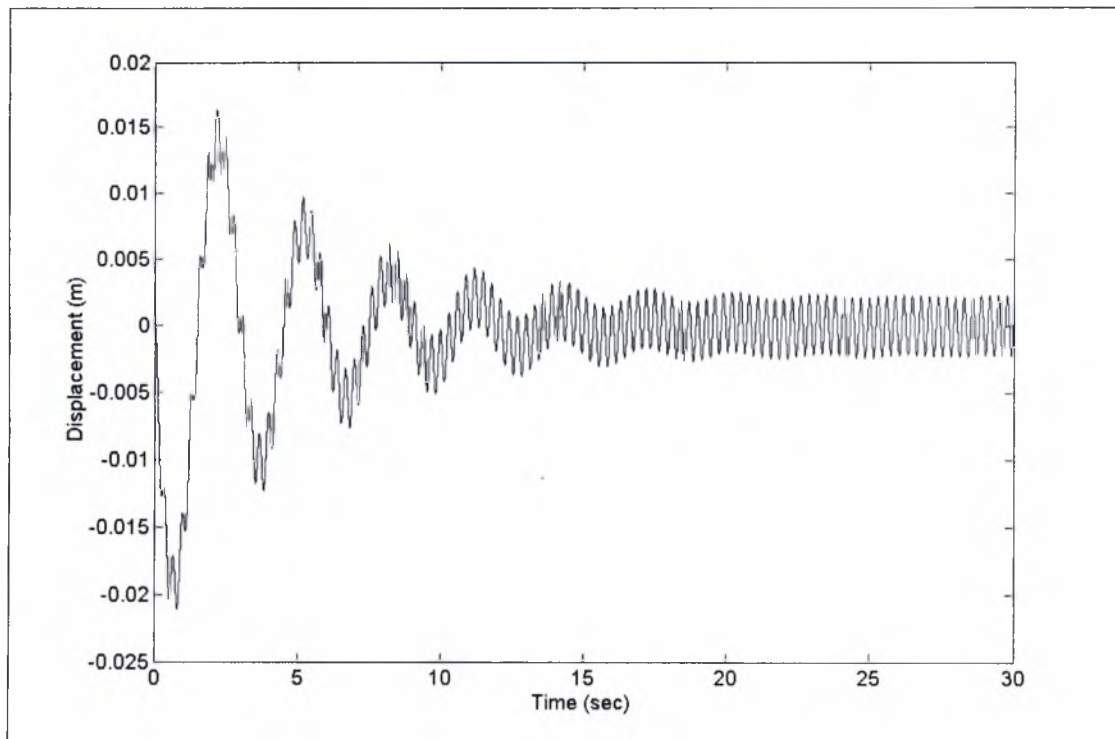
Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K_a \cdot K_b}{M(K_a + K_b)}} \quad (2.3)$$

## 2.3 Αριθμητική επίλυση εξισώσεων κίνησης – Αποτελέσματα

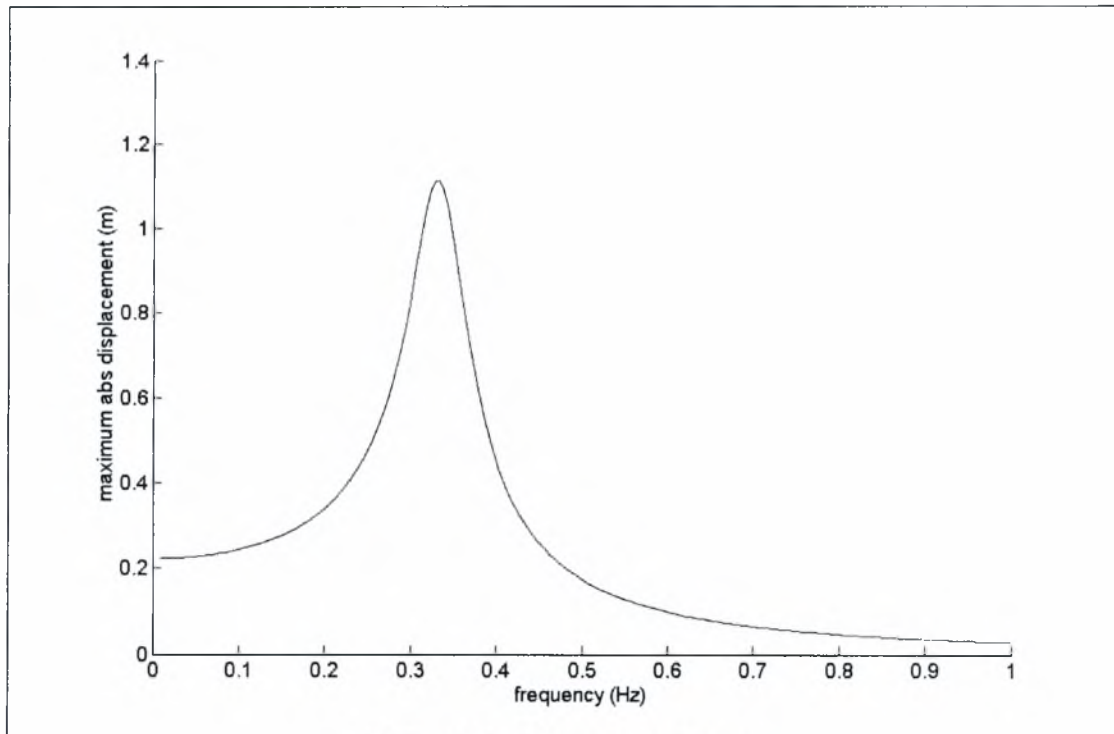
### 2.3.1 Απόκριση σε περιοδική διέγερση

Η επίλυση της εξίσωσης κίνησης γίνεται με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων OpenSees (<http://www.opensees.berkeley.edu/>) και η αναπαράσταση των αποτελεσμάτων έγινε με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB (<http://www.mathworks.com/>). Με την επίλυση αυτή υπολογίζουμε την απόκριση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή και ως εκ τούτου όλα τα υπόλοιπα δεδομένα που μας είναι χρήσιμα στην παρούσα ανάλυση, όπως είναι οι δυνάμεις στα ελατήρια. Σαν διέγερση χρησιμοποιήθηκε επιτάχυνση στα άκρα του μοντέλου η οποία είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα διέγερσης  $\omega$ . Στο Σχήμα 2.3 φαίνεται μια τυπική απόκριση της μάζας  $M$  με συχνότητα διέγερσης 3.3 Hz

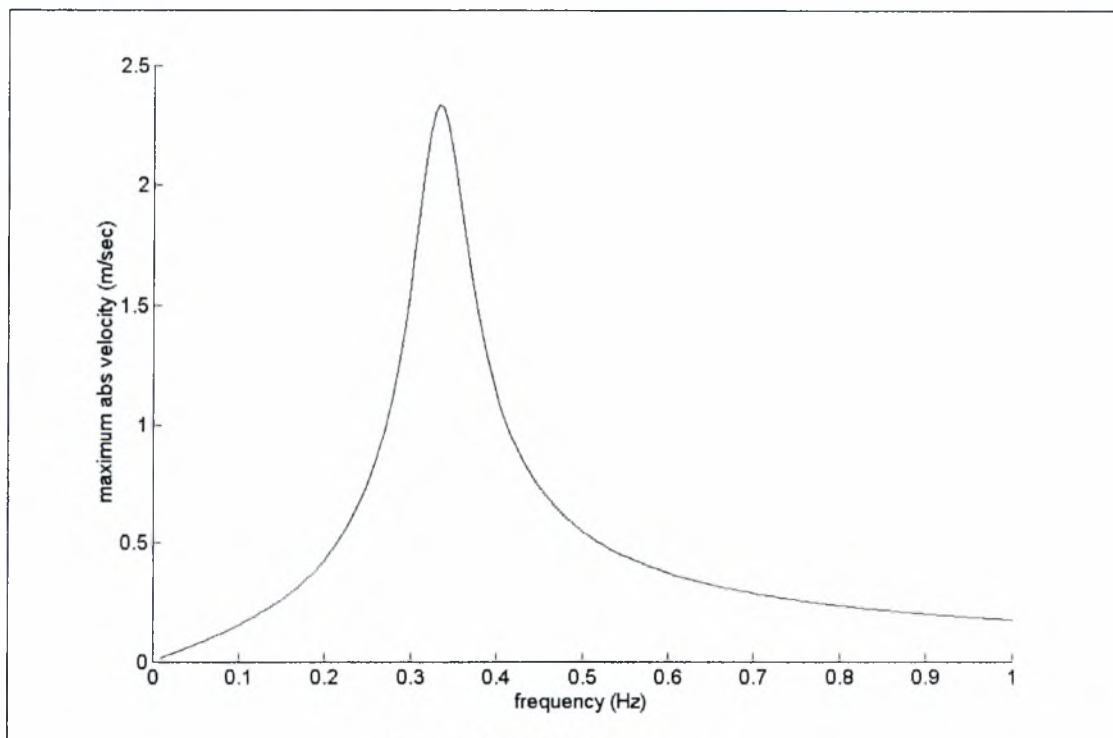


**Σχήμα 2.3:** Τυπική απόκριση συστήματος υπό περιοδική διέγερση

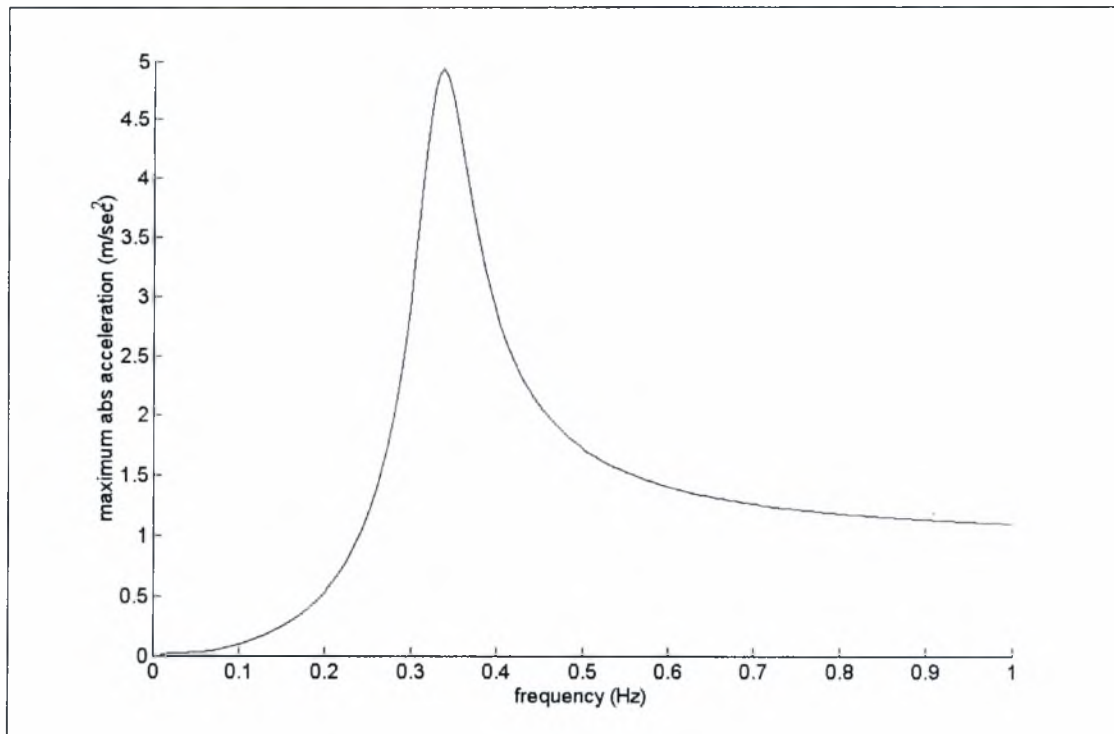
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα φάσματα, σε μόνιμη κατάσταση, της απόλυτης μέγιστης μετατόπισης, ταχύτητας, επιτάχυνσης καθώς και τα φάσματα των δυνάμεων στα ελατήρια για διάφορες τιμές της συχνότητας διέγερσης  $\omega$ , τα οποία ταυτίζονται πλήρως με τα αναλυτικά αποτελέσματα (Νατσιάβας 2001, Chopra 1995). Όπως βλέπουμε οι δυνάμεις στο κάθε ελατήριο είναι ίδιες, κάτι που είναι αναμενόμενο λόγω της συνδεσμολογίας των ελατήριων και της συμμετρίας του προβλήματος.



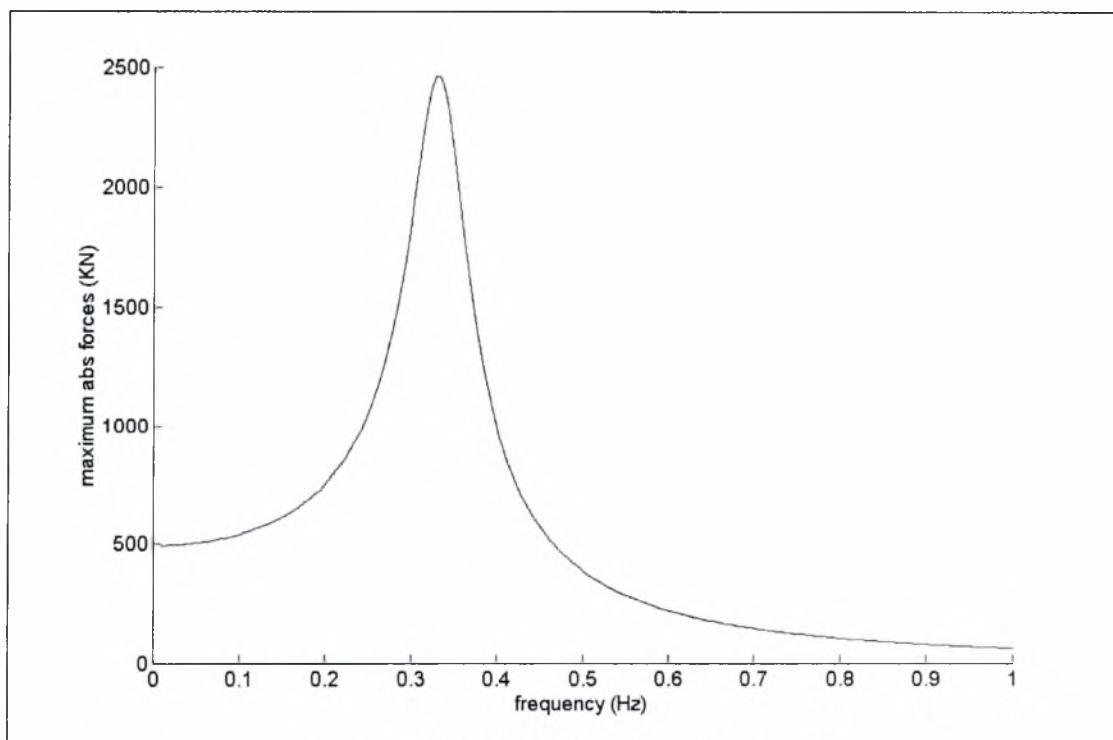
Σχήμα 2.4: Φάσμα μετατόπισης

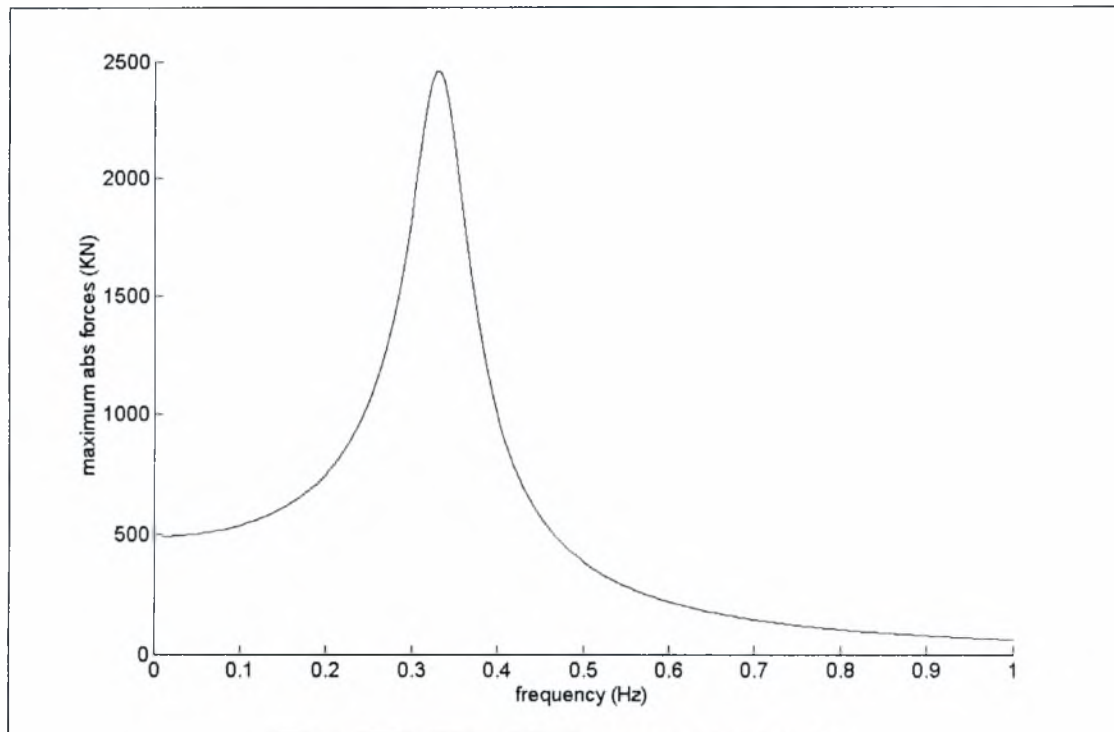


Σχήμα 2.5: Φάσμα ταχύτητας



Σχήμα 2.6: Φάσμα επιτάχυνσης

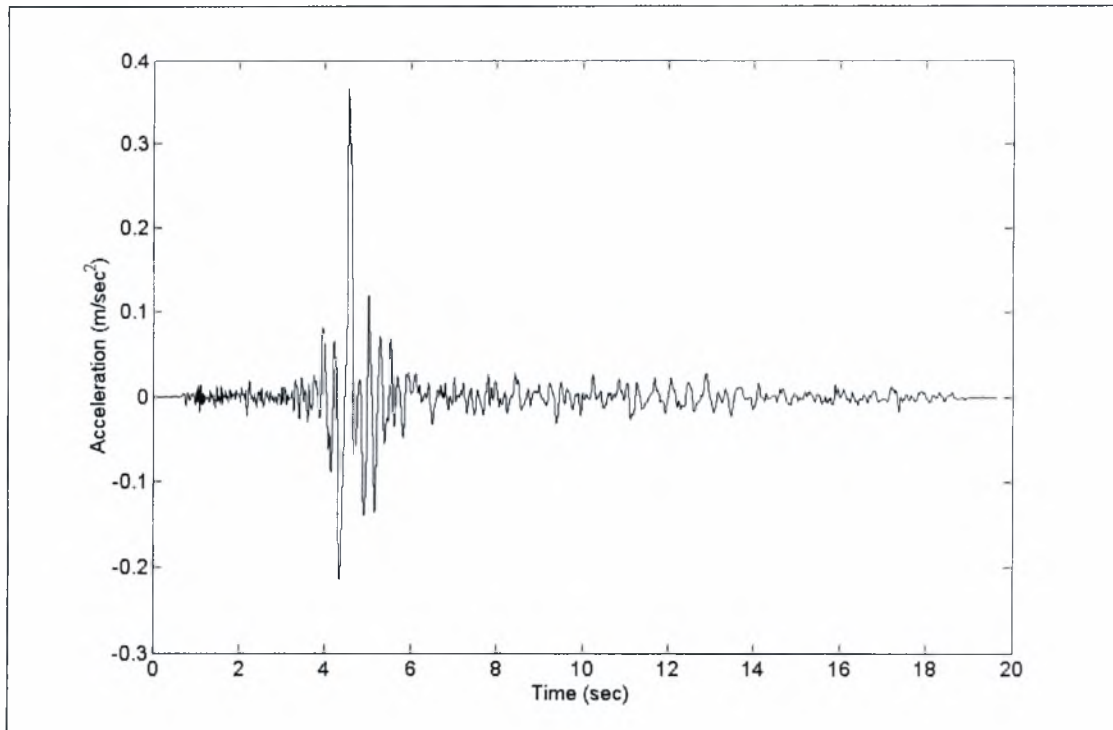
Σχήμα 2.7: Φάσμα δυνάμεων στο ελατήριο  $K_b$



Σχήμα 2.8: Φάσμα δυνάμεων στο ελατήριο  $K_a$

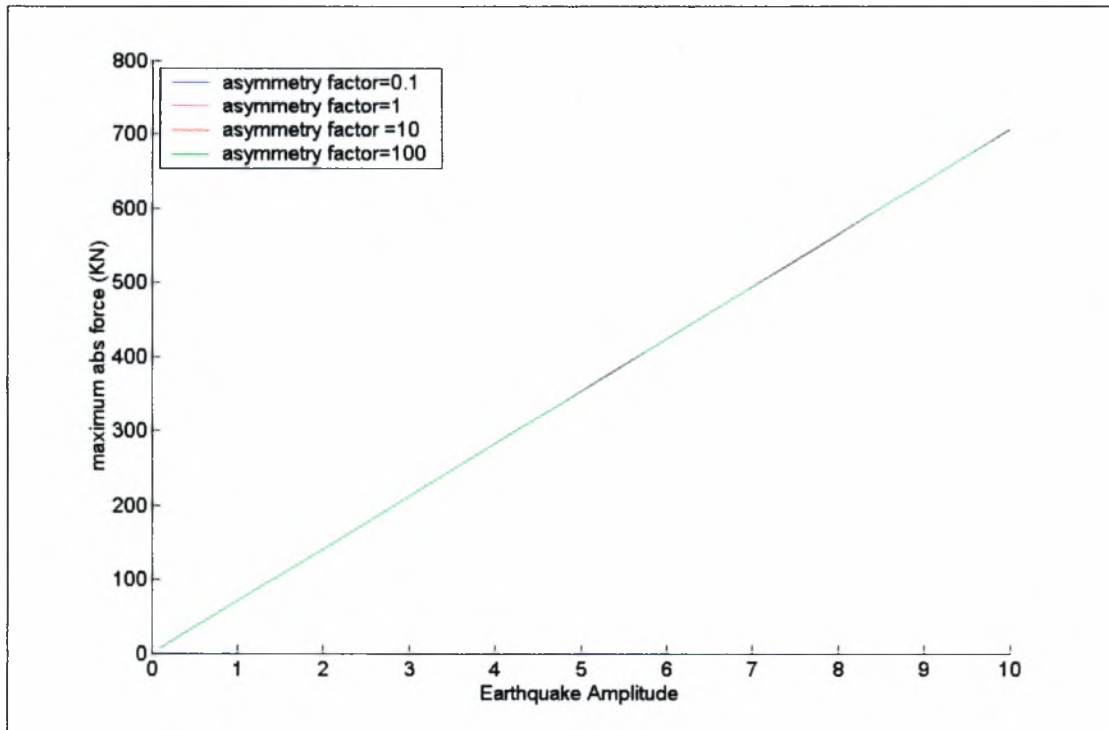
### 2.3.2 Απόκριση σε σεισμική διέγερση

Για την περίπτωση της σεισμικής διέγερσης έγινε ανάλυση στο σύστημα με μη συμμετρικά χαρακτηριστικά όσον αφορά στα ελατήρια  $K_a$  και  $K_b$  στις δυο πλευρές του μοντέλου. Αρχικά έγινε αλλαγή στη ακαμψία του δεξιού ελατηρίου  $K_a$  η οποία πολλαπλασιάστηκε με έναν συντελεστή  $\alpha$ , με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του συστήματος να παραμένουν τα ίδια. Σαν διέγερση χρησιμοποιήθηκε ο σεισμός του Imperial Valley (15-10-1979, El Centro Array 6) του οποίου το επιταχυνσιογράφημα φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Στη συνέχεια έγινε αλλαγή στην ακαμψία του δεξιού ελατηρίου  $K_b$  η οποία επίσης πολλαπλασιάστηκε με έναν συντελεστή  $\beta$  αφήνοντας τα υπόλοιπα ελατήρια ως έχουν.

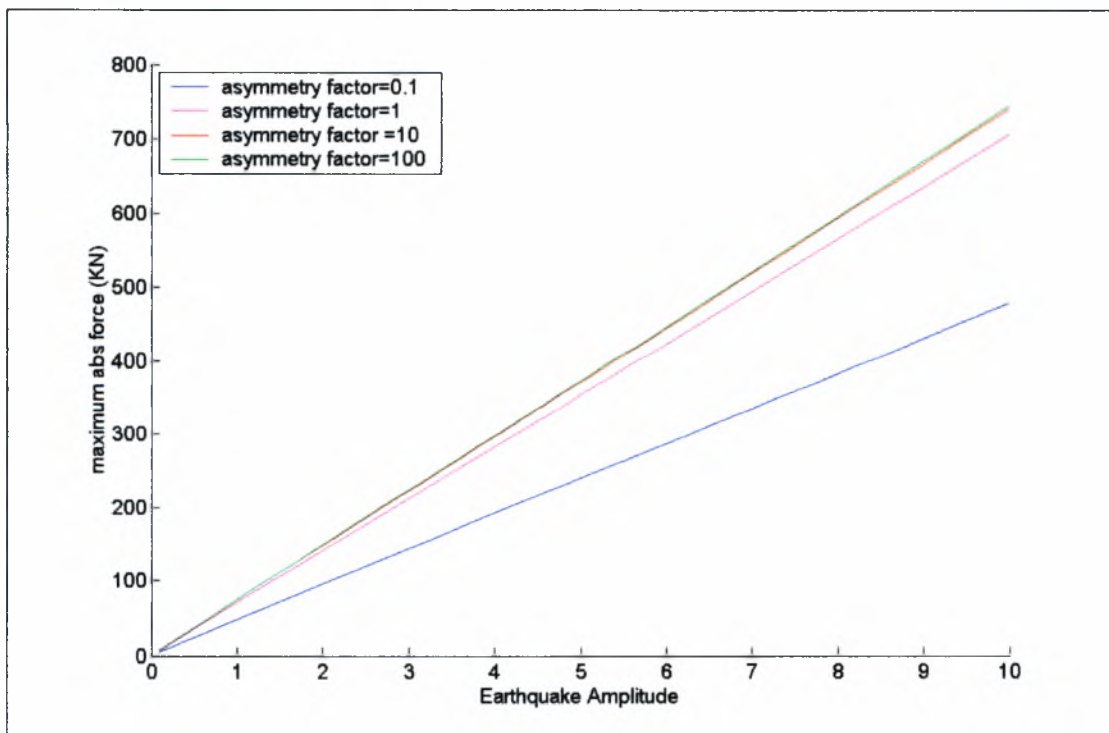


**Σχήμα 2.9:** Επιταχυνσιογράφημα σεισμού Imperial Valley 1979 (El Centro Array 6)

Παρακάτω παρουσιάζεται η μέγιστη απόκριση της κατασκευής συναρτήσει του βαθμού κλιμάκωσης της σεισμικής διέγερσης. Συγκεκριμένα, οι τιμές εδαφικής επιτάχυνσης του επιταχυνσιογραφήματος κλιμακώνονται σταδιακά κατά σταθερούς συντελεστές στο διάστημα  $[0,10]$ , εκτελείται για κάθε επίπεδο κλιμάκωσης μια δυναμική ανάλυση και βρίσκεται η μέγιστη τιμή κάθε μεγέθους που μας ενδιαφέρει. Απεικονίζοντας σε ένα γράφημα τη μέγιστη τιμή του εκάστοτε μεγέθους σε συνάρτηση με το βαθμό κλιμάκωσης της σεισμικής διέγερσης παίρνουμε συνεχείς καμπύλες όπως αυτές που ακολουθούν. Στην προκειμένη περίπτωση επιλέχθηκε να παρουσιαστούν οι δυνάμεις που παραλαμβάνουν τα ελατήρια σε κάθε περίπτωση. Θεωρήθηκε σκόπιμο να μην παρουσιαστούν οι μετατοπίσεις, οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις καθώς λόγω της φύσης του προβλήματος είναι γραμμικές, δεν επηρεάζονται καθόλου από τη ασυμμετρία του προβλήματος και δεν παρουσιάζουν κανένα ενδιαφέρον, σε αντίθεση με τις δυνάμεις.

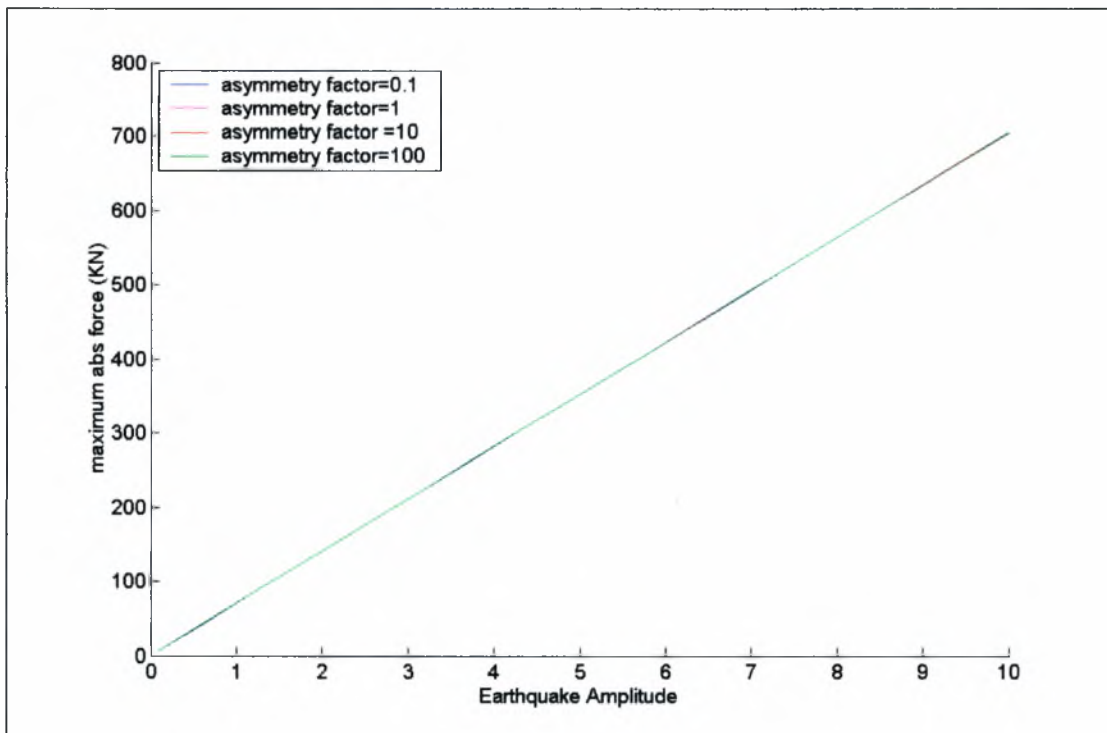


Σχήμα 2.10: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\alpha$

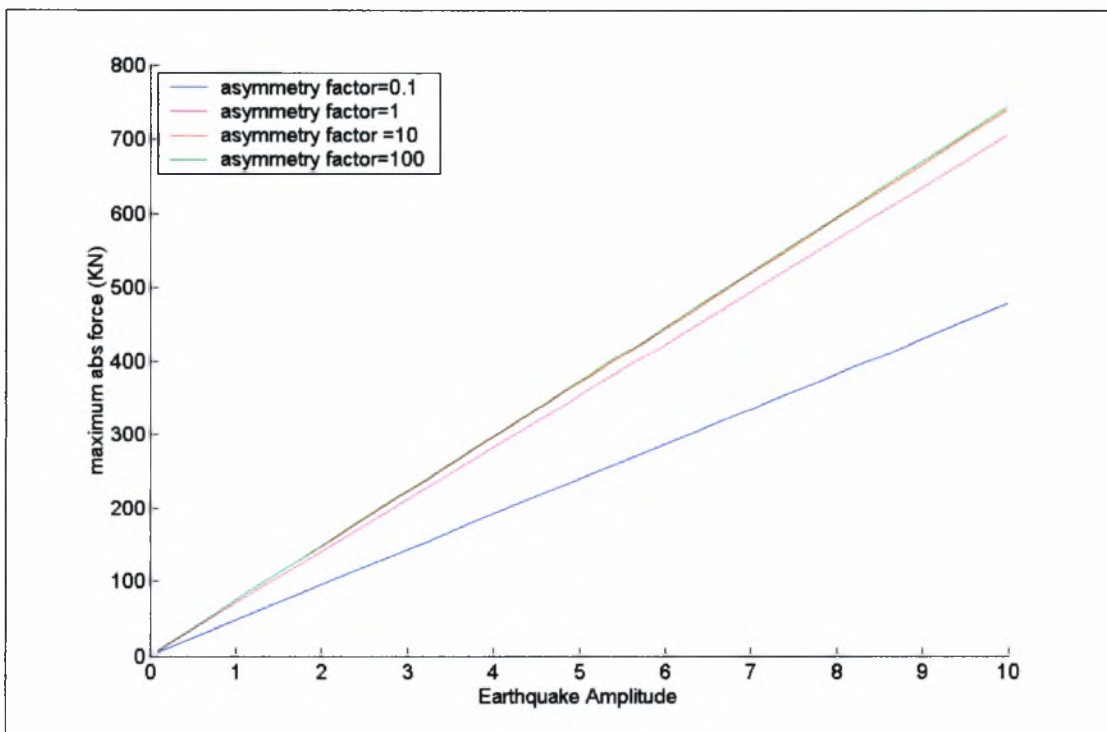


Σχήμα 2.11: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\alpha$

$\alpha$



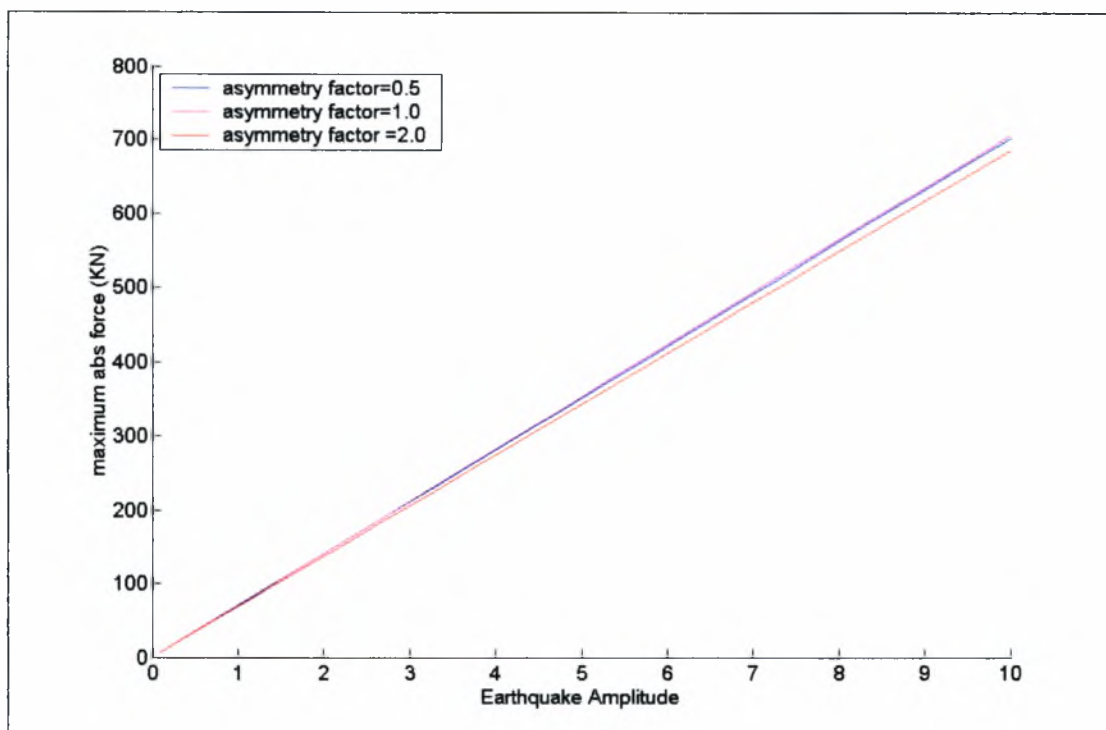
Σχήμα 2.12: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\alpha$



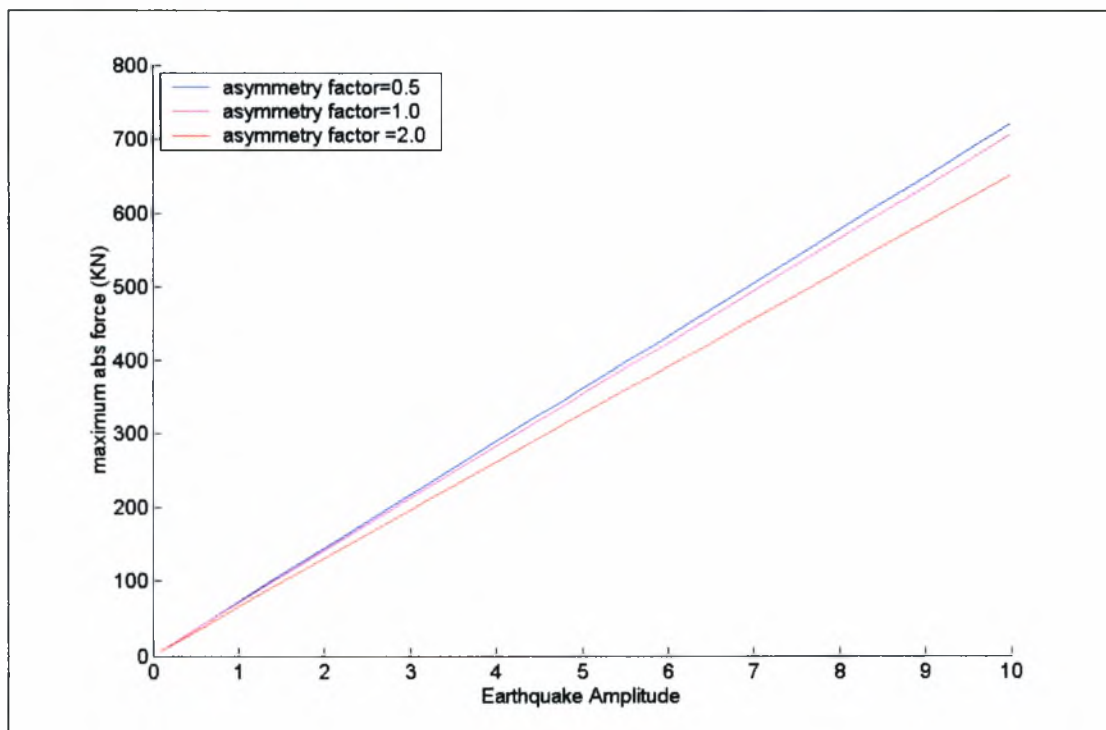
Σχήμα 2.13: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας

$\alpha$

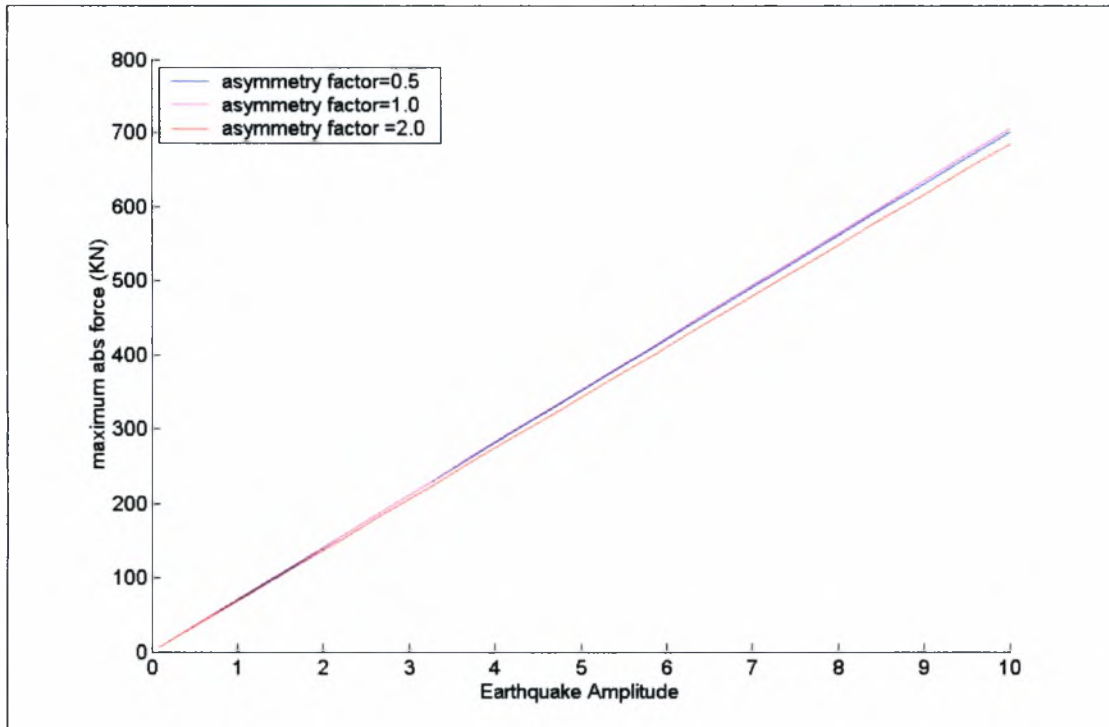




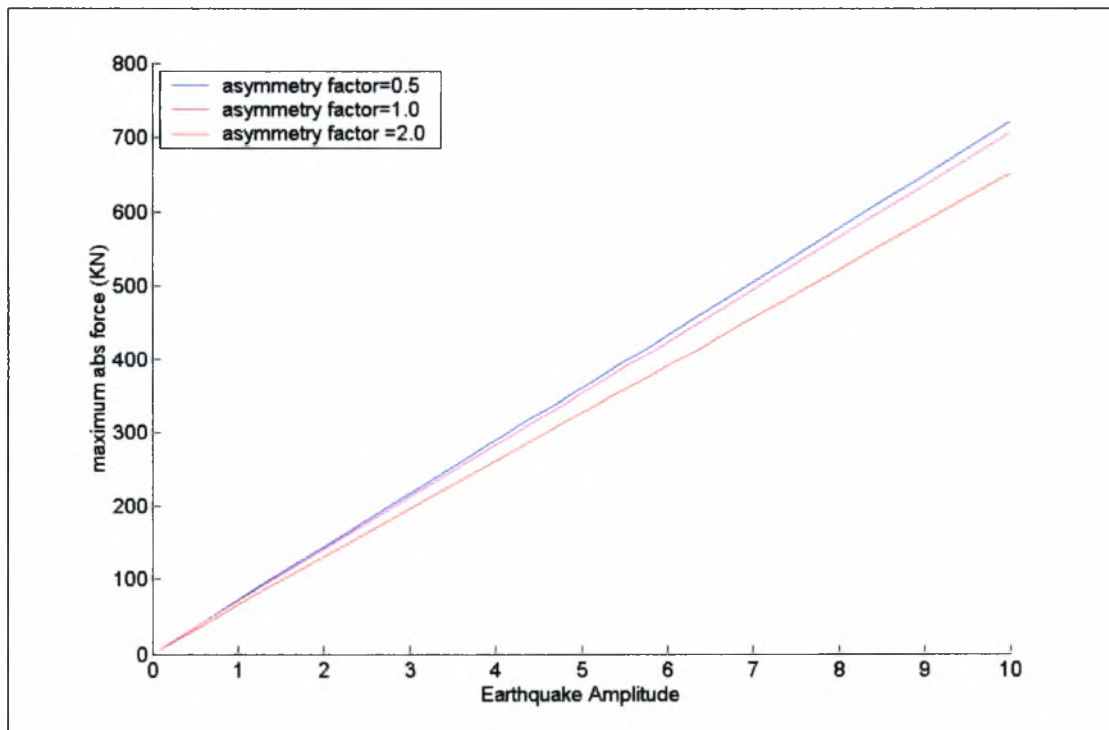
Σχήμα 2.14: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



Σχήμα 2.15: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



Σχήμα 2.16: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



Σχήμα 2.17: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$

### 2.3.3 Σχόλια - Παρατηρήσεις

Από την μελέτη των παραπάνω Σχημάτων (2.10-2.17) παρατηρούμε πως το ελατήριο με τη μικρότερη ακαμψία παραλαμβάνει μεγαλύτερες δυνάμεις και στις δυο περιπτώσεις ασυμμετρίας (Γραφήματα 2.15 και 2.13). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι λόγω της μειωμένης ακαμψίας έχουμε και μεγαλύτερες μετατοπίσεις, άρα και μεγαλύτερες δυνάμεις, αφού η δύναμη του ελατηρίου εξαρτάται γραμμικά από την επιμήκυνση του. Από την αριστερή πλευρά του συστήματος που τα χαρακτηριστικά του συστήματος παραμένουν σταθερά δεν παρατηρούμε μεγάλες διαφορές, κάτι που είναι απόλυτα αναμενόμενο.

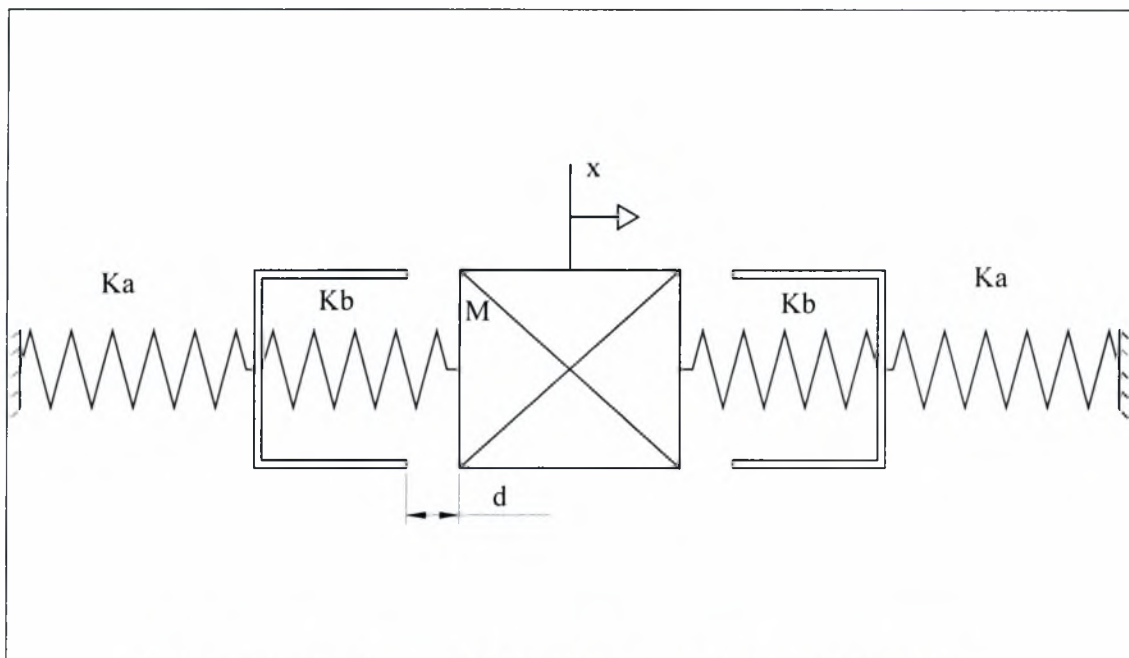
Στη συνέχεια στο απλό αυτό μοντέλο θα προστεθούν μη γραμμικά στοιχεία, με σκοπό την ανάλυση φαινομένων που παρουσιάζονται σε πολύπλοκες κατασκευές όπως γέφυρες, αναρτήσεις οχημάτων κτλ με τη βοήθεια των απλών αυτών μοντέλων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Ταλάντωση συστήματος με τμηματικά γραμμική ακαμψία

Μετά την εξέταση του γραμμικού συστήματος στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα προχωρήσουμε στην εξέταση μη γραμμικών φαινομένων, τα οποία παρουσιάζονται σε πολλά συστήματα, όπως πχ γέφυρες και συστήματα ανάρτησης οχημάτων. Το σύστημα που θα αναλύσουμε στο παρόν κεφάλαιο εμφανίζει μη γραμμικότητα ως προς τη ακαμψία του και συγκεκριμένα η ακαμψία του είναι τμηματικά γραμμική.

#### 3.1 Περιγραφή του μοντέλου



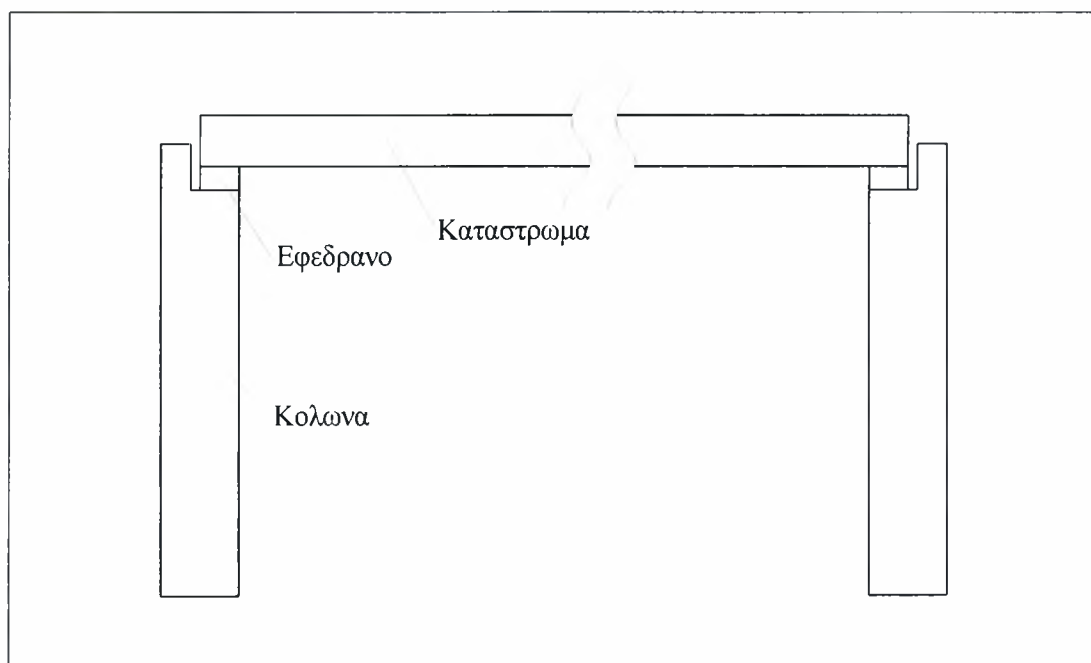
Σχήμα 3.1: Απλουστευμένο σύστημα με τμηματικά γραμμική ακαμψία

Το μοντέλο του συστήματος που εξετάζεται (Σχήμα 3.1) αποτελείται από μια μάζα  $M$  η οποία συνδέεται σε δυο ελατήρια τα οποία έχουν ακαμψία ίση με  $K_b$ . Τα ελατήρια αυτά συνδέονται με τη σειρά τους σε δυο άλλα ελατήρια με ακαμψία  $K_a$ , με το  $K_a$  να είναι πολύ μεγαλύτερο από το  $K_b$ . Ανάμεσα στα ελατήρια  $K_a$  και  $K_b$  υπάρχει

ένας μηχανισμός από άκαμπτες ράβδους ο οποίος περιορίζει τη κίνηση της μάζας  $M$ , ο οποίος μηχανισμός θα αναφέρεται στο εξής ως ‘περιοριστής’.

Το υπό εξέταση σύστημα είναι ένα μοντέλο ταλαντωτή ενός βαθμού ελευθερίας, του οποίου η ακαμψία είναι τμηματικά γραμμική. Αυτό οφείλεται στην παρουσία των δυο άκαμπτων ράβδων οι οποίες περιορίζουν τη κίνηση της μάζας  $M$ , όταν η μετατόπιση της μάζας ξεπερνάει το μήκος  $d$ . Λόγω αυτής της ιδιομορφίας του προβλήματος, η ακαμψία του συστήματος εξαρτάται από την μετατόπιση  $x$ , και μάλιστα παρουσιάζει τρεις γραμμικές περιοχές.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το μοντέλο αυτό αποτελεί μια προσομοίωση του τι συμβαίνει σε μια πραγματική γέφυρα (Σχήμα 3.2), και συγκεκριμένα στο σημείο όπου συνδέεται το κατάστρωμα με κάποια κολώνα. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και με τη γέφυρα της Καβάλας στο σημείο όπου το κατάστρωμα συνδέεται με την κεντρική κολώνα. Ανάμεσα στα δυο αυτά στοιχεία της γέφυρας παρεμβάλλεται ένας σύνδεσμος από μαλακό υλικό (εφέδρανο), ο οποίος ‘απελευθερώνει’ την κίνηση του καταστρώματος σε σχέση με την κίνηση της κολώνας. Όμως αυτή η σχετική κίνηση μπορεί να περιοριστεί από κάποια ειδική διαμόρφωση, η οποία φέρνει σε επαφή απευθείας την κολώνα με το κατάστρωμα όταν η μετατόπιση του καταστρώματος ξεπερνάει κάποια συγκεκριμένα όρια.



**Σχήμα 3.2:** Σχέδιο γέφυρας η οποία μπορεί να προσομοιωθεί με το απλουστευμένο μοντέλο

Τελικά μπορούμε να έχουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στο μοντέλο του σχήματος 3.1 και κάποια πραγματική γέφυρα (Σχήμα 3.2) ως εξής: το ελατήριο  $K_a$  αντιστοιχεί στην κολώνα της κατασκευής, το ελατήριο  $K_b$  στο εφεδρανο, ενώ οι άκαμπτες ράβδοι αντιστοιχούν στη διαμόρφωση που αναλαμβάνει να περιορίσει τη σχετική κίνηση ανάμεσα στο κατάστρωμα της γέφυρας και στη κολώνα της.

Η ακαμψία των ελατηρίων  $K_a$  επιλέγεται ως εξής:

$$K_a = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (3.1)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κολώνας,  $I$  η ροπή αδραειάς της και  $L$  το ύψος της κολώνας. Επίσης η ακαμψία  $K_b$  ισούται με την διατμητική ακαμψία των εφεδράνων. Οι τιμές των διάφορων χαρακτηριστικών του συστήματος είναι τα ίδια με αυτά του γραμμικού.

Παρόμοια αντιστοιχία θα μπορούσε να υπάρξει και με την ανάρτηση ενός οχήματος, όπου παρουσιάζονται παρόμοια μη γραμμικά φαινόμενα.

## 3.2 Εξίσωση κίνησης

Η κίνηση της μάζας  $M$  περιγράφεται από την εξίσωση:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + f(x) = -M \ddot{a} \quad (3.2)$$

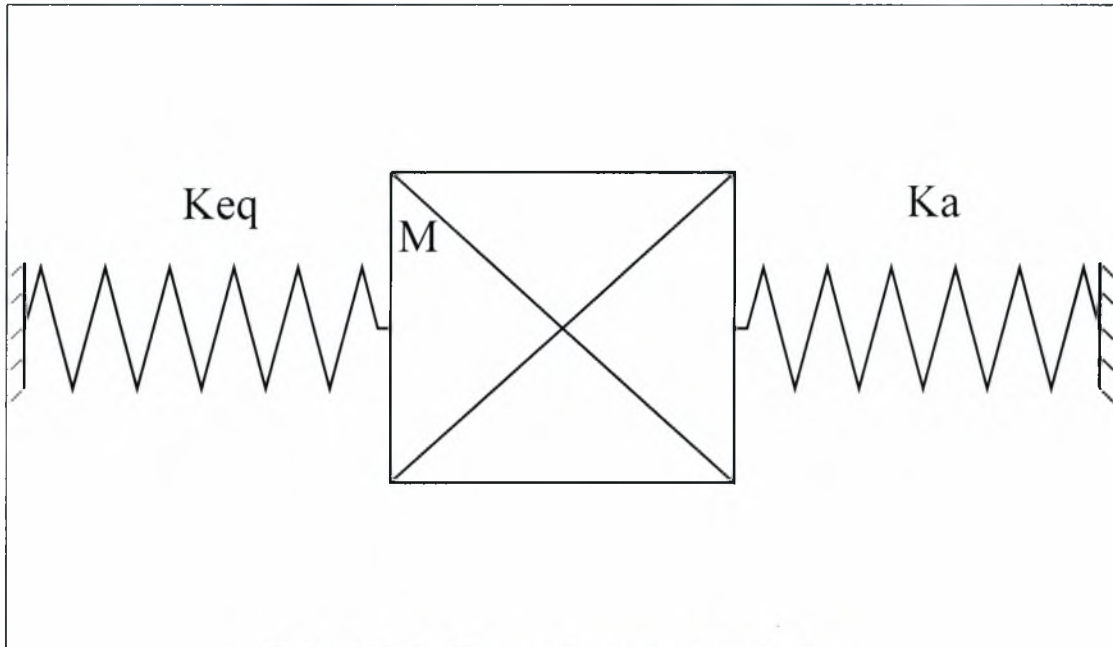
όπου  $M$  είναι η μάζα του σώματος,  $C$  η απόσβεση,  $x$  η μετατόπιση,  $\dot{x}$  η ταχύτητα,  $\ddot{x}$  η επιτάχυνση,  $f$  μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται από την μετατόπιση και από την ακαμψία του συστήματος και  $\ddot{a}$  η επιτάχυνση στις στηρίξεις της κατασκευής.

Για να υπολογίσουμε τα επί μέρους γραμμικά τμήματα της ακαμψίας του συστήματος, θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν  $-g \leq x \leq g$ , όπου το  $g$  είναι η απόσταση  $d \left( \frac{K_b}{K_a} + 1 \right)$  και  $d$  είναι η απόσταση του διάκενου ανάμεσα στη μάζα και στους περιοριστές.

Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει επαφή ανάμεσα στη μάζα και σε κάποιον από τους δυο περιοριστές. Τότε τα ελατήρια  $K_a$  και  $K_b$  είναι συνδεδεμένα σε σειρά και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την ισοδύναμη ακαμψία τους  $K_{eq}$ :

$$K_{eq} = \frac{K_a \cdot K_b}{K_a + K_b}$$



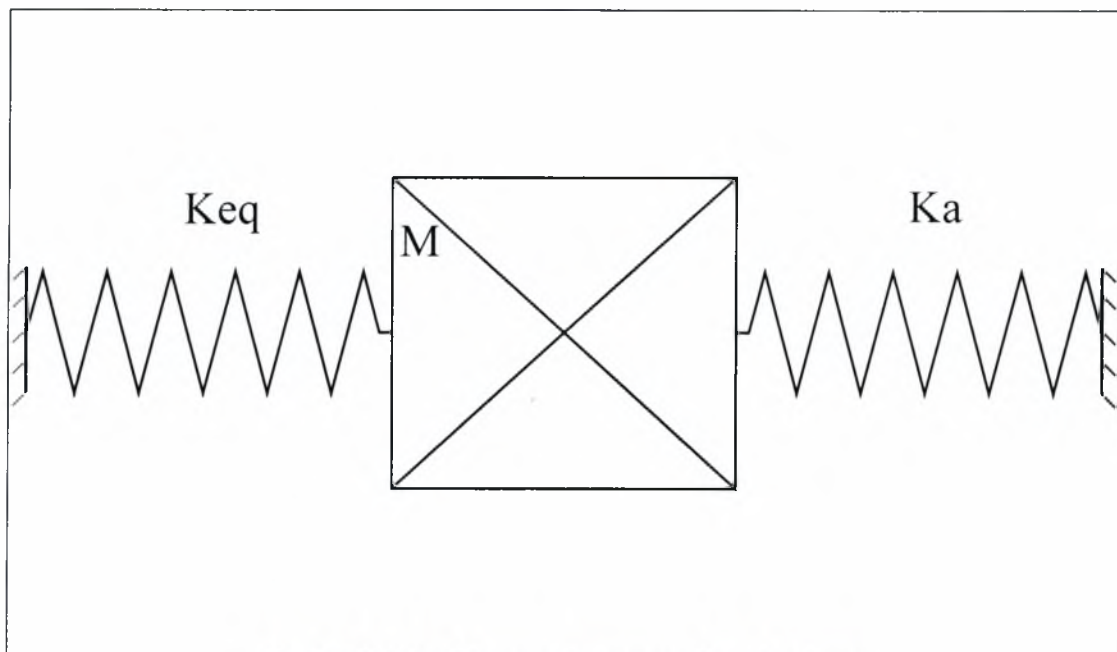
Σχήμα 3.3: Ισοδύναμο σύστημα με δυο ελατήρια

Στη συνέχεια θεωρούμε τα δυο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα και έτσι υπολογίζουμε τη συνολική ακαμψία του συστήματος για  $-g \leq x \leq g$ :

$$K_1 = K_{eq} + K_{eq} = 2 \cdot K_{eq} = \frac{2 \cdot K_a \cdot K_b}{K_a + K_b} \quad (3.3)$$

- ο Αν  $x > g$  ή  $x < -g$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει επαφή ανάμεσα στη μάζα και έναν από τους περιοριστές, ανάλογα με την περιοχή στην οποία βρισκόμαστε. Τότε στη μια πλευρά έχουμε τα ελατήρια  $K_a$  και  $K_b$  σε σειρά ενώ στην άλλη πλευρά υπάρχει μόνο το ελατήριο  $K_a$ .



Σχήμα 3.4: Ισοδύναμο σύστημα με δυο ελατήρια

Άρα η συνολική ακαμψία γίνεται τώρα:

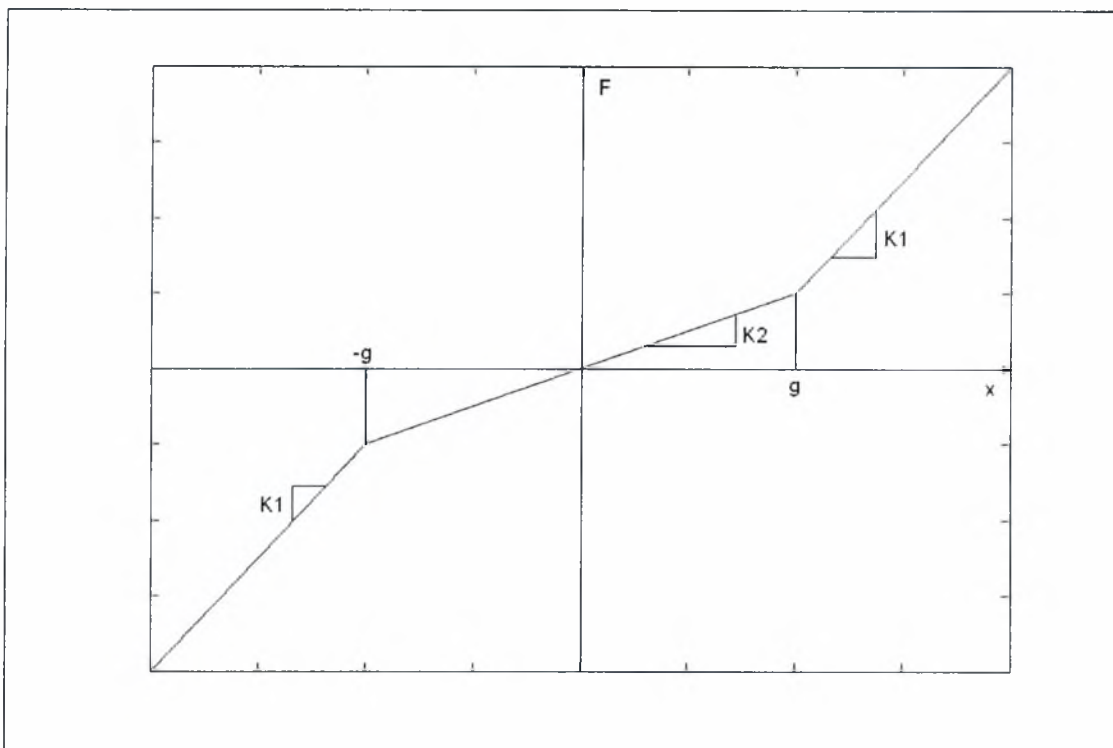
$$K_2 = K_{eq} + K_a = \frac{K_a \cdot K_b}{K_a + K_b} + K_a \quad (3.4)$$



Τελικά η ακαμψία του συστήματος συναρτήσει της μετατόπισης είναι:

$$K_1(x) = \frac{K_a \cdot K_b}{K_a + K_b} + K_a \quad \text{για } x > g \text{ ή } x < -g \quad (\text{επαφή})$$

$$K_2(x) = \frac{2 \cdot K_a \cdot K_b}{K_a + K_b} \quad \text{για } -g \leq x \leq g \quad (\text{όχι επαφή})$$



Σχήμα 3.5: Σχέση δύναμης - μετατόπισης

Στο σχήμα 3.5 παρουσιάζεται η καμπύλη της δύναμης συναρτήσει της μετατόπισης ( $f(x) = K(x) \cdot x$ ) για διάκενο ίσο με  $g$ . Στο σχήμα αυτό φαίνεται καθαρά η αλλαγή στη κλίση της καμπύλης λόγω της αλλαγής της τιμής της ακαμψίας στα σημεία  $x = g$  και  $x = -g$ . Η κλίση πριν το σημείο  $x = -g$  και μετά το σημείο  $x = g$  είναι ίση με:

$$K_1 = \frac{K_a \cdot K_b}{K_a + K_b} + K_a$$

ενώ στα σημεία ανάμεσα στα  $x = -g$  και  $x = g$  είναι:

$$K_2 = \frac{2 \cdot K_a \cdot K_b}{K_a + K_b}$$

### 3.3 Ιδιοσυχνότητες

Το μοντέλο αυτό, λόγω της μη γραμμικής ακαμψίας του, παρουσιάζει την εξής ιδιομορφία: παρά το γεγονός ότι είναι σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, εμφανίζει δυο ιδιοσυχνότητες. Η πρώτη ιδιοσυχνότητα εμφανίζεται στην περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει επαφή ανάμεσα στη μάζα και σε κάποιον περιοριστή ( $-g \leq x \leq g$ ), ενώ η δεύτερη παρουσιάζεται όταν υπάρχει επαφή ( $x > g$  ή  $x < -g$ ).

Η πρώτη ιδιοσυχνότητα είναι, για την περίπτωση που δεν υπάρχει επαφή:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(x)}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K_a \cdot K_b}{M(K_a + K_b)}}$$

Ενώ η δεύτερη ιδιοσυχνότητα είναι, για την περίπτωση που υπάρχει επαφή:

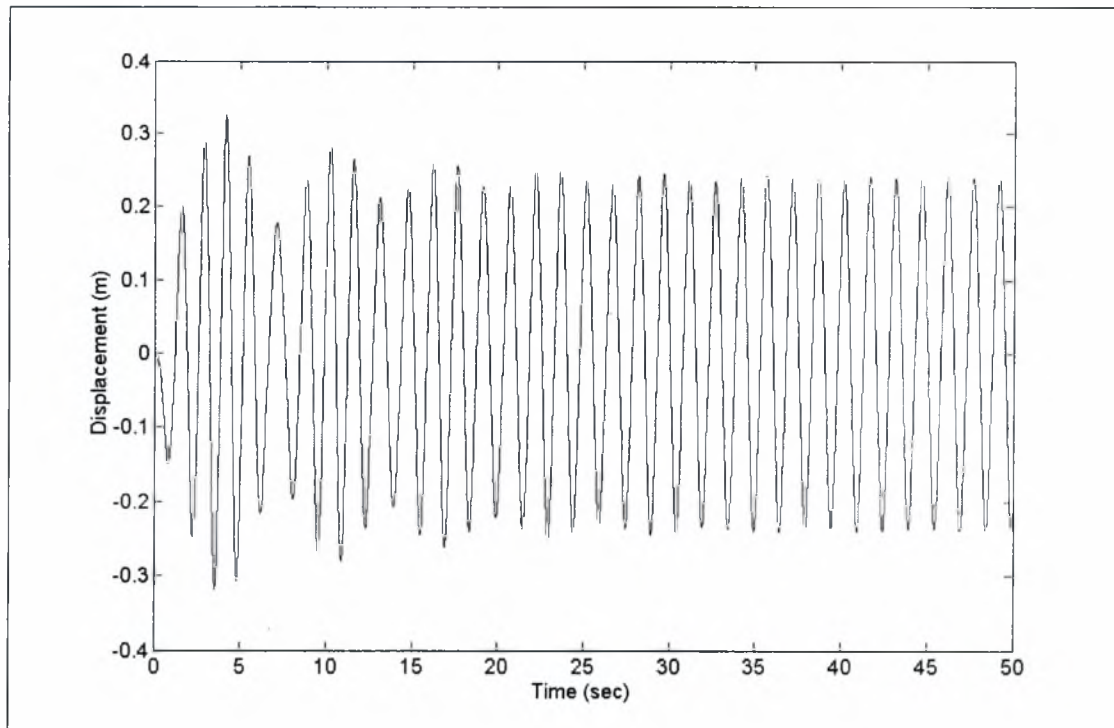
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K(x)}{M}} = \sqrt{\frac{K_a \cdot K_b}{M(K_a + K_b)} + \frac{K_a}{M}}$$

### 3.4 Ολοκλήρωση εξισώσεων κίνησης – Αποτελέσματα

#### 3.4.1 Περιοδική διέγερση

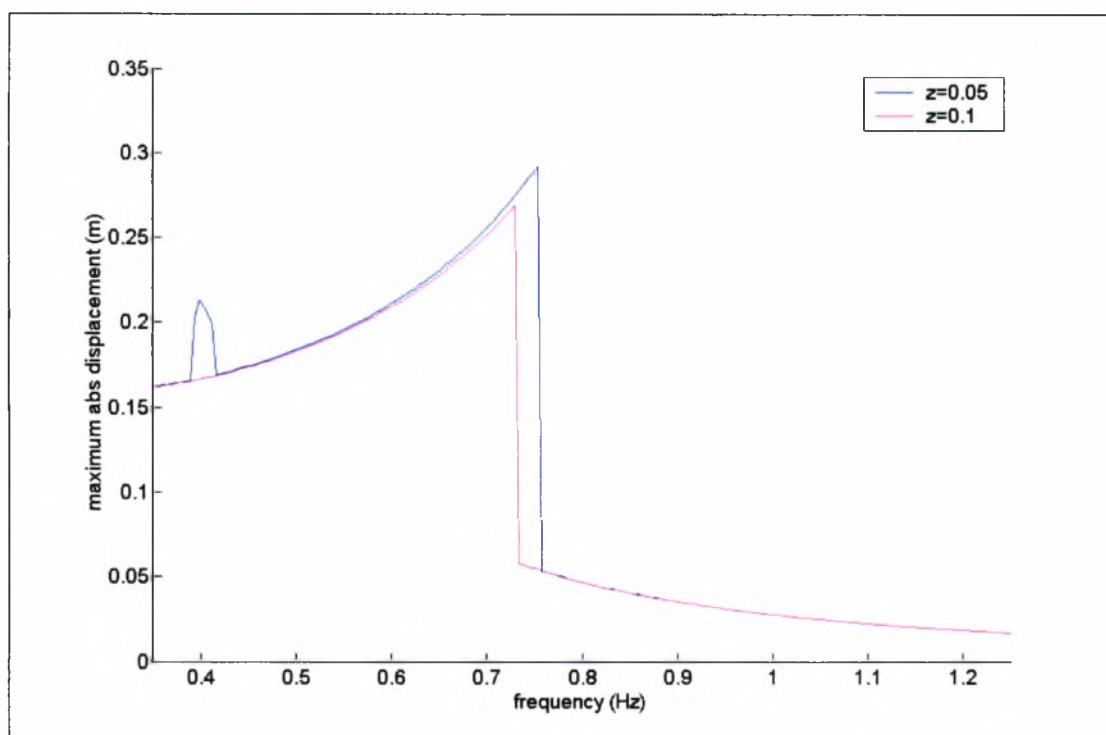


Ο υπολογισμός της απόκρισης του συστήματος γίνεται με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων OpenSees ([www.opensees.berkeley.edu](http://www.opensees.berkeley.edu)) σε συνδυασμό με το υπολογιστικό πακέτο MATLAB (<http://www.mathworks.com/>). Έτσι υπολογίζουμε τα χαρακτηριστικά της κίνησης του συστήματος όπως είναι η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή. Επίσης αναλύονται και οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στα ελατήρια. Ως διέγερση χρησιμοποιήθηκε επιτάχυνση στα άκρα του μοντέλου η οποία είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα διέγερσης  $\omega$  και εύρος  $1 \text{ m/sec}^2$ . Στο σχήμα 3.6 φαίνεται η απόκριση της μάζας  $M$  με συχνότητα διέγερσης  $0.65 \text{ Hz}$

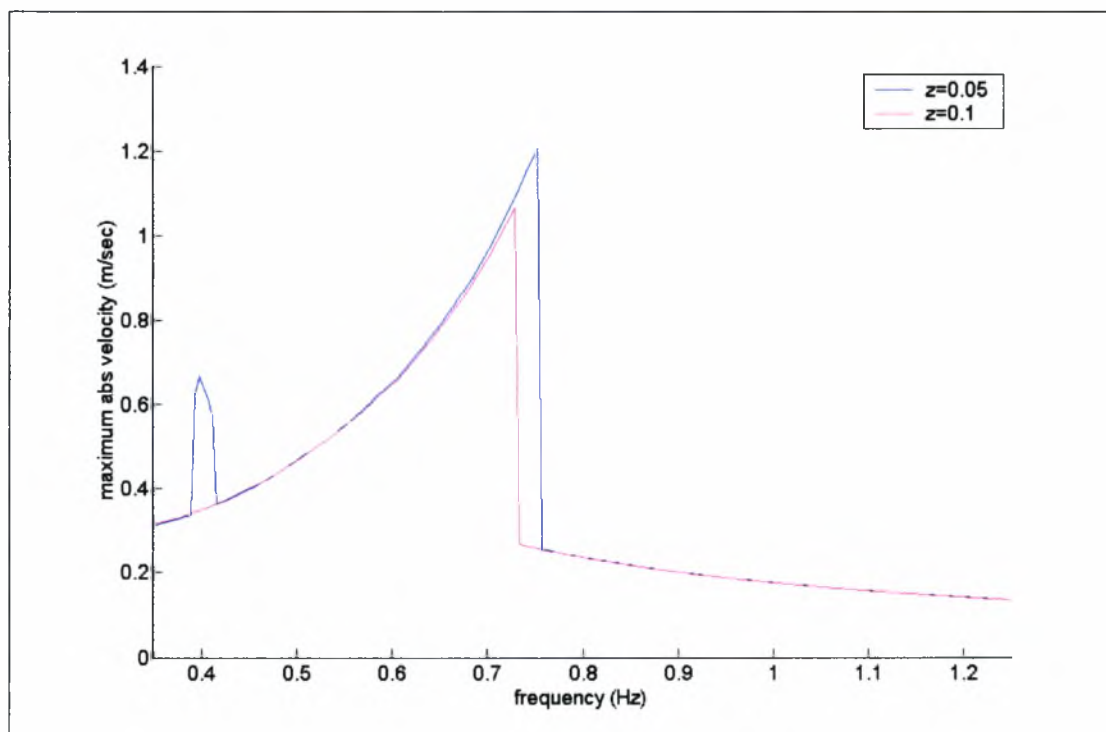


Σχήμα 3.6: Τυπική απόκριση συστήματος υπό περιοδική διέγερση

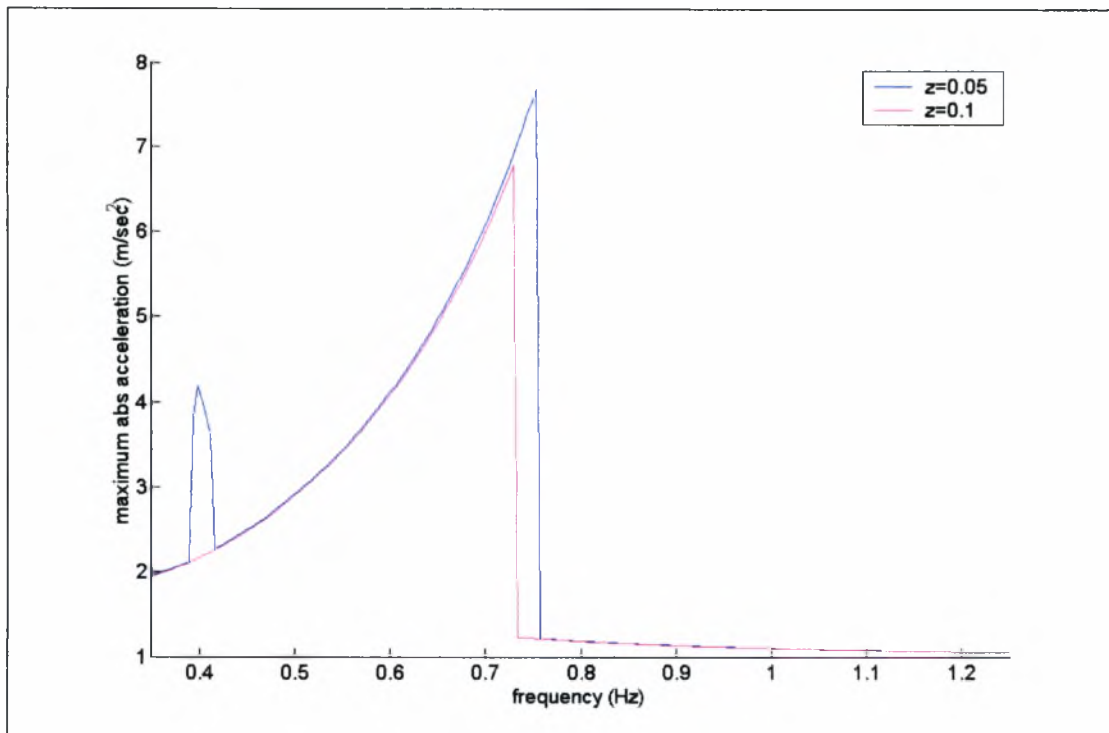
Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται διάφορα φάσματα απόκρισης του μοντέλου για μερικές τιμές των παραμέτρων  $d$  (μήκος διάκενου) και  $z$  (απόσβεση συστήματος). Συγκεκριμένα παρουσιάζονται τα φάσματα της μέγιστης απόλυτης μετατόπισης, της μέγιστης απόλυτης ταχύτητας, της μέγιστης απόλυτης επιτάχυνσης για την μάζα  $M$ , πρώτα για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$  και για  $d=10$  cm, ενώ στη συνέχεια για διάφορες τιμές του διάκενου  $d$  και απόσβεση  $z=0.05$ . Επίσης παρουσιάζονται τα φάσματα των μέγιστων απόλυτων δυνάμεων στα ελατήρια.



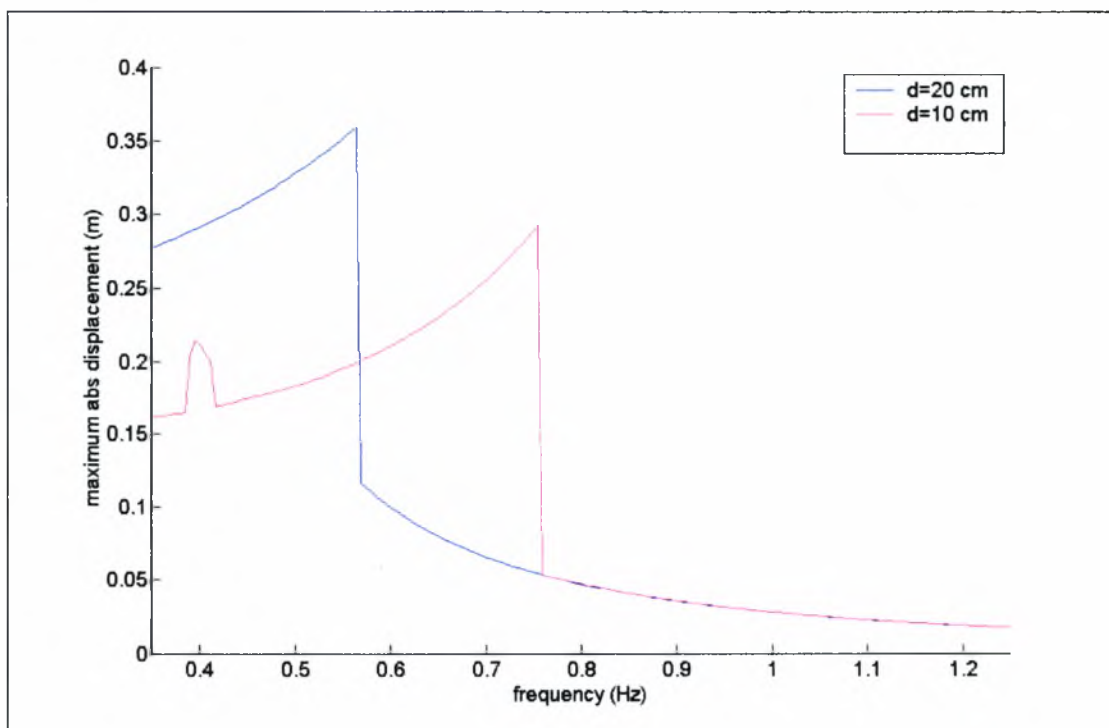
Σχήμα 3.7: Φάσματα μετατοπίσεων για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



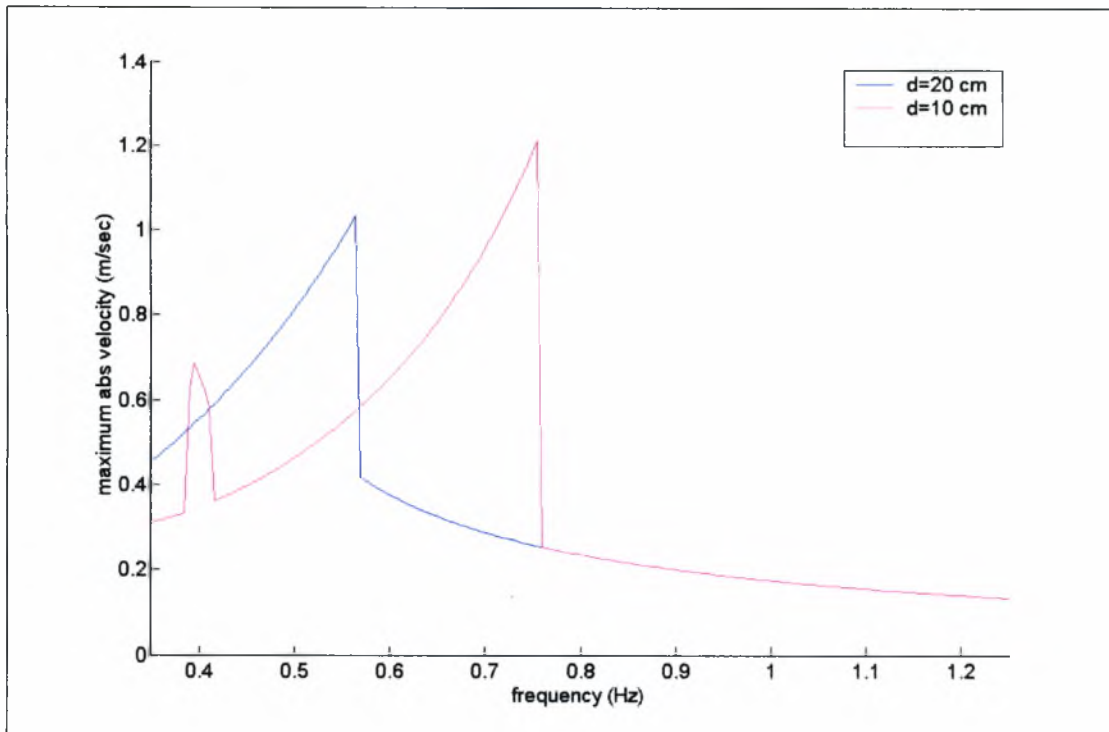
Σχήμα 3.8: Φάσματα ταχυτήτων για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



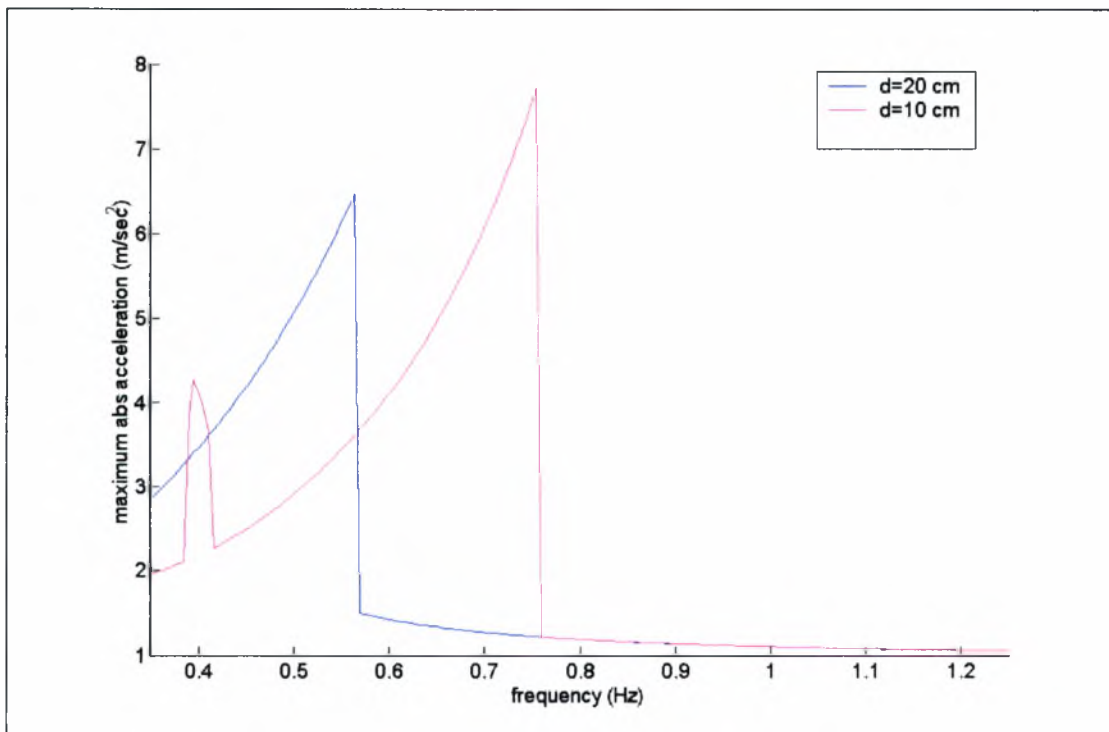
Σχήμα 3.9: Φάσματα επιταχύνσεων για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



Σχήμα 3.10: Φάσματα μετατοπίσεων για διάφορες τιμές του διάκενου  $d$



Σχήμα 3.11: Φάσματα ταχυτήτων για διάφορες τιμές του διάκενου  $d$

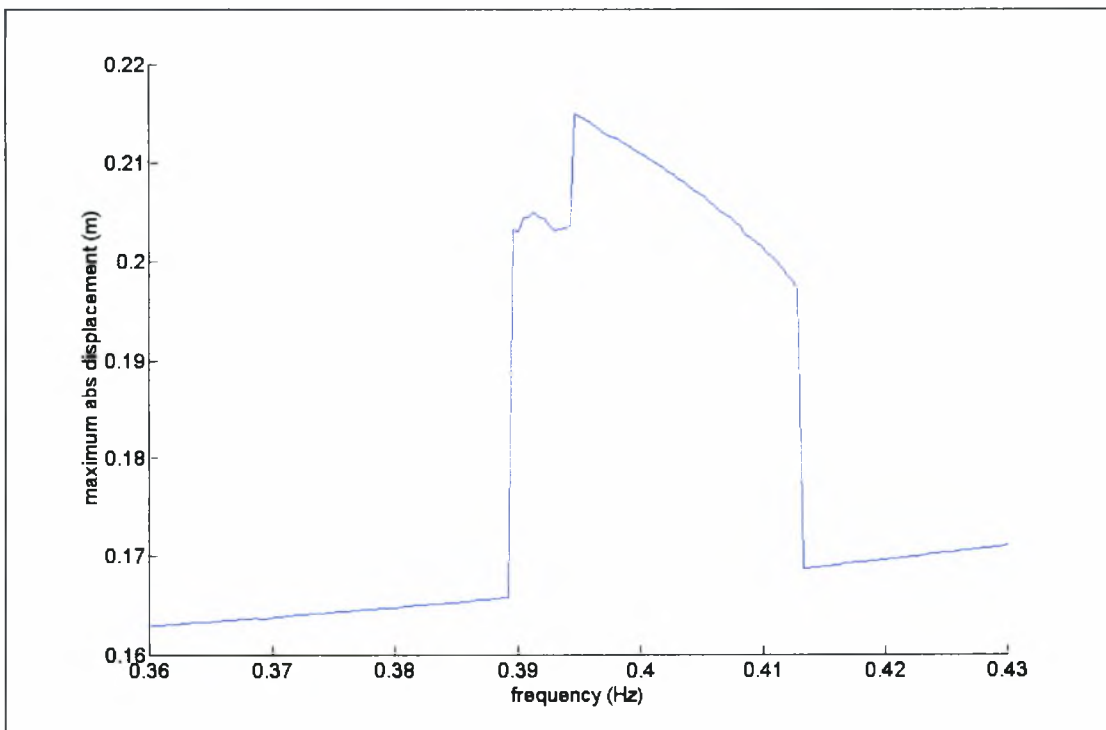


Σχήμα 3.12: Φάσματα επιταχύνσεων για διάφορες τιμές του διάκενου  $d$

### 3.4.2 Σχόλια – Παρατηρήσεις

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω σχήματα υπάρχει μια πολύ μεγάλη μείωση στην απόκριση του συστήματος για κάποια συγκεκριμένη τιμή της συχνότητας διέγερσης. Αυτό το ‘άλμα’ της απόκρισης οφείλεται στη μη γραμμική ακαμψία του συστήματος. Συγκεκριμένα σε αυτή την περιοχή των συχνοτήτων παρουσιάζονται τρεις διαφορετικοί κλάδοι λύσεων: δυο ευσταθείς και ένας ασταθής (π.χ. Natsiavas and Gonzalez 1992). Τον ποιο κλάδο θα ακολουθήσει η απόκριση του μοντέλου εξαρτάται από τις εκάστοτε αρχικές συνθήκες, αλλά κάποια στιγμή η λύση περνάει απότομα από τον ένα κλάδο στον άλλο, με συνέπεια να δημιουργείται αυτό το ‘άλμα’.

Επίσης εμφανίζονται και κάποια μικρότερα ‘άλματα’ σε κάποιες περιοχές μικρότερης συχνότητας διέγερσης και συγκεκριμένα σε συχνότητα διέγερσης ίση με τη μισή συχνότητα συντονισμού. Στο σχήμα 3.13 φαίνεται το φάσμα της μετατόπισης για την περίπτωση που  $z=0.05$  και για τις συχνότητες διέγερσης γύρω από τις οποίες παρουσιάζεται το φαινόμενο αυτό.



Σχήμα 3.13: Φάσμα μετατόπισης για συχνότητες 0.36 ως 0.43 Hz



Στην περίπτωση του μικρού διάκενου (Γραφήματα 3.10-3.12) παρατηρούμε πως το εύρος των συχνοτήτων της διέγερσης για το οποίο έχουμε επαφή είναι πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο του μεγάλου διάκενου ( $d=20$  cm). Κάτι τέτοιο είναι απόλυτα φυσιολογικό, αφού χρειάζεται μικρότερη μετατόπιση η μάζα  $M$  μέχρι να ακουμπήσει σε κάποιον από τους περιοριστές. Αντίθετα όταν το διάκενο είναι μεγαλύτερο επηρεάζεται πολύ μικρότερο εύρος συχνοτήτων διέγερσης.

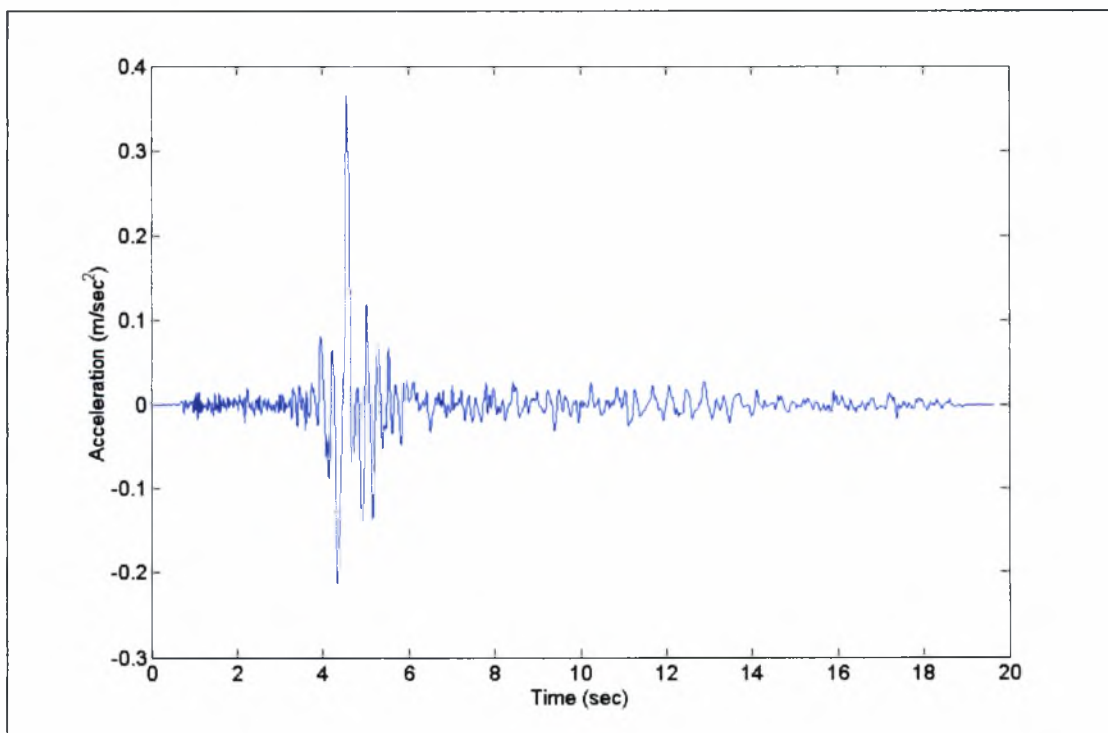
Παρατηρούμε επίσης ότι στις υψηλές συχνότητες φόρτισης η μετατόπιση είναι πολύ μικρή με αποτέλεσμα να μην υπάρχει επαφή ανάμεσα στη μάζα και στους περιοριστές, κάτι το οποίο γίνεται λόγω της πολύ γρήγορης αναστροφής. Αντίθετα στις μικρές συχνότητες φόρτισης παρατηρείται το εξής φαινόμενο: η μάζα έρχεται σε επαφή με τον ένα περιοριστή και ταλαντώνεται γύρω από αυτό το νέο σημείο ισορροπίας. Στη συνέχεια έρχεται σε επαφή με τον άλλο περιοριστή και ταλαντώνεται εκ νέου σε αυτό το σημείο ισορροπίας. Αυτός ο κύκλος επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να αποσβεστεί αρκετά η ταλάντωση του συστήματος και να περάσουμε στη μόνιμη κατάσταση.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί πως το σύστημα αυτό παρουσιάζει αρκετά μεγάλη δυσκολία ως προς τη μετάβαση από τη μεταβατική στη μόνιμη κατάσταση ταλάντωσης, γεγονός που δυσχεραίνει αρκετά τη προσπάθεια υπολογισμού των φασμάτων απόκρισης. Χαρακτηριστικά πρέπει να πούμε πως χρειάστηκαν τουλάχιστον πεντακόσιοι κύκλοι φόρτισης για τον υπολογισμό των φασμάτων, αριθμός που εξαρτάται και από την απόσβεση του συστήματος, ενώ μειώνεται σημαντικά με την προσθήκη αποσβεστήρων όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ένα δεύτερο σημείο στο οποίο αξίζει να αναφερθούμε είναι η ανάγκη υπολογισμού της απόκρισης σε πολλά σημεία ανά κύκλο φόρτισης, ειδικά όταν βρισκόμαστε σε μικρές συχνότητες. Λίγα σημεία οδηγούν σε μεγάλα αριθμητικά σφάλματα κατά τον υπολογισμό του εύρους της ταλάντωσης στη μόνιμη κατάσταση, τα οποία είναι κάτι παραπάνω από εμφανή στα σχήματα των φασμάτων.

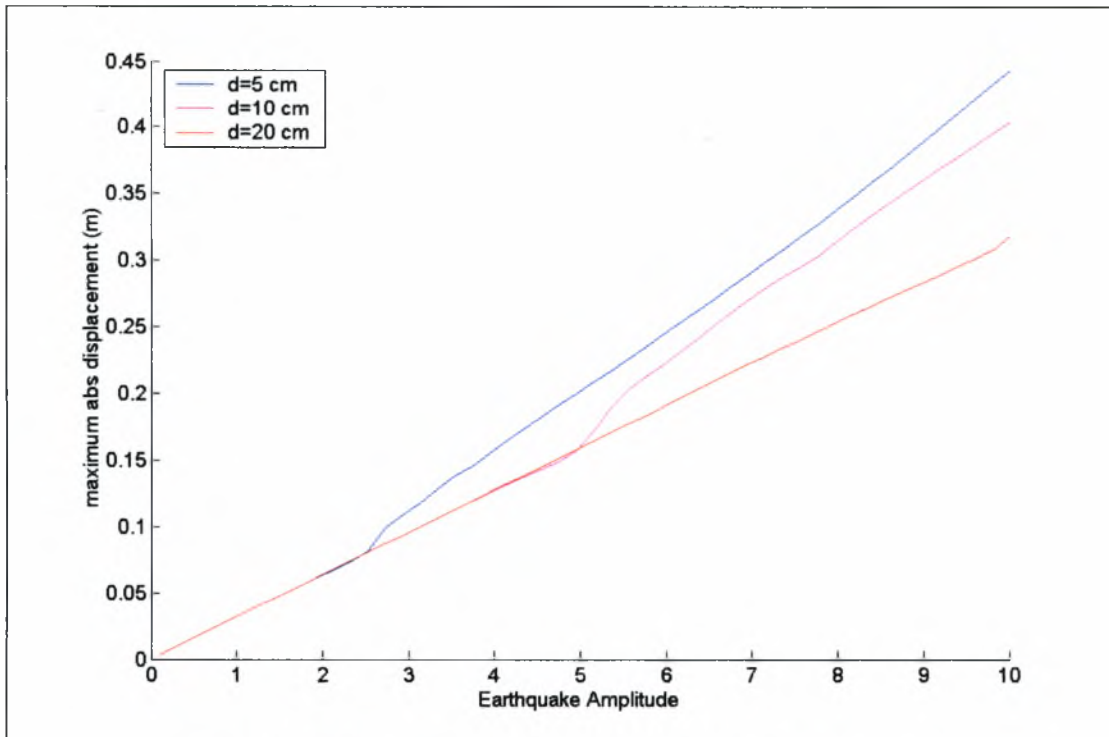
### 3.4.3 Σεισμική διέγερση

#### 3.4.3.1 Συμμετρικό Σύστημα

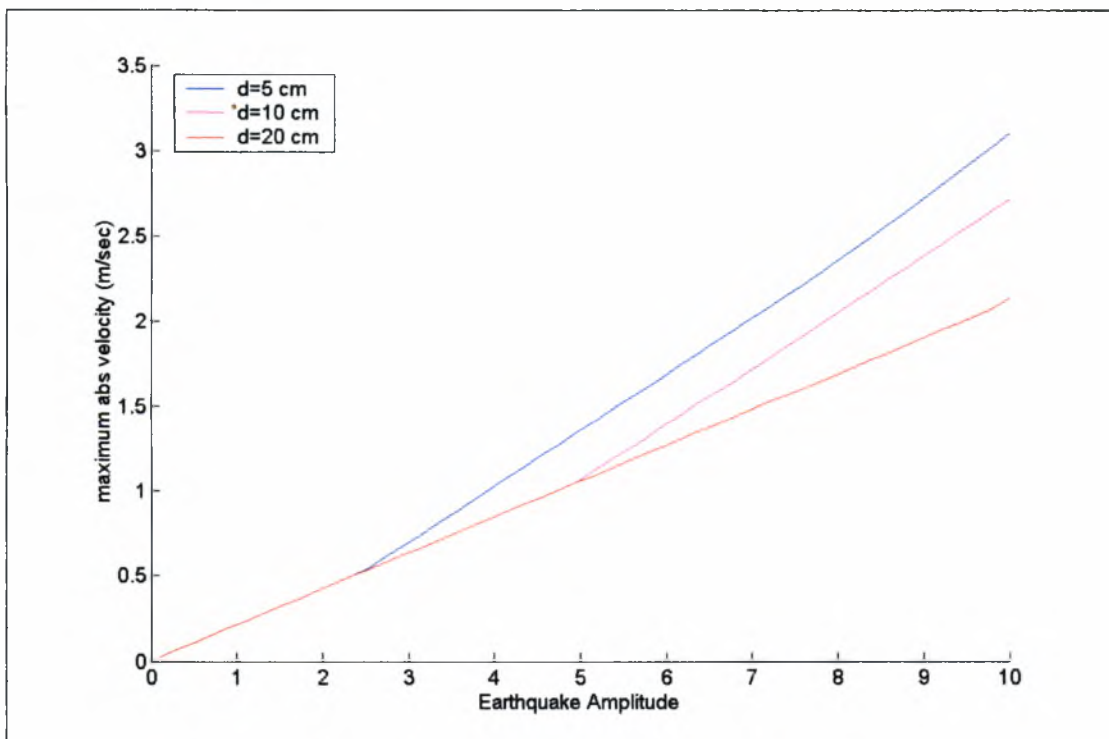
Στη συνέχεια έγινε ανάλυση της απόκρισης του συστήματος σε σεισμική διέγερση. Για αυτόν τον σκοπό χρησιμοποιήθηκε η σεισμική ακολουθία του σεισμού Imperial Valley 1979 (El Centro Array 6), του οποίου το επιταχυνσιογράφημα φαίνεται στο σχήμα 3.14. Παρακάτω παρουσιάζονται τα φάσματα της απόκρισης της κατασκευής συναρτήσει της κλιμάκωσης της σεισμικής διέγερσης. Τα φάσματα αυτά αναφέρονται σε μέγιστη απόλυτη μετατόπιση, μέγιστη απόλυτη ταχύτητα, μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση, καθώς και μέγιστες απόλυτες δυνάμεις στα ελατήρια. Επίσης έγιναν δυο παραμετροποιήσεις, πρώτα ως προς το διάκενο  $d$  ( $z=0.05$ ) και στη συνέχεια ως προς την απόσβεση  $z$  ( $d=10$  cm).



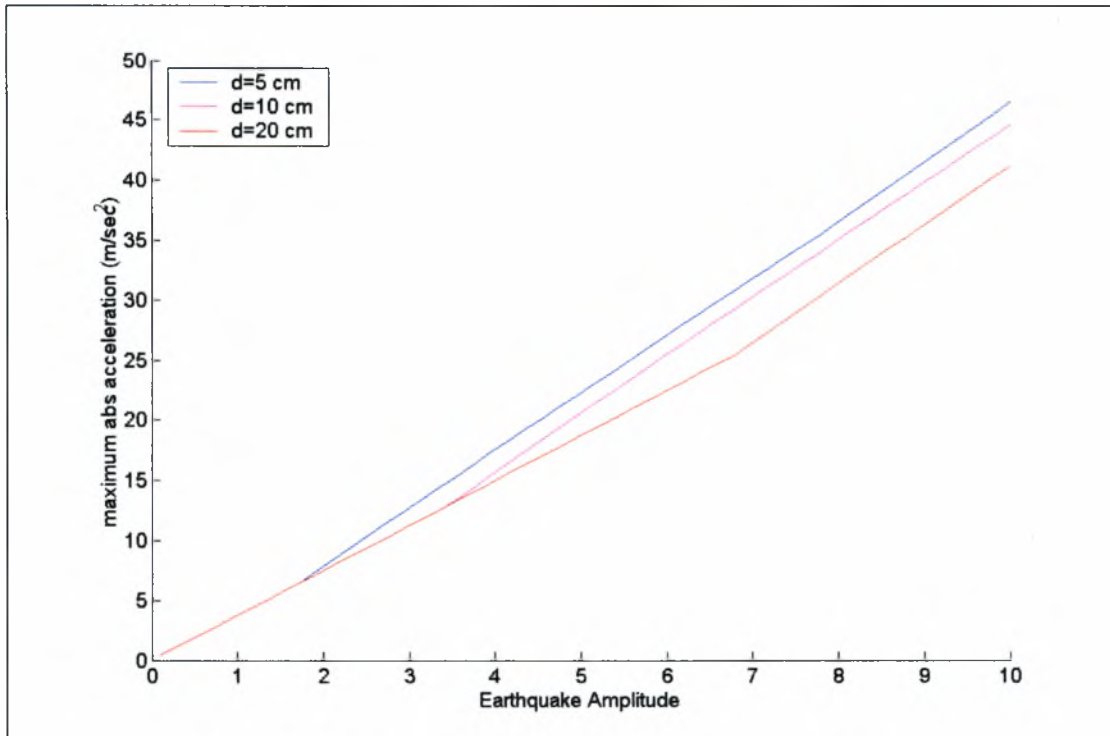
Σχήμα 3.14: Επιταχυνσιογράφημα Imperial Valley 1979 (El Centro Array 6)



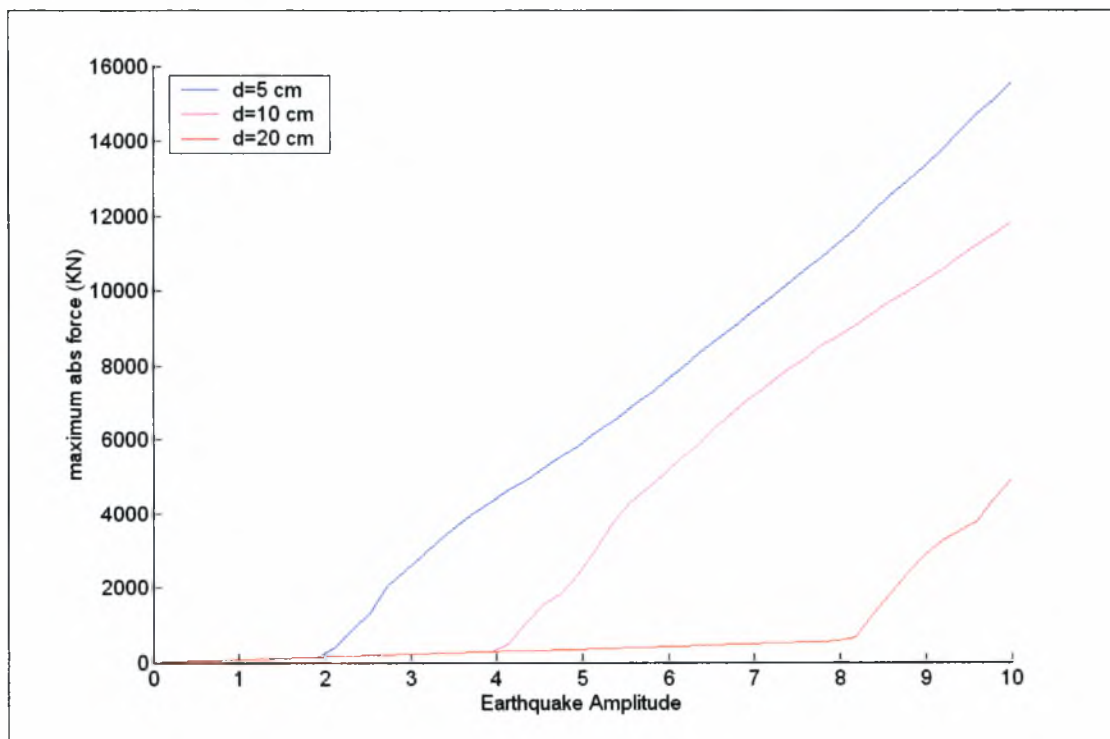
Σχήμα 3.15: Μετατοπίσεις για διάφορες τιμές του διάκενου d



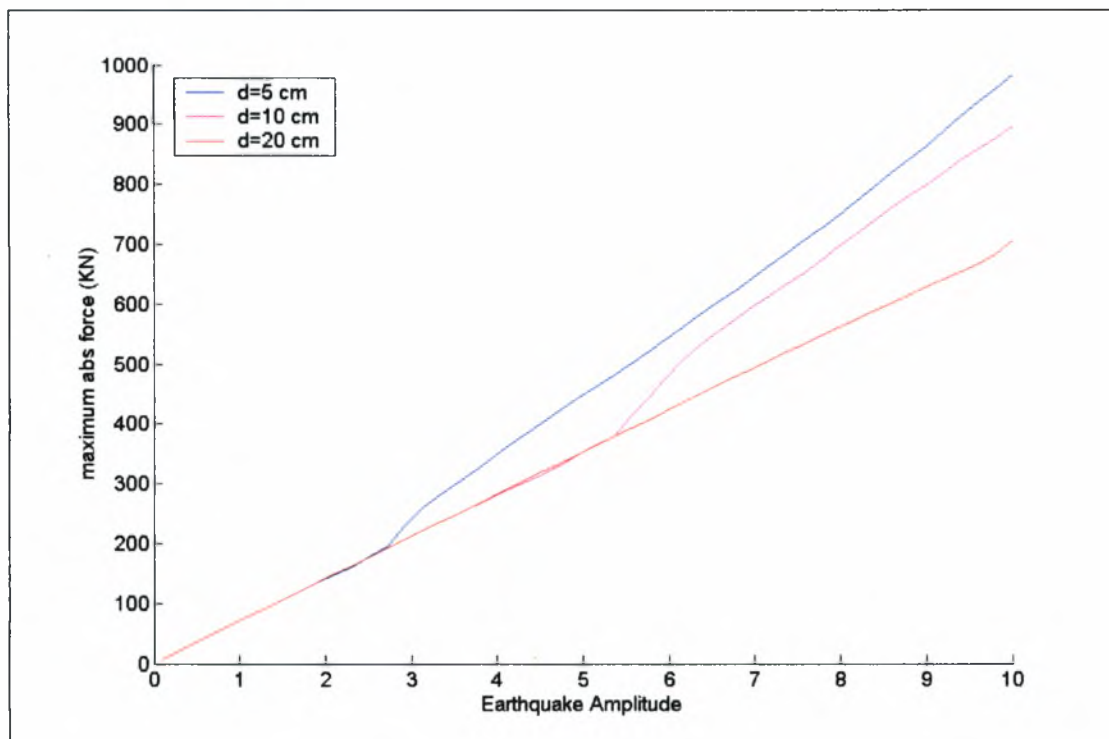
Σχήμα 3.16: Ταχύτητες για διάφορες τιμές του διάκενου d



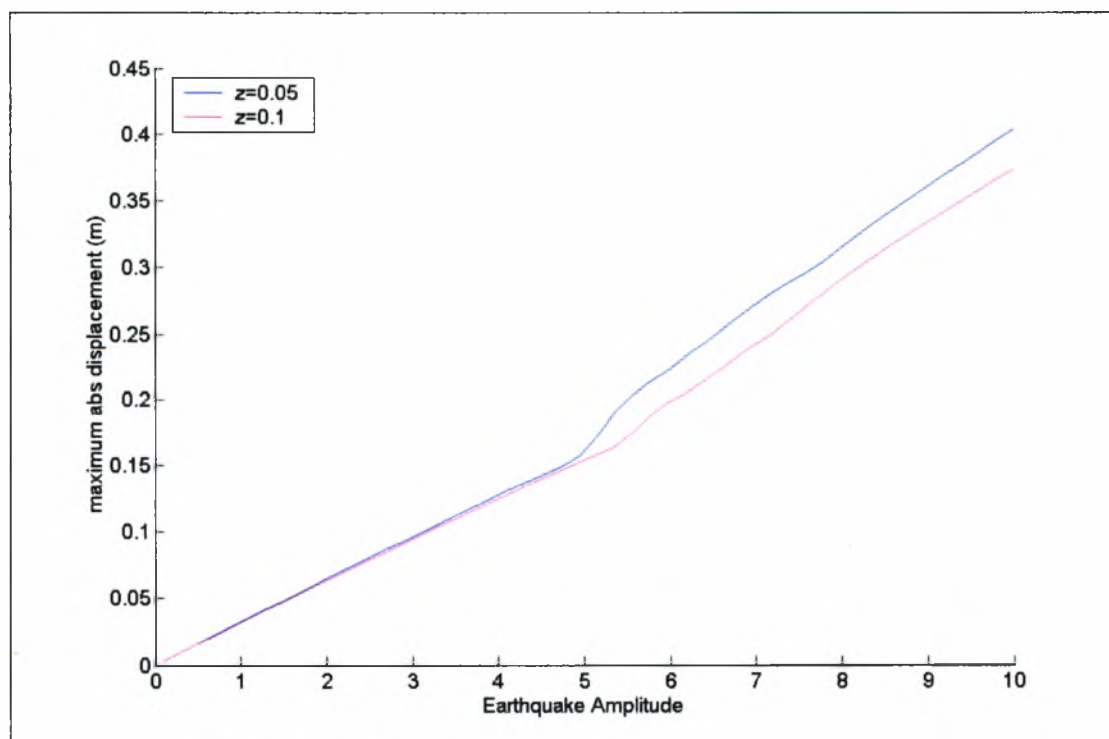
Σχήμα 3.17: Επιταχύνσεις για διάφορες τιμές του διάκενου d



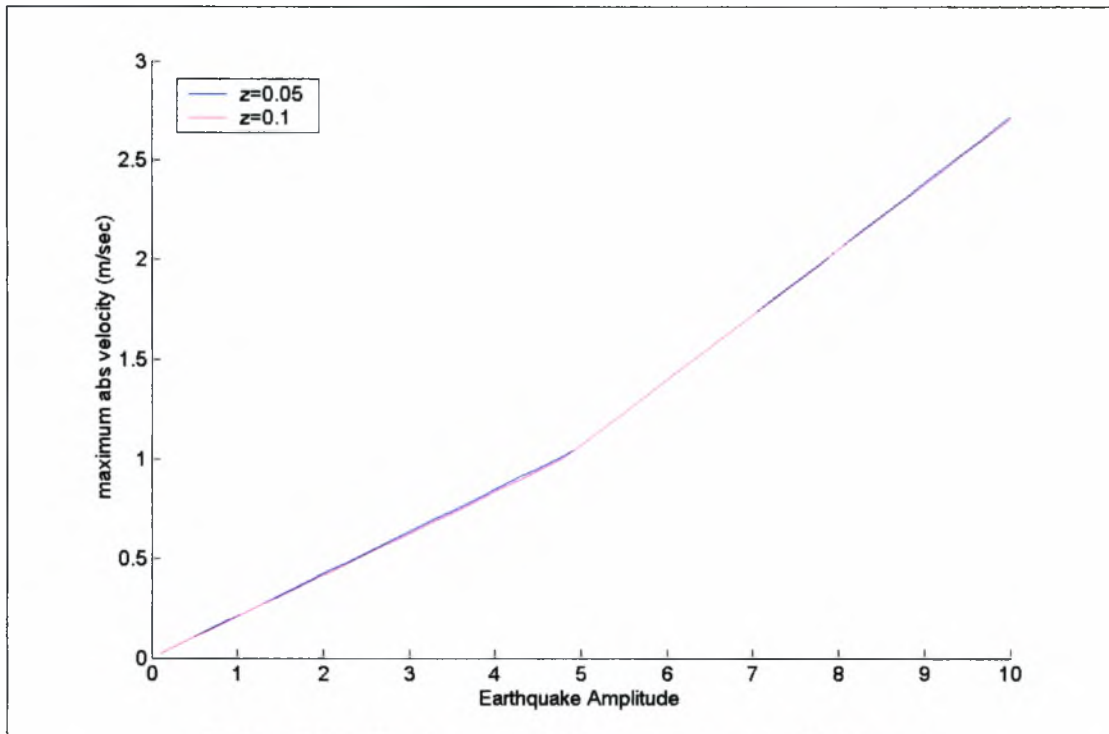
Σχήμα 3.18: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του διάκενου d



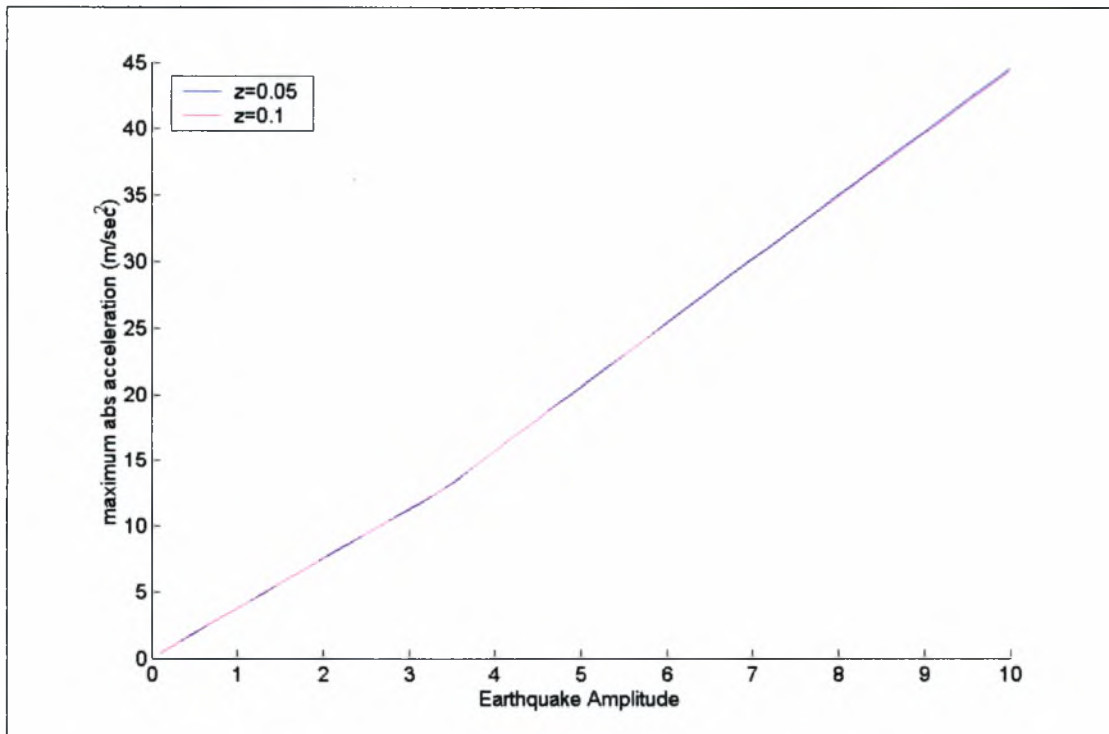
Σχήμα 3.19: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του διάκενου  $d$



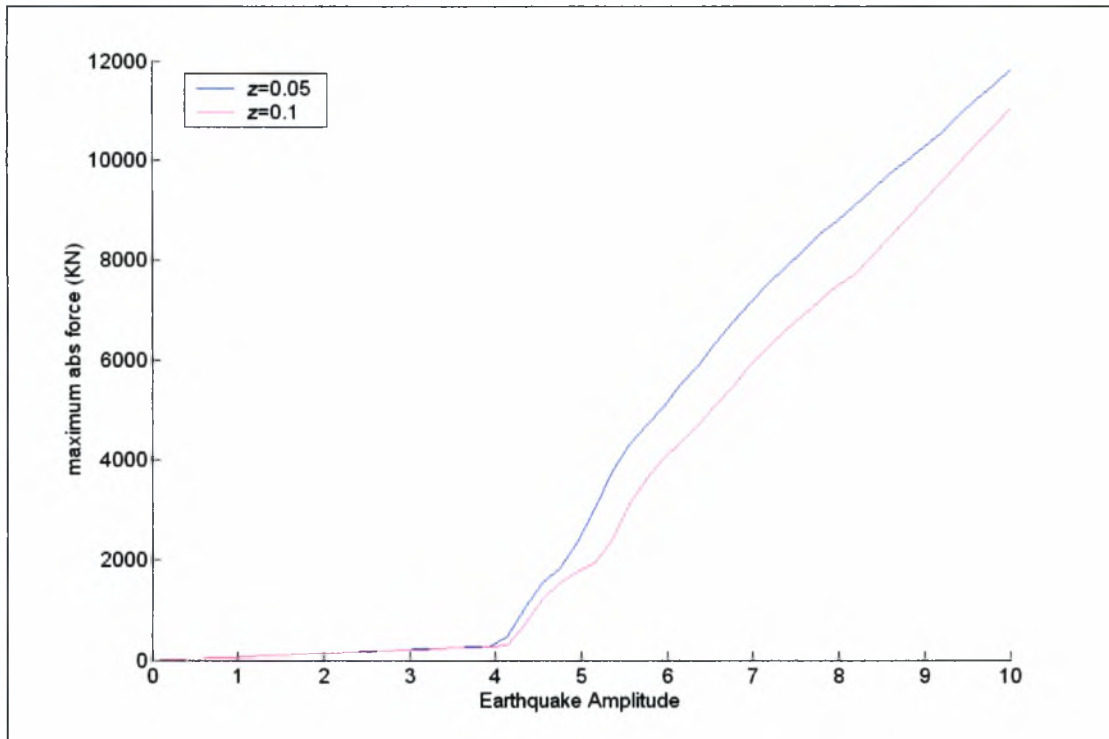
Σχήμα 3.20: Μετατοπίσεις για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



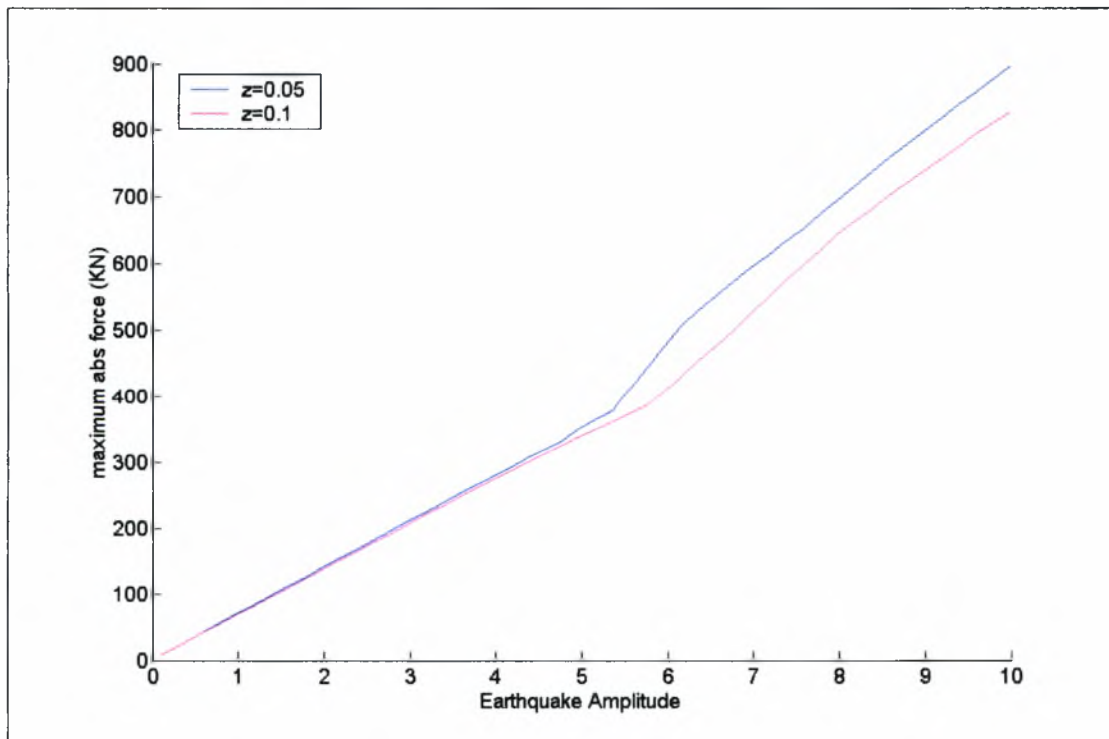
Σχήμα 3.21: Ταχύτητες για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



Σχήμα 3.22: Επιταχύνσεις για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



Σχήμα 3.23: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$



Σχήμα 3.24: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές της απόσβεσης  $z$

### 3.4.3.2 Σχόλια – Παρατηρήσεις

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις αποκρίσεις του συστήματος παρουσιάζονται δυο περιοχές: μια γραμμική για μικρές τιμές του μεγέθους της σεισμικής διέγερσης και μια δεύτερη για μεγαλύτερα μεγέθη η οποία θα μπορούσε να προσεγγιστεί με μια γραμμική, αλλά με διαφορετική κλίση από την προηγούμενη. Αυτή η διαφορά στην κλίση της καμπύλης οφείλεται στο γεγονός ότι μετά από κάποια κρίσιμη τιμή του μεγέθους του σεισμού υπάρχει επαφή ανάμεσα στη μάζα  $M$  και στον περιοριστή με αποτέλεσμα να υπάρχει μια απευθείας ροή δυνάμεων από τη μάζα προς τα ελατήρια ακαμψίας  $K_a$ . Αυτό φαίνεται πολύ καθαρά στα σχήματα 3.19 και 3.24 όπου η αλλαγή στη κλίση είναι πολύ μεγάλη, κάτι που σημαίνει ότι πλέον παύει να υπάρχει η απομόνωση της μάζας μέσω των μαλακών ελατήριων  $K_b$  με αποτέλεσμα τα ελατήρια  $K_b$  να καταπονούνται σημαντικά.

Επίσης είναι προφανής η επίδραση του μήκους  $d$  του διάκενου στα σχήματα 3.15 ως 3.19 αφού αλλάζει το σημείο αλλαγής κλίσης, δηλαδή το κλιμάκωση της σεισμικής διέγερσης από το οποίο υπάρχει επαφή ανάμεσα στη μάζα και σε κάποιον περιοριστή, δηλαδή ‘ενεργοποιείται’ το ελατήριο ακαμψίας  $K_a$ .

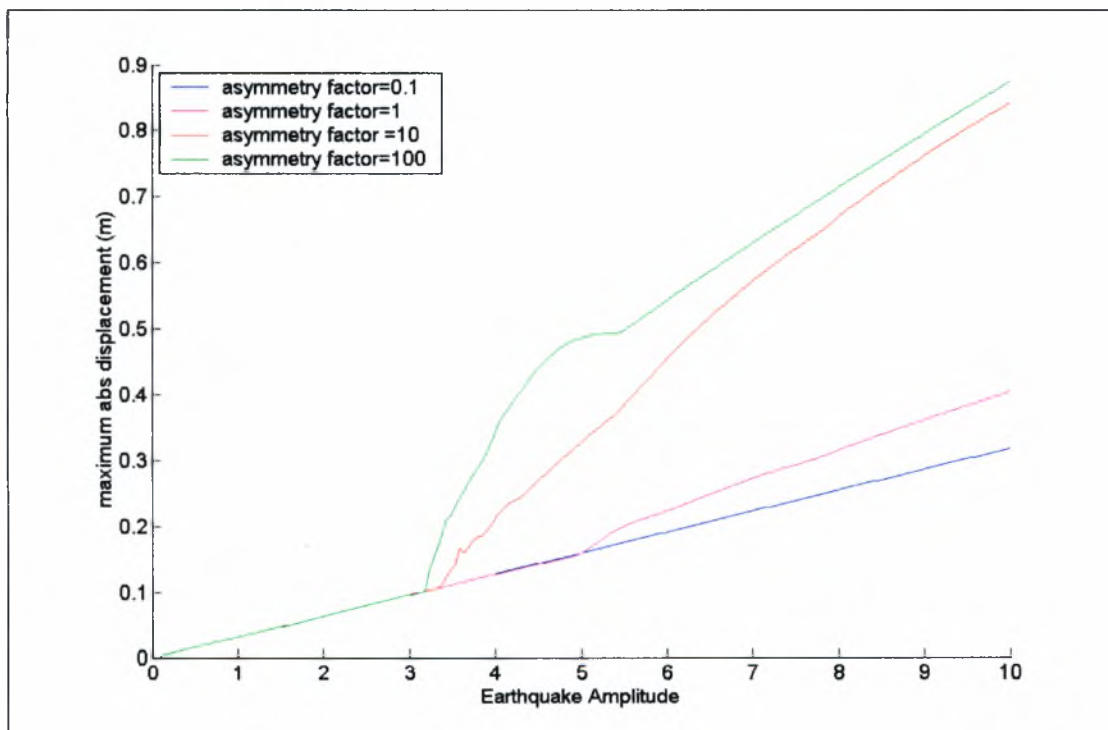
### 3.4.3.3 Ασύμμετρο Σύστημα

Τέλος έγινε ανάλυση της απόκρισης του συστήματος σε σεισμική διέγερση, αλλά με μη συμμετρικά χαρακτηριστικά. Για την ακρίβεια η ακαμψία του ελατηρίου  $K_a$  στη δεξιά πλευρά του μοντέλου πολλαπλασιάστηκε με έναν συντελεστή  $\alpha$ , ενώ το αριστερό ελατήριο καθώς και τα δυο ελατήρια ακαμψίας  $K_b$  παραμένουν ως έχουν. Κάτι τέτοιο έχει νόημα, αφού λόγω χάρη στις αναρτήσεις οχημάτων υπάρχουν διαφορετικά συστήματα στο εμπρός και στο πίσω μέρος ενώ στην περίπτωση κάποιας γέφυρας το ελατήριο  $K_a$  μπορεί να παίζει τον ρόλο είτε κολώνας διαφορετικού ύψους

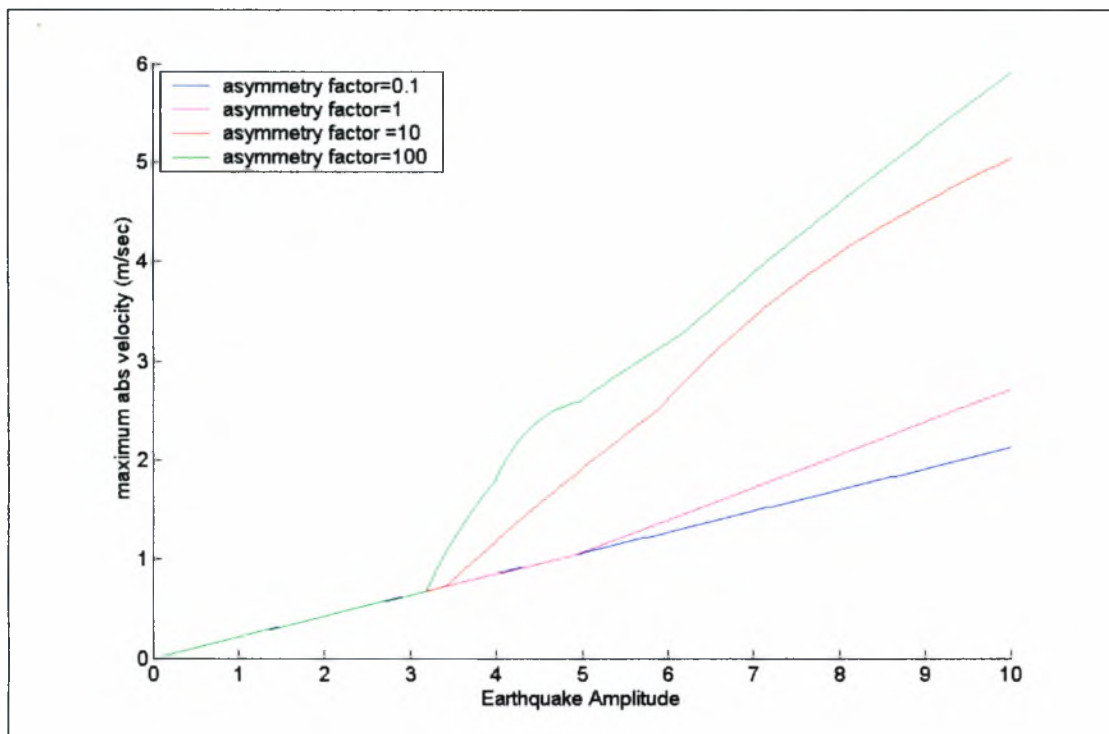


ή διατομής ή ακόμα και δύσκαμπτου ακρόβαθρου. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις η ακαμψία αλλάζει σύμφωνα με τη σχέση 3.1, ενώ στη τρίτη περίπτωση η ακαμψία θεωρητικά είναι άπειρη αλλά πρακτικά μπορούμε να πούμε ότι είναι κατά μερικές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την ακαμψία της κολώνας.

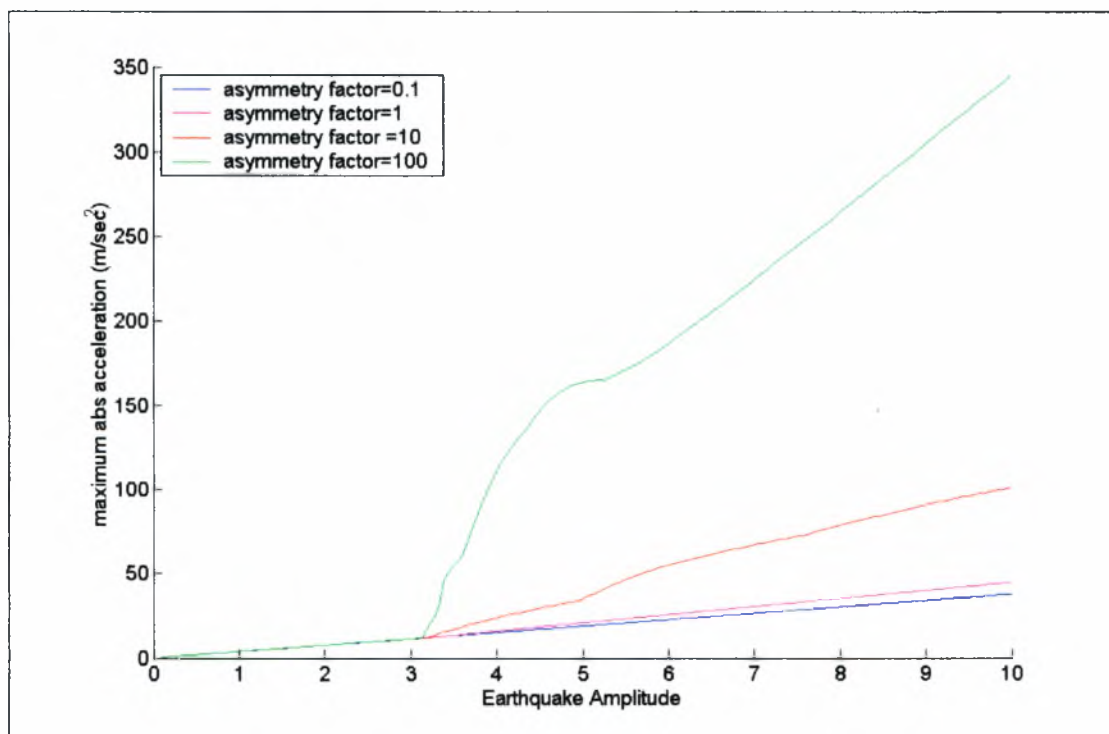
Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής φαίνονται στα παρακάτω σχήματα, στα οποία παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις, καθώς και οι δυνάμεις στα ελατήρια συναρτήσει της κλιμάκωσης του σεισμού αλλά και του συντελεστή ασυμμετρίας.



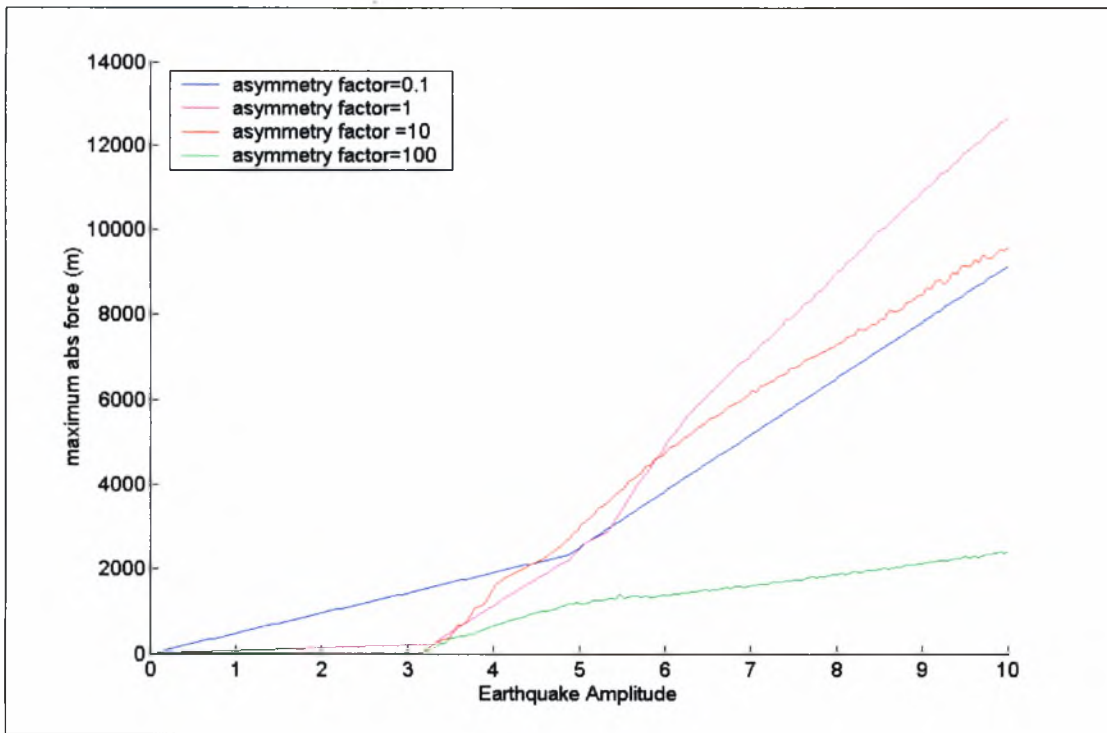
Σχήμα 3.25: Μετατοπίσεις για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\alpha$



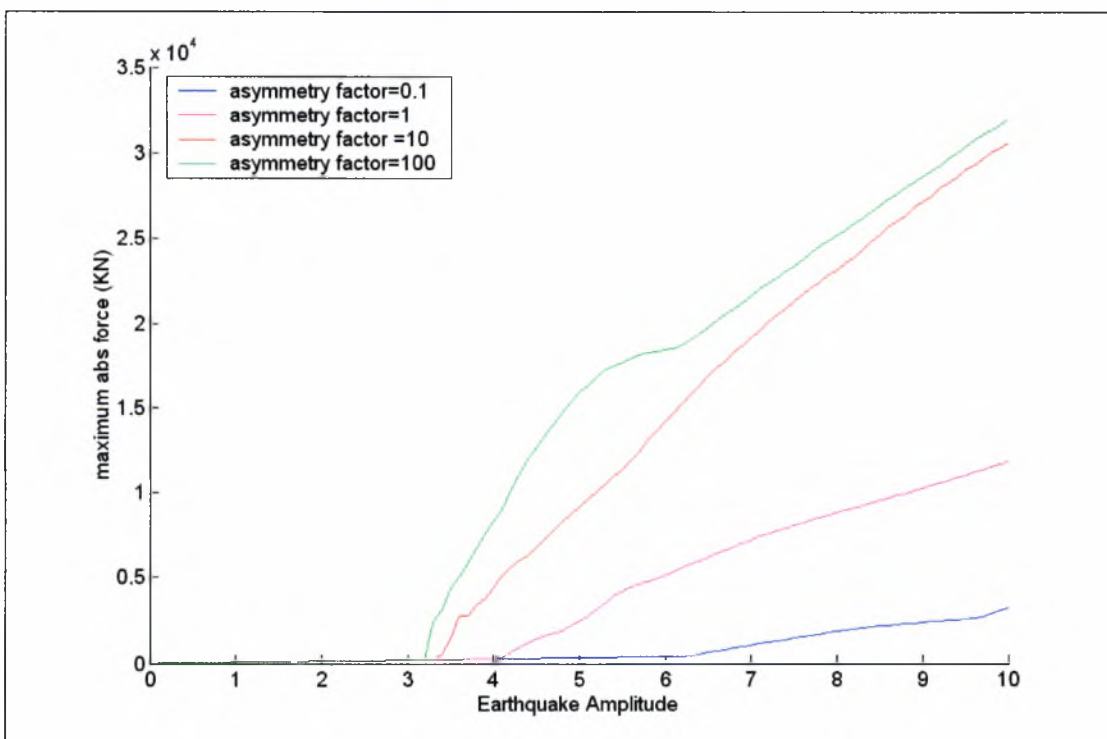
Σχήμα 3.26: Ταχύτητες για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\alpha$



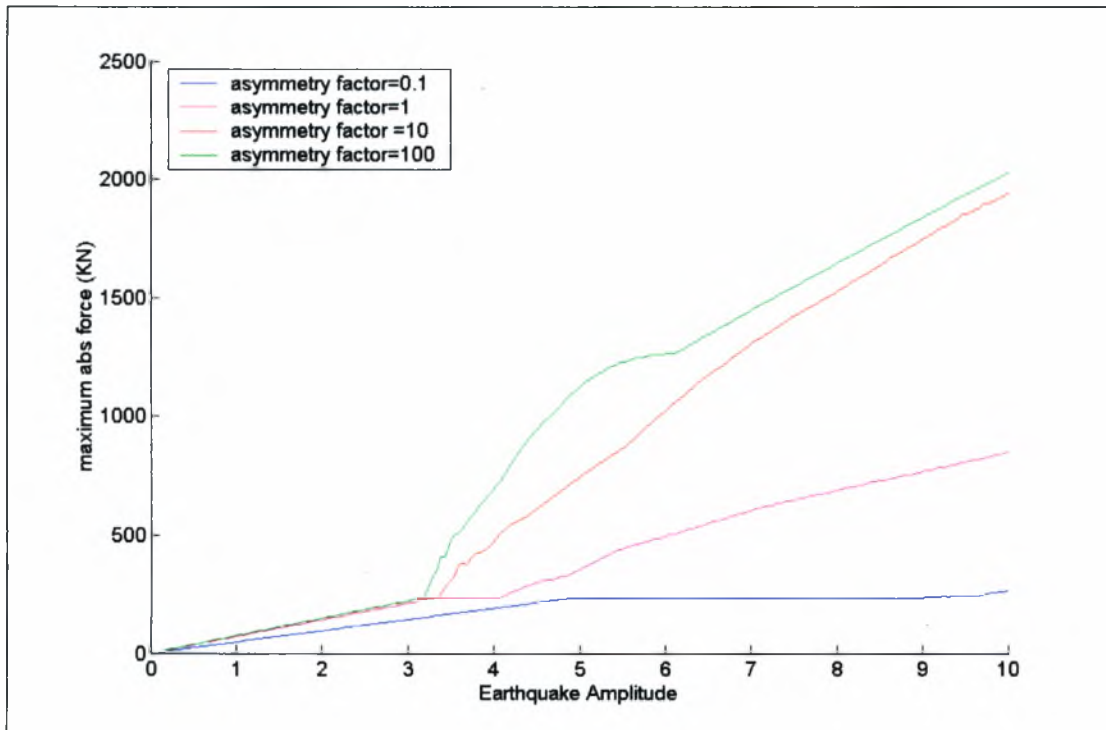
Σχήμα 3.27: Επιταχύνσεις για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\alpha$



Σχήμα 3.28: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $aK_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $a$

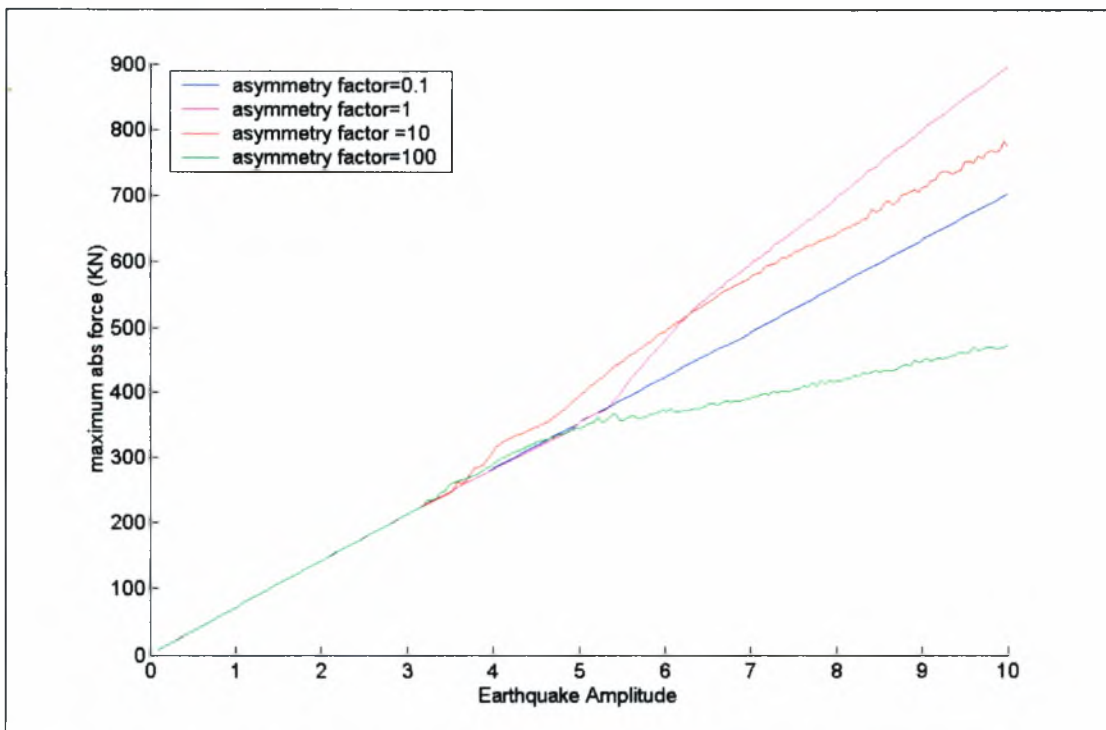


Σχήμα 3.29: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $a$



Σχήμα 3.30: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας

$\alpha$



Σχήμα 3.31: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή

ασυμμετρίας  $\alpha$

### 3.4.3.4 Σχόλια – Παρατηρήσεις

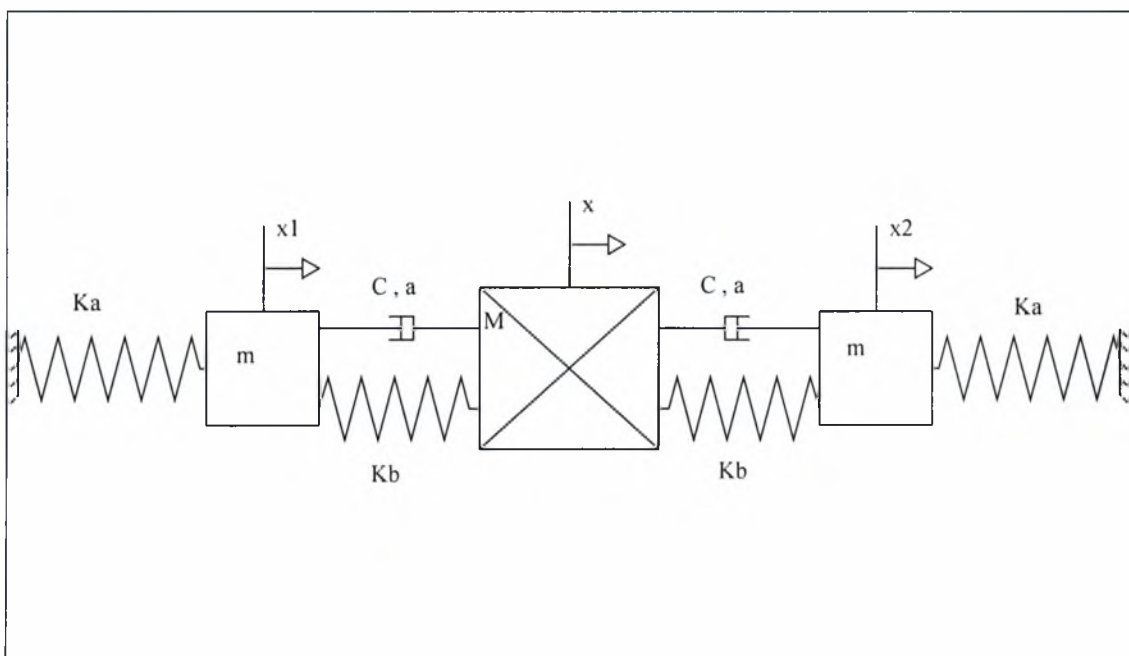
Και σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται δυο περιοχές με διαφορετική κλίση κάτι που οφείλεται στο φαινόμενο που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Όμως είναι πολύ μεγάλη η διαφορά στις δυνάμεις τις οποίες παραλαμβάνουν το δεξί ελατήριο  $K_a$  σε κάθε περίπτωση, ανάλογα με τον συντελεστή ασυμμετρίας  $a$ . Συγκεκριμένα το ελατήριο αυτό παραλαμβάνει σχεδόν σταθερή δύναμη για διάφορες τιμές του συντελεστή  $a$  για μικρές τιμές της κλιμάκωσης της σεισμικής διέγερση λόγω της απομόνωσης του από τη μάζα μέσω του μαλακού ελατηρίου  $K_b$ . Αντίθετα για τις μεγαλύτερες τιμές του μεγέθους του σεισμού, οπότε έχουμε άμεση επαφή ανάμεσα στη μάζα και στο ελατήριο  $K_a$ , η δύναμη που παραλαμβάνει το ελατήριο εξαρτάται από τον συντελεστή ασυμμετρίας  $a$ . Επίσης παρατηρούμε ότι για την περίπτωση που ο συντελεστής ασυμμετρίας παίρνει την τιμή 0.1, δηλαδή το δεξί ελατήριο  $K_a$  έχει μικρότερη ακαμψία από το αριστερό, το δεξί ελατήριο παραλαμβάνει μικρότερες δυνάμεις σε σχέση με το αριστερό.

## Κεφάλαιο 4

### Ταλάντωση συστήματος με μη γραμμική απόσβεση

Αφού αναλύσαμε το σύστημα με τη μη γραμμική ακαμψία θα περάσουμε στην ανάλυση ενός συστήματος με γραμμική ακαμψία, αλλά με μη γραμμική απόσβεση. Συγκεκριμένα θα προσθέσουμε στο γραμμικό μοντέλο (Κεφάλαιο 2) δυο αποσβεστήρες των οποίων η απόσβεση είναι μη γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας. Κάτι τέτοιο συμβαίνει και σε πραγματικές κατασκευές όπως είναι οι γέφυρες (πχ Ρίου-Αντίρριου) και οι αναρτήσεις οχημάτων.

#### 4.1 Περιγραφή του μοντέλου



Σχήμα 4.1: Απλουστευμένο σύστημα με μη γραμμική απόσβεση

Σε αυτό το μοντέλο (Σχήμα 4.1) τη θέση των περιοριστών έχουν πάρει δυο αποσβεστήρες, των οποίων η απόσβεση είναι μη γραμμική και εξαρτάται από τις σταθερές  $C$  και  $a$ . Τα γραμμικά ελατήρια ακαμψίας  $K_a$  και  $K_b$  παραμένουν, με την ακαμψία των δυο ακραίων ελατηρίων να είναι πολύ μεγαλύτερη των άλλων δυο.

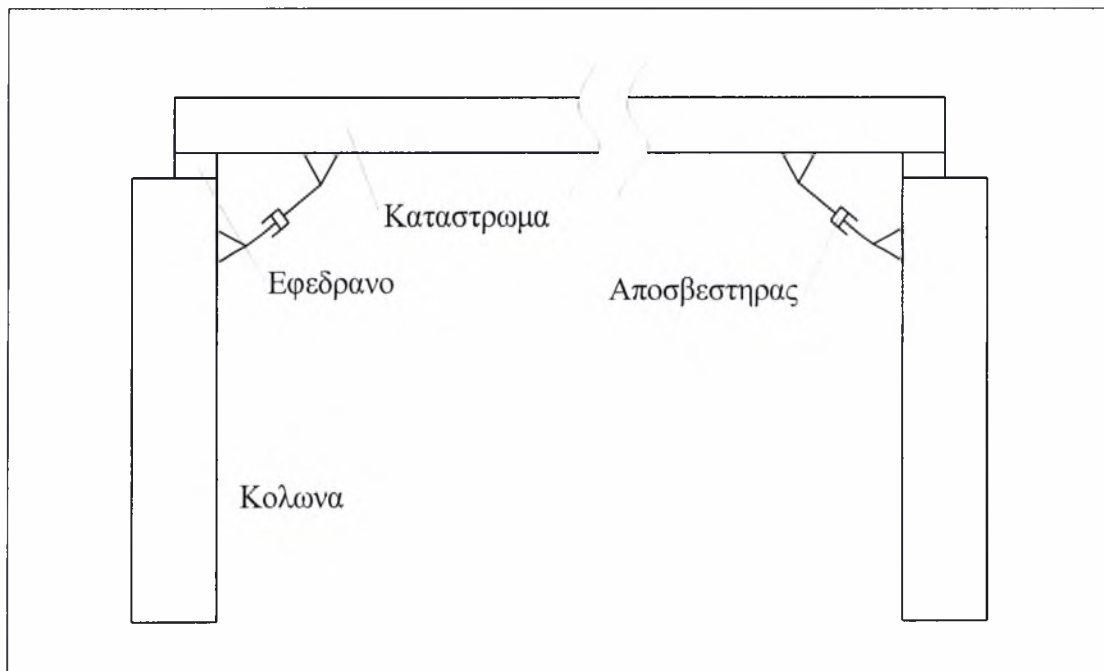
Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, η ακαμψία του είναι γραμμική, αλλά λόγω της παρουσίας των αποσβεστήρων το σύστημα παρουσιάζει μη γραμμική απόσβεση. Χαρακτηριστικά της μη γραμμικής αυτής απόσβεσης είναι οι σταθερές  $C$  και  $a$ .

Ανάλογα με το προηγούμενο μοντέλο μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο αυτό προσομοιώνει κάποια γέφυρα η οποία αντί για περιοριστές διαθέτει μη γραμμικούς αποσβεστήρες που συνδέουν τις κολώνες της κατασκευής με το κατάστρωμα, με σκοπό να αποσβένουν τις ταλαντώσεις (Σχήμα 4.2).

Η ακαμψία των ελατηρίων  $K_a$  επιλέγεται ως εξής:

$$K_a = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

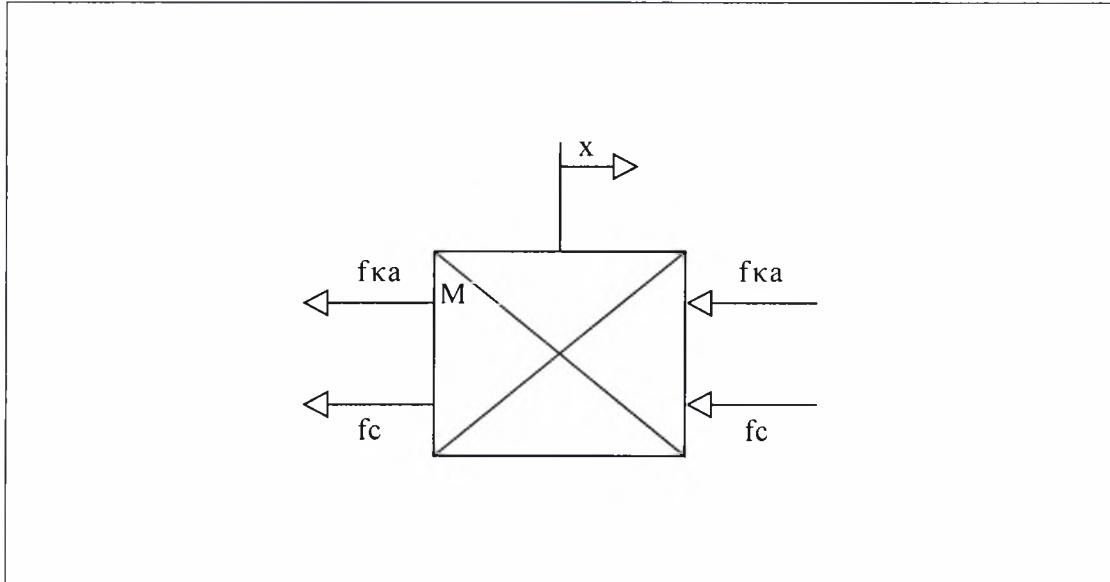
όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κολώνας,  $I$  η ροπή αδραειάς της και  $L$  το ύψος της κολώνας. Επίσης η ακαμψία  $K_b$  ισούται με την διατμητική ακαμψία των εφεδράνων. Οι τιμές των χαρακτηριστικών των ελατηρίων παραμένουν οι ίδιες, ενώ τα χαρακτηριστικά των αποσβεστήρων επιλέγονται ως εξής:  $C=350$  KN και  $a=0.5$ .



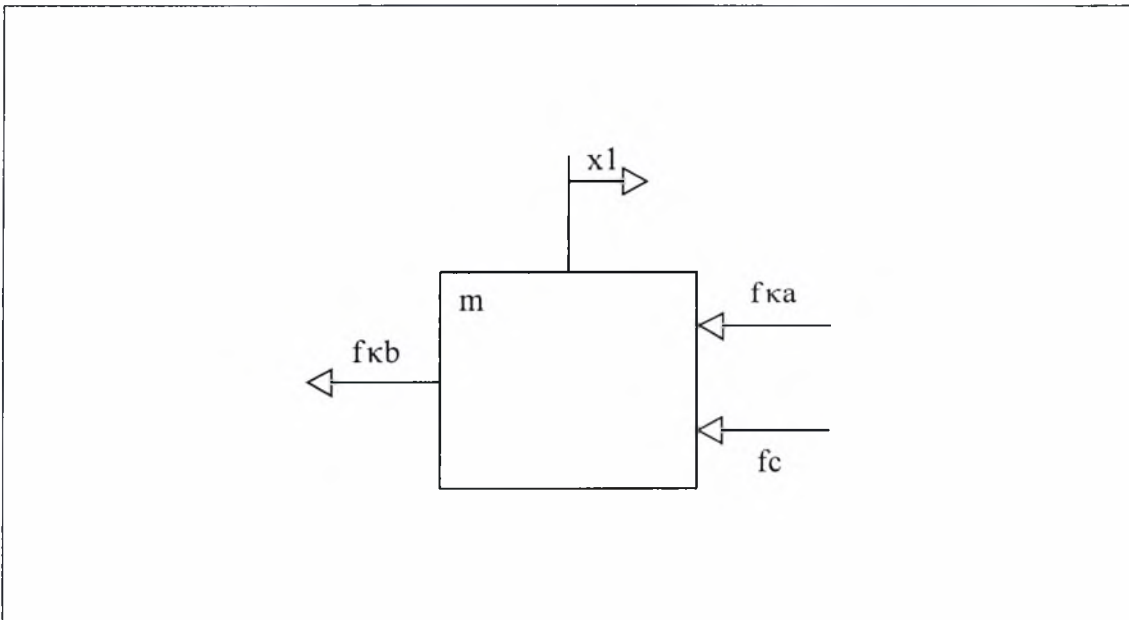
Σχήμα 4.2: Σχέδιο γέφυρας η οποία μπορεί να προσομοιωθεί με το απλουστευμένο μοντέλο

## 4.2 Εξίσωση κίνησης

Διαγράμματα ελευθέρου σώματος:

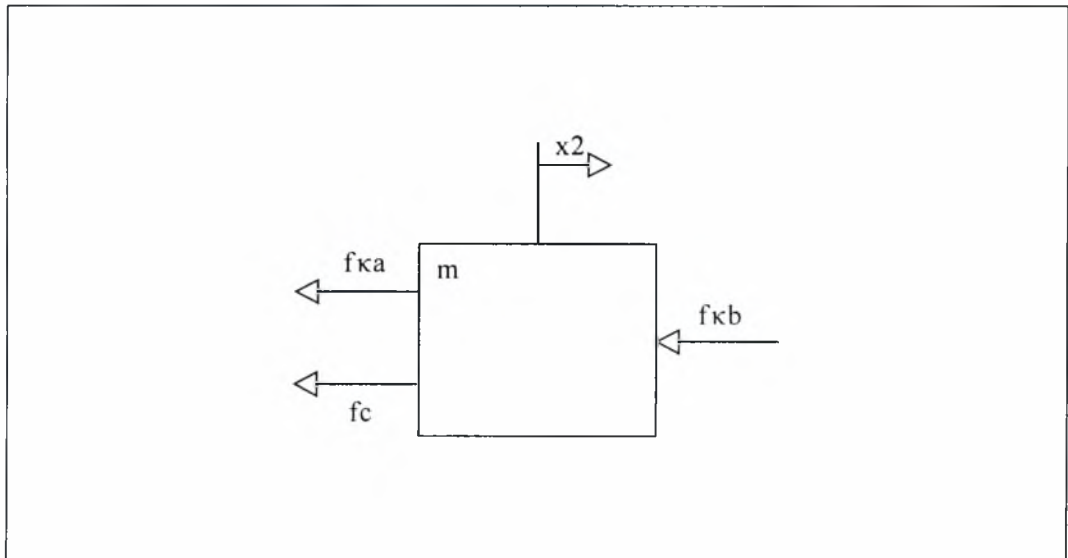


Σχήμα 4.3: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος για τη μάζα  $M$



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος για την μάζα  $m$  στα αριστερά





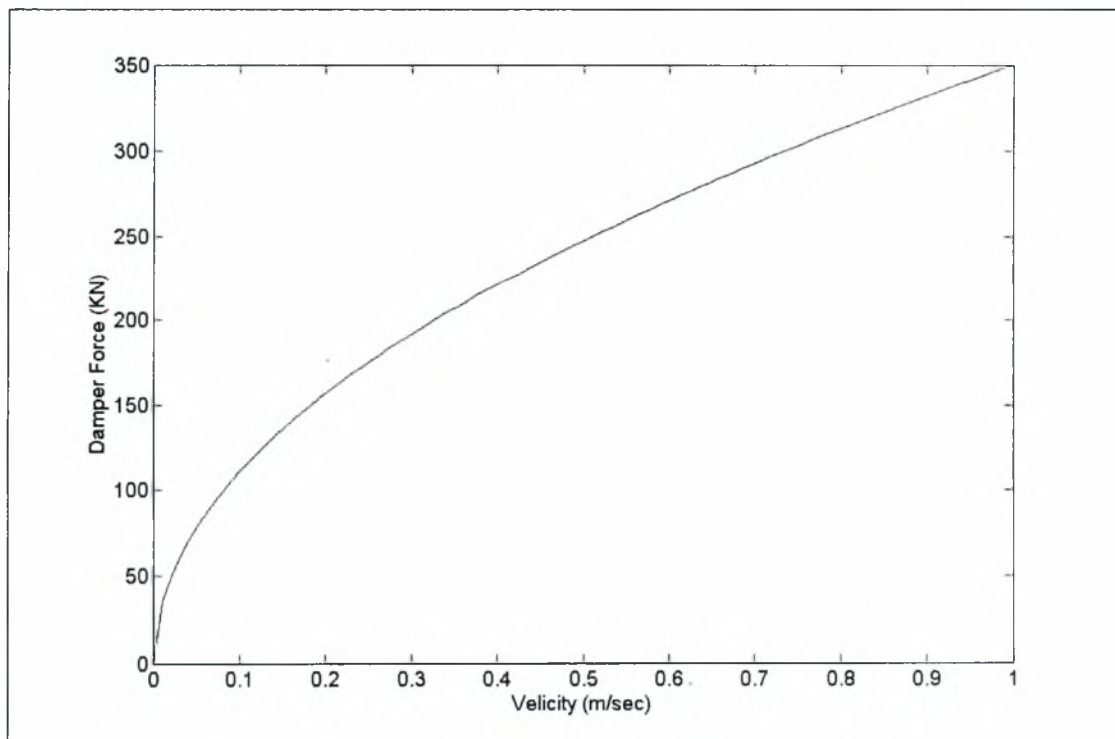
Σχήμα 4.5: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη μάζα  $m$  στα δεξιά

Η δύναμη στους αποσβεστήρες συναρτήσει της ταχύτητας δίδεται από τη μη γραμμική σχέση:

$$f(\dot{x}) = C \cdot |\dot{x}|^a \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \quad (4.1)$$

όπου  $\text{sgn}$  είναι η συνάρτηση προσήμου.

Η σχέση της ταχύτητας με την δύναμη του αποσβεστήρα φαίνεται στο σχήμα 4.6:



Σχήμα 4.6: Σχέση ταχύτητας – δύναμης στον αποσβεστήρα

Οι εξισώσεις κίνησης για τις τρεις μάζες είναι:

$$M(\ddot{x} + \ddot{a}) + K_b(x - x_1) + K_b(x - x_2) + f_1(\dot{x} - \dot{x}_1) + f_2(\dot{x} - \dot{x}_2) = 0$$

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{a}) + K_b(x_1 - x) + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}) + K_a x_1 = 0$$

$$m(\ddot{x}_2 + \ddot{a}) + K_b(x_2 - x) + f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}) + K_a x_2 = 0$$

Συνεπώς η εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση του συστήματος μπορεί να γράφει σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{x}} + \mathbf{f}(\dot{\underline{x}}) + \mathbf{K} \underline{x} = -\mathbf{M} \underline{I} \ddot{a} \quad (4.2)$$

Όπου:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

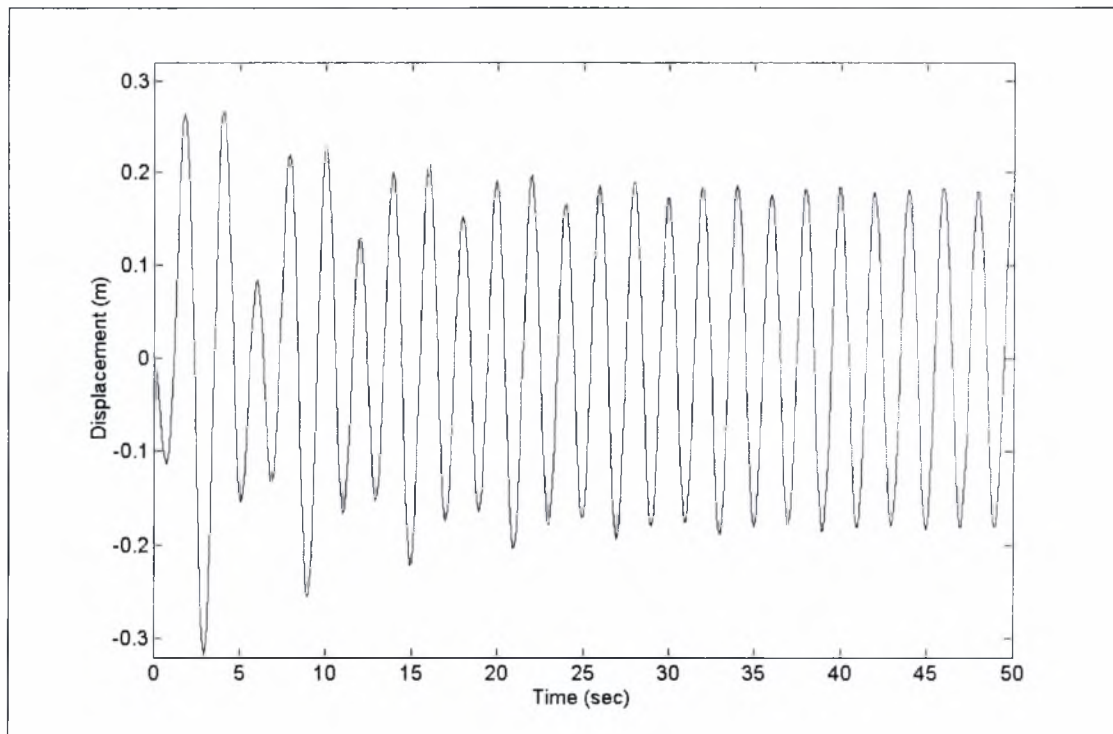
$$K = \begin{bmatrix} 2K_b & -K_b & -K_b \\ -K_b & K_b + K_a & 0 \\ -K_b & 0 & K_b + K_a \end{bmatrix}$$

$$f(\underline{\dot{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{x} - \dot{x}_1) + f_2(\dot{x} - \dot{x}_2) \\ f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}) \\ f_2(\dot{x}_2 - \dot{x}) \end{bmatrix}$$

### 4.3 Ολοκλήρωση εξισώσεων κίνησης – Αποτελέσματα

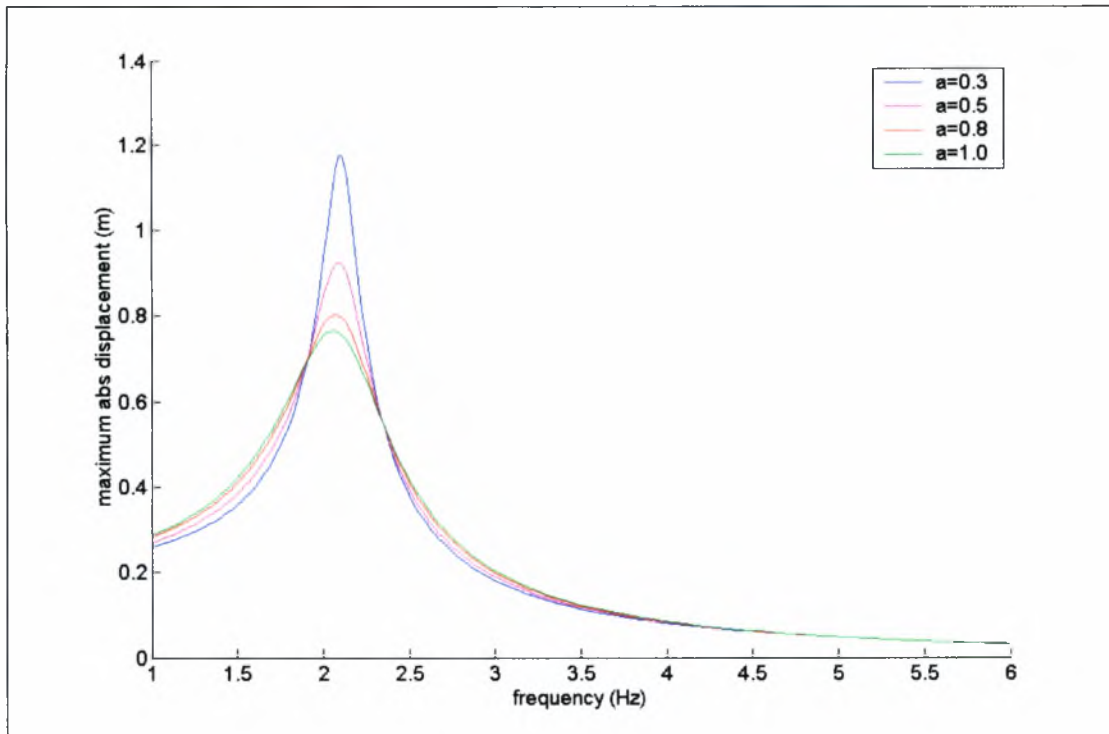
#### 4.3.1 Περιοδική διέγερση

Οι εξισώσεις κίνησης των τριών μαζών ολοκληρώνονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta (Forsythe, Malcolm and Moler 1977) σε λογισμικό περιβάλλον MATLAB. Με την επίλυση αυτή υπολογίζουμε την απόκριση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή και ως εκ τούτου όλα τα υπόλοιπα δεδομένα που μας είναι χρήσιμα στην παρούσα ανάλυση, όπως είναι οι δυνάμεις στους αποσβεστήρες και στα ελατήρια. Σαν διέγερση χρησιμοποιήθηκε επιτάχυνση στα άκρα του μοντέλου η οποία είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα διέγερσης  $\omega$  και εύρος  $1\text{m/s}^2$ . Στο σχήμα 4.7 φαίνεται η απόκριση της μάζας  $M$  με συχνότητα διέγερσης 1 Hz και χαρακτηριστικά αποσβεστήρων  $C=100\text{ KN}$ ,  $a=0.5$ .

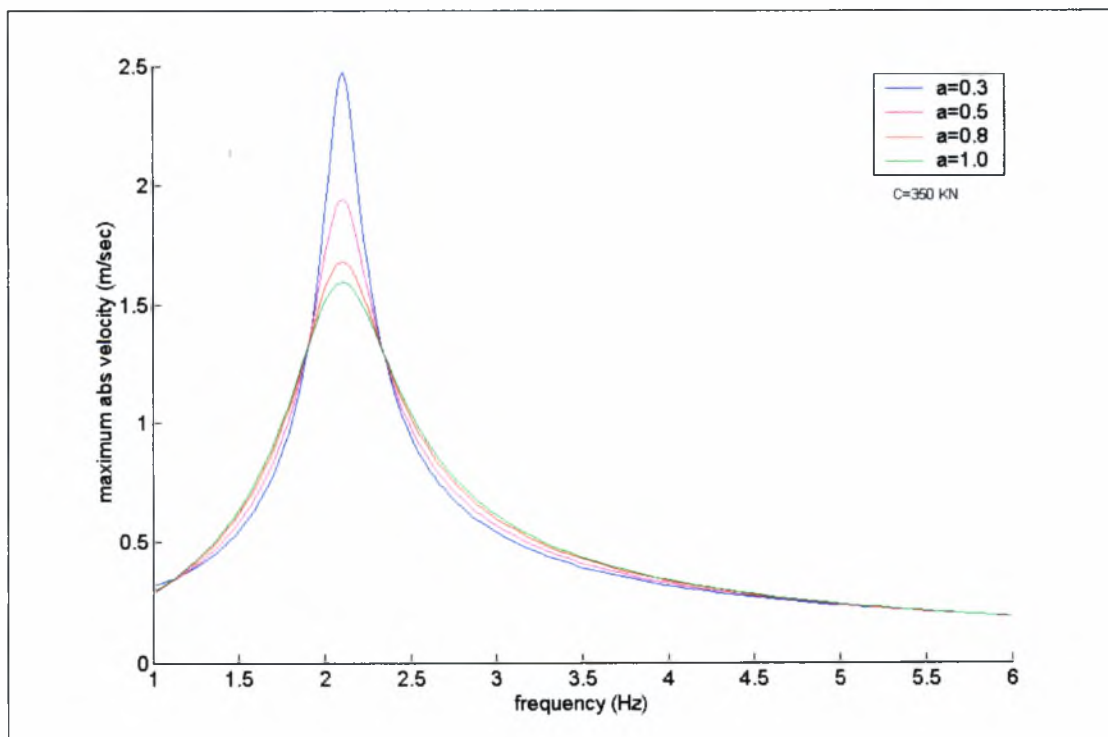


Σχήμα 4.7: Τυπική απόκριση συστήματος υπό περιοδική διέγερση

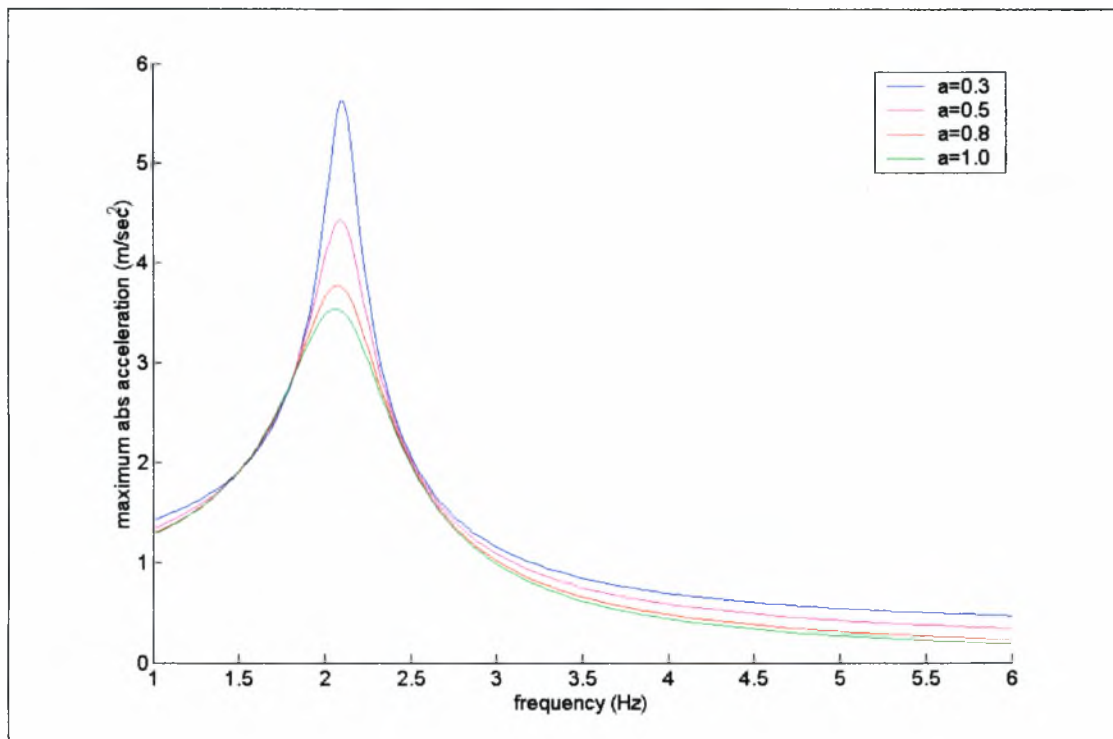
Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται διάφορα φάσματα απόκρισης του μοντέλου για μερικές τιμές των παραμέτρων των μη γραμμικών αποσβεστήρων  $a$  και  $C$ . Συγκεκριμένα παρουσιάζονται τα φάσματα της μέγιστης απόλυτης μετατόπισης, της μέγιστης απόλυτης ταχύτητας, της μέγιστης απόλυτης επιτάχυνσης για την κεντρική μάζα, πρώτα για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  ( $C=350$  KN), και στη συνέχεια για διάφορες τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $C$  ( $a=0.5$ ). Επίσης παρουσιάζονται τα φάσματα των μέγιστων απόλυτων δυνάμεων στα ελατήρια και στους αποσβεστήρες. Θεωρήθηκε σκόπιμο να παρουσιαστούν οι δυνάμεις μόνο στα ελατήρια και στον αποσβεστήρα της μιας πλευράς του μοντέλου λόγω της συμμετρίας του προβλήματος.



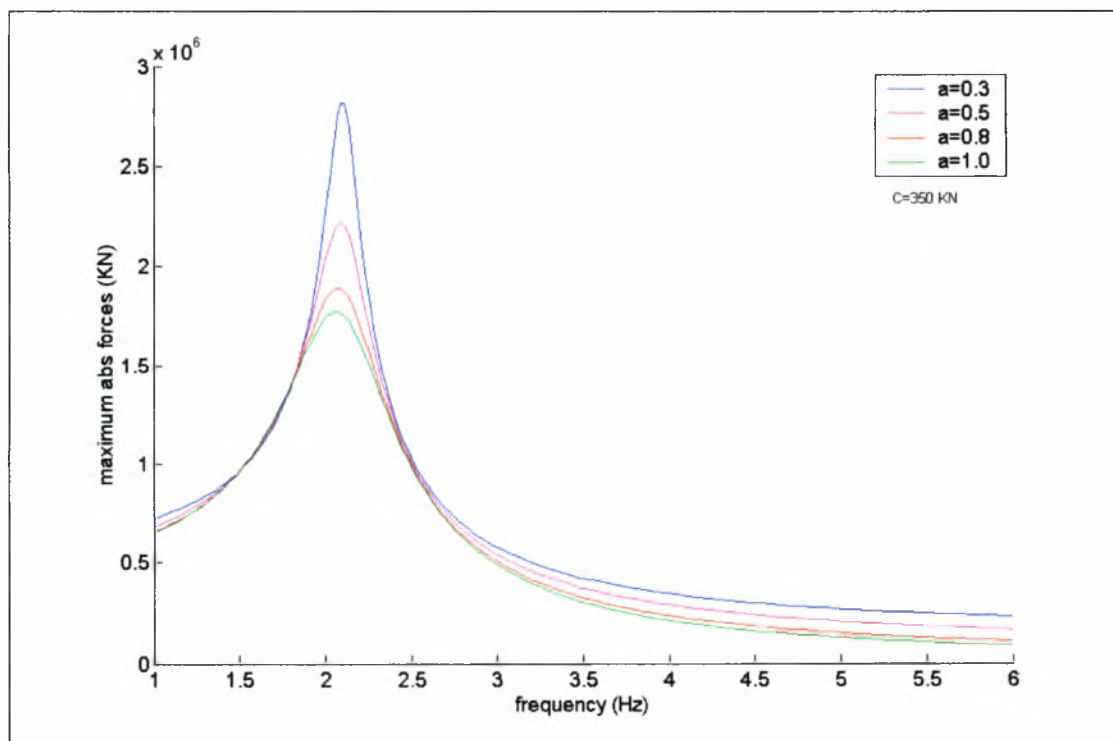
Σχήμα 4.8: Φάσματα μετατοπίσεων για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  και  $C=350$  KN/m



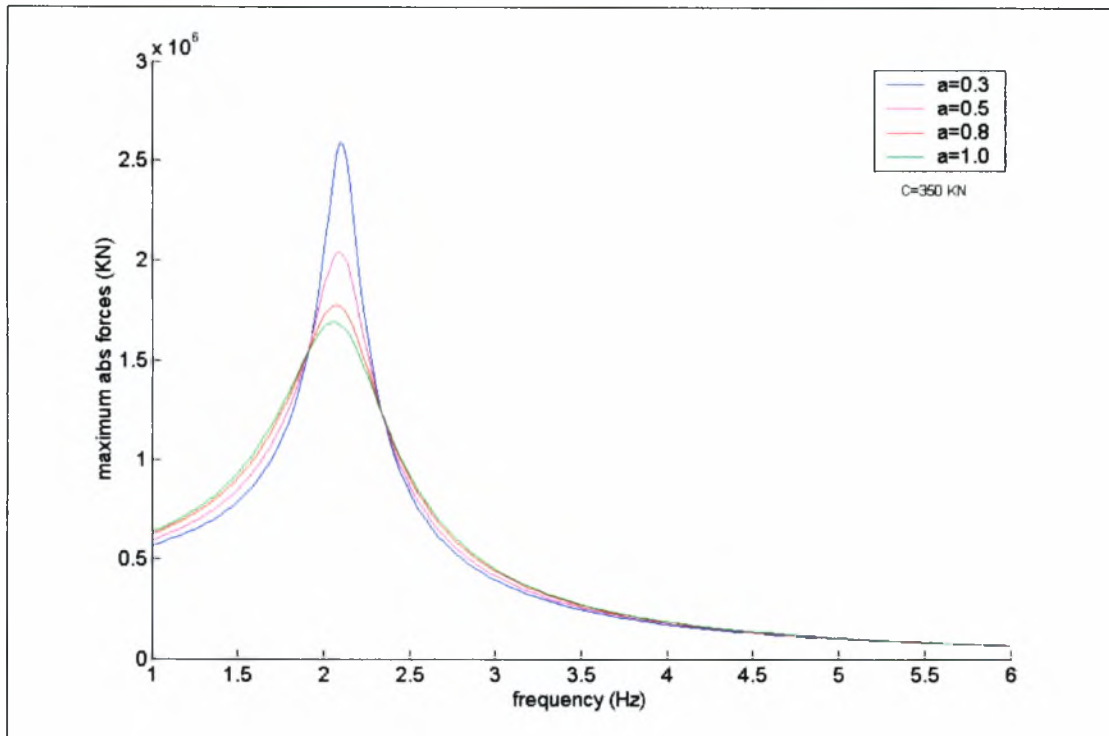
Σχήμα 4.9: Φάσματα ταχυτήτων για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  και  $C=350$  KN/m



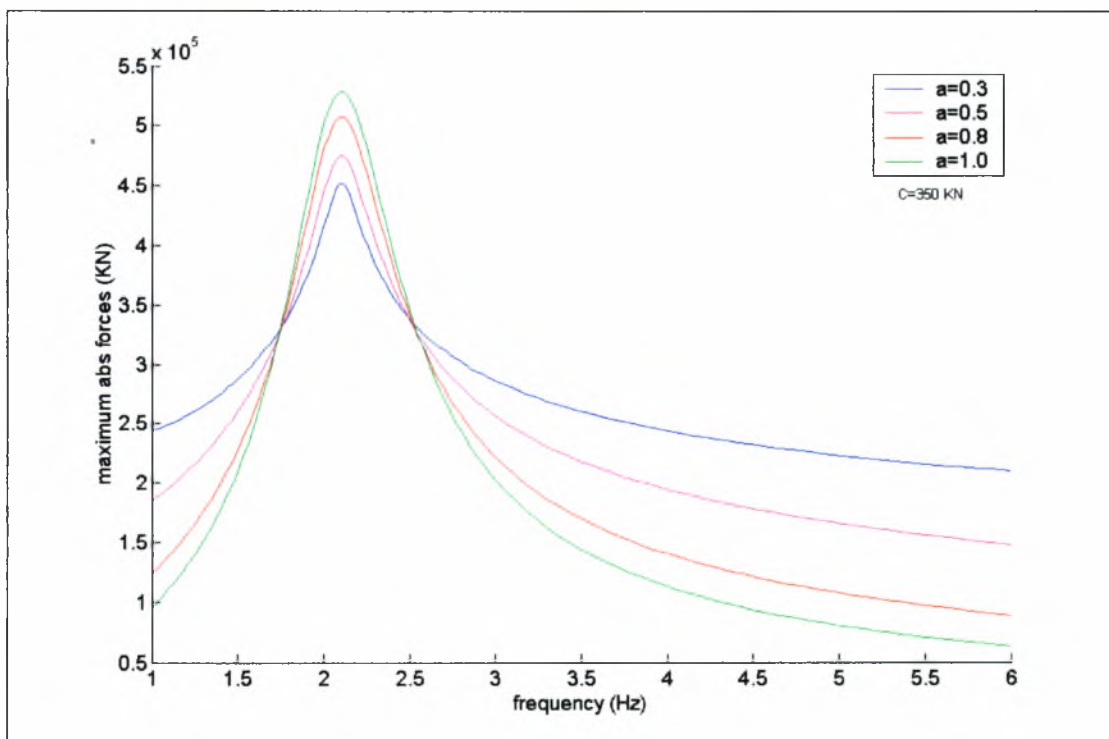
Σχήμα 4.10: Φάσματα επιταχύνσεων για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  και  $C=350$  KN/m



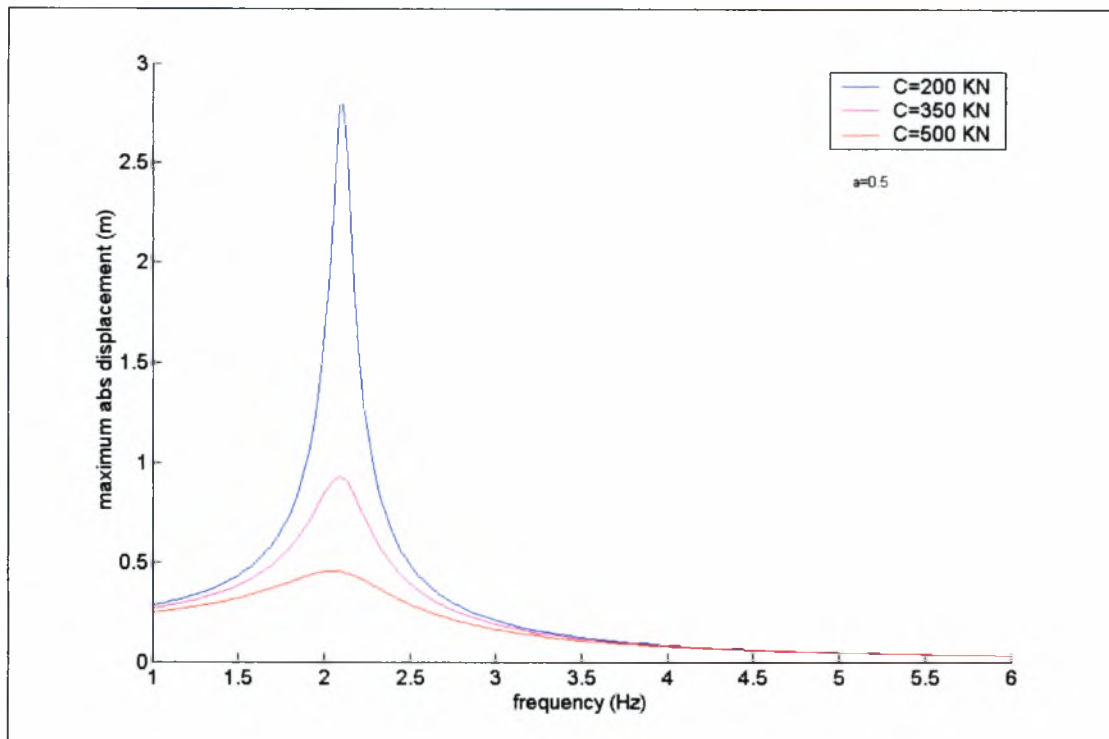
Σχήμα 4.11: Φάσματα δυνάμεων στο ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  και  $C=350$  KN/m



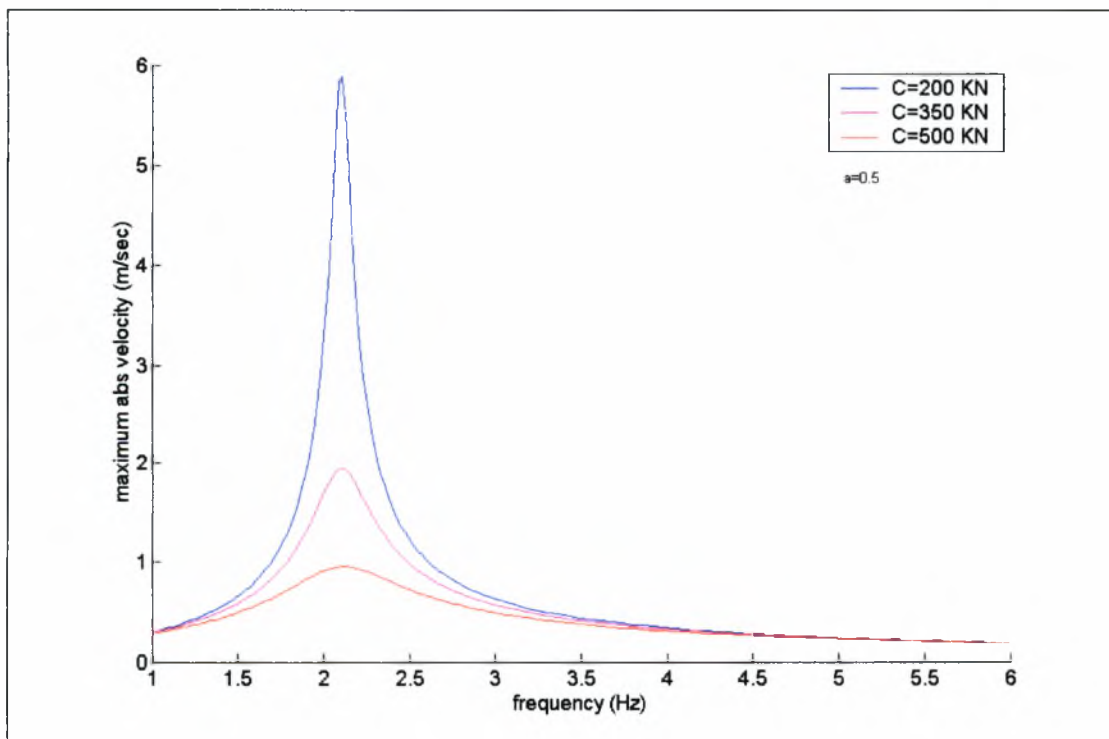
**Σχήμα 4.12:** Φάσματα δυνάμεων στο ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  και  $C=350$  KN/m



**Σχήμα 4.13:** Φάσματα δυνάμεων στους αποσβεστήρες για διάφορες τιμές του έκθετη  $a$  και  $C=350$  KN/m

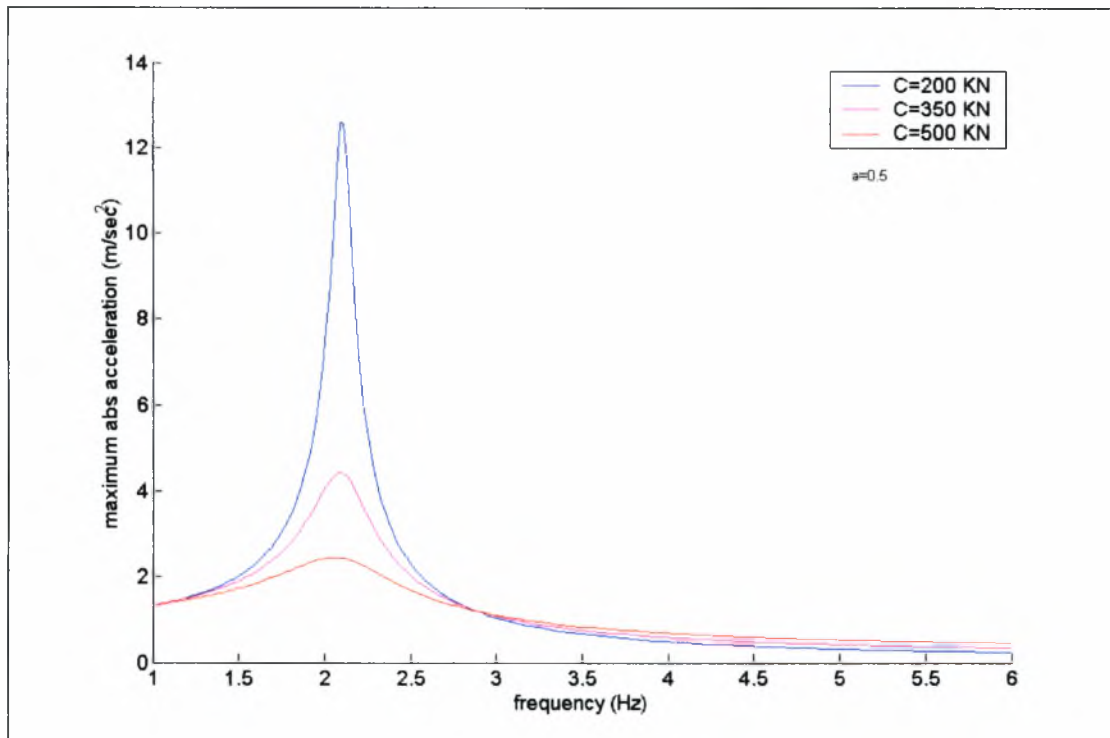


Σχήμα 4.14: Φάσματα μετατοπίσεων για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$

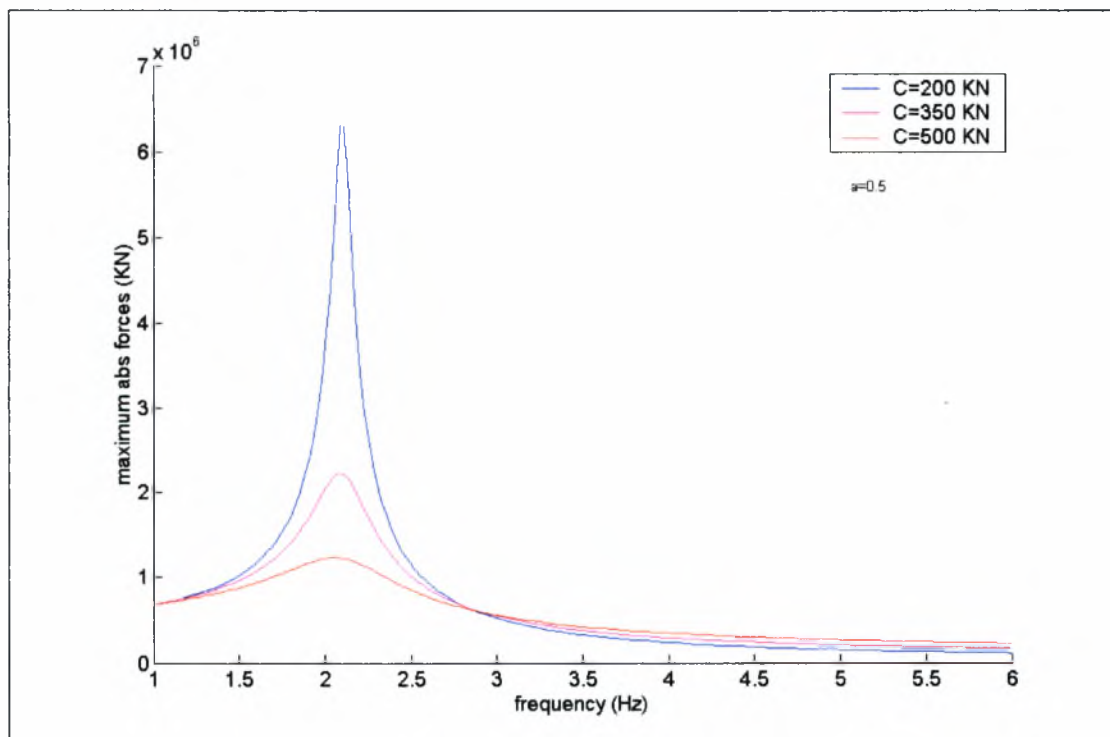


Σχήμα 4.15: Φάσματα ταχυτήτων για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$

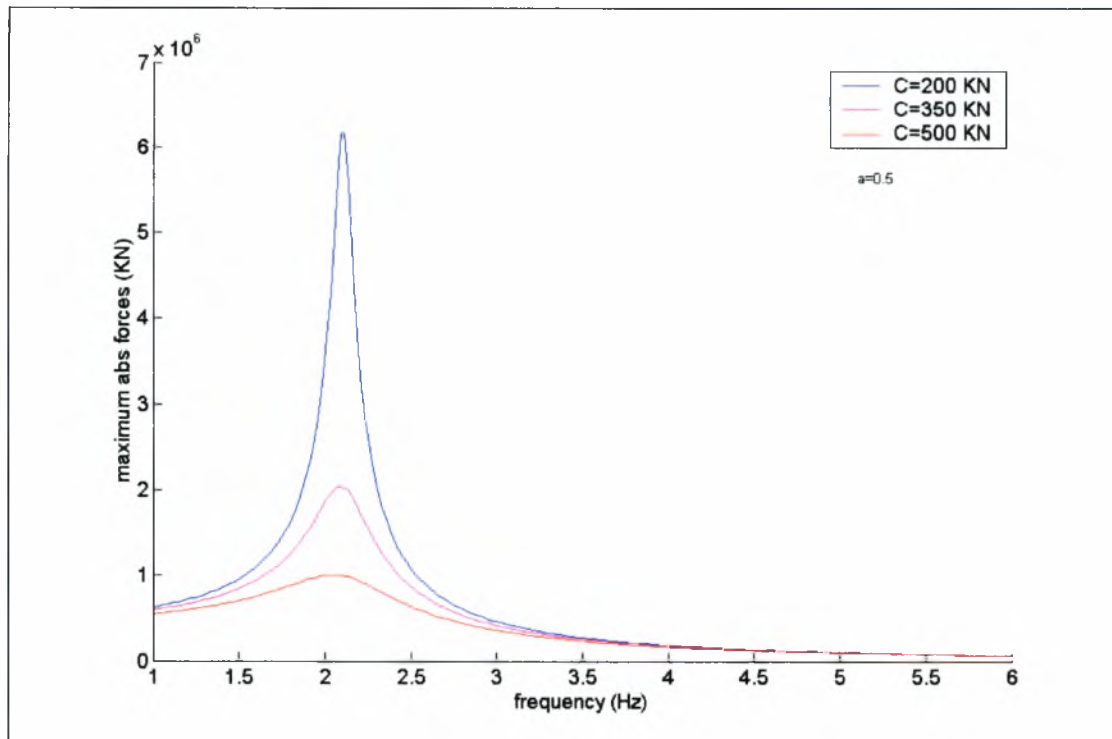




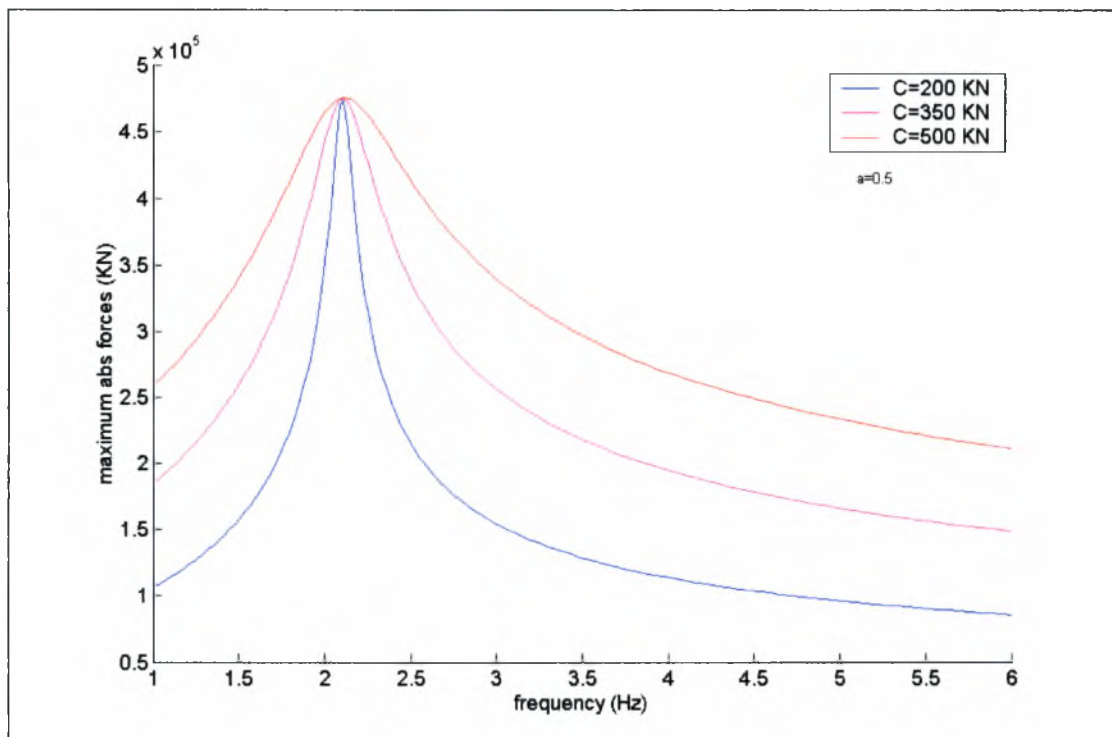
Σχήμα 4.16: Φάσματα επιταχύνσεων για διάφορες τιμές του  $C$  και  $\alpha=0.5$



Σχήμα 4.17: Φάσματα δυνάμεων στο ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του  $C$  και  $\alpha=0.5$



Σχήμα 4.18: Φάσματα δυνάμεων στο ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του  $C$  και  $a=0.5$



Σχήμα 4.19: Φάσματα δυνάμεων στους αποσβεστήρες για διάφορες τιμές του  $C$  και  $a=0.5$

### 4.3.2 Σχόλια – Παρατηρήσεις

Κατά τη διάρκεια αυτής της ανάλυσης δεν παρουσιάστηκαν σημαντικά αριθμητικά προβλήματα, αφού λόγω της ύπαρξης των αποσβεστήρων η μετάβαση από τη μεταβατική στη μόνιμη κατάσταση γίνεται σε σχετικά λίγους κύκλους φόρτισης

Όπως προκύπτει από τα φάσματα της μετατόπισης για διάφορες τιμές του εκθέτη  $a$  (Σχήμα 4.8) η μέγιστη απόλυτη μετατόπιση σε κάθε περίπτωση δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή του εκθέτη  $a$  αλλά και από τιμή της συχνότητας διέγερσης. Κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο άλλωστε αφού ισχύει η προσεγγιστική σχέση (J.Zhang, N.Makris and T. Delis 2004):

$$C_1 = C \frac{2^{2+a}}{\pi} \omega^{\alpha-1} u_0^{\alpha-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma(\alpha+2)}$$

όπου  $C_1$  είναι η ισοδύναμη σταθερά απόσβεσης για έναν γραμμικό αποσβεστήρα ο οποίος αναλώνει το ίδιο πόσο ενέργειας με τον μη γραμμικό αποσβεστήρα ανά κύκλο πλάτους μετατόπισης  $u_0$  υπό ημιτονοειδή φόρτιση συχνότητας  $\omega$ . Η συνάρτηση  $\Gamma$  (Thomas and Finney, 1986) έχει τη μορφή:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

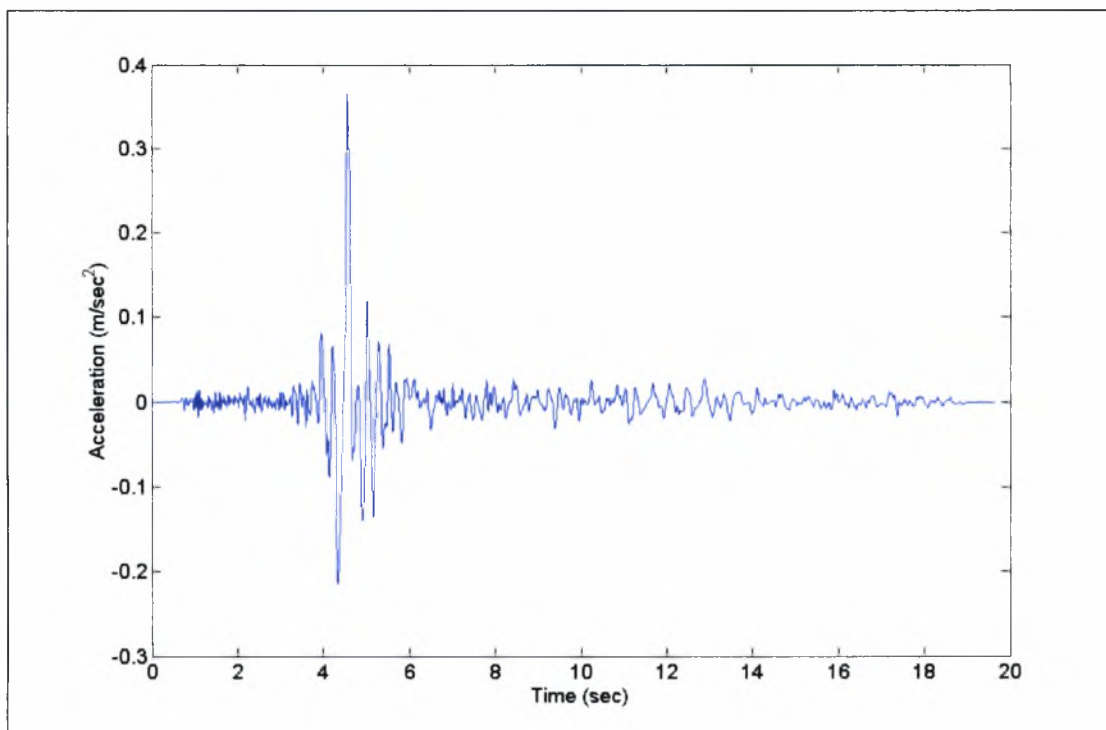
Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες παραμέτρους του προβλήματος, δηλαδή τις ταχύτητες, τις επιταχύνσεις αλλά και τις δυνάμεις στα ελατήρια και στους αποσβεστήρες (Σχήματα 4.9-4.13). Όμως όπως φαίνεται η κατάλληλη επιλογή δεν του  $a$  δεν είναι ικανή για πλήρη απόσβεση, αλλά χρειάζεται κατάλληλη επιλογή και του συντελεστή απόσβεσης  $C$ . Αν επιλέγει ένας αρκετά μεγάλος συντελεστής  $C$ , οι μέγιστες μετατοπίσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις μπορούν να μειωθούν δραστικά (Σχήματα 4.14-4.16). Το ίδιο ισχύει και για τις δυνάμεις στα ελατήρια (Σχήματα 4.17-4.18) αφού ένα πολύ μεγάλο μέρος των δυνάμεων που αναπτύσσονται παραλαμβάνονται από τους αποσβεστήρες.

Άρα μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα πως μια εκτίμηση των συχνοτήτων που πιθανά διεγείρουν την κατασκευή μπορούν να οδηγήσουν στην κατάλληλη επιλογή του εκθέτη  $a$  ενώ το ποσοστό των δυνάμεων που είναι επιθυμητό να παραλαμβάνεται από τους αποσβεστήρες με σκοπό να μην καταπονούνται τα ελατήρια, μπορεί να οδηγήσει στην κατάλληλη εκτίμηση του συντελεστή απόσβεσης  $C$ .

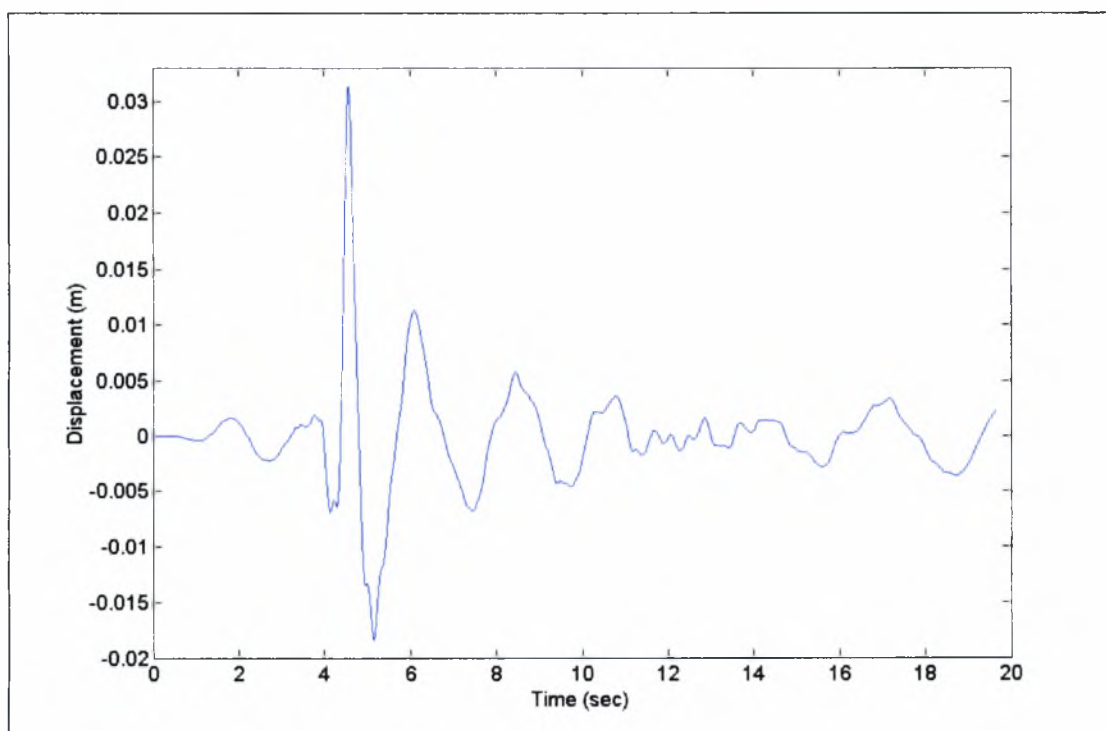
### 4.3.3 Σεισμική διέγερση

#### 4.3.3.1 Συμμετρικό σύστημα

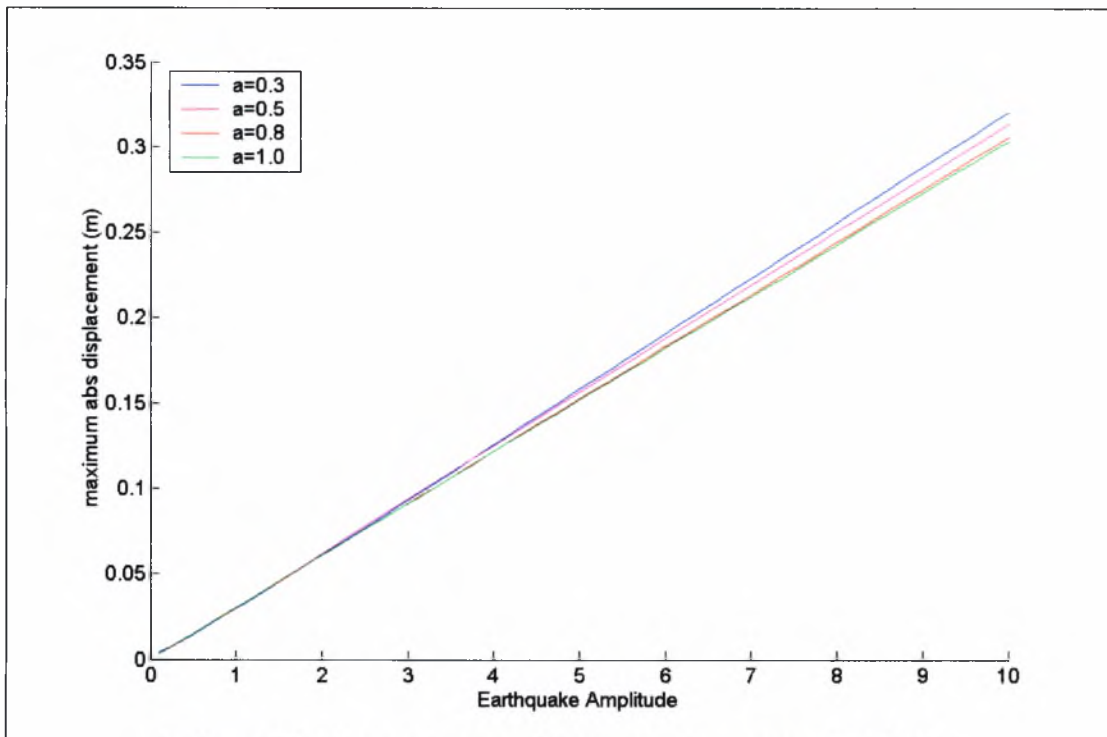
Στη συνέχεια έγινε ανάλυση της απόκρισης του συστήματος σε σεισμική διέγερση. Για αυτόν τον σκοπό χρησιμοποιήθηκε η σεισμική ακολουθία του σεισμού Imperial Valley 1979 (El Centro Array 6), του οποίου το επιταχυνσιογράφημα φαίνεται στο σχήμα 4.20. Παρακάτω παρουσιάζεται η απόκριση της κατασκευής συναρτήσει της κλιμάκωσης της σεισμικής διέγερσης. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται: η μέγιστη απόλυτη μετατόπιση, μέγιστη απόλυτη ταχύτητα, μέγιστη απόλυτη επιτάχυνση, καθώς και μέγιστες απόλυτες δυνάμεις στα ελατήρια και στους αποσβεστήρες. Επίσης έγιναν δυο παραμετροποιήσεις, πρώτα ως προς των εκθέτη  $a$  των αποσβεστήρων και στη συνέχεια ως προς τη σταθερά απόσβεσης  $C$ .



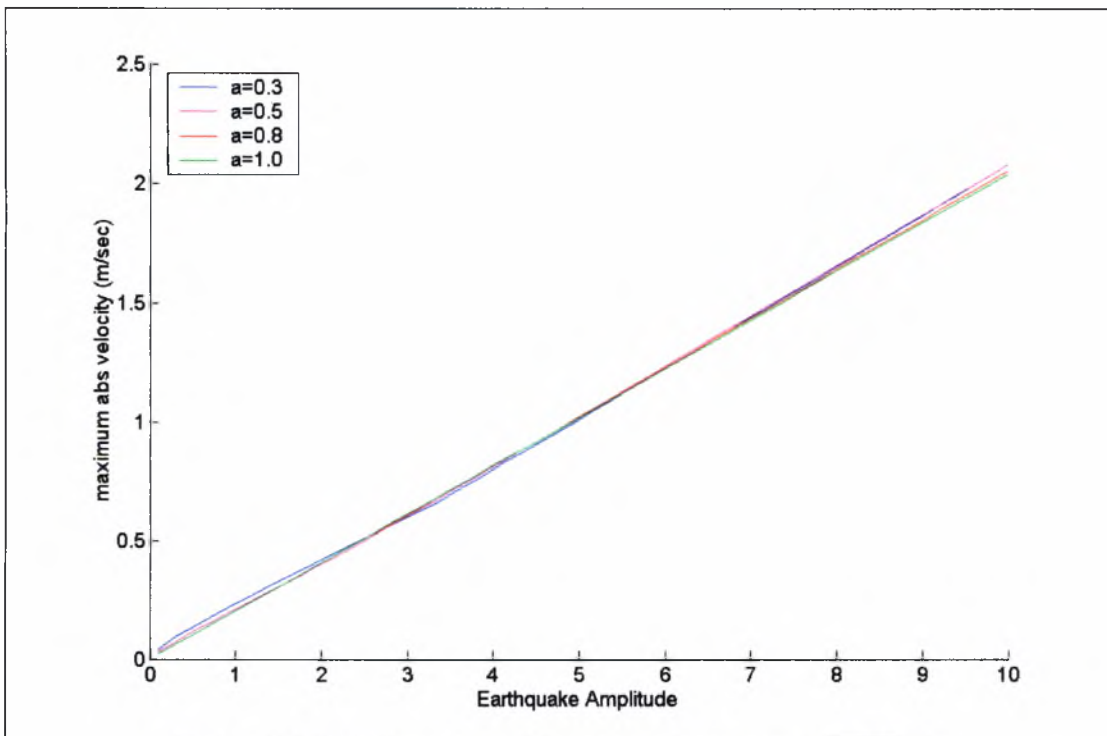
Σχήμα 4.20: Επιταχυνσιογράφημα Imperial Valley 1979 (El Centro Array 6).



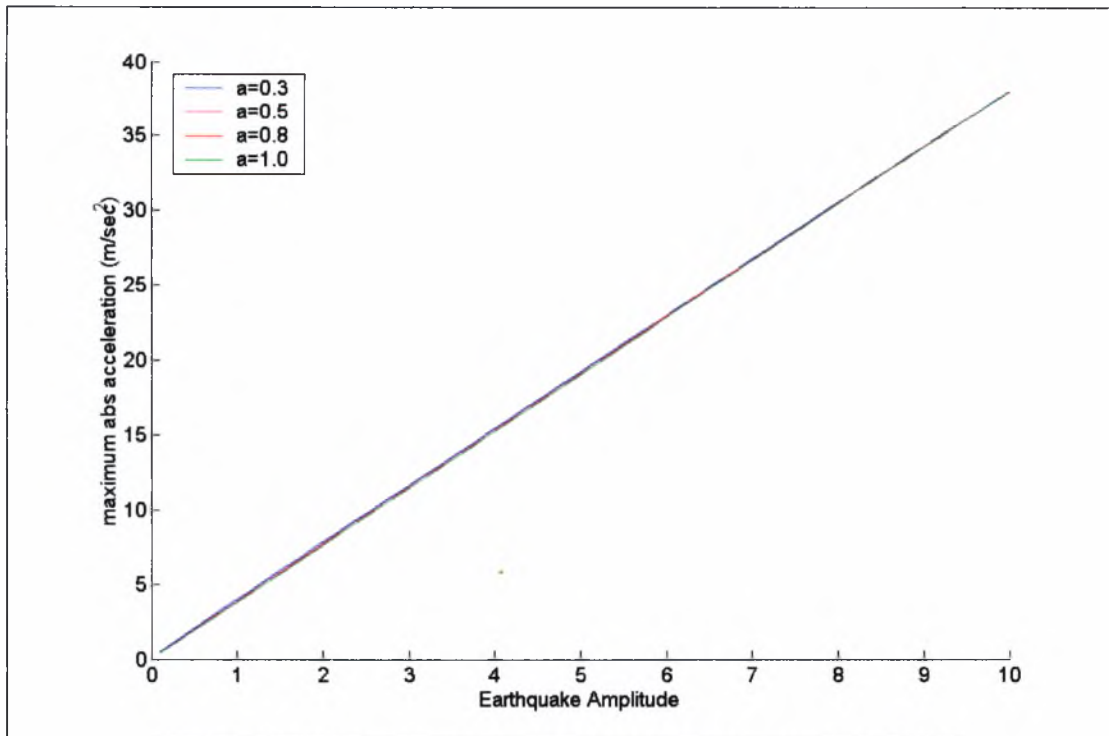
Σχήμα 4.21: Τυπική απόκριση του συστήματος



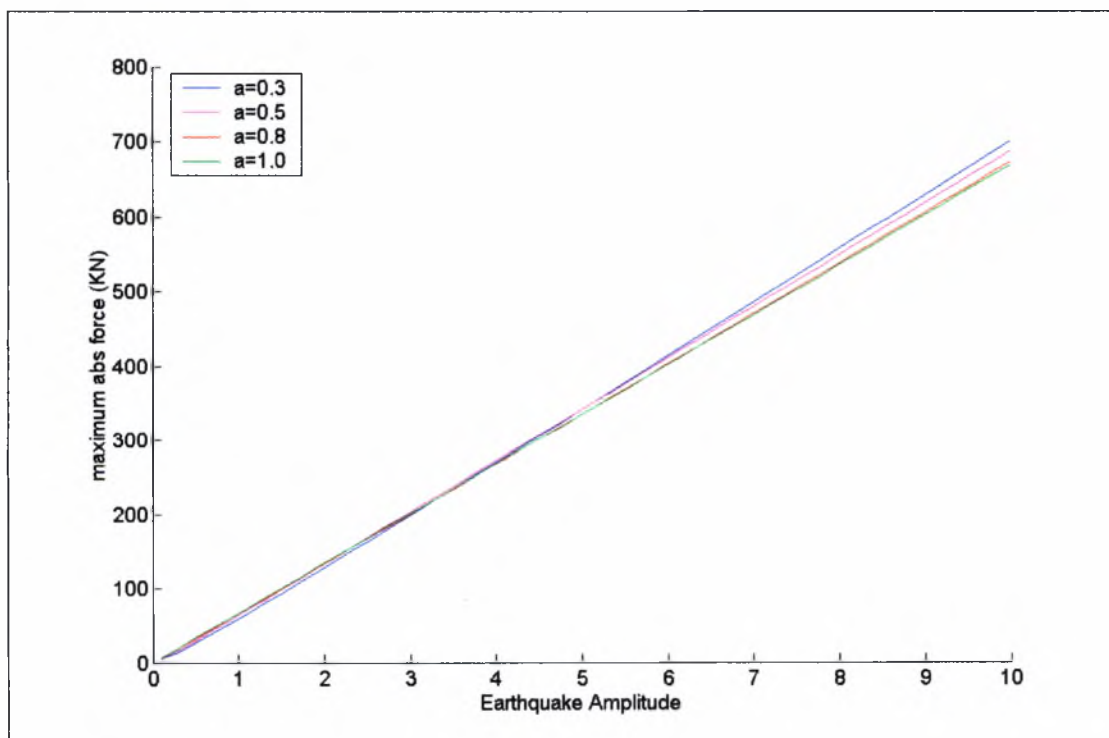
Σχήμα 4.22: Μετατοπίσεις για διάφορες τιμές του  $a$  και  $C=350$  KN



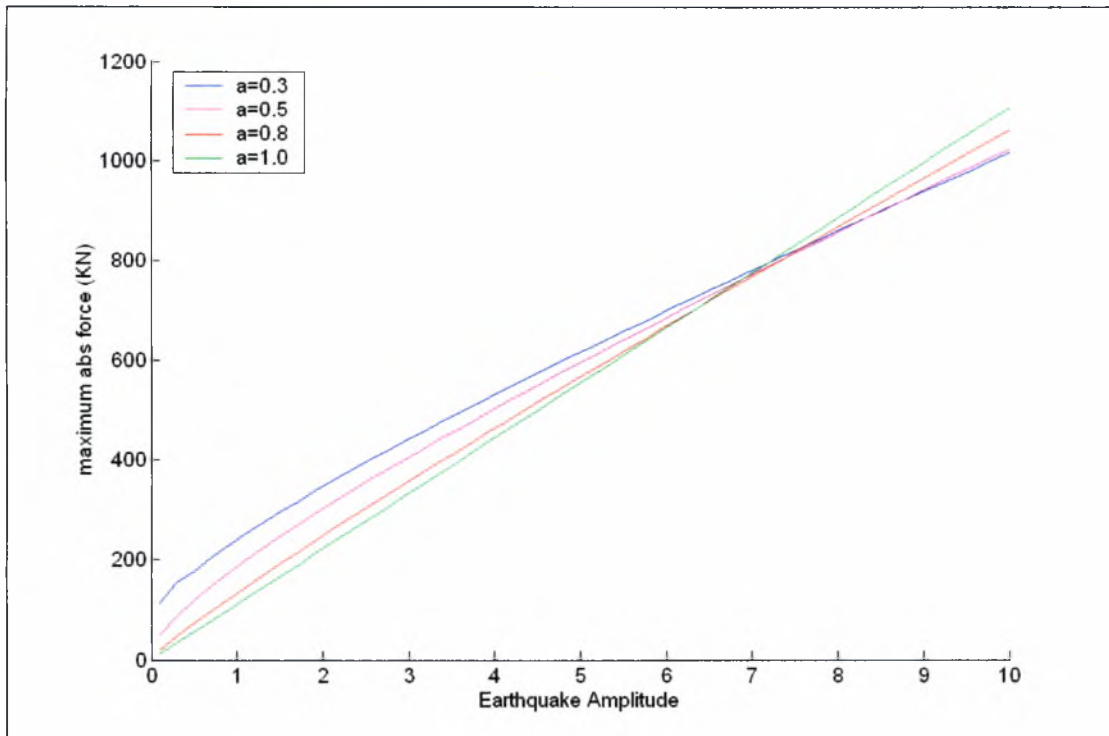
Σχήμα 4.23: Ταχύτητες για διάφορες τιμές του  $a$  και  $C=350$  KN



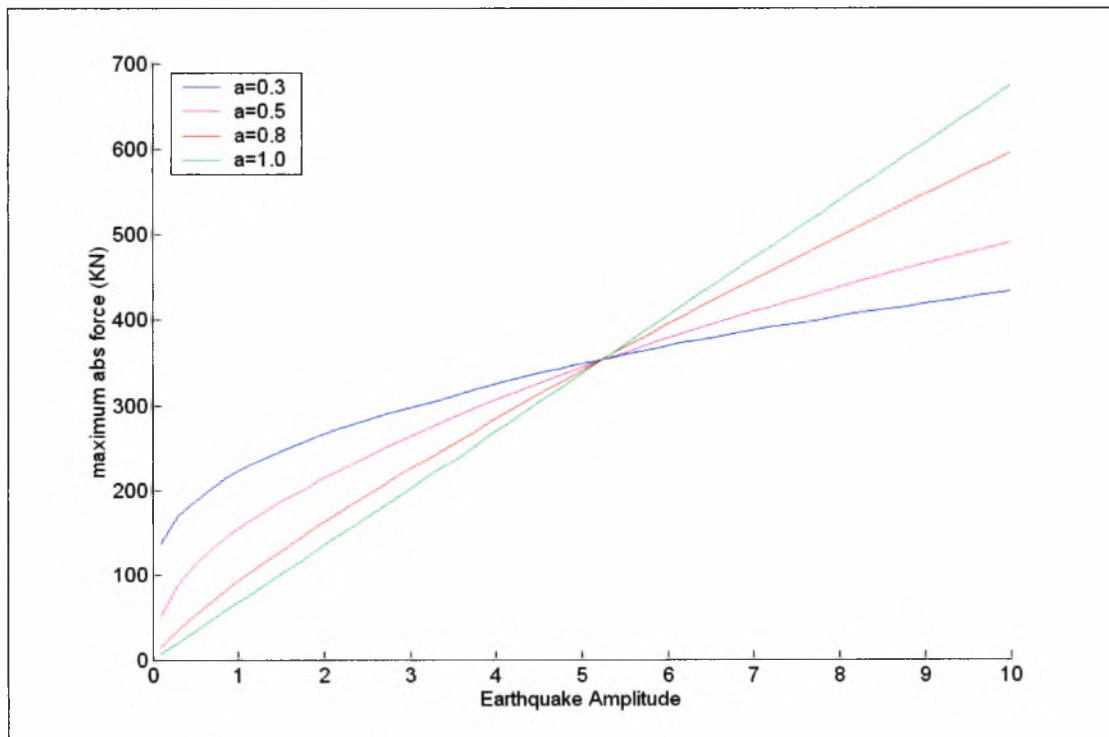
Σχήμα 4.24: Επιταχύνσεις για διάφορες τιμές του  $a$  και  $C=350$  KN



Σχήμα 4.25: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του  $a$  και  $C=350$  KN

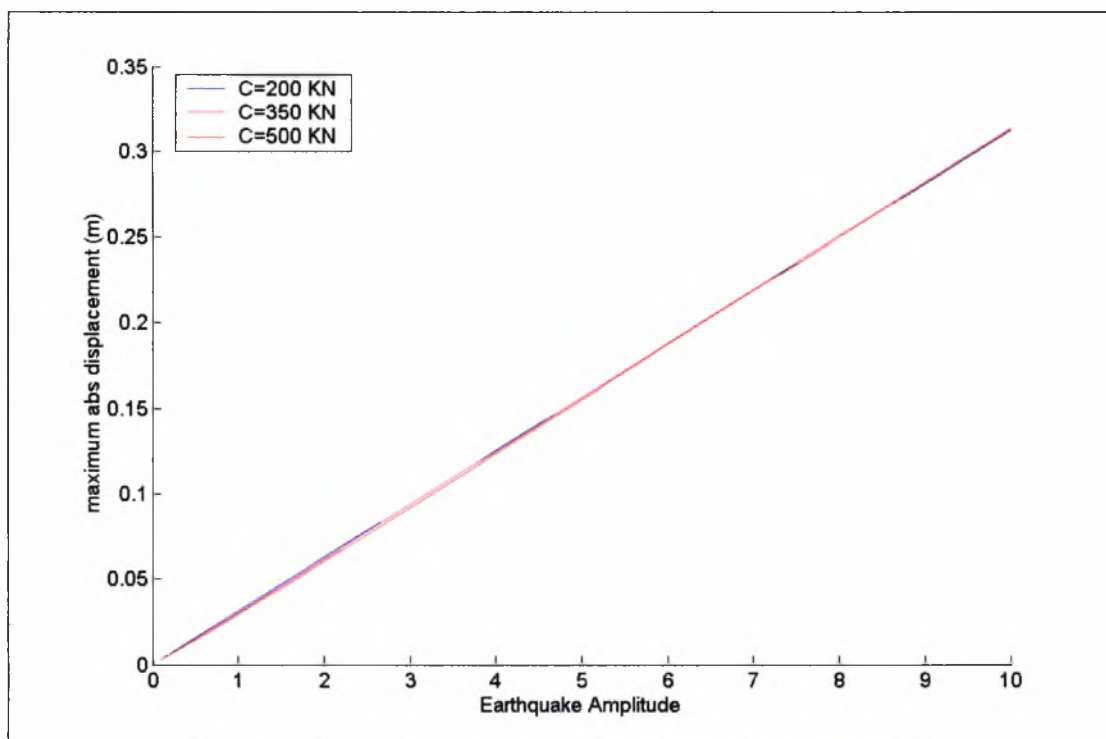


Σχήμα 4.26: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του  $a$  και  $C=350$  KN

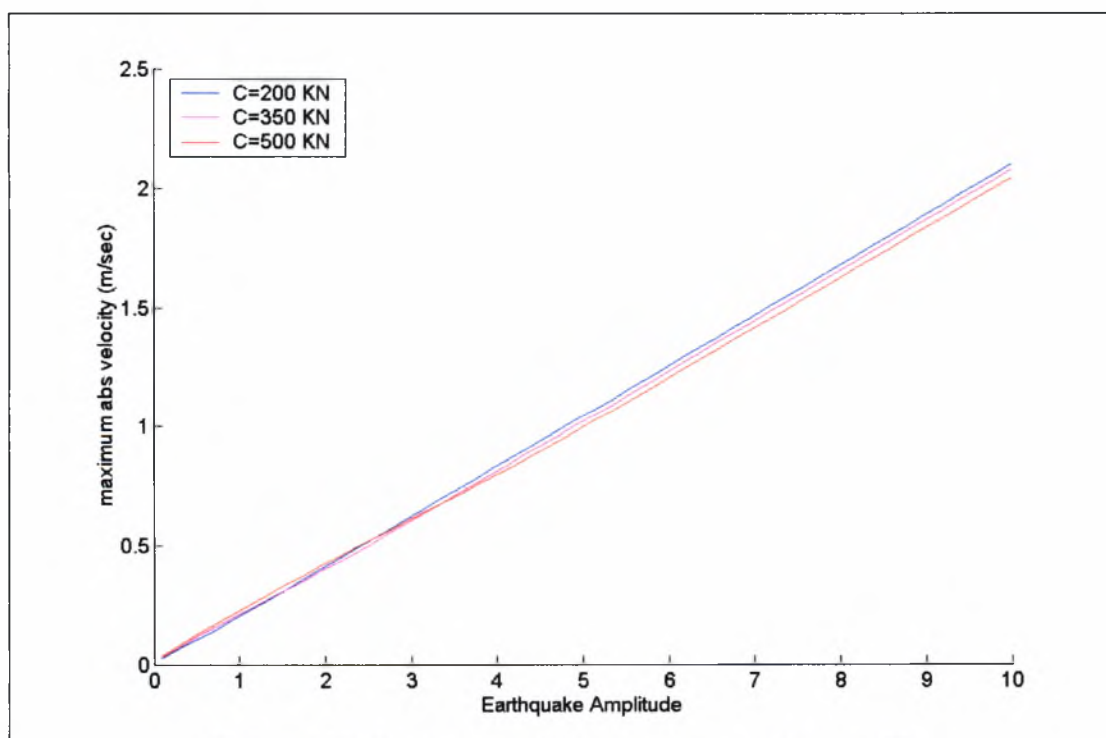


Σχήμα 4.27: Δυνάμεις στον αποσβεστήρα για διάφορες τιμές του  $a$  και  $C=350$  KN

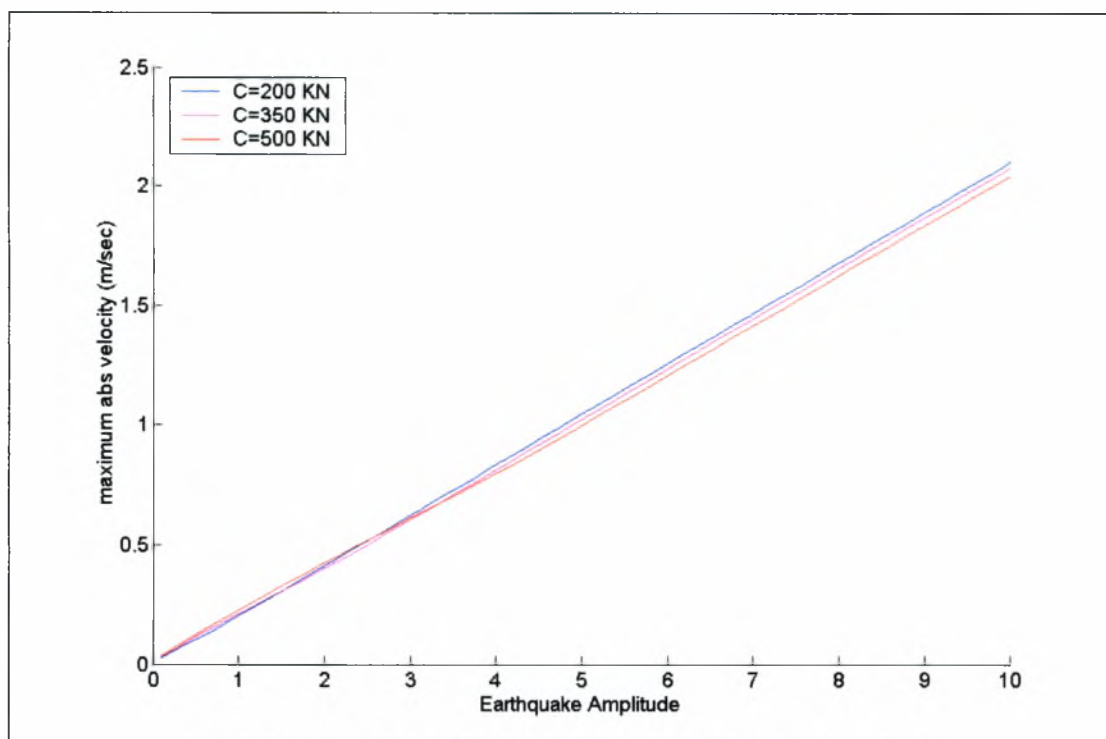




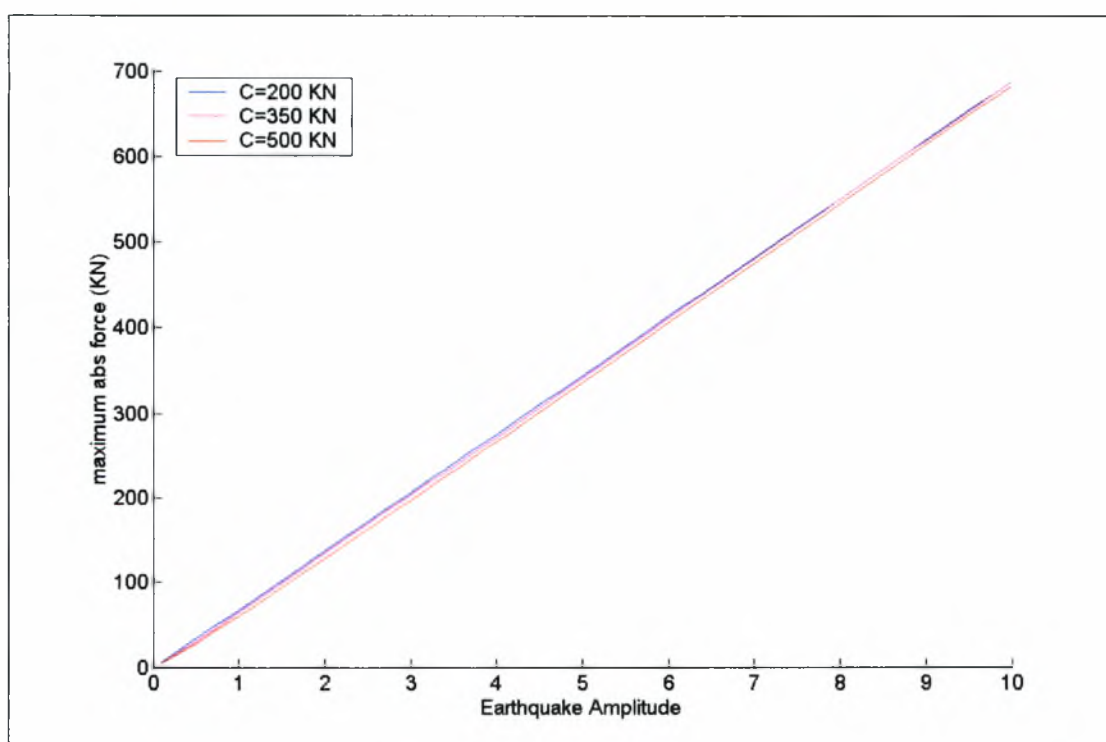
Σχήμα 4.28: Μετατοπίσεις για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$



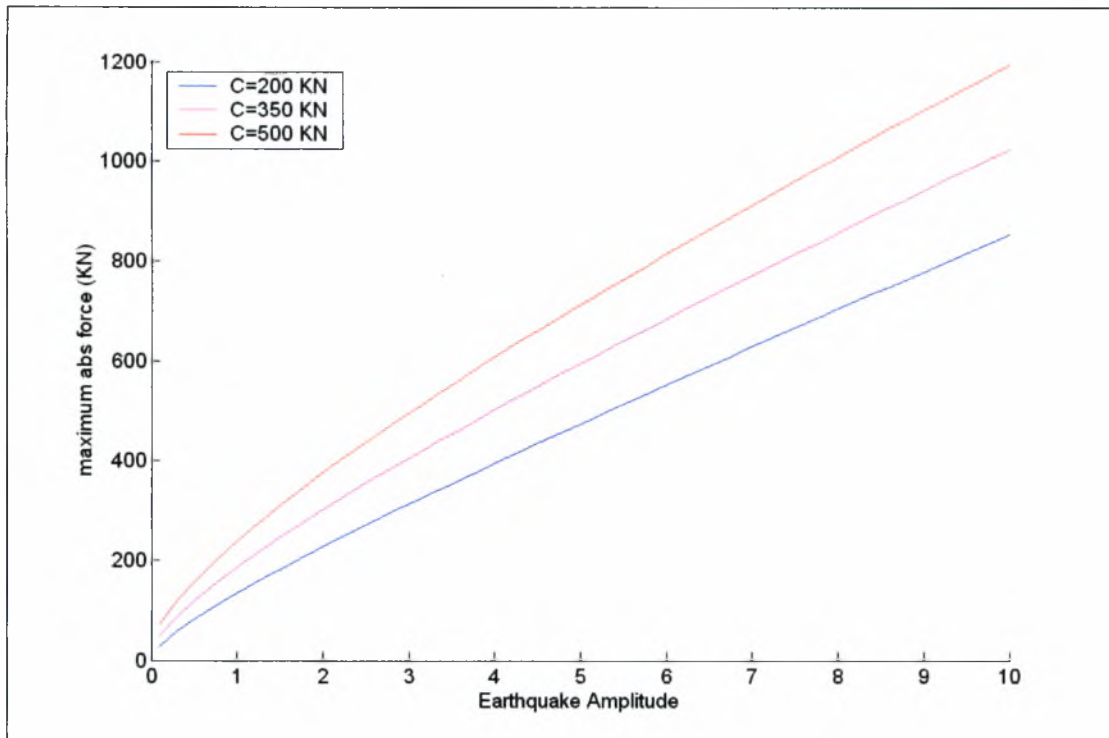
Σχήμα 4.29: Ταχύτητες για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$



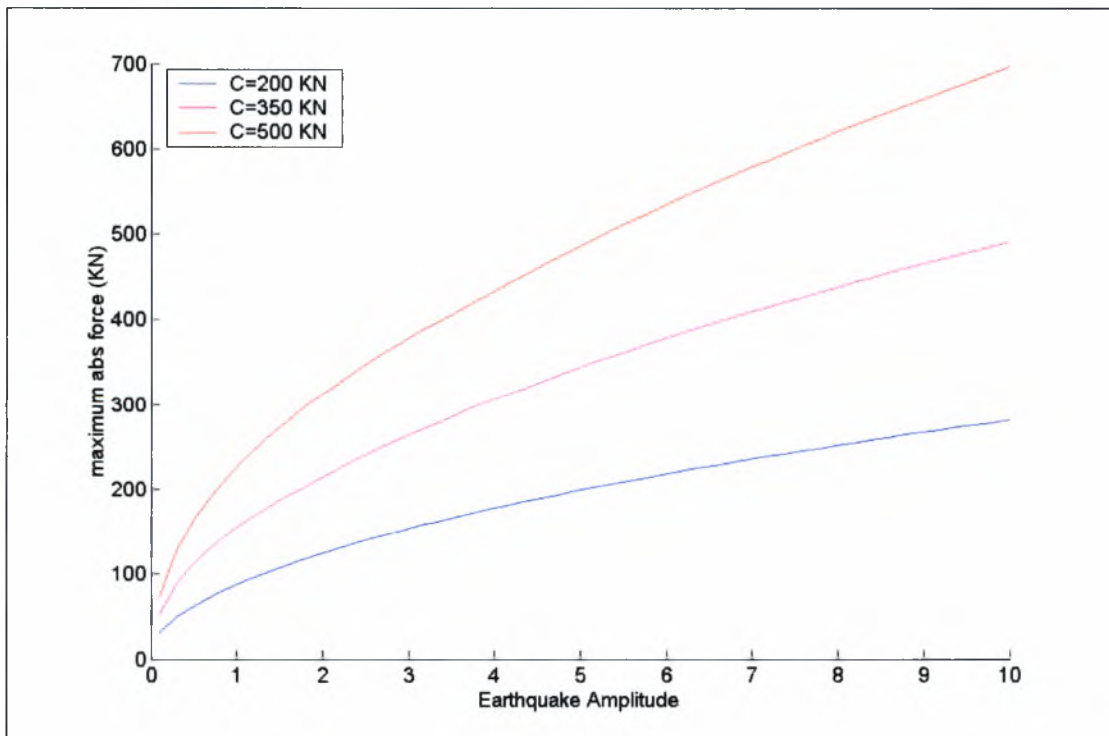
Σχήμα 4.30: Επιταχύνσεις για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$



Σχήμα 4.31: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$



Σχήμα 4.32: Δυνάμεις στο ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$



Σχήμα 4.33: Δυνάμεις στον αποσβεστήρα για διάφορες τιμές του C και  $a=0.5$

### 4.3.3.2 Σχόλια-Παρατηρήσεις

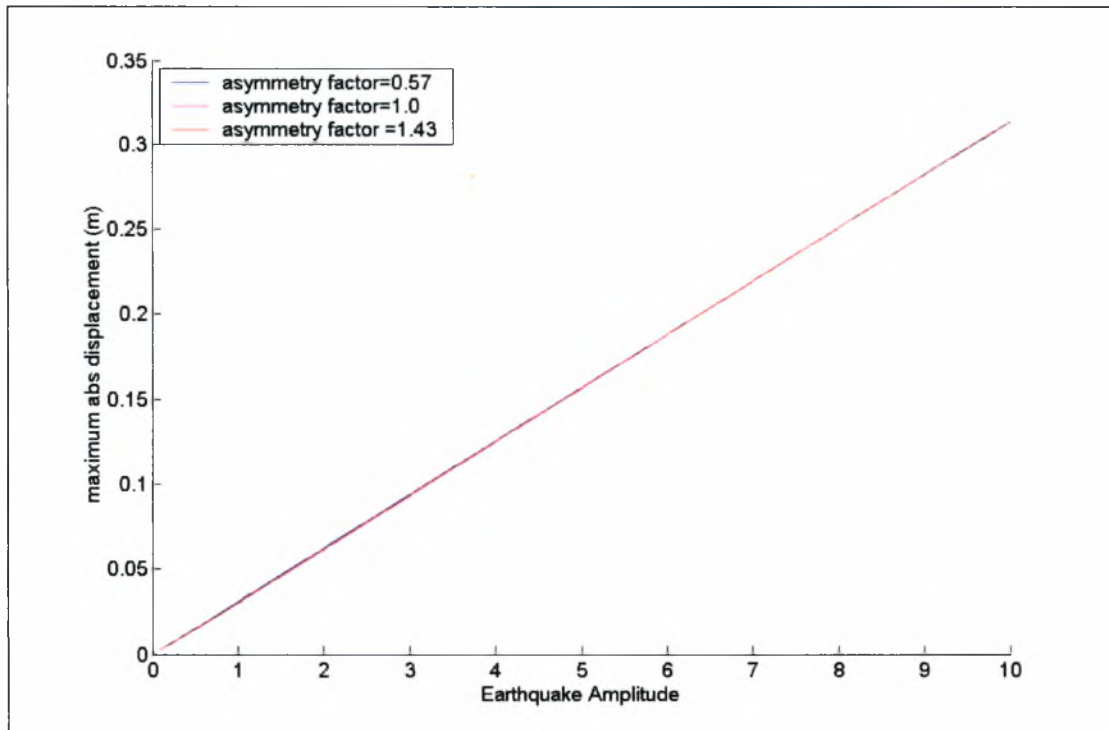
Όπως παρατηρούμε στα σχήματα 4.22 έως 4.27, ο εκθέτης  $a$  δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου την απόκριση του συστήματος όσον αφορά στις μετατοπίσεις, στις ταχύτητες, στις επιταχύνσεις καθώς και στις δυνάμεις στα ελατήρια  $K_b$ . Αντίθετα η τιμή του εκθέτη  $a$  επηρεάζει αρκετά τις δυνάμεις που αναπτύσσονται στο ελατήριο  $K_a$  και στους αποσβεστήρες. Συγκεκριμένα για μικρή κλιμάκωση της σεισμικής διέγερσης, μικρός εκθέτης μεταφράζεται και σε μικρότερες δυνάμεις στα στοιχεία αυτά. Αντίθετα σε μεγαλύτερη κλιμάκωση του σεισμού ισχύει το αντίθετο, δηλαδή μικρότερος εκθέτης συνεπάγεται μεγαλύτερες δυνάμεις στα στοιχεία αυτά.

Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζεται και κατά την ανάλυση ως προς τη σταθερά απόσβεση  $C$  (Σχήματα 4.28-4.33). Από τα σχήματα αυτά φαίνεται πως οι μετατοπίσεις, οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις επηρεάζονται ελάχιστα έως και καθόλου από την αλλαγή της τιμής της σταθεράς απόσβεσης. Το ίδιο ισχύει και για τις δυνάμεις που παραλαμβάνει το ελατήριο  $K_b$ . Οι δυνάμεις δε που αναπτύσσονται στα ελατήρια  $K_a$  και στους αποσβεστήρες επηρεάζονται πολύ από την τιμή της σταθεράς απόσβεσης και συγκεκριμένα είναι μεγαλύτερες όταν αυξάνεται και η τιμή του  $C$ .

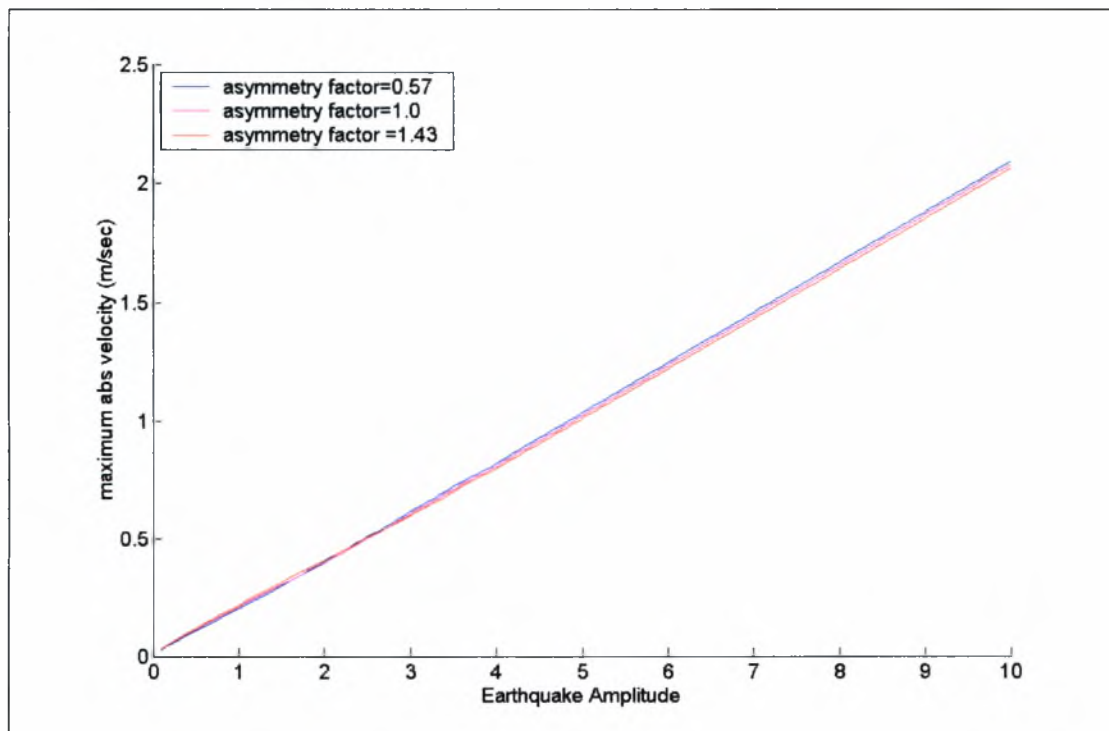
### 4.3.3.3 Ασύμμετρο σύστημα

Στη συνέχεια έγινε ανάλυση της απόκρισης του συστήματος σε σεισμική διέγερση, αλλά με μη συμμετρικά χαρακτηριστικά. Για την ακρίβεια η σταθερά απόσβεσης  $C$  του αποσβεστήρα στα δεξιά πολλαπλασιάστηκε με έναν συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$ . Οι τιμές του συντελεστή  $\beta$  έχουν επιλέγει κατάλληλα ώστε η σταθερά απόσβεσης  $C$  να παίρνει τις αντίστοιχες τιμές της προηγούμενης εφαρμογής (200, 350 500 KN) ενώ η τιμή του  $C$  στην αριστερή πλευρά είναι 350 KN. Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του συστήματος παραμένουν τα ίδια.

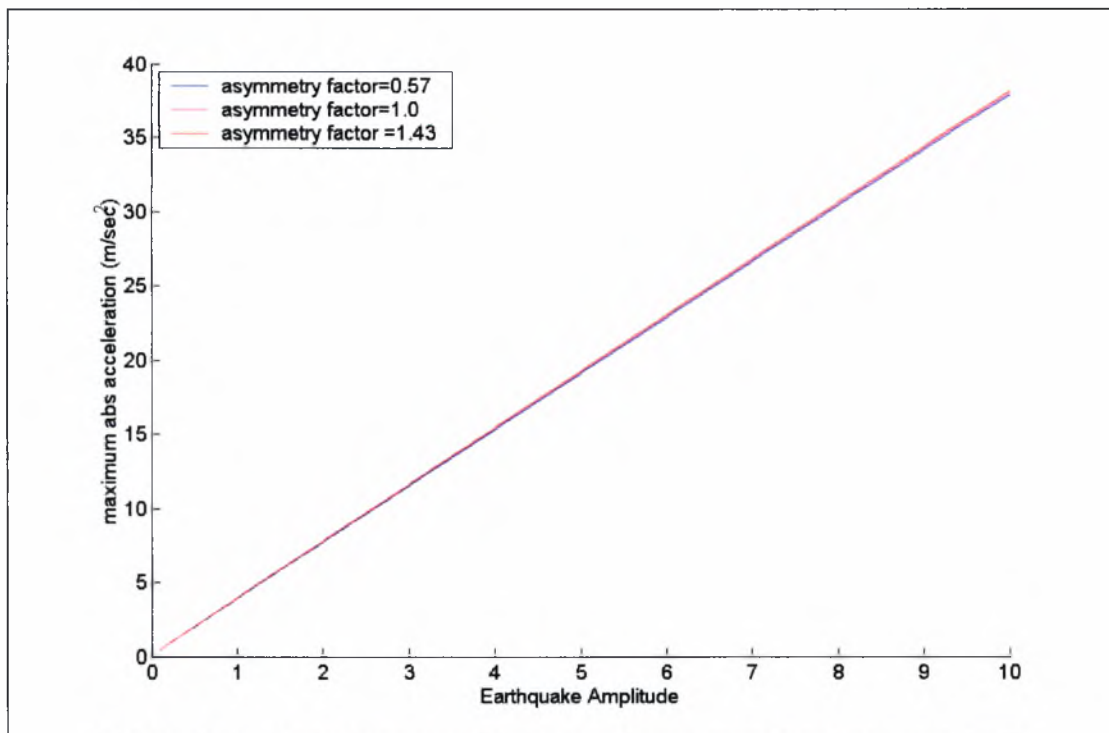
Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής φαίνονται στα παρακάτω σχήματα, στα οποία παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις, καθώς και οι δυνάμεις στα ελατήρια και στους αποσβεστήρες συναρτήσει της κλιμάκωσης του σεισμού αλλά και του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$ .



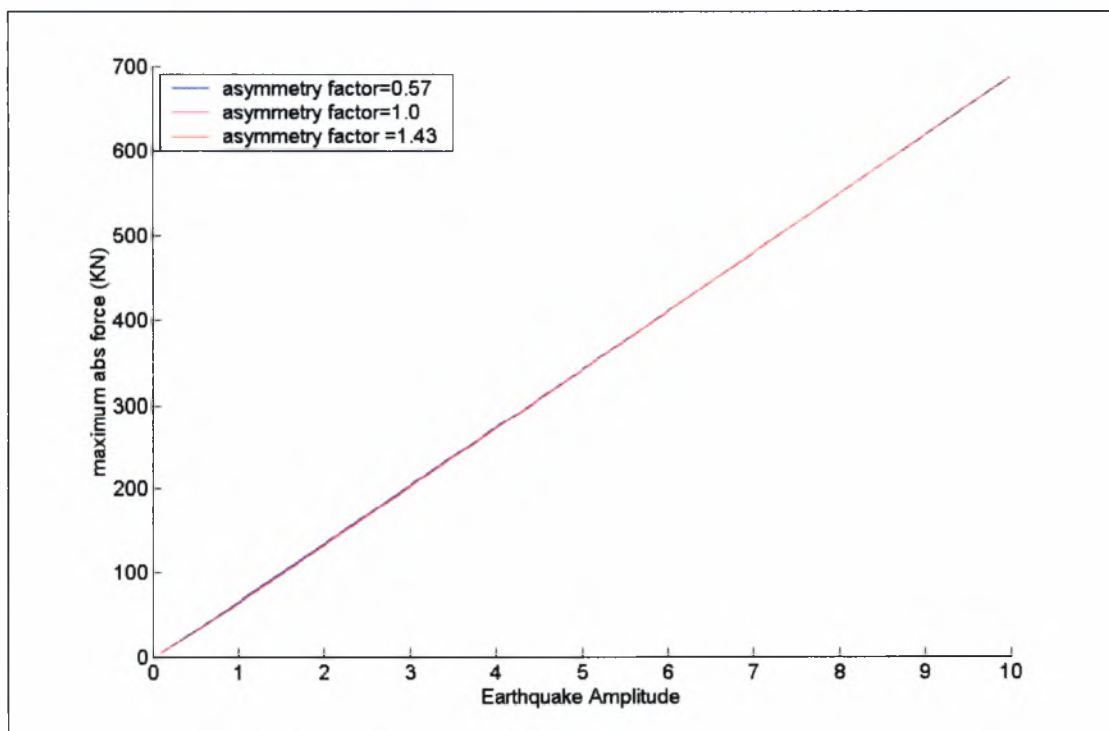
Σχήμα 4.34: Μετατοπίσεις για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



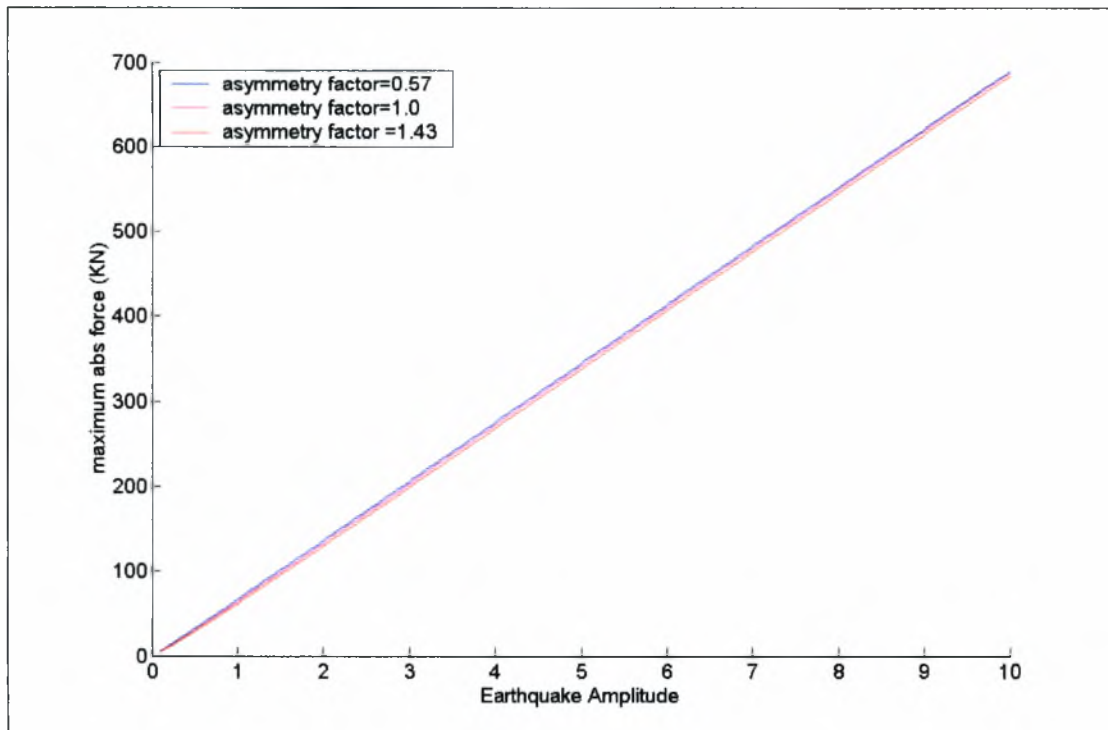
Σχήμα 4.35: Ταχύτητες για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



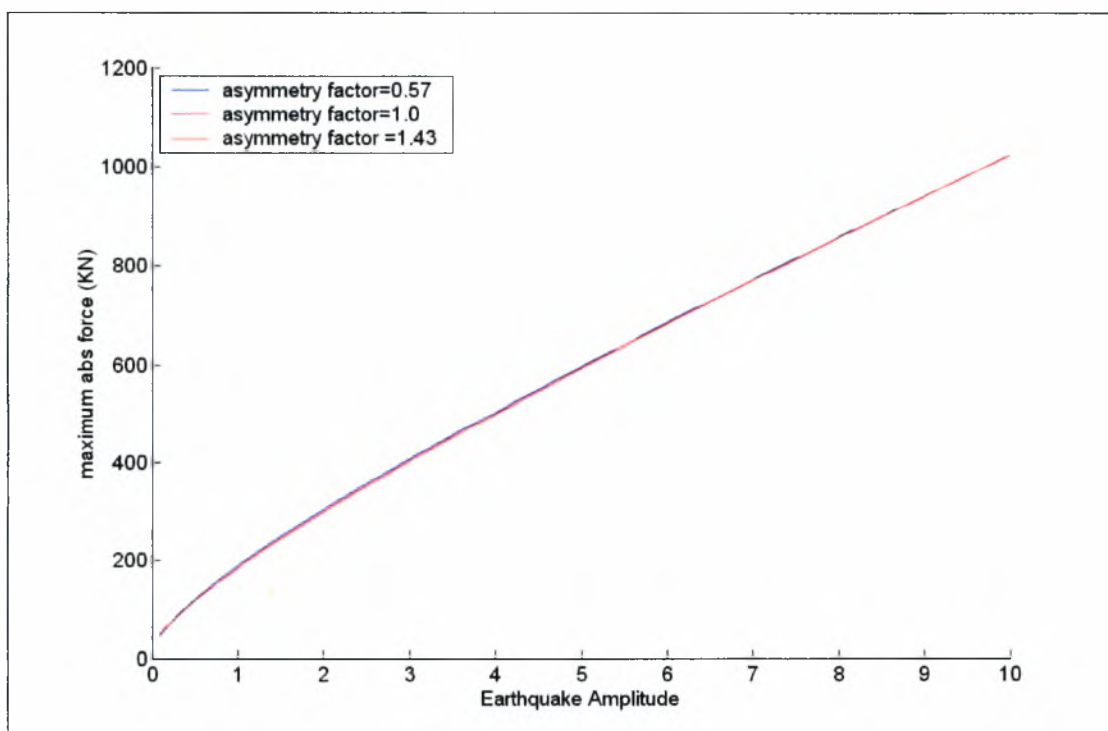
Σχήμα 4.36: Επιταχύνσεις για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας β



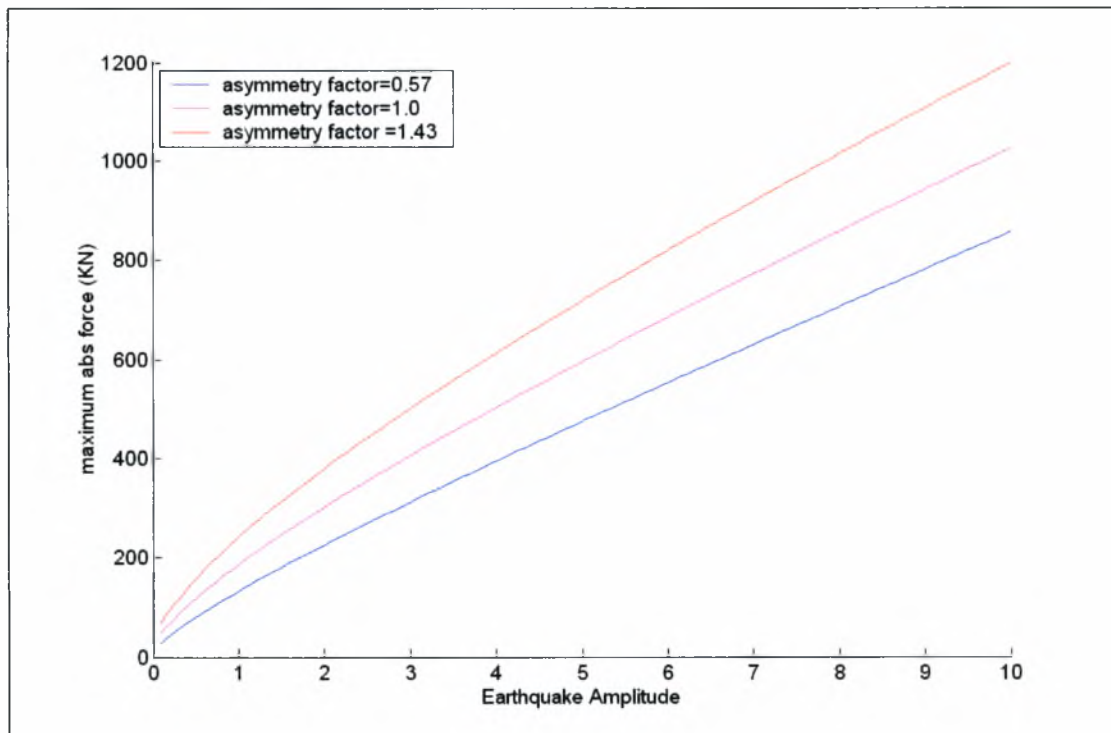
Σχήμα 4.37: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας β



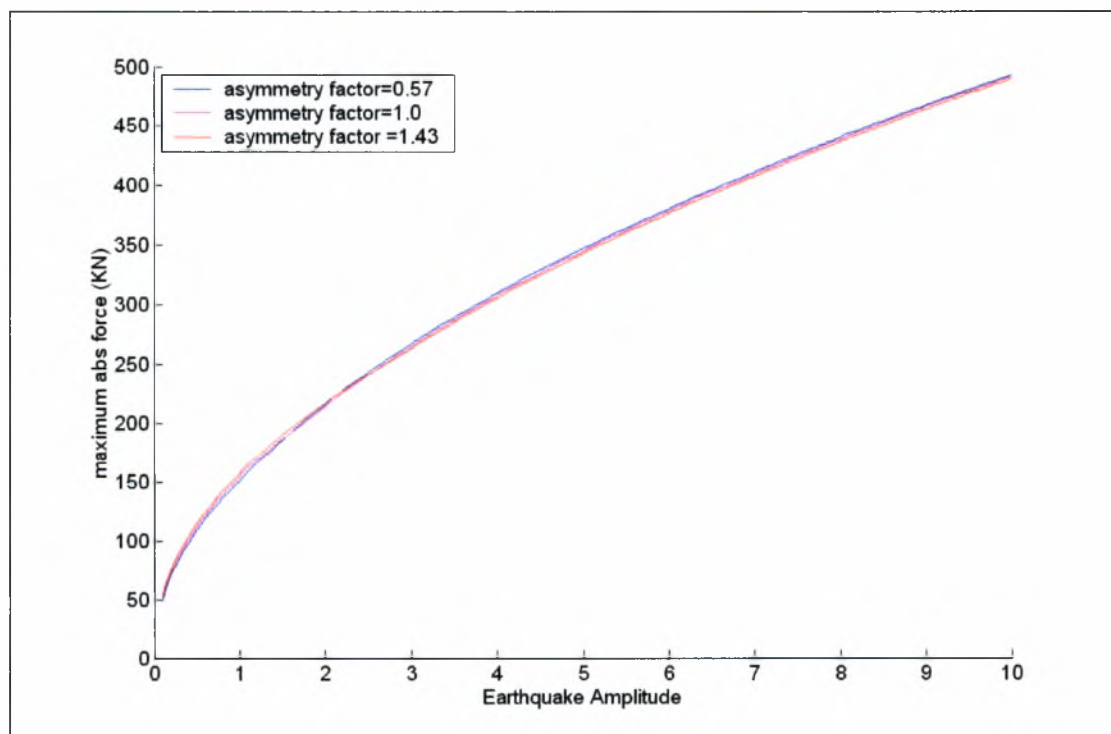
Σχήμα 4.38: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_b$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



Σχήμα 4.39: Δυνάμεις στο αριστερό ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$

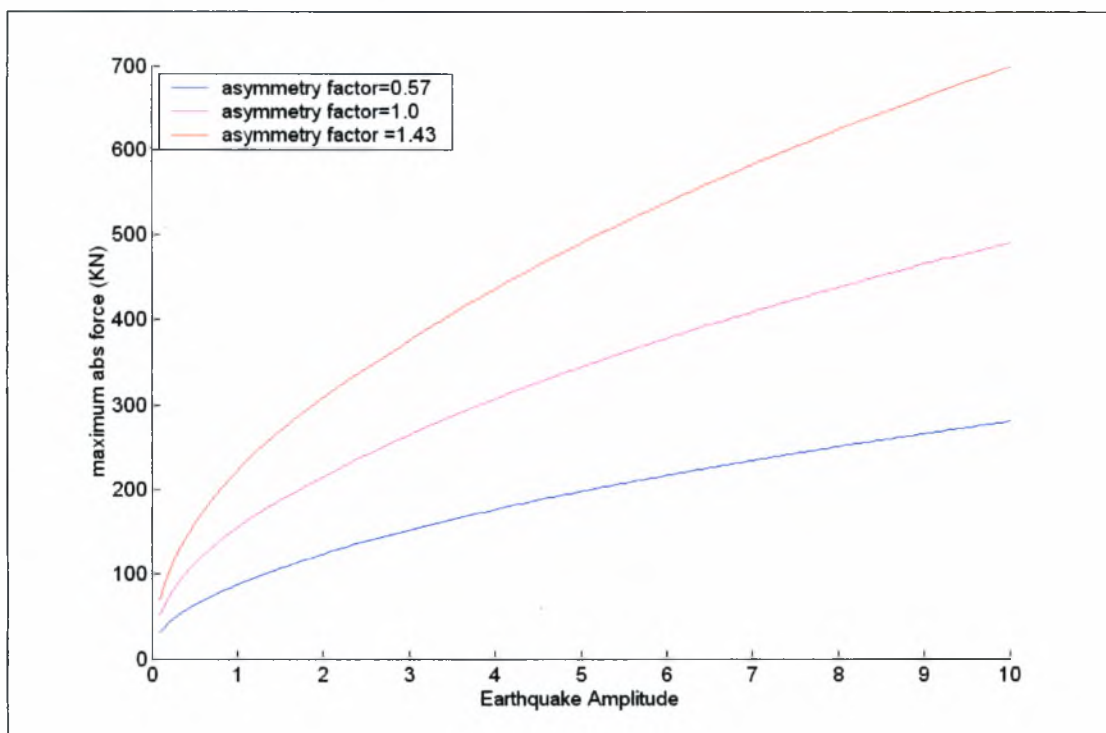


Σχήμα 4.40: Δυνάμεις στο δεξί ελατήριο  $K_a$  για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$



Σχήμα 4.41: Δυνάμεις στον αριστερό αποσβεστήρα για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$





Σχήμα 4.42: Δυνάμεις στον δεξί αποσβεστήρα για διάφορες τιμές του συντελεστή ασυμμετρίας  $\beta$

#### 4.3.3.4 Σχόλια – Παρατηρήσεις

Στα σχήματα 4.34-4.42 παρατηρούμε ότι στη δεξιά πλευρά του μοντέλου, στην οποία αλλάζει η τιμή της σταθεράς απόσβεσης  $C$ , οι δυνάμεις στα ελατήρια και στους αποσβεστήρες μεγαλώνουν ανάλογα με την τιμή του συντελεστή ασυμμετρίας, κατ' επέκταση και του συντελεστή απόσβεσης. Αντίθετα οι δυνάμεις στη αριστερή πλευρά του συστήματος, τα χαρακτηριστικά των διάφορων στοιχείων παραμένουν σταθερά, δεν επηρεάζονται σχεδόν καθόλου από την αλλαγή του συντελεστή ασυμμετρίας, κάτι το οποίο συμβαίνει και με τις μετατοπίσεις, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις.

## Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διερευνήθηκαν δυο βασικά θέματα:

- A) Δυναμική μορφική ανάλυση μοντέλων πολλών βαθμών ελευθερίας υφιστάμενων κατασκευών.
- B) Ανάλυση μη γραμμικών φαινομένων που παρουσιάζονται σε πραγματικές κατασκευές με τη βοήθεια απλουστευμένων συστημάτων λίγων βαθμών ελευθερίας.

Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε έναν αρκετά απλό και υπολογιστικά οικονομικό τρόπο δυναμικής ανάλυσης συστημάτων, δηλαδή τη μορφική ανάλυση. Μέσα από την εφαρμογή της μεθόδου σε μοντέλα όπως είναι αυτά της γέφυρας της Καβάλας και της γέφυρας της Χαλκίδας, με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS, είδαμε πως είναι ένα πολύ καλό και εύχρηστο εργαλείο για ανάλυση γραμμικών φαινομένων και την εξαγωγή αξιόπιστων αποτελεσμάτων. Όμως τα πράγματα δυσκολεύουν πολύ όταν παίρναμε σε σύστημα με μη γραμμικά χαρακτηριστικά.

Για τον λόγο αυτό προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε απλουστευμένα μοντέλα λίγων βαθμών ελευθερίας στα οποία να μπορούμε να εισάγουμε και να αναλύσουμε μη γραμμικά φαινόμενα τα οποία εμφανίζονται σε πραγματικές κατασκευές. Έτσι δημιουργήθηκαν τρία μοντέλα, ένα με γραμμικά χαρακτηριστικά και δυο με μη γραμμικά χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα στο πρώτο μη γραμμικό μοντέλο προσομοιώθηκε το φαινόμενο της επαφής και της κρούσης ανάμεσα σε στοιχεία της κατασκευής, ενώ στο δεύτερο μελετήθηκε η συμπεριφορά της μη γραμμικής απόσβεσης στο σύστημα.

Μετά την ανάλυση αυτών των συστημάτων και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, μπορούμε να πούμε ότι τα απλουστευμένα αυτά μοντέλα μπορούν να δώσουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Έτσι μπορούμε πλέον να πούμε ότι έχουμε αναπτύξει ένα απλό εργαλείο για την αξιόπιστη προσομοίωση μη γραμμικών φαινομένων, με σκοπό την καλύτερη επιλογή των χαρακτηριστικών διάφορων στοιχείων των κατασκευών.

Χρήσιμο θα ήταν να γίνουν στο μέλλον και οι παρακάτω αναλύσεις:

- 1) Δυναμική ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας.
- 2) Ανάλυση ευστάθειας των συστημάτων αυτών.
- 3) Ανάλυση απλουστευμένων δυναμικών συστημάτων για πολλαπλά επιταχυνσιογραφήματα (για γέφυρες) ή προφίλ οδοστρωμάτων (για οχήματα) για πολλούς συνδυασμούς αποσβεστήρων, ελατηρίων και περιοριστών. Ποσοτικοποίηση της διασποράς λόγω των διαφορετικών διεγέρσεων.
- 4) Εξαγωγή εμπειρικών σχέσεων για τη μέση τιμή και τη διασπορά των διαφορών μεγεθών των απλοποιημένων συστημάτων υπό πολλαπλές διεγέρσεις.

## Βιβλιογραφία

ABAQUS 6.3-1 Documentation, (2002).

Ακριβής Γ.Δ. και Δουγαλής Β.Α., (1997) “Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση”,  
Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Chopra A.K., (1995). “Dynamics of structures, Theory and applications to earthquake engineering”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Etter D.M., (1993). “Engineering problem solving with MATLAB” Prentice Hall,  
Englewood Cliffs, New Jersey.

Forsythe G.E, Macolm M.A. and Moler C.B., (1977). “Computer methods for mathematical computations” Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Κερμανίδης Θ., (1984). “Αντοχή υλικών”, Πάτρα.

MATLAB Reference Guide, (1999). The Mathworks, Inc.

Νατσιάβας Σ., (2001). “Ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων”, Εκδόσεις Ζήτη,  
Θεσσαλονίκη.

Natsiavas S. and Gonzalez H., (1992). "Vibration of harmonically excited oscillators with asymmetric constraints", Journal of Applied Mechanics, 59, pp. 284-290.

Παπαδόπουλος Β., (2001). "Ανάπτυξη μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων γέφυρας Καβάλας", Τεχνική αναφορά, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Thomas G.B. and Finney R.L., (1986) "Calculus and analytic geometry", Addison Wesley Publishing.

Τσαμασφύρος Γ.Ι., (1990) "Μηχανική παραμορφώσιμων σωμάτων", Εκδόσεις Συμμετρία.

Zhang J., Makris N. and Delis T., (2004). "Structural characterization of modern highway overcrossings – Case study", Journal of Structural Engineering, Vol 130 (6), pp. 846-860.

<http://www.abaqus.com/>

<http://www.mathworks.com/>

<http://www.opensees.berkeley.edu/>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074029

