



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Σχεδιασμός Μαθήματος και Ανάπτυξη Διδακτικού Υλικού σε Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης»**

**Κατεύθυνση 1η: Θετικές Επιστήμες**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**“Γλωσσικοί ελιγμοί ως εργαλείο αναγνωσιμότητας κατά την επίλυση προβλημάτων  
επίπεδης γεωμετρίας της Ε΄ τάξης του Δημοτικού.”**

Α΄ Επιβλ. Καθηγητής: Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης

Β΄ Επιβλ. Καθηγήτρια: Ευγενία Βασιλάκη

Γ΄ Επιβλ. Καθηγητής: Κώστας Χατζηκυριάκου

Αικατερίνη Κаланτζή

**Βόλος, 2024**

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας μου θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν σε αυτή την ακαδημαϊκή και προσωπική εξέλιξη.

Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη, για την πολύτιμη καθοδήγησή του και τις χρήσιμες συμβουλές του σε κάθε φάση της έρευνάς μου. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην αξιολόγηση της εργασίας μου και για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Ακόμη, ιδιαίτερη ευχαριστία οφείλω στην οικογένεια και τους φίλους μου για τη συμπαράστασή τους.

Τέλος, θα ήταν παράλειψη να μην εκφράσω την εκτίμησή μου στις συναδέλφους, κ. Τριανταφυλλιά Διβράμη και κ. Ελένη Μπαρμπουδάκη, καθώς και στον διευθυντή του σχολείου μου, κ. Γιώργο Πούλιο, για την υποστήριξή τους σε τούτο το επιστημονικό μου εγχείρημα.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία προσεγγίζει διαθεματικά το ζήτημα της επίλυσης προβλημάτων επίπεδης γεωμετρίας μέσα από τη σύνδεση των Μαθηματικών και της Γλώσσας. Σκοπός της έρευνας είναι η εξέταση του τρόπου ενσωμάτωσης μίας εκπαιδευτικής παρέμβασης που ενθαρρύνει γλωσσικές τεχνικές ως εργαλείο αναγνωσιμότητας προβλημάτων επίπεδης Γεωμετρίας της Ε΄ τάξης με την παραγωγή κατάλληλα προσαρμοσμένου διδακτικού υλικού. Τα επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα αφορούν στον τρόπο που οι γλωσσικές τεχνικές δύνανται να αποτελέσουν εργαλείο αναγνωσιμότητας στη διαδικασία επίλυσης αντίστοιχων προβλημάτων και να βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν το επίπεδο κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου, αναπτύσσοντας μαθηματικές δεξιότητες και βελτιώνοντας τη στάση τους απέναντι στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων, καθώς στον τρόπο που ο εκπαιδευτικός, ως ενθαρρυντής της μαθησιακής διαδικασίας, προάγει τον μαθηματικό γραμματισμό. Η έρευνα βασίζεται στη διεξαγωγή διδακτικού πειράματος στην πέμπτη τάξη ενός σχολείου του νομού Μαγνησίας, με τη συμμετοχή 19 μαθητών. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τη συμμετοχική παρατήρηση του εκπαιδευτικού/ερευνητή και την αμέτοχη παρατήρηση δεύτερου ερευνητή, τις σημειώσεις πεδίου, τη διατήρηση ημερολογίου έρευνας, τα φύλλα εργασίας των μαθητών και με την ηχογράφηση των διδασκαλιών. Τα ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι, μέσα από τη διαδοχή των Διδακτικών Επεισοδίων, οι μαθητές μπορούν να αφομοιώσουν τον συστημικό τρόπο προσέγγισης μαθηματικών κειμένων με πυκνό νόημα και απαιτητικό γνωστικό επίπεδο και να εξοικειωθούν με γλωσσο- μαθηματικές πρακτικές, που προτείνει το συστημικό λειτουργικό μοντέλο, κάνοντας κατάλληλους γλωσσικούς ελιγμούς, που ενθαρρύνουν τη μαθηματική επικοινωνία και αντίληψη. Ωστόσο, μία τέτοια εκπαιδευτική παρέμβαση, δύναται να αποτελέσει χρήσιμο εκπαιδευτικό εργαλείο και να υποστηρίξει τη μαθησιακή διαδικασία, επιτυγχάνοντας εμφανέστερα μαθησιακά αποτελέσματα, αν ενσωματωθεί συστηματικά, ώστε οι μαθητές να μνηθούν σταδιακά σε τέτοιου είδους πρακτικές από τις μικρότερες τάξεις του δημοτικού.

Λέξεις- κλειδιά: γλωσσομαθηματικές πρακτικές, εργαλείο αναγνωσιμότητας, συστημικό λειτουργικό μοντέλο, επίλυση προβλήματος, επίπεδη γεωμετρία, διδακτικό πείραμα

## ABSTRACT

This study takes an interdisciplinary approach to the issue of problem-solving in plane geometry by linking Mathematics and Language. The aim of the research is to examine how an educational intervention that encourages linguistic techniques as a readability tool for plane geometry problems in the fifth grade can be integrated, through the development of appropriately adapted teaching materials. The specific research questions focus on how linguistic techniques can serve as a readability tool in the problem-solving process, helping students improve their understanding of mathematical content, develop mathematical skills, and enhance their attitude toward solving such problems. Additionally, the study explores how the teacher, as a facilitator of the learning process, promotes mathematical literacy. The research is based on the implementation of a teaching experiment conducted in a fifth-grade classroom in Magnesia, involving 19 students. Data collection was carried out through the participatory observation of the teacher-researcher and the non-participatory observation of a second researcher, field notes, the maintenance of a research journal, students' worksheets, and audio recordings of the lessons. The research findings indicate that, through the sequence of Teaching Episodes, students can assimilate the systemic approach to mathematical texts, which are characterized by dense meaning and a demanding cognitive level, and familiarize themselves with the language-mathematics practices proposed by the systemic functional model. This is achieved by employing appropriate linguistic maneuvers that encourage mathematical communication and comprehension. However, such an educational intervention can serve as a valuable teaching tool and support the learning process more effectively, yielding more noticeable learning outcomes if it is systematically integrated. This would allow students to gradually become accustomed to such practices from the early years of primary school.

**Keywords:** language-mathematics practices, readability tool, systemic functional model, problem-solving, plane geometry, teaching experiment.

## Περιεχόμενα

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....                                                                    | 3   |
| ABSTRACT .....                                                                   | 4   |
| ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....                                                                    | 7   |
| 1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ .....                                                       | 10  |
| 1.1 Η επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας στα Μαθηματικά .....                        | 10  |
| 1.1.1 Η διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων στο νέο ΠΣ .....                         | 10  |
| 1.1.2 Εμπόδια στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας .....            | 12  |
| 1.2 Η Τροχιά Διδασκαλίας και Μάθησης.....                                        | 17  |
| 1.2.1 Τροχιά Διδασκαλίας και Μάθησης στις έννοιες: περίμετρος, εμβαδόν .....     | 19  |
| i. Γενικές παρατηρήσεις .....                                                    | 20  |
| ii. Παρουσίαση της HLT της περιμέτρου και του εμβαδού .....                      | 23  |
| 1.2.2 Διδακτικός σχεδιασμός έργων .....                                          | 27  |
| 1.3 Συστημική Λειτουργική Γλωσσολογία και Μαθηματικά.....                        | 31  |
| 1.3.1 Περιγραφή θεωρητικού μοντέλου SFL .....                                    | 31  |
| 1.3.2 Αποδόμηση των μαθηματικών κειμένων και γλωσσικές προκλήσεις.....           | 34  |
| 1.3.3 Γλωσσικές πρακτικές ως εργαλεία αναγνωσιμότητας μαθηματικών κειμένων ..... | 37  |
| 1.3.4 Τα 6 στάδια επίλυσης προβλημάτων με βάση την SFL .....                     | 38  |
| 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....                                                 | 42  |
| 2.1 Διαθεματικές έρευνες στα Μαθηματικά και τη Γλώσσα.....                       | 42  |
| 3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ.....                                                      | 48  |
| 3.1 Σκοπός έρευνας .....                                                         | 48  |
| 3.2 Ερευνητικά ερωτήματα .....                                                   | 48  |
| 3.3 Σχεδιασμός του διδακτικού πειράματος .....                                   | 48  |
| 3.4 Πλαίσιο και χρόνος διεξαγωγής του διδακτικού πειράματος.....                 | 50  |
| 3.5 Συμμετέχοντες .....                                                          | 51  |
| 3.6 Μέθοδοι συλλογής δεδομένων .....                                             | 52  |
| 3.7 Παραγωγή διδακτικού υλικού .....                                             | 55  |
| 3.7.1 Γενικά .....                                                               | 55  |
| 3.7.2 Αναλυτική περιγραφή του διδακτικού υλικού .....                            | 56  |
| 3.8 Διδακτικά επεισόδια .....                                                    | 58  |
| 3.9 Ανάλυση δεδομένων.....                                                       | 65  |
| 4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....                                                             | 177 |

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ..... | 179 |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....    | 180 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....       | 188 |

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση προβλημάτων είναι ένα πεδίο που απασχολεί την ερευνητική μαθηματική κοινότητα, διότι έχει αποδειχθεί ότι ως δεξιότητα καθορίζει την ανάπτυξη της μαθηματικής αντίληψης του παιδιού (Schoenfeld, 1985, 2016), ενώ δεδομένης της πολυπλοκότητας αυτής της διαδικασίας (Polya, 2004), μαθητές<sup>1</sup>, ακόμη και με καλή επίδοση στα Μαθηματικά, έχουν αρνητική στάση απέναντι σε αυτή, καθώς συναντούν εμπόδια που τους ακολουθούν στην ακαδημαϊκή τους πορεία (Pehkonen et al., 2013· Phonapichat et al., 2014). Σε αυτή τη διαπίστωση οδηγεί η ελλιπής κατανόηση των μαθηματικών κειμένων και οι παρανοήσεις που γίνονται, με μεγάλη συχνότητα, στη σχολική τάξη πάνω σε θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες (Mirna, 2018· Siniguián, 2017) εξαιτίας μιας σειράς γλωσσικών, κατά μία έννοια, προκλήσεων (Riccomini et al., 2015· Schlepperegell, 2007). Επιπλέον, ως σχέση αμφίδρομη, η ίδια η πολυσημειωτική φύση του γνωστικού αντικείμενου των Μαθηματικών (de Oliveira & Cheng, 2011· Lemke, 2003· O'Halloran, 1999, 2000, 2004· Schlepperegell, 2007), ο μαθητής, αλλά και ο εκπαιδευτικός/ερευνητής<sup>2</sup> είναι που επηρεάζουν με άμεσο τρόπο τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και τη μετάβαση της γεωμετρικής σκέψης του μαθητή από το ένα γνωστικό επίπεδο σε ανώτερο (Van Hiele, 1959).

Παλαιότερα και πιο πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα, λοιπόν, συγκλίνουν στην άποψη ότι η ιδιαίτερη φύση της επιστήμης του μαθηματικού λόγου ταλαιπωρεί τα παιδιά, ενώ πλέον δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην προαγωγή των γλωσσικών δεξιοτήτων (προφορικών και γραπτών) οι οποίες συνδέονται με τη μαθηματική επίδοση του παιδιού (Caponera et al., 2016· Fogelberg et al., 2008· Friedland et al., 2011· Herbel-Eisenmann, 2002· Morgan, 2002· Romberg et al., 2005· Schlepperegell, 2007), καθώς ο μαθηματικός λόγος παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τεχνικότητας της ακαδημαϊκής/επιστημονικής γλώσσας (Halliday, 1978· Halliday & Martin, 1993· Purpura et al., 2017· Riccomini et al., 2015· Shanahan & Shanahan, 2012). Έτσι, υπερσχύει η άποψη ότι ο εκπαιδευτικός/ερευνητής οφείλει να λαμβάνει υπόψη αυτές τις παραμέτρους και να τις αξιοποιεί (Walkington et al., 2018), παρέχοντας ευκαιρίες προσέγγισης μαθηματικών κειμένων μέσα από τη συστηματική χρήση της τεχνικότητας της γλώσσας (Halliday & Martin, 1993), να λειτουργεί υποστηρικτικά προς αυτή την κατεύθυνση προκειμένου ο μαθητής να κατανοεί και να επιλύει προβλήματα γεωμετρίας (Noonan, 1990· Cain & Oakhill, 2007, σελ. 41-75· Oakhill & Cain, 2007, σελ. 3-40), αναδεικνύοντας Μεγάλες

---

<sup>1</sup> Με το αρσενικό γένος γίνεται αναφορά σε κάθε έμφυλο προσδιορισμό.

<sup>2</sup> Με το αρσενικό γένος γίνεται αναφορά σε κάθε έμφυλο προσδιορισμό.

Ιδέες των Μαθηματικών, τις οποίες πρεσβεύει το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) και που διατρέχουν τη φιλοσοφία του Νέου Προγράμματος Σπουδών (Νέο Π.Σ., 2023).

Συγκεκριμένα, το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στο Δημοτικό (Νέο Π.Σ., 2023) δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στην ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου και του κριτικού γραμματισμού, ενώ αυτό δύναται να επιτευχθεί μέσω της καλλιέργειας δεξιοτήτων που αφορούν στη σύνθετη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και στην ανάδειξη των δυσκολιών και λαθών του μαθητή, προτείνοντας τον κατάλληλο σχεδιασμό διδακτικών έργων (Watson & Ohtani, 2015), που ενθαρρύνουν την αναπτυξιακή τροχιά διδασκαλίας και μάθησης (Clements και Sarama, 2004, 2009· Simon, 1995) και επιτυγχάνουν τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Simon και Tzur, 2004).

Στηριζόμενη στο Νέο Π.Σ. (2023) και στη διεθνή βιβλιογραφία επιχειρήθηκε και η διεξαγωγή της παρούσας διαθεματικής έρευνας, η οποία διαπνέεται από το θεωρητικό μοντέλο της Συστημικής Λειτουργικής Γλωσσολογίας (SFL– Systemic Functional Linguistics) και προσεγγίζει γλωσσολογικά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, η εκπαιδευτική παρέμβαση, αφορμώμενη από ζητήματα σχετικά με τη λειτουργία της γλώσσας ως σύστημα και τη μαθηματική αντίληψη, τις προκλήσεις που συναντά ο μαθητής κατά την προσέγγιση μαθηματικών κειμένων (Fang και Schleppegrell, 2008), καθώς και την υιοθέτηση αποτελεσματικών στρατηγικών αναγνωσιμότητας (de Oliveira & Cheng, 2011· Schleppegrell, 2007, 2016), έχει ως σκοπό να προσφέρει χρήσιμα εμπειρικά δεδομένα που απορρέουν μέσα από τη διεξαγωγή διδακτικού πειράματος (Noddings, 1990· Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 2), την ενσωμάτωση διδακτικών έργων σε πραγματικές συνθήκες σχολικής τάξης (Steffe & Thompson, 2000) και την παραγωγή κατάλληλου διδακτικού υλικού, προσαρμοσμένου στις ανάγκες της διδασκαλίας.

Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί ότι η θεωρία της SFL μέχρι τώρα συναντάται σε διεθνείς μελέτες, όπου τα μαθηματικά διδάσκονται σε μαθητικό πληθυσμό που δε μιλά την ελληνική γλώσσα (de Oliveira & Cheng, 2011· Schleppegrell, 2007) και ως επί το πλείστον στη διδασκαλία διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Fang και Schleppegrell, 2008) ή στη διδασκαλία της αγγλικής ως δεύτερη γλώσσα (Schleppegrell, 2016). Ως εκ τούτου, θεωρείται ότι η επιλογή του εν λόγω μεθοδολογικού σχεδιασμού εξασφαλίζει την επιπρόσθετη διερεύνηση ενός πεδίου, που αφορά στον τρόπο ενσωμάτωσης της συγκεκριμένης γλωσσο- μαθηματικής πρακτικής ως εργαλείου αναγνωσιμότητας στη

διδασκαλία των Μαθηματικών, ειδικότερα, στην επίλυση προβλημάτων επίπεδης γεωμετρίας, σε σύγχρονο περιβάλλον μάθησης, συγκεκριμένα σε μαθητές που φοιτούν στην πέμπτη τάξη ενός ελληνικού σχολείου. Τέλος, η προσπάθεια να απαντηθούν τα ερωτήματα, που γέννησε το υπό διερεύνηση θέμα, υπογραμμίζει την αναγκαιότητα σύνδεσης των δεδομένων της εκπαιδευτικής έρευνας με τη σύγχρονη σχολική πραγματικότητα και γεφυρώνει αυτούς τους δύο κόσμους μέσα από το παράδειγμα του διδακτικού πειράματος.

Ως προς τη δομή της, η εργασία αποτελείται από 5 ενότητες. Η πρώτη ενότητα (1. *ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ*) περιγράφει διεξοδικά το θεωρητικό πλαίσιο, που βασίστηκε το υπό διερεύνηση θέμα και απαρτίζεται από τρεις υποενότητες (1.1 *Η επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας στα Μαθηματικά*, 1.2 *Η Τροχιά Διδασκαλίας και Μάθησης* και 1.3 *Συστημική Λειτουργική Γλωσσολογία και Μαθηματικά*). Στη δεύτερη ενότητα (2. *BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ*), αποτελούμενη από μία υποενότητα (2.1 *Διαθεματικές έρευνες στα Μαθηματικά και τη Γλώσσα*), γίνεται αναφορά στη διεθνή βιβλιογραφία διαθεματικών ερευνών στα Μαθηματικά και τη Γλώσσα. Η τρίτη ενότητα (3. *ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ*) παρουσιάζει την ερευνητική μεθοδολογία της εργασίας και διακρίνεται στις εξής επιμέρους ενότητες: 3.1 *Σκοπός έρευνας*, 3.2 *Ερευνητικά ερωτήματα*, 3.3 *Σχεδιασμός του διδακτικού πειράματος*, 3.4 *Πλαίσιο και χρόνος διεξαγωγής του διδακτικού πειράματος*, 3.5 *Συμμετέχοντες*, 3.6 *Μέθοδοι συλλογής δεδομένων*, 3.7 *Παραγωγή διδακτικού υλικού*, 3.8 *Διδακτικά επεισόδια*, 3.9 *Ανάλυση δεδομένων*. Στις δύο τελευταίες ενότητες συνοψίζονται, αντίστοιχα, τα αποτελέσματα του διδακτικού πειράματος (4. *ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ*) και διατυπώνονται τα γενικά συμπεράσματα του εκπαιδευτικού/ερευνητή με τους περιορισμούς και τις προτάσεις για περαιτέρω έρευνα (5. *ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ*).

## 1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το πρώτο μέρος της εργασίας προσεγγίζει θεωρητικές αρχές που διέπουν τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα και απαρτίζεται από επιμέρους ενότητες οι οποίες εστιάζουν σε αλληλοσχετιζόμενα πεδία που αφορούν στην επίλυση προβλημάτων επίπεδης Γεωμετρίας, την τροχιά Διδασκαλίας και Μάθησης και τον Διδακτικό σχεδιασμό έργων, καθώς επίσης, γίνεται μία εκτενής αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο της Συστημικής Λειτουργικής Γλωσσολογίας, πάντα υπό το πρίσμα της αξιοποίησής του στον τομέα της μαθηματικής ανάπτυξης.

### 1.1 Η επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας στα Μαθηματικά

Η επίλυση προβλημάτων είναι ανέκαθεν ένα πεδίο που προσελκύει το ερευνητικό ενδιαφέρον από πολλές δεκαετίες μέχρι σήμερα, καθώς αποτελεί μία βασική δεξιότητα που καλλιεργεί το παιδί κατά τη μαθηματική του ανάπτυξη (Schoenfeld, 1985), αλλά και μία σημαντική δυσκολία που αντιμετωπίζει κατά την εκπαίδευσή του, η οποία έχει αρνητικό αντίκτυπο στην ακαδημαϊκή επίδοση (Pehkonen et al., 2013· Phonapichat et al., 2014). Με σκοπό να δοθούν απαντήσεις σε καίρια αλληλένδετα ερωτήματα, οι ερευνητές μελετούν ενδελεχώς αυτή την πολύπλοκη διαδικασία, προσπαθώντας να την περιγράψουν, προτείνοντας κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (Polya, 2004), οριοθετώντας την πολυσημειωτική φύση του μαθηματικού λόγου (de Oliveira & Cheng, 2011), όπως επίσης συνδέοντας θεωρία και πράξη και τονίζοντας την αξία της μεταγνωστικής λειτουργίας της μαθηματικής σκέψης (Schoenfeld, 2016).

#### 1.1.1 Η διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων στο νέο ΠΣ

Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (Νέο Π.Σ., 2023) υποστηρίζει την αξία της μαθηματικής γνώσης για όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας και τη σύνδεσή της με καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Μία από τις βασικές πρακτικές που πλαισιώνουν τον διδακτικό σχεδιασμό, λοιπόν, είναι η ανάπτυξη της δεξιότητας να επιλύει προβλήματα, με έμφαση στον τρόπο προσέγγισης της γνώσης, αλλά και στα διαδικαστικά σφάλματα που κάνει ο μαθητής κατά τη μαθησιακή διαδικασία και όχι τόσο στο μαθηματικό περιεχόμενο που διδάσκεται ή στην επίδειξη μίας επίλυσης που θεωρείται σωστή (Schoenfeld, 1985, 2016).

Πρόκειται για μία σημαντική δεξιότητα που βοηθάει τους μαθητές να αντιμετωπίζουν με επάρκεια και αποτελεσματικότητα προβληματικές καταστάσεις, ακολουθώντας μία συγκεκριμένη συλλογιστική διαδικασία. Η απόκτησή της, δηλαδή, δε σημαίνει εκμάθηση μίας

απλής διαδικασίας. Αντιθέτως, προϋποθέτει ότι το παιδί μαθαίνει να αυτενεργεί και να ακολουθεί μία σειρά από βήματα που θα το καταστήσουν ικανό στα παραπάνω. Πιο αναλυτικά, να μπορεί να κατανοήσει μία σύνθετη κατάσταση, να αναγνωρίσει το πλαίσιο του προβλήματος, δηλαδή αυτό που θεωρείται δεδομένο και αυτό που αποτελεί περιορισμό, να συνυπολογίσει όλα αυτά τα στοιχεία, χωρίς να βιαστεί να πάρει μία απόφαση για το ποια είναι η ενδεχόμενη λύση. Έπειτα, να είναι ικανό να εκφράσει τις ιδέες του και να σχεδιάσει τα βήματα που θα κάνει για να το επιλύσει. Επιπλέον, να μπορεί να κάνει συσχετισμούς με απλούστερες καταστάσεις που θα τον βοηθήσουν να ακολουθήσει τον πιο βολικό τρόπο επίλυσης, να επιλέγει κατάλληλες στρατηγικές και να αξιοποιεί όλους τους τρόπους έκφρασης του μαθηματικού λόγου. Αυτό, επίσης, συνεπάγεται μία γκάμα από γνώσεις και ικανότητες: να εκφράζεται με ορθό τρόπο, προφορικά και γραπτά, να δημιουργεί και να «διαβάζει» οπτικές αναπαραστάσεις, να μελετά και να κάνει το ίδιο σχεδιαγράμματα και πίνακες, να χρησιμοποιεί και να διαβάσει μαθηματικά σύμβολα και λέξεις. Ως αποκορύφωμα αυτής της πολύπλοκης διαδικασίας θεωρείται να μπορεί να αξιολογεί τον δικό του συλλογισμό και των άλλων και να αντιλαμβάνεται το μαθηματικό νόημα της πορείας που ακολουθήθηκε, ώστε να εφαρμόζει τη γνώση του στην καθημερινή ζωή (Νέο Π.Σ., 2023).

Ο Schoenfeld (1985, 2016), ο οποίος αφιερώνει την έρευνά του στο ζήτημα της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης μέσα από την καλλιέργεια της σύνθετης δεξιότητας του ανθρώπου να επιλύει μη τυπικά προβλήματα, προσεγγίζει το ζήτημα από μία λειτουργική σκοπιά. Εντούτοις, η διδασκαλία των μαθηματικών δεν πρέπει να εστιάζει σε απλά προβλήματα που λύνονται με συγκεκριμένες τυπικές διαδικασίες και στρατηγικές. Το να σκέφτεται κανείς με μαθηματικό τρόπο σημαίνει ότι κατανοεί την αξία των μαθηματικών ιδεών τις οποίες έχει στη φαρέτρα του ως εργαλεία. Επομένως, ο εκπαιδευτικός/ερευνητής που ενσωματώνει στον σχεδιασμό του μαθηματικά προβλήματα πρέπει να αντιλαμβάνεται και να δείχνει στον μαθητή το «πώς» και το «γιατί», καθώς είναι χρήσιμη η ανάπτυξη αυτής της δεξιότητας (Schoenfeld, 1985).

Η απάντηση που δίνει ο Schoenfeld (1985, 2016) στον ερευνητή/εκπαιδευτικό έρχεται με το να παρατηρεί ο ίδιος τον μαθητή την ώρα που λύνει ένα ρεαλιστικό πρόβλημα και να τον ενθαρρύνει να εξηγή τι κάνει και για ποιο λόγο, διότι αυτό ως διαδικασία βοηθάει κατ' αρχήν το παιδί να αντιληφθεί το πρόβλημα και καθορίζει τον τρόπο που θα επιλέξει να το λύσει, αλλά και τον ίδιο τον δάσκαλο να κατανοήσει τη σκέψη του παιδιού. Έτσι, τούτη η πρακτική, όπως αποδεικνύει, καθιστά τον μαθητή εφευρετικό και συνάμα αποτελεσματικό, διότι εκτός από το απόθεμα μαθηματικών γνώσεων και επιμέρους δεξιοτήτων που αποκτά, έχει τον έλεγχο του προβλήματος και είναι σε θέση να σκέφτεται ποια είναι η κατάλληλη τεχνική/στρατηγική

(“heuristics”, αντίστοιχος όρος που χρησιμοποιεί ο Pólya, 2004) κάθε φορά για να το αντιμετωπίζει βήμα βήμα.

Μάλιστα, μία μέθοδος επίλυσης αποτελεί για το άτομο στρατηγική όταν δύναται να αξιοποιηθεί και στην αντιμετώπιση νέων προβληματικών καταστάσεων και αυτό είναι εφικτό όταν γίνεται κατανοητή η λειτουργικότητα μίας μεθόδου. Τότε, σύμφωνα με τον Schoenfeld (2016), μπορούμε να μιλάμε για τη λειτουργία της μεταγνώσης, κατά την οποία ο άνθρωπος δομεί στο μυαλό του νοητικά μοντέλα και αναπαραστάσεις που τον βοηθούν να λειτουργεί με επιστημονικά κριτήρια, όπως να ερμηνεύει τον κόσμο με τρόπο επαγωγικό, να λαμβάνει αποφάσεις στηριζόμενος σε τεκμηριωμένη άποψη και λογικές αποδείξεις και να ελέγχει την ορθότητα ενός επιχειρήματος ή μίας υπόθεσης.

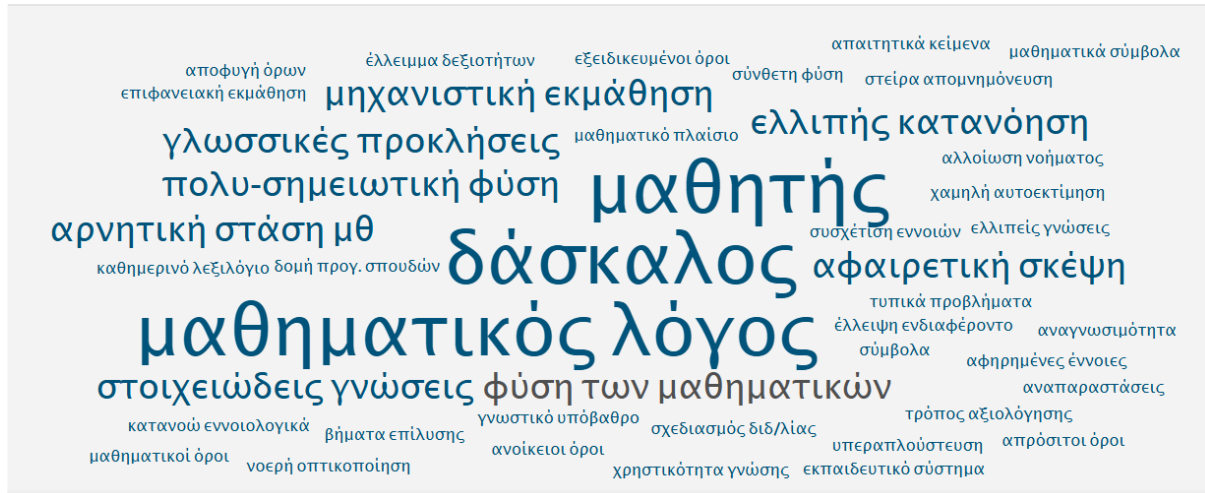
Πέρα από όλες αυτές τις ερευνητικές παρατηρήσεις, είναι αναγκαίο να επισημανθεί μία ακόμη παράμετρος που αφορά στη διδακτική πλαισίωση των προβλημάτων, η οποία αφορά στις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού και του μαθητή. Ο τρόπος που αντιλαμβάνεται το άτομο τη διαδικασία της μάθησης καθορίζει την πρακτική που υιοθετεί, τι είναι αυτό που επιθυμεί να μάθει και σε τι βαθμό θα αναπτύξει μία δεξιότητα. Το συγκεκριμένο ζήτημα, ωστόσο, θίγεται στην επόμενη ενότητα (βλ. εν. 1.2), όπου γίνεται λόγος για την αναπτυξιακή τροχιά μάθησης και τον διδακτικό σχεδιασμό έργων.

### 1.1.2 Εμπόδια στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας

Αξιοσημείωτο είναι ότι ακόμη και «καλοί» μαθητές, που θεωρούνται «δυνατοί λύτες» και βρίσκουν με ευκολία την απάντηση/λύση σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, συχνά αποδεικνύεται ότι έχουν ελλιπή κατανόηση ενός κειμένου και παρανοήσεις σε θεμελιώδεις έννοιες. Ανατρέχοντας στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, αυτό επαληθεύεται από τα συχνά λάθη και τις παρανοήσεις που γίνονται στη σχολική τάξη κατά τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων (Mirna, 2018· Siniguián, 2017).

Τα εμπόδια τα οποία συναντά ο μαθητής, κατά την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης του και τον οδηγούν σε αδυναμία να επιλύσει ένα πρόβλημα, θα μπορούσαν να συνοψιστούν σε ένα τρίπτυχο (βλ. εικ. 1), που επηρεάζει άμεσα τον σχεδιασμό της διδασκαλίας (Van Hiele, 1959). Απορρέουν, λοιπόν, από την ίδια την πολύ-σημειωτική φύση του γνωστικού αντικειμένου (de Oliveira & Cheng, 2011· Lemke, 2003· O’Halloran, 1999, 2000, 2004· Schleppegrell, 2007), για την οποία γίνεται εκτενής λόγος στην υποενότητα 1.4.2, τον μαθητή, αλλά και τον εκπαιδευτικό και τη γενικότερη φιλοσοφία του εκπαιδευτικού συστήματος. Ωστόσο, είναι αδιαμφισβήτητο ότι και οι τρεις πτυχές αλληλοσυνδέονται και, όπως προαναφέρθηκε, έχουν

εξίσου την ίδια βαρύνουσα σημασία στην εκπαιδευτική διαδικασία, για αυτό και ο εκπαιδευτικός/ερευνητής οφείλει να τις μελετά σε βάθος, προκειμένου να υποστηρίξει το παιδί στις δυσκολίες που συναντά κατά την ανάγνωση και κατανόηση προβλημάτων γεωμετρίας (Noonan, 1990· Cain & Oakhill, 2007, σελ. 41-75· Oakhill & Cain, 2007, σελ. 3-40) και να τις λαμβάνει υπόψη, κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας, διότι καθορίζουν την αναπτυξιακή πορεία του μαθητή και τη σταδιακή μετάβασή του σε ανώτερο γνωστικό επίπεδο (Van Hiele, 1959).



Εικ. 1 Εμπόδια στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων γεωμετρίας

Ξεκινώντας από τη σύνθετη επιστημονική φύση του αντικειμένου και της σχέσης που έχει ο μαθητής με αυτή, ο Morris (1986) αναφέρει ότι το παιδί που μαθαίνει γεωμετρία και επιλύει αντίστοιχα προβλήματα, συναντά αρκετές προκλήσεις, καθώς έρχεται αντιμέτωπος με έννοιες αφηρημένες, οι οποίες δεν είναι εύκολο να γίνουν άμεσα αντιληπτές, με μη διαισθητικό τρόπο. Μάλιστα, οι Riccomini et al. (2015) σημειώνουν μία σειρά από τέτοιου είδους γλωσσικές, κατά μία έννοια, προκλήσεις, όπως ότι ο μαθητής πολλές φορές προσπαθεί να κατανοήσει τις μαθηματικές λέξεις μη λαμβάνοντας υπόψη το κειμενικό πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται, ενώ συχνά αλλοιώνει το νόημά τους με μία τάση υπεραπλούστευσης. Επίσης, τονίζουν τη σύγχυση που δημιουργεί η συνήθης χρήση του καθημερινού λεξιλογίου, διότι δεν αποδίδονται με απόλυτη ακρίβεια οι μαθηματικές ιδέες, αποφεύγοντας όρους που μπορεί μεν να μην είναι οικείοι και προσίτοι, είναι, όμως, κατάλληλοι στον μαθηματικό λόγο. Βέβαια, η σύνθετη φύση της γεωμετρίας, πέραν του ότι επιτάσσει τη χρήση εξειδικευμένου επιστημονικού λεξιλογίου, καθιστά αναγκαία και τη συστηματική χρήση μαθηματικών συμβόλων για την επίτευξη της ορθής μαθηματικής διατύπωσης και περιγραφής των γεωμετρικών εννοιών και διαδικασιών (Halliday & Martin, 1993) και δίνει έμφαση στον μαθηματικό συλλογισμό και το λογικό επιχείρημα, το οποίο οδηγεί σε γεωμετρική απόδειξη ή επαλήθευση μιας υπόθεσης (Ma, 2010).

Η Schleppegrell (2007) δίνοντας έμφαση στις γλωσσικές προκλήσεις του μαθητή, θεωρεί σημαντική τη μετάβαση από τον καθημερινό στον μαθηματικό λόγο μέσα από την κατανόηση της λειτουργίας των γλωσσικών στοιχείων εντός μαθηματικού πλαισίου, προκειμένου ο μαθητής να οικοδομήσει τη νέα γνώση. Σύμφωνα με τους Oakhill και Cain (2007, σελ. 3-40), η ενθάρρυνση του μαθητή να χειρίζεται ορθά τον λόγο του και να κάνει ακριβείς αναφορές σε κάποιο γλωσσικό στοιχείο του κειμένου, το οποίο αξιοποίησε, ώστε να εξάγει συμπεράσματα και να κάνει γενικεύσεις, καταδεικνύει ότι έχει ταυτόχρονα και πλήρη γνώση του μαθηματικού λόγου. Μάλιστα, κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι μεγάλο ποσοστό μαθητών δυσκολεύεται να εντοπίζει λέξεις- κλειδιά σε ένα κείμενο ως χρήσιμες πληροφορίες μέσα από τις οποίες αναδεικνύονται οι μαθηματικές ιδέες, και αυτό είναι περισσότερο έντονο όταν πρόκειται για μακροσκελή προβλήματα που τα παιδιά, συνήθως, αποφεύγουν να διαβάζουν, πόσο μάλλον να λύνουν (Phonapichat et al., 2014). Όλη αυτή η διαδικασία, όμως, αν και δυσχεραίνει τη μαθηματική επικοινωνία και κάνει το φαινόμενο πιο έντονο στη σχολική τάξη, καθώς πρόκειται για μία εκπαιδευτική πρακτική με την οποία δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι μαθητές, αλλά και δάσκαλοι, είναι γεγονός ότι είναι αναγκαία (Morris, 1986).

Άλλα ερευνητικά δεδομένα, που προσπαθούν να αποτυπώσουν την αιτιώδη σχέση του φαινομένου, τονίζουν ότι σε μαθητές με μειωμένες γλωσσικές και γραμματικές δεξιότητες αυτό το έλλειμμα εμποδίζει ως ένα βαθμό τη σύνθετη γνωστική διαδικασία κατανόησης σε επίπεδο κειμένου και λόγου και, ευρύτερα, του περιεχομένου της γεωμετρίας (Cain & Oakhill, 2007, σελ. 41-75· Oakhill & Cain, 2007, σελ. 3-40). Επίσης, σε στατιστική έρευνα του Lamb (2010), στην οποία αξιολογείται το επίπεδο αναγνωστικής δυσκολίας σε μαθηματικά κείμενα και της σχέσης που έχει αυτό με το επίπεδο αναγνωσιμότητας και τη μαθηματική επίδοση μαθητών, αποδεικνύεται ότι τα παιδιά συναντούν δυσκολίες όταν το κείμενο είναι απαιτητικό τόσο ως προς τη σύνταξη όσο και ως προς το γνωστικό περιεχόμενο, αλλά και επειδή συνήθως έχουν αναγνωστικές ικανότητες κατώτερες της ηλικίας τους, για αυτό και προτείνουν τη μείωση της αναγνωστικής δυσκολίας στα κείμενα, χωρίς, ωστόσο, την αλλοίωση του μαθηματικού περιεχομένου. Ένα ακόμη εμπόδιο που συναντάται στο πεδίο επίλυσης προβλημάτων γεωμετρίας, είναι η ελλιπής ικανότητα του παιδιού να οπτικοποιεί με νοερό τρόπο αναπαραστάσεις σχημάτων ή να αποδίδει στο χαρτί σχηματικά ένα αντικείμενο, αλλά ακόμη και να αντιλαμβάνεται τις γεωμετρικές του ιδιότητες και να κάνει γεωμετρικές συσχετίσεις. Όταν χρειάζεται, συνήθως δυσκολεύεται να ανταπεξέλθει (Morris, 1986).

Συνεπώς, η επαναλαμβανόμενη αποτυχία κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου δημιουργεί μία αρνητική στάση του μαθητή απέναντι στο γνωστικό αντικείμενο και μία χαμηλή αυτοπεποίθηση των ικανοτήτων του ίδιου του μαθητή να επιλύσει ένα πρόβλημα

γεωμετρίας, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η ευρύτερη μαθηματική του ανάπτυξη. Παρεμφερές στοιχείο ως προς την έλλειψη ενδιαφέροντος του μαθητή του δημοτικού να μάθει γεωμετρία είναι ότι δε διαθέτει την αντιληπτική ικανότητα να κατανοήσει τη χρησιμότητα των γνώσεων που αποκομίζει από το μάθημα, δηλαδή την απόλυτη συνάφεια μεταξύ γεωμετρίας και πραγματικών καταστάσεων (Morris, 1986).

Τη χαμηλή αυτοεκτίμηση και την αρνητική στάση του παιδιού για το μάθημα των μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει άμεσα ή έμμεσα και η συμπεριφορά του εκπαιδευτικού αν δε μελετάται σε βάθος η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων των μαθητών (Pimta, 2009). Οι παραδοσιακές πρακτικές που υιοθετεί ο δάσκαλος στην τάξη και ενθαρρύνουν τη στείρα απομνημόνευση και τη μηχανιστική εκμάθηση αλγορίθμων, δημιουργούν, λοιπόν, πρόσθετα εμπόδια και δε δίνουν κίνητρα στο παιδί, ενώ οδηγούν σε επιφανειακή εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου (Morris, 1986). Η Ma (2010) σημειώνει ότι αυτό οφείλεται στην ελλιπή γνώση στοιχειωδών μαθηματικών από πλευράς του ίδιου του δασκάλου, ο οποίος μη έχοντας πλήρη επίγνωση του πακέτου γνώσεων που καλείται να διδάξει, επηρεάζει αναπόφευκτα τη μαθησιακή πορεία του παιδιού. Τούτο γίνεται εντονότερο όταν ο εκπαιδευτικός δεν υιοθετεί πολλαπλούς τρόπους αναπαράστασης της γνώσης, δηλαδή γραπτές πληροφορίες, πρωτότυπες οπτικές αναπαραστάσεις και σχεδιαγράμματα ή πίνακες, που στο σύνολό τους θα βοηθήσουν το παιδί να αποσαφηνίσει τις μαθηματικές έννοιες (Noonan, 1990). Μάλιστα, η επιλογή της αναπαράστασης του μαθηματικού περιεχομένου -για παράδειγμα ενός επίπεδου σχήματος- με πρότυπη μορφή – πχ. με συγκεκριμένο προσανατολισμό ή μέγεθος- περιορίζει την ανάπτυξη της αφαιρετικής σκέψης και οδηγεί σε λανθασμένες αντιλήψεις και παρανοήσεις σε αντίστοιχες γεωμετρικές έννοιες, ακόμη και αν ο μαθητής μπορεί να αποδώσει τον ορισμό των εννοιών αυτών (Morris, 1986).

Σε μεταγενέστερες έρευνες της τελευταίας δεκαετίας, γίνεται συζήτηση για αδυναμία στη συσχέτιση των βασικών μαθηματικών ιδεών και στη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με ρεαλιστικά (μη τυπικά) προβλήματα, που βρίσκουν εφαρμογή δηλαδή στην καθημερινή ζωή. Η μη αποτίμηση της αξίας των μαθηματικών επιφέρει, μάλιστα, έλλειψη ενδιαφέροντος από την πλευρά του παιδιού για την ανάπτυξη αυτής της δεξιότητας. Εξάλλου, είναι γεγονός ότι ένας μαθητής που έχει την ευχέρεια να κάνει υπολογισμούς, επειδή γνωρίζει τις τέσσερις μαθηματικές πράξεις ή τους τύπους εύρεσης του εμβαδού ή της περιμέτρου, δε σημαίνει ότι έχει αποκτήσει αφαιρετική σκέψη που θα τον βοηθήσει στην επέκταση των γνώσεών του σε πραγματικές καταστάσεις (Kenedi et al., 2019· Morris, 1986· Schoenfeld, 2016). Σε αυτό το σημείο, θα ήταν παράλειψη να μην αναφερθεί ότι κατά τη διδασκαλία ρεαλιστικών

προβλημάτων, τα οποία σύμφωνα με τον Pólya (2004) προάγουν τη μαθηματική σκέψη του παιδιού σε ένα ανώτερο επίπεδο, καθώς απαιτούν υψηλές νοητικές διεργασίες και εφευρετικότητα, φανερώνεται η έντονη αδυναμία του μαθητή να τα επιλύει και η τάση του να μεταβαίνει βιαστικά από το ένα στάδιο επίλυσης του προβλήματος στο επόμενο (αναλυτικά, τα στάδια επίλυσης προβλημάτων περιγράφονται στις υποενότητες 1.1.2 και 1.3.4.) είτε ακόμη και να παρακάμπτει την αλληλουχία των βημάτων και να εστιάζει αποκλειστικά στη μηχανιστική διαδικασία εκτέλεσης μίας πράξης ή επίλυσης ενός γεωμετρικού τύπου προκειμένου να δώσει μία απάντηση σε μία ερώτηση (Siniguián, 2017). Το ζητούμενο, ωστόσο, είναι οι ίδιες οι δυσκολίες του μαθητή να αποτελούν μέρος της μαθησιακής διαδικασίας (Siniguián, 2017) και ο εκπαιδευτικός να θέτει στον μαθητή τέτοιου τύπου προβλήματα, που εξάπτουν την περιέργειά του και τον βοηθούν να αποκτήσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη εμπειρία και αυτονομία, ενώ παράλληλα να αναστοχάζεται τον τρόπο σκέψης του μαθητή καθ' όλη τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων (Pólya, 2004).

Κλείνοντας τη συγκεκριμένη ενότητα, σημειώνεται και ακόμη ένας παράγοντας, εξωτερικός, που δημιουργεί πρόσθετη δυσκολία στη μαθησιακή διαδικασία, ο οποίος σχετίζεται με τις επιλογές του εκπαιδευτικού στον σχεδιασμό της διδασκαλίας και τη μη απαιτούμενη προσοχή που δίνεται στη γεωμετρία, εξαιτίας της ίδιας της δομής του προγράμματος σπουδών. Αντιθέτως, μέρος της ύλης των Μαθηματικών στο δημοτικό δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στην αριθμητική, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μεταβαίνουν στο γυμνάσιο μη γνωρίζοντας στοιχειώδη γεωμετρία (Morris, 1986), ενώ και το περιεχόμενο των μαθηματικών ιδεών, που συναντάται σε προβλήματα γεωμετρίας, δε συμβαδίζει με το γνωστικό υπόβαθρο και το επίπεδο αναγνωσιμότητάς του μαθητή και αυτό, φυσικά, δυσχεραίνει την εννοιολογική κατανόηση (Braselton & Decker, 1994). Ωστόσο, υπάρχει και η τάση να ακολουθείται πιστά από τον δάσκαλο καθ' εαυτή η δομή του περιεχομένου του προγράμματος σπουδών, χωρίς παρέκκλιση ή ευελιξία και αποσπασματικά από τα υπόλοιπα γνωστικά αντικείμενα, ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις που το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί μοναδική πηγή γνώσης και εξάσκησης σε προβλήματα τυπικά, πρακτικές που στο σύνολό τους εμποδίζουν τη μαθηματική ανάπτυξη του παιδιού (Morris, 1986). Τέλος, ο τρόπος αξιολόγησης του μαθήματος κάθε άλλο παρά βοηθάει στην αποτελεσματικότητα του ίδιου και στη ρεαλιστική αποτύπωση του βαθμού κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών από τον μαθητή (Morris, 1986). Κατά αυτόν τον τρόπο, ο εκπαιδευτικός δεν έχει αντικειμενική εικόνα αποτίμησης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, γεγονός που εντείνει τις δυσκολίες και αποδεικνύει την αμφίδρομη σχέση των τριών πτυχών για τις οποίες έγινε λόγος.

## 1.2 Η Τροχιά Διδασκαλίας και Μάθησης

Τα ερευνητικά δεδομένα της σύγχρονης εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης προσπαθώντας να φωτίσουν σημαντικά σημεία του τρόπου που πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά, αναδεικνύουν τη στρατηγική της υποθετικής τροχιάς διδασκαλίας και μάθησης (“hypothetical learning trajectory”, HLT) (Simon, 1995). Η εν λόγω προσέγγιση βασίζεται στις αρχές του κονστρουκτιβιστικού μοντέλου (Noddings, 1990) και, όπως φαίνεται και παρακάτω, αποτελεί σημείο αναφοράς για την εννοιολόγηση του σχεδιασμού της διδασκαλίας, ενώ πλαισιώνει ως στρατηγική τη θεωρία του μεθοδολογικού παραδείγματος πάνω στο οποίο στηρίχθηκε η παρούσα έρευνα.

Για πρώτη φορά, ο Simon (1995), ακολουθώντας τη μεθοδολογία του διδακτικού πειράματος, εξετάζει και αναλύει τον συγκεκριμένο επιστημονικό όρο της HLT, θέλοντας να δώσει έμφαση στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του παιδιού και τη θεωρητική αντίληψη που έχει ο εκπαιδευτικός για τη μάθηση, κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και την ενσωμάτωση μαθηματικών δραστηριοτήτων (βλ. υποενότητα 1.2.2) στη σχολική τάξη. Τους Weber et al. (2015), μάλιστα, απασχολεί η ύπαρξη ποικίλων θεωρητικών εννοιολογήσεων για το μαθηματικό νόημα που αποδίδει ο μαθητής κατά τη διδασκαλία, καθώς υποστηρίζουν ότι αυτή επηρεάζει την αναπτυξιακή τροχιά μάθησης, την περιορίζει ή την ενθαρρύνει. Οι Clements και Sarama (2004, 2009) αναλύουν τη φύση της HLT και την προσεγγίζουν ως ένα πολύτιμο εργαλείο στα χέρια του σύγχρονου εκπαιδευτικού που τον βοηθάει στην απόκτηση μίας συγκεκριμένης θεωρητικής αντίληψης για την πορεία της μάθησης και στη διαμόρφωση μαθηματικά εμπλουτισμένων μαθησιακών περιβαλλόντων που ενθαρρύνουν την κατάκτηση του μαθηματικού περιεχομένου και την καλλιέργεια μαθηματικών δεξιοτήτων.

Εστιάζοντας σε αυτόν τον προβληματισμό, ο Simon (1995) υποστηρίζει ότι ο εκπαιδευτικός/ερευνητής, έχοντας μία συγκεκριμένη αντίληψη περί διδασκαλίας και μάθησης, καλείται να ακολουθήσει μία διαδικασία που άλλοτε είναι προβλέψιμη και άλλοτε χρειάζεται προσαρμοστικότητα και ετοιμότητα, κατά μία έννοια. Μάλιστα, ως προς την πρώτη περίπτωση, έχει ολοκληρωμένη εικόνα της αναπτυξιακής πορείας του μαθητή και των τυπικών σταδίων από τα οποία περνάει η σκέψη του παιδιού από την πρώιμη ηλικία, στην προσπάθειά του να κατανοήσει μία μαθηματική έννοια ή να κατακτήσει μία δεξιότητα (Clements & Sarama, 2009· Sarama & Clements, 2009). Με αυτόν τον τρόπο θέτει στόχους, σχεδιάζει εξ αρχής κατάλληλες δραστηριότητες, βασισμένες στη γνώση του μαθηματικού περιεχομένου, που πρόκειται να διδάξει (Simon, 1995). Σχετική μελέτη των Simon και Tzur (2004), η οποία

περιγράφει το πλαίσιο της υποθετικής τροχιάς διδασκαλίας και μάθησης, επισημαίνει τον καθοριστικό ρόλο των μαθησιακών στόχων στη μαθηματική ανάπτυξη του παιδιού. Φυσικά, στην εκπαιδευτική έρευνα η αναφορά στους μαθησιακούς στόχους παραπέμπει στις λεγόμενες Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών, τις οποίες πρεσβεύει το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) και που διατρέχουν τη φιλοσοφία του Νέου Προγράμματος Σπουδών (Νέο Π.Σ., 2023). Μία από τις Μεγάλες Ιδέες, για παράδειγμα, που αναδεικνύεται στην παρούσα έρευνα, είναι πως το εμβαδόν και η περίμετρος ως έννοιες συνδέονται μεταξύ τους, διότι αν αλλάξουν οι διαστάσεις ενός επίπεδου σχήματος και παραμείνει σταθερό το εμβαδόν του, τότε η περίμετρος και το εμβαδόν του επηρεάζονται (Van de Walle et al., 2010, σελ. 660). Πρόκειται, λοιπόν, για μία σημαντική παράμετρο της θεωρητικής κατασκευής της HLT η οποία σχετίζεται με τις θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες/διαδικασίες και δεξιότητες που συνάδουν με τον συλλογισμό του μαθητή και καθορίζουν τη μελλοντική του ανάπτυξη (Clements & Sarama, 2009).

Ένα ακόμη αλληλένδετο στοιχείο με τα προηγούμενα, το οποίο αφορά, επίσης, στη φύση της HLT, είναι η επιλογή των μαθηματικών δραστηριοτήτων και του τρόπου που διαδέχεται η μία την άλλη, ώστε αυτές να συμβαδίζουν με τη σκέψη των μαθητών, να την υποστηρίζουν, αλλά και να την επεκτείνουν σε ανώτερα επίπεδα (Clements & Sarama, 2009). Όπως ήδη ειπώθηκε, ο δάσκαλος αντιμετωπίζει και την πολυπλοκότητα αυτής της διαδικασίας, λόγω της μη προβλεψιμότητάς της, η οποία έχει να κάνει με την ευελιξία του να προσαρμόζει τις δραστηριότητες στη σκέψη των μαθητών του, αξιολογώντας τις ιδέες και τα επιχειρήματά τους κατά τη διάρκεια του μαθήματος και να παίρνει παιδαγωγικές αποφάσεις που θα τους δώσουν ώθηση να οικοδομήσουν τη νέα μαθηματική γνώση, στηριζόμενοι στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους (Simon, 1995). Υπάρχουν, δηλαδή, ορισμένοι λόγοι που λόγω της εναλλασσόμενης πορείας της διδασκαλίας, την καθιστούν αρκετές φορές μη αποτελεσματική στην πράξη. Για παράδειγμα, μολονότι ο εκπαιδευτικός είναι σε θέση να γνωρίζει το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, δεν υπάρχει συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο που να περιγράφει ξεκάθαρα τη σκέψη του μαθητή ή ποιες ακριβώς δραστηριότητες πρέπει να επιλεγούν και πώς αυτές θα επηρεάσουν τη μαθησιακή διαδικασία (Simon & Tzur, 2004). Εν ολίγοις, οι δραστηριότητες που εμπλέκονται οι μαθητές και ενθαρρύνουν τη μαθηματική ανάπτυξη, καθώς και η υπόθεση που κάνει ο δάσκαλος για την ίδια τη μαθησιακή διαδικασία στη φάση του σχεδιασμού της διδασκαλίας είναι παράγοντες ανεξάρτητοι (Simon, 1995).

Παρόλα αυτά, η ενσωμάτωση της στρατηγικής της HLT στη διδασκαλία διευκολύνει τον εκπαιδευτικό/ερευνητή να προσεγγίσει το πώς ο μαθηματικός αναστοχάζεται και επεξεργάζεται την αλληλεπίδρασή του με τους μαθητές και την ανταλλαγή ιδεών ανάμεσα στα

ίδια τα παιδιά και έτσι μπορεί να παρέχει ένα τέτοιο θεωρητικό πλαίσιο, ενώ ως πρακτική δύναται να επιτευχθεί εκ του αποτελέσματος. Αυτό σημαίνει ότι με την παρατήρηση της σχέσης που αναπτύσσεται ανάμεσα σε μία μαθηματική δραστηριότητα και το προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα, ο δάσκαλος δίνει ευκαιρίες εννοιολογικής κατανόησης του μαθηματικού αντικειμένου (Simon & Tzur, 2004).

Συνοψίζοντας όλους αυτούς τους προβληματισμούς, οι Weber et al. (2015) σε πρόσφατη έρευνά τους αποτυπώνουν μία ξεκάθαρη και συνεκτική εικόνα του εννοιολογικού πλαισίου της HLT, σύμφωνα με τα τρία επικρατέστερα θεωρητικά μοντέλα της μαθηματικής έρευνας - γνωστικό, ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό, πλαισιωμένη μάθηση-. Έτσι, οι διαφορετικές απαντήσεις που δίνονται από την κάθε θεωρητική προσέγγιση στα παρακάτω εύστοχα ερωτήματα, αναδεικνύουν και έναν διαφορετικό τρόπο κατανόησης της μάθησης, ο οποίος στοιχειοθετεί και τον τρόπο δημιουργίας και ενσωμάτωσης της HLT στη διδασκαλία μίας μαθηματικής έννοιας:

- Με ποιον τρόπο ο μαθητής αντιλαμβάνεται τη νέα γνώση;
- Πώς η υποθετική τροχιά μάθησης καθοδηγεί τον σχεδιασμό της διδασκαλίας;
- Ποιους μαθηματικούς στόχους θέτει και επιθυμεί να επιτυγχάνει ο δάσκαλος κατά τον σχεδιασμό και την ενσωμάτωση μαθηματικών έργων στην τάξη;
- Ποιος είναι ο ρόλος του δασκάλου και πώς αντιλαμβάνεται ο ίδιος τη θέση του στη μαθησιακή διαδικασία;

Συμπερασματικά, λοιπόν, παρόλο που η κάθε θεωρία δίνει τις δικές τις απαντήσεις και περιγράφει διαφορετικά τη γνώση και τη μάθηση, ο εκπαιδευτικός/ερευνητής και ο μαθητής βρίσκονται στο επίκεντρο της διδασκαλίας και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σε ένα συνεχές ενεργειών που στόχο έχει να επεκτείνει τη μαθηματική σκέψη, ενώ αυτή η ευελιξία επιτρέπει την ιδέα μιας μαθησιακής τροχιάς, που δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τους διαφορετικούς τρόπους συλλογισμού του μαθητή (Weber et al., 2015). Επομένως, ως θεωρητική κατασκευή αποδεικνύεται ότι έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και την ενσωμάτωση μαθηματικών έργων (βλ. υποενότητα 1.2.2).

### 1.2.1 Τροχιά Διδασκαλίας και Μάθησης στις έννοιες: περίμετρος, εμβαδόν

Προκειμένου ο αναγνώστης να έχει μία ολοκληρωμένη εικόνα της εκπαιδευτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε κατά την έρευνα, κρίνεται σκόπιμη η παρουσίαση της υποθετικής τροχιάς διδασκαλίας και μάθησης γύρω από τις Μεγάλες Ιδέες που διδάχθηκαν οι συμμετέχοντες μαθητές ως ένα μέρος της στοχοθεσίας των μαθηματικών έργων που

ενσωματώθηκαν στο διδακτικό πείραμα. Σε αυτή την υποενότητα, λοιπόν, γίνεται προσπάθεια να περιγραφεί η ιδέα της τροχιάς μάθησης γύρω από τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού με βάση το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (Νέο Π.Σ., 2023) και τη διεθνή βιβλιογραφία.

#### i. Γενικές παρατηρήσεις

Η διδασκαλία της περιμέτρου και του εμβαδού στο Δημοτικό ανήκει στο πεδίο της Γεωμετρίας και συνδέεται με τη μέτρηση του επίπεδου χώρου. Αξίζει να ειπωθεί ότι παρόλο που γεφυρώνει τις θεμελιώδεις έννοιες δύο διαφορετικών πεδίων, της μέτρησης και του αριθμού, παρόλα αυτά δε δίνεται η ίδια βαρύνουσα σημασία στη διδασκαλία και των δύο, με τον ζυγό να γέρνει κατά κύριο λόγο στη διδασκαλία της αριθμητικής (Sarama & Clements, 2009).

Περαιτέρω, η εν λόγω μαθησιακή τροχιά αφορά στην ανάπτυξη ενός μαθηματικού περιεχομένου που προσεγγίζει, κατά κύριο λόγο, μη τυπικές, αντίστοιχα, γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες, ενώ δεν απαιτούν αφαιρετική σκέψη, θέτουν τις βάσεις για την πλήρη ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης, δηλαδή της ικανότητας του ανθρώπου να ερμηνεύει και να αναλύει τη δομή του περιβάλλοντος και, εκτενέστερα, για την πρόοδο της τυπικής γεωμετρικής σκέψης (Νέο Π.Σ., 2023). Ακόμη, αξίζει να αναφερθεί ότι η οικοδόμηση αυτών των γεωμετρικών εννοιών συνιστά θεμέλιο της ευρύτερης μαθηματικής ανάπτυξης του παιδιού και της καλλιέργειας δεξιοτήτων υψηλού επιπέδου (Νέο Π.Σ., 2023), καθώς συνδέεται με ένα ευρύτερο δίκτυο στοιχειωδών μαθηματικών γνώσεων, το οποίο κατακτάται μέσα από μαθηματικές διαδικασίες, όπως ο ορθολογικός συλλογισμός, η διατύπωση επιχειρήματος, η επαγωγική σκέψη (Ma, 2010), η επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (Schoenfeld, 1985, 2016), που αξιοποιεί το περιεχόμενο του προγράμματος σπουδών σε πραγματικές καταστάσεις (Pehkonen et al., 2013) και η ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου και του κριτικού γραμματισμού (Νέο Π.Σ., 2023).

Σύμφωνα με την επιστημονική θεωρία των Van Hiele, για να επιτευχθούν τα παραπάνω προσδοκώμενα μαθησιακά οφέλη, υποστηρίζεται ότι η γεωμετρική σκέψη του παιδιού περνάει από διάφορα στάδια τα οποία είναι διακριτά από τον μαθηματικό λόγο του, ο οποίος αναπαριστά τον τρόπο συλλογισμού του, όταν περιγράφει, αναλύει και επεξηγεί μία ιδέα, έννοια ή διαδικασία. Μεταξύ αυτών των σταδίων υπάρχει, φυσικά, μία ιεραρχική ακολουθία και λογική διαδοχή, η οποία δε σχετίζεται τόσο με το ηλικιακό επίπεδό του, αλλά με τη μαθησιακή διαδικασία στην οποία εμπλέκεται, ενώ η νέα γνώση που αποκτάται σε ένα στάδιο

αποτελεί προϋπόθεση για την επόμενη και επέκταση της προηγούμενης (Van Hiele, 1959). Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατόν να γίνει κατανοητή η σχέση μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού ενός σχήματος, αν ο μαθητής δεν έχει αντιληφθεί ποιο χαρακτηριστικό του σχήματος μετράει όταν αναφέρεται σε καθεμία από αυτές τις δύο έννοιες (Van de Walle et al., 2010, σελ. 660). Περισσότερο απαιτητική γνωστικά είναι η διαδικασία της απόδειξης ενός μαθηματικού συλλογισμού για την παραπάνω σχέση, η οποία προϋποθέτει μία βαθύτερη κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών που σχετίζονται με αυτή και εννοιολογική επέκτασή τους μέσω της εξοικείωσης του μαθητή με πολλαπλά παραδείγματα (Van Hiele, 1959).

Επιπρόσθετα, υποστηρίζεται ότι και σε κάθε στάδιο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης ο μαθητής περνάει από συγκεκριμένες φάσεις. Στην αρχή, διερευνά και ανακαλύπτει με διαισθητικό τρόπο αυτό που βλέπει, δηλαδή τα εξωτερικά χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου, ενώ ο δάσκαλος προσπαθεί να εκμαιεύσει μέσω της συζήτησης τα προσωπικά του βιώματα και τις ιδέες του για αυτό (Van Hiele, 1959). Μάλιστα, πρόσφατες έρευνες στρέφουν το ενδιαφέρον τους στη διερεύνηση και συλλογή δεδομένων που σχετίζονται με την αντίληψη ότι το παιδί πριν έρθει στο σχολείο έχει ήδη διαμορφωμένη στο μυαλό του μία ευρύτερη αντίληψη για τον κόσμο που το περιβάλλει, ισχυρά εδραιωμένη και καθοριστική για τη μελλοντική σχολική του πορεία. Αυτή η άποψη επαφίεται στο γεγονός ότι ο άνθρωπος κατά την αλληλεπίδρασή του με το φυσικό περιβάλλον, εξαιτίας της φυσικής του περιέργειας και της τάσης να πειραματίζεται και να ανακαλύπτει, από πολύ νωρίς, αποκτά αισθητηριακή αντίληψη του χώρου και των αντικειμένων που υπάρχουν σε αυτόν και αρχίζει να οικοδομεί γνώσεις που συχνά απέχουν από την ακαδημαϊκή. Έτσι, η κατανόηση αυτού του γνωστικού υποβάθρου, που κουβαλά ο μαθητής στο μυαλό του, αποτελεί αδιαμφισβήτητα, ένα βοηθητικό εργαλείο για τη μελλοντική ακαδημαϊκή του πορεία και, ειδικότερα, για την υποστήριξη και βελτίωση της μαθηματικής του εκπαίδευσης (Sarama & Clements, 2009).

Στην επόμενη φάση της μαθησιακής διαδικασίας, ο μαθητής προσεγγίζει τη γεωμετρική έννοια με τη βοήθεια χειραπτικών υλικών, κατάλληλα διαμορφωμένων, ενώ ο δάσκαλος τον κατευθύνει να αναδείξει σταδιακά τις ιδέες του. Μάλιστα, έρευνα της Meira (1998) αναδεικνύει τη χρησιμότητα των φυσικών αντικειμένων που χρησιμοποιεί ο μαθηματικός στην τάξη, τονίζοντας ότι η καταλληλότητά τους και η εκπαιδευτική τους αξία φαίνονται όταν ενσωματώνονται με κατάλληλο τρόπο μέσα σε ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο που επιτρέπει τη σύνδεση των μαθηματικών με την ιδιότητα που τα ίδια τα αντικείμενα έχουν εγγενώς.

Όσο το παιδί εμπλέκεται σε μαθηματικές δραστηριότητες, προσπαθεί να επεξηγήσει τη σκέψη του με οικείο τρόπο, χρησιμοποιώντας λέξεις από την καθημερινή του ζωή. Ενώ εξοικειώνεται

με την έννοια, λοιπόν, αρχίζει να οργανώνει τη σκέψη του, αποσαφηνίζοντας αυτό που έχει στο μυαλό του και συνδέοντας τον καθημερινό λόγο με τον επίσημο μαθηματικό. Κατά αυτόν τον τρόπο, η συγκεκριμένη διαδικασία, του δίνει ευκαιρία να εκφραστεί με πολλαπλούς τρόπους. Στην τελευταία φάση, η γνώση που έχει αποκτήσει ο μαθητής επεκτείνεται σε δραστηριότητες που βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή. Κατά αυτόν τρόπο, η νεοαποκτηθείσα γνώση αποκτά νόημα για τον ίδιο και εδραιώνεται στη μαθηματική του σκέψη, η οποία είναι πλέον έτοιμη να μεταβεί σε ανώτερο επίπεδο (Van Hiele, 1959).

Με δεδομένους αυτούς τους ισχυρισμούς, ο εκπαιδευτικός που διδάσκει την περίμετρο και το εμβαδό στο δημοτικό, οφείλει να έχει μία συνεκτική αντίληψη όλης της διαδρομής που ακολουθεί ο μαθητής κατά την εκμάθηση των εν λόγω μαθηματικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένων των συσχετισμών και συνδέσεων που δημιουργεί στο μυαλό του μεταξύ του μαθηματικής γνώσης και άλλων τομέων της ανθρώπινης δραστηριότητας. Αυτή η άποψη, ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, έχει νόημα όταν θέτει ξεκάθαρους μαθησιακούς στόχους και γνωρίζει ποιες είναι οι Μεγάλες Ιδέες που πρόκειται να διδάξει και εξετάζει με ποια μαθηματικά έργα θα τις αναδείξει και, τέλος, όταν αξιοποιεί όλους τους διαθέσιμους πόρους, γλώσσα, σύμβολα, αναπαραστάσεις και εποπτικό υλικό, σε ένα κατάλληλα δομημένο, μαθησιακό περιβάλλον (Clements & Sarama, 2009· Νέο Π.Σ., 2023).

Πιο συγκεκριμένα, οι Μεγάλες Ιδέες της μέτρησης (του μήκους και της επιφάνειας) αντικειμένων στον επίπεδο χώρο έχουν ως επίκεντρο την έννοια της περιγραφής ενός μετρήσιμου χαρακτηριστικού ή ιδιότητάς τους (του μήκους και του εμβαδού) μέσω της σύγκρισής του με μία τυπική ή μη τυπική μονάδα μέτρησης που εκφράζει το ίδιο χαρακτηριστικό ή ιδιότητα. Μάλιστα, ο υπολογισμός της επιφάνειας με βάση τον μαθηματικό τύπο εύρεσης του εμβαδού, γίνεται με τη χρήση των μονάδων μέτρησης του μήκους (Van de Walle et al., 2010, σελ. 660-661). Εκτός από την παραπάνω θεμελιώδη ιδέα, όμως, εμπεριέχονται και άλλες βασικές ιδέες: μέτρηση του μήκους και του εμβαδού σημαίνει, αντίστοιχα, μέτρηση της απόστασης δύο σημείων στον επίπεδο χώρο και της επιφάνειας που καλύπτει ένα αντικείμενο, διατήρηση του μήκους/εμβαδού ενός αντικειμένου, μεταβατικότητα του μήκους/εμβαδού κατά την έμμεση σύγκριση τριών και περισσότερων αντικειμένων, διαδικασία της μέτρησης ως ίσος καταμερισμός του αντικειμένου με ισομεγέθεις μονάδες μέτρησης και ως κατ' επανάληψη συνεχής επικάλυψη μίας επιφάνειας με την ίδια μονάδα μέτρησης, αντίστοιχη εννοιολογική κατανόηση των οργάνων μέτρησης του μήκους/εμβαδού και συσχέτιση του αριθμητικού αποτελέσματος με το χαρακτηριστικό που μετριέται, το συνολικό μήκος μίας απόστασης ή η συνολική επιφάνεια ενός αντικειμένου ισούται, αντίστοιχα, με το άθροισμα από επιμέρους μήκη ή επιφάνειες, σημείο έναρξης μίας μέτρησης

σε αριθμημένη κλίμακα μπορεί να είναι οποιοδήποτε και όχι απαραίτητα το σημείο μηδέν. Αυτές, λοιπόν, οι θεμελιώδεις ιδέες των Μαθηματικών πλαισιώνουν τη θεωρητική κατασκευή, η οποία επηρεάζει ριζικά τη διδασκαλία και μάθηση της περιμέτρου και του εμβαδού, καθώς ο μαθητής αποκτά όσο το δυνατόν περισσότερες εμπειρίες πάνω στις οποίες οικοδομεί τη νέα γνώση (Clements & Sarama, 2009).. Αυτές οι ιδέες της HLT της περιμέτρου και του εμβαδού, τις οποίες η Ma (2010), γενικά, τις προσεγγίζει ως πακέτο γνώσεων που θα έχει αποκτήσει ο μαθητής, όταν κάποια στιγμή θα έχει βαθιά γνώση πάνω σε μία θεμελιώδη έννοια, παρουσιάζονται παρακάτω ανά τάξη.

## ii. Παρουσίαση της HLT της περιμέτρου και του εμβαδού

Το παιδί από την πρώιμη ηλικία μέχρι και το νηπιαγωγείο εισάγεται κατ' αρχήν στην έννοια της μέτρησης ενός αντικειμένου, η οποία αποτελεί το θεμέλιο για την ανάπτυξη της έννοιας της περιμέτρου και του εμβαδού. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από τη διαδικασία της περιγραφής ενός ιδιαίτερου χαρακτηριστικού του, όπως είναι το μήκος, συγκρίνοντάς το με ένα άλλο αντικείμενο (Van de Walle et al., 2010, σελ. 660-662). Φυσικά, το παιδί σε αυτό το επίπεδο δεν έχει ξεκάθαρη διαδικαστική και εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της μέτρησης στον χώρο, καθώς αδυνατεί να αιτιολογήσει την απόδοση μίας ιδιότητας ή να μετρήσει το μήκος και την επιφάνεια ενός αντικειμένου με ακρίβεια, πόσο μάλλον να κάνει εννοιολογικούς συσχετισμούς σε διαφορετικές συνθήκες (Clements & Sarama, 2009). Από το δημοτικό -όπως φαίνεται και στη συνέχεια- αρχίζει να κατανοεί σε βάθος τη μαθηματική αυτή ιδιότητα των αντικειμένων και να εξοικειώνεται με τις μονάδες και τα εργαλεία μέτρησης. Για τους μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού είναι σύνηθες τη μέτρηση να την εκλαμβάνουν ως μία διαδικασία γεμίσματος, επικάλυψης ή συνταιριάσματος. Πιο πολύπλοκες γεωμετρικές έννοιες, όπως τον υπολογισμό της περιμέτρου και την εύρεση του εμβαδού τις προσεγγίζουν από την τρίτη τάξη, ενώ στην επόμενη αρχίζουν να διακρίνουν τις έννοιες. Μάλιστα στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού γίνεται η συστηματική διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στην περίμετρο και το εμβαδόν ενός γεωμετρικού σχήματος (Van de Walle et al., 2010, σελ. 660-662).

### Α' Δημοτικού

Όταν ο μαθητής φοιτά στην πρώτη τάξη του δημοτικού, κατανοεί εννοιολογικά το μετρήσιμο χαρακτηριστικό που περιγράφει, δηλαδή το μήκος, μέσα από την εκτίμηση και τη σύγκριση δύο αντικειμένων με έμμεσο τρόπο, δηλαδή έχοντας πλέον ως σημείο αναφοράς ένα τρίτο αντικείμενο. Αναλύοντας και συνθέτοντας μήκη, προσεγγίζεται η έννοια της διατήρησης του

μήκους μίας απόστασης. Η διαδικασία της μέτρησης αυτού του χαρακτηριστικού γίνεται με την επικάλυψη της απόστασης δύο σημείων κάνοντας χρήση μίας μη τυπικής μονάδας μέτρησης (συνδετήρες, γόμες καλαμάκια, σπάγκοι) σε πολλά αντίγραφα, ενώ το αριθμητικό αποτέλεσμα της επικάλυψης συσχετίζεται με το μήκος. Ο μαθητής πραγματοποιεί μετρήσεις κατασκευάζοντας ο ίδιος μη τυπικά όργανα μέτρησης μήκους, όπως αλυσίδα φτιαγμένη από μικρούς συνδετήρες, ενώ αντιλαμβάνεται την ανάγκη χρήσης μίας κοινής μονάδας μέτρησης (Van de Walle et al., 2010, σελ. 661). Τέλος, δίνεται ευκαιρία σύγκρισης τυπικών και άτυπων οργάνων μέτρησης, όπως μίας σειράς από γόμες και ενός χάρακα.

Αντίστοιχα, την έννοια του εμβαδού το παιδί την αντιλαμβάνεται μέσω της άμεσης σύγκρισης των επιφανειών δύο αντικειμένων, περιγράφοντας αυτή την ιδιότητα με λεκτικό τρόπο. Η αξιοποίηση χειραπτικών υλικών, όπως χαρτάκια σημειώσεων, και κατόπιν αναπαραστάσεων, θεωρείται απαραίτητη για τη μέτρηση, την επικάλυψη επιφανειών και τη σύγκρισή τους, όπως και για τη σύνδεση της αριθμητικής τιμής με αυτό που μετράει ο μαθητής, καθώς βοηθάει στη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, ενώ η διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης μίας επιφάνειας με διαθέσιμα απτά υλικά επιτρέπει την εξοικείωση με τη διαδικασία επικάλυψης (Νέο Π.Σ., 2023).

#### Β' Δημοτικού

Ο μαθητής της Β' τάξης αναλύει και συνθέτει μικρά μήκη αποτελούμενα από περισσότερα των δύο μέρη, πραγματοποιεί επικαλύψεις με, αλλά και χωρίς επανάληψη, ενώ πλέον κατασκευάζει και τυπικές μονάδες με τη χρήση χειραπτικών υλικών, όπως στην προηγούμενη τάξη. Την αριθμητική τιμή της μέτρησης τη συνδέει με τις μονάδες που χρησιμοποιεί, ενώ μέσα από τη συζήτηση και παρατηρώντας τα διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα, διαπιστώνει την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων μέτρησης (Νέο Π.Σ., 2023). Όλη αυτή η μαθησιακή διαδικασία βοηθάει στην κατανόηση της λειτουργίας των εργαλείων μέτρησης (Van de Walle et al., 2010, σελ. 664) και δίνει τη δυνατότητα κατασκευής από τον ίδιο μη τυπικών και τυπικών χαράκων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για μετρήσεις μήκους. Ακόμη, προχωρά στη διάταξη διαφόρων μηκών πραγματοποιώντας εκτιμήσεις και έμμεσες συγκρίσεις (Νέο Π.Σ., 2023).

Η ανάπτυξη της έννοιας του εμβαδού επεκτείνεται, καθώς το παιδί αρχίζει πλέον να κάνει και έμμεσες συγκρίσεις, με ανάλυση και σύνθεση απλών επιφανειών, χρησιμοποιώντας χειραπτικό υλικό, όπως καρτέλες αρχειοθέτησης και τετραγωνισμένα χαρτάκια και δουλεύοντας πάνω σε διάφορους καμβάδες. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι ο μαθητής να εστιάζει στο να μην αφήνει κενά ή να μην κάνει αλληλοεπικαλύψεις, αλλά και στις γραμμές και τις στήλες που δημιουργούνται

με την ολοκλήρωση της επικάλυψης. Οι εκτιμήσεις του μεγέθους απλών επιφανειών επιτυγχάνονται με τη σύγκρισή τους με μη τυπικές μονάδες. Ακόμη, για την ανάδειξη της σχέσης της αριθμητικής τιμής της επικάλυψης με το εμβαδόν της επιφάνειας, γίνεται και χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης. Παράλληλα, ο μαθητής αρχίζει να δομεί ορθογώνιες περιοχές σε γραμμές και στήλες χρησιμοποιώντας τετράγωνα 1 δεκατόμετρου (Νέο Π.Σ., 2023).

#### Γ' Δημοτικού

Στην Γ' δημοτικού το παιδί εξοικειώνεται περισσότερο με τη διαδικασία της μέτρησης του μήκους και των οργάνων και εργαλείων μέτρησης. Αναλύει και συνθέτει μήκη, αλλά τώρα υπολογίζει το συνολικό μήκος τεθλασμένων διαδρομών, αθροίζοντας τα επιμέρους μήκη από τα οποία αποτελείται, με τη βοήθεια τυπικού χάρακα. Αρχίζει να επιλύει προβλήματα μέτρησης μήκους και διαπιστώνει την ανάγκη υποδιαίρεσεων. Βέβαια, στη συγκεκριμένη τάξη εξασκείται στη μετατροπή απλών μονάδων, από εκατοστά σε μέτρα και αντίστροφα. Ακόμη, πραγματοποιεί εκτιμήσεις και μετρήσεις μηκών με τυπικές μονάδες μέτρησης στον περιβάλλοντα χώρο και σε επίπεδα σχήματα και διατάσσει διαφορετικά μήκη.

Στη Γ' τάξη αρχίζει να γίνεται αντιληπτή η ιδέα της διατήρησης του εμβαδού, καθώς ο μαθητής με την ανάλυση και σύνθεση επιφανειών συγκρίνει το μέγεθός τους. Δραστηριότητες που σχεδιάζονται για την αναπαράσταση και ερμηνεία αυτού του μαθηματικού νοήματος κρίνουν απαραίτητη τη χρήση χειραπτικού υλικού, όπως τα τάνγκραμ και τα πεντόμινο. Κατά τη δόμηση ορθογώνιων επιφανειών σε γραμμές και στήλες προστίθεται μία ακόμη υποδιαίρεση, τα τετραγωνάκια 1 εκ. Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται η σημαντική μαθηματική ικανότητα του πολλαπλασιαστικού συλλογισμού, διότι ο μαθητής αρχίζει, για πρώτη φορά, να έρχεται σε επαφή, έμμεσα, με την υπολογιστική διεργασία εύρεσης του εμβαδού, πολλαπλασιάζοντας γραμμές και στήλες συγκεκριμένων δομημένων επιφανειών (Νέο Π.Σ., 2023).

#### Δ' Δημοτικού

Ο μαθητής εξοικειώνεται και με τη μονάδα μέτρησης των χιλιοστών και πραγματοποιεί απλές μετατροπές από τη μία μονάδα στην άλλη, ενώ για να συγκρίνει ευθύγραμμα τμήματα κάνει χρήση του διαβήτη. Στην τάξη αυτή αρχίζει και εισάγεται με συστηματικό τρόπο στην ιδέα της περιμέτρου, καθώς εξασκείται στο να μετράει αποστάσεις γύρω γύρω σε διαφορετικά πλαίσια. Κατά την ενασχόληση με τούτη τη μαθηματική διεργασία, ο δάσκαλος αξιοποιεί τις οπτικές αναπαραστάσεις, ενθαρρύνοντας τον μαθητή να υπολογίζει την περίμετρο πολυγωνικών σχημάτων. Αυτή η ιδέα ενσωματώνεται και σε προβλήματα επίπεδης γεωμετρίας, όπου το

ζητούμενο είναι η κατασκευή σχημάτων με συγκεκριμένη περίμετρο ή εύρεση της περιμέτρου δοσμένων σχημάτων με τη χρήση οργάνων μέτρησης, όπως ο χάρακας (Νέο Π.Σ., 2023).

Ο μαθητής αποκτά ξεκάθαρη αντίληψη της έννοιας της μέτρησης του μήκους μέσα από την επίλυση προβλημάτων, στα οποία του ζητείται να υπολογίζει την περίμετρο και το εμβαδόν ορθογώνιων σχημάτων σε τετραγωνισμένο καμβά. Κατά αυτόν τον τρόπο αρχίζει να διακρίνει τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια της περιμέτρου και του εμβαδού. Η ανάγκη υποδιαίρεσης της μονάδας μέτρησης του εμβαδού προκύπτει μέσα από προβλήματα υπολογισμού επιφανειών σε καμβάδες που αποτελούνται από μισά και τέταρτα τετραγώνου ή ορθογώνιου. Εν συνεχεία, προβαίνει σε εκτιμήσεις και συγκρίσεις του εμβαδού επιφανειών με χρήση τυπικών μονάδων (τ.δεκ.). Τέλος, μία σύνθετη μαθηματική διαδικασία είναι να κατασκευάζει ορθογώνια σχήματα σε επιφάνειες με γραμμές και στήλες, κάνοντας ισοδιαμερισμό των γραμμικών τους διαστάσεων, προκειμένου να υπολογίζει το εμβαδόν (Νέο Π.Σ., 2023).

#### Ε΄ Δημοτικού

Στην Ε΄ τάξη ο μαθητής εξασκείται συστηματικά στις μετατροπές μονάδων μέτρησης μέσα από σχετικά γεωμετρικά προβλήματα που μπορεί να είναι σύνθετα και να απαιτούν πολλά βήματα επίλυσης (Van de Walle et al., 2010, σελ. 661· Νέο Π.Σ., 2023). Στην εύρεση της περιμέτρου αρχίζουν να χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο μαθηματικό τύπο. Ακόμη, η τροχιά ανάπτυξης της μέτρησης αναδεικνύει περισσότερο πολύπλοκες μαθηματικές ιδέες, όπως τη μετρική σχέση μεταξύ πλευρών και συνολικής περιμέτρου πολυγώνων, χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές τους ιδιότητες. Η αξιοποίηση αυτής της σχέσης πραγματοποιείται μέσα από έργα που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε μαθηματικές δραστηριότητες απαιτητικές ως προς το γνωστικό επίπεδο δυσκολίας, όπως το να υπολογίζουν νοερά την περίμετρο ενός κανονικού πολυγώνου έχοντας ως δεδομένο το μήκος της πλευράς του, αλλά και το πλήθος των κορυφών (Νέο Π.Σ., 2023).

Επίσης, στην αναπτυξιακή τροχιά του εμβαδού, το παιδί κάνει εκτιμήσεις και συγκρίσεις του εμβαδού επιφανειών με χρήση των υπολοίπων τυπικών μονάδων (τ.δεκ., τ.εκ.). Τα προβλήματα, που καλείται να επιλύει, βοηθούν στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και εστιάζουν πρώτον στις μετατροπές μονάδων μέτρησης μίας επιφάνειας, με την κατασκευή δισδιάστατων σχημάτων με δοσμένα μήκη πλευρών, αλλά εκφρασμένα σε διάφορες υποδιαίρεσεις, δεύτερον, στον υπολογισμό του εμβαδού ορθογώνιων παραλληλογράμμων και ορθογώνιων τριγώνων, χρησιμοποιώντας τον τύπο του εμβαδού και επιλύοντας σχετικά προβλήματα και, τρίτον, στη διερεύνηση της σχέσης περιμέτρου και εμβαδού (Νέο Π.Σ., 2023). Όσον αφορά στην τελευταία ιδέα, σχετική έρευνα της Ma (2010)

αποδεικνύει ότι ο τρόπος προσέγγισης και η ανάδειξη εναλλακτικών στρατηγικών επίλυσης μίας αντίστοιχης προβληματικής κατάστασης επηρεάζει τη μαθησιακή διαδικασία. Υποστηρίζει, λοιπόν, μία σειρά από πρακτικές, όπως το να διατυπώνει ο μαθητής με ξεκάθαρο τρόπο πώς λύνει ένα πρόβλημα ή πώς σκέφτεται, και όχι να δίνει μόνο μία λύση, το να κάνει ορθούς υπολογισμούς ή συγκρίσεις της περιμέτρου και του εμβαδού ενός σχήματος, εξετάζοντας παράλληλα τις παραμέτρους που αλλάζουν ή παραμένουν ίδιες, όπως και το να ελέγχει με αντιπαραδείγματα μία αρχική υπόθεση. Όλες αυτές οι πρακτικές, όπως αναφέρει, ωθούν τη μαθηματική σκέψη να προχωρήσει ένα βήμα παραπάνω, ενθαρρύνουν τη βαθιά εννοιολογική κατανόηση της στοιχειώδους γνώσης της περιμέτρου και του εμβαδού και, γενικά, προάγουν τον μαθηματικό γραμματισμό, που σημαίνει, μεταξύ άλλων, επιχείρημα, ορθολογικό συλλογισμό, επαγωγικός τρόπος σκέψης, συμπέρασμα. Τα συμπεράσματα της έρευνάς της αξιοποιήθηκαν στον σχεδιασμό έργων κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος .

#### Στ' Δημοτικού

Στην τελευταία τάξη του δημοτικού δίνεται έμφαση πλέον στην έννοια του εμβαδού, καθώς η τροχιά ανάπτυξης της μέτρησης μήκους συνεχίζει με την προσέγγιση του κύκλου. Έτσι, όπως και στην προηγούμενη τάξη, ο μαθητής διερευνά με συστηματικό τρόπο τη σχέση μεταξύ πλευρών, περιμέτρου και εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος. Επεκτείνει τη γνώση του επιλύοντας ρεαλιστικά προβλήματα που αναδεικνύουν τη σχέση ανάμεσα στις ιδέες τις οποίες έχει διδαχθεί και εξοικειώνεται με την εύρεση εμβαδού σε διάφορες επιφάνειες, καμπυλόγραμμες, ακανόνιστες, ορθογωνίων, τριγώνων, τραπεζίων και της παράπλευρης επιφάνειας πυραμίδας και με τις μετατροπές μονάδων μέτρησης του εμβαδού. Επιπλέον, μέσα από κατάλληλα μαθηματικά έργα ενθαρρύνεται να χρησιμοποιεί διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, να διερευνά και να διατυπώνει γενικά συμπεράσματα (Νέο Π.Σ., 2023).

#### 1.2.2 Διδακτικός σχεδιασμός έργων

Αναπόσπαστο μέρος της ανάπτυξης της υποθετικής μαθησιακής τροχιάς στη διδασκαλία των μαθηματικών και της φιλοσοφίας του νέου Π.Σ. αποτελεί ο διδακτικός σχεδιασμός έργων από τον εκπαιδευτικό/ερευνητή. Σύμφωνα με το νέο Π.Σ. (2023) ως «μαθηματικό έργο» νοείται ένα ζητούμενο με μορφή απλής ερώτησης, ένα πρόβλημα ή μία άσκηση, ακόμη και σε παιγνιώδη μορφή, που ωθεί τον μαθητή σε μία μαθηματική δραστηριότητα η οποία κεντρίζει το ενδιαφέρον του, ανταποκρίνεται στο γνωστικό και κοινωνικοπολιτισμικό προφίλ του, δίνει

τη δυνατότητα χρήσης εναλλακτικών στρατηγικών επίλυσης και τον ενθαρρύνει να κατανοήσει Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών που αποτελούν θεμέλιο για την μαθηματική ανάπτυξή του. Η συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζει με συνοπτικό τρόπο πρώτον την ιστορική εξέλιξη του παραπάνω ερευνητικού αποτελέσματος με τη συγκεκριμένη φιλοσοφία, η οποία διατρέχει και την εκπαιδευτική παρέμβαση της παρούσας έρευνας, δεύτερον το περιεχόμενο αυτής της θεωρητικής κατασκευής και παράλληλα προσδιορίζει τα θετικά σημεία και τις παραμέτρους που επηρεάζουν την εφαρμογή της σε πρακτικό επίπεδο.

Οι Watson και Ohtani (2015) στο βιβλίο τους «Task design in mathematics education: An ICMI study 22» προσφέρουν σε εκπαιδευτική και ερευνητική κοινότητα μια ολοκληρωμένη εικόνα των σημαντικών σταθμών που οδήγησαν στον διδακτικό σχεδιασμό έργων και του πώς οι μαθηματικές δραστηριότητες μπορούν να σχεδιαστούν κατάλληλα και να γίνουν έργα που θα προάγουν την αποτελεσματική μάθηση και τη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Μάλιστα, η αναφορά τους σε διεθνείς μελέτες οι οποίες έχουν εφαρμόσει αυτή την πολυπολιτισμική και πολυεπίπεδη πρακτική, φανερώνει την καινοτομία στην εκπαιδευτική έρευνα των δύο τελευταίων δεκαετιών και μία διαφοροποίηση ανάμεσα στις έννοιες δραστηριότητες και έργα, αν λάβουμε υπόψη ότι αυτή η μεταγενέστερη αλλαγή για τα οποία γίνεται λόγος, εστιάζει σε μία συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα και προσφέρει τη δυνατότητα προσαρμογής της διδασκαλίας στις ικανότητες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών στο εκάστοτε μαθησιακό περιβάλλον.

Αναφέρεται, λοιπόν, ότι ενώ από τις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα ψυχολόγοι και μαθηματικοί παρουσιάζουν, αντίστοιχα, μέσα από ελεγχόμενα πειράματα, ένα ενδιαφέρον για το πώς μαθαίνει το παιδί μαθηματικά και για τη δομή των Μαθηματικών και το περιεχόμενο που θα πρέπει να διδαχθεί, παρόλο αυτά παραλείπουν να δώσουν ένα συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο διδακτικού σχεδιασμού και μία εξήγηση σε αυτό που προτείνουν. Περί τα τέλη του 1960 και αρχές του '70 δημιουργείται επισήμως μία εκπαιδευτική ερευνητική κοινότητα που ασχολείται με το παραπάνω ζήτημα, καθώς εισάγει τον όρο “instructional design” και προτείνει θεωρητικά μοντέλα σχεδιασμού της διδασκαλίας. Ωστόσο, μέχρι τα τέλη του 1980 στηρίζεται κυρίως σε γνωστικές θεωρίες, ενώ μία κινητοποίηση σε κοινωνικοπολιτισμικά μοντέλα παρατηρείται στις αρχές της επόμενης δεκαετίας. Υπάρχει, λοιπόν, μία τάση σύνδεσης θεωρίας και πράξης με εφαρμογή εργαστηριακών μελετών στην τάξη. Εμφανίζεται ο όρος “design experiment” και αποσαφηνίζονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του, καθώς επίσης, και ο όρος «έργο» το οποίο διατρέχει μια δραστηριότητα ή σειρά δραστηριοτήτων και περιλαμβάνει ό,τι κάνει ο εκπαιδευτικός για να ενθαρρύνει τους μαθητές σε αλληλεπίδραση

και ό,τι αποφασίζουν να κάνουν οι μαθητές σε μια συγκεκριμένη κατάσταση (Watson & Ohtani, 2015).

Από τις αρχές του 2000 και έπειτα ο όρος “task design” (σχεδιασμός έργου) αποκτά πιο ξεκάθαρο νόημα, ενώ σε άρθρο τους οι Ainley και Pratt (2005), έχοντας στο ερευνητικό τους υπόβαθρο τις αρχές της τοπικής θεωρίας (συναφείς αγγλικοί όροι “Realistic Mathematic Education”, “Local Theories”, “Local Frames”), κάνουν ιδιαίτερη αναφορά σε αυτόν και τον προσεγγίζουν ως μέρος μίας ευρύτερης μαθησιακής διαδρομής που προσφέρει τη δυνατότητα προσαρμογής των δραστηριοτήτων στις ιδιαιτερότητες μίας τάξης, χωρίς, ωστόσο, να παραβλέπονται οι αρχικοί διδακτικοί στόχοι. Μάλιστα, οι ίδιοι επισημαίνουν ότι μία μαθηματική δραστηριότητα προσελκύει το ενδιαφέρον της τάξης με το να αναδεικνύει τη χρηστικότητα της γνώσης που προσφέρει. Επιπρόσθετα, λοιπόν, οι Watson και Ohtani (2015) προσδιορίζουν ως «μαθηματικά έργα» ένα σύνολο στοιχείων που περιλαμβάνει ερωτήσεις και οδηγίες τις οποίες σχεδιάζει προσεκτικά ο δάσκαλος, καθώς και τις καταστάσεις που θέτει στον μαθητή, ανάλογα με το πλαίσιο της τάξης, για να του δώσει τις ευκαιρίες να συνδυάσει το μαθηματικό περιεχόμενο, με τις ιδέες του και τις κατάλληλες στρατηγικές που θα προσδώσουν μαθηματικό νόημα σε ό,τι κάνει.

Με λίγα λόγια, αυτό που αλλάζει και διαφοροποιεί το ερευνητικό ενδιαφέρον είναι τα δύο βασικά σημεία που εστιάζει η μαθηματική έρευνα κατά τον διδακτικό σχεδιασμό έργων και αφορούν στις αρχές των Μεγάλων Θεωριών του 20<sup>ου</sup> αιώνα (Γνωστική Ψυχολογική Θεωρία, Κονστρουκτιβισμός, Κοινωνικός Κονστρουκτιβισμός), τις οποίες πρεσβεύει ένα διδακτικό μοντέλο και στη θέση που λαμβάνουν αυτές στον σχεδιασμό της διδασκαλίας και πώς τον επηρεάζουν. Ως προς το πρώτο σημείο, αυτό που απασχολεί τον ερευνητή είναι ο ρόλος που έχουν οι εμπλεκόμενοι στην εκπαιδευτική διαδικασία, δηλαδή ο μαθητής και ο δάσκαλος και ποιος είναι στο επίκεντρο, το πώς κατακτάται η μαθηματική γνώση, ποιος τύπος δραστηριοτήτων υιοθετείται από τον εκπαιδευτικό, τι έχει μεγαλύτερη αξία κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και πώς αυτή αξιολογείται. Ως προς το δεύτερο σημείο, συναντώνται δύο ερευνητικές τάσεις, οι ενδιάμεσες (domain specific frames) και τοπικές (local specific frames) θεωρίες (Watson & Ohtani, 2015).

Σύμφωνα με την πρώτη, η έρευνα προτείνει κατά κύριο λόγο τον σχεδιασμό της αλληλουχίας μίας διδασκαλίας, έχοντας ως πηγή το γενικό θεωρητικό πλαίσιο ενός διδακτικού μοντέλου και τα εργαλεία σχεδιασμού που αυτό χρησιμοποιεί, χωρίς να λαμβάνει υπόψη το πλαίσιο της σχολικής τάξης. Τούτο σημαίνει πως ο διδακτικός σχεδιασμός είναι η αρχική πρόθεση του εκπαιδευτικού (“design as intention”). Αντιθέτως, με βάση τη δεύτερη τάση, ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων είναι δευτερεύουσας σημασίας, διότι θεωρούνται μέρος ενός ευρύτερου

έργου στο οποίο μπορούν να ενσωματωθούν (“design as implementation”). Στην τελευταία περίπτωση δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στην όλη μαθησιακή διαδικασία και στην υποστήριξη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών και αναγκών του μαθητικού δυναμικού μίας τάξης και όχι τόσο στα αποτελέσματα (Watson & Ohtani, 2015).

Ωστόσο, εμπειρικές μελέτες εξηγούν πώς παρόλο που η σύγχρονη μαθηματική έρευνα κάνει λόγο για σχεδιασμό της διδασκαλίας, εντούτοις μπορεί να συμβαίνει ένα παράδοξο στον χώρο των Μαθηματικών. Τα έργα για τα οποία γίνεται λόγος στην ενότητα αυτή, χάνουν την παιδαγωγική τους αξία όταν ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει τη διδασκαλία αποκλειστικά με βάση τους διδακτικούς στόχους, με αποτέλεσμα να μην αξιοποιούνται από τους μαθητές και να μην αναπτύσσεται η μαθηματική τους σκέψη (Simon & Tzur, 2004). Έτσι, στη σύγχρονη μαθηματική έρευνα αυτό που έχει πρωτίστως σημασία είναι η αυτονομία που αποκτά ο εκπαιδευτικός/ερευνητής στη λήψη αποφάσεων κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, ανάλογα με τον τρόπο που οι μαθητές εκφράζονται και εξηγούν μία μαθηματική έννοια ή διαδικασία, προκειμένου να κάνει τις κατάλληλες εκπαιδευτικές παρεμβάσεις. Επομένως, αυτό που θεωρείται μείζον πλεονέκτημα για τον ίδιο, απαιτεί και δύο προϋποθέσεις: πρώτον, γνώση του μαθησιακού αντικειμένου που καλείται να διδάξει και δεύτερον παιδαγωγική γνώση, δηλαδή να γνωρίζει την επίδραση ενός έργου στη μαθησιακή τροχιά του μαθηματικού περιεχομένου και τι προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα έχει (Watson & Ohtani, 2015).

Συνοψίζοντας τα θετικά σημεία της ενσωμάτωσης έργων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, σημειώνεται ότι η γνώση των παραπάνω θεωρητικών αρχών προσφέρουν τη δυνατότητα της επιλογής και του σχεδιασμού μίας αλληλουχίας ενεργειών μέσα στην τάξη που αναδεικνύουν μία μαθηματική ιδέα, την τροποποίησή τους, τον επανασχεδιασμό τους και την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας του ευρύτερου εκπαιδευτικού έργου (Watson & Ohtani, 2015). Είναι βέβαιο, πάντως, ότι πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και οι περιορισμοί που υφίστανται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς ο ρόλος του δασκάλου/ερευνητή είναι καθοριστικός στο πώς σχεδιάζει αρχικά τα μαθηματικά έργα, εξετάζοντας τα παιδαγωγικά χαρακτηριστικά και τις γνωστικές απαιτήσεις που έχουν αυτά και, εν τέλει, με ποιον τρόπο και σε τι βαθμό υποστηρίζει τον κάθε μαθητή κατά την ενσωμάτωση των έργων στην πράξη, στοχευόμενος αν επεκτείνουν τη μαθηματική σκέψη και αν προάγουν τη μαθηματική επικοινωνία (Simon & Tzur, 2004· Stein et al., 1996· Stein & Smith, 1998).

### 1.3 Συστημική Λειτουργική Γλωσσολογία και Μαθηματικά

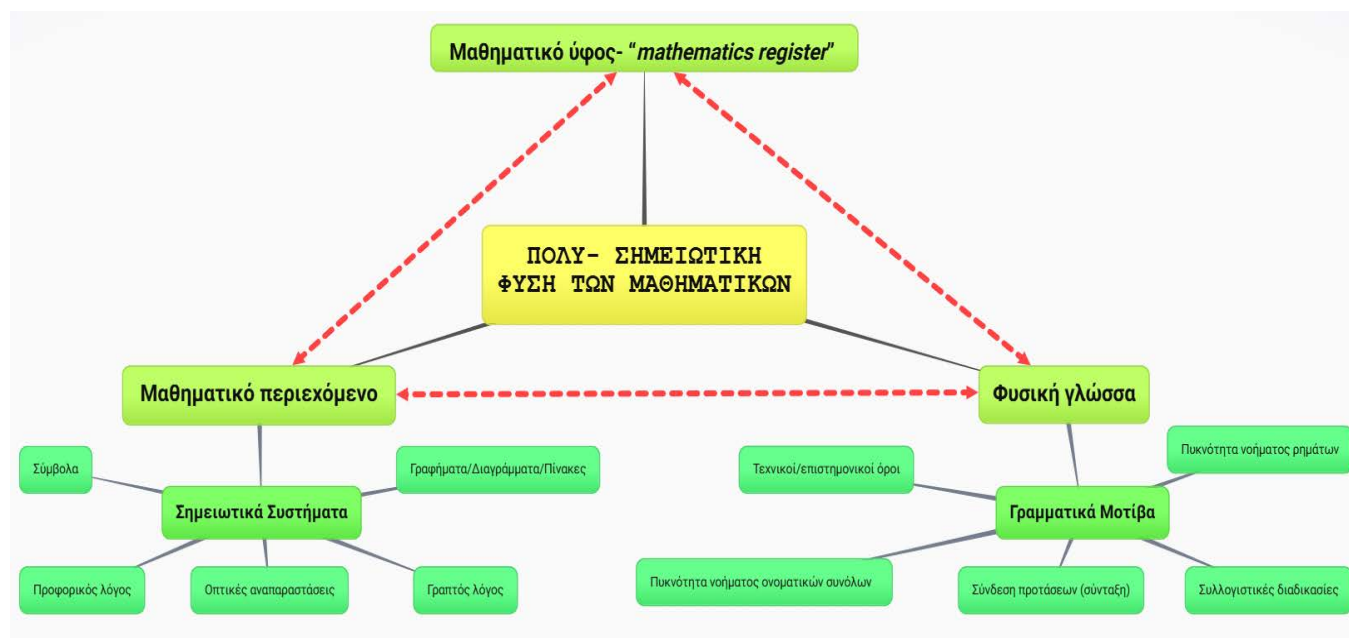
Σε αυτή την ενότητα γίνεται προσπάθεια να περιγραφεί με όσο το δυνατό πληρέστερο τρόπο το θεωρητικό μοντέλο της Συστημικής Λειτουργικής Γλωσσολογίας (SFL) και, πιο συγκεκριμένα, οι βασικές αρχές που αυτό προσβέει, εστιάζοντας σε ζητήματα που αφορούν στη λειτουργία της γλώσσας σε συνάρτηση με τη μαθηματική αντίληψη και ανάπτυξη και στις προκλήσεις που συναντά ο μαθητής κατά την προσέγγιση μαθηματικών κειμένων. Επίσης, συνοψίζονται οι γλωσσικές πρακτικές, που προτείνονται ως εργαλεία αναγνωσιμότητας μαθηματικών κειμένων και παρουσιάζονται αναλυτικά τα 6 στάδια επίλυσης προβλημάτων γεωμετρίας. Τέλος, τα μοτίβα τα οποία πλαισιώνουν την παρακάτω θεωρητική προσέγγιση αποτελούν σημαντικό μέρος της διεξαγωγής της εργασίας, τόσο της συλλογής και ποιοτικής ανάλυσης των δεδομένων της όσο και της αρχικής προετοιμασίας και πραγματοποίησης της εκπαιδευτικής παρέμβασης.

#### 1.3.1 Περιγραφή θεωρητικού μοντέλου SFL

Το μοντέλο της Συστημικής Λειτουργικής Γλωσσολογίας, γνωστής ως SFL –από την αγγλική ονομασία Systemic Functional Linguistics-, κατά κύριο λόγο, εστιάζει στο πώς λειτουργεί η ίδια η γλώσσα ως σύστημα στην κριτική προσέγγιση και βαθιά κατανόηση ενός σύνθετου κειμένου ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο αυτό εντάσσεται (Fang και Schleppegrell, 2008). Σύμφωνα με τη Schleppegrell (2016), της οποίας η μελέτη αφορά στη διδασκαλία της αγγλικής ως δεύτερης γλώσσας, το θεωρητικό πλαίσιο της SFL περιγράφει λεπτομερώς την επιστήμη του λόγου και αποδεικνύεται ότι μπορεί να προσφέρει εκείνα τα μεταγλωσσικά στοιχεία που θα βοηθήσουν τον μαθητή να κατανοήσει το περιεχόμενο των γνωστικών αντικειμένων που διδάσκεται στο σχολείο και ιδιαίτερα εκείνων που εντάσσονται σε ένα αυστηρό επιστημονικό πλαίσιο, όπως είναι τα Μαθηματικά.

Το συγκεκριμένο μοντέλο έχει τις ρίζες του στη σημειωτική θεωρία του M.A.K. Halliday (1978), ο οποίος κάνει λόγο για το «μαθηματικό ύφος» (“*mathematics register*”), ενώ μέσα από την επεξήγηση του όρου αυτού, αναδεικνύει τη λειτουργική χρήση της φυσικής γλώσσας, η οποία έχει σκοπό την επίτευξη της μαθηματικής επικοινωνίας, δηλαδή τη χρήση της σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο. Μεταγενέστερα, ο ίδιος και άλλοι υποστηρικτές της SFL εμπλουτίζουν τις αρχές της θεωρίας προσεγγίζοντας τη γλώσσα ως ένα δυναμικό- ανοικτό σύστημα, το οποίο αλλάζει ανάλογα με το επίπεδο ύφους της γλώσσας, αλλά και τις μεταβαλλόμενες ιστορικές συνθήκες (Halliday & Martin, 1993) και τονίζοντας τα χαρακτηριστικά της πολυ- σημειωτικής φύσης των Μαθηματικών (βλ. εικ. 2) (Lemke, 2003·

Ο'Halloran, 1999· Schleppegrell, 2007). Και, ως πολυ- σημειωτικός χαρακτήρας της μαθηματικής φύσης νοείται το σύνολο από μαθηματικά σύμβολα, κανόνες που διέπουν τις μαθηματικές έννοιες και νοήματα που αποδίδονται σε μία περίπτωση μαθηματικής επικοινωνίας, αλλά και η αλληλεπίδραση μεταξύ όλων αυτών των στοιχείων (de Oliveira & Cheng, 2011).



Εικ. 2 Εννοιολογικός χάρτης

Εμβαθύνοντας στα τρία σημειωτικά συστήματα που απαρτίζεται ο μαθηματικός λόγος, αξίζει να σημειωθεί ότι, από παιδαγωγικής άποψης, αυτά έχουν μία μεταλειτουργία, γεγονός που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Οι de Oliveira και Cheng (2011), στηριζόμενοι σε προγενέστερη έρευνα του Ο'Halloran (2000, 2004), συνοψίζουν τα βασικά σημεία αυτής της θεωρητικής ερμηνείας και εστιάζουν στη γλώσσα και το περιεχόμενο του μαθηματικού λόγου, αντιπαραβάλλοντας τα στοιχεία της μαθηματικής γραμματικής με τη μεταλειτουργία τους. Καταρχήν, επισημαίνουν τον ρόλο της φυσικής γλώσσας, δηλαδή τον τρόπο που παρουσιάζεται το ίδιο το κείμενο, ενώ ο αναγνώστης επιχειρηματολογεί, μέσα από την αλληλεπίδραση με αυτό προκειμένου να κατανοήσει το κειμενικό είδος, που επεξεργάζεται. Δεύτερον, αναφέρουν τα μαθηματικά σύμβολα, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος, το αυστηρό πλαίσιο και τις αρχές, που διέπουν τη μαθηματική διατύπωση. Τέλος, δεν παραλείπουν τις οπτικές αναπαραστάσεις, δηλαδή, εικόνες, σχήματα, γραφήματα, διαγράμματα, πίνακες, που ενθαρρύνουν τη μαθηματική ανάπτυξη, καθώς και την κατάκτηση της «γραμματικής» αυτών των οπτικών αναπαραστάσεων από τον μαθητή μέσα από την εμπλοκή του με το κείμενο και ανάλογα με τις εμπειρίες και το γνωστικό υπόβαθρό του.

Με άλλα λόγια, ο μαθητής χρειάζεται να αντιληφθεί το νόημα αυτών των συστημάτων προκειμένου να υπάρξει εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, γεγονός στο οποίο εστιάζει και η παρούσα έρευνα. Το νόημα το οποίο αποδίδει ένα κείμενο δομείται με τρεις τρόπους: πώς το βιώνει ο αναγνώστης και πώς κατανοεί το περιεχόμενο βάσει των εμπειριών του (“*experiential meaning*”), πώς αλληλεπιδρά με το κείμενο και τι στάση έχει απέναντι σε αυτό (“*interpersonal meaning*”) και πώς αντιλαμβάνεται την κατάλληλη, για τη νοηματοδότησή του, οργάνωση του κειμένου (“*textual meaning*”) (de Oliveira & Cheng, 2011).

Διευρύνοντας, λοιπόν, το υπάρχον θεωρητικό πλαίσιο προτείνεται η βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του κειμένου μέσω της αποδόμησής του, εστιάζοντας στη μεταλειτουργία κάθε γλωσσικού χαρακτηριστικού, προχωρώντας σταδιακά από πρόταση σε πρόταση, αναλύοντας με κριτική ματιά τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα και το πώς οικοδομείται μέσα από αυτές το νόημα του κειμένου (Fang & Schleppegrell, 2008). Ανάλογα, οι Halliday και Martin (1993) αναφέρουν τις πέντε παραμέτρους της συστημικής λειτουργικής γραμματικής, δηλαδή σε τι εστιάζει ο αναγνώστης κατά την προσέγγιση της γλώσσας σε ένα κειμενικό είδος: τους γλωσσικούς πόρους, όχι απομονωμένους τον έναν από τον άλλον, σαν ένα σύνολο από κανόνες, αλλά ως μέσα που προσδίδουν κάποιο νόημα κατά την επικοινωνία, το ίδιο το κείμενο ως όλο και όχι την κάθε πρόταση μεμονωμένα, το συγκεκριμένο, δηλαδή ενδιαφέρονται και αναδεικνύουν τις σχέσεις ανάμεσα σε κείμενα, τα λεγόμενα κοινωνικά συμφραζόμενα, εν προκειμένω στον χώρο των Μαθηματικών, τη δόμηση νοήματος παρά την έκφραση συναισθημάτων και σκέψεων και, τέλος, τον προσανατολισμό σε ένα επεξεργασμένο μοντέλο, στο πλαίσιο του οποίου η γραμματική της γλώσσας μπορεί να ιδωθεί με επικοινωνιακούς όρους.

Εντούτοις, ιδιαίτερος λόγος γίνεται για το κοινωνικό συμφραζόμενο περιβάλλον, για ποιον γράφτηκε το κείμενο, ποια είναι η οπτική γωνία του υπό διερεύνηση θέματος (Halliday & Martin, 1993). Ο εκάστοτε αναγνώστης προσεγγίζει τα γλωσσικά στοιχεία του κειμένου με κριτική ματιά αξιοποιώντας τα όχι μεμονωμένα, ως μονάδες, αλλά εντοπίζοντας τις συνδέσεις μεταξύ τους, οι οποίες χτίζουν «πακεταρισμένες» πληροφορίες από πρόταση σε πρόταση (Fang & Schleppegrell, 2008), δηλαδή συμπυκνωμένες από άποψη νοήματος. Κατά τη μαθησιακή διαδικασία, λοιπόν, και ο μαθητής, για να κατανοήσει τον μαθηματικό λόγο, πρέπει να βρει το νόημα που κρύβεται μέσα στο σύστημα που τον απαρτίζει (κείμενο, σύμβολα, αναπαραστάσεις), δηλαδή να προσεγγίσει και να παρατηρήσει το κείμενο, να αλληλεπιδράσει με αυτό και ο εκπαιδευτικός να ενθαρρύνει τη συζήτηση (“*discourse*”) στην τάξη, ώστε το

παιδί να ανακαλύψει τα «γλωσσικά μοτίβα» που είναι οργανωμένα και «πακετάρουν» τη μαθηματική γνώση (Schleppegrell, 2016). Οι Fang και Schleppegrell στο βιβλίο τους “Reading in secondary content areas, A language- based pedagogy” (2008), θέλοντας να τονίσουν τον υπαρκτό ρόλο των γλωσσικών μοτίβων, εύστοχα, παρομοιάζουν τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα ενός κειμένου με τα χρώματα που χρησιμοποιούν και συνδυάζουν οι ζωγράφοι όταν ζωγραφίζουν έναν πίνακα.

Η σημειωτική θεωρία του Halliday αποτελεί τη βάση της SFL, η οποία δύναται να υποστηρίξει τον εκπαιδευτικό προκειμένου να έχει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα στην τάξη, συνεπώς και τον ίδιο τον μαθητή, καθώς περιγράφει την τεχνικότητα της επιστημονικής γλώσσας (τεχνικοί όροι, αναφορές, επεξηγήσεις), το πώς και γιατί η χρήση της φυσικής γλώσσας διαφοροποιείται σε διαφορετικά πλαίσια, δηλαδή ποιες είναι οι γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα/ομιλητή, όπως επίσης και σε ποιες πτυχές της γλώσσας πρέπει να εστιάζει ο ίδιος ο μαθητής, ώστε να επικοινωνεί αποτελεσματικά σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Με άλλα λόγια, όταν ο μαθητής υιοθετεί καθημερινές πρακτικές που ενθαρρύνουν τον συγκεκριμένο τρόπο προσέγγισης εντός του μαθηματικού πλαισίου και είναι σε θέση να κάνει «γραμματικές μεταφορές» σε ένα κείμενο των μαθηματικών και, γενικότερα σε οποιοδήποτε κειμενικό είδος, σημαίνει ότι κατανοεί τη λειτουργία της γλώσσας, άρα έχει μαθηματική γνώση/ γνώση του συγκεκριμένου πεδίου και γενικότερα μαθηματική αντίληψη.

### 1.3.2 Αποδόμηση των μαθηματικών κειμένων και γλωσσικές προκλήσεις

Πρόσφατες μελέτες υποστηρίζουν ότι κατά τη μαθησιακή διαδικασία ο μαθητής αντιμετωπίζει διάφορες προκλήσεις εξαιτίας της συντακτικής, σημασιολογικής και πραγματιστικής φύσης των Μαθηματικών (de Oliveira & Cheng, 2011). Πιο απλά, τα κείμενα, τα οποία καλείται να διαβάσει ή να γράψει στο πλαίσιο της τάξης, θα λέγαμε ότι (πρέπει να) είναι δομημένα με κατάλληλο γραμματικό τρόπο για την απόδοση μαθηματικού νοήματος. Ωστόσο, αυτές τις γλωσσικές προκλήσεις (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007) ο μαθητής χρειάζεται να τις «ξεπακετάρει» μέσω της «γραμματικής μεταφοράς» αποφεύγοντας την απλοποίηση της γλώσσας ή τη χρήση καθημερινής γλώσσας (Halliday & Martin, 1993), η οποία μπορεί να αλλοιώσει το νόημα.

Αρχικά, τέτοιες προκλήσεις ο μαθητής συναντά στην ίδια τη φυσική γλώσσα, καθώς καλείται να μάθει «τι του λέει το κείμενο». Θα πρέπει να αναγνωρίζει τις συσχετιστικές διαδικασίες, τις οποίες υποδηλώνουν τα ρήματα και άλλοτε φαίνονται ξεκάθαρα, όπως στην περίπτωση του «είναι», που υποδηλώνεται μια σχέση ισότητας, ορισμού, άρα και συγκεκριμένων ιδιοτήτων

του ονόματος το οποίο συνδέει, ενώ άλλοτε υποδηλώνουν σιωπηρά ότι πρέπει να γίνει μια πράξη ή μια ενέργεια ή μια σειρά από πράξεις, όπως στο ρήμα «έχει». Μάλιστα, συχνά, η σειρά των πράξεων που πρέπει να γίνουν για να λυθεί ένα πρόβλημα, είναι αντίθετη από τη σειρά που εμφανίζονται τα στοιχεία στο κείμενο, όπως στην περίπτωση της απόδειξης ενός ισχυρισμού, συχνού φαινομένου στο πεδίο της Γεωμετρίας. Απόλυτα συνυφασμένο με το τελευταίο, μια προστακτική («έλεγξε») υποδηλώνει την εξέταση μια ιδιαίτερης συνθήκης, μιας υπόθεσης («εάν... τότε»). Επίσης, συναντάται με μεγάλη συχνότητα στα κείμενα και η χρήση παθητικής φωνής, η οποία μπορεί να δυσκολέψει ή να στρέψει την προσοχή του μαθητή σε λάθος κατεύθυνση, που θα τον εμποδίσει να διακρίνει το νόημα μιας φράσης (de Oliveira & Cheng, 2011· Halliday & Martin, 1993· Moschkovich, 1999, 2002, 2015· Schleppegrell, 2007· Schleppegrell, 2016).

Ακόμη, ο μαθητής απαιτείται να αντιλαμβάνεται την ονοματοποίηση του επιστημονικού λόγου, που περιλαμβάνει μία ποικιλία περιπτώσεων από ονόματα ή ονοματικά σύνολα, δηλαδή το εξειδικευμένο τεχνικό λεξιλόγιο (ορολογία) ενός επιστημονικού πεδίου, που συναντάται σε ένα γνωστικό αντικείμενο. Τα ονοματικά σύνολα υποδηλώνουν ορισμούς, ταξινομίες/κατηγορίες, από γενική σε ειδική διαδικασία ή αντίθετα, και αυτό συνήθως συμβαίνει με τα αφηρημένα ουσιαστικά, που περιγράφουν με ακρίβεια και αποδίδουν κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά, όπως και με τα επίθετα. Πολλές φορές ο μαθητής συναντά ονόματα ή ονοματικά σύνολα, δηλαδή τεχνικούς όρους, που συναντώνται και στην καθημερινή ζωή, ωστόσο διαφοροποιείται η σημασία τους (Halliday & Martin, 1993). Συχνή είναι και η εμφάνιση αντωνυμιών και η παρουσία του συνδέσμου «και». Στην τελευταία περίπτωση, συνήθως, υπάρχει «παράλειψη» κάποιου όρου της πρότασης, επειδή εννοείται από τα προλεγόμενα του συγγραφέα (de Oliveira & Cheng, 2011· Halliday & Martin, 1993).

Μία ακόμη πρόκληση του μαθητή είναι η πυκνότητα νοήματος, που με λίγα λόγια σημαίνει ότι τα ονόματα πλαισιώνονται πριν και μετά από άλλες φράσεις ή προτάσεις αντίστοιχα, όπως πολλά ονοματικά σύνολα και, γενικά, εμπρόθετες φράσεις, όπου η μια εξαρτάται από την άλλη ή κάποιες επιπλέον δευτερεύουσες προτάσεις (αναφορικές, αιτιολογικές, κτλ.), που παρεμβάλλονται («εγκιβωτισμός») και εξαρτώνται η μία από την άλλη και δε λειτουργούν ανεξάρτητα, αλλά προσδιορίζουν αναφορικά ένα όνομα (δίνοντάς του κάποια χαρακτηριστικά) ή επιρρηματικά ένα ρήμα (αιτιολογώντας μια διαδικασία, εξάγοντας ένα συμπέρασμα, αποδίδοντας μια αιτία ή συνέπεια, κτλ.). Για τον λόγο αυτό, η συστημική λειτουργική προσέγγιση εστιάζει σε κομμάτια της πρότασης που εκφράζουν ένα νόημα και όχι μεμονωμένα σε λέξεις. Κατά τη μαθηματική επικοινωνία, είναι σημαντική η αναγνώριση της

αξίας/λειτουργίας των ονομάτων και των συσχετιστικών διαδικασιών σε σχέση με τα συμφοραζόμενα (Halliday & Martin, 1993).

Τέλος, η αλληλουχία των προτάσεων και η στενή σύνδεση της μίας με την επόμενη είναι μια διαδικασία που ο μαθητής αδυνατεί να κατανοήσει αρκετές φορές είτε δε λαμβάνει υπόψη του καθόλου ή στον βαθμό που πρέπει. Σε ένα επιστημονικό κείμενο, σταδιακά, παρουσιάζονται τα δεδομένα και οι πληροφορίες του (λχ.: ένα ρήμα μπορεί στην επόμενη πρόταση να επαναδιατυπώνεται ως θέμα με τη μορφή ουσιαστικού ή τη θέση ενός ουσιαστικού να την παίρνει μια αντωνυμία). Με βάση την παραδοσιακή γραμματική, οι μαθητές ξέρουν ότι τα ρήματα δηλώνουν διαδικασία/ενέργεια, τα επίθετα δηλώνουν ένα χαρακτηριστικό και τα ουσιαστικά αντίστοιχα πρόσωπα, πράγματα, αφηρημένες καταστάσεις (Halliday & Martin, 1993).

Ωστόσο, σύμφωνα με τη συστημική λειτουργική γραμματική, όπως προαναφέρθηκε, αυτό δύναται να αλλάξει και οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι και τα ουσιαστικά που υπάρχουν σε ένα μαθηματικό κείμενο υποδηλώνουν μια διαδικασία, ένα λογικό επιχείρημα ή προσδίδουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες. Μάλιστα, χρειάζεται να ασκηθούν στην κριτική όταν διαβάζουν σε ένα κείμενο τα ονόματα που εμπεριέχονται και όλα τα στοιχεία που τα πλαισιώνουν, δηλαδή τα υποκείμενα, τα ρήματα και τους επιμέρους προσδιορισμούς (*“participants, processes, circumstances”*), διότι όλα συμμετέχουν σε μια διαδικασία, σε μια αλληλουχία πράξεων και αλληλοσυμπληρώνονται. Επομένως, η ονοματοποίηση που συναντάμε σε επιστημονικά κείμενα, όπως τα μαθηματικά, συνθέτει, συμπυκνώνει, λειτουργεί αφαιρετικά και τεχνικοποιεί τη γλώσσα της καθημερινής ζωής και αυτό πρέπει να το υιοθετήσει ως πρακτική ο μαθητής, όταν διαβάζει και προσπαθεί να αποδομήσει το κείμενο (Fang & Schleppegrell, 2008).

Πέραν αυτών των προκλήσεων, έρχεται να προστεθεί και μία ακόμη η οποία σχετίζεται με τη διαπροσωπική σχέση που αναπτύσσεται μεταξύ αναγνώστη και συγγραφέα («τι με προδιαθέτει το κείμενο να κάνω και πώς;») (de Oliveira & Cheng, 2011). Τούτο εξηγείται μέσα από τη διαδικασία ανάγνωσης και κατανόησης του κειμένου. Διαβάζοντας ο μαθητής, σιωπηλά ή φωναχτά, θα πρέπει να μάθει τον μαθηματικό συλλογισμό, ο οποίος χαρακτηρίζεται από σύμβολα (αριθμών, ισότητας, γεωμετρικούς τύπους, κοκ.) και μαθηματικές εκφράσεις (μ., τ.μ., Π, Ε, κοκ.), συμπυκνωμένα νοήματα (περίμετρος, ορθογώνιο) και αυστηρότητα, ενώ εντοπίζεται σε διάφορα σημεία του κειμένου και σε όλα τα στάδια κατά την επίλυση του προβλήματος (Schleppegrell, 2007). Αυτό συνεπάγεται ότι πρέπει να τα αναγνωρίζει, να ξεκινάει από κάπου και να καταλήγει σε ένα συμπέρασμα/μία λύση. Με λίγα λόγια, θα μάθει να νοηματοδοτεί το κείμενο ως μια δήλωση, ερώτηση, σχόλιο, να αποτιμά κάθε στοιχείο ως

«μια σειρά ενεργειών που επιτρέπεται/ πρέπει/πιθανόν να κάνει», όπου η κάθε μια από αυτές θα διαδέχεται την άλλη (Halliday & Martin, 1993).

Τέλος, ιδιαίτερο ρόλο διαδραματίζουν οι οπτικές αναπαραστάσεις που συνοδεύουν ένα κείμενο («πώς μεταδίδεται το μήνυμα του κειμένου;»). Αυτές πρέπει να συνδέονται με το γνωστικό υπόβαθρο του μαθητή και να ενθαρρύνουν τη μάθηση, καθώς με αυτό τον τρόπο ο μαθητής θα μάθει να διαβάζει τη «γραμματική» τους, ενώ, ακολουθώντας μια μαθηματική εξήγηση, θα είναι σε θέση να επεκτείνει τη γνώση του. Έτσι, όταν αλληλοεπιδρά με το κείμενο και στηρίζεται στις προϋπάρχουσες γνώσεις του, θα μπορεί να δημιουργήσει μια αναπαράσταση και να εξάγει συμπεράσματα (de Oliveira & Cheng, 2011). Φυσικά, καθοριστικό ρόλο –άμεσο και έμμεσο- στην αντιμετώπιση όλων αυτών των γλωσσικών προκλήσεων που παρουσιάστηκαν στη συγκεκριμένη υποενότητα, παίζει ο δάσκαλος (Pimta et al., 2009) (υποενότητα 1.3), ο οποίος λειτουργεί ως καθοδηγητής κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών και ενθαρρύνει τη χρήση του επιχειρηματικού λόγου (Mercer & Sams, 2006), τον διάλογο ανάμεσα στα μέλη της σχολικής τάξης του (Schleppegrell, 2007) και δίνει ευκαιρίες στον κάθε μαθητή, μέσα από τον σχεδιασμό κατάλληλων έργων (Prediger & Wessel, 2013· Smith & Stein, 1998· Stein et al., 1996· Stein & Smith, 1998) και τη διατύπωση κατάλληλων ερωτήσεων προς τον μαθητή (Kawanaka & Stigler, 1999), να προσεγγίσει κείμενα που θα αναδείξουν την τεχνικότητα της μαθηματικής γλώσσας και ο ίδιος να γίνει ο διαμεσολαβητής ανάμεσα στη χρήση της καθημερινής και επιστημονικής γλώσσας (Schleppegrell, 2007) με απώτερο σκοπό την ολόπλευρη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

### 1.3.3 Γλωσσικές πρακτικές ως εργαλεία αναγνωσιμότητας μαθηματικών κειμένων

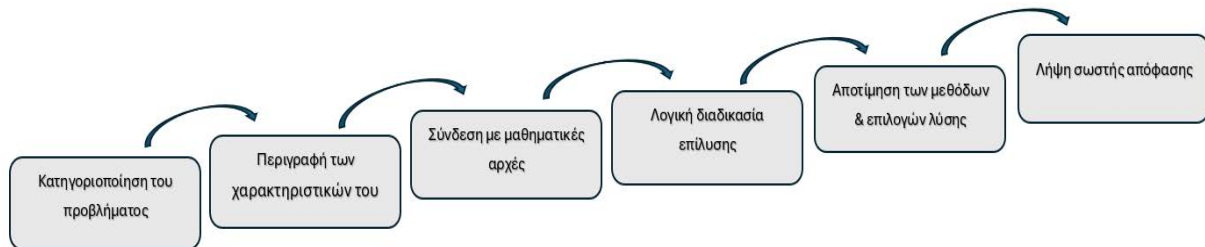
Οι Fang και Schleppegrell στο βιβλίο τους «Reading in secondary content areas» (2008, σελ. 34-38) προτείνουν καθημερινές πρακτικές άσκησης του προφορικού και γραπτού λόγου, τις οποίες ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενσωματώσει στην τάξη. Οι πρακτικές αυτές εστιάζουν στο να βοηθήσουν τον μαθητή να αντιληφθεί τον τρόπο που τα γλωσσικά μοτίβα έχουν αποτελεσματικότητα στη μετάδοση μιας πληροφορίας, στην οικοδόμηση της γνώσης, ενώ η εμπλοκή του μαθητή σε αυτές αποτελούν ένδειξη ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει σε βάθος το περιεχόμενο. Απευθύνονται ως επί το πλείστον σε μαθητές τους δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ μέρος αυτών αποτέλεσε βοηθητικό εργαλείο για τη διδακτική μου παρέμβαση και συνοψίζονται παρακάτω:

- Ο δάσκαλος με τους μαθητές του διαβάζουν φωναχτά το κείμενο και πηγαίνουν «μπρος- πίσω», από τους τεχνικούς όρους (μαθηματικό λεξιλόγιο) σε πιο οικείες καθημερινές λέξεις, δίνοντας αξία στους πρώτους και κατανοώντας τον λειτουργικό τους ρόλο κατά την αιτιολόγηση μιας διαδικασίας ή ενέργειας.
- Οι μαθητές επαναλαμβάνουν με λίγα λόγια το περιεχόμενο του κειμένου.
- Δοκιμάζουν να ξαναγράψουν κάποιο απόσπασμα από ένα μαθηματικό κείμενο το οποίο έχει πυκνό νόημα, το οποίο θα απευθύνεται σε παιδιά μικρότερης ηλικίας που δεν έχουν το ίδιο γνωστικό υπόβαθρο με τους ίδιους, προσέχοντας να μην αλλοιωθεί το νόημα.
- Συγκρίνουν κείμενο που έχουν γράψει οι ίδιοι με αντίστοιχο επιστημονικό.
- Δίνουν έμφαση στην πυκνότητα του νοήματος σε μια περίοδο, καθώς χωρίζουν μια περίοδο σε επιμέρους κομμάτια, διακρίνοντας τους επιμέρους όρους κάθε ονοματικού συνόλου (ΟΣ), δηλαδή περιφερειακά του ονόματος τι υπάρχει. Αντίστροφα, σε ένα όνομα προσθέτουν περιφερειακά στοιχεία που θα το κάνουν να έχει πλήρες, ολοκληρωμένο, διευρυμένο νόημα, άρα δε θα είναι ανακριβές ή ελλιπές.
- Διακρίνοντας τα επιμέρους στοιχεία μιας περιόδου αναλύουν το κείμενο και το κατανοούν σταδιακά.
- Ακόμη, ακολουθώντας την ίδια πρακτική, συζητούν για το θέμα που μιλάει ένα κείμενο, σε ποιους απευθύνεται, για ποιο σκοπό και παρατηρούν τον βαθμό πυκνότητας του κειμένου. Αυτό, όταν γίνεται σε διαφορετικά κείμενα, τα οποία ποικίλουν σε θεματικές επιλογές, βοηθάει στο να έχουν ένα μέτρο σύγκρισης και να αντιληφθούν ότι είναι οι βασικοί λόγοι που ωθούν τον συγγραφέα σε συγκεκριμένες γλωσσικές επιλογές και που διαφοροποιούν την πυκνότητα τους γραμματικής του κειμένου.
- Παράγουν με τον δάσκαλο δικό τους κείμενο ξεκινώντας με ένα σύνθετο ΟΣ και προσθέτοντας σταδιακά και επιμέρους γλωσσικούς όρους, συντάσσουν προτάσεις με νόημα μέχρι να δημιουργηθεί μια ολοκληρωμένη περίοδος. Συνεχίζουν με τη δημιουργία μίας νέας περιόδου που συνδέεται με την προηγούμενη.

#### 1.3.4 Τα 6 στάδια επίλυσης προβλημάτων με βάση την SFL

Το θεωρητικό πλαίσιο της SFL περιγράφει **6 στάδια** (βλ. εικ. 3) από τα οποία πρέπει να περάσει ο μαθητής προκειμένου να κατανοήσει και να επιλύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα γεωμετρίας, ενώ μπορεί να χρειαστεί να επανέλθει σε κάποιο, ωστόσο φτάσει στην απάντησή

του. Αυτά είναι: κατηγοριοποίηση του προβλήματος (“*classification*”), περιγραφή των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του (“*description*”), γνώση των μαθηματικών αρχών (“*principles*”), γνώση της λογικής διαδικασίας επίλυσης (“*sequence*”), αποτίμηση των διαθέσιμων μεθόδων και επιλογών λύσης (“*evaluation*”) και λήψη σωστής απόφασης (“*choice*”) (Fang & Schleppegrell, 2008, σελ. 74-82).



Εικ. 3 Στάδια επίλυσης προβλήματος

Τα παραπάνω στάδια διαδέχονται το ένα το άλλο, απαντώντας ο μαθητής σε εφτά συγκεκριμένες ερωτήσεις:

### 1. Τι ζητάει το πρόβλημα να κάνει; (στάδιο 1)

Δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ευθεία ερώτηση, αλλά μια προστακτική ρήματος («Απόδειξε, Βρες, Έλεγξε, Εξήγησε»). Φυσικά, και στις δύο περιπτώσεις ο μαθητής πρέπει να ακολουθήσει μια διαδικασία για να οδηγηθεί στην επίλυση, να ελέγξει μία υπόθεση ή να αποδείξει έναν ισχυρισμό.

### 2. Ποια είναι τα στοιχεία της πρότασης που δίνουν συναφείς πληροφορίες (participants, processes, circumstances); (στάδιο 2)

Αναλύει τις πληροφορίες του κειμένου, καταγράφοντας τους συμμετέχοντες (ονόματα/ΟΣ), τις συσχετιστικές διαδικασίες (ρήματα) και τις συνθήκες/πλαίσιο του προβλήματος (επιμέρους γλωσσικά στοιχεία). Τις πληροφορίες αυτές τις αντλεί από τα πολυ-σημειωτικά συστήματα του κειμένου (μαθηματικά σύμβολα, οπτικές αναπαραστάσεις και γραφήματα), τα γραμματικά μοτίβα (τεχνικό λεξιλόγιο, ΟΣ, συσχετιστικές διαδικασίες/ρήματα, συνδέσμους και εγκιβωτισμένες προτάσεις και τη σχέση τους με τους υπόλοιπους όρους της πρότασης και γενικότερα του κειμένου). Επίσης, μέσα από την αλληλεπίδρασή του με την υπόλοιπη τάξη και τον εκπαιδευτικό, κατά τη μαθηματική επικοινωνία, μπορεί να αποδομεί το νόημα μιας πρότασης, που έχει ΟΣ με πυκνό νόημα ή να βρίσκει έναν σημαντικό όρο της, που παραλείπεται –επειδή εννοείται-, π.χ. το ρήμα «είναι». Ειδικότερα, για το ρήμα «είναι», μπορεί να φανερώνει τα χαρακτηριστικά ενός ονόματος, δηλαδή ο μαθητής να χρειαστεί να ανατρέξει σε έναν ορισμό, αλλά πιθανό να δηλώνει και το «πού» ή μια μέτρηση. Είναι κομβικής σημασίας η γραμματική ανάλυσή του, καθώς δείχνει στον μαθητή ό,τι περιγράφεται και καθορίζει το πλαίσιο του προβλήματος.

### 3. Ποιες μαθηματικές έννοιες αναδεικνύουν οι πληροφορίες του κειμένου; (στάδιο 3)

Συνδέει τις πληροφορίες που εντόπισε στο στάδιο 2 με μαθηματικές έννοιες, δηλαδή, κατά κάποιο τρόπο, «μεταφράζει» το νόημα της κάθε λέξης- κλειδιού του κειμένου.

Σύμφωνα με τους Halliday και Martin (1993), όταν υπάρχουν τεχνικοί όροι (πχ. Εμβαδόν) χρειάζεται να υπάρξει εξοικείωση με αυτούς, να «διυλιστούν» μέσω μιας λογικής εξήγησης/ ενός επιχειρήματος (που μπορεί να είναι εμφανές ή να χρειάζεται μια αλληλουχία σκέψης) ή ενός ορισμού («διύλιση»). Αντίθετα, όταν υπάρχει ένα όνομα (ή ΟΣ) το οποίο υποδηλώνει μια μαθηματική έννοια, πρέπει ο μαθητής να «συμπυκνώσει» τη σημασία του, επίσης με τον ίδιο τρόπο («συμπύκνωση», π.χ. περίφραξη= Περίμετρος). Με απλά λόγια, να κάνει μία «κίνηση μπρος – πίσω».

Στην περίπτωση της απόδοσης χαρακτηριστικών σε ένα όνομα ή της σχέσης ανάμεσα σε δύο ονόματα χρειάζεται να δίνεται έμφαση στη σειρά με την οποία πρέπει να διατυπωθεί μια πληροφορία (κατηγορία και υποκατηγορίες) (Schleppegrell, 2007). Για παράδειγμα μπορεί να ειπωθεί «Το τετράγωνο είναι ένα τετράπλευρο», αλλά όχι «Τα τετράπλευρα είναι τετράγωνα» ή «Το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο», μα όχι «Το ορθογώνιο είναι ένα τετράγωνο» (δεν αντιστρέφονται οι όροι!). Αντίθετα, «Περίμετρος είναι το άθροισμα του μήκους των πλευρών ενός σχήματος» μπορεί να ειπωθεί και αντίστροφα «το άθροισμα του μήκους των πλευρών ενός σχήματος είναι η Περίμετρός του»!

### 4. Ποιες είναι οι μαθηματικές αρχές που γνωρίζει για να παρουσιάσει αυτές τις μαθηματικές έννοιες; (στάδιο 3)

Αποδομεί το νόημα ενός ΟΣ, ενός ρήματος, μιας οπτικής αναπαράστασης (ενός σχήματος) ή ενός πίνακα ή αντιθέτως, σχεδιάζει ο ίδιος ένα σχήμα, οργανώνει και καταγράφει τα στοιχεία που χρειάζεται σε πίνακα ή ακόμη, χρησιμοποιεί και απτά υλικά, για να λύσει το πρόβλημα.

### 5. Ποιες διαδικασίες μπορεί να ακολουθήσει για να χρησιμοποιήσει αυτές τις μαθηματικές αρχές; (στάδιο 4)

Χρησιμοποιώντας τις πρότερες γνώσεις του, επιλύει το πρόβλημα. Αρκετές φορές μπορεί να χρειαστεί να ακολουθήσει αντίστροφη πορεία από τη σειρά που δίνονται οι πληροφορίες στο κείμενο, ξεκινώντας από το τέλος προς την αρχή.

Συχνά, στο στάδιο αυτό, όταν ο μαθητής αντιλαμβάνεται ότι υπολείπονται σημαντικά στοιχεία, επιστρέφει στα δύο προηγούμενα βήματα, προσπαθώντας να εντοπίσει μαθηματικές έννοιες που δεν ανέδειξε ή να ανακαλέσει κάποια μαθηματική αρχή που θα του χρησιμεύσει.

Αξίζει, επίσης, να ληφθεί υπόψη από τον δάσκαλο, ότι, ιδιαίτερα στο πεδίο της γεωμετρίας, πολλές μαθηματικές ενέργειες του μαθητή παραμένουν «σιωπηλές», θεωρούνται δεδομένες για τον δεύτερο και, για τον λόγο αυτό, δε δηλώνονται ρητά οι πράξεις που κάνει ή παραλείπει

να διατυπώνει λογικά επιχειρήματα που επαληθεύουν τη λύση του προβλήματος (O'Halloran, 2000, όπως αναφέρεται στο Schleppegrell, 2007).

**6. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας που ακολούθησε; (στάδιο 5)**

Ο μαθητής αναφέρει το αποτέλεσμα του προηγούμενου σταδίου, και συνεπώς την απάντηση στο αρχικό ζητούμενο του προβλήματος. Αν πρόκειται για την απόδειξη της αρχικής δήλωσης του προβλήματος, χρειάζεται να διατυπώσει μια λογική εξήγηση σε αυτή.

**7. Έχει νόημα η λύση που βρέθηκε; (στάδιο 6)**

Αν μπορεί να διατυπώσει ένα λογικό επιχείρημα για κάθε βήμα που ακολουθεί κατά την επίλυση του προβλήματος, τότε η λύση που θα βρει, θα έχει νόημα. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή, ωστόσο, συχνά προηγείται της έκτης, αν ο μαθητής έχει αξιολογήσει τη διαδικασία που σκοπεύει να ακολουθήσει για να λύσει το πρόβλημα, προτού προχωρήσει σε αυτή. Τέλος, κατά τη διαδικασία αποτίμησης του προβλήματος, αλλά και στα προηγούμενα στάδια επίλυσής του, ο εκπαιδευτικός έχει υποστηρικτικό ρόλο και βοηθάει τους μαθητές στο να διατυπώσουν ορθά μια σκέψη τους και, γενικότερα, να εκφραστούν με μαθηματικό τρόπο. Ενθαρρύνει τη χρήση συνδέσμων, όπως «εάν, τότε, άρα, επομένως, διότι, έτσι» προκειμένου να υπάρχει λογική συνοχή στην όλη διαδικασία χωρίς παραλείψεις.

## 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Το δεύτερο σκέλος της εργασίας παρουσιάζει με συνοπτικό τρόπο πορίσματα μελετών που έχουν διεξαχθεί εκτενώς σε διεθνές επίπεδο γύρω από τη διαθεματική προσέγγιση Μαθηματικών και Γλώσσας, καθώς το ζήτημα έχει διερευνηθεί κατά καιρούς ποικιλοτρόπως, αναδεικνύοντας τη σχέση των δύο γνωστικών αντικειμένων. Μάλιστα, οι Friedland et al. (2011) σε μία βιβλιογραφική ανασκόπηση ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί στον χώρο της Γλωσσολογίας και των Μαθηματικών, συμπεραίνουν ότι παρόλο που χρησιμοποιούνται διαφορετικές ορολογίες, εν τέλει προτείνονται παρόμοιες γλωσσικές στρατηγικές για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επίσης, η παρούσα βιβλιογραφική αναζήτηση εστίασε στη μελέτη των διαφόρων παραμέτρων οι οποίες επηρεάζουν την ικανότητα του μαθητή να κατανοεί και να επιλύει προβλήματα και σε ενδιαφέροντα ερευνητικά συμπεράσματα που δείχνουν ότι η ενσωμάτωση γλωσσικών στοιχείων στο γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών υποστηρίζει την ανάπτυξη της ικανότητας αναγνωσιμότητας των μαθηματικών κειμένων και κατανόησης του μαθηματικού λόγου, ενώ διευκολύνει τις μαθηματικές διεργασίες που απαιτούνται για την επίλυση μίας προβληματικής κατάστασης.

### 2.1 Διαθεματικές έρευνες στα Μαθηματικά και τη Γλώσσα

Παλαιότερες και μεταγενέστερες έρευνες ενισχύουν την άποψη ότι η ιδιαίτερη φύση της επιστήμης του μαθηματικού λόγου ταλαιπωρεί τα παιδιά, ενώ πλέον τα ερευνητικά πορίσματα δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην προαγωγή των γλωσσικών δεξιοτήτων (προφορικών και γραπτών) και τη διασύνδεσή τους με τη μαθηματική επίδοση του παιδιού (Caponera et al., 2016· Fogelberg et al., 2008· Friedland et al., 2011· Herbel-Eisenmann, 2002· Morgan, 2002· Romberg et al., 2005· Schleppegrell, 2007), καθώς ο μαθηματικός λόγος παρουσιάζει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τεχνικότητας της ακαδημαϊκής/επιστημονικής γλώσσας (Halliday, 1978· Halliday & Martin, 1993· Purpura et al., 2017· Riccomini et al., 2015· Shanahan & Shanahan, 2012). Έτσι, υπερισχύει η άποψη ότι ο εκπαιδευτικός/ερευνητής οφείλει να λαμβάνει υπόψη αυτές τις παραμέτρους και να τις αξιοποιεί (Walkington et al., 2018), παρέχοντας ευκαιρίες προσέγγισης μαθηματικών κειμένων μέσα από τη συστηματική χρήση της τεχνικότητας της γλώσσας (Halliday & Martin, 1993). Άλλωστε, η σύγχρονη μαθηματική έρευνα διευρύνοντας και εμπλουτίζοντας το πεδίο του ενδιαφέροντός της υποστηρίζει τη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων που αξιοποιούν τη μαθηματική γλώσσα των μαθητών ως μια ευρεία έννοια και δεν τη διαχωρίζουν από τη μαθηματική ανάπτυξη. Αυτό σημαίνει ότι η μαθησιακή διαδικασία, και πιο συγκεκριμένα η μαθηματική επικοινωνία, επιτυγχάνεται μέσα από τη μελέτη των

πολλαπλών αναπαραστάσεων, όπως διαγράμματα, σύμβολα, μοντέλα, προφορικό και γραπτό λόγο, που στο σύνολό τους βοηθούν το παιδί να εκφραστεί με ακρίβεια. Αυτές οι αναπαραστάσεις επιτρέπουν στους μαθητές να έχουν ενεργό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης και να δουν τις Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών από διαφορετικές οπτικές γωνίες αναπτύσσοντας μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση (Herbel- Eisenmann, 2002).

Σύμφωνα με τους Halliday και Martin (1993), η εξοικείωση με την τεχνικότητα του επιστημονικού λόγου στα προβλήματα γενικά, και, ειδικότερα σε προβλήματα γεωμετρίας του επιπέδου, ως εργαλείου αναγνωσιμότητας, οδηγεί στην εσωτερίκευση της μαθηματικής γλώσσας, με την ενίσχυση:

- της χρήσης του επιστημονικού λεξιλογίου και πρακτικών τεχνικής επεξεργασίας σε επίπεδο κειμένου -λέξης, πρότασης και παραγράφου
- της αναγνώρισης γραμματικών μοτίβων του μαθηματικού γραμματισμού
- της ανασύνθεσης και αναδόμησης της μαθηματικής πραγματικότητας, εν προκειμένω του προβλήματος.

Επεκτείνοντας τη λειτουργική γλωσσολογική προσέγγιση του Halliday (1978), η εκπαιδευτική έρευνα προτείνει εναλλακτικές γλωσσικές παρεμβάσεις όπου οι μαθητές ακολουθούν συγκεκριμένες στρατηγικές: προβλέπουν, αποσαφηνίζουν, οπτικοποιούν, κάνουν περίληψη, δημιουργούν συνδέσεις και εξάγουν συμπεράσματα, διατυπώνουν ερωτήσεις, σκέφτονται δυνατά, αναζητούν την κεντρική ιδέα στο κείμενο, αναπαριστούν, διακρίνουν τις χρήσιμες και περιττές πληροφορίες και κρατούν χρήσιμες σημειώσεις (Fang και Schleppegrell, 2008). Ωστόσο, τα πορίσματα των πρώτων ερευνών, όπως φαίνεται και παρακάτω, δίνουν έμφαση σε μεμονωμένα γλωσσικά χαρακτηριστικά, τα οποία χρειάζεται μεν να λαμβάνει ο εκπαιδευτικός υπόψη κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, αλλά δεν πρέπει να παραλείπει μία σημαντική παράμετρο, αυτή του τρόπου λειτουργίας των γλωσσικών χαρακτηριστικών (*μεταλειτουργία*), καθώς ο ρόλος ύπαρξής τους συμβάλλει στην ακρίβεια, την επισημότητα και την τεχνικότητα του μαθηματικού λόγου (de Oliveira & Cheng, 2011). Μάλιστα, οι del Prado Hill et al. (2016) και οι McMillen et al. (2010) συστήνουν καινοτόμες παρεμβάσεις εντός ενός πλαισίου σχεδιασμού της διδασκαλίας, που προάγει τον μαθηματικό γραμματισμό, με λίστες ελέγχου ποικίλων γλωσσικών εργαλείων, ώστε ο σύγχρονος εκπαιδευτικός να επιλέγει τα κατάλληλα για την τάξη του και να έχει τη δυνατότητα επαναξιολόγησης του εκπαιδευτικού του έργου προς όφελος του μαθητή.

Προγενέστερες μελέτες, λοιπόν, έχουν δώσει μεγαλύτερη έμφαση στην ανάπτυξη της δεξιότητας ανάγνωσης, περιγράφοντας την αλληλεπίδραση που υπάρχει μεταξύ τριών παραγόντων, του μαθητή ως αναγνώστη, του παιδαγωγικού κλίματος στην τάξη, το οποίο είτε

ενθαρρύνει τη γνωστική διαδικασία ανάγνωσης και τη μαθηματική επικοινωνία είτε τις αποκλείει, αλλά και των ιδιαίτερων γλωσσικών χαρακτηριστικών του κάθε κειμενικού είδους, τα οποία καθορίζουν το επίπεδο κατανόησης του μαθηματικού λόγου (Barton & Heidema, 2002). Για τον λόγο αυτό προτείνουν εναλλακτικές γλωσσικές στρατηγικές που η κάθε μία επιτυγχάνει και μία πολύπλοκη μαθηματική διαδικασία. Χαρακτηριστικές είναι ο εντοπισμός λέξεων-κλειδιών (Kresse, 1984), η συμπλήρωση εννοιολογικού χάρτη και ο καταιγισμός ιδεών, που δίνουν ώθηση στον μαθητή να αναδείξει τις προϋπάρχουσες γνώσεις του πάνω στις οποίες θα οικοδομήσει τη νέα (Barton & Heidema, 2002), οι αναλυτικές γραπτές οδηγίες και τα σχεδιαγράμματα αυτοσυμπλήρωσης, που τον καθοδηγούν σε κάθε βήμα επίλυσης του προβλήματος (Braselton & Decker, 1994) και τον βοηθούν στο να κατανοήσει τη σύνθετη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην αναζήτηση της απάντησης σε μία ερώτηση ή στην εύρεση ενός ζητούμενου και την ίδια την ερώτηση ή το ζητούμενο (McIntosh & Draper, 1995, 1996). Εμπλουτίζοντας προηγούμενες μελέτες, οι οποίες εστιάζουν σε ζητήματα λεξιλογίου και κειμενικών ειδών, οι Bossé και Faulconer (2008) συνδυάζουν την εφαρμογή στρατηγικών ανάγνωσης και γραφής ως περισσότερο αποτελεσματικές για τη μαθηματική ανάπτυξη και την απόκτηση γλωσσικών δεξιοτήτων, καθώς ο μαθητής όταν διαβάζει και γράφει μαθηματικά κείμενα, σταδιακά εξοικειώνεται με τη σύνθετη φύση του γνωστικού αντικειμένου. Ενδιαφέρουσα περίπτωση αξιοποίησης της στρατηγικής γραφής κατά τη διδασκαλία της γεωμετρίας είναι ο σχεδιασμός πρωτότυπων έργων που βασίζεται στην ανάθεση σχεδίου εργασίας σε πραγματικές συνθήκες, όπου οι μαθητές εκπονούν δημιουργικές δραστηριότητες, οι οποίες προάγουν τον μαθηματικό λόγο, καθώς ο εκπαιδευτικός θέτει γλωσσικούς περιορισμούς όσον αφορά στη χρήση μη ορθών ή καθημερινών λέξεων (Gibson & Thomas, 2005). Πιο απαιτητική στην ενσωμάτωση σε μικρές τάξεις, καθώς προτείνεται για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αλλά δίνει τη δυνατότητα εξατομίκευσης της διδασκαλίας και προσαρμογής στο μαθησιακό προφίλ κάθε μαθητή, είναι η συγγραφή και ανταλλαγή γραμμάτων με μαθηματικό περιεχόμενο ανάμεσα σε μαθητές (Norton et al., 2009). Με λίγα λόγια, η ενσωμάτωση τέτοιου είδους πρακτικών, όπου ο μαθητής είναι ικανός να διαβάζει ή να παράγει κείμενο με πυκνό νόημα, δηλαδή να συνδυάζει αφηρημένες έννοιες, σύμβολα, πίνακες, γραφήματα, σχεδιαγράμματα και οπτικές αναπαραστάσεις, φανερώνουν ότι έχει κατανοήσει σε βάθος τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί (Bossé & Faulconer, 2008).

Αρκετά μεταγενέστερα, οι Adams et al. (2015) εστιάζουν και οι ίδιοι το ενδιαφέρον τους στη δυσκολία που παρουσιάζει το λεξιλόγιο, ωστόσο προτείνουν τη μείωση των προβληματικών γλωσσικών χαρακτηριστικών που θεωρείται ότι υπάρχουν στη μαθηματική γλώσσα με την παροχή συστηματικής καθοδήγησης του δασκάλου προς τον μαθητή. Συγκεκριμένα,

προτείνουν στον εκπαιδευτικό να συνοδεύει τα προβλήματα που θέτει στον μαθητή με στοχευμένες γραπτές οδηγίες ως βοηθητικά εργαλεία για την αποσαφήνιση δύσκολων ορισμών ή σύνθετων εννοιών, όπως και για αποφυγή πιθανών παρανοήσεων και για την επισήμανση σημαντικών μαθηματικών διαδικασιών, ενώ κάτι τέτοιο απαιτεί υψηλές νοητικές διεργασίες και ανεπτυγμένες γλωσσικές δεξιότητες, που οδηγούν σε βαθιά εννοιολογική κατανόηση των προβλημάτων.

Οι Ehlinger και Pritchard (1994) εξετάζοντας τρία ζητήματα που αφορούν στην ανάδειξη των λανθασμένων αντιλήψεων των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος και στην κατανόηση της δομής των κειμένων σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, προτείνουν την τεχνική «*Think alouds*», η οποία εστιάζει τόσο στον προφορικό όσο και στον γραπτό λόγο και βοηθά τον μαθητή να αναπαραστήσει με αυτόνομο τρόπο τη σκέψη του κατά την αλληλεπίδραση με ένα επιστημονικό κείμενο. Ειδικότερα, για το μάθημα των μαθηματικών περιγράφουν το μοντέλο στρατηγικής κατανόησης «*Questioning yourself, Giving evidence, Rereading*», όπου ο εκπαιδευτικός κάνει επίδειξη του τρόπου που αλληλεπιδρά ως αναγνώστης με ένα κείμενο στο οποίο παρουσιάζεται μία προβληματική κατάσταση και, εν συνεχεία, οι μαθητές σε μικρές ομάδες επικοινωνούν και αυτοί με μαθηματικό τρόπο.

Επίσης, στην ανάδειξη του προφορικού και γραπτού λόγου εστιάζουν και οι Carter και Dean (2006), οι οποίοι πραγματοποιούν εκπαιδευτική παρέμβαση σε μαθητές με τη διδασκαλία γλωσσικών στρατηγικών ανάγνωσης, που στοχεύουν στην αποκωδικοποίηση του μαθηματικού λεξιλογίου, τη διατύπωση σύνθετων ερωτήσεων, την υπόδειξη γραπτών οδηγιών με βάση το γνωστικό επίπεδο των παιδιών. Παρομοίως, οι Borasi et al. (1998), στηριζόμενοι στις αρχές της «συνδιαλλακτικής θεωρίας ανάγνωσης» (“transactional reading theory”), αν και δεν παραλείπουν τη σημασία των πρότερων γνώσεων και αναγνωστικών εμπειριών του μαθητή, εντείνουν την προσοχή τους όχι τόσο στην αποκωδικοποίηση τεχνικών όρων, που συναντά ο αναγνώστης σε ένα μαθηματικό κείμενο και στις ερμηνευτικές απαντήσεις που δίνει, όσο στην εξερεύνηση και αποδόμηση όλου του κειμένου. Προτείνουν, λοιπόν, τρεις γλωσσικές στρατηγικές τις οποίες μπορεί ο εκπαιδευτικός να ενσωματώσει και να επεκτείνει κατά τον σχεδιασμό της διδασκαλίας του, προκειμένου να ωθήσει το παιδί να συνδιαλλαχτεί με το κείμενο, να συλλάβει το νόημά του και το «τι θέλει να πει ο συγγραφέας», αλλά και κατ’ επέκταση να αναστοχαστεί την αξία των μαθηματικών ιδεών. Ωστόσο, το να φωτίσει ο εκπαιδευτικός πτυχές της ιδιαίτερης φύσης των μαθηματικών, θέτοντας κατάλληλες ερωτήσεις στους μαθητές, ώστε αυτοί να επικοινωνήσουν με μαθηματικό τρόπο, είναι μία πρόκληση για τον ίδιο, καθώς έχει αποδειχθεί πως το τι αντιλαμβάνεται ο εκπαιδευτικός ότι συμβαίνει μέσα

στην τάξη και τι προσμένει ο ίδιος, μπορεί να διαφέρει από το τι πραγματικά σκέφτεται ο κάθε μαθητής (Bennett, 2010· Kawanaka & Stigler, 1999).

Άλλες μελέτες, που διεξήχθησαν την ίδια δεκαετία και εξετάζουν ειδικότερα μεταβλητές που επηρεάζουν την κατανόηση και την επίδοση δίγλωσσων μαθητών στην επίλυση προβλήματος, αποδεικνύουν ότι πέραν του εμπειρικού τους υπόβαθρου, που και αυτό παίζει καίριο ρόλο, η γλωσσική πρακτική της αναδιατύπωσης του κειμένου με απλοποιημένη δομή λειτουργεί αποτελεσματικά, καθώς μειώνονται τα ερμηνευτικά λάθη (Bernardo, 1999). Επίσης, αν και το πεδίο της διδασκαλίας της γλώσσας σε δίγλωσσους μαθητές δεν αφορά άμεσα στην παρούσα έρευνα, αλλά έμμεσα, καθώς και σε τέτοιου είδους μελέτες διερευνάται η σύνδεση γλώσσας και μαθηματικών και, μάλιστα, φαίνεται εντονότερα ο καθοριστικός ρόλος του προφορικού και γραπτού λόγου, εντούτοις, ο εκπαιδευτικός/ερευνητής μπορεί να αντλήσει χρήσιμα δεδομένα για την κατανόηση αυτής της σχέσης και τη βελτίωση του εκπαιδευτικού του έργου. Αυτό συμβαίνει διότι σε σχετικές συζητήσεις γίνεται λόγος για το κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο της τάξης, στο οποίο αναπτύσσεται η μαθηματική επικοινωνία. Φαίνεται, λοιπόν, ότι δεν απασχολεί τόσο η κατάκτηση του μαθηματικού λεξιλογίου ή η απλοποίηση της δομής της γλώσσας όσο ο σχεδιασμός της διδασκαλίας με βάση το κοινωνικό και πολιτισμικό υπόβαθρο των παιδιών, όπου ο δάσκαλος ενσωματώνει κατάλληλες πρακτικές στη σχολική καθημερινότητα και δίνει ευκαιρίες στους μαθητές να διαπραγματεύονται μαθηματικά νοήματα και να εκφράζονται συνδυάζοντας πολλαπλούς τρόπους ανάλογα με το πλαίσιο της τάξης (Moschkovich, 2002, 2015).

Επιστρέφοντας, ωστόσο, στο ζήτημα της αναγνωσιμότητας των μαθηματικών κειμένων και του τρίπτυχου αναγνώστη, συγγραφέα και του πλαισίου που θέτει ο τελευταίος, και εκπαιδευτικού, όπως ισχυρίζονται και οι Meaney και Flett (2006), στηριζόμενοι στη σημειωτική θεωρία του Halliday (1978), το στάδιο της ανάγνωσης ενός προβλήματος είναι κομβικής σημασίας και πρέπει να αφιερώνεται όσος χρόνος χρειάζεται, διότι πρέπει να δίνεται στον μαθητή η ευκαιρία να αντιλαμβάνεται σταδιακά το πλαίσιο του προβλήματος και τον λόγο που γράφει ο συγγραφέας κάθε στοιχείο. Για παράδειγμα, μέσα από την προσέγγισή τους (*«Read- Do- Think ×2»*), περιγράφουν τη συγκεκριμένη μαθησιακή διαδικασία κατά την οποία το παιδί εμπλέκεται σε μια προσπάθεια να γίνει κατανοητό από το ίδιο τι χρήσιμη πληροφορία δίνεται για την επίλυση του προβλήματος και τι απουσιάζει, να καταγράφει σημειώσεις και να δημιουργεί οπτικές αναπαραστάσεις, που το βοηθούν να φτάσει πιο κοντά στην ολοκλήρωσή του, να αποδίδει μαθηματικό νόημα σε αυτές και, τέλος, να μοιράζεται τις ιδέες του και να επεκτείνει τη νέα γνώση σε άλλα πεδία. Στη διαδικασία αυτή ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά με τον μαθητή έχοντας ρόλο διευκολυντή και καθοδηγητή.

Προσανατολισμένες στην ίδια φιλοσοφία είναι και μεταγενέστερες επιστημονικές έρευνες που έχουν διεξαχθεί γύρω από το μοντέλο της Συστημικής Λειτουργικής Γλωσσολογίας, το οποίο περιγράφεται εκτενώς στην υποενότητα 1.3 και πλαισιώσε την παρούσα εργασία. Συνοπτικά, αναφέρεται ότι τέτοιες μελέτες της Εφαρμοσμένης Γλωσσολογίας και της Δεύτερης Γλώσσας αξιοποιούν τη μεταλειτουργία της αγγλικής γλώσσας ως ξένης σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, ενώ τα πορίσματά τους κατ' επέκταση εμπλουτίζουν την εκπαιδευτική έρευνα γύρω από τη γλωσσολογική προσέγγιση της διδασκαλίας των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, προτείνουν την εφαρμογή γλωσσικών πρακτικών που επιτρέπουν τη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού κειμένου -με τον μαθητή σε ενεργό ρόλο- μέσω της αποδόμησής του, προχωρώντας σταδιακά από πρόταση σε πρόταση, αναλύοντας με κριτική ματιά τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα και το πώς οικοδομείται μέσα από αυτές το νόημα του κειμένου (Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007, 2016) και, κυρίως, δίνεται έμφαση στη μεταλειτουργία της μαθηματικής γλώσσας (de Oliveira & Cheng, 2011).

Εν κατακλείδι, αυτό που ενδιαφέρει τους σύγχρονους μελετητές είναι η απόκτηση της λειτουργικής γνώσης της γλώσσας, καθώς και η υιοθέτηση αποτελεσματικών στρατηγικών αναγνωσιμότητας (de Oliveira & Cheng, 2011· Schleppegrell, 2007, 2016) για την επίλυση ρεαλιστικών/μη τυπικών προβλημάτων (Schoenfeld, 1985). Παράλληλα, προσδοκάται η ενθάρρυνση του μαθητή να αναπαριστά τη σκέψη του με διάφανο τρόπο, με τη βοήθεια κατάλληλων ερωτήσεων (Kawanaka & Stigler, 1999), ώστε να επιτευχθεί η μετάβαση από τον σχολικό στον επίσημο μαθηματικό λόγο (Morgan, 2002). Με λίγα λόγια, καίριο ζήτημα είναι η βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ο εξοπλισμός του μαθητή με τις βέλτιστες γνωστικές δεξιότητες που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο του 21ου αι. (Shanahan & Shanahan, 2012).

### 3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

#### 3.1 Σκοπός έρευνας

Σκοπός είναι να διερευνηθεί ο τρόπος ενσωμάτωσης γλωσσικών τεχνικών ως εργαλείου αναγνωσιμότητας στην επίλυση προβλημάτων επίπεδης γεωμετρίας της Ε΄ Δημοτικού μέσα από την ανάπτυξη κατάλληλου διδακτικού υλικού.

#### 3.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που προέκυψαν από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση και αποτέλεσαν την αφορμή για τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας είναι:

1. Με ποιον τρόπο οι γλωσσικές τεχνικές ως εργαλείο αναγνωσιμότητας μπορούν να ενσωματωθούν στη διαδικασία επίλυσης αντίστοιχων προβλημάτων;
2. Με ποιον τρόπο οι γλωσσικές τεχνικές μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν το επίπεδο κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου, ώστε να αναπτύξουν μαθηματικές δεξιότητες και να βελτιώσουν τη στάση τους απέναντι στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων;
3. Με ποιον τρόπο ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη χρήση γλωσσικών τεχνικών κατά τη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων που προάγουν τον μαθηματικό γραμματισμό;

#### 3.3 Σχεδιασμός του διδακτικού πειράματος

Ως προς τη μεθοδολογία της έρευνας χρησιμοποιήθηκε από την ερευνήτρια/εκπαιδευτικό το διδακτικό πείραμα. Το εν λόγω παράδειγμα στηρίζεται σε συγκεκριμένες αρχές, που πηγάζουν από τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης γύρω από τη μαθηματική εκπαίδευση (Noddings, 1990· Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 2) και συνεισφέρει στην ανάπτυξη της εκπαιδευτικής έρευνας, καθώς μπορεί να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού/ερευνητή σε πραγματικές συνθήκες διδασκαλίας (Steffe & Thompson, 2000).

Η πρώτη φορά που εισάγεται ο όρος «πειραματικός σχεδιασμός» (“teaching experiments”) ήταν στο 1<sup>ο</sup> Διεθνές Συνέδριο Ψυχολογίας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης (1<sup>st</sup> International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME, 1976). Η ερευνητική κοινότητα αναδεικνύει τον αναστοχασμό του εκπαιδευτικού/ερευνητή ως παρατηρητή, ο οποίος σχεδιάζει τη διδασκαλία, όχι μόνο με βάση την εμπειρία που λέει «τι δουλεύει», αλλά στηριζόμενος σε ένα θεωρητικό πλαίσιο που εξηγεί το «γιατί» δουλεύει ο σχεδιασμός που κάνει και το «πώς» θα τον προσαρμόσει στις εκάστοτε συνθήκες. Μάλιστα, ο Alan Bell, τρία

χρόνια αργότερα, όπου πραγματοποιείται το 3<sup>rd</sup> συνέδριο (3<sup>rd</sup> International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1979) επισημαίνει τη σημασία των αρχών σχεδιασμού, που μπορούν να συνδέσουν την εννοιολόγηση των Μαθηματικών με τον σχεδιασμό και την ενσωμάτωση δραστηριοτήτων οι οποίες θα τα εφαρμόσουν στην πράξη. Στο μέλλον αναπτύσσονται επιστημονικές προσεγγίσεις πάνω στις οποίες στηρίζονται οι μαθηματικοί για τη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης και πλαισίων στα οποία δύνανται να εφαρμόζονται σχεδιασμένα έργα στην πράξη ως δραστηριότητες (Watson & Ohtani, 2015). Πιο αναλυτικά, για τον διδακτικό σχεδιασμό των έργων που ενσωματώνει ο εκπαιδευτικός σε ένα διδακτικό πείραμα, γίνεται λόγος στην υποενότητα 1.2.2 Διδακτικός σχεδιασμός έργων.

Γενικά, η ερευνητική μεθοδολογία του διδακτικού πειράματος, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, επικεντρώνεται στην άμεση παρατήρηση της διαδικασίας μάθησης του παιδιού και τη συστηματική μελέτη του τρόπου συλλογισμού του, δύο βασικές προϋποθέσεις που δύνανται να εξασφαλιστούν μόνο μέσα στη σχολική τάξη. Ο εκπαιδευτικός έχοντας γνώση του μαθησιακού περιεχομένου που καλείται να διδάξει (Ma, 2010) και λαμβάνοντας υπόψη τη μαθησιακή τροχιά που αναπτύσσει ο μαθητής από τα πρώτα χρόνια της ζωής του στην προσπάθειά του να οικοδομήσει τη νέα γνώση (Clements & Sarama, 2004, 2009· Sarama & Clements, 2009· Weber et al., 2015), σχεδιάζει μία σειρά από διδακτικά επεισόδια. Σε κάθε επεισόδιο εκτός από τους άμεσα εμπλεκόμενους, δηλαδή τον εκπαιδευτικό/ερευνητή και τους μαθητές, χρειάζεται να υπάρχει ένας ακόμη ερευνητής, που θα παρατηρεί τη διδασκαλία αμέτοχα (βλ. υποεν. και ένας τρόπος καταγραφής του μαθήματος, όπως η βιντεοσκόπηση ή η ηχογράφηση, προκειμένου ο ερευνητής να μπορεί να ανατρέξει όταν θα χρειαστεί να αναλύσει κάποια δεδομένα (Steffe & Thompson, 2000).

Ως προς τη διαδικασία που ακολουθείται, πρέπει να τονιστεί ότι ο εκπαιδευτικός/ερευνητής ξεκινάει από τον έλεγχο μίας ερευνητικής υπόθεσης, η οποία κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος είτε θα επιβεβαιωθεί είτε θα καταρριφθεί. Αυτός ο περιορισμός και όλη η φιλοσοφία αυτής της διερευνητικής διαδικασίας, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, μάλιστα, δίνει στο συγκεκριμένο μεθοδολογικό παράδειγμα μία επιστημονική εγκυρότητα. Για τον λόγο αυτό, είναι ιδιαίτερα σημαντικό το γεγονός ότι ο εκπαιδευτικός, που ταυτόχρονα αποκτά και μία ερευνητική ιδιότητα, έχει την ευχέρεια να αναπροσαρμόζει τη διδασκαλία του κάθε φορά που προκύπτει ανάγκη, ενώ αλληλεπιδρά με τους μαθητές του και συλλέγει δεδομένα, τα οποία αναλύει και αξιολογεί προκειμένου να έχει ξεκάθαρη εικόνα της σχολικής πραγματικότητας εντός ορισμένου κοινωνικο- πολιτισμικού πλαισίου (Steffe & Thompson, 2000).

Μάλιστα, ο Thompson (1979) τονίζει ως βασικό στοιχείο διαφοροποίησης της εν λόγω μεθοδολογίας από τις κλασικές μεθόδους της εκπαιδευτικής έρευνας τον παράγοντα

μαθησιακό περιβάλλον, καθώς, κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος, αυτός διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στον τρόπο που οι μαθητές οικοδομούν τη γνώση, ενθαρρύνοντας τη μάθηση, και, αντίστοιχα, βοηθά τον εκπαιδευτικό/ερευνητή να αντιμετωπίζει τις προκλήσεις σε μία σχολική τάξη. Η ευελιξία, λοιπόν, της συγκεκριμένης μεθοδολογίας είναι απαραίτητη, καθώς ο εκπαιδευτικός με άμεσο τρόπο παρατηρεί τον τρόπο σκέψης του κάθε μαθητή και τις πρακτικές τις οποίες ακολουθεί, όπως και το πώς το παιδί αντιλαμβάνεται τη μαθηματική πραγματικότητα σε ένα περιβάλλον μάθησης, η οποία, ωστόσο, πραγματικότητα μπορεί να διαφέρει από τον τρόπο που την ερμηνεύει ο ίδιος ο εκπαιδευτικός (Steffe & Thompson, 2000). Ως εκ τούτου, θα λέγαμε, ότι η προσαρμοστικότητα αυτής της διερευνητικής μεθόδου και τα εμπειρικά δεδομένα που προσφέρει, είναι που την κάνουν να ξεχωρίζει από άλλες ερευνητικές μεθόδους -ποιοτικές ή ποσοτικές- (Creswell, 2016) και, μάλιστα, να αποτελεί ένα αδιαμφισβήτητο ωφέλιμο και καινοτόμο επιστημολογικό εργαλείο ουσιαστικής εννοιολογικής κατανόησης της μαθηματικής ανάπτυξης του παιδιού που βελτιώνει τη διδασκαλία της μαθηματικής εκπαίδευσης, εμπλουτίζοντάς τη με ποιοτικά δεδομένα και νέες εκπαιδευτικές πρακτικές (Steffe & Thompson, 2000).

Ειδικότερα, για τον σχεδιασμό του παρόντος διδακτικού πειράματος, το πλαίσιο της έρευνας, όπως περιγράφεται και στην παρακάτω υποενότητα, στάθηκε ευνοϊκό ως προς την κάλυψη των προϋποθέσεων διεξαγωγής του και τη δημιουργία των απαραίτητων συνθηκών υλοποίησής του. Επίσης, στην περιγραφή των διδακτικών επεισοδίων που πραγματοποιήθηκαν (βλ. εν. 3.8), φαίνεται ξεκάθαρα η προσαρμογή του καθενός από αυτά με βάση το προηγούμενο και τα εμπειρικά δεδομένα που συλλέχτηκαν και αξιολογήθηκαν μέσα από την εμπλοκή των μαθητών στα έργα τα οποία είχαν σχεδιαστεί για τις ανάγκες της έρευνας. Άλλωστε, πρότερος σκοπός του παρόντος μεθοδολογικού σχεδιασμού ήταν η διερεύνηση ενός συγκεκριμένου πεδίου, που αφορά στον τρόπο ενσωμάτωσης συγκεκριμένης πρακτικής μέσα σε σύγχρονο περιβάλλον μάθησης, κάτι που υπογραμμίζει την αναγκαιότητα σύνδεσης των δεδομένων της εκπαιδευτικής έρευνας με τη σύγχρονη σχολική πραγματικότητα και που δύναται να γεφυρώσει αυτούς τους δύο κόσμους μέσα από το διδακτικό πείραμα.

### 3.4 Πλαίσιο και χρόνος διεξαγωγής του διδακτικού πειράματος

Η διεξαγωγή της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε 12/θ Δημοτικό Σχολείο του Νομού Μαγνησίας και συγκεκριμένα στην πέμπτη τάξη που δίδασκε ο ίδιος ο ερευνητής κατά το σχολικό έτος 2023-2024. Έγινε τον μήνα Απρίλιο σε δύο φάσεις, συνολικής διάρκειας οχτώ ημερών, όπου η μία φάση διαδέχθηκε την άλλη. Ξεκίνησε με το διαγνωστικό στάδιο του

διδασκαλίας, με σκοπό να διερευνηθεί το γνωστικό επίπεδο των μαθητών πάνω στην κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων περιμέτρου και εμβαδού. Ακολούθησαν τα υπόλοιπα επτά διδακτικά επεισόδια, τα οποία ολοκληρώθηκαν μέσα σε δύο εβδομάδες. Η διαδοχή των διδακτικών επεισοδίων διαμορφώθηκε με βάση την πορεία της μαθησιακής τροχιάς των συμμετεχόντων στην έρευνα και της συλλογής δεδομένων μέσω συμμετοχικής και αμέτοχης παρατήρησης από τον βασικό εκπαιδευτικό/ερευνητή και μία δεύτερη ερευνήτρια αντιστοίχως.

Αξίζει να σημειωθεί πως εξαιτίας του ότι η εκπαιδευτική παρέμβαση θα διενεργούνταν στην τάξη του εκπαιδευτικού/ερευνητή, υπήρχε η ευχέρεια και φρόντισε ο ίδιος από την έναρξη του σχολικού έτους και όλο το διάστημα που μεσολάβησε μέχρι την άνοιξη, να μυήσει τους μαθητές του σε πρακτικές του ερευνητικού του ενδιαφέροντος, που θα τον βοηθούσαν να συλλέξει και να αξιοποιήσει χρήσιμα ποιοτικά δεδομένα, καταγράφοντας άτυπα κάποιες παρατηρήσεις του σε προσωπικό ημερολόγιο. Αυτή η έκβαση της συστηματικής, έστω άτυπης, παρατήρησής του σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα του Προγράμματος Σπουδών, σε συνδυασμό με τη μετέπειτα διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος, υποστήριξε αδιαμφισβήτητα την έρευνα στον καθολικό σχεδιασμό και ως προς το να έχει μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα της γνωστικής αναπτυξιακής πορείας των παιδιών.

### 3.5 Συμμετέχοντες

Στο διδακτικό πείραμα οι συμμετέχοντες αποτέλεσαν βολικό δείγμα, καθώς έλαβαν μέρος 19 μαθητές τυπικής ανάπτυξης, 11 κορίτσια και 8 αγόρια, όλοι μαθητές της πέμπτης τάξης στην οποία δίδασκε. Γνωρίζοντας το προφίλ τους, θα μπορούσε να αναφερθεί ότι έχουν προνομιούχο κοινωνικοπολιτισμικό υπόβαθρο, ακόμη και τρία παιδιά που είναι μετανάστες δεύτερης γενιάς, πλήρως ενταγμένοι στο κοινωνικό σύνολο, ενώ το ενδιαφέρον και το γνωστικό επίπεδο της πλειοψηφίας της τάξης είναι αρκετά ικανοποιητικό σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα. Μάλιστα, στο μάθημα των Μαθηματικών, έχοντας η ίδια, ως δασκάλα της τάξης και ερευνήτρια, ενσωματώσει αρκετές εκπαιδευτικές πρακτικές στη σχολική ρουτίνα, δημιουργήθηκε με την πάροδο του σχολικού έτους, το κατάλληλο παιδαγωγικό κλίμα που ευνόησε την ομαλή διεξαγωγή της έρευνας. Τέλος, παραθέτοντας στοιχεία που αφορούν στην ακαδημαϊκή επίδοση των μαθητών σε έννοιες της επίπεδης Γεωμετρίας και στην επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων, το  $\frac{1}{4}$  περίπου του συνολικού δείγματος έχει χαμηλή επίδοση, ένα ίδιο ποσοστό έχει πάρα πολύ υψηλή και τρεις μαθήτριες, ενώ παρουσιάζουν πολύ καλή εικόνα στο συγκεκριμένο πεδίο, δυσκολεύονται στην επίλυση προβλημάτων. Η υπόλοιπη τάξη (εφτά μαθητές) θα έλεγε κανείς ότι κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα με μέτρια επίδοση.

### 3.6 Μέθοδοι συλλογής δεδομένων

Για τη συλλογή δεδομένων αξιοποιήθηκαν από τον ερευνητή/εκπαιδευτικό η μέθοδος της συμμετοχικής παρατήρησης, οι σημειώσεις πεδίου και έγινε χρήση ημερολογίου έρευνας. Για την τριγωνοποίηση της έρευνας πραγματοποιήθηκε παράλληλα αμέτοχη παρατήρηση ενός δεύτερου ερευνητή (Creswell, 2016). Επίσης, έγινε συλλογή των φύλλων εργασίας με τους τρόπους που έλυσαν οι μαθητές τα προβλήματα γεωμετρίας, ενώ αποσπάσματά τους παρουσιάζονται αυτούσια στην αντίστοιχη ενότητα της ανάλυσης δεδομένων. Για την αξιοπιστία της έρευνας, τέλος, και για την εγκυρότητα της ποιοτικής ανάλυσης των δεδομένων έγινε ηχογράφηση των διδακτικών επεισοδίων κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος. Μάλιστα, η ενσωμάτωση ενός μέρους του ηχογραφημένου υλικού στην περιγραφική ανάλυση των δεδομένων καθιστά περισσότερο κατανοητή την προσέγγιση της έρευνας, αναδεικνύει τα μοτίβα που προέκυψαν κατά τη θεματική ανάλυση και τεκμηριώνει την υποστήριξη των ερευνητικών αποτελεσμάτων.

#### *Συμμετοχική παρατήρηση ερευνήτριας/εκπαιδευτικού*

Ένα από τα στοιχεία της μεθοδολογίας του διδακτικού πειράματος είναι ο εκπαιδευτικός/ερευνητής, ο οποίος σε ρόλο καθοδηγητή και παρατηρητή επηρεάζει την πορεία της μαθησιακής διαδικασίας, στην προσπάθειά του να διερευνήσει και να κατανοήσει τις ενέργειες και τις σκέψεις των μαθητών του και να υποστηρίξει την αναπτυξιακή τροχιά μάθησης (Steffe & Thompson, 2000). Ακόμη, σύμφωνα με τον Creswell (2016) και Bryman (2017), η συλλογή δεδομένων με τη συμμετοχή του ερευνητή ως παρατηρητή, παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα συγκριτικά με άλλες μεθόδους, όπως για παράδειγμα τη συνέντευξη. Η υποστήριξη αυτής της άποψης έγκειται στην παρουσία του ερευνητή στο πεδίο της έρευνας για μεγάλο χρονικό διάστημα, η οποία δίνει τη δυνατότητα στον ίδιο να έχει μία συνεκτική αντίληψη των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα, να αναστοχάζεται και να συνεισφέρει στη βελτίωση του εκπαιδευτικού του έργου σε πραγματικές συνθήκες. Άλλωστε, ας μην ξεχνάμε, ότι η ίδια η φύση της ποιοτικής έρευνας παρέχει ευελιξία και προσαρμοστικότητα στον ερευνητή και του επιτρέπει να δει τα γεγονότα μέσα από τα μάτια των συμμετεχόντων. Αντιθέτως, η συνέντευξη θεωρείται μία απρόσωπη μέθοδο που κρατάει ερευνητή και συμμετέχοντα σε απόσταση (Bryman, 2017).

Έτσι, λοιπόν, στην περίπτωση της παρούσας έρευνας ο εκπαιδευτικός, έχοντας συνάμα ρόλο ερευνητή και βρισκόμενος σε ένα οικείο μαθησιακό περιβάλλον, ήρθε σε επαφή με ένα συγκεκριμένο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, όπου οι εμπλεκόμενοι επικοινωνούν με

μαθηματικό τρόπο, αναπτύσσουν τον δικό τους γλωσσικό κώδικα, ο οποίος έχει πολυσημειωτική διάσταση και υιοθετούν κοινές πρακτικές. Πιο συγκεκριμένα, η παρατήρηση κινήθηκε σε συγκεκριμένους θεματικούς άξονες που πλαισιώνουν τη συστημική λειτουργική προσέγγιση των Μαθηματικών (de Oliveira & Cheng, 2011), εστιάζοντας στο πώς οι συμμετέχοντες υιοθέτησαν τέτοιες πρακτικές και με ποιον τρόπο ο ίδιος ενθάρρυνε και υποστήριξε τη μαθησιακή διαδικασία. Οι άξονες παρατήρησης ήταν:

- Αξιοποίηση του πολύ-σημειωτικού χαρακτήρα της μαθηματικής γλώσσας
- Μεταλειτουργική προσέγγιση κειμένου
- Ακολουθία βημάτων επίλυσης
- Χρήση μαθηματικού λόγου
- Μαθηματική επικοινωνία

Από τις σημειώσεις πεδίου κατά τη διεξαγωγή του διαγνωστικού σταδίου και των υπολοίπων οκτώ διδακτικών επεισοδίων του πειράματος αναδείχθηκαν θεωρητικά μοτίβα που πλαισιώνουν τη θεωρητική προσέγγιση της SFL στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

#### *Αμέτοχη παρατήρηση δεύτερης ερευνήτριας*

Εξίσου σημαντική στη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος ήταν και η παρουσία δεύτερου ερευνητή, που παρατήρησε την πορεία του κάθε διδακτικού επεισοδίου, χωρίς να εμπλακεί στο μάθημα. Γενικά, ο ρόλος ενός ακόμη παρατηρητή είναι ιδιαίτερα υποστηρικτικός στην έρευνα, διότι έχει την ευχέρεια να καταγράφει ποικίλα στοιχεία και με μεγαλύτερη άνεση, καθώς δε γίνονται αντιληπτές πάντα από τον εκπαιδευτικό που διδάσκει, όλες οι ενέργειες των μαθητών. Μάλιστα, σε αρκετές περιπτώσεις, τυγχάνει να συλλέγει δεδομένα που αφορούν οτιδήποτε δηλώνεται άρρητα από τους συμμετέχοντες ή να κρατάει σημειώσεις που να αντικατοπτρίζουν μία διαφορετική εικόνα από αυτή που πιστεύει ο διδάσκων. Με λίγα λόγια, δεν είναι λίγες οι φορές που αποδίδονται διαφορετικές ερμηνείες για κάτι που διαδραματίζεται εν ώρα διδασκαλίας. Έτσι, ο συνερευνητής παρέχει ουσιαστική ανατροφοδότηση στην έρευνα (Steffe & Thompson, 2000).

#### *Ημερολόγιο έρευνας*

Η συμπλήρωση ημερολογίου αποτελεί μία σημαντική πηγή συλλογής δεδομένων στη μεθοδολογία της έρευνας, ενώ ο τύπος που αξιοποιήθηκε στη διάρκεια της παρούσας αφορά στοιχεία καταγραφής παρατηρήσεων και σκέψεων για τις δραστηριότητες που ενεπλάκησαν οι συμμετέχοντες σε όλες τις φάσεις του διδακτικού πειράματος (Bryman, 2017).

Ειδικότερα, ο ερευνητής/εκπαιδευτικός διατήρησε ημερολόγιο έρευνας, όπου στην αρχή της ημέρας, δηλαδή προτού ξεκινήσει η διδακτική παρέμβαση, κατέγραφε προσωπικές σκέψεις για το τι θα έκανε, αλλά και κάποιες βοηθητικές παρατηρήσεις για πιθανές δυσκολίες που θα αντιμετώπιζε και θα έπρεπε να προσέξει. Επίσης, περισσότερες παρατηρήσεις, μέσα από μία αναστοχαστική ματιά, γίνονταν με το πέρας της ημέρας, μόλις τελείωνε το κάθε διδακτικό επεισόδιο. Περιελάμβαναν συμπεριφορές μαθητών, μία ενδιαφέρουσα στιχομυθία τους, μία ιδέα που τυχόν προέκυψε στη διάρκεια του μαθήματος ή ακόμη και κάποια απρόβλεπτη αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμετεχόντων. Γενικότερα, διάφορα στοιχεία που θα καθόριζαν την εξέλιξη του διδακτικού πειράματος.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να επισημανθεί ότι ο εκπαιδευτικός/ερευνητής διατήρησε και ένα προσωπικό, άτυπο ημερολόγιο έρευνας, που προηγήθηκε της διεξαγωγής του διδακτικού πειράματος και της συστηματικής καταγραφής των πεπραγμένων. Όπως αναφέρθηκε ήδη στην ενότητα 3.4, από την αρχή της σχολικής χρονιάς που πραγματοποιήθηκε η έρευνα και ενώ είχε γίνει μία βιβλιογραφική ανασκόπηση του πεδίου ενδιαφέροντος, λήφθηκε η απόφαση να γίνει μία προσπάθεια μύησης των μαθητών σε πρακτικές που προτείνει η SFL και μπορούν να ενσωματωθούν σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, και όχι μεμονωμένα στα μαθηματικά, κάνοντας συχνά και όποτε έβρισκα ευκαιρία αντιπαραβολές και αναφορές στο πλαίσιο της συγκεκριμένης φιλοσοφίας. Αυτή η προσπάθεια απέδιδε σχεδόν καθημερινά χρήσιμα δεδομένα για την υποστήριξη της έρευνας που επρόκειτο να πραγματοποιηθεί, κυρίως για την παραγωγή του διδακτικού υλικού της, αλλά και για το πρώτο στάδιο του πειράματος που αφορούσε στη διατύπωση της ερευνητικής υπόθεσης, για τον σχεδιασμό διδακτικών επεισοδίων, για το πού έπρεπε να δοθεί προσοχή κατά τον σχεδιασμό των έργων που θα ενσωματώνονταν στο διδακτικό πείραμα. Έτσι, οι παρατηρήσεις που καταγράφονταν μετά τη λήξη αυτών των μαθημάτων βοήθησαν στην αποτύπωση μίας καθολικής εικόνας για την εξοικείωση των μαθητών σε στοχευμένες («γλωσσομαθηματικές») πρακτικές και τη σταδιακή αλλαγή του πλαισίου της τάξης.

#### *Φύλλα εργασίας μαθητών*

Η συμπλήρωση των φύλλων εργασίας, που σχεδιάστηκαν για τις ανάγκες του διδακτικού πειράματος, από τους μαθητές εξασφάλισε την εγκυρότητα και αξιοπιστία της έρευνας, καθώς αποτελούν συνοδευτικό τεκμήριο της όλης διερευνητικής διαδικασίας και αποτυπώνουν την εξελικτική πορεία της διδασκαλίας και μάθησης. Από το περιεχόμενο των απαντήσεων των συμμετεχόντων, τα κείμενα που έγραψαν, τον σχεδιασμό οπτικών αναπαραστάσεων και τους πίνακες που συμπλήρωσαν ή δημιούργησαν, προέκυψαν στη συνέχεια θεματικά μοτίβα που,

κατά τη θεματική ανάλυση και σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα δεδομένα της έρευνας, απέφεραν χρήσιμα συμπεράσματα.

#### *Ηχογράφηση διδακτικών επεισοδίων*

Η συλλογή δεδομένων από την ηχογράφηση των διδασκαλιών που πραγματοποιήθηκαν θεωρείται εξίσου σημαντική και έγκυρη ερευνητική μέθοδος, η οποία επαληθεύει τους ισχυρισμούς του ερευνητή/εκπαιδευτικού και βοηθάει στην κατατοπιστική περιγραφή της διερευνητικής διαδικασίας. Την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων πλαισιώνουν απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα από τους διαλόγους μεταξύ των μαθητών και μεταξύ εκπαιδευτικού/ερευνητή και μαθητών.

### 3.7 Παραγωγή διδακτικού υλικού

#### 3.7.1 Γενικά

Το διδακτικό υλικό (βλ. Παράρτημα) που παράχθηκε για την κάλυψη των αναγκών της διδακτικής παρέμβασης θα μπορούσε να διαχωριστεί σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τον σκοπό που εξυπηρέτησε. Στην πρώτη κατηγορία ανήκει μία σειρά από διδακτικά έργα, που σχεδιάστηκαν σε μορφή άσκησης και προβλημάτων, ανοιχτού ή κλειστού τύπου (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3) εκ των οποίων η μία χρησιμοποιήθηκε στο αρχικό διαγνωστικό στάδιο του πειράματος και η άλλη για τα διδακτικά επεισόδια που ακολούθησαν. Στη δεύτερη ανήκει το συνοδευτικό υποστηρικτικό υλικό, που περιλαμβάνει μία μεγάλη αφίσα με οδηγίες προς τους μαθητές, δοσμένη και ατομικά, σε έντυπη μορφή, όπως και ένας χάρτης με την κάτοψη της περιοχής του σχολείου, ο οποίος βοηθά στην κατανόηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Όσον αφορά στο περιεχόμενο του διδακτικού υλικού, όπως φαίνεται και παρακάτω στη λεπτομερή περιγραφή του καθενός, λήφθηκαν υπόψη κάποια γενικά κριτήρια. Πρώτον, το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της σχολικής τάξης, καθώς βασική μέριμνα ήταν εξαρχής να σχεδιαστεί προσεκτικά ένα υλικό με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και να ενσωματωθεί με τέτοιο τρόπο που θα ενθάρρυνε τα παιδιά να συνδέσουν τις μαθηματικές ιδέες με καθημερινές πρακτικές τους (Meira, 1998). Ακόμη, προσαρμόστηκε στα ενδιαφέροντα των συμμετεχόντων, καθώς και στο γνωστικό επίπεδό τους (Simon & Tzur, 2004· Smith & Stein, 1998· Stein et al., 1996· Stein & Smith, 1998). Παράλληλα, υπήρξε συνάφεια με το μαθηματικό περιεχόμενο που επρόκειτο να διδαχθεί, το οποίο ανέδειξε την πολύ-σημειωτική φύση του μαθήματος (Lemke, 2003· O'Halloran, 1999· Schleppegrell, 2007) και υποστήριξε τη συστημική λειτουργική

προσέγγισή του και την κατανόηση της μεταλειτουργίας των μαθηματικών κειμένων (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007).

### 3.7.2 Αναλυτική περιγραφή του διδακτικού υλικού

#### *Διδακτικό έργο με μορφή άσκησης*

Πρόκειται για ένα έργο *‘open -started’*, δηλαδή δίνεται η εκκίνηση στους μαθητές να προβούν σε μία μαθηματική δραστηριότητα, ενώ ενδιαφέρει η μαθηματική διαδικασία και όχι οι λύσεις των προβλημάτων, καθώς οι απαντήσεις των μαθητών δύνανται να είναι ποικίλες (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3). Αυτής της μορφής η άσκηση ενσωματώθηκε στο αρχικό στάδιο του διδακτικού πειράματος και καλεί τον μαθητή να ομαδοποιήσει μία σειρά από προβλήματα εύρεσης περιμέτρου (το 1<sup>ο</sup>, 4<sup>ο</sup> και 5<sup>ο</sup>) και εμβαδού (το 2<sup>ο</sup>, 3<sup>ο</sup> και 6<sup>ο</sup>), σύνθετα και απλά, εντοπίζοντας ομοιότητες. Ανάμεσα στα προβλήματα που πρέπει να ομαδοποιηθούν υπάρχει ακόμη ένα συνδυαστικό (το 7<sup>ο</sup>) το οποίο αφορά στη σχέση των δύο μαθηματικών εννοιών και, έτσι, κατά κάποιο τρόπο ανήκει και στις δύο προηγούμενες ομάδες ή σε μία τρίτη ξεχωριστή ομάδα.

Ωστόσο, όλο το έργο αξιοποιεί τον πολύ- σημειωτικό χαρακτήρα των Μαθηματικών (μαθηματικές λέξεις, νοητικές αναπαραστάσεις, αριθμούς, σύμβολα) (Lemke, 2003· O’Halloran, 1999· Schleppegrell, 2007) και απαιτεί αναπτυγμένη αναγνωστική ικανότητα και κατανόηση της δομής του (Lamb, 2010· Noonan, 1990), κατάλληλες γλωσσικές μεταφορές εντός μαθηματικού κειμένου (Halliday & Martin, 1993) και μία συστημική λειτουργική προσέγγιση (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007).

#### *Διδακτικά έργα με μορφή προβλημάτων*

Τα συγκεκριμένα διδακτικά έργα ενσωματώθηκαν σε επτά διδακτικά επεισόδια και έχουν τον τίτλο «Επιφανειακές και περιμετρικές... αποκαλύψεις». Ως αφορμή για την κεντρική ιδέα του σχεδιασμού τους στάθηκε το γεγονός ότι φέτος το σχολείο που διεξήχθη η έρευνα «υιοθέτησε» το πάρκο που βρίσκεται απέναντι από το σχολικό κτίριο, καθώς και το ότι γίνονται πολλές εργασίες βελτίωσης της κτιριακής υποδομής της σχολικής μονάδας. Ανατέθηκε, λοιπόν, στους συμμετέχοντες μαθητές να παρέχουν βοήθεια σε ανάλογες εργασίες που αφορούσαν στον σχεδιασμό παρτεριών του «υιοθετημένου» πάρκου, στη διακόσμηση ενός πάρκου, που γειτνιάζει με το σχολείο τους και στην ανακατασκευή των αθλητικών γηπέδων εντός της σχολικής μονάδας. Η παρουσίαση έγινε με τη μορφή εννιά αλληλένδετων

προβληματικών καταστάσεων, όπου η μία διαδεχόταν την άλλη και χρειαζόταν να επιλυθεί είτε ατομικά είτε σε ζευγάρια και να γίνει παρουσίαση των απαντήσεων στην ολομέλεια.

Ως προς τον τύπο και το περιεχόμενο των προβλημάτων που επιλέχθηκαν να συμπεριληφθούν λήφθηκαν υπόψη τα εξής κριτήρια βάσει της υπάρχουσας βιβλιογραφίας:

- Η μαθησιακή τροχιά του εμβαδού και της περιμέτρου (Clements & Sarama, 2009· Sarama & Clements, 2009), οι αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες (Van de Walle et al., 2010, κεφ. 19) και το νέο ΠΣ (2023).
- Ο τρόπος επίλυσης των προβλημάτων να υποστηρίζει την ανάπτυξη της μαθηματικής γλώσσας, δηλαδή να αναδεικνύει όλο το πακέτο γνώσεων και δεξιοτήτων που υποστηρίζουν τη θεμελιώδη κατανόηση της περιμέτρου και του εμβαδού (Ma, 2010) και να ενθαρρύνει τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στη διαδικασία που ακολουθούν και τις μαθηματικές τους γνώσεις και όχι απλά να επιλύουν αλγορίθμους (Smith & Stein, 1998· Stein et al., 1996· Stein & Smith, 1998).
- Η συμπερίληψη και ανάδειξη της πολυ- σημειωτικής φύσης των μαθηματικών κειμένων (λέξεις, αριθμοί, σύμβολα, αναπαραστάσεις, πίνακες) (Lemke, 2003· O'Halloran, 1999 · Schleppegrell, 2007).
- Η πυκνότητα του εκάστοτε κειμένου σε σχέση με την ικανότητα της αναγνωσιμότητας του μαθητή (Lamb, 2010· Noonan, 1990).
- Η ενσωμάτωση ποικίλων ρεαλιστικών προβλημάτων (Schoenfeld, 1985), κλειστού και ανοιχτού τύπου (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3), με διαβαθμισμένη δυσκολία.

#### *Κατασκευή αφίσας*

Μέσω της ψηφιακής εφαρμογής Canva κατασκευάστηκε μία έγχρωμη αφίσα (βλ. εικ. 4) που περιλαμβάνει τα 6 βήματα επίλυσης προβλημάτων με βάση το θεωρητικό πλαίσιο της SFL. Πιο συγκεκριμένα, κάθε βήμα έχει έναν κεντρικό τίτλο (πχ.: «ΟΜΑΔΟΠΟΙΩ») και μία σχετική ερώτηση (πχ.: «Τι ζητάει το πρόβλημα να κάνω;»), την οποία καλείται ο μαθητής να κάνει στον εαυτό του, ώστε να κατανοήσει την αλληλουχία των βημάτων και να ακολουθήσει με ευκολία και ορθό μαθηματικό τρόπο αυτή τη διαδικασία. Επιπρόσθετα, έχουν συμπεριληφθεί και φράσεις ή λέξεις-κλειδιά συναφείς με το κάθε βήμα (πχ.: «Έλεγξε... Απόδειξε...»), συνοδευόμενες από εικόνες, προκειμένου να υποστηριχτούν όλοι οι μαθητές, με διαφορετικά προφίλ και γνωστικό υπόβαθρο. Η αφίσα καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος ήταν αναρτημένη στην τάξη, ενώ μοιράστηκε και στο κάθε παιδί σε έντυπη μορφή.



έρευνας. Η περιγραφή του πλαισίου αυτού δημιουργεί μία σαφέστερη εικόνα της ανάλυσης των δεδομένων, που ακολουθεί στην επόμενη ενότητα της εργασίας (3.9), μέσα από την προσπάθεια σύνδεσης «γλωσσο-μαθηματικών» δραστηριοτήτων υπό το πρίσμα μίας μεταλειτουργικής προσέγγισης του όλου εγχειρήματος.

#### *Διαγνωστικό στάδιο*

Στην πρώτη φάση του διδακτικού πειράματος, στο διαγνωστικό στάδιο, ενδιέφερε να διερευνηθούν ταυτόχρονα δύο στοιχεία: το επίπεδο αναγνωσιμότητας των μαθητών, δηλαδή αν οι μαθητές θα κατανοήσουν το κείμενο και με ποιο τρόπο και, παράλληλα, το γνωστικό τους υπόβαθρο γύρω από την έννοια του εμβαδού και της περιμέτρου. Από την ανάλυση των παρατηρήσεων θα καθοριζόταν και ο σχεδιασμός των επόμενων διδακτικών επεισοδίων. Ωστόσο, αυτό σήμαινε ότι ο ερευνητής/εκπαιδευτικός έπρεπε να μείνει ανεπηρέαστος από τις δικές του αντιλήψεις και υποθέσεις και να είναι ευέλικτος στις αποφάσεις που αφορούν την καθολική πορεία του πειράματος, διότι, σύμφωνα με τις αρχές της συγκεκριμένης μεθοδολογίας, σε κάθε φάση, χρειάζεται να εστιάζει στη μαθηματική σκέψη των παιδιών, στο πώς αλληλεπιδρούν μέσα στο πεδίο της έρευνας και να αναπροσαρμόζει τον τρόπο διδασκαλίας. Σε αντίθετη περίπτωση, δε θα είχε εκπαιδευτική αξία η χρήση αυτού του εννοιολογικού εργαλείου στην έρευνα (Steffe & Thompson, 2000).

Ζητούμενο της ατομικής άσκησης που ανατέθηκε στους μαθητές, λοιπόν, ήταν να διαβάσουν και να ομαδοποιήσουν τα επτά προβλήματα, για τα οποία έγινε λόγος στην υποενότητα 3.7.2 (βλ. και ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ), εντοπίζοντας κάποια κοινά χαρακτηριστικά στα κείμενα ή ακόμη και διαφορές, ενώ δε χρειαζόταν να τα επιλύσουν. Όσον αφορά στα ιδιαίτερα τεχνικά χαρακτηριστικά των κειμένων και τον βαθμό δυσκολίας που υπήρχε -ο οποίος θα έδινε μία εικόνα της αναγνωστικής ικανότητας των παιδιών- υπήρχε ποικιλομορφία. Σε ορισμένα προβλήματα το ζητούμενο ήταν σκόπιμα ξεκάθαρα διατυπωμένο με τη χρήση επιστημονικών όρων ή ρημάτων σε προστακτική, αλλά απαιτούνταν να γίνει αποσυμπύκνωση των λέξεων («5. Τι **περίμετρο** έχει ο διαδραστικός πίνακας της τάξης σας;», «6. Να βρείτε το **εμβαδόν** του παρακάτω σχήματος.»), δηλαδή να γίνει αντιληπτή η μαθηματική διαδικασία που κρύβει η κάθε λέξη. Αντίθετα, σε άλλα, η ύπαρξη ΟΣ οδηγούσε στο να γίνει διαφορετική «γλωσσική μεταφορά» («Πόσα πλακίδια θα χρειαστούν **για την επικάλυψη** όλης της πισίνας;», «Πόσο είναι το συνολικό κόστος της **κάθε ταπετσαρίας** αν λάβετε υπόψη ότι ο κάθε τοίχος, που θα γίνει **η τοποθέτηση, έχει μήκος 4μ. και ύψος 3,5μ.**;»), όπως «να διυλιστεί» και «να συμπυκνωθεί» το νόημα ενός ονομαστικού συνόλου, δηλαδή να ταυτιστεί με μία διαδικασία, η οποία στην επιστήμη των μαθηματικών αποδίδεται με μία λέξη και εκτέλεση μίας ενέργειας (Halliday & Martin, 1993· Lemke, 2003· O'Halloran, 1999· O'Halloran, 2000).

Ακόμη, επειδή στα κείμενα υπήρχε συνδυασμός στοιχείων που χαρακτηρίζουν την επιστήμη του μαθηματικού λόγου, αποδίδουν μαθηματικό νόημα και ενθαρρύνουν τη επικοινωνία εντός ενός μαθηματικού πλαισίου (Halliday, 1978· Halliday & Martin, 1993), δηλαδή συνδυασμός μαθηματικών λέξεων, καθημερινών και μη οικείων, νοητικών αναπαραστάσεων, αριθμών και συμβόλων (Lemke, 2003· O'Halloran, 1999· Schleppegrell, 2007), αναμενόταν να διερευνηθεί αν και πώς οι μαθητές θα κατάφερναν να τα αναδείξουν ως κριτήρια ομαδοποίησης και, γενικά, να κατανοήσουν τη λειτουργία της δομής των κειμένων (de Oliveira & Cheng, 2011· Schleppegrell, 2016).

### *1<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

#### *Παρουσίαση αφίσας & χάρτη*

Στην αρχή, γίνεται από τον εκπαιδευτικό/ερευνητή παρουσίαση της αφίσας με τα βήματα επίλυσης προβλήματος και με τις συγκεντρωτικές πληροφορίες/οδηγίες που θα χρησιμεύσουν στην πορεία. Η παρουσίαση δεν έχει τη μορφή επίδειξης, αλλά γίνεται σε επίπεδο συζήτησης στην ολομέλεια, καθώς ως προς το περιεχόμενό της η αφίσα δεν είναι άγνωστη στα παιδιά και βασική επιδίωξη είναι να συνδεθεί με τις καθημερινές πρακτικές, που ήδη έχουν υιοθετηθεί στην τάξη έως τώρα. Με λίγα λόγια, οι μαθητές θα εξοικειωθούν γρήγορα με τη δομή της αφίσας και θα μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν ως ένα βοηθητικό εργαλείο στην συστημική λειτουργική προσέγγιση των κειμένων (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007) και, γενικότερα, σε κάθε βήμα επίλυσης των προβλημάτων.

Παρομοίως, γίνεται παρουσίαση του χάρτη που απεικονίζει την κάτοψη της γειτονιάς του σχολείου τους, ενώ ταυτόχρονα οι μαθητές παροτρύνονται να εντοπίσουν διάφορα σημεία τα οποία στη συνέχεια θα συναντήσουν στα προβλήματα. Έτσι, το να ανατρέχουν σε αυτόν όποτε χρειάζεται να προσανατολιστούν «πού δουλεύουν», θα δώσει μία ρεαλιστική αποτύπωση της προβληματικής κατάστασης, που καλούνται να επιλύσουν.

#### *1ο πρόβλημα*

Ακολουθεί η επίλυση του 1<sup>ου</sup> προβλήματος στην ολομέλεια, προκειμένου οι μαθητές να εξασκηθούν στα βήματα που θα πρέπει κάθε φορά να ακολουθούν. Σε κάθε στάδιο, σε αντιπαράβολή με τις οδηγίες της αφίσας, δηλώνεται σε ποιο βήμα βρίσκονται, τι ενέργεια πρέπει να κάνουν και με ποιον τρόπο. Ο εκπαιδευτικός/ερευνητής με κατάλληλες ερωτήσεις, παροτρύνει τα παιδιά να επισημαίνουν τις λέξεις- κλειδιά και τις βοηθητικές ερωτήσεις που πρέπει να υποβάλλουν στον εαυτό τους, ώστε να γίνει κατανοητή η σημασία αυτής της διαδικασίας και στα επόμενα διδακτικά επεισόδια να αποκτήσουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αυτονομία και να γίνεται με πιο αυθόρμητο τρόπο.

Τέλος, το πρόβλημα είναι κλειστού τύπου και η μαθηματική δραστηριότητα που θα εμπλακούν οι μαθητές θα αναδείξει τον βαθμό κατανόησης της έννοιας του εμβαδού και την αποσαφήνιση της πολλαπλασιαστικής σχέσης των γραμμικών διαστάσεων μίας επιφάνειας (Van de Walle et al., 2010, κεφ. 19), καθώς το ζητούμενο είναι η εύρεση του εμβαδού ενός τετραγώνου με γνωστό το μήκος πλευράς και τη μονάδα μέτρησης της επιφάνειας. Τεχνικά, συνδυάζει κείμενο και εικόνα και οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τη δομή του κειμένου κάνοντας «γλωσσικούς ελιγμούς» σε επίπεδο (μαθηματικών) λέξεων, φράσεων και προτάσεων και, παράλληλα, «διαβάζοντας» τη συνοδευτική οπτική αναπαράσταση, να αποδώσουν μαθηματικό νόημα και να προχωρήσουν στην υιοθέτηση κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης της προβληματικής κατάστασης.

## *2<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

### *2<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Το 2<sup>ο</sup> πρόβλημα είναι κλειστού τύπου (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3), ενώ οι μαθητές, συνεργαζόμενοι σε ζευγάρια, καλούνται να αποσαφηνίσουν και να ελέγξουν τα δεδομένα του, ώστε να απαντηθεί το δίλημμα της ηρωίδας. Για να ληφθεί η σωστή απόφαση, φυσικά, πρέπει να ακολουθήσουν προσεκτικά τα στάδια επίλυσης και να προβούν σε συγκρίσεις δεδομένων, υπολογίζοντας προηγουμένως το εμβαδόν μίας ορθογώνιας επιφάνειας. Ως προς τον πολύ-σημειωτικό χαρακτήρα της μαθηματικής γλώσσας, υπάρχει μόνο κείμενο με λέξεις και αριθμούς, χωρίς κάποιο σχήμα ή εικόνα. Η κατανόησή του απαιτεί κατάλληλες γραμματικές μεταφορές σε ΟΣ και ρήματα, αντίληψη των γραμμικών διαστάσεων του σχήματος, οι οποίες, επιπλέον, είναι σε κλασματική μορφή, και σχεδιασμό μίας νοητικής αναπαράστασης.

### *3<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Μέσα από το συγκεκριμένο έργο οι μαθητές, σε ζευγάρια, καλούνται να αντιμετωπίσουν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, επίσης κλειστού τύπου (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3), το οποίο θεωρείται πιο σύνθετο σε σχέση με τα προηγούμενα. Περιλαμβάνει αρκετά χαρακτηριστικά που υποδηλώνουν την πολύ-σημειωτική φύση του μαθηματικού λόγου (Lemke, 2003· O'Halloran, 1999· Schleppegrell, 2007), όπως μεγάλο αριθμό λέξεων/φράσεων, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους παρατακτικά και υποτακτικά, ονομάτων με συμπυκνωμένο νόημα (Halliday & Martin, 1993), δύο ζητούμενα (δυνατές εναλλακτικές προτάσεις όσον αφορά στις γραμμικές διαστάσεις ορθογωνίου σχήματος για την κάλυψη 4 ισεμβαδικών ορθογώνιων επιφανειών εντός συγκεκριμένου τετραγωνισμένου σχήματος και υπολογισμός της διαφοράς του εμβαδού δύο επιφανειών), αριθμό σε μορφή ποσοστού, όπως, επίσης, οπτική αναπαράσταση.

Για την ολοκλήρωση του έργου απαιτούνται αρκετοί μαθηματικοί συλλογισμοί και πράξεις, προσεκτική μελέτη του πλαισίου του προβλήματος και αντίληψη των περιορισμών που τίθενται. Τέλος, μέσα από τον διαμοιρασμό των ιδεών των μαθητών και τη συζήτηση, αναμένεται να αναδειχθεί η συστημική λειτουργική ανάλυση του κάθε στοιχείου του κειμένου (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007), οι στρατηγικές επίλυσης των ζευγαριών, ο μαθηματικός συλλογισμός που θα τους οδηγήσει σε ορθές, αλλά και διαφορετικές αποφάσεις ή ακόμη και διάφορα ενδεχόμενα λάθη, που, φυσικά, θα αξιοποιηθούν.

### *3<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

#### *4<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Το διδακτικό έργο περιλαμβάνει τη διερεύνηση μίας τέταρτης προβληματικής κατάστασης, εξίσου σύνθετης, όπως και οι περισσότερες, λόγω της δομής του κειμένου (υποθετικός λόγος) και του πυκνού νοήματός της (Halliday & Martin, 1993). Επίσης, αναδεικνύει την τροχιά μάθησης των συμμετεχόντων γύρω από τις θεμελιώδεις έννοιες μέτρησης σε επίπεδο χώρο (του εμβαδού, της περιμέτρου, του ορθογωνίου και του τετραγώνου) (Clements & Sarama, 2009· Sarama & Clements, 2009), καθώς τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι οι μαθητές να εξετάσουν τη σχέση μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού και, πιο συγκεκριμένα, αν δύο διαφορετικά τετράπλευρα με ίδιο εμβαδό, έχουν και ίση περίμετρο. Απαιτεί, λοιπόν, έλεγχο υπόθεσης («Αν το παρτέρι...»), επομένως και εύρεση κατάλληλης στρατηγικής διερεύνησης της υποθετικής ερώτησης (πχ. μέσω δοκιμής), ποικίλες γραμματικές μεταφορές, όπως αποσυμπύκνωση στοιχειωδών γεωμετρικών εννοιών με μορφή ονομάτων ή ΟΣ («τετράγωνο», «ορθογώνιο», «περίμετρο», «με τη μεγάλη πλευρά 32μ.», «ίδια επιφάνεια με αυτή του ορθογωνίου»), ερμηνεία αρκετών συσχετιστικών διαδικασιών («κάλυπτε ίδια επιφάνεια», «είχε και ίση περίμετρο») και της σημασίας των ρημάτων «έχει-ήταν» (Halliday & Martin, 1993· Lemke, 2003· Ο'Halloran, 1999· Ο'Halloran, 2000· Schleppegrell, 2007). Τέλος, η απουσία οπτικών αναπαραστάσεων πιθανό να δημιουργήσει την ανάγκη στους μαθητές να σχεδιάσουν από μόνοι τους αντίστοιχα σχήματα, προκειμένου να κατανοήσουν εννοιολογικά τις δεδομένες συνθήκες και τα ζητούμενα του προβλήματος. Έτσι, οι μαθητές, σε ζευγάρια, χρειάζεται να «κινηθούν μπρος-πίσω» στο κείμενο, ώστε να αντιληφθούν τη μεταλειτουργία όλων αυτών των στοιχείων σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007), συνδυάζοντάς τα με μαθηματικό τρόπο προκειμένου να εξάγουν ορθά συμπεράσματα με χρήση επιχειρήματος.

#### *4<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

##### *5<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Στο ίδιο μοτίβο με το προηγούμενο διδακτικό έργο, παρουσιάζονται και οι δύο επόμενες προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες ενθαρρύνουν τα παιδιά να εμπλακούν σε ποικίλες μαθηματικές δραστηριότητες μέσα από γλωσσικούς ελιγμούς που αναδεικνύουν τα πολυσημειωτικά κειμενικά χαρακτηριστικά (Lemke, 2003· O'Halloran, 1999· O'Halloran, 2000· Schleppegrell, 2007). Με την ολοκλήρωση του 4<sup>ου</sup> διδακτικού επεισοδίου εμβαθύνουν στις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού εξετάζοντας με συστηματικό τρόπο τις παραμέτρους που αλλάζουν και καθορίζουν τη σχέση αυτών των δύο μαθηματικών ιδεών.

Ειδικότερα, η προσέγγιση του 5<sup>ου</sup> προβλήματος είναι σύνθετη. Αρχικά, το ζητούμενο είναι οι μαθητές να προτείνουν πολλαπλές λύσεις σε μια υποθετική ερώτηση, λαμβάνοντας προηγουμένως υπόψη τις συνθήκες που το πλαισιώνουν. Συμπληρωματικά, είναι απαραίτητη η «ανάγνωση» ενός πίνακα και η καταγραφή στοιχείων σε αυτόν, η οποία βοηθά και στη μεταγενέστερη εξέταση των δεδομένων, που θα συλλεχθούν, προκειμένου να απαντηθούν δυο επόμενα ερωτήματα που αφορούν στη σχέση περιμέτρου και εμβαδού. Με λίγα λόγια, οι προηγούμενες μαθηματικές δραστηριότητες οδηγούν, σε επόμενη φάση, τους μαθητές στην παρατήρηση των παραμέτρων που αλλάζουν και παραμένουν ίδιες και στη διαπίστωση ότι «ορθογώνια με διαφορετική περίμετρο μπορούν να έχουν ίδιο εμβαδό».

##### *6<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Παρομοίως, στο 6<sup>ο</sup> πρόβλημα τα παιδιά αποδίδουν μαθηματικά νοήματα σε ό,τι διαβάζουν, κατανοώντας τη μεταλειτουργία των κειμενικών στοιχείων (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007), ενώ εξετάζουν και πάλι τη σχέση περιμέτρου-εμβαδού, ωστόσο, μέσα σε διαφορετικό πλαίσιο. Αυτό σημαίνει ότι οι συνθήκες του προβλήματος αλλάζουν και καλούνται να διερευνήσουν τη δυνατότητα ύπαρξης διαφορετικών ορθογωνίων σχημάτων, διατηρώντας αυτή τη φορά σταθερή την περίμετρο και όχι το εμβαδό. Μέσα από τη συμπλήρωση του πίνακα και την ανάλυση των δεδομένων, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι «ορθογώνια με διαφορετικές διαστάσεις, αλλά ίδια περίμετρο, δεν έχουν το ίδιο εμβαδό» και επεκτείνουν τη γνώση τους κάνοντας μαθηματικές γενικεύσεις, όπως ότι «το ορθογώνιο που 'τείνει να γίνει τετράγωνο', έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια» ή ότι «ανάμεσα σε ορθογώνια με ίση περίμετρο, αυτό που έχει μεγαλύτερο εμβαδό, είναι αυτό που 'μοιάζει με τετράγωνο'».

#### *5<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

##### *7<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Κατά τη διεξαγωγή του 5<sup>ου</sup> διδακτικού επεισοδίου, στο οποίο τίθεται μία προβληματική κατάσταση ‘open-started’ (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3), γίνεται διερεύνηση της ορθότητας ενός ισχυρισμού, ενώ χρειάζεται να εξεταστούν όλα τα πιθανά ενδεχόμενα που θα τον επαληθεύσουν ή θα τον καταρρίψουν. Ως συνέχεια των προηγούμενων έργων που, επίσης, ελέγχονται υποθέσεις της ηρωίδας, και στο σημείο αυτό αξιοποιούνται τα τεχνικά χαρακτηριστικά του κειμένου (ΟΣ και συσχετιστικές διαδικασίες) και το πλαίσιο μέσα στο οποίο λειτουργεί το καθένα (περιορισμοί και προϋποθέσεις) (Fang & Schleppegrell, 2008). Σημασία στο έργο έχει η διαδικασία που επιλέγουν να κινηθούν οι μαθητές προκειμένου να εκφράσουν τη σκέψη τους, καθώς προκύπτει η ανάγκη να αποτυπωθούν με συστηματικό τρόπο, σε μορφή πίνακα και νοητικών αναπαραστάσεων, δεδομένα που αποκτούν μαθηματικό νόημα και οδηγούν σε παραδείγματα και αντιπαραδείγματα του αρχικού συλλογισμού, ακόμη και σε γενικές παραδοχές.

#### *6<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

##### *8<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Το πλαίσιο στην παρουσίαση της 8<sup>ης</sup> προβληματικής κατάστασης είναι εντελώς διαφορετικό, καθώς οι συμμετέχοντες καλούνται με άμεσο τρόπο να διαβάσουν το κείμενο μέσα από τα μάτια του συγγραφέα και να εντοπίσουν στοιχεία που σκόπιμα έχουν παραλειφθεί και δυσχεραίνουν την απόδοση ορθού μαθηματικού νοήματος στη διαδικασία εύρεσης του εμβადού δύο επιφανειών. Μέσα από την εμπλοκή στο εν λόγω διδακτικό έργο τα παιδιά εξοικειώνονται με τον μαθηματικό λόγο (Lemke, 2003· O’Halloran, 1999· O’Halloran, 2000) και κατανοούν τη μεταλειτουργία (de Oliveira & Cheng, 2011· Fang & Schleppegrell, 2008· Schleppegrell, 2007) ενός μαθηματικού κειμένου ως ένα σύστημα που είναι κατάλληλα δομημένο γλωσσικά (Halliday, 1978· Halliday & Martin, 1993).

#### *7<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

##### *9<sup>ο</sup> πρόβλημα*

Το τελευταίο διδακτικό έργο θα μπορούσαμε να πούμε ότι συνδέεται με το προηγούμενο και αποτελεί ένα εργαλείο συνολικής αποτίμησης του τρόπου που οι μαθητές προσεγγίζουν, αναλύουν γλωσσικά και κατανοούν ένα κείμενο μαθηματικών με βάση τις μαθηματικές ιδέες και διαδικασίες που έχουν κατακτήσει. Πρόκειται για ένα πρόβλημα ανοιχτού τύπου (Watson & Ohtani, 2015, κεφ. 3), όπου οι συμμετέχοντες, σε ζευγάρια, αναλαμβάνουν δύο ρόλους, τον ρόλο συγγραφέα και τον ρόλο αναγνώστη/λύτη. Καλούνται να διατυπώσουν προβλήματα εύρεσης περιμέτρου/εμβადού, αφού προηγουμένως σκεφτούν το πλαίσιο στο οποίο θα

δομήσουν το κείμενο προκειμένου να του αποδώσουν ένα μαθηματικό νόημα. Στη συνέχεια, γίνονται αναγνώστες και λύτες προβλημάτων που κατασκεύασαν άλλα ζευγάρια μαθητών. Τα παιδιά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, ανακαλώντας χαρακτηριστικά που πρέπει να συμπεριλάβουν στο κείμενο προκειμένου να είναι τεχνικά πλήρες και αποτελεσματικές στρατηγικές για τη λήψη σωστών αποφάσεων και την επίλυση των δικών τους προβλημάτων, σε πρώτη φάση, αλλά και των άλλων ζευγαριών σε δεύτερη.

### 3.9 Ανάλυση δεδομένων

#### *Διαγνωστικό στάδιο*

Από την ανάλυση των γραπτών απαντήσεων των συμμετεχόντων και τον διάλογο που αναπτύχθηκε στην τάξη αναδείχθηκαν ορθοί συλλογισμοί, αλλά και σημαντικές - αναμενόμενες βάσει της μαθησιακής τροχιάς της Π και Ε- παρανοήσεις σε μαθηματικές έννοιες, όπως και αρκετές λανθασμένες προσεγγίσεις του μαθηματικού λόγου. Αυτές οι παρατηρήσεις, εκ των οποίων αντιπροσωπευτικό δείγμα παρατίθεται και στον Πίνακα 1, λήφθηκαν υπόψη στην προετοιμασία των επόμενων διδακτικών επεισοδίων.

Σε γενικές γραμμές, η πλειοψηφία των μαθητών δυσκολεύτηκε να καταλάβει το νόημα της δραστηριότητας ομαδοποίησης των 7 προβλημάτων, λόγω της χαμηλής αναγνωστικής ικανότητας. Αυτό φάνηκε, γιατί παρόλο που τους δόθηκε χρόνος να διαβάσουν την εκφώνηση του κειμένου και δόθηκαν επεξηγήσεις από το εκπαιδευτικό/ερευνητή, συνέχισαν να έχουν απορίες

[00:00:30 Ομιλητής 1<sup>3</sup>: Ωραία λοιπόν, θα πρέπει, λοιπόν, να τα διαβάσετε πάρα πολύ προσεκτικά.

00:00:35 Αγγελική<sup>4</sup>: Όλα;

00:00:37 Ομιλητής 1: Ναι, δεν θα χρειαστεί να τα λύσετε, να βρούμε την απάντηση. Απλά, μελετώντας τα, θα πρέπει να σκεφτείτε κάποια χαρακτηριστικά που μπορεί να έχουνε για να τα βάλετε σε ομάδες. Όταν μιλάμε για ομάδες, τι εννοούμε; Όταν βάζουμε κάτι σε ομάδες... τι πρέπει να λάβουμε υπόψη, και γενικά, όχι μόνο στα προβλήματα.

.....

00:03:41 Ανδρέας: Πρέπει να το λύσουμε;

00:03:43 Ομιλητής 1: Όχι, δεν θα το λύσουμε. Θα το διαβάσεις προσεκτικά, θα το μελετήσεις και θα προσπαθήσεις, διαβάζοντας τα όλα, να βρεις κάτι που μπορεί να είναι ομοιότητα, να μοιάζει με ένα άλλο.

.....

---

<sup>3</sup> Αναφέρεται στον εκπαιδευτικό/ερευνητή.

<sup>4</sup> Για λόγους δεοντολογίας και τήρησης της ανωνυμίας των μαθητών, τα πραγματικά ονόματα έχουν αντικατασταθεί από ψευδώνυμα.

00:04:33 Σωτηρία: Κυρία, δεν το έχω καταλάβει τι πρέπει να κάνω.

00:04:33 Ομιλητής 1: Δεν έχει καταλάβει τι πρέπει να κάνει. Ποιος θέλει να βοηθήσει; να μην τα λέω πάλι εγώ.] ή ξεκίνησαν απευθείας να τα λύνουν (Αφροδίτη, Αγγελική) θέλοντας να απαντήσουν βιαστικά σε αυτό που ζητούσε κάθε πρόβλημα χωριστά [00:03:30 Αφροδίτη: Γιατί, κυρία; Αφού ξέρω την απάντηση... 00:03:31 Ομιλητής 1: Δεν πειράζει, εμένα σε αυτή τη φάση δεν με ενδιαφέρουν οι απαντήσεις.], ενώ η δραστηριότητα δε ζητούσε κάτι τέτοιο. Αξίζει να σημειωθεί, βέβαια, πέραν του ότι ήταν ξεκάθαρο πως δεν έγινε κατανοητό το νόημα του κειμένου, πιθανό να έπαιξε ρόλο το γεγονός ότι δεν τους είχε ανατεθεί άλλη φορά παρόμοια δραστηριότητα.

Στην πορεία του διαγνωστικού σταδίου και αφού έγινε κατανοητό το ζητούμενο, οι μαθητές διερεύνησαν το πόσες πιθανές ομάδες μπορεί να υπάρχουν και τα κριτήρια ομαδοποίησης των προβλημάτων.

[00:01:03 Αθανασία: Θα δούμε αυτά που ξέρουμε και αυτά που δεν ξέρουμε.

00:01:04 Ομιλητής 1: Αυτά που ξέρουμε, αυτά που δεν ξέρουμε. Κάτι άλλο; Τι άλλο θα είναι αυτό που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας για να τα βάλουμε σε ομάδους; Ανδρέα, ΕΣΥ τι λες;

00:01:17 Ανδρέας: Μμμ... εξαρτάται... πόσο μεγάλο είναι το καθένα.

00:01:22 Ομιλητής 1: Πόσο μεγάλο το μέγεθος του προβλήματος;

00:01:23 Ανδρέας: Όχι...

00:01:24 Ομιλητής 1: Το πόσες σειρές είναι δηλαδή;

00:01:27 Αφροδίτη: Όχι... Τι λέει το πρόβλημα. Τι γράφει.

00:01:29 Ομιλητής 1: Μάλιστα αυτά που γράφει. Είναι λίγο πιο γενικό βέβαια αυτό... Δεν μπορούμε να ξέρουμε, αλλά πόσες ομάδες μπορούμε να βάλουμε; Είναι 7 προβλήματα. Μπορούν να είναι 7 ομάδες;

00:02:18 Όλοι: Όχι!

00:02:19 Ομιλητής 1: Γιατί, Ελένη;

00:02:20 Ελένη: Για να είναι μια ομάδα πρέπει να είναι πάνω από 1 πρόβλημα.]

Από τον τρόπο προσέγγισης των κειμένων φάνηκε ότι, παρόλο που εν μέρει κάποιοι προσπάθησαν να ακολουθήσουν «γλωσσο- μαθηματικές» πρακτικές που είχαν γνωρίσει καθ' όλη τη διάρκεια της χρονιάς προκειμένου να κατανοήσουν τη δομή τους ολιστικά, αλλά και να συνδέσουν τα επιμέρους τεχνικά χαρακτηριστικά μεταξύ τους (Αφροδίτη), λιγότεροι από τους μισούς, απάντησαν σωστά.

Κάποιοι συμμετέχοντες επισήμαναν το πώς αντιλαμβάνονται την ομοιότητα μεταξύ των προβλημάτων προκειμένου να τα εντάξουν στην ίδια ομάδα [00:05:29 Γεωργία: Με πιο απλά λόγια; ... Ότι να βρούμε τι ίδια έχουνε... 00:05:58 Ελένη: Μπορείς να πεις ότι μπορούν... ότι πρέπει να τα βάλουμε, όχι, πρέπει να βρουν αυτά που ΤΑΙΡΙΑΖΟΥΝ στις προτάσεις και αυτά που ταιριάζουν μαζί να τα βάλουν.]

Κατά τη διάρκεια της ανάγνωσης υπήρξε ένας γενικότερος προβληματισμός όσον αφορά στον εντοπισμό ομοιοτήτων. Μία μαθήτρια επισήμανε και το κριτήριο της διαφοράς ως τρόπο διαχωρισμού ορισμένων προβλημάτων [00:06:25 Αγγελική: Όταν έχουμε κάτι διαφορετικό.].

Ακόμη, φάνηκε από την πρώτη στιγμή το επίπεδο δυσκολίας του 7<sup>ου</sup> προβλήματος, το οποίο συνδύαζε την έννοια του εμβαδού (Ε) και της περιμέτρου (Π), διότι μπέρδεψε την πλειοψηφία.

[00:12:24 Ομιλητής 1: ... ΕΣΥ Κατερίνα, τις έκανες τις ομάδες σου; Δυσκολεύτηκες;

00:12:24 Κατερίνα: Ναι...

00:12:25 Ομιλητής 1: Ορίστε;

00:12:25 Κατερίνα: Λιγάκι.

00:12:33 Ομιλητής 1: Λιγάκι... Τι είναι αυτό που σε δυσκόλεψε δηλαδή;... Ποιο σε δυσκόλεψε;

00:12:42 Κατερίνα: Αυτό. (έδειξε το 7<sup>ο</sup>)

00:12:43 Ομιλητής 1: Ποιο; Ποιο είναι το «αυτό»;

00:12:46 Κατερίνα: Το εφτά.

00:12:48 Ομιλητής 1: Το 7; Μμμ...

00:12:51 Φανή: Όχι! Το 7 εύκολο ήταν!

00:12:51 Ομιλητής 1: Το 7 εύκολο ήταν;

00:12:51 Φανή: Βασικά...

00:12:52 Ομιλητής 1: Και αυτό ήταν εύκολο; Και το 3... για να το δω το 3<sup>ο</sup>. Μάλιστα... βλέπω, όμως... το έβαλες κάπου το 7;

00:13:00 Κατερίνα: Ναι...]

Τελικά, το 7<sup>ο</sup> κάποιοι το ενέταξαν στα προβλήματα εύρεσης είτε της Π είτε του Ε, ενώ λίγοι ήταν οι μαθητές που προβληματίστηκαν περισσότερο, εκφράζοντας την απορία αν μπορούν να το συμπεριλάβουν και στις δύο βασικές ομάδες που είχαν εξ αρχής δημιουργήσει [00:09:34 Φανή: Μπορεί να μπει κάποιο και σε 2 ομάδες; 00:13:28 Νίκος: Μπορούμε να βάλουμε ένα πρόβλημα σε 2 ομάδες; 00:13:35 Ομιλητής 1: Αν ε, αν υπάρχει λόγος που θα το σκεφτείς και θα το εξηγήσεις, να το υποστηρίξεις αυτό, το δέχομαι.] ή να δημιουργήσουν και μία τρίτη ξεχωριστή.

Έτσι, μόνο οκτώ μαθητές απάντησαν στο τέλος σωστά, όπως προαναφέρθηκε, είτε ομαδοποιώντας τα προβλήματα σε δύο κατηγορίες, με βάση την εύρεση της Π και του Ε, ενώ το 7<sup>ο</sup> πρόβλημα το συμπεριέλαβαν και στις δύο ομάδες (Νίκος, Ελένη).

[00:24:02 Νίκος: Έκανα σε σχέση με τι πρόβλημα είναι, με εμβαδόν, περίμετρο ή άλλα.

00:24:04 Ομιλητής 1: Ακούμε ε... Εμβαδόν, περίμετρο ή άλλα. Ναι...

00:24:13 Νίκος: Βρήκα το... Πρώτα τρία. Το 1 με το 4 και το 5, γιατί έχουν περίμετρο και μετά έκανα το 6 με το 3 και το 2, γιατί έχουν εμβαδόν. Το 7 είπα να το βάλω και με τα 2 έχουν Και περίμετρο Και εμβαδόν.

.....

00:48:37 Ελένη: Το ξαναέγραψα και δεν βρήκα 3 Ομάδες. Βρήκα δυόμισι, γιατί είναι 2 ολόκληρες και μια που πάει και στις 2, οπότε είναι μισή.]

Ως προς τη συστημική λειτουργική προσέγγιση θα λέγαμε, δηλαδή, ότι «εκμεταλλεύτηκαν» όχι μόνο το νόημα του κειμένου, αλλά και τα σχήματα και τις εικόνες που υπήρχαν σε ορισμένα προβλήματα με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε ορθή ομαδοποίηση.

[00:06:45 Γεωργία: Όχι, κυρία, θα το βλέπεις και... το βλέπεις κι απ' τα σχέδια και όλο.

.....

00:11:43 Ελένη: Εμείς, απλά, εμείς απλά λέμε για τις ομοιότητες... Έχουμε τα δύο σε σχέση με περιφραξη...

00:12:11 Γεωργία: Και με μήκος...;

00:12:13 Ελένη: Έχουμε μήκος και τέτοια και βγάζει και απ' το σχέδιο... και...

00:12:17 Γεωργία: Ναι... Οπότε είναι ωραία.]

Δόθηκε, λοιπόν, η αφορμή να αναδειχθεί στην ολομέλεια η αξία της ύπαρξης σχημάτων και οπτικών αναπαραστάσεων ενθαρρύνοντας την έκφραση της σκέψης τους και τα παιδιά κατάφεραν να αποσυμπκνώσουν, έμμεσα, το νόημα μαθηματικών λέξεων [00:17:20 Ελένη: Μοιάζουν, γιατί έχουν ένα... για επικάλυψη κάποιου χώρου.], να συσχετίσουν ΟΣ και ρήματα με μαθηματικές διαδικασίες [00:25:52 Ομιλητής 1: Τι κοιτάζεις στα προβλήματα; 00:25:52 Νίκος: Πώς λυνόντουσαν και... 00:25:55 Ομιλητής 1: Σκέφτηκες τον τρόπο επίλυσης.] και να αντιληφθούν τη σημασία του πλαισίου του κάθε προβλήματος [00:01:27 Αφροδίτη: Όχι... Τι λέει το πρόβλημα. Τι γράφει.] λαμβάνοντας υπόψη και τις οπτικές αναπαραστάσεις [00:06:45 Γεωργία: Όχι, κυρία, θα το βλέπεις και... το βλέπεις κι απ' τα σχέδια και όλο.].

Από την άλλη, οι παρανοήσεις έδειξαν πως το γνωστικό υπόβαθρο των περισσότερων μαθητών δεν ήταν αντίστοιχο του επιπέδου της τάξης, δηλαδή το επίπεδο αναγνωσιμότητας ήταν χαμηλό και δεν είχαν κατανοήσει σε βάθος τις ιδιότητες της περιμέτρου και του εμβαδού και τις μαθηματικές διαδικασίες με τις οποίες αυτές συνδέονται.

[00:14:54 Αφροδίτη: Ξεκινάμε να μετράμε από το μηδέν ή από το ένα εδώ; Στον χάρακα...

00:14:57 Ομιλητής 1: Α, από το μηδέν ή απ' το ένα; Από πού θα πρέπει να μετρήσουμε;

00:15:02 Αφροδίτη: Το ένα.

00:15:03 Ομιλητής 1: Το χρειάζεσαι καταρχήν αυτό τώρα; Γιατί το ρωτάς;

00:15:06 Αφροδίτη: Για να δούμε...

00:15:07 Ομιλητής 1: Χρειάζεται χάρακας;

00:15:09 Αφροδίτη: Ναι.

00:15:10 Ομιλητής 1: Τι ρωτάει η ερώτηση, τι λέει το πρόβλημα;

00:15:13 Αφροδίτη: Την περίμετρο και ο διαδραστικός πίνακας.

00:15:16 Ομιλητής 1: Της τάξης. Ο συγκεκριμένος δηλαδή... αυτός εκεί; (δείχνει εναλλάξ τον πραγματικό πίνακα και αυτόν της εικόνας) Αυτός; Χρειάζεσαι χάρακα; Για ποιον ρωτάω; Τον αληθινό...

00:15:26 Αφροδίτη: Αυτό μπορώ να το μετρήσω.

.....

00:19:44 Ομιλητής 1: Γιατί δυσκολεύεσαι; Τι είναι αυτό που σε δυσκολεύει;

00:19:52 Αφροδίτη: Δεν ξέρω... Με την ταπετσαρία και το ύψος.

.....

00:22:06 Ομιλητής 1: Μήπως μπορώ να σε βοηθήσω λίγο;

00:22:11 Αργύρης: Δεν υπάρχει κάτι που με μπερδεύει. Απλά έχω μπερδευτεί πού πρέπει να τα βάλω.

.....

00:34:43 Ομιλητής 1: Συμφωνείς με αυτό που είπε η Κατερίνα; Ότι η επικάλυψη είναι το εμβαδό; ... Πέτρο, τι λες; Μήπως βοήθησε λίγο η Κατερίνα;

00:35:00 Πέτρος: Το έκανα 6 κόμμα 7 κόμμα 3.

00:35:04 Ομιλητής 1: Και το 2 πού το είχες με το 3;

00:35:09 Πέτρος: Το άφησα μόνο του. (γέλιο)

00:35:10 Ομιλητής 1: Μόνο του το 2; ... Γιατί τι είναι αυτό το ξεχωριστό που το κάνει να διαφέρει από τα άλλα δηλαδή;

00:35:20 Πέτρος: Επειδή για να βρούμε το μέσα στο 3 κάνουμε, κάπως, και το εμβαδόν.

00:35:26 Ομιλητής 1: Για να βρούμε;

00:35:27 Πέτρος: Το μέσα στο 3, κάνουμε εμβαδόν.

00:35:31 Ομιλητής 1: Στο 2 τι ζητάει να βρούμε; Ποια διαδικασία θα ακολουθήσουμε;

00:35:39 Πέτρος: Δεν το κατάλαβα το 2.

00:35:40 Ομιλητής 1: Δεν το κατάλαβες; Σε δυσκόλεψε; Γιατί; Τι σε δυσκόλεψε; Κάτι που σε μπερδεψε ίσως... Τι σε μπερδεψε;.

00:35:49 Πέτρος: Με το κείμενο. Δεν κατάλαβα πώς να το λύσω.

.....

00:50:59 Ομιλητής 1: Το 2 είναι για το μέσα, κάποια επικάλυψη ή για το γύρω γύρω;

00:51:02 Σωτηρία: Το μήκος, το ύψος και τα μέτρα. Έχει μέτρα, μήκος και ύψος.]

Ακόμη, οι λανθασμένες ιδέες τους απέδειξαν ότι δε λήφθηκε υπόψη ο πολύ-σημειωτικός χαρακτήρας των κειμένων και πως έγινε μία επιφανειακή και αποσπασματική ανάλυση των στοιχείων της μαθηματικής γλώσσας, με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν πολλοί ανορθόδοξοι τρόποι ομαδοποίησης.

[00:44:55 Φανή: Στην πρώτη ομάδα έβαλα το 5 και το 7. Που μιλάνε και τα δύο για περίμετρο.

00:45:02 Ομιλητής 1: Ναι, συνέχισε.

00:45:03 Φανή: Στη δεύτερη ομάδα έβαλα το 6, πάλι το 7 και το 3 που μιλάνε για εμβαδόν.

00:45:10 Ομιλητής 1: Ναι.

00:45:11 Φανή: Και στην άλλη έβαλα το 2, το 4 και το 1.

00:45:14 Ομιλητής 1: Θα ήθελα να μας πεις στην τρίτη ομάδα που έχεις το 2, 4 και το 1, τι κοινό βρήκες.

00:45:19 Φανή: Ε, γιατί μας ρωτάει το συνολικό.

00:45:21 Ομιλητής 1: Ποιο συνολικό;

00:45:21 Φανή: Να βρούμε το όλο.

00:45:25 Ομιλητής 1: Το συνολικό κόστος στο 2. Το 4;

00:45:37 Φανή: Δεν ξέρω, με μπερδεψε.

00:45:40 Ομιλητής 1: Τι είναι αυτό που βρήκες; Δεν μπορεί. Κάτι που θα σκέφτηκες; Τι είναι αυτό που διάβασες; Που είδες ίσως στην εικόνα κάτι, στο πρόβλημα;

00:45:53 Φανή: Στο μοντέλο.

00:45:56 Ομιλητής 1: Το μοντέλο;

00:45:57 Φανή: Ναι.

00:45:58 Ομιλητής 1: Ναι... Τι ομοιότητα έχουν τα μοντέλα δηλαδή;

00:46:01 Φανή: Έχουν σχήμα... (διστακτικά)

00:46:10 Ομιλητής 1: Σχήματα έχουν όλα, νομίζω. (σιωπή)]

Μάλιστα, χαρακτηριστικό είναι το «ταίριασμα» μαθηματικών όρων ως λέξεων-κλειδιών, χωρίς λειτουργική συστημική προσέγγιση του κειμένου και τούτο φαίνεται από τις σημειώσεις τους (κυκλωμένες/υπογραμμισμένες λέξεις- βελάκια) πάνω στο κείμενο (Αφροδίτη, Αντώνης, Αργύρης), αλλά και από τα λεγόμενά τους.

[00:43:38 Κατερίνα: Εγώ έβαλα την Α Ομάδα, όπως ο Νίκος, το 1, το 4 και το 5 και τη Β Ομάδα, αλλά το 7 που δεν ήξερε πού να το βάλει, εγώ το έβαλα στη Β Ομάδα, διότι μιλάει για εμβαδόν... για εμβαδόν όπως το 2, το 3 και το 6.

00:43:58 Ομιλητής 1: Για περίμετρο δεν μιλάει;

00:44:01 Κατερίνα: Μιλάει.

00:44:05 Ομιλητής 1: Άρα είναι σε 2 ομάδες. Δηλαδή συμφωνείς με τον αδερφό σου;

00:44:09 Κατερίνα: Ναι.]

Το γεγονός ότι αρκετά παιδιά δε διέκριναν τις διαφορετικές μονάδες μέτρησης φανερώνει ότι δεν αντιλαμβάνονταν ποιο είναι το μετρήσιμο χαρακτηριστικό στο οποίο αναφέρονταν και ότι δεν απέδωσαν στη μονάδα μέτρησης μαθηματικό νόημα.

[00:28:38 Ομιλητής 1: Είπε, λοιπόν, ότι το 2 και το 3 μιλάνε για επικάλυψη. Ναι, αυτό στα μαθηματικά, πώς το λέμε; Την επικάλυψη; (σιωπή) Υπάρχει μια λέξη που... «επικάλυψη» δεν είναι λάθος να το πούμε έτσι. Υπάρχει κάποια λέξη που χρησιμοποιούμε για τη λέξη επικάλυψη στα μαθηματικά; Τι είναι αυτό που βρίσκουμε δηλαδή;

00:28:54 Αγγελική: Α... ΤΟ...

00:29:04 Γεωργία: Την περίμετρο.

00:29:04 Ομιλητής 1: Την περίμετρο βρίσκουμε;

00:29:09 Γεωργία: Όχι, σόρυ, μπερδεύτηκα.

00:29:11 Ομιλητής 1: Τι πρέπει να βρω όταν κάνω... Όταν ασχολούμαι με επικάλυψη; Πέτρο, θες να απαντήσεις;

00:29:16 Πέτρος: Το μέσα.

00:29:17 Ομιλητής 1: Το μέσα. Πώς το λένε αυτό το μέσα στα μαθηματικά;

00:29:20 Πέτρος: Εμβαδό...

00:29:25 Ομιλητής 1: Κατερίνα; Είπε ο Πέτρος εμβαδό. Θέλω να δω εσύ τι είπες.

00:29:28 Κατερίνα: Τετραγωνικά μέτρα;

00:29:30 Ομιλητής 1: Αυτή είναι η μονάδα μέτρησης, είναι σε τετραγωνικά μέτρα... τετραγωνικά εκατοστά...

.....

00:49:13 Ομιλητής 1: Μέτρα πού; Τι όμως; Να το κάνουμε λίγο πιο συγκεκριμένα; Να βοηθηθούν εδώ πέρα κάποια παιδιά; Το 1 και το 3 μιλάνε για μέτρα. Το 1 και το 3 δεν είπες;

00:49:22 Σωτηρία: Ναι.

00:49:23 Ομιλητής 1: Για δείξε μου τα μέτρα που πρέπει να βρεις δηλαδή. Στο 1;

00:49:28 Σωτηρία: Πρέπει να βρω...

00:49:29 Ομιλητής 1: Ποιο;

00:49:30 Σωτηρία: Τα μέτρα... Το γύρω γύρω.

00:49:31 Ομιλητής 1: Το γύρω γύρω. Στο 3 τι πρέπει να βρεις; Το γύρω γύρω; Τι πρέπει να βρεις; Τι πρέπει να την κάνουμε την πισίνα;

00:49:46 Σωτηρία: Να βρούμε πώς θα την επικ...

00:49:49 Ομιλητής 1: Επικαλύψουμε, δηλαδή τι σημαίνει αυτό, Τι θα κάνεις;

00:49:52 Σωτηρία: Βασικά να βρούμε πόσα πλακ... 'πλακιδιά'...

00:49:56 Ομιλητής 1: Πλακιδία; Πού θα μπουν τα πλακιδία;

00:49:58 Σωτηρία: Μέσα.

00:49:59 Ομιλητής 1: Γύρω γύρω ή μέσα;

00:50:00 Σωτηρία: Μέσα.

00:50:01 Ομιλητής 1: Άρα είναι το ίδιο;

00:50:02 Σωτηρία: Όχι.

00:50:03 Ομιλητής 1: Μήπως τελικά δεν μοιάζουν αυτά; Πρέπει να τα βάλεις σε διαφορετικές ομάδες; (σιωπή) Βλέπεις λοιπόν;

00:50:08 Σωτηρία: Το βρήκα τώρα.]

Έβαλαν στην ίδια ομάδα προβλήματα που έγραφαν για μέτρα και τετραγωνικά μέτρα, θεωρώντας ότι περιγράφουν κοινό χαρακτηριστικό [00:49:06 Σωτηρία: Το ένα με το 3, γιατί μιλάνε για μέτρα.] και έκριναν ότι το 7<sup>ο</sup> πρόβλημα ανήκε μόνο στην ομάδα εύρεσης της περιμέτρου.

[00:36:11 Αγγελική: Εγώ έκανα δύο ομάδες. Και στην πρώτη ομάδα έβαλα το 1, το 2, το 3 και το 4.

00:36:20 Ομιλητής 1: Το 1, το 2, το 3 και το 4. Τι ομοιότητα έχουν, σε τι μοιάζουν;

00:36:27 Αγγελική: Ότι όλα έχουν με μέτρα.

00:36:31 Ομιλητής 1: Όλα έχουν με μέτρα. Το 1, το 2, το 3... είπες και το 3;

00:36:33 Αγγελική: Ναι.

00:36:34 Ομιλητής 1: Το 3 πού έχει μέτρα; Πού τα κατάλαβες τα μέτρα;

00:36:39 Αγγελική: Μέτρα, δηλαδή στο μοντέλο και... αυτό. Το δείχνει στο Μοντέλο και το λέει 'τετραγωνικού μέτρου'.

00:36:46 Ομιλητής 1: Είναι το ίδιο τα μέτρα και τα τετραγωνικά μέτρα;

00:36:49 Αγγελική: Όχι αλλά...

00:36:49 Ομιλητής 1: Τότε; Τι μετράμε, όταν μετρώ... όταν χρησιμοποιούμε τη μονάδα μέτρησης 'μέτρα'; Τι είναι αυτό που μετράμε; (σιωπή) Μπορείς να μου το δείξεις και στο σχήμα. Τι είναι αυτό που μετράμε δηλαδή; Άμα σου πω «πού είναι τα μέτρα;»... Δείξε μου. (σιωπή) Τι είναι αυτό που θα μετρήσεις;

00:37:12 Αγγελική: Αυτά. (δείχνει διστακτικά τις πλευρές)

00:37:14 Ομιλητής 1: Το μήκος των πλευρών, δηλαδή.

00:37:15 Αγγελική: Ναι.

00:37:16 Ομιλητής 1: Ωραία. Σε τετραγωνικά μέτρα τι θα μετρήσεις; (σιωπή) Γιατί μπερδεύτηκε τώρα η Αγγελική; Αυτά έχουν κάτι που μοιάζουν, αυτές οι δύο λέξεις;

00:37:22 Γεωργία: Όχι.

00:37:22 Αγγελική: Μοιάζουν! Έχουν και οι δύο τις λέξεις 'μέτρα'. Είναι η ίδια λέξη...

00:37:28 Ομιλητής 1: Έχουν την ίδια λέξη. Είναι το ίδιο πράγμα όμως;

00:37:29 Όλοι: Όχι!

00:37:30 Ομιλητής 1: Ωραία, έδειξε η Αναστασία για να το πω σε όλους ότι όταν μιλάμε για μέτρα μου έδειξε τη μια άκρη της πλευράς με την άλλη, ωραία... από την αρχή μέχρι το τέλος, από κορυφή σε κορυφή δηλαδή. Για τα τετραγωνικά μέτρα τι θα μετρήσεις;

00:37:46 Αγγελική: Αυτό. (δείχνει διστακτικά τις πλευρές)

00:37:48 Ομιλητής 1: Γύρω γύρω; Το σύνολο των πλευρών, το μήκος των πλευρών; Μμμ; (σιωπή) Τι είναι το τετραγωνικό μέτρο; Είναι το ίδιο πράγμα; Άμα ήταν το ίδιο, γιατί να χρησιμοποιούμε δύο λέξεις; Για να μπερδευόμαστε; (σιωπή) Γιατί να λέμε τετραγωνικά μέτρα και μέτρα; Είναι το ίδιο πράγμα, Αφροδίτη; Τι μετράμε όταν λέμε τετραγωνικά μέτρα; Κώστα;

00:38:17 Κώστας: Το εμβαδό.

00:38:18 Ομιλητής 1: Το εμβαδόν. Και όταν κάποιος δεν το καταλαβαίνει πώς θα του το εξηγήσουμε; Άμα έρθει δηλαδή ένα παιδάκι της δευτέρας και του πεις τη λέξη εμβαδό, θα καταλάβει;

00:38:27 Κώστας: Όχι.

00:38:27 Ομιλητής 1: Για να το κάνουμε...

00:38:29 Κώστας: Πως μετράμε το μέσα.

00:38:31 Ομιλητής 1: Το μέσα.

00:38:36 Ομιλητής 1: Το μέσα, δηλαδή τι; Για παράδειγμα, άμα έχω μια κανάτα και τη γεμίσω με νερό, πόσο νερό έχει;

00:38:40 Κώστας: Το σχήμα.

00:38:46 Φανή: Όλο.

00:38:47 Ομιλητής 1: Ποιο όλο; ... Προσπάθησε να το πεις με λόγια.

00:38:51 Φανή: Δεν μπορώ.

00:38:56 Ομιλητής 1: Το όλο, ποιο όλο, από τι πράγμα;

00:38:58 Φανή: Όλο το σχήμα.

00:39:00 Ομιλητής 1: Όλο το σχήμα.

00:39:02 Γεωργία: Όλη την περίμετρο.

00:39:07 Ομιλητής 1: Όλη την περίμετρο; Και θα τη μετρήσω σε τετραγωνικά μέτρα;

00:39:07 Κατερίνα: Όλη την περίμετρο και το μέσα.

00:39:10 Ομιλητής 1: Και το μέσα. Πώς το λέμε αυτό με μια λέξη; Πώς το λέμε με μια λέξη όλο το γύρω γύρω και το μέσα... Το γύρω γύρω και το μέσα! Το γύρω γύρω ή το μέσα είναι τελικά; Γιατί δεν είναι το ίδιο πράγμα βασικά!

00:39:26 Ανδρέας: Το μέσα.

00:39:27 Ομιλητής 1: Το μέσα. Εντάξει; Όταν χρησιμοποιώ μέτρα τι μετρώ;

00:39:29 Ανδρέας: Το έξω.

00:39:35 Ομιλητής 1: Το έξω... το γύρω γύρω. Και όταν χρησιμοποιώ τετραγωνικά μέτρα;

00:39:40 Ανδρέας: Το μέσα.

00:39:41 Ομιλητής 1: Το μέσα, πώς το είπαμε; Ποια λέξη;

00:39:44 Ανδρέας: Εμβαδόν.

00:39:45 Ομιλητής 1: Εμβαδόν. Πιο απλά για ένα παιδάκι της πρώτης; ... Μπορείς να μου δείξεις στο σχήμα αυτό εδώ πέρα; Το ένα τετραγωνικό μέτρο, πού το δείχνω στο σχήμα, στο πρόβλημα 3; Πού είναι το τετραγωνικό μέτρο; Γιατί αυτή τη λέξη, τη λέξη «τετραγωνικό μέτρο», την έχει το πρόβλημα 3. Πού την έχει;

00:40:20 Αγγελική: Εδώ, κυρία. (δείχνει στο σχήμα)

00:40:21 Ομιλητής 1: Πού εδώ; Στα λόγια ή στην εικόνα;

00:40:23 Αγγελική: Στην εικόνα.

00:40:28 Ομιλητής 1: Στην εικόνα. Την έχει ΚΑΙ στα λόγια; Αργύρη;

00:40:31 Αργύρης: Ναι.

00:40:34 Ομιλητής 1: Άρα; Τι είναι το τετραγωνικό μέτρο; (σιωπή) Νίκο;

00:40:40 Νίκος: Είναι το ένα τετραγωνάκι.

00:40:43 Ομιλητής 1: Το τετραγωνάκι...

00:40:45 Νίκος: Μέσα από ένα μέτρο...

00:40:48 Ομιλητής 1: Τι έχει 1 μέτρο;

00:40:50 Νίκος: Η κάθε πλευρά του.

00:40:50 Ομιλητής 1: Η κάθε πλευρά του είναι 1 μέτρο.]

Έτσι, δημιούργησαν διαφορετικές ομάδες για προβλήματα που είχαν διαφορετικές λέξεις οι οποίες, ωστόσο, ανταποκρίνονταν σε ταυτόσημες μαθηματικές διαδικασίες (Αγγελική, Στέλλα). Επίσης, έκαναν ομαδοποιήσεις χωρίς αναφορά σε κάποια ομοιότητα (Αγγελική, Στέλλα), ενώ παρατηρήθηκε ότι μπόρεσαν να αναγνωρίσουν με μεγαλύτερη ευκολία στοιχεία του κειμένου που παρέπεμπαν στην έννοια της περιμέτρου (Αντώνης). Αντιθέτως, σε αυτά που αναφέρονταν στο εμβαδόν υπήρξε σύγχυση, λαμβάνοντας υπόψη μεμονωμένες λέξεις και επίπεδα σχήματα που μεταξύ τους έμοιαζαν κατά την κρίση τους (Αντώνης, Αργύρης, Ιωάννης).

Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση τριών μαθητών (Αργύρης, Γεωργία, Ιωάννης) με καλή ακαδημαϊκή επίδοση και θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, που ενώ προσπάθησαν να προσεγγίσουν εννοιολογικά τα κείμενα, δεν το έκαναν ολιστικά συνδέοντας όλα τα τεχνικά χαρακτηριστικά τους, με αποτέλεσμα να μην ολοκληρώσουν ορθά τον συλλογισμό τους και να οδηγηθούν σε λανθασμένα επιχειρήματα και απαντήσεις. Συγκεκριμένα, ο Αργύρης «ταίριαζε» νοηματικά τα σχήματα και τις κοινές λέξεις του κειμένου («αυλόγυρος» με «φράχτη» και «ταπετσαρία στους δύο τοίχους» με «πλακίδια»), ενώ δεν κατάφερε να κάνει το ίδιο με το 5<sup>ο</sup> και 6<sup>ο</sup> πρόβλημα και να αποσυμπυκνώσει το νόημα των μαθηματικών όρων τους («περίμετρο» και «εμβαδόν»).

Η Γεωργία, ενώ προσπάθησε να αποδώσει κοινό μαθηματικό νόημα σε λέξεις των προβλημάτων 1, 4 και 2, 3, τα οποία, όπως αιτιολογεί, αναφέρονται στον «αυλόγυρο» και «φράχτη» και στην «ταπετσαρία» και την «επικάλυψη χώρου» αντίστοιχα, παρόλα αυτά δεν μπόρεσε να «ξεπακετάρει» το νόημα των μαθηματικών όρων «περίμετρος» και «εμβαδόν» των

τριών τελευταίων προβλημάτων, ώστε να εντοπίσει κάποιο κοινό χαρακτηριστικό με τα προηγούμενα προβλήματα.

[00:25:59 Ομιλητής 1: Θες να μας πεις Γεωργία εσύ για τι συμφωνείς και για τι δε συμφωνείς;

00:26:05 Γεωργία: Συμφωνώ για κάποια πράγματα που είπε. Δηλαδή για το εμβαδόν, σε κάποιες ασκήσεις, σε κάποια προβλήματα συμφωνώ, σε κάποια όχι τόσο.

00:26:16 Ομιλητής 1: Ποια είναι αυτά που συμφωνείς; Εσύ καταρχήν με ποιον τρόπο τα χώρισες;

00:26:22 Γεωργία: Τα χώρισα... με... γενικά με τις λέξεις. Δηλαδή να πω, κύρια, πώς τα χώρισα;

00:26:27 Ομιλητής 1: Ναι, φυσικά. Ωραία, στην πρώτη ομάδα έβαλες το 1 και το 4. Γιατί;

00:26:37 Γεωργία: Γιατί έχουν παρόμοιες λέξεις και το ίδιο νόημα.

00:26:41 Ομιλητής 1: Ναι, ποιες είναι οι λέξεις που έχουν και τι νόημα αυτό είναι δηλαδή;

00:26:44 Γεωργία: Ότι το έχουν... είναι το ίδιο, δηλαδή λέει, το πρώτο λέει «Πόσα μέτρα είναι ο αυλόγυρος του σπιτιού» και το άλλο «πόσα μέτρα είναι ο φράχτης και...».

00:27:05 Ομιλητής 1: Τις μονάδες μέτρησης δηλαδή.

00:27:09 Γεωργία: Ναι. Και ότι είναι και το ίδιο σχήμα. Αυτό.

00:27:13 Ομιλητής 1: Μιλάει για το ίδιο σχήμα. Ποια άλλη ομαδοποίηση έκανες;... Να ρωτήσω κάτι για παράδειγμα... Το 3 που λέει για μέτρα που το έβαλες; Αυτό έχει μέτρα. Δεν το έβαλες στην ίδια ομάδα;

00:27:27 Γεωργία: Όχι.

00:27:28 Ομιλητής 1: Γιατί;

00:27:30 Γεωργία: Γιατί σκέφτηκα... Σκέφτηκα ότι είναι... μοιάζει και με το 2 που είναι και αυτό με επικάλυψη.

00:27:41 Ομιλητής 1: Α, μάλιστα.

00:27:42 Γεωργία: Ναι, δηλαδή με που...

00:27:45 Ομιλητής 1: Άρα, δεν είναι ο λόγος οι μονάδες μέτρησης.

.....

00:29:41 Γεωργία: Στην τρίτη ομάδα έβαλα το 5, το 6 και το 7. Ταιριάζουνε, γιατί λένε για εμβαδόν και περίμετρο και...

00:29:50 Ομιλητής 1: Το 5 λέει για εμβαδόν;

00:29:52 Γεωργία: Ναι, όχι, αλλά... Όχι, για περίμετρο!

00:29:52 Ελένη: Όχι!

00:29:56 Ομιλητής 1: Τότε;

00:29:56 Ελένη: Κυρία, εννοεί ότι... ότι αυτό εδώ πέρα λέει για εμβαδόν και περίμετρο. (δείχνει το 7)

00:30:01 Ομιλητής 1: Ναι.

00:30:02 Ελένη: Οπότε ταιριάζει και με αυτό που λέει για εμβαδόν και με αυτό. (δείχνει το 5 και 6)

00:30:04 Γεωργία: Ναι.

00:30:04 Ομιλητής 1: Ναι.

00:30:06 Ελένη: Αυτά τα 2 (δείχνει το 5 και 6) δεν θα ήταν μαζί σε ομάδα, αλλά αυτό εδώ (δείχνει το 7) τα συνδέει κάπως.

00:30:11 Ομιλητής 1: Μάλιστα.

00:30:14 Γεωργία: Καλύτερα...

00:30:16 Ομιλητής 1: Ε... Το 5 και το 6 όμως; Τα έβαλες σε μια ομάδα μεταξύ τους. Ταιριάζουν;

00:30:20 Ελένη: Όχι.

00:30:21 Ομιλητής 1: Όχι, άρα είναι σωστό;

00:30:22 Ελένη: Όχι.

00:30:25 Ομιλητής 1: Άρα λοιπόν, τι είναι αυτό που σας μπέρδεψε εδώ πέρα; Ποιο σας μπέρδεψε λίγο;

00:30:24 Γεωργία: Α, κυρία... έλεγε... Έλεγε, έλεγε έτσι τις λέξεις περίμετρο και αυτά...

00:30:31 Ομιλητής 1: Ποιο σας μπέρδεψε και τα βάλατε στην ίδια ομάδα; Ποιο από όλα δημιούργησε λίγο το μπέρδεμα;

00:30:36 Ελένη: Το 5.

00:30:36 Γεωργία: Το 5.

00:30:37 Αγγελική: Ναι.

00:30:39 Ομιλητής 1: Το 5; Άμα το βγάλετε δηλαδή; Θα είναι καλύτερα;

00:30:41 Ελένη: Θα είναι μια χαρά και αυτό και το 5 θα μπορούσε να πάει και με το 2, με το 3.

00:30:43 Γεωργία: Ναι...

00:30:45 Ομιλητής 1: Το 5; Το 5 και το 3... Γιατί;

00:30:48 Ελένη: Γιατί... Γιατί και αυτό είναι όπως...

00:30:53 Ομιλητής 1: Τι είναι αυτό που έχουν;

00:30:54 Ελένη: Δεν ξέρω... κάπως, όταν το διαβάζεις, ταιριάζει λίγο μέσα.

00:30:57 Ομιλητής 1: Τι είναι αυτό που ταιριάζει... ποια... ποια; Τι έχει γράψει εδώ πέρα ο συγγραφέας;

00:31:00 Ελένη: Αυτοί είναι, αλλά εδώ πέρα πρέπει να λέει για τοίχους εδώ πέρα, κι εδώ για πισίνα, που είναι... είναι κάποια... Πώς να το εξηγήσω τώρα; Είναι κάτι που πρέπει να βρούμε...

00:31:14 Γεωργία: Να το πω εγώ καλύτερα;

00:31:15 Ομιλητής 1: Τι θα πρέπει να βρούμε... σε αυτά τα δύο;

00:31:16 Ελένη: Ναι.

00:31:18 Γεωργία: Πρέπει να βρεις το πόσα μέτρα είναι.. τηρη...

00:31:24 Ομιλητής 1: Το 2 και το 3. Τι πρέπει να βρούμε στο 2 και το 3;

00:31:26 Ελένη: Και το 3 πρέπει να βρούμε...ε... βασικά την επικάλυψή τους.

00:31:31 Ομιλητής 1: Την επικάλυψη. Ποιος άλλος το είπε αυτό; Ποιος άλλος; Το είπε κι η Γεωργία, νομίζω, το είχε πει. Ωραία.

00:31:37 Γεωργία: Και το 5, κάπως έτσι είναι, γιατί λέει να βρούμε τηρη...

00:31:43 Ομιλητής 1: Την επικάλυψη;

00:31:44 Γεωργία: Όχι, αλλά πρέπει να βρούμε την περίμετρο.

00:31:47 Ομιλητής 1: Περίμετρος τι είναι; Τι πρέπει να βρούμε;

00:31:50 Γεωργία: Τώρα σκέφτομαι... μπορεί να έχει δίκιο ο Νίκος.]

Στην απάντηση του Ιωάννη φαίνεται ξεκάθαρα η αδυναμία του να κάνει γραμματικές μεταφορές εντός κειμένου και να αναδείξει με ορθό τρόπο τις μαθηματικές του ιδέες, εκφράζοντας ως αιτιολόγηση την ύπαρξη μεμονωμένων και αποσπασματικών λέξεων και σχημάτων, χωρίς δημιουργία μαθηματικών συνδέσεων μεταξύ των στοιχείων που έχει εντοπίσει.

[00:53:47 Ιωάννης: Η Α Ομάδα είναι 3, 6, 7, λόγω... γιατί ζητάει με το εμβαδόν, γιατί έχει σχέση με το εμβαδόν. Η Β Ομάδα είναι η 5, έχουμε την 5 και την 7 διότι...

00:54:01 Ομιλητής 1: Το 7 νομίζω το ξαναείπες, αλλά το ξαναέβαλες δηλαδή...

00:54:03 Ιωάννης: Ναι, γιατί έχει... μιλάει και για την περίμετρο. Και έκανα... η τρίτη ομάδα είναι 1, 2, 3, 4, διότι μιλάει για τα μέτρα. Η τέταρτη ομάδα...

00:54:24 Ομιλητής 1: Το 3 μιλάει για μέτρα;

00:54:28 Ιωάννης: Α, όχι.

00:54:33 Ομιλητής 1: Γιατί μιλάει;

00:54:36 Ιωάννης: Το 3 μιλάει για τον εμβαδόν.

00:54:39 Ομιλητής 1: Γιατί; Πώς το κατάλαβες; Γιατί δεν βλέπω να γράφει τη λέξη εμβαδόν. Τι είναι αυτό που έγραψε ο συγγραφέας και το κατάλαβες, ότι μιλάει τελικά για εμβαδόν;

00:54:54 Ιωάννης: Τη λέξη επικάλυψη.

00:54:55 Ομιλητής 1: Τη λέξη επικάλυψη, ωραία. Άρα αυτό πρέπει να μπει σ' άλλη ομάδα.

00:54:58 Ιωάννης: Ναι.

00:55:06 Ομιλητής 1: Είδατε λοιπόν; Άμα στα προβλήματα, κάτι δεν το δώσουμε σημασία, από αυτά που έχει γράψει ο συγγραφέας, μπορεί να μας μεπιδέψει λίγο και να μας οδηγήσει σε λάθος συμπέρασμα, να μην καταλάβουμε καλά τι λέει. Άρα, να θυμόμαστε ότι κάθε τι που είναι γραμμένο στο πρόβλημα, όποια φράση κι αν είναι γραμμένη, δεν είναι τυχαία γραμμένη. Το έχουμε ξαναπεί αυτά, έτσι δεν είναι;

00:55:30 Ιωάννης: Ναι.

00:55:31 Ομιλητής 1: Ωραία; Ποια είναι η άλλη ομάδα που έκανες;

00:55:31 Ιωάννης: Η τέταρτη ομάδα είναι 1, 3 4 6, 7 διότι...

00:55:37 Ομιλητής 1: Πάντως να πω ότι κάποια τα επαναλαμβάνεις, τα βάζεις και σε άλλες ομάδες.

00:55:39 Ιωάννης: Ναι.

00:55:40 Ομιλητής 1: Ναι. Για πες...

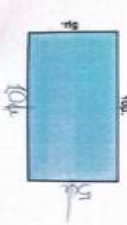
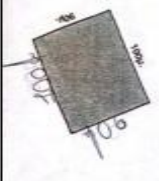
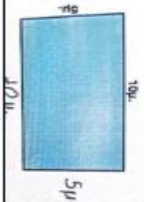
00:55:44 Ιωάννης: Είναι τώρα 1, 3, 4, 6 7 γιατί αναφέρεται πάνω σε ένα σχήμα.

00:55:51 Ομιλητής 1: Μάλιστα... Γιατί η ταπετσαρία δε μιλάει για σχήμα; Η ταπετσαρία τι σχήμα μπορεί να έχει;]

Στις τρεις επόμενες σελίδες ακολουθεί ο Πίνακας 1 με απαντήσεις των μαθητών και σχόλια του εκπαιδευτικού/ερευνητή γύρω από τις παρανοήσεις σε μαθηματικές έννοιες, όπως και γύρω από αρκετές λανθασμένες προσεγγίσεις του μαθηματικού λόγου.

### Πίνακας 1

Απαντήσεις μαθητών - σχόλια εκπαιδευτικού κατά το διαγνωστικό στάδιο

| ΟΝΟΜΑ    | ΑΛΙΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | ΣΧΟΛΙΑ                                                                                                                                                                                         |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Αφοδίτη  | <p>Διάβασε τα πρόβλημά του προσέληθε να τα συμπληρώσεις βρίσκοντας κάποια ομοιότητα.</p> <p>1. Ποσα μέτρα είναι ο ανώγειρος του σπιτιού του Βασίλη;</p>  <p>2. Η οικογένεια του Πάριου σκεπάζει το σπίτι της και σκέφτεται να αλλάξει τη ταπετσαρία στους δύο τοίχους των υπνοδωματίων. Κάνοντας μία έμυνα αγοράς, βρήκε τις δύο παλαιότερες ποσοτικές σε μια βιοτεχνία. Πόσο είναι το συνολικό κόστος της κάθε ταπετσαρίας, αν λάβετε υπόψη ότι ο κάθε τοίχος που θα γίνει η τοποθέτηση, έχει μήκος 4m και ύψος 3,5m.;</p>  <p>3. Το κάθε μέγεθος που θα τοποθετηθεί στην κλίση είναι ενός τετραγωνικού μέτρου. Ποσα μέτρα είναι τα γραμμάτια για την αναδόμηση όλων της κλίσης;</p>  <p>4. Ο κ. Γάβρης θέλει να αντικαταστήσει τον χαλασμένο φράχτη του κτηματός του, θυμηθείς ότι έχει βολιβάκι στην απόληξη του 400m. φράχτη. Του πείτε, ώστε να μη χρειαστεί να αγοράσει κανονόγραφο;</p>  | <p>Μη κατανοητό το ζητούμενο της άσκησης, νοερή επίλυση προβλημάτων, καταγραφή ανών απαντήσεων.</p> <p>«Ανώνωση» σημμάτων, καταγραφή των μηκών.</p> <p>Αποδόμηση κειμένου στο 3ο πρόβλημα.</p> |
| Αγγελική | <p>1. Ποσα μέτρα είναι ο ανώγειρος του σπιτιού του Βασίλη;</p>  <p>30μ.<br/>10+5+10+5=30μ.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p>Μη κατανοητό το ζητούμενο της άσκησης.</p>                                                                                                                                                  |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Αγγελική<br>&<br>Στέλλα | <p><u>Ομαδοποίηση:</u><br/>Α: 1, 2, 4, 1 = γιατί... α. για... είναι... με... με...<br/>Β: 5, 7 = γιατί... ε. έχουν... α. τα... δύο... αριθμοί<br/>Γ: 3, 6 = ...</p> <p><u>Ομαδοποίηση:</u><br/>Α: 1, 4, 3 = έχουν... να... κάνουν... με... με...<br/>Β: 7, 5 = επειδή... έχουν... και... τα... δύο... περιμένουν...<br/>Γ: 2, 6 = ...</p> | <p>Ομαδοποίηση με λανθασμένα κριτήρια και σύγχυση σε βασικές μαθηματικές ιδέες.</p> <p>Διαχωρισμός των γραμμικών διαστάσεων (μ.) από την έννοια της Π.</p> <p>Μη αποδόση μαθηματικού νοήματος στις λέξεις/ διαδικασίες.</p> <p>Μη αναφορά κριτηρίου ομαδοποίησης σε όλες τις ομάδες.</p> |
| Νίκος                   | <p><u>Ομαδοποίηση:</u><br/>Α: 1, 2, 4, 1 και 5 = γιατί... δεν... και... τα... είναι... και... με...<br/>Β: 2, 3, 6 = γιατί... είναι... και... τα... είναι... και... με...<br/>Γ: 7 = γιατί... είναι... και... τα... είναι... και... με...</p> <p>Είναι και ο αριθμός 0 και επεκτείνω</p>                                                  | <p>Σωστή ομαδοποίηση με αποδόληση</p>                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Ελένη                   | <p>Οι 1, 4, 5 είναι... για... ομάδα... γιατί... να... αριθμούς<br/>Οι 2, 3, 6 είναι... για... ομάδα... γιατί... να... αριθμούς<br/>Οι 7 είναι... και... είναι... και... αριθμούς<br/>Ομάδες γιατί... γιατί... για... αριθμούς και... για... αριθμούς</p>                                                                                  | <p>Σωστή ομαδοποίηση με αποδόληση</p>                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Γεωργία                 | <p><u>Ομαδοποίηση:</u><br/>Ομάδα (α) 1+4 = γιατί... είναι...<br/>Ομάδα (β) 2+3+6 = γιατί... είναι...<br/>Ομάδα (γ) 5+6+7 = γιατί... είναι...<br/>Ομάδα (δ) 1+2+3+4+5+6+7 = γιατί... είναι...</p>                                                                                                                                          | <p>Μεγαλύτερη εξοικείωση με καθημερινές λέξεις του κειμένου (επικάλυψη χώρου), αποδόση μαθηματικού νοήματος.</p> <p>Μη αποδόληση των τεχνικών όρων (περίμετρος, εμβαδόν).</p>                                                                                                            |

|                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Αντώνης</p> | <p>4. Τι είναι η <u>ακτινοβολία</u> που εκπέμπεται από το σώμα; Η ακτινοβολία είναι η ενέργεια που μεταφέρεται με τη μορφή κυμάτων ή σωματιδίων. Μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (π.χ. φως, ραδιόφωνο) ή μηχανική (π.χ. ήχος, σεισμοί).</p> <p>5. Τι είναι η <u>ακτινοβολία</u> που εκπέμπεται από το σώμα; Η ακτινοβολία είναι η ενέργεια που μεταφέρεται με τη μορφή κυμάτων ή σωματιδίων. Μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (π.χ. φως, ραδιόφωνο) ή μηχανική (π.χ. ήχος, σεισμοί).</p> <p>6. Τι είναι η <u>ακτινοβολία</u> που εκπέμπεται από το σώμα; Η ακτινοβολία είναι η ενέργεια που μεταφέρεται με τη μορφή κυμάτων ή σωματιδίων. Μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (π.χ. φως, ραδιόφωνο) ή μηχανική (π.χ. ήχος, σεισμοί).</p> | <p>1<sup>η</sup> ομάδα: αντιλαμβάνεται την έννοια της Π, ορθή ομαδοποίηση των 3 προβλημάτων που αναφέρονται σε αυτή.</p> <p>Μη αποσυμπύκνωση ΟΣ που περιγράφουν την έννοια του Ε και μη συνδυασμός κειμένου με οπτικές αναπαραστάσεις:</p> <p>2<sup>η</sup> : εστιάζει μόνο στα επίπεδα σχήματα</p> <p>3<sup>η</sup> : εστιάζει σε οικείες λέξεις (ταπεινότητα, πλακίδια)</p>                                                                                  |
| <p>Αργύρης</p> | <p>4. Τι είναι η <u>ακτινοβολία</u> που εκπέμπεται από το σώμα; Η ακτινοβολία είναι η ενέργεια που μεταφέρεται με τη μορφή κυμάτων ή σωματιδίων. Μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (π.χ. φως, ραδιόφωνο) ή μηχανική (π.χ. ήχος, σεισμοί).</p> <p>5. Τι είναι η <u>ακτινοβολία</u> που εκπέμπεται από το σώμα; Η ακτινοβολία είναι η ενέργεια που μεταφέρεται με τη μορφή κυμάτων ή σωματιδίων. Μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (π.χ. φως, ραδιόφωνο) ή μηχανική (π.χ. ήχος, σεισμοί).</p> <p>6. Τι είναι η <u>ακτινοβολία</u> που εκπέμπεται από το σώμα; Η ακτινοβολία είναι η ενέργεια που μεταφέρεται με τη μορφή κυμάτων ή σωματιδίων. Μπορεί να είναι ηλεκτρομαγνητική (π.χ. φως, ραδιόφωνο) ή μηχανική (π.χ. ήχος, σεισμοί).</p> | <p>Συνδυασμός πολυ- σημειωτικών χαρακτηριστικών των κειμένων.</p> <p>Μη εξοκείωση με τεχνικούς όρους.</p> <p>1<sup>η</sup> ομάδα: εστιάζει σε λέξεις-κλειδιά (φράσης, ανόργανος) &amp; σχήματα.</p> <p>2<sup>η</sup>: εστιάζει σε λέξεις-κλειδιά (επικάλυψη ταπεινότητας, πλακίδια)</p> <p>3<sup>η</sup>: εστιάζει σε επίπεδα σχήματα και σε τεχνικούς όρους (ειβάδι)</p> <p>4<sup>η</sup>: εστιάζει σε επίπεδα σχήματα και σε τεχνικούς όρους (περίμετρο)</p> |
| <p>Ιωάννης</p> | <p>Ομαδοποίηση:</p> <p>Α=3, Β=7, Γ=5, Δ=1, Ε=2, Ζ=4, Η=6, Θ=8, Ι=9, Κ=10, Λ=11, Μ=12, Ν=13, Ξ=14, Ο=15, Π=16, Ρ=17, Σ=18, Τ=19, Υ=20, Φ=21, Χ=22, Ψ=23, Ω=24.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>Άστοχη χρήση διαφορετικού κριτηρίου ομοιότητας.</p> <p>Απουσία γραμματικών μεταφορών, αδυναμία ολιστικής ανάλυσης και κατανόησης του κειμένου</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

Κατά τη διάρκεια του διαγνωστικού σταδίου, έγινε προσπάθεια σύνδεσης της καθημερινής γλώσσας με τον επίσημο μαθηματικό λόγο, καθώς τα παιδιά, όπως ήδη έχει αναφερθεί, επέμεναν στο να χρησιμοποιούν λέξεις οικείες, όπως «μέσα», «γύρω», «έξω», για να περιγράψουν το εμβαδόν και την περίμετρο αντίστοιχα, παρόλο που τέτοιες λέξεις δεν υπήρχαν στα κείμενα και, έτσι, αδυνατούσαν να μεταβούν σε ένα πιο επίσημο πλαίσιο που θα βοηθούσε στην ανάπτυξη της μαθηματικής επικοινωνίας (Herbel-Eisenmann, 2002). Στόχος των διερευνητικών ερωτήσεων που έγιναν προς τους συμμετέχοντες ήταν να αρχίσουν να εκφράζουν τις ιδέες τους και να αντιλαμβάνονται τη λειτουργία των μαθηματικών λέξεων σε ένα κείμενο, μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα που προσέφεραν τα συγκεκριμένα επτά προβλήματα, ποιες έννοιες περιγράφουν και πώς αυτές συνδέονται, αλλά και τι διαδικασία πρέπει να ακολουθηθεί για την επίλυση καθημερινών ζητημάτων, όπως ο υπολογισμός μίας επιφάνειας και της περιμέτρου. Παράλληλα, προσπάθησε να γίνει κατανοητό ότι χρειάζεται να ελέγχεται η ορθότητα των απαντήσεών τους και ότι οι τεχνικοί όροι που πιθανό να δημιουργούν δυσκολίες στην κατανόηση, τελικά συγκλίνουν σε πολλά σημεία με τον καθημερινό λόγο, ο οποίος είναι πιο προσιτός (Bennett, 2010).

[00:29:11 Ομιλητής 1: Τι πρέπει να βρω όταν κάνω... Όταν ασχολούμαι με επικάλυψη; Πέτρο, θες να απαντήσεις;  
00:29:16 Πέτρος: Το μέσα.

00:29:17 Ομιλητής 1: Το μέσα. Πώς το λένε αυτό το μέσα στα μαθηματικά;

00:29:20 Πέτρος: Εμβαδό...

.....

00:33:32 Ομιλητής 1: Μισό λεπτάκι λίγο, να επαναλάβω, γιατί ίσως δεν το προσέξατε αυτό που είπε ο Πέτρος. Ο Πέτρος είπε ότι το 6 και το 7 μιλάνε για εμβαδόν. Τον ρώτησα «πού το κατάλαβες» και λέει «κυρία το λέει». Λέει το ένα 'βρείτε το εμβαδόν και το άλλο τι θα συμβεί με το εμβαδόν' και το άλλο έβαλες, είπες το 2... και... το 3 και το 2, γιατί μιλάνε για επικάλυψη...». Θέλει κάποιος να σχολιάσει αυτό που είπε ο Πέτρος;

00:33:56 Γεωργία: Αχ, κυρία μπερδεύτηκε...

00:33:58 Ομιλητής 1: Ποιος θέλει να σχολιάσει αυτό που είπε ο Πέτρος; Για την ομαδοποίηση; Αυτές τις δύο τελευταίες ομάδες; Εκτός από την Κατερίνα; (σιωπή) Ένα σχόλιο θα ήθελα να κάνετε. (σιωπή) Έβαλε λέει το 6 και το 7, γιατί μιλάνε για εμβαδόν και το 2 και το 3, γιατί μιλάνε για επικάλυψη. (σιωπή) Κατερίνα.

00:34:26 Κατερίνα: Ε, νομίζω ότι το εμβαδόν είναι σ... είναι σαν την επικάλυψη.

00:34:32 Ομιλητής 1: ΕΙΝΑΙ ΣΑΝ την επικάλυψη ή ΕΙΝΑΙ επικάλυψη;

00:34:35 Κατερίνα: Είναι επικάλυψη.

.....

00:54:36 Ιωάννης: Το 3 μιλάει για τον εμβαδόν.

00:54:39 Ομιλητής 1: Γιατί; Πώς το κατάλαβες; (σιωπή) Γιατί δεν βλέπω να γράφει τη λέξη εμβαδόν. Τι είναι αυτό που έγραψε ο συγγραφέας και το κατάλαβες, ότι μιλάει τελικά για εμβαδόν;

00:54:54 Ιωάννης: Τη λέξη επικάλυψη.]

Εν τέλει, αρκετοί μαθητές, όπως ο Ιωάννης, η Σωτηρία και η Αφροδίτη, αντιλήφθηκαν τα λάθη τους, αναθεώρησαν προφορικά τις αρχικές τους αποφάσεις και έκαναν σωστά τον διαχωρισμό των αντίστοιχων προβλημάτων.

[00:59:18 Αφροδίτη: Το 1, το 4, το 5, και το 3 το 2 και το 6... και το 7 πάει και με τα 2, γιατί έχει δύο... γιατί έχει δύο ερωτηματικά, ρωτάει τι θα συμβεί με την περίμετρο και τι θα συμβεί με το εμβαδόν, που ταιριάζει και στις δύο ερωτήσεις.]

### *1<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

Τα παιδιά μέσα από την παρουσίαση της αφίσας εξέφρασαν αρκετές ιδέες οι οποίες αποτελούν πρακτικές της SFL που ήδη είχαν αρχίσει να μυούνται κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2, επισήμαναν σημαντικά στοιχεία της μαθηματικής γλώσσας, δηλαδή κατάλληλους «γλωσσικούς ελιγμούς» που αποσκοπούν στην αποτελεσματικότερη προσέγγιση ενός κειμένου κάθε φορά που διαβάζουν και προσπαθούν να το κατανοήσουν. Μέσα από τη συζήτηση και μεταβαίνοντας από το ένα στάδιο επίλυσης προβλήματος στο άλλο, έγινε από τον εκπαιδευτικό/ ερευνητή μία προσπάθεια κατηγοριοποίησης αυτών των «γλωσσικών ελιγμών», που, ερευνητικά, μπορούν να αναδειχθούν κατά την ανάλυση του περιεχομένου των επόμενων διδακτικών επεισοδίων, αλλά και γενικότερα να αξιοποιηθούν σε οποιοδήποτε γνωστικό αντικείμενο από τον δάσκαλο και τον μαθητή, διευκολύνοντας την κατανόηση της λειτουργίας της γλώσσας ως ένα σύστημα που αποδίδει συγκεκριμένο νόημα. Η αναφορά στους «γλωσσικούς ελιγμούς» (προφορικούς και γραπτούς) του πίνακα γίνεται με τη σειρά που αναφέρθηκαν από τους συμμετέχοντες στο στάδιο αυτό. Πρόκειται, πρώτον, για την αναζήτηση ευθείας ερώτησης ή ρημάτων σε έγκλιση που υποδηλώνει εντολή ή παρότρυνση και την αρχική πρόβλεψη πιθανών απαντήσεων, δεύτερον, την κριτική προσέγγιση του κειμένου μέσα από τα μάτια του συγγραφέα, δηλαδή την κατανόηση της μεταλειτουργίας κάθε στοιχείου που αποτελεί μέρος του συνόλου του κειμένου, τρίτον, τον εντοπισμό του πλαισίου του κειμένου, δηλαδή των ιδιαίτερων συνθηκών που καθορίζουν τις αποφάσεις του αναγνώστη/λύτη για τις στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος, αλλά και την αποφυγή ενδεχόμενων λαθών ή παρερμηνειών, τέταρτον, την ανάδειξη του πολύ-σημειωτικού χαρακτήρα του κειμένου, δηλαδή τη συνδυαστική ανάγνωση κειμένου και μοντέλων/οπτικών αναπαραστάσεων (πινάκων, σχεδιαγραμμάτων και σχημάτων), πέμπτον, τη γραμματική/συντακτική ανάλυση του κειμένου και τη σύνδεση των επιμέρους γλωσσικών στοιχείων μεταξύ τους, κάνοντας «γραμματικές μεταφορές» σε φράσεις και λέξεις, έκτον, την απόδοση μαθηματικού νοήματος στις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα ενός κειμένου («κάνω Γλωσσομαθηματικά»), έβδομο, τη χρήση μαθηματικής γλώσσας, δηλαδή τη σταδιακή

μετάβαση από την καθημερινό λόγο (προφορικό/γραφτό) στη γλώσσα που συναντάται σε κείμενα του σχολείου και μέσα στην τάξη, αλλά και στην επίσημη επιστημονική, όγδοο, την καταγραφή του μαθηματικού συλλογισμού και τη χρήση μαθηματικής απόδειξης, δηλαδή τη διατύπωση βήμα- βήμα του τρόπου επίλυσης του προβλήματος, ένατο και αλληλένδετο με το προηγούμενο, την έκφραση της μαθηματικής σκέψης μέσω της διατύπωσης επιχειρήματος, δέκατο, την ανάδειξη και αξιοποίηση λαθών και δυσκολιών που συναντά ο αναγνώστης/ λύτης μέσω της ανταλλαγής ιδεών και της αναζήτησης της αιτίας τους και, τελευταίο, την συνολική αποτίμηση της διαδικασίας που οδηγεί στην ορθότητα μίας λύσης/απάντησης.

#### Πίνακας 2

Πρακτικές της SFL/ Γλωσσικοί Ελιγμοί κατά την επίλυση προβλήματος - Συζήτηση/  
Ανάδειξη Ιδεών Μαθητών

| <b>Πρακτικές της<br/>SFL/ Γλωσσικοί<br/>Ελιγμοί κατά την<br/>επίλυση<br/>προβλήματος</b> | <b>Συζήτηση/ Ανάδειξη Ιδεών Μαθητών</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Εύρεση ερώτησης/<br/>ζητούμενου και<br/>προβλέψεις της<br/>απάντησης</p>              | <p>00:00:12 Ομιλητής 1: Θυμάστε τι κάναμε κάθε φορά που ξεκινούσαμε να λύνουμε προβλήματα; Είχαμε πει το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε, πέρα από το να το διαβάσουμε πολλές φορές, να αρχίσουμε να το καταλαβαίνουμε;</p> <p>00:00:29 Σωτηρία: Να το χωρίσουμε.</p> <p>00:00:31 Ομιλητής 1: Όχι να το χωρίσουμε. Το πρώτο-πρώτο βήμα ήταν; Έχει εδώ πέρα κάποιες ερωτήσεις.(δείχνω την αφίσα)</p> <p>00:00:31 Αφροδίτη: <b>Τι ζητάει.</b></p> <p>00:00:37 Ομιλητής 1: Τι ζητάει το πρόβλημα να κάνουμε. Και πού εστιάζουμε για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση; Πού πρέπει να κοιτάξουμε για να δούμε τι ζητάει ένα πρόβλημα; Τι είχαμε πει;</p> <p>00:00:45 Αφροδίτη: <b>Την ερώτηση.</b></p> <p>00:00:47 Ομιλητής 1: Την ερώτηση. Πάντα υπάρχει ερώτηση, όμως; Τι άλλο είχαμε πει; Για κοιτάζτε εδώ πέρα το κοριτσάκι, δίπλα του έχει κάποιες λέξεις. Άμα τα δείτε θα τα θυμηθείτε.</p> <p>00:00:55 Σωτηρία: Μπορεί να λέει «ελέγξτε» ή «απαντήστε».</p> <p>00:01:20 Νίκος: Ή να βρούμε το <b>ρήμα</b>.</p> <p>00:01:21 Ομιλητής 1: Να βρούμε το ρήμα. Βέβαια, ένα κειμενάκι έχει πολλά ρήματα. Οποιοδήποτε ρήμα;</p> <p>00:01:23 Νίκος: Αυτό που μας βοηθάει να βρούμε την <b>ερώτηση</b>, που συνήθως υπάρχει στο τέλος, που έχει ένα <b>ερωτηματικό</b>.</p> <p>00:01:27 Ομιλητής 1: Αυτό που μας δείχνει ότι έχει στην ουσία μια ερώτηση, εντάξει; Και σίγουρα, μια ευθεία ερώτηση. Ωραία, αυτό είναι το πρώτο πράγμα. Θυμάστε τι είχαμε πει, όμως; Τι απαντήσεις είχαμε δώσει; Ένα πρόβλημα ζητάει πόσα πράγματα;</p> <p>00:01:46 Φανή: Μπορεί και ένα μπορεί και δύο... Μπορεί να είναι <b>μία απάντηση</b>, αλλά σε κάποια άλλα μπορεί να είναι <b>πολλές</b>.</p> <p>00:01:53 Ομιλητής 1: Και οι απαντήσεις; Τι είδους απαντήσεις μπορεί να έχουμε;</p> <p>00:02:05 Νίκος: Α, να είναι <b>διαφορετικοί αριθμοί</b>, να είναι κλασματικοί αριθμοί, δεκαδικοί.</p> <p>00:02:17 Κώστας: Μπορεί να είναι <b>με λόγια</b>.</p> |
| <p>Κριτική προσέγγιση<br/>του κειμένου μέσα<br/>από τα μάτια του<br/>συγγραφέα</p>       | <p>00:02:52 Αφροδίτη: Σε πολλές ερωτήσεις ο συγγραφέας <b>βάζει μερικές από αυτές εδώ</b> (τις ερωτήσεις του 2<sup>ου</sup> βήματος της αφίσας) για να τοποθετήσει το πρόβλημα.</p> <p>00:03:00 Ομιλητής 1: Μπράβο! Συμπεριλαμβάνει, λοιπόν, αυτά τα συγκεκριμένα πράγματα μέσα στο πρόβλημα, μέσα στο κείμενο για να μας βοηθήσει ή για να μας δυσκολέψει; Για ποιο λόγο υπάρχουν αυτές οι <b>επιλογές ενός συγγραφέα</b>;</p> <p>00:03:12 Αθανασία: <b>Για να μας βοηθήσει</b>, έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε ποια πράξη θα κάνουμε και την απάντηση στα προβλήματα.</p> <p>00:03:28 Γεωργία: Μπορεί πολλές φορές να <b>το βάσει για να μπερδέψει</b> τον άλλον λίγο, να... να μην το κάνει τόσο εύκολο... να είναι <b>λίγο μια δύσκολη</b>.</p> <p>00:03:38 Ομιλητής 1: Μια <b>δύσκολη επιλογή γλωσσική</b> του συγγραφέα; ... Και τι κάνουμε σε αυτή την περίπτωση; Θα τα δούμε και στην πράξη.</p> <p>00:03:47 Γεωργία: Το <b>διαβάζουμε πολλές φορές</b>.</p> <p>00:03:51 Ομιλητής 1: Τι άλλο μπορούμε να κάνουμε;</p> <p>00:03:52 Κατερίνα: Να το <b>αναλύσουμε</b>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

|                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                    | <p>00:03:53 Ομιλητής 1: Εντάξει; Ποιες είναι αυτές οι γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα; Θα πρέπει εμείς να τα βλέπουμε με τη ματιά αυτή, ε; Να βρίσκουμε το «ποιος» λέει, «σε ποιον» αναφέρεται... Ναι;</p> <p>00:04:03 Αφροδίτη: <b>Πώς ενεργεί...</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Έμφαση στο πλαίσιο, ώστε να αποφεύγονται παρανοήσεις και δυσκολίες | <p>00:04:24 Στέλλα: Το <b>πού</b>.</p> <p>00:04:25 Ομιλητής 1: Το «πού», το πλαίσιο δηλαδή. Ποιες είναι συνθήκες; Εντάξει; Υπάρχουν κάποιοι <b>περιορισμοί</b> κάποιες φορές. <b>Δεν είναι αυθαίρετο</b>, να κάνουμε ό,τι θέλουμε. Το «πού», όχι απαραίτητα το μέρος. Το «πού», το πλαίσιο, δηλαδή, το... την <b>καθοδήγηση</b>... «με αυτό τον τρόπο θα το κάνεις». Εντάξει; Αυτό σημαίνει «<b>πλαίσιο</b>».</p> <p>00:05:07 Ομιλητής 1: Το πρόβλημα λοιπόν το αντιμετωπίζουμε σαν ένα κείμενο που έχει κάποια συγκεκριμένα <b>γλωσσικά χαρακτηριστικά</b>, τα οποία <b>δεν υπάρχουν τυχαία</b>. Έχουν νόημα και υπάρχουν. Τα χρησιμοποιούμε. Έχει τύχει πολλές φορές να υπάρχει <b>κάτι το οποίο να μην το λάβουμε υπόψη μας και να μας δημιουργήσει κάποιο πρόβλημα</b>; Να το συζητήσουμε λίγο αυτό; Για πες Σωτηρία...</p> <p>00:05:27 Σωτηρία: <b>Να μην έχουμε καταλάβει</b> τι ρωτάει. Τι λέει μέσα το κείμενο.</p> <p>00:05:32 Ομιλητής 1: Έχει τύχει κάποιες φορές; Και σε σένα, Φανή, νομίζω, σου έχει τύχει κάτι. <b>Για θύμισέ μας</b>.</p> <p>00:05:38 Φανή: Είχε 2 γιαουρτάκια και έγραφε με διαφορετικό τρόπο το πόσο... το πόσο ζυγίζουν.</p> <p>00:05:47 Ομιλητής 1: Το πόσο ζυγίζουν. <b>Δεν είχες προσέξει δηλαδή τη μονάδα μέτρησης</b>;</p> <p>00:06:03 Κατερίνα: Να λέει, ας πούμε ότι είναι 10 μεγαλύτερο από το 100 και <b>εμείς να νομίζουμε</b> ότι είναι 10.</p> <p>00:06:12 Ομιλητής 1: <b>Να μην λάβουμε υπόψη μας</b>, δηλαδή και <b>τις λέξεις που είναι γύρω γύρω</b>, που περιβάλλουν μια άλλη λέξη. Πάρα πολύ ωραία.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Χρησιμότητα σχημάτων/μοντέλων, «ανάγνωσή» τους                     | <p>00:06:35 Ομιλητής 1: Διαβάζονται οι πίνακες δηλαδή;</p> <p>00:06:38 Αθανασία: Ε... (γέλιο) Όχι, αλλά μπορεί να μας λέει σε ένα πρόβλημα να κοιτάζουμε τους πίνακες που είναι γραμμένοι, πίνακες, ε... μεεεε... <b>όχι πίνακες σχολικοί, αλλά κουτάκια με πληροφορίες</b>.</p> <p>00:06:54 Ομιλητής 1: Χμ... Κουτάκια με πληροφορίες. Χρειάζεται να τους διαβάσουμε τους πίνακες και τις πληροφορίες που έχουν, Ιωάννη;</p> <p>00:07:03 Ιωάννης: Ε, ναι.</p> <p>00:07:04 Ομιλητής 1: Γιατί;</p> <p>00:07:05 Ιωάννης: <b>Να καταλάβουμε περισσότερο το πρόβλημα</b>.</p> <p>00:07:07 Ομιλητής 1: ... μπορεί να μην είναι μία ολόκληρη πρόταση, αλλά και ένας πίνακας «λέει» <b>πάρα πολλά</b>.</p> <p>00:09:00 Ελένη: <b>Αμα είναι ένα τετράγωνο, ένα σχήμα</b>, ένα τετράγωνο... και <b>μας λέει να βρούμε την περίμετρό του και έχει κάποια νόημα στην ουσία</b> για να το βρούμε, πρέπει να διαβάσουμε το... <b>να διαβάσουμε το σχήμα</b> και...</p> <p>00:09:14 Ομιλητής 1: Μια άλλη λέξη που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε συνώνυμη;</p> <p>00:09:34 Αφροδίτη: «Να διαβάσω» πρέπει <b>να δω τις εικόνες</b>.</p> <p>00:10:02 Ομιλητής 1: Αυτά που είχαν (σχήματα στα προβλήματα ομαδοποίησης) σας βοήθησαν στο να ομαδοποιήσετε; Ποιος θα μας απαντήσει ολοκληρωμένα στην ερώτηση; Γεωργία.</p> <p>00:10:31 Γεωργία: Εγώ προσωπικά <b>τα χρειάστηκα</b>, γιατί γενικά <b>μόνο με τις λέξεις δε νομίζω να το 'βρισκα</b>, εννοώ κάποια... ας πούμε την περίμετρο και αυτά θα το πεις... θα το 'βρισκα. Όμως, αυτό με τα άλλα... πλακάκια και τέτοια, δεν νομίζω...</p> <p>.....</p> <p>00:13:18 Ομιλητής 1: ... Τι σημαίνει <b>οπτικές αναπαραστάσεις</b>;</p> <p>00:13:20 Γεωργία: Α! Ότι δείχνει, ας πούμε, ρωτάει... δείχνει έναν κήπο και μας ρωτάει πόσα λουλούδια έχει ο κήπος;</p> <p>00:13:33 Ομιλητής 1: Στα προβλήματα, άμα δείτε για παράδειγμα στο πρώτο πρόβλημα που έχω τώρα και θα δουλέψουμε σήμερα, υπάρχει οπτική αναπαράσταση;</p> |

|                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                            | <p>00:13:39 Όλοι: Ναι.</p> <p>00:13:40 Ομιλητής 1: Υπάρχει. <b>Υπάρχει πάντα, όμως;</b></p> <p>00:13:44 Όλοι: Όχι.</p> <p>00:13:46 Ομιλητής 1: Τι κάνουμε τότε; Κατερίνα, τι κάνουμε τότε; Γιατί μου είπατε και πριν κάτι για αυτό;</p> <p>00:13:52 Κατερίνα: <b>Μπορούμε να σχεδιάσουμε</b> εμείς ή να κάνουμε μέσα ένα σχήμα.</p> <p>00:14:13 Ιωάννης: Μπορούμε να το κάνουμε εικόνα στο μυαλό μας.</p> <p>00:14:17 Ομιλητής 1: Στο μυαλό μας. Και αν το αποτυπώσουμε στο χαρτί, μήπως είναι πιο διευκολυντικό, όμως; Τι σας λέω να χρησιμοποιείτε συνέχεια;</p> <p>00:14:26 Αγγελική: <b>Μοντέλα!</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Χωρισμός σε φράσεις με νόημα και σύνδεση μεταξύ τους                                       | <p>00:07:08 Ομιλητής 1: ... «Χωρίζω σε φράσεις». Αυτό το ξέρουμε; Τι σημαίνει; Να το θυμηθούμε; (φασαρία)</p> <p>00:07:38 Αγγελική: Χωρίζω σε φράσεις, δηλαδή <b>χωρίζω μερικά σημεία στις προτάσεις και μετά τις συνδέω μαζί για να γίνει πιο εύκολο.</b></p> <p>00:07:50 Ομιλητής 1: Εύκολο αυτό; Βέβαια κάποιες φορές μου είχατε πει ότι σας <b>κουράζει</b>, έτσι δεν είναι;</p> <p>00:07:58 Όλοι: Ναι...</p> <p>00:07:59 Ομιλητής 1: Νιώθατε ότι <b>καθυστερούμε</b>. Γιατί είχαμε πει, όμως, ότι πρέπει να το κάνουμε στη φάση αυτή, Νίκο;</p> <p>00:08:09 Νίκος: <b>Για να καταλαβαίνουμε</b> το πρόβλημα.</p> <p>00:08:11 Ομιλητής 1: Για να καταλαβαίνουμε το πρόβλημα. Είχαμε πει με τον καιρό αυτό το πράγμα, αυτή τη <b>διαδικασία</b> αυτή δεν θα την κάνουμε. Τι είχαμε πει; Θυμάστε;</p> <p>00:08:18 Αφροδίτη: Για να ταιριάζουμε τις φράσεις με νούμερα...</p> <p>00:08:22 Ομιλητής 1: Αυτό είναι λίγο <b>μηχανικό</b>. Είχαμε πει όμως ότι το κάνουμε για να;</p> <p>00:08:28 Φανή: Για να μας βοηθήσει να το καταλάβουμε και <b>να μην ξεχάσουμε κάτι σημαντικό.</b></p> <p>00:08:32 Ομιλητής 1: Μπράβο, να μην παραλείψουμε κάποια επιλογή του συγγραφέα που είναι σημαντική. Αυτό δεν μπορούμε να το κάνουμε πάντα. Εντάξει; Αλλά είναι ο <b>τρόπος σκέψης</b>, που θα μας κάνουν να το συνηθίσουμε. Θα το κάνουμε με το μυαλό μας με τον καιρό.</p> |
| Σύνδεση μαθηματικών με τις γλωσσικές επιλογές<br>(το αποκαλούν «κάνουμε Γλωσσομαθηματικά») | <p>00:11:05 Ομιλητής 1: Εγώ τι ερώτηση σας κάνω όταν θέλω να συνδυάσετε με τα μαθηματικά; Τι σας δείχνω και τι σας λέω; Τι να κάνετε;</p> <p>00:11:20 Όλοι: <b>«Γλωσσομαθηματικά»!</b></p> <p>00:11:25 Ομιλητής 1: «Γλωσσομαθηματικά», αλλά τι ρωτάω. <b>Ρωτάω κάτι συγκεκριμένα.</b></p> <p>00:11:33 Ομιλητής 1: Θυμάται κανένας; <b>«Συνδυάζω με τα μαθηματικά»</b> λέει. Να βοηθήσω. «Ποιες μαθηματικές έννοιες και αρχές αναδεικνύουν οι πληροφορίες που βρήκα»; Τι δείχνουν δηλαδή; «Μας <b>φανερώνουν</b> πολλές φορές» σας ρωτάω «τι έχουμε εδώ μέσα στο...»</p> <p>00:11:46 Γεωργία: <b>Μυαλό μας, στο κεφαλάκι μας!</b></p> <p>00:11:49 Ομιλητής 1: Και στο μυαλό και στο κεφαλάκι μας. Να τα βγάλουμε, γιατί έχουμε πει ότι δεν τα κρατάμε στο κεφαλάκι, τα χρησιμοποιούμε. Υπάρχει περίπτωση ένας συγγραφέας να σας βάλει εσάς, τώρα που ξέρετε την ηλικία σε ένα πρόβλημα το οποίο να <b>σας ρωτάει κάτι το οποίο ξέρει ότι δεν το έχετε στο κεφαλάκι σας;</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Ανάδειξη σημασίας μαθηματικών εννοιών και ακρίβεια στην περιγραφή τους                     | <p>00:12:33 Ζωή: Ας πούμε εσείς μας λέτε κάτι <b>να το πούμε σε μαθηματική λέξη</b>. Μπορεί να το πείτε...</p> <p>00:12:37 Ομιλητής 1: Με μαθηματικό τρόπο, ακριβώς. Θυμάστε κάποια λέξη χθες που συναντήσαμε και τη συνδέσαμε με μια πολύ σημαντική λέξη, μαθηματική έννοια που δεν την ξέρατε; Μερικοί δεν την καταλαβαίνατε.</p> <p>00:12:50 Ιωάννης: <b>Την επιφάνεια που τη συνδέσαμε με το εμβαδόν.</b></p> <p>.....</p> <p>00:13:01 Αντώνης: <b>Επικάλυψη!</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

|                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Επίλυση βήμα- βήμα<br/>- Καταγραφή<br/>μαθηματικού<br/>συλλογισμού –<br/>Μαθηματική<br/>απόδειξη</p> | <p>00:14:51 Ομιλητής 1: Πρέπει να το λύνω;</p> <p>00:14:52 Όλοι: Ναι.</p> <p>00:14:54 Ομιλητής 1: Α, ναι ε; Ο Πέτρος θέλω να μας πει! Πρέπει να το λύνω το πρόβλημα και να μη γράφω μόνο την απάντηση;</p> <p>00:15:01 Πέτρος: Ναι.</p> <p>00:15:02 Ομιλητής 1: Γιατί;</p> <p>00:15:04 Πέτρος: Γιατί το πρόβλημα <b>είναι για να το λύσουμε.</b></p> <p>00:15:06 Ομιλητής 1: Ναι, αλλά, γιατί πρέπει να το γράψω... να τη γράψω τη λύση;</p> <p>00:15:09 Πέτρος: Για να δείξω...</p> <p>00:15:09 Ομιλητής 1: Γιατί είχαμε μια μικρή διαφωνία στο παρελθόν γι' αυτό...</p> <p>00:15:11 Πέτρος: <b>Να δείξουμε πώς το κάνουμε.</b></p> <p>00:15:13 Ομιλητής 1: Για να δείξουμε πώς το κάναμε. Για ποιο λόγο;</p> <p>00:15:17 Αγγελική: Γιατί <b>ο άλλος δε θα καταλάβει</b> πώς το κάναμε.</p> <p>00:15:20 Ομιλητής 1: Δεν θα καταλάβει ο άλλος πώς το κάνουμε. Για ποιο λόγο;</p> <p>00:15:24 Αφροδίτη: Γιατί σε πολλά προβλήματα, σε πολλά προβλήματα λέει «λύση» και άμα δεν το βάλουμε είναι ουσιαστικά...</p> <p>00:15:30 Ομιλητής 1: Και άμα δεν λέει, δηλαδή, δε θα το λύσουμε;</p> <p>00:15:35 Αφροδίτη: Θα το λύσουμε.</p> <p>00:15:37 Γεωργία: Θα είναι σαν να έχουμε την <b>απάντηση μόνο.</b></p> <p>00:15:40 Αφροδίτη: <b>Είναι σα να 'χουμε κάνει το μισό.</b></p> <p>00:15:45 Ομιλητής 1: Μάλιστα. Είναι σαν να έχουμε κάνει το μισό. <b>Θα μας πει ο άλλος «πώς το βρήκες αυτό; Απόδειξέ το.».</b></p> <p>00:15:50 Γεωργία: Άλλος μπορεί να το έχει κάνει με το <b>κομπιουτεράκι!</b></p> <p>00:15:53 Ομιλητής 1: Το κομπιουτεράκι δεν είναι κακό να το χρησιμοποιήσουμε, γιατί για να χρησιμοποιήσουμε κι ένα κομπιουτεράκι <b>πρέπει να έχουμε καταλάβει τη διαδικασία που θα ακολουθήσουμε.</b> Μη νομίζεις ότι οι άνθρωποι... ξέρουν να χρησιμοποιούν όλοι, απαραίτητα, το κομπιουτεράκι.</p> <p>00:16:17 Αθανασία: <b>Μπορεί να έχουμε κάνει ένα λάθος στην πράξη, αλλά η απάντησή μας να είναι σωστή.</b></p> <p>00:16:19 Ομιλητής 1: Μ; Τυχαίνει αυτό;</p> <p>00:16:19 Όλοι: Ναι!</p> <p>00:16:20 Ομιλητής 1: Αααα, μάλιστα!</p> <p>00:16:20 Γεωργία: Ναι, αλλά <b>δεν είναι εύκολο πολύ.</b> Δηλαδή, πιο πολλές φορές θα είναι λάθος, άμα κάνουμε λάθος τη λύση και βγει σωστή η απάντηση.</p> <p>00:16:25 Ομιλητής 1: Ναι, αυτό που λέει η Αθανασία είναι πάρα πολύ συνηθισμένο φαινόμενο. Σας πληροφορώ δηλαδή, πολλά παιδιά βρίσκουν την απάντηση και δεν μπορούν να γράψουν τη σωστή λύση. Τη σωστή πράξη. Τυχαίνει αυτό το πράγμα; Το έχουμε συναντήσει; Είναι εύκολο να γράψουμε τη μαθηματική λύση;</p> <p>00:16:42 Αφροδίτη: Μπορεί κάποιος να απαντήσει με το μυαλό, αλλά <b>να μην ξέρει να τοποθετεί</b> το ένα νούμερο κάτω από το άλλο, ενώ όλες οι απαντήσεις είναι σωστές.</p> <p>00:17:41 Ελένη: Αυτό που λέει <b>βήμα- βήμα δεν το καταλαβαίνω τι εννοεί.</b></p> <p>00:17:44 Ομιλητής 1: Τι εννοεί βήμα- βήμα;</p> <p>00:17:52 Στέλλα: Δηλαδή λύνω το πρόβλημα βήμα- βήμα. Εεεε... δηλαδή <b>πρώτα</b> κάνω, ας πούμε, πρόσθεση, <b>μετά</b> ό,τι άλλο χρειάζεται <b>και μετά</b> γράφω την απάντηση.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                           | <p>00:18:15 Γεωργία: Το βήμα- βήμα εννοεί <b>κάπως σιγά σιγά</b>, δηλαδή <b>όχι γρήγορα</b>, να το ‘ξεπετάξω’.</p> <p>00:18:20 Ομιλητής 1: Ναι. Δεν εννοεί με αργό ρυθμό. <b>Να μην παραλείψω κάτι σημαντικό.</b></p> <p>00:18:23 Αφροδίτη: Με <b>συγκεκριμένο τρόπο</b>.</p> <p>.....</p> <p>00:18: 40 Σωτηρία: Να μην τα κάνω όλα μαζί, <b>γιατί μπορεί να μπερδευτώ</b>.</p> <p>.....</p> <p>00:19:35 Ελένη: Βοηθάει, γιατί <b>για να βρω το αποτέλεσμα της διαδικασίας</b> πρέπει να έχω κάνει... να τα έχω κάνει <b>όλα, γιατί αλλιώς θα μου βγει σίγουρα λάθος</b>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p>«Μοιράζομαι τη σκέψη μου»- Έκφραση επιχειρημάτων</p> <p>(«Γιατί» πιστεύω κάτι;» ή «γιατί δίνω αυτή την απάντηση;»)</p> | <p>00:19:03 Σωτηρία: Μοιράζομαι τις σκέψεις μου, <b>τι σκέφτηκα για να λύσω</b> ένα πρόβλημα.</p> <p>.....</p> <p>00:20:00 Αντώνης: Δηλαδή <b>άμα μοιραστείς το πρόβλημά σου θα καταλάβεις πιο καλά τι ζητάει</b>.</p> <p>.....</p> <p>00:20:32 Νίκος: Λέω <b>τι έκανα</b> και <b>πώς</b> το έκανα.</p> <p>00:20:36 Ομιλητής 1: Λέω στους άλλους τι έκανα και πώς το έκανα. Γιατί; Γιατί το ζητάω αυτό συνέχεια; Κώστα...</p> <p>00:20:46 Κώστας: Για να <b>μοιραστούμε όλοι μας</b> αυτά που έχουμε κάνει και να δούμε <b>ποιο είναι πιο σωστό, ποιο είναι λάθος...</b></p> <p>00:21:00 Αφροδίτη: Και να το <b>διορθώσουμε</b>.</p> <p>00:21:04 Κατερίνα: Για να αιτιολ... Ας πούμε, άμα κάποιος έχει γράψει <b>κάτι άλλο από εμένα, να αιτιολογήσουμε καθένας</b> τι έχει κάνει και να δούμε ποιο είναι το σωστό.</p> <p>00:21:25 Ομιλητής 1: <b>Είναι εύκολο να μοιραζόμαστε</b> αυτό που σκεφτόμαστε; Γεωργία...</p> <p>00:21:29 Γεωργία: Ναι, γιατί πιστεύω ότι μπορεί να πούμε κάτι και <b>ο άλλος θα μας το διορθώσει</b> και να βγει σωστό το πρόβλημα.</p> |
| <p>Ανάδειξη και αξιοποίηση λαθών μέσα από τη διαδικασία επίλυσης</p>                                                      | <p>00:21:40 Ομιλητής 1: Ναι και εντάξει, εννοείται ότι <b>βοηθάμε ένας τον άλλο</b> και καμιά φορά τυχαίνει και βρίσκομαι και τα ... Λέμε ότι τα εκμεταλλευόμαστε και δεν αφήνουμε να πάνε χαμένα... Τι βρίσκουμε όταν μοιραζόμαστε πολλές φορές τις σκέψεις μας; [μπερδεμένα λόγια] Ποιος του είπε; Πιο δυνατό να ακουστείς...</p> <p>00:21:55 Βαγγέλης: <b>Τα λάθη</b>.</p> <p>00:21:55 Ομιλητής 1: ... Τα λάθη τι τα κάνουμε; Τα αφήνουμε να πάνε χαμένα;</p> <p>00:22:02 Ιωάννης: <b>Τα καταγράφουμε στο μυαλό μας</b> και προσπαθούμε να τα κάνουμε σωστά.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>Αποτίμηση- Ορθότητα σκέψης</p>                                                                                         | <p>00:23:05 Κώστας: Όταν λύνουμε το πρόβλημα, μετά το <b>ξεαναβλέπουμε αν είναι λογικό</b>.</p> <p>00:23:13 Ομιλητής 1: Αν είναι λογικό... Υπάρχει περίπτωση κάτι να έχουμε βρει και να μην είναι λογικό; Κώστα;</p> <p>00:23:17 Κώστας: Ναι. <b>Μπορεί να έχουμε κάνει έναν λάθος</b> πολλαπλασιασμό και να έχει βγει πιο μεγάλο ή μια λάθος διαίρεση ή <b>πολλά λάθη και να ‘χει βγει λάθος</b>.</p> <p>00:23:47 Ελένη: Βασικά μπορεί να το έχεις βρει σωστά και <b>να νομίζεις ότι κάτι είναι λάθος</b> και μετά να... μετά να μπερδευτείς και γι’ αυτό πρέπει να το ξανακοιτάξεις και να δεις <b>αν όλα βγάζουν νόημα</b>.</p> <p>00:24:03 Αφροδίτη: Μπορεί να σε ρωτάει κάτι <b>άλλο η ερώτηση</b>, αλλά <b>εσύ να απαντάς κάτι άλλο</b> στην απάντηση.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

Έπειτα, η ολομέλεια της τάξης ασχολήθηκε με το 1<sup>ο</sup> πρόβλημα, ενώ παράλληλα δόθηκε η ευκαιρία να εξασκηθεί επιπλέον στην ακολουθία των βημάτων επίλυσης.

Έτσι, στο 1<sup>ο</sup> βήμα ζητήθηκε να ανατρέξουν στην τοιχοκολλημένη αφίσα, ώστε να θυμηθούν τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουν, αφού διαβάσουν προσεκτικά το πρόβλημα. Δε

δυσκολεύτηκαν καθόλου, διότι, όπως προαναφέρθηκε, στην πρακτική αυτή είχαν ήδη εξοικειωθεί από το φθινόπωρο. Επισημάνθηκε, λοιπόν, πού πρέπει να αναζητήσουν την απάντηση στην βασική ερώτηση του βήματος αυτού, π.χ. στην ευθεία ερώτηση (εικ. 6) ή σε ρήματα που ζητούν να γίνει κάτι

[00:29:46 Ομιλητής 1: Ποιο παιδάκι θα πει τι ζητάει; Πού θα κοιτάξουμε δηλαδή, καταρχήν, για να απαντήσουμε σε αυτό;

00:29:51 Αγγελική: Να βρω την ερώτηση που έχει;

00:29:52 Ομιλητής 1: Σωστό;

00:29:52 Όλοι: Ναι!

00:29:53 Ομιλητής 1: Διαβάζουμε την ερώτηση. Έχει ερώτηση. Το ερωτηματικό βοηθάει. Είναι ερώτηση. Διάβαστο...

00:29:59 Αγγελική: Πόσα τέτοια κομμάτια λέτε ότι χρειάζεται να τοποθετηθούν σε όλη την επιφάνεια του πάρκου;

00:29:54 Ομιλητής 1: ... Ποια είναι αυτή η λεξούλα που ρωτάει έντονα; Ποια είναι η λέξη αυτή που έχει έντονα την ερώτηση;

00:30:22 Φανή: «Πόσα».]

και έγινε διαφοροποίηση ως προς τον αριθμό και το είδος των απαντήσεων που υπάρχουν στα προβλήματα (μία απάντηση/ «ναι ή όχι», πολλές απαντήσεις, περιγραφική απάντηση, ένας αριθμός, κτλ.).

[00:30:23 Ομιλητής 1: «Πόσα τέτοια κομμάτια;». Πόσες είναι οι απαντήσεις που έχει αυτό το πρόβλημα;

00:30:28 Αφροδίτη: Μια.

00:30:29 Ομιλητής 1: Μία. Συμφωνείτε;

00:30:30 Όλοι: Ναι!

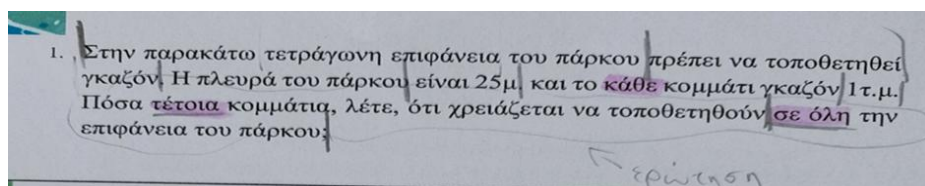
00:30:31 Ομιλητής 1: Γιατί; Γιατί είναι μια η απάντηση και τι απάντηση είναι; Είναι μια λέξη, είναι μια πρόταση, είναι ένας αριθμός;

00:30:35 Αθανασία: Ε, είναι μια η απάντηση, γιατί η ερώτηση μας ρωτάει... εε... μας ρωτάει πόσα θα χρειαστούν σε αυτή, ε... πόσα θα χρειαστούν στην επιφάνεια του πάρκου και εννοεί να βρούμε τον αριθμό που θα χρειαστούν...

00:30:57 Ομιλητής 1: Μπορεί να είναι πολλοί αριθμοί; Φανή...

00:31:05 Φανή: Όχι, γιατί είναι συγκεκριμένο το... συγκεκριμένος ο χώρος που θα τοποθετήσουμε.

00:31:09 Ομιλητής 1: Μπράβο, είναι συγκεκριμένος χώρος. Αρχίζουμε και μπαίνουμε δηλαδή μέσα στο πρόβλημα τώρα, σιγά σιγά. Ένας θα είναι ο αριθμός, λοιπόν. Μια πιθανή απάντηση. Δεν μπορεί τα κομμάτια να είναι 10, 5... να βρουν ο Κώστας 10, να βρει ο Νίκος 5, να βρει η Σωτηρία 1, για παράδειγμα.]



Εικ. 6 Ο μαθητής επεξεργάζεται το κείμενο

Στο 2<sup>ο</sup> βήμα τα παιδιά σε ζευγάρια συζήτησαν, σύντομα, για τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα. Ο περισσότερος χρόνος αφιερώθηκε στη συνέχεια στο να παρουσιάσουν τις διαφορετικές ιδέες τους και όχι στο να προταθεί μια μοναδική ως η καταλληλότερη. Σε πρώτη φάση, λοιπόν, επιχείρησαν να διαχωρίσουν το κείμενο σε φράσεις που είχαν κατά την κρίση τους κάποιο νόημα (εικ. 6 & 7) και να εντοπίσουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.

[00:34:18 Αθανασία: Πρέπει να τοποθετηθεί γκαζόν.

00:34:22 Ομιλητής 1: Πρέπει να τοποθετηθεί γκαζόν.

00:34:24 Ελένη: Κυρία, θα μπορούσε να πει και «πρέπει».

00:34:27 Ομιλητής 1: Ναι... Εντάξει, δεν είναι απαραίτητο να χωρίζουμε λέξη- λέξη. Προσπαθούμε να κάνουμε φράσεις για να βγαίνει και ένα νόημα, γιατί μια λέξη αποκομμένη μόνη της μπορεί να μας δημιουργήσει πρόβλημα και να μας μπερδέψει, να μας παραπλανήσει. Φράσεις προσπαθούμε να χωρίζουμε. Θα τύχει, να υπάρχουν και μόνες τους λέξεις, αλλά δεν είναι απαραίτητο πάντα να συμβαίνει.

00:34:48 Αφροδίτη: Η πλευρά του πάρκου είναι 25 μέτρα, γραμμή.

00:34:51 Ομιλητής 1: Όλο μαζί; «Πλευρά του πάρκου είναι 25 μέτρα». Πολλές πληροφορίες έχει εδώ. [σιωπή] Πώς θα μπορούσαμε να το χωρίσουμε καλύτερα, λίγο να το κόψουμε σε κομματάκια που να μπορούμε να τα συνδέσουμε μετά;

00:35:02 Κώστας: Η πλευρά του πάρκου, γραμμή.

00:35:04 Ομιλητής 1: Η πλευρά του πάρκου...

00:35:07 Κώστας: Και μετά να πούμε είναι 25 μέτρα.]

Μέσα από την ανταλλαγή ιδεών επισημάνθηκε ότι η κάθε φράση/λέξη/εικόνα επιτελεί μία λειτουργία στο κείμενο και έχει ένα νόημα για τον αναγνώστη. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός/ερευνητής παρότρυνε να στηριχθούν στο περιεχόμενο της αφίσας και να προσπαθήσουν να απαντήσουν στις ερωτήσεις που περιγράφουν το πλαίσιο (ποιος, πού, κτλ.), πηγαίνοντας «μπρος- πίσω» στο κείμενο και συνδέοντας αυτές τις ερωτήσεις με τις φράσεις που ήδη είχαν βρει σε ζευγάρια.

[00:41:52 Ομιλητής 1: Λοιπόν το πλαίσιο, το ξέρουμε; Μπορούμε να απαντήσουμε σε κάποια ερώτηση από το βήμα το δεύτερο; «Ποιος, Πού; Πώς;»... Θα απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις;

00:42:09 Αγγελική: Ναι.

00:42:10 Ομιλητής 1: Να τις απαντήσουμε, ναι. ΠΟΙΟΣ θα τοποθετηθεί, ΠΟΥ θα τοποθετηθεί, ΓΙΑΤΙ θα τοποθετηθεί; Για δείτε τις ερωτησούλες; Τις έχω να σας βοηθάω.

00:42:18 Γεωργία: Α! Κυρία! Ποιος θα τοποθετηθεί; Ταααα... κουτάκια...

00:42:29 Ομιλητής 1: Στην πρώτη πρόταση, ποιος θα τοποθετηθεί;

00:42:31 Φανή & Γεωργία: Το γκαζόν.

00:42:32 Ομιλητής 1: Το γκαζόν λέει. Μη βιάζεστε να πάτε στην επόμενη. Το πού;

00:42:38 Στέλλα: Στο πάρκο.

00:42:40 Ομιλητής 1: Γενικά λέει; Στο πάρκο;

00:42:42 Όλοι: Όχι.

00:42:42 Ομιλητής 1: Τι λέει;

00:42:44 Αντώνης: Στην επιφάνεια.

00:42:45 Ομιλητής 1: Σε ποια επιφάνεια; Κοίταξε το πρόβλημα. Σε μια οποιαδήποτε επιφάνεια;

00:42:47 Αντώνης: Όχι. Του πάρκου.

00:42:57 Ομιλητής 1: Του πάρκου και κάτι ακόμα πολύ σημαντικό... Αφροδίτη...

00:42:57 Αφροδίτη: Σε όλη την επιφάνεια του γκαζόν.

00:43:10 Ομιλητής 1: Όχι. Γκαζόν θα τοποθετηθεί. Στην επιφάνεια του πάρκου. Τι σόι επιφάνεια είναι, Αθανασία; [σιωπή] Έχει χρησιμοποιήσει μια ΑΛΛΗ... έχει κάνει μια επιλογή εκεί ο συγγραφέας, που την παραλείπετε και μπορείτε μετά να σας δυσκολέψει αν δεν το προσέξετε. Νίκο, δυνατά.

00:43:39 Νίκος: Στην παρακάτω τετράγωνη.]

Στην πορεία της γλωσσικής επεξεργασίας, δόθηκε έμφαση στις αντωνυμίες του κειμένου («πόσα, όλη, κάθε, τέτοια») (εικ. 6 & 7),

[00:38:00 Ομιλητής 1: Κάποιες λέξεις τις οποίες πρέπει να τους δώσουμε ιδιαίτερη σημασία; Ναι ναι.

00:38:02 Αγγελική: Ότι σε ΟΛΗ την επιφάνεια.

.....

00:38:20 Ομιλητής 1: Έχει νόημα η λέξη «όλη»;

00:38:23 Αθανασία: Ναι.

00:38:25 Ομιλητής 1: Γιατί;

00:38:30 Αφροδίτη: Έχει σημασία το «όλη», γιατί άμα δεν έλεγε την όλη και έλεγε «την επιφάνεια» δεν θα μας το διευκρίνιζε και θα μπορούσα... και θα νομίζαμε και στη μισή.

00:38:31 Ομιλητής 1: Μπορεί και να ήταν. Αυτές οι λεξούλες, τα επίθετα... οι αντωνυμίες είναι σημαντικές. Έχει ακόμα μία λεξούλα που προσδιορίζει μια άλλη.

....

00:38:51 Ομιλητής 1: Στην ερώτηση υπάρχει άλλη μια λεξούλα η οποία είναι σημαντική και θα ήθελα να την υπογραμμίσουμε.

00:38:59 Νίκος: Κομμάτια.

00:39:01 Ομιλητής 1: Κομμάτια... μμμ... κοντά είσαι. Κατερίνα.

00:39:10 Κατερίνα: Τέτοια... τέτοια...

00:39:15 Ομιλητής 1: Τέτοια. ΤΕΤΟΙΑ κομμάτια. Θα μπορούσε να μην είναι τέτοια;

00:39:20 Φανή: Ε, ναι.

00:39:23 Ομιλητής 1: Θα μπορούσε να είναι;

00:39:25 Φανή: Διαφορετικά.

00:39:26 Ομιλητής 1: Διαφορετικά μεταξύ τους. Γίνεται να καλυφθεί η επιφάνεια με διαφορετικά κομμάτια;

00:39:35 Αγγελική: Ναι.

00:39:36 Ομιλητής 1: Γίνεται. Εδώ η επιφάνεια θα καλυφθεί; [σιωπή] Με τι κομμάτια;

00:39:40 Νίκος: Με ίδια.]

στον ρόλο του συνδετικού ρήματος «είναι», αλλά και στην παράλειψη του ίδιου ρήματος σε μία πρόταση (εικ. 7),

[00:35:12 Ομιλητής 1: Να το βάλουμε μόνο του το «είναι»;

00:35:17 Φανή: Ναι.

00:35:18 Ομιλητής 1: Τι ρήμα είναι το «είναι»;

00:35:21 Ιωάννης: Συνδετικό.

.....

00:35:46 Σωτηρία: Και το κάθε κομμάτι γκαζόν ένα τετραγωνικό μέτρο.

00:35:51 Ομιλητής 1: Όλο μαζί αυτό;

00:35:53 Σωτηρία: Όχι. Και το κάθε κομμάτι... γκαζόν.

00:35:57 Ομιλητής 1: Γκαζόν. Και το κάθε κομμάτι γκαζόν, ένα τετραγωνικό μέτρο. Βγαίνει νόημα εκεί πέρα;

00:36:05 Όλοι: Όχι.

00:36:06 Ομιλητή; 1: Τι συμβαίνει εκεί;

00:36:09 Ιωάννης: Πρέπει να το συνδέσουμε με το «είναι» που έχουμε χωρίσει. Εκεί πέρα λείπει μια λέξη η οποία εννοείται. Απλά δεν την ξαναλέει για να μην επαναλαμβάνεται.

.....

00:36:39 Αφροδίτη: Κυρία, θα μπορούσε το πρόβλημα να έχει αφαιρέσει το «και « και να έχει τελεία.

.....

00:44:19 Ομιλητής 1: Το ρήμα της πρότασης δείχνει μια διαδικασία. Μάς λέει να κάνουμε κάτι ή μπορεί αν είναι και συνδετικό, να δίνει και μια ιδιότητα. Το έχουμε μάθει στη γλώσσα. Είπαμε κάνουμε «Γλωσσομαθηματικά». Εδώ πέρα ποιο είναι το ρήμα;

00:44:42 Στέλλα: Το «είναι».

00:44:43 Ομιλητής 1: Το «είναι». Το είναι, είπαμε, είναι ένα συνδετικό ρήμα. Το έχει πει ήδη ο Ιωάννης ότι τα συνδετικά ρήματα τι δίνουν; Δίνουν μια;

00:44:50 Φανή: Ιδιότητα.

00:44:51 Ομιλητής 1: Ιδιότητα. Σε ποιον;

00:44:53 Φανή & Αφροδίτη: Στο υποκείμενο.

.....

00:48:17 Ομιλητής 1: Ποιο είναι το υποκείμενο εδώ πέρα στο «είναι» που εννοείται; Ιωάννη.

00:48:00 Ιωάννης: Το κομμάτι.]

στον ρόλο των ρημάτων και των διαδικασιών που υποδηλώνουν,

[00:41:21 Ομιλητής 1: Τι σημαίνει δηλαδή εδώ πέρα και μου λέει «πρέπει να τοποθετηθεί γκαζόν». Τι διαδικασία θα ακολουθήσουμε;

00:41:27 Φανή: Να βάλουμε κάτι κάπου.

00:41:28 Ομιλητής 1: Να βάλουμε κάτι κάπου. Μμμ... για ποιο λόγο; Τι θα γίνει εκεί πέρα;

00:41:32 Αφροδίτη: Η κυρία Ευτυχιάδου μας λέει είναι απαραίτητο να μπει επειδή πρέπει να καλύψουμε ΟΛΗ την επιφάνεια.

00:41:38 Ομιλητής 1: Άρα λοιπόν θα γίνει μια; Το είπε ήδη η Αφροδίτη, θα γίνει μια;

00:41:42 ΟΛΟΙ: Κάλυψη. Επικάλυψη.]

όπως, επίσης, και στο πλαίσιο που περιγράφει η ερώτηση, καθώς αντιλήφθηκαν ότι η αλλαγή πλαισίου θα οδηγούσε σε άλλη λύση.

[00:38:30 Αφροδίτη: Έχει σημασία το «όλη», γιατί άμα δεν έλεγε την όλη και έλεγε «την επιφάνεια» δεν θα μας το διευκρίνιζε και θα μπορούσα... και θα νομίζαμε και στη μισή.

.....

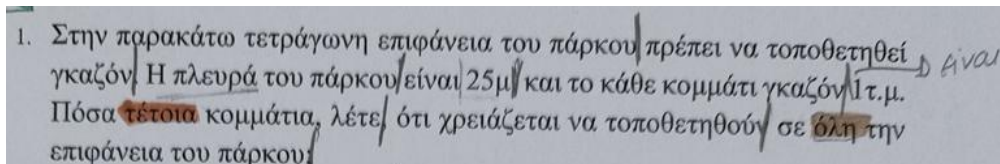
00:53:30 Ομιλητής 1: Το «σε όλη την επιφάνεια του πάρκου»; Υπάρχει λόγος που υπάρχει αυτό εδώ πέρα;

00:53:34 Όλοι: Ναι.

00:53:30 Ομιλητής 1: Δηλαδή;

00:53:35 Γεωργία: Γιατί μπορεί να έλεγε η μισή πλευρά του πάρκου.

00:53:38 Ομιλητής 1: Είναι το πλαίσιο λοιπόν, ε... Είναι ο περιορισμός. ΜΑΣ ΛΕΕΙ... όχι οπουδήποτε.].



Εικ. 7 Ο μαθητής εντοπίζει γλωσσικά στοιχεία

Ακόμη, τα παιδιά αναγνώρισαν τη λειτουργία της συνοδευτικής εικόνας του προβλήματος, «διαβάζοντάς» τη και συνδέοντας τη με το κείμενο (εικ. 8), ενώ η ανάγνωσή τους έγινε με αμφίδρομο τρόπο και όχι προς μία κατεύθυνση.

[00:39:41 Ομιλητής 1: Τα ξέρουμε; (τα κομμάτια)

00:39:42 Κώστας & Φανή: Ναι.

00:39:42 Ομιλητής 1: Γιατί λέει «τέτοια»; Το «τέτοια» τι σημαίνει, που το γράφει στην ερώτηση;

00:39:45 Κώστας: Κομμάτια από γκαζόν που έχουν 1τ.μ. γκαζόν.

00:39:53 Ομιλητής 1: Δηλαδή έχει ήδη...;

00:39:54 Ιωάννης: Πόσα ίδια κομμάτια.

00:39:55 Ομιλητής 1: ΙΔΙΑ κομμάτια. Έχει ήδη στο κείμενο...;

00:39:57 Όλοι: Κομμάτια.

00:39:43 Ελένη: Βασικά εγώ ήθελα να πω ότι αυτό... Ήθελα να κάνω μία ερώτηση. Μπορώ σ' αυτό εδώ πέρα {δείχνει τη λέξη «ίδια» στο κείμενο}, να υπογραμμίσω και από κάτω (δείχνει το κομματάκι γκαζόν του σχήματος) τα κομμάτια, και να βάλω βελάκι και σε αυτό;

00:39:50 Ομιλητής 1: Φυσικά και θα κάνουμε συνδέσεις. Το τέτοια σημαίνει ότι...

00:39:55 Αφροδίτη: Σημαίνει ότι αφού στο σχεδιάγραμμα δείχνει ΗΔΗ ΠΩΣ είναι το ΕΝΑ κουτάκι... πόσα είναι τα πολλά.

00:40:08 Ομιλητής 1: Μπράβο! Μόνο στο σχεδιάγραμμα το δείχνει πώς είναι αυτό το κομμάτι, το ένα; Υπάρχει κάπου αλλού; Μόνο το «και το ΚΑΘΕ κομμάτι γκαζόν είναι ΕΝΑ τετραγωνικό μέτρο.».

00:40:20 Ομιλητής 1: Έχει ήδη αναφερθεί στο κείμενο! Μας το λέει και με λόγια. Έχουμε λόγια, έχουμε και εικόνα. Εντάξει;

.....

00:43:33 Ομιλητής 1: Το λέει. Όταν λέει «παρακάτω» όμως τι σημαίνει; Τι σας προτρέπει να κάνετε;

00:43:39 Ελένη: Μας λέει ότι θα είναι στο... στο σχήμα που είναι από κάτω.

.....

00:44:14 Ελένη: Κυρία, να ρωτήσω κάτι. Αυτό που λέει «πλευρά» εννοεί αυτό εδώ πέρα; (δείχνει το τετράγωνο σχήμα);

.....

00:45:28 Αφροδίτη: Είναι 4 πλευρές και μπορούμε σε οποιαδήποτε.

00:45:32 Ομιλητής 1: Σε οποιαδήποτε πλευρά. Γιατί σε οποιαδήποτε;

00:45:35 Αφροδίτη: Γιατί είναι όλες ίσες.

00:45:36 Ομιλητής 1: Είναι όλες ίσες... από πού το ξέρουμε;

00:45:39 Αφροδίτη: Από την εικόνα.

00:45:41 Ομιλητής 1: Από την εικόνα;

00:45:43 Αφροδίτη: Ναι.

00:45:44 Ομιλητής 1: Μόνο από την εικόνα ξέρουμε ότι είναι ίσες πλευρές;

00:45:50 Ελένη: Αφού λέει πιο πάνω ότι είναι τετράγωνο.

.....

00:46:17 Ομιλητής 1: 25 μέτρα. Αυτό πού μπορούμε να το βάλουμε και πού να το χρησιμοποιήσουμε; Να! Το έχει βάλει ήδη ο Κώστας. Κώστα, τι έκανες;

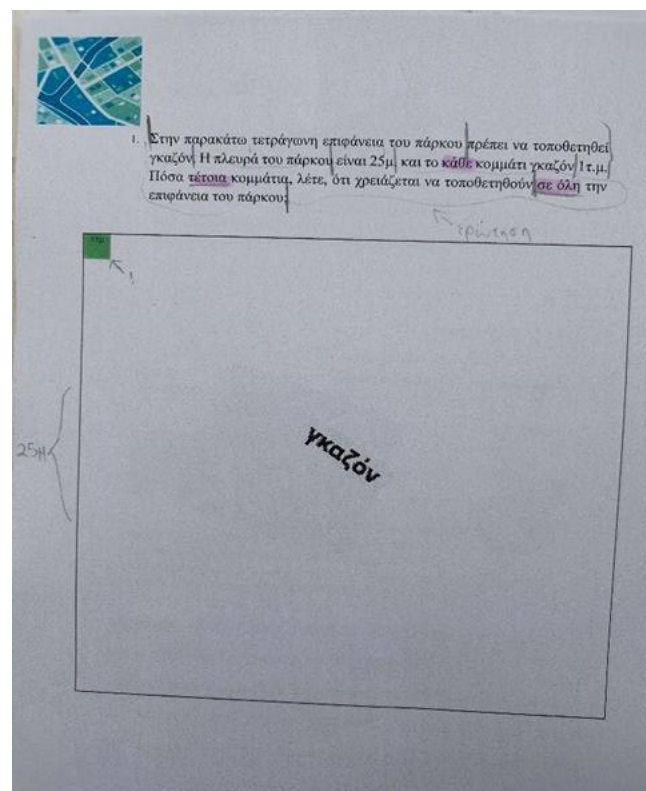
00:46:24 Κώστας: Πήρα τον χάρακα...

00:46:25 Ομιλητής 1: Ο χάρακας δεν χρειάζεται! Η εικόνα μπορεί να μην είναι 25 μέτρα! Γίνεται να είναι 25 μέτρα εδώ πέρα στην εικόνα; [σιωπή] Τι πρέπει να κάνουμε... αυτή την πληροφορία;

00:46:58 Κώστας: Έβαλα 25.

00:46:46 Ομιλητής 1: Το έγραψε! Για να το γράψουμε, λοιπόν, όλοι. Γράφουμε, το γράφουμε.

00:46:50 Κώστας: Δεν το έβαλα από όλες τις μεριές επειδή είναι τετράγωνο.



Εικ. 8 Ο μαθητής συνδυάζει κείμενο και εικόνα, σημειώνοντας πάνω στο σχήμα.

00:48:29 Ομιλητής 1: Στην εικόνα υπάρχει αυτή η πληροφορία; Γιατί είπαμε διαβάζουμε και τα σχήματα. Δεν το ξεχνάμε.

00:48:26 Ελένη: Υπάρχει εδώ (δείχνει στο κείμενο τη φράση «κάθε κομμάτι») και υπάρχει και εκεί πέρα (δείχνει στο τετραγωνάκι γκαζόν στην άκρη του πάρκου).

.....

00:52:54 Ομιλητής 1: Τέτοια κομμάτια. Σαν ποιο δηλαδή;

00:52:54 Ανδρέας: Σαν το κομματάκι αυτό το πράσινο. (δείχνει το σχήμα)]

Δυσκολεύτηκαν στο 3<sup>ο</sup> βήμα της ανάδειξης των μαθηματικών εννοιών, καθώς κάποιοι μαθητές και πάλι φάνηκε να μπερδεύουν την έννοια του τ.μ., παρόλο που στο διαγνωστικό στάδιο, την αμέσως προηγούμενη ημέρα, αναδείχθηκε, αντίστοιχα, η έννοια των μονάδων μέτρησης του Ε και της Π. Παρόλα αυτά, θετικό ήταν ότι συνέχισαν να στηρίζονται στη συνδυαστική ανάγνωση σχήματος και κειμένου και φάνηκε ότι οι ίδιοι κατάλαβαν τη χρησιμότητα αυτής της διαδικασίας στην κατανόηση του προβλήματος (εικ. 8).

[00:49:06 Αγγελική: Ένα τετραγωνικό μέτρο σημαίνει ένα μικρό τετραγωνάκι μέσα στο όλο.

00:49:13 Ομιλητής 1: Ένα μικρό τετραγωνάκι που καλύπτει...

00:49:15 Αγγελική: Ένα... κομμάτι.

00:49:17 Ομιλητής 1: Μπράβο! Τι θα πει όμως αυτό; Τι χαρακτηριστικό έχει αυτό και είναι ΕΝΑ τετραγωνικό μέτρο, αυτό το κουτάκι το πράσινο; (δείχνω την εικόνα) Γιατί το λέμε ότι είναι ένα... Θα μπορούσε να είναι 10 τ.μ., δε θα μπορούσε;

00:49:30 Γεωργία: Γιατί έχει ένα κουτάκι.

00:49:33 Ομιλητής 1: Γι' αυτό; Γι' αυτό; (φασαρία) Τι καταλαβαίνεις με το ΕΝΑ τετραγωνικό μέτρο. Επειδή είναι ένα κουτάκι;

00:49:37 Γεωργία: Όχι, απ' ότι είναι ένα... Ένα μέτρο; Όχι...

00:49:48 Ομιλητής 1: Ποιο είναι 1 μέτρο;

00:49:49 Γεωργία: Το...

00:49:53 Ανδρέας: Το γκαζόν.

00:49:59 Γεωργία: Όχι. Τι λες βρε; Εεε... Το τετραγωνικό μέτρο είναι και...

00:50:06 Ομιλητής 1: Είναι ένα κουτάκι, είπε η Αγγελική. Αλλά ένα οποιοδήποτε κουτάκι; Μπορείς να κοιτάξεις και την εικόνα;

00:50:10 Γεωργία: Μήπως θα έχει και πάχος και...;

00:50:12 Ομιλητής 1: Πάχος...;

00:50:13 Ανδρέας: Πάχος;

00:50:13 Ομιλητής 1: Τι χαρακτηριστικό είναι αυτό; Το είπαμε και χθες. Δεν το ξεκαθαρίσαμε! (σιωπή-ξανασηκώνει χεράκι) Το κατάλαβες; Το θυμήθηκες;

00:50:14 Γεωργία: Ότι η κάθε πλευρά του είναι ένα τετραγωνικό μέτρο... (την τελευταία λέξη τη λέει χαμηλόφωνα)

00:50:20 Ομιλητής 1: Ένα ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ μέτρο;

00:50:21 Γεωργία: Όχι, 1 μέτρο.

00:50:23 Ομιλητής 1: Ένα μέτρο. Νομίζω πως χθες το ξεκαθαρίσαμε, τη διαφορά του τετραγωνικού μέτρου και του μέτρου. Το μέτρο είναι; Τι είναι μέτρο; (σιωπή)

00:50:34 Φανή: 100 εκατοστά!

00:50:37 Ομιλητής 1: (γέλιο) Ναι, αλλά τι είναι αυτό που μετράμε όταν λέμε 1 μέτρο;

00:50:46 Σωτηρία: Το γύρω- γύρω.

00:50:47 Ομιλητής 1: Δεν είναι απαραίτητο να είναι ένα γύρω- γύρω. Μπορεί να είναι και το μήκος της πλευράς. Το γύρω- γύρω είναι ένα μέτρο; Πώς το λέμε στα μαθηματικά;

00:51:00 Φανή: Περίμετρο.

00:51:03 Ομιλητής 1: Περίμετρο. ΆΛΛΟ πράγμα είναι αυτό. Όταν χρησιμοποιούμε, όμως, μονάδες μέτρησης, πρέπει να καταλαβαίνουμε τι είναι αυτό που περιγράφουμε. Όταν λέει 1 μέτρο εννοεί το μήκος της μιας πλευράς.

00:51:16 Γεωργία: Ναι.

00:51:17 Ομιλητής 1: Εντάξει; Υπάρχει ένα τετράγωνο με 10τ.μ.; Που να είναι 10 τ.μ.; Ένα κουτάκι μάλλον που να είναι 10 τ.μ.; Θα ήταν ίδιο με αυτό; (δείχνω το πράσινο κουτάκι)

00:51:30 Όλοι: ΟΧΙ!

00:51:31 Ομιλητής 1: Τι τετράγωνο θα ήταν εκείνο;

00:51:33 Κατερίνα: 10 φορές μεγαλύτερο. (δείχνει με άνοιγμα των χεριών της)

00:51:40 Ομιλητής 1: Δηλαδή; Τι χαρακτηριστικό θα έχει αυτό το τετράγωνο;

00:51:40 Κατερίνα: Θα ήταν μεγαλύτερο.

00:51:41 Ομιλητής 1: Αφού... Αν το κομμάτι γκαζόν δεν ήταν ένα τετραγωνικό μέτρο και ήταν ΔΕΚΑ τ.μ.;

00:51:45 Κατερίνα: Μεγαλύτερο.

00:51:45 Ομιλητής 1: Τι εννοείς μεγαλύτερο; Έναν αριθμό θέλω. Θα ήταν 10 φορές μεγαλύτερο. Δηλαδή;

00:51:52 Φανή: Θα είχε δέκα μέτρα σε κάθε πλευρά.

00:51:53 Ομιλητής 1: Θα ήταν ΔΕΚΑ μέτρα η κάθε πλευρά. Καταλαβαίνετε πόση διαφορά έχει;

00:51:46 Όλοι: Ναι! Ναι!]

Ακόμη, κάποιοι μαθητές είχαν την τάση να θέλουν να προσπεράσουν τη διαδικασία ανάδειξης των μαθηματικών εννοιών και να προσπαθούν να βρουν κατευθείαν με ποια πράξη θα έβρισκαν το ζητούμενο, με αποτέλεσμα να επαναλαμβάνονται αδικαιολόγητα λάθη και να αλλάζουν συνεχώς τις απαντήσεις τους.

[00:53:43 Ομιλητής 1: Όταν λέει «να τοποθετηθεί γκαζόν», ποια διαδικασία μας λέει να κάνουμε; Τι πρέπει να κάνουμε;

00:53:53 Ελένη: Πολλαπλασιασμό; (διστακτικά)

00:53:54 Ομιλητής 1: Για ποιο λόγο; Τι πρέπει να...; Τι πρέπει δηλαδή να... Με ποια έννοια ή διαδικασία των μαθηματικών πρέπει να ασχοληθούμε όταν λέει «να τοποθετηθεί γκαζόν»;

00:53:06 Ελένη: Θα μπορούσαμε να...

00:54:07 Ομιλητής 1: Τι μαθηματικά είναι αυτά;

00:54:08 Ελένη: Θα μπορούσαμε να κάνουμε ένα τετραγωνικό μέτρο επί 25 μέτρα και μετά κάνουμε επί 4.

00:54:19 Ομιλητής 1: Εσύ πήγες στο 4<sup>ο</sup> βήμα, στο «επιλύω το πρόβλημα». (σιωπή) Τι μαθηματικά ξέρουμε γι' αυτό που λέει; (σιωπή) Πρέπει να τοποθετηθεί γκαζόν. Το είχαμε πει. Το είπαμε πει πριν που κάναμε το «κινούμαι μπρος πίσω».

00:54:33 Ελένη: Διαίρεση. (διστακτικά)

00:54:34 Ομιλητής 1: Όχι, όχι! Δε θέλω να μου πείτε την πράξη. Τι είναι αυτό που πρέπει, τι είναι αυτό που πρέπει να αναφερθούμε. Τι μαθηματικά; Πώς θα το πούμε αυτό στα μαθηματικά; Όταν λέμε «να τοποθετήσουμε γκαζόν σε μια επιφάνεια», τι είναι αυτό που κάνουμε, δηλαδή; Τι μαθηματικά είναι;

00:54:51 Αφροδίτη: Το πώς. Ενεργούμε.

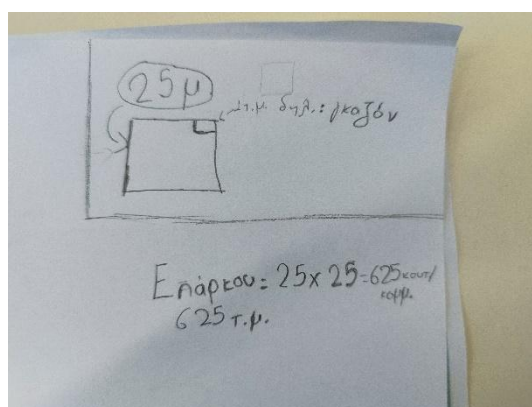
00:54:56 Ομιλητής 1: Ναι ενεργούμε, κάνοντας μια επικάλυψη, καλύπτουμε μια επιφάνεια. Δηλαδή τι είναι αυτό που κάνουμε; Στα μαθηματικά πώς το λέμε;

00:55:17 Στέλλα: Περίμετρος... (χαμηλόφωνα)

00:55:19 Ομιλητής 1: Περίμετρος;

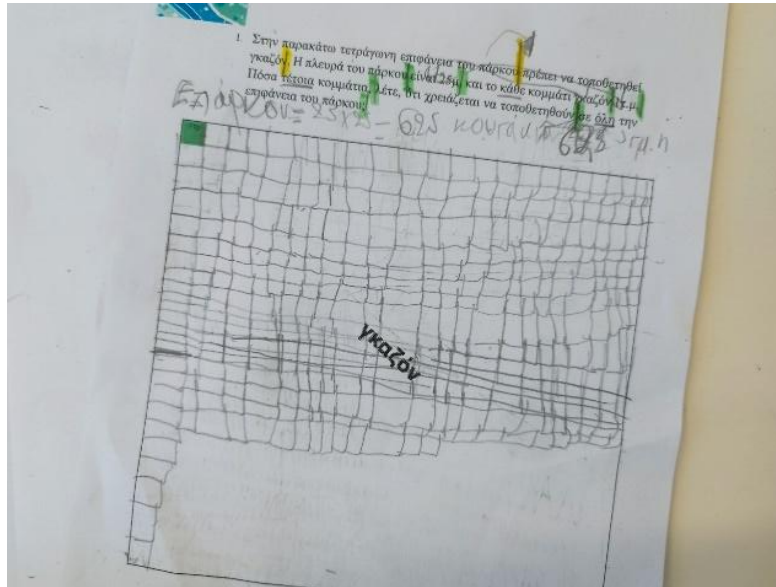
00:55:26 Φανή: Όχι, το εμβαδόν!]

Στο 4<sup>ο</sup> βήμα, όπου χρειαζόταν να αποτυπώσουν τα μαθηματικά που είχαν αναδείξει με τα αντίστοιχα μαθηματικά σύμβολα και πράξεις, οδηγήθηκαν, στην ανάγκη εύρεσης του τύπου του εμβαδού και κατανόησαν την πολλαπλασιαστική σχέση των αριθμών που εκφράζουν τα μήκη των πλευρών του πάρκου/ οριζόντια σε σειρές επί κάθετα σε στήλες (εικ. 9).



Εικ. 9 Ο μαθητής επιλύει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ε

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να συμβεί αυτό βοήθησε η ανάδειξη του λάθους ενός μαθητή (Πέτρου), ο οποίος, όσο ο εκπαιδευτικός και τα υπόλοιπα παιδιά επεξεργάζονταν το πρόβλημα, άρχισε να σχεδιάζει «πρόχειρα» κουτάκια στην εικόνα του προβλήματος με την επιφάνεια του πάρκου (εικόνα 10). Ο μαθητής, δηλαδή αξιοποίησε με λανθασμένο τρόπο την οπτική αναπαράσταση. Ωστόσο, σημειώνεται ότι, γενικά, αποφεύγει να αποτυπώνει τη διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων και, συνήθως, λέει ή γράφει μόνο τις απαντήσεις χωρίς να εξηγήσει τον τρόπο σκέψης του.



Εικ. 10 Λανθασμένη αξιοποίηση οπτικής αναπαράστασης

[00:56:48 Ομιλητής 1: Γιατί το κάνεις, Πέτρο, αυτό τώρα; Γιατί το κάνεις, Πέτρο, αυτό τώρα;

00:56:53 Πέτρος: Απλά ήθελα να το κάνω έτσι και μετά να τα μετρήσω.

00:57:07 Ομιλητής 1: Σχεδιάζεις τις γραμμές και τις στήλες... τις σειρές, για να μετρήσεις τα κουτάκια;

00:57:10 Πέτρος: Ναι. Επειδή δεν το έχω πολυκαταλάβει το πρόβλημα, ακούω όπως τα λέτε και ενώ το λέτε εγώ κάνω αυτό. (δείχνει αυτό που είχε αρχίσει να σχεδιάζει στο σχήμα της παραπάνω εικόνας).]

Οι κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού/ερευνητή στη συνέχεια, με αφορμή την παρέμβαση ενός συμμαθητή του Πέτρου, ο οποίος εξέφρασε τον μαθηματικό του συλλογισμό και προσπάθησε να διατυπώσει ένα λογικό επιχείρημα, ενθάρρυνε την ανταλλαγή ιδεών στην ολομέλεια. Έτσι, αυτό με τη σειρά του βοήθησε όλη την τάξη να «διαβάσει» ορθά την οπτική αναπαράσταση, να αντιληφθεί τη λειτουργία των σχημάτων στο σύνολο της προβληματικής κατάστασης που καλούνταν να επιλύσουν και να κατανοήσει ότι η στρατηγική που ακολούθησε ο Πέτρος στο συγκεκριμένο σχήμα, έδειχνε βιασύνη και, στην προκειμένη περίπτωση, ήταν αδύνατο να εφαρμοστεί, καθώς η ίδια η αναπαράσταση δημιουργούσε την ανάγκη χρήσης του τύπου του εμβαδού, μιας και ούτε οι διαστάσεις ήταν πραγματικές, αλλά ακόμη και αν ήταν βολικό κάτι τέτοιο, θα ήταν τελικά αρκετά χρονοβόρο.

[00:57:17 Ιωάννης: Εγώ σκέφτηκα στην αρχή κάτι... νααα... δίπλα σ' αυτό το κουτάκι (δείχνει το πράσινο κουτάκι), να σχεδιάσουμε και άλλα κουτάκια και να το πάμε μέχρι τέλος και μετά να τα μετρήσουμε, αλλά αυτό θα ήταν πολύ... θα μας έπαιρνε πολύ χρόνο, ενώ απλά θα μπορούσαμε να κάνουμε μία πράξη... (τον διέκοψε ο εκπαιδευτικός)

00:57:31 Ομιλητής 1: Υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος να το κάνουμε πιο γρήγορα;

00:57:34 Φανή: Πράξη!

00:57:34 Ιωάννης: Να κάνουμε 25 επί 25...

00:57:36 Ομιλητής 1: Γιατί να κάνουμε 25 επί 25;

00:57:39 Φανή: Θα κάνουμε 25 επί 4.

00:57:40 Ομιλητής 1: Ωραία. Να πούμε τον λόγο που θα κάνουμε 25 επί 25.

00:57:42 Ιωάννης: Για να βρούμε το εμβαδόν, το μέσα.

00:57:43 Ομιλητής 1: Να κάνω μία ερώτηση. Ποιοι πιστεύουν ότι πρέπει να κάνουμε 25 επί 25 για να βρούμε το εμβαδόν; Να σηκώσουν χεράκι.

00:57:46 Ομιλητής 1: Μόνο δύο άτομα; Και ποιοι πιστεύουν ότι θα κάνουμε 4 επί 25; (σήκωσαν χέρι περίπου οι υπόλοιποι μαθητές) Ωραία. Θα μας πείσεις, Ιωάννη, γιατί πρέπει να κάνουμε 25 επί 25 και όχι 4 επί 25;

00:57:56 Ιωάννης: Γιατί η μία πλευρά είναι 25 και η άλλη πάλι 25. Άρα θα κάνουμε 25 επί 25 για να βρούμε το... (ο εκπαιδευτικός τον διέκοψε)

00:57:59 Ομιλητής 1: Γιατί να κάνουμε 25 επί...

00:58:00 Ιωάννης: Α! Όχι! Είναι 4 πλευρές, άρα... ναι... κάνει 25 επί 4, γιατί είναι 4 πλευρές.

00:58:09 Ομιλητής 1: Δηλαδή θα είναι 4 φορές το 25;

00:58:11 Φανή: Κυρία! Εγώ!

00:58:11 Ομιλητής 1: Τι σημαίνει «4 φορές το 25»;

00:58:12 Αρκετοί μαθητές: Α, κυρία!

00:58:12 Ομιλητής 1: Να πούμε λίγο τι σημαίνει «4 φορές το 25»; 4 φορές τι πράγμα δηλαδή;

00:58:15 Κατερίνα: Θα βρούμε την περίμετρο αν το κάνουμε αυτό!

00:58:16 Φανή: Α! Όχι, κυρία!

00:58:16 Ομιλητής 1: Συμφωνείτε;

00:58:17 Ανδρέας: Όχι... (διστακτικά)

00:58:18 Ομιλητής 1: Άμα κάνουμε 4 φορές το 25 θα βρούμε την περίμετρο; (φασαρία, υπερίσχυαν όσοι φώναζαν «ναι») Τι σημαίνει το «4 φορές 25»; Το 25 που λέμε τι είναι; (φασαρία) Η περίμετρος είναι...;

00:58:30 Ιωάννης: Η μία πλευρά.

00:58:31 Ομιλητής 1: Η μία πλευρά, το μήκος της μίας πλευράς.

00:58:33 Κώστας: Εγώ λέω να κάνουμε 25 επί 25, για να βρούμε το εμβαδόν του.

00:58:35 Ομιλητής 1: Γιατί να κάνουμε 25 επί 25 και όχι 4 φορές το 25; Αυτό εξηγούμε τώρα...

00:58:38 Κώστας: Τέσσερα γιατί... ε, νομίζω πως θα...

00:58:40 Ομιλητής 1: Αν μπορούσαμε να σχεδιάσουμε, αν είχαμε χρόνο και σχεδιάζαμε τα κομματάκια του γκαζόν, τι θα βλέπαμε τελικά; Πόσα θα ήταν και πόσες φορές; (σιωπή) Θα ήταν τέσσερις φορές το 25; (κάνουν νεύμα «όχι»)

00:58:59 Ελένη: Όχι. Κυρία, θα ήταν 25 επί 25 (κάνει με τα χέρια οριζόντια και κάθετη κίνηση)

00:59:02 Ομιλητής 1: Τι σημαίνει αυτό; Το πρώτο το 25 τι σημαίνει;

00:59:04 Ελένη: 25 είναι μία στήλη και 25...

00:59:06 Ομιλητής 1: 25 στήλες...

00:59:07 Ελένη: 25 στήλες... όχι δεν ήθελα να πω αυτό... ήθελα να πω 25 έτσι και 25 έτσι. (κάνει με τα χέρια οριζόντια και κάθετη κίνηση στο σχέδιο) Άμα κάνουμε 25 επί 25... μισό λεπτάκι... (προσπαθεί να βρει ποιο είναι το γινόμενο)

01:00:00 Ομιλητής 1: Συμφωνείτε με την Ελένη;

01:00:01 Όλοι: Ναι!

01:00:02 Ομιλητής 1: Γιατί όμως; Θέλω να εξηγήσουμε τι είναι το ένα το 25 και το άλλο το 25. Γιατί θα το θυμόμαστε. Να μην κάνουμε το ίδιο λάθος... Τι φανερώνει το ένα το 25 και τι το άλλο;

01:00:10 Κώστας: 25, ε, είναι η μία πλευρά... του... του...

01:00:11 Ομιλητής 1: Το μήκος της μίας πλευράς...

01:00:12 Κώστας: Και η άλλη είναι το... πλάτος.

01:00:14 Ομιλητής 1: Ναι...

01:00:15 Κώστας: Και θα τα κάνουμε πολλαπλασιασμό για να βρούμε το εμβαδόν του.

01:00:18 Ομιλητής 1: Ναι... αλλά πάλι δε μου είπατε τι είναι το ένα το 25 και το άλλο το 25.

01:00:22 Ελένη: Το ένα το 25 είναι κάθετα και το άλλο οριζόντια.

01:00:24 Ομιλητής 1: Ωραία. Κάθετα τι σχηματίζεται;

01:00:25 Ελένη: Οι στήλες.

01:00:26 Ομιλητής 1: Άμα πάρουμε τον χάρακα και σχηματίσουμε τα κομματάκια του γκαζόν, θα σχηματιστούν 25 στήλες, 25 γραμμές κάθετες. Και η κάθε στήλη πόσα κουτάκια θα έχει; Πόσα κομμάτια γκαζόν; Ανδρέα...

01:00:36 Κώστας: Η κάθε στήλη θα έχει 25 κουτάκια. (διστακτικά)

01:00:38 Ομιλητής 1: Πώς είμαστε σίγουροι ότι θα έχει τόσα; Άρα δε χρειάζεται να το κάνουμε. Δεν έχουμε χρόνο τώρα... πάει!

01:00:42 Κώστας: Γιατί η μία πλευρά (δείχνει το πάρκο) είναι 25, άρα θα έχει 25 κουτάκια. Άρα 25 στήλες με 25 κουτάκια η κάθε μία, έτσι βγαίνει το 25 επί 25, που κάνει 625.

01:00:49 Ομιλητής 1: Έτσι βγαίνει ο πολλαπλασιασμός αυτός! Θα δούμε πόσο κάνει... Αν είχαμε 4 επί 25 τι θα είχαμε;

01:00:54 Όλοι: 4 στήλες.

01:00:55 Ομιλητής 1: 4 στήλες έχουμε όμως;

01:00:56 Όλοι: Όχι, 25!]

Στη συνέχεια, τα παιδιά χρειάστηκε να επιστρέφουν συχνά στο 3<sup>ο</sup> βήμα και να συζητούν εκ νέου πάνω σε βασικές μαθηματικές έννοιες/ διαδικασίες, καθώς όπως προαναφέρθηκε υπήρχε σύγχυση ανάμεσα σε αυτές.

[00:53:43 Ομιλητής 1: Όταν λέει «να τοποθετηθεί γκαζόν», ποια διαδικασία μας λέει να κάνουμε; Τι πρέπει να κάνουμε;

00:53:53 Ελένη: Πολλαπλασιασμό; (διστακτικά)

00:53:54 Ομιλητής 1: Για ποιο λόγο; Τι πρέπει να...; Τι πρέπει δηλαδή να... Με ποια έννοια ή διαδικασία των μαθηματικών πρέπει να ασχοληθούμε όταν λέει «να τοποθετηθεί γκαζόν»;

00:53:06 Ελένη: Θα μπορούσαμε να...

00:54:07 Ομιλητής 1: Τι μαθηματικά είναι αυτά;

00:54:08 Ελένη: Θα μπορούσαμε να κάνουμε ένα τετραγωνικό μέτρο επί 25 μέτρα και μετά κάνουμε επί 4.

00:54:19 Ομιλητής 1: Εσύ πήγες στο επόμενο βήμα, στο «επιλύω το πρόβλημα». (σιωπή) Τι μαθηματικά ξέρουμε γι' αυτό που λέει; (σιωπή) Πρέπει να τοποθετηθεί γκαζόν. Το είχαμε πει. Το είπαμε πει πριν που κάναμε το «κινούμαι μπρος πίσω». (σιωπή) Τι θα είναι το 625; Ιωάννη...

01:03:47 Ιωάννης: Θα είναι τα κουτάκια που θα έχει μέσα.

01:03:50 Ομιλητής 1: Τα κουτάκια. Μπορώ να τα γράψω με μαθηματικό τρόπο; (σιωπή) Είναι τα κομμάτια. 625 τι δηλαδή;

01:04:15 Κατερίνα: Τετραγωνικά μέτρα.

01:04:17 Ομιλητής 1: Γιατί τα λέμε τα κουτάκια «τετραγωνικά μέτρα»; (σιωπή) Γιατί αντί να γράψουμε κομμάτια, κουτάκια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη λέξη; «Τετραγωνικά μέτρα»...

01:04:28 Αφροδίτη: Κυρία, το ξαναλέτε άλλη μία;

01:04:30 Ομιλητής 1: Αυτό ρωτάω. Το επαναλαμβάνω. (σιωπή) Γιατί; (σιωπή) Την ερώτηση να επαναλάβω;

01:04:30 Όλοι: Ναι...

01:04:31 Ομιλητής 1: Γιατί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στα μαθηματικά... αντί να πούμε «κομμάτια γκαζόν»... «Πόσα κομμάτια γκαζόν» δε ρωτούσε;

01:04:39 Όλοι: Ναι...

01:04:40 Ομιλητής 1: Αυτό ρωτούσε. Μπορούμε να το πούμε με μαθηματικό τρόπο. Πώς το γράφω αυτό στα μαθηματικά;

01:04:45 Νίκος: Τετραγωνικά μέτρα!

01:04:47 Ομιλητής 1: Γιατί να πούμε «τετραγωνικά μέτρα»; Και να μην πούμε σκέτο «μέτρα»;

01:05:02 Φανή: Γιατί είναι τετράγωνο, είναι ένα μικρό τετράγωνο που έχει 1 μέτρο μήκος.

01:05:08 Ομιλητής 1: Δεν είναι ένα. Είναι 625...

01:05:10 Φανή: Α, ναι!

01:05:11 Ομιλητής 1: 625 τετραγωνάκια...

01:05:12 Φανή: Που έχουν 1 μέτρο σε κάθε τους πλευρά.]

Ωστόσο, στο στάδιο αυτό, η επισήμανση της ανάγκης επιστροφής σε προηγούμενο βήμα κάθε φορά που υπήρχε δυσκολία ήταν απαραίτητη και ωφέλιμη προκειμένου να εξοικειωθούν με κάτι τέτοιο και στην πορεία να το κάνουν αυτόνομα.

Η ολοκλήρωση του διδακτικού επεισοδίου με τα δύο τελευταία βήματα της επίλυσης του προβλήματος (5<sup>ο</sup>: η απάντηση στο πρόβλημα & 6<sup>ο</sup>: η ορθότητα της απάντησης) δε δυσκόλεψε ιδιαίτερα τα παιδιά, καθώς μέχρι τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος ήταν ήδη αρκετά εξοικειωμένα με αυτές τις πρακτικές.

[01:07:05 Κώστας: Κάναμε 25 επί 25, δηλαδή η κάθε πλευρά του πάρκου και βρήκαμε 625 κουτάκια.

01:07:15 Ομιλητής 1: Ωραία. Να δούμε αν έχει νόημα η λύση;

01:07:22 Ιωάννης: Έχει νόημα, γιατί για να βρεις την περ... να βρεις το εμβαδόν, μπερδεύτηκα, πρέπει να κάνεις, να πολλαπλασιάσεις το μήκος επί πλάτος και έτσι θα βρούμε το 625.

01:07:38 Ομιλητής 1: Και γιατί να κάνω το μήκος επί πλάτος, όμως;

01:07:40 Ιωάννης: Γιατί άμα κάναμε 25 επί 4, που είναι οι πλευρές, θα βρίσκαμε την περίμετρο, όχι το εμβαδόν!]

## *2<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

Οι μαθητές δούλεψαν στο 2ο και 3ο πρόβλημα.

Στο 1<sup>ο</sup> βήμα επίλυσης του 2<sup>ου</sup> προβλήματος η διερεύνηση του ζητούμενου έγινε σε επίπεδο ολομέλειας. Οι συμμετέχοντες μπόρεσαν να διακρίνουν την υπόθεση και να προβλέψουν ότι η αναμενόμενη απάντηση θα είναι ένα «ναι ή ένα όχι».

[00:01:03 Κώστας: Πρέπει... να δούμε... το πρώτο βήμα είναι να κάνουμε... είναι να δούμε την ερώτηση. Και, μας ρωτάει αν φτάνουν οι πλάκες για να πλακοστρωθεί όλος ο διάδρομος.

00:01:23 Ομιλητής 1: Ωραία, πόσες είναι απαντήσεις;

00:01:27 Κώστας: Οι απαντήσεις... η απάντηση είναι μία.

00:01:32 Ομιλητής 1: Ποια μπορεί να είναι η απάντηση;

00:01:34 Κώστας: Η απάντηση είναι ένα ναι ή ένα όχι.

.....

00:02:07 Νίκος: Για να δούμε... αν... γίνεται αυτό...

00:02:09 Ομιλητής 1: Αυτό το ΑΝ, τι είναι; Να δούμε αν γίνεται... να το... ότι μας ζητάει σα να το; Τι να το κάνουμε;

.....

00:02:34 Ομιλητής 1: Τι είναι το «αν» στη γλώσσα;

00:02:36 Νίκος: Ή με ναι ή όχι.

00:02:37 Ομιλητής 1: Ναι, πώς το λέμε το «αν»; Είναι μια; Πρόσφατα το κάναμε στη γλώσσα... είναι;

00:00:41 Νίκος: Υποθετικός σύνδεσμος.]

Ωστόσο, δυσκολεύτηκαν να σκεφτούν πως το πρόβλημα θα έπρεπε να λυθεί μέσω ελέγχου της αρχικής υπόθεσης. Δεν το συσχέτισαν με άλλου τέτοιου είδους προβλήματα που είχαν συναντήσει στο παρελθόν.

[00:02:47 Ομιλητής 1: Ναι, είναι μια υπόθεση. Στην υπόθεση, λοιπόν, τι κάνουμε; Μμμ;

00:02:53 Κώστας: Πρέπει να βρούμε την απάντηση;

00:02:55 Ομιλητής 1: Ε ναι, προφανώς πρέπει να βρούμε την απάντηση...

00:02:57 Ελένη: Να το λύσουμε;

00:02:58 Ομιλητής 1: Να το λύσουμε, ναι, αλλά πώς αυτό το «εάν»... Το «εάν», να βοηθήσω λίγο... δεν πειράζει... γιατί αυτό θα το συναντήσουμε και σε άλλα προβλήματα. Αυτό που μας ζητάει, το να βρούμε το «εάν... αν φτάνουν ή αν δεν φτάνουν», το «αν» που λέμε και στη γλώσσα «υπόθεση», στην ουσία μας ζητάει να κάνουμε έναν έλεγχο, να το ελέγξουμε. Και πώς μπορούμε να ελέγξουμε κάτι; Να το θυμάστε αυτό... Θα το συναντήσουμε και σε άλλα προβλήματα, έχω βάλει τέτοιου τύπου προβλήματα.

.....

00:03:23 Κατερίνα: Κάνοντας πράξεις για να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα.

00:03:26 Ομιλητής 1: Κάνοντας πράξεις για να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα. Άλλο;

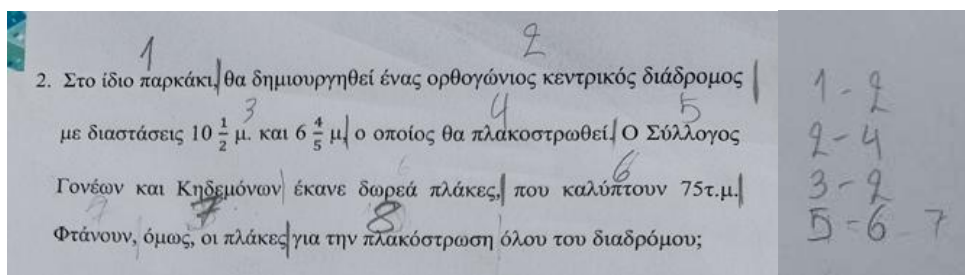
00:03:29 Ελένη: Μπορούμε να τα ελέγξουμε... να πάρουμε ένα φράχτη γύρω γύρω για να μη...

00:03:33 Ομιλητής 1: Να το ελέγξουμε... δεν το έχουμε εδώ πέρα, ζωντανό, να βάλουμε τον φράχτη. Στην ουσία τι να κάνουμε;

00:03:40 Ελένη: Να το περιορίσουμε;

00:03:41 Ομιλητής 1: Να το περιορίσουμε. Τι άλλο; (σιωπή) Να κάνουμε δοκιμή, αν αυτό που λέει, γίνεται... Δεν πρέπει να το κάνουμε; Δοκιμάζοντάς το; Αυτό που μας λέει... αν γίνεται, να το κάνουμε, να δούμε... Γίνεται; Ναι ή όχι; Και να απαντήσουμε. Αυτό σημαίνει έλεγχος. Εντάξει;]

Στο 2<sup>ο</sup> στάδιο εργάστηκαν σε ζευγάρια και παρουσίασαν τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα, κάνοντας συνδέσεις ανάμεσα σε αυτές (εικ. 11).



Εικ. 11 Ο μαθητής εντοπίζει φράσεις με νόημα και τις συνδέει μεταξύ τους με αριθμούς.

[00:07:55 Κατερίνα: Βρήκαμε τις λέξεις- κλειδιά...

00:07:57 Ομιλητής 1: Για πες ξανά, Κατερίνα, τι κάνατε...

00:07:58 Κατερίνα: Βρήκαμε μερικές λέξεις που...

00:08:01 Αθανασία: Χωρίσαμε και ομαδοποιήσαμε...

00:08:04 Κατερίνα: Και βρήκαμε μερικές λέξεις που θα μας βοηθήσουν.

00:08:07 Ομιλητής 1: Δίνουν πληροφορίες, δηλαδή; Λέξεις μεμονωμένες, σημαντικές εννοιές;

00:08:11 Κατερίνα: Ναι.

00:08:15 Ομιλητής 1: Συνδέσεις κάνατε από φράση σε φράση;

00:08:18 Κατερίνα: Ναι...

00:08:18 Αθανασία: Εγώ το έκανα!

00:08:20 Ομιλητής 1: Σκεφτείτε, δηλαδή, ότι είναι σαν ένα παζλ που πρέπει να το ενώσετε.

(οι μαθήτριες συζητούν μεταξύ τους και χωρίζουν το κείμενό τους)

00:08:23 Αθανασία: Σε ποιο παρκάκι; Στο παρκάκι θα δημιουργηθεί... Ορθογώνιος κεντρικός διάδρομος... Με διαστάσεις...

00:08:35 Κατερίνα: Ναι... Στο «θα δημιουργηθεί» νομίζω... και το «κεντρικός διάδρομος» μπορούμε να βάλουμε και το «ο οποίος θα πλακοστρωθεί», γιατί «ΑΥΤΟΣ» θα το κάνει!

00:09:00 Ομιλητής 1: Μπράβο, ακριβώς, άρα μπορείτε να το συνδέσετε αυτό.]

Θετικό ήταν ότι κατά τη διάρκεια των γλωσσικών ελιγμών των μαθητών, έγινε συζήτηση που ανέδειξε τη λειτουργία αυτών των γλωσσικών στοιχείων του κειμένου, που περιγράφουν το πλαίσιο του προβλήματος ως απαραίτητων συνθηκών που θα καθόριζαν την επίλυσή του, σχολιάζοντας το ενδεχόμενο του τι θα συνέβαινε αν αυτά τα στοιχεία απουσίαζαν.

[00:18:55 Ομιλητής 1: Άρα τι άλλη πληροφορία μας δίνει εδώ πέρα; Μας το περιορίζει... μας δημιουργεί ένα πλαίσιο. Μας δίνει τις...;

00:19:07 Αφροδίτη: Διαστάσεις.

00:19:10 Ομιλητής 1: Για τις διαστάσεις. Εντάξει; Είναι σημαντικό; Θα μπορούσε να μην το βάλει; Άμα δεν το έβαζε, θα μπορούσαμε να το λύσουμε;

00:19:27 Αφροδίτη: Όχι...

00:19:28 Ομιλητής 1: Γιατί; Γιατί δεν θα μπορούσαμε να το λύσουμε και είναι απαραίτητη αυτή η επιλογή που έχει κάνει ο συγγραφέας εδώ και μας δίνει τις διαστάσεις; (σιωπή) Το ενδεχόμενο να μην υπήρχε αυτό, Κώστα, τι θα δημιουργούσε;

00:19:40 Κώστας: Δεν θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα.

00:19:41 Ομιλητής 1: Γιατί;

00:19:43 Κώστας: Επειδή δεν θα 'χαμε κάτι.. πράξεις να κάνουμε.

00:19:50 Ομιλητής 1: Πράξεις... Δε θα ξέραμε τι πράξη να κάνουμε;

00:19:53 Νίκος: Θα ξέραμε, αλλά...

00:19:54 Ομιλητής 1: Αλλά;

00:19:56 Νίκος: Δεν θα ξέραμεεεε...

00:19:57 Κώστας: Με τι νούμερα.

00:20:00 Ομιλητής 1: Τους αριθμούς. Είναι σημαντικό να ξέρουμε τους αριθμούς στις διαστάσεις. Θα δημιουργούσε πρόβλημα αν δεν υπήρχε αυτό.]

Τα παραπάνω γλωσσικά στοιχεία αφορούσαν, λοιπόν:

- στην απόδοση χαρακτηριστικών στα σχήματα μέσω της περιγραφής των διαστάσεών τους, όπου δόθηκε η ευκαιρία να αποσυμπυκνώσουν την έννοια του τ.μ.,

[00:12:07 Ομιλητής 1: Τι διαστάσεις θα έχει το κάθε τετράγωνο;

00:12:09 Ιωάννης: 1μ.

00:12:10 Ομιλητής 1: 1μ. Και αυτό θα πρέπει να το κάνεις πόσες φορές;

00:12:14 Ιωάννης: 75. Άρα 75 επί...

00:12:15 Ομιλητής 1: 75. Είναι η ίδια επιφάνεια του ενός τετραγωνικού μέτρου με αυτό που είναι 75 τ.μ.;

00:12:19 Ιωάννης: Όχι.

00:12:20 Ομιλητής 1: Πόσες φορές μεγαλύτερο είναι αυτό που είναι 75 τ.μ.;

00:12:26 Ιωάννης: Πολύ μεγαλύτερο.

00:12:27 Ομιλητής 1: Πόσο;

00:12:28 Ιωάννης: 75.

00:12:28 Ομιλητής 1: 75 φορές. Άλλο 1 κι άλλο 75. Δηλαδή «τα τετραγωνικά μέτρα», άμα σου έλεγα να μου το σχεδιάσεις, τι θα σχεδιάζες στη λέξη «τετραγωνικά μέτρα»;

00:12:38 Ανδρέας: Τετράγωνα.

.....

00:24:15 Ομιλητής 1: Πόσες πλευρές έχει το ορθογώνιο;

00:24:20 Όλοι: 4.

00:24:21 Ομιλητής 1: 4. Πόσες διαστάσεις μας δίνει, Κώστα;

00:24:23 Κώστας: Δύο.

00:24:24 Ομιλητής 1: Γιατί; (φασαρία)

00:24:37 Φανή: Έχει... μας έχει 2 διαστάσεις γιατί η κάθε... η απέναντί του πλευρά είναι η ίδια διάσταση.

00:24:43 Ομιλητής 1: Είναι ίδια διάσταση. Είναι ίση με την άλλη. Ωραία.]

- στον προσδιορισμό των ρημάτων που φανερώνουν μία ενέργεια/ μαθηματική διαδικασία, «διυλίζοντας» τις αντίστοιχες λέξεις

[00:16:57 Στέλλα: Το «θα δημιουργηθεί» δείχνει μία ενέργεια.

00:16:59 Ομιλητής 1: Θα δημιουργηθεί... κάτι πρέπει να γίνει δηλαδή. Γι' αυτό ξεκινήσατε να κάνετε και σχέδιο;

00:17:04 Στέλλα: Ναι.

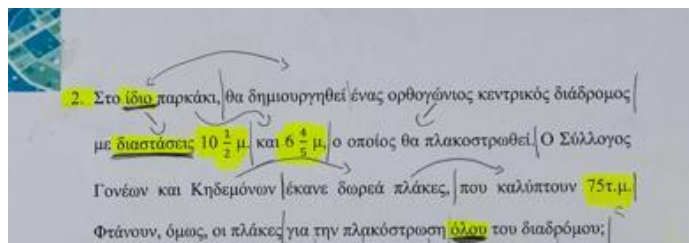
.....

00:20:07 Φανή: Μας λέει ότι θα πλακοστρωθεί, οπότε από αυτό καταλαβαίνουμε ότι θα πρέπει να βρούμε το εμβαδόν.]

- και στην επισήμανση των αντωνυμιών (εικ. 12).

[00:22:50 Ομιλητής 1: Άρα, λοιπόν, αυτό, στον κεντρικό διάδρομο, πώς το καταλαβαίνουμε στην ερώτηση ότι αναφέρεται εκεί;

00:22:59 Κώστας: Εεε..., επειδή λέει «ΟΛΟΥ του διαδρόμου».]



Εικ. 12 Ο μαθητής επισημαίνει στο κείμενο το πλαίσιο του προβλήματος

Ενώ φάνηκε από το προηγούμενο επεισόδιο ότι κατανόησαν την ακολουθία των βημάτων, στο σημερινό δυσκολεύτηκαν περισσότερο στο 3<sup>ο</sup> βήμα και κάπου «χάθηκαν», λόγω της πυκνότητας του νοήματος του κειμένου. Στον διάλογο που αναπτύχθηκε μπορεί κανείς να διακρίνει ότι οι μαθητές μπερδεύουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα και δε θυμούνται τις νοηματικές συνδέσεις που έκαναν ήδη μεταξύ των στοιχείων με αποτέλεσμα να μην μπορούν εύκολα να προχωρήσουν στην ανάδειξη των μαθηματικών.

[00:25:53 Ελένη: Μμμ... Μπορούμε να το λύσουμε τώρα;

00:25:56 Ομιλητής 1: Ορίστε;

00:25:57 Ελένη: Κυρία, σε ποιο βήμα είμαστε;

00:26:00 Ομιλητής 1: Στο τρίτο. Να πούμε τι μαθηματικά ξέρουμε... για αυτά όλα. Έλα.

00:26:07 Ελένη: Ότι το «όλου» που είναι όλο συμβολίζει το 1/9.

00:26:14 Ομιλητής 1: Το 1/9;;;

00:26:17 Ελένη: Αυτό εδώ πέρα είναι κλάσματα, άμα τα κάνουμε ΟΛΑ κλάσματα. (παύση)

00:26:21 Ομιλητής 1: Δεν κατάλαβα τι είπες;

00:26:23 Ελένη: Εδώ πέρα έχει κλάσματα. Άμα τα κάνουμε (μπερδεμένα λόγια, μου έδειξε στο χαρτί ότι είχε μετατρέψει τους μικτούς αριθμούς σε κλάσματα).

00:26:31 Ομιλητής 1: Είχε πει η Φανή πριν ότι «όταν λέει ότι θα πλακοστρωθεί ο διάδρομος», σημαίνει ότι θα πρέπει να μιλήσουμε για το εμβαδόν. Εντάξει, τι θα κάνουμε λοιπόν; Αφού πάμε μαζί! Μα βιάζεστε και πάτε στα κλάσματα κατευθείαν! Ναι...

00:26:56 Φανή: Θα πρέπει πρώτα να βρούμε το όλο.

00:26:58 Ομιλητής 1: Να βρούμε το όλο από τι πράγμα;

00:27:00 Φανή: Από τοσο ορθογώνιο.

00:27:03 Ομιλητής 1: Από τον διάδρομο, δηλαδή, το εμβαδόν όλου του διαδρόμου. Το βρήκατε; Πώς θα το βρούμε το εμβαδόν όλου του διαδρόμου; Χρειάζεται να ξέρουμε το εμβαδόν όλου του διαδρόμου;

00:27:14 Ομιλητής όλοι: Ναι.

00:27:16 Ομιλητής 1: Τι θα κάνουμε; Ναι...

00:27:19 Ιωάννης: Θα κάνουμε 75 επί 75.

00:27:20 Ομιλητής 1: Συμφωνείτε;

00:27:21 Φανή: Τι είπε;

00:27:24 Ομιλητής 1: Να κάνουμε 75 επί 75 για να δούμε το εμβαδόν του διαδρόμου.

00:27:28 Κώστας: Όχι!

00:27:29 Ομιλητής 1: Τι θα κάνουμε; Γιατί να κάνουμε τα κλάσματα και όχι το 75 επί 75;

00:27:30 Κώστας: Επειδή 75 θα 'ναι... εε.. τα τετραγωνικά μέτρα που θα καλύψουν... το ξέρουμε το εμβαδόν του που είναι 75.

00:27:38 Ομιλητής 1: Από τι πράγμα; Το «75 τ.μ.», αυτή η φράση ποιο πράγμα προσδιόριζε; Τον διάδρομο;

00:27:46 Κώστας: Αυτά που μας έχουν δώσει.

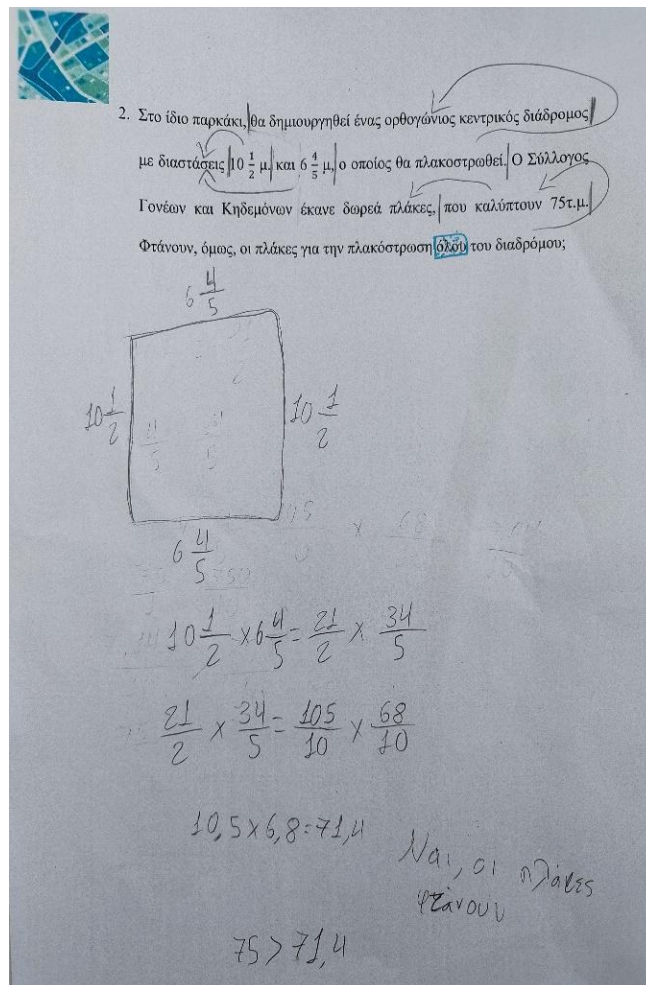
00:27:47 Ομιλητής 1: Αυτά που μας έχουν δώσει, για να καλύψουμε τον διάδρομο. Εεε... Η Φανή, νομίζω, και η Κατερίνα... δε θυμάμαι καλά... είπαν ότι θα πρέπει να βρούμε το εμβαδόν του διαδρόμου. Για τον διάδρομο τι πληροφορίες μας δίνει ο συγγραφέας;

00:28:01 Κώστας: Μας δίνει το 10 και  $\frac{1}{2}$  και το 6 και  $\frac{4}{5}$ .

00:28:05 Ομιλητής 1: Τις διαστάσεις του... ΑΥΤΕΣ θα πρέπει να κάνουμε πολλαπλασιασμό.]

Για τον λόγο αυτό κρίθηκε αναγκαίο την επόμενη φορά να τους παραχθεί μία συστηματική καθοδήγηση: Κατά την επίλυση του επόμενου προβλήματος να επαναλάβουν όλοι μαζί τα βήματα, επιμένοντας σε έναν πιο συστηματικό τρόπο καταγραφής των φράσεων του κειμένου στον πίνακα της τάξης, ώστε να είναι πιο εύκολη η ανάδειξη των μαθηματικών εννοιών που υπάρχουν σε κάθε (γλωσσικό) κομμάτι του κειμένου.

Επίσης, σκέφτηκαν ότι θα βοηθούσε να κάνουν σχήμα κατά το 4<sup>ο</sup> στάδιο επίλυσής του (εικόνα 13). Στο 5<sup>ο</sup> στάδιο μπερδεύτηκαν, όταν χρειάστηκε να μοιραστούν τις ιδέες τους πάνω στην όλη διαδικασία που ακολουθήθηκε για να λυθεί το πρόβλημα. Αρκετοί απάντησαν ορθά στο ζητούμενο του προβλήματος, αν και μία μαθήτρια στην προσπάθειά της αυτή, θέλησε να κάνει μία επιπλέον πράξη (αφαίρεση μεταξύ του εμβαδού των πλακών και του διαδρόμου), ενώ ήταν περιττή, διότι το ζητούμενο ήταν αν έφταναν οι πλάκες και όχι πόσες περίσσευαν και, φυσικά, χρειαζόταν μία απλή σύγκριση των αριθμών.



Εικ. 13 Στάδιο 4<sup>ο</sup>/ Ο μαθητής σχεδιάζει σχήμα.

[00:30:10 Κατερίνα: Και θα το βρούμε κάνοντας 75τ.μ. μείον 71,4τ.μ.... που μας κάνειει....

00:30:15 Ομιλητής 1: Γιατί κάνεις αφαίρεση;

00:30:17 Κατερίνα: Για να βρω πόσα είναι τα κουτάκια, το μέ... το εμβαδόν... Και...

00:30:36 Ομιλητής 1: Δεν το βρήκαμε το εμβαδόν;

00:30:39 Κατερίνα: Όχι...

00:30:40 Ομιλητής 1: Το βρήκαμε... χρειάζεται να κάνουμε αφαίρεση; Για ποιο λόγο να κάνουμε αφαίρεση; Τι είναι αυτό που ρωτάει; Ξεχάσατε;

00:30:47 Αρκετοί: Για να δούμε αν φτάνουν...

00:30:50 Ομιλητής 1: Τι θα κάνουμε για να δούμε αν φτάνουν ή όχι;

00:30:56 Κώστας: Θα δούμε αν οι πλάκες που βρήκαμε είναι λιγότερες ή περισσότερες.

00:30:59 Ομιλητής 1: Άρα τι θα τους κάνουμε τους 2 αριθμούς;

00:31:00 Κατερίνα: Θα τους αφαιρέσουμε...

00:31:01 Κώστας: Θα τους βάλουμε από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο.

00:31:04 Ομιλητής 1: Άρα τι κάνει ο Κώστας;

00:31:06 Νίκος: Διαίρεση.

00:31:08 Ομιλητής 1: ΔΙΑΙΡΕΣΗ;

00:31:08 Νίκος: Αφαίρεση...

00:31:10 Ομιλητής 1: Άμα κάνεις αφαίρεση τι θα βρεις;

00:31:11 Κατερίνα: Θα βρω πόσο έμεινε για να δω αν θα μει...

00:31:14 Ομιλητής 1: ΑΥΤΟ ρωτάει;

00:31:16 Κατερίνα: Αν θα μείνουν...

00:31:17 Ομιλητής 1: Δεν μπορώ να το κάνω αλλιώς, να δούμε αν φτάνουν ή όχι;

00:31:20 Κατερίνα: Μπορώ.

00:31:21 Ομιλητής 1: Με τι τρόπο; Είναι πάρα πολύ απλό.

00:31:23 Κώστας: Πρέπει να δούμε αν το 71,4 είναι μικρότερο από αυτό που έχουμε.

00:31:20 Ομιλητής 1: Αν είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο... άρα τι τους κάνω τους 2 αριθμούς; Τους...;

00:30:22 Κατερίνα: Τους συγκρίνω!]

Το τελευταίο βήμα ολοκληρώθηκε με τον έλεγχο της ορθότητας της απάντησης, με τον οποίο οι μαθητές, αν και εξοικειωμένοι στο να εξηγούν το «γιατί», δυσκολεύτηκαν στον τρόπο έκφρασης και στη διατύπωση μίας ολοκληρωμένης απάντησης. Ωστόσο, δόθηκε η ευκαιρία να αξιοποιηθεί η λανθασμένη ενέργεια που είχε κάνει η μαθήτρια προηγουμένως και να επεκταθεί το πρόβλημα ρωτώντας τους αν θα έφταναν τελικά οι πλάκες ακριβώς και σε περίπτωση που θα περίσσευαν, να υπολογίσουν νοερά πόσες περίπου θα ήταν. Δε δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν στο ζητούμενο παρόλο που για να δοθούν απαντήσεις οι μαθητές έπρεπε να ανατρέξουν στην έννοια των κλασμάτων.

[00:32:19 Ομιλητής 1: Φτάνουν. Ακριβώς; Δηλαδή, Γεωργία;

00:32:23 Γεωργία: Περισσεύουν...

00:32:25 Ομιλητής 1: Περισσεύουν... πόσες δηλαδή περισσεύουν; Αυτό είναι δικιά μου ερώτηση. (σιωπή)  
Περίπου... περίπου... πόσες περισσεύουν... πόσες περίπου;

00:32:36 Γεωργία: 4.

00:32:37 Ομιλητής 1: Περίπου 4 ολόκληρες ώρες;

00:32:38 Γεωργία: Όχι...

00:32:39 Ομιλητής 1: Περίπου 3 θα λέγαμε...

00:32:41 Ελένη: 3,5...

00:32:48 Γεωργία: Οπότε 4.

00:32:48 Ελένη: Οπότε...

00:32:52 Ομιλητής 1: Όχι 4... 3 και λίγο ακόμα.

00:32:54 Γεωργία: Ναι.

00:32:58 Ελένη: Αν το στρογγυλοποιήσουμε...]

Παρομοίως ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία και στο 3<sup>ο</sup> πρόβλημα. Ορισμένα ζευγάρια ήταν περισσότερα αυτόνομα στο να αρχίσουν να επεξεργάζονται το κείμενο.

[00:41:20 Κατερίνα: Βρήκαμε τις λέξεις «ίδια πλευρές, τον καθένα και διαστάσεις».

00:41:28 Ομιλητής 1: Αυτές σε βοηθάνε περισσότερο, δηλαδή;

00:41:30 Κατερίνα: Εεεε, ναι.

00:41:31 Ομιλητής 1: Μμμ...

00:41:34 Κατερίνα: Και ...τόρα σκεφτόμαστε... τι να κάνουμε;

00:41:41 Αγγελική: Μετά πρέπει να τα χωρίσουμε σε φράσεις, που τα έχουμε χωρίσει... και να βρούμε με τι ταιριάζει.]

Κατά την επίλυσή του, έγιναν σωστές γραμματικές μεταφορές των ΟΣ και των ρημάτων και η παρουσία του ποσοστού δε δυσκόλεψε την πλειοψηφία της τάξης. Ως εκ τούτου, παρόλο που διέφευγαν της προσοχής τους ορισμένα σημαντικά στοιχεία, το πλαίσιο του προβλήματος προσδιορίστηκε σχετικά εύκολα μέσα από την ανταλλαγή ιδεών.

[00:45:18 Φανή: Κυρία, θα πρέπει όμως... από εδώ κάτω μας λέει, ότι θα καλύπτουν το 6% της πλατείας...

00:45:23 Ομιλητής 1: Μπράβοοοο.

00:45:26 Φανή: Πρέπει να πάρουν και λίγο από μέσα.

00:45:27 Ομιλητής 1: Κατ' αρχήν το πού θα τα βάλουμε... μας δείχνει πού θα τα βάλουμε;

00:45:29 Ομιλητής 1: Όχι.

00:45:30 Ομιλητής 1: Όχι; Αααααμ... κάτι δεν συμπεριλάβατε... έχει παρακάτω κι άλλο... κι άλλη φράση. Δεν μου την είπατε. (σιωπή) Θα διακοσμήσουν, λέει, κατά μήκος αντίστοιχα τις 4 πλευρές της πλατείας. Αυτό όλο τι πληροφορία δίνει πάλι; Για το;

00:45:51 Φανή: Για τα παρτέρια.

00:45:53 Ομιλητής 1: Ναι, για τα παρτέρι. Τι ακριβώς; Για το σχήμα τους;

00:45:55 Ομιλητής 1: Όχι.

00:45:56 Ομιλητής 1: Άρα σε τι απαντάει; Σε ποια ερώτηση;

00:45:58 Φανή: Για το πού.

00:45:59 Ομιλητής 1: Πάλι για το πού. Δηλαδή, πού τα σχεδιάσατε; Για να δω εγώ... Πού θα τα σχεδιάστε τα παρτέρια;

00:46:04 Αφροδίτη: Σε κάθε πλευρά.

00:46:03 Ομιλητής 1: Σε κάθε πλευρά... γύρω γύρω.

00:46:10 Κώστας: Κύρια, όμως, πρέπει να καλύπτει ένα συγκεκριμένο μέρος.

00:46:11 Ομιλητής 1: Πώς το καταλαβαίνουμε; Υπάρχει ένα αυστηρό πλαίσιο εδώ πέρα. Δεν θα κάνουμε όσο μεγάλα θέλουμε. Πρέπει να καλύπτουν... αυτό πού το καταλάβαμε; Ποια πληροφορία το δίνει; Τι έχει γράψει συγγραφέας που μας το δίνει, Κώστα;

00:46:25 Κώστας: Λέει πως το καθένα παρτέρι θα πρέπει να καλύπτει το 6% της πλατείας.

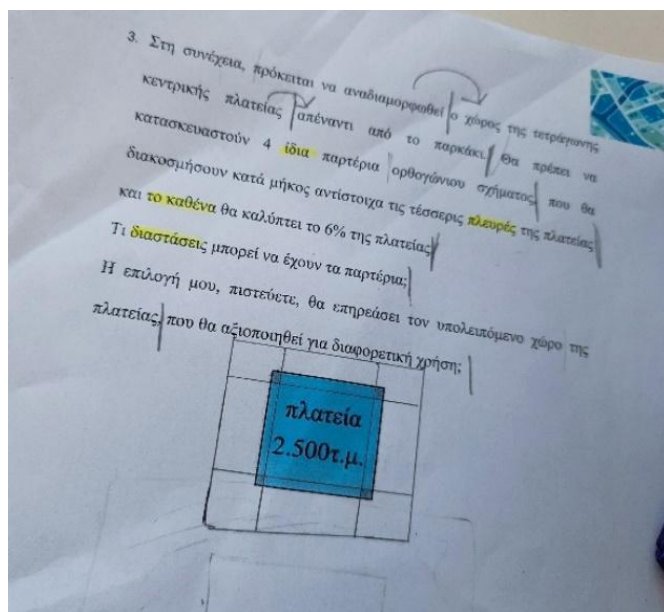
00:46:30 Ομιλητής 1: Είναι αυτό το «καθένα» που είχε πει η Κατερίνα ότι είναι σημαντικό. Το καθένα θα καλύπτει το 6% της πλατείας... δηλαδή πόσο θα καλύπτει; Πολύ... λίγο;

00:46:43 Κώστας: Κυρία... αλλά θα καλύπτει λίγο... όμως αν... όλα τα παρτέρια μαζί θα καλύπτουν ένα μέγεθος.

00:46:48 Κώστας: Θα καλύπτουν το ¼.]

Δύο μαθήτριες εστίασαν στη γραμματική μεταφορά του ρήματος «θα κατασκευαστούν», ερμηνεύοντάς το μεν ως διαδικασία σχεδιασμού σχήματος, χωρίς όμως να εκμεταλλευτούν σωστά το ήδη υπάρχον σχήμα (εικ. 14) (Κατερίνα: «...θα σχεδιάσουμε την πλατεία και μετά από γύρω

γύρω το γκαζόν...») ή το νόημα του κειμένου (Σωτηρία: «Θα πάρει μόνο από την πλατεία ή και απ' έξω;... Δηλαδή μπορεί να πάρει και λίγο... αυτό σκέφτομαι...») αντίστοιχα.



Εικ. 14 Το σχέδιο της Κατερίνας

[00:48:24 Σωτηρία: Θα πάρει μόνο από την πλατεία ή και απ' έξω;

00:48:27 Ομιλητής 1: Όχι, στην πλατεία, λέει, κατά μήκος.

00:48:31 Σωτηρία: Εννοώ, δηλαδή, ότι μπορεί να πάρει 6% από την πλατεία;

00:48:39 Ομιλητής 1: Από πού θα το πάρει το 6%;

00:48:40 Σωτηρία: Απ' την πλατεία.

00:48:40 Ομιλητής 1: Απ' τον δρόμο;

00:48:42 Σωτηρία: Όχι! Απ' την πλατεία. Μπορεί να...

00:48:44 Ομιλητής 1! Άρα;

00:48:44 Σωτηρία: Δηλαδή μπορεί να πάρει και λίγο... αυτό σκέφτομαι...

00:48:45 Ομιλητής 1: Το λέει;

00:48:46 Σωτηρία: Όχι.]

Ωστόσο, μία συμμαθήτριά της (Φανή) αντιλήφθηκε τον ρόλο της υπάρχουσας οπτικής αναπαράστασης και προσπαθώντας να την περιγράψει, συνδέει τη φράση «6% της πλατείας» με την εικόνα και αναδεικνύει τη μαθηματική της ιδέα (Φανή: «Κυρία, να πω κάτι που είδα; Από κάτω το πρόβλημα έχει την πλατεία και μας λέει ότι μέσα χωράνε 2.500 τ.μ., γιατί γράφει 6% ΤΗΣ πλατείας!)).

[00:43:39 Ομιλητής 1: Θα πρέπει, λέει, να κατασκευαστούν. Δηλαδή; Τι βάζει να κάνουμε εδώ πέρα, όταν λέει ότι θα κατασκευαστούν;

00:43:50 Κατερίνα: Να σχεδιάσουμε...

00:43:52 Ομιλητής 1: Μπράβο. Θα πρέπει να σχεδιάσουμε. Σχεδιάσατε κάτι; Τι θα σχεδιάσουμε; Ποιο πράγμα θα σχεδιαστεί;

00:44:00 Κατερίνα: Εεε.. θα σχεδιάσουμε την πλατεία και μετά από γύρω γύρω το γκαζόν... Όχι! (αλλάζει γρήγορα γνώμη)

00:44:08 Ομιλητής 1: Ξέρουμε τι θα σχεδιάσουμε;

00:44:10 Φανή: Κυρία, να πω κάτι που είδα; Από κάτω το πρόβλημα έχει την πλατεία και μας λέει ότι μέσα χωράνε 2.500 τ.μ., γιατί γράφει 6% ΤΗΣ πλατείας!

00:44:14 Ομιλητής 1: Μπράβο! Η Φανή δηλαδή εκμεταλλεύεται και το σχήμα που έχω από κάτω. Υπάρχει ένα σχήμα που δείχνει την πλατεία. Την έχετε την πλατεία, Κατερίνα...

00:44:24 Κατερίνα: Το ξέρω...

00:44:28 Ομιλητής 1: Τι πληροφορία δίνει το σχήμα; Ότι η πλατεία ήταν...;

00:44:30 Φανή: Ότι μέσα χωράνε 2500 τ.μ.]

Και σε αυτό το πρόβλημα οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να αξιοποιήσουν ικανοποιητικά όλες τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα με αποτέλεσμα κατά το 3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup> στάδιο, όπου χρειαζόταν να συνδέσουν όσα είχαν επισημάνει με τις μαθηματικές ιδέες τις οποίες μετά θα έπρεπε να αποτυπώσουν σε πράξεις και σχήματα, αυτό που παρατηρήθηκε ήταν να συγχέουν μαθηματικές έννοιες, όπως τις διαστάσεις, το εμβαδόν και την περίμετρο ή να μη θυμούνται τι ακριβώς κάνουν κάθε φορά (το πώς και γιατί). Όπως φαίνεται και στους παρακάτω διαλόγους, σε κάθε περίπτωση αναγκάζονται να γυρίζουν συνεχώς σε προηγούμενο στάδιο, στο πρώτο ή το δεύτερο.

- Δεν αναδεικνύουν τη μαθηματική διαδικασία που υποδηλώνει η ρηματική φράση.

[00:52:41 Ομιλητής 1: Τι Μαθηματικά υπάρχουν όταν λέει «πρόκειται να αναδιαμορφωθεί ο χώρος της Τετράγωνης κεντρικής πλατείας απέναντι από το παρκάκι»; Έχουμε 3 φράσεις εδώ πέρα... τι μαθηματικά υπάρχουνε;

00:52:50 Φανή: Κυρία, κυρία... πλατεία.

00:52:51 Ομιλητής 1: Το πλατεία που μου λέτε δεν είναι μαθηματικά.

00:53:00 Αφροδίτη: Λέει ότι πρέπει να αναδιαμορφωθεί...

00:53:11 Ομιλητής 1: Ποια έννοια μαθηματική αναδεικνύεται;

00:53:14 Αφροδίτη: Ότι είναι τετράγωνο.

00:53:25 Ομιλητής 1: Ναι, αλλά τι πράγμα του τετραγώνου; Θα μπορούσε να είναι η περίμετρος. ΕΙΝΑΙ η περίμετρος όμως;

00:53:32 Αφροδίτη: Όχι.

00:53:33 Ομιλητής 1: Τι άλλο θα μπορούσε να είναι;

00:53:34 Αφροδίτη: Το εμβαδόν;]

- Προσπαθούν να αποδώσουν μαθηματικό νόημα στις αντωνυμίες και, γενικά, στα ΟΣ:

[00:53:37 Ομιλητής 1: Το εμβαδόν. Εντάξει; Δεν ξέρουμε ακόμη... πάντως σίγουρα έχουμε κι ένα τετράγωνο. Εντάξει, γράφουμε τη λέξη τετράγωνο από κάτω να το θυμόμαστε... από κάτω στο κενό... είναι μαθηματικά. Ωραία. «Θα πρέπει να κατασκευάσουν 4 ίδια παρτέρια ορθογώνιου σχήματος». Εδώ πέρα τα μαθηματικά έχουμε;

00:54:01 Ελένη: Ότι πρέπει να είναι ΙΔΙΑ... ότι πρέπει να είναι 4 ΙΔΙΑ.

00:54:05 Ομιλητής 1: Τι;

00:54:06 Ελένη: Παρτέρια.

00:54:13 Ομιλητής 1: Τι μαθηματικά έχουμε όμως;

00:54:15 Νίκος: Ορθογώνια!]

- Δυσκολεύονται να εκφράσουν με μαθηματικό τρόπο τα ΟΣ και να ονοματίσουν τα σχήματα:

[00:54:16 Ομιλητής 1: Έχουμε 4 ίσα ορθογώνια. Εντάξει; Ωραία... Θα τα ονομάσουμε; θα τα δώσουμε ένα όνομα για να μπορούμε να συνεννοούμαστε;]

00:54:26 Φανή: Όχι.

00:54:27 Ομιλητής 1: Όχι; Πώς θα τα βρείτε; Πώς θα συνεννοούμαστε, να τα λέμε;

00:54:30 Σωτηρία: 1, 2....

00:54:30 Ομιλητής 1: Ωραία, ή Ορθογώνιο Α... ορθογώνιο Β... ορθογώνιο Γ και ορθογώνιο Δ. Και αυτά τι είναι μεταξύ τους;

00:54:38 Νίκος: Ίδια. Ίσα.]

- Δεν αποσυμπυκνώνουν το νόημα επιθετικών προσδιορισμών και ονομάτων:

00:54:39 Ομιλητής 1: Τι ίσα εννοεί;

00:54:42 Ανδρέας: Έχουν ίδιο μέγεθος.

00:54:43 Ομιλητής 1: Έχουν ίδιο μέγεθος. Τι ακριβώς ίδιο μπορεί να έχουν δηλαδή; Όταν λέμε μέγεθος.

00:54:49 Αφροδίτη: Ίδια περίμετρο.

00:54:50 Ομιλητής 1: Ίδια περίμετρο. Τι άλλο;

00:54:52 Αφροδίτη: Ίδιο εμβαδόν...

00:54:52 Ομιλητής 1: Ίδιο εμβαδόν... άλλο;

00:55:02 Αφροδίτη: Ίδια μέτρα...

00:54:57 Ομιλητής 1: Ίδια μέτρα... ίδιες δια...

00:55:04 Όλοι: ...στάσεις...]

- Δε θυμούνται το πλαίσιο του προβλήματος:

[00:58:37 Ομιλητής 1: Μπορώ να τις βρω τις διαστάσεις; Τι χρειάζομαι εδώ πέρα; Μμμ; Ιωάννη...

00:58:41 Ιωάννης: Μπορεί το κάθε τετράγωνο να έχει διαστάσεις 4μ.

00:58:57 Ομιλητής 1: Πώς το βρήκες, πώς θα βρούμε τι διαστάσεις μπορεί να έχει το κάθε παρτέρι; Αυτό δε ρωτάει; Τι χρειάζεται να ξέρουμε;

00:59:15 Ιωάννης: Κυρία, εγώ σκέφτηκα να κάνω 24 δια 4.

00:59:20 Ομιλητής 1: Ξανά να γυρίσουμε δηλαδή στο 6%;

.....

01:01:49 Ομιλητής 1: 15.000... πώς το βρήκες;

01:01:50 Κώστας: Το έκανα με το μυαλό... (σιωπή) Εεεε.... Επειδή έκανα 2 φορές...

01:02:00 Ομιλητής 1: Ποιο βγαίνει 15.000; Όλη αυτή η πράξη;

01:02:04 Κώστας: 15.000.

01:02:08 Ομιλητής 1: Είναι 6%...

01:02:09 Κώστας: Εμμμ....

01:02:12 Ομιλητής 1: Ποιο κάνει 15.000;

01:02:19 Κώστας: Το 6 φορές το 2.500.

01:02:21 Ομιλητής 1: Μπράβο! 6 φορές το 2.500. Εδώ πέρα όμως δεν έχω 6. Έχω 6%. Το 6 έτσι θα το γράψω;

01:02:24 Όλοι: Όχι.

01:02:25 Ομιλητής 1: 6;

01:02:25 Ιωάννης: 6 εκατοστά.

01:02:26 Ομιλητής 1: Άντε μπράβο! Μα, δε μου το είπατε... δεν είπαμε να τα γράψουμε με μαθηματικό τρόπο;

01:02:33 Ομιλητής 1: ΑΥΤΟ κάνει 15.000, Κώστα.]

- Δε θυμούνται το ζητούμενο της μαθηματικής διαδικασίας που ακολουθούν:

[01:02:45 Αργύρης: 150τ.μ.

01:02:49 Ομιλητής 1: Γιατί, Αργύρη; Τι είναι αυτό που βρήκαμε;

01:02:56 Ελένη: Η απάντηση.

01:02:57 Ομιλητής 1: Από τι πράγμα; Η απάντηση από τι; Τι είναι αυτό που βρήκαμε... με τα 150 τ.μ.;

01:02:57 Ελένη: Είναι το αποτέλεσμα από τις πράξεις... και η απάντηση στην ερώτηση από το 6... τις διαστάσεις...

01:03:11 Ομιλητής 1: Τι διαστάσεις... Αυτό τι εκφράζει εδώ πέρα, που γράψαμε... το 150 τ.μ.; (σιωπή) Είναι οι διαστάσεις;

01:03:21 Φανή: ΟΧΙ.

01:03:22 Ομιλητής 1: Τι είναι;

01:03:23 Κώστας: Είναι... το εμβαδόν..

01:03:25 Ομιλητής 1: Ποιανού;

01:03:27 Ιωάννης: Του... του ενός.]

- Δεν έχουν εξοικειωθεί με τον πολύ-σημειωτικό χαρακτήρα της μαθηματικής γλώσσας, καθώς δε σκέφτονται να συνδέουν από μόνοι τους το κείμενο με οπτικές αναπαραστάσεις. Επίσης, και σε αυτό το σημείο δε θυμούνται το πλαίσιο του προβλήματος. Οι ερωταποκρίσεις στην ολομέλεια βοηθούν στο να αρχίζουν να εντοπίζουν τα κατάλληλα γλωσσικά στοιχεία που υποδηλώνουν την παραπάνω ενέργεια και να λαμβάνουν ορθές αποφάσεις (εικ. 15) για τον τρόπο που θα σχεδιαστούν τα παρτέρια και για τις δυνατές επιλογές που έχουν.

[01:04:03 Ομιλητής 1: Ποιος μπορεί να 'ρθει να το σχεδιάσει; Είπαμε ότι τα σχήματα χρειάζονται. Για κοιτάζτε εδώ πέρα... «σχεδιάζω...». (ο εκπαιδευτικός δείχνει την αφίσα) (σιωπή) Τι μπορούμε να κάνουμε τώρα, Κατερίνα;

01:04:15 Κατερίνα: Τα παρτέρια της πλατείας.

01:04:21 Ομιλητής 1: Μπορούμε... χρειάζεται να κάνουμε όλα τα παρτέρια;

01:04:22 Όλοι: Όχι.

01:04:23 Ομιλητής 1: Γιατί;

01:04:26 Αφροδίτη: Γιατί ένα παρτέρι είναι ίδιο... σαν να είναι 4..

01:04:30 Ομιλητής 1: Είναι τα ίδια. Ακριβώς! Δεν χρειάζεται να τα κάνουμε όλα. Κάνουμε ένα. Το 'κανα σωστά ορθογώνιο ή τετράγωνο; (σιωπή) Ορθογώνιο ή τετράγωνο χρειάζεται;

01:04:39 Ελένη- Κατερίνα- Ιωάννης: Τετράγωνο.

01:04:39 Ελένη: Ορθογώνιο... Το παρτέρι είναι ορθογώνιο...

01:04:41 Ομιλητής 1: Δεν ξέρω... ΕΣΕΙΣ τι μου λέτε...

01:04:43 Ιωάννης: Το παρτέρι είναι ορθογώνιο.

01:04:45 Ομιλητής 1: Από μόνοι μας το βρήκαμε; Αυθαίρετα;

01:04:47 Ομιλητής Όλοι: Το λέει!

01:04:49 Ομιλητής 1: Το έχουμε πει ήδη! Γι' αυτό σας έλεγα πριν ότι κάθε φράση να την έχουμε στο μυαλό μας ότι είναι μαθηματικά...

01:05:00 Αφροδίτη: Κυρία, το λέει: «4 ΙΔΙΑ ΠΑΡΤΕΡΙΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ».

....

01:07:01 Αφροδίτη: 75 επί 2.

01:07:01 Ομιλητής 1: 75 επί 2. Γίνεται αυτό; (σιωπή) Μπορεί να μπει παρτέρι εδώ πέρα, 75 επί 2; [ο εκπαιδευτικός δείχνει τον χάρτη]

01:07:06 Όλοι: Όχι.

01:07:08 Κώστας: Α, όχι!

01:07:08 Ομιλητής 1: Πόσο κάνει 75 επί 2; (σιωπή) Γίνεται να το βάλουμε; Να κατασκευαστεί ένα τέτοιο παρτέρι, όμως;

01:07:15 Κώστας: Όχι, γιατί είναι τετράγωνο.]

- Δε θυμούνται το πλαίσιο που ορίζει την πλατεία και την τοποθέτηση των παρτεριών και συγχέουν τη σχέση των διαστάσεων με τη διαδικασία εύρεσης εμβαδού και περιμέτρου:

[01:08:11 Ομιλητής 1: Γιατί δεν μπορεί να μπει το παρτέρι 75 επί 2 στην πλατεία; Για σκεφτείτε λίγο...

01:08:21 Ελένη: Θα είναι τόσο [έδειξε με τα χέρια]... θα είναι πολύ μεγάλο.

01:08:22 Ομιλητής 1: Και τι πειράζει;

01:08:24 Ελένη: Γιατί θα είναι πολύ μακρύ και πολύ λεπτό.

01:08:26 Ομιλητής 1: Γιατί... και τι πειράζει; Δεν υπάρχουν τέτοια παρτέρια;

01:08:28 Ελένη: Υπάρχουν, αλλά αυτό δεν....

01:08:30 Ομιλητής 1: Αυτό γιατί δεν μπαίνει εδώ πέρα; Άλλος ειν' ο λόγος που δεν μπαίνει. (σιωπή) Κάτι δεν έχετε προσέξει σε αυτό που έγραφε; Υπάρχει και στο σχήμα. (σιωπή) Γιατί δεν μπαίνει το παρτέρι αυτό; Επειδή είναι πολύ μακρόστενο;;;]

01:08:54 Νίκος: Κυρία... το «κατά μήκος» μήπως...

01:08:56 Ομιλητής 1: Πού θα μπει; Κατά μήκος σε τι πλευρά;

01:08:59 Νίκος: Αα... Στην πλατεία!

01:09:00 Ομιλητής 1: Κατά μήκος της πλατείας. Την πλατεία τη λάβατε υπόψη; Την πλατεία; Τι διαστάσεις έχει;

01:09:19 Αντώνης: 200... 2.500 τ.μ.

01:09:23 Ομιλητής 1: Τι διαστάσεις έχει δηλαδή η πλατεία, αφού είναι+ 2.500 τ.μ.;

01:09:35 Ελένη: Κυρία! Δεν είναι ακριβώς ίδιες...

01:09:36 Ομιλητής 1: Είναι τετράγωνη... έλεγε... ΑΧ, δε τα προσέξατε! Αυτή η τετράγωνη πλατεία έχει εμβαδόν 2.500 τ.μ. Δηλαδή τι διαστάσεις έχει;

01:09:40 Νίκος: 625μ.

01:09:45 Ομιλητής 1: Είναι τετράγωνη η πλατεία.

01:09:47 Ιωάννης: 625... 625... 625... 625.

01:9:50 Ομιλητής 1: Τι λέτε, παιδιά! Ποιο είναι το εμβαδόν της πλατείας;

01:09:53 Νίκος: 625.

01:09:58 Ομιλητής 1: Πόσο είναι;

01:09:59 Ιωάννης: 625.

01:10:00 Ομιλητής 1: Τι λέτε! Πού το βρήκατε αυτό;

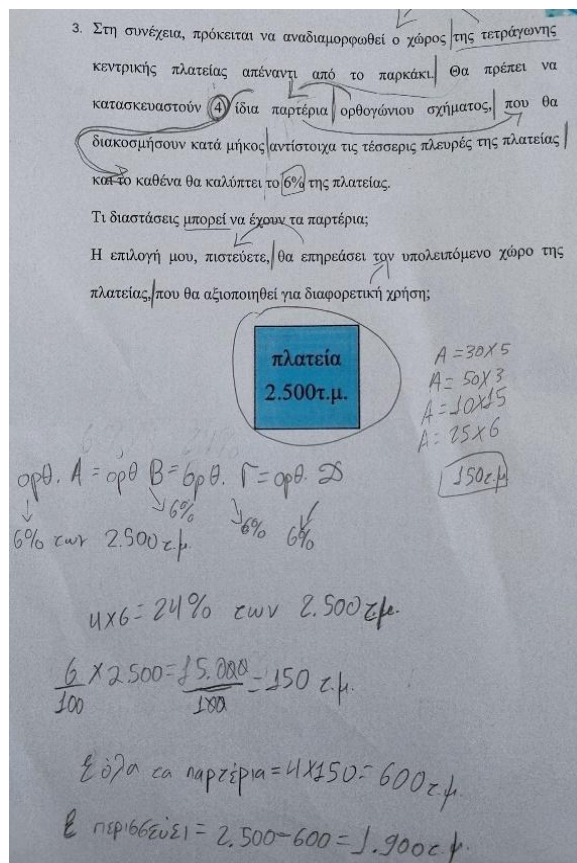
01:10:03 Ιωάννης: Η περίμετρος!

01:10:04 Ομιλητής 1: Ανέφερε τέτοιο πράγμα ο συγγραφέας;

01:10:07 Νίκος: 50;

01:10:08 Ομιλητής: Γιατί είναι 50 επί 50; Πώς το βρήκες;

01:10:14 Νίκος: Επειδή είναι τετράγωνο...]



Εικ. 15 Η ολοκληρωμένη επίλυση μαθητή

### 3ο Διδακτικό Επεισόδιο

Η δυσκολία στην ακολουθία των βημάτων ήταν εμφανώς μικρότερη, συγκριτικά με τα προηγούμενα διδακτικά επεισόδια. Βέβαια, λόγω της συνθετότητας του προβλήματος (πυκνό νόημα με πολλές μαθηματικές έννοιες) -το επισήμανε και η παρατηρήτρια- οι μαθητές, μολονότι αυτή τη φορά -στο 2<sup>ο</sup> στάδιο επίλυσης- κατέγραψαν τα γλωσσικά στοιχεία του κειμένου που πλαισίωναν το πρόβλημα, στη συνέχεια τα ξεχνούσαν και δυσκολεύονταν να αποδώσουν μαθηματικό νόημα σε αυτά, γεγονός που ανάγκαζε τον εκπαιδευτικό να τους ζητάει συχνά να ανατρέχουν αντίστοιχα στις κατάλληλες γλωσσικές επιλογές για τις οποίες είχαν ήδη μιλήσει. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο διάλογος που αναπτύχθηκε, όταν έπρεπε να προβούν στην εύρεση Ε, απόσπασμα του οποίου παρατίθεται παρακάτω.

[00:40:52 Ομιλητής 1: Το εμβαδόν λοιπόν, θα είναι, λέει, ίδιο με του ορθογωνίου. Το ξέρουμε;

00:41:06 Όλοι: Όχι... Ναι. (φασαρία)

00:41:07 Ομιλητής 1: Το ξέρουμε; Πού το ξέρουμε; Πού το γράψαμε; Γράψαμε κάπου «εμβαδόν ορθογωνίου παρτεριού ίσον τόσο»;

00:41:11 Αρκετοί: Όχι.

00:41:14 Ομιλητής 1: Μπορούμε να το βρούμε;

00:41:15 Γεωργία: Ναι...

00:41:15 Ανδρέας: Όχι...

00:41:17 Ομιλητής : Ναι; Ναι ή όχι; Ποιοι λένε «Ναι»; (Σηκώνουν χέρι λίγοι) Μμμ..... χαθήκατε... (σιωπή)  
Μας δίνει και μια ακόμη σημαντική πληροφορία, το 7... ότι έχει και ίδια επιφάνεια με το ορθογώνιο. Πού είναι το ορθογώνιο; Πού το 'χουμε κάνει; (δείχνουν το αντίστοιχο σχήμα)

00:41:27 Ομιλητής 1: Πάνω... «έχει ίδια επιφάνεια» λέει... «αν γίνει τετράγωνο, αν θα έχει ίδια επιφάνεια με αυτό». Την ξέρουμε την επιφάνεια, το εμβαδόν του;

00:41:40 Γεωργία: Ναι.

00:41:42 Ανδρέας: Όχι...

00:41:43 Ομιλητής 1: Πού το έχουμε γράψει; Έλα να μας δείξεις... Το γράψαμε κάπου «εμβαδόν ορθογωνίου ίσον τόσο»; Τι ξέραμε από το ορθογώνιο;

00:41:50 Ανδρέας: Ότι όλες οι πλευρές του γύρω γύρω....

00:41:51 Ομιλητής 1: Την περίμετρο ξέραμε! Πόση περίμετρο είχα;

.....

00:42:16 Ομιλητής 1: Πώς βρίσκουμε το εμβαδόν; Τι μαθηματικά ξέρουμε για αυτό; Είναι το βήμα αυτό που σας δυσκολεύει τώρα... βλέπετε τι γίνεται;

00:42:30 Ανδρέας: Το εμβαδόν το βρίσκουμε... εε... είναι τα τετραγωνάκια που έχει μέσα το τετράγωνο...

00:42:35 Ομιλητής 1: Τα τετραγωνάκια που έχει μέσα... Τώρα εδώ πέρα έχω τετραγωνάκια;

00:42:38 Γεωργία- Φανή: Όχι!

00:42:39 Ομιλητής 1: Θα τελειώσω ποτέ άμα αρχίσω και κάνω τετραγωνάκια;

00:42:40 Γεωργία: Όχι!

00:42:41 Ομιλητής 1: Θυμάστε τι μάθαμε στο πρώτο πρόβλημα; Με το πάρκο με το γκαζόν; Κάνουμε μαθηματικά...

00:42:43 Ανδρέας: Κάνουμε μια σειρά από πάνω και μια σειρά από κάτω...

00:42:46 Ομιλητής 1: Υπάρχει λόγος;

00:42:46 Φανή: Όχι!

00:42:47 Ομιλητής 1: Υπάρχει λόγος να κάνω σειρές από τετραγωνάκια οριζόντια και κάθετα για να σχηματιστούν σειρές και στήλες; Μάθαμε τον κανόνα που βρίσκουμε το εμβαδόν. Δε θα τελειώσουμε ποτέ έτσι!

00:42:58 Κώστας: Να πω;

00:43:00 Ομιλητής 1: Ναι.

00:43:01 Κώστας: Θα κάνουμε 2 φορές το 32...

00:43:04 Ανδρέας: Όχι!

00:43:05 Ομιλητής 1: Τι κάνουμε;

00:43:06 Κώστας: 2 επί 32.

00:43:07 Ομιλητής 1: Ναι ή όχι; (σιωπή) Εδώ πέρα (δείχνω στο σχήμα) αυτές τις πλευρές τις βρήκαμε πόσο είναι;

00:43:12 Όλοι: Ναι. Όχι. (φασαρία)

00:43:14 Ομιλητής 1: Τις μικρές... Δεν είστε συγκεντρωμένοι...

00:43:15 Ανδρέας: Όχι...

00:43:17 Ομιλητής 1: ΟΧΙ;

00:43:18 Όλοι: Ναιiiii...

00:43:20 Ομιλητής 1: Ποιος θα 'ρθει να δείξει πού το έχουμε βρει; Το έχουμε κάνει παιδιά αυτό... Είδατε ότι στο προηγούμενο βήμα, άμα δεν προσέχετε... πρέπει... αναγκάζομαστε και γυρνάμε στο πίσω βήμα τώρα... το 'χουμε βρει αυτό το πράγμα. Έλα να μας δείξεις.]

Το ίδιο συνέβη και στο 5<sup>ο</sup> βήμα, όπου δε θυμόντουσαν την ερώτηση του προβλήματος, συνεπώς δεν ήξεραν τι να απαντήσουν.

[01:01:00 Ομιλητής 1: Ωραία, θα απαντήσεις τώρα τελικά τι απαντάμε στο πρόβλημα;

01:01:05 Ανδρέας: Όχι. Δεν μπορεί να είναι τετράγωνο, επειδή το...

01:01:13 Ομιλητής 1: Αυτό ήταν η ερώτηση; Αν μπορεί να γίνει τετράγωνο;

01:01:17 Ανδρέας: Αν θα 'χει ίδια περίμετρο.

01:01:18 Ομιλητής 1: Ωραία. Θα απαντήσεις, λοιπόν, σωστά στο πρόβλημα;

01:01:25 Ανδρέας: Δεν έχει ίδια περίμετρο, επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο 64...

01:01:38 Ομιλητής 1: 64 είχε; Τι περίμετρο είχε;

01:00:42 Νίκος: 68.]

Παρόλη τη δυσκολία, ωστόσο, μέσα από τη συστηματική προσέγγιση των ονομάτων/εννοιών (τ.μ., μ., Ε, Π) και την προσπάθεια να ερμηνευτούν και να αποτυπωθούν στα σχήματα, αναδείχθηκαν λανθασμένες αντιλήψεις περί εμβαδού και περιμέτρου και αξιοποιήθηκαν λάθη που έγιναν.

Έτσι, οι μαθητές εμβάθυναν σε αυτές τις μαθηματικές έννοιες, καταφέροντας να επισημαίνουν τη λειτουργία των λέξεων/φράσεων, να κάνουν εύστοχες γραμματικές μεταφορές και να αποσυμπυκνώνουν ή να διωλίζουν λέξεις, συνδέοντας τις φράσεις μεταξύ τους και αριθμώντας τες πάνω στο κείμενο (2<sup>ο</sup> βήμα), καταγράφοντας από κάτω σημαντικά γλωσσικά στοιχεία (2<sup>ο</sup> βήμα), αναδεικνύοντας δίπλα στο καθένα το μαθηματικό περιεχόμενο (3<sup>ο</sup> βήμα) το οποίο τους οδηγεί στις αντίστοιχες μαθηματικές πράξεις (4<sup>ο</sup> βήμα).

Στους ακόλουθους διαλόγους και στις εικόνες 16 & 17 φαίνεται ο τρόπος που οι μαθητές κάνουν διάφορους γλωσσικούς ελιγμούς.

- Σύνδεση των «καθημερινών/οικείων» λέξεων και των «μαθηματικών»:

[00:17:45 Ομιλητής 1: Το γύρω γύρω... το λέμε... πώς το λέμε στα μαθηματικά;

00:17:47 Αγγελική: Περίμετρο.

.....

00:40:11 Ομιλητής 1: Τι Μαθηματικά είναι αυτό; Ίδια επιφάνεια με το ορθογώνιο; Πώς το γράφουμε αυτό με μαθηματικό τρόπο; Όταν λέει «ίδια επιφάνεια με το ορθογώνιο»... Το επόμενο βήμα, είπαμε, είναι μαθηματικά. Τι σημαίνει ίδια επιφάνεια;

00:40:26 Αγγελική: Επικάλυψη.

00:40:27 Ομιλητής 1: Επικάλυψη... πώς το λέμε στα μαθηματικά; (σιωπή)

00:40:35 Αγγελική: Εμβαδόν]

- Αποσυμπύκνωση και διύλιση λέξεων, όπως επικάλυψη/Εμβαδόν/πολλαπλασιασμός μήκους επί πλάτος, Περίμετρος/άθροισμα του μήκους των πλευρών, ορθογώνιο/οι απέναντι πλευρές ίσες, τετράγωνο/όλες οι πλευρές ίσες:

[00:18:17 Ομιλητής 1: Αυτό είναι η περίμετρος, το γύρω γύρω. Το 32μ... Τι είναι αυτό; Ποιο είναι 32μ.;

00:18:24 Φώτης: Η πλευρά.

00:18:29 Ομιλητής 1: Οποιαδήποτε πλευρά;

00:18:30 Φώτης: Η μεγάλη πλευρά.

00:18:34 Ομιλητής 1: Είναι η μεγάλη πλευρά. Γιατί λέει «μεγάλη»; Έχει νόημα; Αργύρη.

00:18:42 Αργύρης: Εεε.. ναι.

00:18:44 Ομιλητής 1: Γιατί; Γιατί έχει νόημα; Το «μεγάλη» εκεί, γιατί το έχει γράψει ο συγγραφέας; (σιωπή)  
Έτσι για να μεγαλώσει την πρόταση; Γιατί;

00:19:04 Κατερίνα: Γιατί... είναι σημαντικό!

00:19:08 Ομιλητής 1: Γιατί είναι σημαντικό; Αυτό λέμε... Το χρειαζόμαστε;

00:19:09 Κατερίνα: Ναι, για να λύσουμε το πρόβλημα.

00:19:10 Ομιλητής 1: Ε, ναι, για να λύσουμε το πρόβλημα. Είναι πολύ γενική απάντηση.

00:19:14 Αφροδίτη: Το χρειαζόμαστε, γιατί εδώ λέει «μεγάλη πλευρά». Θα μπορούσε η πλευρά να ήταν πολύ μικρή, αλλά, αντιθέτως, μας λέει ότι είναι μεγάλη, για να κάνουμε... για να βρούμε πιο εύκολα το πρόβλημα.

00:19:24 Φανή: Όχι! Μας λέει την μια, μας λέει τις 2 πλευρές, έτσι ώστε να ξέρουμε ποιες είναι οι άλλες 2, οι απέναντι.

.....

00:30:27 Ομιλητής 1: Όταν λέμε για ένα σχήμα ότι είναι ορθογώνιο παρτέρι, τι μαθηματικά ξέρουμε γι' αυτό; Πάμε στο επόμενο βήμα τώρα... Έλα, Νίκο. Είδατε πόση ώρα μείναμε σε αυτό το βήμα, ε; Στο δεύτερο...

00:30:44 Νίκος: Ότι έχει δύο ίσες πλευρές και δύο άλλες.

00:30:46 Ομιλητής 1: 2 ίσες πλευρές, ναι...

00:30:49 Νίκος: Και δύο μικρότερες.

.....

00:39:10 Ανδρέας: Αν το ΖΗΘΙ μπορεί να γίνει τετράγωνο.

00:39:12 Ομιλητής 1: Ωραία, τι μαθηματικά ξέρουμε για τα τετράγωνα;

00:39:16 Ανδρέας: Ότι έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες.]

- Επισήμανση του «και»/σύνδεση όμοιων στοιχείων:

[00:07:42 Αφροδίτη: Με περίμετρο 68μ.

00:07:46 Ομιλητής 1: Ναι... μήπως ταιριάζει μαζί με το άλλο; «Και με τη μεγάλη πλευρά 32μ.»; Να τοβάλουμε όλο μαζί;

00:07:50 Όλοι: Όοοχι.

00:07:56 Γεωργία: Όχι, γιατί, κυρία, είναι λίγο διαφορετικά... δηλαδή...

00:08:00 Ομιλητής 1: Το «και» συνδέει διαφορετικά πράγματα;

00:08:02 Γεωργία: Όχι, ίδια, αλλά...

00:08:02 Σωτηρία: Έχουν διαφορετικές πληροφορίες...

00:08:03 Γεωργία: Ναι.

00:08:03 Ομιλητής 1: Διαφορετικές πληροφορίες, ναι, αλλά μήπως δίνουνε παρόμοιες πληροφορίες για κάτι;

00:08:08 Γεωργία- Ανδρέας- Σωτηρία: Ναι.

.....

00:09:54 Ομιλητής 1: Για ποιο λόγο πρέπει να το χωρίσουμε εδώ πέρα; Δώστε μου ένα λόγο για να το χωρίσουμε.  
Γεωργία...

00:09:58 Γεωργία: Γιατί πρώτα λέει «αν το παρτέρι ΖΗΘΙ ήταν τετράγωνο» και μετά λέει μια ΑΛΛΗ πληροφορία, «ότι κάλυπτε την ίδια επιφάνεια...».

.....

00:10:18 Φανή: Ε... εάν το παρτέρι ΖΗΘΙ ήταν τετράγωνο, γραμμή, γιατί το «αν το παρτέρι ΖΗΘΙ» δε βγάζει νόημα να ήταν μόνο του.

.....

00:26:20 Ομιλητής 1: Ακούσατε τι είπε ο Κώστας; Συνδέει το «και» δύο ίδιες πληροφορίες.

00:26:26 Κώστας: Πως το τετράγωνο κάλυπτε την ίδια επιφάνεια... Με του ορθογωνίου.

00:26:36 Ομιλητής 1: Δίνει λοιπόν δύο ίδιες πληροφορίες για ποιο; Γεωργία;

00:26:55 Γεωργία: Για την περίμετρο.

.....

00:27:40 Ομιλητής 1: Τι συνδέει το «και»;

00:27:41 Κώστας: Συνδέει το «αν ήταν τετράγωνο» και «κάλυπτε την ίδια επιφάνεια».

00:27:43 Ομιλητής 1: Το τετράγωνο... το «τετράγωνο» και το «ίδια επιφάνεια με του ορθογωνίου». Αυτά τα δύο.]

- Επισήμανση του ρόλου του συνδετικού ρήματος «ήταν»:

[00:10:47 Γεωργία: Ε ναι και η κυρία λέει γιατί να το αφήσουμε μέχρι εκεί;

00:10:53 Ομιλητής 1: Απλά να ξέρετε ότι εδώ πέρα υπάρχει το ρήμα «ήταν», το οποίο τι ρήμα είναι;

00:10:56 Ιωάννης: Α! Συνδετικό!

00:11:03 Ομιλητής 1: Συνδετικό. Τα συνδετικά ρήματα τι κάνουν; Τι ρόλο έχουν μέσα σε μια πρόταση;

00:11:04 Νίκος: Τα συνδέουν.

00:11:05 Ομιλητής 1: Συνδέουν. Προτάσεις συνδέουν;

00:11:05 Αρκετοί μαθητές: Κυρία! Κυρία!

00:11:05 Ομιλητής 1: Όχι όλοι μαζί.

00:11:08 Νίκος: Δίνουν μια... δύναμη στην επόμενη λέξη.

00:11:11 Ομιλητής 1 : Δύναμη...όχι δεν την είχαμε πει έτσι... μία ι....

00:11:12 Όλοι: Ιδιότητα!

00:11:13 Αφροδίτη: Στο υποκείμενο.

.....

00:12:09 Ομιλητής 1: Πού είναι η ιδιότητα που δίνει στο παρτέρι; Ποια είναι η ιδιότητα; Κώστα...

00:12:21 Κώστας: Ήταν τετράγωνο.]

**Fig. 16 (Left):**

4. Έχω και ένα ορθογώνιο παρτέρι ΖΗΘΙ στην άκρη του πάρκου με περίμετρο 68μ. και με τη μεγάλη πλευρά 32μ. Αν το παρτέρι ΖΗΘΙ ήταν τετράγωνο και κάλυπτε την ίδια επιφάνεια με αυτή του ορθογώνιου, θα είχε και ίση περίμετρο με αυτό;

1) ορθ. παρτέρι ΖΗΘΙ  
2) που;  
3) βροχια - περιμετρο ΖΗΘΙ  
 $P = 68\mu / \text{μεγάλη πλευρά} = 32\mu$   
4) Αν ΖΗΘΙ = τετράγωνο  
5) ΔΡ η συν = ιδιότητα  
6) τετράγωνο → ορθογώνιο  
7) (και) ίδια επιφάνεια (ορθογώνιο)  
8) Αν κάλυπτε, αν είναι ίση η περίμετρο, μ, αυτό (ορθ)

1)  $32 \times 32 = 64$   
2)  $68 - 32 = 4 = \text{ε.ε.}$   
3)  $P = 68\mu$   
4)  $68 - 64 = 4\mu$   
5)  $P = 8 \times 4 = 32\mu$

**Fig. 17 (Right):**

4. Έχω και ένα ορθογώνιο παρτέρι ΖΗΘΙ στην άκρη του πάρκου με περίμετρο 68μ. και με τη μεγάλη πλευρά 32μ. Αν το παρτέρι ΖΗΘΙ ήταν τετράγωνο και κάλυπτε την ίδια επιφάνεια με αυτή του ορθογώνιου, θα είχε και ίση περίμετρο με αυτό;

1) ορθ. παρτέρι ΖΗΘΙ  
2) Που;  
3) Γεωμετρία - περιμετρο ΖΗΘΙ  
 $P = 68\mu$   
4) Αν ΖΗΘΙ = τετράγωνο  
5) ΔΡ η συν = ιδιότητα  
6) Τετράγωνο → ορθογώνιο  
7) (και) ίδια επιφάνεια (ορθογώνιο)  
8) Αν κάλυπτε, αν είναι ίση η περίμετρο, μ, αυτό (ορθ)

1)  $32 \times 32 = 64$   
2)  $68 - 32 = 4 = \text{ε.ε.}$   
3)  $P = 68\mu$   
4)  $68 - 64 = 4\mu$   
5)  $P = 8 \times 4 = 32\mu$

Εικ. 16 & 17 Γλωσσικοί ελιγμοί μαθητών

- Προσδιορισμός αντωνυμίας «αυτό»:

[00:30:05 Ομιλητής 1: Εδώ υπάρχει μια αντωνυμία... «με αυτό». Ποιο; Με ποιο, σε ποιο αναφέρεται το «αυτό»;

00:30:18 Αγγελική: Στο ορθογώνιο.]

- Αξιοποίηση οπτικών αναπαραστάσεων/σύνδεση σχημάτων και κειμένου (εικ. 18):

[00:19:37 Ομιλητής 1: Ωραία δίνει πληροφορίες για το πώς θα κάνουμε δηλαδή τι;

00:19:40 Φανή: Το σχήμα.]

- Διευκρίνιση της υποθετικής ερώτησης με το «αν» και τι σημαίνει η ύπαρξη αυτής ως μιας διαδικασίας που καλούμαι να ακολουθήσω/ έλεγχος μέσω δοκιμής:

[00:21:10 Ομιλητής 1: Το «αν»... Τι μας βάζει να κάνουμε; Μας... σαν να μας λέει «θα κάνετε αυτό το πράγμα.»

Να ακολουθήσουμε μια διαδικασία.

00:21:17 Φανή: Είναι μια υπόθεση.

00:21:18 Ομιλητής 1: Είναι μια υπόθεση. Ωραία. Και όταν έχουμε μια υπόθεση, τι έχουμε πει ότι κάνουμε;

00:21:39 Κώστας: Να βρούμε την απόδοση;

00:21:41 Ομιλητής 1: Να βρούμε την απόδοση... Υπάρχει απόδοση μέσα;

00:21:45 Φανή: Εεε... Όχι, εμείς πρέπει...

00:21:47 Ομιλητής 1: Δεν υπάρχει απόδοση στην υπόθεση; Εμείς πρέπει, αλλά κάτι υπάρχει εκεί πέρα. Μμ;

00:21:52 Κατερίνα: Να ελέγξουμε.

00:21:55 Ομιλητής 1: Ναι, μπράβο, πρέπει να το ελέγξουμε. Να δούμε αν αυτό που λέει ισχύει, δηλαδή.

.....

00:23:27 Ομιλητής 1: Ποια είναι η νέα του ιδιότητα λοιπόν;

00:23:44 Κώστας: Το τετράγωνο.

00:23:42 Ομιλητής 1: Το τετράγωνο. Δηλαδή;

00:23:45 Κώστας: Πως ΑΝ ήταν τετράγωνο...

00:23:47 Ομιλητής 1: Τι ακριβώς είναι αυτό που αλλάζει λοιπόν εδώ πέρα;

00:23:50 Φανή: Το σχήμα.

00:23:51 Ομιλητής 1: Το σχήμα λοιπόν. Αποκτά μια νέα ιδιότητα, αλλάζει σχήμα.

.....

00:28:22 Ομιλητής 1: Η τελευταία φρασούλα τι πληροφορία δίνει; Θα «είχε» λέει «και ίση περίμετρο με αυτό».  
(σιωπή)

00:28:32 Κώστας: Πως θα είχε την ίδια περίμετρο...

00:28:37 Ομιλητής 1: Εσύ τώρα το ξαναδιαβάζεις... θέλω να μας πεις, δηλαδή, τι θέση έχει εδώ πέρα αυτή η φράση, για ποιο λόγο υπάρχει. Είναι υπόθεση; Δίνει ιδιότητα... απαντάει στο πού... στο γιατί...;

00:28:52 Κώστας: Είναι ερώτηση.

00:28:53 Ομιλητής 1: Απαντάει στο πού... στο γιατί;

00:28:58 Κώστας: Είναι ερώτηση, αυτό που πρέπει να μάθουμε.

00:29:00 Ομιλητής 1: Είναι μέρος της ερώτησης. Είναι αυτό που πρέπει να μάθουμε, να ελέγξουμε.

.....

00:35:07 Ομιλητής 1: Τι πρέπει να ελέγξουμε τώρα; Αν το ΖΗΘΙ ήταν τετράγωνο. Τι έχουμε γράψει;

00:35:17 Αφροδίτη- Φώτης: Αλλαγή σχήματος...]

- Ανάδειξη μαθηματικού συλλογισμού/ απόδειξης:

[00:35:18 Ομιλητής 1: Να το αλλάξουμε (το σχήμα). Παιδιά, τι πρέπει να βρούμε και γιατί;

00:35:22 Φανή: Πώς... Τις άλλες πλευρές.

00:35:31 Ομιλητής 1: Πρέπει να τις βρούμε; Τις χρειαζόμαστε;

00:35:33 Φανή: Ναι.

00:35:34 Ομιλητής 1: Μπορούμε;

00:35:35 Φανή: Ναι.

00:35:37 Ομιλητής 1: Ωραία. Πώς θα το γράψουμε αυτό για να γράψετε στη δεύτερη στήλη σας, εκεί πέρα; Χρειάζονται οι πράξεις;

00:35:54 Φανή: Όχι.

00:35:55 Ομιλητής 1: Όχι;

00:35:56 Φανή: Είναι εύκολο, με το μυαλό μας.

00:35:58 Ομιλητής 1: Δεν έχει σημασία ότι είναι εύκολο, πρέπει να το αποδείξουμε.

00:36:00 Γεωργία: Οκ. Εντάξει.

00:36:02 Ομιλητής 1: Τα γράφουμε με μαθηματικά, είπαμε.

.....

00:36:17 Ομιλητής 1: Κατερίνα, πώς θα δείξουμε ότι πρέπει να βρούμε τις δύο μικρές (πλευρές) και πώς θα τις βρούμε;

00:36:21 Κατερίνα: Πρόσθεση το 32 με το 32 και θα μας βγει 64 και μετά θα βγάλουμε το 64 από το 68 και θα μας βγει 4 και θα το κάνουμε δια 2 για να μας βγει...

00:36:31 Ομιλητής 1: Για ποιο λόγο;

00:36:32 Κατερίνα: Για να βρούμε πόσο είναι η μία και πόσο είναι η άλλη.

00:36:37 Ομιλητής 1: Γιατί να το κάνουμε δια 2;

00:36:41 Κατερίνα: Για να βρούμε πόσο είναι η μία πλευρά και πόσο είναι και η άλλη.

00:36:43 Ομιλητής 1: Γιατί να κάνουμε δια 2, όμως; (σιωπή) Και να μην κάνουμε δια 3...;

00:36:52 Κατερίνα: Α! Γιατί είναι δύο ίσες πλευρές.

.....

00:57:57 Κώστας: Επειδή 8 επί 8 κάνει 64.

00:57:58 Ομιλητής 1: Γιατί κάνεις 8 επί 8;

00:58:00 Κώστας: Επειδή δεν υπάρχει άλλος αριθμός που να βγάζει 64.

00:58:07 Ομιλητής 1: Γιατί έχεις βάλει τον ίδιο αριθμό;

00:58:09 Κώστας: Επειδή η κάθε πλευρά του τετραγώνου είναι ίση.]

9) Πρόβλημα

- 1) Ορθ. παρότρ. ΖΗΘΙ
- 2) Που
- 3) Στοιχεία-περιγραφή ΖΗΘΙ  $\left\{ \begin{array}{l} \pi = 68 \mu. \\ \mu\gamma\alpha\lambda. \eta\lambda\epsilon\upsilon\sigma\eta = 32 \mu. \end{array} \right.$
- 4) Αν ΖΗΘΙ  $\rightarrow$  ολίσκος
- 5)  $\angle P$  ήταν  $\rightarrow$  ιδιότητα
- 6) Στοιχεία  $\rightarrow$  αλλαγή σχήματος
- 7) και ίδια επιφάνεια με του ορθ.
- 8) Να βρούμε αν έχει και ίση περίμετρο με αυτό

2 σχήματα

① Θήμα

8  $\epsilon = 64 \tau\mu.$  8

32  $\epsilon = 64 \tau\mu.$  2

- 1)  $32 + 32 = 64$
- 2)  $68 - 64 = 4$
- 3)  $4 : 2 = 2 \mu.$  το μήκος των 2 και 1  $\theta$  ολίσκος  $\mu\gamma\alpha\lambda. \eta\lambda\epsilon\upsilon\sigma\eta$
- 4)  $32 \times 2 = 64 \epsilon\mu.$
- 5) Στοιχεία πρέπει να έχουν 64  $\epsilon$
- 6)  $8 \times 8 = 64 \mu\alpha\theta$
- 7)  $\pi = 8 \times 4 = 32 \mu.$  Αρα δεν έχουν ίδια περίμ.

Το θετικό, δηλαδή, ήταν ότι αναδείχθηκαν αρκετά μοτίβα της θεωρίας, γεγονός που θα οδηγήσει, στη συνέχεια, σε μεγαλύτερη εξοικείωση με αυτή την προσέγγιση του κειμένου (εικ. 18). Επίσης, τα παιδιά μέσα από το συγκεκριμένο τύπο προβλήματος, ο οποίος περιελάμβανε έλεγχο υπόθεσης, πήραν ένα πρώτο ερέθισμα της μεθόδου επίλυσής του και της σχέσης ανάμεσα στις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου.

[01:02:52 Ομιλητής 1: Τι ήταν αυτά τα 2 σχήματα για τα οποία μιλούσε το πρόβλημα; Τι χαρακτηριστικά είχαν;

01:02:58 Φανή: Ότι είχαν ίδιο εμβαδόν, αλλά ήταν διαφορετικά.

01:03:01 Ομιλητής 1: Διαφορετικό σχήμα και τελικά είχαν;

01:03:05 Φανή: Διαφορετική περίμετρο και ίδιο εμβαδόν.

01:03:07 Ομιλητής 1: Δεν σημαίνει λοιπόν ότι, επειδή έχουν ίδιο εμβαδόν, θα έχουν απαραίτητα και ίση...

01:03:09 Φανή: Περίμετρο...]

Εικ. 18 Γλωσσικοί ελιγμοί μαθητή

Στα επόμενα προβλήματα που θα κληθούν να επιλύσουν, θα αξιοποιηθούν οι γνώσεις που αποκόμισαν και τα συμπεράσματα που διατύπωσαν και θα δοθεί μια ευκαιρία να εμβαθύνουν περισσότερο στις εν λόγω μαθηματικές έννοιες.

4<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο

Γενικά, οι μαθητές κινήθηκαν με ευκολία από βήμα σε βήμα και δε χρειαζόταν να υπενθυμίζει ο εκπαιδευτικός τι χρειάζεται να κάνουν σε καθένα. Στο 1<sup>ο</sup>, για παράδειγμα θυμήθηκαν αμέσως ότι έπρεπε να αναζητήσουν μία πιθανή ευθεία ερώτηση στο κείμενο για να προσδιοριστεί το ζητούμενο.

[00:00:47 Ομιλητής 1: Πώς θα προχωρήσουμε στο πρώτο βήμα;

00:00:56 Αθανασία: Να δούμε την ερώτηση, τι ζητάει το πρόβλημα.

00:01:03 Ομιλητής 1: Το πρόβλημα, είπες, ωραία. Μπορείς να μας διαβάσεις, λοιπόν, ακριβώς εκεί που είναι η ερώτηση;

00:01:04 Ζωή: Ναι. «Σε πόσα διαφορετικά ορθογώνια παρτέρια μπορεί να φυτευτεί αυτό;».]

Ιδιαίτερης σημασίας είναι το γεγονός ότι οι μαθητές κατά την προσέγγιση των κειμένων αντιλήφθηκαν τον ρόλο του κάθε βήματος προκειμένου να επιλύσουν ένα πρόβλημα.

[00:04:06 Ομιλητής 1: Μπορεί να είναι παραπάνω από μία οι απαντήσεις. Έχουμε συναντήσει ξανά τέτοιο πρόβλημα; Μμμ. Αυτό σημαίνει ομαδοποιώ... σαν να προσπαθώ, δηλαδή το πρόβλημα, αυτό που συναντώ τώρα, να με κάνει να θυμηθώ άλλη παρόμοια περίπτωση. Ένα πρόβλημα που να ανήκει στην ίδια ομάδα. Σας θυμίζω το πρώτο μάθημα που κάναμε, που άρχισα να κάνω την έρευνά μου, που σας είχα βάλει να κάνετε ΤΙ τα προβλήματα; Θυμάστε; Σας είχα βάλει να τα λύσετε;

00:04:32 Φανή: Όχι, να βρούμε τα κοινά.

00:04:34 Ομιλητής 1: Αααα, μπράβο... να κάνετε ομαδοποίηση. Άρα και αυτό, αυτό το πράγμα είναι στην ουσία το πρώτο βήμα, σαν να προσπαθώ να κάνω ομαδοποίηση τα προβλήματα, να δω ΑΥΤΟ μου θυμίζει κάποιο άλλο; Έχουμε συναντήσει κάποιο πρόβλημα που να το 'χουμε... να είναι παρόμοιο με αυτό; Να έχει πολλές απαντήσεις, δηλαδή;

00:04:52 Γεωργία: Ναι!

00:04:52 Ομιλητής 1: Έτσι... ποιο; Θυμάστε κάποιο; Έτσι, πολύ γενικά...

00:04:53 Φανή: Ναι.

00:04:55 Γεωργία: Ναι, με μια, νομίζω, αθλήτρια... Μια που είχαμε στο βιβλίο... που είχε...

00:04:52 Φανή: Να το πω εγώ, το θυμάμαι. Εεε.. το έχω ξαναπεί. Ήταν μια αθλήτρια και έλεγε πόσο ψηλά μπορεί να πήδηξε και ήταν ανάμεσα σε 2 αριθμούς.

00:05:06 Ομιλητής 1: Σε 2 δεκαδικούς αριθμούς. Ναι, και ήταν πολλές οι απαντήσεις.

00:05:10 Φανή: Ναι, ήταν 7,2...]

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ανέφεραν ότι οι αναμενόμενες απαντήσεις ήταν πολλές και αφορούσαν στον αριθμό των ορθογωνίων, εστιάζοντας στην ερωτηματική αντωνυμία «πόσα».

[00:03:13 Ομιλητής 1: Για ποιο λόγο ψάχνουμε να βρούμε μια ερώτηση;

00:03:14 Σωτηρία: Για να απαντήσουμε.

00:03:14 Ομιλητής 1: Για να απαντήσουμε. Άρα αρχίζουμε και προετοιμαζόμαστε. Και τι σκεφτόμαστε;

00:03:20 Φανή: Για να αποδείξουμε αυτό που θα βρούμε στο τέλος.

0:03:25 Ομιλητής 1: Αυτό θα το αποδείξουμε. Φυσικά, ναι. Αλλά δεν πρέπει να πούμε πόσες είναι οι απαντήσεις, να κάνουμε μια πρόβλεψη; Πόσες είναι οι απαντήσεις;

00:03:31 Γεωργία: Αν είναι μία, αν είναι πολλές...

00:03:36 Ομιλητής 1: Ωραία, αν είναι λέξη, αν είναι αριθμός...

00:03:37 Γεωργία: Ναι... Ωραία.

00:03:40 Ομιλητής 1: Ζωή;

00:03:41 Ζωή: Είναι μία.

00:03:42 Ομιλητής 1: Είναι μία. Συμφωνείτε όλοι;

00:03:44 Λίγοι μαθητές: Ναι.

00:03:45 Ομιλητής 1: Σε πόσα διαφορετικά ορθογώνια παρτέρια μπορεί να φυτευτεί αυτός;

00:03:47 Ελένη: Όχι, κυρία... Βασικά κυρία...

00:03:49 Ομιλητής 1: Μήπως λίγο βιαστήκατε;

00:03:50 Γεωργία: Μπορεί να έχει και περισσότερες γιατί... μπορεί...

00:03:52 Ομιλητής 1: Πού το καταλαβαίνουμε ότι μπορεί να είναι περισσότερες από μία;

00:03:54 Γεωργία: Γιατί ρωτάει σε ΠΟΣΑ διαφορετικά μπορούν να φυτευτεί αυτό. Οπότε μπορεί... μπορεί να... να λέει ότι έχουμε... μπορεί να είναι 2 μικρά, αλλά...

.....

00:05:40 Αφροδίτη: Λέει ΠΟΣΑ διαφορετικά ορθογώνια παρτέρια...

00:05:52 Γεωργία: Βάζεις αριθμό, γιατί λέει «ΠΟΣΑ»!]

Τα δύο υποερωτήματα του προβλήματος δεν τα έδωσαν σημασία στο πρώτο στάδιο και για αυτό, κατά τη γλωσσική ανάλυση του 2<sup>ου</sup> βήματος, τονίστηκε η σημασία τους για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος μέσω μιας αναμενόμενης πρόβλεψης του «τι είναι αυτό που ψάχνω». Έγινε συζήτηση γύρω από τα συστατικά της πρότασης (ερωτηματική αντωνυμία «τι») προσπαθώντας να τους αποδοθεί νόημα.

[00:29:12 Ομιλητής 1: Το «τι» σημαίνει κάποιο πράγμα. Ξέρουμε ποιο;

00:29:14 Αγγελική: Το παρτέρι;

00:29:16 Ομιλητής 1: Ξέρουμε ποιο αλλάζει;

00:29:18 Νίκος: Ναι.

00:29:22 Ομιλητής 1: Πού το ξέρουμε; Άμα το ξέραμε θα το ρωτούσε; Μας λέει τι θα αλλάξει;

00:29:24 Νίκος: Το λέει.

00:29:28 Ομιλητής 1: Θα αλλάξει ποιο; Το σχήμα εννοείς;

00:29:29 Νίκος: Ναι.

00:29:30 Ομιλητής 1: Ααα... Αλλά ακριβώς τι είναι αυτό που θα αλλάξει δεν το ξέρουμε...

00:29:32 Αγγελική: Όχι!

00:29:33 Ομιλητής 1: Μμμ... Τι παραμένει ίδιο; Καταρχήν, θέλω στην ερώτηση «τι αλλάζει», να γράψετε «κάτι» δίπλα.

00:29:37 Αγγελική: Παραμένει ίδιο το ότι είναι ορθογώνιο.

00:29:43 Ομιλητής 1: Στο τι αλλάζει, δηλαδή εδώ πέρα, θα μπορούσαμε να βάλουμε ότι, «7», κάτι... κάτι αλλάζει. Ξέρουμε τι;

00:29:46 Νίκος: Όχι.

.....

00:30:10 Ομιλητής 1: Ναι και έχει και άλλη ερώτηση.

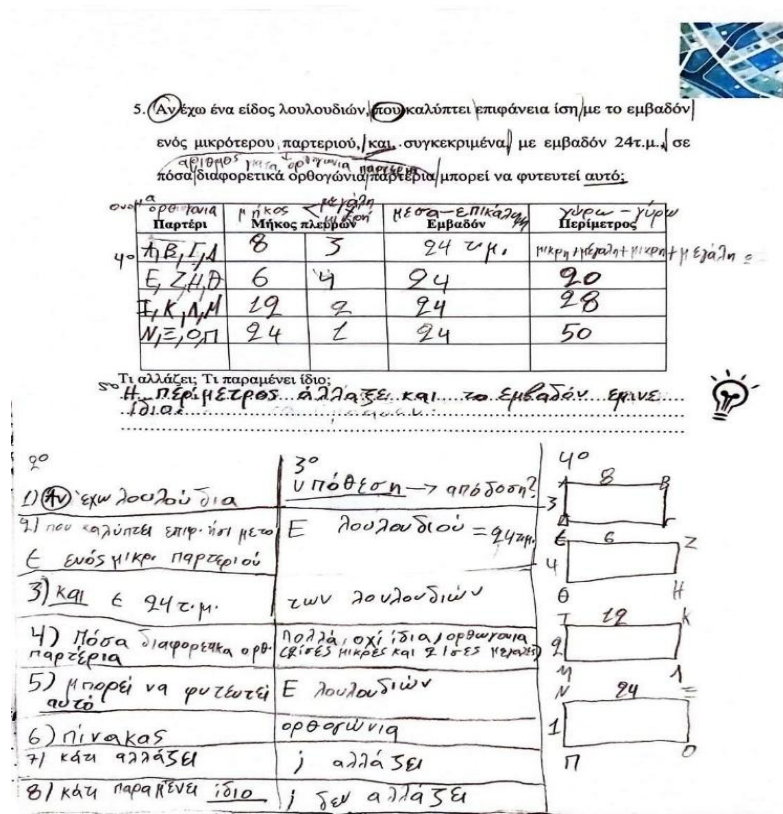
00:30:20 Νίκος: Τι παραμένει ίδιο... το σχήμα.

00:30:23 Ομιλητής 1: Δεν ξέρουμε τι... άμα το ξέραμε, δεν θα το ρωτούσαμε. (σιωπή) Τι σημαίνει «Τι παραμένει ίδιο»;

00:30:31 Νίκος: Δεν αλλάζει.]

Στην εικόνα 19 φαίνεται ο τρόπος που οι μαθητές κατέγραψαν σημαντικά στοιχεία με γλωσσικό και μαθηματικό τρόπο κατά την προσέγγιση του προβλήματος. Αρχικά, χώρισαν το κείμενο σε κομμάτια και υπογράμμισαν σημαντικές λέξεις που έπαιζαν ρόλο στην κατανόηση του πλαισίου του κειμένου. Κατόπιν, στην πρώτη στήλη σημείωσαν λέξεις και φράσεις με νόημα, στη δεύτερη τις συνέδεσαν με αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες και στην τρίτη σχεδίασαν βοηθητικά σχήματα ονοματίζοντάς τα, για να συμπληρώσουν τα δεδομένα του πίνακα.

Πιο συγκεκριμένα, στο 2<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> στάδιο εντόπισαν με μεγαλύτερη ευκολία σημαντικά γλωσσικά στοιχεία (πχ.: την αντωνυμία «που» και «αυτό», τον σύνδεσμο «και», τον επιθετικό προσδιορισμό «διαφορετικά»), τα οποία συνέδεσαν μεταξύ τους εξηγώντας τη λειτουργία τους στο κείμενο και προσπάθησαν να αποσυμπυκνώσουν το νόημα μαθηματικών λέξεων (πχ.: «ορθογώνια») ή αντίστροφα, να το διυλίσουν (πχ.: «να φυτευτεί»), το οποίο θα τους οδηγούσε στη συνέχεια σε συγκεκριμένη μαθηματική ενέργεια (σχεδιασμό ορθογωνίων λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του συγκεκριμένου τετραπλεύρου και εύρεση του Ε).



5. (Αν έχω ένα είδος λουλουδιών, που καλύπτει επιφάνεια ίση με το εμβαδόν) ενός μικρότερου παρτεριού, και... συγκεκριμένα) με εμβαδόν 24τ.μ. σε πόσα διαφορετικά ορθογώνια παρτέρια μπορεί να φυτευτεί αυτό;

| Παράτη     | Μήκος πλευρών | Μέσα-Επικαρπύ | Υψος-Περίμετρος |
|------------|---------------|---------------|-----------------|
| Α, Β, Γ, Δ | 8             | 3             | 24 τ.μ.         |
| Ε, Ζ, Η, Θ | 6             | 4             | 24              |
| Ι, Κ, Λ, Μ | 12            | 2             | 24              |
| Ν, Ξ, Ο, Π | 24            | 1             | 24              |

Τι αλλάζει; Τι παραμένει ίδιο;  
Η... περίμετρος... αλλάζει και... το εμβαδόν... έγινε...

2<sup>ο</sup> 3<sup>ο</sup> 4<sup>ο</sup>

1) (Αν) έχω λουλούδια... Ε λουλουδιού = 24τμ.  
2) που καλύπτει επιφάνεια με το... των λουλουδιών  
3) και Ε 24τ.μ.  
4) Πόσα διαφορετικά ορθογώνια παρτέρια... Πολλά, όχι ίδια ορθογώνια, (κις) μικρά και (κις) μεγάλα  
5) Μπορεί να φυτευτεί Ε λουλουδιών  
6) Πίνακας ορθογώνια  
7) κάτι αλλάζει; ; αλλάζει  
8) κάτι παραμένει ίδιο; ; δεν αλλάζει

Εικ. 19 Γλωσσικοί ελιγμοί μαθητή

[00:08:40 Ελένη: «Καλύπτει επιφάνεια ίση με το εμβαδόν».... ΑΥΤΑ τα λουλούδια καλύπτουν μια επιφάνεια...

00:08:42 Ομιλητής 1: Πώς καταλαβαίνουμε ότι αναφέρεται στα λουλούδια; Από ποια λεξούλα;

00:08:48 Ελένη: «Που».

00:08:50 Ομιλητής 1: Το «πού»... ωραία... για να το κυκλώσετε, να το θυμόμαστε. Αυτό το «πού», λοιπόν, βοηθάει στο να προσδιορίσει τα λουλούδια.

00:09:00 Νίκος: Είναι αναφορικό.

.....

00:11:36 Ομιλητής 1: Το «αυτό» είναι σημαντικό;

00:11:38 Φανή- Γεωργία: Όχι.

00:11:39 Γεωργία: Ε, ναι!

00:11:41 Ομιλητής 1: Γιατί; Τι είναι το «αυτό»; Τι λέξη είναι;

00:11:44 Νίκος: Δείχνει... κάποιο συγκεκριμένο...

00:11:47 Ομιλητής 1: Αναφέρεται σε κάποιο συγκεκριμένο τι;

00:11:51 Νίκος: Ορθογώνιο.

00:11:52 Ομιλητής 1: Σε κάποιο ορθογώνιο. Το «αυτό» είναι μια...; Πώς τη λένε;

00:11:58 Γεωργία: Δείχνει «ποιον»; Το λουλούδι.

00:12:00 Ομιλητής 1: Γιατί χρησιμοποιούμε τη λέξη «αυτό»; Θα μπορούσε να έχει...

00:12:03 Φανή: Για να καταλάβουμε... να μην πούμε τα λουλούδια, να πούμε τα ορθογώνια.

00:12:05 Ομιλητής 1: Αναφέρεται, λοιπόν, σε κάποια λέξη. Πώς τη λέμε αυτή τη λέξη που αναφέρεται σε κάτι άλλο για να μην επαναλαμβάνουμε την ίδια; Για να μην επαναλαμβάνουμε το ίδιο όνομα και χρησιμοποιείται αντί για το όνομα;

00:12:09 Νίκος: Αντωνυμία.

.....

00:21:37 Αγγελική: Για να μη λέμε πολλές φορές την ίδια λέξη.

00:21:43 Ομιλητής 1: Μπράβο! Άρα, λοιπόν, Κατερίνα, για αυτό το έχουμε ξαναπεί, απλά, αντί να πει «λουλούδια» χρησιμοποιεί τη λέξη...;

00:21:45 Κατερίνα: «Αυτό».

00:22:00 Ομιλητής 1: «Αυτό». Είναι διαφορετική πληροφορία αυτή με την πάνω;

00:22:05 Όλοι: Όχι.

00:22:09 Ομιλητής 1: Δεν πρέπει να το γράψουμε όμως;

00:22:14 Αργύρης: Ναι. Γιατί ξέρουμε για ποιο πράγμα μιλάει.

00:22:15 Ομιλητής 1: Μιλάει. Ρωτάει, ψάχνουμε. Αυτό που ψάχνουμε, δηλαδή. Έχουμε μια εικόνα αυτού. Κάτι ξέρουμε. Τι είχαμε γράψει πριν για αυτό; (σιωπή)

00:22:28 Ομιλητής Γεωργία: Α, κυρία ξέρω! Να πω; Ότι είναι 24 τ.μ. το εμβαδόν!

.....

00:15:03 Ομιλητής 1: «Και εμβαδόν 24 τ.μ.» Τι μαθηματικά έχει εδώ; Τι γλωσσο- μαθηματικά θα λέγαμε...

00:15:13 Αγγελική: Ότι... λέει ότι έχει εμβαδόν 24 τ.μ.

00:15:19 Ομιλητής 1: Ποιο;

00:14:23 Αγγελική: Τα λουλούδια.

00:15:25 Ομιλητής 1: Τα λουλούδια. Πώς το καταλάβαμε ότι εννοεί τα λουλούδια; Ποια επιλογή έχει βάλει εδώ συγγραφέας και μας βοηθά να το καταλάβουμε; Το έχουμε ξανασυναντήσει ΚΑΙ αυτό. Πολύ συχνό όταν γράφουμε... Να μας πει ο Ανδρέας! Υπάρχει μια λέξη που...

00:15:32 Ανδρέας: Το «που». Όχι το «και»!

00:15:34 Ομιλητής 1: Δεν υπάρχει στο 3 το «που». Το «και», μπράβο! Τι κάνει το «και»; Θυμάστε τι είχαμε πει;

00:15:37 Ανδρέας: Ναι, συνδέει δύο προτάσεις.

00:15:40 Ομιλητής 1: Δύο.... Όχι απαραίτητα προτάσεις. Δύο φράσεις που είναι...

00:15:46 Ανδρέας: Συνώνυμες.

00:15:48 Ομιλητής 1: Όχι συνώνυμες...

00:15:49 Γεωργία: Ίδιες.

.....

00:18:35 Ομιλητής 1: Τι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας δηλαδή; Τι σημαίνει ορθογώνια;

00:18:40 Αγγελική: Ότι τα σχήματα θα είναι από άλλο... Δε θα είναι τετράγωνο ή κύκλος.

00:18:43 Ομιλητής 1: Έτσι, μπράβο. Σύμφωνοι;

00:18:44 Όλοι: Ναι.

00:18:45 Ομιλητής 1: Υπάρχουν άλλα σχήματα σε παρτέρια; Ε;

00:18:48 Όλοι: Ναι.

00:18:50 Ομιλητής 1: Αυτό, λοιπόν, είναι το πλαίσιο. Μας περιορίζει και μας λέει ότι πρέπει να τα κάνουμε;

00:18:57 Αναστασία: Διαφορετικά!

00:18:58 Ομιλητής 1: Διαφορετικά, τι όμως;

00:19:00 Ανδρέας: Ορθογώνια.

00:19:01 Ομιλητής 1: Ορθογώνια. Δεν θα ξεχαστούμε... Να το γράψω ή να το αφήσω;

00:19:05 Γεωργία: Όχι! Γράψτε το! Γράψτε...

00:19:10 Νίκος: Το «ορθογώνια» δείχνει και άλλα μαθηματικά, επειδή έχει δύο μικρές ίσες πλευρές και δύο μεγάλες.

00:19:20 Ομιλητής 1: Συμφωνούμε;

00:19:25 Όλοι: Ναι, όχι... (φασαρία)

00:19:30 Νίκος: Έχει 2 ίσες πλευρές μικρές και 2 άλλες ίσες.

00:19:38 Ομιλητής 1: Έχει νόημα;

00:19:39 Ανδρέας: Όχι... ναι... (φασαρία)

00:19:41 Ομιλητής 1: Να μην το βάλω;

00:19:42 Όλοι: Όχι!

00:19:45 Ομιλητής 1: Το ξέρετε τόσο καλά που το θυμάστε;

00:19:46 Όλοι: Ναι.

00:19:46 Ομιλητής 1: Πότε θα μπορούσε να μας βοηθήσει αυτό;

00:19:53 Νίκος: Όταν θα κάνουμε... για να... το σχήμα!

.....

00:20:35 Ομιλητής 1: Τι εννοεί «μπορεί να φυτευτεί»; Αυτό σας ρωτάω. Τι διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε εδώ πέρα για να το δούμε αν μπορεί να φυτευτεί;

00:20: 44 Αγγελική: Λέει, ότι μπορεί να φυτευτεί, δηλαδή θα μπορέσει να φυτευτεί, δεν είναι... όλο θα χωράει.

00:20:46 Ομιλητής 1: Θα χωράει, άρα τι πρέπει να έχει για να χωράει αυτό και είχαμε πει ΠΟΙΟ αυτό. Να το γράψουμε.

00:20:52 Φανή: Το εμβαδόν.

00:20:53 Ομιλητής 1: Μπράβο! Όταν φυτεύω κάτι, καλύπτω;

00:20:56 Αγγελική- Φανή: Μια επιφάνεια.]

Επίσης, κατά τη σύνδεση των στοιχείων που είχαν καταγράψει με τις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες, επισημάνθηκε η παράλειψη της αναφοράς τους στον σύνδεσμο «αν», καθώς αυτό υποδηλώνει ότι επρόκειτο να ακολουθήσουν μία συγκεκριμένη διαδικασία, δηλαδή πως θα χρειαζόταν να εξετάσουν μία αρχική υπόθεση («Αν...»). Οι μαθητές στην πρώτη φάση θα μπορούσαν να παραλληλίσουν το πρόβλημα αυτό με εκείνο του προηγούμενου διδακτικού επεισοδίου, βρίσκοντας τη συγκεκριμένη ομοιότητα, πράγμα που συνέβη στην πορεία μέσα από τον διάλογο.

[00:12:19 Ομιλητής 1: Μπορώ να το χρησιμοποιήσω αυτό με μαθηματικό τρόπο; «ΑΝ έχω λουλούδια» και μάλιστα αυτό το «αν» εδώ πέρα το παραλείψαμε να του δώσουμε σημασία. Να κάτι που έγραψε ο συγγραφέας και δεν του δώσαμε σημασία. Το έχουμε ξανασυναντήσει κάπου;

00:12:31 Νίκος: Ναι.

00:12:32 Ομιλητής 1: Μπορούσαμε να το βάλουμε στο πρώτο βήμα, εκεί που προσπαθούμε να ομαδοποιήσουμε προβλήματα.

00:12:45 Όλοι: Ναι...

00:12:45 Ομιλητής 1: Ναι... για να δούμε ποιος θυμάται; Για ποιο λόγο υπάρχει αυτό, τι είναι αυτό, τι Μαθηματικά ξέρω;

00:12:45 Νίκος: Δείχνει μια υπόθεση...

00:12:50 Ομιλητής 1: Ναι...

00:12:51 Νίκος: Για να... και να...

00:12:52 Ομιλητής 1: Και τι μας βάζει να κάνουμε αυτή η υπόθεση, λοιπόν, αφού υπάρχει αυτή η υπόθεση;

00:12:55 Νίκος: Να σκεφτούμε Άμα ισχύει αυτό....

00:12:57 Αργύρης- Φανή: Να βρούμε την απόδοση...

00:13:03 Ομιλητής 1: Να βρούμε την απόδοση... Την απόδοση την ξέρουμε; Την έχει;

00:13:06 Φανή: Όχι, εμείς πρέπει να τη βρούμε.

00:13:07 Ομιλητής 1: Εμείς πρέπει. Είναι η ερώτηση στην ουσία. «ΑΝ έχω αυτό, σε πόσα...», εντάξει; Ωραία. Θέλετε να το γράψουμε εδώ πέρα στα μαθηματικά; Είναι πολύ σημαντικό.

.....

00:17:27 Ελένη: Εννοεί πόσα... πόσους τρόπους υπάρχουν με τα είκοσι τέσσερα να φτιάξουμε ένα παρτέρι; ΠΟΣΑ διαφορετικά παρτέρια θα φτιάξουμε;

00:17:30 Ομιλητής 1: Ακριβώς! Πώς το κατάλαβες αυτό; Αυτή η φράση δεν δείχνει ακριβώς;

00:17:29 Αγγελική: Ναι... πόσα διαφορετικά.

00:17:32 Ομιλητής 1: Σας κάνει εντύπωση;

00:16:34 Φανή: Από το «διαφορετικά» καταλάβαμε ότι έχει πολλούς τρόπους.]

Αυτό που χρειάστηκε να σχολιαστεί και να αναδειχθεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος, ήταν η δυσκολία που συνάντησαν στο 4<sup>ο</sup> στάδιο, όταν χρειάστηκε να συμπληρώσουν τα μήκη των πλευρών των ορθογωνίων. Δυσκολεύτηκαν, διότι στο 2<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> στάδιο δε «διάβασαν» τον πίνακα, δεν έκαναν τις απαραίτητες γλωσσικές μεταφορές των ονομάτων/ονοματικών συνόλων, παρά μόνο μία σύντομη αναφορά της ύπαρξής του πίνακα.

[00:23:12 Ομιλητής 1: Στο δεύτερο... τι άλλο κάνουμε στο δεύτερο;

00:23:15 Γεωργία: Χωρίζω σε φράσεις... διαβάζω τα σχήματααα...

00:23:18 Ομιλητής 1: Υπήρχαν σχήματα;

00:23:15 Γεωργία: Ναι. Όχι σχήματα, όχι σχήματα...

00:23:16 Φανή: Έχει έναν πίνακα!

00:23:16 Γεωργία: Έχει πίνακα!

00:23:18 Ομιλητής 1: Τον είπαμε πριν;

00:23:25 Όλοι: Όχι!

00:23:26 Ομιλητής 1: Τι είχαμε πει όταν υπάρχει πρόβλημα; Τι ξανακάνουμε;

00:23:30 Φανή: Ξαναδιαβάζουμε...

00:23:31 Αγγελική: Ξαναπηγαίνουμε στο προηγούμενο...

00:23:34 Φανή: Βήμα.

00:23:35 Ομιλητής 1: Το παραλείψαμε;

00:23:36 Γεωργία: Ναι.

00:23:37 Ομιλητής 1: Άρα γυρίζουμε στο προηγούμενο βήμα. Και βάζω λοιπόν εδώ πέρα το 6... Έχει λοιπόν τον πίνακα, τον οποίο τον παραλείψαμε και πρέπει να τον διαβάσουμε. Τι λέει ο πίνακας; (σιωπή) Πρέπει να μελετήσουμε τις πληροφορίες του πίνακα. Τι λέει πίνακας; Ελένη.

00:24:03 Ελένη: Λέει για παρτέρια, για εμβαδόν και περίμετρο.]

Παρακάτω παρατίθεται απόσπασμα του διαλόγου, όπου οι μαθητές προσπαθούν να «διαβάσουν» τον πίνακα, κάνοντας γραμματικές μεταφορές.

[00:24:12 Ομιλητής 1: Θυμηθείτε λίγο στο προηγούμενο πρόβλημα που είχε αυτό το «ΖΗΘΙ»... και λέγατε «τι είναι αυτό κυρία». τι άλλα μαθηματικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;

00:25:10 Νίκος: Να βάλουμε γράμματα στη μία πλευρά και την άλλη.

00:25:12 Φανή: Να βάλουμε γράμματα...

00:25:15 Ομιλητής 1: Ωραία. Ορθογώνια, λοιπόν. Μετά θα κάνουμε, όμως. Εντάξει; Τι άλλο; Πάμε στη δεύτερη στήλη, μήκος πλευρών. Τι μαθηματικά, γιατί υπάρχει αυτή η στήλη; Χρειάζεται; Γιατί την έβαλε εδώ πέρα; Αυτός που έγραψε το πρόβλημα; Σωτηρία, γιατί λέει «μήκος πλευρών» και είναι χωρισμένο και σε 2 μικρότερες στήλες αυτή;

00:25:35 Σωτηρία: Το πόσο θα είναι η κάθε πλευρά.

00:25:38 Ομιλητής 1: Πόσες πλευρές έχει ένα ορθογώνιο;

00:25:40 Σωτηρία: Τέσσερις.

00:25:41 Ομιλητής 1: Γιατί έχει 2 στήλες και δεν έχει 4;

00:25:42 Σωτηρία: Κυρία...

00:25:42 Ομιλητής 1: 4 έχει... Δεν απάντησες λάθος. Γιατί έχει δύο στήλες και δεν έχει 4;

00:25:45 Σωτηρία: Γιατί είναι δύο έτσι και δύο έτσι... (δείχνει με τα χέρια τα δύο ζευγάρια ίσων πλευρών)

00:25:47 Ομιλητής 1: Τι θα πει «έτσι και έτσι»; (φασαρία)

00:25:50 Σωτηρία: Είναι 2 κάθετα και 2 απέναντι.

00:25:55 Ομιλητής 1: Άρα τι χρειαζόμαστε; Τι είναι αυτές οι δύο κάθετα και οι δύο απέναντι;

00:26:05 Σωτηρία: Ορθογώνιες.

00:26:01 Ομιλητής 1: Οι πλευρές αυτές οι 2 που δείχνεις, οι 2 και οι 2 τι είναι; Το είχε πει πριν ο Νίκος... το έχουμε γράψει ακριβώς από πάνω.

00:26:06 Σωτηρία: Ίσες... Η μεγάλη και η μικρή!

.....

00:39:20 Ομιλητής 1: Στο βήμα το δεύτερο, εκεί που διαβάσαμε τους πίνακες, τον πίνακα, δεν διαβάσαμε καλά εδώ πέρα τη στήλη με το εμβαδόν. Δεν την εξηγήσαμε καλά το «τι μαθηματικά ξέρω». (σιωπή) Είπαμε ότι είναι το εμβαδόν, ότι είναι 24. Το είπε ο Αντώνης ότι το ξέρουμε... «είναι 24 είπε, κυρία», αλλά τι μαθηματικά ξέρω για αυτό δεν είπαμε. Πες το, Φανή.

00:39:48 Φανή: Ότι θα είναι διαφορετικά.

00:39:50 Ομιλητής 1: Ναι, αλλά... ΟΧΙ, θα είναι διαφορετικά! Το εμβαδόν θα είναι ίδιο είπαμε.

00:39:53 Ομιλητής 1: Μισό λεπτό... τι μαθηματικά ξέρω... πώς βρίσκω το εμβαδόν εννοώ.

00:39:57 Φανή: Θα κάνουμε πολλαπλασιασμό τη μεγάλη με τη μικρή πλευρά.

00:40:00 Ομιλητής 1: Πρέπει να το γράψουμε. Εμβαδόν... μεγάλη, δηλαδή, επί μικρή. Στην περίμετρο, γράψαμε τι μαθηματικά κάνω; Θα έχουμε πρόβλημα. Τι μαθηματικά κάνω για την περίμετρο; Τι μαθηματικά ξέρω, Πέτρο, για την περίμετρο; (σιωπή) Όταν πρέπει να γράψω την περίμετρο, τι πρέπει να κάνω, τι μαθηματικά κάνω; (σιωπή) Είχαμε γράψει το γύρω γύρω. Το 'χατε γράψει, έτσι δεν είναι; Τι κάνω για το γύρω γύρω;

00:40:49 Πέτρος: Προσθέτω κάθε μία... πλευρά;

00:40:50 Ομιλητής 1: 1, 2, 3, 4, πόσες;

00:40:57 Πέτρος: Όλο το σχήμα...

00:40:59 Ομιλητής 1: Για τι σχήμα μιλάμε, Πέτρο, εδώ; Τετράγωνα είναι;

00:41:00 Πέτρος: Ορθογώνια.

00:41:10 Ομιλητής 1: Ορθογώνια. Άρα τι θα προσθέσω; Πόσες πλευρές;

00:41:15 Ελένη: Άμα είναι 8 η μεγάλη, 3 η μικρή, θα προσθέσω 3 και 3 και 8 και 8.

00:41:17 Ομιλητής 1: Άρα προσθέτω;

00:41:17 Κατερίνα: Τα μήκη.

00:41:19 Ελένη: Τις απέναντι πλευρές.

00:41:21 Ομιλητής 1: Μόνο; Μην βιάζεστε να απαντάτε... Σκεφτείτε λίγο! Για να βρω την περίμετρο, τι διαδικασία πρέπει να ακολουθήσω, τι μαθηματική διαδικασία; (σιωπή) Προσθέτω τι;

00:41:36 Νίκος: Όλα... και τα 4 μήκη πλευρών...]

Μάλιστα, μια μαθήτρια (Ελένη) ανέφερε ότι οι αριθμοί που θα βάζουν στα μήκη θα είναι τυχαίοι, ενώ στη συνέχεια, προσπαθώντας να αιτιολογήσει με μαθηματικό τρόπο τη σκέψη της, αναθεώρησε. Μαθηματικό λάθος, λόγω της μη αξιοποίησης των στοιχείων του πίνακα, έκανε και άλλο παιδί (Κατερίνα) που έλαβε υπόψη της μόνο μία συνθήκη του προβλήματος (να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου) και παρέλειψε τη δεύτερη (να έχει  $E=24$ )

[00:36:21 Ελένη: Μπορούμε και τυχαία. Γιατί αφού είναι σωστό, δεν πειράζει και...

00:36:24 Ομιλητής 1: Τυχαία;

00:36:25 Φανή: ΟΧΙ, ΚΥΡΙΑ.

00:36:27 Ομιλητής 1: ΤΥΧΑΙΑ στα μαθηματικά; Τυχαία; Υπάρχουν τυχαία;

00:36:30 Ελένη: Έχει εμβαδόν 24.

00:36:33 Ομιλητής 1: Άρα, τι πρέπει να σκεφτόμαστε;

00:36:35 Ελένη: Αν... αν τα κουτάκια... Επειδή τα κουτάκια άμα τα μετρήσουμε, είναι 24. Οπότε είναι σωστό.

.....

00:36:51 Ομιλητής 1: Αλλιώς; Πιο εύκολα;

00:36:55 Κατερίνα: Εγώ το έκανα το 24 δια 4 και μετά, επειδή μου βγήκε ίσες όλες, δηλαδή ένα τετράγωνο, έδωσα από την μεγάλη στη μικρή και έτσι βγήκε 7 και 7 και 5 και 5.

00:37:11 Ομιλητής 1: Η πληροφορία... Ωραία, εντάξει. Είναι σωστό όμως; Η πληροφορία που έχουμε στην τρίτη στήλη;]

Ένας άλλος μαθητής (Νίκος) πρότεινε τη συμπλήρωση των μηκών με συστηματικό τρόπο σκεπτόμενος τους διαιρέτες του εμβαδού (του 24), ενώ η Ελένη που προηγουμένως είχε απαντήσει βιαστικά, αυτή τη φορά αξιοποίησε τα δεδομένα του πίνακα και πρότεινε έμμεσα να χρησιμοποιηθεί ο τύπος εύρεσης του εμβαδού.

[00:36:44 Ομιλητής 1: Θα φτιάχνουμε κουτάκια κάθε φορά;

00:36:46 Ελένη: Ναι.

00:36:46 Φανή: Όχι.

00:36:46 Ομιλητής 1: Ναι; (Φασαρία)

00:36:47 Νίκος: Άμα κάνουμε το 24 δια 8, θα βγει 3. Άρα βγαίνει.

.....

00:37:27 Φανή: Πρέπει να χωράει τα 24 τ.μ. μέσα στο ορθογώνιο που θα φτιάξουμε.

00:37:30 Ομιλητής 1: Ακριβώς. Και πώς βρίσκουμε αν θα χωράνε ή όχι οι αριθμοί;

00:36:33 Φανή: Θα πρέπει να κάνουμε...

00:37:35 Ομιλητής 1: Τι πράξη θα κάνουμε στο μυαλό μας;

00:37:40 Ελένη: Πολλαπλασιασμό...

00:37:42 Ομιλητής 1: Ποιος αριθμούς;

00:37:44 Ελένη: Εγώ έκανα το 3 με το 8 από την στήλη.

00:37:45 Ομιλητής 1: Τα μήκη των πλευρών δεν κάνουμε; 3 φορές το 8 κάνει 24.]

Χρειάστηκε, λοιπόν, να κινηθούν πίσω δύο βήματα και να «ασχοληθούν» λίγο περισσότερο με τις στήλες του πίνακα προκειμένου να αποσαφηνιστούν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Από κει και έπειτα ήταν πιο εύκολο να προχωρήσουν στη μεθοδική επίλυση μέσω της συμπλήρωσης των στοιχείων του πίνακα και να αναδείξουν με την ανταλλαγή ιδεών τις αυστηρές συνθήκες του προβλήματος, αλλά και τα αναμενόμενα λάθη που προκύπταν κατά τον υπολογισμό του Ε και της Π.

[00:31:42 Ομιλητής 1: Όλα χρειάζεται. Ποιο θα κάνουμε πρώτο;

00:31:44 Σωτηρία: Το καταγράφω...

00:31:46 Ομιλητής 1: Καταγράφω πού, τι και γιατί.

00:32:09 Ομιλητής 1: Γιατί υπάρχει αυτό το πινακάκι εκεί;

00:32:10 Σωτηρία: Για να βοηθηθούμε.

00:32:16 Ομιλητής 1: Για να βοηθηθούμε είναι, ακριβώς. Ωραία και θα δούμε πώς θα μας βοηθήσει. Καταγράφουμε. Πάμε να ξεκινήσουμε. Τι άλλο θα κάνουμε παράλληλα, την ώρα που θα καταγράφουμε;

00:32:29 Ομιλητής 1: Τι άλλο από όλα αυτά που λέει το βήμα το τέταρτο;

00:32:36 Αγγελική: Θα τα κάνουμε βήμα-βήμα.

00:32:39 Ομιλητής 1: Ναι, τι άλλο θα κάνουμε μαζί με την καταγραφή του πίνακα;

00:32:39 Ομιλητής 1: Τι θα γράφουμε;

00:32:41 Φανή: Θα γράφουμε τα στοιχεία που έχουμε.

00:32:42 Ομιλητής 1: Ποια στοιχεία;

00:32:43 Φανή: Αυτά που γράφει ο πίνακας και αυτά που θα βρούμε!

.....

00:46:55 Κατερίνα: ΙΚΑΜ.

00:46:57 Ομιλητής 1: ΙΚΑΜ...

00:47:00 Κατερίνα: Ε... 12... 2.

00:47:03 Ομιλητής 1: 12... 2. Συμφωνείτε;

00:47:08 Όλοι: Ναι!

00:47:09 Ομιλητής 1: Βασιλική, συμφωνείς;

00:47:12 Βασιλική: Ναι...

00:47:14 Ομιλητής 1: Γιατί;

00:47:18 Βασιλική: Ε... γιατί δύο φορές το 12 κάνει 24.

00:47:20 Ομιλητής 1: Ωραία. Είναι μια απαραίτητη συνθήκη αυτή, που μας αναγκάζει να βάζουμε συγκεκριμένους αριθμούς;

00:47:25 Φανή- Βασιλική: Ναι!

00:47:27 Ομιλητής 1: Ποια είναι η συνθήκη η υποχρεωτική που μας αναγκάζει να βάζουμε κάθε φορά συγκεκριμένους αριθμούς; Ποιο είναι αυτό που μας αναγκάζει;

00:47:35 Ιωάννης: Κυρία, να βρούμε αποτέλεσμα 24.

00:47:38 Ομιλητής 1: Το εμβαδόν. Εντάξει; Πρέπει απαραίτητα να είναι 24. Δεν είναι αυθαίρετο, τυχαίο, που μου είπατε στην αρχή «τυχαία κυρία». Περίμετρος... Στέλλα.

00:47:48 Στέλλα: 26.

00:47:49 Ομιλητής 1: Συμφωνείτε;

00:47:50 Φανή: Όχι!

00:47:51 Ομιλητής 1: Τι λάθος έκανε η Στέλλα; Ποιος θα μου πει τι λάθος έκανε η Στέλλα και είπε 26 περίμετρο. (σιωπή) Αθανασία, το λάθος θέλω να μας πεις ,όχι το σωστό.

00:48:11 Αθανασία: Κυρία, έκανε λάθος την πράξη, επειδή έκανε μία φορά τώρα την πλευρά του 2.

00:48:13 Ομιλητής 1: Τι έκανε; Πιο καλά λίγο.... Τι λάθος έκανε;

00:48:16 Ελένη: Μήπως πολλαπλασίασε...;

00:48:17 Ομιλητής 1: Αν πολλαπλασίαζε, θα έβρισκε 26;

00:48:20 Ελένη: Πολλαπλασίασε και πρόσθεσε 2;

00:48:21 Ομιλητής 1: Αν έκανε πολλαπλασιασμό θα έβρισκε 26;

00:48:24 Φανή: Όχι, θα έβρισκε 24!

00:48:25 Ομιλητής 1: Θέλω καλύτερα να μου εξηγήσετε το λάθος, που έκανε η Στέλλα. Είπαμε, άμα καταλαβαίνουμε τα λάθη μας, δεν τα ξανακάνουμε. Σωτηρία...

00:48:32 Σωτηρία: Έκανε πρόσθεση, δηλαδή 12 και 12 και 2 και 2.

00:48:37 Γεωργία- Φανή: Αυτό είναι το σωστό. Όχι... κυρία, σας παρακαλώ!

00:48:38 Ομιλητής 1: Όχι, αυτό θα ήταν το σωστό, όπως είπαν τα παιδιά. Έχει κάνει λάθος, είπε 26. Ποιο είναι; Εσύ, η ίδια (η ίδια μαθήτρια που έκανε το αρχικό λάθος); Μισό λεπτό, κατάλαβες το λάθος σου;

00:48:51 Σωτηρία: Ναι.

00:48:52 Ομιλητής 1: Θέλω να μας πεις πρώτα τι λάθος έκανες και μετά να μας πεις το σωστό.

00:48:54 Σωτηρία: Ε... Πρόσθεσα 12 και 12... και μετά αντί να προσθέσω 2 και 2, πρόσθεσα ένα 2 και...

00:49:03 Ομιλητής 1: Ξέχασες να προσθέσεις δηλαδή;

00:49:05 Σωτηρία: Το 2.

00:49:06 Ομιλητής 1: Ξέχασες να προσθέσεις...; Πόσες πλευρές πρόσθεσες;

00:49:09 Σωτηρία: Μία.

00:49:10 Ομιλητής 1: Μία;

00:49:11 Σωτηρία: Ε... τρεις!

....

00:50:24 Ομιλητής 1: 24 πάντα. Είναι συνθήκη που μας υποχρεώνει. Περίμετρος; Κατερίνα.

00:50:32 Κατερίνα: 50! Υπάρχει κι άλλο. ΝΟΜΙΖΩ...

00:50:36 Ομιλητής 1: Ακούμε.

00:50:39 Κατερίνα: Ε... δεν ξέρω...

00:50:44 Ομιλητής 1: Επειδή υπάρχει και άλλη σειρά το λες;

00:50:45 Κατερίνα: Ναι.

00:50:45 Γεωργία: Κυρία, δεν έχει άλλο.

00:50:46 Ομιλητής 1: Σκεφτείτε. Υπάρχει;

00:50:50 Κατερίνα: Σκέφτηκα 1 2 3 4... το 5 ΔΕ γίνεται.

00:50:54 Ομιλητής 1: Μπράβο, πολύ σωστά! Το πάει σταδιακά. Έβαλε 5, την επόμενη διάσταση. Δεν γίνεται. Γιατί;

00:50:59 Γεωργία: Δε γίνεται! Κι εγώ αυτό έλεγα.

00:51:01 Κατερίνα: Γιατί δεν τελειώνει ούτε σε 5 ούτε σε 0.

00:51:06 Ομιλητής 1: Δεν είναι διαιρέτες, δηλαδή. Ναι. Νομίζω πως δεν υπάρχει άλλη. Έτσι;

00:51:12 Κατερίνα: Δεν υπάρχει άλλη.]

Στις δύο ακόλουθες εικόνες (εικ. 20 & 21) φαίνονται οι σημειώσεις (αποσυμπύκνωση λέξεων και απόδοση μαθηματικού νοήματος) δύο μαθητών κατά την «ανάγνωση» και συμπλήρωση του πίνακά τους.

| Ορθογώνιο<br>Παρτέρι | Μ. Μεγάλη<br>Μήκος πλευρών | Μ. μικρή<br>Μήκος πλευρών | Το μέσο<br>Εμβαδόν<br>Μεγάλη x μικρή | Το γύρω-γύρω<br>Περίμετρος<br>μ. + μ. + μ. + μ. = Π. |
|----------------------|----------------------------|---------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------------------|
| ΑΒΓΔ                 | 8                          | 3                         | 24 σμ.                               | 22 μ.                                                |
| ΕΖΗΘ                 | 6                          | 4                         | 24 σμ.                               | 20 μ.                                                |
| ΙΚΛΜ                 | 12                         | 2                         | 24 σμ.                               | 28 μ.                                                |
| ΝΞΟΠ                 | 24                         | 1                         | 24 σμ.                               | 50 μ.                                                |
|                      |                            |                           | 24                                   |                                                      |

Εικ. 20 Ανάγνωση/συμπλήρωση του πίνακα

| ονομα<br>Παρτέρι | μήκος<br>Μήκος πλευρών | μέσα-επικάταλη<br>Εμβαδόν | γύρω-γύρω<br>Περίμετρος         |
|------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| 4ο ΑΒΓΔ          | 8 3                    | 24 σμ.                    | μικρή + μεγάλη + μικρή + μεγάλη |
| ΕΖΗΘ             | 6 4                    | 24                        | 20                              |
| ΙΚΛΜ             | 12 2                   | 24                        | 28                              |
| ΝΞΟΠ             | 24 1                   | 24                        | 50                              |

Εικ. 21 Ανάγνωση/συμπλήρωση του πίνακα

Στο τελευταίο στάδιο επίλυσης του 5<sup>ου</sup> προβλήματος, όπου τους ζητήθηκε να συλλέξουν δεδομένα από τον πίνακα, προσπάθησαν να διατυπώσουν συμπεράσματα και να γενικεύσουν το αποτέλεσμα με βάση τις παρατηρήσεις τους (σχέση μήκους πλευρών, αλλαγή στη σχέση περιμέτρου και εμβαδού). Με αυτόν τον τρόπο δόθηκε η ευκαιρία να εξοικειωθούν με τη χρήση του πίνακα, στον οποίο στηρίχθηκαν για να εκφραστούν με ορθό συλλογισμό,

[00:52:27 Ομιλητής 1: Πώς θα απαντήσουμε στην ερώτηση;

00:52:30 Γεωργία: Ότι... με αριθμό...

00:52:33 Ομιλητής 1: Ακούω την απάντηση και πού θα τη βρούμε;

00:52:36 Βασιλική: Στον πίνακα.

00:52:40 Ομιλητής 1: Στον πίνακα! Πόσα λοιπόν είναι;

00:52:42 Γεωργία: 4.

....

00:53:35 Ομιλητής 1: Πάμε στη δεύτερη ερώτηση. Σωτηρία, τι αλλάζει; (σιωπή) Πού θα κοιτάξουμε για να απαντήσουμε σε αυτό; Το τι άλλαξε;

00:53:48 Σωτηρία: Στον πίνακα.

00:53:50 Ομιλητής 1: Στον πίνακα πάλι, ακριβώς. Τι άλλαξε;

00:53:54 Σωτηρία: Η περίμετρος.

00:53:55 Ομιλητής 1: Συμφωνείτε ότι αλλάζει η περίμετρος;

00:53:56 Όλοι: Ναι.

00:53:57 Ομιλητής 1: Μπράβο! Γράψτε το. Η περίμετρος αλλάζει. Μισό λεπτό... Αλλάζει η περίμετρος... Για ποιο λόγο άλλαξε η περίμετρος;

00:54:08 Νίκος: Γιατί ήταν άλλη... άλλοοοο... εμβαδόν.

00:54:12 Ομιλητής 1: Άλλο εμβαδόν;

00:54:13 Νίκος: Εεε!!! Όχι άλλο εμβαδόν, άλλα μήκη πλευρών!

00:54:16 Ομιλητής 1: Α, μπράβο! Άλλα μήκη πλευρών! Αλλάζοντας λοιπόν τα μήκη των πλευρών, άλλαξε η περίμετρος. Και, τι παραμένει ίδιο; Κάτι που έμενε ίδιο...

00:54:30 Αρκετοί: Κυρία.. κυρία....(φασαρία)]

00:54:34 Ομιλητής 1: Άλλος; Τι έμεινε ίδιο και πού θα κοιτάζουμε; Βασιλική.

00:54:41 Βασιλική: Θα κοιτάζουμε τον πίνακα και θα δούμε το εμβαδόν.

.....

00:58:25 Ομιλητής 1: Θέλω κι άλλο... Αυτό είναι το πρώτο συμπέρασμα, το δεύτερο δεν το έχει, δεν φαίνεται ξεκάθαρα. Θέλω να συγκρίνετε λίγο τα δεδομένα... εδώ, οριζόντια, τα στοιχεία του πίνακα, τις διαστάσεις των πλευρών, τα μήκη των πλευρών. Είναι όλα; Τι σχήματα είχαμε πει;

00:58:48 Γεωργία: Ορθογώνια.

00:58:50 Ομιλητής 1: Υπάρχει κάποιο που πλησιάζει να γίνει κάποιο άλλο σχήμα και γιατί;

00:58:51 Γεωργία: Ναι. Το ΕΖΗΘ.

00:58:50 Ομιλητής 1: Με τι θα κόντευε να μοιάσει;

00:58:53 Γεωργία: Με τετράγωνο.

00:58:55 Ομιλητής 1: Γιατί, πώς το κατάλαβες;

00:58:56 Γεωργία: Γιατί θέλει άλλ... η μικρή... εμμ... εμμ... γραμμή, όχι... ΠΛΕΥΡΑ που έχει, είναι πολύ κοντά στο 6, δηλαδή χρειάζεται άλλα 2.

00:59:11 Ομιλητής 1: Εάν το σχεδιάσαμε με ακρίβεια, θα έμοιαζε πάρα πολύ με τετράγωνο. Λοιπόν, το σχήμα αυτό, το ορθογώνιο, τι χαρακτηριστικό έχει σε σχέση με τα άλλα; Το οποίο έχει 24 εμβαδόν και 20 περίμετρο; Αυτό που πλησιάζει με τετράγωνο...

00:59:35 Γεωργία: Ότι είναι ισ... ότι είναι και κοντά και η περίμετρος... με το εμβαδόν;

00:59:42 Ομιλητής 1: Η περίμετρός του σε σχέση με τα υπόλοιπα ορθογώνια που δεν μοιάζουν με τετράγωνα;

00:59:47 Φανή: Κυρία, αυτό που λέει η Γεωργία, που είναι σχεδόν η περίμετρος με το εμβαδόν του... και στο πρώτο είναι κοντά.

00:59:50 Ομιλητής 1: Ναι, αλλά εγώ δεν ήθελα αυτό. Γι' αυτό τώρα έκανα κι άλλη ερώτηση. Πολύ σωστή παρατήρηση. Είπε η Γιάννα πάρα πολύ σωστά... «πήγε στο σωστό δρόμο», ότι οι πλευρές είναι σχεδόν ίσες, μόνο 2 εκατοστά διαφέρουν. Εάν λοιπόν... μοιάζει με τετράγωνο...

1:00:08 Φανή: Και έχουν όλα το ίδιο εμβαδόν μεταξύ τους...

1:00:10 Ομιλητής 1: Η περίπτωση αυτή σε σχέση με τις υπόλοιπες, των υπόλοιπων παρτεριών, τι είναι; (σιωπή)  
Είναι συμπέρασμα αυτό.

1:00:12 Νίκος: Εάν... ε... η μικρή είναι κοντά...

1:00:13 Ομιλητής 1: Τα μήκη των πλευρών...

1:00:17 Νίκος: Τότε η περίμετρος θα 'ναι μικρότερη, όσο πιο κοντά είναι... (σιωπή)

1:00:30 Ομιλητής 1: Λίγο καλύτερα... τι συμβαίνει με την περίμετρο; (σιωπή)

1:00:40 Ελένη: Α! Όταν το ορθογώνιο μοιάζει με τετράγωνο...

1:00:54 Γεωργία: Ότι η περίμετρος πρέπει να είναι πιο μικρή...

1:01:00 Ομιλητής 1: Όχι, «Πρέπει». Τότε ξέρουμε, θα ξέρουμε ότι... είναι αναμενόμενο, δηλαδή το περιμένουμε. Τότε η περίμετρος είναι όσο γίνεται...;

1:01:04 Όλοι: Μικρότερη.

1:01:07 Ελένη: Όταν μεγαλώνει... είναι μεγάλη η μία πλευρά...

1:01:11 Ομιλητής 1: Όταν τι; Οι διαστάσεις των πλευρών;

1:01:13 Ελένη: Μακραίνουν.

1:01:16 Ομιλητής 1: Μακραίνουν... μακραίνει το σχήμα... Θα μπορούσαμε να το πούμε και ανάποδα... ότι το τετράγωνο είναι σαν ένα ορθογώνιο, για σκεφτείτε το λίγο, είναι σαν ένα ορθογώνιο, απλά έχει τη μικρότερη δυνατή;

1:01:26 Γεωργία: Περίμετρο.

1:01:27 Ομιλητής 1: Περίμετρο. Εντάξει; Αντίστροφα.

1:01:33 Γεωργία: Ενώ το άλλο, που είναι 24, η μεγάλη, και 1 η μικρή...

1:01:35 Ομιλητής 1: Έχουν μεγάλη διαφορά οι διαστάσεις των πλευρών...

1:01:35 Φανή: Είναι μακρουλό!

1:01:36 Γεωργία: Είναι λίγο... είναι σαν το παρτέρι που έχετε στο πάρκο στην...

1:01:40 Ομιλητής 1: Ναι, μπράβο! Κοιτάζτε το κι εδώ πέρα (στον χάρτη)...ναι, ναι, ακριβώς. Όταν είναι μεγάλη διαφορά στα μήκη των πλευρών, τότε η περίμετρος...

1:01:52 Φανή: Είναι μεγαλύτερη.]

Με την ολοκλήρωση του 5<sup>ου</sup> προβλήματος δόθηκε το έναυσμα οι μαθητές να μεταβούν στο επόμενο, το οποίο ήταν επέκταση του άλλου και αφορούσε στη σχέση εμβαδού και περιμέτρου.

[00:56:32 Ομιλητής 1: Και κάποιο γενικό συμπέρασμα, κοιτάζτε λίγο τις διαστάσεις και τα αποτελέσματα. Βγαίνουν πολύ σημαντικές πληροφορίες που θα σας βοηθήσουν. Αντώνη.

00:56:44 Αντώνης: Ότι...εμμ...Όλα... όλοι οι αριθμοί που έχουμε γράψει στο μήκος των πλευρών, που είναι εεε... (παύση) είναι στα εισαγωγικά η περίμετρος... που ΔΕΝ... Κάθε φορά δεν είναι σαν ίδιο με το εμβαδόν που μένει ίδιο... κάθε φορά...

00:57:06 Ομιλητής 1: Άρα, λοιπόν, ωραία. Άρα μπορούμε να πούμε «ΕΑΝ... (σιωπή) Εάν τι;

00:57:14 Αντώνης: Εάν το εμβαδόν είναι ίδιο...

00:57:18 Ομιλητής 1: Τότε... Τότε;

00:57:21 Αντώνης: Τότε η περίμετρος είναι διαφορετική.

00:57:24 Ομιλητής 1: Πάντα;

00:57:25 Φανή: ΟΧΙ! Κυρία! Μπορεί να είναι και ίδια.

00:57:26 Ομιλητής 1: Αυτό θα το μελετήσουμε σε άλλο πρόβλημα παρακάτω που έχω ετοιμάσει. Δεν είναι απαραίτητο να μένει ίδια... να μένει ίδια η...;

00:57:40 Φανή: Περίμετρος.

00:57:45 Ομιλητής 1: Η περίμετρος. Το θυμόμαστε;

00:57:47 Όλοι: Ναι!

00:57:53 Ομιλητής 1: Θα δούμε αν ισχύει πάντα αυτός ο κανόνας. Δεν είμαστε σίγουροι ακόμη. Με βάση το σημερινό πρόβλημα βγάζουμε αυτό το συμπέρασμα;

00:57:57 Όλοι: Ναι.

00:58:00 Ομιλητής 1: Έχει λογική;

00:58:01 Φανή: Ναι.

00:58:02 Ομιλητής 1: Ακούω... Γεωργία, Πες μας τη γνώμη σου.

00:58:06 Γεωργία: Γιατί... Εμ... πρέπει λίγο... βασικά, να ξανακάνεις λίγο πώς το έκανες, για να δεις άμα είναι логи... άμα έχει...

00:58:14 Φανή: Ελέγχουμε!

00:58:14 Γεωργία: Ναι...

00:58:15 Ομιλητής 1: Μπράβοοο, θυμάστε τι είχαμε πει στην αρχή; Η υπόθεση μας βοηθάει να...; Είναι σαν να μας λέει να το...; (παύση) Αυτό που είπες.

00:58:23 Φανή- Γεωργία: Να το ελέγξουμε.]

Όλα τα βήματα, λοιπόν, έγιναν με φανερά μεγαλύτερη ευκολία, καθώς οι μαθητές το συσχέτισαν με το προηγούμενο και μάλιστα πολύ γρήγορα και εύκολα [00:15:59 Φανή: Δηλαδή τώρα, κυρία, πρέπει να βρούμε διάφορους τρόπους, όπως πριν... για τη μεγάλη και τη μικρή πλευρά. Να κάνουμε δηλαδή την περίμετρο... κάτσε να δω... το εμβαδόν, το εμβαδόν...]. Στον παρακάτω διάλογο φαίνεται η ευκολία των παιδιών να εντοπίζουν γλωσσικά στοιχεία, όπως τον πίνακα, τα ζητούμενα, την υπόθεση, αναφορικές αντωνυμίες, ονόματα, συσχετιστικές διαδικασίες των ρημάτων, να κάνουν γραμματικές μεταφορές, αλλά και κατάλληλες συνδέσεις μεταξύ των φράσεων/λέξεων του κειμένου.

[00:05:28 Ομιλητής 1: Ποια ήταν αυτά που δεν χρησιμοποιήσαμε και δεν εκμεταλλευτήκαμε; ... Και είχαμε ξεχάσει να διαβάσουμε;

00:05:34 Φανή: Τον πίνακα!

00:05:35 Ομιλητής 1: Τον πίνακα, ναι! Άρα εδώ, επειδή έχει πίνακα πρέπει να το θυμηθούμε.

00:05:37 Νίκος: Είχε και τις ερωτήσεις...

00:05:39 Ομιλητής 1: Ναι και αυτές... και τις ερωτήσεις, ναι.

.....

00:06:32 Νίκος: Υπογράμμισα το «αν» επειδή είναι μια υπόθεση.

00:06:34 Ομιλητής 2: Ωραία. Υπογραμμίζετε, λοιπόν, όλοι το «αν» είναι μία υπόθεση. Τι συνηθίσαμε και τις υποθέσεις λίγο.

00:06:42 Αθανασία: «Που τοποθετείται γύρω απ' τα παρτέρια», γραμμή.

00:06:47 Ομιλητής 1: Ωραία, νούμερο 2. Για ποιο λόγο; Τι είναι αυτή η φράση όλη;

00:06:53 Αθανασία: Εεεε, είναι το πού θα τοποθετηθούν, ε, τα 26μ. από διακοσμητικό κράσπεδο.

00:07:02 Ομιλητής 1: Σε ποιο πράγμα δηλαδή αναφέρεται;

00:07:05 Αθανασία: Στο διακοσμητικό κράσπεδο.

00:07:06 Ομιλητής 1: Α, μπράβο! Ποια λέξη είναι αυτή που δείχνει πού αναφέρεται; Μια μικρή λεξούλα;

00:07:14 Φανή: Εεεε «που»!

00:07:15 Ομιλητής 1! Το «που», ναι.

00:07:17 Ελένη: Εγώ υπογράμμισα το «γύρω» και έβαλα βελάκι «Π», γιατί δείχνει την περίμετρο.

.....

00:10:31 Ομιλητής 1: «Μπορώ να τα τοποθετήσω». Τι σημαίνει; Είναι ένα ρήμα, μια ρηματική φράση, μάλλον θα λέγαμε, η οποία μας δείχνει, μας ζητάει να κάνουμε μία...;

00:10:44 Φανή: Να τοποθετήσω.

00:10:44 Ομιλητής 1: Μια;

00:10:47 Φανή: Να βρούμε την περίμετρο. Μία ενέργεια!

00:10:48 Ομιλητής 1: Μια τοποθέτηση. Να κάνουμε μια ενέργεια λοιπόν, τοποθέτηση.

00:10:52 Φανή! Το εμβαδόν πρέπει να βρούμε. Όχι το εμβαδόν, την περίμετρο.

00:10:56 Ομιλητής 1: Θα το δούμε λοιπόν. Μου ζητάει να κάνω μια διαδικασία.

.....

0:19:45 Ομιλητής 1: Τοποθέτηση κράσπεδου. Τι μαθηματικά ξέρω για αυτό;

00:19:51 Φανή: Ότι είναι περίμετρος.

00:19:53 Ομιλητής 1: Μπράβο μας δίνει αυτήν την έννοια. Μπράβο. Περίμετρος ποιανού;

00:19:55 Φανή: Του... του παρτεριού! Περίμετρος του κρασπέδου είναι 26μ.

00:20:05 Ομιλητής 1: Είναι ίδια με του;

00:20: 10 Γεωργία: Με του παρτεριού. Είναι το ίδιο!]

Πλέον, έγινε ακόμη πιο κατανοητή η χρησιμότητα και ο ρόλος του κάθε βήματος, καθώς και ο ρόλος των γλωσσικών επιλογών, συμπεριλαμβανομένων του πίνακα, στον οποίο επέμειναν, όπως και των σχημάτων. Οι μαθηματικές έννοιες αναδείχθηκαν με ευκολία και οι μαθητές προχώρησαν στη σωστή επίλυση του προβλήματος (εικ. 22).

[00:13:25 Νίκος: Κυρία, δεν μπορεί... άμα είναι μεγαλύτερο το παρτέρι, μπορεί να μη χωράει το κράσπεδο εδώ.

00:13:33 Ομιλητής 1: Άρα; Την ξέρουμε την περίμετρο του παρτεριού;

00:13:35 Ανδρέας: Όχι. Μόνο το εμβαδόν.

00:13:39 Ομιλητής 1: Την ξέρουμε; Ο Νίκος είπε κάτι πολύ σημαντικό. Πες το ξανά.

00:13:45 Νίκος: Ότι άμα είναι πολύ μεγάλο το παρτέρι, μπορεί να μη χωράει το κράσπεδο.

00:13:53 Ομιλητής 1: Παιδιά στο βήμα το τρίτο, κοιτάξτε τι λέμε... μαθηματικές λέξεις και σύμβολα και έχει και οπτικές αναπαραστάσεις. ... τι σημαίνει το «οπτικές αναπαραστάσεις»;

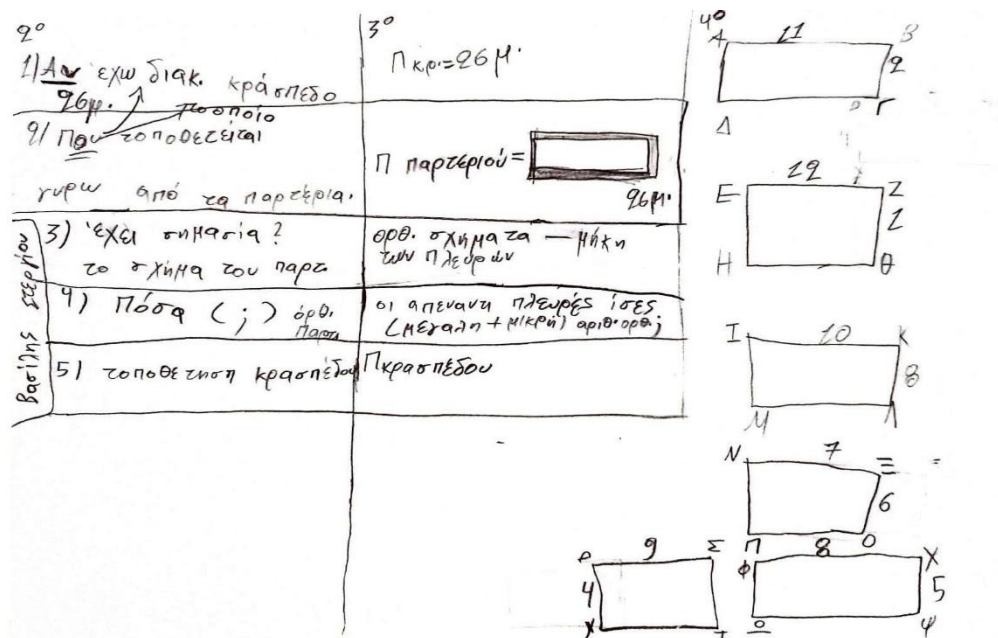
00:14:12 Φανή: Όταν κάτι το βλέπουμε.

00:14:13 Ομιλητής 1: Πώς θα το δούμε;

00:14:15 Φανή: Απ' τον χάρτη.

00:14:16 Ομιλητής 1: Δεν υπάρχει εκεί. Αφού δεν υπάρχει τι μπορούμε να κάνουμε;

00:14:20 Σωτηρία: Να σχεδιάσουμε!]



Εικ. 22 Γλωσσομαθηματικές συνδέσεις από στάδιο σε στάδιο

Μια μαθήτρια κατά την καταγραφή του πίνακα παρατήρησε την αλλαγή πλαισίου, καθώς η Π ήταν αυτή που θα καθόριζε αυτή τη φορά την επιλογή του μήκους των πλευρών, κάνοντας αντιπαραβολή με το 5<sup>ο</sup> πρόβλημα, που τις συνθήκες καθόριζε το Ε.

[00:21:34 Ομιλητής 1: Εμβαδόν; Τι είναι αυτό; Τι θα κάνουμε, Ολυμπία; Στο εμβαδόν;

00:21:40 Κατερίνα: Θα βρούμε το μέσα.

00:21:42 Ομιλητής 1: Μέσα... (φασαρία) Πώς;

00:21:44 Φανή: Πριν προσπαθούσαμε να βρούμε την περίμετρο, ενώ εδώ τώρα θα βρούμε το εμβαδόν.

00:21:48 Ομιλητής 1: Ωωω.... Προχώρησες πολύ εσύ... Μετά... λίγο λίγο...

.....

00:25:11 Ομιλητής 1: Ποιο είναι αυτό, καταρχήν, που θα μας δείξει τι θα συμπληρώσουμε στις δύο στήλες που δεν έχουμε βάλει τίποτα. Στις τρεις μάλλον. Από ποιες πρέπει να ξεκινήσουμε;

00:25:21 Φανή: Να σκεφτούμε.... Πολλαπλασιασ...

00:25:23 Ομιλητής 1: Απ' το εμβαδόν ή απ' τα μήκη των πλευρών;

00:25:26 Φανή: Από το... από τα μήκη.

00:25:28 Ομιλητής 1: Ωραία. Τι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας για να γράφουμε στοιχεία στα μήκη;

00:25:35 Φανή: Την περίμετρο, την περίμετρο.

00:25:44 Ομιλητής 1: Ωραία.

00:25:45 Φανή: Εε... σκέφτηκα εεε... έναν τρόπο!

00:25:49 Ομιλητής 1: Τι θα πρέπει κάθε φορά;

00:25:56 Φανή: Να το χωρίσουμε με διαφορετικό τρόπο.

00:25:59 Ομιλητής 1: Στο προηγούμενο πρόβλημα ήταν το εμβαδόν που μας έκανε να διαλέγουμε τους αριθμούς.

Εδώ πέρα η Φανή είπε ότι είναι η περίμετρος τώρα. Τι θα πρέπει κάθε φορά να συμβαίνει;

00:26:01 Ομιλητής Ελένη: Να βάζουμε διαφορετικούς αριθμούς.

00:26:03 Ομιλητής 1: Ναι, αλλά πώς; Θα είναι οι αριθμοί τυχαίοι;

00:26:06 Φανή: Όχι. Να μπορέσουμε... όταν προσθέσουμε τα μήκη, να μας βγάλει την περίμετρο.]

Βέβαια, ορισμένα παιδιά κατά τη συμπλήρωση του πίνακα, μπέρδεψαν την πολλαπλασιαστική με την προσθετική ιδιότητα του Ε και της Π αντίστοιχα,

[00:28:30 Ομιλητής 1: Μμμ... Βασιλική... Σκέψου έναν τρόπο, δεν πειράζει.

00:28:37 Βασιλική: 12 και 1.

00:28:39 Ομιλητής 1: 12 και 1. Εμβαδόν... Αγγελική;

00:28:59 Αγγελική: (σιωπή) 26.

00:29:00 Ομιλητής 1: Το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει 12 και 1 μήκη πλευρών;

00:29:10 Σωτηρία: Εικοσι... 25.

00:29:15 Ομιλητής 1: Πώς θα βρούμε το εμβαδόν; Κοίτα τι έχεις γράψει στη στήλη σου. Τι μαθηματικά κάνω για να βρω το εμβαδόν;

00:29:25 Σωτηρία: Είκοσι...

00:29:29 Ομιλητής 1: Τι θα κάνεις για να βρεις το εμβαδόν;

00:29:32 Σωτηρία: 12, 12 και 1.

00:29:34 Ομιλητής 1: Για το εμβαδόν; Την περίμετρο την ξέρω. Δεν την ξέρω την περίμετρο;

00:29:40 Σωτηρία: Την ξέρω. (φασαρία) 12 είναι.

00:29:42 Ομιλητής 1: 12 είναι, ναι. Ωραία. Η περίμετρος πάντα 26 είναι.]

παρόλο που προηγουμένως, στο 3<sup>ο</sup> στάδιο, είχαν κάνει αποσυμπύκνωση των μαθηματικών εννοιών και είχαν σημειώσει τον τρόπο εύρεσής τους.

[00:24:08 Ομιλητής 1: Μισό λεπτό. Μαθηματικά γράψαμε για το «μέσα και για το γύρω γύρω» ή θα ξαναγυρίσουμε στο προηγούμενο βήμα;

00:24:11 Γεωργία: Όχι, δε γράψαμε.

00:24:12 Ομιλητής 1: Τι μαθηματικά κάνω για να το «μέσα»;

00:24:17 Σωτηρία: Πολλαπλασιασμό.

00:24:18 Ομιλητής 1: Ποιο;

00:24:19 Σωτηρία: Τις δύο πλευρές.

00:24:17 Ομιλητής 1: Άντε... Δεν το γράψαμε, θα το ξεχάσουμε. Ας το γράψαμε στο προηγούμενο, να μην το γράψουμε και εδώ; Εσείς πιστεύετε ότι το θυμούνται όλοι; Μήκος επί πλάτος, λοιπόν. Το «γύρω γύρω»... Τι μαθηματικά κάνουμε, Ελένη;

00:24:35 Ελένη: Εεε.. μη... τις πλευρές μεταξύ τους; (παύση) Δε θυμάμαι τη λέξη που είχαμε βάλει. Κάνουμε την πάνω πλευρά με την κάτω, και τη δεξιά με την αριστερή;

00:25:00 Ομιλητής 1: Τι πράξη; Μαθηματικά, πώς το κάνω;

00:25:02 Ελένη: Πρόσθεση.

00:25:03 Ομιλητής 1: Πρόσθεση των;

00:25:04 Ελένη: Των πλευρών.]

Χωρίς δυσκολία εξήγαγαν ορθά συμπεράσματα και έκαναν γενικεύσεις, στηριζόμενοι στον πίνακα (6<sup>ο</sup> στάδιο).

[00:34:41 Νίκος: Αλλάζει το εμβαδόν και μένει ίδια η περίμετρος.

00:34:42 Ομιλητής 1: Απαντήστε το, ναι! Αλλάζει το εμβαδόν και παραμένει ίδια η περίμετρος. Μελέτησε τον πίνακα. Είχε μια ερώτηση. Είχε σχέση το σχήμα του παρτεριού;

00:34:55 Γεωργία: ΝΑΙ, ναι.

00:34:57 Ομιλητής 1: Ναι ή όχι;

00:34:58 Ιωάννης: ΝΑΙ.

.....

00:35:12 Φανή: Έχει σημασία, γιατί θα μπορούσαμε να βάλουμε και διαφορετικά, ε, μήκη.

00:35:19 Ομιλητής 1: Το σχήμα, όμως, έχει σημασία;

00:35:23 Φανή: Εεε... ναι; Άλλαξαν τα μήκη και άλλαξε το εμβαδόν, ενώ τώρα έμενε ίδια η περίμετρος.]

### *5<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο*

Πριν αρχίσουμε την επίλυση του 7<sup>ου</sup> προβλήματος έγινε προσπάθεια να διατυπωθεί ένα γενικό συμπέρασμα για τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου ανάλογα με τις αλλαγές που γίνονταν στην περίμετρο και το εμβαδόν των ορθογωνίων σχημάτων των δύο προηγούμενων προβλημάτων. Μέσα από τη συζήτηση και με σκοπό να δοθεί έμφαση στα στοιχεία του πίνακα που είχε συμπληρωθεί, δόθηκε η ευκαιρία να προσεγγιστούν οι έννοιες του ορθογωνίου και του τετραγώνου σε συνάρτηση με το τι παθαίνει η περίμετρος και το εμβαδόν, διατυπώνοντας ορισμούς συνόλων και υποσυνόλων (το τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει- το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν και τη μικρότερη περίμετρο).

[00:03:27 Ομιλητής 1: Και στο τετράγωνο δεν ισχύει αυτό;

00:03:29 Νίκος: Ναι.

00:03:30 Ομιλητής 1: Άρα. Λοιπόν. και γι' αυτό το λέμε και ορθογώνιο. Καταλάβατε; Γιατί έχει τις απέναντι πλευρές ίσες. Άρα λοιπόν είχαμε πει ότι το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο που τι εμβαδόν έχει και τι περίμετρο;

00:03:42 Γεωργία: Που το εμβαδόν του είναι διαφορετικό...

00:03:47 Ομιλητής 1: Όχι, είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο το εμβαδόν;

00:03:48 Γεωργία: Α, είναι μεγαλύτερο.

00:03:49 Ομιλητής 1: Μπράβο, θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν. Και τι είδους περίμετρο; (σιωπή)

00:04:06 Φανή: Διαφορετική περίμετρο.

00:04:10 Ομιλητής 1: Διαφορετική, μεγαλύτερη ή μικρότερη;

00:04:11 Φανή: Μικρότερη.

00:04:12 Γεωργία: Μικρότερη με σχέση με το εμβαδόν.

.....

00:05:25 Ομιλητής 1: Το τετράγωνο είναι και ορθογώνιο. Το ορθογώνιο είναι και τετράγωνο;

00:05:30 Νίκος: Όχι.

00:05:31 Ομιλητής 1: Όχι... δεν ισχύει το αντίστροφο. Ωραία, για να το γράψουμε, λοιπόν, το συμπέρασμα. Συνεχίζουμε.

00:05:40 Ομιλητής 1: Πώς εξάγαμε λοιπόν το συμπέρασμα ότι το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν και την μικρότερη περίμετρο; Τι κάναμε χθες; (σιωπή) Τι ήταν αυτό; Από πού τα βγάλαμε αυτά τα συμπεράσματα; Πού τα βρήκαμε; (φασαρία)

00:05:53 Φανή: Στα μήκη των πλευρών.

00:05:55 Ομιλητής 1: Πού τα γράψαμε; Τι ήταν αυτό που μας βοήθησε;

00:06:05 Φανή: Ο πίνακας!

00:06:08 Ομιλητής 1: Μπράβο! Η καταγραφή των στοιχείων στον πίνακα. Ο πίνακας, λοιπόν, μας έδωσε πολύ σημαντικές πληροφορίες, γι' αυτό έχουμε πει ότι πρέπει να τους;

00:06:17 Όλοι: Κοιτάμε.

00:06:18 Ομιλητής 1: Κοιτάζουμε... να τους διαβάζουμε εντός εισαγωγικών.]

Στην 1<sup>η</sup> φάση του 7<sup>ου</sup> προβλήματος, οι μαθητές έκαναν εύστοχους γλωσσικούς ελιγμούς που έδωσαν έμφαση στην πολύ-σημειωτική φύση του μαθηματικού λόγου (εικ. 23 & 24). Εστίασαν στο κειμενικό είδος που έπρεπε να επεξεργαστούν (υπόθεση) και αξιοποίησαν τη δευτερεύουσα υποθετική πρόταση με το «αν...», μιας και είχαν ξανασυναντήσει παρόμοια περίπτωση σε προηγούμενα προβλήματα, ενώ τονίσθηκε και το αυστηρό πλαίσιο που επέβαλε το εν λόγω κείμενο (ισχυρισμός, επιχειρηματολογία), καθώς έκριναν αναγκαία τη διατύπωση ενός επιχειρήματος προκειμένου να αποδειχθεί η εγκυρότητα του ισχυρισμού της συγγραφέα.

[00:07:47 Ομιλητής 1: Μόνο αυτό ρωτάει;

00:07:48 Φανή: Όχι, και το γιατί.

00:07:49 Ομιλητής 1: Μπράβο! Τι σημαίνει το «Γιατί», λοιπόν, στα μαθηματικά;

00:07:53 Φανή: Τον λόγο.

00:07:55 Ομιλητής 1: Το λόγο... πώς το λέμε αυτό στα μαθηματικά; Το γράφει και η αφίσα μας; (σιωπή) Όταν ρωτάω «γιατί», τι πρέπει να εκφράσουμε; Ένα;

00:08:08 Ελένη: Ένα... μμμ... ν' αποδείξουμε...

00:08:10 Ομιλητής 1: Να αποδείξουμε καταρχήν αν αυτό έχει δίκιο ή όχι. Επιχείρημα δεν το λέμε;

00:08:14 Φανή: Να εξηγήσουμε!

.....

00:08:20 Ομιλητής 1: Ποιες είναι οι αναμενόμενες απαντήσεις;

00:08:29 Σωτηρία: Ναι ή όχι.

00:08:30 Ομιλητής 1: Ναι ή όχι;

00:08:32 Ανδρέας: Και το γιατί.

00:08:32 Φανή: Το επιχείρημα.]

1 2 3 4 5

7. Ανακάλυψα πως αν αυξηθεί η περίμετρος ενός παρτεριού θα αυξάνεται

Μπορώ πάντα και το εμβαδόν του Έχω άραγε δίκιο και γιατί; (Ναι/Όχι) ΕΔΙΧΗΡ.ΝΑ

Απάντηση: Δεν έχει δίκιο... δοκίμασα με... 5 περιπτώσεις  
 1η: Αφάρσαμε ίδια... μικρά... πλάτη... κ'... αυξήσαμε κατά 1... τότε έχουμε υπόθεση  
 2η: Αφάρσαμε... μικρά... πλάτη... αυξήσαμε... 2... τότε έχουμε υπόθεση  
 3η: Αφάρσαμε... μικρά... πλάτη... αυξήσαμε... 3... τότε έχουμε υπόθεση  
 4η: Αφάρσαμε... μικρά... πλάτη... αυξήσαμε... 4... τότε έχουμε υπόθεση  
 5η: Αφάρσαμε... μικρά... πλάτη... αυξήσαμε... 5... τότε έχουμε υπόθεση

2ο 3ο 4ο

1. Ανακάλυψα → ενεργητικό αν δαν υπάρχει η σχέση θα γράψουν οι ίδιοι!

2. Πως αν αυξηθεί → υποθέτουμε → ενεργητικό γιατί / 2+3 → 7+ → 4)  $E^+ \text{ ή } E^- \text{ ή } E =$

3. Περίμετρος παρτεριού → ποιος!

4. Θα αυξηθεί → υπόθεση και παθαίνει

5. Εμβαδόν του παρτεριού → ποιος

18ΧΥΕ (ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΞΗ)

Εικ. 23 Γλωσσικοί ελιγμοί μαθητή

| 20                                                                               | 30                                                              | 40 |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 1) Ανακάλυψα → ενέργεια<br>αν δεν υπήρχε αυτή<br>η δύναμη θα ήμασταν<br>δίζουροι | πίνακας → αποσύνθεση<br>σε στοιχεία μήκη<br>πλευρών Ε-Π-Ου-ΟΡΘ. |    |
| 2) Πώς αν αυξηθεί<br>→ υποθέτουμε ενέργεια<br>χρ. κατά παθαινα                   | ↓<br>μήκος x πλάτος<br>(μεγάλη) x (μικρή<br>πλευρά)             |    |
| 3) Π. παρτεριού → ποιος Π +                                                      |                                                                 |    |
| 4) Θα αυξάνεται → απόδοση<br>ενέργεια → κατά παθαινα                             | $C + u \in - u \in$                                             |    |
| 5) Ε. του παρτεριού → ποιος                                                      |                                                                 |    |
| 6) Ναι-όχι και επιχειρήματα                                                      |                                                                 |    |

Εικ. 24 Γλωσσικοί ελιγμοί μαθητή

Ακόμη, μέσα από τη συζήτηση, τα παιδιά ενθαρρύνθηκαν να προσεγγίσουν το πρόβλημα μέσα από τα μάτια της συγγραφέα και να σκεφτούν τον λόγο ύπαρξης ή όχι διαφόρων οπτικών αναπαραστάσεων. Μία μαθήτρια (Γεωργία) ανέφερε ότι θα χρειαζόταν να γίνει πίνακας από τους ίδιους για την καταγραφή στοιχείων και τη συλλογή δεδομένων, εντοπίζοντας ομοιότητες με τα δύο προηγούμενα προβλήματα (5 και 6), ενώ δεν άφησε ασχολίαστο το επίρρημα «πάντα», διερωτώμενη αν τελικά ισχύει πάντα αυτό που λέει το πρόβλημα.

[00:08:37 Γεωργία: Κυρία, εδώ μπορεί να χρειαστεί να κάνουμε και μόνοι μας πίνακα.

.....

00:08:49 Γεωργία: Γιατί «ανακάλυψα ότι αν αυξηθεί η περίμετρος ενός παρτεριού θα αυξηθεί ΠΑΝΤΑ και το εμβαδόν»; Αλλά το «πάντα» δεν ξέρω αν είμαι... αν είναι αλήθεια ή όχι.....

00:09:05 Ομιλητής 1: Και για... πώς το σκέφτηκες ότι θα σε βοηθήσει ο πίνακας;

00:09:07 Γεωργία: Γιατί και στα προηγούμενα προβλήματα μας βοηθούσε, γιατί λέγαμε το εμβαδόν, βάσαμε και τις πλευρές. Και κάναμε μετά τον πολλαπλασιασμό, βρήκαμε το εμβαδόν και μετά άμα το αυξάναμε λέγαμε...

.....

00:09:58 Ελένη: Θέλει να καταγράψει...

00:09:59 Ομιλητής 1: Θέλει να καταγραφούν κάποια στοιχεία σε πίνακα. Και μετά, αυτά τι θα τα κάνουμε; Γι' αυτό το ρώτησα.

00:10:05 Γεωργία: Μετά, αυτά θα τα πάρουμε τα στοιχεία και θα τα σκεφτούμε, θα κάνουμε...

.....

00:18:31 Κατερίνα: Θα αυξάνεται πάντα και...

00:18:35 Ομιλητής 1: Ωραία, γιατί να το βάλουμε το «θα αυξάνεται πάντα» μαζί; Για ποιο λόγο; Τι είναι αυτό στην πρόταση; Να κάνουμε γλωσσο- μαθηματικά...

00:18:44 Ελένη: Γιατί θα μπορούσε να... θα μπορούσε να δείχνει ότι εδώ πέρα είναι το λάθος. Ας πούμε, θα μπορούσε να μην αυξάνεται ΠΑΝΤΑ. Θα μπορούσε να αυξάνεται σε μερικές περιπτώσεις.

00:18:57 Ομιλητής 1: Το ακούσατε αυτό που είπε η Ελένη;

00:18:59 Γεωργία: Ναι, το «πάντα» πρέπει λίγο να το βγάλουμε, γιατί αυτό μπορεί να μην ισχύει.

00:19:03 Ομιλητής 1: Να δούμε αν ισχύει ή όχι πάντα. Δεν το πιστεύουμε απαραίτητα. Θα το ελέγξουμε εμείς. Υπογραμμίστε!

00:19:11 Γεωργία: Κυρία, μπορούμε να βάλουμε μία γραμμή και να γράψουμε «μπορεί»;

Οι μαθητές, συζητώντας σε ζευγάρια, χώρισαν το πρόβλημα σε φράσεις εξηγώντας το νόημα της κάθε μίας.

[00:11:12 Γεωργία: Να βρούμε... να βγάλουμε τις πληροφορίες που δε μας χρειάζονται και να το ενώσουμε πουνου... με όλες τις βασικές.

00:11:20 Φανή: Βασικά, κυρία, όλες οι πληροφορίες που έχει μέσα το πρόβλημα... εε... συνήθως χρειάζονται. Μπορεί από κάποιααα... Που μας λέει το ΠΟΙΟΣ το έκανε καμιά φορά που δεν μας χρειάζεται αυτό είναι.

.....

00:11:45 Γεωργία: Αυτό που λέει τώρα «ανακάλυψα πως» δεν νομίζω να χρειάζεται.

00:11:48 Ομιλητής 1: Το «ανακάλυψα πως» χρειάζεται;

00:11:50 Αντώνης: Ναι.

00:11:50 Ομιλητής 1: Να το χωρίσουμε σε φράσεις; Πρέπει κάθε φράση να βγάζει, έχουμε πει;

00:11:54 Ανδρέας: Νόημα.]

Στον παρακάτω διάλογο φαίνεται πώς ανταλλάξαν ιδέες για το νόημα του υποθετικού λόγου:

[00:12:27 Γεωργία: Εγώ σκέφτηκα ότι εδώ πέρα που λέει 'αν αυξηθεί η περίμετρος ενός... ενός παρτεριού', η Φανή λέει εδώ στο κόμμα να το χωρίσουμε, αλλά εγώ λέω ότι...

00:12:37 Ομιλητής 1: Την ώρα... που την ώρα που το χωρίζετε θα πρέπει να συζητάτε για ποιο λόγο πρέπει να χωριστεί εκεί και όχι παραπέρα.

00:12:47 Φανή: Γιατί δεν νομίζω να υπάρχει λόγος να το πούμε ΟΛΟ αυτό μαζί και...

00:12:49 Ομιλητής 1: Πρέπει να απαντάνε σε συγκεκριμένες ερωτήσεις τα κομμάτια σας. Σας βοηθά η αφίσα. Το δεύτερο βήμα που έχω ερωτησούλες. Το ποιος, το τι έχει, τι είναι εκείνος, πώς, γιατί, πότε...

00:13:00 Φανή: Αυτή η ερώτηση, όμως... Εδώ απαντάει, στο τι θα αυξηθεί.

00:13:21 Γεωργία: Αν το πάρουμε μαζί...(ψιθυριστά στη διπλανή της)

00:13:22 Φανή: Η Γεωργία λέει να το πάρουμε όλο μαζί.

00:13:25 Γεωργία: Ναι.

00:13:27 Ομιλητής 1: Ίσως κάποιες φορές χρειάζεται, αλλά αν θεωρείς εσύ, ποιο λόγο, για ποιο λόγο; Γιατί το λες;

00:13:32 Φανή: Γιατί αυτό εδώ... Καταρχάς, δεν χρειάζεται να το κάνουμε τόσο μεγάλο πρώτον και κατά δεύτερον αυτό απαντάει και σε μια ερώτηση, στο «τι αυξάνεται».

00:13:38 Ομιλητής 1: Ωραία. Πώς θα το χώριζες εσύ και για ποιο λόγο; Τη σκέψη σου πες στη Γεωργία.

00:13:42 Γεωργία: Ναι, μπορεί εδώ τώρα, γιατί δεν καταλαβαίνω ότι αυτή είναι η ερώτηση και αυτή είναι η απάντηση. Ε, όχι η απάντηση, όχι, η απόδοση.

00:13:50 Ομιλητής 1: Η απόδοση, ωραία...

00:13:51 Γεωργία: Και μετά... και μετά εδώ είναι η ερώτηση που είναι...

00:14:14 Φανή: Εγώ το είπα έτσι, γιατί νομίζω... θεωρώ ότι αν το πάρουμε όλο μαζί θα απαντάει σε παραπάνω από μία ερώτηση.

00:15:08 Ομιλητής 1: Σε ποια ερώτηση απαντάει το πρώτο κομμάτι και σε ποια το δεύτερο;

00:15:12 Γεωργία: Είναι, βασικά, πιστεύω λίγο, το αν θ αυξηθεί είναι λίγο πιο... ..

00:15:15 Ομιλητής 1: Τι σημαίνει;

00:15:16 Γεωργία: Λίγο σημαντική η λέξη...

00:15:17 Ομιλητής 1: Τι σημαίνει και τι είναι αυτό;

00:15:18 Γεωργία: Γιατί μας βοηθάει. Άμα δεν την έλεγε εδώ, θααα...

00:15:20 Ομιλητής 1: Τι είναι αυτό στη γλώσσα μας;

00:15:24 Φανή: Υπόθεση.

00:15:25 Ομιλητής 1: Το «αυξηθεί» εννοώ, τι είναι, με το «αν» μαζί;

00:15:27 Φανή: Ρήμα.]

Μέσα από τον διάλογο που συνεχίστηκε τονίστηκε ο ρόλος των ρημάτων και ότι δηλώνουν κάποια ενέργεια, καθώς και του συνδέσμου «και».

[00:15:28 Ομιλητής 1: Είναι ρήμα. Τι δείχνουν τα ρήματα;

00:15:29 Φανή: Μια ιδιότητα.

00:15:30 Ομιλητής 1: Ιδιότητα δείχνουν τα ρήματα;

00:15:31 Γεωργία: Όχι.

00:15:32 Ομιλητής 1: ΤΙ ΔΕΙΧΝΟΥΝ ΤΑ ΡΗΜΑΤΑ;

00:15:34 Ιωάννης: Μια ενέργεια.

00:15:45 Ομιλητής 1: Και το άλλο το κομμάτι; «Η περίμετρος ενός παρτεριού»; Τι θέση έχει εδώ πέρα;

00:15:47 Φανή- Γεωργία: Εδώ είναι... απαντάει στο αν αυξηθεί.

00:15:54 Γεωργία: Όχι, «ΤΙ» θα αυξηθεί.

00:15:55 Ομιλητής 1: Το Τι, ποιος δηλαδή.

00:17:19 Ομιλητής 1: Αυτό το ρήμα λοιπόν, είναι σαν να μας λέει τι να κάνουμε;

00:17:22 Φανή: Να το βρούμε.

00:17:23 Ομιλητής 1: Να το βρούμε Αν;

00:17:22 Γεωργία- Φανή: Αν είναι σίγουρο αυτό.

.....

00:19:33 Νίκος: Εγώ υπογράμμισα το «και», γιατί συνδέει και... .. το «αυξάνεται πάντα» με το «εμβαδόν του». Γι' αυτό το χώρισα.

00:19:44 Ομιλητής 1: Ναι, το «και» ο Νίκος, εδώ πέρα, λέει ότι συνδέει ποια πράγματα;

00:19:49 Νίκος: Το «αυξάνεται πάντα» και το «εμβαδόν του».

00:19:52 Ομιλητής 1: Ποιο πράγμα συνδέεται; Το εμβαδόν με ποιο πράγμα;

00:19:55 Νίκος: Με το τι θα κάνει.

00:19:59 Ομιλητής 1: Όχι, το «και». Τι συνδέει το «και»;

00:20:02 Φανή: Και το εμβαδόν... (ψιθυριστά)

00:20:04 Νίκος: Και την περίμετρο!

00:20:06 Ομιλητής 1: Την περίμετρο, τα υποκείμενα.

00:20:08 Ιωάννης: Είναι δύο προτάσεις που συνδέονται. Συνδέονται... εεε... και ακολουθεί το ίδιο νόημα.

00:20:14 Ομιλητής 1: Τα Υποκείμενα συνδέει. Αυτά που παθαίνουν κάτι. Ποια παθαίνουν κάτι;

00:20:19 Φανή: Το εμβαδόν και η περίμετρος.]

Μία μαθήτρια (Φανή) σχολίασε την ύπαρξη του ρήματος «Ανακάλυψα», λέγοντας πως αν δεν υπήρχε θα ήταν σίγουρος ο ισχυρισμός της κ. Ευτυχιάδου, άρα για να το λέει η ίδια μπορεί και να μην ισχύει. Αυτό σήμαινε, σύμφωνα με τη μαθήτρια, ότι θα έπρεπε να το εξετάσουν [00:11:59 Φανή: Γιατί δεν είναι σίγουρη ότι υπάρχει αυτό το πράγμα. Λέει ότι το ανακάλυψε. 00:17:08 Φανή: Γιατί αν δε μας έλεγε αυτό, θα ήταν σαν να λέει ότι το ΞΕΡΕΙ ότι θα γίνεται αυτό που λέει παρακάτω.].

Στη συνέχεια, ένας καλός μαθητής (Ανδρέας) «πετάχτηκε» και είπε ότι ξέρει την απάντηση και ότι δεν ισχύει η υπόθεση, χωρίς, βέβαια, να επιχειρηματολογήσει, όταν ρωτήθηκε από τον εκπαιδευτικό. Ένας συμμαθητής του ανέφερε ότι πήγε στο 5<sup>ο</sup> βήμα και ότι αυτό πιθανό να τον ανάγκαζε να γυρίσει πίσω σε προηγούμενα βήματα, αφού υπήρχε περίπτωση να είχε άδικο. Συμφώνησαν όλοι ότι πρέπει να το εξετάσουν, αμφισβητώντας τον ισχυρισμό της κ. Ευτυχιάδου.

[00:21:25 Ομιλητής 1: Είχαμε πει στην ερώτηση, στην πρόβλεψη της απάντησης ότι θα δούμε αν έχει δίκιο ή όχι και θα βάλουμε και ένα επιχείρημα.

00:21:36 Ανδρέας: Οοοοοο!

00:21:37 Ομιλητής 1: Τι είναι; ΠΕΣ... Ήθελες να πεις κάτι;

00:21:39 Ανδρέας: Όχι, επειδή όσο και να αυξάνεται το σχήμα, η περίμετρος μένει ίδια.

00:21:45 Ομιλητής 1: Σε ποιο βήμα πήδηξε ο Ανδρέας και πήγε; Σε ποιο βήμα πήδηξε και πήγε; Στο;

00:21:53 Νίκος: Στο πέμπτο.

00:21:55 Ομιλητής 1: Στο πέμπτο. Έδωσε απάντηση χωρίς να κάνει πίνακα, χωρίς να κάνει τίποτα!]

Ένας μαθητής με καλή μαθηματική επίδοση παρατήρησε ότι είχε παραλειφθεί η ανάδειξη των μαθηματικών στο σημείο του κειμένου που περιέγραφε το πλαίσιο (η περίμετρος αυξάνεται, αυξάνεται και το εμβαδό), δηλαδή τι σήμαινε η κάθε φράση αυτή, πέραν του ότι και οι δυο δείχνουν κάποια ενέργεια, το οποίο είχε ήδη αναφερθεί στο 2<sup>ο</sup> στάδιο. Αφιερώθηκε χρόνος στη συνθήκη που πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά την καταγραφή των στοιχείων και επισημάνθηκε η συνδυαστική αξιοποίηση των οπτικών αναπαραστάσεων. Παράλληλα, έγινε υπενθύμιση από τα ίδια τα παιδιά ενός λάθους που είχε γίνει σε προηγούμενο πρόβλημα από μια μαθήτρια, προκειμένου να αποφευχθεί. Αυτό αφορούσε στο ότι δεν είχε κατανοήσει τη

συνθήκη/τις παραμέτρους που θα καθόριζε/αν τις επιλογές της στον πίνακα, δοκιμάζοντας αν ισχύει η αρχική υπόθεση της κ. Ευτυχιάδου.

[00:26:47 Νίκος: Γιατί πήγαμε στο επόμενο βήμα;

00:26:48 Ομιλητής 1: Στοπ! Δεν έχουμε πάει; Δε θα πάμε στο επόμενο; Έχουμε κάτι άλλο;

00:26:52 Νίκος: Ναι, από μαθηματικά τα άλλα, το 2, το 3, το 4...

00:27:00 Ομιλητής 1: (σιωπή) Συμφωνείτε με αυτό που είπε ο Νίκος; Το συζητήσαμε καθόλου τι μαθηματικά θα λάβουμε υπόψη μας στον πίνακα με βάση το 2 και το 3 και το 4; Τα 'παμε;

00:27:15 Γεωργία: Όχι, δεν τα 'παμε.

00:27:18 Ομιλητής 1: Άμα δεν τα πούμε τι μπορεί να πάθουμε;

00:27:20 Γεωργία: Να μπερδευτούμε πάλι και να πάμε πίσω.

00:27:21 Ομιλητής 1: Τι είναι αυτά όλα, που λέει εδώ πέρα; Πως αν αυξηθεί, η υπόθεση...; Η περίμετρος... θα αυξηθεί...

00:27:29 Φανή: Είναι τα σχήματα που, αν δεν τα προσέξουμε, ίσως να τα χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά.

00:27:33 Ομιλητής 1: Διαφορετικά. Δε θα ακολουθήσουμε αυτό που μας ζητάει. Μπορεί να μπερδευτούμε και να κάνουμε τα δικά μας. Άρα λοιπόν τι θα λάβουμε υπόψη μας για αυτό; Τι μαθηματικά θα κάνουμε όταν λέει «Αν αυξηθεί η περίμετρος»; Τι θα συμβεί; Τι θα δοκιμάσουμε;

00:27:54 Φανή: Να κάνουμε τον πίνακα, τώρα, να το δοκιμάσουμε;

00:27:57 Ομιλητής 1: Ναι, αλλά τι θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας κάθε φορά στον πίνακα; Τι θα πρέπει να κάνουμε;]

Γενικά πάντως, κατά την ανάδειξη των μαθηματικών, τα παιδιά δούλεψαν με άνεση λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες του προβλήματος.

[00:25:24 Ομιλητής 1: Πολύ σωστά! Για να δούμε λίγο, γιατί είναι σημαντικό να καταγράψουμε τι μαθηματικά ξέρω για το εμβαδόν και την περίμετρο;

00:25:31 Γεωργία: Είχα πει ότι ήθελα για το εμβαδόν να κάνουμε 26 και ένα, η μεγάλη πλευρά 26 και ένα η μικρή, για να βγει...

00:25:44 Ομιλητής 1: Γιατί τα είχες κάνει;

00:25:46 Γεωργία: Και... εμ... τα είχα κάνει πολλαπλασιασμό για το εμβαδόν, αλλά μετά για την περίμετρο δεν έβγαινε...

00:25:55 Ομιλητής 1: Δεν είχες σκεφτεί τη συνθήκη που έπρεπε να λάβεις υπόψη σου;

00:25:57 Γεωργία: Ναι.

00:25:59 Φανή: Πήρε την περίμετρο και την έκανε πολλαπλασιασμό επί ένα.

00:26:03 Γεωργία: Ναι, για να μου βγει το εμ... γιατί το... να βγει το εμβαδόν 26, αλλά είχα κάνει λάθος, γιατί έπρεπε να βγει η περίμετρος 26!

.....

00:28:08 Φανή: Θα κάνουμε πολλαπλασιασμό δύο πλευρές. ΤΟ... εεεε!

00:28:10 Ομιλητής 1: Τι μαθηματικά θα κάνουμε για να αυξάνεται η περίμετρος; Αυτό δε λέει;

00:28:16 Φανή: Προσθέτουμε.

00:28:18 Ομιλητής 1: Τι θα προσθέτουμε;

00:28:20 Νίκος: Εε, σιγά σιγά...

00:28:22 Φανή: Θα προσθέτουμε σιγά σιγά αριθμούς για να δούμε αν...

00:28:25 Ομιλητής 1: Τι θα παθαίνει, για ποιο λόγο; Τι να παθαίνει η περίμετρος;

00:28:29 Φανή: Να αυξηθεί για να δούμε αν θα μεγαλώσει...

.....

00:29:04 Ομιλητής 1: Το 4; Αυτό παιδιά θα το κάνουμε; Θα την αυξάνουμε την περίμετρο που ήταν η υπόθεση;

00:29:15 Όλοι (φασαρία): Ναι, όχι.

00:29:15 Φανή: Ναι!

00:29:18 Ομιλητής 1: Ναι, είναι η προϋπόθεση αυτό. Να την αυξάνουμε πρέπει την περίμετρο. Και τι δεν είμαστε σίγουροι και πρέπει να ελέγχουμε;

00:29:25 Φανή-Γεωργία: Αν θα αυξηθεί το εμβαδόν!

00:29:27 Ομιλητής 1: Πώς θα γράψουμε, λοιπόν, επιγραμματικά με μαθηματικά;

00:29:30 Νίκος: «Έψιλον και».

00:29:31 Ομιλητής 1

«Έψιλον συν». Επειδή όμως δεν είμαστε σίγουροι, τι άλλο μπορεί να βάλουμε, έψιλον και; Ή; Τι μπορεί; Είμαστε σίγουροι ότι πάντα θα αυξάνεται; Εσείς το είπατε.

00:29:43 Νίκος: Έψιλοοοοο... ήηη...

00:29:43 Φανή: Όχι. Έψιλοοοοοοο... μείον!

00:29:47 Νίκος: Ίσον!

00:29:47 Ομιλητής 1: Μείον ή μπορεί και να μένει και ίδιο.

00:29:52 Γεωργία: Ναι.

00:29:56 Ομιλητής 1: Αυτά όλα θα τα εξετάσουμε, εντάξει;

00:29:57 Ιωάννης: Ναι.

00:30:00 Ομιλητής 1: Αλλάζοντας τι θα τα εξετάσουμε αυτά, όμως;

00:30:02 Νίκος: Την περίμετρο.

00:30:03 Ομιλητής 1: Την περίμετρο, το πλαίσιο εδώ πέρα. Εντάξει; Ωραία. Πάμε λοιπόν στο επόμενο βήμα να κάνουμε ένα πίνακα.]

Στο 4<sup>ο</sup> στάδιο οι μαθητές έκαναν έναν πίνακα και τον χώρισαν σε στήλες. Άρχισαν να αναρωτιούνται τι αριθμούς θα γράψουν στα μήκη των πλευρών, αφού δεν τους το έλεγε στο πρόβλημα! Ο εκπαιδευτικός εξήγησε ότι οι ίδιοι θα έπρεπε να σκεφτούν, απλά θα έπρεπε να βρουν έναν τρόπο που θα ακολουθήσουν, ώστε να μην μπερδευτούν κατά τη διερεύνηση. Στη φάση αυτή, δόθηκε η ευκαιρία να γίνει συζήτηση για τις περιπτώσεις που μπορεί να επαλήθευαν τον ισχυρισμό του προβλήματος, άρα θα έπρεπε να καταγράψουν παραδείγματα που θα αυξάνονταν η Π και το Ε, αλλά θα έπρεπε να σκεφτούν ίσως και περιπτώσεις που να μην επαλήθευαν την ανακάλυψη, δηλαδή κάποια αντιπαραδείγματα.

[00:32:36 Ομιλητής 1: Είναι υπόθεση μεν, πρέπει να την εξετάσουμε να δούμε αν γίνεται πάντα. Για να λέει ότι γίνεται ΠΑΝΤΑ σημαίνει ότι ΚΑΠΟΙΕΣ φορές ΜΠΟΡΕΙ να γίνεται;

00:32:44 Γεωργία: Ναι, αλλά μπορεί τις περισσότερες.

00:32:46 Ομιλητής 1: Α, μπράβο! Ωραία! Άρα σίγουρα και σε κάποιες γίνεται, αλλά εμείς θα ψάξουμε να βρούμε και αυτές που μπορεί να μη γίνεται. Αυτό ξέρετε πώς το λέμε στα μαθηματικά; Και όχι μόνο στα μαθηματικά.

00:32:56 Φανή: Αναγνώριση;

00:32:57 Ομιλητής 1: Όχι, όχι αντιπαράδειγμα λέγεται. Δηλαδή μπορεί να σας πει κύριε Ευτυχιάδου... «ΝΑ... ξέρω αυτό το παράδειγμα που ισχύει ΚΑΤΙ Τέτοιο». Θα το κάνουμε και εμείς, αλλά μπορεί μετά, παράδειγμα η Γεωργία, που δεν είναι πολύ, έτσι, ευκολόπιστη, να φέρει ένα αντιπαράδειγμα το οποίο να καταρρίπτει και να αναιρεί τον ισχυρισμό της κυρίας Ευτυχιάδου. Καταλάβατε τι σημαίνει αντιπαράδειγμα;

00:33:21 Γεωργία: ΝΑΙ!]

Γενικά, ενώ γίνονταν σε αυτή τη φάση πολλές προτάσεις με αριθμούς που θα αντιπροσώπευαν τα μήκη των πλευρών, εν τέλει προχώρησαν ικανοποιητικά. Κατά την καταγραφή, ο εκπαιδευτικός είχε υποστηρικτικό και καθοδηγητικό ρόλο στο να ακολουθήσουν έναν μεθοδικό τρόπο, ρωτώντας σε κάθε περίπτωση τι θα άλλαζε και τι θα έμενε ίδιο στα μήκη των πλευρών.

[00:30:33 Ομιλητής 1: Για να μην το ξεχάσουμε και πώς θα την αυξάνουμε την περίμετρο, που το είπε και η Φανή πριν;

00:30:37 Ελένη: Μεγαλώνοντας τα νούμερα στα μήκη.

00:30:42 Ομιλητής 1: Μεγαλώνοντας τα νούμερα στα μήκη.

00:30:45 Φανή: Θα μας δίνετε εσείς την περίμετρο ή το εμβαδόν για να βρούμε εμείς τα άλλα.

00:30:48 Ομιλητής 1: Εγώ θα τα πω;;;

00:30:50 Ομιλητής Ιωάννης- Γεωργία: Όχι!

00:30:51 Ομιλητής 1: Εσείς πρέπει να τα πείτε.

00:30:52 Γεωργία: Όχι! Ναι, εννοώ ότι θα μας δίνετε, ας πούμε, τον αριθμό της περιμέτρου...

00:30:55 Ομιλητής 1: Όχι, εσείς θα τα πείτε.

00:30:57 Βασιλική- Γεωργία: Μα πώς;

00:30:58 Ομιλητής 1: Υπάρχει αριθμός στο πρόβλημα;

00:31:00 Φανή: Όχι! Πρέπει να βρούμε τα μήκη...

00:31:03 Ομιλητής 1: Ξεκινάμε από κάποιο μήκος πλευρών.

00:31:06 Φανή: Για να τα κάνουμε μετά τις πράξεις και να βρούμε το εμβαδόν και...

00:31:09 Ομιλητής 1: Ωραία, πάμε. Παρτέρι πρώτο...

00:31:10 Φανή: ΑΒΓΔ!

00:31:41 Γεωργία: Κυρία, μπορούμε να το κάνουμε και κάθετα το ορθογώνιο;

00:31:45 Ομιλητής 1: Εσύ θα μας πεις.

00:31:46 Γεωργία: Ναι μπορούμε.

00:31:47 Ομιλητής 1: Έχει σημασία η θέση του;

00:31:48 Γεωργία: Όχι.

00:31:48 Ομιλητής 1: Άμα το βάλω στραβά ή ίσια ή ξαπλωτό ή όρθιο;

00:31:53 Σωτηρία: Όχι, παραμένει ορθογώνιο.

00:31:53 Κατερίνα: Δεν ξέρουμε αν είναι... (φασαρία) Δεν ξέρουμε αν είναι ίσιο, δεν μπορούμε να βρούμε τις διαστάσεις.

00:32:00 Ομιλητής 1: Δεν μπορούμε να βρούμε; Να ξεκινήσουμε από κάτι; Να δώσουμε ένα σημείο εκκίνησης;

00:32:04 Κατερίνα: Από πούuuu;

00:32:05 Ομιλητής 1: Σκέψου εσύ. Ένα παρτέρι με ΤΙ διαστάσεις; Μη βάλουμε μεγάλα νούμερα. Μονοψήφιους αριθμούς.

.....

00:33:22 Ομιλητής 1: Αλλά πρέπει να το βρείτε εσείς όμως αυτό, αλλάζοντας τους;

00:33:27 Φανή: Όρους.

00:33:28 Ομιλητής 1: Ποιους όρους;

00:33:30 Ανδρέας: Τα μήκη.

00:33:31 Ομιλητής 1: Τα μήκη, τους αριθμούς των μηκών. Εντάξει; Για να δούμε λοιπόν. Θέλω να σκεφτείτε και σε ζευγαράκια, ξεκινώντας από αριθμούς μικρούς, δε χρειάζεται να είναι μεγάλοι.

.....

00:34:21 Ομιλητής 1: Ψάξτε, λοιπόν, να βρείτε ένα παράδειγμα που να ισχύει η υπόθεση της κυρίας Ευτυχιάδου.

00:34:26 Φανή: Ααααα...

00:34:27 Ομιλητής 1: Τι θα πρέπει να συμβαίνει για να ισχύει η υπόθεσή της; (σιωπή)

00:34:41 Φανή: Ότι αν αυξηθεί η περίμετρος, θα αυξάνεται πάντα και το εμβαδόν του.

00:34:45 Ομιλητής 1: Ωραία. Αυτό! Κάντε το! Υπάρχει παράδειγμα για αυτό; Πώς μπορεί να το ισχυρίζεται κάποιος; Παράδειγμα θέλουμε. (ενώ δουλεύουν) Εάν βρείτε μια περίπτωση ενός ορθογωνίου... Τι θα κάνετε για να αυξήσετε την περίμετρο;

00:35:34 Φανή: Θα αφήσουμε το μικρό ίδιο.

00:35:35 Ομιλητής 1: Τη μικρή πλευρά ίδια.

00:35:36 Φανή: Και θα προσθέτουμε από τη μεγάλη.

00:35:39 Ομιλητής 1: Για δοκιμάστε, λοιπόν, αυτό. Θα αυξηθεί η περίμετρος μ' αυτό τον τρόπο;

00:35:44 Φανή: Ναι. (ενώ δουλεύουν) Κυρία, να πω κάτι!

00:37:07 Ομιλητής 1: Πες το.

00:37:10 Φανή: Παρατηρούμε ότι... Εεε... όσο μεγαλώνει... όσο μεγαλώνει... αυξάνεται η μεγάλη πλευρά, εεε... το εμβαδόν πλησιάζει την περίμετρο.

00:37:20 Ομιλητής 1: Πλησιάζει την περίμετρο, εντάξει. Αυτό, βέβαια, μπορεί να είναι και τυχαίο λίγο. Μη βιάζεστε να βγάλετε συμπεράσματα. Να συλλέξουμε λίγο δεδομένα και από άλλες περιπτώσεις. Θέλω να μου πείτε κατά πόσο αυξάνεται η μεγάλη πλευρά; Την αυξήσαμε πολύ; Την αυξήσαμε λίγο; Ενώ η μικρή παρέμενε ίδια...

00:37:39 Φανή: Αρκετά.

00:37:40 Αθανασία: Επειδή αυξάνεται κατά ένα, οπότε...

00:37:42 Ομιλητής 1: Πολύ ή λίγο;

00:37:45 Αθανασία: Λίγο.

00:37:46 Ομιλητής 1: Λίγο. Θέλετε να δοκιμάσουμε μια περίπτωση που να αυξάνεται... Πόσο ας πούμε για παράδειγμα;

00:38:05 Ελένη: Να δοκιμάσουμε να την αυξήσουμε 5 νούμερα.

00:38:07 Ομιλητής 1: 5 νούμερα... από το αρχικό. (σιωπή) Αλλάζει τώρα το μοτίβο. Τώρα θα αυξήσουμε πολύ τη μεγάλη πλευρά. Αν από 5 την αυξήσουμε 5 μονάδες, θα γίνει;

00:38:19 Ελένη- Φανή: 10.

00:38:20 Ομιλητής 1: 10. Η άλλη;

00:38:25 Νίκος: Μένει ίδια.

00:39:41 Ομιλητής 1: Λοιπόν, πάμε να αλλάξουμε το μοτίβο. (ενώ δουλεύουν)

00:40:06 Κατερίνα: Ναι. Ισχύει στην περίπτωση αυτή. Στην περίπτωση αυτή, στο μοτίβο αυτό, άλλαξε αυτό που έλεγε η κ. Ευτυχιάδου. Θέλουμε να ψάξουμε να βρούμε παράδειγμα, που μπορεί να μην ισχύει αυτό.

00:40:08 Ομιλητής 1: Ισχύει. Αυξανόταν... Ανδρέα, γιατί έχει δίκιο η κ. Ευτυχιάδου σε αυτήν περίπτωση που αυξάνεται κατά 5 εκατοστά;

00:40:18 Ανδρέας: Επειδή έλεγε ότι θα αυξάνεται και το εμβαδόν του.

00:40:20 Ομιλητής 1: Αυξήθηκε;

00:40:21 Ανδρέας: Ναι.

00:40:22 Ομιλητής 1: Ωραία! Άρα μέχρι στιγμής έχει δίκιο. Πάμε να δούμε άλλη περίπτωση.]

Προβλήματα 10:

| Όνομα Παρ.     | ΜΗΚΗ | ΕΜΒΑΔΟΝ | ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ |
|----------------|------|---------|------------|
| ΑΒΓΔ           | 5    | 2       | 14         |
| ΕΖΗΘ           | 6    | 2       | 16         |
| ΙΚΛΜ           | 7    | 2       | 18         |
| ΝΞΟΠ           | 10   | 2       | 24         |
| ΡΖΤΥ           | 15   | 2       | 34         |
| <del>ΦΧΨ</del> | 10   | 1       | 22         |
| ΦΧΨ            | 10   | 6       | 32         |
| Α'Β'Γ'Δ'       | 20   | 5       | 50         |
| Ε'Ζ'Η'Θ'       | 30   | 4       | 68         |
|                | 40   | 3       | 86         |

Εικ. 25 Συμπλήρωση του πίνακα με τις 3 περιπτώσεις

Έτσι, προέκυψαν τρεις περιπτώσεις (εικ. 25):

- μία πλευρά μεγάλωνε και η δεύτερη παρέμενε ίδια,
- και οι δύο μεγάλωναν ταυτόχρονα και,
- τέλος, η μία μεγάλωνε περισσότερο απ' ό,τι μειωνόταν η δεύτερη.

Όταν σε μία καταγραφή της τελευταίας περίπτωσης παρατήρησαν ότι δεν ίσχυε τελικά η υπόθεση του προβλήματος, έγινε μία ενδιαφέρουσα και εκτενής συζήτηση για το πότε μπορεί να ισχύει τελικά ένα συμπέρασμα και ότι, έστω και αν υπάρχει ένα αντιπαράδειγμα, αυτό αυτομάτως καταρρίπτει οποιοδήποτε ισχυρισμό. Μέσα από την ανταλλαγή ιδεών αναδείχθηκαν λανθασμένοι συλλογισμοί μαθητών.

[00:46:53 Νίκος: Ε, δεν ισχύει πάντα.

00:46:58 Ιωάννης: Α, ναι ναι ναι ναι.

00:47:00 Ομιλητής 1: Αυξήσαμε στο Ε΄Ζ΄Η΄Θ, στο τελευταίο σχήμα, στο τελευταίο παρτέρι, αυξήθηκε η περίμετρος;

00:47:05 Γεωργία: Ναι! Μα, κυρία!

00:47:06 Ομιλητής 1: Το εμβαδόν τι έπαθε;

00:47:09 Γεωργία: Κυρία, τώρα εδώ, δεν κάνουμε αυτό που λέει η άσκηση! Δεν κάνουμε αυτό.

00:47:12 Ομιλητής 1: Τι κάνουμε;

00:47:13 Γεωργία: Κάνουμε... μειώνουμε κιόλας ταααα... πρώτον...

00:47:21 Ομιλητής 1: Τι έλεγε... τι έλεγε η υπόθεση της;

00:47:22 Γεωργία: Η υπόθεση έλεγε το μεγάλο... η μεγάλη....

00:47:30 Ομιλητής 1: Τι έλεγε η υπόθεση;

00:47:32 Φανή: Αν αυξηθεί η περίμετρος...

00:47:33 Ομιλητής 1: Την αυξήσαμε την περίμετρο;

00:47:34 Γεωργία- Φανή: Ναι.

00:47:34 Ομιλητής 1: Απλά με διαφορετικό τρόπο. Την αυξήσαμε, όμως; (φασαρία) Μιλάτε ταυτόχρονα. Θα απαντάτε στην ερώτηση που κάνω.

00:47:38 Γεωργία: Αλλά, κυρία...

00:47:39 Ομιλητής 1: Αυξήθηκε η περίμετρος;

00:47:40 Γεωργία- Φανή: Ναι!

00:47:41 Ομιλητής 1: Έχει σημασία ο τρόπος; Ο ισχυρισμός, η υπόθεση της δεν ισχύει;

00:47:45 Γεωργία: Ναι, αλλά...

00:47:46 Ομιλητής 1: Αλλά τι;

00:47:47 Γεωργία: Έλεγε ότι... να κάνεις... μόνο να μεγαλώσεις...

00:47:49 Ομιλητής 1: Δεν το 'λεγε.

00:47:51 Φανή: Ουσιαστικά αυτό που μας λέει, αυτό που πρέπει να βρούμε είναι αν τελικά πάντα μεγαλώνουν και τα 2.

00:47:59 Ομιλητής 1: Εδώ πέρα ισχύει;

00:48:00 Γεωργία: Ναι!

00:48:01 Ομιλητής 1: Ναι; (φασαρία) Αυξήθηκε το εμβαδόν; 6 5, 3... Ενώ αυξήθηκε η περίμετρος το εμβαδόν αυξήθηκε;

00:48:06 Όλοι: Όχι!

00:48:07 Ομιλητής 1: Άρα αυτό τι είναι; Είναι παράδειγμα ή αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό της;

00:48:10 Φανή: Αντιπαράδειγμα!

00:48:11 Ομιλητής 1: Τι πρέπει να το κάνουμε;

00:48:11 Γεωργία: Αφού τα μήκη...!

00:48:12 Ομιλητής 1: Δεν αυξήθηκε η περίμετρος, Γεωργία; Ποιος θα το εξηγήσει ξανά στη Γεωργία; Βρήκαμε μια περίπτωση που τελικά καταρρίπτεται ο ισχυρισμός της κυρίας Ευτυχιάδου.

00:48:22 Γεωργία: Μπορεί να μην είναι πάντα, αλλά τις περισσότερες φορές τουλάχιστον.

00:48:25 Ομιλητής 1- Φανή: Λέει «Πάντα» (γέλιο) Μαζί το 'παμε!

00:48:30 Ομιλητής 1: Ποιος θα της ξαναεξηγήσει;

00:48:31 Γεωργία: Τις περισσότερες φορές τότε! Οπότε...

00:48:43 Ομιλητής 1: Οπότε βιάζεσαι...(χαμόγελο)

00:48:44 Γεωργία: Οπότε εδώ ό,τι λέει...

00:48:50 Ομιλητής 1: Θα συνεχίσουμε ή φτάνει;

00:48:51 Γεωργία: Φτάνει, κυρία, αφού έχουμε καταλάβει...

00:48:52 Φανή: ΟΧΙ! Γιατί δεν έχουμε πει από πού θα...

00:48:56 Γεωργία: Τι λες το 'χουμε βρει!

00:48:59 Ομιλητής 1: Βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα. Χρειάζεται να συνεχίσουμε;

00:49:00 Γεωργία: Όχι!

0:49:04 Κατερίνα: Όχι... Αλλά εγώ ήθελα να πω ότι... εεε... δεν είναι μόνο τα περισσότερα, γιατί άμα κάναμε κι άλλες φορές έβγαίνε... ίσως έβγαίναν περισσότερα τα άλλα.

00:49:16 Νίκος: Θα έβγαίνε κι άλλο.

00:49:16 Ομιλητής 1: Ακριβώς!

00:49:17 Κατερίνα: Δεν είναι μόνο μια φορά.

.....

00:58:22 Νίκος: Εξαρτάται άμα λέει πολλές φορές ή άμα λέει πάντα.

00:58:54 Ομιλητής 1: Έλεγε πολλές φορές ή πάντα, όμως;

00:58:56 Νίκος: Πάντα!

00:58:57 Ομιλητής 1: Άρα μπορούμε να πούμε ότι έχει δίκιο τελικά; Πάμε στο 5ο;]

Ένας μαθητής (Ιωάννης) προσπάθησε να εξηγήσει τι μπορεί να συνέβη με την κ. Ευτυχιάδου, δίνοντας έμφαση στην αξία του μαθηματικού συλλογισμού με τη χρήση παραδείγματος και αντιπαραδείγματος, αναφέροντας πως μάλλον θα της έτυχαν πολλές περιπτώσεις όπως οι δύο πρώτες, που εξέτασαν και οι ίδιοι, και για αυτό η κυρία γενίκευσε τον κανόνα!

[00:59:06 Κατερίνα: Κυρία, και να ήτανε τις περισσότερες φορές, άμα κάνω, άμα συνεχίσουμε, μπορεί να βγούνε τα άλλα περισσότερες.

[00:16:16 Ομιλητής 1: Εάν δεν είχαμε κάνει, κατ' αρχήν, τι; Τι τους βοήθησε;

00:16:20 Ιωάννης: Ο πίνακας.

00:14:38 Ομιλητής 1: Εάν δε φτιάχναμε έναν πίνακα... Τι κάναμε στον πίνακα;

00:16:25 Ιωάννης: Γράψαμε, καταγράψαμε τους αριθμούς και...

00:16:28 Ομιλητής 1: Ναι... με τυχαίο τρόπο;

00:14:38 Ιωάννης: Ό,τι βρίσκαμε.

00:14:38 Ομιλητής 1: Τυχαίοι ήταν οι τρόποι που ακολουθήσαμε;

00:14:38 Φανή: ΤΟΥΣ. Κάναμε διάφορους τρόπους...

00:16:35 Ιωάννης: Κάναμε διάφορους τρόπους μέχρι να καταλήξουμε στο συμπέρασμα.

00:14:38 Ομιλητής 1: Χμ...

00:16:41 Ιωάννης: Καταγράψαμε τους αριθμούς, αλλά μάλλον η κυρία Ευτυχιάδου δεν πρόσεξε. Έκανε τόσα πολλά που βρήκε ότι το εμβαδόν θα ήτανε... θα αυξανόταν και θα σκέφτηκε «γιατί να κάνω άλλα; Θα είναι σωστό.».]

*6ο Διδακτικό Επεισόδιο*

Στο συγκεκριμένο διδακτικό επεισόδιο διαφαίνεται η ευχέρεια που έχουν αρχίσει να αποκτούν τα παιδιά αντιμετωπίζοντας με κριτικό αναστοχασμό το κείμενο, κάνοντας επεξεργασία του και επεκτείνοντας αυτό που καλούνται να επιλύσουν, συνδέοντάς το με προϋπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις.

Συγκεκριμένα, κατά την επίλυση του 8<sup>ου</sup> προβλήματος κατανόησαν αμέσως το ζητούμενο, τονίζοντας την ανάγκη επεξεργασίας του κειμένου και αναφέροντας ενδεχόμενες απαντήσεις.

[00:03:18 Αθανασία: Πρώτα καταρχήν θα βρούμε την ερώτηση. «Φτάνουν τα 1.200€ που θα διαθέτει το σχολείο σας για την ολοκλήρωση των εργασιών;».

00:03:35 Ομιλητής 1: Είναι μια ερώτηση. Ποια είναι αναμενόμενη απάντηση που μπορεί να είναι; Ποια είναι η πιθανή απάντηση;

00:03:41 Αθανασία: Ναι ή όχι.

00:03:42 Ομιλητής 1: Υπάρχει κάπου αλλού, κάποιο σημείο το οποίο μας ζητάει κάτι η κυρία Ευτυχιάδου; Το πρόβλημα δηλαδή της κυρίας Ευτυχιάδου είναι αυτό... ξεκάθαρα; Αθανασία.

00:04:00 Αθανασία: Όχι. Πρέπει να...

00:04:04 Ομιλητής 1: Άμα, δείτε στο πρώτο βήμα. Φανή.

00:04:14 Φανή: Ε, μας ζητάει να βρούμε κάποια στοιχεία που δεν έχει γράψει ο συγγραφέας.

00:04:30 Ομιλητής 1: Θες να πεις από πού το κατάλαβες για να το υπογραμμίσουμε;

00:04:38 Φανή: «Να σκεφτείτε ποια σημαντικά γλωσσικά στοιχεία παρέλειψε ο συγγραφέας».

.....

00:05:36 Ομιλητής 1: Τι σας ζητάει να κάνετε; Ποια ενέργεια σας ζητάει να κάνετε;

00:05:52 Ιωάννης: Θα διαβάσουμε το πρόβλημα και να καταλάβουμε τι λέει.

00:05:56 Ομιλητής 1: Ναι, πρέπει να το σκεφτούμε, να το καταλάβουμε κιόλας. Τι άλλο;

00:05:59 Φανή: Να το επεξεργαστούμε!]

Ως εκ τούτου, μετέβησαν γρήγορα στο 2<sup>ο</sup> στάδιο εντοπίζοντας τα γλωσσικά στοιχεία που συμπεριέλαβε ο συγγραφέας του κειμένου. Κατά τον χωρισμό του σε φράσεις, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα (εικ. 26) αρκετοί μαθητές σημείωναν πάνω από καθεμία το νόημά της/τον ρόλο της, δηλαδή σε ποια ερώτηση απαντούσε (π.χ.: «τα δύο γήπεδα/ η κατασκευαστική εταιρεία»- ποια; τα ρήματα- ενέργεια, «για την ολοκλήρωση των εργασιών»- μετατροπή ΟΣ σε ΡΣ που εκφράζει τον σκοπό, «που»- αντωνυμία που αναφέρεται στο υποκείμενο, το πλαίσιο). Επίσης, στην παρακάτω εικόνα (εικ. 27) φαίνεται ο τρόπος που ερμήνευσε ο μαθητής κάθε σημαντικό γλωσσικό στοιχείο και το μαθηματικό νόημα που απέδωσε σε αυτό.

8. Τώρα ήρθε η ώρα να **διαβάσετε** το παρακάτω πρόβλημα και να **σκεφτείτε** ποια **σημαντικά γλωσσικά στοιχεία** παρέλειψε ο συγγραφέας του κειμένου:

① πότε, ② ενέργεια ③ τι θα συμβεί ④  
 Την επόμενη σχολική χρονιά προγραμματίζεται να επικαλυφθούν τα δύο γήπεδα,  
 του βόλεϊ και του μπάσκετ ⑤ με αθλητικό ελαστικό τάπητα ⑥ Η κατασκευαστική  
 εταιρεία, ⑦ ποιος ⑧ που θα αναλάβει την εγκατάσταση ⑨ ενέργεια ⑩ 20 ευρώ ανά τ.μ.  
 για το θρούπε ⑪  
 Φτάνουν τα 1.200 ευρώ, που διαθέτει το σχολείο σας, για την ολοκλήρωση των  
 εργασιών (Ναι/Όχι)

Εικ. 26 Γλωσσικοί ελιγμοί μαθητή

8ο **πρόβλημα**  
 2ο **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
 1. πότε;  
 2. ενέργεια (τι γίνεται);  
 3. τι θα συμβεί;  
 4. ποιος;  
 5. με τι;  
 6. ποιος;  
 7. ενέργεια (εγκατάσταση)  
 8. ενέργεια  
 9. πόσο;  
 10. ηρέπει να θρούπε (πόσο);  
 11. ποιος διαθέτει (πού ετο οροιο)  
 12. σκοπός να επιταχυνθούν τα  
 γήπεδα  
 3ο  
 (2+3)+4  
 Ε: μπαίνει  
 Ε: βολέϊ  
 5) Μονάδες μέτρησης  
 Ε (6+7)  
 6  
 8 ή 11 κόστους  
 9) 20 Ε/τ.μ. → ταυρίζουν  
 10) κόστος 6 Ε  
 1.200 Ε  
 11 Ε όλη  
 γηπέδων.

Εικ. 27 Η επεξεργασία του κειμένου κατά το 2° & 3° στάδιο επίλυσης

Ενδεικτικά, παρατίθεται απόσπασμα του διαλόγου ανάμεσα σε δύο μαθήτριες (Φανή-Γεωργία), ενώ επεξεργάζονται το κείμενο και κάνουν κατάλληλους γλωσσικούς ελιγμούς, εξηγώντας τον τρόπο που σκέφτονται (εικ. 27), ανταλλάσσοντας ιδέες και κρατώντας σημειώσεις πάνω από φράσεις:

[00:09:32 Φανή: «Ποιος» θα το κάνουν.

00:09:35 Ομιλήτης 1: Μόνο.

00:09:39 Φανή: Ποιος. Και τι έκανε.

00:09:43 Ομιλητής 1: Αλλά μήπως πρέπει να χωρίσουμε το ποιος και το τι κάνει;

00:09:47 Φανή: Ναι.

00:09:55 Γεωργία: Σίγουρα;

00:09:57 Φανή: Στο «κοστολόγησε», ναι. «Ποιος» εδώ και στο «Κοστολόγησε».

00:10:04 Γεωργία: Μπορεί το «κοστολόγησε» να το βάλουμε ΜΟΝΟ του, γιατί είναι έτσι, λίγο ένα... μια ενέργεια που λένε.

.....

00:10:43 Φανή: Και φτάνουν τα 1.200€ που διαθέτει το σχολείο σας, γραμμή.

00:10:48 Ομιλητής 1: Ποιος είναι ο ρόλος της πρότασης, της φράσης μάλλον;

00:10:54 Φανή: Το αν φτάνουν τα χρήματα.

00:10:58 Ομιλητής 1: Ναι...

00:11:00 Φανή: Είμαστε στο...

00:11:00 Ομιλητής 1: Γιατί το έχει βάλει αυτό εδώ πέρα;

00:11:06 Φανή: Για να βρούμε αν θα φτάνουν.

00:11:09 Γεωργία: Μας ρωτάει, δηλαδή. Για να δούμε αν θα φτάνουν.

00:11:09 Φανή: Ναι.

00:11:14 Γεωργία: Δεν μας ρωτάει να το βρούμε;

00:11:14 Ομιλητής 1: Ναι.

00:11:19 Φανή: Για την ολοκλήρωση των εργασιών. (σιωπή) Τώρα εδώ πέρα μπορεί να μην έπρεπε να το χωρίσουμε... δεν ξέρω.

00:11:28 Γεωργία: Γιατί; Ποιος ο ρόλος εδώ πέρα αυτής της φράσης; Και μετά για... για ποιο...

00:11:34 Φανή: Είναι σημαντικό, γιατί μας λέει για την ολοκλήρωση.

00:11:38 Γεωργία: Μπορεί, όχι για την αρχή, ας πούμε.

00:11:40 Φανή: Όλου, όλο... και του βόλει και του μπάσκετ.]

Δόθηκε έμφαση στον ρόλο των ερωτήσεων που περιγράφουν το πλαίσιο/τις συνθήκες του προβλήματος και σε ποια φάση της επίλυσης του προβλήματος θα γίνει αντιληπτό το γλωσσικό στοιχείο που έχει παραλείψει ο συγγραφέας. Μια μαθήτρια (Φανή) επισήμανε ότι το τελευταίο θα γίνει μεταξύ του 2<sup>ου</sup> και 3<sup>ου</sup> σταδίου, καθώς κινούνται μπρος-πίσω στο κείμενο και συνδυάζουν με τα μαθηματικά, αλλά και επειδή πλησιάζουν στην επίλυσή του. Για τον λόγο αυτό έγινε και με αβίαστο τρόπο η μετάβαση από το 2<sup>ο</sup> στάδιο στο 3<sup>ο</sup>.

[00:24:49 Ομιλητής 1: Σε ποιο σημείο της επίλυσης θα καταλάβουμε αυτό το στοιχείο που λείπει; (σιωπή) Σε ποιο σημείο λέτε θα το ανακαλύψουμε;

00:25:01 Φανή: Ότι κάτι λείπει;

00:25:04 Ομιλητής 1: Ναι. Σε ποια φάση, που το λύνουμε τώρα, στο δεύτερο βήμα... στο τρίτο... στο τέταρτο; Ανάμεσα σε ποια, για παράδειγμα, και γιατί;

00:25:13 Φανή: Στο δεύτερο και στο τρίτο.

00:25:15 Ομιλητής 1: Στο δεύτερο και στο τρίτο.

00:25:17 Φανή: Γιατί καθώς κινούμαστε μπρος πίσω και συνδυάσαμε τώρα τα μαθηματικά...

00:25:24 Ομιλητής 1: Τώρα θα τα συνδυάσουμε, ναι.

00:25:25 Φανή: ΤΩΡΑ θα τα συνδυάσουμε, ναι... Καταλαβαίνουμε... Επειδή είμαστε κοντά προς την επίλυση του...

00:25:32 Ομιλητής 1: Ωραία.

00:25:33 Φανή: Προβλήματος, καταλαβαίνουμε τι μας λείπει για να το βρούμε.]

Στην 3<sup>η</sup> φάση, λοιπόν, κατά τη σύνδεση των μαθηματικών που γνώριζαν με την πρώτη φράση «Την επόμενη σχολική χρονιά», η οποία φανερώνει τον χρόνο («πότε»), επισημάνθηκε ότι δεν αναδεικνύει κάποια σημαντική πληροφορία πέραν του ότι αποτελεί δήλωση μιας μελλοντικής ενέργειας.

[00:25:42 Ομιλητής 1: Πρώτη [φράση]. Τι μαθηματικά ξέρουμε; Χρειάζεται κάτι εδώ πέρα;

00:25:49 Γεωργία: Τον χρόνο.

00:25:50 Ομιλητής 1: Οπότε δείχνει τον χρόνο. Ο χρόνος είναι το πλαίσιο. Εντάξει;

.....

00:26:42 Ομιλητής 1: Υπάρχει κάποιος ρόλος που υπάρχει;

00:26:45 Αφροδίτη: Την επόμενη χρονιά.

00:26:46 Ομιλητής 1: Δηλαδή, τι καταλαβαίνουμε όταν λέει «την επόμενη σχολική χρονιά»;

00:26:47 Αφροδίτη: Μετά τις διακοπές.

00:26:49 Ομιλητής 1: Ναι. Ποια χρονική στιγμή; Στο...;

00:26:55 Αφροδίτη: Στο μέλλον.

00:26:56 Ομιλητής 1: Άρα δεν έχει γίνει. Θα το γράψουμε με κάποιο τρόπο στα μαθηματικά; Υπάρχει τρόπος;

00:27:09 Φανή: Α, κυρία, θα βάλουμε αριθμό!

00:27:11 Ομιλητής 1: Τι αριθμό να βάλουμε;

00:27:12 Φανή: Να βάλουμε 2050.

00:27:14 Ομιλητής 1: Τυχαίο εννοείς; Εντάξει, δεν είναι απαραίτητα... Τα μαθηματικά δεν είναι μόνο αριθμοί, είναι και έννοιες. Είναι η έννοια του χρόνου εδώ πέρα, αλλά νομίζω πως δεν επηρεάζει την επίλυση του προβλήματος. Εντάξει, απλά καταλαβαίνουμε ότι δεν έχει γίνει. Ορίστε;

00:27:30 Αφροδίτη: Να βάλουμε 2050.

00:27:31 Ομιλητής 1: Δεν χρειάζεται. Θα το χρησιμοποιήσουμε για κάποιο λόγο αυτό;

00:27:31 Φανή- Ανδρέας: Όχι!

00:27:35 Ομιλητής 1: Άμα ήτανε τόσο σημαντικό, δεν θα είχε ένα έτος;

00:27:36 Όλοι: Μμμ...

Παρόλα αυτά, δόθηκε η αφορμή να γίνει μία σύντομη, αλλά ενδιαφέρουσα συζήτηση γύρω από το πώς θα μπορούσε να αξιοποιηθεί η έννοια του χρόνου σε μία άλλη περίπτωση και να αναδειχθεί μια μαθηματική έννοια μέσα από μια τέτοια γλωσσική επιλογή. Μία μαθήτρια (Αθανασία) ανέφερε εύστοχα ένα τέτοιο παράδειγμα.

[00:27:36 Ομιλητής 1: Ίσως να ρωτούσε κάτι άλλο μετά. Αν έδινε τον χρόνο, για παράδειγμα, με συγκεκριμένη ημερομηνία, τι θα μπορούσε να ζητάει; Αν ήταν σημαντική πληροφορία αυτό. Αν υπήρχε για κάποιο λόγο, τι θα μπορούσε να ζητάει το πρόβλημα; Αθανασία.

00:27:47 Αθανασία: Αν, ξέρω γω, 10 πλάκες από, 10 πλάκες από τον τάπητα αυτό [που αναφέρει το πρόβλημα] έφταναν για να γίνει η επικάλυψη ενός τετραγωνικού μέτρου σε μία μέρα, θα έφτανε ένας χρόνος για την επικάλυψη των δύο γηπέδων;

00:28:06 Ομιλητής 1: Πολύ ωραία. Τότε γίνεται μαθηματική πληροφορία που θα χρησιμοποιήσουμε! Τέλεια! Κάτι άλλο; Σκεφτήκατε κι άλλο;]

Ένας άλλος μαθητής (Νίκος) διατύπωσε άλλο πρόβλημα.

[00:28:19 Νίκος: Άμα έλεγε ότι για να φέρουν αυτές... ότι 10 πλάκες θέλουν μισό χρόνο. Πόσες θα θέλουν για ενάμιση χρόνο;].

Στο 4<sup>ο</sup> βήμα συνέδεσαν τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα, τις οποίες ήδη είχαν καταγράψει σε λίστα, με τα μαθηματικά που γνώριζαν. Αναδείχθηκαν, λοιπόν, ΟΣ και ΡΣ: «να επικαλυφθούν= εμβαδόν, με ελαστικό τάπητα= μονάδα μέτρησης και αντιπαραβολή με το πρώτο πρόβλημα και τη μονάδα μέτρησης που είχε, δηλαδή τα κομμάτια γκαζόν, θα αναλάβει την εγκατάσταση= ενέργεια επικάλυψης επιφάνειας, δηλαδή εύρεσης Ε, κοστολόγησε= τιμή κόστους, αριθμός= τιμή κόστους, η φράση με το ζητούμενο στο οποίο έβαλαν ερωτηματικό και πρέπει να απαντηθεί με ναι ή όχι= κόστος σε χρήματα, εμβαδόν όλων των γηπέδων».

[00:30:05 Ομιλητής 1: Να επικαλυφθούν, λέει. Δηλαδή;

00:30:10 Ιωάννης: Ότι θαααα....

00:30:12 Ομιλητής 1: Πού πηγαίνει το μυαλό σου όταν ακούς «να επικαλυφθούν»; (φασαρία) Σε ποια διαδικασία; (σηκώνουν πολλοί μαθητές χέρι/φασαρία)

00:30:19 Ομιλητής 1: Με τι τρόπο, πώς; Πώς θα γίνει επικάλυψη, με ποιο τρόπο θα γίνει η τοποθέτηση;

00:30:26 Ιωάννης: Θα τις τοποθετούσα. Στο εμβαδόν.

.....

00:32:03 Ομιλητής 1: Όταν λέμε το πλαίσιο εδώ πέρα, το με τι θα γίνει η επικάλυψη, με αθλητικό ελαστικό τάπητα, τι μαθηματικά θα χρησιμοποιήσουμε για αυτό;

00:32:13 Γεωργία: Περίμετρο. (διστακτικά)

00:32:16 Ομιλητής 1: Γιατί γύρω γύρω θα μπει ο τάπητας;

00:32:19 Γεωργία: Όχι! Το μέσα. Αχ, κυρία... Το εμβαδόν!

00:32:22 Ομιλητής 1: Όταν δείχνει το εμβαδόν, «με τι», όμως;

00:32:28 Γεωργία: Με ελαστικό τάπητα.

00:32:30 Ομιλητής 1: Στα μαθηματικά, πώς το λέμε το «με τι» για το εμβαδόν;

00:32:35 Γεωργία: Τετραγωνικά μέτρα. Όπως το πάρκο με το γρασίδι με το γκαζόν.

.....

00:33:52 Ομιλητής 1: «Που θα αναλάβει την εγκατάσταση».

00:33:58 Φανή: Ενέργεια.

00:33:59 Ομιλητής 1: Ενέργεια. Τι μαθηματικά έχουμε;

00:34:04 Φανή: Ε, πάλι εμβαδόν.

00:34:11 Νίκος: Α, μαθηματικά. Ενέργεια εγκατάστασης κάποιου πράγματος είναι η επικάλυψη επιφάνειας, δηλαδή το εμβαδόν.

00:34:25 Ομιλητής 1: Τι μαθηματικά έχουμε στο «κοστολόγησε»;

00:34:29 Φανή: Τιμή.

.....

00:36:01 Ομιλητής 1: Ποιος θα επαναλάβει τι σημαίνει το 10; Ιωάννη.

00:36:06 Ιωάννης: Τιμή κόστους σε ευρώ.

.....

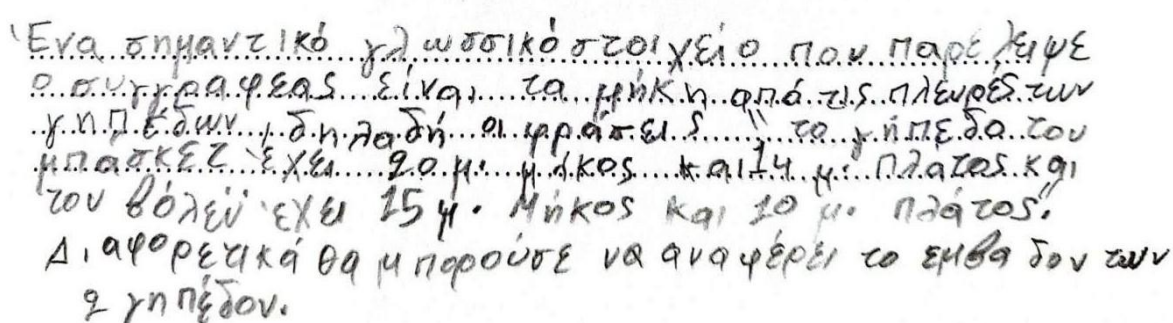
00:36:17 Ομιλητής 1: Το 11 και το 12; Ποιο παιδάκι θα το πει;

.....

00:37:25 Ομιλητής 1: Επειδή πρέπει να το βρούμε, τι πρέπει να κάνω, να βάλω, όταν δεν το ξέρω, αφού πρέπει να το βρούμε;

00:37:33 Γεωργία: Ερωτηματικό! Γιατί είναι ναι ή όχι, αν φτάνουνε.]

Στο 5<sup>ο</sup> βήμα επίλυσης, βρήκαν το γλωσσικό στοιχείο που παρέλειψε ο συγγραφέας και μάλιστα το διατύπωσαν ορθά με δύο διαφορετικούς τρόπους: «τα μήκη των πλευρών των γηπέδων» και «το εμβαδόν τους» (εικ. 28).



Ένα σημαντικό γλωσσικό στοιχείο που παρέλειψε ο συγγραφέας... είναι... τα μήκη από τις πλευρές των γηπέδων... δηλαδή αφραπεί... τα γηπέδα του μπασκετ... έχει 20 μ. μήκος και 14 μ. πλάτος και του βόλεϊ έχει 15 μ. μήκος και 10 μ. πλάτος.  
Διαφορετικά θα μπορούσε να αναφέρει το εμβαδόν των 2 γηπέδων.

Εικ. 28 Η απάντηση ενός μαθητή

[00:38:41 Ομιλητής 1: Ποιος θέλει να πει; Ολοκληρωμένα, όμως. Θα ακούσουμε Ελένη πρώτα και μετά τη Φανή. Δυνατά και καθαρά.

00:38:50 Ελένη: Λείπει... δεν μας λέει το μήκος των γηπέδων.

00:38:56 Φανή: Όχι το μήκος.

00:39:01 Ελένη: Όχι το μήκος. Μία λέξη, που δεν τη θυμάμαι ποια...

00:39:03 Ομιλητής 1: Φανή, να ολοκληρώσει η Ελένη και μετά...

00:39:06 Ελένη: Δεν μας λέει το εμβαδόν των γηπέδων.

00:39:11 Ομιλητής 1: Εάν είχαμε τα μήκη των γηπέδων θα μπορούσαμε να το βρούμε το εμβαδόν τους;

00:39:16 Φανή- Ελένη: Ναι.

00:39:16 Ομιλητής 1: Άρα τι είναι αυτό που λείπει;

00:39:19 Ελένη: Τα μήκη των πλευρών του.

.....

00:39:37 Ομιλητής 1: Μου είπατε ότι λείπουν τα μήκη των πλευρών των γηπέδων. Αν θέλαμε να το εντάξουμε στο δεύτερο βήμα, που είναι τα γλωσσικά στοιχεία, ποιο γλωσσικό στοιχείο λείπει; Αγγελική.

00:39:51 Αγγελική: Πόσα μέτρα είναι τα γήπεδα.]

### 7<sup>ο</sup> Διδακτικό Επεισόδιο

Πριν το τελευταίο έργο (διατύπωση/επίλυση προβλήματος από τα ίδια τα παιδιά) αφιερώθηκε χρόνος για μία γενική ανασκόπηση των προηγούμενων έργων. Στόχος του εκπαιδευτικού/ερευνητή ήταν να ξαναθυμηθούν οι μαθητές σημαντικά λειτουργικά στοιχεία που θα αποτελούσαν βοήθεια για το τελευταίο έργο και ίσως θα ήταν και μία ευκαιρία να τα ανακαλέσουν στη μνήμη τους με μια «αναστοχαστική» ματιά, μιας που στη συνέχεια θα καλούνταν να γίνουν και οι ίδιοι συγγραφείς μαθηματικών κειμένων.

Η ανασκόπηση, λοιπόν, ξεκίνησε από το έργο της ομαδοποίησης των επτά προβλημάτων και εστίασε στα εξής:

- Ποιο πρόβλημα τους είχε μπερδέψει και γιατί.

[00:01:21 Ελένη: Αυτά τα προβλήματα έπρεπε να τα βάλουμε σε ομάδες και το 7 δεν μπορούσαμε να βρούμε μπαίνει...

00:01:25 Ομιλητής 1: Ωραία. Επειδή ο αριθμός «δεν λέει κάτι» στη Βασιλική (απουσίαζε στο πρώτο μάθημα), δεν τη βοηθάει αυτό να καταλάβει. Γενικά, τα προβλήματα ως προς τι τα ομαδοποιήσαμε;

00:01:30 Ελένη: Ως προς το εμβαδόν και ως προς την περίμετρο.

00:01:43 Κώστας: Βάλαμε στην πρώτη ομάδα τα προβλήματα που ζητούσαν να βρούμε το εμβαδόν και στην άλλη τα προβλήματα που ζητούσαν να βρούμε την περίμετρο.

00:02:29 Φανή: Ήθελα να πω ότι στο τελευταίο πρόβλημα ρωτούσε και για το εμβαδόν και για την περίμετρο.]

- Ποια στοιχεία (κριτήρια) τους βοήθησαν στην ομαδοποίηση. Αναδείχθηκε πέραν από συγκεκριμένες φράσεις και η βοήθεια των σχημάτων. Τονίστηκε, δηλαδή, από τα ίδια τα παιδιά πως υπήρχαν διαφορετικές επιλογές του συγγραφέα οι οποίες ήταν βοηθητικές (ονόματα, ΟΣ, σχήματα και εικόνες).

[00:03:16 Ομιλητής 1: Τι ήταν αυτό που είχε γράψει ο συγγραφέας και μας βοήθησε να καταλάβουμε ότι εκείνα θα έπρεπε να μούνε στο εμβαδόν; (σιωπή)

00:03:56 Κώστας: Ε, όταν ρωτούσε ποιο είναι το εμβαδόν του σχήματος.

00:04:02 Ομιλητής 1: Μπορεί να έλεγε το εμβαδόν... να το έλεγε, δηλαδή. Άλλο;

00:04:06 Κώστας: Μπορεί να είχε ένα σχήμα.

00:04:09 Ομιλητής 1: Από το σχήμα όμως, πώς το καταλαβαίναμε; Τι διαβάσαμε στο σχήμα και βρίσκαμε; Πώς καταλαβαίναμε ότι αφορούσε στο εμβαδόν; Γιατί; Δεν μπορώ να βρω την περίμετρο σε ένα σχήμα;

00:04:18 Κώστας: Ναι, όμως μέσα μπορεί να έχει κουτάκια για να δούμε το εμβαδόν.

.....

00:04:45 Γεωργία: Έλεγε πόσα τετραγωνικά μέτρα θα γεμίσει το πάρκο.

00:04:58 Κώστας: Έλεγε το τρίτο (πρόβλημα), από την πρώτη εργασία, «το κάθε πλακίδιο που θα τοποθετηθεί στην πισίνα είναι ενός τριγωνικού μέτρου».

00:05:21 Φανή: Εγώ θέλω να πω για ένα πρόβλημα που είχαμε δει... και κάποιοι δεν είχαν παρατηρήσει ότι υπήρχε ένα κουτάκι που μέσα έγραφε «τετραγωνικά μέτρα».

00:05:35 Ομιλητής 1: Ναι, δεν είχαν «διαβάσει», δηλαδή, σωστά το σχήμα. Πάντως και το σχήμα μελετήσαμε και διαβάσαμε, έτσι δεν είναι;

00:05:59 Νίκος: Μπορεί να μας έδειχνε ή το σχήμα και να βρίσκαμε το εμβαδόν ή να μας έλεγε την περίμετρο και να βρούμε το εμβαδόν.

00:06:11 Ομιλητής 1: Ναι... Με ποιον τρόπο δηλαδή;

00:06:12 Νίκος: Αν μας το 'δειχνε στο σχήμα και...

00:06:18 Ομιλητής 1: Είχε και ακόμη μια έκφραση. Δεν τη θυμάστε...

00:06:20 Αθανασία: Επικάλυψη.

.....

00:06:36 Ομιλητής 1: Πάμε στην ομάδα με την περίμετρο. Ποιες γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα ήταν αυτές που καταλαβαίναμε ότι θα μιλούσαν για την περίμετρο;

00:07:00 Φανή: Μας έλεγε τα μήκη.

00:07:02 Ομιλητής 1: Έλεγε τα μήκη των πλευρών. Δηλαδή, τότε δεν μπορεί να ασχοληθώ με το εμβαδόν;

00:07:08 Ελένη: Αλλά, κυρία, σε μερικά προβλήματα μας έλεγε το εμβαδόν και μας ζητούσε την περίμετρο. Οπότε άμα είναι να βρούμε το εμβαδόν, θα μας έδινε την περίμετρο.

00:07:14 Ομιλητής 1: Ναι. Έλεγε δηλαδή ξεκάθαρα την περίμετρο; Με τα μήκη μπορώ να βρω το εμβαδόν, αν ξέρω τα μήκη των πλευρών;

00:07:18 Ελένη: Ναι.

00:07:30 Ομιλητής 1: Χρειάζονται ή όχι; (σιωπή) Δε χρειάζονται;

00:07:32 Αθανασία: Χρειάζονται.

00:07:35 Ομιλητής 1: Σε ποιο πρόβλημα δεν υπήρχαν μήκη και ήταν κάτι που έλειπε; Αθανασία;

00:07:43 Αθανασία: Στο προτελευταίο, το οποίο έλεγε για ένα γήπεδο του βόλεϊ και ένα γήπεδο του μπάσκετ, που έπρεπε να τοσο...

00:07:56 Ομιλητής 1: Τι είχε κάνει ο συγγραφέας εκεί;

00:07:58 Αθανασία: Μας είχε γράψει όλες τις πληροφορίες εκτός από το... τα μήκη του γηπέδου... των γηπέδων, έτσι ώστε να βρούμε... Έτσι ώστε να μην μπορούμε... να μην μπορούμε να βρούμε πόσο τάπητα έπρεπε να βάλουμε σε κάθε πλευρά.

.....

00:08:43 Νίκος: Μας έδειχνε το σχήμα και μας έλεγε τα μήκη των πλευρών πάνω στο σχήμα και μας έλεγε «πόση είναι περίμετρος;».]

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αναφορά σε προβλήματα που έχουν σχήμα, όπου θεωρούνται ότι είναι πιο εύκολα για αυτά, γιατί τους βοηθά να το «φανταστούν» και να καταλάβουν τι ζητάει.

[00:18:48 Νίκος: Το σχήμα βοηθάει τον άλλον να το φανταστεί.

00:18:58 Ομιλητής 1: Άμα δεν υπάρχει το φαντάζεται. Άμα υπάρχει;

00:18:55 Νίκος: Να σκεφτεί πώς είναι.

00:18:58 Ομιλητής 1: Άμα υπάρχει, το «διαβάζουμε» το σχήμα, είπαμε. Αλλιώς το σχεδιάζουμε.]

Στη συνέχεια, αφού διαβάστηκε η εκφώνηση της δραστηριότητας 9, οι μαθητές ανέφεραν ότι παρόλο που δεν υπάρχει ερώτηση για να βρούμε τι ζητάει, αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει

και ζητούμενο. Επίσης, εντόπισαν ρήματα που τους λένε τι ενέργεια να κάνουν (να γίνετε... να διατυπώσετε... θα πρέπει να το λύσει...).

[00:10:40 Νίκος: Παρατήρησα κάτι. Πρώτα πρέπει να βρούμε την ερώτηση και παρατήρησα ότι δεν έχει.

00:10:48 Ομιλητής 1: Δεν έχει ερώτηση. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ερώτηση στο πρόβλημα; Δεν ζητάει τίποτα;

00:10:48 Αρκετοί μαθητές μαζί: Ζητάει!

00:10:49 Ομιλητής 1: Τι ζητάει; Τι υπάρχει, λοιπόν;

00:10:55 Νίκος: Να διατυπώσουμε ένα πρόβλημα. Από το ρήμα!

00:10:57 Ομιλητής 1: Από το ρήμα λοιπόν. Ωραία, υπογραμμίζουμε «να διατυπώσετε ένα πρόβλημα». Μας το ζητάει με άλλον τρόπο, έμμεσα, λοιπόν. «Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα». Και τι άλλο μετά; Μόνο ένα πράγμα ζητάει; Ελένη.

00:11:13 Ελένη: Να το λύσει ο διπλανός μας.]

Στο 2<sup>ο</sup> στάδιο επίλυσης, τα παιδιά ενθαρρύνθηκαν να κινηθούν «μπρος- πίσω», καθώς και να στηριχτούν στην αφίσα για να κατανοήσουν το πλαίσιο που θα καθόριζε τη διατύπωση του προβλήματος, το οποίο δε θα έπρεπε να είναι αυθαίρετο ως προς τις γλωσσικές επιλογές (μία μαθήτρια το εξήγησε λέγοντας ότι δε θα έπρεπε να βάλουν «απλές λέξεις»).

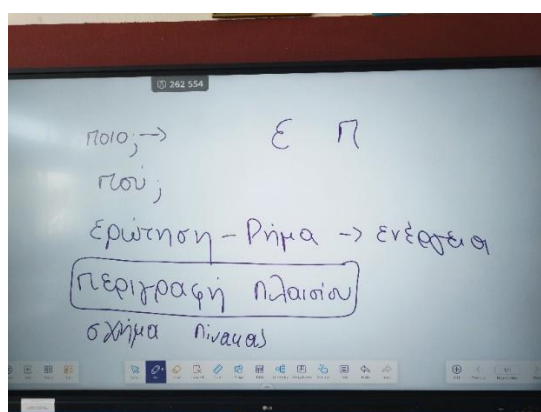
[00:12:02 Ομιλητής 1: «Κινηθείτε λίγο μπρος- πίσω» στο κείμενο και πείτε μου σημαντικά στοιχεία που έχει βάλει ως συγγραφέας και σας ζητάνε να κάνετε συγκεκριμένο πράγμα.

00:12:15 Σωτηρία: Να επιλέξουμε κατάλληλες γλωσσικές επιλογές, δηλαδή να μην βάλουμε ξέρω γω πολύ απλές λέξεις.

00:12:23 Ομιλητής 1: Γλωσσικές επιλογές, ποιο βήμα βοηθά για τις γλωσσικές επιλογές από την αφίσα, πού βρίσκονται οι γλωσσικές επιλογές; Σε ποιο βήμα;

00:12:38 Αθανασία: Στο 2.]

Έτσι, επισήμαναν τα βασικά γλωσσικά στοιχεία του κειμένου [00:14:26 Νίκος: Πρέπει να μας λείν, τουλάχιστον κάτι για το πλαίσιο του προβλήματος.], ενώ ο εκπαιδευτικός παράλληλα κατέγραψε στον πίνακα της τάξης σημαντικά σημεία που αναφέρθηκαν μέσα από τη συζήτηση και που θα βοηθούσαν στη δραστηριότητα (εικ. 29). Τονίστηκε συνδυαστικά να επιμείνουν στις ερωτήσεις που υπήρχαν στην αναρτημένη αφίσα και που έπρεπε να απαντήσουν νοερά.



Εικ. 29 Οι σημειώσεις στον πίνακα της τάξης

Όσον αφορά στις «γλωσσικές επιλογές» που έπρεπε να διαλέξουν, έγινε εστίαση στην αξία τους και στο τι μπορεί να συμβεί αν δεν τις προσέξουν. Θυμήθηκαν το πρόβλημα της προηγούμενης δραστηριότητας, που απουσίαζαν σημαντικά στοιχεία και το πρόβλημα ήταν αδύνατο να λυθεί.

[00:12:39 Κώστας: Στο δεύτερο θα πρέπει, δηλαδή, να συμπεριλάβουμε γλωσσικές επιλογές που να απαντάνε σε αυτές τις ερωτήσεις. (έδειξε την αφίσα)

00:13:06 Ομιλητής 1: Να μείνουμε λίγο σ' αυτά, να πούμε δύο- τρία πράγματα. Τι θα πρέπει να βάλετε, λοιπόν, στο πρόβλημα που θα γράψετε; Τι σημαντικά στοιχεία σαν συγγραφείς εσείς, για να μπορεί να λυθεί; Θυμίζω το πρόβλημα στο οποίο έλειπαν σημαντικά στοιχεία του, το προηγούμενο, χθες.

00:13:26 Κώστας: Όχι! Προχθές! Για να μην το πάθει και κάποιος από μας!]

Οι μαθητές ανέφεραν τις ερωτήσεις που πρέπει να σκεφτούν για την ορθή διατύπωση του προβλήματος (ποιος, πού), πρότειναν ότι μπορούν να μην αναφέρουν τη λέξη περίμετρος/εμβαδόν στο κείμενο, αλλά να το καταλάβει αυτός που θα το λύσει από άλλα στοιχεία του προβλήματος, την ύπαρξη ερώτησης ή κάποιου ρήματος που να δείχνει μία ενέργεια, την περιγραφή του πλαισίου αυτού για το οποίο θα γίνεται αναφορά, την ύπαρξη ή μη ενός σχήματος, όπως και ενός πίνακα, που θα περιέχει πληροφορίες.

[00:13:40 Φανή: Πρέπει να γράψουμε κατ' αρχάς τι πρέπει να βρει.

.....

00:14:26 Κατερίνα: Πρέπει να μας λέει, ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ, κάτι για το... πλαίσιο του προβλήματος.

00:14:30 Ομιλητής 1: Τι είναι αυτό, από τις ερωτήσεις αυτές; (ο εκπαιδευτικός έδειξε την αφίσα)

00:14:39 Κατερίνα: Για την περίμετρο ή το εμβαδόν!

00:14:40 Ομιλητής 1: Είναι απαραίτητο να λέει αυτή τη λέξη;

00:14:41 Νίκος: Όχι.

00:14:43 Φανή: Για το πού!

00:14:46 Ομιλητής 1: Το πού, ναι. Δεν είναι αναγκαστικό. Θα μπορούσε, όμως.

00:14:48 Φανή: Εμείς, κυρία, σε αυτό το πρόβλημα που σκεφτήκαμε με τη Γεωργία είναι πολύ σημαντικό το «πού»!

.....

00:14:56 Νίκος: Τα ποσά.

00:14:57 Ομιλητής 1: Τα ποσά;

00:15:00 Νίκος: Ναι, δηλαδή τα μήκη, η περίμετρος...

.....

00:15:31 Φανή: Την ερώτηση.

00:15:33 Ομιλητής 1: Πρέπει να έχει μια ερώτηση ή αλλιώς; Αυτό (το 9<sup>ο</sup> πρόβλημα) έχει ερώτηση; Το πρόβλημα που σας έχω βάλει εγώ τώρα;

00:15:40 Νίκος: Ή κάποιο ρήμα!

00:15:40 Ομιλητής 1: Ή κάποιο ρήμα που να ζητάει κάτι.

00:15:47 Φανή: Κάποια ενέργεια!

.....

00:16:18 Ομιλητής 1: Ένα πρόβλημα ΜΟΝΟ ζητάει;

00:16:19 Γεωργία: Όχι. Λέξεις, σύμβολα...

00:16:25 Φανή: Να αποδείξουμε...

.....

00:16:43 Κατερίνα: Και να το περιγράψουμε!

00:16:45 Ομιλητής 1: Άντε μπράβο, την περιγραφή του πλαισίου! Αν δεν υπάρχουν συγκεκριμένες συνθήκες;

00:16:52 Ελένη: Τι είπατε;

00:16:54 Ομιλητής 1: Εξήγησέ το, Κατερίνα.

00:16:58 Κατερίνα: Είπα για να περιγράψουμε το... ΣΧΗΜΑ!

.....

00:17:34 Ομιλητής 1: Τι άλλο μπορεί να έχει ένα πρόβλημα;

00:17:43 Νίκος: Σχήμα!

00:17:43 Ομιλητής 1: Μπορεί να έχει σχήμα για να το χρησιμοποιήσει ο άλλος;

00:17:45 Νίκος: Ναι.

.....

00:17:51 Ομιλητής 1: Είναι εύκολο ή δύσκολο όταν έχει σχήμα; Πότε είναι πιο εύκολο;

00:17:56 Γεωργία: Όταν έχει σχήμα.

00:18:01 Ομιλητής 1: Όταν έχει. Γιατί; Γιατί είναι πιο εύκολο; (φασαρία)

00:18:09 Ιωάννης: Γιατί αν... γιατί αν δεν έχει σχήμα μπορεί να εννοεί τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο... και έτσι να μην καταλάβουμε άμα είμαστε κοντά στο να το λύσουμε.

00:18:19 Ομιλητής 1: Ωραία! Μπορεί απαραίτητα να το δείχνει το σχήμα, μπορεί και να;

00:18:22 Αφροδίτη: Να το λέει!

.....

00:19:05 Ομιλητής 1: Και κάτι άλλο;

00:19:07 Φανή: Μπορεί να έχει ΠΙΝΑΚΕΣ!

00:19:08 Ομιλητής 1: Μπορεί να έχει έναν πίνακα. Γιατί υπάρχει πίνακας; Γεωργία, γιατί μπορεί να χρειάζεται ένας πίνακας;

00:19:14 Γεωργία: Γιατί μπορεί να έχει κάποιες πληροφορίες που πρέπει να τις γράψουμε για να τις θυμόμαστε.] Έπειτα, συζητήθηκε το επόμενο βήμα: ο κάθε μαθητής/ζευγάρι, για να λύσει το πρόβλημα, θα έπρεπε να εντοπίσει τα γλωσσικά στοιχεία που σκέφτηκαν τα αντίστοιχα ζευγάρια και έπειτα να γίνουν μαθηματικές πράξεις, αποτίμηση και επαλήθευση.

[00:20:01 Ομιλητής 1: Λάβετε υπόψη όλες αυτές τις γλωσσικές επιλογές, τις οποίες μετά τι θα τις κάνει αυτός που θα τις εντοπίσει; Ποιο είναι το επόμενο βήμα;

00:20:06 Ιωάννης: Το δεύτερο! Να ακολουθήσει τα βήματα αυτά, να εντοπίσει τις γλωσσικές επιλογές και θα τις μετατρέψει σε μαθηματικά.

.....

00:20:45 Ομιλητής 1: Θα τις εντοπίσει να τις κάνει μαθηματικά, τρίτο βήμα, και μετά τι να κάνει;

00:20:58 Νίκος: Να το λύσει.

00:21:01 Ομιλητής 1: Και μετά;

00:21:05 Φανή: Να το αποτιμήσει.

00:21:06 Ομιλητής 1: Και μετά; (φασαρία)

00:21:07 Νίκος: Να το επαληθεύσει!]

Αρχική πρόθεση του δασκάλου ήταν να γίνει ατομικά η δραστηριότητα, αλλά τα παιδιά θέλησαν να δουλέψουν σε ζευγάρια και να ανταλλάξουν τα προβλήματα που θα έγραφαν με άλλα ζευγάρια. Μόνο δύο μαθήτριες θέλησαν να δουλέψουν ατομικά και να ανταλλάξουν μεταξύ τους τα προβλήματα που θα έλυναν. Έπειτα, διευκρινίστηκε το είδος του προβλήματος που έπρεπε να σκεφτούν, δηλαδή προσδιορίστηκε ότι θα αφορά σε Εμβαδόν και Περίμετρο. Έγινε παρότρυνση να πρωτοτυπήσουν και να αποφύγουν προβλήματα παρόμοια με της κ. Ευτυχιάδου που ασχολούταν με τον σχεδιασμό παρτεριών, γεγονός που τους ενθουσίασε. Άλλοι μαθητές επέλεξαν να διατυπώσουν «εύκολα» προβλήματα και άλλοι «δύσκολα». Συγκεκριμένα, όταν άρχισαν να δουλεύουν σε ζευγάρια, ρώτησαν αν μπορούσαν να γράψουν ένα πρόβλημα που να είναι «δύσκολο». Ζητήθηκε να εξηγήσουν πώς μπορεί να γίνει αυτό και απάντησαν ότι είναι δυνατό αν το πρόβλημα ζητάει παραπάνω από ένα πράγμα, αν βάλουν δεκαδικούς και κλάσματα, δηλαδή να υπάρχει ποικιλία μαθηματικών εκφράσεων που θα έκανε το νόημα πιο πυκνό (βλ. το πρόβλημα της 6<sup>ης</sup> ομάδας).

[00:24:28 Ομιλητής 1: Θα μου πείτε και μένα το πώς σκέφτεστε;

00:24:30 Φανή: Εμείς σκεφτόμαστε από διάφορα που κάναμε...

00:24:31 Ομιλητής 1: Τις γλωσσικές επιλογές, θέλω να μου πείτε, που θα συμπεριλάβετε.

00:24:35 Φανή: Ε... θα... δεν έχουμε... Πρώτα αποφασίζουμε, λίγο, για ΤΙ θα μιλάει.

00:24:38 Γεωργία: Πώς θα 'ναι το πρόβλημα.

00:24:40 Ομιλητής 1: Τι θα ζητάει;

00:24:42 Φανή: Ναι. Θα ζητάει να βρει καταρχάς το εμβαδόν. Ε, σκεφτόμαστε από διάφορα προβλήματα που έχουμε δει, να βάλουμε και κλάσματα. Έτσι, να τους μπερδέψουμε λίγο... να τα καταλάβουν. Ε, σκεφτήκαμε να τους βάλουμε να 'χουν... ν' απαντήσουν δύο απαντήσεις.

00:25:07 Ομιλητής 1: Να ζητάει δύο πράγματα δηλαδή;

00:25:08 Φανή: Ναι. Στην αρχή σκεφτήκαμε να γράψουμε ΤΡΕΙΣ επιλογές και κανένα από αυτά και να το βρουν αυτές. Καταλάβατε... για να ... τις μπερδέψουμε. Αλλά δεν ξέρουμε σε αυτό το συγκεκριμένο πρόβλημα αν θα ταιριάζει αυτό.

00:25:20 Γεωργία: Οπότε εμείς το αλλάξαμε και θα κάνουμε για σχολικό πίνακα.

00:25:29 Φανή: Ή για τοίχο ή για...]

Σε άλλη περίπτωση που μαθήτρια έκρινε ότι οι επιλογές της θα διευκόλυναν τη συμμαθήτριά της να λύσει το πρόβλημα, τονίστηκε ο ρόλος των αντωνυμιών/επιθέτων κατά την περιγραφή του πλαισίου.

[00:28:15 Ελένη: Δεν το έκανα πολύ εύκολο ούτε πολύ δύσκολο, γιατί δεν θέλω η Κατερίνα να παιδευτεί και να πάθει τίποτα. (γέλια)

00:28:19 Ομιλητής 1: Γιατί το λες αυτό; Γιατί το θεωρείς δύσκολο;

00:28:25 Ελένη: Δεν το θεωρώ δύσκολο, αυτό λέω.

00:28:28 Ομιλητής 1: Α! Και γιατί το θεωρείς εύκολο;

00:28:30 Ελένη: Γιατί είναι πολύ εύκολο.

00:28:32 Ομιλητής 1: Για ποιο λόγο; Τι είναι αυτό που έχεις γράψει και θα τη βοηθήσει, πιστεύεις, αν το σκεφτεί;

00:28:37 Ελένη: Έχω γράψει ότι έχουν το ΙΔΙΟ εμβαδόν ΟΛΑ τα δωμάτια, οπότε αυτό θα της κάνει τη ζωή πολύ εύκολη και για την περίμετρο είναι σχετικά εύκολο να την υπολογίσεις.]

Ένας μαθητής είπε ότι θα συμπεριελάμβανε ως ζητούμενο και τη διατύπωση ενός συμπεράσματος [00:36:13 Ιωάννης: Είναι με περίμετρο ΚΑΙ εμβαδόν και για να δυσκολέψουμε παραπάνω, βάλουμε κι ένα συμπέρασμα.].

Μετά την παρατήρηση των προβλημάτων που διατυπώθηκαν και των λύσεων που έγραψαν, κρίθηκε αναγκαίο πως έπρεπε να γίνει μεταγενέστερη συζήτηση ανά ζευγάρια και διόρθωση ορισμένων ασαφειών. Παρατίθενται τα προβλήματα και οι λύσεις των ζευγαριών σε δύο φάσεις, πριν και μετά τη συζήτηση.

- Ζευγάρι Ελένη- Κατερίνα (η μία έλυσε το πρόβλημα της άλλης)

Η κ. Ευτυχιάδα... έχει... ανάλαβε... να... κάνει... κάτι... καινούριο...  
είναι... αρχικά... να... φτιάχνει... και... όπως... πρώτα... εγώ... σου... ανέλαβε  
... να... έχει... εμβαδόν... 150... μ... αλλά...  
... κυρία... Ευτυχιάδα... έχασε... πως... να... υπολογίσει...  
... περίμετρο... θα... την... υπολογίσεις... για... εκείνη...  
... τα... δωμάτια... έχουν... το... ίδιο... εμβαδόν... και... είναι...  
... 4... πόσο... είναι... το... εμβαδόν... του... κάθε... δωματίου...

$$150 : 4 = 37,5$$

$$150 : 2 = 75$$

(μ.β.δ.ον)

$$75 : 4 = 18,75 \mu.$$

Το κάθε δωμάτιο έχει 37,5  
και η περ.

$$\begin{array}{r} 18,75 \\ \times 18,75 \\ \hline 9375 \end{array}$$

Εικ. 30 Αρχικό πρόβλημα Ελένης- Λύση Κατερίνας

Η Ελένη (εικ. 30) επέλεξε να γράψει το εμβαδόν τετραγώνου ίσο με 150τ.μ. Η Κατερίνα δεν έκανε σχήμα και απέφυγε να καταγράψει το νόημα στην εκτέλεση της κάθε πράξης. Βρήκε σωστά το Ε των 4 δωματίων του αρχικού Ε του σπιτιού, το οποίο ήταν 150τ.μ., κατόπιν, όμως, συνάντησε δυσκολία στην εύρεση της περιμέτρου, λόγω του ότι δεν αξιοποίησε ορθά τη γλωσσική επιλογή «είναι τετράγωνο», οπότε έκανε λανθασμένες μαθηματικές πράξεις.

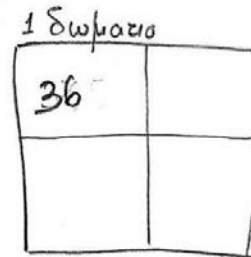
Η... η... Ευκλείδου... έχει... αναλάβει... να... κάνει... ε.π.τ. το γούρνο...  
 αρχικά... να... μεταχθεί... και... επιζητά... το... πράγμα... επιζητά... σου ανέλαβε  
 είναι... περιφέρεια... και... έχει... 144... μ... αλλά... η... η...  
 Ευκλείδου... έχασε... πως... να... υπολογίσει... την... περίμετρο...  
 Θα... την... υπολογίσεις... για... εκείνη...  
 Αν... τα... διαμετρία... έχουν... το... ίδιο... εμβαδόν... και... είναι  
 4... αρά... είναι... το... εμβαδόν... του... κάθε... δωματίου...  
 ...

$$\textcircled{C} \text{γωνίου} = 144 \text{ ε.μ.}$$

$$\textcircled{C} \text{δωματίου} = 144 : 4 = 36 \text{ ε.μ.}$$

Η κάθε πλευρά του γωνιού  
 είναι 12μ. γιατί  $12 \times 12 = 144$

$$\text{Αρα } \textcircled{D} \text{γωνιού} = 12 \times 4 = 48 \text{ μ.}$$



↑  
 τετράγωνο  
 γωνία  
 άρα  
 έχει  
 1688 πλε-  
 ούς

Εικ. 31 Τελικό πρόβλημα Ελένης- Λύση Κατερίνας

Η Ελένη (εικ. 31) διόρθωσε το  $E_{\text{τετρ}} = 144 \text{ τ.μ.}$ , επειδή κατάλαβε ότι ήταν δύσκολο να βρεθεί το μήκος των πλευρών του σπιτιού, που ήταν τετράγωνο. Η Κατερίνα έκανε σχήμα και, συνδυαστικά, κατέγραψε τις γλωσσικές επιλογές της Ελένης, τις οποίες στη συνέχεια τις αξιοποίησε ορθά κι έλυσε το πρόβλημα.

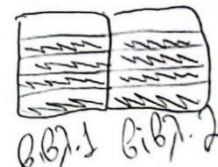
Η Κατερίνα ανέφερε (εικ. 32) από μόνη της ότι υπήρχαν περιττές πληροφορίες («το Ε δωματίου = 15τ.μ.», «το κρεβάτι είναι διπλάσιο από το θρανίο»), αλλά εξήγησε ότι πρόθεσή της ήταν να συμπεριλάβει ακόμη μία ερώτηση («να βρει το υπόλοιπο Ε του δωματίου») που, για να την απαντήσει η συμμαθήτριά της, θα χρειαζόταν να τις αξιοποιήσει. Ωστόσο, τελικά, ξέχασε να τη συμπεριλάβει. Επίσης, είπε ότι ήθελε να κάνει το πρόβλημα δύσκολο στην κατανόηση, για αυτό επέλεξε να βάλει κλάσμα και πολύπλοκη περιγραφή του πλαισίου του

προβλήματος («διπλάσιο»). Κατόπιν, ο δάσκαλος επισήμανε την ύπαρξη μίας ασάφειας («η μία βιβλιοθήκη...»), την οποία καμία από τις δύο μαθήτριες δεν είχε αντιληφθεί και όταν ρωτήθηκαν και οι δύο σχετικά με το πώς ήξερε η Ελένη ότι έχουν το ίδιο εμβαδόν οι δύο βιβλιοθήκες και πώς μπόρεσε να συμπεράνει ότι και οι δύο έχουν εμβαδόν 2τ.μ., απάντησαν ότι η μία το είχε πει στην άλλη προφορικά. Όσον αφορά στην επίλυση του προβλήματος από την Ελένη, αξίζει να σημειωθεί ότι δεν έγραφε τις μαθηματικές έννοιες, που αναδείκνυε το πρόβλημα της Κατερίνας. Έκανε λάθος πράξη κατά την εύρεση του εμβαδού του θρανίου λόγω του κλάσματος.

Το εμβαδόν της Ελένης είναι 15 τ.μ. ....  
 Η βιβλιοθήκη της έχει εμβαδόν 1 τ.μ. ....  
 Η βιβλιοθήκη της έχει εμβαδόν 1 τ.μ. ....  
 Η βιβλιοθήκη της έχει εμβαδόν 1 τ.μ. ....  
 Η βιβλιοθήκη της έχει εμβαδόν 1 τ.μ. ....  
 Η βιβλιοθήκη της έχει εμβαδόν 1 τ.μ. ....

$$1 + 1 = 2 \text{ τ.μ. βιβλιοθήκες}$$

$$\frac{2}{1} - \frac{4}{5} = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$



$$\frac{6}{5} \times 2 = \frac{12}{5}$$

$$\frac{12 \times 2}{5 \times 2} = \frac{24}{10} = 2,4 \text{ τ.μ.}$$

Το κρεβάτι έχει (8) 2,4 τ.μ.

Εικ. 32 Αρχικό πρόβλημα Κατερίνας- Λύση Ελένης

Η Κατερίνα (εικ. 33) κατάλαβε ότι έπρεπε να είναι πιο συγκεκριμένη στη διατύπωση και διόρθωσε τη λέξη «μία», αντικαθιστώντας τη με την αντωνυμία «καθεμία». Επίσης, διόρθωσε το ρήματα «καταναλώνει», το οποίο φαινόταν πιο οικείο και στις δύο, όπως ανέφεραν, και

έγραψε «καταλαμβάνει» μετά από δική μου επεξήγηση και παρότρυνση. Ο δάσκαλος πρότεινε στην Ελένη να αναπαραστήσει με σχήμα τη γλωσσική επιλογή της συμμαθήτριάς της, που τη δυσκόλευε, το σχεδίασε από μόνη της σωστά και, τελικά, διόρθωσε και τη μαθηματική πράξη, κάνοντας πολλαπλασιασμό.

Το δωμάτιο της Ελένης έχει 15\* μ.  
 2ο δωμάτιο της έχει 2 βιβλιοθήκες ένα κρεβάτι  
 ένα θρανίο. Η κάθε μια βιβλιοθήκη έχει 1 τ.μ.  
 το κρεβάτι είναι διπλό από το θρανίο και  
 το θρανίο καταλαμβάνει τα 4/5 από τις βιβλιοθήκες.  
 Ποσό € είναι το κρεβάτι της Ελένης.

$x = 1 + 1 = 2 \text{ τ.μ. βιβλ.}$

βιβλ. 1 βιβλ. 2

$x = \frac{2}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \text{ θρανίο}$

$x = \frac{8}{5} \times 2 = \frac{16 \times 2}{5 \times 2} = \frac{32}{10} = 3,2 \text{ τ.μ. κρεβάτι}$

\* Άχρηστη πληροφορία γιατί εκκεύτεια να δρώσω  
 και πόσο είναι το υπόλοιπο δωμάτιο της Ελένης

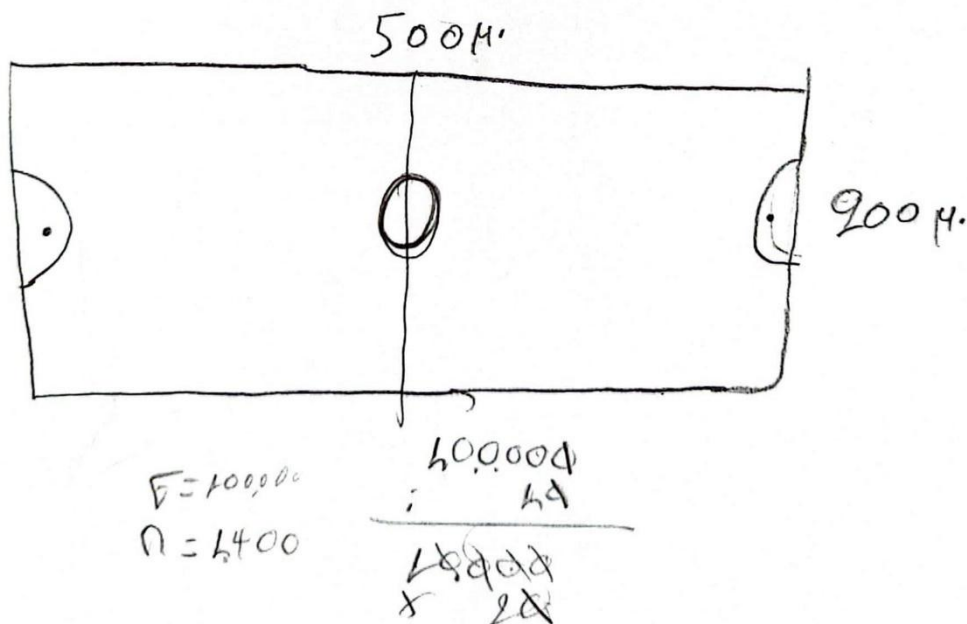
Εικ. 33 Τελικό πρόβλημα Κατερίνας- Λύση Ελένης

Η υπόλοιπη τάξη εργάστηκε ομαδικά. Η μία ομάδα έλυσε το πρόβλημα μίας άλλης, οπότε όλες ανέλαβαν και τους δύο ρόλους, του συγγραφέα και του λύτη.



Ένα χηπέδο ποδοσφαίρου έχει 500 μ. την μέγιστη πλευρά και την μικρότερη 200 μ. Πάσα είναι η περίμετρο και πάσα είναι το εμβαδόν του. Εάν πρέπει να καλυφθεί με χαρτάρι η οκταθένα κομμάτι χαρτάρι καλύπτει 10 τμ. Πόσο θα κοστίσει εάν κάνει 20.000 τμ. καθένα;

απάντηση: Για να το καλύψουν όλο θα χρειαστούν 200000 €



Συμπέρασμα: με την Π βρήκε 200000 €

Εικ. 35 Πρόβλημα 2<sup>ης</sup> ομάδας- Αρχική λύση 1<sup>ης</sup> ομάδας

Η 2<sup>η</sup> ομάδα περιέγραψε το πλαίσιο του προβλήματος σωστά χωρίς να υπάρχουν παραλείψεις (εικ. 35). Ήθελε και αυτή η ομάδα να γράψει δύσκολο πρόβλημα, για αυτό αποφάσισε να γράψει τρία ζητούμενα και, επιπλέον, ζητούσε την εξαγωγή ενός συμπεράσματος. Βοηθητικά συμπεριέλαβε και σχήμα. Ο Νίκος δούλεψε περισσότερο με την επίλυση του προβλήματος, καθώς οι υπόλοιποι της ομάδας δυσκολεύτηκαν. Βέβαια, δεν ακολούθησε ορθή διαδικασία επίλυσης και αυτό φάνηκε εντονότερα στο 4<sup>ο</sup> στάδιο όπου χρειάστηκε να εκτελέσει μαθηματικές πράξεις. Συγκεκριμένα, έκανε συνεχόμενη πράξη σε προηγούμενο αποτέλεσμα, και έτσι δημιουργήθηκαν λανθασμένες ισότητες, ενώ παρέλειψε να αναδείξει τις μαθηματικές έννοιες του προβλήματος βήμα- βήμα. Ωστόσο, βρήκε τη σωστή απάντηση. Τέλος, κατά τη διατύπωση του συμπεράσματος δυσκολεύτηκε.

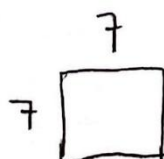
$\text{Μεγ. πλευρά} = 500\text{μ.}$  και  $\text{Μίν. πλευρά} = 200\text{μ.}$   
 $E \text{ γηπέδου} = 500 \times 200 = 100000 \text{ τ.μ.}$   
 $\text{Π. γηπέδου} = 500 + 500 + 200 + 200 = 1400\text{μ.}$   
 $\text{σημ. Χορτάρι} = 100000 : 10 = 10000 \text{ κομμάτια}$   
 $\text{Λιγότερα } 20000 \times 20 = 200.000 \text{ €}$   
Συμπέρασμα:  
 Δεν μπορεί να βρω συμπέρασμα,  
 αλλά είναι ένα πρόβλημα εμβαδού + περιμέτρου

Εικ. 36 Τελική λύση 1<sup>ης</sup> ομάδας

Η 2<sup>η</sup> ομάδα έκανε μία ακόμη απόπειρα να επιλύσει το πρόβλημα ακολουθώντας προσεκτικά - σε όλα τα βήματα- μία πιο συστηματική προσέγγιση (εικ. 36). Κατέγραψε τις μαθηματικές έννοιες που υπήρχαν στο κείμενο και έκανε ορθά τις μαθηματικές πράξεις. Στο συμπέρασμα ανέφερε ότι ήταν πρόβλημα εμβαδού και περιμέτρου.

- Ομάδα 3 (Κώστας- Αργύρης) και Ομάδα 4 (Στέλλα- Σωτηρία)

Ο Χρήσης έχει ένα οικόπεδο 120 χιλιοστά και  
 Η καθε πλευρά του οικοπέδου έχει 7 μέτρα  
 Ο Χρήσης θέλει να βάλει καινούρια χλοοτάπητα  
 65 από τα 120 οικόπεδα. Ποσα ταμήνα θα  
 θα χρειάζονται αν θέλει να καθαρίσει  
 τα 120 οικόπεδα



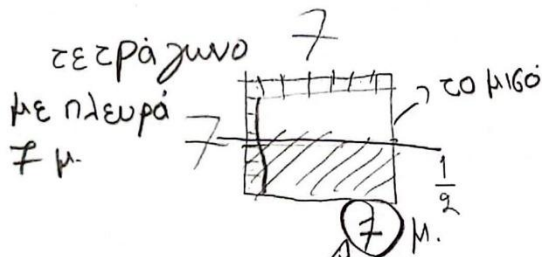
Εικ. 37 Πρόβλημα 3<sup>ης</sup> ομάδας

Τα παιδιά της 3<sup>ης</sup> ομάδας διατύπωσαν πρόβλημα εύρεσης εμβαδού (εικ. 37), το οποίο περιελάμβανε σαφείς πληροφορίες που περιέγραφαν το πλαίσιο του προβλήματος και ένα σχήμα, χωρίς καθόλου παραλείψεις.

1) Χάρης έχει ένα τριγωνικό χαρτί. 2) Η κάθε πλευρά του τριγωνικού χαρτιού είναι 7 μ. 3) Χάρης θέλει να κόψει ένα τετράγωνο χαρτί. 4) Το τετράγωνο χαρτί που θα κόψει θα έχει πλευρά 7 μ. 5) Αν θέλει να κόψει το τετράγωνο χαρτί, θα χρειαστεί 24,5 σ.μ. χαρτί.

Από την 4η: Θα χρειαστεί 24,5 σ.μ. χαρτί.

ένας (Γ.Μ.) αριθμός μια ανάντη



- 1) Έχει
  - 2) Οικόπεδο
  - 3) Η κάθε πλευρά του οικοπέδου
  - 4) Έχει = είναι 7 μ.
  - 5) καινούριο χαρτί → το μέσο = ε. τετραγώνου  $7 \times 7 = 49 \text{ μ}^2$
  - 6) δε όλο το οικόπεδο →
  - 7) πόσα σ.μ. χαρτί? → σ.μ.
  - 8) Θα χρειαστεί
  - 9) Αν θέλει να κόψει. 1η) Μήκη οικόπεδου
- $49 : 2 = 24,5 \text{ σ.μ.}$
- ε. μ. ού =

Εικ. 38 Η επίλυση της 4ης ομάδας

Οι μαθήτριες της 4ης ομάδας ακολούθησαν βήμα-βήμα τα στάδια της αφίσας, συνδέοντας τα γλωσσικά στοιχεία με τις μαθηματικές έννοιες του προβλήματος (εικ. 38). Τις βοήθησε αρκετά η οπτική αναπαράσταση που είχαν συμπεριλάβει οι συμμαθητές τους και πάνω σε αυτή αποτύπωσαν στο 3ο στάδιο τα γλωσσικά στοιχεία με μαθηματικό τρόπο και στη συνέχεια έκαναν τις σωστές μαθηματικές πράξεις.

Εχουμε <sup>ορθ</sup>εικότιμο με 13 ε.μ. και θέλουμε να  
φυτεύουμε λουλούδια ΗΠ. Είναι 23 μ. και ε  
είναι 8 μ. Ποσα λουλούδια θα πρέπει να  
φυτεύουμε.  
Εξηγήσε την απάντησή σου!

Λύση:

είναι πρόβλημα δεν  
δίνεται να υπάρχουν  
τ.μ. και εμβαδόν μαζί,  
γιατί σημαίνουν τα  
ίδιο.

Το άλλο λάθος  
είναι ότι στο  
πρόβλημα υπάρχουν  
δύο διαφορετικές  
μονάδες μέτρησης,  
τα τ.μ. με τα  
μ.

Ασάφεια: Αρα δεν μπορεί να λυθεί

Εικ. 39 Πρόβλημα 4<sup>ης</sup> ομάδας- Λύση 3<sup>ης</sup> ομάδας

Το πρόβλημα που προσπάθησαν να διατυπώσουν οι μαθήτριες της 4<sup>ης</sup> ομάδας (εικ. 39) είχε ομοιότητες με αυτά που δουλέψαμε στα προηγούμενα διδακτικά επεισόδια. Παρόλα αυτά, υπήρχαν σοβαρά λάθη στην περιγραφή του πλαισίου και συγκεκριμένα στις μαθηματικές έννοιες που συμπεριέλαβαν, είτε τις περιέγραφαν άμεσα (πχ. εμβαδόν, περίμετρος) -στην πραγματικότητα φαίνεται ότι ήθελαν να αναφερθούν στο μήκος και πλάτος!- είτε έμμεσα (πχ. τ.μ., λουλούδια που θα φυτευτούν), καθώς δινόταν ταυτόχρονα το εμβαδόν και οι διαστάσεις ενός κήπου στα οποία υπήρχε αναντιστοιχία και λανθασμένες μονάδες μέτρησης. Επίσης, στο ζητούμενο υπήρχε ασάφεια. Στο τέλος του προβλήματος, ζήτησαν επεξήγηση της λύσης από το ζευγάρι που θα έπρεπε να το λύσει, γεγονός που φανερώνει ότι είχαν στο πλάνο τους τα βήματα επίλυσης προβλημάτων και ότι αυτά είναι αναγκαία. Οι μαθητές της 3<sup>ης</sup> ομάδας διαπίστωσαν ότι ήταν αδύνατο να λυθεί. Μάλιστα, εντόπισαν στο κείμενο τις δυσκολίες και τις παραλείψεις των συμμαθητριών τους και προσπάθησαν να τις καταγράψουν, αναφέροντας συγκεκριμένα τα «προβληματικά» γλωσσικά στοιχεία, την ασάφεια στη διπλή αναφορά στο εμβαδόν και τις μονάδες μέτρησης. Το παραλλήλισαν με το 8<sup>ο</sup> πρόβλημα του προηγούμενου έργου.

- Ομάδα 5 (Αθανασία- Βασιλική) και Ομάδα 6 (Φανή- Γεωργία)

Το ζευγάρι της 5<sup>ης</sup> ομάδας χρησιμοποίησε σχήμα, όμως στα δεδομένα του σχήματος και του κειμένου που το συνόδευε, υπήρχε αναντιστοιχία. Συγκεκριμένα, δε συμφωνούσε το πλαίσιο

που περιέγραφε τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν, τα οποία δίνονταν στο σχήμα και στο κείμενο αντιστοίχως. Οι μαθήτριες της 6<sup>ης</sup> ομάδας που θα έλυναν το πρόβλημα, βρήκαν το λάθος και ζήτησαν από τις συμμαθήτριά τους να το διορθώσουν. Έτσι κι έγινε, και, μάλιστα, το ζευγάρι που θα το έλυne, ακολούθησε όλα τα βήματα επίλυσης, αναγνωρίζοντας τις γλωσσικές επιλογές του συγγραφέα, συνδυάζοντάς τες με τα μαθηματικά που ήξερε και παίρνοντας ορθές αποφάσεις (εικ. 40).

Ο κ. Νίκος... έχει ένα οικοπέδο... με... χαρτα...  
 και... να... κουρέψει... την... χαρτα...  
 Αν... εμβαδόν... οικοπέδου... είναι... 200 τ.μ. και...  
 μηχανή... κάθε... 15 λεπτά... από...  
 αλλά... 5 μ. (Πόσα... θα...  
 για να... την... (για...)

ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ -> να την βρω  
 $200 : 10 = 20 \mu$

Εμβαδόν  $α = 200 \tau.μ.$   
 Κάθε 15 ζ. κουρέψει 10  
 5 μ. της επιφάνειας του οικ.  
 3) χρόνος σε ζ. ή ώρες  
 της περιμέτρου

$Ε_{α} = 200 \tau.μ.$  Μεγ. η ζ. = 20 ζ.  
 με η ζ. = 10 ζ.

$Π = 2 \times 10 + 2 \times 20 = 60 \mu$   
 $60 : 5 = 12 \mu.$

$12 \times 15 = 180 \text{ ζ.}$   
 Θα χρειαστεί για να κουρέψει την  
 περίμετρο

Εικ. 40 Πρόβλημα 5<sup>ης</sup> ομάδας- Λύση 6<sup>ης</sup> ομάδας

Βασική ιδέα των μαθητριών της 6<sup>ης</sup> ομάδας ήταν να γράψουν ένα πρόβλημα δύσκολο, οπότε έπρεπε να σκεφτούν τις γλωσσικές επιλογές τους. Το τι θα επέλεγαν, λοιπόν, θα καθόριζε τον βαθμό δυσκολίας και αποφάσισαν ότι θα έπρεπε να υπάρχει ποικιλία ως προς την περιγραφή του πλαισίου (π.χ. ονοματικό σύνολο στις διαστάσεις του τοίχου), την επιλογή των ρημάτων που θα δείχνουν μία διαδικασία (π.χ. «θα επικαλυφθεί»-εύρεση εμβαδού), την έκταση των προτάσεων (παραπάνω από μία πρόταση σε μία περίοδο κάνοντας χρήση του συνδέσμου «και» ή του αναφορικού «που»), τη χρήση αντωνυμιών («όλες»), τη συμπερίληψη κλασμάτων, τη

διατύπωση παραπάνω του ενός ερωτήματος. Το ζευγάρι που το έλυσε (εικ. 41) ακολούθησε μεθοδικά τα βήματα της αφίσας, εντόπισε τα σημαντικά γλωσσικά στοιχεία του κειμένου που θα αναδείκνυαν τα μαθηματικά προκειμένου να οδηγηθούν στην απάντηση του προβλήματος.

4 το Μόλις σκεφτόμασταν να χτίσουμε έναν κολωνάκι... εμείς δύο  
6.11.11. 0. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. 32. 34. 36. 38. 40. 42. 44. 46. 48. 50. 52. 54. 56. 58. 60. 62. 64. 66. 68. 70. 72. 74. 76. 78. 80. 82. 84. 86. 88. 90. 92. 94. 96. 98. 100.

5. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

α) Ποσός πέτρες θα χρειαστεί να την επικαλύψει; → 1 απάντηση 1 αριθμός  
β) πόσο κοστίζουν (6000) οι πέτρες; το ίδιο

1) ενέργεια  
2) τείχος (τις)  
3) ενέργεια  
4) ενέργεια  
5) υψος, κ' πλάτος του τείχους  
6) ενέργεια  
7) μήτις  
8) κόστος πετρών  
9) διαστάσεις πετρών  
10) αριθμός πετρών  
11) ενέργεια  
12) κόστος πετρών  
13) ποια; όλες

Ε τείχους  
Ε =  $3\frac{4}{10} \times 14\frac{6}{10} = \frac{34}{10} \times \frac{146}{10} = \frac{4964}{10} = 496,4$   
Ε τοίχου = 496,4 πέτρες = 496,4 τμ.  
Ε πετρών = 1 x 1,5 = 1,5 τμ.  
496,4 : 1,5 = 330,93 τμ.  
496,4 x 4 = 1.323,72 €  
Απάντηση: α) Θα χρειαστούν 330,93 πέτρες.  
Απάντηση: β) Όλες οι πέτρες θα κοστίζουν 1.323,72 €

Εικ. 41 Πρόβλημα 6<sup>ης</sup> ομάδας- Λύση 5<sup>ης</sup> ομάδας

Δύο ακόμη ζευγάρια έγραψαν προβλήματα με παραλείψεις γλωσσικών στοιχείων, οπότε δεν ήταν δυνατό να λυθούν. Παρόλα αυτά, τα αντίστοιχα ζευγάρια, που έπρεπε να τα λύσουν, εντόπισαν τις παραλείψεις.

#### 4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κατά την διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος και μέσα από την ενσωμάτωση των κατάλληλα σχεδιασμένων διδακτικών έργων, οι μαθητές ενεπλάκησαν σε μαθηματικές δραστηριότητες που τους ώθησαν να αναδείξουν τη λειτουργία των τεχνικών χαρακτηριστικών των κειμένων, δηλαδή να τα προσεγγίσουν ως σύστημα και να αποδώσουν νόημα σε κάθε γλωσσο-μαθηματική επιλογή του συγγραφέα (de Oliveira & Cheng, 2011· Schleppegrell, 2016). Η ερευνητική εκπαιδευτική παρέμβαση, η οποία παρουσιάστηκε διεξοδικά στο τρίτο μέρος της παρούσας εργασίας, και η μετέπειτα τεκμηριωμένη ποιοτική ανάλυση των δεδομένων, που συλλέχθηκαν, βοήθησαν στη διερεύνηση του σκοπού για τον οποίο διεξήχθη η έρευνα και δύνανται να απαντήσουν στα αρχικά ερευνητικά ερωτήματα. Μάλιστα, ο τρόπος διερεύνησης του θέματος αποτελεί ουσιαστικά και τον παράγοντα επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων, ενώ η μεθοδική συστημική λειτουργική προσέγγιση των κειμένων, η οποία έχει τη βάση της στην ομώνυμη θεωρία της Συστημικής Λειτουργικής Γλωσσολογίας (SFL), συνέβαλε εξ ολοκλήρου ως ερευνητικό και εκπαιδευτικό εργαλείο στα παραπάνω. Επίσης, ο καθοδηγητικός ρόλος του εκπαιδευτικού-ερευνητή και η χρήση του υποστηρικτικού μαθησιακού υλικού, που παρήχθη για τις ανάγκες της έρευνας και στηρίζεται εξίσου στην εν λόγω θεωρία, διευκόλυναν την όλη εκπαιδευτική διαδικασία και καθόρισαν σε σημαντικό βαθμό τη διεξαγωγή της έρευνας.

Τέλος, τα ερευνητικά αποτελέσματα διαφαίνονται περισσότερο μέσα από τη διαδοχή των διδακτικών επεισοδίων, καθώς οι συμμετέχοντες μαθητές όσο είχαν την ευκαιρία να εξοικειωθούν σταδιακά με πρακτικές, που προτείνει το συστημικό λειτουργικό μοντέλο, τόσο ήταν σε θέση να κάνουν κατάλληλους γλωσσικούς ελιγμούς, οι οποίοι ενθάρρυναν τη μαθηματική επικοινωνία και αντίληψη. Αυτό, άλλωστε, αν εξαιρέσουμε τα πρώτα διδακτικά επεισόδια όπου τα παιδιά δυσκολεύτηκαν να αφομοιώσουν τον συστημικό τρόπο προσέγγισης, είναι και ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της έρευνας, καθώς η πρακτική εφαρμογή της θεωρίας της SFL σε πραγματικές συνθήκες, εντός της σχολικής τάξης, κάλυψε τις ανάγκες της εκπαιδευτικής έρευνας και απέδειξε ότι οι συμμετέχοντες μαθητές εν τέλει μπόρεσαν να κατανοήσουν σε ικανοποιητικό βαθμό μαθηματικά κείμενα με περιεχόμενο επίπεδης γεωμετρίας και, μάλιστα, κατάφεραν, υιοθετώντας γλωσσικές πρακτικές, να βελτιώσουν το επίπεδο κατάκτησης βασικών μαθηματικών εννοιών και των σχέσεων που διέπονται μεταξύ τους, εντός κειμένων με πυκνό νόημα και απαιτητικό γνωστικό επίπεδο, από άποψη τεχνικών χαρακτηριστικών και μαθηματικού περιεχομένου.

Απαντώντας στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, επισημαίνεται ότι μία σειρά από γλωσσικές τεχνικές, που προτείνει η θεωρία, αποτέλεσαν βοηθητικά εργαλεία αναγνωσιμότητας στη διαδικασία επίλυσης σύνθετων προβλημάτων από πλευράς μαθηματικού νοήματος και γλωσσικής δομής. Κατά την διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος, οι μαθητές προσέγγισαν με «γλωσσο-μαθηματικό» τρόπο προβλήματα επίπεδης γεωμετρίας, κατανοώντας την έννοια της περιμέτρου και του εμβαδού, καθώς και τη σχέση που υπάρχει ανάμεσά τους, ακολουθώντας συγκεκριμένα στάδια επίλυσης. Οι συμμετέχοντες αξιοποίησαν την πολυσημειωτική φύση της επιστήμης των Μαθηματικών αναδεικνύοντας τα τεχνικά χαρακτηριστικά ενός μαθηματικού κειμένου, όπως μαθηματικές λέξεις και σύμβολα, πίνακες και οπτικές αναπαραστάσεις. Ακόμη, προσπάθησαν σε κάθε διδακτικό επεισόδιο να ακολουθήσουν ένα συγκεκριμένο μοτίβο επίλυσης του εκάστοτε προβλήματος, όπως να εντοπίζουν την ερώτηση/ζητούμενο και να κάνουν προβλέψεις της απάντησης, να αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα των σχημάτων/μοντέλων «διαβάζοντάς» τα, να επεξεργάζονται το νόημα των κειμένων, χωρίζοντάς τα σε φράσεις, να καταγράφουν τον μαθηματικό συλλογισμό τους και να εξοικειώνονται με τη μαθηματική απόδειξη, να αποτιμούν τη λύση του κάθε προβλήματος και να ελέγχουν την ορθότητα μίας απάντησης.

Απαντώντας στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, αναφέρεται ότι η διαθεματική προσέγγιση των κειμένων, μέσα από τα μάτια του συγγραφέα και η κατανόηση από τους μαθητές ότι κάθε γλωσσικό στοιχείο μπορεί να αναδείξει μαθηματικό νόημα δίνοντας έμφαση στο εκάστοτε πλαίσιο, εν προκειμένω στο μαθηματικό, διευκόλυνε, αν όχι καθόρισε, τον βαθμό κατανόησης αυτών των κειμένων και ακολούθως οδήγησε σε μία μαθηματική εξήγηση ή εύρεση μίας λύσης. Ακόμη, η αδιάκοπη ενασχόληση των μαθητών με τη γλωσσική επεξεργασία των κειμένων, τελικά, βοήθησε στην οικειοποίηση του εκάστοτε μαθηματικού πλαισίου με αποτέλεσμα τα παιδιά να διαχειρίζονται με ευκολία τον μαθηματικό λόγο και να αλλάζουν στάση προς μία θετική κατεύθυνση απέναντι στην επίλυση προβλημάτων, η οποία διαδικασία σε άλλη περίπτωση πιθανό να ήταν απρόσιτη και να οδηγούσε είτε σε μία λανθασμένη απάντηση/επίλυση είτε σε παραίτηση των μαθητών.

Αναφορικά με το τελευταίο ερευνητικό ερώτημα, στην εν λόγω διαδικασία βοήθησε το διδακτικό υλικό που σχεδιάστηκε από τον εκπαιδευτικό-ερευνητή, στηριζόμενο στο μοντέλο της SFL. Ειδικότερα, η προετοιμασία διδακτικών έργων με μορφή κατάλληλα διαμορφωμένων προβληματικών καταστάσεων που παρέπεμπαν σε παραδείγματα από την καθημερινή ζωή, όπως επίσης και η περιγραφή των σταδίων επίλυσης προβλημάτων και η καθοδήγηση που παρείχε ο εκπαιδευτικός/ερευνητής, ενθάρρυναν την εξοικείωση με τις προαναφερθείσες πρακτικές, τη δημιουργία νοηματικών συνδέσεων με «γλωσσο-μαθηματική» απόχρωση,

εστιάζοντας στην αποφυγή παρανοήσεων και ενδεχόμενων δυσκολιών, στην ανάδειξη της σημασίας των μαθηματικών εννοιών και της ακρίβειας στην έκφραση. Μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις οι μαθητές «μοιράστηκαν τη σκέψη τους», εξέφρασαν τις ιδέες τους και αξιοποίησαν λανθασμένες αντιλήψεις, αιτιολογώντας τις ορθές αποφάσεις τους.

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η συστημική λειτουργική προσέγγιση των προβλημάτων που δύναται να ενσωματωθεί από τον εκπαιδευτικό/ερευνητή στη διδασκαλία των Μαθηματικών φαίνεται να δυσκολεύει ως ένα βαθμό τους μαθητές. Ωστόσο, η μύηση μαθητών, που φοιτούν στην Ε' τάξη του Δημοτικού, σε γλωσσικές πρακτικές που στηρίζονται στο εν λόγω μοντέλο και μάλιστα σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, μέσα από τη συχνή αντιπαραβολή και αναφορές στο πλαίσιο της συγκεκριμένης μεθοδολογίας βοηθάει στην εξοικείωση και διευκολύνει τη μαθησιακή διαδικασία. Ειδικότερα στο μάθημα της επίπεδης γεωμετρίας, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διεξαγωγή διδακτικού πειράματος και μέσα από την ακολουθία διδακτικών επεισοδίων οι μαθητές κατανοούν και αντιλαμβάνονται τη σημασία του συγκεκριμένου πλαισίου, καθώς καταφέρνουν σε ικανοποιητικό βαθμό να προσεγγίζουν μαθηματικές έννοιες και να χειρίζονται με μεγαλύτερη ευχέρεια τη λειτουργία του κάθε γλωσσικού στοιχείου στα προβλήματα, μπαίνοντας στον ρόλο του συγγραφέα και προσπαθώντας να κατανοούν το κάθε κείμενο. Επίσης, αυτό παρατηρείται ακόμη και σε μαθητές που έχουν πολύ καλό επίπεδο γνώσεων στα μαθηματικά, με δυσκολίες όμως στην επίλυση προβλημάτων, αλλά και σε αρκετά παιδιά που γενικά έχουν αδυναμίες στο μάθημα και αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά προβλήματα.

Πιθανό μία τέτοια συστηματική προσπάθεια, άρχουσα σε προγενέστερη τάξη του δημοτικού και προσαρμοσμένη στο γνωστικό επίπεδο και στο προφίλ της τάξης, θα μπορούσε να έχει εμφανέστερα μαθησιακά αποτελέσματα, καθώς θα έδινε την ευκαιρία στους μαθητές να υιοθετήσουν στρατηγικές προσέγγισης βασισμένες στην SFL και να αφομοιώσουν το συγκεκριμένο πλαίσιο σε βάθος χρόνου με μεθοδικό τρόπο και μέσα από την εξοικείωση. Εν τούτοις, μία μεταγενέστερη μελέτη πάνω σε αυτή την ιδέα, με εφαρμογή της διαθεματικής προσέγγισης μαθηματικών κειμένων, στηριζόμενης στις αρχές του συστημικού λειτουργικού μοντέλου, σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού, θα παρουσίαζε ενδιαφέρον, διότι θα συνέλεγε μεγαλύτερο όγκο δεδομένων για συζήτηση στην εκπαιδευτική έρευνα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Adams, A. E., Pegg, J., & Case, M. (2015). Anticipation guides: Reading for mathematics understanding. *The Mathematics Teacher*, 108(7), 498-504.  
<https://doi.org/10.5951/mathteacher.108.7.0498>
- Ainley, J., & Pratt, D. (2005). The significance of task design in mathematics education: Examples from proportional reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–108). PME.
- Barton, M. L., & Heidema, C. (2002). *Teaching reading in mathematics*. Aurora, CO: Mid-continent research for education and learning.
- Bennett, C. A. (2010). “It's Hard Getting Kids to Talk about Math”: Helping New Teachers Improve Mathematical Discourse. *Action in Teacher Education*, 32(3), 79-89.  
<https://doi.org/10.1080/01626620.2010.10463561>
- Bernardo, A.B.I. (1999). Overcoming Obstacles to Understanding and Solving Word Problems in Mathematics. *Educational Psychology*, 19(2), 149-163.  
<https://doi.org/10.1080/0144341990190203>
- Borasi, R., Siegal, M., Fonzi, J., & Smith, C. F. (1998). Using transactional reading strategies to support sense-making and discussion in mathematics classrooms: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, 29(3), 275-305.  
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.29.3.0275>
- Bossé, M. J., & Faulconer, J. (2008). Learning and assessing mathematics through reading and writing. *School Science and Mathematics*, 108(1), 8-19. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2008.tb17935.x>
- Braselton, S., & Decker, B. C. (1994). Using graphic organizers to improve the reading of mathematics. *The reading teacher*, 48(3), 276-281. <http://www.jstor.org/stable/20201418>
- Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι Κοινωνικής Έρευνας* (Αθ. Αϊδινίδης & Π. Σακελλαρίου, επιμ.). Gutenberg.
- Cain, K., & Oakhill, J. (2007). Reading Comprehension Difficulties. Correlates, Causes, and Consequences. Στο K. Cain, & J. Oakhill (Επιμ.), *Children's Comprehension Problems in Oral and Written Language. A Cognitive Perspective* (σσ. 41-75). The Guilford Press.

- Caponera, E., Sestito, P., & Russo, P. M. (2016). The influence of reading literacy on mathematics and science achievement. *The Journal of Educational Research*, 109(2), 197-204. <https://doi.org/10.1080/00220671.2014.936998>
- Carter, T. A., & Dean, E. O. (2006). Mathematics intervention for grades 5–11: Teaching mathematics, reading, or both?. *Reading Psychology*, 27(2-3), 127-146. <https://doi.org/10.1080/02702710600640248>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (Eds.). (2004). Hypothetical learning trajectories [Special issue]. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2).
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). Learning trajectories in early mathematics—sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of language and literacy development*, 7, 1-6. Ανακτήθηκε στις 6/8/2024 από [https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Clements-2/publication/242686699\\_Learning\\_Trajectories\\_in\\_Early\\_Mathematics\\_-\\_Sequences\\_of\\_Acquisition\\_and\\_Teaching/links/0c960529762a4c1414000000/Learning-Trajectories-in-Early-Mathematics-Sequences-of-Acquisition-and-Teaching.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Clements-2/publication/242686699_Learning_Trajectories_in_Early_Mathematics_-_Sequences_of_Acquisition_and_Teaching/links/0c960529762a4c1414000000/Learning-Trajectories-in-Early-Mathematics-Sequences-of-Acquisition-and-Teaching.pdf)
- Creswell, J. (2016). *Η έρευνα στην εκπαίδευση: Σχεδιασμός, διεξαγωγή και αξιολόγηση ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας*. (Ν. Κουβαράκου) (Χ. Τσορμπατζούδης, επιμ.). Εκδοτικός Όμιλος Ίων.
- de Oliveira, L. C., & Cheng, D. (2011). Language and the Multisemiotic Nature of Mathematics. *Reading Matrix: An International Online Journal*, 11(3), 255-268.
- del Prado Hill, P., Friedland, E. S., & McMillen, S. (2016). Mathematics-Literacy Checklists: A Pedagogical Innovation to Support Teachers as They Implement the Common Core. *Journal of Inquiry and Action in Education*, 8(1), 23-38. Ανακτήθηκε στις 10/12/2023 από <https://eric.ed.gov/?id=EJ1133599>
- Ehlinger, J., & Pritchard, R. (1994). Using think alongs in secondary content areas. *Literacy Research and Instruction*, 33(3), 187-205. <https://doi.org/10.1080/19388079409558155>
- Fang, Z., & Schleppegrell, M. J. (2008). *Reading in secondary content areas*. University of Michigan Press.
- Fogelberg, E., Skalinder, C., Satz, P., Hiller, B., Bernstein, L., & Vitantonio, S. (2008). *Integrating Literacy and Math: Strategies for K-6 Teachers*. Guilford Press.
- Friedland, E. S., McMillen, S. E., & del Prado Hill, P. (2011). Collaborating to cross the mathematics–literacy divide: An annotated bibliography of literacy strategies for mathematics

- classrooms. *Journal of Adolescent & Adult Literacy*, 55(1), 57-66.  
<https://doi.org/10.1598/JAAL.55.1.6>
- Gibson, M., & Thomas, T. G. (2005). QUILT BLOCKS: Writing in the Geometry Classroom. *The Mathematics Teacher*, 99(2), 108–111. <http://www.jstor.org/stable/27971888>
- Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic*. Edward Arnold.
- Halliday, M.A.K., & Martin, J.R. (1993). *Writing Science: Literacy and Discursive Power*. The Falmer Press.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2002). Using student contributions and multiple representations to develop mathematical language. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(2), 100-105.  
<https://doi.org/10.5951/MTMS.8.2.0100>
- Kawanaka, T., & Stigler, J. W. (1999). Teachers' use of questions in eighth-grade mathematics classrooms in Germany, Japan, and the United States. *Mathematical thinking and learning*, 1(4), 255-278. [https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0104\\_1](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0104_1)
- Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M., & Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 69-80. Ανακτήθηκε στις 17/8/2023 από <https://eric.ed.gov/?id=EJ1204804>
- Kresse, E. C. (1984). Using Reading as a Thinking Process to Solve Math Story Problems. *Journal of Reading*, 27(7), 598–601. <http://www.jstor.org/stable/40029394>
- Lamb, J. H. (2010). Reading grade levels and mathematics assessment: An analysis of Texas mathematics assessment items and their reading difficulty. *The Mathematics Educator*, 20(1). Ανακτήθηκε στις 16/ 8/ 2023 από <https://ojs01.galib.uga.edu/tme/article/view/1946>
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 235-264.
- Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 215-234). Ottawa, ON, Legas Publishing.

- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.
- McIntosh, M. E., & Draper, R. J. (1995). Applying the Question-Answer Relationship Strategy in Mathematics. *Journal of Adolescent & Adult Literacy*, 39(2), 120–131. <http://www.jstor.org/stable/40034520>
- McIntosh, M. E., & Draper, R. J. (1996). Using the question-answer relationship strategy to improve students' reading of mathematics texts. *The Clearing House*, 69(3), 154-162. <https://doi.org/10.1080/00098655.1996.10114302>
- McMillen, S., del Prado Hill, P., & Friedland, E. (2010). Literacy strategies in mathematics instruction: A look at New York State classrooms. *New York State Mathematics Teachers Journal*, 60(3), 101–103.
- Meaney, T., & Flett, K. (2006). Learning to Read in Mathematics Classrooms. *The Australian Mathematics Teacher*, 62(2), 10–16. <https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.152020133518685>
- Meira, L. (1998). Making Sense of Instructional Devices: The Emergence of Transparency in Mathematical Activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121–142. <https://doi.org/10.2307/749895>
- Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and education*, 20(6), 507-528. <https://doi.org/10.2167/le678.0>
- Mirna, M. (2018). Errors analysis of students in mathematics department to learn plane geometry. In IOP Conference Series: *Materials Science and Engineering*, 335(1), p. 012116. IOP Publishing. doi:10.1088/1757-899X/335/1/012116
- Morgan, C. (2002). *Writing mathematically: The discourse of investigation*. Routledge.
- Morris, R. (1986). What are some obstacles to learning geometry?. Στο A. J. Bishop (Επιμ.), *Studies in mathematics education. Teaching of geometry* (σσ. 141-159). Unesco.
- Moschkovich, J. N. (1999). Supporting the participation of English language learners in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics*, 19(1), 11–19. <http://www.jstor.org/stable/40248284>

- Moschkovich, J. (2002). A Situated and Sociocultural Perspective on Bilingual Mathematics Learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(2–3), 189–212. [https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023\\_5](https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023_5)
- Moschkovich, J. N. (2015). Academic literacy in mathematics for English learners. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 43-62. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.005>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Νέο Π.Σ. (2023). Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, ΦΕΚ 508/02.02.2023. Ανακτήθηκε στις 20/6/2023 <http://iep.edu.gr/el/nea-ps-provoli>
- Noddings, N. (1990). Chapter 1: Constructivism in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 4, 7-18. <https://doi.org/10.2307/749909>
- Noonan, J. (1990). Readability problems presented by mathematics text. *Early child development and care*, 54(1), 57-81. <https://doi.org/10.1080/0300443900540104>
- Norton, A., Rutledge, Z., Hall, K., & Norton, R. (2009). Mathematical letter writing. *Mathematics Teacher*, 103(5), 341–346. DOI: 10.2307/20876631
- Oakhill, J., & Cain, K. (2007). Introduction to Comprehension Development. Στο K. Cain, & J. Oakhill (Επιμ.), *Children's Comprehension Problems in Oral and Written Language. A Cognitive Perspective* (σσ. 3- 40). The Guilford Press.
- O'Halloran, K. (1999). Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica*, 124(1-2), 1-30. <https://doi.org/10.1515/semi.1999.124.1-2.1>
- O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359-388. [https://doi.org/10.1016/S0898-5898\(99\)00013-3](https://doi.org/10.1016/S0898-5898(99)00013-3)
- O'Halloran, K. L. (2004). Discourses in secondary school mathematics classrooms according to social class and gender. In J. A. Foley (Ed.), *Language, education and discourse: Functional approaches* (pp. 191-225). The Continuum International Publishing Group, Ltd.
- Pehkonen, E., Näveri, L., & Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *CEPS Journal*, 3(4), 9-23. <https://doi.org/10.25656/01:8498>

- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia-social and behavioral sciences*, 116, 3169-3174. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.728>
- Pimta, S., Tayraukham, S., & Nuangchalem, P. (2009). Factors Influencing Mathematic Problem-Solving Ability of Sixth Grade Students. *Online Submission*, 5(4), 381-385. Ανακτήθηκε στις 17/8/2023 από <https://eric.ed.gov/?id=ED506983>
- Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Prediger, S., & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language-and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 435-456. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0079-2>
- Purpura, D. J., Napoli, A. R., Wehrspann, E. A., & Gold, Z. S. (2017). Causal Connections Between Mathematical Language and Mathematical Knowledge: A Dialogic Reading Intervention. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10(1), 116-137. DOI: 10.1080/19345747.2016.1204639
- Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31(3), 235-252. <https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995>
- Romberg, T. A., Carpenter, T. P., & Dremock, F. (2005). *Understanding Mathematics and Science Matters*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research, Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.
- Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & writing quarterly*, 23(2), 139-159. <https://doi.org/10.1080/10573560601158461>
- Schleppegrell, M. J. (2016). Content-based language teaching with functional grammar in the elementary school. *Language Teaching*, 49(1), 116-128. 10.1017/S0261444814000093
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Shanahan, T., & Shanahan, C. (2008). Teaching disciplinary literacy to adolescents: Rethinking content-area literacy. *Harvard educational review*, 78(1), 40-59. <https://doi.org/10.17763/haer.78.1.v62444321p602101>
- Shanahan, T., & Shanahan, C. (2012). What is disciplinary literacy and why does it matter?. *Topics in language disorders*, 32(1), 7-18. DOI: 10.1097/TLD.0b013e318244557a
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104. [http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602\\_2](http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2)
- Siniguian, M. T. (2017). Students' difficulty in solving mathematical problems. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Applied Sciences*, 6(2), 1-12. Ανακτήθηκε στις 20/ 8/ 2023 από <https://www.indianjournals.com/ijor.aspx?target=ijor:ijareas&volume=6&issue=2&article=001>
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(5), 344-350. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344>
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Erlbaum.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal*, 33(2), 455-488. <https://doi.org/10.2307/1163292>

- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.  
<https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Thompson, P. (1979, March). The constructivist teaching experiment in mathematics education research. In *research reporting session, annual meeting of NCTM, Boston*.
- Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). Η Δόμηση των Εννοιών της Μέτρησης. Στο Τ. Α. Τριανταφυλλίδης (Επιμ.), *Μαθηματικά από το νηπιαγωγείο ως το γυμνάσιο: διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του* (σσ. 660- 731). Μεταίχμιο.
- Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, 243-252. Ανακτήθηκε στις 18/8/2023 από <http://geometryandmeasurement.pbworks.com/f/VanHiele.pdf>
- Walkington, C., Clinton, V., & Shivraj, P. (2018). How readability factors are differentially associated with performance for students of different backgrounds when solving mathematics word problems. *American Educational Research Journal*, 55(2), 362-414.  
<https://doi.org/10.3102/0002831217737028>
- Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (p. 339). Springer Nature.
- Weber, E., Walkington, C., & McGalliard, W. (2015). Expanding notions of “learning trajectories” in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(4), 253-272.  
<https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1083836>

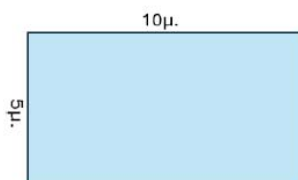
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### 1. Αρχικό φύλλο εργασίας «Ομαδοποίηση προβλημάτων»

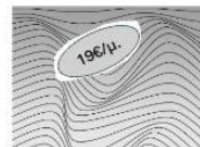
Όνομα: .....

**Διάβασε τα παρακάτω 7 προβλήματα και προσπάθησε να τα ομαδοποιήσεις βρίσκοντας κάποια ομοιότητα.**

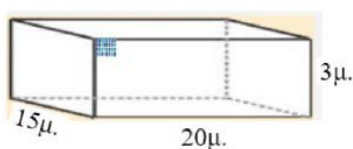
1. Πόσα μέτρα είναι ο αυλόγυρος του σπιτιού του Βασίλη;



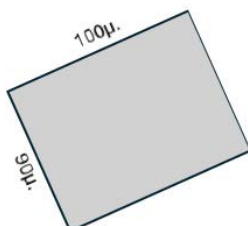
2. Η οικογένεια του Πέτρου ανακαινίζει το σπίτι της και σκέφτεται να αλλάξει τη ταπετσαρία στους δύο τοίχους των υπνοδωματίων. Κάνοντας μία έρευνα αγοράς βρήκε τις δύο παρακάτω προσφορές σε μια βιοτεχνία. Πόσο είναι το συνολικό κόστος της κάθε ταπετσαρίας αν λάβετε υπόψη ότι ο κάθε τοίχος, που θα γίνει η τοποθέτηση, έχει μήκος 4μ. και ύψος 3,5μ.;



3. Το κάθε πλακίδιο που θα τοποθετηθεί στην πισίνα είναι ενός τετραγωνικού μέτρου. Πόσα πλακίδια θα χρειαστούν για την επικάλυψη όλης της πισίνας;



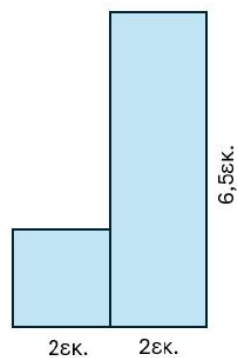
4. Ο κ. Γιάννης θέλει να αντικαταστήσει τον χαλασμένο φράχτη του κτήματός του. Θυμήθηκε ότι έχει βολεμένο στην αποθήκη του 400μ. φράχτη. Του φτάνει, ώστε να μη χρειαστεί να αγοράσει καινούριο;



5. Τι περίμετρο έχει ο διαδραστικός πίνακας της τάξης σας;



6. Να βρείτε το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.



7. Αν διπλασιαστούν τα μήκη των πλευρών του παρακάτω σχήματος, τι θα συμβεί με την περίμετρό του; Τι θα συμβεί με το εμβαδόν του;



**Ομαδοποίηση:**

.....  
.....  
.....

## 2. Προβλήματα Περιμέτρου και Εμβαδού



### ‘Επιφανειακές και περιμετρικές... αποκαλύψεις’

Η κ. Ευτυχιάδου εργάζεται στο τμήμα πρασίνου του Δήμου και συγκεκριμένα είναι υπεύθυνη για τον σχεδιασμό των παρτεριών και τη διακόσμηση των πάρκων της πόλης σας. Αυτό το διάστημα ασχολείται με το παρκάκι, που υιοθετήθηκε από το σχολείο σας, αλλά και με την ευρύτερη περιοχή.

Ακολουθούν κάποιες εργασίες και σκέψεις της. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;

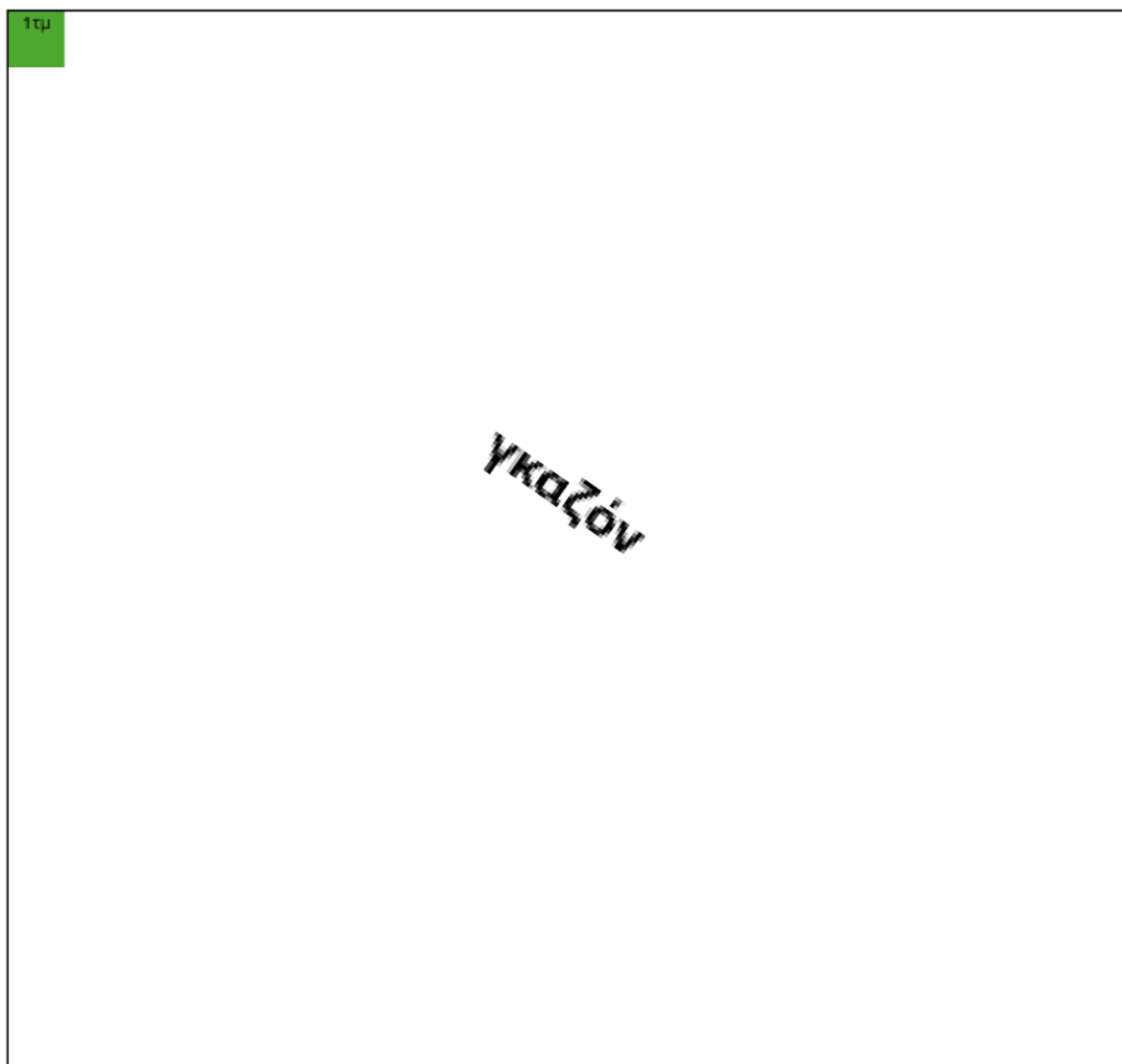
Η κ. Ευτυχιάδου εργάζεται στο τμήμα πρασίνου του Δήμου και συγκεκριμένα είναι υπεύθυνη για τον σχεδιασμό των παρτεριών και τη διακόσμηση των πάρκων της πόλης σας. Αυτό το διάστημα ασχολείται με το παρκάκι, που υιοθετήθηκε από το σχολείο σας, αλλά και με την ευρύτερη περιοχή.

Ακολουθούν κάποιες εργασίες και σκέψεις της. Μπορείτε να τη βοηθήσετε;





1. Στην παρακάτω τετράγωνη επιφάνεια του πάρκου πρέπει να τοποθετηθεί γκαζόν. Η πλευρά του πάρκου είναι 25μ. και το κάθε κομμάτι γκαζόν 1τ.μ. Πόσα τέτοια κομμάτια, λέτε, ότι χρειάζεται να τοποθετηθούν σε όλη την επιφάνεια του πάρκου;





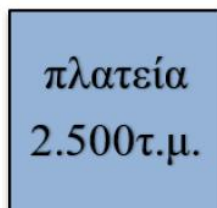
2. Στο ίδιο παρκάκι, θα δημιουργηθεί ένας ορθογώνιος κεντρικός διάδρομος με διαστάσεις  $10\frac{1}{2}$  μ. και  $6\frac{4}{5}$  μ, ο οποίος θα πλακοστρωθεί. Ο Σύλλογος Γονέων και Κηδεμόνων έκανε δωρεά πλάκες, που καλύπτουν 75τ.μ. Φτάνουν, όμως, οι πλάκες για την πλακόστρωση όλου του διαδρόμου;



3. Στη συνέχεια, πρόκειται να αναδιαμορφωθεί ο χώρος της τετράγωνης κεντρικής πλατείας απέναντι από το παρκάκι. Θα πρέπει να κατασκευαστούν 4 ίδια παρτέρια ορθογώνιου σχήματος, που θα διακοσμήσουν κατά μήκος αντίστοιχα τις τέσσερις πλευρές της πλατείας και το καθένα θα καλύπτει το 6% της πλατείας.

Τι διαστάσεις μπορεί να έχουν τα παρτέρια;

Η επιλογή μου, πιστεύετε, θα επηρεάσει τον υπολειπόμενο χώρο της πλατείας, που θα αξιοποιηθεί για διαφορετική χρήση;





4. Έχω και ένα ορθογώνιο παρτέρι ΖΗΘΙ στην άκρη του πάρκου με περίμετρο 68μ. και με τη μεγάλη πλευρά 32μ. Αν το παρτέρι ΖΗΘΙ ήταν τετράγωνο και κάλυπτε την ίδια επιφάνεια με αυτή του ορθογωνίου, θα είχε και ίση περίμετρο με αυτό;



5. Αν έχω ένα είδος λουλουδιών, που καλύπτει επιφάνεια ίση με το εμβαδόν ενός μικρότερου παρτεριού, και, συγκεκριμένα, με εμβαδόν 24τ.μ., σε πόσα διαφορετικά ορθογώνια παρτέρια μπορεί να φυτευτεί αυτό;

| Παρτέρι | Μήκος πλευρών |  | Εμβαδόν | Περίμετρος |
|---------|---------------|--|---------|------------|
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |

Τι αλλάζει; Τι παραμένει ίδιο;

.....

.....

.....





6. Αν έχω 26μ. διακοσμητικό κράσπεδο, που τοποθετείται γύρω από τα παρτέρια, έχει σημασία το σχήμα του παρτεριού; Σε πόσα ορθογώνια παρτέρια μπορώ να το τοποθετήσω;

| Παρτέρι | Μήκος πλευρών |  | Εμβαδόν | Περίμετρος |
|---------|---------------|--|---------|------------|
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |
|         |               |  |         |            |

Τι αλλάζει; Τι παραμένει ίδιο;

.....

.....



**Τι συμπέρασμα βγάζουμε για τη σχέση εμβαδού(E) και περιμέτρου(Π);**

.....

.....

.....

.....



7. Ανακάλυψα πως, αν αυξηθεί η περίμετρος ενός παρτεριού, θα αυξάνεται πάντα και το εμβαδόν του! Έχω άραγε δίκιο και γιατί;

.....

.....

.....

.....



8. Τώρα ήρθε η ώρα να διαβάσετε το παρακάτω πρόβλημα και να σκεφτείτε ποια σημαντικά γλωσσικά στοιχεία παρέλειψε ο συγγραφέας του κειμένου:

*Την επόμενη σχολική χρονιά προγραμματίζεται να επικαλυφτούν τα δύο γήπεδα, του βόλεϊ και του μπάσκετ, με αθλητικό ελαστικό τάπητα. Η κατασκευαστική εταιρεία, που θα αναλάβει την εγκατάσταση κοστολόγησε 20 ευρώ ανά τ.μ. Φτάνουν τα 1.200 ευρώ, που διαθέτει το σχολείο σας, για την ολοκλήρωση των εργασιών;*

.....  
.....  
.....  
.....



9. Τώρα είναι η σειρά σας να γίνετε συγγραφείς και, κάνοντας τις κατάλληλες γλωσσικές επιλογές, να διατυπώσετε ένα πρόβλημα εύρεσης περιμέτρου ή εύρεσης εμβαδού.



Στη συνέχεια, θα πρέπει να το επιλύσει η διπλανή σας ή ο διπλανός σας.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 3. Αφίσα «Βήματα επίλυσης προβλημάτων»

## ΑΚΟΛΟΥΘΗΣΕ ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΕΝΑ-ΕΝΑ & ΑΝ ΔΥΣΚΟΛΕΥΤΕΙΣ, ΓΥΡΙΣΕ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ!

### 1. ΟΜΑΔΟΠΟΙΩ

Τι ζητάει το πρόβλημα να  
κάνω;

Ελέγξε ;  
Απόδειξε ;  
Ερώτηση ;  
Βρες ;  
Εξήγησε ;  
Ρήμα



### 2. ΚΙΝΟΥΜΑΙ ΜΠΡΟΣ- ΠΙΣΩ

Ποιες είναι οι γλωσσικές  
επιλογές του συγγραφέα;

Ποιος;  
Κάνει- Έχει- Είναι;  
Τίνος;  
Πότε;  
Πώς;  
Πού;  
Γιατί;  
“Διαβάζω” τους πίνακες  
Χωρίζω σε φράσεις  
“Διαβάζω” τα σχήματα





### 3. ΣΥΝΔΥΑΖΩ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ποιες μαθηματικές έννοιες & αρχές αναδεικνύουν οι πληροφορίες που βρήκα;

μαθηματικές λέξεις & σύμβολα

οπτικές αναπαραστάσεις

### 4. ΕΠΙΛΥΩ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ποια διαδικασία θα ακολουθήσω για να φτάσω στην τελική λύση;

Καταγράφω

Σχεδιάζω

Βήμα - βήμα

Πίνακες- Σχήματα

Αποδεικνύω

Συλλέγω δεδομένα



## 5. ΑΠΟΤΙΜΩ ΤΗ ΛΥΣΗ

Ποιο είναι το αποτέλεσμα της διαδικασίας που ακολούθησα;



Μοιράζομαι



## 6. ΛΑΜΒΑΝΩ ΤΗ ΣΩΣΤΗ ΑΠΟΦΑΣΗ

Έχει νόημα η λύση που βρήκα;

Ορθότητα σκέψης

Λογικό επιχείρημα

Εάν... τότε..

Διότι...

Άρα...

Έτσι, ...

Επομένως...



#### 4. Χάρτης γειτονιάς σχολείου

