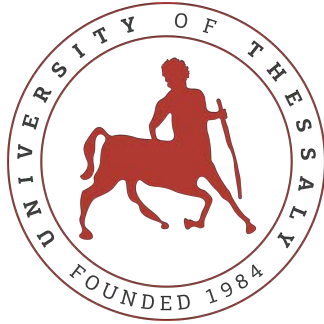




Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Μηχανικής, Υλικών & Κατεργασιών

# Αριθμητική ανάλυση ασταθειών σε σύνθετα υλικά με στρωματώδεις μικροδομές και υπερελαστικές φάσεις

Μητσιαάκης Φίλιππος

Διπλωματική Εργασία που υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων  
για την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2024

© 2024 Μητσιακής Φίλιππος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)

Δρ. Μιχάλης Αγόρας

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

Δρ. Νικόλαος Αράβας

Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

Δρ. Σπύρος Καραμάνος

Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Περίληψη

Τα σύνθετα υλικά με στρωματώδεις μικροδομές αποτελούν μια από τις σημαντικότερες κατηγορίες υλικών σε ποικίλους τομείς της σύγχρονης εποχής. Σύμφωνα με τον γενικό κανόνα των σύνθετων υλικών, ένας φορέας ενισχύεται από μία ή περισσότερες οικογένειες ενισχυτικών υλικών, με στόχο τη δημιουργία υλικών που, αν και μακροσκοπικά ανισότροπα, συνδυάζουν επιθυμητές μηχανικές ιδιότητες όπως το χαμηλό βάρος, την υψηλή αντοχή και τη δυσκαμψία. Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στα σύνθετα υπερελαστικά υλικά με στρωματώδη μικροδομή και συγκεκριμένα στην αριθμητική ανάλυση ασταθειών σε αυτά τα υλικά. Το αντιπροσωπευτικό μοντέλο αποτελείται από δύο φάσεις υπερελαστικών υλικών: ένα απλό Neo-Hookean υλικό και ένα γενικευμένο Neo-Hookean υλικό, των οποίων η συμπεριφορά περιγράφεται από τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης. Το μοντέλο της μελέτης είναι ένα υπερελαστικό στερεό με γεωμετρικές ατέλειες στο μήκος των στρώσεων του, το οποίο υπόκειται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης και συγκεκριμένα σε αξονική θλίψη κατά το μήκος των στρώσεων. Η παρούσα εργασία εστιάζει στη μελέτη της ευστάθειας της μακροσκοπικής συμπεριφοράς των υπό θεώρηση σύνθετων υλικών υπό συνθήκες πεπερασμένων ελαστικών παραμορφώσεων. Κοινό χαρακτηριστικό όλων των περιπτώσεων που εξετάστηκαν είναι ότι μόλις το επιβαλλόμενο θλιπτικό φορτίο αποκτήσει μία κρίσιμη τιμή, η οποία εξαρτάται από τις τοπικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού, οι στρώσεις αρχίζουν να περιστρέφονται και η γωνία που σχηματίζουν με τη διεύθυνση φόρτισης αυξάνεται συνεχώς με την συνέχιση της φόρτισης. Επίσης, βρέθηκε ότι η μακροσκοπική συμπεριφορά του υλικού μετά την κρίσιμη κατάσταση μπορεί να παραμείνει ευσταθή ή να γίνει ασταθής, ανάλογα με την μη γραμμικότητα των φάσεων. Στις περιπτώσεις ασταθούς συμπεριφοράς, η αστάθεια εκδηλώνεται με τη μορφή μέγιστης τάσης (maximum load) ή μέγιστης τάσης και μέγιστης παραμόρφωσης (snap back).

Στη δεύτερη περίπτωση, η αστάθεια συνοδεύεται από συγκέντρωση της παραμορφώσεως εντός μιας στενής ζώνης και αποφόρτιση του υλικού εκτός ζώνης.

## Abstract

Composite materials with layered microstructures are one of the most significant categories of materials in various fields of the modern era. According to the general rule of composite materials, a matrix is reinforced by one or more families of reinforcing materials, with the aim of creating materials that, although macroscopically anisotropic, combine desirable mechanical properties such as low weight, high strength, and stiffness. In the context of this thesis, our interest is focused on hyperelastic composite materials with a layered microstructure, specifically on the numerical analysis of instabilities in these materials. The representative model consists of two phases of hyperelastic materials: a simple Neo-Hookean material and a generalized Neo-Hookean material, whose behavior is described by the corresponding strain energy density functions. The model of the study is a hyperelastic solid with geometric imperfections along the length of its layers, which is subjected to plane strain conditions and specifically to axial compression along the length of the layers. The present work focuses on the study of the stability of the macroscopic behavior of the considered composite materials under conditions of finite elastic deformations. A common feature of all cases considered is that once the imposed compressive load reaches a critical value, which depends on the local properties of the composite, the layers begin to rotate and the angle they form with the direction of loading increases continuously with the continuation of loading. It is also found that the macroscopic behavior of the material after the critical state can remain stable or become unstable, depending on the nonlinearity of the phases. In the cases of unstable behavior, the instability manifests itself in the form of maximum stress (maximum load) or maximum stress and maximum deformation (snap back). In the second case, the instability is accompanied by a concentration of the deformation within a narrow zone and unloading of the material outside the zone.

# Contents

|                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Περίληψη</b>                                                               | <b>iii</b> |
| <b>Abstract</b>                                                               | <b>v</b>   |
| <b>1 Εισαγωγή</b>                                                             | <b>1</b>   |
| 1.1 Ιστορία . . . . .                                                         | 2          |
| 1.2 Μοντέρνες εφαρμογές . . . . .                                             | 5          |
| 1.2.1 Μηχανικές εφαρμογές . . . . .                                           | 6          |
| 1.2.2 Βιολογικές εφαρμογές . . . . .                                          | 10         |
| 1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση . . . . .                                        | 13         |
| 1.4 Οργάνωση της Εργασίας . . . . .                                           | 15         |
| <b>2 Θεωρία Σύνθετων Υλικών</b>                                               | <b>17</b>  |
| 2.1 Σύνθετα Υλικά . . . . .                                                   | 17         |
| 2.2 Το πρόβλημα στατικής ισορροπίας για ένα γενικά ετερογενές υλικό . . . . . | 18         |
| 2.3 Γραμμικώς υπερελαστικά Υλικά . . . . .                                    | 22         |
| 2.4 Συμμετρίες Μη Γραμμικών Υλικών: Αναλλοίωτες Συναρτήσεις . . . . .         | 24         |
| 2.5 Απλές Στρωματώδεις Μικροδομές . . . . .                                   | 31         |
| <b>3 Στρωματώδεις μικροδομές με τέλεια επίπεδες στρώσεις</b>                  | <b>35</b>  |
| 3.1 Το πρόβλημα ομογενοποίησης . . . . .                                      | 35         |
| 3.2 Απλό και Γενικευμένο Neo-Hookean Μοντέλο . . . . .                        | 38         |
| 3.3 Πρώτη Piola-Kirchhoff Τάση . . . . .                                      | 40         |
| 3.4 Κύρια Λύση . . . . .                                                      | 42         |

|          |                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5      | Διακλαδωμένη Λύση . . . . .                            | 43        |
| <b>4</b> | <b>Στρωματώδεις μικροδομές με γεωμετρικές ατέλειες</b> | <b>49</b> |
| 4.1      | Μοντελοποίηση . . . . .                                | 49        |
| 4.2      | Αποτελέσματα και συζήτηση . . . . .                    | 55        |
| <b>5</b> | <b>Συμπεράσματα</b>                                    | <b>77</b> |
| <b>A</b> | <b>Προγράμματα και κωδικοποίηση</b>                    | <b>79</b> |
| A.1      | ABAQUS . . . . .                                       | 79        |
| A.2      | Fortran Subroutines . . . . .                          | 79        |
| A.3      | Python . . . . .                                       | 84        |
| A.4      | Matlab . . . . .                                       | 90        |
| A.5      | Mathematica . . . . .                                  | 93        |



## Κατάλογος Εικόνων

|     |                                                                                                                                            |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Σχεδιασμός του F/A-18 Hornet Αεροπλάνου. . . . .                                                                                           | 8  |
| 2.1 | Αναπαράσταση χωρίου $\Omega$ , αντίστοιχου συνόρου $\partial\Omega$ και κάθετου διανύσματος $\mathbf{n}$ . . . . .                         | 19 |
| 2.2 | Διάγραμμα αναπαράστασης συνθηκών στις διεπιφάνειες των φάσεων. . . . .                                                                     | 21 |
| 2.3 | Διάγραμμα βάση συνέπειας της συνθήκης (i) . . . . .                                                                                        | 22 |
| 2.4 | Σύνθετο υλικό με απλή στρωματώδη μικροδομή. . . . .                                                                                        | 32 |
| 3.1 | Απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση της κυψελίδας. . . . .                                                                            | 44 |
| 4.1 | Πρότυπο μοντέλο. . . . .                                                                                                                   | 50 |
| 4.2 | Στρωματώδης Μοντέλο με και χωρίς τη προσθήκη της $\Delta X_2$ ατέλειας.<br>Πραγματικό μοντέλο με μαύρο. Τέλειο μοντέλο με κόκκινο. . . . . | 52 |
| 4.3 | Διάγραμμα πορείας εξέλιξης συμπεριφοράς του υλικού κατά το σημείο<br>διακλάδωσης. . . . .                                                  | 54 |
| 4.4 | Παραμορφωσιακή κατάσταση για $c^{(f)} = 0.5$ , $\alpha = 0.22$ , $n = 1$ σε διάφορα<br>στάδια. . . . .                                     | 58 |
| 4.5 | Παραμορφωσιακή κατάσταση για $c^{(f)} = 0.5$ , $\alpha = 1$ , $n = 0.75$ σε διάφορα<br>στάδια. . . . .                                     | 62 |
| 4.6 | Παραμορφωσιακή κατάσταση για $c^{(f)} = 0.5$ , $\alpha = 0.22$ , $n = 0.55$ σε διάφορα<br>στάδια. . . . .                                  | 66 |
| 4.7 | Παραμορφωσιακή κατάσταση για $c^{(f)} = 0.5$ , $\alpha = 0.25$ , $n = 0.9$ σε διάφορα<br>στάδια. . . . .                                   | 70 |
| 4.8 | Παραμορφωσιακή κατάσταση για $c^{(f)} = 0.5$ , $\alpha = 0.75$ , $n = 0.55$ σε διάφορα<br>στάδια. . . . .                                  | 74 |

## Κατάλογος Πινάκων

|     |                                                                                                                                                              |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Σύνθετα υλικά με τις αντίστοιχες κωδικές και πλήρες ονομασίες. . . . .                                                                                       | 5  |
| 1.2 | Σύνθεση επί τις % δομικού βάρους των Airbus A320 και Boeing 787 . . . . .                                                                                    | 6  |
| 1.3 | Σύνθεση επί τις % δομικού βάρους του F/A-18 Hornet και των εκδοχών του . .                                                                                   | 7  |
| 1.4 | Μηχανικές ιδιότητες και συναφή βιοχημικά δεδομένα ορισμένων<br>αντιπροσωπευτικών οργάνων που αποτελούνται κυρίως από μαλακούς<br>συνδετικούς ιστούς. . . . . | 11 |
| 1.5 | Κατηγορίες συνθέτων υλικών . . . . .                                                                                                                         | 12 |
| 1.7 | Πίνακας Ιδιοτήτων Υλικών . . . . .                                                                                                                           | 13 |
| 4.1 | Συνδυασμοί παραμετρικής αναλύσεως του γενικευμένου Neo-Hookean υλικού<br>της ίνας (fiber) με τα αντίστοιχα κλάσματα όγκου . . . . .                          | 56 |
| 4.2 | Πίνακας τιμών για $\alpha$ , $n$ , $c^{(f)}$ και $\lambda_c$ κατηγοριοποιημένες κατά $c^{(f)}$ . . . . .                                                     | 56 |
| 5.1 | Συνολικές συγκεντρώσεις ίνας $c^{(f)}$ . . . . .                                                                                                             | 78 |

## Κατάλογος Διαγραμμάτων

|      |                                                                                                                          |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1  | Σύγκριση απόκρισης για $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 0.22, n = 1$ . . . . .                                                   | 57 |
| 4.2  | Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.22, n = 1$ . . . . .       | 59 |
| 4.3  | Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.22, n = 1$ . . . . .    | 59 |
| 4.4  | Σύγκριση απόκρισης για $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 1, n = 0.75$ . . . . .                                                   | 61 |
| 4.5  | Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 1, n = 0.75$ . . . . .       | 63 |
| 4.6  | Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 1, n = 0.75$ . . . . .    | 63 |
| 4.7  | Σύγκριση απόκρισης για $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 0.22, n = 0.55$ . . . . .                                                | 65 |
| 4.8  | Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.22, n = 0.55$ . . . . .    | 67 |
| 4.9  | Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.22, n = 0.55$ . . . . . | 67 |
| 4.10 | Σύγκριση απόκρισης για $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 0.25, n = 0.9$ . . . . .                                                 | 69 |
| 4.11 | Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.25, n = 0.9$ . . . . .     | 71 |
| 4.12 | Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.25, n = 0.9$ . . . . .  | 71 |
| 4.13 | Σύγκριση απόκρισης για $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 0.75, n = 0.55$ . . . . .                                                | 73 |

|                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.14 Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.75, n = 0.55$ . . . . .    | 75 |
| 4.15 Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες $\alpha = 0.75, n = 0.55$ . . . . . | 75 |

# 1 Εισαγωγή

Ως σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται τα υλικά που αποτελούνται από δύο ή περισσότερες φάσεις με σκοπό την ενίσχυση του φορέα (ή μητρικού υλικού) ή την επίτευξη ορισμένων επιθυμητών ιδιοτήτων. Αντίστοιχα οι φάσεις αυτές απαρτίζουν αυτό που ονομάζεται μικροδομή ενός σύνθετου υλικού. Η ανάλυση και μελέτη αυτών των υλικών αναλόγως την κλίμακα στην οποία επικεντρώνεται κάποιος διαφοροποιείται τόσο σε μικροσκοπικό επίπεδο όσο και σε μακροσκοπικό, και τα δύο εξίσου σημαντικά για τη σωστή κατανόηση της συμπεριφοράς και των ιδιοτήτων των σύνθετων αυτών υλικών.

Μια ειδική κατηγορία των ελαστικών υλικών, αποτελούν τα υπερελαστικά υλικά τα οποία μπορούν να υποβάλλονται σε μεγάλες παραμορφώσεις και να εξακολουθούν να διατηρούν πλήρως τις ελαστικές τους ιδιότητες. Όπως είναι γνωστό, κατά την αποφόρτιση ελαστικών υλικών, το δοκίμιο μπορεί να ανακτήσει ορισμένη από την ελαστική παραμόρφωση, έτσι και στα υπερελαστικά υλικά, το φαινόμενο αυτό είναι ακόμα πιο αισθητό από ότι σε απλά ελαστικά ή ελαστοπλαστικά δοκίμια, χωρίς να παρουσιάζουν πλαστικές παραμορφώσεις παρά το αυξημένο μέγεθος των τάσεων ή και των παραμορφώσεων στα οποία υπόκεινται. Ωστόσο όμως σημαντική διαφορά αποτελεί το γεγονός ότι η σχέση τάσεως-παραμορφώσεως ανακτάται από μια συνάρτηση γνωστή ως συνάρτηση ενέργειας παραμορφώσεως. Υπάρχουν πολλά είδη υπερελαστικών μοντέλων για την περιγραφή τέτοιων φαινομένων όπως το Neo-Hookean, το Mooney-Rivlin, το Ogden, το Arruda-Boyce και πολλά άλλα, όμως στην παρούσα μελέτη επίκεντρο θα αποτελέσει το Απλό Neo-Hookean, καθώς και το Γενικευμένο Neo-Hookean μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιείται συχνά λόγω της απλότητάς του αλλά και της συμβατότητάς του.

Η συσσώρευση των παραμορφώσεων, λειτουργεί ως πρόδρομος της αστοχίας στα στερεά και συνεπώς αποτελεί ένα ευρέως μελετημένο πρόβλημα στη μηχανική των στερεών. Η προσέγγιση της μοντελοποίησης αυτού του φαινομένου μελετά τις συνθήκες που οδηγούν στην απώλεια της ελλειπτικότητας στις κύριες εξισώσεις, η οποία αποτελεί τη βασική ιδιότητα που επιτρέπει να προκύψουν διακριτές λύσεις ισορροπίας. Οι μη-γραμμικές θεωρίες ομογενοποίησης μας βοηθούν να κατανοήσουμε την έναρξη της συμπεριφοράς αυτής και θεωρείται ότι η απώλεια της μακροσκοπικής (ομογενοποιημένης) ελλειπτικότητας, είναι αυτή που οδηγεί στη συγκέντρωση τοπικών παραμορφώσεων. Η συγκεκριμένη θεωρία ισχύει σε πολλές μηχανικές εφαρμογές, ωστόσο η παρούσα εργασία ερευνά το αν αυτή η συμπεριφορά ισχύει πάντα στα στερεά που φορτίζονται πέρα από την κρίσιμη κατάσταση τους, αφού έχουν πρώτα χάσει τη μακροσκοπική τους ελλειπτικότητα.

Για την ανάλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, στη παρούσα εργασία αξιοποιείται ένα στρωματώδες υπερελαστικό στερεό, που υπόκειται σε συνθήκες επίπεδης παραμορφώσεως και συγκεκριμένα υπό αξονική συμπίεση κατά μήκος της κατεύθυνσης της διαστρωμάτωσης. Η απάντηση στο ζήτημα αυτό βρίσκεται στη μετα-διακλαδόμενη λύση του προβλήματος πέραν του κρίσιμου σημείου παραμορφώσεως, το οποίο αναλύεται σε περιπτώσεις απλής ισορροπίας χωρίς αστάθειες παρά το γεγονός απώλειας ελλειπτικότητας, αποφόρτιση των τάσεων κατά τη πορεία συμπίεσης του στερεού, ή αντιστροφή της μακροσκοπικής απόκρισης τάσεως-παραμορφώσεως με τη μορφή του φαινομένου snap-back.

## 1.1 Ιστορία

Παρατηρώντας την ιστορία των σύνθετων υλικών, μπορούμε να βρούμε παραδείγματα καθημερινής χρήσης τους ακόμα και από την αρχαιότητα. Πρώτες ενδείξεις τέτοιων υλικών πιστώνονται στους ανθρώπους της Μεσοποταμίας κατά το έτος 3400 π.Χ., οι οποίοι κολλούσαν λωρίδες ξύλου μεταξύ τους σε διαφορετικές γωνίες για να κατασκευάσουν κόντρα πλακέ. Μεταξύ 2181 και 2055 π.Χ. οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν στρώματα από λινό ή πάπυρο εμποτισμένα σε γύψο για να φτιάξουν ομοιώματα των νεκρών τους, ενώ πλησιάζοντας στο έτος 1500 π.Χ παρατηρείται ότι οικοδόμοι και τεχνίτες των ίδιων λαών ξανά, έχουν αρχίσει να

χρησιμοποιούν άχυρα για να ενισχύσουν τούβλα από λάσπη, αγγεία αλλά και βάρκες. Το 25 π.Χ., "Τα Δέκα Βιβλία της Αρχιτεκτονικής" περιγράφει το σκυρόδεμα, αλλά διακρίνει επίσης διάφορους τύπου ασβέστη και κονίαμα, για τα οποία μοντέρνα έρευνα δείχνει ότι το τσιμέντο που χρησιμοποιούνταν εκείνη την εποχή, είναι παρόμοιο και σε ορισμένες περιπτώσεις ανώτερο από το τυποποιημένο τσιμέντο που χρησιμοποιούμε στη σύγχρονη εποχή [1].

**Δεκαετία του 1930:** Η εταιρεία γυαλιού Owens-Illinois, μαζί με την Corning Glass, συνδυάζουν ίνες γυαλιού με πολυεστερική ρητίνη για να δημιουργήσουν ένα νέο ισχυρό και ταυτόχρονα ελαφρύ υλικό. Οι δύο εταιρείες συγχωνεύτηκαν με το νέο όνομα Fiberglas, το οποίο στη συνέχεια εδραιώθηκε ως "fiberglass" ή όπως εμείς γνωρίζουμε "υαλοβάμβακα", για να περιγράψουν μια ευρύ κατηγορία υλικών γνωστή και ως πολυμερή ενισχυμένα με ίνες γυαλιού (glass fiber-reinforced polymers GFRP). Το 1932 ακολούθησε η δημιουργία του πρώτου θερμοπλαστικού πολυμερούς πολυαμιδίου, το νάιλον 6-6.

**Δεκαετία του 1940:** Η ναυτιλιακή βιομηχανία γρήγορα εκμεταλλεύτηκε την εφεύρεση των GFRP, με αποτέλεσμα το 1942 να φτιαχτεί το πρώτο ιστιοφόρο από υαλοβάμβακα. Ταυτόχρονα, ο ίδιος ο δεύτερος παγκόσμιος πόλεμος αποτέλεσε σημαντικό παράγοντα για την εξέλιξη αυτής της επιστήμης, καθώς κάθε πλευρά είχε σημαντική ανάγκη για υλικά που μπορούσαν να μειώσουν το βάρος των εναέριων και θαλασσινών σκαφών, ενώ ταυτόχρονα είχαν τη δυνατότητα να αυξήσουν τόσο τη μηχανική αντοχή τους, όσο και την αντοχή τους σε καιρικές συνθήκες και τις διαβρωτικές επιδράσεις του θαλασσινού νερού και αέρα. Η ανάγκη αυτή, είχε ως αποτέλεσμα μέχρι το τέλος του 1945, να έχουν κατασκευαστεί από τρία εκατομμύρια κιλά υαλοβάμβακα με κύριο σκοπό τη στρατιωτική τους χρήση.

**Δεκαετία του 1950:** Ο πόλεμος μπορεί πλέον να είχε τελειώσει, όμως η βιομηχανία γνώριζε πια τις δυνατότητες των σύνθετων υλικών, με αποτέλεσμα να βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στην αυτοκινητοβιομηχανία, ναυτιλία, δεξαμενές αποθήκευσης, σωληνώσεις, αγωγούς και πολλά άλλα. Παράλληλα, αναπτύχθηκαν πολλές νέοι μέθοδοι κατασκευής, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον να παρουσιάζει η περιέλιξη νήματος η οποία αποτέλεσε τη βάση για τη κατασκευή κινητήρων πυραύλων μεγάλης κλίμακας για την εξερεύνηση του διαστήματος.

**Δεκαετία του 1960:** Τη δεκαετία αυτή παρατηρούμε σταδιακά την ενσωμάτωση των ανθρακονημάτων όλο και πιο πολύ στη καθημερινότητα των ανθρώπων και τη βιομηχανία, με κεντρική χρονιά το 1966, όπου η χημικός Stephanie Kwolek, εφηύρε το κέβλαρ, μια ισχυρή παρα-αραμιδική ίνα γνωστή για την χρήση του σου σε βαλλιστικές πανοπλίες και ανθεκτικότητα σε μαχαιρώματα.

**Δεκαετία του 1970-1980:** Σύνθετα υλικά αρχίζουν να εκμεταλλεύονται στη κατασκευή υποδομών στην Ευρώπη και την Ασία, καθώς και η κατασκευή της πρώτης γέφυρας αυτοκινητόδρομου με τη χρήση σύνθετων υλικών ενίσχυσης.

**Δεκαετία του 1990:** Η εγκατάσταση της πρώτης πεζογέφυρας κατασκευασμένη εξ' ολοκλήρου από σύνθετα υλικά στο Aberfeldy της Σκωτίας.

**Δεκαετία του 2000:** Ενσωμάτωση της νανοτεχνολογίας σε εμπορικά προϊόντα και χρήση σύνθετων υλικών για κατασκευή νανοσωλήνων για την εφαρμογή τους ως ίνες με σκοπό τη βελτίωση μηχανικών, ηλεκτρικών και θερμικών ιδιοτήτων.

**Δεκαετία του 2010:** Εμφάνιση και ανάπτυξη της τρισδιάστατης εκτύπωσης (3D Printing), σε σπίτια και επιχειρήσεις με τη βοήθεια ενός CAD (Computer-Aided Design) προγράμματος.



## 1.2 Μοντέρνες εφαρμογές

Κάθε πτυχή της σύγχρονης καθημερινής ζωής χαρακτηρίζεται πλέον από πολυάριθμα σύνθετα υλικά, αρκετά από τα οποία φαίνονται στο πίνακα 1.1. Όλα τα υλικά αυτά αποτελούν αναπόσπαστο μέρος για οποιαδήποτε σύγχρονη κατασκευή των πολλαπλών σημερινών βιομηχανικών κλάδων, όπως είναι η αεροδιαστημική, η αυτοκινητοβιομηχανία, η ναυπηγική, η κατασκευή εξοπλισμού ή εμβιομηχανικής. Οι ιδιότητες απαράμιλλης απόδοσης και ανθεκτικότητας τις καθιστούν το βασικό εφόδιο της ανάπτυξης καινοτόμων λύσεων για τα σύγχρονα προβλήματα με τα οποία έρχεται η ανθρωπότητα αντιμέτωπη.

| Κωδικός | Αγγλική Ονομασία                   | Ελληνική Ονομασία                       |
|---------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| FRP     | Fiber Reinforced Plastic           | Πλαστικά ενισχυμένα με ίνες             |
| CFRP    | Carbon Fiber Reinforced Plastic    | Πλαστικά ενισχυμένα με ίνες άνθρακα     |
| GFRP    | Glass Fiber Reinforced Plastic     | Πλαστικά ενισχυμένα με υαλοΐνες         |
| AFRP    | Aramid Fiber Reinforced Plastic    | Πλαστικά ενισχυμένα με ίνες αραμιδής    |
| MMC     | Metal Matrix Composite             | Σύνθετα υλικά μεταλλικής μήτρας         |
| CMC     | Ceramic Matrix Composite           | Σύνθετα υλικά κεραμικής μήτρας          |
| PMC     | Polymer Matrix Composite           | Σύνθετα υλικά πολυμερικής μήτρας        |
| SMC     | Sheet Molding Compound             | Σύνθετο υλικό μορφοποίησης φύλλων       |
| BMC     | Bulk Molding Compound              | Σύνθετο υλικό μορφοποίησης όγκου        |
| LMC     | Laminate Composite                 | Σύνθετο υλικό λαμιναρίσματος            |
| HMC     | Hybrid Matrix Composite            | Σύνθετα υλικά υβριδικής μήτρας          |
| NMC     | Nanocomposite                      | Νανοςύνθετο υλικό                       |
| FML     | Fiber Metal Laminate               | Λαμινάτα μεταλλικών ινών                |
| UD      | Unidirectional                     | Μονοκατευθυντικό                        |
| BD      | Bidirectional                      | Διπλής κατεύθυνσης                      |
| QF      | Quasi-isotropic Fabric             | Σχεδόν ισότροπο ύφασμα                  |
| NW      | Non-woven Fabric                   | Μη υφαντό ύφασμα                        |
| RW      | Reinforced Weave                   | Ενισχυμένη ύφανση                       |
| HPPC    | High Performance Polymer Composite | Σύνθετο υλικό πολυμερών υψηλής απόδοσης |
| RCC     | Reinforced Carbon-Carbon           | Ενισχυμένο ανθρακόνημα-άνθρακας         |
| HMC     | High Modulus Composite             | Σύνθετο υλικό υψηλού μέτρου             |

Πίνακας 1.1: Σύνθετα υλικά με τις αντίστοιχες κωδικές και πλήρες ονομασίες.

### 1.2.1 Μηχανικές εφαρμογές

**Αεροδιαστημική Βιομηχανία:** [2] Ο εναέριος χώρος, αποτελεί ένας από τους καίριους τομείς στους οποίους τα σύνθετα υλικά αποτελούν κεντρικό σημαντικό παράγοντα. Παρά το ότι η χρήση τους σε συνάρτηση με τη συγκέντρωση της ολικής κατασκευής που χρησιμοποιείται κάθε φορά είναι ποσοστιαία μικρή ως προς το σύνολο, οι εφαρμογές τους σε σημαντικές πτυχές, όπου έχουμε ως στόχο υψηλή ακαμψία, μειωμένο βάρος και αντοχή στην κόπωση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Airbus 320, στο οποίο πλαστικά ενισχυμένα με ίνες (FRP) μας επιτρέπουν μείωση του βάρους έως και 800 κιλά σε αντίθεση με τη χρήση κράματος αλουμινίου. Τα σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογή σε πολλαπλά μέλη της κατασκευής του αεροπλάνου, με αυτά να αποτελούν σημαντικό μέρος των πτερυγίων, της ατράκτου, της ουράς και των πορτών. Αντίστοιχα και στα ελικόπτερα εμφανίζεται η ανάγκη για τα σύνθετα υλικά, για τη χρήση τους σε προπέλες, λεπίδες ρότορα και τον ίδιο το σκελετό. Ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση μελέτης αποτελεί το Boeing 787, το οποίο είναι κατά 50% προηγμένα σύνθετα υλικά, μια σύντομη περιγραφή της σύνθεσης τους φαίνεται και στο πίνακα 1.2. Το σύνολο αυτών των ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών, καθιστούν τα σύνθετα υλικά αναγκαία και για τη πολεμική αεροπορία, όπως μπορούμε να δούμε το χαρακτηριστικό παράδειγμα του σχεδιασμού του F/A-18 Hornet αεροπλάνου 1.1 και τα ποσοστά των συνθέσεων των δύο μοντέρνων εκδοχών του C/D και E/F 1.3

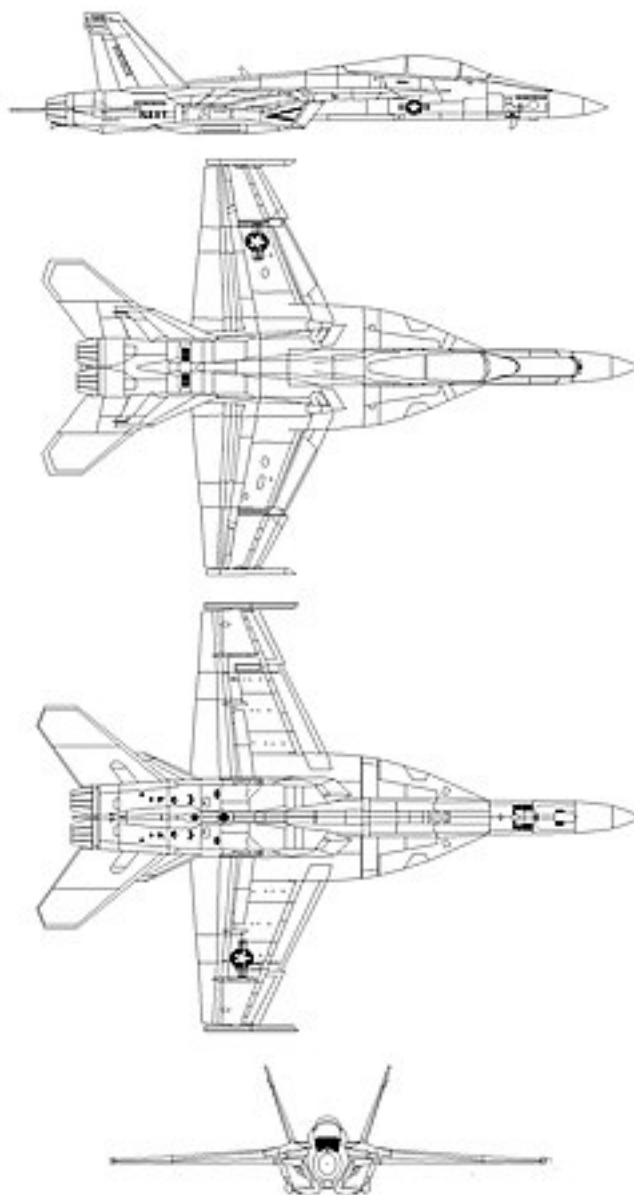
| Υλικό                          | Airbus A320 | Boeing 787  |
|--------------------------------|-------------|-------------|
| Αλουμίνιο                      | 58%         | 20%         |
| Χάλυβας                        | 6%          | 10%         |
| Τιτάνιο                        | 7%          | 15%         |
| Σύνθετο Υλικό Εποξικού Άνθρακα | 15%         | 50%         |
| Άλλα Σύνθετα Υλικά             | 14%         | 5%          |
| <b>Σύνολο</b>                  | <b>100%</b> | <b>100%</b> |

Πίνακας 1.2: Σύνθεση επί τις % δομικού βάρους των Airbus A320 και Boeing 787

Όσον αφορά τις διαστημικές εφαρμογές, λόγω της ενσωμάτωσης των σύνθετων υλικών, διαστημικοί πύραυλοι και δορυφόροι κατασκευάζονται πλέον σε συντομότερα χρονικά διαστήματα και αρκετά οικονομικά. Λόγω της φύσης του διαστήματος, στην εξωτερική ατμόσφαιρα τα φορτία δεν αποτελούν πρόβλημα, αλλά στη θέση τους οι κατασκευές αυτές έρχονται αντιμέτωπες με ακραίες περιβαλλοντικές συνθήκες, θερμικούς κύκλους και επιπτώσεις υψηλού κενού και διάβρωσης μέσω ατομικού οξυγόνου ή μικροαστεροειδών συγκρούσεων. Εδώ εμφανίζεται η χρήση των Glass-fire plastics (GRP) για τοπική θερμομόνωση, και Carbon-fibre reinforced polymer (CFRP) για τους ίδιους λόγους με προηγουμένως σε εφαρμογές όπως βραχίονες, ανακλαστήρες κεραιών, ηλιακά πάνελ και οπτικές πλατφόρμες.

| <b>Υλικό</b>                            | <b>F/A-18C/D</b> | <b>F/A-18E/F</b> |
|-----------------------------------------|------------------|------------------|
| Αλουμίνιο                               | 49%              | 31%              |
| Χάλυβας                                 | 15%              | 14%              |
| Τιτάνιο                                 | 13%              | 21%              |
| Σύνθετο<br>Υλικό<br>Εποξικού<br>Άνθρακα | 10%              | 19%              |
| Άλλο                                    | 13%              | 15%              |
| <b>Σύνολο</b>                           | <b>100%</b>      | <b>100%</b>      |

*Πίνακας 1.3: Σύνθεση επί τις % δομικού βάρους του F/A-18 Hornet και των εκδοχών του*



*Εικόνα 1.1: Σχεδιασμός του F/A-18 Hornet Αεροπλάνου.*

**Αυτοκινητοβιομηχανία:** [3] Τα σύνθετα υλικά είναι ιδιαίτερα ευεργετικά για τη μείωση του βάρους των οχημάτων, με αποτέλεσμα να βελτιώνεται η κατανάλωση του καυσίμου έως και 60%, ενώ επιπλέον μπορούν να ενισχύουν τη προσφερόμενη ασφάλεια καθώς έχουν καλύτερη απορρόφηση της ενέργειας σε περίπτωση συγκρούσεων. Χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο σε διάφορα αυτοκινητιστικά εξαρτήματα, από τα πάνελ και το σασί, έως τις δομές του δαπέδου και της οροφής. Τα πλεονεκτήματα αυτών των κατασκευών είναι πάρα πολλά, ωστόσο το υψηλό κόστος των υλικών και των διαδικασιών κατασκευής έχει περιορίσει τη διάδοσή τους στο τομέα αυτό, αλλά συνεχείς έρευνες καταρρίπτουν με το χρόνο τα εμπόδια αυτά, με αποτέλεσμα τα σύνθετα υλικά να αποτελούν μια πολύ υποσχόμενη μελλοντική λύση.

**Οικοδομικός Τομέας:** [4] Τα σύνθετα υλικά από πολυμερή ενισχυμένα με ίνες άνθρακα (CFRP) έχουν αναδειχθεί ως μια πολλά υποσχόμενη εναλλακτική λύση σε σχέση με τα παραδοσιακά υλικά στον οικοδομικό τομέα. Τα CFRP προτιμούνται λόγω των εξαιρετικών μηχανικών ιδιοτήτων τους, της υψηλής αντοχής και του μειωμένου βάρους τους, χαρακτηριστικά τα οποία τα καθιστούν επιθυμητά στη κατασκευή γεφυρών, κτιρίων και άλλων έργων υποδομής.

Ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία των CFRP αποτελεί η υψηλή αναλογία αντοχής προς βάρος, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι μπορούν να παρέχουν την ίδια αντοχή και διάρκεια ζωής με υλικά όπως το σκυρόδεμα και ο χάλυβας, με μικρότερες απαιτήσεις σε υλικό. Επιπρόσθετα, παρουσιάζουν αυξημένη αντοχή στη διάβρωση και τις περιβαλλοντικές φθορές, επεκτείνοντας έτσι τις δομικές δυνατότητες, ενώ ταυτόχρονα εμφανίζουν υψηλή αντοχή και σε κόπωση χωρίς να υποβαθμίζεται η κατασκευή.

**Αθλητικός Εξοπλισμός:** [5] Ο αθλητικός εξοπλισμός εκμεταλλεύεται σύνθετα υλικά που ενισχύονται με ίνες, όπως ίνες άνθρακα ή ίνες γυαλιού, έναντι της χρήσης παραδοσιακών υλικών όπως ξύλο, ατσάλι και αλουμίνιο. Αυτό γίνεται, καθώς η συνεχή καταπόνηση των υλικών αυτών καθιστά αναγκαίο το ότι ο εξοπλισμός αυτός πρέπει να έχει υψηλή αντοχή, υψηλό μέτρο ελαστικότητας και καλή απόδοση απορρόφησης κραδασμών, όπως είναι στις ρακέτες και τα ποδήλατα. Επιπλέον λόγοι αποτελούν το μειωμένο βάρος, πράγμα το οποίο σημαίνει μειωμένο υλικό που χρειάζεται για τη κατασκευή τέτοιου εξοπλισμού αλλά και μείωση της κόπωσης των

ίδιων των αθλητών που χρησιμοποιούν τον εξοπλισμό αυτό.

### 1.2.2 Βιολογικές εφαρμογές

**Προσθετικές και Ορθωτικές Συσκευές:** [6] Τα σύνθετα υλικά μέσα από την εξέλιξη των προσθετικών και ορθωτικών συσκευών, έχουν καταφέρει να βελτιώσουν σημαντικά τη ποιότητα ζωής των ανθρώπων με απώλεια άκρων ή άλλες ορθοπεδικές παθήσεις. Κατά κύριο λόγο, οι ίνες άνθρακα χρησιμοποιούνται εκτενώς στο βιολογικό τομέα εξαιτίας της υψηλής αντοχής, ελαφρύ βάρους και ευκαμψίας που προσφέρουν. Γενικά, οι ίνες άνθρακα προσφέρουν μεγάλη ευελιξία, ικανότητα που είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις πολύπλοκες και εξατομικευμένες δομές που το απαιτούν. Εκτός από όλες τις αναγκαίες μηχανικές ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν, προσφέρουν στο άτομο επίσης υψηλή άνεση στο δέρμα, καθώς και μακροχρόνια ασφάλεια από ερεθισμούς, αλλεργίες, λοιμώξεις και δερματικά προβλήματα παρά τη συνεχή επαφή του δέρματος με έναν ξένο για αυτόν οργανισμό.

**Μηχανική των Ιστών:** [7] Η μηχανική των ιστών, αποτελεί τομέα της εμβιομηχανικής που έχει ως στόχο την ανάπτυξη, αποκατάσταση ή και βελτίωση λειτουργικών ιστών, ακόμα και αν αυτοί έχουν τραυματιστεί ή καταστραφεί, μέσω του συνδυασμού κυττάρων, ικριωμάτων, βιοϋλικών και ενεργών βιολογικών συστατικών. Ένα από τα αρχικά επιτυχημένα αποτελέσματα του κλάδου αυτού ήταν η μεταμόσχευση ενός κατεστραμμένου αεραγωγού από ένα όργανο που ήταν πλήρως κατασκευασμένο από μηχανικούς ιστούς το 2008. Η επιστήμη αυτή χωρίζεται αντίστοιχα σε δύο κατηγορίες, την *ex vivo* και την *in situ*. Η πρώτη αποτελεί την απομόνωση των βλαστικών κυττάρων από το δότη και της κατεργασίας του σε επιθυμητό εξωτερικό περιβάλλον. Ενώ η δεύτερη αποτελεί μια πιο απλή και βολική διεργασία που περιλαμβάνει την προκατασκευή ενός ικρίωματος σε συγκεκριμένες προδιαγραφές και την εμφύτευσή του απευθείας στον ιστό. Η *in situ* επιλέγεται έναντι της *ex vivo* όποτε είναι δυνατό όταν θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι ο οργανισμός δε θα απορρίψει το εμφυτευμένο ικρίωμα, ενώ αντιθέτως η *ex vivo* προσφέρει πιο "πλούσιες" μηχανικές ιδιότητες καθώς έχουμε καλύτερο έλεγχο της κυτταρικής διαφοροποίησης.

**Βιομηχανική των Μαλακών Ιστών:** [8] Γενικά, οι μαλακοί ιστοί συμπεριφέρονται

ανισοτροπικά εξαιτίας των ινών τους οι οποίες παρουσιάζουν συμπεριφορά κατά την οποία προτιμούν ορισμένες κατευθύνσεις. Λόγω της σύστασης τους, κατά τη μικροσκοπική κλίμακα αποτελούν μη-ομογενή υλικά και η εφελκυστική τους απόκριση είναι μη γραμμική δυσκαμψία, ενώ η ίδια η εφελκυστική ισχύς είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ρυθμό παραμορφώσεως. Οι μηχανικές τους αυτές ιδιότητες, όπως στο πίνακα 1.4, είναι αυτές οι οποίες τις καθιστούν επιθυμητές στο κλάδο αυτό. Συγκρίνοντάς τα με σκληρούς ιστούς, μπορούν να εμφανίζουν μεγαλύτερες παραμορφώσεις, ενώ ταυτόχρονα πολλοί από τους μαλακούς ιστούς εμφανίζουν ιξωδοελαστική συμπεριφορά (χαλάρωση και/ή ερπυσμό), γεγονός το οποίο οφείλεται στη διατμητική αλληλεπίδραση του κολλαγόνου με τη μήτρα των πρωτεογλυκανών (ομάδα πρωτεϊνών με χαρακτηριστική γλυκοζυλίωση που ανευρίσκονται σε διάφορους ιστούς και ιδίως στην εξωκυττάρια ουσία του συνδετικού ιστού). Με αυτό το τρόπο συνεπώς μπορούμε να συσχετίσουμε συμπεριφορά του δέρματος και κατ' επέκταση των βιολογικών ιστών με μηχανικές συμπεριφορές ώστε να μπορούμε να μελετάμε την εφελκυστική συμπεριφορά τάσεως-παραμορφώσεως στο τομέα της βιολογίας.

| Υλικό               | Αντοχή<br>εφελκυσμού<br>[Mpa] | Εφελκυστική<br>παραμόρφωση<br>[%] | Κολλαγόνο (%<br>ξηρού βάρους) | Ελαστίνη (%<br>ξηρού βάρους) |
|---------------------|-------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| Τένοντας            | 50-100                        | 10-15                             | 75-85                         | < 3                          |
| Σύνδεσμος           | 50-100                        | 10-15                             | 70-80                         | 10-15                        |
| Αορτή               | 0.3-0.8                       | 50-100                            | 25-35                         | 40-50                        |
| Δέρμα               | 1-20                          | 30-70                             | 60-80                         | 5-10                         |
| Αρθρικός<br>Χόνδρος | 9-40                          | 60-120                            | 40-70                         | -                            |

*Πίνακας 1.4: Μηχανικές ιδιότητες και συναφή βιοχημικά δεδομένα ορισμένων αντιπροσωπευτικών οργάνων που αποτελούνται κυρίως από μαλακούς συνδετικούς ιστούς.*

Τα σύνθετα υλικά μπορούν συνοπτικά να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις ευρές κατηγορίες, όπως στον ακόλουθο πίνακα 1.5, οι οποίες αναλύονται στη συνέχεια, ενώ ο πίνακας 1.7 παρουσιάζει μερικές από τις βασικές ιδιότητες των υλικών αυτών των κατηγοριών.

| ‘Κλασικά’ σύνθετα υλικά     | ‘Έξυπνα’ σύνθετα υλικά   | Υλικά στη φύση                               |
|-----------------------------|--------------------------|----------------------------------------------|
| Υλικά με πολυμερείς φορείς  | Κράματα με μνήμη μορφής  | Βιολογικά υλικά (μύες, τένοντες, οστά, ξύλα) |
| Υλικά με μεταλλικούς φορείς | Πολυμερή με μνήμη μορφής | Μέταλλα και κράματα                          |
| Υλικά με κεραμικούς φορείς  | Πιεζοηλεκτρικά υλικά     | Φυσικά πετρώματα                             |
|                             |                          | Παγετώνες                                    |

*Πίνακας 1.5: Κατηγορίες συνθέτων υλικών*

**Κλασικά Σύνθετα Υλικά:** Τα πολυμερή χρησιμοποιούνται ως μήτρες σε σύνθετα υλικά λόγω της ανθεκτικότητάς τους, της χαμηλής πυκνότητας και της καλής απόδοσης σε διαφορετικές θερμοκρασίες. Τυπικά παραδείγματα είναι το πολυαιθυλένιο, το πολυπροπυλένιο και το πολυστυρόλιο. Αυτά τα σύνθετα υλικά έχουν ως μήτρα ένα μεταλλικό στοιχείο, όπως το αλουμίνιο ή το τιτάνιο, προσφέροντας αντοχή σε υψηλές θερμοκρασίες και αντοχή στη φθορά. Οι κεραμικές μήτρες είναι ανθεκτικές σε υψηλές θερμοκρασίες και έχουν υψηλή σκληρότητα και αντοχή στη φθορά, γεγονός που τα καθιστά κατάλληλα για εφαρμογές όπου απαιτείται υψηλή αντοχή στη θερμότητα.

**Έξυπνα Σύνθετα Υλικά:** Αυτά τα υλικά μπορούν να ανακτήσουν το αρχικό τους σχήμα μετά από παραμόρφωση όταν θερμανθούν. Έχουν εφαρμογές στην αεροδιαστημική, την αυτοκινητοβιομηχανία και στην ιατρική. Παρόμοια με τα κράματα, αυτά τα πολυμερή μπορούν να επιστρέψουν στο αρχικό τους σχήμα με την αλλαγή της θερμοκρασίας, και γενικότερα διαθέτουν την ικανότητα να αντιδρούν δυναμικά στις αλλαγές του περιβάλλοντός τους, είτε αυτές είναι πίεση, θερμοκρασία, ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία. Η αντίδραση τους μπορεί να περιλαμβάνει αλλαγές στο ίδιο το σχήμα τους, την ακαμψία ή ακόμα και την αγωγιμότητα.

**Υλικά στη Φύση:** Περιλαμβάνουν τους μύες, τένοντες, οστά και ξύλα, τα οποία έχουν φυσικές σύνθετες δομές που προσφέρουν εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες. Τα φυσικά μέταλλα και τα κράματα χρησιμοποιούνται ευρέως λόγω της αντοχής και της ευκαμψίας τους. Παραδείγματα



περιλαμβάνουν τον σίδηρο, το χάλυβα και το αλουμίνιο. Τα πετρώματα όπως ο γρανίτης και το μάρμαρο είναι ανθεκτικά και χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, ενώ οι παγετώνες μελετώνται για τις ιδιότητές τους στη διαχείριση της αλλαγής του κλίματος.

| Υλικό                                          | Πυκνότητα (kg/m <sup>3</sup> ) | Ιδιότητες                                               |
|------------------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Πολυμερή (π.χ. πολυαιθυλένιο)                  | 900-960                        | Υψηλή αντοχή σε χημικά, χαμηλή πυκνότητα                |
| Μεταλλικές μήτρες (π.χ. αλουμίνιο)             | 2700                           | Υψηλή αντοχή, καλή αγωγιμότητα θερμότητας               |
| Κεραμικές μήτρες (π.χ. οξείδιο του αλουμινίου) | 3900                           | Υψηλή σκληρότητα, ανθεκτικότητα στη θερμότητα           |
| Κράματα με μνήμη μορφής (π.χ. νικέλιο-τιτάνιο) | 6450                           | Ανακτούν το σχήμα τους με τη θέρμανση                   |
| Πιεζοηλεκτρικά υλικά (π.χ. χαλαζίας)           | 2650                           | Παράγουν ηλεκτρικό φορτίο υπό πίεση                     |
| Βιολογικά υλικά (π.χ. οστά)                    | 1700-2000                      | Φυσικές σύνθετες δομές, εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες |
| Φυσικά πετρώματα (π.χ. γρανίτης)               | 2600-2700                      | Υψηλή ανθεκτικότητα και σκληρότητα                      |

Πίνακας 1.7: Πίνακας Ιδιοτήτων Υλικών

### 1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Τα σύνθετα υλικά παίζουν πλέον καθοριστικό ρόλο στις σύγχρονες κατασκευές, με πλήθος τεχνολογικών εφαρμογών που έχουν ωθήσει την ερευνητική δραστηριότητα στον τομέα αυτό. Ένα βασικό αντικείμενο της έρευνας είναι η συσχέτιση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με τη μικροδομή τους. Η θεωρία της ομογενοποίησης κατέχει κεντρική θέση

στη μελέτη αυτή, καθώς παρέχει τα εργαλεία για την περιγραφή της συμπεριφοράς σύνθετων υλικών μέσω των χαρακτηριστικών των συστατικών φάσεων. Ένα σημαντικό σημείο αναφοράς για τη θεωρία αυτή αποτελεί το βιβλίο του Milton (Milton, Theory of Composites, 2002) [9], όπου εξετάζονται λεπτομερώς οι δομές υλικών με στρωματώδη μικροδομή. Αυτή η κατηγορία υλικών, και ιδιαίτερα η rank-1 μικροδομή που αφορά ετερογενή υλικά με διαστρωματωμένη γεωμετρία, περιγράφεται αναλυτικά στο έργο του.

Στη μελέτη αυτή, καθοριστικό ρόλο διαδραμάτισε το άρθρο των M.P. Santisi d'Avila, N. Triantafyllidis και G. Wen [10] με τίτλο "Localization of deformation and loss of macroscopic ellipticity in microstructured solids". Οι συγγραφείς εμβαθύνουν στην ευστάθεια της μακροσκοπικής απόκρισης σύνθετων υπερελαστικών υλικών υπό συνθήκες πεπερασμένων ελαστικών παραμορφώσεων. Το μοντέλο της παρούσας εργασίας βασίζεται στη συγκεκριμένη έρευνα, καθώς και στις εξισώσεις που προτείνονται για τον υπολογισμό των μακροσκοπικών αντιδράσεων αυτών των υλικών.

Επιπλέον, η χρήση του μετασχηματισμού Legendre-Fenchel, που προτάθηκε από τον Adrien-Marie Legendre, είναι κεντρική για τη συσχέτιση των ενεργειακών συναρτήσεων σε υπερελαστικά υλικά. Ο μετασχηματισμός αυτός επιτρέπει την αντιστοίχιση συναρτήσεων που αφορούν τη θέση, την πίεση ή την τάση με συναρτήσεις της συζυγούς ποσότητας ενέργειας (Rockafellar, Convex Analysis, 1970) [11]. Αυτή η διαδικασία είναι θεμελιώδης για την ανάλυση των υπερελαστικών υλικών, ενώ παράλληλα το έργο του Ogden (Ogden, Nonlinear Elastic Deformation, 1984) [12] παρέχει την αναγκαία θεωρητική βάση για τα υλικά τύπου Neo-Hookean και τις μακροσκοπικές τάσεις τύπου Piola-Kirchhoff.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, για τον υπολογισμό των μακροσκοπικών ιδιοτήτων σύνθετων υλικών με στρωματώδεις μικροδομές και υπερελαστικές φάσεις, αξιοποιήθηκαν οι σημειώσεις του μαθήματος Σύνθετα Υλικά (Αγόρας, 2020) [13], καθώς και το βιβλίο Μηχανική των Υλικών (Αράβας, 2018) [14], για την εφαρμογή μαθηματικών εξισώσεων και ορισμών που είναι απαραίτητοι για την ανάλυση των σύνθετων υπερελαστικών υλικών.

## 1.4 Οργάνωση της Εργασίας

Η παρούσα εργασία είναι οργανωμένη σε πέντε κεφάλαια, τα οποία δομούνται ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται η θεωρία των σύνθετων υλικών, η οποία αποτελεί τη θεμελιώδη βάση για την κατανόηση και εμβάθυνση στο θέμα στα επόμενα κεφάλαια. Περιλαμβάνονται κρίσιμοι ορισμοί, όπως ορισμός των σύνθετων υλικών, οι κλίμακες μήκους, οι μικροδομές και οι φάσεις, καθώς και η ανάλυση των γραμμικώς υπερελαστικών υλικών και των αναλλοίωτων παραμέτρων που είναι απαραίτητες για τη μελέτη των υπερελαστικών υλικών. Αναλύεται το πρόβλημα της στατικής ισορροπίας για γενικά ετερογενή υλικά, καθώς και συνοπτικά το πρόβλημα της ομογενοποίησης, το οποίο αποτελεί κεντρικό άξονα της μελέτης των σύνθετων υλικών και θα αναλυθεί εκτενώς παρακάτω. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι μέθοδοι και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση και τη μελέτη των μικροδομών.

Στο Κεφάλαιο 3, εστιάζουμε στις στρωματώδεις μικροδομές με τέλεια επίπεδες στρώσεις, εμβαθύνοντας στο ζήτημα της ομογενοποίησης. Διατυπώνονται τα δύο μοντέλα Neo-Hookean με τα οποία ασχοληθήκαμε: το απλό και το γενικευμένο. Αυτά τα μοντέλα αποτελούν τη βάση για την ανάλυση που οδηγεί στην κύρια και τη διακλαδωμένη λύση του προβλήματος. Εξετάζονται οι ιδιότητες και η συμπεριφορά των υλικών υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης και παραμόρφωσης, καθώς και η επίδραση των γεωμετρικών και υλικών παραμέτρων στις τελικές λύσεις.

Στο Κεφάλαιο 4, επεκτεινόμαστε στις στρωματώδεις μικροδομές με γεωμετρικές ατέλειες, οι οποίες αποτελούν το βασικό θέμα της εργασίας. Αναλύεται η διαδικασία μοντελοποίησης που χρησιμοποιήθηκε σε σχέση με τις γεωμετρικές ατέλειες, καθώς και μια συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που θα παρουσιαστούν. Παράλληλα, περιγράφεται ο τρόπος υπολογισμού της μακροσκοπικής απόκρισης τάσης-παραμόρφωσης και ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων. Μετά την εδραίωση του τμήματος της μοντελοποίησης, ακολουθούν τα αποτελέσματα της υπολογιστικής μελέτης, τα οποία συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης. Εξετάζονται επίσης οι επιπτώσεις των γεωμετρικών ατελειών στην απόδοση των σύνθετων

υλικών και γίνεται σύγκριση με τις ιδανικές μικροδομές.

Στο Κεφάλαιο 5, συνοψίζονται τα συμπεράσματα που προήλθαν από την εργασία και προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα. Γίνεται αναφορά στα κύρια ευρήματα της μελέτης, στους περιορισμούς της, καθώς και στις προοπτικές για περαιτέρω διερεύνηση και βελτιώσεις. Προτείνονται συγκεκριμένες περιοχές έρευνας που θα μπορούσαν να αναπτυχθούν περαιτέρω βάσει των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας.

Στο Παράρτημα περιλαμβάνονται επιπλέον πληροφορίες σχετικά με το πρακτικό κομμάτι της κωδικοποίησης και των προγραμμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη, καθώς και οι τρόποι με τους οποίους αξιοποιήθηκαν.

## 2 Θεωρεία Σύνθετων Υλικών

### 2.1 Σύνθετα Υλικά

Κάθε υλικό, ανάλογα με την κλίμακα με βάση την οποία το προσεγγίζουμε, εμφανίζει διαφορετική δομή. Δηλαδή, ένα υλικό μπορεί να είναι ομογενές σε μια κλίμακα μήκους  $L$  και ετερογενές σε μια άλλη κλίμακα μήκους  $l$ , όπου απαραίτητη προϋπόθεση είναι ότι οι δύο κλίμακες πρέπει να είναι καλά χωρισμένες μεταξύ τους:

$$l \ll L \quad (2.1)$$

Συνεπώς, ως σύνθετο υλικό χαρακτηρίζουμε εκείνα τα ετερογενή υλικά των οποίων οι κλίμακες μήκους είναι καλά διαχωρισμένες. Εμβαθύνοντας στη διαφοροποίηση αυτή, στην κλίμακα μήκους  $l$  εμφανίζονται πάλι ομογενή υλικά, τα οποία ονομάζονται φάσεις. Η κατανομή αυτών των φάσεων με τη σειρά της ονομάζεται μικροδομή.

Αυτή η διαφοροποίηση οδηγεί στην ανάγκη για το πρόβλημα της ομογενοποίησης, μια διαδικασία κατά την οποία υπολογίζονται οι μακροσκοπικές (ομογενοποιημένες) ιδιότητες ενός σύνθετου υλικού που αποτελείται από πολλαπλές φάσεις. Με αυτόν τον τρόπο, η ομογενοποίηση προσπαθεί να περιγράψει τη συμπεριφορά του σύνθετου υλικού ως σύνολο, αντί να αναλύει κάθε συστατικό ξεχωριστά. Στο κεφάλαιο 3.1, αναλύεται περαιτέρω η μέθοδος αυτή ως προς τα δεδομένα, τα ζητούμενα και τις τεχνικές ομογενοποίησης που αξιοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος.

## 2.2 Το πρόβλημα στατικής ισορροπίας για ένα γενικά ετερογενές υλικό

Έστω  $N$ -φασικό ετερογενές υλικό. Ανεξαρτήτως της μικροδομής αυτού του υλικού, δηλαδή σωματιδιακή ή κοκκώδη, πάντα το υλικό αυτό θα καταλαμβάνει την περιοχή  $\Omega$  του χώρου με σύνορο  $\partial\Omega$ . Αντίστοιχα, θεωρούμε φάση  $r$ , με  $r = 1, \dots, N$ , να καταλαμβάνει την υποπεριοχή  $\Omega^{(r)}$  της  $\Omega$ , έτσι ώστε

$$\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \dots \cup \Omega^{(N)}, \quad \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} \cap \dots \cap \Omega^{(N)} = \emptyset \quad (2.2)$$

Κάθε υποπεριοχή του  $\Omega^{(r)}$  του ολικού χώρου  $\Omega$  καταλαμβάνει ένα ορισμένο ποσοστό όγκου της περιοχής, ο οποίος ορίζεται ως

$$c^{(r)} = \frac{|\Omega^{(r)}|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \chi^{(r)}(\mathbf{x}) dV, \quad r = 1, \dots, N$$

και περιγράφεται πλήρως μέσω των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των φάσεων

$$\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \mathbf{x} \in \Omega^{(r)} \\ 0 & \text{εάν } \mathbf{x} \notin \Omega^{(r)} \end{cases}, \quad r = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

Για τις άνω σχέσεις ισχύουν τα εξής

$$\sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \sum_{r=1}^N c^{(r)} = 1$$

Το πρόβλημα της στατικής ισορροπίας για ένα γενικά ετερογενές υλικό ορίζεται από 3 είδη συνθηκών:

### (i) Συνοριακές συνθήκες

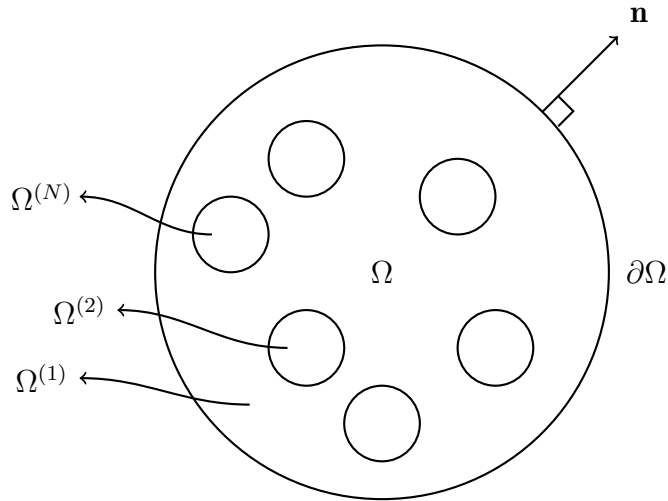
Κάθε σώμα φορτίζεται με μαζικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  και επιφανειακά φορτία  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , όπου  $\mathbf{x}$  είναι το διάνυσμα θέσεως ενός σημείου του σώματος,  $\boldsymbol{\sigma}$  ο ταυιστής των τάσεων και  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $\partial\Omega$  του σώματος και με κατεύθυνση "προς τα έξω", όπως φαίνεται και στην εικόνα

2.1. Κάθε σημείο της επιφάνειας του σώματος περιγράφεται από το σύνολο των τριών αυτών συνιστωσών της φορτίσεως ανά μονάδα επιφάνειας, καθώς και το διάνυσμα μετατοπίσεως  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , οπότε το σύνορο περιγράφεται ως εξής.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{ή} \quad u_i = \hat{u}_i \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \text{ή} \quad \sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_t \quad (2.5)$$

όπου  $\hat{\mathbf{u}}$  οι γνωστές επιβαλλόμενες μετατοπίσεις στο μέρος  $\partial\Omega_u$  του συνόρου και  $\hat{\mathbf{t}}$  είναι οι γνωστές επιβαλλόμενες επιφανειακές δυνάμεις στο υπόλοιπο  $\partial\Omega_t$  του συνόρου, ενώ τα δύο μέρη του συνόρου είναι συμπληρωματικά μεταξύ τους και δεν υπάρχει επικάλυψη, οπότε  $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t = \partial\Omega$  και  $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$ .



Εικόνα 2.1: Αναπαράσταση χωρίου  $\Omega$ , αντίστοιχου συνόρου  $\partial\Omega$  και κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$ .

## (ii) Συνθήκες στο εσωτερικό των φάσεων

### – Κινηματικές σχέσεις

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \right] \quad (2.6)$$

– **Καταστατικές εξισώσεις**

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}), \quad w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) w^{(r)}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.7)$$

ή, εναλλακτικά,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}), \quad u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) u^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.8)$$

– **Εξισώσεις ισορροπίας**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

όπου  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  είναι οι μαζικές δυνάμεις στο σώμα, όμως στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούνται αμελητέες, συνεπώς

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

(iii) **Συνθήκες στις διεπιφάνειες των φάσεων**

– Συμβολίζουμε τις ασυνέχειες τύπου άλματος (jump discontinuities) στις διεπιφάνειες ενός πεδίου  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  ως

$$[\mathbf{T}(\mathbf{x})] = \mathbf{T}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^-(\mathbf{x})$$

– **Συνέχεια των μετατοπίσεων**

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x})] = 0$$

Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται ότι

$$[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} [\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})] \quad (2.11)$$

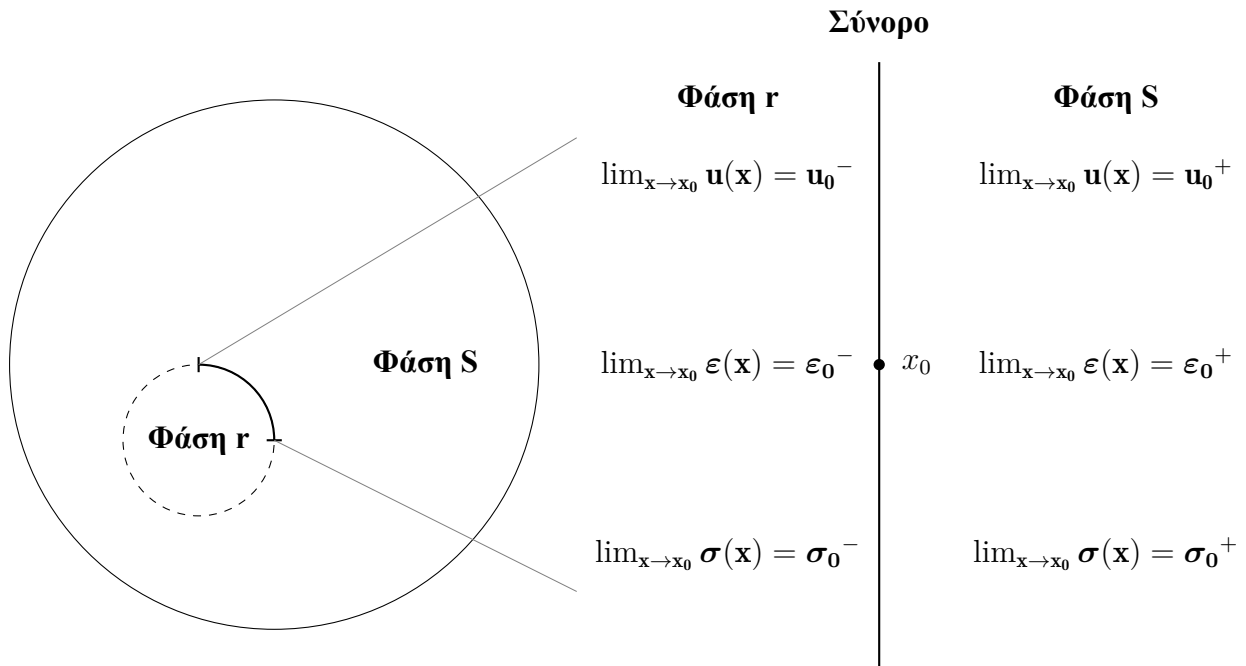
όπου  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  είναι ένα (άγνωστο) διανυσματικό πεδίο.



– Συνέχεια των τάσεων

$$[\sigma(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.12)$$

Οι συνθήκες στη διεπιφάνεια των φάσεων μπορούν να φανούν κατά αναπαράσταση στο σχήμα 2.2

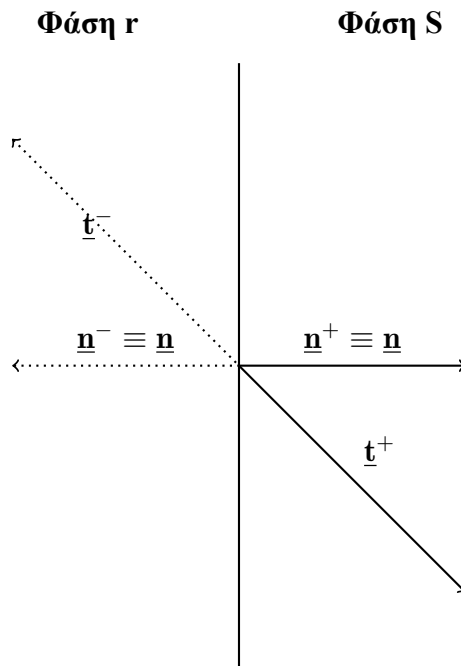


Εικόνα 2.2: Διάγραμμα αναπαράστασης συνθηκών στις διεπιφάνειες των φάσεων.

Συναρτήσει των τριών άνω συνθηκών, έχουμε και τις ακόλουθες βασικές υποθέσεις:

- (i) Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n}$  είναι συνεχές 2.3.
- (ii) Το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  είναι επίσης συνεχές.

Θεωρούμε ότι στη διεπιφάνεια έχουμε "perfect bonding", δηλαδή δεν έχουμε διάχυση μεταξύ των φάσεων, κενά, ρωγμές κλπ. Βάση της υπόθεσης (i) έχουμε τις ακόλουθες συνέπειες:



Εικόνα 2.3: Διάγραμμα βάση συνέπειας της συνθήκης (i)

$$\begin{aligned}
 \underline{t}^+ + \underline{t}^- &= \underline{0} \\
 \Rightarrow \underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n}^+ + \underline{\sigma}^- \cdot \underline{n}^- &= \underline{0} \\
 \Rightarrow \underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} - \underline{\sigma}^- \cdot \underline{n} &= \underline{0} \\
 \Rightarrow (\underline{\sigma}^+ - \underline{\sigma}^-) \cdot \underline{n} &= \underline{0}
 \end{aligned}$$

ή

$$[[\underline{\sigma}(\mathbf{x})]] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

## 2.3 Γραμμικώς υπερελαστικά Υλικά

Στο παρόν θέμα κύριο ενδιαφέρον αποτέλεσαν τα υπερελαστικά υλικά, τόσο τα γραμμικά όσο και τα μη-γραμμικά, οπότε αρχικά παρουσιάζονται τα γραμμικά υπερελαστικά υλικά και η γενική φύση των υπερελαστικών υλικών. Σε αντίθεση με τα απλά ελαστικά υλικά όπου η σχέση τάσης-παραμόρφωσης είναι γραμμική (Νόμος του Hooke [9]), τα γραμμικώς υπερελαστικά υλικά παρουσιάζουν μη γραμμική σχέση. Για το λόγο αυτό, υπερελαστικά, αποτελούν τα υλικά

για τα οποία υπάρχει γνησίως κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $w = w(\epsilon)$  τέτοια ώστε

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \epsilon} \quad (2.14)$$

Σύμφωνα με το μετασχηματισμό Legendre-Fenchel [11] της προαναφερόμενης συνάρτησης  $w$ , βάση της οποίας υπολογίζουμε το Supremum (ή sup), δηλαδή το κατώτατο άνω φράγμα του συνόλου

$$u(\sigma) \equiv w^*(\sigma) = \sup_{\epsilon} \{ \epsilon : \sigma - w(\epsilon) \} \quad (2.15)$$

η νέα αυτή συνάρτηση  $u = u(\epsilon)$  είναι γνησίως κυρτή και παραγωγίσιμη τέτοια ώστε μπορούμε να εξάγουμε την επόμενη συσχέτιση

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial \sigma} \quad (2.16)$$

Αντίστοιχα η  $w$  είναι ο μετασχηματισμός Legendre-Fenchel [11] της  $u$ , βάση της οποίας υπολογίζουμε ξανά το Supremum

$$w(\epsilon) \equiv u^*(\epsilon) = \sup_{\sigma} \{ \sigma : \epsilon - u(\sigma) \} \quad (2.17)$$

όπου  $\sigma$  ο ταυστής των τάσεων και  $\epsilon$  ο ταυστής των απειροστών παραμορφώσεων. Η συνάρτηση  $w(\epsilon)$  ονομάζεται "εξίσωση δυναμικού των παραμορφώσεων" και εκφράζει την ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου που αποθηκεύεται στο υλικό λόγω της παραμόρφωσης  $\epsilon$ . Αντίστοιχα, η συνάρτηση  $u(\sigma)$  ονομάζεται "εξίσωση δυναμικού των τάσεων" και εκφράζει την ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου που αποθηκεύεται στο υλικό λόγω της τάσης  $\sigma$ .

Ο μετασχηματισμός Legendre-Fenchel [11] που αναφέραμε προηγουμένως για να αιτιολογήσουμε τη σχέση μεταξύ των δύο δυναμικών έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα. Οι  $u(\sigma) \equiv w^*(\sigma)$  και  $w(\epsilon) \equiv u^*(\epsilon)$  είναι γνησίως κυρτές και παραγωγίσιμες, δηλαδή, οι συναρτήσεις  $w$  και  $u$  είναι συζυγείς και οι καταστατικές εξισώσεις 2.14 και 2.16 είναι ισοδύναμες.

Συνεχίζοντας, χαρακτηρίζουμε ένα υπερελαστικό υλικό ως γραμμικό όταν

$$w(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon : \mathbb{C} : \epsilon, \quad \sigma = \mathbb{C} : \epsilon \quad (2.18)$$

ή ισοδύναμα όταν

$$u(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{S} : \sigma, \quad \epsilon = \mathbb{S} : \sigma \quad (2.19)$$

Όπου  $\mathbb{C}$  και  $\mathbb{S}$  είναι σταθεροί τανυστές ελαστικότητας και ενδοτικότητας 4ης τάξεως, ανεξάρτητοι του  $\epsilon$  και  $\sigma$ , οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους μέσα από τη σχέση

$$\mathbb{C} = \mathbb{S}^{-1} \quad (2.20)$$

και κατ' επέκταση αναλύονται ως

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon \partial \epsilon}, \quad \mathbb{S} = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial \sigma} \quad (2.21)$$

Λαμβάνοντας πλέον υπόψη την εξίσωση 2.20 και το γεγονός ότι οι τανυστές  $\sigma$  και  $\epsilon$  είναι συμμετρικοί, γνωρίζουμε ότι αντίστοιχα οι τανυστές  $\mathbb{C}$  και  $\mathbb{S}$  έχουν ελάσσονες και μείζονες συμμετρίες. Συνεπώς, κάθε ένας εκ των  $\sigma$  και  $\epsilon$  μπορεί να περιγραφεί πλήρως από 21 (το πολύ) ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές σε ένα σύνολο 36 τιμών, που έχει αναχθεί από ένα αρχικό σύνολο 81 τιμών ενός 9x9 τανυστή. Ωστόσο, εφόσον όλα τα υλικά δε παρουσιάζουν τις ίδιες συμμετρίες, ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών μπορεί να διαφέρει από υλικό σε υλικό.

## 2.4 Συμμετρίες Μη Γραμμικών Υλικών: Αναλλοίωτες Συναρτήσεις

Οι αναλλοίωτες ενός τανυστή ονομάζονται οι συναρτήσεις των συνιστωσών του που έχουν την ιδιότητα να παίρνουν την ίδια τιμή ανεξαρτήτως του συστήματος στο οποίο έχουν ήδη οριστεί οι συνιστώσες του αρχικού μας τανυστή. Με αυτό το τρόπο, ενώ οι συνιστώσες του τανυστή αλλάζουν όταν αλλάζει και το ίδιο το σύστημα των συντεταγμένων που είχε οριστεί, ορισμένοι συνδυασμοί των επιμέρους συνιστωσών που μας δίνουν τις αναλλοίωτες θα μας δίνουν την ίδια τιμή σε όποιο σύστημα εμείς επιλέξουμε. Οι τρεις κύριες αναλλοίωτες ενός τανυστή δευτέρας

τάξεως βάση του βιβλίου Μηχανική των Υλικών (Αράβας, 2018) [14] είναι:

**(i) Πρώτη κύρια αναλλοίωτη ( $I_1$ ):** Είναι το ίχνος του τανυστή τάσης, δηλαδή το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του τανυστή τάσης.

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.22)$$

**(ii) Δεύτερη κύρια αναλλοίωτη ( $I_2$ ):** Είναι το μισό της διαφοράς μεταξύ του τετραγώνου του ίχνους του τανυστή τάσης (ή πρώτης κύριας αναλλοίωτης) και του ίχνους του τετραγώνου του τανυστή τάσης.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)) \\ &= \frac{1}{2}[(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) - (\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{31}\sigma_{13})] \end{aligned} \quad (2.23)$$

**(iii) Τρίτη κύρια αναλλοίωτη ( $I_3$ ):** Είναι η ορίζουσα του τανυστή τάσης.

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{6}(I_1^3 + 2\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) - 3I_1\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)) \\ &= \det(\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{22}\sigma_{31}\sigma_{13} - \sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{21} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Έστω αρχικά ένας ορθογώνιος τανυστής δευτέρας τάξης, ο οποίος κατ' επέκταση μπορεί να θεωρηθεί ένας γραμμικός μετασχηματισμός που επιτρέπει τα μήκη των διανυσμάτων καθώς και τις γωνίες μεταξύ τους να διατηρούνται σταθερά όταν θέλουμε να παράγουμε νέα διανύσματα στο χώρο, εφόσον αυτά περιγράφονται από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων αυτών. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί εκφράζουν περιστροφές ή αντικατοπτρισμούς ή συνδυασμούς και των δύο (improper rotations) των διανυσμάτων στα οποία επιδρούν. Επιπρόσθετα, εάν ο μετασχηματισμός αυτός επιτρέπει στις ιδιότητες του υλικού να παραμένουν αναλλοίωτες, τότε ο  $\mathbf{Q}$  αποτελεί ένα μετασχηματισμό συμμετρίας του υλικού, βάση του οποίου μετά ο αριθμός των ανεξάρτητων στοιχείων των τανυστών ελαστικότητας  $\mathbb{C}$  ή ενδοτικότητας  $\mathbb{S}$ , δηλαδή των σταθερών που περιγράφουν πλήρως τη συμπεριφορά ενός υλικού, μπορεί να μειωθεί.

Στη περίπτωση των γραμμικών ελαστικών υλικών, λέμε ότι είναι συμμετρικά ως προς έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό  $\mathbf{Q}$  εάν

$$C_{ijkl} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}C_{pqrs} \quad (2.25)$$

ή ισοδύναμα,

$$S_{ijkl} = Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}S_{pqrs} \quad (2.26)$$

Οι δύο άνω συνθήκες ορίζουν ένα σύνολο περιορισμών για τους αντίστοιχους τανυστές σύμφωνα με τις οποίες όπως αναφέραμε προηγουμένως μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό των αναγκαίων ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών των τανυστών αυτών.

Με τη βοήθεια του συνόλου των ορθογώνιων μετασχηματισμών  $\mathbf{Q}$  με βάση τους οποίους ένα υλικό είναι συμμετρικό μπορούμε να ορίσουμε την ομάδα συμμετρίας  $\mathbb{S}$  του υλικού για να εκπληρώσουμε το στόχο μείωσης των σταθερών. Τέτοιες συμμετρίες αποτελούν:

**Μονοκλινής Συμμετρία:** Ένα επίπεδο συμμετρίας, που συνήθως δεν είναι κάθετο σε καμία από τις κύριες διευθύνσεις του υλικού.

**Ορθοτροπία:** Τρία αμοιβαία κάθετα επίπεδα συμμετρίας, δηλαδή το υλικό έχει διαφορετικές ιδιότητες κατά μήκος τριών κάθετων αξόνων.

**Εγκάρσια Ισοτροπία:** Υπάρχει ένα επίπεδο συμμετρίας που κάνει το υλικό ισοτροπικό σε όλες τις κατευθύνσεις εντός αυτού του επιπέδου, ενώ οι ιδιότητες κατά την κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο είναι διαφορετικές.

**Κυβική Συμμετρία:** Το υλικό έχει τις ίδιες ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις, καθώς υπάρχουν πολλές συμμετρίες, όπως διαγώνιες και περιστροφικές.

**Ισοτροπία:** Απόλυτη συμμετρία, το υλικό έχει τις ίδιες ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις χωρίς εξαίρεση.

Έτσι αντίστοιχα και στα μη γραμμικά υλικά μας, εκμεταλλευόμαστε τις αναλλοίωτες

συναρτήσεις για να περιγράψουμε τις συμμετρίες τους. Λέμε ότι η  $w = w(\epsilon)$  είναι αναλλοίωτη συνάρτηση του  $\epsilon$  στο σύνολο  $\mathcal{S}$  εάν

$$w(\mathbf{Q} \cdot \epsilon \cdot \mathbf{Q}^T) = w(\epsilon) \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^6, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{S} \quad (2.27)$$

Όπου  $\mathcal{S}$  είναι η ομάδα συμμετρίας του υλικού που αναλύσαμε προηγουμένως. Όπως και με τις συμμετρίες των γραμμικών υλικών, έτσι και για τις συμμετρίες των μη γραμμικών υλικών έχουμε ισότροπες, εγκαρσίως ισότροπες και ορθότροπες συναρτήσεις για την περιγραφή των συναρτήσεων δυναμικού των παραμορφώσεων  $w(\epsilon)$ , οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

### Ισότροπες συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} & \text{tr} \epsilon, \quad \text{tr} \epsilon^2, \quad \text{tr} \epsilon^3, \\ & I_1(\epsilon) = \text{tr} \epsilon, \quad I_2(\epsilon) = \frac{1}{2}[(\text{tr} \epsilon)^2 - \text{tr} \epsilon^2], \quad I_3(\epsilon) = \det \epsilon, \\ & \epsilon_m = \frac{1}{3} \text{tr} \epsilon, \quad \epsilon_e(\epsilon) = \left( \frac{2}{3} \epsilon_d : \epsilon_d \right)^{1/2} \\ & \text{tr} \sigma, \quad \text{tr} \sigma^2, \quad \text{tr} \sigma^3, \\ & I_1(\sigma) = \text{tr} \sigma, \quad I_2(\sigma) = \frac{1}{2}[(\text{tr} \sigma)^2 - \text{tr} \sigma^2], \quad I_3(\sigma) = \det \sigma \\ & \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma, \quad \sigma_e = \left( \frac{2}{3} \sigma^d : \sigma^d \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Βάση των συναρτήσεων αυτών, το δυναμικό των παραμορφώσεων  $w(\epsilon)$  ενός ισότροπου υλικού

είναι μια ισότροπη συνάρτηση του  $\epsilon$ , που μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
w(\epsilon) &= \bar{w}(\text{tr}\epsilon, \text{tr}\epsilon^2, \text{tr}\epsilon^3) \\
&= \tilde{w}(I_1(\epsilon), I_2(\epsilon), I_3(\epsilon)) \\
&= \hat{w}(\epsilon_m, \epsilon_e, \det \epsilon) \\
&= \check{w}(\epsilon_1(\epsilon), \epsilon_2(\epsilon), \epsilon_3(\epsilon)) \\
&= \check{w}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \\
&= \check{w}(\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_2) \\
&= \check{w}(\epsilon_3, \epsilon_1, \epsilon_2)
\end{aligned}$$

Όπου η συνάρτηση  $\check{w}$  είναι συμμετρική ως προς τα αντίστοιχα ορίσματα της, με  $\epsilon_1(\epsilon), \epsilon_2(\epsilon), \epsilon_3(\epsilon)$  να είναι οι ιδιοτιμές του  $\epsilon$ .

Αντίστοιχα, προκύπτει και το δυναμικό των τάσεων  $u(\sigma)$  ως μια ισότροπη συνάρτηση του  $\sigma$  ως

$$\begin{aligned}
u(\sigma) &= \bar{u}(\text{tr}\sigma, \text{tr}\sigma^2, \text{tr}\sigma^3) \\
&= \tilde{u}(I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma)) \\
&= \hat{u}(\sigma_m, \sigma_e, \det \sigma) \\
&= \check{u}(\sigma_1(\sigma), \sigma_2(\sigma), \sigma_3(\sigma)) \\
&= \check{u}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\
&= \check{u}(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2) \\
&= \check{u}(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)
\end{aligned}$$

Όπου η συνάρτηση  $\check{u}$  είναι συμμετρική ως προς τα αντίστοιχα ορίσματα της, με  $\sigma_1(\sigma), \sigma_2(\sigma), \sigma_3(\sigma)$  να είναι οι ιδιοτιμές του  $\sigma$ .



## Εγκαρσώς Ισότροπες Συναρτήσεις

$$\text{tr} \epsilon, \quad \text{tr} \epsilon^2, \quad \text{tr} \epsilon^3, \quad I_1(\epsilon), \quad I_2(\epsilon), \quad I_3(\epsilon),$$

$$I_4(\epsilon) = \text{tr}(\epsilon \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \epsilon \cdot \mathbf{n},$$

$$I_5(\epsilon) = \text{tr}(\epsilon^2 \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \epsilon^2 \cdot \mathbf{n}$$

$$\text{tr} \sigma, \quad \text{tr} \sigma^2, \quad \text{tr} \sigma^3, \quad I_1(\sigma), \quad I_2(\sigma), \quad I_3(\sigma),$$

$$I_4(\sigma) = \text{tr}(\sigma \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n},$$

$$I_5(\sigma) = \text{tr}(\sigma^2 \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{n}$$

όπου  $\mathbf{n}$  είναι ο άξονας συμμετρίας.

Βάση των συναρτήσεων αυτών, το δυναμικό των παραμορφώσεων  $w(\epsilon)$  ενός εγκαρσώς ισότροπου υλικού είναι μια εγκαρσώς ισότροπη συνάρτηση του  $\epsilon$ , που μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} w(\epsilon) &= \bar{w}(I_1(\epsilon), I_2(\epsilon), I_3(\epsilon), I_4(\epsilon), I_5(\epsilon)) \\ &= \tilde{w}(\epsilon_p, \epsilon_n, \gamma_p, \gamma_n, \det \epsilon) \end{aligned}$$

Όπου

$$\epsilon_p = \frac{1}{2} E_{iikl}^{[1]} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \beta_{kl} \epsilon_{kl}$$

$$\epsilon_n = E_{iikl}^{[2]} \epsilon_{kl} = \alpha_{kl} \epsilon_{kl}$$

$$\gamma_p^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ijkl}^{[3]} \epsilon_{kl}$$

$$\gamma_n^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ijkl}^{[4]} \epsilon_{kl}$$

Αντίστοιχα, προκύπτει και το δυναμικό των τάσεων  $u(\sigma)$  ως μια εγκαρσώς ισότροπη

συνάρτηση του  $\sigma$

$$\begin{aligned} u(\sigma) &= \bar{u}(I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma), I_4(\sigma), I_5(\sigma)) \\ &= \tilde{u}(\sigma_p, \sigma_n, \tau_p, \tau_n, \det \sigma) \end{aligned}$$

Όπου

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{1}{2} E_{iikl}^{[1]} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \beta_{kl} \sigma_{kl} \\ \sigma_n &= E_{iikl}^{[2]} \sigma_{kl} = \alpha_{kl} \sigma_{kl} \\ \tau_p^2 &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ijk l}^{[3]} \sigma_{kl} \\ \tau_n^2 &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_{ijk l}^{[4]} \sigma_{kl} \end{aligned}$$

### Ορθότροπες Συναρτήσεις

$$\text{tr} \epsilon, \quad \text{tr} \epsilon^2, \quad \text{tr} \epsilon^3, \quad I_1(\epsilon), \quad I_2(\epsilon), \quad I_3(\epsilon), \quad I_4(\epsilon), \quad I_5(\epsilon),$$

$$I_6(\epsilon) = \mathbf{n}_1 \cdot \epsilon \cdot \mathbf{n}_1,$$

$$I_7(\epsilon) = \mathbf{n}_1 \cdot \epsilon^2 \cdot \mathbf{n}_1,$$

$$I_6(\epsilon) = \mathbf{n}_2 \cdot \epsilon \cdot \mathbf{n}_2,$$

$$I_7(\epsilon) = \mathbf{n}_2 \cdot \epsilon^2 \cdot \mathbf{n}_2$$

$$\text{tr} \sigma, \quad \text{tr} \sigma^2, \quad \text{tr} \sigma^3, \quad I_1(\sigma), \quad I_2(\sigma), \quad I_3(\sigma), \quad I_4(\sigma), \quad I_5(\sigma),$$

$$I_6(\sigma) = \mathbf{n}_1 \cdot \sigma \cdot \mathbf{n}_1,$$

$$I_7(\sigma) = \mathbf{n}_1 \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{n}_1,$$

$$I_6(\sigma) = \mathbf{n}_2 \cdot \sigma \cdot \mathbf{n}_2,$$

$$I_7(\sigma) = \mathbf{n}_2 \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{n}_2$$

όπου  $\mathbf{n}_1$  και  $\mathbf{n}_2$  είναι κύριοι άξονες της ορθοτροπίας.

Βάση των συναρτήσεων αυτών, το δυναμικό των παραμορφώσεων  $w(\epsilon)$  ενός ορθότροπου υλικού είναι μια ορθότροπη συνάρτηση του  $\epsilon$ , που μπορεί να γραφεί ως

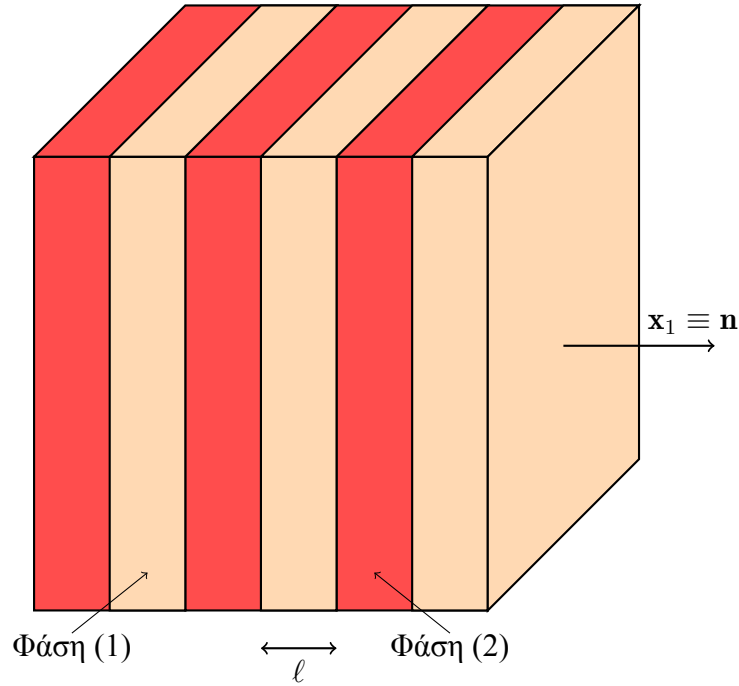
$$w(\epsilon) = \bar{w}(I_1(\epsilon), I_2(\epsilon), I_3(\epsilon), I_4(\epsilon), I_5(\epsilon), I_6(\epsilon), I_7(\epsilon))$$

Αντίστοιχα, προκύπτει και το δυναμικό των τάσεων  $u(\sigma)$  ως μια ορθότροπη συνάρτηση του  $\sigma$

$$u(\sigma) = \bar{u}(I_1(\sigma), I_2(\sigma), I_3(\sigma), I_4(\sigma), I_5(\sigma), I_6(\sigma), I_7(\sigma))$$

## 2.5 Απλές Στρωματώδεις Μικροδομές

Το υλικό αποτελείται από δύο εναλλασσόμενες μεταξύ τους φάσεις, με το ίδιο το υλικό να είναι ετερογενές κατά τη διεύθυνση της διαστρωμάτωσης  $\mathbf{n}$  και ομογενές κατά το εγκάρσιο (κάθετο) επίπεδο. Συνεπώς έχουμε μονοδιάστατα ετερογενές υλικό. Η επίλυση του προβλήματος αυτού ως προς την εύρεση του μακροσκοπικού τανυστή ελαστικότητας για τη μελέτη της συμπεριφοράς του σύνθετου υλικού εμφανίζεται και στο βιβλίο του Milton (Milton, 2002) [9].



Εικόνα 2.4: Σύνθετο υλικό με απλή στρωματώδη μικροδομή.

Τα πεδία των τάσεων και παραμορφώσεων του σύνθετου υλικού με στρωματώδη μικροδομή είναι ομοιόμορφα στις δύο αντίστοιχες φάσεις από τις οποίες απαρτίζεται με

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)} & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} & \forall \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}$$

Όπου  $\boldsymbol{\sigma}$  και  $\boldsymbol{\epsilon}$  είναι η μέση τάση και μέση παραμόρφωση που χαρακτηρίζει την κάθε φάση, τα οποία προκύπτουν από τα αντίστοιχα θεωρήματα μέσης τιμής αυτών.

Τότε, μπορούμε να συνεχίσουμε στην επίλυση του συστήματος των εξισώσεων με αγνώστους τις μακροσκοπικές μέσες τιμές τάσεων και παραμορφώσεως, καθώς και τις μέσες τιμές των επιμέρους φάσεων που χαρακτηρίζουν το σύνθετο υλικό μας και το άγνωστο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ .

**Εσωτερικό των φάσεων:** Οι εξισώσεις ισορροπίας, οι κινηματικές σχέσεις και οι καταστατικές

εξισώσεις μας δίνουν τα πρώτα δύο αναγκαία ζεύγη εξισώσεων (1) και (2) για την επίλυση του μοντέλου.

$$c^{(1)}\overline{\sigma}^{(1)} + c^{(2)}\overline{\sigma}^{(2)} = \overline{\sigma} \quad (1)$$

$$c^{(1)}\overline{\epsilon}^{(1)} + c^{(2)}\overline{\epsilon}^{(2)} = \overline{\epsilon} \quad (2)$$

**Καταστατικές εξισώσεις φάσεων:** Πιο συγκεκριμένα προκύπτουν οι σχέσεις των επιμέρους φάσεων ως οι εξισώσεις (3) και (4).

$$\overline{\sigma}^{(1)} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \epsilon}(\overline{\epsilon}^{(1)}) = \mathbb{C}^{(1)} : \overline{\epsilon}^{(1)} \quad (3)$$

$$\overline{\sigma}^{(2)} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \epsilon}(\overline{\epsilon}^{(2)}) = \mathbb{C}^{(2)} : \overline{\epsilon}^{(2)} \quad (4)$$

**Εξωτερικό των φάσεων:** Από την συνθήκη συνέχειας τάσεων και παραμορφώσεων προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις (5) και (6) του συστήματος.

$$\overline{\epsilon}^{(2)} - \overline{\epsilon}^{(1)} = (\mathbf{a}\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathbf{a})\mathbf{a} \quad (5)$$

$$\overline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \overline{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \overline{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} \quad (6)$$

Η μακροσκοπική καταστατική εξίσωση του υλικού προσδιορίζεται από την επίλυση του άνω συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων (1)-(6). Στη γενική περίπτωση απαιτείται η λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων, στην ειδική περίπτωση όμως αυτήν έχουμε αλγεβρικές εξισώσεις. Η λύση που προκύπτει είναι ακριβής, ενώ η σχέση που χαρακτηρίζει το υλικό είναι η εξής

$$\overline{\sigma} = \tilde{\mathbb{C}} : \overline{\epsilon} \quad (2.28)$$

Όπου  $\tilde{\mathbb{C}}$  είναι ο μακροσκοπικός τανυστής ελαστικότητας του σύνθετου υλικού με

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{(1)} + c^{(2)}[(\mathbb{C}^{(2)} - \mathbb{C}^{(1)})^{-1} + c^{(1)}\mathbb{H}^{(1)}(\mathbf{n})]^{-1} \quad (2.29)$$

Ο τανυστής  $\mathbb{H}^{(1)}$  είναι μια συνάρτηση του τανυστή ελαστικότητας  $\mathbb{C}^{(1)}$  και της διεύθυνσεως

διαστρωμάτωσης  $\mathbf{n}$ , ο οποίος αναφέρεται συχνά και ως "τανυστής μικροδομής" εξαιτίας της εξάρτησης ως προς τη διεύθυνση διαστρωμάτωσης και περιγράφεται από τη σχέση

$$H_{ijpq}^{(1)}(\mathbf{n}) = \frac{1}{4}[N_i p^{(1)} n_j n_q + N_i q^{(1)} n_j n_p + N_j p^{(1)} n_i n_q + N_j q^{(1)} n_i n_p] \quad (2.30)$$

με

$$\mathbf{N}^{(1)} = (\mathbf{K}^{(1)})^{-1}, \quad K_{ik}^{(1)} = C_{ijkl}^{(1)} n_l n_j \quad (2.31)$$

Όπου  $K_{ik}^{(1)}$  ο ακουστικός τανυστής. Πολλοί από τους άνω τανυστές έχουν εξάρτηση ως προς τις ιδιότητες  $(\mathbb{C}^{(1)})$  και τη μικροδομή  $(c^{(1)}$  και  $\mathbb{H}^{(1)})$  της φάσεως (1) του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στη χρήση της εξίσωσης

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{έναντι της σχέσης,} \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n}$$

Οπότε αντίστοιχα, με τη χρήση της δεύτερης σχέσης για την επίλυση του άνω συστήματος θα προέκυπταν οι ανάλογοι τανυστές με εξάρτηση ως προς τη φάση (2) του σύνθετου υλικού. Η επίλυση του συστήματος ως προς το μακροσκοπικό τανυστή ελαστικότητας ενός σύνθετου υλικού με στρωματώδη μικροδομή και διεύθυνση διαστρωμάτωσης  $\mathbf{n}$ , μπορεί να γενικευτεί αντίστοιχα για τις  $N$  γραμμικά ελαστικές φάσεις ( $N = 2, 3, 4, \dots$ ) από τις οποίες μπορεί να απαρτίζεται με

$$\tilde{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C}(\mathbf{x}) : [\mathbb{I} + \mathbb{H}^{(1)}(\mathbf{n}) : (\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^{(1)})]^{-1} \rangle : \langle [\mathbb{I} + \mathbb{H}^{(1)}(\mathbf{n}) : (\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^{(1)})]^{-1} \rangle \quad (2.32)$$

### 3 Στρωματώδεις μικροδομές με τέλεια επίπεδες στρώσεις

#### 3.1 Το πρόβλημα ομογενοποίησης

Υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των ομογενών και των ετερογενών υλικών και των συναρτήσεων που τα χαρακτηρίζουν για την ανάλυση της συμπεριφοράς τους [13]. Τα σύνθετα υλικά είναι εν γένει ετερογενή υλικά στη μικροκλίμακα, βάση ορισμού, και ομογενή στη μακροκλίμακα. Συνεπώς, για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό χρειάζεται να προσδιορίσουμε τη μακροσκοπική καταστατική εξίσωση του σύνθετου υλικού συναρτήσει της μικροδομής του και των ιδιοτήτων των φάσεων του απ' τις οποίες απαρτίζεται [9]. Για το λόγο αυτό θεωρούμε ένα "αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου (ΑΣΟ)" ή "representative volume element (RVE)"  $\Omega$  του σύνθετου υλικού, στο οποίο οι κλίμακες μήκους  $L$  και  $l$  είναι καλά διαχωρισμένες με

$$l \ll L \quad (3.1)$$

Επιπρόσθετα, η μικροδομή στο  $\Omega$  πρέπει να είναι στατιστικά ομογενής, δηλαδή πρέπει να διακρίνουμε όμοια ποσοστά στις φάσεις και τρόπο συμπεριφοράς (π.χ. ισότροπο) σε κάθε μικροδομή που επιλέγουμε. Οι δύο αυτές άνω υποθέσεις είναι αναγκαίες για την ύπαρξη μακροσκοπικών ιδιοτήτων σύνθετων υλικών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το πρόβλημα ομογενοποίησης μπορεί να χωριστεί στις επιμέρους κατηγορίες.

**Δεδομένα:** Αρχικά, η μικροδομή και οι φάσεις του υλικού αποτελούν τα δεδομένα του προβλήματος αναγκαία για την ομογενοποίηση του υλικού. Η μικροδομή περιλαμβάνει τη γεωμετρική κατανομή και τη διάταξη των διαφόρων συστατικών φάσεων σε μικροσκοπική κλίμακα. Αντίστοιχα, τα στοιχεία της μικροδομής περιλαμβάνουν τη χωρική κατανομή και τον προσανατολισμό των ενισχυτικών στοιχείων ως προς το υλικό φορέα, καθώς και

το κλασματικό ποσοστό κάθε φάσης που αποτελεί αλληλένδετη σχέση μεταξύ μήτρας και ενισχυτικού στοιχείου. Οι ιδιότητες των φάσεων και η αλληλεπίδρασή τους καθορίζουν τη συνολική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Επιπλέον σημαντικό κομμάτι των δεδομένων αποτελούν οι φάσεις, δηλαδή τα διακριτά ομογενή υλικά συστατικά στη μικροκλίμακα του σύνθετου υλικού, καθένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από διαφορετικές φυσικές και μηχανικές ιδιότητες. Οι φάσεις αυτές των σύνθετων υλικών χωρίζονται συνήθως σε δύο κύριες κατηγορίες, φορέα που αποτελεί το συνεχές υλικό στο οποίο είναι ενσωματωμένα τα ενισχυτικά στοιχεία, και τα ίδια τα ενισχυτικά στοιχεία τα οποία προστίθενται στο φορέα για τη βελτίωση των ιδιοτήτων του.

**Ζητούμενα:** Αντίστοιχα, το πρόβλημα της ομογενοποίησης είναι αυτό μέσα από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί και αναλυθεί η μακροσκοπική συμπεριφορά ενός σύνθετου υλικού, δηλαδή η απόκριση της τάσεως-παραμορφώσεως, καθώς και οι ομογενοποιημένες ιδιότητες του υλικού αυτού. Η συμπεριφορά αυτή αποδίδεται από τις μέσες τιμές των τάσεων και παραμορφώσεων που ορίζονται ως εξής:

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{t}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{t}(\mathbf{x})] dS = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \bar{\sigma}^{(r)} \quad (3.2)$$

$$\bar{\epsilon} \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})] dS = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \bar{\epsilon}^{(r)} \quad (3.3)$$

Όπου,  $c(r)$  είναι το κλάσμα όγκου της αντίστοιχης φάσης  $r$  στην οποία αναφέρεται.

**Θεώρημα Hill [11]:** Έστω ότι οι μαζικές δυνάμεις είναι αμελητέες, ότι το πεδίο των τάσεων ικανοποιεί τις συνθήκες ισορροπίας  $\nabla \cdot \sigma = 0$  και το πεδίο παραμορφώσεων είναι συμβατό με το πεδίο των μετατοπίσεων. Τότε, αν το πεδίο τάσεων  $\sigma$  ικανοποιεί τη συνθήκη ομοιόμορφων τάσεων στο σύνορο  $\partial\Omega$ , ή το πεδίο μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$  ικανοποιεί τη συνθήκη γραμμικών μετατοπίσεων στο σύνορο  $\partial\Omega$ , δηλαδή

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{x}$$



Τότε η μακροσκοπική ενέργεια του συστήματος ισούται με το γινόμενο των επιμέρους μέσων τιμών τάσεως και παραμορφώσεως, δηλαδή

$$\langle \sigma : \epsilon(\mathbf{u}) \rangle = \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} \quad (3.4)$$

Ο υπολογισμός των άνω εκφράσεων βασίζεται στη γνώση των τασικών και παραμορφωσιακών πεδίων στη κάθε φάση  $r$ . Οι πληροφορίες αυτές προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που προκύπτει από τις:

**(i) Εξισώσεις ισορροπίας:**

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma_{ij,j} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{αγνοούνται μαζικές δυνάμεις})$$

**(ii) Κινηματικές εξισώσεις:**

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla) \quad \text{ή} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

**(iii) Καταστατικές εξισώσεις:**

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}(\epsilon)$$

Όπου  $W$  είναι η συνάρτηση ενέργειας παραμορφώσεως του υπερελαστικού υλικού η οποία θα αναλυθεί περαιτέρω στα επόμενα κεφάλαια. Στη περίπτωση των πεπερασμένων παραμορφώσεων οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στις ακόλουθες:

**(i) Εξισώσεις ισορροπίας:**

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b} = \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (\text{αγνοούνται μαζικές δυνάμεις})$$

**(ii) Κινηματικές εξισώσεις:**

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$$

**(iii) Καταστατικές εξισώσεις:**

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$$

Όπου  $\mathbf{S}$  είναι η Πρώτη Piola-Kirchhoff Τάση και  $\mathbf{F}$  είναι ο τανυστής παραμορφώσεων.

### 3.2 Απλό και Γενικευμένο Neo-Hookean Μοντέλο

Απ' όλα τα είδη των υπερελαστικών μοντέλων, το Neo-Hookean μοντέλο [12] αποτελεί το πιο συνηθισμένο λόγω της απλότητας του καθώς και της συμβατότητας του. Το ίδιο το μοντέλο αυτό κατ' επέκταση μπορεί εύκολα να εκμεταλλευτεί τόσο στην απλή του μορφή όσο και στη γενικευμένη του μορφή [13].

Γενικά, η συνάρτηση ενέργειας παραμορφώσεων των υπερελαστικών υλικών αυτών έχει τη μορφή

$$W = g(I) + h(J) \quad (3.5)$$

Όπου

$$g(I) = \frac{\mu}{2}(I - 3) \quad (3.6)$$

και

$$h(J) = -\mu \ln J + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{\mu}{3}\right)(J - 1)^2 \quad (3.7)$$

Οι σταθερές και μεταβλητές που απαρτίζουν το μοντέλο μας είναι οι εξής. Αρχικά,  $\mu$  αποτελεί ελαστική σταθερά που περιγράφει το μέτρο διατμήσεως του υλικού, μια παράμετρος σχετιζόμενη με την αντίσταση του υλικού σε διατμητικές παραμορφώσεις. Η  $I$  είναι η πρώτη αναλλοίωτη η οποία ισούται με το ίχνος των κύριων επιμηκύνσεων, δηλαδή  $I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$  (ή  $I = F_{ij}F_{ij} = F_{ji}^T F_{ij} = C_{jj}$ ), του δεξιού Cauchy-Green τανυστή παραμορφώσεων. Αντίστοιχα,  $\kappa$  είναι η σταθερά που αντιπροσωπεύει το μέτρο διογκώσεως του υλικού, και τέλος  $J$  είναι η Ιακοβιανή (Jacobian), δηλαδή η ορίζουσα του τανυστή παραμορφώσεως με  $J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\det \mathbf{C}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  η οποία σχετίζεται με τη συμπίεστικότητα του υλικού.

Η απλότητα του μοντέλου αυτού βασίζεται στην εξάρτηση μόνο δύο παραμέτρων, του μέτρου διατμήσεως και του λόγου συμπίεστικότητας, συνεπώς όταν κάποιος έρχεται αντιμέτωπος με ασυμπίεστα υλικά όπως στη παρούσα περίπτωση, τότε ο όρος που σχετίζεται με τη συμπίεστικότητα του υλικού  $h(J)$  εξαλείφεται, καθώς η Ιακοβιανή μας πλέον είναι σταθερή και

ίση με τη μονάδα ( $J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ ) και η αρχική εξίσωση 3.5 ανάγεται στην εξής απλοποιημένη μορφή

$$W \equiv g(I) = \frac{\mu}{2}(I - 3) \quad (3.8)$$

Έχοντας πλέον τη κύρια και βασική εξίσωση, αναγκαία για την επίλυση του προβλήματος, μπορεί κάποιος να συνεχίσει στις επακόλουθες μαθηματικές συναρτήσεις που εξάγονται από τη γνωστή συνάρτηση ενέργειας παραμορφώσεως, εφόσον όπως έχουμε αναφέρει, στα υπερελαστικά υλικά, η τάση υπολογίζεται μέσα από τη συνάρτηση αυτή έναντι των κλασικών μεθόδων. Υπάρχουν δύο τάσεις που προκύπτουν από τις συναρτήσεις αυτές, οι οποίες είναι γνωστές ως **Πρώτη Piola-Kirchhoff Τάση** ή **First Piola-Kirchhoff Stress (FPK)** και **Δεύτερη Piola-Kirchhoff Τάση** ή **Second Piola-Kirchhoff Stress (SPK)** [12]. Η FPK τάση είναι ένας δευτεροβάθμιος τανυστής που συσχετίζει τη δύναμη ανά μονάδα αρχικής επιφάνειας (αναφοράς) με την παραμόρφωση του σώματος, ενώ η SPK τάση είναι επίσης ένας δευτεροβάθμιος τανυστής που συσχετίζει τη δύναμη ανά μονάδα αρχικής επιφάνειας (αναφοράς) με την παραμόρφωση, αλλά σχετίζεται με την αναφορά στη φυσική (ή τωρινή) διαμόρφωση του σώματος. Η ανάλυση των τάσεων αυτών αρχικά βασίζεται στις ακόλουθες μερικές παραγώγους των συναρτήσεων  $g(I)$  και  $h(J)$  του Neo-Hookean μοντέλου.

**Συνάρτηση  $g(I)$  και οι παράγωγοι της**

$$\begin{aligned} g(I) &= \frac{\mu}{2}(I - 3) \\ g_I &= \frac{\mu}{2} \\ g_{II} &= 0 \end{aligned}$$

**Συνάρτηση  $h(J)$  και οι παράγωγοι της**

$$\begin{aligned} h(J) &= -\mu \ln J + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{\mu}{3} \right) (J - 1)^2 \\ h_J &= -\mu J^{-1} + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) (J - 1) \\ h_{JJ} &= \mu J^{-2} + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \end{aligned}$$

Επικεντρώνοντας στα ισότροπα και ασυμπίεστα υλικά, παρουσιάζεται αντίστοιχα το γενικευμένο Neo-Hookean μοντέλο που μπορεί να αξιοποιηθεί για τη μελέτη της συμπεριφοράς των υπερελαστικών υλικών.

$$g(z) = \frac{\mu}{2} z^n = \frac{\mu}{2} (I - 3)^n, \quad 1 \geq n > 0.5 \quad (3.9)$$

Όπως και στο απλό μοντέλο, η ελαστική σταθερά  $\mu$  αποτελεί το μέτρο διατμήσεως του υλικού και  $\mathbf{I}$  την πρώτη αναλλοίωτη του για την οποία ισχύει  $z \equiv (I - 3)$ , συνδυαζόμενο αυτή τη φορά με τη παράμετρο  $n$  η οποία καθορίζει επίσης τη δυσκαμψία του υλικού. Στην ειδική περίπτωση όπου επιλέγεται  $n = 1$  προκύπτει ξανά το απλό Neo-Hookean μοντέλο. Υπολογίζονται παρακάτω οι αντίστοιχες παράγωγοι

**Συνάρτηση  $g(z)$  και οι παράγωγοι της**

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\alpha}{2} z^n \\ g_I &= \frac{\alpha}{2} n z^{n-1} \\ g_{II} &= \frac{\alpha}{2} n(n-1) z^{n-2} \end{aligned}$$

### 3.3 Πρώτη Piola-Kirchhoff Τάση

Η Πρώτη Piola-Kirchhoff Τάση [13], αποτελεί τη πρώτη παράγωγο της συνάρτησης πυκνότητας ενέργειας παραμορφώσεως  $W$  ως προς το τανυστή παραμορφώσεως του υλικού  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial W}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = 2g_I \mathbf{F} + J h_J \mathbf{F}^{-T} \quad (3.10)$$

Οι υπολογισμοί και η βαθύτερη μαθηματική ανάλυση έγινε συναρτήσει των σημειώσεων του μαθήματος Σύνθετα Υλικά (Αγόρας, 2020) [13]. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε αρχικά την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της πρώτης αναλλοίωτης ως προς το τανυστή της παραμορφώσεως

$$\frac{\partial I}{\partial F_{pq}} = \frac{\partial F_{ij}^2}{\partial F_{pq}} = 2F_{ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial F_{pq}} = 2F_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = 2F_{pq} \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial F_{pq} \partial F_{rs}} = \frac{\partial}{\partial F_{rs}} (2F_{pq}) = 2 \frac{\partial F_{pq}}{\partial F_{rs}} = 2\delta_{pr} \delta_{qs} \Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{\Delta}, \quad \Delta_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια έχουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της Ιακοβιανής ως προς το τανυστή της παραμορφώσεως που μας δίνει το μέρος που προκύπτει από τη συμπίεστικότητα του υλικού εάν

αυτή υπάρχει

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-T} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = JF_{ji}^{-1} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial F_{ij} \partial F_{pq}} &= \frac{\partial}{\partial F_{pq}}(JF_{ji}^{-1}) = \frac{\partial J}{\partial F_{pq}}F_{ji}^{-1} + J\frac{\partial F_{ji}^{-1}}{\partial F_{pq}} = J(F_{qp}^{-1}F_{ji}^{-1} - F_{iq}^{-1}F_{pj}^{-1}) \\ \text{ή αλλιώς} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} &= \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} \otimes \mathbf{F}^{-T} + J\frac{\partial \mathbf{F}^{-T}}{\partial \mathbf{F}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Η επίλυση της άνω παραγώγου βασίζεται στο εξής

$$\begin{aligned} F_{ik}^T F_{kj}^{-T} = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_{ki}}{\partial F_{pq}} F_{kj}^{-T} + F_{ik}^T \frac{\partial F_{kj}^{-T}}{\partial F_{pq}} &= 0 \\ \Rightarrow \quad F_{mi}^{-T} F_{ik}^T \frac{\partial F_{kj}^{-T}}{\partial F_{pq}} &= -F_{mi}^{-T} \delta_{iq} F_{pj}^{-T} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial F_{ij}^{-T}}{\partial F_{pq}} &= -F_{iq}^{-T} F_{pj}^{-T} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Έχοντας υπολογίσει πλέον όλες τις αναγκαίες παραγώγους είναι εύκολο να βρεθεί ο τανυστής ελαστικότητας  $\mathbb{L}$  του Neo-Hookean υλικού. Ο τανυστής αυτός προκύπτει από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης ενέργειας παραμορφώσεως ως προς τον τανυστή παραμορφώσεως ως εξής

$$\mathbb{L} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} = 2g_I \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} + 2g_{II} \mathbf{F} \otimes \frac{\partial I}{\partial \mathbf{F}} + h_J \mathbf{F}^{-T} \otimes \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} + Jh_{JJ} \mathbf{F}^{-T} \otimes \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} + Jh_J \frac{\partial \mathbf{F}^{-T}}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.16)$$

Ο οποίος στη συνέχεια μπορεί να απλουστευθεί στην εξής μορφή

$$\mathbb{L} = 2g_I \mathbf{\Delta} + 4g_{II} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F} + J(h_J \mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T} + Jh_{JJ} \mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T} + h_J \mathbb{C}) \quad (3.17)$$

Όπου ο τανυστής  $\mathbb{C}$  που αξιοποιείται είναι ο

$$\mathbb{C}_{ijkl} = -F_{il}^{-T} F_{kj}^{-T} = -F_{li}^{-1} F_{jk}^{-1} \quad (3.18)$$

Στην ειδική περίπτωση που το υλικό μας είναι ασυμπίεστο η συνάρτηση 3.10 μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = 2g_I \mathbf{F} - p \mathbf{F}^{-T} \quad (3.19)$$

Όπου  $p$  είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange, αναγκαίος για τον περιορισμό της ασυμπιεστότητας του υλικού, που εμφανίζεται στο δεύτερο όρο της συνάρτησης της πρώτης Piola-Kirchhoff τάσης, καθώς για ασυμπίεστα υλικά προκύπτει ότι  $J = 1$ .

### 3.4 Κύρια Λύση

Η κύρια λύση, είναι αυτή που περιγράφει τη κατάσταση ισορροπίας του σύνθετου υλικού υπό δεδομένες συνθήκες φόρτισης. Αυτή η λύση είναι συνήθως σταθερή και αντιστοιχεί στην αναμενόμενη συμπεριφορά παραμόρφωσης του υλικού. Στη περίπτωση των υπερελαστικών υλικών, λόγω της εξάρτησης από τη συνάρτηση ενέργειας παραμορφώσεως, η κύρια λύση λαμβάνεται από την επίλυση των καταστατικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη συνάρτηση αυτή του υλικού. Οι εξισώσεις και τα συμπεράσματα των μακροσκοπικών παραμορφώσεων και τάσεων βασίζονται στις σημειώσεις διαλέξεων στα Σύνθετα Υλικά (Αγόρας, 2020) [13].

Έστω πρόβλημα επίπεδης παραμορφώσεως για ένα άπειρο, τέλεια περιοδικό, στρωματώδες, υπερελαστικό στερεό με δύο χαρακτηριστικές φάσεις, μια φάση-ίνα (με συμβολισμό fiber ή  $f$ ), και μια φάση-φορέα (με συμβολισμό matrix ή  $m$ ). Στη περίπτωση αυτή, η κύρια λύση υποθέτει ομοιόμορφες παραμορφώσεις με αποτέλεσμα οι τανυστές των μέσων παραμορφώσεων των δύο φάσεων να είναι ίσοι μεταξύ τους αλλά και ίσοι με το μακροσκοπικό τανυστή των παραμορφώσεων του ολικού σύνθετου υλικού. Στα σύνθετα υλικά, η μέση παραμόρφωση υπολογίζεται ως εξής:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = c^{(f)} \mathbf{F}_f + c^{(m)} \mathbf{F}_m \quad (3.20)$$

Βάση των παραπάνω όμως, στη κύρια λύση έχουμε:

$$\langle \mathbf{F}_m \rangle = \langle \mathbf{F}_f \rangle = \langle \mathbf{F} \rangle = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.21)$$

Κατά συνέπεια, εφόσον η ίνα και ο φορέας έχουν τον ίδιο τανυστή παραμορφώσεως, η πρώτη Piola-Kirchhoff τάση των φάσεων είναι

$$\langle \mathbf{S}_f \rangle = \frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{F}}, \quad \langle \mathbf{S}_m \rangle = \frac{\partial W_m}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.22)$$

Συναρτήσει αυτών, η μακροσκοπική πρώτη Piola-Kirchhoff τάση του στερεού εξαρτάται από το κλάσμα όγκου που συνεισφέρει κάθε φάση με

$$\langle \mathbf{S} \rangle = c^{(f)} \langle \mathbf{S}_f \rangle + c^{(m)} \langle \mathbf{S}_m \rangle \quad (3.23)$$

### 3.5 Διακλαδωμένη Λύση

Ο εντοπισμός της έναρξης της διακλαδωμένης λύσης, βασίζεται στην εύρεση της μη τετριμμένης (μηδενικής) λύσης για τη διαφορά μεταξύ της κύριας και της διακλαδωμένης λύσης.

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2, \quad \Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 \quad (3.24)$$

Όπου οι δείκτες 1 και 2 συμβολίζουν τους τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων της κύριας και αντίστοιχα της διακλαδωμένης λύσης. Δηλαδή:

**Κυρία Λύση**

$$(\mathbf{S}_1, \quad \mathbf{F}_1)$$

**Διακλαδωμένη Λύση**

$$(\mathbf{S}_2, \quad \mathbf{F}_2)$$

Αρχικά η καταστατική εξίσωση του υπερελαστικού σύνθετου υλικού είναι η εξής

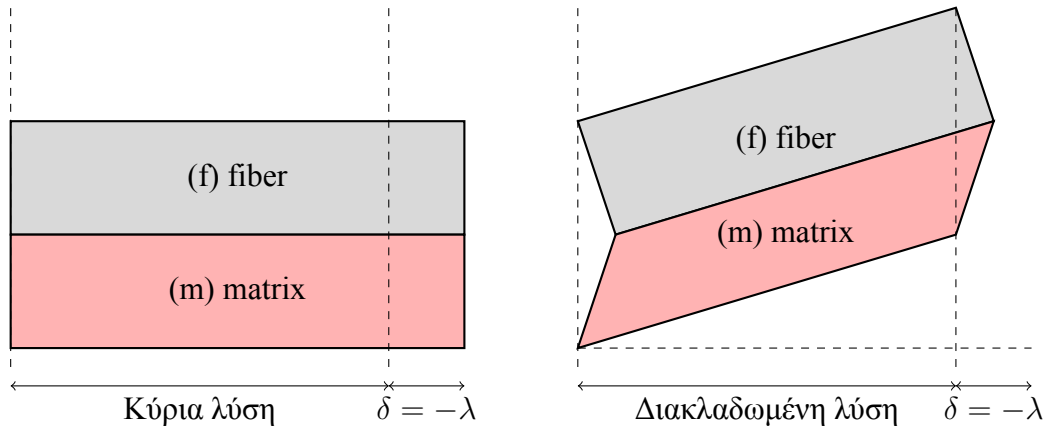
$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} \quad (3.25)$$

Όπου  $W(\mathbf{F})$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας παραμορφώσεως της ίνας ή του υλικού φορέα και  $\mathbf{F}$  ο αντίστοιχος τανυστής παραμορφώσεως. Οπότε, ο τανυστής των απειροστών τάσεων  $\Delta \mathbf{S}$  μπορεί να εκφραστεί ως προς τις αντίστοιχες απειροστές μετατοπίσεις  $\Delta \mathbf{u}$

$$\Delta S_{ij} = L_{ijkl} \Delta F_{kl}, \quad L_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}, \quad \Delta F_{kl} = \Delta u_{k,l}. \quad (3.26)$$

Με το  $\mathbf{L}$  να αποτελεί το τανυστή ελαστικότητας 4ης τάξης, πάνω στον οποίο βασίζεται και η έναρξη της διακλαδωμένης λύσης.

Στην κυψελίδα με τις δύο στρώσεις υπερελαστικών υλικών, κάθε στρώση μετατοπίζεται κατά την ίδια γωνία με μια ομοιόμορφη τάση ή παραμόρφωση. Κατά την διακλαδωμένη λύση πλέον, κάθε στρώση ίνας χαρακτηρίζεται από την ίδια παραμόρφωση  $\mathbf{F}^f$ , όπως και κάθε στρώση του φορέα χαρακτηρίζεται από την ίδια παραμόρφωση  $\mathbf{F}^m$ , όμως  $\mathbf{F}^f \neq \mathbf{F}^m$ . Βασικό χαρακτηριστικό της διακλαδωμένης λύσης αποτελεί το γεγονός ότι οι στρώσεις των φάσεων σχηματίζουν γωνία με τον οριζόντιο άξονα  $X_1$  καθώς αυξάνεται η επιβαλλόμενη θλιπτική φόρτιση, όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.1 όπου φαίνεται η συμπεριφορά αυτή σε σχέση με τη συμπεριφορά της κύριας λύσης. Η λύση αυτή έχει προσδιοριστεί λεπτομερώς και στην εργασία των M.P. Santisi d'Avila, N. Triantafyllidis και G. Wen στο άρθρο "**Localization of deformation and loss of macroscopic ellipticity in microstructured solids**"[10] στην οποία παραπέμπουμε τον αναγνώστη για περαιτέρω λεπτομέρειες.



Εικόνα 3.1: Απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση της κυψελίδας.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα βασικά πορίσματα, συμπεράσματα και σχέσεις που προκύπτουν από την μαθηματική ανάλυση των M.P. Santisi d'Avila, N. Triantafyllidis και G. Wen [10]. Πιο συγκεκριμένα, αξιοποιώντας την ομογενοποιημένη πυκνότητα ενέργειας του στερεού με

$$W^H(\lambda, \gamma) = \langle W \rangle \equiv c^{(f)} W^f + c^{(m)} W^m. \quad (3.27)$$



Αποδεικνύεται στο άρθρο, ότι η έναρξη της διακλάδωσης συμπίπτει με την εξαφάνιση της ομογενοποιημένης σταθεράς  $L_{2121}^H(\lambda_c)$ . Συνεπώς, προκύπτει ότι η λύση αυτή είναι πιο εμφανής κατά την πορεία ισορροπίας της κύριας λύσης, δηλαδή για μηδενική διατμητική τάση  $\gamma = 0$ . Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τις αποδείξεις των προτάσεων που παρουσιάζονται μπορεί να ανατρέξει στην αντίστοιχη βιβλιογραφία που αναφέρθηκε προηγουμένως. Τα βασικά συμπεράσματα τους που οδηγούν στην εύρεση της διακλαδωμένης λύσης, παρουσιάζονται παρακάτω.

Βάση των κινηματικών εξισώσεων προκύπτει:

$$\langle F_{11} \rangle = F_{11}^f = F_{11}^m = 1 - \lambda \quad (3.28)$$

$$\langle F_{21} \rangle = F_{21}^f = F_{21}^m = \gamma \quad (3.29)$$

$$\langle F_{12} \rangle = c^{(f)} F_{12}^f + c^{(m)} F_{12}^m = 0 \quad (3.30)$$

$$\langle F_{22} \rangle = c^{(f)} F_{22}^f + c^{(m)} F_{22}^m \quad (3.31)$$

Όπου  $c^{(f)} \equiv H_f/H$  και  $c^{(m)} \equiv H_m/H$  είναι οι λόγοι των συγκεντρώσεων της ίνας και του φορέα, με  $H_f$ ,  $H_m$  και  $H$  να είναι το πάχος της ίνας, του φορέα και της αντίστοιχης ολικής κυψελίδας, με το  $\lambda$  και  $\gamma$  να αποτελούν την αξονική και διατμητική παραμόρφωση.

Από τις εξισώσεις ισορροπίας υπολογίζονται οι κατάλληλες σχέσεις της μέσης τιμής των  $FPK$  τάσεων:

$$\langle S_{11} \rangle = c^{(f)} S_{11}^f + c^{(m)} S_{11}^m = -\Lambda \quad (3.32)$$

$$\langle S_{12} \rangle = c^{(f)} S_{12}^f + c^{(m)} S_{12}^m = 0 \quad (3.33)$$

$$\langle S_{21} \rangle = S_{21}^f = S_{21}^m \quad (3.34)$$

$$\langle S_{22} \rangle = S_{22}^f = S_{22}^m = 0 \quad (3.35)$$

Όπως φαίνεται, το δοκίμιο όταν υπόκειται σε αξονική θλίψη κατά τη  $X_1$  όπου  $\Lambda$  αποτελεί το μέτρο της  $FPK$  τάσης, δέχεται μηδενικές διατμητικές δυνάμεις κατά τη διεύθυνση  $X_{12}$  και μηδενικές τάσεις στη κατακόρυφη διεύθυνση  $X_2$ .

Στη περίπτωση του ασυμπίεστου σύνθετου υλικού, ο καταστατικός νόμος 3.25 παίρνει τη μορφή

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} - p \frac{\partial}{\partial F_{ij}} (\det(\mathbf{F}) - 1) \quad (3.36)$$

Και επειδή το υλικό είναι ασυμπίεστο και υπόκειται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, δηλαδή

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Προκύπτει αντίστοιχα

$$\det(\mathbf{F}) = F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} = 1 \quad (3.38)$$

Όπου  $p$  αποτελεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange που συσχετίζεται με τον περιορισμό της ασυμπίεστότητας. Σε συνδυασμό με τις κινηματικές εξισώσεις 3.28 και 3.29, εξάγονται οι ακόλουθες σχέσεις

$$S_{11} = \mu g' \left[ 1 - \lambda - \frac{(1 + \gamma F_{12})^2}{(1 - \lambda)^3} \right] \quad (3.39)$$

$$S_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \mu g' \left( \frac{1 + \gamma F_{12}}{(1 - \lambda)^2} \right) \quad (3.40)$$

$$S_{21} = \mu g' \left[ F_{12} + \gamma \left( \frac{1 + \gamma F_{12}}{(1 - \lambda)^2} \right) \right] \quad (3.41)$$

$$S_{12} = \mu g' \left[ \gamma + \frac{F_{12}(1 + \gamma F_{12})}{(1 - \lambda)^2} \right] \quad (3.42)$$

Όπου  $g'$  είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις πρώτης παραγώγου της συνάρτησης πυκνότητας ενέργειας παραμορφώσεως της ίνας ή του φορέα και  $\mu$  το μέτρο διατμήσεως.

Λόγω συνέχειας στο σύνορο των φάσεων μεταξύ ίνας και φορέα και του κινηματικού περιορισμού ως προς τη διάτμηση στη διεύθυνση  $X_{12}$ , δηλαδή ο συνδυασμός των εξισώσεων

3.34 και 3.30 και η επίλυση του συστήματος αυτών των δύο, προκύπτει

$$F_{12}^f = \frac{\gamma}{(1-\lambda)^2 + \gamma^2} \frac{(m_m - m_f)c^{(m)}}{c^{(f)}m_m + c^{(m)}m_f} \quad (3.43)$$

$$F_{12}^m = \frac{\gamma}{(1-\lambda)^2 + \gamma^2} \frac{(m_f - m_m)c^{(f)}}{c^{(f)}m_m + c^{(m)}m_f} \quad (3.44)$$

Όπου  $m_f \equiv \mu_f g'_f$  και  $m_m \equiv \mu_m g'_m$ .

Στη συνέχεια, συνδυάζοντας το περιορισμό 3.33 με την εξίσωση 3.42 για την ίνα και το φορέα, καθώς και τις νέες σχέσεις 3.43 και 3.44, παίρνουμε την εξίσωση που θα μας δώσει τη σχέση τάσεως-παραμορφώσεως του συστήματος

$$\langle S_{12} \rangle = \gamma \left\{ m_G - \frac{(\Delta m)^2}{m_H} \frac{1}{[(1-\lambda)^2 + \gamma^2]^2} \right\} \quad (3.45)$$

Όπου  $\Delta m \equiv m_f - m_m$ ,  $m_G \equiv c^{(f)}m_f + c^{(m)}m_m$ ,  $m_H \equiv \frac{m_f}{c^{(f)}} + \frac{m_m}{c^{(m)}}$ .

Τέλος, εφόσον το σύστημα λύνεται για  $\langle S_{12} \rangle = 0$ , προκύπτει η σχέση τάσεως-παραμορφώσεως με την εξής μορφή

$$(1-\lambda)^2 + \gamma^2 = \frac{\Delta m}{(m_G m_H)^{1/2}} \quad (3.46)$$

Από την οποία υπολογίζεται κάθε φορά η κρίσιμη τιμή παραμορφώσεως για το σημείο διακλάδωσης για  $\gamma = 0$ .

Ο συνδυασμός όλων των άνω εξισώσεων και σχέσεων οδηγεί στη γενική μορφή τάσεως-παραμορφώσεως όπου η ίνα είτε ο φορέας μπορούν να λαμβάνουν οποιαδήποτε από τις δύο υπερελαστικές μορφές που αναλύθηκαν προηγουμένως με

$$(1-\lambda)^2 + \gamma^2 = \frac{m_f - m_m}{\sqrt{(c^{(f)}m_f + (1-c^{(f)})m_m) \left( \frac{m_f}{c^{(f)}} + \frac{m_m}{1-c^{(f)}} \right)}} \quad (3.47)$$

Η οποία άμεσα συσχετίζεται με τη πρώτη αναλλοίωτη και κατ' επέκταση με τη μεταβλητή  $z (\equiv I_1 - 3)$ , η οποία είναι κρίσιμη για τον υπολογισμό της συνάρτησης  $g'_m$ . Για το λόγο αυτό

αξιοποιείται η ίδια η σχέση της πρώτης αναλλοίωτης για τον προσδιορισμό των τελευταίων αγνώστων με

$$I_1 = F_{ij}F_{ij} = (1 - \lambda)^2 + \left( \frac{1 + \gamma F_{12}}{1 - \lambda} \right)^2 + (F_{12})^2 + \gamma^2 = z + 3 \quad (3.48)$$

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών λύνεται κάθε φορά για ξεχωριστή συγκέντρωση  $c^{(f)}$  για  $\gamma = 0$ , με σκοπό τον υπολογισμό του κρίσιμου σημείο  $\lambda = \lambda_c$ .

## 4 Στρωματώδεις μικροδομές με γεωμετρικές ατέλειες

### 4.1 Μοντελοποίηση

Στη συνέχεια πρόκειται να παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο στήθηκε το μοντέλο πάνω στο οποίο διεξάχθηκε η παρούσα έρευνα, οι γεωμετρικές ατέλειες που εφαρμόστηκαν, οι συνθήκες της παραμετρικής ανάλυσης που ακολούθησε, και τα αποτελέσματα πάνω στα οποία βασίστηκε η ολική μελέτη της συμπεριφοράς των διαφόρων μοντέλων του σύνθετου υλικού.

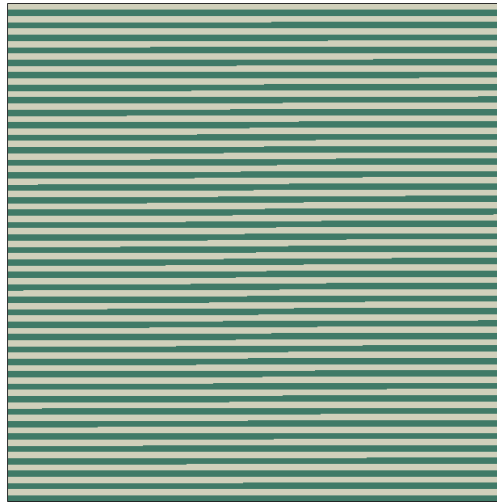
Η ανάλυση αφορά σύνθετα υλικά με απλή στρωματώδη μικροδομή, ενώ οι κυψελίδες που χαρακτηρίζουν το ολικό μοντέλο έχουν τη μορφή του σχήματος 4.1. Οι υπερελαστικές και ισότροπες φάσεις που χαρακτηρίζουν τη μικροδομή προσδιορίζονται μέσα από τα δύο Neo-Hookean μοντέλα που έχουν αναλυθεί προηγουμένως. Αναλύουμε τις δύο φάσεις σε φορέα-"matrix" και ίνα-"fiber" και κανονικοποιούμε το μέτρο διατμήσεως της κάθε φάσης μέσα από τον λόγο των ελαστικών αυτών σταθερών ως  $\alpha = \frac{\mu_m}{\mu_f}$  με την ίνα να έχει μοναδιαίο μέτρο διατμήσεως ( $\mu_f = 1$ ). Ο φορέας υιοθετεί το γενικευμένο Neo-Hookean μοντέλο και θα περιγράφεται μέσα από την παράμετρο  $n$  και τη νέα παράμετρο  $\alpha$ . Συνοπτικά οπότε το σύνθετο υλικό μας περιγράφεται ως εξής:

**Συνάρτηση ενέργειας και παράγωγοι  
του Fiber**

$$\begin{aligned}g_f(z) &= \frac{1}{2}z \\g_f^I &= \frac{1}{2} \\g_f^{II} &= 0\end{aligned}$$

**Συνάρτηση ενέργειας και παράγωγοι  
του Matrix**

$$\begin{aligned}g_m(z) &= \frac{\alpha}{2}z^n \\g_m^I &= \frac{\alpha}{2}nz^{n-1} \\g_m^{II} &= \frac{\alpha}{2}n(n-1)z^{n-2}\end{aligned}$$



Εικόνα 4.1: Πρότυπο μοντέλο.

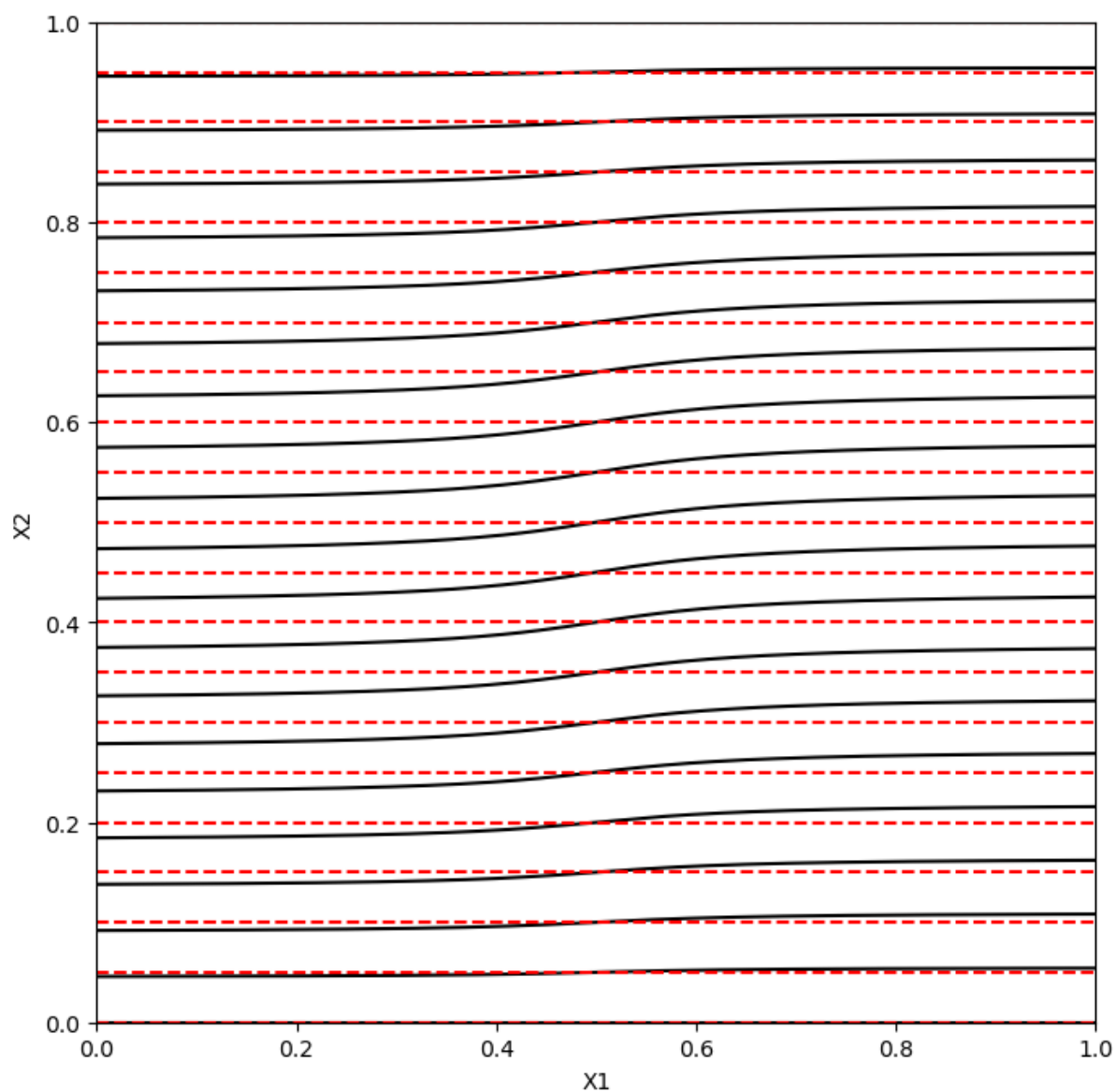
Η έρευνα αυτή βασίζεται σε ένα ήδη υπάρχον μοντέλο των M.P. Santisi d'Avila, N. Triantafylidis και G. Wen στο άρθρο "**Localization of deformation and loss of macroscopic ellipticity in microstructured solids**"[10], στο οποίο κατασκευάστηκε ένα σύνθετο υλικό διαστάσεων  $(L \times L)$  στο οποίο οι συντοριακές συνθήκες επιβάλλονται μέσω μετατοπίσεων ή τάσεων στο σύνορο του δοκιμίου με μακροσκοπική (μέση) εφαρμοζόμενη παραμόρφωση  $\langle F_{11} \rangle = 1 - \lambda$  και μακροσκοπικές (μέσες) εφαρμοζόμενες τάσεις FPK με  $\langle \Pi_{12} \rangle = \langle \Pi_{22} \rangle = 0$ . Το μοντέλο είναι χωρισμένο σε 40 αντίστοιχα κυψελίδες, όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.1, όπου κάθε κυψελίδα αποτελείται από τα δύο είδη υπερελαστικού υλικού που απαρτίζουν το σύνθετο υλικό, δηλαδή την ίνα και το υλικό φορέας ή μητρικό υλικό. Το πάχος της κυψελίδας διατηρείται σταθερό σε κάθε είδος υπολογισμού και ανάλυσης που διεξάχθηκε με πάχος  $H = L/40$ , με τη συγκέντρωση της ίνας ωστόσο να αποτελεί τη βασική μεταβλητή η οποία αλλάζει με  $c^{(f)} \equiv H_f/H$  και κατ' επέκταση του συμπληρωματικού του φορέα, με συγκέντρωση  $c^{(m)} = 1 - c^{(f)} \equiv H_m/H$ . Κάθε ίνα και φορέας διακριτοποιείται με ένα καρτεσιανό πλέγμα 4κομβικών στοιχείων, για τα οποία χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε μοντέλο περίπου 320 στοιχεία (ξανά περίπου 640 για μία ολόκληρη κυψελίδα), για ένα σύνολο 102,400 τέτοιων στοιχείων, ένα νούμερο το οποίο έχει πολύ μικρές αποκλίσεις σύμφωνα με τον όρο  $c^{(f)}$  που αναφέρθηκε προηγουμένως. Τα μοντέλα αυτά μελετήθηκαν επίσης για ελάχιστο αριθμό στοιχείων ίσο με 25,600 στοιχεία, καθώς και 51,200 και κατάλληλο αριθμό μεταξύ αυτών των ορίων για κάθε συγκέντρωση  $c^{(f)}$ ,

τα συμπεράσματα των οποίων θα συζητηθούν παρακάτω. Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται μέσα από τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM - Finite Element Method) με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS [15], το οποίο εφαρμόζει και εκμεταλλεύεται τις σχέσεις πυκνότητας ενέργειας παραμορφώσεως. Για τον υπολογισμό και μελέτη της συμπεριφοράς των ασυμπίεστων στοιχείων αξιοποιήθηκαν στοιχεία τύπου CPE4H, δηλαδή 4κομβικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης, υβριδικά με συνεχόμενη πίεση.

Το πραγματικό μοντέλο στο οποίο διεξάχθηκε η μελέτη έχει ενσωματωμένο κατά τη κατασκευή του μια γεωμετρική ατέλεια η οποία είναι απαραίτητη για την ενεργοποίηση και ανάλυση της διακλαδωμένης λύσης. Η ατέλεια αυτή εφαρμόζεται κατά μήκος μόνο της κατακόρυφης διεύθυνσης της κάθε στρώσης η οποία μεγιστοποιείται στη μέση του ύψους του μοντέλου και εξαφανίζεται στα άκρα και περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta X_1 = 0, \quad \Delta X_2 = \xi \sin \left( \frac{\pi X_2}{L} \right) \arctan \left[ \beta \left( \frac{X_1}{L} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.1)$$

Όπου η παράμετρος  $\xi = 10^{-3}$  ελέγχει το μέγιστο πλάτος της ατέλειας στη διεύθυνση  $X_2$  και η παράμετρος  $\beta = 8$  ελέγχει το εύρος του  $X_1$ . Η αρχή των συντεταγμένων διαλέγεται στη κάτω αριστερή γωνία του μοντέλου. Η εφαρμοζόμενη μακροσκοπική αξονική παραμόρφωση  $\lambda$  είναι αυτή η οποία καθορίζει τη συμπεριφορά του υλικού, ενώ για την εφαρμογή του αξιοποιήθηκε βήμα Riks, έτσι ώστε το μοντέλο να μπορεί να ξεπεράσει τα όρια των επιτρεπτών φορτίων που σχετίζονται με το φαινόμενο των snap-backs, με την επιλογή NLGeom=ON ώστε να λαμβάνουν μέρος μη-γραμμικές γεωμετρίες. Η εικόνα 4.2 αποτελεί μια υπερβολή του πραγματικού μοντέλου της μελέτης η οποία όμως παρουσιάζει τις διαφορές μεταξύ του τέλειου μοντέλου (με κόκκινο χρώμα) και του πραγματικού μοντέλου με γεωμετρικές ατέλειες (με μαύρο χρώμα).



Εικόνα 4.2: Στρωματώδης Μοντέλο με και χωρίς τη προσθήκη της  $\Delta X_2$  ατέλειας. Πραγματικό μοντέλο με μαύρο. Τέλειο μοντέλο με κόκκινο.



Κατά τη διεξαγωγή των υπολογισμών κάθε μοντέλο υπόκειται σε συνθήκες επίπεδης παραμορφώσεως σε μορφή αξονικής θλίψης, με το δοκίμιο να παραμορφώνεται έως μια κρίσιμη τιμή διακλάδωσης (bifurcation point με παραμόρφωση  $\lambda_c$  ή τάση  $\Lambda_c$ ) κατά την οποία το υλικό μπορεί να αλλάξει δραστικά συμπεριφορά. Η τάση και η παραμόρφωση μετά το σημείο διακλάδωσης διατυπώνονται ως  $\Lambda_2$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα, η συμπεριφορά των οποίων αναλύεται στις τρεις ακόλουθες περιπτώσεις, οι οποίες εμφανίζονται και στο διάγραμμα 4.3.

**Περίπτωση (i):** Το δοκίμιο θα συνεχίσει να παραμορφώνεται με όμοιο τρόπο με αυτόν πριν το σημείο διακλαδώσεως.

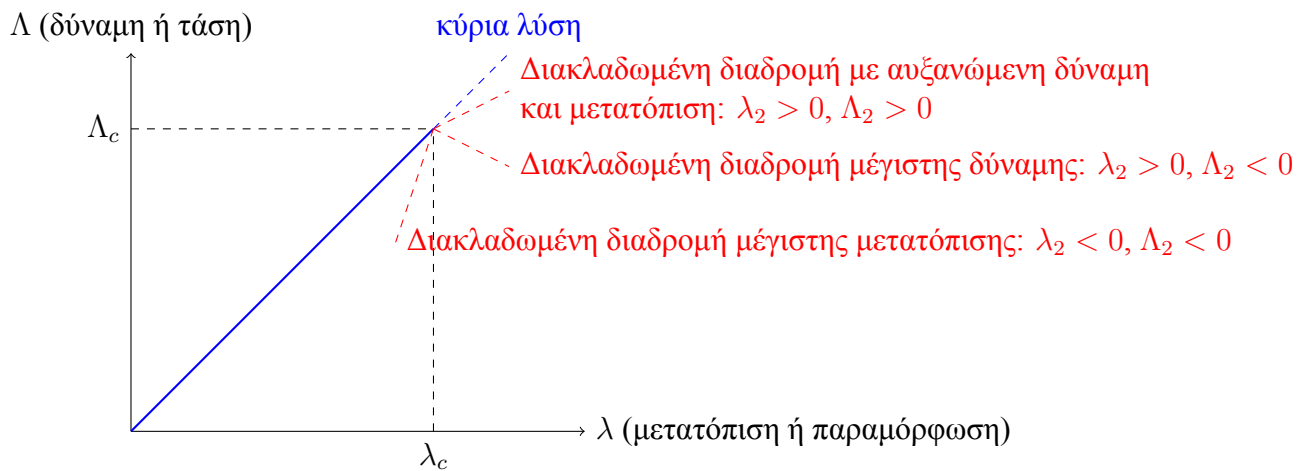
Διακλαδωμένη διαδρομή με αυξανόμενη δύναμη και μετατόπιση:  $\lambda_2 > 0, \quad \Lambda_2 > 0$

**Περίπτωση (ii):** Έχουμε αλλαγή συμπεριφοράς ως προς την αναπτυσσόμενη τάση του μοντέλου κατά την εμφάνιση του κρίσιμου σημείου. Στο σενάριο αυτό, το μοντέλο μας συνεχίζει να παραμορφώνεται κατά την πορεία της μονοαξονικής θλίψης, ωστόσο το ίδιο το κρίσιμο σημείο αποτελεί σημείο μέγιστης δύναμης (ή τάσης), έχουμε δηλαδή Load Maximum κατά τη φόρτιση.

Διακλαδωμένη διαδρομή μέγιστης δύναμης:  $\lambda_2 > 0, \quad \Lambda_2 < 0$

**Περίπτωση (iii):** Σε αυτή τη περίπτωση, τόσο η τάση όσο και η παραμόρφωση αρχίζουν να μειώνονται όταν φτάσουν στο κρίσιμο σημείο. Έχουμε δηλαδή την εμφάνιση του φαινομένου snap-back κατά το οποίο έχουμε αποφόρτιση (unloading) στο μοντέλο.

Διακλαδωμένη διαδρομή μέγιστης μετατόπισης:  $\lambda_2 < 0, \quad \Lambda_2 < 0$



Εικόνα 4.3: Διάγραμμα πορείας εξέλιξης συμπεριφοράς του υλικού κατά το σημείο διακλάδωσης.

Τα αποτελέσματα των αριθμητικών υπολογισμών διατυπώνονται στα ακόλουθα διαγράμματα τάσεως-παραμορφώσεως ( $\Lambda - \lambda$ ) του κεφαλαίου σε συνδυασμό με τα αντίστοιχα contour-plots της διατμητικής παραμορφώσεως των μοντέλων. Η μέση τάση στην οριζόντια διεύθυνση ορίζεται ως  $\Lambda$  και υπολογίζεται από τις αντιδράσεις στις στηρίξεις ως εξής:

$$\Lambda = \frac{RF}{A}$$

Όπου  $RF$  = δύναμη αντίδρασης στην οριζόντια διεύθυνση και  $A = L * t$  η απαραμόρφωτη επιφάνεια στην οποία ασκείται η δύναμη, με  $L$  να είναι η επίπεδη κάθετη επιφάνεια και  $t$  το (μοναδιαίο) βάθος στη διεύθυνση 3.

Αντίστοιχα, η μέση παραμόρφωση δίνεται από τη μετατόπιση του γωνιακού κόμβου με συντεταγμένες  $(L, 0)$  στον οποίο επιβάλλονται οι συνοριακές συνθήκες με:

$$\lambda = \frac{u_x}{L}$$

## 4.2 Αποτελέσματα και συζήτηση

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μετα-διακλαδόμενης λύσης, αναλύοντας διαφορετικά κλάσματα όγκου των δύο υπερελαστικών υλικών που συνθέτουν το σύνθετο υλικό. Εξετάστηκαν πέντε διαφορετικοί συνδυασμοί λόγων μέτρων διατμήσεως  $\alpha$  και παραμέτρων  $n$  του γενικευμένου μοντέλου Neo-Hookean. Οι τιμές αυτών των παραμέτρων συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1 μαζί με τις αντίστοιχες συγκεντρώσεις της ίνας στις οποίες εφαρμόστηκαν τα μοντέλα αυτά, ενώ ο Πίνακας 4.2 περιέχει όλες τις τιμές με τις αντίστοιχες κρίσιμες παραμορφώσεις που προέκυψαν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων, όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3.5.

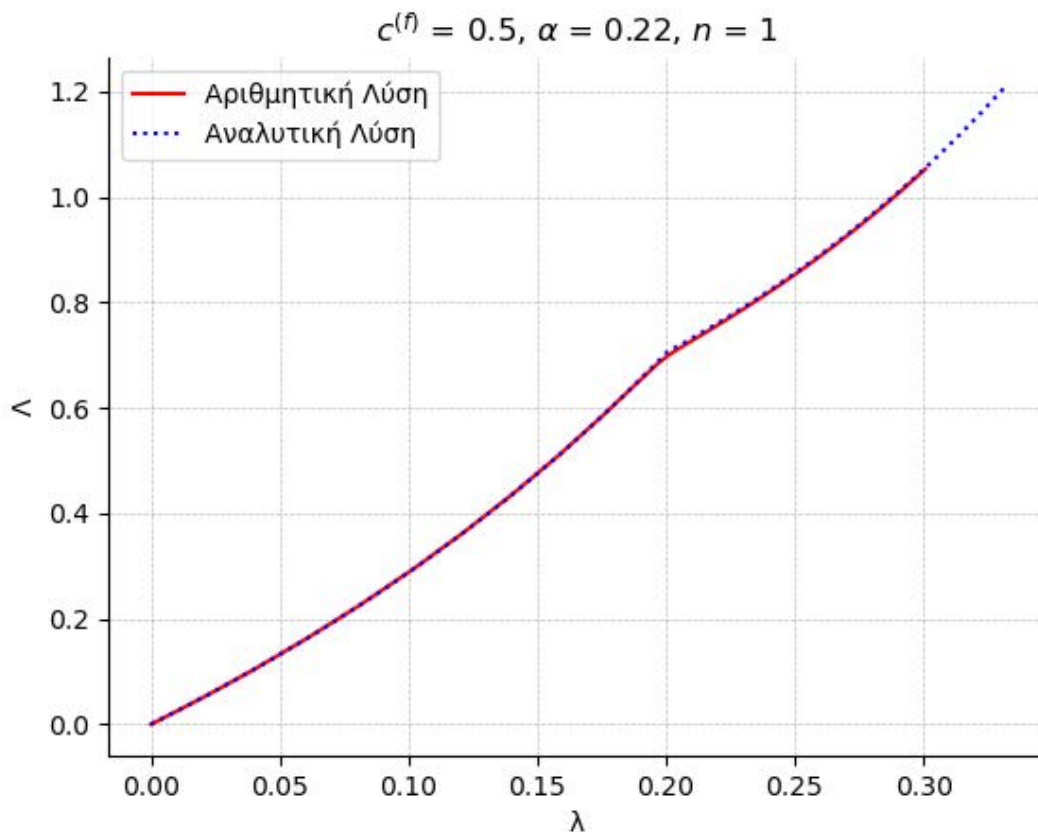
| Λόγος μέτρων διατμήσεως ( $\alpha$ ) | Παράμετρος $n$ | Κλάσμα όγκου ίνας ( $c^{(f)}$ ) |
|--------------------------------------|----------------|---------------------------------|
| 0.22                                 | 1              | 0.5, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95        |
| 0.25                                 | 0.9            |                                 |
| 1                                    | 0.75           |                                 |
| 0.75                                 | 0.55           |                                 |
| 0.22                                 | 0.55           |                                 |

Πίνακας 4.1: Συνδυασμοί παραμετρικής ανάλυσεως του γενικευμένου Neo-Hookean υλικού της ίνας (*fiber*) με τα αντίστοιχα κλάσματα όγκου

| $c^{(f)} = 0.5$ |      |             |
|-----------------|------|-------------|
| $\alpha$        | $n$  | $\lambda_c$ |
| 0.22            | 1    | 0.200409941 |
| 0.25            | 0.9  | 0.230011123 |
| 1               | 0.75 | 0.505392651 |
| 0.75            | 0.55 | 0.368998154 |
| 0.22            | 0.55 | 0.211974838 |

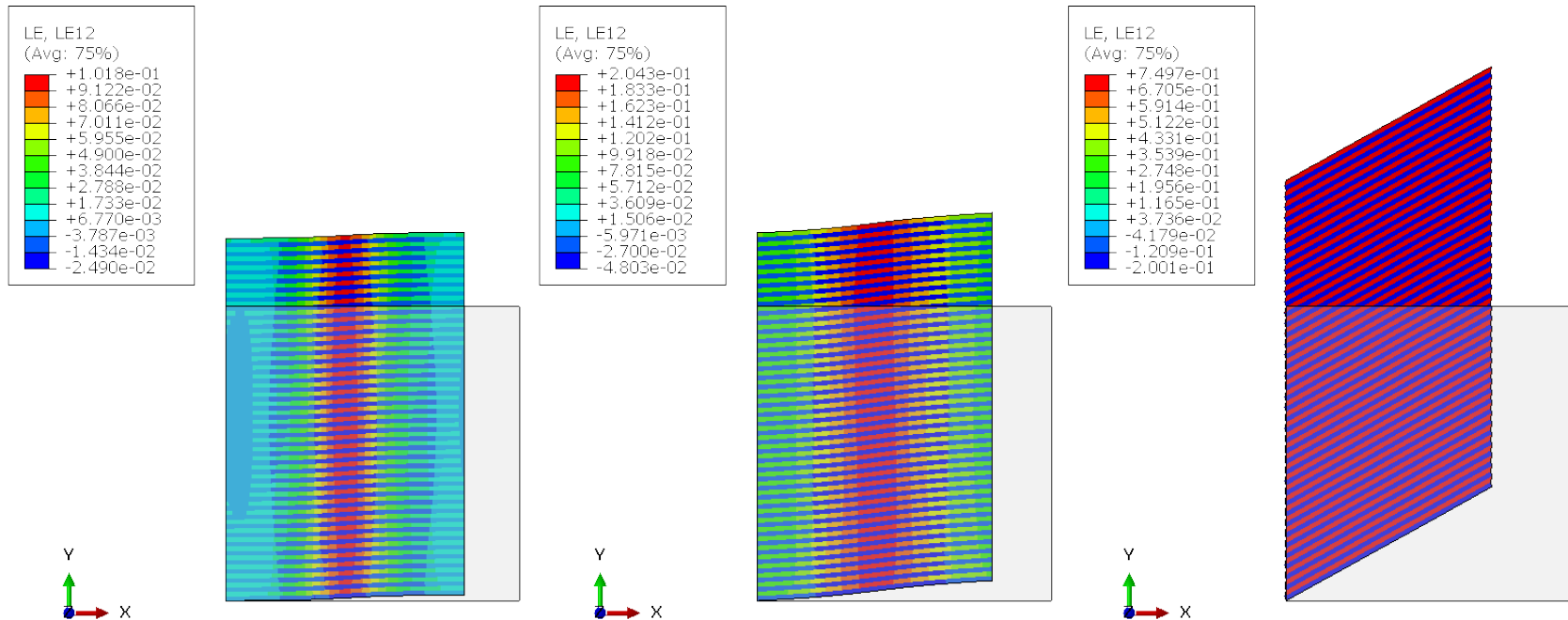
| $c^{(f)} = 0.6$ |      |             | $c^{(f)} = 0.8$  |      |             |
|-----------------|------|-------------|------------------|------|-------------|
| $\alpha$        | $n$  | $\lambda_c$ | $\alpha$         | $n$  | $\lambda_c$ |
| 0.22            | 1    | 0.20525996  | 0.22             | 1    | 0.255791332 |
| 0.25            | 0.9  | 0.234225874 | 0.25             | 0.9  | 0.277716399 |
| 1               | 0.75 | 0.508043637 | 1                | 0.75 | 0.534533394 |
| 0.75            | 0.55 | 0.371580673 | 0.75             | 0.55 | 0.398026091 |
| 0.22            | 0.55 | 0.214518935 | 0.22             | 0.55 | 0.241162569 |
| $c^{(f)} = 0.9$ |      |             | $c^{(f)} = 0.95$ |      |             |
| $\alpha$        | $n$  | $\lambda_c$ | $\alpha$         | $n$  | $\lambda_c$ |
| 0.22            | 1    | 0.33185437  | 0.22             | 1    | 0.416266099 |
| 0.25            | 0.9  | 0.342784234 | 0.25             | 0.9  | 0.41593715  |
| 1               | 0.75 | 0.572158285 | 1                | 0.75 | 0.613100286 |
| 0.75            | 0.55 | 0.437543328 | 0.75             | 0.55 | 0.483018853 |
| 0.22            | 0.55 | 0.282936085 | 0.22             | 0.55 | 0.3337447   |

Πίνακας 4.2: Πίνακας τιμών για  $\alpha$ ,  $n$ ,  $c^{(f)}$  και  $\lambda_c$  κατηγοριοποιημένες κατά  $c^{(f)}$



Διάγραμμα 4.1: Σύγκριση απόκρισης για  $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 0.22, n = 1$

Στο διάγραμμα 4.1, απεικονίζεται η απόκριση ενός σύνθετου υλικού που αποτελείται από δύο απλές Neo-Hookean φάσεις, με ιδιαίτερα μαλακό φορέα και παράμετρο  $\alpha = 0.22$ . Η μακροσκοπική καμπύλη τάσεως-παραμόρφωσης είναι σχεδόν ταυτόσημη με αυτήν που προκύπτει από τους αναλυτικούς υπολογισμούς. Κατά την κρίσιμη παραμόρφωση  $\lambda_c = 0.211974838$ , το μοντέλο με γεωμετρική ατέλεια παρουσιάζει μια υψηλή συγκέντρωση παραμόρφωσης στο κέντρο, όπως απεικονίζεται στην εικόνα 4.4. Η περαιτέρω αύξηση της παραμόρφωσης οδηγεί σε συμφωνία μεταξύ των δύο καμπυλών μέχρι την ολοκλήρωση της παραμορφωσιακής τους κατάστασης, με το υλικό να σχηματίζει τέλεια επίπεδες φάσεις που διατηρούν ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών πεδίων.

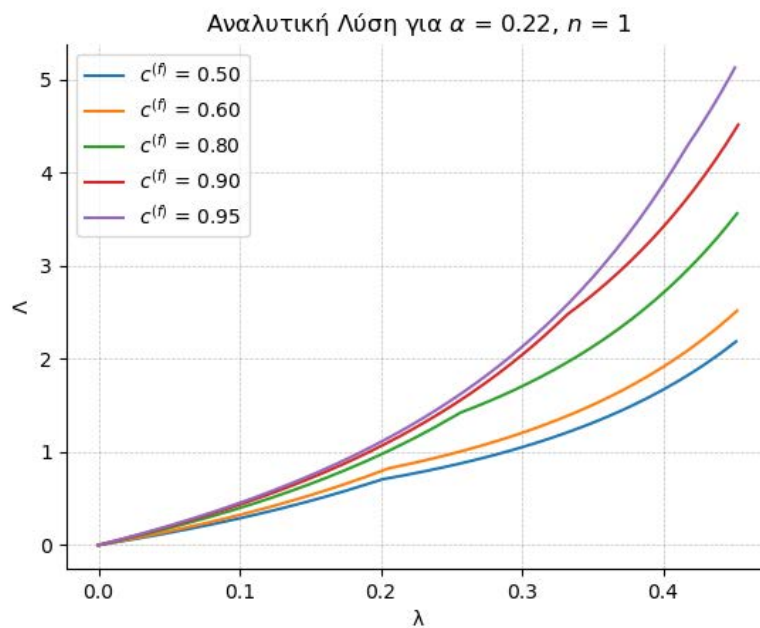


(a) Πριν από το κρίσιμο σημείο με  $\lambda \approx 0.189$

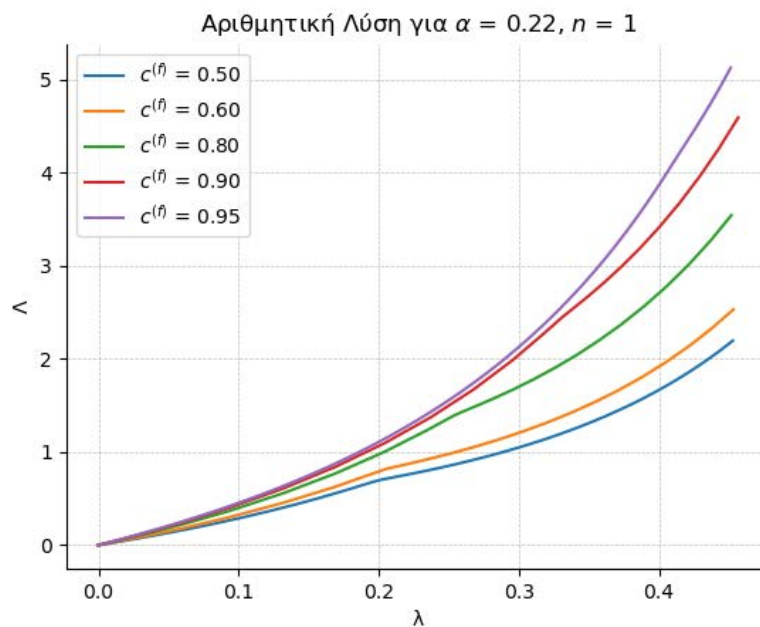
(b) Στο κρίσιμο σημείο με  $\lambda \approx 0.201$

(c) Μετά το κρίσιμο σημείο με  $\lambda \approx 0.301$

Εικόνα 4.4: Παραμορφωσιακή κατάσταση για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.22$ ,  $n = 1$  σε διάφορα στάδια.



Διάγραμμα 4.2: Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.22, n = 1$

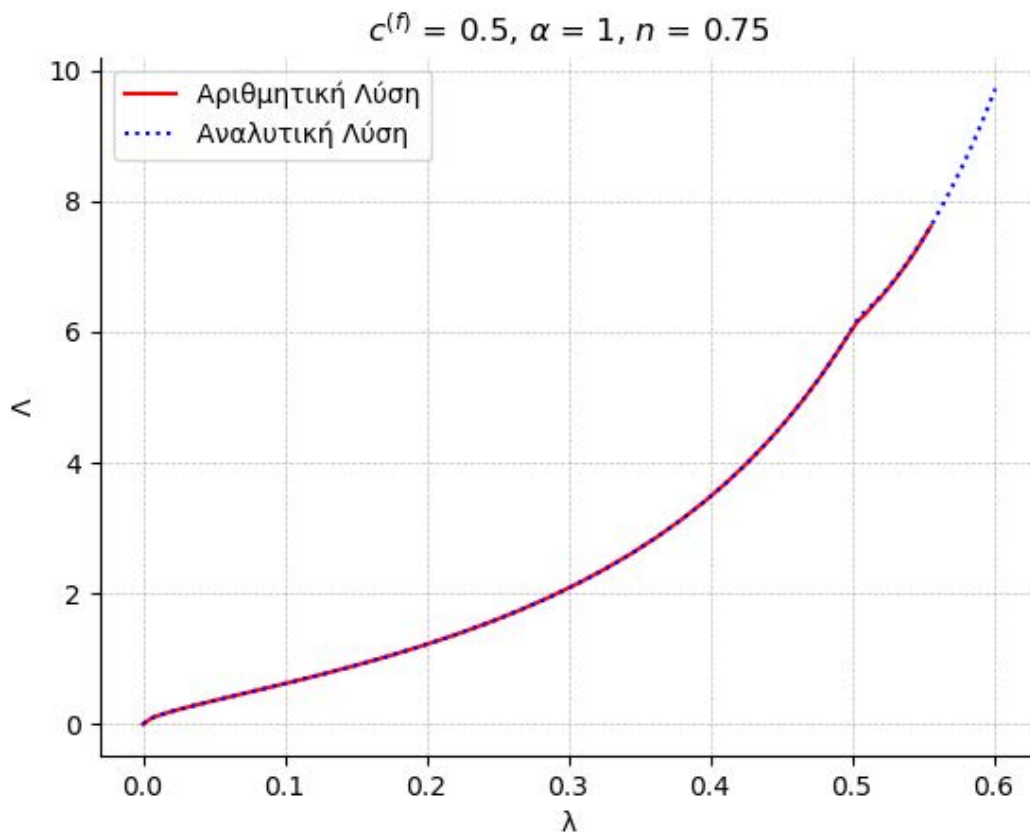


Διάγραμμα 4.3: Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.22, n = 1$

Στο διάγραμμα 4.3, παρατηρούμε απλές συμπεριφορές για όλες τις πιθανές συγκεντρώσεις. Σε κάθε περίπτωση, τα μοντέλα υπερβαίνουν το αντίστοιχο κρίσιμο σημείο τους, παρουσιάζοντας συνεχώς αυξανόμενη απόκριση στη μακροσκοπική τάση-παραμόρφωση. Το κρίσιμο σημείο μεταξύ των συγκεντρώσεων  $c^{(f)} = 0.5$  και  $c^{(f)} = 0.6$  μπορεί να θεωρηθεί ταυτόσημο γύρω από το σημείο  $\lambda = 0.21$ . Ωστόσο, καθώς συνεχίζουμε να αυξάνουμε τη συγκέντρωση της ίνας, το κρίσιμο σημείο μετακινείται όλο και πιο έντονα, ενώ ταυτόχρονα η διακλαδωμένη λύση στο σημείο αυτό και μετά φαίνεται να είναι πιο ασθενής. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της  $c^{(f)} = 0.95$ , το σημείο της κρίσιμης παραμόρφωσης με  $\lambda_c = 0.416266099$  είναι σχεδόν αδύνατο να διακριθεί στο διάγραμμα.

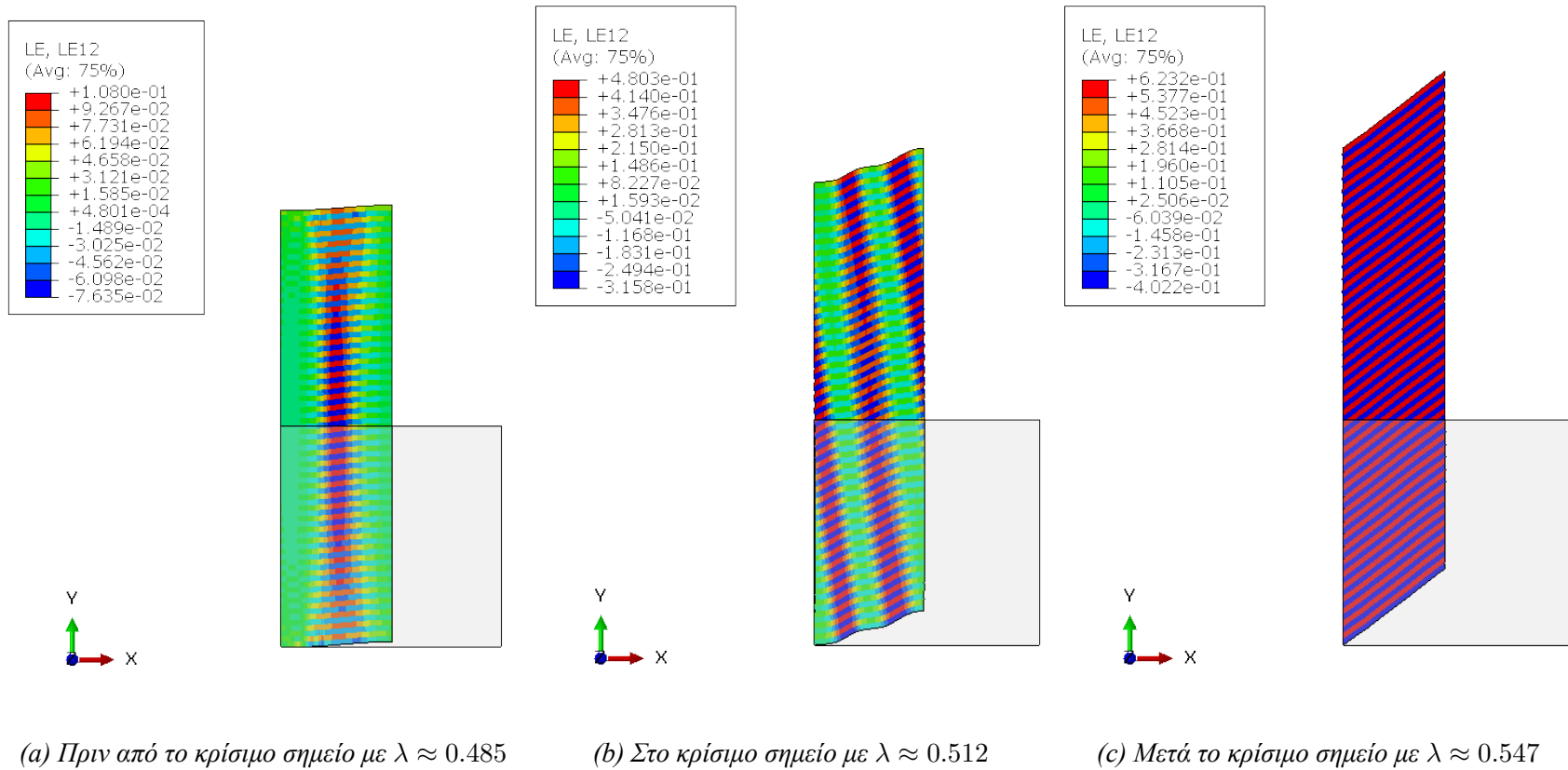
Οι παραμορφωσιακές καταστάσεις όλων των συγκεντρώσεων είναι όμοιες με αυτές του  $c^{(f)} = 0.5$ , με τη συμπεριφορά τους να μην επηρεάζεται από οποιονδήποτε αριθμό στοιχείων μεταξύ των άνω και κάτω ορίων που ορίσαμε.



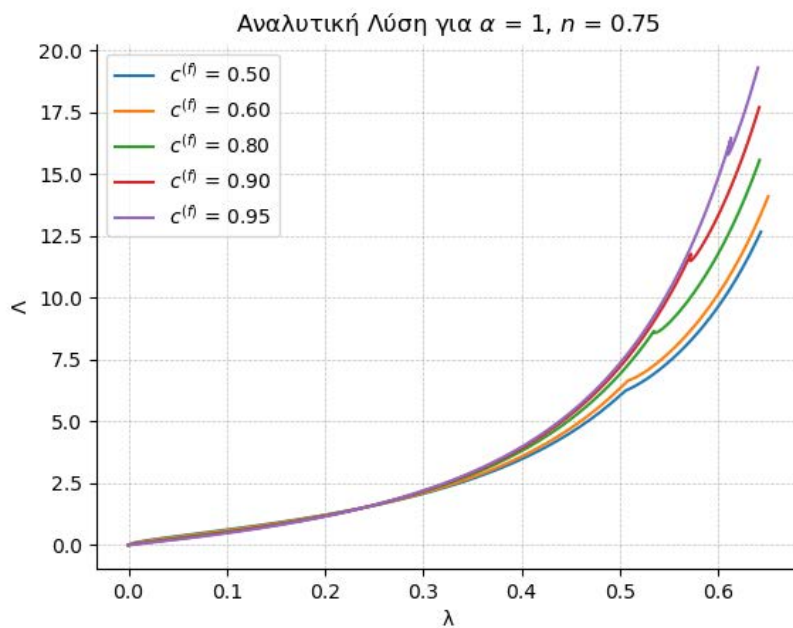


Διάγραμμα 4.4: Σύγκριση απόκρισης για  $c^{(f)} = 0.5, \alpha = 1, n = 0.75$

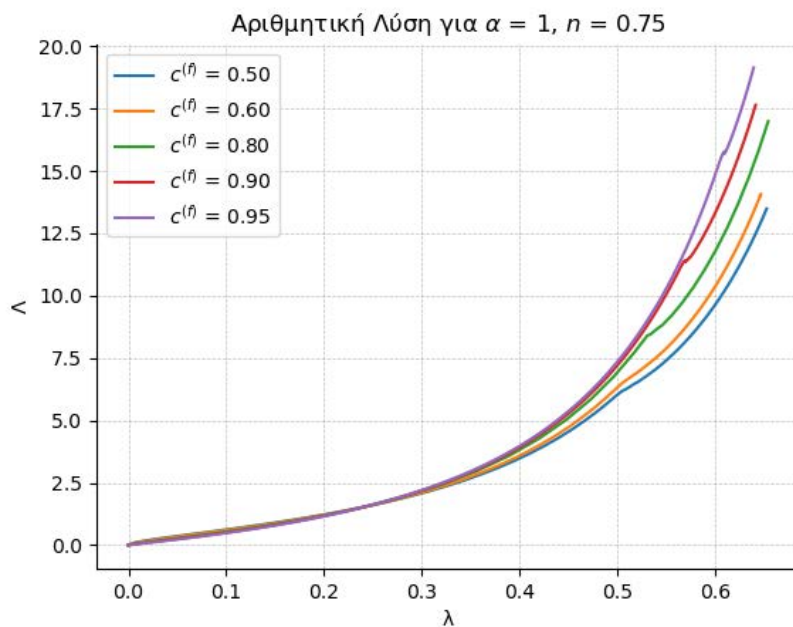
Στο διάγραμμα 4.4, παρατηρείται η εισαγωγή του γενικευμένου μοντέλου σε μία εκ των δύο φάσεων με παράμετρο  $n \neq 1$ , διατηρώντας όμως ίδια μέτρα διατμήσεων μεταξύ των φάσεων ( $\alpha = 1$ ). Είναι σαφές ότι ο συνδυασμός αυτών των παραμέτρων καταλήγει ξανά σε ομαλή μεταδιακλαδωμένη συμπεριφορά. Η μοναδική διαφορά σε σχέση με την περίπτωση του στερεού με παραμέτρους  $\alpha = 0.22$  και  $n = 1$  είναι το γεγονός ότι στην παρούσα περίπτωση το όριο του κρίσιμου σημείου έχει αυξηθεί σημαντικά, με αποτέλεσμα το υλικό να είναι ικανό να επιτύχει υψηλές τιμές παραμόρφωσης. Επιπλέον, η υψηλή τιμή του μέτρου διατμήσεως του φορέα καθιστά το στερεό πιο σκληρό, οδηγώντας σε ιδιαίτερα αυξημένες παραγόμενες τάσεις. Στο κρίσιμο σημείο  $\lambda_c = 0.505392651$ , όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.5, παρατηρούνται εναλλασσόμενες ζώνες υψηλών και χαμηλών διατμητικών πεδίων κατά μήκος των στρώσεων. Μετά το σημείο αυτό, η απόκριση συγκλίνει και πάλι στη λύση του τέλει μοντέλου.



Εικόνα 4.5: Παραμορφωσιακή κατάσταση για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $n = 0.75$  σε διάφορα στάδια.



Διάγραμμα 4.5: Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 1, n = 0.75$

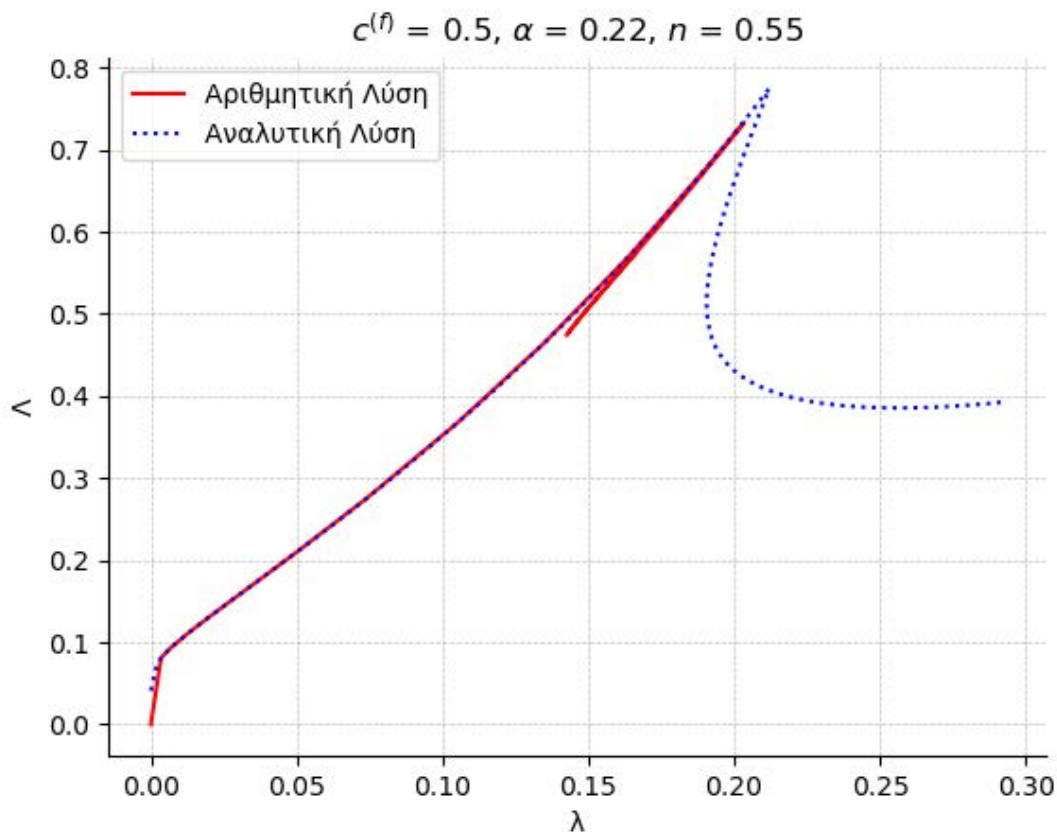


Διάγραμμα 4.6: Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 1, n = 0.75$

Στο διάγραμμα 4.6, παρουσιάζονται τα αυξημένα όρια παραμόρφωσης για τον συγκεκριμένο τύπο σύνθετου υλικού. Τα στερεά, των οποίων το κλάσμα όγκου της ίνας προσεγγίζει την τιμή  $c^{(f)} = 0.95$ , εμφανίζουν όλο και πιο έντονα τη συμπεριφορά της διακλαδωμένης κατά το κρίσιμο σημείο. Συγκρίνοντας την απόκριση όλων των μοντέλων με αυτή του διαγράμματος 4.3, παρατηρούμε ότι η διακλαδωμένη λύση στα αντίστοιχα κρίσιμα σημεία είναι πιο ασθενής καθώς η συγκέντρωση της ίνας μειώνεται, σε αντίθεση με προηγούμενες παρατηρήσεις.

Το διάγραμμα 4.5 της αναλυτικής λύσης, κατά την αύξηση της συγκέντρωσης, φαίνεται σταδιακά να αλλάζει συμπεριφορά, αρχίζοντας να εμφανίζει το φαινόμενο της μεγιστοποίησης της τάσης, με άμεση πτώση αυτής κατά το κρίσιμο σημείο. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτά με την αριθμητική λύση, παρατηρείται ότι, ενώ τα μοντέλα υψηλών συγκεντρώσεων τείνουν προς αυτή τη συμπεριφορά, το φαινόμενο δεν εμφανίζεται. Η εμβάθυνση στα αριθμητικά αποτελέσματα στο κρίσιμο σημείο και μετά δεν δείχνει ποτέ πτώση της τάσης από το ένα βήμα στο επόμενο.

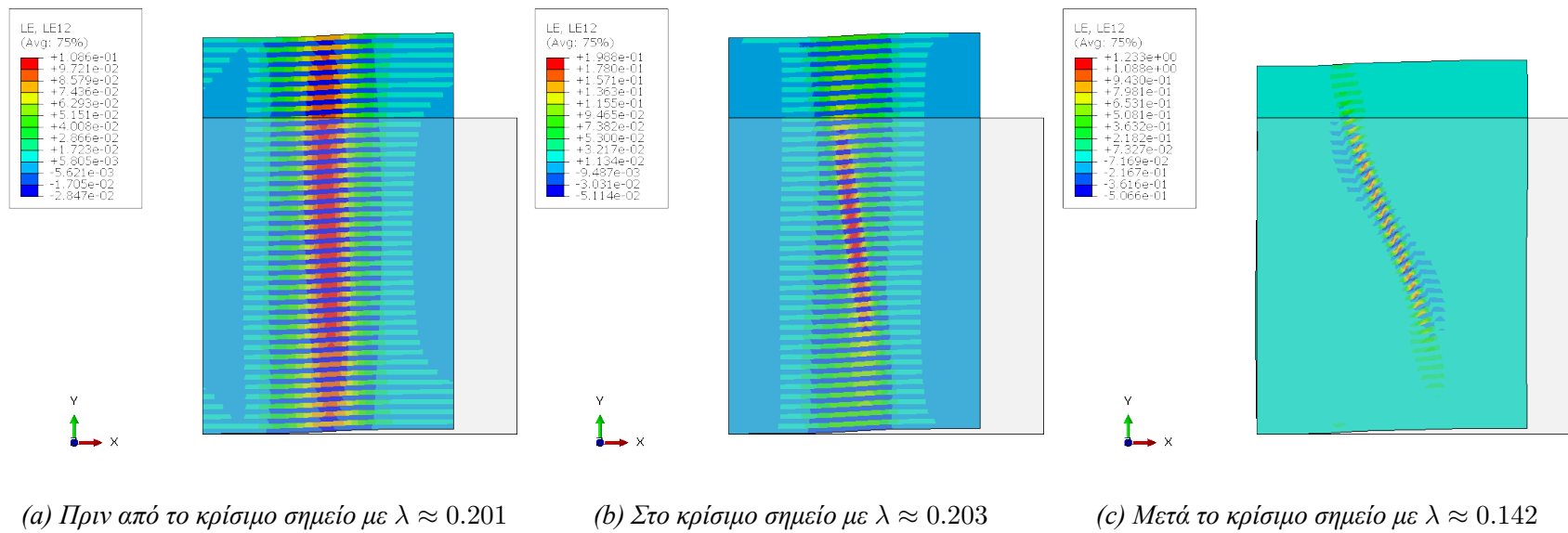
Η συγκέντρωση της ίνας, καθώς και ο αριθμός των στοιχείων, δεν παρουσίασαν διαφορές κατά τη μετα-διακλαδωμένη συμπεριφορά όλων των μοντέλων.



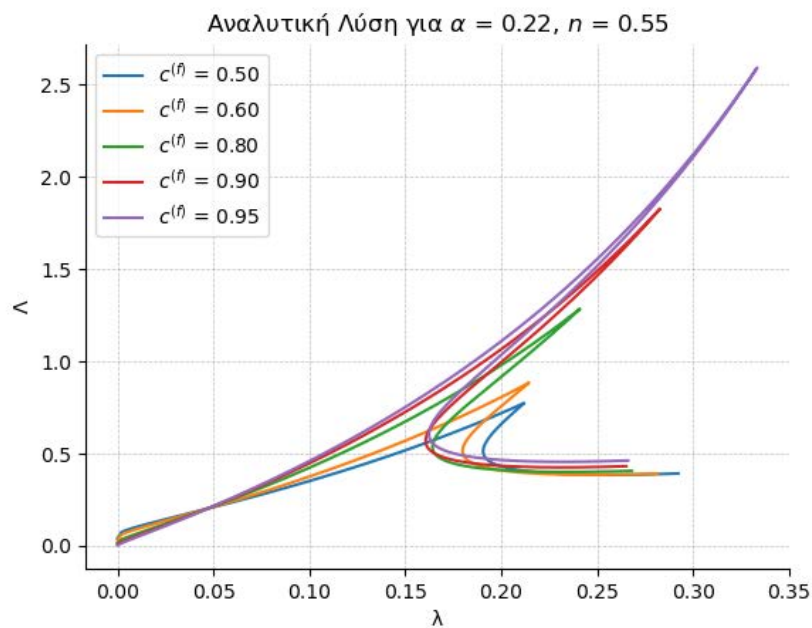
Διάγραμμα 4.7: Σύγκριση απόκρισης για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.22$ ,  $n = 0.55$

Στο διάγραμμα 4.7, εμφανίζεται η απόκριση του σύνθετου υλικού, στο οποίο ο φορέας αξιοποιεί ξανά το γενικευμένο μοντέλο με  $n \neq 1$ , ενώ αυτή τη φορά ο λόγος των μέτρων διατμήσεων είναι ιδιαίτερα χαμηλός με  $\alpha = 0.22$ . Όπως φαίνεται και στην εικόνα 4.6, όταν το μοντέλο πλησιάζει στο κρίσιμο σημείο με  $\lambda_c = 0.211974838$ , το σύνθετο υλικό εμφανίζει το φαινόμενο snap-back πολύ πιο έντονα σε σύγκριση με το αντίστοιχο τέλειο μοντέλο, με αποτέλεσμα την αντιστροφή της μακροσκοπικής πορείας τάσεως-παραμορφώσεως.

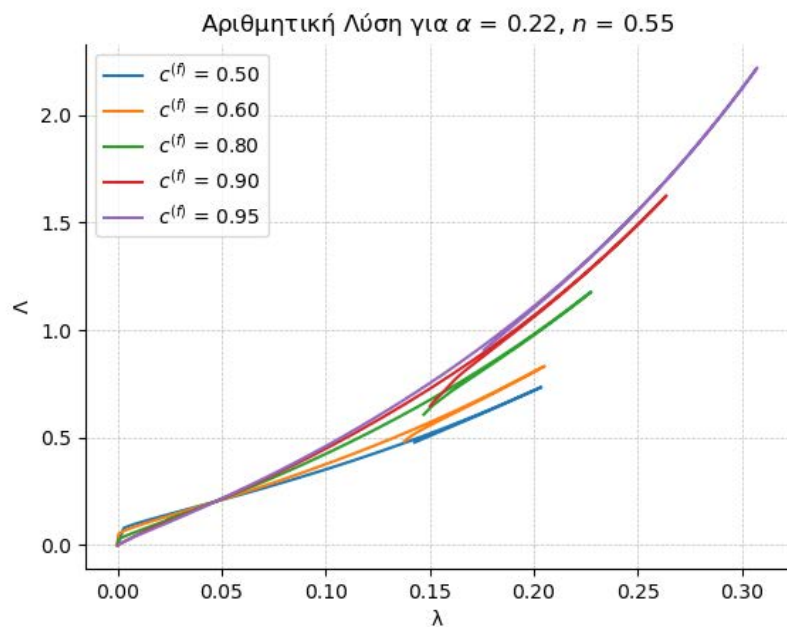
Η μεγιστοποίηση της τάσης και της παραμόρφωσης στο κρίσιμο σημείο, όπως απεικονίζεται στην εικόνα 4.6, συνοδεύεται από το σχηματισμό μιας τοπικής ζώνης παραμόρφωσης στο μέσο του σύνθετου υλικού, όπου το πλάτος της γεωμετρικής ατέλειας μεγιστοποιείται. Η εξέλιξη της παραμορφωσιακής κατάστασης έχει ως αποτέλεσμα η τοπική ζώνη αυτή να γίνεται πιο έντονη, σε αντίθεση με το υπόλοιπο σύνθετο υλικό, το οποίο χαλαρώνει και αποφορτίζεται.



Εικόνα 4.6: Παραμορφωσιακή κατάσταση για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.22$ ,  $n = 0.55$  σε διάφορα στάδια.



Διάγραμμα 4.8: Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.22, n = 0.55$

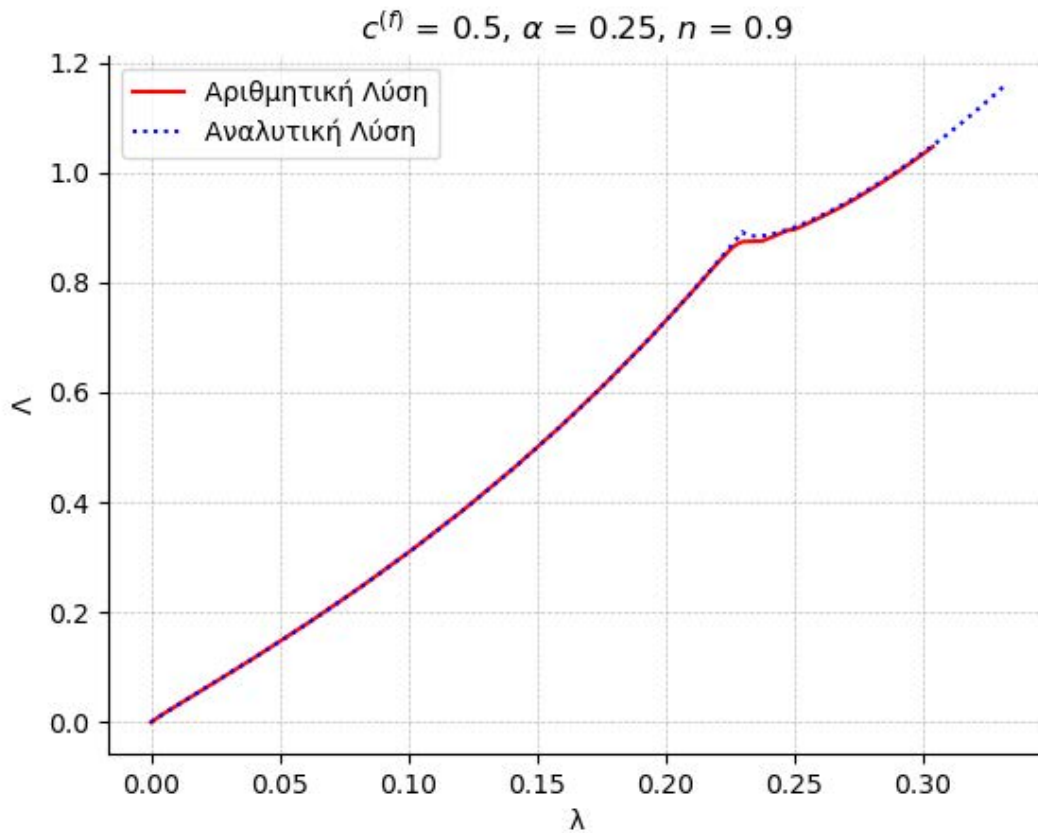


Διάγραμμα 4.9: Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.22, n = 0.55$

Στο διάγραμμα 4.9, παρατηρείται το φαινόμενο snap-back σε κάθε συγκέντρωση της ίνας, όπως διαπιστώθηκε προηγουμένως στο διάγραμμα 4.7, με την αντιστροφή της μακροσκοπικής απόκρισης τάσης-παραμορφώσεως. Καθώς το κλάσμα όγκου της ίνας αυξάνεται έως την τιμή του  $c^{(f)} = 0.95$ , το φαινόμενο αυτό γίνεται ολοένα και πιο έντονο, με την πορεία της αντιστροφής να αυξάνεται αναλόγως. Διαπιστώνεται ότι η αύξηση του κλάσματος όγκου της ίνας συνοδεύεται από αντίστοιχα αυξημένα όρια τάσης-παραμόρφωσης. Ωστόσο, στην αρχή του διαγράμματος, παρατηρούμε ότι οι χαμηλότερες συγκεντρώσεις συνδυάζονται με αυξημένες τάσεις για τις ίδιες παραμορφώσεις, συγκριτικά με τις υψηλότερες, μέχρι το σημείο διασταύρωσης όλων των μακροσκοπικών καμπύλων στο σημείο του  $\lambda \approx 0.048$ . Επίσης, επισημαίνεται ότι ο συνδυασμός των παραμέτρων  $\alpha$  και  $n$  στις χαμηλότερες συγκεντρώσεις συνοδεύεται από τα μικρότερα αντίστοιχα όρια τόσο της μακροσκοπικής τάσης όσο και της παραμόρφωσης.

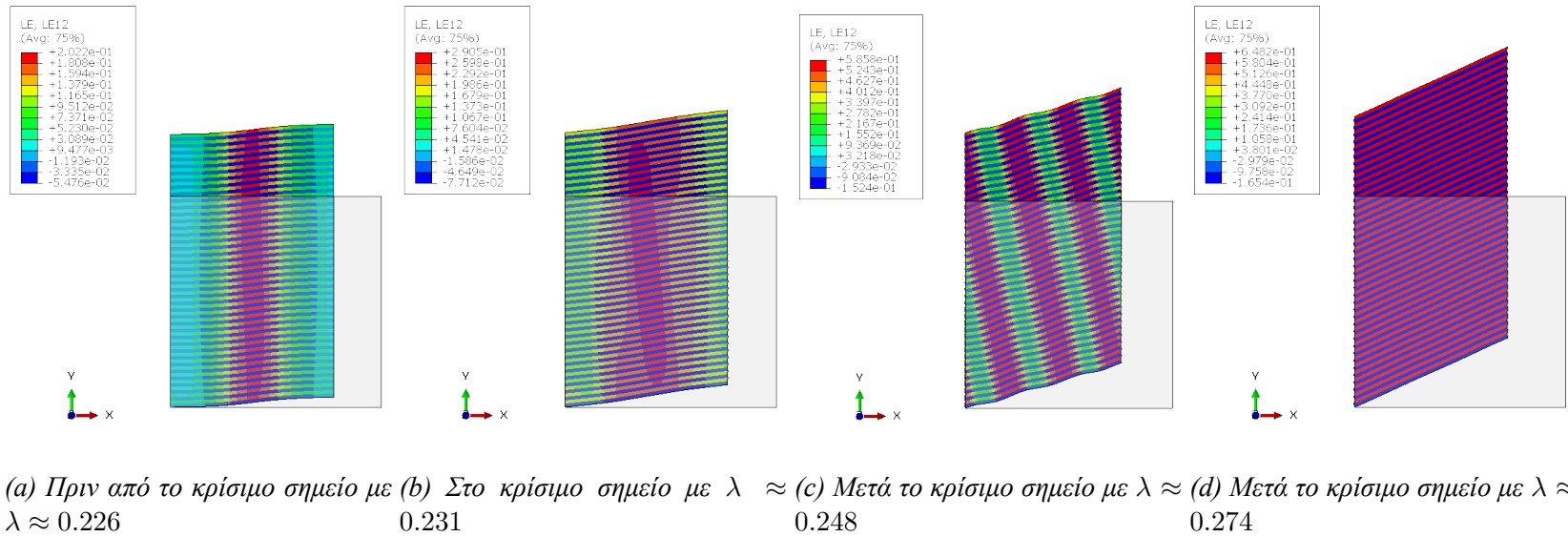
Ο αριθμός των στοιχείων δεν επηρεάζει τη συμπεριφορά των μοντέλων. Ωστόσο, από πλευράς αριθμητικής αξιοπιστίας, παρατηρείται ότι ο αυξημένος αριθμός στοιχείων ευνοεί τη διαδικασία, γεγονός που οφείλεται στο ότι το φαινόμενο της απώλειας της ελλειπτικότητας εξαρτάται σημαντικά από το μέγεθος των στοιχείων. Συνεπώς, ενώ η συμπεριφορά φαίνεται να συγκλίνει και για τα δύο όρια των στοιχείων, επιλέγουμε πάντοτε τα αποτελέσματα των άνω ορίων. Οι μετα-διακλαδωμένες παραμορφωσιακές καταστάσεις κάθε συγκέντρωσης είναι όμοιες με αυτές της περίπτωσης του  $c^{(f)} = 0.5$ .



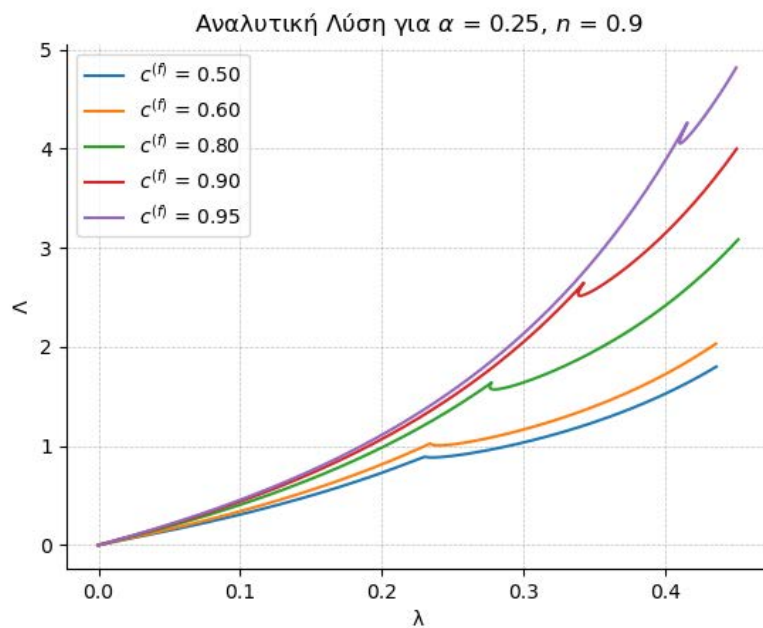


Διάγραμμα 4.10: Σύγκριση απόκρισης για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $n = 0.9$

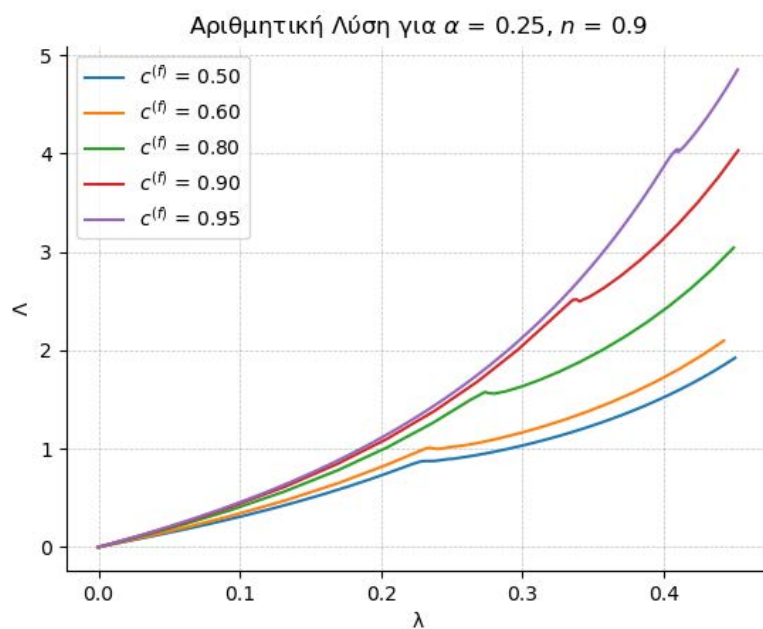
Στο διάγραμμα 4.10, παρουσιάζεται η απόκριση του σύνθετου υλικού, στο οποίο η φάση του γενικευμένου μοντέλου χαρακτηρίζεται από παράμετρο  $n = 0.9$ , δηλαδή τιμή κοντά στο απλό Neo-Hookean μοντέλο, με λόγο μέτρων διατμήσεως  $\alpha = 0.25$ . Στην περίπτωση αυτή, κατά το κρίσιμο σημείο  $\lambda_c = 0.230011123$ , παρατηρείται μεγιστοποίηση της τάσης, χωρίς όμως να επηρεάζεται η πορεία της παραμόρφωσης του μοντέλου. Συνεπώς, το φαινόμενο αυτό είναι εμφανές μόνο κατά τον υπολογισμό της μακροσκοπικής συμπεριφοράς, ένα συμπέρασμα το οποίο δεν θα μπορούσαμε να εξάγουμε παρατηρώντας αποκλειστικά το σχήμα 4.7. Η εξέλιξη της παραμορφωσιακής κατάστασης οδηγεί στην εμφάνιση εναλλασσόμενων ζωνών υψηλών και χαμηλών διατμητικών πεδίων κατά μήκος των στρώσεων, έως ότου όλες οι στρώσεις γίνουν επίπεδες μεταξύ τους και τα πεδία κατανεμηθούν ομοιόμορφα, όπως φαίνεται και στην αντίστοιχη εικόνα 4.7.



Εικόνα 4.7: Παραμορφωσιακή κατάσταση για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $n = 0.9$  σε διάφορα στάδια.



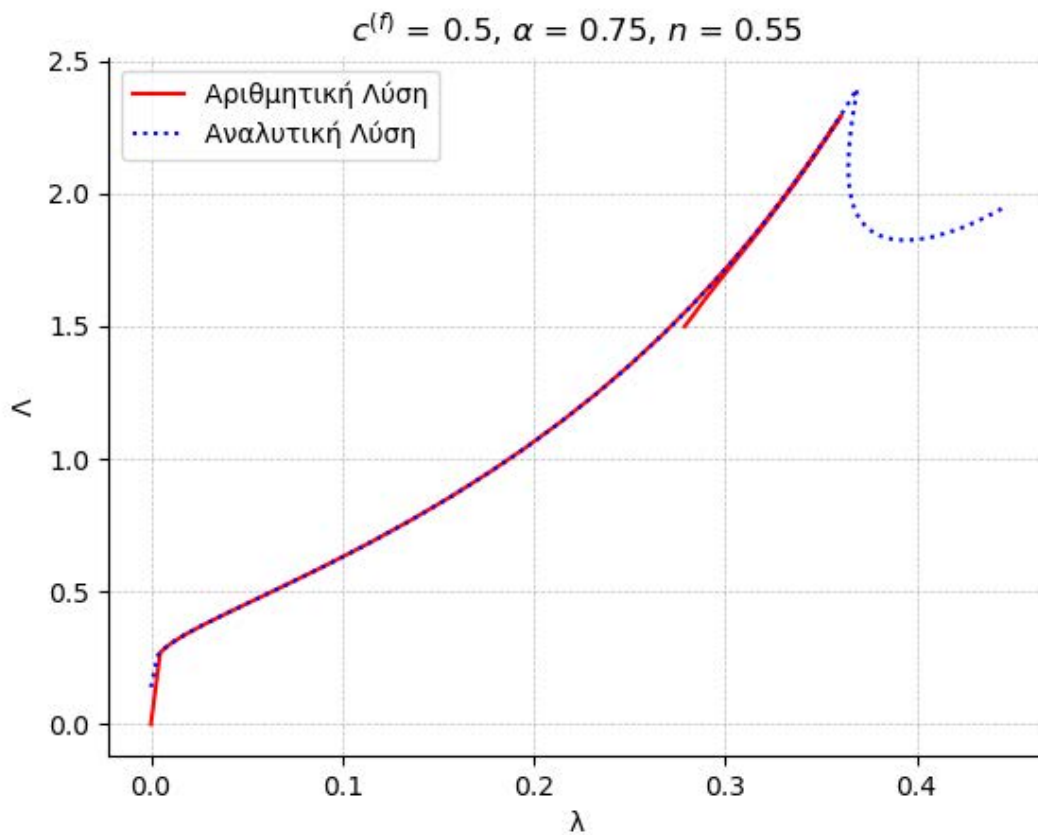
Διάγραμμα 4.11: Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.25, n = 0.9$



Διάγραμμα 4.12: Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.25, n = 0.9$

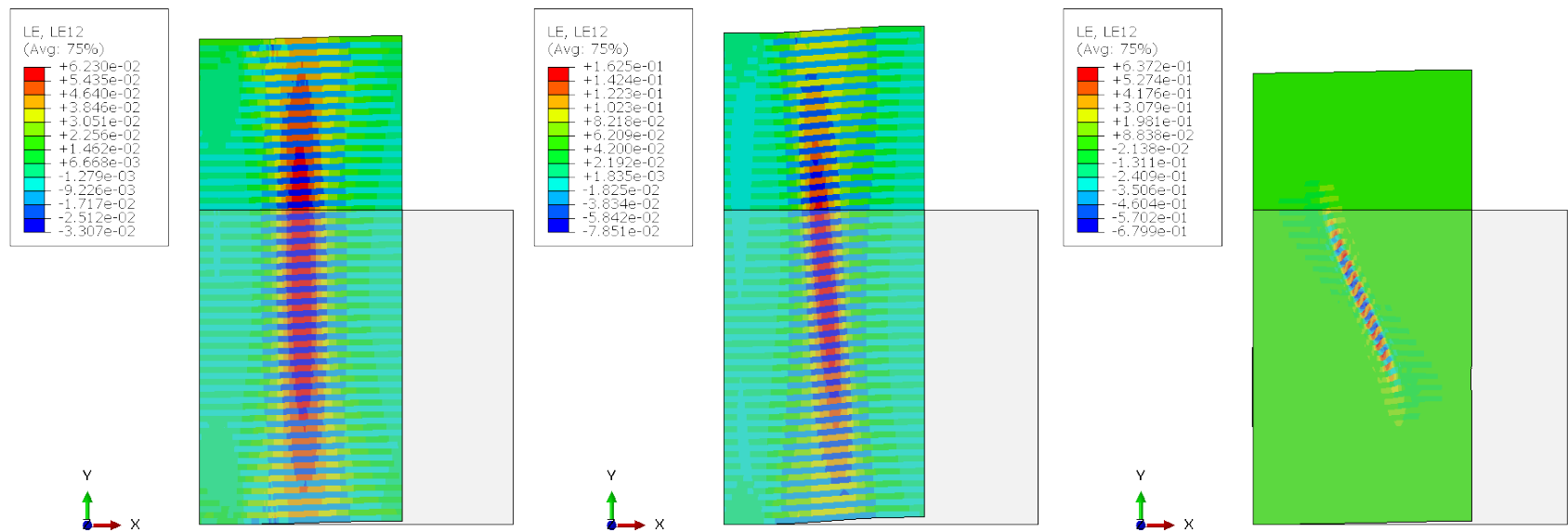
Στο διάγραμμα 4.12, παρατηρούμε ότι το φαινόμενο της μεγιστοποίησης της τάσης, ξεκινώντας από το κλάσμα όγκου  $c^{(f)} = 0.5$  και πλησιάζοντας το όριο του  $c^{(f)} = 0.95$ , γίνεται ολοένα και πιο έντονο στο αντίστοιχο κρίσιμο σημείο. Συγκεκριμένα, οι περιπτώσεις των  $c^{(f)} = 0.80$ ,  $c^{(f)} = 0.90$  και  $c^{(f)} = 0.95$  στην αναλυτική λύση προτείνουν την αντιστροφή όχι μόνο της μακροσκοπικής τάσης, αλλά και της παραμόρφωσης. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτά με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις, ανακαλύπτουμε ότι τα αποτελέσματά μας αποκλίνουν για τις υψηλές συγκεντρώσεις, καθώς τα αριθμητικά δεδομένα εμφανίζουν μεγιστοποίηση μόνο της τάσης, χωρίς να παρατηρείται αντιστροφή της παραμόρφωσης, ακόμα και για τις ακραίες συγκεντρώσεις του  $c^{(f)} = 0.95$ .

Η διεξαγωγή της μελέτης των μοντέλων αυτών με αυξημένο ή μειωμένο αριθμό στοιχείων δεν επηρεάζει την ασυμφωνία μεταξύ της αναλυτικής και της αριθμητικής λύσης, καθώς η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης.



Διάγραμμα 4.13: Σύγκριση απόκρισης για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.75$ ,  $n = 0.55$

Στο διάγραμμα 4.13, παρατηρείται σύνθετο υλικό που χαρακτηρίζεται από παράμετρο  $n = 0.55$ , όμοια με την περίπτωση στην οποία εμφανίστηκε το φαινόμενο snap-back προηγουμένως (βλ. διάγραμμα 4.7). Ωστόσο, αυτή τη φορά επιλέγεται μεγαλύτερος λόγος μέτρων διατμήσεως, με  $\alpha = 0.75$ , ο οποίος καθιστά το στερεό πιο σκληρό. Στο κρίσιμο σημείο του  $\lambda_c = 0.368998154$ , το υλικό παρουσιάζει την ίδια απόκριση του φαινομένου snap-back, με αυξημένα, όμως, όρια μακροσκοπικής τάσης-παραμόρφωσης, γεγονός που αποδίδεται στη σκληρότερη φύση του συγκεκριμένου μοντέλου.

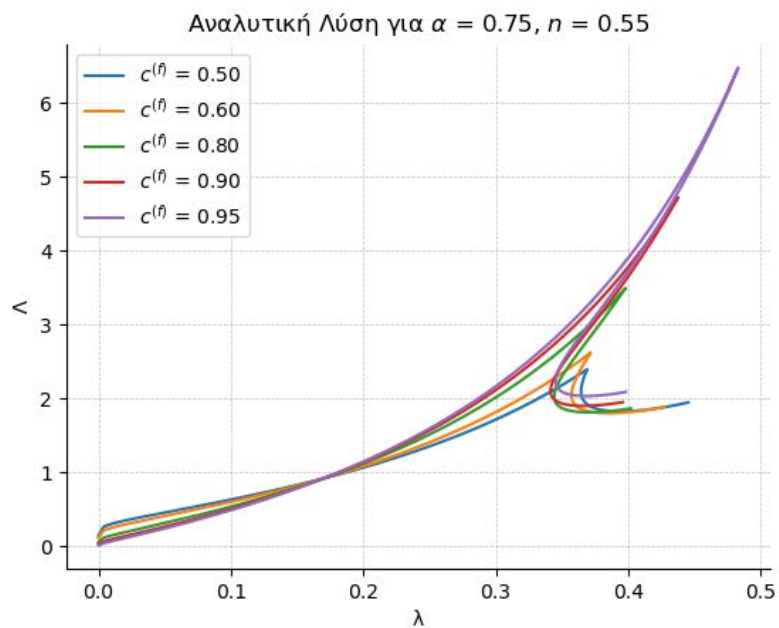


(a) Πριν από το κρίσιμο σημείο με  $\lambda \approx 0.353$

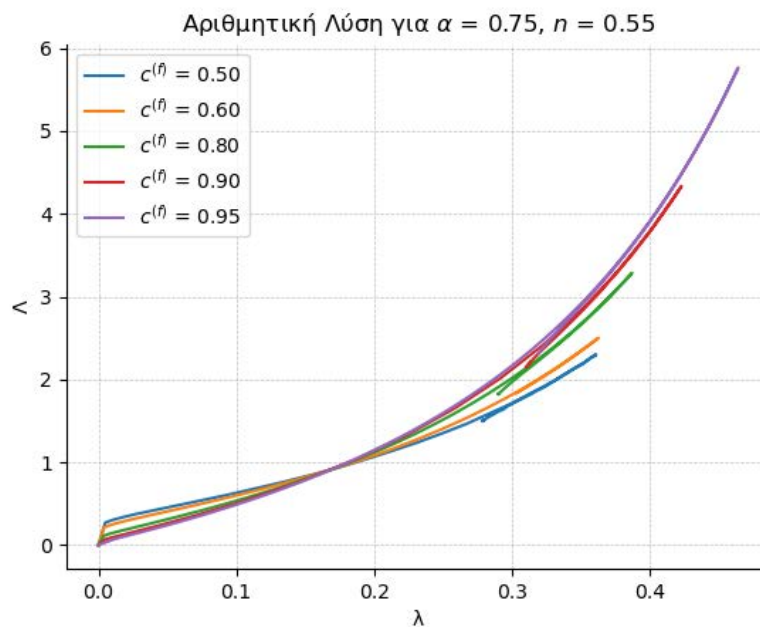
(b) Στο κρίσιμο σημείο με  $\lambda \approx 0.361$

(c) Μετά το κρίσιμο σημείο με  $\lambda \approx 0.311$

Εικόνα 4.8: Παραμορφωσιακή κατάσταση για  $c^{(f)} = 0.5$ ,  $\alpha = 0.75$ ,  $n = 0.55$  σε διάφορα στάδια.



Διάγραμμα 4.14: Σύγκριση αναλυτικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.75, n = 0.55$



Διάγραμμα 4.15: Σύγκριση υπολογιστικής λύσης απόκρισης όλων των συγκεντρώσεων για τις ίδιες συνθήκες  $\alpha = 0.75, n = 0.55$

Στο διάγραμμα 4.15, παρατηρείται συμπεριφορά παρόμοια με αυτή του διαγράμματος 4.9, με την εμφάνιση του φαινομένου snap-back και την αντιστροφή της μακροσκοπικής απόκρισης τάσης-παραμόρφωσης. Ένα επιπλέον στοιχείο που συνδέει τη συμπεριφορά αυτών των μοντέλων με εκείνα του διαγράμματος 4.9 είναι το γεγονός ότι οι χαμηλές συγκεντρώσεις ίνας συνοδεύονται από αυξημένες τάσεις, μέχρι το σημείο διασταύρωσης των μακροσκοπικών καμπύλων στο σημείο του  $\lambda \approx 0.17$ , όπου οι συμπεριφορές αντιστρέφονται. Παρατηρούμε ότι, αυτή τη φορά, η χρήση ενός πιο σκληρού φορέα με  $\alpha = 0.75$  επιτρέπει στα μοντέλα όλων των συγκεντρώσεων να επιτυγχάνουν αυξημένα όρια μακροσκοπικής τάσης-παραμόρφωσης σε σύγκριση με αυτά της περίπτωσης του  $\alpha = 0.22$ .

Αναφορικά με τον αριθμό των στοιχείων, οι μεγαλύτερες συγκεντρώσεις είχανε σύγκληση ως προς τα αποτελέσματα τους για κάθε αριθμό στοιχείων με μεγάλη ευκολία. Ωστόσο, για χαμηλές συγκεντρώσεις όπως αυτή του  $c^{(f)} = 0.5$ , είχανε σύγκληση όμως με δυσκολία ως προς τον υπολογιστικό φόρτο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, ενώ το φαινόμενο της απώλειας της ελλειπτικότητας ευνοείται από τον αυξημένο αριθμό στοιχείων, η γεωμετρική ατέλεια  $\Delta X_2$ , που έχει επιβληθεί στο μοντέλο μας, καθιστά τη γεωμετρία πολύπλοκη. Αυτή η πολυπλοκότητα έρχεται σε αντίφαση με τον αυξημένο αριθμό στοιχείων, αναγκάζοντάς μας να βρούμε μια ισορροπία μεταξύ των δύο αυτών προβλημάτων.



## 5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διερευνήθηκε η συμπεριφορά σύνθετων υπερελαστικών υλικών με στρωματώδη μικροδομή υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Αναλύθηκαν ειδικότερα οι ασταθείς συμπεριφορές που παρουσιάζονται κατά την διαδικασία συμπίεσης αυτών των υλικών και οι συνθήκες υπό τις οποίες συμβαίνει η απώλεια ελλειπτικότητας σε μακροσκοπικό επίπεδο. Τα βασικά ευρήματα της έρευνας περιλαμβάνουν την ταυτοποίηση των παραγόντων που συμβάλλουν στην απώλεια της ελλειπτικότητας και συνεπώς στην ενίσχυση τοπικής παραμόρφωσης, που είναι άμεσα εξαρτημένοι από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των υλικών του μοντέλου.

Αρχικά, τα υλικά που αποτελούνται από απλές στρώσεις Neo-Hookean καταδεικνύουν σταθερή συμπεριφορά στη μετα-διακλαδωμένη κατάσταση, χωρίς ενδείξεις τοπικής παραμόρφωσης ακόμη και μετά την κρίσιμη φόρτιση. Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι σε υλικά των οποίων η παράμετρος  $n$  προσεγγίζει τη μονάδα, που χαρακτηρίζει τα απλά Neo-Hookean υλικά, συνοδεύεται από ομαλή μετα-διακλαδωμένη συμπεριφορά εφόσον και τα δύο υλικά έχουν υψηλά μέτρα διατμήσεων ( $\alpha$  υψηλό). Παρουσιάζεται επίσης ότι η ενδιάμεση περιοχή μεταξύ του σχεδόν απλού Neo-Hookean υλικού και ενός μαλακότερου φορέα σε σχέση με την  $n$  αποτελεί το σημείο όπου αρχίζει να εντοπίζεται η μεγιστοποίηση της τάσης κατά την απώλεια της ελλειπτικότητας. Τέλος, τα υλικά που χαρακτηρίζονται από χαμηλή παράμετρο  $n$  στις Neo-Hookean στρώσεις τους παρουσιάζουν φαινόμενα snap-back στην μακροσκοπική αντίδρασή τους, ανεξαρτήτως αν ο λόγος των μέτρων διατμήσεως είναι αυξημένος ή μειωμένος, με την ανάπτυξη μιας ισχυρής παραμορφωσιακής ζώνης στο κέντρο του μοντέλου, όπου μεγιστοποιείται το πλάτος της γεωμετρικής ατέλει.

Έχει αποδειχθεί ότι η απώλεια της ελλειπτικότητας δεν συνδέεται απαραίτητα με την εμφάνιση ασταθειών, αλλά μπορεί να οδηγήσει σε διάφορες μετα-διακλαδωμένες συμπεριφορές. Τα στερεά με ισχυρό φορέα που πλησιάζουν τις ιδιότητες του απλού Neo-Hookean υλικού παρουσιάζουν σταθερή ομογενοποιημένη συμπεριφορά, ενώ η απομάκρυνση από αυτές τις ιδιότητες αποτελεί τον καταλύτη για την εκδήλωση ασταθειών, με την αύξηση της συγκέντρωσης του ενισχυτικού υλικού-ίνας να εντείνει τα φαινόμενα που προκύπτουν κατά την απώλεια της ελλειπτικότητας χωρίς όμως να μεταβάλλει το φαινόμενο της αστάθειας.

Η μελέτη αυτή είχε αρχικά διεξαχθεί για ένα σύνολο συγκεντρώσεων της ίνας που φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα 5.1.

| Κλάσμα όγκου ίνας $c^{(f)}$ | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 0.9 | 0.95 |
|-----------------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
|-----------------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|

*Πίνακας 5.1: Συνολικές συγκεντρώσεις ίνας  $c^{(f)}$*

Ωστόσο, οι συγκεντρώσεις υπό της τιμής του  $c^{(f)} = 0.5$ , αποδείχτηκαν πολύ προβληματικές. Η αριθμητική σύγκλιση ως προς τον αριθμό των στοιχείων σε συνδυασμό με τον ίδιο τον υπολογιστικό φόρτο που χρειάστηκε για την εύρεση της πραγματικής συμπεριφοράς των μοντέλων δε μπορούσε να θεωρηθεί αξιόπιστη. Μοντέλα των οποίων οι παράμετροι καθόριζαν ομαλές συμπεριφορές κατά το κρίσιμο σημείο παραμόρφωσης και μετά, μπόρεσαν να εξακριβωθούν μέσα από αρκετά μοντέλα. Όμως, η απαίτηση του υπολογιστικού φόρτου, η περίπλοκη γεωμετρία και η έλλειψη σύγκλισης, ιδιαίτερα στα μοντέλα που συνοδευόταν από την ανάπτυξη μεγάλων ασταθειών. Προτείνεται συνεπώς, η περαιτέρω διερεύνηση της συμπεριφοράς των συγκεντρώσεων αυτών, καθώς και της συμπεριφοράς άλλων τύπων υπερελαστικών υλικών και η εξέταση της επίδρασης διαφορετικών τύπων ατελειών στη μικροδομή.

## **A Προγράμματα και κωδικοποίηση**

Σε αυτό το παράρτημα περιγράφεται η πρακτική ανάλυση και η μελέτη που ακολούθησε για την πραγματοποίηση της έρευνας.

### **A.1 ABAQUS**

Το υπολογιστικό πρόγραμμα ABAQUS [15] αποτέλεσε τον βασικό συνδετικό κρίκο όλων των υπόλοιπων προγραμμάτων που χρειάστηκαν για την επίλυση του θέματος. Πιο συγκεκριμένα, κάθε μοντέλο, για να κατασκευαστεί με τις κατάλληλες συνθήκες και γεωμετρίες, καθώς και για να "τρέξει" το υπολογιστικό πρόγραμμα βάσει των δικών μας τροποποιημένων υπερελαστικών μοντέλων, ήταν αναγκαία η συνδυαστική γνώση περί scripts για τη χρήση της Python, κωδικοποίηση για την ενσωμάτωση υπορουτίνων της Fortran, Matlab για την υποβολή περιοδικών συνοριακών συνθηκών και Mathematica για την επίλυση και επιβεβαίωση πολλαπλών υπολογισμών, τανυστών και διαγραμμάτων.

### **A.2 Fortran Subroutines**

Όσον αφορά την ενσωμάτωση υπερελαστικών υλικών στο μοντέλο μας, το πρόγραμμα ABAQUS προσφέρει πληθώρα επιλογών, ορισμένες από τις οποίες όμως απαιτούν τη χρήση υπορουτίνων της Fortran για να περιγράψουν τα υπερελαστικά μοντέλα που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4.1. Για το λόγο αυτό, όταν θέλουμε να εισάγουμε στα υλικά μας τα λεγόμενα "User-Defined Materials", πρέπει να καταφύγουμε σε υπορουτίνες της Fortran και συγκεκριμένα σε μορφή κωδικοποίησης ".for". [15]

Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι υπορουτίνες UMAT χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό

και τον υπολογισμό της μηχανικής συμπεριφοράς του υλικού σε κάθε βήμα (increment) και στοιχείο του πλέγματος της ανάλυσής μας. Η πρότυπη μορφή μιας τέτοιας υπορουτίνας είναι η ακόλουθη:

---

```
1 SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
2   1 RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
3   2 STRAN,DSTRAN,TIME,DTEMP,TEMP,DTEMP,PRED,DPRED,CMNAME,
4   3 NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
5   4 CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
6 C
7   INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
8 C
9   CHARACTER*80 CMNAME
10  DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
11  1 DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
12  2 STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PRED(1),DPRED(1),
13  3 PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
14 C
15 C   user coding to define DDSDDE, STRESS, STATEV, SSE, SPD, SCD
16 C   and, if necessary, RPL, DDSDDT, DRPLDE, DRPLDT, PNEWDT
17 C
18 RETURN
19 END
```

---

Αυτό το είδος υπορουτίνας προσφέρει μεγάλη ελευθερία στη δημιουργία των υλικών μας, καθιστώντας όμως έτσι τη κατασκευή της εξίσου δύσκολη και χρονοβόρα. Ωστόσο, στην περίπτωση των υπερελαστικών υλικών, υπάρχει και ένας δεύτερος πιο απλός τρόπος δημιουργίας υλικών μέσω της υπορουτίνας UHYPER. Αυτή βασίζεται απολύτως στη συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης του υλικού και των αντίστοιχων μερικών παραγώγων ως προς τις αναλλοίωτες για τον υπολογισμό και την ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς του. Η πρότυπη μορφή της είναι η ακόλουθη:

---

```
1 SUBROUTINE UHYPER(BI1,BI2,AJ,U,UI1,UI2,UI3,TEMP,NOEL,
2   1 CMNAME,INCPFLAG,NUMSTATEV,STATEV,NUMFIELDV,FIELDV,
3   2 FIELDVINC,NPROPS,PROPS)
```

---

```

4 C
5 INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
6 C
7 CHARACTER*80 CMNAME
8 DIMENSION U(2),UI1(3),UI2(6),UI3(6),STATEV(*),FIELDV(*),
9 2 FIELDVINC(*),PROPS(*)
10 C
11 C user coding to define U,UI1,UI2,UI3,STATEV
12 C
13 RETURN
14 END

```

---

Η λειτουργία της είναι όμοια με αυτή της UMAT. Καλείται σε κάθε βήμα και στοιχείο του πλέγματος για να υπολογίζει τη συνάρτηση ενέργειας παραμόρφωσης και όλες τις δυνατές παραγώγους που αποτελούν μέλη των τανυστών της τάσης και της ελαστικότητας. Η τελική μορφή της υπορουτίνας που χρησιμοποιήθηκε είναι η ακόλουθη, η οποία επιτρέπει στον χρήστη να την αξιοποιεί σε πολλαπλές μορφές, προσθέτοντας κάθε φορά το όνομα του υλικού που χρησιμοποιείται στο ABAQUS και προσδιορίζοντας τις κατάλληλες παραμέτρους. Η υπορουτίνα UHYPER μπορεί να είναι μια πιο απλή μορφή κωδικοποίησης, αλλά λόγω της φύσης των γενικευμένων Neo-Hookean υπερελαστικών υλικών, η πρώτη παράγωγος που μας δίνει την τάση του υλικού έχει πάντα μηδενική τιμή κατά την εκκίνηση του "Job", με αποτέλεσμα το μοντέλο να μη μπορεί να αρχίσει να παραμορφώνεται. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε με τη χρήση μιας οριακής τιμής για την εκκίνηση της παραμόρφωσης. Ο κώδικας που ακολουθεί αποτελεί τη βέλτιστη έκδοχή της υπορουτίνας που αξιοποιήθηκε, στον οποίο ο χρήστης μπορεί προσδιορίσει κάθε φορά ένα Neo-Hookean υλικό, ορίζοντας απλά το αντίστοιχο όνομα που χρησιμοποιεί στο πρόγραμμα ABAQUS και τις παραμέτρους  $\alpha$  (*aratio*),  $n$  (*ncoeff*) και τα όρια μηδενικής τάσης (*limit1*, *limit2* που προκύπτουν από  $ui1(1)$ ,  $ui2(1)$  πχ. για  $(statev(1) - 3.) = 10^{-5}$ ).

---

```

1 subroutine uhyper(bi1,bi2,aj,u,ui1,ui2,ui3,temp,noel,
2 . cmname,incmpflag,numstatev,statev,
3 . numfieldv,fieldv,fieldvinc,numprops,props)
4

```

```

5      include 'aba_param.inc'
6
7      character*8 cmname
8      dimension ui1(3), ui2(6), ui3(6), statev(*), fieldv(*),
9      .      fieldvinc(*), props(*)
10
11      real(kind=8) :: c10, ncoef, limit1, limit2, aratio
12
13      ! Set properties based on material name, adjust accordingly for more materials
14      if (cmname(1:5) .EQ. 'FIRST') then
15          aratio = 0.22
16          ncoef = 1.
17          limit1 = 0.
18          limit2 = 0.
19      else if (cmname(1:6) .EQ. 'SECOND') then
20          aratio = 1.
21          ncoef = 0.75
22          limit1 = 6.66855
23          limit2 = 166714.
24      else if (cmname(1:5) .EQ. 'THIRD') then
25          aratio = 0.22
26          ncoef = 0.55
27          limit1 = 10.7586
28          limit2 = 484137.
29      else if (cmname(1:7) .EQ. 'LOADMAX') then
30          aratio = 0.25
31          ncoef = 0.9
32          limit1 = 0.355756
33          limit2 = 3557.56
34      else if (cmname(1:9) .EQ. 'LOCALMODE') then
35          aratio = 0.75
36          ncoef = 0.55
37          limit1 = 36.677
38          limit2 = 1650470.
39      end if
40
41      ! Common calculation always
42      c10 = aratio / 2.
43      statev(1) = bi1
44      u = c10 * (statev(1) - 3.)**ncoef
45
46      ! Triple statement for instance of a model
47      if (ncoef .EQ. 1.) then
48          ! Calculates the Simple Neo - Hookean model

```

```

49      ui1(1) = c10
50      ui2(1) = 0.
51  else if (statev(1) .EQ. 3. .AND. ncoef .NE. 1.) then
52      ! Calculates the first step of a General Hyperelastic model
53      ui1(1) = limit1
54      ui2(1) = -limit2
55  else
56      ! Calculates the remaining steps of a General Hyperelastic model
57      ui1(1) = c10 * ncoef * (statev(1)-3.)**(ncoef-1.)
58      ui2(1) = c10 * ncoef * (ncoef-1.) * (statev(1)-3.)**(ncoef-2.)
59  end if
60
61  ! First derivatives
62  !ui1(1)          bi1 (already calculated)
63  ui1(2) = 0.      ! bi2
64  ui1(3) = 0.      ! aj
65
66  ! Second derivatives
67  !ui2(1)          bi1bi1 (already calculated)
68  ui2(2) = 0.      ! bi2bi2
69  ui2(3) = 0.      ! aja
70  ui2(4) = 0.      ! bi1bi2
71  ui2(5) = 0.      ! bi1aj
72  ui2(6) = 0.      ! bi2aj
73
74  ! Third derivatives
75  ui3(1) = 0.      ! bi1bi1aj
76  ui3(2) = 0.      ! bi2bi2aj
77  ui3(3) = 0.      ! bi1bi2aj
78  ui3(4) = 0.      ! bi1ajaj
79  ui3(5) = 0.      ! bi2ajaj
80  ui3(6) = 0.      ! ajajaj
81
82  IOUT=7
83  IWR = 0 ! If IWR is equal to 1 then the statement starts writing
84  if (IWR .NE. 0 .AND. NOEL .EQ. 47) then
85      write(IOUT, 1002) NOEL
86      write(IOUT, *) 'u for MATRIX:', u
87      write(IOUT, *) 'ui1 for MATRIX:', ui1(1)
88      write(IOUT, *) 'ui2 for MATRIX:', ui2(1)
89      write(IOUT, *) 'bi1 for MATRIX:', statev(1)
90  end if
91  1001 format(1P, E13.5)
92  1002 format(10I5)

```

```
93
94     return
95     end
```

---

### A.3 Python

Το πρόγραμμα ABAQUS προσφέρει στον χρήστη του πολυάριθμες σχεδιαστικές και υπολογιστικές δυνατότητες. Ωστόσο, στην περίπτωση μας, το μοντέλο που θέλουμε να κατασκευάσουμε, μαζί με τις γεωμετρικές ατέλειες, δεν υποστηρίζει από μόνο του τις αναλυτικές και λεπτομερείς σχεδιαστικές ικανότητες που έχουμε ανάγκη. Για το λόγο αυτό, καταφύγαμε στη δημιουργία scripts της Python ώστε να αντιμετωπίσουμε το νέο αυτό εμπόδιο. Το script που ακολουθεί έχει δημιουργηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπει τον σχεδιασμό του μοντέλου μας μαζί με την περίπλοκη γεωμετρική ατέλεια, με όλες τις αναγκαίες παραμέτρους συμπυκνωμένες στην αρχή του κώδικα για εύκολη τροποποίηση του επιθυμητού μοντέλου.

---

```
1  from abaqus import *
2  from abaqusConstants import *
3  import section
4  import regionToolset
5  import part
6  import material
7  import assembly
8  import step
9  import interaction
10 import load
11 import mesh
12 import job
13 import sketch
14 import visualization
15 import xyPlot
16 import displayGroupOdbToolset as dgo
17 import os
18
19 # Define inputs
20 zf_values = [0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95]
21
22 # Define constants
```



```

23 N = 160 # Number of points in the spline, increase for accuracy
24 L = 1.0 # Side length of the square
25 spacing = L / 40 # Unit cell concentration
26 fiberspacing_values = [zf * spacing for zf in zf_values] # Fiber concentration
27 matrixspacing_values = [(1 - zf) * spacing for zf in zf_values] # Matrix concentration
28 num_lines = 81 # Number of laminate lines
29 model_names = ['HyperZf0{:02d}'.format(int(zf * 100)) if zf != 0.05 else 'HyperZf005' for zf in
↪ zf_values]
30 part_names = ['HyperZf0{:02d}'.format(int(zf * 100)) if zf != 0.05 else 'HyperZf005' for zf in zf_values]
31 job_names = ['HyperZf0{:02d}'.format(int(zf * 100)) if zf != 0.05 else 'HyperZf005' for zf in zf_values]
32
33 def calculate_dx2(x, y, L, j=10**(-3), b=8):
34     import math
35     return j * math.sin(math.pi * y / L) * math.atan(b * (x / L - 0.5))
36
37 def create_sketches_and_parts(model_name, part_name, zf, fiberspacing, matrixspacing):
38     model = mdb.models[model_name]
39
40     # Create the rectangle part (base part)
41     s2 = model.ConstrainedSketch(name='rectSketch', sheetSize=10.0)
42     s2.rectangle(point1=(0, 0), point2=(L, L))
43     p1 = model.Part(name=part_name, dimensionality=TWO_D_PLANAR,
↪ type=DEFORMABLE_BODY)
44     p1.BaseShell(sketch=s2)
45     del model.sketches['rectSketch']
46
47     # Create the sketch for partitioning
48     s1 = model.ConstrainedSketch(name='lamineSketch', sheetSize=10.0)
49     y = 0.0
50     for i in range(num_lines):
51         spline_points = []
52         for n in range(N + 1):
53             x = L * n / N
54             dx2 = calculate_dx2(x, y, L)
55             spline_points.append((x, y + dx2))
56         s1.Spline(points=spline_points)
57         y += fiberspacing if i % 2 == 0 else matrixspacing
58
59     # Project this sketch onto the base part for partitioning
60     p1.projectReferencesOntoSketch(sketch=s1, filter=COPLANAR_EDGES)
61     f = p1.faces
62     pickedFaces = f.getByBoundingBox(xMin=0, yMin=0, xMax=L, yMax=L)
63     p1.PartitionFaceBySketch(faces=pickedFaces, sketch=s1)
64     del model.sketches['lamineSketch']

```

```

65
66 def define_materials_and_sections(model_name, part_name):
67     model = mdb.models[model_name]
68     # Define materials
69     model.Material(name='FIBER')
70     model.materials['FIBER'].Hyperelastic(materialType=ISOTROPIC, testData=OFF,
71     ↪ type=NEO_HOOKE, volumetricResponse=VOLUMETRIC_DATA, table=((0.5, 0.0),))
72     model.Material(name='MATRIX')
73     model.materials['MATRIX'].Hyperelastic(materialType=ISOTROPIC, testData=OFF, type=USER,
74     ↪ volumetricResponse=VOLUMETRIC_DATA, table=())
75     # Define sections
76     model.HomogeneousSolidSection(name='FiberSection', material='FIBER', thickness=None)
77     model.HomogeneousSolidSection(name='MatrixSection', material='MATRIX', thickness=None)
78
79     p1 = model.parts[part_name]
80     all_faces = p1.faces
81     sorted_faces = list(all_faces) # Assuming the faces are already in some consistent order
82
83     for i, face in enumerate(sorted_faces):
84         # Get centroid coordinates as a flat tuple
85         centroid_coords = face.getCentroid()
86         # If the coordinates are nested, flatten them
87         if isinstance(centroid_coords[0], tuple):
88             centroid_coords = centroid_coords[0]
89         # Use the flattened coordinates for findAt
90         face_array = p1.faces.findAt((centroid_coords,))
91         region = regionToolset.Region(faces=face_array)
92         if i % 2 == 0:
93             # Assign even-indexed faces to 'FiberSection'
94             p1.SectionAssignment(region=region, sectionName='FiberSection', offset=0.0)
95         else:
96             # Assign odd-indexed faces to 'MatrixSection'
97             p1.SectionAssignment(region=region, sectionName='MatrixSection', offset=0.0)
98
99 def assemble_and_mesh(model_name, part_name):
100     model = mdb.models[model_name]
101     part_instance = model.parts[part_name]
102
103     # Mesh controls with FREE technique and MEDIAL_AXIS algorithm for the whole part
104     part_instance.setMeshControls(regions=part_instance.faces, technique=FREE, elemShape=QUAD,
105     ↪ algorithm=MEDIAL_AXIS)
106
107     # Element type specification
108     elemType1 = mesh.ElemType(elemCode=CPE4H, elemLibrary=STANDARD)

```

```

106 part_instance.setElementType(regions=(part_instance.faces,), elemTypes=(elemType1,))
107
108 # Seeding and mesh generation
109 part_instance.seedPart(size=0.003125, deviationFactor=0.1, minSizeFactor=0.1)
110 part_instance.generateMesh()
111
112 # Now create an instance of the meshed part in the assembly
113 a = model.rootAssembly
114 a.Instance(name=part_name + '_Instance', part=part_instance, dependent=ON)
115
116 def create_node_sets(model_name, part_name, L):
117     model = mdb.models[model_name]
118     a = model.rootAssembly
119     instance = a.instances[part_name + '_Instance']
120
121     # Define the tolerance for selecting nodes
122     tol = 1e-6
123
124     # Select nodes and create sets
125     top_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=-tol, yMin=L-tol, xMax=L+tol,
126     ↪ yMax=L+tol)
127     bot_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=-tol, yMin=-tol, xMax=L+tol, yMax=tol)
128     left_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=-tol, yMin=-tol, xMax=tol, yMax=L+tol)
129     right_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=L-tol, yMin=-tol, xMax=L+tol,
130     ↪ yMax=L+tol)
131
132     # Combine edge nodes into one set
133     edge_nodes = top_nodes + bot_nodes + left_nodes + right_nodes
134
135     # Create node sets for edges
136     a.Set(nodes=top_nodes, name='TopFace')
137     a.Set(nodes=bot_nodes, name='BotFace')
138     a.Set(nodes=left_nodes, name='LeftFace')
139     a.Set(nodes=right_nodes, name='RightFace')
140     a.Set(nodes=edge_nodes, name='allEdgeNodes')
141
142     # Create node sets for corners
143     corner1_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=-tol, yMin=-tol, xMax=tol, yMax=tol)
144     corner2_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=L-tol, yMin=-tol, xMax=L+tol,
145     ↪ yMax=tol)
146     corner3_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=-tol, yMin=L-tol, xMax=tol,
147     ↪ yMax=L+tol)
148     corner4_nodes = instance.nodes.getByBoundingBox(xMin=L-tol, yMin=L-tol, xMax=L+tol,
149     ↪ yMax=L+tol)

```

```

145
146 # Sometimes corners can be identified with multiple nodes due to mesh density,
147 # so ensure to get only one node for each corner if that's required.
148 corners = corner1_nodes + corner2_nodes + corner3_nodes + corner4_nodes
149 a.Set(nodes=corners, name='cornerNodes')
150
151 def define_and_apply_bcs(model_name, part_name):
152     model = mdb.models[model_name]
153     a = model.rootAssembly
154     instance = a.instances[part_name + '_Instance']
155
156     # Find specific nodes for applying boundary conditions
157     fixed_node = instance.vertices.findAt(((0, 0, 0),), )
158     top_left_node = instance.vertices.findAt(((0, L, 0),), )
159     compression_node = instance.vertices.findAt(((L, 0, 0),), )
160
161     # Create sets for boundary condition application
162     a.Set(vertices=fixed_node, name='FixedEdge')
163     a.Set(vertices=top_left_node, name='TopLeftNode')
164     a.Set(vertices=compression_node, name='CompressionNode')
165
166     # Create a Riks analysis step
167     model.StaticRiksStep(name='Riks', previous='Initial', nlgeom=ON, initialArcInc=0.01,
168         ↪ maxArcInc=0.1, minArcInc=1E-05, maxNumInc=500)
169
170     # Apply boundary conditions
171     model.DisplacementBC(name='FixedEdgeBC', createStepName='Initial',
172         ↪ region=a.sets['FixedEdge'], u1=SET, u2=SET, ur3=UNSET)
173     model.DisplacementBC(name='TopLeftNodeBC', createStepName='Initial',
174         ↪ region=a.sets['TopLeftNode'], u1=SET, u2=UNSET, ur3=UNSET)
175     model.DisplacementBC(name='CompressionNodeBC', createStepName='Riks',
176         ↪ region=a.sets['CompressionNode'], u1=-0.6, u2=UNSET, ur3=UNSET)
177
178 def customize_history_output(model_name):
179     model = mdb.models[model_name]
180     a = model.rootAssembly
181     region_def = a.sets['cornerNodes']
182
183     # Modify an existing history output request or create a new one
184     # to record the specified output variables for the 'cornerNodes' set.
185     if 'H-Output-1' in model.historyOutputRequests:
186         model.historyOutputRequests['H-Output-1'].setValues(variables=('COOR1', 'COOR2', 'RF1',
187             ↪ 'U1'),

```

```

183         region=region_def, sectionPoints=DEFAULT,
        ↪ rebar=EXCLUDE)
184
185     else:
186         model.HistoryOutputRequest(name='H-Output-1', createStepName='Initial',
187         variables=('COOR1', 'COOR2', 'RF1', 'U1'),
188         region=region_def, sectionPoints=DEFAULT, rebar=EXCLUDE)
189
190 def submit_job(model_name, job_name):
191     model = mdb.models[model_name]
192     job = mdb.Job(name=job_name, model=model_name,
193     ↪ userSubroutine='C:\\AbaqusJobs\\Alpha.for')
194
195 # Main loop to run all operations for each zf value
196 for zf, fiberspacing, matrixspacing, model_name, part_name, job_name in zip(zf_values,
197 ↪ fiberspacing_values, matrixspacing_values, model_names, part_names, job_names):
198     mdb.Model(name=model_name) # Create the model
199     create_sketches_and_parts(model_name, part_name, zf, fiberspacing, matrixspacing) # Create
200     ↪ sketches and parts
201     define_materials_and_sections(model_name, part_name) # Define materials and sections
202     assemble_and_mesh(model_name, part_name) # Assemble and apply mesh controls
203     create_node_sets(model_name, part_name, L) # Create node sets for edges and corners
204     define_and_apply_bcs(model_name, part_name) # Apply loads and boundary conditions
205     customize_history_output(model_name) # Customize history output for corner nodes
206     submit_job(model_name, job_name) # Submit the job for analysis

```

---

Το μοναδικό απαραίτητο κομμάτι του κώδικα είναι ο υπολογισμός της ατέλειας  $\Delta X_2$  και η εφαρμογή της, μαζί με τον σχεδιασμό των sketches που απαιτούνται από το μοντέλο μας. Επιπλέον, ο κώδικας επιτρέπει στον χρήστη να μεταβάλλει τον επιθυμητό υπολογιστικό φόρτο που σχετίζεται με την ακρίβεια της ατέλειας, εισάγοντας τις κατάλληλες σταθερές και παραμέτρους στην αρχή του script. Συνοπτικά, τα απαραίτητα functions του κώδικα είναι τα εξής:

- def calculate\_dx2
- def create\_sketches\_and\_parts

Όλα τα υπόλοιπα functions μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσα από το πρόγραμμα ABAQUS. Δημιουργήθηκαν ωστόσο για λόγους ακρίβειας και αποφυγής ανθρωπίνου σφάλματος λόγω

της περίπλοκης και χρονοβόρας διαδικασίας. Περιλαμβάνουν όλα τα αναγκαία βήματα αυτοματοποιημένα για εύκολη μελλοντική αναπαραγωγή και τροποποίηση.

## A.4 Matlab

Για την σωστή αναπαράσταση ενός αντιπροσωπευτικού στοιχείου όγκου (ΑΣΟ), το μοντέλο μας απαιτεί την ενσωμάτωση περιοδικών συνοριακών συνθηκών (ΠΣΣ). Για να μπορέσουμε να εισάγουμε τις αναγκαίες γραμμές κώδικα που αναπαριστούν τις συναρτήσεις των ΠΣΣ, χρειάζεται να μορφοποιήσουμε το αρχείο .inp του μοντέλου μας, το οποίο περιλαμβάνει όλη την πληροφορία του αντιπροσωπευτικού υλικού, εκτός του περιβάλλοντος του ABAQUS στη Matlab. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε, δημιουργήθηκε για τη χειροκίνητη παραγωγή περιοδικών συνοριακών συνθηκών σε 2D περιβάλλον σε μοντέλα με υψηλό αριθμό στοιχείων.

---

```
1 %% PBCGen2D_SemiAuto: PBCGenerator for ABAQUS - A semi-automatic approach
2 %Author: Dr Michael Okereke (c) CMVideos Ltd UK
3 %Purpose: The script generates text input of *NSet and *Equation commands
4 %         that prescribe PBC for a typical ABAQUS model input (*.inp) file. It is
5 %         semi-automatic as this scripts writes the PBC commands but the user has to
6 %         manually provide nodal list for edge nodes as well as update the original
7 %         input file.
8 %Version: 1.0
9 %Date: 12.11.2022
10
11 %% Strucutre and code lables for the 2D RVE
12 %
13 %         YPos
14 %   N4-----N3
15 %   |           |
16 %   |           |
17 % XNeg |           | XPos
18 %   |           |
19 %   N1 -----N2
20 %         YNeg
21 %
22
23 %% Nodal and Instance input
24 instanceName = 'HyperZf0X_Instance';
```

```

25 allEdgeNodes      = [ ];
26 allEdgeNodesExtra = [ ];
27 cornerNodesN1     = ;
28 cornerNodesN2     = ;
29 cornerNodesN3     = ;
30 cornerNodesN4     = ;
31 xPos              = [ ];
32 xNeg              = [ ];
33 yPos              = [ ];
34 yNeg              = [ ];
35 %% Find Internal Nodes
36 allEdgeNodes      = reshape(allEdgeNodes,1,[]); %change matrix to column matrix
37 allEdgeNodes      = [allEdgeNodes reshape(allEdgeNodesExtra,1,[])];
38 cornerNodes       = [cornerNodesN1 cornerNodesN2 cornerNodesN3 cornerNodesN4];
39 xPosInt           = setdiff(xPos,cornerNodes, 'stable');
40 xNegInt            = setdiff(xNeg,cornerNodes, 'stable');
41 yPosInt           = setdiff(yPos,cornerNodes, 'stable');
42 yNegInt            = setdiff(yNeg,cornerNodes, 'stable');
43 xEdgeInt           = [xPosInt' xNegInt'];
44 yEdgeInt           = [yPosInt' yNegInt'];
45
46 %CreateFile Name
47 txtFileName = ['NSetEqnFile for ', instanceName, '.txt'];
48 fidNSetEqn = fopen(txtFileName, 'w+');
49
50 %% Write NSet commands
51 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
52 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
53 fprintf(fidNSetEqn, '*** \n');
54 fprintf(fidNSetEqn, '***Beginning of *NSet Group for All Boundary Nodes ----- \n');
55 for i = 1:length(allEdgeNodes)
56     fprintf(fidNSetEqn, ['*Nset, nset=N%d, instance=',instanceName, ' \n'], allEdgeNodes(i));
57     fprintf(fidNSetEqn, ' %d, \n',allEdgeNodes(i));
58 end
59 fprintf(fidNSetEqn, '***End of *NSet Group for All Boundary Nodes ----- \n');
60 fprintf(fidNSetEqn, '***\n');
61
62
63 %% Write *Equation commands
64 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
65 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
66 fprintf(fidNSetEqn, '***Beginning of *NSet Equation List ----- \n')      ;
67
68 %Connect Xpos to Xneg faces

```

```

69 for j = 1:length(xEdgeInt(:,1))
70     %X-axis degree of freedom
71     fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
72     fprintf(fidNSetEqn, '** XEdge >> Constraint: Eqn-%d_11_local_axes \n', j);
73     fprintf(fidNSetEqn, '*Equation \n');
74     fprintf(fidNSetEqn, '4 \n');
75     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, 1. \n', xEdgeInt(j,1)) ;
76     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, -1. \n', xEdgeInt(j,2)) ;
77     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, -1. \n', cornerNodes(2)) ;
78     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, 1. \n', cornerNodes(1)) ;
79     %Y-axis degree of freedom
80     fprintf(fidNSetEqn, '*** \n');
81     fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
82     fprintf(fidNSetEqn, '** XEdge >> Constraint: Eqn-%d_22_local_axes \n', j);
83     fprintf(fidNSetEqn, '*Equation \n');
84     fprintf(fidNSetEqn, '4 \n');
85     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, 1. \n', xEdgeInt(j,1)) ;
86     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, -1. \n', xEdgeInt(j,2)) ;
87     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, -1. \n', cornerNodes(2)) ;
88     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, 1. \n', cornerNodes(1)) ;
89 end
90 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
91
92 %Connect cornerNodes (only along x-axis)
93 for k = 1
94     %X-axis degree of freedom for Node N3
95     fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
96     fprintf(fidNSetEqn, '** XEdge >> Constraint: Eqn-%d_11_local_axes (cornerNode N3) \n', k);
97     fprintf(fidNSetEqn, '*Equation \n');
98     fprintf(fidNSetEqn, '4 \n');
99     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, 1. \n', cornerNodes(3)) ;
100    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, -1. \n', cornerNodes(4)) ;
101    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, -1. \n', cornerNodes(2)) ;
102    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, 1. \n', cornerNodes(1)) ;
103    %Y-axis degree of freedom for Node N3
104    fprintf(fidNSetEqn, '*** \n');
105    fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
106    fprintf(fidNSetEqn, '** XEdge >> Constraint: Eqn-%d_22_local_axes (cornerNode N3) \n', k);
107    fprintf(fidNSetEqn, '*Equation \n');
108    fprintf(fidNSetEqn, '4 \n');
109    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, 1. \n', cornerNodes(3)) ;
110    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, -1. \n', cornerNodes(4)) ;
111    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, -1. \n', cornerNodes(2)) ;
112    fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, 1. \n', cornerNodes(1)) ;

```



```

113 end
114 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
115 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
116
117 %Connect Ypos to Yneg faces
118 for k = 1:length(yEdgeInt(:,1))
119     %X-axis degree of freedom
120     fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
121     fprintf(fidNSetEqn, '** YEdge >> Constraint: Eqn-%d_11_local_axes \n', k);
122     fprintf(fidNSetEqn, '*Equation \n');
123     fprintf(fidNSetEqn, '4 \n');
124     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, 1. \n', yEdgeInt(k,1)) ;
125     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, -1. \n', yEdgeInt(k,2)) ;
126     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, -1. \n', cornerNodes(4)) ;
127     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 1, 1. \n', cornerNodes(1)) ;
128     %Y-axis degree of freedom
129     fprintf(fidNSetEqn, '** \n');
130     fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
131     fprintf(fidNSetEqn, '** YEdge >> Constraint: Eqn-%d_22_local_axes \n', k);
132     fprintf(fidNSetEqn, '*Equation \n');
133     fprintf(fidNSetEqn, '4 \n');
134     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, 1. \n', yEdgeInt(k,1)) ;
135     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, -1. \n', yEdgeInt(k,2)) ;
136     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, -1. \n', cornerNodes(4)) ;
137     fprintf(fidNSetEqn, 'N%d, 2, 1. \n', cornerNodes(1)) ;
138 end
139
140 %Display End
141 fprintf(fidNSetEqn, '***End of *NSet Equations for all matched pair of edges ----- \n');
142 fprintf(fidNSetEqn, '*** \n');
143 fprintf(fidNSetEqn, '** ----- \n');
144 fprintf(fidNSetEqn, '** -----');
145
146 %% Close all files
147 fclose(fidNSetEqn);

```

---

## A.5 Mathematica

Τέλος, η Mathematica αποτέλεσε σημαντικό εργαλείο για τους υπολογισμούς των αναλυτικών λύσεων του τέλειου μοντέλου, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως βασικό σημείο σύγκρισης με τους δικούς μας υπολογισμούς πεπερασμένων στοιχείων του μοντέλου με γεωμετρική ατέλεια.

## Bibliography

- [1] History Of Composites. 2024. URL: <https://compositeslab.com/composites-101/history-of-composites/index.html>.
- [2] Composites UK. 2024. URL: <https://compositesuk.co.uk/composite-materials/applications/aerospace/>.
- [3] Spasenovic Jovana and Blagojevic Ivan. "Composite materials in automotive industry – a review." In: 49.2 (2021), pp. 57–68.
- [4] Vahid Monfared et al. "A systematic study on composite materials in civil engineering." In: Ain Shams Engineering Journal 14.12 (Dec. 2023), p. 102251. ISSN: 2090-4479. DOI: 10.1016/j.asej.2023.102251. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2090447923001405>.
- [5] Lei Zhang. The Application of Composite Fiber Materials in Sports Equipment. Jan. 2015. DOI: 10.2991/emim-15.2015.88.
- [6] SMI COMPOSITES. 2018. URL: <https://www.smicomposites.com/the-role-of-composite-materials-in-advanced-prosthetics-and-orthotics/>.
- [7] Alaa Emad Eldeeb, Salwa Salah, and Nermeen A. Elkasabgy. "Biomaterials for Tissue Engineering Applications and Current Updates in the Field: A Comprehensive Review." In: AAPS PharmSciTech 23.7 (Sept. 2022), p. 267. ISSN: 1530-9932. DOI: 10.1208/s12249-022-02419-1. URL: <https://doi.org/10.1208/s12249-022-02419-1>.
- [8] Gerhard Holzapfel. "Biomechanics of Soft Tissue." In: The Handbook of Materials Behavior Models 3 (Dec. 2001), pp. 1049–1063. DOI: 10.1016/B978-012443341-0/50107-1.

- [9] Graeme W. Milton. Theory of Composites. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 978-0-521-78125-1. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/theory-of-composites/038F75470C46C48548188FFEA748F589>.
- [10] M.P. Santisi d'Avila, N. Triantafyllidis, and G. Wen. "Localization of deformation and loss of macroscopic ellipticity in microstructured solids." In: SI: Pierre Suquet Symposium 97 (Dec. 2016), pp. 275–298. ISSN: 0022-5096. DOI: 10.1016/j.jmps.2016.07.009. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616304677>.
- [11] R. Tyrrell Rockafellar. Convex Analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970. ISBN: 978-0-691-01586-6. URL: <https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691015866/convex-analysis>.
- [12] R. W. Ogden. Nonlinear Elastic Deformations. New York: Dover Publications, 1984. ISBN: 9780486696482.
- [13] Μιχάλης Αγόρας. Σημειώσεις Διαλέξεων στα Σύνθετα Υλικά. Πάρθηκε από e-class Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, 2020.
- [14] Ν. Αράβας. Μηχανική των Υλικών. Greece: Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- [15] Abaqus Documentation - Hyperelastic Behavior of Rubberlike Materials. 2006. URL: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt05ch17s05abm07.html#usb-mat-chyperelastic>.