
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**ΔΙΦΑΣΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΗ
ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ**

**Διπλωματική Εργασία Σ. Α. Εκμεκτζόγλου
Επιβλέπων : Δρ. Μ. Α. Καττής**

ΒΟΛΟΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 1996



αρ. εισ. 39/Π.Α.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 944/1
Ημερ. Εισ.: 12-09-1997
Δωρεά:
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
1996
ΕΚΜ

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Οι βασικές εξισώσεις της ανισότροπης ελαστικότητας	3
3	Τα ελαστικά προβλήματα της ανισότροπης ελαστικότητας	7
4	Τα διδιάστατα προβλήματα της ανισότροπης ελαστικότητας	8
5	Η μιγαδική διατύπωση του αντιεπίπεδου προβλήματος	11
5.1	Η ελικοειδής γραμμοαταξία σε άπειρο σώμα	13
6	Σύμμορφοι μετασχηματισμοί	15
6.1	Ο ισότροπος σύμμορφος μετασχηματισμός	15
6.2	Ο ανισότροπος σύμμορφος μετασχηματισμός	16
7	Τα διφασικά διδιάστατα μοντέλα των σύνθετων ανισότροπων υλικών ...	18
8	Τα διφασικά δυναμικά των διφασικών μοντέλων	20
9	Ανομοιογένειες σε ελαστική μήτρα	23
9.1	Ομοιόμορφος διατμητικός μετασχηματισμός μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας	23
9.2	Διατάραξη ενός ομοιόμορφου διατμητικού πεδίου από μια ελλειπτική ανομοιογένεια	25
10	Αλληλεπίδραση ελικοειδής γραμμοαταξίας με διεπιφάνειες	26
10.1	Ελικοειδής γραμμοαταξία δίπλα σε ελλειπτική ανομοιογένεια	26
10.2	Ελικοειδής γραμμοαταξία κοντά σε επίπεδη ανομοιογένεια ...	28
11	Συμπεράσματα	28
	Βιβλιογραφία	29

1 Εισαγωγή

Μια ερώτηση που έχει προκαλέσει αρκετό ενδιαφέρον στην ελαστικότητα είναι στο αν και κατά πόσο ο αριθμός των τεσσάρων αρμονικών συναρτήσεων της λύσης των Parkovich-Newber του τρισδιάστατου ελαστικού προβλήματος μπορεί να μειωθεί σε τρεις χωρίς να αλλοιωθεί η πληρότητα της λύσης. Βασιζόμενος σε ένα αστήρικτο μαθηματικά επιχείρημα, ο Newber [1] οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι μια οποιαδήποτε από αυτές τις τέσσερις συναρτήσεις μπορεί να εξισωθεί με το μηδέν χωρίς να χαθεί η πληρότητα της λύσης. Αυτή η άποψη είναι γενικά σωστή υπό την προϋπόθεση ότι η γεωμετρία του σώματος δεν συναντάει ορισμένες συνθήκες. Η αυστηρή διατύπωση των συνθηκών για τις οποίες μια τέτοια μείωση είναι επιτρεπτή τέθηκε από τους Eubanks και Sternberg [2]. Επίσης οι Eubanks και Sternberg έδειξαν ότι, στην περίπτωση προβλημάτων στρέψης με αξονική συμμετρία, δύο συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού της λύσης Parkovich-Newber μπορούν να τεθούν ίσες με το μηδέν.

Στην ισότροπη ελαστικότητα, μια τρισδιάστατη ελαστική κατάσταση στην οποία οι μεταβλητές πεδίου είναι ανεξάρτητες της μιας Καρτεσιανής συντεταγμένης μπορεί να μελετηθεί ως δύο ξεχωριστά προβλήματα, που είναι γνωστά ως επίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση. Η λύση των Parkovich-Newber για το ελαστικό πρόβλημα της συνεπίπεδης παραμόρφωσης εμπλέκει τρεις βαθμωτές αρμονικές συναρτήσεις δύο από τις οποίες είναι συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού, ενώ η λύση του προβλήματος της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης εμπλέκει μία μόνο αρμονική συνάρτηση. Είχε αποδειχθεί ότι η πληρότητα της λύσης του συνεπίπεδου προβλήματος διατηρείται, είτε θέτοντας ένα από τις συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού ίσο με το μηδέν, είτε επιβάλλοντας μεταξύ αυτών των συνιστωσών μια συνθήκη τύπου Cauchy-Riemann [3]. Εύκολα δείχνεται ότι η τελευταία περίπτωση είναι μια ισοδύναμη μορφή της περίφημης γνωστής λύσης των μιγαδικών δυναμικών του Muskhelishvili [4].

Η παραπάνω ερώτηση αναφορικά με την πληρότητα της ελαστικής λύσης έχει πρόσφατα διευθυνθεί σε διδιάστατα ελαστικά συστήματα που αποτελούνται από δύο διακριτές φάσεις ομογενών και ισότροπων υλικών [5,6]. Στα πλαίσια της μιγαδικής θεωρίας της διδιάστατης ελαστικότητας, έχει βρεθεί ότι για τέτοια συστήματα ο ελάχιστος αριθμός των ανεξάρτητων ολομορφικών συναρτήσεων που περιγράφουν πλήρως τις μεταβλητές του πεδίου είναι ίσος με αυτόν της ομογενούς περίπτωσης. Αυτές οι συναρτήσεις αποτελούν τα *διφασικά δυναμικά* του συστήματος και υπάρχουν δύο τέτοιες συναρτήσεις για το πρόβλημα της συνεπίπεδης παραμόρφωσης και μία μόνο για το πρόβλημα της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης. Εχοντας αποδείξει την ισοδυναμία ανάμεσα στις αντιπροσωπεύ-

σεις των λύσεων των Muskhelishvili και Parkovich-Newber για το συνεπίπεδο πρόβλημα, το συμπέρασμα αυτό μπορεί να παρουσιαστεί σε όρους αρμονικών συναρτήσεων των Parkovich-Newber. Στην περίπτωση αυτή τα δυναμικά των Parkovich-Newber των δύο φάσεων μπορούν να εκφραστούν σε όρους δύο αρμονικών συναρτήσεων, οι οποίες αποτελούν τα διφασικά δυναμικά του συστήματος. Τέτοιες εκφράσεις έχουν αναπτυχθεί προηγούμενα από τον Aderogba [7] για μια κυκλική ανομοιογένεια χρησιμοποιώντας την λύση των Parkovich-Newber για την συνεπίπεδη παραμόρφωση.

Στην παρούσα εργασία, τα προηγούμενα αποτελέσματα επεκτείνονται για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση ενός διφασικού συστήματος της ανισότροπης ελαστικότητας. Στην ανισότροπη ελαστικότητα, μια τρισδιάστατη ελαστική κατάσταση που εξαρτάται από τις δύο συντεταγμένες του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων μπορεί να διασπαστεί σε συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση, μόνο στην περίπτωση που το ανισότροπο υλικό κατέχει ένα επίπεδο ελαστικής συμμετρίας. Χρησιμοποιώντας την αντιπροσώπευση της λύσης των Enshelby-Lekhnitskii [8,9] σε συνδυασμό με μια τεχνική σύμμορφης απεικόνισης, βρίσκεται, ότι μία μόνο ολόμορφη συνάρτηση μπορεί να περιγράψει την αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος. Τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων εκφράζονται σε όρους αυτής της συνάρτησης, που αποτελεί το διφασικό δυναμικό του συστήματος. Τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν εφαρμόζονται για να αναπτυχθούν λύσεις σε προβλήματα μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας σε ελαστική μήτρα, και στο πρόβλημα των ημιάπειρων περιοχών συνδεδεμένων κατά μήκος μιας επίπεδης διεπιφάνειας.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής: στα κεφάλαια 2 και 3 αναπτύσσεται περιληπτικά η βασική ελαστική θεωρία των ανισότροπων υλικών, και στο κεφάλαιο 4 συζητούνται τα δύο βασικά ελαστικά προβλήματα της διδιάστατης ελαστικότητας. Στο κεφάλαιο 5 παρέχεται μια εναλλακτική διατύπωση της λύσης του αντιεπίπεδου προβλήματος με μιγαδικές μεταβλητές, ενώ στο κεφάλαιο 6 περιγράφονται οι τεχνικές της σύμμορφης απεικόνισης που χρησιμοποιούνται στον φορμαλισμό του προβλήματος που εξετάζεται. Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα δύο ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα των σύνθετων ανισότροπων υλικών και στο κεφάλαιο 8 κατασκευάζεται η αντιπροσώπευση της λύσης του αντιεπίπεδου προβλήματος, όπου εισάγεται την έννοια του διφασικού δυναμικού. Τέλος στα κεφάλαια 9 και 10 εξάγονται λύσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα εφαρμόζοντας την προτεινόμενη μέθοδο.

2 Οι βασικές εξισώσεις της ανισότροπης ελαστικότητας

Ένα σώμα παραμορφώνεται ελαστικά εξαιτίας εξωτερικών δυνάμεων ή εσωτερικών καταναγκασμών με την θερμοκρασία της απαραμόρφωτης κατάστασης να παραμένει σταθερή. Αναφορικά με ένα σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο του σώματος περιγράφεται από τον ταυυστή των τάσεων

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

όπου $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Όταν η διαδικασία παραμόρφωσης του σώματος δεν εμπλέκει δυναμικά φαινόμενα και δεν υπάρχουν μαζικές δυνάμεις, οι συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων πρέπει να ικανοποιούν τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις αυτές σε συνεπτυγμένη μορφή γράφονται

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Η επανάληψη δείκτη σε σχέση δηλώνει άθροισμα ως προς το δείκτη αυτό ($\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$), ενώ οι λατινικοί δείκτες όπου εμφανίζονται, θα παίρνουν τις τιμές 1, 2 και 3. Η παραμορφωμένη κατάσταση του σώματος στην περιοχή ενός σημείου περιγράφεται από τον ταυυστή παραμορφώσεων

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Οι συνιστώσες ε_{ij} του ταυυστή παραμορφώσεων \mathbf{e} συνδέονται με τις συνιστώσες u_i του διανύσματος μετατόπισης $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Στην περίπτωση του ομοιογενούς και γραμμικού ανισότροπου υλικού, οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων και παραμορφώσεων συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις, που είναι γνωστές ως ο γενικευμένος νόμος του Hooke:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{1123}\varepsilon_{23} + C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{12} &= C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1213}\varepsilon_{13} + C_{1221}\varepsilon_{21} + C_{1222}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{1223}\varepsilon_{23} + C_{1231}\varepsilon_{31} + C_{1232}\varepsilon_{32} + C_{1233}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{13} &= C_{1311}\varepsilon_{11} + C_{1312}\varepsilon_{12} + C_{1313}\varepsilon_{13} + C_{1321}\varepsilon_{21} + C_{1322}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{1323}\varepsilon_{23} + C_{1331}\varepsilon_{31} + C_{1332}\varepsilon_{32} + C_{1333}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{21} &= C_{2111}\varepsilon_{11} + C_{2112}\varepsilon_{12} + C_{2113}\varepsilon_{13} + C_{2121}\varepsilon_{21} + C_{2122}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{2123}\varepsilon_{23} + C_{2131}\varepsilon_{31} + C_{2132}\varepsilon_{32} + C_{2133}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{22} &= C_{2211}\varepsilon_{11} + C_{2212}\varepsilon_{12} + C_{2213}\varepsilon_{13} + C_{2221}\varepsilon_{21} + C_{2222}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{2223}\varepsilon_{23} + C_{2231}\varepsilon_{31} + C_{2232}\varepsilon_{32} + C_{2233}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{23} &= C_{2311}\varepsilon_{11} + C_{2312}\varepsilon_{12} + C_{2313}\varepsilon_{13} + C_{2321}\varepsilon_{21} + C_{2322}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{2323}\varepsilon_{23} + C_{2331}\varepsilon_{31} + C_{2332}\varepsilon_{32} + C_{2333}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{31} &= C_{3111}\varepsilon_{11} + C_{3112}\varepsilon_{12} + C_{3113}\varepsilon_{13} + C_{3121}\varepsilon_{21} + C_{3122}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{3123}\varepsilon_{23} + C_{3131}\varepsilon_{31} + C_{3132}\varepsilon_{32} + C_{3133}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{32} &= C_{3211}\varepsilon_{11} + C_{3212}\varepsilon_{12} + C_{3213}\varepsilon_{13} + C_{3221}\varepsilon_{21} + C_{3222}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{3223}\varepsilon_{23} + C_{3231}\varepsilon_{31} + C_{3232}\varepsilon_{32} + C_{3233}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{33} &= C_{3311}\varepsilon_{11} + C_{3312}\varepsilon_{12} + C_{3313}\varepsilon_{13} + C_{3321}\varepsilon_{21} + C_{3322}\varepsilon_{22} \\
 &\quad + C_{3323}\varepsilon_{23} + C_{3331}\varepsilon_{31} + C_{3332}\varepsilon_{32} + C_{3333}\varepsilon_{33}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνεπτυγμένη μορφή γράφονται

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn}. \tag{7}$$

Οι ογδοντάενα ποσότητες C_{ijmn} αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή τετάρτης τάξης και ορίζουν τις ελαστικές σταθερές του υλικού. Παίρνοντας υπόψη τις συμμετρικές ιδιότητες του τανυστή των τάσεων και παραμορφώσεων οι σταθερές C_{ijmn} ικανοποιούν τις σχέσεις

$$C_{ijmn} = C_{jimn}, \quad C_{ijmn} = C_{ijnm}, \quad \text{κτλ.}$$

Το γεγονός αυτό ανάγει τις ογδοντάενα σταθερές σε τριανταέξι. Για απλοποίηση της ανάλυσης εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις ελαστικές σταθερές C_{ijmn} : θεωρώντας τους δείκτες των ελαστικών σταθερών σαν δύο ζευγάρια συμμετρικών δεικτών (i, j) και (m, n) και κάνοντας την αντιστοιχία

$$(11) \leftrightarrow 1, \quad (22) \leftrightarrow 2, \quad (33) \leftrightarrow 3, \quad (23) \leftrightarrow 4, \quad (13) \leftrightarrow 5, \quad (12) \leftrightarrow 6$$

ο συμβολισμός των ελαστικών σταθερών μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής:

$$C_{1111} \leftrightarrow C_{(11)(11)} \leftrightarrow c_{11}, \quad C_{1112} \leftrightarrow C_{(11)(12)} \leftrightarrow c_{16}$$

$$C_{1312} \leftrightarrow C_{(13)(12)} \leftrightarrow c_{56}, \quad C_{2311} \leftrightarrow C_{(23)(11)} \leftrightarrow c_{41} \quad \text{κλπ.}$$

Με τον τροποποιημένο τώρα συμβολισμό οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων (6) γράφονται

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} + 2c_{14}\varepsilon_{23} + 2c_{15}\varepsilon_{13} + 2c_{16}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= c_{21}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22} + c_{23}\varepsilon_{33} + 2c_{24}\varepsilon_{23} + 2c_{25}\varepsilon_{13} + 2c_{26}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{33} &= c_{31}\varepsilon_{11} + c_{32}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33} + 2c_{34}\varepsilon_{23} + 2c_{35}\varepsilon_{13} + 2c_{36}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{32} &= c_{41}\varepsilon_{11} + c_{42}\varepsilon_{22} + c_{43}\varepsilon_{33} + 2c_{44}\varepsilon_{23} + 2c_{45}\varepsilon_{13} + 2c_{46}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{31} &= c_{51}\varepsilon_{11} + c_{52}\varepsilon_{22} + c_{53}\varepsilon_{33} + 2c_{54}\varepsilon_{23} + 2c_{55}\varepsilon_{13} + 2c_{56}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{21} &= c_{61}\varepsilon_{11} + c_{62}\varepsilon_{22} + c_{63}\varepsilon_{33} + 2c_{64}\varepsilon_{23} + 2c_{65}\varepsilon_{13} + 2c_{66}\varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

Θεωρώντας την ενέργεια παραμόρφωσης ως συνάρτηση των συνιστωσών ε_{ij} του τανυστή παραμορφώσεων ε , γράφουμε

$$W = W(\varepsilon_{ij}) \quad (9)$$

Η συνάρτηση αυτή πρέπει να είναι μια συνεχής συνάρτηση των ε_{ij} . Αυτό εξασφαλίζεται μαθηματικά όταν

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{22}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{22} \partial \varepsilon_{11}}. \quad (10)$$

Από την σχέση αυτή συνάγεται ότι $c_{12} = c_{21}$. Με όμοιο τρόπο συνάγεται η συμμετρία και των υπολοίπων ελαστικών σταθερών που ελαττώνει τις τριανταέξι ελαστικές σταθερές σε είκοσιένα.

Επειδή οι σχέσεις (8) είναι γραμμικές ως προς τις συνιστώσες παραμόρφωσης ε_{ij} και η εξεταζομένη κατάσταση είναι ελαστική, οι σχέσεις αυτές καλούνται σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων για ένα γραμμικά ελαστικό υλικό. Μια διεξοδική αντιμετώπιση της αντίστοιχης θεωρίας δίνεται στην περίφημη μονογραφία του S.G.Lekhnitskii με κύκλο *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body* [9].

Οι συνιστώσες C_{ijmn} , όπως εμφανίζονται στην (6), αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή τετάρτης τάξης και μετασχηματίζονται με τον ακόλουθο τρόπο όταν αλλάζει το σύστημα αναφοράς:

$$C'_{pqrs} = \cos(x_i, x_p^*) \cos(x_j, x_q^*) \cos(x_m, x_r^*) \cos(x_n, x_s^*) C_{ijmn} \quad (11)$$

όπου, C'_{pqrs} είναι ο τανυστής τετάρτης τάξης ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , και (x_k, x_l^*) η γωνία που σχηματίζει ο άξονας x_k με τον

άξονα x_i^* . Αν οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού είναι συμμετρικές ως προς διάφορα επίπεδα συμμετρίας (επίπεδα ελαστικής συμμετρίας), τότε οι εικοσιένα ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές μειώνονται. Υλικά με τρία επίπεδα ελαστικής συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους καλούνται ορθότροπα, όπως είναι για παράδειγμα το ξύλο. Στην περίπτωση αυτή οι ελαστικές σταθερές μειώνονται σε εννιά.

Παρατηρούμε από τις (5) ότι, όταν το υλικό παραμορφώνεται οι έξι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης ε_{ij} δεν μπορούν να συμπεριφέρονται ανεξάρτητα, αλλά πρέπει να εξάγονται από τις τρεις συνιστώσες u_i του διανύσματος μετατόπισης. Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες, προκειμένου οι έξι συνιστώσες των παραμορφώσεων να εξάγονται από τις τρεις συναρτήσεις των μετατοπίσεων u_i αποτελούν τις *συνθήκες συμβιβαστότητας*. Οι συνθήκες αυτές σε μητρωική μορφή είναι:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{x_1} & U_{x_3} & U_{x_2} \\ U_{x_3} & R_{x_2} & U_{x_1} \\ U_{x_2} & U_{x_1} & R_{x_3} \end{bmatrix} = 0, \quad (12)$$

όπου

$$\begin{aligned} R_{x_1} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ R_{x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ R_{x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ U_{x_1} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ U_{x_2} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ U_{x_3} &= -\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

3 Τα ελαστικά προβλήματα της ανισότροπης ελαστικότητας

Ο προσδιορισμός των δεκαπέντε αγνώστων συναρτήσεων, δηλαδή των έξι συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης ϵ_{ij} , των έξι συνιστωσών του τανυστή τάσης σ_{ij} και των τριών συνιστωσών του διανύσματος μετατόπισης u_i , μπορεί να γίνει αφού διατίθενται ισάριθμες διαφορικές εξισώσεις. Αυτές είναι:

- Οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (14)$$

- Οι τρεις εξισώσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right], \quad (15)$$

- Οι έξι εξισώσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmnp} \epsilon_{mn}. \quad (16)$$

Η λύση του προβλήματος θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια S του σώματος. Οι συνιστώσες $t_i = \sigma_{ij} n_j$ του διανύσματος τάσης θα πρέπει πάνω στο τμήμα S_T της επιφάνειας να είναι ίσες με τις εξωτερικές τάσεις T_i που επενεργούν στο τμήμα αυτό, ενώ στο υπόλοιπο τμήμα S_u θα πρέπει οι αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις u_i να είναι ίσες με τις συνιστώσες U_i του διανύσματος μετατόπισης U που έχει επιβληθεί στο τμήμα αυτό. Οι συνθήκες αυτές γράφονται:

$$t_i = T_i \quad \text{στο τμήμα } S_T \text{ (συνθήκη τάσεων)}, \quad (17)$$

$$u_i = U_i \quad \text{στο τμήμα } S_u \text{ (συνθήκη μετατοπίσεων)}. \quad (18)$$

Ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στην επιφάνεια S του σώματος, τα συνοριακά προβλήματα ελαστικότητας διακρίνονται σε τρία είδη, που είναι γνωστά σαν προβλήματα I, II και III. Στο πρόβλημα I είναι γνωστές οι τάσεις σε όλη την επιφάνεια του σώματος ($S_T = S$), στο πρόβλημα II είναι γνωστές οι μετατοπίσεις σε όλη την επιφάνεια του σώματος ($S_u = S$), και στο πρόβλημα III είναι γνωστές οι μετατοπίσεις πάνω στο τμήμα S_u και οι τάσεις πάνω στο τμήμα S_T ($S_u \cup S_T = S$). Δείχνεται ότι τα τρία προβλήματα έχουν μία και μόνο λύση.

Για την επίλυση αυτών προβλημάτων έχουν αναπτυχθεί δύο βασικές μέθοδοι: η μέθοδος μετατοπίσεων και η μέθοδος τάσεων. Παρακάτω θα αναπτύξουμε

μόνο την μέθοδο των μετατοπίσεων, την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης.

Στην μέθοδο μετατοπίσεων επιλέγονται ως βασικοί άγνωστοι οι τρεις συνιστώσες u_i του διανύσματος μετατόπισης και οι διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος εκφράζονται συναρτήσει αυτών. Έτσι, οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων με την βοήθεια των σχέσεων (5) γράφονται

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} u_{m,n} . \quad (19)$$

Αν οι σχέσεις αυτές εισαχθούν στις εξισώσεις ισορροπίας (3) παίρνουμε τις σχέσεις

$$C_{ijmn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_n} = 0 . \quad (20)$$

Έτσι λοιπόν ένα συνοριακό πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του διαφορικού συστήματος (20) με συνοριακές συνθήκες της μορφής (17) και (18). Όταν προσδιοριστούν οι συνιστώσες u_i , διαμέσου των σχέσεων (15) και (16) υπολογίζονται οι παραμορφώσεις και οι τάσεις. Οι συναρτήσεις u_i που προσδιορίζονται από την επίλυση του διαφορικού συστήματος (20) θα πρέπει να είναι *μονότιμες* και *συνεχείς* συναρτήσεις σε κάθε σημείο του σώματος. Για την περίπτωση του συνεκτικού πεδίου, όταν δηλαδή το σώμα δεν έχει κοιλότητες, οι συνθήκες αυτές πληρούνται όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

4 Τα διδιάστατα πρόβληματα της ανισότροπης ελαστικότητας

Το διδιάστατο πρόβλημα της ανισότροπης ελαστικότητας ορίζεται ως το πρόβλημα εκείνο του οποίου οι μεταβλητές πεδίου είναι ανεξάρτητες από τη μία συντεταγμένη του Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς (x_1, x_2, x_3) . Αν οι μεταβλητές πεδίου είναι ανεξάρτητες της συντεταγμένης x_3 έχουμε

$$u_i = u_i(x_1, x_2), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2) . \quad (21)$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις αυτές στις σχέσεις (5) έχουμε

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} ,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\end{aligned}\tag{22}$$

Συνεπώς, οι σχέσεις τάσεων μετατοπίσεων γίνονται

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{14} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{15} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 2c_{16} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{22} &= c_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{24} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{25} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 2c_{26} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{33} &= c_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{32} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{34} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{35} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 2c_{36} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{32} &= c_{41} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{42} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 2c_{46} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{31} &= c_{51} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{52} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{54} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 2c_{56} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{21} &= c_{61} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{62} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{64} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{65} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + 2c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).\end{aligned}\tag{23}$$

Οι σχέσεις ισορροπίας (2) λόγω των (21) παρέχουν

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} &= 0\end{aligned}\tag{24}$$

Εισάγοντας τις (23) στις σχέσεις ισορροπίας (24) έχουμε:

$$\begin{aligned}&c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{62} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{64} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ &+ c_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{61} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (c_{14} + c_{65}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &+ 2c_{16} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + 2c_{66} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0, \\ &c_{61} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{65} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{24} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ &+ c_{62} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (c_{64} + c_{25}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &+ 2c_{66} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + 2c_{26} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0,\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& c_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c_{42} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\
& + c_{25} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{41} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (c_{54} + c_{45}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \\
& + 2c_{56} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + 2c_{46} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 .
\end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές ορίζουν τις τρεις διαφορικές εξισώσεις του διδιάστατου προβλήματος της ανισότροπης ελαστικότητας με άγνωστες τις συναρτήσεις u_1, u_2 και u_3 . Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η διδιάστατη παραμόρφωση των ανισότροπων σωμάτων δεν μπορεί να αποσυζευχθεί σε συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση, όπως συμβαίνει στο ισότροπο σώμα. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν το σώμα κατέχει ένα επίπεδο ελαστικής συμμετρίας, ας πούμε το επίπεδο x_1, x_2 . Στην περίπτωση αυτή δείχνεται ότι:

$$c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = 0 . \quad (26)$$

Αντικαθιστώντας την (26) στην (25) έχουμε

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= 0 , \\
c_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= 0 , \\
c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} &= 0 ,
\end{aligned} \quad (27)$$

Λόγω των (26), οι (23) γίνεται

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \\
\sigma_{22} &= c_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \\
\sigma_{33} &= c_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{32} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \\
\sigma_{32} &= c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} , \\
\sigma_{31} &= c_{54} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} , \\
\sigma_{21} &= 2C_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) .
\end{aligned} \quad (28)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις δείχνεται ότι, στην περίπτωση που το ανισότροπο υλικό έχει το επίπεδο x_1, x_2 ως επίπεδο ελαστικής συμμετρίας, η παραμόρφωση

μπορεί να αποσυζευχθεί σε δύο επιμέρους προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα οι άγνωστες συναρτήσεις u_1, u_2 προσδιορίζονται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2c_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} &= 0 , \\ c_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2c_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= 0 , \end{aligned} \quad (29)$$

και είναι γνωστό ως *συνεπίπεδο πρόβλημα της ανισότροπης ελαστικότητας*. Στο δεύτερο πρόβλημα η άγνωστη συνάρτηση u_3 προσδιορίζεται από την σχέση

$$c_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 , \quad (30)$$

και είναι γνωστό ως *αντιεπίπεδο πρόβλημα της ανισότροπης ελαστικότητας*.

Στο συνεπίπεδο πρόβλημα οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων παρέχονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \\ \sigma_{22} &= c_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \\ \sigma_{33} &= c_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{32} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} , \\ \sigma_{12} &= 2c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) , \end{aligned} \quad (31)$$

ενώ για το αντιεπίπεδο πρόβλημα οι αντίστοιχες σχέσεις είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{54} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} , \\ \sigma_{23} &= c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{45} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} . \end{aligned} \quad (32)$$

5 Η μιγαδική διατύπωση του αντιεπίπεδου προβλήματος

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του αντιεπίπεδου προβλήματος εισάγουμε μια μιγαδική συνάρτηση $F(\xi)$ και αναζητούμε μια λύση της μορφής

$$u_3 = F(\xi) + \overline{F(\xi)} \quad \text{όπου } \xi = x_1 + px_2 , \quad (33)$$

όπου p είναι μια μιγαδική σταθερά. Αντικαθιστώντας την (33) στην (30) προκύπτει

$$[c_{55} + 2pc_{45} + p^2c_{44}] \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + [c_{44} + 2\bar{p}c_{45} + \bar{p}^2c_{44}] \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial \bar{\xi}^2} = 0. \quad (34)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι, προκειμένου η u_3 να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης, θα πρέπει να ισχύει

$$c_{44}p^2 + 2c_{45}p + c_{55} = 0. \quad (35)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η σταθερά p θα πρέπει να είναι μία από τις δύο ρίζες της (35).

Στην παρακάτω ανάλυση επιλέγουμε τη ρίζα με το θετικό πρόσημο

$$p = -\frac{c_{45}}{c_{44}} + i \frac{\sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}}{c_{44}}. \quad (36)$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η υπόριζα ποσότητα της προηγούμενης εξίσωσης είναι πάντα θετική.

Ετσι λοιπόν, όταν η μιγαδική σταθερά p δίνεται από την (36), τότε η (35) αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης. Θα εκφράσουμε τώρα τις τάσεις σε όρους αυτής της μιγαδικής συνάρτησης $F(\xi)$. Εισάγοντας την (33) στην (32), προκύπτει

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= (c_{55} + pc_{45})F'(\xi) + (c_{55} + \bar{p}c_{45})\overline{F'(\xi)}, \\ \sigma_{23} &= (c_{54} + pc_{44})F'(\xi) + (c_{54} + \bar{p}c_{44})\overline{F'(\xi)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Μια συμπαγής μορφή της (37), παρέχεται από τον παρακάτω τασιικό συνδυασμό

$$\sigma_{13} + p\sigma_{23} = -i\lambda_0(p - \bar{p})\overline{F'(\xi)}, \quad (38)$$

όπου

$$\lambda_0 = \sqrt{c_{44}c_{55} - c_{45}^2}.$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από την (35) παίρνοντας υπόψη την σχέση

$$c_{55} + pc_{45} = -p(c_{45} + pc_{44}), \quad (39)$$

που προκύπτει από το γεγονός ότι η p είναι ρίζα της (34).

Μια ποσότητα που θα χρησιμοποιηθεί στην παρακάτω ανάλυση είναι η συνισταμένη δύναμη Z που επενεργεί πάνω σε ένα δρόμο που ενώνει δύο σημεία του σώματος A και B . Ο υπολογισμός της δύναμης αυτής παρέχει

$$iZ = \lambda_0 [F(\xi_B) - \overline{F(\xi_B)}] = \lambda_0 [F(\xi_A) - \overline{F(\xi_A)}]. \quad (40)$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί ξ_A και ξ_B αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των σημείων A και B

$$\xi_A = x_1^A + px_2^A, \quad \xi_B = x_1^B + px_2^B,$$

όπου (x_1^A, x_2^A) και (x_1^B, x_2^B) είναι οι συντεταγμένες των σημείων στο επίπεδο z . Θεωρώντας τώρα ότι το σημείο B μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του σώματος με συντεταγμένη ξ στην θέση (x_1, x_2) , με το A να είναι ένα σταθερό σημείο έχουμε

$$iZ = \lambda_0 [F(\xi) - \overline{F(\xi)}] + iZ_0, \quad (41)$$

όπου $\xi = x_1 + px_2$. Η σταθερά στο δεύτερο μέρος της (41) εκφράζει τον σταθερό όρο του δεύτερου μέλους της (41). Επειδή η ποσότητα αυτή δεν συνεισφέρει στο τασικό πεδίο μπορεί να εγκαταλειφθεί. Συνεπώς η (41) γράφεται

$$iZ = \lambda_0 [F(\xi) - \overline{F(\xi)}]. \quad (42)$$

Έτσι λοιπόν για την επίλυση ενός προβλήματος της αντιεπίπεδης ελαστικότητας αρκεί να βρούμε μια μιγαδική συνάρτηση $F(\xi)$ που ικανοποιεί τις συνοριακές και ιδιόμορφες συνθήκες του προβλήματος. Η συνάρτηση αυτή ενέχει την θέση ενός τασικού δυναμικού.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι βασικές σχέσεις της αντιεπίπεδης ελαστικότητας σε όρους του μιγαδικού δυναμικού είναι:

$$u_3 = F(\xi) + \overline{F(\xi)}, \quad \text{όπου} \quad \xi = x_1 + px_2, \quad (43)$$

$$\sigma_{13} + p\sigma_{23} = -i\lambda_0(p - \bar{p})\overline{F'(\xi)}, \quad (44)$$

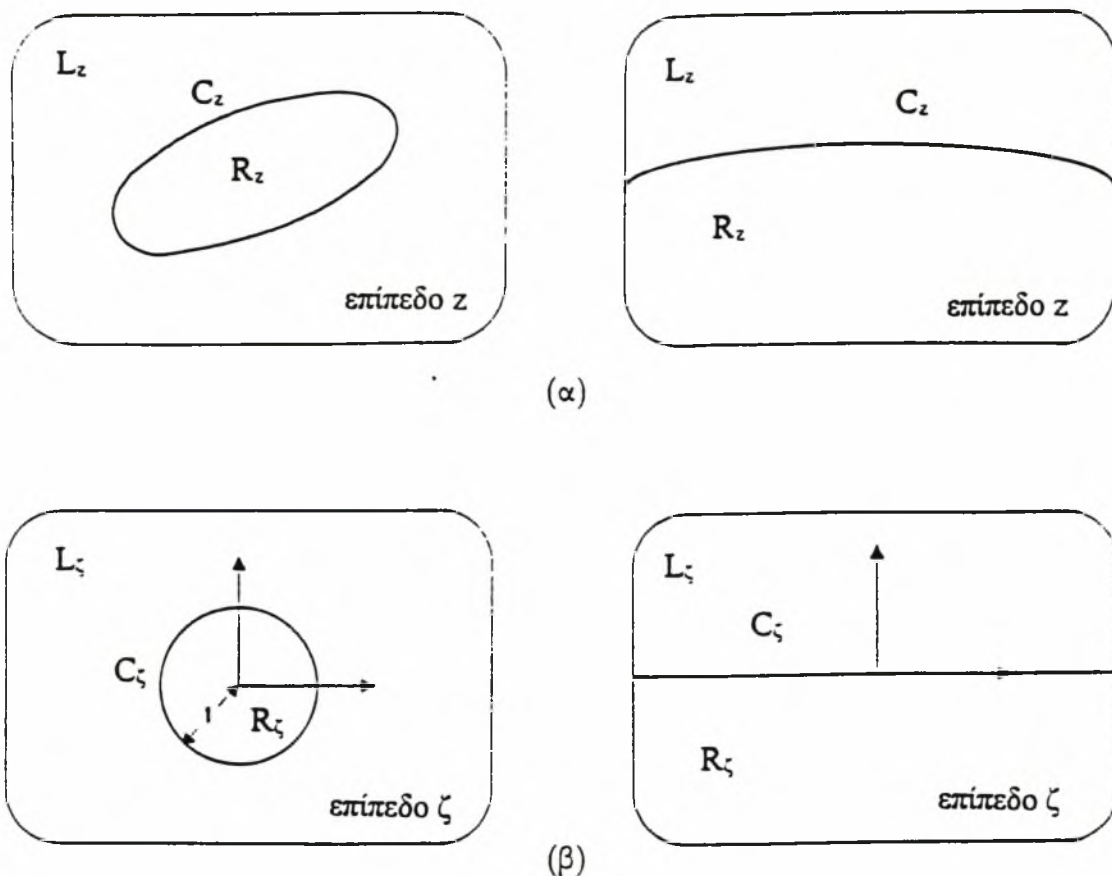
$$iZ = \lambda_0 [F(\xi) - \overline{F(\xi)}]. \quad (45)$$

Αμέσως παρακάτω χρησιμοποιώντας τον παραπάνω φορμαλισμό θα αναπτύξουμε ορισμένες τις ελαστικές λύσεις που θα χρησιμοποιηθούν στη ανάλυση του διφασικού προβλήματος.

5.1 Η ελικοειδής γραμμοαταξία σε άπειρο σώμα

Εστω ένα άπειρο ανισότροπο σώμα που έχει το επίπεδο x_1, x_2 ως επίπεδο ελαστικής συμμετρίας. Για μια ελικοειδή γραμμοαταξία με πυρήνα το σημείο (x_1^0, x_2^0) και με διάνυσμα Burgers b , το μιγαδικό δυναμικό $F(\xi)$ θα αναζητηθεί έτσι ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη

$$[u_3]_c = b, \quad (46)$$



Σχήμα 1: (α) Η περίπτωση της κλειστής και της ανοιχτής καμπύλης στο επίπεδο z και (β) ο μετασχηματισμός τους στο επίπεδο ζ .

όπου $[u_3]$ παριστάνει την μεταβολή της μετατόπισης u_3 που βρίσκεται μέσα στην αγκύλη όταν περιστρεφόμαστε κατά μήκος ενός κλειστού δρόμου c που περικλείει το σημείο (x_1^0, x_2^0) . Μια κατάλληλη μορφή της τασικής συνάρτησης είναι

$$F(\xi) = C \log(\xi - \xi_0), \quad (47)$$

όπου C είναι μια σταθερά που θα προσδιοριστεί ώστε να ικανοποιείται η (46). Από τις σχέσεις (43), (46) και (47) προκύπτει ότι

$$C = -\frac{bi}{2\pi}. \quad (48)$$

Έτσι το μιγαδικό δυναμικό για την περίπτωση ελικοειδούς γραμμοαταξίας σε ένα άπειρο σώμα είναι

$$F(\xi) = -\frac{bi}{2\pi} \log(\xi - \xi_0). \quad (49)$$

Το πρόβλημα αυτό έχει επιλυθεί με ένα διαφορετικό φορμαλισμό από τους Es-helby *et al.* [8].

6 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί

6.1 Ο ισότροπος σύμμορφος μετασχηματισμός

Μια κλειστή καμπύλη C_z του επιπέδου z ($z = x_1 + ix_2$) που δεν τέμνει τον εαυτό της μπορεί να μετασχηματιστεί σύμμορφα μέσω μιας ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης

$$z = m(\zeta), \quad (50)$$

στην μοναδιαία περιφέρεια Γ , $|\zeta| = 1$, του επιπέδου ζ (σχήμα 1α). Η συνάρτηση αυτή απεικονίζει ένα προς ένα τα σημεία του εξωτερικού πεδίου της καμπύλης C_z στα σημεία του εξωτερικού πεδίου $|\zeta| > 1$ της μοναδιαίας περιφέρειας Γ . Για παράδειγμα, η ολόμορφη συνάρτηση

$$z = m(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad (51)$$

μετασχηματίζει την έλλειψη που βρίσκεται στο επίπεδο z και έχει ημιάξονες

$$\alpha_1 = R(1 + m), \quad \alpha_2 = R(1 - m), \quad (52)$$

στο μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = 1$ του επιπέδου ζ . Η ολόμορφη συνάρτηση

$$z = m(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{k}{n\zeta^n}\right), \quad R > 0, \quad n = \text{ακέραιος θετικός αριθμός} \quad (53)$$

μετασχηματίζει μια υποτροχοειδή καμπύλη του επιπέδου z στο μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = 1$ του επιπέδου ζ . Η σταθερά k είναι μια πραγματική σταθερά. Η αντίστοιχη συνάρτηση μετασχηματισμού ενός κανονικού πολυγώνου πάνω στον μοναδιαίο κύκλο παρέχεται από τη σχέση [4],

$$m(\zeta) = R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(2-n)(2-2n)\dots(2-(n+1)n)}{k!n^k(nk-1)} \frac{1}{\zeta^{nk-1}}. \quad (54)$$

Γενικά, η συνάρτηση μετασχηματισμού (50) για την περίπτωση μιας κλειστής καμπύλης C_z του μιγαδικού επιπέδου έχει την ακόλουθη γενική μορφή

$$z = m(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m_{-1}}{\zeta} + \frac{m_{-2}}{\zeta^2} + \frac{m_{-3}}{\zeta^3} + \dots\right), \quad (55)$$

όπου m_{-1}, m_{-2}, m_{-3} είναι κατάλληλες μιγαδικές σταθερές.

Μια ανοικτή καμπύλη C_z του μιγαδικού επιπέδου z , για παράδειγμα μια παραβολή, μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω μιας ολόμορφης συνάρτησης

$$z = m(\zeta), \quad (56)$$

πάνω στον πραγματικό άξονα του ζ -επιπέδου (σχήμα 1β). Ο μετασχηματισμός αυτός απεικονίζει ένα προς ένα όλα τα σημεία του ενός από τα δύο ημιάπειρα πεδία που χωρίζεται το επίπεδο z με την καμπύλη C_z στα σημεία του άνω ημιεπιπέδου του επιπέδου ζ . Για μια παραβολή η συνάρτηση μετασχηματισμού (50) έχει την μορφή

$$z = m(\zeta) = -(\zeta + i\sqrt{p})^2, \quad (p < q), \quad (57)$$

όπου p και q ($q > 0$) είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για την ανοικτή καμπύλη C_z η γενική μορφή της συνάρτησης μετασχηματισμού έχει την ακόλουθη μορφή

$$z = m(\zeta) = R(m_1\zeta + m_2\zeta^2 + m_3\zeta^3 + \dots), \quad (58)$$

όπου m_1, m_2, m_3 είναι κατάλληλες μιγαδικές σταθερές.

6.2 Ο ανισότροπος σύμμορφος μετασχηματισμός

Όπως είπαμε παραπάνω, μια κλειστή καμπύλη C_z του επιπέδου z μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού της μορφής (55) στον μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = 1$ ενός επιπέδου ζ . Εισάγουμε τώρα μια νέα μιγαδική μεταβλητή $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ που συνδέεται με την μεταβλητή $z = x_1 + ix_2$ του επιπέδου z με μια σχέση της μορφής

$$\xi = x_1 + px_2. \quad (59)$$

Η σχέση αυτή γράφεται

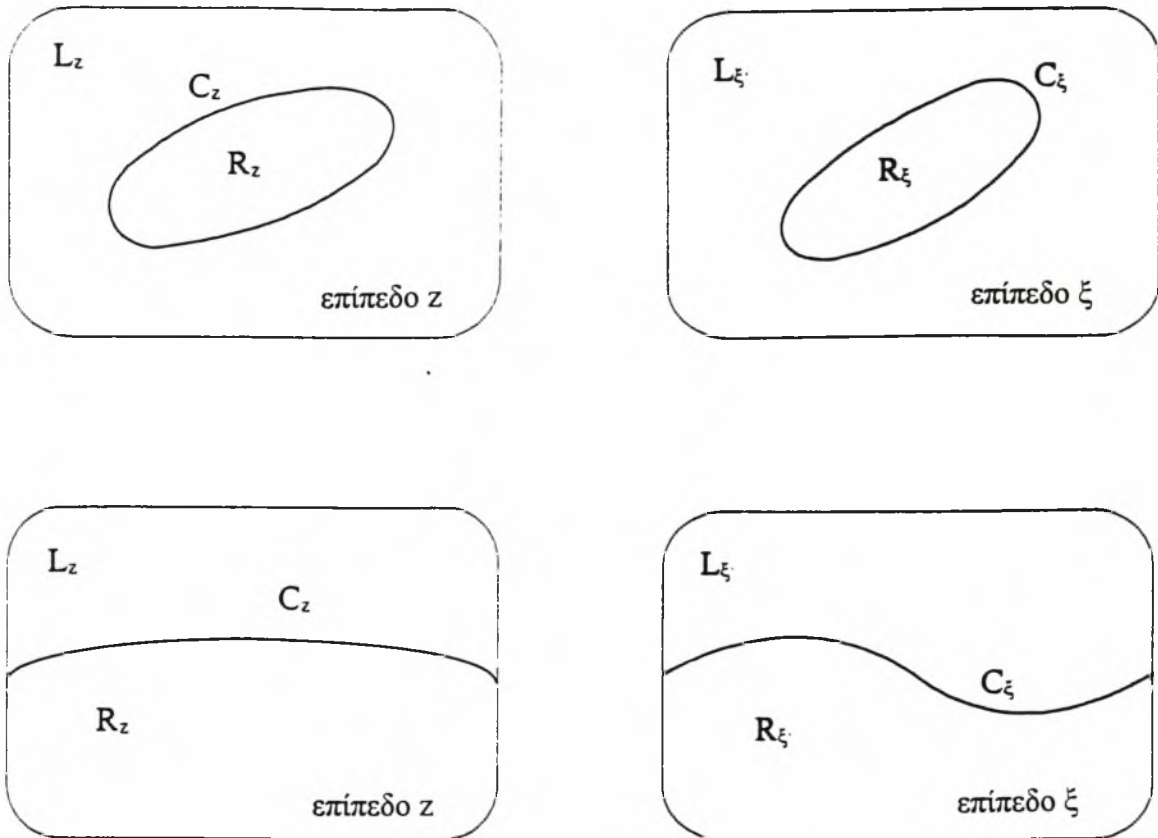
$$\xi = \frac{1 - ip}{2}z + \frac{1 + ip}{2}\bar{z}, \quad (60)$$

όπου $p = p_1 + ip_2$ μια μιγαδική σταθερά με $p_2 > 0$. Η (59) εισάγει ένα νέο μιγαδικό επίπεδο ξ και συσχετίζει σημείο προς σημείο τα σημεία του επιπέδου z με τα σημεία του επιπέδου ξ . Στο επίπεδο ξ η καμπύλη C_z συμβολίζεται με C_ξ και έχει την ίδια φορά περιγραφής με την C_z (σχήμα 2). Εισάγοντας τώρα τον μετασχηματισμό $z = m(\zeta)$ στην (60) έχουμε για τα σημεία της καμπύλης C_z

$$\xi = \frac{1 - ip}{2}m(\sigma) + \frac{1 + ip}{2}\bar{m}(\bar{\sigma}), \quad (61)$$

όπου σ δηλώνει τα σημεία της μοναδιαίας περιφέρειας. Επειδή $\bar{\sigma} = 1/\sigma$, η (61) δίνει

$$\xi = \frac{1 - ip}{2}m(\sigma) + \frac{1 + ip^L}{2}\bar{m}\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (62)$$



Σχήμα 2: Ο μετασχηματισμός της ανοικτής και της κλειστής καμπύλης μέσω της $\xi = x_1 + px_2$ στο επίπεδο ξ .

Η σχέση αυτή δείχνει ότι τα σημεία σ της μοναδιαίας περιφέρειας του επιπέδου ζ αντιστοιχούν σημείο προς σημείο μέσω της (62) στα σημεία της καμπύλης C_ξ . Επίσης η συνάρτηση

$$\xi = \frac{1 - ip}{2} m(\zeta) + \frac{1 + ip}{2} \bar{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad (63)$$

μετασχηματίζει τα εξωτερικά σημεία της περιφέρειας $|\zeta| = 1$ στο εξωτερικό της καμπύλης C_ξ . Έτσι, ο νέος μετασχηματισμός (63), που κατασκευάστηκε με βάση τον ισότροπο μετασχηματισμό $z = m(\zeta)$, απεικονίζει σημείο προς σημείο τα εξωτερικά σημεία της περιφέρειας $|\zeta| = 1$ του επιπέδου ζ στα εξωτερικά σημεία της καμπύλης C_ξ , με την περιφέρεια να αντιστοιχεί στην καμπύλη C_ξ . Στην συνέχεια, μέσω της (59), κάθε σημείο του ξ επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα σημείο του z επιπέδου.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση μετασχηματισμού για την περίπτωση που η καμπύλη C_z είναι μια ανοικτή καμπύλη του επιπέδου z . Στην περίπτωση αυτή η ανοικτή καμπύλη C_z μέσω της (59) αντιστοιχεί στην ανοικτή καμπύλη C_ξ του επιπέδου ξ που έχει την ίδια φορά περιγραφής με την C_z . Η συνάρτηση μετασχηματισμού για την

περίπτωση αυτή είναι

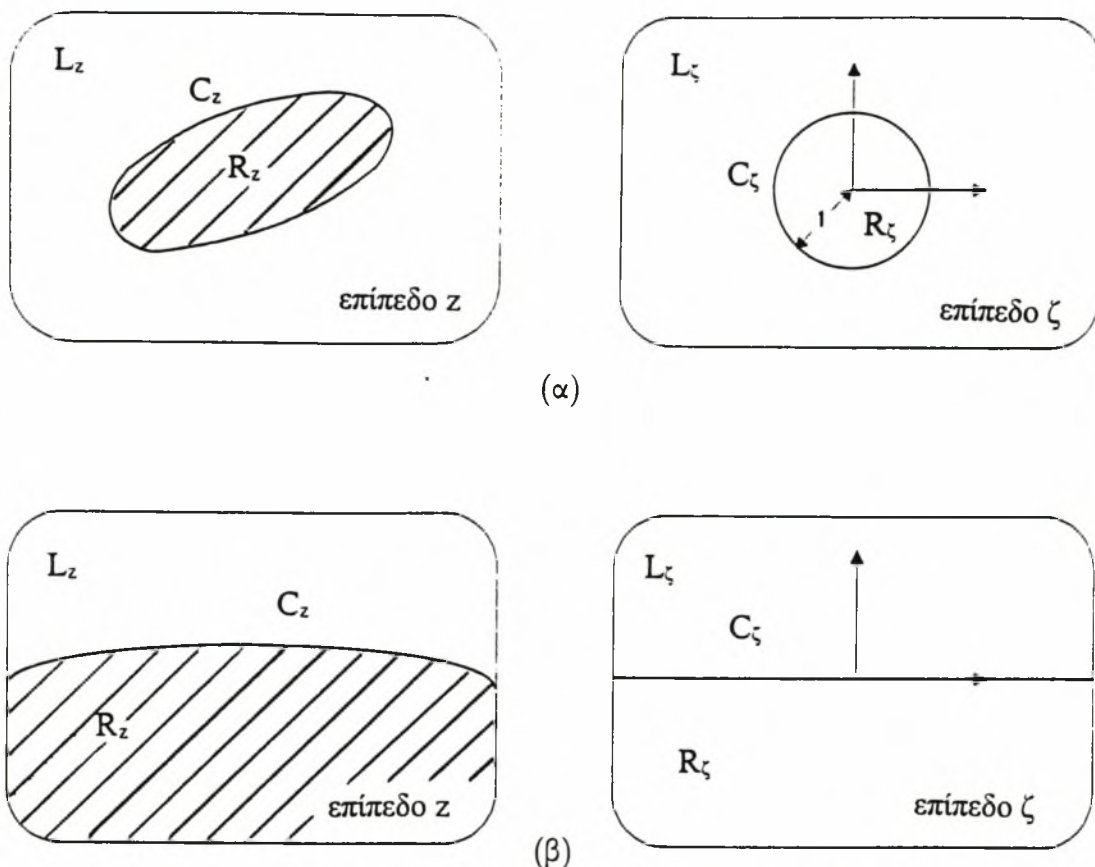
$$\xi = \frac{1 - ip}{2}m(\zeta) + \frac{1 + ip^L}{2}\bar{m}(\zeta). \quad (64)$$

Η παραπάνω τεχνική επινοήθηκε από τον Lekhnitskii [9] για να λύσει προβλήματα οπών και ανομοιογενειών με ελλειπτικά σύνορα και διεπιφάνειες σε ανισότροπα υλικά. Έχει γίνει αρκετή συζήτηση πάνω στα όρια εφαρμογής αυτής της τεχνικής, αλλά δεν είναι καθαρό ακόμα εάν μπορεί να εφαρμοστεί στις κλειστές διεπιφάνειες με την γενική μορφή της συνάρτησης $m(\zeta)$ που δίνεται από την (55). Στην παρούσα εργασία, οι γενικές σχέσεις που θα αναπτυχθούν θα βασιστούν στην γενική μορφή των σύμμορφων μετασχηματισμών αλλά οι εφαρμογές θα περιοριστούν σε ελλειπτικές διεπιφάνειες.

7 Τα διφασικά διδιάστατα μοντέλα των σύνθετων ανισότροπων σωμάτων

Θεωρούμε ένα σύνθετο υλικό που αποτελείται από δύο διακριτές φάσεις από ομογενές και ισότροπο ελαστικό. Υποθέτουμε ότι η διεπιφάνεια είναι μια κλειστή ή ανοικτή κυλινδρική επιφάνεια της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες στον κυλινδρικό άξονα p . Η περίπτωση της κλειστής διεπιφάνειας αντιστοιχεί στο μοντέλο της ελαστικής ανομοιογένειας σε μια ελαστική μήτρα. Η περίπτωση της ανοικτής διεπιφάνειας αντιστοιχεί στο μοντέλο των δύο ημιάπειρων δίσκων που συνδέονται κατά μήκος μιας καμπυλόγραμμης διεπιφάνειας. Για το μοντέλο αυτό υιοθετούμε τον αγγλικό όρο *intrusion* για να περιγράψουμε τη μία από τις δύο φάσεις [10].

Εισάγουμε τώρα ένα μιγαδικό επίπεδο z που είναι κάθετο στον άξονα p της κυλινδρικής επιφάνειας. Το μιγαδικό επίπεδο z είναι συνδεδεμένο με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2) , του οποίου η αρχή είναι τοποθετημένη στο πεδίο που καταλαμβάνεται από την ανομοιογένεια ή το *intrusion* (σχήμα 3). Αναφορικά με το μιγαδικό επίπεδο z , καλούμε το πεδίο που καταλαμβάνεται από την ανομοιογένεια ή το *intrusion* ως πεδίο R_z , ενώ το πεδίο που καταλαμβάνεται από την άλλη φάση ως πεδίο L_z . Η διεπιφάνεια των δύο φάσεων θα δηλώνεται με C_z και υποθέτουμε ότι μετασχηματίζεται μέσω μιας ολόμορφης συνάρτησης $z = m(\zeta)$ στον μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = 1$, για την περίπτωση της κλειστής διεπιφάνειας, ή σε ένα τμήμα του πραγματικού άξονα n_1 ενός μιγαδικού επιπέδου ζ ($\zeta = n_1 + ip_2$), για την περίπτωση της ανοικτής διεπιφάνειας



Σχήμα 3: (α) Το μοντέλο της ανομοιογένειας και (β) το μοντέλο intrusion στο φυσικό και μετασχηματισμένο επίπεδο.

(σχήμα 3). Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, μια γενική μορφή της συνάρτησης μετασχηματισμού για την περίπτωση της κλειστής διεπιφάνειας παρέχεται από την σχέση

$$z = m(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m_{-1}}{\zeta} + \frac{m_{-2}}{\zeta^2} + \dots\right), \quad (65)$$

ενώ για την περίπτωση της ανοικτής διεπιφάνειας από τις σχέσεις

$$z = m(\zeta) = R(\zeta + m_2\zeta^2 + m_3\zeta^3 + \dots). \quad (66)$$

Στις σχέσεις αυτές το R είναι μια θετική σταθερά και m_k είναι κατάλληλες μιγαδικές σταθερές. Ο μετασχηματισμός (65) απεικονίζει σημείο προς σημείο το πεδίο L_z (μήτρα) του μιγαδικού επιπέδου ζ στο εξωτερικό πεδίο L_ζ του μιγαδικού κύκλου $|\zeta| = 1$. Ο μετασχηματισμός (66) μετασχηματίζει το πεδίο L_z στο πεδίο L_ζ του πάνω ημιεπιπέδου του επιπέδου ζ (σχήμα 3).

Στην παρακάτω ανάλυση ποσότητες που συνδέονται με τα πεδία L_z και R_z θα δηλώνονται με τους δείκτες L, R . Με βάση την σύμβαση αυτή οι ποσότητες

$$\xi^L = x_1 + p^L x_2, \quad \xi^R = x_1 + p^R x_2 \quad (67)$$

ορίζουν τα μιγαδικά επίπεδα ξ^L και ξ^R . Στις σχέσεις αυτές p^L και p^R είναι μιγαδικές σταθερές που εμπλέκουν τις ελαστικές σταθερές των πεδίων L και R μέσω της σχέσης (36), δηλαδή:

$$p^L = -\frac{c_{45}^L}{c_{44}^L} + i \frac{\sqrt{c_{44}^L c_{55}^L - (c_{45}^L)^2}}{c_{44}^L}, \quad (68)$$

$$p^R = -\frac{c_{45}^R}{c_{44}^R} + i \frac{\sqrt{c_{44}^R c_{55}^R - (c_{45}^R)^2}}{c_{44}^R}. \quad (69)$$

Για την περίπτωση της κλειστής διεπιφάνειας, η διεπιφάνεια C_z αντιστοιχεί μέσω της (67α) στην κλειστή καμπύλη C_{ξ^L} στο επίπεδο ξ^L , και μέσω της (67β) στην κλειστή καμπύλη C_{ξ^R} στο επίπεδο ξ^R (σχήμα 4α). Έτσι λοιπόν, οι ανισότροποι μετασχηματισμοί που ορίζονται, έχουν την παρακάτω μορφή

$$\xi^L = m^L(\zeta) = \frac{1 - ip^L}{2} m(\zeta) + \frac{1 + ip^L}{2} \bar{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad (70)$$

$$\xi^R = m^R(\sigma) = \frac{1 - ip^R}{2} m(\zeta) + \frac{1 + ip^R}{2} \bar{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right). \quad (71)$$

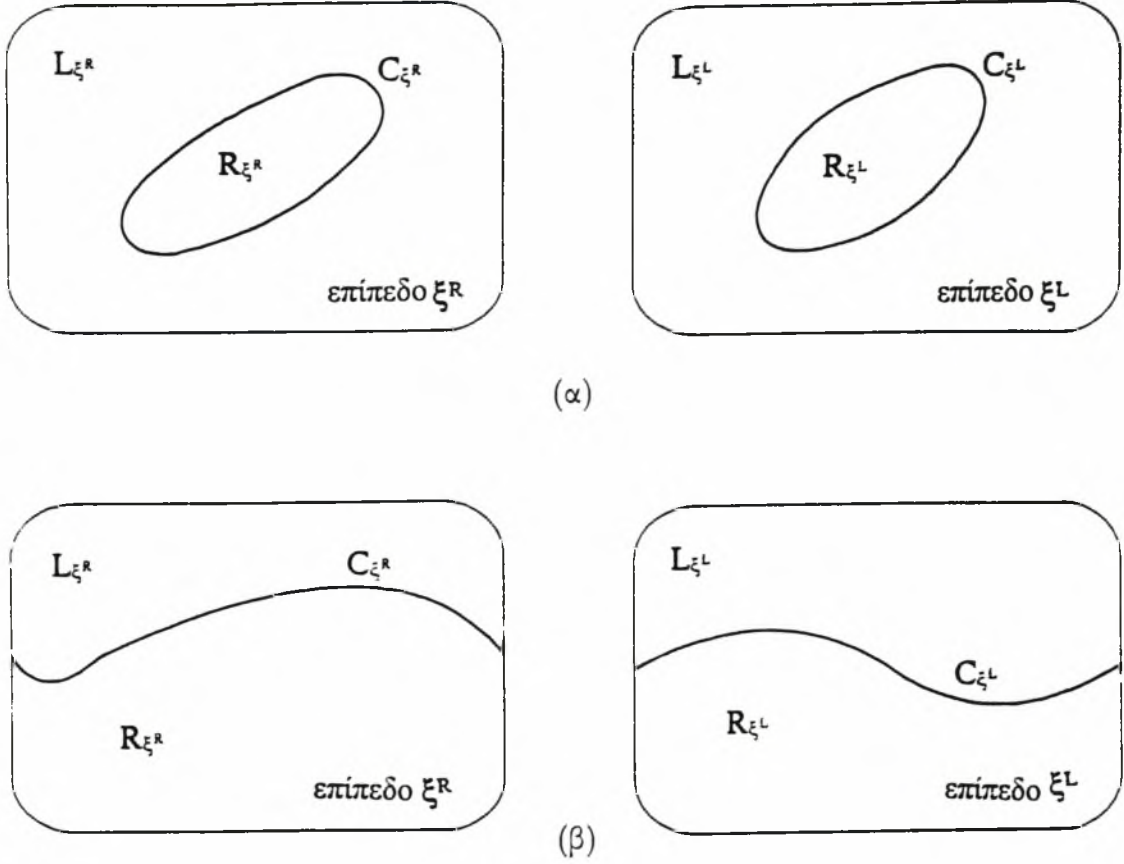
Για την περίπτωση της ανοικτής διεπιφάνειας (σχήμα 4β), οι ανισότροποι μετασχηματισμοί που ορίζονται έχουν την παρακάτω μορφή

$$\xi^L = m^L(\zeta) = \frac{1 - ip^L}{2} m(\zeta) + \frac{1 + ip^L}{2} \bar{m}(\zeta), \quad (72)$$

$$\xi^R = m^R(\zeta) = \frac{1 - ip^R}{2} m(\zeta) + \frac{1 + ip^R}{2} \bar{m}(\zeta). \quad (73)$$

8 Τα διφασικά δυναμικά των διφασικών μοντέλων

Κατά μήκος της διεπιφάνειας, υποθέτουμε ότι υπάρχει τέλεια σύνδεση των δύο υλικών έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια των τάσεων και των μετατοπίσεων. Προκειμένου να συμπεριλάβουμε στην ανάλυση εντατικές καταστάσεις που συνδέονται με πηγές εσωτερικών τάσεων, όπως μετασχηματισμοί φάσεων για παράδειγμα, θεωρούμε ότι οι ελαστικές μετατοπίσεις που αναπτύσσονται κατά μήκος της διεπιφάνειας των δύο υλικών έχουν ένα γνωστό άλμα. Το άλμα αυτό εκφράζεται μέσω μιας συνάρτησης $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_1, x_2)$. Η συνάρτηση αυτή



Σχήμα 4: Τα επίπεδα ξ των δύο μοντέλων του σχήματος 3.

είναι γνωστή ως Somigliana dislocation [15] και, όπως θα δούμε παρακάτω, συνδέεται με μη εντατικές παραμορφώσεις που μπορούν να αναπτυχθούν στην ανομοιογένεια ή στο intrusion. Έτσι οι διεπιφανειακές συνθήκες κατά μήκος της C_z εκφράζεται με τις σχέσεις

$$u_3^L - u_3^R = \mathcal{U}, \quad Z^L = Z^R. \quad (74)$$

Οι δύο αυτές συνθήκες ανάγονται μέσω των (43), (44) και (45) στην

$$2\lambda_0^L F^L(t^L) = (\lambda_0^L + \lambda_0^R) F^R(t^R) + (\lambda_0^L - \lambda_0^R) \overline{F^R(t^R)} + \lambda_0^L \mathcal{U}(t^R, \bar{t}^R), \quad (75)$$

όπου $t^R = m^R(\sigma)$ και $t^L = m^L(\sigma)$ αντιπροσωπεύουν σημεία στις C_{ξ^R} και C_{ξ^L} , αντίστοιχα. Εισάγουμε τώρα την παρακάτω σύμβαση: ποσότητες που σχετίζονται με τα πεδία L και τις διεπιφάνειες των μοντέλων θα αναφέρονται σε όρους της μεταβλητής ζ , ενώ ποσότητες που σχετίζονται με τα R -πεδία θα αναφέρονται σε όρους των μεταβλητών ξ των επιπέδων ξ . Μια τέτοια σύμβαση είναι αναγκαία, καθόσον μόνο τα πεδία L και οι διεπιφάνειες εμπλέκονται στις σύμμορφες απεικονίσεις. Η σύμβαση αυτή μαζί με τον επονομαζόμενο hat-μετασχηματισμό μιας ολόμορφης συνάρτησης $m(\zeta)$ αποτελούν τη βάση για να κατασκευη γενικών αντιπροσωπεύσεων των μιγαδικών δυναμικών των δύο φάσεων έτσι ώστε οι διεπιφανειακές συνθήκες (74) να ικανοποιούνται. Ο hat μετασχηματισμός της

σύμμορφης συνάρτησης $m(\zeta)$ αναφορικά με την μοναδιαία περιφέρεια $|\zeta|=1$ ορίζεται ως $\hat{m}(\zeta) = \bar{m}(1/\zeta)$, ενώ αναφορικά με τον πραγματικό άξονα του επιπέδου ζ ως $\hat{m}(\zeta) = \bar{m}(\zeta)$. Τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων ορίζονται ως εξής:

$$F^R(\xi^R) = \frac{2}{1+\Gamma} F_0(\xi^R), \quad (76)$$

$$F^L(\zeta) = F_0(m^R(\zeta)) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \bar{F}_0(\bar{m}^R(\frac{1}{\zeta})) + \frac{1}{2} \mathcal{U}(m^R(\zeta), \bar{m}^R(\frac{1}{\zeta})), \quad (77)$$

για μια κλειστή διεπιφάνεια, και

$$F^R(\xi^R) = \frac{2}{1+\Gamma} F_0(\xi^R), \quad (78)$$

$$F^L(\zeta) = F_0(m^R(\zeta)) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \bar{F}_0(\bar{m}^R(\zeta)) + \frac{1}{2} \mathcal{U}(m^R(\zeta), \bar{m}^R(\zeta)), \quad (79)$$

για μια ανοικτή διεπιφάνεια. Στις σχέσεις αυτές, $\Gamma(= \lambda_0^R/\lambda_0^L)$ είναι μια διαφοσική ελαστική παράμετρος, ενώ F_0 είναι μια ολόμορφη συνάρτηση. Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων εκφράζονται από τις (76)-(79) σε όρους μιας διαφοσικής συνάρτησης F_0 , που είναι το διαφοσικό δυναμικό του σύνθετου υλικού. Τα διαφοσικά δυναμικά F_0 ορίζονται στην περιοχή L_{ξ^R} και σε ολόκληρο επίπεδο ζ , εκτός ίσως από ένα αριθμό σημείων, όπου η συνάρτηση έχει μια ιδιόμορφη συμπεριφορά που αντιστοιχεί στα ιδιόμορφα σημεία εξωτερικών φορτίσεων. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, το διαφοσικό δυναμικό F_0 προσδιορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες και οι συνθήκες ιδιομορφίας του.

Στην ειδική περίπτωση όπου η περιοχή R είναι ένα άκαμπτο σώμα ($\Gamma \cong \infty$), τα μιγαδικά δυναμικά των πεδίων L δίνονται από τις σχέσεις

$$F^L(\zeta) = F_0(m^R(\zeta)) + \bar{F}_0(\bar{m}^R(\zeta)) + \frac{1}{2} \mathcal{U}(m^R(\zeta), \bar{m}^R(\frac{1}{\zeta})), \quad (80)$$

$$F^L(\zeta) = F_0(m^R(\zeta)) + \bar{F}_0(\bar{m}^R(\zeta)) + \frac{1}{2} \mathcal{U}(m^R(\zeta), \bar{m}^R(\zeta)), \quad (81)$$

για μια κλειστή και μια ανοικτή διεπιφάνεια αντίστοιχα. Τα παραπάνω γενικά αποτελέσματα θα εφαρμοστούν τώρα για την εξαγωγή ορισμένων λύσεων σε προβλήματα που ενδιαφέρουν την έρευνα και την εφαρμογή.

9 Ανομοιογένειες σε ελαστική μήτρα

Η ύπαρξη ανομοιογενειών σε ένα σώμα επιφέρει μια τοπική διατάραξη στα ελαστικά του πεδία που ορισμένες φορές καθορίζει τη συνολική μηχανική συμπεριφορά του σώματος. Ένα μοντέλο που περιγράφει ικανοποιητικά και με αρκετή ευκαμψία τις γεωμετρικές μορφές των ανομοιογενειών είναι αυτό της ελλειπτικής ανομοιογένειας. Η περίπτωση της κυκλικής ανομοιογένειας και της λεπτής ευθύγραμμης ίνας αποτελούν δύο ειδικές περιπτώσεις που ενδιαφέρουν την μηχανική των σύνθετων υλικών. Από την άλλη μεριά, το μοντέλο αυτό μπορεί να καλύψει και την περίπτωση των οπών και των ρωγμών σε ένα ελαστικό μέσο. Για τους λόγους αυτούς το μοντέλο της ελλειπτικής ανομοιογένειας έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών που ασχολούνται με την θεωρητική ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών.

Παρακάτω θα μελετήσουμε δύο βασικά προβλήματα της ελλειπτικής ανομοιογένειας: το πρόβλημα του ομοιόμορφου διατμητικού μετασχηματισμού της ελλειπτικής ανομοιογένειας και το πρόβλημα της διατάραξης ενός ομοιόμορφου διατμητικού πεδίου της μήτρας. Τα δύο αυτά προβλήματα αποτελούν την αντιεπίπεδη μορφή του γενικού προβλήματος της ελλειψοειδούς ανομοιογένειας που έθεσε και μελέτησε ο Eshelby [16]. Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των Hwu και Ting [11], που διαπραγματεύτηκαν το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ισοδύναμης ανομοιογένειας του Eshelby, αποκτάμε λύσεις σε απλή αλγεβρική μορφή.

9.1 Ομοιόμορφος διατμητικός μετασχηματισμός μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας

Στην περίπτωση της ελλειπτικής ανομοιογένειας η συνάρτηση μετασχηματισμού έχει την μορφή

$$z = m(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \quad (R > 0, 0 \leq m \leq 1) \quad (82)$$

όπου

$$\alpha_1 = R(1 + m), \quad \alpha_2 = R(1 - m), \quad (83)$$

είναι ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι η ομοιογένεια υφίσταται έναν διατμητικό μετασχηματισμό ο οποίος, στην απουσία του περιβάλλοντος υλικού της μήτρας, περιγράφεται από τις συνιστώσες παραμόρφωσης e_{23}^T και e_{13}^T . Στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι

η μήτρα είναι απύσασ, η ανάπτυξη των παραμορφώσεων αυτών δεν συνοδεύεται από τάσεις. Η παρουσία της ελαστικής μήτρας εμποδίζει την ανάπτυξη του παραπάνω μετασχηματισμού με αποτέλεσμα να αναπτυχθούν ελαστικές τάσεις και παραμορφώσεις στα δύο υλικά.

Αν συμβολίσουμε με u_3^T την μετατόπιση που επιφέρει ο μετασχηματισμός στην ανομοιογένεια, τότε

$$u_3^T = 2e_{13}^T x_1 + 2e_{23}^T x_2. \quad (84)$$

Εστω τώρα u_3^L και u_3^R ότι είναι οι ελαστικές παραμορφώσεις της μήτρας και της ανομοιογένειας που αναπτύσσονται λόγω του μετασχηματισμού. Υποθέτοντας ότι στην διεπιφάνεια μήτρας-ανομοιογένειας υπάρχει τέλεια σύνδεση θα πρέπει να υπάρχει συνέχεια των ολικών μετατοπίσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας:

$$u_3^R + u_3^T = u_3^L. \quad (85)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$u_3^L - u_3^R = u_3^T. \quad (86)$$

Η (86) δείχνει ότι η Somigliana Dislocation του προβλήματος είναι

$$\mathcal{U} = u_3^T. \quad (87)$$

Η (87) σε όρους της μεταβλητής του επιπέδου ξ^R γράφεται

$$\mathcal{U}(\xi^R, \bar{\xi}^R) = -2(\bar{\mathcal{E}}^T \xi^R + \mathcal{E}^T \bar{\xi}^R), \quad (88)$$

όπου

$$\mathcal{E}^T = \frac{e_{23}^T - p^R e_{13}^T}{p^R - \bar{p}^R}.$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα το διφασικό δυναμικό $F_0(\xi^R)$ του προβλήματος. Η γραμμικότητα της συνάρτησης \mathcal{U} προτείνει την ακόλουθη μορφή του μιγαδικού δυναμικού

$$F_0(\xi^R) = \mathcal{A}_1 \xi^R, \quad (89)$$

όπου \mathcal{A}_1 είναι μια μιγαδική σταθερά που θα προσδιοριστεί από τις συνθήκες του προβλήματος. Αντικαθιστώντας την (89) και την (88) στην (77) και απαιτώντας ο τασιικός συνδυασμός (44) να μηδενίζεται στο άπειρο, παίρνουμε

$$\mathcal{A}_1 = (1 + \Gamma) \frac{2\Gamma \bar{M}_1^R \bar{M}_2^R \mathcal{E}^T + [(1 + \Gamma) |M_1^R|^2 - (1 - \Gamma) |M_2^R|^2] \bar{\mathcal{E}}^T}{(1 + \Gamma)^2 |M_1^R|^2 - (1 - \Gamma)^2 |M_2^R|^2}, \quad (90)$$

όπου

$$M_1 = \frac{R}{2} [(1 - ip) + m(1 + ip)], \quad M_2 = \frac{R}{2} [m(1 - ip) + (1 + ip)].$$

Εχοντας υπολογίσει το διαφασικό δυναμικό $F_0(\xi^R)$, οι τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο υλικά, προκύπτουν από τις (76), (77) και (44) στην μορφή

$$\sigma_{13} + p^R \sigma_{23} = -\frac{2i\lambda_0^R(p^R - \bar{p}^R)\bar{\mathcal{A}}_1}{1 + \Gamma}, \quad (91)$$

για την ανομοιογένεια, και

$$\sigma_{13} + p^L \sigma_{23} = -\frac{i\lambda_0^L(p^L - \bar{p}^L)\bar{\mathcal{B}}_1}{2\bar{M}_2^L} \left[1 - \frac{\bar{\xi}_L}{\sqrt{(\bar{\xi}^L)^2 - 4\bar{M}_1^L\bar{M}_2^L}} \right], \quad (92)$$

για την μήτρα, όπου

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 M_2^R + \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \bar{\mathcal{A}}_1 \bar{M}_1^R - \bar{\mathcal{E}}^T M_2^R - \mathcal{E}^T \bar{M}_2^R.$$

9.2 Διατάραξη ενός ομοιόμορφου διατμητικού πεδίου της μήτρας από μια ελλειπτική ανομοιογένεια

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα της διατάραξης ενός ομοιόμορφου διατμητικού πεδίου $\sigma_{13}^\infty + i\sigma_{23}^\infty$ της μήτρας από μια ελλειπτική ανομοιογένεια. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (76) και (79) χωρίς τους όρους της συνάρτησης \mathcal{U} . Υποθέτοντας μια γραμμική μορφή του διαφασικού δυναμικού, δηλαδή

$$F_0(\xi^R) = \mathcal{A}_2 \xi^R, \quad (93)$$

από την συνθήκη των τάσεων στο άπειρο

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} (\sigma_{13}^\infty + p^L \sigma_{23}^\infty) = \sigma_{13}^\infty + p^L \sigma_{23}^\infty \quad (94)$$

βρίσκουμε

$$\mathcal{A}_2 = (1 + \Gamma) \frac{(1 + \Gamma)\bar{M}_1^R M_1^R \Sigma^\infty - (1 - \Gamma)\bar{M}_1^L \bar{M}_2^R \Sigma^\infty}{(1 + \Gamma)^2 |M_1^R|^2 - (1 - \Gamma)^2 |M_2^R|^2},$$

όπου

$$\Sigma^\infty = \frac{\sigma_{13}^\infty + p^L \sigma_{23}^\infty}{\lambda_0^L(p^L - \bar{p}^L)} i.$$

Εχοντας υπολογίσει το διφασικό δυναμικό $F_0(\xi^R)$, οι τάσεις που αναπτύσσονται στις δύο περιοχές, βρίσκονται με αντικατάσταση των (76) και (77) στην (44)

$$\sigma_{13} + p^R \sigma_{23} = -\frac{2i\lambda_0^R(p^R - \bar{p}^R)\bar{\mathcal{A}}_2}{1 + \Gamma}, \quad (95)$$

στην ανομοιογένεια, και

$$\begin{aligned} \sigma_{13} + p^L \sigma_{23} &= \frac{\sigma_{13}^\infty + p^L \sigma_{23}^\infty}{2} \left(1 + \frac{\bar{\xi}^L}{\sqrt{(\bar{\xi}^L)^2 - 4\bar{M}_1^L \bar{M}_2^L}} \right) \\ &\quad - \frac{i\lambda_0(p^L - \bar{p}^L)\bar{\mathcal{B}}_2}{2\bar{M}_2^L} \left(1 - \frac{\bar{\xi}^L}{\sqrt{(\bar{\xi}^L)^2 - 4\bar{M}_1^L \bar{M}_2^L}} \right), \end{aligned} \quad (96)$$

στην μήτρα, όπου

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2 M_2^R + \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \bar{\mathcal{A}}_2 \bar{M}_1^R.$$

Στην ειδική περίπτωση των ισότροπων υλικών, τα παραπάνω αποτελέσματα συμπίπτουν με αυτά των Gong και Meguid [12].

10 Αλληλεπίδραση ελικοειδούς γραμμοαταξίας με διεπιφάνειες

10.1 Ελικοειδής γραμμοαταξία δίπλα σε ελλειπτική ανομοιογένεια

Εκτός από το μετασχηματισμό φάσης, οι γραμμοαταξίες αποτελούν μια από τις κυριότερες πηγές εσωτερικών τάσεων. Θα μελετήσουμε εδώ το ελαστικό πρόβλημα μιας ελικοειδούς γραμμοαταξίας που βρίσκεται κοντά σε μια ελλειπτική ανομοιογένεια. Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας της ανομοιογένειας είναι τοποθετημένος στο σημείο z_0 του πεδίου L_z , και ότι το διάνυσμα Burgers της γραμμοαταξίας είναι b .

Ανεξάρτητα από την παρουσία της ανομοιογένειας, πολύ κοντά στον πυρήνα της γραμμοαταξίας το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας έχει την ακόλουθη μορφή

$$F^L(\xi^L) \cong -\frac{bi}{2\pi} \log(\xi^L - \xi_0^L) + O(1), \quad (97)$$

όπου

$$\xi_0^L = x_1^0 + ix_2^0.$$

Η (97) παρέχει την ιδιόμορφη συμπεριφορά που πρέπει να ικανοποιεί το ζητούμενο μιγαδικό δυναμικό F_0 στο σημείο ξ_0 . Επιλέγοντας ως διφασικό δυναμικό

$$F_0(\xi^R) = \frac{b}{2\pi i} \log(\xi^R - \xi_0^R) = \frac{b}{2\pi i} \log [\xi^R(\zeta) - \xi^R(\zeta_0)] , \quad (98)$$

η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, αλλά μια ανεπιθύμητη ιδιομορφία με αντοχή $-(1 - \Gamma)b/(2\pi i(1 + \Gamma))$ εισάγεται στο σημείο

$$\zeta_0^* = \zeta_0 \frac{1 + ip^{\overline{R}}}{1 - ip^{\overline{R}}} ,$$

της μήτρας. Για το σημείο ζ_0^* δείχνεται ότι $|\zeta_0^*| > |\zeta_0|$. Για να απαλείψουμε αυτή την ανεπιθύμητη γραμμοαταξία πρέπει να διορθώσουμε το μιγαδικό δυναμικό που υποθέσαμε προσθέτοντας ένα νέο όρο, δηλαδή

$$F_0(\xi^R) = \frac{b}{2\pi i} \log [\xi^R(\zeta) - \xi^R(\zeta_0)] + \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \frac{b}{2\pi i} \log [\xi^R(\zeta) - \xi^R(\zeta_0^*)] . \quad (99)$$

Αλληπάλληλες απαλοιφές των ανεπιθύμητων ανωμαλιών που εισάγονται από τους νέους όρους του διφασικού δυναμικού που εισάγουμε οδηγούν στην ακόλουθη απειροσειρά

$$\begin{aligned} F_0(\xi^R) = & \frac{b}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \Gamma^{2k}}{1 + \Gamma} \log [\xi^R(\zeta) - \xi^R(p^k \overline{p}^k \zeta_0)] \\ & + \frac{b}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \Gamma^{2k+1}}{1 + \Gamma} \log [\xi^R(\zeta) - \xi^R(p^k \overline{p}^{k+1} \zeta_0)] , \end{aligned} \quad (100)$$

όπου

$$p = \frac{1 + ip^{\overline{R}}}{1 - ip^{\overline{R}}} .$$

Το μιγαδικό δυναμικό του πεδίου L_z έχει την μορφή

$$\begin{aligned} F^L(\zeta) = & \frac{b}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \Gamma^{2k}}{1 + \Gamma} \log [\zeta - p^k \overline{p}^k \zeta_0] \\ & + \frac{b}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \Gamma^{2k+1}}{1 + \Gamma} \log [\zeta - p^k \overline{p}^{k+1} \zeta_0] . \end{aligned} \quad (101)$$

Στην ειδική περίπτωση του ισότροπου υλικού το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό του Sendeckyj [13].

10.2 Ελικοειδής γραμμοαταξία κοντά σε επίπεδη διεπιφάνεια

Στην περίπτωση ελικοειδούς γραμμοαταξίας σε άπειρο ελαστικό σώμα όπως δείξαμε στην παράγραφο 5.1 το μιγαδικό δυναμικό έχει την μορφή

$$F(\xi) = -\frac{bi}{2\pi} \log(\xi - \xi_0). \quad (102)$$

Στην περίπτωση που το intrusion καταλαμβάνει το κάτω ημιεπίπεδο του επιπέδου z , εύκολα δείχνεται ότι το διφασικό δυναμικό έχει την μορφή

$$F_0(\xi) = F(\xi). \quad (103)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το διφασικό δυναμικό στην περίπτωση της επίπεδης διεπιφάνειας ισούται με το μιγαδικό δυναμικό του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί εύκολα να γενικευτεί για μια ιδιομορφία της οποίας το μιγαδικό δυναμικό του ομογενούς προβλήματος έχει την μορφή

$$F(\xi) = A_0 \log(\xi^L - \xi_0^L) + \frac{A_{-1}}{\xi^L - \xi_0^L} + \frac{A_{-2}}{(\xi^L - \xi_0^L)^2} + \dots + \frac{A_{-n}}{(\xi^L - \xi_0^L)^n} \quad (104)$$

όπου $A_0, A_{-1}, A_{-2}, A_{-n}, \dots$ είναι γνωστές μιγαδικές σταθερές. Το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό που αποκτήθηκε πρόσφατα από τον Suo [14].

11 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκαν γενικές εκφράσεις της λύσης του αντιεπίπεδου διφασικού προβλήματος της ανισότροπης ελαστικότητας σε όρους μιας ολόμορφης συνάρτησης που αποτελεί το διφασικό δυναμικό του παραμορφωμένου σύνθετου υλικού. Η ανάλυση που αναπτύχθηκε συνιστά μια νέα μέθοδο επίλυσης ελαστικών προβλημάτων σύνθετων διφασικών υλικών που, σε αντίθεση με τις μέχρι τώρα μεθόδους, εφαρμόζεται άμεσα και σε προβλήματα που εμπλέκουν εσωτερικές τάσεις από μετασχηματισμό φάσεων.

Η δυναμικότητα της προτεινόμενης μεθόδου δείχθηκε με την εφαρμογή της σε συγκεκριμένα προβλήματα. Εξετάστηκε το πρόβλημα του ομοιόμορφου διατμητικού μετασχηματισμού μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας και η διατάραξη ενός ομοιόμορφου διατμητικού πεδίου από μια ελλειπτική ανομοιογένεια. Οι λύσεις που αναπτύχθηκαν είναι απλές και σαφείς και στην οριακή περίπτωση των ισοτρόπων σωμάτων συμφωνούν με τα υπάρχοντα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Η μέθοδος επίσης εφαρμόστηκε για την μελέτη της αλληλεπίδρασης μιας ελλειπτικής ανομοιογένειας με μια ελικοειδή γραμμοαταξία. Η λύση

που αναπτύχθηκε για το πρόβλημα αυτό, σε αντιδιαστολή με τις προηγούμενες λύσεις, είναι σειριακής μορφής.

Βιβλιογραφία

- [1] Neuber, H., 1934, "Ein neuer Ansatz zur Losung raunlicher Probleme der Elastizitatstheorie", *Z.A.M.M.*, **14**, pp. 203-215.
- [2] Eubanks, R.A., and Sternberg, E., 1956, "The Completeness of the Boussinesq-Papkovich Stress Functions", *J. Rat. Mech. Anal.*, **5**, pp. 735-746.
- [3] Kattis, M.A., 1995, "Two-phase Potentials in Two-Phase Elasticity", έχει υποβληθεί για δημοσίευση.
- [4] Muskhelishvili, N.I., 1953, "*Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*", Noordhoff, Groningen, Holland.
- [5] Kattis, M.A. and Meguid, S.A., 1995, "Two-phase Potentials for the Treatment of an Elastic Inclusion in Plane Thermoelasticity", *ASME Journal of Applied Mechanics*, **62**, pp. 7-12.
- [6] Kattis, M.A., 1994, "Two-phase Potentials for Isotropic Elastic Bi-Materials", *International Journal of Engineering Science*, **32**, pp. 1493-1499.
- [7] Aderogba, K., 1973, "An Elastostatic Circle Theorem", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **73**, pp. 269-277.
- [8] Eshelby, J.D., Read, W.T., and Shockley, W., 1953, "Anisotropic Elasticity with Applications to Dislocation Theory", *Acta Metallurgica*, **1**, pp. 251-259.
- [9] Lekhnitskii, S.G., 1963, "*Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*", Holden-Day, San Francisco.
- [10] Dundurs, J. and Markenscoff, X., 1993, "Invariance of Stresses Under a Change in Elastic Compliances", *Proceedings of the Royal Society of London*, **443**, pp.289-300.
- [11] Chyanbin Hwu and Ting, T.C.T., 1989, "Two-Dimensional Problems of the Anisotropic Elastic Solid with an Elliptical Inclusion", *Q.JI Mech. appl. Math.*, **42**, pp. 553-572.
- [12] Gong, S.X., and Meguid, S.A., 1992, "A general Treatment of the Elastic Field of an Elliptical Inhomogeneity Under Antiplane Shear", *ASME Journal of Applied Mechanics*, **59**, pp. 5131-5135.
- [13] Sendeckyj, G.P., 1970, "Screw Dislocation in Inhomogeneous Solids", in *Fundamental Aspects of Dislocation Theory*, National Bureau of Standards (U.S.), Special Publication 317 (Ed. by J.A.Summons, R. de Wit and

R.Bulough), I, pp. 57-69.

[14] Suo, Z., 1990, "Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media", *Proceeding of the Royal Society of London A*, **427**, pp. 331- 358.

[15] Eshelby, J.D., 1951, "The Force on an Elastic Singularity", *Proceeding of the Royal Society of London A*, **244**, pp. 87-111.

[16] Eshelby, J.D., 1951, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems", *Proceeding of the Royal Society of London A*, **241**, pp.376-396.

