



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Σχολή Τεχνολογίας

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

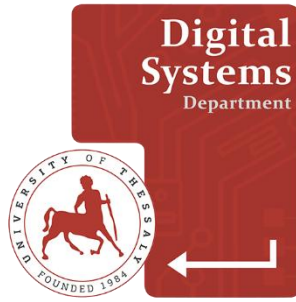
**Μεθοδολογίες Διαχείρισης
Συγκοινωνιακών Κοινωνικών
Δικτύων**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κοτρώτσιου Μαρία (ΑΜ: 3121016)

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Κόκκινος, *Επικουρος Καθηγητής*

ΛΑΡΙΣΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2025



UNIVERSITY OF THESSALY

School of Technology

Digital Systems Department

Management Methodologies of Transport Social Networks

BACHELOR THESIS

Kotrotsiou Maria (RN: 3121016)

Supervisor: Konstantinos Kokkinos, *Assistant Professor*

LARISSA, SEPTEMBER 2025

Υπεύθυνη Δήλωση περί Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας και Πνευματικών Δικαιωμάτων

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα πτυχιακή εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον, και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Η Δηλούσα

(Υπογραφή)

Κοτρώτσιου Μαρία

30/ 09 / 2025

Εγκρίνεται από την Επιτροπή Εξέτασης:

Επιβλέπων	Δρ. Κωνσταντίνος Κόκκινος Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μέλος	Δρ. Κωνσταντίνος Χαϊκάλης Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μέλος	Δρ. Όμηρος Ιατρέλλης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ημερομηνία έγκρισης: 06-10-2025

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εξετάζει τη δομή και τη λειτουργία του συγκοινωνιακού δικτύου του Μετρό της Αθήνας, αξιοποιώντας τη θεωρία γράφων και τα εργαλεία ανάλυσης κοινωνικών δικτύων. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων και τα σημαντικότερα μέτρα κεντρικότητας, τα οποία χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση της σχετικής σημασίας των κόμβων ενός δικτύου. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η μοντελοποίηση του δικτύου του μετρό με τη χρήση της γλώσσας R και της βιβλιοθήκης `igraph`, ενώ εφαρμόζονται μετρικές όπως η Βαθμική Κεντρικότητα, η Ιδιοκεντρικότητα, η Κεντρικότητα Εγγύτητας, η Διαμεσότητα, η Katz και η PageRank Centrality, καθώς και η Κεντρικότητα Πληροφορίας. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν τους πιο κομβικούς σταθμούς, όπως το Σύνταγμα, η Ομόνοια και το Μοναστηράκι, οι οποίοι διαδραματίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη συνδεσιμότητα και τη ροή του δικτύου. Επιπλέον, ελέγχθηκαν οι ιδιότητες Small-World και Rich-Club, όπου διαπιστώθηκε ότι το δίκτυο δεν εμφανίζει ισχυρή παρουσία αυτών των χαρακτηριστικών. Συνολικά, η εργασία καταδεικνύει τη χρησιμότητα της θεωρίας γράφων στην κατανόηση και αξιολόγηση συγκοινωνιακών συστημάτων, παρέχοντας παράλληλα χρήσιμες ενδείξεις για τον στρατηγικό σχεδιασμό και τη βελτίωση της αποδοτικότητας των αστικών μεταφορών.

Λέξεις - Κλειδιά

Θεωρία Γράφων, Κοινωνικά Δίκτυα, Μέτρα Κεντρικότητας, Ανάλυση Δικτύων,
Μετρό Αθήνας, Small-World, Rich-Club

Abstract

This thesis examines the structure and functionality of the Athens Metro transportation network by applying graph theory and social network analysis tools. Initially, the fundamental concepts of graph theory and the most important centrality measures are presented, which are employed to assess the relative significance of network nodes. Subsequently, the metro network is modeled using the R programming language and the igraph library, while metrics such as Degree Centrality, Eigenvector Centrality, Closeness Centrality, Betweenness Centrality, Katz Centrality, PageRank Centrality, and Information Centrality are applied. The results highlighted the most critical stations, such as Syntagma, Omonia, and Monastiraki, which play a pivotal role in the network's connectivity and flow. Furthermore, the Small-World and Rich-Club properties were tested, with findings showing that the network does not strongly exhibit these characteristics. Overall, the thesis demonstrates the usefulness of graph theory in understanding and evaluating transportation systems, while also providing valuable insights for strategic planning and improving the efficiency of urban mobility.

Key-words

Graph Theory, Social Networks, Centrality Measures, Network Analysis, Athens Metro, Small-World, Rich-Club

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Κόκκινο, τόσο για την καθοδήγηση και τη στήριξή του, όσο και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου την παρούσα πτυχιακή εργασία. Ευχαριστώ επίσης την οικογένειά μου για την υποστήριξή της καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και τους φίλους και συμφοιτητές μου οι οποίοι ήταν δίπλα μου σε κάθε βήμα των σπουδών μου όλα αυτά τα χρόνια, βοηθώντας με ο καθένας με τον δικό του τρόπο σε ότι έχω πετύχει έως τώρα.

Περιεχόμενα

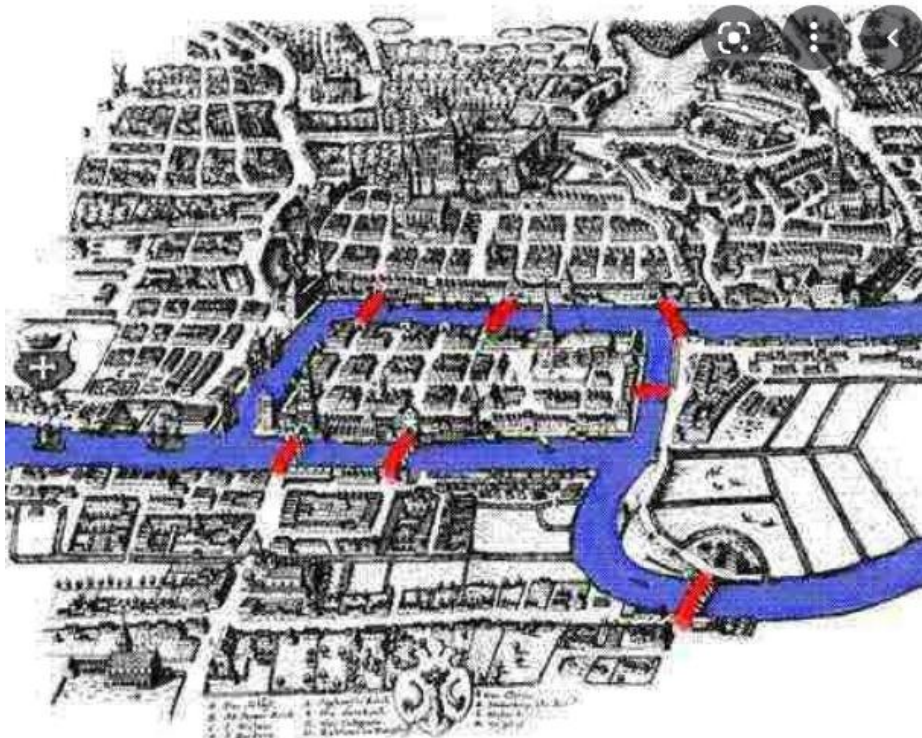
Περίληψη	7
Abstract	9
Ευχαριστίες	11
Περιεχόμενα	13
1 Εισαγωγή	15
1.1 Ιστορική Αναδρομή	15
1.2 Βασικοί Ορισμοί και Θεωρήματα	17
1.3 Τυχαίοι Γράφοι (Random Graphs)	20
1.4 Rich Club Effect	22
2 Μέτρα Κεντρικότητας σε Δίκτυα	23
2.1 Βαθμική Κεντρικότητα (Degree Centrality)	23
2.2 Ιδιοκεντρικότητα (Eigenvector Centrality)	24
2.3 Κεντρικότητα Εγγύτητας (Closeness Centrality)	24
2.4 Διαμεσότητα (Betweenness Centrality)	25
2.5 Κεντρικότητα Katz (Katz Centrality)	26
2.6 Βαθμική Κεντρικότητα Page (PageRank Centrality)	27
2.7 Κεντρικότητα Πληροφορίας (Information Centrality)	28
3 Μοντελοποίηση και Ανάλυση του Δικτύου Συγκοινωνιών της Αθήνας.....	31
3.1 Εισαγωγή στο Δίκτυο του Μετρό Αθηνών	31
3.2 Σχετικά με το δίκτυο που αναλύουμε	31
3.3 Αποτελέσματα της Ανάλυσης	32
3.4 Ιδιότητα Μικροκόσμου (Small World Property)	42
3.5 Rich Club Effect	42
4 Συμπεράσματα	43
4.1 Γενικά Συμπεράσματα	43
4.2 Μελλοντική Διερεύνηση	44
Βιβλιογραφία	45
Παράρτημα Α: Κώδικας R.....	47

1 Εισαγωγή

1.1 Ιστορική Αναδρομή

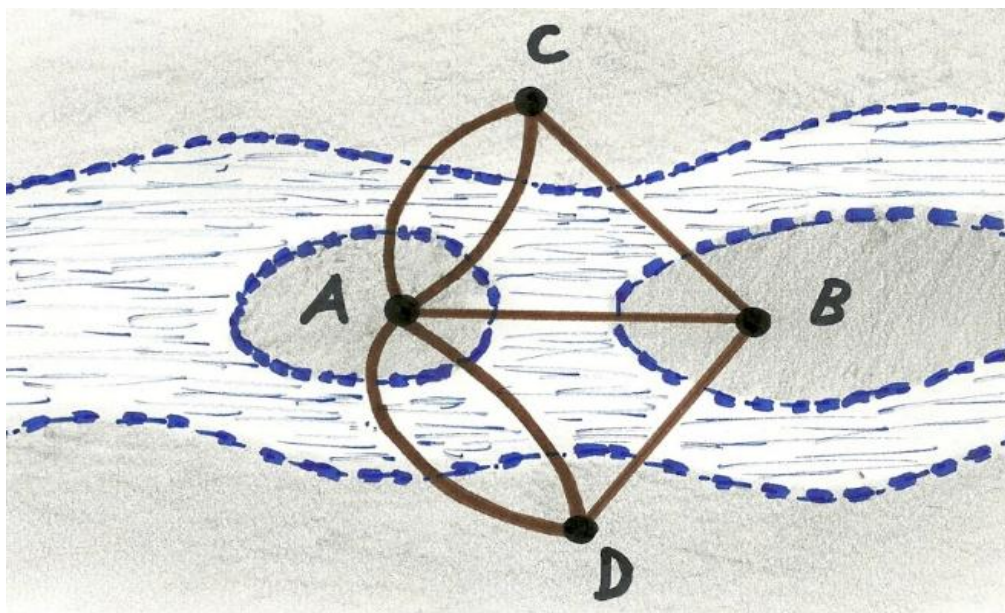
Ο Leonhard Paul Euler (1707–1783), μία από τις πλέον εμβληματικές φυσιογνωμίες της μαθηματικής επιστήμης, υπήρξε θεμελιωτής ποικίλων κλάδων των μαθηματικών, μεταξύ των οποίων δεσπόζει η θεωρία γράφων. Παρότι η αρχική του ενασχόληση με το εν λόγω πεδίο προέκυψε από την αντιμετώπιση ενός φαινομενικά απλού προβλήματος αστικού σχεδιασμού, η συμβολή του έθεσε τις βάσεις για την ανάπτυξη ενός πλήρους και ιδιαίτερα σημαντικού θεωρητικού πλαισίου, με πολυδιάστατες εφαρμογές σε πλήθος επιστημονικών αντικειμένων.

Η αφορμή για την ανάπτυξη της θεωρίας γράφων δόθηκε μέσω της επίλυσης του επονομαζόμενου Προβλήματος των Επτά Γεφυρών του Κένιγκσμπεργκ, που αφορούσε τη γεωγραφική διαρρύθμιση της ομώνυμης πόλης (σημερινό Καλίνινγκραντ της Ρωσίας). Η εν λόγω πόλη διχοτομείται από τον ποταμό Pregel και διέθετε, κατά την εποχή του Euler, τέσσερις διακριτές χερσαίες περιοχές οι οποίες συνδέονταν μεταξύ τους μέσω επτά γεφυρών. Το ερώτημα που είχε τεθεί ήταν αν υπήρχε δυνατότητα να ακολουθηθεί μια διαδρομή που να διασχίζει κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά, χωρίς να επαναλαμβάνεται καμία διάβαση και χωρίς να απαιτείται ανύψωση του μέσου γραφής από την επιφάνεια – κάτι ανάλογο της έννοιας της «μονοκονδυλιάς». Στην εικόνα που ακολουθεί απεικονίζεται ο χάρτης του Königsberg κατά τη χρονική περίοδο του Euler, τονίζοντας τον ποταμό Pregel και τις επτά γέφυρες.



Εικόνα 1: Οι επτά γέφυρες του Königsberg

Η καινοτομία της προσέγγισης του Euler έγκειται στο γεγονός ότι, εγκαταλείποντας τη γεωμετρική και χωρική απεικόνιση της πόλης, μετέφερε το πρόβλημα σε ένα αφηρημένο επίπεδο αναπαράστασης, αντικαθιστώντας τις γεωγραφικές περιοχές με κόμβους και τις γέφυρες με ακμές ενός γραφήματος. Με αυτήν τη μετασχηματιστική προσέγγιση, ο Euler ουσιαστικά εγκαίνιασε τη μαθηματική μελέτη των δομών που σήμερα ορίζονται ως γράφημα, μια δομή η οποία αποτελεί τη θεμελιώδη μονάδα ανάλυσης σε σύγχρονα συστήματα διασυνδεδεμένων οντοτήτων.



Εικόνα 2: Γραφική αναπαράσταση του Euler

Η θεμελιώδης συνεισφορά του Euler συνίσταται στη διατύπωση ενός αναγκαίου και ικανού κριτηρίου για την ύπαρξη ενός μονοπατιού Euler σε ένα συνεκτικό γράφημα: ένα τέτοιο μονοπάτι υπάρχει αν και μόνο αν το γράφημα περιλαμβάνει ακριβώς δύο κόμβους περιττού βαθμού ή κανέναν. Επιπλέον, στην περίπτωση που όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό, το μονοπάτι μπορεί να είναι κλειστό (δηλαδή να αρχίζει και να καταλήγει στον ίδιο κόμβο), οπότε το γράφημα διαθέτει κύκλωμα Euler. Στην περίπτωση του Κένιγκσμπεργκ, το γράφημα που αναπαριστούσε τη διάταξη της πόλης περιελάμβανε τέσσερις κόμβους, όλοι με περιττό βαθμό, γεγονός που καθιστούσε μαθηματικά αδύνατη την ύπαρξη τέτοιας διαδρομής.

Στη σύγχρονη επιστημονική πραγματικότητα, η θεωρία γράφων κατέχει κεντρική θέση στη μελέτη κοινωνικών δικτύων. Τα κοινωνικά δίκτυα μπορούν να αναπαρασταθούν ως γράφοι στους οποίους οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν άτομα, οργανισμούς ή κοινωνικές οντότητες και οι ακμές συμβολίζουν τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις ή σχέσεις (π.χ. φιλία, επικοινωνία, συνεργασία, επιρροή). Μέσω εργαλείων της θεωρίας γράφων, καθίσταται εφικτή η δομική ανάλυση τέτοιων δικτύων, η χαρτογράφηση της διάδοσης πληροφορίας, η ταυτοποίηση ηγετικών ή κεντρικών κόμβων, καθώς και η ανίχνευση κοινοτήτων ή υποδομών σε ευρύτερα συστήματα.

Συνεπώς, η εργασία του Euler δεν αποτελεί απλώς ένα ιστορικό παράδειγμα μαθηματικής επινοητικότητας, αλλά ένα κομβικό σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη εργαλείων και θεωριών που σήμερα είναι απολύτως αναγκαία για την κατανόηση σύνθετων κοινωνικών, τεχνολογικών και πληροφοριακών δομών. Η αφαιρετική προσέγγιση που εισήγαγε ο Euler καθιστά εμφανές ότι η τοπολογική και

διασυνδεσιακή δομή ενός συστήματος είναι καθοριστικής σημασίας για την ερμηνεία της λειτουργίας και της δυναμικής του – αρχή που διαπερνά και διαμορφώνει το πεδίο της ανάλυσης κοινωνικών δικτύων μέχρι και σήμερα.

1.2 Βασικοί Ορισμοί και Θεωρήματα

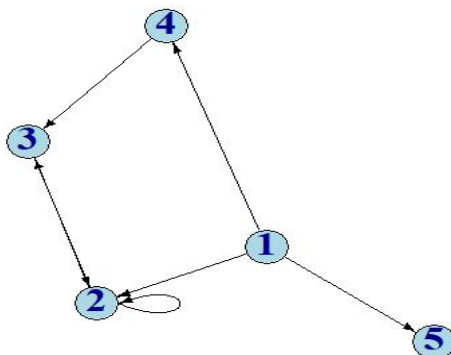
Ορισμός 1.2.1: *Γράφος* (ή γράφημα) G , ονομάζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος συνόλων (V, E) , όπου V είναι μη κενό σύνολο στοιχείων και E ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών του V , δηλαδή $E \subseteq [V]^2$, όπου $[V]^2 = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ τα 2-υποσύνολα του V . Τα στοιχεία του μη κενού συνόλου V λέγονται **κορυφές** ή **κόμβοι** (vertices or nodes) του γράφου, ενώ τα στοιχεία του συνόλου E λέγονται **ακμές** (edges).

Γενικά για ακμές ή κορυφές του G γράφουμε:

$$x_i \in G \text{ ή } u_i \in G$$

με $|V(G)| = n$: η τάξη του γραφήματος.

Τα γραφήματα διακρίνονται σε κατευθυνόμενα ή προσανατολισμένα (directed graph) και σε μη κατευθυνόμενα (undirected graph). Κατευθυνόμενα ονομάζονται τα γραφήματα στα οποία υπάρχει κάποια διάταξη στις σχέσεις των αντικειμένων, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, ενώ στα μη κατευθυνόμενα δεν υπάρχει τέτοια διάταξη.



Εικόνα 3: Κατευθυνόμενος γράφος

Ορισμός 1.2.2: *Απλός γράφος* λέγεται ο γράφος που δεν έχει παράλληλες ακμές και self loops, δηλαδή ακμές που να ξεκινούν και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο τύπου (u, u) . Τα γραφήματα που δεν είναι απλά ονομάζονται **πολυγραφήματα**. Ακόμη, σε έναν απλό γράφο με n κόμβους, κάθε κόμβος έχει βαθμό μικρότερο του n , κάτι που δεν ισχύει στα πολυγραφήματα.

- Σε έναν απλό μη κατευθυνόμενο γράφο υπάρχουν το πολύ:

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ ακμές.}$$

- Σε έναν απλό κατευθυνόμενο γράφο υπάρχουν το πολύ:

$$m = n(n - 1) \text{ ακμές.}$$

Ορισμός 1.2.3: Δύο κορυφές u και v σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G , ονομάζονται **γειτονικές** στο G , αν οι u και v είναι τα άκρα μιας ακμής e του G . Μια τέτοια ακμή e ονομάζεται **προσπίπτουσα** στις u και v και επίσης λέμε ότι η e συνδέει τις u και v .

Ορισμός 1.2.4: Ο **βαθμός** (degree) ή **αξία** (valency) μιας κορυφής σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, είναι το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε αυτή, με εξαίρεση το γεγονός ότι ένας βρόχος σε μια κορυφή συνεισφέρει δύο φορές στο βαθμό αυτής της κορυφής. Ο βαθμός της κορυφής δηλώνεται ως $\deg(v)$. Αντίθετα, σε έναν κατευθυνόμενο γράφο, μετράται ξεχωριστά ο βαθμός εισερχόμενων και εξερχόμενων ακμών αντίστοιχα.

Μια κορυφή με βαθμό 0 ονομάζεται **απομονωμένη**. Συνεπώς, μια απομονωμένη κορυφή δεν είναι γειτονική με καμία κορυφή. Μια κορυφή είναι εκκρεμής, αν και μόνο αν έχει βαθμό ίσο με 1. Συνεπώς, μια **εκκρεμής** κορυφή είναι γειτονική με ακριβώς μια άλλη κορυφή.

Ο ελάχιστος και ο μέγιστος βαθμός των κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζονται $\delta(G)$ και $\Delta(G)$, αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$\delta(G) = \min_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\}$$

και

$$\Delta(G) = \max_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\}$$

αντίστοιχα. Προφανώς ισχύει ότι: $\delta(G) \leq \Delta(G)$.

Θεώρημα 1.2.1: Έστω $G=(V,E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με m ακμές. Τότε προκύπτει ότι το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων του γραφήματος G είναι διπλάσιο του πλήθους των ακμών του, δηλαδή:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

Με άλλα λόγια, κάθε ακμή συνεισφέρει στο άθροισμα κατά 1 για κάθε κόμβο στον οποίο προσπίπτει και αυτό ισχύει ακόμα και αν υπάρχουν πολλαπλές ακμές και βρόχοι.

Ορισμός 1.2.5: Ο **πίνακας γειτνίασης** (adjacency matrix) A του γραφού $G=(V,E)$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $A(G) = [a_{ij}]$, όπου τα στοιχεία του ορίζονται ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν και μόνο αν η κορυφή } v_i \text{ συνδέεται με την κορυφή } v_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Πρόκειται για έναν πίνακα με μηδενικά στην κύρια διαγώνιο, αφού κανένας κόμβος δεν έχει ακμές ακμές που να συνδέουν τον ίδιο με τον εαυτό του. Προφανώς, κάθε πίνακας γειτνίασης είναι συμμετρικός. Είναι επίσης φανερό ότι αν όλα τα στοιχεία της γραμμής i είναι 0, τότε η κορυφή v_i είναι απομονωμένη.

Ορισμός 1.2.6: *Πλήρης γράφος* η κορυφών ονομάζεται ο γράφος του οποίου κάθε κορυφή είναι παρακείμενη σε όλες τις άλλες. Ο πλήρης γράφος των n κορυφών συμβολίζεται με K_n .

Ορισμός 1.2.7: *Περίπατος* καλείται μια ακολουθία ακμών, κάθε μια από αυτές έχει αρχή το τέλος της προηγούμενης της, εκτός από την πρώτη. Η τελευταία ακμή της ακολουθίας καταλήγει σε μια κορυφή που καλείται καταλυτική.

Ορισμός 1.2.8: *Μονοπάτι* (trail) είναι μια διαδρομή στην οποία κάθε κορυφή συμμετέχει μόνο μια φορά.

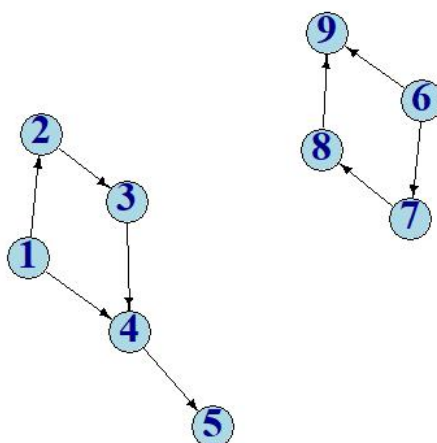
Ορισμός 1.2.9: Το *μήκος διαδρομής* εκφράζει τον αριθμό ακμών που περιλαμβάνει.

Θεώρημα 1.2.2: Αν υπάρχει περίπατος που συνδέει τις κορυφές u και v ενός γραφήματος G , τότε υπάρχει και μονοπάτι μεταξύ των κορυφών αυτών.

Ορισμός 1.2.10: Ένας γράφος G καλείται *συνεκτικός* (connected), αν κάθε ζεύγος κορυφών v_i, v_j μπορεί να συνδεθεί με μια διαδρομή. Αντιθέτως, στην περίπτωση που υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι κόμβων που να μην συνδέεται μέσω κάποιου περιπάτου, ο γράφος ονομάζεται μη συνεκτικός.

Πόρισμα 1.2.1: Αν G συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, τότε οποιοσδήποτε κορυφές συνδέονται με μονοπάτι μήκους $n-1$.

Ορισμός 1.2.11: *Συνιστώσα* (component) ενός μη συνεκτικού γραφήματος G , είναι ένα υπογράφημα του G το οποίο είναι συνεκτικό. *Μέγιστη συνιστώσα* (giant component) είναι η συνιστώσα του γραφήματος που έχει το μεγαλύτερο πλήθος κόμβων.



Εικόνα 4: Κατευθυνόμενο γράφημα με δύο συνιστώσες

Ορισμός 1.2.12: *Κλίκα* σε έναν γράφο G καλείται ένας υπογράφος H αυτού που είναι πλήρης. Ο αριθμός κλίκας (clique number) συμβολίζεται με $\omega(G)$ και είναι ο αριθμός των κόμβων που περιέχεται στη μέγιστη κλίκα του γραφήματος. Είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερες της μίας κλίκας σε έναν γράφο G . Η κλίκα με το μέγιστο δυνατό μέγεθος καλείται «μέγιστη κλίκα».

Ορισμός 1.2.13: Χρωματισμός ενός γράφου G είναι η αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές του, ώστε οι κορυφές που συνδέονται με μια ακμή να έχουν διαφορετικά χρώματα. Το ελάχιστο πλήθος των χρωμάτων που απαιτείται λέγεται **χρωματικός αριθμός** του γραφήματος και συμβολίζεται $\chi(G)$.

1.3 Τυχαίοι Γράφοι (Random Graphs)

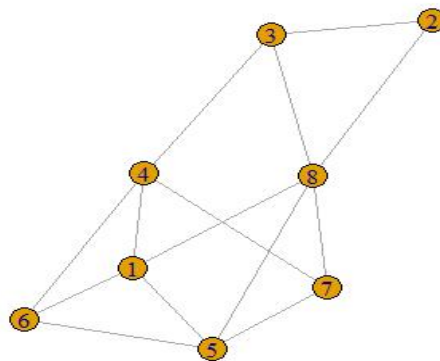
Με τον όρο τυχαίοι γράφοι αναφερόμαστε ουσιαστικά σε μια συλλογή από κόμβους που συνδέονται μεταξύ τους με ακμές κατά τρόπο τυχαίο. Το πιο γνωστό μοντέλου τυχαίου γράφου είναι αυτό των *Erdős and Rényi*.

1.3.1 Το μοντέλο $G_{n,m}$

Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, έστω $G_{n,m}$ όλο το σύνολο των γράφων με κορυφές το σύνολο $V = \{1, 2, \dots, n\}$ και ακμές $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Ο δειγματόχωρος $G_{n,m}$ περιέχει $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ στοιχεία με καθένα από αυτά να έχει πιθανότητα εμφάνισης:

$$P(G) = \left(\frac{\binom{n}{2}}{m} \right)^{-1}.$$

$G(8,14)$



Εικόνα 5: Μοντέλο Erdős and Rényi $G(8,14)$

1.3.2 Το μοντέλο $G_{n,p}$

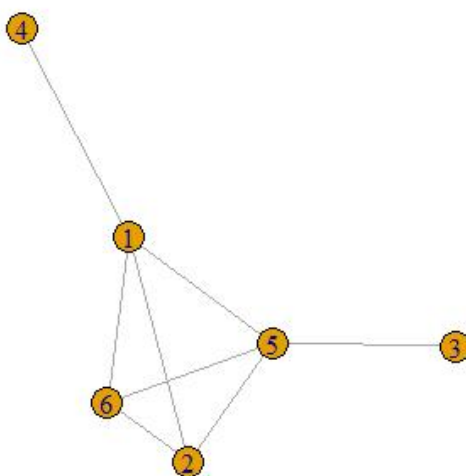
Στο μοντέλο $G_{n,p}$ που προτάθηκε από τον Edgar Gilbert, θεωρείται ότι κάθε μία από τις $\binom{n}{2}$ δυνατές ακμές που μπορούν να συνδέσουν δύο από τις n κορυφές, επιλέγεται

με πιθανότητα p , όπου $0 < p < 1$. Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ότι μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει ένα πλήρες γράφημα K_n διαγράφοντας τις ακμές του με πιθανότητα $q = 1 - p$. Ένα στοιχείο G_0 στο δειγματικό χώρο $G_{n,p}$, που έχει n κορυφές και m ακμές έχει πιθανότητα εμφάνισης ίση με:

$$P(\{G_0\}) = P(G = G_0) = p^m \cdot q^{\binom{n}{2} - m}.$$

Αν $p = \frac{1}{2}$, τότε τα στοιχεία του $G_{n, \frac{1}{2}}$ είναι ισοπίθανα, με πιθανότητα:

$$P(G = G_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}}.$$



Εικόνα 6: Μοντέλο Edgar Gilbert $G\left(6, \frac{1}{2}\right)$

1.3.3 Φαινόμενο του Μικρόκοσμου (Small World Phenomenon)

Το φαινόμενο του μικρόκοσμου βασίζεται σε εμπειρικές παρατηρήσεις πάνω σε πειράματα δικτύων, και σύμφωνα με αυτό, είναι εφικτό δύο άγνωστα μεταξύ τους άτομα στον πλανήτη να καταφέρουν να επικοινωνήσουν, με τη βοήθεια ελαχίστων μεσαζόντων. Το Small – Worldness δίνεται από τον τύπο:

$$SW = \frac{\frac{\overline{clu}}{\overline{clu}^{ER}}}{\frac{\overline{d}}{\overline{d}^{ER}}},$$

όπου $\overline{clu}$ ο συντελεστής σύμπλεξης average του δικτύου, $\overline{clu}^{ER}$ ο συντελεστής σύμπλεξης average του τυχαίου δικτύου Erdos-Renyi, $\overline{d}$ η μέση απόσταση του δικτύου και $\overline{d}^{ER}$ η μέση απόσταση του τυχαίου δικτύου Erdos-Renyi.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με την εμπειρική μελέτη αυτού του φαινομένου ήταν ο κοινωνικός ψυχολόγος Stanley Milgram (1967). Πιο συγκεκριμένα, στην πόλη Omaha της Nebraska, ο Stanley παρέδωσε σε τυχαίους κατοίκους των περιοχών

Ohama, Wichita και Kansas 296 δέματα, με στόχο να καταλήξουν σε ένα τραπεζίτη στο Sharon, προάστιο της Βοστώνης, απαγορεύοντας στους συμμετέχοντες να αποστείλουν τα δέματα κατευθείαν στον τελικό παραλήπτη. Ο Stanley ζήτησε από τους συμμετέχοντες να αποστείλουν αρχικά τα δέματα σε κάποιο πρόσωπο που γνώριζαν ήδη, προκειμένου το πρόσωπο αυτό να προωθήσει με τη σειρά του τα δέματα στον παραλήπτη, υποθέτοντας ότι αυτό θα ήταν εφικτό είτε λόγω τοποθεσίας, είτε λόγω γνωριμιών. Ωστόσο, υπήρξαν άτομα που αρνήθηκαν την αποστολή των δεμάτων και έτσι τα στατιστικά αποτελέσματα έδειξαν ότι μόνο το 20% (περίπου 64 δέματα) των δεμάτων κατάφερε να προσεγγίσει τον τελικό στόχο και να φτάσει στα χέρια του τραπεζίτη. Το μέσο μήκος αυτής της «αλυσίδας» είναι 6.5, που σημαίνει ότι χρειάστηκε η αποστολή να επαναληφθεί 6.5 φορές, προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος. Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που το πρόβλημα ονομάστηκε “6 degrees separation” («προσέγγιση του κόσμου με 6 βήματα»). (Milgram Stanley, 1967). Για την προσομοίωση, λοιπόν, του πειράματος αυτού δημιουργήθηκαν πολλά μοντέλα, με το πιο γνωστό να είναι αυτό των Watts-Strogatz (1998).

1.4 Rich Club Effect

Ο συντελεστής *rich club* είναι ένας μετρικός δείκτης για δίκτυα, σχεδιασμένος να ελέγχει αν οι καλώς συνδεδεμένοι κόμβοι συνδέονται επίσης μεταξύ τους. Τα δίκτυα που έχουν σχετικά υψηλό συντελεστή rich club εμφανίζουν το φαινόμενο rich club και έχουν πολλές συνδέσεις μεταξύ κόμβων υψηλού βαθμού.

Ο συντελεστής αυτός εισήχθη για πρώτη φορά το 2004 σε ένα έγγραφο που μελετά την τοπολογία του Internet και ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(k) = \frac{2E_{\geq k}}{N_{\geq k}(N_{\geq k} - 1)},$$

όπου $E_{\geq k}$ είναι ο αριθμός των ακμών μεταξύ κόμβων με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με k και $N_{\geq k}$ είναι ο αριθμός των κορυφών με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του k .

Ουσιαστικά, μετράει πόσες ακμές υπάρχουν μεταξύ κορυφών βαθμού τουλάχιστον k , κανονικοποιημένο από το πόσες ακμές θα μπορούσαν να υπάρχουν μεταξύ αυτών των κορυφών σε ένα πλήρες γράφημα. Όταν η τιμή του είναι πολύ κοντά στο 1 για τιμές k κοντά στο $k_{\max}$, ερμηνεύεται ότι οι υψηλού βαθμού κορυφές του δικτύου είναι καλά συνδεδεμένες.

2 Μέτρα Κεντρικότητας σε Δίκτυα

Η ανάλυση της δομής και των χαρακτηριστικών ενός δικτύου αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα της επιστημονικής διερεύνησης πολύπλοκων συστημάτων, στα οποία η διασύνδεση μεταξύ των επιμέρους μονάδων παίζει καθοριστικό ρόλο για τη λειτουργία και τη συνοχή τους. Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στην αποτίμηση της σημασίας και της σχετικής θέσης των κόμβων εντός του δικτύου, μέσω της εφαρμογής δεικτών κεντρικότητας. Τα μέτρα κεντρικότητας επιτρέπουν τον ποσοτικό προσδιορισμό του βαθμού επιρροής, διασύνδεσης ή μεσολάβησης κάθε κόμβου, προσφέροντας πολύτιμες πληροφορίες για τη δομή και τη δυναμική του συστήματος. Στις ενότητες που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι κυριότεροι δείκτες κεντρικότητας που αξιοποιήθηκαν για την ανάλυση του υπό μελέτη δικτύου, καθώς και η μεθοδολογία υπολογισμού τους με τη συνδρομή εξειδικευμένων εργαλείων λογισμικού.

2.1 Βαθμική Κεντρικότητα (Degree Centrality)

Η Βαθμική Κεντρικότητα παρόλο που είναι ένα από τα απλούστερα μέτρα ενός δικτύου καθώς πρόκειται για τον βαθμό κάθε κορυφής του, κρίνεται μεγίστης σημασίας. Σύμφωνα με τον Freeman (1978) ο βαθμός των κόμβων σε ένα δίκτυο ισούται με τον αριθμό των κόμβων με τους οποίους συνδέονται. Ωστόσο, όταν πρόκειται για κατευθυνόμενα δίκτυα διαχωρίζουμε την Βαθμική Κεντρικότητα σε εσωτερική (in-degree) και εξωτερική (out-degree), η οποία μετρά το πλήθος των ακμών που καταλήγουν σε έναν κόμβο και το πλήθος των ακμών που φεύγουν από τον κόμβο με κατεύθυνση τις υπόλοιπες κορυφές του δικτύου, αντίστοιχα. Σε ένα κοινωνικό δίκτυο είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι με πολλές συνδέσεις θα έχουν μια εξέχουσα θέση στο δίκτυο και θα είναι σημαντικότεροι σε σύγκριση με άλλους κόμβους που έχουν λιγότερες συνδέσεις. Το συγκεκριμένο μέτρο, παρόλο που είναι αρκετά απλό, βρίσκει εφαρμογή σε πολλά είδη δικτύων, πέρα των κοινωνικών.

- Η Βαθμική Κεντρικότητα ορίζεται ως το πηλίκο:

$$\frac{deg(v)}{n - 1}.$$

- Η εξωτερική και εσωτερική Βαθμική Κεντρικότητα στα κατευθυνόμενα δίκτυα δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$K_j^{out} = \sum_j^N A_{ij}$$

και

$$K_j^{in} = \sum_j^N A_{ji} ,$$

όπου N το πλήθος των κορυφών του δικτύου και A_{ij} το στοιχείο του πίνακα γειτνίασης που βρίσκεται στη θέση (i,j) του δικτύου.

2.2 Ιδιοκεντρικότητα (Eigenvector Centrality)

Πρόκειται για ένα μέτρο που αναδεικνύει την επιρροή ενός κόμβου σε ολόκληρο το δίκτυο. Πιο συγκεκριμένα, το μέτρο αυτό αναθέτει σε κάθε κόμβο τη σχετική βαθμολογία κεντρικότητας, σύμφωνα με την αρχή ότι οι συνδέσεις με υψηλόβαθμους κόμβους συνεισφέρουν περισσότερο στη βαθμολογία του, σε σύγκριση με κόμβους που έχουν τον ίδιο αριθμό συνδέσεων, αλλά αντιστοιχούν σε χαμηλότερους κόμβους. Ο πίνακας συνδέσεων είναι απαραίτητος, προκειμένου να βρεθεί ο κόμβος με τη μεγαλύτερη ιδιοκεντρικότητα.

Δεδομένου, λοιπόν, ενός γράφου $G(V,E)$, όπου V είναι το πλήθος των κόμβων, E το πλήθος των ακμών και $A = (A_{ij})$ ο πίνακας συνδέσεών του, όπου

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E(G) \\ 0, & (i,j) \notin E(G) \end{cases}$$

τότε ισχύει

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in G} \alpha_{ij} \cdot x_j$$

με λ τυχαία περίμετρο.

2.3 Κεντρικότητα Εγγύτητας (Closeness Centrality)

Το 1979 δημιουργήθηκε από τον Freeman ένα επιπλέον μέτρο κεντρικότητας, το οποίο αποδίδει υψηλές τιμές σε κόμβους που βρίσκονται σε κοντινότερες αποστάσεις με τους υπόλοιπους του δικτύου. Το μέτρο αυτό ονομάζεται Κεντρικότητα Εγγύτητας και ορίζεται ως η συνολική απόσταση ενός κόμβου i από τους γειτονικούς του, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι όσο μικρότερη είναι η απόσταση αυτή, τόσο γρηγορότερα μεταδίδεται μια πληροφορία μέσω αυτού. Ο Borgatti (2005) σημείωσε πως κόμβοι με μικρό βαθμό Closeness Centrality βρίσκονται σε πλεονεκτική θέση στο δίκτυο, και έχουν τη δυνατότητα να αποκτήσουν μια πληροφορία μεγίστης σημασίας, πιο γρήγορα από τους υπόλοιπους κόμβους, τη στιγμή μάλιστα που αυτή έχει υψηλή αξία και να τη μεταδώσουν με τη σειρά τους στους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου. Ο προαναφερθείς ορισμός μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη εξίσωση:

$$C_i = \frac{1}{\ell_i},$$

όπου

$$\ell_i = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

είναι η μέση απόσταση η οποία είναι μικρή για τις κεντρικές κορυφές και μεγάλη για τις απομακρυσμένες κορυφές. Αν δεν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών, τότε θεωρούμε ως απόσταση το πλήθος όλων των κρυφών.

Η παρούσα κεντρικότητα έχει και έντονο επιχειρησιακό ενδιαφέρον, διότι αν κάποια εταιρεία επιθυμεί να διαφημίσει μια προσφορά του προϊόντος που παράγει ή την επωνυμία της γενικότερα, θα προτιμήσει έναν κόμβο-χρήστη με υψηλό Closeness Centrality, προκειμένου να την προωθήσει στους υπόλοιπους χρήστες του δικτύου. Δεν παύει όμως, ο συγκεκριμένος δείκτης να έχει και αρνητική επίδραση στο δίκτυο, διότι με την ίδια ταχύτητα που μεταφέρει μια «είδηση» στους άλλους κόμβους του δικτύου, εξίσου γρήγορα μπορεί να γίνει και η αιτία διάδοσης ψευδών ειδήσεων (fake news), παρεμποδίζοντας την διάδοση της αλήθειας.

2.4 Διαμεσότητα (Betweenness Centrality)

Η διαμεσότητα προτάθηκε από τον Freeman το 1977 ως ένα καινούριο μέτρο κεντρικότητας σε δίκτυα και ορίζεται ως το πλήθος των σύντομων διαδρομών που διαπερνούν έναν κόμβο. Πρόκειται για έναν δείκτη που αναφέρεται σε έναν κόμβο του γράφου και είναι αυτός που επιλέγεται ώστε δια μέσου αυτού να διακινηθεί μια πληροφορία στο δίκτυο, με την προϋπόθεση ότι οι κόμβοι αναζητούν και επιλέγουν κάθε φορά το συντομότερο μονοπάτι (γεωδαισιακή). Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η ενδιάμεση κορυφή να μην έχει μικρή Βαθμική Κεντρικότητα, αλλά ταυτόχρονα έχει και μεγάλη Διαμεσότητα, δηλαδή μεγαλύτερο έλεγχο στη ροή πληροφοριών διαμέσου του δικτύου. Ο προαναφερθείς ορισμός μπορεί να περιγραφεί από τον ακόλουθο αλγόριθμο για έναν συγκεκριμένο κόμβο s :

- Υπολογίζουμε τα ελαχίστου μήκους μονοπάτια για κάθε ζεύγος κόμβων (u,v) ενός γράφου $G=(V,E)$
- Για κάθε ζεύγος κόμβων (u,v) μετράμε πόσα ελαχίστου μήκους μονοπάτια διέρχονται από τον κόμβο s
- Βρίσκουμε το πλήθος των κόμβων για τους οποίους ισχύει η παραπάνω πρόταση

Έτσι, λοιπόν προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$g(s) = \sum_{u \neq s \neq v} \frac{\sigma_{uv}(s)}{\sigma_{uv}},$$

όπου $\sigma_{uv}(s)$ είναι ο συνολικός αριθμός των γεωδαισιακών από τον κόμβο u στον κόμβο v , τα οποία περνούν από τον κόμβο s , ενώ σ_{uv} είναι ο συνολικός αριθμός των γεωδαισιακών από τον κόμβο u στον κόμβο v , χωρίς αυτά να περνούν από τον κόμβο s . Μια κανονικοποιημένη μορφή της διαμεσότητας λαμβάνεται αν διαιρέσουμε με $(n-1)(n-2)$ σε κατευθυνόμενα δίκτυα και με $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ σε μη κατευθυνόμενα δίκτυα, όπου n είναι το πλήθος των κόμβων του μεγαλύτερου παράγοντα του δικτύου.

Στον ορισμό που αναφέρθηκε παραπάνω, δεν υπολογίζονται τα μονοπάτια που ξεκινούν και καταλήγουν στον ίδιο κόμβο, δηλαδή τα self loops, όπως επίσης ούτε τα

μονοπάτια που έχουν ως άκρα τον κόμβο, του οποίου η κεντρικότητα συνυπολογίζεται. Ωστόσο, οι διαφορές αυτές κρίνονται αμελητέες και δεν επηρεάζουν την κατάταξη των κόμβων.

2.5 Κεντρικότητα Katz (Katz Centrality)

Η Κεντρικότητα Katz αποτελεί παραλλαγή της Κεντρικότητας Ιδιοδιανύσματος και δίνει λύση στα προβλήματα της τελευταίας δίνοντας εξ αρχής μία τιμή σε κάθε κόμβο ανεξαρτήτως της θέσης του στο δίκτυο αλλά και της θέσης των γειτόνων του. Έτσι:

$$x_i = \alpha \sum_j A_{ij} x_j + b,$$

όπου $\alpha, b > 0$ σταθερές.

Σε μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$x = \alpha Ax + be \Rightarrow$$

$$x - \alpha Ax = be \Rightarrow$$

$$(I - \alpha A)x = be \Rightarrow$$

$$x = (I - \alpha A)^{-1} be,$$

όπου e ένα διάνυσμα $n \times 1$ με στοιχεία μονάδες.

Συχνά επιλέγουμε $b=1$, έτσι ώστε:

$$x = (I - \alpha A)^{-1} e.$$

Τίθεται επομένως το ερώτημα του πως επιλέγεται η σταθερά α . Προφανώς για $\alpha \rightarrow 0$ παίρνουμε κεντρικότητα ίση με $b = 1$ για κάθε κόμβο. Όσο αυξάνουμε την τιμή του α παρουσιάζεται απόκλιση της κεντρικότητας κάθε κόμβου με κρίσιμη τιμή τη μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A , όπως προκύπτει από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(A - \alpha^{-1}I) = 0,$$

δηλαδή:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha} \text{ ή } \alpha = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Καθώς επιθυμούμε σύγκλιση της μεθόδου επιλέγουμε τιμές για τη σταθερά α που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\alpha < \frac{1}{\lambda_1}.$$

Παραμένει, ωστόσο, σχετική ελευθερία στην επιλογή του α . Κάποιοι ερευνητές επιλέγουν τιμές κοντά στο $\frac{1}{\lambda_1}$ δίνοντας μέγιστο βάρος στον όρο της Κεντρικότητας Ιδιοδιανύσματος και ελάχιστο στον σταθερό όρο (Newman, 2010).

Ο άμεσος υπολογισμός της κεντρικότητας από την εξίσωση $x = (I - \alpha A)^{-1}e$ παρουσιάζει μεγάλο υπολογιστικό κόστος καθώς απαιτεί αντιστροφή πίνακα. Αντίθετα, για τον υπολογισμό εφαρμόζουμε την επαναληπτική διαδικασία της μορφής:

$$x' = \alpha Ax + be$$

Βασίζόμενοι στην αρχική εξίσωση. Εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο, το διάνυσμα x συγκλίνει στο ιδιοδιάνυσμα. Καθώς ο πίνακας A έχει m μη μηδενικά στοιχεία απαιτούνται m πολλαπλασιασμοί καθιστώντας τον υπολογισμό της τάξης $O(rm)$, όπου r ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου. Ο ακριβής αριθμός r δεν μπορεί να υπολογιστεί καθώς εξαρτάται τόσο από το ίδιο το δίκτυο, όσο και από την επιλογή του α .

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κεντρικότητα Katz μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη κατευθυνόμενους γράφους. Κεντρικότητα Katz μπορεί να γενικευθεί δίνοντας διαφορετικά σταθερά δάρη σε κάθε κόμβο. Για παράδειγμα, σε ένα κοινωνικό δίκτυο η σημαντικότητα κάθε κόμβου (ατόμου) μπορεί να εξαρτάται από παράγοντες που δε σχετίζονται με το δίκτυο όπως η ηλικία ή το εισόδημα (Newman, 2010). Τέτοιου τύπου αλληλεπιδράσεις μπορούν να ληφθούν υπόψη από τους όρους b_i .

Η κεντρικότητα Katz παρουσιάζει ένα ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό. Εάν ένας κόμβος με υψηλή κεντρικότητα Katz δείχνει πολλούς άλλους κόμβους τότε και αυτοί με τη σειρά τους λαμβάνουν υψηλή τιμή κεντρικότητας. Κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα επιθυμητό. Για παράδειγμα το γεγονός ότι μία ιστοσελίδα δείχνεται από το Google το οποίο είναι αδιαμφισβήτητα σημαντική ιστοσελίδα, δεν την κάνει απαραίτητα σημαντική.

2.6 Βαθμική Κεντρικότητα Page (PageRank Centrality)

Ένα ακόμη μέτρο που βρίσκει εφαρμογή σε κατευθυνόμενα και μη δίκτυα είναι η Κεντρικότητα PageRank. Πρόκειται για έναν αλγόριθμο που αναπτύχθηκε από τους Larry Page και Sergey Brin, δημιουργούς της Google. Πρόκειται για μια βελτίωση της κατά Katz κεντρικότητας, στην οποία κάθε κόμβος που συνδεόταν με έναν κόμβο μεγάλης κεντρικότητας έχει και αυτός μεγάλη κεντρικότητα.

Για τη μελέτη αυτής της κεντρικότητας απαιτείται αρχικά η κατανόηση του μοντέλου του τυχαίου σέρφερ. Το μοντέλο του τυχαίου σέρφερ αναφέρεται σε ένα χρήστη του διαδικτύου, ο οποίος πλοηγείται σε ιστοσελίδες. Ο χρήστης επιλέγει κάθε φορά τυχαία τη σελίδα στην οποία θα συνεχίσει την πλοήγησή του, κάνοντας κλικ στους υπερσυνδέσμους που εκείνη περιέχει με σκοπό να μεταβεί στην επόμενη ιστοσελίδα. Ωστόσο, αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν περιέχουν όλες οι ιστοσελίδες υπερσυνδέσμους. Στην περίπτωση αυτή, ο χρήστης επιλέγει με τυχαίο τρόπο μια άλλη ιστοσελίδα. Αντιστοιχίζοντας αυτό το παράδειγμα στη θεωρία δικτύων, κάθε ιστοσελίδα αποτελεί έναν κόμβο του δικτύου, ενώ οι υπερσύνδεσμοι που επιτρέπουν

την πλοήγηση μεταξύ των ιστοσελίδων αποτελούν τις ακμές του δικτύου. Έτσι, ξεκινώντας, λοιπόν, από έναν κόμβο και εκτελώντας τον τυχαίο περίπατο με πιθανότητα p , συνεχίζουμε τον περίπατο σε έναν γειτονικό κόμβο με πιθανότητα $q = 1 - p$ και μεταφερόμαστε τελικά σε έναν οποιονδήποτε κόμβο του δικτύου. Δίνεται από τη σχέση:

$$\Pr(p_i) = p \sum_{p_j \in M(p_i)} \frac{\Pr(p_j)}{L(p_j)} + \frac{q}{N},$$

όπου $M(p_j)$ είναι το σύνολο των τυχαίων περιπάτων που συνδέονται με τον p_j , $L(p_j)$ είναι ο εξωτερικός βαθμός του p_j και N είναι το συνολικό πλήθος των κόμβων του δικτύου.

2.7 Κεντρικότητα Πληροφορίας (Information Centrality)

Η Κεντρικότητα Πληροφορίας συνιστά ένα μέτρο που αποτυπώνει τον βαθμό στον οποίο ένας κόμβος διευκολύνει τη συνολική διάδοση πληροφοριών σε ένα δίκτυο. Παρουσιάζει ομοιότητες με άλλες μορφές κεντρικότητας, όπως η Κεντρικότητα Εγγύτητας και η Διαμεσότητα, αλλά επικεντρώνεται ειδικότερα στην αποδοτικότητα επικοινωνίας μεταξύ των κόμβων. Το υπόβαθρο αυτού του δείκτη βασίζεται στην παραδοχή ότι οι πληροφορίες κυκλοφορούν ταυτόχρονα μεταξύ όλων των κόμβων, με αποτέλεσμα κάθε κόμβος να συμμετέχει στη διακίνηση πολλαπλών «πακέτων» δεδομένων παράλληλα. Με αυτήν την παραδοχή, η κεντρικότητα κάθε κόμβου συνδέεται άμεσα με τη συμβολή του στη συνολική ικανότητα μετάδοσης πληροφοριών του δικτύου.

Για να εκτιμηθεί η σημασία κάθε κόμβου, εξετάζεται η επίδραση της απομάκρυνσής του στις ιδιότητες του δικτύου. Αρχικά υπολογίζεται η αποτελεσματικότητα του δικτύου στην πλήρη μορφή του, δηλαδή όταν όλοι οι κόμβοι παραμένουν ενεργοί. Στη συνέχεια, για κάθε κόμβο πραγματοποιείται η ίδια διαδικασία, αλλά αφαιρούνται όλες οι ακμές που τον συνδέουν με τους γείτονές του. Μέσα από αυτήν τη σύγκριση, προσδιορίζεται το μέγεθος της συνεισφοράς του στην ομαλή κυκλοφορία των πληροφοριών.

Η έννοια της αποτελεσματικότητας αξιοποιείται για να αποτυπωθεί η μέση ταχύτητα διάχυσης πληροφοριών στο δίκτυο. Ο δείκτης αυτός βασίζεται στο άθροισμα των αντιστρόφων των αποστάσεων μεταξύ όλων των ζευγών κόμβων. Συγκεκριμένα, η αποτελεσματική επικοινωνία δύο κόμβων i και j είναι αντιστρόφως ανάλογη της μικρότερης διαδρομής που τους συνδέει. Στην περίπτωση που δύο κόμβοι δεν επικοινωνούν, η απόσταση θεωρείται άπειρη και το αντίστροφο μηδενίζεται. Για μη κατευθυνόμενα δίκτυα, η τιμή της αποτελεσματικότητας κυμαίνεται στο διάστημα $[0,1]$.

Το μέτρο της κεντρικότητας πληροφορίας ορίζεται ως το σχετικό ποσοστό μείωσης της συνολικής αποτελεσματικότητας του δικτύου που προκαλεί η απομάκρυνση των συνδέσεων ενός κόμβου. Δηλαδή, συγκρίνεται η αποτελεσματικότητα του αρχικού γράφου με εκείνη του γράφου που προκύπτει αφού αφαιρεθούν οι ακμές του υπό εξέταση κόμβου. Όσο μεγαλύτερη η μείωση της αποτελεσματικότητας, τόσο υψηλότερη θεωρείται η κεντρικότητα πληροφορίας του κόμβου.

Η λογική πίσω από αυτό το μέτρο στηρίζεται στο γεγονός ότι η κυκλοφορία των πληροφοριών ακολουθεί τις συντομότερες διαδρομές. Επομένως, η απώλεια κάποιων

ακμών μπορεί να αναγκάσει τα δεδομένα να αναζητήσουν παρακάμψεις, αυξάνοντας τις αποστάσεις μεταξύ των κόμβων και μειώνοντας τον συνολικό βαθμό επικοινωνίας. Ένας κόμβος που συμμετέχει σε μεγάλο πλήθος τέτοιων συντομότερων μονοπατιών αναδεικνύεται καθοριστικός για την αποτελεσματική λειτουργία του δικτύου. Αντίθετα, όταν η αφαίρεση ενός κόμβου δεν επιφέρει αξιόλογες αλλαγές στην αποτελεσματικότητα, η κεντρικότητα πληροφορίας του παραμένει χαμηλή.

3 Μοντελοποίηση και Ανάλυση του Δικτύου Συγκοινωνιών της Αθήνας

3.1 Εισαγωγή στο Δίκτυο του Μετρό Αθηνών

Το δίκτυο του Μετρό Αθηνών αποτελεί έναν από τους πλέον σημαντικούς και πολυσύχναστους συγκοινωνιακούς άξονες της πρωτεύουσας, συνδέοντας κρίσιμα αστικά κέντρα και παρέχοντας αξιόπιστη μετακίνηση σε εκατομμύρια επιβάτες ετησίως. Αποτελείται από τρεις κύριες γραμμές, οι οποίες εκτείνονται από τα δυτικά προς τα ανατολικά προάστια, ενώ διασταυρώνονται σε κεντρικούς σταθμούς, δημιουργώντας ένα περίπλοκο αλλά αρμονικό δίκτυο μεταφορών.

Η δομή αυτού του δικτύου χαρακτηρίζεται από τη χωρική κατανομή των σταθμών και των συνδέσεων μεταξύ τους, οι οποίες αναπαριστούν τις δυνατές διαδρομές μετακίνησης των επιβατών. Κάθε σταθμός λειτουργεί ως κόμβος, ενώ οι ακμές αντιπροσωπεύουν τις απευθείας γραμμικές συνδέσεις μεταξύ διαδοχικών σταθμών στην ίδια γραμμή. Η μελέτη αυτού του γράφου επιτρέπει την ανάλυση της λειτουργικής και τοπολογικής δομής του μετρό, με απώτερο στόχο την κατανόηση της ροής επιβατών, την αξιολόγηση της σημασίας των σταθμών και την εύρεση κρίσιμων σημείων του δικτύου που επιδρούν στην αποδοτικότητα και την αξιοπιστία των μεταφορών.

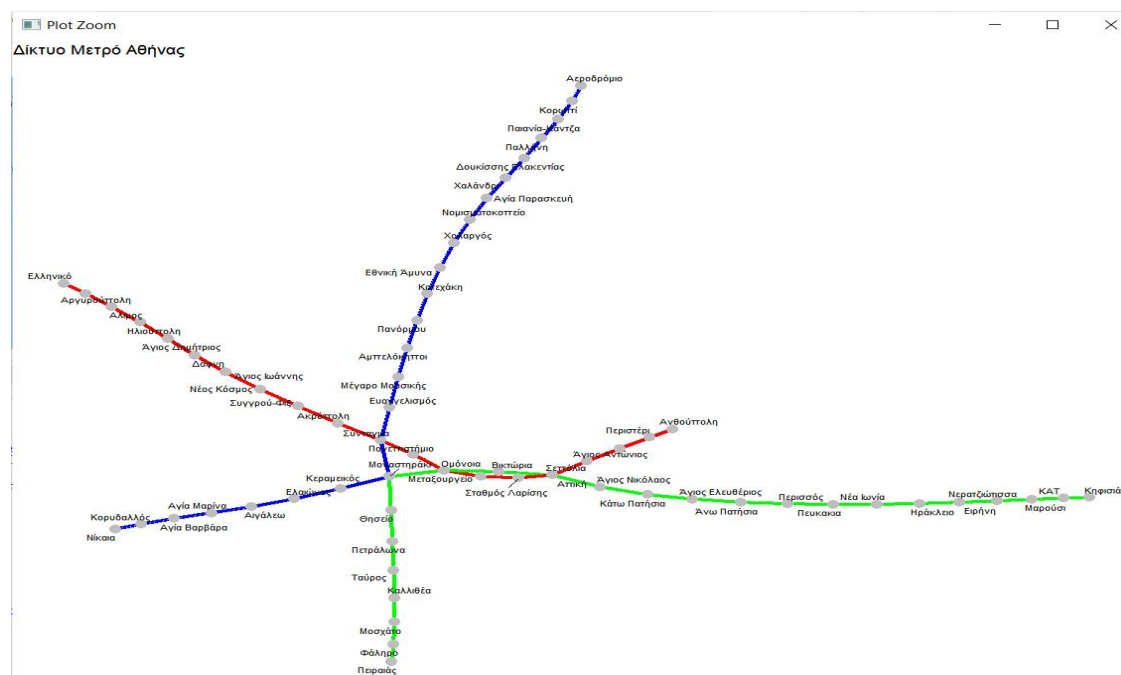
3.2 Σχετικά με το δίκτυο που αναλύουμε

Αντιμετωπίζοντας, λοιπόν, το δίκτυο του Μετρό Αθηνών ως ένα σύστημα κόμβων και ακμών, πραγματοποιήθηκε η κατασκευή και ανάλυση του δικτύου με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού R και της βιβλιοθήκης *igraph*. Συγκεκριμένα, το δίκτυο περιλαμβάνει τους σταθμούς ως κόμβους και τις συνδέσεις μεταξύ διαδοχικών σταθμών ως ακμές, με τις τρεις γραμμές του μετρό να απεικονίζονται με διαφορετικά χρώματα για καλύτερη οπτικοποίηση και διάκριση των διαδρομών. Αξίζει ακόμη να αναφερθεί ότι τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του υπό εξέταση δικτύου έχουν συλλεγεί από την επίσημη πηγή της ΣΤΑΣΥ Α.Ε. (Σταθερές Συγκοινωνίες Α.Ε.) και θεωρούνται επιστημονικά έγκυρα και αξιόπιστα. Η επιλογή αυτής της πηγής εξασφαλίζει την ακρίβεια και την πληρότητα των στοιχείων, δεδομένου ότι προέρχονται από τον αρμόδιο δημόσιο φορέα που διαχειρίζεται και λειτουργεί τα μέσα σταθερής τροχιάς στην ευρύτερη περιοχή της Αθήνας.

Αναλύοντας το παρόν δίκτυο, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για ένα μη κατευθυνόμενο δίκτυο με 64 κόμβους και 65 ακμές. Η μοντελοποίηση αυτή επιτρέπει την εφαρμογή μετρικών κεντρικότητας και άλλων τοπολογικών χαρακτηριστικών, μέσω των οποίων διερευνάται η δομή και η λειτουργία του δικτύου. Η χρήση της R και της *igraph* διευκολύνει τόσο τη διαχείριση των δεδομένων όσο και την εκτέλεση σύνθετων αναλύσεων, καθιστώντας δυνατή τη διεξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων σχετικά με τη σημασία των σταθμών και την αποτελεσματικότητα των διαδρομών.

Επειδή το δίκτυο περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό σταθμών και διασυνδέσεων, η παρουσίαση εστιάζεται στην πλήρη αναπαράσταση των τριών γραμμών με σκοπό την επιστημονική διερεύνηση των χαρακτηριστικών τους μέσω των μέτρων

κεντρικότητας που ακολουθούν. Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε μια πρώτη αναπαράσταση του δικτύου.



Εικόνα 7: Πρώτη αναπαράσταση του Δικτύου του Μετρό των Αθηνών

3.3 Αποτελέσματα της Ανάλυσης

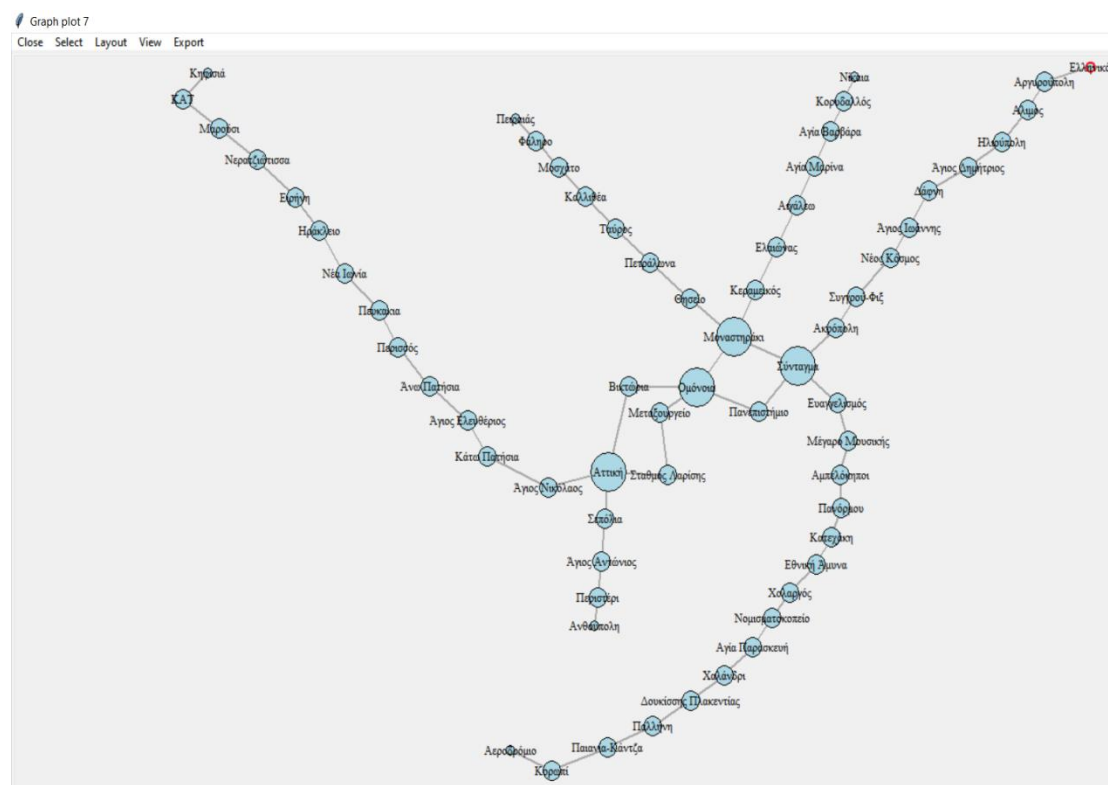
3.3.1 Πυκνότητα του Δικτύου (Edge Density)

Η τιμή της πυκνότητας στο κοινωνικό δίκτυο του Μετρό υπολογίστηκε με τη χρήση της συνάρτησης `graph.density` της βιβλιοθήκης `igraph` στη γλώσσα R και βρέθηκε ίση με $0.03224206 \ll 0.25$. Το 0.25 είναι η τιμή αναφοράς της πυκνότητας που προσδίδει σε ένα δίκτυο την ιδιότητα πυκνό ή αραιό. Η τιμή αυτή καταδεικνύει ότι το δίκτυο του μετρό της Αθήνας χαρακτηρίζεται από μεγάλη αραιότητα, γεγονός που αντανακλά τη δομή του συστήματος μεταφορών, όπου κάθε σταθμός συνδέεται άμεσα μόνο με έναν περιορισμένο αριθμό γειτονικών σταθμών και όχι με όλους τους κόμβους του δικτύου. Η αραιότητα αυτή είναι χαρακτηριστική των πραγματικών δικτύων μεταφορών, όπου η λειτουργικότητα και η αποδοτικότητα επιβάλλουν συγκεκριμένες και περιορισμένες συνδέσεις μεταξύ των κόμβων.

3.3.2 Βαθμική Κεντρικότητα (Degree Centrality)

Στην παρούσα υποενότητα εξετάζεται η Βαθμική Κεντρικότητα των κόμβων του δικτύου, το οποίο αντιστοιχεί στους σταθμούς του μετρό της Αθήνας. Η ανάλυση αυτή αποτυπώνεται αφενός σε γραφική μορφή, όπου οι κόμβοι παρουσιάζονται με

μέγεθος ανάλογο της τιμής της κεντρικότητάς τους, και αφετέρου σε πίνακα, όπου καταγράφεται το ακριβές ποσοτικό μέτρο για κάθε σταθμό. Αξίζει να σημειωθεί ότι επειδή τα αποτελέσματα των μέτρων δε μας ενδιαφέρουν ως μεγέθη, αλλά θέλουμε μόνο να συγκρίνουμε την αξία των κόμβων στο δίκτυο, χρησιμοποιήσαμε την κανονικοποιημένη βαθμική κεντρικότητα η οποία προκύπτει διαιρώντας κάθε κεντρικότητα με τη με την μέγιστη του δικτύου. Η κεντρικότητα βαθμού εκφράζει τον αριθμό των άμεσων συνδέσεων που διαθέτει κάθε κόμβος, συνεπώς επιτρέπει να εντοπιστούν οι σταθμοί με τη μεγαλύτερη τοπική σημασία στο δίκτυο. Οι σταθμοί με υψηλότερη κεντρικότητα θεωρούνται πιο προσβάσιμοι, καθώς συνδέονται άμεσα με περισσότερους γειτονικούς κόμβους.



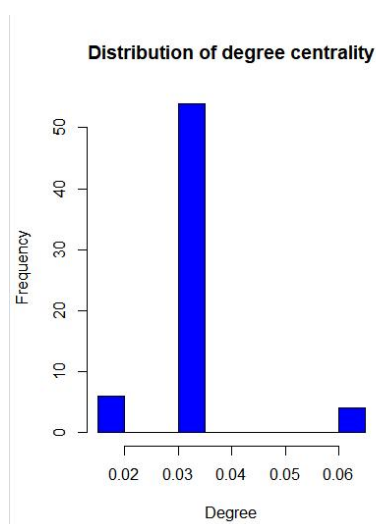
Εικόνα 8: Οπτικοποίηση της Βαθμικής Κεντρικότητας των σταθμών του Μετρό της Αθήνας

```
> sort(dc)
```

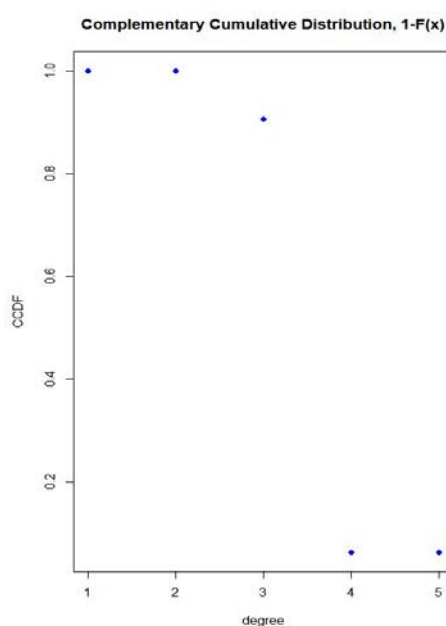
Πειραιάς 0.01587302	Κηφισιά 0.01587302	Ανθούπολη 0.01587302	Ελληνικό 0.01587302	Νίκαια 0.01587302	Αεροδρόμιο 0.01587302
Φάληρο 0.03174603	Μοσχάτο 0.03174603	Καλλιθέα 0.03174603	Ταύρος 0.03174603	Πετράλωνα 0.03174603	Θεσείο 0.03174603
Βικτώρια 0.03174603	Άγιος Νικόλαος 0.03174603	Κάτω Πατήσια 0.03174603	Άγιος Ελευθέριος 0.03174603	Ανω Πατήσια 0.03174603	Περισσός 0.03174603
Πευκακκία 0.03174603	Νέα Ιωνία 0.03174603	Ηράκλειο 0.03174603	Ειρήνη 0.03174603	Νερατζιώτισσα 0.03174603	Μαρούσι 0.03174603
KAT 0.03174603	Περιστέρι 0.03174603	Άγιος Αντώνιος 0.03174603	Σεπόλια 0.03174603	Σταθμός Λαρίσης 0.03174603	Μεταξουργείο 0.03174603
Πανεπιστήμιο 0.03174603	Ακρόπολη 0.03174603	Συγγρού-Φιξ 0.03174603	Νέος Κόσμος 0.03174603	Άγιος Ιωάννης 0.03174603	Δάφνη 0.03174603
Άγιος Δημήτριος 0.03174603	Ηλιούπολη 0.03174603	Αλιμος 0.03174603	Αργυρούπολη 0.03174603	Κορυδαλλός 0.03174603	Αγία Βαρβάρα 0.03174603
Αγία Μαρίνα 0.03174603	Αιγάλεω 0.03174603	Ελαιώνας 0.03174603	Κεραμεικός 0.03174603	Ευαγγελισμός 0.03174603	Μέγαρο Μουσικής 0.03174603
Αμπελόκηποι 0.03174603	Πανόρμου 0.03174603	Κατεγάνκη 0.03174603	Εθνική Άμυνα 0.03174603	Χολαργός 0.03174603	Νομισματικό 0.03174603
Αγία Παρασκευή 0.03174603	Χαλάνδρι 0.03174603	Πλακεντίας 0.03174603	Παλλήνη 0.03174603	Παιανία-Κάντζα 0.03174603	Κορωπί 0.03174603
Μοναστηράκι 0.06349206	Ομόνοια 0.06349206	Αττική 0.06349206	Σύνταγμα 0.06349206		

Εικόνα 9: Πίνακας τιμών της Βαθμικής Κεντρικότητας για κάθε σταθμό του δικτύου

Επιπλέον, υπολογίστηκε ο ελάχιστος βαθμός 0.01587, το 25% των κόμβων έχει τιμή που δεν ξεπερνά το 0.03175, το 75% των κόμβων έχει τιμή που δεν ξεπερνά το 0.03175, ενώ η μέγιστη τιμή είναι 0.06349. Ακόμη, η μέση τιμή είναι 0.03224 και διαφοροποιείται ελαφρώς από τη διάμεσο που είναι 0.03175, γεγονός που υποδηλώνει ήπια θετική ασυμμετρία στην κατανομή. Η τυπική απόκλιση είναι ίση με 0.009366617 και ο συντελεστής μεταβλητότητας φτάνει στο $CV=29.05\%$. Τα δύο αυτά μέτρα καταδεικνύουν ότι η διασπορά των τιμών είναι μέτρια, με την πλειονότητα των κόμβων να εμφανίζει παρόμοιο επίπεδο δικτυακής σύνδεσης, χωρίς έντονα διαφοροποιημένους κόμβους που να συγκεντρώνουν εξαιρετικά υψηλή βαθμοκεντρικότητα. Για την πληρέστερη κατανόηση της κατανομής των τιμών, παρατίθενται στη συνέχεια το ιστόγραμμα συχνοτήτων των τιμών βαθμού κεντρικότητας και η αντίστοιχη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής, τα οποία αποτυπώνουν τον τρόπο με τον οποίο οι τιμές κατανέμονται και συσσωρεύονται στο δείγμα των κόμβων.

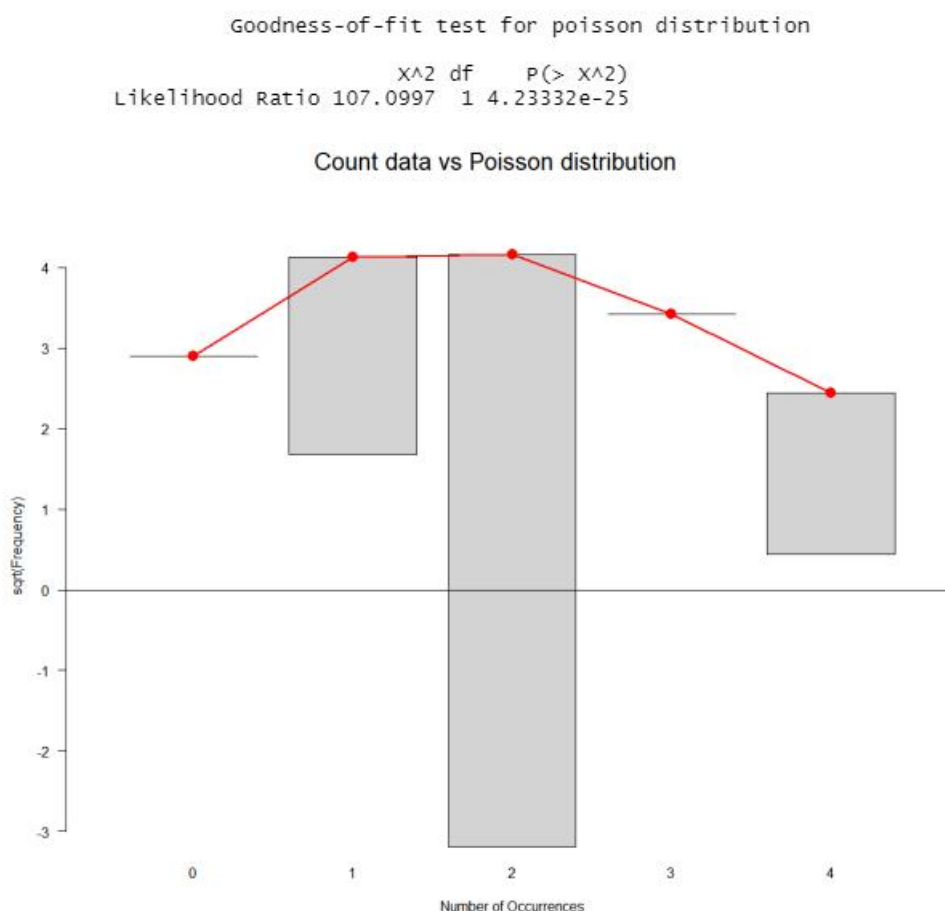


Εικόνα 10: Ιστόγραμμα κατανομής της Βαθμικής Κεντρικότητας



Εικόνα 11: Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της Βαθμικής Κεντρικότητας των κόμβων

Τέλος, έγινε ένας ακόμη έλεγχος καλής προσαρμογής για το αν η κατανομή των βαθμών ακολουθεί την κατανομή Poisson και τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα εξής:

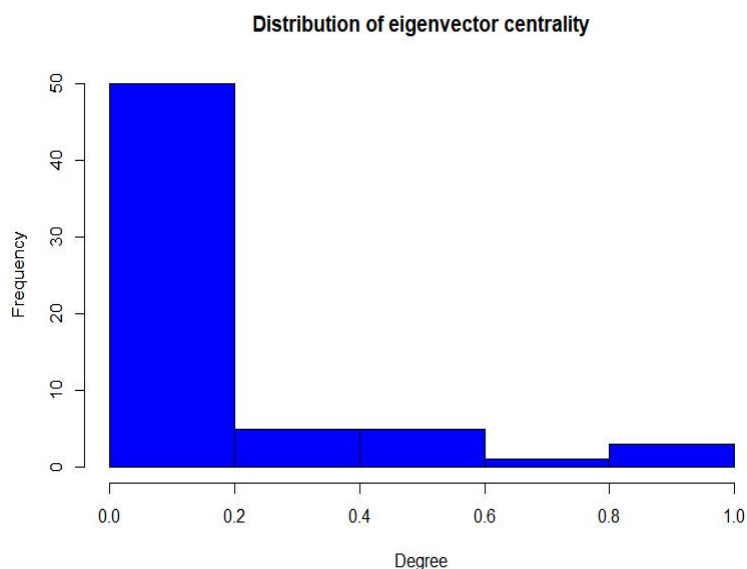


Εικόνα 12: Απεικόνιση δεδομένων συγκριτικά με την κατανομή Poisson

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του ελέγχου, η τιμή του στατιστικού ελέγχου ήταν $\chi^2 = 107,1$ με 1 βαθμό ελευθερίας και $p - \text{value} < 4.2e - 25$, γεγονός που είναι εξαιρετικά σημαντικό στατιστικά. Η πολύ χαμηλή $p - \text{value}$ οδηγεί στην απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή η κατανομή των βαθμών δεν ακολουθεί Poisson κατανομή. Στο διάγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα η απόκλιση των παρατηρούμενων συχνοτήτων από τις θεωρητικές τιμές της Poisson κατανομής, καθώς οι μπάρες (παρατηρούμενες συχνότητες) εμφανίζουν μεγάλες διαφορές σε σχέση με την κόκκινη γραμμή (αναμενόμενες συχνότητες). Η πιο έντονη απόκλιση παρατηρείται γύρω από συγκεκριμένες τιμές βαθμού, επιβεβαιώνοντας τη μη καλή προσαρμογή. Τα παραπάνω αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι η κατανομή των βαθμών στο συγκεκριμένο δίκτυο είναι πιθανόν να ακολουθεί άλλη κατανομή και όχι Poisson, όπως συμβαίνει συχνά σε πραγματικά δίκτυα που δεν είναι τυχαία αλλά εμφανίζουν ετερογένεια.

3.3.3 Ιδιοκεντρικότητα (Eigenvector Centrality)

Η ιδιοκεντρικότητα χαρακτηρίζει έναν κόμβο (σταθμό του Μετρό της Αθήνας) λαμβάνοντας υπόψη και τις συνδέσεις των γειτόνων του, καθώς και των δικών τους γειτόνων. Επομένως, κόμβοι με υψηλή ιδιοκεντρικότητα έχει παρατηρηθεί ότι συνδέονται με ισχυρούς γείτονες και σε κάποιες περιπτώσεις μαζί με τους γείτονές τους δημιουργούν ισχυρές κλίκες. Υπολογίστηκε η ελάχιστη τιμή 0, το 25% των κόμβων έχει τιμή που δεν ξεπερνά το 0.001, το 75% των κόμβων έχει τιμή που δεν ξεπερνά το 0.1727, μέγιστη τιμή είναι το 1 (λόγω της κανονικοποίησης). Επιπλέον, η μέση τιμή είναι 0.14 και διαφέρει αρκετά από τη διάμεσο που είναι 0.015. Τέλος, η τυπική απόκλιση είναι ίση με 0.2443353, ενώ ο συντελεστής μεταβλητότητας φτάνει στο $CV=174.51\%$. Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται το ιστόγραμμα κατανομής της Ιδιοκεντρικότητας.



Εικόνα 13: Ιστόγραμμα Κατανομής της ιδιοκεντρικότητας

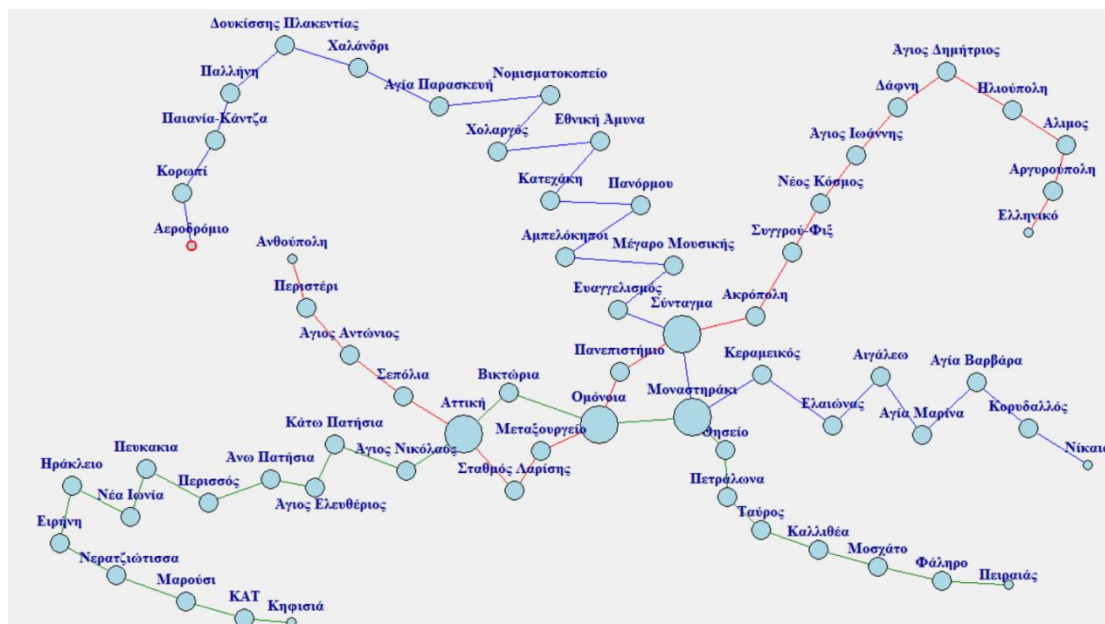
3.3.4 Κεντρικότητα Εγγύτητας (Closeness Centrality)

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ταξινομημένη σε αύξουσα σειρά η Κεντρικότητα Εγγύτητας όλων των κόμβων του δικτύου. Η μέτρηση αυτή αποτυπώνει τον βαθμό προσβασιμότητας κάθε κόμβου προς όλους τους υπόλοιπους, με υψηλότερες τιμές να υποδηλώνουν μεγαλύτερη εγγύτητα και, συνεπώς, μεγαλύτερη σημασία στο συνολικό δίκτυο. Όπως είναι αναμενόμενο, οι σταθμοί που αποτελούν βασικούς κόμβους σύνδεσης, όπως το Μοναστηράκι, το Σύνταγμα και η Ομόνοια, εμφανίζουν τις υψηλότερες τιμές, καθώς βρίσκονται σε κομβικές θέσεις του δικτύου και διαθέτουν άμεση πρόσβαση σε μεγάλο αριθμό άλλων σταθμών με μικρές αποστάσεις. Επιπλέον, αποτυπώνεται και οπτικά το δίκτυο των σταθμών του μετρό της Αθήνας. Το μέγεθος κάθε κόμβου είναι αναλογικό με την τιμή Closeness

Centrality, ώστε να αναδεικνύονται οι σταθμοί με τη μεγαλύτερη εγγύτητα και σημασία στη συνολική δομή του δικτύου.

Κηφισιά 0.055	Αεροδρόμιο 0.055	ΚΑΤ 0.058	Κορωπί 0.058	Παιανία-Κάντζα 0.061	Μαρούσι 0.062
Ελληνικό 0.065	Παλλήνη 0.065	Νερατζιώτισσα 0.066	Δουκίσσης 0.069	Ειρήνη 0.070	Αργυρούπολη 0.070
Χαλάνδρι 0.073	Ηράκλειο 0.074	Αλίμος 0.075	Πειραιάς 0.077	Νίκαια 0.077	Αγία Παρασκευή 0.078
Νέα Ιωνία 0.079	Ηλιούπολη 0.081	Νομισματοκοπείο 0.083	Φάληρο 0.084	Πευκακιά 0.084	Κορυδαλλός 0.084
Ανθούπολη 0.087	Αγίος Δημήτριος 0.087	Χολαργός 0.088	Περισσός 0.090	Μοσχάτο 0.091	Αγία Βαρβάρα 0.091
Δάφνη 0.094	Περιστέρι 0.095	Εθνική Άμυνα 0.095	Ανω Πατήσια 0.096	Καλλιθέα 0.099	Αγία Μαρίνα 0.099
Κατεχάκη 0.101	Αγίος Ιωάννης 0.102	Αγίος Ελευθέριος 0.103	Αγίος Αντώνιος 0.104	Ταύρος 0.109	Αιγάλεω 0.109
Πανόρμου 0.109	Κάτω Πατήσια 0.111	Νέος Κόσμος 0.111	Σεπόλια 0.115	Αμπελόκηποι 0.117	Αγίος Νικόλαος 0.119
Πετράλωνα 0.120	Ελαιώνας 0.120	Συγγρού-Φιξ 0.121	Σταθμός Λαρίσης 0.124	Μέγαρο Μουσικής 0.125	Αττική 0.129
Μεταξουργείο 0.131	Ακρόπολη 0.132	Θησείο 0.133	Κεραμεικός 0.133	Βικτωρία 0.135	Ευαγγελισμός 0.135
Πανεπιστήμιο 0.140	Ομόνοια 0.143	Σύνταγμα 0.146	Μοναστηράκι 0.149		

Εικόνα 14: Τιμές Κεντρικότητας Εγγύτητας για κάθε σταθμό του Μετρό της Αθήνας



Εικόνα 15: Οπτικοποίηση της Κεντρικότητας Εγγύτητας των σταθμών του Μετρό της Αθήνας

3.3.5 Διαμεσότητα (Betweenness Centrality)

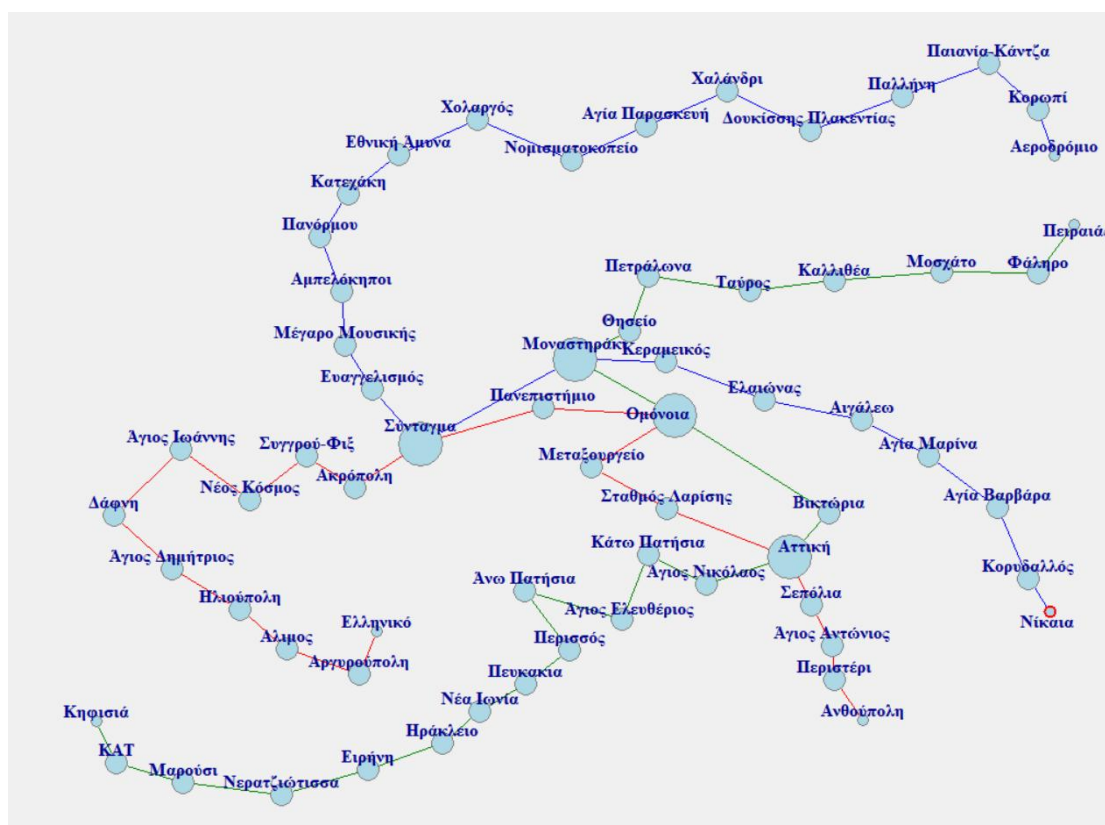
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές της Διαμεσότητας για κάθε σταθμό του δικτύου του μετρό της Αθήνας. Η Διαμεσότητα εκφράζει τον αριθμό των συντομότερων διαδρομών που διέρχονται από κάθε σταθμό και αποτελεί ένδειξη της σημασίας του ως ενδιάμεσου κόμβου στη σύνδεση διαφορετικών περιοχών του δικτύου. Παρατηρείται ότι οι σταθμοί Σύνταγμα, Μοναστηράκι και Ομόνοια συγκεντρώνουν τις υψηλότερες τιμές, γεγονός που υπογραμμίζει τον κομβικό τους ρόλο στη συνολική διάρθρωση και στη διευκόλυνση της μετακίνησης. Για να αποδοθεί πιο παραστατικά αυτή η πληροφορία, στο επόμενο γράφημα το μέγεθος κάθε κόμβου έχει οριστεί αναλογικό με τη Διαμεσότητά του, έτσι ώστε οι σταθμοί με

τη μεγαλύτερη επίδραση στη ροή του δικτύου να προβάλλονται με μεγαλύτερο μέγεθος και να γίνονται εύκολα διακριτοί οπτικά.

> Sbc

Πειραιάς 0.0000	Κηφισιά 0.0000	Ανθούπολη 0.0000	Ελληνικό 0.0000	Νίκαια 0.0000	Αεροδρόμιο 0.0000
Σταθμός Λαρίσης 0.0092	Μεταξουργείο 0.0220	Φάληρο 0.0317	ΚΑΤ 0.0317	Περιστέρι 0.0317	Αργυρούπολη 0.0317
Κορυδαλλός 0.0317	Κορωπί 0.0317	Μοσχάτο 0.0625	Μαρούσι 0.0625	Άγιος Αντώνιος 0.0625	Αλιμος 0.0625
Αγία Βαρβάρα 0.0625	Παιανία-Κάντζα 0.0625	Καλλιθέα 0.0922	Νερατζιώτισσα 0.0922	Σεπόλια 0.0922	Ηλιούπολη 0.0922
Αγία Μαρίνα 0.0922	Παλλήνη 0.0922	Ταύρος 0.1208	Ειρήνη 0.1208	Άγιος Δημήτριος 0.1208	Αιγάλεω 0.1208
Δουκίσσης Πλακεντίας 0.1208	Πανεπιστήμιο 0.1464	Πετράλωνα 0.1485	Ηράκλειο 0.1485	Δάφνη 0.1485	Ελαιώνας 0.1485
Χαλάνδρι 0.1485	Θησείο 0.1751	Νέα Ιωνία 0.1751	Άγιος Ιωάννης 0.1751	Κεραμεικός 0.1751	Αγία Παρασκευή 0.1751
Πευκακιά 0.2007	Νέος Κόσμος 0.2007	Νομισματοκοπείο 0.2007	Περисσός 0.2253	Συγγρού-Φιξ 0.2253	Χολαργός 0.2253
Ανω Πατήσια 0.2488	Ακρόπολη 0.2488	Εθνική Άμυνα 0.2488	Άγιος Ελευθέριος 0.2714	Κατεχάκη 0.2714	Κάτω Πατήσια 0.2929
Πανόρμου 0.2929	Άγιος Νικόλαος 0.3134	Αμπελόκηποι 0.3134	Μέγαρο Μουσικής 0.3328	Ευαγγελισμός 0.3513	Βικτώρια 0.3963
Αττική 0.4275	Ομόνοια 0.4560	Μοναστηράκι 0.5228	Σύνταγμα 0.5671		

Εικόνα 16: Τιμές Διαμεσότητας για κάθε σταθμό του Μετρό της Αθήνας



Εικόνα 17: Οπτικοποίηση της Διαμεσότητας των σταθμών του Μετρό της Αθήνας

3.3.6 Κεντρικότητα Katz (Katz Centrality)

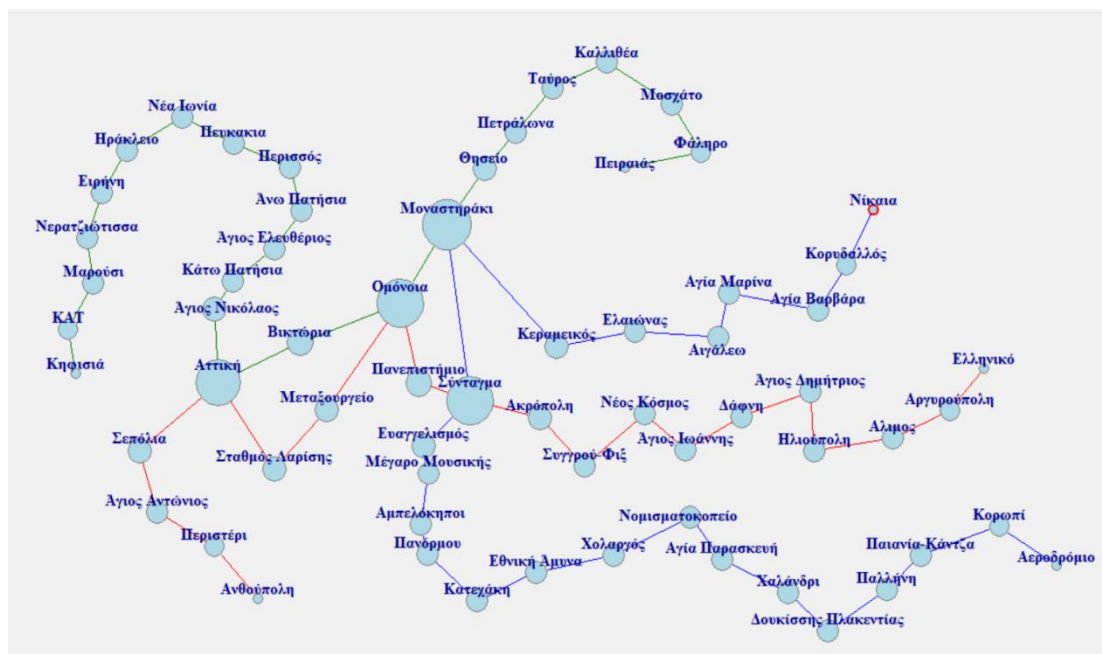
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι τιμές της κεντρικότητας Katz για όλους τους σταθμούς του δικτύου του μετρό της Αθήνας. Η Katz centrality αποτελεί έναν δείκτη που αποτιμά τη συνολική επιρροή κάθε κόμβου, καθώς συνυπολογίζει τόσο τις άμεσες συνδέσεις όσο και τις έμμεσες διαδρομές που διέρχονται από τον εκάστοτε

σταθμό, με φθίνουσα βαρύτητα όσο η απόσταση αυξάνεται. Όπως φαίνεται, οι σταθμοί Μοναστηράκι, Ομόνοια και Σύνταγμα εμφανίζουν αισθητά υψηλότερες τιμές σε σύγκριση με περιφερειακούς σταθμούς, γεγονός που υποδηλώνει τον καθοριστικό τους ρόλο στη διάχυση πληροφορίας και στη διασύνδεση διαφορετικών τμημάτων του δικτύου.

Για την πληρέστερη κατανόηση και την ευκολότερη αποτύπωση των διαφορών που καταγράφονται, στο ακόλουθο γράφημα αποδίδεται οπτικά η κεντρικότητα Katz για κάθε σταθμό. Συγκεκριμένα, το μέγεθος κάθε κόμβου έχει κλιμακωθεί αναλογικά με τη σχετική του τιμή, ώστε οι σταθμοί με μεγαλύτερη επιρροή στο σύνολο του δικτύου να προβάλλονται με μεγαλύτερους κύκλους. Με τον τρόπο αυτό καθίσταται άμεσα ορατό ποιοι κόμβοι διαδραματίζουν πρωτεύοντα ρόλο στη συνολική συνδεσιμότητα και ποιοι λειτουργούν περισσότερο περιφερειακά. Η απεικόνιση αυτή συμπληρώνει τον πίνακα, προσφέροντας μια πιο παραστατική εικόνα της σημασίας κάθε σταθμού σε όρους κεντρικότητας Katz.

> katzs					
Αεροδρόμιο	Κηφισιά	Ελληνικό	Πειραιάς	Νίκαια	Ανθούπολη
1.123724	1.123724	1.123724	1.123724	1.123724	1.123752
Κορωπί	ΚΑΤ	Αργυρούπολη	Φάληρο	Κορυδαλλός	Περστέρι
1.237244	1.237244	1.237244	1.237244	1.237244	1.237516
Παλαιά-Κάντζα	Μαρούσι	Αλίμος	Μοσχάτο	Αγία Βαρβάρα	Παλλήνη
1.248711	1.248711	1.248711	1.248715	1.248715	1.249870
Νερατζιώτισσα	Ηλιούπολη	Καλλιθέα	Αγία Μαρίνα	Πλάκεντίας	Ειρήνη
1.249870	1.249870	1.249903	1.249903	1.249987	1.249987
Αγίος Δημήτριος	Χαλάνδρι	Ηράκλειο	Αγία Παρασκευή	Νέα Ιωνία	Νομισματοκοπείο
1.249987	1.249999	1.249999	1.250000	1.250000	1.250000
Χολαργός	Πεύκακια	Εθνική Άμυνα	Δάφνη	Περισσός	Κατεχάκη
1.250000	1.250000	1.250000	1.250002	1.250003	1.250003
Ανω Πατήσια	Αγίος Ιωάννης	Πανόρμου	Αγίος Ελευθέριος	Νέος Κόσμος	Αμπελόκηποι
1.250027	1.250030	1.250031	1.250272	1.250302	1.250302
Ταύρος	Αιγάλεω	Αγίος Αντώνιος	Κάτω Πατήσια	Συγγρού-Φιξ	Μέγαρο Μουσικής
1.250312	1.250312	1.251404	1.252693	1.252994	1.252994
Πετράλωνα	Ελαιώνας	Σεπόλια	Αγίος Νικόλαος	Ακρόπολη	Ευαγγελισμός
1.253217	1.253217	1.276529	1.276658	1.279635	1.279635
Σταθμός Λαρίσης	Θησείο	Κεραμεικός	Μεταξουργείο	Βικτώρια	Πανεπιστήμιο
1.279648	1.281855	1.281855	1.282594	1.306018	1.308965
Αττική	Σύνταγμα	Ομόνοια	Μοναστηράκι		
1.513885	1.543357	1.546291	1.565336		

Εικόνα 18: Τιμές της Κεντρικότητας Katz για κάθε σταθμό του Μετρό της Αθήνας



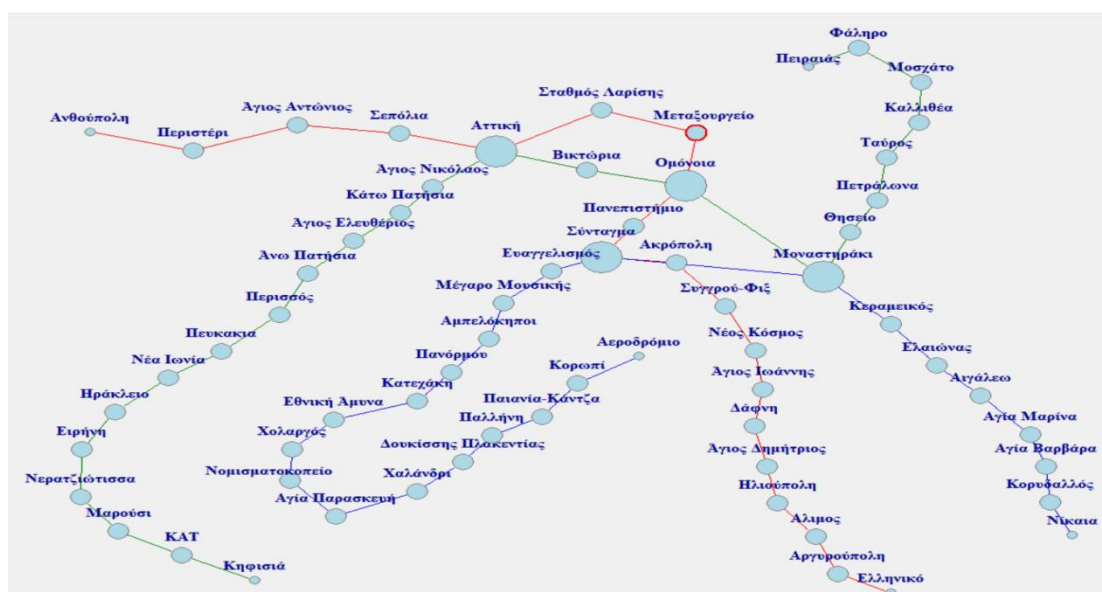
Εικόνα 19: Οπτικοποίηση της Κεντρικότητας Katz των σταθμών του Μετρό της Αθήνας

3.3.7 Βαθμική Κεντρικότητα Page (PageRank Centrality)

Στη συνέχεια για να προσδιοριστούν οι πιο σημαντικοί σταθμοί στο δίκτυο, υπολογίστηκε ο δείκτης κεντρικότητας Pagerank για κάθε κόμβο. Ο δείκτης αυτός λαμβάνει υπόψη τόσο τον αριθμό των συνδέσεων ενός σταθμού όσο και τη σημασία των σταθμών με τους οποίους συνδέεται. Έτσι, οι κόμβοι που συνδέονται με άλλους σημαντικούς κόμβους αποκτούν υψηλότερη τιμή κεντρικότητας. Ιδιαίτερα, οι σταθμοί που λειτουργούν ως κόμβοι ανταπόκρισης, όπως η Ομόνοια, το Σύνταγμα, το Μοναστηράκι και η Αττική εμφανίζονται να διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στη διασύνδεση των υπολοίπων σταθμών και τη διατήρηση της συνοχής του δικτύου. Αυτό αποδεικνύει ότι το δίκτυο παρουσιάζει χαρακτηριστικά ιεραρχικής δομής, όπου οι κεντρικοί σταθμοί ασκούν μεγαλύτερη επίδραση στη συνολική ροή πληροφορίας ή μετακινήσεων. Το εύρημα αυτό είναι συνεπές με την αναμενόμενη λειτουργία ενός συγκοινωνιακού συστήματος, στο οποίο οι κύριοι σταθμοί συγκεντρώνουν μεγαλύτερη κυκλοφορία και λειτουργούν ως βασικά σημεία αναφοράς για τη διαχείριση της κινητικότητας. Ακολουθεί πίνακας με τις επιμέρους τιμές για κάθε σταθμό και ένα διάγραμμα στο οποίο παρουσιάζεται ο οπτικός χάρτης του δικτύου, όπου το μέγεθος κάθε κόμβου αντιστοιχεί στη σχετική του κεντρικότητα Pagerank.

Πειραιάς 0,010	Κηφισιά 0,010	Ανθούπολη 0,010	Ελληνικό 0,010	Νίκαια 0,010	Αεροδρόμιο 0,010
Βικτώρια 0,013	Σταθμός Λαρίσης 0,013	Μεταξουργείο 0,013	Πανεπιστήμιο 0,013	Θησείο 0,014	Άγιος Νικόλαος 0,014
Ακρόπολη 0,014	Κεραμεικός 0,014	Ευαγγελισμός 0,014	Ταύρος 0,015	Πετράλωνα 0,015	Κάτω Πατήσια 0,015
Άγιος Ελευθέριος 0,015	Ανω Πατήσια 0,015	Σεπόλια 0,015	Συγγρού-Φιξ 0,015	Νέος Κόσμος 0,015	Άγιος Ιωάννης 0,015
Αιγάλεω 0,015	Ελαιώνας 0,015	Μέγαρο Μουσικής 0,015	Αμπελόκηποι 0,015	Πανόρμου 0,015	Κατεχάκη 0,015
Καλλιθέα 0,016	Περισσός 0,016	Πευκακιά 0,016	Νέα Ιωνία 0,016	Ηράκλειο 0,016	Ειρήνη 0,016
Νερατζιώτισσα 0,016	Άγιος Αντώνιος 0,016	Δάφνη 0,016	Άγιος Δημήτριος 0,016	Ηλιούπολη 0,016	Αγία Μαρίνα 0,016
Εθνική Άμυνα 0,016	Χολαργός 0,016	Νομισματοκοπείο 0,016	Αγία Παρασκευή 0,016	Χαλάνδρι 0,016	Δουκίσσης Πλακεντίας 0,016
Παλλήνη 0,016	Μοσχάτο 0,017	Μαρούσι 0,017	Περιστερί 0,017	Αλimos 0,017	Αγία Βαρβάρα 0,017
Παλαιά-Κάντζα 0,017	Φάληρο 0,018	KAT 0,018	Αργυρούπολη 0,018	Κορυδαλλός 0,018	Κορυμνί 0,018
Μοναστηράκι 0,024	Ομόνοια 0,024	Σύνταγμα 0,025	Αττική 0,026		

Εικόνα 20: Τιμές της Κεντρικότητας PageRank για κάθε σταθμό του Μετρό της Αθήνας



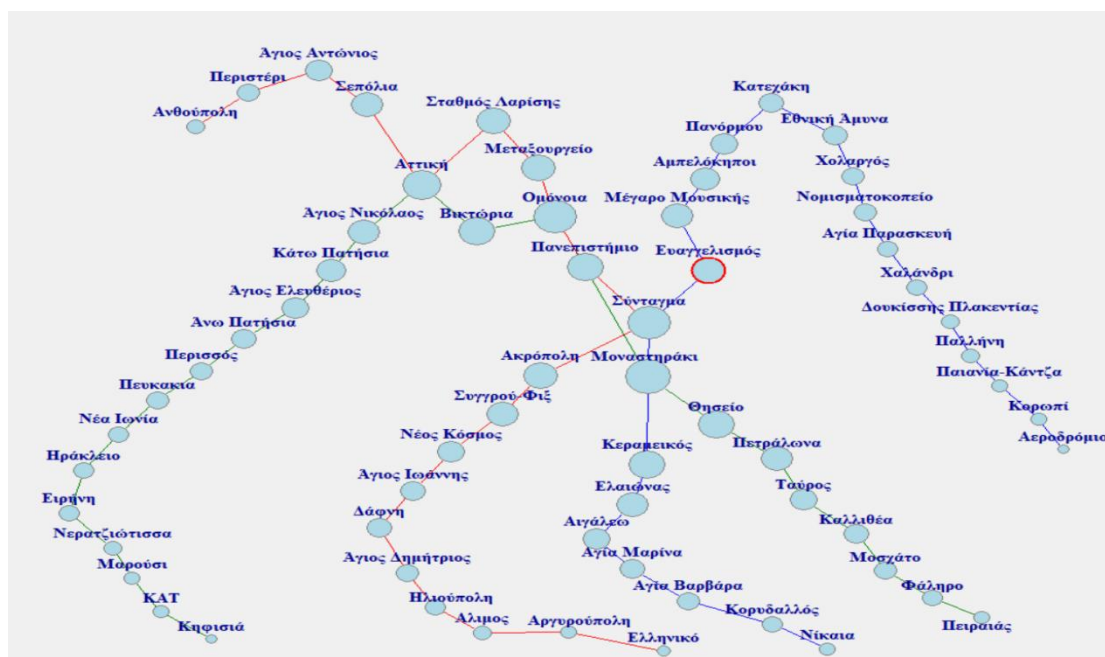
Εικόνα 21: Οπτικοποίηση της Κεντρικότητας PageRank των σταθμών του Μετρό της Αθήνας

3.3.8 Κεντρικότητα Πληροφορίας (Information Centrality)

Η Κεντρικότητα Πληροφορίας είναι ένας δείκτης που μετρά πόσο σημαντικός είναι κάθε κόμβος για την επικοινωνία και τη σύνδεση όλων των υπολοίπων σημείων του δικτύου. Με πιο απλά λόγια, δείχνει πόσο συμβάλλει κάθε σταθμός στη συνολική λειτουργία και διασύνδεση του συστήματος, καθώς και πόσο διευκολύνει τη μεταφορά και τη ροή πληροφορίας μέσα από διαφορετικά μονοπάτια. Στην περίπτωση του Μετρό της Αθήνας, η ανάλυση έδειξε ότι σταθμοί όπως το Μοναστηράκι, το Σύνταγμα, η Ομόνοια και η Αττική έχουν τις υψηλότερες τιμές κεντρικότητας. Αυτό σημαίνει ότι είναι οι πιο κομβικοί και σημαντικοί για την εύρυθμη κυκλοφορία και τη σύνδεση διαφορετικών γραμμών. Αντίθετα, οι σταθμοί που βρίσκονται στις άκρες του δικτύου, όπως το Αεροδρόμιο και η Κηφισιά, παρουσιάζουν μικρότερη κεντρικότητα, αφού εξυπηρετούν κυρίως τοπική μετακίνηση και όχι τη διασύνδεση πολλών διαδρομών. Τα αποτελέσματα αυτά βοηθούν να κατανοήσουμε ποιοι σταθμοί παίζουν καθοριστικό ρόλο και ποιοι έχουν περισσότερο περιφερειακή σημασία μέσα στο δίκτυο.

> sort(info_cent)					
Αεροδρόμιο	Κηφισιά	Ελληνικό	Κορωπί	KAT	Πειραιάς
5.620588	5.677538	6.211715	6.673560	6.738641	6.956498
Νίκαια	Παιανία-Κάντζα	Μαρούσι	Αργυρούπολη	Παλλήνη	Ανθούπολη
6.956498	7.235296	7.310346	7.342253	7.640902	7.694696
Νερατζιώτισσα	Δουκίσσης	Πλακεντίας	Ειρήνη	Φάληρο	Κορυδαλλός
7.728354	7.975983	7.998786	8.079128	8.220732	8.220732
Χαλάνδρι	Ηράκλειο	Ηλιούπολη	Αγία Παρασκευή	Νέα Ίωνια	Νομισματοκοπείο
8.276829	8.400228	8.522252	8.564035	8.714201	8.852460
Αγίος Δημήτριος	Πευκακιά	Μοσχάτο	Αγία Βαρβάρα	Χολαργός	Περιστερί
9.006956	9.039045	9.054058	9.054058	9.155515	9.161838
Περιστός	Εθνική Αμυνα	Δάφνη	Ανω Πατήσια	Καλλιθέα	Αγία Μαρίνα
9.393489	9.487961	9.502764	9.801969	9.820130	9.820130
Κατεχάκη	Αγίος Ιωάννης	Αγίος Ελευθέριος	Αγίος Αντώνιος	Πανόρμου	Ταύρος
9.868888	10.052730	10.302935	10.317405	10.326430	10.654978
Αιγάλεω	Νέος Κόσμος	Αμπελόκηποι	Κάτω Πατήσια	Συγγρού-Φιξ	Σεπόλεια
10.654978	10.712004	10.907383	10.969053	11.575387	11.673952
Πετράλωνα	Ελκιδώνες	Μέγαρο Μουσικής	Αγίος Νικόλαος	Σταθμός Λαρίσης	Μεταξουργείο
11.694953	11.694953	11.701322	11.975601	12.275467	12.768074
Ακρόπολη	Ευαγγελισμός	Θησείο	Κεραμεικός	Πανεπιστήμιο	Βικτώρια
12.858377	12.920119	13.201363	13.201363	13.532129	13.534741
Αττική	Ομόνοια	Σύνταγμα	Μοναστηράκι		
14.004039	15.246706	15.340321	16.059907		

Εικόνα 22: Τιμές της Κεντρικότητας Πληροφορίας για κάθε σταθμό του Μετρό της Αθήνας



Εικόνα 23: Οπτικοποίηση της Κεντρικότητας Πληροφορίας των σταθμών του Μετρό της Αθήνας

3.4 Ιδιότητα Μικροκόσμου (Small World Property)

Κατά τους Watts και Strogatz η ιδιότητα του μικρόκοσμου αποτελεί χαρακτηριστικό των δικτύων τα οποία δε διαφέρουν σημαντικά ως προς τη μέση απόσταση, αλλά ως προς τον συντελεστή σύμπλεξης από το τυχαίο δίκτυο Erdos-Renyi με ίσο αριθμό ακμών και κόμβων. Η μελέτη της ιδιότητας Small World βασίζεται στον υπολογισμό της διαμέτρου, της μέσης απόστασης αλλά και του συντελεστή σύμπλεξης, σε σύγκριση με τις τιμές ενός δείγματος ER δικτύων. Για τον λόγο αυτό δημιουργήσαμε ένα Erdos-Renyi τυχαίο δίκτυο $G(64,65)$ του οποίου η πυκνότητα βρέθηκε ίση με 0.03224206, ίδια με εκείνη του δικτύου του Μετρό της Αθήνας. Επιπλέον, υπολογίστηκε η μέση απόσταση για το δίκτυο του Μετρό και βρέθηκε ίση με 11.02827 ($\cong 11$ έπειτα από στρογγυλοποίηση), ενώ για το αντίστοιχο τυχαίο δίκτυο ήταν 5.71648. Οι δύο προηγούμενες τιμές δεν είναι αρκετά κοντά. Επιπλέον, το δίκτυο του Μετρό έχει συντελεστή σύμπλεξης ίσο με 0, ενώ το αντίστοιχο τυχαίο 0.06324786, υποδηλώνοντας ότι οι κόμβοι στο πραγματικό δίκτυο δεν σχηματίζουν τριγωνικούς δεσμούς. Με βάση τις τιμές που προαναφέρθηκαν και τη μελέτη των Watts και Strogatz, το δίκτυο της Eurovision έχει την ιδιότητα του μικροκόσμου. Επομένως, με βάση τα αποτελέσματα των μετρήσεων, ο δίκτυο του Μετρό δεν διαθέτει ούτε μικρή μέση απόσταση συγκρίσιμη με το τυχαίο δίκτυο, ούτε υψηλότερο τοπικό clustering, και κατά συνέπεια δεν εμφανίζει την ιδιότητα small-world.

3.5 Rich Club Effect

Ο έλεγχος για τον αν το δίκτυο του Μετρό της Αθήνας έχει την ιδιότητα Rich Club έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πίνακας 1: Αποτελέσματα ελέγχου Rich Club

	Ομφαλοί με πάνω από 1 γείτονα	Ομφαλοί με πάνω από 2 γείτονες	Ομφαλοί με πάνω από 3 γείτονες
Edge Density	0.03569268	0.3333333	0.3333333
Vcount	58	4	4
Ecount	59	2	2

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι ο αριθμός των κόμβων με υψηλό βαθμό (πάνω από 2 ή 3 γείτονες) είναι πολύ μικρός, με αποτέλεσμα οι υπογράφοι αυτών των κόμβων να έχουν πολύ λίγες συνδέσεις και μικρό μέγεθος. Ο υπογράφος με κόμβους που έχουν πάνω από 1 γείτονα περιλαμβάνει αρκετούς κόμβους, αλλά η συνολική πυκνότητα ακμών είναι χαμηλή. Αυτό υποδηλώνει ότι το δίκτυο δεν παρουσιάζει έντονο φαινόμενο Rich Club, δηλαδή οι κόμβοι με υψηλό βαθμό δεν συνδέονται μεταξύ τους πιο πυκνά από ό,τι αναμένεται τυχαία. Συνεπώς, δεν υπάρχει ισχυρή ένδειξη για την ύπαρξη rich Club Effect στο δίκτυο του Μετρό της Αθήνας με βάση τα παρόντα δεδομένα.

4 Συμπεράσματα

4.1 Γενικά Συμπεράσματα

Η παρούσα πτυχιακή εργασία εστίασε στη μελέτη, ανάλυση και αξιολόγηση του συγκοινωνιακού δικτύου του Μετρό της Αθήνας μέσω της θεωρητικής προσέγγισης των κοινωνικών δικτύων και της θεωρίας γράφων. Μέσα από τη μοντελοποίηση του δικτύου ως γράφου και την εφαρμογή ποικίλων μετρικών κεντρικότητας, επιχειρήθηκε η ανάδειξη της δομής, της λειτουργίας και της σχετικής σημασίας των κόμβων του συστήματος, με στόχο την εξαγωγή ποιοτικών και ποσοτικών συμπερασμάτων σχετικά με την αποδοτικότητα και τη δυναμική του.

Καταρχάς, διαπιστώθηκε ότι το δίκτυο χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερη αραιότητα, όπως καταδεικνύεται από την τιμή της πυκνότητας ($\text{density} \cong 0.032$). Το εύρημα αυτό είναι απολύτως σύμφωνο με την πρακτική φύση των συγκοινωνιακών δικτύων, όπου οι κόμβοι (σταθμοί στο παρόν δίκτυο) συνδέονται κυρίως με γειτονικούς σταθμούς και όχι με το σύνολο των κόμβων του συστήματος. Η ιδιότητα αυτή, αν και περιορίζει τη συνολική διασυνδεσιμότητα, ενισχύει τη λειτουργική σταθερότητα και μειώνει την πολυπλοκότητα του δικτύου.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή των δεικτών κεντρικότητας, η οποία ανέδειξε συγκεκριμένους σταθμούς, όπως το Σύνταγμα, η Ομόνοια και το Μοναστηράκι, ως κρίσιμα σημεία του δικτύου, δεδομένου ότι κατέχουν υψηλές τιμές στους περισσότερους δείκτες κεντρικότητας (Degree Centrality, Closeness Centrality, Betweenness Centrality, Katz Centrality, PageRank Centrality και Eigenvector Centrality). Οι σταθμοί αυτοί λειτουργούν ως βασικοί κόμβοι ανταπόκρισης και διευκολύνουν τη ροή πληροφορίας και μετακινήσεων μεταξύ διαφορετικών περιοχών της πόλης, συμβάλλοντας καίρια στη διατήρηση της συνοχής του συστήματος.

Επιπλέον, από την ανάλυση της βαθμικής κατανομής, προέκυψε ότι το δίκτυο δεν ακολουθεί την κατανομή Poisson, όπως συμβαίνει σε ιδανικά τυχαία δίκτυα. Η σημαντική απόκλιση που παρατηρήθηκε ενισχύει την υπόθεση ότι το υπό μελέτη σύστημα παρουσιάζει ετερογένεια και ιεραρχική οργάνωση. Το στοιχείο αυτό είναι χαρακτηριστικό των πραγματικών κοινωνικών ή συγκοινωνιακών δικτύων, όπου ορισμένοι κόμβοι κατέχουν δυσανάλογα μεγαλύτερη σημασία σε σχέση με άλλους.

Αναφορικά με τον δείκτη Rich Club Coefficient, διαπιστώθηκε ότι δεν παρατηρείται σημαντικό φαινόμενο "rich club", δηλαδή οι κόμβοι με υψηλό βαθμό δεν εμφανίζουν έντονη μεταξύ τους διασύνδεση. Το εύρημα αυτό ερμηνεύεται ως απόρροια της κατασκευής και της λειτουργικής διάρθρωσης του συγκοινωνιακού δικτύου, όπου οι βασικοί κόμβοι έχουν ευρεία σύνδεση με δευτερεύοντες, αλλά όχι απαραίτητα μεταξύ τους.

Παράλληλα, ερευνήθηκε και το ενδεχόμενο το δίκτυο να ικανοποιεί τα κριτήρια του φαινομένου Small-World. Ωστόσο, η ανάλυση έδειξε ότι δεν πληροί τις σχετικές προϋποθέσεις, καθώς παρουσιάζει μικρή τιμή τοπικού συντελεστή σύμπλεξης (clustering coefficient) και η μέση απόσταση μεταξύ κόμβων δεν είναι επαρκώς μικρή. Το γεγονός αυτό ενισχύει την άποψη ότι τα συγκοινωνιακά δίκτυα τείνουν να εμφανίζουν τοπολογίες που αντανakλούν περισσότερο την ανάγκη για λειτουργική

απλότητα και γεωγραφικό περιορισμό παρά την αυθόρμητη σύνδεση που παρατηρείται σε κοινωνικά ή πληροφοριακά δίκτυα.

Συνοψίζοντας, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης καταδεικνύουν τόσο την πολυπλοκότητα όσο και τη δομημένη αρχιτεκτονική του συγκοινωνιακού δικτύου της Αθήνας. Η αξιοποίηση κατάλληλων μεθοδολογικών εργαλείων επέτρεψε την αντικειμενική αποτίμηση της σημασίας των επιμέρους κόμβων και συνέβαλε στην εις βάθος κατανόηση της λειτουργικής δυναμικής του συστήματος. Τα παραχθέντα αποτελέσματα μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμο υπόβαθρο για τη χάραξη στρατηγικών που αφορούν τη βελτίωση της ροής, την ενίσχυση της ανθεκτικότητας απέναντι σε ενδεχόμενες αστοχίες ή κρίσεις, καθώς και τον αποτελεσματικό σχεδιασμό μελλοντικών επεκτάσεων. Εν γένει, η ενσωμάτωση της θεωρίας γράφων και των συναφών μετρικών αποδεικνύεται ουσιώδης για την ερμηνεία, την ανάλυση και τη βελτιστοποίηση περίπλοκων συστημάτων αστικών μεταφορών.

4.2 Μελλοντική Διερεύνηση

Η παρούσα εργασία εστίασε στην ανάλυση του συγκοινωνιακού δικτύου του Μετρό της Αθήνας με τη χρήση μετρικών κεντρικότητας και τοπολογικών χαρακτηριστικών, προσφέροντας σημαντικές ενδείξεις για τη δομή και τη λειτουργία του συστήματος. Ωστόσο, υπάρχουν αρκετές προοπτικές για περαιτέρω επιστημονική διερεύνηση και επέκταση της μελέτης. Πρώτον, θα μπορούσε να εξεταστεί η δυναμική εξέλιξη του δικτύου σε βάθος χρόνου, αναλύοντας ιστορικά δεδομένα μεταβολών στη δομή του, καθώς και τις επιπτώσεις από παρεμβάσεις, όπως η προσθήκη ή η αφαίρεση σταθμών. Η χρονική διάσταση προσφέρει τη δυνατότητα μελέτης της ανθεκτικότητας και της ευελιξίας του συστήματος σε μεταβολές. Δεύτερον, θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη η ενσωμάτωση πραγματικών δεδομένων κίνησης επιβατών, ώστε να συνδυαστεί η τοπολογική ανάλυση με λειτουργικά στοιχεία, όπως ο φόρτος μετακίνησης ανά σταθμό ή η συχνότητα δρομολογίων. Ένα τέτοιο πολυεπίπεδο μοντέλο θα καθιστούσε την ανάλυση πιο ρεαλιστική και θα παρείχε πληρέστερες ενδείξεις για τον σχεδιασμό πολιτικής μεταφορών. Επιπλέον, η διερεύνηση θα μπορούσε να επεκταθεί στη σύγκριση του δικτύου του Μετρό της Αθήνας με αντίστοιχα συστήματα άλλων μεγάλων ευρωπαϊκών χωρών, αξιοποιώντας κοινά μετρικά και δείκτες. Μια τέτοια συγκριτική προσέγγιση θα αναδείκνυε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του αθηναϊκού δικτύου και θα προσέφερε τεκμηριωμένες κατευθύνσεις για βελτιώσεις με βάση διεθνείς βέλτιστες πρακτικές. Τέλος, στο πλαίσιο της σύγχρονης ερευνητικής δραστηριότητας, θα μπορούσε να διερευνηθεί και η εφαρμογή αλγορίθμων μηχανικής μάθησης και προσομοίωσης, με στόχο την πρόβλεψη πιθανών σημείων συμφόρησης, τη βελτιστοποίηση της κυκλοφορίας ή ακόμη και την υποστήριξη στη λήψη αποφάσεων για την επέκταση του δικτύου. Η συνέχιση της μελέτης προς τις ανωτέρω κατευθύνσεις εκτιμάται ότι θα ενισχύσει περαιτέρω την κατανόηση και την αποδοτική διαχείριση των σύγχρονων συστημάτων αστικών συγκοινωνιών.

Βιβλιογραφία

- [1] Reinhard Diestel (2005). Graph Theory. Springer.
- [2] Opsahl, T., Agneessens, F., & Skvoretz, J. (2010), “Node centrality in weighted networks: Generalized degree and shortest paths”. Social Networks, 245-251.
- [3] Erdos, P., and Renyi, A. (1960), “On the evolution of random graphs”, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. 5, 17-61.
- [4] Barabási, A. L., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. Science, 286 (5439), 509-512.
- [5] Bonacich, P., & Lloyd, P. (2001). Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. Social Networks. 23(3), 191-201.
- [6] Borgatti, S. P. (2005). Centrality and network flow. Social Networks. 27(1) , 55–71.
- [7] Freeman L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. Sociometry Vol. 40(1), 35-41
- [8] Ghosh, R., Lerman, K. (2011). A Parameterized Centrality Metric for Network Analysis. Physical Review E. 83(6), <http://arxiv.org/abs/1010.4247>.
- [9] Koschützki, D., & Schreiber, F. (2004). Comparison of Centralities for Biological Networks. In German Conference on Bioinformatics , 53, 199-206.
- [10] Latora, V., & Marchiori, M. (2001). Efficient behavior of small-world networks. Physical review letters. 87(19), 198701.
- [11] Newman, M. (2005). A measure of betweenness centrality based on random walks. Social Networks. 27(1), 39-54.
- [12] Rusinowska, A., Berghammer, R., De Swart, H., Grabisch, M., (2011). Social Networks: Prestige, Centrality, and Influence. In RAMICS 2011, Springer(Ed.) 22-39.
- [13] Spizzirri, L. 2011. Justification and Application of Eigenvector Centrality.
- [14] Wilson, R. J. (1996). Introduction to graph theory. Harlow: Longman.
- [15] Μποζάνης Π., “Διακριτά μαθηματικά και εφαρμογές τους” [βιβλίο], Γραφήματα [Κεφάλαιο συγγράματος], Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.

- [16] Rossi, R. A., Ahmed, N. K. (2015). The Network Data Repository with Interactive Graph Analytics and Visualization.
- [17] Γκόγκογλου Βασίλειος, Διπλωματική εργασία: Διπλωματική εργασία: «Ανάλυση online κοινωνικών δικτύων. Μια εφαρμογή σε δίκτυο από το Youtube», Θεσσαλονίκη, 2016.
- [18] Γρηγοριάδης Ιωάννης, Διπλωματική εργασία: “Μέτρα σε δίκτυα-ιδιότητες και εφαρμογές”, Θεσσαλονίκη, 2015, 15-19, 31-37.
- [19] Λιάρου Μ., Διπλωματική εργασία: “Αξιοποίηση τυχαίων γραφημάτων για δίκτυα συναγορών. Ανάλυση και οπτικοποίηση σε πραγματικά δεδομένα της Amazon”, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο, Αθήνα, 2018.
- [20] Μπιτισκώκος Λ., Μεταπτυχιακή εργασία: “Μελέτες επιδραστικότητας χρηστών κοινωνικών δικτύων”, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Αθήνα, 2022.
- [21] Γεωργίου Δ., Αντωνίου Ε., Χατζημιχαηλίδης Α., “Γράφοι και Εφαρμογές αυτών”, [Κεφάλαιο Συγγράματος] στο Γεωργίου Δ., Αντωνίου Ε., Χατζημιχαηλίδης Α. (2015) “Διακριτές μαθηματικές δομές για την επιστήμη των υπολογιστών” , [ηλεκτρ. Βιβλ.], Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, κεφ 5 διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/11419/461>.
- [22] Σωτήριος Δ. Γκουδινούδης, Διονύσιος Ι. Φωτόπουλος, Διπλωματική εργασία: “Εξελισσόμενα δίκτυα στο χρόνο: Η περίπτωση ενός δικτύου συνεργασίας επιστημόνων”, Αθήνα, 2012.
- [23] Μωυσιάδης Πολυχρόνιος, Καραγιάννης Βασίλειος, Διαφάνειες Μαθήματος με τίτλο “Τυχαία Γραφήματα-Μικρόκοσμοι και Αυτοόμοια Δίκτυα”, Θεσσαλονίκη, 2020.

Παράρτημα Α: Κώδικας R

```
# Φόρτωση βιβλιοθήκης
library(igraph)
library(ggraph)
library(tidygraph)
install.packages("vcd")
library(vcd)

# Γραμμή 1 (ΗΣΑΠ) Πειραιάς - Κηφισιά
edges_line1 <- c(
  "Πειραιάς", "Φάληρο",
  "Φάληρο", "Μοσχάτο",
  "Μοσχάτο", "Καλλιθέα",
  "Καλλιθέα", "Ταύρος",
  "Ταύρος", "Πετράλωνα",
  "Πετράλωνα", "Θησείο",
  "Θησείο", "Μοναστηράκι",
  "Μοναστηράκι", "Ομόνοια",
  "Ομόνοια", "Βικτώρια",
  "Βικτώρια", "Αττική",
  "Αττική", "Άγιος Νικόλαος",
  "Άγιος Νικόλαος", "Κάτω Πατήσια",
  "Κάτω Πατήσια", "Άγιος Ελευθέριος",
  "Άγιος Ελευθέριος", "Άνω Πατήσια",
  "Άνω Πατήσια", "Περισσός",
  "Περισσός", "Πευκακιά",
  "Πευκακιά", "Νέα Ιωνία",
  "Νέα Ιωνία", "Ηράκλειο",
  "Ηράκλειο", "Ειρήνη",
  "Ειρήνη", "Νερατζιώτισσα",
  "Νερατζιώτισσα", "Μαρούσι",
  "Μαρούσι", "ΚΑΤ",
  "ΚΑΤ", "Κηφισιά"
)

# Γραμμή 2 (Κόκκινη) Ανθούπολη - Ελληνικό
edges_line2 <- c(
  "Ανθούπολη", "Περιστερί",
  "Περιστερί", "Άγιος Αντώνιος",
  "Άγιος Αντώνιος", "Σεπόλια",
  "Σεπόλια", "Αττική",
  "Αττική", "Σταθμός Λαρίσης",
  "Σταθμός Λαρίσης", "Μεταξουργείο",
  "Μεταξουργείο", "Ομόνοια",
  "Ομόνοια", "Πανεπιστήμιο",
```

```

"Πανεπιστήμιο", "Σύνταγμα",
"Σύνταγμα", "Ακρόπολη",
"Ακρόπολη", "Συγγρού-Φιξ",
"Συγγρού-Φιξ", "Νέος Κόσμος",
"Νέος Κόσμος", "Άγιος Ιωάννης",
"Άγιος Ιωάννης", "Δάφνη",
"Δάφνη", "Άγιος Δημήτριος",
"Άγιος Δημήτριος", "Ηλιούπολη",
"Ηλιούπολη", "Αλιμος",
"Αλιμος", "Αργυρούπολη",
"Αργυρούπολη", "Ελληνικό"
)

# Γραμμή 3 (Μπλε) Νίκαια - Αεροδρόμιο
edges_line3 <- c(
  "Νίκαια", "Κορυδαλλός",
  "Κορυδαλλός", "Αγία Βαρβάρα",
  "Αγία Βαρβάρα", "Αγία Μαρίνα",
  "Αγία Μαρίνα", "Αιγάλεω",
  "Αιγάλεω", "Ελαιώνας",
  "Ελαιώνας", "Κεραμεικός",
  "Κεραμεικός", "Μοναστηράκι",
  "Μοναστηράκι", "Σύνταγμα",
  "Σύνταγμα", "Ευαγγελισμός",
  "Ευαγγελισμός", "Μέγαρο Μουσικής",
  "Μέγαρο Μουσικής", "Αμπελόκηποι",
  "Αμπελόκηποι", "Πανόρμου",
  "Πανόρμου", "Κατεχάκη",
  "Κατεχάκη", "Εθνική Άμυνα",
  "Εθνική Άμυνα", "Χολαργός",
  "Χολαργός", "Νομισματοκοπείο",
  "Νομισματοκοπείο", "Αγία Παρασκευή",
  "Αγία Παρασκευή", "Χαλάνδρι",
  "Χαλάνδρι", "Δουκίσσης Πλακεντίας",
  "Δουκίσσης Πλακεντίας", "Παλλήνη",
  "Παλλήνη", "Παιανία-Κάντζα",
  "Παιανία-Κάντζα", "Κορωπί",
  "Κορωπί", "Αεροδρόμιο"
)

edges_all <- c(edges_line1, edges_line2, edges_line3)

# Δημιουργία γράφου
g <- graph(edges_all, directed=FALSE)

# Χρώματα ακμών ανά γραμμή
E(g)$color <- "black"
E(g)$width <- 3

# Ακμές γραμμής 1: Πρώτες

```

```

E(g)$color[1:(length(edges_line1)/2)] <- "green"
# Γραμμή 2: αμέσως μετά
E(g)$color[(length(edges_line1)/2 + 1):(length(edges_line1)/2 +
length(edges_line2)/2)] <- "red"
# Γραμμή 3: οι υπόλοιπες
E(g)$color[(length(edges_line1)/2 + length(edges_line2)/2 + 1):ecount(g)] <- "blue"

tkplot(
  g,
  vertex.size=6,
  vertex.color="lightgray",
  vertex.label.color="black",
  edge.width=E(g)$width,
  main="Δίκτυο Μετρό Αθήνας",
  layout=layout_with_fr
)

# Δημιουργία γράφου όπως στο προηγούμενο σου script
edges_all <- c(edges_line1, edges_line2, edges_line3)
g <- graph(edges_all, directed=FALSE)

# Φτιάχνουμε ένα data frame ακμών με το χρώμα ανά γραμμή
edges_df <- as_data_frame(g, what = "edges")

# Προσθήκη χρώματος στις ακμές ανάλογα με γραμμή
edges_df$color <- NA
edges_df$color[1:(length(edges_line1)/2)] <- "green"
edges_df$color[(length(edges_line1)/2 + 1):(length(edges_line1)/2 +
length(edges_line2)/2)] <- "red"
edges_df$color[(length(edges_line1)/2 + length(edges_line2)/2 + 1):nrow(edges_df)]
<- "blue"
g_tidy <- tbl_graph(nodes = as_data_frame(g, what="vertices"), edges = edges_df,
directed = FALSE)
ggraph(g_tidy, layout = "fr") +
  geom_edge_link(aes(color = color), edge_width = 1.5) +
  geom_node_point(size = 4, color = "gray") +
  geom_node_text(aes(label = name), repel = TRUE, size = 3) +
  scale_edge_color_identity() +
  theme_void() +
  ggtitle("Δίκτυο Μετρό Αθήνας")

legend(
  "topleft",
  legend=c("Γραμμή 1 (HΣΑΠ)", "Γραμμή 2 (Κόκκινη)", "Γραμμή 3 (Μπλε)"),
  col=c("green", "red", "blue"),
  lty=1,

```

```

lwd=3,
bty="n"
)

summary(g_tidy)
vcount(g_tidy)
ecount(g_tidy)

graph.density(g_tidy)
# Υπολογισμός μετρικών κεντρικότητας (προαιρετικά)

# Υπολογισμός βαθμικής κεντρικότητας
degree centrality <- degree(g)

# Rescale μεγέθους κόμβων
rescaled_size <- scales::rescale(degree centrality, to=c(5,20))

# Δημιουργία πιο αραιού layout
layout_fr <- layout_with_fr(
  g,
  niter = 2000,
  area = vcount(g)^3
)

# Σχεδίαση γραφήματος Degree Centrality
tkplot(
  g,
  layout = layout_with_kk(g),
  vertex.size = rescaled_size,
  vertex.color = "lightblue",
  vertex.label.cex = 0.8,
  vertex.label.color = "black",
  edge.width = 2,
  main = "Degree Centrality"
)

dc<-degree(g_tidy, mode = "all", loops = F,
           normalized = T)
sort(dc)

# Compute the normalized degree (number of neighbors) for each vertex
( dcgFN <- degree(g_tidy,
  mode = "all",
  loops = F,
  normalized = TRUE) )      # between 0 and 1

dcgFNS <- rev(sort( dcgFN )) # round to 3 digits
dcgFNS                      # and sort

```

```

# Descriptive Statistics
#dcgF0 <- dcgF[dcgF!=0] # without 0

# Min, Max, Median, Mean, SD, CV

( min.de <- min ( dcgFNS ) )
( max.de <- max ( dcgFNS ) )
( med.de <- median ( dcgFNS ) )
( mean.de <- mean ( dcgFNS ) )
( sd.de <- sd ( dcgFNS ) )
( cv.de <- round (100 * sd (dcgFNS) / mean ( dcgFNS ) , 2) )

# see also : summary ( dcgFNS )
summary ( dcgFNS )

# Degree distribution from 'igraph'
dd<-degree_distribution(g_tidy, cumulative = T) # Cumulative

# Make the histogram
par(mfrow=c(1,2))
hist(dcgFN,
     breaks="Sturges",
     col="blue",
     xlab="Degree",
     ylab="Frequency",
     main="Distribution of degree centrality")

plot(dd,
     xlab="degree",
     ylab="CCDF",
     pch=19,
     cex=1,
     col="blue",
     main = "Complementary Cumulative Distribution, 1-F(x)")

#####katanomh twn vathmvn
erGd <- degree(g_tidy)
summary(erGd )

# standard deviation
sd(erGd )
# coefficient of variation
cverG <-sd(erGd )*100/mean(erGd );cverG

```

```

#make a data frame with degree distribution
erGdist <-table(erGd) ; erGdist
vert <-as.integer(names(erGdist )) ## names are the number of vertices
erGdistdf<- data.frame( "degrees" = vert,
                        "number of vertices" = as.vector(erGdist ) )
erGdistdf ## frequency distribution

derG<-degree_distribution(g_tidy, cumulative = FALSE)
par(mfrow=c(1,1))
plot(0:max(degree(g_tidy)),derG, xlab="degree", ylab="freq");
hist(erGd , freq=FALSE, right = FALSE, xlab="degree", ylab="freq")

par(mfrow=c(1,1))
gfp<-goodfit(erGd ,type= "poisson",method= "ML")
summary(gfp)
plot(gfp,main="Count data vs Poisson distribution")

# Eigenvector Centrality

# Compute normalized eigenvector centrality
ecgFN<-eigen_centrality(g_tidy,
                        directed = FALSE,
                        scale = TRUE,
                        weights = NA) # normalized (max <= 1)
ecgFN
str(ecgFN) # the result is a list
ecgFN$vector
ecgFNS <- rev(sort(round ( ecgFN$vector, 3) )) # round to 3 digits
ecgFNS # and sort

# Descriptive Statistics
# vector0 <- ecgFN$vector[ ecgFN$vector != 0] # without 0

# Min, Max, Median, Mean, SD, CV

( min.ev <- min ( ecgFNS ) )
( max.ev <- max ( ecgFNS ) )
( med.ev <- median ( ecgFNS ) )
( mean.ev <- mean ( ecgFNS ) )
( sd.ev <- sd ( ecgFNS ) )
( cv.ev <- round (100 * sd (ecgFNS) / mean ( ecgFNS ) , 2) )

# see also : summary ( ecgFNS )
summary ( ecgFNS )

hist(ecgFNS,
     breaks="Sturges",

```

```

col="blue",
xlab="Degree",
ylab="Frequency",
main="Distribution of eigenvector centrality")

# Υπολογισμός closeness centrality

cc05<-round(closeness(g_tidy,
                      weights = NA, normalized = T), 3)
scc05<-sort(cc05)
scc05

tkplot(g_tidy ,
       edge.width=1,
       vertex.shape="circle",
       vertex.color="lightblue",
       vertex.frame.color=V(g_tidy)$color,
       vertex.size=rescaled_size,
       vertex.label=V(g_tidy)$name,
       vertex.label.font=2,
       vertex.label.cex=1,
       vertex.label.dist=1,
       vertex.label.degree=-pi/2,
       main="Closeness Centrality")

hist(cc05b,
     breaks="Sturges",
     col="blue",
     xlab="Out-Closeness centrality",
     ylab="Frequency",
     main="Histogram of closeness centrality")

# Betweenness Centrality (directed network)
bc<-round(betweenness(g_tidy,
                      directed = FALSE,
                      weights = NA,
                      nobigint = TRUE,
                      normalized = TRUE),4)
bc
Sbc <- sort(bc)
Sbc

tkplot(g_tidy ,
       vertex.shape="circle",

```

```

vertex.color="lightblue",
vertex.frame.color="grey",
vertex.size=rescaled_size,
vertex.label=V(g_tidy)$name,
vertex.label.font=2,
vertex.label.cex=1,
vertex.label.dist=0.5,
vertex.label.degree=-pi/2,
main = "Betweenness Centrality")

## Υπολογισμός katz centrality
katz <- alpha_centrality(
  g_tidy,
  alpha = 0.1,      # Παράμετρος attenuation

  tol = 1e-7        # Ανοχή σύγκλισης
)

katzs<- sort(katz)
katzs

katz_scaled <- (katz - min(katz)) / (max(katz) - min(katz)) # τιμές στο [0,1]
vertex_sizes <- 5 + katz_scaled * 20 # Προσαρμογή μεγέθους (5 έως 25)

tkplot(g_tidy ,
  vertex.shape="circle",
  vertex.color="lightblue",
  vertex.frame.color="grey",
  vertex.size=vertex_sizes,
  vertex.label=V(g_tidy)$name,
  vertex.label.font=2,
  vertex.label.cex=1,
  vertex.label.dist=0.5,
  vertex.label.degree=-pi/2,
  main = "Katz Centrality")

##PageRank Centrality
pg <- page_rank(g_tidy)
sort(round(pg$vector,3))

sizpg05 <- scales::rescale(pg, to=c(5,20))
sizpg05

tkplot(g_tidy,
  vertex.shape="circle",
  vertex.frame.color="grey",
  vertex.color="lightblue",
  vertex.size=sizpg05,
  vertex.label=V(g_tidy)$name,

```

```

vertex.label.font=2,
vertex.label.cex=1,
vertex.label.dist=1,
vertex.label.degree=-pi/2,
edge.arrow.size=0.2,
main="PageRank Centrality")

#κεντρικότητα πληροφορίας
d <- distances(g_tidy)
inv_d <- 1 / d
inv_d[is.infinite(inv_d)] <- 0
info_cent <- rowSums(inv_d)
sort(info_cent)

sizpg05 <- scales::rescale(info_cent, to=c(5,20))
sizpg05

tkplot(g_tidy,
  vertex.shape="circle",
  vertex.frame.color="grey",
  vertex.color="lightblue",
  vertex.size= sizpg05,
  vertex.label=V(g_tidy)$name,
  vertex.label.font=2,
  vertex.label.cex=1,
  vertex.label.dist=0.8,
  vertex.label.degree=-pi/2,
  edge.arrow.size=0.2,
  main="Information Centrality")

#Let's make an ER random graph G(64, 65)

erG <- sample_gnm(64, 65,
  directed = FALSE, loops = FALSE)

is.simple(erG)          ## OK !!
edge_density(erG)
#
layerG<-layout_with_fr(erG)  ## get the coordinates
V(erG)$x <-layerG[,1]
V(erG)$x <-layerG[,2]      ## use them for subgraphs

summary(erG)

clerG<-components(erG); erG      ## components info
clerG$no      ## ..... components
clerG$size    ## size of each component

```

```

sort(clerG$size)
clerG$membership          ## nodes in each component

vgnerG<-vcount(erG)       ## components' descriptives

aplg0e<-mean_distance(erG, directed=FALSE, unconnected=FALSE) ; aplg0e

trgFe <- round(transitivity(erG,
                           type = "average",
                           weights = NULL,
                           isolates = "zero"), 3)

mean_distance <- mean_distance(g_tidy, directed = FALSE, unconnected = TRUE)

mean_distance

mean_distance2 <- mean_distance(erG, directed = FALSE, unconnected = TRUE)

mean_distance2

clustering_coeff_local <- transitivity(erG, type = "average")

clustering_coeff_local

clustering_coeff_local2 <- transitivity(g_tidy, type = "average")

clustering_coeff_local2

rccg10<-induced_subgraph(g_tidy,V(g_tidy)[degree(g_tidy)>2])

summary(rccg10)

plot(rccg10,
     edge.color="steelblue1",
     edge.width=1,
     vertex.shape="circle",
     vertex.frame.color="red1",
     vertex.color="red1",
     vertex.size=5,
     vertex.label=V(rccg10)$name,
     vertex.label.dist=0.8,
     vertex.label.font=4,
     vertex.label.cex=1,
     vertex.label.color="black", main="Hubs with more than 1 collaborators")

```

```
edge_density(rccg10)
vcount(rccg10)
ecount(rccg10)
is_connected(rccg10)
```