



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**Μεθοδολογία παράλειψης σταδίου διακλάδωσης σε
αλγόριθμους branch & price για βέλτιστο
χρονοπρογραμματισμό ιπτάμενου προσωπικού**

υπό

ΔΟΞΟΠΟΥΛΟΥ ΠΑΝΤΕΛΗ

Διπλωματική Εργασία

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για
την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2024

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Κοζανίδης Γεώργιος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Παντελής Δημήτριος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Λυμπερόπουλος Γιώργος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, εξετάζουμε και συγκρίνουμε τη μεθοδολογία Branch-and-Price, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στον τομέα των αερομεταφορών για τη βελτιστοποίηση του προγραμματισμού και ανάθεση του πληρώματος, με μία παραλλαγή της ίδιας μεθοδολογίας, όπου παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης. Ειδικότερα, η ανάπτυξη της μεθοδολογίας επικεντρώνεται στη διαδικασία παραγωγής στηλών, αγνοώντας τη φάση της διακλάδωσης, με στόχο τη μείωση του υπολογιστικού κόστους και την σύγκριση των αποτελεσμάτων. Το μοντέλο αναπτύχθηκε ως ένα πρόβλημα κάλυψης συνόλου (set-covering), το οποίο στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους προγραμματισμού. Το κόστος αυτό διαχωρίζεται στο άθροισμα του κόστους των ακάλυπτων διαδρομών και του κόστους μη ικανοποίησης των απαιτήσεων του προσωπικού. Παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα από δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν στο μοντέλο και τελικά τα δύο μοντέλα συγκρίνονται τόσο στην αποτελεσματικότητά τους, αναφορικά με το τελικό κόστος, όσο και στον υπολογιστικό χρόνο που χρειάστηκε για να βρεθεί η τελική λύση. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η προσέγγιση που παραλείπει το στάδιο της διακλάδωσης αποφέρει λιγότερο αποδοτικές λύσεις, ενώ ταυτόχρονα απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο. Η εργασία αναλύει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου, ενώ συζητά τους περιορισμούς που προκύπτουν από την παραλλαγή της στρατηγικής.

Abstract

In this thesis, we investigate the Branch-and-Price methodology, widely applied in the aviation industry for optimizing crew scheduling and assignment, and we comparatively evaluate against a variation of the same methodology where the branching phase is skipped. Specifically, the development of the methodology focuses on the column generation process, bypassing the branching phase, with the aim of reducing the computational effort. The model is formulated as a set-covering problem, aiming to minimize the total scheduling cost. This cost is comprised of the cost of uncovered routes and the cost of soft quality requirements. Experimental results from test scenarios are presented, highlighting the performance of the two methodologies. The comparison focuses on two main aspects: the effectiveness of each method in minimizing the total cost and the computational time required to obtain the optimal solution. The results indicate that skipping the branching phase produces less efficient solutions while also requiring higher computational time. The thesis analyzes the advantages and disadvantages of each method and discusses the limitations arising from the variation in strategy.

1. Εισαγωγή	1
1.1: Γενικά.....	1
1.2: Προκλήσεις Των Αεροπορικών Εταιριών	2
1.2.1. Σχεδιασμός Δρομολογίων.....	3
1.2.2. Ανάθεση στόλου	3
1.2.3. Συντήρηση	3
1.2.4. Προγραμματισμός Πληρώματος	4
1.2.5. Διαχείριση Κόστους και Εσόδων	4
1.2.6. Άλλες Προκλήσεις Αεροπορικής Διαχείρισης ..	5
1.3. Σχετικά με την παρούσα διπλωματική	6
1.3.1. Γενικά	6
1.3.2. Στόχος	7
2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	9
2.1. Αναφορές σε Επιστημόνων	9
2.2. Τεχνικές Βελτιστοποίησης	10
2.2.1. Branch and Bound	10
2.2.2. Branch and Price	12
2.2.3. Παραγωγή Στηλών	13
3. Μοντελοποίηση	15
3.1. Κύριο Πρόβλημα.....	15
3.2. Set Partition και Set Cover	17
3.3. Ισορροπία Χρόνου Πτήσεων	18
3.4. Υπο-Πρόβλημα Column Generation	19
3.5. Τελικό Πρόβλημα	20
4. Μεθοδολογία Επίλυσης	23
5. Αποτελέσματα	41
6. Συμπεράσματα	50
7. Μελλοντική Έρευνα	51
8. Βιβλιογραφία	52

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1: Διαδικασία Αεροπορικού Σχεδιασμού (Πηγή[8]).....	2
Εικόνα 2: Οπτική αναπαράσταση των βασικών περιορισμών στη διαδικασία ανάθεσης πληρώματος.....	6
Εικόνα 3: Υβριδικό Μοντέλο.....	8
Εικόνα 4: Παράδειγμα ενός δέντρου Branch and Bound (Πηγή[2]).....	11
Εικόνα 5: Τα βήματα της Branch and Price (Πηγή[5]).....	12
Εικόνα 6: Γραφική απεικόνιση των βημάτων της Column Generation (Πηγή[12])..	13
Εικόνα 7: Απεικόνιση των μοντέλων Set Partitioning και Set covering (Πηγή[5])....	18
Εικόνα 8: Παράδειγμα δικτύου (Πηγή[4]).....	20

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 5.1: N=2, Branch and Price (παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης).	41
Πίνακας 5.2: N=5, Branch and Price (παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης).	42
Πίνακας 5.3: Παραδείγματα μη κάλυψης στην Branch and Price, παραλείποντας το στάδιο της διακλάδωσης.....	43
Πίνακας 5.4: Παραδείγματα μη κάλυψης στην Branch and Price.....	43
Πίνακας 5.5: Παραδείγματα: Branch and Price (παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης).....	45
Πίνακας 5.6: Παραδείγματα: Branch and Price (διαγράφοντας τα κυρίαρχα rosters και παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης).....	46
Πίνακας 5.7: Παραδείγματα: Branch and Price.....	47
Πίνακας 5.8: Χρόνος Επίλυσης Μοντέλου.....	49

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 5.1: Σύγκριση Ακάλυπτων Διαδρομών.....	44
Διάγραμμα 5.2: Σύγκριση Κόστους Ισορροπίας.....	44
Διάγραμμα 5.3: Σύγκριση Υπολογιστικών Κοστών με και χωρίς τα κυριαρχούμενα rosters.....	47
Διάγραμμα 5.4: Σύγκριση Υπολογιστικών Κοστών: Branch and Price και μεθοδολογίας παράλειψης σταδίου διακλάδωσης.....	48
Διάγραμμα 5.5: Σύγκριση Τελικών Κοστών: Branch and Price και μεθοδολογίας παράλειψης σταδίου διακλάδωσης.....	48
Διάγραμμα 5.6: Επιρροή του χρόνου επίλυσης του μοντέλου.....	49

1. Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Στη σύγχρονη εποχή, οι αεροπορικές εταιρίες έρχονται αντιμέτωπες με ιδιαίτερα πολύπλοκους και πολυσύνθετους προβληματισμούς. Πρωταρχικός τους στόχος είναι να διασφαλίζουν την ασφαλή και αποτελεσματική μεταφορά επιβατών και φορτίου, διατηρώντας παράλληλα το κόστος σε χαμηλά επίπεδα. Μία επιτυχημένη αποπεράτωση του στόχου τους περιλαμβάνει ευέλικτα χρονοδιαγράμματα, ακριβείς πτήσεις, ασφάλεια, ικανοποιητικές υπηρεσίες κατά τη διάρκεια της πτήσης, ικανοποιητική διαχείριση των αποσκευών, έγκαιρα προγράμματα πτήσεων και ανταγωνιστικές τιμές.

Για όλους τους παραπάνω λόγους ο τομέας των αερομεταφορών έχει επηρεαστεί σημαντικά από τις συνεχιζόμενες ερευνητικές εξελίξεις και την νέα τεχνολογία. Καθώς οι οικονομικές αγορές εξελίσσονται, οι αεροπορικές εταιρίες αναζητούν συνεχώς καινοτόμες προσεγγίσεις για τη βελτίωση της συνολικής απόδοσής τους μέσω της χρήσης ενημερωμένων μεθοδολογιών για τη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων.

Η πολυπλοκότητα και η δυσκολία των παραπάνω προβλημάτων προέρχεται από το ίδιο το περιβάλλον στο οποίο λειτουργούν οι αεροπορικές εταιρίες. Οι αεροπορικές εταιρίες λειτουργούν κάτω από ένα εξαιρετικά δυναμικό περιβάλλον, το οποίο εξελίσσεται και διαφοροποιείται συνεχώς. Συχνά μάλιστα καλούνται να τροποποιήσουν τον αρχικό τους προγραμματισμό εξαιτίας εκτάκτων γεγονότων όπως έκτακτα καιρικά φαινόμενα, ξαφνικές μηχανικές βλάβες στα αεροσκάφη, ασθένεια μέλους του πληρώματος. Επιπλέον, αυξάνεται περαιτέρω η δυσκολία καθώς αναφερόμαστε σε ένα μεγάλο γεωγραφικό εύρος που εκτείνονται συνήθως οι αεροπορικές εταιρίες. Αυτό καθιστά ιδιαίτερα περίπλοκη την εύρεση βέλτιστης λύσης για τα αποθέματα που υποχρεωτικά πρέπει να υπάρχουν στη διάθεση της επιχείρησης. Τέλος, οι νομικοί κανονισμοί που απευθύνονται στις εναέριες μεταφορές αυξάνουν τους περιορισμούς που πρέπει να συμπεριληφθούν από τις εταιρίες αναφορικά με την συντήρηση των αεροσκαφών, τα μέτρα ασφαλείας, την ετοιμότητα και εκπαίδευση του πληρώματος και την κατανάλωση καυσίμων που εκπέμπεται από τα αεροσκάφη. Ωστόσο, η δυσκολία των αεροπορικών εταιριών δεν περιορίζεται μόνο σε αυτούς τους τομείς. Κάθε εταιρία ανταγωνίζεται η μία την άλλη αλλά και άλλα μέσα μεταφοράς όπως λεωφορεία, τρένα, πλοία, αυτοκίνητα. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη στρατηγικών μέτρων για να παραμείνουν λειτουργικά αποτελεσματικές.

Εύκολα μπορεί να αντιληφθεί κανείς την πολυπλοκότητα και δυσκολία του θέματος, με αποτέλεσμα να αναζητείται η δημιουργία ενός μοντέλου που παρέχει όλες τις παραπάνω πληροφορίες με βέλτιστο τρόπο. Κάθε αεροπορική εταιρία προσπαθεί να βρει τρόπους να αποκτήσει και να διατηρήσει έναν ηγετικό ρόλο στην ανταγωνιστική αγορά των αερομεταφορών και να λειτουργήσει όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματικά και αποδοτικά προκειμένου να ανταποκριθεί στις ανάγκες των πελατών. Μάλιστα, από την δεκαετία του 1950 οι αεροπορικές εταιρίες χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα και ποσοτικές μεθόδους για την προσομοίωση και βελτιστοποίηση της λειτουργίας τους. Ωστόσο, πολλά από αυτά τα μοντέλα παρέχουν μη ρεαλιστικά σενάρια καθώς είναι ευκολότερη η ανάπτυξη τέτοιων μοντέλων αλλά και συχνά υπάρχουν στην πραγματικότητα καταστάσεις οι οποίες δεν μπορούν εύκολα να διατυπωθούν σε ένα μαθηματικό πρόβλημα. Συνεπώς, για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, η έρευνα των επιστημών επικεντρώθηκε στην ανάπτυξη πιο ευέλικτων και σύγχρονων εργαλείων, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα διαχείρισης μεγαλύτερων προβλημάτων αλλά και πολύπλοκων και απρόβλεπτων καταστάσεων με τον καλύτερο τρόπο.

Από τεχνολογικής άποψης, λοιπόν, η ταχύτητα των επεξεργασιών Η/Υ και η χωρητικότητα των αποθηκευτικών συσκευών των Η/Υ είναι πλέον πλήρως ικανοποιητικές για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων σε πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, ο απαιτούμενος χρόνος επίλυσης έχει μειωθεί κατά πολύ με αποτέλεσμα οποιαδήποτε πρόβλημα που θα εμφανιστεί να μπορεί να επιλυθεί άμεσα, χωρίς να επιφέρει δυσμενείς καταστάσεις. Από ερευνητικής άποψης, τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί ραγδαίες θετικές εξελίξεις όσο αφορά τους αλγόριθμους βελτιστοποίησης και τις τεχνικές επίλυσης προβλημάτων. Πλέον, τα μοντέλα έχουν τη δυνατότητα της προσομοίωσης πολλών πραγματικών καταστάσεων με λύσεις πολύ κοντά στην πραγματική.

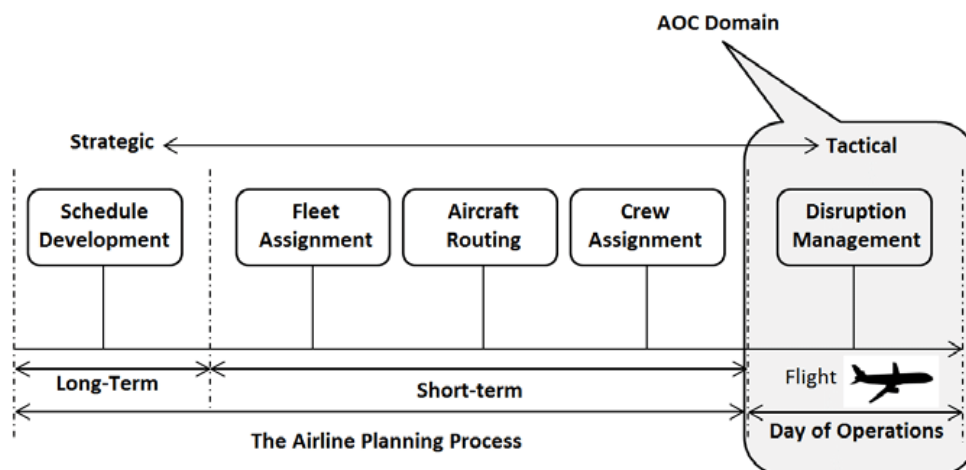
Συνεπώς για την αποτελεσματική υλοποίηση όλων των προαναφερθέντων εργασιών, οι αεροπορικές εταιρείες κατανέμουν πόρους σε έρευνες για να εξασφαλίσουν τη μακροζωία και την επέκτασή τους στον κλάδο. Συγκεκριμένα, αφιερώνουν χρόνο στον κατάλληλο προγραμματισμό και σχεδιασμό δικτύου πτήσεων, στην ανάθεση κατάλληλου και επαρκούς πληρώματος σε κάθε πτήση, αφού πρώτα έχει εξασφαλιστεί ένα κατάλληλο πρόγραμμα εκπαίδευσης και ξεκούρασης για το πλήρωμα, στην ακολουθία πτήσεων που ανατίθενται σε αεροσκάφη, σε πρόγραμμα συντήρησης αεροσκαφών, σε διαδικασίες που αφορούν την τιμολόγηση εισιτηρίων και διαχείρισης αποσκευών αλλά και στην διαχείριση εναέριας κυκλοφορίας και μη προγραμματισμένων ενεργειών.

1.2 Προκλήσεις Των Αεροπορικών Εταιριών

Στην ακόλουθη ενότητα πλησιάζουμε περισσότερο στο ζήτημα της παρούσας διπλωματικής. Αρχικά, σημαντικό κρίνεται να παρουσιαστούν οι βασικές προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι αεροπορικές εταιρίες. Συγκεκριμένα, για την διαχείριση των λειτουργιών τους και την αποτελεσματικότητά τους στον κλάδο εξετάζουν, μελετούν και επιλύουν μία σειρά προβλημάτων που δημιουργούνται από την συνεχόμενη ανάπτυξη του τομέα.

Αναλυτικότερα, παρακάτω δίνεται μία σύντομη εικόνα που απεικονίζει τα διάφορα στάδια που πρέπει να επιλυθούν από οποιαδήποτε αεροπορική εταιρία για την επιτυχία της. Μερικές από τις βασικές προκλήσεις είναι ο σχεδιασμός δρομολογίων, η ανάθεση στόλου, η συντήρηση των αεροσκαφών, ο προγραμματισμός πληρώματος, η διαχείριση κόστους και εσόδων και πολλών άλλων.

Σε αυτήν την ενότητα θα επισημανθούν συντόμως οι σημασίες αυτών των κλάδων, καθώς οι αεροπορικές εταιρίες διαχωρίζουν αυτούς τους κλάδους και αναθέτουν διαφορετικό προσωπικό με τις αντίστοιχες γνώσεις σε καθένα από αυτά.



Εικόνα 1: Διαδικασία Αεροπορικού Σχεδιασμού (Πηγή: [8])

1.2.1 Σχεδιασμός Δρομολογίων

Η πρώτη μεγάλη απόφαση που καλείται οποιαδήποτε αεροπορική εταιρία να πάρει, είναι να σχεδιάσει το δίκτυο της και να καθορίσει το σύνολο των προορισμών που θα παρέχει στους πελάτες της. Η παραπάνω απόφαση είναι πρωταρχικής σημασίας, καθώς έχει σημαντική επίδραση σε πολλές άλλες αποφάσεις και καθορίζει την μετέπειτα πορεία της εταιρίας.

Αναλυτικότερα, αρχικά καλείται να κατασκευάσει το δίκτυο της, δηλαδή τις συγκεκριμένες τοποθεσίες των σταθμών αναχώρησης και άφιξης αλλά και των ενδιάμεσων σταθμών που θα κινούνται τα αντίστοιχα αεροσκάφη της. Με τον καιρό έχουν δημιουργηθεί διάφορα μοντέλα που επιδιώκουν στην εύρεση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Τα παλιότερα χρόνια, έως και το 1970, ένα τέτοιο πρότυπο ήταν το <<από σημείο σε σημείο>>, στο οποίο κάθε σημείο είχε απευθείας διαδρομή προς κάθε άλλο. Επιπλέον, ένα άλλο γνωστό μοντέλο διανομής ήταν το spoke-hub, γνωστό και ως Hub and spoke, σύμφωνα με το οποίο η σχεδίαση της κυκλοφορίας και των δρομολογίων οργανώνεται από έναν κεντρικό σταθμό και διαφόρων απομακρυσμένων σταθμών που βρίσκονται σε μία ακτίνα γύρω από τον κεντρικό.

Ουσιαστικά, μετά την ολοκλήρωση αυτού του σταδίου, η αεροπορική εταιρία θα έχει αποφασίσει ποιες πόλεις και ποια αεροδρόμια θα διατίθενται για τα αεροσκάφη της. Μία τέτοια απόφαση θα καθορίσει και ποιους δυνατούς συνδυασμούς πτήσεων μπορεί να καλύψει.

1.2.2 Ανάθεση στόλου (Fleet Assignment)

Το πρόβλημα ανάθεσης στόλου είναι ακριβώς η επόμενη διαδικασία που πρέπει να απασχολήσει μία αεροπορική εταιρία, αφού πρώτα έχει κατασκευάσει το δίκτυο πτήσεων της. Συνοπτικά, το πρόβλημα ανάθεσης στόλου πρόκειται για τη διαδικασία αντιστοίχισης των διαθέσιμων αεροσκαφών στις πτήσεις που έχουν προγραμματιστεί, λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις κάθε πτήσης και τα χαρακτηριστικά κάθε αεροσκάφους. Αναλυτικότερα, ανάλογα με τη χωρητικότητα, τον εξοπλισμό και το λειτουργικό κόστος των αεροσκαφών, η επιλογή της σωστής κατανομής κρίνεται ζωτικής σημασίας για τη βελτιστοποίηση της απόδοσης και την κερδοφορία της εταιρίας. Για παράδειγμα, η ανάθεση μικρότερου αεροσκάφους από το αναγκαίο σε μία πτήση θα έχει ως αποτέλεσμα να μην εξυπηρετηθούν πελάτες λόγω ανεπαρκούς χωρητικότητας ενώ παράλληλα η ανάθεση μεγαλύτερου αεροσκάφους θα έχει ως αποτέλεσμα να μην εκμεταλλευθούν όλες οι κενές θέσεις, άρα πιθανόν αυτό να ερμηνεύεται ως υψηλότερο λειτουργικό κόστος. Ωστόσο, λόγω του μεγάλου αριθμού προγραμματισμένων πτήσεων κάθε μέρα και της εξάρτησης αυτής της διαδικασίας και ανάλυσης από άλλες διαδικασίες και αποφάσεις της αεροπορικής εταιρίας, η επίλυση του προβλήματος ανάθεσης στόλου αποτελούσε πάντοτε ένα πολυσύνθετο και πολύπλοκο έργο για τις αεροπορικές εταιρίες.

1.2.3 Συντήρηση (Aircraft Rotations)

Ύστερα από την ανάθεση των κατάλληλων αεροσκαφών στις αντίστοιχες πτήσεις, ακολουθεί το πρόβλημα της συντήρησης. Περιληπτικά, είναι το βήμα στο οποίο εξασφαλίζεται η ασφάλεια των επιβατών, αφού πρώτα εξασφαλισθεί η ασφάλεια των αεροσκαφών. Στόχος, ουσιαστικά, είναι η εύρεση και σχεδίαση ενός βέλτιστου και εφικτού προγράμματος πτήσεων στο οποίο θα δίνεται επαρκής χρόνος παραμονής των αεροσκαφών σε συγκεκριμένα αεροδρόμια, ώστε να πραγματοποιηθούν οι αναγκαίοι τεχνικοί έλεγχοι και επισκευές που πρέπει να γίνονται ανά τακτικά χρονικά διαστήματα.

Παλιότερα μοντέλα συχνά οδηγούσαν σε άνιση κατανομή συντήρησης, με κάποια αεροσκάφη να έχουν στη διάθεση τους περισσότερες ευκαιρίες τεχνικών ελέγχων από ότι χρειάζονται και άλλες να μην διαθέτουν ούτε τις αναγκαίες. Προφανώς, στην πρώτη περίπτωση μία τέτοια δυσμενής κατάσταση οδηγούσε σε απώλεια εσόδων καθώς αεροσκάφη διανυκτέρευαν σε

αεροδρόμια άσκοπα, χωρίς να χρησιμοποιούνται βέλτιστα. Στη δεύτερη περίπτωση, προφανώς, αυξανόταν ο κίνδυνος των επιβατών.

Με τη βοήθεια νέων μοντέλων και με την ανάλυση δεδομένων αποτελεσματικά, οι αεροπορικές εταιρίες μπορούν να προβλέψουν με μεγαλύτερη επιτυχία πότε απαιτείται συντήρηση, ώστε, τελικά, να εξασφαλίζεται η ασφάλεια αλλά και ταυτόχρονα η αποδοτικότητα.

1.2.4 Προγραμματισμός Πληρώματος (Crew Scheduling)

Ύστερα από την επιτυχή αποπεράτωση των τριών παραπάνω σταδίων, δηλαδή τον σχεδιασμό δρομολογίων, την ανάθεση στόλων και το πρόγραμμα συντήρησης, οι αεροπορικές εταιρίες ασχολούνται με τον προγραμματισμό πληρώματος. Το πρόβλημα του προγραμματισμού πληρώματος είναι και αυτό με το οποίο ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία. Στη συνέχεια, λοιπόν, θα παρουσιαστεί με περισσότερη λεπτομέρεια και θα δοθούν λύσεις. Ουσιαστικά, το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι να βρεθεί με βέλτιστο τρόπο το κατάλληλο ταίριασμα κάθε πληρώματος σε μία ακολουθία εργασιών/πτήσεων. Σύμφωνα με τα αντίστοιχα προσόντα, χαρακτηριστικά και δυνατότητες κάθε εργάτη/πληρώματος του ανατίθενται το κατάλληλο σύνολο εργασιών που μπορεί να ολοκληρώσει με επιτυχία. Βασικό κριτήριο, προφανώς, είναι να καλυφθούν όλες οι πτήσεις με το χαμηλότερο δυνατό κόστος χωρίς να παραβιαστούν είτε φυσικοί είτε νομικοί περιορισμοί. Τέτοιοι περιορισμοί μπορεί να είναι ο μέγιστος χρόνος εργασίας, η ελάχιστη ξεκούραση, οι επαγγελματικές πιστοποιήσεις και άλλοι πολλοί, οι οποίοι θα αναλυθούν και παρακάτω.

Στην πραγματικότητα, οι αεροπορικές εταιρίες επιδιώκουν να σχεδιάσουν και να κατασκευάσουν ένα επαναλαμβανόμενο και σταθερό πρόγραμμα που θα προσφέρει συνεχείς υπηρεσίες στους επιβάτες τους. Έτσι, προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν τον αριθμό αλλαγών πληρώματος, ώστε κάθε πλήρωμα να ακολουθεί την πορεία ενός συγκεκριμένου αεροσκάφους με αποτέλεσμα να μην δημιουργούνται προβλήματα κατά την ανταλλαγή εργαζομένων σε περίπτωση καθυστερήσεων και προβλημάτων. Ωστόσο, ένα τέτοιο σενάριο φαντάζει ιδιαίτερα σπάνιο, καθώς συχνά το πρόγραμμα που έχει οριστεί πρέπει να τροποποιηθεί λόγω ξαφνικών αλλαγών και προβλημάτων, όπως για παράδειγμα μία απότομη κακοκαιρία ή μία βλάβη σε κάποιο από τα αεροσκάφη ή και μία ασθένεια κάποιου εργαζόμενου. Συνεπώς, κάθε αεροπορική εταιρία ακολουθεί και ερευνά με διαφορετική μέθοδο επίλυσης τους συγκεκριμένους περιορισμούς και προβλήματα.

1.2.5 Διαχείριση Κόστους και Εσόδων (Revenue Management)

Η διαχείριση κόστους και εσόδων περιλαμβάνει τεχνικές που συνεισφέρουν και οδηγούν τις επιχειρήσεις να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Συγκεκριμένα, οι αεροπορικές εταιρίες καλούνται να προσαρμόζουν τις τιμές των εισιτηρίων, αναλύοντας ταυτόχρονα τυχόν πόρους και δαπάνες που απαιτούνται για την κάλυψη της ζήτησης. Μοντέλα που δημιουργήθηκαν για την επίτευξη αυτών των στόχων, περιλαμβάνουν τη διαφοροποίηση τιμών, τη διαχείριση ζήτησης και τη διαχείριση του στόλου και του πληρώματος.

Ένα σημαντικό εργαλείο είναι η βελτιστοποίηση των διαθέσιμων θέσεων (seat inventory control), όπου οι τιμές προσαρμόζονται ανάλογα με τη ζήτηση, ενώ εφαρμόζονται παράλληλα στρατηγικές όπως το overbooking για να αποφεύγονται τυχόν κενές θέσεις. Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται καθώς αρκετές φορές οι πελάτες ακυρώνουν τις κρατήσεις τους ή δεν εμφανίζονται για να επιβιβαστούν στο αεροδρόμιο. Προκειμένου, λοιπόν να μην απογειωθεί το αεροσκάφος με ελεύθερα καθίσματα, καθώς δίνεται η ευκαιρία να επωφεληθούν οι εταιρίες από τυχόν απόντες και να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους, προβλέπουν τον αριθμό των συγκεκριμένων επιβατών και επιτρέπουν την αγορά περισσότερων εισιτηρίων. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή πρέπει να χρησιμοποιείται με μεγάλη προσοχή και να επιτρέπει τυχόν λάθη της πρόβλεψης, καθώς σε περίπτωση λάθους υπάρχει ο κίνδυνος συγκέντρωσης περισσότερων επιβατών από την συνολική χωρητικότητα. Μία τέτοια κατάσταση θα επιφέρει δυσμενή εμπειρία στους επιβάτες και ενδεχομένως απρόβλεπτα κόστη, καθώς πιθανόν να πρέπει να δοθεί αποζημίωση. Η αποζημίωση που δίνεται μπορεί να είναι χρηματική

ή να ερμηνεύεται ως δωρεάν εισιτήρια, εύρεση διαθέσιμων θέσεων σε άλλες πτήσεις ή ακόμη και χρήση άλλων αεροπορικών εταιριών.

Παράλληλα, οι εταιρίες αναπτύσσουν συστήματα πρόβλεψης που ενσωματώνουν δεδομένα όπως πωλήσεις και τάσεις αγοράς για τη βελτίωση της αποδοτικότητας τους. Ένα μεγάλο μέρος των εσόδων αποκτάται λόγω της ανάπτυξης ενός μοντέλου που θα μεριμνά όλα τα παραπάνω ζητήματα και θα εφευρίσκει τη βέλτιστη λύση.

1.2.6 Άλλες Προκλήσεις Αεροπορικής Διαχείρισης

Η συνεχής, ραγδαία ανάπτυξη της αεροπορικής βιομηχανίας έχει δημιουργήσει νέες και ποικίλες προκλήσεις στον τομέα της αεροπορικής διαχείρισης. Οι αεροπορικές εταιρίες καλούνται να αντιμετωπίσουν και να αναπτύξουν μοντέλα που θα επιλύουν μία σειρά προβλημάτων που απαιτούν σύνθετους υπολογισμούς. Πέραν των βασικότερων και ίσως πιο πολύπλοκων προβλημάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω, κρίνεται σημαντικό να αναφερθούν συνοπτικά μερικές και από τις υπόλοιπες προκλήσεις.

Μία από αυτές είναι ο σχεδιασμός και η διαχείριση πόρων. Αυτές οι δραστηριότητες περιλαμβάνουν την εκχώρηση θέσεων πύλης, τη διαχείριση χρονοδιαγραμμάτων και τον προγραμματισμό προσωπικού εδάφους. Συγκεκριμένα, η εκχώρηση θέσεων πύλης διασφαλίζει την ενοικοδομητική κατανομή πυλών για αφίξεις και αναχωρήσεις, λαμβάνοντας υπόψη τους χρόνους πτήσεων, τις ανάγκες των επιβατών, τους χρόνους προετοιμασίας των αεροσκαφών και τη διαθεσιμότητα πληρώματος. Επιπλέον, οι αεροπορικές εταιρίες οφείλουν να σχεδιάσουν ένα χρονοδιάγραμμα συμβατό με τους κανόνες. Υπάρχουν συγκεκριμένα χρονικά παράθυρα κατά τα οποία επιτρέπεται ένα αεροσκάφος να απογειωθεί και να προσγειωθεί, καθώς, συχνά παρατηρείται περιορισμένη διαθεσιμότητα αεροδιαδρόμων με σκοπό τη μείωση των προβλημάτων καθυστέρησης λόγω συμφόρησης. Τέλος, το προσωπικό εδάφους εξασφαλίζει τον έλεγχο των εισιτηρίων, εξυπηρετεί τα αεροσκάφη, συμβάλει στη διαχείριση αποσκευών και γενικότερα συνεισφέρει στην ομαλή λειτουργία του αεροδρομίου.

Παράλληλα, άλλες τέτοιες προκλήσεις είναι η διαχείριση κυκλοφορίας, με σκοπό την ασφαλή μετακίνηση των επιβατών για την αποφυγή συγκρούσεων. Η ασφάλεια των επιβατών και του πληρώματος καθορίζονται ως η προτεραιότητα των αεροπορικών εταιριών, με τις εταιρίες να συμμορφώνουν αυστηρούς κανονισμούς. Επιπλέον, οι εταιρίες πρέπει να μεριμνήσουν και να έχουν τη δυνατότητα να διαχειριστούν έκτακτες συνθήκες για την αντιμετώπιση απρόβλεπτων περιστατικών που επηρεάζουν τη λειτουργία τους. Επιπρόσθετα, οι αεροπορικές εταιρίες καλούνται να λάβουν υπόψη τους και περιβαλλοντικούς περιορισμούς, μειώνοντας τις εκπομπές ρύπων. Απαιτείται, λοιπόν, να προωθήσουν την αειφορία, αναπτύσσοντας νέες τεχνολογίες. Επίσης, σημαντικό κρίνεται και η συνεχής εκπαίδευση του προσωπικού, με στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων για την άμεση αντίδραση σε καταστάσεις κρίσης, την εκμάθηση πρώτων βοηθειών αλλά και την συντήρηση αεροσκαφών.

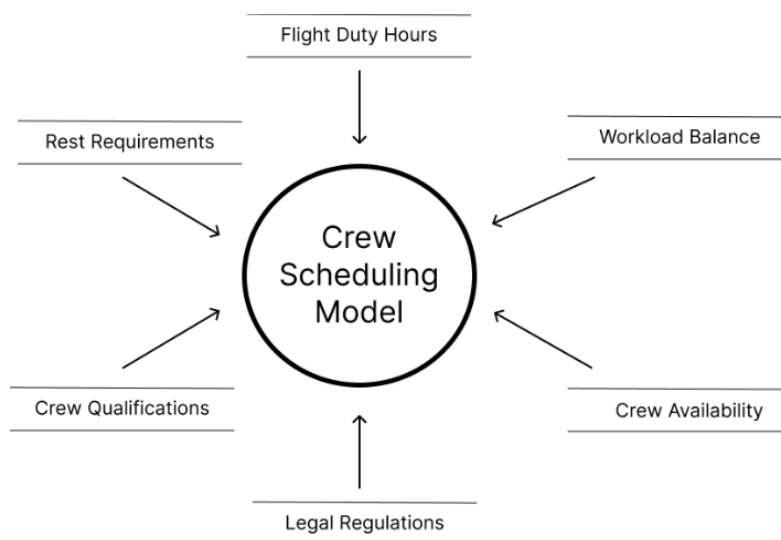
Οι τομείς που προβληματίζουν κάθε αεροπορική εταιρία δεν είναι μόνο αυτοί που αναφέρθηκαν. Οι αεροπορικές εταιρίες αντιμετωπίζουν πολλές προκλήσεις και πρέπει να προσαρμόζονται συνεχώς στις νέες ανάγκες των επιβατών και του πληρώματος τους. Η τεράστια μεγέθους και πολυπλοκότητα όλων αυτών των προβλημάτων οδήγησε στην ανάπτυξη λύσεων μέσω της πληροφορικής με τη χρήση υπολογιστών. Η χρήση ενός υπολογιστή και η ανάπτυξη ενός βέλτιστου αλγορίθμου φαίνεται να είναι η μοναδική λύση για την αντιμετώπιση αυτής της συνεχόμενης και ραγδαίας εξέλιξης της αεροπορικής βιομηχανίας.

1.3 Σχετικά με την παρούσα διπλωματική

1.3.1 Γενικά

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό να λυθεί το πρόβλημα της ανάθεσης πληρώματος, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω. Το πρόβλημα της ανάθεσης πληρώματος είναι ένα πολυσύνθετο και πολύπλοκο πρόβλημα, στο οποίο πρέπει να ληφθούν υπόψη πολλοί περιορισμοί. Βασικός στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη ανάθεση του διαθέσιμου προσωπικού (κατάλληλο ταίριασμα) σε μία ακολουθία πτήσεων/εργασιών. Οι περιορισμοί που πρέπει να περιληφθούν είναι τόσο νομικής προέλευσης όσο και φυσικής.

Μερικοί από αυτούς τους περιορισμούς είναι η επαγγελματική κατάρτιση του πληρώματος, ο μέγιστος χρόνος εργασίας, ο ελάχιστος χρόνος ξεκούρασης, η διαθεσιμότητα των αεροσκαφών και η διαθεσιμότητα του πληρώματος. Προφανώς, κάθε εργαζόμενος μπορεί να έχει προσθέσει τους δικούς του περιορισμούς, όπως για παράδειγμα να μην επιτρέπει να απομακρύνεται για μεγάλα χρονικά διαστήματα από τη βάση του κτλ. Εύκολα, λοιπόν, διακρίνεται ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές περιπτώσεις που κάθε μία έχει τους δικούς της περιορισμούς, το οποίο καθιστά το πρόβλημα πολύ σύνθετο και περίπλοκο. Στην παρακάτω φωτογραφία διακρίνονται μερικοί από τους περιορισμούς, οι οποίοι πρέπει να προστεθούν στο μοντέλο που θα δημιουργηθεί για την επίλυση του προβλήματος.



Εικόνα 2: Οπτική αναπαράσταση των βασικών περιορισμών στη διαδικασία ανάθεσης πληρώματος

Αρχικά, το πρόβλημα του προγραμματισμού πληρώματος επιλύεται μελετώντας το πρόβλημα σύζευξης/ταιριάσματος πληρωμάτων και ύστερα το πρόβλημα ανάθεσης πληρώματος. Η πρώτη φάση, λοιπόν, περιλαμβάνει τη σύζευξη ή το ταίριασμα πτήσεων, με στόχο την εύρεση εφικτών συνδυασμών που μπορούν να καλυφθούν από τα πληρώματα με ελάχιστο κόστος. Το πρόβλημα αυτό, είναι γνωστό ως πρόβλημα Διαμερισμού Συνόλου (Set partitioning problem), στο οποίο κάθε σειρά περιέχει μία συγκεκριμένη προγραμματισμένη πτήση και κάθε στήλη περιέχει όλα τα πιθανά σύνολα που μπορούν να αντιστοιχηθούν και να εξυπηρετήσουν την πτήση, καλύπτοντας, προφανώς, όλους τους περιορισμούς με επιτυχία. Επίσης, συχνά, στην μεθοδολογία επιτρέπεται η μετακίνηση αεροσκάφους χωρίς επιβάτες (deadheading), το οποίο μπορεί να είναι χρήσιμο και αποδοτικό για την κάλυψη του προγράμματος.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το πρόβλημα λαμβάνει ως δεδομένο ένα σύνολο πληρώματος και ένα σύνολο συνδέσεων πτήσεων, οι οποίες έχουν κατασκευαστεί ήδη κατά τη διάρκεια της προηγούμενης φάσης. Επιπλέον, το πρόβλημα λαμβάνει υπόψη, κατά την ανάθεση μελών πληρώματος σε συνδέσεις πτήσεων, περιορισμούς και χρονικούς και συμβατούς. Για παράδειγμα, η ώρα άφιξης μίας πτήσης πρέπει να προηγείται της ώρας αναχώρησης της επόμενης και το αεροδρόμιο άφιξης μίας πτήσης πρέπει να είναι το ίδιο με το αεροδρόμιο αναχώρησης της επόμενης. Γενικότερα, στο δεύτερο στάδιο, δηλαδή στην ανάθεση πληρώματος, λαμβάνονται υπόψη οι ανάγκες και υποχρεώσεις για ξεκούραση των εργαζομένων, οι διακοπές τους, η εκπαίδευση τους, οι μισθοί τους και σύμφωνα με αυτά, στόχος είναι η ανάθεση ενός πληρώματος σε κάθε μία προγραμματισμένη πτήση με το ελάχιστο δυνατό κόστος ανάθεσης των εργαζομένων σε αυτά τα ωράρια εργασίας.

Επιπλέον, η κάλυψη όλων των προγραμματισμένων πτήσεων κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική, ώστε να εξυπηρετηθούν οι επιβάτες εποικοδομητικά και να μείνουν ικανοποιημένοι. Ωστόσο, συχνά η πλήρης κάλυψη μπορεί να είναι δύσκολη, με αποτέλεσμα την απώλεια εσόδων από ακάλυπτες πτήσεις. Το συγκεκριμένο πρόβλημα, έχει ως στόχο τη μείωση, όσο είναι το δυνατόν, ακάλυπτων πτήσεων. Για το σκοπό αυτό, έχει προστεθεί ποινή (penalty) στο πρόγραμμα στην περίπτωση που δεν καλυφθεί κάποια πτήση, η οποία αυξάνει τα έξοδα της αεροπορικής εταιρίας. Αυτή η ποινή είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός, η οποία περιέχεται στην αντικειμενική συνάρτηση.

Η επίλυση του προβλήματος βασίζεται σε προηγμένες τεχνικές, με κυριότερη την δημιουργία στηλών (column generation), η οποία θα αναλυθεί περαιτέρω και παρακάτω. Ουσιαστικά, αρχικά το πρόβλημα ενσωματώνει ένα κύριο πρόβλημα (master problem), το οποίο εντοπίζει ένα σύνολο ταιριασμάτων που καλύπτουν τις πτήσεις με το ελάχιστο κόστος. Στη συνέχεια, χωρίζοντας το πρόβλημα σε υπο-προβλήματα, παράγονται νέες λύσεις, οικονομικά ενισχυμένες και προστίθενται στο κύριο πρόβλημα για περαιτέρω βελτίωση.

Το πρόβλημα του προγραμματισμού πληρώματος είναι ένας συνδυασμός τεχνικών, επιχειρησιακών και ανθρώπινων προκλήσεων. Με τη χρήση προηγμένων μεθόδων επιτυγχάνεται η δημιουργία αποδοτικών και ποιοτικών προγραμμάτων που καλύπτουν τις ανάγκες των αεροπορικών εταιριών, μειώνοντας ταυτόχρονα τα κόστη και ενισχύοντας την απόδοσή τους.

1.3.2 Στόχος

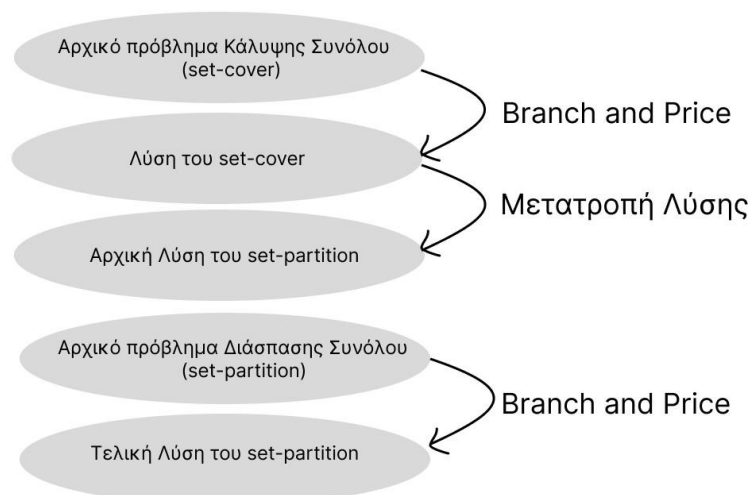
Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα παρουσιαστούν δύο διαφορετικές μεθοδολογίες και θα συγκριθούν οι λύσεις τους. Προφανώς, και οι δύο μεθοδολογίες έχουν τον ίδιο σκοπό, δηλαδή την εύρεση βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα της ανάθεσης πληρώματος. Επιπλέον, όπως θα φανεί και παρακάτω στις επόμενες ενότητες, τα αποτελέσματα θα συγκριθούν, εισάγοντας τα ίδια δεδομένα.

Αναλυτικότερα, η πρώτη μεθοδολογία χρησιμοποιεί ένα υβριδικό αλγοριθμικό σχεδιασμό, όπου η λύση που παράγεται από τη μέθοδο set-cover χρησιμοποιείται ως σημείο εκκίνησης για τη μέθοδο set-partition (αναλυτική επεξήγηση των όρων αυτών επιστημαίνεται στις επόμενες ενότητες). Συνοπτικά, ξεκινάμε τη διατύπωση του set-cover. Ουσιαστικά, στόχος είναι να βρούμε έναν τρόπο ώστε όλα τα δρομολόγια να εκτελούνται από τα μέλη του πληρώματος, χωρίς να εστιάζουμε σε πιθανές επικαλύψεις ή σε αυστηρούς περιορισμούς. Ύστερα, μετατρέπουμε τη λύση που πήραμε σε συμβατή μορφή για το πρόβλημα set-partition, αφαιρώντας επικαλύψεις και λαμβάνοντας υπόψη πρόσθετους περιορισμούς που ισχύουν για τα πληρώματα. Η λύση που προκύπτει από αυτήν την μετατροπή χρησιμοποιείται ως αρχικό σημείο για την επίλυση του προβλήματος set-partition. Έτσι, εξασφαλίζουμε ότι κάθε δρομολόγιο εκχωρείται αποκλειστικά σε ένα πλήρωμα, ενώ, προφανώς, τηρούνται όλοι οι περιορισμοί. Η βασική στρατηγική που ακολουθείται είναι να αναγνωριστεί η μέγιστη δυνατή κάλυψη πτήσεων με ελάχιστο υπολογιστικό χρόνο και κόστος. Η μεθοδολογία της Branch and Price χρησιμοποιείται και στα δύο βήματα για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, ενώ, παράλληλα, η διαδικασία διακλάδωσης (Branching) αποτελεί καθοριστικό μέρος για τη δημιουργία εφικτών λύσεων. Η μεθοδολογία που μόλις παρουσιάστηκε, παρουσιάζεται σχηματικά στο παρακάτω σχήμα.

Το συγκεκριμένο μοντέλο δίνεται έτοιμο, και θα συγκριθούν τα αποτελέσματα του τόσο στον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο όσο και στο τελικό κόστος με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε αυτήν την εργασία.

Συγκεκριμένα, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε αυτήν την εργασία, παρακάμπτει τη διαδικασία της διακλάδωσης με ένα μοντέλο που εστιάζει στη βελτιστοποίηση του ταιριάσματος πληρώματος με μία ακολουθία πτήσεων μετά τη γραμμική χαλάρωση του κύριου προβλήματος. Εισάγονται νέες δυαδικές μεταβλητές και περιορισμοί για την επιλογή των rosters και την αφαίρεση των περιττών αντιστοιχιών. Ουσιαστικά, η μεθοδολογία επικεντρώνεται στη χρήση της column generation για την επίλυση του κύριου προβλήματος και για την παραγωγή μίας λύσης στο γραμμικό πρόβλημα χαλάρωσης. Επιπλέον, λαμβάνει υπόψη περιορισμούς (όπως ώρες εργασίας εργαζομένων), στοχεύοντας στην μείωση του τελικού κόστους αλλά και του υπολογιστικού χρόνου.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων, ωστόσο, της μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα γίνει με τις τελικές τιμές του υβριδικού μοντέλου. Προφανώς, το υβριδικό μοντέλο, εφόσον πραγματοποιεί δύο φορές τη μεθοδολογία, Branch-and-Price, και μετατρέπει τη λύση σε set-partition, θα είναι και πιο χρονοβόρο από το δικό μας μοντέλο αλλά και πιο αποτελεσματικό. Εφόσον, και στο δικό μας μοντέλο παίρνουμε μία set-cover λύση και μετά εφαρμόζουμε column-generation, κρίνεται λογικό οι τελικές τιμές του μοντέλου μας να συγκριθούν μετά από αυτές της πρώτης επίλυσης της μεθοδολογίας Branch-and-Price. Ουσιαστικά, δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με την μετατροπή της λύσης σε set-partition.



Εικόνα 3: Υβριδικό μοντέλο

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Τα προβλήματα, τα οποία ήδη αναφέρθηκαν στην εισαγωγή, είναι ο λόγος που εκατομμύρια χιλιάδες χρήματα έχουν επενδυθεί από τις αεροπορικές εταιρίες για να ερευνηθούν και να βρεθούν οι βέλτιστες λύσεις τους. Ως αποτέλεσμα, διατίθεται ένας τεράστιος όγκος σχετικών πηγών στη βιβλιογραφία και, προφανώς, είναι αδύνατον να αναφερθούν όλες αυτές οι πηγές. Στη συγκεκριμένη ενότητα, λοιπόν, θα επισημανθούν άρθρα που μελετήθηκαν για την ανάπτυξη της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα, η παρούσα ενότητα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, τονίζεται η βιβλιογραφία που αφορά τόσο το προγραμματισμό πληρώματος, όσο και μερικά από τα υπόλοιπα σημαντικά προβλήματα που μία αεροπορική εταιρία πρέπει να αντιμετωπίσει. Θα επισημανθούν επιστήμονες, οι οποίοι με τα επιτεύγματα τους καθόρισαν την πορεία και την εξέλιξη της αεροπορικής βιομηχανικής. Στο δεύτερο μέρος, τονίζονται, με λεπτομέρεια, οι πιο συχνές μέθοδοι επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, καθώς αυτές χρησιμοποιούνται και στην παρούσα διπλωματική. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εισάγει τον αναγνώστη στις βασικές μεθοδολογίες που εφαρμόζονται.

2.1 Αναφορές σε Επιστήμονες

Οι αεροπορικές εταιρίες χρειαζόταν να αναπτύξουν και να εφαρμόσουν νέες τεχνολογίες που θα επιτρέπουν την ικανοποίηση των επιβατών και την ομαλή τους λειτουργία. Στην σύγχρονη εποχή, έχουν αναπτυχθεί αρκετά μοντέλα που δίνουν σημαντικές λύσεις. Ωστόσο, σε όλη αυτήν την πορεία της αεροπορικής βιομηχανίας και στην οδήγηση εύρεσης τέτοιων μαθηματικών μοντέλων, επηρέασαν σημαντικά οι αρχικές σκέψεις και προσεγγίσεις πολλών επιστημόνων περί του θέματος. Παρακάτω, λοιπόν, αναλύονται οι συνεισφορές ορισμένων εξ αυτών.

Σχετικά, με τον προγραμματισμό και την ανάθεση στόλου, ο Abara(1989) εισήγαγε ένα επιτυχημένο δίκτυο πτήσεων, λαμβάνοντας υπόψη τις δυνατές συνδέσεις μεταξύ αεροσκαφών και πτήσεων. Η συγκεκριμένη έρευνα κρίνεται καθοριστική και απαραίτητη για την ιστορία της βιομηχανικής έρευνας, καθώς συνεισφέρει ραγδαία σε μεταγενέστερες έρευνες. Οι Daskin και Panagiotopoulos (1989) με τη βοήθεια του δυαδικού προγραμματισμού, έδωσαν λύσεις για δίκτυα μονών κόμβων. Στο μοντέλο τους χρησιμοποιούνταν οι πολλαπλασιαστές Lagrangian για τη διασφάλιση εφικτών λύσεων.

Επιπλέον, σχετικά με το πρόβλημα ανάθεσης στόλου, με τη σειρά τους, οι Hane et al. (1995) ανέπτυξαν ένα μοντέλο για πάνω από 2000 πτήσεις με στόχο τη βέλτιστη κατανομή/ταίριασμα αεροσκαφών σε προγραμματισμένες πτήσεις. Οι Rushmeier και Kontogiorgis (1997), αλλά και οι Lohatepanont και Barnhart (2004), συνεχίζουν την έρευνα και προσεγγίζουν το πρόβλημα βρίσκοντας ευρετικές λύσεις. Οι Sherali και Zhu (2007) πρότειναν στοχαστικά προγράμματα για την πρόσληψη και κατανομή προσωπικού, καθώς έδωσαν έμφαση στην αβεβαιότητα της ζήτησης.

Οι Kabbani και Patty (1992) συνδυάζουν τη σχεδίαση δικτύων δρομολογίων με περιορισμούς συντήρησης και προτείνουν στρατηγικές για τη μείωση διαταραχών και την ελαχιστοποίηση της ανάγκης συντήρησης. Βασικός τους στόχος ήταν η βελτιστοποίηση δρομολογίων, το οποίο ερμηνεύεται και ως μείωση αποστάσεων μεταξύ των πτήσεων και λογική κατανομή των αεροσκαφών στις πτήσεις.

Σχετικά με τη μέθοδο column generation, οι Gamache et al. (1999) και Duck et al. (2011) χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη μέθοδο για τη βελτιστοποίηση του προγραμματισμού πληρώματος. Επιπλέον, η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε και από τους Wen et al (2022) για τη δρομολόγηση συντήρησης, αλλά και από τους Gabteni και Gronkvist (2009) για την ανάθεση αεροσκαφών στις προγραμματισμένες πτήσεις. Οι Desrochers et al. (1992) και οι Bramei και Simchi-Levi (2002) ανέδειξαν τα οφέλη του μοντέλου κάλυψης συνόλου για την επίλυση προβλημάτων δρομολόγησης, αλλά και ταυτόχρονα για την κάλυψη των περιορισμών.

Στον προγραμματισμό πληρώματος, οι Desrochers και Soumis (1989) υιοθέτησαν τη μέθοδο set-cover για την αποδοτικότερη χρήση της column generation, ενώ οι Smith και Wren (1988) ενσωμάτωσαν αποτελεσματικά τα κόστη για την αποφυγή υπερκάλυψης. Τέλος, οι Mesquita και Palas (2008) συνδύασαν τις προσεγγίσεις κάλυψης και κατανομής συνόλου και εκτός της αεροπορικής βιομηχανίας, σε άλλα προβλήματα δρομολόγησης οχημάτων και πληρωμάτων.

Όλοι οι παραπάνω επιστήμονες και πολλοί ακόμα έχουν συμβάλει καθοριστικά και αποτελεσματικά στην ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων και στην εύρεση βελτιστοποιημένων λύσεων. Οι ιδέες και οι προσεγγίσεις τους συνεχίζουν μέχρι και σήμερα να επηρεάζουν σημαντικά την εξέλιξη της αεροπορικής βιομηχανίας.

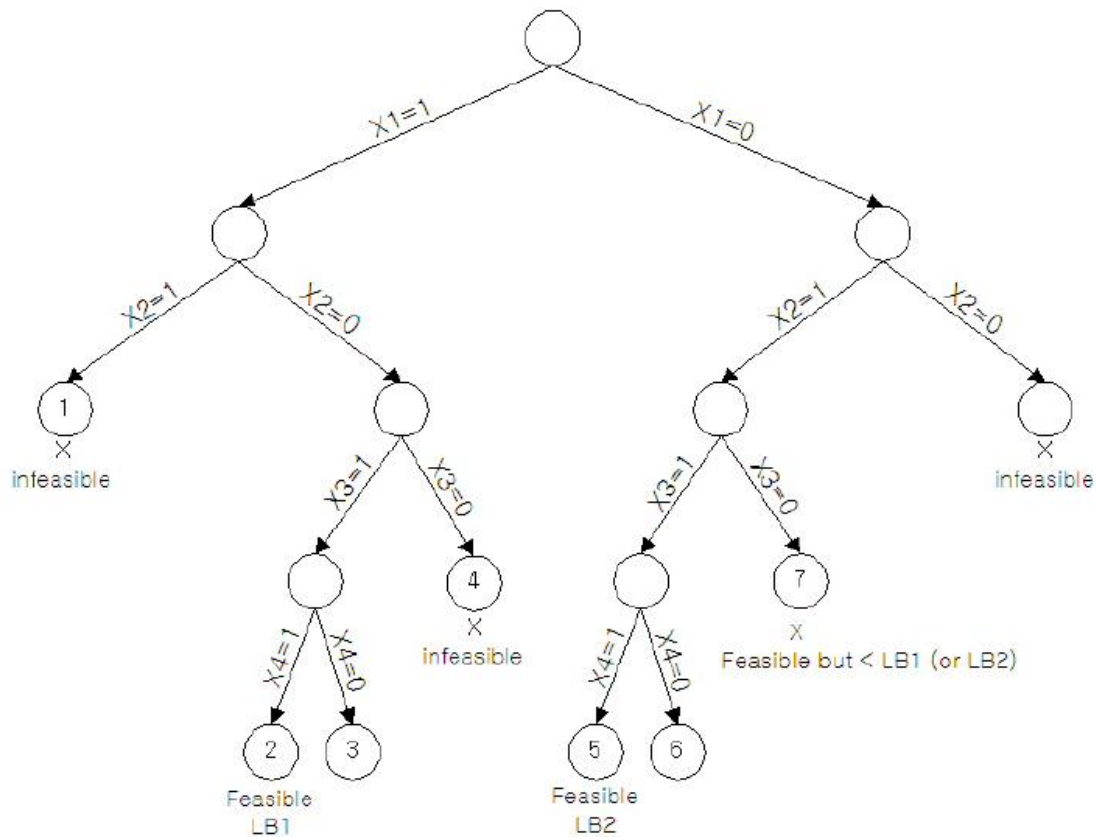
2.2 Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Η βελτιστοποίηση αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Τέτοια προβλήματα διαπιστώνονται σε μεταφορές, στην εφοδιαστική αλυσίδα, στον προγραμματισμό πληρώματος και σε άλλα. Με τον καιρό έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές για τον σκοπό αυτό, όπως οι μέθοδοι δυναμικού προγραμματισμού, στοχαστικών μοντέλων, ευρετικών και μετευρετικών αλγορίθμων, καθώς και πιο εξειδικευμένες και πολύπλοκες τεχνικές όπως είναι η linear programming, η integer programming και η constraint programming. Παράλληλα, οι προσεγγίσεις όπως οι Branch and bound, branch and price και η column generation έχουν κεντρικό ρόλο και έχουν αποδεχθεί ιδιαίτερα αποδοτικές. Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής, η προσοχή θα επικεντρωθεί μόνο σε αυτές τις μεθόδους και η ανάλυση τους είναι απαραίτητη για την πλήρη κατανόηση του αναγνώστη.

2.2.1 Branch and Bound

Η μέθοδος Branch and Bound είναι μία αποτελεσματική τεχνική για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Είναι ακόμη πιο αποτελεσματική σε προβλήματα που οι μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες τιμές. Συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή διαχωρίζεται σε δύο διαδικασίες, στη διαδικασία της διακλαδώσεως (branching) και στη διαδικασία της αποκοπής (bounding). Η αποτελεσματικότητα της επιτρέπει στις αεροπορικές εταιρίες να την χρησιμοποιήσουν ευρέως. Αναλυτικότερα, χρησιμοποιείται στα προβλήματα ανάθεσης στόλου, δρομολογιών, επιβατών αλλά και ανάθεσης πληρώματος. Είναι ένα ισχυρό εργαλείο και για αυτόν το λόγο κρίνεται απαραίτητο να αναλυθεί η λειτουργία της και τα βήματά της. Συνήθως χρησιμοποιείται σε προβλήματα που περιλαμβάνουν διακριτές αποφάσεις και αντικειμενικές συναρτήσεις που πρέπει να βελτιστοποιηθούν.

Ουσιαστικά για να λυθεί ένα πρόβλημα με τη μέθοδο Branch and Bound χρειάζεται να κατασκευαστούν ένα δέντρο και δύο πινακάκια. Το ένα πινακάκι θα ανανεώνει τις τιμές των μεταβλητών και το άλλο θα ανανεώνει τις τιμές του άνω ορίου και του κάτω ορίου. Το δέντρο χρειάζεται για την κατανόηση του προβλήματος και την εξακρίβωση αν μία λύση είναι εφικτή ή όχι. Παρακάτω, επισημαίνεται ένα σχήμα από μία διατριβή του Jay M. Rosenberger, ώστε να κατανοηθεί καλύτερα πώς φαίνεται ένα δέντρο της Branch and Bound.



Εικόνα 4: Παράδειγμα ενός δέντρου Branch and Bound (Πηγή[2])

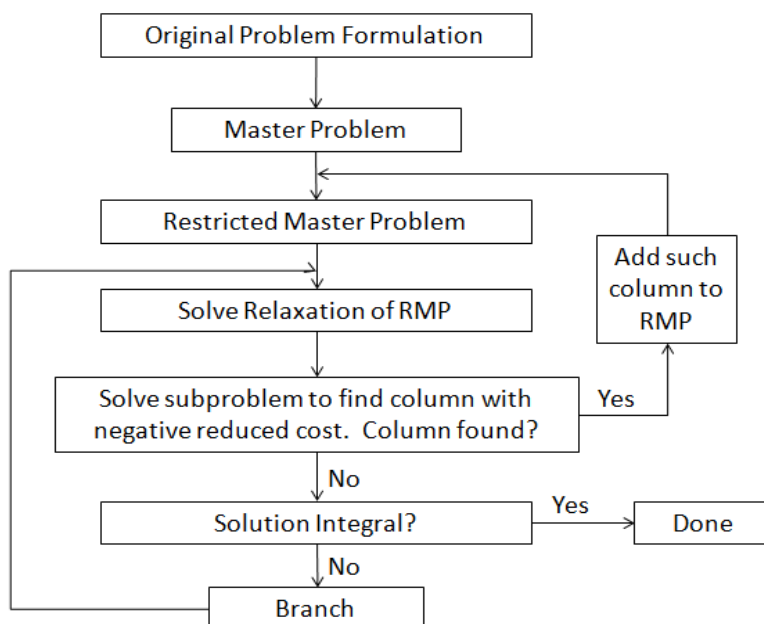
Αναλυτικότερα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα προγραμματισμού με μία αντικειμενική συνάρτηση και ορισμένους περιορισμούς ισότητας και ανισότητας. Πρώτο βήμα για να μπορεί να λυθεί ένα πρόβλημα με την μέθοδο Branch and Bound είναι να εφαρμόσουμε γραμμική χαλάρωση στο πρόβλημα. Γενικά η γραμμική χαλάρωση μας οδηγεί σε μία κατώτερη αντίσταση της εκτίμησης της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή γίνεται για να μετατραπούν τυχόν ακέραιες μεταβλητές σε συνεχείς. Η γραμμική χαλάρωση αφαιρεί την απαίτηση ακεραιότητας και επιτρέπει στις μεταβλητές να λάβουν οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Αφού, λοιπόν, έχει πραγματοποιηθεί η γραμμική χαλάρωση, το υπό-πρόβλημα είναι πλέον γραμμικό και μπορεί να λυθεί με οποιαδήποτε γραμμική αλγοριθμική προσέγγιση. Αφού λυθεί το γραμμικό πρόβλημα καταγράφουμε τη λύση. Αυτό απαιτεί να γράψουμε στο πινακάκι των μεταβλητών τις βέλτιστες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και των μεταβλητών που βρήκαμε για το συγκεκριμένο υπό-πρόβλημα, αλλά και την ανανέωση των άνω και κάτω ορίων. Ουσιαστικά, με τη λύση του συγκεκριμένου υπό-προβλήματος, λύθηκε στο δέντρο ο πρώτος κόμβος. Από αυτή τη λύση περιορίζουμε μία συνεχής μεταβλητή - η οποία έπρεπε να έχει ακέραια τιμή, αλλά δεν έχει λόγω της γραμμικής χαλάρωσης που εφαρμόστηκε στην αρχή - να λάβει τιμές κάτω και πάνω από τις δύο πιο κοντινές ακέραιες τιμές που βρίσκεται. Για παράδειγμα αν στον Κόμβο Α η λύση δίνει $x_1 = 2.5$, τότε απαιτούμε στον Κόμβο Β, $x_1 \leq 2$ και στον Κόμβο 3, $x_1 \geq 3$. Λύνουμε, στη συνέχεια, τα γραμμικά προβλήματα που δημιουργήθηκαν με τις μεθόδους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή, θα καταλήξουμε σε κάποιους κόμβους που δεν είναι εφικτοί, σε κάποιους άλλους που δε θα περιέχουν τις βέλτιστες λύσεις, και σε αυτούς που θα έχουν τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος, τότε, ολοκληρώνεται.

2.2.2 Branch and Price

Η μέθοδος Branch and Price είναι μία εξελιγμένη μέθοδος βελτιστοποίησης. Δεν διαφέρει κατά πολύ από τη μέθοδο Branch and Bound, καθώς έχει αναπτυχθεί βασισμένη σε αυτήν. Συνοπτικά, συνδυάζει την μέθοδο διακλαδώσεως, από τη μέθοδο Branch and Bound, με την διαδικασία της τιμολόγησης (pricing) για να φέρει καλύτερα αποτελέσματα και να μεγιστοποιήσει την απόδοση της.

Συγκεκριμένα, η Branch and Price διαιρεί τα αρχικά πρόβλημα σε υπό-πρόβλημα. Τα υπό-πρόβλημα, όπως είναι λογικό, περιέχουν τις λύσεις του αρχικού. Ωστόσο, επειδή είναι μικρότερα οδηγούν στην διαδικασία επίλυσης να είναι ευκολότερη. Ένα υπό-πρόβλημα μπορεί να μην περιέχει και καμία εφικτή λύση. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει την πιο εύκολη επίλυση του προβλήματος, όχι όμως την επιβεβαίωσή ότι αυτή η λύση είναι η βέλτιστη.

Για να κατανοήσουμε με μεγαλύτερη ευκολία τη μεθοδολογία, τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν για την επιτυχημένη αποπεράτωση της, διατυπώνονται στο παρακάτω σχήμα. Αρχικά, έχουμε το αρχικό πρόβλημα. Όπως και στην Branch and Bound εφαρμόζουμε γραμμική χαλάρωση για να το μετατρέψουμε σε πιο εφικτή μορφή. Διαιρούμε το κάθε υπό-πρόβλημα ξεχωριστά και το λύνουμε με τις μεθόδους γραμμικής επίλυσης. Για κάθε κόμβο εξετάζουμε αν μπορούμε να δημιουργήσουμε νέες στήλες (column generation), οι οποίες θα μας δίνουν καλύτερα αποτελέσματα. Αν υπάρχουν τέτοιες στήλες, τότε τις προσθέτουμε στον κόμβο και ξανά λύνουμε το τρέχον πρόβλημα. Αν δεν μπορούμε, τότε ελέγχουμε μήπως η λύση αυτή είναι η βέλτιστη. Αν είναι, τότε η διαδικασία ολοκληρώθηκε. Αν όχι, χρειάζεται να εφαρμόσουμε ξανά τη διαδικασία της διακλαδώσεως και να δημιουργήσουμε νέους κόμβους. Μόλις το κάνουμε, λύνουμε τα νέα υπό-πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται ώπου εντοπιστεί η βέλτιστη λύση ή να εξαντληθούν οι πιθανότητες εύρεσης νέων εφικτών λύσεων. Βασικός, λοιπόν, στόχος της μεθόδου είναι να συγκλίνουμε σε μία βέλτιστη λύση με την επαναληπτική διαδικασία, ώπου η λύση θα μας ικανοποιεί ή δε θα μπορεί να βελτιστοποιηθεί περαιτέρω.



Εικόνα 5: Τα βήματα της Branch & Price(Πηγή[5])

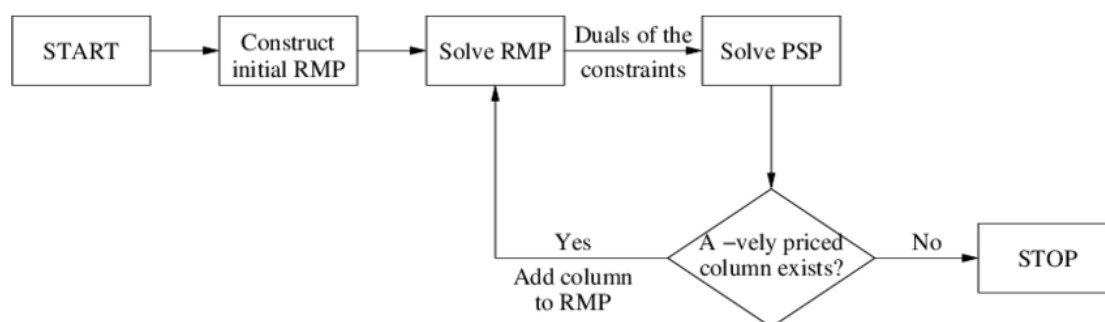
Στο κλάδο της αεροπορίας, η Branch and Price έχει χρησιμοποιηθεί και εξάγει επιτυχημένα αποτελέσματα, ιδιαίτερα στο πρόβλημα του προγραμματισμού πληρώματος. Επιπλέον, υπάρχουν και άλλες παραλλαγές της Branch and Price, όπως branch and cut ή η branch-cut and price. Όλες αυτές είναι μεθοδολογίες παρόμοιες. Σε πρόσφατη έρευνα ο Sadykov(2019) ασχολείται με την branch cut and price και προσπαθεί να συμβάλλει στην ανάπτυξη του όσο το δυνατόν γίνεται. Ουσιαστικά, η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει και την αποκοπή στηλών (cut), σε αντίθεση με την branch and price.

2.2.3 Παραγωγή Στηλών (column generation)

Η παραγωγή στηλών (column generation) είναι μία πολύ διαδεδομένη τεχνική επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιείται σε πολύπλοκα γραμμικά προβλήματα, που περιέχουν έναν μεγάλο αριθμό από μεταβλητές απόφασης.

Η παραγωγή στηλών αν και είναι απλή σαν μέθοδος, έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες. Είναι ιδιαίτερα σημαντική και έχουν γίνει πολλές αναλύσεις για την προσπάθεια ενίσχυσης της και δημιουργίας μία παραλλαγής, όπως για παράδειγμα παραλλαγή της αποτελεί η Dantzig-Wolfe, η οποία είναι και αυτή μέθοδος επίλυσης γραμμικών προβλημάτων. Ο Lubbecke(2011) συσχετίζει τη δημιουργία στηλών με τη χαλάρωση Langrangian και τους αλγόριθμους κοπτικού επιπέδου(cutting plane algorithms). Οι Desrosiers και Lubbecke(2005) περιγράφουν και εξετάζουν διάφορες συνεισφορές της δημιουργίας στηλών(column generation) με τη μέθοδο Dantzig-Wolfe. Η ενασχόληση των επιστημόνων με τη συγκεκριμένη μέθοδο συνεχίζεται ακόμη και σήμερα, καθώς έχει τη δυνατότητα να συνεισφέρει και να προσεγγίσει πολλά, σύνθετα προβλήματα.

Για την εφαρμογή της μεθόδου, ξεκινάμε έχοντας ένα υποσύνολο από τις πιθανές μεταβλητές απόφασης(στήλες). Το υποσύνολο μπορεί να έχει επιλεγεί με βάση κάποια κριτήρια, βασισμένο στην ιδιαιτερότητα του προβλήματος. Το υπό-πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί από τη χρήση μίας μεθόδου επίλυσης γραμμικού συστήματος, όπως είναι η μέθοδος Simplex. Αν οι επιλεγμένες στήλες δεν είναι αρκετές για να παραχθεί η βέλτιστη λύση, τότε προσθέτουμε νέες στήλες στο περιορισμένο πρόβλημα. Ουσιαστικά, παράγουμε (generate) νέες στήλες, συγκλίνοντας προς τη βέλτιστη λύση. Η διαδικασία είναι επαναληπτική και εφαρμόζεται μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Παρακάτω, επισυνάπτεται ένα σχήμα και δείχνει σχηματικά τα βήματα που εξηγήσαμε παραπάνω, τα βήματα της μεθόδου παραγωγής στηλών.



Εικόνα 6: Γραφική απεικόνιση των βημάτων της Column Generation (Πηγή[12])

Τα πλεονεκτήματα της column generation είναι ποικίλα, καθώς οδηγούν αποτελεσματικά και αποδοτικά στην επίλυση πολύπλοκων και μεγάλων γραμμικών προβλημάτων που περιέχουν μεγάλους αριθμούς μεταβλητών απόφασης. Χρησιμοποιείται, επίσης, ευρέως από τις αεροπορικές εταιρίες σε διάφορες εφαρμογές. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται για τη βελτιστοποίηση διαδικασιών δρομολόγησης πτήσεων, τη διαχείριση πόρων αλλά και στον προγραμματισμό πληρώματος, μειώνοντας το κόστος σε ικανοποιητικά επίπεδα με ταυτόχρονη βελτίωσή της απόδοσης. Εκτός από την αποδοτικότητα στον σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση δρομολογίων μεταφοράς εμπορευμάτων ή επιβατών, η column generation χρησιμοποιείται και σε πολλούς ακόμα κλάδους, όπως είναι οι παρακάτω:

- **Δρομολόγηση Οχημάτων:** Η μεθοδολογία που ακολουθείται για τη βελτιστοποίηση του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων δε διαφέρει κατά πολύ από αυτήν του προβλήματος δρομολόγησης πτήσεων. Η διαφορά, προφανώς, είναι στους περιορισμούς που πρέπει να προστεθούν στο κάθε πρόβλημα. Η δημιουργία στηλών (column generation) διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, με αποτέλεσμα να μειώνει το κόστος και το χρόνο παράδοσης που απαιτείται από τυχόν μεταφορικές εταιρίες. Η δημιουργία νέων στηλών συνεχίζεται για να βρεθεί η βέλτιστη δρομολόγηση. Συνεπώς, με τις κατάλληλες δρομολογήσεις οχημάτων, άρα και παραγγελιών, η μέθοδος συνεισφέρει και στην ευκολότερη διαχείριση αποθεμάτων αλλά και στην μέγιστη ικανοποίηση του πελάτη.
- **Διαχείριση Ενέργειας και Παραγωγής Ηλεκτρικής Ενέργειας:** Η column generation συνεισφέρει στο σχεδιασμό των δικτύων που διανέμουν την ενέργεια.
- **Σχεδιασμός δικτύων τηλεπικοινωνιών:** Η column generation βοηθάει στο να παρθεί μία βέλτιστη απόφαση για το σχεδιασμό του δικτύου των τηλεπικοινωνιών. Με την σωστή σύνδεση και τοποθέτηση του κάθε κόμβου, τα δεδομένα μεταδίδονται αποτελεσματικά και οι χρήστες ικανοποιούνται.

Αυτές ήταν μερικές από τις ποικίλες εφαρμογές της μεθόδου. Η μέθοδος, όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό, χρησιμοποιείται με μεγάλη αποτελεσματικότητα σε προβλήματα δρομολόγησης, τα οποία είτε αφορούν αεροπορικές πτήσεις, είτε δρομολόγια οχημάτων κτλ.

3. Μοντελοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η μοντελοποίηση του προβλήματος του προγραμματισμού πληρώματος. Η μοντελοποίηση αυτή αποτελεί κρίσιμο στάδιο για την κατανόηση της διαδικασίας, αλλά και για την εφαρμογή κατάλληλων τεχνικών για την βελτιστοποίηση της κατανομής των καθυκόντων και εν τέλει την ελαχιστοποίηση του κόστους μίας αεροπορικής εταιρίας.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση αυτού του προβλήματος είναι η Branch and Price, με την ιδιαιτερότητα ότι παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης, καθώς έχουμε επισημάνει αρκετές φορές τις δυνατότητες και τα επιτυχημένα αποτελέσματα του αλγόριθμου αυτού. Πρώτο βήμα της μεθόδου είναι η αρχικοποίηση του κυρίου προβλήματος. Με άλλα λόγια, η μετατροπή του κύριου προβλήματος (master problem) σε ένα περιορισμένο πρόβλημα του αρχικού (restricted master problem, RMP). Ένα υπο-πρόβλημα, συνήθως, περιέχει μερικές από τις εφικτές λύσεις του αρχικού προβλήματος. Το τρέχον υπο-πρόβλημα είναι πιο εύκολο ως προς τη λύση του και η δημιουργία του, καθώς μας επιτρέπει να εστιάσουμε σε ένα υποσύνολο των λύσεων του κύριου προβλήματος. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της μεθόδου column generation αναζητούνται νέες στήλες (μεταβλητές απόφασης), οι οποίες θα οδηγήσουν στη σύγκλιση της βέλτιστης λύσης. Όπως προαναφέρθηκε στην επεξήγηση της μεθόδου column generation αν οι στήλες δεν είναι αρκετές για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, τότε παράγουμε νέες. Οι νέες αυτές στήλες, στη συνέχεια, προστίθενται στο περιορισμένο κύριο πρόβλημα (restricted master problem). Η διαδικασία είναι επαναληπτική, ώπου η λύση να είναι η βέλτιστη. Σύμφωνα, με τον Κοζανίδη(2015), από τη στιγμή που είναι διαθέσιμα νέα προγράμματα εργασίας τα οποία προσφέρουν τη μείωση του συνολικού κόστους και μπορούν να προστεθούν στο κύριο πρόβλημα (master problem), η λύση ενημερώνεται σταδιακά και οδεύει προς τη βέλτιστη. Αν η λύση είναι ακέραια και βέλτιστη, τότε η διαδικασία ολοκληρώνεται. Στη γενική μορφή της μεθόδου Branch and Price, αν η λύση που προκύπτει από τη διαδικασία παραγωγής στηλών δεν μπορεί να ανανεωθεί περαιτέρω ή έχει δώσει ως αποτέλεσμα μία μη ακέραια λύση, τότε εφαρμόζεται η μέθοδος της διακλάδωσης (branching). Το συγκεκριμένο στάδιο, έχει ήδη προαναφερθεί ότι εφαρμόζεται με σκοπό να απομακρυνθούν σταδιακά οι μη ακέραιες λύσεις. Επιτρέπουμε, αρχικά, το πρόβλημα να δώσει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και μετά προσθέτοντας περαιτέρω περιορισμούς σε κάθε κόμβο της μεθόδου της διακλαδώσεως, απαιτούμε να μειωθεί η εφικτή περιοχή λύσεων, ώπου λάβουμε ακέραιες τιμές. Τα γραμμικά προβλήματα που πρέπει να λυθούν για κάθε κόμβο, λύνονται με την γραμμική μέθοδο επίλυσης column generation.

Ωστόσο, στη δική μας μελέτη, παραλείπουμε το τελευταίο βήμα. Επιλύουμε το πρόβλημα χαλάρωσης μέσω της διαδικασίας παραγωγής στηλών. Η επιλογή αυτή γίνεται για να μειωθεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα του σταδίου διακλαδώσεως, αλλά και για να επικεντρωθούμε στα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη γραμμική προσέγγιση.

3.1 Κύριο Πρόβλημα (Master Problem)

Το κύριο πρόβλημα της εργασίας αφορά τον προγραμματισμό πτήσεων και τη διαχείριση του πληρώματος μίας αεροπορικής εταιρίας. Στόχος είναι η κάλυψη όλων των προγραμματισμένων πτήσεων με ταυτόχρονη ικανοποίηση διαφόρων κανονισμών και περιορισμών.

Πριν διατυπωθεί, όμως, το πρόβλημα με μαθηματικά σύμβολα, πρέπει να επισημανθούν οι αντίστοιχες μεταβλητές που εξασφαλίζουν την ολοκληρωμένη διατύπωση του. Οι συμβολισμοί είναι οι εξής:

Σύνολα:

I : σύνολο ιπταμένων, με δείκτη i

R_i = σύνολο εναλλακτικών προγραμμάτων για τον ιπτάμενο i , με δείκτη j

F : σύνολο ταιριασμάτων προς κάλυψη, με δείκτη f .

Παράμετροι του προβλήματος:

c_{ij} : κόστος ποιότητας του προγράμματος j του ιπταμένου i , $i \in I$, $j \in R_i$

h : κόστος για κάθε ακάλυπτη μονάδα ταιριάσματος

b_f : συμπλήρωμα πληρώματος του ταιριάσματος f , $f \in F$

a_{ijf} : δυαδική παράμετρος που παίρνει την τιμή 1 αν το πρόγραμμα του ιπταμένου i καλύπτει το ταιρίασμα f , και 0 διαφορετικά, $i \in I$, $j \in R_i$, $f \in F$

Μεταβλητές απόφασης:

x_{ij} : δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν το πρόγραμμα j ανατεθεί στον ιπτάμενο i , και 0 διαφορετικά, $i \in I$, $j \in R_i$

y_f : ακέραια μεταβλητή απόφασης που δηλώνει τον αριθμό των μονάδων συμπληρώματος του ταιριάσματος f που παραμένει ακάλυπτο, $f \in F$.

Έχοντας σημειώσει τις παραπάνω μεταβλητές και παραμέτρους, το κύριο πρόβλημα (master problem) διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{f \in F} h y_f \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in R_i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$y_f + \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} a_{ijf} x_{ij} = b_f, \quad \forall f \in F \quad (3)$$

$$x_{ij} \text{ binary}, y_f \text{ integer} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in R_i, f \in F \quad (4)$$

Η (1) είναι η αντικειμενική συνάρτηση, η οποία στηρίζεται στο βασικό στόχο του προβλήματος, δηλαδή στην ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται, αποτελείται από δύο όρους, οι οποίοι προστίθενται. Ο πρώτος, αποτελείται από το κόστος ποιότητας, το οποίο πολλαπλασιάζεται με τη δυαδική μεταβλητή, x_{ij} . Σκοπός είναι, αν όντως αντιστοιχήθηκε το συγκεκριμένο πρόγραμμα με τον ιπτάμενο, το κόστος αυτό να προστεθεί στην αντικειμενική συνάρτηση, αλλιώς η δυαδική μεταβλητή θα πάρει την τιμή 0, άρα το συνολικό κόστος δε θα μεταβληθεί. Ο δεύτερος όρος, περιλαμβάνει το h , το οποίο είναι ένας μεγάλος σταθερός αριθμός και πολλαπλασιάζεται με το y_f . Ουσιαστικά, σε αυτόν τον όρο, καθιστούμε πολύ σημαντικό να ικανοποιηθούν όλα τα ταιριάσματα που έχουν δημιουργηθεί, καθώς θέλουμε να καλυφθούν όλες οι προγραμματισμένες διαδρομές. Έτσι, με σκοπό να διαχειριστούμε και να αποτρέψουμε μία τέτοια κατάσταση, προσθέτουμε έναν πολύ μεγάλο όρο, ο οποίος θα μεγαλώσει κατά πολύ το συνολικό κόστος αν κάτι τέτοιο συμβεί. Πέρα από την αντικειμενική συνάρτηση, όμως, υπάρχουν και οι περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούνται. Ο περιορισμός (2), εξασφαλίζει την ανάθεση ενός

μοναδικού προγράμματος διαδρομών σε έναν ιπτάμενο. Χωρίς αυτόν τον περιορισμό, το μοντέλο θα επέτρεπε την ανάθεση πολλών προγραμμάτων σε έναν πλήρωμα ή κανένα πρόγραμμα σε άλλα. Μία τέτοια κατάσταση θα οδηγούσε σε μία μη ισορροπημένη λειτουργία της εταιρίας, με μέρος του πληρώματος να αναλαμβάνει μεγαλύτερο φόρτο από αυτόν που επιτρέπεται και μπορεί να φέρει εις πέρας και σε άλλο μέρος του πληρώματος να μην έχει ανατεθεί καμία απολύτως εργασία. Ο περιορισμός (3), διασφαλίζει ότι κάθε ταίριασμα καλύπτεται, ενώ η μεταβλητή y_f και η αντίστοιχη ποινή h λειτουργούν ως μηχανισμοί αποτροπής της μη κάλυψης. Τέλος, οι περιορισμοί (4), περιορίζουν τις μεταβλητές απόφασης σε μη αρνητικές ακέραιες μεταβλητές. Όλοι οι παραπάνω περιορισμοί κρίνονται απαραίτητοι και εξασφαλίζουν την σωστή και αποδοτική λύση του προβλήματος του προγραμματισμού πληρώματος.

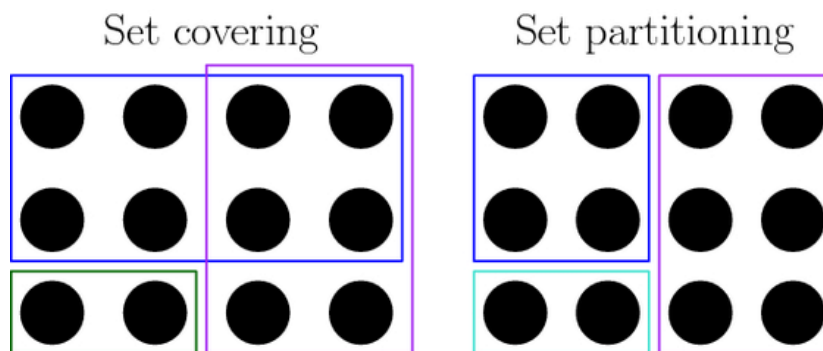
3.2 Set Partition και Set Cover

Το Master problem είναι διατυπωμένο ορθά και, από μαθηματικής άποψης, έχει τη δυνατότητα να ανακαλύψει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Ωστόσο, η διαδικασία επίλυσης μπορεί να αποδειχθεί προβληματική. Οι υπολογιστικές δυσκολίες είναι τόσο υψηλές που το πρόβλημα απαιτεί περαιτέρω ανάλυση. Προηγουμένως, αναφέρθηκε αρκετές φορές η μεθοδολογία η οποία πρέπει να ακολουθηθεί για την εύρεση της λύσης και ως πρώτο βήμα αναφέρθηκε η διαίρεση του κύριου προβλήματος σε υπο-προβλήματα. Σε αυτήν, λοιπόν, την ενότητα θα αναλυθούν δύο μοντέλα που εφαρμόζονται ευρέως ώστε να διαιρεθεί το πρόβλημα σε μικρότερα. Αυτά τα μοντέλα είναι τα Set Partition και Set Cover. Για την κατανόηση και την εφαρμογή των παραπάνω μεθοδολογιών είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στο πρόβλημα Set Partition. Η τελική απόφαση για το ποια από τις δύο θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται συνήθως από την προτεραιότητα που δίνεται στην ακρίβεια της κάλυψης των πτήσεων έναντι του συνολικού κόστους ή της διαθεσιμότητας των πληρώματος. Αναλόγως τις διαθεσιμότητες, την ευελιξία στην ανάθεση αεροσκαφών και άλλους πολλούς παράγοντες, κάθε αεροπορική εταιρία παίρνει τις δικές της αποφάσεις, θεωρώντας ότι με αυτόν τον τρόπο θα οδηγηθεί σε βέλτιστα αποτελέσματα.

Όπως, έχει προαναφερθεί, κάθε αεροσκάφος έχει τις δικές του απαιτήσεις και οι αεροπορικές εταιρίες οφείλουν να διαθέτουν ένα συγκεκριμένο αριθμό μελών πληρώματος και να τους αναθέτει στην κάθε προγραμματισμένη πτήση. Στο πρόβλημα Set-Partition απαιτείται κάθε ζευγάρι να καλύπτεται ακριβώς από τον απαιτούμενο αριθμό μελών πληρώματος. Δηλαδή, κάθε πτήση να μην περιέχει ούτε περισσότερους ούτε λιγότερους ιπταμένους από αυτούς που κρίνονται αναγκαίοι για τη κάλυψη της πτήσης. Στόχος είναι να βρεθεί το βέλτιστο σύνολο πληρώματος που θα εξασφαλίζει την πλήρη κάλυψη των πτήσεων με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Στο πρόβλημα του Set Cover, αντίθετα, επιτρέπεται η ανάθεση ενός ζεύγους πτήσης σε περισσότερα μέλη του πληρώματος από τον απαιτούμενο αριθμό. Ουσιαστικά, αυτό μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα να αντιστοιχηθούν πτήσεις με ακριβώς τον απαιτούμενο αριθμό μελών πληρώματος αλλά μπορεί και περισσότερα μέλη από τα αναγκαία να ανατεθούν στην ίδια πτήση. Στόχος σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος αλλά και η κάλυψη υπηρεσιών από περισσότερα μέλη από τα απαραίτητα.

Στο παρακάτω σχήμα, απεικονίζονται τα δύο μοντέλα, για να κατανοηθούν με μεγαλύτερη ευκολία. Ουσιαστικά, ως θεωρήσουμε ότι οι μαύροι κύκλοι συμβολίζουν προγραμματισμένες πτήσεις που πρέπει να καλυφθούν και κάθε παραλληλόγραμμα συμβολίζει ένα σύνολο πληρώματος. Για παράδειγμα, στο μοντέλο του set partitioning παρατηρείται ότι οι πτήσεις καλύπτονται από ακριβώς ένα σύνολο πληρώματος. Καλύπτονται όλες οι πτήσεις, αλλά χωρίς υπερκάλυψη μελών του πληρώματος. Αντίθετα, στο μοντέλο του set covering φαίνεται ότι τα παραλληλόγραμμα, δηλαδή τα μέλη πληρώματος, βρίσκονται πάνω από άλλες γραμμές άλλων παραλληλογράμμων. Συνεπώς, περισσότερα από ένα σύνολα πληρώματος ορίζονται σε κάθε πτήση. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, είναι δυνατόν να ανατεθεί και ακριβώς ένα σύνολο πληρώματος σε ένα πρόγραμμα πτήσεων με τη μέθοδο του Set Cover, έτσι και γίνεται και σε αυτό το παράδειγμα, καθώς στις δύο κάτω αριστερά πτήσεις (μαύρους κύκλους) έχει αντιστοιχηθεί ακριβώς ένα σύνολο.



Εικόνα 7: Απεικόνιση των μοντέλων Set Partitioning και Set covering (Πηγή[5])

Το set cover θεωρείται ένα πολύ αποτελεσματικό εργαλείο και ίσως αποτελεσματικότερο από αυτό του set partition, καθώς στην διαδικασία δημιουργίας νέων στηλών (column generation) παρέχει έναν πολύ καλό εκτιμητή βέλτιστης λύσης, ενισχύοντας τη διακλάδωση να λειτουργήσει ομαλά. Επιπλέον, λόγω το ότι στο set cover επιτρέπεται η υπερκάλυψη προγραμματισμένων πτήσεων δηλαδή η ανάθεση περισσότερων πόρων από όσους απαιτούνται, φτάνουμε πιο γρήγορα στη λύση από ότι στην set partition, η οποία είναι πιο απαιτητική και αργεί παραπάνω. Ωστόσο, από την άλλη, σε ορισμένες περιπτώσεις η εφαρμογή μίας τέτοιας τεχνικής είναι ιδιαίτερη δύσκολη. Ορισμένα προβλήματα, απαιτούν την ακριβή κάλυψη των απαιτήσεων τους γιατί μία αεροπορική εταιρία δεν διαθέτει την ευελιξία και την διαθεσιμότητα πληρώματος για να επιτύχει υπερκαλύψεις ή δεν υπάρχουν περιθώρια υπερκάλυψης εξαιτίας νομικών και κανονιστικών περιορισμών. Η επιλογή, λοιπόν, ανάμεσα στα δύο μοντέλα είναι πολύ περίπλοκη και αποτελεί μία πολύ δύσκολη απόφαση για τους ερευνητές. Οι δύο μέθοδοι έχουν τα πλεονεκτήματα όσο και τα μειονεκτήματα τους. Η απόφαση πρέπει να βασίζεται στα δεδομένα της κάθε εταιρίας και μετά από συγκεκριμένη ανάλυση των δεδομένων να παρθεί η βέλτιστη απόφαση.

3.3 Ισορροπία Χρόνου Πτήσεων

Από τη διατύπωσή του προβλήματος, εύκολα διαπιστώνεται η δυσκολία του να αντιστοιχηθεί κάθε προγραμματισμός διαδρομών με τα πληρώματα. Στην πραγματικότητα, η διαδικασία αυτή είναι πολύπλοκη και εξαρτάται από πολλούς, διαφορετικούς μεταξύ τους, παράγοντες. Για παράδειγμα, δε γίνεται να ανατεθούν σε ένα μέρος του πληρώματος παραπάνω από ένα προγράμματα διαδρομών και σε άλλο μέρος του πληρώματος κανένα. Μία τέτοια κατάσταση, θα οδηγούσε στην ανάθεση υπερβολικά μεγάλου φορτίου εργασίας σε κάποιους εργαζόμενους, ενώ άλλοι δεν θα αξιοποιούνταν καθόλου. Συνεπώς, κρίνεται απαραίτητο να προστεθούν μερικά όρια και περιορισμοί, ώστε να διασφαλιστεί μία ισορροπία. Συγκεκριμένα, για την ομαλή λειτουργία μίας εταιρίας απαιτείται από αυτήν να καθορίσει ισορροπία στο χρόνο πτήσης του πληρώματος.

Η ισορροπία του χρόνου πτήσης οδηγεί κάθε μέλος του πληρώματος, i , σε ένα επιθυμητό επιτρεπτό παράθυρο χρόνου πτήσης μεταξύ του κατώτερου ορίου (LB) και του ανώτερου ορίου (UB). Ουσιαστικά, ο εργαζόμενος επιτρέπεται να ανατεθεί διαδρομές που δεν υπερβαίνουν σε χρόνο τα όρια αυτά. Με την προσθήκη αυτών των ορίων, το μαθηματικό μοντέλο που θα αναπτυχθεί θα λαμβάνει υπόψιν του τις συγκεκριμένες τιμές και θα οδηγείται σε μία λύση βασισμένο σε αυτά. Έτσι, ένας εργαζόμενος, για παράδειγμα, δεν θα δουλεύει για περισσότερες ώρες από τις επιτρεπτές ή, αντίθετα, θα εξασφαλίζεται ότι θα εργάζεται έστω κάποιες ώρες της ημέρας. Αυτά τα όρια διαφέρουν για κάθε μέλος του πληρώματος, καθώς εξαρτώνται από πολλούς και διαφορετικούς παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί δεν είναι μόνο φυσικοί και λογικοί περιορισμοί, όπως για παράδειγμα να μην εργάζεται κάποιος παραπάνω ώρες από αυτές που επιτρέπει η κάθε κυβέρνηση, αλλά και από προσωπικούς. Προσωπικοί παράγοντες μπορεί να είναι η επαγγελματική κατάσταση των υπαλλήλων,

η διαθεσιμότητα, οι προ-αναθέσεις (προγραμματισμένα ρεπό, άδειες κτλ.) αλλά μπορεί ακόμη και κάθε υπάλληλος να έχει προσθέσει τα δικά του όρια και τους δικούς του περιορισμούς στο συμβόλαιο του.

Για να αναπτυχθεί ένα μαθηματικό μοντέλο που θα λαμβάνει υπόψιν του, τα παραπάνω όρια, προστίθενται ποινές σε περίπτωση παραβίασης τους. Στόχος των ποινών είναι να αποτρέψουν τις υπερβολικές αποκλίσεις από το επιθυμητό εύρος. Το μοντέλο, δεν υποχρεούται να δώσει λύση, στην οποία οι υπάλληλοι εργάζονται μέσα σε αυτά τα όρια. Ωστόσο, επιβαρύνεται με μία ποινή, άρα σκοπός είναι να μην παραβιάζονται τα όρια. Ουσιαστικά, επιβάλλεται μία ποινή για κάθε μονάδα απόκλισης του συνολικού χρόνου πτήσης του προγράμματος ενός μέλους του πληρώματος εκτός του καθορισμένου παραθύρου. Έτσι, αποτρέπεται η υπερφόρτωση μερικών και η υποαπασχόληση άλλων. Μαθηματικά ένα τέτοιο σενάριο, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\text{Ποινή} = \max(0, \text{Flight Time} - UB) + \max(0, LB - \text{Flight Time})$$

Όπου:

Flight Time: είναι ο συνολικός χρόνος πτήσης του προγράμματος του ιπταμένου.

UB: είναι το άνω όριο

LB: είναι το κάτω όριο

Η ισορροπία του χρόνου πτήσης επιτρέπει τη δημιουργία αποδοτικών και δίκαιων προγραμμάτων, ενισχύοντας την ικανοποίηση του πληρώματος. Ο συνολικός χρόνος πτήσης κατανέμεται δίκαια, τα μέλη του πληρώματος δεν υπερφορτώνονται, ούτε υποαπασχολούνται και βελτιώνεται η συνολική ποιότητα του προγράμματος πληρώματος.

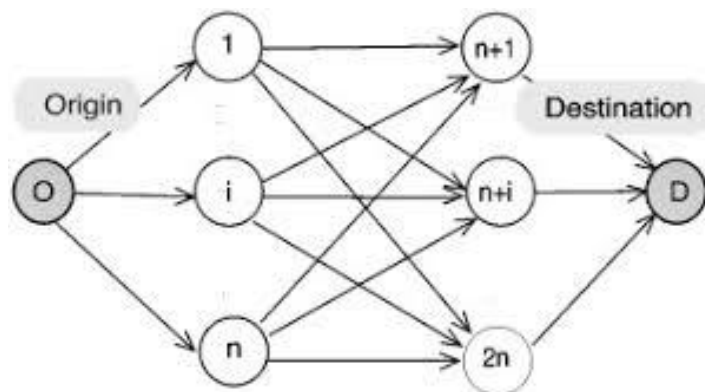
3.4 Υπο-Πρόβλημα Column Generation

Αφού έχει διαιρεθεί το Master problem σε υπο-προβλήματα βασισμένο σε διάφορα κριτήρια, τα υπο-προβλήματα πρέπει να λυθούν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της column generation. Το πρόβλημα της column generation λύνεται με τη βοήθεια ενός δικτύου που περιλαμβάνει κόμβους και τόξα, όπου κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε ένα πρόγραμμα πληρώματος. Το δίκτυο, συγκριμένα, περιλαμβάνει:

- *Κόμβοι*: Έναν κόμβο για κάθε μέλος του πληρώματος, έναν κόμβο για κάθε ταίριασμα, και έναν πλασματικό τελικό κόμβο που συμβολίζει το τέλος του προγράμματος
- *Τόξα*: Σύνδεσμοι μεταξύ κόμβων μελών πληρώματος διαδρομής ή και διαδρομής-διαδρομής

Το μοντέλο επιδιώκει να βρει το καλύτερο πρόγραμμα για κάθε μέλος του πληρώματος, ξεκινώντας από τον αρχικό, δηλαδή, από αυτόν του μέλους του πληρώματος. Στη συνέχεια, προσπαθεί να βρει τη βέλτιστη διαδρομή, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος. Τέλος, καταλήγει στον τελικό κόμβο. Παράλληλα, υπάρχουν και περιορισμοί, οι οποίοι πρέπει να ικανοποιούνται. Από το μοντέλο πρέπει να διασφαλίζεται ότι κάθε πρόγραμμα ανήκει σε μόνο ένα συγκεκριμένο σύνολο μελών του πληρώματος και να μην δημιουργείται υπερ-κάλυψη. Επίσης, πρέπει να εξασφαλίζεται ότι καλύπτονται όλες οι προγραμματισμένες διαδρομές. Παρακάτω, φαίνεται ένα παράδειγμα με σχήμα. Ουσιαστικά, ο origin κόμβος (κόμβος O) είναι το μέλος του πληρώματος και ακολουθώντας τις διαδρομές πρέπει να καταλήξει στον τελικό κόμβο, κόμβο destination (κόμβος D). Όλοι οι ενδιάμεσοι

κόμβοι εκφράζουν πιθανά προγράμματα και πτήσεις στα οποία μπορεί να ανατεθεί το μέλος του πληρώματος.



Εικόνα 8: Παράδειγμα δικτύου (Πηγή[4])

Τέτοιου είδους προβλήματα, συνήθως, λύνονται με τη χρήση του αλγορίθμου συντομότερης διαδρομής για μη κυκλικά δίκτυα. Η μεθοδολογία επιτρέπει την αποτελεσματική δημιουργία βέλτιστων διαδρομών για τα μέλη του πληρώματος, λαμβάνοντας υπόψιν και τους περιορισμούς που προαναφέρθηκαν, με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους και την κάλυψη όλων των αναγκαίων διαδρομών.

3.5 Τελικό Πρόβλημα

Το Master problem έχει, πλέον, διαιρεθεί σε υπο-προβλήματα και με τη χρήση της μεθόδου της column generation έχουν δοθεί οι αντίστοιχες στήλες. Ύστερα, λοιπόν, της LP φάσης, εφαρμόζουμε την μέθοδο που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, για να ερευνηθεί και να εντοπιστεί η πιο αποτελεσματική κάλυψη με όσο το δυνατόν χαμηλότερο κόστος. Ουσιαστικά, σε αυτό το βήμα παραλείπεται η διαδικασία διακλάδωσης, όπως γίνεται στην Branch and Price.

Στη φάση αυτή έχουμε στη διάθεση μας όλα τα σύνολα των προγραμματισμένων διαδρομών και όλα τα σύνολα του πληρώματος. Στόχος είναι να αντιστοιχηθούν κατάλληλα μεταξύ τους ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μη κάλυψης αλλά και το κόστος ταιριάσματος. Οι εναλλακτικές και οι αντιστοιχίσεις που μπορούν να γίνουν είναι πολλές. Το μοντέλο που θα δημιουργηθεί καλείται να βρει την βέλτιστη λύση μεταξύ όλων, αλλά και να αποφασίσει πιο ζευγάρι, που ήδη υπάρχει, είναι προτιμότερο να αφαιρεθεί, ώστε να βρεθεί ένα καλύτερο. Στη φάση αυτή, αν η λύση είναι ακέραια, τότε η διαδικασία ολοκληρώνεται και η βέλτιστη λύση έχει βρεθεί. Εάν, όμως, η λύση δεν είναι ακέραια, η γενική μεθοδολογία θα προέβλεπε την εφαρμογή της διαδικασίας διακλάδωσης (Branching), με στόχο να επιτευχθεί μία ακέραια λύση, η οποία να πληροί τις συνθήκες του προβλήματος. Ωστόσο, στη μεθοδολογία της εργασίας, το κύριο πρόβλημα χρησιμοποιείται για να προσπαθήσει να βρει μία λύση μέγιστης κάλυψης με κατανομή σε σύνολα, χωρίς να χρειαστεί να περάσει από τα χρονοβόρα βήματα της φάσης της διακλάδωσης.

Σε αυτό το σημείο της μεθοδολογίας, το πρόβλημα τροποποιείται και καλούμαστε να λύσουμε ένα πρόβλημα με άλλους περιορισμούς. Όπως και προηγουμένως, πριν διατυπώσουμε μαθηματικά το μοντέλο, είναι σημαντικό να αναφερθούν οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση του. Διατηρώντας τις παλιές μεταβλητές ίδιες, προστίθενται και καινούργιες για να μπορεί

να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα. Παρακάτω, λοιπόν, αναφέρονται , λεπτομερώς, οι καινούργιες μεταβλητές που κρίνονται αναγκαίες για τη ολοκληρωμένη διατύπωση του προβλήματος.

Καινούργιοι παράμετροι του προβλήματος:

t_f : Χρόνος πτήσης του ταιριάσματος f , όπου $f \in F$

C_b : Συντελεστής ποινής για κάθε μονάδα απόκλισης χρόνου πτήσης από το εύρος χρόνου του κάθε ενός μέλους του πληρώματος

LB_i : Κατώτατο όριο του εύρους ισορροπίας χρόνου πτήσης του υπαμένου i , όπου $i \in I$

UB_i : Ανώτατο όριο του εύρους ισορροπίας χρόνου πτήσης του υπαμένου i , όπου $i \in I$

PFT_i : Συνολικός χρόνος πτήσης που ανατέθηκε στον υπάμενο i μετά την κάλυψη των συνόλων προγραμματισμένων διαδρομών, όπου $i \in I$

Καινούργιες μεταβλητές απόφασης:

FFT_i : Συνολικός πτητικός χρόνος του κάθε μέλος του πληρώματος i μετά την τελική λύση. Αφού δηλαδή έχουν αφαιρεθεί τυχόν ίδιες διαδρομές που έχουν αντιστοιχηθεί σε άλλο μέλος του πληρώματος, όπου $i \in I$

dev_i : Απόκλιση χρόνου πτήσης του μέλους του πληρώματος i από το αντίστοιχο εύρος ισορροπίας του, όπου $i \in I$

Z_{ijf} : δυαδική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν το ταίριασμα f αφαιρεθεί από το δρομολόγιο j του μέλους του πληρώματος i , και 0 διαφορετικά, όπου $i \in I, j \in R_i$ και $f \in F$

Έχοντας, λοιπόν, προσθέσει, εκτός από τις μεταβλητές και παραμέτρους που είχαμε στο Master problem και τις παραπάνω, μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα ως εξής:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I} C_b dev_i + \sum_{f \in F} h y_f \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in R_i} x_{ij} = 1, \forall i \in I \quad (6)$$

$$FFT_i = \sum_{j \in R_i} PFT_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} a_{ijf=1} t_f Z_{ijf}, \forall i \in I \quad (7)$$

$$y_f + \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} a_{ijf} x_{ij} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} Z_{ijf} = b_f, \forall f \in F \quad (8)$$

$$dev_i \geq FFT_i - UB_i, \forall i \in I \quad (9)$$

$$dev_i \geq LB_i - FFT_i, \forall i \in I \quad (10)$$

$$Z_{ijf} \leq x_{ij}, \forall i \in I, j \in R_i: a_{ijf}=1 \quad (11)$$

$$FFT_i \geq 0, \forall i \in I \quad (12)$$

$$dev_i: integer, y_f: integer, x_{ij}: binary, Z_{ijf}: binary, \forall i \in I, j \in R_i, f \in F \quad (13)$$

Η συνάρτηση (5) είναι η αντικειμενική. Στόχος της είναι να ελαχιστοποιηθεί το κόστος από τις ποινές από το εύρος ωρών των μελών του πληρώματος και το κόστος ακάλυπτων προγραμματισμένων διαδρομών. Αποτελείται από δύο όρους, οι οποίοι εκφράζουν, ακριβώς, το παραπάνω. Ο όρος C_b είναι ένας πολύ σταθερός αριθμός που εκφράζει την ποινή και πολλαπλασιάζεται με το dev_i , όπου είναι οι μονάδες που απόκλισης από το παράθυρο ισορροπίας ωρών. Αυτός ο όρος προστίθεται με το όρο $\sum_{f \in F} hy_f$, το οποίο όπως και στο Master problem εκφράζει το κόστος των ακάλυπτων καθηκόντων. Ο περιορισμός (6) είναι ο ίδιος με το master problem και εξασφαλίζει ότι μόνο ένα πρόγραμμα θα ανατεθεί σε κάθε μέλος του πληρώματος. Ο περιορισμός (7) υπολογίζει τον τελικό χρόνο πτήσης του μέλους του πληρώματος i , αφού πρώτα του ανατεθούν συγκριμένα προγράμματα διαδρομών και αφού πρώτα έχουν αφαιρεθεί τυχόν επαναλαμβανόμενα ζευγάρια που ικανοποιούνται και από άλλα μέλη του πληρώματος. Ο περιορισμός (8) εξασφαλίζει η ακέραια μεταβλητή απόφασης f θα πάρει τιμές με βάση το συνολικό αριθμό ακάλυπτων διαδρομών. Οι περιορισμοί (9) και (10) είναι παρόμοιοι, απλά, ο ένας (9) καθορίζεται για το άνω όριο του εύρους ωρών πτήσεων για το κάθε μέλος του πληρώματος, ενώ ο άλλος (10) προστίθεται για το κάτω όριο. Ουσιαστικά, βοηθούν την dev_i να πάρει τη σωστή τιμή, υπολογίζοντας πόσες ακριβώς μονάδες απόκλισης δημιουργούνται, ώστε στη συνέχεια να οριστεί και η αντίστοιχη ποινή. Ο περιορισμός (11) εξασφαλίζει ότι κάθε ζεύγος δε μπορεί να αφαιρεθεί από ένα μη επιλεγμένο πρόγραμμα πτήσεων αλλά και ότι όταν ένα ζεύγος αφαιρείται από ένα πρόγραμμα τότε το πρόγραμμα αυτό πρέπει να είναι αντιστοιχημένο στο συγκεκριμένο μέλος του πληρώματος. Ο περιορισμός (12) επιβάλλει να μην παίρνει μη αρνητικές τιμές το FFT_i , καθώς, όπως προαναφέρθηκε, εκφράζει χρόνο πτήσης και οι περιορισμοί (13) είναι περιορισμοί ακεραιότητας.

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σημαντικό να επισημάνουμε ότι εκτός από το βασικό στόχο, που έχει ήδη αναφερθεί αρκετές φορές, δηλαδή την ελαχιστοποίηση των κοστών, είναι σημαντικό και το υπολογιστικό κόστος. Ουσιαστικά, οι αεροπορικές εταιρίες καλούνται να χρησιμοποιήσουν ένα μοντέλο που θα ελαχιστοποιεί τόσο το κόστος, όσο και το χρόνο που απαιτείται για να δοθεί η λύση. Γι' αυτόν το λόγο, για τη βέλτιστη υπολογιστική απόδοση, αφαιρούνται οι κυριαρχούμενες λίστες (rosters) πριν την εφαρμογή του μοντέλου. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο rosters A και B που περιλαμβάνονται στο κύριο πρόβλημα. Το roster A κυριαρχείται από το roster B αν και τα δύο rosters αφορούν το ίδιο μέλος του πληρώματος και, επιπλέον, το roster B περιλαμβάνει όλα τα καθήκοντα που περιλαμβάνονται στο roster A. Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα, η αφαίρεση του roster A από το κύριο πρόβλημα δεν έχει καμία απολύτως συνέπεια στη βέλτιστη λύση που θα προκύψει μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας, καθώς αυτό το roster μπορεί να προκύψει μέσω κατάλληλης διαγραφής ταιριάσματος (pairing) από το roster B. Το ίδιο, προφανώς, ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο roster που μπορεί να προκύψει αφαιρώντας ταιριάσματα από το roster A. Συνεπώς, η αφαίρεση των κυριαρχούμενων λιστών δεν έχει καμία απολύτως επίπτωση στην αντικειμενική συνάρτηση, ωστόσο μειώνει την υπολογιστική προσπάθεια και τον υπολογιστικό χρόνο.

4. Μεθοδολογία Επίλυσης

Στόχος της παρούσα διπλωματικής είναι να επιλυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο Branch and Price, παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης. Επόμενο βήμα είναι να συγκριθούν τα αποτελέσματα με αυτά που μας δίνει η μέθοδος Branch and Price, δηλαδή αν δεν παραλειφθεί το στάδιο διακλάδωσης. Πριν όμως μελετηθεί ένα πρόβλημα με πολλές μεταβλητές και γίνει η παραπάνω σύγκριση, κρίνεται σημαντικό να λυθεί πρώτα ένα μικρό πρόβλημα, με σκοπό να κατανοηθούν ευκολότερα οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται αλλά και τα αποτελέσματα.

Σε αυτήν την ενότητα, λοιπόν, θα μελετηθεί ένα πρόβλημα στο οποίο ορίζονται μονάχα δύο μέλη πληρώματος και τρία προγράμματα που το καθένα περιέχει ένα σύνολο διαδρομών. Προφανώς, τα τρία αυτά προγράμματα πρέπει να κατανεμηθούν με βέλτιστο τρόπο στα μέλη του πληρώματος, ικανοποιώντας τους περιορισμούς και ελαχιστοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση.

Αρχικά, πριν αναλύσουμε τα αποτελέσματα που μας έδωσε η μέθοδος, παρουσιάζεται αναλυτικά η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Τα παρακάτω, έχουν δοθεί από το μοντέλο που δημιουργήθηκε και ορίζουν, με μαθηματικά σύμβολα, την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος.

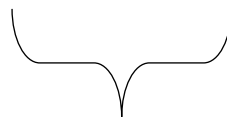
Minimize

obj1:

$$1000000 x_1 + 1000000 x_2 + 1000000 x_3 + 1000 x_{18} + 1000 x_{19}$$



$$\sum_{f \in F} h y_f$$



$$\sum_{i \in I} C_b dev_i$$

Subject To

CrewMember0:

$$x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 1$$

CrewMember1:

$$x_5 + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 1$$

$$\sum_{j \in R_i} x_{ij} = 1$$

Route0:

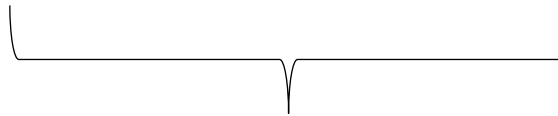
$$x_1 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} - x_{22} - x_{24} - x_{26} - x_{29} - x_{33} - x_{35} - x_{37} - x_{40} = 1$$

Route1:

$$x_2 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{17} - x_{23} - x_{25} - x_{27} - x_{31} - x_{34} - x_{36} - x_{38} - x_{42} = 1$$

Route2:

$$x_3 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{15} + x_{16} + x_{17} - x_{28} - x_{30} - x_{32} - x_{39} - x_{41} - x_{43} = 1$$



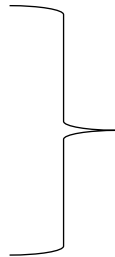
$$y_f + \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} a_{ijf} x_{ij} - \sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} Z_{ijf} = b_f$$

UB_0:

$$x_{18} - x_{20} \geq -1$$

UB_1:

$$x_{19} - x_{21} \geq -30$$



$$dev_i \geq FFT_i - UB_i ,$$

LB_0:

$$x_{18} + x_{20} \geq -5$$

LB_1:

$$x_{19} + x_{21} \geq 24$$



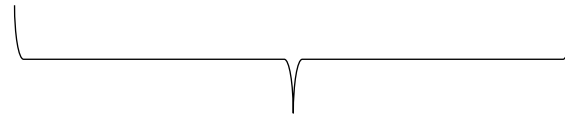
$$dev_i \geq LB_i - FFT_i ,$$

Fft_Constr#0:

$$- 25 x_6 - 21 x_7 - 46 x_8 - 51 x_9 - 30 x_{10} - 26 x_{11} + x_{20} + 25 x_{22} + 21 x_{23} + 25 x_{24} + 21 x_{25} + 25 x_{26} + 21 x_{27} + 5 x_{28} + 25 x_{29} + 5 x_{30} + 21 x_{31} + 5 x_{32} = 0$$

Fft_Constr#1:

$$- 25 x_{12} - 21 x_{13} - 46 x_{14} - 51 x_{15} - 30 x_{16} - 26 x_{17} + x_{21} + 25 x_{33} + 21 x_{34} + 25 x_{35} + 21 x_{36} + 25 x_{37} + 21 x_{38} + 5 x_{39} + 25 x_{40} + 5 x_{41} + 21 x_{42} + 5 x_{43} = 0$$



$$FFT_i = \sum_{j \in R_i} PFT_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} a_{ijf=1} t_f Z_{ijf}$$

- ZX_5#11: - x₆ + x₂₂ <= 0
- ZX_6#12: - x₇ + x₂₃ <= 0
- ZX_7#13: - x₈ + x₂₄ <= 0
- ZX_7#14: - x₈ + x₂₅ <= 0
- ZX_8#15: - x₉ + x₂₆ <= 0
- ZX_8#16: - x₉ + x₂₇ <= 0
- ZX_8#17: - x₉ + x₂₈ <= 0
- ZX_9#18: - x₁₀ + x₂₉ <= 0
- ZX_9#19: - x₁₀ + x₃₀ <= 0
- ZX_10#20: - x₁₁ + x₃₁ <= 0
- ZX_10#21: - x₁₁ + x₃₂ <= 0
- ZX_11#22: - x₁₂ + x₃₃ <= 0
- ZX_12#23: - x₁₃ + x₃₄ <= 0
- ZX_13#24: - x₁₄ + x₃₅ <= 0
- ZX_13#25: - x₁₄ + x₃₆ <= 0
- ZX_14#26: - x₁₅ + x₃₇ <= 0
- ZX_14#27: - x₁₅ + x₃₈ <= 0
- ZX_14#28: - x₁₅ + x₃₉ <= 0
- ZX_15#29: - x₁₆ + x₄₀ <= 0
- ZX_15#30: - x₁₆ + x₄₁ <= 0
- ZX_16#31: - x₁₇ + x₄₂ <= 0
- ZX_16#32: - x₁₇ + x₄₃ <= 0



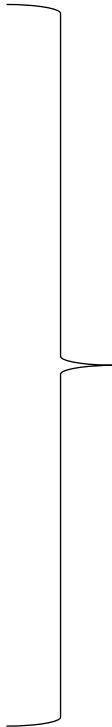
$$Z_{ijf} \leq x_{ij}$$

Bounds

```

x1 >= 0
x2 >= 0
x3 >= 0
x4 >= 0
x5 >= 0
x6 >= 0
x7 >= 0
x8 >= 0
x9 >= 0
x10 >= 0
x11 >= 0
x12 >= 0
x13 >= 0
x14 >= 0
x15 >= 0
x16 >= 0
x17 >= 0
x18 >= 0
x19 >= 0
x20 >= 0
x21 >= 0
0 <= x22 <= 1
0 <= x23 <= 1
0 <= x24 <= 1
0 <= x25 <= 1
0 <= x26 <= 1
0 <= x27 <= 1
0 <= x28 <= 1
0 <= x29 <= 1
0 <= x30 <= 1
0 <= x31 <= 1
0 <= x32 <= 1
0 <= x33 <= 1
0 <= x34 <= 1
0 <= x35 <= 1
0 <= x36 <= 1
0 <= x37 <= 1
0 <= x38 <= 1
0 <= x39 <= 1
0 <= x40 <= 1
0 <= x41 <= 1
0 <= x42 <= 1
0 <= x43 <= 1

```



$FFT_i \geq 0$
 $dev_i: integer$
 $y_f: integer$
 $x_{ij}: binary$
 $Z_{ijf}: binary$

Generals

```

x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x16 x17
x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x28 x29 x30 x31 x32
x33 x34 x35 x36 x37 x38 x39 x40 x41 x42 x43

```

End

Αρχικά, όπως έχει προαναφερθεί στο Master Problem ορίζεται μία μεταβλητή για κάθε έναν προγραμματισμένο σύνολο πτήσεων, η οποία προστίθεται στην αντικειμενική συνάρτηση και πολλαπλασιάζεται με έναν πολύ μεγάλο σταθερό αριθμό. Ο όρος αυτός είναι ο $\sum_{f \in F} h y_f$, ο οποίος εκφράζει το κόστος των ακάλυπτων καθηκόντων. Συνεπώς, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου $N=2$ και $R=3$, εφόσον έχουμε τρία προγραμματισμένα σύνολα πτήσεων, θα πρέπει το πρόβλημα να δημιουργήσει τρεις μεταβλητές που θα δηλώνουν τα μη καλυπτόμενα προγράμματα. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ξανά, ότι αυτοί οι όροι είναι σημαντικό να έχουν τιμές ίσες με μηδέν, ώστε να καλυφθούν όλες οι πτήσεις. Αυτός είναι και ο λόγος που έχουν πολλαπλασιαστεί με έναν πολύ μεγάλο αριθμό, συγκεκριμένα με τον αριθμό $h = 1000000$ (όπως φαίνεται και παραπάνω), με στόχο το πρόγραμμα που δημιουργήθηκε να αποτρέψει μία τέτοια δυσμενής κατάσταση. Παρακάτω δίνονται τα αποτελέσματα που μας έδωσε το πρόγραμμα για τις ακάλυπτες προγραμματισμένες πτήσεις.

Uncovered

$x[0] = 0.0$	//	$x[1] = 0.0$	//	$x[2] = 0.0$
--------------------------------	-----------	--------------------------------	-----------	--------------------------------

Πράγματι, λοιπόν, σε αυτό το μικρό πρόβλημα, η μέθοδος κατάφερε να μηδενίσει τις ακάλυπτες πτήσεις. Άρα, από αυτόν τον όρο στην αντικειμενική συνάρτηση δεν έχει προστεθεί κανένα κόστος. Ύστερα, το πρόβλημα μας δίνει τις τιμές των rosters. Ουσιαστικά, κάθε roster αντιπροσωπεύει ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα εργασίας για το προσωπικό, το οποίο περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα routes. Στόχος είναι να ανατεθούν τα rosters στα μέλη του πληρώματος με τρόπο που να βελτιστοποιείται το συνολικό κόστος. Οι μεταβλητές που αναφέρονται ως rosters στη συγκεκριμένη περίπτωση ορίζονται με μαθηματικά σύμβολα από το $x[3]$ έως το $x[16]$. Οι μεταβλητές αυτές δείχνουν ποια σύνολα πτήσεων και δρομολογίων θα καλυφθούν. Συνεπώς, έχει οριστεί στο πρόβλημα να είναι μεταβλητές που παίρνουν δυαδικές τιμές. Συγκεκριμένα, παίρνουν την τιμή 1.0 , στην περίπτωση που το συγκεκριμένο roster καλυφθεί και αντίθετα παίρνουν την τιμή 0.0 .

Παρακάτω απεικονίζονται τα αποτελέσματα που έχουν πραχθεί από τη λύση της μεθοδολογίας.

Rosters

$x[3] = 0.0$	//	$x[4] = 0.0$	//	$x[5] = 0.0$
$x[6] = 0.0$	//	$x[7] = 0.0$	//	$x[8] = 1.0$
$x[9] = 0.0$	//	$x[10] = 0.0$	//	$x[11] = 0.0$
$x[12] = 0.0$	//	$x[13] = 0.0$	//	$x[14] = 1.0$
$x[15] = 0.0$	//	$x[16] = 0.0$		

Εύκολα παρατηρείται από τα παραπάνω αποτελέσματα ότι οι μεταβλητές που εμφανίζουν τιμή 1.0 είναι η $x[8]$ και η $x[14]$. Αυτό σημαίνει ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η μέθοδος έχει επιλέξει αυτά τα δύο rosters, μόνο, να καλυφθούν. Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παίρνουν την τιμή 0.0 . Ο λόγος που το σύστημα όρισε ότι αυτά τα δύο rosters πρέπει να καλυφθούν, είναι επειδή έκρινε ότι είναι οι πιο αποδοτικές επιλογές. Παρακάτω θα δούμε ότι συμμορφώνονται και με τους περιορισμούς. Άρα,

ο λόγος που ορίζει αυτές τις μεταβλητές να μην μηδενιστούν είναι επειδή καλύπτουν τις απαιτήσεις του προβλήματος, ελαχιστοποιώντας το κόστος όσο είναι δυνατόν.

Επόμενο αποτέλεσμα που μας δίνει η λύση του προβλήματος είναι οι τιμές των dev_i και των FFT_i . Να θυμίσουμε ότι οι συγκεκριμένες μεταβλητές ορίζουν την απόκλιση του χρόνου πτήσης του μέλους του πληρώματος i από το αντίστοιχο εύρος ισορροπίας του και τον συνολικό χρόνο διαδρομών του κάθε μέλους του πληρώματος i μετά την τελική λύση, αντίστοιχα. Οι τελικές τιμές που μας δίνει το πρόβλημα είναι οι εξής:

Dev_i

$x[17] = 20.0$ $//$ $x[18] = 0.0$

FFT_i

$x[19] = 21.0$ $//$ $x[20] = 30.0$

Τέλος, η λύση του προβλήματος μας δίνει και τις τιμές των Z_{ijf} , οι οποίες μεταβλητές είναι δυαδικές μεταβλητές που παίρνουν την τιμή 1 αν το ζεύγος f αφαιρεθεί από το δρομολόγιο j του μέλους του πληρώματος i , και 0 διαφορετικά, όπου $i \in I, j \in Ri$ και $f \in F$. Παρακάτω επισυνάπτονται και οι τιμές που μας δίνει το πρόβλημα, για αυτές τις μεταβλητές.

Z_{ijf}

$x[21] = 0.0$	$//$	$x[22] = 0.0$	$//$	$x[23] = 0.0$
$x[24] = 0.0$	$//$	$x[25] = 1.0$	$//$	$x[26] = 0.0$
$x[27] = 1.0$	$//$	$x[28] = 0.0$	$//$	$x[29] = 0.0$
$x[30] = 0.0$	$//$	$x[31] = 0.0$	$//$	$x[32] = 0.0$
$x[33] = 0.0$	$//$	$x[34] = 0.0$	$//$	$x[35] = 0.0$
$x[36] = 0.0$	$//$	$x[37] = 1.0$	$//$	$x[38] = 0.0$
$x[39] = 0.0$	$//$	$x[40] = 0.0$	$//$	$x[41] = 0.0$
$x[42] = 0.0$				

Η τιμή 1.0 για τις μεταβλητές $x[25]$, $x[26]$, $x[32]$ και $x[41]$ υποδεικνύει ότι τα συγκεκριμένα ζεύγη πτήσεων αφαιρούνται από τα rosters των μελών του πληρώματος. Το πρόβλημα όρισε να αφαιρεθούν,

καθώς έτσι εξασφαλίζει ότι η λύση πληροί όλους τους περιορισμούς του μοντέλου, διατηρώντας τη λύση πιο αποτελεσματική, χωρίς να υπάρχουν περιττές πτήσεις ή ζεύγη πτήσεων που δεν συμβάλλουν στην κάλυψη των απαιτήσεων ή επιβαρύνουν το σύστημα.

Ικανοποίηση Περιορισμών

Στην επόμενη ανάλυση, θα εξετάσουμε πώς οι λύσεις, οι οποίες επισημάνθηκαν προηγουμένως, ικανοποιούν τους περιορισμούς του μοντέλου. Κάθε περιορισμός στο μοντέλο εξασφαλίζει ότι οι αποφάσεις κατά την ανάθεση του πληρώματος στις προγραμματισμένες πτήσεις πληρούν τις απαιτήσεις του προβλήματος. Στόχος μας είναι να επαληθεύσουμε πως η επιλεγμένη λύση καλύπτει όλους αυτούς του περιορισμούς και εξασφαλίζει τη βέλτιστη κατανομή των πόρων, ελαχιστοποιώντας ταυτόχρονα το συνολικό κόστος και βελτιώνοντας την ποιότητα της λύσης. Στην ανάλυση, λοιπόν, που ακολουθεί θα εξηγηθεί αναλυτικά η ικανοποίηση κάθε περιορισμού.

Αρχικά, πρώτος περιορισμός του προβλήματος, όπως φαίνεται και στην ενότητα της μοντελοποίησης, διασφαλίζει ότι κάθε μέλος του πληρώματος θα ανατεθεί ακριβώς σε ένα roster. Συγκεκριμένα, ο περιορισμός είναι ο παρακάτω:

$$\sum_{j \in R_i} x_{ij} = 1, \forall i \in I$$

Ο περιορισμός αυτός όπως φαίνεται είναι για κάθε ένα μέλος του πληρώματος. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ισχύει ότι $N=2$, δηλαδή τα μέλη του πληρώματος είναι, μόνο, δύο. Άρα, δύο είναι και οι περιορισμοί που τον διατυπώνουν. Οι περιορισμοί αυτοί είναι οι παρακάτω:

Για το πρώτο μέλος του πληρώματος: $x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = 1$

Για το δεύτερο μέλος του πληρώματος: $x_5 + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 1$

Σημαντικό είναι, πριν ξεκινήσουμε, να κατανοηθεί ότι το πρόγραμμα που χρησιμοποιούμε έχει και την τιμή $X[0]$. Ωστόσο, τα αποτελέσματα ξεκινάν από $X1$. Άρα, για παράδειγμα, ενώ οι ακάλυπτες μεταβλητές ήταν οι $X[0]$, $X[1]$ και $X[2]$, στους περιορισμούς οι συγκεκριμένες μεταβλητές απεικονίζονται ως $X1$, $X2$ και $X3$. Συνεπώς, γενικότερα, σε όλες τις μεταβλητές πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να προσθέτουμε μία μονάδα στον δείκτη για να είναι ο σωστός.

Αναφορικά, τώρα, με τους παραπάνω περιορισμούς, φαίνεται ότι το πρώτο μέλος του πληρώματος θα αναλάβει ένα από τα σύνολα πτήσεων που φαίνονται παραπάνω. Το ίδιο και το δεύτερο μέλος του πληρώματος. Επιπλέον, σημαντικό είναι να υπενθυμίσουμε ότι όπως αναφέρθηκε και στο Master Problem, αρχικά, δίνεται ένα άδειο roster σε κάθε ένα μέλος του πληρώματος. Στο αρχικό πρόβλημα που δημιουργήθηκε, πριν γίνει η μοντελοποίηση του προβλήματος, σε κάθε μέλος του πληρώματος του ανατίθεται ένα άδειο roster. Στη συνέχεια, προφανώς, στόχος είναι αυτές οι μεταβλητές να μηδενιστούν, καθώς αν κάποιο μέλος του πληρώματος δεν πάρει κανένα roster, σημαίνει ότι είναι ασήμαντο και άσκοπο να είναι μέλος της εταιρίας. Με λίγα λόγια σημαίνει ότι η εταιρία μπορεί να καλύψει τις ανάγκες τις με λιγότερα μέλη, άρα και με λιγότερα έξοδα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, εφόσον έχουμε δύο μέλη πληρώματος, δύο είναι και οι μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν τα άδεια rosters. Αυτές είναι η $X4$ και $X5$ και όπως σωστά έγινε, η μία έχει προστεθεί στο πρώτο μέλος του πληρώματος και η άλλη στο δεύτερο. Από τα αποτελέσματα, βλέπουμε ότι οι συγκεκριμένες μεταβλητές έχουν μηδενιστεί. Εύκολα, άρα, κάποιος

αντιλαμβάνεται ότι για να ικανοποιηθούν τρία προγραμματισμένα σύνολα πτήσεων, όπως έχουμε σε αυτό το πρόβλημα, είναι αναγκαία η εργασία και των δύο μελών του πληρώματος.

Τα μέλη του πληρώματος, όμως, όπως είπαμε πρέπει να αντιστοιχηθούν σε ένα roster, αλλιώς αντίστοιχος περιορισμός δεν ικανοποιείται. Οι μεταβλητές που παίρνουν μονάδα από τα rosters είπαμε ότι είναι η $X[8]$ και η $X[14]$. Προσοχή, όμως, όπως προαναφέρθηκε, στους περιορισμούς η μέτρηση ξεκινάει από το $X1$ και όχι από το $X[0]$, άρα οι τιμές που παίρνουν μονάδα είναι οι $X[9]$ και $X[15]$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι πράγματι η $X[9]$ βρίσκεται στον πρώτο περιορισμό, άρα το πρώτο μέλος του πληρώματος αντιστοιχήθηκε στο αντίστοιχο roster και ότι η $X[15]$ βρίσκεται στον δεύτερο περιορισμό, άρα και το δεύτερο μέλος του πληρώματος αντιστοιχήθηκε σε roster, όπως και πρέπει.

$$\text{Για το πρώτο μέλος του πληρώματος: } x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + \textcircled{x_9} + x_{10} + x_{11} = 1$$

$$\text{Για το δεύτερο μέλος του πληρώματος: } x_5 + x_{12} + x_{13} + x_{14} + \textcircled{x_{15}} + x_{16} + x_{17} = 1$$

Οι επόμενοι περιορισμοί που θα αναλυθούν είναι αυτοί που περιγράφουν πώς ο συνολικός χρόνος διαδρομών κάθε μέλους του πληρώματος πρέπει να βρίσκεται εντός του εύρους ισορροπίας που ορίζεται από τα κατώτατα και ανώτατα όρια. Υπενθυμίζουμε ότι ο συνολικός χρόνος διαδρομών για κάθε μέλος ορίζεται ως, FFT_i , τα άνω και κάτω όρια ως, UB και LB , και τέλος ορίζεται ως dev_i η απόκλιση αυτή. Εφόσον για κάθε μέλος του πληρώματος υπάρχει ένα άνω και ένα κάτω όριο και πρέπει να ελεγχθεί εάν ο συνολικός χρόνος πτήσης υπερβαίνει τόσο το ένα όσο και το άλλο, όπως και έχει προαναφερθεί, δημιουργούνται δύο περιορισμοί για κάθε μέλος. Αφού, λοιπόν, στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε $N=2$, και όπως είπαμε κάθε μέλος έχει δύο περιορισμούς, έναν για κάθε εξίσωση, συνολικά θα έχουμε τέσσερις. Πριν όμως επισημάνουμε τους περιορισμούς, ας δούμε τα δεδομένα που έχουν οριστεί για κάθε ένα μέλος.

Δεδομένα Μελών Πληρώματος

Μέλη Πληρώματος: 2

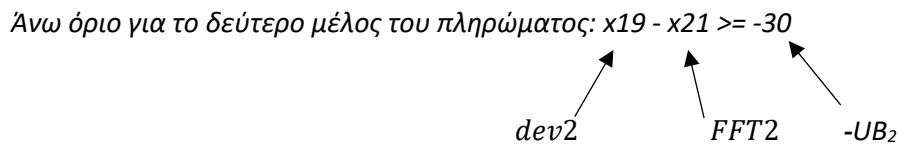
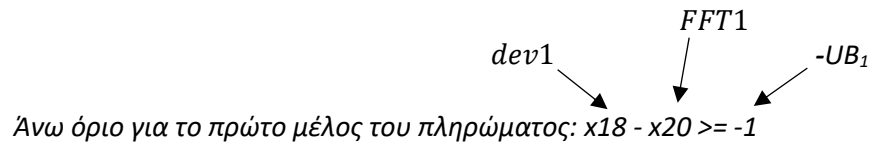
Πρώτο Μέλος Πληρώματος : $LB = -5$, $UB = 1$

Δεύτερο Μέλος Πληρώματος : $LB = 24$, $UB = 30$

Τα παραπάνω, λοιπόν, είναι τα αποτελέσματα των ορίων του κάθε μέλους του πληρώματος. Οι περιορισμοί, οι οποίοι διασφαλίζουν ότι η απόκλιση καλύπτει τη διαφορά του συνολικού χρόνου πτήσης από το ανώτερο και κατώτερο όριο, είναι οι παρακάτω:

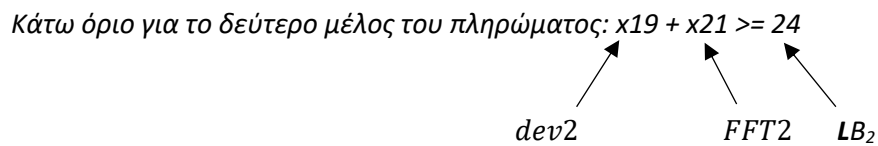
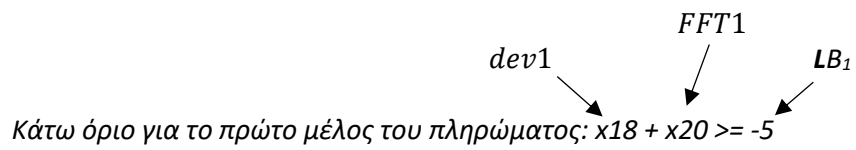
$$dev_i \geq FFT_i - UB_i$$

$$dev_i - FFT_i \geq UB_i$$



$$dev_i \geq LB_i - FFT_i$$

$$dev_i + FFT_i \geq LB_i$$



Παρατηρώντας τις συναρτήσεις και τις τιμές των μεταβλητών που μας έδωσε το πρόβλημα ως αποτελέσματα, διαπιστώνουμε ότι οι συγκεκριμένοι περιορισμοί ικανοποιούνται με επιτυχία. Για ακόμη μία φορά να υπενθυμίσουμε ότι όταν το αποτέλεσμα δίνει μία τιμή για παράδειγμα στην $X[17]$, τότε στους περιορισμούς αυτή η μεταβλητή συμπληρώνεται ως $X18$, καθώς όπως προαναφέρθηκε, η λύση του προβλήματος ξεκινάει από την μεταβλητή $X[0]$, ενώ στους περιορισμούς η πρώτη μεταβλητή απεικονίζεται ως $X1$.

Παρακάτω φαίνονται αναλυτικά, για άλλη μία φορά, οι τιμές των μεταβλητών και δίπλα από αυτές τις τιμές φαίνονται οι πράξεις που έγιναν. Όπως εύκολα κανείς παρατηρεί όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται.

$dev1 = X18 = X[17] = 20.0$		$x18 - x20 = 20.0 - 30.0 = -10.0 \geq -1$
$dev2 = X19 = X[18] = 0.0$		$x19 - x21 = 0.0 - 30.0 = -30.0 \geq -30$
$FFT1 = X20 = X[19] = 21.0$		$x18 + x20 = 0.0 + 21.0 = 21.0 \geq -5$
$FFT2 = X21 = X[20] = 30.0$		$x19 + x21 = 0.0 + 30.0 = 30.0 \geq 24$

Επόμενος περιορισμός που θα μελετηθεί είναι αυτός που υπολογίζει τον τελικό χρόνο πτήσης κάθε μέλους του πληρώματος στο τέλος του set-partition. Δηλαδή, αφού του ανατεθούν οι τελικές προγραμματισμένες πτήσεις και του έχουν αφαιρεθεί τυχόν επαναλαμβανόμενα ταιριάσματα. Προφανώς, αυτοί οι περιορισμοί πρέπει να είναι ακριβώς όσα είναι και τα μέλη του πληρώματος, καθώς δημιουργείται ένας περιορισμός για κάθε ένα μέλος. Άρα, όπως φαίνεται και παρακάτω, στη δική μας περίπτωση δημιουργήθηκαν δύο περιορισμοί, ένας για το πρώτο μέλος, και ένας για το δεύτερο.

$$FFT_i = \sum_{j \in R_i} PFT_i x_{ij} - \sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} a_{ijf=1} t_f Z_{ijf}$$

$$FFT_i - \sum_{j \in R_i} PFT_i x_{ij} + \sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} a_{ijf=1} t_f Z_{ijf} = 0$$

Για το πρώτο μέλος του πληρώματος:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j \in R_i} PFT_{ij} x_{ij} \\
 & \underbrace{- 25 x_6 - 21 x_7 - 46 x_8 - 51 x_9 - 30 x_{10} - 26 x_{11} + x_{20}}_{\text{FFT1}} \\
 & + 25 x_{22} + 21 x_{23} + 25 x_{24} + 21 x_{25} + 25 x_{26} + 21 x_{27} + 5 x_{28} + 25 x_{29} + 5 x_{30} + 21 x_{31} + 5 x_{32} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} a_{ijf=1} t_f Z_{ijf}$$

Για το δεύτερο μέλος του πληρώματος:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j \in R_i} PFT_{ij} x_{ij} \\
 & \underbrace{- 25 x_{12} - 21 x_{13} - 46 x_{14} - 51 x_{15} - 30 x_{16} - 26 x_{17} + x_{21}}_{\text{FFT2}} \\
 & + 25 x_{33} + 21 x_{34} + 25 x_{35} + 21 x_{36} + 25 x_{37} + 21 x_{38} + 5 x_{39} + 25 x_{40} + 5 x_{41} + 21 x_{42} + 5 x_{43} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j \in R_i} \sum_{f \in F} a_{ijf=1} t_f Z_{ijf}$$

Εύκολα κανείς διαπιστώνει ότι οι μεταβλητές που πολλαπλασιάζονται με τα PFT_{ij} είναι σωστές, καθώς είναι οι μεταβλητές από x_6 έως x_{17} , οι οποίες αποτελούν rosters. Επιπλέον, οι μεταβλητές που πολλαπλασιάζονται με τα t_f , παρατηρούμε ότι είναι και αυτές σωστές, καθώς είναι οι μεταβλητές x_{22} έως x_{43} , οι οποίες αποτελούν τα Z_{ijf} .

Ωστόσο, πριν επιβεβαιώσουμε ότι οι περιορισμοί ικανοποιούνται, πρέπει να κατανοηθεί γιατί οι τιμές των PFT_{ij} και t_f είναι αυτές. Αρχικά, αναφορικά με τα PFT_{ij} , για το πρώτο μέλος του πληρώματος οι τιμές είναι οι 25, 21, 46, 51, 30, 26, και συγκεκριμένα, τοποθετούνται μπροστά από τα rosters x6, x7, x8, x9, x10, x11, αντίστοιχα. Οι PFT_{ij} μεταβλητές αντιπροσωπεύουν τις προγραμματισμένες ώρες πτήσης που έχουν ανατεθεί σε ένα μέλος του πληρώματος μετά την κάλυψη όλων των προγραμματισμένων διαδρομών. Ως αποτέλεσμα αρχικά έχουμε τα εξής:

| ROUTE DATA |

| Number of Routes = 3 |

$RT = 0 :$

$DepartureDay = 10 \parallel ArrivalDay = 11$

$DepartureTime = 14840 \parallel ArrivalTime = 16340$

$FlightHours = 25$

$RT = 1 :$

$DepartureDay = 11 \parallel ArrivalDay = 12$

$DepartureTime = 17020 \parallel ArrivalTime = 18280$

$FlightHours = 21$

$RT = 2 :$

$DepartureDay = 18 \parallel ArrivalDay = 18$

$DepartureTime = 26470 \parallel ArrivalTime = 26770$

$FlightHours = 5$

Στα παραπάνω αποτελέσματα, RT συμβολίζεται το κάθε route, δηλαδή η κάθε διαδρομή. Έχουμε προφανώς τρεις διαδρομές, καθώς έχουμε αναφέρει αρκετές φορές ότι αυτό λάβαμε ως δεδομένο. Για την κάθε διαδρομή υπολογίζεται ο χρόνος πτήσης, καθώς γνωρίζουμε την ημέρα άφιξης ($ArrivalDay$) και την ημέρα αναχώρησης ($DepartureDay$). Εφόσον γνωρίζουμε αυτές τις δύο παραμέτρους μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε και την ώρα άφιξης ($ArrivalTime$) και την ώρα αναχώρησης ($DepartureTime$). Ουσιαστικά ο τύπος που χρησιμοποιείται τόσο για τις αφίξεις όσο και για τις αναχωρήσεις είναι ο παρακάτω:

$$DepartureTime [λεπτά] = DepartureDay[ημέρες] \times 24[ώρες] \times 60[λεπτά] + TimeOfDay[λεπτά]$$

$$RT = 0 : \quad ArrivalTime - DepartureTime = 16340 - 14840 = 1500 \text{ λεπτά} = 25 \text{ ώρες}$$

$$RT = 1 : \quad ArrivalTime - DepartureTime = 18280 - 17020 = 1260 \text{ λεπτά} = 21 \text{ ώρες}$$

$$RT = 2 : \quad ArrivalTime - DepartureTime = 26770 - 26470 = 300 \text{ λεπτά} = 5 \text{ ώρες}$$

Αυτές, λοιπόν, είναι οι αρχικές τιμές των PFT_{ij} . Ωστόσο, παρατηρούμε ότι δίνονται και τιμές όπως 46, 51, 30, 26 κτλ. Οι τιμές των PFT_{ij} για κάθε μέλος του πληρώματος επηρεάζεται από το γεγονός ότι ορισμένες πτήσεις ή διαδρομές ανήκουν σε περισσότερα από ένα roster. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος πτήσης δεν είναι στατικός αλλά μοιράζεται ή επαναλαμβάνεται σε διαφορετικές διαδρομές. Για παράδειγμα όπως φαίνεται και παρακάτω η μεταβλητή x_8 (roster) περιλαμβάνεται ταυτόχρονα στη πρώτη διαδρομή (route0) αλλά και στην δεύτερη (route1). Αυτή η επανάληψη, η οποία συμβαίνει και με άλλες μεταβλητές, οδηγεί στο γεγονός ότι τα PFT_{ij} εμφανίζονται πολλαπλές φορές στα rosters, με αποτέλεσμα να προστίθεται ο ίδιος χρόνος σε κάθε route στο οποίο συμμετέχει. Για παράδειγμα το x_9 έχει $PFT = 51$, καθώς συμμετέχει και στα τρία routes. Άρα θα αθροίσουμε τις τιμές και των τριών, όπως πραγματοποιείται παρακάτω.

$$FlightTime_Route0 + FlightTime_Route1 + FlightTime_Route2 = 25 \text{ ώρες} + 21 \text{ ώρες} + 5 \text{ ώρες} = 51 \text{ ώρες}$$

Συνεπώς, αυτή είναι η τιμή του PFT για το x_9 . Έτσι, υπολογίζουμε και όλα τα άλλα rosters.

Route0:

$$x_1 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} - x_{22} - x_{24} - x_{26} - x_{29} - x_{33} - x_{35} - x_{37} - x_{40} = 1$$

Rosters που περιέχονται: $x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$

Route1:

$$x_2 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{17} - x_{23} - x_{25} - x_{27} - x_{31} - x_{34} - x_{36} - x_{38} - x_{42} = 1$$

Rosters που περιέχονται: $x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{17}$

Route2:

$$x_3 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{15} + x_{16} + x_{17} - x_{28} - x_{30} - x_{32} - x_{39} - x_{41} - x_{43} = 1$$

Rosters που περιέχονται: $x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{15} + x_{16} + x_{17}$

Συνεπώς, μπορούμε να πάρουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

X6	//	περιλαμβάνεται στις: Route0	//	PFT = 25
X7	//	περιλαμβάνεται στις: Route1	//	PFT = 21
X8	//	περιλαμβάνεται στις: Route0 και Route1	//	PFT = 46
X9	//	περιλαμβάνεται στις: Route0, Route0 και Route1	//	PFT = 51
X10	//	περιλαμβάνεται στις: Route0 και Route2	//	PFT = 30
X11	//	περιλαμβάνεται στις: Route1 και Route2	//	PFT = 26
X12	//	περιλαμβάνεται στις: Route0	//	PFT = 25
X13	//	περιλαμβάνεται στις: Route1	//	PFT = 21
X14	//	περιλαμβάνεται στις: Route0 και Route1	//	PFT = 46
X15	//	περιλαμβάνεται στις: Route0, Route0 και Route1	//	PFT = 51
X16	//	περιλαμβάνεται στις: Route0 και Route2	//	PFT = 30
X17	//	περιλαμβάνεται στις: Route1 και Route2	//	PFT = 26

Αναφορικά με τις τιμές των t_f , παρατηρούμε ότι διαφέρουν από αυτές των PFT_{ij} . Να θυμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι οι μεταβλητές t_f αναφέρονται στον χρόνο πτήσης του συγκεκριμένου ταιριάσματος (*pairing*). Για παράδειγμα, αν ένα *pairing* αντιπροσωπεύει μία πτήση διάρκειας 25 λεπτών, τότε $t_f = 25$. Ουσιαστικά, η διαφορά ανάμεσα στις δύο μεταβλητές είναι ότι το t_f αναφέρεται καθαρά στον χρόνο πτήσης του *pairing*, ενώ το PFT_{ij} αναφέρεται στον συνολικό χρόνο πτήσης που προκύπτει για ένα συγκεκριμένο roster.

Στην περίπτωση που ένα *pairing* εμφανίζεται σε περισσότερα rosters, το t_f πρέπει να καταγραφεί ξεχωριστά για κάθε φορά που το *pairing* αυτό συμμετέχει. Ουσιαστικά, δεν συμβαίνει αυτό που γινόταν πριν με τις μεταβλητές PFT_{ij} , οι οποίες προστίθενται. Για παράδειγμα, αν ένα *pairing* έχει χρόνο πτήσης $t_f = 25$ και εμφανίζεται σε δύο routes, τότε ο χρόνος 25 θα κατανεμηθεί και στους δύο περιορισμούς. Αυτός ο διαχωρισμός πραγματοποιείται για να διασφαλιστεί ότι ο χρόνος αυτός υπολογίζεται σωστά και δεν διπλασιάζεται. Επίσης, επιτρέπει στις μεταβλητές Z_{ijf} να αφαιρέσουν ένα *pairing* στο τέλος της διαδικασίας. Όταν αφαιρείται, ουσιαστικά πολλαπλασιάζεται με το αντίστοιχο $Z_{ijf} = 0$. Οι αφαιρέσεις αυτές προκύπτουν για διάφορους λόγους, επιτρέποντας τη δυνατότητα στο σύστημα να βελτιστοποιήσει το κόστος, αφαιρώντας *pairings* που μπορεί να ξεπερνούν τους επιτρεπτούς χρόνους εργασίας ή να παραβιάζουν τα χρονικά όρια ανάπαυσης. Επιπλέον, επιτρέπει την ανακατανομή βαρδιών, με στόχο την ισορρόπηση των βαρδιών και των καθηκόντων και την εξυπηρέτηση άλλων αναγκών κάλυψης.

Ας πάρουμε για παράδειγμα τον πρώτο περιορισμό που μελετάμε και να τον αναλύσουμε. Το πρώτο roster που παρατηρούμε να παίρνει τιμή διαφορετική από 25, 21 ή 5 είναι η x_8 . Αυτό όπως αναφέραμε και προηγουμένως γίνεται επειδή η μεταβλητή x_8 βρίσκεται και στην Route0 και στην Route1. Ωστόσο, αντί να γραφτεί 46, ξεχωρίζεται σε 25 και 21, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να αφαιρεθεί.

$$\begin{aligned}
 & - 25 x_6 - 21 x_7 - \textcircled{46 x_8} - 51 x_9 - 30 x_{10} - 26 x_{11} + x_{20} \\
 & \quad \swarrow \quad \searrow \\
 & + 25 x_{22} + 21 x_{23} + \textcircled{25 x_{24}} + \textcircled{21 x_{25}} + 25 x_{26} + 21 x_{27} + 5 x_{28} + 25 x_{29} + 5 x_{30} + 21 x_{31} + 5 x_{32} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Εφόσον, πραγματοποιήθηκε η απαραίτητη ανάλυση για την κατανόηση του αναγνώστη, σε αυτό το σημείο θα ελεγχθεί αν πράγματι η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε ικανοποιεί αυτούς τους περιορισμούς.

Οι τιμές που δεν παίρνουν μηδενική τιμή είναι οι: $x_9 = 1.0$, $x_{15} = 1.0$, $x_{20} = 21.0$, $x_{21} = 30.0$, $x_{28} = 1.0$, $x_{38} = 1.0$.

Για το πρώτο μέλος του πληρώματος:

$$\begin{aligned}
 & -25x_6 - 21x_7 - 46x_8 - 51x_9 - 30x_{10} - 26x_{11} + x_{20} \\
 & + 25x_{22} + 21x_{23} + 25x_{24} + 21x_{25} + 25x_{26} + 21x_{27} + 5x_{28} + 25x_{29} + 5x_{30} + 21x_{31} + 5x_{32} \\
 & = -51.0 + 21.0 + 25.0 + 5.0 = 0
 \end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέλος του πληρώματος:

$$\begin{aligned}
 & -25x_{12} - 21x_{13} - 46x_{14} - 51x_{15} - 30x_{16} - 26x_{17} + x_{21} \\
 & + 25x_{33} + 21x_{34} + 25x_{35} + 21x_{36} + 25x_{37} + 21x_{38} + 5x_{39} + 25x_{40} + 5x_{41} + 21x_{42} + 5x_{43} \\
 & = -51.0 + 30.0 + 21.0 = 0
 \end{aligned}$$

Επόμενος περιορισμός με τον οποίο θα ασχοληθούμε είναι αυτός ο οποίος εξασφαλίζει ότι ο συνολικός αριθμός των ακάλυπτων pairings υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις αναθέσεις και αφαιρέσεις από τα προγράμματα των μελών του πληρώματος.

Αφαιρεί τα pairings που έχουν καλυφθεί
από τα άλλα μέλη
Παράδειγμα: Αν το $Z_{1,1,f}=1$ το f αφαιρείται
από το route1 του μέλους1

καταγράφει αν το pairing
παραμένει ακάλυπτο

$$y_f + \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} a_{ijf} x_{ij} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in R_i} Z_{ijf} = b_f$$

Καταγράφει πόσα προγράμματα j
που καλύπτουν το f έχουν ανατεθεί
pairings
Παράδειγμα: Αν το $a_{1,1,f}=1$ και το $x_{1,1}=1$,
τότε το f καλύπτεται από το route1 του μέλους1

Διασφαλίζει αν το σύστημα
ικανοποιεί τις απαιτήσεις για
τα ακάλυπτα

Αρχικά, εύκολα διαπιστώνεται ότι οι περιορισμοί αυτοί ικανοποιούνται. Οι μεταβλητές οι οποίες δεν είναι μηδενικές είναι οι $x_9, x_{15}, x_{26}, x_{28}, x_{38}$. Όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παίρνουν μηδενική τιμή. Άρα, όπως φαίνεται και παρακάτω, με πράξεις, οι περιορισμοί ικανοποιούνται.

Route0: Η x_9, x_{15} συμβάλλουν στην κάλυψη του Route0, ενώ η x_{26} αφαιρεί ένα pairing.

$$x_1 + x_6 + x_8 + \textcircled{x_9} + x_{10} + x_{12} + x_{14} + \textcircled{x_{15}} + x_{16} - x_{22} - x_{24} - \textcircled{x_{26}} - x_{29} - x_{33} - x_{35} - x_{37} - x_{40} = 2 - 1 = 1$$

Route1: Η x_9, x_{15} συμβάλλουν στην κάλυψη του Route1, ενώ η x_{38} αφαιρεί ένα pairing.

$$x_2 + x_7 + x_8 + \textcircled{x_9} + x_{11} + x_{13} + x_{14} + \textcircled{x_{15}} + x_{17} - x_{23} - x_{25} - x_{27} - x_{31} - x_{34} - x_{36} - \textcircled{x_{38}} - x_{42} = 2 - 1 = 1$$

Route2: Η x_9, x_{15} συμβάλλουν στην κάλυψη του Route3, ενώ η x_{28} αφαιρεί ένα pairing.

$$x_3 + \textcircled{x_9} + x_{10} + x_{11} + \textcircled{x_{15}} + x_{16} + x_{17} - \textcircled{x_{28}} - x_{30} - x_{32} - x_{39} - x_{41} - x_{43} = 2 - 1 = 1$$

Ρόλος των pairings είναι να εξασφαλίζει ότι κάθε καθήκον είτε καλύπτεται είτε παραμένει ακάλυπτο με βάση τους περιορισμούς που έχουν οριστεί. Η ισορροπία μεταξύ κόστους, ωραρίων και κάλυψης, η οποία αναζητείται για τη βελτιστοποίηση του προβλήματος, καθορίζει ποια pairings θα καλυφτούν και ποια όχι. Επιπλέον, τα pairings συμμετέχουν στους περιορισμούς όπου κάθε ένα προσθέτει ή αφαιρεί μία μονάδα για να εξασφαλιστεί ότι οι συνολικές ανάγκες κάθε διαδρομής ικανοποιούνται. Για παράδειγμα, η μεταβλητή x_9 , η οποία παίρνει την τιμή ένα, καλύπτει μία μονάδα ανάγκης στο Route0, Route1, και Route2, συνεισφέροντας στη συνολική ισορροπία.

Όταν ένα pairing αφαιρείται από έναν περιορισμό σημαίνει ότι δεν συμμετέχει πια στην κάλυψη της αντίστοιχης διαδρομής. Αυτό συμβαίνει είτε επειδή το pairing έχει καλυφθεί από άλλο route, είτε επειδή είναι μέρος ενός άλλου συνδυασμού που εξυπηρετεί καλύτερα την ισορροπία και βελτιστοποίηση του συστήματος. Εφόσον αναφερόμαστε σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, οι συγκεκριμένες μεταβλητές κρίνονται απαραίτητες. Η αφαίρεση τους ελαχιστοποιεί την πραγματοποίηση περιττών διαδρομών, περιορίζοντας την υπερκάλυψη που θα οδηγούσε σε μεγαλύτερα κόστη, αλλά και στην έλλειψη ισορροπίας και αποτελεσματικής κατανομής των μελών του πληρώματος. Επιπλέον, εξασφαλίζεται ότι η μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα ρεαλιστικά, ώστε κάθε διαδρομή να καλύπτεται από όσα pairings είναι απολύτως απαραίτητα.

Σχετικά με τον περιορισμό (11) από την μοντελοποίηση, όπως έχει ξανά αναφερθεί, εξασφαλίζει ότι κάθε ζεύγος δε μπορεί να αφαιρεθεί από ένα μη επιλεγμένο πρόγραμμα πτήσεων αλλά και ότι όταν ένα ζεύγος αφαιρείται από ένα πρόγραμμα, τότε το πρόγραμμα αυτό πρέπει να είναι αντιστοιχημένο στο συγκεκριμένο μέλος του πληρώματος. Συγκεκριμένα, αν το ζεύγος i, j επιλέγεται για την συγκεκριμένη πτήση, τότε και η αντιστοίχιση του συγκεκριμένου μέλους του πληρώματος για το pairing f μπορεί να πάρει την τιμή 1, υποδηλώνοντας ότι το ζεύγος μπορεί να ανατεθεί στην αντίστοιχη διαδρομή. Ενώ, αντίθετα, αν $x_{ij} = 0$, δηλαδή αν το ζεύγος δεν επιλέγεται σε πτήση, τότε απαιτούμε και $Z_{ijf} = 0$. Συνεπώς, το ζεύγος δεν μπορεί να αντιστοιχιστεί σε κάποια πτήση, καθώς δεν έχει επιλεγεί. Οι αντιστοιχοι περιορισμοί που καλύπτουν τον περιορισμό αυτόν στο δικό μας πρόβλημα,

επισημαίνονται παρακάτω. Τέλος, πραγματοποιούνται και οι αντίστοιχες πράξεις, ώστε να κατανοηθεί ότι ικανοποιούνται.

ZX_1:	- x6 + x22 = -0 + 0 = 0 <= 0	Εφόσον το roster x6 είναι μηδέν, δεν έχει επιλεχθεί σε πρόγραμμα πτήσεων. Το x22 δεν μπορεί να πάρει μονάδα (να αφαιρέσει το ζεύγος από ένα μη επιλεγμένο πρόγραμμα πτήσεων).
ZX_2:	- x7 + x23 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_3:	- x8 + x24 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_4:	- x8 + x25 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_5:	- x9 + x26 = -1 + 1 = 0 <= 0	
ZX_6:	- x9 + x27 = -1 + 0 = -1 <= 0	Εφόσον το roster x15 είναι μονάδα, έχει επιλεχθεί σε πρόγραμμα πτήσεων. Το x27 μπορεί να πάρει είτε μονάδα (αφαίρεση από το πρόγραμμα) είτε μηδέν.
ZX_7:	- x9 + x28 = -1 + 1 = 0 <= 0	
ZX_8:	- x10 + x29 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_9:	- x10 + x30 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_10:	- x11 + x31 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_11:	- x11 + x32 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_12:	- x12 + x33 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_13:	- x13 + x34 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_14:	- x14 + x35 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_15:	- x14 + x36 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_16:	- x15 + x37 = -1 + 0 = -1 <= 0	
ZX_17:	- x15 + x38 = -1 + 0 = -1 <= 0	
ZX_18:	- x15 + x39 = -1 + 1 = 0 <= 0	
ZX_19:	- x16 + x40 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_20:	- x16 + x41 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_21:	- x17 + x42 = -0 + 0 = 0 <= 0	
ZX_22:	- x17 + x43 = -0 + 0 = 0 <= 0	

Τελευταίοι περιορισμοί που πρέπει να ελεγχθούν είναι αυτοί που απαιτούν από τις μεταβλητές να είναι μη αρνητικές, ακέραιες ή δυαδικές. Απλώς αν παρατηρήσουμε τα αποτελέσματα, εύκολα διαπιστώνεται ότι όλοι αυτοί οι περιορισμοί ικανοποιούνται.

$FFT_i \geq 0$	→	$FFT_1 = 21.0, FFT_2 = 30.0$
$dev_i: integer$	→	$dev_1 = 20.0, dev_2 = 0.0$
$x_{ij}: binary$	→	μεταβλητές: x1 έως x17 → μονάδα ή μηδέν
$z_{ijf}: binary$	→	μεταβλητές: x22 έως x43 → μονάδα ή μηδέν

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι σε αυτό το μικρό πρόβλημα ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί. Γενικότερα, η μεθοδολογία λειτουργεί με επιτυχία, καλύπτοντας τους περιορισμούς και βρίσκοντας εφικτές λύσεις. Όμως, η δεύτερη κατάσταση που προβληματίζει τις αεροπορικές εταιρίες και τους επιστήμονες είναι το συνολικό κόστος που υπολογίστηκε με την εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθοδολογίας. Ναι μεν το αρχικό βήμα είναι να έχουμε εφικτές λύσεις, ώστε να αξίζει να ασχοληθούμε περαιτέρω με τη μέθοδο, αλλά πρέπει να μας δίνει και ανταγωνιστικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, λοιπόν, ως τελευταίο ζήτημα που θα μας απασχολήσει στο συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος, δηλαδή να υπολογίσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επιπλέον, θα αναλύσουμε την αντικειμενική συνάρτηση, ώστε να διαπιστώσουμε από ποιόν όρο αυξάνεται το κόστος.

Coverage and Balance Cost Parameters // Παράμετροι Κόστους Κάλυψης και Ισορροπίας

→ UndercoverCost = 1000000 → Κόστος για τη μη κάλυψη προγραμματισμένης πτήσης

→ HourPenalty = 1000 → Κόστος ανά ώρα παραβίασης του χρονικού παραθύρου ενός μέλους του πληρώματος

$$\begin{array}{ccc} \text{HourPenalty} & & \text{UndercoverCost} \\ \nearrow & & \nearrow \\ \text{Min} \quad \sum_{i \in I} C_b dev_i + \sum_{f \in F} hy_f & & \\ \searrow & & \searrow \\ \text{Απόκλιση χρόνου πτήσης} & & \text{Ακάλυπτες} \\ dev_1 = 20.0, dev_2 = 0.0 & & \end{array}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση = $(1000 \times 20.0 + 1000 \times 0.0) + (1000000 \times 0.0) = \mathbf{20,000}$

Παρατηρούμε ότι εφόσον δεν έχουμε καμία ακάλυπτη προγραμματισμένη πτήση, ο δεύτερος όρος της αντικειμενικής συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Ουσιαστικά, το αποτέλεσμα είναι 20,000 και το κόστος οφείλεται αποκλειστικά στην απόκλιση του χρόνου των πτήσεων από τα επιθυμητά χρονικά παράθυρα. Άρα, υπάρχουν πτήσεις που δεν εκτελούνται αυστηρά μέσα στον προγραμματισμένο χρόνο, και αυτό επιβαρύνει την αντικειμενική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι το κόστος προέρχεται μονάχα από τον όρο dev_1 , δηλαδή προέρχεται επειδή στο πρώτο μέλος του πληρώματος δεν ικανοποιούνται τα χρονικά παράθυρα εργασίας του. Να υπενθυμίσουμε ότι το κάτω όριο του χρονικού παραθύρου του πρώτου μέλους του πληρώματος ορίζεται ως LB_1 ενώ το άνω όριο ως UB_1 . Το $dev_1 = 20.0$, υποδηλώνει ότι η συνολική απόκλιση από αυτά τα δύο όρια είναι κατά 20 μονάδες.

5. Αποτελέσματα

Όπως έχει αναφερθεί ήδη, στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να συγκριθεί η συγκεκριμένη μεθοδολογία με αυτήν της Branch and Price. Σε αυτήν την ενότητα θα γίνουν οι απαραίτητες συγκρίσεις, ώστε μετά να υπάρχει η δυνατότητα να παραχθούν σημαντικά αποτελέσματα. Πριν όμως εισάγουμε παραδείγματα και συγκρίσεις των δύο μεθόδων, είναι σημαντικό να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της δικής μας μεθοδολογίας και να κάνουμε κάποιες σημαντικές διαπιστώσεις. Στο παρακάτω πίνακα [5.1] φαίνεται ένα μικρό πρόβλημα όπου τα μέλη του πληρώματος είναι δύο και τα σύνολα διαδρομών διαφέρουν. Όπως φαίνεται τα δύο μέλη μπορούν να καλύψουν ένα σύνολο διαδρομών έως 10, χωρίς το σύστημα να αναγκαστεί να αφήσει ακάλυπτες διαδρομές. Ωστόσο, αν αυξήσουμε παραπάνω τα σύνολα διαδρομών, για παράδειγμα $R=14$, $R=18$, διαπιστώνουμε ότι τα δύο μέλη του πληρώματος αδυνατούν να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα όταν το σύνολο των διαδρομών είναι 14, τότε η βέλτιστη λύση του συστήματος είναι να μείνουν δύο διαδρομές ακάλυπτες, με αποτέλεσμα η αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή το κόστος, να αυξάνεται κατά πολύ. Συμπεραίνουμε εύκολα, λοιπόν, ότι για περισσότερες διαδρομές, μία αεροπορική εταιρία αξίζει να αυξήσει τα μέλη του πληρώματος της.

Επιπλέον, στον πίνακα [5.2] καταγράφηκαν τα αποτελέσματα για τα ίδια σύνολα διαδρομών, αλλά με πέντε μέλη πληρώματος. Αρχικά, η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι έχοντας πέντε μέλη πληρώματος σε κανένα από τα παραδείγματα δεν αφήνονται ακάλυπτες διαδρομές. Συνεπώς, επιβεβαιώνεται ότι ενώ με δύο μέλη πληρώματος είχαμε ακάλυπτες διαδρομές, στις περιπτώσεις όπου $R=14$ και $R=18$, με πέντε μέλη, δηλαδή με μεγαλύτερο αριθμό προσωπικού αυτό δεν συμβαίνει. Προφανώς, ένα τέτοιο φαινόμενο οδηγεί, όπως και βλέπουμε, στην μείωση του κόστους. Άρα, πράγματι, συνέφερε μία αεροπορική εταιρία να προσλάβει περισσότερα μέλη, παρά να αφήσει ακάλυπτα μερικά δρομολόγια. Μην ξεχνάμε ότι στην αντικειμενική συνάρτηση έχει προστεθεί ένας πολύ μεγάλος όρος που πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό των ακάλυπτων διαδρομών, με στόχο να παραλείψουμε τέτοιες δυσμενείς καταστάσεις. Ωστόσο, μία ακόμη σημαντική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι σε αυτήν όπου $R=10$. Σε αυτήν την περίπτωση, δεν έχει κανένα παράδειγμα ακάλυπτη διαδρομή. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι ενώ αυξάνουμε τα μέλη του πληρώματος, τα κόστη αυξάνονται. Προφανώς, αυξάνονται τα κόστη ισορροπίας. Εδώ, λοιπόν, κατανοούμε ότι η αύξηση των μελών του πληρώματος δεν μας επιφέρει πάντοτε κέρδη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η αύξηση των μελών του πληρώματος έφερε ανισορροπίες και ελαττωματικές κατανομές των πτήσεων, με αποτέλεσμα να αυξηθούν τα κόστη ισορροπίας. Το γεγονός αυτό απαιτεί προσεκτική διαχείριση για να αποφευχθεί η αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Μία αεροπορική εταιρία πρέπει να μελετήσει με μεγάλη λεπτομέρεια τα δεδομένα της, ώστε να αποφασίσει με ακρίβεια, πόσα μέλη πρέπει να ανήκουν σε αυτήν.

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Κόστος μη κάλυψης	Κόστος ισορροπίας	Συνολικό κόστος	Συνολικός αριθμός ακάλυπτων διαδρομών
1	2	10	0	2000	2000	0
2	2	14	2000000	23000	2023000	2
3	2	18	5000000	26000	5026000	5

Πίνακας 5.1: $N=2$, Branch and Price (παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης)

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Κόστος μη κάλυψης	Κόστος ισορροπίας	Συνολικό κόστος	Συνολικός αριθμός ακάλυπτων διαδρομών
1	5	10	0	15400	15400	0
2	5	14	0	64000	64000	0
3	5	18	0	18000	18000	0

Πίνακας 5.2: N=5, Branch and Price (παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης)

Στη συνέχεια, η επόμενη σύγκριση που θα πραγματοποιηθεί είναι σε δεδομένα μη ρεαλιστικά, και σε παραδείγματα που δεν καλύπτονται όλες οι προγραμματισμένες διαδρομές που έχουν καθοριστεί να πραγματοποιηθούν. Σκοπός της σύγκρισης αυτής, είναι να ελέγξουμε τη συμπεριφορά των δύο μοντέλων, τόσο στο κόστος κάλυψης όσο και στο κόστος ισορροπίας. Όπως και φαίνεται, ο πίνακας [5.3] παρουσιάζει τα αποτελέσματα μερικών παραδειγμάτων, της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, και στον πίνακα [5.4] φαίνονται τα αποτελέσματα της Branch and Price. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το κόστος κάλυψης στη δική μας μεθοδολογία είναι πάντοτε μεγαλύτερο της Branch and Price, καθώς οι ακάλυπτες διαδρομές είναι πάντοτε περισσότερες. Ωστόσο, αναφορικά με το κόστος ισορροπίας παρατηρούμε ότι τις περισσότερες φορές τα αποτελέσματα, παραλείποντας το στάδιο της διακλάδωσης, είναι καλύτερα. Αυτό δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά στις περισσότερες, μιλώντας πάντοτε για τα συγκεκριμένα παραδείγματα. Παράλληλα, όμως, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα κόστη ισορροπίας είναι πολύ κοντά στις δύο περιπτώσεις, χωρίς να παρουσιάζονται δραματικές διαφορές.

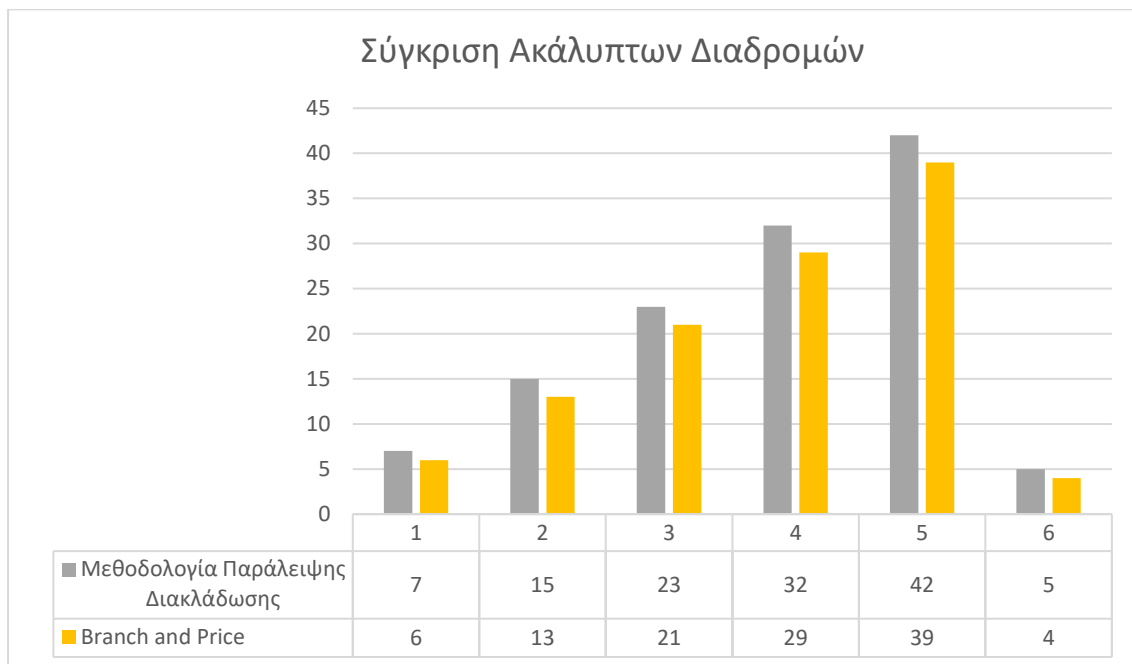
Σημαντικό κρίνεται σε αυτό το σημείο, να υπενθυμίσουμε, ότι η κάλυψη των προγραμματισμένων πτήσεων είναι καθοριστική, καθώς λόγω της αναγκαιότητας της κάλυψης των πτήσεων, στο μοντέλο έχει προστεθεί ένας μεγάλος σταθερός αριθμός, όπου πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό των μη καλυπτόμενων διαδρομών και προστίθεται στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεπώς, αυτή η μεγάλη διαφοροποίηση των δύο μοντέλων στην κάλυψη των διαδρομών, καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα, και όπως και φαίνεται, τα τελικά κόστη, στη δική μας μεθοδολογία, είναι σημαντικά μεγαλύτερα. Στα διαγράμματα [5.1] και [5.2] φαίνονται οι απαραίτητες συγκρίσεις, ανάμεσα στα δύο μοντέλα, στο κόστος κάλυψης και στο κόστος ισορροπίας, αντίστοιχα.

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Κόστος μη κάλυψης	Κόστος ισορροπίας	Συνολικό κόστος	Συνολικός αριθμός ακάλυπτων διαδρομών
1	10	60	7000000	193000	70193000	7
2	10	70	15000000	127000	15127000	15
3	10	80	23000000	119000	23119000	23
4	10	90	32000000	104000	32104000	32
5	10	100	42000000	221000	42221000	42
6	20	110	5000000	261000	5261000	5

Πίνακας 5.3: Παραδείγματα μη κάλυψης στην Branch and Price, παραλείποντας το στάδιο της διακλάδωσης.

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Κόστος μη κάλυψης	Κόστος ισορροπίας	Συνολικό κόστος	Συνολικός αριθμός ακάλυπτων διαδρομών
1	10	60	6000000	222000	6222000	6
2	10	70	13000000	173000	13173000	13
3	10	80	21000000	154000	21154000	21
4	10	90	29000000	184000	29184000	29
5	10	100	39000000	191000	39191000	39
6	20	110	4000000	315000	4315000	4

Πίνακας 5.4: Παραδείγματα μη κάλυψης στην Branch and Price



Διάγραμμα 5.1: Σύγκριση Ακάλυπτων Διαδρομών.



Διάγραμμα 5.2: Σύγκριση Κόστους Ισορροπίας.

Στην συνέχεια, ακολουθούν και άλλα παραδείγματα των δύο μοντέλων. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφερθεί, ότι δεν θα μελετήσουμε μόνο τα τελικά κόστη αλλά και το χρόνο που χρειάστηκε για να βρεθεί η λύση. Προφανώς, τα κόστη διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο, καθώς αυτός είναι και ο βασικός λόγος που αναζητά μία αεροπορική εταιρία λύσεις. Ωστόσο, σημαντικό είναι και ο χρόνος εκτέλεσης, καθώς όταν μελετάμε μεγάλα παραδείγματα ο χρόνος κρίνεται πολύτιμος.

Για την ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού κόστους, έχουμε ήδη αναφέρει, ότι θα αφαιρεθούν τα κυρίαρχα rosters πριν την εφαρμογή του μοντέλου. Στους πίνακες [5.5] και [5.6] έχουν υπολογιστεί μερικά πιο ρεαλιστικά παραδείγματα. Συγκεκριμένα, στον πίνακα [5.5] φαίνονται τα αποτελέσματα της μεθόδου, όταν δεν πραγματοποιήθηκε η αφαίρεση των κυριαρχούμενων rosters, ενώ στον πίνακα [5.6], έχει πραγματοποιηθεί. Να υπενθυμίσουμε ότι, το roster A κυριαρχείται από το roster B αν και τα δύο rosters αφορούν το ίδιο μέλος του πληρώματος και, επιπλέον, το roster B περιλαμβάνει όλα τα καθήκοντα που περιλαμβάνονται στο roster A. Έτσι, αφαιρούμαι το roster A, χωρίς να έχουμε καμία απολύτως επιρροή στην αντικειμενική συνάρτηση, αλλά μειώνοντας σημαντικά το υπολογιστικό κόστος. Όπως και παρατηρούμαι από τους δύο παρακάτω πίνακες, πράγματι το τελικό κόστος δεν διαφοροποιήθηκε καθόλου. Αντίθετα, σε όλες τις περιπτώσεις, ο χρόνος επίλυσης μειώθηκε σημαντικά, καθώς αφαιρέθηκαν rosters και το πρόβλημα λύθηκε ταχύτερα. Για παράδειγμα, όπως και βλέπουμε στο τελευταίο παράδειγμα (παράδειγμα: 6), όπου $N=350$ και $R=1450$, ενώ το μοντέλο χρειάστηκε 4:34:52 [ώρες: λεπτά: δευτερόλεπτα], για να επιλύσει το πρόβλημα, όταν αφαιρούμε τα κυριαρχούμενα rosters τότε απαιτούνται 3:36:01.

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Κόστος μη κάλυψης	Κόστος ισορροπίας	Συνολικό κόστος	Συνολικός αριθμός ακάλυπτων διαδρομών	Χρόνος Επίλυσης [seconds]
1	100	350	0	1789000	1789000	0	0:10:37
2	150	520	0	3395000	3395000	0	0:25:26
3	200	650	0	5223000	5223000	0	0:21:16
4	250	810	0	6931000	6931000	0	0:27:07
5	300	1000	0	8491000	8491000	0	0:54:40
6	350	1450	0	6618993	6618993	0	4:34:52

Πίνακας 5.5: Παραδείγματα: Branch and Price (παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης)

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Συνολικός Αριθμός Rosters	Αριθμός Διαγραφόμενων Rosters	Συνολικό κόστος	Χρόνος Επίλυσης [seconds]
1	100	350	1740	40	1789000	0:08:39
2	150	520	2490	48	3395000	0:10:22
3	200	650	3180	75	5223000	0:11:30
4	250	810	3990	120	6931000	0:23:10
5	300	1000	4820	58	8491000	0:39:05
6	350	1450	6410	91	6618993	3:36:01

Πίνακας 5.6: Παραδείγματα: Branch and Price (διαγράφοντας τα κυρίαρχα rosters και παραλείποντας το στάδιο διακλάδωσης)

Παρακάτω, παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα της μεθόδου Branch and Price, στα ίδια παραδείγματα. Συνοπτικά, παρατηρείται ότι το τελικό κόστος είναι σε κάποιες περιπτώσεις καλύτερο στη δική μας μεθοδολογία, ενώ σε μερικές άλλες καλύτερο στη μεθοδολογία της Branch and Price. Όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα παραδείγματα, το κόστος ισορροπίας είναι παρόμοιο και στα δύο μοντέλα, με τις περισσότερες φορές να έχει καλύτερα αποτελέσματα στη δική μας μεθοδολογία. Το κόστος κάλυψης είναι αυτό που μειώνεται σημαντικά στην μέθοδο της Branch and Price, ωστόσο εφόσον στα παρακάτω παραδείγματα δεν υπάρχει καμία ακάλυπτη διαδρομή, αυτό δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα.

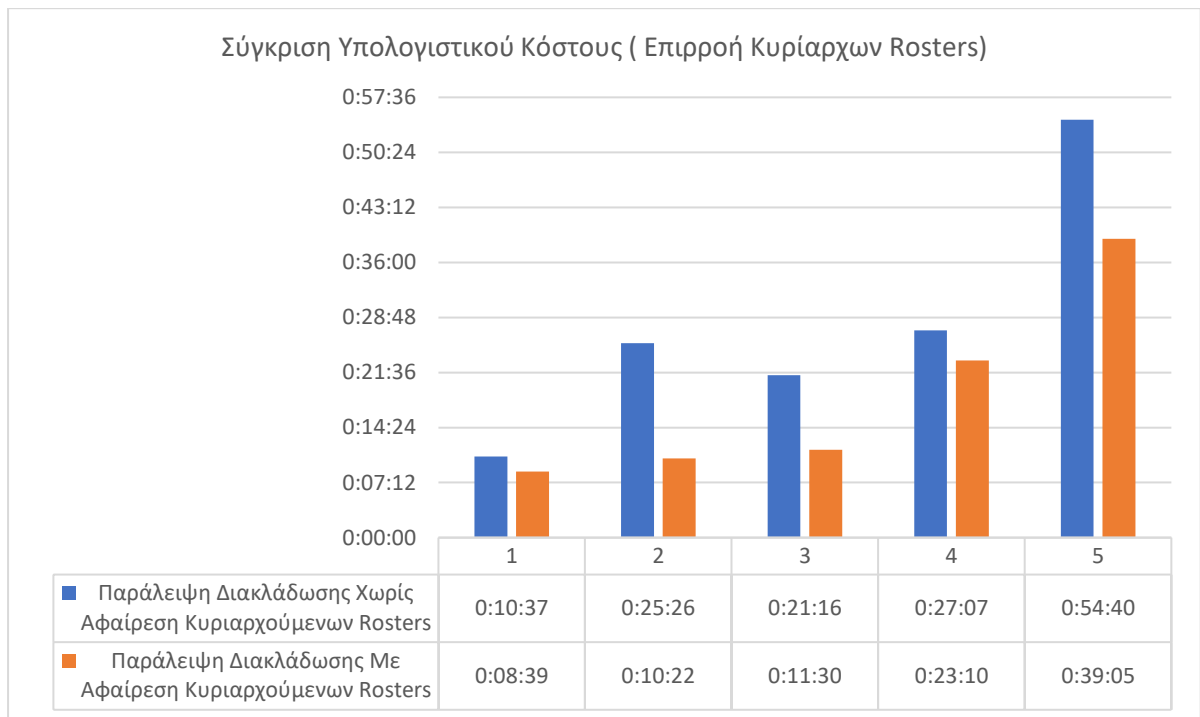
Ωστόσο, από τα παρακάτω παραδείγματα μπορεί να πάρει κανείς σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτούν τα δύο μοντέλα. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι το υπολογιστικό κόστος είναι μικρότερο στη μεθοδολογία της Branch and Price, κάτι που περιμέναμε να ήταν διαφορετικό, καθώς παρότι, στη δική μας μέθοδο, παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης, ο χρόνος επίλυσης παραμένει υψηλότερος.

Για να κατανοηθούν καλύτερα όλα αυτά, ας πάρουμε ένα παράδειγμα. Το τελευταίο παράδειγμα (παράδειγμα: 6), στην μεθοδολογία της Branch and Price έχει αντικειμενική συνάρτηση 7209000 και υπολογιστικό κόστος 2:41:37. Στη μέθοδο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, προφανώς, είτε αφαιρούνται τα κυριαρχούμενα rosters είτε όχι, η αντικειμενική συνάρτηση είναι ίδια, και είναι 6618993. Άρα είναι μικρότερη, και όπως έχουμε ήδη αναφέρει πολλές φορές, ο λόγος είναι το κόστος ισορροπίας, καθώς αναφορικά με το κόστος κάλυψης η μέθοδος Branch and Price είναι πάντοτε καλύτερη. Ωστόσο, ο χρόνος, της μεθόδου όπου παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης, είναι μεγαλύτερος, καθώς ακόμη και όταν έχουν αφαιρεθεί τα κυριαρχούμενα rosters, ο χρόνος είναι 3:36:01.

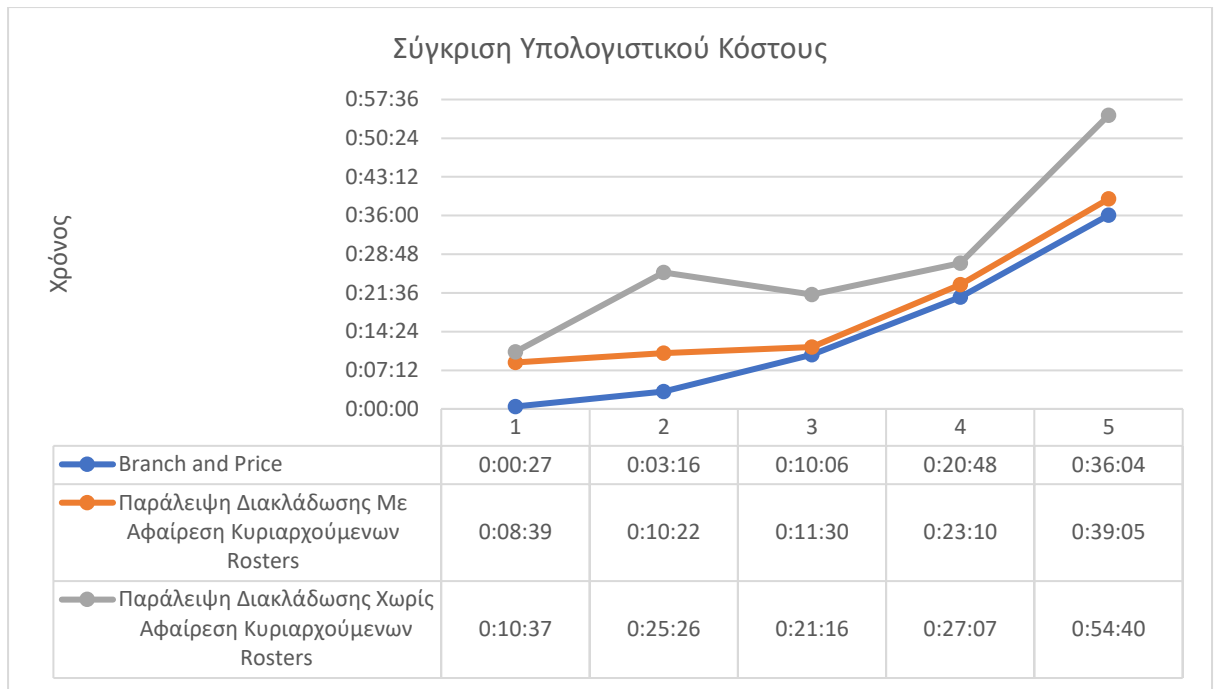
Παρακάτω από τον πίνακα, φαίνονται σε διαγράμματα τα αποτελέσματα, και γίνονται οι απαραίτητες συγκρίσεις, με στόχο να παρθούν αποτελέσματα.

Νούμερο Παραδείγματος	N: Αριθμός μελών πληρώματος	R: Αριθμός Διαδρομών	Κόστος μη κάλυψης	Κόστος ισορροπίας	Συνολικό κόστος	Συνολικός αριθμός ακάλυπτων διαδρομών	Χρόνος Επίλυσης [seconds]
1	100	350	0	2339000	2339000	0	0:00:27
2	150	520	0	3546000	3546000	0	0:03:16
3	200	650	0	5579000	5579000	0	0:10:06
4	250	810	0	6411000	6411000	0	0:20:48
5	300	1000	0	7257000	7257000	0	0:36:04
6	350	1450	0	7209000	7209000	0	2:41:37

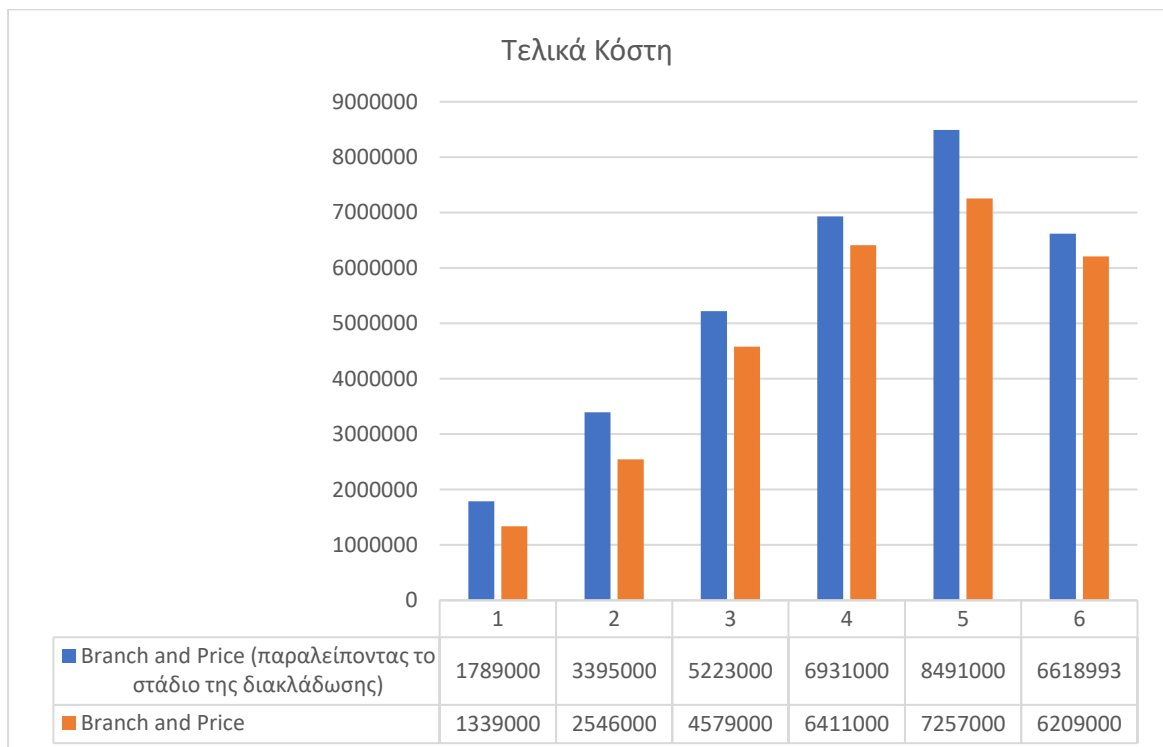
Πίνακας 5.7: Παραδείγματα: Branch and Price



Διάγραμμα 5.3: Σύγκριση Υπολογιστικών Κόστων με και χωρίς τα κυρίαρχα rosters.



Διάγραμμα 5.4: Σύγκριση Υπολογιστικών Κοστών: Branch-and-Price και μεθοδολογία παράλειψης σταδίου διακλάδωσης.

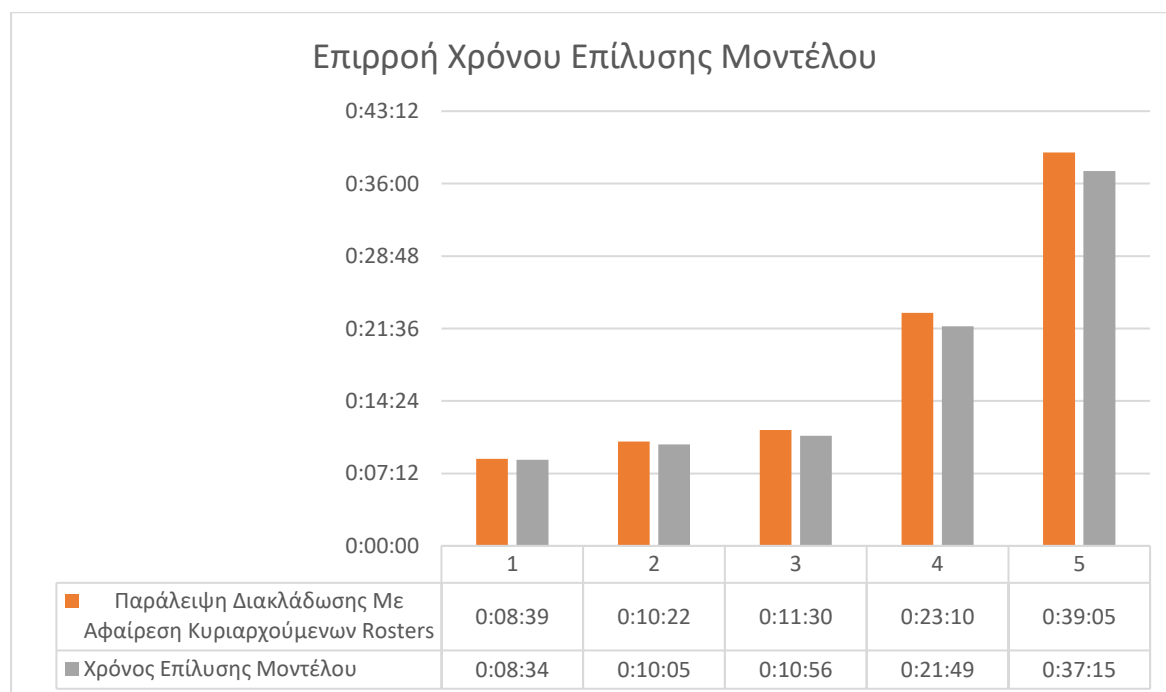


Διάγραμμα 5.5: Σύγκριση Τελικών Κοστών: Branch-and-Price και μεθοδολογίας παράλειψης σταδίου διακλάδωσης.

Τέλος, μεγάλο ενδιαφέρον φαίνεται να έχει ο χρόνος επίλυσης του μεικτού προβλήματος ακέραιας βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, στον παρακάτω πίνακα, μετρήθηκε μόνο ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος, χωρίς να ληφθεί υπόψη ο χρόνος κάλυψης του γραμμικού προβλήματος. Όπως και φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα, σχεδόν όλος ο συνολικός χρόνος που απαιτείται, είναι ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος. Τα αποτελέσματα αυτά, πάρθηκαν από τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε αυτήν την εργασία, με την αφαίρεση των κυρίαρχων rosters. Συνεπώς, η σύγκριση των χρόνων επίλυσης του παρακάτω πίνακα, πρέπει να γίνει με τους χρόνους του πίνακα [5.6]. Στο διάγραμμα [5.6] φαίνονται οι διαφορές των δύο υπολογιστικών τιμών του κόστους.

Νούμερο Παραδείγματος	Αριθμός Σειρών	Αριθμός Στηλών	Συνολικό κόστος	Χρόνος Επίλυσης [seconds]
1	10014	16505	1339000	0:08:34
2	14363	16505	2546000	0:10:05
3	17960	20665	4579000	0:10:56
4	22035	25405	6411000	0:21:49
5	27766	31928	7257000	0:37:15
6	36991	42610	6209000	3:31:47

Πίνακας 5.8: Χρόνος Επίλυσης Μοντέλου



Διάγραμμα 5.6: Επιρροή Χρόνου Επίλυσης του Μοντέλου.

6. Συμπεράσματα

Η σύγκριση των δύο μεθόδων, υποδηλώνει διαφορές τόσο στην αποτελεσματικότητα τους όσο και στον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται για την επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων. Η μέθοδος Branch and Price, αποδεικνύεται ότι είναι πιο αποτελεσματική, καθώς μειώνει την αντικειμενική συνάρτηση και προσεγγίζει το πρόβλημα με μεγαλύτερη ακρίβεια. Συγκεκριμένα, αναφορικά με το κόστος κάλυψης, η ολοκληρωμένη υλοποίηση της μεθόδου Branch and Price είναι καθοριστικά αποτελεσματικότερη, καθώς όταν παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης, οι ακάλυπτες διαδρομές αυξάνονται. Σχετικά, όμως, με το κόστος ισορροπίας, τα δύο μοντέλα φαίνεται να δίνουν παρόμοια αποτελέσματα, με αυτά της μεθοδολογίας που παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης, να είναι ελαφρώς καλύτερα σε μερικές περιπτώσεις. Σε γενικές γραμμές, όμως, πραγματοποιώντας το στάδιο της διακλάδωσης, τα τελικά κόστη είναι καλύτερα, καθώς οι ακάλυπτες διαδρομές διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στους στόχους μίας αεροπορικής εταιρίας.

Παράλληλα, η ολοκληρωμένη μεθοδολογία της Branch and Price απαιτεί και σημαντικά λιγότερο υπολογιστικό χρόνο. Ενώ, στη μέθοδο της συγκεκριμένης εργασίας, παραλείπεται το στάδιο της διακλάδωσης, το οποίο είναι σίγουρα χρονοβόρο, ο χρόνος πάλι παραμένει μεγαλύτερος. Ανεξαρτήτως, λοιπόν, του γεγονότος ότι η αφαίρεση των κυριαρχούμενων rosters μειώνει δραματικά το υπολογιστικό κόστος, πάλι τα αποτελέσματα δεν είναι καλύτερα από αυτά της μεθόδου της Branch and Price. Συνεπώς, συμφέρει να προστεθεί το στάδιο της διακλάδωσης τόσο για το τελικό κόστος όσο και για το τελικό υπολογιστικό κόστος.

Επιπλέον, ο αριθμός των μελών του πληρώματος παίζει κρίσιμο ρόλο στη βέλτιστη διαχείριση του συστήματος. Σίγουρα, αν υπάρχουν ακάλυπτες διαδρομές στο πρόβλημα μας, η λύση είναι να αυξήσουμε τον αριθμό των μελών του πληρώματος. Ωστόσο, η αύξηση των μελών δεν επιφέρει πάντοτε κέρδη. Σε ορισμένες περιπτώσεις που μελετήθηκαν, διαπιστώθηκε ότι η αύξηση μελών επιφέρει ανισοκατανομή των πόρων και προκαλεί αυξημένα κόστη. Συνεπώς, καθοριστικό είναι μία αεροπορική εταιρία πριν πάρει τις τελικές αποφάσεις της, να δοκιμάσει και να ελέγξει τα αντίστοιχα μοντέλα, με στόχο να βρεθεί η αποδοτικότερη επιλογή.

Τέλος, όπως και φάνηκε, στα τελευταία παραδείγματα που πραγματοποιήθηκαν, ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων, είναι κατά βάση ο χρόνος επίλυσης του μεικτού αέριου προβλήματος βελτιστοποίησης. Σχεδόν, όλος ο χρόνος επίλυσης είναι αυτός, με το χρόνο κάλυψης του γραμμικού προβλήματος, να είναι ελάχιστος.

Συμπερασματικά, παρά την παράλειψη του σταδίου της διακλάδωσης, η Branch and Price εξισορροπεί καλύτερα το κόστος και το χρόνο επίλυσης. Οι αεροπορικές εταιρίες καλούνται να αναλύσουν προσεκτικά τα δεδομένα τους και να δοκιμάσουν διαφορετικά μοντέλα, πριν λάβουν αποφάσεις. Η χρήση μεθόδων, όπως το Branch and Price, μπορεί να προσφέρει βέλτιστες λύσεις, εξασφαλίζοντας τη μέγιστη αποδοτικότητα σε επιχειρησιακό επίπεδο, αλλά και τη διατήρηση του κόστους σε ανταγωνιστικά επίπεδα.

7. Μελλοντική Έρευνα

Η παρούσα διπλωματική εργασία ανέδειξε αρκετές δυνατότητας περαιτέρω έρευνας. Στη συγκεκριμένη περίοδο, οι προοπτικές για μελλοντική ανάπτυξη και βελτίωση είναι πολλές και μπορούν να συμβάλλουν καθοριστικά στη δημιουργία πιο ολοκληρωμένων και ρεαλιστικών λύσεων για το πρόβλημα του προγραμματισμού πληρώματος αεροπορικών εταιριών.

Για παράδειγμα, ίσως και η πιο σημαντική εξέλιξη της παρούσας εργασίας θα ήταν η ανάπτυξη της εφαρμογής σε πραγματικά δεδομένα που περιλαμβάνουν τις πραγματικές διαδρομές μίας αεροπορικής εταιρίας. Εφόσον προστεθούν πραγματικές διαδρομές, με την ακριβή ώρα πτήσεων τους, θα προστεθούν οι περιορισμοί και οι προτιμήσεις των μελών του πληρώματος. Με δοκιμές στον αριθμό των μελών του πληρώματος θα βρεθεί η βέλτιστη λύση. Μετά από τέτοιες αλλαγές και διαφοροποιήσεις, η εφαρμογή θα μπορούσε να προσεγγίσει ρεαλιστικές ανάγκες και συνθήκες λειτουργίας σε μία αεροπορική εταιρία. Παράλληλα, μία ακόμη σημαντική εξέλιξη της εφαρμογής θα ήταν να προστεθούν μερικοί ακόμη περιορισμοί, με στόχο το πρόβλημα να γίνει ακόμη πιο ρεαλιστικό. Για παράδειγμα, σημαντικό θα ήταν να προστεθούν περιορισμοί όπως η ελάχιστη διάρκεια ανάπαυσης, η μέγιστη διάρκεια εργασίας και οι κανόνες για τις νυχτερινές πτήσεις. Τέτοιοι περιορισμοί θα καθιστούσαν το σύστημα πιο εφαρμόσιμο στις πραγματικές απαιτήσεις μίας αεροπορικής εταιρίας.

Μία επιπλέον, σημαντική επέκταση, θα ήταν η ενσωμάτωση κριτηρίων αξιολόγησης της ποιότητας των προγραμμάτων. Εκτός από το κόστος ισορροπίας και το παράθυρο χρόνου εργασίας που έχουν ήδη προστεθεί στο μοντέλο, θα μπορούσαν να περιληφθούν ποινές για δύσκολες συνθήκες, όπως για παράδειγμα σε περιόδους με μικρά διαστήματα ανάπαυσης ή όταν για παράδειγμα τα μέλη του πληρώματος ξεκινάν την εργασία νωρίς μετά από μέρες άδειας. Παράλληλα, η ενσωμάτωση των προτιμήσεων των μελών του πληρώματος στο σύστημα θα βελτίωνε κατά πολύ την αποδοτικότητα του και θα πρόσθετε μεγαλύτερη ικανοποίηση στους εργαζομένους.

Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα τόσο του τελικού κόστους όσο και του υπολογιστικού χρόνου επίλυσης των προβλημάτων φαίνονται ικανοποιητικά. Ωστόσο, σίγουρα η βελτιστοποίηση των παραμέτρων του αλγόριθμου αποτελεί μία πρόκληση για το μέλλον. Η εφαρμογή έχει περιθώρια εξέλιξης στα αποτελέσματα της, μία κατάσταση που φαντάζει ιδανική για τις αεροπορικές εταιρίες, οι οποίες και την αναζητάν.

Μία ακόμη από τις προκλήσεις, θα ήταν να ενσωματωθεί ολοκληρωμένη η εφαρμογή σε μία πλατφόρμα. Αυτό θα περιλάμβανε την ανάπτυξη ενός συστήματος για τη δημιουργία ζευγών πτήσεων και την ενσωμάτωση του στο πρόβλημα προγραμματισμού πληρώματος. Ουσιαστικά, μία τέτοια πλατφόρμα θα μπορούσε να δεχτεί τα δεδομένα μίας αεροπορικής εταιρίας, να τα επεξεργαστεί και να δώσει τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Οι αεροπορικές εταιρίες θα μπορούσαν έτσι να αξιολογήσουν την εφαρμογή άμεσα, και να τη χρησιμοποιήσουν για να συγκρίνουν τα αποτελέσματα τους.

Τέλος, σίγουρα με την ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας και της τεχνητής νοημοσύνης, τα τελευταία χρόνια έχουν ανοίξει νέες προοπτικές και νέους ορίζοντες. Με τη χρήση της τεχνητής νοημοσύνης, το σύστημα ενδεχομένως θα μπορούσε να προβλέψει τυχόν ακυρωμένες πτήσεις ή επιβάτες που τελικά δεν θα παρευρεθούν για αναχώρηση. Για παράδειγμα, η πρόβλεψη επιβατών που εν τέλει δεν θα χρησιμοποιήσουν το εισιτήριό τους, δίνει την δυνατότητα στην αεροπορική εταιρία να επιτρέψει την αγορά του εισιτηρίου ξανά, με αποτέλεσμα να μεγιστοποιεί τα έσοδα της. Τέτοια εργαλεία βελτιώνουν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων και καθιστούν το σύστημα πιο αποδοτικό.

Γενικότερα, η εφαρμογή μπορεί να εξελιχθεί σε διάφορα σημεία, έχοντας πολλές προοπτικές που μπορούν να προσφέρουν λύσεις στις αεροπορικές εταιρίες και να κριθούν καθοριστικές. Η υλοποίηση των παραπάνω ιδεών, αλλά και άλλων, μπορεί να καταστήσει το σύστημα πιο χρήσιμο και αποτελεσματικό.

8. Βιβλιογραφία

- [1] J.Desrosiers and M.E.Lübbercke, “A primer in column generation,” in Column Generation, Springer, 2005, pp. 1-32.
- [2] J.M.Rosenberger, H.S.Hwang, Ratna, ..., and E.G.Brungerdt, “The generalized weapon target assignment problem,” Article. Available: <https://www.researchgate.net/publication/228980383>.
- [3] F.N.Kazama, A.F.R Araujo, P. de B.Correia, and E.Guerrero-Pena, “Cnstraint-guided evolutionary algorithm for solving the winner determination problem,” Journal of Heuristics, vol. 27, no.2, Dec. 2021, doi:10.1007/s10732-021-09485-x.
- [4] R.García-Ródenas, A.Marín, and M.Patriksson, “Column generation algorithms for nonlinear optimization, II: Numerical investigations,” Computers & Operations Research , vol. 38, no. 3, pp. 591-604, Mar.2011, doi: 10.1016/j.cor.2010.07.021.
- [5] M.Akella, A.Sarkar, and S.Gupta. “Branch and price: Column generation for solving huge integer programs,” University at Buffalo. Created Oct 29, 2011, pp. 1-20.
- [6] G.Kozanidis, «Column generation for optimal shipment delivery in a logistic distribution network,” in Sustainable Logistics and Transportation, D.Cinar, K.Gakis, and P.M.Pardalos(Eds.), Springer Optimization and Its Applications, vol. 129, Berlin: Sprenger-Verlag,2018, pp. 87-112, doi: 10.1007/978-3-319-69215-9_5.
- [7] C.Bernhart, E.L.Johnson, G.L.Nemhauser, M.W.P.Savelsbergh, and P.H.Vance,”Branch and Price:Column generation for solving huge integer programs,” Operations Research, vol. 46, no.3, pp. 316-329, 1998, doi 10.1287/opre.46.3.316.
- [8] S.Bouarfa, H.A.P .Blom, R.Curran, and K.V.Hindriks, “A study into modeling coordination in disruption management by Airline Operations Control,” Conference Paper, Jun. 2014.
- [9] G.Desaulniers, J.Desrosiers, and M.M.Solomon, Column Generation, vol. 5, Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] D.R.Morrison, S.H.Jacobson, J.J.Sauppe, and E.C.Sewell, “Branch-and-Bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning” Discrete Optimization, vol. 19, pp. 79-102, 2016.
- [11] G.Kozanidis, “Branch and price for covering shipments in a logistic distribution network with a fleet of aircraft” Optimization Methods and Software, vol. 33, no. 2, pp 221-248, 2018, doi: 10.1080/10556788.2017.1281923.
- [12] İ.Muter, İ.Birbil, and K.Bülbul, “Simultaneous column-and-row generation for large-scale linear programs with column-dependent-rows,” Dec. 2013 [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/258395257_Simultaneous_column-and-row_generation_for_large-scale_linear_programs_with_column-dependent-rows.