



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Σχολή Τεχνολογίας

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

**Κατασκευή INVERTER δύο γραμμών
με σύνδεση φωτοβολταϊκών σε σειρά**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σαμιακός Νικόλαος Σπυρίδωνα (ΑΜ: 3119102)

Επιβλέπων: Δρ. Κώστας Χαϊκάλης, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΛΑΡΙΣΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2025

Υπεύθυνη Δήλωση περί Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας και Πνευματικών Δικαιωμάτων

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα πτυχιακή εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον, και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Ο/Η Δηλών/ούσα

Σαμακός Νικόλαος

(Υπογραφή)

Ιούνιος 2025

Εγκρίνεται από την Επιτροπή Εξέτασης:

Επιβλέπων/πουσα **Χαϊκάλης Κωνσταντίνος**
Αναπληρωτής καθηγητής
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μέλος **Απόστολος Ξενάκης**
Επίκουρος καθηγητής
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μέλος **Δημήτριος Κοσμάνος**
Ακαδημαϊκός υπότροφος
Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ημερομηνία έγκρισης:

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά κυρίως την κατασκευή ενός INVERTER με 4 βασικά χαρακτηριστικά: **1.** Τη σύνδεση των panels (φωτοβολταϊκά) σε σειρά, μέσω transistor ισχύος. **2.** Την κλιμακωτή αύξηση της τάσης, με σταδιακή είσοδο κάθε panel, μέχρι να επιτευχθεί η κορυφή της τάσης $N \times V_p$, όπου N = αριθμός panels και V_p η ονομαστική τάση λειτουργίας του κάθε panel, έτσι ώστε να προσεγγίζεται η ημιτονοειδής καμπύλη. **3.** Στη διάρκεια μετατροπής, συνεχούς σε εναλλασσόμενο, έχουμε απώλεια μέρους της ισχύος, την οποία στην παρούσα εργασία αξιοποιείται με τη λειτουργία δεύτερης γραμμής τάσης ($2^{\text{ος}}$ INVERTER), δηλαδή ανά πάσα στιγμή αξιοποιείται η ενέργεια όλων των panels. **4.** Τη θεωρητική μελέτη της παραγωγής δύο εναλλασσόμενων τάσεων με διαφορά φάσης 90 μοίρες, στηριγμένης στην ανάλυση Fourier και η οποία δίνει ένα γενικό μαθηματικό θεωρητικό μοντέλο εφαρμογής, εύκολα προσαρμόσιμο στα προϊόντα της αγοράς (panels). Όλα τα παραπάνω μπορούν να παραμετροποιηθούν σε ένα πρόγραμμα, σε γλώσσα python, το οποίο μπορεί να μας δίνει με βήμα μίας μοίρας (ή 2 μοιρών) τις τιμές της ρεύματος και των δύο INVERTERS, καθώς και την μορφή της καμπύλης του ρεύματος σε υποθετικό καταναλωτή με αντίσταση και αυτεπαγωγή. Οι βασικοί παράμετροι στο πρόγραμμα αυτό είναι οι γωνίες $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9$ του κάθε βήματος ανόδου της τάσης, η ονομαστική τάση του κάθε πάνελ V_p , καθώς και οι τιμές R, L του καταναλωτή. Με αυτές τις παραμέτρους υπολογίζει το πρόγραμμα τις περιττές αρμονικές b_n των ημιτονοειδών όρων, (αφού η ανάλυση Fourier δείχνει ότι δεν υπάρχουν συνημιτονοειδείς αλλά και ούτε άρτιοι ημιτονοειδείς όροι), καθώς επίσης τα λειτουργικά χαρακτηριστικά των Inverters A και B, δηλαδή τις ενεργές τάσεις εξόδου V_{rms} , την απόδοση ϵ και την κυματομορφή της τάσης εξόδου των 2 Inverters με χρήση των πρώτων 23 περιττών αρμονικών. Όλα τα παραπάνω καταλήγουν στον σχεδιασμό κυκλώματος και την παραγωγή τόσο της πλακέτας παραγωγής σημάτων, όσο και της πλακέτας με τα transistor MOSFET ισχύος, μέσω των οποίων παράγονται οι δύο τάσεις ημιτονοειδούς κατά προσέγγιση μορφής.

ABSTRACT

The present work concerns mainly the construction of an INVERTER with four fundamental distinctives: **1.** The photovoltaic panel's connection in series via power transistors MOSFET. **2.** The scale form development of the voltage, introducing step by step each transistor, until the last reaches the peak of the voltage $N \times V_p$, where N = panel's number & V_p = the nominal voltage of each panel, in order to approach the sinusoidal form. **3.** During the conversion of D.C to A.C. current, there is a power loss which in this device is becoming productive by using a second INVERTER, that means all the panels are in use every time, alternatively by the two INVERTES. **4.** The theoretical study of two alternative, scale form current, with a phase different 90° , based on Fourier analysis, which gives us a simple general mathematic form, easy to apply to the market products (photovoltaic panels).

All the above can be used in a Python's language code that gives, by step of one or two degrees, the current values of the two INVERTERS and the form of current on a conditional load with resistance R and self-inductance L . The parameters, in this code, are the nominal value of each panel voltage V_p , the angles $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9$ of the steps voltage elevation and the load parameters R, L . With these parameters, the code calculates the odd harmonics b_n of the sinusoidal terms - because the Fourier analysis proves the no existence of cosinusoidal and even sinusoidal terms -, the root middle square of output voltage V_{rms} , the efficiency e and the waveforms of the two Inverters output voltage, using the first 23 odd harmonics b_n of the sinusoidal terms. As result of all the precedents is the design of signal circuits and also the plaquettes with the power MOSFET, which produce the two sinusoidal approximatively form.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ το πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, τον καθηγητή Κωνσταντίνο Χαϊκάλη, τον πατέρα μου Σπύρο Σαμιακό, καθώς και όλους τους καθηγητές που με τα μαθήματα τους μου έδωσαν της γνώσεις για να τελειοποιήσω την εργασία.

Σαμιακός Νικόλαος

18/05/2025

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	V
ABSTRACT.....	VI
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	VII
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	9
1. Εισαγωγή - Παρουσίαση δομής της εργασίας.....	11
2. Αρχή λειτουργίας INVERTER.....	13
3. Κλιμακωτά αναπτυσσόμενη τάση.....	15
4. Ανάλυση Fourier κλιμακωτά αναπτυσσόμενης τάσης.....	18
4.1 Αρχή κλιμακωτά αναπτυσσόμενης τάση.....	18
4.2 Ανάλυση Fourier.....	19
5. Θεωρητικός υπολογισμός αρμονικών b_n	28
6. Υπολογισμός αρμονικών.....	37
6.1 Υπολογιστικά φύλλα (excel).....	40
6.2 Υπολογισμός αρμονικών για INVERTER.B.....	43
6.3 Υπολογισμός αρμονικών για $\Delta\phi = 9^\circ$	45
7. Υπολογισμός ενεργού τάσης V_{rms} των INVERTER.....	47
7.1 Θεωρητικός υπολογισμός.....	47
7.2 INVERTER.A.....	47
7.3 INVERTER.B.....	48
7.4 V_{rms} για $\Delta\phi = 9^\circ$	50
8. Απόδοση διπλού INVERTER.A & B.....	51
8.1 Απόδοση για $\Delta\phi = 9^\circ$	52
9. Επιλογή panel από την αγορά.....	53
10. Βασικός σχεδιασμός διπλού INVERTER.....	56
11. Στάδια λειτουργίας INVERTER.....	60
12. Κυκλώματα σημάτων ελέγχου.....	69
13. ΚΩΔΙΚΑΣ σε γλώσσα Python.....	76

14. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.....	81
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	83

1. Εισαγωγή - Παρουσίαση δομής της εργασίας

Η εργασία αφορά μέθοδο μείωσης της ημερήσιας κατανάλωση ενέργειας στην Αθήνα, σε διαμέρισμα πολυκατοικίας. Η προτεινόμενη επένδυση σκοπεύει στην εξοικονόμηση ενέργειας που παρέχεται από το ηλεκτρικό δίκτυο στη διάρκεια της ημέρας με ηλιοφάνεια. Η μεγάλη κατανάλωση αφορά τρεις βασικά συσκευές.

A. Η κατανάλωση ενέργειας για ψύξη –θέρμανση που αφορά ένα δωμάτιο, στο οποίο γίνεται συστηματική χρήση κλιματιστικού για 9 περίπου ώρες την ημέρα κάθε μέρα. Επειδή η ρύθμιση είναι σε λογικά πλαίσια (23°C για χειμώνα – 26°C το καλοκαίρι) και υπάρχει καλή θερμομόνωση του σπιτιού, έχει διαπιστωθεί ότι ο πραγματικός χρόνος λειτουργίας του κλιματιστικού (στην ενεργοβόρα του λειτουργία) είναι περίπου 20 λεπτά την ώρα, μετά την πρώτη μισή ώρα. Άρα η παραδοχή πραγματικού χρόνου λειτουργίας είναι το $1/3$ του ονομαστικού χρόνου, δηλαδή $(1/3)*9 = 3$ ώρες για ονομαστική ισχύ κλιματιστικού $1350\text{W}=1,35\text{ KW}$.

B. Άλλος μεγάλος καταναλωτής είναι το μάτι της ηλεκτρικής κουζίνας που είναι γύρω στα $1,5\text{KW}-2\text{KW}$. Γ. Ο τρίτος μεγάλος καταναλωτής είναι ο θερμοσίφωνας.

Το βασικό τμήμα της εργασίας αφορά την θεωρητική μελέτη και σχεδιασμό ενός INVERTER (μετατροπέας D.C.→ A.C.) ο οποίος είναι ικανός να τροφοδοτεί, την ώρα της ηλιοφάνειας, τις μεγάλες καταναλώσεις με αποκοπή από το δίκτυο. Τα πάνελ συνδέονται σε σειρά, σταδιακά μέσω transistor ισχύος MOSFET, με τρόπο ώστε να δίνουν κλιμακωτά αναπτυσσόμενη τάση. Ο σχεδιασμός προβλέπει την λειτουργία δεύτερης γραμμής, από τα πάνελ που είναι εκτός λειτουργίας (INVERTER.B), στη διάρκεια ανάπτυξης κλιμακωτής τάσης στον κύριο INVERTER.A

Μπορεί η διαθέσιμη ισχύς του 2^{ου} INVERTER.B να διοχετεύεται μέσω μετασχηματιστή στον ηλεκτρικό θερμοσίφωνα. Με ελάχιστη εκπαίδευση των χρηστών της οικογένειας μπορεί η κύρια γραμμή (INVERT.A) που τροφοδοτεί κουζίνα να τροφοδοτήσει εναλλακτικά και το πλυντήριο (αποκλείοντας την χρήση της κουζίνας ή ηλ. σκούπας). Συνοψίζοντας: Όταν υπάρχει ηλιοφάνεια από τις 3 γραμμές που έχει συνήθως ένα διαμέρισμα $80 -120\text{m}^2$, αποσυνδέονται οι δύο που συνδέονται αυτόματα με τους δύο

INVERTERS . Ο ένας τροφοδοτεί το κλιματιστικό (και φωτισμό) ή εναλλακτικά ηλ. κουζίνα (ένα μάτι) ή πλυντήριο ρούχων (μόνο ένα από τα 3 κάθε φορά). Η γραμμή που παραμένει να τροφοδοτείται από το δίκτυο (ΔΕΗ ή άλλο πάροχο) είναι η γραμμή του ηλεκτρικού ψυγείου. Εννοείται ότι απαιτείται η κατασκευή πίνακα που θα συνδεθεί λειτουργικά με τον υπάρχοντα πίνακα για όλες τις περιγραφόμενες διαδικασίες.

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζεται κι εξηγείται το πώς παράγεται η κλιμακωτά αυξανόμενη τάση από τα panels ώστε να προσεγγίζει την ημιτονοειδή μορφή.

Στη συνέχεια ακολουθεί ανάλυση κατά Fourier της κλιμακωτά αναπτυσσόμενης τάσης σε μία περίοδο T (ή $0-360^\circ$). Με βάση την ανάλυση γίνεται ο υπολογισμός των αρμονικών σε πίνακες excel.

Συγκρίνουμε ποιοτικά τις δύο κατά προσέγγιση ημιτονοειδείς τάσεις των 2 INVERTERS με βάση την πρώτη και τις υπόλοιπες αρμονικές.

Ακολουθεί ο σχεδιασμός και παρουσίαση των βασικών κυκλωμάτων, τόσο της δημιουργίας των σημάτων όσο και των κυκλωμάτων ισχύος που παράγουν τις δύο πηγές εναλλασσόμενης τάσης που έχουν διαφορά φάσης 90° .

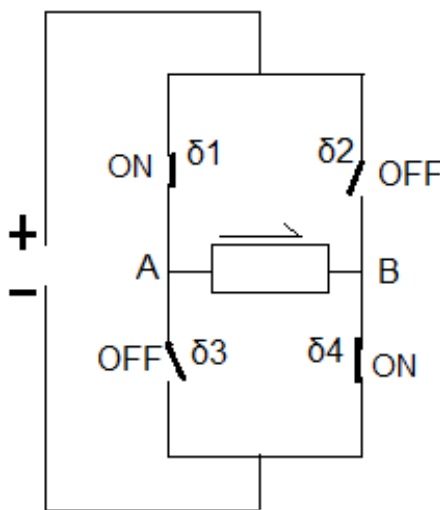
Το τρίτο τμήμα αφορά τη δημιουργία προγράμματος σε Python που θα εισάγονται ως παράμετροι οι αρμονικές b_n και τα υποθετικά χαρακτηριστικά ενός καταναλωτή με αυτεπαγωγή (L) και ωμική αντίσταση (R).

Τέλος με βάση τον παραπάνω σχεδιασμό γίνεται η κατασκευή των 2 πλακετών, τόσο των σημάτων όσο και των δύο κυκλωμάτων παραγωγής εναλλασσόμενων τάσεων.

2. Αρχή λειτουργίας INVERTER

Επειδή η εργασία αφορά την μελέτη και κατασκευή ενός μετατροπέα $DC \rightarrow AC$ (συνεχούς σε εναλλασσόμενο) θα πρέπει να δούμε την αρχή λειτουργίας του.

Στην Εικόνα 1 φαίνεται η αρχή της μετατροπής του συνεχούς ρεύματος σε εναλλασσόμενο.

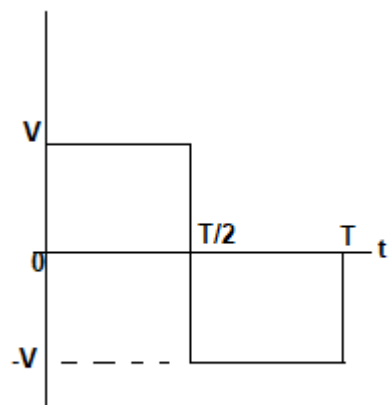


Εικόνα 1- Αρχή Λειτουργίας Inverter

Όταν οι διακόπτες $\delta 1$ και $\delta 4$ είναι κλειστοί (ON) και οι $\delta 2$, $\delta 3$ ανοιχτοί (OFF) τότε το ρεύμα έχει συμβατική φορά από το A στο B.

Όταν αντίθετα, είναι οι διακόπτες $\delta 1$, $\delta 4$ OFF και $\delta 2$, $\delta 3$ ON τότε το ρεύμα έχει συμβατική φορά από το B προς A.

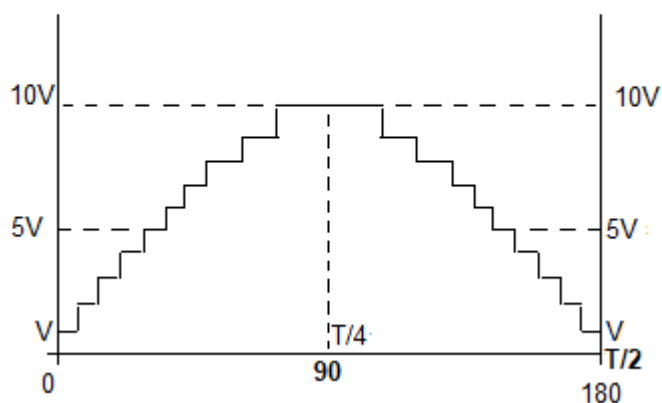
Εάν οι διακόπτες είναι συγχρονισμένοι, έτσι ώστε: όταν $\delta 1, \delta 4$ [ON] τότε $\delta 2$, $\delta 3$ [OFF] και το αντίστροφο και αυτό να συμβαίνει με συγκεκριμένη συχνότητα, τότε παρέχεται στη συσκευή μεταξύ των σημείων A, B ρεύμα εναλλασσόμενης φοράς, δηλαδή εναλλασσόμενο, τετραγωνικής μορφής (Εικόνα 2), όπως στο παρακάτω διάγραμμα (εάν η παρεχόμενη συνεχής τάση είναι σταθερής τιμής) [5, (183-187)].



Εικόνα 2 - Εναλλασσόμενη τάση τετραγωνικής μορφής

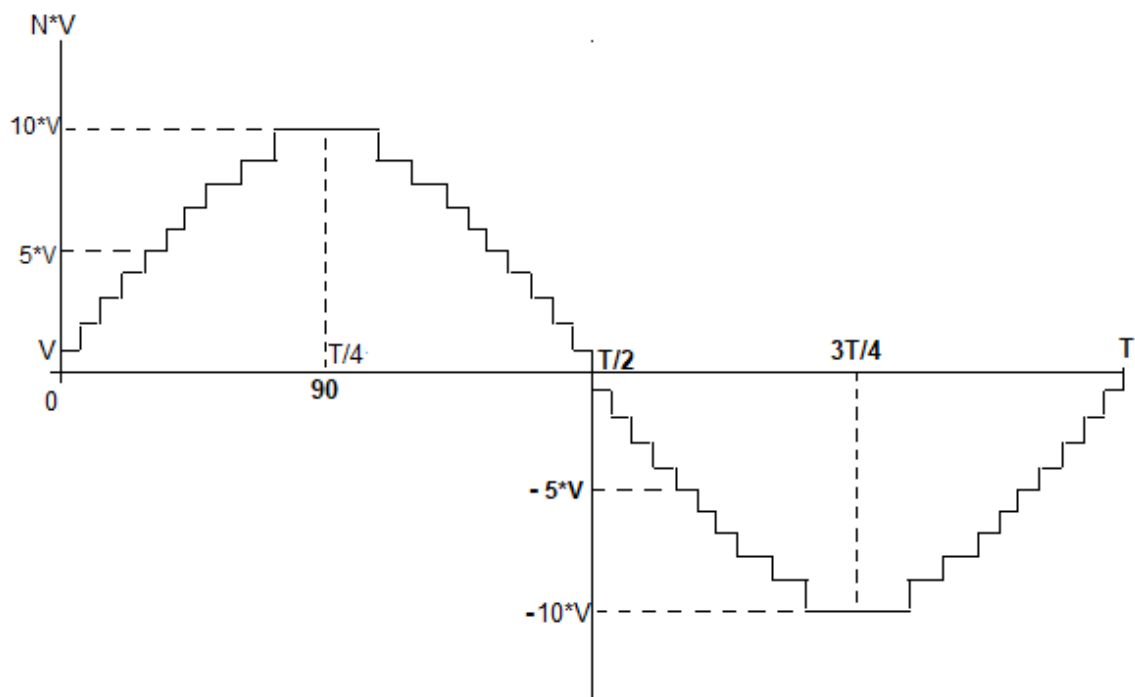
3. Κλιμακωτά αναπτυσσόμενη τάση

Εάν όμως η παρεχόμενη τάση είναι μεν συνεχής, αλλά περιοδικά μεταβαλλόμενης κλιμακωτά τιμής, όπως στο παρακάτω διάγραμμα (Εικόνα 3.):



Εικόνα 3-Κλιμακωτή συνεχόμενη τάση

Τότε με ταυτόχρονη μετάβαση από κατάσταση ON – OFF και αντιστρόφως, των ζευγών διακοπών (δ_1, δ_4) και (δ_2, δ_3) τις στιγμές 0, $T/2$, T , $3T/2$, $2T$, ... ,δηλαδή με περίοδο εναλλαγής $T/2$, παίρνουμε εναλλασσόμενη τάση που προσεγγίζει την ημιτονοειδή, όπως φαίνεται στην επόμενη Εικόνα 4



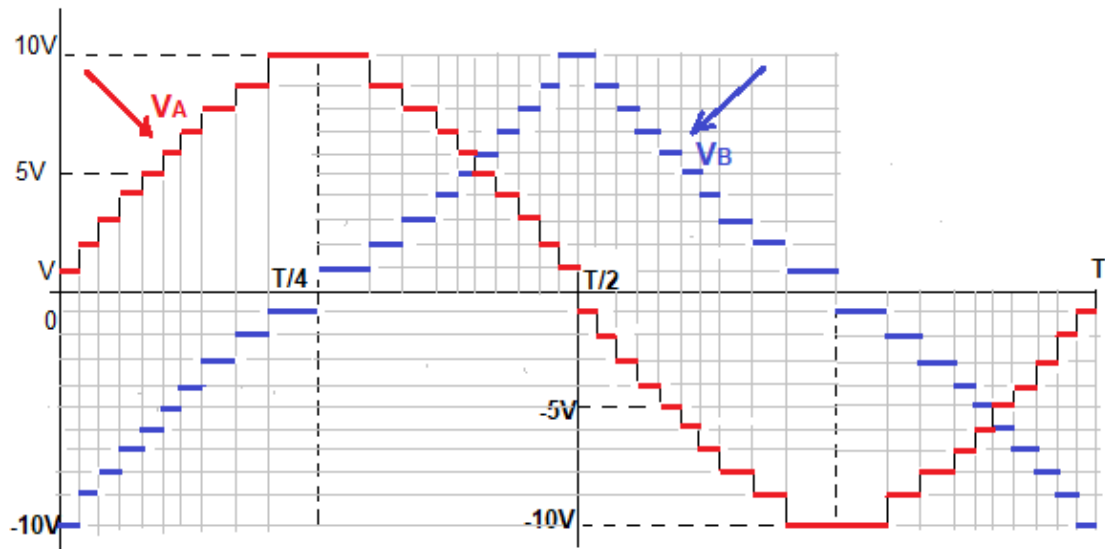
Εικόνα 4-Εναλλασσόμενη τάση κλιμακωτής μορφής.

Οι τιμές $5*V$, $10*V$ στον κατακόρυφο άξονα δεν είναι 5Volt, 10Volt αντίστοιχα αλλά $5*V$ και $10*V$, όπου V = το σταθερό βήμα (π.χ. $V=12\text{Volt}$ ή $V=36\text{Volt}$, αν το κάθε πάνελ βγάζει αντίστοιχα 12 ή 36 Volt) που καθορίζεται η τιμή του από τις προδιαγραφές του κατασκευαστή. Τα πάνελ συνδέονται δηλαδή σε σειρά διαδοχικά, που στη θεωρητική ανάλυση έχουμε τιμή κορυφής $10*V$.

Αυτό αφορά, τον «πρωτεύοντα» Inverter A που δίνει όλα τα παραπάνω.

Στον σχεδιασμό όμως έχουμε και έναν παράλληλο Inverter **B** οποίος παρέχει εναλλασσόμενη τάση όταν τα panel είναι σε αποκοπή στον «πρωτεύοντα» A.

Δηλαδή όταν ένα πάνελ είναι ανενεργό στον A για χρόνο Δt , τότε στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt δίνει τάση (και ισχύ) στον Inverter B , όπως στην επόμενη Εικόνα 5.



Εικόνα 5– Εναλλασσόμενη κλιμακωτή τάση

Το διάγραμμα Εικόνας 5. δείχνει ότι η κυματομορφή του Inverter B (μπλε καμπύλη) υπολείπεται και σε ποιότητα (όσον αφορά την ημιτονοειδή καμπύλη), αλλά και σε τιμή V_{rms} , αφού στις χαμηλές τάσεις τα χρονικά διαστήματα Δt είναι μεγαλύτερα σε σχέση με τις υψηλές.

Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο καμπύλες έχουν διαφορά φάσης 90° , με αυτή του Inverter B (μπλε) να είναι μετατοπισμένη δεξιά κατά $T/4$.

Για να ήταν ακριβώς ίδιες, θα έπρεπε να ήταν όλα τα χρονικά διαστήματα ίσα μεταξύ τους, δηλαδή για 10 βήματα V (τάση πάνελ) να ήταν αντίστοιχα των γωνιών 9° , αφού $90^\circ/10 = 9^\circ$ που αντιστοιχεί σε $\Delta t = (9/360) \cdot T = T/40$.

Επειδή όσα πάνελ δεν δίνουν τάση-ισχύ στον Inverter.A (κόκκινο) δίνουν στον B (μπλε) το άθροισμα σε απόλυτες τιμές τάσεων $|V_A| + |V_B| = 1+10 = 2+9 = 3+8 = \dots = 11 \cdot V$

Το πώς επιτυγχάνεται αυτό εξηγείται στα Κεφάλαια 10, 11, 12 που αφορούν τον σχεδιασμό των κυκλωμάτων του διπλού INVERTER.

4. Ανάλυση Fourier κλιμακωτά αναπτυσσόμενης τάσης

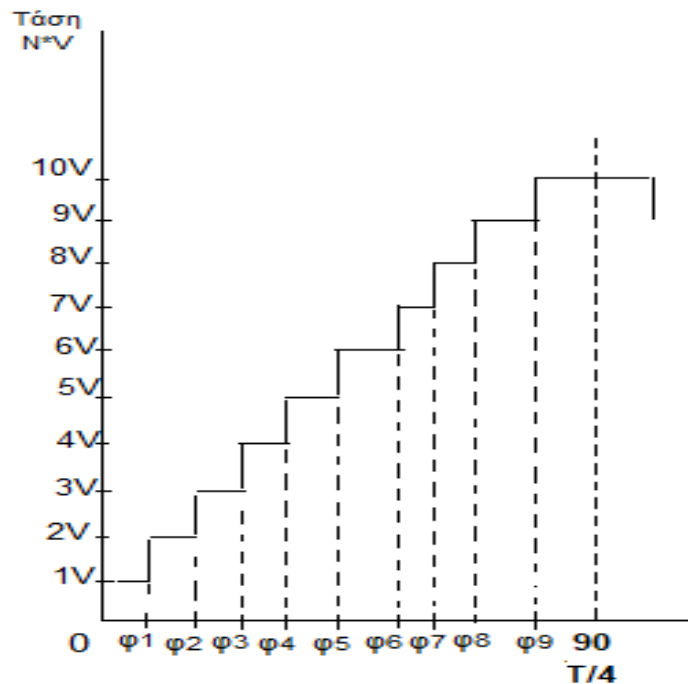
4.1 Αρχή κλιμακωτά αναπτυσσόμενης τάσης

Η κλιμακωτά αναπτυσσόμενη τάση εξασφαλίζεται με σύνδεση των panels κατά σειρά, με μεσολάβηση transistor ισχύος MOSFET που ενεργοποιούνται διαδοχικά από συγκριτές τάσης, οι οποίοι έχουν ως σήμα αναφοράς μία καθορισμένη τιμή και το σήμα είναι ημιτονοειδές από το δίκτυο. Αυξανόμενης της τάσης μπαίνουν σταδιακά τα transistor σε κατάσταση ON εισάγοντας κάθε φορά και ένα επί πλέον panel.

Για τον λόγο αυτό η αναπτυσσόμενη τάση είναι της μορφής $1*V$, $2*V$, $3*V$, $4*V$, $5*V$, ..., $9*V$, $10*V$, όπου V η ονομαστική τάση λειτουργίας V_p του panel.

Η γωνία φ (φάση ωt) για την οποία ενεργοποιείται το κάθε panel, δηλαδή η φ_1 , φ_2 , φ_3 , ..., φ_9 επιλέγεται με βάση τη καμπύλη του ημιτόνου ώστε η κλιμακωτή τάση να βρίσκεται όσο γίνεται πλησιέστερα σε αυτήν.

Η ανάλυση Fourier γίνεται με βάση γενικές τιμές $\varphi_1 = \omega t_1$, $\varphi_2 = \omega t_2$, $\varphi_3 = \omega t_3$ κλπ, ώστε να προκύψει ένας θεωρητικός γενικός τύπος από τον οποίον να μπορεί κάποιος να εισάγει τιμές V_p ονομαστικής τάσης λειτουργίας panel και γωνιών φ_k και να υπολογίζει τις αρμονικές. Το παρακάτω διάγραμμα απεικονίζει την έννοια της κλιμακωτά αναπτυσσόμενης τάσης.



Εικόνα 6 - Κλιμακωτή τάση

Για την παραπάνω διαδικασία και ανάλυση είναι προφανές από το διάγραμμα ότι έχει επιλεγεί η ανάπτυξη κλιμακωτής τάσης σε 10 βήματα, δηλαδή $V_{\text{peak}} = 10 \cdot V$ ($V = V_p =$ ονομαστική τάση λειτουργίας του panel. Με βάση αυτό το διάγραμμα θα γίνει η ανάλυση Fourier.

4.2 Ανάλυση Fourier [2, (129-131)]

Επειδή στην παραπάνω συνάρτηση (κλιμακωτό περίγραμμα ημιτονοειδούς καμπύλης) ισχύει $f(-t) = -f(t)$, δεν υπάρχουν συνημιτονοειδείς όροι (περιττή συνάρτηση).

Επίσης λόγω συμμετρίας εμβαδών ως προς τον οριζόντιο άξονα του χρόνου ($\varphi = \omega t$) δεν υπάρχει σταθερός όρος a_0 στο γενικό ανάπτυγμα Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Άρα υπάρχουν μόνο ημιτονοειδείς όροι, οπότε γίνεται:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\text{με } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Επειδή οι όροι είναι πολλοί, το παραπάνω ολοκλήρωμα το σπάμε σε 4 χρονικές περιόδους $0-T/4$, $T/4-T/2$, $T/2-3T/4$, $3T/4-T$ ονομάζοντας τα αντίστοιχα ολοκληρώματα $\beta_1, \beta_2, \beta_3, , \beta_4$, όπου:

$$\beta_1 = \beta_{1(0-t_1)} + \beta_{1(t_1-t_2)} + \dots + \beta_{1(t_9-T/4)} \quad (\text{Εικόνα 6. - σ.18 , } t_1 \rightarrow \varphi_1, t_2 \rightarrow \varphi_2 \text{ κλπ }).$$

$$\beta_{1(0-t_1)} = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} V \sin(n\omega t) dt = \frac{2V}{T} \int_0^{t_1} -\left(\frac{1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = - \left[\frac{V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_1) - 1]$$

απ' όπου:

$$\beta_{1(0-t_1)} = \left[\frac{V}{n\pi}\right] [1 - \cos(n\omega t_1)] \quad (1.a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{1(t_1-t_2)} &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} 2V \sin(n\omega t) dt = \frac{4V}{T} \int_{t_1}^{t_2} -\left(\frac{1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \\ &= - \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_1)] = \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] \rightarrow \end{aligned}$$

$$\beta_{1(t_1-t_2)} = \left[\frac{2V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] \quad (1.b)$$

και όμοια:

$$\beta_{1(t_2-t_3)} = \left[\frac{3V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] \quad (1.c)$$

$$\beta_{1(t_3-t_4)} = \left[\frac{4V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] \quad (1.d)$$

$$\beta_{1(t_4-t_5)} = \left[\frac{5V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] \quad (1.e)$$

$$\beta_{1(t_5-t_6)} = \left[\frac{6V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] \quad (1.f)$$

$$\beta_{1(t_6-t_7)} = \left[\frac{7V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] \quad (1.g)$$

$$\beta_{1(t_7-t_8)} = \left[\frac{8V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] \quad (1.h)$$

$$\beta_{1(t_8-t_9)} = \left[\frac{9V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] \quad (1.k)$$

$$\begin{aligned} \beta_{1(t_9-T/4)} &= \frac{2}{T} \int_{t_9}^{T/4} 10V(-1) \left[\frac{1}{n\omega}\right] d[\cos(n\omega t)] = \\ &= \left[\frac{10V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega t_9) - \cos(n\frac{\pi}{2})] \rightarrow \end{aligned}$$

$$\beta_{1(t_9-T/4)} = \left[\frac{10V}{n\pi} \right] [\cos(n\omega t_9) - \cos(n \frac{\pi}{2})] \rightarrow$$

$$\text{Για } n=2κ + 1 : \beta_{1(t_9-T/4)} = \left[\frac{10V}{n\pi} \right] \cos(n\omega t_9) \quad (1.m.1)$$

$$\text{Για } n=4k : \beta_{1(t_9-T/4)} = \left[\frac{10V}{n\pi} \right] [\cos(n\omega t_9) - 1] \quad (1.m.2)$$

$$\text{Για } n=4k + 2 : \beta_{1(t_9-T/4)} = \left[\frac{10V}{n\pi} \right] [\cos(n\omega t_9) + 1] \quad (1.m.3)$$

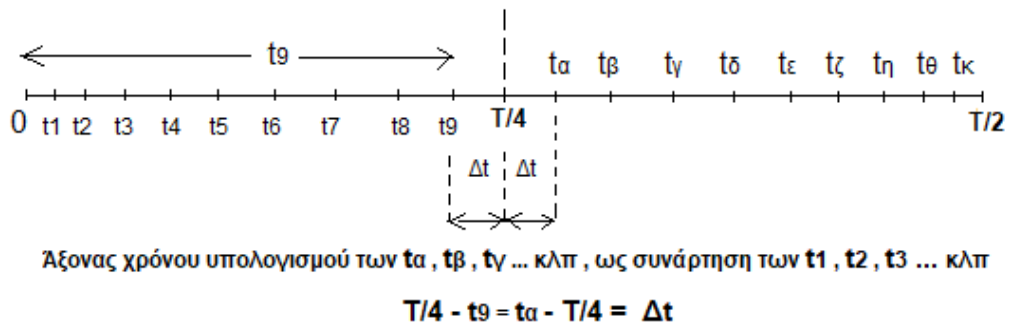
Άρα το ολοκλήρωμα από 0 -T/4 υπολογίζεται ως άθροισμα των παραπάνω:

$$\beta_1 = \beta_{1(0-t_1)} + \beta_{1(t_1-t_2)} + \beta_{1(t_2-t_3)} + \dots + \beta_{1(t_9-T/4)}$$

Ίδια λογική υπολογισμών οδηγεί για το ολοκλήρωμα β_2 , από $T/4 \rightarrow T/2$ ($90^\circ - 180^\circ$) στον επί μέρους υπολογισμό των:

$$\beta_{2[T/4 - (T/2-t_9)]}, \beta_{2[(T/2-t_9) - (T/2-t_8)]}, \dots, \beta_{2[(T/2-t_1) - T/2]}$$

Για την κατανόηση των ορίων ολοκλήρωσης $[(\frac{T}{2} - t_k) - (\frac{T}{2} - t_{k-1})]$ σχεδιάζεται μόνο ο οριζόντιος άξονας (Εικόνα 7.):



Εικόνα 7

Με βάση το άνω διάγραμμα χρόνου και από: $\frac{T}{4} - t_9 = t_a - \frac{T}{4} = \Delta t \rightarrow$

$$\frac{T}{4} + \frac{T}{4} - t_9 = t_a \rightarrow t_a = \frac{T}{2} - t_9 \text{ και όμοια από } \frac{T}{4} - t_8 = t_b - \frac{T}{4} \rightarrow$$

$$t_b = \frac{T}{2} - t_8 \text{ και συνεχίζοντας: } t_c = \frac{T}{2} - t_7, t_d = \frac{T}{2} - t_6, t_e = \frac{T}{2} - t_5,$$

$$t_f = \frac{T}{2} - t_4, t_g = \frac{T}{2} - t_3, t_h = \frac{T}{2} - t_2, t_k = \frac{T}{2} - t_1$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζουμε τα μερικά ολοκληρώματα από $\frac{T}{4} \rightarrow \frac{T}{2}$:

$$\beta_{2[T/4 - (T/2 - t_9)]} = \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2 - t_9} 10V \sin(n\omega t) dt = -\frac{20V}{T} \int_{T/4}^{T/2 - t_9} \left(\frac{1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] =$$

$$= -\frac{10V}{n\pi} |\cos(n\omega t)|_{T/4}^{(T/2 - t_9)} =$$

$$= -\left[\frac{10V}{n\pi}\right] [\cos(n\omega(\frac{T}{2} - t_9)) - \cos(n\omega\frac{T}{4})] = \left[\frac{10V}{n\pi}\right] [\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi - n\omega t_9)]$$

και τελικά : $\beta_{2[T/4 - (T/2 - t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n(\pi/2)) - \cos(n\pi)\cos(n\omega t_9) + 0]$, απ' ό-

που:

$$\beta_{2[T/4 - (T/2 - t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right) \cos(n\omega t_9) \quad \text{για } n = 2k + 1 \quad (2.a.1)$$

$$\beta_{2[T/4 - (T/2 - t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [+1 - \cos(n\omega t_9)] \quad \text{για } n = 4k \quad (2.a.2)$$

$$\beta_{2[T/4 - (T/2 - t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [-1 - \cos(n\omega t_9)] \quad \text{για } n = 4k + 2 \quad (2.a.3)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_9) - (T/2 - t_8)]} = \frac{2}{T} \int_{(T/2 - t_9)}^{(T/2 - t_8)} 9V \sin(n\omega t) dt =$$

$$= -\frac{18V}{T} \int_{(T/2 - t_9)}^{(T/2 - t_8)} \left(\frac{1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = -\frac{9V}{n\pi} |\cos(n\omega t)|_{(T/2 - t_9)}^{(T/2 - t_8)} =$$

$$= \left(-\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega(\frac{T}{2} - t_8)) - \cos(n\omega(\frac{T}{2} - t_9))] =$$

$$= \left(-\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega\frac{T}{2})\cos(n\omega t_8) + \sin(n\pi)\sin(n\omega t_8) -$$

$$- \cos(n\pi)\cos(n\omega t_9) - \sin(n\pi)\sin(n\omega t_9)]$$

και με $\sin(n\pi) = 0$ και $n\omega(\frac{T}{2}) = n(\frac{2\pi}{T})(\frac{T}{2}) = n\pi$, η τελευταία γίνεται:

$$\beta_{2[(T/2 - t_9) - (T/2 - t_8)]} = \left(\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\pi)\cos(n\omega t_9) - \cos(n\pi)\cos(n\omega t_8)] =$$

$$= \left(\frac{9V}{n\pi}\right) \cos(n\pi) [\cos(n\omega t_9) - \cos(n\omega t_8)] \quad \text{και τελικά:}$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_9) - (T/2 - t_8)]} = \left(\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_9) - \cos(n\omega t_8)] \quad \text{για } n = 2k \quad (2.b.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_9) - (T/2 - t_8)]} = \left(\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] \quad \text{για } n = 2k + 1 \quad (2.b.2)$$

και όμοια:

$$\beta_{2[(T/2 - t_8) - (T/2 - t_7)]} = \left(\frac{8V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_7)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.c.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_8) - (T/2 - t_7)]} = \left(\frac{8V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.c.2)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_7) - (T/2 - t_6)]} = \left(\frac{7V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_6)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.d.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_7) - (T/2 - t_6)]} = \left(\frac{7V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.d.2)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_6) - (T/2 - t_5)]} = \left(\frac{6V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_5)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.e.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_6) - (T/2 - t_5)]} = \left(\frac{6V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.e.2)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_5) - (T/2 - t_4)]} = \left(\frac{5V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_4)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.f.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_5) - (T/2 - t_4)]} = \left(\frac{5V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.f.2)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_4) - (T/2 - t_3)]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_3)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.g.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_4) - (T/2 - t_3)]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.g.2)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_3) - (T/2 - t_2)]} = \left(\frac{3V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_2)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.h.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_3) - (T/2 - t_2)]} = \left(\frac{3V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.h.2)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_2) - (T/2 - t_1)]} = \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_1)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k \quad (2.k.1)$$

$$\beta_{2[(T/2 - t_2) - (T/2 - t_1)]} = \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] \quad \gamma_{\alpha} \quad n = 2k + 1 \quad (2.k.2)$$

$$\begin{aligned} \beta_{2[(T/2 - t_2) - T/2]} &= \frac{2}{T} \int_{(T/2 - t_1)}^{T/2} V \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \frac{-V}{n\pi} |\cos(n\omega t)|_{(T/2 - t_1)}^{T/2} = \\ &= \frac{-V}{n\pi} [\cos(n\omega \frac{T}{2}) - \cos(n\omega \frac{T}{2} - t_1)] \quad \text{και με } \omega = 2\pi f \text{ \& } f^*T = 1 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{2[(T/2 - t_2) - T/2]} &= \frac{-V}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos(n\pi)\cos(n\omega t_1) - \sin(n\pi)\sin(n\omega t_1)] = \\ &= \left(\frac{-V}{n\pi}\right)\cos(n\pi)[1 - \cos(n\omega t_1) - 0] = \left(\frac{V}{n\pi}\right)\cos(n\pi)[\cos(n\omega t_1) - 1] \rightarrow \\ \beta_{2[(T/2 - t_1) - T/2]} &= \left(\frac{V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_1) - 1] \quad \text{για } n=2k \quad (2.m.1) \\ \beta_{2[(T/2 - t_1) - T/2]} &= \left(\frac{V}{n\pi}\right)[1 - \cos(n\omega t_1)] \quad \text{για } n=2k+1 \quad (2.m.2)\end{aligned}$$

Για το χρονικό διάστημα $T/2 - 3T/4$ τα όρια των ολοκληρωμάτων είναι:

$[T/2 - (T/2 + t_1)]$, $[(T/2 + t_1) - (T/2 + t_2)]$, ..., $[(T/2 + t_9) - 3T/4]$ με τη συνάρτηση να παίρνει αρνητικές τιμές $[-kV]$ με $k=1, 2, 3, \dots, 10$, αφού στο διάστημα $T/2 - 3T/4$ η γραφική παράσταση είναι συμμετρική του διαστήματος $0 - T/4$ (ως προς τον άξονα του χρόνου) και μετατοπισμένη χρονικά κατά $T/2$. Άρα:

$$\begin{aligned}\beta_{3[(T/2 - (T/2 + t_1))] } &= \frac{2}{T} \int_{T/2}^{(T/2 + t_1)} (-V) \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \left(\frac{V}{n\pi}\right) |\cos(n\omega t)|_{T/2}^{(T/2 + t_1)} = \\ &= \left(\frac{V}{n\pi}\right) [(\cos(n\omega(\frac{T}{2} + t_1))) - \cos(n\omega \frac{T}{2})] = \left(\frac{V}{n\pi}\right) [\cos(n\pi + n\omega t_1) - \cos(n\pi)] = \\ &= \left(\frac{V}{n\pi}\right) [\cos(n\pi)\cos(n\omega t_1) - \cos(n\pi)] = \left(\frac{V}{n\pi}\right)\cos(n\pi)[\cos(n\omega t_1) - 1] \rightarrow\end{aligned}$$

$$\beta_{3 [T/2 - (T/2 + t_1)] } = \left(\frac{V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_1) - 1] \quad \text{για } n = 2\rho \quad (3.a.1)$$

$$\beta_{3 [T/2 - (T/2 + t_1)] } = \left(\frac{V}{n\pi}\right) [1 - \cos(n\omega t_1)] \quad \text{για } n = 2\rho + 1 \quad (3.a.2)$$

$$\begin{aligned}\beta_{3[(T/2 + t_1) - (T/2 + t_2)]} &= \frac{2}{T} \int_{(T/2 + t_1)}^{(T/2 + t_2)} (-2V) \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \frac{2V}{n\pi} |d\cos(n\omega t)|_{\frac{T}{2} + t_1}^{\frac{T}{2} + t_2} = \\ &= \frac{2V}{n\pi} [\cos[n\omega(\frac{T}{2} + t_2)] - \cos[n\omega(\frac{T}{2} + t_1)]] \quad \text{και με } n\omega \frac{T}{2} = n\pi \text{ \& } \sin(n\pi) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{3[(T/2 + t_1) - (T/2 + t_2)]} &= \dots = \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\pi)\cos(n\omega t_2) - \cos(n\pi)\cos(n\omega t_1)] = \\ &= \left(\frac{2V}{n\pi}\right) \cos(n\pi) [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_1)], \quad \text{απ' όπου:}\end{aligned}$$

$$\beta_{3[(T/2 + t_1) - (T/2 + t_2)]} = \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_1)] \quad \text{για } n = 2\rho \quad (3.b.1)$$

$$\beta_{3[(T/2 + t_1) - (T/2 + t_2)]} = \left(\frac{2V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] \quad \text{για } n = 2\rho + 1 \quad (3.b.2)$$

και όμοια:

$$\beta_{3[(T/2+t_2) - (T/2 + t_3)]} = \left(\frac{3V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_2)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.c.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_2) - (T/2 + t_3)]} = \left(\frac{3V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.c.2)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_3) - (T/2 + t_4)]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_3)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.d.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_3) - (T/2 + t_4)]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.d.2)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_4) - (T/2 + t_5)]} = \left(\frac{5V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_4)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.e.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_4) - (T/2 + t_5)]} = \left(\frac{5V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.e.2)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_5) - (T/2 + t_6)]} = \left(\frac{6V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_5)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.f.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_5) - (T/2 + t_6)]} = \left(\frac{6V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.f.2)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_6) - (T/2 + t_7)]} = \left(\frac{7V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_6)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.g.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_6) - (T/2 + t_7)]} = \left(\frac{7V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.g.2)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_7) - (T/2 + t_8)]} = \left(\frac{8V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_7)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.h.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_7) - (T/2 + t_8)]} = \left(\frac{8V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.h.2)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_8) - (T/2 + t_9)]} = \left(\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_9) - \cos(n\omega t_8)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho \quad (3.k.1)$$

$$\beta_{3[(T/2+t_8) - (T/2 + t_9)]} = \left(\frac{9V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] \quad \gamma_{\alpha} n = 2\rho+1 \quad (3.k.2)$$

Για το διάστημα $(T/2 + t_9) - 3T/4$:

$$\begin{aligned} \beta_{3[(\frac{T}{4} + t_9) - 3\frac{T}{4}]} &= \frac{2}{T} \int_{(\frac{T}{2} + t_9)}^{\frac{3T}{4}} (-10V) \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \frac{10V}{n\pi} |d\cos(n\omega t)|_{\frac{T}{2} + t_9}^{\frac{3T}{4}} = \\ &= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega 3\frac{T}{4}) - \cos(n\omega(\frac{T}{2} + t_9))] = \\ &= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n3\frac{\pi}{2}) - \cos(n\pi + \omega t_9)] = \\ &= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n3\frac{\pi}{2}) - \cos(n\pi)\cos(n\omega t_9) + \sin(n\pi)\sin(n\omega t_9)] \rightarrow \end{aligned}$$

$$\beta_{3[(T/2 + t_9) - 3T/4]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n3\frac{\pi}{2}) - \cos(n\pi)\cos(n\omega t_9)] , \text{ αφού } \sin(n\pi) = 0$$

το οποίο για $n=2k+1$ δίνει:

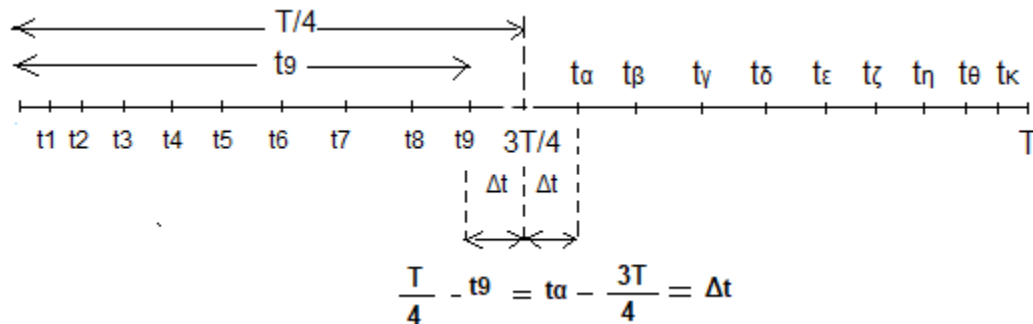
$$\beta_{3[(T/2 + t_9) - 3T/4]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right)\cos(n\omega t_9) \quad n = 2k + 1 \quad (3.m.1)$$

$$\beta_{3[(T/2 + t_9) - 3T/4]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right)[1 - \cos(n\omega t_9)] \quad n = 4k \quad (3.m.2)$$

$$\beta_{3[(T/2 + t_9) - 3T/4]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right)[-1 - \cos(n\omega t_9)] \quad n = 4k + 2 \quad (3.m.3)$$

$$\alpha\text{φού } \cos(n3\frac{\pi}{2}) = \cos[3(\frac{n}{2})\pi] = -1 \quad \gamma\text{ια } \frac{n}{2} = 2k + 1$$

Για το διάστημα $3T/4 - T$ σχεδιάζουμε τον οριζόντιο άξονα των χρόνων:



Εικόνα 8

Στην άνω Εικόνα 8. έχει μετατοπιστεί το διάστημα $[0 - T/4]$ κατά $T/2$ για να φαίνεται η συμμετρία των διαφορών Δt .

Η χρονική στιγμή t_a είναι συμμετρική της t_9 ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

$$\text{Από το διάγραμμα φαίνεται ότι } \Delta t = \frac{T}{4} - t_9 = t_a - \frac{3T}{4} \rightarrow T - t_9 = t_a \quad \eta$$

$$t_a = T - t_9 \quad \text{και όμοια} \quad \frac{T}{4} - t_8 = t_\beta - \frac{3T}{4} \rightarrow t_\beta = T - t_8 \quad \text{και συνεχίζοντας:}$$

$$t_\gamma = T - t_7, \quad t_\delta = T - t_6, \dots, \quad t_\theta = T - t_2, \quad t_k = T - t_1, \quad \text{οπότε με τα άνω όρια:}$$

$$\beta_{4[3T/4 - (T - t_9)]} = \frac{2}{T} \int_{3T/4}^{T-t_9} (-10V) \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \frac{10V}{n\pi} |d\cos(n\omega t)|_{3T/4}^{T-t_9} =$$

$$= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos[n\omega(T - t_9)] - \cos(n\omega \frac{3T}{4})] =$$

$$= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega T)\cos(n\omega t_9) + \sin(n\omega T)\sin(n\omega t_9)] - \cos(n\omega \frac{3T}{4})] =$$

$$= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_9) - \cos(3n\frac{\pi}{2})] =$$

$$= \left(\frac{10V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_9) - \cos(3n\frac{\pi}{2})], \quad \alpha\text{φού } n\omega T = 2n\pi, \quad \alpha\pi \text{ όπου:}$$

$$\beta_{4[3T/4 - (T-t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right)\cos(n\omega t_9) \quad \text{για } n = 2k + 1 \quad (4.a.1)$$

$$\beta_{4[3T/4 - (T-t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_9) - 1] \quad \text{για } n = 4k \quad (4.a.2)$$

$$\beta_{4[3T/4 - (T-t_9)]} = \left(\frac{10V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_9) + 1] \quad \text{για } n = 4k + 2 \quad (4.a.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_{4[(T-t_9) - (T-t_8)]} &= \frac{2}{T} \int_{T-t_9}^{T-t_8} (-9V) \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \frac{9V}{n\pi} |d\cos(n\omega t)|_{T-t_9}^{T-t_8} = \\ &= \left(\frac{9V}{n\pi}\right)[\cos[n\omega(T-t_8)] - \cos[n\omega(T-t_9)]] = \\ &= \left(\frac{9V}{n\pi}\right)[\cos(n2\pi)\cos(n\omega t_8) + \sin(n2\pi)\sin(n\omega t_8) - \cos(n2\pi)\cos(n\omega t_9) - \\ &\quad - \sin(n2\pi)\sin(n\omega t_9)] = \left(\frac{9V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] \quad \text{αφ' όπου:} \\ \beta_{4[(T-t_9) - (T-t_8)]} &= \left(\frac{9V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] \quad (4.b) \end{aligned}$$

και όμοια:

$$\beta_{4[(T-t_8) - (T-t_7)]} = \left(\frac{8V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] \quad (4.c)$$

$$\beta_{4[(T-t_7) - (T-t_6)]} = \left(\frac{7V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] \quad (4.d)$$

$$\beta_{4[(T-t_6) - (T-t_5)]} = \left(\frac{6V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] \quad (4.e)$$

$$\beta_{4[(T-t_5) - (T-t_4)]} = \left(\frac{5V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] \quad (4.f)$$

$$\beta_{4[(T-t_4) - (T-t_3)]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] \quad (4.g)$$

$$\beta_{4[(T-t_3) - (T-t_2)]} = \left(\frac{3V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] \quad (4.h)$$

$$\beta_{4[(T-t_2) - (T-t_1)]} = \left(\frac{2V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] \quad (4.k)$$

Για το διάστημα $(T-t_1) - T$:

$$\begin{aligned} \beta_{4[(T-t_1) - T]} &= \frac{2}{T} \int_{T-t_1}^T (-V) \left(\frac{-1}{n\omega}\right) d[\cos(n\omega t)] = \frac{V}{n\pi} |d\cos(n\omega t)|_{T-t_1}^T = \\ &= \left(\frac{V}{n\pi}\right)[\cos(n\omega T) - \cos[n\omega(T-t_1)]] = \left(\frac{V}{n\pi}\right)[1 - \cos(n\omega T)\cos(n\omega t_1) - 0] = \\ &= \left(\frac{V}{n\pi}\right)[1 - \cos(n\omega t_1)] \quad , \quad \text{αφού } \sin(n\omega T)\sin(n\omega t_1) = 0 * \sin(n\omega t_1) = 0 \text{ και} \end{aligned}$$

$$\text{Από } \cos(n\omega T)=1 \rightarrow \beta_{4[(T-t_1) - T]} = \left(\frac{V}{n\pi}\right)[1 - \cos(n\omega t_1)] \quad (4.m)$$

5. Θεωρητικός υπολογισμός αρμονικών b_n

Για τον υπολογισμό των αρμονικών b_n υπολογίζουμε τρεις φορές το άθροισμα 40 όρων $[4 \times 10]$, δηλαδή μία φορά με $n = 2k + 1$ (περιττός) και δύο φορές για άρτιο.

Μία φορά για άρτιο $n = 4k$ ($n/2 = 2k$) και άλλη μία για άρτιο $n = 4k + 2$ ή $n/2 = 2k + 1$.

Υπολογισμός αρμονικών για $n = 2k + 1$

Αθροίζουμε όλους τους όρους χωρίς προϋποθέσεις μαζί με αυτούς που έχουν ως προϋπόθεση το $n = 2k + 1$, δηλαδή:

$$b_n = (1.a + 1.b + \dots + 1.k + 1.m.1) + (2.a.1 + 2.b.2 + 2.c.2 + 2.d.2 + 2.e.2 + 2.f.2 + 2.g.2 + 2.h.2 + 2.k.2 + 2.m.2) + (3.a.2 + 3.b.2 + 2.c.2 + 3.d.2 + 3.e.2 + 3.f.2 + 3.g.2 + 3.h.2 + 3.k.2 + 3.m.1) + (4.a.1 + 4.b + 4.c + \dots + 4.m) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} b_{n[n=2k+1]} = & \frac{V}{n\pi} [1 - \cos(n\omega t_1)] + \frac{2V}{n\pi} [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] + \\ & + \frac{3V}{n\pi} [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] + \frac{4V}{n\pi} [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] + \\ & + \frac{5V}{n\pi} [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] + \frac{6V}{n\pi} [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] + \\ & + \frac{7V}{n\pi} [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] + \frac{8V}{n\pi} [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] + \\ & + \frac{9V}{n\pi} [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\ & + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{9V}{n\pi} [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] + \\ & + \frac{8V}{n\pi} [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] + \frac{7V}{n\pi} [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] + \\ & + \frac{6V}{n\pi} [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] + \left(\frac{5V}{n\pi}\right) [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] + \\ & + \frac{4V}{n\pi} [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] + \frac{3V}{n\pi} [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] + \\ & + \frac{2V}{n\pi} [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] + \frac{V}{n\pi} [1 - \cos(n\omega t_1)] + \\ & + \frac{V}{n\pi} [1 - \cos(n\omega t_1)] + \frac{2V}{n\pi} [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5V}{n\pi} [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] + \frac{6V}{n\pi} [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] + \\
& + \frac{7V}{n\pi} [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] + \frac{8V}{n\pi} [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] + \\
& + \frac{9V}{n\pi} [\cos(n\omega t_8) - \cos(n\omega t_9)] + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{9V}{n\pi} [\cos n\omega t_8 - \cos n\omega t_9] + \\
& + \frac{8V}{n\pi} [\cos(n\omega t_7) - \cos(n\omega t_8)] + \frac{7V}{n\pi} [\cos(n\omega t_6) - \cos(n\omega t_7)] + \\
& + \frac{6V}{n\pi} [\cos(n\omega t_5) - \cos(n\omega t_6)] + \frac{5V}{n\pi} [\cos(n\omega t_4) - \cos(n\omega t_5)] \\
& + \frac{4V}{n\pi} [\cos(n\omega t_3) - \cos(n\omega t_4)] + \frac{3V}{n\pi} [\cos(n\omega t_2) - \cos(n\omega t_3)] + \\
& + \frac{2V}{n\pi} [\cos(n\omega t_1) - \cos(n\omega t_2)] + \frac{V}{n\pi} [1 - \cos(n\omega t_1)] = \\
& = \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \\
& + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \\
& + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \\
& + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \\
& + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \\
& + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \\
& + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \\
& + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \\
& + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) = \\
& = \frac{4V}{n\pi} + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) [-1+2+2-1-1+2+2-1] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) [-2+3+3-2-2+3+3-2] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) [-3+4+4-3-3+4+4-3] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) [-4+5+5-4-4+5+5-4] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) [-5+6+6-5-5+6+6-5] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) [-6+7+7-6-6+7+7-6] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) [-7+8+8-7-7+8+8-7] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) [-8+9+9-8-8+9+9-8] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) [-9+10-9-9+10+10] = \\
& = \frac{4V}{n\pi} + \frac{4V}{n\pi} [\cos(n\omega t_1) + \cos(n\omega t_2) + \cos(n\omega t_3) + \cos(n\omega t_4) + \\
& + \cos(n\omega t_5) + \cos(n\omega t_6) + \cos(n\omega t_7) + \cos(n\omega t_8) + \cos(n\omega t_9)] \rightarrow \\
& \text{(αφού όλες οι αγκύλες έχουν άθροισμα 4)}
\end{aligned}$$

Άρα :

$$\begin{aligned}
b_{n[n=2k+1]} = \frac{4V}{n\pi} [1 + \cos(n\omega t_1) + \cos(n\omega t_2) + \cos(n\omega t_3) + \cos(n\omega t_4) + \cos(n\omega t_5) + \\
+ \cos(n\omega t_6) + \cos(n\omega t_7) + \cos(n\omega t_8) + \cos(n\omega t_9)]
\end{aligned}$$

Και γενικεύοντας:

$$b_{n[n=2k+1]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [1 + \cos(n\omega t_1) + \cos(n\omega t_2) + \cos(n\omega t_3) + \dots + \cos(n\omega t_{\lambda-1})]$$

Μαθηματική έκφραση περιττών αρμονικών

Προκύπτει δηλαδή μία απλή μαθηματική έκφραση που μας επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό των περιττών αρμονικών οι οποίες εξαρτώνται από τον αριθμό των «βημάτων» λ , (από V έως λV), όπου στο παράδειγμά μας το $\lambda=10$ (10 βήματα), καθώς και από την επιλογή των γωνιών $\omega t_1, \omega t_2, \omega t_3, \dots, \omega t_{\lambda-1}$.

Υπολογισμός αρμονικών για $n=4k$ ή $(n/2) = 2k$

Με την ίδια λογική, **για** $n=4k$, αθροίζουμε όλους τους όρους, όπως και πριν και όπου υπάρχει συνθήκη για άρτιο ή περιττό παίρνουμε τους άρτιους για $n=4k$:

$$\begin{aligned}
b_{n(n=4k)} = & \\
= & (1.a + 1.b + \dots + 1.k + 1.m.2) + (2.a.2 + 2.b.1 + 2.c.1 + 2.d.1 + 2.e.1 + 2.f.1 + \\
& + 2.g.1 + 2.h.1 + 2.k.1 + 2.m.1) + (3.a.1 + 3.b.1 + 2.c.1 + 3.d.1 + 3.e.1 + \\
& + 3.f.1 + 3.g.1 + 3.h.1 + 3.k.1 + 3.m.2) + (4.a.2 + 4.b + 4.c + \dots + 4.m) \rightarrow \\
b_{n(n=4k)} = & \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \\
& + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4V}{n\pi}\cos(n\omega t_4) + \frac{5V}{n\pi}\cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi}\cos(n\omega t_5) + \\
& + \frac{6V}{n\pi}\cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi}\cos(n\omega t_6) + \frac{7V}{n\pi}\cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi}\cos(n\omega t_7) + \frac{8V}{n\pi}\cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi}\cos(n\omega t_8) + \\
& + \frac{9V}{n\pi}\cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) - \\
& - \frac{10V}{n\pi} + \frac{10V}{n\pi} - \\
& - \frac{10V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) + \frac{9V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) - \frac{9V}{n\pi}\cos(n\omega t_8) + \\
& + \frac{8V}{n\pi}\cos(n\omega t_8) - \frac{8V}{n\pi}\cos(n\omega t_7) + \frac{7V}{n\pi}\cos(n\omega t_7) - \\
& - \frac{7V}{n\pi}\cos(n\omega t_6) + \frac{6V}{n\pi}\cos(n\omega t_6) - \frac{6V}{n\pi}\cos(n\omega t_5) + \\
& + \frac{5V}{n\pi}\cos(n\omega t_5) - \frac{5V}{n\pi}\cos(n\omega t_4) + \frac{4V}{n\pi}\cos(n\omega t_4) - \\
& - \frac{4V}{n\pi}\cos(n\omega t_3) + \frac{3V}{n\pi}\cos(n\omega t_3) - \frac{3V}{n\pi}\cos(n\omega t_2) + \\
& + \frac{2V}{n\pi}\cos(n\omega t_2) - \left(\frac{2V}{n\pi}\right)\cos(n\omega t_1) + \frac{V}{n\pi}\cos(n\omega t_1) - \frac{V}{n\pi} + \\
& + \left(\frac{V}{n\pi}\right)\cos(n\omega t_1) - \frac{V}{n\pi} + \left(\frac{2V}{n\pi}\right)\cos(n\omega t_2) - \left(\frac{2V}{n\pi}\right)\cos(n\omega t_1) + \\
& + \frac{3V}{n\pi}\cos(n\omega t_3) - \frac{3V}{n\pi}\cos(n\omega t_2) + \frac{4V}{n\pi}\cos(n\omega t_4) - \\
& - \frac{4V}{n\pi}\cos(n\omega t_3) + \frac{5V}{n\pi}\cos(n\omega t_5) - \frac{5V}{n\pi}\cos(n\omega t_4) + \\
& + \frac{6V}{n\pi}\cos(n\omega t_6) - \frac{6V}{n\pi}\cos(n\omega t_5) + \frac{7V}{n\pi}\cos(n\omega t_7) - \\
& - \frac{7V}{n\pi}\cos(n\omega t_6) + \frac{8V}{n\pi}\cos(n\omega t_8) - \frac{8V}{n\pi}\cos(n\omega t_7) + \\
& + \frac{9V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) - \frac{9V}{n\pi}\cos(n\omega t_8) + \frac{10V}{n\pi} - \\
& - \frac{10V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi}\cos(n\omega t_9) - \frac{10V}{n\pi} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \\
& + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) = 0
\end{aligned}$$

Χρωματίστηκαν δειγματοληπτικά με 4 διαφορετικά χρώματα, 4 όμοιοι όροι, για να γίνει σαφές ότι οι όμοιοι όροι απαλείφονται και ότι το τελικό άθροισμα είναι μηδέν.

Άρα δεν υπάρχουν άρτιοι για $n=4k$

Υπολογισμός αρμονικών για $n=4k+2$ ή $(n/2) = 2k+1$

Με την ίδια λογική, για $n=4k+2$, αθροίζουμε όλους τους όρους, όπως και πριν και όπου υπάρχει συνθήκη για άρτιο ή περιττό παίρνουμε τους άρτιους για $n=4k+2$:

$$\begin{aligned}
b_{n(n=4k+2)} &= (1.a + 1.b + \dots + 1.k + 1.m.3) + (2.a.3 + 2.b.1 + 2.c.1 + 2.d.1 + 2.e.1 + \\
& + 2.f.1 + 2.g.1 + 2.h.1 + 2.k.1 + 2.m.1) + (3.a.1 + 3.b.1 + 2.c.1 + 3.d.1 + 3.e.1 \\
& + 3.f.1 + 3.g.1 + 3.h.1 + 3.k.1 + 3.m.3) + (4.a.3 + 4.b + 4.c + \dots + 4.m) \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{n(n=4k+2)} &= \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \\
& + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \\
& + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \\
& + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{10V}{n\pi} - \frac{10V}{n\pi} - \\
& - \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) - \\
& - \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) - \\
& - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \\
& - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{V}{n\pi} + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \\
& - \frac{V}{n\pi} + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \\
& - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \\
& + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \\
& - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \\
& - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) - \frac{10V}{n\pi} - \\
& - \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \frac{10V}{n\pi} + \\
& + \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) - \frac{9V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) + \\
& + \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) - \frac{8V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) + \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) - \\
& - \frac{7V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) + \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) - \frac{6V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) + \\
& + \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) - \frac{5V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) + \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) + \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) - \frac{3V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) + \\
& + \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) - \frac{2V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) + \frac{V}{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \cos n\omega t_1 = \\
& = \frac{V}{n\pi} [1-1-1+1] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_1) [-1+2-2+1+1-2+2-1] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_2) [-2+3-3+2+2-3+3-2] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_3) [-3+4-4+3+3-4+4-3] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_4) [-4+5-5+4+4-5+5-4] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_5) [-5+6-6+5+5-6+6-5] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_6) [-6+7-7+6+6-7+7-6] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_7) [-7+8-8+7+7-8+8-7] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_8) [-8+9-9+8+8-9+9-8] + \\
& + \frac{V}{n\pi} \cos(n\omega t_9) [-9+10-10+9+9-10+10-9] = 0
\end{aligned}$$

αφού όλα τα αθροίσματα εντός των αγκυλών είναι 0 .

Άρα δεν υπάρχουν άρτιοι για $n=4k+2$

Επειδή δεν υπάρχουν άρτιοι αρμονικοί ούτε για $n = 4k$, ούτε για

$n = 4k+2$ ($\frac{n}{2} = 2k+1$) προκύπτει ότι δεν υπάρχουν γενικά άρτιοι αρμονικοί αλλά

αλλά μόνο περιττοί, δηλαδή για $n=2k+1$ ή

$b_1, b_3, b_5, b_7, b_9, b_{11}, b_{13}, b_{15}, b_{17}, b_{19}, b_{21}, \dots, b_{2n+1}$

$\mu \epsilon \quad b_{n[n=2k+1]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [1 + \cos(n\omega t_1) + \cos(n\omega t_2) + \cos(n\omega t_3) + \dots + \cos(n\omega t_k)]$

Επειδή οι άνω αρμονικές είναι αρμονικές τάσης θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψη ότι οι αντίστοιχες αρμονικές έντασης ρεύματος, θα είναι γρηγορότερα μειούμενες με χρήση ενός πηνίου μικρής αυτεπαγωγής (π.χ. 1mH) σε σειρά με το φορτίο (κατανάλωση), σε ρόλο εξομαλυντή ρεύματος. Ακόμα δε περισσότερο εάν το ίδιο το φορτίο (καταναλωτής) είναι κινητήρας, η περιέλιξη του οποίου, έχει πολύ μεγαλύτερη αυτεπαγωγή και επαγωγική αντίσταση $Z_L = L\omega$

Για τον λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τις πρώτες 23 αρμονικές, με τις οποίες θα γίνει η παραμετροποίηση στο πρόγραμμα, σε Python, ώστε να παίρνουμε την προβλεπόμενη κυματομορφή ρεύματος για διαφορετικές τιμές αυτεπαγωγής L και αντίστασης R του καταναλωτή (φορτίου) .

6. Υπολογισμός αρμονικών

Με βάση τη τελευταία μαθηματική έκφραση υπολογισμού των αρμονικών:

$$b_{n[n=2k+1]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [1 + \cos n\omega t_1 + \cos n\omega t_2 + \cos n\omega t_3 + \dots + \cos n\omega t_k]$$

δημιουργούμε υπολογιστικά φύλλα (excel) από τα οποία βρίσκουμε τις 23 πρώτες αρμονικές, έχοντας επιλέξει συγκεκριμένες τιμές φάσης:

(γωνίες) $\varphi_1 = \omega t_1$, $\varphi_2 = \omega t_2$, $\varphi_3 = \omega t_3$, ..., $\varphi_{2k+1} = \omega t_{2k+1}$

Η επιλογή των γωνιών φ_1 , φ_2 , φ_3 , γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε η κλιμακωτά αναπτυσσόμενη τάση να βρίσκεται όσο γίνεται πλησιέστερα στην ημιτονοειδή καμπύλη από 0° έως 90° , με ελεύθερη εκτίμηση.

Για το σκοπό αυτό, χαράσσεται πρώτα η ημιτονοειδής καμπύλη και στη συνέχεια επιλέγουμε τις γωνίες φ_1 , φ_2 , φ_3 , ... έτσι ώστε η κλιμακωτή τάση να βρίσκεται όσο γίνεται πλησιέστερα στην ημιτονοειδή καμπύλη.

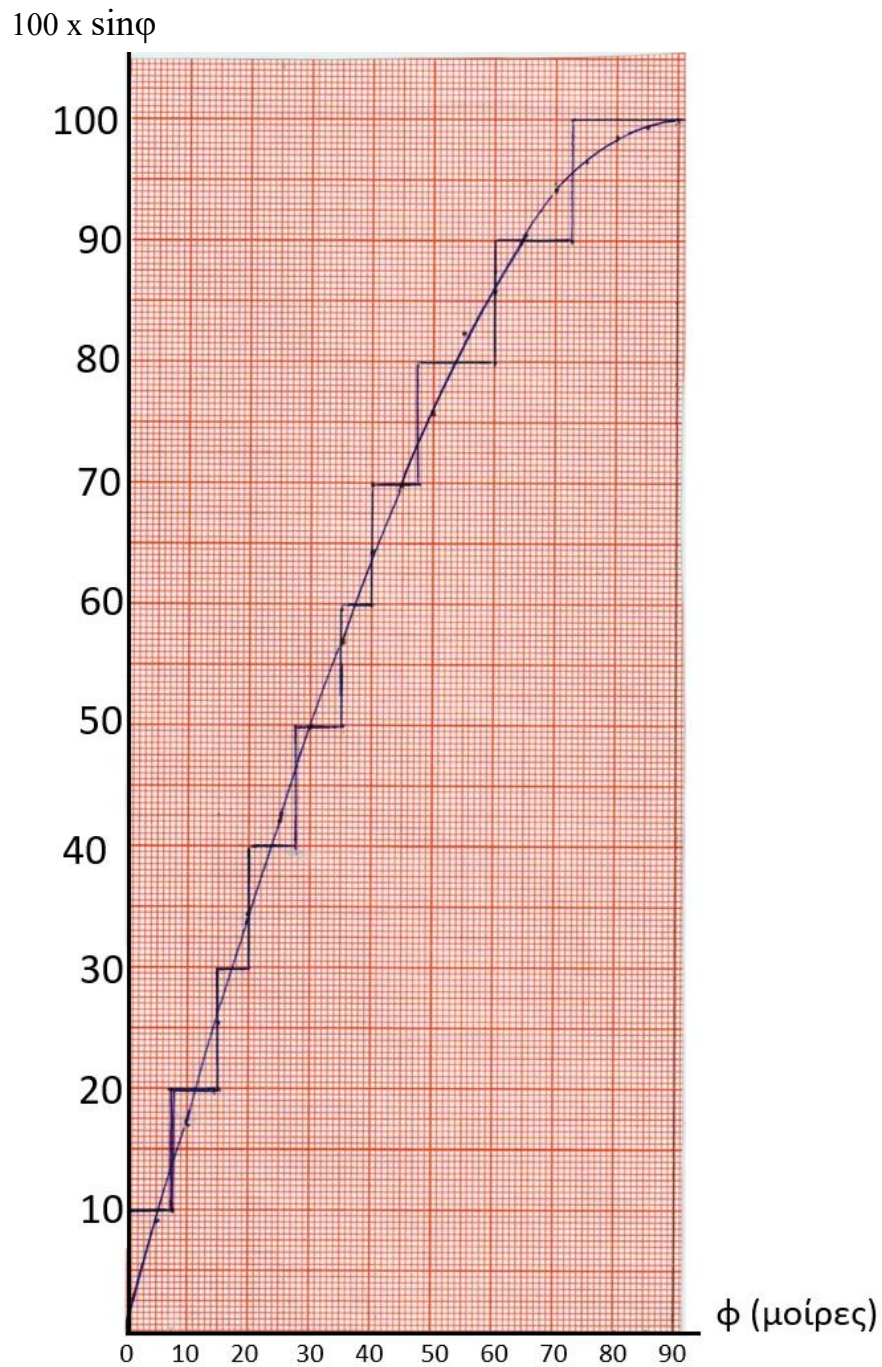
Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών ημιτόνων ανά 5 μοίρες χαράσσεται η καμπύλη με άξονες:

Οριζόντιο με τις γωνίες σε μοίρες – Κατακόρυφο [$\sin\phi \times 100$]

από 0^0 έως 90^0 ή $\left[0 - \frac{\pi}{4} \right]$

$\phi(\mu\text{οίρ.})$	$\phi(\text{rad})$	$\sin\phi$	$[\sin\phi]\times 100$
5,00	0,08727	8,72E-02	8,72
10,00	0,17453	1,74E-01	17,36
15,00	0,2618	2,59E-01	25,88
20,00	0,34907	3,42E-01	34,20
25,00	0,43633	4,23E-01	42,26
30,00	0,5236	5,00E-01	50,00
35,00	0,61087	5,74E-01	57,36
40,00	0,69813	6,43E-01	64,28
45,00	0,7854	7,07E-01	70,71
50,00	0,87266	7,66E-01	76,60
55,00	0,95993	8,19E-01	81,92
60,00	1,0472	8,66E-01	86,60
65,00	1,13446	9,06E-01	90,63
70,00	1,22173	9,40E-01	93,97
75,00	1,309	9,66E-01	96,59
80,00	1,39626	9,85E-01	98,48
85,00	1,48353	9,96E-01	99,62
90,00	1,5708	1,00E+00	100,00

Εικόνα 9 (Υπολογισμός $100*\sin\phi$)



Εικόνα 10 – Καμπύλη ημιτόνου από 0° - 90°

Από την καμπύλη στην Εικόνα 10., φαίνεται ότι έχουν επιλεγεί για την ανάπτυξη της κλιμακωτής τάσης οι γωνίες :

$$\phi_1 = 7,5^\circ, \phi_2 = 15^\circ, \phi_3 = 20^\circ, \phi_4 = 27,5^\circ, \phi_5 = 35^\circ$$

$$\phi_6 = 40^\circ, \phi_7 = 47,5^\circ, \phi_8 = 60^\circ, \phi_9 = 72,5^\circ$$

Με βάση αυτές τις γωνίες και τον γενικό τύπο εύρεσης των αρμονικών b_n :

$$b_{n[n=2k+1]} = \left(\frac{4V}{n\pi}\right) [1 + \cos(n\omega t_1) + \cos(n\omega t_2) + \cos(n\omega t_3) + \dots + \cos(n\omega t_k)]$$

συντάσσεται φύλλο εργασίας excel, στο οποίο υπολογίζονται οι αρμονικές b_n , χωρίς την τάση V , όπως φαίνεται στις παρακάτω σελίδες, για τις πρώτες 23 περιττές αρμονικές:

$b_1, b_3, b_5, b_7, b_9, b_{11}, b_{13}, b_{15}, b_{17}, b_{19}, b_{21}, b_{23}$ ως παράγοντες σε ρόλο τελεστή. Δηλαδή $V_{1,peak} = V \cdot b_1, V_{3,peak} = V \cdot b_3, \dots, V_{23,peak} = V \cdot b_{23}$

6.1 Υπολογιστικά φύλα (excel)

Ακολουθούν στις επόμενες σελίδες τα υπολογιστικά φύλα για τους παραπάνω παράγοντες $b_1, b_2, \dots, b_{23}$

ΟΙ αντίστοιχες αρμονικές βρίσκονται αν πολλαπλασιαστεί ο κάθε παράγοντας με την τάση βήματος V π.χ. $b_{1.0} = b_{1,peak} = b_1 \cdot V$, όπου $V = V_p$ = η ονομαστική τάση λειτουργίας εκάστου πάνελ. Δηλαδή στα υπολογιστικά φύλα κάνουμε τους υπολογισμούς χωρίς την τάση V , υπολογίζοντας από τον παραπάνω τύπο το γινόμενο:

$$b_n = \left(\frac{4}{n\pi}\right) [1 + \cos(n\omega t_1) + \cos(n\omega t_2) + \cos(n\omega t_3) + \dots + \cos(n\omega t_k)]$$

n	φ	$n*\varphi$	rad	$\cos(n*\varphi)$	$bn=(4/n\pi)*[SUM+1]$
1	7,5	7,5	0,130899694	0,99144486	9,989287776
1	15	15	0,261799388	0,96592583	
1	20	20	0,34906585	0,93969262	
1	27,5	27,5	0,479965544	0,88701083	
1	35	35	0,610865238	0,81915204	
1	40	40	0,6981317	0,76604444	
1	47,5	47,5	0,829031394	0,67559021	
1	60	60	1,04719755	0,5	
1	72,5	72,5	1,265363706	0,3007058	
			SUM=	6,84556664	
			SUM+1=	7,84556664	
			b1= 9,98928778		
			V= 31,7		
			b1_{peak}= 316,660422		
			Vrms= 223,878919		

Εικόνα 11- Υπολογισμός 1^{ης} αρμονικής b1.A – IVERTER.A

Για λόγους οικονομίας χώρου εκτός από το πάνω φύλλο εργασίας excel για την 1^η αρμονική ακολουθεί και το τελευταίο για την b₂₃.

Τα υπόλοιπα από b₃ έως την b₂₁ δεν μπαίνουν στο κείμενο. Φαίνονται όμως οι τιμές όλων των αρμονικών στον Πίνακα 12 που ακολουθεί.

n	φ	$n*\varphi$	rad	$\cos(n*\varphi)$	$bn=(4/n\pi)*[SUM+1]$
23	7,5	172,5	3,01069296	-0,991444861	0,043878117
23	15	345	6,02138591	0,965925825	
23	20	460	8,02851455	-0,173648169	
23	27,5	632,5	11,0392075	0,043619375	
23	35	805	14,0499005	0,087155759	
23	40	920	16,0570291	-0,939692627	
23	47,5	1092,5	19,0677221	0,976296012	
23	60	1380	24,0855437	0,499999976	
23	72,5	1667,5	29,1033652	-0,675590232	
			SUM=	-0,207378943	
			SUM+1=	0,792621057	
			b23= 0,043878117		

Εικόνα 12– 23^η Αρμονική INVERTER.A

Από τις τιμές των: $b_1, b_3, b_5, b_7, b_9, b_{11}, b_{13}, b_{15}, b_{17}, b_{19}, b_{21}, b_{23}$ συντάσσουμε φύλο εργασίας excel στο οποίο υπολογίζουμε την επί τοις % σχέση κάθε αρμονικής b_n ως προς την b_1 (απόλυτη τιμή).

2k+1	b1	b_n	b_n/b1	 _{(b_n/b1})x100 %
1	9,989287776	9,989287776	1	100
3	9,989287776	-0,035656322	0,003569456	0,356945588
5	9,989287776	0,042553753	0,004259939	0,42599386
7	9,989287776	-0,017779658	0,001779872	0,177987244
9	9,989287776	0,108277283	0,01083934	1,083933966
11	9,989287776	0,090114609	0,009021125	0,902112455
13	9,989287776	-0,073614542	0,007369348	0,736934841
15	9,989287776	0,045491594	0,004554038	0,45540378
17	9,989287776	0,046471973	0,004652181	0,465218077
19	9,989287776	0,117524232	0,011765026	1,176502618
21	9,989287776	0,013147847	0,001316195	0,131619462
23	9,989287776	0,043878117	0,004392517	0,439251703

Εικόνα 13 - Όλων των αρμονικών INVERTER.A

Παρατηρούμε ότι εκτός από τις αρμονικές b_9, b_{11}, b_{13} και b_{19} που είναι αντίστοιχα: 1,0839% , 0,9021%, 0,737% και 1,1765% ή προσεγγιστικά 1,084%, 0,902%, 0,737% και 1,177% , της πρώτης αρμονικής, οι υπόλοιπες είναι κάτω του 0,5%

Και μάλιστα αυτές είναι αρμονικές τάσης.

Αν σε σειρά με την κατανάλωση (φορτίο) τοποθετηθεί πηνίο αυτεπαγωγής, $L=1\text{mH}$ ή 2mH , τότε οι αντίστοιχες αρμονικές ρεύματος υποβαθμίζονται ακόμα περισσότερο, αφού «πνίγει» τις υψηλές αρμονικές. Αν δε ο καταναλωτής (φορτίο) έχει ο ίδιος αυτεπαγωγή (π.χ. κινητήρας) τότε υπάρχει ακόμα μεγαλύτερη βελτίωση της καμύλης.

Η κλιμακωτά αναπτυσσόμενη τάση, η οποία σχεδιάζεται με τρόπο ώστε να προσεγγίζει όσο γίνεται την ημιτονοειδή, παράγεται από ένα κύκλωμα μετατροπής της συνεχούς τάσης σε εναλλασσόμενη. Όπως αναφέρθηκε πριν εάν η συνεχής τάση ήταν σταθερής τιμής τότε θα προέκυπτε εναλλασσόμενη τάση τετραγωνικής μορφής. Εάν όμως η παρεχόμενη συνεχής τάση είναι κλιμακωτά αναπτυσσόμενη, τότε ο μετατροπέας:

DC $\rightarrow$ AC παράγει εναλλασσόμενη τάση που με βάση την προηγούμενη μαθηματική ανάλυση προσεγγίζει την ημιτονοειδή τάση.

6.2 Υπολογισμός αρμονικών για INVERTER B

Υπολογισμός b_1 και πρώτης αρμονικής $b_1 \cdot V = b_{1 \cdot B, \text{peak}}$ και V_{rms} πρώτης αρμονικής $b_{1 \cdot B, \text{peak}}$, με βάση την $V_{\text{rms}} = 0,707 \cdot b_{1 \cdot B, \text{peak}}$ ($0,707 = 1/\sqrt{2}$)

Όπως και στον INVERTER.A παραθέτουμε στο κείμενο μόνο τον υπολογισμό της πρώτης αρμονικής $b_{1 \cdot B}$ και της $23^{\text{ης}}$ για οικονομία χώρου. Τα φύλλα excel συνοδεύουν την εργασία για όλες τις αρμονικές

n	φ	$n \cdot \varphi$	rad	$\cos(n \cdot \varphi)$	$b_n = (4/n\pi) \cdot [\text{SUM} + 1]$
1	17,5	17,5	0,30543262	0,953716951	7,596782446
1	30	30	0,52359878	0,866025404	
1	42,5	42,5	0,74176493	0,737277337	
1	50	50	0,87266463	0,64278761	
1	55	55	0,95993109	0,573576437	
1	62,5	62,5	1,09083078	0,461748614	
1	70	70	1,22173048	0,342020145	
1	75	75	1,30899694	0,258819047	
1	82,5	82,5	1,43989663	0,130526194	
			SUM=	4,966497739	
			SUM+1=	5,966497739	
			b1.B= 7,596782446		
			b1.B.peak= 240,818		
			Vrms.b1.B= 170,284		

Εικόνα 14– Εύρεση 1^{ης} αρμονικής INVERTER.B

n	φ	n*φ	rad	cos(n*φ)	bn=(4/nπ)*[SUM+1]
23	17,5	402,5	7,02495023	0,737277342	0,103809008
23	30	690	12,0427718	0,866025397	
23	42,5	977,5	17,0605934	-0,21643963	
23	50	1150	20,0712864	0,342020165	
23	55	1265	22,078415	-0,9961947	
23	62,5	1437,5	25,089108	0,99904822	
23	70	1610	28,0998009	-0,98480775	
23	75	1725	30,1069296	0,258819012	
23	82,5	1897,5	33,1176225	-0,13052615	
			SUM=	0,875221901	
			SUM+1=	1,8752219	
			b23.B=	0,103809	

Εικόνα 15-Υπολογισμός 23^{ης} αρμονικής INVERTER.B

Από τα παραπάνω υπολογιστικά φύλλα συντάσσουμε ένα που δείχνει την % τιμή κάθε αρμονικής ως προς την πρώτη, όπως ακριβώς και για τον INVERTER.A

Σχέση αρμονικών με 1^η στον INVERTER.B

2k+1	b1	bn	bn/b1	(bn/b1)x100 %
1	7,5967824	7,5967824	1	100
3	7,5967824	-1,6	-0,211135177	-21,11351774
5	7,5967824	0,5893632	0,077580635	7,758063466
7	7,5967824	-0,04294238	-0,005652706	-0,565270634
9	7,5967824	0,14147109	0,018622501	1,862250128
11	7,5967824	-0,06742236	-0,008875121	-0,88751206
13	7,5967824	0,1230678	0,01619999	1,619999014
15	7,5967824	0,1241923	0,016348013	1,634801334
17	7,5967824	0,0428375	0,0056389	0,563890049
19	7,5967824	0,06402437	0,008427827	0,842782729
21	7,5967824	0,12475841	0,016422533	1,642253305
23	7,5967824	0,10380901	0,013664866	1,366486554

Εικόνα 16 - Σχέση αρμονικών με 1^η στον INVERTER.B

Παρατηρούμε ότι οι αρμονικές b_3 και b_5 έχουν υψηλές τιμές -21,11% και 7,75% αντίστοιχα ως προς την πρώτη αρμονική, δηλαδή, είναι όχι και τόσο καλής ποιότητας σε σχέση με αυτήν του Inverter A.

Άρα η γραμμή που τροφοδοτεί ο Inverter B μπορεί να έχει συσκευές με μόνο ωμικό χαρακτήρα (αντιστάσεις).

Επίσης έχει σημαντικά χαμηλότερη τιμή η πρώτη αρμονική $b_1 = 7,596$ ως προς αυτήν του Inverter A που έχει $b_1 = 9,989$ που δίνει τιμή τάσης κορυφής $V_{peak} = 9,989 \cdot V$ και προσεγγίζει το μέγιστο $10 \cdot V$ (για 10 πάνελ).

Αυτό όμως επιβάλλει τη χρήση μετασχηματιστή στην τάση του Inverter B, εκτός και αν θέλουμε απλώς να θερμαίνουμε νερό στο θερμοσίφωνα με χαμηλή τάση και να την έχουμε συνδεδεμένη μόνιμα με αυτό όσο έχει ηλιοφάνεια.

6.3 Υπολογισμός αρμονικών για $\Delta\phi = 9^\circ$

Για τον παραπάνω λόγο ελέγχουμε την συμμετρική μορφή ανάπτυξης της κλιμακωτής τάσης ανά 9° , με τα ίδια υπολογιστικά φύλλα excel, όπως και πριν για τον υπολογισμό των αρμονικών, από b_1 έως b_{23} .

Παρατίθεται μόνο το υπολογιστικό φύλλο για την πρώτη αρμονική b_1

n	ϕ	$n \cdot \phi$	rad	$\cos(n \cdot \phi)$	$b_n = (4/n\pi) \cdot [\text{SUM}+1]$
1	9	9	0,1570796	0,987688341	8,725642763
1	18	18	0,3141593	0,951056516	
1	27	27	0,4712389	0,891006524	
1	36	36	0,6283185	0,809016995	
1	45	45	0,7853982	0,707106782	
1	54	54	0,9424778	0,587785253	
1	63	63	1,0995574	0,453990501	
1	72	72	1,2566371	0,309016996	
1	81	81	1,4137167	0,156434467	
			SUM=	5,853102374	
			SUM+1=	6,853102374	
			b1.9= 8,725642763		

Εικόνα 17- Υπολογισμός 1^{ης} αρμον. για $\phi = \Delta\phi = 9^\circ$

Ακολουθεί πάλι πίνακας με όλες τις αρμονικές για $\phi = \Delta\phi = 9^\circ$ καθώς και η % σχέση τους ως προς την 1^η αρμονική.

2k+1	b1	bn	bn/b1	(bn/b1)x100%
1	8,7256427	8,7256427	1	100
3	8,7256427	-0,671697	-0,076979659	-7,697965905
5	8,7256427	0,434711	0,04981994	4,981994048
7	8,7256427	-0,057464	-0,006585647	-0,658564669
9	8,7256427	0,153556	0,017598245	1,759824523
11	8,7256427	0,008445	0,000967837	0,096783702
13	8,7256427	0,078980	0,009051482	0,905148225
15	8,7256427	0,0248615	0,002849246	0,284924571
17	8,7256427	0,046438	0,005322015	0,532201485
19	8,7256427	0,030869	0,003537734	0,353773367
21	8,7256427	0,027929	0,003200796	0,320079574
23	8,7256427	0,0343243	0,003933727	0,393372743

Εικόνα 18 - % σχέση b_{2k+1} / b_1

Παρατηρούμε στην άνω Εικόνα 18 ότι εκτός από τις περιττές αρμονικές b_3 , b_5 και b_9 που είναι αντίστοιχα: -7,6879% , 4,9819% και 1,7598% όλες οι υπόλοιπες κάτω του 1% ως προς την πρώτη b_1 .

Άρα η επιλογή της πρώτης λύσης (μη συμμετρικής) ή της συμμετρικής με κλιμάκωση της τάσης ανά 9° που δίνει μία όμοια ως προς τη μορφή της τάσης στους δύο Inverters A,B μπορεί να γίνει ανάλογα με το τι θα δείξει το πρόγραμμα σε python ή και με βάση τις απαιτήσεις μας.

Από την πρώτη δε αρμονική $b_1 = 7,7256427$ και την απαίτηση να είναι η τάση κορυφής περίπου ίση με $230 \cdot \sqrt{2} = 325$ Volt γίνεται ο υπολογισμός του αριθμού των panels που πρέπει να συνδεθούν σε σειρά, μέσω transistors ισχύος, ώστε η τάση κορυφής να είναι περίπου 325 Volt, ή να επιλεγεί ένα panel αγοράς που η τάση του V να είναι τόση ώστε η ανάλυση που κάναμε με βάση τα $10 \cdot V$ να είναι στην περιοχή περίπου των 325 Volt, δηλαδή:

$$7,7256427 \cdot V \approx 325 \text{ Volt} \text{ απ' όπου } V \approx 42 \text{ Volt}$$

Αν δεν υπάρχει στην αγορά τέτοιο panel, η άλλη λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο σε πλησιέστερη τιμή και να γίνει χρήση μετασχηματιστή, η οποία έτσι και αλλιώς χρειάζεται για λόγους απομόνωσης.

7. Υπολογισμός ενεργού τάσης V_{rms} των INVERTER

7.1 Θεωρητικός υπολογισμός

Ο κανονικός υπολογισμός της ενεργού τιμής πρέπει να γίνει με βάση την Εικόνα 5. / σελ. 16 και από τις τιμές $\Delta\phi$, όπως αυτές προκύπτουν από τους πίνακες excel των σελίδων 40 και 41 (Εικόνες 11 & 14 αντίστοιχα), για τους δύο INVERTER A,B.

Με βάση τον ορισμό της ενεργού τιμής τάσης V_{rms} : [2, (9-14)]

$$V_{rms}^2 * T = \int_0^T (V(t))^2 dt = 4 * \int_0^{T/4} (V(t))^2 dt = 4 * \sum_{n=1}^{n=10} (nV)^2 \frac{\Delta\phi}{360} T,$$

όπου $(\Delta\phi/360)*T$ είναι το Δt που αντιστοιχεί για κάθε $\Delta\phi$ με συγκεκριμένη τιμή του n και τάση nV .

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $V_{rms}^2 = 4 * \sum_{n=1}^{n=10} (nV)^2 \frac{\Delta\phi}{360}$

$$\text{και τελικά: } V_{rms} = 2 * \text{SQR} \left(\sum_{n=1}^{n=10} (nV)^2 \frac{\Delta\phi}{360} \right) = 2 * V * \text{SQR} \left(\sum_{n=1}^{n=10} n^2 \frac{\Delta\phi}{360} \right)$$

και με βάση αυτή τη σχέση υπολογίζουμε σε excel, την ενεργό τιμή τάσης, εισάγοντας τα διάφορα $\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ από $0^0 - 90^0$.

7.2 Inverter.A

Με επιλεγμένες γωνίες ϕ_n : (σελ. 40-Εικ.11.)

$0^0 \quad 7,5^0 \quad 15^0 \quad 20^0 \quad 27,5^0 \quad 35^0 \quad 40^0 \quad 47,5^0 \quad 60^0 \quad 72,5^0 \quad 90^0$

προκύπτει ότι τα $\Delta\phi$ είναι:

$7,5^0 \quad 7,5^0 \quad 5^0 \quad 7,5^0 \quad 7,5^0 \quad 5^0 \quad 7,5^0 \quad 12,5^0 \quad 12,5^0 \quad 17,5^0$

n	nxn	$\Delta\phi$	$\Delta\phi/360$	$[n \times n \times (\Delta\phi/360)]$	2*SQR(SUM)
1	1	7,5	0,020833333	0,020833333	7,071067812
2	4	7,5	0,020833333	0,083333333	
3	9	5	0,013888889	0,125	
4	16	7,5	0,020833333	0,333333333	
5	25	7,5	0,020833333	0,520833333	
6	36	5	0,013888889	0,5	
7	49	7,5	0,020833333	1,020833333	
8	64	12,5	0,034722222	2,222222222	
9	81	12,5	0,034722222	2,8125	
10	100	17,5	0,048611111	4,861111111	
			SUM= 12,5		
			SQR(SUM)= 3,535533906		
	V _p = 31,7		V _{rms} = 224,1528496		
	V _p = Τάση panel (volt)				

Εικόνα 19 - Υπολογισμός ενεργού τιμής V_{rms} Inverter.A

Συγκρίνοντας την παραπάνω τιμή V_{rms} = **224,15 Volt** με την V_{rms} της πρώτης αρμονικής ($0,707 = 1/\sqrt{2}$) :

$$V_{b1.A,rms} = b_{1.A} * V_p * 0,707 = 9,94752 * 31,7 * 0,707 = \mathbf{222.94 \text{ Volt}}$$

παρατηρούμε ότι ΔV=1,21V (λίγο). Αυτό δείχνει την χαμηλή συμμετοχή των υπόλοιπων αρμονικών στην απόδοση ενέργειας, καθώς και την καλή προσέγγιση της ημιτονοειδούς καμπύλης.

7.3 INVERTER.B

Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για τον Inverter B για γωνίες φ: (σελ.43-Εικ.14):

0 17,5 30 42,5 50 55 62,5 70 75 82,5 90 - οπότε Δφ:
17,5 12,5 12,5 7,5 5 7,5 7,5 5 7,5 7,5

n	nxn	Δφ	Δφ/360	nxn(Δφ/360)	2*SQR(SUM)
1	1	17,5	0,0486111	0,048611111	
2	4	12,5	0,0347222	0,138888889	
3	9	12,5	0,0347222	0,3125	
4	16	7,5	0,0208333	0,333333333	
5	25	5	0,0138889	0,347222222	5,517648452
6	36	7,5	0,0208333	0,75	
7	49	7,5	0,0208333	1,020833333	
8	64	5	0,0138889	0,888888889	
9	81	7,5	0,0208333	1,6875	
10	100	7,5	0,0208333	2,083333333	
			SUM= 7,611111111		
			SQR(SUM)= 2,758824226		
		V_p= 31,7	V_{rms}= 174,9094559		
		V_p= Τάση panel (volt)			

Εικόνα 20 -Υπολογισμός τάσης V_{rms} INVERTER.B

Συγκρίνοντας την παραπάνω τιμή $V_{rms} = 174,9 \text{ Volt}$ με την V_{rms} της

πρώτης αρμονικής $V_{b1.B.rms}$ ($0,707 = 1/\sqrt{2}$) :

$V_{b1.B.rms} = b_{1.B} * V_p * 0,707 = 7,59678 * 31,7 * 0,707 = 170,26 \text{ Volt}$, προκύπτει διαφορά $\Delta V = 4,64 \text{ Volt}$ που οφείλεται στην υψηλή τιμή της 3^{ης} και 5^{ης} αρμονικής και την απόκλιση από την ημιτονοειδή μορφή της τάσης στον INVERTER.B

Τελικά:

Στον Inverter A έχουμε: $\frac{\Delta V}{V} \times 100\% = \frac{1,21}{224,15} \times 100\% = 0,54\%$ απόκλιση, ενώ

στον Inverter B έχουμε: $\frac{\Delta V}{V} \times 100\% = \frac{4,64}{174,9} \times 100\% = 2,65\%$ απόκλιση

Δηλαδή στον Inverter B εκτός από χαμηλότερη κατά 50V περίπου τάση, σε σχέση με τον A ($224,15 - 174,9 = 49,25V$) έχουμε και μεγαλύτερη απόκλιση, μεταξύ πραγματικής V_{rms} και θεωρητικής με βάση την πρώτη αρμονική.

7.4 V_{rms} για $\Delta\phi = 9^\circ$

n	nxn	$\Delta\phi$	$\Delta\phi/360$	$n \times n \times (\Delta\phi/360)$	2*SQR(SUM)
1	1	9	0,025	0,025	6,204836823
2	4	9	0,025	0,1	
3	9	9	0,025	0,225	
4	16	9	0,025	0,4	
5	25	9	0,025	0,625	
6	36	9	0,025	0,9	
7	49	9	0,025	1,225	
8	64	9	0,025	1,6	
9	81	9	0,025	2,025	
10	100	9	0,025	2,5	
			SUM= 9,625		
			SQR(SUM 3,102418411		
	V _p = 31,7		V _{rms} = 196,6933273		
	V _p = Τάση panel (volt)				

Εικόνα 21- Υπολογισμός V_{rms} $\Delta\phi=9^\circ$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της V_{rms} είναι περίπου 196,5 Volt και με 1^η αρμονική από σελίδα 45 - Εικόνα 17 - $V_{b1.9peak} = 8,72$ Volt , προκύπτει θεωρητική :

$$V_{9,peak} = 8,72 \times 31,7 = 276,5 \text{ Volt , απ' όπου:}$$

$V_{rms} = 276,5 \times 0,707 = 195,5 \text{ Volt}$ που είναι περίπου αυτή της άνω Εικόνας 21 (λίγο χαμηλότερη κατά 1 Volt).

8. ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΙΠΛΟΥ INVERTER A & B

Για να υπολογίσουμε την απόδοση συγκρίνουμε την ενέργεια που θα μας παρείχε μία συνεχής τάση $10 \cdot V_p$ ($V_p = 31,7V =$ τάση πάνελ) με το άθροισμα των ενεργειών που μας παρέχουν αθροιστικά οι 2 γραμμές του INVERTER A και B στον ίδιο χρόνο.

Σαν χρόνο παίρνουμε την περίοδο T πάνω σε ωμική αντίσταση R .

Για τη συνεχή τάση:

$$E_{dc} = \frac{(10 \cdot V)^2}{R} T = \frac{T}{R} \cdot (10 \cdot V)^2 \quad (V = V_p)$$

Για INVERTER :

$$E_{INV} = \frac{(V_{rms.A})^2}{R} T + \frac{(V_{rms.B})^2}{R} T = \frac{T}{R} [(V_{rms.A})^2 + (V_{rms.B})^2]$$

Η απόδοση $e = E_{INV} / E_{DC}$ και με απαλειφή του κλάσματος $\frac{T}{R}$ προκύπτει:

$$e = [(V_{rms.A})^2 + (V_{rms.B})^2] / (10 \cdot V_p)^2$$

Αν θέσουμε τις τιμές $V_{rms.A} = 224,15 V$, $V_{rms.B} = 174,9 V$ και $V_p = 31,7 V$ προκύπτει ότι :

$$e = 80833 / 100489 = 0,80 \quad \text{ή} \quad e = 80\%$$

Αν π.χ. θέλουμε να έχουμε μία ελάχιστη ισχύ $4KW$ θα πρέπει η ισχύς της εγκατάστασης να είναι τουλάχιστο $4 / 0,8 = 5 KW$

Η ισχύς όμως αυτή δεν κατανέμεται εξ' ίσου από τους δύο γραμμές A και B.

Από την τελευταία μαθηματική έκφραση της απόδοσης e παρατηρούμε ότι η τιμή της εξαρτάται από τις τάσεις $V_{rms.A}$ και $V_{rms.B}$, αφού η τάση ανά πάνελ V_p είναι δεδομένη.

Ονομάζοντας P_A και P_B την ισχύ των INVERTERs A και B προκύπτει ότι ο λόγος των δύο είναι:

$$P_A / P_B = (V_{rms.A})^2 / (V_{rms.B})^2 = (224,15 \text{ V})^2 / (174,9 \text{ V})^2 = 1,64246, \text{ απ' όπου}$$

προκύπτει ότι $P_A = 1,64246 P_B$ και η συνολική $P = 1,64246 P_B + P_B$

Άρα η συνολική ισχύς $P = 2,64246 P_B \rightarrow P_B = 0,378 P$ και $P_A = 0,622 P$

Ή αντίστοιχα: $P_A = 62,2\% P$ και $P_B = 37,8\% P$ (P =τελική ωφέλιμη)

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα και για ωφέλιμη τελικά ισχύ $P = 4 \text{ KW}$:

$$P_A = 0,622 * 4 = 2,48 \text{ KW} \quad \text{και} \quad P_B = 1,512 \text{ KW}$$

Με βάση αυτά τα μεγέθη ως προς τις αποδόσεις θα υπολογιστεί ο αναγκαίος αριθμός πάνελ για την τροφοδοσία 2 γραμμών και η κατανομή της ισχύος σε συσκευές, με καθοριστικό μέγεθος την κύρια γραμμή A. Αν δεν επαρκεί π.χ. η ισχύς των 2,48 KW για την γραμμή A και απαιτείται ισχύς $P_A = 2,8 \text{ KW}$, τότε από $P_A = 62,2\% P$ υπολογίζεται:

$P = 2,8 / 0,622 = 4,5 \text{ KW}$, απ' όπου προκύπτει ότι η απαιτούμενη εγκατεστημένη ισχύς των πάνελ πρέπει να είναι τουλάχιστο $4,5 / 0,8 = 5,62 \text{ KW}$ και προσεγγιστικά 6 KW, όπου 0,8 = η συνολική απόδοση e.

8.1 Απόδοση για $\Delta\phi = 90^\circ$ (δύο συμμετρικές γραμμές)

Με βάση την ίδια λογική που υπολογίστηκε προηγουμένως ;

$$e = [(V_{rms.A})^2 + (V_{rms.B})^2] / (10 * V_p)^2$$

και με:

$$(V_{rms.A})^2 = (V_{rms.B})^2 = 196^2 \quad \text{υπολογίζεται ότι} \quad e = 76832 / 100489 = 0,76$$

Δηλαδή περίπου $e = 76\% < 80\%$ που είναι των μη συμμετρικών A,B.

9. Επιλογή panel από την αγορά

Ένα panel που υπάρχει στην αγορά (τουλάχιστο 3 χρόνια) είναι το AS – 6P30 της εταιρίας Amerisolar, κοντά στις άνω απαιτήσεις.

Τα χαρακτηριστικά λειτουργίας του κατασκευαστή ακολουθούν, σαν επισυναπτόμενο αρχείο, στις 2 επόμενες σελίδες .

Αυτό που ενδιαφέρει την παρούσα εργασία είναι η ισχύς ανά panel, η ονομαστική τάση λειτουργίας και το ονομαστικό ρεύμα λειτουργίας, με ηλιοφάνεια που είναι αντίστοιχα $P = 340 \text{ W}$ $V_{np} = 37,5 \text{ V}$ $I_{np} = 9 \text{ A}$ (τελευταία στήλη δεξιά) .

Τεχνικά το να βγει στην αγορά panel με διαφορετική ονομαστική τάση λειτουργίας, αντί για 37,5 Volt (που δίνει το επιλεγέν AS-6P30) , είναι θέμα καθαρά κατασκευαστικό. Θα μπορούσε να γίνει και ένας συνδυασμός, αρκεί να υπάρχει συμβατότητα σε τεχνικά χαρακτηριστικά.

AS-6P

POLYCRYSTALLINE MODULE



Passionately
committed to
delivering innovative
energy solution

ADVANCED PERFORMANCE & PROVEN ADVANTAGES

- High module conversion efficiency up to 17.52% by using high efficient solar cells and advanced manufacturing technology.
- Low degradation and excellent performance under high temperature and low light conditions.
- Robust aluminum frame ensures the modules to withstand wind loads up to 2400Pa and snow loads up to 5400Pa.
- High reliability against extreme environmental conditions (passing salt mist, ammonia and hail tests).
- Potential induced degradation (PID) resistance.
- Positive power tolerance of 0 ~ +3 %.

CERTIFICATIONS

- IEC61215, IEC61730, IEC62716, IEC61701, CE, CQC, CGC, ETL(USA), JET(Japan), J-PEC(Japan), Kemco(South Korea), KS(South Korea), MCS(UK), CEC(Australia), FSEC(FL-USA), CSI Eligible(CA-USA), Israel Electric(Israel), InMetro(Brazil), TSE(Turkey)
- ISO9001:2008: Quality management system
- ISO14001:2004: Environmental management system
- OHSAS18001:2007: Occupational health and safety management system

SPECIAL WARRANTY

- 12 years limited product warranty.
- Limited linear power warranty: 12 years 91.2% of the nominal power output, 30 years 80.6% of the nominal power output.



ELECTRICAL CHARACTERISTICS AT STC

Nominal Power (P_{max})	300W	305W	310W	315W	320W	325W	330W	335W	340W
Open Circuit Voltage (V_{oc})	45.3V	45.4V	45.5V	45.6V	45.7V	45.8V	45.9V	46.0V	46.1V
Short Circuit Current (I_{sc})	8.68A	8.76A	8.85A	8.93A	9.04A	9.15A	9.26A	9.38A	9.50A
Voltage at Nominal Power (V_{mp})	36.7V	36.8V	36.9V	37.0V	37.1V	37.2V	37.3V	37.4V	37.5V
Current at Nominal Power (I_{mp})	8.18A	8.29A	8.41A	8.52A	8.63A	8.74A	8.85A	8.96A	9.07A
Module Efficiency (%)	15.46	15.72	15.98	16.23	16.49	16.75	17.01	17.26	17.52
Operating Temperature	-40°C to +85°C								
Maximum System Voltage	1000V DC								
Fire Resistance Rating	Type 1 (in accordance with UL1703)/Class C (IEC61730)								
Maximum Series Fuse Rating	15A								

STC: Irradiance 1000W/m², Cell temperature 25°C, AM1.5

ELECTRICAL CHARACTERISTICS AT NOCT

Nominal Power (P_{max})	221W	224W	228W	232W	236W	239W	243W	247W	251W
Open Circuit Voltage (V_{oc})	41.7V	41.8V	41.9V	42.0V	42.1V	42.2V	42.3V	42.4V	42.5V
Short Circuit Current (I_{sc})	7.03A	7.10A	7.17A	7.23A	7.32A	7.41A	7.50A	7.60A	7.70A
Voltage at Nominal Power (V_{mp})	33.4V	33.5V	33.6V	33.7V	33.8V	33.9V	34.0V	34.1V	34.2V
Current at Nominal Power (I_{mp})	6.62A	6.69A	6.79A	6.89A	6.98A	7.05A	7.15A	7.25A	7.34A

NOCT: Irradiance 800W/m², Ambient temperature 20°C, Wind Speed 1 m/s

MECHANICAL CHARACTERISTICS

Cell type	Polycrystalline 156x156mm (6x6inches)
Number of cells	72 (6x12)
Module dimensions	1956x992x50mm (77.01x39.06x1.97inches)
Weight	23kg (50.7lbs)
Front cover	3.2mm (0.13inches) tempered glass with AR coating
Frame	Anodized aluminum alloy
Junction box	IP67, 3 diodes
Cable	4mm ² (0.006inches ²), 1000mm (39.37inches)
Connector	MC4 or MC4 compatible

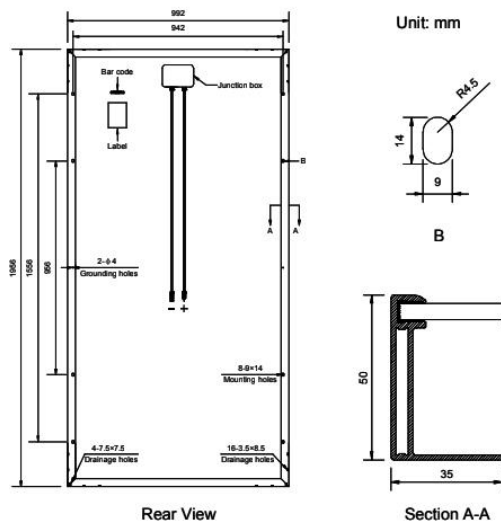
TEMPERATURE CHARACTERISTICS

Nominal Operating Cell Temperature (NOCT)	45°C±2°C
Temperature Coefficients of P_{max}	-0.41%/°C
Temperature Coefficients of V_{oc}	-0.31%/°C
Temperature Coefficients of I_{sc}	0.05%/°C

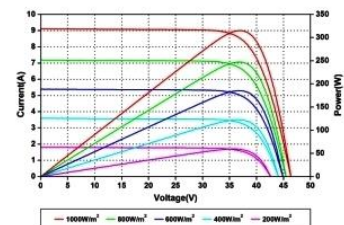
PACKAGING

Standard packaging	21pcs/pallet
Module quantity per 20' container	210pcs
Module quantity per 40' container	462pcs(GP)/506pcs(HQ)

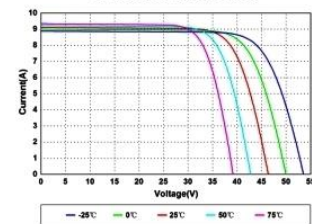
ENGINEERING DRAWINGS



IV CURVES



Current-Voltage and Power-Voltage Curves at Different Irradiances



Current-Voltage Curves at Different Temperatures

Specifications in this datasheet are subject to change without prior notice.

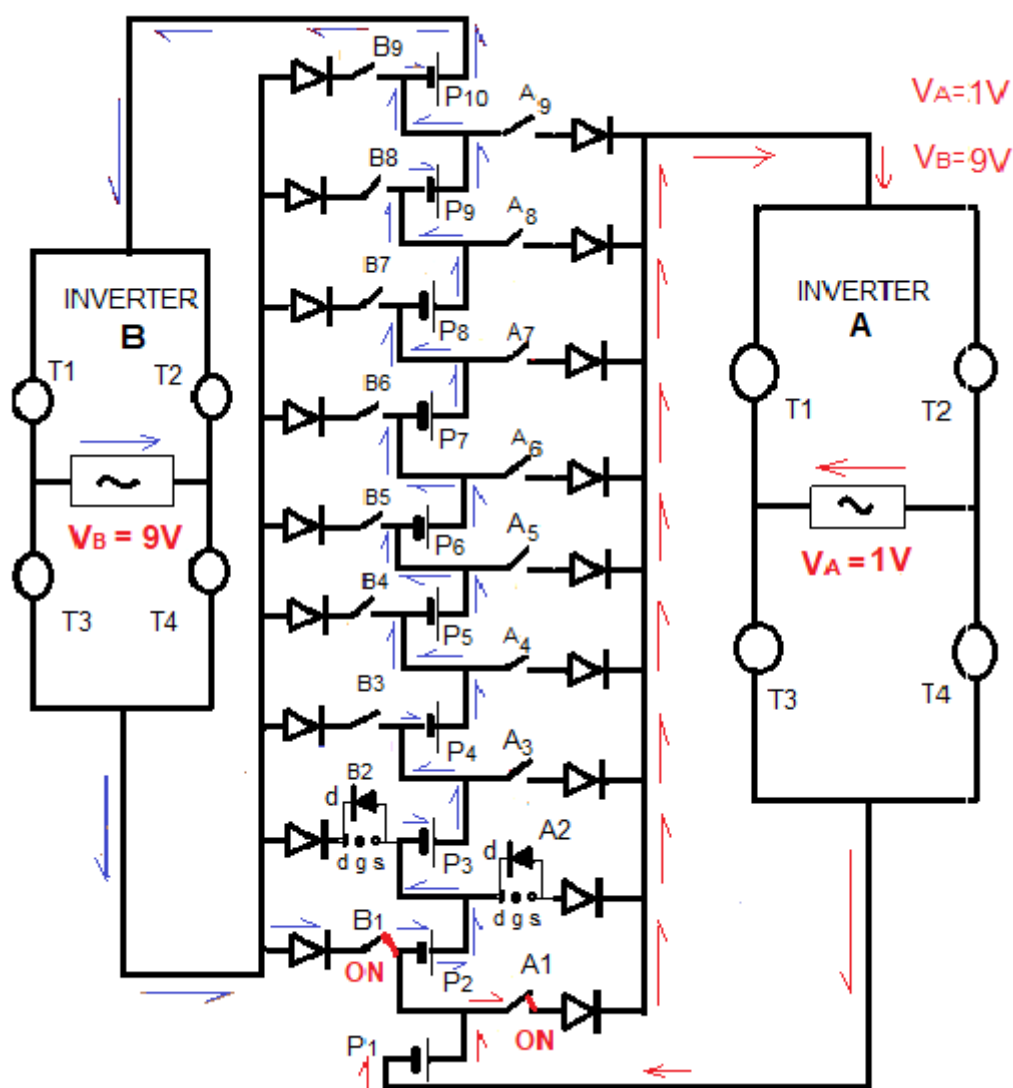
Amerisolar and Amerisolar logo denoted with ® are registered trademarks of Worldwide Energy and Manufacturing USA Co., Ltd.

10. ΒΑΣΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΠΛΟΥ INVERTER

Το παρακάτω βασικό σχεδιάγραμμα – κύκλωμα δείχνει την αρχή λειτουργίας του διπλού INVERTER, στο οποίο οι μηχανικοί διακόπτες παριστάνουν τα transistor ισχύος MOSFET [5, (25-28) & 7, (3- 137,138)] που τίθενται διαδοχικά σε καταστάσεις ON-OFF από σήματα που δίνουν συγκριτές τάσης.

Ένα ημιτονοειδές σήμα συγκρίνεται με τιμές αναφοράς, είναι χαμηλής τάσης, εναλλασσόμενο 9V A.C. και εξηγείται η διαδικασία δημιουργίας των σημάτων στους συγκριτές σε άλλο κύκλωμα παρακάτω.

Ακολουθεί το βασικό απλοποιημένο σχεδιάγραμμα του διπλού Inverter



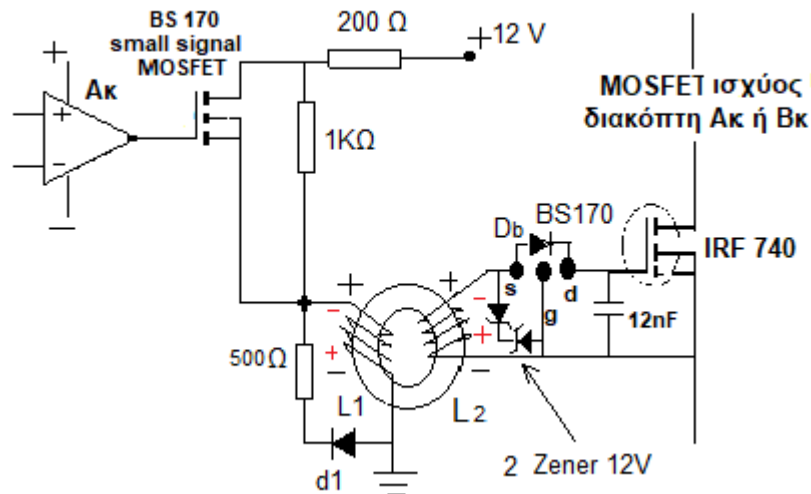
Εικόνα 22 – Βασικό σχεδιάγραμμα του διπλού INVERTER

Ο δεξιός INVERTER (4 transistors παριστάνονται με κυκλάκια) τροφοδοτείται μέσω των διακοπών A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10 με ρεύμα που δίνουν τα panel P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 που παριστάνονται με πηγές συνεχούς τάσης.

Ο αριστερός INVERTER (4 transistors παριστάνονται με κυκλάκια) τροφοδοτείται από τα panels μέσω των διακοπών B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B10.

Οι δίοδοι αριστερά των διακοπών B1,..., B10 εμποδίζουν βραχυκύκλωμα μεταξύ των panels διότι οι διακόπτες A1,...,A10 και B1,...,B10 είναι transistors MOSFET, με εσωτερική δίοδο που επιτρέπει το ρεύμα να ρέει από το S στο D. Το ίδιο και οι δίοδοι δεξιά από τα transistors MOSFET A1, A2,...κλπ Στο σχήμα φαίνεται ότι οι βρόχοι με B1,B2 και A1,A2 αν δεν υπήρχαν οι δίοδοι θα έκαναν βραχυκύκλωμα λόγω των διόδων.

Για την κατανόηση του πως λειτουργούν οι «διακόπτες» A_K ή B_K δίνεται πρώτα η βασική και μετά η πλήρης λειτουργία με δύο σχέδια (Εικόνες 23 & 24):



Εικόνα 23 -Βασικό κύκλωμα ηλεκτρομαγνητικού παλμού

Στο παραπάνω κύκλωμα (Εικόνας 23) φαίνεται ο βασικός τρόπος λειτουργίας του διακόπτη ηλεκτρομαγνητικού παλμού, με χρήση ενός MOSFET ισχύος IRF740, δύο μικρού ρεύματος – σήματος MOSFET BS 170 [7, (3- 62,63,64)] κι ενός μικρού κυκλικού πηνίου δύο όμοιων περιελίξεων L1 και L2.

- Μόλις το σήμα $V^+ > V^-$ τότε η έξοδος του συγκριτή γίνεται θετική και κάνει ON το BS 170 που βραχυκυκλώνει την αντίσταση $R=0,5K\Omega$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την απότομη άνοδο του ρεύματος στο πηνίο L1 από 10 mA ($12V/1200\Omega$) σε 60 mA ($12V/200\Omega$).

Αναπτύσσεται στο L1 επαγωγική τάση, μικρής διάρκειας (παλμός), η οποία μεταφέρεται στο πηνίο L2 και μέσω της εσωτερικής διόδου D_b του BS170, οδηγεί την πύλη G του MOS ισχύος IRF 740 στο να το θέσει σε κατάσταση ON (φορτίζεται η χωρητικότητα εισόδου $1600pF = 1,6nF$ του IRF 740 -power MOSFET- [7, (3-137,138)]).

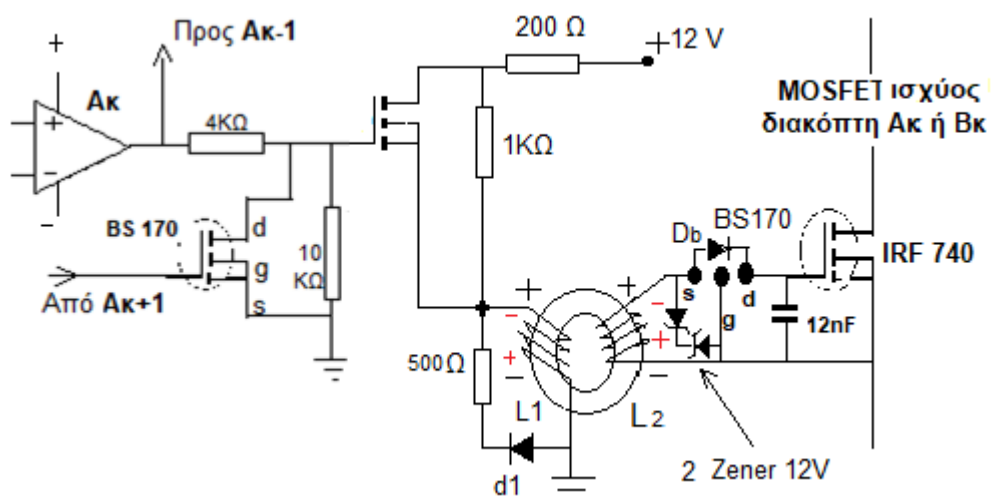
Στη διάρκεια του φαινομένου, το BS 170 στο κύκλωμα του L2 παραμένει OFF, αφού $V_{gs} < 0$ και η «φόρτιση» της χωρητικότητας GS στο IRF 740 γίνεται μέσω της εσωτερικής διόδου D.

Με μαύρο χρώμα (+) και (-) συμβολίζονται οι πολικότητες παλμικής επαγωγικής τάσης στα L1 & L2, στην παραπάνω διαδικασία που θέτει το MOS ισχύος σε κατάσταση ON.

Αντίθετα όταν $V^+ < V^-$ τότε η έξοδος του συγκριτή γίνεται αρνητική (ή μηδέν) και το BS 170 γίνεται OFF, με αποτέλεσμα την απότομη μείωση του ρεύματος στο πηνίο L1 από 60mA σε 10mA (αφού το ρεύμα περνά αναγκαστικά από την $R=1K\Omega$ στο κύκλωμα του L1). Αναπτύσσεται τότε παλμική επαγωγική τάση στον L1 αντίστροφής πολικότητας (-) & (+) που κάνει ON το BS170 στο κύκλωμα του L2 με αποτέλεσμα την «αποφόρτιση» της χωρητικότητας GS, στο MOS ισχύος IRF 740, με αποτέλεσμα να τεθεί σε κατάσταση OFF.

Για την πληρέστερη κατανόηση της λειτουργίας από ON σε OFF ακολουθεί η Εικόνα 24 , στην οποία αναφέρεται η συνέχεια του κειμένου.

Στη διαδικασία αυτή που θέτει το MOSFET ισχύος σε OFF, το ρεύμα μειώνεται απότομα από 60 σε 10 mA. Η ενέργεια του πηνίου L1 που μειώνεται απότομα θα γίνει υπέρταση στο κύκλωμα εάν δεν υπάρξει τρόπος μετατροπής της. Για το σκοπό αυτό συνδέεται παράλληλα στο πηνίο L1 αντίσταση $R=500\Omega$ μέσω διόδου d_1 . Η διάοδος στην διαδικασία ON εμποδίζει την αντίσταση να παίζει ρόλο, όμως στη διαδικασία OFF, το στιγμιαίο ρεύμα τη $t_0 = 0$ είναι $i(0) = 60\text{ mA}$ και δίνει στιγμιαία υπέρταση επί της $R=500\Omega$ ίση με $500\Omega \cdot 60\text{mA} = 30V$. Αυτή η ελεγχόμενη υπέρταση ανακλάται στιγμιαία στο πηνίο L2 και προκαλεί το ON του BS170 , την αποφόρτιση της χωρητικότητας GS στο ισχύος IRF 740 και την οδήγησή του σε κατάσταση OFF. Ο μικρός πυκνωτής 12nF έχει ρόλο «απορρόφησης» μέρους της υπέρτασης και της ενέργειας. Οι δύο διάοδοι Zener 12V προστατεύουν τον BS 170.



Εικόνα 24— Κύκλωμα ενεργοποίησης & «σβέσης» «διακοπών» A_k και B_k

Ο διαιρέτης τάσης των 2 αντιστάσεων $4K\Omega$ και $10K\Omega$ μπαίνει για την αδρανοποίηση της εξόδου ON του συγκριτή τάσης A_k . Δηλαδή ενώ η τάση εξόδου στον A_k είναι περίπου 11V, με το άνοιγμα του BS 170 από το σήμα του A_{k+1} το σήμα εξόδου γειώνεται μετά το πέρασμά του από την $R=4K\Omega$. Η αντίσταση των $4K\Omega$ είναι προστασίας του τελεστικού ενισχυτή.

Άρα ο BS 170 του πηνίου L1 «σβήνει» και κατά συνέπεια «σβήνει» και γίνεται OFF και το MOS ισχύος IRF 740.

Η δε έξοδος του A_k οδηγείται για τον ίδιο λόγο στο κύκλωμα-διακόπτη του A_{k-1} ώστε να αδρανοποιήσει τον A_{k-1} μόλις ενεργοποιηθεί ο A_k .

Αυτό γίνεται γιατί όταν ο διακόπτης A_k γίνεται ON τότε ο A_{k-1} γίνεται OFF.

Η ίδια λογική ισχύει και στη σειρά διακοπών B_k .

Όταν δηλαδή γίνεται ON ο B_k , τότε γίνεται OFF ο B_{k-1} .

Δηλαδή φαίνεται από τα παραπάνω ότι ο κάθε συγκριτής τάσης ενεργοποιεί ταυτόχρονα δύο «διακόπτες»:

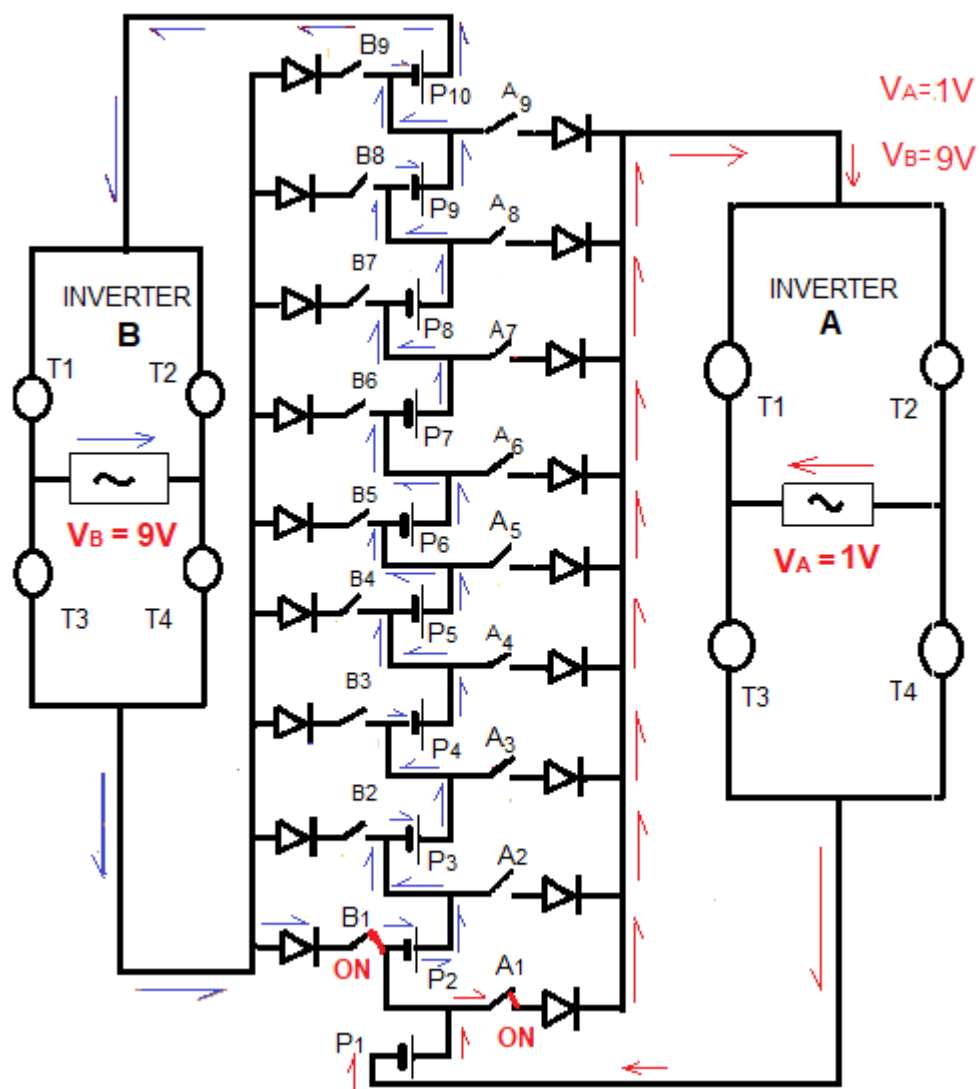
Όταν το σήμα είναι θετικό κλείνει τον A_k (ON) και ανοίγει τον A_{k-1} (OFF)

Και όταν ο A_{k+1} γίνει ON τότε ο A_k γίνεται OFF.

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν για τους «διακόπτες» B_k . Δηλαδή όταν π.χ B_5 γίνεται ON τότε B_4 γίνεται OFF.

11. Στάδια λειτουργίας INVERTER

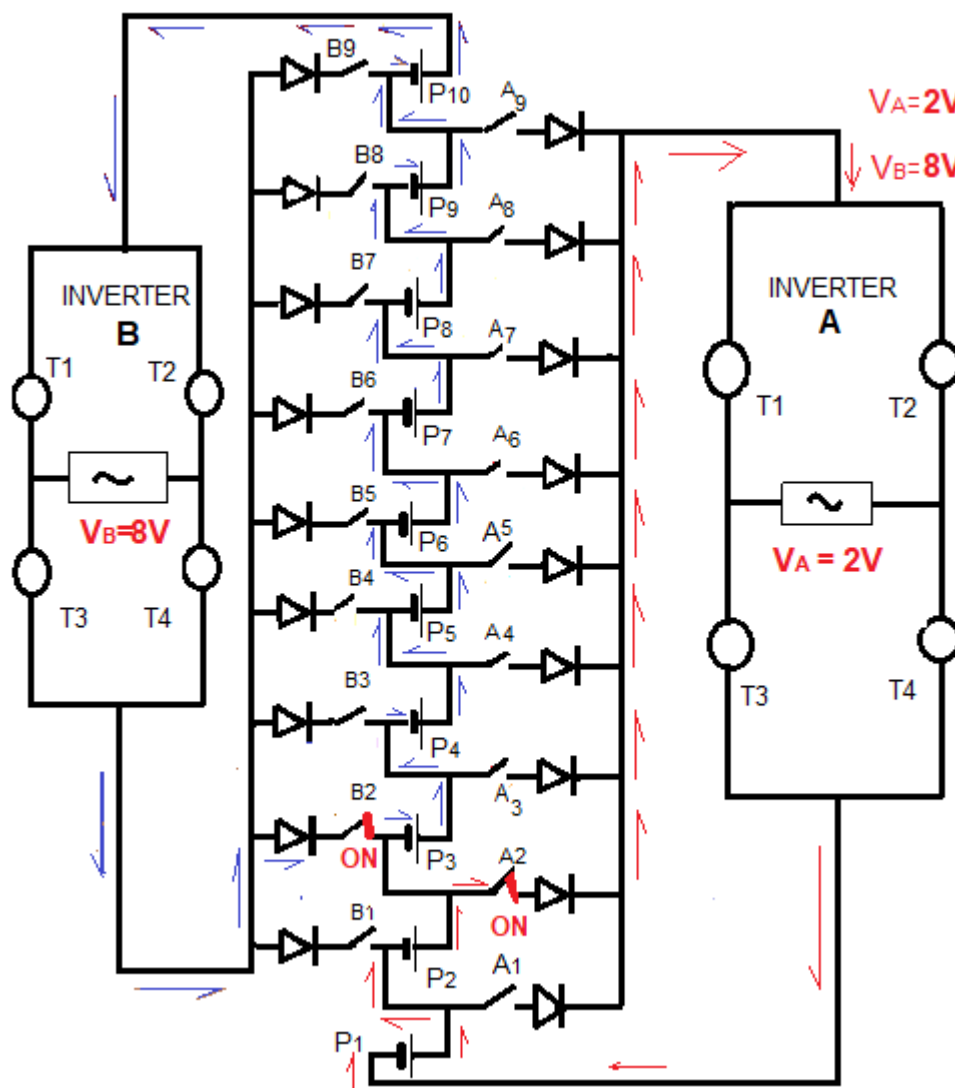
Τα παραπάνω αποσαφηνίζονται με την προβολή του βασικού σχεδιαγράμματος – κυκλώματος του διπλού INVERTER στα διαδοχικά στάδια ανάπτυξης της κλιμακωτής τάσης σε μία ημιπερίοδο, δηλαδή από $0 - T/2$, κατά την οποία στον INVERTER.A η τάση αναπτύσσεται από 1^*V μέχρι 9^*V και στον INVERTER.B πέφτει σταδιακά από τα 9^*V στο 1^*V . Στις διαδοχικές αυτές φάσεις λειτουργίας φαίνεται το ποιοι διακόπτες A_K και B_K είναι ενεργοί (ON) και ποιοι OFF. Για λόγους σχεδιαστικής ευκολίας, στο γενικό αυτό σχεδιάγραμμα, η τάση αναπτύσσεται από 1^*V μέχρι 9^*V αντί για 10^*V -ενώ στην ανάλυση από 1^*V μέχρι 10^*V



Εικόνα 25- (A1 , B1) ON

Οι διακόπτες **A1** και **B1** είναι ενεργοί και οι υπόλοιποι OFF. Τα βέλη δείχνουν την πορεία των ρευμάτων προς τους δύο INVERTERS A και B και η τάση που παρέχουν είναι $V_A=1*V$ και $V_B = 9*V$ (V = ονομαστική τάση λειτουργίας του κάθε πάνελ)

Η διόδος αριστερά του «διακόπτη» B1 επιτρέπει την επιστροφή του ρεύματος στην κάθοδο (-) του πάνελ P2 . Στον Inverter A είναι ON τα transistor **T1** και **T4** και στον Inverter B τα **T2** και **T3**. Το ρεύμα στο φορτίο του A έχει φορά προς τα δεξιά και στον B προς τα αριστερά. Αυτό εξηγείται από τις καμπύλες της σελίδας 17 – Εικόνα 5

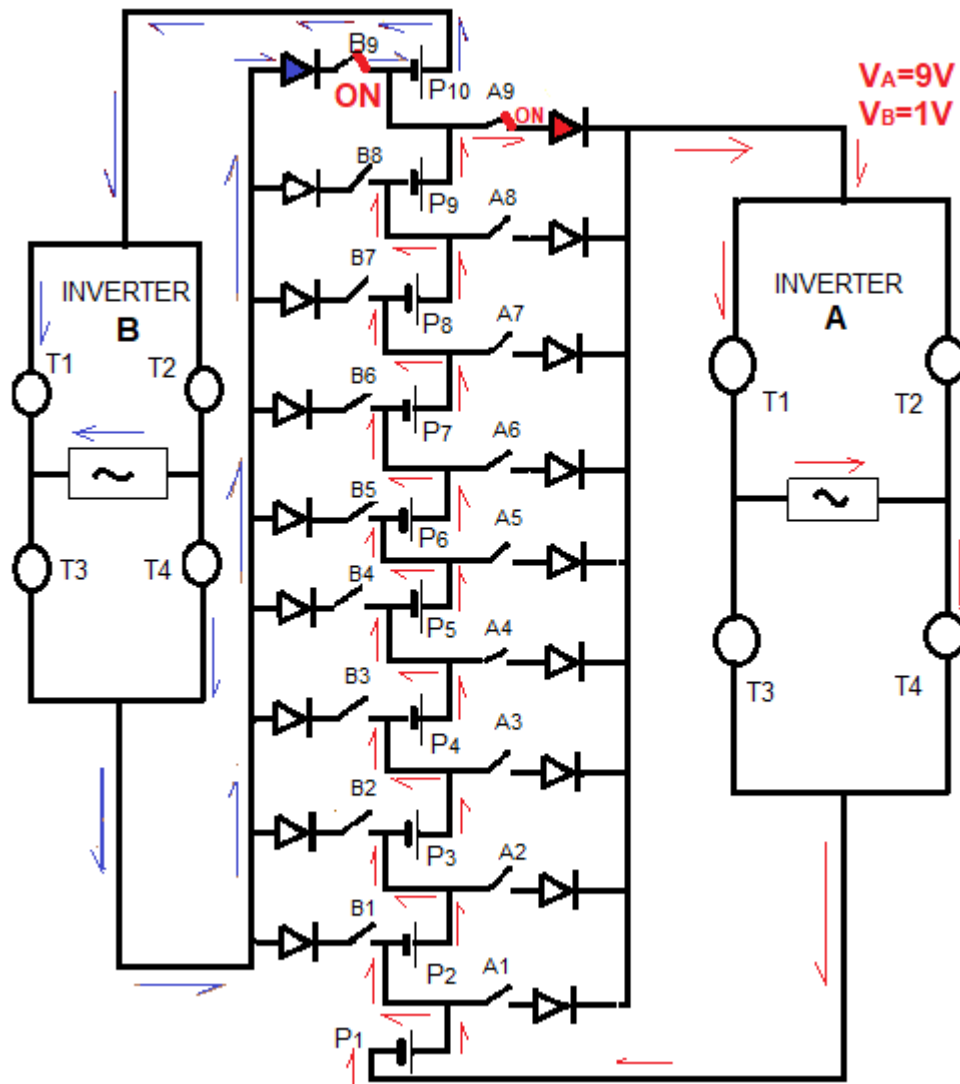


Εικόνα 26– (A2 ,B2)

Οι διακόπτες **A2** και **B2** είναι ON και οι υπόλοιποι OFF. Τα βέλη δείχνουν την πορεία των ρευμάτων προς τους δύο INVERTERS A και B και η τάση που παρέχουν είναι $V_A=2*V$ και $V_B = 8*V$ (V = ονομαστική τάση λειτουργίας του κάθε πάνελ)

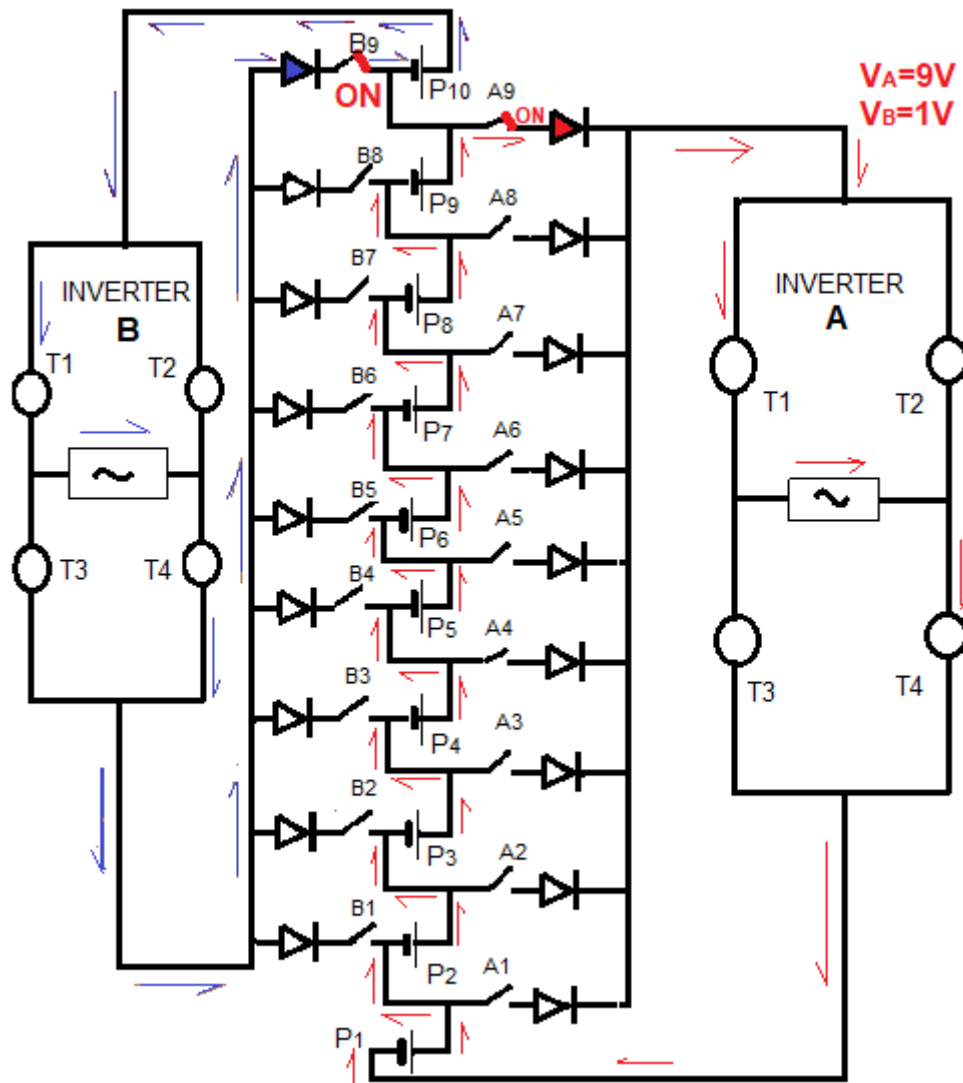
Η διόδος αριστερά του «διακόπτη» B2 επιτρέπει την επιστροφή του ρεύματος στην κάθοδο (-) του πάνελ P3 . Στον Inverter A είναι ON τα transistor **T1** και **T4** και στον Inverter B τα **T2** και **T3**. Το ρεύμα στο φορτίο του A έχει φορά προς τα δεξιά και στον B προς τα αριστερά. Αυτό εξηγείται από τις καμπύλες της σελίδας 17-Εικόνα 5.

Είναι προφανές ότι κάθε πάνελ ή θα παρέχει ρεύμα και ισχύ στον Inverter A ή στον B. Τη στιγμή που η τάση $V_B = 1 \text{ V}$ (ή $V_A = 9 \text{ V}$) και το ημιτονοειδές σήμα αναφοράς προσεγγίσει την τιμή κορυφής, δηλαδή αντιστοιχεί σε γωνία λίγο πιο κάτω από τις 90° τότε γίνεται αντιστροφή στον Inverter B με τα transistors **T2** και **T3** να γίνονται **OFF** και τα **T1** και **T4** **ON**. Η εικόνα λίγο πριν την αντιστροφή:



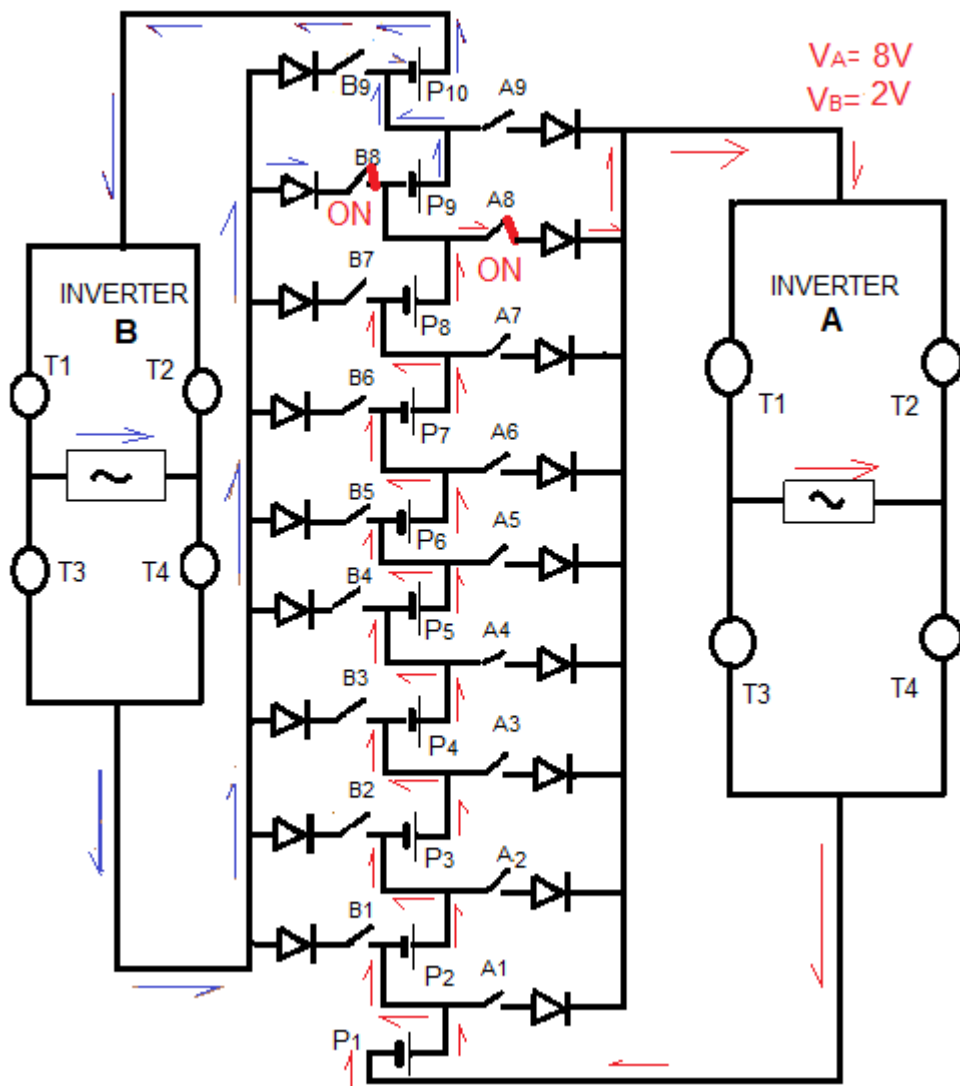
Εικόνα 28– Λίγο πριν την αναστροφή του ρεύματος στον INVERTER.B

Ακολουθεί η εικόνα αμέσως μετά την αντιστροφή από (T2 ,T3) ON σε OFF στον INVERTER B



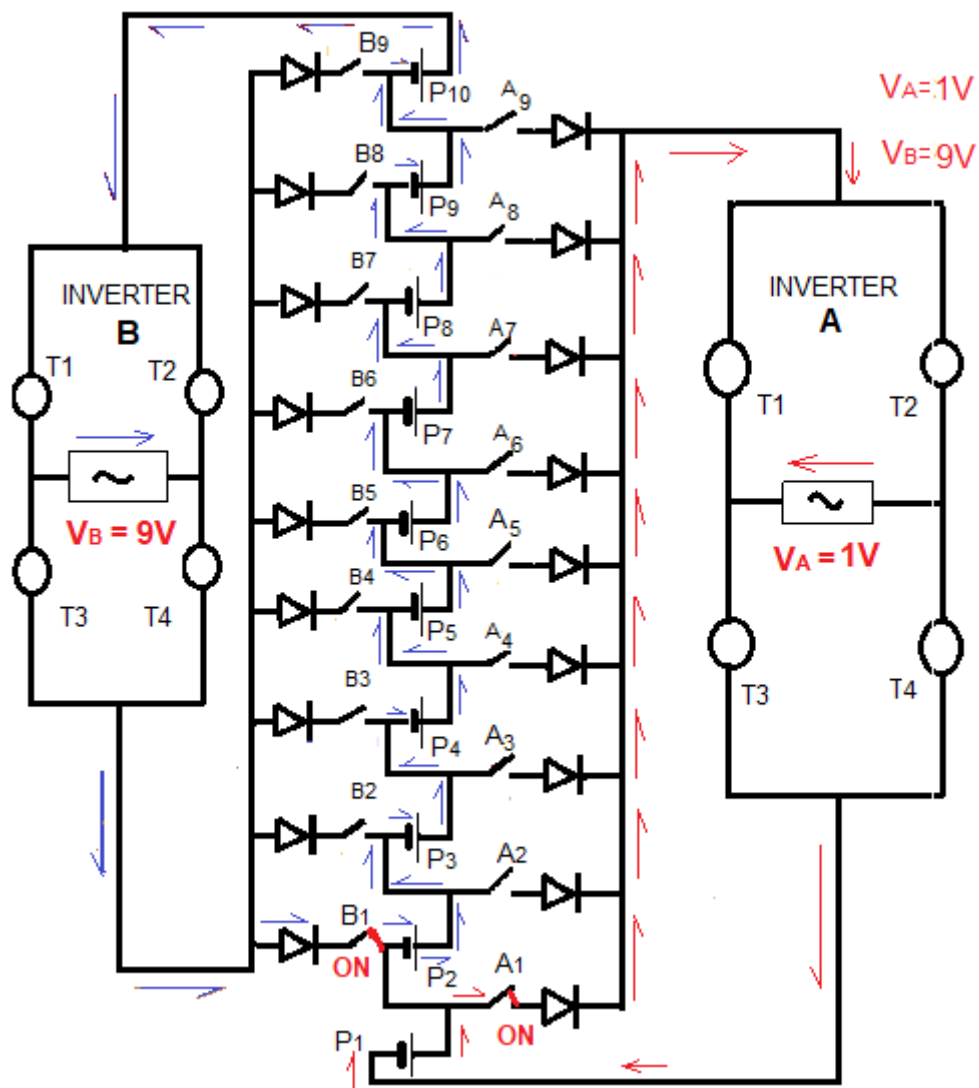
Εικόνα 29 - Αμέσως μετά την αντιστροφή του ρεύματος στον INVERTER.B

Και οι δύο τάσεις V_A , V_B έχουν θετική τιμή (ρεύμα ίδιας φοράς στα φορτία). Ακολουθεί η σταδιακή πτώση της V_A και σταδιακή άνοδος της V_B όπως φαίνεται παρακάτω, μέχρι τη στιγμή $T/2$ (σελίδα17) χωρίς αλλαγή φοράς ρευμάτων.



Εικόνα 30 – Ίδιας φοράς τα ρεύματα στους 2 INVERTERs A , B

Η τάση V_A πέφτει σταδιακά και η V_B ανεβαίνει χωρίς αλλαγή φοράς ρευμάτων μέχρις η τιμή του σήματος αναφοράς προσεγγίσει το μηδέν όπως φαίνεται στην εικόνα, με $V_A=1 \cdot V$ και $V_B=9 \cdot V$ ή λίγο πριν τη στιγμή $T/2$ (σελίδα 17), οπότε έχουμε αντιστροφή των transistors στον Inverter A, με T1, T4 να γίνονται OFF και T2, T3 να γίνονται ON. Ακολουθούν οι δύο εικόνες λίγο πριν και λίγο μετά.



Εικόνα 31-Λίγο πριν την αντιστροφή του ρεύματος στον INVERTER.A

Η εικόνα αντιστοιχεί ελάχιστα πριν τη στιγμή $T/2$ (ή λίγο πριν τις 180°) και η παρακάτω εικόνα ελάχιστα μετά τη στιγμή $T/2$ και την αντιστροφή των transistors στον Inverter A (σελίδα 17).

12. Κυκλώματα σημάτων ελέγχου

Από τις κυματομορφές της σελίδας 17 φαίνεται ότι οι αντιστροφές στον **Inverter A** γίνονται τις στιγμές $0, T/2, 2T/2, 3T/2, 4T/2$ και γενικά $k(T/2)$ ή τις στιγμές που τάση του ημιτονοειδούς σήματος τείνει στο μηδέν.

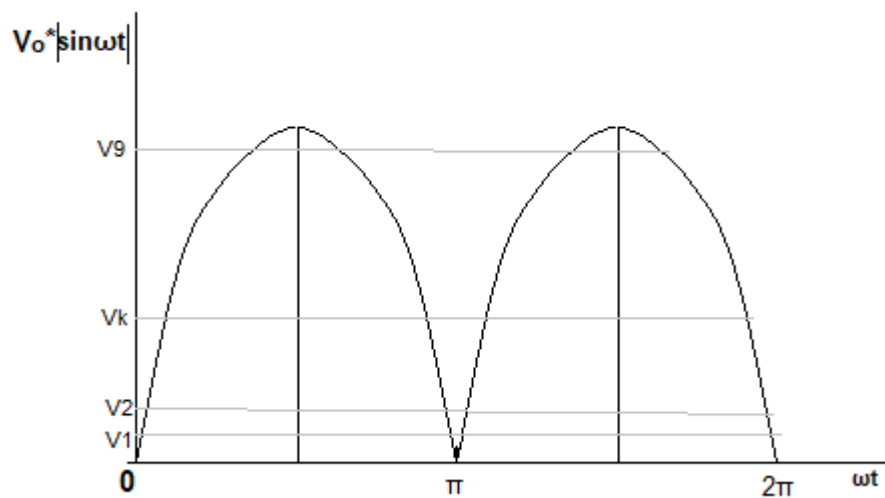
Ενώ για τον Inverter B οι στιγμές αντιστροφής είναι $T/4, 3T/4, 5T/4$ και γενικώς $(2k+1)T/4$ ή τις στιγμές που η τάση του σήματος τείνει στο μέγιστο.

Η αντιστροφή γίνεται με τον ίδιο τρόπο μετάβασης από ON σε OFF και αντίστροφα που εξηγήθηκε στις σελίδες 60-68.

Δηλαδή υπάρχει ένα ημιτονοειδές σήμα που όταν υπερβαίνει ή γίνεται μικρότερο από τιμές αναφοράς τότε ενεργοποιούνται συγκριτές τάσης που προκαλούν ηλ/μαγνητικό παλμό ο οποίος θέτει τα transistors σε ON ή OFF.

Για τον Inverter A η τιμή αναφοράς είναι περίπου το μηδέν και για τον Inverter B η τιμή αναφοράς είναι σχεδόν η μέγιστη (ελάχιστα πιο κάτω) του ημιτονοειδούς σήματος.

Τα κυκλώματα που μας παρέχουν τα σήματα αναφοράς για τους συγκριτές τάσης περιγράφονται στις εικόνες που ακολουθούν.



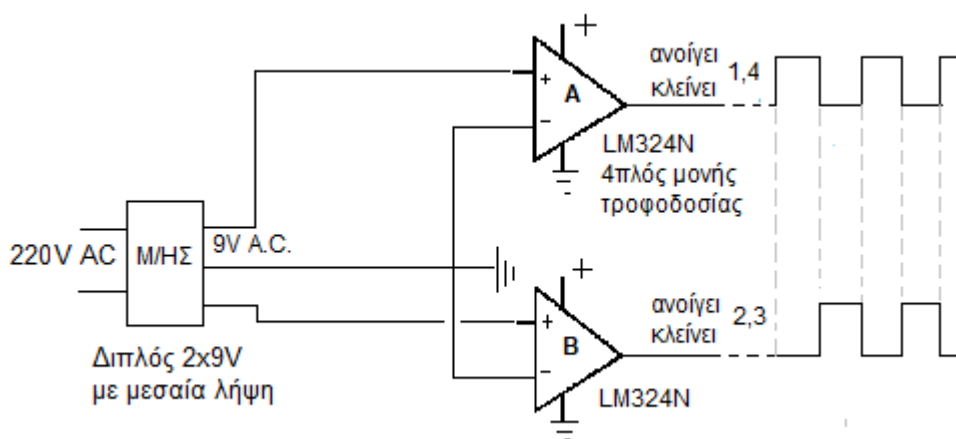
Εικόνα 33- Διπλά ανορθωμένο σήμα

Το παραπάνω σήμα προκύπτει από διπλή ανόρθωση με γέφυρα και το παίρνουμε από το δευτερεύον μετασχηματιστή (9V A.C.), Εισέρχεται βέβαια μία μικρή παραμόρφωση, λόγω τάσης πόλωσης των δύο διόδων (που την παίρνουμε υπ' όψη για να μειώσουμε το σφάλμα). Χρησιμοποιεί τόσο στην διαδοχική είσοδο – έξοδο των διακοπών (MOSFET) για την ανάπτυξη της κλιμακωτής τάσης, όσο και στην αντιστροφή των δια-

γώνιων «διακοπών» στους δύο Inverters A και B (δηλαδή όταν οι δ1,δ2 γίνονται ON οι δ2,δ3 να γίνονται OFF)

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα (Εικόνα 33) για τον Inverter.A η αναστροφή των διακοπών και της φοράς του ρεύματος γίνεται στις γωνίες $0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$ ενώ για τον Inverter.B γίνεται στις γωνίες $\pi/2, 3(\pi/2), 5(\pi/2), \dots, (2k+1)(\pi/2)$, δηλαδή στις κορυφές (ελάχιστα πιο κάτω).

INVERTER.A (ανίχνευση μηδενός)

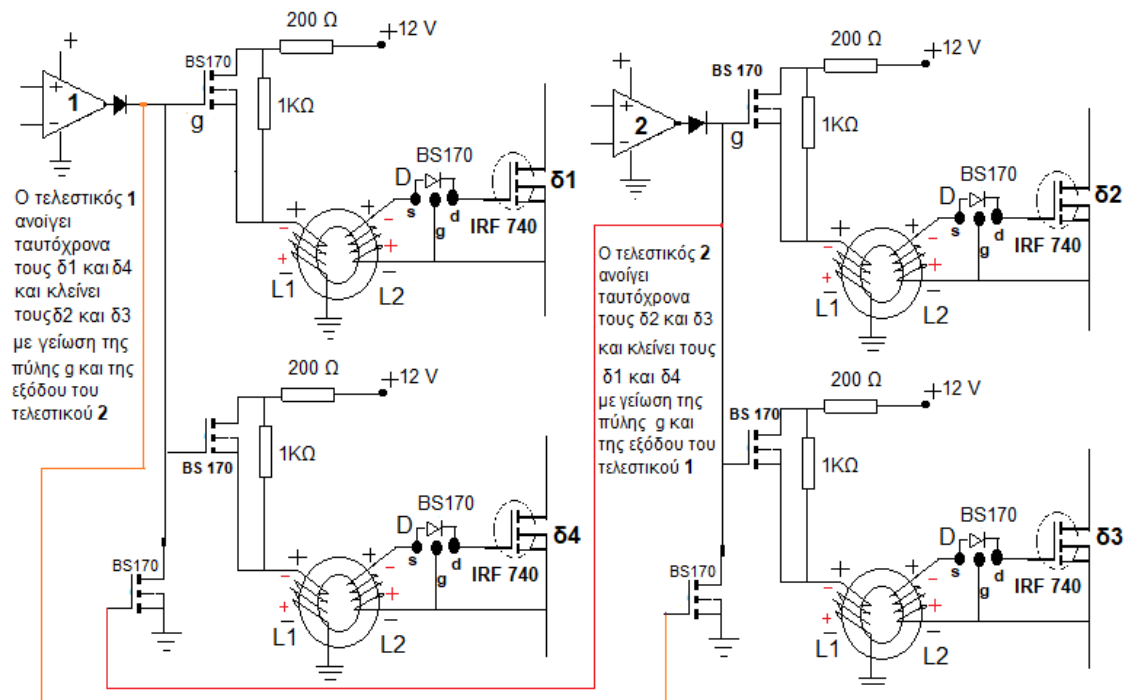


Εικόνα 34 — Ανίχνευση μηδενός στον Inverter.A

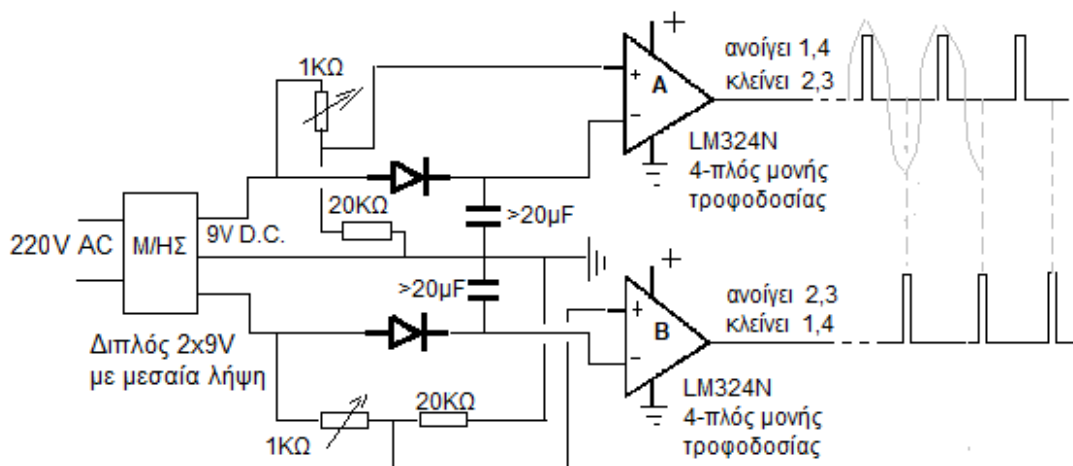
Στην πάνω Εικόνα 34 έχουμε ανίχνευση του μηδενός, μόλις η τάση στη μία ημιπερίοδο ξεπεράσει το μηδέν (επάνω τελεστικός) $V_+ > 0$, οπότε με θετική έξοδο του άνω τελεστικού ανοίγουν οι «διακόπτες» 1,4 στον Inverter A (ON) και μόλις αναστραφεί η τάση στο δευτερεύον του μετασχηματιστή και η τάση V_+ γίνει $V_+ < 0$ τότε η έξοδος του τελεστικού μηδενίζεται και κλείνουν (OFF) οι «διακόπτες» 1,4 (αρνητικός παλμός).

Αντίθετη είναι η λειτουργία του κάτω τελεστικού. Μόλις δηλαδή αναστραφεί τάση στην έξοδο του μετασχηματιστή και το σήμα V_+ , στον κάτω τελεστικό, γίνει $V_+ > 0$ τότε η έξοδος του γίνεται θετική και ο θετικός παλμός ανοίγει (ON) τους «διακόπτες» 2,3 αντιστρέφοντας τη φορά ρεύματος στον Inverter A. Στο τέλος δε της ημιπεριόδου μόλις αναστραφεί και πάλι η τάση στην έξοδο του M/H τότε έξοδος γίνεται μηδέν και ο αρνητικός παλμός κάνει OFF τους διακόπτες 2,3.

INVERTER.B (ανίχνευση κορυφής)



Εικόνα 35 – Αντιστροφή διακοπών κοντά στη κορυφή



Εικόνα 36 – Σήμα εξόδου τελεστικών

Βλέπουμε από την κάτω Εικόνα 36 ότι ο τελεστικός 1 της επάνω 35 είναι ο A της κάτω και ο B κάτω ο τελεστικός 2 επάνω. Από τα σήματα της κάτω εικόνας 36 φαί-

νεται ότι όταν ο A (ή 1), είναι ON, για μία στενή περιοχή κοντά στην κορυφή του ημιτονοειδούς σήματος, τότε η έξοδος του 2 (ή B) είναι μηδέν, οπότε το MOSFET BS170 που γειώνει το σήμα στην έξοδο στον τελεστικό 1 (ή A) δεν κινδυνεύει να βραχυκυκλώσει και να κάψει τον τελεστικό 1. Θα μπορούσε να μπει και αντίσταση προστασίας 2KΩ πριν το FET γείωσης σήματος, όμως από τη στιγμή που η έξοδος είναι μηδέν δεν είναι απαραίτητη. Το ίδιο ισχύει και για τον τελεστικό 2 (ή B).

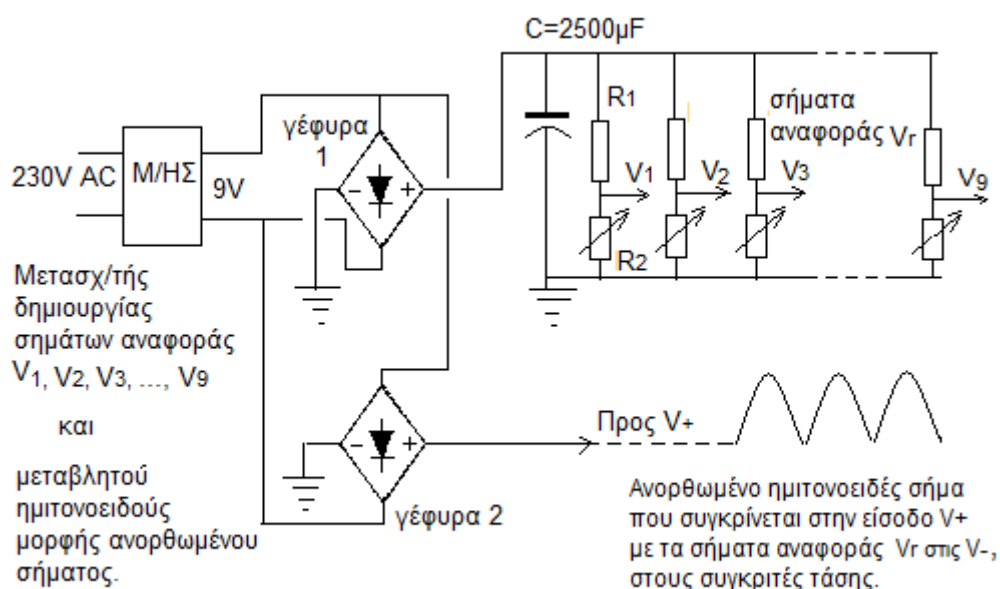
Λειτουργία διπλού διακόπτη δ1,δ4 και δ2,δ3 (Εικόνες 35 , 36):

Έστω ότι το σήμα ανίχνευσης κορυφής ξεπερνά μία τιμή που αντιστοιχεί π.χ. σε τιμή γωνίας γύρω στις 80^0-85^0 , δηλαδή λίγο πιο κάτω από την κορυφή. Τότε η έξοδος του τελεστικού A (ή 1) γίνεται ON και φορτίζει των 60pF χωρητικότητα GS στο small signal MOSFET BS170, το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί θετικό παλμό και ανοίγουν οι «διακόπτες» δ1 και δ2, δηλαδή τα MOSFET ισχύος IRF740 γίνονται ON. Η διόδος στην έξοδο του τελεστικού «παγιδεύει» τα φορτία στη χωρητικότητα εισόδου του BS170 και αυτό ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ ON, παρά το γεγονός ότι σε ελάχιστο χρονικά διάστημα, όταν «πέφτει» το σήμα κάτω από το αντίστοιχο των 80^0-85^0 η έξοδος του τελεστικού A (ή 1) γίνεται ξανά 0. Ταυτόχρονα το θετικό σήμα του τελεστικού (πορτοκαλί) κάνει ON το BS170 γείωσης σήματος, μεταξύ τη διόδου και πύλης στον τελεστικό B (ή 2), οπότε «σβήνει» απότομα (OFF) το BS170 και με αρνητικό παλμό σβήνει τα MOSFET ισχύος IRF 740 δ2, δ3 (OFF).

Μέχρι να αντιστραφεί η τάση σήματος και να ξεπεράσει τη γωνία 80^0-85^0 οι δ1, δ2 παραμένουν ON λόγω της διόδου στην έξοδο του τελεστικού A. Μόλις όμως το σήμα υπερβεί μία τιμή τότε ο τελεστικός B (ή 1) γίνεται ON και το θετικό σήμα κάνει δύο ενέργειες ταυτόχρονα:

1. Ανοίγει με θετικό παλμό τους δ2, δ3 και
2. Το θετικό σήμα (κόκκινο) ανοίγει το BS170, γείωσης της πύλης G στην έξοδο του τελεστικού A (ή 1), με αποτέλεσμα να σβήνουν ταυτόχρονα με αρνητικό παλμό οι διακόπτες δ1, δ4.

Στη συνέχεια γίνεται ότι και περιγράφηκε πριν. Δηλαδή τα παγιδευμένα από τη διόδο φορτία κρατούν «ανοιχτό» το BS170 και τους δ2, δ3 παρά το γεγονός ότι η έξοδος του τελεστικού B (ή 2) γίνεται μηδέν [0]. Αυτό διαρκεί μέχρι την αντιστροφή σήματος και να ακολουθήσει ο ίδιος κύκλος.



Εικόνα 37 - ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Στην παραπάνω Εικόνα 37 η χρήση των γεφυρών εισάγει μία μείωση της τάσης λόγω πόλωσης διόδου. Υπάρχει δηλαδή μία μείωση τόσο στα άκρα του πυκνωτή (άνω) όσο και στο ανορθωμένο ημιτονοειδές κάτω.

Για τον σωστό υπολογισμό των σημάτων αναφοράς $V_1, V_2, V_3, \dots, V_9$ πρέπει να ληφθεί υπ' όψη το γεγονός ότι έχουμε πτώση τάσης σε 2 διόδους, άρα στον πυκνωτή άνω η σταθερή τάση θα είναι η τάση κορυφής για $V_{rms}=9V$ ή $V_0 = 12,7278V$ μείον $0,7 V$ περίπου και τελικά $V_C = 12,7279 - 0,7 = 12,028 V$.

Από την διαίρεση της τάσης $12,028 V$ παίρνουμε τελικά τα σήματα αναφοράς.

Για τα σήματα αναφοράς εργαζόμαστε ως εξής:

Από τις τιμές των γωνιών ανάπτυξης της κλιμακωτής τάσης βρίσκουμε τη θεωρητική τιμή για κάθε γωνία ϕ , όπου ϕ :

$$7,5^0, 15^0, 20^0, 27,5^0, 35^0, 40^0, 47,5^0, 60^0, 72,5^0$$

Από τη σχέση δηλαδή $V(\varphi) = 12,7278 \cdot \sin \varphi$ υπολογίζουμε τη θεωρητική τιμή V_r των σημάτων αναφοράς για τις παραπάνω γωνίες. Αντικαθιστώντας προκύπτουν οι τιμές:

1,66V, 3,29V, 4,35V, 5,877V, 7,3V, 8,18V, 9,38V, 11,02V, 12,138V

Αφαιρούμε από τις παραπάνω τιμές την πτώση τάσης στις δύο διόδους της γέφυρας, περίπου 0,7Volt, παίρνοντας τελικά τις τιμές :

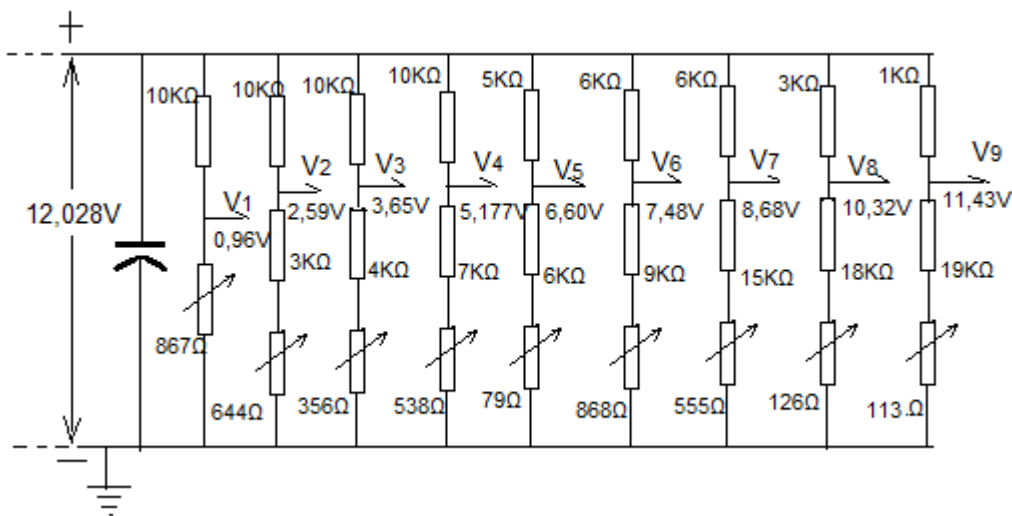
0,96V, 2,59V, 3,65V, 5,177V, 6,60V, 7,48V, 8,68V, 10,32V, 11,43V

Για να πάρουμε τις τιμές αυτές υπολογίζουμε ενδεικτικές τιμές των αντιστάσεων, παρ' ότι θα είναι ρυθμιστικές, για να έχουμε μία εικόνα της τάξης μεγέθους.

Στην εικόνα που ακολουθεί δίπλα σε κάθε αντίσταση βάζουμε και μία τιμή, παρ' ότι είναι ρυθμιστικές, έτσι όπως αυτές οι τιμές προκύπτουν από τους υπολογισμούς.

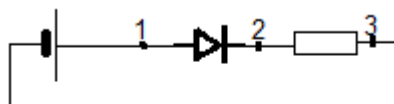
Η τελική ρύθμιση θα γίνει βέβαια με ψηφιακό βολτόμετρο από τις ρυθμιστικές αντιστάσεις (0-1KΩ).

Επίσης η τιμή τάσης πόλωσης στη γέφυρα, που υποθέσαμε 0,7Volt και αυτή θα μετρηθεί πειραματικά, όμως η όποια διαφορά δεν θα είναι μεγάλη και οι τιμές των αντιστάσεων θα είναι αυτές περίπου της κάτω εικόνας 37.



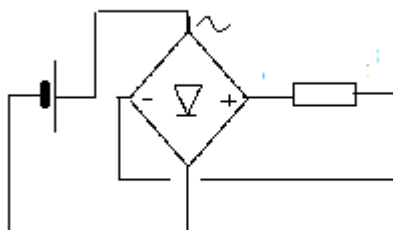
Εικόνα 38 - Υπολογισμός σημάτων αναφοράς για Ακ - Βκ

Για την πειραματική μέτρηση της τάσης πόλωσης διόδου χρησιμοποιούμε το παρακάτω απλό κύκλωμα.



Εικόνα 39 – Μέτρηση τάσης πόλωσης διόδου

Μετράμε την τάση στους πόλους της πηγής και την τάση στα άκρα της αντίστασης και τις αφαιρούμε. Η διαφορά είναι η τάση πόλωσης της διόδου. Σαν πηγή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μπαταρία 9V για ποτιστικό και η αντίσταση να είναι περίπου $1\text{K}\Omega$. Μπορούμε και απ' ευθείας να μετρήσουμε V_{1-2} .



Εικόνα 40 – Μέτρηση τάσης πόλωσης γεφυρών διόδου

Μετράμε το ψηφιακό βολτόμετρο όπως και πριν την τάση στους πόλους της πηγής και στα άκρα της αντίστασης. Η διαφορά είναι η τάση πόλωσης των διόδων της γέφυρας. Η αντίσταση είναι όπως και πριν περίπου $1\text{K}\Omega$.

13. ΚΩΔΙΚΑΣ – Σε Python

Όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη του INVERTER μπορούν να υπολογιστούν από ένα πρόγραμμα στο οποίο ως αρχικοί παράμετροι θα μπαίνουν οι γωνίες(angles_f1 , $\text{angles_f2}, \dots$), το βήμα της κλιμακωτής τάσης (τάση πάνελ) και στο πρώτο σκέλος του προγράμματος θα υπολογίζονται όλες οι αρμονικές τάσης (bnA_values , bnB_values), η ενεργός τιμή $V_{\text{rms}}\{VRMS1, VRMS2\}$ των 2 INVERTER A και B καθώς και την συνολική απόδοση e (e_{apodosis}) του INVERTER των δυο γραμμών A,B ως προς την απόδοση της τετραγωνικής μορφής $[(E_A + E_B) / E_{DC}]$, όπου E = ενέργεια σε χρόνο T.

Στο δεύτερο σκέλος του προγράμματος, με βάση τις αρμονικές τάσης και τις δύο βασικές παραμέτρους ενός καταναλωτή (φορτίο), δηλαδή την ωμική αντίσταση R και την αυτεπαγωγή L, θα υπολογίζεται με βήμα δύο μοιρών (ή και ανά μία μοίρα) το ρεύμα που διαρρέει τον καταναλωτή ως άθροισμα (I_n) 23 ρευμάτων (ένα για κάθε αρμονική), για τις πρώτες 23 αρμονικές.

Για τον υπολογισμό του ρεύματος, κάθε αρμονικής τάσης, θα λαμβάνεται υπ' όψη το πλάτος της τάσης, η σύνθετη αντίσταση $Z = [R^2 + (L\omega)^2]$, με $\omega = 2\pi \cdot 50 \cdot (2k+1)$, καθώς και η διαφορά φάσης τάσης - ρεύματος έτσι όπως υπολογίζεται από $\varphi = L\omega/R$.

Στο τρίτο σκέλος του προγράμματος, με βάση τις τιμές ρεύματος ανά 1 μοίρα, σχεδιάζεται η καμπύλη ρεύματος $I - \varphi$, για να έχουμε μία εικόνα της μορφής του ρεύματος. Όλα τα παραπάνω υπολογίζονται για τον INVERTER.A. Μπορεί φυσικά να αλλάξουν οι γωνίες αρχικά στις παραμέτρους και να τρέξει το πρόγραμμα και για τον INVERTER.B

Σαν καταναλωτή παίρνουμε ένα κλιματιστικό και με βάση τα χαρακτηριστικά στην ετικέτα (Ισχύ P, μέγιστο ρεύμα κλπ) το εξομοιώνουμε με μία αντίσταση και ένα πηνίο σε σειρά. Αυτές οι τιμές R, L μπαίνουν στο πρόγραμμα.

Στο παράδειγμα, για ένα κλιματιστικό 1500W υπολογίστηκε $R = 30,6\Omega$, $L = 0,036H$

Αφού τρέξει το πρόγραμμα συγκρίνουμε τις τιμές που δίνει για τις περιττές αρμονικές, μέχρι την 23^η, με τις τιμές που υπολογίσαμε με τα υπολογιστικά φύλλα (excel) για να ελέγξουμε αν το πρόγραμμα λειτουργεί σωστά. Την ίδια σύγκριση κάνουμε και με τα άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη όπως οι ενεργές τιμές V_{rms} .

```

import math

import matplotlib.pyplot as plt

pi = 3.14

angles_f1 = [7.5 , 15 , 20 , 27.5 , 35 , 40 , 47.5 , 60 , 72.5 ]
angles_f2 = [17.5 , 30 , 42 , 50, 55, 62.5, 70, 75, 82.5 ]

bnA_values = [ ]
bnB_values = [ ]

for n in range(1, 23 + 2, 2)      :

    sum_cos = sum(math.cos(math.radians(n * angle)))

    for angle in angles_f1)

        bn = (4 / (n * pi)) * (sum_cos + 1)

        bnA_values.append(bn)

        print(f"n = {n}, b_n = {bn:.6f}", "A INVENTER")

print("\n Λίστα με όλες τις τιμές b_n :", bnA_values)

n = 1

while n <= 23  :

    sum_cos = sum(math.cos(math.radians(n * angle)))

    for angle in angles_f2)

        b_n = (4 / (n * pi)) * (sum_cos + 1)

        bnB_values.append(b_n)

        print(f" n = {n}, b_n = {b_n:.6f}", "B INVENTER")

        n += 2

print("\n Λίστα με όλες τις τιμές b_n:", bnB_values)

DF_vrms1 = [7.5 , 7.5 , 5, 7.5, 7.5, 5, 7.5, 12.5, 12.5, 17.5]
DF_vrms2 = [17.5 , 12.5 , 12.5 , 7.5 , 5 , 7.5 , 7.5 , 5 , 7.5, 7.5]

sum_result = 0

n = 1

while n <= 10  :

```

```

term = (n * n) * (DF_vrms1 [n - 1] / 360)

sum_result += term

print(f'n = {n}, df = {DF_vrms1 [n - 1]}, term = {term:.5f}')

n += 1


print("\n άθροισμα " , sum_result)

Vpanel = 31.7

Vrms = 2*math.sqrt(sum_result) * Vpanel

print("\n ENERGOS TIMH Vrms A INVENTER :", "{:.4f}".format(Vrms) )

VRMS1 = Vrms

print("\n")

sum_result = 0

n = 1

while n <= 10:

    term2 = (n * n) * ( DF_vrms2[n - 1] / 360)

    sum_result += term2

    print(f'n = {n}, df = {DF_vrms2 [n - 1]}, term = {term2:.5f}')

    n += 1

Vrms = 2*math.sqrt(sum_result) * Vpanel

VRMS2 = Vrms

print("\n ENERGOS TIMH Vrms B INVENTER :", "{:.4f}".format(Vrms) )

Edc = (10*Vpanel)**2 # 10 λογο των πανελ

Einv = (VRMS1*VRMS1)+(VRMS2*VRMS2)

e_apodosis = Einv/Edc

e_apodosis = "{:.4f}".format(e_apodosis )

print("\n e = [(V rms.A ) 2 + (V rms.B ) 2 ] / (10*Vp)^2 " )

print("\n ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΔΙΠΛΟΥ INVERTER :e = E INV / E DC "
,e_apodosis )

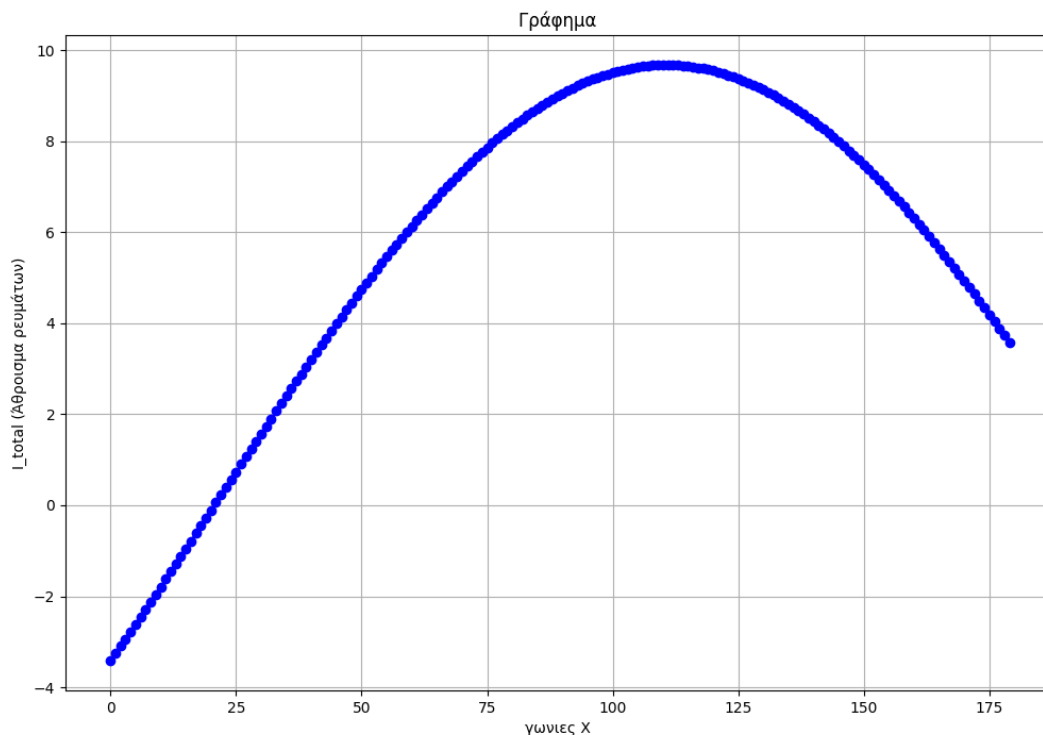
```

```

L = 0.038 # ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ L
R = 30.6 # ΤΙΜΗ ΩΜΙΚΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ R
Vp=31.7
I_n= [ ]
for x in range(1, 181, 1) :
    I_total = 0
    k=0
    for n in range (1, 23+1, 2) :
        w = 314 * n # ΠΡΟΚΙΠΤΕΙ ΑΠΟ 1 ΑΡΜΟΝΙΚΗ  $\omega=2\pi f$ 
        z = math.sqrt(R*R+(L*w)**2) # ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ Z
        g = (L*w)/R # ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΦΑΣΗΣ I,V
        y = math.atan(g) # ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ
        a = x*3.14159/180
        I = ((bnA_values[k] *vp) / z) * math.sin(a - y)
        I_total += I
        k += 1
    I_n.append(I_total)
print(I_n, "\n")
print(len(I_n))
plt.figure(figsize=(12, 8)) # Ορίζουμε το μέγεθος του γραφήματος
plt.plot(I_n, marker='o', linestyle='-', color='b') # Σχεδιάζουμε το γράφημα (με κύκλους στα σημεία)
plt.title('Γράφημα ') # Τίτλος του γραφήματος
plt.xlabel('γωνίες X ') # Ετικέτα για τον άξονα x
plt.ylabel('I_total (Άθροισμα ρευμάτων)') # Ετικέτα για τον άξονα y
plt.grid(True) # Ενεργοποιούμε το πλέγμα στο γράφημα
plt.show() # Εμφάνιση του γραφήματος

```

Το τρέξιμο του προγράμματος έδωσε το παραπάνω γράφημα:



Εικόνα 41 – Γράφημα έντασης ρεύματος - γωνίας (0^0 - 180^0)

Παρατηρούμε ότι στις 0^0 η τιμή του ρεύματος είναι αρνητική γύρω στα $-3,3\text{A}$ (από τον άξονα) και γίνεται 0 γύρω στις 20-22 μοίρες. Αυτό οφείλεται στην υστέρηση φάσης του ρεύματος λόγω της αυτεπαγωγής [$\epsilon\phi\phi = L\omega / R = 0,038 \cdot 314 / 30,6 = 0,39 \rightarrow \phi = 21.3^0$] με βάση την πρώτη αρμονική (που καθορίζει και την καμπύλη).

Η κορυφή του ρεύματος είναι λίγο πιο κάτω από τα 10 A που είναι λογικό αφού με βάση την μέγιστη τιμή I_{rms} του κλιματιστικού - $I_{\text{max}} = 7\text{A}$ - (από ετικέτα) έγιναν οι υπολογισμοί για R και L. Πράγματι $7\sqrt{2} = 9,87 < 10$

14. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στις παρατηρήσεις υπάρχουν τα συμπεράσματα που προκύψανε στη διάρκεια της μελέτης και υπολογισμών καθώς και πληροφορίες σε σχέση με τα προϊόντα της αγοράς, πάνω στα οποία σχεδιάστηκε ο INVERTER.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι δύο παραγόμενες εναλλασσόμενες τάσεις με διαφορά φάσης περίπου 90 μοίρες κάνουν τη κατασκευή αυτή κατάλληλη και για βιοτεχνίες και αγροτικές επιχειρήσεις που κάνουν χρήση φωτοβολταϊκών σε στέγη ή και στο έδαφος, αφού με μικρή επέμβαση, οι δύο φάσεις του επαγωγικού μονοφασικού ασύγχρονου μοτέρ μπορούν να έχουν εξωτερικούς ακροδέκτες που να δέχονται τις δύο αυτές τάσεις και να δημιουργείται περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή να έχουμε έναν μονοφασικό επαγωγικό ηλεκτροκινητήρα που να λειτουργεί όπως ακριβώς και ο τριφασικός χωρίς τη χρήση πυκνωτή (για τη δημιουργία διαφοράς φάσης) και με ισχυρή ροπή εκκίνησης, αφού δύο τυλίγματα με κάθετους άξονες που τροφοδοτούνται με τάσεις A.C. διαφοράς φάσης 90^0 δημιουργούν περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο. Ένα τέτοιο μοτέρ μπορεί να κινεί μία αντλία νερού σε αγρόκτημα ή π.χ. έναν τόρνο σε μηχανουργείο.
2. Αρχικά οι περιττές αρμονικές των ημιτονοειδών όρων είχαν υπολογιστεί με λογιστικά φύλλα excel, πριν τη σύνταξη του κώδικα σε γλώσσα Python. Με βάση όμως αυτές τις τιμές, από τα λογιστικά φύλλα excel, υπολογίστηκαν οι ενεργές τιμές V_{rms} των τάσεων A & B καθώς και η συνολική απόδοση ϵ του Inverter. Επίσης οι τιμές αυτές χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων του κώδικα, όταν έτρεξε το πρόγραμμα.
3. Όπως έχει αναφερθεί και στο κείμενο για την περίπτωση οικίας μπορεί η γραμμή A, λόγω υψηλής ποιότητας ημιτόνου, να χρησιμοποιείται εναλλάξ σε διάφορες ενεργοβόρες συσκευές (μάτι ηλ. κουζίνας, κλιματιστικό, πλυντήριο κλπ). Η δε άλλη γραμμή B που δεν είναι τόσο καλή ποιοτικά και μικρότερης τάσης να χρησιμοποιείται, με μετασχηματιστή τάσης (μείωσης) στον ηλεκτρικό θερμοσίφωνα, και με χρήση άλλου μετασχηματιστή, με έξοδο 220-230 Volt, να τροφοδοτεί γραμμή για φωτισμό, υπολογιστές H/Y, τηλεόραση κλπ., μέσω UPS. Με άλλα λόγια ένα μέρος της ισχύος από τη γραμμή B, γύρω στο 1KW (με μείωση της τάσης – μέσω M/H) είναι συνδεδεμένο μόνιμα με τον ηλεκτρικό θερ-

μοσίφωνα, σε όλη η διάρκεια της ηλιοφάνειας και το υπόλοιπο πηγαίνει για φωτισμό, TV, H/Y- μέσω UPS . Φυσικά όλα τα προηγούμενα απαιτούν μία μικρή εκπαίδευση των χρηστών και μικρή επέμβαση στον υπάρχοντα ηλεκτρικό πίνακα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΜΙΚΡΟΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ – ΕΒΔΟΜΗ ΕΚΔΟΣΗ
(**SEDRA/SMITH** – ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ – 2017 – ISBN: 987-960-491-106-6 //
σελ. 21-Σχήμα 1.14 , σελ. (110-114), (212-223), (271-285)
2. ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ MATLAB Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου
ΜΙΧΑΛΗΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ (Αναπλ. Καθηγ. Πανεπ. Πελοποννήσου)
Εκδόσ. ΤΖΙΟΛΑ ISBN: 978-960-418-578-8 // σελ.: (8-14), (129 - 139)
3. Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός – **MICHAEL SPIVAK** – Παν. Εκδ.
Κρήτης – 2019 , ISBN: 978-960-524-302-9 // σελ. (152-163) , (327 – 340)
4. A-LEVEL PHYSICS –**Roger Muncaster** – Sec. Edit.- 1986 – Stanley Thornes
Publishers – ISBN: 0 85950 2244 // σελ.: (794-801)
5. POWER ELECTRONICS – **Cyril W. Lander**
(Second Edit. – ISBN 0-07-084162-4 , 1987 // σελ.: (25-27) , 245, 246
6. OPERATIONAL AMPLIFIERS AND LINEAR INTERGRATED CIRCUITS
THIRD EDITION – **ROBERT F. COUGHLIN – FREDERICK F. DRISCOLL**
1987– ISBN: 0-13-637992-3 // σελ: (12-14), (69 - 76)
7. POWER MOSFET TRANSISTOR DATA – MOTOROLA – Forth Ed. 1989 //
σελ.: 3- 62,63,64 , 3 - 137,138
8. Python Εισαγωγή στους υπολογιστές – Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης - 4^η
Έκδοση – **Νικ. Αβούρης, Μιχ. Κουκιάς, Βας. Παλιουράς, Κυριάκ. Σγάρμπας**
- ISBN: 978-960-524-529-0 // σελ. (21 – 66)