

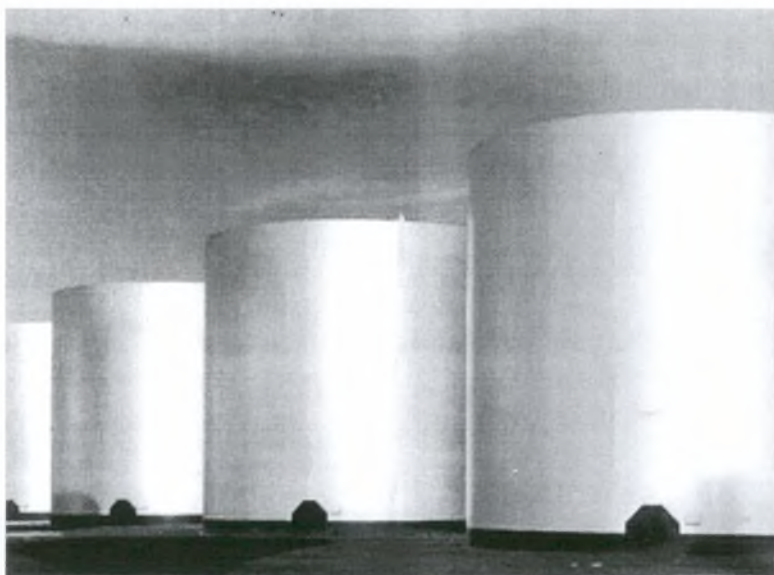
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

*ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ
ΛΟΓΩ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
ΣΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ*

Υπό

Αναστασίας Αργύρη



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2003



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 2426/1

Ημερ. Εισ.: 27-02-2004

Δωρεά:

Ταξινόμησης Κωδικός: ΠΤ ΜΜΒ

2003

ΑΡΓ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000070542

© 2003 Αναστασία Αργύρη

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Δημήτρης Βαλουγεώργης
(Επιβλέπων) Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος
(Συνεπιβλέπων) Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Βασίλης Μποντόζογλου
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της παρούσας εργασίας πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ολοκλήρωσης του κύκλου των προπτυχιακών μου σπουδών στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και υλοποιήθηκε στο Εργαστήριο Ηλεκτρονικών Υπολογιστών.

Η ολοκλήρωσή της όμως δεν θα ήταν εφικτή χωρίς την επιστημονική καθοδήγηση και την αμέριστη υποστήριξη του επιβλέποντα Επίκουρου Καθηγητή και υπεύθυνου του εργαστηρίου Η/Υ κ. Δ. Βαλουγεώργη, η συμβολή του οποίου ήταν καθοριστική στην πραγματοποίηση των στόχων που ετέθησαν.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Σ. Καραμάνο, ο οποίος ως συνεπιβλέπων της παρούσας εργασίας συνετέλεσε αποφασιστικά στη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς η βαθιά του γνώση στη μέθοδο αυτή με βοήθησε να αντιμετωπίσω επιτυχώς όλα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στην πορεία της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, επίσης, τους μεταπτυχιακούς φοιτητές Χ. Δριτσέλη και Σ. Παπασπύρου, για την πολύτιμη βοήθειά τους στην πραγματοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για την κατανόηση και υπομονή που επέδειξαν στη μέχρι τώρα πορεία μου.

Αναστασία Αργύρη

Βόλος, Σεπτέμβριος 2003

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή	3
1.1 Στόχος της παρούσας διπλωματικής.....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Πρόβλημα Ιδιοτιμών	16
3.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	16
3.2 Επίλυση του προβλήματος (Ιδιοτιμές και ιδιομορφές).....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών	20
4.1 Διατύπωση του προβλήματος.....	20
4.2 Επίλυση του προβλήματος ωστικής κίνησης.....	21
4.3 Επίλυση του επαγωγικού προβλήματος.....	23
4.4 Πιέσεις, δυνάμεις και ροπές	27
4.5 Εναλλακτική μεθοδολογία επίλυσης	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Αριθμητική λύση με πεπερασμένα στοιχεία	32
5.1 Εισαγωγή.....	32
5.2 Διατύπωση του προβλήματος.....	33
5.3 Απλουστευμένη εφαρμογή τεσσάρων στοιχείων	38
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Αποτελέσματα	46
6.1 Αποτελέσματα προβλήματος ιδιοτιμών.....	46
6.1.1 Αναλυτικά αποτελέσματα	46
6.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα	55
6.2 Αποτελέσματα προβλήματος συνοριακών τιμών.....	59
6.2.1 Αναλυτικά αποτελέσματα	59

6.2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα	62
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Συμπεράσματα	68
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Αναφορές.....	72
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Συνημμένα.....	77
9.1 Κώδικες Mathematika.....	77
9.1.1 Υπολογισμός των δυνάμεων και των λόγων C_1 και C_2	77
9.1.2 Υπολογισμός τιμών της αναλυτικής λύσης σε διάφορα σημεία της δεξαμενής	78
9.1.3 Υπολογισμός ριζών της συνάρτησης Bessel	80
9.1.4 Υπολογισμός ιδιοτιμών	80
9.1.5 Σύγκριση λύσεων διαχωρισμού I και II	81
9.2 Κώδικες Fortran.....	83
9.2.1 Πρόγραμμα ιδιοτιμών	83
9.2.2 Πρόβλημα ωστικής κίνησης.....	94
9.2.3 Πρόβλημα ωστικής και επαγωγικής κίνησης	104

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

1 Εισαγωγή

Κοινό χαρακτηριστικό όλων των δοχείων πίεσης και δεξαμενών αποθήκευσης υγρών είναι ότι το αποθηκευμένο υγρό έχει μία επιφάνεια, της οποίας η κίνηση δεν περιορίζεται από τα τοιχώματα του δοχείου ή της δεξαμενής. Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και επιτρέπει τη σχετική κίνηση του ρευστού ως προς το δοχείο, με αποτέλεσμα την εμφάνιση κυματισμών στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Η επιφάνεια του υγρού κινείται μόνο κάθετα ως προς τη βάση της δεξαμενής και τα μήκη κύματος ταυτίζονται με ένα φάσμα συγκεκριμένων διακριτών τιμών, που αποτελούν τις ιδιοτιμές του συστήματος. Αντίστοιχα οι ιδιομορφές του συστήματος περιγράφουν την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.

Όταν μία από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος υγρού – δοχείου βρίσκεται στην περιοχή ή ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα μιας εξωτερικής κίνησης, διαταραχής ή διέγερσης που ασκείται πάνω στην κατασκευή, τότε εμφανίζεται το φαινόμενο του συντονισμού και η ευστάθεια του συστήματος επηρεάζεται σημαντικά. Επομένως, ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων του φαινομένου του κυματισμού και γενικότερα η μελέτη της απόκρισης του συστήματος υγρού – δοχείου σε εξωτερική διέγερση, αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σημασία.

Το φαινόμενο του κυματισμού εξαρτάται τόσο από το είδος της εξωτερικής διέγερσης, όσο και από το σχήμα της δεξαμενής ή του δοχείου, με αποτέλεσμα η ελεύθερη επιφάνεια να εμφανίζει διαφορετικά είδη κίνησης, όπως επίπεδη και μη επίπεδη κίνηση, περιστροφική, συμμετρική, ασύμμετρη, ημιπεριοδική ή χαοτική.

Η κίνηση του υγρού μέσα σε ένα δοχείο περιλαμβάνει απεριόριστο αριθμό ιδιοσυχνοτήτων, αλλά οι χαμηλότερες είναι αυτές που διεγείρονται από την κίνηση του

δοχείου. Για το λόγο αυτό οι περισσότερες μελέτες έχουν επικεντρωθεί στη διερεύνηση των εξαναγκασμένων αρμονικών ταλαντώσεων κοντά στις χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες.

Δεξαμενές και δοχεία πίεσης διαφορετικής γεωμετρίας (κυλινδρικές, σφαιρικές, τετραγωνικές), χρησιμοποιούνται ευρέως στην χημική βιομηχανία για την αποθήκευση διαφόρων υγρών, όπως νερό, πετρέλαιο, χημικά και υγροποιημένο φυσικό αέριο. Η συμπεριφορά των δεξαμενών αυτών κατά τη διάρκεια σεισμικής διέγερσης αποτελεί σημαντικό στοιχείο του αντισεισμικού σχεδιασμού.

Η επίδραση ενός σεισμού σε δεξαμενές μπορεί να προκαλέσει σοβαρές ζημιές, τόσο στην ίδια την κατασκευή όσο και στα υπόλοιπα στοιχεία που περιβάλλουν την δεξαμενή, όπως σωληνώσεις. Αντίστοιχα, στο σχεδιασμό των δοχείων πίεσης, όπου το περιεχόμενο υγρό βρίσκεται υπό πίεση, θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι οδηγίες αντισεισμικού σχεδιασμού. Αναλυτικότερα, η εμφάνιση μεγάλων αξονικών (διαμηκών) τάσεων λόγω αξονικών και καμπτικών ροπών σε συνδυασμό με την εσωτερική πίεση μπορεί να προκαλέσει τοπικό λυγισμό των τοιχωμάτων της δεξαμενής τύπου “diamond shape” καθ’ ύψος της δεξαμενής ή και τύπου “elephant foot” στη βάση.

Οι δεξαμενές διαστημόπλοιων, τα βυτιοφόρα και τα πλωτά μέσα που μεταφέρουν υγροποιημένους υδρογονάνθρακες (π.χ. φυσικό αέριο, κτλ.), αποτελούν δυναμικά συστήματα, των οποίων κύρια τμήματα είναι οι δεξαμενές υγρών. Η δυναμική συμπεριφορά αυτών των συστημάτων επηρεάζεται άμεσα από την δυναμική της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Το βασικό πρόβλημα του κυματισμού είναι ο υπολογισμός της κατανομής της υδροδυναμικής πίεσης, των δυνάμεων, των ροπών και των ιδιοσυχνοτήτων της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Όλες αυτές οι παράμετροι επηρεάζουν άμεσα τη δυναμική συμπεριφορά των δεξαμενών.

Ο κυματισμός του υγρού σε δεξαμενή υπό εξωτερική διέγερση, δημιουργεί μια ποικιλία προβλημάτων σε θέματα ασφάλειας, που αφορούν και τα ντεπόζιτα των φορτηγών

που κινούνται σε δρόμους υψηλής ταχύτητας και τα πλοία που μεταφέρουν υγρά φορτία. Σε κατοικημένες περιοχές βυτιοφόρα που μεταφέρουν βενζίνη και άλλα εύφλεκτα υλικά εμπλέκονται συχνά σε ατυχήματα και αναποδογυρίζουν, καθώς μπαίνουν ή βγαίνουν σε ή από δρόμο μεγάλης κυκλοφορίας.

Στα βυτιοφόρα που κινούνται σε δρόμους, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού μπορεί να ανυψωθεί αρκετά ακόμη και για μικρές κινήσεις του δοχείου που περιέχει το υγρό. Αυτό είναι ένα ανεπιθύμητο γεγονός, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί επικίνδυνο για τη σταθερότητα και την ικανότητα ελιγμού του οχήματος. Το πρόβλημα αυτό είναι κοινό για δοχεία καυσίμων ή άλλων φορτίων, π.χ. για τρένα με δεξαμενές, για δεξαμενές καυσίμων μεγάλων πλοίων και βυτιοφόρων.

Στην περίπτωση των πλοίων, λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση των κυμάτων σ' αυτά, είναι λογικό να προκαλούνται κινήσεις στο φορτίο και να οδηγούν σε συντονισμό. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία μεγάλων τοπικών φορτίσεων στην κατασκευή του πλοίου, με επίδραση στην κίνησή του. Όταν κύματα επιδρούν στο πλοίο, είναι δυνατό να παρουσιαστούν υψηλές πιέσεις πρόσκρουσης στα τοιχώματα της δεξαμενής του, μέσω της οποίας μεταφέρονται καύσιμα ή άλλα φορτία [1 – 10].

Πολιτικοί μηχανικοί ασχολούνται με το πρόβλημα του κυματισμού, προκειμένου να μελετήσουν την επίδραση του σεισμού σε μεγάλα φράγματα, δεξαμενές πετρελαίου και νερού. Το πρόβλημα αυτό απασχολεί ακόμη τους αεροναυπηγούς μηχανικούς, αφού σχετίζεται άμεσα με το σχεδιασμό και την κατασκευή αεροσκαφών και μεγάλων πυραύλων [11 – 23], π.χ. σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας, όπου ο όγκος του υγρού προσανατολίζεται άτακτα και δημιουργεί πρόβλημα στον έλεγχο της ροής του.

Μερικά από τα κύρια προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν κατά το σχεδιασμό πυραύλων αερίων υπό πίεση, είναι η κίνηση του κέντρου μάζας, η δυναμική συμπεριφορά του πυραύλου, καθώς και η πλευρική κάμψη της κατασκευής του πυραύλου. Η

τεχνολογία που αναπτύχθηκε για τη μελέτη του κυματισμού στις διαστημικές εφαρμογές δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί σε δεξαμενές που μεταφέρουν υγρά στο οδικό δίκτυο γιατί έχει δοθεί έμφαση στις συχνότητες και τις συνολικές δυνάμεις, όπως αυτές σχετίζονται με τις απαιτήσεις του συστήματος ελέγχου των διαστημικών εφαρμογών. Για το λόγο αυτό, οι επιδράσεις του υψηλότερου τοπικού σημείου πίεσης στις απαιτήσεις του σκελετού του πυραύλου δεν έχουν μελετηθεί σε μεγάλη έκταση. Επιπλέον, το πλάτος της διέγερσης που λαμβάνεται υπόψη στις διαστημικές εφαρμογές είναι πολύ μικρό για την προσομοίωση του φαινομένου του κυματισμού στα τροχοφόρα.

Το φαινόμενο του κυματισμού, περικλείει ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων, τα οποία εξαρτώνται από τον τύπο της εφαρμογής, τη διέγερση, το πεδίο βαρύτητας και πολλούς άλλους παράγοντες. Αναμφίβολα, η αεροδιαστημική τεχνολογία έχει προωθήσει τις έρευνές της σε αρκετά ζητήματα που σχετίζονται με το φαινόμενο του κυματισμού και ειδικά η έρευνα της NASA, που πραγματοποιήθηκε από τον Abramson [15], τεκμηριώνει αυτά τα προβλήματα.

Γενικά, η υδροδυναμική πίεση του υγρού σε ανελαστικές δεξαμενές, αποτελείται από δύο χωριστές συνιστώσες. Η μία συνιστώσα είναι ανάλογη της επιτάχυνσης της δεξαμενής και προκαλείται από το υγρό που κινείται μαζί με τη δεξαμενή (impulsive). Η δεύτερη συνιστώσα είναι γνωστή ως “convective” πίεση και προκαλείται από το υγρό που κινείται σχετικά ως προς τη δεξαμενή. Η συνιστώσα αυτή μπορεί να σχεδιαστεί με τη βοήθεια ενός συστήματος εξασθένησης μάζας – ελατηρίου ή ενός συστήματος εκκρεμούς [24 - 32].

Ιδιαίτερη αναφορά για το πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας υπάρχει και στον Ευρωκώδικα 8 (European prestandard), ο οποίος αφορά στο σχεδιασμό των κατασκευών σε περίπτωση σεισμού. Περιέχει έναν αριθμό διατάξεων για τον σχεδιασμό κτιρίων και άλλων δομικών έργων, όπως το σχεδιασμό αποθηκευτικών δεξαμενών διαφόρων τύπων. Η αντοχή και η ευστάθεια των δεξαμενών που υπόκεινται σε έντονη σεισμική

δραστηριότητα μπορεί να εξαρτάται από σύνθετα φαινόμενα αλληλεπίδρασης εδάφους – κατασκευής – ρευστού, τα οποία δεν είναι εύκολο να απλοποιηθούν για τις διαδικασίες σχεδιασμού.

Μία εύχρηστη μέθοδος, που βασίζεται στη λύση των υδροδυναμικών εξισώσεων με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δομική επάρκεια του συστήματος της δεξαμενής υπό τη σεισμική δράση σχεδιασμού. Συγκεκριμένα η ανάλυση πρέπει να υπολογίζει τα ακόλουθα μεγέθη, όπου απαιτείται:

- Τις επαγωγικές και ωστικές συνιστώσες κίνησης του ρευστού
- Την παραμόρφωση στο κέλυφος της δεξαμενής, όταν αυτή βρίσκεται υπό την επίδραση υδροδυναμικών πιέσεων, καθώς και τις πιθανές αλληλεπιδράσεις με την ωστική συνιστώσα.
- Την παραμορφωσιμότητα του εδάφους θεμελίωσης και την προκύπτουσα τροποποίηση της αντίδρασης.

Ακόμη, σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν συσκευές απόσβεσης (dampers), ώστε να μειωθεί ο κυματισμός. Για τον ίδιο λόγο μπορεί να χρησιμοποιηθούν κάθετα χωρίσματα, τα οποία μπορούν να εισαχθούν στο εσωτερικό των δεξαμενών.

1.1 Στόχος της παρούσας διπλωματικής

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και κατανοώντας τη σημασία του φαινομένου του κυματισμού, η διπλωματική αυτή έχει σαν στόχο τη διατύπωση, επίλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων για την επίδραση του φαινομένου αυτού σε κυλινδρικές δεξαμενές. Η παρούσα εργασία, βασίζεται στη θεωρία ωστικής / επαγωγικής κίνησης, για την αντιμετώπιση του φαινομένου του κυματισμού. Η αναλυτική λύση χρησιμοποιήθηκε ως

μέτρο σύγκρισης για την επίλυση του φαινομένου του κυματισμού με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Κατά τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής μελετήθηκαν αναλυτικά, με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών και αριθμητικά, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, τα προβλήματα της ωστικής και επαγωγικής κίνησης.

Αρχικά, στο κεφάλαιο 1 υπάρχει μια εισαγωγή για το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας σε δεξαμενές και τις επιδράσεις που έχει σ' αυτές. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση της μελέτης του φαινομένου από διάφορους ερευνητές στη διάρκεια των χρόνων μέχρι σήμερα.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών αναλυτικά, με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών και προκύπτουν οι ιδιοτιμές του μελετούμενου προβλήματος. Εκτός από το πρόβλημα των ιδιοτιμών, στο 4^ο κεφάλαιο εξετάζεται και το πρόβλημα συνοριακών τιμών της υπό διέγερσης απόκρισης της δεξαμενής. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ίδια με αυτή του προβλήματος των ιδιοτιμών. Αναλυτικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών λύνεται με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών, αφού όμως πρώτα χωρίζεται σε δύο υποπροβλήματα, της ωστικής και επαγωγικής κίνησης. Επίσης, υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής, καθώς επίσης και οι ροπές που αντιστοιχούν στις δυνάμεις αυτές.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 5 το πρόβλημα των ιδιοτιμών λύνεται και αριθμητικά, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη δημιουργία κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran. Στο ίδιο κεφάλαιο επιλύεται αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και προγραμματίζεται σε γλώσσα Fortran και το πρόβλημα συνοριακών τιμών. Εδώ, δημιουργείται κώδικας για το πρόβλημα της ωστικής κίνησης και για το συνολικό, χωρίς να υπάρξει ξεχωριστό πρόγραμμα για το πρόβλημα της επαγωγικής κίνησης. Όπως και στο αναλυτικό μέρος της παρούσας εργασίας, έτσι και στο αριθμητικό,

υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής, καθώς και οι ροπές που αντιστοιχούν σ' αυτές.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αναλυτικά αποτελέσματα του προβλήματος των ιδιοτιμών για διάφορες διαστάσεις δεξαμενών, καθώς επίσης και οι ιδιομορφές του προβλήματος σε μία και δύο διαστάσεις. Στη συνέχεια παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα των ιδιοτιμών και μελετάται η σύγκλιση με τις αναλυτικές τιμές. Επίσης, απεικονίζονται γραφικά οι λόγοι των δυνάμεων που ορίζονται στο κεφάλαιο των συνοριακών τιμών, με στόχο την καλύτερη κατανόηση των αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Στο κεφάλαιο 7, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω μελέτη. Έτσι, στο κεφάλαιο αυτό υπάρχουν τα πορίσματα στα οποία καταλήξαμε λύνοντας τα προβλήματα των ιδιοτιμών αλλά και των συνοριακών τιμών, τόσο αναλυτικά, όσο και αριθμητικά. Στο τέλος της ενότητας αυτής, προτείνονται και πιθανοί τρόποι συνέχισης της παρούσας εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Αρκετοί μελετητές ασχολήθηκαν με το φαινόμενο του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού τόσο σε κυλινδρικές όσο και σε ορθογωνικές δεξαμενές. Παρακάτω αναφέρονται ορισμένες από τις εργασίες αυτές.

Ο Housner [33], παρουσίασε τις υδροδυναμικές πιέσεις που αναπτύσσονται, όταν σε δοχείο που περιέχει υγρό ασκούνται οριζόντιες επιταχύνσεις. Πιο απλοποιημένοι τύποι αναπτύχθηκαν για δοχεία που παρουσίαζαν διπλή συμμετρία, είχαν εύκαμπτα τοιχώματα και κεκλιμένες επιφάνειες. Η ανάλυση περιελάμβανε τόσο τις ωστικές πιέσεις, όσο και τις πιέσεις που προέρχονται από το φαινόμενο του κυματισμού.

Ένα σύντομο απολογισμό μελετών που έγινε στο πανεπιστήμιο του Rice έγραψε ο Veletsos [34], με σκοπό να εκτιμηθεί η επίδραση των εύκαμπτων δεξαμενών στο μέγεθος και την κατανομή των δυνάμεων. Βασικός στόχος της προσπάθειας αυτής ήταν η αξιοποίηση των πληροφοριών και των μεθόδων που είχαν αναπτυχθεί παλαιότερα, έτσι ώστε να αποτελέσουν αρχή για την ανάπτυξη απλών, πρακτικών μεθόδων ανάλυσης και σχεδιασμού περιπτώσεων, στις οποίες η επίδραση της ελαστικότητας της δεξαμενής είναι σημαντική. Οι δεξαμενές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν κυλινδρικές, κυκλικής διατομής, με ελεύθερη την επιφάνεια του υγρού και ασκήθηκε σ' αυτές οριζόντια διέγερση.

Ο Fischer [35], αφού έλαβε υπόψη του το δυναμικό της ταχύτητας συμπιεστού υγρού, όπως αυτό βρέθηκε με τη μέθοδο Galerkin και θεωρώντας δεξαμενή με εύκαμπτα τοιχώματα και ανοιχτές επιφάνειες, παρουσίασε αναλυτικές λύσεις για την ωστική μάζα, την ροπή ώσης και την ροπή ανατροπής.

Ένα μηχανικό μοντέλο εμφάνισε ο Haroun [36], το οποίο λαμβάνει υπόψη του την ικανότητα παραμόρφωσης της δεξαμενής. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε γραφικές παραστάσεις. Η μέγιστη σεισμική αντίδραση της δεξαμενής μπορεί να υπολογιστεί μέσω της

απόκρισης του φάσματος, ενώ η σύγκριση με την «ακριβή» λύση του προβλήματος επιβεβαιώνει την εγκυρότητα της μεθόδου.

Ο Luft [37], παρουσίασε τη μέθοδο των ιδιομορφών για μία κυλινδρική δεξαμενή από προενταμένο σκυρόδεμα, γεμισμένη με ασυμπιεστο υγρό, όταν αυτή υπόκειται σε κάθετες επιταχύνσεις. Η λύση, η οποία δίνει τις ιδιομορφές, τις ιδιοσυχνότητες και τους παράγοντες που συμμετέχουν στην φόρτιση, χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα και προκαλούνται από την υδροδυναμική πίεση του υγρού.

Ο Veletsos [38], δημοσίευσε μία απλή, πρακτική διαδικασία για την εκτίμηση της δυναμικής αντίδρασης μιας όρθιας κυλινδρικής δεξαμενής αποθήκευση υγρού, κυκλικής διατομής, λαμβάνοντας υπόψη και την ελαστικότητα του μέσου στήριξης.

Στη δημοσίευση που παρουσίασε ο Isaacson [39], περιγράφει το φαινόμενο του κυματισμού κάποιου υγρού, όταν αυτό βρίσκεται σε κυλινδρική δεξαμενή, κυκλικής διατομής και ασκείται πάνω της αρμονική και μη αρμονική διέγερση. Αρχικά, το πρόβλημα οριακών τιμών για ατριβές υγρό και αρμονική διέγερση λύνεται με την υπόθεση ότι υπάρχει γραμμική δυναμική ροή.

Ο Rammerstorfer [40], παρουσίασε μεθόδους, όπως αυτές διατυπώθηκαν από άλλους συγγραφείς. Αυτές είχαν σκοπό να λύσουν το πρόβλημα που προκαλείται σε δεξαμενή που περιέχει υγρό, όταν επιδρά σ' αυτή σεισμική φόρτιση. Έγινε διαχωρισμός μεταξύ αγκιστρωμένων και μη αγκιστρωμένων δεξαμενών.

Ο Gupta [41], στη συγκεκριμένη δημοσίευση παρουσίασε την επίδραση που έχουν τα ευλύγιστα τοιχώματα της δεξαμενής στην δυναμική απόκριση του υγρού. Ακόμη, η έκθεση αυτή έλαβε υπόψη τόσο τις χαμηλές συχνότητες (liquid sloshing mode), όσο και τις υψηλές συχνότητες (tank bulging mode).

Ένα σύνολο σχεδιαστικών κανόνων έχει αναπτυχθεί, που επιτρέπει την λεπτομερή αξιολόγηση κυλινδρικών δεξαμενών, μεγάλης αποθήκευσης, οι οποίες δέχονται σεισμική

φόρτιση. Ο Adams [42], παρουσίασε εξισώσεις και κατάλληλους συντελεστές, που δημιουργήθηκαν για τον προσδιορισμό των τάσεων στα τοιχώματα των δεξαμενών, στην περιφέρεια και στην αξονική διεύθυνση, εξαιτίας της επίδρασης της ωστικής και επαγωγικής μάζας του υγρού.

Την ίδια χρονιά, ο Veletsos [43], παρουσίασε μία τροποποιημένη μέθοδο, για την εκτίμηση των ωστικών συνιστωσών στην κάθετη απόκριση, σε κυλινδρικές δεξαμενές αποθήκευσης υγρών, οι οποίες στηρίζονται σε άκαμπτα κυκλικά θεμέλια και τους ασκείται εξωτερική διέγερση στην οριζόντια κατεύθυνση και στη βάση τους. Οι επαγωγικές συνιστώσες δεν επηρεάζονται από την ευκαμπτότητα της δεξαμενής και τη θεμελίωσή της και μπορούν να υπολογιστούν θεωρώντας ότι τόσο η δεξαμενή όσο και το μέσο στήριξης είναι άκαμπτα. Κρίσιμες αποκρίσεις υπολογίζονται για αρμονικές και σεισμικές διεγέρσεις, για μεγάλο φάσμα αναλογιών δεξαμενών και στιβαρότητας θεμελίων και τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να αποσαφηνιστούν οι αλληλεπιδράσεις βάσης – κατασκευής και να εξακριβωθεί η αρτιότητα προηγούμενων πιο απλοϊκών μεθόδων.

Σε άλλη μελέτη που έγινε από τον Gupta [44], υπολογίστηκαν με πιο ακριβή μέθοδο τα ταλαντωτικά χαρακτηριστικά του κυματισμού, για κυλινδρική δεξαμενή με ευλύγιστα τοιχώματα και πακτωμένη στο έδαφος. Για την ταλάντωση του δοχείου χρησιμοποιήθηκε η ακριβής θεωρία του Flugge και η δυναμική πίεση στην ακτινική διεύθυνση, που δημιουργείται από τα κύματα της επιφάνειας, εξάγεται από το δυναμικό της ταχύτητας ϕ . Τα αποτελέσματα λαμβάνονται για διάφορες παραμέτρους και συγκρίνονται με αποτελέσματα άλλων μεθόδων που περιλαμβάνονται στην έκθεση. Προέκυψε ότι η μέθοδος Flugge είναι μια επιτυχής μέθοδος λύσης ανάλογων προβλημάτων. Επίσης, η ελαστικότητα των τοιχωμάτων και το βάθος του υγρού, επηρεάζουν την απόκριση του συστήματος σημαντικά και πρέπει να ληφθούν υπόψη στο σχεδιασμό του.

Στη συνέχεια, ο Veletsos [45], παρουσίασε μια εκτενή ανασκόπηση, η οποία αναφερόταν στην απόκριση που είχαν σε οριζόντια μετατόπιση του εδάφους, όρθιες κυλινδρικές δεξαμενές, κυκλικής διατομής με υγρό, αγκυρωμένες στο έδαφος. Στην ίδια εργασία, μελετήθηκαν οι επιδράσεις της ελαστικότητας του τοιχώματος της δεξαμενής, ενώ μελετήθηκε και η περίπτωση δεξαμενής που περιείχε βισκοελαστικό υλικό και έγινε η σύγκριση με δεξαμενή που περιείχε υγρό. Έμφαση, τέλος, δόθηκε στην ερμηνεία αριθμητικών λύσεων και στην επεξήγηση των θεμελιωδών μηχανισμών απόκρισης.

Το φαινόμενο του κυματισμού στην επιφάνεια υγρού μέσα σε όρθιες κυλινδρικές δεξαμενές, έχει ήδη μελετηθεί αρκετά. Αρκετοί κανόνες σχεδιασμού υπάρχουν για δεξαμενές αποθήκευσης υγρού, με σκοπό την αντοχή τους στην πίεση που θα ασκήσει το υγρό πάνω τους, σε περίπτωση σεισμικής διέγερσης. Στην αναφορά του αυτή ο Fischer [46], παρουσιάζει την αλληλεπίδραση του κυματισμού με την παραμόρφωση των τοιχωμάτων της δεξαμενής, κατά τη διάρκεια σεισμικής διέγερσης. Σε αντίθεση με άλλες εκθέσεις, στις οποίες είχε αγνοηθεί η επίδραση του κυματισμού στα τοιχώματα της δεξαμενής, σ' αυτή την εργασία η πιο σημαντική αλληλεπίδραση αφορά στην παραμόρφωση των τοιχωμάτων, η οποία προκαλείται από την επίδραση της ωστικής δύναμης. Εδώ παρουσιάζεται μια αναλυτική διαδικασία, που επιτρέπει τη λεπτομερή μελέτη της παραμόρφωσης των τοιχωμάτων, τόσο στην πίεση όσο και στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, για τυπικές ιδιομορφές παραμόρφωσης, όπως για ταλαντωτικές ιδιομορφές. Από τις πολύπλοκες μαθηματικές παραγώγους, χρησιμοποιείται μια απλή μορφή, η οποία δίνει τη δυνατότητα στους μηχανικούς να μαντέψουν γρήγορα το μέγεθος της παραμόρφωσης των τοιχωμάτων από την επαγωγική πίεση λόγω του κυματισμού και να αποφασίσουν αν η υπόθεση άκαμπτης δεξαμενής είναι σωστή.

Άλλη μελέτη που πραγματοποιήθηκε και αφορούσε στις κυλινδρικές δεξαμενές έγινε από τον Hamdan [47]. Η έκθεση αυτή παρουσιάζει μία ανασκόπηση στη συμπεριφορά και τη

σχεδίαση κυλινδρικών δεξαμενών αποθήκευσης υγρών, όταν σ' αυτές επιδρά σεισμική δόνηση. Εδώ παρουσιάζονται παρατηρήσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια παλιών σεισμών και οι διαπιστώσεις αυτές χρησιμοποιούνται μαζί με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και άλλων δημοσιευμένων πειραματικών αποτελεσμάτων, για εκτίμηση της ακρίβειας πρόσφατων σχεδιασμών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο παράρτημα Α του Ευροκόδικα 8 (Eurocode 8 – Earthquake Resistant Design Of Structures), Part 4: Tanks, Silos and Pipelines. Τα διάφορα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν στην εργασία αυτή περιλαμβάνουν και αυτό του κυματισμού και απαιτούν ανοικτή επιφάνεια, βάση διάτμησης και ροπή ανατροπής στη βάση της δεξαμενής και στις δυνάμεις στήριξής της.

Η εργασία που πραγματοποιήθηκε από τον Cho [48], αναφέρεται σε αριθμητικές μεθόδους για σεισμικές αναλύσεις όπως και για τις ελεύθερες ταλαντώσεις δεξαμενών αποθήκευσης υγρών. Στην αριθμητική διατύπωση του ακριβή πίνακα πρόσθετης μάζας, για κατασκευή οικοδομικού δυναμικού συστήματος, η αυξομείωση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού λαμβάνεται υπόψη.

Η ελεύθερη ταλάντωση ελαστικής λεπτής πλάκας, η οποία τοποθετήθηκε σε κυκλική οπή και συνδέθηκε ελαστικά με επίπεδο πάτο κυλινδρικής δεξαμενής, κυκλικής διατομής, με υγρό ελεύθερης επιφάνειας, μελετήθηκε από τον Cheung [49]. Το υγρό θεωρήθηκε ασυμπιεστο, αστρόβιλο και ατριβές. Η επίδραση του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας λαμβάνεται επίσης υπόψη. Η αναλυτική λύση για το δυναμικό της ταχύτητας υπολογίζεται από τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών. Μέρος των αγνώστων συντελεστών στο δυναμικό της ταχύτητας υπολογίζονται από τις εκφράσεις των Fourier – Bessel στην εξίσωση της επιφάνειας του υγρού – πλάκας, με τη μορφή ολοκληρωμάτων, τα οποία σχετίζονται με τη δυναμική απόκλιση από την πλάκα. Ακόμη, εφαρμόζεται η μέθοδος Galerkin, ώστε να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες από την αρχική εξίσωση της ταλάντωσης της πλάκας και από την εξίσωση στην ελεύθερη επιφάνεια, υπό την επίδραση υδροδυναμικών πιέσεων.

Σε εργασία που πραγματοποιήθηκε από τον Nachtigall [50], παρουσιάστηκε ένα νέο μοντέλο υπολογισμού των βασικών συχνοτήτων του συστήματος δεξαμενής – υγρού, όπου χρησιμοποιήθηκε κυλινδρική δεξαμενή, κυκλικής διατομής. Έδειξε ότι αυτές οι συχνότητες ταιριάζουν πολύ καλά με τις συχνότητες του σεισμού, οι οποίες συμβαίνουν για μέγιστες επιταχύνσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

3 Πρόβλημα Ιδιοτιμών

3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Το πρόβλημα του κυματισμού, αποτελεί ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο περιγράφει την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ρευστού στο εσωτερικό κλειστής δεξαμενής. Μαθηματικά το πρόβλημα έγκειται στον υπολογισμό των ιδιοτιμών λ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις,

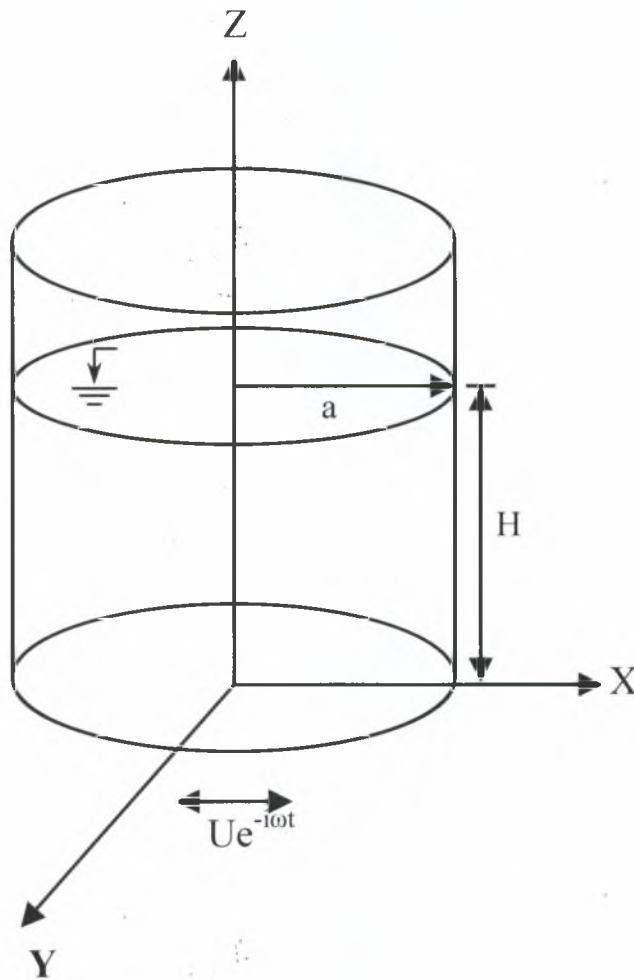
$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0 \quad , \quad G \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \lambda\phi \quad , \quad \partial_1 G \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad , \quad \partial_2 G \quad (3.1.3)$$

όπου ϕ είναι το δυναμικό της ταχύτητας ενός ασυμπίεστου ρευστού σε μία δεξαμενή G με ελεύθερη επιφάνεια $\partial_1 G$ και τοιχώματα $\partial_2 G$. Οι ιδιοτιμές λ σχετίζονται με τις συχνότητες του κυματισμού ω σύμφωνα με τη σχέση $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και οι ιδιομορφές του προβλήματος του κυματισμού. Θεωρούμε κατακόρυφη κυλινδρική δεξαμενή ακτίνας r , στην οποία το ύψος του υγρού είναι H , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1. Στους υπολογισμούς που ακολουθούν η ακτίνα r της δεξαμενής είναι $r = 7.5\text{m}$, ενώ το ύψος της επιφάνειας του υγρού είναι $H = 8\text{m}$. Επιπλέον, γίνονται οι υποθέσεις ότι το υγρό είναι ασυμπίεστο με στρωτή ροή και με αμελητέα επιφανειακή τάση, ενώ η κίνησή του περιγράφεται σε δύο διαστάσεις. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις, η ταχύτητα του υγρού μπορεί να εκφραστεί με το δυναμικό της ταχύτητας $\phi(r, \theta, z)$.



Σχήμα 3.1: Γραφική απεικόνιση κυλινδρικής γεωμετρίας.

3.2 Επίλυση του προβλήματος (Ιδιοτιμές και ιδιομορφές)

Η συνάρτηση $\phi(r, \theta, z)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Η εξίσωση που περιγράφει το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η εξής :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2.1)$$

με τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

στον πυθμένα της δεξαμενής

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.2.2)$$

στα τοιχώματα τις δεξαμενής

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad r = \alpha, \quad 0 < z < H, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.2.3)$$

στην επιφάνεια του ρευστού

$$-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = H, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.2.4)$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος γίνεται με τη χρήση της μεθόδου διαχωρισμού των μεταβλητών. Θέτοντας $\phi(r, \theta, z) = R(r)T(\theta)Z(z)$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.2.1), προκύπτουν οι συνήθειες διαφορικές εξισώσεις που ακολουθούν.

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} + m^2 T = 0 \Rightarrow T(\theta) = A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta) \quad (3.2.5)$$

$$\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2 \quad (3.2.6)$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών στην εξίσωση (3.2.6), προκύπτουν και οι παρακάτω συνήθειες διαφορικές εξισώσεις.

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k_n^2 Z = 0 \Rightarrow Z(z) = B_1 \sinh(k_n z) + B_2 \cosh(k_n z) \quad (3.2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} = -k_n^2 \Rightarrow R(r) = D_{1m} J_m(k_n r) + D_{2m} Y_m(k_n r) \quad (3.2.8)$$

Επειδή το $Y_m(k_n r)$ γίνεται άπειρο για $r = 0$, πρέπει $D_{2m} = 0$. Επομένως η λύση παίρνει τελικά τη μορφή

$$R_k(r) = D_m J_m(k_n r) \quad (3.2.9)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα της δεξαμενής (3.2.3), προκύπτει

$$J'_m(k_n a) = 0 \quad (3.2.10)$$

όπου $J'_m(\cdot)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης Bessel m-τάξης.

Πίνακας 3.1: Υπολογισμός του ορίσματος της συνάρτησης Bessel.

Τάξη της Bessel	Όρισμα της Bessel				
	$k_1 a$	$k_2 a$	$k_3 a$	$k_4 a$	$k_5 a$
1	1.841	5.331	8.536	11.706	14.864
2	3.054	6.706	9.969	13.170	16.347
3	4.201	8.015	11.346	14.586	17.788
4	5.317	9.282	12.682	15.964	19.196
5	6.416	10.519	13.987	17.313	20.575

Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη (3.2.2), προκύπτει η λύση της εξίσωσης (3.2.7).

$$Z_k(z) = B_k \cosh(k_n z) \quad (3.2.11)$$

Επομένως, οι γενικές λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών δίδονται από τις σχέσεις

$$\phi_{mn}(r, \theta, z) = (A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)) B_k \cosh(k_n z) D_m J_m(k_n r) \quad (3.2.12)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.2.4), που ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής προκύπτουν οι ιδιοτιμές του προβλήματος.

$$\omega_{mn}^2 = g k_n \tanh(k_n H) \quad (3.2.13)$$

όπου ο δείκτης m είναι η τάξη της συνάρτησης Bessel.

Οι ιδιοτιμές και οι ιδιομορφές του προβλήματος βρίσκονται στο κεφάλαιο 6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο**4 Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών****4.1 Διατύπωση του προβλήματος**

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ένα αναλυτικό μοντέλο του κυματισμού ενός υγρού σε μία άκαμπτη κυλινδρική δεξαμενή, όταν σ' αυτήν ασκείται εξωτερική αρμονική διέγερση

$$X = X_0 e^{-i\omega t}, U = U_0 e^{-i\omega t} \text{ και } U = X \quad (4.1.1)$$

Θεωρούμε κατακόρυφη κυλινδρική δεξαμενή ακτίνας r όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1. Επιπλέον, γίνονται οι υποθέσεις ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται σε ύψος H , το υγρό είναι ασυμπίεστο με στρωτή ροή και με αμελητέα επιφανειακή τάση, ενώ η κίνησή του περιγράφεται σε δύο διαστάσεις και η δεξαμενή είναι άκαμπτη. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω υποθέσεις, η ταχύτητα του υγρού μπορεί να απεικονισθεί με το διάνυσμα του δυναμικού της ταχύτητας $\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi(r, \theta, z) e^{-i\omega t}$. Η συνάρτηση $\Phi(r, \theta, z)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.2)$$

με συνοριακές συνθήκες :

στον πυθμένα της δεξαμενής

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.1.3)$$

στο τοίχωμα της δεξαμενής

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta, \quad r = a, \quad 0 < z < H, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.1.4)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής

$$-\omega^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = H, \quad 0 < r < a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.1.5)$$

Το παραπάνω συνολικό πρόβλημα χωρίζεται σε δύο υποπροβλήματα, στο πρόβλημα ωστικής κίνησης και στο πρόβλημα της επαγωγικής κίνησης [46]. Το δυναμικό της ταχύτητας μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\Phi(r, \theta, z) = f(r, \theta, z) + \phi(r, \theta, z) \quad (4.1.6)$$

Η $f(r, \theta, z)$ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση της ωστικής κίνησης, ενώ η $\phi(r, \theta, z)$ τη συνάρτηση της επαγωγικής κίνησης.

4.2 Επίλυση του προβλήματος ωστικής κίνησης

Λύνουμε την εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

με συνοριακές συνθήκες :

στον πυθμένα της δεξαμενής

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.2.2)$$

στο τοίχωμα της δεξαμενής

$$\frac{\partial f}{\partial r} = U \cos \theta, \quad r = \alpha, \quad 0 < z < H, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.2.3)$$

στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής

$$f(r, \theta, z) = 0, \quad z = H, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.2.4)$$

Θέτουμε $f(r, \theta, z) = R(r)T(\theta)Z(z)$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4.2.1) και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διαχωριζομένων μεταβλητών προκύπτουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} + n^2 T = 0 \Rightarrow T(\theta) = A_1 \sin(n\theta) + A_2 \cos(n\theta) \quad (4.2.5)$$

και

$$\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2 \quad (4.2.6)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των διαχωριζομένων μεταβλητών και στην εξίσωση (4.2.6), προκύπτουν οι παρακάτω συνήθειες διαφορικές εξισώσεις.

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_m^2 Z = 0 \Rightarrow Z(z) = B_1 \sin(k_m z) + B_2 \cos(k_m z) \quad (4.2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} = k_m^2 \Rightarrow R(r) = D_{1n} I_n(k_m r) + D_{2n} K_n(k_m r) \quad (4.2.8)$$

Η εξίσωση (4.2.8) είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel, για την οποία πρέπει να ισχύει $D_{2n} = 0$, αφού στο $r = 0$ το $K_n(k_m r)$ γίνεται άπειρο. Επομένως η εξίσωση (4.2.8) παίρνει τη μορφή:

$$R(r) = D_n I_n(k_m r) \quad (4.2.9)$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (4.2.2) και (4.2.4) στην εξίσωση (4.2.7), προκύπτει:

$$Z_k(z) = B_k \cos(k_m z) \quad (4.2.10)$$

$$k_m = \frac{(2m-1)\pi}{2H} \quad (4.2.11)$$

Από την συνοριακή συνθήκη (4.2.3) προκύπτει :

$$\sum_m \sum_n (A_1 \sin(n\theta) + A_2 \cos(n\theta)) B_k \cos\left(\frac{2m-1}{2H} \pi z\right) \frac{2m-1}{2H} \pi D_n I_n'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right) = U \cos \theta$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση και να ισχύει η ισότητα πρέπει: $n = 1$ και $A_1 = 0$.

Αντικαθιστώντας προκύπτει

$$\sum_m C_m \left(\frac{2m-1}{2H} \pi\right) \cos\left(\frac{2m-1}{2H} \pi z\right) I_1'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right) = U \quad (4.2.12)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\cos\left(\frac{2n-1}{2H} \pi z\right)$ και ολοκληρώνουμε από 0 έως H.

$$\int_0^H C_m \left(\frac{2m-1}{2H} \pi \right) I_1' \left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha \right) \cos \left(\frac{2n-1}{2H} \pi z \right) \cos \left(\frac{2m-1}{2H} \pi z \right) dz = U \int_0^H \cos \left(\frac{2n-1}{2H} \pi z \right) dz \Rightarrow$$

Από τις σχέσεις ορθογωνιότητας γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^H \cos \left(\frac{2n-1}{2H} \pi z \right) \cos \left(\frac{2m-1}{2H} \pi z \right) dz = \frac{H}{2} \quad (4.2.13)$$

$$\int_0^H \cos \left(\frac{2n-1}{2H} \pi z \right) dz = \frac{2H}{(2n-1)\pi} \sin \left((2n-1) \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2.14)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.1.13) και (4.2.14) στην (4.2.12) προκύπτει ο συντελεστής C_n

$$C_n = \frac{8UH}{[(2m-1)\pi]^2} \frac{\sin \left(\frac{2m-1}{2} \pi \right)}{I_1' \left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha \right)} \quad (4.2.15)$$

Η τελική λύση του προβλήματος της ομοιόμορφης κίνησης είναι :

$$f(r, \theta, z) = \sum_n \frac{8UH}{[(2m-1)\pi]^2} (-1)^{n+1} \cos \theta \frac{I_1 \left(\frac{2m-1}{2H} \pi r \right)}{I_1' \left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha \right)} \cos \left(\frac{2m-1}{2H} \pi z \right) \quad (4.2.16)$$

4.3 Επίλυση του επαγωγικού προβλήματος

Στη συνέχεια επιλύουμε το πρόβλημα της επαγωγικής κίνησης. Η εξίσωση που περιγράφει το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η εξής :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

με τις ακόλουθες οριακές συνθήκες:

στον πυθμένα της δεξαμενής

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.3.2)$$

στα τοιχώματα τις δεξαμενής

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad r = \alpha, \quad 0 < z < H, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.3.3)$$

στην επιφάνεια του ρευστού

$$-\omega^2 \phi + g \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0, \quad z = H, \quad 0 < r < \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.3.4)$$

Η συνθήκη (4.3.4), συνδέει το επαγωγικό πρόβλημα με το προηγούμενο πρόβλημα της ωστικής κίνησης.

Η λύση του παραπάνω προβλήματος γίνεται με τη χρήση της μεθόδου διαχωρισμού των μεταβλητών. Θέτοντας $\phi(r, \theta, z) = R(r)T(\theta)Z(z)$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.3.1), προκύπτουν οι συνήθειες διαφορικές εξισώσεις που ακολουθούν.

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} + m^2 T = 0 \Rightarrow T(\theta) = A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta) \quad (4.3.5)$$

$$\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = m^2 \quad (4.3.6)$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών στην εξίσωση (4.3.6), προκύπτουν και οι παρακάτω συνήθειες διαφορικές εξισώσεις.

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k_n^2 Z = 0 \Rightarrow Z(z) = B_1 \sinh(k_n z) + B_2 \cosh(k_n z) \quad (4.3.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2} = -k_n^2 \Rightarrow R(r) = D_{1m} J_m(k_n r) + D_{2m} Y_m(k_n r) \quad (4.3.8)$$

Επειδή το $Y_m(k_n r)$ γίνεται άπειρο για $r = 0$, πρέπει $D_{2m} = 0$. Επομένως η λύση παίρνει τελικά τη μορφή

$$R_k(r) = D_m J_m(k_n r) \quad (4.3.9)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνοριακή συνθήκη στο τοίχωμα της δεξαμενής (4.3.3), προκύπτουν οι τιμές k_n του προβλήματος από το όρισμα της εξίσωσης Bessel.

$$J'_m(k_n a) = 0 \quad (4.3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη (4.3.2), προκύπτει η λύση της εξίσωσης (4.3.7).

$$Z_k(z) = B_k \cosh(k_n z) \quad (4.3.11)$$

Επομένως η συνολική λύση είναι

$$\phi_{mk}(r, \theta, z) = (A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)) B_k \cosh(k_n z) D_m J_m(k_n r) \quad (4.3.12)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (4.3.4), που ισχύει στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής και λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση (4.2.16) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 ((A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)) B_k \cosh(k_n H) D_m J_m(k_n r)) \\ & + g ((A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)) B_k \sinh(k_n H) k_n D_m J_m(k_n r)) = \\ & g \sum_l \frac{4U}{\Gamma_l \left(\frac{2l-1}{2H} \pi a \right)} \cos \theta I_1 \left(\frac{2l-1}{2H} \pi r \right) \frac{1}{(2l-1)\pi} \end{aligned}$$

Πρέπει $A_1 = 0$ και $m = 1$, ώστε να ισχύει η παραπάνω ισότητα.

$$\left(-\omega^2 \cosh(k_n H) + g k_n \sinh(k_n H) \right) C_n J_1(k_n r) = g \sum_l \frac{4U}{\Gamma_l \left(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)} \frac{1}{(2l-1)\pi} I_1 \left((2l-1) \frac{\pi r}{2 H} \right)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $r J_1(k_n r)$ και εφαρμόζουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 \cosh(k_n H) + g k_n \sinh(k_n H) \right) C_n \int_0^a r J_1(k_n r) J_1(k_n r) dr = \\ & = g \sum_l \frac{4U}{\Gamma_l \left(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)} \frac{1}{(2l-1)\pi} \int_0^a r J_1(k_n r) I_1 \left((2l-1) \frac{\pi r}{2 H} \right) dr \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

$$\int_0^a r J_1(k_n r) J_1(k_n r) dr = \frac{k_n^2 a^2 - 1}{2k_n^2} J_1^2(k_n a), \quad m = n \quad (4.3.14)$$

$$\int_0^1 \xi J_1(k_n \xi) I_1(\lambda \xi) d\xi = \frac{\lambda}{k_n^2 + \lambda^2} J_1(k_n) \Gamma_1(\lambda) \quad (4.3.15)$$

$$\int_0^a J_1(k_n r') I_1(\lambda r') r' dr' = \frac{\lambda a}{k_n^2 + \lambda^2} J_1(k_n a) \Gamma_1(\lambda a) \quad (4.3.16\alpha)$$

όπου

$$\lambda = \frac{2l-1}{2H} \pi \quad (4.3.16\beta)$$

Αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα των σχέσεων (4.3.14) και (4.3.16α) στην εξίσωση (4.3.13)

και προκύπτει ο συντελεστής C_n

$$C_n = \frac{g \sum_l UaH \frac{2}{k_n^2 H^2 + \left(\frac{2l-1}{2} \pi\right)^2}}{\left[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)\right] \frac{k_n^2 \alpha^2 - 1}{2k_n^2} J_1(k_n \alpha)} \quad (4.3.17\alpha)$$

Ο όρος $\sum_l \frac{2}{k_n^2 H^2 + \left(\frac{2l-1}{2} \pi\right)^2}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\sum_l UaH \frac{2}{k_n^2 H^2 + \left(\frac{2l-1}{2} \pi\right)^2} \cong \frac{1}{k_n H} \tanh(k_n H)$$

Άρα ο συντελεστής C_n καταλήγει στην πιο απλοποιημένη μορφή

$$C_n = \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{\left[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)\right] (k_n^2 \alpha^2 - 1) J_1(k_n \alpha)} \quad (4.3.17\beta)$$

Επομένως η τελική λύση του υποπροβλήματος είναι

$$\phi_n(r, \theta, z) = C_n \cos(\theta) \cosh(k_n z) J_1(k_n r)$$

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_n \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{\left[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)\right] (k_n^2 \alpha^2 - 1) J_1(k_n \alpha)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos \theta \cosh(k_n z) \quad (4.3.18)$$

Διαιρώντας με το $\cosh(k_n H)$ η σχέση (4.3.18) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_n \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{\left[-\omega^2 + \omega_n^2\right] (k_n^2 \alpha^2 - 1) J_1(k_n \alpha)} \frac{J_1(k_n r) \cosh(k_n z)}{\cosh(k_n H)} \cos \theta \quad (4.3.19)$$

4.4 Πιέσεις, δυνάμεις και ροπές

Το φαινόμενο της κίνησης του ρευστού συνοδεύεται από υδροδυναμικές πιέσεις, οι οποίες υπολογίζονται από το δυναμικό με βάση την εξίσωση Bernoulli.

$$P(r, \theta, z, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.4.1)$$

Έχει προκύψει ότι η συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόβλημα της ωστικής κίνησης είναι η

$$f(r, \theta, z) = \sum_m \frac{8UH}{[(2m-1)\pi]^2} (-1)^{m+1} \cos \theta \frac{I_1\left(\frac{2m-1}{2H} \pi r\right)}{I_1'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right)} \cos\left(\frac{2m-1}{2H} \pi z\right) \quad (4.2.16)$$

ενώ η συνάρτηση που επιλύει το επαγωγικό πρόβλημα είναι η

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_n \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)](k_n^2 \alpha^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos \theta \cosh(k_n z) \quad (4.3.18)$$

και η συνολική συνάρτηση είναι το άθροισμα των (4.2.16) και (4.3.18)

Εισάγοντας το χρόνο στην (4.2.13) και στην (4.3.20), προκύπτει:

$$\tilde{f}(r, \theta, z, t) = \sum_m \frac{8UH}{[(2m-1)\pi]^2} (-1)^{m+1} \cos \theta \frac{I_1\left(\frac{2m-1}{2H} \pi r\right)}{I_1'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right)} \cos\left(\frac{2m-1}{2H} \pi z\right) e^{-i\omega t} \quad (4.4.2)$$

$$\tilde{\phi}(r, \theta, z, t) = \sum_n \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)](k_n^2 \alpha^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos \theta \cosh(k_n z) e^{-i\omega t} \quad (4.4.3)$$

Για να προκύψουν οι πιέσεις παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο τις σχέσεις (4.4.2) και (4.4.3).

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -i\omega \sum_m \frac{8UH}{[(2m-1)\pi]^2} (-1)^{m+1} \cos \theta \frac{I_1\left(\frac{2m-1}{2H} \pi r\right)}{I_1'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right)} \cos\left(\frac{2m-1}{2H} \pi z\right) e^{-i\omega t} \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -i\omega \sum_n \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)](k_n^2 \alpha^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos \theta \cosh(k_n z) e^{-i\omega t} \quad (4.4.5)$$

Το άθροισμα των (4.4.4) και (4.4.5) μας δίνει την παράγωγο της συνολικής συνάρτησης Φ .

$$P = -\rho \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = P_I + P_C$$

Επομένως :

$$P_I = -\rho \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \rho i \omega \sum_m \frac{8UH}{[(2m-1)\pi]^2} (-1)^{m+1} \cos \theta \frac{I_1\left(\frac{2m-1}{2H} \pi r\right)}{I_1'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right)} \cos\left(\frac{2m-1}{2H} \pi z\right) e^{-i\omega t} \quad (4.4.6)$$

$$P_C = -\rho \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \rho i \omega \sum_n \frac{2gUak_n \tanh(k_n H)}{[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)](k_n^2 \alpha^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos \theta \cosh(k_n z) e^{-i\omega t} \quad (4.4.7)$$

Για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις ολοκληρώνουμε τις σχέσεις (4.4.6) και (4.4.7)

$$F_I = \int_0^H \int_0^{2\pi} P_I a \cos \theta d\theta dz \quad (4.4.8)$$

$$F_C = \int_0^H \int_0^{2\pi} P_C a \cos \theta d\theta dz \quad (4.4.9)$$

Επομένως οι δυνάμεις υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$F_I = \rho i \omega \sum_m \frac{16\alpha UH^2}{(2m-1)^3 \pi^2} \frac{I_1\left(\frac{2m-1}{2H} \pi r\right)}{I_1'\left(\frac{2m-1}{2H} \pi \alpha\right)} e^{-i\omega t} \quad (4.4.10)$$

$$F_C = \rho i \omega \sum_n \frac{2gUa^2 \pi \tanh(k_n H)}{[-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)](k_n^2 \alpha^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos \theta \sinh(k_n H) e^{-i\omega t} \quad (4.4.11)$$

Η συνολική δύναμη είναι το άθροισμα των (4.4.10) και (4.4.11)

$$F_T = F_I + F_C \quad (4.4.12)$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται ο λόγος C_1 , ως το πηλίκο της δύναμης του επαγωγικού προβλήματος F_C προς τη δύναμη του ωστικού προβλήματος F_I και ο λόγος C_2 , ως το πηλίκο της συνολικής δύναμης του επαγωγικού προβλήματος και του ωστικού προβλήματος $F_S + F_I$ προς τη δύναμη της ομοιόμορφης κίνησης F_U .

$$C_1 = \frac{F_c}{F_t} \quad (4.4.13)$$

$$C_2 = \frac{F_c + F_t}{F_U} \quad (4.4.14)$$

$$\text{με } F_U = i\omega e^{-i\omega t} Um \quad (4.4.15)$$

και

$$m = \rho\pi r^2 H \quad (4.4.16)$$

Οι λόγοι (4.4.13) και (4.4.14) παριστάνονται γραφικά στο κεφάλαιο 6.

Τέλος, υπολογίζονται οι ροπές που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής.

$$M(r, \theta, t) = \rho i \omega e^{-i\omega t} \int_0^H z(f(r, \theta, z) + \phi(r, \theta, z)) dz \quad (4.4.17)$$

$$M(r, \theta, t) = \rho i \omega e^{-i\omega t} \left(\sum_m \frac{16UH^3 [\pi(2n-1)\cos(n\pi) + 2(\sin(n\pi)-1)]}{[(2m-1)\pi]^4} (-1)^{m+1} \cos\theta \frac{I_1\left(\frac{2m-1}{2H}\pi r\right)}{I_1\left(\frac{2m-1}{2H}\pi\alpha\right)} \right) \\ + \rho i \omega e^{-i\omega t} \left(\sum_n \frac{2gUa \tanh(k_n H)(1 - \cosh(k_n H) + Hk_n \sinh(k_n H))}{k_n [-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H)](k_n^2 \alpha^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n \alpha)} \cos\theta \right) \quad (4.4.18)$$

Το σημείο εφαρμογής της ροπής δίνεται από τη σχέση

$$\Sigma E = \frac{M(r, \theta, t)}{F_T(r, \theta, t)} \quad (4.4.19)$$

4.5 Εναλλακτική μεθοδολογία επίλυσης

Στη παρούσα εργασία για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία ωστικής / επαγωγικής κίνησης. Σύμφωνα με τη λύση αυτή, το συνολικό πρόβλημα του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας ενός υγρού διασπάται σε δύο υποπροβλήματα, στο πρόβλημα της ωστικής κίνησης και στο πρόβλημα της επαγωγικής κίνησης.

Η επίλυση του συνολικού προβλήματος έχει γίνει και με μια άλλη εναλλακτική μεθοδολογία, τη μεθοδολογία ομοιόμορφης κίνησης / πρόβλημα κυματισμού [39]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή το πρόβλημα πάλι διασπάται σε δύο υποπροβλήματα, η συνολική λύση των οποίων ταυτίζεται με τη συνολική λύση του προβλήματος με τη μέθοδο διαχωρισμού των ωστικής / επαγωγικής κίνησης.

Σύμφωνα με το διαχωρισμό II, η λύση διατυπώνεται ως εξής:

$$\Phi(r, \theta, z) = \varphi_s(r, \theta, z) + \varphi_v(r, \theta) \quad (4.5.1)$$

όπου

$$\varphi_v(r, \theta) = Ur \cos \theta \quad (4.5.2)$$

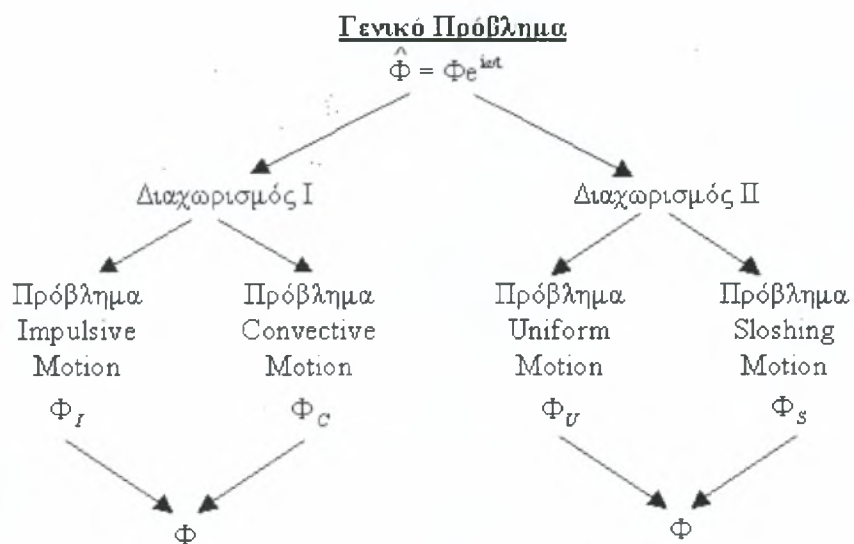
και

$$\varphi_s(r, \theta, z) = \sum_n \frac{2\omega^2 Ua}{(-\omega^2 \cosh(k_n H) + gk_n \sinh(k_n H))(k_n^2 a^2 - 1)} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n a)} \cosh(k_n z) \cos \theta \quad (4.5.3)$$

Οι τιμές k_n δίνονται από την παράγωγο της συνάρτησης Bessel πρώτης τάξης, δηλαδή

$$J_1'(k_n a) = 0 \quad (4.5.4)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια σχηματική απεικόνιση των δύο μεθόδων στο σχήμα 4.1, ενώ το γεγονός ότι και οι δύο λύσεις καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται από τους πίνακες 4.1 και 4.2.



Σχήμα 4.1: Σχηματική απεικόνιση των διαχωρισμών I και II.

Πίνακας 4.1: Διαδικασία σύγκλισης των λύσεων σύμφωνα με το διαχωρισμό I και II στο σημείο $r = 4m$ και $z = 4m$.

Σύγκριση λύσεων διαχωρισμού I και διαχωρισμού II για $r=4$ και $H=4$		
Διαχωρισμός I	Διαχωρισμός II	Άθροισμα όρων N
5.45225	5.49136	1
5.496	5.48525	2
5.48571	5.48506	3
5.48488	5.48507	4
5.48507	5.48507	5
5.48509	5.48507	6
5.48509	5.48507	7

Πίνακας 4.2: Διαδικασία σύγκλισης των λύσεων σύμφωνα με το διαχωρισμό I και II στο σημείο $r = 2m$ και $z = 2m$.

Σύγκριση λύσεων διαχωρισμού I και διαχωρισμού II για $r=2$ και $H=2$		
Διαχωρισμός I	Διαχωρισμός II	Άθροισμα όρων N
2.63139	2.60361	1
2.60166	2.60146	2
2.60142	2.60151	3
2.60152	2.60151	4
2.60151	2.60151	5
2.60151	2.60151	6
2.60151	2.60151	7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

5 Αριθμητική λύση με πεπερασμένα στοιχεία

5.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μία εναλλακτική υπολογιστική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις. Το πεδίο επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης διαιρείται σε υποπεδία που ονομάζονται στοιχεία. Στη συνέχεια διατυπώνεται μία προσεγγιστική λύση για κάθε στοιχείο. Τέλος, η ολική λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει συνδυάζοντας τις επιμέρους λύσεις κάθε στοιχείου, εξασφαλίζοντας τη συνέχεια της λύσης στα όρια κάθε στοιχείου.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μία συνοπτική περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η διατύπωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθεί μια γενικευμένη μεθοδολογία. Τα βασικά βήματα της μεθόδου είναι τα εξής:

- Ασθενής μορφή των εξισώσεων.

Αρχικά, επιλέγεται τυχαία αποδεκτή συνάρτηση, δηλαδή συνάρτηση που να ικανοποιεί τις βασικές ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Η συνάρτηση αυτή αντικαθίσταται στη διαφορική εξίσωση και στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και προκύπτει η ασθενής μορφή του προβλήματος.

- Διακριτοποίηση - Διατύπωση εξισώσεων

Το επόμενο βήμα στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διακριτοποίηση του χωρίου ορισμού του προβλήματος. Το πεδίο λύσης διασπάται σε υποπεδία που ονομάζονται στοιχεία

Στη συνέχεια γίνεται η διατύπωση εξισώσεων που να προσεγγίζουν τη λύση σε κάθε στοιχείο. Επιλέγονται κατάλληλες συναρτήσεις βάσης με άγνωστους συντελεστές και οι συντελεστές εκτιμώνται, έτσι ώστε η λύση να προσεγγίζεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Για το σκοπό αυτό εφαρμόζεται η μέθοδος Galerkin. Με την απαίτηση να ισχύει η ‘διακριτοποιημένη’ ασθενής μορφή καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για κάθε στοιχείο της μορφής $[k] \{u\} = \{F\}$, όπου $[k]$ είναι το γνωστό μητρώο συντελεστών, $\{u\}$ το διάνυσμα των αγνώστων στους κόμβους και $\{F\}$ το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα των εξωτερικών δυνάμεων ή διαταραχών που ασκούνται στους κόμβους.

- Τελικό σύστημα εξισώσεων

Έχοντας τις εξισώσεις κάθε στοιχείου, διατυπώνεται το τελικό σύστημα εξισώσεων για όλο το πεδίο ορισμού του προβλήματος. Το τελικό σύστημα έχει τη μορφή $[K] \{u'\} = \{F'\}$, όπου είναι το τελικό μητρώο συντελεστών και $\{u'\}$ και $\{F'\}$ τα διανύσματα των αγνώστων και των εξωτερικών δυνάμεων αντίστοιχα. Το σύμβολο «'» δηλώνει ότι τα διανύσματα $\{u'\}$ και $\{F'\}$ προκύπτουν από τη σύνθεση των διανυσμάτων $\{u\}$ και $\{F\}$ για κάθε στοιχείο.

- Οριακές συνθήκες

Το σύστημα $[K] \{u'\} = \{F'\}$ τροποποιείται λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

- Επίλυση

Η επίλυση του συστήματος και ο προσδιορισμός των αγνώστων ποσοτήτων γίνεται με μία τυπική μέθοδο επίλυσης γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων (π.χ. απαλοιφή Gauss).

- Επεξεργασία αποτελεσμάτων

Μετά την επίλυση του προβλήματος ακολουθεί η μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων.

5.2 Διατύπωση του προβλήματος

Δίδεται η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.2.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = Ue^{-i\omega t} \text{ στο } B_1(\alpha) \quad (5.2.2\alpha)$$

$$\phi = 0 \text{ στο } B_1(0) \quad (5.5.2\beta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_3 \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } B_2 \quad (5.2.4)$$

όπου το $B_1(\alpha)$ είναι το τοίχωμα της δεξαμενής, το $B_1(0)$ ο άξονας συμμετρίας της δεξαμενής, το B_2 είναι η ελεύθερη επιφάνεια και το B_3 ο πυθμένας της δεξαμενής.

Η συνάρτηση ϕ δίνεται από τη σχέση

$$\phi = \Phi(r, z)e^{-i\omega t} \cos \theta \quad (5.2.5)$$

η οποία αντικαθίσταται στη σχέση (5.2.1).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Στη συνέχεια προκύπτει η ασθενής μορφή του προβλήματος.

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB - \int_{\Omega} (\nabla \Phi)(\nabla \varphi^*) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \varphi^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \Phi \varphi^* d\Omega = 0 \\ \int_{B_1(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_{1(0)} + \int_{B_1(\alpha)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_{1(\alpha)} + \int_{B_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_2 + \int_{B_3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \varphi^* dB_3 - \\ \int_{\Omega} (\nabla \Phi)(\nabla \varphi^*) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \varphi^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \Phi \varphi^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

όπου οι συναρτήσεις Φ , και Φ , είναι συναρτήσεις βάσης και η φ^* αποδεκτή συνάρτηση.

Στο σύνορο B_2 ισχύει η σχέση (5.2.4), η οποία τροποποιείται στην παρακάτω μορφή

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi e^{-i\omega t} \quad (5.2.7a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} e^{-i\omega t} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} e^{-i\omega t} \quad (5.2.7b)$$

Αντικαθιστώνται οι σχέσεις (5.2.7a) και (5.2.7b) στην (5.2.4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \Phi \quad (5.2.8)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.2.2), (5.2.3) και (5.2.8), η σχέση (5.2.6) παίρνει τη μορφή:

$$\int_{B_1} U \varphi^* dB_1 + \int_{B_2} \frac{\omega^2}{g} \Phi \varphi^* dB_2 - \int_{\Omega} (\nabla \Phi)(\nabla \varphi^*) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \varphi^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \Phi \varphi^* d\Omega = 0 \quad (5.2.9)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Galerkin με συναρτήσεις

$$\Phi = \sum_{i=1}^N a_i \Psi_i(r, z) \quad (5.2.10)$$

$$\varphi^* = \sum_{i=1}^N \beta_i \Psi_i(r, z) \quad (5.2.11)$$

όπου οι συναρτήσεις $\Psi_i(r, z)$ είναι γνωστές συναρτήσεις βάσης, τα a_i είναι άγνωστα και τα β_i είναι τυχαία. Με την παραπάνω διακριτοποίηση και με την απαίτηση να ισχύει η ‘διακριτοποιημένη’ ασθενής μορφή για τυχαία β_i , καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} a_j = F_i \quad (5.2.12)$$

όπου το μητρώο ακαμψίας K_{ij} δίνεται από τη σχέση

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \Psi_i)(\nabla \Psi_j) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} \Psi_j d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \Psi_i \Psi_j d\Omega - \frac{\omega^2}{g} \int_{\Omega} \Psi_i \Psi_j dB_2 \quad (5.2.13)$$

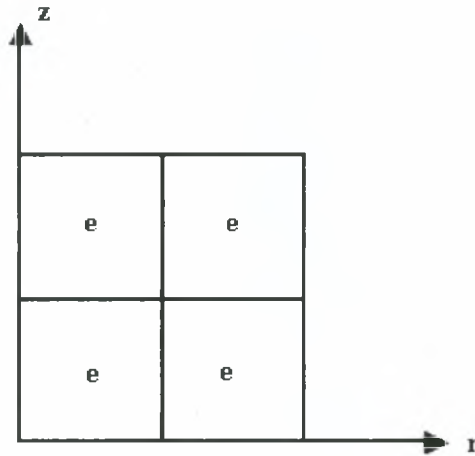
και το μητρώο των δυνάμεων F_i από τη σχέση:

$$F_i = U \int_{B_1} \Psi_i dB_1 \quad (5.2.14)$$

Το σύστημα σε μητρωϊκή μορφή γίνεται:

$$[K] \cdot \alpha = [F] \Rightarrow \alpha = [K]^{-1} [F]$$

Για την επιλογή των συναρτήσεων βάσης $\Psi_i(r, z)$ χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Θεωρούμε πλέγμα που αποτελείται από τετραγωνικά τετρακομβικά στοιχεία, και καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (r, z) τοποθετημένο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση στοιχείων στο καρτεσιανό σύστημα.

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος χρησιμοποιούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, n) (σχήμα 5.2), για το οποίο ισχύουν οι παρακάτω μετασχηματισμοί.

$$r(\xi, n) = r_a + \frac{h_r}{2}(1 + \xi) \Rightarrow \frac{dr}{d\xi} = \frac{h_r}{2}, \quad \frac{dr}{dn} = 0$$

$$z(\xi, n) = z_a + \frac{h_z}{2}(1 + n) \Rightarrow \frac{dz}{d\xi} = 0, \quad \frac{dz}{dn} = \frac{h_z}{2}$$

Άρα για κάθε στοιχείο ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$[K]^e = \int_{\Omega^e} [B]^T [B] d\Omega^e - \frac{\omega^2}{g} \int_{B_2^e} [N]^T [N] dB_2^e - \int_{\Omega^e} \frac{1}{r} \frac{\partial [N]^T}{\partial r} [N] d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{1}{r^2} [N]^T [N] d\Omega^e \quad (5.2.15)$$

Το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων για κάθε στοιχείο είναι της μορφής:

$$[F]^e = U \int_{B_1^e} [N]^T dB_1^e \quad (5.2.16)$$

όπου ο πίνακας $[N]$ αποτελείται από τις συναρτήσεις βάσεις N_1, N_2, N_3 και N_4 , δηλαδή

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

όπου

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (5.2.17)$$

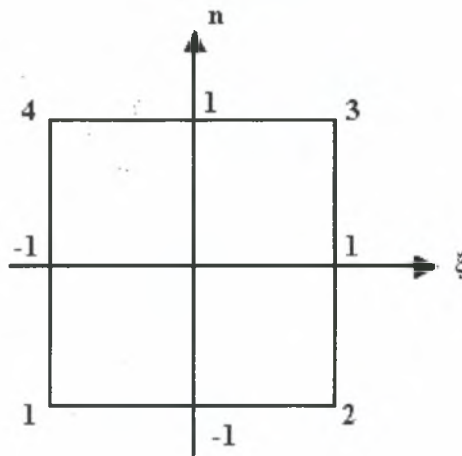
$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (5.2.18)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (5.2.19)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (5.2.20)$$

και ο πίνακας $[B]$ είναι της μορφής

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & N_{3,r} & N_{4,r} \\ N_{1,z} & N_{2,z} & N_{3,z} & N_{4,z} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 5.2 : Τοπικό σύστημα συντεταγμένων για κάθε στοιχείο.

Υπολογίζουμε τους πίνακες που προκύπτουν από τις σχέσεις (5.2.15) και (5.2.16) για το κάθε στοιχείο και στη συνέχεια τους συνθέτουμε, έτσι ώστε να προκύψουν το ολικό μητρώο των συντελεστών $[K]$ και το ολικό διάνυσμα των δυνάμεων $[F]$. Στη συνέχεια

επιλύουμε το σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση (5.2.12) και υπολογίζουμε τους άγνωστους συντελεστές.

Η σχέση (5.2.9) είναι μια γενική έκφραση και από αυτή προκύπτουν οι υπόλοιπες περιπτώσεις του προβλήματος του κυματισμού. Συγκεκριμένα, όταν μηδενίζεται ο πρώτος όρος της σχέσης (5.2.9), επιλύουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών, ενώ όταν μηδενίζεται ο δεύτερος όρος της σχέσης αυτής προκύπτει το πρόβλημα του κυματισμού.

5.3 Απλουστευμένη εφαρμογή τεσσάρων στοιχείων

Στην παράγραφο αυτή παρατίθεται ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου που περιγράφηκε παραπάνω. Έτσι, χρησιμοποιείται η μέθοδος Galerkin για την εφαρμογή στην οποία υπάρχουν τέσσερα στοιχεία.

Δίδεται η εξίσωση Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.3.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = Ue^{-i\omega t} \text{ στο } B_1(\alpha) \quad (5.3.2\alpha)$$

$$\phi = 0 \text{ στο } B_1(0) \quad (5.3.2\beta)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ στο } B_3 \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ στο } B_2 \quad (5.3.4)$$

όπου το $B_1(\alpha)$ είναι το τοίχωμα της δεξαμενής, το $B_1(0)$ ο άξονας συμμετρίας της δεξαμενής, το B_2 είναι η ελεύθερη επιφάνεια και το B_3 ο πυθμένας της δεξαμενής

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος εφαρμόζουμε αυτά που ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Καταλήγουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος,

διακριτοποιούμε και προκύπτει το γραμμικό σύστημα προς επίλυση. Ακόμη, χρησιμοποιούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, n) για το κάθε στοιχείο, στο οποίο η αρίθμηση των κόμβων ακολουθεί την αρίθμηση που φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Επιπλέον, για την μετάβαση από το ολικό (r, z) στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, n) ισχύουν οι παρακάτω μετασχηματισμοί:

$$r(\xi, n) = r_a + \frac{h_r}{2}(1 + \xi) \Rightarrow \frac{dr}{d\xi} = \frac{h_r}{2}, \quad \frac{dr}{dn} = 0$$

$$z(\xi, n) = z_a + \frac{h_z}{2}(1 + n) \Rightarrow \frac{dz}{d\xi} = 0, \quad \frac{dz}{dn} = \frac{h_z}{2}$$

Θεωρούμε το ορθογωνικό στοιχείο (i, j, k, l) με τοπική αρίθμηση $(1, 2, 3, 4)$ (Σχήμα 5.2) και τις γραμμικές συναρτήσεις που δίνονται από τις σχέσεις (5.2.17) – (5.2.20).

Παραγωγίζουμε τις παραπάνω συναρτήσεις ως προς ξ και n .

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial r} = \frac{1}{2h_r}(n-1)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial n} = \frac{\partial N_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial N_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial z} = \frac{1}{2h_z}(\xi-1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{\partial N_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial r} = \frac{1}{2h_r}(1-n)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial n} = \frac{\partial N_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial N_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial N_2}{\partial z} = \frac{1}{2h_z}(-1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial r} = \frac{1}{2h_r}(1+n)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial n} = \frac{\partial N_3}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial N_3}{\partial z} = \frac{1}{2h_z}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{\partial N_4}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_4}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial N_4}{\partial r} = \frac{1}{2h_r}(-n-1)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial n} = \frac{\partial N_4}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial N_4}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial N_4}{\partial z} = \frac{1}{2h_z} (1 - \xi)$$

Ορίζουμε το μητρώο

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & N_{3,r} & N_{4,r} \\ N_{1,z} & N_{2,z} & N_{3,z} & N_{4,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2h_r}(n-1) & \frac{1}{2h_r}(1-n) & \frac{1}{2h_r}(1+n) & \frac{1}{2h_r}(-1-n) \\ \frac{1}{2h_z}(\xi-1) & \frac{1}{2h_z}(-1-\xi) & \frac{1}{2h_z}(1+\xi) & \frac{1}{2h_z}(1-\xi) \end{bmatrix}$$

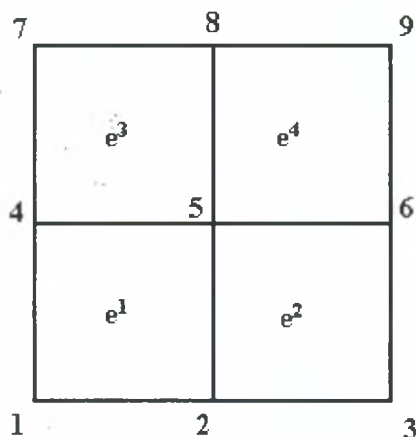
Και τον ανάστροφο του πίνακα $[B]$, $[B]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_r}(n-1) & \frac{1}{h_z}(\xi-1) \\ \frac{1}{h_r}(1-n) & \frac{1}{h_z}(-1-\xi) \\ \frac{1}{h_r}(1+n) & \frac{1}{h_z}(1+\xi) \\ \frac{1}{h_r}(-1-n) & \frac{1}{h_z}(1-\xi) \end{bmatrix}$

Ο πίνακας $[M]$ δίνεται από τη σχέση $[M]^T = \int_{\Omega'} [B]^T [B] d\Omega$

Υπολογίζουμε το εξής ολοκλήρωμα : $\int_{\Omega'} [B]^T [B] d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [B] \det \begin{bmatrix} \frac{h_r}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h_z}{2} \end{bmatrix} d\xi dn$

$$[B]^T [B] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{(n-1)^2}{h_r^2} + \frac{(\xi-1)^2}{h_z^2} & -\frac{(n-1)^2}{h_r^2} - \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} & \frac{(n^2-1)}{h_r^2} + \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} & -\frac{(n^2-1)}{h_r^2} - \frac{(\xi-1)^2}{h_z^2} \\ -\frac{(n-1)^2}{h_r^2} - \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} & \frac{(n-1)^2}{h_r^2} + \frac{(\xi+1)^2}{h_z^2} & -\frac{(n^2-1)}{h_r^2} - \frac{(\xi+1)^2}{h_z^2} & \frac{(n^2-1)}{h_r^2} + \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} \\ \frac{(n^2-1)}{h_r^2} + \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} & -\frac{(n^2-1)}{h_r^2} - \frac{(\xi+1)^2}{h_z^2} & \frac{(n+1)^2}{h_r^2} + \frac{(\xi+1)^2}{h_z^2} & -\frac{(n+1)^2}{h_r^2} - \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} \\ \frac{(n^2-1)}{h_r^2} + \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} & -\frac{(n^2-1)}{h_r^2} - \frac{(\xi-1)^2}{h_z^2} & -\frac{(n^2-1)}{h_r^2} - \frac{(\xi^2-1)}{h_z^2} & \frac{(n+1)^2}{h_r^2} + \frac{(\xi-1)^2}{h_z^2} \end{bmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας τον πίνακα $[B]^T [B]$ και πολλαπλασιάζοντας με την ορίζουσα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας, ενώ τα στοιχεία έχουν ως εξής (Σχήμα 5.3):



Σχήμα 5.3: Απεικόνιση στοιχείων και κόμβων.

Για το πρώτο στοιχείο το μητρώο είναι το παρακάτω, ενώ τα στοιχεία της κάθε γραμμής και της κάθε στήλης αντιστοιχούν στους κόμβους 1, 2, 5 και 4 αντίστοιχα.

$$[M]^1 = \frac{1}{48} h_r h_z \begin{bmatrix} \frac{16}{h_r^2} + \frac{16}{h_z^2} & -\frac{16}{h_r^2} + \frac{16}{h_z^2} & -\frac{8}{h_r^2} - \frac{8}{h_z^2} & \frac{8}{h_r^2} - \frac{16}{h_z^2} \\ -\frac{16}{h_r^2} + \frac{8}{h_z^2} & \frac{16}{h_r^2} + \frac{16}{h_z^2} & \frac{8}{h_r^2} - \frac{16}{h_z^2} & -\frac{8}{h_r^2} - \frac{8}{h_z^2} \\ -\frac{8}{h_r^2} - \frac{8}{h_z^2} & \frac{8}{h_r^2} - \frac{16}{h_z^2} & \frac{16}{h_r^2} + \frac{16}{h_z^2} & -\frac{16}{h_r^2} + \frac{8}{h_z^2} \\ \frac{8}{h_r^2} - \frac{16}{h_z^2} & -\frac{8}{h_r^2} - \frac{8}{h_z^2} & -\frac{16}{h_r^2} + \frac{8}{h_z^2} & \frac{16}{h_r^2} + \frac{16}{h_z^2} \end{bmatrix}$$

↓ 1
↓ 2
↓ 5
↓ 4

← 1
← 2
← 5
← 4



Ομοίως και για τα υπόλοιπα στοιχεία οι πίνακες είναι ίδιοι, υπάρχει όμως διαφορετική συμβολή κόμβων ανάλογα με το στοιχείο που βρισκόμαστε. Στη συνέχεια συνθέτουμε τον ολικό πίνακα, οποίος προκύπτει από τη σύνθεση των παραπάνω πινάκων και λαμβάνοντας υπόψη τους κόμβους των στοιχείων κάθε φορά. Έτσι, προκύπτει ο πίνακας 9x9 που φαίνεται παρακάτω.

Ακόμη δημιουργούμε για το κάθε στοιχείο τον πίνακα που προκύπτει από τους όρους

$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$ και $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$. Ο κάθε ένας από αυτούς τους όρους διαμορφώνει ένα πίνακα. Οι πίνακες

αυτοί προκύπτουν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$[A]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{h_z}{32}}{r_\alpha + \frac{h_r}{2}(1+\xi)} \begin{bmatrix} (-1+n)^2(-1+\xi) & -(-1+n)^2(1+\xi) & (-1+n^2)(1+\xi) & (1-n^2)(-1+\xi) \\ (-1+n)^2(1-\xi) & (-1+n)^2(1+\xi) & (1-n^2)(1+\xi) & (-1+n^2)(-1+\xi) \\ (-1+n^2)(-1+\xi) & (1-n^2)(1+\xi) & (1+n)^2(1+\xi) & (1+n)^2(1-\xi) \\ (1-n^2)(-1+\xi) & (-1+n^2)(1+\xi) & -(1+n)^2(1+\xi) & (1+n)^2(-1+\xi) \end{bmatrix} d\xi dn$$

$$[B]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{h_r h_z}{64}}{\left(r_\alpha + \frac{h_r}{2}(1+\xi)\right)^2} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2(1-n)^2 & (1-\xi^2)(1-n)^2 & (1-\xi^2)(1-n^2) & (1-\xi)^2(1-n^2) \\ (1-\xi^2)(1-n)^2 & (1+\xi)^2(1-n)^2 & (1+\xi)^2(1-n^2) & (1-\xi^2)(1-n^2) \\ (1-\xi^2)(1-n^2) & (1+\xi)^2(1-n^2) & (1+\xi)^2(1+n)^2 & (1-\xi^2)(1+n)^2 \\ (1-\xi)^2(1-n^2) & (1-\xi)^2(1-n^2) & (1-\xi^2)(1+n)^2 & (1-\xi)^2(1+n)^2 \end{bmatrix} d\xi dn$$

Ακολουθεί η σύνθεση των πινάκων [A] και [B], με τον ίδιο τρόπο που έγινε η σύνθεση του [M]. Έτσι, προκύπτουν άλλοι δύο 9x9 πίνακες που αφορούν σε όλα τα στοιχεία.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα $[N]^T [N]$, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων για $n = 1$, γιατί η συνοριακή συνθήκη ισχύει στο $y = H$.

$$[C]^e = \int_{-1}^1 [N]^T [N] dB_z^e = \int_{-1}^1 [N]^T [N] \frac{h_r}{2} d\xi = \frac{h_r}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο παραπάνω πίνακας υπολογίστηκε για το τρίτο στοιχείο, ομοίως προκύπτει και ο πίνακας του τέταρτου στοιχείου. Επομένως το ολικό μητρώο που προκύπτει από τη σύνθεσή τους έχει ως εξής :

$$[C] = \int_{B_2} [N]^T [N] dB_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_r}{3} & \frac{h_r}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_r}{6} & \frac{2h_r}{3} & \frac{h_r}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_r}{6} & \frac{h_r}{3} \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων σε κάθε στοιχείο ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Στοιχείο 1 (συμβολή κόμβων 1 και 4)

$$F_1 = - \int_{-1}^1 N_1(-1, n) U \frac{h_z}{2} dn = 0$$

$$F_4 = - \int_{-1}^1 N_4(-1, n) U \frac{h_z}{2} dn = 0$$

Στοιχείο 2 (συμβολή κόμβων 3 και 6)

$$F_3 = \int_{-1}^1 N_3(1, n) U \frac{h_z}{2} dn = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} 2(1-n) U \frac{h_z}{2} dn = \frac{1}{2} U h_z$$

$$F_6 = \int_{-1}^1 N_6(1, n) U \frac{h_z}{2} dn = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} 2(1+n) U \frac{h_z}{2} dn = \frac{1}{2} U h_z$$

Στοιχείο 3 (συμβολή κόμβων 4 και 7)

$$F_4 = - \int_{-1}^1 N_4(-1, n) U \frac{h_z}{2} dn = 0$$

$$F_7 = - \int_{-1}^1 N_7(-1, n) U \frac{h_z}{2} dn = 0$$

Στοιχείο 4(συμβολή κόμβων 6 και 9)

$$F_6 = \int_{-1}^1 N_6(1,n)U \frac{h_z}{2} dn = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} 2(1-n)U \frac{h_z}{2} dn = \frac{1}{2} U h_z$$

$$F_9 = \int_{-1}^1 N_9(1,n)U \frac{h_z}{2} dn = - \int_{-1}^1 \frac{1}{4} 2(1+n)U \frac{h_z}{2} dn = \frac{1}{2} U h_z$$

Το συνολικό μητρώο του $[F]$ που προκύπτει από τη σύνθεση των παραπάνω $[F]$ που υπολογίστηκαν είναι :

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} U h_z & 0 & 0 & U h_z & 0 & 0 & \frac{1}{2} U h_z \end{bmatrix}^T$$

Τέλος, λύνουμε το σύστημα, $[K] \cdot a = [F] \Rightarrow a = [K]^{-1} \cdot [F]$, όπου ο πίνακας K αποτελείται από τους πίνακες $[A]$, $[B]$, $[C]$ και $[M]$, δηλαδή $[K] = [M] - [A] + [B] - [C]$.

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα και θέτοντας $U = 1m/sec, h_r = 3.75m, h_z = 4m$, και

$\theta = 0^\circ$, προκύπτει η παρακάτω λύση :

- 1 0.00000
- 2 7.00343
- 3 11.46110
- 4 0.00000
- 5 7.79944
- 6 12.49275
- 7 0.00000
- 8 10.68772
- 9 16.56903

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

6 Αποτελέσματα

6.1 Αποτελέσματα προβλήματος ιδιοτιμών

6.1.1 Αναλυτικά αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο 3 επιλύθηκε το πρόβλημα των ιδιοτιμών. Οι ιδιοτιμές αυτές, σύμφωνα πάντα με τη λύση που προηγήθηκε, δίνονται από τον τύπο

$$\omega_{mn}^2 = gk_n \tanh(k_n H) \quad (3.2.14)$$

όπου το m προσδιορίζει την τάξη της συνάρτησης Bessel και το n παίρνει διάφορες τιμές και τα k_n προσδιορίζονται από τη σχέση $J_m'(k_n a) = 0$. Οι ιδιοτιμές παρατίθενται στον πίνακα 6.1.

Στον πίνακα 6.2 φαίνεται ο λόγος $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$, όπως προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{\omega_{mn}^2}{g} = k_n \tanh(k_n H) \quad \text{για } m=1, 1 < n < 4 \text{ και } H = 8m. \text{ Στον πίνακα 6.3 φαίνονται οι}$$

ιδιοτιμές του προβλήματος για ακτίνα $r = 4m$ και $H = 8m$, στον πίνακα 6.4 οι ιδιοτιμές για $r = 15m$ και $H = 8m$, στον πίνακα 6.5 οι ιδιοτιμές για $r = 4m$ και $H = 4m$ και στον πίνακα 6.6 οι ιδιοτιμές για $r = 4m$ και $H = 2m$.

Από τη μελέτη των πινάκων 6.1, 6.3, 6.4, 6.5 και 6.6, παρατηρούμε ότι η μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μέσα στη δεξαμενή, έχει μικρή επίπτωση στις τιμές των ιδιοτιμών. Ειδικότερα, προκύπτει ότι αυξάνοντας το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού από $H = 2m$ σε $H = 4m$ μεταβάλλεται η πρώτη και η δεύτερη ιδιοτιμή, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν ανεπηρέαστες. Από ύψος $H = 4m$ σε ύψος $H = 8m$, επηρεάζεται μόνο η πρώτη ιδιοτιμή και οι υπόλοιπες παραμένουν αμετάβλητες. Αντίθετα,

διπλασιασμός της ακτίνας της δεξαμενής επιδρά σημαντικά σε όλες τις ιδιοτιμές του προβλήματος.

Για την εξαγωγή των ιδιοτιμών, χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο Mathematica, στο οποίο τοποθετήθηκαν οι αναλυτικές εκφράσεις του προβλήματος. Ο τρόπος εξαγωγής των ιδιοτιμών φαίνεται στο κεφάλαιο 9, στον αντίστοιχο επισυναπτόμενο αλγόριθμο.

Παρακάτω φαίνονται οι ιδιομορφές του προβλήματος, δηλαδή η γραφική απεικόνιση της ελεύθερης επιφάνειας σε μία και δύο διαστάσεις για συνδυασμό των m και n , όπως αυτές μεταβάλλονται με την ακτίνα r της κυλινδρικής δεξαμενής. Και εδώ οι ιδιομορφές προέκυψαν με χρήση του Mathematica.

Πίνακας 6.1: Ιδιοτιμές προβλήματος κυματισμού ω_{nm} για $1 < m, n < 4$, ακτίνα $r = 7.5m$ και $H = 8m$.

Ιδιοτιμές για ακτίνα $r=7.5m$ και $H=8m$				
$m \backslash \omega_n$	1	2	3	4
1	1.5216	2.6407	3.3414	3.9129
2	1.9957	2.9616	3.6111	4.1505
3	2.3438	3.2378	3.8523	4.3678
4	2.6372	3.4845	4.0728	4.5695

Πίνακας 6.2: Τιμές του λόγου $\frac{\omega^2}{g}$ για $m = 1, 1 < n < 4$ $r = 7.5m$ και $H = 8m$.

n	1	2	3	4
ω^2/g	0.236	0.711	1.138	1.561

Πίνακας 6.3: Ιδιοτιμές προβλήματος κυματισμού ω_{1n} για $1 < n < 5$, $r = 4m$ και $H = 8m$.

Ιδιοτιμές για ακτίνα $r=4m$ και $H=8m$					
$m \backslash \omega_n$	1	2	3	4	5
1	2.12362	3.61599	4.57551	5.35807	6.03763

Πίνακας 6.4: Ιδιοτιμές προβλήματος κυματισμού ω_{1n} για $1 < n < 5$, $r = 15m$ και $H = 8m$.

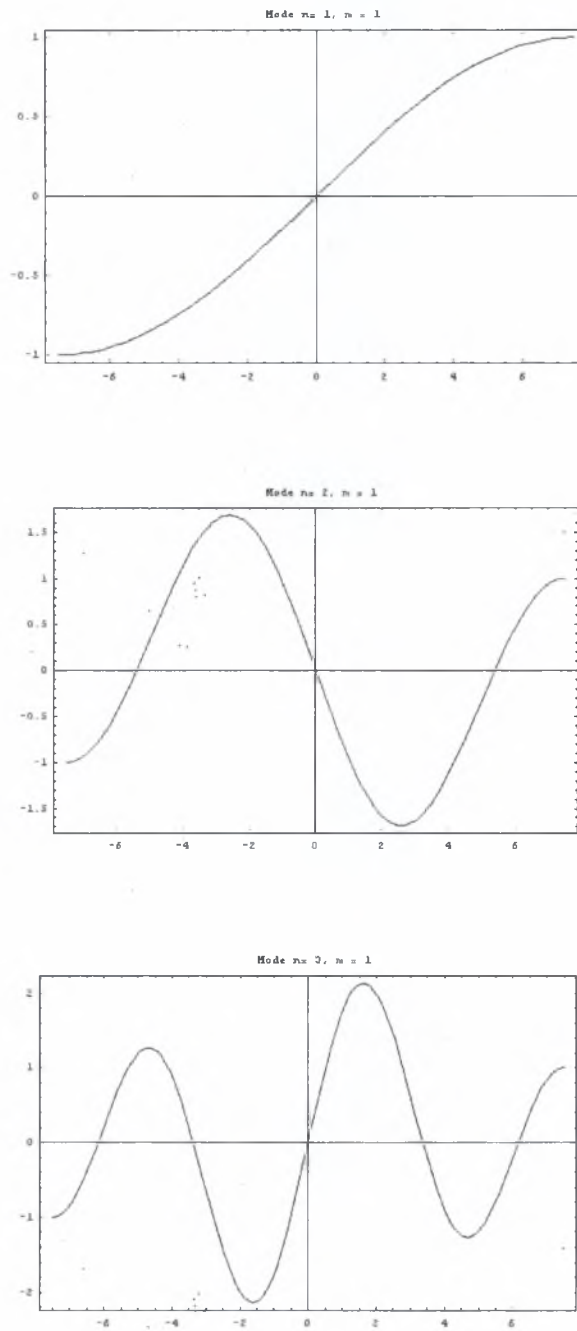
Ιδιοτιμές για ακτίνα $r=15m$ και $H=8m$					
$m \backslash \omega_n$	1	2	3	4	5
1	0.952792	1.86097	2.36252	2.76689	3.11782

Πίνακας 6.5: Ιδιοτιμές προβλήματος κυματισμού ω_{1n} για $1 < n < 5$, $r = 4m$ και $H = 4m$.

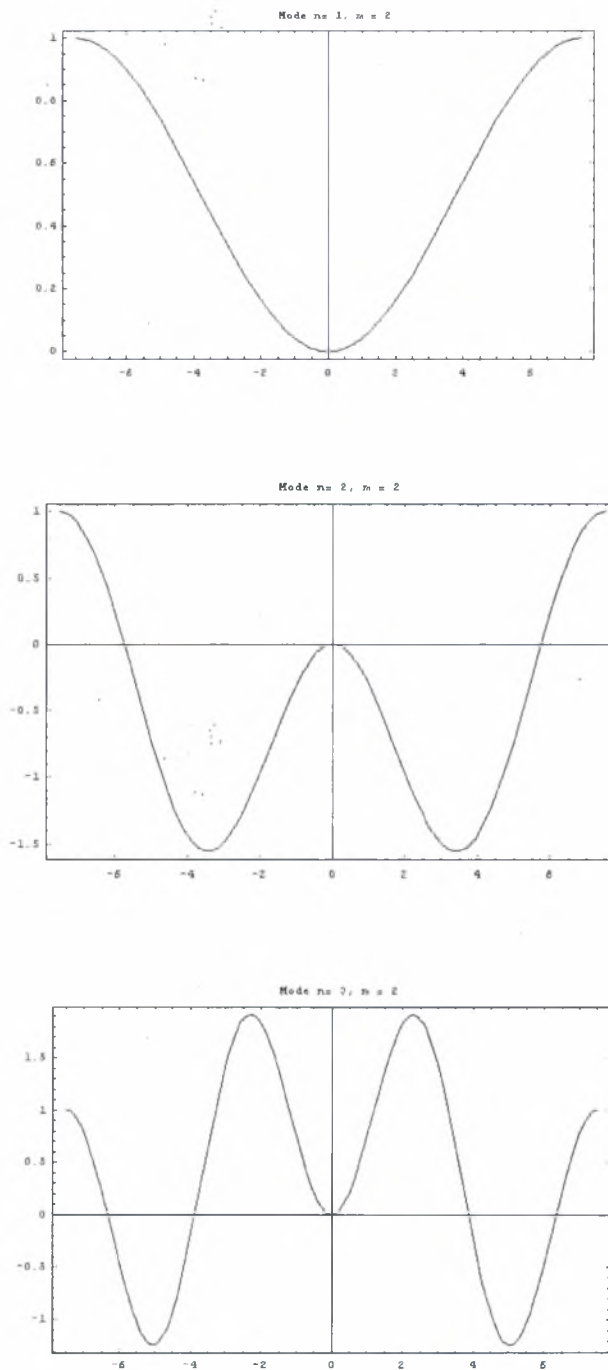
Ιδιοτιμές για ακτίνα $r=4m$ και $H=4m$					
$m \backslash \omega_n$	1	2	3	4	5
1	2.07215	3.6159	4.57551	5.35807	6.03763

Πίνακας 6.6: Ιδιοτιμές προβλήματος κυματισμού ω_{1n} για $1 < n < 5$, $r = 4m$ και $H = 2m$.

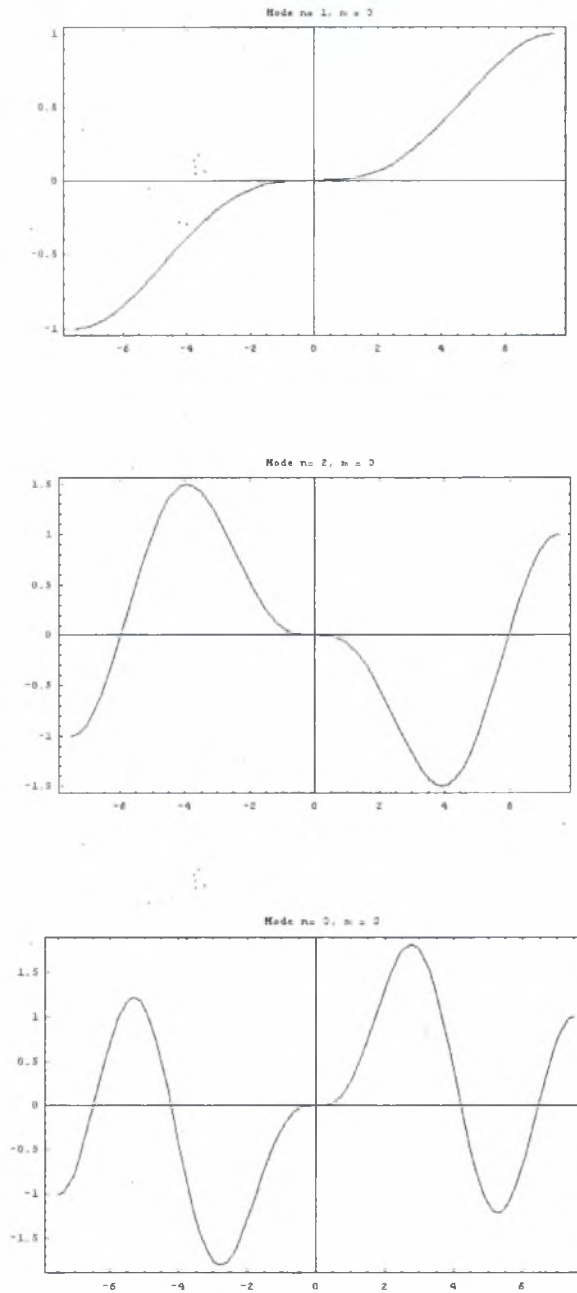
Ιδιοτιμές για ακτίνα $r=4m$ και $H=2m$					
$m \backslash \omega_n$	1	2	3	4	5
1	1.81081	3.59854	4.57462	5.35803	6.03763



Σχήμα 6.1: Ιδιομορφές σε μία διάσταση για $m = 1$, $n = 1, 2, 3$ και $0 \leq \theta \leq \pi$.

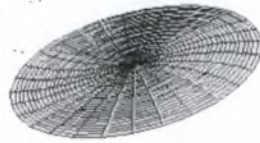


Σχήμα 6.2: Ιδιομορφές σε μία διάσταση για $m = 2$, $n = 1, 2, 3$ και $0 \leq \theta \leq \pi$.

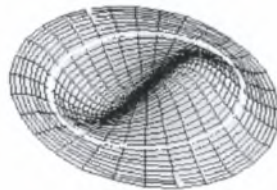


Σχήμα 6.3: Ιδιομορφές σε μία διάσταση για $m = 3$, $n = 1, 2, 3$ και $0 \leq \theta \leq \pi$.

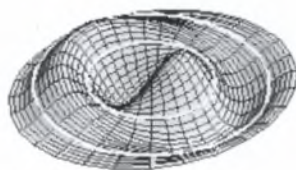
na 1, m=1 Phase= (0/4) π



na 2, m=1 Phase= (0/4) π



na 3, m=1 Phase= (0/4) π

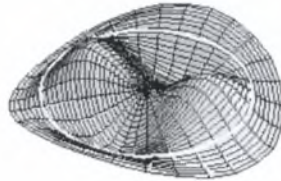


Σχήμα 6.4: Ιδιομορφές σε δύο διαστάσεις για $m = 1$, $n = 1, 2, 3$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

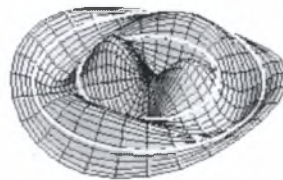
$n=1, m=2 \text{ Phase}=(0/4)\pi$



$n=2, m=2 \text{ Phase}=(0/4)\pi$

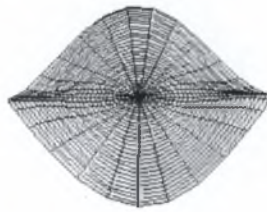


$n=3, m=2 \text{ Phase}=(0/4)\pi$

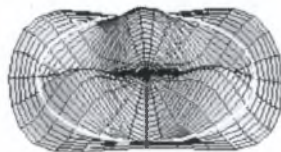


Σχήμα 6.5 : Ιδιομορφές σε δύο διαστάσεις για $m = 2$, $n = 1,2,3$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

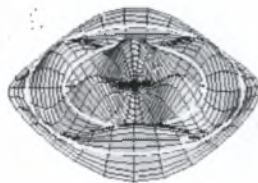
$n=2, m=2 \text{ Phase}=(0/4)\pi$



$n=2, m=3 \text{ Phase}=(0/4)\pi$



$n=2, m=3 \text{ Phase}=(\pi/4)$



Σχήμα 6.6: Ιδιομορφές σε δύο διαστάσεις για $m = 2$, $n = 1,2,3$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

6.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στη συνέχεια, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων των ιδιοτιμών που προέκυψαν από τη αναλυτική λύση και αυτών που εξάχθηκαν από το πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα, συγκρίνονται τόσο ο λόγος $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$, όσο και μόνο οι ιδιοτιμές ω .

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα και δίνουν το λόγο $\lambda = \frac{\omega^2}{g}$, υπολογίστηκαν με τη χρήση διαφορετικών πλεγμάτων πεπερασμένων στοιχείων, δηλαδή πλεγμάτων με διαφορετικό αριθμό κόμβων στην κάθε κατεύθυνση. Τα υπολογιστικά πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν 3, 4, 20, 30, 50 και 60 κόμβων στην κάθε κατεύθυνση. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στους πίνακες 6.7 και 6.8, στη μία στήλη των οποίων φαίνονται και τα αναλυτικά αποτελέσματα. Ο αριθμός των ιδιοτιμών που εξάγονται από τον κώδικα εξαρτάται από τους κόμβους που έχουμε σε κάθε κατεύθυνση και συγκεκριμένα ο αριθμός των ιδιοτιμών αντιστοιχεί στον αριθμό των κόμβων που υπάρχουν στην ελεύθερη επιφάνεια.

Όπως φαίνεται από τους πίνακες 6.7 και 6.8, όταν το πλέγμα είναι αραιό και υπάρχουν τρεις κόμβοι σε κάθε κατεύθυνση, οι ιδιοτιμές δεν έχουν ικανοποιητική ακρίβεια, αφού απέχουν από την τιμές που προκύπτουν από την αναλυτική λύση. Όσο όμως αυξάνεται η πυκνότητα του πλέγματος, οι τιμές των ιδιοτιμών τείνουν να ταυτιστούν με αυτές που δίνει η αναλυτική λύση και η πρώτη ιδιοτιμή έχει ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων από το πλέγμα των 900 κόμβων, ενώ για τις υπόλοιπες απαιτείται πυκνότερο πλέγμα. Γενικά, παρατηρούμε ότι η σύγκλιση αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι αρκετά αργή.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια, προέκυψαν λύνοντας το πρόβλημα των ιδιοτιμών σε κώδικα Fortran. Ο κώδικας αυτός, ο οποίος επισυνάπτεται στο 9 κεφάλαιο, δημιουργήθηκε σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Για την εξαγωγή των ιδιοτιμών απαιτείται η λύση του συστήματος $Ax = \lambda Bx$, όπου τα A και B είναι

οι πίνακες που αναφέρονται στο 5 κεφάλαιο. Το σύστημα αυτό επιλύθηκε με τη βοήθεια της υπορουτίνας GVLRG, και η οποία υπάρχει στη βιβλιοθήκη της IMSL.

Πίνακας 6.7: Σύγκριση του λόγου λ με τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων.

ω^2/g						
Αριθμός κόμβων στην κάθε κατεύθυνση						Αναλυτικά Αποτελέσματα
3x3	4x4	20x20	30x30	50x50	60x60	
0.1747	0.1931	0.2288	0.2313	0.2332	0.2337	0.2360
0.6937	0.6569	0.6946	0.6997	0.7039	0.7051	0.7108
1.5014	1.4265	1.1210	1.1243	1.1286	1.1300	1.1382
	2.2457	1.5563	1.5502	1.5507	1.5517	1.5608
		2.0093	1.9830	1.9743	1.9739	1.9818
		2.4876	2.4262	2.4011	2.3981	2.4021
		2.9994	2.8829	2.8323	2.8253	2.8219
		3.5540	3.3562	3.2691	3.2562	3.2415
		4.1621	3.8493	3.7126	3.6916	3.6609
		4.8351	4.3660	4.1636	4.1322	4.0803
		5.5839	4.9102	4.6234	4.5788	4.4995
		6.4171	5.4862	5.0930	5.0320	4.9187
		7.3381	6.0987	5.5735	5.4926	5.3378
		8.3404	6.7523	6.0662	5.9613	5.7569
		9.4005	7.4519	6.5722	6.4389	6.1759
		10.4699	8.2017	7.0930	6.9263	6.5950
		11.4684	9.0057	7.6298	7.4242	7.0140
		12.2808	9.8662	8.1841	7.9336	7.4330
		12.7595	10.7837	8.7574	8.4554	7.8520
		13.9271	11.7560	9.3513	8.9904	8.2710
			12.7765	9.9674	9.5398	8.6899
			13.8328	10.6073	10.1045	9.1089
			14.9058	11.2727	10.6855	9.5279
			15.9676	11.9651	11.2840	9.9468
			16.9811	12.6861	11.9010	10.3659
			17.9005	13.4371	12.5378	10.7847
			18.6723	14.2195	13.1952	11.2037
			19.2385	15.0343	13.8746	11.6226
			19.5414	15.8823	14.5770	12.0414
			21.2571	16.7639	15.3033	12.4605
				17.6790	16.0547	12.8794
				18.6268	16.8320	13.2982
				19.6058	17.6359	13.7171
				20.6136	18.4671	14.1360
				21.6465	19.3260	14.5549
				22.6997	20.2127	14.9739
				23.7667	21.1272	15.3927
				24.8393	22.0689	15.8116
				25.9079	23.0370	16.2308
				26.9604	24.0298	16.6494
				27.9835	25.0455	17.0684
				28.9617	26.0813	17.4872
				29.8782	27.1336	17.9063
				30.7151	28.1981	18.3251
				31.4536	29.2695	18.7440
				32.0752	30.3415	19.1630
				32.5616	31.4066	19.5817
				32.8966	32.45649	20.0007
				33.0671	33.4817	20.4196
				35.9173	34.4716	20.8386
					35.4151	21.2573
					36.3000	21.6762
					37.1139	22.0951
					37.8441	22.5139
					38.4779	22.9330
					39.0033	23.3517
					39.4089	23.7708
					39.6852	24.1895
					39.8247	24.6086
					43.2474	25.0273

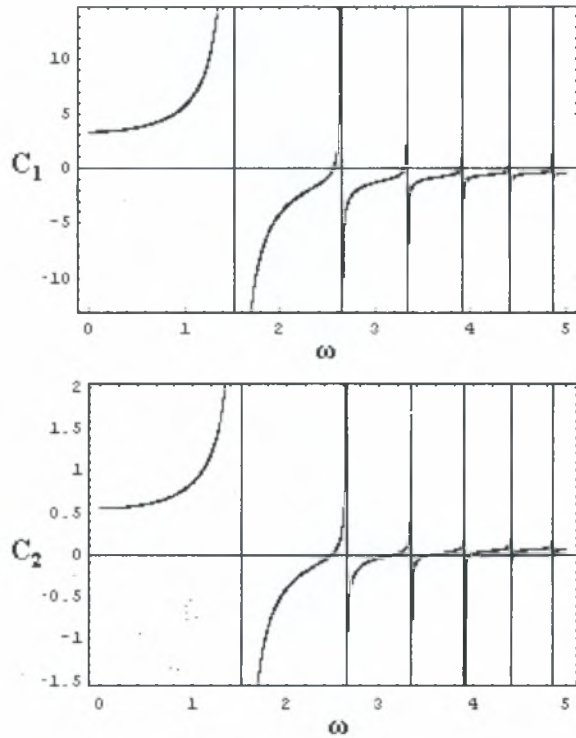
Πίνακας 6.8: Σύγκριση του ω με τα αποτελέσματα των πεπερασμένων στοιχείων.

ω						
Αριθμός κόμβων στην κάθε κατεύθυνση						Αναλυτικά Αποτελέσματα
3x3	4x4	20x20	30x30	50x50	60x60	
1.3091	1.3763	1.4982	1.5063	1.5125	1.5141	1.5216
2.6087	2.5385	2.6104	2.6199	2.6278	2.6300	2.6407
3.8378	3.7409	3.3162	3.3211	3.3274	3.3294	3.3415
	4.6936	3.9073	3.8997	3.9003	3.9015	3.9130
		4.4397	4.4106	4.4009	4.4004	4.4093
		4.9400	4.8786	4.8533	4.8503	4.8543
		5.4244	5.3180	5.2711	5.2646	5.2615
		5.9046	5.7380	5.6630	5.6518	5.6391
		6.3899	6.1450	6.0349	6.0178	5.9928
		6.8871	6.5445	6.3910	6.3669	6.3267
		7.4012	6.9404	6.7347	6.7021	6.6438
		7.9342	7.3362	7.0684	7.0259	6.9464
		8.4845	7.7349	7.3943	7.3404	7.2363
		9.0454	8.1388	7.7142	7.6472	7.5150
		9.6031	8.5500	8.0295	7.9477	7.7837
		10.1346	8.9699	8.3416	8.2430	8.0434
		10.6068	9.3993	8.6515	8.5342	8.2950
		10.9761	9.8381	8.9602	8.8221	8.5392
		11.1880	10.2853	9.2688	9.1075	8.7766
		11.6887	10.7390	9.5779	9.3913	9.0077
			11.1954	9.8884	9.6740	9.2330
			11.6490	10.2009	9.9562	9.4530
			12.0924	10.5159	10.2384	9.6679
			12.5157	10.8341	10.5212	9.8782
			12.9068	11.1557	10.8050	10.0841
			13.2516	11.4812	11.0903	10.2858
			13.5342	11.8107	11.3774	10.4837
			13.7379	12.1444	11.6666	10.6779
			13.8456	12.4822	11.9583	10.8686
			14.4406	12.8240	12.2526	11.0561
				13.1693	12.5498	11.2404
				13.5177	12.8500	11.4217
				13.8684	13.1533	11.6002
				14.2204	13.4597	11.7760
				14.5723	13.7691	11.9492
				14.9226	14.0814	12.1200
				15.2693	14.3965	12.2883
				15.6100	14.7138	12.4544
				15.9423	15.0330	12.6184
				16.2629	15.3536	12.7801
				16.5686	15.6747	12.9399
				16.8557	15.9955	13.0977
				17.1203	16.3150	13.2537
				17.3584	16.6320	13.4078
				17.5659	16.9450	13.5602
				17.7386	17.2525	13.7109
				17.8726	17.5527	13.8599
				17.9643	17.8437	14.0074
				18.0108	18.1233	14.1533
				18.7710	18.3893	14.2978
					18.6393	14.4407
					18.8707	14.5823
					19.0811	14.8226
					19.2679	14.8614
					19.4285	14.9991
					19.5607	15.1354
					19.6622	15.2706
					19.7310	15.4045
					19.7656	15.5374
					20.5975	15.6690

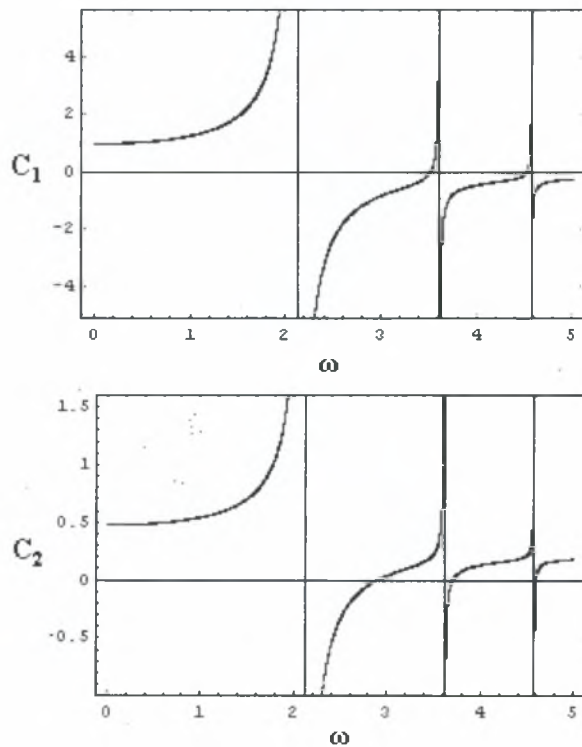
6.2 Αποτελέσματα προβλήματος συνοριακών τιμών

6.2.1 Αναλυτικά αποτελέσματα

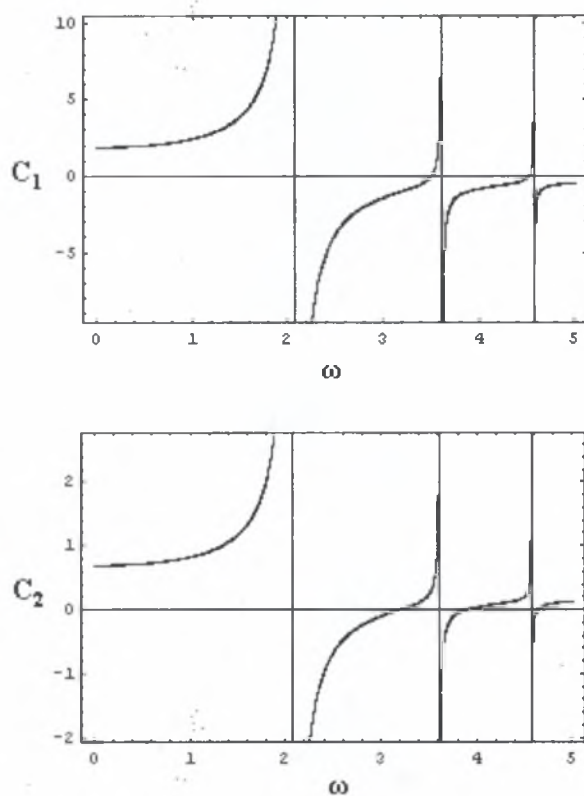
Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται τα αποτελέσματα που αφορούν στις δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στα τοιχώματα της κυλινδρικής δεξαμενής. Συγκεκριμένα, παρακάτω φαίνονται οι λόγοι των σχέσεων (4.4.13) και (4.4.14), όπως αυτοί ορίστηκαν στο κεφάλαιο 4, για διάφορες διαστάσεις δεξαμενών και ως συνάρτηση της εξωτερικής διέγερσης ω . Στο σχήμα 6.7 απεικονίζονται οι λόγοι C_1 και C_2 αντίστοιχα για διάμετρο διπλάσια του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μέσα στη δεξαμενή, στο σχήμα 6.8 απεικονίζονται οι λόγοι για διάμετρο και ύψος υγρού σχεδόν ίσα και στο σχήμα 6.9 απεικονίζονται οι λόγοι για ύψος ελεύθερης επιφάνειας υγρού διπλάσιο της διαμέτρου της δεξαμενής. Η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 5, $1 < \omega < 5$.



Σχήμα 6.7: Γραφική απεικόνιση των λόγων C_1 και C_2 συναρτήσεϊ του ω , με $1 < \omega < 5$, για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 7,5m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 8m$.



Σχήμα 6.8: Γραφική απεικόνιση των λόγων C_1 και C_2 συναρτήσεϊ του ω , με $1 < \omega < 5$, για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 4m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 8m$.



Σχήμα 6.9: Γραφική απεικόνιση των λόγων C_1 και C_2 συναρτήσει του ω , με $1 < \omega < 5$, για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 4m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 4m$.

6.2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στους πίνακες 6.9 και 6.11, φαίνονται τα αποτελέσματα του προγράμματος για διαφορετικής πυκνότητας πλέγματα για το πρόβλημα της ωστικής κίνησης και για το συνολικό πρόβλημα της ωστικής και της επαγωγικής κίνησης αντίστοιχα, ενώ στους πίνακες 6.10 και 6.12, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης για τα αντίστοιχα προβλήματα.

Στη συνέχεια φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των λόγων C_1 και C_2 όπως αυτοί ορίστηκαν στο 4^ο κεφάλαιο και σύμφωνα με τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τον κώδικα των πεπερασμένων στοιχείων. Ειδικότερα, η δύναμη F_I υπολογίστηκε από τον κώδικα της Fortran που δημιουργήθηκε και λύνει το πρόβλημα της ωστικής κίνησης. Ανάλογος κώδικας φτιάχτηκε και για την επίλυση του συνολικού προβλήματος της ωστικής και επαγωγικής κίνησης και από το πρόγραμμα αυτό προέκυψε η συνολική δύναμη $F_I + F_C$.

Οι συντελεστές C_1 και C_2 υπολογίστηκαν για τρεις διαφορετικούς λόγους διαστάσεων της δεξαμενής. Έτσι, επιλέχθηκαν οι λόγοι, ύψος ελεύθερης επιφάνειας του υγρού προς τη διάμετρο της δεξαμενής, 1:2, 1:1 και 2:1, ενώ και στις τρεις περιπτώσεις η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης ω παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 5.

Και τα δύο προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή αποτελεσμάτων παρατίθενται στο 9^ο κεφάλαιο, ενώ το σύστημα που προκύπτει λύνεται και τις δύο φορές με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss. Το πλέγμα που επιλέχθηκε για τον υπολογισμό των δυνάμεων είχε 73 κόμβους σε κάθε κατεύθυνση. Οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν έγιναν με τη βοήθεια του προγράμματος Excel.

Πίνακας 6.9: Αριθμητικά αποτελέσματα για διαφορετικής πυκνότητας πλέγματα.

Impulsive - 5x5					
$\begin{matrix} r \\ z \end{matrix}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	0	0	0	0
3H/4	0	0.61611	1.18375	1.97284	3.48926
H/2	0	1.11092	2.10018	3.35605	4.99757
H/4	0	1.41601	2.63616	4.05971	5.77292
0	0	1.51694	2.80618	4.27929	6.01012

Impulsive - 21x21					
$\begin{matrix} r \\ z \end{matrix}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	0	0	0	0
3H/4	0	0.54503	1.13807	1.97233	3.39542
H/2	0	0.96724	1.97478	3.2303	4.87691
H/4	0	1.218	2.4483	3.88555	5.60596
0	0	1.29951	2.59877	4.0878	5.82777

Impulsive - 53x53					
$\begin{matrix} r \\ z \end{matrix}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	1	0	0	0	0
3H/4	0	0.52591	1.12314	1.96044	3.38302
H/2	0	0.9318	1.9455	3.2048	4.85258
H/4	0	1.1719	2.40934	3.85131	5.57338
0	0	1.24976	2.55646	4.05052	5.79228

Impulsive - 73x73					
$\begin{matrix} r \\ z \end{matrix}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	0	0	0	0
3H/4	0	0.4956	1.06433	1.86746	3.26641
H/2	0	0.92513	1.94009	3.20014	4.84816
H/4	0	1.16327	2.40221	3.8451	5.56748
0	0	1.24046	2.54874	4.1337	5.78587

Πίνακας 6.10: Αναλυτικά αποτελέσματα.

Impulsive					
$\begin{matrix} r \\ z \end{matrix}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	0	0	0	0
3H/4	0	0.5124	1.1126	1.9518	3.3754
H/2	0	0.9070	1.9257	3.1879	4.8363
H/4	0	1.1399	2.3833	3.8288	5.5523
0	0	1.2153	2.5283	4.0260	5.7688

Πίνακας 6.11: Αριθμητικά αποτελέσματα για διαφορετικής πυκνότητας πλέγματα.

Sloshing+Impulsive-5x5					
$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ z \end{array}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	5.32839	9.11192	12.30028	14.715
3H/4	0	4.45035	7.62097	10.31992	12.48302
H/2	0	3.8955	6.69421	9.13394	11.20482
H/4	0	3.59441	6.19792	8.50967	10.53459
0	0	3.49961	6.0425	8.31498	10.32605

Sloshing+Impulsive-21x21					
$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ z \end{array}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	3.96424	7.39127	10.40878	12.7747
3H/4	0	3.3162	6.19349	8.75748	10.88175
H/2	0	2.91421	5.46412	7.78852	9.8209
H/4	0	2.69926	5.07889	7.28562	9.27574
0	0	2.63209	4.95912	7.13022	9.10776

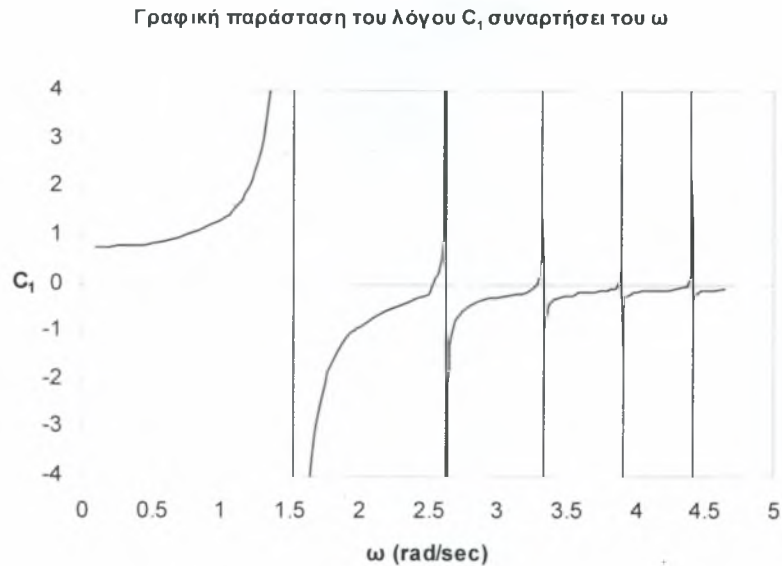
Sloshing+Impulsive - 53x53					
$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ z \end{array}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	3.71145	7.09556	10.08963	12.4481
3H/4	0	3.10563	5.94758	8.49244	10.61054
H/2	0	2.73118	5.2512	7.55941	9.58645
H/4	0	2.53163	4.88463	7.07691	9.06224
0	0	2.46938	4.77088	6.92811	8.90105

Sloshing+Impulsive-73x73					
$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ z \end{array}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	3.6662	7.0435	10.0336	12.3908
3H/4	0	3.0946	5.9545	8.5143	10.6389
H/2	0	2.6984	5.2137	7.5192	9.5453
H/4	0	2.5016	4.8504	7.0402	9.0247
0	0	2.4402	4.7377	7.0072	8.8648

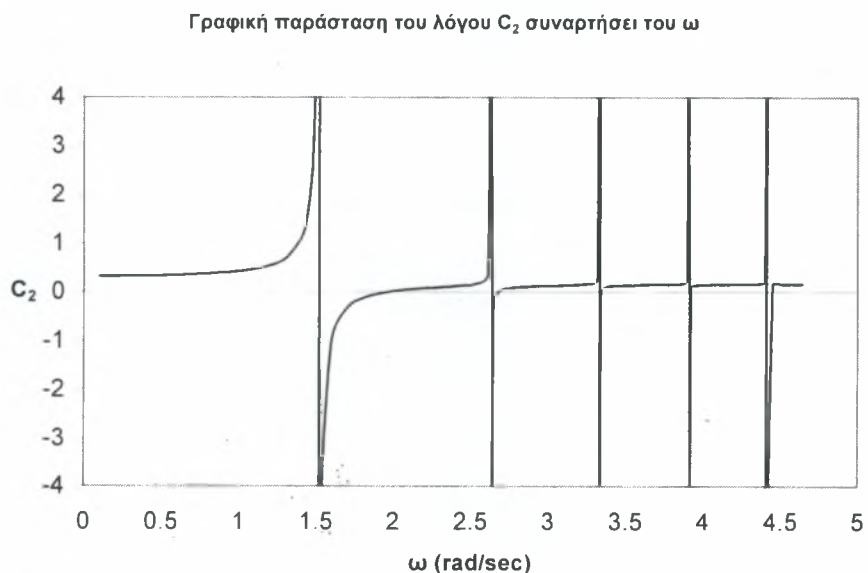
Sloshing+Impulsive-93x93					
$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ z \end{array}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	3.64104	7.01505	10.0033	12.35988
3H/4	0	3.04695	5.88059	8.42069	10.53725
H/2	0	2.68014	5.19317	7.49736	9.52308
H/4	0	2.48484	4.83166	7.02038	9.00455
0	0	2.42397	4.71954	6.87339	8.84524

Πίνακας 6.12: Αναλυτικά αποτελέσματα.

Sloshing+Impulsive					
$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ z \end{array}$	0	a/4	a/2	3a/4	a
H	0	3.5421	6.9040	9.8809	12.1592
3H/4	0	2.9668	5.7881	8.3207	10.4399
H/2	0	2.6107	5.1136	7.4117	9.4325
H/4	0	2.4214	4.7594	6.9428	8.9274
0	0	2.3624	4.6496	6.7984	8.7665

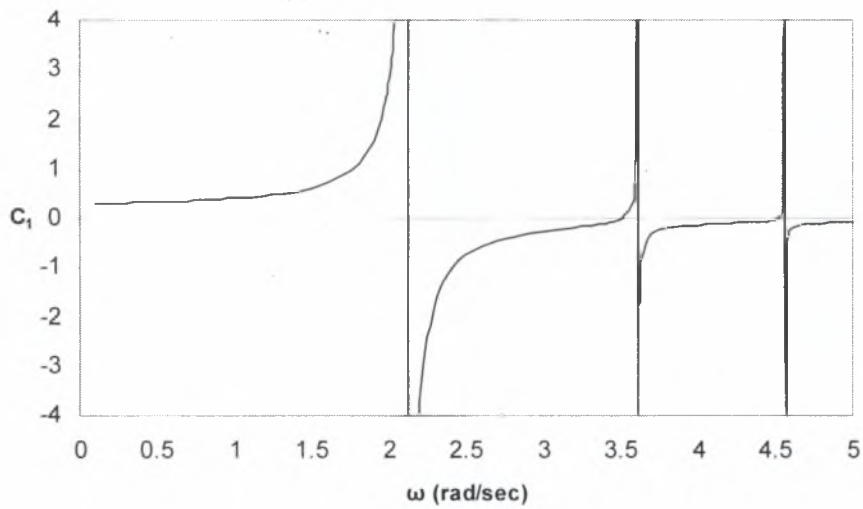


Σχήμα 6.10: Γραφική παράσταση του λόγου C_1 συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης ω για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 7,5m$ και ύψος ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 8m$.



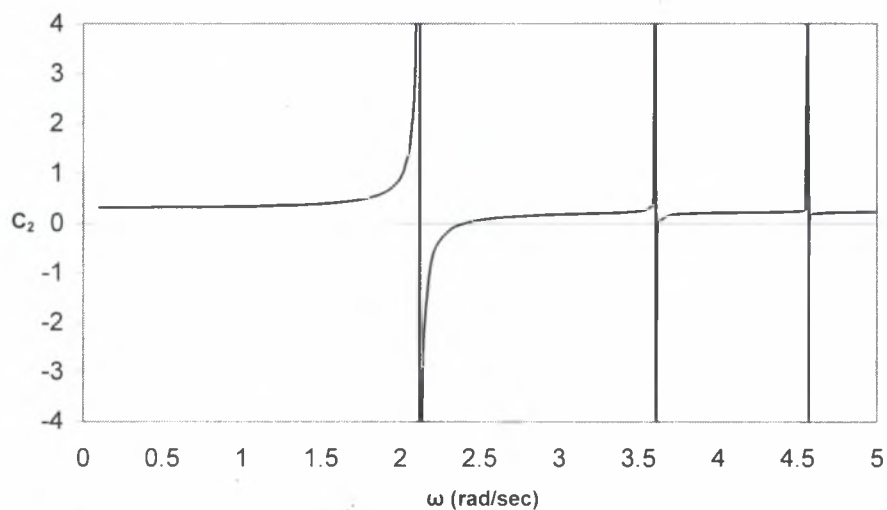
Σχήμα 6.11: Γραφική παράσταση του λόγου C_2 συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης ω για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 7,5m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 8m$.

Γραφική παράσταση του λόγου C_1 συναρτήσει του ω



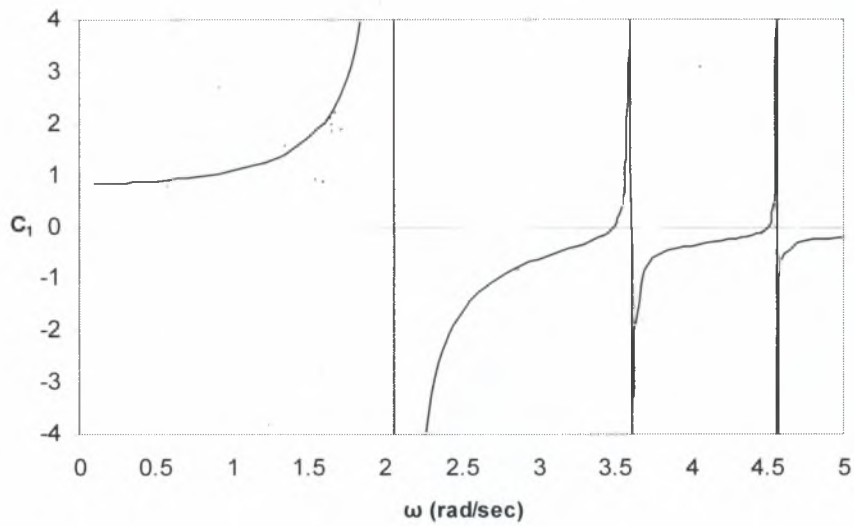
Σχήμα 6.12: Γραφική παράσταση του λόγου C_1 συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης ω για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 4m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 8m$.

Γραφική παράσταση του λόγου C_2 συναρτήσει του ω



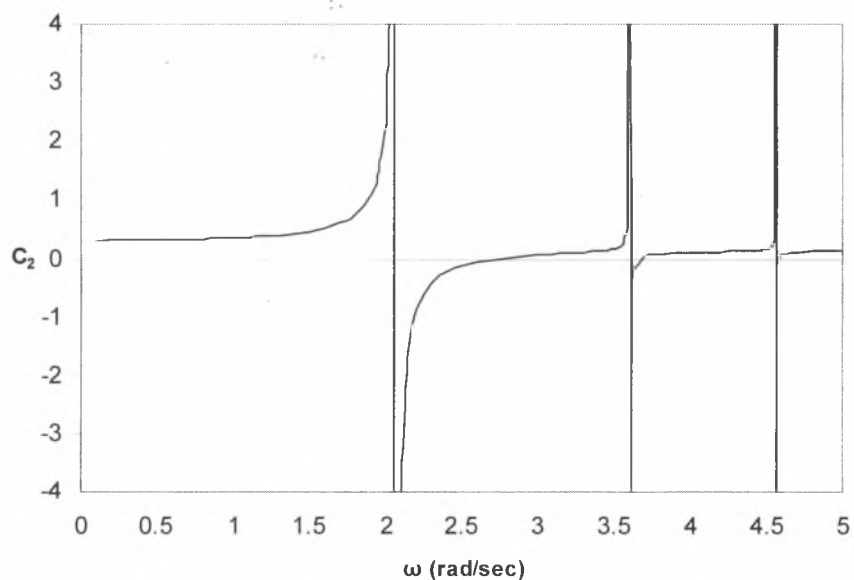
Σχήμα 6.13: Γραφική παράσταση του λόγου C_2 συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης ω για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 4m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 8m$.

Γραφική παράσταση του λόγου C_1 συναρτήσει του ω



Σχήμα 6.14: Γραφική παράσταση του λόγου C_1 συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης ω για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 4m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 4m$.

Γραφική παράσταση του λόγου C_2 συναρτήσει του ω



Σχήμα 6.15: Γραφική παράσταση του λόγου C_2 συναρτήσει της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης ω για δεξαμενή ακτίνας $\alpha = 4m$ και ύψους ελεύθερης επιφάνειας υγρού $H = 4m$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^ο

7 Συμπεράσματα

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος του κυματισμού της ελεύθερης επιφάνειας, σε κυλινδρική δεξαμενή, στην οποία ασκείται οριζόντια εξωτερική διέγερση. Αρχικά, έγινε η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών αναλυτικά, με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών. Με τη χρήση του συγκεκριμένου αναλυτικού μοντέλου προέκυψαν οι ιδιοτιμές του προβλήματος του κυματισμού. Παρατηρήθηκε ότι η μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μέσα στη δεξαμενή έχει μικρή επίπτωση στις τιμές των ιδιοτιμών. Ειδικότερα, προκύπτει ότι αυξάνοντας το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού $H = 2m$ σε $H = 4m$, μεταβάλλεται η πρώτη και η δεύτερη ιδιοτιμή, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν ανεπηρέαστες. Από ύψος $H = 4m$ σε ύψος $H = 8m$, επηρεάζεται μόνο η πρώτη ιδιοτιμή και οι υπόλοιπες παραμένουν αμετάβλητες. Αντίθετα, διπλασιασμός της ακτίνας της δεξαμενής επιδρά σημαντικά σε όλες τις ιδιοτιμές του προβλήματος. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι διπλασιάζοντας περίπου την ακτίνα από $r = 4m$ σε $r = 7.5m$, οι ιδιοτιμές ελαττώνονται. Αυξάνοντας ακόμη περισσότερο την ακτίνα σε $r = 15m$, οι ιδιοτιμές έχουν την ίδια συμπεριφορά, δηλαδή συνεχίζουν να μειώνονται.

Στη συνέχεια το πρόβλημα των ιδιοτιμών επιλύθηκε αριθμητικά, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η μέθοδος αυτή προγραμματίστηκε σε γλώσσα Fortran και οι ιδιοτιμές του προβλήματος υπολογίστηκαν για πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων διαφορετικής πυκνότητας. Παρατηρήθηκε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων στην κάθε κατεύθυνση, οι ιδιοτιμές που προκύπτουν τείνουν όλο και περισσότερο στις αναλυτικές ιδιοτιμές του προβλήματος. Έτσι, όταν το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από 60 κόμβους (το λιγότερο) σε κάθε κατεύθυνση, τα υπολογιστικά αποτελέσματα παρουσιάζουν ικανοποιητική σύγκλιση με τα αναλυτικά. Η σύγκλιση των δέκα πρώτων

ιδιοτιμών είναι ακρίβειας πρώτου ή και δεύτερου δεκαδικού ψηφίου, ενώ τα αποτελέσματα αρχίζουν να αποκλίνουν μετά από αυτές τις ιδιοτιμές.

Στη συνέχεια, εκτός από το πρόβλημα των ιδιοτιμών, εξετάσθηκε και το πρόβλημα των συνοριακών τιμών της υπό διέγερσης απόκρισης της δεξαμενής. Προκειμένου να επιτευχθεί η αναλυτική επίλυσή του, το πρόβλημα χωρίστηκε σε δύο υποπροβλήματα, σύμφωνα με το διαχωρισμό ωστικής / επαγωγικής κίνησης (π.χ. Fischer και Rammerstofer [46]). Έτσι αρχικά επιλύθηκε αναλυτικά το πρόβλημα της ωστικής και στη συνέχεια της επαγωγικής κίνησης. Οι αναλυτικές λύσεις που προέκυψαν για τα δύο προβλήματα συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες λύσεις που υπάρχουν στη βιβλιογραφία και βρέθηκαν σε πλήρη συμφωνία με αυτές. Στη συνέχεια με βάση τις λύσεις αυτές υπολογίστηκαν οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής.

Για την υπολογιστική επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών χρησιμοποιήθηκε, όπως και στην περίπτωση των ιδιοτιμών, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και ο κώδικας προγραμματισμού έγινε σε γλώσσα Fortran. Στο πρόβλημα της ωστικής κίνησης για αρκετά μεγάλης πυκνότητας πλέγματα, τα αποτελέσματα πλησίαζαν αρκετά τα αναλυτικά. Στο πρόβλημα της ωστικής και επαγωγικής κίνησης τα αποτελέσματα που προέκυψαν για διάφορα πλέγματα αρχικά βρίσκονται μακριά από αυτά της αναλυτικής λύσης. Παρατηρήθηκε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων στην κάθε κατεύθυνση, οι τιμές συνεχώς μειώνονται και τείνουν να πλησιάσουν τις αναλυτικές τιμές και για αρκετά πυκνά πλέγματα παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές βρίσκονται πολύ κοντά σ' αυτές. Η συμπεριφορά των μοντέλων, τόσο για το πρόβλημα της ωστικής, όσο και για το συνολικό πρόβλημα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για ακόμη μεγαλύτερα πλέγματα οι υπολογιστικές τιμές και οι αναλυτικές θα ταυτιστούν πλήρως. Όπως και στο πρόβλημα των ιδιοτιμών ο κώδικας της Fortran έχει αργή σύγκλιση. Επιπλέον, από την επίλυση του προβλήματος της ωστικής κίνησης υπολογίστηκαν οι ωστικές δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της

δεξαμενής. Στη συνέχεια, από το συνολικό πρόβλημα συνοριακών τιμών, με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες προέκυψαν οι συνολικές δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα της δεξαμενής.

Για να επιτευχθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων, έγιναν οι γραφικές παραστάσεις των λόγων της ωστικής προς την επαγωγική δύναμη και της συνολικής δύναμης (ωστική και επαγωγική) προς τη δύναμη της ομοιόμορφης κίνησης, τόσο για τα αναλυτικά όσο και για τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Οι γραφικές αυτές παραστάσεις έγιναν για διαφορετικούς λόγους του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού προς την ακτίνα της δεξαμενής και επιλέχθηκαν λόγοι 1:2, 1:1 και 2:1. Η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης και στις τρεις περιπτώσεις κυμαινόταν μεταξύ 1 και 5, δηλαδή $1 < \omega < 5$. Στις παραπάνω περιπτώσεις η μορφή των γραφικών παραστάσεων που προέκυψαν υπολογιστικά προσεγγίζει την μορφή των γραφικών παραστάσεων που προήρθαν από τους αναλυτικούς τύπους.

Από τη μελέτη όλων αυτών των αποτελεσμάτων προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

- ✓ Η επίδραση του κυματισμού είναι σημαντική κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων που ασκούνται στη δεξαμενή, όταν οι τιμές της εξωτερικής διέγερσης ω προσεγγίζουν τις ιδιοτιμές του προβλήματος.
- ✓ Οι ιδιοτιμές δεν επηρεάζονται έντονα από τη μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας αλλά από τη μεταβολή της ακτίνας της δεξαμενής. Μείωση της ακτίνας της δεξαμενής προκαλεί αύξηση των ιδιοτιμών. Οι δεξαμενές που έχουν μικρή ακτίνα και σχετικά μεγάλο ύψος υγρού, είναι αυτές που έχουν και μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες προτάσεις, οι οποίες αφορούν στον τρόπο που θα μπορούσε να συνεχιστεί και να επεκταθεί η συγκεκριμένη εργασία. Η ίδια μελέτη θα μπορούσε να γίνει :

- ✓ Λαμβάνοντας υπόψη την παραμόρφωση των τοιχωμάτων της δεξαμενής, η οποία θεωρήθηκε αμελητέα.
- ✓ Επίλυση προβλήματος χωρίς γραμμικοποίηση των εξισώσεων (π.χ. Navier – Stokes).
- ✓ Μη αρμονική εξωτερική διέγερση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^ο

8 Αναφορές

- [1] Akita Y. (1967), “Dynamic Pressure Of Cargo Oil Due To Pitching And Effectiveness Of Swash Bulkhead In Long Tanks”, Japan Shipbuilding Marine Eng., 2(5), 42-55
- [2] Brathu M. C., Huthèr M. and Planeix J. M. (1972), “Computer Calculations Of Liquid Motions In Tanks”, Shipping World And Shipbuilder, December 1972
- [3] Filstead CG (1972), “The Design And Operation Of LNG Ships With Regard To Safety”, Shipping World And Shipbuilder, 165(3866), 259-262
- [4] Faltinsen OM (1974), “A nonlinear Theory Of Sloshing In Rectangular Tanks”, J. Ship. Res., 18(4)
- [5] Faltinsen OM (1978). “A Numerical Nonlinear Method Of Sloshing In Tanks With Two – Dimensional Flow”, J. Ship. Res., 22(3), 193-202
- [6] Faltinsen OM, Olsen HA, Abramson HN and BassRL (1974), “Liquid Slosh In LNG Carriers”, Det Norske Veritas, Norway, Publication No 85
- [7] Bass RL (1975), “Dynamic Slosh. Induced Loads On Liquid Cargo Tank Bulkheads”, Soc Naval Archit And Marine Eng., Report No R-19
- [8] Cox PA, Bowles EB and Bass RL (1980), “Evaluation Of Liquid Dynamic Loads In Slack LNG Cargo Tanks”, Tech. Report SSC-297, SWRI
- [9] Mikelis NE, Miller JK and Taylor KV (1984), “Sloshing In Partially Filled Tanks And Its Effects On Ship Motions : Numerical Simulations And Experimental Verification”, Proc. Royal Inst. Naval Archit., Spring Meeting
- [10] Arai M (1986), “Experimental And Numerical Studies Of Sloshing In Liquid Cargo Tanks With Internal Structures”, Ishikawajima – Harima Heavy Indust. Eng. Rev 19(2), 51-56

- [11] Schy A. A. (1952), “A Theoretical Analysis Of The Effects Of Fuel Motion On Airplane Dynamics”, NACA Report No 1080
- [12] Sewal J. L. (1957), “An Experimental And Theoretical Study Of The Effects Of Fuel On Pitching – Translation Flutter” NACA TN – 4166
- [13] Abramson H. N. (1961b), “Liquid Dynamic Behavior In Rocket Propellant Tanks”, ONR/AIAA, Symp. Struct. Dynamics Of High Speed Flight, Los Angeles, April 1961, 287-318
- [14] Abramson H. N. (1965), “Further Studies Of Liquid Sloshing In Rocket Propellant Tanks”, Final Report, Contract NAS8-1555, SWRI, Dec. 1965
- [15] Abramson H. N. (1966a), “The Dynamic Behavior Of Liquids In Moving Containers, NASA SP 106
- [16] Bauer H. F. (1958d), “Fluid Oscillations Of A Circular Cylindrical Tank Performing Lissajons – Oscillations” ABMA, DA – TR – 2 – 58, April 58
- [17] Bauer H. F. (1961d), “Dynamics Of Liquid Propellant Vehicles”, Proc ONR/AIAA Symp. On Struct. Dynamics Of High Speed Flight, 319-355 (Office Of Naval Res., Los Angeles, CA)
- [18] Bauer H. F. (1962a), “Theory Of Fluid Oscillations In Partially Filled Cylindrical Containers, MSFC, NASA, MTP – AERO – 62 – 1, Jan 62
- [19] Kana D.D. (1964a), “Experiments On Liquid Dynamics In Titan II Propellant Tanks, SWRI, Final Report
- [20] Ring E. (1964), “Propellant Sloshing”, Rocket Propellant And Pressurization System, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey
- [21] Roberts J. R., Basurto E. R. and Chen P. Y. (1966), “Slosh Design Handbook”, NASA CR – 406

- [22] Moiseev N. N. and Rumnyantsev V. V. (1968), “Dynamic Stability Of Bodies Containing Fluid”, Applied Physics and Eng/An Int Series, Vol. 6, HN Abramson (ed), Springer – Verlag
- [23] Candless C. E. and Walls J. C. (1969), “Slosh Test Analysis For The 200 inch Multicell Tank, NASA – CR – 61268
- [24] Graham EW (1951), “The Forces Produced By Fuel Oscillations In Rectangular Tank”, Douglas AirCraft Co, SM-13748
- [25] Graham EW and Rodriguez AM (1952), “The Characteristics Of Fuel Motion Which Affect Airplane Dynamics”, J. Appl. Mech 74, 381-388
- [26] Abramson HN and Ransleben GE Jr (1961c), “Representation Of Fuel Sloshing In Cylindrical Tanks By An Equivalent Mechanical Model”, ARS J. 31(12), 1967-1705
- [27] Armstrong GL and Kachigan K(1961), “Propellant Sloshing” Handbook Of Astronautical Eng., HH Koelle (ed), Ch. 14, 14-14-14-27
- [28] Bauer HF (1960a), “Mechanical Model For The Description Of The Motion In A Rectangular Container”, Lockheed – Co, RN ER – 8559
- [29] Bauer HF (1961c), “Mechanical Analogy Of Fluid Oscillations In Cylindrical Tank With Circular And Annular Cross – Section, MSFC, NASA, MTP – AERO 61-4
- [30] Bauer HF (1962b), “Mechanical Model Of Fluid Oscillations In Cylindrical Containers And Introduction Of Damping“ MTP – AERO – 62 – 16
- [31] Mooney J., Ryan J. and Walls J. (1964b), “Slosh Handbook”. NSL Tech. Memo 1
- [32] Ewart DG (1956), “Fuel Oscillations In Cylindrical Tanks And The Forces Produced Thereby”, De Havilland Propellers Ltd, GW Dynamics Dept, Tech. Note No 2050
- [33] Housner G. W. (1957), “Dynamic Pressures On Accelerated Fluid Containers”, Bulletin Of The Seismological Society Of America, 15-35

- [34] Veletsos S. A., Asce A. and Yang Y. J., “Earthquake Response Of Liquid – Storage Tanks”, 2nd Engineering Mechanics Specialty Conference, 1-24
- [35] Fischer D. (1979), “Dynamic Fluid Effects in Liquid – Filled Flexible Cylindrical Tanks”, Earthquake Engineering And Structural Dynamics, vol.7, 587-601
- [36] Haroun A. M., Asce M. A., Housner W. G., “Seismic Design Of Liquid Storage Tanks”, Journal Of The Technical Councils Of ASCE, Vol. 107, 191-207
- [37] Luft W.R., Asce M., “Vertical Accelerations In Prestressed Concrete Tanks”, Journal Of Structural Engineering, Vol.110, 706-713
- [38] Veletsos A., Asce M. and Tang Y., “Dynamics Of Vertically Excited Liquid Storage Tanks”, Journal Of Structural Engineering, Vol.112, 1228-1247
- [39] Isaacson M and Subbiah K., “Earthquake – Induced Sloshing In A Rigid Circular Tank”, Canadian Journal Of Civil Engineering, 18, 904-915
- [40] Rammerstorfer G. F. and Scharf K., “Storage Tanks Under Earthquake Loading”, Journal Of Applied Mechanics Review, Vol. 43, no 11, 261-282
- [41] Gupta K. R. and Hutchinson G. L., “Effects Of Wall Flexibility On response Of Liquid Storage Tanks”, Engineering Structures, Vol.13, 253-267
- [42] Adams N. J. I., “Seismic Design Rules For Flat Bottom Cylindrical Liquid Storage Tanks”, International Journal Of Pressure, Vessel and Piping, 49, 61-95
- [43] Veletsos S. A., Member, ASCE, Tang Y., Associate Member, ASCE and Tang H. T., “Dynamic Response Of Flexibly Supported Liquid – Storage Tanks”, Journal Of Structural Engineering, Vol. 118, No. 1, 264-283
- [44] Gupta R. K., “Sloshing In Shallow Cylindrical Tanks”, Journal Of Sound And Vibration, 180(3), 397-415
- [45] Veletsos S. A. and Shivakumar P., “Tanks Containing Liquids Or Solids”, Computer Analysis And Design Of Earthquake Resistant Structures A Handbook, 721-774

- [46] Fischer D. F., Rammerstorfer F. G., “A Refined Analysis Of Sloshing Effects In Seismically Excited Tanks”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 76, 693-709
- [47] Hamdan H. F., “Seismic Behavior Of Cylindrical Steel Liquid Storage Tanks”, *Journal Of Constructional Steel Research*, 53, 307-333
- [48] Cho R. J., Song M. J., Lee J. K., “Finite Element Techniques For The Free – Vibration And Seismic Analysis Of Liquid – Storage Tanks”, *Finite Elements In Analysis and Design*, 37, 467-483
- [49] Cheung K. Y. and Zhou D., “Hydroelastic Vibration Of Circular Container Bottom Plate Using Galerkin Method”, *Journal Of Fluids And Structures*, 16(4), 561-580
- [50] Nachtigall I., Gebbeken N., Urrutia – Galicia L. J., “On The Analysis Of Vertical Circular Cylindrical Tanks Under Earthquake Excitation At Its Base”, *Engineering Structures*, 25, 201-213

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^ο

9 Συνημμένα

9.1 Κώδικες Mathematica

9.1.1 Υπολογισμός των δυνάμεων και των λόγων C_1 και C_2

$$U := 1$$

$$H := 4$$

$$g := 9.81$$

$$\alpha := 4$$

$$k_1 := \frac{1.84118}{\alpha}$$

$$k_2 := \frac{5.33144}{\alpha}$$

$$k_3 := \frac{8.53632}{\alpha}$$

$$k_4 := \frac{11.706}{\alpha}$$

$$F_I = \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^4 \left(\frac{4 * U}{(2 * n - 1) * \pi} * (-1)^{n+1} * \alpha * \text{Cos}[\theta]^2 * \text{BesselI}\left[1, \frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * \alpha\right] \right) \right) \right. \\ \left. \left(D[\text{BesselI}\left[1, \frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * r\right]] /. r \rightarrow \alpha \right) * \text{Cos}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * z\right] \right) d\theta dz$$

$$F_S =$$

$$\int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^6 (2 * g * U * \alpha^2 * k_n * \text{Tanh}[k_n * H]) / \right. \right. \\ \left. \left. ((-\omega^2 * \text{Cosh}[k_n * H] + g * k_n * \text{Sinh}[k_n * H]) (k_n^2 * \alpha^2 - 1)) * \right. \right. \\ \left. \left. \text{Cosh}[k_n * z] * \text{Cos}[\theta]^2 \right) d\theta \right) dz$$

$$F_U = \pi * \alpha^2 * H$$

$$C_1 = \frac{F_S}{F_I}$$

$$C_2 = \frac{F_I + F_S}{F_U}$$

(* Γραφική παράσταση λόγων για $\alpha=7.5$ και $H=8$ *)

`Plot[C1, { ω , 0, 5}, PlotPoints \rightarrow 10000, Frame \rightarrow True]`

`Plot[C2, { ω , 0, 5}, PlotPoints \rightarrow 10000, Frame \rightarrow True]`

(* Γραφική παράσταση λόγων για $\alpha=4$ και $H=8$ *)

`Plot[C1, { ω , 0, 5}, PlotPoints \rightarrow 10000, Frame \rightarrow True]`

`Plot[C2, { ω , 0, 5}, PlotPoints \rightarrow 10000, Frame \rightarrow True]`

9.1.2 Υπολογισμός τιμών της αναλυτικής λύσης σε διάφορα σημεία της δεξαμενής

`U := 1`

`H := 8`

`ω := 0.99`

`α := 7.5`

`σ := 9.81`

`$k_1 := \frac{1.84118}{\alpha}$`

`$k_2 := \frac{5.33144}{\alpha}$`

`$k_3 := \frac{8.53632}{\alpha}$`

`$k_4 := \frac{11.706}{\alpha}$`

`$k_5 := \frac{14.8636}{\alpha}$`

`$k_6 := \frac{18.0155}{\alpha}$`

$$\begin{aligned}
 k_7 &:= \frac{21.1644}{\alpha} \\
 k_8 &:= \frac{24.3113}{\alpha} \\
 k_9 &:= \frac{27.4571}{\alpha} \\
 k_{10} &:= \frac{30.6019}{\alpha} \\
 k_{11} &:= \frac{33.7462}{\alpha} \\
 k_{12} &:= \frac{36.89}{\alpha} \\
 k_{13} &:= \frac{40.0334}{\alpha} \\
 k_{14} &:= \frac{43.1766}{\alpha} \\
 k_{15} &:= \frac{46.3196}{\alpha} \\
 k_{16} &:= \frac{49.4624}{\alpha} \\
 k_{17} &:= \frac{52.605}{\alpha} \\
 k_{18} &:= \frac{55.7476}{\alpha} \\
 k_{19} &:= \frac{58.89}{\alpha} \\
 k_{20} &:= \frac{62.0323}{\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f[r_, \theta_, z_] &= N\left[\sum_{n=1}^{20} \left(\frac{4 * U}{(2 * n - 1) * \pi} * (-1)^{n-1} * \text{BesselI}\left[1, \frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * r\right] / \right. \right. \\
 &\left. \left. \left(D[\text{BesselI}\left[1, \frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * r\right], r\right] /. r \rightarrow \alpha \right) * \text{Cos}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * z\right] \right) * \text{Cos}[\theta] \right]
 \end{aligned}$$

N[Table[f[r, 0, z], {r, 0, 7.5, 7.5/4}, {z, 0, 8, 8/4}]] // MatrixForm

$$\phi[r_, \theta_, z_] =$$

$$\begin{aligned}
 N\left[\sum_{n=1}^{20} \frac{2 * g * U * \alpha * k_n * \text{Tanh}[k_n * H]}{(-\omega^2 * \text{Cosh}[k_n * H] + g * k_n * \text{Sinh}[k_n * H]) * (k_n^2 * \alpha^2 - 1)} * \text{Cosh}[k_n * z] * \right. \\
 \left. \frac{\text{BesselJ}[1, k_n * r]}{\text{BesselJ}[1, k_n * \alpha]} * \text{Cos}[\theta] \right]
 \end{aligned}$$

```
N[Table[φ[r, 0, z], {r, 0, 7.5, 7.5/4}, {z, 0, 8, 8/4}]] // MatrixForm
```

```
N[Table[f[r, 0, z] + φ[r, 0, z], {r, 0, 7.5, 7.5/4}, {z, 0, 8, 8/4}]] // MatrixForm
```

9.1.3 Υπολογισμός ριζών της συνάρτησης Bessel

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
```

```
a = 7.5;
```

```
h = 8;
```

```
g = 9.81;
```

```
ν[α_] := (1/2 * π) * Sqrt[(g * α / a) * Tanh[α * h / a]]
```

```
row2 = BesselJPrimeZeros[1, {1, 60}]
```

9.1.4 Υπολογισμός ιδιοτιμών

```
α := 7.5
```

```
h := 8
```

$$K_1 := \frac{1.84118}{\alpha}$$

$$K_2 := \frac{5.33144}{\alpha}$$

$$K_3 := \frac{8.53632}{\alpha}$$

$$K_4 := \frac{11.706}{\alpha}$$

$$K_5 := \frac{14.8636}{\alpha}$$

$$K_6 := \frac{18.0155}{\alpha}$$

$$K_7 := \frac{21.1644}{\alpha}$$

$$K_8 := \frac{24.3113}{\alpha}$$

$$K_9 := \frac{27.4571}{\alpha}$$

$$K_{10} := \frac{30.6019}{\alpha}$$

Table [$\omega_n = \sqrt{9.81 * K_n * \text{Tanh}[K_n * h]}$, {n, 10}]

9.1.5 Σύγκριση λύσεων διαχωρισμού I και II

Διαχωρισμός I

$$U := 1$$

$$H := 8$$

$$R := 7.5$$

$$g := 9.81$$

$$\omega := 1$$

$$k_1 := \frac{1.84118}{R}$$

$$k_2 := \frac{5.33144}{R}$$

$$k_3 := \frac{8.53632}{R}$$

$$k_4 := \frac{11.706}{R}$$

$$k_5 := \frac{14.8636}{R}$$

$$k_6 := \frac{18.0155}{R}$$

$$k_7 := \frac{21.1644}{R}$$

$$f[r_-, \theta_-, z_-] =$$

$$\sum_{n=1}^7 \left(\frac{4 * U}{(2 * n - 1) * \pi} * (-1)^{n+1} * \frac{\text{BesselI}[1, \frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * r]}{(D[\text{BesselI}[1, \frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * r], r] /. r \rightarrow R)} * \right. \\ \left. \text{Cos}\left[\frac{2 * n - 1}{2 * H} * \pi * z\right] \right) * \text{Cos}[\theta]$$

$$\varphi[r_-, \theta_-, z_-] =$$

$$\sum_{n=1}^7 (2 * k_n * R * g * U * \text{Sinh}[k_n * H]) / \\ ((g * k_n * \text{Tanh}[k_n * H] - \omega^2) * \text{Cosh}[k_n * H]^2 * (k_n^2 * R^2 - 1) * \text{BesselJ}[1, k_n * R]) * \\ \text{BesselJ}[1, k_n * r] * \text{Cosh}[k_n * z] * \text{Cos}[\theta]$$

$$f[2, 0, 2]$$

$$\varphi[2, 0, 2]$$

$$f[2, 0, 2] + \varphi[2, 0, 2]$$

Διαχωρισμός II

$$\phi[r_-, \theta_-, z_-] =$$

$$\sum_{n=1}^7 (2 * U * \omega^2 * R) / \\ (((-\omega^2 * \text{Cosh}[k_n * H]) + (g * k_n * \text{Sinh}[k_n * H])) * (k_n * R)^2 - 1) * \\ (\text{BesselJ}[1, k_n * r]) * \text{Cosh}[k_n * z] * \text{Cos}[\theta] \\ \text{BesselJ}[1, k_n * R]$$

$$f[r_-, \theta_-] = U * r * \text{Cos}[\theta]$$

$$\phi[2, 0, 2]$$

$$f[2, 0]$$

$$\phi[2, 0, 2] + f[2, 0]$$

9.2 Κώδικες Fortran

9.2.1 Πρόγραμμα ιδιοτιμών

```

PROGRAM grid
IMPLICIT NONE

C-----
C          DHLOSEIS METABLHTON
C-----

      INTEGER  LDA1,LDB1, N1,LDEVEC,LDAINV
      PARAMETER(N1=4225,LDA1=N1,LDB1=N1,LDEVEC=N1,LDAINV=N1)

      REAL    AMACH, BETA(N1)
      COMPLEX ALPHA(N1)
      EXTERNAL AMACH, GVLRG

C
      REAL AINV(LDAINV,LDAINV),NSTIFF(N1,N1)
      REAL ABC(LDA1,LDA1)

C
      COMPLEX EVAL(N1)
      EXTERNAL EVLCG, WRCRN,LINRG,WRRRN
      COMPLEX EVEC(LDEVEC,N1)

      INTEGER::I,J,IEL,E,NNX,NNY,M,K,NELY,NELX,NUMEL,L,IIFL,IK,JK,
1      J4,IJK
      I ,IJ1,IJ2,I1,I2,IB,K1,K2,IB1,IFLAG,M1
C      INTEGER NDIM,N !,IPVT(N)
C      INTEGER KB,KM1,NM1,KP1
      REAL T
      REAL:: dx,dy,hx,hy,ra
      INTEGER JJ,II,IJ,III,JJJ,MM,KK,IIII,JJJ
      REAL*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Ax(:,:),Ay(:,:),STIFF(:,)
1,NE(:,:),N(:,:),KAPA(:,:),KAPAE(:,:),STIFA(:,)
1,STIFFE(:,:),XYC(:)
      INTEGER*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: IC(:,:),IW(:,),IW1(:,)
1IBO(:)

C      REAL(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: A(:,)
C      REAL, DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: WORK(:)
C      INTEGER(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: IPVT(:)
C      REAL EK,ANORM,YNORM,ZNORM

```

C-----


```
C ANOIGONTAI TA ARXEIA STA OPOIA 8A APO8HKEYTOYN
C TA APOTELESMATA KAI OI PINAKES POY 8A PROKYPSON
C APO TO PROGRAMMA
```

C-----

```
OPEN(5,FILE='OUTSYNTET.dat')
OPEN(6,FILE='OUTKOMBOI.dat')
OPEN(7,FILE='OUTMITROO.dat')
OPEN(8,FILE='OUTN.dat')
OPEN(9,FILE='OUTKAPA.DAT')
OPEN(10,FILE='OUTIDIOT.DAT')
OPEN(11,FILE='OUTIDIODYN.DAT')
OPEN(15,FILE='OUTSTIFA.DAT')
```

C-----

```
C DINONTAI EITE MESO ARXEIOY EITE MESO PLHKTROLOGIOY
C O ARI8MOS TON KOMBON STHN Y KAI X KATEY8YNSH
C TO SYNOLIKO MHKOS TON STOIXEION STHN X KAI Y KATEY8YNSH
C KAI YPOLOGIZETAI O ARI8MOS TON STOIXEION STHN KA8E
C KATEY8YNSH
```

C-----

```
PRINT*,'enter 1 for givin input at the screen:'
PRINT*,'enter 2 for givin input from file:'
READ(*,*) IIFL
IF(IIFL.EQ.1)THEN
```

```
PRINT*,'NUMBER OF NODES IN Y'
  READ(*,*) NNY
PRINT*,'NUMBER OF NODES IN X'
  READ(*,*) NNX
PRINT*,'TOTAL LENGTH IN X'
  READ(*,*) hx
PRINT*,'TOTAL LENGTH IN Y'
  READ(*,*) hy
ELSE
```

```
OPEN(125,file='inp.dat')
```

```
READ(125,*)NNY
READ(125,*)NNx
READ(125,*)hx
READ(125,*)hy
```

```
ENDIF
```

```
NELY=NNY-1
NELX=NNX-1
```

```
NUMEL=NELX*NELY
dx=hx/FLOAT(NNX-1)
```

dy=hy/FLOAT(NNY-1)

```

C-----
C O PINAKAS Ax DINEI THN ARI8MESH TON KOMBON STHN X
C KATEY8YNSH
C O PINAKAS Ay DINEI THN ARI8MESH TON KOMBON STHN Y
C KATEY8YNSH
C O PINAKAS STIFF DINEI TO SYNOLIKO MHTROO AKAMPSIAS
C O PINAKAS N DINEI TO MHTROO POY PROKYPTEI APO TH
C SYN8HKH THS
C ELEY8ERHS EPIFANEIAS
C O PINAKAS KAPA PROKYPTEI APO TO A8ROISMA TON EPIPLEON
C OLOKLHROMATON POY EMFANIZONTAI STHN EKSISOSH
C LAPLACE SE
C KYLINDRIKES SYNTETAGMENES
C-----

```

```

ALLOCATE
(Ax(NNY,NNX),Ay(NNY,NNX),STIFF(NNX*NNY,NNX*NNY),ibo(nny))
ALLOCATE
(KAPAE(4,4),KAPA(NNX*NNY,NNX*NNY),STIFA(NNX*NNY,NNX*NNY))
ALLOCATE (IC(4,NUMEL),iw(nny),iw1(nely))
ALLOCATE (STIFFE(4,4),NE(4,4),N(NNX*NNY,NNX*NNY),XYC(NUMEL))

```

```

C-----
C KRATAEI THN ARI8MESH TON KOMBON STHN DEKSIA
C PLEYRA,KAI KSANAKSEKINAEI APO TO 0
C-----

```

```

DO J4=1,NNY
iw(J4)=(J4-1)*NNX
PRINT*,J4,IW(J4)
ENDDO

```

```

WRITE(*,*)
DO J4=1,NELY
IW1(J4)=(J4-1)*NELX
PRINT*,J4,IW1(J4)
ENDDO
READ(*,*)

```

```

DO IB=1,NNY
IB1=IB+(IB-1)*(NNX-1)
IBO(IB)=IB+(IB-1)*(NNX-1)
ENDDO
READ(*,*)

```

I1=0

```
c      IFLAG=0
      XYC(1)=0.5*dx
      DO I=1,NUMEL
      IFLAG=0
      IF (MOD(I,NNX-1).EQ.0) THEN
      I1=0
      IFLAG=1
      ENDIF

      I1=I1+1

      IF(I.EQ.IW1(I1)+1)THEN
      XYC(I)=0.5*dx
      ELSE
      IF(IFLAG.EQ.1)THEN
      XYC(I)=0.5*dx
      ELSE
      XYC(I)=XYC(i-1)+dx
      ENDIF
      ENDIF
      PRINT*, I,I1,XYC(I)
      END DO
```

```
C-----
C      ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ Η ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΗ
C      ΤΟΝ ΚΟΜΒΟΝ
C-----
```

```
      DO J=1,NNY
      DO I=1,NNX

      Ax(J,I)=(I-1)*dx
      Ay(J,I)=(J-1)*dy
      M=(J-1)*NNX+I

      WRITE(5,*) M,J,I,Ax(J,I),Ay(J,I)
      ENDDO
      ENDDO
```

```
C-----
C      ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΠΟΥ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟ
C-----
```

```
      K=0
      L=0

      DO E=1,NUMEL
      IF(MOD(E,NELX).EQ.1.AND.E.NE.1)L=L+1
      L=L+1
```

```
IC(1,E)=L
IC(2,E)=L+1
IC(3,E)=L+NNX+1
IC(4,E)=L+NNX

WRITE(6,*) E,IC(1,E),IC(2,E),IC(3,E),IC(4,E)

ENDDO

OPEN(15,file='1.txt')
```

```
C----- start of iel do loop -----
C   YPOLOGIZETAI TO MHTROO GIA KA8E STOIXEIO KAI STH
C   SYNEXEIA GINETAI
C   H SYN8ESH TOY OLIKOY MHTROOY AKAMPSIAS
C-----

      M1=0
      DO IEL=1,NUMEL
C     DO M=1,numel
C     DO m1=1,NELY
      IF (MOD(M1,NNX-1).EQ.0)M1=0
      M1=M1+1

C-----
C   AN TO STOIXEIO ANHKEI STHN ARISTERH PLEYRA TOTE TO
C   MITROO POY PREPEI
C   EINAI NA DHMIOYRGHTHEI EINAI TO PARAKATO,EKSAITIAS THS
C   SHN8HKHS POY
C   YPARXEI STON AKSONA SYMMETRIAS THS DEKSAMENHS
C   (SYNARTHSH=0)
C-----

      IF(IEL.EQ.(1+NELX*(M1-1))) THEN

      STIFFE(1,1)=0.
      STIFFE(1,2)=0.
      STIFFE(1,3)=0.
      STIFFE(1,4)=0.
      STIFFE(2,1)=0.
      STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
      STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
      STIFFE(2,4)=0.
      STIFFE(3,1)=0.
      STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
      STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
      STIFFE(3,4)=0.
```

STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
 STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
 STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
 STIFFE(4,4)=0.

C-----
 C AN TO STOIXEIO ANHKEI OPOYDHPOTE ALLOY TOTE TO MHTROO
 C EINAI THS
 C PARAKATO MORFHS
 C-----

ELSE

STIFFE(1,1)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(1,2)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(1,3)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(1,4)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(2,1)=STIFFE(1,2)
 STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(2,4)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(3,1)=STIFFE(1,3)
 STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
 STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(3,4)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
 STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
 STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
 STIFFE(4,4)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))

END IF

C-----
 C YPOLOGIZETAI O PINAKAS POY PROKYPTEI APO TA PROS8ETA
 C OLOKΛHROMATA THS
 C EKSISOSHS LAPLACE SE KYLINDRIKES SYNTETAGMENES GIA TO
 C KA8E STOIXEIO KAI
 C META GINETAI H SYN8ESH
 C POY AFORA SE OLA TA STOIXEIA
 C-----

ra=XYC(IEL)

C-----
 C KAI EDO AN TO STOIXEIO ANHKEI STHN ARISTERH PLEYRA TOTE
 C TO MHTROO TOY EINAI
 C THS PARAKATO MORFHS
 C-----

IF(IEL.EQ.(1+NELX*(M1-1))) THEN

KAPAE(1,1)=0.

KAPAE(1,2)=0.

KAPAE(1,3)=0.

KAPAE(1,4)=0.

KAPAE(2,1)=0.

KAPAE(2,2)=-((dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1 *ra)))/(3.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(2,3)=-((dx*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1 *ra)))/(6.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(2,4)=0.

KAPAE(3,1)=0.

KAPAE(3,2)=-((dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1 *ra)))/(6.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(3,3)=-((dx*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1 *ra)))/(3.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(3,4)=0.

KAPAE(4,1)=0.

KAPAE(4,2)=0.

KAPAE(4,3)=0.

KAPAE(4,4)=0.

C-----
C AN TO STOIXEIO DEN ANΗKEI STHN ARISTERH PLEYRA TOTE TO
C MHTROO TOY
C EXEI THN AKOLOY8H MORFH
C-----

ELSE

KAPAE(1,1)=-((dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)))/(3.*(dx**2)
1 *ra)

KAPAE(1,2)=(dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra
1))/(3.*(dx**2))

```

KAPAE(1,3)=(dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))
1      *ra))/(6.*(dx**2))

KAPAE(1,4)=-(dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra))/(6.*(dx**2)
1      *ra)

KAPAE(2,1)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(3.*(dx**2))

KAPAE(2,2)=-(dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1      )*ra))/(3.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(2,3)=-(dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1      )*ra))/(6.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(2,4)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(6.*(dx**2))

KAPAE(3,1)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(6.*(dx**2))

KAPAE(3,2)=-(dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1      )*ra))/(6.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(3,3)=-(dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra)
1      )*ra))/(3.*(dx**2)*(dx+ra))

KAPAE(3,4)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(3.*(dx**2))

KAPAE(4,1)=-(dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra))/(6.*(dx**2)
1      *ra)

KAPAE(4,2)=(dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)
1      )/(6.*(dx**2))

KAPAE(4,3)=(dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)
1      )/(3.*(dx**2))

KAPAE(4,4)=-(dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra))/(3.*(dx**2)
1      *ra)

```

END IF

```

C-----
C   SYN8ESH MHTROOY AKAMPSIAS
C-----

```

```

DO II=1,4
DO JJ=1,4
C   PRINT*,IEL,Ii,Jj,IC(Ii,IEL),IC(JJ,IEL)
STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))=STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))

```

```
      I          +STIFFE(II,JJ)
      ENDDO
      ENDDO
```

```
C-----
C   DHMIOYRGIA MHTROOY POY PROKYPTEI APO THN SYN8HKH
C   STHN
C   ELEY8ERH EPIFANEIA
C-----
```

```
      IF(IEL.LE.IW1(NELY))THEN
      CONTINUE
      ELSE
      NE(1,1)=0.
      NE(1,2)=0.
      NE(1,3)=0.
      NE(1,4)=0.
      NE(2,1)=0.
      NE(2,2)=0.
      NE(2,3)=0.
      NE(2,4)=0.
      NE(3,1)=0.
      NE(3,2)=0.
      NE(3,3)=(dx)/3.
      NE(3,4)=(dx)/6.
      NE(4,1)=0.
      NE(4,2)=0.
      NE(4,3)=(dx)/6.
      NE(4,4)=(dx)/3.
      ENDIF
```

```
C-----
C   SYN8ESH TOY PINAKA N
C-----
```

```
      DO III=1,4
      DO JJJ=1,4
      N(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))=N(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))
      I          +NE(III,JJJ)

      ENDDO
      ENDDO
```

```
C-----
C   SYN8ESH TOY PINAKA KAPA
C-----
```

```
      DO III=1,4
      DO JJJ=1,4
```



```

KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))=KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))
1      +KAPAE(IIII,JJJJ)
END DO
END DO

c      DO Iiii=1,4
c      DO Jjjj=1,4
c      STIFA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))=STIFF(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))
c      1+KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))
c      END DO
c      END DO

c      do i=1,4
c      do j=1,4
c      print*,iel,i,j,IC(i,iel),IC(j,iel)
c      STIFA(IC(I,IEL),IC(J,IEL))=STIFF(IC(I,IEL),IC(J,IEL))
c      1+KAPA(IC(I,IEL),IC(J,IEL))
c      enddo
c      enddo

      END DO
C-----
C      ORISMOS ENOS PINAKA STIFA POY EINAI H DIAFORA TOY STIFF
C      KAI KAPA
C-----

      DO I=1,NNX*NNY
      DO J=1,NNX*NNY
c      print*,iel,i,j,IC(i,iel),IC(j,iel)

      STIFA(I,J)=STIFF(I,J)-KAPA(I,J)
      ENDDO
      ENDDO

      DO II=1,NNX*NNY
      WRITE(15,12345) (STIFA(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
      END DO

C----- end of iel do loop -----
C-----
C      ME TH XRHSH THS YPOROUTINAS GVLRG YPOLOGIZONTAI OI
C      IDIOTIMES
C      TOY PROBLHMATOS
C-----

```

```
C      CALL EVLRG (N1, stiff, LDA1, EVAL)
C      CALL EVCRG (N1,stifa , LDA1, EVAL, EVEC, LDEVEC)
1579  CALL GVLRG (N1, STIFA, LDA1, N, LDB1, ALPHA, BETA)
C      CALL GVCRG (N1, STIFA, LDA1, N, LDB1, ALPHA, BETA, EVEC, LDEVEC)
C      Compute eigenvalues
      DO 10 I=1, N1
          EVAL(I) = ALPHA(I)/BETA(I)
10 CONTINUE
```

```
      DO IJK=1,NNX*NNY
          write(10,*)IJK,EVAL(IJK)
      ENDDO
```

```
      WRITE(10,*)
```

```
      DO I=1,NNX*NNY
      DO J=1,NNX*NNY
```

```
      WRITE(11,*)I,J,EVEC(I,J)
      ENDDO
      ENDDO
```

```
C-----
C      APO8HKEYSH TON APOTELESMATON STA ANTISTOIXA ARXEIA
C-----
```

```
c      DO II=1,NNX*NNY
c      WRITE (7,12345) (STIFF(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
c      WRITE (8,4455) (N(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
c      WRITE (9,12345) (KAPA(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
```

```
c      ENDDO
```

```
c      WRITE(7,*)
c      DO II=1,NNX*NNY
c      WRITE (7,12345) (STIFA(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
```

```
c      ENDDO
```

```
12345 FORMAT (20(1X,F12.5))
4455  FORMAT (9(1X,F12.5))
```

CLOSE (5)
 CLOSE (6)
 CLOSE (7)
 CLOSE (8)
 CLOSE (9)
 CLOSE (10)
 CLOSE (11)
 CLOSE (15)

```
C-----
C          TELOS TOY PROGRAMMATOS
C-----
```

8987 END

9.2.2 Πρόβλημα ωστικής κίνησης

```
PROGRAM grid
use portlib
IMPLICIT NONE
C-----
C          DHLOSEIS METABLHTON
C-----
      INTEGER  LDA1,LDB1, N1,LDEVEC,LDAINV
      PARAMETER (N1=900,LDA1=N1,LDB1=N1,  LDEVEC=N1,LDAINV=N1)
      REAL    AMACH, BETA(N1)
      COMPLEX ALPHA(N1)
      EXTERNAL AMACH, GVLRG
      character*100 dummy
C
      REAL AINV(LDAINV,LDAINV),NSTIFF(N1,N1)
      REAL ABC(LDA1,LDA1)
C
      COMPLEX EVAL(N1)
      EXTERNAL EVLCG, WRCRN,LINRG,WRRRN
      COMPLEX EVEC(LDEVEC,N1)
      real time1
      NTEGER::I,J,IEL,E,NNX,NNY,M,K,NELY,NELX,NUMEL,L,IIFL,IK,JK,J4,IJK
      I ,IJ1,IJ2,I1,I2,IB,K1,K2,IB1,IFLAG,M1,NN,NN1,N
C  INTEGER NDIM,N !,IPVT(N)
C  INTEGER KB,KM1,NM1,KP1
      REAL T,THETA,V,VI
      REAL:: dx,dy,hx,hy,ra
      REAL FORCRIGHT,MR
      INTEGER JJ,II,IJ,III,JJJ,MM,KK,III,JJJ,IPATH
      REAL*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Ax(:,:),Ay(:,:),STIFF(:,:)
```

```

1,KAPA(:,:),KAPAE(:,:),STIFA(:,:)
1,STIFFE(:,:),XYC(:)
INTEGER*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: IC(:,:),IW(:,IW1(:),
    IIBO(:)
REAL(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: A(:,:),B,X,F(:,:),FE(:,:)
C REAL(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: A(:,:)
C REAL, DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: WORK(:)
C INTEGER(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: IPVVT(:)
C REAL EK,ANORM,YNORM,ZNORM

C-----
C ANOIGONTAI TA ARXEIA STA OPOIA 8A APO8HKEYTOYN
C TA APOTELESMATA KAI OI PINAKES POY 8A PROKYPSON
C APO TO PROGRAMMA
C-----

OPEN(5,FILE='OUTSYNTET.dat')
OPEN(6,FILE='OUTKOMBOI.dat')
OPEN(7,FILE='OUTMITROO.dat')
OPEN(8,FILE='OUTN.dat')
OPEN(9,FILE='OUTKAPA.DAT')
OPEN(10,FILE='OUTIDIOT.DAT')
OPEN(11,FILE='OUTIDIODYN.DAT')
OPEN(15,FILE='OUTSTIFA.DAT')
OPEN(16,FILE='OUTRESULTS.DAT')
time1=timef()

C-----
C DINONTAI EITE MESO ARXEIOY EITE MESO PLHKTROLOGIOY
C O ARI8MOS TON KOMBON STHN Y KAI X KATEY8YNSH
C TO SYNOLIKO MHKOS TON STOIXEION STHN X KAI Y KATEY8YNSH
C KAI YPOLOGIZETAI O ARI8MOS TON STOIXEION STHN KA8E KATEY8YNSH
C-----

c PRINT*,'enter 1 for giving input at the screen:'
c PRINT*,'enter 2 for giving input from file:'
c READ(*,*) IIFL
    IIFL=2
    IF(IIFL.EQ.1)THEN

PRINT*,'NUMBER OF NODES IN Y'
    READ(*,*) NNY
PRINT*,'NUMBER OF NODES IN X'
    READ(*,*) NNX
PRINT*,'TOTAL LENGTH IN X'
    READ(*,*) hx
PRINT*,'TOTAL LENGTH IN Y'
    READ(*,*) hy
ELSE
OPEN(1259,file='input.dat')

```

```

read(1259,1253)dummy
READ(1259,1251)NNY
READ(1259,1251)NNX
READ(1259,1252)hx
READ(1259,1252)hy
READ(1259,1252)v
READ(1259,1252)theta
1251 format(9x,i5)
1253 format(9x,a100)
1252 format(9x,f12.5)

ENDIF
write(*,1251)NNY
write(*,1251)NNX
write(*,1252)hx
write(*,1252)hy
write(*,1252)v
write(*,1252)theta
c print*,'VELOCITY OF EXTERNAL EXCITATION'
c read(*,*) V

NELY=NNY-1
NELX=NNX-1
NUMEL=NELX*NELY
dx=hx/FLOAT(NNX-1)
dy=hy/FLOAT(NNY-1)

```

```

C-----
C O PINAKAS Ax DINEI THN ARI8MSH TON KOMBON STHN X KATEY8YNSH
C O PINAKAS Ay DINEI THN ARI8MSH TON KOMBON STHN Y KATEY8YNSH
C O PINAKAS STIFF DINEI TO SYNOLIKO MHTROO AKAMPSIAS
C O PINAKAS N DINEI TO MHTROO POY PROKYPTEI APO TH SYN8HKH THS
C ELEY8ERHS EPIFANEIAS
C O PINAKAS KAPA PROKYPTEI APO TO A8ROISMA TON EPIPLEON
C OLOKLHROMATON POY EMFANIZONTAI STHN EKSISOSH LAPLACE SE
C KYLINDRIKES SYNTETAGMENES
C-----

```

```

ALLOCATE
(Ax(NNY,NNX),Ay(NNY,NNX),STIFF(NNX*NNY,NNX*NNY),ibo(nny))
ALLOCATE
(KAPAE(4,4),KAPA(NNX*NNY,NNX*NNY),STIFA(NNX*NNY,NNX*NNY))
ALLOCATE (IC(4,NUMEL),iw(numel),iw1(nely))
ALLOCATE (STIFFE(4,4),XYC(NUMEL))

```

```

C-----
C KRATAEI THN ARI8MSH TON KOMBON STHN DEKSIA PLEYRA,DHLADH
C SOY DEIXNEI POTE
C-----

```

```

DO J4=1,Numel !ELY
if(mod(j4,nnx-1).eq.0)then
IW(J4)=j4 !(J4-1)*NELX
else
IW(J4)=0
endif
ENDDO

DO J4=1,NELY
IW1(J4)=(J4-1)*NELX
ENDDO

DO IB=1,NNY
IB1=IB+(IB-1)*(NNX-1)
IBO(IB)=IB+(IB-1)*(NNX-1)
ENDDO
I1=0
IFLAG=0
DO I=1,NUMEL
IFLAG=0
IF (MOD(I1,NNX-1).EQ.0) THEN
I1=0
IFLAG=1
ENDIF
I1=I1+1
IF(I.EQ.IW1(I1)+1)THEN
XYC(I)=0.5*dx
ELSE
IF(IFLAG.EQ.1)THEN
XYC(I)=0.5*dx
ELSE
XYC(I)=XYC(I-1)+dx
ENDIF
ENDIF
END DO

```

```

C-----
-----
C   ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ Η ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΗ
ΤΟΝ ΚΟΜΒΟΝ
C-----
-----

```

```

DO J=1,NNY
DO I=1,NNX
Ax(J,I)=(I-1)*dx
Ay(J,I)=(J-1)*dy
M=(J-1)*NNX+I

c   WRITE(5,*) M,J,I,Ax(J,I),Ay(J,I)

```

ENDDO
ENDDO

C-----
C YPOLOGIZONTAI OI KOMBOI POY ANHKOYN SE KA8E STOIXEIO
C-----

K=0
L=0
DO E=1,NUMEL
IF(MOD(E,NELX).EQ.1.AND.E.NE.1)L=L+1
L=L+1
IC(1,E)=L
IC(2,E)=L+1
IC(3,E)=L+NNX+1
IC(4,E)=L+NNX
c WRITE(6,*) E,IC(1,E),IC(2,E),IC(3,E),IC(4,E)
ENDDO
c OPEN(15,file='1.txt')

C----- start of iel do loop -----
C YPOLOGIZETAI TO MHTROO GIA KA8E STOIXEIO KAI STH SYNEXEIA
GINETAI
C H SYN8ESH TOY OLIKOU MHTROOU AKAMPASIAS
C-----

M1=0
DO IEL=1,NUMEL
C DO M=1,numel
C DO m1=1,NELY
IF (MOD(M1,NNX-1).EQ.0)M1=0
M1=M1+1

C-----
C AN TO STOIXEIO ANHKEI STHN ARISTERH PLEYRA TOTE TO MITROO
C POY PREPEI
C EINAI NA DHMIOYRGHTHEI EINAI TO PARAKATO,EKSAITIAS THS
C SHN8HKHS POY
C YPARXEI STON AKSONA SYMMETRIAS THS DEKSAMENHS
C (SYNARTHSH=0)
C-----

C TO MHTROO EINAI THS
C PARAKATO MORFHS
C-----

STIFFE(1,1)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,2)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,3)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(1,4)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,1)=STIFFE(1,2)

```

STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(2,4)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,1)=STIFFE(1,3)
STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
STIFFE(3,4)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
STIFFE(4,4)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))

```

```

C-----
C   SYN8ESH MHTROOY AKAMPSTIAS
C-----

```

```

DO II=1,4
DO JJ=1,4
STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))=STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))
      1                      +STIFFE(II,JJ)
ENDDO
ENDDO

```

```

C-----
C   YPOLOGIZETAI O PINAKAS POY PROKYPTEI APO TA PRO8ETA
C   OLOKLHROMATA THS
C   EKSISOSHS LAPLACE SE KYLINDRIKES SYNTETAGMENES GIA TO KA8E
C   STOIXEIO KAI
C   META GINETAI H SYN8ESH
C   POY AFORA SE OLA TA STOIXEIA
C-----

```

```

=xYC(IEL)

```

```

C-----
C   TO MHTROO TOY
C   EXEI THN AKOLOY8H MORFH
C-----

```

```

KAPAE(1,1)=-
      1      (dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra))/(3.*(dx**2)
      *ra)

```

```

KAPAE(2,1)=
      1      (dy*((1.+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra
      ))/(3.*(dx**2))

```

```

KAPAE(3,1)=(dy*((1.+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))
      1      *ra))/(6.*(dx**2))

```

```

KAPAE(4,1)=-
      1      (dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra))/(6.*(dx**2)
      *ra)

```


$$KAPAE(1,2)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(3.*(dx**2))$$

$$KAPAE(2,2)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(3,2)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(4,2)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(6.*(dx**2))$$

$$KAPAE(1,3)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(6.*(dx**2))$$

$$KAPAE(2,3)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(3,3)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(4,3)=(dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra))/(3.*(dx**2))$$

$$KAPAE(1,4)=-\frac{dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*ra}$$

$$KAPAE(2,4)=\frac{dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(3,4)=\frac{dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(4,4)=-\frac{dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*ra}$$

C-----
 C SYN8ESH TOY PINAKA KAPA
 C-----

```
DO IIII=1,4
  DO JJJJ=1,4
    KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))=KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))
      +KAPAE(IIII,JJJJ)
  END DO
END DO

END DO
```

C-----
 C ORISMOS ENOS PINAKA STIFA POY EINAI H DIAFORA TOY STIFF KAI C
 C KAPA
 C-----

```

c DO I=1,NNX*NNY
c DO J=1,NNX*NNY
c STIFA(I,J)=STIFF(I,J)-KAPA(I,J)
c ENDDO
c ENDDO

```

```

ALLOCATE (A(NNX*NNY-NNY,NNX*NNY-NNY),B(NNX*NNY-NNY),
          1X(NNX*NNY-NNY),
          1F(NNX*NNY,1)
          1,FE(4,4))
IPATH=1

```

```

nN=0
THETA=0.0
V=1.
DO M=1,numel

```

```

IF (M.EQ.iw(m)) THEN
    FE(2,1)=(1./2.)*V*COS(theta)*dy
    FE(3,1)=(1./2.)*V*COS(theta)*dy
    FE(1,1)=0.
    FE(4,1)=0.

```

```

ELSE
    FE(1,1)=0.
    FE(2,1)=0.
    FE(3,1)=0.
    FE(4,1)=0.
END IF

```

```

DO MM=1,4
F(IC(MM,m),1)=F(IC(MM,m),1)+FE(MM,1)
ENDDO

```

```

c ENDDO
c ENDDO

```

```

c-----

```

```

DO I=1,NNX*NNY-NNY
b(I)=f(I,1)
ENDDO

```

```

DO I=1,NNX*NNY-NNY
DO J=1,NNX*NNY-NNY
A(I,J)=STIFF(I,J)-KAPA(I,J)
ENDDO
ENDDO

```

```

c-----
      K1=1
      K2=0
      DO I=1,NNX*NNY-NNY
        DO J=1,NNX*NNY-NNY

          IF (I.EQ.J)THEN
            K2=K2+1
            IF (K2.EQ.K1*NNX.and.k1.le.NNY.and.k2.ne.NNX*NNY)then
              K1=K1+1
            end if
          IF(I.EQ.ipo(K1)) THEN
            A(I,J)=1.0E+30
          END IF
        END if

      ENDDO
    ENDDO

c10001 DO II=1,NNX*NNY-NNY
c      WRITE (7,12345) (STIFF(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
c      WRITE(20,12345) (STIFA(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
c      WRITE(15,12345) (A(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX-nyy)
c      WRITE (8,4455) (N(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
c      WRITE (9,12345) (KAPA(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)

c      ENDDO

      print*,'ok.....1'
      CALL LSLRG (NNX*NNY-NNY, A, NNX*NNY-NNY, B, IPATH, X)

      print*,'ok.....'

      WRITE(*,*)'THE SOLUTION IS:'
      DO I=1,NNX*NNY-NNY
        WRITE(16,7)i,x(i) !b(I)
      ENDDO

7      FORMAT(1x,i5,2x,F10.5)
8      FORMAT(80('-'))
      PRINT*,'THE SYSTEM SOLVED SUCCESSFULLY'

      FORCRIGHT=0.0
      DO N=1,NNY
        NN1=N*NNX
        IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN

```

```
FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(1./2.*X(NN1))
      ELSE
FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(X(NN1))
ENDIF
ENDDO
```

```
OPEN (141,FILE='FORCES.DAT')
WRITE(141,1411)FORCRIGHT
1411  FORMAT(1X,'RIGHT BOUNDARY FORCE:',F12.5)
```

```
C-----
C                                     YPOLOGISMOS ROPON
C-----
```

```
MR=0.0
DO N=1,NNY
  NN1=N*NNX
  IF(N.EQ.1.OR.N.EQ.NNY)THEN
    MR=MR+ DY*(N-1)* DY*(1./2.*X(NN1))
  ELSE
    MR=MR+ DY*(N-1)* DY*(X(NN1))
  ENDIF
ENDDO
```

```
OPEN (142,FILE='ROPES.DAT')
WRITE(142,1412)MR
1412  FORMAT(1X,'ROPI:',F12.5)
```

```
GOTO 10000
10000 CONTINUE
time1=timef()
write(*,6655)time1/60.
6655  format(1x,'cpu time:',f12.5,1x,'mins')
12345 FORMAT (20(1X,F12.5))
4455  FORMAT (9(1X,F12.5))
CLOSE (5)
CLOSE (6)
CLOSE (7)
CLOSE (8)
CLOSE (9)
CLOSE (10)
CLOSE (11)
CLOSE (15)
CLOSE (16)
```

```
C-----
C                                     TELOS TOY PROGRAMMATOS
C-----
```

```
8987  END
```

9.2.3 Πρόβλημα ωστικής και επαγωγικής κίνησης

```

PROGRAM oliko
use portlib
IMPLICIT NONE

C-----
C                                     DHLOSEIS METABLHTON
C-----

INTEGER  LDA1,LDB1, N1,LDEVEC,LDAINV
PARAMETER (N1=900,LDA1=N1,LDB1=N1,  LDEVEC=N1,LDAINV=N1)
REAL    AMACH, BETA(N1)
COMPLEX ALPHA(N1)
EXTERNAL AMACH, GVLRG
CHARACTER*100 dummy

C
REAL AINV(LDAINV,LDAINV),NSTIFF(N1,N1)
REAL ABC(LDA1,LDA1)

C
COMPLEX  EVAL(N1)
EXTERNAL EVLCG, WRCRN,LINRG,WRRRN
COMPLEX  EVEC(LDEVEC,N1)
REAL time1

INTEGER::I,J,IEL,E,NNX,NNY,M,K,NELY,NELX,NUMEL,L,IIFL,IK,JK,J4,IJK
      1 ,IJ1,IJ2,I1,I2,IB,K1,K2,IB1,IFLAG,M1,NN,NN1,C
REAL T,THETA,V,V1,FORCRIGHT,MR
REAL:: dx,dy,hx,hy,ra,lamda
INTEGER JJ,II,IJ,III,JJJ,MM,KK,IIII,JJJJ,IPATH
REAL*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: Ax(:,:),Ay(:,:),STIFF(:,:),
      1,NE(:,:),N(:,:),KAPA(:,:),KAPAE(:,:),STIFA(:,:),
      1,STIFFE(:,:),XYC(:)
INTEGER*4, ALLOCATABLE, DIMENSION(:) :: IC(:,:),IW(:,:),IW1(:,:),
      1IIBO(:)
REAL(4), DIMENSION (:), ALLOCATABLE :: A(:,:),B,X,F(:,:),FE(:,:)

C-----
C ANOIGONTAI TA ARXEIA STA OPOIA 8A APO8HKEYTOYN
C TA APOTELESMATA KAI OI PINAKES POY 8A PROKYPSON
C APO TO PROGRAMMA
C-----

OPEN(5,FILE='OUTSYNTET.dat')
OPEN(6,FILE='OUTKOMBOI.dat')
OPEN(7,FILE='OUTMITROO.dat')
OPEN(8,FILE='OUTN.dat')

```

```
OPEN(9,FILE='OUTKAPA.DAT')
OPEN(10,FILE='OUTIDIOT.DAT')
OPEN(11,FILE='OUTIDIODYN.DAT')
OPEN(15,FILE='OUTSTIFA.DAT')
OPEN(16,FILE='OUTRESULTS.DAT')
time1=timef()
```

```
C-----
C  DINONTAI EITE MESO ARXEIOY EITE MESO PLHKTROLOGIOY
C  O ARI8MOS TON KOMBON STHN Y KAI X KATEY8YNSH
C  TO SYNOLIKO MHKOS TON STOIXEION STHN X KAI Y KATEY8YNSH
C  KAI YPOLOGIZETAI O ARI8MOS TON STOIXEION STHN KA8E KATEY8YNSH
C-----
```

```
c  PRINT*,'enter 1 for giving input at the screen:'
c  PRINT*,'enter 2 for giving input from file:'
c  READ(*,*) IIFL
   IIFL=2
   IF(IIFL.EQ.1)THEN
   PRINT*,'NUMBER OF NODES IN Y'
     READ(*,*) NNY
   PRINT*,'NUMBER OF NODES IN X'
     READ(*,*) NNX
   PRINT*,'TOTAL LENGTH IN X'
     READ(*,*) hx
   PRINT*,'TOTAL LENGTH IN Y'
     READ(*,*) hy
   ELSE
   OPEN(1259,file='input.dat')
   READ(1259,1253)dummy
   READ(1259,1251)NNY
   READ(1259,1251)NNX
   READ(1259,1252)hx
   READ(1259,1252)hy
   READ(1259,1252)v
   READ(1259,1252)theta
   READ(1259,1252)lamda
   1251  FORMAT(9x,i5)
   1253  FORMAT(9x,a100)
   1252  FORMAT(9x,f12.5)

   ENDIF

   WRITE(*,1251)NNY
   WRITE(*,1251)NNX
   WRITE(*,1252)hx
   WRITE(*,1252)hy
   WRITE(*,1252)v
   WRITE(*,1252)theta
```

```
NELY=NNY-1
NELX=NNX-1
```

```
NUMEL=NELX*NELY
dx=hx/FLOAT(NNX-1)
dy=hy/FLOAT(NNY-1)
```

```
C-----
C  Ο ΠΙΝΑΚΑΣ Ax ΔΙΝΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΟΝ ΚΟΜΒΟΝ ΣΤΗΝ Χ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
C  Ο ΠΙΝΑΚΑΣ Ay ΔΙΝΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΟΝ ΚΟΜΒΟΝ ΣΤΗΝ Υ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
C  Ο ΠΙΝΑΚΑΣ STIFF ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ
C  Ο ΠΙΝΑΚΑΣ N ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΤΗΣ
C  ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ
C  Ο ΠΙΝΑΚΑΣ KAPA ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΤΟ Α8ΡΟΙΣΜΑ ΤΟΝ ΕΠΙΠΛΕΟΝ
C  ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΝ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΣΙΣΩΣΗ LAPLACE ΣΕ
C  ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ
C-----
```

```
ALLOCATE
(Ax(NNY,NNX),Ay(NNY,NNX),STIFF(NNX*NNY,NNX*NNY),ibo(nny))
ALLOCATE
(KAPAE(4,4),KAPA(NNX*NNY,NNX*NNY),STIFA(NNX*NNY,NNX*NNY))
ALLOCATE (IC(4,NUMEL),iw(numel),iw1(nely))
ALLOCATE (STIFFE(4,4),NE(4,4),N(NNX*NNY,NNX*NNY),XYC(NUMEL))
```

```
C-----
C  ΚΡΑΤΑΕΙ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΟΝ ΚΟΜΒΟΝ ΣΤΗΝ ΔΕΞΙΑ ΠΛΕΥΡΑ
C-----
```

```
DO J4=1,NUMEL
IF(MOD(J4,NNX-1).EQ.0)THEN
IW(J4)=J4
ELSE
IW(J4)=0
ENDIF
ENDDO
```

```
DO J4=1,NELY
IW1(J4)=(J4-1)*NELX
ENDDO
```

```
DO IB=1,NNY
IB1=IB+(IB-1)*(NNX-1)
IBO(IB)=IB+(IB-1)*(NNX-1)
ENDDO
```

```
I1=0
IFLAG=0
DO I=1,NUMEL
IFLAG=0
```

```
IF (MOD(I1,NNX-1).EQ.0) THEN
I1=0
IFLAG=1
ENDIF
I1=I1+1
IF(I.EQ.IW1(I1)+1)THEN
XYC(I)=0.5*dx
ELSE
IF(IFLAG.EQ.1)THEN
XYC(I)=0.5*dx
ELSE
XYC(I)=XYC(I-1)+dx
ENDIF
ENDIF
ENDDO
```

```
C-----
C  YPOLOGIZONTAI OI SYNTETAGMENES KAI H SYNOLIKH ARI8MESH TON
KOMBON
C-----
```

```
DO J=1,NNY
DO I=1,NNX

Ax(J,I)=(I-1)*dx
Ay(J,I)=(J-1)*dy
M=(J-1)*NNX+I

c  WRITE(5,*) M,J,I,Ax(J,I),Ay(J,I)
ENDDO
ENDDO
```

```
C-----
C  YPOLOGIZONTAI OI KOMBOI POY ANHKOYN SE KA8E STOIXEIO
C-----
```

```
K=0
L=0

DO E=1,NUMEL
IF(MOD(E,NELX).EQ.1.AND.E.NE.1)L=L+1
L=L+1
IC(1,E)=L
IC(2,E)=L+1
IC(3,E)=L+NNX+1
IC(4,E)=L+NNX

c  WRITE(6,*) E,IC(1,E),IC(2,E),IC(3,E),IC(4,E)

ENDDO
```


c OPEN(15,file='1.txt')

C----- start of iel do loop -----
 C YPOLOGIZETAI TO MHTROO GIA KA8E STOIXEIO KAI STH SYNEXEIA
 C GINETAI
 C H SYN8ESH TOY OLIKOY MHTROOY AKAMPSIAS
 C-----

M1=0
 DO IEL=1,NUMEL
 IF (MOD(M1,NNX-1).EQ.0)M1=0
 M1=M1+1

STIFFE(1,1)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(1,2)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(1,3)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(1,4)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(2,1)=STIFFE(1,2)
 STIFFE(2,2)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(2,3)=(1./16.)*dx*dy*(8./(3.*(dx**2))-16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(2,4)=(1./16.)*dx*dy*(-8./(3.*(dx**2))-8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(3,1)=STIFFE(1,3)
 STIFFE(3,2)=STIFFE(2,3)
 STIFFE(3,3)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(3,4)=(1./16.)*dx*dy*(-16./(3.*(dx**2))+8./(3.*(dy**2)))
 STIFFE(4,1)=STIFFE(1,4)
 STIFFE(4,2)=STIFFE(2,4)
 STIFFE(4,3)=STIFFE(3,4)
 STIFFE(4,4)=(1./16.)*dx*dy*(16./(3.*(dx**2))+16./(3.*(dy**2)))

C-----
 C SYN8ESH MHTROOY AKAMPSIAS
 C-----

DO II=1,4
 DO JJ=1,4
 STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))=STIFF(IC(II,IEL),IC(JJ,IEL))
 +STIFFE(II,JJ)
 ENDDO
 ENDDO

C-----
 C YPOLOGIZETAI O PINAKAS POY PROKYPTEI APO TA PROS8ETA
 OLOKLRHOMATA THS
 C EKSISOSHS LAPLACE SE KYLINDRIKES SYNTETAGMENES GIA TO KA8E
 STOIXEIO KAI

C META GINETAI H SYN8ESH
 C POY AFORA SE OLA TA STOIXEIA
 C-----

$$ra=xYC(IEL)$$

$$KAPAE(1,1)=-\frac{dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*ra}$$

$$KAPAE(2,1)=\frac{dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(3,1)=\frac{dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(4,1)=-\frac{dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*ra}$$

$$KAPAE(1,2)=\frac{dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra)}{3.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(2,2)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(3,2)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(4,2)=\frac{dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra)}{6.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(1,3)=\frac{dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra)}{6.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(2,3)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(3,3)=-\frac{dy*ra*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*(dx+ra)}$$

$$KAPAE(4,3)=\frac{dy*(dx+(LOG(ra)-LOG(ra+dx))*ra)}{3.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(1,4)=-\frac{dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)*ra}$$

$$KAPAE(2,4)=\frac{dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{6.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(3,4)=\frac{dy*((1+LOG(ra)-LOG(dx+ra))*dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)}$$

$$KAPAE(4,4)=-\frac{dy*(dx+ra)*(dx+(LOG(ra)-LOG(dx+ra))*ra)}{3.*(dx**2)*ra}$$

C-----
C SYN8ESH TOY PINAKA KAPA
C-----

```
DO IIII=1,4
  DO JJJJ=1,4
    KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))=KAPA(IC(IIII,IEL),IC(JJJJ,IEL))
    1 +KAPAE(IIII,JJJJ)
  END DO
END DO
```

C-----
C DHMIOYRGIA MHTROOY POY PROKYPTEI APO THN SYN8HKH STHN
C ELEY8ERH EPIFANEIA
C-----

```
IF(IEL.LE.IW1(NELY))THEN
CONTINUE
NE(1,1)=0.
NE(1,2)=0.
NE(1,3)=0.
NE(1,4)=0.
NE(2,1)=0.
NE(2,2)=0.
NE(2,3)=0.
NE(2,4)=0.
NE(3,1)=0.
NE(3,2)=0.
NE(3,3)=0.
NE(3,4)=0.
NE(4,1)=0.
NE(4,2)=0.
NE(4,3)=0.
NE(4,4)=0.
```

ELSE

```
NE(1,1)=0.
NE(1,2)=0.
NE(1,3)=0.
NE(1,4)=0.
NE(2,1)=0.
NE(2,2)=0.
NE(2,3)=0.
NE(2,4)=0.
NE(3,1)=0.
NE(3,2)=0.
NE(3,3)=(dx)/3.
NE(3,4)=(dx)/6.
```

```

NE(4,1)=0.
NE(4,2)=0.
NE(4,3)=(dx)/6.
NE(4,4)=(dx)/3.
ENDIF

```

```

C-----
C   SYN8ESH TOY PINAKA N
C-----

```

```

DO III=1,4
  DO JJJ=1,4
    N(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))=N(IC(III,IEL),IC(JJJ,IEL))
      1                +NE(III,JJJ)
  ENDDO
ENDDO

ENDDO

```

```

C-----
C   ORISMOS ENOS PINAKA STIFA POY EINAI H DIAFORA TOY STIFF KAI
C   KAPA
C-----

```

```

c   DO I=1,NNX*NNY
c   DO J=1,NNX*NNY
c   STIFA(I,J)=STIFF(I,J)-KAPA(I,J)
c   ENDDO
c   ENDDO

```

```

C----- end of iel do loop -----

```

```

ALLOCATE (A(NNX*NNY,NNX*NNY),B(NNX*NNY),
  1X(NNX*NNY),
  1F(NNX*NNY,1)
  1,FE(4,4))
IPATH=1

```

```

nN=0

```

```

DO M=1,numel
IF (M.EQ.iw(m)) THEN
  FE(2,1)=(1./2.)*V*COS(theta)*dy
  FE(3,1)=(1./2.)*V*COS(theta)*dy
  FE(1,1)=0.
  FE(4,1)=0.

```

```

ELSE
    FE(1,1)=0.
    FE(2,1)=0.
    FE(3,1)=0.
    FE(4,1)=0.
END IF

DO MM=1,4
    F(IC(MM,m),1)=F(IC(MM,m),1)+FE(MM,1)
ENDDO

ENDDO

c-----
DO I=1,NNX*NNY
    b(I)=f(I,1)
ENDDO

DO I=1,NNX*NNY
    DO J=1,NNX*NNY
        A(I,J)=STIFF(I,J)-KAPA(I,J)-lamda*N(I,J)
    ENDDO
ENDDO

c-----
K1=1
K2=0

DO I=1,NNX*NNY
DO J=1,NNX*NNY

IF (I.EQ.J)THEN
    K2=K2+1
    IF (K2.EQ.K1*NNX.and.k1.LE.NNY.and.k2.NE.NNX*NNY)then
        K1=K1+1
    end if
    IF(I.EQ.IBO(K1)) THEN
        A(I,J)=1.0E+30
    END IF
END IF

ENDDO
ENDDO

c10001 DO II=1,NNX*NNY
c    WRITE (7,12345) (STIFF(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)
c    WRITE(20,12345) (STIFA(II,JJ),JJ=1,NNY*NNX)

```

```

c WRITE(15,12345) (A(I1,J1),J1=1,NNY*NNX-nny)
c WRITE (8,4455) (N(I1,J1),J1=1,NNY*NNX)
c WRITE (9,12345) (KAPA(I1,J1),J1=1,NNY*NNX)

c ENDDO

print*,'ok.....!'
CALL LSLRG (NNX*NNY, A, NNX*NNY, B, IPATH, X)

print*,'ok.....!'

WRITE(*,*)'THE SOLUTION IS:'
DO I=1,NNX*NNY
WRITE(16,7)i,x(i) !b(I)
ENDDO
7 FORMAT(1x,i5,2x,F10.5)
8 FORMAT(80('-'))
PRINT*,'THE SYSTEM SOLVED SUCCESSFULLY'

FORCRIGHT=0.0
DO C=1,NNY
NN1=C*NNX
IF(C.EQ.1.OR.C.EQ.NNY)THEN
FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(1./2.*X(NN1))
ELSE
FORCRIGHT=FORCRIGHT+ DY*(X(NN1))
ENDIF
ENDDO

OPEN (141,FILE='FORCES.DAT')
WRITE(141,1411)FORCRIGHT
1411 FORMAT(1X,'RIGHT BOUNDARY FORCE:',F12.5)

C-----
C YPOLOGISMOS ROPON
C-----

MR=0.0
DO C=1,NNY
NN1=C*NNX
IF(C.EQ.1.OR.C.EQ.NNY)THEN
MR=MR+ DY*(C-1)* DY*(1./2.*X(NN1))
ELSE
MR=MR+ DY*(C-1)* DY*(X(NN1))
ENDIF
ENDDO
OPEN (142,FILE='ROPES.DAT')
WRITE(142,1412)MR
1412 FORMAT(1X,'ROPH:',F12.5)

GOTO 10000

```

```
10000 CONTINUE
      time1=timef()
      write(*,6655)time1/60.
6655  format(1x,'cpu time:',f12.5,1x,'mins')
12345 FORMAT (20(1X,F12.5))
4455  FORMAT (25(1X,F12.5))
```

```
      CLOSE (5)
      CLOSE (6)
      CLOSE (7)
      CLOSE (8)
      CLOSE (9)
      CLOSE (10)
      CLOSE (11)
      CLOSE (15)
      CLOSE (16)
```

```
C-----
C                                     TELOS TOY PROGRAMMATOS
C-----
```

```
8987  END
```