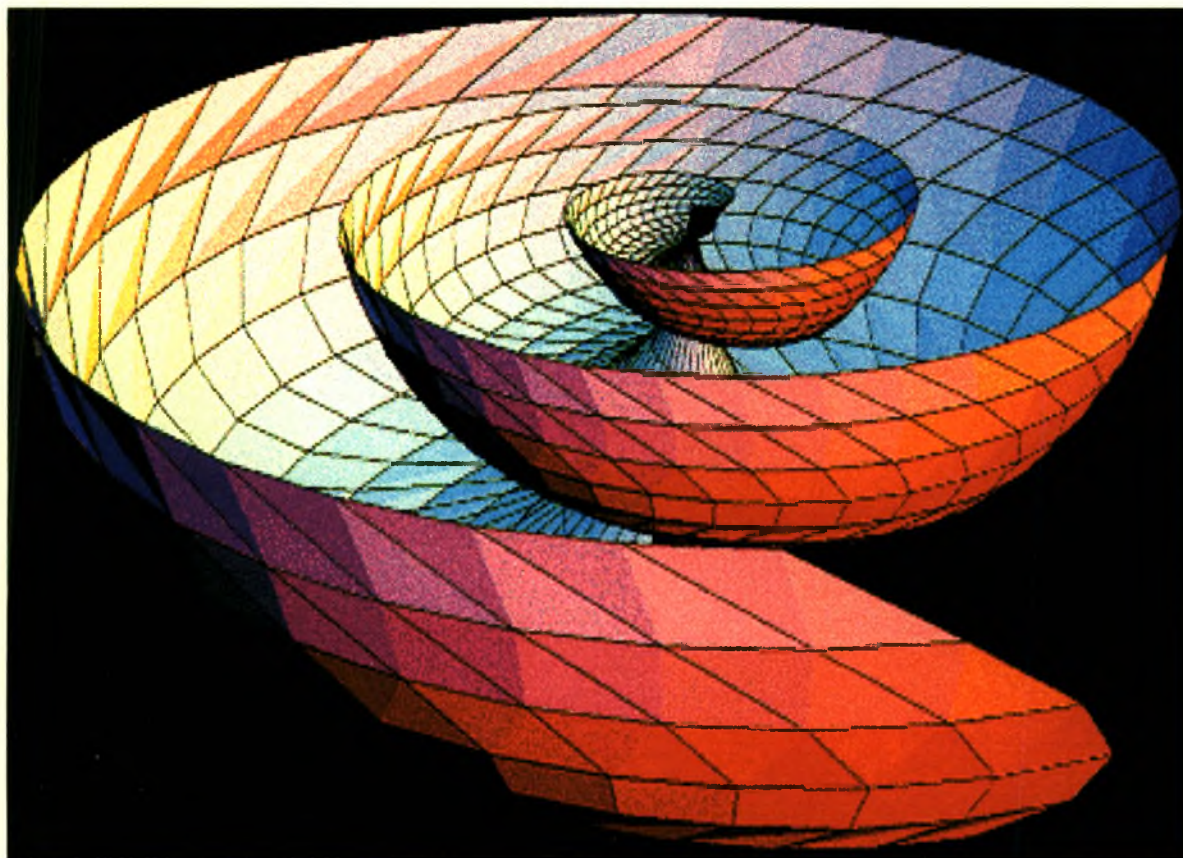


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ  
ΚΕΝΤΡΟ Η/Υ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΜΕ ΘΕΜΑ

“ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΛΥΦΟΕΙΔΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ,  
ΟΠΩΣ ΑΥΤΕΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ,  
ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ”



ΦΟΙΤΗΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ Μ. ΔΟΪΝΑΚΗΣ  
ΕΠΙΒΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ. ΕΥΘΥΜΙΟΣ ΠΡΟΒΙΔΑΣ



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 823/1

Ημερ. Εισ.: 12-09-1997

Δωρεά:

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ

1996

ΔΟΙ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ Μ. ΔΟΪΝΑΚΗΣ

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΛΥΦΟΕΙΔΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ,  
ΟΠΩΣ ΑΥΤΕΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ,  
ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

ΒΟΛΟΣ 1996



αρ. εισ. .... 32/11.A .....

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
  
004000055869

στους γονείς μου

*Μιχάλη και Αναστασία*

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας. Πρώτον τον Δρ. Ε. Προβίδα για την καθοδήγησή του, την συνεχόμενη βοήθεια και για την συνεργασία. Αλλά και τους επιβλέπωντες-εξεταστές Δρ. Μ. Καττή και καθηγητή Ν. Αράβα για την προθυμία αλλά και την ουσιαστική βοήθεια όταν αυτή τους ζητήθηκε.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

σελ.

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	5
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ</b> <b>ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</b> .....	6
1.1. Το Πλαγιογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων .....	6
1.2. Η Γεωμετρία Του Τριγώνου .....	7
1.3. Το Σύνоро Του Τριγώνου .....	8
1.4. Το Παραμορφωμένο Τριγωνικό Στοιχείο .....	9
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ</b> <b>ΛΕΠΤΟΙ ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΦΟΡΕΙΣ</b> .....	11
2.1. Εισαγωγή .....	11
2.2. Το Τριγωνικό Στοιχείο Σταθερής Παραμόρφωσης .....	12
2.2.1. Πολυώνυμα παρεμβολής .....	12
2.2.2. Σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων .....	13
2.2.3. Σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων .....	14
2.2.4. Το μητρώο ακαμψίας .....	14
2.2.5. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .....	15
2.3. Οι Εξισώσεις Ισοροπίας Για Τον Επίπεδο Φορέα .....	16
2.3.1. Το ολικό μητρώο ακαμψίας .....	16
2.3.2. Το ολικό διάνυσμα φόρτισης .....	16
2.4. Εύρεση Μετατοπίσεων, Τάσεων Και Παραμορφώσεων .....	16
2.5. Πρόγραμμα FORTRAN .....	17
2.6. Εφαρμογή .....	18

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ</b>	
<b>ΛΕΠΤΕΣ ΠΛΑΚΕΣ</b> .....	21
<b>3.1. Εισαγωγή</b> .....	21
<b>3.2. Το Τριγωνικό Στοιχείο Του Morley</b> .....	22
3.2.1. Πολύωνυμο παρεμβολής .....	22
3.2.2. Σχέσεις καμπυλοτήτων - μετατοπίσεων .....	23
3.2.3. Σχέσεις ροπών - καμπυλοτήτων .....	24
3.2.4. Το μητρώο ακαμψίας .....	24
3.2.5. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .....	25
<b>3.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Την Πλάκα</b> .....	26
3.3.1. Το ολικό μητρώο ακαμψίας .....	26
3.3.2. Το ολικό διάνυσμα φόρτισης .....	26
<b>3.4. Εύρεση Μετατοπίσεων, Ροπών Και Καμπυλοτήτων</b> .....	26
<b>3.5. Πρόγραμμα FORTRAN</b> .....	27
<b>3.6. Εφαρμογή</b> .....	28
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ</b>	
<b>ΛΕΠΤΑ ΚΕΛΥΦΗ</b> .....	31
<b>4.1. Εισαγωγή</b> .....	31
<b>4.2. Το Τριγωνικό Στοιχείο Σταθερής Παραμόρφωσης Και Κάμψης</b> .....	31
4.2.1. Περιγραφή .....	31
4.2.2. Το μητρώο ακαμψίας .....	32
4.2.3. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .....	33
<b>4.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Το Κέλυφος</b> .....	34
4.3.1. Το ολικό μητρώο ακαμψίας .....	34
4.3.2. Το ολικό διάνυσμα φόρτισης .....	35
<b>4.4. Εύρεση Μετατοπίσεων, Παραμορφώσεων, Τάσεων, Καμπυλοτήτων και Ροπών</b> .....	35
<b>4.5. Πρόγραμμα FORTRAN</b> .....	35
<b>4.6. Εφαρμογή</b> .....	35



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ	
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ .....	37
5.1. Εισαγωγή .....	37
5.2. Ένα Απλό Τριγωνικό Στοιχείο .....	38
5.2.1. Πολύωνυμα παρεμβολής .....	38
5.2.2. Σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων .....	40
5.2.3. Σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων και ροπών - καμπυλοτήτων .....	41
5.2.4. Το μητρώο ακαμψίας .....	42
5.2.5. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .....	43
5.2.6. Το επαπτόμενο μητρώου ακαμψίας .....	45
5.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Την Κατασκευή .....	45
5.4. Η Επίλυση Του Μη Γραμμικού Συστήματος .....	46
5.5. Εύρεση Μετατοπίσεων, Παραμορφώσεων, Τάσεων, Καμπυλοτήτων και Ροπών .....	47
5.6. Πρόγραμμα FORTRAN .....	48
5.7. Εφαρμογή .....	48
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	51
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	52
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ .....	54
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I .....	55
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II .....	71
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III .....	88
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV .....	103

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα κελύφη είναι κατασκευές οι οποίες μπορούν να μεταφέρουν πολύ μεγάλα φορτία και γι' αυτό είναι απαραίτητα σε πολλές εφαρμογές. Τα λεπτά κελύφη, λόγω του μικρού τους βάρους, χρησιμοποιούνται ευρύτερα στην αυτοκινητοβιομηχανία και πολύ περισσότερο στην αεροπορική βιομηχανία. Στην τελευταία, τα κελύφη σχεδιάζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε κατά την διάρκεια της χρήσης των να παραμορφώνονται μόνο ελαστικά.

Στις περισσότερες εφαρμογές οι παραμορφώσεις είναι μικρές και αρκεί η θεωρία των μικρών ελαστικών μετατοπίσεων. Σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι παραμορφώσεις είναι μεγάλες, είναι απαραίτητη η θεωρία των μεγάλων μετατοπίσεων. Μια τέτοια θεωρία ονομάζεται γεωμετρικά μη γραμμική.

Γεωμετρικές μη γραμμικές θεωρίες υπάρχουν πολλές, αλλά οι εξισώσεις έχουν τέτοια πλοκή που είναι αδύνατον να επιλυθούν αναλυτικά. Τα τελευταία σαράντα χρόνια η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά για την επίλυση προβλημάτων με κελύφη. Έτσι σήμερα υπάρχουν αρκετά πακέτα λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων. Η χρήση τους όμως, για την εξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων, προϋποθέτει βαθιά γνώση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και των παγίδων που αυτή κρύβει.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι

- η μελέτη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων
- η ανάπτυξη πεπερασμένων στοιχείων
- η ανάπτυξη κώδικα σε γλώσσα FORTRAN
- η επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

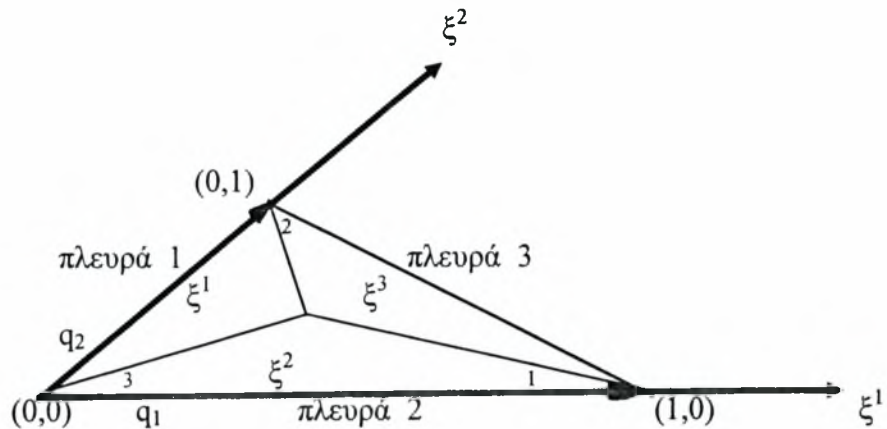
Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στην ανάπτυξη ενός μη γραμμικού επίπεδου τριγωνικού στοιχείου για την ανάλυση κελυφών.

Στο Πρώτο Κεφάλαιο παρουσιάζεται το τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων το οποίο στην ανάπτυξη των πεπερασμένων στοιχείων έχει αρκετά πλεονεκτήματα έναντι του ορθογωνίου. Το Δεύτερο Κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στους επίπεδους φορείς και ιδιαίτερα στην ανάπτυξη του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης<sup>[8]</sup>. Το Τρίτο Κεφάλαιο ασχολείται με τις πλάκες και γίνεται η ανάπτυξη του στοιχείου του Morley<sup>[7]</sup>. Το Τέταρτο Κεφάλαιο εξετάζει την ανάλυση κελυφών με επίπεδα τριγωνικά στοιχεία. Στο Πέμπτο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα απλό τριγωνικό στοιχείο για την γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση των κελυφών. Τέλος στα Παραρτήματα I-IV δίνεται ο κώδικας σε γλώσσα FORTRAN για όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις. Θα πρέπει να σημειωθεί πως μόνο η υπορουτίνα SKFUL<sup>[5]</sup> δεν αποτελεί δημιουργήμα του γραφόντα.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1. Το Πλαγιογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων

Έστω ένα επίπεδο τριγωνικό στοιχείο, όπως αυτό στο σχήμα (1.1), του οποίου οι κορυφές του αριθμούνται με φορά αντίθετη προς τους δείκτες του ωρολογιού. Η πλευρά η οποία βρίσκεται απέναντι από την κορυφή 1 ονομάζεται πλευρά 1 και παρόμοια ονομάζονται και οι άλλες δύο πλευρές του. Το στοιχείο έχει πάχος  $h$  και έχει κάτω, επάνω και μέση επιφάνεια. Στη μη παραμορφωμένη μέση επιφάνεια του στοιχείου ορίζεται ένα πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων του οποίου η ρίζα είναι η κορυφή 3 ενώ οι άξονες του  $\xi^1$  και  $\xi^2$  συμπίπτουν με τις πλευρές 2 και 1, αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες των κορυφών 1 και 2 είναι  $(1,0)$  και  $(0,1)$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1

Το τριγωνικό στοιχείο στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Έστω τώρα ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $XYZ$  στο χώρο και έστω  $e_1, e_2, e_3$  τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα βάσης. Τότε για τα μη μοναδιαία διανύσματα βάσης  $q_1, q_2$  του πλαγιογωνίου συστήματος στη μη παραμορφωμένη μέση επιφάνεια ισχύει

$$q_1 = (X_1 - X_3)e_1 + (Y_1 - Y_3)e_2 + (Z_1 - Z_3)e_3$$

$$q_2 = (X_2 - X_3)e_1 + (Y_2 - Y_3)e_2 + (Z_2 - Z_3)e_3 \quad (1.1)$$

Εάν  $n$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην μη παραμορφωμένη μέση επιφάνεια του στοιχείου, τότε

$$n = \frac{q_1 \times q_2}{|q_1 \times q_2|} = n^1 e_1 + n^2 e_2 + n^3 e_3 \quad (1.2)$$

όπου

$$\begin{aligned}
n^1 &= \frac{1}{2A} [(Y_1 - Y_3)(Z_2 - Z_3) - (Y_2 - Y_3)(Z_1 - Z_3)] \\
n^2 &= \frac{1}{2A} [(Z_1 - Z_3)(X_2 - X_3) - (Z_2 - Z_3)(X_1 - X_3)] \\
n^3 &= \frac{1}{2A} [(X_1 - X_3)(Y_2 - Y_3) - (X_2 - X_3)(Y_1 - Y_3)]
\end{aligned} \tag{1.3}$$

και Α συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι πλαγιογώνιες συντεταγμένες  $\xi^1$  και  $\xi^2$  είναι ισοδύναμες με τις εμβαδικές συντεταγμένες  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  του Zienkiewicz<sup>[1]</sup> όπου

$$\xi^3 = 1 - \xi^1 - \xi^2 . \tag{1.4}$$

## 1.2. Η Γεωμετρία Του Τριγώνου

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγωνικού στοιχείου υπολογίζονται εύκολα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
l_1 &= \sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + (Z_2 - Z_3)^2} \\
l_2 &= \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2} \\
l_3 &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ενώ τα παρακάτω μεγέθη είναι χρήσιμα

$$\begin{aligned}
l_{12} &= (l_1)^2 + (l_2)^2 - (l_3)^2 \\
l_{23} &= (l_2)^2 + (l_3)^2 - (l_1)^2 \\
l_{31} &= (l_3)^2 + (l_1)^2 - (l_2)^2 .
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{l_{12}l_{23} + l_{23}l_{31} + l_{31}l_{12}} \tag{1.7}$$

ενώ για το επίπεδο XY ισχύει

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (Y_3(X_2 - X_1) + Y_2(X_1 - X_3) + Y_1(X_3 - X_2)) . \quad (1.8)$$

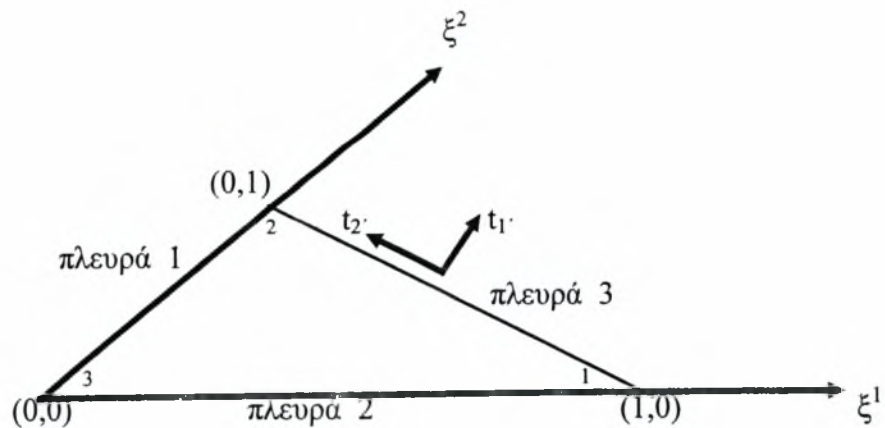
### 1.3. Το Σύνορο Του Τριγώνου

Το τριγωνικό στοιχείο έχει ένα σύνορο το οποίο είναι οι τρεις πλευρές του. Για κάθε πλευρά ορίζεται ένα τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $\xi^1, \xi^2$ , με μοναδιαία διανύσματα βάσης  $t_1$  και  $t_2$ , αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.2). Το διάνυσμα  $t_1$  είναι κάθετο στην πλευρά ενώ το διάνυσμα  $t_2$  εφάπτεται της πλευράς. Στην αναφορά Providas<sup>[3]</sup> δίνεται ότι

$$\begin{aligned} t_{1'} &= h_{1'}^1 q_1 + h_{1'}^2 q_2 \\ t_{2'} &= h_{2'}^1 q_1 + h_{2'}^2 q_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

όπου

$$\begin{aligned} \text{πλευρά 1: } h_{1'}^1 &= -\frac{l_1}{2A}, & h_{1'}^2 &= \frac{l_{12}}{4Al_1}, & h_{2'}^1 &= 0, & h_{2'}^2 &= -\frac{1}{l_1} \\ \text{πλευρά 2: } h_{1'}^1 &= \frac{l_{12}}{4Al_2}, & h_{1'}^2 &= -\frac{l_2}{2A}, & h_{2'}^1 &= \frac{1}{l_2}, & h_{2'}^2 &= 0 \\ \text{πλευρά 3: } h_{1'}^1 &= \frac{l_{31}}{4Al_3}, & h_{1'}^2 &= \frac{l_{23}}{4Al_3}, & h_{2'}^1 &= -\frac{1}{l_3}, & h_{2'}^2 &= \frac{1}{l_3} . \end{aligned} \quad (1.10)$$



**Σχήμα 1.2**  
Τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Οι ποσότητες  $h_{\alpha}^{\alpha}$  ( $\alpha=1,2$ ) είναι καλά ορισμένες και ακολουθούν την άλγεβρα των ταυσιτών. Η μεταφορά ποσοτήτων από το πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $\xi^1, \xi^2$  στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $\xi^1, \xi^2$ , σε μια από τις πλευρές του τριγώνου, μπορεί να γίνει εύκολα με την βοήθεια των συμβόλων  $h_{\alpha}^{\alpha}$ . Για παράδειγμα, η μεταφορά του ταυσιτή τάσης  $\sigma_{\alpha\beta}$  (covariant συνιστώσες) από το πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων μιας πλευράς του τριγώνου, γίνεται απλά ως εξής

$$\sigma_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\alpha} h_{\beta}^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad (1.11)$$

ή σε μητρική μορφή

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1'1'} \\ \sigma_{2'2'} \\ \sigma_{1'2'} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

όπου

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1^1 h_1^1 & h_1^2 h_1^2 & 2h_1^1 h_1^2 \\ h_2^1 h_2^1 & h_2^2 h_2^2 & 2h_2^1 h_2^2 \\ h_1^1 h_2^1 & h_1^2 h_2^2 & h_1^1 h_2^2 + h_1^2 h_2^1 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

#### 1.4. Το Παραμορφωμένο Τριγωνικό Στοιχείο

Το στοιχείο κατά την φόρτιση καταπονείται με αποτέλεσμα να παραμορφώνεται. Η παραμορφωμένη μέση επιφάνεια του στοιχείου μπορεί να περιγραφεί με το διάνυσμα

$$\mathbf{r} = U\mathbf{e}_1 + V\mathbf{e}_2 + W\mathbf{e}_3 \quad (1.14)$$

όπου  $U, V$  και  $W$  συμβολίζουν τις μετατοπίσεις παράλληλα με τους άξονες  $X, Y$  και  $Z$ , αντίστοιχα. Εναλλακτικά, το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  μπορεί να γραφεί με αναφορά στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων ως εξής

$$\mathbf{r} = u^{\bullet} \mathbf{q}_1 + v^{\bullet} \mathbf{q}_2 + w^{\bullet} \mathbf{n} \quad (1.15)$$

όπου  $u^{\bullet}, v^{\bullet}$  και  $w^{\bullet}$  είναι οι μετατοπίσεις παράλληλα προς τα διανύσματα βάσεις  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  και  $\mathbf{n}$ , αντίστοιχα. Οι συνιστώσες  $u^{\bullet}, v^{\bullet}$  και  $w^{\bullet}$  ονομάζονται contravariant συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{r}$ .

Σύμφωνα με την θεωρία των ταυιστών, στο σύνολο των συνιστωσών  $u^*$ ,  $v^*$  και  $w^*$  αντιστοιχεί ένα άλλο σύνολο συνιστωσών  $u$ ,  $v$  και  $w$  οι οποίες ονομάζονται covariant συνιστώσες, όπως για παράδειγμα στην αναφορά Providas<sup>[3]</sup>. Στην τελευταία δίνεται η εξής πολύτιμη σχέση

$$u = (X_1 - X_3)U + (Y_1 - Y_3)V + (Z_1 - Z_3)W$$

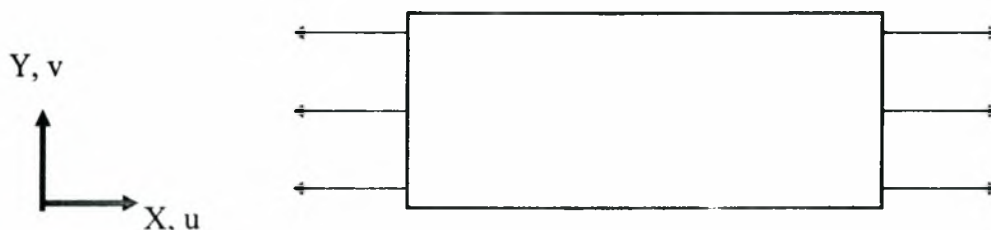
$$v = (X_2 - X_3)U + (Y_2 - Y_3)V + (Z_2 - Z_3)W$$

$$w = n^1U + n^2V + n^3W . \tag{1.16}$$

ΛΕΠΤΟΙ ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

2.1. Εισαγωγή

Οι λεπτοί επίπεδοι φορείς είναι επίπεδες κατασκευές των οποίων το πάχος  $h$  είναι κατά πολύ μικρότερο σε σύγκριση με τις άλλες διαστάσεις τους και δέχονται μόνο εφελκυστικά ή θλιπτικά φορτία. Η επίπεδη ή διαξονική εντατική κατάσταση μπορεί να προσδιορισθεί από τις μετατοπίσεις  $u$  και  $v$  οι οποίες είναι παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων  $X$  και  $Y$ .



Σχήμα 2.1  
Επίπεδος φορέας

Εάν οι μετατοπίσεις  $u$  και  $v$  είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις του επίπεδου φορέα, τότε ισχύει η γραμμική θεωρία όπου οι παραμορφώσεις ορίζονται ως εξής

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

ενώ οι τάσεις για ελαστικό ισότροπο υλικό είναι

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \quad (2.2)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας (Young's Modulus) και  $\nu$  είναι ο συντελεστής Poisson.



Οι προς επίλυση εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + f_x = 0$$

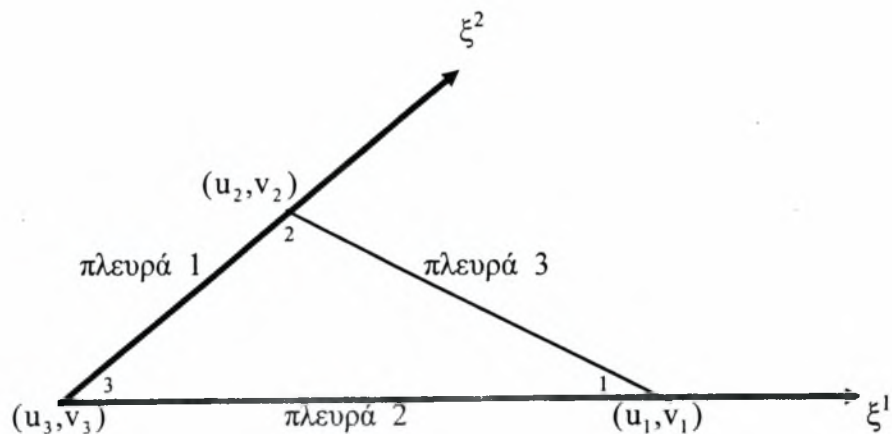
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0, \quad (2.3)$$

όπου  $f_x$  και  $f_y$  είναι φορτίσεις στις  $X$  και  $Y$  διευθύνσεις, αντίστοιχα. Οι εξισώσεις ισορροπίας συνοδεύονται με τις κατάλληλες για κάθε περίπτωση οριακές συνθήκες.

## 2.2. Το Τριγωνικό Στοιχείο Σταθερής Παραμόρφωσης

### 2.2.1. Πολύωνυμα παρεμβολής

Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης έχει τρεις κόμβους, έναν σε κάθε κορυφή του τριγώνου, με δύο βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο ( $u_i, v_i, i=1,2,3$ ). Έτσι οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι έξι όπως φαίνεται στο σχήμα (2.2).



**Σχήμα 2.2**

*Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης*

Μέσα στο τρίγωνο οι μετατοπίσεις  $u, v$  περιγράφονται από τα γραμμικά πολύωνυμα

$$u = u_1 \xi^1 + u_2 \xi^2 + u_3 \xi^3$$

$$v = v_1 \xi^1 + v_2 \xi^2 + v_3 \xi^3, \quad (2.4)$$

όπου  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  συμβολίζουν τις εμβαδικές συντεταγμένες και  $u_i, v_i$  είναι οι τιμές των  $u, v$  στις κορυφές του τριγώνου. Με την βοήθεια της εξίσωσης (1.4) οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\begin{aligned}
 u &= (u_1 - u_3)\xi^1 + (u_2 - u_3)\xi^2 + u_3 \\
 v &= (v_1 - v_3)\xi^1 + (v_2 - v_3)\xi^2 + v_3 .
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

### 2.2.2. Σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων

Οι παραμορφώσεις με αναφορά στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial \xi^1} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial \xi^2} \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v}{\partial \xi^1} \right) ,
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

οι οποίες μετά την αντικατάσταση των εξισώσεων (2.5) και εκτέλεση των πράξεων γράφονται

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= u_1 - u_3 \\
 \varepsilon_{22} &= v_2 - v_3 \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(v_1 + u_2 - u_3 - v_3) .
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε μητρική μορφή ως εξής

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{ \varepsilon_{\alpha\beta} \} = [\mathbf{B}] \{ a_i \} ,
 \tag{2.8}$$

όπου ο πίνακας B έχει την μορφή

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}
 \tag{2.9}$$

και  $\{ a_i \}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων του στοιχείου με αναφορά στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

### 2.2.3. Σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων

Στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων οι τάσεις (contravariant συνιστώσες) ορίζονται ως εξής

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ 2\sigma^{12} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{\sigma^{\alpha\beta}\} = [D] \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \quad (2.10)$$

όπου

$$[D] = \frac{E}{64(1-\nu^2)(A)^4} \begin{bmatrix} 4(l_1)^4 & 4\nu(l_1 l_2)^2 + (1-\nu)(l_{12})^2 & -4(l_1)^2 l_{12} \\ & 4(l_2)^4 & -4(l_2)^2 l_{12} \\ \text{συμ.} & & 2(1+\nu)(l_{12})^2 + 8(1-\nu)(l_1 l_2)^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

είναι ο πίνακας ελαστικότητας. Το A συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου, τα  $l_1, l_2, l_3$  είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και το  $l_{12}$  δίνεται στις εξισώσεις (1.6).

### 2.2.4. Το μητρώο ακαμψίας

Με την βοήθεια των παραπάνω συμβολισμών η ενέργεια παραμόρφωσης για το τριγωνικό στοιχείο μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\Pi = \frac{h}{2} \iint_A \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}^T \{\sigma^{\alpha\beta}\} \partial\xi^1 \partial\xi^2 = \frac{h}{2} \iint_A \{a_i\}^T [B]^T [D] [B] \{a_i\} \partial\xi^1 \partial\xi^2. \quad (2.12)$$

Η αρχή της ελάχιστης ενέργειας παραμόρφωσης απαιτεί η παράγωγος πρώτης τάξης της ενέργειας παραμόρφωσης  $\Pi$  ως προς το  $\{a_i\}$  να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή

$$\delta\Pi = \frac{h}{2} \iint_A (\delta\{a_i\}^T [B]^T [D] [B] \{a_i\} + \{a_i\}^T [B]^T [D] [B] \delta\{a_i\}) \partial\xi^1 \partial\xi^2 = \delta\{a_i\}^T (hA [B]^T [D] [B]) \{a_i\} = 0 \quad (2.13)$$

ή μετά την αντικατάσταση

$$\delta\{a_i\}^T [K] \{a_i\} = 0, \quad (2.14)$$

όπου ο διαστάσεων (6x6) συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας

$$[K] = hA [B]^T [D] [B] \quad (2.15)$$

είναι το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Από την εξίσωση (2.14) προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο,

$$[K]\{a_i\} = 0 \quad (2.16)$$

### 2.2.5. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Η μεταφορά των  $u$  και  $v$  από το τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γίνεται σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.16), δηλαδή

$$\begin{aligned} u &= (X_1 - X_3)U + (Y_1 - Y_3)V \\ v &= (X_2 - X_3)U + (Y_2 - Y_3)V \end{aligned} \quad (2.17)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γράφονται ως εξής

$$[T]^T [K] [T] \{U_i\} = 0 \quad (2.18)$$

όπου

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

συμβολίζει το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων για το οποίο ισχύει

$$\{a_i\} = [T] \{U_i\} \quad (2.20)$$

όπου

$$[T] = \begin{bmatrix} X_1 - X_3 & Y_1 - Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 - X_3 & Y_2 - Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 - X_3 & Y_1 - Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 & Y_2 - Y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 - X_3 & Y_1 - Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 - X_3 & Y_2 - Y_3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Τον Επίπεδο Φορέα

#### 2.3.1. Το ολικό μητρώο ακαμψίας

Το ολικό μητρώο ακαμψίας δημιουργείται με κατάλληλη πρόσθεση των επιμέρους μητρώων ακαμψίας των στοιχείων με αναφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Το ολικό μητρώο ακαμψίας έχει τις ίδιες ιδιότητες με τα επιμέρους μητρώα ακαμψίας των στοιχείων δηλαδή είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο. Η διάστασή του ισούται με το γινόμενο των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου επί των αριθμό των κόμβων που υπάρχουν στον κάρναβο.

#### 2.3.2. Το ολικό διάνυσμα φόρτισης

Το ολικό διάνυσμα φόρτισης για λόγους ευκολίας δημιουργείται για ολόκληρη την κατασκευή στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, παρά για κάθε στοιχείο ξεχωριστά. Αποτέλεσμα αυτής της τακτικής είναι ότι η κάθε είδους φόρτιση θα πρέπει να μετετρέπεται σε αντίστοιχη σημειακή φόρτιση.

Έτσι, οι προς επίλυση τελικές εξισώσεις ισορροπίας για τον επίπεδο φορέα, συμπεριλαμβανομένης και της εξωτερικής φόρτισης, στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$[K^{ολ}] \{U_i^{ολ}\} = \{F_i^{ολ}\} . \quad (2.22)$$

### 2.4. Εύρεση Μετατοπίσεων, Τάσεων Και Παραμορφώσεων

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος (2.22) μπορεί να γίνει με μία από τις γνωστές αριθμητικές μεθόδους όπως με την μέθοδο Gauss ή ακόμη καλύτερα με την μέθοδο Cholesky η οποία λαμβάνει υπ' όψη το γεγονός ότι το ολικό μητρώο ακαμψίας είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο.

Η επίλυση του συστήματος δίνει τις τιμές του διανύσματος  $\{U_i^{ολ}\}$ , δηλαδή τις τιμές των μετατοπίσεων σε όλους τους κόμβους της κατασκευής. Η μεταφορά των μετατοπίσεων από το καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων γίνεται με την βοήθεια της εξίσωσης (2.20). Οι παραμορφώσεις με αναφορά στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων υπολογίζονται από την εξίσωση (2.8).

Ποσότητες οι οποίες αναφέρονται στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων δεν έχουν πρακτική σημασία και γι' αυτό θα πρέπει να μεταφέρονται στο ορθογώνιο σύστημα σε μία από τις πλευρές του τριγώνου. Τέτοιου είδους μεταφορά μπορεί να πραγματοποιηθεί με την χρήση της εξίσωσης (1.12), δηλαδή

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta'}\} = [H] \{\varepsilon_{\alpha\beta}\} . \quad (2.23)$$

Έτσι οι τάσεις στο τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\{\sigma_{\alpha\beta}\} = [D']\{\varepsilon_{\alpha\beta}\} \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11'} \\ \sigma_{22'} \\ 2\sigma_{12'} \end{Bmatrix} = [D'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11'} \\ \varepsilon_{22'} \\ \varepsilon_{12'} \end{Bmatrix}, \quad (2.24)$$

όπου

$$[D'] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{συμ.} & & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

είναι ο πίνακας ελαστικότητας για ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Τέλος, ποσότητες οι οποίες έχουν πρακτική σημασία και είναι ανεξάρτητες από συστήματα συντεταγμένων είναι οι κύριες τιμές των τάσεων και παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{11'} + \varepsilon_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11'} - \varepsilon_{22'}}{2}\right)^2 + (\varepsilon_{12'})^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11'} + \sigma_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11'} - \sigma_{22'}}{2}\right)^2 + (\sigma_{12'})^2}. \quad (2.26)$$

## 2.5. Πρόγραμμα FORTRAN

Για την επίλυση των προβλημάτων για επίπεδους φορείς οι οποίοι καταπονούνται με εφελκυστικά ή θλιπτικά φορτία έχει γραφεί πρόγραμμα FORTRAN το οποίο παρατίθεται στο Παράρτημα Ι.

Τα δεδομένα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να εισαχθούν σε ειδικό αρχείο εισαγωγής με την εξής σειρά

- Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής (E)
- Ο συντελεστής Poisson του υλικού της κατασκευής ( $\nu$ )
- Το πάχος κάθε στοιχείου (h)
- Η συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά, κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου
- Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων του καννάβου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (X,Y)
- Το πλήθος των οριακών συνθηκών
- Οι οριακές συνθήκες στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
- Οι γενικευμένες κομβικές δυνάμεις στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Το πρόγραμμα υπολογίζει τις μετατοπίσεις για κάθε κόμβο της κατασκευής και στη συνέχεια βρίσκει τις κύριες παραμορφώσεις και τάσεις για κάθε στοιχείο.

## 2.6. Εφαρμογή

Για τον έλεγχο του κώδικα αλλά και για την αξιολόγηση ενός στοιχείου συνηθίζεται να χρησιμοποιείται το Patch Test. Το Patch Test είναι ένα πρόβλημα για το οποίο οι σταθερές παραμορφώσεις, τάσεις και οι αντίστοιχες μετατοπίσεις είναι γνωστές από την αρχή. Ένα πεπερασμένο στοιχείο λέγεται ότι έχει “περάσει” το Patch Test όταν ο αντίστοιχος κώδικας είναι σε θέση να αναπαράγει τις πραγματικές τιμές καθώς αυξάνει ο αριθμός των στοιχείων στην κατασκευή. Έχει αποδειχθεί από τον Zienkiewicz<sup>[1]</sup> ότι εάν ένα στοιχείο έχει “περάσει” το αντίστοιχο Patch Test τότε αυτό το στοιχείο θα δίνει πάντοτε αξιόπιστες λύσεις για οποιοδήποτε πρόβλημα, οι οποίες καθώς αυξάνει ο αριθμός των στοιχείων στη κατασκευή θα συγκλίνουν στην πραγματική λύση. Για τους επίπεδους φορείς ο Macneal<sup>[6]</sup> προτείνει το παρακάτω Patch Test.

Έστω ότι οι μετατοπίσεις  $u$  και  $v$  για ένα επίπεδο φορέα σε καταπόνηση μεταβάλλονται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$u = 10^{-3} \left( x + \frac{y}{2} \right)$$

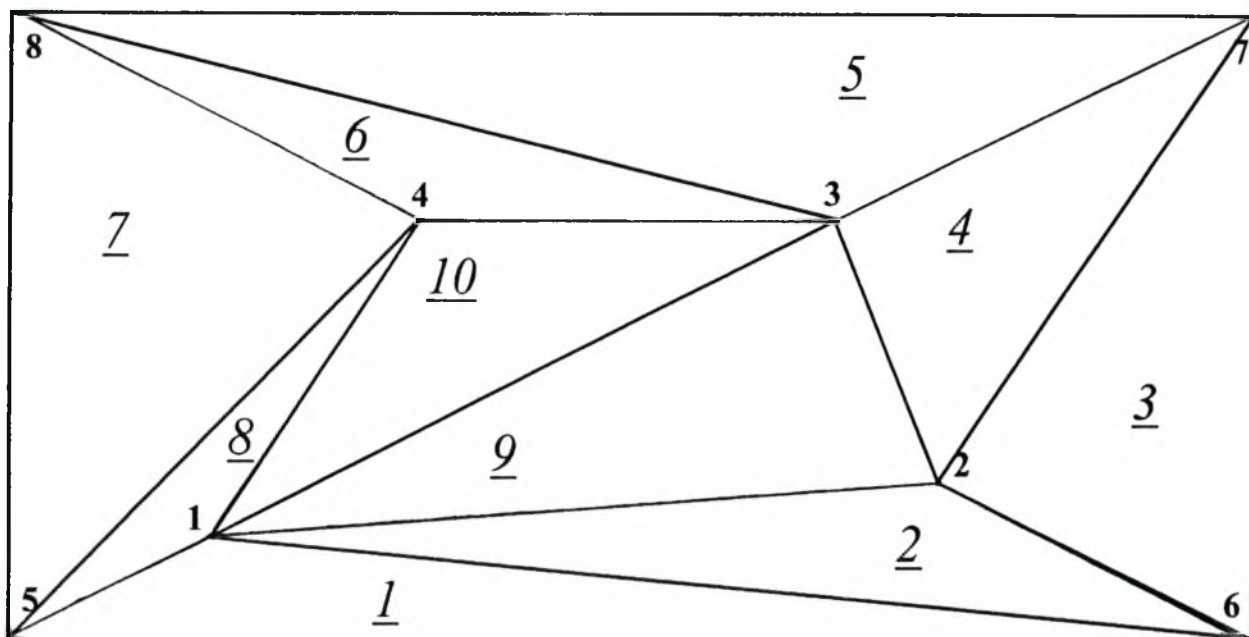
$$v = 10^{-3} \left( \frac{x}{2} + y \right) .$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 0.0010 \\ \varepsilon_{yy} &= 0.0010 \\ \varepsilon_{xy} &= 0.0005 \\ \sigma_{xx} &= 1333.3333 \\ \sigma_{yy} &= 1333.3333 \\ \sigma_{xy} &= 400.0000 , \end{aligned}$$

όπου το μέτρο ελαστικότητας, ο συντελεστής Poisson και το πάχος του επίπεδου φορέα είναι, αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} E &= 10^6 \\ \nu &= 0.25 \\ h &= 10^{-3} . \end{aligned}$$



**Σχήμα 2.3**  
Patch Test για επίπεδο φορέα

Ο επίπεδος φορέας μοντελοποιείται με δέκα ακανόνιστα τριγωνικά στοιχεία όπως φαίνεται στο σχήμα (2.3). Η συνδεκτικότητα των στοιχείων και οι συντεταγμένες των κόμβων δίνονται στον Πίνακα 2.1 και στον Πίνακα 2.2, αντίστοιχα.

α / α	στοιχείου	Συνδεκτικότητα
1		5 6 1
2		1 6 2
3		6 7 2
4		2 7 3
5		7 8 3
6		3 8 4
7		5 4 8
8		5 1 4
9		2 3 1
10		4 1 3

**Πίνακας 2.1** Συνδεκτικότητα των στοιχείων



$\alpha / \alpha$	κόμβου	X	Y
1		0.04	0.02
2		0.18	0.03
3		0.16	0.08
4		0.08	0.08
5		0.00	0.00
6		0.24	0.00
7		0.24	0.12
8		0.00	0.12

*Πίνακας 2.2 Συντεταγμένες των κόμβων*

Στο όριο περιγράφονται οι μετατοπίσεις  $u, v$  των οποίων οι τιμές δίνονται στον Πίνακα 2.3.

$\alpha / \alpha$	κόμβου	u	v
1		0.00005	0.00004
2		0.00195	0.00012
3		0.00020	0.00016
4		0.00012	0.00012

*Πίνακας 2.3 Οριακές συνθήκες*

Ζητούνται οι μετατοπίσεις στους εσωτερικούς κόμβους καθώς και οι παραμορφώσεις και τάσεις σε όλη την επιφάνεια του επίπεδου φορέα.

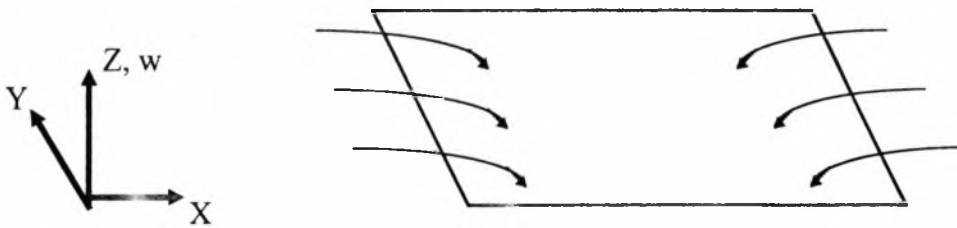
Στο Παράρτημα I δίνεται επιπλέον το αρχείο εισαγωγής και τα αποτελέσματα για την παραπάνω εφαρμογή. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι αυτά συμφωνούν με τις πραγματικές τιμές.

**3.1. Εισαγωγή**

Οι λεπτές πλάκες, όπως και οι επίπεδοι φορείς, είναι επίπεδες κατασκευές των οποίων το πάχος  $h$  είναι κατά πολύ μικρότερο σε σύγκριση με τις άλλες διαστάσεις τους αλλά δέχονται μόνο καμπτικά φορτία. Το βέλος κάμψης  $w$  παράλληλο στον άξονα συντεταγμένων  $Z$  και οι επαπτόμενες των ελαστικών γραμμών

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{-\partial w}{\partial x} \\ \varphi_y &= \frac{-\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.1}$$

προσδιορίζουν την εντατική κατάσταση.



*Σχήμα 3.1  
Καταπόνηση πλάκας*

Στη γραμμική θεωρία όπου το βέλος κάμψης  $w$  παραμένει πολύ μικρό σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις της πλάκας οι καμπυλότητες ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_{yy} &= \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= \frac{-\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.2}$$

ενώ οι ροπές για ελαστικό ισότροπο υλικό είναι

$$M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(k_{xx} + \nu k_{yy})$$

$$M_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\nu k_{xx} + k_{yy})$$

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}k_{xy}, \quad (3.3)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας (Young's Modulus) και  $\nu$  είναι ο συντελεστής Poisson.

Οι προς επίλυση εξισώσεις ισορροπίας είναι

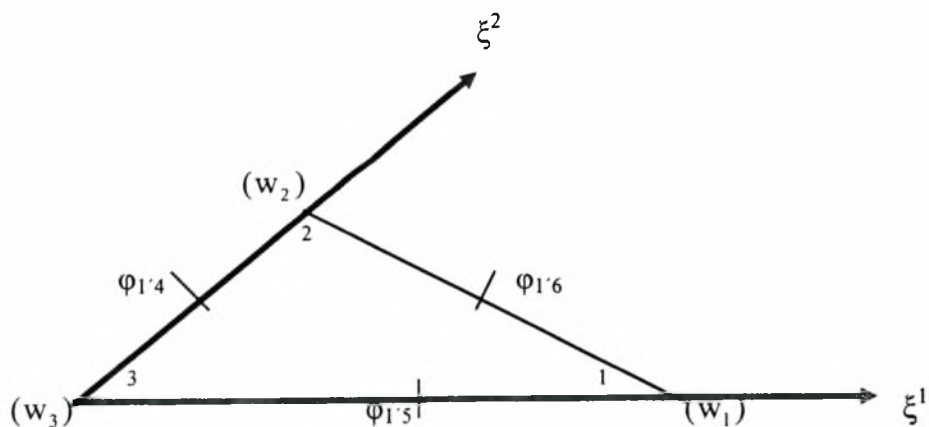
$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + f_z = 0, \quad (3.4)$$

όπου  $f_z$  είναι η φόρτιση στη  $Z$  διεύθυνση. Οι εξισώσεις ισορροπίας συνοδεύονται με τις κατάλληλες για κάθε περίπτωση οριακές συνθήκες.

### 3.2. Το Τριγωνικό Στοιχείο Του Morley

#### 3.2.1. Πολυώνυμο παρεμβολής

Το πεπερασμένο στοιχείο του Morley<sup>[7]</sup> είναι το πιο απλό στοιχείο για την ανάλυση πλακών. Το στοιχείο έχει έξι κόμβους, τις τρεις κορυφές του τριγώνου και τα μέσα των τριών πλευρών του. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι έξι, το βέλος κάμψης  $w$  στις κορυφές και η κάθετη κλίση  $\phi_{i,n}$  στα μέσα των πλευρών.



Σχήμα 3.2  
Στοιχείο του Morley

Μέσα στο τρίγωνο το βέλος κάμψης  $w$  περιγράφεται από ένα πλήρες πολυώνυμο δευτέρου βαθμού

$$w = w_1 \xi^1 + w_2 \xi^2 + w_3 \xi^3 + \psi_1 \xi^2 \xi^3 + \psi_2 \xi^3 \xi^1 + \psi_3 \xi^1 \xi^2, \quad (3.5)$$

όπου  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  συμβολίζουν τις εμβαδικές συντεταγμένες,  $w_i$  είναι οι τιμές του  $w$  στις κορυφές του τριγώνου και

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4A}{I_2} \varphi_{r'5} + \frac{4A}{I_3} \varphi_{r'6} + \left( \frac{I_{12}}{(I_2)^2} + \frac{I_{31}}{(I_3)^2} \right) w_1 - \frac{I_{31}}{(I_3)^2} w_2 - \frac{I_{12}}{(I_2)^2} w_3 \right\} \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4A}{I_1} \varphi_{r'4} + \frac{4A}{I_3} \varphi_{r'6} - \frac{I_{23}}{(I_3)^2} w_1 + \left( \frac{I_{12}}{(I_1)^2} + \frac{I_{23}}{(I_3)^2} \right) w_2 - \frac{I_{12}}{(I_1)^2} w_3 \right\} \\ \psi_3 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4A}{I_1} \varphi_{r'4} + \frac{4A}{I_2} \varphi_{r'5} - \frac{I_{23}}{(I_2)^2} w_1 - \frac{I_{31}}{(I_1)^2} w_2 + \left( \frac{I_{31}}{(I_1)^2} + \frac{I_{23}}{(I_2)^2} \right) w_3 \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Με την βοήθεια της εξίσωσης (1.4) η εξίσωση (3.5) γράφεται

$$w = w_1 \xi^1 + w_2 \xi^2 + w_3 - w_3 \xi^1 - w_3 \xi^2 + \psi_1 \xi^2 - \psi_1 \xi^2 \xi^1 - \psi_1 (\xi^2)^2 + \psi_2 \xi^1 - \psi_2 (\xi^1)^2 - \psi_2 \xi^1 \xi^2 + \psi_3 \xi^1 \xi^2 \quad (3.7)$$

### 3.2.2. Σχέσεις καμπυλοτήτων - μετατοπίσεων

Οι καμπυλότητες με αναφορά στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{-\partial^2 w}{(\partial \xi^1)^2} \\ k_{22} &= \frac{-\partial^2 w}{(\partial \xi^2)^2} \\ k_{12} &= \frac{-\partial^2 w}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

οι οποίες μετά την αντικατάσταση της εξίσωσης (3.7) και εκτέλεση των πράξεων γράφονται

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2\psi_2 \\ k_{22} &= 2\psi_1 \\ k_{12} &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{16} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{k_{\alpha\beta}\} = [B]\{b_i\}, \quad (3.10)$$

όπου ο πίνακας B έχει την μορφή

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-l_{23}}{(l_3)^2} & \frac{l_{12}(l_3)^2 + l_{23}(l_1)^2}{(l_1 l_3)^2} & \frac{-l_{12}}{(l_1)^2} & \frac{4A}{l_1} & 0 & \frac{4A}{l_3} \\ \frac{l_{12}(l_3)^2 + l_{31}(l_2)^2}{(l_2 l_3)^2} & \frac{-l_{31}}{(l_3)^2} & \frac{-l_{12}}{(l_2)^2} & 0 & \frac{4A}{l_2} & \frac{4A}{l_3} \\ \frac{l_{31}}{(l_3)^2} & \frac{l_{23}}{(l_3)^2} & -2 & 0 & 0 & \frac{4A}{l_3} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

και  $\{b_i\}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων του στοιχείου με αναφορά στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

### 3.2.3. Σχέσεις ροπών - καμπυλοτήτων

Στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων οι ροπές (contravariant συνιστώσες) ορίζονται ως εξής

$$\begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ 2M^{12} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{12} [D] \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{M^{\alpha\beta}\} = \frac{h^2}{12} [D]\{k_{\alpha\beta}\}, \quad (3.12)$$

όπου

$$[D] = \frac{Eh}{64(1-\nu^2)(A)^4} \begin{bmatrix} 4(l_1)^4 & 4\nu(l_1 l_2)^2 + (1-\nu)(l_{12})^2 & -4(l_1)^2 l_{12} \\ & 4(l_2)^4 & -4(l_2)^2 l_{12} \\ \text{συμ.} & & 2(1+\nu)(l_{12})^2 + 8(1-\nu)(l_1 l_2)^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

είναι ο πίνακας ελαστικότητας.

### 3.2.4. Το μητρώο ακαμψίας

Με την βοήθεια των παραπάνω συμβολισμών η ενέργεια παραμόρφωσης για το τριγωνικό στοιχείο γράφεται ως εξής

$$\Pi = \frac{h^2}{12} \iint_A \{k_{\alpha\beta}\}^T \{M^{\alpha\beta}\} \partial\xi^1 \partial\xi^2 = \frac{h^2}{12} \iint_A \{b_i\}^T [B]^T [D][B] \{b_i\} \partial\xi^1 \partial\xi^2 . \quad (3.14)$$

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης ενέργειας παραμόρφωσης, η παράγωγος πρώτης τάξης της ενέργειας παραμόρφωσης  $\Pi$  ως προς το  $\{b_i\}$  πρέπει να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή

$$\delta\Pi = \frac{h^2}{12} \iint_A (\delta\{b_i\}^T [B]^T [D][B] \{b_i\} + \{b_i\}^T [B]^T [D][B] \delta\{b_i\}) \partial\xi^1 \partial\xi^2 = \delta\{b_i\}^T (hA [B]^T [D][B]) \{b_i\} = 0 \quad (3.15)$$

ή μετά την αντικατάσταση

$$\delta\{b_i\}^T [K] \{b_i\} = 0, \quad (3.16)$$

όπου ο διαστάσεων (6x6) συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας

$$[K] = \frac{Ah^2}{12} [B]^T [D][B] \quad (3.17)$$

είναι το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Από την εξίσωση (3.16) προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο,

$$[K] \{b_i\} = 0 . \quad (3.18)$$

### 3.2.5. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Η ποσότητα  $w$  είναι ίδια για το τοπικό και για το ολικό σύστημα συντεταγμένων και γι' αυτό δεν χρειάζεται μεταφορά. Για τις κάθετες κλίσεις μέριμνα θα πρέπει να ληφθεί ώστε στην περίπτωση δύο γειτονικών στοιχείων η κλίση  $\varphi_{,n}$  να έχει έχει την ίδια φορά, για λόγους συμβατότητας. Έτσι, εφαρμόζεται ο παρακάτω κανόνας.

Ελέγχουμε την συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου. Εάν ο αύξων αριθμός του κόμβου 1 είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο του κόμβου 2, τότε αλλάζουμε τα πρόσημα της έκτης γραμμής και έκτης στήλης του πίνακα  $[K]$ . Εάν ο αύξων αριθμός του κόμβου 2 είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο του κόμβου 3, τότε αλλάζουμε τα πρόσημα της τέταρτης γραμμής και τέταρτης στήλης του πίνακα  $[K]$ . Τέλος, εάν ο αύξων αριθμός του κόμβου 3 είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο του κόμβου 1 αλλάζουμε τα πρόσημα της πέμπτης γραμμής και πέμπτης στήλης του πίνακα  $[K]$ .

Μετά τις αναγκαίες αλλαγές προσήμων οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γράφονται ως εξής

$$[K] \{W_i\} = 0 \quad (3.19)$$

όπου

$$[W_i] = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \varphi_{1'4} \\ \varphi_{1'5} \\ \varphi_{1'6} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

συμβολίζει το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

### 3.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Την Πλάκα

#### 3.3.1. Το ολικό μητρώο ακαμψίας

Το ολικό μητρώο ακαμψίας δημιουργείται όπως και στην παράγραφο (2.3.1.). Έχει τις ίδιες ιδιότητες με τα επιμέρους μητρώα ακαμψίας των στοιχείων και η διάστασή του ισούται με το γινόμενο των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου επί των αριθμό των κόμβων που υπάρχουν στον κάναβο.

#### 3.3.2. Το ολικό διάνυσμα φόρτισης

Το ολικό διάνυσμα φόρτισης δημιουργείται για ολόκληρη την κατασκευή στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και η κάθε είδους φόρτιση θα πρέπει να μετετρέπεται σε αντίστοιχη σημειακή φόρτιση. Έτσι, οι προς επίλυση τελικές εξισώσεις ισορροπίας για την πλάκα, συμπεριλαμβανομένης και της εξωτερικής φόρτισης, στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$[K^{ol}] \{W_i^{ol}\} = \{F_i^{ol}\} . \quad (3.21)$$

### 3.4. Εύρεση Μετατοπίσεων, Ροπών Και Καμπυλοτήτων

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος (3.21) με μία από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στην παράγραφο (2.4.) δίνει τις τιμές του διανύσματος  $\{W_i^{ol}\}$ , δηλαδή τις τιμές του βέλους κάμψης  $w$  στους κόμβους/κορυφές και κλίσεις  $\varphi_{i'n}$  στους κόμβους/μέσα πλευρών σε όλη την κατασκευή. Για κάθε στοιχείο το διάνυσμα  $\{b_i\}$  έχει τις ίδιες τιμές με το διάνυσμα  $\{W_i\}$  εκτός τις απαραίτητες αλλαγές προσήμων, όπου αυτές είναι αναγκαίες, όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Οι καμπυλότητες με αναφορά στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων υπολογίζονται από την εξίσωση (3.10), ενώ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων σε μια από τις πλευρές του τριγώνου μεταφέρονται με την χρήση της εξίσωσης (1.12), δηλαδή

$$\{k_{\alpha'\beta'}\} = [H] \{k_{\alpha\beta}\} \quad (3.22)$$

Έτσι οι ροπές στο τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\{M_{\alpha\beta}\} = \frac{h^2}{12} [D'] \{k_{\alpha\beta}\} \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} M_{11'} \\ M_{22'} \\ 2M_{12'} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{12} [D'] \begin{Bmatrix} k_{11'} \\ k_{22'} \\ k_{12'} \end{Bmatrix}, \quad (3.23)$$

όπου

$$[D'] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{συμ.} & & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

είναι ο πίνακας ελαστικότητας για ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Τέλος, οι κύριες τιμές των ροπών και καμπυλοτήτων είναι

$$k_{1,2} = \frac{k_{11'} + k_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_{11'} - k_{22'}}{2}\right)^2 + (k_{12'})^2}$$

$$M_{1,2} = \frac{M_{11'} + M_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{11'} - M_{22'}}{2}\right)^2 + (M_{12'})^2} \quad (3.25)$$

### 3.5. Πρόγραμμα FORTRAN

Για την επίλυση των προβλημάτων πλακών οι οποίες καταπονούνται με καμπτικά φορτία έχει γραφεί πρόγραμμα FORTRAN το οποίο παρατίθεται στο Παράρτημα II.

Τα δεδομένα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να εισαχθούν σε ειδικό αρχείο εισαγωγής με την εξής σειρά

- Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής (E)
- Ο συντελεστής Poisson του υλικού της κατασκευής ( $\nu$ )
- Το πάχος κάθε στοιχείου (h)
- Η συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά, κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου
- Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων του καννάβου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (X,Y)
- Το πλήθος των οριακών συνθηκών
- Οι οριακές συνθήκες στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
- Οι γενικευμένες κομβικές δυνάμεις στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Το πρόγραμμα υπολογίζει τις μετατοπίσεις για κάθε κόμβο της κατασκευής και στη συνέχεια βρίσκει τις κύριες καμπυλοότητες και ροπές για κάθε στοιχείο.



### 3.6. Εφαρμογή

Για τις πλάκες ο Macneal<sup>[6]</sup> προτείνει το παρακάτω Patch Test.

Έστω ότι το βέλος κάμψης  $w$  για μία πλάκα σε καταπόνηση μεταβάλεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$w = 10^{-3} \frac{(x^2 + xy + y^2)}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι

$$k_{xx} = -10^{-3}$$

$$k_{yy} = -10^{-3}$$

$$k_{xy} = -0.5 \times 10^{-3}$$

$$M_{xx} = 1.111 \times 10^{-7}$$

$$M_{yy} = 1.111 \times 10^{-7}$$

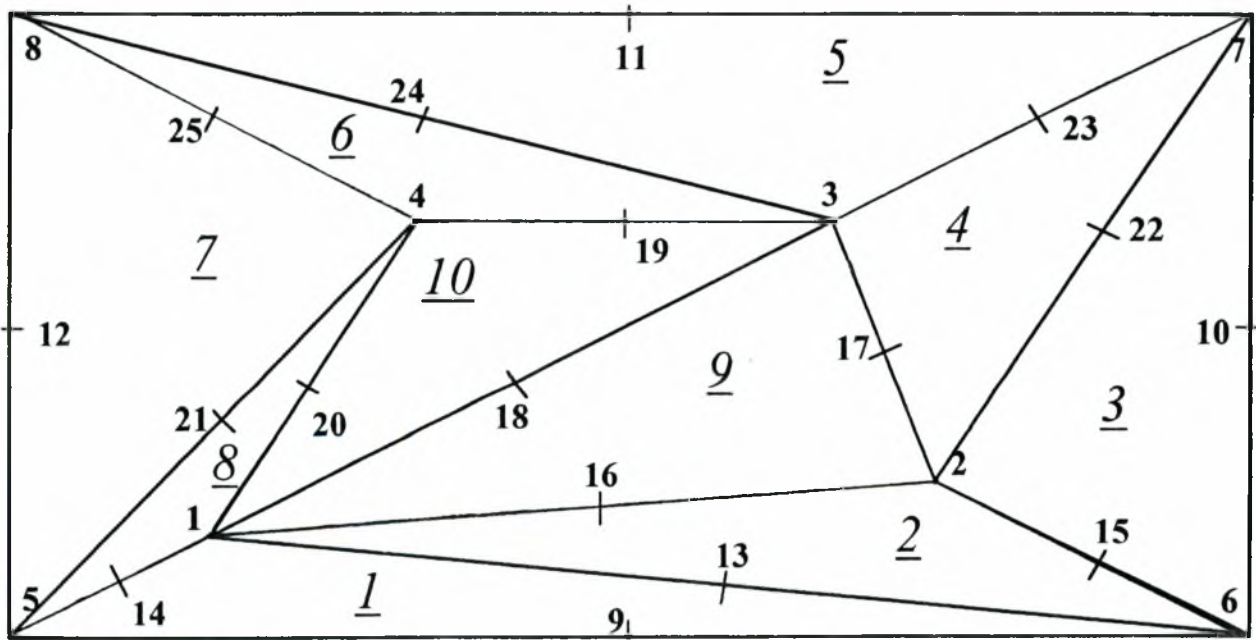
$$M_{xy} = 0.333 \times 10^{-7},$$

όπου το μέτρο ελαστικότητας, ο συντελεστής Poisson και το πάχος της πλάκας είναι, αντίστοιχα,

$$E = 10^6$$

$$\nu = 0.25$$

$$h = 10^{-3}.$$



Σχήμα 3.3  
Patch Test για πλάκα

Η πλάκα μοντελοποιείται με δέκα ακανόνιστα στοιχεία όπως φαίνεται στο σχήμα (3.3). Η συνδεκτικότητα των στοιχείων και οι συντεταγμένες των κόμβων δίνονται στον Πίνακα 3.1 και στον Πίνακα 3.2, αντίστοιχα.

<b>α / α</b>	<b>στοιχείου</b>	<b>Συνδεκτικότητα</b>					
1		5	6	1	13	14	9
2		1	6	2	15	16	13
3		6	7	2	22	15	10
4		2	7	3	23	17	22
5		7	8	3	24	23	11
6		3	8	4	25	19	24
7		5	4	8	25	12	21
8		5	1	4	20	21	14
9		2	3	1	18	16	17
10		4	1	3	18	19	20

*Πίνακας 3.1 Συνδεκτικότητα των στοιχείων*

<b>α / α</b>	<b>κόμβου</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>
1		0.040	0.020
2		0.180	0.030
3		0.160	0.080
4		0.080	0.080
5		0.000	0.000
6		0.240	0.000
7		0.240	0.120
8		0.000	0.120
9		0.120	0.000
10		0.240	0.060
11		0.120	0.120
12		0.000	0.060
13		0.140	0.010
14		0.020	0.010
15		0.210	0.015
16		0.110	0.025
17		0.170	0.055
18		0.100	0.050
19		0.120	0.080
20		0.060	0.050
21		0.040	0.040
22		0.210	0.075
23		0.200	0.100
24		0.080	0.100
25		0.040	0.100

*Πίνακας 3.2 Συντεταγμένες των κόμβων*

Στο όριο περιγράφονται οι μετατοπίσεις  $w$ ,  $\varphi_{i_n}$  των οποίων οι τιμές δίνονται στον Πίνακα 3.3.

$\alpha / \alpha$ κόμβου	$w$ , $\varphi_{i_n}$
5	0.0000000
6	0.0000288
7	0.0000504
8	0.0000072
9	0.0000600
10	- 0.0002700
11	- 0.0001800
12	- 0.0000300

**Πίνακας 3.3** Οριακές συνθήκες

Ζητούνται οι μετατοπίσεις στους εσωτερικούς κόμβους καθώς και οι καμπυλότητες και ροπές σε όλη την επιφάνεια της πλάκας.

Στο Παράρτημα II δίνεται επιπλέον το αρχείο εισαγωγής και τα αποτελέσματα για την παραπάνω εφαρμογή. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι αυτά συμφωνούν με τις πραγματικές τιμές.

ΛΕΠΤΑ ΚΕΛΥΦΗ

4.1. Εισαγωγή

Τα λεπτά κελύφη είναι κατασκευές στις οποίες το κύριο γνώρισμα είναι η καμπυλότητα, το πάχος τους  $h$  είναι πολύ μικρό συγκριτικά με τις άλλες διαστάσεις τους και δέχονται καμπτικά και εφελκυστικά ή θλιπτικά φορτία. Λόγω της καμπυλότητας δεν μπορεί να γίνει διαχωρισμός σε πρόβλημα εφελκυσμού ή θλίψης και πρόβλημα κάμψης.

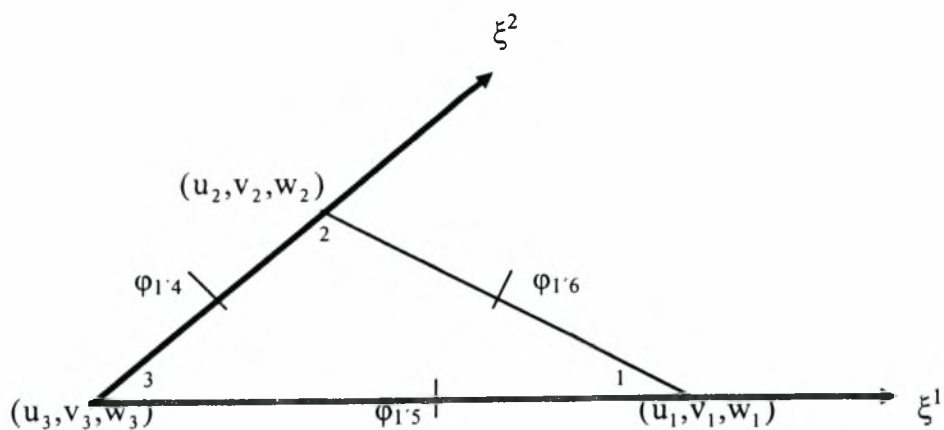
Η μοντελοποίηση ενός λεπτού κελύφους μπορεί να γίνει είτε με κελυφοειδή ή με επίπεδα πεπερασμένα στοιχεία. Τα τελευταία παρ' όλο που μπορούν να αναπαράγουν μόνο προσεγγιστικά την πραγματική μέση επιφάνεια του κελύφους, είναι απλά και οικονομικά και γι' αυτό χρησιμοποιούνται ευρύτερα. Για την ανάλυση των κελυφών με επίπεδα πεπερασμένα στοιχεία μόνο τρίγωνα μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Οι άγνωστοι κύριοι παράμετροι είναι οι μετατοπίσεις  $u, v$  και  $w$ . Εάν αυτές είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις ενός κελύφους τότε μπορεί να γίνει χρήση της γραμμικής θεωρίας των λεπτών κελυφών, όπου οι παραμορφώσεις/καμπυλότητες και οι τάσεις/ροπές ορίζονται όπως τις εξισώσεις (2.1), (3.2) και (2.2), (3.3), αντίστοιχα.

4.2. Το Τριγωνικό Στοιχείο Σταθερής Παραμόρφωσης Και Κάμψης

4.2.1. Περιγραφή

Το επίπεδο τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης και κάμψης προέρχεται από την σύνθεση του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης για επίπεδους φορείς και του τριγωνικού στοιχείου του Morley για πλάκες. Το "πάντρεμα" αυτών των δύο στοιχείων δίδει το πιο απλό τριγωνικό στοιχείο για την ακριβή ανάλυση των κελυφών. Έχει δώδεκα βαθμούς ελευθερίας, τρεις μετατοπίσεις  $u, v$  και  $w$  ανά κορυφή του τριγώνου και την κάθετη κλίση  $\varphi_{i\alpha}$  στο μέσο της κάθε πλευράς, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.1).



Σχήμα 4.1

Το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης και κάμψης

Μέσα στο τρίγωνο οι μετατοπίσεις  $u$ ,  $v$  και  $w$ , περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.5) και (3.7). Οι σχέσεις των γενικευμένων παραμορφώσεων (παραμορφώσεις και καμπυλότητες)-μετατοπίσεων δίνονται από τις εξισώσεις (2.8) και (3.10). Ενώ οι σχέσεις των γενικευμένων τάσεων (τάσεις και ροπές)-παραμορφώσεων δίνονται από τις εξισώσεις (2.10) και (3.12).

#### 4.2.2. Το μητρώο ακαμψίας

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου  $[K]$  στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι συνδιασμός του μητρώου ακαμψίας για επίπεδο φορέα  $[K]$ , όπως αυτό δίνεται στην εξίσωση (2.15) και του μητρώου ακαμψίας για την πλάκα  $[K]$ , όπως αυτό δίνεται στην εξίσωση (3.17), δηλαδή

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{(επ)} & O_{(6 \times 6)} \\ O_{(6 \times 6)} & K_{(πλ)} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Ο διαστάσεων (12x12) πίνακας  $[K]$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο είναι

$$[K]\{a_i\} = 0 \quad (4.2)$$

όπου

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \varphi_{1,4} \\ \varphi_{1,5} \\ \varphi_{1,6} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

συμβολίζει το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

#### 4.2.3. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Η μεταφορά των  $u$ ,  $v$  και  $w$  από το τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γίνεται σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.16), δηλαδή

$$\begin{aligned} u &= (X_1 - X_3)U + (Y_1 - Y_3)V + (Z_1 - Z_3)W \\ v &= (X_2 - X_3)U + (Y_2 - Y_3)V + (Z_2 - Z_3)W \\ w &= n^1U + n^2V + n^3W. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γράφονται ως εξής

$$[T^T][K][T]\{U_i\} = 0 \quad (4.5)$$

όπου

$$[U_i] = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \varphi_{1'4} \\ \varphi_{1'5} \\ \varphi_{1'6} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

συμβολίζει το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων για το οποίο ισχύει

$$\{a_i\} = [T]\{U_i\} \quad (4.7)$$

όπου

$$T = \begin{bmatrix} I & J & 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & M & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & J & 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & M & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & J & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & M & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ n^1 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^1 & n^2 & 0 & 0 & 0 & n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n^1 & n^2 & 0 & 0 & n^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

με

$$\begin{aligned} I &= X_1 - X_3 \\ J &= Y_1 - Y_3 \\ K &= Z_1 - Z_3 \\ L &= X_2 - X_3 \\ M &= Y_2 - Y_3 \\ N &= Z_2 - Z_3 \end{aligned} \quad (4.9)$$

και τα  $n^1, n^2, n^3$  δίνονται στις εξισώσεις (1.3).

Σημείωση, κατά την μεταφορά από το τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων οι ποσότητες  $\varphi_{i_n}$  θα πρέπει να αλλάζουν πρόσημο όπου αυτό είναι αναγκαίο, για λόγους συμβατότητας.

### 4.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Το Κέλυφος

#### 4.3.1. Το ολικό μητρώο ακαμψίας

Το ολικό μητρώο ακαμψίας δημιουργείται όπως και στην περίπτωση των επίπεδων φορέων και πλακών. Έχει τις ίδιες ιδιότητες με τα επιμέρους μητρώα ακαμψίας των στοιχείων και η διάστασή του είναι

$$n = 3 \times (\text{αριθμός κόμβων/κορυφών}) + (\text{αριθμός κόμβων/μέσα πλευρών}). \quad (4.10)$$

#### 4.3.2. Το ολικό διάνυσμα φόρτισης

Για το ολικό διάνυσμα φόρτισης ισχύει ότι έχει ειπωθεί για την περίπτωση επίπεδων φορέων και πλακών.

Οι προς επίλυση τελικές εξισώσεις ισορροπίας για το κέλυφος, συμπεριλαμβανομένης και της εξωτερικής φόρτισης, στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$[K^{ολ}] \{U_i^{ολ}\} = \{F_i^{ολ}\} . \quad (4.11)$$

#### 4.4. Εύρεση Μετατοπίσεων, Παραμορφώσεων, Τάσεων, Καμπυλοτήτων και Ροπών

Η επίλυση του γραμμικού συστήματος (4.11) δίνει τις τιμές του διανύσματος  $\{U_i^{ολ}\}$ , δηλαδή τις τιμές των μετατοπίσεων σε όλους τους κόμβους/κορυφές και τις τιμές  $\varphi_{i_n}$  σε όλους τους κόμβους/μέσα πλευρών, σε όλη την κατασκευή. Η μεταφορά των παραπάνω στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων και η εύρεση των γενικευμένων παραμορφώσεων και τάσεων γίνεται όπως έχει ήδη περιγραφεί στις παραγράφους (2.4.) και (3.4.).

#### 4.5. Πρόγραμμα FORTRAN

Για την επίλυση των προβλημάτων για κελύφη τα οποία καταπονούνται με διάφορα φορτία έχει γραφεί πρόγραμμα FORTRAN το οποίο παρατίθεται στο Παράρτημα III .

Τα δεδομένα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να εισαχθούν σε ειδικό αρχείο εισαγωγής με την εξής σειρά

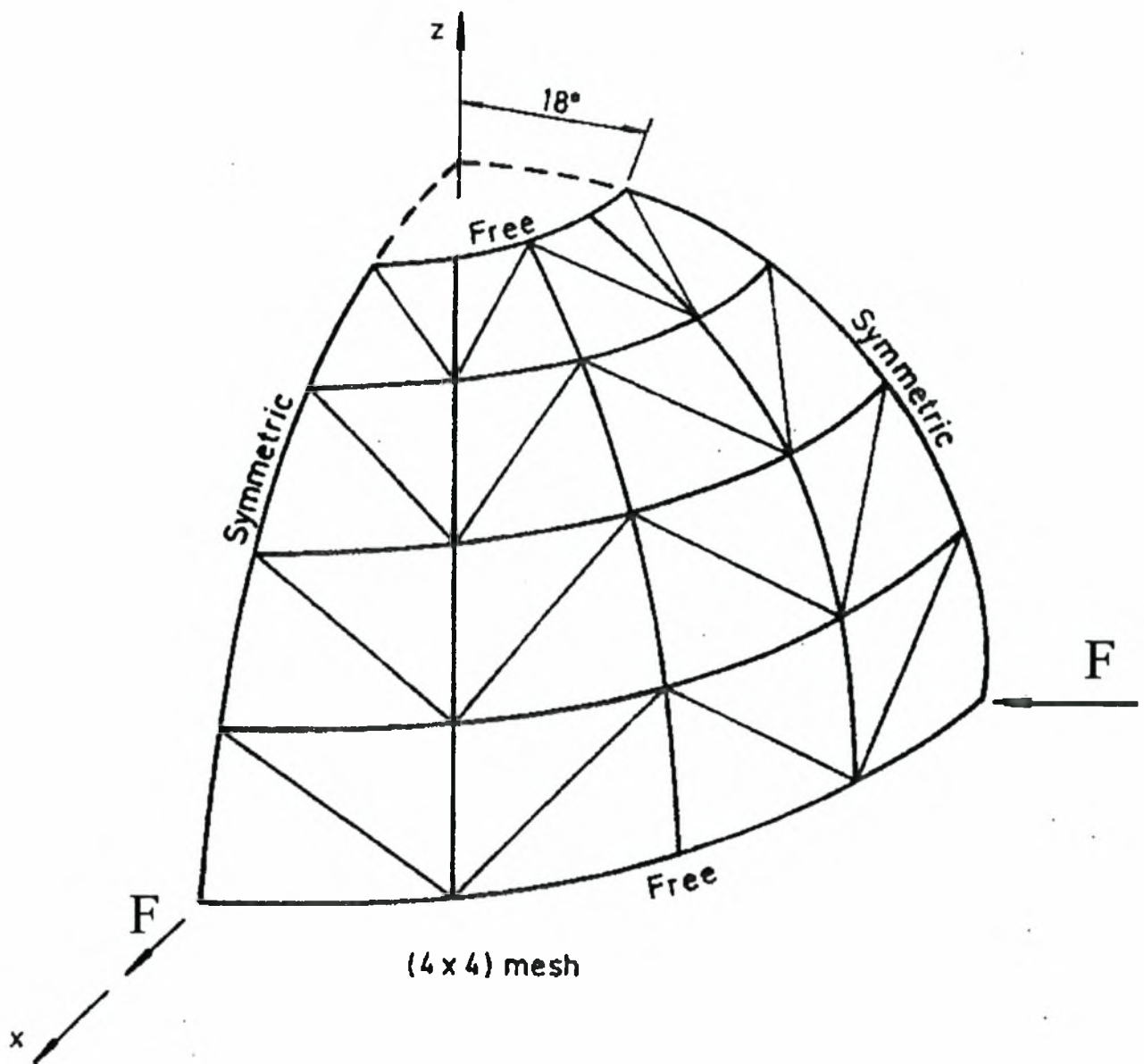
- Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής (E)
- Ο συντελεστής Poisson του υλικού της κατασκευής ( $\nu$ )
- Το πάχος κάθε στοιχείου (h)
- Η συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά, κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου
- Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων του καννάβου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (X,Y,Z)
- Το πλήθος των οριακών συνθηκών
- Οι οριακές συνθήκες στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
- Οι γενικευμένες κομβικές δυνάμεις στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Το πρόγραμμα υπολογίζει τις μετατοπίσεις για κάθε κόμβο της κατασκευής και στη συνέχεια βρίσκει τις κύριες παραμορφώσεις, τάσεις, καμπυλότητες και ροπές για κάθε στοιχείο.

#### 4.6. Εφαρμογή

Στο σχήμα (4.2) παριστάνεται ένα τεταρτημόριο ενός ημισφαιρικού κελύφους το οποίο έχει μια οπή στην κορυφή. Η ακτίνα του κελύφους είναι  $R=10$  και το πάχος  $h=0.04$ . Το μέτρο ελαστικότητας είναι  $E = 6.825 \times 10^7$  και ο συντελεστής Poisson  $\nu = 0.3$  .





Σχήμα 4.2

Ένα τεταρτημόριο του ημισφαιρικού κελύφους σε καταπόνηση με σημειακά φορτία

Κάνναβος	Το παρών στοιχείο	MacNeal <sup>[6]</sup>
4 x 4 (32 τριγ. στοιχεία)	51.4	100.0

Πίνακας 4.1 Το βέλος κάμψης  $w$  στα σημεία φόρτισης (επί τις %)

Το κέλυφος καταπονείται με σημειακά, διαμετρικά φορτία και τα δύο σύνορα είναι τελείως ελεύθερα όπως φαίνεται στο σχήμα (4.2). Λόγω της συμμετρίας της κατασκευής, της φόρτισης και των οριακών συνθηκών μόνο το ένα τέταρτο του κελύφους μοντελοποιείται με 32 τριγωνικά στοιχεία.

Στο Πίνακα 4.1 συγκρίνεται το βέλος κάμψης  $w$  στα σημεία φόρτισης με γνωστή αναλυτική λύση. Το παρών στοιχείο παρ'όλο που είναι απλό και διαθέτει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, για ένα τόσο δύσκολο πρόβλημα.

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

## 5.1. Εισαγωγή

Μέχρι εδώ έχει υποθεθεί ότι οι μετατοπίσεις  $u, v$  και  $w$  είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις της κατασκευής. Σε πολλές εφαρμογές όμως οι μετατοπίσεις μπορεί να είναι μεγάλες και σε αυτή την περίπτωση η χρήση μιας γεωμετρικά μη γραμμικής θεωρίας είναι απαραίτητη. Μια τέτοια θεωρία είναι η θεωρία του von Κάρμάν<sup>[9]</sup> για πλάκες όπου οι μετατοπίσεις  $u, v$  και  $w$  επιτρέπονται να είναι μεγάλες ενώ οι κλίσεις  $\varphi_{i,n}$  είναι σχετικά μικρές.

Στη γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία του von Κάρμάν οι γενικευμένες παραμορφώσεις ορίζονται ως εξής

$$\gamma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\gamma_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$k_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$k_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{5.1}$$

ενώ οι γενικευμένες ροπές για ελαστικό ισότροπο υλικό είναι

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\
N_{yy} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\
N_{xy} &= \frac{Eh}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\
M_{xx} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (k_{xx} + \nu k_{yy}) \\
M_{yy} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu k_{xx} + k_{yy}) \\
M_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} k_{xy}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

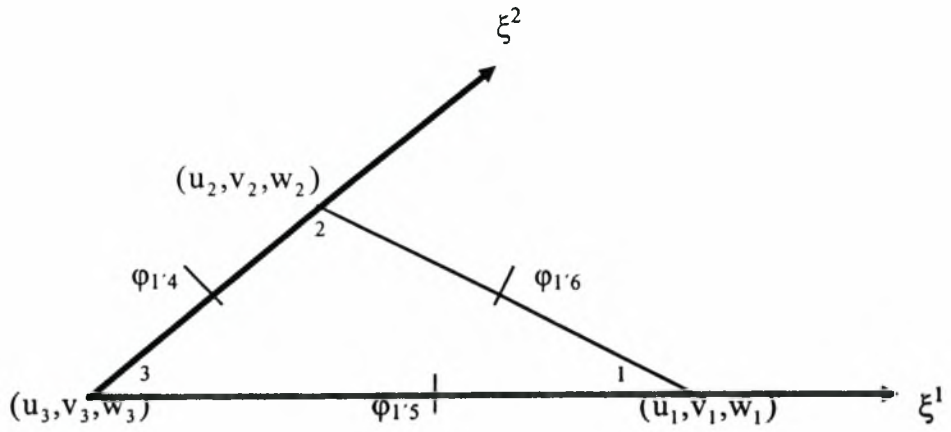
όπου

$$N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \quad , \quad N_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz \quad , \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad . \tag{5.3}$$

## 5.2. Ένα Απλό Τριγωνικό Στοιχείο

### 5.2.1. Πολυώνυμα παρεμβολής

Το πιο απλό στοιχείο για την ανάλυση πλακών και κελυφών τα οποία αναγκάζονται να υποφέρουν μεγάλες μετατοπίσεις είναι το επίπεδο τριγωνικό στοιχείο το οποίο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας  $u, v$  και  $w$  ανά κορυφή και ένα βαθμό ελευθερίας  $\varphi_{in}$  σε κάθε μέσο των πλευρών του. Δηλαδή, τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας με το τριγωνικό στοιχείο το οποίο προκύπτει από τον συνδυασμό του τριγώνου της σταθερής παραμόρφωσης και το στοιχείο του Morley. Θα πρέπει να τονισθεί ότι το προτεινόμενο τριγωνικό στοιχείο είναι μη γραμμικό από μόνο του και είναι βασισμένο στην γεωμετρικά μη γραμμική θεωρία του von Kármán. Αυτό σε αντίθεση με άλλες λύσεις στην βιβλιογραφία όπου χρησιμοποιούνται γραμμικά στοιχεία σε τοπικό επίπεδο και η επίδραση των μεγάλων μετατοπίσεων εισάγεται κατά τη μεταφορά από το τοπικό στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων.



**Σχήμα 5.1**  
Το τριγωνικό στοιχείο για μη γραμμικά κελύφη

Μέσα στο τρίγωνο οι μετατοπίσεις  $u$ ,  $v$  και  $w$  περιγράφονται από τα πολυώνυμα

$$u = (u_1 - u_3)\xi^1 + (u_2 - u_3)\xi^2 + u_3$$

$$v = (v_1 - v_3)\xi^1 + (v_2 - v_3)\xi^2 + v_3$$

$$w = w_1\xi^1 + w_2\xi^2 + w_3 - w_3\xi^1 - w_3\xi^2 + \psi_1\xi^2 - \psi_1\xi^2\xi^1 - \psi_1(\xi^2)^2 + \psi_2\xi^1 - \psi_2(\xi^1)^2 - \psi_2\xi^1\xi^2 + \psi_3\xi^1\xi^2 \quad (5.4)$$

όπου

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4A}{l_2} \phi_{1^5} + \frac{4A}{l_3} \phi_{1^6} + \left( \frac{l_{12}}{(l_2)^2} + \frac{l_{31}}{(l_3)^2} \right) w_1 - \frac{l_{31}}{(l_3)^2} w_2 - \frac{l_{12}}{(l_2)^2} w_3 \right\}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4A}{l_1} \phi_{1^4} + \frac{4A}{l_3} \phi_{1^6} - \frac{l_{23}}{(l_3)^2} w_1 + \left( \frac{l_{12}}{(l_1)^2} + \frac{l_{23}}{(l_3)^2} \right) w_2 - \frac{l_{12}}{(l_1)^2} w_3 \right\}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4A}{l_1} \phi_{1^4} + \frac{4A}{l_2} \phi_{1^5} - \frac{l_{23}}{(l_2)^2} w_1 - \frac{l_{31}}{(l_1)^2} w_2 + \left( \frac{l_{31}}{(l_1)^2} + \frac{l_{23}}{(l_2)^2} \right) w_3 \right\} . \quad (5.5)$$

### 5.2.2. Σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων

Οι παραμορφώσεις με αναφορά στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right)^2 \\ \gamma_{22} &= \frac{\partial v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right)^2 \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi^1} + \frac{\partial u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right).\end{aligned}\quad (5.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.4) προκύπτει ότι οι παραμορφώσεις  $\gamma_{\alpha\beta}$  είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Κατάλληλη επιλογή όρων, όπως στην αναφορά Providas<sup>[3]</sup>, μπορεί να δώσει σταθερές παραμορφώσεις  $\gamma_{\alpha\beta}$ , δηλαδή

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= u_1 - u_3 + \frac{1}{2}(w_1 - w_3)^2 \\ \gamma_{22} &= v_2 - v_3 + \frac{1}{2}(w_2 - w_3)^2 \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2}(v_1 + u_2 - u_3 - v_3) + \frac{1}{2}(w_1 - w_3)(w_2 - w_3).\end{aligned}\quad (5.7)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν σε μητρωϊκή μορφή ως εξής

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [B_w] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{g_{\alpha\beta}\} = [B]\{a_i\} + \frac{1}{2}[B_w]\{b_i\}, \quad (5.8)$$

όπου

$$[B] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

και

$$[B_w] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(w_1 - w_3) & 0 & -2(w_1 - w_3) \\ 0 & 2(w_2 - w_3) & -2(w_2 - w_3) \\ w_2 - w_3 & w_1 - w_3 & -w_1 - w_2 + 2w_3 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Οι καμπυλότητες στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{-\partial^2 w}{(\partial \xi^1)^2} \\ k_{22} &= \frac{-\partial^2 w}{(\partial \xi^2)^2} \\ k_{12} &= \frac{-\partial^2 w}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Η αντικατάσταση των εξισώσεων (5.4) δίνει σταθερές καμπυλότητες  $k_{\alpha\beta}$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2\psi_2 \\ k_{22} &= 2\psi_1 \\ k_{12} &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3. \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.2.3. Σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων και ροπών - καμπυλοτήτων

Στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων οι τάσεις (contravariant συνιστώσες) ορίζονται ως εξής

$$\begin{Bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ 2N^{12} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{N^{\alpha\beta}\} = [D] \{g_{\alpha\beta}\} \quad (5.13)$$

ενώ οι ροπές (contravariant συνιστώσες) δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ 2M^{12} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{12} [D] \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{M^{\alpha\beta}\} = \frac{h^2}{12} [D] \{k_{\alpha\beta}\} \quad (5.14)$$

όπου

$$[D] = \frac{Eh}{64(1-\nu^2)(A)^4} \begin{bmatrix} 4(l_1)^4 & 4\nu(l_1 l_2)^2 + (1-\nu)(l_{12})^2 & -4(l_1)^2 l_{12} \\ & 4(l_2)^4 & -4(l_2)^2 l_{12} \\ \text{συμ.} & & 2(1+\nu)(l_{12})^2 + 8(1-\nu)(l_1 l_2)^2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

είναι ο πίνακας ελαστικότητας και

$$\{k_{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{Bmatrix}. \quad (5.16)$$

#### 5.2.4. Το μητρώο ακαμψίας

Με την βοήθεια των παραπάνω συμβολισμών η ενέργεια παραμόρφωσης για το τριγωνικό στοιχείο γράφεται ως εξής

$$\Pi = \frac{A}{2} (\{g_{\alpha\beta}\}^T [D] \{g_{\alpha\beta}\} + \frac{h^2}{12} \{k_{\alpha\beta}\}^T [D] \{k_{\alpha\beta}\}). \quad (5.17)$$

Έστω

$$\{c_i\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου στο τοπικό πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης ενέργειας παραμόρφωσης, η παράγωγος πρώτης τάξης της ενέργειας παραμόρφωσης  $\Pi$  ως προς το  $\{c_i\}$  πρέπει να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή

$$\delta\Pi = A (\delta\{g_{\alpha\beta}\}^T [D] \{g_{\alpha\beta}\} + \frac{h^2}{12} \delta\{k_{\alpha\beta}\}^T [D] \{k_{\alpha\beta}\}) = 0 \quad (5.19)$$

ή μετά την αντικατάσταση

$$\delta\{c_i\}^T [K] \{c_i\} = 0, \quad (5.20)$$

όπου ο διαστάσεων (12x12) μη συμμετρικός πίνακας

$$[K] = A \begin{bmatrix} B^T DB & \frac{1}{2} B^T DB_w & O_{(6 \times 3)} \\ B_w^T DB & \frac{1}{2} B_w^T DB_w & O_{(3 \times 3)} \\ O_{(3 \times 6)} & O_{(3 \times 3)} & \frac{h^2}{12} D \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

είναι το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου. Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι ο πίνακας  $[K]$  δεν είναι πα σταθερός αλλά εξαρτάται από τις άγνωστες μεταβλητές  $\{c_i\}$ .

Από την εξίσωση (5.20) προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο,

$$[K]\{c_i\} = 0. \quad (5.22)$$

#### 5.2.5. Μεταφορά στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

Για την μεταφορά στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων χρειάζονται οι εξισώσεις (1.16) και (5.12). Οι τελευταίες μετά την αντικατάσταση των εξισώσεων (5.5) γίνονται

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{-I_{23}}{(I_3)^2} w_1 + \frac{I_{12}(I_3)^2 + I_{23}(I_1)^2}{(I_1 I_3)^2} w_2 - \frac{I_{12}}{(I_1)^2} w_3 + \frac{4A}{I_1} \varphi_{1'4} + \frac{4A}{I_3} \varphi_{1'6} \\ k_{22} &= \frac{I_{12}(I_3)^2 + I_{31}(I_2)^2}{(I_2 I_3)^2} w_1 - \frac{I_{31}}{(I_3)^2} w_2 - \frac{I_{12}}{(I_2)^2} w_3 + \frac{4A}{I_2} \varphi_{1'5} + \frac{4A}{I_3} \varphi_{1'6} \\ k_{12} &= \frac{I_{31}}{(I_3)^2} w_1 + \frac{I_{23}}{(I_3)^2} w_2 - 2w_3 + \frac{4A}{I_3} \varphi_{1'6}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για το στοιχείο στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γράφονται ως εξής

$$[T^T][K][T]\{U_i\} = 0 \quad (5.24)$$

όπου



$$[U_i] = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \varphi_{14} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{16} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

συμβολίζει το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων για το οποίο ισχύει

$$\{c_i\} = [T]\{U_i\} \quad (5.26)$$

όπου

$$[T] = \begin{bmatrix} I & J & 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & M & 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & J & 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & M & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & J & 0 & 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & M & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ n^1 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^1 & n^2 & 0 & 0 & 0 & n^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n^1 & n^2 & 0 & 0 & n^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-l_{23}}{(l_3)^2} & \frac{l_{12}(l_3)^2 + l_{23}(l_1)^2}{(l_1 l_3)^2} & \frac{-l_{12}}{(l_1)^2} & \frac{4A}{l_1} & 0 & \frac{4A}{l_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_{12}(l_3)^2 + l_{31}(l_2)^2}{(l_2 l_3)^2} & \frac{-l_{31}}{(l_3)^2} & \frac{-l_{12}}{(l_2)^2} & 0 & \frac{4A}{l_2} & \frac{4A}{l_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_{31}}{(l_3)^2} & \frac{l_{23}}{(l_3)^2} & -2 & 0 & 0 & \frac{4A}{l_3} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

με

$$\begin{aligned}
I &= X_1 - X_3 \\
J &= Y_1 - Y_3 \\
K &= Z_1 - Z_3 \\
L &= X_2 - X_3 \\
M &= Y_2 - Y_3 \\
N &= Z_2 - Z_3
\end{aligned} \tag{5.28}$$

και τα  $n^1, n^2, n^3$  δίνονται στις εξισώσεις (1.3).

### 5.2.6. Το εφαπτόμενο μητρώο ακαμψίας

Για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος (5.22) το εφαπτόμενο μητρώο ακαμψίας  $[K_T]$  είναι απαραίτητο. Η δεύτερη παράγωγος της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς το  $\{c_i\}$  δίνει

$$\delta^2 \Pi = A(\delta^2 \{g_{\alpha\beta}\}^T [D] \{g_{\alpha\beta}\} + \delta \{g_{\alpha\beta}\}^T [D] \delta \{g_{\alpha\beta}\} + \frac{h^2}{12} \delta \{k_{\alpha\beta}\}^T [D] \delta \{k_{\alpha\beta}\}) = \delta \{c_i\}^T [K_T] \delta \{c_i\}, \tag{5.29}$$

όπου

$$[K_T] = A \begin{bmatrix} B^T D B & B^T D B_w & O_{(6 \times 3)} \\ & B_w^T D B_w + B_{Gw} & O_{(3 \times 3)} \\ \text{συμ.} & & \frac{h^2}{12} D \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

και

$$[B_{Gw}] = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{12} & -(N^{11} + N^{12}) \\ & N^{22} & -(N^{22} + N^{12}) \\ \text{συμ.} & & N^{11} + N^{22} + 2N^{12} \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Ο διαστάσεων (12x12) συμμετρικός πίνακας  $K_T$  είναι το εφαπτόμενο μητρώο ακαμψίας. Η μεταφορά του  $[K_T]$  στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων γίνεται ως εξής

$$[T^T][K_T][T]. \tag{5.32}$$

### 5.3. Οι Εξισώσεις Ισορροπίας Για Την Κατασκευή

Το ολικό μητρώο ακαμψίας δημιουργείται όπως και στην περίπτωση των επίπεδων φορέων και πλακών, δηλαδή με κατάλληλη πρόσθεση των μητρώων ακαμψίας όλων των στοιχείων της κατασκευής.

Οι προς επίλυση τελικές εξισώσεις ισορροπίας, συμπεριλαμβανομένης και της εξωτερικής φόρτισης, στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$[K^{ol}]\{U_i^{ol}\} = \{F_i^{ol}\} \quad (5.33)$$

όπου ο  $[K^{ol}]$  δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από το διάνυσμα  $\{U_i^{ol}\}$ .

#### 5.4. Η Επίλυση Του Μη Γραμμικού Συστήματος

Η επίλυση του μη γραμμικού συστήματος (5.33) μπορεί να γίνει με την μέθοδο Newton-Raphson και με προοδευτική αύξηση του φορτίου.

Έστω  $F(x)$  μία συνάρτηση και  $x_0$  μια αρχική εκτίμηση της ζητούμενης λύσης της  $F(x)=0$ . Η επαναληπτική σχέση για την μέθοδο Newton-Raphson γράφεται ως εξής

$$x_{j+1} = x_j - \frac{F(x_j)}{F'(x_j)} \quad , \quad j=0,1,2, \dots \quad (5.34)$$

όπου  $j$  δηλώνει τον αύξων αριθμό επανάληψης. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$F'(x_j)\delta x_j = -F(x_j) \quad , \quad (5.35)$$

όπου

$$x_{j+1} = x_j + \delta x_j \quad . \quad (5.36)$$

Ανάλογα, το μη γραμμικό σύστημα (5.33) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$F(\{U_i^{ol}\}) = [K^{ol}]\{U_i^{ol}\} - \{F_i^{ol}\} = 0 \quad (5.37)$$

οπότε

$$[K_T^{ol}]_j \delta \{U_i^{ol}\}_j = -([K^{ol}]\{U_i^{ol}\} - \{F_i^{ol}\})_j \quad , \quad (5.38)$$

με

$$\{U_i^{ol}\}_{j+1} = \{U_i^{ol}\}_j + \delta \{U_i^{ol}\}_j \quad . \quad (5.39)$$

Ως αρχική λύση λαμβάνεται η λύση της γραμμικής θεωρίας. Η φόρτιση γίνεται προοδευτικά. Πρώτα εφαρμόζεται ένα μικρό φορτίο και στη συνέχεια αυξάνει σταδιακά. Σε κάθε αύξηση ένας αριθμός από επαναλήψεις της Newton-Raphson θα πρέπει να εκτελεσθεί μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Οι επαναλήψεις σταματούν όταν ικανοποιηθεί το παρακάτω κριτήριο

$$\max_i \left| \delta \{ U_i^{\alpha\lambda} \}_j \right| < \varepsilon \quad (5.40)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ένας πολύ μικρός αριθμός, συνήθως  $10^{-7}$ .

### 5.5. Εύρεση Μετατοπίσεων, Παραμορφώσεων, Τάσεων, Καμπυλοτήτων και Ροπών

Σε κάθε αύξηση του φορτίου και σε κάθε επανάληψη υπολογίζονται οι γενικευμένες παραμορφώσεις  $\{g_{\alpha\beta}\}$  και  $\{k_{\alpha\beta}\}$  σύμφωνα με τις εξισώσεις (5.8) και (5.12). Η μεταφορά τους στο τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων σε μια από τις πλευρές του τριγώνου γίνεται ως εξής

$$\{g_{\alpha'\beta'}\} = [H] \{g_{\alpha\beta}\} \quad (5.41)$$

και

$$\{k_{\alpha'\beta'}\} = [H] \{k_{\alpha\beta}\} \quad (5.42)$$

Οι γενικευμένες τάσεις στο τοπικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\{N_{\alpha'\beta'}\} = [D'] \{g_{\alpha'\beta'}\} = h \{\sigma_{\alpha'\beta'}\} \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} N_{11'} \\ N_{22'} \\ 2N_{12'} \end{Bmatrix} = [D'] \begin{Bmatrix} \gamma_{11'} \\ \gamma_{22'} \\ \gamma_{12'} \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

και

$$\{M_{\alpha'\beta'}\} = \frac{h^2}{12} [D'] \{k_{\alpha'\beta'}\} \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} M_{11'} \\ M_{22'} \\ 2M_{12'} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{12} [D'] \begin{Bmatrix} k_{11'} \\ k_{22'} \\ k_{12'} \end{Bmatrix}, \quad (5.44)$$

όπου

$$[D'] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{συμ.} & & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

είναι ο πίνακας ελαστικότητας για ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Τέλος υπολογίζονται οι κύριες τιμές

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \frac{\gamma_{11'} + \gamma_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_{11'} - \gamma_{22'}}{2}\right)^2 + (\gamma_{12'})^2} \\ N_{1,2} &= \frac{N_{11'} + N_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N_{11'} - N_{22'}}{2}\right)^2 + (N_{12'})^2} \\ k_{1,2} &= \frac{k_{11'} + k_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_{11'} - k_{22'}}{2}\right)^2 + (k_{12'})^2} \\ M_{1,2} &= \frac{M_{11'} + M_{22'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{11'} - M_{22'}}{2}\right)^2 + (M_{12'})^2} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

### 5.6. Πρόγραμμα FORTRAN

Για την επίλυση προβλημάτων για πλάκες και κελύφη τα οποία υποφέρουν μεγάλες μετατοπίσεις έχει γραφεί πρόγραμμα FORTRAN, το οποίο παρατίθεται στο Παράρτημα IV .

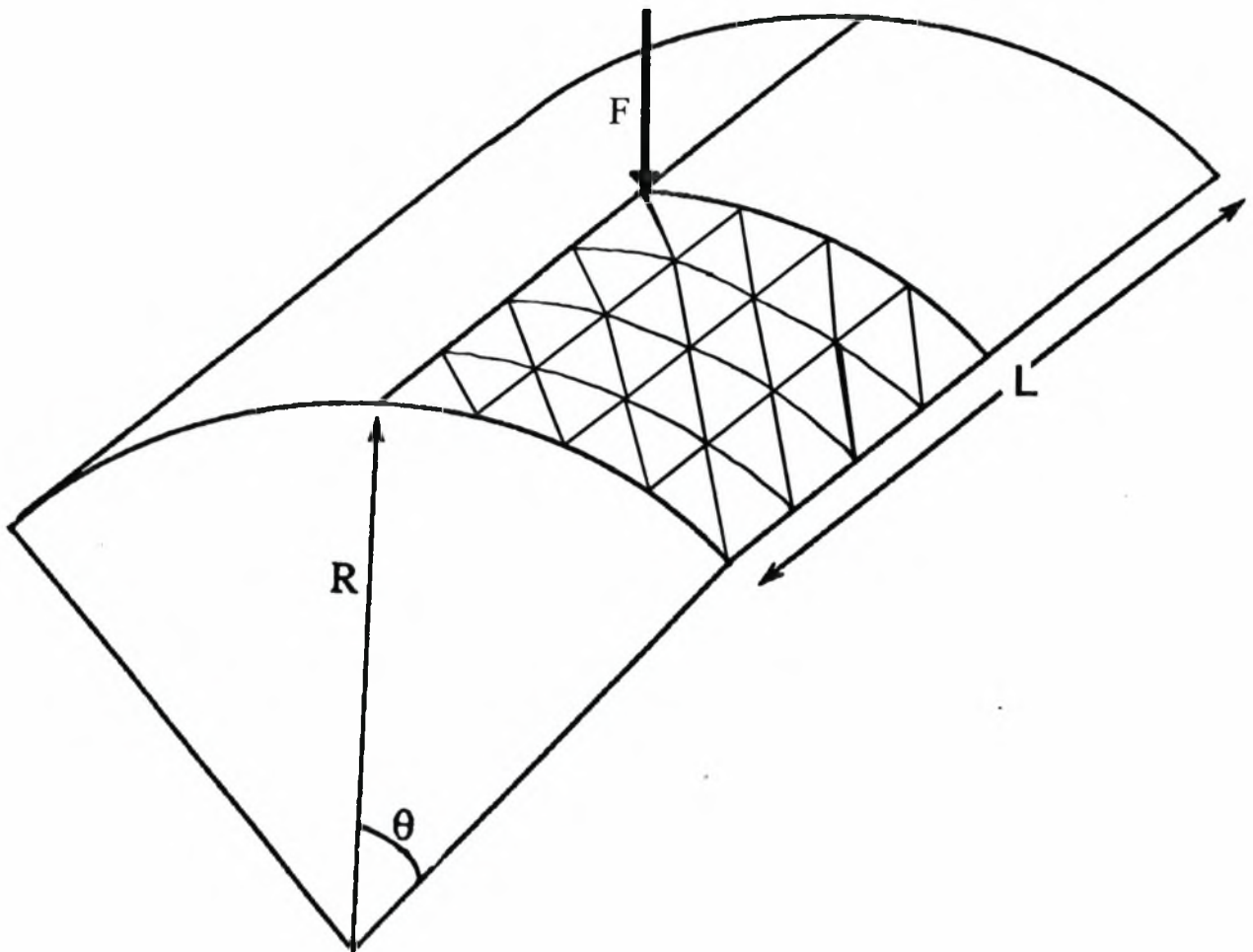
Τα δεδομένα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να εισαχθούν σε ειδικό αρχείο εισαγωγής, με την εξής σειρά

- Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής ( E )
- Ο συντελεστής Poisson του υλικού της κατασκευής ( ν )
- Το πάχος κάθε στοιχείου ( h )
- Η συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά, κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου
- Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων του καννάβου στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ( X,Y,Z )
- Το πλήθος των οριακών συνθηκών
- Οι οριακές συνθήκες στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
- Οι γενικευμένες κομβικές δυνάμεις στο καθολικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
- Ο συντελεστής προοδευτικής αύξησης του φορτίου

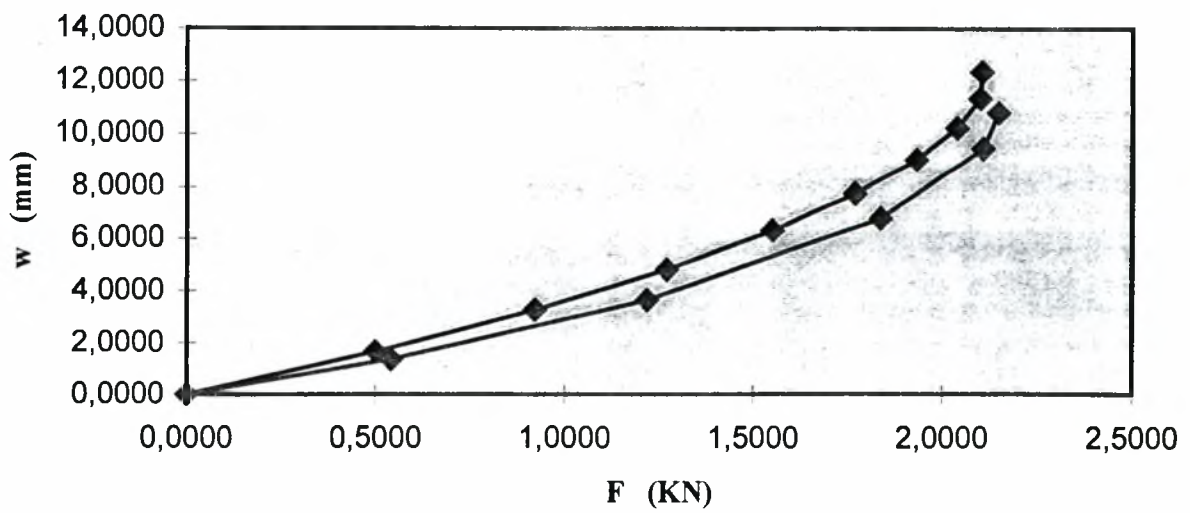
Το πρόγραμμα υπολογίζει τις μετατοπίσεις για κάθε κόμβο της κατασκευής και στη συνέχεια βρίσκει τις κύριες παραμορφώσεις, τάσεις, καμπυλότητες και ροπές για κάθε στοιχείο.

### 5.7. Εφαρμογή

Το κυλινδρικό κέλυφος στο σχήμα (5.2), έχει ακτίνα R=2540 mm, γωνία  $\theta=0.1$  rad, μήκος L=254 mm και πάχος h=12.7 mm. Το μέτρο ελαστικότητας είναι  $E = 3.10275 \text{ KN/mm}^2$  και ο συντελεστής Poisson  $\nu = 0.3$  .



Σχήμα 5.2  
Κυλινδρικό κέλυφος σε καταπόνηση με κεντρική σημειακή φόρτιση



Σχήμα 5.3  
Μεταβολή του βέλους κάμψης  $w$  με την φόρτιση  $F$  (τα έξι σημεία είναι τα αποτελέσματα του Meek)

Το κέλυφος καταπονείται με σημειακή φόρτιση στο κέντρο. Οι δύο ευθείες πλευρές είναι μερικώς πακτωμένες, δηλαδή  $u = v = w = 0$  και μπορεί να περιστραφεί ελεύθερα. Οι δύο καμπύλες πλευρές είναι τελείως ελεύθερες. Λόγω της συμμετρίας της κατασκευής, της φόρτισης και των οριακών συνθηκών μόνο το ένα τέταρτο του κελύφους μοντελοποιείται με 32 τριγωνικά στοιχεία όπως φαίνεται στο σχήμα (5.2).

Στο γράφημα του σχήματος (5.3) παριστάνεται η μεταβολή του βέλους κάμψης  $w$  στο κέντρο σε σχέση με την φόρτιση  $F$ . Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά της αναφοράς Meek<sup>[10]</sup> όπου χρησιμοποιούνται πιο πολύπλοκα και υπολογιστικά χρονοβόρα ακριβή στοιχεία. Το παρών στοιχείο παρ'όλο που είναι απλό και διαθέτει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας δίνει πολύ καλά αποτελέσματα.

Η μέθοδος Newton-Raphson μπορεί να δώσει λύση μέχρι και το σημείο λυγισμού. Για την εύρεση λύσεων από αυτό το σημείο και μετά πρέπει να χρησιμοποιηθούν πιο πολύπλοκες τεχνικές όπως, για παράδειγμα, στην αναφορά Providas<sup>[3]</sup>.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία έγινε ανάπτυξη των παρακάτω επιπέδων πεπερασμένων στοιχείων

- Το τρίγωνο σταθερής παραμόρφωσης για επίπεδους φορείς
- Το τρίγωνο του Morley για πλάκες
- Το τρίγωνο σταθερής παραμόρφωσης και κάμψης για κελύφη
- Το γεωμετρικά μη γραμμικό τρίγωνο σταθερής παραμόρφωσης και κάμψης

Σε όλες τις περιπτώσεις αναπτύχθηκε κώδικας FORTRAN και επιλύθηκαν μερικά χαρακτηριστικά προβλήματα.

Τα συμπεράσματα είναι ότι τα επίπεδα τριγωνικά στοιχεία μπορεί να αποτελέσουν μια απλή αξιόπιστη επιλογή για την ανάλυση κελυφών στην γραμμική και μη γραμμική θεωρία. Το γεωμετρικά μη γραμμικό στοιχείο που παρουσιάστηκε δίνει πολύ καλά αποτελέσματα παρ'όλο που είναι απλό σε σύγκριση με άλλες γνωστές στην βιβλιογραφία λύσεις. Αυτό το στοιχείο θα πρέπει να εξετασθεί περισσότερο και να αποτελέσει την βάση για την ανάπτυξη άλλων παρόμοιων αλλά ανώτερης τάξης πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος, η μέθοδος Newton-Raphson με προοδευτική αύξηση του φορτίου δεν είναι ικανή να δώσει λύσεις πέρα του σημείου λυγισμού και για αυτό θα πρέπει να αναπτυχθούν πιο προχωρημένες τεχνικές.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ZIENKIEWICZ O., *The Finite Element Method*,  
Mc GRAW HILL, (1977)
2. ΤΣΑΜΑΣΦΥΡΟΣ Γ. και ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ Ε., *Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων*,  
ΑΘΗΝΑ (1994)
3. PROVIDAS E., *Ph D Thesis "On the Geometrically Nonlinear Constant Moment Triangle"*,  
BRUNEL UNIVERSITY OF WEST LONDON, (1990)
4. PROVIDAS E., *Higher Order Derivatives for the Stability Analysis of Thin Walled Structures*,  
4<sup>ο</sup> ΕΘΝΙΚΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΞΑΝΘΗ (1995)
5. AKIN J., *Application and Implementation of Finite Element Methods*,  
ACADEMIC PRESS, (1982)
6. MACNEAL H. and HARDER L.,  
*A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy*,  
FINITE ELEMENTS IN ANALYSIS AND DESIGN 1, pp 3-20, (1985)
7. MORLEY L.S.D., *The Constant-Moment Plate-Bending Element*  
J. STRAIN ANALYSIS, 6, No I, pp 20-24, (1971)
8. TURNER M. J. and CLOUGH R. W. and MARTIN H. C. and TOPP L. J.,  
*Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*  
J. AERONAUT SCI, 23, pp 805-824, (1956)
9. VON KARMAN T., *Festigkeitsprobleme im maschinembau*,  
ENCYKLOPAEDIE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN, VOL. IV/4, C,  
pp 311-385, (1910)
10. MEEK J. L. and TAN H. S., *Instability Analysis of Thin Plates and Arbitrary Shells*  
*Using a Faceted Shell Element with Loof Nodes*  
COMP. METH. APPL. MECH. ENGRG. 57,  
pp 143-170, (1986)
11. ΚΑΤΤΗΣ Μ., *Σημειώσεις "Υπολογιστικές Μέθοδοι στην Μηχανική"*,  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ, ΒΟΛΟΣ (1994)
12. ΒΑΡΚΑΡΑΚΗΣ Κ., *Στατική των Πλακών - Τόμος I*,  
ΑΘΗΝΑ (1977)
13. ΒΑΡΚΑΡΑΚΗΣ Κ., *Στατική των Κελυφών*,  
Ε.Μ.Π., ΑΘΗΝΑ (1988)

14. ΚΕΡΜΑΝΙΔΗΣ Θ., *Αντοχή Υλικών - Τόμος 1 και 2*,  
Αφοι ΚΥΡΙΑΚΙΔΗ, ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ (1990)
15. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ Γ., *Σημειώσεις "Αντοχή Υλικών"*,  
Α.Π.Θ., ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ (1991)
16. ΤΖΑΒΑΡΑΣ Α., *Η Δομή και οι Ιδιότητες των Υλικών - Τόμος III*,  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ (1993)
17. ΧΑΪΔΕΜΕΝΟΠΟΥΛΟΣ Γ., *Σημειώσεις "Εισαγωγή στην Τεχνολογία των Υλικών"*,  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ, ΒΟΛΟΣ (1992)
18. FORSYTHE G. and MALCOM M. and MOLER C., *Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα  
για Μαθηματικούς Υπολογισμούς*, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ,  
ΗΡΑΚΛΕΙΟ (1993)
19. SCHEID F., *Αριθμητική Ανάλυση*,  
ΕΣΠΙ, ΑΘΗΝΑ
20. ΛΑΖΟΣ Κ., *FORTRAN 77*,  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ (1995)
21. ΠΡΟΒΙΔΑΣ Ε., *Σημειώσεις "FORTRAN 77"*,  
ΚΕΝΤΡΟ Η/Υ - ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ, ΒΟΛΟΣ (1993)

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FORTRAN

ΑΡΧΕΙΟ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΑΡΧΕΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ



ΕΥΡΕΣΗ  
ΤΑΣΕΩΝ & ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ  
ΣΕ ΔΙΣΚΟ  
ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ  
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

του

ΔΗΜΗΤΡΗ ΜΙΧ. ΔΟΙΝΑΚΗ

AA	διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
BP	πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
BPTD	πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του πίνακα BP με τον DELAST πίνακα
DELAST	πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
E	μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
EE	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
EEE	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Ei	κύριες παραμορφώσεις κάθε στοιχείου
FQ	διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
H	πάχος κάθε στοιχείου
H2	ημιπάχος κάθε στοιχείου
INDEX	διάνυσμα που περιέχει τις θέσεις των μεταβλητών κάθε στοιχείου, στο ολικό μητρώο ακαμψίας
IORS	διάνυσμα που περιέχει τον αύξων αριθμό κάθε οριακής συνθήκης
KEL	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KEL1	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KOMB	διάνυσμα που περιέχει του κόμβους κάθε στοιχείου
L1	μήκος πλευράς No 1
L2	μήκος πλευράς No 2
L3	μήκος πλευράς No 3
L12	βοηθητικό μήκος
MET	πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου της κατασκευής, από το τοπικό-πλαγιογώνιο στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
N	ο αριθμός των κόμβων σε κάθε στοιχείο
NDIAS	δηλώνει την διάσταση του χώρου
NEDOF	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο (NKDOF*N)
NEL	ο αριθμός των στοιχείων στον κάνναβο

C NK ο αριθμός των κόμβων στον κάνναβο  
 C NKDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο  
 C NN ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων σε κάθε στοιχείο  
 C NORS πλήθος οριακών συνθηκών  
 C NSDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής (NKDOF\*NK)  
 C ORS διάνυσμα που περιέχει τις οριακές συνθήκες,  
 C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C Si κύριες τάσεις σε κάθε στοιχείο  
 C SK ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής,  
 C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C SSS διάνυσμα που περιέχει τις τάσεις σε κάθε στοιχείο,  
 C στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C SYND πίνακας που περιέχει την συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου  
 C του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά,  
 C κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου  
 C T πίνακας στροφής κάθε στοιχείου, που συνδέει το  
 C τοπικό-πλαγιογώνιο με το καθολικό-ορθογώνιο  
 C σύστημα συντεταγμένων  
 C TTK1 πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του  
 C πίνακα T με τον KEL1 πίνακα  
 C U διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές  
 C μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C UE διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 C στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C UEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 C στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C V λόγος Poisson του υλικού της κατασκευής  
 C XE διάνυσμα που περιέχει τις τετμημένες των κόμβων κάθε  
 C στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C XY πίνακας που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες  
 C των κόμβων, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C YE διάνυσμα που περιέχει τις τεταγμένες των κόμβων κάθε  
 C στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C

PROGRAM DISK

PARAMETER (N=3,NDIAS=2,NEL=10,NK=8,NKDOF=2,NN=3)

PARAMETER (NEDOF=NKDOF\*N,NSDOF=NKDOF\*NK)

DOUBLE PRECISION AA,BP(NN,NEDOF),BPTD(NEDOF,NN),DELAST(NN,NN),E,  
 &EE(NN),EEE(NN),E1,E2,FQ(NSDOF),H,H2,KEL(NEDOF,NEDOF),  
 &KEL1(NEDOF,NEDOF),L1,L2,L3,L12,MET(NN,NN),ORS(NSDOF),  
 &SK(NSDOF,NSDOF),SSS(N),S1,S2,T(NEDOF,NEDOF),TTK1(NEDOF,NEDOF),  
 &U(NSDOF),UE(NEDOF),UEL(NEDOF),V,XE(N),XY(NK,NDIAS),YE(N)

DIMENSION INDEX(NEDOF),IORS(NSDOF),KOMB(N)

INTEGER SYND(NEL,N)

COMMON L1,L2,L3,L12

OPEN (10,FILE='DISKOS1.IN')

OPEN (20,FILE='DISKOS1.OUT')

C Δεδομένα κατασκευής

CALL DED(E,FQ,H,IORS,N,NDIAS,NEL,NK,NORS,NSDOF,ORS,SK,SYND,V,XY)

H2=H/2.00

DO 10 I=1,NEL

C Κόμβοι κάθε στοιχείου

CALL KOMBOI(I,KOMB,N,NEL,SYND)

C Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,

C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

CALL SYNTET(KOMB,N,NDIAS,NK,XE,XY,YE)

C Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου

CALL AEL(AA,N,XE,YE)

C Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου

CALL MHKH(N,XE,YE)

C Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο

C σύστημα συντεταγμένων

CALL BPAR(BP,NEDOF,NN)

C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο

```

C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL DELAS1(AA,DELAST,E,NN,V)
C      Πίνακας στροφής κάθε στοιχείου
      CALL TPIN(N,NEDOF,T,XE,YE)
C      Μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL KE(AA,BP,BPTD,DELAST,H2,KEL,KEL1,NEDOF,NN,T,TTK1)
C      Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
C      κάθε στοιχείου
      CALL INDXEL(INDEX,KOMB,N,NEDOF,NKDOF)
C      Ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL SKFUL(INDEX,KEL,NEDOF,NSDOF,SK)
10    CONTINUE
C      Γνωστές μεταβλητές των στοιχείων
      CALL ORIAKS(FQ,IORS,NORS,NSDOF,ORS,SK)
C      Τριγωνοποίηση ολικού μητρώου ακαμψίας
      CALL GAUSS(FQ,NSDOF,SK)
C      Γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL BACKS(FQ,NSDOF,SK,U)
      WRITE (20,20) (U(I),I=1,NSDOF)
20    FORMAT (1X,F16.7)
      DO 30 I=1,NEL
C      Κόμβοι κάθε στοιχείου
      CALL KOMBOI(I,KOMB,N,NEL,SYND)
C      Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
C      στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
      CALL SYNTET(KOMB,N,NDIAS,NK,XE,XY,YE)
C      Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
      CALL AEL(AA,N,XE,YE)
C      Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
      CALL MHKH(N,XE,YE)
C      Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL BPAR(BP,NEDOF,NN)
C      Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL DELAS2(DELAST,E,NN,V)
C      Πίνακας στροφής κάθε στοιχείου
      CALL TPIN(N,NEDOF,T,XE,YE)
C      Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
C      κάθε στοιχείου
      CALL INDXEL(INDEX,KOMB,N,NEDOF,NKDOF)
C      Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      DO 40 J=1,NEDOF
      UE(J)=U(INDEX(J))
40    CONTINUE
C      Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(T,UE,UEL,NEDOF,1,NEDOF)
      WRITE (20,'(///,'ΣΤΟΙΧΕΙΟ',I5)') I
      WRITE (20,'(''-----'')')
C      Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(BP,UEL,EE,NEDOF,1,NN)
C      Πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου
      CALL META(AA,MET,NN)
C      Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(MET,EE,EEE,NN,1,NN)
C      Τάσεις σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων

```



```

CALL POLPP (DELAST, EEE, SSS, NN, 1, NN)
SSS(3) = SSS(3) / 2.00
C Κύριες παραμορφώσεις κάθε στοιχείου
E1 = (EEE(1) + EEE(2)) / 2.00 + DSQRT(((EEE(1) - EEE(2)) / 2.00)**2 + EEE(3)**2)
E2 = (EEE(1) + EEE(2)) / 2.00 - DSQRT(((EEE(1) - EEE(2)) / 2.00)**2 + EEE(3)**2)
WRITE (20, '(//, ''Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2'', /)')
WRITE (20, 50) E1, E2
50 FORMAT (1X, F19.10, 1X, F19.10)
C Κύριες τάσεις σε κάθε στοιχείο
S1 = (SSS(1) + SSS(2)) / 2.00 + DSQRT(((SSS(1) - SSS(2)) / 2.00)**2 + SSS(3)**2)
S2 = (SSS(1) + SSS(2)) / 2.00 - DSQRT(((SSS(1) - SSS(2)) / 2.00)**2 + SSS(3)**2)
WRITE (20, '(//, ''Κύριες Τάσεις σ1 , σ2'', /)')
WRITE (20, 50) S1, S2
30 CONTINUE
WRITE (20, '(///// , 3X, ''- diskos.out -'')')
CLOSE (20)
CLOSE (10)
END

C
C Αρχικά δεδομένα για την συγκεκριμένη κατασκευή
SUBROUTINE DED(E, FQ, H, IORS, N, NDIAS, NEL, NK, NORS, NSDOF, ORS, SK, SYND,
&V, XY)
DOUBLE PRECISION E, FQ(NSDOF), H, ORS(NSDOF), SK(NSDOF, NSDOF), V,
&XY(NK, NDIAS)
DIMENSION IORS(NSDOF)
INTEGER SYND(NEL, N)
C Διαβάζει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
READ (10, *) E
C Διαβάζει τον συντελεστή Poisson του υλικού της κατασκευής
C (για τέλειο ισότροπο ελαστικό υλικό ν = 0.25 αλλά
C συνήθως για τα μέταλλα ν = 0.33 - γενικά 0 < ν < 0.50)
READ (10, *) V
C Διαβάζει το πάχος κάθε στοιχείου
READ (10, *) H
C Διαβάζει την συνδετικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου,
C με αντιωρολογιακή φορά
READ (10, *) ((SYND(I, J), J=1, N), I=1, NEL)
C Διαβάζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
READ (10, *) ((XY(I, J), J=1, NDIAS), I=1, NK)
C Διαβάζει το πλήθος των οριακών συνθηκών
READ (10, *) NORS
C Διαβάζει τις οριακές συνθήκες, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
C (τιμές κομβικών μετατοπίσεων-περιορισμοί στα όρια)
READ (10, *) (IORS(I), ORS(I), I=1, NORS)
C Διαβάζει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
READ (10, *) (FQ(I), I=1, NSDOF)
C Μηδενίζει το ολικό μητρώο ακαμψίας
CALL MHDEN(SK, NSDOF, NSDOF)
RETURN
END

C
C Μηδενισμός πίνακα
C A πίνακας διαστάσεων (N, L)
SUBROUTINE MHDEN(A, L, N)
DOUBLE PRECISION A(N, L)
DO 10 I=1, N
DO 20 J=1, L
A(I, J) = 0.00
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN

```

```

      END
C
C Εντοπίζει τους κόμβους κάθε στοιχείου
C   I αύξων αριθμός στοιχείου
      SUBROUTINE KOMBOI (I, KOMB, N, NEL, SYND)
      DIMENSION KOMB(N)
      INTEGER SYND(NEL, N)
      DO 10 K=1, N
      KOMB(K) = SYND(I, K)
10 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C Εντοπίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE SYNTET (KOMB, N, NDIAS, NK, XE, XY, YE)
      DOUBLE PRECISION XE(N), XY(NK, NDIAS), YE(N)
      DIMENSION KOMB(N)
      DO 10 I=1, N
      XE(I) = XY(KOMB(I), 1)
      YE(I) = XY(KOMB(I), 2)
10 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C Υπολογισμός διπλάσιου εμβαδού κάθε τριγωνικού στοιχείου
      SUBROUTINE AEL(AA, N, XE, YE)
      DOUBLE PRECISION AA, XE(N), YE(N)
      AA = (XE(2) - XE(1)) * YE(3) + (XE(1) - XE(3)) * YE(2) + (XE(3) - XE(2)) * YE(1)
      RETURN
      END
C
C Υπολογίζει τα μήκη των πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
      SUBROUTINE MHKH(N, XE, YE)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
      DOUBLE PRECISION XE(N), YE(N)
      COMMON L1, L2, L3, L12
      L1 = DSQRT((XE(2) - XE(3)) ** 2 + (YE(2) - YE(3)) ** 2)
      L2 = DSQRT((XE(3) - XE(1)) ** 2 + (YE(3) - YE(1)) ** 2)
      L3 = DSQRT((XE(1) - XE(2)) ** 2 + (YE(1) - YE(2)) ** 2)
      L12 = L1 ** 2 + L2 ** 2 - L3 ** 2
      RETURN
      END
C
C Εύρεση πίνακα παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE BPAR(BP, NEDOF, NN)
      DOUBLE PRECISION BP(NN, NEDOF)
      BP(1, 1) = 1.00
      BP(1, 2) = 0.00
      BP(1, 3) = 0.00
      BP(1, 4) = 0.00
      BP(1, 5) = -1.00
      BP(1, 6) = 0.00
      BP(2, 1) = 0.00
      BP(2, 2) = 0.00
      BP(2, 3) = 0.00
      BP(2, 4) = 1.00
      BP(2, 5) = 0.00
      BP(2, 6) = -1.00
      BP(3, 1) = 0.00
      BP(3, 2) = 0.50
      BP(3, 3) = 0.50
      BP(3, 4) = 0.00

```

```
BP(3,5)=-0.50
BP(3,6)=-0.50
RETURN
END
```

C

C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων

```
SUBROUTINE DELAS1(AA,DELAST,E,NN,V)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,DELAST(NN,NN),E,P,V
COMMON L1,L2,L3,L12
P=E/((1-V**2)*AA**4)
DELAST(1,1)=(L1**4)*P
DELAST(1,2)=(V*(L1*L2)**2+((1-V)*L12**2)/4.00)*P
DELAST(1,3)=(-L12*L1**2)*P
DELAST(2,1)=DELAST(1,2)
DELAST(2,2)=(L2**4)*P
DELAST(2,3)=(-L12*L2**2)*P
DELAST(3,1)=DELAST(1,3)
DELAST(3,2)=DELAST(2,3)
DELAST(3,3)=((1+V)*L12**2)/2.00+2.00*(1-V)*(L1*L2)**2)*P
RETURN
END
```

C

C Εύρεση πίνακα στροφής κάθε στοιχείου

```
SUBROUTINE TPIN(N,NEDOF,T,XE,YE)
DOUBLE PRECISION T(NEDOF,NEDOF),XE(N),YE(N)
CALL MHDEN(T,NEDOF,NEDOF)
T(1,1)=(XE(1)-XE(3))
T(1,2)=(YE(1)-YE(3))
T(2,1)=(XE(2)-XE(3))
T(2,2)=(YE(2)-YE(3))
T(3,3)=(XE(1)-XE(3))
T(3,4)=(YE(1)-YE(3))
T(4,3)=(XE(2)-XE(3))
T(4,4)=(YE(2)-YE(3))
T(5,5)=(XE(1)-XE(3))
T(5,6)=(YE(1)-YE(3))
T(6,5)=(XE(2)-XE(3))
T(6,6)=(YE(2)-YE(3))
RETURN
END
```

C

C Εύρεση μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων

C VE όγκος κάθε τριγωνικού στοιχείου

```
SUBROUTINE KE(AA,BP,BPTD,DELAST,H2,KEL,KEL1,NEDOF,NN,T,TTK1)
DOUBLE PRECISION AA,BP(NN,NEDOF),BPTD(NEDOF,NN),DELAST(NN,NN),H2,
&KEL(NEDOF,NEDOF),KEL1(NEDOF,NEDOF),T(NEDOF,NEDOF),
&TTK1(NEDOF,NEDOF),VE
CALL PAPP(BP,BPTD,DELAST,KEL1,NN,NEDOF)
```

```
VE=AA*H2
```

```
CALL POLAP(KEL1,VE,NEDOF,NEDOF)
```

C Μετατροπή μητρώου ακαμψίας, από το τοπικό-πλαγιογώνιο

C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```
CALL PAPP(T,TTK1,KEL1,KEL,NEDOF,NEDOF)
```

```
RETURN
```

```
END
```

C

C Πολλαπλασιασμός ανάστροφου ενός πίνακα με άλλο πίνακα

C και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζετε με τον πρώτο

C  $F(N,N) = DT(N,L) * E(L,L) * D(L,N) = C(N,L) * D(L,N)$

C (χωρίς να υπάρχει ο πίνακας DT, γίνετε ο πολλαπλασιασμός

C αναστρέφοντας κατευθείαν τον πίνακα D)

```

C      C   πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του
C      C   πίνακα D με τον E πίνακα, διαστάσεων (N,L)
C      D   πίνακας διαστάσεων (L,N)
C      DT  ανάστροφος πίνακας του D, διαστάσεων (N,L)
C      E   πίνακας διαστάσεων (L,L)
C      F   τελικός πίνακας διαστάσεων (N,N)
SUBROUTINE PAPP(D,C,E,F,L,N)
DOUBLE PRECISION C(N,L),D(L,N),E(L,L),F(N,N),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+D(K,I)*E(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
CALL POLPP(C,D,F,L,N,N)
RETURN
END

```

```

C
C Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα
C  $C(N,M) = A(N,L) * B(L,M)$ 
C      A   πίνακας διαστάσεων (N,L)
C      B   πίνακας διαστάσεων (L,M)
C      C   τελικός πίνακας διαστάσεων (N,M)
SUBROUTINE POLPP(A,B,C,L,M,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),B(L,M),C(N,M),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,M
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+A(I,K)*B(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα
C  $A(N,L) = X * A(N,L)$ 
C      A   πίνακας διαστάσεων (N,L)
C      X   αριθμός
SUBROUTINE POLAP(A,X,L,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),X
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
A(I,J)=X*A(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Συνθήκες συνέχειας των γενικευμένων μετατοπίσεων και ισορροπίας των
C γενικευμένων δυνάμεων στους κόμβους κάθε στοιχείου
SUBROUTINE INDXEL(INDEX,KOMB,N,NEDOF,NKDOF)
DIMENSION INDEX(NEDOF),KOMB(N)
K=0
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,NKDOF
K=K+1
INDEX(K)=(KOMB(I)-1)*NKDOF+J
20 CONTINUE

```

```
10 CONTINUE
RETURN
END
```

C

```
C Δημιουργία ολικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE SKFUL(INDEX,KEL,NEDOF,NSDOF,SK)
DOUBLE PRECISION KEL(NEDOF,NEDOF),SK(NSDOF,NSDOF)
DIMENSION INDEX(NEDOF)
DO 10 I=1,NEDOF
II=INDEX(I)
DO 20 J=1,NEDOF
JJ=INDEX(J)
SK(II,JJ)=SK(II,JJ)+KEL(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END
```

C

```
C Αντικατάσταση γνωστών μεταβλητών των στοιχείων
C (υπολογισμός ανοιγμένων μητρώων)
SUBROUTINE ORIAKS(FQ,IORS,NORS,NSDOF,ORS,SK)
DOUBLE PRECISION FQ(NSDOF),ORS(NORS),SK(NSDOF,NSDOF)
DIMENSION IORS(NORS)
DO 10 I=1,NORS
DO 20 K=1,NSDOF
FQ(K)=FQ(K)-SK(K,IORS(I))*ORS(I)
SK(IORS(I),K)=0.00
SK(K,IORS(I))=0.00
20 CONTINUE
SK(IORS(I),IORS(I))=1.00
FQ(IORS(I))=ORS(I)
10 CONTINUE
RETURN
END
```

C

```
C Μέθοδος απαλοιφής προς τα εμπρός
C (μέθοδος Gauss με αλλαγή γραμμών)
C  $A(N,N) * X(N,1) = B(N,1)$ 
C A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C (ο πίνακας A στην έξοδο είναι τριγωνικός)
C B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
SUBROUTINE GAUSS(B,N,A)
DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),Z
DO 10 K=1,N-1
CALL PIVOT(A,B,K,N)
DO 20 I=K+1,N
Z=A(I,K)/A(K,K)
B(I)=B(I)-Z*B(K)
DO 30 J=K+1,N
A(I,J)=A(I,J)-Z*A(K,J)
30 CONTINUE
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END
```

C

```
C Διαδικασία μερικής οδήγησης
C (partial pivoting)
C A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C K δηλώνει την εκάστοτε στήλη
C N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
```

```

SUBROUTINE PIVOT(A,B,K,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B)
DIMENSION A(N,N),B(N)
AMAX=A(K,K)
M=K
DO 10 J=K+1,N
IF (DABS(A(J,K)).GT.DABS(AMAX)) THEN
AMAX=A(J,K)
M=J
END IF
10 CONTINUE
IF (M.NE.K) THEN
DO 20 I=1,N
ANT1=A(K,I)
A(K,I)=A(M,I)
A(M,I)=ANT1
20 CONTINUE
ANT2=B(K)
B(K)=B(M)
B(M)=ANT2
END IF
RETURN
END

```

Αντικατάσταση προς τα πίσω  
(back substitution)

A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων  
(ο πίνακας A στην είσοδο είναι τριγωνικός)  
B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος  
N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος  
X διάνυσμα που περιέχει τους αγνώστους του συστήματος

```

SUBROUTINE BACKS(B,N,A,X)
DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),S,X(N)
DO 10 I=N,1,-1
S=0.00
DO 20 J=I+1,N
S=S+A(I,J)*X(J)
20 CONTINUE
X(I)=(B(I)-S)/A(I,I)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

SUBROUTINE DELAS2(DELAST,E,NN,V)
DOUBLE PRECISION DELAST(NN,NN),E,P,V
P=E/(1-V**2)
DELAST(1,1)=P
DELAST(1,2)=V*P
DELAST(1,3)=0.00
DELAST(2,1)=DELAST(1,2)
DELAST(2,2)=DELAST(1,1)
DELAST(2,3)=0.00
DELAST(3,1)=0.00
DELAST(3,2)=0.00
DELAST(3,3)=2.00*P*(1-V)
RETURN
END

```

Εύρεση πίνακα μεταφοράς κάθε στοιχείου

```

SUBROUTINE META(AA,MET,NN)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,MET(NN,NN)

```

```
COMMON L1,L2,L3,L12
MET(1,1)=L12**2/(4.00*AA**2*L2**2)
MET(1,2)=L2**2/AA**2
MET(1,3)=-L12/AA**2
MET(2,1)=1.00/L2**2
MET(2,2)=0.00
MET(2,3)=0.00
MET(3,1)=L12/(2.00*AA*L2**2)
MET(3,2)=0.00
MET(3,3)=-1.00/AA
RETURN
END
```

001000000.00

0.25

0.001

5	6	1
1	6	2
6	7	2
2	7	3
7	8	3
3	8	4
5	4	8
5	1	4
2	3	1
4	1	3

000.040	000.020
000.180	000.030
000.160	000.080
000.080	000.080
000.000	000.000
000.240	000.000
000.240	000.120
000.000	000.120

8

9	000.0000000
10	000.0000000
11	000.0002400
12	000.0001200
13	000.0003000
14	000.0002400
15	000.0000600
16	000.0001200

000.00	000.00	000.00	000.00	000.00
000.00	000.00	000.00	000.00	000.00
000.00	000.00	000.00	000.00	000.00
000.00				

diskos.in -



.0000500  
.0000400  
.0001950  
.0001200  
.0002000  
.0001600  
.0001200  
.0001200  
.0001200  
.0000000  
.0000000  
.0002400  
.0001200  
.0003000  
.0002400  
.0000600  
.0001200

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 1  
-----

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 2  
-----

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 3  
-----

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 4

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 5

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 6

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333334 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 7

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 8

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 9  
-----

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 10  
-----

Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2  
.0015000000 .0005000000

Κύριες Τάσεις σ1 , σ2  
1733.3333333333 933.3333333333

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FORTRAN

ΑΡΧΕΙΟ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΑΡΧΕΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

ΕΥΡΕΣΗ  
ΡΟΠΩΝ & ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΩΝ  
ΣΕ ΠΛΑΚΑ

ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ  
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

του

ΔΗΜΗΤΡΗ ΜΙΧ. ΔΟΙΝΑΚΗ

AA	διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
BP	πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
BPTD	πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του πίνακα BP με τον DELAST πίνακα
DELAST	πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
E	μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
FQ	διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
H	πάχος κάθε στοιχείου
INDEX	διάνυσμα που περιέχει τις θέσεις των μεταβλητών κάθε στοιχείου, στο ολικό μητρώο ακαμψίας
IORS	διάνυσμα που περιέχει τον αύξων αριθμό κάθε οριακής συνθήκης
KEL	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Ki	κύριες καμπυλότητες κάθε στοιχείου
KK	διάνυσμα που περιέχει τις καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KKK	διάνυσμα που περιέχει τις καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KOMB	διάνυσμα που περιέχει του κόμβους κάθε στοιχείου
L1	μήκος πλευράς No 1
L2	μήκος πλευράς No 2
L3	μήκος πλευράς No 3
L12	βοηθητικό μήκος
L23	βοηθητικό μήκος
L31	βοηθητικό μήκος
MET	πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου της κατασκευής, από το τοπικό-πλαγιογώνιο στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Mi	κύριες ροπές σε κάθε στοιχείο
MMM	διάνυσμα που περιέχει τις ροπές σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
N	ο αριθμός των κόμβων σε κάθε στοιχείο
NDIAS	δηλώνει την διάσταση του χώρου

C NEDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο (NKDOF\*N)  
C NEL ο αριθμός των στοιχείων στον κάνναβο  
C NK ο αριθμός των κόμβων στον κάνναβο  
C NKDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο  
C NN ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων σε κάθε στοιχείο  
C NORS πλήθος οριακών συνθηκών  
C NSDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής (NKDOF\*NK)  
C ORS διάνυσμα που περιέχει τις οριακές συνθήκες,  
στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C SK ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής,  
στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C SYND πίνακας που περιέχει την συνδετικότητα κάθε στοιχείου  
του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά,  
κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου  
C V λόγος Poisson του υλικού της κατασκευής  
C W διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές  
μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C WE διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C WEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C XE διάνυσμα που περιέχει τις τετμημένες των κόμβων κάθε  
στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C XY πίνακας που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες  
των κόμβων, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C YE διάνυσμα που περιέχει τις τεταγμένες των κόμβων κάθε  
στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C Zi βοηθητικές μεταβλητές

PROGRAM PLAK

PARAMETER (N=6,NDIAS=2,NEL=10,NK=25,NKDOF=1,NN=3)

PARAMETER (NEDOF=NKDOF\*N,NSDOF=NKDOF\*NK)

DOUBLE PRECISION AA,BP(NN,NEDOF),BPTD(NEDOF,NN),DELAST(NN,NN),E,  
&FQ(NSDOF),H,KEL(NEDOF,NEDOF),KK(NN),KKK(NN),K1,K2,L1,L2,L3,L12,  
&L23,L31,MET(NN,NN),MMM(NN),M1,M2,ORS(NSDOF),SK(NSDOF,NSDOF),V,  
&W(NSDOF),WE(NEDOF),WEL(NEDOF),XE(N),XY(NK,NDIAS),YE(N),Z1,Z2  
DIMENSION INDEX(NEDOF),IORS(NSDOF),KOMB(N)

INTEGER SYND(NEL,N)

COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31

OPEN (10,FILE='PLAKA1.IN')

OPEN (20,FILE='PLAKA1.OUT')

C Δεδομένα κατασκευής

CALL DED(E,FQ,H,IORS,N,NDIAS,NEL,NK,NORS,NSDOF,ORS,SK,SYND,V,XY)

Z1=(H\*\*2)/24.00

DO 10 I=1,NEL

C Κόμβοι κάθε στοιχείου

CALL KOMBOI(I,KOMB,N,NEL,SYND)

C Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,

C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

CALL SYNTET(KOMB,N,NDIAS,NK,XE,XY,YE)

C Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου

CALL AEL(AA,N,XE,YE)

C Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου

CALL MHKH(N,XE,YE)

C Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο

C σύστημα συντεταγμένων

CALL BPAR(AA,BP,NEDOF,NN)

C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο

C σύστημα συντεταγμένων

CALL DELAS1(AA,DELAST,E,H,NN,V)

C Μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο

C σύστημα συντεταγμένων

CALL KE(AA,BP,BPTD,DELAST,KEL,KOMB,N,NEDOF,NN,Z1)

C Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους

```

C      κάθε στοιχείου
      CALL INDXEL(INDEX,KOMB,N,NEDOF,NKDOF)
C      Ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL SKFUL(INDEX,KEL,NEDOF,NSDOF,SK)
10    CONTINUE
C      Γνωστές μεταβλητές των στοιχείων
      CALL ORIAKS(FQ,IORS,NORS,NSDOF,ORS,SK)
C      Τριγωνοποίηση ολικού μητρώου ακαμψίας
      CALL GAUSS(FQ,NSDOF,SK)
C      Γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL BACKS(FQ,NSDOF,SK,W)
      WRITE (20,20) (W(I),I=1,NSDOF)
20    FORMAT (1X,F16.7)
      Z2=(H**2)/12.00
      DO 30 I=1,NEL
C      Κόμβοι κάθε στοιχείου
      CALL KOMBOI(I,KOMB,N,NEL,SYND)
C      Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
C      στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
      CALL SYNTET(KOMB,N,NDIAS,NK,XE,XY,YE)
C      Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
      CALL AEL(AA,N,XE,YE)
C      Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
      CALL MHKH(N,XE,YE)
C      Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL BPAR(AA,BP,NEDOF,NN)
C      Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL DELAS2(DELAST,E,H,NN,V)
C      Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
C      κάθε στοιχείου
      CALL INDXEL(INDEX,KOMB,N,NEDOF,NKDOF)
C      Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      DO 40 J=1,NEDOF
      WE(J)=W(INDEX(J))
40    CONTINUE
C      Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL WELEM(KOMB,N,NEDOF,WE,WEL)
      WRITE (20,'(///, 'Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο',I5)') I
      WRITE (20,'(''-----'')')
C      Καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(BP,WEL,KK,NEDOF,1,NN)
C      Πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου
      CALL META(AA,MET,NN)
C      Καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(MET,KK,KKK,NN,1,NN)
C      Ροπές σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(DELAST,KKK,MMM,NN,1,NN)
      CALL POLAP(MMM,Z2,1,NN)
      MMM(3)=MMM(3)/2.00
C      Κύριες καμπυλότητες κάθε στοιχείου
      K1=(KKK(1)+KKK(2))/2.00+DSQRT(((KKK(1)-KKK(2))/2.00)**2+KKK(3)**2)
      K2=(KKK(1)+KKK(2))/2.00-DSQRT(((KKK(1)-KKK(2))/2.00)**2+KKK(3)**2)
      WRITE (20,'(//, 'Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2',/)'')
      WRITE (20,50) K1,K2
50    FORMAT (1X,F19.10,1X,F19.10)

```



```

C      Κύριες ροπές σε κάθε στοιχείο
M1=(MMM(1)+MMM(2))/2.00+DSQRT(((MMM(1)-MMM(2))/2.00)**2+MMM(3)**2)
M2=(MMM(1)+MMM(2))/2.00-DSQRT(((MMM(1)-MMM(2))/2.00)**2+MMM(3)**2)
WRITE (20,'(//, 'Κύριες Ροπές M1 , M2', /)')
WRITE (20,50) M1,M2
30 CONTINUE
WRITE (20,'(////,3X, '- plaka.out -')')
CLOSE (20)
CLOSE (10)
END

C
C Αρχικά δεδομένα για την συγκεκριμένη κατασκευή
SUBROUTINE DED(E,FQ,H,IORS,N,NDIAS,NEL,NK,NORS,NSDOF,ORS,SK,SYND,
&V,XY)
DOUBLE PRECISION E,FQ(NSDOF),H,ORS(NSDOF),SK(NSDOF,NSDOF),V,
&XY(NK,NDIAS)
DIMENSION IORS(NSDOF)
INTEGER SYND(NEL,N)
C Διαβάζει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
READ (10,*) E
C Διαβάζει τον συντελεστή Poisson του υλικού της κατασκευής
C (για τέλειο ισότροπο ελαστικό υλικό  $\nu = 0.25$  αλλά
C συνήθως για τα μέταλλα  $\nu = 0.33$  - γενικά  $0 < \nu < 0.50$ )
READ (10,*) V
C Διαβάζει το πάχος κάθε στοιχείου
READ (10,*) H
C Διαβάζει την συνδετικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου,
C με αντιωρολογιακή φορά
READ (10,*) ((SYND(I,J),J=1,N),I=1,NEL)
C Διαβάζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
READ (10,*) ((XY(I,J),J=1,NDIAS),I=1,NK)
C Διαβάζει το πλήθος των οριακών συνθηκών
READ (10,*) NORS
C Διαβάζει τις οριακές συνθήκες, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
C (τιμές κομβικών μετατοπίσεων-περιορισμοί στα όρια)
READ (10,*) (IORS(I),ORS(I),I=1,NORS)
C Διαβάζει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
READ (10,*) (FQ(I),I=1,NSDOF)
C Μηδενίζει το ολικό μητρώο ακαμψίας
CALL MHDEN(SK,NSDOF,NSDOF)
RETURN
END

C
C Μηδενισμός πίνακα
C A πίνακας διαστάσεων (N,L)
SUBROUTINE MHDEN(A,L,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L)
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
A(I,J)=0.00
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

C
C Εντοπίζει τους κόμβους κάθε στοιχείου
C I αύξων αριθμός στοιχείου
SUBROUTINE KOMBOI(I,KOMB,N,NEL,SYND)
DIMENSION KOMB(N)
INTEGER SYND(NEL,N)
DO 10 K=1,N

```

```

      KOMB(K)=SYND(I,K)
10 CONTINUE
      RETURN
      END

C
C Εντοπίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE SYNTET(KOMB,N,NDIAS,NK,XE,XY,YE)
      DOUBLE PRECISION XE(N),XY(NK,NDIAS),YE(N)
      DIMENSION KOMB(N)
      DO 10 I=1,N
      XE(I)=XY(KOMB(I),1)
      YE(I)=XY(KOMB(I),2)
10 CONTINUE
      RETURN
      END

C
C Υπολογισμός διπλάσιου εμβαδού κάθε τριγωνικού στοιχείου
      SUBROUTINE AEL(AA,N,XE,YE)
      DOUBLE PRECISION AA,XE(N),YE(N)
      AA=(XE(2)-XE(1))*YE(3)+(XE(1)-XE(3))*YE(2)+(XE(3)-XE(2))*YE(1)
      RETURN
      END

C
C Υπολογίζει τα μήκη των πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
      SUBROUTINE MHKH(N,XE,YE)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
      DOUBLE PRECISION XE(N),YE(N)
      COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
      L1=DSQRT((XE(2)-XE(3))**2+(YE(2)-YE(3))**2)
      L2=DSQRT((XE(3)-XE(1))**2+(YE(3)-YE(1))**2)
      L3=DSQRT((XE(1)-XE(2))**2+(YE(1)-YE(2))**2)
      L12=L1**2+L2**2-L3**2
      L23=L2**2+L3**2-L1**2
      L31=L3**2+L1**2-L2**2
      RETURN
      END

C
C Εύρεση πίνακα παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE BPAR(AA,BP,NEDOF,NN)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
      DOUBLE PRECISION AA,BP(NN,NEDOF)
      COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
      BP(1,1)=-L23/L3**2
      BP(1,2)=(L12*L3**2+L23*L1**2)/(L1*L3)**2
      BP(1,3)=-L12/L1**2
      BP(1,4)=2.00*AA/L1
      BP(1,5)=0.00
      BP(1,6)=2.00*AA/L3
      BP(2,1)=(L12*L3**2+L31*L2**2)/(L2*L3)**2
      BP(2,2)=-L31/L3**2
      BP(2,3)=-L12/L2**2
      BP(2,4)=0.00
      BP(2,5)=2.00*AA/L2
      BP(2,6)=BP(1,6)
      BP(3,1)=L31/L3**2
      BP(3,2)=L23/L3**2
      BP(3,3)=-2.00
      BP(3,4)=0.00
      BP(3,5)=0.00
      BP(3,6)=BP(1,6)
      RETURN
      END

```

```

C
C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE DELAS1 (AA, DELAST, E, H, NN, V)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
      DOUBLE PRECISION AA, DELAST (NN, NN) , E, H, P, V
      COMMON L1, L2, L3, L12, L23, L31
      P=E*H/((1-V**2)*AA**4)
      DELAST(1,1)=(L1**4)*P
      DELAST(1,2)=(V*(L1*L2)**2+((1-V)*L12**2)/4.00)*P
      DELAST(1,3)=(-L12*L1**2)*P
      DELAST(2,1)=DELAST(1,2)
      DELAST(2,2)=(L2**4)*P
      DELAST(2,3)=(-L12*L2**2)*P
      DELAST(3,1)=DELAST(1,3)
      DELAST(3,2)=DELAST(2,3)
      DELAST(3,3)=(((1+V)*L12**2)/2.00+2.00*(1-V)*(L1*L2)**2)*P
      RETURN
      END

C
C Εύρεση μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE KE (AA, BP, BPTD, DELAST, KEL, KOMB, N, NEDOF, NN, Z1)
      DOUBLE PRECISION AA, BP (NN, NEDOF) , BPTD (NEDOF, NN) , DELAST (NN, NN) ,
&KEL (NEDOF, NEDOF) , Z, Z1
      DIMENSION KOMB (N)
      CALL PAPP (BP, BPTD, DELAST, KEL, NN, NEDOF)
      Z=AA*Z1
      CALL POLAP (KEL, Z, NEDOF, NEDOF)

C
C Μετατροπή μητρώου ακαμψίας, από το τοπικό-πλαγιογώνιο
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
      IF (KOMB(2).GT.KOMB(3)) THEN
        DO 10 L=1, NEDOF
          KEL(4, L)=-KEL(4, L)
          KEL(L, 4)=-KEL(L, 4)
10      CONTINUE
        END IF
        IF (KOMB(3).GT.KOMB(1)) THEN
          DO 20 L=1, NEDOF
            KEL(5, L)=-KEL(5, L)
            KEL(L, 5)=-KEL(L, 5)
20      CONTINUE
          END IF
          IF (KOMB(1).GT.KOMB(2)) THEN
            DO 30 L=1, NEDOF
              KEL(6, L)=-KEL(6, L)
              KEL(L, 6)=-KEL(L, 6)
30      CONTINUE
            END IF
            RETURN
            END

C
C Πολλαπλασιασμός ανάστροφου ενός πίνακα με άλλο πίνακα
C και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζετε με τον πρώτο
C  $F(N,N) = DT(N,L) * E(L,L) * D(L,N) = C(N,L) * D(L,N)$ 
C (χωρίς να υπάρχει ο πίνακας DT, γίνετε ο πολλαπλασιασμός
C αναστρέφοντας κατευθείαν τον πίνακα D)
C      C πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του
C      πίνακα D με τον E πίνακα, διαστάσεων (N,L)
C      D πίνακας διαστάσεων (L,N)
C      DT ανάστροφος πίνακας του D, διαστάσεων (N,L)
C      E πίνακας διαστάσεων (L,L)
C      F τελικός πίνακας διαστάσεων (N,N)
      SUBROUTINE PAPP (D, C, E, F, L, N)

```

```

DOUBLE PRECISION C(N,L),D(L,N),E(L,L),F(N,N),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+D(K,I)*E(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
CALL POLPP(C,D,F,L,N,N)
RETURN
END

```

```

C
C Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα
C  $C(N,M) = A(N,L) * B(L,M)$ 
C   A πίνακας διαστάσεων (N,L)
C   B πίνακας διαστάσεων (L,M)
C   C τελικός πίνακας διαστάσεων (N,M)
SUBROUTINE POLPP(A,B,C,L,M,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),B(L,M),C(N,M),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,M
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+A(I,K)*B(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα
C  $A(N,L) = X * A(N,L)$ 
C   A πίνακας διαστάσεων (N,L)
C   X αριθμός
SUBROUTINE POLAP(A,X,L,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),X
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
A(I,J)=X*A(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Συνθήκες συνέχειας των γενικευμένων μετατοπίσεων και ισορροπίας των
C γενικευμένων δυνάμεων στους κόμβους κάθε στοιχείου
SUBROUTINE INDXEL(INDEX,KOMB,N,NEDOF,NKDOF)
DIMENSION INDEX(NEDOF),KOMB(N)
K=0
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,NKDOF
K=K+1
INDEX(K)=(KOMB(I)-1)*NKDOF+J
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Δημιουργία ολικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE SKFUL(INDEX,KEL,NEDOF,NSDOF,SK)

```

```

DOUBLE PRECISION KEL(NEDOF,NEDOF),SK(NSDOF,NSDOF)
DIMENSION INDEX(NEDOF)
DO 10 I=1,NEDOF
  II=INDEX(I)
DO 20 J=1,NEDOF
  JJ=INDEX(J)
  SK(II,JJ)=SK(II,JJ)+KEL(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C Αντικατάσταση γνωστών μεταβλητών των στοιχείων

C (υπολογισμός ανοιγμένων μητρών)

```

SUBROUTINE ORIAKS(FQ,IORS,NORS,NSDOF,ORS,SK)
DOUBLE PRECISION FQ(NSDOF),ORS(NORS),SK(NSDOF,NSDOF)
DIMENSION IORS(NORS)
DO 10 I=1,NORS
DO 20 K=1,NSDOF
  FQ(K)=FQ(K)-SK(K,IORS(I))*ORS(I)
  SK(IORS(I),K)=0.00
  SK(K,IORS(I))=0.00
20 CONTINUE
  SK(IORS(I),IORS(I))=1.00
  FQ(IORS(I))=ORS(I)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C Μέθοδος απαλοιφής προς τα εμπρός

C (μέθοδος Gauss με αλλαγή γραμμών)

C  $A(N,N) * X(N,1) = B(N,1)$

C A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων

C (ο πίνακας A στην έξοδο είναι τριγωνικός)

C B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος

C N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος

```

SUBROUTINE GAUSS(B,N,A)
DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),Z
DO 10 K=1,N-1
CALL PIVOT(A,B,K,N)
DO 20 I=K+1,N
  Z=A(I,K)/A(K,K)
  B(I)=B(I)-Z*B(K)
DO 30 J=K+1,N
  A(I,J)=A(I,J)-Z*A(K,J)
30 CONTINUE
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C Διαδικασία μερικής οδήγησης

C (partial pivoting)

C A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων

C B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος

C K δηλώνει την εκάστοτε στήλη

C N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος

```

SUBROUTINE PIVOT(A,B,K,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B)
DIMENSION A(N,N),B(N)
AMAX=A(K,K)
M=K
DO 10 J=K+1,N
  IF (DABS(A(J,K)).GT.DABS(AMAX)) THEN

```

```

    AMAX=A(J,K)
    M=J
  END IF
10 CONTINUE
  IF (M.NE.K) THEN
    DO 20 I=1,N
      ANT1=A(K,I)
      A(K,I)=A(M,I)
      A(M,I)=ANT1
20 CONTINUE
      ANT2=B(K)
      B(K)=B(M)
      B(M)=ANT2
    END IF
  RETURN
  END

```

C

C Αντικατάσταση προς τα πίσω

C (back substitution)

C A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων  
 C (ο πίνακας A στην είσοδο είναι τριγωνικός)  
 C B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος  
 C N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος  
 C X διάνυσμα που περιέχει τους αγνώστους του συστήματος

```

SUBROUTINE BACKS(B,N,A,X)
DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),S,X(N)
DO 10 I=N,1,-1
  S=0.00
  DO 20 J=I+1,N
    S=S+A(I,J)*X(J)
20 CONTINUE
  X(I)=(B(I)-S)/A(I,I)
10 CONTINUE
  RETURN
  END

```

C

C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο

C σύστημα συντεταγμένων

```

SUBROUTINE DELAS2(DELAST,E,H,NN,V)
DOUBLE PRECISION DELAST(NN,NN),E,H,P,V
P=E*H/(1-V**2)
DELAST(1,1)=P
DELAST(1,2)=V*P
DELAST(1,3)=0.00
DELAST(2,1)=DELAST(1,2)
DELAST(2,2)=DELAST(1,1)
DELAST(2,3)=0.00
DELAST(3,1)=0.00
DELAST(3,2)=0.00
DELAST(3,3)=2.00*P*(1-V)
RETURN
END

```

C

C Υπολογίζει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο

C τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

SUBROUTINE WELEM(KOMB,N,NEDOF,WE,WEL)
DOUBLE PRECISION WE(NEDOF),WEL(NEDOF)
DIMENSION KOMB(N)
DO 10 J=1,NEDOF
  WEL(J)=WE(J)
10 CONTINUE
  IF (KOMB(2).GT.KOMB(3)) THEN
    WEL(4)=-WE(4)
  END IF

```

```
IF (KOMB(3).GT.KOMB(1)) THEN
  WEL(5)=-WE(5)
END IF
IF (KOMB(1).GT.KOMB(2)) THEN
  WEL(6)=-WE(6)
END IF
RETURN
END
```

C

C Εύρεση πίνακα μεταφοράς κάθε στοιχείου

```
SUBROUTINE META(AA,MET,NN)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,MET(NN,NN)
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
MET(1,1)=L12**2/(4.00*AA**2*L2**2)
MET(1,2)=L2**2/AA**2
MET(1,3)=-L12/AA**2
MET(2,1)=1.00/L2**2
MET(2,2)=0.00
MET(2,3)=0.00
MET(3,1)=L12/(2.00*AA*L2**2)
MET(3,2)=0.00
MET(3,3)=-1.00/AA
RETURN
END
```

001000000.00

0.25

0.001

5	6	1	13	14	9
1	6	2	15	16	13
6	7	2	22	15	10
2	7	3	23	17	22
7	8	3	24	23	11
3	8	4	25	19	24
5	4	8	25	12	21
5	1	4	20	21	14
2	3	1	18	16	17
4	1	3	18	19	20

000.040	000.020
000.180	000.030
000.160	000.080
000.080	000.080
000.000	000.000
000.240	000.000
000.240	000.120
000.000	000.120
000.120	000.000
000.240	000.060
000.120	000.120
000.000	000.060
000.140	000.010
000.020	000.010
000.210	000.015
000.110	000.025
000.170	000.055
000.100	000.050
000.120	000.080
000.060	000.050
000.040	000.040
000.210	000.075
000.200	000.100
000.080	000.100
000.040	000.100

8

5	000.0000000
6	000.0000288
7	000.0000504
8	000.0000072
9	000.0000600
10	-000.0002700
11	-000.0001800
12	-000.0000300

000.00	000.00	000.00	000.00	000.00
000.00	000.00	000.00	000.00	000.00
000.00	000.00	000.00	000.00	000.00



000.00	000.00	000.00	000.00	000.00
000.00	000.00	000.00	000.00	000.00

- plaka.in -

.0000014  
.0000194  
.0000224  
.0000096  
.0000000  
.0000288  
.0000504  
.0000072  
.0000600  
-.0002700  
-.0001800  
-.0000300  
.0000940  
-.0000067  
.0002046  
.0000711  
-.0002354  
.0000335  
-.0001400  
-.0000263  
.0000000  
-.0001061  
.0000671  
-.0001673  
-.0001476

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 1  
-----

Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2  
-.0005000000 -.0015000000

Κύριες Ροπές M1 , M2  
-.0000000778 -.0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 2  
-----

Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2  
-.0005000000 -.0015000000

Κύριες Ροπές M1 , M2  
-.0000000778 -.0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 3  
-----

Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2

- .0005000000                    - .0015000000

Κύριες Ροπές    M1 , M2

- .0000000778                    - .0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο    4  
-----

Κύριες Καμπυλότητες    K1 , K2

- .0005000000                    - .0015000000

Κύριες Ροπές    M1 , M2

- .0000000778                    - .0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο    5  
-----

Κύριες Καμπυλότητες    K1 , K2

- .0005000000                    - .0015000000

Κύριες Ροπές    M1 , M2

- .0000000778                    - .0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο    6  
-----

Κύριες Καμπυλότητες    K1 , K2

- .0005000000                    - .0015000000

Κύριες Ροπές    M1 , M2

- .0000000778                    - .0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο    7  
-----

Κύριες Καμπυλότητες    K1 , K2

- .0005000000                    - .0015000000

Κύριες Ροπές    M1 , M2

-.0000000778

-.0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 8

Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2

-.0005000000

-.0015000000

Κύριες Ροπές M1 , M2

-.0000000778

-.0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 9

Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2

-.0005000000

-.0015000000

Κύριες Ροπές M1 , M2

-.0000000778

-.0000001444

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο 10

Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2

-.0005000000

-.0015000000

Κύριες Ροπές M1 , M2

-.0000000778

-.0000001444

- plaka.out -

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

ΕΥΡΕΣΗ  
ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ  
ΣΕ ΚΕΛΥΦΟΣ

ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ  
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

του

ΔΗΜΗΤΡΗ ΜΙΧ. ΔΟΙΝΑΚΗ

AA	διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
BP1	πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου του δίσκου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
BP2	πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου της πλάκας, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
BPTD1	πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του πίνακα BP1 με τον DELAST πίνακα
BPTD2	πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του πίνακα BP2 με τον DELAST πίνακα
DELAST	πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
E	μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
EE	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
EEE	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Ei	κύριες παραμορφώσεις κάθε στοιχείου
FQ	διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
H	πάχος κάθε στοιχείου
H2	ημιπάχος κάθε στοιχείου
INDEX	διάνυσμα που περιέχει τις θέσεις των μεταβλητών κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο ολικό μητρώο ακαμψίας
IORS	διάνυσμα που περιέχει τον αύξων αριθμό κάθε οριακής συνθήκης
KEL	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KELL	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KEL1	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου του δίσκου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KEL2	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου της πλάκας, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Ki	κύριες καμπυλότητες κάθε στοιχείου
KK	διάνυσμα που περιέχει τις καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KKK	διάνυσμα που περιέχει τις καμπυλότητες κάθε στοιχείου,

C στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C KOMB διάνυσμα που περιέχει του κόμβους κάθε στοιχείου  
C L1 μήκος πλευράς No 1  
C L2 μήκος πλευράς No 2  
C L3 μήκος πλευράς No 3  
C L12 βοηθητικό μήκος  
C L23 βοηθητικό μήκος  
C L31 βοηθητικό μήκος  
C MET πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου της κατασκευής,  
C από το τοπικό-πλαγιογώνιο στο τοπικό-ορθογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων  
C Mi κύριες ροπές σε κάθε στοιχείο  
C MMM διάνυσμα που περιέχει τις ροπές σε κάθε στοιχείο,  
C στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C N1 ο αριθμός των κόμβων σε κάθε στοιχείο του δίσκου  
C N2 ο αριθμός των κόμβων σε κάθε στοιχείο της πλάκας  
C NDIAS δηλώνει την διάσταση του χώρου  
C NEDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο  
C της κατασκευής (NEDOF1+NEDOF2)  
C NEDOF1 ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο  
C του δίσκου (NKDOF1\*N1)  
C NEDOF2 ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο  
C της πλάκας (NKDOF2\*N2)  
C NEL ο αριθμός των στοιχείων στον κάνναβο  
C NK1 ο αριθμός των κόμβων στον κάνναβο του δίσκου  
C NK2 ο αριθμός των κόμβων στον κάνναβο της πλάκας  
C NKDOF1 ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο  
C του δίσκου  
C NKDOF2 ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο  
C της πλάκας  
C NN ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων σε κάθε στοιχείο  
C NORS πλήθος οριακών συνθηκών  
C NSDOF ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής  
C (NSDOF1+NSDOF2)  
C NSDOF1 ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του δίσκου  
C (NKDOF1\*NK1)  
C NSDOF2 ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της πλάκας  
C (NKDOF2\*NK2)  
C ORS διάνυσμα που περιέχει τις οριακές συνθήκες,  
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C Si κύριες τάσεις σε κάθε στοιχείο  
C SK ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής,  
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C SSS διάνυσμα που περιέχει τις τάσεις σε κάθε στοιχείο,  
C στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C SYND πίνακας που περιέχει την συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου  
C του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά,  
C κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου  
C T πίνακας στροφής κάθε στοιχείου της κατασκευής, που συνδέει  
C το τοπικό-πλαγιογώνιο με το καθολικό-ορθογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων  
C TTKL πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του  
C πίνακα T με τον KELL πίνακα  
C UEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
C στοιχείου του δίσκου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων  
C UW διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές  
C μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
C UWE διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
C στοιχείου της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων  
C UWEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
C στοιχείου της κατασκευής, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων

C V λόγος Poisson του υλικού της κατασκευής  
 C WEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 C στοιχείου της πλάκας, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
 C σύστημα συντεταγμένων  
 C XE διάνυσμα που περιέχει τις τετμημένες των κόμβων κάθε  
 C στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C XYZ πίνακας που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες  
 C των κόμβων, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C YE διάνυσμα που περιέχει τις τεταγμένες των κόμβων κάθε  
 C στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C ZE διάνυσμα που περιέχει τις κατηγμένες των κόμβων κάθε  
 C στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 C Zi βοηθητικές μεταβλητές

----- Κ Υ Ρ Ι Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α -----

PROGRAM KELYF

PARAMETER (N1=3,N2=6,NDIAS=3,NEL=10,NK1=8,NK2=25,NKDOF1=2,  
&NKDOF2=1,NN=3)

PARAMETER (NEDOF1=NKDOF1\*N1,NEDOF2=NKDOF2\*N2,NEDOF=NEDOF1+NEDOF2,  
&NSDOF1=NKDOF1\*NK1,NSDOF2=NKDOF2\*NK2,NSDOF=NSDOF1+NSDOF2)

DOUBLE PRECISION AA,BP1(NN,NEDOF1),BP2(NN,NEDOF2),  
&BPTD1(NEDOF1,NN),BPTD2(NEDOF2,NN),DELAST(NN,NN),E,EE(NN),EEE(NN),  
&E1,E2,FQ(NSDOF),H,H2,KEL(NEDOF,NEDOF),KELL(NEDOF,NEDOF),  
&KEL1(NEDOF1,NEDOF1),KEL2(NEDOF2,NEDOF2),KK(NN),KKK(NN),K1,K2,L1,  
&L2,L3,L12,L23,L31,MET(NN,NN),MMM(NN),M1,M2,ORS(NSDOF),  
&SK(NSDOF,NSDOF),SSS(NN),S1,S2,T(NEDOF,NEDOF),TTKL(NEDOF,NEDOF),  
&UEL(NEDOF1),UW(NSDOF),UWE(NEDOF),UWEL(NEDOF),V,WEL(NEDOF2),XE(N2),  
&XYZ(NK2,NDIAS),YE(N2),ZE(N2),Z1,Z2

DIMENSION INDEX(NEDOF),IORS(NSDOF),KOMB(N2)

INTEGER SYND(NEL,N2)

COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31

OPEN (10,FILE='KELYFOS1.IN')

OPEN (20,FILE='KELYFOS1.OUT')

C -- ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ --

CALL DED(E,FQ,H,IORS,N2,NDIAS,NEL,NK2,NORS,NSDOF,ORS,SK,SYND,V,  
&XYZ)

C -- ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΚΟΜΒΙΚΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ, --

C -- ΣΤΟ ΚΑΘΟΛΙΚΟ-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΜΕΝΩΝ --

H2=H/2.00

Z1=(H\*\*2)/24.00

DO 10 I=1,NEL

C -- Γεωμετρία Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --

C Κόμβοι κάθε στοιχείου

CALL KOMBOI(I,KOMB,N2,NEL,SYND)

C Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,

C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

CALL SYNTET(KOMB,N2,NDIAS,NK2,XE,XYZ,YE,ZE)

C Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου

CALL MHKH(N2,XE,YE,ZE)

C Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου

CALL AEL(AA)

C -- Υπολογισμός Μητρώου Ακαμψίας Κάθε Στοιχείου Του Δίσκου, --

C -- Στο Τοπικό-Πλαγιογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων --

C Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων

CALL BPAR1(BP1,NEDOF1,NN)

C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
C σύστημα συντεταγμένων

CALL DELA1P(AA,DELAST,E,NN,V)

C Μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο

C σύστημα συντεταγμένων



```

CALL KE1 (AA, BP1, BPTD1, DELAST, H2, KEL1, NEDOF1, NN)
C -- Υπολογισμός Μητρώου Ακαμψίας Κάθε Στοιχείου Της Πλάκας, --
C -- Στο Τοπικό-Πλαγιογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων --
C Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL BPAR2 (AA, BP2, NEDOF2, NN)
C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLAP (DELAST, H, NN, NN)
C Μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL KE2 (AA, BP2, BPTD2, DELAST, KEL2, KOMB, N2, NEDOF2, NN, Z1)
C -- Υπολογισμός Ολικού Μητρώου Ακαμψίας Της Κατασκευής --
C -- Στο Καθολικό-Ορθογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων --
C Πίνακας στροφής κάθε στοιχείου
CALL TPIN (AA, N2, NEDOF, T, XE, YE, ZE)
C Μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL KE (KEL, KELL, KEL1, KEL2, NEDOF, NEDOF1, NEDOF2, T, TTKL)
C Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
C κάθε στοιχείου
CALL INDXEL (INDEX, KOMB, N1, N2, NEDOF, NEDOF1, NKDOF1, NKDOF2, NSDOF1)
C Ολικό μητρώο ακαμψίας στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL SKFUL (INDEX, KEL, NEDOF, NSDOF, SK)
10 CONTINUE
C Γνωστές μεταβλητές των στοιχείων της κατασκευής
CALL ORIAKS (FQ, IORS, NORS, NSDOF, ORS, SK)
C Τριγωνοποίηση ολικού μητρώου ακαμψίας
CALL GAUSS (FQ, NSDOF, SK)
C Γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL BACKS (FQ, NSDOF, SK, UW)
WRITE (20, 20) (UW(I), I=1, NSDOF)
20 FORMAT (1X, F16.7)
C -- ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΟΜΒΙΚΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ --
C -- ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ --
Z2=(H**2)/12.00
DO 30 I=1, NEL
C -- Γεωμετρία Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --
C Κόμβοι κάθε στοιχείου
CALL KOMBOI (I, KCMB, N2, NEL, SYND)
C Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL SYNTET (KOMB, N2, NDIAS, NK2, XE, XYZ, YE, ZE)
C Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
CALL MHKH (N2, XE, YE, ZE)
C Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
CALL AEL (AA)
C Πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου
CALL META (AA, MET, NN)
C Πίνακας στροφής κάθε στοιχείου
CALL TPIN (AA, N2, NEDOF, T, XE, YE, ZE)
C -- Κομβικές Μετατοπίσεις Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --
C Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
C κάθε στοιχείου
CALL INDXEL (INDEX, KOMB, N1, N2, NEDOF, NEDOF1, NKDOF1, NKDOF2, NSDOF1)
C Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
DO 40 J=1, NEDOF
UWE (J) = UW (INDEX (J))
40 CONTINUE
C Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP (T, UWE, UWEL, NEDOF, 1, NEDOF)

```

```

C -- Δίσκος --
C Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL BPAR1(BP1,NEDOF1,NN)
C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL DELA10(DELAST,E,NN,V)
C Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
DO 50 J=1,NEDOF1
  UEL(J)=UWEL(J)
50 CONTINUE
C Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(BP1,UEL,EE,NEDOF1,1,NN)
C Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(MET,EE,EEE,NN,1,NN)
C Τάσεις σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(DELAST,EEE,SSS,NN,1,NN)
SSS(3)=SSS(3)/2.00
C -- Πλάκα --
C Πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL BPAR2(AA,BP2,NEDOF2,NN)
C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLAP(DELAST,H,NN,NN)
C Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
DO 60 J=1,NEDOF2
  WEL(J)=UWEL(J+NEDOF1)
60 CONTINUE
CALL WELEM(KOMB,N2,NEDOF2,WEL)
C Καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(BP2,WEL,KK,NEDOF2,1,NN)
C Καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(MET,KK,KKK,NN,1,NN)
C Ροπές σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(DELAST,KKK,MMM,NN,1,NN)
CALL POLAP(MMM,Z2,1,NN)
MMM(3)=MMM(3)/2.00
C -- Αγνωστοι Παράμετροι Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --
C Κύριες παραμορφώσεις κάθε στοιχείου
E1=(EEE(1)+EEE(2))/2.00+DSQRT(((EEE(1)-EEE(2))/2.00)**2+EEE(3)**2)
E2=(EEE(1)+EEE(2))/2.00-DSQRT(((EEE(1)-EEE(2))/2.00)**2+EEE(3)**2)
C Κύριες τάσεις σε κάθε στοιχείο
S1=(SSS(1)+SSS(2))/2.00+DSQRT(((SSS(1)-SSS(2))/2.00)**2+SSS(3)**2)
S2=(SSS(1)+SSS(2))/2.00-DSQRT(((SSS(1)-SSS(2))/2.00)**2+SSS(3)**2)
C Κύριες καμπυλότητες κάθε στοιχείου
K1=(KKK(1)+KKK(2))/2.00+DSQRT(((KKK(1)-KKK(2))/2.00)**2+KKK(3)**2)
K2=(KKK(1)+KKK(2))/2.00-DSQRT(((KKK(1)-KKK(2))/2.00)**2+KKK(3)**2)
C Κύριες ροπές σε κάθε στοιχείο
M1=(MMM(1)+MMM(2))/2.00+DSQRT(((MMM(1)-MMM(2))/2.00)**2+MMM(3)**2)
M2=(MMM(1)+MMM(2))/2.00-DSQRT(((MMM(1)-MMM(2))/2.00)**2+MMM(3)**2)
C -- ΕΚΤΥΠΩΣΗ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ --
WRITE (20,'(///,' Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο ',' I5)') I
WRITE (20,'(''-----'')')
WRITE (20,'(//,' Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2 ',/)'')
WRITE (20,70) E1,E2

```

```

WRITE (20, '(//, ''Κύριες Τάσεις σ1 , σ2'',//)')
WRITE (20,70) S1,S2
WRITE (20, '(//, ''Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2'',//)')
WRITE (20,70) K1,K2
WRITE (20, '(//, ''Κύριες Ροπές M1 , M2'',//)')
WRITE (20,70) M1,M2
70 FORMAT (1X,F19.10,1X,F19.10)
30 CONTINUE
WRITE (20, '(////,3X, ''- kelyfos.out -'' )')
CLOSE (20)
CLOSE (10)
END

```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

----- Υ Π Ο Ρ Ο Υ Τ Ι Ν Ε Σ Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Τ Ο Σ -----

```

C Αρχικά δεδομένα για την συγκεκριμένη κατασκευή
SUBROUTINE DED (E, FQ, H, IORS, N2, NDIAS, NEL, NK2, NORS, NSDOF, ORS, SK,
&SYND, V, XYZ)
DOUBLE PRECISION E, FQ (NSDOF) , H, ORS (NSDOF) , SK (NSDOF, NSDOF) , V,
&XYZ (NK2, NDIAS)
DIMENSION IORS (NSDOF)
INTEGER SYND (NEL, N2)
C Διαβάζει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
READ (10, *) E
C Διαβάζει τον συντελεστή Poisson του υλικού της κατασκευής
C (για τέλειο ισότροπο ελαστικό υλικό  $\nu = 0.25$  αλλά
C συνήθως για τα μέταλλα  $\nu = 0.33$  - γενικά  $0 < \nu < 0.50$ )
READ (10, *) V
C Διαβάζει το πάχος κάθε στοιχείου
READ (10, *) H
C Διαβάζει την συνδετικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου,
C με αντιωρολογιακή φορά
READ (10, *) ((SYND (I, J) , J=1, N2) , I=1, NEL)
C Διαβάζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
READ (10, *) ((XYZ (I, J) , J=1, NDIAS) , I=1, NK2)
C Διαβάζει το πλήθος των οριακών συνθηκών
READ (10, *) NORS
C Διαβάζει τις οριακές συνθήκες, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
C (τιμές κομβικών μετατοπίσεων-περιορισμοί στα όρια)
READ (10, *) (IORS (I) , ORS (I) , I=1, NORS)
C Διαβάζει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
READ (10, *) (FQ (I) , I=1, NSDOF)
C Μηδενίζει το ολικό μητρώο ακαμψίας
CALL MHDEN (SK, NSDOF, NSDOF)
RETURN
END

```

C

C Μηδενισμός πίνακα

```

C A πίνακας διαστάσεων (N,L)
SUBROUTINE MHDEN (A, L, N)
DOUBLE PRECISION A (N, L)
DO 10 I=1, N
DO 20 J=1, L
A (I, J) = 0.00
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Εντοπίζει τους κόμβους κάθε στοιχείου της κατασκευής
C   I αύξων αριθμός στοιχείου
SUBROUTINE KOMBOI (I, KOMB, N2, NEL, SYND)
DIMENSION KOMB (N2)
INTEGER SYND (NEL, N2)
DO 10 K=1, N2
KOMB (K) =SYND (I, K)
10 CONTINUE
RETURN
END

C
C Εντοπίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου
C της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE SYNTET (KOMB, N2, NDIAS, NK2, XE, XYZ, YE, ZE)
DOUBLE PRECISION XE (N2), XYZ (NK2, NDIAS), YE (N2), ZE (N2)
DIMENSION KOMB (N2)
DO 10 I=1, N2
XE (I) =XYZ (KOMB (I), 1)
YE (I) =XYZ (KOMB (I), 2)
ZE (I) =XYZ (KOMB (I), 3)
10 CONTINUE
RETURN
END

C
C Υπολογίζει τα μήκη των πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
C της κατασκευής
SUBROUTINE MHKH (N2, XE, YE, ZE)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION XE (N2), YE (N2), ZE (N2)
COMMON L1, L2, L3, L12, L23, L31
L1=DSQRT ((XE (2) -XE (3)) **2+(YE (2) -YE (3)) **2+(ZE (2) -ZE (3)) **2)
L2=DSQRT ((XE (3) -XE (1)) **2+(YE (3) -YE (1)) **2+(ZE (3) -ZE (1)) **2)
L3=DSQRT ((XE (1) -XE (2)) **2+(YE (1) -YE (2)) **2+(ZE (1) -ZE (2)) **2)
L12=L1**2+L2**2-L3**2
L23=L2**2+L3**2-L1**2
L31=L3**2+L1**2-L2**2
RETURN
END

C
C Υπολογισμός διπλάσιου εμβαδού κάθε τριγωνικού στοιχείου της κατασκευής
SUBROUTINE AEL (AA)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA
COMMON L1, L2, L3, L12, L23, L31
AA=DSQRT (L12*L23+L23*L31+L31*L12) /2.00
RETURN
END

C
C Εύρεση πίνακα παραμορφώσεων κάθε στοιχείου του δίσκου,
C στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE BPAR1 (BP1, NEDOF1, NN)
DOUBLE PRECISION BP1 (NN, NEDOF1)
BP1 (1, 1) =1.00
BP1 (1, 2) =0.00
BP1 (1, 3) =0.00
BP1 (1, 4) =0.00
BP1 (1, 5) =-1.00
BP1 (1, 6) =0.00
BP1 (2, 1) =0.00
BP1 (2, 2) =0.00
BP1 (2, 3) =0.00
BP1 (2, 4) =1.00
BP1 (2, 5) =0.00

```

```

BP1(2,6)=-1.00
BP1(3,1)=0.00
BP1(3,2)=0.50
BP1(3,3)=0.50
BP1(3,4)=0.00
BP1(3,5)=-0.50
BP1(3,6)=-0.50
RETURN
END

```

C  
C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου του δίσκου,  
C στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

SUBROUTINE DELA1P(AA,DELAST,E,NN,V)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,DELAST(NN,NN),E,P,V
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
P=E/((1-V**2)*AA**4)
DELAST(1,1)=(L1**4)*P
DELAST(1,2)=(V*(L1*L2)**2+((1-V)*L12**2)/4.00)*P
DELAST(1,3)=(-L12*L1**2)*P
DELAST(2,1)=DELAST(1,2)
DELAST(2,2)=(L2**4)*P
DELAST(2,3)=(-L12*L2**2)*P
DELAST(3,1)=DELAST(1,3)
DELAST(3,2)=DELAST(2,3)
DELAST(3,3)=(((1+V)*L12**2)/2.00+2.00*(1-V)*(L1*L2)**2)*P
RETURN
END

```

C  
C Εύρεση μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου του δίσκου,  
C στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

C VE όγκος κάθε τριγωνικού στοιχείου
SUBROUTINE KE1(AA,BP1,BPTD1,DELAST,H2,KEL1,NEDOF1,NN)
DOUBLE PRECISION AA,BP1(NN,NEDOF1),BPTD1(NEDOF1,NN),DELAST(NN,NN),
&H2,KEL1(NEDOF1,NEDOF1),VE
CALL PAPP(BP1,BPTD1,DELAST,KEL1,NN,NEDOF1)
VE=AA*H2
CALL POLAP(KEL1,VE,NEDOF1,NEDOF1)
RETURN
END

```

C  
C Πολλαπλασιασμός ανάστροφου ενός πίνακα με άλλο πίνακα  
C και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζετε με τον πρώτο  
C  $F(N,N) = DT(N,L) * E(L,L) * D(L,N) = C(N,L) * D(L,N)$   
C (χωρίς να υπάρχει ο πίνακας DT, γίνεται ο πολλαπλασιασμός  
C αναστρέφοντας κατευθείαν τον πίνακα D)

C C πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του  
C πίνακα D με τον E πίνακα, διαστάσεων (N,L)  
C D πίνακας διαστάσεων (L,N)  
C DT ανάστροφος πίνακας του D, διαστάσεων (N,L)  
C E πίνακας διαστάσεων (L,L)  
C F τελικός πίνακας διαστάσεων (N,N)

```

SUBROUTINE PAPP(D,C,E,F,L,N)
DOUBLE PRECISION C(N,L),D(L,N),E(L,L),F(N,N),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+D(K,I)*E(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
CALL POLPP(C,D,F,L,N,N)

```

```

        RETURN
        END

C
C Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα
C  $C(N,M) = A(N,L) * B(L,M)$ 
C   A πίνακας διαστάσεων (N,L)
C   B πίνακας διαστάσεων (L,M)
C   C τελικός πίνακας διαστάσεων (N,M)
SUBROUTINE POLPP(A,B,C,L,M,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),B(L,M),C(N,M),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,M
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+A(I,K)*B(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

C
C Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα
C  $A(N,L) = X * A(N,L)$ 
C   A πίνακας διαστάσεων (N,L)
C   X αριθμός
SUBROUTINE POLAP(A,X,L,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),X
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
A(I,J)=X*A(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

C
C Εύρεση πίνακα παραμορφώσεων κάθε στοιχείου της πλάκας,
C στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE BPAR2(AA,BP2,NEDOF2,NN)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,BP2(NN,NEDOF2)
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
BP2(1,1)=-L23/L3**2
BP2(1,2)=(L12*L3**2+L23*L1**2)/(L1*L3)**2
BP2(1,3)=-L12/L1**2
BP2(1,4)=2.00*AA/L1
BP2(1,5)=0.00
BP2(1,6)=2.00*AA/L3
BP2(2,1)=(L12*L3**2+L31*L2**2)/(L2*L3)**2
BP2(2,2)=-L31/L3**2
BP2(2,3)=-L12/L2**2
BP2(2,4)=0.00
BP2(2,5)=2.00*AA/L2
BP2(2,6)=BP2(1,6)
BP2(3,1)=L31/L3**2
BP2(3,2)=L23/L3**2
BP2(3,3)=-2.00
BP2(3,4)=0.00
BP2(3,5)=0.00
BP2(3,6)=BP2(1,6)
RETURN
END

C
C Εύρεση μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου της πλάκας,

```

```

C στο τοπικό-πλαγιολόγιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE KE2 (AA, BP2, BPTD2, DELAST, KEL2, KOMB, N2, NEDOF2, NN, Z1)
DOUBLE PRECISION AA, BP2 (NN, NEDOF2), BPTD2 (NEDOF2, NN), DELAST (NN, NN),
&KEL2 (NEDOF2, NEDOF2), Z, Z1
DIMENSION KOMB (N2)
CALL PAPP (BP2, BPTD2, DELAST, KEL2, NN, NEDOF2)
Z=AA*Z1
CALL POLAP (KEL2, Z, NEDOF2, NEDOF2)
IF (KOMB (2) .GT. KOMB (3)) THEN
DO 10 L=1, NEDOF2
KEL2 (4, L) = -KEL2 (4, L)
KEL2 (L, 4) = -KEL2 (L, 4)
10 CONTINUE
END IF
IF (KOMB (3) .GT. KOMB (1)) THEN
DO 20 L=1, NEDOF2
KEL2 (5, L) = -KEL2 (5, L)
KEL2 (L, 5) = -KEL2 (L, 5)
20 CONTINUE
END IF
IF (KOMB (1) .GT. KOMB (2)) THEN
DO 30 L=1, NEDOF2
KEL2 (6, L) = -KEL2 (6, L)
KEL2 (L, 6) = -KEL2 (L, 6)
30 CONTINUE
END IF
RETURN
END

```

C  
C Εύρεση πίνακα στροφής κάθε στοιχείου της κατασκευής

```

SUBROUTINE TPIN (AA, N2, NEDOF, T, XE, YE, ZE)
DOUBLE PRECISION AA, N1N, N2N, N3N, T (NEDOF, NEDOF), XE (N2), YE (N2),
&ZE (N2)
N1N = ((YE (1) - YE (3)) * (ZE (2) - ZE (3)) - (YE (2) - YE (3)) * (ZE (1) - ZE (3))) / AA
N2N = ((ZE (1) - ZE (3)) * (XE (2) - XE (3)) - (ZE (2) - ZE (3)) * (XE (1) - XE (3))) / AA
N3N = ((XE (1) - XE (3)) * (YE (2) - YE (3)) - (XE (2) - XE (3)) * (YE (1) - YE (3))) / AA
CALL MHDEN (T, NEDOF, NEDOF)
T (1, 1) = (XE (1) - XE (3))
T (1, 2) = (YE (1) - YE (3))
T (1, 7) = (ZE (1) - ZE (3))
T (2, 1) = (XE (2) - XE (3))
T (2, 2) = (YE (2) - YE (3))
T (2, 7) = (ZE (2) - ZE (3))
T (3, 3) = T (1, 1)
T (3, 4) = T (1, 2)
T (3, 8) = T (1, 7)
T (4, 3) = T (2, 1)
T (4, 4) = T (2, 2)
T (4, 8) = T (2, 7)
T (5, 5) = T (1, 1)
T (5, 6) = T (1, 2)
T (5, 9) = T (1, 7)
T (6, 5) = T (2, 1)
T (6, 6) = T (2, 2)
T (6, 9) = T (2, 7)
T (7, 1) = N1N
T (7, 2) = N2N
T (7, 7) = N3N
T (8, 3) = N1N
T (8, 4) = N2N
T (8, 8) = N3N
T (9, 5) = N1N
T (9, 6) = N2N
T (9, 9) = N3N

```

```
T(10,10)=1.00
T(11,11)=1.00
T(12,12)=1.00
RETURN
END
```

```
C
C Εύρεση μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE KE(KEL, KELL, KEL1, KEL2, NEDOF, NEDOF1, NEDOF2, T, TTKL)
DOUBLE PRECISION KEL(NEDOF, NEDOF), KELL(NEDOF, NEDOF),
&KEL1(NEDOF1, NEDOF1), KEL2(NEDOF2, NEDOF2), T(NEDOF, NEDOF),
&TTKL(NEDOF, NEDOF)
CALL MHDEN(KELL, NEDOF, NEDOF)
DO 10 I=1, NEDOF1
DO 20 K=1, NEDOF1
KELL(I, K)=KEL1(I, K)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 I=NEDOF1+1, NEDOF
DO 40 K=NEDOF1+1, NEDOF
KELL(I, K)=KEL2(I-NEDOF1, K-NEDOF1)
40 CONTINUE
30 CONTINUE
C Μετατροπή μητρώου ακαμψίας, από το τοπικό-πλαγιογώνιο
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL PAPP(T, TTKL, KELL, KEL, NEDOF, NEDOF)
RETURN
END
```

```
C
C Συνθήκες συνέχειας των γενικευμένων μετατοπίσεων και ισορροπίας των
C γενικευμένων δυνάμεων, στους κόμβους κάθε στοιχείου της κατασκευής
SUBROUTINE INDXEL(INDEX, KOMB, N1, N2, NEDOF, NEDOF1, NKDOF1, NKDOF2,
&NSDOF1)
DIMENSION INDEX(NEDOF), KOMB(N2)
K=0
DO 10 I=1, N1
DO 20 J=1, NKDOF1
K=K+1
INDEX(K)=(KOMB(I)-1)*NKDOF1+J
20 CONTINUE
10 CONTINUE
K=NEDOF1
DO 30 I=1, N2
DO 40 J=1, NKDOF2
K=K+1
INDEX(K)=NSDOF1+(KOMB(I)-1)*NKDOF2+J
40 CONTINUE
30 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C
C Δημιουργία ολικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE SKFUL(INDEX, KEL, NEDOF, NSDOF, SK)
DOUBLE PRECISION KEL(NEDOF, NEDOF), SK(NSDOF, NSDOF)
DIMENSION INDEX(NEDOF)
DO 10 I=1, NEDOF
II=INDEX(I)
DO 20 J=1, NEDOF
JJ=INDEX(J)
SK(II, JJ)=SK(II, JJ)+KEL(I, J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
```



```

        END
C
C Αντικατάσταση γνωστών μεταβλητών των στοιχείων της κατασκευής
C (υπολογισμός ανοιγμένων μητρώων)
      SUBROUTINE ORIAKS (FQ, IORS, NORS, NSDOF, ORS, SK)
      DOUBLE PRECISION FQ(NSDOF), ORS(NORS), SK(NSDOF, NSDOF)
      DIMENSION IORS(NORS)
      DO 10 I=1, NORS
      DO 20 K=1, NSDOF
      FQ(K)=FQ(K)-SK(K, IORS(I))*ORS(I)
      SK(IORS(I), K)=0.00
      SK(K, IORS(I))=0.00
20 CONTINUE
      SK(IORS(I), IORS(I))=1.00
      FQ(IORS(I))=ORS(I)
10 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C Μέθοδος απαλοιφής προς τα εμπρός
C (μέθοδος Gauss με αλλαγή γραμμών)
C  $A(N, N) * X(N, 1) = B(N, 1)$ 
C   A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C   (ο πίνακας A στην έξοδο είναι τριγωνικός)
C   B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C   N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
      SUBROUTINE GAUSS(B, N, A)
      DOUBLE PRECISION A(N, N), B(N), Z
      DO 10 K=1, N-1
      CALL PIVOT(A, B, K, N)
      DO 20 I=K+1, N
      Z=A(I, K)/A(K, K)
      B(I)=B(I)-Z*B(K)
      DO 30 J=K+1, N
      A(I, J)=A(I, J)-Z*A(K, J)
30 CONTINUE
20 CONTINUE
10 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C Διαδικασία μερικής οδήγησης
C (partial pivoting)
C   A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C   B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C   K δηλώνει την εκάστοτε στήλη
C   N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
      SUBROUTINE PIVOT(A, B, K, N)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A, B)
      DIMENSION A(N, N), B(N)
      AMAX=A(K, K)
      M=K
      DO 10 J=K+1, N
      IF (DABS(A(J, K)).GT.DABS(AMAX)) THEN
      AMAX=A(J, K)
      M=J
      END IF
10 CONTINUE
      IF (M.NE.K) THEN
      DO 20 I=1, N
      ANT1=A(K, I)
      A(K, I)=A(M, I)
      A(M, I)=ANT1
20 CONTINUE

```

```
    ANT2=B(K)
    B(K)=B(M)
    B(M)=ANT2
  END IF
  RETURN
END
```

C

C Αντικατάσταση προς τα πίσω

C (back substitution)

C A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων  
C (ο πίνακας A στην είσοδο είναι τριγωνικός)  
C B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος  
C N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος  
C X διάνυσμα που περιέχει τους αγνώστους του συστήματος

```
  SUBROUTINE BACKS(B,N,A,X)
  DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),S,X(N)
  DO 10 I=N,1,-1
  S=0.00
  DO 20 J=I+1,N
  S=S+A(I,J)*X(J)
20 CONTINUE
  X(I)=(B(I)-S)/A(I,I)
10 CONTINUE
  RETURN
  END
```

C

C Εύρεση πίνακα μεταφοράς κάθε στοιχείου της κατασκευής

```
  SUBROUTINE META(AA,MET,NN)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
  DOUBLE PRECISION AA,MET(NN,NN)
  COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
  MET(1,1)=L12**2/(4.00*AA**2*L2**2)
  MET(1,2)=L2**2/AA**2
  MET(1,3)=-L12/AA**2
  MET(2,1)=1.00/L2**2
  MET(2,2)=0.00
  MET(2,3)=0.00
  MET(3,1)=L12/(2.00*AA*L2**2)
  MET(3,2)=0.00
  MET(3,3)=-1.00/AA
  RETURN
  END
```

C

C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου του δίσκου,

C στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```
  SUBROUTINE DELA10(DELAST,E,NN,V)
  DOUBLE PRECISION DELAST(NN,NN),E,P,V
  P=E/(1-V**2)
  DELAST(1,1)=P
  DELAST(1,2)=V*P
  DELAST(1,3)=0.00
  DELAST(2,1)=DELAST(1,2)
  DELAST(2,2)=DELAST(1,1)
  DELAST(2,3)=0.00
  DELAST(3,1)=0.00
  DELAST(3,2)=0.00
  DELAST(3,3)=2.00*P*(1-V)
  RETURN
  END
```

C

C Υπολογίζει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου της πλάκας

```
  SUBROUTINE WELEM(KOMB,N2,NEDOF2,WEL)
  DOUBLE PRECISION WEL(NEDOF2)
  DIMENSION KOMB(N2)
```

```
IF (KOMB(2).GT.KOMB(3)) THEN
  WEL(4)=-WEL(4)
END IF
IF (KOMB(3).GT.KOMB(1)) THEN
  WEL(5)=-WEL(5)
END IF
IF (KOMB(1).GT.KOMB(2)) THEN
  WEL(6)=-WEL(6)
END IF
RETURN
END
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

ΕΥΡΕΣΗ  
ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ  
ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ  
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ  
ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ  
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

του

ΔΗΜΗΤΡΗ ΜΙΧ. ΔΟΙΝΑΚΗ

AA	διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
AKRIB	επιθυμητή ακρίβεια υπολογισμού, για την διαδικασία των διαδοχικών προσαυξήσεων
B	πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου για εφελκυσμό, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
BTD	πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του πίνακα B με τον D πίνακα
BW	πίνακας παραμορφώσεων κάθε στοιχείου για κάμψη, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
BWTD	πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του πίνακα BW με τον D πίνακα
D	πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων
DEIKT	βοηθητική μεταβλητή
DFQ	βοηθητικό διάνυσμα
DUW	βοηθητικό διάνυσμα
E	μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
EE	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
EE1	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου λόγω εφελκυσμού, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
EE2	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου λόγω κάμψης, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
EEE	διάνυσμα που περιέχει τις παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
EEi	βοηθητικά διανύσματα
Ei	κύριες παραμορφώσεις κάθε στοιχείου
FQ	διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
H	πάχος κάθε στοιχείου
INDEX	διάνυσμα που περιέχει τις θέσεις των μεταβλητών κάθε στοιχείου της κατασκευής, στα ολικά μητρώα
IORS	διάνυσμα που περιέχει τον αύξων αριθμό κάθε οριακής

	συνθήκης
K	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
K1	μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KA	βοηθητικός πίνακας
KB	βοηθητικός πίνακας
KC	βοηθητικός πίνακας
KD	βοηθητικός πίνακας
Ki	κύριες καμπυλότητες κάθε στοιχείου
KK	διάνυσμα που περιέχει τις καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KKK	διάνυσμα που περιέχει τις καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KOMB	διάνυσμα που περιέχει του κόμβους κάθε στοιχείου
KT	παράγωγος του μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
KT1	παράγωγος του μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων
L1	μήκος πλευράς No 1
L2	μήκος πλευράς No 2
L3	μήκος πλευράς No 3
L12	βοηθητικό μήκος
L23	βοηθητικό μήκος
L31	βοηθητικό μήκος
MET	πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου της κατασκευής, από το τοπικό-πλαγιογώνιο στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Mi	κύριες ροπές σε κάθε στοιχείο
MMM	διάνυσμα που περιέχει τις ροπές σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
N1	ο αριθμός των κόμβων σε κάθε στοιχείο που εφελκύετε
N2	ο αριθμός των κόμβων σε κάθε στοιχείο που κάμπτετε
NDIAS	δηλώνει την διάσταση του χώρου
NEDOF	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο της κατασκευής
NEDOF1	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο που εφελκύετε
NEDOF2	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε στοιχείο που κάμπτετε
NEL	ο αριθμός των στοιχείων στον κάνναβο
NK1	ο αριθμός των κόμβων στον κάνναβο που εφελκύνονται
NK2	ο αριθμός των κόμβων στον κάνναβο που κάμπτονται
NKDof1	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο που εφελκύετε
NKDof2	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο που κάμπτετε
NN	ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων σε κάθε στοιχείο
NORS	πλήθος οριακών συνθηκών
NSDOF	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής
NSDOF1	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας των στοιχείων που εφελκύνονται
NSDOF2	ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας των στοιχείων που κάμπτονται
ORS	διάνυσμα που περιέχει τις οριακές συνθήκες, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
Si	κύριες τάσεις σε κάθε στοιχείο
SK	ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SKT	ολικό μητρώο της παραγωγού, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SKUW	διάνυσμα που ισούται με το γινόμενο του

SS πίνακα SK με το UW διάνυσμα  
 διάνυσμα που περιέχει τις τάσεις σε κάθε στοιχείο,  
 στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 SSS διάνυσμα που περιέχει τις τάσεις σε κάθε στοιχείο,  
 στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 SYND πίνακας που περιέχει την συνδεκτικότητα κάθε στοιχείου  
 του καννάβου, με αντιωρολογιακή φορά,  
 κατά αύξοντα αριθμό στοιχείου  
 T πίνακας στροφής κάθε στοιχείου της κατασκευής, που συνδέει  
 το τοπικό-πλαγιογώνιο με το καθολικό-ορθογώνιο  
 σύστημα συντεταγμένων  
 TTK1 πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του  
 πίνακα T με τον K1 πίνακα  
 TTKT1 πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του  
 πίνακα T με τον KT1 πίνακα  
 UEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 στοιχείου του δίσκου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
 σύστημα συντεταγμένων  
 UW διάνυσμα που περιέχει τις γενικευμένες κομβικές  
 μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 UWE διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 στοιχείου της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο  
 σύστημα συντεταγμένων  
 UWEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 στοιχείου της κατασκευής, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
 σύστημα συντεταγμένων  
 V λόγος Poisson του υλικού της κατασκευής  
 WEL διάνυσμα που περιέχει τις κομβικές μετατοπίσεις κάθε  
 στοιχείου της πλάκας, στο τοπικό-πλαγιογώνιο  
 σύστημα συντεταγμένων  
 XE διάνυσμα που περιέχει τις τετμημένες των κόμβων κάθε  
 στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 XYZ πίνακας που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες  
 των κόμβων, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 YE διάνυσμα που περιέχει τις τεταγμένες των κόμβων κάθε  
 στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 ZE διάνυσμα που περιέχει τις κατηγμένες των κόμβων κάθε  
 στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  
 Z2 βοηθητική μεταβλητή

----- K Y P I O Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α -----

```

PROGRAM MGKEL
  PARAMETER (N1=3,N2=6,NDIAS=3,NEL=10,NK1=8,NK2=25,NKDOF1=2,
&NKDOF2=1,NN=3)
  PARAMETER (NEDOF1=NKDOF1*N1,NEDOF2=NKDOF2*N2/2,
&NEDOF=NEDOF1+NEDOF2+NN,NSDOF1=NKDOF1*NK1,NSDOF2=NKDOF2*NK2,
&NSDOF=NSDOF1+NSDOF2)
  DOUBLE PRECISION AA,AKRIB,B(NN,NEDOF1),BGW(NEDOF2,NEDOF2),
&BTD(NEDOF1,NN),BW(NN,NEDOF2),BSTD(NEDOF2,NN),D(NN,NN),DFQ(NSDOF),
&DUW(NSDOF),E,E11,E22,EE(NN),EE1(NN),EE2(NN),EEE(NN),FQ(NSDOF),
&FQ1(NSDOF),H,K(NEDOF,NEDOF),K1(NEDOF,NEDOF),K11,K22,
&KA(NEDOF1,NEDOF1),KB(NEDOF1,NEDOF2),KC(NEDOF2,NEDOF1),
&KD(NEDOF2,NEDOF2),KK(NN),KKK(NN),KT(NEDOF,NEDOF),KT1(NEDOF,NEDOF),
&L1,L2,L3,L12,L23,L31,M11,M22,MET(NN,NN),MMM(NN),ORS(NSDOF),S11,
&S22,SK(NSDOF,NSDOF),SKT(NSDOF,NSDOF),SKUW(NSDOF),SS(NN),SSS(NN),
&T(NEDOF,NEDOF),TTK1(NEDOF,NEDOF),TTKT1(NEDOF,NEDOF),UEL(NEDOF1),
&UW(NSDOF),UWE(NEDOF),UWEL(NEDOF),V,WEL(NEDOF2),XE(N2),
&XYZ(NK2,NDIAS),YE(N2),ZE(N2),Z2
  DIMENSION INDEX(NEDOF),IORS(NSDOF),KOMB(N2)
  INTEGER DEIKT,SYND(NEL,N2)
  COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
  
```

```

OPEN (10,FILE='MGKELYF1.IN')
OPEN (20,FILE='MGKELYF1.OUT')
C -- ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ --
CALL DED(AKRIB,E,FQ,H,IORS,K1,KT1,N2,NDIAS,NEDOF,NEL,NK2,NORS,
&NSDOF,ORS,SK,SKT,SYND,UW,V,XYZ)
C -- ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΟΜΒΙΚΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ --
C -- ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ --
Z2=(H**2)/12.00
10 DO 20 I=1,NEL
C -- Γεωμετρία Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --
C Κόμβοι κάθε στοιχείου
CALL KOMBOI(I,KOMB,N2,NEL,SYND)
C Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL SYNTET(KOMB,N2,NDIAS,NK2,XE,XYZ,YE,ZE)
C Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
CALL MHKH(N2,XE,YE,ZE)
C Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
CALL AEL(AA)
C -- Υπολογισμός Μητρώου Ακαμψίας Κάθε Στοιχείου Της κατασκευής, --
C -- Στο Καθολικό-Ορθογώνιο Σύστημα Συντεταγμένων --
C Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
C κάθε στοιχείου
CALL INDXEL(INDEX,KOMB,N1,N2,NEDOF,NEDOF1,NKDOF1,NKDOF2,NSDOF1)
C Πίνακας στροφής κάθε στοιχείου
CALL TPIN(AA,N2,NEDOF,T,XE,YE,ZE)
C Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
DO 30 J=1,NEDOF
UWE(J)=UW(INDEX(J))
30 CONTINUE
C Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(T,UWE,UWEL,NEDOF,1,NEDOF)
DO 40 J=1,NEDOF1
UEL(J)=UWEL(J)
40 CONTINUE
DO 50 J=1,NEDOF2
WEL(J)=UWEL(NEDOF1+J)
50 CONTINUE
C Πίνακας B
CALL BPAR(B,NEDOF1,NN)
C Πίνακας BW
CALL BPARW(BW,NEDOF2,NN,WEL)
C Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(B,UEL,EE1,NEDOF1,1,NN)
CALL POLPP(BW,WEL,EE2,NEDOF2,1,NN)
DO 60 J=1,NN
EE(J)=EE1(J)+EE2(J)/2.00
60 CONTINUE
C Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL DELAP(AA,D,E,H,NN,V)
C Τάσεις σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(D,EE,SS,NN,1,NN)
SS(3)=SS(3)/2.00
C Πίνακας BGW
CALL BPGW(BGW,SS,NEDOF2,NN)
C Μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου και η παράγωγος αυτού,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL KKT(AA,B,BGW,BTD,BW,BWTD,D,K,K1,KA,KB,KC,KD,KOMB,KT,KT1,N2,
&NEDOF,NEDOF1,NEDOF2,NN,T,TTK1,TTKT1,Z2)

```



```

Ολικά μητρώα στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL SKFUL(INDEX,K,NEDOF,NSDOF,SK)
CALL SKFUL(INDEX,KT,NEDOF,NSDOF,SKT)
20 CONTINUE
-- Επίλυση Γραμμικού Προβλήματος --
IF (DEIKT.NE.2) THEN
  Γνωστές μεταβλητές των στοιχείων της κατασκευής
  CALL ORIAKS(FQ,IORS,NORS,NSDOF,ORS,SK)
  Τριγωνοποίηση ολικού μητρώου ακαμψίας
  CALL GAUSS(FQ,NSDOF,SK)
  Γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο
  σύστημα συντεταγμένων
  CALL BACKS(FQ,NSDOF,SK,UW)
END IF
-- Επίλυση Μη Γραμμικού Προβλήματος --
Διαδικασία διαδοχικών προσαυξήσεων των φορτίων
CALL NEWRAP(AKRIB,DEIKT,DFQ,DUW,FQ,NSDOF,SK,SKT,SKUW,UW)
GO TO (70,10),DEIKT
70 WRITE (20,80) (UW(I),I=1,NSDOF)
80 FORMAT (1X,F16.7)
DO 90 I=1,NEL
-- Γεωμετρία Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --
Κόμβοι κάθε στοιχείου
CALL KOMBOI(I,KOMB,N2,NEL,SYND)
Καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου,
στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
CALL SYNTET(KOMB,N2,NDIAS,NK2,XE,XYZ,YE,ZE)
Μήκη πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου
CALL MHKH(N2,XE,YE,ZE)
Διπλάσιο εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
CALL AEL(AA)
Συνθήκες συνέχειας και ισορροπίας των μεταβλητών στους κόμβους
κάθε στοιχείου
CALL INDXEL(INDEX,KOMB,N1,N2,NEDOF,NEDOF1,NKDOF1,NKDOF2,NSDOF1)
Πίνακας στροφής κάθε στοιχείου
CALL TPIN(AA,N2,NEDOF,T,XE,YE,ZE)
Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο καθολικό-ορθογώνιο
σύστημα συντεταγμένων
DO 100 J=1,NEDOF
UWE(J)=UW(INDEX(J))
100 CONTINUE
Κομβικές μετατοπίσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(T,UWE,UWEL,NEDOF,1,NEDOF)
DO 110 J=1,NEDOF1
UEL(J)=UWEL(J)
110 CONTINUE
DO 120 J=1,NEDOF2
WEL(J)=UWEL(NEDOF1+J)
120 CONTINUE
Πίνακας B
CALL BPAR(B,NEDOF1,NN)
Πίνακας BW
CALL BPARW(BW,NEDOF2,NN,WEL)
Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
σύστημα συντεταγμένων
CALL POLPP(B,UEL,EE1,NEDOF1,1,NN)
CALL POLPP(BW,WEL,EE2,NEDOF2,1,NN)
DO 130 J=1,NN
EE(J)=EE1(J)+EE2(J)/2.00
130 CONTINUE
Πίνακας μεταφοράς κάθε στοιχείου
CALL META(AA,MET,NN)
Πίνακας ελαστικότητας κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο

```

```

C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL DELAO(D,E,H,NN,V)
C      Παραμορφώσεις κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(MET,EE,EEE,NN,1,NN)
C      Τάσεις σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(D,EEE,SSS,NN,1,NN)
      SSS(3)=SSS(3)/2.00
C      Καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      DO 140 J=1,NN
      KK(J)=UWEL(NEDOF1+NEDOF2+J)
140 CONTINUE
      CALL KKE(KOMB,N2,NN,KK)
C      Καμπυλότητες κάθε στοιχείου, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(MET,KK,KKK,NN,1,NN)
C      Ροπές σε κάθε στοιχείο, στο τοπικό-ορθογώνιο
C      σύστημα συντεταγμένων
      CALL POLPP(D,KKK,MMM,NN,1,NN)
      CALL POLAP(MMM,Z2,1,NN)
      MMM(3)=MMM(3)/2.00
C  -- Αγνώστοι Παράμετροι Κάθε Στοιχείου Της Κατασκευής --
C      Κύριες παραμορφώσεις κάθε στοιχείου
      E11=(EEE(1)+EEE(2))/2.00+DSQRT(((EEE(1)-EEE(2))/2.00)**2+
&EEE(3)**2)
      E22=(EEE(1)+EEE(2))/2.00-DSQRT(((EEE(1)-EEE(2))/2.00)**2+
&EEE(3)**2)
C      Κύριες τάσεις σε κάθε στοιχείο
      S11=(SSS(1)+SSS(2))/2.00+DSQRT(((SSS(1)-SSS(2))/2.00)**2+
&SSS(3)**2)
      S22=(SSS(1)+SSS(2))/2.00-DSQRT(((SSS(1)-SSS(2))/2.00)**2+
&SSS(3)**2)
C      Κύριες καμπυλότητες κάθε στοιχείου
      K11=(KKK(1)+KKK(2))/2.00+DSQRT(((KKK(1)-KKK(2))/2.00)**2+
&KKK(3)**2)
      K22=(KKK(1)+KKK(2))/2.00-DSQRT(((KKK(1)-KKK(2))/2.00)**2+
&KKK(3)**2)
C      Κύριες ροπές σε κάθε στοιχείο
      M11=(MMM(1)+MMM(2))/2.00+DSQRT(((MMM(1)-MMM(2))/2.00)**2+
&MMM(3)**2)
      M22=(MMM(1)+MMM(2))/2.00-DSQRT(((MMM(1)-MMM(2))/2.00)**2+
&MMM(3)**2)
C  -- ΕΚΤΥΠΩΣΗ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ --
      WRITE (20, '(///, 'Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ο', I5)') I
      WRITE (20, ' (''-----'')')
      WRITE (20, '(//, 'Κύριες Παραμορφώσεις ε1 , ε2'',/)' )
      WRITE (20,150) E11,E22
      WRITE (20, '(//, 'Κύριες Τάσεις σ1 , σ2'',/)' )
      WRITE (20,150) S11,S22
      WRITE (20, '(//, 'Κύριες Καμπυλότητες K1 , K2'',/)' )
      WRITE (20,150) K11,K22
      WRITE (20, '(//, 'Κύριες Ροπές M1 , M2'',/)' )
      WRITE (20,150) M11,M22
150 FORMAT (1X,F19.10,1X,F19.10)
90 CONTINUE
      WRITE (20, '(////,3X, ''- mgkelyf.out -'')')
      CLOSE (20)
      CLOSE (10)
      END

```

C  
C  
C

```

C ----- Υ Π Ο Ρ Ο Υ Τ Ι Ν Ε Σ   Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α Τ Ο Σ -----
C
C
C Αρχικά δεδομένα για την συγκεκριμένη κατασκευή
  SUBROUTINE DED (AKRIB, E, FQ, H, IORS, K1, KT1, N2, NDIAS, NEDOF, NEL, NK2,
&NORS, NSDOF, ORS, SK, SKT, SYND, UW, V, XYZ)
  DOUBLE PRECISION AKRIB, E, FQ (NSDOF), H, K1 (NEDOF, NEDOF),
&KT1 (NEDOF, NEDOF), ORS (NSDOF), SK (NSDOF, NSDOF), SKT (NSDOF, NSDOF),
&UW (NSDOF), V, XYZ (NK2, NDIAS)
  DIMENSION IORS (NSDOF)
  INTEGER SYND (NEL, N2)
C Διαβάζει το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της κατασκευής
  READ (10, *) E
C Διαβάζει τον συντελεστή Poisson του υλικού της κατασκευής
C (για τέλειο ισότροπο ελαστικό υλικό  $\nu = 0.25$  αλλά
C συνήθως για τα μέταλλα  $\nu = 0.33$  - γενικά  $0 < \nu < 0.50$ )
  READ (10, *) V
C Διαβάζει το πάχος κάθε στοιχείου
  READ (10, *) H
C Διαβάζει την συνδετικότητα κάθε στοιχείου του καννάβου,
C με αντιωρολογιακή φορά
  READ (10, *) ((SYND (I, J), J=1, N2), I=1, NEL)
C Διαβάζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
  READ (10, *) ((XYZ (I, J), J=1, NDIAS), I=1, NK2)
C Διαβάζει το πλήθος των οριακών συνθηκών
  READ (10, *) NORS
C Διαβάζει τις οριακές συνθήκες, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
C (τιμές κομβικών μετατοπίσεων-περιορισμοί στα όρια)
  READ (10, *) (IORS (I), ORS (I), I=1, NORS)
C Διαβάζει τις γενικευμένες κομβικές δυνάμεις,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
  READ (10, *) (FQ (I), I=1, NSDOF)
C Διαβάζει την επιθυμητή ακρίβεια υπολογισμού, για την διαδικασία
C των διαδοχικών προσαιξήσεων
  READ (10, *) AKRIB
C Μηδενίζει τα K1, KT1, SK, SKT, UW
  CALL MHDEN (K1, NEDOF, NEDOF)
  CALL MHDEN (KT1, NEDOF, NEDOF)
  CALL MHDEN (SK, NSDOF, NSDOF)
  CALL MHDEN (SKT, NSDOF, NSDOF)
  CALL MHDEN (UW, 1, NSDOF)
  RETURN
  END
C
C Μηδενισμός πίνακα
C A πίνακας διαστάσεων (N, L)
  SUBROUTINE MHDEN (A, L, N)
  DOUBLE PRECISION A (N, L)
  DO 10 I=1, N
  DO 20 J=1, L
  A (I, J)=0.00
  20 CONTINUE
  10 CONTINUE
  RETURN
  END
C
C Εντοπίζει τους κόμβους κάθε στοιχείου της κατασκευής
C I αύξων αριθμός στοιχείου
  SUBROUTINE KOMBOI (I, KOMB, N2, NEL, SYND)
  DIMENSION KOMB (N2)
  INTEGER SYND (NEL, N2)
  DO 10 K=1, N2

```

```

      KOMB(K)=SYND(I,K)
10  CONTINUE
      RETURN
      END

```

Εντοπίζει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων κάθε στοιχείου της κατασκευής, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

SUBROUTINE SYNTET(KOMB,N2,NDIAS,NK2,XE,XYZ,YE,ZE)
DOUBLE PRECISION XE(N2),XYZ(NK2,NDIAS),YE(N2),ZE(N2)
DIMENSION KOMB(N2)
DO 10 I=1,N2
XE(I)=XYZ(KOMB(I),1)
YE(I)=XYZ(KOMB(I),2)
ZE(I)=XYZ(KOMB(I),3)
10  CONTINUE
      RETURN
      END

```

Υπολογίζει τα μήκη των πλευρών κάθε τριγωνικού στοιχείου της κατασκευής

```

SUBROUTINE MHKH(N2,XE,YE,ZE)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION XE(N2),YE(N2),ZE(N2)
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
L1=DSQRT((XE(2)-XE(3))**2+(YE(2)-YE(3))**2+(ZE(2)-ZE(3))**2)
L2=DSQRT((XE(3)-XE(1))**2+(YE(3)-YE(1))**2+(ZE(3)-ZE(1))**2)
L3=DSQRT((XE(1)-XE(2))**2+(YE(1)-YE(2))**2+(ZE(1)-ZE(2))**2)
L12=L1**2+L2**2-L3**2
L23=L2**2+L3**2-L1**2
L31=L3**2+L1**2-L2**2
RETURN
END

```

Υπολογισμός διπλάσιου εμβαδού κάθε τριγωνικού στοιχείου της κατασκευής

```

SUBROUTINE AEL(AA)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
AA=DSQRT(L12*L23+L23*L31+L31*L12)/2.00
RETURN
END

```

Συνθήκες συνέχειας των γενικευμένων μετατοπίσεων και ισορροπίας των γενικευμένων δυνάμεων, στους κόμβους κάθε στοιχείου της κατασκευής

```

SUBROUTINE INDXEL(INDEX,KOMB,N1,N2,NEDOF,NEDOF1,NKDOF1,NKDOF2,
&NSDOF1)
DIMENSION INDEX(NEDOF),KOMB(N2)
K=0
DO 10 I=1,N1
DO 20 J=1,NKDOF1
K=K+1
INDEX(K)=(KOMB(I)-1)*NKDOF1+J
20  CONTINUE
10  CONTINUE
K=NEDOF1
DO 30 I=1,N2
DO 40 J=1,NKDOF2
K=K+1
INDEX(K)=NSDOF1+(KOMB(I)-1)*NKDOF2+J
40  CONTINUE
30  CONTINUE
      RETURN
      END

```

C Εύρεση πίνακα στροφής κάθε στοιχείου της κατασκευής

```
SUBROUTINE TPIN(AA,N2,NEDOF,T,XE,YE,ZE)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,N1N,N2N,N3N,T(NEDOF,NEDOF),XE(N2),YE(N2),
&ZE(N2)
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
N1N=((YE(1)-YE(3))*(ZE(2)-ZE(3))-(YE(2)-YE(3))*(ZE(1)-ZE(3)))/AA
N2N=((ZE(1)-ZE(3))*(XE(2)-XE(3))-(ZE(2)-ZE(3))*(XE(1)-XE(3)))/AA
N3N=((XE(1)-XE(3))*(YE(2)-YE(3))-(XE(2)-XE(3))*(YE(1)-YE(3)))/AA
CALL MHDEN(T,NEDOF,NEDOF)
T(1,1)=(XE(1)-XE(3))
T(1,2)=(YE(1)-YE(3))
T(1,7)=(ZE(1)-ZE(3))
T(2,1)=(XE(2)-XE(3))
T(2,2)=(YE(2)-YE(3))
T(2,7)=(ZE(2)-ZE(3))
T(3,3)=T(1,1)
T(3,4)=T(1,2)
T(3,8)=T(1,7)
T(4,3)=T(2,1)
T(4,4)=T(2,2)
T(4,8)=T(2,7)
T(5,5)=T(1,1)
T(5,6)=T(1,2)
T(5,9)=T(1,7)
T(6,5)=T(2,1)
T(6,6)=T(2,2)
T(6,9)=T(2,7)
T(7,1)=N1N
T(7,2)=N2N
T(7,7)=N3N
T(8,3)=N1N
T(8,4)=N2N
T(8,8)=N3N
T(9,5)=N1N
T(9,6)=N2N
T(9,9)=N3N
T(10,7)=-L23/L3**2
T(10,8)=(L12*L3**2+L23*L1**2)/(L1*L3)**2
T(10,9)=-L12/L1**2
T(10,10)=2.00*AA/L1
T(10,11)=0.00
T(10,12)=2.00*AA/L3
T(11,7)=(L12*L3**2+L31*L2**2)/(L2*L3)**2
T(11,8)=-L31/L3**2
T(11,9)=-L12/L2**2
T(11,10)=0.00
T(11,11)=2.00*AA/L2
T(11,12)=T(10,12)
T(12,7)=L31/L3**2
T(12,8)=L23/L3**2
T(12,9)=-2.00
T(12,10)=0.00
T(12,11)=0.00
T(12,12)=T(10,12)
RETURN
END
```

C

C Εύρεση πίνακα B

```
SUBROUTINE BPAR(B,NEDOF1,NN)
DOUBLE PRECISION B(NN,NEDOF1)
B(1,1)=1.00
B(1,2)=0.00
B(1,3)=0.00
```

```

B(1,4)=0.00
B(1,5)=-1.00
B(1,6)=0.00
B(2,1)=0.00
B(2,2)=0.00
B(2,3)=0.00
B(2,4)=1.00
B(2,5)=0.00
B(2,6)=-1.00
B(3,1)=0.00
B(3,2)=0.50
B(3,3)=0.50
B(3,4)=0.00
B(3,5)=-0.50
B(3,6)=-0.50
RETURN
END

```

C

C Εύρεση πίνακα BW

```

SUBROUTINE BPARW(BW,NEDOF2,NN,WEL)
DOUBLE PRECISION BW(NN,NEDOF2),WEL(NEDOF2)
BW(1,1)=WEL(1)-WEL(3)
BW(1,2)=0.00
BW(1,3)=-BW(1,1)
BW(2,1)=0.00
BW(2,2)=WEL(2)-WEL(3)
BW(2,3)=-BW(2,2)
BW(3,1)=BW(2,2)/2.00
BW(3,2)=BW(1,1)/2.00
BW(3,3)=-BW(3,1)-BW(3,2)
RETURN
END

```

C

C Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα

C  $C(N,M) = A(N,L) * B(L,M)$

C A πίνακας διαστάσεων (N,L)

C B πίνακας διαστάσεων (L,M)

C C τελικός πίνακας διαστάσεων (N,M)

```

SUBROUTINE POLPP(A,B,C,L,M,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),B(L,M),C(N,M),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,M
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+A(I,K)*B(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C

C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου της κατασκευής,  
C στο τοπικό-πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

SUBROUTINE DELAP(AA,D,E,H,NN,V)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
DOUBLE PRECISION AA,D(NN,NN),E,H,P,V
COMMON L1,L2,L3,L12,L23,L31
P=E*H/((1-V**2)*AA**4)
D(1,1)=(L1**4)*P
D(1,2)=(V*(L1*L2)**2+((1-V)*L12**2)/4.00)*P
D(1,3)=(-L12*L1**2)*P
D(2,1)=D(1,2)
D(2,2)=(L2**4)*P

```

```

D(2,3)=(-L12*L2**2)*P
D(3,1)=D(1,3)
D(3,2)=D(2,3)
D(3,3)=((1+V)*L12**2)/2.00+2.00*(1-V)*(L1*L2)**2)*P
RETURN
END

```

Εύρεση πίνακα BGW

```

SUBROUTINE BPGW(BGW,SS,NEDOF2,NN)
DOUBLE PRECISION BGW(NEDOF2,NEDOF2),SS(NN)
BGW(1,1)=SS(1)
BGW(1,2)=SS(3)
BGW(1,3)=- (SS(1)+SS(3))
BGW(2,1)=BGW(1,2)
BGW(2,2)=SS(2)
BGW(2,3)=- (SS(2)+SS(3))
BGW(3,1)=BGW(1,3)
BGW(3,2)=BGW(2,3)
BGW(3,3)=-BGW(3,1)-BGW(3,2)
RETURN
END

```

Εύρεση μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου της κατασκευής και της παραγώγου αυτού, στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων

```

A εμβαδόν κάθε τριγωνικού στοιχείου
SUBROUTINE KKT(AA,B,BGW,BTD,BW,BWTD,D,K,K1,KA,KB,KC,KD,KOMB,KT,
&KT1,N2,NEDOF,NEDOF1,NEDOF2,NN,T,TTK1,TTKT1,Z2)
DOUBLE PRECISION A,AA,B(NN,NEDOF1),BGW(NEDOF2,NEDOF2),
&BTD(NEDOF1,NN),BW(NN,NEDOF2),BWTD(NEDOF2,NN),D(NN,NN),
&K(NEDOF,NEDOF),K1(NEDOF,NEDOF),KA(NEDOF1,NEDOF1),
&KB(NEDOF1,NEDOF2),KC(NEDOF2,NEDOF1),KD(NEDOF2,NEDOF2),
&KT(NEDOF,NEDOF),KT1(NEDOF,NEDOF),T(NEDOF,NEDOF),TTK1(NEDOF,NEDOF),
&TTKT1(NEDOF,NEDOF),Z2
DIMENSION KOMB(N2)
Πίνακας KA
CALL PAPP(B,BTD,D,KA,NN,NEDOF1)
Πίνακας KB
CALL POLPP(BTD,BW,KB,NN,NEDOF2,NEDOF1)
Πίνακας KC
CALL ANAS(KB,KC,NEDOF2,NEDOF1)
Πίνακας KD
CALL PAPP(BW,BWTD,D,KD,NN,NEDOF2)
Μητρώο ακαμψίας και η παράγωγος αυτού, στο τοπικό-πλαγιογώνιο
σύστημα συντεταγμένων
DO 10 I=1,NEDOF1
DO 20 J=1,NEDOF1
K1(I,J)=KA(I,J)
KT1(I,J)=KA(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 30 I=1,NEDOF1
DO 40 J=NEDOF1+1,NEDOF1+NEDOF2
KT1(I,J)=KB(I,J-NEDOF1)
K1(I,J)=KT1(I,J)/2.00
K1(J,I)=KC(J-NEDOF1,I)
KT1(J,I)=KT1(I,J)
40 CONTINUE
30 CONTINUE
DO 50 I=NEDOF1+1,NEDOF1+NEDOF2
DO 60 J=NEDOF1+1,NEDOF1+NEDOF2
K1(I,J)=KD(I-NEDOF1,J-NEDOF1)/2.00
KT1(I,J)=KD(I-NEDOF1,J-NEDOF1)+BGW(I-NEDOF1,J-NEDOF1)
60 CONTINUE
50 CONTINUE

```

```

DO 70 I=NEDOF1+NEDOF2+1,NEDOF
DO 80 J=NEDOF1+NEDOF2+1,NEDOF
K1(I,J)=Z2*D(I-NEDOF1-NEDOF2,J-NEDOF1-NEDOF2)
KT1(I,J)=K1(I,J)
80 CONTINUE
70 CONTINUE
A=AA/2.00
CALL POLAP(K1,A,NEDOF,NEDOF)
CALL POLAP(KT1,A,NEDOF,NEDOF)
C Μετατροπή μητρώου ακαμψίας και της παραγώγου αυτού,
C από το τοπικό-πλαγιογώνιο στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
CALL PAPP(T,TTK1,K1,K,NEDOF,NEDOF)
CALL PAPP(T,TTKT1,KT1,KT,NEDOF,NEDOF)
IF (KOMB(2).GT.KOMB(3)) THEN
DO 90 L=1,NEDOF
K(10,L)=-K(10,L)
K(L,10)=-K(L,10)
KT(10,L)=-KT(10,L)
KT(L,10)=-KT(L,10)
90 CONTINUE
END IF
IF (KOMB(3).GT.KOMB(1)) THEN
DO 100 L=1,NEDOF
K(11,L)=-K(11,L)
K(L,11)=-K(L,11)
KT(11,L)=-KT(11,L)
KT(L,11)=-KT(L,11)
100 CONTINUE
END IF
IF (KOMB(1).GT.KOMB(2)) THEN
DO 110 L=1,NEDOF
K(12,L)=-K(12,L)
K(L,12)=-K(L,12)
KT(12,L)=-KT(12,L)
KT(L,12)=-KT(L,12)
110 CONTINUE
END IF
RETURN
END

C
C Πολλαπλασιασμός ανάστροφου ενός πίνακα με άλλο πίνακα
C και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζετε με τον πρώτο
C  $F(N,N) = DT(N,L) * E(L,L) * D(L,N) = C(N,L) * D(L,N)$ 
C (χωρίς να υπάρχει ο πίνακας DT, γίνετε ο πολλαπλασιασμός
C αναστρέφοντας κατευθείαν τον πίνακα D)
C C πίνακας που ισούται με το γινόμενο του ανάστροφου του
C πίνακα D με τον E πίνακα, διαστάσεων (N,L)
C D πίνακας διαστάσεων (L,N)
C DT ανάστροφος πίνακας του D, διαστάσεων (N,L)
C E πίνακας διαστάσεων (L,L)
C F τελικός πίνακας διαστάσεων (N,N)
SUBROUTINE PAPP(D,C,E,F,L,N)
DOUBLE PRECISION C(N,L),D(L,N),E(L,L),F(N,N),STC
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
STC=0.00
DO 30 K=1,L
STC=STC+D(K,I)*E(K,J)
30 CONTINUE
C(I,J)=STC
20 CONTINUE
10 CONTINUE
CALL POLPP(C,D,F,L,N,N)

```



```

        RETURN
        END
C
C Ανάστροφος πίνακας
C   A πίνακας διαστάσεων (N,L)
C   AT ανάστροφος πίνακας του A, διαστάσεων (L,N)
SUBROUTINE ANAS(A,AT,L,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),AT(L,N)
DO 10 I=1,L
DO 20 J=1,N
AT(I,J)=A(J,I)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END
C
C Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα
C  $A(N,L) = X * A(N,L)$ 
C   A πίνακας διαστάσεων (N,L)
C   X αριθμός
SUBROUTINE POLAP(A,X,L,N)
DOUBLE PRECISION A(N,L),X
DO 10 I=1,N
DO 20 J=1,L
A(I,J)=X*A(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END
C
C Δημιουργία ολικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής,
C στο καθολικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
SUBROUTINE SKFUL(INDEX,K,NEDOF,NSDOF,SK)
DOUBLE PRECISION K(NEDOF,NEDOF),SK(NSDOF,NSDOF)
DIMENSION INDEX(NEDOF)
DO 10 I=1,NEDOF
II=INDEX(I)
DO 20 J=1,NEDOF
JJ=INDEX(J)
SK(II,JJ)=SK(II,JJ)+K(I,J)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END
C
C Αντικατάσταση γνωστών μεταβλητών των στοιχείων της κατασκευής
C (υπολογισμός ανοιγμένων μητρώων)
SUBROUTINE ORIAKS(FQ,IORS,NORS,NSDOF,ORS,SK)
DOUBLE PRECISION FQ(NSDOF),ORS(NORS),SK(NSDOF,NSDOF)
DIMENSION IORS(NORS)
DO 10 I=1,NORS
DO 20 K=1,NSDOF
FQ(K)=FQ(K)-SK(K,IORS(I))*ORS(I)
SK(IORS(I),K)=0.00
SK(K,IORS(I))=0.00
20 CONTINUE
SK(IORS(I),IORS(I))=1.00
FQ(IORS(I))=ORS(I)
10 CONTINUE
RETURN
END
C
C Μέθοδος απαλοιφής προς τα εμπρός
C (μέθοδος Gauss με αλλαγή γραμμών)

```

```

C A(N,N) * X(N,1) = B(N,1)
C   A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C   (ο πίνακας A στην έξοδο είναι τριγωνικός)
C   B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C   N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
SUBROUTINE GAUSS(B,N,A)
DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),Z
DO 10 K=1,N-1
CALL PIVOT(A,B,K,N)
DO 20 I=K+1,N
Z=A(I,K)/A(K,K)
B(I)=B(I)-Z*B(K)
DO 30 J=K+1,N
A(I,J)=A(I,J)-Z*A(K,J)
30 CONTINUE
20 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C Διαδικασία μερικής οδήγησης
C (partial pivoting)
C   A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C   B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C   K δηλώνει την εκάστοτε στήλη
C   N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
SUBROUTINE PIVOT(A,B,K,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A,B)
DIMENSION A(N,N),B(N)
AMAX=A(K,K)
M=K
DO 10 J=K+1,N
IF (DABS(A(J,K)).GT.DABS(AMAX)) THEN
AMAX=A(J,K)
M=J
END IF
10 CONTINUE
IF (M.NE.K) THEN
DO 20 I=1,N
ANT1=A(K,I)
A(K,I)=A(M,I)
A(M,I)=ANT1
20 CONTINUE
ANT2=B(K)
B(K)=B(M)
B(M)=ANT2
END IF
RETURN
END

```

```

C
C Αντικατάσταση προς τα πίσω
C (back substitution)
C   A πίνακας που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων
C   (ο πίνακας A στην είσοδο είναι τριγωνικός)
C   B διάνυσμα που περιέχει τους σταθερούς όρους του συστήματος
C   N ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος
C   X διάνυσμα που περιέχει τους αγνώστους του συστήματος
SUBROUTINE BACKS(B,N,A,X)
DOUBLE PRECISION A(N,N),B(N),S,X(N)
DO 10 I=N,1,-1
S=0.00
DO 20 J=I+1,N
S=S+A(I,J)*X(J)
20 CONTINUE

```

```

      X(I) = (B(I) - S) / A(I, I)
10  CONTINUE
      RETURN
      END
C
C Μέθοδος Newton-Raphson
      SUBROUTINE NEWRAP (AKRIB, DEIKT, DFQ, DUW, FQ, NSDOF, SK, SKT, SKUW, UW)
      DOUBLE PRECISION AKRIB, DFQ (NSDOF), DUW (NSDOF), FQ (NSDOF), MAXD,
&SK (NSDOF, NSDOF), SKT (NSDOF, NSDOF), SKUW (NSDOF), UW (NSDOF)
      INTEGER DEIKT
      pause 'EISODOS'
C Διάνυσμα SKUW
10  CALL POLPP (SK, UW, SKUW, NSDOF, 1, NSDOF)
C Διάνυσμα DFQ
      DO 20 I=1, NSDOF
      DFQ(I) = -SKUW(I) + FQ(I)
20  CONTINUE
C Τριγωνοποίηση πίνακα SKT
      CALL GAUSS (DFQ, NSDOF, SKT)
C Διάνυσμα DUW
      CALL BACKS (DFQ, NSDOF, SKT, DUW)
      MAXD=0.00
C Γενικευμένες κομβικές μετατοπίσεις, στο καθολικό-ορθογώνιο
C σύστημα συντεταγμένων
      DO 30 I=1, NSDOF
      UW(I) = UW(I) + DUW(I)
      IF (DABS (DUW(I)) .GT. MAXD) THEN
      MAXD=DUW(I)
      END IF
30  CONTINUE
C Έλεγχος ακρίβειας υπολογισμού
      IF (MAXD.GT.AKRIB) THEN
      DEIKT=2
      ELSE
      DEIKT=1
      END IF
      RETURN
      END
C
C Εύρεση πίνακα μεταφοράς κάθε στοιχείου της κατασκευής
      SUBROUTINE META (AA, MET, NN)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (L)
      DOUBLE PRECISION AA, MET (NN, NN)
      COMMON L1, L2, L3, L12, L23, L31
      MET(1, 1) = L12**2 / (4.00 * AA**2 * L2**2)
      MET(1, 2) = L2**2 / AA**2
      MET(1, 3) = -L12 / AA**2
      MET(2, 1) = 1.00 / L2**2
      MET(2, 2) = 0.00
      MET(2, 3) = 0.00
      MET(3, 1) = L12 / (2.00 * AA * L2**2)
      MET(3, 2) = 0.00
      MET(3, 3) = -1.00 / AA
      RETURN
      END
C
C Εύρεση πίνακα ελαστικότητας κάθε στοιχείου της κατασκευής,
C στο τοπικό-ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων
      SUBROUTINE DELAO (D, E, H, NN, V)
      DOUBLE PRECISION D (NN, NN), E, H, P, V
      P = E * H / (1 - V**2)
      D(1, 1) = P
      D(1, 2) = V * P
      D(1, 3) = 0.00

```

```
D(2,1)=D(1,2)
D(2,2)=D(1,1)
D(2,3)=0.00
D(3,1)=0.00
D(3,2)=0.00
D(3,3)=2.00*P*(1-V)
RETURN
END
```

C

```
SUBROUTINE KKE(KOMB,N2,NN, KK)
DOUBLE PRECISION KK(NN)
DIMENSION KOMB(N2)
IF (KOMB(2).GT.KOMB(3)) THEN
  KK(1)=-KK(1)
END IF
IF (KOMB(3).GT.KOMB(1)) THEN
  KK(2)=-KK(2)
END IF
IF (KOMB(1).GT.KOMB(2)) THEN
  KK(3)=-KK(3)
END IF
RETURN
END
```

