



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Σχολή Τεχνολογίας

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

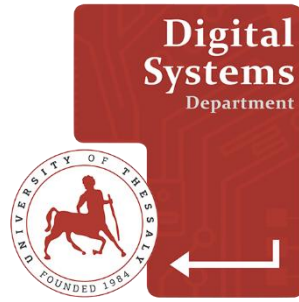
**Αναλυτική περιγραφή
αλγορίθμων αποκωδικοποίησης
καναλιού**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αικατερίνη Κων. Ζούμπου (ΑΜ: 3120243)

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Χαϊκάλης, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΛΑΡΙΣΑ, Μάρτιος 2025



UNIVERSITY OF THESSALY

School of Technology

Digital Systems Department

Detailed analysis of channel decoding algorithms

BACHELOR THESIS

Aikaterini K. Zoumpou (RN: 3120243)

Supervisor: Costas Chaikalis, Associate Professor of Telecommunications

LARISSA, March 2025

Υπεύθυνη Δήλωση περί Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας και Πνευματικών Δικαιωμάτων

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα πτυχιακή εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον, και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Η Δηλούσα

(Υπογραφή)

Αικατερίνη Ζούμπου

13/03/2025

Εγκρίνεται από την Επιτροπή Εξέτασης:

Επιβλέπων	Κωνσταντίνος Χαϊκάλης Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μέλος	Απόστολος Ξενάκης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Μέλος	Δημήτριος Κοσμάνος Ακαδημαϊκός Υπότροφος, Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ημερομηνία έγκρισης: 18-03-2025

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με την αναλυτική περιγραφή και αξιολόγηση αλγορίθμων αποκωδικοποίησης καναλιού, εστιάζοντας στις μεθόδους Sum-Product και Iterative Log-Likelihood. Αρχικά, γίνεται θεωρητική παρουσίαση των δύο αλγορίθμων, εξηγώντας τη μαθηματική τους θεμελίωση και τη διαδικασία λειτουργίας τους.

Στη συνέχεια, η μελέτη περιλαμβάνει αναλυτική επίλυση παραδειγμάτων αποκωδικοποίησης, όπου εφαρμόζονται οι δύο αλγόριθμοι και εξετάζεται η απόδοσή τους σε τρεις διαδοχικές επαναλήψεις μέχρι την ορθή ανακατασκευή του μηνύματος. Επιπλέον, διερευνάται η συμπεριφορά του Sum-Product σε 12 σενάρια με διαφορετικά επίπεδα θορύβου. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι σε χαμηλά επίπεδα θορύβου η αποκωδικοποίηση είναι άμεση, ενώ σε υψηλότερα επίπεδα απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις ή, σε ακραίες περιπτώσεις, η αποκωδικοποίηση αποτυγχάνει.

Η εργασία προσφέρει μια συστηματική μελέτη της αποτελεσματικότητας των συγκεκριμένων τεχνικών αποκωδικοποίησης, παρέχοντας χρήσιμα συμπεράσματα για την εφαρμογή τους σε συστήματα επικοινωνίας με παρουσία θορύβου.

Abstract

This thesis focuses on the analytical description and evaluation of channel decoding algorithms, specifically the Sum-Product and Iterative Log-Likelihood methods. Initially, a theoretical presentation of both algorithms is provided, explaining their mathematical foundation and operational process.

Subsequently, the study includes a detailed solution of decoding examples, where both algorithms are applied and their performance is examined over three successive iterations until the correct reconstruction of the message is achieved. Additionally, the behavior of the Sum-Product algorithm is analyzed across 12 scenarios with varying noise levels. The results indicate that at low noise levels, decoding is immediate, whereas higher noise levels require more iterations, and in extreme cases, decoding fails.

This thesis offers a systematic study of the effectiveness of these decoding techniques, providing valuable insights into their application in communication systems affected by noise.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη σε όλους όσους με στήριξαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

Αρχικά, ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Χαϊκάλη για την πολύτιμη καθοδήγησή του, τις γνώσεις που μου προσέφερε και την αδιάκοπη υποστήριξή του. Η επιστημονική του καθοδήγηση υπήρξε καθοριστική για την ολοκλήρωση αυτής της μελέτης.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στην οικογένειά μου, που με στήριξε αδιάκοπα καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Η ενθάρρυνση, η κατανόηση και η πίστη τους σε εμένα υπήρξαν πολύτιμες πηγές δύναμης και έμπνευσης.

Τέλος, ευχαριστώ όλους όσους, με οποιονδήποτε τρόπο, συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Αικατερίνη Ζούμπου

13/03/2025

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	VII
ABSTRACT	IX
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	XI
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	XIII
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2 ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΝΑΛΙΟΥ.....	3
3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΝΑΛΙΟΥ.....	5
3.1 SUM-PRODUCT ALGORITHM	5
3.2 ITERATIVE LOG LIKELIHOOD DECODING ALGORITHM.....	7
4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ SUM-PRODUCT.....	9
4.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1 ^Η	9
4.2 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2 ^Η	15
4.3 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 3 ^Η	19
5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ LOG LIKELIHOOD	25
5.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1 ^Η	25
5.1.1 <i>Check node update</i>	25
5.1.2 <i>Bit node update</i>	31
5.2 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 2 ^Η	32
5.2.1 <i>Check node update</i>	32
5.2.2 <i>Bit node update</i>	34
6 ΣΕΝΑΡΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ SUM-PRODUCT.....	35
6.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 1Ο	35
6.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 2Ο	37
6.3 ΣΕΝΑΡΙΟ 3Ο	38
6.4 ΣΕΝΑΡΙΟ 4Ο	40

6.5	ΣΕΝΑΡΙΟ 5Ο.....	42
6.6	ΣΕΝΑΡΙΟ 6Ο.....	44
6.6.1	Επανάληψη 1 ^η	44
6.6.2	Επανάληψη 2 ^η	45
6.6.3	Επανάληψη 3 ^η	47
6.6.4	Επανάληψη 4 ^η	48
6.6.5	Επανάληψη 5 ^η	49
6.7	ΣΕΝΑΡΙΟ 7Ο.....	50
6.7.1	Επανάληψη 1 ^η	50
6.7.2	Επανάληψη 2 ^η	52
6.7.3	Επανάληψη 3 ^η	53
6.7.4	Επανάληψη 4 ^η	55
6.8	ΣΕΝΑΡΙΟ 8Ο.....	56
6.8.1	Επανάληψη 1 ^η	56
6.8.2	Επανάληψη 2 ^η	58
6.8.3	Επανάληψη 3 ^η	59
6.9	ΣΕΝΑΡΙΟ 9Ο.....	60
6.9.1	Επανάληψη 1 ^η	60
6.9.2	Επανάληψη 2 ^η	62
6.9.3	Επανάληψη 3 ^η	63
6.10	ΣΕΝΑΡΙΟ 10Ο.....	65
6.10.1	Επανάληψη 1 ^η	65
6.10.2	Επανάληψη 2 ^η	66
6.10.3	Επανάληψη 3 ^η	68
6.10.4	Επανάληψη 4 ^η έως 8 ^η	69
6.11	ΣΕΝΑΡΙΟ 11Ο.....	70
6.11.1	Επανάληψη 1 ^η	70
6.11.2	Επανάληψη 2 ^η	71
6.11.3	Επανάληψη 3 ^η	73
6.11.4	Επανάληψη 4 ^η έως 8 ^η	74
6.12	ΣΕΝΑΡΙΟ 12Ο.....	75
6.12.1	Επανάληψη 1 ^η	75
6.12.2	Επανάληψη 2 ^η	77
6.12.3	Επανάληψη 3 ^η	78

6.12.4 Επανάληψη 4 ^η έως 8 ^η	79
6.13 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΗ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΣΕΝΑΡΙΩΝ	80
7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	85
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....	89

1 Εισαγωγή

Βασικός στόχος της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η αναλυτική περιγραφή και αξιολόγηση των αλγορίθμων αποκωδικοποίησης καναλιού, με έμφαση στις μεθόδους Sum-Product και Iterative Log-Likelihood. Οι αλγόριθμοι αυτοί διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη διόρθωση σφαλμάτων που προκύπτουν κατά τη μετάδοση δεδομένων μέσω θορυβωδών καναλιών επικοινωνίας.

Αρχικά, παρατίθεται μια σύντομη αναφορά στην κωδικοποίηση καναλιού (Κεφάλαιο 2) και στη συνέχεια παρουσιάζονται θεωρητικά οι δύο αλγόριθμοι (Κεφάλαιο 3), εξηγώντας τη μαθηματική τους βάση και τον τρόπο λειτουργίας τους. Στη συνέχεια, το Κεφάλαιο 4 εστιάζει στην εφαρμογή του Sum-Product σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αποκωδικοποίησης, επιδεικνύοντας τη διαδικασία σε τρεις επαναλήψεις μέχρι την επιτυχή ανακατασκευή του αρχικού μηνύματος. Αντίστοιχα, το Κεφάλαιο 5 επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία για τον Iterative Log-Likelihood, αναλύοντας τα ενδιάμεσα στάδια μέχρι την ορθή αποκωδικοποίηση.

Το Κεφάλαιο 6 διερευνά τη συμπεριφορά του αλγορίθμου Sum-Product σε 12 διαφορετικά σενάρια, στα οποία το επίπεδο θορύβου μεταβάλλεται. Οι προσομοιώσεις καταδεικνύουν ότι η αποκωδικοποίηση επιτυγχάνεται άμεσα σε χαμηλό θόρυβο, καθυστερεί σε υψηλότερο θόρυβο, ενώ σε ακραίες περιπτώσεις αποτυγχάνει πλήρως.

Μέσω αυτής της ανάλυσης, η εργασία επιχειρεί να προσφέρει μια σαφή και συγκριτική εικόνα της αποτελεσματικότητας των συγκεκριμένων τεχνικών αποκωδικοποίησης, συμβάλλοντας στην κατανόηση της εφαρμογής τους σε πραγματικά συστήματα επικοινωνίας.

2 Κωδικοποίηση καναλιού

Η κωδικοποίηση καναλιού αποτελεί βασικό τομέα της Θεωρίας Πληροφορίας, ο οποίος ασχολείται με τη βελτίωση της αξιοπιστίας της μετάδοσης δεδομένων μέσω θορυβωδών καναλιών επικοινωνίας. Κάθε επικοινωνιακό σύστημα υπόκειται σε θορύβους και παρεμβολές, οι οποίες μπορούν να αλλοιώσουν τα μεταδιδόμενα δεδομένα, προκαλώντας σφάλματα στη λήψη. Η κωδικοποίηση καναλιού εισάγει επιπλέον πλεονάζουσα πληροφορία στα αρχικά δεδομένα, επιτρέποντας την ανίχνευση και διόρθωση σφαλμάτων κατά την αποκωδικοποίηση. Έτσι, ενισχύεται η αξιοπιστία των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων και επιτυγχάνεται καλύτερη απόδοση σε περιβάλλοντα με υψηλό θόρυβο ή περιορισμένους πόρους μετάδοσης.

Η έννοια της κωδικοποίησης καναλιού εισήχθη αρχικά από τον Claude Shannon το 1948, στο πλαίσιο της Θεωρίας Πληροφορίας. Το θεώρημα του Shannon έδειξε ότι υπάρχει ένα ανώτατο όριο ρυθμού μετάδοσης δεδομένων, ονομάζεται χωρητικότητα καναλιού, πέρα από το οποίο δεν είναι δυνατή η αξιόπιστη επικοινωνία χωρίς σφάλματα. Η προσθήκη κωδικών διόρθωσης σφαλμάτων επιτρέπει την προσέγγιση αυτού του ορίου, εξασφαλίζοντας ότι η πληροφορία φτάνει σωστά στον προορισμό της, ακόμα και σε συνθήκες υψηλού θορύβου.

Οι μέθοδοι κωδικοποίησης καναλιού διακρίνονται σε κωδικούς ανίχνευσης σφαλμάτων και κωδικούς διόρθωσης σφαλμάτων. Οι πρώτοι, όπως ο κώδικας ελέγχου παρεμβολής (CRC - Cyclic Redundancy Check), επιτρέπουν στον δέκτη να ανιχνεύσει σφάλματα, αλλά όχι να τα διορθώσει. Οι δεύτεροι περιλαμβάνουν πιο σύνθετες τεχνικές, όπως οι κώδικες Hamming, οι κώδικες Reed-Solomon, οι Turbo codes και οι κώδικες LDPC (Low-Density Parity-Check), οι οποίοι μπορούν να επιδιορθώσουν τα λάθη και να ανακατασκευάσουν τα αρχικά δεδομένα με υψηλή ακρίβεια.

Οι κώδικες Hamming είναι από τις πιο απλές μεθόδους και χρησιμοποιούνται κυρίως σε εφαρμογές χαμηλής πολυπλοκότητας, όπως στη μνήμη υπολογιστών. Οι κώδικες Reed-Solomon είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις οπτικές αποθηκευτικές συσκευές (CD, DVD, Blu-ray) και στις δορυφορικές επικοινωνίες, καθώς είναι ανθεκτικοί σε σφάλματα

κατά ομάδες (burst errors). Οι Turbo codes και οι LDPC codes χρησιμοποιούνται σε σύγχρονα τηλεπικοινωνιακά δίκτυα, όπως στα συστήματα κινητής τηλεφωνίας 4G και 5G, καθώς επιτυγχάνουν σχεδόν βέλτιστη απόδοση κοντά στο όριο του Shannon.

Εφαρμογές της Κωδικοποίησης Καναλιού

Η κωδικοποίηση καναλιού είναι μια θεμελιώδης τεχνολογία, που επιτρέπει την αξιόπιστη επικοινωνία και αποθήκευση δεδομένων, και είναι απαραίτητη σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Ενδεικτικά αναφέρονται:

- Στα σύγχρονα κινητά δίκτυα (4G, 5G), οι τεχνικές κωδικοποίησης μειώνουν την πιθανότητα σφαλμάτων, διασφαλίζοντας αξιόπιστη επικοινωνία ακόμα και σε συνθήκες χαμηλής ισχύος σήματος.
- Στις δορυφορικές επικοινωνίες, όπου η απόσταση και οι παρεμβολές προκαλούν υψηλά ποσοστά σφαλμάτων, οι προηγμένοι κώδικες επιτρέπουν τη λήψη δεδομένων με ελάχιστη απώλεια.
- Στα ασύρματα δίκτυα Wi-Fi και στις επικοινωνίες Bluetooth, η κωδικοποίηση χρησιμοποιείται για τη σταθερότητα και την ομαλή μετάδοση δεδομένων.
- Οι σκληροί δίσκοι (HDD), οι SSD και οι μνήμες flash εφαρμόζουν τεχνικές κωδικοποίησης, όπως οι κώδικες BCH και Reed-Solomon, για να διατηρούν την ακεραιότητα των δεδομένων, παρά τις φυσικές φθορές.
- Στις οπτικές αποθηκευτικές συσκευές, η κωδικοποίηση προστατεύει τα δεδομένα από αλλοιώσεις που μπορεί να προκληθούν λόγω χρόνου ή κακής χρήσης.
- Οι τεχνολογίες συμπίεσης και ροής βίντεο, όπως τα πρωτόκολλα H.264 και H.265, ενσωματώνουν κωδικοποίηση διόρθωσης σφαλμάτων για τη βελτίωση της ποιότητας της εικόνας, ακόμη και σε περιβάλλοντα με χαμηλό εύρος ζώνης.
- Οι υπηρεσίες cloud computing και τα μεγάλα κέντρα δεδομένων (data centers) χρησιμοποιούν κώδικες διόρθωσης για την προστασία των αρχείων από απώλειες ή αλλοιώσεις.

Η συνεχής εξέλιξη των τεχνικών κωδικοποίησης συμβάλλει στη βελτίωση της ποιότητας των τηλεπικοινωνιών, της απόδοσης των αποθηκευτικών μέσων και της ανθεκτικότητας των πολυμέσων. Με την πρόοδο της τεχνητής νοημοσύνης και των κβαντικών επικοινωνιών, αναμένονται ακόμη πιο αποδοτικές και ασφαλείς μέθοδοι κωδικοποίησης, ενισχύοντας την αξιοπιστία των σύγχρονων και μελλοντικών συστημάτων επικοινωνίας.

3 Αλγόριθμοι Αποκωδικοποίησης Καναλιού

Οι Κώδικες Χαμηλής Πυκνότητας Ελέγχου Ισοτιμίας (LDPC- Low-Density Parity-Check) είναι ένας τύπος γραμμικών κωδίκων που χρησιμοποιούνται για τη διόρθωση λαθών σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Αυτοί οι κώδικες επιτυγχάνουν απόδοση κοντά στο όριο του Shannon και βασίζονται σε αλγορίθμους επαναληπτικής αποκωδικοποίησης. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν και οι αλγόριθμοι που περιγράφονται παρακάτω, για την αποκωδικοποίηση LDPC κωδίκων κάνοντας χρήση της πληροφορίας του καναλιού. Δύνανται να διορθώσουν πολλά σφάλματα που συμβαίνουν κατά την μετάδοση ενός μηνύματος μέσω θορυβώδους καναλιού, κατατάσσονται στην κατηγορία των soft-decision αποκωδικοποιητών και συνδυάζουν αξιοπιστία, αποδοτικότητα, αλλά και μεγάλη πολυπλοκότητα στις πράξεις που τους απαρτίζουν. Από τους πιο διαδεδομένους αλγορίθμους είναι οι δύο αλγόριθμοι οι οποίοι θα αναλυθούν στην παρούσα εργασία, ο Sum-Product και ο Iterative Log Likelihood.

3.1 Sum-Product Algorithm

Για τη μετάδοση μιας κωδικής λέξης μέσω AWGN καναλιού, θεωρούμε την προς μετάδοση αρχική πληροφορία ως ένα δυαδικό διάνυσμα c το οποίο αρχικά χαρτογραφείται στο μεταδιδόμενο διάνυσμα σήματος t που απαρτίζεται από $t_n = (2c_n - 1)a$ στοιχεία. Θεωρούμε ότι $a \rightarrow 1$ και $-a \rightarrow 0$, χρησιμοποιώντας έναν binary phase-shift keyed (BPSK) σχηματισμό σήματος. Στη συνέχεια το αρχικό σήμα διέρχεται μέσω ενός καναλιού, το οποίο προσθέτει ένα διάνυσμα Gaussian θορύβου v , κάθε στοιχείο του οποίου είναι ανεξάρτητο πανομοιότυπα κατανεμημένο, με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση $\sigma^2 = N_0/2$. Το λαμβανόμενο διάνυσμα είναι $r = t + v$. Με βάση τα λαμβανόμενα δεδομένα υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες του καναλιού σύμφωνα με τον τύπο

$$P(c_n = 1|r_n) = \frac{1}{1 + e^{-2ar_n/\sigma^2}} \quad (1)$$

Μετατρέποντας τις πιθανότητες σε δυαδικό διάνυσμα έχουμε μια εκτίμηση του μηνύματος, το οποίο μπορεί να έχει διαφορές σε σχέση με το αρχικό, ανάλογα με το πόσο

‘αδύναμα’ ή ‘δυναμικά’ μετατρέπονται οι εκ των υστέρων πιθανότητες του καναλιού σε 0 και 1. Αυτές οι ‘αδύναμες’ και ‘δυναμικές’ ενδείξεις θα διερευνηθούν μέσω ενός soft-decision αποκωδικοποιητή (Moon, 2005).

Εδώ ξεκινά η αποκωδικοποίηση με τη χρήση του αλγορίθμου Sum Product.

- Εισερχόμενα δεδομένα: Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H , οι εκ των υστέρων πιθανότητες του καναλιού $p_n(x) = P(c_n = x | r_n)$ και ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων L του αλγορίθμου.
- Αρχικοποίηση: Θέτουμε $q_{mn}(x) = p_n(x)$ για όλα τα (m, n) όπου $H(m, n) = 1$. Αυτές οι τιμές, οι εκ των υστέρων πιθανότητες δηλαδή, χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση της αποκωδικοποίησης των bit
- Οριζόντιο βήμα: Για κάθε (m, n) όπου $H(m, n) = 1$ υπολογίζουμε το $\delta q_{mn} = q_{mn}(0) - q_{mn}(1)$ και στη συνέχεια το δr_{mn} ως εξής:

$$\delta r_{mn} = \prod_{\{n' \in N_{m,n}\}} \delta q_{mn'} \quad (2)$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τα

$$r_{mn}(1) = \frac{1 - \delta r_{mn}}{2} \quad (3)$$

$$r_{mn}(0) = \frac{1 + \delta r_{mn}}{2} \quad (4)$$

- Κάθετο βήμα: Για κάθε (m, n) όπου $H(m, n) = 1$ υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες (“pseudoposterior” probabilities) σύμφωνα με τους ακόλουθους τύπους

$$q_n(0) = a_n p_n(0) \prod_{\{m' \in M_n\}} r_{m'n}(0) \quad (5)$$

$$q_n(1) = a_n p_n(1) \prod_{\{m' \in M_n\}} r_{m'n}(1) \quad (6)$$

Όπου το a_n είναι τέτοιο ώστε $q_n(0) + q_n(1) = 1$.

- Απόφαση: Ο αλγόριθμος καλείται να αποφασίσει με κριτήριο τις τιμές $q_n(1)$ και να συνθέσει το μήνυμα που έχει ληφθεί ως εξής: θέτει $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$. Αν, κάνοντας τον έλεγχο, επιβεβαιωθεί ότι $H\hat{c} = 0$ τότε σταματά, αφού έχει αποκωδικοποιήσει σωστά το μήνυμα. Σε αντίθετο αποτέλεσμα, επαναλαμβάνει την διαδικασία από το ‘Οριζόντιο βήμα’, με νέες πιθανότητες αυτές που προέκυψαν από την 1^η επανάληψη και μέχρι να έχει επιτυχή αποκωδικοποίηση ή μέχρι να φτάσει τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, γεγονός που θα σημάνει αποτυχία αποκωδικοποίησης και τερματισμό του αλγορίθμου (Moon, 2005).

Για την καλύτερη κατανόηση του αλγορίθμου, εξετάζουμε, σε επόμενο κεφάλαιο, ένα παράδειγμα στο οποίο εφαρμόζεται ο Sum-Product σε έναν LDPC κώδικα με συγκεκριμένο πίνακα ελέγχου ισοτιμίας. Σε κάθε βήμα υπολογίζονται οι επικοινωνίες μεταξύ κόμβων και τελικά συγκρίνεται η αποκωδικοποιημένη ακολουθία με τον αρχικό κώδικα.

3.2 Iterative Log Likelihood Decoding Algorithm

Ένας από τους πιο διαδεδομένους αλγορίθμους είναι η αποκωδικοποίηση μέσω πιθανοτήτων καταγραφής λόγων (Log Likelihood Ratio - LLR), που εφαρμόζεται με την τεχνική του μηνυμάτων (message passing).

Ο αλγόριθμος αποκωδικοποίησης με βάση τις πιθανολογικές σχέσεις εφαρμόζεται στον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας του κώδικα και βασίζεται στη διάδοση μηνυμάτων μεταξύ κόμβων ελέγχου (check nodes) και κόμβων μεταβλητών (variable nodes). Τα βασικά βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

- Εισερχόμενα δεδομένα: Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H , το λαμβανόμενο διάνυσμα r , ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου L και η αξιοπιστία του καναλιού L_c .
- Αρχικοποίηση: Θέτουμε $n_{mn}^{[0]} = 0$ για όλα τα (m,n) όπου $H(m,n) = 1$, το $\lambda_n = L_c r_n$ και τον μετρητή των επαναλήψεων $l = 1$.
- Check node update:

Κάθε κόμβος ελέγχου λαμβάνει μηνύματα από τους κόμβους μεταβλητών και υπολογίζει το νέο μήνυμα που στέλνει πίσω, βασισμένο στη λειτουργία εξίσωσης ελέγχου ισοτιμίας. Το μήνυμα που αποστέλλεται από έναν κόμβο ελέγχου προς έναν κόμβο μεταβλητής υπολογίζεται για κάθε (m,n) όπου $H(m,n) = 1$, σύμφωνα με τον τύπο:

$$n_{m,n}^{[l]} = -2 \tanh^{-1} \left(\prod_{j \in N_{m,n}} \tanh \left(-\frac{\lambda_j^{[l-1]} - n_{m,j}^{[l-1]}}{2} \right) \right) \quad (7)$$

- Bit node update:
- Κάθε κόμβος μεταβλητής ενημερώνει την εκτίμησή του για το αντίστοιχο bit συνδυάζοντας τα μηνύματα από τους κόμβους ελέγχου. Για κάθε κόμβο μεταβλητής n , υπολογίζουμε σύμφωνα με τον τύπο:

$$\lambda_n^{[l]} = L_c r_n + \sum_{m \in M_n} n_{m,n}^{[l]} \quad (8)$$

Όπου $\lambda_n^{[0]} = L_c r_n$ η αρχική αξιοπιστία καναλιού και M_n το σύνολο των check nodes που συνδέονται με τον bit node n .

- Έλεγχος -απόφαση: ο αλγόριθμος θέτει $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $\lambda_n[1] > 0$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$. Αν, κάνοντας τον έλεγχο, επιβεβαιωθεί ότι $H\hat{c} = 0$ τότε σταματά αφού έχει αποκωδικοποιήσει σωστά το μήνυμα. Σε αντίθετο αποτέλεσμα, επαναλαμβάνει την διαδικασία από το Check node update, με νέες τιμές λ_n αυτές που προέκυψαν από την 1^η επανάληψη και μέχρι να έχει επιτυχή αποκωδικοποίηση ή μέχρι να φτάσει τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, γεγονός που θα σημαίνει αποτυχία αποκωδικοποίησης και τερματισμό του αλγορίθμου (Moon, 2005).

Για την καλύτερη κατανόηση του αλγορίθμου, εξετάζουμε, σε επόμενο κεφάλαιο, ένα παράδειγμα αποκωδικοποίησης χρησιμοποιώντας έναν πίνακα ελέγχου ισοτιμίας και συγκεκριμένες αρχικές τιμές LLR. Σε κάθε βήμα, ανανεώνονται τα μηνύματα και ελέγχεται αν η λύση ικανοποιεί τις εξισώσεις ισοτιμίας.

4 Παράδειγμα αποκωδικοποίησης με Sum-Product

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η αναλυτική επίλυση παραδείγματος αποκωδικοποίησης με τον αλγόριθμο SUM-PRODUCT.

Παράδειγμα 1

Έστω ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H με διαστάσεις (5×10) :

	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
$H =$	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0

Έστω (c) η κωδική λέξη που φτάνει στο κανάλι:

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

H οποία μεταδίδεται μέσω ασύρματου καναλιού AWGN με $\sigma^2=2$ και $\alpha=2$.

H ακολουθία δεδομένων (r) που λαμβάνεται στον δέκτη είναι η εξής:

$$r = [-0,63 \ -0,83 \ -0,73 \ -0,04 \ 0,1 \ 0,95 \ -0,76 \ 0,66 \ -0,55 \ 0,58]$$

Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων για τον αλγόριθμο ορίζεται σε $L=8$.

Αρχικός υπολογισμός πιθανοτήτων

Υπολογίζουμε τις πιθανότητες για AWGN κανάλι, σύμφωνα με τον τύπο (1)

$$P(c_n = 1|r_n) = \frac{1}{1 + e^{-2\alpha r_n/\sigma^2}}$$

Έτσι προκύπτουν οι εκ των υστέρων πιθανότητες του καναλιού, που στη συνέχεια συμβολίζουμε ως $p_n(x)$:

$$P(c=1|r) = [0,22 \ 0,16 \ 0,19 \ 0,48 \ 0,55 \ 0,87 \ 0,18 \ 0,79 \ 0,25 \ 0,76]$$

$$P(c=0|r) = [0,78 \ 0,84 \ 0,81 \ 0,52 \ 0,45 \ 0,13 \ 0,82 \ 0,21 \ 0,75 \ 0,24]$$

4.1 Επανάληψη 1^η

Οριζόντιο Βήμα (Horizontal Step):

Θέτουμε $q_{mn}(x) = p_n(x)$ για όλα τα (m, n) όπου $H(m, n) = 1$

q _{mn} (0)									
0,78	0,84	0,81			0,13	0,82			0,24
0,78		0,81		0,45	0,13		0,21	0,75	
		0,81	0,52	0,45		0,82		0,75	0,24
	0,84		0,52	0,45	0,13		0,21		0,24
0,78	0,84		0,52			0,82	0,21	0,75	
q _{mn} (1)									
0,22	0,16	0,19			0,87	0,18			0,76
0,22		0,19		0,55	0,87		0,79	0,25	
		0,19	0,48	0,55		0,18		0,25	0,76
	0,16		0,48	0,55	0,87		0,79		0,76
0,22	0,16		0,48			0,18	0,79	0,25	

Για κάθε (m, n) όπου $H(m, n) = 1$, υπολογίζουμε το $\delta q_{mn} = q_{mn}(0) - q_{mn}(1)$

δ q _{mn}									
0,56	0,68	0,62			-0,74	0,64			-0,52
0,56		0,62		-0,10	-0,74		-0,58	0,50	
		0,62	0,04	-0,10		0,64		0,50	-0,52
	0,68		0,04	-0,10	-0,74		-0,58		-0,52
0,56	0,68		0,04			0,64	-0,58	0,50	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το (δr_{mn}) σύμφωνα με τον τύπο (2):

$$\delta r_{mn} = \prod_{\{n' \in N_{m,n}\}} \delta q_{mn'}$$

Για κάθε θέση του πίνακα (δq_{mn}) , όπου περιέχεται τιμή, καταχωρείται ως τιμή στον (δr_{mn}) το αποτέλεσμα του γινομένου της γραμμής του πίνακα (δq_{mn}) , εξαιρουμένου του ποσοστού που βρίσκεται στο αντίστοιχο κελί με αυτό που υπολογίζουμε.

Παράδειγμα:

$$\delta r_{11} = 0,68 \times 0,62 \times (-0,74) \times 0,64 \times (-0,52) = 0,1051$$

$$\delta r_{35} = 0,62 \times 0,04 \times 0,64 \times 0,5 \times (-0,52) = -0,0042$$

$$\delta r_{58} = 0,56 \times 0,68 \times 0,04 \times 0,64 \times 0,5 = 0,0049$$

Κατόπιν των υπολογισμών παίρνουμε τις παρακάτω τιμές:

δ r _{mn}									
0,1051	0,0862	0,0941			-0,0793	0,0915			-0,1122
-0,0133		-0,0119		0,0745	0,0100		0,0128	-0,0148	
		0,0007	0,0104	-0,0042		0,0006		0,0008	-0,0008
	0,0009		0,0152	-0,0061	-0,0008		-0,0010		-0,0012
-0,0050	-0,0041		-0,0705			-0,0044	0,0049	-0,0056	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε σύμφωνα με τους τύπους (3) και (4) ως εξής:

$$r_{mn}(1) = \frac{1 - \delta r_{mn}}{2}$$

$r_{mn}(1)$									
0,45	0,46	0,45			0,54	0,45			0,56
0,51		0,51		0,46	0,49		0,49	0,51	
		0,50	0,49	0,50		0,50		0,50	0,50
	0,50		0,49	0,50	0,50		0,50		0,50
0,50	0,50		0,54			0,50	0,50	0,50	

$$r_{mn}(0) = \frac{1 + \delta r_{mn}}{2}$$

$r_{mn}(0)$									
0,55	0,54	0,55			0,46	0,55			0,44
0,49		0,49		0,54	0,51		0,51	0,49	
		0,50	0,51	0,50		0,50		0,50	0,50
	0,50		0,51	0,50	0,50		0,50		0,50
0,50	0,50		0,46			0,50	0,50	0,50	

Κάθετο Βήμα (Vertical Step):

Για κάθε (m, n) όπου $H(m, n) = 1$, υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες (“pseudoposterior” probabilities) σύμφωνα με τους τύπους (5) και (6):

$$q_n(0) = a_n p_n(0) \prod_{\{m' \in M_n\}} r_{m'n}(0)$$

$$q_n(1) = a_n p_n(1) \prod_{\{m' \in M_n\}} r_{m'n}(1)$$

Όπου το a_n είναι τέτοιο ώστε $q_n(0) + q_n(1) = 1$.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} q_1(1) &= a_1 \times P_1(1) \times r_{11}(1) \times r_{21}(1) \times r_{51}(1) = a_1 \times 0,22 \times 0,45 \times 0,51 \times 0,5 \\ &= a_1 \times 0,025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(0) &= a_1 \times P_1(0) \times r_{11}(0) \times r_{21}(0) \times r_{51}(0) = a_1 \times 0,78 \times 0,55 \times 0,49 \times 0,5 \\ &= a_1 \times 0,106 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(1) + q_1(0) &= 1 \Rightarrow (a_1 \times 0,025) + (a_1 \times 0,106) = 1 \Rightarrow a_1 \\ &= \frac{1}{0,025 + 0,106} \Rightarrow a_1 = 7,643 \end{aligned}$$

$$q_1(1) = 7,643 \times 0,025 = 0,19$$

$$q_1(0) = 7,643 \times 0,106 = 0,81$$

$$\begin{aligned} q_2(1) &= a_2 \times P_2(1) \times r_{12}(1) \times r_{42}(1) \times r_{52}(1) = a_2 \times 0,16 \times 0,46 \times 0,5 \times 0,5 \\ &= a_2 \times 0,018 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(0) &= a_2 \times P_2(0) \times r_{12}(0) \times r_{42}(0) \times r_{52}(0) = a_2 \times 0,84 \times 0,54 \times 0,5 \times 0,5 \\ &= a_2 \times 0,114 \end{aligned}$$

$$q_2(1) + q_2(0) = 1 \Rightarrow (a_2 \times 0,025) + (a_2 \times 0,106) = 1 \Rightarrow a_2$$

$$= \frac{1}{0,025 + 0,106} \Rightarrow a_2 = 7,575$$

$$q_2(1) = 7,575 \times 0,018 = 0,14$$

$$q_2(0) = 7,575 \times 0,114 = 0,86$$

$$q_3(1) = a_3 \times P_3(1) \times r_{13}(1) \times r_{23}(1) \times r_{33}(1) = a_3 \times 0,19 \times 0,45 \times 0,51 \times 0,5$$

$$= a_3 \times 0,022$$

$$q_3(0) = a_3 \times P_3(0) \times r_{13}(0) \times r_{23}(0) \times r_{33}(0) = a_3 \times 0,81 \times 0,55 \times 0,49 \times 0,5$$

$$= a_3 \times 0,11$$

$$q_3(1) + q_3(0) = 1 \Rightarrow (a_3 \times 0,022) + (a_3 \times 0,11) = 1 \Rightarrow a_3$$

$$= \frac{1}{0,022 + 0,11} \Rightarrow a_3 = 7,617$$

$$q_3(1) = 7,617 \times 0,022 = 0,17$$

$$q_3(0) = 7,617 \times 0,11 = 0,83$$

$$q_4(1) = a_4 \times P_4(1) \times r_{34}(1) \times r_{44}(1) \times r_{54}(1) = a_4 \times 0,48 \times 0,49 \times 0,49 \times 0,54$$

$$= a_4 \times 0,063$$

$$q_4(0) = a_4 \times P_4(0) \times r_{34}(0) \times r_{44}(0) \times r_{54}(0) = a_4 \times 0,52 \times 0,51 \times 0,51 \times 0,46$$

$$= a_4 \times 0,062$$

$$q_4(1) + q_4(0) = 1 \Rightarrow (a_4 \times 0,063) + (a_4 \times 0,062) = 1 \Rightarrow a_4$$

$$= \frac{1}{0,063 + 0,062} \Rightarrow a_4 = 8,028$$

$$q_4(1) = 8,028 \times 0,063 = 0,5$$

$$q_4(0) = 8,028 \times 0,062 = 0,5$$

$$q_5(1) = a_5 \times P_5(1) \times r_{25}(1) \times r_{35}(1) \times r_{45}(1) = a_5 \times 0,55 \times 0,46 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_5 \times 0,064$$

$$q_5(0) = a_5 \times P_5(0) \times r_{25}(0) \times r_{35}(0) \times r_{45}(0) = a_5 \times 0,45 \times 0,54 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_5 \times 0,06$$

$$q_5(1) + q_5(0) = 1 \Rightarrow (a_5 \times 0,064) + (a_5 \times 0,06) = 1 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{0,064 + 0,06} \Rightarrow a_5 = 8,058$$

$$q_5(1) = 8,058 \times 0,064 = 0,52$$

$$q_5(0) = 8,058 \times 0,06 = 0,48$$

$$q_6(1) = a_6 \times P_6(1) \times r_{16}(1) \times r_{26}(1) \times r_{46}(1) = a_6 \times 0,87 \times 0,54 \times 0,49 \times 0,5 = a_6 \times 0,116$$

$$q_6(0) = a_6 \times P_6(0) \times r_{16}(0) \times r_{26}(0) \times r_{46}(0) = a_6 \times 0,13 \times 0,46 \times 0,51 \times 0,5 = a_6 \times 0,015$$

$$q_6(1) + q_6(0) = 1 \Rightarrow (a_6 \times 0,116) + (a_6 \times 0,015) = 1 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{0,116 + 0,015} \Rightarrow a_6 = 7,611$$

$$q_6(1) = 7,611 \times 0,116 = 0,89$$

$$q_6(0) = 7,611 \times 0,015 = 0,11$$

$$q_7(1) = a_7 \times P_7(1) \times r_{17}(1) \times r_{37}(1) \times r_{57}(1) = a_7 \times 0,18 \times 0,45 \times 0,5 \times 0,5 = a_7 \times 0,021$$

$$q_7(0) = a_7 \times P_7(0) \times r_{17}(0) \times r_{37}(0) \times r_{57}(0) = a_7 \times 0,82 \times 0,55 \times 0,5 \times 0,5 = a_7 \times 0,111$$

$$q_7(1) + q_7(0) = 1 \Rightarrow (a_7 \times 0,021) + (a_7 \times 0,111) = 1 \Rightarrow a_7 = \frac{1}{0,021 + 0,111} \Rightarrow a_7 = 7,577$$

$$q_7(1) = 7,577 \times 0,021 = 0,16$$

$$q_7(0) = 7,577 \times 0,111 = 0,84$$

$$q_8(1) = a_8 \times P_8(1) \times r_{28}(1) \times r_{48}(1) \times r_{58}(1) = a_8 \times 0,79 \times 0,49 \times 0,5 \times 0,5 = a_8 \times 0,097$$

$$q_8(0) = a_8 \times P_8(0) \times r_{28}(0) \times r_{48}(0) \times r_{58}(0) = a_8 \times 0,21 \times 0,51 \times 0,5 \times 0,5 = a_8 \times 0,027$$

$$q_8(1) + q_8(0) = 1 \Rightarrow (a_8 \times 0,097) + (a_8 \times 0,027) = 1 \Rightarrow a_8$$

$$= \frac{1}{0,097 + 0,027} \Rightarrow a_8 = 8,078$$

$$q_8(1) = 8,078 \times 0,097 = 0,78$$

$$q_8(0) = 8,078 \times 0,027 = 0,22$$

$$q_9(1) = a_9 \times P_9(1) \times r_{29}(1) \times r_{39}(1) \times r_{59}(1) = a_9 \times 0,25 \times 0,51 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_9 \times 0,032$$

$$q_9(0) = a_9 \times P_9(0) \times r_{29}(0) \times r_{39}(0) \times r_{59}(0) = a_9 \times 0,75 \times 0,49 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_9 \times 0,092$$

$$q_9(1) + q_9(0) = 1 \Rightarrow (a_9 \times 0,032) + (a_9 \times 0,092) = 1 \Rightarrow a_9$$

$$= \frac{1}{0,032 + 0,092} \Rightarrow a_9 = 8,079$$

$$q_9(1) = 8,079 \times 0,032 = 0,26$$

$$q_9(0) = 8,079 \times 0,092 = 0,74$$

$$q_{10}(1) = a_{10} \times P_{10}(1) \times r_{110}(1) \times r_{310}(1) \times r_{410}(1)$$

$$= a_{10} \times 0,76 \times 0,56 \times 0,5 \times 0,5 = a_{10} \times 0,106$$

$$q_{10}(0) = a_{10} \times P_{10}(0) \times r_{110}(0) \times r_{310}(0) \times r_{410}(0)$$

$$= a_{10} \times 0,24 \times 0,44 \times 0,5 \times 0,5 = a_{10} \times 0,027$$

$$q_{10}(1) + q_{10}(0) = 1 \Rightarrow (a_{10} \times 0,106) + (a_{10} \times 0,027) = 1 \Rightarrow a_{10}$$

$$= \frac{1}{0,106 + 0,027} \Rightarrow a_{10} = 7,550$$

$$q_{10}(1) = 7,550 \times 0,106 = 0,8$$

$$q_{10}(0) = 7,550 \times 0,027 = 0,2$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα έχουμε:

$$q_n(1) = [0,19 \ 0,14 \ 0,17 \ 0,5 \ 0,52 \ 0,89 \ 0,16 \ 0,78 \ 0,26 \ 0,8]$$

$$q_n(0) = [0,81 \ 0,86 \ 0,83 \ 0,5 \ 0,48 \ 0,11 \ 0,84 \ 0,22 \ 0,74 \ 0,2]$$

Θέτουμε $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται και θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\hat{c}H^T = 0$.

Κάνοντας την πράξη καταλήγουμε στο $z = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$ που είναι $\neq 0$ άρα δεν ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και προχωρούμε στη 2^η επανάληψη του αλγορίθμου.

4.2 Επανάληψη 2^η

Οι πιθανότητες που χρησιμοποιούμε είναι αυτές που προέκυψαν από την 1^η επανάληψη του αλγορίθμου.

Θέτουμε $q_{mn}(x) = p_n(x)$ για όλα τα (m, n) όπου $H(m, n) = 1$

$q_{mn}(0)$									
0,81	0,86	0,83			0,11	0,84			0,20
0,81		0,83		0,48	0,11		0,22	0,74	
		0,83	0,50	0,48		0,84		0,74	0,20
	0,86		0,50	0,48	0,11		0,22		0,20
0,81	0,86		0,50			0,84	0,22	0,74	
$q_{mn}(1)$									
0,19	0,14	0,17			0,89	0,16			0,80
0,19		0,17		0,52	0,89		0,78	0,26	
		0,17	0,50	0,52		0,16		0,26	0,80
	0,14		0,50	0,52	0,89		0,78		0,80
0,19	0,14		0,50			0,16	0,78	0,26	

Για κάθε (m, n) όπου $H(m, n) = 1$, υπολογίζουμε το $\delta q_{mn} = q_{mn}(0) - q_{mn}(1)$

δq_{mn}									
0,62	0,72	0,66			-0,78	0,68			-0,60
0,62		0,66		-0,04	-0,78		-0,56	0,48	
		0,66	0,00	-0,04		0,68		0,48	-0,60
	0,72		0,00	-0,04	-0,78		-0,56		-0,60
0,62	0,72		0,00			0,68	-0,56	0,48	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το (δr_{mn}) ως εξής:

δr_{mn}									
0,1512	0,1302	0,1421			-0,1202	0,1379			-0,1563
-0,0055		-0,0052		0,0858	0,0044		0,0061	-0,0071	
		0,0000	0,0052	0,0000		0,0000		0,0000	0,0000
	0,0000		0,0075	0,0000	0,0000		0,0000		0,0000
0,0000	0,0000		-0,0816			0,0000	0,0000	0,0000	

Κατόπιν υπολογίζουμε τα $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$

$r_{mn}(1)$									
0,4244	0,4349	0,4290			0,5601	0,4311			0,5781
0,5028		0,5026		0,4571	0,4978		0,4969	0,5036	
		0,5000	0,4974	0,5000		0,5000		0,5000	0,5000
	0,5000		0,4962	0,5000	0,5000		0,5000		0,5000
0,5000	0,5000		0,5408			0,5000	0,5000	0,5000	

r mn(0)									
0,5756	0,5651	0,5710			0,4399	0,5689			0,4219
0,4972		0,4974		0,5429	0,5022		0,5031	0,4964	
		0,5000	0,5026	0,5000		0,5000		0,5000	0,5000
	0,5000		0,5038	0,5000	0,5000		0,5000		0,5000
0,5000	0,5000		0,4592			0,5000	0,5000	0,5000	

Και τέλος, υπολογίζουμε τα $q_n(1)$ και $q_n(0)$ ως εξής:

$$q_1(1) = a_1 \times P_1(1) \times r_{11}(1) \times r_{21}(1) \times r_{51}(1)$$

$$= a_1 \times 0,19 \times 0,4244 \times 0,5028 \times 0,5 = a_1 \times 0,02$$

$$q_1(0) = a_1 \times P_1(0) \times r_{11}(0) \times r_{21}(0) \times r_{51}(0)$$

$$= a_1 \times 0,81 \times 0,5756 \times 0,4972 \times 0,5 = a_1 \times 0,116$$

$$q_1(1) + q_1(0) = 1 \Rightarrow a_1 (0,02 + 0,116) = 1 \Rightarrow a_1 = 7,343$$

$$q_1(1) = 7,343 \times 0,02 = 0,15$$

$$q_1(0) = 7,343 \times 0,116 = 0,85$$

$$q_2(1) = a_2 \times P_2(1) \times r_{12}(1) \times r_{42}(1) \times r_{52}(1) = a_2 \times 0,14 \times 0,4349 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_2 \times 0,015$$

$$q_2(0) = a_2 \times P_2(0) \times r_{12}(0) \times r_{42}(0) \times r_{52}(0) = a_2 \times 0,86 \times 0,5651 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_2 \times 0,121$$

$$q_2(1) + q_2(0) = 1 \Rightarrow a_2 (0,015 + 0,121) = 1 \Rightarrow a_2 = 7,314$$

$$q_2(1) = 7,314 \times 0,015 = 0,11$$

$$q_2(0) = 7,314 \times 0,121 = 0,89$$

$$q_3(1) = a_3 \times P_3(1) \times r_{13}(1) \times r_{23}(1) \times r_{33}(1)$$

$$= a_3 \times 0,17 \times 0,4290 \times 0,5026 \times 0,5 = a_3 \times 0,018$$

$$q_3(0) = a_3 \times P_3(0) \times r_{13}(0) \times r_{23}(0) \times r_{33}(0)$$

$$= a_3 \times 0,83 \times 0,5710 \times 0,4974 \times 0,5 = a_3 \times 0,118$$

$$q_3(1) + q_3(0) = 1 \Rightarrow a_3 (0,018 + 0,118) = 1 \Rightarrow a_3 = 7,342$$

$$q_3(1) = 7,342 \times 0,018 = 0,13$$

$$q_3(0) = 7,342 \times 0,118 = 0,87$$

$$q_4(1) = a_4 \times P_4(1) \times r_{34}(1) \times r_{44}(1) \times r_{54}(1)$$

$$= a_4 \times 0,5 \times 0,4974 \times 0,4962 \times 0,5408 = a_4 \times 0,067$$

$$q_4(0) = a_4 \times P_4(0) \times r_{34}(0) \times r_{44}(0) \times r_{54}(0)$$

$$= a_4 \times 0,5 \times 0,5026 \times 0,5038 \times 0,4592 = a_4 \times 0,058$$

$$q_4(1) + q_4(0) = 1 \Rightarrow a_4 (0,067 + 0,058) = 1 \Rightarrow a_4 = 8,008$$

$$q_4(1) = 8,008 \times 0,067 = 0,53$$

$$q_4(0) = 8,008 \times 0,058 = 0,47$$

$$q_5(1) = a_5 \times P_5(1) \times r_{25}(1) \times r_{35}(1) \times r_{45}(1) = a_5 \times 0,52 \times 0,4571 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_5 \times 0,059$$

$$q_5(0) = a_5 \times P_5(0) \times r_{25}(0) \times r_{35}(0) \times r_{45}(0) = a_5 \times 0,48 \times 0,5429 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_5 \times 0,065$$

$$q_5(1) + q_5(0) = 1 \Rightarrow a_5 (0,059 + 0,065) = 1 \Rightarrow a_5 = 8,028$$

$$q_5(1) = 8,028 \times 0,059 = 0,48$$

$$q_5(0) = 8,028 \times 0,065 = 0,52$$

$$q_6(1) = a_6 \times P_6(1) \times r_{16}(1) \times r_{26}(1) \times r_{46}(1)$$

$$= a_6 \times 0,89 \times 0,5601 \times 0,4978 \times 0,5 = a_6 \times 0,124$$

$$q_6(0) = a_6 \times P_6(0) \times r_{16}(0) \times r_{26}(0) \times r_{46}(0)$$

$$= a_6 \times 0,11 \times 0,4399 \times 0,5022 \times 0,5 = a_6 \times 0,012$$

$$q_6(1) + q_6(0) = 1 \Rightarrow a_6 (0,124 + 0,012) = 1 \Rightarrow a_6 = 7,341$$

$$q_6(1) = 7,341 \times 0,124 = 0,91$$

$$q_6(0) = 7,341 \times 0,012 = 0,09$$

$$q_7(1) = a_7 \times P_7(1) \times r_{17}(1) \times r_{37}(1) \times r_{57}(1) = a_7 \times 0,16 \times 0,4311 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_7 \times 0,017$$

$$q_7(0) = a_7 \times P_7(0) \times r_{17}(0) \times r_{37}(0) \times r_{57}(0) = a_7 \times 0,84 \times 0,5689 \times 0,5 \times 0,5$$

$$= a_7 \times 0,119$$

$$q_7(1) + q_7(0) = 1 \Rightarrow a_7 (0,017 + 0,119) = 1 \Rightarrow a_7 = 7,314$$

$$q_7(1) = 7,314 \times 0,017 = 0,13$$

$$q_7(0) = 7,314 \times 0,119 = 0,87$$

$$\begin{aligned} q_8(1) &= a_8 \times P_8(1) \times r_{28}(1) \times r_{48}(1) \times r_{58}(1) = a_8 \times 0,78 \times 0,4969 \times 0,5 \times 0,5 \\ &= a_8 \times 0,097 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_8(0) &= a_8 \times P_8(0) \times r_{28}(0) \times r_{48}(0) \times r_{58}(0) = a_8 \times 0,22 \times 0,5031 \times 0,5 \times 0,5 \\ &= a_8 \times 0,028 \end{aligned}$$

$$q_8(1) + q_8(0) = 1 \Rightarrow a_8(0,097 + 0,028) = 1 \Rightarrow a_8 = 8,028$$

$$q_8(1) = 8,028 \times 0,097 = 0,78$$

$$q_8(0) = 8,028 \times 0,028 = 0,22$$

$$\begin{aligned} q_9(1) &= a_9 \times P_9(1) \times r_{29}(1) \times r_{39}(1) \times r_{59}(1) = a_9 \times 0,26 \times 0,5036 \times 0,5 \times 0,5 \\ &= a_9 \times 0,033 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_9(0) &= a_9 \times P_9(0) \times r_{29}(0) \times r_{39}(0) \times r_{59}(0) = a_9 \times 0,74 \times 0,4964 \times 0,5 \times 0,5 \\ &= a_9 \times 0,092 \end{aligned}$$

$$q_9(1) + q_9(0) = 1 \Rightarrow a_9(0,033 + 0,092) = 1 \Rightarrow a_9 = 8,028$$

$$q_9(1) = 8,028 \times 0,033 = 0,26$$

$$q_9(0) = 8,028 \times 0,092 = 0,74$$

$$\begin{aligned} q_{10}(1) &= a_{10} \times P_{10}(1) \times r_{110}(1) \times r_{310}(1) \times r_{410}(1) \\ &= a_{10} \times 0,8 \times 0,5781 \times 0,5 \times 0,5 = a_{10} \times 0,116 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{10}(0) &= a_{10} \times P_{10}(0) \times r_{110}(0) \times r_{310}(0) \times r_{410}(0) \\ &= a_{10} \times 0,2 \times 0,4219 \times 0,5 \times 0,5 = a_{10} \times 0,021 \end{aligned}$$

$$q_{10}(1) + q_{10}(0) = 1 \Rightarrow a_{10}(0,116 + 0,021) = 1 \Rightarrow a_{10} = 7,314$$

$$q_{10}(1) = 7,314 \times 0,116 = 0,85$$

$$q_{10}(0) = 7,314 \times 0,021 = 0,15$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα έχουμε:

$$q_n(1) = [0,15 \ 0,11 \ 0,13 \ \mathbf{0,53} \ \mathbf{0,48} \ 0,91 \ 0,13 \ 0,78 \ 0,26 \ 0,85]$$

$$q_n(0) = [0,85 \ 0,89 \ 0,87 \ \mathbf{0,47} \ \mathbf{0,52} \ 0,09 \ 0,87 \ 0,22 \ 0,74 \ 0,15]$$

Θέτουμε $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{1} \ \mathbf{0} \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται και θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\hat{c}H^T = 0$.

Κάνοντας την πράξη καταλήγουμε στο $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ και άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος θα σταματήσει.

Επειδή όμως για τα δύο μπιτ (με έντονη γραφή), οι εκ των υστέρων πιθανότητες είναι πολύ κοντά στο 0,5 θα προχωρήσουμε σε 3^η επανάληψη του αλγορίθμου.

4.3 Επανάληψη 3^η

Οι πιθανότητες που χρησιμοποιούμε είναι αυτές που προέκυψαν από την 2^η επανάληψη του αλγορίθμου.

Θέτουμε $q_{mn}(x) = p_n(x)$ για όλα τα (m, n) όπου $H(m, n) = 1$

$q_{mn}(0)$									
0,85	0,89	0,87			0,09	0,87			0,15
0,85		0,87		0,52	0,09		0,22	0,74	
		0,87	0,47	0,52		0,87		0,74	0,15
	0,89		0,47	0,52	0,09		0,22		0,15
0,85	0,89		0,47			0,87	0,22	0,74	
$q_{mn}(1)$									
0,15	0,11	0,13			0,91	0,13			0,85
0,15		0,13		0,48	0,91		0,78	0,26	
		0,13	0,53	0,48		0,13		0,26	0,85
	0,11		0,53	0,48	0,91		0,78		0,85
0,15	0,11		0,53			0,13	0,78	0,26	

Για κάθε (m, n) όπου $H(m, n) = 1$, υπολογίζουμε το $\delta q_{mn} = q_{mn}(0) - q_{mn}(1)$

δq_{mn}									
0,70	0,78	0,74			-0,82	0,74			-0,70
0,70		0,74		0,04	-0,82		-0,56	0,48	
		0,74	-0,06	0,04		0,74		0,48	-0,70
	0,78		-0,06	0,04	-0,82		-0,56		-0,70
0,70	0,78		-0,06			0,74	-0,56	0,48	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το (δr_{mn}) ως εξής:

δr_{mn}									
0,2452	0,2200	0,2319			-0,2093	0,2319			-0,2452
0,0065		0,0062		0,1142	-0,0056		-0,0082	0,0095	
		0,0006	-0,0074	0,0110		0,0006		0,0009	-0,0006
	0,0008		-0,0100	0,0150	-0,0007		-0,0011		-0,0009
0,0093	0,0084		-0,1086			0,0088	-0,0116	0,0136	

Κατόπιν υπολογίζουμε τα $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$

r mn(1)									
0,3774	0,3900	0,3840			0,6046	0,3840			0,6226
0,4967		0,4969		0,4429	0,5028		0,5041	0,4952	
		0,4997	0,5037	0,4945		0,4997		0,4995	0,5003
	0,4996		0,5050	0,4925	0,5004		0,5005		0,5004
0,4953	0,4958		0,5543			0,4956	0,5058	0,4932	

r mn(0)									
0,6226	0,6100	0,6160			0,3954	0,6160			0,3774
0,5033		0,5031		0,5571	0,4972		0,4959	0,5048	
		0,5003	0,4963	0,5055		0,5003		0,5005	0,4997
	0,5004		0,4950	0,5075	0,4996		0,4995		0,4996
0,5047	0,5042		0,4457			0,5044	0,4942	0,5068	

Και τέλος, υπολογίζουμε τα $q_n(1)$ και $q_n(0)$ ως εξής:

$$q_1(1) = a_1 \times P_1(1) \times r_{11}(1) \times r_{21}(1) \times r_{51}(1)$$

$$= a_1 \times 0,15 \times 0,3774 \times 0,4967 \times 0,4953 = a_1 \times 0,014$$

$$q_1(0) = a_1 \times P_1(0) \times r_{11}(0) \times r_{21}(0) \times r_{51}(0)$$

$$= a_1 \times 0,85 \times 0,6226 \times 0,5033 \times 0,5047 = a_1 \times 0,134$$

$$q_1(1) + q_1(0) = 1 \Rightarrow a_1 (0,014 + 0,134) = 1 \Rightarrow a_1 = 6,742$$

$$q_1(1) = 6,742 \times 0,014 = 0,09$$

$$q_1(0) = 6,742 \times 0,134 = 0,91$$

$$q_2(1) = a_2 \times P_2(1) \times r_{12}(1) \times r_{42}(1) \times r_{52}(1)$$

$$= a_2 \times 0,11 \times 0,39 \times 0,4996 \times 0,4958 = a_2 \times 0,011$$

$$q_2(0) = a_2 \times P_2(0) \times r_{12}(0) \times r_{42}(0) \times r_{52}(0)$$

$$= a_2 \times 0,89 \times 0,61 \times 0,5004 \times 0,5042 = a_2 \times 0,137$$

$$q_2(1) + q_2(0) = 1 \Rightarrow a_2 (0,011 + 0,137) = 1 \Rightarrow a_2 = 6,775$$

$$q_2(1) = 6,775 \times 0,011 = 0,07$$

$$q_2(0) = 6,775 \times 0,137 = 0,93$$

$$q_3(1) = a_3 \times P_3(1) \times r_{13}(1) \times r_{23}(1) \times r_{33}(1)$$

$$= a_3 \times 0,13 \times 0,3840 \times 0,4969 \times 0,4997 = a_3 \times 0,012$$

$$q_3(0) = a_3 \times P_3(0) \times r_{13}(0) \times r_{23}(0) \times r_{33}(0)$$

$$= a_3 \times 0,87 \times 0,6160 \times 0,5031 \times 0,5003 = a_3 \times 0,135$$

$$q_3(1) + q_3(0) = 1 \Rightarrow a_3(0,012 + 0,135) = 1 \Rightarrow a_3 = 6,790$$

$$q_3(1) = 6,790 \times 0,012 = 0,08$$

$$q_3(0) = 6,790 \times 0,135 = 0,92$$

$$q_4(1) = a_4 \times P_4(1) \times r_{34}(1) \times r_{44}(1) \times r_{54}(1)$$

$$= a_4 \times 0,53 \times 0,5037 \times 0,5050 \times 0,5543 = a_4 \times 0,075$$

$$q_4(0) = a_4 \times P_4(0) \times r_{34}(0) \times r_{44}(0) \times r_{54}(0)$$

$$= a_4 \times 0,47 \times 0,4963 \times 0,4950 \times 0,4457 = a_4 \times 0,051$$

$$q_4(1) + q_4(0) = 1 \Rightarrow a_4(0,075 + 0,051) = 1 \Rightarrow a_4 = 7,925$$

$$q_4(1) = 7,925 \times 0,075 = 0,59$$

$$q_4(0) = 7,925 \times 0,051 = 0,41$$

$$q_5(1) = a_5 \times P_5(1) \times r_{25}(1) \times r_{35}(1) \times r_{45}(1)$$

$$= a_5 \times 0,48 \times 0,4429 \times 0,4945 \times 0,4925 = a_5 \times 0,052$$

$$q_5(0) = a_5 \times P_5(0) \times r_{25}(0) \times r_{35}(0) \times r_{45}(0)$$

$$= a_5 \times 0,52 \times 0,5571 \times 0,5055 \times 0,5075 = a_5 \times 0,074$$

$$q_5(1) + q_5(0) = 1 \Rightarrow a_5(0,052 + 0,074) = 1 \Rightarrow a_5 = 7,931$$

$$q_5(1) = 7,931 \times 0,052 = 0,41$$

$$q_5(0) = 7,931 \times 0,074 = 0,59$$

$$q_6(1) = a_6 \times P_6(1) \times r_{16}(1) \times r_{26}(1) \times r_{46}(1)$$

$$= a_6 \times 0,91 \times 0,6046 \times 0,5028 \times 0,5004 = a_6 \times 0,138$$

$$q_6(0) = a_6 \times P_6(0) \times r_{16}(0) \times r_{26}(0) \times r_{46}(0)$$

$$= a_6 \times 0,09 \times 0,3954 \times 0,4972 \times 0,4996 = a_6 \times 0,009$$

$$q_6(1) + q_6(0) = 1 \Rightarrow a_6(0,138 + 0,009) = 1 \Rightarrow a_6 = 6,791$$

$$q_6(1) = 6,791 \times 0,138 = 0,94$$

$$q_6(0) = 6,791 \times 0,009 = 0,06$$

$$q_7(1) = a_7 \times P_7(1) \times r_{17}(1) \times r_{37}(1) \times r_{57}(1)$$

$$= a_7 \times 0,13 \times 0,3840 \times 0,4997 \times 0,4956 = a_7 \times 0,012$$

$$\begin{aligned}
q_7(0) &= a_7 \times P_7(0) \times r_{17}(0) \times r_{37}(0) \times r_{57}(0) \\
&= a_7 \times 0,87 \times 0,6160 \times 0,5003 \times 0,5044 = a_7 \times 0,135 \\
q_7(1) + q_7(0) &= 1 \Rightarrow a_7(0,012 + 0,135) = 1 \Rightarrow a_7 = 6,775 \\
q_7(1) &= 6,775 \times 0,012 = 0,08 \\
q_7(0) &= 6,775 \times 0,135 = 0,92
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_8(1) &= a_8 \times P_8(1) \times r_{28}(1) \times r_{48}(1) \times r_{58}(1) \\
&= a_8 \times 0,78 \times 0,5041 \times 0,5005 \times 0,5058 = a_8 \times 0,1 \\
q_8(0) &= a_8 \times P_8(0) \times r_{28}(0) \times r_{48}(0) \times r_{58}(0) \\
&= a_8 \times 0,22 \times 0,4959 \times 0,4995 \times 0,4942 = a_8 \times 0,027 \\
q_8(1) + q_8(0) &= 1 \Rightarrow a_8(0,1 + 0,027) = 1 \Rightarrow a_8 = 7,907 \\
q_8(1) &= 7,907 \times 0,1 = 0,79 \\
q_8(0) &= 7,907 \times 0,027 = 0,21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_9(1) &= a_9 \times P_9(1) \times r_{29}(1) \times r_{39}(1) \times r_{59}(1) \\
&= a_9 \times 0,26 \times 0,4952 \times 0,4995 \times 0,4932 = a_9 \times 0,032 \\
q_9(0) &= a_9 \times P_9(0) \times r_{29}(0) \times r_{39}(0) \times r_{59}(0) \\
&= a_9 \times 0,74 \times 0,5048 \times 0,5005 \times 0,5068 = a_9 \times 0,095 \\
q_9(1) + q_9(0) &= 1 \Rightarrow a_9(0,032 + 0,095) = 1 \Rightarrow a_9 = 7,908 \\
q_9(1) &= 7,908 \times 0,032 = 0,25 \\
q_9(0) &= 7,908 \times 0,095 = 0,75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{10}(1) &= a_{10} \times P_{10}(1) \times r_{110}(1) \times r_{310}(1) \times r_{410}(1) \\
&= a_{10} \times 0,85 \times 0,6226 \times 0,5003 \times 0,5004 = a_{10} \times 0,132 \\
q_{10}(0) &= a_{10} \times P_{10}(0) \times r_{110}(0) \times r_{310}(0) \times r_{410}(0) \\
&= a_{10} \times 0,15 \times 0,3774 \times 0,4997 \times 0,4996 = a_{10} \times 0,014 \\
q_{10}(1) + q_{10}(0) &= 1 \Rightarrow a_{10}(0,132 + 0,014) = 1 \Rightarrow a_{10} = 6,820 \\
q_{10}(1) &= 6,820 \times 0,132 = 0,9 \\
q_{10}(0) &= 6,820 \times 0,014 = 0,1
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα έχουμε:

$$q_n(1) = [0,09 \ 0,07 \ 0,08 \ \mathbf{0,59} \ \mathbf{0,41} \ 0,94 \ 0,08 \ 0,79 \ 0,25 \ 0,9]$$

$$q_n(0) = [0,91 \ 0,93 \ 0,92 \ \mathbf{0,41} \ \mathbf{0,59} \ 0,06 \ 0,92 \ 0,21 \ 0,75 \ 0,1]$$

Θέτουμε $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{1} \ \mathbf{0} \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται και θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\hat{c}H^T = 0$.

Κάνοντας την πράξη καταλήγουμε στο $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ και άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος θα σταματήσει.

5 Παράδειγμα αποκωδικοποίησης με Log Likelihood

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η αναλυτική επίλυση παραδείγματος αποκωδικοποίησης με τον αλγόριθμο Iterative Log Likelihood Decoding Algorithm for Binary LDPC Codes.

Παράδειγμα 2

Έστω ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H με διαστάσεις (5×10) :

	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
$H =$	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0

Έστω (c) η κωδική λέξη που φτάνει στο κανάλι:

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Η οποία μεταδίδεται μέσω ασύρματου καναλιού AWGN με $\sigma^2=2$ και $\alpha=2$.

Η ακολουθία δεδομένων (r) που λαμβάνεται στον δέκτη είναι η εξής:

$$r = [-0,63 \ -0,83 \ -0,73 \ -0,04 \ 0,1 \ 0,95 \ -0,76 \ 0,66 \ -0,55 \ 0,58]$$

Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων για τον αλγόριθμο ορίζεται σε $l=8$.

Δίνεται η αρχική αξιοπιστία καναλιού ως εξής:

$$\lambda^{[0]} = [-1,3 \ -1,7 \ -1,5 \ -0,08 \ 0,2 \ 1,9 \ -1,5 \ 1,3 \ -1,1 \ 1,2]$$

5.1 Επανάληψη 1^η

5.1.1 Check node update

Για κάθε Check node m και συνδεδεμένο bit n υπολογίζουμε σύμφωνα με τον τύπο(7) :

$$n_{m,n}^{[l]} = -2 \tanh^{-1} \left(\prod_{j \in N_{m,n}} \tanh \left(-\frac{\lambda_j^{[l-1]} - n_{m,j}^{[l-1]}}{2} \right) \right)$$

Για $n_{1,1}$ το $j \in N_{1,1}$ δηλαδή $j \in \{2, 3, 6, 7, 10\}$

Θέτουμε το $n_{m,n}^{[0]} = 0$ οπότε και $n_{m,j}^{[l-1]} = 0$

Για τον κόμβο ελέγχου $m=1$ που συνδέεται με τα bits $n=1,2,3,6,7,10$

Υπολογίζουμε τα μηνύματα για κάθε σύνδεση:

$$n_{1,1}^{[1]} \rightarrow N_{1,1} = \{2,3,6,7,10\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{1,1}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \right. \\ \left. \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = -0,22$$

$$n_{1,2}^{[1]} \rightarrow N_{1,2} = \{1,3,6,7,10\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{1,2}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \right. \\ \left. \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = -0,18$$

$$n_{1,3}^{[1]} \rightarrow N_{1,3} = \{1,2,6,7,10\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{1,3}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \right. \\ \left. \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = -0,20$$

$$n_{1,6}^{[1]} \rightarrow N_{1,6} = \{1,2,3,7,10\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_{10}^{[0]} \\ = 1,2$$

$$n_{1,6}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) \\ = -0,17$$

$$n_{1,7}^{[1]} \rightarrow N_{1,7} = \{1,2,3,6,10\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{1,7}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \right. \\ \left. \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = -0,20$$

$$n_{1,10}^{[1]} \rightarrow N_{1,10} = \{1,2,3,6,7\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_7^{[0]} \\ = -1,5$$

$$n_{1,10}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,7}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) = 0,24$$

Για τον κόμβο ελέγχου m=2 που συνδέεται με τα bits n=1,3,5,6,8,9

Υπολογίζουμε τα μηνύματα για κάθε σύνδεση:

$$n_{2,1}^{[1]} \rightarrow N_{2,1} = \{3,5,6,8,9\}, \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{2,1}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = 0,027$$

$$n_{2,3}^{[1]} \rightarrow N_{2,3} = \{1,5,6,8,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{2,3}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = 0,024$$

$$n_{2,5}^{[1]} \rightarrow N_{2,5} = \{1,3,6,8,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{2,5}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = -0,154$$

$$n_{2,6}^{[1]} \rightarrow N_{2,6} = \{1,3,5,8,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{2,6}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = -0,021$$

$$n_{2,8}^{[1]} \rightarrow N_{2,8} = \{1,3,5,6,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{2,8}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = -0,027$$

$$n_{2,9}^{[1]} \rightarrow N_{2,9} = \{1,3,5,6,8\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3$$

$$n_{2,9}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) = -0,031$$

Για τον κόμβο ελέγχου m=3 που συνδέεται με τα bits n=3,4,5,7,9,10

Υπολογίζουμε τα μηνύματα για κάθε σύνδεση:

$$n_{3,3}^{[1]} \rightarrow N_{3,3} = \{4,5,7,9,10\}, \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_9^{[0]} = -1,1 \lambda_{10}^{[0]} \\ = 1,2$$

$$n_{3,3}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,2}{2}\right) = -0,0014$$

$$n_{3,4}^{[1]} \rightarrow N_{3,4} = \{3,5,7,9,10\}, \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_9^{[0]} = -1,1 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{3,4}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,2}{2}\right) = -0,0216$$

$$n_{3,5}^{[1]} \rightarrow N_{3,5} = \{3,4,7,9,10\}, \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_9^{[0]} = -1,1 \lambda_{10}^{[0]} \\ = 1,2$$

$$n_{3,5}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,2}{2}\right) = 0,0087$$

$$n_{3,7}^{[1]} \rightarrow N_{3,7} = \{3,4,5,9,10\}, \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_9^{[0]} = -1,1 \lambda_{10}^{[0]} \\ = 1,2$$

$$n_{3,7}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,2}{2}\right) = -0,0014$$

$$n_{3,9}^{[1]} \rightarrow N_{3,9} = \{3,4,5,7,10\}, \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_{10}^{[0]} \\ = 1,2$$

$$n_{3,9}^{[1]} = -2tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,2}{2}\right) = -0,0017$$

$$n_{3,10}^{[1]} \rightarrow N_{3,10} = \{3,4,5,7,9\}, \lambda_3^{[0]} = -1,5 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{3,10}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{0,08}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-0,2}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,1}{2} \right) \right) = 0,0016$$

Για τον κόμβο ελέγχου m=4 που συνδέεται με τα bits n=2,4,5,6,8,10

Υπολογίζουμε τα μηνύματα για κάθε σύνδεση:

$$n_{4,2}^{[1]} \rightarrow N_{4,2} = \{4,5,6,8,10\}, \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{4,2}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{0,08}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-0,2}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = -0,0018$$

$$n_{4,4}^{[1]} \rightarrow N_{4,4} = \{2,5,6,8,10\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{4,4}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-0,2}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = -0,0313$$

$$n_{4,5}^{[1]} \rightarrow N_{4,5} = \{2,4,6,8,10\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{4,5}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{0,08}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = 0,0126$$

$$n_{4,6}^{[1]} \rightarrow N_{4,6} = \{2,4,5,8,10\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{4,6}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{0,08}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-0,2}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = 0,0017$$

$$n_{4,8}^{[1]} \rightarrow N_{4,8} = \{2,4,5,6,10\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_{10}^{[0]} = 1,2$$

$$n_{4,8}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{0,08}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-0,2}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,9}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,2}{2} \right) \right) = 0,0022$$

$$n_{4,10}^{[1]} \rightarrow N_{4,10} = \{2,4,5,6,8\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_5^{[0]} = 0,2 \lambda_6^{[0]} = 1,9 \lambda_8^{[0]} = 1,3$$

$$n_{4,10}^{[1]} = -2\tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,7}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-0,2}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,9}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) = 0,0023$$

Για τον κόμβο ελέγχου m=5 που συνδέεται με τα bits n=1,2,4,7,8,9

Υπολογίζουμε τα μηνύματα για κάθε σύνδεση:

$$n_{5,1}^{[1]} \rightarrow N_{5,1} = \{2,4,7,8,9\}, \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} \\ = -1,1$$

$$n_{5,1}^{[1]} = -2\tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,7}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = 0,01$$

$$n_{5,2}^{[1]} \rightarrow N_{5,2} = \{1,4,7,8,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} \\ = -1,1$$

$$n_{5,2}^{[1]} = -2\tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = 0,0083$$

$$n_{5,4}^{[1]} \rightarrow N_{5,4} = \{1,2,7,8,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} = -1,1$$

$$n_{5,4}^{[1]} = -2\tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,7}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) \\ = 0,1438$$

$$n_{5,7}^{[1]} \rightarrow N_{5,7} = \{1,2,4,8,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_8^{[0]} = 1,3 \lambda_9^{[0]} \\ = -1,1$$

$$n_{5,7}^{[1]} = -2\tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,7}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{-1,3}{2}\right) \\ \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) = 0,009$$

$$n_{5,8}^{[1]} \rightarrow N_{5,8} = \{1,2,4,7,9\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_9^{[0]} \\ = -1,1$$

$$n_{5,8}^{[1]} = -2\tanh^{-1}(\tanh\left(\frac{1,3}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,7}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{0,08}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,5}{2}\right) \times \tanh\left(\frac{1,1}{2}\right) \\ = -0,01$$

$$n_{5,9}^{[1]} \rightarrow N_{5,9} = \{1,2,4,7,8\}, \lambda_1^{[0]} = -1,3 \lambda_2^{[0]} = -1,7 \lambda_4^{[0]} = -0,08 \lambda_7^{[0]} = -1,5 \lambda_8^{[0]} = 1,3$$

$$n_{5,9}^{[1]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(\frac{1,3}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,7}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{0,08}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{1,5}{2} \right) \times \tanh \left(\frac{-1,3}{2} \right) \right) = 0,0115$$

Έτσι έχουμε:

	-0,22	-0,18	-0,2	-	-	0,17	-0,2	-	-	0,24
	0,027	-	0,024	-	-0,154	-0,021	-	-0,027	0,031	-
$n^{[1]} =$	-	-	-0,0014	-0,021	0,0087	-	-0,0014	-	-0,0017	0,0016
	-	-0,0018	-	-0,0313	0,0126	0,0017	-	0,0022	-	0,0023
	0,01	0,0083	-	0,1438	-	-	0,009	-0,01	0,011	-

5.1.2 Bit node update

Για κάθε κόμβο bit n, υπολογίζουμε σύμφωνα με τον τύπο (8):

$$\lambda_n^{[l]} = L_c r_n + \sum_{m \in M_n} n_{m,n}^{[l]}$$

Όπου $\lambda_n^{[0]} = L_c r_n$ η αρχική αξιοπιστία καναλιού και M_n το σύνολο των check nodes που συνδέονται με τον κόμβο bit n.

$$\lambda_1^{[1]} = -1,3 + (-0,22) + 0,027 + 0,01 = -1,4856$$

$$\lambda_2^{[1]} = -1,7 + (-0,18) + (-0,0018) + 0,0083 = -1,8773$$

$$\lambda_3^{[1]} = -1,5 - 0,2 + 0,024 - 0,0014 = -1,6773$$

$$\lambda_4^{[1]} = -0,08 - 0,021 - 0,0313 + 0,1438 = 0,011$$

$$\lambda_5^{[1]} = 0,2 - 0,154 + 0,0087 + 0,0126 = 0,0672$$

$$\lambda_6^{[1]} = 1,9 + 0,17 - 0,021 + 0,0017 = 2,0526$$

$$\lambda_7^{[1]} = -1,5 - 0,2 - 0,0014 + 0,009 = -1,69$$

$$\lambda_8^{[1]} = 1,3 - 0,027 + 0,0022 - 0,01 = 1,2653$$

$$\lambda_9^{[1]} = -1,1 + 0,031 - 0,0017 + 0,011 = -1,0596$$

$$\lambda_{10}^{[1]} = 1,2 + 0,24 + 0,0016 + 0,0023 = 1,2039$$

Έτσι έχουμε:

$$\lambda^{[1]} = [-1,4 \ -1,8 \ -1,6 \ 0,011 \ 0,067 \ 2,05 \ -1,69 \ 1,26 \ -1,06 \ 1,2]$$

Θέτουμε $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $\lambda_n^{[1]} > 0$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται και θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\hat{c}H^T = 0$.

Κάνοντας την πράξη καταλήγουμε στο $z = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$ που είναι $\neq 0$ άρα δεν ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και προχωρούμε στη 2^η επανάληψη του αλγορίθμου.

5.2 Επανάληψη 2^η

5.2.1 Check node update

Για κάθε Check node m και συνδεδεμένο bit n υπολογίζουμε σύμφωνα με τον τύπο (7):

$$n_{m,n}^{[l]} = -2 \tanh^{-1} \left(\prod_{j \in N_{m,n}} \tanh \left(-\frac{\lambda_j^{[l-1]} - n_{m,j}^{[l-1]}}{2} \right) \right)$$

Για $l = 2$, $\lambda^{[1]} = [-1,4 \ -1,8 \ -1,6 \ 0,011 \ 0,067 \ 2,05 \ -1,69 \ 1,26 \ -1,06 \ 1,2]$ και

	-0,22	-0,18	-0,2	-	-	0,17	-0,2	-	-	0,24
	0,027	-	0,024	-	-0,154	-0,021	-	-0,027	0,031	-
$n^{[1]} =$	-	-	-0,0014	-0,021	0,0087	-	-0,0014	-	-0,0017	0,0016
	-	-0,0018	-	-0,0313	0,0126	0,0017	-	0,0022	-	0,0023
	0,01	0,0083	-	0,1438	-	-	0,009	-0,01	0,011	-

Για τον κόμβο ελέγχου $m=1$ που συνδέεται με τα bits $n=1,2,3,6,7,10$

Υπολογίζουμε τα μηνύματα για κάθε σύνδεση:

$$n_{1,1}^{[2]} \rightarrow N_{1,1} = \{2,3,6,7,10\}, \lambda_2^{[1]} = -1,8 \lambda_3^{[1]} = -1,6 \lambda_6^{[1]} = 2,05 \lambda_7^{[1]} = -1,69 \lambda_{10}^{[1]} = 1,2$$

$$n_{1,1}^{[2]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(-\frac{-1,8 + 0,18}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,6 + 0,2}{2} \right) \right. \\ \times \tanh \left(-\frac{2,05 - 0,17}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,69 + 0,2}{2} \right) \\ \left. \times \tanh \left(-\frac{1,2 - 0,24}{2} \right) \right) = 0,17$$

$$n_{1,2}^{[2]} \rightarrow N_{1,2} = \{1,3,6,7,10\}, \lambda_1^{[1]} = -1,4 \lambda_3^{[1]} = -1,6 \lambda_6^{[1]} = 2,05 \lambda_7^{[1]} = -1,69 \lambda_{10}^{[1]} = 1,2$$

$$n_{1,2}^{[2]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(-\frac{-1,4 + 0,22}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,6 + 0,2}{2} \right) \right. \\ \times \tanh \left(-\frac{2,05 - 0,17}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,69 + 0,2}{2} \right) \\ \left. \times \tanh \left(-\frac{1,2 - 0,24}{2} \right) \right) = 0,13$$

$$n_{1,3}^{[2]} \rightarrow N_{1,3} = \{1,2,6,7,10\}, \lambda_1^{[1]} = -1,4 \lambda_2^{[1]} = -1,8 \lambda_6^{[1]} = 2,05 \lambda_7^{[1]} = -1,69 \lambda_{10}^{[1]} \\ = 1,2$$

$$n_{1,3}^{[2]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(-\frac{-1,4 + 0,22}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,8 + 0,18}{2} \right) \right. \\ \times \tanh \left(-\frac{2,05 - 0,17}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,69 + 0,2}{2} \right) \\ \left. \times \tanh \left(-\frac{1,2 - 0,24}{2} \right) \right) = 0,15$$

$$n_{1,6}^{[2]} \rightarrow N_{1,6} = \{1,2,3,7,10\}, \lambda_1^{[1]} = -1,4 \lambda_2^{[1]} = -1,8 \lambda_3^{[1]} = -1,6 \lambda_7^{[1]} = -1,69 \lambda_{10}^{[1]} \\ = 1,2$$

$$n_{1,6}^{[2]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(-\frac{-1,4 + 0,22}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,8 + 0,18}{2} \right) \right. \\ \times \tanh \left(-\frac{-1,6 + 0,2}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,69 + 0,2}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{1,2 - 0,24}{2} \right) \\ \left. \right) = -0,12$$

$$n_{1,7}^{[2]} \rightarrow N_{1,7} = \{1,2,3,6,10\}, \lambda_1^{[1]} = -1,4 \lambda_2^{[1]} = -1,8 \lambda_3^{[1]} = -1,6 \lambda_6^{[1]} = 2,05 \lambda_{10}^{[1]} \\ = 1,2$$

$$n_{1,7}^{[2]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(-\frac{-1,4 + 0,22}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,8 + 0,18}{2} \right) \right. \\ \times \tanh \left(-\frac{-1,6 + 0,2}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{2,05 - 0,17}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{1,2 - 0,24}{2} \right) \\ \left. \right) = -0,14$$

$$n_{1,10}^{[2]} \rightarrow N_{1,10} = \{1,2,3,6,7\}, \lambda_1^{[1]} = -1,4 \lambda_2^{[1]} = -1,8 \lambda_3^{[1]} = -1,6 \lambda_6^{[1]} = 2,05 \lambda_7^{[1]} \\ = -1,69$$

$$n_{1,10}^{[2]} = -2 \tanh^{-1} \left(\tanh \left(-\frac{-1,4 + 0,22}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{-1,8 + 0,18}{2} \right) \right. \\ \times \tanh \left(-\frac{-1,6 + 0,2}{2} \right) \times \tanh \left(-\frac{2,05 - 0,17}{2} \right) \\ \left. \times \tanh \left(-\frac{-1,69 + 0,2}{2} \right) \right) = -0,2$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα μηνύματα για τους υπόλοιπους κόμβους ελέγχου και παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές:

	0,17	0,13	0,15	-	-	-0,12	-0,14	-	-	-0,2
	0,032	-	0,029	-	-0,179	-0,025	-	-0,035	0,039	-
$\lambda^{[2]}_1 =$	-	-	0,0002	-0,0071	-0,0038	-	0,0002	-	0,0002	-0,0002
	-	0,0003	-	-0,0099	-0,0066	-0,0003	-	-0,0004	-	-0,0004
	0,018	0,0152	-	0,1658	-	-	0,0158	-0,0194	0,0223	-

5.2.2 Bit node update

Για κάθε κόμβο bit n , υπολογίζουμε σύμφωνα με τον τύπο (8)

$$\lambda_1^{[2]} = -1,4 + 0,17 + 0,032 + 0,018 = -1,18$$

$$\lambda_2^{[2]} = -1,8 + 0,13 + 0,0003 + 0,0152 = -1,65$$

$$\lambda_3^{[2]} = -1,6 + 0,15 + 0,029 + 0,0002 = -1,42$$

$$\lambda_4^{[2]} = 0,011 - 0,0071 - 0,0099 + 0,1658 = 0,16$$

$$\lambda_5^{[2]} = 0,067 - 0,179 - 0,0038 - 0,0066 = -0,123$$

$$\lambda_6^{[2]} = 2,05 - 0,12 - 0,025 - 0,0003 = 1,9$$

$$\lambda_7^{[2]} = -1,69 - 0,14 + 0,0002 + 0,0158 = -1,8$$

$$\lambda_8^{[2]} = 1,26 - 0,035 - 0,0004 - 0,0194 = 1,2$$

$$\lambda_9^{[2]} = -1,06 + 0,039 + 0,0002 + 0,0223 = -0,1$$

$$\lambda_{10}^{[2]} = 1,2 - 0,2 - 0,0002 - 0,0004 = 1$$

Έτσι έχουμε:

$$\lambda^{[1]} = [-1,18 \ -1,65 \ -1,42 \ 0,16 \ -0,123 \ 1,9 \ -1,8 \ 1,2 \ -0,1 \ 1]$$

Θέτουμε $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $\lambda_n^{[1]} > 0$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται και θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\hat{c}H^T = 0$.

Κάνοντας την πράξη καταλήγουμε στο $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ και άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος θα σταματήσει.

6 Σενάρια εφαρμογής του Sum-Product

Με σημείο αναφοράς το παράδειγμα 1 όπου εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος Sum-Product, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αποκωδικοποίησης που προέκυψαν με την εφαρμογή διαφορετικών επιπέδων θορύβου στο κανάλι. Ακολουθούν 12 σενάρια για τα οποία υπολογίστηκαν οι ακολουθίες δεδομένων (r) που λαμβάνονται στο δέκτη, με εφαρμογή διαφορετικών τιμών θορύβου καναλιού, με την βοήθεια κώδικα προσομοίωσης μέσω MATLAB. Το πλάτος σήματος δίνεται για όλα τα σενάρια $a=2$.

6.1 Σενάριο 1ο

Για θόρυβο $N_0=0,5w$, $\sigma^2=0,25$, $\sigma=0,5$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-2,6749 \ -0,4825 \ -1,6373 \ 1,9685 \ -1,6426 \ 1,8975 \ -2,0621 \ 2,7448 \ -1,2955 \ 2,7086]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$P(c=0|r) = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

$q_{mn}(0)$									
1,00	1,00	1,00			0,00	1,00			0,00
1,00		1,00		1,00	0,00		0,00	1,00	
		1,00	0,00	1,00		1,00		1,00	0,00
	1,00		0,00	1,00	0,00		0,00		0,00
1,00	1,00		0,00			1,00	0,00	1,00	
$q_{mn}(1)$									
0,00	0,00	0,00			1,00	0,00			1,00
0,00		0,00		0,00	1,00		1,00	0,00	
		0,00	1,00	0,00		0,00		0,00	1,00
	0,00		1,00	0,00	1,00		1,00		1,00
0,00	0,00		1,00			0,00	1,00	0,00	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
1,00	1,00	1,00			-1,00	1,00			-1,00
1,00		1,00		1,00	-1,00		-1,00	1,00	
		1,00	-1,00	1,00		1,00		1,00	-1,00
	1,00		-1,00	1,00	-1,00		-1,00		-1,00
1,00	1,00		-1,00			1,00	-1,00	1,00	
δr_{mn}									
0,9991	1,0000	0,9991			-0,9991	0,9991			-0,9991
1,0000		1,0000		1,0000	-1,0000		-1,0000	1,0000	
		1,0000	-1,0000	1,0000		1,0000		1,0000	-1,0000
	1,0000		-0,9991	0,9991	-0,9991		-0,9991		-0,9991
0,9991	1,0000		-0,9991			0,9991	-0,9991	0,9991	
$r_{mn}(1)$									
0,00	0,00	0,00			1,00	0,00			1,00
0,00		0,00		0,00	1,00		1,00	0,00	
		0,00	1,00	0,00		0,00		0,00	1,00
	0,00		1,00	0,00	1,00		1,00		1,00
0,00	0,00		1,00			0,00	1,00	0,00	
$r_{mn}(0)$									
1,00	1,00	1,00			0,00	1,00			0,00
1,00		1,00		1,00	0,00		0,00	1,00	
		1,00	0,00	1,00		1,00		1,00	0,00
	1,00		0,00	1,00	0,00		0,00		0,00
1,00	1,00		0,00			1,00	0,00	1,00	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

α_{mn}	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$				$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$				
1,001	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	0,99911287	0,999112867
1,000	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	1,00000000	0,999556335
1,000	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	0,99955633	0,999556334
1,001	1,00	0,9991129	0,999112867		0,00	0,00000000	0,000000000
1,000	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	0,99955633	0,999556334
1,001	1,00	0,9991129	0,999112868		0,00	0,00000000	0,000000000
1,001	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	0,99911287	0,999112867
1,001	1,00	0,9991129	0,999112867		0,00	0,00000000	0,000000000
1,000	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	0,99955634	0,999556335
1,001	1,00	0,9991129	0,999112868		0,00	0,00000000	0,000000000

$$q_n(1) = [0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ολοκληρώνεται η διαδικασία του αλγορίθμου.

6.2 Σενάριο 2ο

Για θόρυβο $N_0=1w$, $\sigma^2=0,5$, $\sigma=0,7071$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-2,9545 \ 0,1460 \ -1,4871 \ 1,9554 \ -1,4946 \ 1,8551 \ -2,0878 \ 3,0534 \ -1,0037 \ 3,0021]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,00 \ 0,76 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$P(c=0|r) = [1,00 \ 0,24 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

$q_{mn}(0)$									
1,00	0,24	1,00			0,00	1,00			0,00
1,00		1,00		1,00	0,00		0,00	1,00	
		1,00	0,00	1,00		1,00		1,00	0,00
	0,24		0,00	1,00	0,00		0,00		0,00
1,00	0,24		0,00			1,00	0,00	1,00	
$q_{mn}(1)$									
0,00	0,76	0,00			1,00	0,00			1,00
0,00		0,00		0,00	1,00		1,00	0,00	
		0,00	1,00	0,00		0,00		0,00	1,00
	0,76		1,00	0,00	1,00		1,00		1,00
0,00	0,76		1,00			0,00	1,00	0,00	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
1,00	-0,53	1,00			-1,00	1,00			-1,00
1,00		1,00		1,00	-1,00		-1,00	1,00	
		1,00	-1,00	1,00		1,00		1,00	-1,00
	-0,53		-1,00	1,00	-1,00		-1,00		-1,00
1,00	-0,53		-1,00			1,00	-1,00	1,00	

δr_{mn}									
-0,5256	1,0000	-0,5256			0,5256	-0,5256			0,5256
0,9993		0,9993		0,9993	-0,9993		-0,9993	1,0000	
		0,9993	-0,9993	0,9993		0,9993		1,0000	-0,9993
	1,0000		0,5256	-0,5256	0,5256		0,5256		0,5256
-0,5252	0,9993		0,5252			-0,5252	0,5252	-0,5256	

$r_{mn}(1)$									
0,76278	0,00001	0,76278			0,23722	0,76278			0,23722
0,00034		0,00033		0,00033	0,99966		0,99966	0,00001	
		0,00033	0,99966	0,00033		0,00034		0,00001	0,99966
	0,00001		0,23722	0,76278	0,23722		0,23722		0,23722
0,76261	0,00033		0,23739			0,76261	0,23739	0,76278	
$r_{mn}(0)$									
0,23722	0,99999	0,23722			0,76278	0,23722			0,76278
0,99966		0,99967		0,99967	0,00034		0,00034	0,99999	
		0,99967	0,00034	0,99967		0,99966		0,99999	0,00034
	0,99999		0,76278	0,23722	0,76278		0,76278		0,76278
0,23739	0,99967		0,76261			0,23739	0,76261	0,23722	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

α_{mn}	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$				$p_n(0)$		
	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$			$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
17,764	0,00	0,0001973	0,000000000		1,00	0,05629418	0,056294175
4,217	0,76	0,0000000	0,000000000		0,24	0,99966005	0,237136043
4,218	0,00	0,0000001	0,000000000		1,00	0,23705929	0,237057672
17,764	1,00	0,0562941	0,056294107		0,00	0,00019711	0,000000000
4,218	0,00	0,0000001	0,000000000		1,00	0,23705915	0,237057634
17,776	1,00	0,0562544	0,056254346		0,00	0,00019712	0,000000000
17,764	0,00	0,0001972	0,000000000		1,00	0,05629417	0,056294169
17,764	1,00	0,0562941	0,056294139		0,00	0,00019729	0,000000000
4,217	0,00	0,0000000	0,000000000		1,00	0,23721039	0,237133157
17,776	1,00	0,0562544	0,056254444		0,00	0,00019725	0,000000000

$$q_n(1) = [0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ολοκληρώνεται η διαδικασία του αλγορίθμου.

6.3 Σενάριο 3ο

Για θόρυβο $N_0=2w$, $\sigma^2=1$, $\sigma=1$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-3,3499 \ 1,0349 \ -1,2746 \ 1,9369 \ -1,2853 \ 1,7950 \ -2,1241 \ 3,4897 \ -0,5910 \ 3,4172]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,00 \ 0,98 \ 0,01 \ 1,00 \ 0,01 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,09 \ 1,00]$$

$$P(c=0|r) = [1,00 \ 0,02 \ 0,99 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,91 \ 0,00]$$

$q_{mn}(0)$									
1,00	0,02	0,99			0,00	1,00			0,00
1,00		0,99		0,99	0,00		0,00	0,91	
		0,99	0,00	0,99		1,00		0,91	0,00
	0,02		0,00	0,99	0,00		0,00		0,00
1,00	0,02		0,00			1,00	0,00	0,91	
$q_{mn}(1)$									
0,00	0,98	0,01			1,00	0,00			1,00
0,00		0,01		0,01	1,00		1,00	0,09	
		0,01	1,00	0,01		0,00		0,09	1,00
	0,98		1,00	0,01	1,00		1,00		1,00
0,00	0,98		1,00			0,00	1,00	0,09	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
1,00	-0,97	0,99			-1,00	1,00			-1,00
1,00		0,99		0,99	-1,00		-1,00	0,83	
		0,99	-1,00	0,99		1,00		0,83	-1,00
	-0,97		-1,00	0,99	-1,00		-1,00		-1,00
1,00	-0,97		-1,00			1,00	-1,00	0,83	

δr_{mn}									
-0,9550	0,9859	-0,9668			0,9565	-0,9554			0,9550
0,8073		0,8172		0,8168	-0,8085		-0,8073	0,9749	
		0,8174	-0,8082	0,8170		0,8078		0,9751	-0,8075
	0,9860		0,9559	-0,9663	0,9565		0,9551		0,9551
-0,8011	0,8270		0,8018			-0,8014	0,8011	-0,9674	

$r_{mn}(1)$									
0,98	0,01	0,98			0,02	0,98			0,02
0,10		0,09		0,09	0,90		0,90	0,01	
		0,09	0,90	0,09		0,10		0,01	0,90
	0,01		0,02	0,98	0,02		0,02		0,02
0,90	0,09		0,10			0,90	0,10	0,98	

$r_{mn}(0)$									
0,02	0,99	0,02			0,98	0,02			0,98
0,90		0,91		0,91	0,10		0,10	0,99	
		0,91	0,10	0,91		0,90		0,99	0,10
	0,99		0,98	0,02	0,98		0,98		0,98
0,10	0,91		0,90			0,10	0,90	0,02	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$							
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$	
494,882	0,00	0,0848253	0,000000129	1,00	0,00202056	0,002020555	
70,784	0,98	0,0000043	0,000004185	0,02	0,90074788	0,014123241	
73,067	0,01	0,0082060	0,000049806	0,99	0,01371954	0,013636271	
497,300	1,00	0,0019752	0,001974390	0,00	0,08449936	0,000036469	
72,143	0,01	0,0082417	0,000047939	0,99	0,01389424	0,013813421	
2012,514	1,00	0,0004275	0,000427155	0,00	0,09162723	0,000069736	
495,701	0,00	0,0846230	0,000017277	1,00	0,00200048	0,002000068	
495,488	1,00	0,0020181	0,002018139	0,00	0,08482805	0,000000074	
68,777	0,09	0,0001537	0,000013210	0,91	0,01589255	0,014526438	
2191,120	1,00	0,0004563	0,000456281	0,00	0,09198031	0,000000107	

$$q_n(1) = [0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,98 \ 0,00 \ 0,86 \ 0,01 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,02 \ 1,00 \ 0,14 \ 0,99 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ολοκληρώνεται η διαδικασία του αλγορίθμου.

6.4 Σενάριο 4ο

Για θόρυβο $N_0=3w$, $\sigma^2=1,5$, $\sigma=1,225$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το:

$$r = [-1,1774 \ -3,4792 \ -1,1214 \ 3,9970 \ -1,4011 \ 3,2675 \ -1,1096 \ 1,6283 \ -1,6400 \ 1,0356]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,04 \ 0,00 \ 0,05 \ 1,00 \ 0,02 \ 1,00 \ 0,05 \ 0,99 \ 0,01 \ 0,94]$$

$$P(c=0|r) = [0,96 \ 1,00 \ 0,95 \ 0,00 \ 0,98 \ 0,00 \ 0,95 \ 0,01 \ 0,99 \ 0,06]$$

$q_{mn}(0)$									
0,96	1,00	0,95			0,00	0,95			0,06
0,96		0,95		0,98	0,00		0,01	0,99	
		0,95	0,00	0,98		0,95		0,99	0,06
	1,00		0,00	0,98	0,00		0,01		0,06
0,96	1,00		0,00			0,95	0,01	0,99	

$q_{mn}(1)$									
0,04	0,00	0,05			1,00	0,05			0,94
0,04		0,05		0,02	1,00		0,99	0,01	
		0,05	1,00	0,02		0,05		0,01	0,94
	0,00		1,00	0,02	1,00		0,99		0,94
0,04	0,00		1,00			0,05	0,99	0,01	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,92	1,00	0,90			-1,00	0,90			-0,88
0,92		0,90		0,95	-1,00		-0,97	0,98	
		0,90	-1,00	0,95		0,90		0,98	-0,88
	1,00		-1,00	0,95	-1,00		-0,97		-0,88
0,92	1,00		-1,00			0,90	-0,97	0,98	

δr_{mn}									
0,7178	0,6584	0,7279			-0,6585	0,7303			-0,7471
0,8188		0,8304		0,7875	-0,7511		-0,7707	0,7700	
		0,7383	-0,6677	0,7003		0,7407		0,6847	-0,7577
	0,8182		-0,8181	0,8580	-0,8183		-0,8396		-0,9284
0,8561	0,7852		-0,7851			0,8710	-0,8058	0,8051	

$r_{mn}(1)$									
0,14	0,17	0,14			0,83	0,13			0,87
0,09		0,08		0,11	0,88		0,89	0,11	
		0,13	0,83	0,15		0,13		0,16	0,88
	0,09		0,91	0,07	0,91		0,92		0,96
0,07	0,11		0,89			0,06	0,90	0,10	

$r_{mn}(0)$									
0,86	0,83	0,86			0,17	0,87			0,13
0,91		0,92		0,89	0,12		0,11	0,89	
		0,87	0,17	0,85		0,87		0,84	0,12
	0,91		0,09	0,93	0,09		0,08		0,04
0,93	0,89		0,11			0,94	0,10	0,90	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$							
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$		
1,439	0,04	0,0009193	0,000038147	0,96	0,72492514	0,694842394		
1,486	0,00	0,0016672	0,000000156	1,00	0,67287076	0,672807873		
1,528	0,05	0,0015097	0,000072254	0,95	0,68723500	0,654342932		
1,478	1,00	0,6765681	0,676552173	0,00	0,00162360	0,000000038		
1,450	0,02	0,0011301	0,000026318	0,98	0,70589101	0,689452428		
1,515	1,00	0,6600895	0,659980997	0,00	0,00193036	0,000000317		
1,493	0,05	0,0011277	0,000055613	0,95	0,70441554	0,669676589		
1,378	0,99	0,7352576	0,725815691	0,01	0,00089294	0,000011467		
1,505	0,01	0,0017659	0,000021990	0,99	0,67287160	0,664492918		
1,436	0,94	0,7402351	0,696239315	0,06	0,00054835	0,000032591		

$$q_n(1) = [0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ολοκληρώνεται η διαδικασία του αλγορίθμου.

6.5 Σενάριο 5ο

Για θόρυβο $N_0=3,5w$, $\sigma^2=1,75$, $\sigma=1,3229$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-1,1117 \ -3,5974 \ -1,0512 \ 4,1566 \ -1,3532 \ 3,3688 \ -1,0384 \ 1,5986 \ -1,6112 \ 0,9585]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,07 \ 0,00 \ 0,08 \ 1,00 \ 0,04 \ 1,00 \ 0,09 \ 0,97 \ 0,02 \ 0,90]$$

$$P(c=0|r) = [0,93 \ 1,00 \ 0,92 \ 0,00 \ 0,96 \ 0,00 \ 0,91 \ 0,03 \ 0,98 \ 0,10]$$

$q_{mn}(0)$									
0,93	1,00	0,92			0,00	0,91			0,10
0,93		0,92		0,96	0,00		0,03	0,98	
		0,92	0,00	0,96		0,91		0,98	0,10
	1,00		0,00	0,96	0,00		0,03		0,10
0,93	1,00		0,00			0,91	0,03	0,98	

$q_{mn}(1)$									
0,07	0,00	0,08			1,00	0,09			0,90
0,07		0,08		0,04	1,00		0,97	0,02	
		0,08	1,00	0,04		0,09		0,02	0,90
	0,00		1,00	0,04	1,00		0,97		0,90
0,07	0,00		1,00			0,09	0,97	0,02	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,85	1,00	0,83			-1,00	0,83			-0,80
0,85		0,83		0,91	-1,00		-0,95	0,95	
		0,83	-1,00	0,91		0,83		0,95	-0,80
	1,00		-1,00	0,91	-1,00		-0,95		-0,80
0,85	1,00		-1,00			0,83	-0,95	0,95	

δr_{mn}									
0,5519	0,4716	0,5651			-0,4718	0,5682			-0,5900
0,6871		0,7035		0,6425	-0,5873		-0,6179	0,6170	
		0,5754	-0,4800	0,5255		0,5785		0,5047	-0,6008
	0,6920		-0,6917	0,7573	-0,6922		-0,7284		-0,8657
0,7485	0,6395		-0,6393			0,7705	-0,6732	0,6722	

$r_{mn}(1)$									
0,22	0,26	0,22			0,74	0,22			0,80
0,16		0,15		0,18	0,79		0,81	0,19	
		0,21	0,74	0,24		0,21		0,25	0,80
	0,15		0,85	0,12	0,85		0,86		0,93
0,13	0,18		0,82			0,11	0,84	0,16	

$r_{mn}(0)$									
0,78	0,74	0,78			0,26	0,78			0,20
0,84		0,85		0,82	0,21		0,19	0,81	
		0,79	0,26	0,76		0,79		0,75	0,20
	0,85		0,15	0,88	0,15		0,14		0,07
0,87	0,82		0,18			0,89	0,16	0,84	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

α_{mn}	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$			$p_n(0)$		
	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$		$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
1,884	0,07	0,0044066	0,000321821	0,93	0,57227589	0,530481718
1,960	0,00	0,0073341	0,000001969	1,00	0,51027803	0,510141048
2,075	0,08	0,0068444	0,000567834	0,92	0,52502339	0,481465462
1,949	1,00	0,5130383	0,512999941	0,00	0,00722850	0,000000541
1,898	0,04	0,0051449	0,000223269	0,96	0,55042382	0,526537777
2,025	1,00	0,4941502	0,493926554	0,00	0,00838740	0,000003796
1,994	0,09	0,0052210	0,000444921	0,91	0,54783697	0,501151938
1,754	0,97	0,5848559	0,570096797	0,03	0,00423984	0,000106995
2,015	0,02	0,0077727	0,000190716	0,98	0,50858319	0,496104239
1,872	0,90	0,5935906	0,533890483	0,10	0,00274706	0,000276284

$$q_n(1) = [0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ολοκληρώνεται η διαδικασία του αλγορίθμου.

6.6 Σενάριο 6ο

6.6.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=4,5w$, $\sigma^2=2,25$, $\sigma=1,5$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-3,7219 \ -1,8427 \ -0,9166 \ 5,8782 \ -3,0003 \ 2,281 \ -2,1237 \ -0,8995 \ -2,6584 \ -0,692]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,00 \ 0,04 \ 0,16 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,98 \ 0,02 \ 0,17 \ 0,01 \ 0,23]$$

$$P(c=0|r) = [1,00 \ 0,96 \ 0,84 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,02 \ 0,98 \ 0,83 \ 0,99 \ 0,77]$$

$q_{mn}(0)$									
1,00	0,96	0,84			0,02	0,98			0,77
1,00		0,84		1,00	0,02		0,83	0,99	
		0,84	0,00	1,00		0,98		0,99	0,77
	0,96		0,00	1,00	0,02		0,83		0,77
1,00	0,96		0,00			0,98	0,83	0,99	

$q_{mn}(1)$									
0,00	0,04	0,16			0,98	0,02			0,23
0,00		0,16		0,00	0,98		0,17	0,01	
		0,16	1,00	0,00		0,02		0,01	0,23
	0,04		1,00	0,00	0,98		0,17		0,23
0,00	0,04		1,00			0,02	0,17	0,01	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} , δr_{mn} , $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
1,00	0,93	0,67			-0,97	0,96			0,55
1,00		0,67		0,99	-0,97		0,66	0,98	
		0,67	-1,00	0,99		0,96		0,98	0,55
	0,93		-1,00	0,99	-0,97		0,66		0,55
1,00	0,93		-1,00			0,96	0,66	0,98	

δr_{mn}									
-0,3150	-0,3388	-0,4673			0,3252	-0,3289			-0,5735
-0,4194		-0,6222		-0,4223	0,4330		-0,6301	-0,4257	
		-0,5090	0,3422	-0,3455		-0,3582		-0,3483	-0,6247
	0,3478		-0,3225	0,3256	-0,3338		0,4858		0,5887
-0,5775	-0,6212		0,5760			-0,6030	-0,8677	-0,5863	

$r_{mn}(1)$									
0,66	0,67	0,73			0,34	0,66			0,79
0,71		0,81		0,71	0,28		0,82	0,71	
		0,75	0,33	0,67		0,68		0,67	0,81
	0,33		0,66	0,34	0,67		0,26		0,21
0,79	0,81		0,21			0,80	0,93	0,79	

$r_{mn}(0)$									
0,34	0,33	0,27			0,66	0,34			0,21
0,29		0,19		0,29	0,72		0,18	0,29	
		0,25	0,67	0,33		0,32		0,33	0,19
	0,67		0,34	0,66	0,33		0,74		0,79
0,21	0,19		0,79			0,20	0,07	0,21	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$						
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$	
46,576	0,00	0,3680311	0,000491703	1,00	0,02100663	0,020978563	
21,230	0,04	0,1769482	0,006442134	0,96	0,04219789	0,040661593	
11,917	0,16	0,4489708	0,073585125	0,84	0,01235244	0,010327904	
21,686	1,00	0,0461081	0,046106737	0,00	0,17914202	0,000005185	
15,841	0,00	0,1613245	0,000774713	1,00	0,06265438	0,062353496	
15,290	0,98	0,0637939	0,062706971	0,02	0,15813006	0,002694255	
34,481	0,02	0,3616491	0,008105480	0,98	0,02137543	0,020896349	
24,717	0,17	0,1956883	0,032896349	0,83	0,00909000	0,007561919	
44,377	0,01	0,3811510	0,003347885	0,99	0,01935641	0,019186387	
18,410	0,23	0,1314217	0,029720031	0,77	0,03178790	0,024599302	

$$q_n(1) = [0,02 \ 0,14 \ 0,88 \ 1,00 \ 0,01 \ 0,96 \ 0,28 \ 0,81 \ 0,15 \ 0,55]$$

$$q_n(0) = [0,98 \ 0,86 \ 0,12 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,04 \ 0,72 \ 0,19 \ 0,85 \ 0,45]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.6.2 Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,98	0,86	0,12			0,04	0,72			0,45
0,98		0,12		0,99	0,04		0,19	0,85	
		0,12	0,00	0,99		0,72		0,85	0,45
	0,86		0,00	0,99	0,04		0,19		0,45
0,98	0,86		0,00			0,72	0,19	0,85	

$q_{mn}(1)$									
0,02	0,14	0,88			0,96	0,28			0,55
0,02		0,88		0,01	0,96		0,81	0,15	
		0,88	1,00	0,01		0,28		0,15	0,55
	0,14		1,00	0,01	0,96		0,81		0,55
0,02	0,14		1,00			0,28	0,81	0,15	

δq_{mn}									
0,95	0,73	-0,75			-0,92	0,44			-0,09
0,95		-0,75		0,98	-0,92		-0,63	0,70	
		-0,75	-1,00	0,98		0,44		0,70	-0,09
	0,73		-1,00	0,98	-0,92		-0,63		-0,09
0,95	0,73		-1,00			0,44	-0,63	0,70	

δr_{mn}									
-0,0209	-0,0274	0,0264			0,0217	-0,0452			0,2115
-0,2970		0,3759		-0,2905	0,3088		0,4525	-0,4032	
		0,0285	0,0215	-0,0220		-0,0487		-0,0306	0,2279
	0,0528		-0,0384	0,0393	-0,0418		-0,0613		-0,4071
0,1410	0,1852		-0,1346			0,3050	-0,2148	0,1914	

$r_{mn}(1)$									
0,51	0,51	0,49			0,49	0,52			0,39
0,65		0,31		0,65	0,35		0,27	0,70	
		0,49	0,49	0,51		0,52		0,52	0,39
	0,47		0,52	0,48	0,52		0,53		0,70
0,43	0,41		0,57			0,35	0,61	0,40	

$r_{mn}(0)$									
0,49	0,49	0,51			0,51	0,48			0,61
0,35		0,69		0,35	0,65		0,73	0,30	
		0,51	0,51	0,49		0,48		0,48	0,61
	0,53		0,48	0,52	0,48		0,47		0,30
0,57	0,59		0,43			0,65	0,39	0,60	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,03 \ 0,09 \ 0,74 \ 1,00 \ 0,02 \ 0,93 \ 0,20 \ 0,74 \ 0,23 \ 0,54]$$

$$q_n(0) = [0,97 \ 0,91 \ 0,26 \ 0,00 \ 0,98 \ 0,07 \ 0,80 \ 0,26 \ 0,77 \ 0,46]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 3^η επανάληψη.

6.6.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,97	0,91	0,26			0,07	0,80			0,46
0,97		0,26		0,98	0,07		0,26	0,77	
		0,26	0,00	0,98		0,80		0,77	0,46
	0,91		0,00	0,98	0,07		0,26		0,46
0,97	0,91		0,00			0,80	0,26	0,77	

$q_{mn}(1)$									
0,03	0,09	0,74			0,93	0,20			0,54
0,03		0,74		0,02	0,93		0,74	0,23	
		0,74	1,00	0,02		0,20		0,23	0,54
	0,09		1,00	0,02	0,93		0,74		0,54
0,03	0,09		1,00			0,20	0,74	0,23	

δq_{mn}									
0,93	0,81	-0,49			-0,86	0,60			-0,08
0,93		-0,49		0,96	-0,86		-0,48	0,54	
		-0,49	-1,00	0,96		0,60		0,54	-0,08
	0,81		-1,00	0,96	-0,86		-0,48		-0,08
0,93	0,81		-1,00			0,60	-0,48	0,54	

δr_{mn}									
-0,0162	-0,0186	0,0311			0,0177	-0,0252			0,1898
-0,1045		0,2006		-0,1020	0,1142		0,2021	-0,1797	
		0,0249	0,0121	-0,0127		-0,0202		-0,0223	0,1520
	0,0315		-0,0256	0,0268	-0,0300		-0,0531		-0,3211
0,1281	0,1473		-0,1197			0,1991	-0,2477	0,2202	

$r_{mn}(1)$									
0,51	0,51	0,48			0,49	0,51			0,41
0,55		0,40		0,55	0,44		0,40	0,59	
		0,49	0,49	0,51		0,51		0,51	0,42
	0,48		0,51	0,49	0,51		0,53		0,66
0,44	0,43		0,56			0,40	0,62	0,39	

$r_{mn}(0)$									
0,49	0,49	0,52			0,51	0,49			0,59
0,45		0,60		0,45	0,56		0,60	0,41	
		0,51	0,51	0,49		0,49		0,49	0,58
	0,52		0,49	0,51	0,49		0,47		0,34
0,56	0,57		0,44			0,60	0,38	0,61	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,03 \ 0,07 \ 0,63 \ 1,00 \ 0,03 \ 0,91 \ 0,15 \ 0,78 \ 0,22 \ 0,53]$$

$$q_n(0) = [0,97 \ 0,93 \ 0,37 \ 0,00 \ 0,97 \ 0,09 \ 0,85 \ 0,22 \ 0,78 \ 0,47]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 4^η επανάληψη.

6.6.4 Επανάληψη 4^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 3^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,97	0,93	0,37			0,09	0,85			0,47
0,97		0,37		0,97	0,09		0,22	0,78	
		0,37	0,00	0,97		0,85		0,78	0,47
	0,93		0,00	0,97	0,09		0,22		0,47
0,97	0,93		0,00			0,85	0,22	0,78	

$q_{mn}(1)$									
0,03	0,07	0,63			0,91	0,15			0,53
0,03		0,63		0,03	0,91		0,78	0,22	
		0,63	1,00	0,03		0,15		0,22	0,53
	0,07		1,00	0,03	0,91		0,78		0,53
0,03	0,07		1,00			0,15	0,78	0,22	

δq_{mn}									
0,94	0,86	-0,27			-0,82	0,69			-0,07
0,94		-0,27		0,95	-0,82		-0,56	0,56	
		-0,27	-1,00	0,95		0,69		0,56	-0,07
	0,86		-1,00	0,95	-0,82		-0,56		-0,07
0,94	0,86		-1,00			0,69	-0,56	0,56	

δr_{mn}									
-0,0088	-0,0096	0,0310			0,0100	-0,0119			0,1219
-0,0645		0,2271		-0,0635	0,0731		0,1084	-0,1083	
		0,0247	0,0065	-0,0069		-0,0095		-0,0118	0,0971
	0,0294		-0,0253	0,0266	-0,0307		-0,0454		-0,3750
0,1845	0,2006		-0,1726			0,2496	-0,3100	0,3098	

$r_{mn}(1)$									
0,50	0,50	0,48			0,50	0,51			0,44
0,53		0,39		0,53	0,46		0,45	0,55	
		0,49	0,50	0,50		0,50		0,51	0,45
	0,49		0,51	0,49	0,52		0,52		0,69
0,41	0,40		0,59			0,38	0,66	0,35	

$r_{mn}(0)$									
0,50	0,50	0,52			0,50	0,49			0,56
0,47		0,61		0,47	0,54		0,55	0,45	
		0,51	0,50	0,50		0,50		0,49	0,55
	0,51		0,49	0,51	0,48		0,48		0,31
0,59	0,60		0,41			0,62	0,34	0,65	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,03 \ 0,05 \ 0,49 \ 1,00 \ 0,03 \ 0,90 \ 0,10 \ 0,85 \ 0,16 \ 0,62]$$

$$q_n(0) = [0,97 \ 0,95 \ 0,51 \ 0,00 \ 0,97 \ 0,10 \ 0,90 \ 0,15 \ 0,84 \ 0,38]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 4^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά. Επειδή οι πιθανότητες για το 3^ο bit είναι οριακά πάνω στο 0,5 προχωράμε σε 5^η επανάληψη.

6.6.5 Επανάληψη 5^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 4^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,97	0,95	0,51			0,10	0,90			0,38
0,97		0,51		0,97	0,10		0,15	0,84	
		0,51	0,00	0,97		0,90		0,84	0,38
	0,95		0,00	0,97	0,10		0,15		0,38
0,97	0,95		0,00			0,90	0,15	0,84	
$q_{mn}(1)$									
0,03	0,05	0,49			0,90	0,10			0,62
0,03		0,49		0,03	0,90		0,85	0,16	
		0,49	1,00	0,03		0,10		0,16	0,62
	0,05		1,00	0,03	0,90		0,85		0,62
0,03	0,05		1,00			0,10	0,85	0,16	

δq_{mn}									
0,95	0,91	0,01			-0,81	0,79			-0,24
0,95		0,01		0,94	-0,81		-0,71	0,68	
		0,01	-1,00	0,94		0,79		0,68	-0,24
	0,91		-1,00	0,94	-0,81		-0,71		-0,24
0,95	0,91		-1,00			0,79	-0,71	0,68	

δr_{mn}									
0,0020	0,0021	0,1311			-0,0024	0,0024			-0,0081
0,0054		0,3485		0,0054	-0,0063		-0,0072	0,0075	
		0,1211	-0,0018	0,0019		0,0022		0,0026	-0,0075
	0,1283		-0,1166	0,1234	-0,1443		-0,1644		-0,4913
0,3479	0,3631		-0,3299			0,4150	-0,4653	0,4854	

$r_{mn}(1)$									
0,50	0,50	0,43			0,50	0,50			0,50
0,50		0,33		0,50	0,50		0,50	0,50	
		0,44	0,50	0,50		0,50		0,50	0,50
	0,44		0,56	0,44	0,57		0,58		0,75
0,33	0,32		0,66			0,29	0,73	0,26	

$r_{mn}(0)$									
0,50	0,50	0,57			0,50	0,50			0,50
0,50		0,67		0,50	0,50		0,50	0,50	
		0,56	0,50	0,50		0,50		0,50	0,50
	0,56		0,44	0,56	0,43		0,42		0,25
0,67	0,68		0,34			0,71	0,27	0,74	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,01 \ 0,02 \ 0,22 \ 1,00 \ 0,02 \ 0,93 \ 0,04 \ 0,96 \ 0,06 \ 0,83]$$

$$q_n(0) = [0,99 \ 0,98 \ 0,78 \ 0,00 \ 0,98 \ 0,07 \ 0,96 \ 0,04 \ 0,94 \ 0,17]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 5^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά.

6.7 Σενάριο 7ο

6.7.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=5w$, $\sigma^2=2,5$, $\sigma=1,5811$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$r = [-0,5954 \ -3,8136 \ -3,69 \ 0,7201 \ -6,6552 \ 4,2742 \ -1,4858 \ 0,8064 \ 0,1666 \ -0,7061]$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$P(c=1|r) = [0,28 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,76 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,08 \ 0,78 \ 0,57 \ 0,24]$

$P(c=0|r) = [0,72 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,24 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,92 \ 0,22 \ 0,43 \ 0,76]$

$q_{mn}(0)$									
0,72	1,00	1,00			0,00	0,92			0,76
0,72		1,00		1,00	0,00		0,22	0,43	
		1,00	0,24	1,00		0,92		0,43	0,76
	1,00		0,24	1,00	0,00		0,22		0,76
0,72	1,00		0,24			0,92	0,22	0,43	
$q_{mn}(1)$									
0,28	0,00	0,00			1,00	0,08			0,24
0,28		0,00		0,00	1,00		0,78	0,57	
		0,00	0,76	0,00		0,08		0,57	0,24
	0,00		0,76	0,00	1,00		0,78		0,24
0,28	0,00		0,76			0,08	0,78	0,57	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,44	1,00	0,99			-1,00	0,83			0,51
0,44		0,99		1,00	-1,00		-0,57	-0,13	
		0,99	-0,52	1,00		0,83		-0,13	0,51
	1,00		-0,52	1,00	-1,00		-0,57		0,51
0,44	1,00		-0,52			0,83	-0,57	-0,13	
δr_{mn}									
-0,4196	-0,1868	-0,1870			0,1864	-0,2241			-0,3636
-0,0747		-0,0333		-0,0331	0,0332		0,0583	0,2500	
		0,0292	-0,0560	0,0291		0,0350		-0,2196	0,0569
	-0,1508		0,2888	-0,1502	0,1505		0,2642		-0,2935
-0,0324	-0,0144		0,0276			-0,0173	0,0252	0,1082	
$r_{mn}(1)$									
0,71	0,59	0,59			0,41	0,61			0,68
0,54		0,52		0,52	0,48		0,47	0,37	
		0,49	0,53	0,49		0,48		0,61	0,47
	0,58		0,36	0,58	0,42		0,37		0,65
0,52	0,51		0,49			0,51	0,49	0,45	
$r_{mn}(0)$									
0,29	0,41	0,41			0,59	0,39			0,32
0,46		0,48		0,48	0,52		0,53	0,63	
		0,51	0,47	0,51		0,52		0,39	0,53
	0,42		0,64	0,42	0,58		0,63		0,35
0,48	0,49		0,51			0,49	0,51	0,55	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$							
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$	
9,835	0,28	0,1968815	0,054802796	0,72	0,06495626	0,046875415	
11,728	0,00	0,1731890	0,000386891	1,00	0,08507175	0,084881706	
9,877	0,00	0,1488359	0,000404995	1,00	0,10111037	0,100835240	
9,356	0,76	0,0912796	0,069363877	0,24	0,15628556	0,037523345	
9,461	0,00	0,1442110	0,000003424	1,00	0,10569971	0,105697196	
11,958	1,00	0,0835288	0,083439411	0,00	0,17627906	0,000188676	
9,706	0,08	0,1501966	0,012754954	0,92	0,09865686	0,090278751	
9,689	0,78	0,0844329	0,066211287	0,22	0,17145038	0,037001082	
8,595	0,57	0,1019526	0,057730487	0,43	0,13514835	0,058620840	
10,452	0,24	0,2079353	0,050778929	0,76	0,05940069	0,044894724	

$$q_n(1) = [0,54 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,65 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,12 \ 0,64 \ 0,5 \ 0,53]$$

$$q_n(0) = [0,46 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,35 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,88 \ 0,36 \ 0,5 \ 0,47]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.7.2 Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,46	1,00	1,00			0,00	0,88			0,47
0,46		1,00		1,00	0,00		0,36	0,50	
		1,00	0,35	1,00		0,88		0,50	0,47
	1,00		0,35	1,00	0,00		0,36		0,47
0,46	1,00		0,35			0,88	0,36	0,50	

$q_{mn}(1)$									
0,54	0,00	0,00			1,00	0,12			0,53
0,54		0,00		0,00	1,00		0,64	0,50	
		0,00	0,65	0,00		0,12		0,50	0,53
	0,00		0,65	0,00	1,00		0,64		0,53
0,54	0,00		0,65			0,12	0,64	0,50	

δq_{mn}									
-0,08	0,99	0,99			-1,00	0,75			-0,06
-0,08		0,99		1,00	-1,00		-0,28	0,01	
		0,99	-0,30	1,00		0,75		0,01	-0,06
	0,99		-0,30	1,00	-1,00		-0,28		-0,06
-0,08	0,99		-0,30			0,75	-0,28	0,01	

δr_{mn}									
0,0453	-0,0036	-0,0036			0,0035	-0,0047			0,0574
0,0021		-0,0002		-0,0002	0,0002		0,0006	-0,0218	
		0,0001	-0,0004	0,0001		0,0001		0,0137	-0,0017
	0,0052		-0,0172	0,0051	-0,0051		-0,0181		-0,0832
0,0005	0,0000		0,0001			0,0000	0,0001	-0,0049	

$r_{mn}(1)$									
0,48	0,50	0,50			0,50	0,50			0,47
0,50		0,50		0,50	0,50		0,50	0,51	
		0,50	0,50	0,50		0,50		0,49	0,50
	0,50		0,51	0,50	0,50		0,51		0,54
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

$r_{mn}(0)$									
0,52	0,50	0,50			0,50	0,50			0,53
0,50		0,50		0,50	0,50		0,50	0,49	
		0,50	0,50	0,50		0,50		0,51	0,50
	0,50		0,49	0,50	0,50		0,49		0,46
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,52 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,66 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,12 \ 0,65 \ 0,5 \ 0,54]$$

$$q_n(0) = [0,48 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,34 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,88 \ 0,35 \ 0,5 \ 0,46]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 3^η επανάληψη.

6.7.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,48	1,00	1,00			0,00	0,88			0,46
0,48		1,00		1,00	0,00		0,35	0,50	
		1,00	0,34	1,00		0,88		0,50	0,46
	1,00		0,34	1,00	0,00		0,35		0,46
0,48	1,00		0,34			0,88	0,35	0,50	
$q_{mn}(1)$									
0,52	0,00	0,00			1,00	0,12			0,54
0,52		0,00		0,00	1,00		0,65	0,50	
		0,00	0,66	0,00		0,12		0,50	0,54
	0,00		0,66	0,00	1,00		0,65		0,54
0,52	0,00		0,66			0,12	0,65	0,50	
δq_{mn}									
-0,03	0,99	0,99			-1,00	0,75			-0,09
-0,03		0,99		1,00	-1,00		-0,30	-0,01	
		0,99	-0,31	1,00		0,75		-0,01	-0,09
	0,99		-0,31	1,00	-1,00		-0,30		-0,09
-0,03	0,99		-0,31			0,75	-0,30	-0,01	
δr_{mn}									
0,0653	-0,0020	-0,0020			0,0020	-0,0026			0,0222
-0,0016		0,0000		0,0000	0,0000		-0,0002	-0,0089	
		-0,0001	0,0004	-0,0001		-0,0001		0,0208	0,0013
	0,0083		-0,0262	0,0082	-0,0083		-0,0275		-0,0925
-0,0004	0,0000		0,0000			0,0000	0,0000	-0,0021	
$r_{mn}(1)$									
0,47	0,50	0,50			0,50	0,50			0,49
0,50		0,50		0,50	0,50		0,50	0,50	
		0,50	0,50	0,50		0,50		0,49	0,50
	0,50		0,51	0,50	0,50		0,51		0,55
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	
$r_{mn}(0)$									
0,53	0,50	0,50			0,50	0,50			0,51
0,50		0,50		0,50	0,50		0,50	0,50	
		0,50	0,50	0,50		0,50		0,51	0,50
	0,50		0,49	0,50	0,50		0,49		0,45
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,48 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,67 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,13 \ 0,66 \ 0,5 \ 0,58]$$

$$q_n(0) = [0,52 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,33 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,87 \ 0,34 \ 0,5 \ 0,42]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά. Επειδή οι πιθανότητες για το 1^ο και 9^ο bit είναι οριακά πάνω στο 0,5 προχωράμε σε 4^η επανάληψη.

6.7.4 Επανάληψη 4^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 3^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,57	1,00	1,00			0,00	0,88			0,36
0,57		1,00		1,00	0,00		0,31	0,53	
		1,00	0,31	1,00		0,88		0,53	0,36
	1,00		0,31	1,00	0,00		0,31		0,36
0,57	1,00		0,31			0,88	0,31	0,53	

$q_{mn}(1)$									
0,43	0,00	0,00			1,00	0,12			0,64
0,43		0,00		0,00	1,00		0,69	0,47	
		0,00	0,69	0,00		0,12		0,47	0,64
	0,00		0,69	0,00	1,00		0,69		0,64
0,43	0,00		0,69			0,12	0,69	0,47	

δq_{mn}									
0,15	0,99	0,99			-1,00	0,75			-0,28
0,15		0,99		1,00	-1,00		-0,37	0,06	
		0,99	-0,38	1,00		0,75		0,06	-0,28
	0,99		-0,38	1,00	-1,00		-0,37		-0,28
0,15	0,99		-0,38			0,75	-0,37	0,06	

δr_{mn}									
0,2090	0,0315	0,0315			-0,0314	0,0416			-0,1101
0,0208		0,0031		0,0031	-0,0031		-0,0084	0,0547	
		0,0046	-0,0121	0,0046		0,0061		0,0807	-0,0162
	0,0399		-0,1037	0,0395	-0,0397		-0,1068		-0,1392
0,0060	0,0009		-0,0024			0,0012	-0,0024	0,0157	

$r_{mn}(1)$									
0,40	0,48	0,48			0,52	0,48			0,56
0,49		0,50		0,50	0,50		0,50	0,47	
		0,50	0,51	0,50		0,50		0,46	0,51
	0,48		0,55	0,48	0,52		0,55		0,57
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,49	

$r_{mn}(0)$									
0,60	0,52	0,52			0,48	0,52			0,44
0,51		0,50		0,50	0,50		0,50	0,53	
		0,50	0,49	0,50		0,50		0,54	0,49
	0,52		0,45	0,52	0,48		0,45		0,43
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,51	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,31 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,74 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,11 \ 0,73 \ 0,4 \ 0,75]$$

$$q_n(0) = [0,69 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,26 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,89 \ 0,27 \ 0,6 \ 0,25]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 4^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά.

6.8 Σενάριο 8ο

6.8.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=6w$, $\sigma^2=3$, $\sigma=1,7320$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-0,5445 \ -3,5381 \ -1,8266 \ 1,0569 \ -1,4743 \ 0,9602 \ -1,1514 \ 3,2806 \ 0,965 \ 1,6638]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,33 \ 0,01 \ 0,08 \ 0,80 \ 0,12 \ 0,78 \ 0,18 \ 0,99 \ 0,78 \ 0,90]$$

$$P(c=0|r) = [0,67 \ 0,99 \ 0,92 \ 0,20 \ 0,88 \ 0,22 \ 0,82 \ 0,01 \ 0,22 \ 0,10]$$

$q_{mn}(0)$									
0,67	0,99	0,92			0,22	0,82			0,10
0,67		0,92		0,88	0,22		0,01	0,22	
		0,92	0,20	0,88		0,82		0,22	0,10
	0,99		0,20	0,88	0,22		0,01		0,10
0,67	0,99		0,20			0,82	0,01	0,22	
$q_{mn}(1)$									
0,33	0,01	0,08			0,78	0,18			0,90
0,33		0,08		0,12	0,78		0,99	0,78	
		0,08	0,80	0,12		0,18		0,78	0,90
	0,01		0,80	0,12	0,78		0,99		0,90
0,33	0,01		0,80			0,18	0,99	0,78	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,35	0,98	0,84			-0,56	0,65			-0,80
0,35		0,84		0,75	-0,56		-0,98	-0,57	
		0,84	-0,61	0,75		0,65		-0,57	-0,80
	0,98		-0,61	0,75	-0,56		-0,98		-0,80
0,35	0,98		-0,61			0,65	-0,98	-0,57	
δr_{mn}									
0,2416	0,0856	0,1002			-0,1487	0,1302			-0,1046
-0,1977		-0,0820		-0,0912	0,1217		0,0705	0,1213	
		-0,1348	0,1862	-0,1499		-0,1752		0,1994	0,1407
	0,2028		-0,3281	0,2642	-0,3527		-0,2043		-0,2479
-0,2130	-0,0754		0,1220			-0,1148	0,0760	0,1306	
$r_{mn}(1)$									
0,38	0,46	0,45			0,57	0,43			0,55
0,60		0,54		0,55	0,44		0,46	0,44	
		0,57	0,41	0,57		0,59		0,40	0,43
	0,40		0,66	0,37	0,68		0,60		0,62
0,61	0,54		0,44			0,56	0,46	0,43	
$r_{mn}(0)$									
0,62	0,54	0,55			0,43	0,57			0,45
0,40		0,46		0,45	0,56		0,54	0,56	
		0,43	0,59	0,43		0,41		0,60	0,57
	0,60		0,34	0,63	0,32		0,40		0,38
0,39	0,46		0,56			0,44	0,54	0,57	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$					
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
9,013	0,33	0,1377288	0,044909650	0,67	0,09799316	0,066040228
6,647	0,01	0,0979909	0,000868064	0,99	0,15091011	0,149573258
8,964	0,08	0,1381065	0,011118663	0,92	0,10922763	0,100433949
8,527	0,80	0,1186158	0,095324332	0,20	0,11178119	0,021949384
8,247	0,12	0,1154174	0,014178783	0,88	0,12207706	0,107080151
6,654	0,78	0,1705860	0,133482733	0,22	0,07726683	0,016805909
9,082	0,18	0,1424391	0,025245074	0,82	0,10315016	0,084868430
7,745	0,99	0,1292926	0,127683939	0,01	0,11456260	0,001425422
9,897	0,78	0,0764509	0,059905593	0,22	0,19006700	0,041133834
6,996	0,90	0,1480529	0,133527385	0,10	0,09602872	0,009421405

$$q_n(1) = [0,40 \ 0,01 \ 0,10 \ 0,81 \ 0,12 \ 0,89 \ 0,23 \ 0,99 \ 0,59 \ 0,93]$$

$$q_n(0) = [0,60 \ 0,99 \ 0,90 \ 0,19 \ 0,88 \ 0,11 \ 0,77 \ 0,01 \ 0,41 \ 0,07]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.8.2 Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,60	0,99	0,90			0,11	0,77			0,07
0,60		0,90		0,88	0,11		0,01	0,41	
		0,90	0,19	0,88		0,77		0,41	0,07
	0,99		0,19	0,88	0,11		0,01		0,07
0,60	0,99		0,19			0,77	0,01	0,41	

$q_{mn}(1)$									
0,40	0,01	0,10			0,89	0,23			0,93
0,40		0,10		0,12	0,89		0,99	0,59	
		0,10	0,81	0,12		0,23		0,59	0,93
	0,01		0,81	0,12	0,89		0,99		0,93
0,40	0,01		0,81			0,23	0,99	0,59	

δq_{mn}									
0,19	0,99	0,80			-0,78	0,54			-0,87
0,19		0,80		0,77	-0,78		-0,98	-0,19	
		0,80	-0,63	0,77		0,54		-0,19	-0,87
	0,99		-0,63	0,77	-0,78		-0,98		-0,87
0,19	0,99		-0,63			0,54	-0,98	-0,19	

δr_{mn}									
0,2888	0,0557	0,0687			-0,0709	0,1016			-0,0634
-0,0865		-0,0206		-0,0215	0,0212		0,0169	0,0887	
		-0,0419	0,0536	-0,0438		-0,0619		0,1804	0,0386
	0,3160		-0,4992	0,4076	-0,4023		-0,3194		-0,3597
-0,0608	-0,0117		0,0185			-0,0214	0,0118	0,0624	

$r_{mn}(1)$									
0,36	0,47	0,47			0,54	0,45			0,53
0,54		0,51		0,51	0,49		0,49	0,46	
		0,52	0,47	0,52		0,53		0,41	0,48
	0,34		0,75	0,30	0,70		0,66		0,68
0,53	0,51		0,49			0,51	0,49	0,47	

$r_{mn}(0)$									
0,64	0,53	0,53			0,46	0,55			0,47
0,46		0,49		0,49	0,51		0,51	0,54	
		0,48	0,53	0,48		0,47		0,59	0,52
	0,66		0,25	0,70	0,30		0,34		0,32
0,47	0,49		0,51			0,49	0,51	0,53	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,34 \ 0,00 \ 0,10 \ 0,92 \ 0,06 \ 0,95 \ 0,22 \ 0,99 \ 0,43 \ 0,97]$$

$$q_n(0) = [0,66 \ 1,00 \ 0,90 \ 0,08 \ 0,94 \ 0,05 \ 0,78 \ 0,01 \ 0,57 \ 0,03]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά. Επειδή οι πιθανότητες για το 9^ο bit είναι οριακά πάνω στο 0,5 προχωράμε σε 3^η επανάληψη.

6.8.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,66	1,00	0,90			0,05	0,78			0,03
0,66		0,90		0,94	0,05		0,01	0,57	
		0,90	0,08	0,94		0,78		0,57	0,03
	1,00		0,08	0,94	0,05		0,01		0,03
0,66	1,00		0,08			0,78	0,01	0,57	

$q_{mn}(1)$									
0,34	0,00	0,10			0,95	0,22			0,97
0,34		0,10		0,06	0,95		0,99	0,43	
		0,10	0,92	0,06		0,22		0,43	0,97
	0,00		0,92	0,06	0,95		0,99		0,97
0,34	0,00		0,92			0,22	0,99	0,43	

δq_{mn}									
0,33	0,99	0,80			-0,91	0,55			-0,94
0,33		0,80		0,88	-0,91		-0,99	0,14	
		0,80	-0,84	0,88		0,55		0,14	-0,94
	0,99		-0,84	0,88	-0,91		-0,99		-0,94
0,33	0,99		-0,84			0,55	-0,99	0,14	

δr_{mn}									
0,3771	0,1250	0,1548			-0,1370	0,2242			-0,1324
0,0918		0,0377		0,0344	-0,0333		-0,0306	0,2089	
		0,0555	-0,0533	0,0506		0,0804		0,3079	-0,0475
	0,6200		-0,7368	0,7002	-0,6795		-0,6241		-0,6568
0,0660	0,0219		-0,0260			0,0392	-0,0220	0,1503	

$r_{mn}(1)$									
0,31	0,44	0,42			0,57	0,39			0,57
0,45		0,48		0,48	0,52		0,52	0,40	
		0,47	0,53	0,47		0,46		0,35	0,52
	0,19		0,87	0,15	0,84		0,81		0,83
0,47	0,49		0,51			0,48	0,51	0,42	

$r_{mn}(0)$									
0,69	0,56	0,58			0,43	0,61			0,43
0,55		0,52		0,52	0,48		0,48	0,60	
		0,53	0,47	0,53		0,54		0,65	0,48
	0,81		0,13	0,85	0,16		0,19		0,17
0,53	0,51		0,49			0,52	0,49	0,58	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,14 \ 0,00 \ 0,06 \ 0,99 \ 0,01 \ 0,99 \ 0,13 \ 1,00 \ 0,16 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [0,86 \ 1,00 \ 0,94 \ 0,01 \ 0,99 \ 0,01 \ 0,87 \ 0,00 \ 0,84 \ 0,00]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά.

6.9 Σενάριο 9ο

6.9.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=8w$, $\sigma^2=4$, $\sigma=2$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [0,8386 \ -1,4168 \ -1,6044 \ 5,1754 \ -3,6089 \ 3,3932 \ -0,3298 \ 1,5126 \ -1,5687 \ -0,3317]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,70 \ 0,20 \ 0,17 \ 0,99 \ 0,03 \ 0,97 \ 0,42 \ 0,82 \ 0,17 \ 0,42]$$

$$P(c=0|r) = [0,30 \ 0,80 \ 0,83 \ 0,01 \ 0,97 \ 0,03 \ 0,58 \ 0,18 \ 0,83 \ 0,58]$$

$q_{mn}(0)$									
0,30	0,80	0,83			0,03	0,58			0,58
0,30		0,83		0,97	0,03		0,18	0,83	
		0,83	0,01	0,97		0,58		0,83	0,58
	0,80		0,01	0,97	0,03		0,18		0,58
0,30	0,80		0,01			0,58	0,18	0,83	
$q_{mn}(1)$									
0,70	0,20	0,17			0,97	0,42			0,42
0,70		0,17		0,03	0,97		0,82	0,17	
		0,17	0,99	0,03		0,42		0,17	0,42
	0,20		0,99	0,03	0,97		0,82		0,42
0,70	0,20		0,99			0,42	0,82	0,17	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
-0,40	0,61	0,67			-0,93	0,16			0,16
-0,40		0,67		0,95	-0,93		-0,64	0,66	
		0,67	-0,99	0,95		0,16		0,66	0,16
	0,61		-0,99	0,95	-0,93		-0,64		0,16
-0,40	0,61		-0,99			0,16	-0,64	0,66	

δr_{mn}									
-0,0102	0,0066	0,0061			-0,0043	0,0247			0,0246
0,2466		-0,1469		-0,1032	0,1046		0,1530	-0,1492	
		-0,0165	0,0111	-0,0116		-0,0671		-0,0167	-0,0667
	-0,0919		0,0567	-0,0592	0,0600		0,0877		-0,3411
0,0412	-0,0268		0,0165			-0,1000	0,0256	-0,0249	

$r_{mn}(1)$									
0,51	0,50	0,50			0,50	0,49			0,49
0,38		0,57		0,55	0,45		0,42	0,57	
		0,51	0,49	0,51		0,53		0,51	0,53
	0,55		0,47	0,53	0,47		0,46		0,67
0,48	0,51		0,49			0,55	0,49	0,51	

$r_{mn}(0)$									
0,49	0,50	0,50			0,50	0,51			0,51
0,62		0,43		0,45	0,55		0,58	0,43	
		0,49	0,51	0,49		0,47		0,49	0,47
	0,45		0,53	0,47	0,53		0,54		0,33
0,52	0,49		0,51			0,45	0,51	0,49	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$							
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$	
8,916	0,70	0,0912059	0,063677218	0,30	0,16060387	0,048475021	
8,572	0,20	0,1392249	0,027171647	0,80	0,11119479	0,089493600	
8,921	0,17	0,1448463	0,024242566	0,83	0,10551128	0,087852114	
8,711	0,99	0,1146778	0,114033102	0,01	0,13575947	0,000763262	
9,488	0,03	0,1477512	0,003895835	0,97	0,10424552	0,101496817	
9,348	0,97	0,1056741	0,102238810	0,03	0,14571547	0,004737015	
8,169	0,42	0,1431027	0,059858340	0,58	0,10754289	0,062558850	
9,421	0,82	0,0941135	0,077120956	0,18	0,16078258	0,029029905	
9,075	0,17	0,1496972	0,025808068	0,83	0,10196182	0,084383416	
8,422	0,42	0,1744301	0,072881621	0,58	0,07875497	0,045849012	

$$q_n(1) = [0,57 \ 0,23 \ 0,22 \ 0,99 \ 0,04 \ 0,96 \ 0,49 \ 0,73 \ 0,23 \ 0,61]$$

$$q_n(0) = [0,43 \ 0,77 \ 0,78 \ 0,01 \ 0,96 \ 0,04 \ 0,51 \ 0,27 \ 0,77 \ 0,39]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.9.2 Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,43	0,77	0,78			0,04	0,51			0,39
0,43		0,78		0,96	0,04		0,27	0,77	
		0,78	0,01	0,96		0,51		0,77	0,39
	0,77		0,01	0,96	0,04		0,27		0,39
0,43	0,77		0,01			0,51	0,27	0,77	
$q_{mn}(1)$									
0,57	0,23	0,22			0,96	0,49			0,61
0,57		0,22		0,04	0,96		0,73	0,23	
		0,22	0,99	0,04		0,49		0,23	0,61
	0,23		0,99	0,04	0,96		0,73		0,61
0,57	0,23		0,99			0,49	0,73	0,23	

δq_{mn}									
-0,14	0,53	0,57			-0,91	0,02			-0,23
-0,14		0,57		0,93	-0,91		-0,45	0,53	
		0,57	-0,99	0,93		0,02		0,53	-0,23
	0,53		-0,99	0,93	-0,91		-0,45		-0,23
-0,14	0,53		-0,99			0,02	-0,45	0,53	

δr_{mn}									
0,0014	-0,0004	-0,0003			0,0002	-0,0085			0,0008
0,1153		-0,0276		-0,0169	0,0172		0,0345	-0,0294	
		0,0024	-0,0014	0,0015		0,0628		0,0026	-0,0061
	0,0859		-0,0465	0,0496	-0,0503		-0,1013		-0,2016
0,0028	-0,0007		0,0004			-0,0172	0,0008	-0,0007	

$r_{mn}(1)$									
0,50	0,50	0,50			0,50	0,50			0,50
0,44		0,51		0,51	0,49		0,48	0,51	
		0,50	0,50	0,50		0,47		0,50	0,50
	0,46		0,52	0,48	0,53		0,55		0,60
0,50	0,50		0,50			0,51	0,50	0,50	

$r_{mn}(0)$									
0,50	0,50	0,50			0,50	0,50			0,50
0,56		0,49		0,49	0,51		0,52	0,49	
		0,50	0,50	0,50		0,53		0,50	0,50
	0,54		0,48	0,52	0,47		0,45		0,40
0,50	0,50		0,50			0,49	0,50	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,51 \ 0,20 \ 0,23 \ 0,99 \ 0,03 \ 0,96 \ 0,47 \ 0,75 \ 0,24 \ 0,71]$$

$$q_n(0) = [0,49 \ 0,80 \ 0,77 \ 0,01 \ 0,97 \ 0,04 \ 0,53 \ 0,25 \ 0,76 \ 0,29]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 3^η επανάληψη.

6.9.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,49	0,80	0,77			0,04	0,53			0,29
0,49		0,77		0,97	0,04		0,25	0,76	
		0,77	0,01	0,97		0,53		0,76	0,29
	0,80		0,01	0,97	0,04		0,25		0,29
0,49	0,80		0,01			0,53	0,25	0,76	
$q_{mn}(1)$									
0,51	0,20	0,23			0,96	0,47			0,71
0,51		0,23		0,03	0,96		0,75	0,24	
		0,23	0,99	0,03		0,47		0,24	0,71
	0,20		0,99	0,03	0,96		0,75		0,71
0,51	0,20		0,99			0,47	0,75	0,24	
δq_{mn}									
-0,02	0,59	0,55			-0,92	0,06			-0,41
-0,02		0,55		0,93	-0,92		-0,50	0,51	
		0,55	-0,99	0,93		0,06		0,51	-0,41
	0,59		-0,99	0,93	-0,92		-0,50		-0,41
-0,02	0,59		-0,99			0,06	-0,50	0,51	
δr_{mn}									
0,0073	-0,0002	-0,0002			0,0001	-0,0020			0,0003
0,1210		-0,0036		-0,0021	0,0022		0,0039	-0,0039	
		0,0115	-0,0064	0,0068		0,1073		0,0124	-0,0153
	0,1763		-0,1057	0,1122	-0,1139		-0,2071		-0,2517
0,0089	-0,0002		0,0001			-0,0025	0,0003	-0,0003	
$r_{mn}(1)$									
0,50	0,50	0,50			0,50	0,50			0,50
0,44		0,50		0,50	0,50		0,50	0,50	
		0,49	0,50	0,50		0,45		0,49	0,51
	0,41		0,55	0,44	0,56		0,60		0,63
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	
$r_{mn}(0)$									
0,50	0,50	0,50			0,50	0,50			0,50
0,56		0,50		0,50	0,50		0,50	0,50	
		0,51	0,50	0,50		0,55		0,51	0,49
	0,59		0,45	0,56	0,44		0,40		0,37
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,44 \ 0,15 \ 0,22 \ 1,00 \ 0,03 \ 0,97 \ 0,42 \ 0,82 \ 0,24 \ 0,81]$$

$$q_n(0) = [0,56 \ 0,85 \ 0,78 \ 0,00 \ 0,97 \ 0,03 \ 0,58 \ 0,18 \ 0,76 \ 0,19]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος σταματά.

6.10 Σενάριο 10ο

6.10.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=9w$, $\sigma^2=4,5$, $\sigma=2,1213$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-0,1154 \ -4,4333 \ -4,2674 \ 0,2828 \ -8,2457 \ 5,0512 \ -1,3102 \ 0,3986 \ 0,9068 \ -1,6306]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,47 \ 0,02 \ 0,02 \ 0,56 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,24 \ 0,59 \ 0,69 \ 0,19]$$

$$P(c=0|r) = [0,53 \ 0,98 \ 0,98 \ 0,44 \ 1,00 \ 0,01 \ 0,76 \ 0,41 \ 0,31 \ 0,81]$$

$q_{mn}(0)$									
0,53	0,98	0,98			0,01	0,76			0,81
0,53		0,98		1,00	0,01		0,41	0,31	
		0,98	0,44	1,00		0,76		0,31	0,81
	0,98		0,44	1,00	0,01		0,41		0,81
0,53	0,98		0,44			0,76	0,41	0,31	
$q_{mn}(1)$									
0,47	0,02	0,02			0,99	0,24			0,19
0,47		0,02		0,00	0,99		0,59	0,69	
		0,02	0,56	0,00		0,24		0,69	0,19
	0,02		0,56	0,00	0,99		0,59		0,19
0,47	0,02		0,56			0,24	0,59	0,69	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,05	0,96	0,96			-0,98	0,52			0,62
0,05		0,96		1,00	-0,98		-0,18	-0,38	
		0,96	-0,13	1,00		0,52		-0,38	0,62
	0,96		-0,13	1,00	-0,98		-0,18		0,62
0,05	0,96		-0,13			0,52	-0,18	-0,38	
δr_{mn}									
-0,2922	-0,0156	-0,0157			0,0153	-0,0286			-0,0242
-0,0626		-0,0034		-0,0032	0,0033		0,0183	0,0084	
		0,0155	-0,1187	0,0149		0,0283		-0,0388	0,0239
	-0,0133		0,1021	-0,0128	0,0131		0,0728		-0,0206
-0,0042	-0,0002		0,0017			-0,0004	0,0012	0,0006	

$r_{mn}(1)$									
0,65	0,51	0,51			0,49	0,51			0,51
0,53		0,50		0,50	0,50		0,49	0,50	
		0,49	0,56	0,49		0,49		0,52	0,49
	0,51		0,45	0,51	0,49		0,46		0,51
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	
$r_{mn}(0)$									
0,35	0,49	0,49			0,51	0,49			0,49
0,47		0,50		0,50	0,50		0,51	0,50	
		0,51	0,44	0,51		0,51		0,48	0,51
	0,49		0,55	0,49	0,51		0,54		0,49
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

α_{mn}	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$		$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$				
7,989	0,47	0,1723641	0,081765724	0,53	0,08258464	0,043408302
8,228	0,02	0,1286592	0,002452746	0,98	0,12139404	0,119079798
8,029	0,02	0,1254066	0,002762246	0,98	0,12453276	0,121789761
8,083	0,56	0,1253451	0,070508559	0,44	0,12161898	0,053206408
8,011	0,00	0,1251169	0,000082010	1,00	0,12483399	0,124752161
8,253	0,99	0,1210807	0,119737130	0,01	0,12899252	0,001431382
8,009	0,24	0,1249825	0,029724389	0,76	0,12481548	0,095130809
8,120	0,59	0,1136395	0,066781671	0,41	0,13672168	0,056375460
7,912	0,69	0,1286872	0,088957111	0,31	0,12122711	0,037426935
8,109	0,19	0,1275275	0,024241773	0,81	0,12232898	0,099075401

$$q_n(1) = [0,65 \ 0,02 \ 0,02 \ 0,57 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,24 \ 0,54 \ 0,70 \ 0,20]$$

$$q_n(0) = [0,35 \ 0,98 \ 0,98 \ 0,43 \ 1,00 \ 0,01 \ 0,76 \ 0,46 \ 0,30 \ 0,80]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.10.2 Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,35	0,98	0,98			0,01	0,76			0,80
0,35		0,98		1,00	0,01		0,46	0,30	
		0,98	0,43	1,00		0,76		0,30	0,80
	0,98		0,43	1,00	0,01		0,46		0,80
0,35	0,98		0,43			0,76	0,46	0,30	

$q_{mn}(1)$									
0,65	0,02	0,02			0,99	0,24			0,20
0,65		0,02		0,00	0,99		0,54	0,70	
		0,02	0,57	0,00		0,24		0,70	0,20
	0,02		0,57	0,00	0,99		0,54		0,20
0,65	0,02		0,57			0,24	0,54	0,70	

δq_{mn}									
-0,31	0,96	0,96			-0,98	0,52			0,61
-0,31		0,96		1,00	-0,98		-0,08	-0,41	
		0,96	-0,14	1,00		0,52		-0,41	0,61
	0,96		-0,14	1,00	-0,98		-0,08		0,61
-0,31	0,96		-0,14			0,52	-0,08	-0,41	

δr_{mn}									
-0,2846	0,0909	0,0913			-0,0893	0,1665			0,1437
-0,0321		0,0103		0,0099	-0,0101		-0,1164	-0,0241	
		0,0181	-0,1237	0,0173		0,0330		-0,0424	0,0285
	-0,0070		0,0480	-0,0067	0,0069		0,0794		-0,0111
-0,0024	0,0008		-0,0053			0,0014	-0,0088	-0,0018	

$r_{mn}(1)$									
0,64	0,45	0,45			0,54	0,42			0,43
0,52		0,49		0,50	0,51		0,56	0,51	
		0,49	0,56	0,49		0,48		0,52	0,49
	0,50		0,48	0,50	0,50		0,46		0,51
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

$r_{mn}(0)$									
0,36	0,55	0,55			0,46	0,58			0,57
0,48		0,51		0,50	0,49		0,44	0,49	
		0,51	0,44	0,51		0,52		0,48	0,51
	0,50		0,52	0,50	0,50		0,54		0,49
0,50	0,50		0,50			0,50	0,50	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,78 \ 0,02 \ 0,02 \ 0,61 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,17 \ 0,57 \ 0,73 \ 0,15]$$

$$q_n(0) = [0,22 \ 0,98 \ 0,98 \ 0,39 \ 1,00 \ 0,01 \ 0,83 \ 0,43 \ 0,27 \ 0,85]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 3^η επανάληψη.

6.10.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,22	0,98	0,98			0,01	0,83			0,85
0,22		0,98		1,00	0,01		0,43	0,27	
		0,98	0,39	1,00		0,83		0,27	0,85
	0,98		0,39	1,00	0,01		0,43		0,85
0,22	0,98		0,39			0,83	0,43	0,27	

$q_{mn}(1)$									
0,78	0,02	0,02			0,99	0,17			0,15
0,78		0,02		0,00	0,99		0,57	0,73	
		0,02	0,61	0,00		0,17		0,73	0,15
	0,02		0,61	0,00	0,99		0,57		0,15
0,78	0,02		0,61			0,17	0,57	0,73	

δq_{mn}									
-0,57	0,97	0,96			-0,98	0,66			0,70
-0,57		0,96		1,00	-0,98		-0,13	-0,46	
		0,96	-0,22	1,00		0,66		-0,46	0,70
	0,97		-0,22	1,00	-0,98		-0,13		0,70
-0,57	0,97		-0,22			0,66	-0,13	-0,46	

δr_{mn}									
-0,4186	0,2460	0,2462			-0,2423	0,3626			0,3397
-0,0569		0,0335		0,0324	-0,0330		-0,2483	-0,0698	
		0,0464	-0,2045	0,0448		0,0683		-0,0966	0,0640
	-0,0195		0,0861	-0,0189	0,0192		0,1447		-0,0269
-0,0083	0,0049		-0,0216			0,0072	-0,0364	-0,0102	

$r_{mn}(1)$									
0,71	0,38	0,38			0,62	0,32			0,33
0,53		0,48		0,48	0,52		0,62	0,53	
		0,48	0,60	0,48		0,47		0,55	0,47
	0,51		0,46	0,51	0,49		0,43		0,51
0,50	0,50		0,51			0,50	0,52	0,51	

$r_{mn}(0)$									
0,29	0,62	0,62			0,38	0,68			0,67
0,47		0,52		0,52	0,48		0,38	0,47	
		0,52	0,40	0,52		0,53		0,45	0,53
	0,49		0,54	0,49	0,51		0,57		0,49
0,50	0,50		0,49			0,50	0,48	0,49	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,91 \ 0,01 \ 0,01 \ 0,67 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,08 \ 0,63 \ 0,80 \ 0,07]$$

$$q_n(0) = [0,09 \ 0,99 \ 0,99 \ 0,33 \ 1,00 \ 0,01 \ 0,92 \ 0,37 \ 0,20 \ 0,93]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 4^η επανάληψη.

6.10.4 Επανάληψη 4^η έως 8^η

Εν συντομία, παρουσιάζουμε τις πιθανότητες που προκύπτουν στις επόμενες επαναλήψεις, ως εξής:

4^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,99 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,80 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,01 \ 0,78 \ 0,92 \ 0,01]$$

$$q_n(0) = [0,01 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,20 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,99 \ 0,22 \ 0,08 \ 0,99]$$

5^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,96 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,96 \ 1,00 \ 0,00]$$

$$q_n(0) = [0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,04 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,04 \ 0,00 \ 1,00]$$

6^η, 7^η & 8^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00]$$

$$q_n(0) = [0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00]$$

Από την 3^η επανάληψη και μετά, είναι εμφανές ότι, οι πιθανότητες που προέκυψαν μέσα από την εκτέλεση του αλγορίθμου δεν παρουσιάζουν ουσιαστική μεταβολή. Η κωδική λέξη παρέμεινε η ίδια από την 3^η επανάληψη και ο αλγόριθμος εκτελώντας και την 8^η επανάληψη τερματίζει χωρίς να έχει επιτύχει να την διορθώσει. Συμπεραίνουμε ότι το

επίπεδο θορύβου που εφαρμόστηκε στο κανάλι προκάλεσε μεγάλη αλλοίωση στα δεδομένα με αποτέλεσμα την αποτυχία της αποκωδικοποίησης.

6.11 Σενάριο 11ο

6.11.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=10w$, $\sigma^2=5$, $\sigma=2,2361$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στον δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-5,0185 \ 4,7864 \ -0,3779 \ 1,8590 \ -0,4018 \ 1,5417 \ -2,2776 \ 5,3311 \ 1,1507 \ 5,1690]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,02 \ 0,98 \ 0,42 \ 0,82 \ 0,42 \ 0,77 \ 0,14 \ 0,99 \ 0,72 \ 0,98]$$

$$P(c=0|r) = [0,98 \ 0,02 \ 0,58 \ 0,18 \ 0,58 \ 0,23 \ 0,86 \ 0,01 \ 0,28 \ 0,02]$$

$q_{mn}(0)$									
0,98	0,02	0,58			0,23	0,86			0,02
0,98		0,58		0,58	0,23		0,01	0,28	
		0,58	0,18	0,58		0,86		0,28	0,02
	0,02		0,18	0,58	0,23		0,01		0,02
0,98	0,02		0,18			0,86	0,01	0,28	
$q_{mn}(1)$									
0,02	0,98	0,42			0,77	0,14			0,98
0,02		0,42		0,42	0,77		0,99	0,72	
		0,42	0,82	0,42		0,14		0,72	0,98
	0,98		0,82	0,42	0,77		0,99		0,98
0,02	0,98		0,82			0,14	0,99	0,72	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} δr_{mn} $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,96	-0,96	0,15			-0,55	0,72			-0,97
0,96		0,15		0,16	-0,55		-0,97	-0,43	
		0,15	-0,63	0,16		0,72		-0,43	-0,97
	-0,96		-0,63	0,16	-0,55		-0,97		-0,97
0,96	-0,96		-0,63			0,72	-0,97	-0,43	
δr_{mn}									
-0,0551	0,0555	-0,3542			0,0968	-0,0736			0,0549
-0,0055		-0,0353		-0,0332	0,0096		0,0054	0,0123	
		-0,0303	0,0072	-0,0285		-0,0063		0,0105	0,0047
	0,0520		0,0788	-0,3124	0,0907		0,0512		0,0514
0,1825	-0,1838		-0,2788			0,2439	-0,1810	-0,4091	

$r_{mn}(1)$									
0,53	0,47	0,68			0,45	0,54			0,47
0,50		0,52		0,52	0,50		0,50	0,49	
		0,52	0,50	0,51		0,50		0,49	0,50
	0,47		0,46	0,66	0,45		0,47		0,47
0,41	0,59		0,64			0,38	0,59	0,70	

$r_{mn}(0)$									
0,47	0,53	0,32			0,55	0,46			0,53
0,50		0,48		0,48	0,50		0,50	0,51	
		0,48	0,50	0,49		0,50		0,51	0,50
	0,53		0,54	0,34	0,55		0,53		0,53
0,59	0,41		0,36			0,62	0,41	0,30	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

α_{mn}	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$					
	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
7,227	0,02	0,1084094	0,001921736	0,98	0,13890207	0,136439799
7,570	0,98	0,1325013	0,129683482	0,02	0,11327948	0,002409073
8,322	0,42	0,1805555	0,076734367	0,58	0,07551616	0,043422512
7,283	0,82	0,1461908	0,119241605	0,18	0,09795347	0,018056974
8,328	0,42	0,1743264	0,073273720	0,58	0,08072940	0,046796827
8,866	0,77	0,1016660	0,078730747	0,23	0,15098199	0,034060615
7,277	0,14	0,1021063	0,014211618	0,86	0,14313503	0,123212859
7,201	0,99	0,1393098	0,137379178	0,01	0,10819609	0,001499467
6,914	0,72	0,1721320	0,123101296	0,28	0,07556341	0,021523768
8,930	0,98	0,1115440	0,109787414	0,02	0,13928559	0,002193402

$$q_n(1) = [0,01 \ 0,98 \ 0,64 \ 0,87 \ 0,61 \ 0,70 \ 0,10 \ 0,99 \ 0,85 \ 0,98]$$

$$q_n(0) = [0,99 \ 0,02 \ 0,36 \ 0,13 \ 0,39 \ 0,30 \ 0,90 \ 0,01 \ 0,15 \ 0,02]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.11.2Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,99	0,02	0,36			0,30	0,90			0,02
0,99		0,36		0,39	0,30		0,01	0,15	
		0,36	0,13	0,39		0,90		0,15	0,02
	0,02		0,13	0,39	0,30		0,01		0,02
0,99	0,02		0,13			0,90	0,01	0,15	

$q_{mn}(1)$									
0,01	0,98	0,64			0,70	0,10			0,98
0,01		0,64		0,61	0,70		0,99	0,85	
		0,64	0,87	0,61		0,10		0,85	0,98
	0,98		0,87	0,61	0,70		0,99		0,98
0,01	0,98		0,87			0,10	0,99	0,85	

δq_{mn}									
0,97	-0,96	-0,28			-0,40	0,79			-0,96
0,97		-0,28		-0,22	-0,40		-0,98	-0,70	
		-0,28	-0,74	-0,22		0,79		-0,70	-0,96
	-0,96		-0,74	-0,22	-0,40		-0,98		-0,96
0,97	-0,96		-0,74			0,79	-0,98	-0,70	

δr_{mn}									
0,0806	-0,0814	-0,2827			-0,1979	0,0988			-0,0816
-0,0166		0,0583		0,0734	0,0408		0,0165	0,0230	
		0,0870	0,0327	0,1094		-0,0304		0,0343	0,0251
	-0,0605		-0,0791	-0,2644	-0,1472		-0,0596		-0,0607
0,3870	-0,3905		-0,5106			0,4744	-0,3846	-0,5358	

$r_{mn}(1)$									
0,46	0,54	0,64			0,60	0,45			0,54
0,51		0,47		0,46	0,48		0,49	0,49	
		0,46	0,48	0,45		0,52		0,48	0,49
	0,53		0,54	0,63	0,57		0,53		0,53
0,31	0,70		0,76			0,26	0,69	0,77	

$r_{mn}(0)$									
0,54	0,46	0,36			0,40	0,55			0,46
0,49		0,53		0,54	0,52		0,51	0,51	
		0,54	0,52	0,55		0,48		0,52	0,51
	0,47		0,46	0,37	0,43		0,47		0,47
0,69	0,30		0,24			0,74	0,31	0,23	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,01 \ 0,99 \ 0,70 \ 0,96 \ 0,65 \ 0,81 \ 0,03 \ 1,00 \ 0,94 \ 0,98]$$

$$q_n(0) = [0,99 \ 0,01 \ 0,30 \ 0,04 \ 0,35 \ 0,19 \ 0,97 \ 0,00 \ 0,06 \ 0,02]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 3^η επανάληψη.

6.11.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,99	0,01	0,30			0,19	0,97			0,02
0,99		0,30		0,35	0,19		0,00	0,06	
		0,30	0,04	0,35		0,97		0,06	0,02
	0,01		0,04	0,35	0,19		0,00		0,02
0,99	0,01		0,04			0,97	0,00	0,06	

$q_{mn}(1)$									
0,01	0,99	0,70			0,81	0,03			0,98
0,01		0,70		0,65	0,81		1,00	0,94	
		0,70	0,96	0,65		0,03		0,94	0,98
	0,99		0,96	0,65	0,81		1,00		0,98
0,01	0,99		0,96			0,03	1,00	0,94	

δq_{mn}									
0,99	-0,99	-0,41			-0,62	0,93			-0,97
0,99		-0,41		-0,30	-0,62		-0,99	-0,89	
		-0,41	-0,91	-0,30		0,93		-0,89	-0,97
	-0,99		-0,91	-0,30	-0,62		-0,99		-0,97
0,99	-0,99		-0,91			0,93	-0,99	-0,89	

δr_{mn}									
0,2242	-0,2245	-0,5474			-0,3570	0,2382			-0,2288
-0,0669		0,1633		0,2191	0,1065		0,0668	0,0745	
		0,2212	0,0980	0,2967		-0,0963		0,1009	0,0925
	-0,1647		-0,1780	-0,5388	-0,2620		-0,1642		-0,1679
0,7401	-0,7410		-0,8005			0,7864	-0,7385	-0,8243	

$r_{mn}(1)$									
0,39	0,61	0,77			0,68	0,38			0,61
0,53		0,42		0,39	0,45		0,47	0,46	
		0,39	0,45	0,35		0,55		0,45	0,45
	0,58		0,59	0,77	0,63		0,58		0,58
0,13	0,87		0,90			0,11	0,87	0,91	

$r_{mn}(0)$									
0,61	0,39	0,23			0,32	0,62			0,39
0,47		0,58		0,61	0,55		0,53	0,54	
		0,61	0,55	0,65		0,45		0,55	0,55
	0,42		0,41	0,23	0,37		0,42		0,42
0,87	0,13		0,10			0,89	0,13	0,09	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,79 \ 1,00 \ 0,68 \ 0,93 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,99 \ 0,99]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 0,21 \ 0,00 \ 0,32 \ 0,07 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,01 \ 0,01]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 4^η επανάληψη.

6.11.4 Επανάληψη 4^η έως 8^η

Εν συντομία, παρουσιάζουμε τις πιθανότητες που προκύπτουν στις επόμενες επαναλήψεις, ως εξής:

4^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,91 \ 1,00 \ 0,70 \ 0,98 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 0,09 \ 0,00 \ 0,30 \ 0,02 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

5^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,99 \ 1,00 \ 0,59 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 0,01 \ 0,00 \ 0,41 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

6^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,09 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,91 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

Εδώ η κωδική λέξη άλλαξε κατά ένα bit

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με τον έλεγχο της κωδικής λέξης, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε επόμενη επανάληψη.

7^η & 8^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

Είναι εμφανές ότι, η κωδική λέξη παρέμεινε η ίδια από την 6^η επανάληψη και ο αλγόριθμος εκτελώντας και την 8^η επανάληψη τερματίζει χωρίς να έχει επιτύχει να την διόρθωση. Συμπεραίνουμε ότι το επίπεδο θορύβου που εφαρμόστηκε στο κανάλι προκάλεσε μεγάλη αλλοίωση στα δεδομένα με αποτέλεσμα την αποτυχία της αποκωδικοποίησης.

6.12 Σενάριο 12ο

6.12.1 Επανάληψη 1^η

Για θόρυβο $N_0=20w$, $\sigma^2=10$, $\sigma=3,1623$, το λαμβανόμενο διάνυσμα r στο δέκτη είναι το ακόλουθο:

$$r = [-0,2997 \ 3,7993 \ -9,1432 \ 4,7265 \ -0,992 \ -2,1353 \ -3,3711 \ 3,0835 \ 9,316 \ 10,7578]$$

Οι εκ των υστέρων πιθανότητες υπολογίστηκαν σύμφωνα με την σχέση (1)

$$P(c=1|r) = [0,47 \ 0,82 \ 0,03 \ 0,87 \ 0,40 \ 0,30 \ 0,21 \ 0,77 \ 0,98 \ 0,99]$$

$$P(c=0|r) = [0,53 \ 0,18 \ 0,97 \ 0,13 \ 0,60 \ 0,70 \ 0,79 \ 0,23 \ 0,02 \ 0,01]$$

$q_{mn}(0)$									
0,53	0,18	0,97			0,70	0,79			0,01
0,53		0,97		0,60	0,70		0,23	0,02	
		0,97	0,13	0,60		0,79		0,02	0,01
	0,18		0,13	0,60	0,70		0,23		0,01
0,53	0,18		0,13			0,79	0,23	0,02	
$q_{mn}(1)$									
0,47	0,82	0,03			0,30	0,21			0,99
0,47		0,03		0,40	0,30		0,77	0,98	
		0,03	0,87	0,40		0,21		0,98	0,99
	0,82		0,87	0,40	0,30		0,77		0,99
0,47	0,82		0,87			0,21	0,77	0,98	

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα δq_{mn} , δr_{mn} , $r_{mn}(1)$ και $r_{mn}(0)$ με τους τύπους (2, 3, 4):

δq_{mn}									
0,06	-0,64	0,95			0,40	0,59			-0,97
0,06		0,95		0,20	0,40		-0,55	-0,95	
		0,95	-0,74	0,20		0,59		-0,95	-0,97
	-0,64		-0,74	0,20	0,40		-0,55		-0,97
0,06	-0,64		-0,74			0,59	-0,55	-0,95	
δr_{mn}									
0,1403	-0,0131	0,0088			0,0208	0,0143			-0,0086
0,0392		0,0025		0,0120	0,0058		-0,0043	-0,0025	
		-0,0788	0,1014	-0,3819		-0,1273		0,0785	0,0768
	-0,0311		-0,0270	0,1018	0,0495		-0,0363		-0,0205
0,1453	-0,0136		-0,0118			0,0148	-0,0159	-0,0091	

$r_{mn}(1)$									
0,43	0,51	0,50			0,49	0,49			0,50
0,48		0,50		0,49	0,50		0,50	0,50	
		0,54	0,45	0,69		0,56		0,46	0,46
	0,52		0,51	0,45	0,48		0,52		0,51
0,43	0,51		0,51			0,49	0,51	0,50	

$r_{mn}(0)$									
0,57	0,49	0,50			0,51	0,51			0,50
0,52		0,50		0,51	0,50		0,50	0,50	
		0,46	0,55	0,31		0,44		0,54	0,54
	0,48		0,49	0,55	0,52		0,48		0,49
0,57	0,49		0,49			0,51	0,49	0,50	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

	Υπολογισμός $q_n(1)$ & $q_n(0)$					
α_{mn}	$p_n(1)$	$\Pi r_{mn}(1)$	$p_n(1) * \Pi r_{mn}(1)$	$p_n(0)$	$\Pi r_{mn}(0)$	$p_n(0) * \Pi r_{mn}(0)$
7,611	0,47	0,0882446	0,041480770	0,53	0,16965165	0,089904207
7,707	0,82	0,1323474	0,108590646	0,18	0,11790445	0,021164174
8,555	0,03	0,1333214	0,003353510	0,97	0,11646130	0,113531884
8,419	0,87	0,1167213	0,101410273	0,13	0,13237458	0,017364378
8,838	0,40	0,1533028	0,061640215	0,60	0,08614320	0,051506620
7,751	0,30	0,1156624	0,034533240	0,70	0,13469779	0,094481162
8,521	0,21	0,1368364	0,028205466	0,79	0,11229094	0,089144908
7,754	0,77	0,1321549	0,102342498	0,23	0,11804475	0,026629349
8,553	0,98	0,1165277	0,113787810	0,02	0,13325041	0,003133141
8,408	0,99	0,1187734	0,117188289	0,01	0,13071168	0,001744448

$$q_n(1) = [0,32 \ 0,84 \ 0,03 \ 0,85 \ 0,54 \ 0,27 \ 0,24 \ 0,79 \ 0,97 \ 0,99]$$

$$q_n(0) = [0,68 \ 0,16 \ 0,97 \ 0,15 \ 0,46 \ 0,73 \ 0,76 \ 0,21 \ 0,03 \ 0,01]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 1^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 2^η επανάληψη.

6.12.2 Επανάληψη 2^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 1^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,68	0,16	0,97			0,73	0,76			0,01
0,68		0,97		0,46	0,73		0,21	0,03	
		0,97	0,15	0,46		0,76		0,03	0,01
	0,16		0,15	0,46	0,73		0,21		0,01
0,68	0,16		0,15			0,76	0,21	0,03	

$q_{mn}(1)$									
0,32	0,84	0,03			0,27	0,24			0,99
0,32		0,03		0,54	0,27		0,79	0,97	
		0,03	0,85	0,54		0,24		0,97	0,99
	0,84		0,85	0,54	0,27		0,79		0,99
0,32	0,84		0,85			0,24	0,79	0,97	

δq_{mn}									
0,37	-0,67	0,94			0,46	0,52			-0,97
0,37		0,94		-0,09	0,46		-0,59	-0,95	
		0,94	-0,71	-0,09		0,52		-0,95	-0,97
	-0,67		-0,71	-0,09	0,46		-0,59		-0,97
0,37	-0,67		-0,71			0,52	-0,59	-0,95	

δr_{mn}									
0,1488	-0,0814	0,0582			0,1180	0,1056			-0,0565
-0,0218		-0,0085		0,0897	-0,0173		0,0137	0,0085	
		0,0302	-0,0403	-0,3182		0,0549		-0,0301	-0,0294
	0,0168		0,0160	0,1262	-0,0243		0,0193		0,0116
0,1376	-0,0752		-0,0716			0,0976	-0,0864	-0,0536	

$r_{mn}(1)$									
0,43	0,54	0,47			0,44	0,45			0,53
0,51		0,50		0,46	0,51		0,49	0,50	
		0,48	0,52	0,66		0,47		0,52	0,51
	0,49		0,49	0,44	0,51		0,49		0,49
0,43	0,54		0,54			0,45	0,54	0,53	

$r_{mn}(0)$									
0,57	0,46	0,53			0,56	0,55			0,47
0,49		0,50		0,54	0,49		0,51	0,50	
		0,52	0,48	0,34		0,53		0,48	0,49
	0,51		0,51	0,56	0,49		0,51		0,51
0,57	0,46		0,46			0,55	0,46	0,47	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,21 \ 0,87 \ 0,02 \ 0,88 \ 0,60 \ 0,24 \ 0,16 \ 0,81 \ 0,98 \ 0,99]$$

$$q_n(0) = [0,79 \ 0,13 \ 0,98 \ 0,12 \ 0,40 \ 0,76 \ 0,84 \ 0,19 \ 0,02 \ 0,01]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 2^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 3^η επανάληψη.

6.12.3 Επανάληψη 3^η

Με τις νέες πιθανότητες που προκύψαν από την 2^η επανάληψη, υπολογίζουμε ως ακολούθως:

$q_{mn}(0)$									
0,79	0,13	0,98			0,76	0,84			0,01
0,79		0,98		0,40	0,76		0,19	0,02	
		0,98	0,12	0,40		0,84		0,02	0,01
	0,13		0,12	0,40	0,76		0,19		0,01
0,79	0,13		0,12			0,84	0,19	0,02	
$q_{mn}(1)$									
0,21	0,87	0,02			0,24	0,16			0,99
0,21		0,02		0,60	0,24		0,81	0,98	
		0,02	0,88	0,60		0,16		0,98	0,99
	0,87		0,88	0,60	0,24		0,81		0,99
0,21	0,87		0,88			0,16	0,81	0,98	
δq_{mn}									
0,57	-0,74	0,95			0,52	0,68			-0,97
0,57		0,95		-0,20	0,52		-0,62	-0,95	
		0,95	-0,75	-0,20		0,68		-0,95	-0,97
	-0,74		-0,75	-0,20	0,52		-0,62		-0,97
0,57	-0,74		-0,75			0,68	-0,62	-0,95	

δr_{mn}									
0,2459	-0,1898	0,1484			0,2699	0,2067			-0,1448
-0,0589		-0,0355		0,1690	-0,0646		0,0544	0,0354	
		0,0954	-0,1206	-0,4541		0,1329		-0,0952	-0,0931
	0,0476		0,0470	0,1770	-0,0677		0,0570		0,0363
0,2262	-0,1746		-0,1725			0,1901	-0,2090	-0,1361	

$r_{mn}(1)$									
0,38	0,59	0,43			0,37	0,40			0,57
0,53		0,52		0,42	0,53		0,47	0,48	
		0,45	0,56	0,73		0,43		0,55	0,55
	0,48		0,48	0,41	0,53		0,47		0,48
0,39	0,59		0,59			0,40	0,60	0,57	

$r_{mn}(0)$									
0,62	0,41	0,57			0,63	0,60			0,43
0,47		0,48		0,58	0,47		0,53	0,52	
		0,55	0,44	0,27		0,57		0,45	0,45
	0,52		0,52	0,59	0,47		0,53		0,52
0,61	0,41		0,41			0,60	0,40	0,43	

Υπολογίζουμε τις νέες πιθανότητες που προκύπτουν:

$$q_n(1) = [0,10 \ 0,93 \ 0,02 \ 0,92 \ 0,67 \ 0,19 \ 0,06 \ 0,84 \ 0,98 \ 0,99]$$

$$q_n(0) = [0,90 \ 0,07 \ 0,98 \ 0,08 \ 0,33 \ 0,81 \ 0,94 \ 0,16 \ 0,02 \ 0,01]$$

Η κωδική λέξη που λαμβάνεται προκύπτει: $\hat{c}_n = 1$ εφόσον $q_n(1) > 0,5$ αλλιώς $\hat{c}_n = 0$

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με την ολοκλήρωση της 3^{ης} επανάληψης του αλγορίθμου κάνουμε τον έλεγχο της κωδικής λέξης που λαμβάνεται, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$ και λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση και ο αλγόριθμος προχωρά σε 4^η επανάληψη.

6.12.4 Επανάληψη 4^η έως 8^η

Εν συντομία, παρουσιάζουμε τις πιθανότητες που προκύπτουν στις επόμενες επαναλήψεις, ως εξής:

4^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,02 \ 0,98 \ 0,01 \ 0,97 \ 0,75 \ 0,11 \ 0,01 \ 0,89 \ 0,99 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [0,98 \ 0,02 \ 0,99 \ 0,03 \ 0,25 \ 0,89 \ 0,99 \ 0,11 \ 0,01 \ 0,00]$$

5^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,82 \ 0,03 \ 0,00 \ 0,96 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,18 \ 0,97 \ 1,00 \ 0,04 \ 0,00 \ 0,00]$$

6^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,86 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,14 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

7^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,58 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,42 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

8^η Επανάληψη

$$q_n(1) = [0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$$

$$q_n(0) = [1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]$$

Εδώ η κωδική λέξη άλλαξε κατά ένα bit

$$\hat{c} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Με τον έλεγχο της κωδικής λέξης, σύμφωνα με τη σχέση $\hat{c}H^T = 0$, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα $z = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \neq 0$, άρα ΔΕΝ ικανοποιείται η παραπάνω σχέση. Έτσι ο αλγόριθμος εκτελώντας και την 8^η επανάληψη τερματίζει χωρίς να έχει επιτύχει να την διόρθωση. Συμπεραίνουμε ότι το επίπεδο θορύβου που εφαρμόστηκε στο κανάλι προκάλεσε μεγάλη αλλοίωση στα δεδομένα με αποτέλεσμα την αποτυχία της αποκωδικοποίησης.

6.13 Συγκεντρωτική αποτίμηση σεναρίων

Όπως μπορούμε να δούμε και στον παρακάτω πίνακα 1, στις περιπτώσεις αποκωδικοποίησης καναλιού όπου εφαρμόστηκαν χαμηλά επίπεδα θορύβου N_0 η αλλοίωση της πληροφορίας ήταν τέτοια ώστε να μπορεί να ανακτηθεί η αρχική πληροφορία με μόλις μία επανάληψη του αλγόριθμου αποκωδικοποίησης.

Πίνακας 1: Αποτίμηση αποτελεσμάτων σεναρίων.

Σενάρια	Θόρυβος (watt)	E_b/N_0 (dB)	Αποτέλεσμα αποκωδικοποίησης
1 ^ο	$N_0 = 0,5$	12,04	Επιτυχία – 1 επανάληψη
2 ^ο	$N_0 = 1$	9,03	Επιτυχία – 1 επανάληψη
3 ^ο	$N_0 = 2$	6,02	Επιτυχία – 1 επανάληψη

4°	$N_0 = 3$	4,26	Επιτυχία – 1 επανάληψη
5°	$N_0 = 3,5$	3,58	Επιτυχία – 1 επανάληψη
6°	$N_0 = 4,5$	2,5	Επιτυχία – 5 επαναλήψεις
7°	$N_0 = 5$	2,04	Επιτυχία – 4 επαναλήψεις
8°	$N_0 = 6$	1,27	Επιτυχία – 3 επαναλήψεις
9°	$N_0 = 8$	0	Επιτυχία – 3 επαναλήψεις
10°	$N_0 = 9$	-0,5	Αποτυχία
11°	$N_0 = 10$	-0,97	Αποτυχία
12°	$N_0 = 20$	-3,98	Αποτυχία

Επίσης, στις περιπτώσεις αποκωδικοποίησης καναλιού όπου εφαρμόστηκαν μέτρια επίπεδα θορύβου N_0 , η αλλοίωση της πληροφορίας ήταν τέτοια ώστε να μπορεί να ανακτηθεί η αρχική πληροφορία σε περισσότερες επαναλήψεις του αλγόριθμου αποκωδικοποίησης. Ενώ όταν τα επίπεδα του θορύβου αυξήθηκαν περισσότερο, η αλλοίωση της πληροφορίας ήταν τέτοια ώστε να μην μπορεί να ανακτηθεί η αρχική πληροφορία και ο αλγόριθμος αποκωδικοποίησης να τερματίζεται δηλώνοντας σφάλμα.

7 Συμπεράσματα

Η παρούσα μελέτη ανέλυσε δύο από τις πλέον αποτελεσματικές μεθόδους αποκωδικοποίησης για LDPC κώδικες, τον Sum-Product Algorithm και τον Iterative Log-Likelihood Algorithm, αξιολογώντας την απόδοσή τους σε διάφορα σενάρια θορυβωδών καναλιών.

Ο Sum-Product Algorithm αποδείχθηκε ιδιαίτερα ισχυρός, επιτυγχάνοντας υψηλή απόδοση μέσω της χρήσης πιθανολογικών μηνυμάτων. Αν και απαιτεί αυξημένους υπολογιστικούς πόρους σε σχέση με απλούστερες προσεγγίσεις, η αποτελεσματικότητά του τον καθιστά ιδανική επιλογή για σύγχρονα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, όπου η αξιόπιστη μετάδοση δεδομένων είναι κρίσιμη. Τα πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι σε χαμηλό θόρυβο η αποκωδικοποίηση επιτυγχάνεται άμεσα, ενώ σε υψηλότερα επίπεδα απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις. Σε ακραίες συνθήκες, η αποκωδικοποίηση αποτυγχάνει λόγω της έντονης παραμόρφωσης των δεδομένων.

Ο Iterative Log-Likelihood Algorithm προσφέρει επίσης υψηλή απόδοση, προσεγγίζοντας το όριο του Shannon με σχετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος. Η μετάδοση πληροφοριών μέσω μηνυμάτων σε δίκτυα κόμβων ενισχύει την ακρίβεια της αποκωδικοποίησης, καθιστώντας τη μέθοδο αξιόπιστη για ποικίλες εφαρμογές. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις, η σύγκλιση του αλγορίθμου δεν είναι εγγυημένη, γεγονός που περιορίζει την πρακτική του χρήση. Βελτιώσεις, όπως η Min-Sum προσέγγιση, προσφέρουν μεγαλύτερη σταθερότητα και αποδοτικότητα, ενισχύοντας τη λειτουργία του σε πραγματικές συνθήκες.

Συνολικά, η ανάλυση κατέδειξε τη σημασία της επιλογής του κατάλληλου αλγορίθμου ανάλογα με τις απαιτήσεις του συστήματος, τη διαθεσιμότητα υπολογιστικών πόρων και τις συνθήκες θορύβου του καναλιού. Η συνεχής εξέλιξη των τεχνικών αποκωδικοποίησης αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για τη βελτίωση της αξιοπιστίας και της απόδοσης των τηλεπικοινωνιακών δικτύων.

Για μελλοντική έρευνα, θα μπορούσε να μελετηθεί η βελτίωση της απόδοσης των συγκεκριμένων αλγορίθμων μέσω τροποποιημένων προσεγγίσεων, όπως η υβριδική

χρήση του Sum-Product με μεθόδους μείωσης της πολυπλοκότητας και η Min-Sum προσέγγιση. Επιπλέον, η εφαρμογή τους σε πραγματικά δεδομένα επικοινωνίας και η αξιολόγηση της απόδοσής τους σε δυναμικά μεταβαλλόμενα κανάλια θα μπορούσε να προσφέρει χρήσιμες πρακτικές γνώσεις. Τέλος, η διερεύνηση νευρωνικών δικτύων και τεχνικών μηχανικής μάθησης για τη βελτίωση της αποκωδικοποίησης θα μπορούσε να αποτελέσει μια ενδιαφέρουσα προοπτική για περαιτέρω μελέτη.

Βιβλιογραφία

- [1] Moon K. Todd, "Error correction coding : mathematical methods and algorithms", Utah State University, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [2] Rao K. Deerga, "Channel Coding Techniques for Wireless Communications", Forum for interdisciplinary Mathematics, Springer, Hyderabad, Telangana, India 2019.
- [3] Ryan E. William, Lin Shu, "Channel codes -Classical and Modern", Cambridge University Press, 2009.
- [4] Johnson J. Sarah, "Iterative Error Correction -Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes", Cambridge University Press, 2010.
- [5] Kumar , N., Kedia, D. & Purohit, G., "A review of channel coding schemes in the 5G standard." Telecommunication Systems 83, 423–448, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11235-023-01028-y>.
- [6] Declercq David, Fossorier Marc, Biglieri Ezio, "Channel Coding -Theory, Algorithms, and Applications", Academic Press Library in Mobile and Wireless Communications, 2014.
- [7] Sweeney Peter, "Error Control Coding: From Theory to Practice", A John Wiley & Sons, Inc. Publication, USA, 2002.
- [8] Chung Sae-Young, Richardson T. J. and Urbanke R. L., "Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation," in IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47, no. 2, pp. 657-670, Feb 2001, doi: 10.1109/18.910580.
- [9] Mao Yongyi and Banihashemi A. H., "Decoding low-density parity-check codes with probabilistic schedule," 2001 IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing (IEEE Cat. No.01CH37233), Victoria, BC, Canada, 2001, pp. 119-123 vol.1, doi: 10.1109/PACRIM.2001.953537.
- [10] Gallager R., "Low-density parity-check codes," in IRE Transactions on Information Theory, vol. 8, no. 1, pp. 21-28, January 1962, doi: 10.1109/TIT.1962.1057683.

- [11] Fossorier M. P. C., Mihaljevic M. and Imai H., "Reduced complexity iterative decoding of low-density parity check codes based on belief propagation," in IEEE Transactions on Communications, vol. 47, no. 5, pp. 673-680, May 1999.
- [12] MacKay J. C. David, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," in IEEE Transactions on Information Theory, vol. 45, no. 2, pp. 399-431, March 1999.
- [13] Johnson Sarah J., "Introducing Low-Density Parity-Check Codes", School of Electrical Engineering and Computer Science, The University of Newcastle, Australia.
- [14] Fan J. L., "Constrained coding and soft iterative decoding," Proceedings 2001 IEEE Information Theory Workshop (Cat. No.01EX494), Cairns, QLD, Australia, 2001.
- [15] Lucas R., Fossorier M. P. C., Kou Yu and Lin Shu, "Iterative decoding of one-step majority logic deductible codes based on belief propagation," in IEEE Transactions on Communications, vol. 48, no. 6, pp. 931-937, June 2000.
- [16] Richardson T. J. and Urbanke R. L., "Efficient encoding of low-density parity-check codes," in IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47, no. 2, pp. 638-656, Feb 2001.
- [17] Shrinidhi J, Krishna P. Sri, Yamuna B, Pargunarajan K., "Modified Min Sum Decoding Algorithm for Low Density Parity Check Codes", Procedia Computer Science, Volume 171, 2020, Pages 2128-2136, ISSN 1877-0509, <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.04.230>.
- [18] Tahir B., Schwarz S. and Rupp M., "BER comparison between Convolutional, Turbo, LDPC, and Polar codes," 2017 24th International Conference on Telecommunications (ICT), Limassol, Cyprus, 2017, pp. 1-7, doi: 10.1109/ICT.2017.7998249.
- [19] Subramaniam M. Avinash, Sejal Jay, Rithvij Pasupuleti, Thridhamnae P. Sai and Pargunarajan K, "Performance Analysis of Sub-Optimal LDPC Decoder for 5G using Belief Propagation Algorithm," 2021 10th International Conference on Internet of Everything, Microwave Engineering, Communication and Networks (IEMECON), Jaipur, India, 2021, pp. 1-5, doi: 10.1109/IEMECON53809.2021.9689078.

- [20] Vatta F., Soranzo A. and Babich F., "More Accurate Analysis of Sum-Product Decoding of LDPC Codes Using a Gaussian Approximation," in IEEE Communications Letters, vol. 23, no. 2, pp. 230-233, Feb. 2019.

Παράρτημα Α

Ενδεικτικά παρατίθεται ο κώδικας βάσει του οποίου έγινε προσομοίωση της διέλευσης του μηνύματος μέσω θορυβώδους καναλιού και ο υπολογισμός των λαμβανομένων δια-
νυσμάτων.

```
Command Window

>> % =====
% Προσομοίωση μετάδοσης μέσω AWGN καναλιού με BPSK (με πλάτος a=2)
% Δίνεται ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας, η κωδική λέξη και το επίπεδο θορύβου.
% =====

%% 1. Ορισμός παραμέτρων

% Νέος πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H
H = [1 1 1 0 0 1 1 0 0 1;
     1 0 1 0 1 1 0 1 1 0;
     0 0 1 1 1 0 1 0 1 1;
     0 1 0 1 1 1 0 1 0 1;
     1 1 0 1 0 0 1 1 1 0];

% Νέα κωδική λέξη c
c = [0 0 0 1 0 1 0 1 0 1];

% Έλεγχος εγκυρότητας της κωδικής λέξης
if all(mod(H * c', 2) == zeros(size(H,1),1))
    disp('Η κωδική λέξη ικανοποιεί τους parity checks.');
```

```
else
    disp('Προσοχή: Η κωδική λέξη ΔΕΝ ικανοποιεί τους parity checks!');
end

% Ορισμός της τυπικής απόκλισης του θορύβου (σ)
sigma = 1.5811; % Μπορείς να τροποποιήσεις αυτή την τιμή για διαφορετικά επίπεδα θορύβου

% Πλάτος σήματος
a = 2;

%% 2. Μετατροπή της κωδικής λέξης σε BPSK σύμβολα με πλάτος a
% Αντιστοίχιση: 1 -> +a, 0 -> -a
s = a * (2*c - 1);
disp('BPSK σύμβολα (διανύσμα s):');
```

```
disp(s);
```

```

%% 3. Προσομοίωση καναλιού AWGN
% Δημιουργία διανύσματος θορύβου με κανονική κατανομή
noise = sigma * randn(1, length(s));

% Λαμβανόμενο διανύσμα y = s + noise
y = s + noise;

%% 4. Εμφάνιση αποτελεσμάτων
disp('Θόρυβος που προστέθηκε:');
disp(noise);

disp('Λαμβανόμενο διανύσμα y:');
disp(y);
Η κωδική λέξη ικανοποιεί τους parity checks.
BPSK σύμβολα (διανύσμα s):
    -2    -2    -2     2    -2     2    -2     2    -2     2

Θόρυβος που προστέθηκε:
    1.4046   -1.8136   -1.6900   -1.2799   -4.6552    2.2742    0.5142   -1.1936    2.1666   -2.7061

Λαμβανόμενο διανύσμα y:
   -0.5954   -3.8136   -3.6900    0.7201   -6.6552    4.2742   -1.4858    0.8064    0.1666   -0.7061
>>

```

Workspace			
Name	Value	Size	Class
H	5×10 double	5×10	double
a	2	1×1	double
c	[0,0,1,0,1,0,1,0,1]	1×10	double
noise	[1.4046,-1.8136,-1.6900,-1.2799,-4.6552,2.2742,0.5142,-1.1936,2.1666,-2.7061]	1×10	double
s	[-2,-2,-2,2,-2,2,-2,2,-2,2]	1×10	double
sigma	1.5811	1×1	double
y	[-0.5954,-3.8136,-3.6900,0.7201,-6.6552,4.2742,-1.4858,0.8064,0.1666,-0.7061]	1×10	double

