



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΥΝΤΗΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

υπό
ΣΤΕΦΑΝΟΥ ΠΟΥΛΗΜΕΝΟΥ

Διπλωματική Εργασία

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για
την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2025



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΥΝΤΗΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

υπό
ΣΤΕΦΑΝΟΥ ΠΟΥΛΗΜΕΝΟΥ

Διπλωματική Εργασία

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για
την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2025

© 2025 Στέφανος Πουλημένος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής: Παντελής Δημήτριος

Δεύτερος Εξεταστής: Αμπουντώλας Κωσταντίνος

Τρίτος Εξεταστής: Λυμπερόπουλος Γιώργος

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς και θερμές ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, κ. Δημήτρη Παντελή, για την πολύτιμη καθοδήγηση, τη διαρκή υποστήριξη και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της απαιτητικής διαδρομής. Η συνεργασία μαζί του υπήρξε για μένα πολύτιμο μάθημα, όχι μόνο σε ακαδημαϊκό αλλά και σε προσωπικό επίπεδο.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στους γονείς μου, για την ανιδιοτελή τους αγάπη, την αδιάκοπη στήριξη και την αμέριστη εμπιστοσύνη που μου δείχνουν σε κάθε μου βήμα. Χωρίς την ηθική, συναισθηματική και υλική συμπαράστασή τους, η πορεία μου μέχρι εδώ δεν θα ήταν εφικτή. Η παρούσα εργασία αφιερώνεται τιμητικά σε αυτούς, ως ελάχιστη ένδειξη ευγνωμοσύνης και βαθιάς εκτίμησης.

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΥΝΤΗΡΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΠΟΥΛΗΜΕΝΟΣ

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2025

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Δημήτρης Παντελής

Περίληψη

Η εργασία αναπτύσσει ένα ενιαίο θεωρητικό και πρακτικό πλαίσιο για τη βέλτιστη συντήρηση τεχνικών συστημάτων, με έμφαση στις πολιτικές αντικατάστασης. Η συντήρηση αντιμετωπίζεται πλέον ως κρίσιμος παράγοντας ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος για οργανισμούς που στηρίζονται σε υψηλή αξιοπιστία και αποδοτικότητα. Αρχικά ορίζονται οι βασικές έννοιες της ανάλυσης (σύστημα – υποσύστημα – μονάδα) και καταγράφονται οι κύριες μορφές εξαρτήσεων που επηρεάζουν τη λήψη αποφάσεων. Η εργασία εμβαθύνει σε κλασικές πολιτικές αντικατάστασης, οι οποίες μελετώνται σε περιβάλλοντα όπου η αστοχία ακολουθεί κατανομή Weibull και κύκλοι εργασιών είναι εκθετικοί. Αναλύονται τόσο οι πολιτικές τύπου ηλικίας και διάρκειας κύκλου και παρουσιάζονται περιοδικές εκδοχές αυτών, λαμβάνοντας υπόψη την έννοια του minimal repair. Σε επόμενο στάδιο αναλύονται συνδυαστικές μέθοδοι και σύγκριση με συμβατικές μεθόδους. Τέλος, η εργασία εμπλουτίζεται με υλοποιήσεις σε MATLAB, όπου παρουσιάζεται κώδικας που επιτρέπει την εφαρμογή, δοκιμή και σύγκριση των διαφορετικών πολιτικών αντικατάστασης σε προσομοιωτικά σενάρια.

Λέξεις-κλειδιά: Συντήρηση τεχνικών συστημάτων, Weibull αποτυχίες, εκθετικοί κύκλοι εργασιών, Ελάχιστη επισκευή (minimal repair), Βελτιστοποίηση (T^* , N^*), Τροποποιημένο κόστος, Ποινή διακοπής κύκλου.

Optimal Maintenance of Production Units

STEFANOS POULIMENOS

Department of Mechanical Engineering, University of Thessaly, 2025

Supervisor: Pandelis Dimitrios

Abstract

The paper develops a unified theoretical and practical framework for the optimal maintenance of technical systems, with emphasis on replacement policies. Maintenance is now treated as a critical factor of competitive advantage for organizations that rely on high reliability and efficiency. Initially, the basic concepts of analysis (system – subsystem – unit) are defined and the main forms of dependencies that affect decision making are recorded. The paper goes deeper into classical replacement policies, which are studied in environments where failure follows a Weibull distribution and work cycles are exponential. Both age-based and cycle-based policies are analyzed and periodic versions of them are presented, taking into account the concept of minimal repair. At the next stage, combinatorial methods are analyzed and compared with conventional methods. Finally, the paper is enriched with implementations in MATLAB, where code is presented that allows the application, testing and comparison of the different replacement policies in simulation scenarios.

Key words: Maintenance of technical systems, Weibull failures, exponential cycles, minimal repair, optimization (T^* , N^*), modified cost, cycle interruption penalty.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Η Σύγχρονη Συντήρηση ως Μέσο Ανταγωνιστικού Πλεονεκτήματος	1
1.2 Δομή Συστημάτων και Τύποι Εξαρτήσεων στη Συντήρηση	2
1.3 Κατηγορίες και Μορφές Συντήρησης.....	3
1.4 Παράγοντες Επιλογής Πολιτικής Συντήρησης	5
1.5 Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις στην Ανάλυση Πολιτικών Συντήρησης	6
Κεφάλαιο 2. Ανάλυση και Βελτιστοποίηση Πολιτικών Αντικατάστασης Εξοπλισμού	8
2.1 Πολιτική Αντικατάστασης κατά Χρόνο - CAR (Continuous Age Replacement).....	10
2.2 Πολιτική Αντικατάστασης κατά Κύκλο (DAR – Discrete Age Replacement).....	11
2.3 Τροποποιημένο κόστος προληπτικής αντικατάστασης cn και αξιολόγηση πολιτικών.....	12
2.4 Πολιτική Περιοδικής Αντικατάστασης – CPR (Continuous Periodic Replacement)	14
2.5 Πολιτική Περιοδικής Αντικατάστασης – DPR (Discrete Periodic Replacement).....	17
2.6 Τροποποιημένο Κόστος και Σύγκριση Πολιτικών DPR – CPR	18
2.7 Πολιτική Αντικατάστασης με Υπέρβαση Χρόνου – ARO (Age Replacement with Overtime) ..	19
2.8 Συγκριτική Ανάλυση της ARO με τις CAR και DAR	21
2.9 Περιοδική Πολιτική Αντικατάσταση με Υπέρβαση Χρόνου (PRO).....	23
2.10 Σύγκριση της Πολιτικής PRO με τις CPR και DPR	24
Κεφάλαιο 3. Βελτιστοποίηση Πολιτικών Αντικατάστασης βάσει Συνδυασμού Χρόνου και Κύκλων Λειτουργίας	27
3.1 Πολιτική Replacement Last (RL)	27
3.2 Πολιτική Replacement First (RF)	29
3.3 Σύγκριση Πολιτικών RL, RF και Age Replacement	30
3.4 Περιοδική πολιτική Replacement Last (RL) και Replacement First (RF).....	32
3.5 Σύγκριση Περιοδικών Πολιτικών RL, RF και CPR	34
Κεφάλαιο 4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΩΔΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	35
4.1 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για CAR-DAR	35
4.2 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για CPR-DPR	36
4.3 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για ARO	36
4.4 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για PRO	38
4.5 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για RL,RF,CAR	38
4.6 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για περιοδικές RL,RF,CPR	39
Βιβλιογραφία	41
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ	42
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1.....	42
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2	45

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3	48
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4	53
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5	55
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6	57

Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το γενικό υπόβαθρο και το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται η διπλωματική εργασία, με έμφαση στη σημασία της συντήρησης τεχνικών συστημάτων στο σύγχρονο βιομηχανικό και τεχνολογικό περιβάλλον. Παρουσιάζεται το κίνητρο επιλογής του ερευνητικού αντικειμένου, καθώς και οι θεμελιώδεις έννοιες και μορφές συντήρησης τεχνικών συστημάτων, οι οποίες αποτελούν τον θεωρητικό πυρήνα της μελέτης. Επιπροσθέτως, γίνεται αναφορά στις βασικές μεθοδολογικές προσεγγίσεις που αξιοποιούνται για την ανάλυση και αξιολόγηση συντηρησιακών πολιτικών, με σκοπό την παροχή ενός ολοκληρωμένου πλαισίου κατανόησης. Το κεφάλαιο αυτό εισάγει και θεμελιώνει το αναλυτικό πλαίσιο στο οποίο βασίζονται οι επόμενες ενότητες της διπλωματικής εργασίας.

1.1 Η Σύγχρονη Συντήρηση ως Μέσο Ανταγωνιστικού Πλεονεκτήματος

Η ταχύτατη τεχνολογική εξέλιξη και η ενσωμάτωση σύνθετων τεχνικών υποδομών στη λειτουργία των επιχειρήσεων καθιστούν τη συντήρηση βασικό συντελεστή για τη διατήρηση της αξιοπιστίας, της παραγωγικής αποδοτικότητας και της λειτουργικής ανθεκτικότητας των συστημάτων και του εξοπλισμού [1,2]. Ενώ παλαιότερα η συντήρηση αντιμετωπιζόταν κυρίως ως αντίδραση σε βλάβες, στη σύγχρονη εποχή έχει εξελιχθεί σε στρατηγικό εργαλείο, ενσωματωμένο στον συνολικό σχεδιασμό διαχείρισης του εξοπλισμού και των υποδομών. Ο κατάλληλος σχεδιασμός και η έγκαιρη εφαρμογή συντήρησης αποτελούν θεμέλιο για την αποτροπή αιφνίδιων βλαβών, τη συγκράτηση του λειτουργικού κόστους και τη διασφάλιση της σταθερής ποιότητας της παραγωγής [3]. Αντίθετα, η έλλειψη αποτελεσματικών στρατηγικών συντήρησης μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις, προκαλώντας διακοπές στη λειτουργία, μείωση της παραγωγικότητας, κινδύνους για την ασφάλεια και πρόωρη φθορά του εξοπλισμού.

Η ανάγκη για μεγαλύτερη αξιοπιστία και οικονομική αποδοτικότητα έχει οδηγήσει στη στροφή της επιστημονικής και τεχνολογικής κοινότητας προς τη μελέτη προηγμένων πολιτικών συντήρησης. Η μετάβαση αυτή ανοίγει νέους ερευνητικούς ορίζοντες, καθώς

απαιτεί την ενσωμάτωση στοχαστικών μοντέλων μέσα από την αξιοποίηση δεδομένων που συλλέγονται σε πραγματικό χρόνο, καθώς και με την εις βάθος κατανόηση των επιχειρησιακών και τεχνικών περιορισμών που χαρακτηρίζουν τη λειτουργία σύνθετων συστημάτων. Ιδιαίτερα σε περιβάλλοντα όπου η αυτοματοποίηση και η παραγωγική πολυπλοκότητα είναι υψηλές, το κόστος συντήρησης αποτελεί σημαντικό μέρος του συνολικού κόστους κύκλου ζωής ενός εξοπλισμού [1]. Παράλληλα, η συντήρηση επηρεάζει άμεσα και άλλες λειτουργικές δραστηριότητες όπως ο προγραμματισμός παραγωγής, η διαχείριση αποθεμάτων και η εφοδιαστική αλυσίδα.

Προκειμένου να διαμορφωθούν βέλτιστες στρατηγικές συντήρησης, είναι απαραίτητο να υπάρχει κοινή κατανόηση των βασικών εννοιών και όρων που χρησιμοποιούνται στον επιστημονικό λόγο. Για τον λόγο αυτό, ακολουθεί συνοπτική παρουσίαση της βασικής ορολογίας και των θεμελιωδών εννοιών του πεδίου.

1.2 Δομή Συστημάτων και Τύποι Εξαρτήσεων στη Συντήρηση

Για την ουσιαστική κατανόηση και ανάλυση των πολιτικών συντήρησης, είναι απαραίτητο να προηγείται η σαφής ερμηνεία των θεμελιωδών εννοιών και όρων που αποτελούν τη βάση της επιστημονικής προσέγγισης στο πεδίο της συντήρησης τεχνικών συστημάτων [4]. Η διάκριση μεταξύ των βασικών δομικών στοιχείων ενός τεχνικού συστήματος αποτελεί προϋπόθεση για την κατανόηση και εφαρμογή αποτελεσματικών πολιτικών συντήρησης.

Στο πλαίσιο αυτό ως σύστημα ορίζεται ένα οργανωμένο σύνολο μηχανολογικών ή τεχνολογικών στοιχείων, τα οποία συνεργάζονται με σκοπό την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης λειτουργίας. Το σύστημα μπορεί να περιλαμβάνει υποσυστήματα, δηλαδή επιμέρους λειτουργικές ενότητες με σχετική αυτονομία, που εκτελούν εξειδικευμένα καθήκοντα στο πλαίσιο της συνολικής λειτουργίας του συστήματος. Κάθε υποσύστημα με τη σειρά του απαρτίζεται από μονάδες, οι οποίες αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία που υπόκεινται άμεσα σε ενέργειες συντήρησης [1]. Οι μονάδες αυτές είναι οι ελάχιστες αυτόνομες οντότητες συντήρησης, γεγονός που τις καθιστά το κεντρικό αντικείμενο ανάλυσης σε πλήθος

μοντέλων βελτιστοποίησης πολιτικών συντήρησης. Η ταξινόμηση ενός συστήματος ως single-unit (μονο-μονάδα) ή multi-unit (πολύ-μονάδα) εξαρτάται από τον βαθμό ανεξαρτησίας των μονάδων και από την άποψη του εκάστοτε αναλυτή ή χρήστη του συστήματος. Για παράδειγμα, ένας κινητήρας μπορεί να θεωρηθεί ως μία μονάδα προς αντικατάσταση σε επίπεδο πεδίου, αλλά ως σύνθετο σύστημα προς επισκευή σε επίπεδο εργαστηρίου [5].

Στην πράξη, τα επιμέρους τμήματα ενός τεχνικού συστήματος δεν λειτουργούν απομονωμένα. Η συντήρηση κάθε μονάδας μπορεί να επηρεάζεται σημαντικά από άλλες μονάδες. Οι τύποι εξαρτήσεων που αναγνωρίζονται και επηρεάζουν τον σχεδιασμό πολιτικών συντήρησης είναι κυρίως η οικονομική εξάρτηση που υφίσταται όταν η συντήρηση πολλών μονάδων ταυτόχρονα είναι οικονομικά διαφορετική (συνήθως φθηνότερη). Στοχαστική εξάρτηση όταν οι πιθανότητες φθοράς ή αστοχίας διαφορετικών μονάδων συνδέονται λόγω κοινών εξωτερικών παραγόντων, όπως θερμοκρασία ή δονήσεις. Δομική εξάρτηση μιας μονάδας όταν απαιτεί την αποσυναρμολόγηση ή την πρόσβαση μέσω άλλων μονάδων και τέλος όταν πολλές μονάδες μοιράζονται κοινά μέσα συντήρησης, όπως τεχνικούς, ανταλλακτικά την ονομάζουμε εξάρτηση πόρων.

1.3 Κατηγορίες και Μορφές Συντήρησης

Η συντήρηση τεχνικών συστημάτων κατατάσσεται σε επιμέρους κατηγορίες, ανάλογα με τη χρονική στιγμή εφαρμογής, τις συνθήκες ενεργοποίησης και τον επιδιωκόμενο στόχο της κάθε ενέργειας. Οι βασικές μορφές συντήρησης περιλαμβάνουν:

Διορθωτική συντήρηση (Corrective Maintenance - CM): Η διορθωτική συντήρηση περιλαμβάνει κάθε ενέργεια που πραγματοποιείται αφού έχει επέλθει βλάβη ή αστοχία στον εξοπλισμό. Σκοπός της είναι η αποκατάσταση της λειτουργίας μέσω επισκευής ή αντικατάστασης των φθαρμένων στοιχείων [1,6,7]. Παρόλο που η εφαρμογή της συχνά συνεπάγεται αυξημένο κόστος λόγω απώλειας παραγωγικού χρόνου, ενδεχόμενων ζημιών στον εξοπλισμό ή καθυστερήσεων στην επιχειρησιακή λειτουργία, παραμένει αναγκαία. Ιδίως σε περιπτώσεις όπου δεν είναι δυνατή ή συμφέρουσα η εφαρμογή προληπτικών μέτρων, η διορθωτική προσέγγιση αποτελεί ρεαλιστική λύση. Επιπλέον, εφαρμόζεται συχνά

σε μη κρίσιμα συστήματα, σε εξοπλισμό χαμηλής αξίας ή όταν οι συνθήκες λειτουργίας δεν δικαιολογούν το κόστος παρακολούθησης ή προληπτικής επέμβασης. Στις επισκευάσιμες μονάδες, η αποκατάσταση μπορεί να γίνει μέσω επισκευής, η οποία διακρίνεται σε τέλεια επισκευή όπου η μονάδα αποκαθίσταται πλήρως και λειτουργεί όπως όταν ήταν καινούργια. Σε ατελής επισκευή όπου η λειτουργικότητα αποκαθίσταται μερικώς, αλλά η μονάδα παραμένει φθαρμένη. Τέλος στην ελάχιστη επισκευή (minimal repair) στην οποία η μονάδα επανέρχεται στην κατάσταση που βρισκόταν λίγο πριν την αστοχία και δεν αποκαθίσταται καμία φθορά [8].

Προληπτική Συντήρηση (Preventive Maintenance - PM): Η προληπτική συντήρηση αποτελεί μια από τις βασικότερες μορφές τεχνικής παρέμβασης και στοχεύει στην αποτροπή αστοχιών μέσω έγκαιρων και προγραμματισμένων ενεργειών, πριν εμφανιστούν δυσλειτουργίες. Εφαρμόζεται με βάση προκαθορισμένα κριτήρια που σχετίζονται είτε με τον χρόνο είτε με τη χρήση του εξοπλισμού. Όταν οι παρεμβάσεις συντήρησης πραγματοποιούνται μόλις ο εξοπλισμός φτάσει σε συγκεκριμένη ηλικία ή χρόνο λειτουργίας, τότε μιλάμε για ηλικιακή προληπτική συντήρηση (age-based). Αντίστοιχα, όταν η συντήρηση εξαρτάται από το πλήθος των κύκλων χρήσης ή την ένταση λειτουργίας, τότε χαρακτηρίζεται ως συντήρηση βάσει χρήσης. Επιπλέον, υπάρχει και η περιοδική προληπτική συντήρηση, η οποία εφαρμόζεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα, ανεξαρτήτως της πραγματικής κατάστασης του εξοπλισμού. Κάθε μία από αυτές τις μορφές επιλέγεται με γνώμονα τη φύση και τη σημασία της μονάδας, την προσβασιμότητα σε δεδομένα παρακολούθησης, καθώς και την επιθυμητή ισορροπία μεταξύ κόστους και αξιοπιστίας [9,10,11].

Συντήρηση βάσει κατάστασης (Condition-Based Maintenance): Η συντήρηση βάσει κατάστασης αποτελεί μια σύγχρονη προσέγγιση που ενεργοποιείται όχι σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, αλλά όταν εντοπιστούν σαφείς ενδείξεις φθοράς ή επικείμενης δυσλειτουργίας στον εξοπλισμό. Η λήψη αποφάσεων βασίζεται σε πραγματικά δεδομένα που συλλέγονται μέσω αισθητήρων, επιθεωρήσεων ή δειγματοληπτικών ελέγχων, επιτρέποντας την ακριβέστερη αξιολόγηση της κατάστασης των μονάδων. Στόχος είναι η εκτέλεση συντήρησης μόνο όταν αυτή είναι πράγματι αναγκαία, αποφεύγοντας τόσο τις άσκοπες προληπτικές παρεμβάσεις όσο και τις απώλειες από αιφνίδιες βλάβες. Στο πλαίσιο της εντάσσεται και η Προγνωστική Συντήρηση η οποία αξιοποιεί προηγμένα αναλυτικά

εργαλεία, όπως στατιστικά μοντέλα, τεχνικές μηχανικής μάθησης και μέθοδοι τεχνητής νοημοσύνης για την εκτίμηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Συντήρηση ευκαιρίας: Εκτελείται όταν παρουσιάζεται κατάλληλη ευκαιρία. Τέτοιες ευκαιρίες μπορεί να περιλαμβάνουν τη σύμπτωση διακοπής λειτουργίας πολλών μονάδων, τη διαθεσιμότητα εξειδικευμένου τεχνικού προσωπικού ή την παρουσία άλλων προγραμματισμένων εργασιών.

Συντήρηση με βάση πολιτικές αντικατάστασης (Replacement Policy-based Maintenance): Η συγκεκριμένη κατηγορία συντήρησης στηρίζεται στην εφαρμογή μαθηματικά διατυπωμένων στρατηγικών που καθορίζουν πότε πρέπει να πραγματοποιηθεί αντικατάσταση εξοπλισμού, με στόχο την επίτευξη ελαχιστοποίησης του κόστους και τη μεγιστοποίηση της διαθεσιμότητας. Οι πολιτικές αυτές ενδείκνυνται για συστήματα όπου η φθορά μπορεί να περιγραφεί μέσω στοχαστικών μοντέλων. Ενδεικτικά η αντικατάσταση πραγματοποιείται όταν η μονάδα φτάσει μία προκαθορισμένη ηλικία, ή νωρίτερα σε περίπτωση βλάβης (Age Replacement) ή κατά την ολοκλήρωση ενός κύκλου εργασίας (Discrete Age Replacement). Οι παραπάνω πολιτικές, καθώς και συνδυαστικές ή περιοδικές παραλλαγές τους, αποτελούν αντικείμενο εκτενούς ανάλυσης στα επόμενα κεφάλαια. Η διερεύνηση επικεντρώνεται στη σύγκριση της αποτελεσματικότητάς τους υπό διαφορετικές συνθήκες λειτουργίας και οικονομικά σενάρια, με σκοπό την ανάδειξη της καταλληλότερης στρατηγικής για κάθε περίπτωση [11,12, 13].

1.4 Παράγοντες Επιλογής Πολιτικής Συντήρησης

Η επιλογή της βέλτιστης πολιτικής συντήρησης για ένα τεχνικό σύστημα συνιστά μια σύνθετη διαδικασία, που δεν βασίζεται σε μια σταθερή συνταγή αλλά απαιτεί την πολυπαραγοντική αξιολόγηση τεχνικών, λειτουργικών και οικονομικών παραμέτρων. Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των σύγχρονων υποδομών, η αβεβαιότητα που διέπει τη φθορά των εξαρτημάτων, καθώς και οι ρεαλιστικοί περιορισμοί της λειτουργικής καθημερινότητας, επιβάλλουν τεκμηριωμένη προσέγγιση στον σχεδιασμό και την εφαρμογή στρατηγικών συντήρησης.

Το κόστος και η προσπάθεια ελαχιστοποίησής του αποτελούν τον σημαντικότερο καθοριστικό παράγοντα στην επιλογή πολιτικής συντήρησης, καθώς επηρεάζουν άμεσα τόσο τη βιωσιμότητα όσο και την αποδοτικότητα του τεχνικού συστήματος. Σε εξοπλισμό με υψηλό κόστος αστοχίας για παράδειγμα, ευνοούνται πιο συντηρητικές πολιτικές [1]. Παράλληλα, η μορφή της φθοράς, όπως εκφράζεται μέσα από καμπύλες αστοχίας και οι κατανομές χρόνου ζωής, επηρεάζουν σημαντικά την επιλογή μεταξύ πολιτικών βάσει ηλικίας ή κατάστασης. Η πολυπλοκότητα της δομής του συστήματος, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για multi-unit συστήματα με αλληλοεξαρτήσεις μπορεί να οδηγήσει σε πιο ευέλικτες ή ομαδοποιημένες προσεγγίσεις όπως η ευκαιριακή συντήρηση. Σημαντική παράμετρο επίσης αποτελεί η διαθεσιμότητα τεχνικών πόρων αλλά και το επίπεδο αυτοματισμού και τεχνολογικής υποστήριξης. Η ύπαρξη αισθητήρων, υποδομών για ανάλυση δεδομένων (data analytics) ανοίγει τον δρόμο για προγνωστικές πολιτικές. Τέλος, το παραγωγικό και λειτουργικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται το σύστημα, ειδικά σε βιομηχανίες με αυστηρούς ρυθμούς και κρίσιμες απαιτήσεις διαθεσιμότητας, επιβάλλει την υιοθέτηση πολιτικών που προσαρμόζονται στον ρυθμό και τις απαιτήσεις της παραγωγικής διαδικασίας και σε συντονισμό με άλλες δραστηριότητες (π.χ. logistics).

Συμπερασματικά, η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής συντήρησης εξαρτάται από ένα πλήθος παραμέτρων που σχετίζονται τόσο με τη φύση και τη δομή του συστήματος όσο και με το λειτουργικό και οικονομικό του πλαίσιο.

1.5 Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις στην Ανάλυση Πολιτικών Συντήρησης

Η μελέτη και η αξιολόγηση πολιτικών συντήρησης βασίζεται σε μια πληθώρα μεθοδολογικών εργαλείων, τα οποία επιτρέπουν την προσομοίωση, την πρόβλεψη, τη βελτιστοποίηση και τη λήψη αποφάσεων σε περιβάλλοντα αβεβαιότητας. Αναλυτικά μαθηματικά μοντέλα όπως θεωρία αξιοπιστίας [13] και στοχαστικές διαδικασίες συντελούν στο προσδιορισμό του βέλτιστου χρόνου συντήρησης ή αντικατάστασης [14]. Κατά συνέπεια κρίνεται αναγκαία η χρήση από Μοντέλα βελτιστοποίησης. Χρήση μεθόδων όπως δυναμικός προγραμματισμός, γραμμικός και μη γραμμικός προγραμματισμός, στοχαστικός έλεγχος για την αναζήτηση της βέλτιστης στρατηγικής με βάση δεδομένα κόστους, διαθεσιμότητας,

αξιοπιστίας κ.λ.π. [1]. Ειδικά στο πλαίσιο της προγνωστικής συντήρησης, χρησιμοποιούνται τεχνικές μηχανικής μάθησης, όπως νευρωνικά δίκτυα, και μοντέλα υπολειπόμενου χρόνου ζωής για την πρόβλεψη φθοράς και αστοχίας.

Σε περιπτώσεις όπου η αναλυτική επίλυση καθίσταται δύσκολη ή ανεφάρμοστη λόγω της πολυπλοκότητας ή της μη γραμμικότητας του συστήματος, χρησιμοποιούνται μέθοδοι προσομοίωσης, όπως η προσομοίωση γεγονότων. Οι τεχνικές αυτές επιτρέπουν την αποτίμηση της απόδοσης διαφορετικών πολιτικών συντήρησης υπό ρεαλιστικές συνθήκες λειτουργίας και τυχαιότητας. Παράλληλα, όταν απαιτείται η συνεκτίμηση πολλαπλών, ενδεχομένως αντικρουόμενων, παραμέτρων όπως το κόστος, η διαθεσιμότητα, η ασφάλεια και το περιβαλλοντικό αποτύπωμα, εφαρμόζονται μέθοδοι πολυκριτηριακής ανάλυσης [1]. Οι μέθοδοι αυτές επιτρέπουν τη συγκριτική αξιολόγηση εναλλακτικών στρατηγικών συντήρησης με τρόπο που να αντανakλά τις προτεραιότητες και τους περιορισμούς της εκάστοτε εφαρμογής.

Κεφάλαιο 2. Ανάλυση και Βελτιστοποίηση Πολιτικών Αντικατάστασης Εξοπλισμού

Στο παρόν κεφάλαιο, εξετάζουμε τις πολιτικές αντικατάστασης συστημάτων με στόχο τη βελτιστοποίηση του κόστους συντήρησης και την ενίσχυση της αποδοτικότητας τους. Η ανάγκη για αντικατάσταση εξαρτημάτων ή ολόκληρου του συστήματος εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως η κατανομή των χρόνων αποτυχίας, ο αριθμός των λειτουργικών κύκλων και το κόστος της συντήρησης ή αντικατάστασης. Οι βασικές πολιτικές αντικατάστασης περιλαμβάνουν την αντικατάσταση με βάση τον χρόνο, την αντικατάσταση με βάση τον αριθμό των κύκλων και τις συνδυασμένες πολιτικές, οι οποίες ενσωματώνουν και τα δύο κριτήρια. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία του Zhao και Mizutani (2015)[14], οι πολιτικές αυτές μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις βασικούς τύπους.

Τύπος I – Αντικατάσταση με διακοπή κύκλου (π.χ. CAR, CPR), όπου η αντικατάσταση γίνεται σε προκαθορισμένο χρόνο, χωρίς απαραίτητα να έχει ολοκληρωθεί ο τρέχων κύκλος.

Τύπος II – Αντικατάσταση μετά την ολοκλήρωση κύκλου (π.χ. DAR), όπου η διαδικασία ολοκληρώνεται στον τερματισμό ενός συγκεκριμένου αριθμού εργασιακών κύκλων.

Τύπος III – Αποτελεί βελτίωση του Τύπου I, καθώς εξασφαλίζει την ολοκλήρωση ενός κύκλου εργασίας και μπορεί να υλοποιηθεί σε διακριτά χρονικά σημεία.

Στο πλαίσιο αυτής της ανάλυσης, οι κύριες μέθοδοι αντικατάστασης περιλαμβάνουν την πολιτική Αντικατάστασης κατά Χρόνο (CAR), την πολιτική Αντικατάστασης κατά Κύκλο (DAR) και τις υβριδικές πολιτικές, όπως η Αντικατάσταση με Υπέρβαση Χρόνου (ARO) και οι περιοδικές παραλλαγές αυτών των μοντέλων. Για κάθε μία από αυτές τις πολιτικές, θα παρουσιαστούν οι αντίστοιχοι μαθηματικοί τύποι που προσδιορίζουν το αναμενόμενο κόστος, ενώ θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο το κόστος επηρεάζεται από τις παραμέτρους του συστήματος, όπως οι κατανομές αποτυχίας και οι χρόνοι λειτουργίας.

Η κατανόηση των διαφορών ανάμεσα στις πολιτικές και των συνθηκών υπό τις οποίες η κάθε μία υπερέχει είναι κρίσιμη για τη λήψη βέλτιστων αποφάσεων συντήρησης. Στις

παρακάτω ενότητες, αναλύουμε διεξοδικά κάθε πολιτική, παρουσιάζοντας τόσο τη θεωρητική της βάση όσο και την πρακτική της εφαρμογή μέσω κώδικα matlab και παραδειγμάτων.

Το σύστημα που εξετάζουμε αποτελείται από μια μονάδα που εκτελεί διαδοχικές εργασίες με τυχαίους χρόνους κύκλου Y_j με ($j=1,2,3,\dots$). Αυτοί οι χρόνοι κύκλου ακολουθούν μια κατανομή $G(t)$, η οποία περιγράφει την πιθανότητα ολοκλήρωσης ενός κύκλου μέχρι τη χρονική στιγμή t . Η μονάδα υπόκειται σε φθορά λόγω λειτουργίας και μπορεί να αποτύχει σε χρόνο X , ο οποίος ακολουθεί μια γενική κατανομή $F(t)$. Αυτή η κατανομή εκφράζει την πιθανότητα η μονάδα να αποτύχει πριν από το χρόνο t . Οι κατανομές $G(t)$ και $F(t)$ θεωρούνται ανεξάρτητες. Οι μέσες τιμές τους δίνονται από:

$$E[Y_j] = \frac{1}{\theta} \text{ και } E[X] = \mu \quad (2.1)$$

Ο ρυθμός αστοχίας της μονάδας ορίζεται ως:

$$h(t) = \frac{f(t)}{(1-F(t))}, \text{ όπου } f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (2.2)$$

Για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας μιας πολιτικής, χρησιμοποιείται ο υπολογισμός του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου λειτουργίας [15].

Τα κόστη ορίζονται ως εξής:

c_F : κόστος διορθωτικής αντικατάστασης (σε περίπτωση αποτυχίας),

c_T : κόστος προληπτικής αντικατάστασης στον χρόνο T , με $c_F > c_T$

c_N : κόστος προληπτικής αντικατάστασης στο τέλος του n -οστού κύκλου, με $c_F > c_N$

Το γενικό κόστος για μια πολιτική τύπου με χρονικό όριο T και παρακολούθηση κύκλων μέσω της κατανομής ολοκλήρωσης κύκλου $G^{(N)}(t)$ (κατανομή ολοκλήρωσης N κύκλων) δίνεται από τη σχέση:

$$C_{(T; N)} = \frac{(c_T + (c_F - c_T) \int_0^T (1 - G^{(N)}(t)) dF(t) + (c_N - c_T) \int_0^T (1 - F(t)) dG^{(N)}(t))}{\int_0^T (1 - G^{(N)}(t))(1 - F(t)) dt} \quad (2.3)$$

2.1 Πολιτική Αντικατάστασης κατά Χρόνο - CAR (Continuous Age Replacement)

Η πολιτική CAR (Continuous Age Replacement) προβλέπει την αντικατάσταση του εξαρτήματος σε σταθερό χρονικό διάστημα T , εφόσον δεν έχει προκύψει αποτυχία μέχρι εκείνη τη στιγμή. Εάν η αποτυχία συμβεί νωρίτερα, τότε γίνεται διορθωτική αντικατάσταση τη στιγμή της βλάβης. Η CAR ανήκει στις πολιτικές τύπου I, καθώς παραβιάζει τον κύκλο εργασίας. Παρά το μειονέκτημα της διακοπής λειτουργίας, είναι μια ευέλικτη και εύκολα υλοποιήσιμη πολιτική [14].

Ωστόσο, η πολιτική CAR δεν παρακολουθεί κύκλους, καθώς βασίζεται αποκλειστικά στην ηλικία του συστήματος. Επομένως, για την CAR θεωρούμε ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί καμία ολοκλήρωση κύκλου έως τον χρόνο T . Υπό αυτή την υπόθεση, ο γενικός τύπος απλοποιείται ως εξής:

$$C^{CAR}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_{(T; N)} = \frac{c_F - (c_F - c_T)(1 - F(t))}{\int_0^T (1 - F(t)) dt} \quad (2.4)$$

Ο στόχος της πολιτικής CAR είναι να βρεθεί ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* για τον οποίο ελαχιστοποιείται το κόστος $C^{CAR}(T)$ [16]. Η εύρεση του γίνεται είτε αριθμητικά, είτε ως λύση της εξίσωσης:

$$\int_0^{T^*} [h(T^*) - h(t)](1 - F(t)) dt = \frac{c_T}{(c_F - c_T)} \quad (2.5)$$

Για να διασφαλιστεί η ύπαρξη μοναδικού ελάχιστου, πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} h(t) > \frac{c_F}{\mu(c_F - c_T)} \quad (2.6)$$

Όπου $\mu = E[X]$ είναι ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος.

Εφόσον η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, η συνάρτηση κόστους διαθέτει μοναδικό ελάχιστο, και επομένως προσδιορίζεται βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* και ελάχιστο κόστος :

$$C^{CAR}(T^*) = (c_F - c_T)h(T^*) \quad (2.7)$$

2.2 Πολιτική Αντικατάστασης κατά Κύκλο (DAR – Discrete Age Replacement)

Η πολιτική DAR (Discrete Age Replacement) προβλέπει ότι η αντικατάσταση του συστήματος πραγματοποιείται μόνο στο τέλος ενός πλήρους λειτουργικού κύκλου, και πιο συγκεκριμένα μετά την ολοκλήρωση ενός συγκεκριμένου αριθμού κύκλων N . Το σύστημα υπό εξέταση είναι το ίδιο όπως και στην πολιτική CAR. Αν το σύστημα αποτύχει πριν συμπληρωθεί ο N -οστός κύκλος, τότε πραγματοποιείται διορθωτική αντικατάσταση. Η πολιτική DAR ανήκει στην κατηγορία Τύπου II, καθώς η αντικατάσταση επιτρέπεται μόνο μετά την ολοκλήρωση συγκεκριμένου αριθμού κύκλων, χωρίς δυνατότητα διακοπής εντός κύκλου. Αυτός ο περιορισμός καθιστά την πολιτική κατάλληλη για περιβάλλοντα όπου η ολοκλήρωση κύκλων είναι κρίσιμη (π.χ. παραγωγικές διαδικασίες ή παρτίδες) [13].

Δεδομένων αυτών των χαρακτηριστικών, η συνάρτηση κόστους της DAR μπορεί να προκύψει ως ειδική περίπτωση του γενικού τύπου κόστους, εφόσον θεωρήσουμε ότι το χρονικό όριο αντικατάστασης τείνει στο άπειρο. Η τελική έκφραση του μέσου κόστους διαμορφώνεται ως:

$$C^{DAR}(N) = \lim_{T \rightarrow \infty} C_{(T; N)} = \frac{c_F - (c_F - c_N) \int_0^\infty G^{(N)}(t) dF(t)}{\int_0^\infty (1 - G^{(N)}(t))(1 - F(t)) dt}, \quad N=1,2,3... \quad (2.8)$$

Η συνάρτηση $G^{(N)}(t)$ ακολουθεί Erlang κατανομή, καθώς αποτελεί το άθροισμα N ανεξάρτητων εκθετικών μεταβλητών με παράμετρο θ .

Η παραπάνω συνάρτηση δεν επιδέχεται αναλυτική ελαχιστοποίηση ως προς το N , καθώς το N εμφανίζεται μέσα στις συναρτήσεις κατανομής και ολοκληρώματα. Για τον λόγο

αυτό, η εύρεση του βέλτιστου αριθμού κύκλων N^* πραγματοποιείται με αριθμητική μέθοδο μέσω διαδοχικών υπολογισμών. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$Q_{\infty} > \frac{c_F}{\mu(c_F - c_N)} \quad (2.9)$$

όπου ο όρος $Q_N(T)$ δίνεται από:

$$Q_N(T) = \frac{\int_0^T (\theta t)^N e^{-\theta t} dF(t)}{\int (\theta t)^N e^{-\theta t} (1-F(t)) dt} \quad (2.10)$$

και όταν T τείνει στο άπειρο, προκύπτει το όριο:

$$Q_N = \lim_{T \rightarrow \infty} Q_N(T) \quad (2.11)$$

συνεπώς:

$$Q_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N \quad (2.12)$$

Τότε υπάρχει μοναδική και πεπερασμένη βέλτιστη τιμή κύκλων N^* για την πολιτική DAR, η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους.

2.3 Τροποποιημένο κόστος προληπτικής αντικατάστασης c_n και αξιολόγηση πολιτικών.

Η πολιτική CAR προσφέρει αυξημένη ευελιξία στον προγραμματισμό, καθώς η αντικατάσταση γίνεται σε προκαθορισμένο χρονικό σημείο, ανεξαρτήτως της φάσης του κύκλου. Ωστόσο, αυτή η πολιτική διακόπτει την εκτέλεση των κύκλων, γεγονός που ενδέχεται να προκαλεί επιχειρησιακές απώλειες, όπως διακοπή παραγωγής ή ατελή εκτέλεση εργασιών. Αντίθετα, η DAR πολιτική πραγματοποιείται μετά την ολοκλήρωση ενός συγκεκριμένου αριθμού κύκλων, διασφαλίζοντας τη συνέχιση των εργασιών χωρίς διακοπές.

Σε περίπτωση που το κόστος αντικατάστασης με βάση τον χρόνο c_T είναι μικρότερο ή ίσο με το αντίστοιχο κόστος αντικατάστασης μετά από N κύκλους c_N το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται μέσω της πολιτικής CAR, με αντικατάσταση στον χρόνο T^* όπως προκύπτει από την αντίστοιχη εξίσωση κόστους. Ωστόσο, στην πράξη το c_T για την CAR είναι συχνά μεγαλύτερο από το c_N , εξαιτίας της ποινής διακοπής κύκλου που συνεπάγεται η προληπτική αντικατάσταση εντός λειτουργίας.

Για τη δίκαιη και αντικειμενική σύγκριση των δύο πολιτικών εισάγεται η έννοια του τροποποιημένου κόστους προληπτικής αντικατάστασης c_n με $c_n < c_T$. Η τιμή c_n αποτελεί θεωρητικό μέγεθος και δεν αντιστοιχεί σε πραγματικό κόστος συντήρησης. Υπολογίζεται έτσι ώστε η πολιτική DAR, με βάση το πλήθος κύκλων, να έχει το ίδιο αναμενόμενο κόστος με την πολιτική CAR, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η διακοπή που προκαλεί η CAR. Με άλλα λόγια, c_n εκφράζει το επίπεδο στο οποίο η DAR μπορεί να εξισωθεί οικονομικά με την CAR υπό ιδανικές συνθήκες (χωρίς διακοπή). Η εισαγωγή του c_n επιτρέπει την ουδέτερη αξιολόγηση των δύο πολιτικών, απομονώνοντας την επίδραση της πρόωρης διακοπής που χαρακτηρίζει την CAR. Έτσι, μπορούμε να εκτιμήσουμε ποια πολιτική είναι πραγματικά πιο αποδοτική. Για τον υπολογισμό του τροποποιημένου κόστους c_n και του αντίστοιχου βέλτιστου αριθμού κύκλων n_1^* για την πολιτική DAR, επιλύεται ένα σύστημα εξισώσεων που εξισώνει το μέσο κόστος της DAR με το αντίστοιχο κόστος της CAR. Αρχικά, εφαρμόζεται η εξίσωση:

$$(c_F - c_T)h(T^*) = \frac{c_F - (c_F - c_n) \int_0^\infty G^{(n_1^*)}(t) dF(t)}{\int_0^\infty (1 - G^{(n_1^*)}(t))(1 - F(t)) dt} \quad (2.13)$$

Η οποία εξισώνει το αναμενόμενο κόστος της CAR με εκείνο της DAR για κάποιο n_1^* και άγνωστο c_n . Για να εξασφαλιστεί ότι η λύση είναι εφικτή, απαιτείται η ικανοποίηση της ανισότητας:

$$Q_{n_1^*} \int_0^\infty (1 - G^{(n_1^*)}(t))(1 - F(t)) dt + \int_0^\infty G^{(n_1^*)}(t) dF(t) \geq \frac{c_F}{(c_F - c_n)} \quad (2.14)$$

όπου ο όρος $Q_N(T)$ δίνεται όπως πριν.

Αντί να επιλυθεί απευθείας το σύστημα των εξισώσεων, η διαδικασία μετασχηματίζεται σε δύο βήματα. Πρώτον, προσδιορίζεται η ελάχιστη τιμή n_1^* που ικανοποιεί την ανισότητα:

$$h(T^*) \int_0^\infty (1 - G^{(n_1^*)}(t)) (1 - F(t)) dt + \frac{h(T^*)}{Q_{n_1^*}} \int_0^\infty G^{(n_1^*)}(t) dF(t) \leq \frac{c_F}{(c_F - c_T)} \quad (2.15)$$

η οποία αντιστοιχεί σε συνθήκη σύγκρισης του κόστους DAR με το κόστος της CAR για γνωστό T^* . Έπειτα, για το n_1^* που προέκυψε, επιλύεται η εξίσωση [2.10].

Η παραπάνω μεθοδολογία υποστηρίζεται αριθμητικά μέσω υλοποίησης σε περιβάλλον MATLAB, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο. Εκεί υπολογίζεται, εκτός των άλλων, και η ποσότητα $\delta = c_T - c_n$, η οποία εκφράζει το πρόσθετο κόστος που επιβαρύνει την πολιτική CAR σε σχέση με τη θεωρητικά ισοδύναμη πολιτική DAR. Μικρές τιμές του δ υποδηλώνουν ότι η CAR είναι ανταγωνιστική, ενώ μεγάλες τιμές υποδεικνύουν ότι η DAR υπερτερεί, εφόσον μπορεί να επιτευχθεί λειτουργικά η αντίστοιχη τιμή του c_n . Η τιμή δ μπορεί να αξιοποιηθεί ως δείκτης «ποινής διακοπής κύκλου» (cycle interruption penalty), αποκαλύπτοντας τη σχετική ευαισθησία του συστήματος σε προληπτικές ενέργειες εντός κύκλου

2.4 Πολιτική Περιοδικής Αντικατάστασης – CPR (Continuous Periodic Replacement)

Η πολιτική CPR (Continuous Periodic Replacement) αποτελεί μια στρατηγική προληπτικής συντήρησης, κατά την οποία η αντικατάσταση του εξαρτήματος πραγματοποιείται περιοδικά, κάθε T χρονικές μονάδες, ανεξαρτήτως της κατάστασης ή της φθοράς του συστήματος. Η βασική παραδοχή είναι ότι το σύστημα υποβάλλεται σε έλεγχο και προληπτική αντικατάσταση σε σταθερά, προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, για παράδειγμα κάθε μήνα ή μετά από κάποιες ώρες λειτουργίας. Εάν προκύψει αποτυχία πριν από την επόμενη προγραμματισμένη αντικατάσταση, πραγματοποιείται ελάχιστη

επιδιόρθωση (minimal repair), και το σύστημα συνεχίζει τη λειτουργία του έως τον επόμενο κύκλο αντικατάστασης. Η ελάχιστη επιδιόρθωση δεν επαναφέρει το σύστημα σε καινούργια κατάσταση, αλλά το διατηρεί στην προ της βλάβης κατάσταση [14].

Σε αντίθεση με τη δυναμική πολιτική CAR (Continuous Age Replacement), όπου η αντικατάσταση πραγματοποιείται μόλις το σύστημα φτάσει σε έναν βέλτιστο χρόνο ζωής T^* , βάσει της κατανομής φθοράς και με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους, η CPR λειτουργεί χωρίς να αξιολογεί την ηλικία ή την υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του εξαρτήματος. Η απόφαση αντικατάστασης είναι αμιγώς χρονική και ανεξάρτητη από τη στοχαστική συμπεριφορά του συστήματος.

Αυτή η προσέγγιση καθιστά την CPR ιδιαίτερα κατάλληλη για περιβάλλοντα όπου οι διαδικασίες συντήρησης οφείλουν να εναρμονίζονται με σταθερά χρονοδιαγράμματα λειτουργίας ή επιθεώρησης, όπως σε βιομηχανικές γραμμές παραγωγής, ή εγκαταστάσεις με αυστηρούς κανονισμούς πιστοποίησης (π.χ. ISO), υπερτερεί σε προβλεψιμότητα και απλότητα υλοποίησης.

Για την αξιολόγηση της αποδοτικότητας περιοδικών πολιτικών τύπου I, στις οποίες η αντικατάσταση πραγματοποιείται ανά τακτά χρονικά διαστήματα T , και όπου ενδέχεται να έχει προηγηθεί αποτυχία, χρησιμοποιείται ο εξής γενικός τύπος κόστους ανά μονάδα χρόνου:

$$C(T; N) = \frac{c_T + (c_N - c_T)G^{(N)}(t) + c_M \int_0^T (1 - G^{(N)}(t))h(t)dt}{\int_0^T (1 - G^{(N)}(t))dt} \quad (2.16)$$

c_T : κόστος αντικατάστασης στον σταθερό χρόνο T

c_N : κόστος αντικατάστασης μετά από N κύκλους

c_M : κόστος διορθωτικής αντικατάστασης

$G^{(N)}(t)$: κατανομή ολοκλήρωσης N κύκλων έως τον χρόνο t

$h(t)$: ρυθμός αστοχίας.

Ο τύπος αυτός καλύπτει γενικές περιοδικές πολιτικές, όπου η αντικατάσταση λαμβάνει χώρα είτε μετά από καθορισμένο χρονικό διάστημα, είτε μετά από συγκεκριμένο

αριθμό κύκλων λειτουργίας. Όταν η απόφαση αντικατάστασης δεν εξαρτάται από κύκλους, δηλαδή όταν το N τείνει στο άπειρο, ο τύπος απλοποιείται στη μορφή:

$$C^{CPR}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} C(T; N) = \frac{c_M H(T) + c_T}{T} \quad (2.17)$$

όπου ο όρος $H(T)$:

$$H(T) = \int_0^T h(t) dt \quad (2.18)$$

Η εξίσωση αυτή αναπαριστά το κόστος της πολιτικής CPR (Continuous Cyclic Periodic Replacement), στην οποία η αντικατάσταση γίνεται αποκλειστικά σε σταθερά χρονικά διαστήματα T .

Ο στόχος της πολιτικής CPR είναι να βρεθεί ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* , για τον οποίο ελαχιστοποιείται το κόστος [15]. Η εύρεσή του γίνεται αριθμητικά ή ως λύση της εξίσωσης:

$$T^* h(T^*) - H(T^*) = \frac{c_T}{c_M} \quad (2.19)$$

Για να διασφαλιστεί η ύπαρξη μοναδικού και πεπερασμένου T , πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\int_0^\infty t dh(t) > \frac{c_T}{c_M} \quad (2.20)$$

Εφόσον η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, η συνάρτηση κόστους διαθέτει μοναδικό ελάχιστο, και επομένως προσδιορίζεται βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* και ελάχιστο κόστος :

$$C^{CPR}(T^*) = c_M h(T^*) \quad (2.21)$$

2.5 Πολιτική Περιοδικής Αντικατάστασης – DPR (Discrete Periodic Replacement)

Η DPR (Discrete Periodic Replacement) αποτελεί μια παραλλαγή της πολιτικής DAR, κατά την οποία η αντικατάσταση του εξαρτήματος πραγματοποιείται περιοδικά, δηλαδή κάθε σταθερό αριθμό κύκλων λειτουργίας N , ανεξαρτήτως της κατάστασης φθοράς ή ηλικίας του συστήματος. Η πολιτική DPR εφαρμόζεται κυρίως σε περιβάλλοντα όπου η συντήρηση οφείλει να εκτελείται σε προκαθορισμένες φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας, όπως ανά παρτίδα ή στο τέλος σταθερών σειρών επαναλαμβανόμενων εργασιών. Αν το σύστημα αποτύχει πριν συμπληρωθεί ο προκαθορισμένος αριθμός κύκλων N , δεν πραγματοποιείται άμεση αντικατάσταση, αλλά εφαρμόζεται ελάχιστη επιδιόρθωση (minimal repair), ώστε το σύστημα να συνεχίσει τη λειτουργία του μέχρι να φτάσει στον N -οστό κύκλο, όπου και γίνεται η περιοδική αντικατάσταση. Σε αντίθεση με τη δυναμική φύση της DAR, όπου ο αριθμός κύκλων N^* υπολογίζεται ως βέλτιστος με βάση την κατανομή αποτυχίας, η DPR προϋποθέτει ότι η αντικατάσταση γίνεται με σταθερό προγραμματισμό (π.χ. ανά κάποιο αριθμό κύκλων), χωρίς να μεταβάλλεται δυναμικά. Η απλότητα της πολιτικής DPR διευκολύνει την υλοποίησή της σε πραγματικά συστήματα, ωστόσο ενδέχεται να οδηγεί σε υπο-βελτιστοποίηση κόστους συγκριτικά με τη DAR, καθώς δεν αξιοποιεί τη στατιστική πληροφόρηση για τη φθορά [14].

Αντίστοιχα, η συνάρτηση κόστους της πολιτικής DPR προκύπτει ως ειδική περίπτωση του γενικού τύπου κόστους στην περίπτωση όπου το χρονικό όριο αντικατάστασης T τείνει στο άπειρο. Υπό αυτή τη συνθήκη, η αντικατάσταση εξαρτάται αποκλειστικά από την ολοκλήρωση N κύκλων λειτουργίας και όχι από χρονικό περιορισμό. Η τελική μορφή της συνάρτησης κόστους ανά μονάδα χρόνου για την DPR διαμορφώνεται ως:

$$C^{DPR}(N) = \lim_{T \rightarrow \infty} C(T:N) = \frac{c_M \int_0^\infty (1 - G^{(N)}(t)) h(t) dt + c_N}{N/\theta} \quad (2.22)$$

Ο προσδιορισμός του βέλτιστου αριθμού κύκλων αντικατάστασης N^* για την πολιτική DPR πραγματοποιείται μέσω βελτιστοποίησης της αντίστοιχης συνάρτησης κόστους. Εφόσον η παράμετρος N λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές και συμμετέχει σε ολοκληρωτικούς όρους χωρίς αναλυτική έκφραση, η ελαχιστοποίηση του κόστους δεν είναι δυνατή μέσω

παραγωγής. Αντί αυτού, εφαρμόζεται αριθμητική μέθοδος, κατά την οποία η συνάρτηση κόστους υπολογίζεται επαναληπτικά για αυξανόμενες τιμές του N , έως ότου εντοπιστεί η ελάχιστη τιμή της. Η διαδικασία σταματά όταν η διαφορά κόστους μεταξύ διαδοχικών τιμών N δεν παρουσιάζει περαιτέρω βελτίωση, ή όταν παρατηρείται μονοτονική αύξηση του κόστους. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι υπό την ικανοποίηση της συνθήκης:

$$\int_0^{\infty} (H_{\infty} - h(t)) dt \geq \frac{c_N}{c_M} \quad (2.23)$$

όπου ο όρος :

$$H_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} H(T) \quad (2.24)$$

Υπάρχει μοναδική και πεπερασμένη βέλτιστη τιμή κύκλων N^* για την πολιτική DPR, η οποία ελαχιστοποιεί το αντίστοιχο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

2.6 Τροποποιημένο Κόστος και Σύγκριση Πολιτικών DPR – CPR

Η πολιτική CPR προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία στον προγραμματισμό, καθώς η αντικατάσταση πραγματοποιείται ανά σταθερό χρονικό διάστημα, ανεξαρτήτως του αριθμού κύκλων ή της φάσης λειτουργίας του συστήματος. Αντιθέτως, η DPR διατηρεί τη συνέχεια της λειτουργίας, επιτρέποντας την ολοκλήρωση ενός προκαθορισμένου αριθμού κύκλων πριν από κάθε αντικατάσταση, γεγονός που την καθιστά κατάλληλη για παραγωγικά συστήματα με αυστηρά οριοθετημένες φάσεις εργασίας. Όταν το κόστος προληπτικής αντικατάστασης ανά χρόνο c_T είναι σημαντικά μικρότερο από το αντίστοιχο κόστος ανά κύκλο c_N , η πολιτική CPR τείνει να υπερτερεί. Για δίκαιη σύγκριση των δύο πολιτικών, είναι σκόπιμο να εισαχθεί η έννοια του τροποποιημένου κόστους αντικατάστασης c_n . ακολουθεί παρόμοια λογική με τη σύγκριση των πολιτικών αντικατάστασης DAR και CAR, όπου εισήχθη επίσης ένα τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης για την ουδέτερη αξιολόγηση των στρατηγικών [14].

Αρχικά, προσδιορίζεται αριθμητικά ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* για την πολιτική CPR, μέσω ελαχιστοποίησης της αντίστοιχης συνάρτησης κόστους [17]. Στη συνέχεια, αναζητείται η ελάχιστη τιμή $n2^*$ για την οποία ικανοποιείται η σχετική ανισότητα:

$$H_{n_2^*} \geq h(T^*) \quad (2.25)$$

όπου ο όρος $H_{n_2^*}$ δίνεται από:

$$H_N = \int_0^\infty \frac{\theta(\theta t^N)}{N!} e^{-\theta t} h(t) dt \quad (2.26)$$

Αφού προσδιοριστεί το κατάλληλο n_2^* , επιλύεται η εξίσωση που εξισώνει το κόστος της DPR με εκείνο της CPR, χρησιμοποιώντας το T^* που έχει ήδη βρεθεί, ώστε να βρεθεί η τιμή του τροποποιημένου κόστους c_n :

$$\frac{c_n}{c_M} = \frac{n_2^* h(T^*)}{\theta} - \int_0^\infty (1 - G^{(n_2^*)}(t)) h(t) dt \quad (2.27)$$

Η παραπάνω διαδικασία ακολουθεί την ίδια αρχή με εκείνη που εφαρμόστηκε για τη σύγκριση των πολιτικών DAR και CAR, εξασφαλίζοντας εννοιολογική και μεθοδολογική συνέπεια στη συγκριτική αξιολόγηση των στρατηγικών αντικατάστασης. Η διαφορά $\delta = c_T - c_n$ αποτυπώνει την ποινή διακοπής κύκλου που συνεπάγεται η CPR λόγω της αδιαφορίας της για την ολοκλήρωση λειτουργικών φάσεων. Μικρές τιμές του δείκτη δ υποδηλώνουν ότι η CPR παραμένει αποδοτική, ενώ μεγαλύτερες τιμές ευνοούν την εφαρμογή της DPR, εφόσον μπορεί να υλοποιηθεί επιχειρησιακά.

2.7 Πολιτική Αντικατάστασης με Υπέρβαση Χρόνου – ARO (Age Replacement with Overtime)

Η πολιτική ARO (Age Replacement with Overtime) ανήκει στον Τύπο III και αποτελεί μια βελτιωμένη εκδοχή τόσο της CAR όσο και της DAR, καθώς συνδυάζει τη χρονική ευκολία προγραμματισμού της πρώτης με τον λειτουργικό ρεαλισμό της δεύτερης, αποφεύγοντας την πρόωρη διακοπή κύκλων. Συγκεκριμένα, προβλέπει την αντικατάσταση του εξαρτήματος αφού παρέλθει ο προκαθορισμένος χρόνος T , όχι όμως ακριβώς στον χρόνο αυτό, αλλά μετά την ολοκλήρωση του πρώτου κύκλου λειτουργίας που ξεκινά μετά τον χρόνο T , υπό την

προϋπόθεση ότι δεν έχει συμβεί αποτυχία ενδιάμεσα. Σε περίπτωση που η μονάδα αποτύχει πριν την ολοκλήρωση του κύκλου, εφαρμόζεται διορθωτική αντικατάσταση. Αυτό προσδίδει στην ARO τη δυνατότητα ολοκλήρωσης κύκλου, καθιστώντας την πιο ρεαλιστική σε περιβάλλοντα όπου η πρόωρη διακοπή επιφέρει λειτουργική ή οικονομική ποινή. Ωστόσο, η καθυστέρηση αντικατάστασης που ενδέχεται να προκύψει εξαιτίας της αναμονής για την ολοκλήρωση του κύκλου, συνεπάγεται αυξημένο κίνδυνο αστοχίας, ιδιαίτερα όταν οι κύκλοι έχουν μεγάλο εύρος διάρκειας ή η κατανομή αστοχίας είναι αυξανόμενη.

Ο αναμενόμενος ρυθμός κόστους για την ARO [15], όταν οι κύκλοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο θ , δηλαδή:

$$G(t) = 1 - e^{-\theta t}$$

Δίνεται από:

$$C^{ARO}(T) = \frac{c_F + (c_F - c_0) \int_T^\infty \theta(1-F(t))e^{-\theta(t-T)} dt}{\int_0^T (1-F(t))dt + \int_T^\infty (1-F(t))e^{-\theta(t-T)} dt} \quad (2.28)$$

Τα κόστη ορίζονται ως εξής:

c_0 : κόστος προληπτικής αντικατάστασης με υπέρβαση χρόνου,

c_F : κόστος διορθωτικής αντικατάστασης,

Ο βέλτιστος χρόνος T^* υπολογίζεται ως λύση της εξίσωσης:

$$Q(T) \int_0^T (1 - F(t))dt - F(T) = \frac{c_0}{(c_F - c_0)} \quad (2.29)$$

Όπου:

$$Q(T) = \frac{\int_T^\infty e^{-\theta t} dF(t)}{\int_T^\infty (1-F(t))e^{-\theta t} dt} \quad (2.30)$$

Ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* στην πολιτική ARO υπάρχει και είναι μοναδικός όταν ισχύει η ανισότητα:

$$h(\infty) = \frac{c_F}{\mu(c_F - c_0)} \quad (2.30)$$

όπου $h(\infty)$ είναι το όριο του ρυθμού αστοχίας για t τείνει στο άπειρο και μ ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος.

2.8 Συγκριτική Ανάλυση της ARO με τις CAR και DAR

Η πολιτική ARO (Age Replacement with Overtime) συνιστά έναν ενδιάμεσο και ευέλικτο μηχανισμό αντικατάστασης, ο οποίος ενσωματώνει πλεονεκτήματα τόσο της CAR όσο και της DAR. Η CAR (Τύπος Ι) βασίζεται αποκλειστικά σε χρονικό όριο T , με άμεση αντικατάσταση στο χρόνο αυτό, ανεξαρτήτως της κατάστασης λειτουργίας του συστήματος. Αν και είναι προγραμματιστικά απλή, η CAR οδηγεί σε πρόωρες διακοπές κύκλων, κάτι που μπορεί να είναι ανεπιθύμητο ή και ζημιογόνο σε κρίσιμες εφαρμογές. Η ARO υπερτερεί, καθώς επιτρέπει την ολοκλήρωση του κύκλου μετά το T , αποφεύγοντας τη διακοπή αλλά με πιθανό τίμημα την καθυστέρηση και την αυξημένη πιθανότητα αποτυχίας. Αν το κόστος αντικατάστασης της CAR και της ARO είναι ίσο $c_0 = c_T$, τότε η CAR είναι προτιμότερη, καθώς οδηγεί σε μικρότερο μέσο κόστος. Ωστόσο, αυτή η σύγκριση δεν είναι απόλυτα δίκαιη, καθώς η CAR επιβάλλει λειτουργική ποινή μέσω της διακοπής κύκλου, κάτι που η ARO αποφεύγει. Τότε αναδιαμορφώσουμε το κόστος μέσω ενός τροποποιημένου κόστους αντικατάστασης $c_0 < c_T$, ώστε να γίνει η σύγκριση "δίκαιη" [13].

Αρχικά γίνεται υπολογισμός του βέλτιστου χρόνου αντικατάστασης T_1^* για την CAR. Αυτό γίνεται ως λύση της εξίσωσης [2.4]. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το T_1^* της CAR για να βρούμε έναν νέο, βελτιστοποιημένο χρόνο t_3^* για την ARO. Προκύπτει ως λύση της εξίσωσης:

$$h(T_1^*) \int_0^{t_3^*} (1 - F(u)) du + \frac{h(T_1^*)(1 - F(t_3^*))}{Q(t_3^*)} = \frac{c_F}{(c_F - c_T)} \quad (2.31)$$

Τέλος υπολογίζουμε τροποποιημένο κόστος c_0 , αφού βρούμε το t_3^* χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{c_F - c_0}{(c_F - c_T)} = \frac{h(T_1^*)}{Q(t_3^*)} \quad (2.32)$$

Με την εισαγωγή του τροποποιημένου κόστους και του νέου βελτιστοποιημένου χρόνου αντικατάστασης για την ARO, καθίσταται πλέον δυνατή μια πιο δίκαιη και ακριβής σύγκριση με την πολιτική CAR. Ενώ η αρχική ARO παρουσίαζε υψηλότερο κόστος λόγω της καθυστέρησης στην αντικατάσταση, η νέα παραμετροποίηση εξισορροπεί αυτό το μειονέκτημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η ARO δεν προκαλεί διακοπή κύκλου.

Αντίστοιχα μπορεί να πραγματοποιηθεί και δίκαιη σύγκριση μεταξύ των πολιτικών ARO και DAR, με βάση ένα τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης c_n για τη DAR και έναν βέλτιστο αριθμό κύκλων n_1^* . Εφόσον θεωρήσουμε ότι το αρχικό κόστος αντικατάστασης της DAR είναι ίσο με εκείνο της ARO $c_n = c_o$ τότε η ARO παρουσιάζει πλεονέκτημα. Για να συγκριθεί αντικειμενικά η πολιτική DAR με την ARO εισάγεται ένα τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης $c_n < c_o$ για τη DAR, καθώς και ένας νέος, βελτιστοποιημένος αριθμός κύκλων αντικατάστασης n_1^* . Αυτός ο αριθμός αντιπροσωπεύει το σημείο όπου η DAR επιτυγχάνει αναμενόμενο κόστος ίσο ή χαμηλότερο από εκείνο της ARO με βάση τις τροποποιημένες παραμέτρους.

Αρχικά χρησιμοποιούμε το βέλτιστο T_3^* που έχουμε βρει από τον τύπο [2.28] για ARO και στη συνέχεια υπολογίζουμε το n_1^* που ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα:

$$Q(T_3^*) \int_0^\infty (1 - G^{(n_1^*)}(t)) (1 - F(t)) dt + \frac{Q(T_3^*)}{Q_{n_1^*}} \int_0^\infty G^{(n_1^*)}(t) dF(t) \leq \frac{c_F}{(c_F - c_o)} \quad (2.33)$$

Με βάση το n_1^* , υπολογίζεται το αντίστοιχο τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης c_n για τη DAR από τη σχέση:

$$c_F - c_n = \frac{(c_F - (c_F - c_o)) \int_0^\infty (1 - G^{(n_1^*)}(t)) (1 - F(t)) dt}{\int_0^\infty G^{(n_1^*)}(t) dF(t)} \quad (2.34)$$

Έτσι, η πολιτική DAR επαναπροσδιορίζεται με τις τιμές n_1^* και c_n , ώστε να συγκριθεί ισοδύναμα με την ARO.

2.9 Περιοδική Πολιτική Αντικατάσταση με Υπέρβαση Χρόνου (PRO)

Η πολιτική PRO (Periodic Replacement with Overtime) εφαρμόζεται σε συστήματα που υπόκεινται σε επισκευές σε κάθε περίπτωση αστοχίας και προβλέπει αντικατάσταση κατά την ολοκλήρωση του πρώτου κύκλου λειτουργίας που υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο χρονικό όριο T . Η προσέγγιση αυτή εντάσσεται στον Τύπο III και αποτελεί γενίκευση της πολιτικής ARO, ενσωματώνοντας τη βασική διαφοροποίηση ότι, σε περίπτωση αστοχίας δεν πραγματοποιείται πλήρης αντικατάσταση της μονάδας, αλλά υλοποιείται επισκευή. Με αυτόν τον τρόπο, η PRO επιτυγχάνει έναν συμβιβασμό μεταξύ κόστους και διαθεσιμότητας, περιορίζοντας τη συχνότητα των πλήρων αντικαταστάσεων δηλαδή διατηρείται η λειτουργία του συστήματος, έστω και προσωρινά, επιτρέποντας τη συνέχιση μέχρι ένα προγραμματισμένο χρονικό σημείο.

Ο αναμενόμενος ρυθμός κόστους για την πολιτική PRO με δεδομένο ότι οι κύκλοι ακολουθούν εκθετική κατανομή δίνεται:

$$C^{PRO}(T) = \frac{c_M(H(T) + \int_0^\infty e^{-\theta t} h(t+T) dt) + c_o}{T + \frac{1}{\theta}} \quad (2.35)$$

Στην πολιτική PRO (Periodic Replacement with Overtime), τα σύμβολα c_o και c_M έχουν την εξής σημασία:

c_o : Πρόκειται για το σταθερό κόστος προληπτικής αντικατάστασης

c_M : Είναι το κόστος κάθε επισκευής που επαναφέρει προσωρινά τη λειτουργικότητα της μονάδας, χωρίς να αποκαθιστά πλήρως την αρχική αξιοπιστία.

Ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* προκύπτει από τη συνθήκη:

$$\int_0^T t dh(t) + \int_T^\infty e^{-\theta(t-T)} dh(t) = \frac{c_o}{c_M} \quad (2.36)$$

Επιπλέον εάν ισχύει:

$$\int_0^{\infty} t dh(t) > \frac{c_o}{c_M} \quad (2.37)$$

Συνεπώς, υφίσταται μοναδικός και πεπερασμένος βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T^* , στον οποίο ελαχιστοποιείται το κόστος της πολιτικής PRO, με αποτέλεσμα το συνολικό βέλτιστο κόστος να προκύπτει ως:

$$C^{PRO}(T^*) = c_M \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta t} h(t + T^*) dt = \frac{c_M H(T^*) + c_o}{T^*} \quad (2.38)$$

2.10 Σύγκριση της Πολιτικής PRO με τις CPR και DPR

Η πολιτική PRO (Periodic Replacement with Overtime) συνδυάζει στοιχεία από τις CPR και DPR, καθώς αποτελεί συνδυαστική προσέγγιση. Προσφέρει ένα πιο ευέλικτο σχήμα συντήρησης που επιτρέπει χρονικό έλεγχο και διατήρηση κύκλων, με ελάχιστες επισκευές ενδιάμεσα. Οι τρεις πολιτικές διαφέρουν ως προς τον μηχανισμό ενεργοποίησης αντικατάστασης και το πώς χειρίζονται τις αποτυχίες κατά τη διάρκεια της λειτουργίας.

Η πολιτική CPR εφαρμόζει αντικατάσταση στο τέλος σταθερών χρονικών διαστημάτων T , ανεξαρτήτως κατάστασης ή κύκλου. Αντίθετα, η PRO επιτρέπει την ολοκλήρωση του κύκλου που έχει ξεκινήσει πριν τον χρόνο T , και αντικαθιστά τη μονάδα μετά από υπέρβαση, εφόσον δεν έχει σημειωθεί αποτυχία. Σε περιπτώσεις αποτυχίας, και οι δύο πολιτικές εφαρμόζουν επισκευές χωρίς πλήρη αντικατάσταση.

Όταν το κόστος αντικατάστασης είναι το ίδιο για τις δύο πολιτικές δηλαδή $c_o = c_T$ η CPR υπερέχει, καθώς αποφεύγει την καθυστέρηση της αντικατάστασης που ενδέχεται να αυξήσει τον κίνδυνο αστοχίας στην PRO. Για να συγκριθούν γίνετε εξισορρόπηση μέσω τροποποιημένου κόστους στην PRO, εισάγοντας $c_o < c_T$, ώστε να ληφθεί υπόψη το πλεονέκτημα της μη διακοπής κύκλου. Ο τροποποιημένος χρόνος αντικατάστασης t_4^* υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\int_0^{\infty} \theta e^{-\theta u} h(u + t_4^*) dt = h(T_2^*) \quad (2.39)$$

Όπου T_2^* είναι ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης για την πολιτική CPR, δηλαδή το χρονικό διάστημα στο οποίο ελαχιστοποιείται ο συνολικός αναμενόμενος ρυθμός κόστους για την CPR. Γνωρίζοντας τον τροποποιημένο βέλτιστο χρόνο αντικατάστασης t_4^* , μπορούμε να υπολογίσουμε το αντισταθμιστικό κόστος αντικατάστασης c_0 για την πολιτική PRO από την εξίσωση:

$$\int_0^{t_4^*} t dh(t) + \int_T^{\infty} e^{-\theta(t-t_4^*)} dh(t) = \frac{c_0}{c_M} \quad (2.40)$$

Εάν, με βάση αυτές τις παραμέτρους, το συνολικό αναμενόμενο κόστος της PRO είναι μικρότερο ή ίσο από εκείνο της CPR, τότε η PRO καθίσταται προτιμότερη επιλογή, ιδίως σε εφαρμογές όπου η διατήρηση της ροής λειτουργίας και η αποφυγή διακοπών έχουν κρίσιμη σημασία. Συνεπώς, η προσέγγιση αυτή επιτρέπει μια πιο ρεαλιστική αξιολόγηση των στρατηγικών συντήρησης.

Με παρόμοιο τρόπο θα συγκριθούν οι δύο πολιτικές PRO και DPR που βασίζεται αποκλειστικά στον αριθμό των ολοκληρωμένων κύκλων εργασίας N , χωρίς άμεσο χρονικό περιορισμό, και εφαρμόζει αντικατάσταση μετά την ολοκλήρωση ενός σταθερού πλήθους κύκλων. Όταν το κόστος αντικατάστασης στην PRO είναι ίσο με εκείνο της DPR ($c_0 = c_n$) η πολιτική PRO αποδεικνύεται πάντα πιο αποδοτική, λόγω της παρουσίας χρονικού ελέγχου και του πιο σταδιακού χειρισμού των αποτυχιών. Για να καταστεί η σύγκριση δίκαιη επειδή η DPR υστερεί από τη φύση της εισάγουμε ένα τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης $c_n < c_0$.

Αρχικά απαιτείται ο υπολογισμός του βέλτιστου χρόνου αντικατάστασης για την PRO, δηλαδή το T_4^* οποίος ικανοποιεί σχέση [2.36]. Στο δεύτερο βήμα υπολογίζω n_2^* το οποίο είναι η βελτιστοποιημένη τιμή του n που κάνει την DPR ανταγωνιστική ή ισοδύναμη σε κόστος με την PRO, με βάση το τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης c_n . Το ελάχιστο πλήθος κύκλων εργασίας n_2^* είναι η μικρότερη ακέραια τιμή του n που ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα:

$$H_{n2^*} \geq \int_0^\infty \theta e^{-\theta t} h(t + t_4^*) dt \quad (2.41)$$

όπου ο όρος H_{n2^*} δίνεται από τύπο (2.25)

Με βάση το n_2^* , υπολογίζεται το αντίστοιχο τροποποιημένο κόστος αντικατάστασης c_n για τη DPR από τη σχέση:

$$\frac{c_n}{c_M} = \frac{n_2^* h(T_2^*)}{\theta} - \int_0^\infty \left(1 - G^{(n_2^*)}(t)\right) h(t) dt \quad (2.42)$$

Με βάση τους υπολογισμούς των βέλτιστων παραμέτρων και την ισοδύναμη θεώρηση κόστους, η τελική αξιολόγηση δείχνει ποια πολιτική υπερέχει.

Κεφάλαιο 3. Βελτιστοποίηση Πολιτικών Αντικατάστασης βάσει Συνδυασμού Χρόνου και Κύκλων Λειτουργίας

Οι πολιτικές αντικατάστασης που βασίζονται αποκλειστικά στον χρόνο λειτουργίας ή στον αριθμό κύκλων χρήσης παρουσιάζουν περιορισμούς σε συστήματα που λειτουργούν με μη σταθερούς ή απρόβλεπτους ρυθμούς. Για την αντιμετώπιση αυτών των περιορισμών, προτείνεται η υιοθέτηση στρατηγικών αντικατάστασης που ενσωματώνουν ταυτόχρονα δύο χρονικές κλίμακες τη συνολική διάρκεια λειτουργίας και την πρόοδο των εργασιακών κύκλων.

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζονται οι πολιτικές αντικατάστασης με βάση την τελευταία ή την πρώτη επέλευση ενός χρονικού ορίου ή ενός κύκλου εργασίας, γνωστές ως Replacement Last (RL) και Replacement First (RF) αντίστοιχα (Zhao and Nakagawa 2012). Σε αντίθεση με τις πολιτικές του Κεφαλαίου 2, όπου η αντικατάσταση βασιζόταν σε σταθερά χρονικά όρια ή πλήθος κύκλων, εδώ εισάγεται η σύγκριση και αλληλεπίδραση δύο χρονικών μεγεθών. Σκοπός είναι ο εντοπισμός της πλέον κατάλληλης χρονικής στιγμής για την προληπτική συντήρηση, ώστε να επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα και οικονομία.

Ακολουθεί η ανάλυση των αναμενόμενων χρόνων αντικατάστασης, των αντίστοιχων κόστους και των βέλτιστων στρατηγικών, ενώ παράλληλα πραγματοποιείται συγκριτική αξιολόγηση των πολιτικών αυτών τόσο μεταξύ τους όσο και έναντι των τυπικών μοντέλων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

3.1 Πολιτική Replacement Last (RL)

Η πολιτική Replacement Last (RL) εφαρμόζεται σε περιβάλλοντα όπου η λειτουργική μονάδα εκτελεί διαδοχικές εργασίες με στοχαστικούς χρόνους ολοκλήρωσης (εργασιακούς κύκλους), ενώ ταυτόχρονα υπόκειται σε φθορά λόγω λειτουργίας. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, η προληπτική αντικατάσταση δεν πραγματοποιείται σε ένα σταθερό χρονικό

σημείο ή μετά από συγκεκριμένο αριθμό κύκλων, αλλά στην τελευταία από τις δύο χρονικές κλίμακες. Πιο συγκεκριμένα είτε όταν ξεπεραστεί ένας προκαθορισμένος συνολικός χρόνος λειτουργίας T , είτε κατά την ολοκλήρωση ενός κύκλου εργασίας Y , όποιο από τα δύο συμβεί τελευταίο. Σε περίπτωση που συμβεί αστοχία νωρίτερα, εφαρμόζεται άμεσα διορθωτική αντικατάσταση η οποία συνεπάγεται υψηλότερο κόστος. Ωστόσο, σε περιπτώσεις όπου το χρονικό όριο T προηγείται του τέλους του κύκλου Y , η μονάδα συνεχίζει να λειτουργεί μέχρι την ολοκλήρωση του κύκλου, γεγονός που ενδέχεται να αυξήσει τον κίνδυνο αστοχίας και να οδηγήσει σε διορθωτική αντικατάσταση [13,16].

Η αναμενόμενη χρονική στιγμή αντικατάστασης εξαρτάται από τη στοχαστική συμπεριφορά των δύο μεταβλητών T και Y , με βασικά εργαλεία τις συναρτήσεις κατανομής αποτυχίας $F(t)$ και κύκλου εργασίας $G(t)$. Το αναμενόμενο κόστος αντικατάστασης δίνεται από τη σχέση:

$$C_L(T) = \frac{(c_F - (c_F - c_P) \int_T^\infty G(t) dF(t))}{\int_0^T (1 - F(t)) dt + \int_T^\infty (1 - G(t))(1 - F(t)) dt} \quad (3.1)$$

όπου:

c_F : είναι το κόστος αντικατάστασης μετά από αποτυχία (διορθωτική αντικατάσταση),

c_P : το κόστος προληπτικής αντικατάστασης (σε T ή Y), με $c_P < c_F$.

Η βελτιστοποίηση της πολιτικής RL επιτυγχάνεται μέσω του προσδιορισμού του βέλτιστου χρόνου T_L^* που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους. Για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη μοναδικού και πεπερασμένου βέλτιστου χρόνου αντικατάστασης T_L^* , απαιτείται να πληρείται μια συγκεκριμένη συνθήκη. Συγκεκριμένα, εφόσον η $h(t)$ αυξάνεται και ισχύει:

$$h(\infty) > \frac{c_F}{\mu(c_F - c_P)} \quad (3.2)$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη τιμή του χρόνου αποτυχίας X . Ο βέλτιστος χρόνος T_L^* υπολογίζεται ως η λύση της παρακάτω εξίσωσης:

$$h(t) \left[\int_0^T (1 - F(t)) dt + \int_T^\infty (1 - G(t))(1 - F(t)) dt \right] - \left[1 - \int_T^\infty G(t) dF(t) \right] = \frac{c_F}{(c_F - c_P)} \quad (3.3)$$

η οποία προκύπτει από τη διαφοροποίηση της αναμενόμενης συνάρτησης κόστους. Η αριστερή πλευρά αυτής της εξίσωσης αυξάνεται αυστηρά με το T , και επομένως, αν πληρούταν η παραπάνω συνθήκη (3.2), η εξίσωση διαθέτει μοναδική και πεπερασμένη λύση. Η τελική μορφή της αναμενόμενης ελάχιστης τιμής του κόστους είναι:

$$C_L(T_L^*) = (c_F - c_P)h(T_L^*) \quad (3.4)$$

3.2 Πολιτική Replacement First (RF)

Η πολιτική Replacement First (RF) αποτελεί μια παραλλαγή της προληπτικής αντικατάστασης που εστιάζει στην πρώτη από τις δύο χρονικές κλίμακες, είτε στον προκαθορισμένο συνολικό χρόνο λειτουργίας T , είτε στην ολοκλήρωση ενός στοχαστικού κύκλου εργασίας Y , όποιο συμβεί πρώτο. Με άλλα λόγια, η μονάδα αντικαθίσταται πριν από την αστοχία, μόλις επιτευχθεί είτε το χρονικό όριο είτε η λήξη ενός κύκλου. Εάν ωστόσο η μονάδα αποτύχει νωρίτερα, τότε εφαρμόζεται διορθωτική αντικατάσταση με αντίστοιχο υψηλότερο κόστος. Σε αυτή την πολιτική, είναι πιθανό η μονάδα να απομακρυνθεί ενώ βρίσκεται ακόμη σε ενεργό κύκλο, κάτι που ενδέχεται να οδηγήσει σε διακοπή παραγωγής χωρίς ουσιαστική ανάγκη, αυξάνοντας το κόστος. Παρ' όλα αυτά, μειώνει τον κίνδυνο αστοχίας, καθώς η μονάδα αποσύρεται προληπτικά στο πρώτο σημάδι χρονικής ολοκλήρωσης [13].

Η αναμενόμενη χρονική στιγμή αντικατάστασης εξαρτάται από τις στοχαστικές κατανομές αποτυχίας $F(t)$ και κύκλου εργασίας $G(t)$, ενώ το συνολικό κόστος υπολογίζεται ως εξής:

$$C_F(T) = \frac{(c_P + (c_F - c_P) \int_0^T (1 - G(t)) dF(t))}{\int_0^T (1 - G(t))(1 - F(t)) dt} \quad (3.5)$$

Όπου c_p και c_F ορίζονται όπως αναφέραμε πιο πάνω στη μεθοδολογία RL. Ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T_F^* που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους $C_F(T)$ προσδιορίζεται ως λύση της εξίσωσης:

$$h(T) \int_0^T (1 - G(t))(1 - F(t))dt - \int_0^T (1 - G(t))dF(t) = \frac{c_p}{(c_F - c_p)} \quad (3.6)$$

Ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T_F^* στην πολιτική RF υπάρχει και είναι μοναδικός όταν ισχύει η ανισότητα:

$$h(\infty) \int_0^\infty (1 - G(t))(1 - F(t))dt - \int_0^\infty (1 - G(t))dF(t) > \frac{c_p}{(c_F - c_p)} \quad (3.7)$$

Εφόσον η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, η συνάρτηση κόστους διαθέτει μοναδικό ελάχιστο, και επομένως προσδιορίζεται:

$$C_F(T_F^*) = (c_F - c_p)h(T_F^*) \quad (3.8)$$

3.3 Σύγκριση Πολιτικών RL, RF και Age Replacement

Η αξιολόγηση των πολιτικών αντικατάστασης RF (Replacement First), RL (Replacement Last) και CAR (Age Replacement) βασίζεται όχι μόνο στα κόστη, αλλά και στον χρονισμό των παρεμβάσεων και την ευελιξία τους ως προς τον κύκλο λειτουργίας. Η RF πραγματοποιεί προληπτική αντικατάσταση στο νωρίτερο από τα δύο σημεία T και N , γεγονός που οδηγεί σε υψηλότερη πιθανότητα πρόωρων παρεμβάσεων και διακοπών της παραγωγής. Αντίθετα, η RL περιμένει μέχρι να ολοκληρωθεί τουλάχιστον ένας κύκλος λειτουργίας (μέγιστο των T και N), γεγονός που περιορίζει τις περιττές διακοπές και αξιοποιεί καλύτερα τη μονάδα. Η σύγκριση των RF και RL βασίζεται αναλυτικά στο μέγεθος $L(T_A^*)$ [13], το οποίο ορίζεται ως:

$$L(T_A^*) = h(T) \int_0^{T_A^*} (1 - G(t))(1 - F(t))dt - \int_0^{T_A^*} (1 - G(t))dF(t) \quad (3.9)$$

Το κρίσιμο σημείο T_A^* ορίζεται ως ρίζα της εξίσωσης $Q_1(T)=0$. Το $Q_1(T)$ είναι η συνάρτηση κριτήριο σύγκρισης και ορίζεται ως:

$$Q_1(T) = \int_0^T G(t)(1 - F(t))(h(T) - h(t))dt - \int_T^\infty (1 - G(t))(1 - F(t))(h(t) - h(T))dt \quad (3.10)$$

Το T_A^* είναι μοναδικό όταν το $Q'_1(T) > 0$ και ταυτόχρονα όταν τα όρια $\lim_{T \rightarrow \infty} Q_1(T) = \infty$ και $\lim_{T \rightarrow 0} Q_1(T) < 0$. Για την σύγκριση λοιπόν αν ισχύει ότι:

$$L(T_A^*) > \frac{c_P}{(c_F - c_P)} \quad (3.11)$$

τότε η RF πολιτική υπερτερεί, ενώ σε αντίθετη περίπτωση υπερτερεί η RL. Οπότε, η επιλογή μεταξύ των δύο εξαρτάται από τη σχετική αναλογία κόστους και τη μορφή της κατανομής κύκλου. Αυτό δίνει ένα πρακτικό κριτήριο σύγκρισης με βάση την αναλογία κόστους και τη συμπεριφορά των κατανομών $F(t)$ και $G(t)$. Επιπλέον, η RF ενεργοποιεί αντικατάσταση ακόμη κι αν δεν έχει ολοκληρωθεί καμία εργασία, ενώ η RL διασφαλίζει την ολοκλήρωση τουλάχιστον μιας. Αυτή η διαφοροποίηση γίνεται κρίσιμη σε εφαρμογές με μεγάλη ή μεταβλητή διάρκεια κύκλων.

Η CAR, από την άλλη, βασίζεται αποκλειστικά στον χρόνο, η μονάδα αντικαθίσταται σε σταθερά χρονικά διαστήματα ανεξάρτητα από το αν έχει ολοκληρωθεί κάποιος κύκλος ή αν έχει συμβεί αποτυχία. Όταν το κόστος της προληπτικής αντικατάστασης είναι το ίδιο είτε πραγματοποιείται στον χρόνο T είτε στο τέλος ενός κύκλου Y (δηλαδή $c_T = c_Y = c_P$), η CAR αποδεικνύεται θεωρητικά η πιο αποδοτική στρατηγική, καθώς επιτυγχάνει τον χαμηλότερο αναμενόμενο ρυθμό κόστους σε σχέση με τις πολιτικές RL (Replacement Last) και RF (Replacement First). Αυτό αποδεικνύεται μέσω των ανισοτήτων στις εξισώσεις, από τις οποίες προκύπτει ότι οι βέλτιστοι χρόνοι αντικατάστασης RL και RF (δηλαδή T_L και T_F) είναι μεγαλύτεροι από τον αντίστοιχο της CAR, γεγονός που συνεπάγεται αυξημένο κόστος. Επομένως, υπό ίσα κόστη, η CAR είναι η θεωρητικά βέλτιστη πολιτική. Όμως, όταν ισχύει ότι $c_Y < c_T$, δηλαδή όταν η αντικατάσταση στο τέλος ενός κύκλου είναι φθηνότερη από εκείνη σε σταθερό χρόνο T , τότε η CAR παύει να είναι βέλτιστη, και οι πολιτικές RL ή RF ενδέχεται να έχουν μικρότερο συνολικό κόστος, ειδικά σε περιπτώσεις όπου η μονάδα μπορεί να

συνεχίσει να λειτουργεί χωρίς προβλήματα μέχρι την ολοκλήρωση ενός κύκλου. Επιπλέον, όταν ο λόγος c_F / c_P είναι πολύ μεγάλος (δηλαδή το κόστος αποτυχίας είναι σημαντικά υψηλότερο από το κόστος αντικατάστασης), τότε η RF γίνεται πιο κατάλληλη επιλογή, καθώς εφαρμόζει πιο πρόωρη προληπτική αντικατάσταση και μειώνει τον κίνδυνο διορθωτικής παρέμβασης με υψηλό κόστος.

3.4 Περιοδική πολιτική Replacement Last (RL) και Replacement First (RF)

Η περιοδική πολιτική Replacement Last είναι δομικά όμοια με την απλή πολιτική Replacement Last, καθώς και στις δύο περιπτώσεις η αντικατάσταση της μονάδας γίνεται είτε όταν συμπληρωθεί ένας καθορισμένος χρόνος λειτουργίας T , είτε κατά την ολοκλήρωση ενός κύκλου εργασίας Y , όποιο από τα δύο συμβεί τελευταίο. Η βασική διαφορά έγκειται στον χειρισμό των αποτυχιών, ενώ στην απλή RL η μονάδα αποσύρεται με την πρώτη αποτυχία, στην περιοδική έκδοση η μονάδα υποβάλλεται σε minimal repair σε κάθε αποτυχία μέχρι να φτάσει η στιγμή της αντικατάστασης. Ο αναμενόμενος ρυθμός κόστους δίνεται από τη σχέση:

$$C_L(T) = \frac{c_M(H(T) + \int_T^\infty (1-G(t))h(t)dt) + c_P}{T + \int_T^\infty (1-G(t))dt} \quad (3.12)$$

όπου:

c_M : είναι το κόστος του minimal repair

c_P : το κόστος προληπτικής αντικατάστασης (σε T ή Y), με $c_P < c_M$.

Η βέλτιστη χρονική στιγμή αντικατάστασης T_L είναι η τιμή του T που ελαχιστοποιεί τον ρυθμό κόστους και προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$\int_0^T (h(T) - h(t))dt - \int_T^\infty (1 - G(t))(h(t) - h(T))dt = \frac{c_P}{c_M} \quad (3.13)$$

Ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T_L^* στην πολιτική RL υπάρχει και είναι μοναδικός όταν ισχύει η ανισότητα:

$$\int_0^{\infty} (h(\infty) - h(t))dt > \frac{c_P}{c_M} \quad (3.14)$$

Εφόσον η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, η συνάρτηση κόστους διαθέτει μοναδικό ελάχιστο, και επομένως προσδιορίζεται:

$$C_L(T_L^*) = c_M h(T_L^*) \quad (3.15)$$

Στην περιοδική πολιτική Replacement First (RF), η μονάδα αντικαθίσταται στο πρώτο από τα δύο χρονικά σημεία, δηλαδή στο $\min(T, Y)$ και σε κάθε αποτυχία μέχρι τότε υφίσταται ελάχιστη επισκευή. Ο αναμενόμενος ρυθμός κόστους δίνεται από τη σχέση:

$$C_F(T) = \frac{c_M(\int_0^{\infty} (1-G(t))h(t)dt) + c_P}{\int_T^{\infty} (1-G(t))dt} \quad (3.16)$$

Αντίστοιχα η βέλτιστη χρονική στιγμή αντικατάστασης T_F^* είναι η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους, και προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$\int_0^T (1 - G(t))(h(t) - h(T))dt = \frac{c_P}{c_M} \quad (3.17)$$

Ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T_F^* υπάρχει και είναι μοναδικός όταν ισχύει η συνθήκη:

$$\int_0^{\infty} (1 - G(t))(h(\infty) - h(t))dt > \frac{c_P}{c_M} \quad (3.18)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους ισούται με:

$$C_F(T_F^*) = c_M h(T_F^*) \quad (3.19)$$

3.5 Σύγκριση Περιοδικών Πολιτικών RL, RF και CPR

Μια αντίστοιχη σύγκριση για τα περιοδικά μοντέλα με minimal repair στα ενδιάμεσα μπορεί να επιτευχθεί έως εξής. Στις περιοδικές πολιτικές RF και RL ορίζουμε το σημείο T_B^* ως τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης $Q_2(T)=0$ η οποία προσδιορίζεται ως:

$$Q_2(T) = \int_0^T G(t)(h(T) - h(t))dt - \int_T^\infty (1 - G(t))(h(t) - h(T))dt \quad (3.20)$$

Στο T_B^* υπολογίζουμε επίσης το μέτρο $L(T_B^*)$, το οποίο λειτουργεί ως πρακτικό κριτήριο επιλογής.

$$L(T_B^*) = \int_0^{T_B^*} (1 - G(t))(h(T_B^*) - h(t))dt \quad (3.21)$$

Αν λοιπόν ισχύει:

$$L(T_B^*) > \frac{c_P}{c_M} \quad (3.22)$$

Τότε $T_F^* < T_L^*$ και υπερέχει η RF· διαφορετικά υπερέχει η RL. Διαισθητικά, όταν η προληπτική αντικατάσταση είναι «φθηνή» σε σχέση με το minimal repair δηλαδή ο λόγος c_P προς c_M είναι μικρός, συμφέρει η πιο πρόωρη RF, ενώ όταν είναι «ακριβή» τείνει να υπερέχει η πιο «συγκρατημένη» RL που αποφεύγει περιττές παρεμβάσεις πριν ολοκληρωθεί ένας κύκλος. Από την άλλη η τυπική περιοδική αντικατάσταση (SPR) δηλαδή αντικατάσταση ανά περίοδο T με minimal repair στις αστοχίες όταν τα προληπτικά κόστη είναι ίδια, το T_S^* είναι συνήθως μικρότερο από τα T_F^* , T_L^* οδηγώντας σε χαμηλότερο μακροχρόνιο ρυθμό κόστους, ενώ διαφορετικές σχέσεις κόστους μπορούν να ανατρέψουν αυτή την κατάταξη υπέρ της RF ή/και της RL.

Κεφάλαιο 4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΩΔΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, στόχος ήταν η ανάλυση και σύγκριση διαφορετικών πολιτικών αντικατάστασης εξοπλισμού ή εξαρτημάτων, με σκοπό την ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας. Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν διάφοροι αλγόριθμοι σε περιβάλλον MATLAB, οι οποίοι υλοποιούν μοντέλα αξιοπιστίας βασισμένα σε κατανομή Weibull για τον χρόνο αστοχίας και εκθετική κατανομή. Οι κώδικες παρατίθενται στα παραρτήματα και καλύπτουν τις πολιτικές αντικατάστασης που μελετήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Μέσα από την αριθμητική επίλυση των σχετικών εξισώσεων και την παραμετρική μελέτη διαφορετικών σεναρίων, δίνεται η δυνατότητα εξαγωγής πορισμάτων για τη βέλτιστη πολιτική.

4.1 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για CAR-DAR

Ο κώδικας στο (Παράρτημα 1) υπολογίζει και συγκρίνει τις βέλτιστες πολιτικές αντικατάστασης (CAR, DAR και τροποποιημένη DAR) για εξαρτήματα με αστοχία Weibull, προσδιορίζοντας τα T^* , N^* , n_1^* , τα αντίστοιχα κόστη (CAR, DAR, c_n) και την ποινή δ^* . Υιοθετήσαμε Weibull με $a=2$ δηλαδή ο ρυθμός βλαβών ανά μονάδα χρόνου αυξάνει με την ηλικία του εξοπλισμού, $scale\ b=5$, εκθετικούς κύκλους με $\theta=1$, κόστη $c_F=1$, $c_T/c_F \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ και $c_N = c_T$, όπως στο Zhao–Mizutani (2015). Από τα αριθμητικά αποτελέσματα διαπιστώνουμε ότι η πολιτική CAR διατηρεί προβάδισμα έναντι της DAR, αλλά το πλεονέκτημά της μειώνεται όσο αυξάνεται ο λόγος c_T/c_F . Ταυτόχρονα, τα βέλτιστα T^* και N^* μετατοπίζονται σε μεγαλύτερες τιμές, κάτι απολύτως αναμενόμενο, αφού η προληπτική αντικατάσταση καθίσταται ακριβότερη. Επιπλέον, το «κατώφλι» c_n και η ποινή δ^* παρέχουν σαφή κανόνα απόφασης. Επιλέγεται DAR όταν $c_N \leq c_n$ ή όταν το κόστος διακοπής υπερβαίνει τη ποινή, διαφορετικά προτιμάται η CAR. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν αυξήσουμε το λ (άρα μικραίνει η κλίμακα $b=1/\lambda$), η αξιοπιστία χειροτερεύει. Ο μέσος χρόνος μέχρι βλάβη μειώνεται και ο στιγμιαίος ρυθμός αστοχίας αυξάνει. Ως συνέπεια, τα βέλτιστα σημεία T^* και N^* μικραίνουν, ενώ τα κόστη ανά μονάδα χρόνου αυξάνονται.

Πίνακας 4.1 CAR-DAR

cT/cF	1/λ=5								
	T1	N1	cn/cF	n1	cn/cT	Cost_CAR(T1)	Cost_DAR(N1)	Cost_DAR(n1)	δ
0,1	1,6823	2	0,0506	1	0,5059	0,1211	0,1472	0,1211	0,0494
0,2	2,5533	3	0,1346	2	0,6729	0,1634	0,1828	0,1634	0,0654
0,3	3,3947	4	0,226	3	0,7534	0,1901	0,2039	0,1901	0,074
0,4	4,323	6	0,3247	5	0,8117	0,2075	0,2161	0,2075	0,0753
0,5	5,454	8	0,4248	6	0,8496	0,2182	0,2226	0,2184	0,0752

4.2 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για CPR-DPR

Με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα του κώδικα (Παράρτημα 2) και εφαρμόζοντας τις ίδιες εισόδους, για τις περιοδικές πολιτικές (CPR-DPR) προκύπτουν ποιοτικά τα ίδια συμπεράσματα με τις πολιτικές ηλικίας (CAR-DAR). Με $c_N = c_T$ η CPR εμφανίζει χαμηλότερο αναμενόμενο κόστος από τη DPR, ενώ το προβάδισμά της μειώνεται όσο αυξάνει ο λόγος c_T/c_M . Παράλληλα, τα βέλτιστα σημεία T_2^* και N_2^* μετατοπίζονται σε μεγαλύτερες τιμές καθώς η προληπτική αντικατάσταση καθίσταται ακριβότερη.

Πίνακας 4.2 CPR-DPR

cT/cM	1/λ=5								
	T2	N2	cn/cM	n2	cn/cT	Cost_CPR(T2)	Cost_DPR(N2)	Cost_DPR(n2)	δ
0,1	1,5811	2	0,0465	1	0,4649	0,1265	0,17	0,1265	0,0535
0,2	2,2361	2	0,1178	2	0,5889	0,1789	0,22	0,22	0,0822
0,5	3,5355	4	0,3685	3	0,7371	0,2828	0,325	0,2828	0,1315
1	5	5	0,8	5	0,8	0,4	0,44	0,4	0,2
5	11,18	11	4,5588	11	0,9118	0,8944	0,93	0,8944	0,4412

4.3 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για ARO

Ο κώδικας στο (παράρτημα 3) υλοποιεί βήμα-βήμα την πολιτική ARO υπό αστοχίες Weibull. Δέχεται ως είσοδο τις παραμέτρους a, b του Weibull, τον ρυθμό κύκλου θ (εκθετική

κατανομή), και τα κόστη c_F (αντικατάσταση μετά από αστοχία) και c_T (προληπτική αντικατάσταση που δίνεται ως λόγος). Για δίκαιη σύγκριση τίθεται αρχικά $c_0 = c_T$. Αφού ορίσει τις συναρτήσεις, επιλύει για το βέλτιστο κατώφλι T_3^* και υπολογίζει το κόστος ARO. Ελέγχει μοναδικότητα μέσω του ορίου του ρυθμού αστοχίας και, χρησιμοποιώντας CAR, λύνει τις εξισώσεις που δίνουν το νέο t_3^* και το προσαρμοσμένο κόστος κύκλου c_0 , υπολογίζοντας εκ νέου το κόστος ARO. Τέλος, συγκρίνει τη τροποποιημένη ARO με τη DAR βρίσκει το ελάχιστο n_1^* και υπολογίζει το αντίστοιχο προσαρμοσμένο κόστος αντικατάστασης c_n και το κόστος DAR στο n_1^* .

Από αριθμητικά αποτελέσματα παρατηρούμε προκύπτει ότι το ARO (Age Replacement with Overtime) παρουσιάζει συστηματικά χαμηλότερο μέσο κόστος αντικατάστασης σε σχέση με το DAR (Discrete Age Replacement), ακόμη κι αν αντικαθιστά νωρίτερα, δηλαδή με μικρότερο βέλτιστο χρόνο. Τα τροποποιημένα κόστη επιβεβαιώνουν αυτήν την τάση, καθώς το ARO εξακολουθεί να υπερέχει οριακά του DAR, με τη διαφορά να μειώνεται όσο αυξάνεται το σχετικό κόστος αντικατάστασης (c_T/c_F).

Πίνακας 4.3 ARO

c_T/c_F	$1/\lambda=5$						
	T_3	$Cost_ARO(T_3)$	T_1	t_3	c_0/c_F	c_0/c_T	$Cost_ARO(t_3)$
0,1	1,0425	0,1346	1,6823	0,7926	0,0722	0,7218	0,1211
0,2	1,8742	0,1703	2,5533	1,6862	0,177	0,8848	0,1634
0,3	2,7113	0,1939	3,3947	2,5483	0,2811	0,9371	0,1901
0,4	3,65	0,2094	4,323	3,498	0,3849	0,9623	0,2075
0,5	4,8033	0,219	5,454	4,6535	0,4884	0,9768	0,2182

c_T/c_F					
	n_1	$Cost_DAR(N_1)$	$Cost_DAR(n_1)$	c_n	c_n/c_T
0,1	2	0,1472	0,1346	0,073	0,7303
0,2	3	0,1828	0,1703	0,1559	0,7793
0,3	4	0,2039	0,1939	0,2455	0,8185
0,4	5	0,2161	0,211	0,3401	0,8504
0,5	6	0,2226	0,2201	0,4348	0,8696

4.4 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για PRO

Αντίστοιχο κώδικα matlab για την πολιτική PRO έχουμε στο (παράρτημα 4). Προκύπτει ότι ο βέλτιστος χρόνος αντικατάστασης T_4^* αυξάνεται καθώς μεγαλώνει ο λόγος c_T/c_M , γεγονός που σημαίνει ότι όταν η αντικατάσταση είναι ακριβότερη σε σχέση με την επισκευή, συμφέρει να γίνεται πιο αραιά. Το αντίστοιχο μέσο κόστος PRO επίσης αυξάνεται με το c_T/c_M . Για πολύ μικρό λόγο η τροποποιημένη DPR δίνει μικρότερο κόστος από την PRO.

Πίνακας 4.4 PRO

c_T/c_M	$1/\lambda=5$							
	T_4^*	Cost_PRO(T_4^*)	t_4^*	Cost_PRO(t_4^*)	n^*	Cost_DPR(n)	cn	cn/c_T
0,1	0,7071	0,1697	0,5811	0,1842	1	0,1366	0,0566	0,5657
0,2	1,7321	0,1848	1,2361	0,1636	2	0,2186	0,1971	0,9856
0,3	2,3452	0,2217	1,7386	0,1851	3	0,2676	0,3228	1,0762
0,4	2,8284	0,2546	2,1623	0,21	3	0,3063	0,4388	1,0971
0,5	3,2404	0,2839	2,5355	0,2344	4	0,3392	0,5569	1,1138

4.5 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για RL,RF,CAR

Ο κώδικας στο (παράρτημα 5) ζητά τις παραμέτρους Weibull και εκθετικής κατανομής μαζί με τα κόστη αντικατάστασης. Ορίζει τις αντίστοιχες συναρτήσεις και υπολογίζει τους βέλτιστους χρόνους αντικατάστασης για τρεις πολιτικές (Replacement Last, Replacement First, Standard Age Replacement) ελαχιστοποιώντας το μέσο κόστος. Επιπλέον λύνει την εξίσωση $Q_1(T)=0$ για να βρει τον χαρακτηριστικό χρόνο T_A^* και υπολογίζει τη συνάρτηση $L(T)$ σε αυτό το σημείο. Παρακάτω και ο πίνακας για διαφορά αποτελέσματα με Weibull με $a=2$ δηλαδή ο ρυθμός βλαβών ανά μονάδα χρόνου αυξάνει με την ηλικία του εξοπλισμού, scale $b=1$, εκθετικούς κύκλους με $\theta=10$, κόστη $c_F=1$.

Πίνακας 4.5 RL-RF-CAR

theta	cost_ratio	TL	TF	TS	TA	L(TA)
10	0,01	0,12335	0,11995	0,10009	0,12633	0,0109
10	0,03	0,18154	0,24184	0,17363	0,12633	0,0109
10	0,05	0,22832	0,34887	0,22454	0,12633	0,0109
10	0,07	0,26821	0,45238	0,26613	0,12633	0,0109
3,3333	0,01	0,2343	0,10597	0,10009	0,32541	0,075108
3,3333	0,03	0,26368	0,19215	0,17363	0,32541	0,075108
3,3333	0,05	0,29181	0,25645	0,22454	0,32541	0,075108
3,3333	0,07	0,31872	0,31208	0,26613	0,32541	0,075108
1	0,01	0,40763	0,10179	0,10009	0,65087	0,326

4.6 Κώδικας και Αριθμητικά αποτελέσματα για περιοδικές RL,RF,CPR

Ο κώδικας στο (παράρτημα 6) παρόμοιας λογικής με προηγούμενο, υπολογίζει βέλτιστους χρόνους προληπτικής αντικατάστασης στις αντίστοιχες περιοδικές πολιτικές (Replacement Last, Replacement First, Periodic Age Replacement). Οι χρόνοι αστοχίας ακολουθούν κατανομή Weibull με παραμέτρους a, b , οι κύκλοι ακολουθούν εκθετική κατανομή και λαμβάνονται υπόψη κόστη διορθωτικής αντικατάστασης c_F , προληπτικής αντικατάστασης c_P και ελάχιστης επισκευής c_M . Με χρήση της f_{minbnd} ελαχιστοποιούνται οι συναρτήσεις αυτές και προκύπτουν οι βέλτιστοι χρόνοι αντικατάστασης μαζί με το ελάχιστο κόστος τους. Τέλος, μέσω επίλυσης της εξίσωσης $Q_2(T)=0$, υπολογίζεται και μια ειδική τιμή TB^* , καθώς και η συνάρτηση $L(TB^*)$. Παρακάτω και ο πίνακας για διαφορά αποτελέσματα με ίδιες εισόδους όπως πριν.

Πίνακας 4.6 RL-RF-SPR

Theta	Ratio	T(L)	Cost_RL	TF	Cost_RF	TS	Cost_SPR	TB	LTB
10	0.01	0.1254	0.2507	0.1198	0.2397	0.1	0.2	0.13	0.0115
10	0.03	0.1823	0.3646	0.241	0.482	0.1732	0.3464	0.13	0.0115
10	0.05	0.2281	0.4563	0.3469	0.6938	0.2236	0.4472	0.13	0.0115
10	0.07	0.2672	0.5344	0.4489	0.8978	0.2646	0.5292	0.13	0.0115
3.3333	0.01	0.283	0.566	0.1059	0.2118	0.1	0.2	0.39	0.1031
3.3333	0.03	0.3075	0.6151	0.1916	0.3832	0.1732	0.3464	0.39	0.1031
3.3333	0.05	0.3312	0.6624	0.2552	0.5104	0.2236	0.4472	0.39	0.1031
3.3333	0.07	0.354	0.708	0.3099	0.6198	0.2646	0.5292	0.39	0.1031
1	0.01	0.8926	1.7853	0.1017	0.2034	0.1	0.2	1.2809	1.1174
1	0.03	0.9003	1.8007	0.1783	0.3567	0.1732	0.3464	1.2809	1.1174
1	0.05	0.908	1.816	0.2323	0.4645	0.2236	0.4472	1.2809	1.1174
1	0.07	0.9156	1.8312	0.2768	0.5535	0.2646	0.5292	1.2809	1.1174

Βιβλιογραφία

- [1] B. de Jonge and P.A. Scarf / *European Journal of Operational Research* 285 (2020) 805–824.
- [2] Alsayouf, I. (2007). The role of maintenance in improving companies' productivity and profitability. *International Journal of Production Economics*, 105 (1), 70–78 .
- [3] Zio, E. , & Compare, M. (2013). Evaluating maintenance policies by quantitative modeling and analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 109 , 53–65 .
- [4] Ben-Daya, M. , Kumar, U. , & Murthy, D. (2016). *Introduction to maintenance engineering: Modelling, optimization and management* . New York, NY, USA: Wiley .
- [5] Olde Keizer, M. C. A. , Flapper, S. D. P. , & Teunter, R. H. (2017). Condition-based maintenance policies for systems with multiple dependent components: A review. *European Journal of Operational Research*, 261 (2), 405–420
- [6] Wang, G. J. , & Zhang, Y. L. (2013). Optimal repair-replacement policies for a system with two types of failures. *European Journal of Operational Research*, 226 (3), 500–506.
- [7] Finkelstein, M. (2015). On the optimal degree of imperfect repair. *Reliability Engineering and System Safety*, 138 , 54–58 .
- [8] Zhou, X. , Xi, L. , & Lee, Y. (2007). Reliability-centered predictive maintenance scheduling for a continuously monitored system subject to degradation. *Reliability Engineering and System Safety*, 92 (4), 530–534 .
- [9] Wang, H. (2002). A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, 139 (3), 469–489 .
- [10] Dekker, R. (1996). Applications of maintenance optimization models: A review and analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 51 (3), 229–240 .
- [11] McCall, J. J. (1965). Maintenance policies for stochastically failing equipment: A survey. *Management Science*, 11 (5), 493–524
- [12] Wang, H. (2002). A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, 139 (3), 469–489
- [13] Zhao, X., & Nakagawa, T. (2012). Optimization problems of replacement first or last in reliability theory. *European Journal of Operational Research*, 223(1), 141–149.
- [14] Zhao, X., Mizutani, S., & Nakagawa, T. (2015). Which is better for replacement policies with continuous or discrete scheduled times? *European Journal of Operational Research*, 242(2), 477–486.
- [15] Chen, Y. (2012). A bivariate optimal imperfect preventive maintenance policy for a used system with two-type shocks. *Computers & Industrial Engineering* 63, 1227–1234.
- [16] Nakagawa, T. (2005). *Maintenance theory of reliability*. London: Springer.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

```
clc;
clear;

disp('CALCULATION OF CAR POLICY WITH WEIBULL FAILURE');

% USER INPUTS
a = input('Enter Weibull shape parameter (a): ');
b = input('Enter Weibull scale parameter (b): ');
theta = input('Enter  $\theta$  parameter of the exponential distribution for cycles: ');
cF = input('Enter failure replacement cost cF: ');
cT_ratio = input('Enter ratio cT/cF: ');
cT = cT_ratio * cF;
cN = cT; % We assume cN = cT for fair comparison between CAR and DAR

fprintf('Replacement cost at N cycle cN is equal to cT cost at time T');

% Check that inputs are valid
if a <= 0 || b <= 0 || theta <= 0 || cF <= 0 || cT_ratio <= 0
    error('All parameters must be positive and cT < cF ');
end

% Compute mean  $\mu$  of Weibull
m = b * gamma(1 + 1/a);

if a > 1
    h_inf = Inf;
elseif a == 1
    h_inf = 1 / b;
else
    h_inf = 0;
end

error_1 = cF / (m * (cF - cT));

if h_inf > error_1
    fprintf('Condition satisfied: unique finite T* and N* exist');
else
    fprintf('Condition not satisfied: T* or N* may not exist uniquely');
end

% WEIBULL DISTRIBUTION FUNCTIONS
```

```

F = @(t) wblcdf(t, b, a);
f = @(t) wblpdf(t, b, a);

% Hazard function
h = @(t) f(t) ./ (1 - F(t) + eps); % failure rate, with eps for safety

% SOLVE EQUATION (2.5) FOR T*
% Left-hand side integral of equation (4)
eq_1 = @(T) integral(@(t) (h(T) - h(t)) .* (1 - F(t)), 0, T);

% Right-hand side of equation (4)
eq_2 = cT / (cF - cT);

% Numerical solution for optimal replacement time T*
T_guess = b; % Initial guess close to scale parameter
T_star = fzero(@(T) eq_1(T) - eq_2, T_guess);

% COMPUTE CAR COST
CAR_cost = (cF - cT) * h(T_star);

%DISPLAY RESULTS
fprintf('Optimal replacement time T* = %.4f\n', T_star);
fprintf('CAR Cost = %.4f\n', CAR_cost);

disp('CALCULATION OF DAR POLICY WITH WEIBULL FAILURE');

% Calculation of DAR cost based on the equation (2.8)
G_N = @(t, N) gamcdf(t, N, 1/theta); % Erlang

%Equation of DAR cost
DAR_cost = @(N) (cF - (cF - cN) * integral(@(t) G_N(t, N) .* f(t), 0, Inf)) ./ integral(@(t)
(1-G_N(t, N)) .* (1-F(t)), 0, Inf);

% Start with N = 1
N = 1;

D_N1= DAR_cost(N);
D_N2 = DAR_cost(N + 1);

while D_N2 < D_N1
    N = N + 1;
    D_N1 = D_N2;
    D_N2 = DAR_cost(N + 1);
end

%DISPLAY RESULTS
fprintf('Optimal replacement cycle N* = %.4f\n', N);

```

```

fprintf('DAR Cost = %.4f\n', DAR_cost(N));

fprintf('CALCULATION OF MODIFIED n1* , cn AND PENALTY')

for n = 1:100

    h_T = h(T_star);

    % Compute Q_n for equation (2.12)
    top_Q = integral(@(t) (theta * t).^n .* exp(-theta * t) .* f(t), 0, Inf);
    bottom_Q = integral(@(t) (theta * t).^n .* exp(-theta * t) .* (1-F(t)), 0, Inf);
    Q_n = top_Q / bottom_Q;

    % Terms for equation (2.14)
    I_1 = integral(@(t) (1 - G_N(t, n)) .* (1-F(t)), 0, Inf);
    I_2 = integral(@(t) G_N(t, n) .* f(t), 0, Inf);
    I_3 = cF / (cF - cT);

    eq_3 = h_T * I_1 + (h_T ./ Q_n) * I_2;

    if eq_3 <= I_3
        break;
    end
end

n1_star = n;
fprintf('Modified optimal n1* = %.4f\n', n1_star);

% Compute cn from equation (2.10)
% Equation (2.10) as function of cn

eq_cn_top1 = (cF - cT) .* h_T .* integral(@(t) (1 - G_N(t, n1_star)) .* (1-F(t)), 0, Inf);
eq_cn_top2 = cF .* (integral(@(t) G_N(t, n1_star) .* f(t), 0, Inf));
eq_cn_bottom = integral(@(t) G_N(t, n1_star) .* f(t), 0, Inf);

cn = (eq_cn_top1 + eq_cn_top2 - cF) ./ (eq_cn_bottom);

% PENALTY
delta = cT - cn;

% Compute DAR cost for n1_star using cn and the ratio cn/cT , cn/cF
DAR_n1_cost = (cF - (cF - cn) * integral(@(t) G_N(t, n1_star) .* f(t), 0, Inf)) ./
integral(@(t) (1 - G_N(t, n1_star)) .* (1-F(t)), 0, Inf);
cn_ratio_1 = cn / cF;
cn_ratio_2 = cn / cT;

% Display results

```

```

fprintf('Modified cost cn = %.4f (%.2f%% of cT)\n', cn);
fprintf('Ratio cn / cF = %.4f (%.2f%% of cT)\n', cn_ratio_1);
fprintf('Penalty  $\delta^*$  = cT - cn = %.4f\n', delta);
fprintf('DAR Cost using cn Cost = %.4f\n', DAR_n1_cost);
fprintf('Ratio cn / cT = %.4f\n', cn_ratio_2);

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

```

clc;

clear;

disp('CALCULATION OF CPR POLICY WITH WEIBULL FAILURE');

% User Inputs
a = input('Enter Weibull shape parameter (a): ');
b = input('Enter Weibull scale parameter (b): ');
theta = input('Enter  $\theta$  parameter of exponential cycle distribution: ');
cM = input('Enter minimal repair cost cM: ');
cT_ratio = input('Enter ratio cT/cM: ');
cT = cT_ratio * cM;
cN = cT;% We assume cN = cT for fair comparison

% Check that inputs are valid
if a <= 0 || b <= 0 || theta <= 0 || cM <= 0 || cT_ratio <= 0
    error('All inputs must be positive and reasonable');
end

% WEIBULL DISTRIBUTION FUNCTIONS
F = @(t) wblcdf(t, b, a);
f = @(t) wblpdf(t, b, a);

% Hazard function 2
h = @(t) f(t) ./ (1 - F(t) + eps); % failure rate, with eps for safety

```

```

dh = @(t) (a * (a - 1) / b^a) * t.^(a - 2); %
H = @(t) -log(1 - wblcdf(t, b, a));

% Uniqueness condition check
error_1 = cT / cM;
integral_dh = integral(@(t) t .* dh(t), 0, Inf);

if integral_dh > error_1
    fprintf('Uniqueness condition satisfied, finite T* exists');
else
    fprintf('Uniqueness condition NOT satisfied, T* may not exist uniquely');
end

% Solve Equation (2.18) for T*
eq_1 = @(T) T * h(T) - H(T) - (cT / cM);
T2_star = fzero(eq_1, b); % Start search near scale b

% Compute CPR cost (2.20)
CPR_cost = cM * h(T2_star);

%DISPLAY RESULTS
fprintf('Optimal replacement time T2* = %.4f\n', T2_star);
fprintf('CPR Cost = %.4f\n', CPR_cost);

% Erlang distribution for cycles
G_N = @(t, N) gamcdf(t, N, 1/theta);

% DPR cost function (2.21)
DPR_cost = @(N) (cM * integral(@(t) (1 - G_N(t, N)) .* h(t), 0, Inf) + cN) / (N / theta);

% Find optimal N*
N = 1;

```

```

D_N1= DPR_cost(N);
D_N2 = DPR_cost(N + 1);

while D_N2 < D_N1
    N = N + 1;
    D_N1 = D_N2;
    D_N2 = DPR_cost(N + 1);
end

%DISPLAY RESULTS
fprintf('Optimal replacement cycle N* = %.4f\n', N);
fprintf('DPR Cost = %.4f\n', DPR_cost(N));

disp('CALCULATION OF MODIFIED n , cn AND PENALTY');

% Find modified cn and n*
for n = 1:100
    top = integral(@(t) theta * (theta * t).^n .* exp(-theta * t) .* h(t), 0, Inf);
    H_n = top / factorial(n);
    if H_n >= h(T2_star)
        break;
    end
end

n2_star = n;
fprintf('Modified optimal n* = %.0f\n', n2_star);

% Compute cn using equation (28)

I1 = integral(@(t) (1 - G_N(t, n2_star)) .* h(t), 0, Inf);
cn = cM .* ((n2_star / theta) .* h(T2_star) - I1);

```



```

delta = cT - cn;

DPR_n_cost = (cM * integral(@t (1 - G_N(t, n2_star)) .* h(t), 0, Inf) + cn) / (n2_star /
theta);

;
cn_ratio = cn/cM ;
cn_ratio_2 = cn/cT ;

%DISPLAY RESULTS
fprintf('Modified cost cn = %.4f (%.2f%% of cT)\n', cn);
fprintf('Penalty  $\delta^*$  = cT - c_n = %.4f\n', delta);
fprintf('DPR using cn Cost = %.4f\n', DPR_n_cost);
fprintf('Ratio cn / cM = %.4f\n', cn_ratio);
fprintf('Ratio cn / cT = %.4f\n', cn_ratio_2);

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

```

clc;
clear;

disp('CALCULATION OF ARO POLICY WITH WEIBULL FAILURE');

% USER INPUTS
a = input('Enter Weibull shape parameter (a): ');
b = input('Enter Weibull scale parameter (b): ');
theta = input('Enter  $\theta$  parameter of the exponential distribution for cycles: ');
cF = input('Enter failure replacement cost cF: ');
co_ratio = input('Enter ratio cT/cF: ');
cT = co_ratio * cF;
% We assume co = cT for fair comparison between ARO and CAR
co = cT;
cN = co;

```

```

% Check that inputs are valid
if a <= 0 || b <= 0 || theta <= 0 || cF <= 0 || co_ratio <= 0
    error('All parameters must be positive and cT < cF ');
end

% WEIBULL DISTRIBUTION FUNCTIONS
F = @(t) wblcdf(t, b, a);
f = @(t) wblpdf(t, b, a);

% Hazard function
h = @(t) f(t) ./ (1 - F(t) + eps); % failure rate, with eps for safety

% Solve (2.28) Optimal T3*
Q = @(T) integral(@(t) exp(-theta * t) .* f(t), T, Inf) ./ integral(@(t) exp(-theta * t) .* (1-
F(t)), T, Inf);

% Left-hand side of equation (2.28)
eq_1 = @(T) Q(T) * integral(@(t) (1-F(t)), 0, T) - F(T);
% Right-hand side of equation (2.28)
eq_2 = cT / (cF - cT);

T3_guess = b;% Initial guess close to scale parameter
T3_star = fzero(@(T)eq_1(T) - eq_2 , T3_guess);

% Compute ARO cost using (2.31)
ARO_cost = (cF - (cF - co) * (1-F(T3_star))) ./ integral(@(t) (1-F(t)), 0, T3_star);

% Display
fprintf('Optimal T*_3 = %.4f\n', T3_star);
fprintf('ARO Cost with T*_3 = %.4f\n', ARO_cost);

```

```

disp('MODIFIED ARO CALCULATION');

% Compute mean  $\mu$  of Weibull
m = b * gamma(1 + 1/a);

if a > 1
    h_inf = Inf;
elseif a == 1
    h_inf = 1 / b;
else
    h_inf = 0;
end

error = cF / (m * (cF - cT));

if h_inf > error
    fprintf(' Uniqueness condition satisfied for T*');
else
    fprintf('Condition not satisfied T* may not exist uniquely');
end

% Use h(T1*) from CAR to define new condition
eq_1 = @(T) integral(@(t) (h(T) - h(t)) .* (1 - F(t)), 0, T);
eq_2 = cT / (cF - cT);
T_guess = b;% Initial guess close to scale parameter
T1_star = fzero(@(T) eq_1(T) - eq_2, T_guess);

% Solve (2.31)
eq_3 = @(t) h(T1_star) .* integral(@(u) (1-F(u)), 0, t) + (h(T1_star) .* (1-F(t))) / Q(t);
eq_4 = cF ./ (cF - cT);
t_guess = b
t3_star = fzero(@(t) eq_3(t) - eq_4, t_guess);

```

```

% Then compute modified co from (2.32)
Q_t3 = Q(t3_star);
co_new = (cF .* Q_t3 - (cF - cT) * h(T1_star)) ./ Q_t3;

% Cost with modified co
ARO_cost_new= (cF - (cF - co_new) * (1-F(t3_star))) ./ integral(@(t) (1-F(t)), 0, t3_star);

% Display
fprintf('Modified t3* = %.4f\n', t3_star);
fprintf('Modified co = %.4f\n', co_new);
fprintf('ARO Cost with co = %.4f\n', ARO_cost_new);
fprintf('co / cF = %.4f\n', co_new / cF);
fprintf('co / cT = %.4f\n', co_new / cT);

%MODIFIED ARO VS DAR CALCULATION
%Equation of DAR cost
% Calculation of DAR cost based on the equation (2.8)
G_N = @(t, N) gamcdf(t, N, 1/theta); % Erlang

DAR_cost = @(N) (cF - (cF - cN) * integral(@(t) G_N(t, N) .* f(t), 0, Inf)) ./ integral(@(t)
(1-G_N(t, N)) .* (1-F(t)), 0, Inf);

% Start with N = 1
N = 1;

D_N1= DAR_cost(N);
D_N2 = DAR_cost(N + 1);

while D_N2 < D_N1
    N = N + 1;
    D_N1 = D_N2;

```

```

        D_N2 = DAR_cost(N + 1);
    end

%DISPLAY RESULTS
fprintf('Optimal replacement cycle N* = %.4f\n', N);
fprintf('DAR Cost with N1 = %.4f\n', DAR_cost(N));

% Loop to find minimal n1* satisfying (2.33)

for n = 1:100
    numerator = integral(@(t) ((theta .* t).^n) .* exp(-theta .* t) .* f(t), 0, Inf);
    denominator = integral(@(t) ((theta .* t).^n) .* exp(-theta .* t) .* (1 - F(t)), 0, Inf);
    Q_n1 = (numerator) / (denominator);

    Q_T3 = Q(T3_star);
    right = cF / (cF - co);
    G_n = @(t) gamcdf(t, n, 1/theta);
    I1 = integral(@(t) (1 - G_n(t)) .* (1 - F(t)), 0, Inf);
    I2 = integral(@(t) G_n(t) .* f(t), 0, Inf);

    total = Q_T3 * I1 + (Q_T3 / Q_n1) .* I2;

    if total <= right
        break;
    end
end

n1_star = n;
fprintf('Modified optimal n1* = %d\n', n1_star);

```

```

% Compute modified replacement cost cn for the given n1*
G_N = @(t, n) gamcdf(t, n, 1/theta);
cn_new = cF - ( cF - (cF - co) * Q(T3_star) * I1 ) / I2;
DAR_n1_cost = (cF - (cF - cn_new) * integral(@(t) G_N(t, N) .* f(t), 0, Inf)) ./
integral(@(t) (1-G_N(t, N)) .* (1-F(t)), 0, Inf);

% Display results
fprintf('MODIFIED DAR BASED ON ARO COMPARISON');
fprintf('Modified replacement cost cn = %.4f\n', cn_new);
fprintf('Modified DAR cost = %.4f\n', DAR_n1_cost);
fprintf('Ratio cn / cT = %.4f\n', cn_new / cT);

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

```

clc;
clear;

disp('CALCULATION OF PRO POLICY WITH WEIBULL FAILURE');

% USER INPUTS
a = input('Enter Weibull shape parameter (a): ');
b = input('Enter Weibull scale parameter (b): ');
theta = input('Enter θ parameter of the exponential distribution for cycles: ');
cM = input('Enter minimal repair cost cM: ');
ratio = input(['Enter ratio cT/cM: ']);
cT = ratio * cM;
co=cT % We assume co = cT for fair comparison

% Check that inputs are valid
if a <= 0 || b <= 0 || theta <= 0 || cM <= 0 || ratio <= 0 || ratio >= 1
    error('All parameters must be positive and 0 < co/cM < 1');
end

% WEIBULL DISTRIBUTION FUNCTIONS
F = @(t) wblcdf(t, b, a);
f = @(t) wblpdf(t, b, a);

% Hazard function
h = @(t) f(t) ./ (1 - F(t) + eps); % failure rate, with eps for safety
dh = @(t) (a * (a - 1) / b^a) * t.^(a - 2);
H = @(t) -log(1 - wblcdf(t, b, a));

```

```

% CPR POLICY find T*_2 from equation (2.18)
eq_1 = @(T) T * h(T) - H(T) - (cT / cM);
T2_star = fzero(eq_1, b); % Start search near scale b
h_T2 = h(T2_star);

% First compute T*_4
eq_1 = @(T) integral(@(t) t .* dh(t), 0, T) + integral(@(t) exp(-theta * (t - T)) .* dh(t), T,
Inf) - (co / cM);
T4_guess = b;
T4_star = fzero(eq_1, T4_guess);

% Compute PRO cost using (2.38)
PRO_cost = (cM * H(T4_star) + co) ./ T4_star

% DISPLAY RESULTS
fprintf('Optimal T*_4 = %.4f\n', T4_star);
fprintf('PRO Cost with T*_4 = %.4f\n', PRO_cost);

% MODIFIED PRO CALCULATION

%Solve for t4_star
eq_t4 = @(t) integral(@(u) theta .* exp(-theta .* u) .* h(u + t), 0, Inf) - h_T2;
t4_star = fzero(eq_t4, b);

% Compute new co from equation (2.40)
int1 = integral(@(t) t .* h(t), 0, t4_star);
int2 = integral(@(t) exp(-theta * (t - t4_star)) .* dh(t), t4_star, Inf);
co_new = cM * (int1 + int2);

% Compute new cost rate with modified co
PRO_cost_new = (cM * H(t4_star) + co_new) ./ t4_star;

% Display results
fprintf('MODIFIED PRO RESULTS');
fprintf('Modified t4* = %.4f\n', t4_star);
fprintf('Modified co = %.4f\n', co_new);
fprintf('Modified PRO cost = %.4f\n', PRO_cost_new);
fprintf('co_new / cT = %.4f\n', co_new / cT);

% COMPARISON: PRO vs DPR

eq_2 = integral(@(t) theta .* exp(-theta .* t) .* h(t + T4_star), 0, Inf);

for n = 1:100
    top = integral(@(t) theta * (theta * t).^n .* exp(-theta * t) .* h(t), 0, Inf);
    H_n = top / factorial(n);

```

```

        if H_n >= eq_2
            n2_star = n;
            break;
        end
    end

    % Modified replacement cost cn (2.42)
    G_n2_star = @(t) gamcdf(t, n2_star, 1/theta);
    I1 = integral(@(t) (1 - G_n2_star(t)) .* h(t), 0, Inf); %  $\int (1 - G_n) * h(t) dt$ 
    cn_new = cM * (n2_star * eq_2 - I1); % Modified cost cn that makes DPR match

PRO

    % Compute DPR cost with the modified cn
    DPR_cost = (cM * I1 + cn_new) / (n2_star / theta);

    % DISPLAY
    fprintf(' MODIFIED DPR BASED ON PRO');
    fprintf('Modified optimal n* = %d\n', n2_star);
    fprintf('Modified replacement cost c_n = %.4f\n', cn_new);
    fprintf('Modified DPR cost = %.4f\n', DPR_cost);
    fprintf('PRO cost (with T4*) = %.4f\n', PRO_cost);
    fprintf('Ratio c_n / cT = %.4f\n', cn_new / cT);
    fprintf('Ratio c_n / cM = %.4f\n', cn_new / cM);

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

```

clc;

clear;

% USER INPUT

a = input('Enter Weibull shape parameter (a): ');
b = input('Enter Weibull scale parameter (b): ');
theta = input('Enter exponential rate  $\theta$ : ');
cF = input('Enter corrective replacement cost (cF): ');
cost_ratio = input('Enter cost ratio cP / (cF - cP): ');
cP = (cost_ratio * cF) / (1 + cost_ratio);

if a <= 0 || b <= 0 || theta <= 0 || cF <= 0 || cP <= 0 || cP >= cF
    error('All parameters must be positive and satisfy: cP < cF and cM < cF');
end

```



```

% Define distributions (Weibull for failure, Exponential for cycle)
F = @(t) wblcdf(t, b, a); % Weibull CDF (failure time)
f = @(t) wblpdf(t, b, a); % Weibull PDF
G = @(t) expcdf(t, 1/theta); % Exponential CDF (working cycle)
g = @(t) exppdf(t, 1/theta); % Exponential PDF
h = @(t) f(t) ./ (1 - F(t) + eps); % Hazard function

% COST FUNCTIONS

% Replacement Last (RL) cost function
Cost_RL = @(T) (cF - (cF - cP) * integral(@(t) G(t).*f(t), T, Inf)) ./ (integral(@(t) (1-F(t)),
0, T) + integral(@(t) (1-G(t)).* (1-F(t)), T, Inf));

% Replacement First (RF) cost function
Cost_RF = @(T) (cP + (cF - cP) * integral(@(t) (1-G(t)) .* f(t), 0, T)) ./ (integral(@(t) (1-
G(t)) .* (1-F(t)), 0, T));

% Standard Age Replacement (SAR) cost function
Cost_SAR = @(T) (cP + (cF - cP)* F(T)) ./ integral(@(t) 1 - F(t), 0, T);

% OPTIMAL REPLACEMENT TIMES

% Solve with fminbnd
Tmin = 0.01;
Tmax = 2 * b;

TL_star = fminbnd(Cost_RL, Tmin, Tmax);
TF_star = fminbnd(Cost_RF, Tmin, Tmax);
TS_star = fminbnd(Cost_SAR, Tmin, Tmax);

% DISPLAY RESULTS
fprintf(' OPTIMAL REPLACEMENT TIMES (cost minimization)');
fprintf('T*L (Replacement Last):%.4f\n', TL_star);

```

```

fprintf('Cost_RL(T*L):%.4f\n\n', Cost_RL(TL_star));
fprintf('T*F (Replacement First):%.4f\n', TF_star);
fprintf('Cost_RF(T*F):%.4f\n\n', Cost_RF(TF_star));
fprintf('T*S (Standard Age Replacement): %.4f\n', TS_star);
fprintf('Cost_SAR(T*S): %.4f\n', Cost_SAR(TS_star));

% Q_1(T): difference q_1(T) - q_2(T). The root Q_1(T)=0 gives T_A*
q_1 = @(T) integral(@(t) G(t).*(1-F(t)).*(h(T)-h(t)), 0, T)

q_2 = @(T) integral(@(t) (1-G(t)).*(1-F(t)).*(h(t)-h(T)),T,Inf)

Q_1 = @(T) (q_1(T) - q_2(T));

T_guess = b;

TA_star = fzero(Q_1, T_guess);

fprintf('T*A = %.4f\n', TA_star);

L = @(T) h(T) .* integral(@(t) (1-G(t)).*(1-F(t)), 0, T) - integral(@(t) (1-G(t)).*f(t), 0, T);
L_TA = L(TA_star);

% DISPLAY RESULTS
fprintf('L(T*A): %.4f\n', L_TA);

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

```

clc;
clear;

% USER INPUTS
a = input('Enter Weibull shape parameter (a): ');

```

```

b = input('Enter Weibull scale parameter (b): ');
theta = input('Enter exponential rate  $\theta$ : ');
cF = input('Enter corrective replacement cost (cF): ');
cM = input('Enter minimal repair cost (cM): ');
cost_ratio = input('Enter cost ratio cP / cM: ');
cP = cost_ratio * cM;

if a <= 0 || b <= 0 || theta <= 0 || cF <= 0 || cP <= 0 || cM <= 0 || cP >= cF || cM >=
cF
    error('All parameters must be positive and satisfy: cP < cF and cM < cF');
end

% Define distributions (Weibull for failure, Exponential for cycle)
F = @(t) wblcdf(t, b, a); % Weibull CDF (failure time)
f = @(t) wblpdf(t, b, a); % Weibull PDF
G = @(t) expcdf(t, 1/theta); % Exponential CDF (working cycle)
g = @(t) exppdf(t, 1/theta); % Exponential PDF
h = @(t) f(t) ./ (1 - F(t) + eps); % Hazard function
H = @(t) integral(@(x) h(x), 0, t); % cumulative hazard

% Replacement Last (RL) cost function
COST_RL = @(T) ((cM .* (H(T) + integral(@(t) (1-G(t)) .* h(t), T, Inf)) + cP)) ./
(T+integral(@(t) 1-G(t), T, Inf));

% Replacement First (RF) cost function
COST_RF = @(T) ((cM .* (integral(@(t) (1-G(t)) .* h(t), 0, T)) + cP)) ./ (integral(@(t) 1-
G(t), 0, T));

% Standard Periodic Replacement cost function
COST_SPR = @(T) ((cM .* H(T)) + cP) ./ T;

% OPTIMAL REPLACEMENT TIMES

```

```

% Solve with fminbnd

Tmin = 0.01;
Tmax = 2 * b;

TL_star = fminbnd(COST_RL, Tmin, Tmax);
TF_star = fminbnd(COST_RF, Tmin, Tmax);
TS_star = fminbnd(COST_SPR, Tmin, Tmax);

% DISPLAY RESULTS
fprintf(' OPTIMAL REPLACEMENT TIMES (cost minimization)');
fprintf('T*L (Replacement Last):%.4f\n', TL_star);
fprintf('Cost_RL(T*L):%.4f\n\n', COST_RL(TL_star));
fprintf('T*F (Replacement First):%.4f\n', TF_star);
fprintf('Cost_RF(T*F):%.4f\n\n', COST_RF(TF_star));
fprintf('T*S (Periodic Age Replacement): %.4f\n', TS_star);
fprintf('Cost_SPR(T*S): %.4f\n', COST_SPR(TS_star));

% Q_2(T): difference q_1(T) - q_2(T). The root Q_2(T)=0 gives T_B*

q_1 = @(T) integral(@(t) G(t).*(h(T)-h(t)), 0, T)

q_2 = @(T) integral(@(t) (1-G(t)).*(h(t)-h(T)),T,Inf)

Q_2 = @(T) (q_1(T) - q_2(T));

T_guess = b;

TB_star = fzero(Q_2, T_guess);

fprintf('T*B = %.4f\n', TB_star);

L = @(T) integral(@(t) (1-G(t)).*(h(TB_star)-h(t)), 0, TB_star);

```

```
L_TB = L(TB_star);
```

```
% DISPLAY RESULTS
```

```
fprintf('L(T*B): %.4f\n', L_TB);
```