

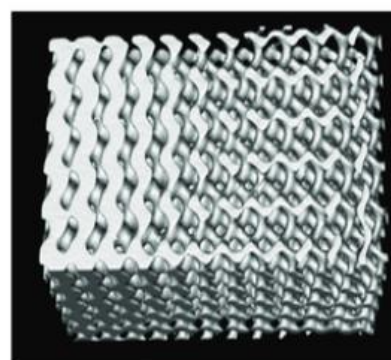


**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

Διπλωματική Εργασία

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΜΕ
ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

ΔΑΝΑΗ ΑΝΑΛΥΤΗ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2024

© 2024 Δανάη Αναλυτή

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Χρήστος Παπακωνσταντίνου
(Κύριος Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Παναγιώτης Γουργιώτης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Λάμπρος Κούτας
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παναγιώτη Γουργιώτη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Διευκρινίζεται πως η παρούσα διπλωματική εργασία ξεκίνησε και περατώθηκε με τον κύριο Παναγιώτη Γουργιώτη ως κύριο επιβλέποντα, λόγω όμως του διορισμού του στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, ως κύριος επιβλέπων ορίστηκε ο Αναπληρωτής Καθηγητής, κύριος Χρήστος Παπακωνσταντίνου.

Επίσης, θέλω να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χρήστο Παπακωνσταντίνου καθώς και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Λάμπρο Κούτα για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Τέλος, είμαι ευγνώμων στην οικογένειά μου, καθώς και σε όλους όσους στάθηκαν στο πλάι μου, για την αμέριστη στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των χρόνων φοίτησής μου.

Δανάη Αναλυτή

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΙΚΑ ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Δανάη Αναλυτή

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2024

Επιβλέπων Καθηγητής: Χρήστος Παπακωνσταντίνου, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η ανάλυση συγκέντρωσης τάσεων σε υλικά με λειτουργικά διαβαθμισμένες ιδιότητες, γνωστά ως FGM. Πιο συγκεκριμένα, μελετάται μία τετραγωνική πλάκα στο επίπεδο με κυκλική οπή στο μέσον της, η οποία υπόκειται σε μονοαξονική εφελκυστική τάση. Με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, ABAQUS, πραγματοποιήθηκε η προσομοίωση πλάκας με χωρικά μεταβαλλόμενες ιδιότητες (FGM) με τη χρήση συγκεκριμένων νόμων, αντλούμενων από τη βιβλιογραφία. Στα λειτουργικά διαβαθμισμένα υλικά που εξετάζονται συμπεριλαμβάνεται και η ανάλυση αυξητικού υλικού. Μελετήθηκε η συμπεριφορά της πλάκας σε συνδυασμό με τις εκάστοτε μεταβαλλόμενες ιδιότητες, πάνω στο κομμάτι που αφορά τη μέγιστη αναπτυσσόμενη κύρια τάση στο επίπεδο λόγω της ασυνέχειας στο μέσον της, δηλαδή της κυκλικής οπής. Αναλύεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson σε συνάρτηση με την απόσταση από την οπή καθώς και η αντίστοιχη αύξηση ή μείωση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων. Εν κατακλείδι, εξάγεται το συμπέρασμα πως η εφαρμογή κατάλληλων FGM μπορεί να συμβάλει στη μείωση των αναπτυσσόμενων τάσεων στις κρίσιμες περιοχές του υλικού, γεγονός που συνεπάγεται την ελάττωση της καταπόνησης της κατασκευής.

Λέξεις Κλειδιά: Λειτουργικά διαβαθμισμένα υλικά, συγκέντρωση τάσεων, αυξητικά υλικά, πρόβλημα Kirsch

STRESS CONCENTRATION PROBLEMS IN MICROSTRUCTURAL MATERIALS WITH GRADED MECHANICAL PROPERTIES

Danai Analyti

University of Thessaly, Department of Civil Engineering, 2024

Supervisor: Christos Papakonstantinou, Associate Professor

Abstract

The subject of this paper is the analysis of stress concentration in materials with functionally graded properties, known as FGMs. More specifically, a square plate in the plane with a circular hole in its middle, subjected to uniaxial tensile stress, is studied. Using the finite element analysis software program, ABAQUS, the simulation of a plate with spatially varying properties (FGM) was carried out using specific laws derived from the bibliography/literature. The functionally graded materials considered include the analysis of auxetic material. The behaviour of the plate in combination with the respective varying properties was studied over the part concerning the maximum developing principal in-plane stress due to the discontinuity in the middle of the plate, i.e. the circular hole. The variation of the elastic modulus and Poisson's ratio as a function of the distance from the hole and the corresponding increase or decrease in the stress concentration factor are analyzed. On a final note it can be deducted that the application of appropriate FGM can contribute to the reduction of the developing stresses in the critical areas of the material, which entails the reduction of the stress on the structure.

Keywords: *Functionally graded materials, stress concentration, auxetic materials, Kirsch's solution*

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή στα Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά	1
1.1	Η Ιστορία των FGMs	2
1.2	FGMs και γενική εφαρμογή σε κλάδους	5
1.3	FGMs στο αντικείμενο του πολιτικού μηχανικού	6
1.4	Αυξητικά Υλικά (Auxetic Materials)	8
1.4.1	Λόγος Poisson	8
1.4.2	Λειτουργία αυξητικών Υλικών	9
1.5	Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων (Stress Concentration Factor)	10
1.5.1	Συγκέντρωση Τάσεων	10
1.5.2	Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων	11
1.5.3	Εντατική κατάσταση γύρω από κυκλική οπή	11
Κεφάλαιο 2	Ομογενή υλικά και συγκέντρωση τάσεων	14
2.1	Συνάρτηση Τάσης Airy (Airy Stress Function)	14
2.2	Πρόβλημα Kirsch	15
2.2.1	Μονοαξονική τάση – Kirsch’s solution (1898)	15
2.3	Συγκέντρωση Τάσεων με συντελεστή $Kt = 3$ (Stress Concentration Factor, $Kt = 3$)	17
2.3.1	Σχηματική αναπαράσταση κατάστασης καταπόνησης	17
2.3.2	Σχηματική αναπαράσταση ροής τάσεων γύρω από την οπή	18
2.3.3	Πλάκα πεπερασμένων διαστάσεων	19
Κεφάλαιο 3	FGM πλάκα με οπή υπό μονοαξονική φόρτιση και Συγκέντρωση τάσεων	211
3.1	Αντικείμενο και στόχος της εργασίας	211
3.2	Επίλυση προβλήματος συγκέντρωσης τάσεων στην FGM πλάκα	233
Κεφάλαιο 4	Συμπεράσματα και σχολιασμοί	46
4.1	Συμπερασματική ανάλυση	466
4.2	Σχολιασμός συμπερασμάτων	477

Βιβλιογραφία 4949

Παράρτημα Α 511

Κατάλογος Πινάκων

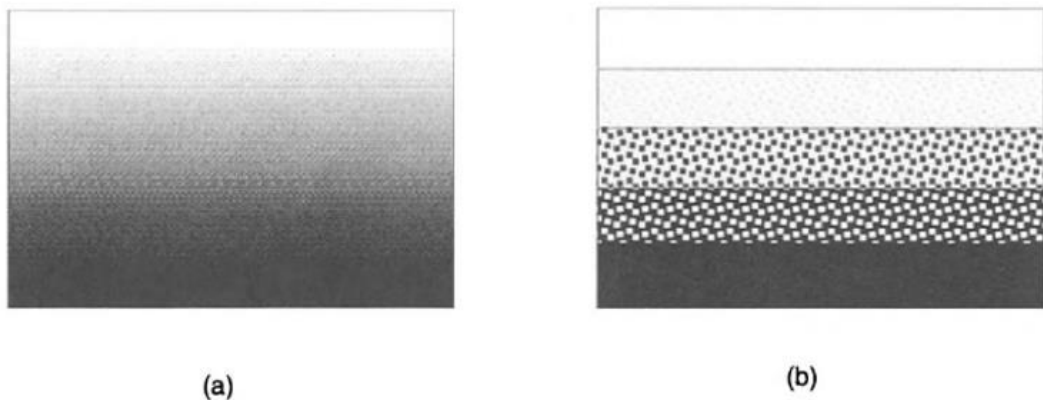
- Πίνακας 3.1:** : Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε πλέγματος (με βάση τα Seeds που χρησιμοποιήθηκαν κατά την πυκνωση) με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K που προκύπτει. 32
- Πίνακας 3.2:** Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε n με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.5).**Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.**5
- Πίνακας 3.3:** Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε n με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.6). 466
- Πίνακας 3.4:** Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.7).**Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.**7
- Πίνακας 3.5:** Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε n με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.8).**Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.**8
- Πίνακας 4.1:** Συγκεντρωτικός πίνακας που συνοψίζει όλα τα αποτελέσματα για την εκάστοτε συνάρτηση.**Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.**7

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1.1: Κατανομή τάσεων γειτονικής περιοχής εγκάρσιο άξονα κυκλικής οπής.....	12
Σχήμα 3.1.1: : Πεπερασμένων διαστάσεων πλάκα με κυκλική οπή στο μέσον της, στο περιβάλλον του λογισμικού προγράμματος ABAQUS.	24
Σχήμα 3.1.2: Σχηματική αναπαράσταση εξεταζόμενης πλάκας υπό μονοαξονική εφελκυστική τάση σ και διαχωρισμός της σε τέσσερα συμμετρικά κομμάτια.....	25
Σχήμα 3.1.3: Η πλάκα του προβλήματος χωρισμένη στο $\frac{1}{4}$	25
Σχήμα 3.1.4: Τοποθέτηση συνοριακών συνθηκών με τη χρήση κυλίσεων στην αριστερή και στην κάτω παρειά του $\frac{1}{4}$ της πλάκας.	26
Σχήμα 3.1.5: Η πλάκα του προβλήματος χωρισμένη σε 50 διαφορετικά κάθετα layers.	27
Σχήμα 3.1.6: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=1.	28
Σχήμα 3.1.7: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.5.	29
Σχήμα 3.1.8: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.2.	30
Σχήμα 3.1.9: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.1.	31
Σχήμα 3.1.10: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.05.	32
Σχήμα 3.1.11: Διάγραμμα ανάλυσης σύγκλισης.....	33
Σχήμα 3.1.12: Διάγραμμα μεταβολής του Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K για τη συνάρτηση (3.5).....	34
Σχήμα 3.1.13: Διάγραμμα μεταβολής του Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K για τη συνάρτηση (3.6).....	36
Σχήμα 3.1.14: Διάγραμμα μεταβολής του Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K για τη συνάρτηση (3.8).....	38
Σχήμα 3.1.15: Προσομοίωση του ABAQUS που απεικονίζει τα εντασιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στην πλάκα σύμφωνα με τη συνάρτηση (3.5).	39
Σχήμα 3.1.16: Υπομνήματα του ABAQUS με τις μέγιστες κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε αντιστοιχία με το Σχ. 3.1.15 για $n=-0.4$, $n=0$ και $n=0.4$ της συνάρτησης (3.5).....	39
Σχήμα 3.1.17: Προσομοίωση του ABAQUS που απεικονίζει τα εντασιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στην πλάκα σύμφωνα με τη συνάρτηση (3.6).	40
Σχήμα 3.1.18: Υπομνήματα του ABAQUS με τις μέγιστες κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε αντιστοιχία με το Σχ. 3.1.17 για $K=-0.5$ και $K=5$ της συνάρτησης (3.6).....	40
Σχήμα 3.1.19: Προσομοίωση του ABAQUS που απεικονίζει τα εντασιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στην πλάκα σύμφωνα με τη συνάρτηση (3.8).	41
Σχήμα 3.1.20: Υπομνήματα του ABAQUS με τις μέγιστες κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε αντιστοιχία με το Σχ. 3.1.19 για $n=0$ και $n=0.4$ της συνάρτησης (3.8).	41
Σχήμα 3.1.21: Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας Young E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.5).	42
Σχήμα 3.1.22: Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας Young E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.6).	43
Σχήμα 3.1.23: Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας Young E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.7).	44
Σχήμα 3.1.24: Διάγραμμα μεταβολής του λόγου Poisson ν συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.8).....	45

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή στα Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά

Τα Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά, γνωστά και ως FGMs (Functionally Graded Materials), είναι προηγμένα υλικά με διαβαθμισμένες μηχανικές ιδιότητες, τα οποία χαρακτηρίζονται από τη χωρική μεταβολή των ιδιοτήτων τους με συνεχή τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, τα FGMs παρουσιάζουν διακυμάνσεις τόσο στη σύνθεση όσο και στη δομή σταδιακά σε σχέση με τον όγκο. Είναι σχεδιασμένα για συγκεκριμένη εφαρμογή ή λειτουργία, στην οποία η χωρική διαβάθμιση της δομής και της σύνθεσής τους προσφέρει από μόνη της προσαρμοσμένες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα χημικές, μηχανικές, μαγνητικές, θερμικές και ηλεκτρικές ιδιότητες. Υπάρχουν FGMs τα οποία είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να έχουν συνεχείς διαβαθμισμένες ιδιότητες (continuous-graded structures) και άλλα σχεδιασμένα να έχουν σταδιακά διαβαθμισμένες ιδιότητες (stepwise-graded structures).



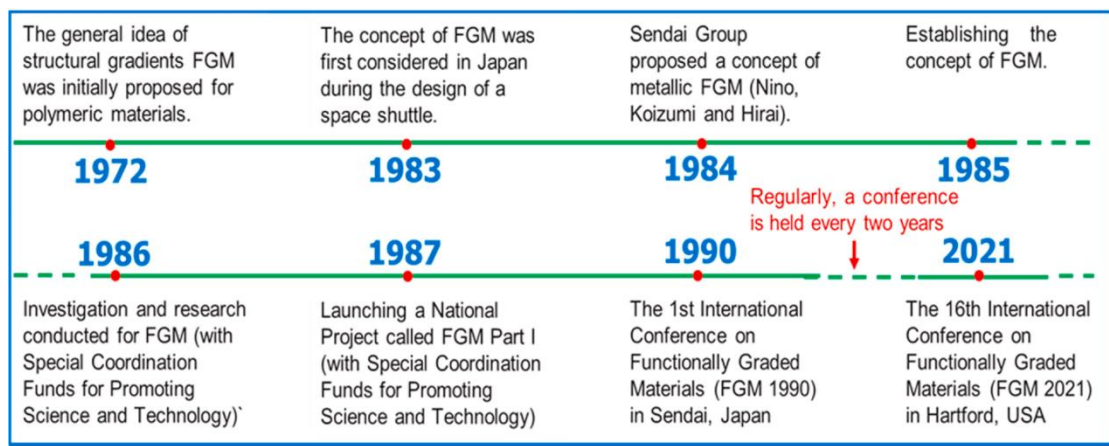
Εικόνα 1.1: (a) Συνεχείς και (b) σταδιακά διαβαθμισμένες ιδιότητες. [1]

Ο αρχικός σκοπός των FGMs ήταν η χαλάρωση της εσωτερικής θερμικής καταπόνησης σε υψηλές θερμοκρασίες μέσω της σταδιακής αλλαγής του συντελεστή θερμικής διαστολής μεταξύ της μπροστινής και της πίσω πλευράς του σώματος. Υπάρχει μία ευδιάκριτη διεπαφή μεταξύ δύο υλικών σε ένα συνηθισμένο σύνθετο σώμα, σε αντίθεση με ένα FGM, όπου η διαφορά εντοπίζεται στην κατανομή ιδιοτήτων (π.χ. συντελεστής θερμικής διαστολής, θερμική αγωγιμότητα, θερμική αντίσταση κ.ά.). Πιο συγκεκριμένα, ένα συνηθισμένο σύνθετο υλικό περιέχει μία ξαφνική αλλαγή στις ιδιότητές του στη διεπαφή, ενώ ένα υλικό FGM παρουσιάζει μια σταδιακή αλλαγή στις χημικές ιδιότητες, τη δομή, το μέγεθος των κόκκων, το επίπεδο υφής, την πυκνότητα και άλλες φυσικές ιδιότητες από στρώμα σε στρώμα. Η διαφορά στους συντελεστές θερμικής διαστολής στη διεπιφάνεια προκαλεί εσωτερική θερμική καταπόνηση

σε υψηλές θερμοκρασίες, οδηγώντας μερικές φορές στην καταστροφή των διεπαφών. Ωστόσο, ένα υλικό FGM μειώνει τη θερμική καταπόνηση σχεδόν κατά 30% με αποτέλεσμα να μπορεί ενδεχομένως να αποτρέψει την καταστροφή της διεπαφής. Η αρχική ιδέα των FGMs για τη μείωση της θερμικής καταπόνησης επεκτάθηκε στα γενικά υλικά το 1988 και ιδρύθηκε ο οργανισμός με το όνομα "Functionally Graded Materials Forum, Japan". Στόχος της παραγωγής των FGM είναι η εξάλειψη του μακροσκοπικού ορίου σε υλικά στα οποία οι μηχανικές, φυσικές και χημικές ιδιότητες του υλικού αλλάζουν συνεχώς και δεν έχουν ασυνέχειες εντός του υλικού. Τα FGMs έχουν καλύψει όχι μόνο τα ανθεκτικά στη θερμότητα υλικά αλλά και τα δομικά υλικά, τα βιοϋλικά, τους ημιαγωγούς και τα υλικά ηλεκτροδίων. Η επιστήμη των FGMs έχει εφαρμογή σε πολυάριθμους τομείς και κλάδους όπως η μηχανική, η αεροδιαστημική, η βιοϊατρική κ.ο.κ..

1.1 Η Ιστορία των FGMs

Η ιδέα της εφαρμογής των FGMs εξετάστηκε για πρώτη φορά το 1983-1984 στην Ιαπωνία και σχετιζόταν βαθιά με το σχεδιασμό διαστημικού αεροπλάνου, ο οποίος προτάθηκε από τον Οργανισμό Επιστήμης και Τεχνολογίας της χώρας. Το διαστημικό αεροπλάνο είναι ένας συνδυασμός αεριωθούμενου αεροπλάνου και πυραύλου που μετακινείται μεταξύ της γης και του διαστήματος. Ο σχεδιασμός του βασιζόταν σε έναν συνδυασμό χρησιμοποιούμενων υλικών ο οποίος θα εξυπηρετούσε τον σκοπό ενός θερμικού φραγμού, ικανού να αντέξει μια θερμοκρασία επιφάνειας 2000 K και μια διαβάθμιση θερμοκρασίας 1000 K σε ένα τμήμα 10 χιλιοστών. Τα τελευταία έτη, τα FGMs έχουν γίνει πιο δημοφιλή στην Ευρώπη και ιδιαίτερα στη Γερμανία. Ένα διαπεριφερειακό συνεργατικό ερευνητικό κέντρο (SFB Transregio) χρηματοδοτείται από το 2006 προκειμένου να αξιοποιήσει τις δυνατότητες ταξινόμησης μονοϋλικών, όπως είναι ο χάλυβας, το αλουμίνιο και το πολυπροπυλένιο, χρησιμοποιώντας θερμομηχανικά συζευγμένες διαδικασίες παραγωγής.



Εικόνα 1.2: Ιστορική επισκόπηση των σχετικών ορόσημων στην έρευνα και την ανάπτυξη των FGMs. [2]

Το Σχήμα δείχνει ένα ιστορικό σχεδιάγραμμα ορόσημων της επιστήμης των FGMs, όπου:

- 1972

Η γενική ιδέα των δομικών κλίσεων FGM προτάθηκε αρχικά για πολυμερή υλικά.

- 1983

Η ιδέα των FGM εξετάζεται για πρώτη φορά στην Ιαπωνία κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού ενός διαστημικού λεωφορείου.

- 1984

Ο Όμιλος Sendai προτείνει μια ιδέα μεταλλικού FGM (Nino, Koizumi και Hirai).

- 1985

Καθιέρωση της έννοιας των FGM.

- 1986

Μελέτη και έρευνα που πραγματοποιήθηκε για τα FGM (μαζί με το ερευνητικό ταμείο Special Coordination Funds for Promoting Science and Technology).

- 1987

Έναρξη ενός Εθνικού Έργου που ονομάζεται FGM Part I (μαζί με το ερευνητικό ταμείο Special Coordination Funds for Promoting Science and Technology).

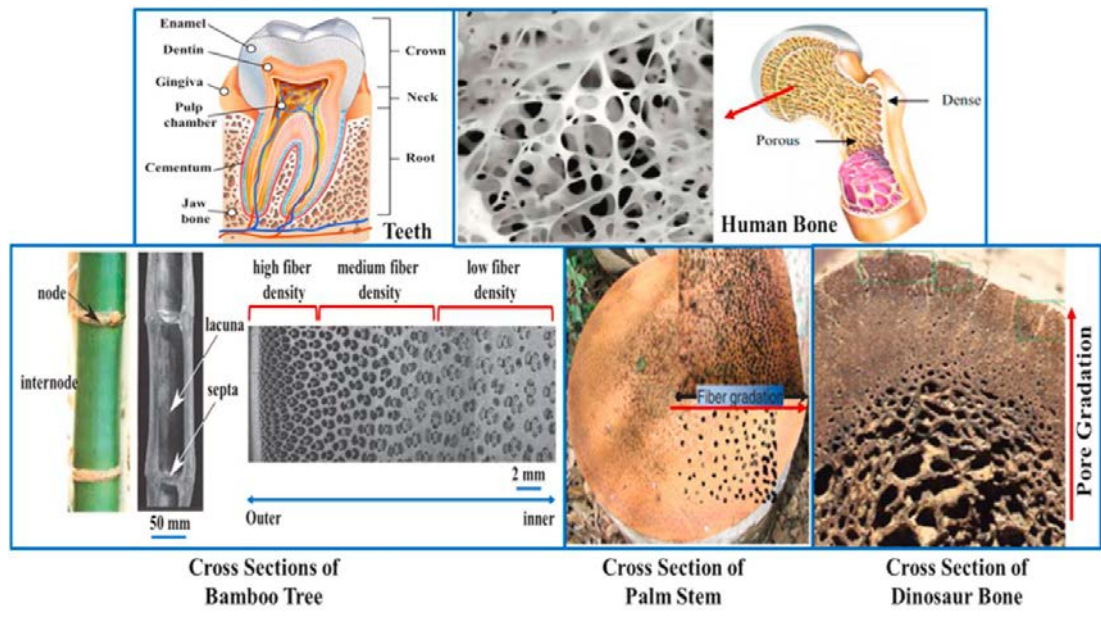
- 1990

Το 1^ο Διεθνές Συνέδριο με θέμα τα Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά (FGM 1990) στην πόλη Σεντάι της Ιαπωνίας.

- 2021

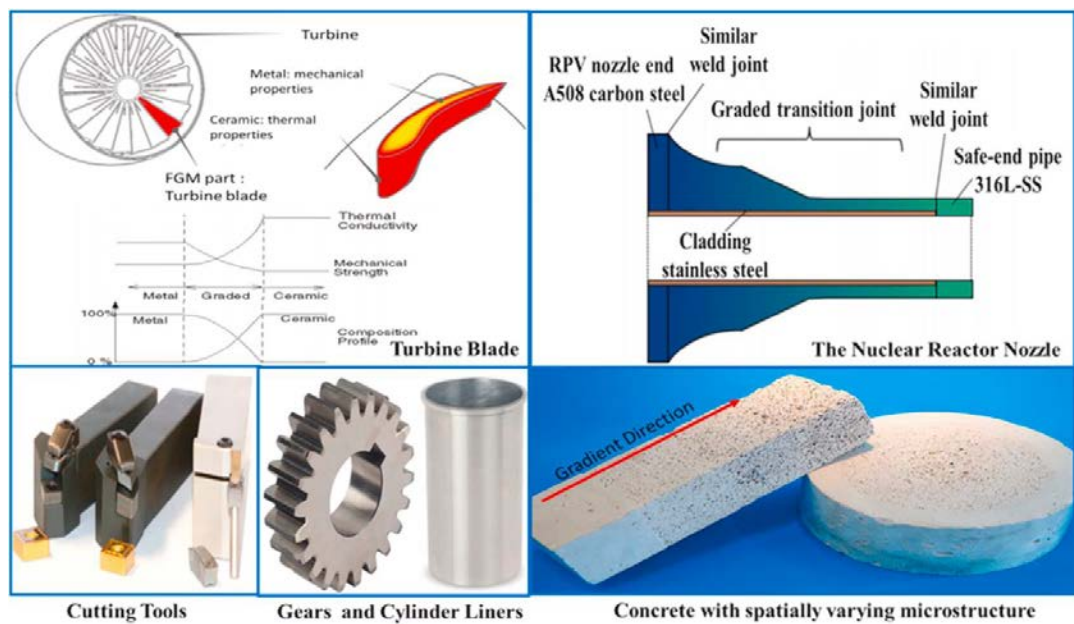
Το 16^ο Διεθνές Συνέδριο με θέμα τα Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά (FGM 2021) στην πόλη Χάρτφορντ των Η.Π.Α..

Η ιδέα των δομών με διαβαθμισμένες ιδιότητες δεν είναι νέα καθώς υπάρχουν πολλά παραδείγματα στη φύση, όπου τα πιο σημαντικά εξ' αυτών είναι τα μέρη του ανθρώπινου σώματος, όπως τα οστά, τα δόντια και το δέρμα, επειδή αυτά τα μέρη έχουν διαβάθμιση στις ιδιότητες της σκληρότητας και της ολκιμότητας, όπως επίσης και οι βιολογικοί ιστοί των ζώων και των δέντρων. Παρακάτω, στην Εικόνα (1.3), παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια παραδείγματα FGMs που υπάρχουν στη φύση όπως είναι τα δόντια και συγκεκριμένα οι οδοντικές στεφάνες (στην εσωτερική επιφάνεια χρειάζεται υψηλή ολκιμότητα για να αποφευχθεί η κόπωση και η ευθραυστότητα ενώ στην εξωτερική επιφάνεια χρειάζεται υψηλή σκληρότητα για να αποφευχθεί η φθορά), τα ανθρώπινα οστά, οι διατομές δέντρου μπαμπού, η διατομή στελέχους φοίνικα και η διατομή οστού δεινοσαύρου.



Εικόνα 1.3: Φυσικά παραδείγματα FGM που είναι δομημένα με διαβαθμισμένες ιδιότητες. [2]

Ο κύριος λόγος εμφάνισης αρκετών μεθόδων παραγωγής FGMs είναι η αναγκαιότητα αυτών των υλικών σε μια ποικιλία εφαρμογών της μηχανικής λόγω των εξαιρετικών ιδιοτήτων τους. Η παρακάτω εικόνα (Εικ. 1.4) παρουσιάζει κατασκευασμένα υλικά τα οποία παρουσιάζουν διαβαθμισμένες ιδιότητες.



Εικόνα 1.4: Παραδείγματα FGM κατασκευασμένα με διαβαθμισμένες ιδιότητες. [2]

1.2 FGMs και γενική εφαρμογή σε κλάδους

Τα FGMs έγιναν αρκετά ελκυστικά τα τελευταία χρόνια λόγω της ευελιξίας τους στην προσαρμογή των ιδιοτήτων των υλικών τους που τα καθιστούν κατάλληλα υλικά για μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών σε τομείς όπως η αεροδιαστημική, η πυρηνική ενέργεια, η βιολογική μηχανική κ.ά.. Η σύνθεσή τους συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των FGMs με τα χαρακτηριστικά των πορωδών υλικών. Αυτά τα υλικά έχουν αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά, από τα οποία ξεχωρίζει η αναλογία ακαμψίας-βάρους. Η ικανότητα παροχής μοναδικών μηχανικών ιδιοτήτων με σχετικά μικρό βάρος καθιστά το πορώδες FGM ένα ευρέως εφαρμοσμένο υλικό σε διάφορους τομείς. Λόγω της πιθανής εφαρμογής τους σε διαφορετικά συστήματα, το συγκεκριμένο υλικό έχει τραβήξει το ενδιαφέρον ερευνητικών ομάδων όσον αφορά την ανάπτυξη και την εφαρμογή στη μηχανική της πραγματικής ζωής. Οι μέθοδοι κατασκευής των FGMs είναι μία αναπτυσσόμενη περιοχή, με τη διαδικασία πυροσυσσωμάτωσης να είναι η πιο χρησιμοποιούμενη λόγω της σχέσης κόστους-οφέλους. Έχουν αποτελέσει αντικείμενο πολλών μελετών σχετικά με βιοϊατρικές εφαρμογές, ιδιαίτερα για προθέσεις ισχίου και γόνατος, χάρη στη μεγάλη βιοσυμβατότητά τους ως βιοϋλικά, καθώς και αντικείμενο της οπτοηλεκτρονικής και των ενεργειακών υλικών. Τα FGMs είναι χρήσιμα σε αμυντικές εφαρμογές ως υλικά ανθεκτικά στη διείσδυση που χρησιμοποιούνται για πλάκες θωράκισης και αλεξίσφαιρα γιλέκα λόγω της ικανότητάς τους να εμποδίζουν τη διάδοση ρωγμών. Το ινοπλισμένο πολυμερές (FRP) είναι μία ακόμη εφαρμογή των FGMs για την ενίσχυση υλικών σκυροδέματος. Η δυνατότητα σχεδιασμού FGM με τις απαιτούμενες ιδιότητες σε μηχανικό, φυσικό ή βιολογικό επίπεδο, καθιστά αυτά τα υλικά άριστα υποψήφια για την κατασκευή πολυάριθμων προϊόντων.



Εικόνα 1.5: Τομείς εφαρμογής των Λειτουργικά Διαβαθμισμένων Υλικών (FGMs). [3]

1.3 FGMs στο αντικείμενο του πολιτικού μηχανικού

Αν και η ιδέα του FGM σχεδιάστηκε αρχικά για ανθεκτικά στη θερμότητα υλικά, με την πάροδο του χρόνου αυτά τα υλικά έχουν χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της παραμόρφωσης, της πίεσης, της φθοράς και της διάβρωσης καθώς και για τη μείωση της συγκέντρωσης τάσεων μέσω της ομαλής μετάβασης σε ολόκληρες διαστάσεις του προϊόντος. Τα τελευταία τριάντα χρόνια, έχουν αναπτυχθεί οι μέθοδοι κατασκευής FGM, καθώς υπάρχουν πλέον πολλές τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή αυτών των υλικών, όπως μέθοδοι φυγόκεντρης δύναμης, μέθοδοι μεταλλουργίας σκόνης, μέθοδοι εναπόθεσης ατμών και μέθοδοι προσθετικής κατασκευής [2]. Τα λειτουργικά διαβαθμισμένα υλικά αποτελούν ιδιαίτερα σημαντικό εργαλείο σε εφαρμογές όπου οι συνθήκες λειτουργίας είναι πιο απαιτητικές. Οι πιθανές εφαρμογές περιλαμβάνουν τις κατασκευαστικές και μηχανολογικές χρήσεις που απαιτούν συνδυασμούς ασυμβίβαστων λειτουργιών όπως η ανθεκτικότητα ή η σκληρότητα ή η χημική αδράνεια με ανθεκτικότητα. Οι εφαρμογές των FGMs έχουν σημαντικά

πλεονεκτήματα σε συστήματα μηχανολογικής και πολιτικής μηχανικής, συμπεριλαμβανομένων των θερμικών συστημάτων (ασπίδες θερμότητας πυραύλων, σωλήνες εναλλάκτη θερμότητας, θερμοηλεκτρικές γεννήτριες, ανθεκτικές στη φθορά επενδύσεις, κινητήρες ντίζελ και στροβίλου κ.λπ.). Το ινοπλισμένο πολυμερές (FRP) είναι μια άλλη εφαρμογή των FGMs για την ενίσχυση υλικών σκυροδέματος όπως φαίνεται στην εικόνα (1.6). Τα υλικά FRP βελτιώνουν την αντίσταση στη διάβρωση του χάλυβα και ενισχύουν τον κύκλο ζωής της αντοχής του υλικού.



Εικόνα 1.6: Ινοπλισμένη πολυμερής γέφυρα.

Μελέτες έχουν αποδείξει ότι τα FGM μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά στον σχεδιασμό πολυστρωματικών οδοστρωμάτων. Έχει επίσης πραγματοποιηθεί έρευνα για την απόκτηση επακριβών αναλυτικών λύσεων. Έχουν πραγματοποιηθεί πολυάριθμες ερευνητικές εργασίες στη δόνηση και τη δυναμική επίλυση λειτουργικά διαβαθμισμένων πλαισίων κελύφους μόνο με ορθογώνια κάτοψη.

Συμπερασματικά, το FGM είναι ένα εξαιρετικό προηγμένο υλικό που θα φέρει επανάσταση στον κατασκευαστικό κόσμο. Έχουν διεξαχθεί πολλές μελέτες σχετικά με τη συμπεριφορά των λειτουργικά διαβαθμισμένων υλικών και η βιβλιογραφία είναι πολύ πλούσια σε αυτό λόγω των ευρειών περιοχών εφαρμογής του νέου αυτού υλικού. Υπάρχουν μεγάλες δυνατότητες για την ανάπτυξη νέων λειτουργικά διαβαθμισμένων σύνθετων υλικών και νέων μεθόδων επεξεργασίας. Καθώς οι παράμετροι επεξεργασίας διαφέρουν από σύστημα σε σύστημα, υπάρχει ένα ευρύ μέλλον για τη βελτιστοποίηση αυτών των παραμέτρων.

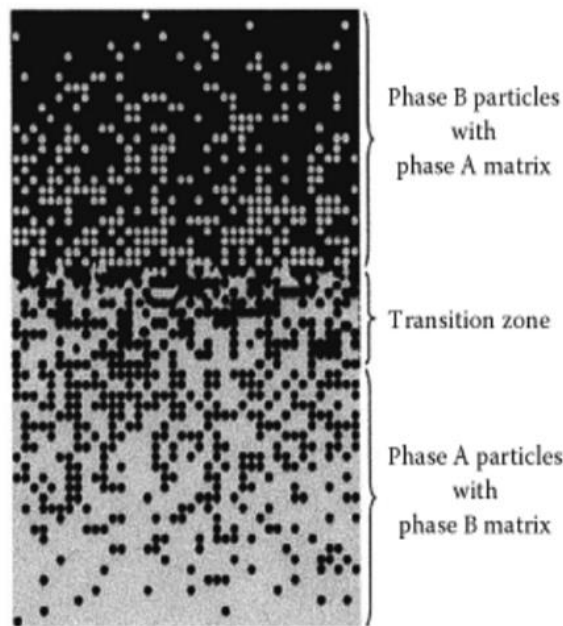


Fig.-1: An FGM with volume fractions of constituent phases graded in the vertical direction.

Εικόνα 1.7: Λειτουργικά Διαβαθμισμένο Υλικό κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. [5]

1.4 Αυξητικά Υλικά (Auxetic Materials)

Αυξητικά υλικά είναι δομές ή υλικά τα οποία έχουν αρνητικό λόγο Poisson. Ο διεθνής τεχνικός όρος «Auxetics» προέρχεται από την ελληνική λέξη «αύξητικός» (auxetikos) και καθιερώθηκε το 1996 από τον καθηγητή Ken Evans του Πανεπιστημίου Exeter [11].

1.4.1 Λόγος Poisson

Ο λόγος του Poisson εκφράζει την αναλογία της εγκάρσιας συστολής σε σχέση με την διαμήκη διαστολή στην αξονική κατεύθυνση της εφελκυστικής δύναμης. Η εφελκυστική παραμόρφωση θεωρείται με θετικό πρόσημο και η θλιπτική με αρνητικό. Ο ορισμός του λόγου Poisson έγινε με αρνητικό πρόσημο έτσι ώστε η πληθώρα των υλικών (σχεδόν όλα όσα συναντώνται στη φύση) να έχουν θετικό πρόσημο ($0 \leq \nu \leq 0.5$).

Ο λόγος του Poisson ορίζεται ως:

$$\nu = - \varepsilon_{\text{εγκάρσια}} / \varepsilon_{\text{διαμήκης}} \quad (1.4.1)$$

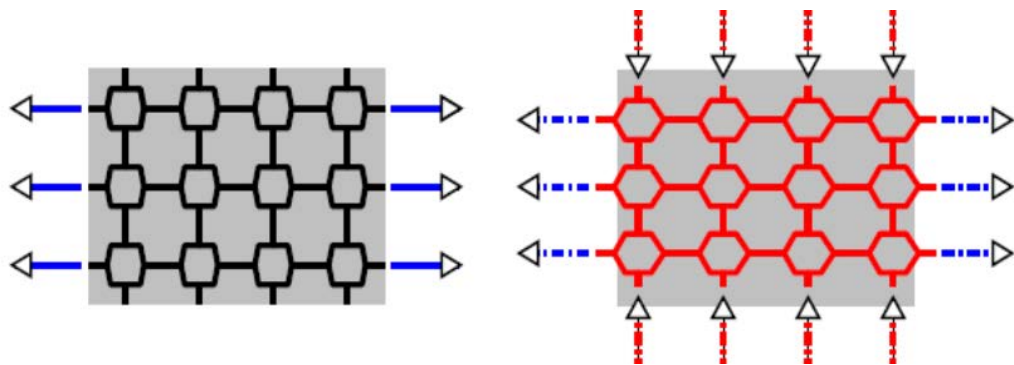
όπου " ε " είναι η παραμόρφωση, η οποία ορίζεται ως:

$$\varepsilon = \Delta L / L \quad (1.4.2)$$

όπου ΔL η μεταβολή στο μήκος και L το συνολικό μήκος.

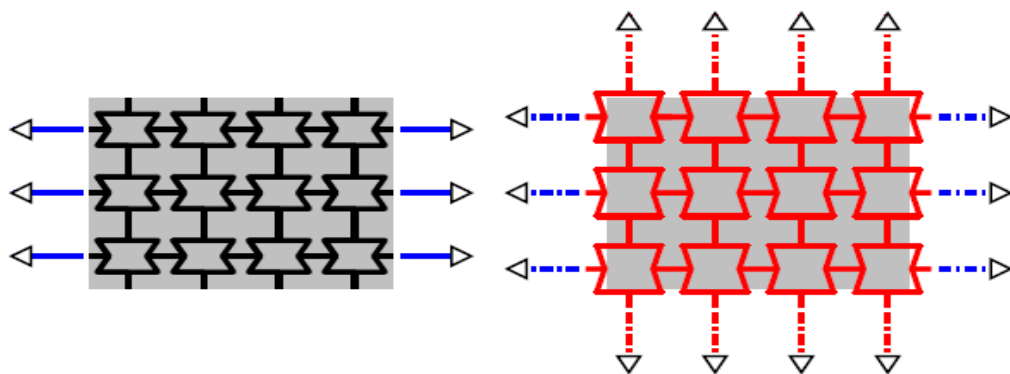
1.4.2 Λειτουργία αυξητικών Υλικών

Η έννοια και η λειτουργία των αυξητικών υλικών θα γίνει σαφέστερη μέσω της σύγκρισης ενός αυξητικού υλικού με ένα κανονικό υλικό. Όταν ένα κανονικό υλικό βρίσκεται υπό εφελκυστική αξονική τάση, τείνει να συμπιεστεί πλευρικά (βράχυνση). Αντίθετα, εάν το υλικό αυτό συμπιέζεται αξονικά (θλιπτική αξονική τάση) τείνει να διογκωθεί πλευρικά (πλευρική διαστολή).

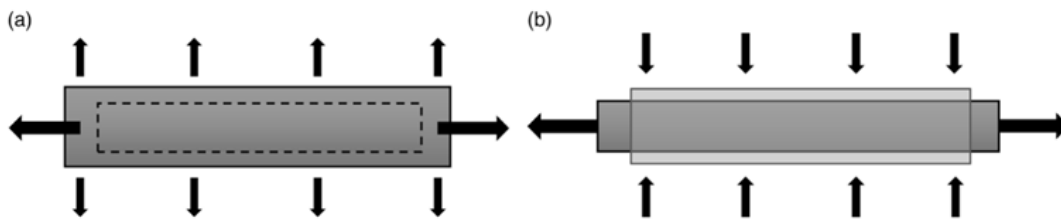


Εικόνα 1.8: Συνηθισμένη διάταξη μικροδομής υλικού: Εφαρμογή εφελκυστικών δυνάμεων (μπλε βέλη) οι οποίες συρρικνώνουν τη δομή κάθετα στην διεύθυνσή τους (κόκκινα βέλη). [6]

Τα υλικά τα οποία όταν υπόκεινται σε εφελκυσμό αντί να συρρικνώνονται, επιμηκύνονται κάθετα στην κατεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου, έχουν αρνητικό λόγο Poisson και ονομάζονται αυξητικά υλικά. Αυτό οφείλεται στους τεχνητούς συνδέσμους που εμφανίζονται στο εσωτερικό της μικροδομής τους και βοηθάνε στο λύγισμα. Υλικά, με αρνητικό λόγο του Poisson δεν έχουν βρεθεί (ακόμα) στην φύση, ωστόσο έχουν παραχθεί πρόσφατα σε εργαστήρια.



Εικόνα 1.9: Αυξητική συμπεριφορά: Εφαρμογή εφελκυστικών δυνάμεων (μπλε βέλη) οι οποίες επιμηκύνουν τη δομή κάθετα στην διεύθυνσή τους (κόκκινα βέλη). [6]



Εικόνα 1.10: α) Επίδραση του αρνητικού λόγου Poisson και του μηχανισμού παραμόρφωσης σε αυξητικό υλικό υπό μονοαξονική φόρτιση και β) επίδραση του θετικού λόγου Poisson και μηχανισμός παραμόρφωσης σε συμβατικό μη αυξητικό υλικό.

Τα αυξητικά υλικά κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους νανοκατασκευής, όπως η κατασκευή κεραμικών με βάση τη λιθογραφία, η άμεση γραφή με λέιζερ κ.ά.. Τα υλικά αυτά παρουσιάζουν ποικίλλες ιδιότητες εκ των οποίων είναι η αντίσταση στη διείσδυση, η αντοχή στη ρωγμή, η απόσβεση ταλαντώσεων, η απορρόφηση ενέργειας και η μεταβλητή διαπερατότητα. Η εφαρμογή τους εντοπίζεται σε τομείς όπως βιοϊατρική, αεροδιαστημική, κτίρια και κατασκευές, έξυπνα κλωστοϋφαντουργικά προϊόντα και εφαρμογές άμυνας, συμπεριλαμβανομένων των συστημάτων θωράκισης.

Η έρευνα για τα αυξητικά υλικά γίνεται ολοένα και σημαντικότερη, καθώς θεωρητικά ένα αυξητικό υλικό δεν θα παραμορφωθεί ποτέ πλαστικά, πράγμα που σημαίνει πως δεν θα αστοχήσει και θα υφίσταται πάντα αναστρέψιμη παραμόρφωση.

1.5 Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων (Stress Concentration Factor)

1.5.1 Συγκέντρωση Τάσεων

Η συγκέντρωση τάσεων είναι ένα σημείο στο σχεδιασμό ενός αντικειμένου όπου η τάση είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την περιβάλλουσα περιοχή. Μηχανικά στοιχεία όπως άξονες, γρανάζια, βραχίονες στήριξης, συνδετήρες με σπείρωμα κ.λπ. έχουν συχνά τρισδιάστατα χαρακτηριστικά που αλλάζουν το μέγεθος και το σχήμα τους με σκοπό την εκπλήρωση των σκοπών τους. Οι συγκεντρώσεις τάσεων προκαλούνται κατά βάση από μια απότομη αλλαγή στη γεωμετρία του υλικού, (συνήθως γύρω από αιχμηρές γωνίες, οπές, εγκοπές ή αυλακώσεις) η οποία αλλαγή δημιουργεί διακοπή στη ροή της τάσης. Αυτά τα ξαφνικά σημεία αλλαγής της γεωμετρίας κάτω από συνθήκες φόρτισης δημιουργούν συχνά τοπικά πεδία τάσεων όπου το υλικό τυπικά αστοχεί. Αυτή η εντοπισμένη τάση ονομάζεται συγκέντρωση τάσεων.

1.5.2 Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων

Ο Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων – ΣΣΤ (Stress Concentration Factor K_t) είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που χρησιμοποιείται για να ποσοτικοποιήσει πόσο συγκεντρωμένη είναι η τάση σε ένα μηχανικό μέρος (υπό τυπικά εφελκυστικά φορτία). Ορίζεται ως ο λόγος της υψηλότερης τάσης στο υλικό σε σύγκριση με μια ονομαστική (μέση) τάση.

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}} \quad (1.5.2)$$

όπου K είναι ο ΣΣΤ, $\sigma_{\max}$ είναι η μέγιστη ανεπτυγμένη τάση και σ_{ave} είναι η μέση τάση.

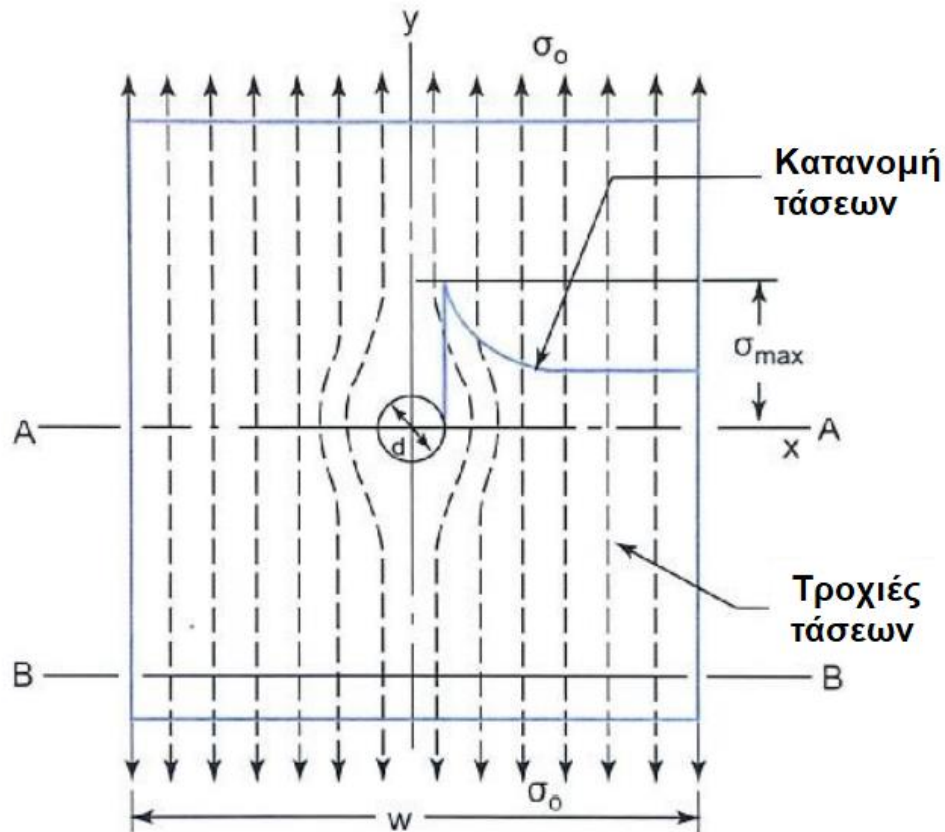
Σημειώνεται ότι η ονομαστική τάση είναι η συνολική τάση εντός ενός στοιχείου υπό τις ίδιες συνθήκες φόρτισης, αλλά χωρίς συγκεντρώσεις τάσεων (δηλαδή, η συνολική τάση στο στοιχείο όταν αυτό είναι απαλλαγμένο από ασυνέχειες).

Η μέση τάση υπολογίζεται με τον κλασικό τύπο της αντοχής υλικών για την τάση $\sigma = \frac{F}{A}$ (1.5.2α) αλλά η διατομή A είναι η ελάχιστη μετά τη μείωση λόγω της διάνοιξης οπής ή της ύπαρξης της οποιασδήποτε ασυνέχειας. Το γεγονός ότι η ανομοιόμορφα κατανομημένη τάση μπορεί να πάρει τιμές οι οποίες μπορεί να είναι και αρκετά χαμηλότερες από τη μέση τιμή σε κάποιες περιοχές περιμετρικά της διατομής, οφείλεται στο ότι η τάση που θα βρίσκαμε με τον υπολογισμό της εναπομείνουσας διατομής, λόγω συνθηκών ισορροπίας θα πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα όλων των συνιστωσών των ελαχίστων και μεγίστων τάσεων. Μέσω των σχέσεων (Εξ. 1.5.2 και 1.5.2α) αντιλαμβανόμαστε ότι ο συνήθης ΣΣΤ για τον απλό και γρήγορο υπολογισμό των μέγιστων τάσεων σε μια οπή έχει την τιμή $K = 3$. Σε λίγο πιο εμβαθή ανάλυση ανακαλύπτουμε ότι αυτή η τιμή δεν είναι σταθερή αλλά ποικίλει για κάθε αναλογία των γεωμετρικών μιας οπής ή όποιας ασυνέχειας σε σχέση με άλλες διαστάσεις του δοκιμίου.

Η κατανόηση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων είναι σημαντική κατά τη διαδικασία επιλογής υλικού, καθώς και για την πρόβλεψη της ρηγμάτωσης λόγω διάβρωσης υπό τάση, της διάβρωσης λόγω τριβής και των αστοχιών του υλικού.

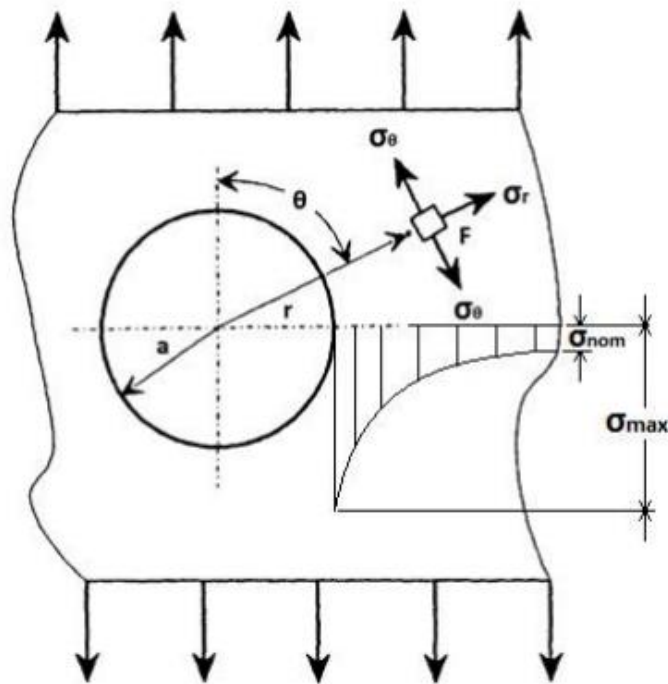
1.5.3 Εντατική κατάσταση γύρω από κυκλική οπή

Με δεδομένο ότι το φαινόμενο συγκέντρωσης τάσεων συμβαίνει στις περιοχές γύρω από τις ρωγμές και τις γεωμετρικές ασυνέχειες παντός τύπου, όταν η ασυνέχεια παύει να είναι ιδιότητα του υλικού αλλά παίρνει το ρόλο της σχεδιαστικής ασυνέχειας, πρέπει να γίνει περεταίρω ανάλυση για την κατανομή και την τιμή της τάσης, καθώς αυτή μπορεί να πάρει τιμές πολύ μεγαλύτερες από τις αναμενόμενες.



Σχήμα 1.1.1: Κατανομή τάσεων γειτονικής περιοχής εγκάρσιο άξονα κυκλικής οπής. [4]

Η κυκλική οπή λόγω της ανάγκης σύνδεσης των δομικών μηχανολογικών εξαρτημάτων μέσω ήλων και κοχλιών, αποτελεί το πλέον συνηθισμένο πρόβλημα συγκέντρωσης τάσεων. Τα σημεία έναρξης της αστοχίας των περισσότερων υλικών πλειοψηφικά βρίσκονται στις γειτονικές περιοχές τέτοιων οπών και γι' αυτό το λόγο χρήζουν ιδιαίτερης μελέτης. Η ανομοιόμορφη κατανομή της τάσης στην κοντινή περιοχή γύρω από μια οπή ενός μέλους που καταπονείται σε μονοαξονικό εφελκυσμό δεν επιφέρει μόνο μεγαλύτερες από τη μέση τάση (σ_0) τιμές αλλά εννοείται ότι μπορεί να έχουμε και μικρότερες από αυτές.



Εικόνα 1.11: Θεωρητικά άπειρη πλάκα με μικρού μεγέθους κυκλική οπή. [4]

Η μέγιστη τάση (σ_{max}) γύρω από μια οπή παρουσιάζεται πάνω στον εγκάρσιο άξονα διαμήκους φόρτισης και στις δύο πλευρές της οπής. Σύμφωνα με κάποιες θεωρίες και μέσω της προσπάθειας για τυποποίηση, σε κάποιες βιβλιογραφίες και έντυπα αναφέρεται απλά ότι η μέγιστη τάση στις πλευρές μιας οπής όπως στο σχήμα (Σχ. 1.11) όπου θα είναι $(a) = (r)$ και $(\theta) = (1/2) \cdot (\pi)$ της φόρτισης, μέσω της σχέσης για την έλλειψη θα ισοδυναμούν οι διαστάσεις της a και b ($b = a$) και επομένως θα έχουμε:

$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{2a}{b} \right) \right] \Leftrightarrow \sigma_{\theta} = \sigma_0 \cdot \left[1 + \frac{2a}{a} \right] = \sigma_0 \cdot (1 + 2 \cdot 1) \Leftrightarrow \sigma_{\theta} = \sigma_{max} = 3 \cdot \sigma_0 \quad (1.5.3)$$

Κεφάλαιο 2 Ομογενή υλικά και συγκέντρωση τάσεων

Ως "ομογενές υλικό" νοείται ένα υλικό με ομοιόμορφη σύνθεση σε όλη την έκτασή του ή ένα υλικό, αποτελούμενο από συνδυασμό υλικών, το οποίο δεν μπορεί να αποσυνδεθεί ή να διαχωριστεί σε διαφορετικά υλικά.

2.1 Συνάρτηση Τάσης Airy (Airy Stress Function)

Πολυάριθμες λύσεις σε προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης και επίπεδης τάσης μπορούν να προσδιοριστούν μέσω της χρήσης μιας συγκεκριμένης τεχνικής συνάρτησης τάσης. Η μέθοδος χρησιμοποιεί τη συνάρτηση τάσεων Airy και θα μειώσει τη γενική διατύπωση σε μια ενιαία διέπουσα εξίσωση ως προς έναν και μόνο άγνωστο. Η προκύπτουσα διέπουσα εξίσωση είναι στη συνέχεια επιλύσιμη με διάφορες μεθόδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών, και έτσι μπορούν να παραχθούν πολλές αναλυτικές λύσεις σε διάφορα προβλήματα. Η διατύπωση της συνάρτησης τάσης βασίζεται στη γενική ιδέα της ανάπτυξης μιας αναπαράστασης για το πεδίο τάσης που ικανοποιεί την ισορροπία και τις εξισώσεις συμβιβαστού.

Η μέθοδος ξεκινά με την επανεξέταση των εξισώσεων ισορροπίας για το πρόβλημα του επιπέδου. Οι δυνάμεις του σώματος διατηρούνται, αλλά με την υπόθεση ότι μπορούν να προκύψουν από μια συνάρτηση δυναμικού V έτσι ώστε:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.1)$$

Αυτή η υπόθεση δεν είναι πολύ περιοριστική, διότι πολλές δυνάμεις σώματος που συναντώνται σε εφαρμογές (π.χ. φόρτιση βαρύτητας) εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία. Υπό τη μορφή (a), οι εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\frac{\partial(\sigma_x - V)}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y - V)}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

Παρατηρείται ότι οι εξισώσεις αυτές θα ικανοποιούνται πανομοιότυπα επιλέγοντας μια αναπαράσταση

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

όπου $\phi=\phi(x,y)$ είναι μια αυθαίρετη μορφή που ονομάζεται συνάρτηση τάσης Airy.

2.2 Πρόβλημα Kirsch

Η ιστορία της ανάλυσης των συγκεντρώσεων τάσεων ξεκινάει το 1898 με τη γραμμική ελαστική λύση του Γερμανού μηχανικού Ernst Gustav Kirsch για τις τάσεις γύρω από μια οπή σε μια άπειρη πλάκα. Η λύση του Kirsch περιέχει τη γνωστή συγκέντρωση τάσεων με συντελεστή τρία στην οπή υπό μονοαξονική φόρτιση. Το δισδιάστατο πρόβλημα της ελαστοστατικής μπορεί να αναχθεί ώστε να οδηγήσει στην απόκτηση συναρτήσεων τάσεων. Η συνάρτηση τάσεων του Airy χρησιμοποιήθηκε από τον Kirsch για την επίλυση του προβλήματος και για την εύρεση των τάσεων σε πολικές συντεταγμένες. Παρατηρήθηκε ότι η συγκέντρωση των τελικών τάσεων βρίσκεται σε σημεία κατά μήκος αυτών των άκρων της κυκλικής οπής και στη διεύθυνση της κάθετης στον άξονα φόρτισης.

2.2.1 Μονοαξονική τάση – Kirsch's solution (1898)

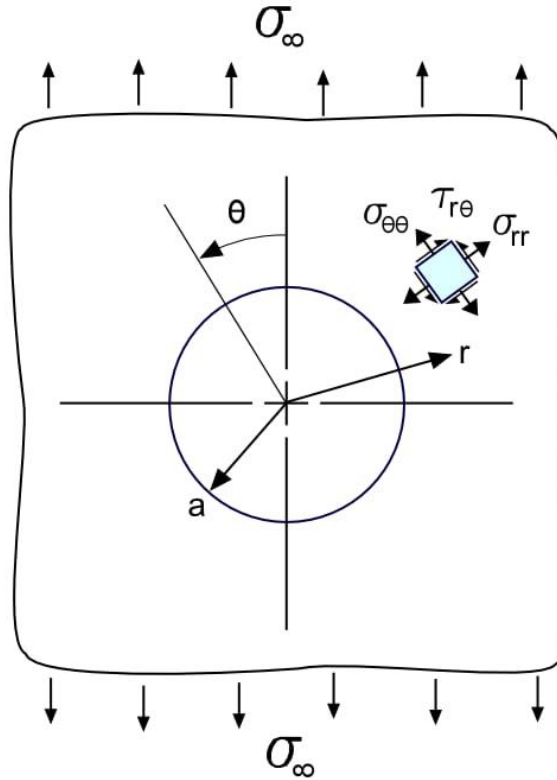
Η λύση του Kirsch (Kirsch's Solution) για τις τάσεις σε μια οπή είναι για την περίπτωση μονοαξονικής τάσης σε μια άπειρη πλάκα. Η μονοαξονική τάση αντιπροσωπεύεται από την απομακρυσμένη τάση σ_∞ . Η οπή έχει ακτίνα a η ακτινική συντεταγμένη είναι r (η οποία δεν έχει νόημα όταν $r < a$) και $\theta=0$ ευθυγραμμίζεται με τη διεύθυνση της απομακρυσμένης φόρτισης. Θα δούμε ότι η περίφημη συγκέντρωση τάσεων με συντελεστή τρία εμφανίζεται στη θέση $\theta=\pm 90^\circ$.

Δεν χρειάζεται να επανεξετάσουμε την παραγωγή. Η λύση για την κατάσταση τάσης γύρω από μια οπή είναι:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta \quad (2.8)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_{\infty}}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta \quad (2.9)$$



Εικόνα 2.1: Μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση άπειρης πλάκας με κυκλική οπή. [7]

Στο άπειρο:

Στο $r = \infty$ όλοι οι a/r όροι μηδενίζονται, αφήνοντας:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\infty}}{2} + \frac{\sigma_{\infty}}{2} \cos 2\theta \quad (2.10)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\infty}}{2} - \frac{\sigma_{\infty}}{2} \cos 2\theta \quad (2.11)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_{\infty}}{2} \sin 2\theta \quad (2.12)$$

και $\sigma_{rr} = \sigma_{\infty}$ όταν $\theta=0^\circ$ και 180° , ενώ $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\infty}$ όταν $\theta=\pm 90^\circ$ όπως πρέπει να είναι. Η διατμητική τάση $\tau_{\tau\theta}$ είναι απλώς το αποτέλεσμα των μετασχηματισμών συντεταγμένων στο σ_{∞} .

Στην οπή:

Στο $r = a$ όλοι οι a/r όροι είναι ίσοι με ένα, παράγοντας τα παρακάτω:

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\infty}(1 - 2 \cos 2\theta) \quad (2.14)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (2.15)$$

Η ακτινική τάση σ_{rr} και η διατμητική τάση $\tau_{r\theta}$ είναι μηδενικές στην οπή επειδή είναι ελεύθερη επιφάνεια.

Η τάση στεφάνης $\sigma_{\theta\theta}$ ωστόσο χρήζει προσοχής. Στο $\theta=0$, η $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{\infty}$, οπότε η τάση στεφάνης είναι στην πραγματικότητα θλιπτική. Ωστόσο, στο $\theta=\pm 90^\circ$ ισχύει $\sigma_{\theta\theta} = 3\sigma_{\infty}$ και εμφανίζεται ο λόγος τάσεων του συντελεστή τρία (factor-of-three stress ratio). Ο λόγος αυτός ονομάζεται Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων (K_t).

Αυτή είναι η μεγαλύτερη τάση στην οπή και, επομένως, η πρώτη τιμή που συγκρίνεται με το όριο διαρροής ενός υλικού για να ελεγχθεί η διαρροή. Η εντατική κατάσταση είναι μονοαξονική, οπότε η $\sigma_{\theta\theta}$ είναι επίσης η πραγματική τάση ή η τάση von Mises που μπορεί να συγκριθεί άμεσα με την αντοχή διαρροής του υλικού.

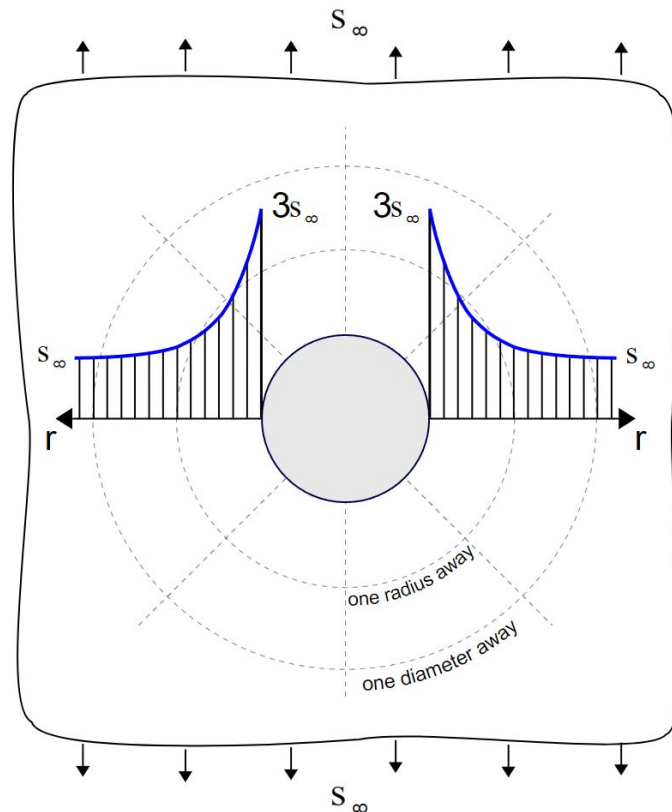
Να σημειωθεί ότι οι συνιστώσες της τάσης στην οπή είναι ανεξάρτητες από το μέγεθος της ίδιας της οπής. Αυτό σχετίζεται με το γεγονός ότι η πλάκα είναι απείρως μεγάλη, οπότε το μέγεθος της οπής είναι ασήμαντο σε σχέση με την πλάκα.

2.3 Συγκέντρωση Τάσεων με συντελεστή $K_t = 3$ (Stress Concentration Factor, $K_t = 3$)

Ο Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων (K_t) είναι ο λόγος της μέγιστης τάσης σε μια οπή, ένα φιλέτο ή μια εγκοπή (αλλά όχι σε μια ρωγμή) προς την απομακρυσμένη τάση. Για την περίπτωση μας, μιας οπής σε μια άπειρη πλάκα, $K_t = 3$.

2.3.1 Σχηματική αναπαράσταση κατάστασης καταπόνησης

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η τάση στεφάνης, $\sigma_{\theta\theta}$ στο $\theta=\pm 90^\circ$ ως συνάρτηση του r . Δείχνει τη συγκέντρωση τάσεων με συντελεστή τρία στην άκρη της οπής και πώς αυτή μειώνεται γρήγορα με την αύξηση του r . Η συγκέντρωση τάσεων είναι και πάλι μικρή σε απόσταση μίας διαμέτρου από την άκρη της οπής και μάλιστα αμελητέα σε απόσταση δύο διαμέτρων.



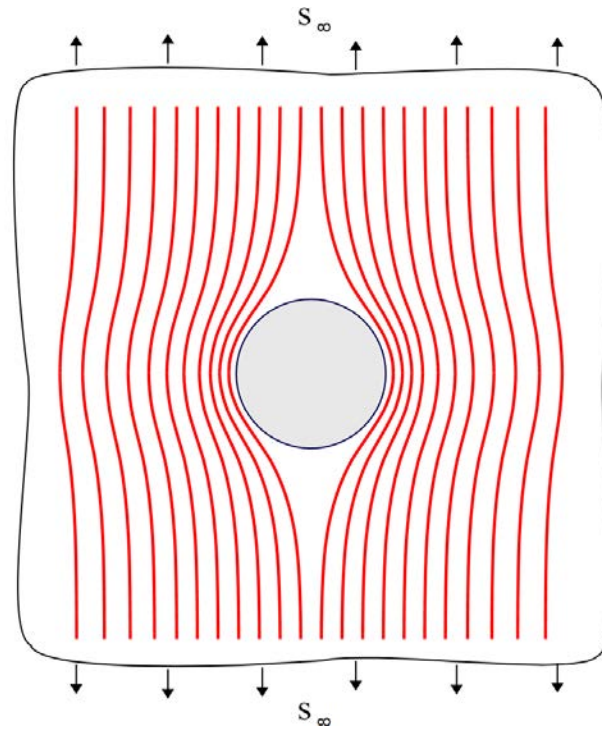
Εικόνα 2.2: Κατανομή τάσεων και μέγιστη αναπτυσσόμενη τάση στο αριστερό και δεξί άκρο της οπής. [8]

2.3.2 Σχηματική αναπαράσταση ροής τάσεων γύρω από την οπή

Η παρακάτω εικόνα (Εικ. 2.3) πραγματεύεται το θέμα του μεγέθους της οπής και την επιρροή του στις τάσεις γύρω από αυτήν. Το παράδοξο αποτέλεσμα είναι ότι η συγκέντρωση τάσεων με συντελεστή τρία είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος της οπής. Μια πολύ μικρού μεγέθους οπή παράγει την ίδια συγκέντρωση τάσεων με μια πολύ μεγάλη οπή (σε μια άπειρη πλάκα).

Οι κόκκινες καμπύλες δείχνουν, ποιοτικά, τη ροή της δύναμης γύρω από την οπή με τρόπο παρόμοιο με τις γραμμές ροής σε ένα πεδίο ροής ρευστού. Η απόσταση μεταξύ των καμπυλών, η οποία γίνεται η ελάχιστη στις πλευρές της οπής, απεικονίζει τις συγκεντρώσεις τάσεων.

Με αυτόν τον τρόπο, συνεχίζοντας την αναλογία του πεδίου ροής, το ύψος της οπής παρέχει έγκαιρη προειδοποίηση στο πεδίο ροής της δύναμης ότι πρέπει να εκτραπεί γύρω από την οπή. Η ροή πρέπει να εκτραπεί περισσότερο για μια φαρδύτερη οπή, όμως μια φαρδύτερη οπή είναι αντιστοίχως ψηλότερη, οπότε προειδοποιεί τη ροή νωρίτερα. Το καθαρό αποτέλεσμα είναι ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στα δύο άκρα της οπής έχει πάντοτε τιμή ίση με τρία, ανεξάρτητα από το μέγεθος της οπής.



Εικόνα 2.3: Ροή τάσεων γύρω από την κυκλική οπή άπειρης πλάκας, υποβαλλόμενης σε μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση.

[8]

2.3.3 Πλάκα πεπερασμένων διαστάσεων

Στις πλάκες πεπερασμένου πλάτους, είναι απαραίτητο να εισαχθεί ένας πρόσθετος όρος, η ονομαστική τάση σ_{nom} . Είναι η μέση τάση στην οπή λόγω της μείωσης της διατομής και σχετίζεται με σ_{∞} από την εξής σχέση:

$$\text{Force (Δύναμη)} = \sigma_{\infty} W = \sigma_{nom}(W-d) \quad (2.16)$$

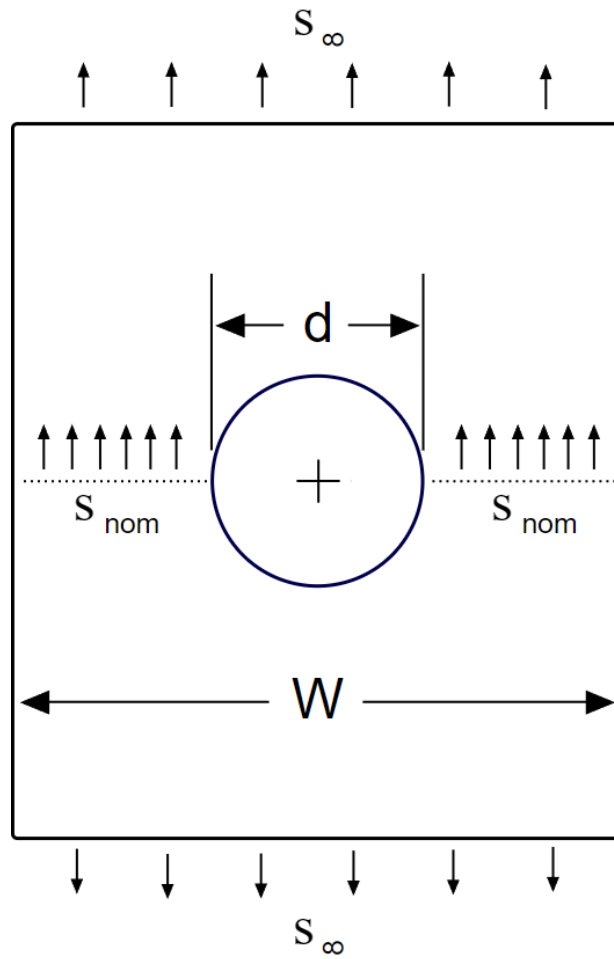
Όπου d είναι η διάμετρος της οπής, W είναι το πλάτος της πλάκας, καθώς το πάχος έχει αγνοηθεί. Λύνοντας ως προς σ_{nom} :

$$\sigma_{nom} = \frac{W}{W-d} \sigma_{\infty} \quad (2.17)$$

Ο Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων K_t ορίζεται ως εξής:

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (2.18)$$

Όπου σ_{max} είναι σε αυτή την περίπτωση η μέγιστη τάση στεφάνης $\sigma_{\theta\theta}$, στο $\theta=90^\circ$.



Εικόνα 2.4: Ονομαστική τάση σ_{nom} (μέση τάση) στην οπή μίας πεπερασμένων διαστάσεων πλάκας. [8]

Ο λόγος $d/W=0$ αντιστοιχεί στην απείρως ευρεία πλάκα, και πράγματι $K_t = 3$ σε αυτό το σημείο. Η εξίσωση της καμπύλης, η οποία είναι στην πραγματικότητα εμπειρική, είναι:

$$K_t = 3 - 3,14 \left(\frac{d}{W} \right) + 3,667 \left(\frac{d}{W} \right)^2 - 1,527 \left(\frac{d}{W} \right)^3 \quad (2.19)$$

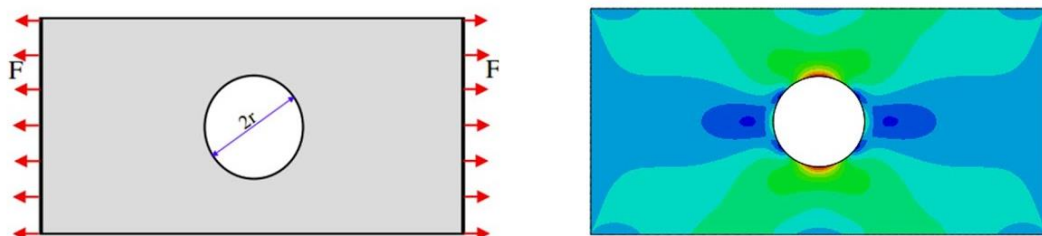
Κεφάλαιο 3 FGM πλάκα με οπή υπό μονοαξονική φόρτιση και Συγκέντρωση τάσεων

Το λειτουργικά διαβαθμισμένο υλικό (FGM), όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, είναι ένα νέο είδος ανομοιογενούς σύνθετου υλικού, που διαθέτει συνεχώς μεταβαλλόμενη μικροδομή και μηχανικές ιδιότητες.

Οι συγκεντρώσεις τάσεων γύρω από τις οπές έχουν μεγάλη πρακτική σημασία καθώς αποτελούν την συνήθη αιτία αστοχίας. Ο Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων (SCF), K_t , ορίζεται ως ο λόγος της μέγιστης τάσης παρουσία μιας γεωμετρικής ανωμαλίας ή ασυνέχειας, προς την τάση μακριά από την επίδραση της εν λόγω ανωμαλίας ή ασυνέχειας, δηλαδή την εφαρμοζόμενη τάση.

3.1 Αντικείμενο και στόχος της εργασίας

Ο κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι να πραγματοποιηθεί ανάλυση συγκέντρωσης τάσεων μιας πεπερασμένης πλάκας κατασκευασμένη από λειτουργικά διαβαθμισμένο υλικό (FGM) με κυκλική οπή υπό συνθήκες μονοαξονικής φόρτισης (συγκεκριμένα εφελκυσμού). Αναλύονται οι δισδιάστατες κατανομές των τάσεων κοντά στην κυκλική οπή και εξετάζεται η ευαισθησία των Συντελεστών Συγκέντρωσης Τάσεων στις ιδιότητες του FGM, όπως η κατεύθυνση της διαβάθμισης και η παράμετρος σύνθεσης, καθώς και οι γεωμετρικές παράμετροι.



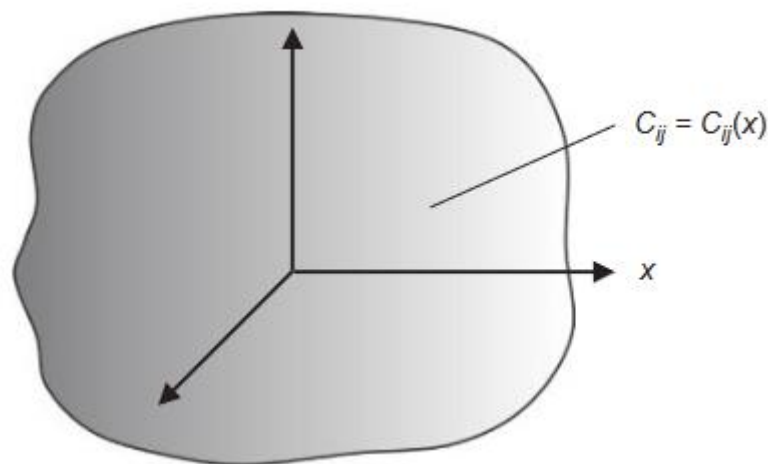
Εικόνα 3.1: Προσομοίωμα εντατικής κατάστασης και συγκέντρωσης δυνάμεων στην πλάκα και γύρω από την οπή, καθώς η πλάκα υπόκειται σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

Στο ανομοιογενές μοντέλο, οι ελαστικοί συντελεστές εκφράζονται συναρτήσει των χωρικών συντεταγμένων x_m που περιγράφουν το πρόβλημα. Επομένως ο νόμος του Hooke διαβάζεται ως εξής:

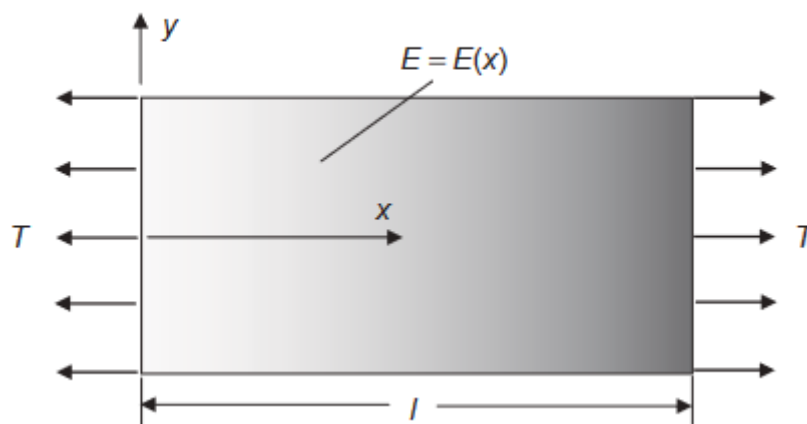
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_m)e_{kl} \quad (3.1)$$

Οι υπόλοιπες βασικές εξισώσεις του πεδίου μετατόπισης της τάσης, συμβατότητας της παραμόρφωσης και της ισορροπίας θα παραμείνουν ίδιες.

Η διακύμανση των ελαστικών ιδιοτήτων θα ληφθεί ως απλής συνεχούς μορφής, για παράδειγμα σε μία απεριόριστη περιοχή, οι συντελεστές ελαστικότητας μπορεί να επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να ποικίλλουν σε μία μόνο κατεύθυνση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2 όπου η διαβάθμιση υποδεικνύεται μέσω της σχεδίασης με σκίαση.



Εικόνα 3.2: Ανομοιογενές υλικό στο χώρο και διακύμανση των ελαστικών του ιδιοτήτων μέσω συναρτήσεων. [9]



Εικόνα 3.3: Πεπερασμένη μη ομογενής πλάκα (FGM) υπό μονοαξονική φόρτιση και διακύμανση των ελαστικών ιδιοτήτων μέσω της συνάρτησης $E=E(x)$. [9]

Συγκεκριμένες λειτουργικές μορφές που περιγράφουν μία τέτοια μη ομοιογένεια χρησιμοποιούν συνήθως γραμμική, εκθετική και power-law (συνάρτηση κατανομής νόμου δύναμης) διακύμανση στους ελαστικούς συντελεστές εκ των οποίων ορισμένα παραδείγματα είναι της μορφής:

$$C_{ij}(x) = C_{ij}^0(1 + ax) \quad (3.2)$$

$$C_{ij}(x) = C_{ij}^0 e^{ax} \quad (3.3)$$

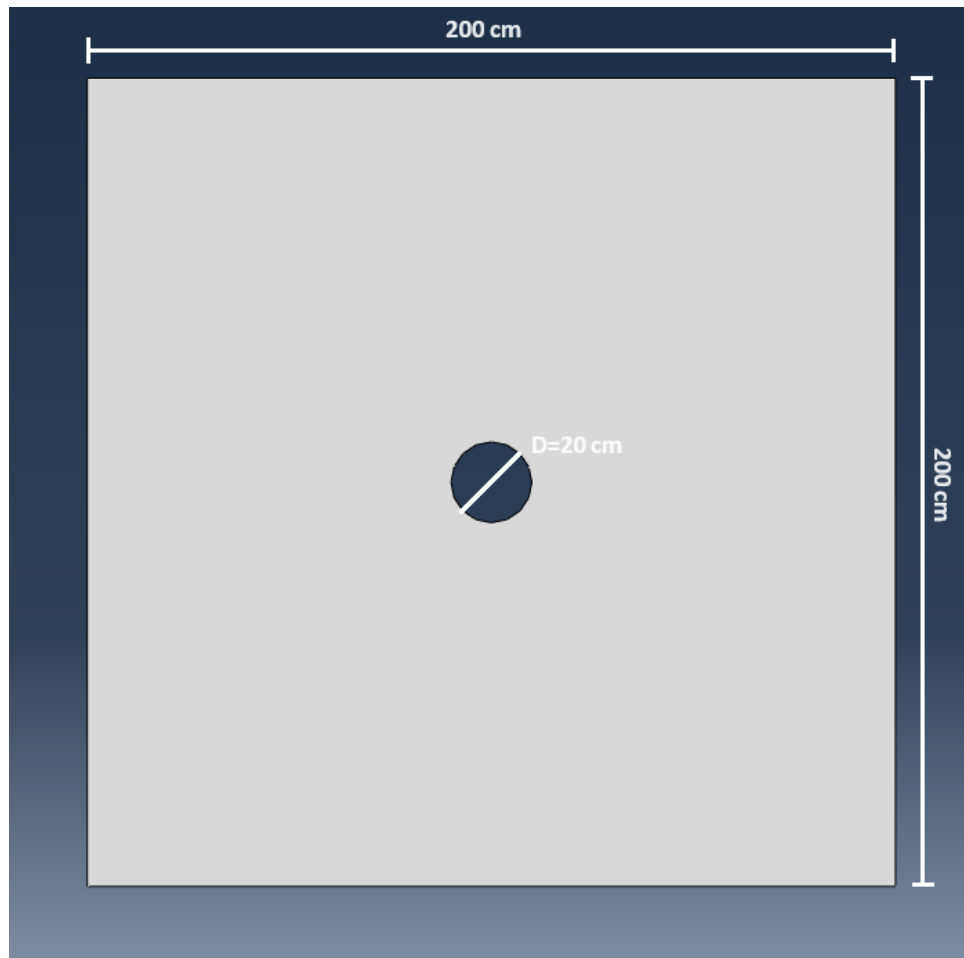
$$C_{ij}(x) = C_{ij}^0 x^a \quad (3.4)$$

όπου C_{ij}^0 και a είναι προδιαγεγραμμένες σταθερές [9]. Επειδή η εμπειρία έχει δείξει ότι η διακύμανση του λόγου Poisson κανονικά δεν παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό των μεγεθών των τάσεων και των μετατοπίσεων, το ν συνήθως θεωρείται σταθερό σε πολλές ανομοιογενείς συνθέσεις.

3.2 Επίλυση προβλήματος συγκέντρωσης τάσεων στην FGM πλάκα

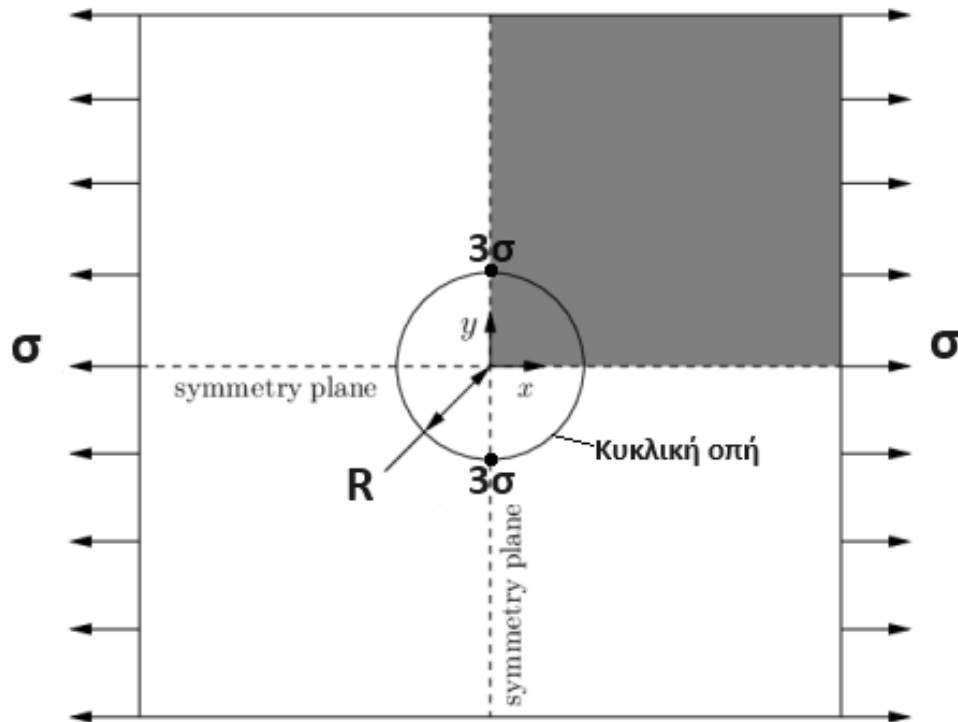
Το πρόβλημα επιλύθηκε με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων, ABAQUS. Αρχικά, είναι σημαντικό να αναφερθεί το γεγονός ότι το ABAQUS δεν διαθέτει μονάδες μέτρησης, επομένως εναπόκειται στον χρήστη να διασφαλίσει ότι οι παρεχόμενες αριθμητικές τιμές συνοδεύονται από συνεπείς μονάδες.

Στο αντικείμενο της εργασίας μελετήθηκε δισδιάστατη τετραγωνική πλάκα διαστάσεων 200x200cm με κυκλική οπή στο μέσον της, διαμέτρου 20cm (ακτίνας $r=10\text{cm}$).

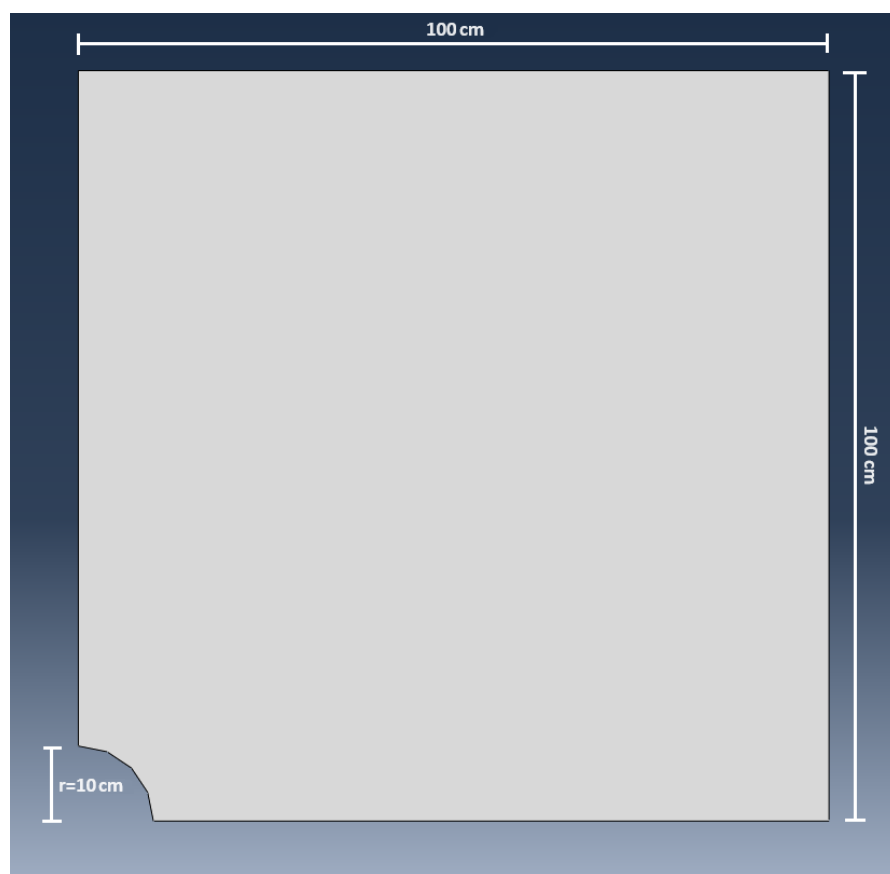


Σχήμα 3.1.1: Πεπερασμένων διαστάσεων πλάκα με κυκλική οπή στο μέσον της, στο περιβάλλον του λογισμικού προγράμματος ABAQUS.

Για λόγους εξοικονόμησης χρόνου αλλά και μεγαλύτερης ακρίβειας αποτελεσμάτων, η πλάκα του προβλήματος χωρίστηκε στο $\frac{1}{4}$.

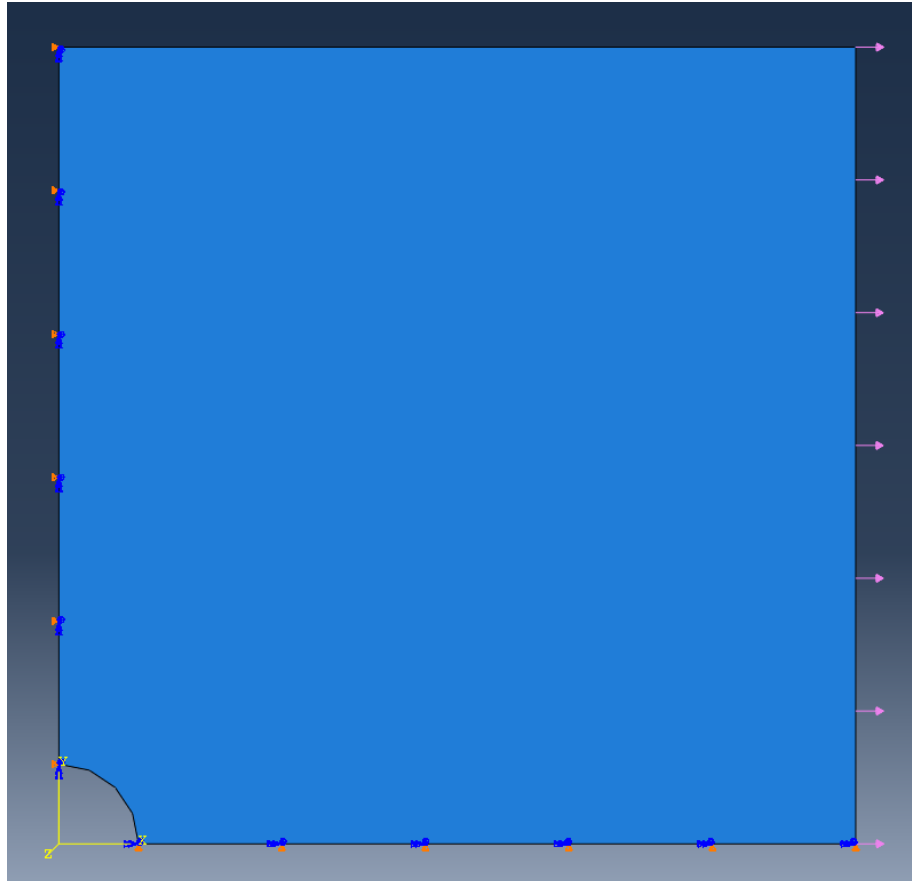


Σχήμα 3.1.2: Σχηματική αναπαράσταση εξεταζόμενης πλάκας υπό μονοαξονική εφελκυστική τάση σ και διαχωρισμός της σε τέσσερα συμμετρικά κομμάτια.



Σχήμα 3.1.3: Η πλάκα του προβλήματος χωρισμένη στο $\frac{1}{4}$.

Η διαίρεση της πλάκας στο $\frac{1}{4}$ ισοδυναμεί με ολόκληρη την πλάκα, γεγονός που προκύπτει από τη γεωμετρία, αφού φυσικά τοποθετηθούν πρώτα οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες (Boundary Conditions).

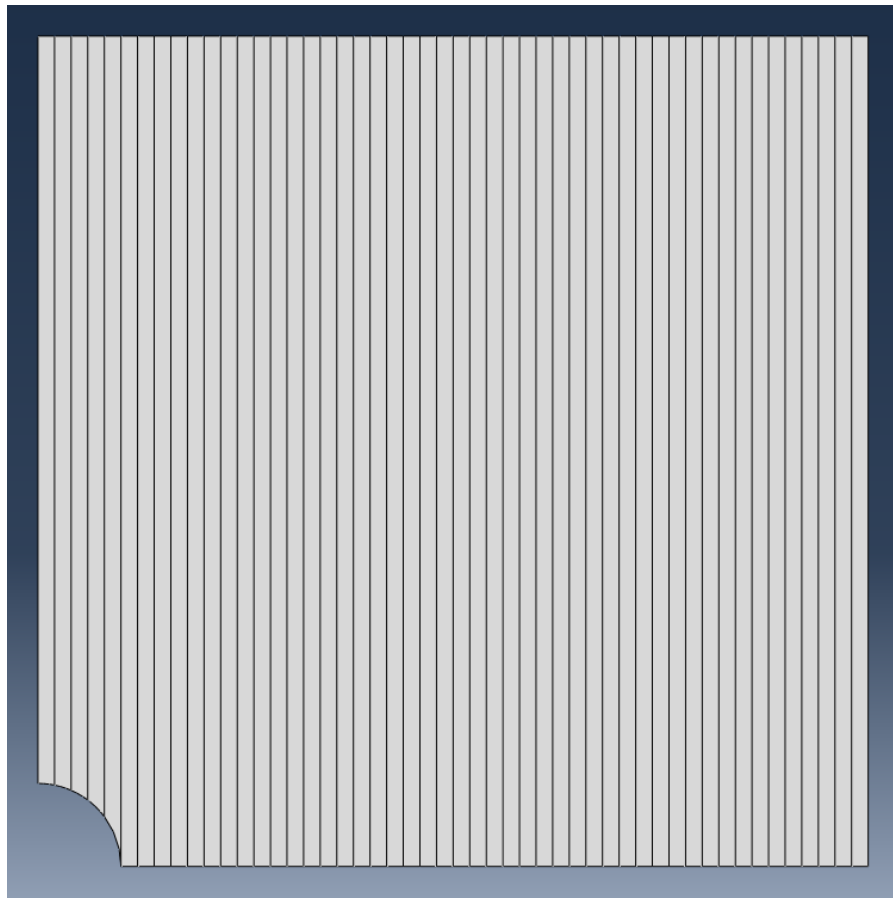


Σχήμα 3.1.4: Τοποθέτηση συνοριακών συνθηκών με τη χρήση κυλίσεων στην αριστερή και στην κάτω παρειά του $\frac{1}{4}$ της πλάκας.

Με την τοποθέτηση κυλίσεων στον οριζόντιο άξονα του κάτω μέρους της πλάκας και στον κάθετο άξονα του αριστερού της μέρους (δηλαδή στις δυο παρειές όπου έχουν γίνει οι δύο τομές της πλάκας), επιτυγχάνεται η ελευθερία της απειροστής κίνησης που τείνει να κάνει η πλάκα λόγω της εφελκυστικής δύναμης που ασκείται στα δύο άκρα της. Πιο συγκεκριμένα, στο κομμάτι της πλάκας που εξετάζεται, καθώς ασκείται μια εφελκυστική τάση στο δεξί της άκρο η πλάκα τείνει να εφελκυστεί στον οριζόντιο άξονα της και παράλληλα στον κάθετο άξονα τείνει να βραχυνθεί. Με αυτόν τον τρόπο, το πρόγραμμα λαμβάνει την εντολή μέσω των κυλίσεων να επιτρέψει την κίνηση σε αυτούς τους άξονες.

Η πλάκα που εξετάζεται αποτελεί Λειτουργικά Διαβαθμισμένο Υλικό (FGM) και γι' αυτόν το λόγο θα χωριστεί σε layers, όπου το καθένα layer από αυτά θα διαφέρει ως προς τις ιδιότητές του σε σχέση με τα άλλα. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη διαφοροποίηση αυτή των ιδιοτήτων θα αναφερθούν παρακάτω.

Το κομμάτι της πλάκας που εξετάζεται χωρίστηκε σε 50 διαφορετικά layers των 2cm το καθένα, παράλληλα στη διεύθυνση του κάθετου άξονα.



Σχήμα 3.1.5: Η πλάκα του προβλήματος χωρισμένη σε 50 διαφορετικά κάθετα layers.

Σε κάθε ένα από αυτά τα 50 layers αντιστοιχούν διαφορετικές ιδιότητες υλικού. Αυτές οι διαφορετικές ιδιότητες λαμβάνονται μέσω συναρτήσεων της βιβλιογραφίας. Στην παρούσα εργασία θα αναλυθούν 3 διαφορετικές συναρτήσεις διακύμανσης του μέτρου ελαστικότητας Young (E) και ακόμα μία που αφορά την διακύμανση του λόγου Poisson ν .

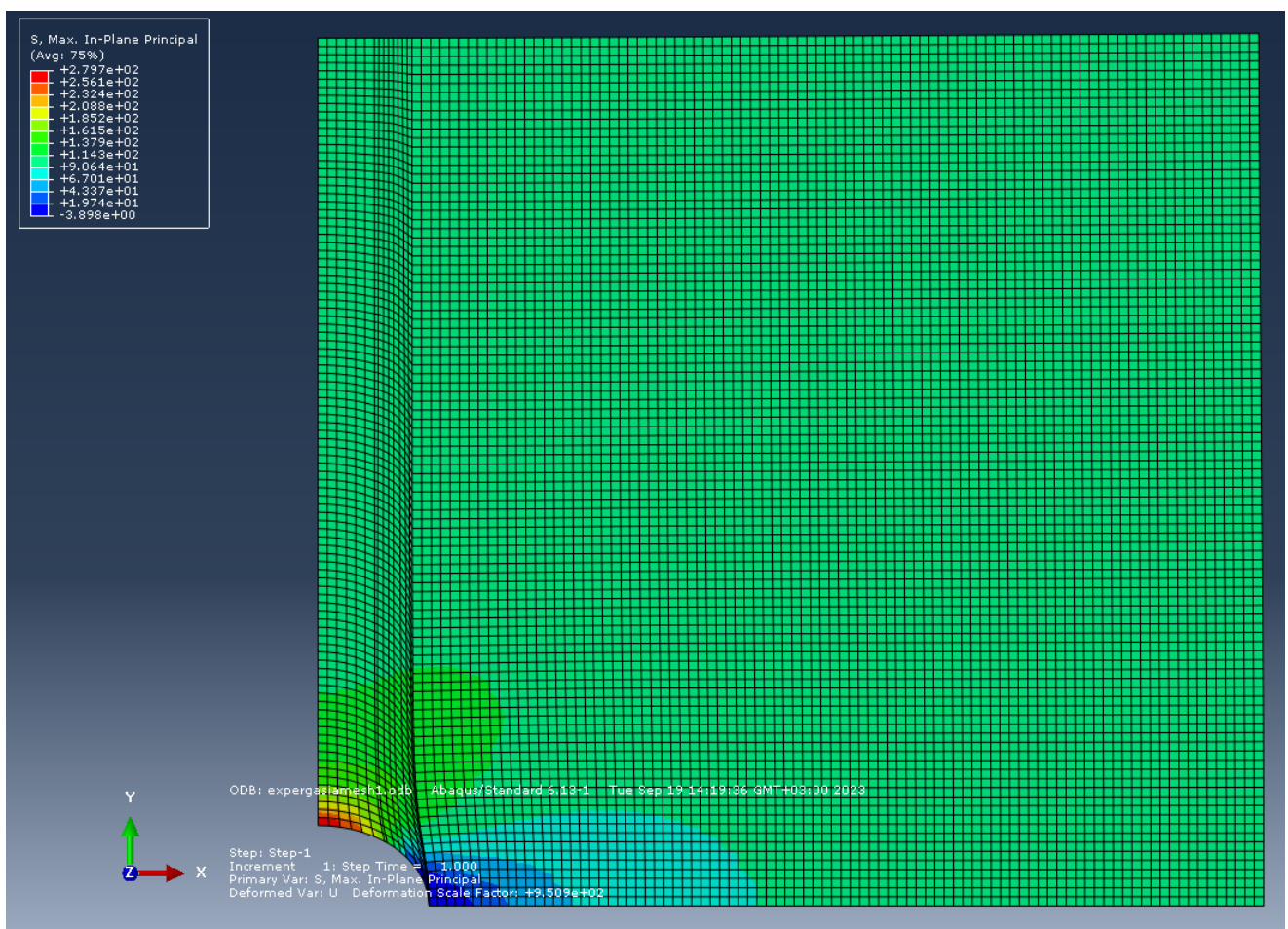
Για να επιτευχθεί η ανάλυση συγκέντρωσης τάσεων στη πλάκα, χρησιμοποιείται το εργαλείο Mesh του ABAQUS.

Διακριτοποίηση Mesh (πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων)

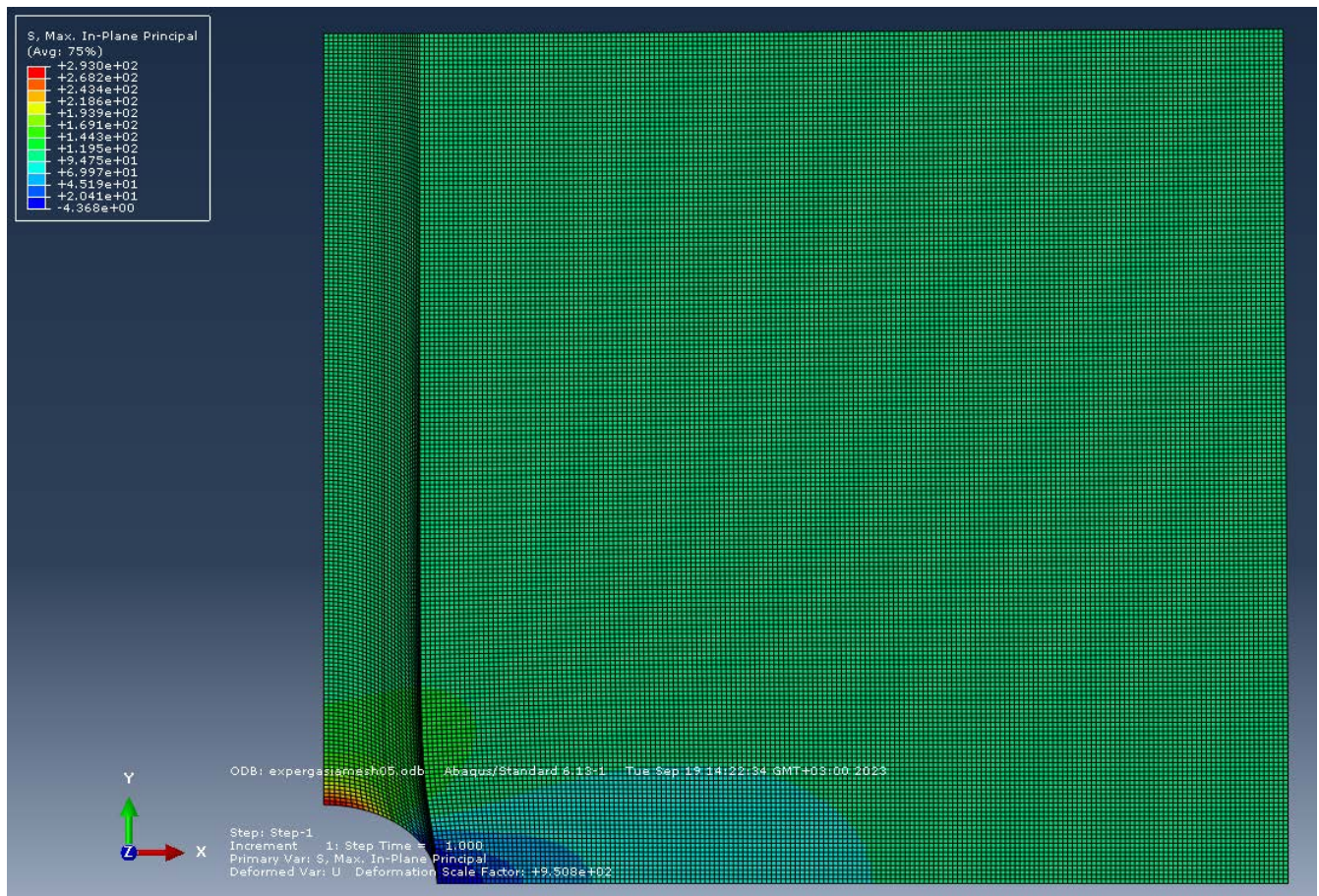
Με τη χρήση του εργαλείου mesh, η γεωμετρία του σχήματος χωρίζεται σε πεπερασμένα στοιχεία κι έτσι δημιουργείται ένα πλέγμα. Όσο πιο πυκνό είναι αυτό το πλέγμα, τόσο πιο ακριβή είναι τα αποτελέσματα της επίλυσης.

Για την ορθότερη εξασφάλιση της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων, πραγματοποιήθηκε ανάλυση σύγκλισης του πλέγματος διακριτοποίησης (convergence analysis) και σύγκριση των αποτελεσμάτων. Είναι πολύ σημαντικό να χρησιμοποιηθεί ένα

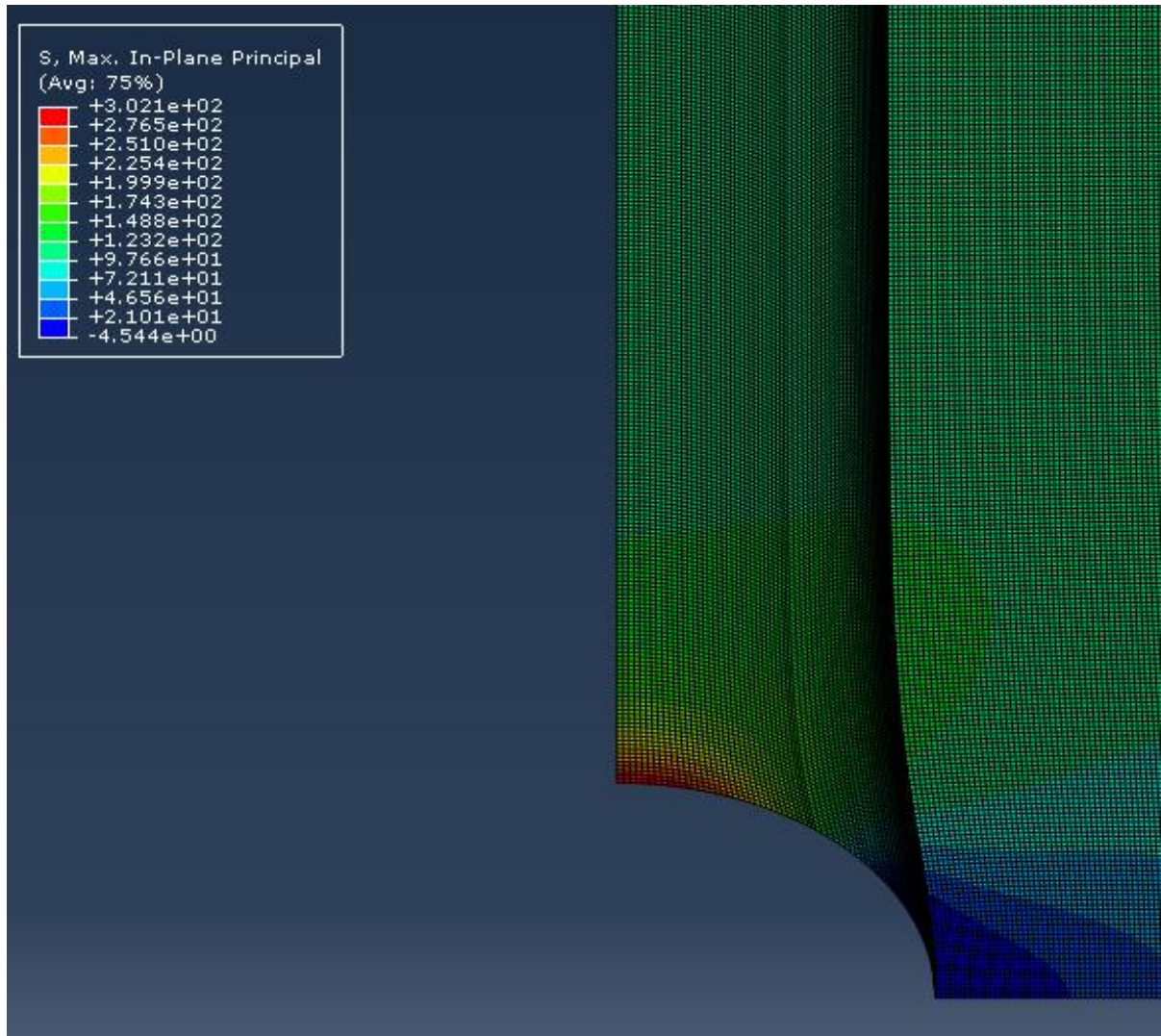
αρκετά πυκνό πλέγμα έτσι ώστε να εξασφαλισθεί ότι τα αποτελέσματα της προσομοίωσης θα είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβή. Τα χονδροειδή πλέγματα δίνουν ανακριβή και μη έγκυρα αποτελέσματα, ενώ καθώς πυκνώνεται το πλέγμα η αριθμητική τιμή του προβλήματος τείνει σε μία μοναδική τιμή. Για να μπορέσει ένα πλέγμα να είναι συγκλίνον (άρα και ακριβές), θα πρέπει η όποια ενδεχόμενη περαιτέρω πύκνωσή του να παράγει αμελητέα αλλαγή στη λύση, δηλαδή ελάχιστη απόκλιση των αποτελεσμάτων. Η πύκνωση του πλέγματος επιτυγχάνεται μέσω του εργαλείου «Global Seeds» και χαρακτηρίζει ουσιαστικά το μέγεθος του εκάστοτε πεπερασμένου στοιχείου από το οποίο αποτελείται το πλέγμα. Έτσι λοιπόν, όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος των στοιχείων αυτών, τόσο πιο αραιό είναι το πλέγμα και αντιστοίχως όσο μικρότερο είναι το μέγεθος των στοιχείων τόσο πυκνότερο είναι το πλέγμα.



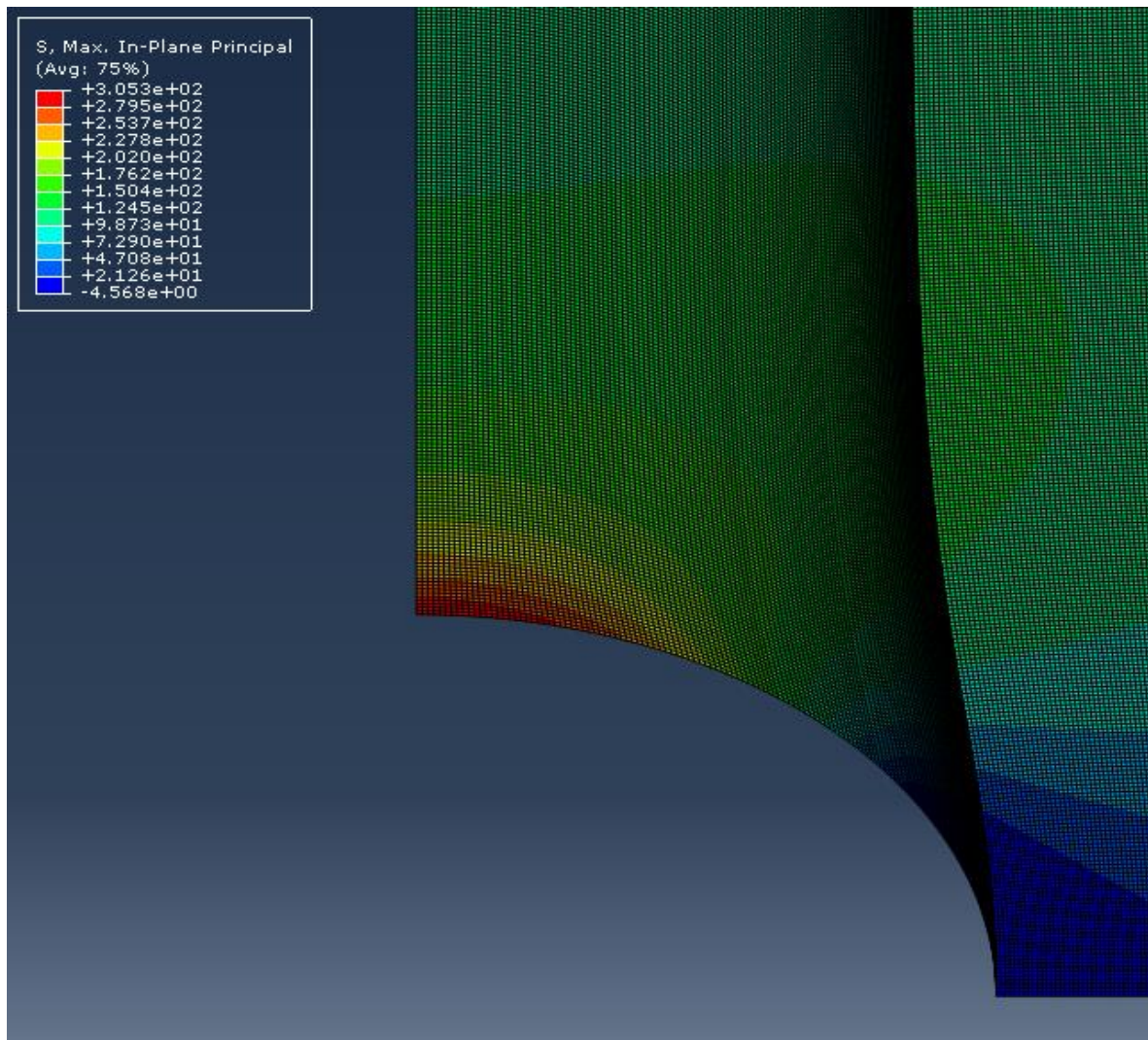
Σχήμα 3.1.6: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=1.



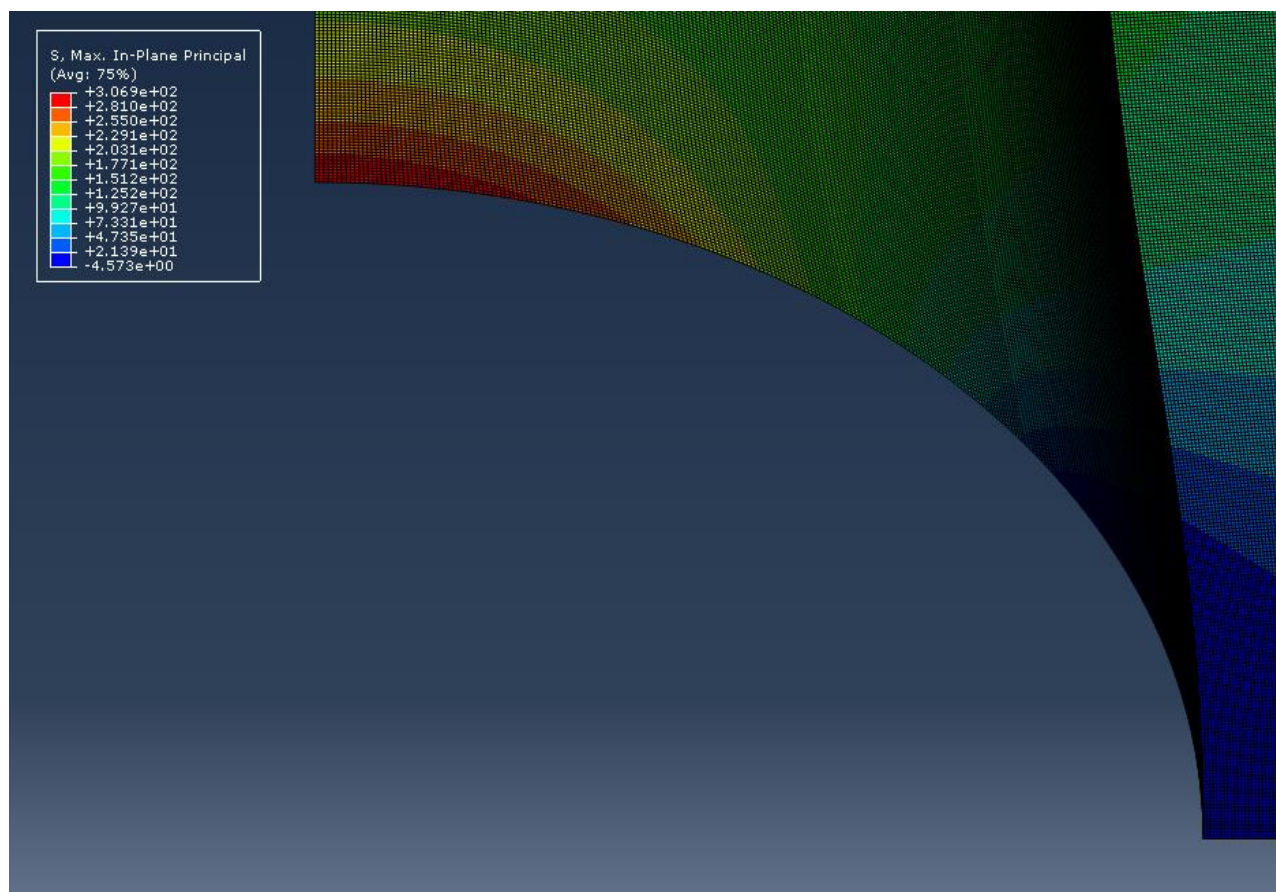
Σχήμα 3.1.7: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.5.



Σχήμα 3.1.8: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.2.



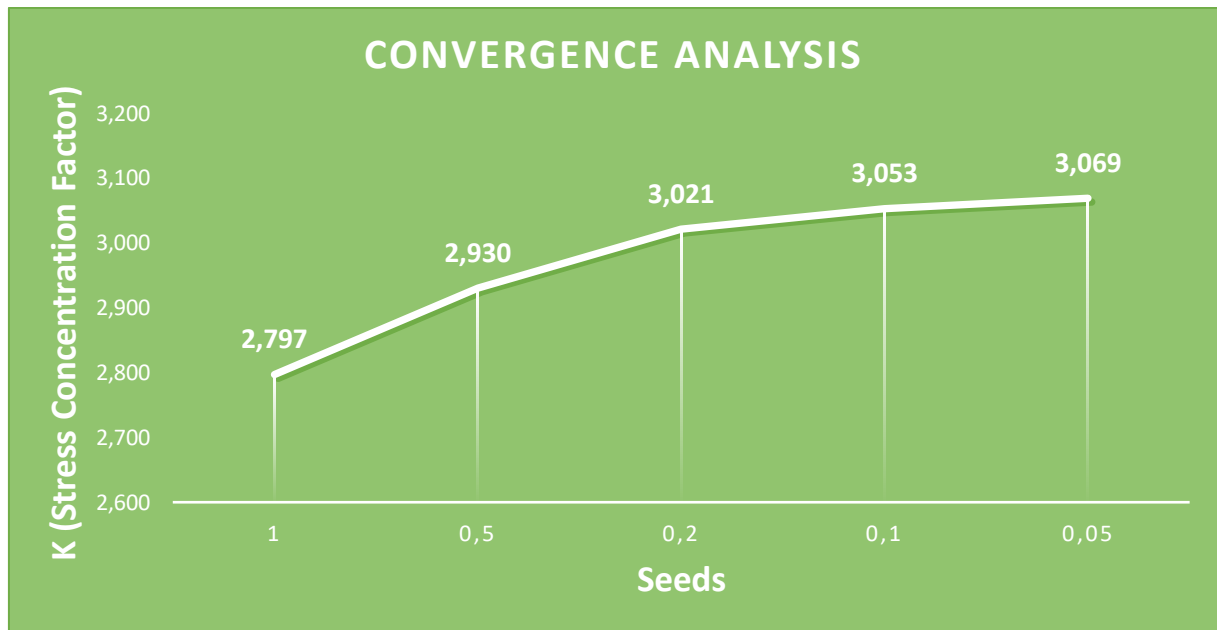
Σχήμα 3.1.9: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.1.



Σχήμα 3.1.10: Μορφή πλέγματος και μέγιστη κύρια τάση στο επίπεδο (Max. In-Plane Principal Stress) σε ομογενές υλικό και για Global Seeds=0.05.

Seeds	K (Stress Concentration Factor)
1 (9984 Elements)	2,797
0,5 (39537 Elements)	2,93
0,2 (248196 Elements)	3,021
0,1 (998188 Elements)	3,053
0,05 (3990580 Elements)	3,069

Πίνακας 3.1: Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε πλέγματος (με βάση τα Seeds που χρησιμοποιήθηκαν κατά την πυκνωση) με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K που προκύπτει.



Σχήμα 3.1.11: Διάγραμμα ανάλυσης σύγκλισης

Από το παραπάνω διάγραμμα ανάλυσης σύγκλισης φαίνεται πως πυκνώνοντας το πλέγμα, από ένα σημείο και μετά η κλίση της ευθείας τείνει να γίνει οριζόντια, δηλαδή η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη πλάκα (συγκεκριμένα στο άνω σημείο της οπής) τείνει να σταθεροποιηθεί σε ένα συγκεκριμένο νούμερο, περίπου ίσο με 3.

Ωστόσο, οι πόροι του συστήματος που απαιτούνται για να τρέξουν την προσομοίωση του χρήστη, αυξάνονται καθώς το πλέγμα πυκνώνεται. Επομένως, για λόγους εξοικονόμησης χρόνου, το mesh που χρησιμοποιείται στην εργασία είναι 0,2, το οποίο δίνει ικανοποιητικά και ακριβή αποτελέσματα.

Όπως αναφέρθηκε, η ανάλυση πλάκας FGM που γίνεται στη παρούσα εργασία, προκύπτει από την χρήση συγκεκριμένων νόμων. Οι νόμοι που μελετήθηκαν χαρακτηρίζονται από τις εξής συναρτήσεις [9] :

$$\bullet \quad E = E_0 \left[\frac{x}{L} \right]^n \quad (3.5)$$

$$\bullet \quad E = \frac{E_0}{1 + K \left[\frac{x}{L} \right]} \quad (3.6)$$

$$\bullet \quad E = E_0 e^{-\frac{x}{L}} \quad (3.7)$$

- $\nu = \nu_0 \left[\frac{x}{L} \right]^n$ (3.8)

Ο πρώτος νόμος αναλύθηκε μέσω της συνάρτησης power-law $E = E_0 \left[\frac{x}{L} \right]^n$ (3.5), όπου:

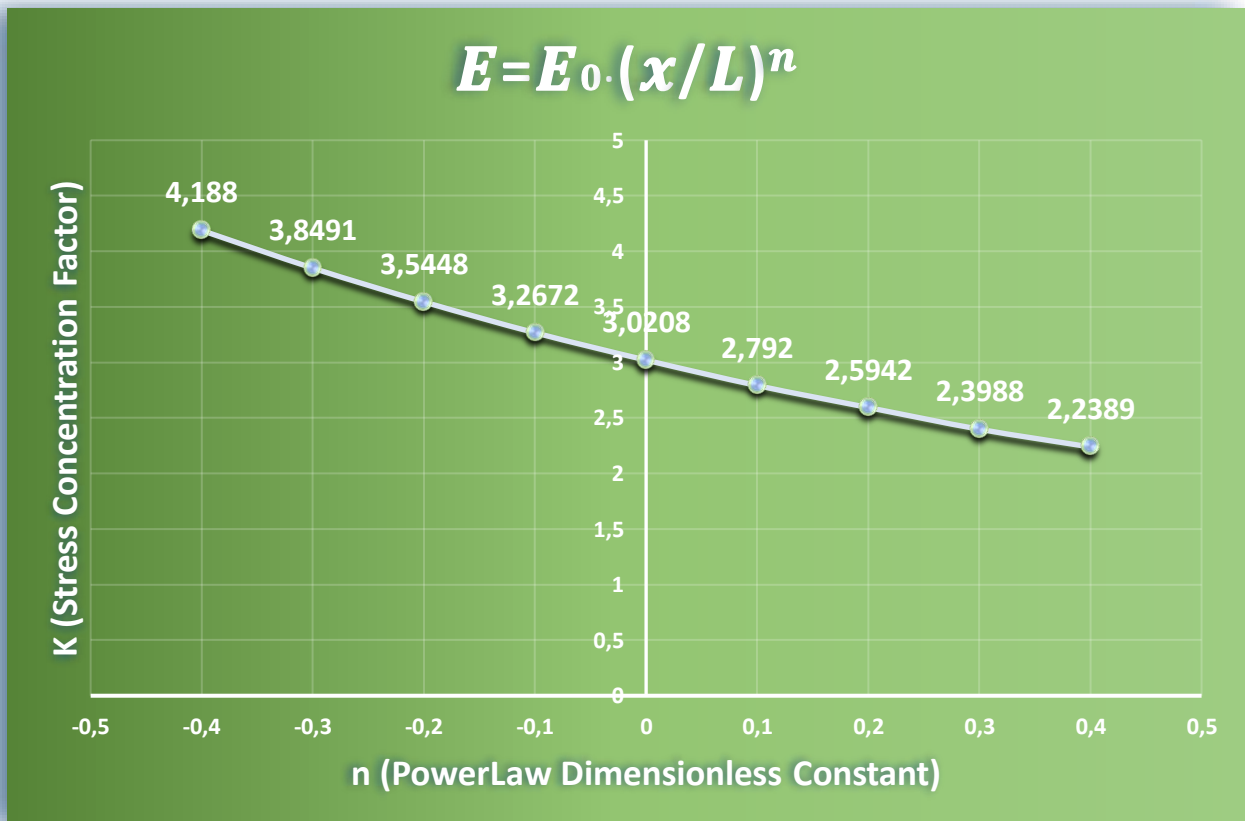
E: Τιμές μέτρου ελαστικότητας Young

E_0 : Μέτρο ελαστικότητας ομογενούς υλικού

x: Απόσταση κέντρου βάρους του εκάστοτε layer από την αριστερή παρειά της πλάκας

L: Μήκος ίσο με 100cm

n: Αδιάστατη σταθερά με τιμές από -0,4 έως +0,4 με βήμα 0,1



Σχήμα 3.1.12: Διάγραμμα μεταβολής του Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K για τη συνάρτηση (3.5).

n	K (Stress Concentration Factor)
-0,4	4,188
-0,3	3,8491
-0,2	3,5448
-0,1	3,2672
0	3,0208
0,1	2,792
0,2	2,5942
0,3	2,3988
0,4	2,2389

Πίνακας 3.2: Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε n με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.5).

Ο δεύτερος νόμος αναλύθηκε μέσω της συνάρτησης $E = \frac{E_0}{1+K\left[\frac{x}{L}\right]}$ (3.6), όπου:

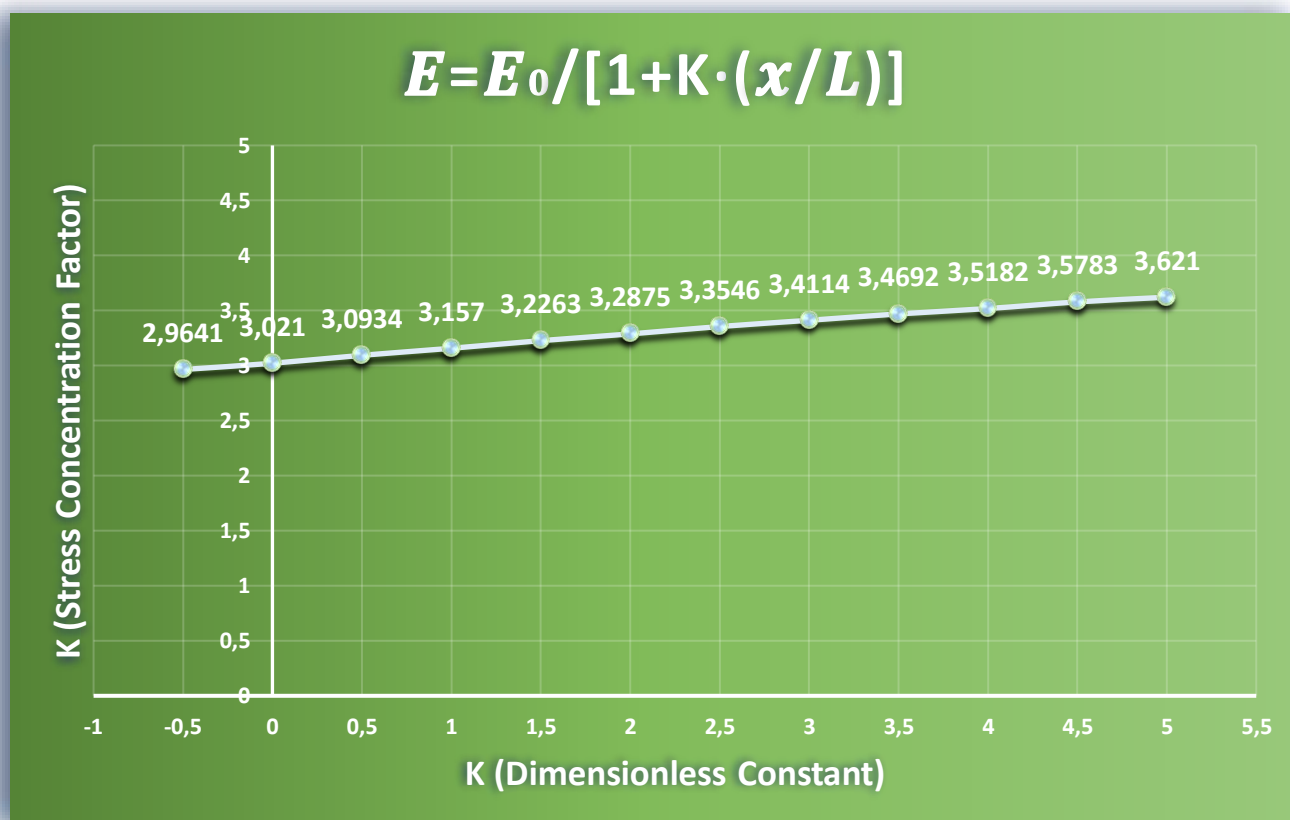
E: Τιμές μέτρου ελαστικότητας Young

E_0 : Μέτρο ελαστικότητας ομογενούς υλικού

K: Αδιάστατη σταθερά με τιμές από -0,5 έως +5 με βήμα 0,5

x: Απόσταση κέντρου βάρους του εκάστοτε layer από την αριστερή παρειά της πλάκας

L: Μήκος ίσο με 100cm



Σχήμα 3.1.13: Διάγραμμα μεταβολής του Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K για τη συνάρτηση (3.6).

K	K (Stress Concentration Factor)
-0,5	2,9641
0	3,021
0,5	3,0934
1	3,157
1,5	3,2263
2	3,2875
2,5	3,3546
3	3,4114
3,5	3,4692
4	3,5182
4,5	3,5783
5	3,621

Πίνακας 3.3: Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε n με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.6).

Ο τρίτος νόμος αναλύθηκε μέσω της συνάρτησης $E = E_0 e^{-\frac{x}{L}}$ (3.7), όπου:

E: Τιμές μέτρου ελαστικότητας Young

E_0 : Μέτρο ελαστικότητας ομογενούς υλικού

x: Απόσταση κέντρου βάρους του εκάστοτε layer από την αριστερή παρειά της πλάκας

L: Μήκος ίσο με 100cm

K (Stress Concentration Factor)
3,159

Πίνακας 3.4: Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση (3.7).

Ο τέταρτος νόμος αναλύθηκε μέσω της συνάρτησης $\nu = \nu_0 \left[\frac{x}{L} \right]^n$ (3.8) και πρόκειται για αυξητικό υλικό, όπου:

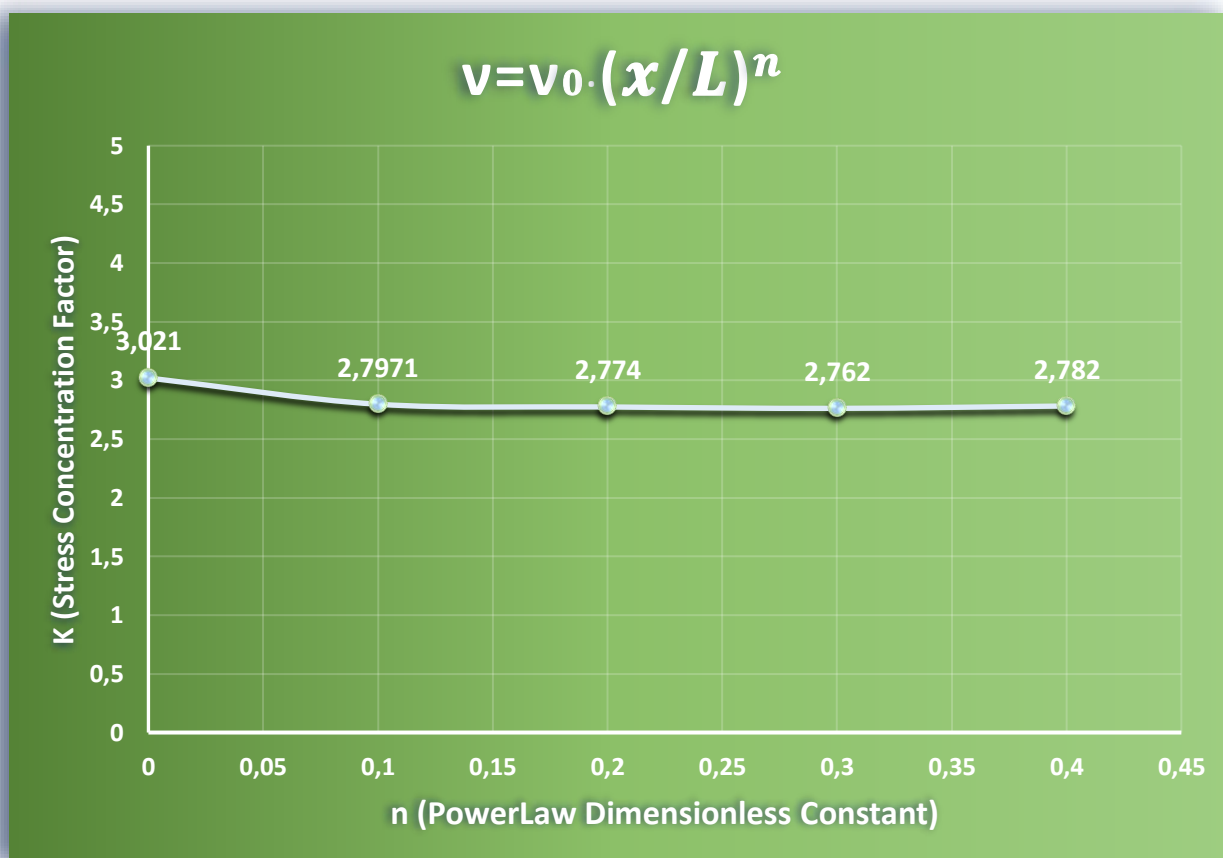
ν : Τιμές λόγου Poisson

ν_0 : Λόγος Poisson ομογενούς υλικού με τιμή ίση με -1

x: Απόσταση κέντρου βάρους του εκάστοτε layer από την αριστερή παρειά της πλάκας

L: Μήκος ίσο με 100cm

n: Αδιάστατη σταθερά με τιμές από 0 έως +0,4 με βήμα 0,1



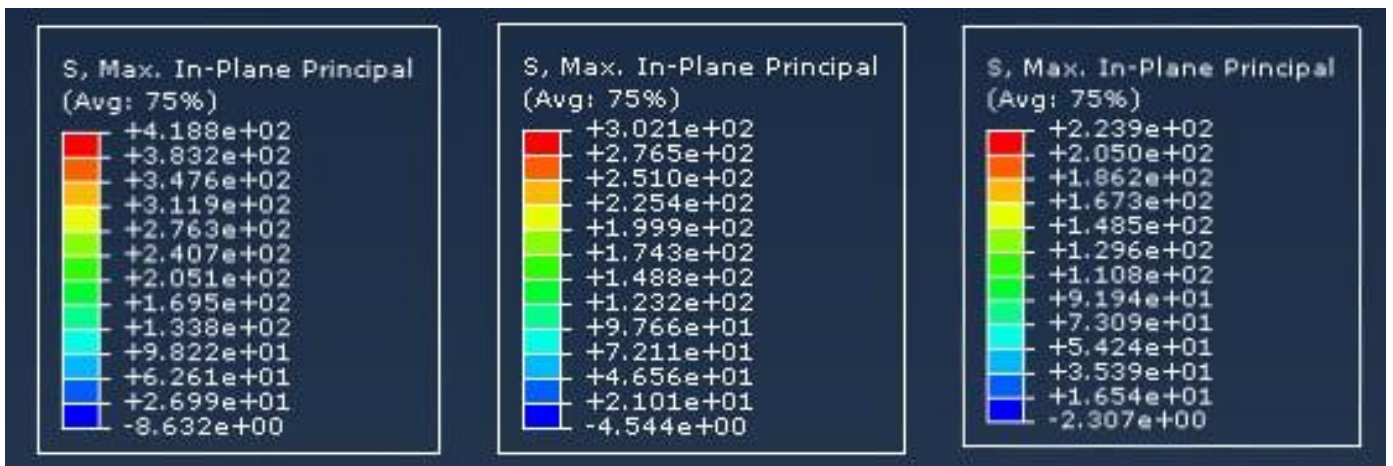
Σχήμα 3.1.14: Διάγραμμα μεταβολής του Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων K για τη συνάρτηση (3.8).

n	K (Stress Concentration Factor)
0	3,021
0,1	2,7971
0,2	2,774
0,3	2,762
0,4	2,782

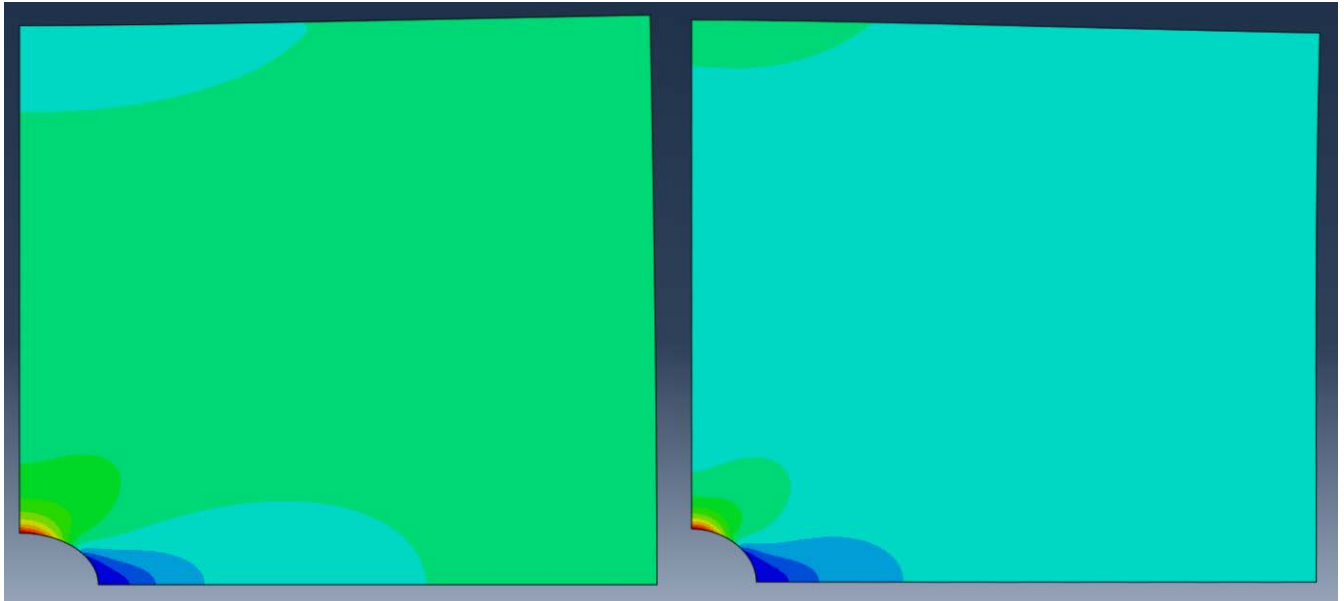
Πίνακας 3.5: Συγκεντρωτικός πίνακας αντιστοίχισης του εκάστοτε n με τον Συντελεστή Συγκέντρωσης Τάσεων που προκύπτει από τη συνάρτηση.



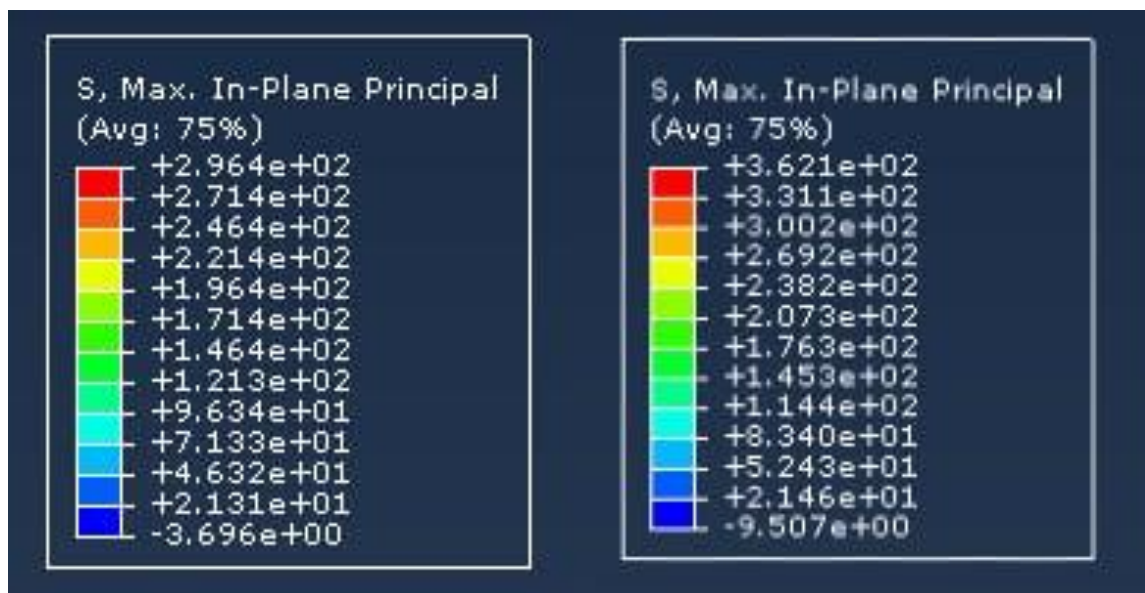
Σχήμα 3.1.15: Προσομοίωση του ABAQUS που απεικονίζει τη μέγιστη κύρια τάση που αναπτύσσεται στην πλάκα σύμφωνα με τη συνάρτηση (3.5). Συγκεκριμένα, αριστερά απεικονίζεται η συγκέντρωση τάσεων στη πλάκα για $n=-0.4$, στη μέση για $n=0$ (δηλαδή για ομογενές υλικό) και δεξιά για $n=0.4$.



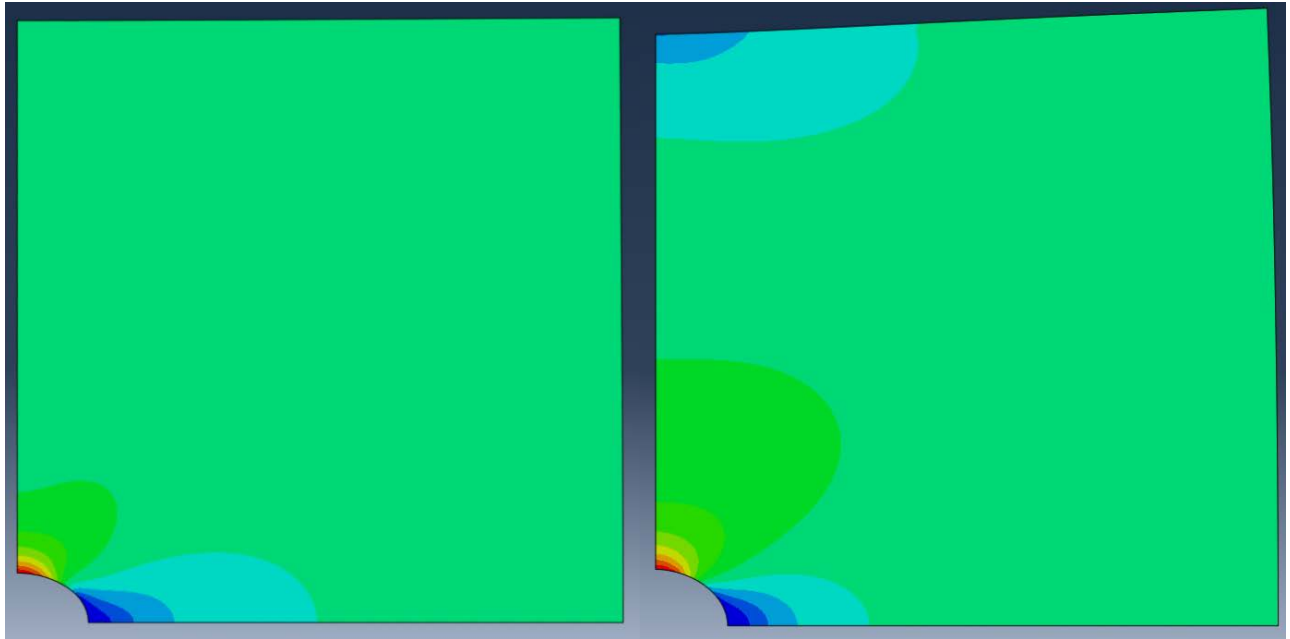
Σχήμα 3.1.16: Υπομνήματα του ABAQUS με τις μέγιστες κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε αντιστοιχία με το Σχ. 3.1.15 για $n=-0.4$, $n=0$ και $n=0.4$ της συνάρτησης (3.5).



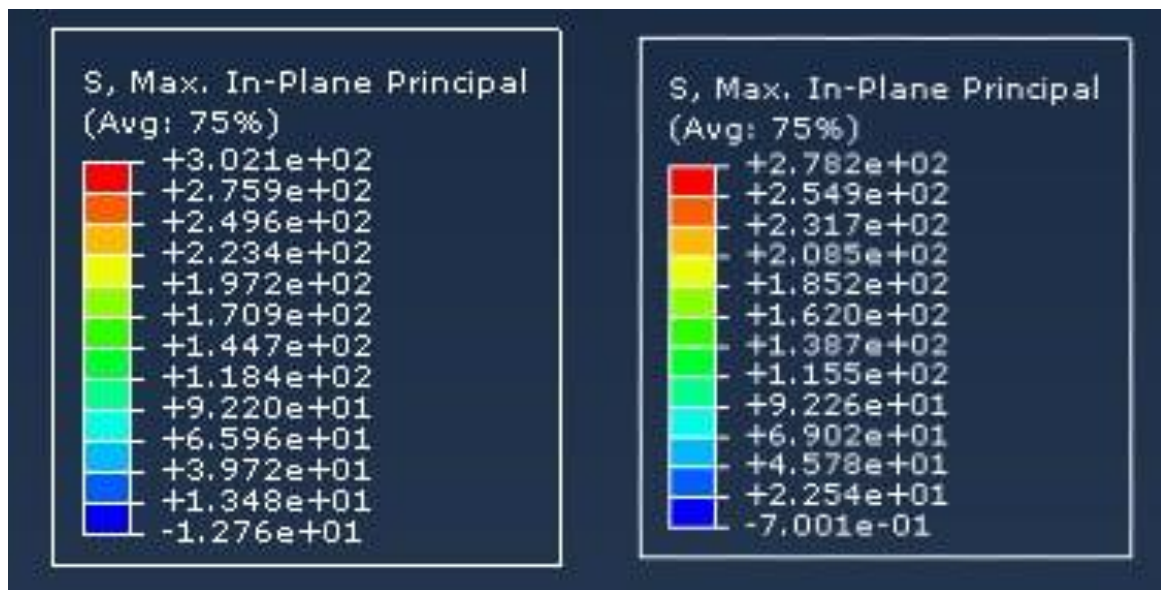
Σχήμα 3.1.17: Προσομοίωση του ABAQUS που απεικονίζει τη μέγιστη κύρια τάση που αναπτύσσεται στην πλάκα σύμφωνα με τη συνάρτηση (3.6). Συγκεκριμένα, αριστερά απεικονίζεται η συγκέντρωση τάσεων στη πλάκα για $K=-0.5$ και δεξιά για $K=5$.



Σχήμα 3.1.18: Υπομνήματα του ABAQUS με τις μέγιστες κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε αντιστοιχία με το Σχ. 3.1.17 για $K=-0.5$ και $K=5$ της συνάρτησης (3.6).

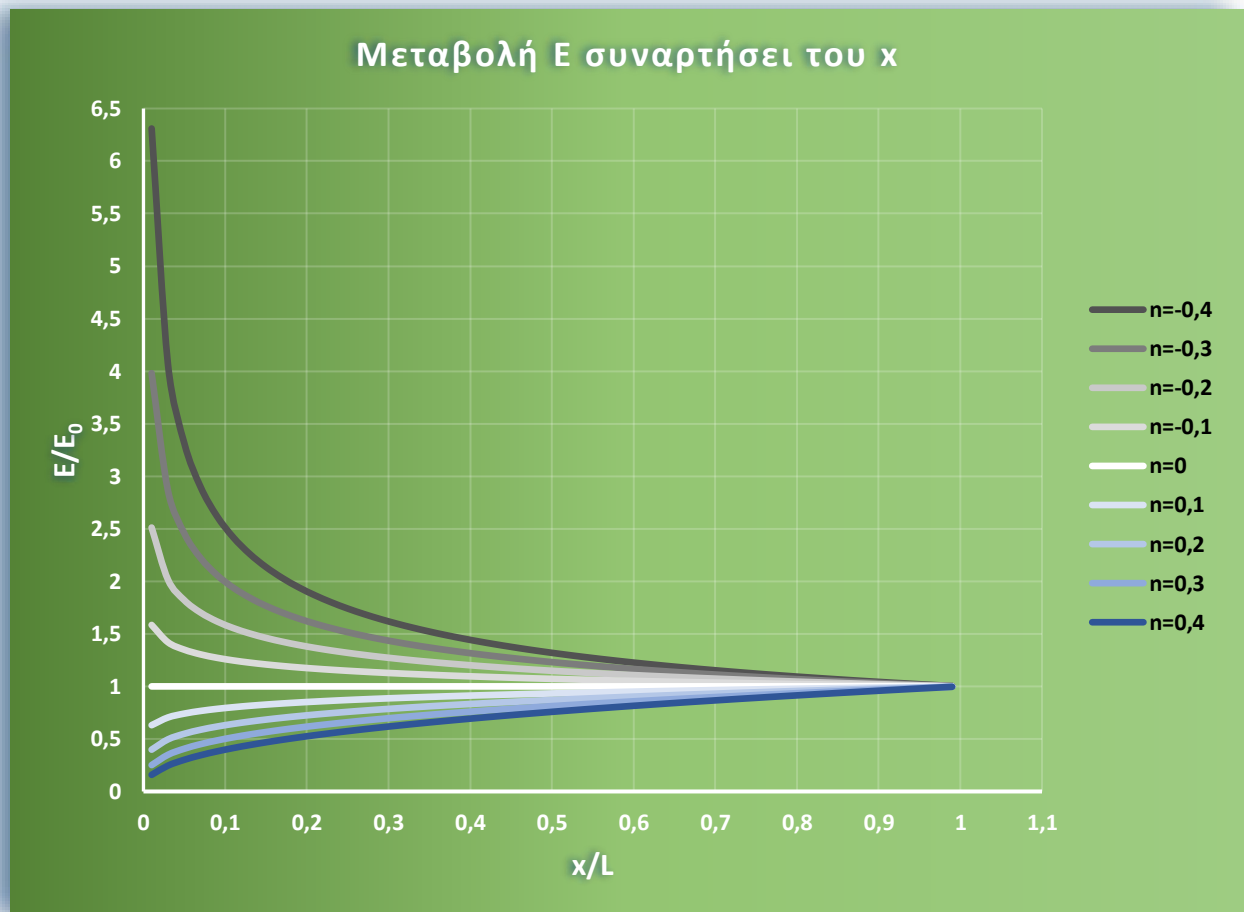


Σχήμα 3.1.19: Προσομοίωση του ABAQUS που απεικονίζει τη μέγιστη κύρια τάση που αναπτύσσεται στην πλάκα σύμφωνα με τη συνάρτηση (3.8). Συγκεκριμένα, αριστερά απεικονίζεται η συγκέντρωση τάσεων στη πλάκα για $n=0$ (δηλαδή για ομογενές υλικό) και δεξιά για $n=0.4$.



Σχήμα 3.1.20: Υπομνήματα του ABAQUS με τις μέγιστες κύριες τάσεις που αναπτύσσονται σε αντιστοιχία με το Σχ. 3.1.19 για $n=0$ και $n=0.4$ της συνάρτησης (3.8).

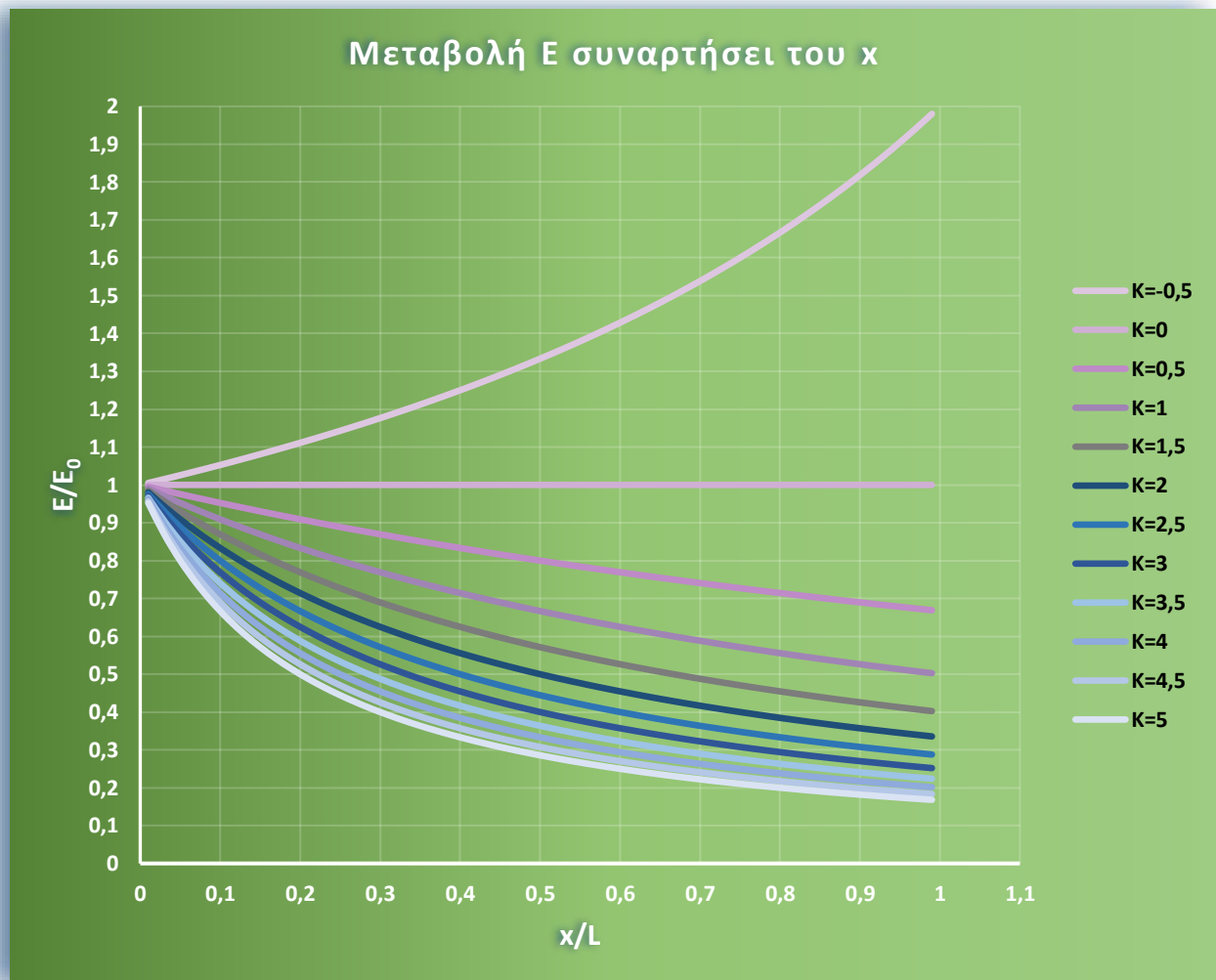
Τα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζουν την μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας. Η κάθε καμπύλη αφορά μία τιμή της εκάστοτε μεταβλητής των συναρτήσεων που αναλύονται στη παρούσα εργασία, οι οποίες τιμές φαίνονται στο υπόμνημα, δεξιά από το διάγραμμα. Το τρίτο διάγραμμα αφορά αντίστοιχα την τρίτη προαναφερόμενη συνάρτηση (3.7), η οποία δεν περιέχει κάποια μεταβλητή και γι' αυτό χαρακτηρίζεται από μία και μόνο καμπύλη.



Σχήμα 3.1.21: Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας Young E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.5).

Παρατηρούμε ότι:

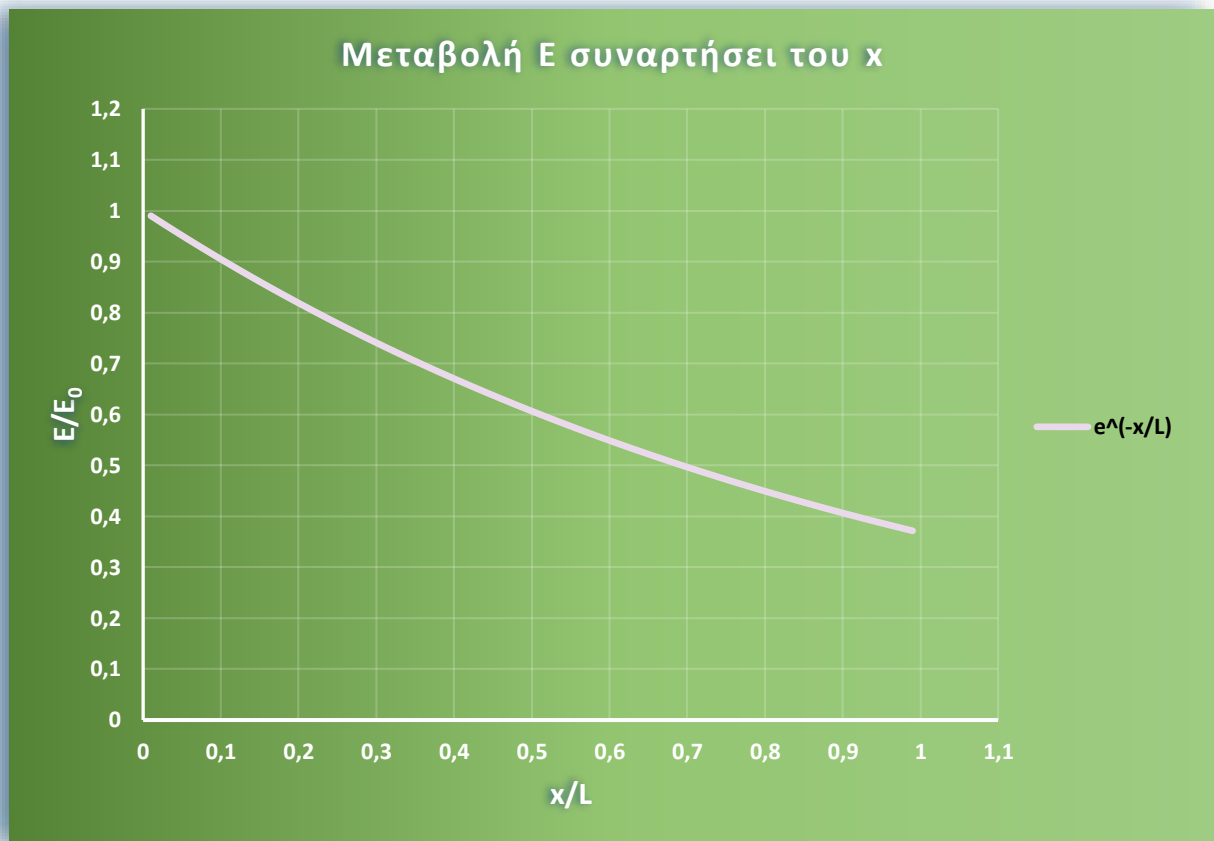
- Για $n=0$: $E=E_0$ (φυσιολογική τιμή) σε όλο το μήκος της πλάκας
- Για $n>0$: στο $x=0$ έχουμε $E<E_0$ επομένως το υλικό είναι πιο ασθενές (μαλακό) ενώ καθώς προχωράμε και φτάνουμε στο $x=L$ έχουμε $E=E_0$.
- Για $n<0$: στο $x=0$ έχουμε $E>E_0$ επομένως το υλικό είναι πιο ανθεκτικό (σκληρό) ενώ καθώς προχωράμε και φτάνουμε στο $x=L$ έχουμε $E=E_0$.



Σχήμα 3.1.22: Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας Young E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.6).

Παρατηρούμε ότι:

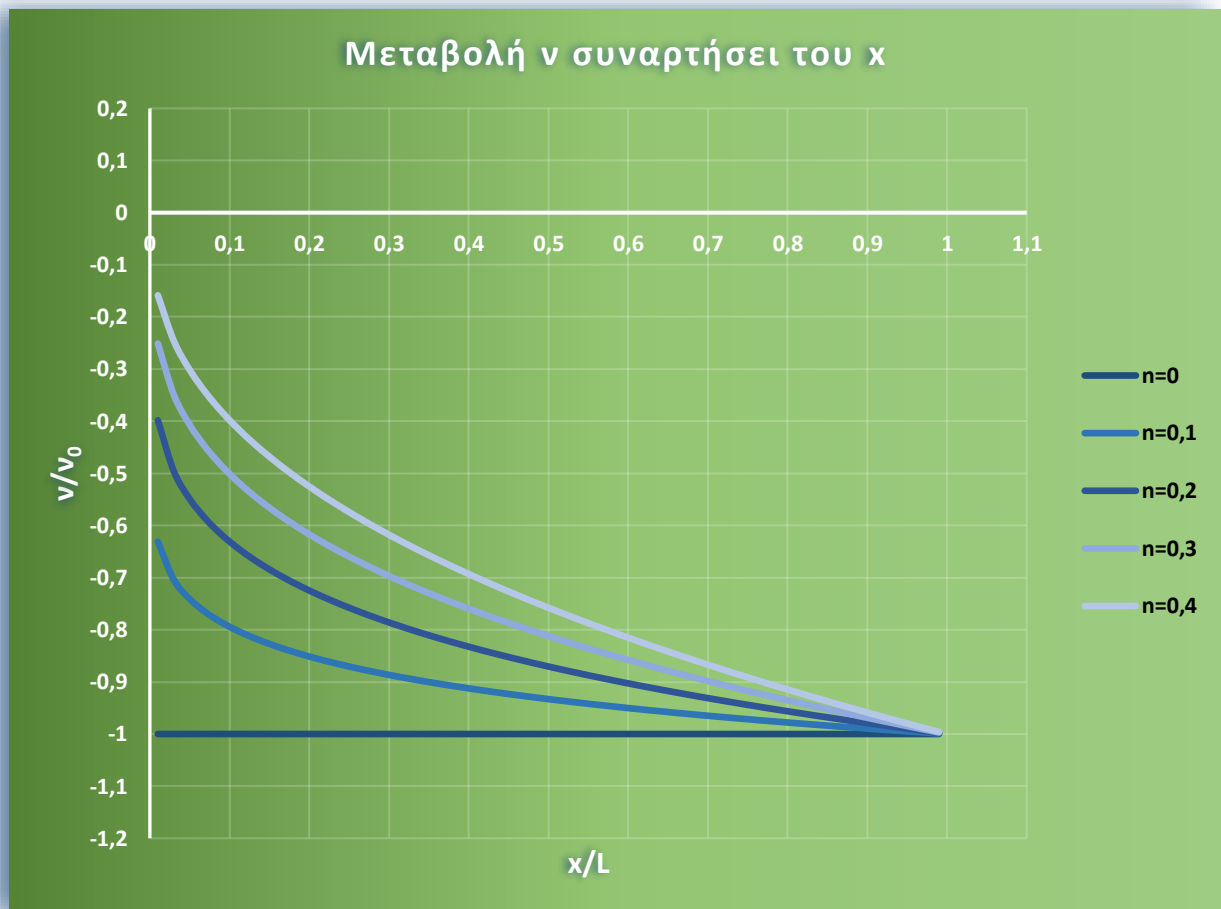
- Για $K=0$: $E=E_0$ (φυσιολογική τιμή) σε όλο το μήκος της πλάκας
- Για $K>0$: στο $x=0$ έχουμε $E=E_0$ ενώ καθώς προχωράμε και φτάνουμε στο $x=L$ έχουμε $E<E_0$ επομένως το υλικό είναι πιο ασθενές (μαλακό).
- Για $K<0$: στο $x=0$ έχουμε $E=E_0$ ενώ καθώς προχωράμε και φτάνουμε στο $x=L$ έχουμε $E>E_0$ επομένως το υλικό είναι πιο ανθεκτικό (σκληρό).



Σχήμα 3.1.23: Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας Young E συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.7).

Παρατηρούμε ότι:

- Για $x=0$: $E=E_0$ (φυσιολογική τιμή)
- Για $x=L$: $E<E_0$ δηλαδή το υλικό καθώς προχωράμε προς τη δεξιά παρειά της πλάκας γίνεται πιο ασθενές (μαλακό).



Σχήμα 3.1.24: Διάγραμμα μεταβολής του λόγου Poisson ν συναρτήσει της απόστασης x από την αριστερή παρειά της πλάκας, για τη συνάρτηση (3.8).

Παρατηρούμε ότι:

- Για $n=0$: $\nu=\nu_0$ (φυσιολογική τιμή) σε όλο το μήκος της πλάκας
- Για $n>0$: στο $x=0$ έχουμε $\nu<\nu_0$ ενώ καθώς προχωράμε και φτάνουμε στο $x=L$ έχουμε $\nu=\nu_0$.

Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα

4.1 Συμπερασματική ανάλυση

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί σε αποτελέσματα μέσω των οποίων προκύπτουν και τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Στο υλικό που χαρακτηρίζεται από το νόμο (3.5) παρατηρείται ότι για $n=-0,4$ από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.12 προκύπτει συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων $K=4,188$ και από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.21 προκύπτει ότι στην αριστερή παρειά έχουμε μέτρο ελαστικότητας $E=6,31$ και καθώς προχωράμε προς τη δεξιά παρειά, το μέτρο ελαστικότητας μειώνεται μέχρι που φτάνει να είναι πολύ κοντά στο 1. Για $n=+0,4$ παρατηρείται από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.12 ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων μειώνεται και είναι ίσος με $K=2,239$ και από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.21 προκύπτει ότι στην αριστερή παρειά της πλάκας έχουμε μικρό μέτρο ελαστικότητας $E=0,16$ ενώ προχωρώντας προς τη δεξιά παρειά της πλάκας το μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται και φτάνει πολύ κοντά στο 1.

Στο υλικό που χαρακτηρίζεται από το νόμο (3.6) παρατηρείται ότι για $K=-0,5$ από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.13 προκύπτει συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων $K=2,964$ και από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.22 προκύπτει ότι στην αριστερή παρειά έχουμε μέτρο ελαστικότητας E το οποίο είναι πολύ κοντά στο 1 και καθώς προχωράμε προς τη δεξιά παρειά, το μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται και φτάνει την τιμή $E=1,98$. Για $K=5$ παρατηρείται από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.13 ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων αυξάνεται και είναι ίσος με $K=3,621$ και από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.22 προκύπτει ότι στην αριστερή παρειά της πλάκας έχουμε μέτρο ελαστικότητας E πολύ κοντά στο 1 ενώ προχωρώντας προς τη δεξιά παρειά της πλάκας το μέτρο ελαστικότητας μειώνεται σε τιμή ίση με $E=0,17$.

Στο υλικό που χαρακτηρίζεται από το νόμο (3.7) η μόνη μεταβλητή είναι η απόσταση x από την αριστερή παρειά και μέσω της ανάλυσης προκύπτει συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων $K=3,159$. Παρατηρείται από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.23 ότι στην αριστερή παρειά το μέτρο ελαστικότητας είναι πολύ κοντά στο 1 ενώ καθώς προχωράμε προς τη δεξιά παρειά της πλάκας, δηλαδή όλο και πιο μακριά από την οπή, το μέτρο ελαστικότητας μειώνεται σε $E=0,37$.

Όσον αφορά το αυξητικό υλικό που χαρακτηρίζεται από το νόμο (3.8) παρατηρείται ότι για $n=0$ από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.14 προκύπτει συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων

$K=3,021$ (ομογενές υλικό) και από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.24 προκύπτει προφανώς μία ευθεία με σταθερό λόγο Poisson ίσο με -1 . Για $n=0,4$ παρατηρείται από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.14 ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων μειώνεται και είναι ίσος με $K=2,782$ και από το διάγραμμα του Σχήματος 3.1.24 προκύπτει ότι στην αριστερή παρεία της πλάκας έχουμε λόγο Poisson ν πολύ κοντά στο 0 ενώ προχωρώντας προς τη δεξιά παρεία της πλάκας ο λόγος Poisson μειώνεται και φτάνει στην τιμή $\nu=-1$.

Συνοπτικά:

ΝΟΜΟΣ	ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ	Σ.Σ.Τ. - S.C.F.	ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΠΑΡΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ (Κοντά στην οπή)	ΔΕΞΙΑ ΠΑΡΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ (Μακριά από την οπή)
$E = E_0 \left[\frac{x}{L} \right]^n$	Για $n=-0,4$	$K=4,188$	$E=6,31E_0$	$E=E_0$
	Για $n=0,4$	$K=2,239$	$E=0,16E_0$	$E=E_0$
$E = \frac{E_0}{1+K \left[\frac{x}{L} \right]}$	Για $K=-0,5$	$K=2,964$	$E=E_0$	$E=1,98E_0$
	Για $K=5$	$K=3,621$	$E=E_0$	$E=0,17E_0$
$\nu = \nu_0 \left[\frac{x}{L} \right]^n$	Για $n=0$	$K=3,021$	$\nu=-1$	$\nu=-1$
	Για $n=0,4$	$K=2,782$	$\nu=0$	$\nu=-1$

Πίνακας 4.1: Συγκεντρωτικός πίνακας που συνοψίζει όλα τα αποτελέσματα για την εκάστοτε συνάρτηση.

4.2 Σχολιασμός συμπερασμάτων

Από τον παραπάνω πίνακα εξάγονται συγκεκριμένα συμπεράσματα για τον ρόλο των FGMs στη συγκέντρωση τάσεων ενός υλικού. Στον νόμο της σχέσης (3.5) παρατηρείται πως καθώς το μέτρο ελαστικότητας E μειώνεται με την απομάκρυνση από την οπή, ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων αυξάνεται, ενώ καθώς το μέτρο ελαστικότητας E αυξάνεται με την απομάκρυνση από την οπή, ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων μειώνεται. Η ίδια ακριβώς παρατήρηση ισχύει και για όλους τους υπόλοιπους νόμους. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι με την εφαρμογή κατάλληλων υλικών FGM, αναλόγως με τις υπάρχουσες απαιτήσεις, μπορεί να ελεγχθεί η αντίστοιχη ανάπτυξη τάσεων. Το σύνηθες είναι να

επιδιώκεται όσο το δυνατόν μικρότερη συγκέντρωση τάσεων. Με τις κατάλληλες ιδιότητες υλικού FGM, είναι εφικτό λοιπόν να μειωθεί σε ικανοποιητικό βαθμό η συγκέντρωση τάσεων στις κρίσιμες περιοχές του υλικού αυτού με αποτέλεσμα η κατασκευή να καταπονείται όσο το δυνατόν λιγότερο. Η συγκεκριμένη λειτουργία δίνει λύση σε πολυάριθμα προβλήματα ανάπτυξης και συγκέντρωσης τάσεων.

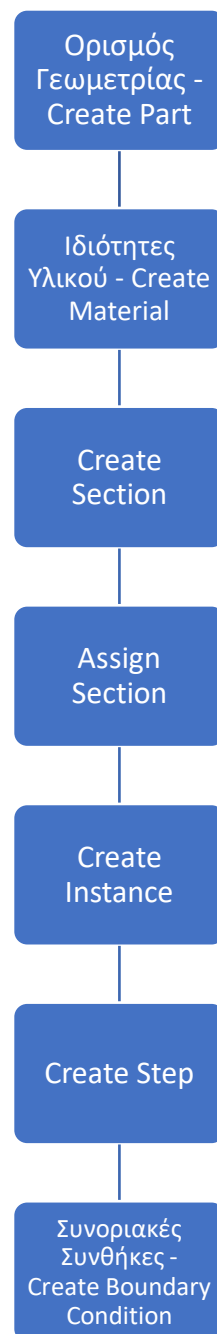
Βιβλιογραφία

- [1] Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G., Functionally Graded Materials: Design, Processing, and Applications, Materials Technology Series, 5, (1999), pp. 2.
- [2] Saleh B., Jiang J., Fathi R., Al-hababi T., Xu Q., Wang L., Song D., Ma A., 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges, Composites Part B: Engineering, 201, (2020), pp. 2-3.
- [3] Mota A. F., Loja M. A. R., Mechanical Behavior of Porous Functionally Graded Nanocomposite Materials, Journal of Carbon Research, 5(2), 34, (2019), pp. 5.
- [4] Αποστόλου Ν., Συγκέντρωση τάσεων σε μηχανολογικές κατασκευές, Διπλωματική εργασία, Πάτρα (2017) pp. 26.
- [5] Singam S., Kumar B., Rajagopal A., Reddy J., Gupta R. K., Influence of the homogenization scheme on the bending response of functionally graded plates, Acta Mechanica (2018) pp. 3.
- [6] Naidoo P., Drosopoulos G., Evaluation of the dynamic response of structures using auxetic-type base isolation, Focused on Structural Integrity and Safety: Experimental and Numerical Perspectives, Frattura ed Integrità Strutturale, 14(51):52-70, (2020) pp. 54.
- [7] Preetha V., Vignesh P. S., Indhumathi L., Senthilkumar V., Parametric studies on thin plates with holes, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 764, (2020) pp. 1.
- [8] Stress Concentration at Holes, Fracture Mechanics Website

- [9] Sadd M.H., Elasticity Theory, Applications and Numerics. Fourth Edition, Academic Press
(2021) *Nonhomogeneous Elasticity*, 14, pp. 435-436.
- [10] Wikipedia, Functionally Graded Material
- [11] Wikipedia, Auxetics

Παράρτημα Α

ABAQUS FlowChart



ABAQUS FlowChart (συνέχεια)

