

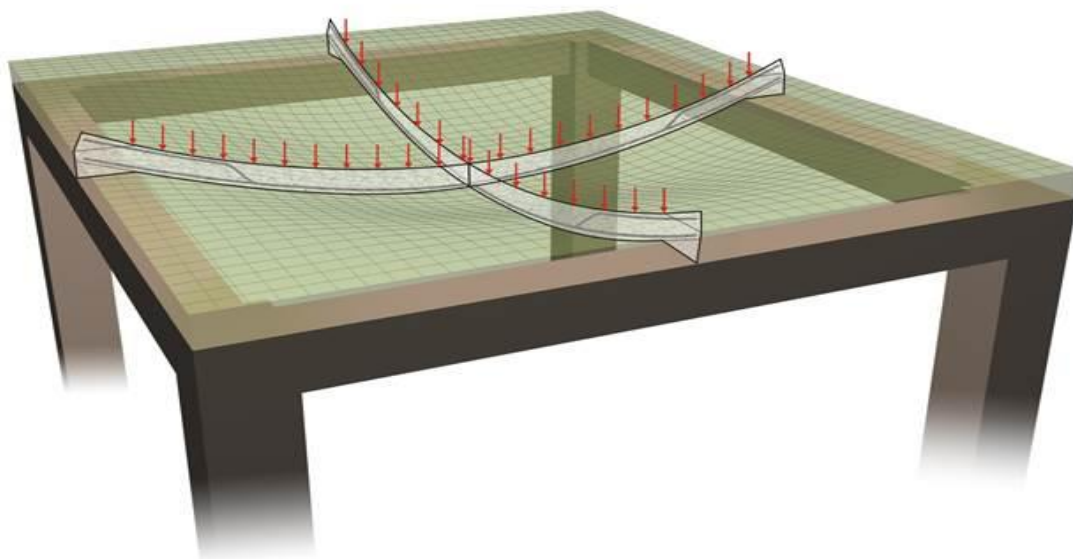


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Αναλυτικές μαθηματικές μέθοδοι και λύσεις στη θεωρία πλακών

ΠΑΤΣΙΑΝΤΑΣ ΑΡΓΥΡΙΟΣ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2024

© 2023 ΠΑΤΣΙΑΝΤΑΣ ΑΡΓΥΡΙΟΣ

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Θεοφάνης Γραμμένος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Ευριπίδης Μυστακίδης Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Παναγούλη Ολυμπία Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους όσους συνέβαλαν στην πραγματοποίηση αυτής της προσπάθειας. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, Αναπλ. Καθηγητή κ. Θεοφάνη Γραμμένο, για την καθοδήγηση, την υπομονή και τις πολύτιμες συμβουλές του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής. Η υποστήριξη και οι γνώσεις του υπήρξαν καθοριστικές για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης, Καθηγητή κ. Ευριπίδη Μυστακίδη και Αναπλ. Καθηγήτρια κ. Ολυμπία Παναγούλη για τον πολύτιμο χρόνο και τις προσπάθειές τους κατά την ανάγνωση και αξιολόγηση της διπλωματικής μου εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους μου και φίλους για την ενθάρρυνση και τη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στην οικογένειά μου για την αδιάκοπη υποστήριξη και την πίστη τους σε εμένα, χωρίς την οποία δεν θα μπορούσα να φέρω εις πέρας αυτή την προσπάθεια. Η ενθάρρυνσή τους με βοήθησε να παραμείνω προσηλωμένος και αισιόδοξος σε κάθε βήμα αυτής της προσπάθειας.

Τέλος, ευχαριστώ όλους τους φίλους μου για την ηθική υποστήριξη και την κατανόησή τους.

Με εκτίμηση,

Πατσιαντάς Αργύριος

Αναλυτικές μαθηματικές μέθοδοι και λύσεις στη θεωρία πλακών

Αργύριος Πατσιαντάς

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2024

Επιβλέπων Καθηγητής: Θεοφάνης Γραμμένος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην ανάπτυξη των μαθηματικών θεωριών πλακών και στις αναλυτικές μεθόδους επίλυσής τους στο πλαίσιο της ελαστοστατικής. Ξεκινώντας με την εισαγωγή στις βασικές θεωρίες και τις μεθόδους ανάλυσης πλακών, παρουσιάζεται η σημασία των πλακών στη μηχανική και οι διαφορετικές μέθοδοι επίλυσης. Στο δεύτερο κεφάλαιο, γίνεται αναφορά στα θεμελιώδη στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας, όπως οι τάσεις, οι μετακινήσεις, οι καταστατικές εξισώσεις και οι εξισώσεις ισορροπίας. Το τρίτο κεφάλαιο εξετάζει την κλασική θεωρία Kirchhoff-Love για λεπτές πλάκες, περιλαμβάνοντας τις αναλυτικές μεθόδους επίλυσης ορθογωνικών πλακών κυρίως μέσω των μεθόδων Navier και Levy. Στη συνέχεια, μελετάται η συμπεριφορά κυκλικών και ελλειπτικών πλακών με τη χρήση πολικών συντεταγμένων για την επίλυσή τους. Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι θεωρίες διατμητικών παραμορφώσεων Mindlin-Reissner και Reddy. Στο έκτο κεφάλαιο αναλύεται η μη γραμμική συμπεριφορά των λεπτών πλακών, καθώς και η στατική διατύπωσή τους μέσω των εξισώσεων Föppl-von Karman. Τέλος, η εργασία περιλαμβάνει παραρτήματα με εφαρμογές στο MATLAB και μια εισαγωγή στις σειρές Fourier, για τον προγραμματισμό και την βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών στοιχείων που διέπουν τις αναλυτικές μεθόδους επίλυσης λεπτών πλακών.

Λέξεις Κλειδιά: θεωρία Kirchhoff-Love, θεωρία πλακών, προβλήματα συνοριακών τιμών, μέθοδος Navier, μέθοδος Levy, μη γραμμικές θεωρίες πλακών, θεωρίες διατμητικών παραμορφώσεων.

Analytical mathematical methods and solutions in plate theory

Argyrios Patsiantas

University of Thessaly, Department of Civil Engineering, 2024

Supervisor: Theofanis Grammenos, Associate Professor

Abstract

The thesis focuses on the development of mathematical plate theories and their analytical solution methods within the framework of elastostatics. Starting with an introduction to the basic theories and methods of plate analysis, the importance of plates in engineering and the various solution methods are presented. In the second chapter, the fundamental elements of elasticity theory, such as stresses, displacements, constitutive equations, and equilibrium equations, are discussed. The third chapter examines the classical Kirchhoff-Love theory for thin plates, including analytical methods for solving rectangular plates, primarily through the Navier and Levy methods. Next, the behavior of circular and elliptical plates is studied using polar coordinates for their solution. The fifth chapter develops the shear deformation theories of Mindlin-Reissner and Reddy. In the sixth chapter, the nonlinear behavior of thin plates is analyzed, along with their static formulation through the Föppl-von Karman equations. Finally, the thesis includes appendices with MATLAB applications and an introduction to Fourier series for programming and deeper understanding of the mathematical elements governing the analytical solution methods for thin plates.

Keywords: Kirchhoff-Love theory, plate theory, boundary value problems, Navier method, Levy method, nonlinear plate theories, shear deformation theories.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή	11
1.1 Η σημασία των πλακών στη Μηχανική	11
1.2 Θεωρίες πλακών και αναλυτικές μέθοδοι	11
1.3 Παχιές πλάκες και μη γραμμικότητα	12
1.4 Σημασία των σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων	13
Κεφάλαιο 2 Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας	13
2.1 Εισαγωγή	13
2.2 Τάσεις	14
2.3 Παραμορφώσεις και μετακινήσεις	16
2.4 Καταστατικές Εξισώσεις	18
2.5 Εξισώσεις Ισορροπίας	18
2.6 Συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων	19
2.7 Καταστατικός νόμος υλικού	20
Κεφάλαιο 3 Θεωρία πλακών και αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης	21
3.1.α Υποθέσεις Kirchhoff-Love και κινηματικά μεγέθη	21
3.1.β Τάσεις, εξισώσεις ισορροπίας, δυνάμεις	27
3.1.γ Διαφορική εξίσωση πλακών Kirchhoff-Love	33
3.1.δ Συνοριακές συνθήκες και τέμνουσες Kirchhoff	35
3.2 Αναλυτικές μέθοδοι Navier και Levy για την επίλυση ορθογωνικών πλακών	38

3.2.1α	Μέθοδος Navier	39
3.2.1.β	Εφαρμογές της μεθόδου Levy	42
3.2.2	Επίλυση πλακών με απλές τριγωνομετρικές σειρές (Μέθοδος Ley)	50
3.2.2.β	Εφαρμογές της μεθόδου Levy	54
Κεφάλαιο 4 Κυκλικές και ελλειπτικές πλάκες		58
4.1	Μετατροπή των εξισώσεων και της διαφορικής εξίσωσης πλάκας σε πολικές συντεταγμένες	59
4.2	Εφαρμογές σε πλάκες με αξονοσυμμετρική φόρτιση	64
4.3	Ελλειπτικές πλάκες	73
Κεφάλαιο 5 Παχιές πλάκες μεσαίου πάχους		76
5.1	Πρώτης τάξης θεωρία διατμητικών παραμορφώσεων Mindlin-Reissner	76
5.2	Ανώτερης τάξης θεωρίες διατμητικών παραμορφώσεων (Reddy, Levinson)	84
Κεφάλαιο 6 Μη γραμμική ανάλυση (εξισώσεις von Karman)		88
6.1	Μη γραμμική συμπεριφορά της πλάκας	88
6.2	Εξισώσεις Förrpl-von Karman. Μη γραμμική θεωρία λεπτών πλακών	89
Βιβλιογραφία		93
Παράρτημα Α		94
A]	Σειρές Fourier	94
B]	Διπλές σειρές Fourier	98
Παράρτημα Β		100
B1]	Συνήθεις Λεπτές Πλάκες στο λογισμικό Matlab	100
B2]	Μέθοδος Navier στο λογισμικό Matlab	103

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος.....	14
Σχήμα 2.2: Ορθές και διατμητικές τάσεις (θετικές) σε στοιχειώδες τμήμα του σώματος με επίπεδα κάθετα στους άξονες x , y , z . (Τριανταφύλλου).....	15
Σχήμα 2.3: Απεικόνιση επίπεδης παραμόρφωσης ενός στοιχείου.....	16
Σχήμα 3.1.1: Γραφική απεικόνιση των υποθέσεων Kirchhoff-Love 3.,4. (Krauthammer).....	24
Σχήμα 3.1.2: Γεωμετρική καμπυλότητα δυο σημείων A , B που απέχουν dx κατά x και z από το μέσο επίπεδο, κατά την παραμόρφωση. (Szilard).....	25
Σχήμα 3.1.3: Κατανομή των τάσεων και δυνάμεων σε στοιχείο πλάκας πάχους t	28
Σχήμα 3.1.4 (Ugural).....	30
Σχήμα 3.1.5 (Krauthammer).....	31
Σχήμα 3.1.6: Αρχή Saint-Venant (Ugural).....	36
Σχήμα 3.1.7: Ανασήκωση γωνιών σε πλάκα με τεμνόμενες απλά εδραζόμενες πλευρές(Szilard).....	38
Σχήμα 3.2.1: (Szilard).....	42
Σχήμα 3.2.2: (Ugural).....	44
Σχήμα 3.2.3: (Ugural).....	47
Σχήμα 3.2.4: Σύστημα συντεταγμένων επίλυσης Levy με απλά εδραζόμενες πλευρές για $x=0$, $x=a$ και αυθαίρετες στηρίξεις στα $y=-b/2$, $y=b/2$. (Birman).....	50
Σχήμα 3.2.5 (Krauthammer).....	55
Σχήμα 3.2.6 (Ugural plates).....	57
Σχήμα 4.1: Σύνδεση πολικών συντεταγμένων με καρτεσιανές συντεταγμένες.....	59
Σχήμα 4.2: Εντατικά μεγέθη σε φορτισμένο στοιχείο κυκλικής πλάκας dr , $d\phi$.(Szilard).....	61
Σχήμα 4.3: Περιμετρικά πακτωμένη κυκλική πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(x,y)$.(Google).....	66

Σχήμα 4.4: Κυκλική πλάκα στηριζόμενη περιμετρικά με απλή έδραση υπό φόρτιση συγκεντρωμένης δύναμης στο κέντρο.(Mittelstedt).....	68
Σχήμα 4.5: Δακτυλιοειδής πλάκα υπό κάθετο κατανεμημένο φορτίο.(Google).....	70
Σχήμα 4.6: Απλά εδραζόμενη πλάκα υπό τμηματικό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο εσωτερικής ακτίνας R_i . (Mittelstedt).....	71
Σχήμα 4.7: Πακτωμένη ελλειπτική λεπτή πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.(Ugural).....	74
Σχήμα 5.1: Αρχική και παραμορφωμένη κατάσταση ενός πλευρικού στοιχείου πλάκας σύμφωνα με τις υποθέσεις της θεωρίας Mindlin-Reissner. (Reddy).....	78
Σχήμα 5.2: Συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης για τη θεωρία Mindlin-Reissner ($\varphi_x=\varphi$, $\varphi_y=\psi$). (Reddy).....	81
Σχήμα 5.3: Σύγκριση της παραμόρφωσης της μέσης επιφάνειας και της καθέτου,για ένα σημείο που απέχει z από αυτήν, κατά το xz επίπεδο για θεωρίες Kirchhoff-Love, Mindlin-Reissner, Levinson-Reddy.(Reddy).....	86
Σχήμα A1.1: Αυθαίρετη επέκταση της συνάρτησης $y=f(x)$ a.Περιττή b.Άρτια.(Szilard).....	98
Σχήμα B2.1: Σχήμα B2.1: Μέγιστο βέλος κάμψης για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση και ημιτονοειδές φορτίση ($m,n=1$)......	109
Σχήμα B2.2: Μέγιστο βέλος κάμψης για ομοιόμορφο κατανεμημένη φόρτιση για περισσότερους m,n όρους. ($m,n=1,3,5$)......	113
Σχήμα B2.3: Μέγιστη βύθιση 0,40 για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση για $m,n=1$ $b/\alpha=3$.115	
Σχήμα B2.4: Μέγιστη βύθιση 0,4894 για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση για $m,n=1$ $b/\alpha=10$	115
Σχήμα B2.5: Μέγιστη βύθιση 0,4968 για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση για $m,n=1$ $b/\alpha=20$	115

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι η κατανόηση της στατικής συμπεριφοράς της πλάκας υπό την επίδραση φορτίων. Η συμπυκνωμένη παράθεση των εξισώσεων και της αναλυτικής επίλυσής τους έχει στόχο να προσφέρει στον αναγνώστη μια προσιτή προσέγγιση στη μαθηματική θεωρία πλακών. Σε καμιά περίπτωση δεν υποκαθιστά επιστημονικά συγγράμματα και όποιος επιθυμεί να διευρύνει τις γνώσεις του επί του θέματος παροτρύνεται να προσφύγει στη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος.

Η μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των πλακών διαδραματίζει θεμελιώδη ρόλο στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού, όπου αυτές αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία. Οι πλάκες, που χαρακτηρίζονται ως επίπεδες, δισδιάστατες κατασκευές, έχουν την ικανότητα να αντέχουν σε ροπές κάμψης και εγκάρσιες δυνάμεις. Είναι απαραίτητα δομικά στοιχεία σε εφαρμογές όπως οροφές και δάπεδα κτιρίων, καταστρώματα γεφυρών καθώς και πτέρυγες αεροσκαφών και κύπη πλοίων. Αυτές οι εφαρμογές απαιτούν μια λεπτομερή κατανόηση του πώς οι πλάκες συμπεριφέρονται υπό κάθετα φορτία, και έχουν οδηγήσει με την πάροδο του χρόνου στην ανάπτυξη πολλών θεωριών πλακών και αναλυτικών μεθόδων μελέτης τους.

1.1 Η Σημασία των πλακών στη Μηχανική

Οι πλάκες χρησιμοποιούνται εκτενώς σε πολλά πεδία της μηχανικής λόγω της ευελιξίας τους και της αντοχής τους στη διαχείριση εγκάρσια κατανεμημένων φορτίων. Στη δομοστατική μηχανική, οι πλάκες εμφανίζονται ως πλάκες οροφής σε κτίρια και κατασκευές γεφυρών. Στην αεροδιαστημική μηχανική, οι πτέρυγες και οι άτρακτοι των αεροσκαφών είναι ουσιαστικά καμπύλες πλάκες, που απαιτούν κατανόηση της σύνθετης συμπεριφοράς κάμψης υπό ταυτόχρονα επίπεδα και εγκάρσια φορτία. Στα μηχανικά συστήματα, οι πλάκες αποτελούν βασικά στοιχεία σε συσκευές πίεσης, εναλλάκτες θερμότητας και μηχανικά εξαρτήματα, όπου η ικανότητά τους να κατανέμουν ομοιόμορφα τάσεις και παραμορφώσεις είναι κρίσιμη για την απόδοσή τους.

Η συμπεριφορά των πλακών υπό τη δράση φορτίου είναι καθοριστική για τον προσδιορισμό της ασφάλειας και της αντοχής των κατασκευών. Αναλυτικές και αριθμητικές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των πλακών, επιτρέποντας στους μηχανικούς να σχεδιάζουν κατασκευές που πληρούν αυστηρές προδιαγραφές απόδοσης. Οι κλασικές θεωρίες κάμψης πλακών παρέχουν βασικές λύσεις, ενώ πιο προχωρημένες θεωρίες λαμβάνουν υπόψη παράγοντες όπως η διάτμηση και η μη γραμμικότητα.

1.2 Θεωρίες πλακών και αναλυτικές μέθοδοι

Η θεωρία Kirchhoff-Love αποτελεί τον βασικό πυλώνα της κλασικής ανάλυσης λεπτών πλακών. Σε αυτήν τη θεωρία υποθέτουμε ότι μια πλάκα είναι αρκετά λεπτή σε πάχος σε σχέση με τις πλάγιες διαστάσεις της, με τις καμπτικές παραμορφώσεις να κυριαρχούν έναντι των διατμητικών παραμορφώσεων. Οι εξισώσεις που διέπουν τις πλάκες Kirchhoff-Love προέρχονται από τη θεωρία ελαστικότητας και παρέχουν λύσεις για πλάκες υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης και συνοριακές συνθήκες. Αυτή η θεωρία παραμένει ευρέως χρησιμοποιούμενη για λεπτές πλάκες όπου τα φαινόμενα διάτμησης είναι αμελητέα, προσφέροντας πρακτικά και αποτελεσματικά μέσα ανάλυσης των δομικών στοιχείων.

Εκτός από τη θεωρία Kirchhoff-Love, οι Navier και Levy ανέπτυξαν σημαντικές αναλυτικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων κάμψης πλακών με συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Αυτές οι λύσεις υποθέτουν ότι οι πλάκες είναι λεπτές και ελαστικές, επιτρέποντας ακριβείς λύσεις στις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κάμψη των πλακών. Η μέθοδος του Navier χρησιμοποιεί μια διπλή σειρά Fourier για ορθογωνικές πλάκες με απλά στηριζόμενες πλευρές, και παρέχει ακριβείς λύσεις. Η μέθοδος του Levy, από την άλλη πλευρά, επεκτείνει τη λύση του Navier αντιμετωπίζοντας περισσότερες περιπτώσεις πλακών με λιγότερο επίπονη διεργασία (δεν απαιτεί τη χρήση διπλών σειρών Fourier).

Αυτές οι μέθοδοι είναι ζωτικής σημασίας για την επίλυση κλασικών προβλημάτων κάμψης πλακών και παρέχουν μια βάση για πιο πολύπλοκες, είτε αριθμητικές είτε υπολογιστικές, μεθόδους ανάλυσης. Ενώ οι αναλυτικές λύσεις συχνά περιορίζονται σε συγκεκριμένες γεωμετρίες και συνοριακές συνθήκες, είναι αναγκαίες καθώς παρέχουν ακριβή κριτήρια για την επικύρωση αριθμητικών μεθόδων.

1.3 Παχιές πλάκες και μη γραμμικότητα

Καθώς οι κατασκευές πλάκας γίνονταν πιο σύνθετες και αυξανόταν η ανάγκη για ακρίβεια στις παχύτερες πλάκες, η κλασική θεωρία Kirchhoff-Love επεκτάθηκε για να λάβει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση. Η θεωρία Mindlin-Reissner εισήγαγε τη θεωρία πρώτης τάξης διάτμησης (FSDT), η οποία λαμβάνει υπόψη τις εγκάρσιες διατμητικές τάσεις, καθιστώντας την κατάλληλη για μετρίως παχιές πλάκες όπου τα φαινόμενα διάτμησης δεν μπορούν να αγνοηθούν. Αυτή η θεωρία γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ των θεωριών λεπτών πλακών και πιο προχωρημένων, παχίων πλακών.

Επιπλέον, η θεωρία τρίτης τάξης που αναπτύχθηκε από τον J.N. Reddy βελτιώνει περαιτέρω την ανάλυση των παχίων πλακών, λαμβάνοντας υπόψη εντονότερα φαινόμενα διάτμησης. Η θεωρία του Reddy προσφέρει πιο ακριβή αποτελέσματα για πλάκες μέτριου πάχους και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν απαιτείται ακρίβεια στις διατμητικές τάσεις.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, οι πλάκες υφίστανται μεγάλες παραμορφώσεις και τάσεις, με αποτέλεσμα τη μη γραμμική συμπεριφορά. Οι εξισώσεις von Karman αντιμετωπίζουν αυτές τις

μη γραμμικότητες επεκτείνοντας την κλασική θεωρία πλακών ώστε να συμπεριλάβουν γεωμετρικώς μη γραμμικά φαινόμενα. Αυτές οι εξισώσεις είναι κρίσιμες για την ανάλυση πλακών που υφίστανται σημαντικές βυθίσεις και παραμορφώσεις.

Λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων της μη γραμμικής θεωρίας είναι δύσκολο να βρεθούν αναλυτικές λύσεις και απαιτείται η χρήση προηγμένων αριθμητικών μεθόδων, όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM).

1.4 Σημασία των σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων

Ενώ οι κλασικές αναλυτικές μέθοδοι, όπως αυτές των Navier και Levy, προσφέρουν ακριβείς λύσεις, είναι περιορισμένες σε εύρος εφαρμοσιμότητας. Για πιο γενικές γεωμετρίες και για σύνθετες συνθήκες φόρτισης, οι αριθμητικές μέθοδοι όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) έχουν καταστεί απαραίτητα εργαλεία στην ανάλυση πλακών. Η μέθοδος FEM μέσω της διακριτοποίησης σύνθετων γεωμετριών πλακών, επιτρέπει τη λεπτομερή ανάλυση της κάμψης, των διατμητικών παραμορφώσεων και της μη γραμμικής συμπεριφοράς υπό ρεαλιστικές συνθήκες φόρτισης.

Ο συνδυασμός κλασικών θεωριών και αριθμητικών μεθόδων παρέχει στους μηχανικούς ισχυρά εργαλεία για την ανάλυση και τον σχεδιασμό κατασκευών πλακών. Στην πράξη, οι κλασικές λύσεις χρησιμοποιούνται συχνά ως σημεία αναφοράς, ενώ οι αριθμητικές μέθοδοι εφαρμόζονται σε πιο πολύπλοκα προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Με τον συνδυασμό κλασικών λύσεων και σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων, οι μηχανικοί μπορούν να σχεδιάζουν κατασκευές πλακών που ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις των σύγχρονων εφαρμογών, εξασφαλίζοντας τόσο την ασφάλεια όσο και την απόδοση. Τα επόμενα κεφάλαια αυτής της διπλωματικής εργασίας θα εμβαθύνουν περαιτέρω στις θεωρίες που προαναφέρθηκαν.

Κεφάλαιο 2 Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας

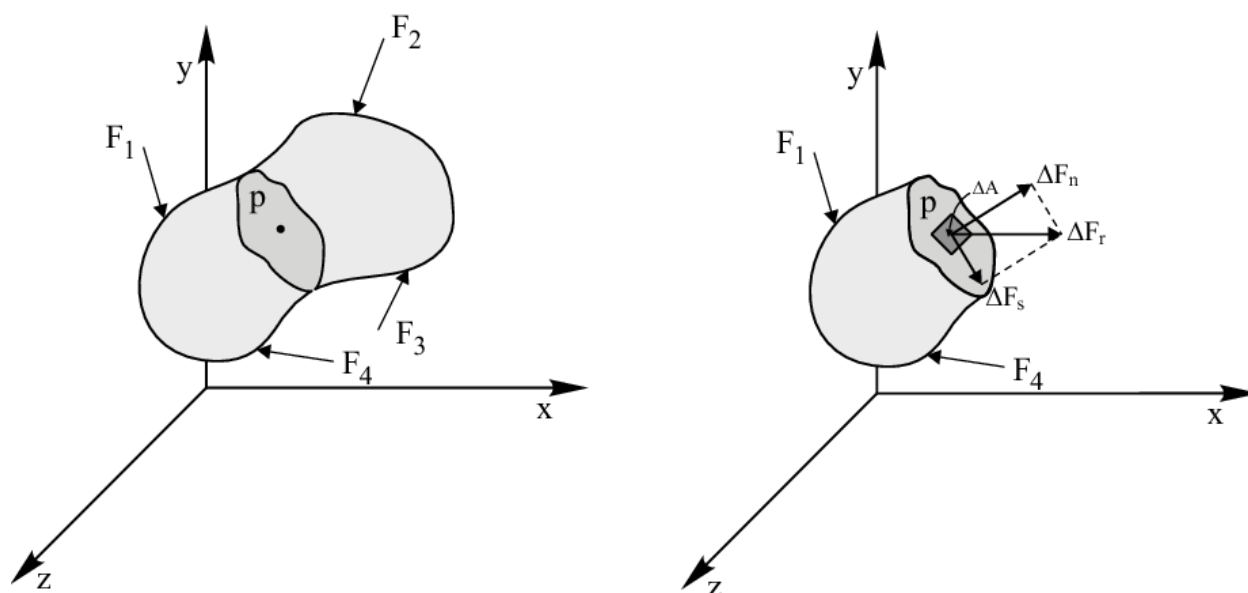
2.1 Εισαγωγή

Οι κλασικές θεωρίες πλακών χρησιμοποιούν στη βάση τους την κλασική θεωρία ελαστικότητας, η οποία μελετά τις σχέσεις μεταξύ δυνάμεων, μετατοπίσεων, τάσεων και παραμορφώσεων σε ένα ελαστικό σώμα. Η άσκηση ενός εξωτερικού φορτίου σε ένα στερεό σώμα, έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εσωτερικών τάσεων και παραμορφώσεων αναλόγως του φορτίου που εξαρτώνται από τις μηχανικές ιδιότητες του σώματος. Στην κλασική θεωρία ελαστικότητας αναφερόμαστε σε ελαστικώς γραμμικά υλικά, όπου οι σχέσεις τάσεων, παραμορφώσεων είναι γραμμικές καθώς και σε υλικά τα οποία είναι ομογενή και ισότροπα. Ομογενές είναι ένα υλικό το οποίο έχει ίδιες ιδιότητες σε οποιοδήποτε σημείο. Ισότροπο ονομάζεται ένα υλικό όταν είναι ελαστικώς ισοδύναμο σε όλες τις διευθύνσεις και επομένως παρουσιάζει πλήρη συμμετρία. Αυτό το οποίο επιδιώκουμε με τη θεωρία ελαστικότητας είναι να εκφράσουμε τις σχέσεις μεταξύ των μηχανικών

ιδιοτήτων του σώματος και να οδηγηθούμε σε ίδιο αριθμό αγνώστων και εξισώσεων ώστε να υπάρχει μοναδική λύση.

2.2 Τάσεις

Στο Σχήμα 2.1 θεωρούμε ένα ελαστικό σώμα το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία υπό την επίδραση των εξωτερικών επιφανειακών δυνάμεων. Εφαρμόζουμε μια κάθετη τομή σε ένα εσωτερικό σημείο P και χωρίζουμε το σώμα σε δύο μέρη. Προκειμένου να καταστεί δυνατή η ισορροπία αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις στη τομή. Οι εσωτερικές δυνάμεις ασκούνται σε μικρή επιφάνεια ΔA μιας τομής. Σύμφωνα με τον νόμο δράσης-αντίδρασης του Νεύτωνα οι εσωτερικές δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες.



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

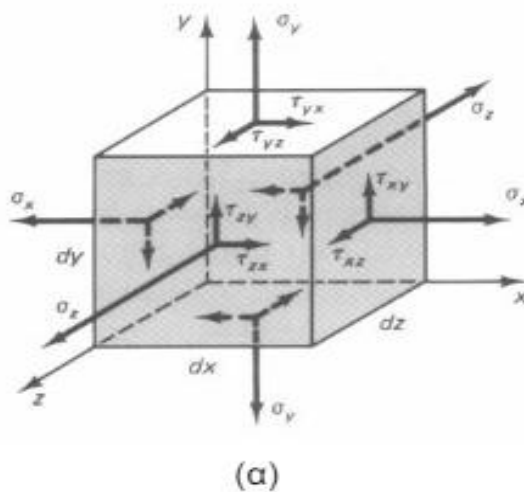
Το διάνυσμα της τάσης στο σημείο P ορίζεται από τη σχέση:

$$t = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A} = \frac{df}{dA}$$

όπου Δf είναι η δύναμη που ασκείται σε μια επιφάνεια ΔA γύρω από το σημείο P. Για διαφορετικές διευθύνσεις τις επιφάνειας ΔA αλλάζει ο προσανατολισμός και έχουμε διαφορετικές τάσεις. Τρία επίπεδα κάθετα μεταξύ τους είναι αρκετά για να βρεθεί το διάνυσμα της τάσης σε οποιαδήποτε διεύθυνση. Στη θεωρία ελαστικότητας χρησιμοποιούμε συνήθως για το ελαστικό σώμα το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς xyz.

Αν επιπρόσθετα της υποθετικής τομής θεωρήσουμε ένα εσωτερικό σημείο στο σώμα του Σχήματος 2.2, αντιστοιχίζοντας ένα παραλληλεπίπεδο στοιχείο απειροστών διαστάσεων με

πλευρές παράλληλες στα επίπεδα συντεταγμένων, μπορούμε να περιγράψουμε την ένταση των εσωτερικών δυνάμεων σε κάθε πλευρά. Αυτές αναλύονται στην κύρια ορθή τάση, κάθετη στο επίπεδο, και στις εφαπτόμενες διατμητικές τάσεις που εφαρμόζονται παράλληλα στο επίπεδο. Ο πρώτος δείκτης δηλώνει τον κάθετο άξονα ενώ ο δεύτερος τον παράλληλο στον οποίο εφαρμόζεται το διάνυσμα της τάσης. Οι τάσεις είναι θετικές κατά τους δείκτες των θετικών αξόνων. Όταν η τάση και το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο που δρα αυτή έχουν την ίδια διεύθυνση θεωρούμε ότι είναι θετική.



Σχήμα 2.2: Ορθές και διατμητικές τάσεις (θετικές) σε στοιχειώδες τμήμα του σώματος με επίπεδα κάθετα στους άξονες x , y , z . (Τριανταφύλλου)

Ο ταυστής των τάσεων για ένα τριδιάστατο ελαστικό σώμα εκφράζεται ως:

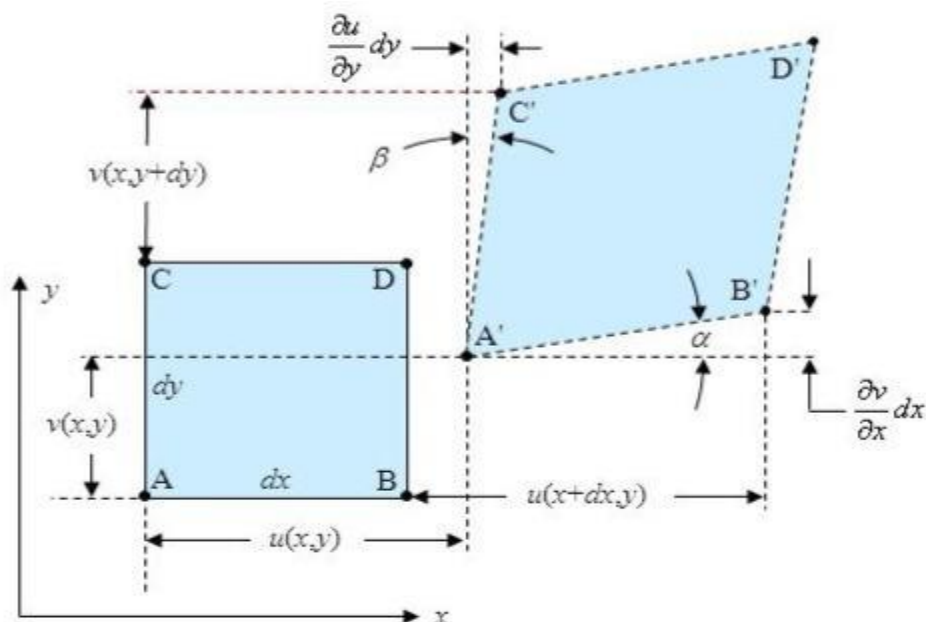
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Επομένως μόνο 6 από τις 9 μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Για τον διδιάστατο ταυστή τάσεων ισχύει $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι 3.

Λόγω συμμετρίας έχουμε $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (2.2.2)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

2.3 Παραμορφώσεις και μετακινήσεις



Σχήμα 2.3: Απεικόνιση επίπεδης παραμόρφωσης ενός στοιχείου

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το επίπεδο στοιχείο του Σχήματος 2.3. Για λόγους απλοποίησης αποδεικνύουμε στις δύο διαστάσεις τη σύνδεση παραμορφώσεων μετακινήσεων. Αρχικά αυτό είναι ορθογωνικό με πλευρές dx και dy απειροστού μήκους. Κατά την παραμόρφωση ένα σημείο (x,y) μετακινείται κατά (u,v) , όπου x,y οι προβολές των αποστάσεων στους άξονες x και y αντίστοιχα. Οι αρχικές, λοιπόν, πλευρές dx και dy αλλάζουν μήκος και δεν είναι πια ορθογωνικές, σχηματίζοντας γωνίες γ_1 και γ_2 ως προς τους άξονες. Οι μετακινήσεις του σημείου $(x+dx, y)$ δίνονται από τους δύο πρώτους όρους της σειράς Taylor ως $u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$ κατά x και $v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$ κατά y . Λαμβάνοντας υπόψη τον γεωμετρικό ορισμό της παραμόρφωσης ενός σώματος έχουμε $\epsilon = \frac{L-L_0}{L}$, όπου $L=dx$ το αρχικό μήκος.

Υποθέτουμε $\gamma_1 \ll 1$, $L=dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x})$ και καταλήγουμε σε $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Έστω ότι στις τρεις διαστάσεις η μετακίνηση κατά τον άξονα z συμβολίζεται ως w . Έχουμε

$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$. Η διατμητική παραμόρφωση ανάμεσα στους άξονες x, y είναι

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Όταν οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων ενός σώματος είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις γραμμικές διαστάσεις του, ο τανυστής παραμόρφωσης παίρνει τη μορφή $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial u_i & \partial u_j \\ \partial x_j & \partial x_i \end{pmatrix}$

Συνεπώς ο τριδιάστατος τανυστής παραμόρφωσης γράφεται σε μητρική μορφή.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

Οι κινηματικές εξισώσεις συνδέουν τις παραμορφώσεις με τις μετακινήσεις σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{zy} &= \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Στις δύο διαστάσεις έχουμε:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad (2.3.3)$$

Λόγω συμμετρίας οι άγνωστες παραμορφώσεις είναι 6 στις τρεις διαστάσεις και 3 στις δύο. Συνοψίζοντας παρατηρούμε πως οι ορθές συνιστώσες ε_x , ε_y , ε_z μάς δίνουν τις ανοιγμένες

μηκώνσεις στους άξονες x, y, z αντίστοιχα, ενώ οι διατμητικές συνιστώσες μας δείχνουν το μισό της μεταβολής των αρχικά ορθών γωνιών μεταξύ των ανά ζεύγος αξόνων.

2.4 Καταστατικές Εξισώσεις

Αναφερόμενοι σε γραμμικώς ελαστικά σώματα, παρατηρείται ότι οι συνιστώσες τάσης της καταστατικής τους εξίσωσης είναι γραμμικές συναρτήσεις όλων των συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης.

$$\sigma_{ij} = \kappa_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.4.1)$$

Η ίδια εξίσωση σε ένα τονούμενο σύστημα συντεταγμένων και με την υπόθεση ότι

$$\sigma' = C \sigma C^T \text{ και } \varepsilon' = C \varepsilon C^T \quad (2.4.2)$$

θα γραφεί ως

$$\sigma'_{ij} = \kappa_{ijkl} \varepsilon'_{kl}$$

επειδή από (2.4.2) προκύπτει

$$\kappa_{ijkl} = \kappa'_{ijkl}$$

Αυτός ο τανυστής είναι τέταρτης τάξης οπότε έχει $3^4 = 81$ συνιστώσες, αλλά λόγω συμμετρίας των τανυστών τάσης και παραμόρφωσης, καταλήγει να έχει 36 συνιστώσες που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει η γενική μορφή του μητρώου δυσκαμψίας κ_{ijkl} για ένα ανισότροπο γραμμικώς ελαστικό σώμα.

2.5 Εξισώσεις Ισορροπίας

Ως βασικό βήμα στην επίλυση προβλημάτων της θεωρίας ελαστικότητας θεωρείται η διατύπωση των στεροστατικών συνθηκών ισορροπίας. Για τη διατύπωσή του θα χρησιμοποιήσουμε το απειροστό στοιχείο του Σχήματος 2.2. Οι τάσεις σε κάθε θετική ή αρνητική πλευρά του επιπέδου διαφέρουν κατά κάποιες απειροστές αυξήσεις. Αυτές εκφράζονται ως $d\sigma_{xx}$, $d\sigma_{yy}$, $d\sigma_{zz}$, $d\tau_{xy}$, $d\tau_{yz}$, $d\tau_{xz}$, που μπορούν να εκφραστούν ως σειρές Taylor οι οποίες τερματίζονται μετά τον πρώτο όρο.

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx d\sigma_{yy} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy d\sigma_{zz} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz$$

$$d\tau_{xy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx d\tau_{yx} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy d\tau_{xz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz$$

$$d\tau_{zx} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz d\tau_{yz} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy d\tau_{zy} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$$

(2.5.1)

Θα εξετάσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τον άξονα x .

$$\left(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\tau_{xy} + d\tau_{xy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz +$$

$$\left(\tau_{zx} + d\tau_{zx} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

(2.5.2)

Παρατηρώντας ότι $t_{ij} = t_{ji}$ οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0.$$

(2.5.3)

Όμοια γίνεται η απόδειξη για τους άξονες y και z .

Προφανώς, οι συνθήκες ισορροπίας είναι 3 και οι άγνωστοι 6. Επομένως το πρόβλημα παρουσιάζει στατική αοριστία και οι υπάρχουσες συνθήκες ισορροπίας δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των τάσεων. Επιπρόσθετες εξισώσεις πρέπει να βρεθούν προκειμένου να προσδιοριστούν οι μεταβλητές κατάστασης ενός στερεού σώματος.

2.6 Συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων

Δεδομένου ότι οι τρεις εξισώσεις (2.5.3) δεν επαρκούν για να προκύψει λύση, τα προβλήματα τριδιάστατης ελαστικότητας είναι εσωτερικά υπερστατικά. Οι προηγούμενοι ορισμοί των σχέσεων (2.3.2) μας δείχνουν ότι οι έξι συνιστώσες παραμόρφωσης εξαρτώνται γραμμικά από τις παραγώγους των τριών συνιστωσών μετακινήσεων. Μπορούν να αναπτυχθούν έξι εξισώσεις που αναφέρονται ως συνθήκες συμβατότητας, παρουσιάζοντας τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ϵ_x , ϵ_y

, $\varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Ο αριθμός εξισώσεων γίνεται ένας στις δύο διαστάσεις. Οι συνθήκες συμβιβαστού δημιουργούνται απαλείφοντας τις μετακινήσεις από τις κινηματικές εξισώσεις .

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} &= 0\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

2.7 Καταστατικός νόμος υλικού

Οι καταστατικές εξισώσεις συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Για γραμμικό ελαστικό, ισότροπο και ομογενές υλικό, αυτές εκφράζονται από τον γενικό νόμο του Hooke.

Επομένως:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)], \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]\tag{2.7.α}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}\tag{2.7.β}$$

όπου E , ν , G , το μέτρο ελαστικότητας, ο λόγος Poisson, και το μέτρο διάτμησης, αντίστοιχα, και

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Παρατηρούμε ότι με τη διατύπωση των παραπάνω εξισώσεων, οι διαθέσιμες εξισώσεις έφτασαν τις δεκαπέντε και ο αριθμός αγνώστων είναι επίσης δεκαπέντε. Άρα το πρόβλημα πλέον έχει μοναδικές λύσεις που εξαρτώνται από τις εκάστοτε συνοριακές συνθήκες. Αντίστοιχα, έχουμε εννέα εξισώσεις και εννέα αγνώστους στη διδιάστατη εκδοχή της θεωρίας.

Κεφάλαιο 3 Θεωρία πλακών και αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε και θα καταστρώσουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη θεωρία πλακών για ορθογωνικές και κυκλικές πλάκες, καθώς και τις αναλυτικές μεθόδους επίλυσης των Navier και Levy.

3.1.α Υποθέσεις Kirchhoff-Love και κινηματικά μεγέθη

Επίπεδοι φορείς οι οποίοι δέχονται κάθετα φορτία στην επιφάνειά τους και το πάχος τους είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις τους ονομάζονται πλάκες. Με βάση το πάχος οι πλάκες κατατάσσονται σε :

Πλάκες λεπτές με πολύ μικρές παραμορφώσεις σε σχέση με τις διαστάσεις.

Πλάκες λεπτές με μεγάλες παραμορφώσεις.

Πλάκες μεγάλου πάχους.

Στη θεωρία πλακών ασχολούμαστε κυρίως με λεπτές πλάκες από γραμμικό και ισότροπο υλικό. Λεπτή ονομάζουμε μια πλάκα όταν το πάχος είναι σε αναλογία $1/10$ έως $1/50$ με τη μικρότερη των δύο άλλων διαστάσεων. Οι περισσότερες κλασσικές λεπτές πλάκες εμφανίζουν αναλογία $1/20$.

Η λύση της φόρτισης μιας λεπτής πλάκας απαιτεί τη χρήση τριδιάστατης ελαστικότητας. . Στις περισσότερες περιπτώσεις οι μαθηματικές δυσκολίες είναι μεγάλες και εκεί εμφανίζονται οι υποθέσεις των Kirchhoff-Love, που αποτελούν τη θεμελιώδη βάση για τη θεωρία πλακών προκειμένου να απλοποιηθεί, μέσω γεωμετρικών παραδοχών, το τριδιάστατο πρόβλημα σε πρόβλημα δύο διαστάσεων. Επίσης, το είδος της φόρτισης, η γεωμετρία και οι στηρίξεις που καθορίζουν τις συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να ευνοούν την εξαγωγή μιας ακριβούς λύσης, διαφορετικά θα πρέπει να αναζητηθεί λύση μέσω πειραματικών ή προσεγγιστικών μεθόδων (Marcus). Οι πολύτιμες, λοιπόν, για τη θεωρία, υποθέσεις των Kirchhoff-Love είναι:

1. Η βύθιση της μέσης επιφάνειας πρέπει να είναι πολύ μικρότερη του πάχους της πλάκας. Έτσι η κλίση της ελαστικής γραμμής είναι πολύ μικρή και το τετράγωνό της μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα ποσότητα.
2. Η πλάκα είναι αρχικά απαραμόρφωτη και στη μέση επιφάνεια της δεν αναπτύσσονται καθόλου εντάσεις κατά την κάμψη.
3. Ευθείες γραμμές, κάθετες στη μέση επιφάνεια διατηρούν το μήκος τους πριν και μετά την παραμόρφωση. Αν συμβολίσουμε με d_z την απόσταση πριν την παραμόρφωση και με d_z' μετά την παραμόρφωση ισχύει:

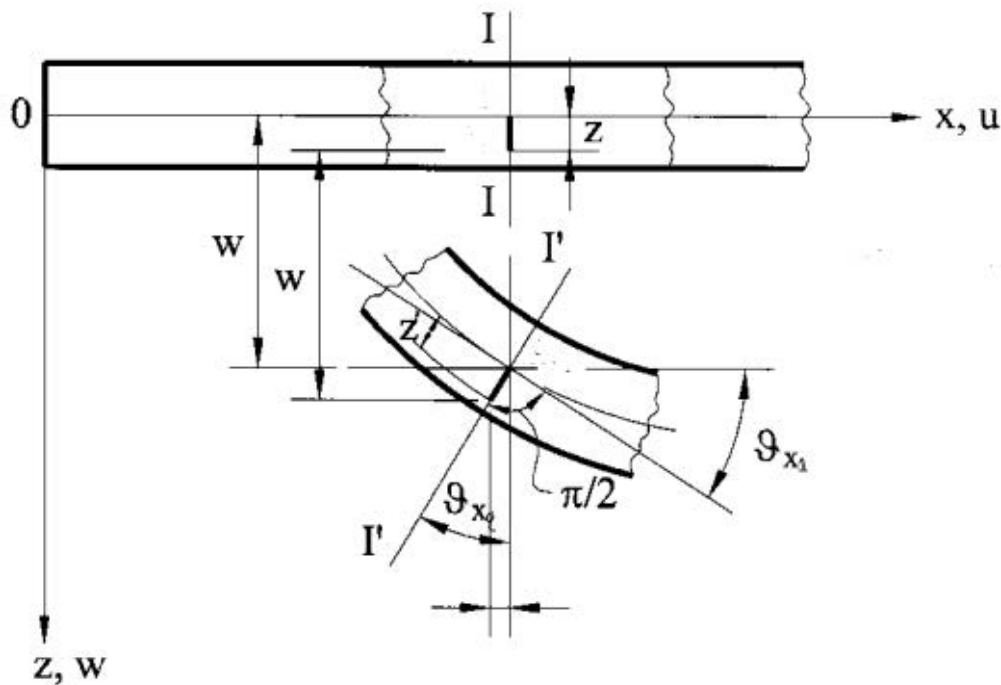
$$d_z = d_z' \Rightarrow \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w(x, y, z) = w(x, y).$$

Αυτό σημαίνει πως η συνάρτηση βύθισης κατά την κάμψη της πλάκας δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή z και το πάχος διατηρείται σταθερό. Επίσης, οι παραμορφώσεις ε_z μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Αυτή η υπόθεση αποτελεί επέκταση της θεωρίας Bernoulli για την κάμψη δοκών.(βλ. Σχήμα 3.1.1)

4. Ευθείες γραμμές κάθετες στη μέση επιφάνεια παραμένουν ευθείες και κάθετες στη μέση επιφάνεια και μετά την παραμόρφωση της πλάκας (βλ.Σχήμα 3.1.1). Δηλαδή οι γωνίες που σχηματίζουν πριν την παραμόρφωση οι κάθετες της πλάκας σε ένα σημείο της μέσης επιφάνειας, με τις ίδιες κάθετες μετά την παραμόρφωση είναι ίδιες (μηδενική διατμημητική τροπή):

$$\theta_{x_1} = \theta_{x_2} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

5. Στον τανυστή των τάσεων οι σ_z που είναι κάθετες στη μέση επιφάνεια είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις υπόλοιπες συνιστώσες και παραλείπονται.



Σχήμα 3.1.1: Γραφική απεικόνιση των υποθέσεων Kirchhoff-Love 3.,4. (Krauthammer)

Αξίζει να σημειώσουμε πως αν οι βυθίσεις του μέσου επιπέδου της λεπτής πλάκας είναι μεγάλες, τότε οι παραμορφώσεις θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οπότε οι 1 και 2 δεν ισχύουν παρά μόνο σε κυλινδρικές ή κωνικές γεωμετρίες. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όσο μεγάλες και αν είναι οι βυθίσεις παραμένουν, λόγω γεωμετρίας, μικρές σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις και θεωρούνται ίσες με το μηδέν.

Επιπλέον οι υποθέσεις (3) , (4) και (5) δεν ισχύουν σε πλάκες μεγάλου πάχους διότι σε αυτές η ανάπτυξη διατμητικών τάσεων παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Για αυτό αναφερόμαστε κυρίως σε λεπτές πλάκες όταν μιλάμε για τις υποθέσεις Kirchhoff-Love.

Για ένα τυχαίο σημείο που απέχει απόσταση z από τη μέση ουδέτερη επιφάνεια έχουμε τους εξής αγνώστους για προσδιορισμό:

- Τρείς μετατοπίσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$.

- Πέντε παραμορφώσεις ε_x , ε_y , γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} . ($\varepsilon_z=0$)

- Πέντε τάσεις σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} .

- Πέντε φορτία διατομής M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y

Θα ξεκινήσουμε τη διαδικασία κατάστρωσης της θεωρίας λεπτών πλακών εισάγοντας πρώτα τα κινηματικά μεγέθη. Από τις υποθέσεις (3), (4) οι κινηματικές εξισώσεις (2.3.2) της θεωρίας ελαστικότητας γίνονται

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

(3.1.1)

με $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$.

Μηδενική διατμητική τροπή κατά το xz επίπεδο.

$$\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{ολοκληρώνοντας ως προς } z \Rightarrow$$

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z + u_0(x,y). \quad (3.1.2)$$

Ομοίως, για τη μηδενική διατμητική τροπή κατά το yz επίπεδο προκύπτει:

$$\gamma_{yz} = 0 \Rightarrow v = -\frac{\partial w}{\partial y} z + v_0(x,y). \quad (3.1.3)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τώρα την υπόθεση Kirchhoff-Love 2, στη μέση επιφάνεια δεν αναπτύσσονται εντάσεις οπότε έχουμε $u_0(x,y) = v_0(x,y) = 0$. (3.1.4)

Επίσης, από την υπόθεση (3) το μήκος μιας κάθετης επιφάνειας μένει ίδιο πριν και μετά την παραμόρφωση $dz = dz' - \varepsilon z = 0 - \frac{\partial w}{\partial z} z = 0$. Άρα $w(x,y,z) = w(x,y)$. Η συνάρτηση βύθισης δεν

εξαρτάται από το πάχος. Συνδέοντας αυτές μεταξύ τους προκύπτουν οι εξισώσεις μετατοπίσεων πλάκας, όπου οι οριζόντιες μετατοπίσεις εξαρτώνται από το πάχος ενώ η κατακόρυφη βύθιση δεν εξαρτάται από το πάχος.

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z$$

$$v = -\frac{\partial w}{\partial y} z$$

$$w = w(x, y)$$

(3.1.5)

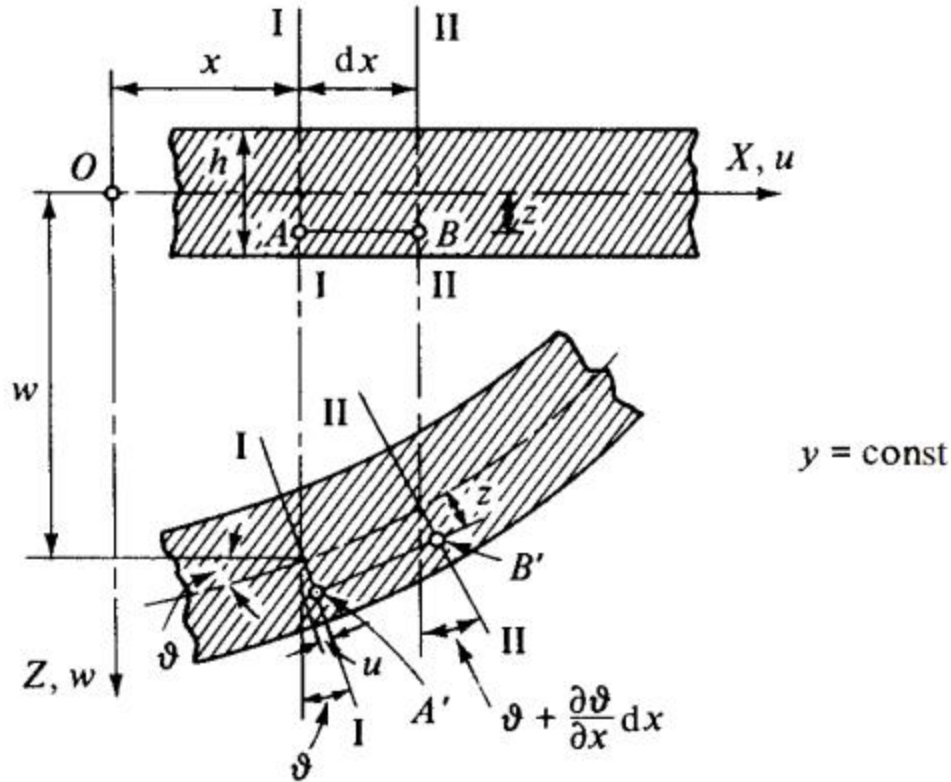
Επιστρέφοντας στις σχέσεις (2.3.2) και αντικαθιστώντας τις (3.1.5) προκύπτει:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} z \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(3.1.6)



Σχήμα 3.1.2: Γεωμετρική καμπυλότητα δυο σημείων A, B που απέχουν dx κατά x και z από το μέσο επίπεδο, κατά την παραμόρφωση. (Szilard)

Η καμπυλότητα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας κλίσης της καμπύλης ως προς την απόσταση κατά μήκος της καμπύλης. Εξαιτίας της υπόθεσης Kirchhoff-Love 1, τα τετράγωνα της κλίσης μπορούν να αμεληθούν και έτσι οι καμπυλότητες παίρνουν την πιο απλοποιημένη μορφή των εξισώσεων (3.1.7). Οι καμπυλότητες κ_x, κ_y εκφράζουν την κάμψη του επιπέδου της μέσης επιφάνειας ως προς τους αρχικούς άξονες Oxz και Oxy αντίστοιχα, κ_{xy} εκφράζει τη στρόφι λόγω στρέψης ως προς τους άξονες αυτούς. Θετική είναι η καμπυλότητα με τα κοίλα προς τα άνω, ενώ αρνητική με τα κοίλα προς τα κάτω.

$$\kappa_x = \frac{1}{\rho_x} = \frac{\partial^2 w / \partial x^2}{[1 + (\partial w / \partial x)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.7)$$

Εξισώνοντας (3.1.6) και (3.1.7) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= -z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= -2z\kappa_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

3.1.β Τάσεις, εξισώσεις ισορροπίας, δυνάμεις

Με την εισαγωγή των νέων δεδομένων ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$) από τη θεωρία λεπτών πλακών στις καταστατικές εξισώσεις του Κεφαλαίου 2, (2.6.α), (2.6.β), αυτές γίνονται:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Αν τώρα σε αυτές αντικαταστήσουμε τις (3.1.6) και (3.1.7) προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις καμπυλότητες και τη βύθιση:

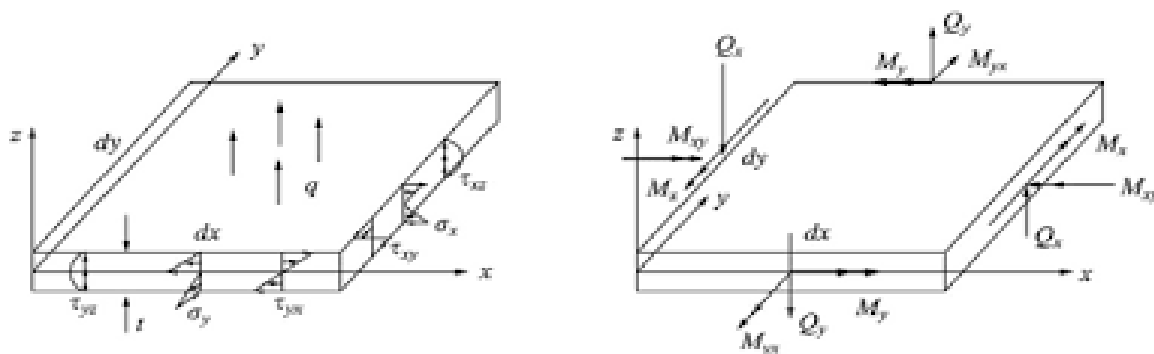
$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu\kappa_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_y + \nu\kappa_x) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \kappa_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.1.10\alpha)$$

Οι διατμητικές τάσεις και η τάση σ_z τις έχουμε ορίσει ως αμελητέες εξαιτίας των υποθέσεων της λεπτής θεωρίας πλακών. Εφόσον δεν έχουν συσχέτιση με τις παραμορφώσεις, ο προσδιορισμός τους γίνεται μέσω των γενικών εξισώσεων ισορροπίας (2.5.3).

$$\tau_{xz} = \int_z^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\tau_{yz} = \int_z^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

(3.1.10β)



Σχήμα 3.1.3: Κατανομή των τάσεων και δυνάμεων σε στοιχείο πλάκας πάχους t

Όπως παρατηρείται και στο Σχήμα 3.1.3:

- Στη μέση επιφάνεια της πλάκας οι τάσεις μηδενίζονται.
- Κατά τη διεύθυνση του πάχους οι ορθές τάσεις (σ_x , σ_y) και η διατμητική τάση τ_{xy} παρουσιάζουν γραμμική κατανομή.
- Οι διατμητικές τάσεις τ_{xz} , τ_{yz} κατανέμονται παραβολικά κατά τη διεύθυνση του πάχους.
- Στη μέση επιφάνεια έχουμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και στα όρια αυτές μηδενίζονται.

Για να εκφράσουμε τις συνθήκες στατικής ισορροπίας είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τα φορτία διατομής και να τα συνδέσουμε με τις τάσεις για ένα οποιοδήποτε σημείο του σώματος που απέχει απόσταση z από τη μέση επιφάνεια. Οι κατανεμημένες τάσεις παράγουν καμπτικές ροπές, ροπές συστροφής και τέμνουσες δυνάμεις. Για τις καμπτικές ροπές ευθύνονται οι ορθές τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} ενώ για τις δυνάμεις οι διατμητικές τάσεις τ_{xz} , τ_{yz} . Αυτές λέγονται φορτία διατομής M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y και υπολογίζονται ολοκληρώνοντας τις τάσεις κατά το πάχος της

πλάκας με αρχικό επίπεδο τον ουδέτερο άξονα ή αλλιώς μέση επιφάνεια της πλάκας. Οι ροπές είναι θετικές όταν δημιουργούν εφελκυστικές (δηλαδή θετικές) τάσεις στην κάτω επιφάνεια της πλάκας και οι τέμνουσες είναι θετικές εκεί που οι τάσεις είναι αντίστοιχα θετικές. Οι M_x , M_y αποτελούν ροπές κάμψης της πλάκας ανά μονάδα μήκους σε διατομές κάθετες στους άξονες x, y αντίστοιχα. Οι $M_{xy} = M_{yx}$ είναι ροπές συστροφής ανά μονάδα μήκους σε διατομές κάθετες στους άξονες x, y , αντίστοιχα. Έχουμε:

$$M_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz \quad (3.1.11)$$

όπου M_{xy} είναι οι ροπές στρέψης και τέμνουσες:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} dz \quad (3.1.12)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.1.10α) που συνδέουν τις τάσεις με τις καμπυλότητες στις (3.1.11) προκύπτουν οι εκφράσεις των ροπών συναρτήσει των καμπυλοτήτων και των βυθίσεων. Άρα έχουμε:

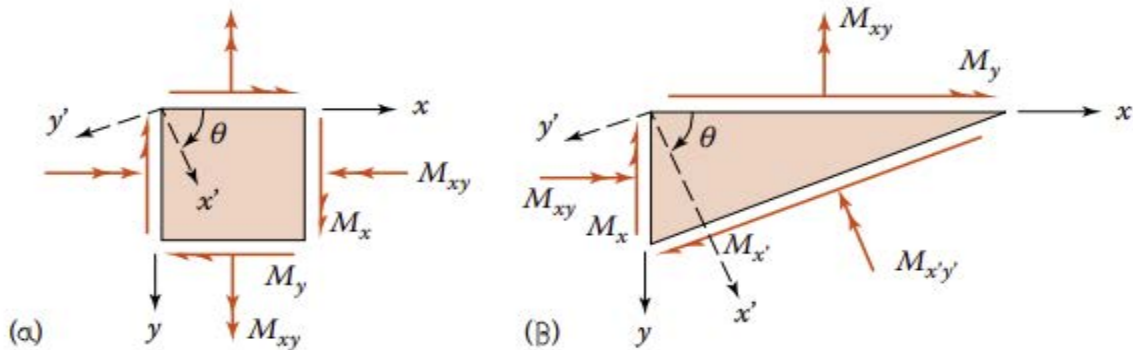
$$\begin{aligned} M_x &= -K(k_x + \nu k_y) = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -K(k_y + \nu k_x) = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -K(1 - \nu)k_{xy} = -K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

όπου $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu)^2}$ ο δείκτης δυσκαμψίας της πλάκας. Λόγω τού όρου $(1 - \nu)^2$ παρατηρούμε ότι η πλάκα παρουσιάζει 10 φορές περισσότερη δυσκαμψία από μια δοκό. Επιπλέον, παρατηρούμε την εξής αντιστοιχία. Σύμφωνα με την υπόθεση 4. Kirchhoff-Love περί της καθετότητας των διατομών αποδείξαμε ότι έχουμε μηδενική διατμητική τροπή, γεγονός που βάσει του νόμου του Hooke συνεπάγεται $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Για να μπορούμε παράλληλα να έχουμε $Q_x \neq 0$ και $\tau_{xz} = 0$ θα μπορούσε κάποιος να πει πως το μέτρο διάτμησης $G \rightarrow \infty$ οπότε η πλάκα έχει άπειρη δυσκαμψία σε διάτμηση.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.1.9) με (3.1.13), εκφράζουμε τις τάσεις σε σχέση με τα φορτία διατομής:

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{t^3}, \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3}, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3} \quad (3.1.14)$$

Ροπές κάμψης και συστροφής σε πλάγια διατομή:



Σχήμα 3.1.4 (Ugural)

Οι εξισώσεις μετασχηματισμού των ροπών είναι όμοιες με αυτές των τάσεων σ_{ij} (εφαρμογή του κύκλου Mohr).

Από Σχήμα 3.1.3 έχουμε:

$$M_{x'} = \frac{1}{2} (M_x + M_y) + \frac{1}{2} (M_x - M_y) \cos 2\theta + M_{xy} \sin 2\theta$$

$$M_{x'y'} = -\frac{1}{2} (M_x - M_y) \sin 2\theta + M_{xy} \cos 2\theta$$

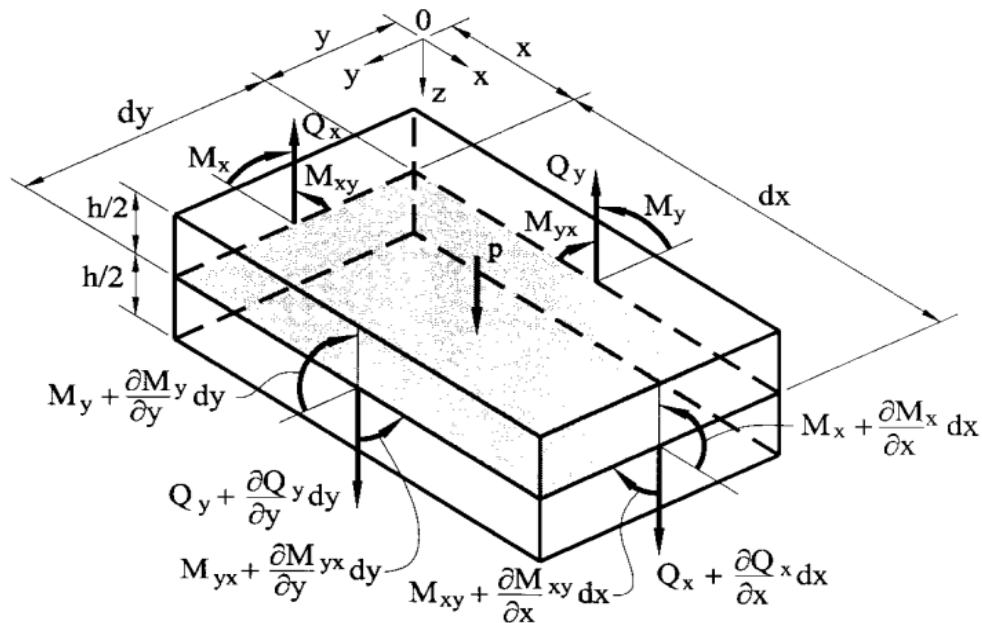
Ομοίως,

$$M_{y'} = \frac{1}{2} (M_x + M_y) - \frac{1}{2} (M_x - M_y) \cos 2\theta - M_{xy} \sin 2\theta$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να εξαχθούν και με ορθογώνιο μετασχηματισμό του μητρώου (ταυστής 2^{ης} τάξης) των ροπών:

$$M' = QMQ^T, \quad Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x'} & M_{x'y'} \\ M_{x'y'} & M_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Σχήμα 3.1.5 (Krauthammer)

Στο Σχήμα 3.1.5 έχουμε ένα στοιχείο πλάκας διαστάσεων dx , dy , στο οποίο ασκείται ένα φορτίο κάθετα προς τα κάτω κατά τον άξονα z . Για να εκφράσουμε τις συνθήκες ισορροπίας ενός τυχαίου σημείου που απέχει απόσταση z από τη μέση επιφάνεια, λαμβάνουμε υπόψη τα φορτία διατομής. Σε κάθε σημείο το φορτίο μεταβάλλεται προσαυξητικά από τον ουδέτερο άξονα και αυτό εκφράζεται από μια σειρά Taylor της οποίας αναγράφουμε προσεγγιστικά μόνο τους δύο πρώτους όρους.

Ισορροπία δυνάμεων:

-κατά τον άξονα z

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -Q_x dy - Q_y dx + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

(3.1.15a)

-κατά τον άξονα x

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x = 0 &\Rightarrow -M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \\
&\quad \left[\left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \right] \times dy - (dx dy) \times \frac{dy}{2} \\
&\Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - Q_y dx dy - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx dy - q dx dy \frac{dy}{2} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1.15\beta}$$

Επειδή $dx dy dy \ll dx dy$ ως όρος μικρότερης τάξης αμελείται και διαιρώντας με $dx dy$ προκύπτει η παραπάνω σχέση.

-Ομοίως, κατά τον άξονα y

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0.
\tag{3.1.15\gamma}$$

Εξισώνοντας τις (3.1.15β), (3.1.15γ) στην (3.1.15α) προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση καμπτόμενης λεπτής πλάκας η οποία είναι μη ομογενής γραμμική 2^{ης} τάξης και περιλαμβάνει τρία άγνωστα μεγέθη:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q
\tag{3.1.16}$$

Στη συνέχεια, για να ορίσουμε τις τέμνουσες δυνάμεις Q_x , Q_y ως προς τη βύθιση θα αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις ισορροπίας (3.1.15β), (3.1.15γ) τις σχέσεις (3.1.13) που συνδέουν τις ροπές με τις βυθίσεις. Άρα καταλήγουμε:

$$Q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)
\tag{3.1.17\alpha}$$

$$Q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w), \quad (3.1.17\beta)$$

όπου:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

ο διδιάστατος τελεστής Laplace.

3.1γ Διαφορική εξίσωση πλακών Kirchhoff-Love

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση ισορροπίας (3.1.16) τις εκφράσεις των M_x , M_y , M_{xy} (3.1.13) προκύπτει η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης (διαρμονική εξίσωση) πλάκας ως προς το βέλος κάμψης (βύθιση) $w(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{K} \quad \text{ή} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{K} \quad (3.1.18)$$

Η εξίσωση (3.1.18) μπορεί να αναχθεί σε δύο διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Σε πολλές περιπτώσεις βολεύει να χρησιμοποιούμε αυτές για να λύσουμε το πρόβλημα βάσει των δεδομένων μας. Προσθέτοντας τα M_x και M_y από τις (3.1.13) έχουμε:

$$M_x + M_y = -K(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -K(1 + \nu) \nabla^2 w \quad (3.1.19)$$

Το άθροισμα αυτό είναι ένα αναλλοίωτο του τανυστή των ροπών και αν θέσουμε

$$M = \frac{M_x + M_y}{(1 + \nu)} \quad (3.1.20)$$

τότε έχουμε από την (3.1.19) :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{K}$$

(3.1.21α)

Η εξίσωση (3.1.19) μπορεί να γραφεί σε μορφή

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{q}{K}$$

Αντικαθιστώντας σε αυτήν την (3.1.21α) προκύπτει

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) = -q$$

(3.1.21β)

Γνωρίζοντας τα δεδομένα για το φορτίο της πλάκας και τις συνοριακές συνθήκες μπορούμε να εξάγουμε τη ροπή M από την (3.1.21α) και να βρούμε τη βύθιση στην (3.1.21α).

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι για να καταστρώσουμε τη διαφορική εξίσωση ελαστικής πλάκας απαιτούνται τα παρακάτω βήματα.

- Η χρησιμοποίηση γεωμετρικών χαρακτηριστικών μιας καμπτόμενης πλάκας για την έκφραση των παραμορφώσεων ως προς τις μετακινήσεις.
- Η σύνδεση των τάσεων και των παραμορφώσεων μέσω του νόμου του Hooke.
- Η έκφραση των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων και των ροπών μέσω των εξισώσεων ισορροπίας.
- Τέλος, η σύνδεση των προηγούμενων με τις τάσεις και τις παραμορφώσεις και κατ' επέκταση με τις καμπυλότητες (βύθιση).

3.1δ Συνοριακές συνθήκες και τέμνουσες Kirchhoff

Η λύση της διαρμονικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πλάκας (3.1.18) πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα την εξίσωση αλλά και τις συνοριακές συνθήκες της πλάκας. Επειδή η εξίσωση είναι τέταρτης τάξης απαιτούνται δύο συνοριακές συνθήκες σε κάθε σύνορο που οφείλονται στις ροπές κάμψης και συστροφής και στις τέμνουσες δυνάμεις. Υπάρχει μία βασική διαφορά στις συνοριακές συνθήκες μεταξύ πλακών και δοκών και αυτή είναι η ύπαρξη ροπών συστροφής στα άκρα της πλάκας. Πιο κάτω θα δείξουμε ότι αυτές μπορούν να αντικατασταθούν με τέμνουσες δυνάμεις οδηγώντας στις δυνάμεις Kirchhoff. Από τις συνοριακές συνθήκες εξάγουμε δεδομένα με τη μορφή συνοριακών τιμών. Αναλόγως με το είδος, δηλαδή βυθίσεις και

κλίσεις λόγω του τρόπου στήριξης, φορτία και ροπές λόγω του είδους της φόρτισης ή συνδυασμούς αυτών, οι συνοριακές συνθήκες κατηγοριοποιούνται σε:

- Γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες, (πάκτωση)
- Στατικές συνοριακές συνθήκες, (ελεύθερη πλευρά)
- Μίξη των προηγούμενων, (απλά εδραζόμενη)

Πλάκα με απλά εδραζόμενο σύνορο:

Για $x=0$

$$M_x = 0 \Rightarrow K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Επειδή όμως κατά μήκος του συνόρου ισχύει $\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Μπορούμε να πούμε για $x=0$

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Αντίστοιχα, για $y=0$

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Πλάκα πακτωμένη:

Για $x=0$ το βέλος κάμψης είναι μηδέν όπως και η εφαπτόμενη στη μέση επιφάνεια κάθετη στη πακτωμένη πλευρά.

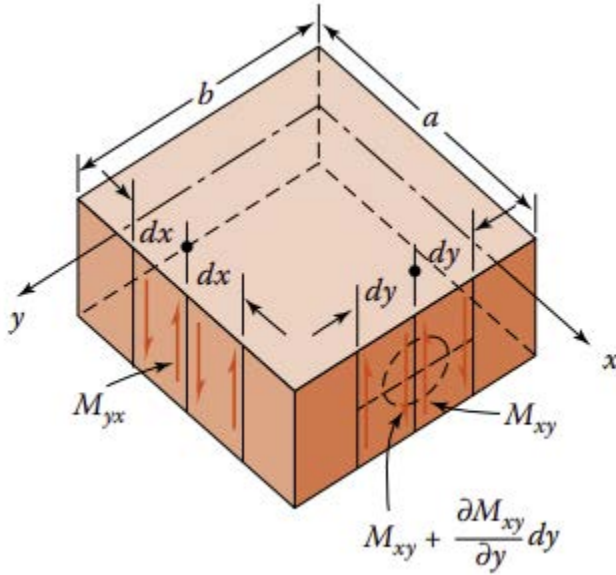
$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Αντίστοιχα για $y=0$

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ελεύθερη πλευρά:

Σε αυτή την περίπτωση όλα τα εντατικά μεγέθη M_x , M_{xy} , Q_x είναι μηδέν. Όπως έχουμε προαναφέρει όμως, σε κάθε σύνορο χρειαζόμαστε δύο συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η λύση. Η θεωρία των Kirchhoff-Love απέδειξε ότι υπάρχει συσχέτιση της ροπής συστροφής με την τέμνουσα.



Σχήμα 3.1.6: Αρχή Saint-Venant (Ugural)

Για να το δείξουμε αυτό θα αντικαταστήσουμε σε μια απειροστή περιοχή τη ροπή συστροφής με ένα ισοδύναμο ζεύγος δυνάμεων λόγω της αρχής του Saint-Venant. Σύμφωνα με την αρχή του Saint-Venant, αν σε ένα ελαστικό σώμα το φορτίο που δρα σε μια μικρή επιφάνεια αντικατασταθεί με ένα άλλο ισοδύναμο, δημιουργούνται ουσιαστικές μεταβολές των τάσεων αλλά σε μικρή απόσταση, π.χ. στην περίπτωση μας, στα άκρα. Στην περιοχή αυτή, αν στη συνισταμένη δύναμη $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ η οποία ισούται με $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ ανά μονάδα μήκους προστεθεί και η διατμητική τάση Q_x , τότε προκύπτει η υποκατάστατη τέμνουσα στο σύνορο παράλληλο στον άξονα y .

$$\bar{Q}_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -K \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (3.1.22\alpha)$$

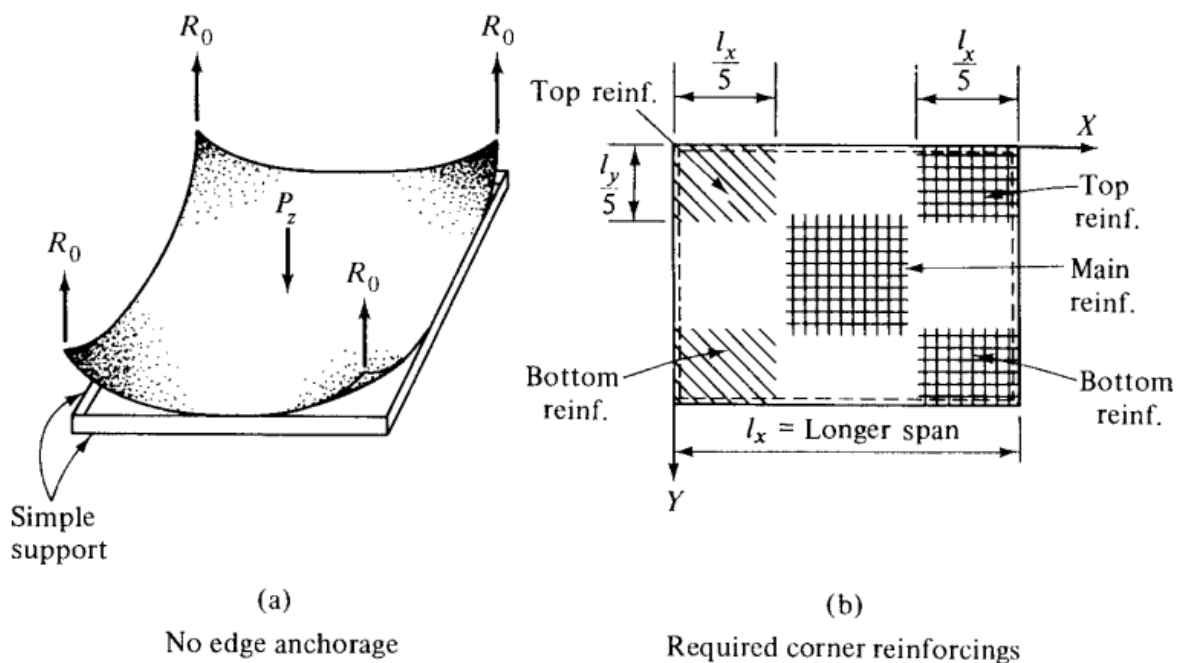
Ομοίως, για σύνορο παράλληλο στον άξονα x ,

$$\bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -K \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.1.22\beta)$$

Στις γωνίες των τετραγωνικών πλακών οι δυνάμεις από τις ροπές συστροφής προστίθενται μεταξύ τους αντί να αλληλοαναιρούνται ($M_{xy} = M_{yx}$) και παράγουν μια δύναμη R_c ίδια λόγω συμμετρίας σε όλες τις γωνίες ίση με

$$R_c = 2M_{xy} = -2K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.23)$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει φορά προς τα πάνω. Αυτό δημιουργεί ανασήκωση των γωνιών όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1.7) και πρέπει στα άκρα να προστεθούν αγκυρώσεις. Αν τα σύνορα των γωνιών είναι πακτώσεις τότε $M_{xy} = 0$, $R_c = 0$.



Σχήμα 3.1.7: Ανασήκωση γωνιών σε πλάκα με τεμνόμενες απλά εδραζόμενες πλευρές (Szilard)

Άρα, καταλήγοντας, στην ελεύθερη πλευρά οι συνοριακές συνθήκες είναι

Για $x = 0$

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ R_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0 \end{cases}$$

Για $y = 0$

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0 \end{cases} \quad (3.1.24)$$

3.2 Αναλυτικές μέθοδοι Navier και Levy για την επίλυση ορθογωνικών πλακών

3.2.1.α Μέθοδος Navier

Το 1820, ο C.L. Navier παρουσίασε στη Γαλλία τη μέθοδό του για την αναλυτική λύση της κάμψης ορθογωνικών πλακών χρησιμοποιώντας διπλές ημιτονικές σειρές Fourier. Έτσι κατάφερε να μετατρέψει τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική μέσω της παρακάτω μαθηματικής διαδικασίας.

Αρχικά η μέθοδος ισχύει για περιπτώσεις ορθογωνικών πλακών με συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης στις πλευρές και κάθετη φόρτιση $p(x,y)$. Θεωρούμε μια ορθογωνική πλάκα ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού, με μέτρο ελαστικότητας E και λόγο Poisson ν , διαστάσεων a και b ως προς τους άξονες x , y , αντίστοιχα. Οι συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης είναι :

$$\begin{aligned} (w)_{x=0,x=a} &= 0, m_{x x=0,x=a} = 0 \\ (w)_{y=0,y=b} &= 0, m_{y y=0,y=b} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.1.1)$$

Με τον τρόπο που αναγράφεται στο Παράρτημα Α1 εκφράζουμε τις συναρτήσεις βύθισης και φορτίου, με τους αντίστοιχους συντελεστές Fourier w_{mn} , q_{mn} , μέσω διπλών ημιτονικών σειρών Fourier, ως λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.1.18).

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(3.2.1.2)

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(3.2.1.3)

Από την προηγούμενη ενότητα γνωρίζουμε ότι το βέλος κάμψης $w(x,y)$ λεπτής πλάκας υπό στατικές συνθήκες φόρτισης επαληθεύει τη διαρμονική διαφορική εξίσωση (3.1.18)

$$\nabla^4 w = \frac{q(x,y)}{D}$$

Οι συνοριακές συνθήκες πληρούνται καθώς:

$$\text{για } x = 0 \quad w(0,y) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi 0}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$x = a \quad w(a,y) = \sum \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi a}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. (\sin m\pi = 0 \text{ για } m = 1,2,3,\dots)$$

$$\text{για } y = 0 \quad w(x,0) = 0$$

$$y = b \quad w(x,y) = 0 \left(\sin \frac{n\pi b}{b} = \sin n\pi = 0, n = 1,2,3,\dots \right)$$

Επιπλέον, παραγωγίζουμε την (3.2.2) για να δούμε αν ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στη μορφή της δεύτερης τους παραγώγου,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum \sum w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum \sum w_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

οι οποίες μηδενίζονται όμοια για $x(0,a)$, $y(0,b)$.

Αν προσδιοριστούν οι συντελεστές w_{mn} που ικανοποιούν την (3.1.18) τότε η (3.2.1.2) είναι και η λύση. Υπολογίζουμε τις τέταρτες μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum \sum w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum \sum w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum \sum w_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\pi^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x,y)}{D}.$$

Εξισώνοντας την παραπάνω με την εξίσωση φορτίου (3.2.1.3) έχουμε:

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βύθισης :

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

η οποία αποτελεί τη λύση Navier.

(3.2.1.4)

Με την ίδια λογική, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ροπές και τέμνουσες σε οποιοδήποτε σημείο, εφόσον αυτές έχουν εκφραστεί ως προς τη βύθιση $w(x,y)$ στη προηγούμενη ενότητα (3.1.13) , (3.1.17α,β).

$$m_x = \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

$$m_y = \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \nu \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right] w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

$$m_{xy} = -\pi^2 D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{ab} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

(3.2.1.5)

$$Q_x = \frac{\pi^3 d}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ m \left[\left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b} \right)^2 + (1 - \nu) \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \right\} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\alpha} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

$$Q_y = \frac{\pi^3 d}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 + (1 - \nu) \left(\frac{m}{\alpha} \right)^2 \right] \right\} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\alpha} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

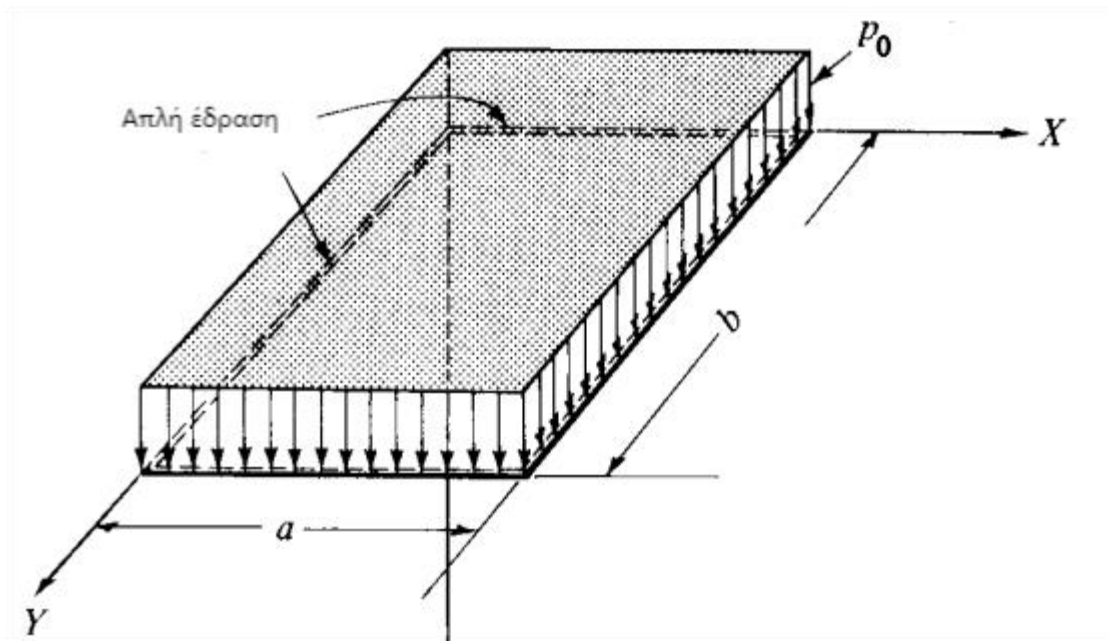
(3.2.1.6)

Οι σειρές Fourier για το βέλος κάμψης συγκλίνουν γρήγορα. Αυτό σημαίνει πως υπάρχει ικανοποιητική ακρίβεια λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πρώτους όρους της σειράς. Η σύγκλιση γίνεται πιο αργή όσο το φορτίο από ομοιόμορφα κατανεμημένο γίνεται συγκεντρωμένο ή ασκείται σε μικρό τμήμα.

3.2.1.β Εφαρμογές της μεθόδου Navier

Θεωρούμε μια ορθογωνική πλάκα διαστάσεων (α,β) η οποία θα υπόκειται σε διάφορες περιπτώσεις φορτίσεων. Στόχος είναι για την κάθε φόρτιση να βρούμε τους αγνώστους συντελεστές Fourier w_{mn} , p_{mn} και να προβούμε σε συμπεράσματα.

- Ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση $q(x,y)=q_0$, $x \in [0,\alpha]$ και $y \in [0,b]$



Σχήμα 3.2.1: (Szilard)

Αρχικά προσδιορίζουμε τον συντελεστή Fourier q_{mn} μέσω της εξίσωσης A5.(Παράρτημα A1):

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \Rightarrow q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \Rightarrow q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \left[-\frac{b}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi y}{b} \right]_0^b \right] \sin \frac{m\pi x}{a} dx =$$

$$= \frac{4q_0}{ab} \int_0^a -\frac{b}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{4q_0}{2n\pi} (\cos n\pi - 1) \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx =$$

$$= -\frac{4q_0}{2n\pi} [(-1)^n - 1] \left[-\frac{\pi}{mn} (\cos m\pi - 1) \right] \Rightarrow q_{mn} = \frac{4q_0}{\pi^2 mn} [(-1)^n][(-1)^m] \Rightarrow$$

$$q_{mn} = \begin{cases} 0, & m, n \text{ άρτια} \\ \frac{16q_0}{\pi^2 mn}, & m, n \text{ περιττά} \end{cases}$$

(3.2.1.7)

Επομένως,

$$q(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q_0 \quad (3.2.1.8)$$

Αντικαθιστώντας τον συντελεστή στην 3.2.1.4 έχουμε:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \quad (3.2.1.9)$$

Για να βρούμε τις ροπές έχοντας βρεί το q_{mn} , βρίσκουμε το w_{mn} μέσω της ,

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \text{ οπότε απο τις σχέσεις 3.2.1.5 :}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b} \right)^2}{mn \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} . \\ M_y &= \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}{mn \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} . \\ M_{xy} &= \frac{-16q_0(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} . \end{aligned} \quad (3.2.1.10)$$

Είναι εμφανές από τις προηγούμενες εξισώσεις πως στις πλευρές και στα άκρα οι ροπές M_x , M_y μηδενίζονται σε αντίθεση με τη M_{xy} . Όπως αναφέραμε και στη Θεωρία των Kirchhoff-Love, η ροπή συστροφής δημιουργεί μια διαταραχή στα άκρα μέσω ανακατανομής των τάσεων. Σύμφωνα όμως με την αρχή του Saint-Venant, αυτή η ανακατανομή φθίνει με ραγδαίο ρυθμό καθώς απομακρυνόμαστε προς το εσωτερικό της πλάκας.

Ας θεωρήσουμε μια τετραγωνική πλάκα. Για $x=a/2$ και $y=b/2$ στο κέντρο παρατηρούμε το μέγιστο βέλος κάμψης, καθώς και τις μέγιστες ροπές, ενώ η ροπή συστροφής μηδενίζεται .

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3,\dots} \int_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \cdot$$

$$(\text{Ισχύει } \sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}).$$

Θεωρώντας $m=n=1$, και λόγο Poisson $\nu=0,3$:

$$w_{\max} = 0,00416q_0 \frac{a^4}{D}.$$

Αθροίζοντας περισσότερους όρους για $m, n = 1$ και 3 , έχουμε $w_{\max} = 0,00406q_0 \frac{a^4}{D}$. Επομένως παρατηρούμε ότι το βέλος κάμψης έχει ραγδαία σύγκλιση και με ένα μόνο όρο της σειράς έχουμε ικανοποιητική ακρίβεια στο αποτέλεσμα.

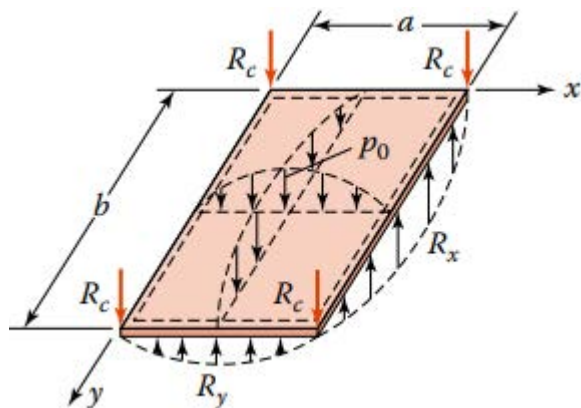
Αντίστοιχα, για τις ροπές στο κέντρο της τετραγωνικής πλάκας η διαφορά είναι:

$$M_{x_{\max}} = M_{y_{\max}} = 0,053q_0 a^4.$$

$$M_{x_{\max}} = M_{y_{\max}} = 0,046q_0 a^4.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις 3.2.1.9 της βύθισης συγκλίνουν με ταχύτερο ρυθμό σε σύγκριση με τις εξισώσεις 3.2.1.10 των ροπών.

- Ημιτονική φόρτιση $q(x,y)=q_0 \sin \pi x/a \sin \pi y/b$.



Σχήμα 3.2.2: (Ugural)

Σε αυτή την περίπτωση η φόρτιση είναι ήδη σε διπλή ημιτονική μορφή. Αναπτύσσοντας τη σειρά Fourier (Παράρτημα Α1) έχουμε:

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \Rightarrow$$

$$q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \Rightarrow q_{mn} = \begin{cases} q_0, & \text{για } m = n = 1. \\ 0, & \text{για τα υπόλοιπα } m, n. \end{cases}$$

Θεωρούμε $m=n=1$, άρα ως επακόλουθο έχουμε $q_{mn} = q_0$. Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3.2.1.4), (3.2.1.5), (3.2.1.6) προσδιορίζουμε το βέλος κάμψης, τις ροπές και τις τέμνουσες για τη συγκεκριμένη περίπτωση φόρτισης.

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

(3.2.1.11)

$$M_x = \frac{q_0}{\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

$$M_y = \frac{q_0}{\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

$$M_{xy} = -\frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

(3.2.1.12)

$$Q_x = \frac{q_0}{a\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

$$Q_y = \frac{q_0}{b\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

(3.2.1.13)

Το συνολικό φορτίο της πλάκας , αγνοώντας το ίδιο βάρος της, είναι:

$$\int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4q_0 ab}{\pi^2}.$$

Οι κατανεμημένες αντιδράσεις στις απλά εδραζόμενες πλευρές της πλάκας μπορούν να βρεθούν με τη χρήση των εξισώσεων (3.1.22.α) , (3.1.22.β) της ενεργής τέμνουσας.

$$\overline{Q}_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -\frac{q_0}{\alpha \pi (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{b^2})^2} (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2-\nu}{b^2}) \sin \frac{\pi y}{b}.$$

$$\overline{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -\frac{q_0}{b \pi (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{b^2})^2} (\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{\alpha^2}) \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Η συνολική δύναμη των αντιδράσεων στις τέσσερις πλευρές είναι:

$$F_{\text{συνολικό}} = 2 \int_0^b \overline{Q}_x dy + 2 \int_0^a \overline{Q}_y dx = -\frac{4q_0 ab}{\pi^2} - \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 \alpha \beta (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{b^2})^2}. \quad (3.2.1.14)$$

Προκειμένου η πλάκα να βρίσκεται σε ισορροπία θα πρέπει το ολικό φορτίο που φέρει η πλάκα να είναι ίσο με την συνισταμένη δύναμη των κατανεμημένων αντιδράσεων. Θα αποδείξουμε ότι την διαφορά εξισορροπούν οι δυνάμεις στις γωνίες (τέμνουσες Kirchhoff) που τείνουν να ανασηκώσουν την πλάκα. Από την (3.1.23) του προηγούμενου κεφαλαίου αντικαθιστώντας το βέλος κάμψης w για την ημιτονική φόρτιση. Για γωνία $x=a$, $y=b$:

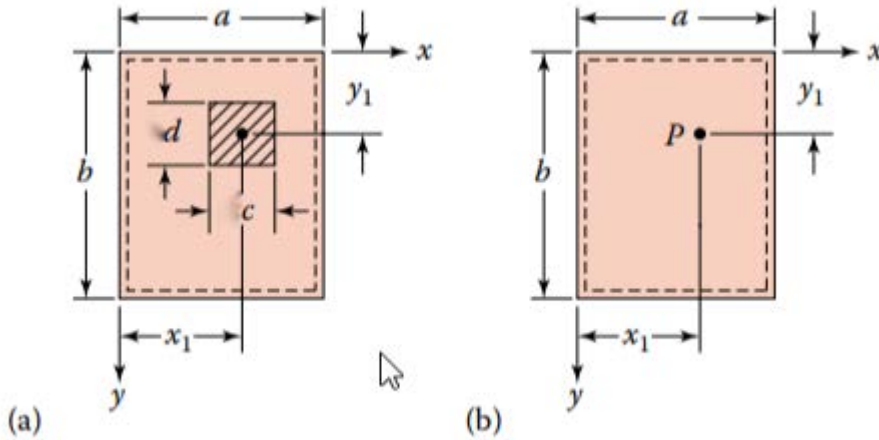
$$F_c = R_c = 2M_{xy} = -\frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{b^2})^2 \alpha b}.$$

$$\text{Αθροίζοντας 4 γωνίες } 4F_c = -\frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 (\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{b^2})^2 \alpha b}. \quad (3.2.1.15)$$

Εν τέλει αποκαθίσταται η ισορροπία ως:

$$|F_{\text{συνολικό}}| = |\text{ολικό εγκάρσιο φορτίο πλάκας}| + |4F_c|.$$

- Τμηματικά ομοιόμορφη φόρτιση σε αυθαίρετο τμήμα διαστάσεων (c, d) με κέντρο που απέχει x_1, y_1 από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3.2.3: (Ugural)

$$q(x, y) = \begin{cases} q_{mn}, & \text{για } \begin{cases} x \in (x_1 - \frac{c}{2}, x_1 + \frac{c}{2}) \\ y \in (y_1 - \frac{d}{2}, y_1 + \frac{d}{2}) \end{cases} \\ 0, & \text{σε οποιοδήποτε άλλο σημείο.} \end{cases}$$

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_{x_1 - \frac{c}{2}}^{x_1 + \frac{c}{2}} \int_{y_1 - \frac{d}{2}}^{y_1 + \frac{d}{2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$1) \int_{y_1 - \frac{d}{2}}^{y_1 + \frac{d}{2}} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = -\frac{b}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi y}{b} \right]_{y_1 - \frac{d}{2}}^{y_1 + \frac{d}{2}} = -\frac{b}{n\pi} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{b} \left(y_1 + \frac{d}{2} \right) \right) - \cos \left(\frac{n\pi}{b} \left(y_1 - \frac{d}{2} \right) \right) \right].$$

$$\text{Ομοίως, } 2) \int_{x_1 - \frac{c}{2}}^{x_1 + \frac{c}{2}} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{a}{m\pi} \left[\cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x_1 + \frac{c}{2}\right)\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x_1 - \frac{c}{2}\right)\right) \right].$$

Σε αυτή τη φάση εφαρμόζουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos(\psi_1 + \psi_2) - \cos(\psi_1 - \psi_2) = -2\sin\psi_1\sin\psi_2.$$

Επομένως τα ολοκληρώματα γίνονται:

$$1) \int_{y_1 - \frac{d}{2}}^{y_1 + \frac{d}{2}} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = -\frac{b}{n\pi} \left(-2\sin \frac{n\pi y_1}{b} \sin \frac{n\pi d}{2b} \right).$$

$$2) \int_{x_1 - \frac{c}{2}}^{x_1 + \frac{c}{2}} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{a}{m\pi} \left(-2\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi c}{2a} \right).$$

Άρα ο συντελεστής Fourier της φόρτισης είναι:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b}.$$

Επομένως:

$$q(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b}.$$

(3.2.1.16)

Από τη σχέση (3.2.1.4) που αποτελεί τη λύση Navier εκφράζουμε το βέλος κάμψης :

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

(3.2.1.17)

Το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο στο τμήμα (c,d) μπορούμε να το εκφράσουμε με ισοδύναμο στατικό φορτίο που ασκείται στο κέντρο βάρους του τμήματος: $p=q_0cd \Rightarrow q_0=p/cd$.

Άρα η (3.2.1.17) γίνεται:

$$w(x,y) = \frac{16p}{\pi^6 Dcd} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.2.1.18)$$

Κατ'έκταση, μπορούμε να βρούμε τη βύθιση για συγκεντρωμένο φορτίο στο σημείο (x_1, y_1)

θεωρώντας τις διαστάσεις c, d να τείνουν στο μηδέν:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{m\pi c}{2a}}{c} = \frac{m\pi}{2a}, \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b}}{d} = \frac{n\pi}{2b}.$$

Τότε

$$w(x,y) = \frac{4p}{\pi^4 Dab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.2.1.19)$$

Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι η δύναμη ασκείται στο μέσον σε απόσταση $x_1=a/2, y_1=b/2$ η

βύθιση παίρνει τη μορφή:

$$w(x,y) = \frac{4p}{\pi^4 Dab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

Σε περίπτωση τετραγωνικής πλάκας $a=b$ η μέγιστη βύθιση εμφανίζεται στο κέντρο :

$$w_{max} = \frac{4p\alpha^4}{\pi^4 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}, \quad m, n = (1, 2, 3, \dots)$$

Για λίγους πρώτους όρους λαμβάνουμε ($m=1, 3, 5, n=1, 3, 5$):

$$w_{max} = \frac{4p\alpha^4}{\pi^4 D} \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{50^2} \right] = 0,0114 \frac{p\alpha^2}{D}.$$

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση είναι αρκετά κοντά στην ακριβή λύση που είναι 0,0115.

3.2.2 Επίλυση πλακών με απλές τριγωνομετρικές σειρές Fourier(Μέθοδος Levy)

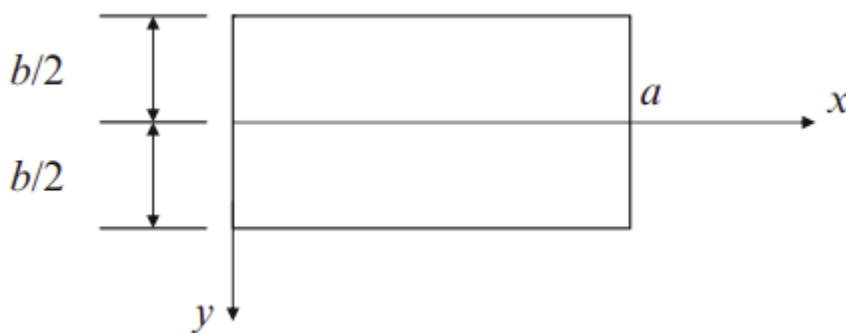
Το 1899 ο M. Levy ανέπτυξε μια μέθοδο επίλυσης ορθογωνικών πλακών με την προϋπόθεση ότι οι δύο απέναντι πλευρές είναι απλά εδραζόμενες και στις άλλες δύο ισχύουν οποιεσδήποτε συνοριακές συνθήκες. Το βασικό πλεονέκτημα έναντι της μεθόδου του Navier είναι η χρήση απλών και όχι διπλών σειρών Fourier. Κατά συνέπεια, η μέθοδος Levy αποτελεί πιο πρακτική μέθοδο καθώς η μαθηματική διαδικασία επίλυσης είναι σχετικά ευκολότερη και καλύπτει μεγαλύτερο εύρος περιπτώσεων πλακών. Επιπλέον λόγω της χρήσης απλών σειρών Fourier η μέθοδος Levy συγκλίνει ταχύτερα.

Για τη χρήση της μεθόδου η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση εξαρτάται μόνο από τη διάσταση x ($q=q(x)$) οπότε είναι επαρκής η απλή ημιτονική σειρά Fourier:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad m = 1, 2, 3, \dots \text{ (Απλή σειρά Fourier θεωρώντας το } y \text{ σταθερό)}$$

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx.$$

(3.2.2.1)



Σχήμα 3.2.4: Σύστημα συντεταγμένων επίλυσης Levy με απλά εδραζόμενες πλευρές για $x=0$, $x=a$ και αυθαίρετες στηρίξεις στα $y=-b/2$, $y=b/2$. (Birman)

Η διαρμονική διαφορική εξίσωση πλάκας (3.1.18) είναι γραμμική μη ομογενής και έτσι η γενική λύση της μπορεί να γραφεί στη μορφή $w = w_h + w_p$, όπου w_h είναι η λύση της αντίστοιχης

ομογενούς εξίσωσης $\nabla^4 w_h = 0$, ενώ η w_p είναι μια μερική λύση ολόκληρης της εξίσωσης $\nabla^4 w_p = \frac{q}{D}$.

- Εύρεση w_h .

Η γενική λύση της ομογενούς μπορεί να γραφεί ως:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{\alpha}, \quad (3.2.2.2)$$

όπου $w_h(0,y)$, $w_h(a,y) = 0$ και οι δεύτερες παράγωγοι για $x=0$, $x=a$ επίσης μηδενίζονται. Επομένως ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης (3.2.1.1). Η ομογενής διαρμονική εξίσωση $\nabla^4 w_h = 0$ γράφεται ως:

$$\frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} = 0. \quad (3.2.2.3)$$

Αναλύουμε ξεχωριστά τους όρους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\alpha^4} \right) f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \\ 2 \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^2 \partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f_m(y)}{\partial y^2} \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \right) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\alpha^2} \right) \frac{\partial^2 f_m(y)}{\partial y^2} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \\ \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^4 f_m(y)}{\partial y^4} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\nabla^4 w_h = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^4 f_m}{\partial y^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial y^2} + \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^4 f_m \right] \sin \frac{m\pi x}{\alpha} = 0. \quad (3.2.2.4)$$

Για να ισχύει η τελευταία πρέπει η αγκύλη να ισούται με 0:

$$\frac{\partial^4 f_m}{\partial y^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial y^2} + \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^4 f_m = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια γραμμική, ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι:

$$\lambda^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^4 = 0,$$

η οποία έχει δύο διπλές ρίζες :

$$\lambda_{1,2} = \frac{m\pi}{\alpha}, \lambda_{3,4} = -\frac{m\pi}{\alpha}$$

Επομένως, η λύση της διαφορικής εξίσωσης εκφράζεται συναρτήσει υπερβολικών συναρτήσεων ως:

$$f_m(y) = A_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha} + y(C_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha}). \quad (3.2.2.5)$$

Αντικαθιστώντας την (3.2.2.5) στην (3.2.2.2) προκύπτει η λύση της ομογενούς εξίσωσης:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha} + y(C_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha}) \right] \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \quad (3.2.2.6)$$

Οι συντελεστές A_m, B_m, C_m, D_m υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στις πλευρές για $y=-b/2, y=+b/2$. Θα δείξουμε παρακάτω ότι αν υπάρχει συμμετρία κατά y (ίδιες στηρίξεις στην άνω και κάτω πλευρά), τότε οι συντελεστές A_m, D_m μηδενίζονται και η σχέση απλοποιείται.

- Εύρεση w_p .

Η μερική λύση ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες κατά x και, αφού το φορτίο είναι ανεξάρτητο της διάστασης y , ικανοποιεί την εξίσωση αμφιέρειστης κυλινδρικά καμπτόμενης πλάκας:

$$\nabla^4 w_p = \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{D}. \quad (3.2.2.7)$$

Όπως και με το κάθετο καταναμεημένο φορτίο (3.2.2.1), κατ' αναλογία εισάγουμε για το βέλος κάμψης (βύθιση) την αντίστοιχη απλή ημιτονική σειρά Fourier:

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \quad (3.2.2.8)$$

Έχοντας εκφράσει τη w_p σε ημιτονική σειρά Fourier, την αντικαθιστούμε μαζί με την (3.2.2.1) στην εξίσωση (3.2.2.7) και αναλύουμε τους όρους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{D} \Rightarrow \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \right) &= \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^4 w_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha} &= \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη προκύπτει :

$$w_m = \frac{q_m \alpha^4}{m^4 \pi^4 D}. \quad (3.2.2.9)$$

Άρα από τις (3.2.2.8) και (3.2.2.9) παίρνουμε:

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \alpha^4}{m^4 \pi^4 D} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \quad (3.2.2.10)$$

Τελικά, αφού προσδιορίσαμε τη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μια μερική λύση τις προσθέτουμε και έτσι προκύπτει η λύση Levy για ορθογωνικές πλάκες:

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha} + y(C_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + D_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha}) \right] \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \alpha^4}{m^4 \pi^4 D} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2.2.11)$$

Η εξίσωση (3.2.2.11) αποτελεί τη βασική εξίσωση Levy και για την εφαρμογή της ακολουθούμε δύο βήματα:

1) Προσδιορισμός του άγνωστου συντελεστή Fourier q_m της φόρτισης.

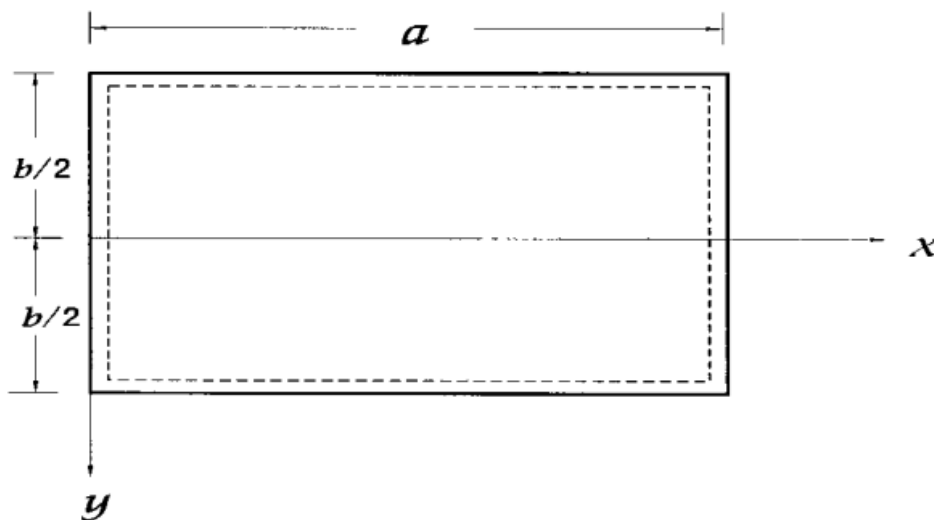
2) Προσδιορισμός των συντελεστών A_m , B_m , C_m , D_m μέσω των συνοριακών συνθηκών κατά y .

Συνοψίζοντας, για την εφαρμογή της μεθόδου του Levy θα πρέπει να πληρούνται δύο κριτήρια:

- Οι δύο απέναντι πλευρές τις οποίες ορίζουμε και τοποθετούμε στον άξονα x θα πρέπει να είναι στηριζόμενες με απλή έδραση.
- Το κάθετο καταναμεμένο φορτίο εξαρτάται μόνο από το x και η μορφή του είναι ίδια σε όλες τις διευθύνσεις της πλάκας που είναι παράλληλες ως προς τον άξονα x .

3.2.2.β Εφαρμογές μεθόδου Levy

Ορθογωνική πλάκα (a,b) αμφιέριστη κατά τις δύο διευθύνσεις υπό κάθετο ομοιόμορφα καταναμεμένο φορτίο $q(x,y)=q_0$.



Σχήμα 3.2.5 (Krauthammer)

Από την (3.2.2.1), αναπτύσσοντας τη συνάρτηση του φορτίου ως περιττή ως προς x σύμφωνα με το παράρτημα Α, με την ίδια συλλογιστική που εφαρμόσαμε στη μέθοδο Navier, προκύπτει:

$$q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{2q_0}{m\pi} (\cos m\pi - 1) = \frac{4q_0}{m\pi} \quad \text{για } m = 1, 3, \dots \quad (0 \text{ για } m = 2, 4, \dots)$$

(3.2.2.12)

Συνδυάζοντας τις (3.2.2.12) , (3.2.2.10) :

$$w_p = \frac{4q_0\alpha^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \quad (3.2.2.13)$$

Λόγω της συμμετρίας των στηρίξεων και του φορτίου ως προς x συμπεραίνουμε ότι το βέλος κάμψης θα είναι επίσης συμμετρικό:

$$w(x, y) = w(x, -y). \text{ Άρτια συνάρτηση ως προς } y$$

Επομένως, η λύση της ομογενούς εξίσωσης (3.2.2.6) απλοποιείται καθώς οι όροι $A_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha}$, $y D_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha}$ είναι περιττοί ως προς y και μηδενίζονται.

$$\sinh \frac{m\pi y}{\alpha} = -\sinh \frac{-m\pi y}{\alpha}, y \cosh \frac{m\pi y}{\alpha} = -(-y \cosh \frac{-m\pi y}{\alpha}).$$

Συνεπώς:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha} + y C_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} \right] \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \quad (3.2.2.14)$$

Άρα η συνάρτηση βύθισης (βέλος κάμψης) για τη συγκεκριμένη εφαρμογή είναι:

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{\alpha} + y C_m \sinh \frac{m\pi y}{\alpha} + \frac{4q_0\alpha^4}{m^5\pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{\alpha}. \quad (3.2.2.15)$$

Το επόμενο βήμα αποτελεί ο προσδιορισμός των συντελεστών μέσω των συνοριακών συνθηκών στις πλευρές $y=-b/2$, $y=b/2$:

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y = \pm \frac{b}{2})$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} 1) \quad w = 0 &\Rightarrow B_m \cosh \frac{m\pi b}{\alpha 2} + \frac{b}{2} C_m \sinh \frac{m\pi b}{\alpha 2} + \frac{4q_0\alpha^4}{m^5\pi^5 D} = 0. \\ 2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 &\Rightarrow B_m \cosh \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{m\pi b}{2\alpha} + C_m \frac{m\pi}{\alpha} \left(2 \cosh \frac{m\pi b}{2\alpha} + \frac{m\pi b}{\alpha} \frac{1}{2} \sinh \frac{m\pi b}{2\alpha} \right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } a_m = \frac{m\pi b}{2\alpha} \Rightarrow B_m \left(\frac{m\pi}{\alpha} \right)^2 \cosh a_m + C_m \frac{m\pi}{\alpha} \left(2\cosh a_m + \frac{m\pi}{\alpha} \frac{b}{2} \sinh a_m \right) = 0.$$

Από το παραπάνω σύστημα λαμβάνουμε τις λύσεις:

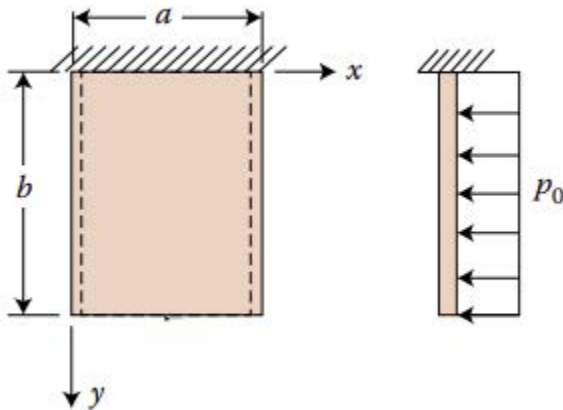
$$B_m = -\frac{4q_0\alpha^4 + m\pi q_0\alpha^3 b \tanh a_m}{m^5\pi^5 D \cosh a_m}, C_m = \frac{2q_0\alpha^3}{m^4\pi^4 D \cosh a_m}.$$

Τελικά η βύθιση της πλάκας παίρνει τη μορφή:

$$w = \frac{4q_0\alpha^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{a_m \tanh a_m + 2}{2 \cosh a_m} \cosh \frac{2a_m y}{b} + \frac{1}{2 \cosh a_m} \frac{m\pi y}{\alpha} \sinh \frac{2a_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{\alpha}.$$

(3.2.2.16)

Στη δεύτερη εφαρμογή έχουμε μια ορθογωνική πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, αμφιέριστη κατά x με πάκτωση στην πλευρά $y=-b/2$ και ελεύθερη πλευρά για $y=b/2$, προσομοιώνοντας έναν πρόβολο (μπαλκόνι).



Σχήμα 3.2.6 (Ugural plates)

Η μερική λύση είναι ίδια με εκείνη της προηγούμενης εφαρμογής (3.2.2.13). Για την εύρεση της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε την κανονική εκδοχή της (3.2.2.6) και όχι την απλοποιημένη, καθώς δεν έχουμε συμμετρία στηρίζεων για $y = -b/2$, $y = b/2$. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες κατά y για τον προσδιορισμό των συντελεστών της λύσης.

Στην ελεύθερη πλευρά για $y = +b/2$.

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. (1) \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0. (2) \end{cases}$$

Στην πακτωμένη πλευρά για $y=-b/2$.

$$\begin{cases} w = 0. (3) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0. (4) \end{cases}$$

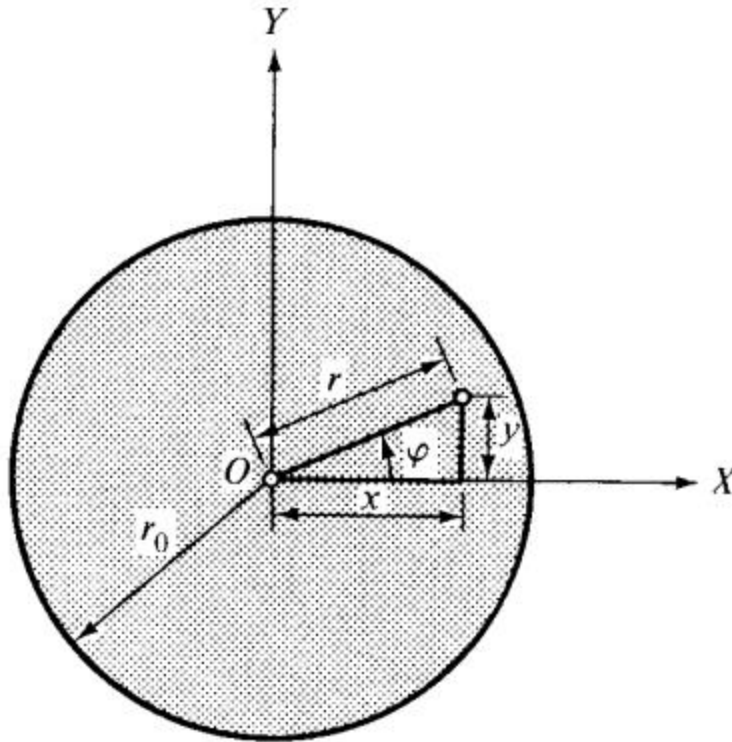
Επομένως, έχουμε ένα τετραγωνικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους (συντελεστές της ομογενούς) και από την επίλυσή του βρίσκουμε τη λύση της ομογενούς εξίσωσης την οποία προσθέτουμε στη μερική λύση ώστε να πάρουμε τη γενική λύση για τη βύθιση.

Συνοψίζοντας, οι μέθοδοι Navier και Levy δίνουν ακριβείς αναλυτικές λύσεις για τις λεπτές ορθογωνικές πλάκες αλλά έχουν περιορισμένο εύρος εφαρμογής λόγω του μεγάλου όγκου μαθηματικών πράξεων. Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί ποια αναλυτική διεργασία πρέπει να ακολουθήσουμε για την επίλυση μιας λεπτής πλάκας πακτωμένης σε τρεις πλευρές; Σε περιπτώσεις που δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με τις προαναφερθείσες δύο μεθόδους, μπορούμε να προσφύγουμε, για παράδειγμα, σε προσεγγιστικές μεθόδους (π.χ. μέθοδος Marcus), ενεργειακές μεθόδους (Ritz, Galerkin) ή αριθμητικές μεθόδους (π.χ. FEM).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Κυκλικές και ελλειπτικές πλάκες

Στα προβλήματα των ορθογωνικών πλακών χρησιμοποιούμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με άξονες παράλληλους και εφαπτόμενους στις πλευρές της πλάκας. Επομένως, κάθε σύνορο της πλευράς ταυτίζεται με μια μεταβλητή x, y καθιστώντας δυνατό το ανάπτυγμα συναρτήσεων σε σειρές Fourier. Για τις κυκλικές πλάκες απαιτείται η χρήση πολικών συντεταγμένων και η αντίστοιχη θεώρηση της θεωρίας ελαστικότητας των λεπτών πλακών με χρήση πολικών συντεταγμένων. Κυκλικές πλάκες μπορούμε να συναντήσουμε σε πληθώρα έργων όπως σε θεμελιώσεις ή δάπεδα βιομηχανικών κατασκευών, ναυπηγικές κατασκευές και καλύμματα ανοιγμάτων (αγωγοί πίεσης, σωλήνες, υπόγεια δίκτυα).

4.1 Μετατροπή των εξισώσεων και της διαφορικής εξίσωσης πλάκας σε πολικές συντεταγμένες



Σχήμα 4.1: Σύνδεση πολικών συντεταγμένων με καρτεσιανές συντεταγμένες.

Στις πολικές συντεταγμένες αντί για τις καρτεσιανές μεταβλητές x, y έχουμε τις μεταβλητές της ακτίνας r (πολική ακτίνα) και της γωνίας φ (πολική γωνία), οπότε $w(x,y) = w(r,\varphi)$. Οι πολικές συντεταγμένες σχετίζονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων:

$$x = r \cos \varphi, r^2 = x^2 + y^2, y = r \sin \varphi, \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \text{ ή } \frac{y}{x} = \tan \varphi \quad (4.1)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r} \quad (4.2)$$

Προκειμένου να εκφράσουμε όλες τις εξισώσεις πλακών του Κεφαλαίου 3.1 σε πολικές συντεταγμένες πρέπει πρώτα να μετασχηματιστούν οι όροι:

$$1) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right)$$

$$2) \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{r} \right)$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\sin^2 \varphi}{r} \end{aligned}$$

Ομοίως :

$$4) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

$$5) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

$$\text{Διδιάστατος τελεστής Laplace } 6) \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Άρα, η μη ομογενής διαρμονική εξίσωση πλάκας 3.1.18 γράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως:

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{q(r, \varphi)}{K} \quad (4.3)$$

Επομένως τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε όλα τα εντατικά μεγέθη για λεπτές κυκλικές πλάκες (βλ. Σχήμα 4.2) σύμφωνα με τις αντίστοιχες εξισώσεις (3.1.13), (3.1.14), (3.1.17), (3.1.22).

-Ροπές

$$\begin{aligned} \text{Ακτινική ροπή } M_r &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right) \\ \text{Γωνιακή ροπή } M_\varphi &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -K \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ \text{Ροπή συστροφής } M_{r\varphi} &= -K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -K(1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

-Τέμνουσες

$$Q_r = -K \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w)$$

$$Q_\varphi = -K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 w)$$

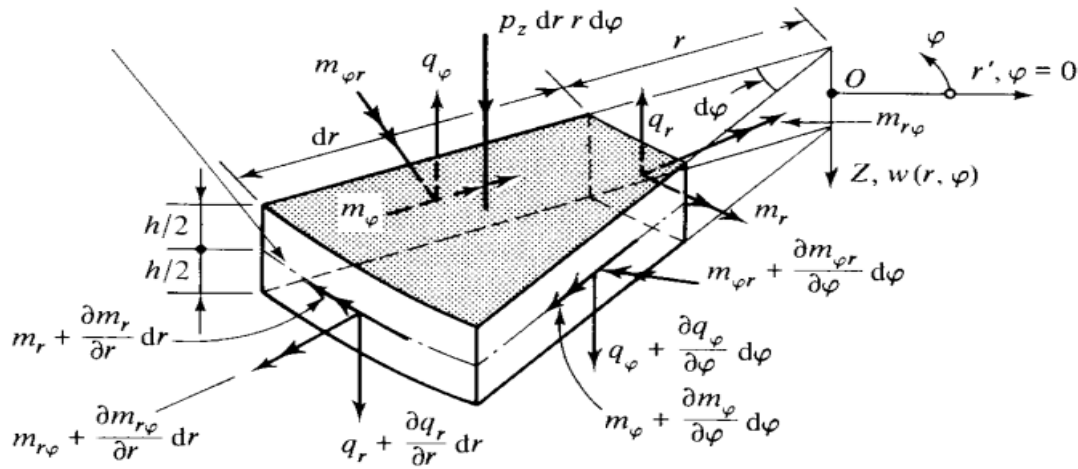
(4.5)

-Τέμνουσες Kirchhoff στα άκρα

$$\overline{Q}_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi}$$

$$\overline{Q}_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r}$$

(4.6)



Σχήμα 4.2: Εντατικά μεγέθη σε φορτισμένο στοιχείο κυκλικής πλάκας $dr, d\varphi$. (Szilard)

Οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να πληρούνται σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\text{Πάκτωση} \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\text{Άρθρωση} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\text{Ελεύθερη πλευρά } M_r = 0, \quad \overline{Q_r} = 0 \quad (4.7)$$

Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4.3) για κυκλική πλάκα είναι πολύπλοκη. Λόγω της γραμμικότητας της (4.3), η λύση w γράφεται ως άθροισμα της λύσης w_h της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας μερικής λύσης w_p , δηλαδή $w = w_h + w_p$.

-Εύρεση της λύσης w_h με σειρές Fourier

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (4.8)$$

Οι σειρές Fourier μέσω των οποίων εκφράζουμε τη λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$w_h = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* \sin n\varphi \quad (4.9)$$

Οι f_n, f_n^* είναι συναρτήσεις μόνο της ακτινικής μεταβλητής r .

Αντικαθιστώντας την (4.8) στην (4.9) προκύπτουν γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις που, εν γένει, μπορούν να επιλυθούν.

-Εύρεση μερικής λύσης w_p με σειρές Fourier

Αρχικά εκφράζουμε την εκάστοτε φόρτιση $q(r, \varphi)$ σε σειρά Fourier:

$$q_{(r, \varphi)} = q_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(r) \cos n\varphi + R_n(r) \sin n\varphi],$$

όπου,

$$P_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_{(r, \varphi)} \cos n\varphi d\varphi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$R_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_{(r, \varphi)} \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(4.10)

Εκφράζοντας και τη μερική λύση σε σειρά Fourier έχουμε:

$$w_p = F_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(r)\cos n\varphi + G_n(r)\sin n\varphi] \quad (4.11)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις (4.10), (4.11) στην (4.3) προκύπτουν διαφορικές εξισώσεις των οποίων η επίλυση είναι εν γένει δυνατή (αν και επίπονη) με μεθόδους επίλυσης γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές. Επειδή και στις δύο περιπτώσεις η εύρεση της συνολικής βύθισης $w(r, \varphi)$ μέσω της αναλυτικής διαδικασίας επίλυσης που περιγράψαμε πιο πάνω είναι αρκετά επίπονη, συνήθως προτιμάται η αριθμητική επίλυση.

4.1.2 Κάμψη συμμετρικών πλακών ως προς τον κεντρικό κάθετο άξονα περιστροφής z

Στην περίπτωση που έχουμε συμμετρία στον τρόπο φόρτισης και στις στηρίξεις ως προς τον κατακόρυφο άξονα z που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής πλάκας, όλα τα μεγέθη που περιλαμβάνουν τη γωνιακή μεταβλητή φ μηδενίζονται και το πρόβλημα καθίσταται ακτινικό. Σε αυτή την περίπτωση απλοποιούνται αρκετά οι σχέσεις, με τις βυθίσεις και την εξίσωση πλάκας να εξαρτώνται μόνο από την πολική ακτίνα. Τα φορτία διατομής που αναπτύσσονται είναι M_r , M_φ , Q_r :

$$M_r = -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right]$$

$$M_\varphi = -K \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right]$$

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = 0$$

(4.12)

$$\overline{Q_r} = Q_r = -K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right)$$

$$\overline{Q_\varphi} = Q_\varphi = 0$$

(4.13)

Στη διαρμονική εξίσωση (3.3.3) οι όροι που εξαρτώνται από το φ μηδενίζονται και καθώς πλέον έχουμε συνάρτηση μόνο μίας μεταβλητής (της ακτινικής) η μερική διαφορική εξίσωση

μετατρέπεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση με μία μεταβλητή και ολικές παραγώγους ως προς r . Το φορτίο αποτελεί συνάρτηση μόνο της μεταβλητής r . Έτσι, η διαρμονική εξίσωση ξαναγράφεται ως

$$\nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{K}, \quad (4.14)$$

δηλαδή έχει πάρει την εξής γενική μορφή:

$$f''''(r) = \frac{q(r)}{K}$$

Η αναλυτική επίλυση είναι πλέον αρκετά εύκολη. Ολοκληρώνουμε διαδοχικά 4 φορές για την εύρεση της w :

$$w = \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \frac{rq}{K} dr dr dr dr \quad (4.15)$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (δηλαδή για μηδενικό φορτίο) είναι:

$$w_h(r) = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (4.16)$$

Μερικές λύσεις της πλήρους διαφορικής εξίσωσης δίνονται στη βιβλιογραφία για ορισμένες βασικές περιπτώσεις και είναι «πινακοποιημένες» με βάση τον τρόπο κατανομής (π.χ. ορθογωνικό, τριγωνικό, ή παραβολικό φορτίο, βλ. Μακάριος-Μανώλης σελ.119) του εξωτερικού φορτίου, υποθέτοντας μια συνεχή κατανομή. Για παράδειγμα, στη συνήθη περίπτωση του ορθογωνικού φορτίου, έχουμε

$$w_p = \frac{qr^4}{64K} \quad (4.17)$$

Για την εύρεση των συντελεστών $C_1, \dots, C_4$ της λύσης (4.16) χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες. Επιπλέον υπάρχουν κάποιες περαιτέρω απλοποιήσεις:

1) Αν το κέντρο της πλάκας είναι υλικό σημείο της πλάκας, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια οπή

και ταυτόχρονα δεν υπάρχει συγκεντρωμένο, έχουμε $C_1 = C_2 = 0$. Θέτοντας τους

συντελεστές C_1 και C_2 ίσους με μηδέν αποφεύγουμε τον απειρισμό του λογαρίθμου.

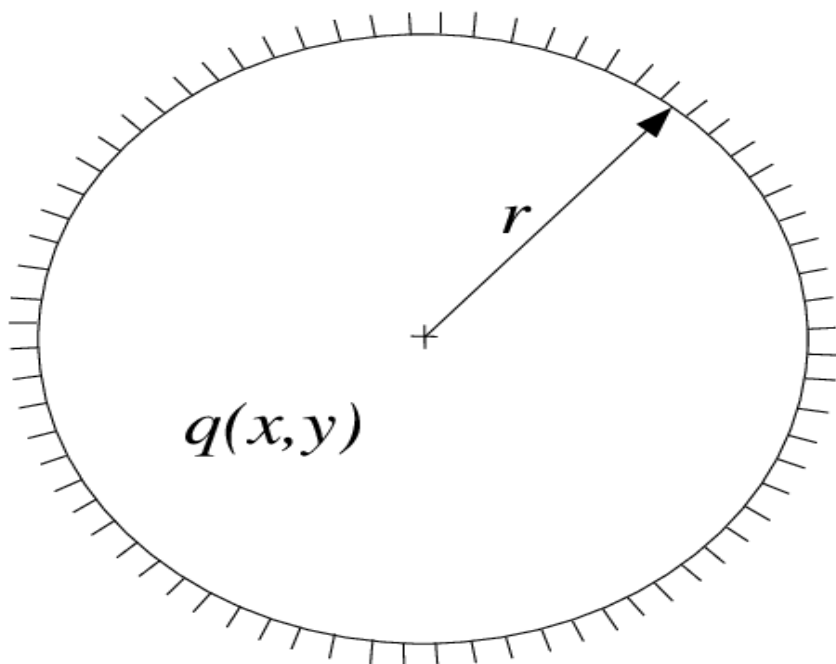
- 2) Αν το κέντρο της πλάκας είναι υλικό σημείο της πλάκας, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια οπή και ταυτόχρονα υπάρχει συγκεντρωμένο φορτίο, έχουμε $C_1=0$, $C_2 \neq 0$.
- 3) Αν το κέντρο της πλάκας δεν είναι υλικό σημείο της πλάκας, δηλαδή υπάρχει κάποια οπή, τότε δεν ισχύει ότι $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.
- 4) Η τελική λύση, λόγω της γραμμικότητας του τελεστή Laplace, προκύπτει από την επαλληλία της μερικής λύσης και της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:

$$w(r) = w_p(r) + w_h(r) \quad (4.18)$$

4.2 Εφαρμογές σε πλάκες με αξονοσυμμετρική φόρτιση

Σκοπός των εφαρμογών είναι η εύρεση της βύθισης και η παραδειγματική κατανόηση του πώς μεταβάλλονται οι διαφορές στη λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και στη μερική λύση για κάθε περίπτωση.

Πρώτη εφαρμογή:Περιμετρικά πακτωμένη κυκλική πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.



Σχήμα 4.3: Περιμετρικά πακτωμένη κυκλική πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(x,y)$.(Google)

Το κέντρο της πλάκας αποτελεί υλικό σημείο της πλάκας και παράλληλα δεν υπάρχει συγκεντρωμένο φορτίο.Επομένως θέτουμε $C_1=C_2=0$.Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις περιμετρικές συνοριακές συνθήκες για $r=a$ για την εύρεση των C_2, C_3 .

Για $r=a$

$$w = 0 \Rightarrow \frac{qa^4}{64K} + C_3a^2 + C_4 = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{4qa^3}{64K} + 2C_3a = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{2qa^2}{64K} = -\frac{qa^2}{32K}$$

Η επίλυση ως προς C_4 δίνει:

$$C_4 = +\frac{qa^2}{32K} - \frac{qa^4}{64K} = +\frac{qa^4}{64K}$$

Αντικατάσταση στην συνάρτηση βύθισης δίνει:

$$w = \frac{qr^4}{64K} - \frac{qa^2}{32K}r^2 + \frac{qa^4}{64K} = \frac{qr^4}{64K} - \frac{2qa^2}{64K}r^2 + \frac{qa^4}{64K} = \frac{q}{64K}(a^2 - r^2)^2$$

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64K} \text{ για } r = 0$$

Για τον υπολογισμό των ροπών πρέπει να βρούμε τους όρους dw/dr , d^2w/dr^2 .

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q}{64K} 2(\alpha^2 - r^2)(-2qr) = -\frac{4qr}{64K} (\alpha^2 - r^2) = -\frac{qr}{16K} (\alpha^2 - r^2)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{qr}{16K} [r(\alpha^2 - r^2)]' = -\frac{qr}{16K} [1(\alpha^2 - r^2) + r(\alpha^2 - r^2)'] = -\frac{qr}{16K} (\alpha^2 - 3r^2)$$

$$\begin{aligned} M_r &= -K \left[\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = +\frac{q}{16} (\alpha^2 - 3r^2) + \frac{\nu qr}{r 16} (\alpha^2 - r^2) = \frac{q}{16} (\alpha^2 - 3r^2 + \alpha^2 - r^2) = \\ &= \frac{q}{16} [(1 + \nu)\alpha^2 - (3 + \nu)r^2] \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε:

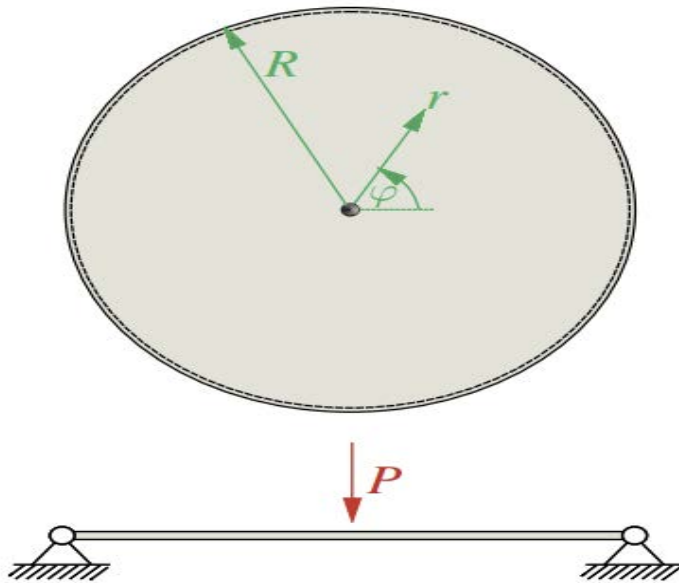
$$M_\phi = -K \left[\nu \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = \frac{q}{16} [(1 + \nu)\alpha^2 - (1 + 3\nu)r^2]$$

Για $r=\alpha$ προκύπτει η μέγιστη ροπή M_r .

$$M_{r_{\max}} = \frac{q\alpha^2}{8}$$

Στη περίπτωση που υπάρχει περιμετρικά απλή έδραση χρησιμοποιούμε ακριβώς την ίδια μεθοδολογία βρίσκοντας διαφορετικά C_2 , C_3 από τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

Δεύτερη εφαρμογή: Κυκλική πλάκα στηριζόμενη περιμετρικά με απλή έδραση υπό φόρτιση συγκεντρωμένης δύναμης στο κέντρο.



Σχήμα 4.4: Κυκλική πλάκα στηριζόμενη περιμετρικά με απλή έδραση υπό φόρτιση συγκεντρωμένης δύναμης στο κέντρο.(Mittelstedt)

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι μερικές λύσεις δεν είναι «πινακοποιημένες». Για να λύσουμε το πρόβλημα θα προσφύγουμε στη συνθήκη στατικής ισορροπίας κατά τον άξονα z. Οι περιμετρικές τέμνουσες Q_r εξισώνονται με τη συγκεντρωμένη δύναμη P:

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -2\pi r Q_r = P$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση τέμνουσας (3.3.13) και προκύπτει:

$$K \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{P}{2\pi r}$$

Έπειτα από διαδοχικές ολοκληρώσεις έχουμε:

$$w = \frac{P}{2\pi K} \left(\frac{r^2}{4} \ln r + C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 \right)$$

Επειδή το κέντρο είναι υλικό σημείο της πλάκας και ταυτόχρονα υπάρχει συγκεντρωμένη δύναμη («ιδιομορφία φορτίου») θέτουμε $C_2 = 0$. Έτσι αποφεύγουμε για $r = 0$ τον απειρισμό του λογαρίθμου και οι w παραμένουν πεπερασμένες.

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$\text{Για } r = \alpha \quad w = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4} \ln \alpha + C_1 \alpha^2 + C_3 = 0$$

$$\Gamma \alpha r = \alpha \quad M_r = 0 \Rightarrow -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] = 0$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{2}{4} r \ln r + \frac{r^2}{4} \frac{1}{r} + 2rC_1$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial r^2} = \frac{2}{4} \ln r + \frac{2}{4} r \frac{1}{r} + \frac{1}{4} + 2C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} (2 \ln r + 3) + 2C_1 + \frac{\nu}{r} \left(\frac{2}{4} r \ln r + \frac{r}{4} + 2rC_1 \right) = \frac{\ln r}{2} + \frac{3}{4} + 2C_1 + \frac{2 \ln r \nu}{4} + \frac{\nu}{4} + \nu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 (2 + 2\nu) + \frac{1}{2} (\ln r + \nu \ln r) + \frac{1}{4} (3 + \nu) = C_1 2(1 + \nu) + \frac{1}{2} \ln r (1 + \nu) + \frac{1}{4} (3 + \nu) = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{4} \ln \alpha - \frac{1}{8} \frac{(3 + \nu)}{(1 + \nu)}$$

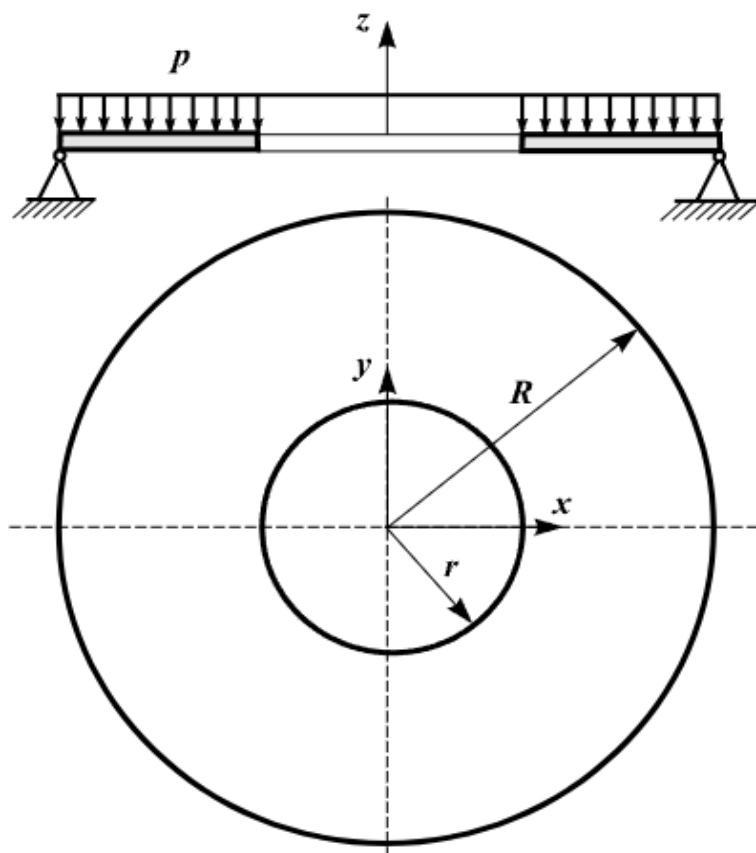
Επίλυση ως προς C_3 :

$$C_3 = -\frac{\alpha^2}{4} \ln \alpha - C_1 \alpha^2 = -\frac{\alpha^2}{4} \ln \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \ln \alpha + \frac{\alpha^2 (3 + \nu)}{8 (1 + \nu)} = \frac{\alpha^2 (3 + \nu)}{8 (1 + \nu)}$$

Αντικατάσταση σταθερών στην αρχική w δίνει:

$$\begin{aligned} w &= \frac{P}{2\pi K} \left(\frac{r^2}{4} \ln r - \frac{r^2}{4} \ln \alpha - \frac{r^2 (3 + \nu)}{8 (1 + \nu)} + \frac{\alpha^2 (3 + \nu)}{8 (1 + \nu)} \right) \\ &= \frac{P}{16\pi K} (2r^2 \ln r - 2r^2 \ln \alpha - r^2 \frac{(3 + \nu)}{(1 + \nu)} + \alpha^2 \frac{(3 + \nu)}{(1 + \nu)}) \\ \Rightarrow w &= \frac{P}{16\pi K} \left[2r^2 \ln \frac{r}{\alpha} + (\alpha^2 - r^2) \frac{(3 + \nu)}{(1 + \nu)} \right] \end{aligned}$$

Τρίτη εφαρμογή: Δακτυλιοειδής πλάκα υπό κάθετο κατανεμημένο φορτίο.



Σχήμα 4.5: Δακτυλιοειδής πλάκα υπό κάθετο κατανεμημένο φορτίο.(Google)

Ο δακτύλιος ακτίνας a του παραπάνω σχήματος είναι περιμετρικά εδραζόμενος με απλή στήριξη. Υποβάλλεται σε κάθετη ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση και παρουσιάζει κυκλική οπή την οποία χαρακτηρίζουμε θέτοντας εσωτερική ακτίνα b .

Λόγω της ομοιόμορφα κατανεμημένης φόρτισης λαμβάνουμε:

$$w_p = \frac{qr^4}{64K}$$

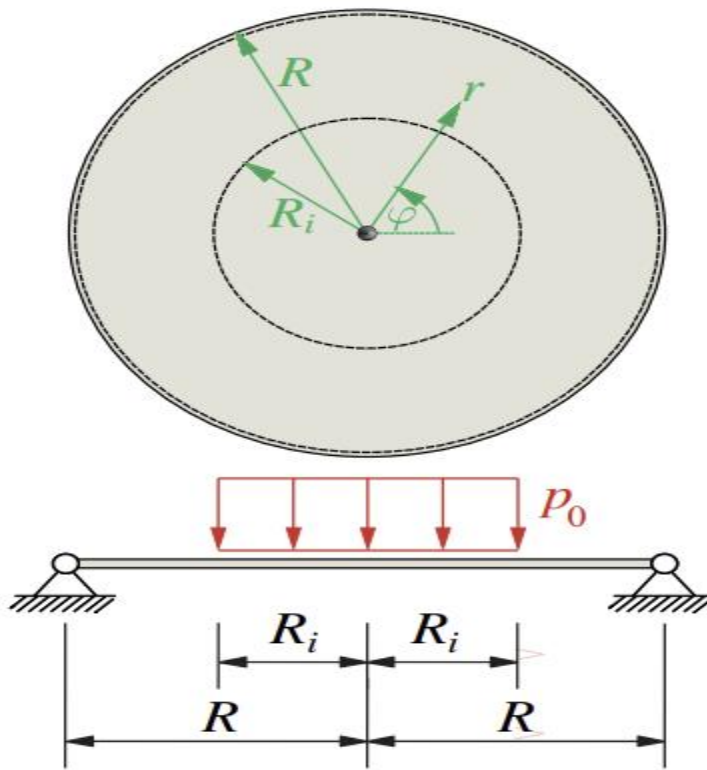
Το κέντρο της πλάκας βρίσκεται εντός της οπής ακτίνας b , επομένως δεν αποτελεί υλικό σημείο της πλάκας. Άρα $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

Η γενική λύση για τη βύθιση (βέλος κάμψης) παίρνει τη μορφή:

$$w(r) = w_p(r) + w_h(r) = \frac{qr^4}{64K} + C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4$$

Έχουμε τέσσερις συντελεστές C τους οποίους προσδιορίζουμε από τέσσερις συνοριακές συνθήκες, δύο για $r=a$ από την απλά εδραζόμενη εξωτερική περίμετρο, και δύο για $r=b$ στην εσωτερική περίμετρο ελεύθερου άκρου.

Τέταρτη εφαρμογή: Απλά εδραζόμενη πλάκα υπό τμηματικό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο εσωτερικής ακτίνας R_i .



Σχήμα 4.6: Απλά εδραζόμενη πλάκα υπό τμηματικό ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο εσωτερικής ακτίνας R_i . (Mittelstedt)

Για την επίλυση της συγκεκριμένης περίπτωσης φόρτισης απαιτείται ο διαχωρισμός του προβλήματος σε δύο περιπτώσεις.

Αρχικά για $0 < r < R_i$ θεωρούμε πλάκα ακτίνας R_i υπο ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο με πακτωμένο σύνορο. Επομένως έχουμε:

$$w_h = C_3 r^2 + C_4 + \frac{q r^2}{64K}, C_1 = C_2 = 0$$

Για το εύρος $R_i < r < R$ θεωρούμε δακτύλιο χωρίς φόρτιση. Το κέντρο δεν αποτελεί σημείο της πλάκας, επομένως όλοι οι συντελεστές C είναι διάφοροι του μηδενός:

$$\bar{w}_h = \bar{C}_1 \ln r + \bar{C}_2 r^2 \ln r + \bar{C}_3 r^2 + \bar{C}_4$$

Για $r=R$ στην απλή στήριξη έχουμε:

$$\bar{w}_h = 0 \Rightarrow \bar{w}_h = \bar{C}_1 \ln R + \bar{C}_2 R^2 \ln R + \bar{C}_3 R^2 + \bar{C}_4 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\bar{w}_h}{dr} \Big|_{r=R} = \bar{C}_1 \frac{1}{R} + \bar{C}_2 2R \ln R + \bar{C}_2 R^2 \frac{1}{R} + \bar{C}_3 2R = \bar{C}_1 \frac{1}{R} + 2\bar{C}_2 R \ln R + \bar{C}_2 R + 2\bar{C}_3 R$$

$$\frac{d^2\bar{w}_h}{dr^2} \Big|_{r=R} = -\bar{C}_1 \frac{1}{R^2} + 2\bar{C}_2 \ln R + 2\bar{C}_2 R \frac{1}{R} + \bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 = -\bar{C}_1 \frac{1}{R^2} + 2\bar{C}_2 \ln R + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3$$

$$M_{r(r=R)} = 0 \Rightarrow -K \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \Rightarrow -\bar{C}_1 \frac{1}{R^2} + 2\bar{C}_2 \ln R + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 + \frac{\nu}{R} \bar{C}_1 +$$

$$+ \nu 2\bar{C}_2 \ln R + \nu \bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 \nu = 0 \Rightarrow -\bar{C}_1 \frac{1}{R^2} + 2\bar{C}_2 \ln R + 3\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 + \nu \frac{1}{R^2} \bar{C}_1 + \nu 2\bar{C}_2 \ln R +$$

$$+ \nu \bar{C}_2 + 2\bar{C}_3 \nu = 0 \Rightarrow (\nu - 1) \frac{1}{R^2} \bar{C}_1 + (2\ln R + 3 + 2\nu \ln R + \nu) \bar{C}_2 + 2(\nu + 1) \bar{C}_3 = 0 \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε 2 εξισώσεις και 4 αγνώστους. Στο συναντώμενο σύνορο για $r=R_i$ απαιτείται όλα τα εντατικά μεγέθη να είναι ίδια και για τις δύο περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει:

$$w_{h(r=R_i)} = \bar{w}_{h(r=R_i)}$$

$$\frac{dw}{dr} \Big|_{(r=R_i)} = \frac{d\bar{w}}{dr} \Big|_{(r=R_i)}$$

$$M_{r(r=R_i)} = \bar{M}_{r(r=R_i)}$$

$$Q_{r(r=R_i)} = \bar{Q}_{r(r=R_i)}$$

$$w_{h(r=R_i)} = \bar{w}_{h(r=R_i)} \Rightarrow \bar{C}_1 \ln R_i + \bar{C}_2 R_i^2 \ln R_i + \bar{C}_3 R_i^2 + \bar{C}_4 = C_3 R_i^2 + C_4 + \frac{q R_i^2}{64K} \quad (3)$$

Βρίσκουμε την παράγωγο της λύσης της ομογενούς εξίσωσης για την εσωτερική πλάκα και εξισώνουμε με την αντίστοιχη του δακτυλίου για $r = R_i$:

$$\frac{dw}{dr} \Big|_{(r=R_i)} = 2C_3 R_i + 0 + \frac{q R_i^2}{64K} = 2C_3 R_i + \frac{q 2R_i}{64K}$$

$$\frac{dw}{dr} \Big|_{(r=R_i)} = \frac{d\bar{w}}{dr} \Big|_{(r=R_i)} \Rightarrow 2C_3 R_i + \frac{q 2R_i}{64K} = \bar{C}_1 \frac{1}{R} + 2\bar{C}_2 R_i \ln R_i + \bar{C}_2 R_i + 2\bar{C}_3 R_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_3 = -\frac{q}{64K} + \frac{1}{2}\bar{C}_1 \frac{1}{R_i^2} + 2\bar{C}_2 \ln R_i + \frac{\bar{C}_2}{2} + \bar{C}_3 \quad (4)$$

Επιστρέφουμε στη σχέση (3) :

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{qR_i^2}{64K} + \bar{C}_1 \ln R_i + \bar{C}_2 R_i^2 \ln R_i + \bar{C}_3 R_i + \bar{C}_4 + \frac{qR_i^2}{64K} - \frac{1}{2}\bar{C}_1 - 2\bar{C}_2 \frac{\ln R_i}{R_i^2} - \frac{\bar{C}_3}{R_i^2} = \\ &= \bar{C}_1 \left(\ln R_i - \frac{1}{2} \right) + \bar{C}_2 \left(R_i^2 \ln R_i - \frac{\ln R_i}{R_i^2} \right) + \bar{C}_3 \left(R_i - \frac{1}{R_i^2} \right) + \bar{C}_4 \end{aligned}$$

Οι συντελεστές C έχουν εκφραστεί ως προς τους συντελεστές $\bar{C}$. Εφαρμόζοντας έτσι και τις άλλες δύο σχέσεις για τις ροπές και τις τέμνουσες θα προκύψουν οι άλλες δύο εξισώσεις (3), (4) που συσχετίζουν τα $\bar{C}$, ώστε να επιλυθεί το σύστημα. Η τελική αναλυτική διεργασία πραγματοποιήθηκε από τον Girkmann (1974) και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι:

$$C_3 = \frac{qR_i^2}{64(1+\nu)K} \left[4(3+\nu)R^2 - (7+3\nu)R_i^2 - 4(1+\nu)R_i^2 \ln \frac{R}{R_i} \right]$$

$$C_4 = \frac{qR_i^2}{32(1+\nu)K} \left[4 - (1-\nu)\frac{R_i}{R} + 4(1+\nu) \ln \frac{R}{R_i} \right]$$

$$\bar{C}_3 = \frac{qR_i^2}{32(1+\nu)K} \left[2(3+\nu)R^2 - (1+\nu)R_i^2 - 2(1+\nu)R_i^2 \ln R \right]$$

$$\bar{C}_4 = -\frac{qR_i^2}{32(1+\nu)K} \left[2(3+\nu) + 4(1+\nu) \ln R - (1-\nu)\frac{R_i^2}{R^2} \right]$$

$$\bar{C}_1 = \frac{qR_i^4}{16K}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{qR_i^4}{8K}$$

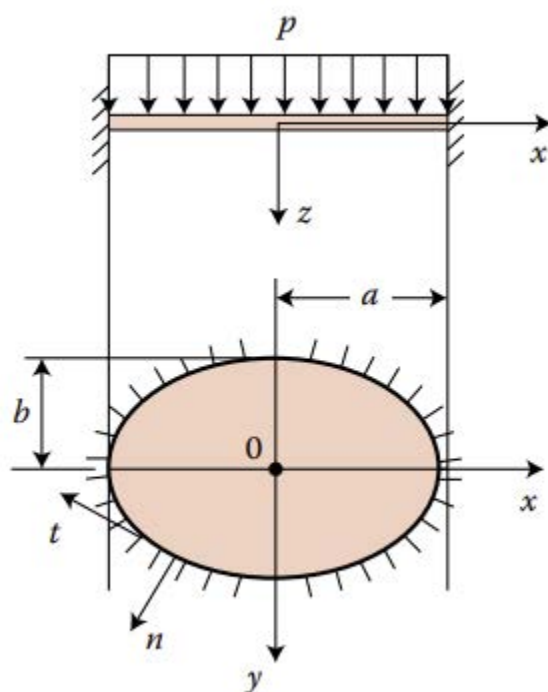
Τέλος, μετά από την αντικατάσταση των συντελεστών στις αντίστοιχες εξισώσεις βύθισης έχουμε:

$$w_h = \frac{qR_i^2}{16K} \left\{ \frac{r^4}{R_i^2} + r^2 \left[\frac{(1-\nu)R_i^2 - 4R^2}{2(1+\nu)R^2} + 2 \ln \frac{R_i}{R} \right] + \frac{4(3+\nu)R^2 - (7+3\nu)R_i^2}{4(1+\nu)} + R_i^2 \ln \frac{R_i}{R} \right\}$$

$$\bar{w}_h = \frac{qR_i^2}{16K} \left[\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - 2r^2 R_i^2 \ln \frac{R_i}{r} - \frac{(1-\nu)}{2(1+\nu)} R_i^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - R_i^2 \ln \frac{R}{r} \right]$$

4.3 Ελλειπτικές πλάκες

Η μελέτη των ελλειπτικών πλακών, αν και βασίζεται στις ίδιες θεμελιώδεις αρχές με τις άλλες γεωμετρίες πλακών, απαιτεί πιο σύνθετες αναλυτικές ή αριθμητικές μεθόδους λόγω της μη ομοιομορφίας που εισάγεται από το ελλειπτικό σχήμα. Οι λύσεις για ελλειπτικές πλάκες ακόμη και λεπτές είναι συχνά πιο περίπλοκες λόγω της μεταβλητής καμπυλότητας κατά μήκος των συνόρων της πλάκας. Δεν υπάρχουν πολλές ακριβείς αναλυτικές λύσεις, χρησιμοποιούνται συχνά προσεγγιστικές μέθοδοι ή αριθμητικές μέθοδοι, όπως είναι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Στη συνέχεια θα προσεγγίσουμε αναλυτικά το πρόβλημα μιας λεπτής πακτωμένης ελλειπτικής πλάκας υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.



Σχήμα 4.7: Πακτωμένη ελλειπτική λεπτή πλάκα υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο.(Ugural)

Η καρτεσιανή εξίσωση έλλειψης με κέντρο στην αρχή των αξόνων που χρησιμοποιούμε για τις συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

(4.3.1)

Η διαρμονική διαφορική εξίσωση πλάκας είναι :

$$\nabla^4 w = \frac{q}{K} \quad (4.3.2)$$

Για πάκτωση ισχύει:

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (4.3.3)$$

όπου n είναι το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της καμπύλης λόγω μεταβλητής καμπυλότητας.

Οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται αν εκφράσουμε τη βύθιση συναρτήσει μιας σταθερής παραμέτρου w_0 , έτσι ώστε να ισχύει:

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \quad (4.3.4)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.3.4), (4.3.2) προκύπτει ότι η (4.3.4) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση πλάκας (4.3.2) όταν η σταθερή παράμετρος ισούται με: (βλ. Timoshenko, Ugural)

$$w_0 = \frac{q}{K \left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2} \right)} = \frac{q a^4 b^4}{8K(3b^4 + 3a^4 + 2a^2 b^2)} \quad (4.3.5)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.5) στην (4.3.4) βρίσκουμε:

$$w = \frac{q a^4 b^4}{8K(3b^4 + 3a^4 + 2a^2 b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2, \quad (4.3.6)$$

με τη μέγιστη βύθιση $w_{\max}$ στο κέντρο για $x, y = 0$:

$$w_{\max} = \frac{q a^4 b^4}{8K(3b^4 + 3a^4 + 2a^2 b^2)}$$

Άρα έχουμε ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών και της διαφορικής εξίσωσης πλάκας. Η (4.3.6) δίνει την ακριβή λύση για την βύθιση πακτωμένης ελλειπτικής πλάκας υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις δεύτερες παραγώγους της βύθισης προκειμένου να προσδιορίσουμε τις ροπές:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(w_0 2 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)' \right)' = \left(2w_0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \left(-\frac{2x}{\alpha^2} \right) \right)' = \\ &= \left(4w_0 \left(-\frac{x}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^4} + \frac{xy^2}{b^2\alpha^2} \right) \right)' = 4w_0 \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{3x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{b^2\alpha^2} \right)\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4w_0 \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{3y^2}{b^4} + \frac{x^2}{b^2\alpha^2} \right)$$

Με αντικατάσταση της (4.3.6) στις (3.1.13) προσδιορίζονται οι ροπές:

$$\begin{aligned}M_x &= 4Kw_0 \left[\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{3x^2}{\alpha^4} - \frac{y^2}{b^2\alpha^2} \right) + \nu \left(\frac{1}{b^2} - \frac{3y^2}{b^4} - \frac{x^2}{b^2\alpha^2} \right) \right] \\ M_y &= 4Kw_0 \left[\left(\frac{1}{b^2} - \frac{3y^2}{b^4} - \frac{x^2}{b^2\alpha^2} \right) + \nu \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{3x^2}{\alpha^4} - \frac{y^2}{b^2\alpha^2} \right) \right] \\ M_{xy} &= -(1-\nu) \frac{8Kw_0}{b^2\alpha^2} xy\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

Για $x, y=0$:

$$\begin{aligned}M_x &= 4Kw_0 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \\ M_y &= 4Kw_0 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{\alpha^2} \right)\end{aligned}$$

Για τη μικρή ακτίνα $b(x=0, y=\pm b)$:

$$M_{x\max} = -8 \frac{Kw_0\nu}{b^2}, M_{y\max} = -8 \frac{Kw_0}{b^2}$$

Για τη μεγάλη ακτίνα $\alpha(x=\pm\alpha, y=0)$:

$$M_x = -8 \frac{Kw_0}{\alpha^2}, M_y = -8 \frac{Kw_0\nu}{\alpha^2}$$

Οι μέγιστες ροπές παρατηρούνται για $(x=0, y=\pm b)$ καθώς $b < \alpha$ στον παρανομαστή, επομένως τα κλάσματα θα είναι αριθμητικά μεγαλύτερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Παχιές πλάκες μεσαίου πάχους

Η κλασική θεωρία πλακών των Kirchhoff-Love είναι αρκετά ακριβής για λεπτές πλάκες, όσο όμως το πάχος μεγαλώνει η ακρίβεια μειώνεται. Πειράματα έχουν δείξει ότι καθώς αυξάνεται το πάχος η θεωρία υποτιμά τις βυθίσεις και υπερεκτιμά τα φορτία και τις συχνότητες. Ο λόγος αυτής της ανεπάρκειας οφείλεται στις υπερβολικές παραδοχές που δεν ισχύουν με τη μεταβολή του πάχους. Η μηχανική συμπεριφορά της διάτμησης της πλάκας παίζει σημαντικό ρόλο στην αναλυτική μελέτη. Είναι λοιπόν επιτακτική η ανάγκη ανάπτυξης θεωριών που να καλύπτουν αυτές τις περιπτώσεις.

Πλάκες μεσαίου πάχους ονομάζονται οι πλάκες που έχουν αναλογία πάχους h προς τη μικρότερη από τις δύο πλευρές L : $h/L = 1/10-1/5$. Οι πιο γνωστές θεωρίες που αντιπροσωπεύουν αυτό το εύρος περιπτώσεων είναι οι πρώτης τάξης θεωρίες διατμητικών παραμορφώσεων των Mindlin-Reissner και οι ανώτερης τάξης θεωρίες όπως του Levinson ή η τρίτης τάξης θεωρία του Reddy.

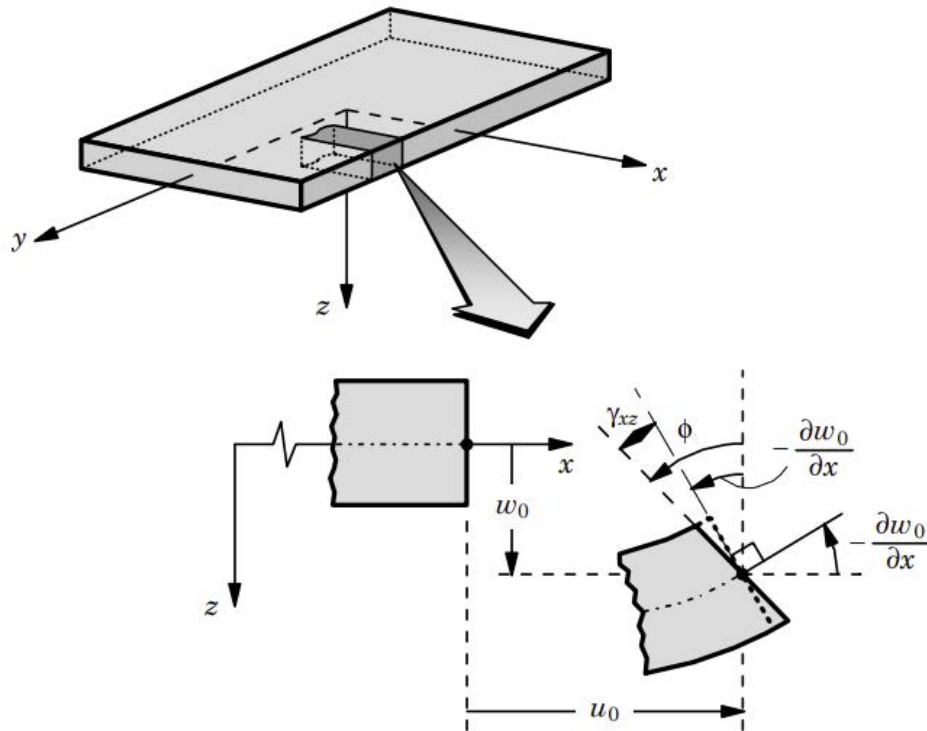
5.1 Πρώτης τάξης θεωρία διατμητικών παραμορφώσεων Mindlin-Reissner

Η κύρια διαφορά μεταξύ της θεωρίας Mindlin-Reissner και της θεωρίας Kirchhoff-Love είναι γεωμετρικής-κινηματικής φύσεως και έγκυται στο ότι η κάθετος στη μέση επιφάνεια κατά την κάμψη παραμένει ευθύγραμμη αλλά όχι σταθερή, καθώς μπορεί να στραφεί επιτρέποντας την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων-παραμορφώσεων.

Οι παραδοχές της θεωρίας είναι:

- Αμελούνται οι τάσεις σ_z κατά z . Η συνάρτηση του βέλους κάμψης $w(x,y)$ εξαρτάται μόνο από τους άξονες x, y .
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τη μέση επιφάνεια με τις άνω και κάτω ίνες παραμένει ευθύγραμμο και μετά την παραμόρφωση αλλά δεν παραμένει κάθετο.
- Το πλάτος h παραμένει σταθερό κατά την παραμόρφωση ($\varepsilon_z=0$).
- Θεωρούμε γραμμική ελαστικότητα και μικρές βυθίσεις σε αναλογία με το πάχος της πλάκας.

Η αναλυτική επεξήγηση της θεωρίας παρουσιάζει μεγάλες ομοιότητες με αυτήν του Kirchhoff. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία ελαστικότητας ξεκινάμε από τα κινηματικά μεγέθη και καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας της πλάκας.



Σχήμα 5.1: Αρχική και παραμορφωμένη κατάσταση ενός πλευρικού στοιχείου πλάκας σύμφωνα με τις υποθέσεις της θεωρίας Mindlin-Reissner. (Reddy)

Το επίπεδο μετακινήσεων σύμφωνα με το Σχ.5.1 είναι:

$$u = -z\varphi$$

$$v = -z\psi$$

$$w = w(x, y)$$

(5.1.1)

Επιπλέον δεν υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ των στροφών φ , ψ και της καμπυλότητας της βύθισης $\partial w_0 / \partial x$. Άρα τα φ , ψ αποτελούν ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας και μαζί με το βέλος κάμψης τους αγνώστους προς προσδιορισμό.

Από το επίπεδο μετακινήσεων προκύπτει και το επίπεδο παραμορφώσεων:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -z \varphi_{,x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \psi}{\partial y} = -z \psi_{,y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z(\varphi_{,y} + \psi_{,x})\end{aligned}\tag{5.1.2α}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi = w_{,x} - \varphi \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} - \psi = w_{,y} - \psi\end{aligned}\tag{5.1.2β}$$

Έχοντας καθορίσει τα επίπεδα μετακινήσεων και παραμορφώσεων, μέσω του νόμου του Hooke προσδιορίζουμε τις τάσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)}(\varphi_{,x} + \nu \psi_{,y}) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{-Ez}{(1-\nu^2)}(\nu \varphi_{,x} + \psi_{,y}) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G(\varphi_{,y} + \psi_{,x})\end{aligned}\tag{5.1.3α}$$

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G(w_{,x} - \varphi) \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G(w_{,y} - \psi)\end{aligned}\tag{5.1.3β}$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε στο ύψος της πλάκας για να βρούμε τα εντατικά μεγέθη και έχουμε, αντίστοιχα, τα εξής:

$$M_x, M_y, M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \quad (5.1.4)$$

$$Q_x, Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (5.1.5)$$

Η τελευταία (5.1.5) εξίσωση πρέπει να υποστεί τροποποίηση, καθώς παρατηρούμε ότι οι δύο διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz} , γ_{yz} και κατ'επέκταση οι διατμητικές τάσεις τ_{yz} , τ_{xz} κατανέμονται σταθερά καθ' ύψος, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την πραγματικότητα.

Διορθωτικός διατμητικός παράγοντας κ^2

Οι εξισώσεις (5.1.3) οδηγούν σε σταθερές διατμητικές παραμορφώσεις και τάσεις, αντίστοιχα. Γνωρίζουμε όμως από τη θεωρία πως οι διατμητικές τάσεις κατανέμονται παραβολικά κατά το ύψος και συγκεκριμένα στα άκρα μηδενίζονται και στη μέση επιφάνεια μεγιστοποιούνται. Είναι λοιπόν αναγκαίο να εισαχθεί ένας <<διορθωτικός διατμητικός παράγοντας>>. Αυτός έχει προσδιοριστεί έτσι ώστε η ενέργεια παραμόρφωσης των διατμητικών τάσεων να τείνει στην πραγματική που υποδεικνύει η τριδιάστατη θεωρία ελαστικότητας. Η αριθμητική τιμή του παράγοντα προκύπτει από την ενεργειακή θεώρηση του προβλήματος (βλ. Reddy, Κεφ. 10).

Το κ^2 είναι γραμμική συνάρτηση του λόγου Poisson ν . Οι εκτιμήσεις για την τιμή του με βάση το ν είναι:

$$\kappa^2 \leq 0,91 \text{ για } 0 \leq \nu \leq 0,5$$

$$\kappa^2 = \frac{\pi^2}{12} = 0,822 \text{ ή } \kappa^2 = 5/6 = 0,833 \text{ για } \nu = 0,3$$

Η παραμετρική έκφραση του κ^2 του είναι:

$$\kappa^2 = 20(1 + \nu)/(24 + 25\nu + \nu^2)$$

Για $\nu=0,3$ έχουμε $\kappa^2 = 0,823$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στις εκτιμήσεις των Mindlin-Reissner.

Πρέπει να τονιστεί ότι ο διορθωτικός διατμητικός παράγοντας κ^2 δεν εξαλείφει την αστοχία της θεωρίας σχετικά με τις σταθερές διατμητικές παραμορφώσεις, αλλά επιφέρει μια υπολογιστική

διευκόλυνση. Ένας τρόπος για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι η προσφυγή σε ανώτερης τάξης θεωρίες, όπως η τρίτης τάξης θεωρία του Reddy. (βλ. Κεφ. 5.2)

Οι εξισώσεις (5.1.5) γίνονται:

$$Q_x, Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \kappa^2 (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (5.1.6)$$

Τα εντατικά μεγέθη εκφράζονται ως προς τις μετατοπίσεις:

$$\begin{aligned} M_x &= -K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ M_y &= -K \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= -K \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5.1.7\alpha)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \kappa^2 G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \\ Q_y &= \kappa^2 G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi \right) \end{aligned} \quad (5.1.7\beta)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ισορροπίας της πλάκας για να βρούμε τις τελικές διαφορικές εξισώσεις πλάκας. Σε αντίθεση με τις λεπτές πλάκες που η διαφορική εξίσωση ήταν μία, εδώ είναι τρεις διότι έχουμε τρεις βαθμούς ελευθερίας w, φ, ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_x \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= Q_y \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q \end{aligned}$$

(5.1.8)

Έτσι προκύπτουν οι εξής μερικές διαφορικές εξισώσεις:

$$K \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] + \kappa^2 G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) = 0$$

$$K \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] + \kappa^2 G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi \right) = 0$$

$$\kappa^2 G h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

(5.1.9)

Προκειμένου να έχουμε ένα καλώς τοποθετημένο πρόβλημα από μαθηματική άποψη, πρέπει σε κάθε σύνορο να ικανοποιούνται τρεις συνθήκες ισορροπίας. Για τις πιο κοινές συνοριακές συνθήκες έχουμε:

A) Ελεύθερη πλευρά.

Όλα τα εντατικά μεγέθη μηδενίζονται για x,y αντίστοιχα.

$$Q_x = M_x = M_{xy} = 0 \text{ ή } Q_y = M_y = M_{xy} = 0$$

(5.1.10)

B) Πλευρά με απλή στήριξη.

Μηδενίζονται οι ροπές και η βύθιση για x,y αντίστοιχα.

$$M_x = M_{xy} = w = 0 \text{ ή } M_y = M_{xy} = w = 0$$

(5.1.11)

Γ) Πλευρά πακτωμένη.

Μηδενίζονται όλοι οι όροι μετακινήσεων για x,y αντίστοιχα.

$$\varphi = \psi = w = 0$$

(5.1.12)

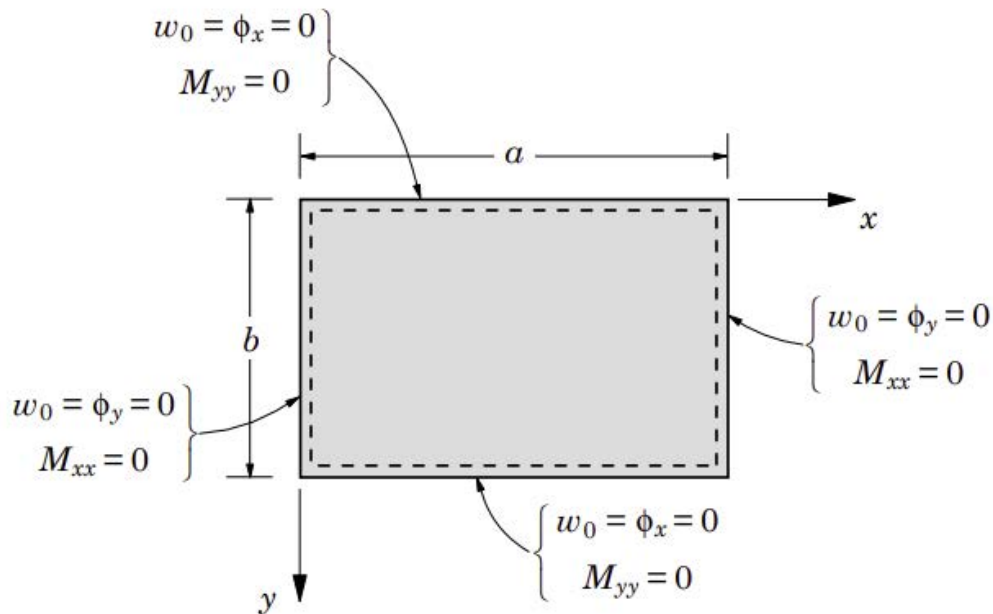
Όταν προσδιοριστούν οι μετακινήσεις w , ϕ , ψ , οι τάσεις και οι παραμορφώσεις μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε σημείο.

Μέθοδος Navier για τη θεωρία Mindlin-Reissner

Όπως και στις λεπτές πλάκες Kirchhoff, μια λύση Navier μπορεί να προέλθει για ισότροπες ορθογωνικές πλάκες στο πλαίσιο της θεωρίας των Mindlin-Reissner. Η πλάκα έχει απλή έδραση σε όλες τις πλευρές και φορτίζεται με κάθετο φορτίο $q(x,y)$. Το φορτίο όπως έχουμε εξηγήσει σε προηγούμενες ενότητες αναπτύσσεται ως:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.1.13)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (5.1.14)$$



Σχήμα 5.2: Συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης για τη θεωρία Mindlin-Reissner ($\varphi_x = \varphi$, $\varphi_y = \psi$). (Reddy)

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$w_0(x=0, x=\alpha) = 0$$

$$w_0(y=0, y=b) = 0$$

$$\varphi(y=0, y=b) = 0$$

$$\psi(x=0, x=\alpha) = 0$$

$$M_x(x=0, x=\alpha) = 0$$

$$M_y(y=0, y=b) = 0$$

(5.1.15)

Τα παρακάτω διπλά αναπτύγματα Fourier προκύπτουν ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{\alpha} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

(5.1.16)

Παρατηρούμε ότι, όπως αναφέρεται στο Παράρτημα Α1 δεν είναι απαραίτητο το ανάπτυγμα να γίνεται μόνο με διπλές ημιτονικές σειρές αλλά μπορεί να γίνει με οποιοδήποτε τριγωνομετρικό συνδυασμό αρκεί να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Για να βρούμε τους συντελεστές Fourier εξισώνουμε τις εξισώσεις (5.1.16) με τις εξισώσεις πλάκας (5.1.9).

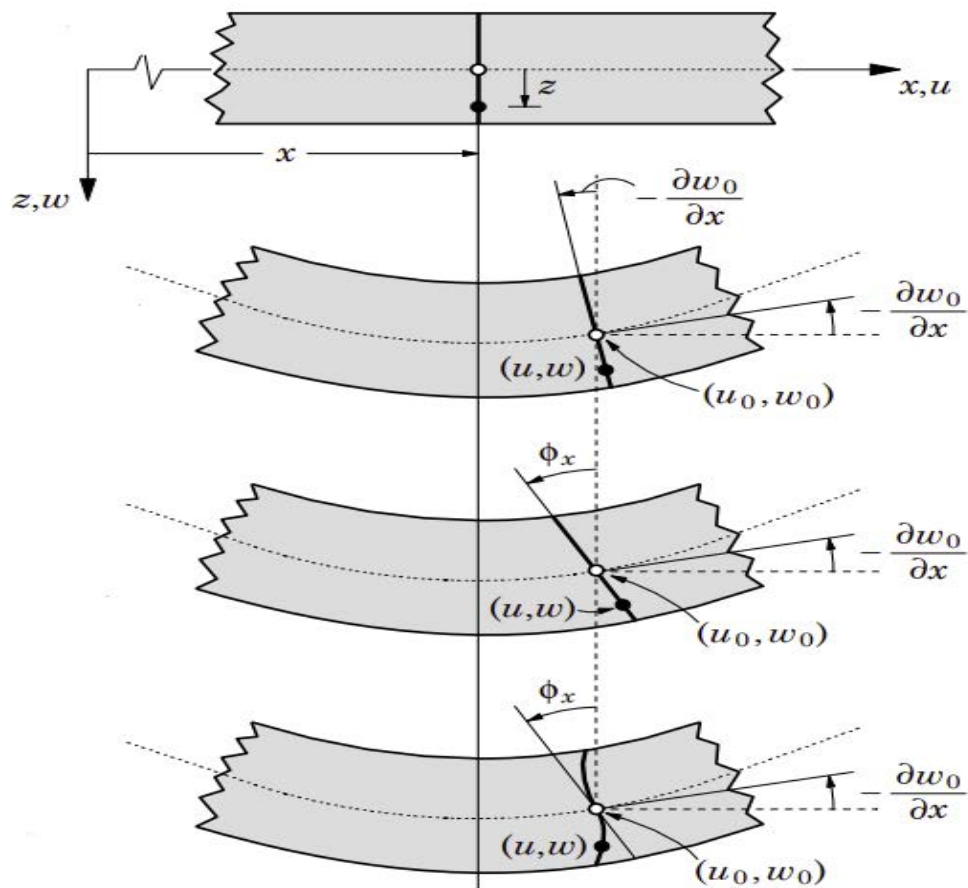
Όσο το πάχος της πλάκας είναι κοντά σε $h/L=1/10$ η θεωρία Mindlin-Reissner είναι αρκετά αντιπροσωπευτική. Όταν όμως ο λόγος h/L τείνει στο $1/5$ είναι αναγκαίο να πρέπει να προσφύγουμε σε τρίτης τάξης θεωρίες.

5.2 Ανώτερης Τάξης θεωρίες διατμητικών παραμορφώσεων (Levinson, Reddy)

Θεωρίες που περιέχουν ανωτέρου από έναν βαθμό z -όρους (εκφράσεις μετακινήσεων ως προς το πάχος) στο επίπεδο μετακινήσεων ονομάζονται ανώτερης τάξης θεωρίες διατμητικών παραμορφώσεων. Όσο πιο πολύ αυξάνουμε τον βαθμό των πολυωνυμικών όρων των εξισώσεων μετακινήσεων, τόσο πιο ακριβής και ρεαλιστική γίνεται η περιγραφή της συμπεριφοράς της πλάκας σε κάμψη. Παρολ'αυτά, η μεγάλη μαθηματική δυσκολία που ενέχουν θεωρίες τάξης ανώτερης της τρίτης προκειμένου να έχουμε καλύτερη ακρίβεια είναι συχνά αποτρεπτική. Ο λόγος επέκτασης του πεδίου μετακινήσεων σε τρίτο βαθμό ως προς το πάχος γίνεται για να αποτυπώσουμε εξ'αρχής πιο ρεαλιστικά τη συμπεριφορά της παχιάς πλάκας κατά την κάμψη χωρίς να χρειαστεί η εισαγωγή διορθωτικού παράγοντα όπως στη θεωρία Mindlin-Reissner.

Τρίτης τάξης θεωρία Levinson, Reddy

Μια από τις πρώτες προσπάθειες ανάπτυξης ανώτερης τάξης θεωρίας είναι αυτή των Levinson (1980) και Reddy (1984).



Σχήμα 5.3: Σύγκριση της παραμόρφωσης της μέσης επιφάνειας και της καθέτου, για ένα σημείο που απέχει z από αυτήν, κατά το xz επίπεδο για θεωρίες Kirchhoff-Love, Mindlin-Reissner, Levinson-Reddy. (Reddy)

Βλέπουμε πως έχουμε περαιτέρω χαλάρωση των παραδοχών των Kirchhoff-Love και κατ'έκταση των Mindlin-Reissner, καθώς πλέον η κάθετος στη μέση επιφάνεια δεν παραμένει ευθύγραμμη αλλά μπορεί να υποστεί καμπύλωση.

Το επίπεδο μετακινήσεων έχει τη μορφή:

$$u = z\varphi_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y)$$

$$v = z\varphi_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y),$$

(5.2.1)

όπου :

$$\begin{aligned}\psi_x &= -\frac{4}{3h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \psi_y &= -\frac{4}{3h^2}(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y})\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}u &= z\varphi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) = z\left[\varphi_x - \frac{4z^2}{3h^2}(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x})\right] \\ v &= z\varphi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2}(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) = z\left[\varphi_y - \frac{4z^2}{3h^2}(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y})\right] \\ w &= w(x, y)\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

Οι συναρτήσεις φ_x, φ_y εκφράζουν τη γωνία περιστροφής της καθέτου της μέσης επιφάνειας όπως στη θεωρία Mindlin-Reissner. Οι ψ_x, ψ_y αποτελούν συναρτήσεις λυγισμού και εκφράζουν την καμπύλωση της καθέτου της μέσης επιφάνειας. Αυτές οι κινηματικές υποθέσεις αποτυπώνουν μια παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων κατά το πάχος και ικανοποιούν τις απαιτήσεις μας για μηδενισμό αυτών στην άνω και κάτω ίνα. Οι άγνωστοι προς προσδιορισμό όπως και στην προηγούμενη θεωρία είναι οι φ_x, φ_y, w (φ, ψ, w για τη θεωρία Mindlin-Reissner).

Απο το πεδίο μετακινήσεων βρίσκουμε το επίπεδο παραμορφώσεων:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)\left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right) - \frac{4z^3}{3h^2}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x - \frac{4z^2}{h^2}\left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y - \frac{4z^2}{h^2} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (5.2.4)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία όπως στις θεωρίες Kirchhoff-Love, Mindlin-Reissner προκύπτει μια πιο βελτιωμένη προσέγγιση για μεσαίου πάχους πλάκες με τις διαφορικές εξισώσεις πλάκας να είναι:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} Gh(\nabla^2 w + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) + q(x, y) &= 0 \\ \frac{2K}{5} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi_x + (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - \frac{2}{3} Gh \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] &= 0 \\ \frac{2K}{5} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi_y + (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{2}{3} Gh \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Μια μεταγενέστερη πολυωνυμική εκδοχή 3^{ου} βαθμού του Reddy που δίνει πιο ακριβή λύση αλλά η διαδικασία επίλυσης είναι πιο απαιτητική από μαθηματική άποψη (βλ. Mittelstedt, Κεφ. 10.2) είναι η εξής:

$$u = z\psi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\lambda_x(x, y)$$

$$v = z\psi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\lambda_y(x, y)$$

$$w = w(x, y)$$

Ξεκινώντας από τα κινηματικά μεγέθη μέχρι την ισορροπία της πλάκας, αλλά τώρα χρησιμοποιώντας μητρώα (μητρώο δυσκαμψίας κλπ.) θα καταλήξουμε σε 7 διαφορικές εξισώσεις αφού έχουμε 7 αγνώστους. Πρέπει να τονιστεί ότι από αυτό το σημείο και μετά για πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού η μεγαλύτερη ακρίβεια που παίρνουμε είναι αμελητέα σε σχέση με το πόσο πιο απαιτητική και επίπονη καθίσταται η αναλυτική επίλυση από μαθηματική άποψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Μη γραμμική ανάλυση (εξισώσεις von Karman)

6.1 Μη γραμμική συμπεριφορά της πλάκας

Η μη γραμμική θεώρηση της κάμψης πλακών γίνεται σημαντική όταν οι μετατοπίσεις είναι αρκετά μεγάλες ώστε οι γραμμικές υποθέσεις της κλασικής θεωρίας πλακών (όπως η θεωρία Kirchhoff-Love) να μην είναι πλέον έγκυρες. Η μη γραμμική θεωρία πλακών είναι κρίσιμη για την κατανόηση της συμπεριφοράς δομικών στοιχείων όπως οι πτέρυγες αεροσκαφών, τα καταστρώματα γεφυρών και οι λεπτότοιχες κατασκευές που υφίστανται σημαντικές παραμορφώσεις υπό την άσκηση φορτίου. Στη γραμμική θεωρία πλακών οι μετατοπίσεις υποτίθεται ότι είναι μικρές, και οι γεωμετρικές μη γραμμικότητες αγνοούνται. Ωστόσο, όταν οι πλάκες υφίστανται σημαντική βύθιση, οι αλλαγές στη γεωμετρία κατά την παραμόρφωση πρέπει να ληφθούν υπόψη.

- **Γεωμετρική μη γραμμικότητα:** Καθώς η πλάκα κάμπτεται, η μέση επιφάνειά της υφίσταται δυνάμεις εντός του επιπέδου, που αλλάζουν σημαντικά την κατανομή των τάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, οι παραμορφώσεις δεν σχετίζονται πλέον γραμμικά με τις μετατοπίσεις και πρέπει να προστεθούν νέοι όροι στις εξισώσεις ισορροπίας, που να λαμβάνουν υπόψη αυτές τις μεγάλες παραμορφώσεις.
- **Μη γραμμικότητα von Karman:** Μία από τις πιο διαδεδομένες διατυπώσεις για την περιγραφή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας στις λεπτές πλάκες είναι οι εξισώσεις von Karman. Αυτές τροποποιούν τις σχέσεις παραμόρφωσης-μετατόπισης για να συμπεριλάβουν τετραγωνικούς όρους, λαμβάνοντας υπόψη μεγάλες μετατοπίσεις, ενώ παράλληλα υποθέτουν μέτριες περιστροφές (αυτή η υπόθεση βοηθάει στην απλοποίηση κάποιων όρων κατά την κατάστροψη των εξισώσεων της θεωρίας όπως θα δούμε στη συνέχεια).

Όταν το βέλος κάμψης μιας πλάκας γίνεται μεγάλο σε σχέση με το πάχος της h , συγκεκριμένα όταν $w \geq 0,3h$, η σχέση μεταξύ του εξωτερικού φορτίου και του βέλους κάμψης δεν είναι πλέον γραμμική. Αυτό σημαίνει ότι η εφαρμογή επιπλέον φορτίου δεν οδηγεί σε αναλογική αύξηση της βύθισης, όπως θα συνέβαινε σε ένα γραμμικό σύστημα. Αυτό συμβαίνει διότι οι μεγάλες βυθίσεις προκαλούν το τέντωμα της μέσης επιφάνειας της πλάκας, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη μεμβρανικών δυνάμεων

Πρόκειται για εφελκυστικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στη μέση επιφάνεια της πλάκας (ουδέτερος άξονας) καθώς αυτή παραμορφώνεται. Καθώς η πλάκα υφίσταται μεγαλύτερη βύθιση, αυτό το φαινόμενο τεντώματος αυξάνει την αντοχή της, αυξάνοντας την ικανότητά της να φέρει φορτίο. Οι μεμβρανικές δυνάμεις είναι σημαντικές επειδή προσφέρουν επιπλέον αντίσταση στα εφαρμοζόμενα φορτία, πέρα από την αντίσταση που παρέχεται από την κάμψη. Είναι ως εάν η πλάκα να «καταλαβαίνει» την αυξανόμενη κάμψη και να δημιουργεί εσωτερικά μια προένταση προκειμένου να αντέξει τη φόρτιση.

Εάν η πλάκα συνεχίσει να παραμορφώνεται πέραν του μισού του πάχους της $w_{\max} \geq h/2$ τότε η ικανότητα της πλάκας να λαμβάνει φορτίο αυξάνεται σημαντικά λόγω της πρόσθετης συνεισφοράς από τις μεμβρανικές δυνάμεις.

- Όταν η βύθιση φτάσει περίπου το πάχος της πλάκας $w_{\max} = h$, η δράση της μεμβράνης γίνεται συγκρίσιμη με την αντίσταση λόγω κάμψης.
- Εάν η βύθιση υπερβεί το πάχος της $w_{\max} > h$, η δράση της μεμβράνης κυριαρχεί έναντι της κάμψης. Σε αυτό το σημείο, η αντοχή της πλάκας βασίζεται κυρίως στις μεμβρανικές δυνάμεις.

Στις περιπτώσεις λεπτών πλακών όπου το βέλος κάμψης είναι ίσο ή μεγαλύτερο της διάστασης του πάχους, οι εξισώσεις von Karman αποτελούν τα θεμέλια για την ανάλυση της μη γραμμικής συμπεριφοράς της πλάκας. Πρέπει να τονιστεί πως η θεωρία ισχύει για τη μη γραμμική συμπεριφορά λεπτών πλακών που σημαίνει πως αν και μεγάλο το βέλος κάμψης σχετικά με το πάχος, σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις παραμένει αναλογικά μικρό.

6.2 Εξισώσεις Förrpl-von Karman. Μη γραμμική θεωρία λεπτών πλακών

Η υπόθεση Kirchhoff-Love υποθέτει ότι τα κάθετα επίπεδα στο μέσο επίπεδο της πλάκας παραμένουν κάθετα στην πλάκα ακόμη και μετά την παραμόρφωση. Αυτό συνεπάγεται ότι η μεταβολή του πάχους της πλάκας κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης είναι αμελητέα και ότι οι εντός του επιπέδου (μεμβρανικές) μετατοπίσεις είναι μικρές. Θεωρώντας ότι οι περιστροφές της πλάκας είναι μικρές, δηλαδή οι παραμορφώσεις είναι μεν μη γραμμικές, αλλά μέτριες εκφράζουμε το πεδίο μετατοπίσεων:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_s(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_s(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Οι ριζοσπαστικές και για κάποιους θεωρητικά αμφιλεγόμενες υποθέσεις του von Karman είναι οι παραδοχές:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

(6.2.2)

Χρησιμοποιώντας τον τριδιάστατο τανυστή παραμόρφωσης του Lagrange και τις υποθέσεις του von Karman διατυπώνουμε τις γνωστές παραμορφώσεις von Karman:

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \approx \frac{\partial u_s}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

Οι δύο πρώτοι τετραγωνικοί όροι εξαιτίας της παραδοχής αποτελούν αμελητέα ποσότητα και παραλείπονται. Ομοίως, έχουμε:

$$E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \approx \frac{\partial v_s}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

Οι παραγωγίσεις των w, u_s, v_s ως προς z μηδενίζονται διότι είναι συναρτήσεις που εξαρτώνται μόνο από τα x, y . Έτσι,

$$\begin{aligned} E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial xy} + \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} E_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v_s}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + 0 \right) \approx 0 \end{aligned}$$

Οι παραδοχές (6.2.2) έχουν την ίδια ισχύ. Αυτό σημαίνει πως η ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε από τα δύο πρώτα μέλη με οποιαδήποτε από τα δύο δεύτερα μέλη. Θα μπορούσαμε δηλαδή να την ξαναγράψουμε στη μορφή:

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

(6.2.2β)

Οι όροι του πρώτου μέλους αποτελούν μικρή ποσότητα και του δεύτερου μέλους πολύ μικρότεροι. Στις προηγούμενες παραμορφώσεις κρατούσαμε τους όρους :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_s}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_s}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Αν όμως αυτοί πολλαπλασιαστούν ως ήδη πολύ μικρές ποσότητες με μια άλλη μικρή ποσότητα τότε προκύπτει κάτι αμελητέο και προσεγγιστικά το θεωρούμε ίσο με μηδέν όπως φαίνεται στην παραπάνω σχέση.

Σε αυτό το σημείο θα υπενθυμίσουμε ότι μία αρχική υπόθεση στην ανάπτυξη της θεωρίας von Karman αποτελεί ότι η πλάκα κατά την παραμόρφωση δεν αλλάζει το πάχος της και παραμένει συμπαγής. Αυτό έχει ως συνέπεια να ορίσουμε $E_{zz} = 0$, με την ίδια λογική που στη θεωρία Kirchhoff-Love θέσαμε $\sigma_z = 0$. Συνοψίζοντας, ο τανυστής των παραμορφώσεων von Karman είναι:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ E_{yy} &= \frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ E_{zz} &= E_{yz} = E_{xz} = 0 \end{aligned}$$

(6.2.3)

Οι πρώτοι όροι εκφράζουν τις συνήθεις μικρές παραμορφώσεις για τη μέση επιφάνεια λεπτών πλακών. Οι δεύτεροι όροι, που περιλαμβάνουν τα τετράγωνα των διαφορικών των μετατοπίσεων, είναι μη γραμμικοί και πρέπει να ληφθούν υπόψη όταν η κάμψη της πλάκας είναι αρκετά μεγάλη (Μικρές περιστροφές όπως προαναφέραμε περίπου 10 – 15 μοίρες). Αυτοί οι δύο πρώτοι όροι μαζί ονομάζονται μεμβρανικές παραμορφώσεις. Οι τελευταίοι όροι, που περιλαμβάνουν δεύτερες παραγώγους, είναι οι παραμορφώσεις κάμψης και εκφράζουν τις καμπυλότητες. Οι μηδενικοί όροι οφείλονται στις υποθέσεις της κλασικής θεωρίας πλακών, η οποία υποθέτει ότι τα στοιχεία που είναι κάθετα στη μέση επιφάνεια παραμένουν ανελαστικά και ότι οι κάθετες γραμμές στο μέσο επίπεδο παραμένουν κάθετες μετά την παραμόρφωση.

Οι παραμορφώσεις συνδέονται γραμμικά μέσω του νόμου του Hooke με τις τάσεις σε μια λεπτή πλάκα, ομογενή και ισότροπη:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\nu \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]\end{aligned}\tag{6.2.4}$$

Τα εντατικά μεγέθη προσδιορίζονται ολοκληρώνοντας τις τάσεις κατά το πάχος της πλάκας:

$$\begin{aligned}N_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \\ M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{ij} dz \\ N_{xx} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[2 \frac{\partial u_s}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial v_s}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ N_{yy} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[2\nu \frac{\partial u_s}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_s}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ N_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

$$\begin{aligned}M_{xx} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{yy} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

(6.2.6)

Οι εξισώσεις Föppl–von Karman συνήθως προκύπτουν μέσω ενεργειακής θεώρησης, λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας και το έργο που γίνεται από τις εξωτερικές δυνάμεις. Οι προκύπτουσες στατικές εξισώσεις που διέπουν το σύστημα είναι:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = q$$

(6.2.7)

Η μη γραμμική θεωρία λεπτών πλακών του von Karman είναι εφαρμόσιμη σε ορισμένες απλοποιημένες περιπτώσεις, αλλά λόγω της πολυπλοκότητας και της μη γραμμικότητας των εξισώσεων που διέπουν τη θεωρία, είναι συχνά δύσκολο να λυθεί αναλυτικά στις περισσότερες πραγματικές εφαρμογές. Σε περιπτώσεις όπου η γεωμετρία είναι απλή (π.χ. ορθογωνική πλάκα με ομοιόμορφες συνοριακές συνθήκες) και η φόρτιση είναι σχετικά απλή (π.χ. ομοιόμορφη ή συμμετρική φόρτιση), μπορούν να προκύψουν προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις μέσω ενεργειακών μεθόδων (Galerkin, Ritz). Στην πράξη, χρησιμοποιούνται συνήθως αριθμητικές μέθοδοι και υπολογιστικοί κώδικες που ενσωματώνουν αυτές τις εξισώσεις για την επίλυση γενικών περιπτώσεων, ειδικά όταν πρόκειται για σύνθετες γεωμετρίες, συνθήκες φόρτισης και συνοριακές συνθήκες.

Βιβλιογραφία

Bhaskar, K., & Varadan, T. K. (2014). *Plates: Theories and Applications*. John Wiley & Sons.

Birman, V. (2011). *Plate Structures: Modeling, Analysis, and Design*. Springer.

Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*. CRC Press.

K.Girkmann, *Flächentragwerke*, 6th ed., Springer, 197

Mittelstedt, C. (2023). *Theory of plates and shells*. Springer.

- Neto, M. A., Amaro, A., Roseiro, L., Cirne, J., & Leal, R. (2015). *Engineering computation of structures: the finite element method*. Springer.
- Podio-Guidugli, P., & Tiero, A. (2006). Marcus integration method for shearable plates. *J Elasticity*, 84, 189-196.
- Reddy, J. N. (Ed.). (1999). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC Press.
- Slaughter, W. S. (2002). *The linearized theory of elasticity*. Birkhäuser.
- Szilard, R. (2003). *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical, and Engineering Methods*. John Wiley and sons.
- Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- Troitsky, M. S. (1976). *Stiffened Plates: Bending, Stability, and Vibrations*. Elsevier.
- Ugural, A. C. (2017). *Plates and Shells: Theory and Analysis* (4th ed.). CRC Press.
- Θωμάς, Ν., & Βαλλιάρης, Ν. (2000). *Επιφανειακοί φορείς: Θεωρία και μέθοδοι επίλυσης*. Εκδόσεις Ζήτη.
- Μακάριος, Μ. (2018). *Επιφανειακοί φορείς: Δίσκοι, πλάκες, κελύφη*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πιπερίδης, Α. (2000), *Σύνταξη πινάκων κατανομής ομοιόμορφου φορτίου τετράρειστων, τριέρειστων και διέρειστων πλακών*, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.
- Τριανταφύλλου, Α. Χ. (2015). *Μηχανική των Υλικών Ι* (1η έκδοση). Εκδόσεις Γκότσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Α] Σειρές Fourier

Οι σειρές Fourier έχουν χρήση στην αναλυτική επίλυση πολλών προβλημάτων στο πεδίο της μηχανικής, όπως στη θεωρία ελαστικότητας, τις ταλαντώσεις, στη μετάδοση θερμότητας και στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Σύμφωνα με την θεωρία του Fourier οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση $y = f(x)$ μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός άπειρου αριθμού ημιτονικών ή συνημιτονικών όρων. Η αναπαράσταση περιοδικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές σειρές ονομάζεται ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$, με περίοδο $2L$, συνεχής και παραγωγίσιμη με σημεία ασυνέχειας τα σημεία $x = \pm(2n+1)L$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), και

$$f(x) = f(x + 2L).$$

Η σειρά Fourier που εκφράζει τη συγκεκριμένη συνάρτηση είναι :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

(A.1)

Μέσω αυτής μπορεί η $f(x)$ να προσεγγισθεί με οποιαδήποτε ακρίβεια στα σημεία που είναι συνεχής.

Τα a_0 , a_n , b_n ονομάζονται συντελεστές Fourier και για τον υπολογισμό τους ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\cos \frac{m\pi x}{L}$, $\sin \frac{n\pi x}{L}$ για a_n , b_n αντίστοιχα.

2) Ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[-L, +L]$.

3) Κάνουμε χρήση των συνθηκών ορθογωνιότητας τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

- $\int_{-L}^{+L} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}$.
- $\int_{-L}^{+L} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$, για κάθε m, n .
- $\int_{-L}^{+L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ L, m = n \end{cases}$

Άρα, εφαρμόζοντας τα βήματα στην A.1 έχουμε:

$$1) f(x) \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}$$

$$2) f(x) \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{+L} \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{+L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\int_{-L}^{+L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \text{ όπου } \int_{-L}^{+L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = L, \int_{-L}^{+L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0$$

(συνθήκες ορθογωνιότητας τριγωνομετρικών συναρτήσεων)

$$3) \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \alpha_n L \Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx .$$

Για τα b_n ακολουθούμε την ίδια διαδικασία πολλαπλασιάζοντας με $\sin \frac{m\pi x}{L}$.

Επομένως, έχουμε τελικά τους ακόλουθους συντελεστές Fourier:

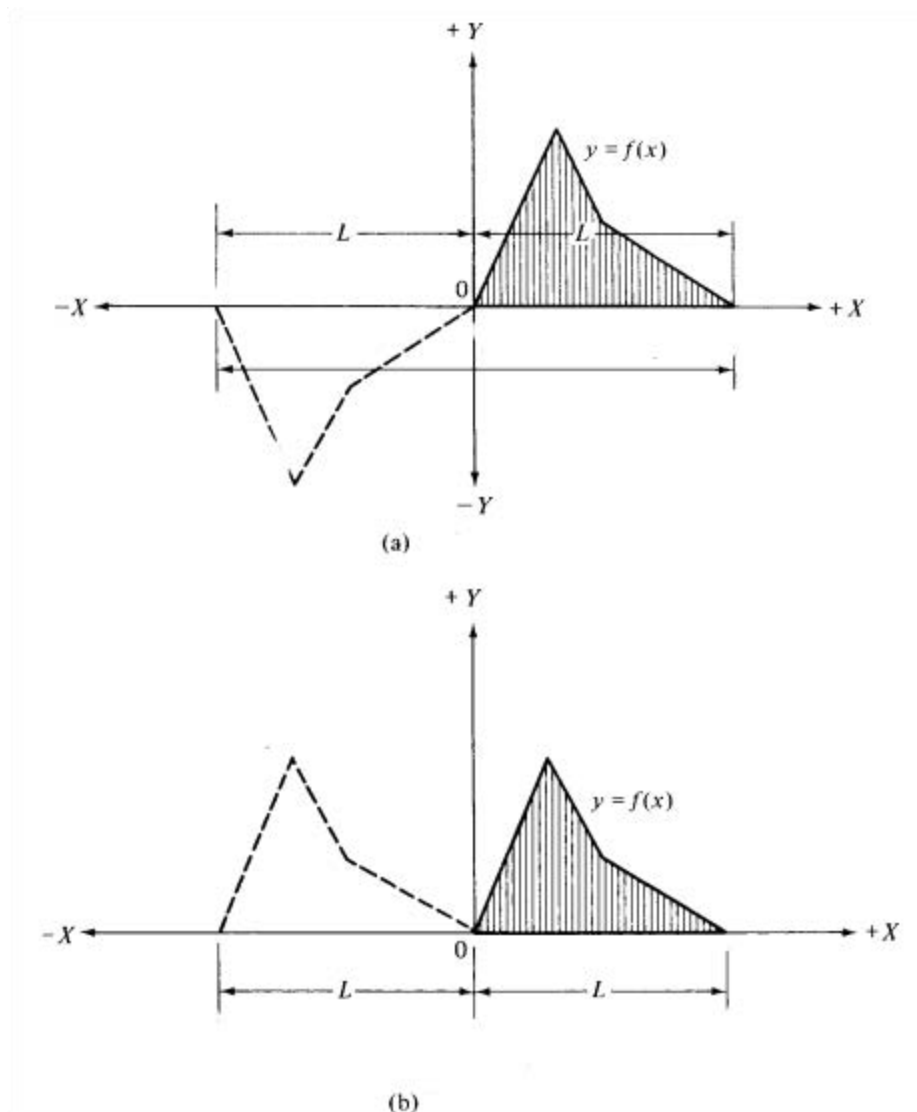
$$\alpha_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx .$$

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx .$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx .$$

(A.2)

Σε πληθώρα εφαρμογών, όπως στην περίπτωση ορθογωνικών πλακών, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες άρτιας ή περιττής συνάρτησης για λόγους απλοποίησης. Αν θέλουμε το ανάπτυγμα μιας σειράς Fourier στο διάστημα $x \in [0, L]$ τότε την επεκτείνουμε στο διάστημα $[-L, L]$ θεωρώντας την άρτια ή περιττή. Με τη διαδικασία αυτή χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο επιμέρους συμμετρικά ολοκληρώματα συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, είτε άρτια είτε περιττά, γεγονός που θα μας βοηθήσει στην εύρεση των συντελεστών Fourier.



Σχήμα Α1.1: Αυθαίρετη επέκταση της συνάρτησης $y=f(x)$ α. Περιττή β. Άρτια. (Szilard)

Ας υποθέσουμε μια άρτια συνάρτηση $f(x)$:

$$f(-x) = f(x)$$

Μπορούμε να γράψουμε τους συντελεστές της **(Α.2)** ως:

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αλλαγής μεταβλητής θέτουμε $x = -u \rightarrow dx = -du$, το $x = -L$ αντιστοιχεί σε $u = L \rightarrow x = 0$ αντιστοιχεί σε $u = 0$. Απομονώνοντας τον πρώτο όρο έχουμε

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(-u) \cos\left(\frac{-n\pi u}{L}\right) (-du)$$

Όμως ,

$$f(-u) = f(u) \cos\left(\frac{-n\pi u}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right)$$

Ο όρος γίνεται

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(u) \cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right) (du)$$

Άρα ,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Το b_n ισούται με μηδέν διότι το ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.

Με αντίστοιχη διαδικασία σε περίπτωση περιττής συνάρτησης $f(x) = -f(-x)$ στο διάστημα $(-L, L)$ προκύπτει:

$$a_n = 0, \text{ για όλα τα } L$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(A.3)

B] Διπλές σειρές Fourier

Η ιδέα της απλής σειράς Fourier για συναρτήσεις μίας μεταβλητής μπορεί να γενικευθεί και για δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$ που ορίζεται σε διαστήματα $x \in [0,a]$ και $y \in [0,b]$ μπορεί να αναπτυχθεί σε διπλή σειρά Fourier. Επεκτείνουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $x \in [-a,a]$ και $y \in [-b,b]$ και κάνοντας την παραδοχή ότι είναι περιττή $f(x,y) = -f(-x,y)$, $f(x,y) = -f(x,-y)$ ως και προς τις δύο μεταβλητές έχουμε:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{Απλή σειρά Fourier θεωρώντας το } y \text{ σταθερό})$$

$$f_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{Απλή σειρά Fourier της συνάρτησης } f_m(y))$$

Με συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει η διπλή ημιτονική σειρά Fourier:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Κάνοντας την αναλογία εκφράζουμε τη συνάρτηση για κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ μίας πλάκας:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(A.4)

Για να βρούμε τους συντελεστές p_{mn} θεωρώντας τη μεταβλητή y ως σταθερά γράφουμε:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$p_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της **[A.3]** στην **[A.4]**.

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

$$p_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b p_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις στην **(A.4)** προκύπτει :

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

[A.5]

Με αυτή την εξίσωση γνωρίζοντας το είδος φόρτισης μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Fourier, όπως θα δούμε και στο Κεφάλαιο 3.2 .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

B1] Συνήθειες λεπτές πλάκες στο λογισμικό matlab

Στη παρούσα ενότητα αναλύεται η κατάστροψη ενός κώδικα στο Matlab για συνήθειες λεπτές πλάκες Kirchhoff-Love υπό κάθετο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(x,y)$. Ακολουθώντας ένα προς ένα τα βήματα από το Κεφάλαιο 3.1 θα ξεκινήσουμε από τα κινηματικά μεγέθη και θα καταλήξουμε στη διαφορική εξίσωση πλάκας. Θεωρούμε ομογενή ισοπαχή πλάκα από ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό.

1) Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν είναι οι δύο ελαστικές σταθερές που χαρακτηρίζουν το ισότροπο ελαστικό υλικό της λεπτής πλάκας που θέλουμε να μελετήσουμε. Συσχετίζοντας αυτές βρίσκουμε και το μέτρο διάτμησης G .

```
syms E nu h D
```

```
G = E / (2 * (1 + nu));
```

2) Στο Κεφάλαιο 3.2 έχει αποδειχθεί πως σε κάθε σημείο της πλάκας οι μετατοπίσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ συνδέονται με τις πρώτες μερικές παραγώγους του βέλους κάμψης $w(x,y)$.

```
syms x y z w(x, y) p(x,y)
```

(Ορισμός των μεταβλητών x , y , z και της συνάρτησης $w(x,y)$, $p(x,y)$)

```
u = -z * diff(w(x, y), x);
```

```
v = -z * diff(w(x, y), y);
```

(Προσδιορισμός των συναρτήσεων των μετατοπίσεων $u(x,y)$, $v(x,y)$.)

4) Σύμφωνα με τον ορισμό των παραμορφώσεων προσδιορίζουμε από τις μετατοπίσεις τις σχετικές παραμορφώσεις που αποτελούν δεύτερες παραγώγους του βέλους κάμψης.

```
epsilon_x = diff(u, x);
```

```
epsilon_y = diff(v, y);
```

```
gamma_xy = diff(u, y) + diff(v, x);
```

(Προσδιορισμός των παραμορφώσεων.)

```
epsilon_x_simplified = simplify(epsilon_x);
```

```
epsilon_y_simplified = simplify(epsilon_y);
```

```
gamma_xy_simplified = simplify(gamma_xy);
```

(Απλοποιεί τις εκφράσεις στις πιο απλές-μειωμένες μορφές τους.)

5) Επόμενο βήμα είναι η συσχέτιση τάσεων παραμορφώσεων σύμφωνα με τον γραμμικό νόμο του Hooke.

```
syms sigma_x sigma_y tau_xy
```

```
epsilon_x = (1/E) * (sigma_x - nu * sigma_y);
```

```
epsilon_y = (1/E) * (sigma_y - nu * sigma_x);
```

```
gamma_xy = (1/G) * tau_xy;
```

```
eq1 = epsilon_x == epsilon_x_simplified;
```

```
eq2 = epsilon_y == epsilon_y_simplified;
```

```
eq3 = gamma_xy == gamma_xy_simplified;
```

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων.

```
[sol_sigma_x, sol_sigma_y, sol_tau_xy] = solve([eq1, eq2, eq3], [sigma_x, sigma_y, tau_xy]);
```

```
sol_sigma_x = simplify(sol_sigma_x);
```

```
sol_sigma_y = simplify(sol_sigma_y);
```

```
sol_tau_xy = simplify(sol_tau_xy);
```

Αποτελέσματα τελικών τάσεων ως προς το βέλος κάμψης $w(x,y)$. (outputs)

```
sol_sigma_x (E*z*(diff(w(x, y), x, x) + nu*diff(w(x, y), y, y)))/(nu^2 - 1)
```

```
sol_sigma_y (E*z*(nu*diff(w(x, y), x, x) + diff(w(x, y), y, y)))/(nu^2 - 1)
```

```
sol_tau_xy -(E*z*diff(w(x, y), x, y))/(nu + 1)
```

6) Ροπές με ολοκλήρωση των τάσεων καθ' ύψος $-h/2$ έως $h/2$ με την εντολή `integrate`.

```
Mx = int(sol_sigma_x * z, z, -h/2, h/2);
```

```
My = int(sol_sigma_y * z, z, -h/2, h/2);
```

```
Mxy = int(sol_tau_xy * z, z, -h/2, h/2);
```

```
Mx_simplified = simplify(Mx)
```

```
My_simplified = simplify(My)
```

```
Mxy_simplified = simplify(Mxy)
```

```
Mx_simplified =  
(E*h^3*(diff(w(x, y), x, x) + nu*diff(w(x, y), y, y)))/(12*(nu^2 - 1))  
  
My_simplified =  
(E*h^3*(nu*diff(w(x, y), x, x) + diff(w(x, y), y, y)))/(12*(nu^2 - 1))  
  
Mxy_simplified =  
-(E*h^3*diff(w(x, y), x, y))/(12*(nu + 1))
```

Αποτελέσματα ροπών στον αλγόριθμο.(outputs)

Αντικατάσταση μέτρου ελαστικότητας με δυσκαμψία πλάκας $D=h^3E/12(1- \nu^2)$

```
D = solve(h^3 * E == 12 * D * (1 - nu^2), D);
```

```
D  $-(E*h^3)/(12*nu^2 - 12)$ 
```

Επομένως οι τύποι των ροπών αντικαθιστώνται ώστε να συμπεριλαμβάνουν το D.

```
Mx_substituted = subs(Mx_simplified, E * h^3 / (12 * (1 - nu^2)), D);
```

```
My_substituted = subs(My_simplified, E * h^3 / (12 * (1 - nu^2)), D);
```

```
Mxy_substituted = subs(Mxy_simplified, E * h^3 / (12 * (1 - nu^2)), D);
```

7) Επόμενο βήμα αποτελεί η ικανοποίηση των στατικών εξισώσεων ισορροπίας της πλάκας.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.1.15α), (3.1.15β), (3.1.15γ) έχουμε:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0.$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

Οι ροπές έχουν είδη προγραμματιστεί και εκφραστεί ως προς το βέλος κάμψης. Απομένει η διατύπωση των τεμνουσών ως προς τις ροπές και κατ'επέκταση της εξίσωσης ισορροπίας στον κώδικα.

```
Qx = diff(Mx_simplified, x) + diff(Mxy_simplified, y);
```

```
Qy = diff(Mxy_simplified, x) + diff(My_simplified, y);
```

```
eq_iss = diff(Qx, x) + diff(Qy, y) == -p(x, y);
```

Η εξίσωση eq_iss αποτελεί και τη γραμμική μη ομογενή διαφορική εξίσωση πλάκας με μερικές παραγώγους ως προς το βέλος κάμψης.

```
pde=eq_iss;
```

Τέλος, διαιρούμε με τη δυσκαμψία για να καταλήξουμε στην τελική μερική διαφορική εξίσωση σύμφωνα με τις παραδοχές των Kirchhoff-Love. Εξίσωση (3.1.18).

```
pde_normalized = pde / D;
```

B2] Μέθοδος Navier στο λογισμικό Matlab

Σε αυτή την ενότητα θα καταστρώσουμε έναν κώδικα στο Matlab που να επιλύει ορθογωνικές λεπτές πλάκες με τις παραδοχές που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διπλών τριγωνομετρικών σειρών Fourier του Navier. Η διαδικασία θα γίνει ταυτόχρονα για δύο περιπτώσεις, α) τριγωνομετρικής και β) ομοιόμορφα κατανεμημένης φόρτισης.

Ο πρώτος κώδικας τρέχει παράλληλα για ημιτονική και ομοιόμορφη φόρτιση λαμβάνοντας υπόψη τους πρώτους m,n όρους. Με τα σύμβολα % επεξηγούνται αναλυτικά οι εκφράσεις που αντιστοιχούν σε κάθε εντολή. Φυσικά, αυτές είναι στα αγγλικά ώστε να διαβάζονται από το εκάστοτε λογισμικό. Έτσι, εξάγοντας κάποιος τον κώδικα μπορεί να τον τρέξει έχοντας μαζί με τις εντολές και ακριβείς πληροφορίες για το τι αντιπροσωπεύουν αυτές.

```
clc
```

```
clear
```

```

% Parameters

M = 200;    % Number of terms in the Fourier series (x-direction)

N = 200;    % Number of terms in the Fourier series (y-direction)

q0_sin = 30; % Sinusoidal load amplitude

q0_uni = 30; % Uniform load amplitude

D = 1;      % Flexural rigidity of the plate

a = 1;      % Length of the plate in the x-direction

b = 1;      % Length of the plate in the y-direction

dx = a/M;   % Step size in the x-direction

dy = b/N;   % Step size in the y-direction


% Initialize deflection matrices for both cases

w_sin = zeros(M, N); % For sinusoidal load

w_uni = zeros(M, N); % For uniform load


% 1. Sinusoidal Load Case

m = 1; % Fourier index for x-direction

n = 1; % Fourier index for y-direction

aaa = 1/(((m/a)^2 + (n/b)^2)^2);

aaa1 = (pi*dx*m)/a;

aaa2 = (pi*dy*n)/b;

aa_sin = q0_sin / ((pi^4) * D);

for i = 1:M

```



```

for j = 1:N
    w_sin(i, j) = aa_sin * aaa * sin(aaa1 * i) * sin(aaa2 * j); % Sinusoidal deflection
end
end

```

% 2. Uniform Load Case for m=n=1

m = 1; % Fourier index for x-direction

n = 1; % Fourier index for y-direction

denominator = (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2;

aaa1 = (pi * m / a) * dx;

aaa2 = (pi * n / b) * dy;

aa_uni = 16 * q0_uni / (pi^6 * D);

```

for i = 1:M

```

```

    for j = 1:N

```

```

        w_uni(i, j) = aa_uni / (m * n * denominator) * sin(aaa1 * i) * sin(aaa2 * j);

```

```

    end

```

```

end

```

% Boundary conditions (Simply supported plate)

w_sin(1:M, 1) = 0; % Sinusoidal load - x=0

w_sin(1:M, N) = 0; % Sinusoidal load - x=b

w_sin(1, 1:N) = 0; % Sinusoidal load - y=0

w_sin(M, 1:N) = 0; % Sinusoidal load - y=a

```

w_uni(1:M, 1) = 0; % Uniform load - x=0
w_uni(1:M, N) = 0; % Uniform load - x=b
w_uni(1, 1:N) = 0; % Uniform load - y=0
w_uni(M, 1:N) = 0; % Uniform load - y=a
% Find max deflection for sinusoidal load
[max_deflection_sin, idx_sin] = max(w_sin(:)); % Maximum deflection and its index
[x_idx_sin, y_idx_sin] = ind2sub(size(w_sin), idx_sin); % Convert index to x and y indices
x_max_sin = x_idx_sin * dx; % x-coordinate of max deflection
y_max_sin = y_idx_sin * dy; % y-coordinate of max deflection

% Display the results for sinusoidal load
fprintf('Max deflection for sinusoidal load: %f at x = %f, y = %f\n', max_deflection_sin,
x_max_sin, y_max_sin);

% Find max deflection for uniform load
[max_deflection_uni, idx_uni] = max(w_uni(:)); % Maximum deflection and its index
[x_idx_uni, y_idx_uni] = ind2sub(size(w_uni), idx_uni); % Convert index to x and y indices
x_max_uni = x_idx_uni * dx; % x-coordinate of max deflection
y_max_uni = y_idx_uni * dy; % y-coordinate of max deflection

% Display the results for uniform load
fprintf('Max deflection for uniform load: %f at x = %f, y = %f\n', max_deflection_uni, x_max_uni,
y_max_uni);

% Create mesh for plotting
[x, y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);

```

```

% Create mesh for plotting

[x, y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);


% Plotting the results

figure;


% Plot sinusoidal load result

subplot(1, 2, 1);

surf(x(1:M, 1:N), y(1:M, 1:N), w_sin');

xlabel('x')

ylabel('y')

zlabel('Deflection w(x, y)')

title('Sinusoidal Load')

axis equal

shading interp


% Plot uniform load result

subplot(1, 2, 2);

surf(x(1:M, 1:N), y(1:M, 1:N), w_uni');

xlabel('x')

ylabel('y')

zlabel('Deflection w(x, y)')

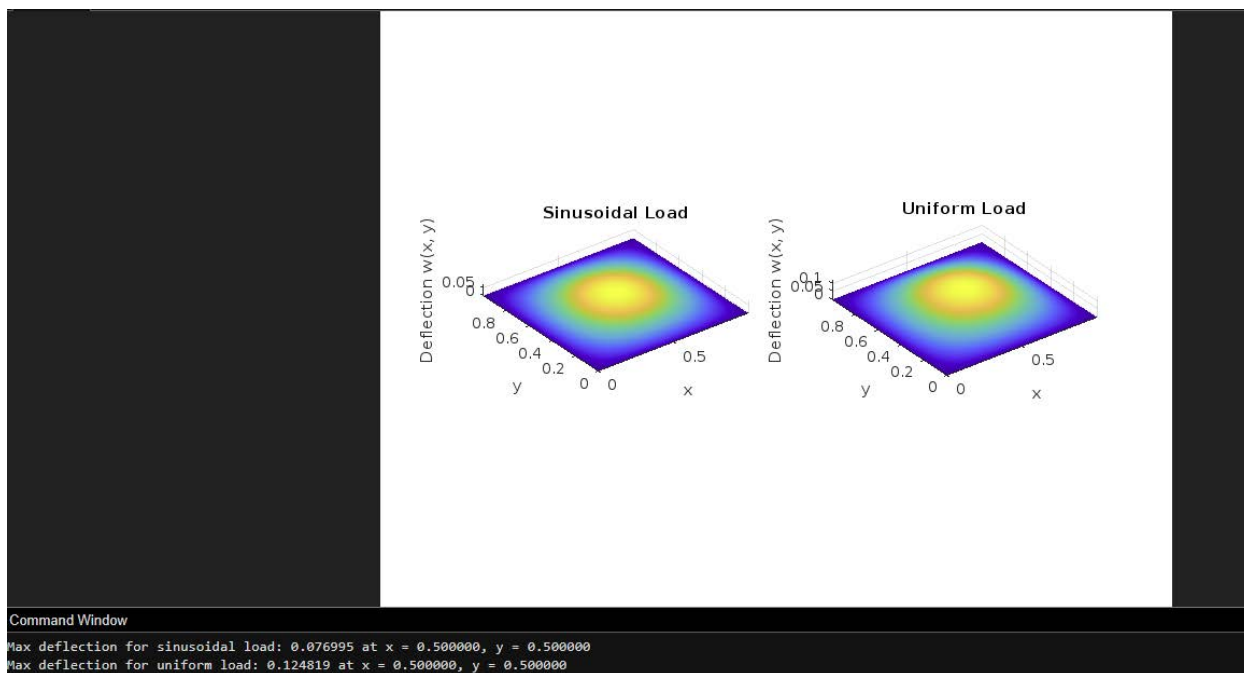
title('Uniform Load')

axis equal

```

shading interp

Μετά την εφαρμογή του κώδικα έχουμε τα αποτελέσματα:



Σχήμα B2.1: Μέγιστο βέλος κάμψης για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση και ημιτονική φόρτιση ($m,n=1$)

Για την εγκυροποίηση του κώδικα θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα στο λογισμικό με τα αποτελέσματα των αναλυτικών λύσεων από το Κεφάλαιο 3.2 για κάθε είδος φόρτισης.

Θέτουμε για προσιτούς υπολογισμούς $\alpha=b=1$ και δυσκαμψία $D=1$.

Ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση:

Ας υποθέσουμε μια τετραγωνική πλάκα. Για $x=a/2$ και $y=b/2$ στο κέντρο παρατηρούμε το μέγιστο βέλος κάμψης, καθώς και τις μέγιστες ροπές, ενώ η ροπή συστροφής μηδενίζεται .

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3,\dots} \int_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left[\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \cdot$$

$$\left(\text{Ισχύει } \sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right)$$

Θεωρώντας $m=n=1$:

$$w_{\max} = 0,00416q_0 \frac{\alpha^4}{D} = 0,00426 \cdot 30 \cdot \frac{1}{1} = 0,127$$

Αναλυτικό αποτέλεσμα ημιτονικής φόρτισης:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{\alpha} \sin \frac{\pi y}{b} = \frac{30 \alpha^2}{3.1415^4 \cdot 1 \cdot 4} = 0,077$$

Αν θεωρήσουμε $q=30\text{N/m}^2$, $D=1\text{N/m}^2$ τότε μονάδα μέτρησης του w είναι τα μέτρα.

Στον παρακάτω αλγόριθμο λαμβάνουμε υπόψην περισσότερους m, n όρους για το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο ώστε να παρατηρηθεί η διακύμανση των αποτελεσμάτων και η συμβολή στην ακρίβεια. Αυτό γίνεται εισάγοντας μια επιπλέον διαδικασία επανάληψης η οποία κάλλιστα μπορεί να ενταχθεί και στον προηγούμενο αλγόριθμο.

Μετα από την εφαρμογή παρατηρούμε ότι οι επιπρόσθετοι m, n όροι δεν προσφέρουν ιδιαίτερη επιπλέον ακρίβεια και μπορούν να παραληφθούν (από 0,12481-0,12499). Όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3 στη μέθοδο Navier για το ομοιόμορφο φορτίο το βέλος κάμψης παρουσιάζει γρήγορη σύγκλιση.

Αλγόριθμος για ομοιόμορφο φορτίο για $m=n=1,3,5$

clc

clear

% Parameters

M = 200; % Number of terms in the Fourier series (x-direction)

N = 200; % Number of terms in the Fourier series (y-direction)

q0_uni = 30; % Uniform load amplitude

D = 1; % Flexural rigidity of the plate

a = 1; % Length of the plate in the x-direction

b = 1; % Length of the plate in the y-direction

dx = a/M; % Step size in the x-direction

dy = b/N; % Step size in the y-direction

```

% Initialize deflection matrix for uniform load

w_uni = zeros(M, N);

% Coefficients for the Fourier series terms

terms = [1, 3, 5]; % Fourier modes to include (m=n=1,3,5)

% Uniform load coefficient

aa_uni = 16 * q0_uni / (pi^6 * D);

% Compute deflection for each Fourier mode

for k = 1:length(terms)

    m = terms(k); % Fourier index for x-direction

    n = terms(k); % Fourier index for y-direction

    denominator = (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2;

    aaa1 = (pi * m / a) * dx;

    aaa2 = (pi * n / b) * dy;

    % Accumulate the contribution of each term

    for i = 1:M

        for j = 1:N

            w_uni(i, j) = w_uni(i, j) + aa_uni / (m * n * denominator) * sin(aaa1 * i) * sin(aaa2 * j);

        end

    end

end

end

```

```

% Boundary conditions (Simply supported plate)

w_uni(1:M, 1) = 0; % Uniform load - x=0
w_uni(1:M, N) = 0; % Uniform load - x=b
w_uni(1, 1:N) = 0; % Uniform load - y=0
w_uni(M, 1:N) = 0; % Uniform load - y=a

% Find max deflection for uniform load

[max_deflection_uni, idx_uni] = max(w_uni(:)); % Maximum deflection and its index
[x_idx_uni, y_idx_uni] = ind2sub(size(w_uni), idx_uni); % Convert index to x and y indices
x_max_uni = x_idx_uni * dx; % x-coordinate of max deflection
y_max_uni = y_idx_uni * dy; % y-coordinate of max deflection


% Display the results for uniform load

fprintf('Max deflection for uniform load: %f at x = %f, y = %f\n', max_deflection_uni, x_max_uni,
y_max_uni);


% Create mesh for plotting

[x, y] = meshgrid(0:dx:a, 0:dy:b);


% Plotting the result for the uniform load

figure;

surf(x(1:M, 1:N), y(1:M, 1:N), w_uni);

xlabel('x')

ylabel('y')

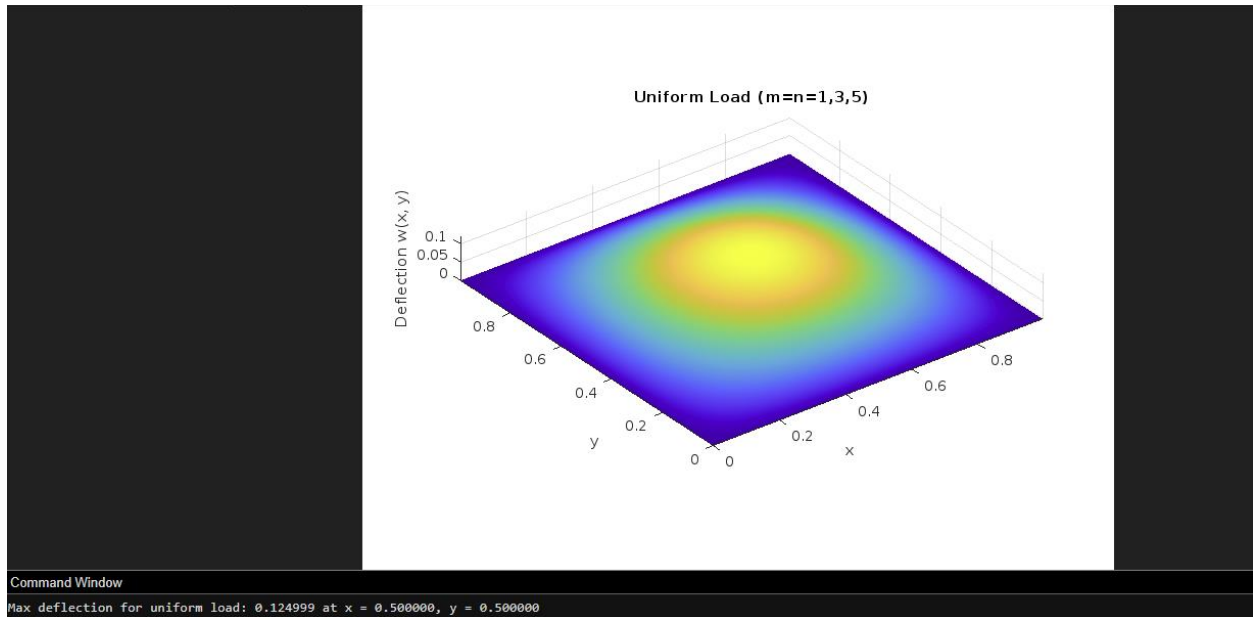
zlabel('Deflection w(x, y)')

```

title('Uniform Load (m=n=1,3,5)')

axis equal

shading interp



Σχήμα B2.2: Μέγιστο βέλος κάμψης για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση για περισσότερους m,n όρους.(m,n=1,3,5)

Από σελ.44 της Διπλωματικής έχουμε:

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \int_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^2} \cdot$$

$$(\text{Ισχύει } \sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}})$$

Για m,n=1:

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Για το ομοιόμορφα καταναμεμημένο φορτίο σε πλάκα απλής έδρασης που πληρεί τις υποθέσεις Navier, ισχύει πως για $m,n=1$ και $b/a \rightarrow \infty$, η λύση της κυλινδρικά καμπτόμενης πλάκας απείρου μήκους είναι:

$$w_{\max} = 0,01697 \frac{q_0 \alpha^4}{K}, b \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{n^2}{b^2} \rightarrow 0,$$

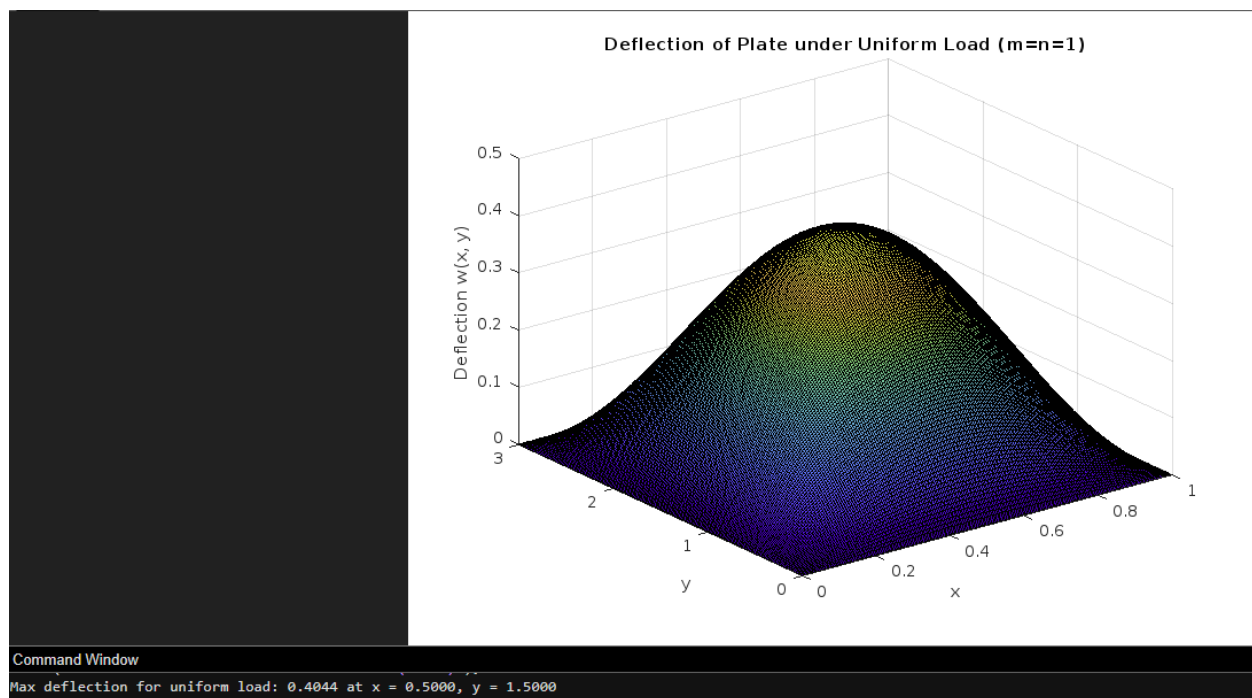
όπου για $q_0=30$, $K=1$ και $\alpha=1$, $w_{\max}=0,50$.

Για $b=3\alpha$:

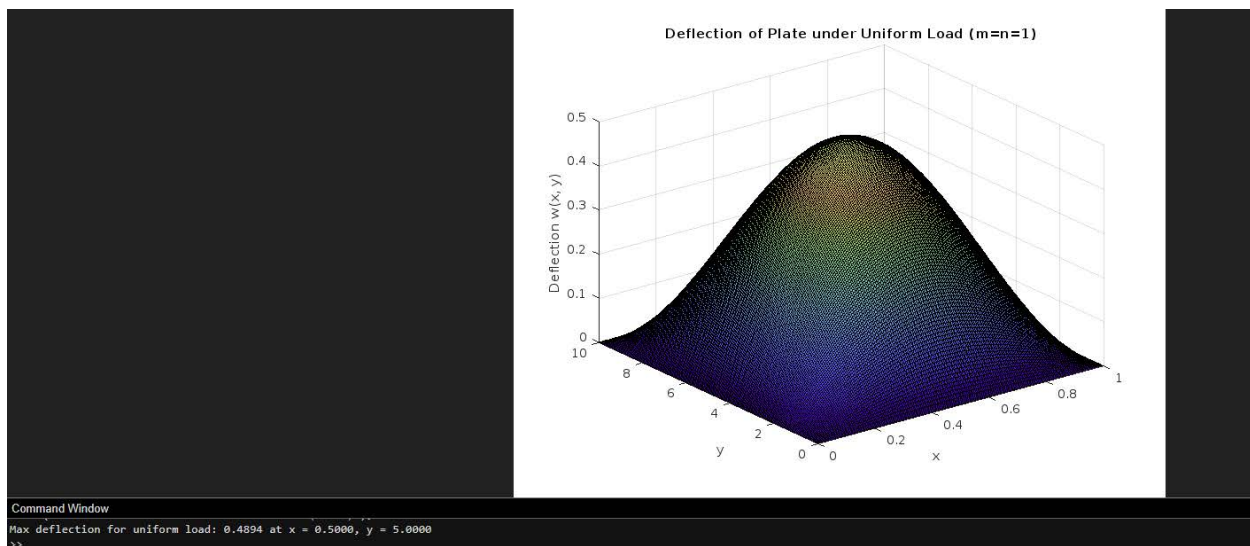
$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \frac{1}{\left(\frac{1^2}{\alpha^2} + \frac{1^2}{(3\alpha)^2}\right)^2} = 0,0138 \frac{q_0 \alpha^4}{K},$$

όπου για $q_0=30$, $K=1$ και $\alpha=1$, $w_{\max}=0,414$.

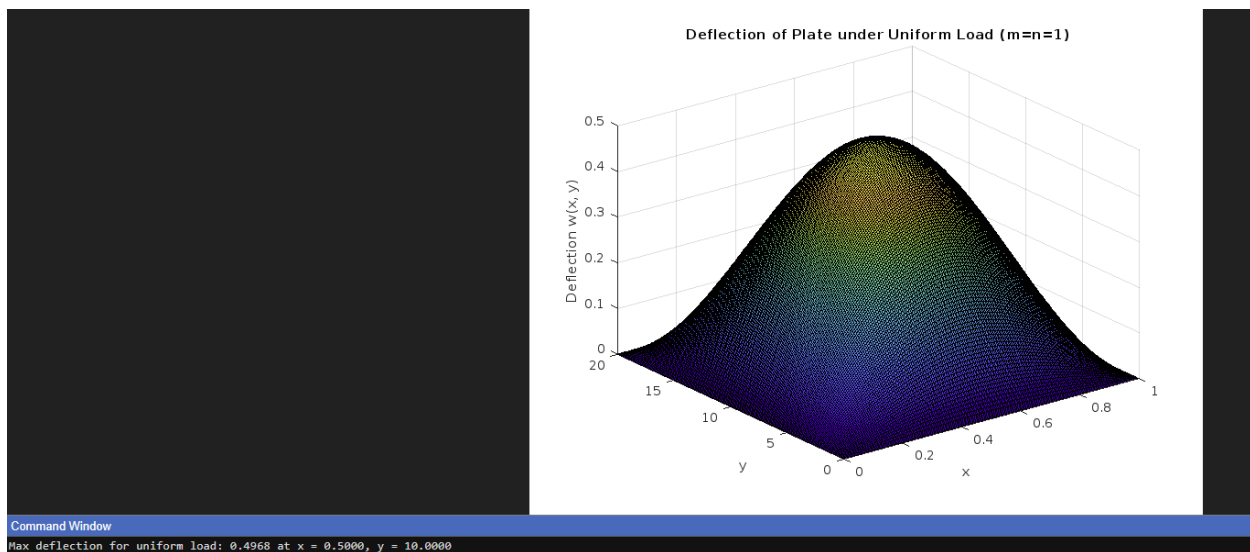
Δηλαδή για $b/a > 3$ η λύση $w_{\max}$ μπορεί να λαμβάνεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τη λύση της κυλινδρικά καμπτόμενης πλάκας. Επομένως, θα πλοτάρουμε τον κώδικα στο Matlab για ομοιόμορφα καταναμεμημένο φορτίο ώστε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα.



Σχήμα B2.3: Μέγιστη βύθιση 0,40 για ομοιόμορφα καταναμεμημένη φόρτιση για $m,n=1$ $b/a=3$



Σχήμα B2.4: Μέγιστη βύθιση 0,4894 για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση για $m,n=1$ $b/a=10$



Σχήμα B2.5: Μέγιστη βύθιση 0,4968 για ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση για $m,n=1$ $b/a=20$

Συνοψίζοντας, ο κώδικας δίνει αποτελέσματα που συμφωνούν με τα αναλυτικά αποτελέσματα.

