



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Σχολή Τεχνολογίας

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων

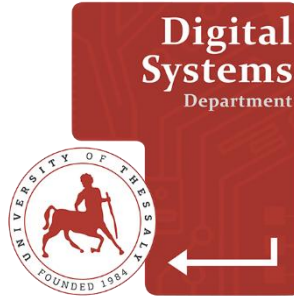
**Γραμματισμός
Κβαντικής Υπολογιστικής
στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στυλιανός Ντούσιος (ΑΜ: 3121001)

Επιβλέπων: Δρ. Ηλίας Σάββας, Καθηγητής

ΛΑΡΙΣΑ, Μάιος 2024



UNIVERSITY OF THESSALY

School of Technology

Digital Systems Department

Quantum Computing Literacy in Secondary Education

BACHELOR THESIS

Stylianos Ntousios (RN: 3121001)

Supervisor: *Dr Ilias Savas, professor*

LARISSA, May 2024

Υπεύθυνη Δήλωση περί Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας και Πνευματικών Δικαιωμάτων

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα πτυχιακή εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον, και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Ο Δηλών

(Υπογραφή)

Στυλιανός Ντούσιος

/ /2024

Εγκρίνεται από την Επιτροπή Εξέτασης:

Επιβλέπων

Ηλίας Σάββας

Καθηγητής / Κβαντικής Υπολογιστικής,

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μέλος

Κωνσταντίνος Χαϊκάλης

Αναπληρωτής Καθηγητής / Τηλεπικοινωνίες,

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μέλος

Όμηρος Ιατρέλλης

Επίκουρος Καθηγητής / Φυσικής – Διδακτικής,

Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ημερομηνία έγκρισης:-.....-2024

Περίληψη

Οι κβαντικοί υπολογιστές βρίσκονται σήμερα στην αιχμή της τεχνολογίας στον πλανήτη μας. Ποια εικόνα μπορούν να έχουν οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για το θέμα; Η πληροφόρηση που εισπράττουν, κυρίως από πηγές στο διαδίκτυο συχνά αμφιλεγόμενες, γεννά απορίες και αρκετές φορές παρερμηνείες. Μπορεί το σχολείο να έχει έναν καταλυτικό ρόλο στην εκπαίδευση των παιδιών για ένα τόσο σύγχρονο πεδίο της επιστήμης και της τεχνολογίας, που φαίνεται πως θα παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στην ζωή τους στο μέλλον; Οφείλει να το κάνει.

Η εργασία αυτή φιλοδοξεί να γίνει ένας οδηγός για τον εκπαιδευτικό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που κινείται στην περιοχή του STEAM και θα ήθελε να εισάγει την κβαντική υπολογιστική στο σχολείο του. Το πρώτο μέρος της περιλαμβάνει όλες τις βασικές, θεωρητικές γνώσεις, που θα πρέπει στοιχειωδώς να έχει ο ίδιος για την κβαντική υπολογιστική και είναι γραμμένο στην γλώσσα των μαθηματικών. Το δεύτερο μέρος αφορά στην διδακτική και περιλαμβάνει τόσο την θεωρητική προσέγγιση της ένταξης της κβαντικής υπολογιστικής στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όσο και μία πρόταση εφαρμογής που δοκιμάστηκε στην πράξη σε ελληνικό σχολείο.

Τα αποτελέσματα είναι εξαιρετικά ενθαρρυντικά και το κεντρικό συμπέρασμα της εργασίας είναι πως δεν υπάρχει ουσιαστικός περιορισμός για τα σύγχρονα θέματα της επιστήμης που μπορεί να προσεγγίσει ο εκπαιδευτικός με τους μαθητές του στην τάξη.

Abstract

Quantum computers are currently at the cutting edge of technology on our planet. What insight can secondary school students have on the subject? The information they receive, mainly from often controversial sources on the internet, raises questions and several times misinterpretations. Can school have a catalytic role in educating children about such a modern field of science and technology, which seems to play a very important role in their lives in the future? It must do so.

This project aspires to become a guide for the secondary school teacher who moves around STEM and would like to introduce quantum computing in his school. The first part of it includes all the basic, theoretical knowledge that he should have about quantum computing and is written in the language of mathematics. The second part concerns didactics and includes both the theoretical approach of integrating quantum computing into secondary education, as well as an application proposal that was tested in practice in a Greek high school.

The results are extremely encouraging, and the central conclusion of the paper is that there is no substantial limitation on contemporary science issues that the teacher can approach with his students in class.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ από καρδιάς τον Dr. Ηλία Σάββα, για το μεγάλο παράθυρο που άνοιξε στο μυαλό μου, προσφέροντάς μου το θέμα της πτυχιακής αυτής, όπως και για την αμέριστη στήριξη και εμπιστοσύνη που μου έδειξε. Ευχαριστώ τη Δήμητρα και τα παιδιά, για όλα τα «Δεν μπορώ τώρα» που άκουσαν με υπομονή στο σπίτι. Ευχαριστώ τους πραγματικά καινοτόμους συναδέλφους μου, την Κατερίνα Καμπούρη και τον Γιώργο Κουκουτιανό, που στήριξαν την προσπάθειά μου να εισάγω πειραματικά στο σχολείο μας τον γραμματισμό στην κβαντική υπολογιστική και οπωσδήποτε τους μαθητές μου και τις μαθήτριάς μου για τον ενθουσιασμό, το πάθος, το χιούμορ και τις υπέροχες ιδέες και απορίες με τις οποίες ζωντάνεψαν τον κβαντικό εκπαιδευτικό μας όμιλο!

Στέλιος Ντούσιος

/ /2024

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	VI
ABSTRACT	VII
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	VIII
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	IX
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΜΕΡΟΣ Α΄ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ	3
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΒ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ.....	3
1.1 ΚΛΑΣΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ VS ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ.	3
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ.	5
1.3 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ.	8
1.3.1 Δυναδικότητα κύματος – σωματιδίου.....	8
1.3.2 Αρχή της αβεβαιότητας & κυματοσυνάρτηση.....	9
1.3.3 Κβαντική μέτρηση – υπέρθεση – διεμπλοκή	11
2 ΑΡΧΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ.....	13
2.1 QUBITS – ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ	13
2.1.1 Μορφές qubit	13
2.1.2 Αλγεβρικός φορμαλισμός	14
2.1.3 Γινόμενα κβαντικών καταστάσεων	15
2.1.4 Η σφαίρα Bloch.....	16
2.2 ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ & ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ	17
2.2.1 Κβαντικές πύλες ενός qubit.....	18
2.2.2 Κβαντικές πύλες για 2 ή 3 qubits	20
2.3 ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ – ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ & ΑΝΑΛΥΣΗ	22
3 ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ	26
3.1 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DEUTSCH-JOZSA.....	26
3.2 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ GROVER	29
3.3 Άλλοι κβαντικοί αλγόριθμοι.....	31

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ.....	33
4 Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ.....	33
4.1 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝ. ΣΧΟΛΕΙΟ	33
4.2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕ ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ	37
5 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΒ.ΥΠ. ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ.....	41
5.1 ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΗΜΑΤΟΣ.....	41
5.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΚΟΣΜΟ.....	42
5.3 ΕΞΟΙΚΕΙΩΣΗ ΜΕ ΤΟΝ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟ “Q IS 4 QUANTUM”	47
5.4 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ IBM Q EXPERIENCE.....	55
5.5 MONEY OR TIGER.....	58
5.6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ	63
6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	65
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	67
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	71
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	72

Εισαγωγή

Η Επιστήμη και η Τεχνολογία της Κβαντικής Πληροφορίας (QIST) γνωρίζει στην εποχή μας μεγάλη ανάπτυξη, με τεράστιες επενδύσεις στην έρευνα και στην προσπάθεια κατασκευής λειτουργικά αξιόπιστων κβαντικών υπολογιστών. Η επίτευξη του στόχου μπορεί να φέρει μία πραγματική επανάσταση στις υπολογιστικές δυνατότητες των ανθρώπων, με επεκτάσεις σε πολλούς τομείς της επιστημονικής έρευνας και της τεχνολογίας. Αναμένεται η πρακτική αξιοποίηση της κβαντικής υπολογιστικής να επιδράσει καταλυτικά στην ασφάλεια, στην κρυπτογραφία, στην μηχανική μάθηση, στην ανάπτυξη νέων υλικών, στην φαρμακευτική έρευνα, στη διαχείριση της ενέργειας, στη διαχείριση των εφοδιαστικών αλυσίδων και τελικά στην υγεία, στην οικονομία και στην ίδια την ζωή των ανθρώπων.

Οι μαθητές και οι μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συναντούν, στο διαδίκτυο κυρίως, πληροφορίες για τις σχετικές τεχνολογίες και αποκτούν την περιέργεια να μάθουν περισσότερα. Στην εργασία αυτή επιχειρείται να δοθεί στον εκπαιδευτικό του σχολείου ένας οδηγός για να εισάγει τα παιδιά στον κόσμο της κβαντικής υπολογιστικής, ξεπερνώντας τον σκόπελο των προαπαιτούμενων γνώσεων φυσικής και μαθηματικών, χωρίς όμως αυτή η παράκαμψη να γίνεται σε βάρος της επιστημονικής αλήθειας και να γεννά παρανοήσεις.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη: Ένα μέρος καθαρά θεωρητικό που περιλαμβάνει τις βασικές, απαιτούμενες γνώσεις κβαντικής μηχανικής και υπολογιστικής, με τον μαθηματικό φορμαλισμό τους, που πρέπει να έχει ως υπόβαθρο ο εκπαιδευτικός κι ένα μέρος που περιγράφει την διδακτική προσέγγιση, με μία πλήρη μέθοδο διδακτικής της κβαντικής υπολογιστικής, που εφαρμόστηκε για πρώτη φορά φέτος σε ελληνικό σχολείο με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

Το πρώτο μέρος ξεκινά με την διάκριση μεταξύ κβαντικής και κλασικής υπολογιστικής, εστιάζοντας στις διαφορές στην φιλοσοφία, στην λειτουργία και στην υλοποίηση των υπολογιστικών συστημάτων. Στη συνέχεια, δίνεται η ιστορική διαδρομή με τα ορόσημα της κβαντικής υπολογιστικής που μας οδήγησαν στο σήμερα και οι θεμελιώδεις αρχές της κβαντικής μηχανικής, πάνω στις οποίες στηρίζεται το οικοδόμημα των κβαντικών υπολογιστών. Εστιάζουμε στην δυαδικότητα κύματος – σωματιδίου, στην

αρχή της αβεβαιότητας και την κυματοσυνάρτηση που περιγράφει τα κβαντικά σωματίδια, όπως και στα φαινόμενα που αξιοποιούνται κατά κόρον στην κβαντική υπολογιστική, την υπέρθεση, την διεμπλοκή και την έννοια της μέτρησης – παρατήρησης ενός κβαντικού σωματιδίου. Ακολουθούν οι αρχές της κβαντικής υπολογιστικής, όπου περιγράφονται οι μορφές των qubits και ο μαθηματικός φορμαλισμός τους, καθώς και η επεξεργασία της πληροφορίας μέσω των κβαντικών πυλών. Το πρώτο μέρος κλείνει με τον σχεδιασμό και την ανάλυση βασικών κβαντικών αλγορίθμων, με κύρια εστίαση στον Deutsch-Jozsa που αξιοποιείται και στην διδακτική μέθοδο με τη μορφή παιχνιδιού-γρίφου.

Το δεύτερο μέρος αφορά στην διδακτική της κβαντικής υπολογιστικής στους εφήβους. Ξεκινά με τη διδακτική προσέγγιση ενός τέτοιου σύγχρονου θέματος, γενικά και ειδικότερα στο ελληνικό σχολείο. Εξετάζονται εκπαιδευτικές πρακτικές που έχουν αξιοποιηθεί μέχρι σήμερα και εξηγείται η επιλογή της συγκεκριμένης νέας μεθόδου. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή για την εφαρμογή της μεθόδου διδακτικής στην πράξη, όπως αυτή υλοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2023-2024. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα που ολοκληρώνεται σε τέσσερα στάδια, ένα θεωρητικό και τρία με πρακτικές δραστηριότητες στο χαρτί και στον υπολογιστή.

Κανένα στάδιο δεν περιλαμβάνει τον μαθηματικό φορμαλισμό με τον οποίο περιγράφονται σε προπτυχιακό ή μεταπτυχιακό επίπεδο τα φαινόμενα αυτά. Το 1^ο θεωρητικό στάδιο εισάγει τα παιδιά στον κόσμο της κβαντικής μηχανικής και υπολογιστικής. Στο 2^ο στάδιο γίνεται εξοικείωση των παιδιών με έναν ειδικό φορμαλισμό που περιλαμβάνει μόνο μπάλες και κουτιά. Στο 3^ο στάδιο μεταβαίνουμε στο περιβάλλον προσομοίωσης του IBM Q Experience, όπου οι μπάλες και τα κουτιά γίνονται κβαντικά κυκλώματα με qubits και κβαντικές πύλες. Στο 4^ο και τελευταίο στάδιο τα παιδιά αξιοποιούν όσα έμαθαν για να παίξουν το παιχνίδι Money or Tiger και να λύσουν έναν γρίφο.

Τα αποτελέσματα από τις παρατηρήσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια του προγράμματος και την ανατροφοδότηση που έδωσαν τα παιδιά που συμμετείχαν στο πρόγραμμα είναι ενδιαφέροντα και περιγράφονται αναλυτικά στο τέλος της παρούσης. Το κεντρικό συμπέρασμα από την υλοποίηση, είναι πως η εισαγωγή της κβαντικής υπολογιστικής στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι εφικτή με πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα και ανοίγει ένας δρόμος για βελτιστοποίηση των καλών πρακτικών που εφαρμόστηκαν.

Μέρος Α΄

Βασικά στοιχεία κβ. υπολογιστικής

Σε αυτό το πρώτο μέρος της παρούσης δίνονται τα βασικά στοιχεία της κβαντικής υπολογιστικής για τον αναγνώστη που έχει το μαθηματικό υπόβαθρο να τα παρακολουθήσει με την επιστημονική τους ορολογία. Απευθύνεται κυρίως στον εκπαιδευτικό που δραστηριοποιείται στον χώρο του STEM (Science Technology Engineering Mathematics) και θέλει πριν απευθυνθεί στα παιδιά, να γνωρίζει τους βασικούς μαθηματικούς σχηματισμούς, που κρύβονται πίσω από την μέθοδο προσομοίωσης που θα χρησιμοποιήσει στην τάξη του. Φυσικά για την πληρέστερη προσέγγιση του θέματος κρίνεται απαραίτητη η μελέτη κάποιων σχετικών αναλυτικών συγγραμμάτων π.χ. (Καραφυλλίδης, 2015), (Σάββας & Σαμπάνη, 2022), (Khang, 2024) και πολλά άλλα κυρίως στην αγγλική, αλλά και η πρακτική εξάσκηση με σχετικά εργαλεία όπως το Qiskit ή το IBM Quantum.

1 Εισαγωγή στην κβ. υπολογιστική

Πόσο κοντά είναι η κβαντική υπολογιστική στην κλασική υπολογιστική που γνωρίζουμε; Σε αυτό το κεφάλαιο εντοπίζονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τους κβαντικούς υπολογιστές από τους κλασικούς, ανιχνεύεται το ιστορικό πλαίσιο που εισήγαγε και ανέπτυξε την κβαντική υπολογιστική και περιγράφονται οι θεμελιώδεις αρχές της κβαντικής μηχανικής που σχετίζονται με τους κβαντικούς υπολογιστές.

1.1 Κλασική υπολογιστική vs κβαντική υπολογιστική.

Ας δούμε αρχικά τι νέο εισάγεται με την κβαντική υπολογιστική και ποιες είναι οι διαφοροποιήσεις έναντι της κλασικής υπολογιστικής (Williams, 2010).

Μία βασική διαφορά, αφορά στη θεμελιώδη μονάδα πληροφορίας. Οι κλασικοί υπολογιστές χρησιμοποιούν δυαδικά ψηφία (bits), όπου κάθε bit μπορεί να πάρει αποκλειστικά μία από τις δύο τιμές: 0 ή 1 και η φυσική έκφραση των δύο τιμών αντιπροσωπεύεται κατά κόρον από την ύπαρξη ή την απουσία τάσης σε έναν αγωγό.

Στους κβαντικούς υπολογιστές βασική μονάδα πληροφορίας είναι το κβαντικό bit (qubit). Ένα qubit μπορεί να έχει την τιμή 0, την τιμή 1, αλλά μπορεί επιπλέον να είναι ταυτόχρονα μερικώς 0 και μερικώς 1. Μπορεί δηλαδή εν γένει να περιέχει περισσότερη πληροφορία από τα κλασικά bits. Αυτό επιτυγχάνεται με την ειδική κατάσταση της «υπέρθεσης» (superposition) στην οποία μπορεί να βρεθεί ένα κβαντικό στοιχειώδες σωματίδιο, αλλά και χάρη στην «διεμπλοκή» (entanglement), ένα φαινόμενο στο οποίο η κατάσταση ενός qubit καθορίζεται από την κατάσταση στην οποία θα βρεθεί ένα άλλο qubit. Η υλοποίηση ενός qubit μπορεί να γίνει με την αξιοποίηση κβαντικών καταστάσεων του μικρόκοσμου στις οποίες μπορεί να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο, ένα φωτόνιο, κ.α. στοιχειώδη σωματίδια (Dür & Heusler, 2016).

Οι λειτουργίες που εκτελούνται σε έναν κλασικό υπολογιστή χρησιμοποιούν λογικές πύλες (AND, NOT, OR, κλπ.) και υλοποιούνται από τρανζίστορς. Χειρίζονται τα bits με βάση απολύτως καθορισμένους κανόνες και παράγουν ντετερμινιστικά αποτελέσματα. Αντιθέτως οι κβαντικές πύλες (H, CNOT, κλπ.) υλοποιούνται από κβαντικά συστήματα όπως άτομα, ιόντα, κ.α. και χειρίζονται τα qubits με κανόνες που παράγουν πιθανοκρατικά αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει επειδή τα κβαντικά συστήματα μπορούν να βρίσκονται σε περισσότερες από μία καταστάσεις ταυτόχρονα. Ως αποτέλεσμα, είναι αδύνατο να προβλέψουμε με βεβαιότητα την έξοδο μιας κβαντικής πύλης πριν μετρηθεί το εξερχόμενο.

Διαφοροποιήσεις υπάρχουν και ως προς την διαδικασία επεξεργασίας των δεδομένων. Για παράδειγμα, στους κβαντικούς υπολογιστές υπάρχει η δυνατότητα αποθήκευσης πληροφορίας στα qubits, όπως και στους κλασικούς υπολογιστές αντίστοιχα σε bits μνήμης, αλλά στους κβαντικούς δεν έχουμε τη δυνατότητα, που υπάρχει στους κλασικούς, αντιγραφής της πληροφορίας που περιέχει ένα qubit σε ένα άλλο qubit (no-cloning theorem)(Weigert, 2009). Επίσης ενώ οι κλασικοί υπολογιστές επεξεργάζονται δεδομένα διαδοχικά, εκτελώντας μια λειτουργία κάθε φορά, οι κβαντικοί υπολογιστές μπορούν να επεξεργάζονται πολλαπλές πιθανότητες ταυτόχρονα (λόγω της υπέρθεσης), επιτρέποντας δυνητικά εκθετική επιτάχυνση σε ορισμένους υπολογισμούς. Έτσι, ενώ οι κλασικοί υπολογιστές απαιτούν τεράστιους χρόνους για να βρουν λύσεις σε ορισμένα δυσεπίλυτα προβλήματα, μετατρέποντας τα προβλήματα αυτά σε πρακτικά «άλυτα», οι κβαντικοί υπολογιστές έχουν τη δυνατότητα να τα αντιμετωπίσουν σε εκθετικά μικρότερους χρόνους και τα καθιστούν επιλύσιμα! (Rieffel & Polak, 2000)

Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η παραγοντοποίηση μεγάλων αριθμών (σημαντική για την κρυπτογραφία) με την χρήση του κβαντικού αλγορίθμου του Shor (Hayward, 2008). Γενικά οι κβαντικοί αλγόριθμοι, σε αντίθεση με τους σειριακούς κλασικούς αλγόριθμους, είναι σχεδιασμένοι να εκμεταλλεύονται τις κβαντικές ιδιότητες των qubits και να επιλύουν συγκεκριμένα προβλήματα πιο αποτελεσματικά από τους κλασικούς. Οι βασικές ιδιότητες, που εκμεταλλεύονται, αναφέρθηκαν ήδη και θα αναλυθούν παρακάτω, είναι η υπέρθεση και η διεμπλοκή.

Οι παραπάνω πολύ σημαντικές διαφορές μεταξύ των κλασικών και των κβαντικών υπολογιστικών συστημάτων θα ήταν συντριπτικές υπέρ των δεύτερων αν δεν λάβουμε υπόψη κάποιους σημαντικούς παράγοντες. Οι κβαντικοί υπολογιστές, σε αντίθεση με τους κλασικούς, είναι εξαιρετικά ευαίσθητοι στο θόρυβο και την κβαντική αποσυννοχή (decoherence) των qubits, καθιστώντας τη διόρθωση σφαλμάτων μια σημαντική πρόκληση. Η κατασκευή και η διατήρηση σταθερών qubits είναι ένα πολύπλοκο και δύσκολο έργο (Schlosshauer, 2019). Επίσης, το πλεονέκτημα εκθετικής μείωσης του χρόνου επίλυσης προβλημάτων αφορά μόνο σε συγκεκριμένα είδη προβλημάτων, ενώ η δομή λειτουργίας των κβαντικών υπολογιστών δεν πλεονεκτεί σε βασικές λειτουργίες του υπολογιστή όπως π.χ. η μεταφορά δεδομένων ή η αναπαραγωγή πολυμέσων. Παρ' όλα αυτά, εφόσον ξεπεραστούν οι προκλήσεις, αναμένεται η κβαντική υπολογιστική να αλλάξει πραγματικά τον κόσμο της τεχνολογίας, της υγείας, της οικονομίας, της ασφάλειας και τελικά της καθημερινής μας ζωής.

1.2 Ιστορική διαδρομή της κβαντικής υπολογιστικής.

Το 1965 ο G. Moore, συνιδρυτής της Intel, έκανε μία παρατήρηση που έμεινε στην ιστορία ως νόμος του Moore. Είπε ότι ο αριθμός των τρανζίστορ που θα μπορούν να τοποθετούνται σε ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα, άρα και κατ' αναλογία η υπολογιστική του ισχύς, θα διπλασιάζεται κάθε δύο χρόνια περίπου. Ο νόμος του Moore, έμελλε να αποδειχτεί αρκετά ακριβής για 50 τουλάχιστον χρόνια. Αλλά η σμίκρυνση ενός τρανζίστορ έχει ένα φυσικό όριο και αυτό είναι το ατομικό επίπεδο. Στο ατομικό επίπεδο εμφανίζονται ιδιαίτερα έντονα τα κβαντικά φαινόμενα της ύλης και αρκετοί επιστήμονες έστρεψαν, ως φυσικό επακόλουθο, την έρευνά τους στην ενδεχόμενη αξιοποίηση των κβαντικών ιδιοτήτων των σωματιδίων του μικρόκοσμου, στην εξέλιξη της πληροφορικής (Theis & Wong, 2017).

Η κβαντική μηχανική που περιγράφει τα φαινόμενα αυτά, ξεκίνησε με πρωτοστάτη τον Max Plank στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, χωρίς να αποκτήσει άμεσα κάποια σύνδεση με την επιστήμη της πληροφορικής, καθώς δόθηκε μια μεγάλη μάχη έως ότου γίνει αποδεκτή και εδραιωθεί. Ο Wiesner (βραβείο Turing 1994) ανέπτυξε την δεκαετία του 1960 την ιδέα των qubits, θέλοντας να αξιοποιήσει τις ιδιότητές τους για τη δημιουργία κρυπτογραφικών συστημάτων. Θεωρείται ένας από τους ιδρυτές της κβαντικής πληροφορικής και η δουλειά του συνεχίζει να είναι σημαντική και σήμερα.

Το 1970 ο James Park δημοσιεύει το θεώρημα μη κλωνοποίησης των qubits (no-cloning theorem), που θα παίξει έναν σημαντικό ρόλο στην διαφοροποίηση των κβαντικών από τους κλασικούς υπολογιστές στη συνέχεια. Το 1973 ο Al. Holevo δημοσίευσε το δικό του θεώρημα, που αποκαλύπτει ότι η qubits μπορούν να μεταφέρουν πολύ περισσότερη πληροφορία από ότι η κλασικά bits.

Η ιδέα της αξιοποίησης της κβαντικής μηχανικής για υπολογισμούς κέρδισε έδαφος στην δεκαετία του 1980. Οραματιστές, όπως ο R. Feynman και ο D. Deutsch, υπέθεσαν ότι τα κβαντικά συστήματα θα μπορούσαν να αξιοποιήσουν αποτελεσματικά κβαντικά φαινόμενα που είναι εγγενώς πολύπλοκα για τους κλασικούς υπολογιστές. Το 1988 ο Y. Yamamoto και ο K. Igeta προτείνουν την πρώτη φυσική υλοποίηση ενός κβαντικού υπολογιστή, που θα περιλαμβάνει την πύλη CNOT του Feynman.

Την δεκαετία του 1990 αναδείχθηκαν μερικοί από τους πιο σημαντικούς αλγορίθμους της κβαντικής υπολογιστικής. Ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa (1992) ήταν μια κομβική στιγμή, που ανέδειξε το κβαντικό πλεονέκτημα επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων, σε πολύ μικρότερους χρόνους από αυτούς των κλασικών αλγορίθμων. Το 1994 ο P. Shor παρουσιάζει τον δικό του αλγόριθμο, που λύνει το πρόβλημα παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών και δημιουργεί, θεωρητικά προς το παρόν, ένα μεγάλο κενό στα συστήματα κρυπτογράφησης που υπάρχουν στους κλασικούς υπολογιστές. Ήταν ένας αλγόριθμος που πυροδότησε τεράστιο ενδιαφέρον για την φυσική υλοποίηση κβαντικών υπολογιστών και απελευθέρωσε σημαντικά κεφάλαια προς την εν λόγω έρευνα. Έτσι, παράλληλα με την ανάπτυξη και άλλων σημαντικών κβαντικών αλγορίθμων, όπως του L. Grover (1996) για την αναζήτηση στοιχείων σε μη δομημένες βάσεις δεδομένων, η έρευνα στράφηκε στην ανάπτυξη διαφορετικών τεχνολογιών qubit, προκειμένου να φτάσουμε κάποια μέρα στην υλοποίηση ενός κβαντικού υπολογιστή με ικανοποιητικούς χρόνους συνοχής των qubit.

Το 1998 έγινε η πρώτη πειραματική επίδειξη ενός κβαντικού αλγορίθμου. Ένας λειτουργικός κβαντικός υπολογιστής NMR, βασισμένος σε πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό (Nuclear Magnetic Resonance) των 2 qubit, χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή του αλγορίθμου Deutsch από τους J. Jones και M. Mosca στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης. Στη συνέχεια, τα υπεραγώγιμα κυκλώματα κέρδισαν σημαντική θέση, επιτρέποντας τη δημιουργία αρκετών κβαντικών πυλών και πολύπλοκων κυκλωμάτων. Σταδιακά, παγιδευμένα ιόντα, φωτόνια και κβαντικές κουκκίδες (QDs) αναδύθηκαν ως βιώσιμες μορφές qubit, καθεμία με μοναδικά πλεονεκτήματα και προκλήσεις.

Στον 21^ο αιώνα, έχουμε αυξημένο ενδιαφέρον τόσο από τον ακαδημαϊκό χώρο όσο και από την βιομηχανία. Σημαντικοί τεχνολογικοί κολοσσοί όπως η IBM, η Google, αλλά και νεοσύστατες επιχειρήσεις ασχολούνται με την έρευνα και την κατασκευή κβαντικών υπολογιστών. Οι μορφές και το πλήθος των qubits αυξάνονται ραγδαία, το ίδιο και η υπολογιστική ισχύς. Τα κβαντικά κυκλώματα επεκτείνονται, η κβαντική διόρθωση σφαλμάτων βελτιώνεται και πολλαπλασιάζονται οι άνθρωποι που συμβάλουν στο εγχείρημα. Το 2021 η IBM ανακοινώνει ότι έχει δημιουργήσει έναν επεξεργαστή με 127 qubits, τον “IBM Eagle”, ενώ στις 9 Νοεμβρίου του 2022 η ίδια εταιρεία παρουσιάζει τον διάδοχο του Eagle, τον κβαντικό επεξεργαστή “Osprey” με 433 qubits!

Το 2023 κυκλοφορεί ήδη στην Ιαπωνία ο πρώτος εμπορικός κβαντικός υπολογιστής NMR με 2 qubits (youtu.be/yA5hnLLolXI), που λειτουργεί σε θερμοκρασίες δωματίου 0-30 °C. Ωστόσο, εξακολουθούν να υπάρχουν προκλήσεις. Τα κβαντικά συστήματα είναι εξαιρετικά ευαίσθητα στο θόρυβο και την αποσυννοχή, περιορίζοντας τους χρόνους σταθερότητας και συνοχής των qubits. Η έρευνα επικεντρώνεται στην ανάπτυξη κβαντικών υπολογιστών που θα είναι ανεκτικοί σε σφάλματα και στην βελτίωση των μεθόδων διόρθωσης κβαντικών σφαλμάτων.

Κοιτάζοντας μπροστά, το μέλλον της κβαντικής υπολογιστικής είναι πολλά υποσχόμενο αλλά και αβέβαιο. Οι κβαντικοί υπολογιστές, εφόσον αντιμετωπιστούν οι προκλήσεις, θα φέρουν πραγματικά την επανάσταση στην κρυπτογραφία, στην χημεία, στην οικονομία και σε μία ατελείωτη σειρά επιστημών, με εφαρμογές πολύ εντυπωσιακών δυνατοτήτων! Καθώς η κβαντική τεχνολογία εξελίσσεται και ο κβαντικός γραμματισμός εξαπλώνεται, η ιστορία αυτού του πεδίου μας υπενθυμίζει ότι κάθε κβαντικό άλμα βασίζεται στα θεμέλια ιδεών, ανακαλύψεων και καινοτομιών που εκτείνονται πίσω στις απαρχές της κβαντικής μηχανικής.

1.3 Θεμελιώδεις αρχές της κβαντικής μηχανικής.

Αλήθεια είναι ότι για να εργαστεί κάποιος με τους κβαντικούς αλγόριθμους δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζει την κβαντική μηχανική των qubits, όπως κάποιος θα μπορούσε να μάθει να προγραμματίζει κλασικούς υπολογιστές, με μία γλώσσα ανώτερου επιπέδου, χωρίς να γνωρίζει την φυσική των ημιαγωγών που σχηματίζουν τα τρανζίστορς. Δίνουμε όμως εδώ τις θεμελιώδεις αρχές της κβαντομηχανικής, που σχετίζονται με την λειτουργία των κβαντικών υπολογιστών, πρώτον γιατί είναι σημαντικό να ικανοποιούμε την περιέργειά μας και δεύτερον γιατί οι αρχές αυτές είναι συναρπαστικές!

Ο Niels Bohr, ηγετική μορφή της Σχολής της Κοπεγχάγης που έθεσε τα θεμέλια της κβαντικής ερμηνείας του μικρόκοσμου, είχε πει πως *«Αν η κβαντική μηχανική δεν σε έχει σοκάρει βαθιά, δεν την έχεις καταλάβει ακόμη»*. Στην ενότητα αυτή λοιπόν, γίνεται μια μικρή απόπειρα να σοκαριστεί ο αναγνώστης. Φυσικά η δόση θα είναι πολύ μικρή σε σχέση με το πραγματικό βάθος και το πλάτος της κβαντομηχανικής και θα εστιάσουμε μόνο σε ότι σχετίζεται περισσότερο με τη λειτουργία των κβαντικών υπολογιστών.

Η κβαντική μηχανική ήρθε να αποκαταστήσει την παταγώδη αποτυχία της κλασικής φυσικής, όταν στις αρχές του 20^{ου} αιώνα αποπειράθηκε να μελετήσει τη δομή του ατόμου. Αν ίσχυαν στον μικρόκοσμο οι νόμοι της κλασικής φυσικής όπως τους γνωρίζαμε, κανένα άτομο δεν θα ήταν σταθερό και ο κόσμος μας δεν θα ήταν όπως τον ξέρουμε (Τραχανάς, 2014). Η ιδέα της κβάντωσης της ενέργειας των σωματιδίων εισήχθη αρχικά από τον Planck για τα φωτόνια, αλλά στη συνέχεια έγινε ευρέως αποδεκτή για κάθε σωματίδιο στο σύμπαν. Η ιδέα λέει πως ένα σωματίδιο δεν μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή ενέργειας αλλά μπορεί να παίρνει μόνο συγκεκριμένες τιμές. Κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την κλασική θεώρηση, που δέχεται ότι μία μπάλα του μπυλιάρδου, για παράδειγμα, μπορεί να πάρει ή να δώσει όση ενέργεια θέλει, χωρίς να υπάρχει κανένας περιορισμός σε αυτό.

1.3.1 Δυαδικότητα κύματος – σωματιδίου

Στον κλασικό κόσμο οι άνθρωποι διακρίνουν τα σώματα από τα κύματα. Στην μακρόχρονη ιστορία της εξέλιξης των ιδεών για το φως, η ερώτηση «Τι είναι το φως;» απαντήθηκε αρκετές φορές είτε ως «Είναι μικρά σωματίδια» (Αρχαίοι Έλληνες, Newton, Einstein, κ.α.) είτε ως «Είναι ένα κύμα» (Huygens, Young, Maxwell, κ.α.). Ανάλογα με το πείραμα (εικονικό ή πραγματικό) που έκανε ο καθένας, έδινε και διαφορετική απάντηση. Η κβαντική μηχανική μας ζητάει να ξεχάσουμε αυτόν τον διαχωρισμό στον

μικρόκοσμο. Το φως αποτελείται από κβάντα (πακέτα) ενέργειας που ονομάζονται φωτόνια. Τα φωτόνια έχουν την δική τους μαθηματική περιγραφή που είναι απολύτως συμβατή με κάθε πείραμα. Δεν είναι όμως συμβατή η συμπεριφορά τους με την εύλογη ανάγκη του εγκεφάλου μας να τα κατατάξουμε οπωσδήποτε σε μία κατηγορία (κύμα ή σωματίδιο), που να είναι φιλική με τις καθημερινές εμπειρίες μας. Ανάλογα με το πείραμα που θα κάνουμε μπορούμε να εντοπίσουμε μια κυματική συμπεριφορά στο φως (π.χ. περίθλαση από σχισμές) ή να εντοπίσουμε μια σωματιδιακή συμπεριφορά (π.χ. φωτοηλεκτρικό φαινόμενο), για αυτό ενίοτε ονομάζονται και κυματοσωματίδια.

Ένα κύμα έχει συχνότητα f και μήκος κύματος λ . Ένα σωματίδιο έχει κάποια ενέργεια E και κάποια ορμή p . Το φως λοιπόν ως σωματίδιο έχει ενέργεια και ορμή που δίνονται από τις σχέσεις (1) & (2) αντίστοιχα:

$$E=hf \quad (1) \quad p=h/\lambda \quad (2)$$

Ο Louis de Broglie το 1924 πίστεψε πως αν το φως, που το θεωρούσαν για πολλά χρόνια κύμα, είχε σωματιδιακή φύση, τότε θα πρέπει, αν η φύση είναι όμορφα συμμετρική, και τα σωματίδια να έχουν επίσης κυματική φύση! Κάτι που επαληθεύτηκε πειραματικά (Davisson & Germer, 1927) και πλέον γνωρίζουμε πως κάθε σωματίδιο έχει μια συχνότητα ως κύμα και ένα μήκος κύματος που δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις:

$$f=E/h \quad (3) \quad \lambda=h/p \quad (4)$$

Είναι φανερό από τις σχέσεις αυτές, πως ο κρίκος που συνδέει την κυματική φύση (λ, f) με την σωματιδιακή φύση (E, p) δεν είναι άλλος από την παγκόσμια σταθερά του Plank ($h \approx 6.626 \cdot 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$). Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι η παραδοχή αυτή της διττής φύσης των πραγμάτων που εισάγει η κβαντική μηχανική, δεν επιφέρει καμία αναστάτωση στην δυνατότητα που έχουν οι κλασικοί νόμοι να περιγράφουν με ακρίβεια τον φυσικό κόσμο των μεγαλύτερων διαστάσεων, καθώς αν δοκιμάσουμε να μετρήσουμε το μήκος κύματος μιας μπάλας του tennis (80g), μετά από σερβίς του R. Federer (250Km/h), θα δούμε πως η μπάλα είναι ταυτόχρονα ένα κύμα με μήκος κύματος της τάξης των 10^{-34}m . Η κυματική φύση λοιπόν γίνεται ασήμαντη (μη παρατηρήσιμη) για τα μεγαλύτερα σώματα, είναι όμως καθοριστική για τη συμπεριφορά των σωματιδίων στον μικρόκοσμο που χρησιμοποιούνται στους κβαντικούς υπολογιστές ως qubits.

1.3.2 Αρχή της αβεβαιότητας & κυματοσυνάρτηση

Με την κλασική θεώρηση των πραγμάτων κάθε σωματίδιο μπορεί να είναι ένας κόκκος ύλης με απολύτως εντοπισμένη θέση στον χώρο. Από την άλλη ένα κύμα μπορεί να

εκτείνεται απεριόριστα στον χώρο. Αν στον μικρόκοσμο έχουμε ένα κυματοσωματίδιο με απολύτως καθορισμένη ορμή σύμφωνα με τη σχέση (4) θα παριστάνει ένα τρέχων κύμα μήκους κύματος λ , που θα εκτείνεται σε όλο τον χώρο και στην ερώτηση «Που βρίσκεται το σωματίδιο;» η απάντηση είναι «Οπουδήποτε!».

Η σωματιδιακή φύση όμως συνεχίζει να υπάρχει και ένα ηλεκτρόνιο, για παράδειγμα, μπορεί να περιοριστεί στον χώρο και να εντοπιστεί με αρκετή ακρίβεια σε μία μικρή περιοχή. Τι γίνεται τότε η κυματική φύση του ηλεκτρονίου; Μπορούμε να παραστήσουμε μαθηματικά την κυματομορφή του «εγκλωβισμένου» ηλεκτρονίου με υπέρθεση κυμάτων, συνδυάζοντας κατάλληλα κύματα με συγκεκριμένα μήκη κύματος, πλάτη και φάσεις. Όμως, όσο πιο εντοπισμένη θέλουμε τη θέση του ηλεκτρονίου, τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, χάνοντας και πάλι λόγω της σχέσης (4), την ικανότητα να γνωρίζουμε με ακρίβεια την ορμή του σωματιδίου.

Η αδυναμία μας αυτή, του ταυτόχρονου εντοπισμού της ορμής και της θέσης ενός κβαντικού σωματιδίου, δεν οφείλεται σε δική μας έλλειψη μαθηματικού υποβάθρου ή τεχνολογίας, αλλά είναι εγγενής ιδιότητα της φύσης και εξηγεί αποτελεσματικά πολλά φαινόμενα, όπως για παράδειγμα την ισχύ της πυρηνικής ενέργειας. Ο W. Heisenberg το 1927 την αναδεικνύει ως «αρχή της αβεβαιότητας» και προσδιορίζει με ακρίβεια τη σχέση μεταξύ της απροσδιοριστίας στην θέση Δx (σε μία διάσταση εδώ για λόγους απλότητας) και την απροσδιοριστία στην ορμή Δp ενός σωματιδίου με τη σχέση (5):

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2\pi \quad (5)$$

Η συνάρτηση λοιπόν του κύματος που περιγράφει το σωματίδιο, δεν έχει την έννοια του κλασικού κύματος, αλλά πρόκειται, όπως αποκάλυψε ο Max Born, για μια κυματοσυνάρτηση *πιθανότητας* εντοπισμού του σωματιδίου σε μία συγκεκριμένη θέση. Δεν σημαίνει πως το σωματίδιο εκτείνεται σε όλο τον χώρο του κύματος, όπως εσφαλμένα αρχικά θεωρήθηκε από αρκετούς. Λίγο περισσότερο μαθηματικά, ο Born είπε πως αν έχουμε έναν στοιχειώδη όγκο dV , γύρω από ένα σημείο του χώρου $A(x,y,z)$, τότε το σωματίδιο έχει πιθανότητα εντοπισμού στον χώρο αυτό: $|\Psi|^2 dV$ όπου $\Psi(x,y,z,t)$ η συνάρτηση του κύματος στον χώρο και στον χρόνο. Έμελλε να βρεθεί η εξίσωση που θα έδινε ως λύση την συνάρτηση Ψ και αυτή ήρθε από τον E. Schrödinger. Δίνεται στη σχέση (6), σε μία διάσταση για λόγους απλότητας:

$$i\hbar \frac{\partial^2}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t) \quad (6)$$

Οι λύσεις της διαφορικής που προκύπτουν για διάφορες καταστάσεις των σωματιδίων ξεφεύγουν από τους στόχους αυτής της εργασίας.

1.3.3 Κβαντική μέτρηση – υπέρθεση – διεμπλοκή

Στην κβαντική μηχανική, θα πρέπει να αναθεωρήσουμε την έννοια της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους, γιατί είναι σημαντικά διαφορετική από αυτή στην κλασική φυσική. Ενώ στην κλασική φυσική μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις χωρίς να παρεμβαίνουμε στην κατάσταση του παρατηρήσιμου σώματος, στην κβαντική μηχανική η μέτρηση είναι μια καθοριστική επέμβαση στην κατάσταση του σωματιδίου.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η κυματοσυνάρτηση περιγράφει ένα κύμα πιθανότητας εντοπισμού του σωματιδίου σε κάποια συγκεκριμένη θέση στον χώρο. Η πειραματική ανίχνευση της θέσης του σωματιδίου προκαλεί την απόρριψη όλων των υπολοίπων πιθανοτήτων πλην της θέσης εντοπισμού και την κατάρρευση της μορφής της κυματοσυνάρτησης σε μία σχεδόν κρουστική συνάρτηση δέλτα (ανάλογα με την διακριτική ικανότητα της μεθόδου και των οργάνων ανίχνευσης) γύρω από τη θέση εντοπισμού. Η ιδιότητα αυτή της κβαντικής μέτρησης δεν αφορά μόνο στην θέση του σωματιδίου, αλλά σε κάθε κβαντική κατάσταση που το περιγράφει, όπως π.χ. το spin ενός ηλεκτρονίου ή ενεργειακή κατάσταση ενός ιόντος, ή η πόλωση ενός φωτονίου.

Οι κβαντικές αυτές καταστάσεις είναι καθαρά πιθανοκρατικές και υπακούουν σε μία από τις πιο θεμελιώδεις ιδιότητες της κβαντικής μηχανικής που είναι η *υπέρθεση*. Ένα σωματίδιο μπορεί να υπάρξει σε συνδυασμό πολλαπλών καταστάσεων ταυτόχρονα, που αντιπροσωπεύονται μαθηματικά από έναν γραμμικό συνδυασμό κυματοσυναρτήσεων. Οι κβαντικοί υπολογιστές αξιοποιούν την υπέρθεση, καθώς τα σωματίδια που αντιπροσωπεύουν τα qubits μπορούν να βρίσκονται σε δύο καταστάσεις ταυτόχρονα με κάποια πλάτη πιθανοτήτων για την κάθε μία από αυτές. Όσο δεν γίνεται μέτρηση, ώστε να καταρρεύσει η κυματοσυνάρτηση σε μία από τις δύο καταστάσεις τα qubits διατηρούν τη διττή αυτή πληροφορία, με αποτέλεσμα κάθε qubit να συμμετέχει στις διαδικασίες που επιβάλλει ο αλγόριθμος, ελέγχοντας *παράλληλα* όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των δύο καταστάσεων. Είναι ο λεγόμενος *κβαντικός παραλληλισμός* (Rieffel & Polak, 2000).

Ένα ακόμη εντυπωσιακό παιχνίδι των κυματοσυναρτήσεων, που αξιοποιούν ορισμένοι κβαντικοί αλγόριθμοι, είναι το φαινόμενο της διεμπλοκής ή σύμπλεξης (entanglement). Η διεμπλοκή είναι μία παράδοξη (αλλά ανύπαρκτη τελικά) «τρομακτική

δράση από απόσταση», όπως την αποκάλεσε το 1935 ο Albert Einstein. Είναι ένα φαινόμενο όπου δύο ή περισσότερα κβαντικά σωματίδια συσχετίζονται σε βαθμό που οι καταστάσεις τους είναι αλληλεξαρτώμενες, ανεξάρτητα από την απόσταση. Η μέτρηση της κατάστασης του ενός σωματιδίου καθορίζει ακαριαία την κατάσταση του εμπλεκόμενου συντρόφου του. Η ιδιότητα αυτή των ζευγών κβαντικών σωματιδίων παραπέμπει σε ακαριαία μετάδοση πληροφορίας, με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός (!), που αντίκειται στην επιβεβαιωμένη ειδική θεωρία της σχετικότητας και προκάλεσε αρχικά μεγάλες αντιδράσεις και ενθάρρυνε πολλές μεταφυσικές θεωρίες.

Τα πράγματα όμως είναι πιο απλά και θα το δούμε με ένα παράδειγμα. Ένα από τα εντυπωσιακά φαινόμενα του μικρόκοσμου είναι αυτό της δίδυμης γένεσης (pair production). Μπορεί, κατά το φαινόμενο αυτό, ένα φωτόνιο ισχυρής ενέργειας να αντικαταστήσει την ύπαρξή του με δύο λεπτόνια (ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο). Τα δύο λεπτόνια θα έχουν υποχρεωτικά, λόγω θεμελιωδών αρχών διατήρησης, αντίθετο spin ώστε το συνολικό τους να είναι μηδέν, όσο δηλαδή και του αρχικού φωτονίου. Δεν γνωρίζουμε, αν δεν κάνουμε μέτρηση, ποιο από τα δύο λεπτόνια θα έχει spin πάνω ($\uparrow$) και πιο κάτω ($\downarrow$). Το ζεύγος των λεπτονίων βρίσκεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης, με ίση πιθανότητα για τις καταστάσεις ($\uparrow\downarrow$) και ($\downarrow\uparrow$), που προκύπτει από την κοινή κυματοσυνάρτηση Ψ που τα περιγράφει, από τη στιγμή της γέννησής τους (Das & Ferbel, 2003).

$$\Psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\uparrow}(1)\psi_{\downarrow}(2) - \psi_{\downarrow}(1)\psi_{\uparrow}(2)] \quad (7)$$

Αν η συνάρτηση καταρρεύσει (γίνει μέτρηση) αυτό θα οδηγήσει σε έναν από τους δύο όρους (πιθανά ενδεχόμενα) της συνάρτησης και θα αποκαλυφθεί το spin των δύο λεπτονίων, όσο μακριά κι αν είναι μεταξύ τους. Δεν γίνεται καμία μετάδοση πληροφορίας ή μεταφορά ενέργειας σε τρομακτική απόσταση. Γίνεται απλά η αποκάλυψη μιας πιθανής κατάστασης.

2 Αρχές κβαντικής υπολογιστικής

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η κβαντική υπολογιστική βασίζεται στις κβαντικές ιδιότητες των κυματοσωματιδίων του μικρόκοσμου και εξαιτίας αυτού, οι όροι bit, πύλη, κύκλωμα έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά από αυτά των αντίστοιχων κλασικών όρων. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά των όρων αυτών στους κβαντικούς υπολογιστές.

2.1 Qubits – Υλοποίηση και φορμαλισμός

Η πληροφορία στους κβαντικούς υπολογιστές αποθηκεύεται με διάφορες μορφές στον μικρόκοσμο ως κβαντική κατάσταση. Τα στοιχειώδη κβαντικά συστήματα που θα φέρουν την πληροφορία αυτή και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κβαντικά bits, ονομάζονται qubits και υπάρχουν αρκετές εναλλακτικές για τη μορφή που μπορούν να έχουν.

2.1.1 Μορφές qubit

Τον ρόλο ενός qubit μπορούν να παίζουν πολλά διαφορετικά κβαντικά συστήματα (Rieffel & Polak, 2014). Μερικά από τα πιο κοινά είναι:

- Φωτόνια με διαφορετικές καταστάσεις στην διεύθυνση της πόλωσής τους στον χώρο.
- Τα ηλεκτρόνια με διαφορετικές καταστάσεις στην ιδιοπεριστροφή τους (spin up ή spin down) ή την ενεργειακή τους κατάσταση σε ένα πηγάδι δυναμικού.
- Πυρήνες ατόμων μπορούν επίσης να έχουν διαφορετικές καταστάσεις στην ιδιοπεριστροφή τους (spin up ή spin down).
- Άτομα που μπορούν να είναι ιονισμένα ή μη ιονισμένα μέσα σε ένα μεταλλικό πλέγμα.
- Υπεραγώγιμα κυκλώματα που λειτουργούν σε θερμοκρασίες πολύ κοντά στους 0°K και μπορούν να βρεθούν σε δύο καταστάσεις (superconducting ή non-superconducting).

Η επιλογή της μορφής των qubit καθορίζει και το “hardware” ενός κβαντικού υπολογιστή (Williams & Clearwater, 1999) και εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως η δυνατότητα παρασκευής και ελέγχου των qubits, η διάρκεια ζωής τους και η ευαισθησία τους σε παρεμβολές. Η ανάπτυξη σταθερών και αξιόπιστων qubits είναι ένα από τα κύρια εμπόδια στην ανάπτυξη των κβαντικών υπολογιστών στην πράξη και για ευρεία χρήση.

2.1.2 Αλγεβρικός φορμαλισμός

Μπορεί η υλοποίησή των qubit να είναι διαφορετική σε διαφορετικούς υπολογιστές, αλλά σε κάθε περίπτωση τα qubits είναι κβαντικά συστήματα που μπορούν να βρεθούν σε κατάσταση υπέρθεσης των δύο βασικών τους κβαντικών καταστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι ανεξάρτητα από την υλοποίησή τους, τα qubits μπορούν να παρασταθούν ως ένας γραμμικός συνδυασμός δύο βασικών τους καταστάσεων, οι οποίες συνήθως συμβολίζονται με $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Έτσι, ένα qubit μπορεί να βρίσκεται στην κατάσταση υπέρθεσης $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, όπου α και β είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί με $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Με βάση αυτόν τον φορμαλισμό θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε κάθε κατάσταση και σε ένα διάνυσμα δισδιάστατου χώρου με μέτρο 1. Τα $|\alpha|^2$ και $|\beta|^2$ είναι οι πιθανότητες που έχει το qubit να βρεθεί στην κατάσταση $|0\rangle$ ή $|1\rangle$ αντίστοιχα. Για παράδειγμα ένα qubit που περιγράφεται από την σχέση $|\psi\rangle = 0,6|0\rangle + 0,8|1\rangle$ έχει πιθανότητα $0,6^2=0,36$ (ή 36%) να βρεθεί στην κατάσταση $|0\rangle$ και αντίστοιχα $0,8^2=0,64$ (ή 64%) να βρεθεί στην κατάσταση $|1\rangle$. Προφανώς τα ενδεχόμενα για τις δύο καταστάσεις είναι ισοπίθανα όταν $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Τα σύμβολα $| \rangle$ (ket) και $\langle |$ (bra) προτάθηκαν από τον Dirac το 1958 και προέρχονται από τα δύο μισά της λέξης bracket (αγκύλη). Το ket διάνυσμα της κατάστασης $|q\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ μπορεί να παρασταθεί επίσης με έναν πίνακα στήλη της μορφής $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, ενώ το αντίστοιχο bra διάνυσμα $\langle q| = \alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|$, όπου α^* και β^* οι συζυγείς των α και β , μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα γραμμή της μορφής $[\alpha^* \quad \beta^*]$. Συνεπώς τα διανύσματα – καταστάσεις ket $|0\rangle$ και $|1\rangle$ με τη μορφή πίνακα θα έχουν τη μορφή $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ενώ τα bra $\langle 0|$ και $\langle 1|$ αντίστοιχα τη μορφή $[1 \quad 0]$ και $[0 \quad 1]$ (Hidary & Hidary, 2021).

2.1.3 Γινόμενα κβαντικών καταστάσεων

Στα διανύσματα αυτών των καταστάσεων, ορίζεται επίσης το εσωτερικό και το εξωτερικό τους γινόμενο (Shankar, 2012). Για το *εσωτερικό* γινόμενο δύο καταστάσεων $|P\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ και $|R\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$, παίρνουμε το γινόμενο bra*ket των δύο καταστάσεων που συμβολίζεται με το $\langle P|R\rangle$ και παράγεται με τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \alpha^* \gamma + \beta^* \delta \quad (8)$$

Το αποτέλεσμα, όπως συμβαίνει στα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων, είναι ένας αριθμός. Εύκολα τώρα αποδεικνύεται ότι για τις βασικές καταστάσεις ισχύει:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (9) \quad \langle 0|1\rangle = 0 \quad (10) \quad \langle 1|1\rangle = 1 \quad (11) \quad \langle 1|0\rangle = 0 \quad (12)$$

Οι σχέσεις (10) & (12) μας δείχνουν πως οι καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και μπορούν να αποτελέσουν μία ορθοκανονική βάση για τον χώρο στον οποίο βρίσκονται. Δηλαδή κάθε άλλο διάνυσμα (κατάσταση) στον χώρο αυτό μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Για το *εξωτερικό* γινόμενο των καταστάσεων $|P\rangle$ και $|R\rangle$ παίρνουμε το γινόμενο ket*bra, που συμβολίζεται με $|P\rangle\langle R|$ και το αποτέλεσμα αυτή τη φορά είναι ένας πίνακας:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^* & \delta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma^* & \alpha\delta^* \\ \beta\gamma^* & \beta\delta^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ο πίνακας που προκύπτει αναφέρεται και ως πίνακας πυκνότητας (density matrix) και αντιπροσωπεύει έναν συγκεκριμένο τύπο συσχέτισης μεταξύ των δύο αρχικών καταστάσεων.

Πέραν του εσωτερικού και του εξωτερικού γινομένου, θα χρειαστούμε και το *τανυστικό* γινόμενο (tensor product) διανυσμάτων, τουλάχιστον για την περιγραφή της κατάστασης ενός κβαντικού καταχωρητή που αποτελείται από δύο ή περισσότερα qubits. Οι κβαντικοί καταχωρητές αποθηκεύουν όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των κβαντικών καταστάσεων των qubits που περιέχουν, συνεπώς και πολύ περισσότερη πληροφορία από τους κλασικούς καταχωρητές. Έτσι, η κατάσταση $|q_i\rangle$ ενός κβαντικού καταχωρητή των δύο qubit $|q_0\rangle, |q_1\rangle$ δίνεται από το τανυστικό γινόμενο των αντίστοιχων

πινάκων $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ και συμβολίζεται με $|q_0\rangle \otimes |q_1\rangle$ ή $|q_0\rangle|q_1\rangle$ ή απλούστερα $|q_0q_1\rangle$ ¹.

Είναι λοιπόν:

$$|q_r\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0\alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1 \\ \beta_0\alpha_1 \\ \beta_0\beta_1 \end{bmatrix} = \alpha_0\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_0\beta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_0\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_0\beta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

και γενικότερα για τον καταχωρητή των δύο qubit έχουμε την αλγεβρική παράσταση:

$$|q_r\rangle = \gamma_0|00\rangle + \gamma_1|01\rangle + \gamma_2|10\rangle + \gamma_3|11\rangle \quad (15)$$

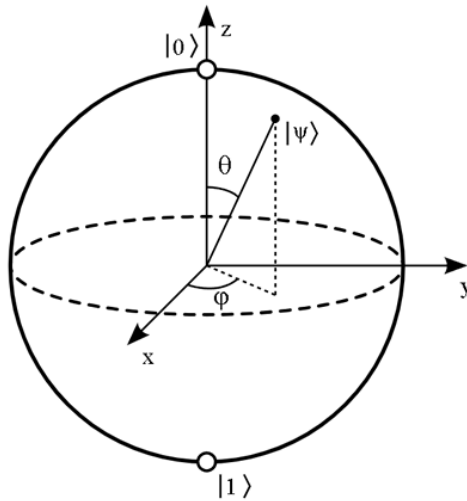
όπου κι εδώ $|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2 = 1$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ, ότι ενώ ο κβαντικός καταχωρητής των δύο qubit μπορεί να βρεθεί σε υπέρθεση $2^2=4$ καταστάσεων, ένας καταχωρητής των τριών qubit μπορεί να τεθεί σε υπέρθεση $2^3=8$ καταστάσεων και για κάθε ένα qubit που προστίθεται στον καταχωρητή ο όγκος της πληροφορίας που μπορεί να αποθηκευτεί σε αυτόν διπλασιάζεται! Επαγωγικά παρατηρούμε πως ένας καταχωρητής με n qubits μπορεί να τεθεί σε υπέρθεση 2^n καταστάσεων και να φιλοξενήσει έναν τεράστιο όγκο πληροφορίας εκθετικά μεγαλύτερο από αυτή που μπορούν να αποθηκεύσουν κλασικοί καταχωρητές.

2.1.4 Η σφαίρα Bloch

Η περιγραφή των qubits που έγινε ως εδώ, αφορά τον αλγεβρικό φορμαλισμό τους. Αν θέλουμε να παραστήσουμε τις κβαντικές τους καταστάσεις ως διανύσματα, θα πρέπει να επιλέξουμε τον χώρο στον οποίο θα γίνει αυτό. Αν τα πλάτη των πιθανοτήτων α και β είναι πραγματικοί αριθμοί μας αρκεί ένας δισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος. Στη γενική περίπτωση όμως, όπου τα α και β είναι μιγαδικοί αριθμοί, χρειαζόμαστε έναν χώρο τεσσάρων διαστάσεων ή έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο Hilbert (Fano & Blinder, 2017). Για την αναπαράσταση των διανυσμάτων – καταστάσεων έχει επικρατήσει η σφαίρα που πρότεινε ο φυσικός F. Bloch (Εικόνα 1).

¹ Είθισται στους καταχωρητές να διαβάσουμε τα qubits από δεξιά προς τα αριστερά, δηλαδή στον καταχωρητή $|q_0q_1\rangle$ είναι πρώτο qubit το q_1 και δεύτερο το q_0 .



Εικόνα 1: Η κατάσταση $|\psi\rangle$ ενός qubit στη σφαίρα Bloch (Πηγή: Wikipedia)

Η σφαίρα Bloch έχει μοναδιαία ακτίνα και κάθε διάνυσμα από το κέντρο προς την επιφάνειά της αντιπροσωπεύει μία κβαντική κατάσταση ενός qubit. Οι γωνίες θ και ϕ μας βοηθούν να περιγράψουμε και αλγεβρικά την κατάσταση αυτή μέσω της σχέσης 16.

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (16)$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει ότι η γωνία θ είναι καθοριστική για τα πλάτη των πιθανοτήτων, ενώ η γωνία ϕ εισάγει απλά μια φάση στην κβαντική κατάσταση, που γίνεται όμως σημαντική στις περιπτώσεις συμβολής κβαντικών καταστάσεων, όπως συμβαίνει και με τις φάσεις των κλασικών κυμάτων.

2.2 Κβαντικές πύλες & επεξεργασία της πληροφορίας

Αφού είδαμε την μορφή και την μαθηματική αναπαράσταση που μπορούν να έχουν τα qubits, θα πρέπει να δούμε με ποιον τρόπο μπορεί να γίνει η επεξεργασία της πληροφορίας που είναι αποθηκευμένη σε αυτά. Στους κλασικούς υπολογιστές η μονάδα επεξεργασίας περιέχει λογικές πύλες, φυσικά συστήματα από ημιαγωγούς, μέσα από τις οποίες διέρχονται τα κλασικά bits, με τη μορφή παλμών τάσης, και οι πύλες ανάλογα με τη δομή τους διαμορφώνουν τα εξερχόμενα bits.

Αντίθετα στους κβαντικούς υπολογιστές η πληροφορία που περιέχεται στα qubits δεν διέρχεται από κάποια φυσικά συστήματα προκειμένου να επεξεργαστεί. Η πληροφορία παραμένει στα qubits, τα οποία όμως δέχονται εξωτερικές δράσεις που τροποποιούν την κβαντική τους κατάσταση. Μπορούν για παράδειγμα, μέσω αυτών των δράσεων, να βρεθούν σε υπέρθεση, ή να διεμπλακούν με ένα άλλο qubit, ή ακόμη να αλλάξουν τη

φάση τους. Κάθε τέτοια δράση έχει τον ρόλο μιας κβαντικής πύλης (Williams & Williams, 2011) και ο τρόπος υλοποίησής των κβαντικών πυλών καθορίζεται από το είδος του qubit που χρησιμοποιείται.

Σε κάθε περίπτωση όμως, μαθηματικά εκφράζεται με την επενέργεια ενός τελεστή του χώρου Hilbert πάνω στην κβαντική κατάσταση των qubits. Εφόσον οι κβαντικές καταστάσεις των qubits αντιστοιχούν σε μοναδιαία διανύσματα πάνω στη σφαίρα Bloch, οι μεταβολές των καταστάσεων αυτών θα αντιστοιχούν σε περιστροφές των διανυσμάτων αυτών, κατά την γωνία θ ή την γωνία ϕ , χωρίς φυσικά να μεταβάλλεται με την εφαρμογή των τελεστών το μοναδιαίο μήκος του διανύσματος². Ας δούμε μερικές από τις πιο γνωστές κβαντικές πύλες, με τη δράση τους και τον τελεστή που αντιστοιχεί σε αυτές.

2.2.1 Κβαντικές πύλες ενός qubit

Η συνήθης γραφική απεικόνιση της εφαρμογής μιας πύλης (G) σε ένα qubit που βρίσκεται στην κατάσταση $|q_i\rangle$ και πρόκειται να μεταβεί στην κατάσταση $|q_j\rangle$ είναι αυτή στην Εικόνα 2.



Εικόνα 2: Απεικόνιση κβαντικής πύλης G

Δυστυχώς (ή ευτυχώς), αποδεικνύεται (Hirvensalo, 2013) ότι είναι αδύνατο να κατασκευαστεί πύλη που να αντιγράφει την άγνωστη σε εμάς κατάσταση ενός qubit, σε ένα άλλο qubit (no-cloning theorem). Οι κβαντικές πύλες που μπορούν να δράσουν σε ένα qubit είναι σε αριθμό, όσοι και οι ορθομοναδιαίοι τελεστές σε έναν χώρο Hilbert, δηλαδή άπειρες. Στην πράξη όμως, χρησιμοποιούμε ελάχιστες και οι βασικότερες ακολουθούν.

² Το μήκος του διανύσματος είναι και πρέπει να παραμείνει ίσο με τη μονάδα, γιατί εκφράζει τη συνολική πιθανότητα (δηλαδή την βεβαιότητα) να βρεθεί το qubit σε κάποια από τις πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να μετρηθεί.

Η πύλη Hadamard

Η κβαντική πύλη Hadamard (H) όταν ενεργεί πάνω σε qubits που βρίσκονται σε μία από τις βασικές καταστάσεις τα θέτει σε υπέρθεση. Ο τελεστής που εφαρμόζεται δίνεται από τον πίνακα:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Δρώντας στις καταστάσεις $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ οδηγεί τα qubits στις αντίστοιχες καταστάσεις υπέρθεσης:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (18) \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (19)$$

Ενδιαφέρον είναι, ότι δρώντας ξανά με την πύλη Hadamard στα ίδια qubits που έχουν τεθεί σε υπέρθεση το αποτέλεσμα είναι τα qubits να επιστρέφουν στις αρχικές τους βασικές καταστάσεις:

$$H(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle) = |0\rangle \quad (20) \quad H(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle) = |1\rangle \quad (21)$$

Οι πύλες Pauli

Οι κβαντικές πύλες Pauli (X,Y,Z) μας δίνουν τη δυνατότητα να περιστρέψουμε το διάνυσμα κατάστασης του qubit στη σφαίρα Bloch κατά τον άξονα X, τον Y ή τον Z. Οι τρεις αντίστοιχοι τελεστές που εφαρμόζονται είναι:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22) \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (23) \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ας δούμε για παράδειγμα την δράση της X στο διανύσματα $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle \quad (25) \quad X|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle \quad (26)$$

Παρατηρούμε ότι αναστρέφει την κατάσταση του qubit από $|0\rangle$ σε $|1\rangle$ και αντίστροφα, περιστρέφοντας το διάνυσμα γύρω από τον άξονα X. Είναι γνωστή και ως πύλη NOT. Αντίστοιχα ο τελεστής Y προκαλεί μια περιστροφή γύρω από τον άξονα Y της σφαίρας Bloch, ενώ ο Z εισάγει μια αναστροφή της φάσης ϕ στην κατάσταση του qubit περιστρέφοντάς το γύρω από τον Z άξονα.

Στις κβαντικές πύλες Pauli θα πρέπει να εντάξουμε και την λεγόμενη πύλη Αδράνειας (I) που δεν προκαλεί καμία μεταβολή στο διάνυσμα κατάστασης και ο τελεστής της δεν είναι άλλος από τον μοναδιαίο πίνακα της γραμμικής άλγεβρας:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Οι πύλες του Pauli, συμπεριλαμβανομένης της πύλης I, σχηματίζουν ένα θεμελιώδες σύνολο πυλών ενός qubit που μας επιτρέπουν πολλαπλές κβαντικές λειτουργίες και χειρισμούς μέσα στα κβαντικά κυκλώματα. Μπορούμε κάθε πύλη για ένα qubit να την γράψουμε ως ένα γραμμικό συνδυασμό των πυλών Pauli. Για παράδειγμα η πύλη Hadamard γράφεται:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z) \quad (28)$$

Η πύλη μετατόπισης φάσης

Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης Φ μας δίνει τη δυνατότητα να επηρεάσουμε αποκλειστικά τη φάση φ ενός qubit επενεργώντας στο διάνυσμα κατάστασης με τον τελεστή:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Το αποτέλεσμα της επίδρασης σε ένα qubit στην κατάσταση $|q_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ είναι:

$$\Phi|q_0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ e^{i\varphi}\beta \end{bmatrix} \quad (30)$$

Στο παραγόμενο $|q_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\varphi}|1\rangle$ έχουμε μόνο μεταβολή της φάσης κατά φ , ενώ τα πλάτη πιθανότητας για τις καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ παραμένουν ίδια καθώς $|e^{i\varphi}\beta| = |\beta|$. Φυσικά, μπορούμε και αυτή την πύλη να την γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό των πυλών Pauli (Cybenko, 2001):

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1+e^{i\varphi}}{2}I + \frac{1-e^{i\varphi}}{2}Z \quad (31)$$

2.2.2 Κβαντικές πύλες για 2 ή 3 qubits

Οι κβαντικές πύλες που δρουν σε δύο (ή τρία) qubits, δηλαδή σε κβαντικούς καταχωρητές, καθορίζουν την επίδρασή τους σε ένα qubit από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται ένα άλλο qubit (ή δύο άλλα qubits). Για την πραγματοποίηση αυτής της σύνδεσης αξιοποιούν το φαινόμενο της διεμπλοκής (ή σύμπλεξης) που ήδη περιεγράφηκε. Το qubit που με την κατάστασή του αποφασίζει αν θα γίνει επίδραση στο άλλο qubit, ονομάζεται qubit ελέγχου (control qubit). Επειδή η παρούσα εργασία έχει έναν εισαγωγικό χαρακτήρα στην κβαντική υπολογιστική, θα γίνουν μόνο απλές αναφορές στις πύλες με περισσότερα από 2 qubits.

Ελεγχόμενο ΟΧΙ με 2 qubits CNOT (ή με 3 qubits CCNOT & Fredkin)

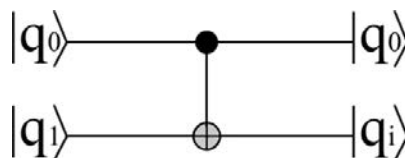
Η κβαντική πύλη CNOT (Controlled NOT) έχει έναν καθοριστικό ρόλο στην επεξεργασία των πληροφοριών στα κβαντικά κυκλώματα. Εφαρμόζεται σε καταχωρητές των 2 qubits $|q_0q_1\rangle$, όπου το ένα (q_0) λειτουργεί ως qubit ελέγχου και το άλλο (q_1) ως qubit στόχος. Η CNOT αναστρέφει την κατάσταση του qubit στόχου αν και μόνο αν το qubit ελέγχου βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$, ενώ αν το qubit ελέγχου βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$, η κατάσταση του qubit στόχου παραμένει αμετάβλητη. Αυτό μαθηματικά επιτυγχάνεται με την χρήση του τελεστή:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή CNOT διαδοχικά στις καταστάσεις

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

θα δούμε ότι πράγματι παίρνουμε $CNOT|00\rangle = |00\rangle$, $CNOT|01\rangle = |01\rangle$, $CNOT|10\rangle = |11\rangle$ και $CNOT|11\rangle = |10\rangle$. Η γραφική απεικόνιση της CNOT για τα δύο qubits δίνεται στην Εικόνα 3, όπου $|q_i\rangle = |q_1\rangle$ αν $|q_0\rangle = |0\rangle$ και $|q_i\rangle = X|q_1\rangle$ αν $|q_0\rangle = |1\rangle$.



Εικόνα 3: Η πύλη CNOT

Αντίστοιχα (Williams & Williams, 2011) μπορεί γίνει ελεγχόμενη επίδραση με 3 qubits, χρησιμοποιώντας 2 qubits ως qubits ελέγχου και 1 ως qubit στόχο (CCNOT ή και TOFFOLI) ή 1 qubit ως qubit ελέγχου και 2 ως qubits στόχους (Fredkin ή και Controlled-SWAP). Μία πύλη CCNOT αναστρέφει την κβαντική κατάσταση του τρίτου qubit (στόχου), μόνο αν και τα δύο πρώτα qubits (ελέγχου) είναι ταυτόχρονα στην κατάσταση $|1\rangle$. Για παράδειγμα, θα έχουμε $CCNOT|010\rangle = |010\rangle$ ενώ $CCNOT|110\rangle = |111\rangle$. Επίσης, μία πύλη Fredkin (F) εναλλάσσει τα δύο qubits στόχους, μόνο αν το πρώτο qubit ελέγχου βρίσκεται στην κατάσταση $|1\rangle$. Για παράδειγμα, θα έχουμε $F|010\rangle = |010\rangle$ ενώ $F|110\rangle = |101\rangle$.

Ελεγχόμενη αλλαγή φάσης CΦ

Η κβαντική πύλη CΦ, όπως και η CNOT, εφαρμόζεται σε 2 qubits, όπου το ένα λειτουργεί ως qubit ελέγχου και το άλλο ως qubit στόχος. Η CΦ μεταβάλλει την φάση του qubit στόχου κατά φ , αν και μόνο αν το qubit ελέγχου και το qubit στόχου βρίσκονται στην κατάσταση $|1\rangle$. Σε κάθε άλλη περίπτωση η κατάσταση του qubit στόχου παραμένει αμετάβλητη. Αυτό μαθηματικά επιτυγχάνεται με την χρήση του τελεστή:

$$C\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Πράγματι οι πράξεις του πολλαπλασιασμού του CΦ με τους πίνακες των βασικών καταστάσεων των 2 qubit (σχέσεις 33) δίνουν: $C\Phi|00\rangle=|00\rangle$, $C\Phi|01\rangle=|01\rangle$, $C\Phi|10\rangle=|10\rangle$ και $C\Phi|11\rangle=e^{i\varphi}|11\rangle$.

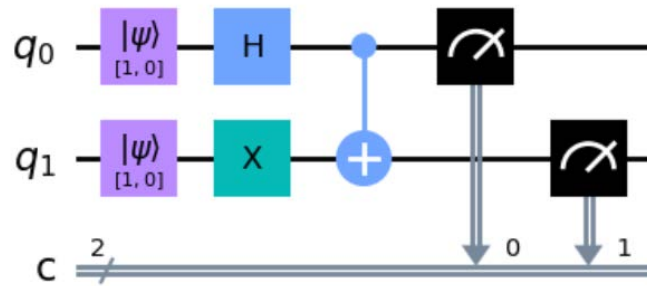
2.3 Κβαντικά κυκλώματα – Σχεδιασμός & Ανάλυση

Οι κβαντικές πύλες επενεργούν όπως είδαμε στα qubits και εν γένει στους κβαντικούς καταχωρητές, προκαλώντας μία σειρά από μεταβολές στις δυνατές καταστάσεις τους. Αυτή την αλληλουχία των καταστάσεων, συνθέτει τα βήματα του κβαντικού υπολογισμού και αναπαρίσταται ως ένα κβαντικό κύκλωμα.

Δεν θα πρέπει εδώ βέβαια, να αποδίδουμε στη λέξη κύκλωμα την έννοια που έχει σε έναν κλασικό υπολογιστή. Εκεί αντιπροσωπεύει ένα φυσικό σύστημα με αγωγίμα και ημιαγωγίμα υλικά, τα οποία διατρέχουν οι παλμοί των κλασικών bits. Ένα κβαντικό κύκλωμα δεν είναι ένα φυσικό σύστημα, που διατρέχουν τα qubits και η πληροφορία δεν το διαπερνά, αλλά παραμένει στα qubits. Πρόκειται απλά για μια αναπαράσταση των εφαρμοζόμενων τελεστών στα qubits, με την χρονική σειρά που ενεργούν πάνω σε αυτά (Nielsen & Chuang, 2010) και ολοκληρώνεται πάντα με την μέτρηση της τελικής κατάστασης, δηλαδή με την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης των qubits.

Κάθε qubit σε ένα κβαντικό κύκλωμα, αντιστοιχεί σε έναν οριζόντιο άξονα χρόνου, με φορά από αριστερά προς τα δεξιά, που περιέχει την ακολουθία των δράσεων (πυλών – τελεστών) που εφαρμόζονται σε αυτό. Σε ένα κβαντικό κύκλωμα μπορούμε να εισάγουμε και κλασικά bits που αναπαρίστανται με διπλή οριζόντια γραμμή και αποτελούν τον κλασικό καταχωρητή που θα συλλέξει τα αποτελέσματα των κβαντικών

μετρήσεων. Ένα παράδειγμα κβαντικού κυκλώματος με δύο qubits, q_0 και q_1 , κι έναν κλασικό καταχωρητή c , είναι αυτό που ακολουθεί στην Εικόνα 4.



Εικόνα 4: Κβαντικό κύκλωμα με 2 qubits (Πηγή: Qiskit)

Στο πρώτο βήμα εφαρμογής αυτού του κυκλώματος, τα qubits q_0 και q_1 αρχικοποιούνται και τα δύο στην κατάσταση $|\psi\rangle = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Στο δεύτερο χρονικά βήμα εφαρμόζεται στο q_0 ο τελεστής H μιας πύλης Hadamard, που θέτει το qubit σε κατάσταση υπέρθεσης και στο q_1 ο τελεστής X μιας πύλης Pauli, που ισοδυναμεί με μια πύλη NOT και αντιστρέφει την κατάσταση του qubit. Στο τρίτο βήμα έχουμε την εφαρμογή της πύλης CNOT που συμπλέκει τα δύο qubits, με qubit ελέγχου το q_0 και qubit στόχο το q_1 . Στο τελευταίο βήμα αυτού του κυκλώματος έχουμε την κβαντική μέτρηση των καταστάσεων των qubits και την καταγραφή τους στον κλασικό καταχωρητή c . Ποια θα είναι όμως η αναμενόμενη μέτρηση σε ένα τέτοιο κύκλωμα;

Αρχικά, και τα δύο qubits βρίσκονται στην βασική κατάσταση $|0\rangle$. Η εφαρμογή της πύλης X (NOT) στο 2^ο qubit, το θέτει με βεβαιότητα στην κατάσταση $|1\rangle$, ενώ η εφαρμογή της πύλης Hadamard στο 1^ο qubit, το θέτει σε κατάσταση υπέρθεσης με 50% πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $|0\rangle$ και 50% πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $|1\rangle$. Η εφαρμογή της CNOT που ακολουθεί, προκαλεί τη σύμπλεξη των δύο qubits και συνδέσει τη «μοίρα» του 2^{ου} qubit με αυτή του 1^{ου} qubit. Έτσι, αν το 1^ο qubit, που είναι τώρα qubit ελέγχου, μετρηθεί και βρεθεί στην κατάσταση $|0\rangle$, θα αφήσει ανεπηρέαστο το 2^ο qubit, που είναι τώρα qubit στόχος, και το τελικό αποτέλεσμα της μέτρησης θα είναι $|01\rangle$. Αν όμως το 1^ο qubit μετρηθεί και βρεθεί στην κατάσταση $|1\rangle$, ως qubit ελέγχου θα αντιστρέψει την κατάσταση του 2^{ου} qubit από $|1\rangle$ σε $|0\rangle$ και το τελικό αποτέλεσμα θα είναι $|10\rangle$. Συνεπώς, αναμένεται το κύκλωμα να μας δώσει με 50% πιθανότητα τη μέτρηση $|01\rangle$, με 50% τη μέτρηση $|10\rangle$ και δεν υπάρχει καμία πιθανότητα τα δύο qubits μετά την εφαρμογή να βρεθούν στην ίδια κατάσταση ($|00\rangle$ ή $|11\rangle$).

Ας δούμε όμως αναλυτικά και την μαθηματική επεξεργασία, που μας οδηγεί βέβαια στο ίδιο αποτέλεσμα. Στο κύκλωμα αυτό έχουμε ένα καταχωρητή με 2 qubits που βρίσκονται και τα δύο στην κατάσταση $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Η κβαντική κατάσταση του καταχωρητή προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων των 2 qubit:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Για τον υπολογισμό της ολικής επίδρασης των πυλών στην κατάσταση του καταχωρητή, θα πρέπει σε κάθε βήμα να υπολογίζουμε το τανυστικό γινόμενο των τελεστών των πυλών που δρουν ταυτόχρονα και με τον νέο αυτό τελεστή που προκύπτει να πολλαπλασιάζουμε το διάνυσμα – πίνακα της κβαντικής κατάστασης του καταχωρητή. Έτσι, από τις πύλες H και X που δρουν αρχικά, παίρνουμε τον τελεστή που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο:

$$H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Για να πάμε στη νέα κατάσταση, τον πολλαπλασιάζουμε με την τρέχουσα κατάσταση (σχέση 35) του καταχωρητή:

$$H \otimes X |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Στη συνέχεια δρα στον καταχωρητή η πύλη CNOT με τον τελεστή της και τελικά παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |10\rangle + 0 \cdot |11\rangle \quad (38)$$

Όπως βλέπουμε από τα πλάτη της τελικής κατάστασης οι καταστάσεις $|00\rangle$ και $|11\rangle$ έχουν μηδενικές πιθανότητες και οι καταστάσεις $|01\rangle$ και $|10\rangle$ έχουν, η κάθε μία, πιθανότητα $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$ δηλαδή 50%, όπως προβλέφθηκε αρχικά.

Σήμερα, αν και δεν έχουμε ευρέως διαθέσιμους κβαντικούς υπολογιστές, μπορούμε να σχεδιάζουμε κβαντικά κυκλώματα, απλά ή σύνθετα, και να τα βάζουμε σε εφαρμογή χρησιμοποιώντας περιβάλλοντα προσομοίωσης, όπως το Qiskit (qiskit.org). Επίσης, η IBM μας δίνει τη δυνατότητα να συνθέσουμε κβαντικά κυκλώματα, σε ένα περιβάλλον προσομοίωσης (quantum-computing.ibm.com/composer), με πολύ απλές (drag & drop) διαδικασίες. Μπορείτε ακόμη και να προωθήσετε το κβαντικό κύκλωμα που θα κατασκευάσετε σε μια ουρά υποβολής, για να τρέξει κάποια στιγμή σε έναν από τους πραγματικούς κβαντικούς υπολογιστές και να σας επιστρέψει πραγματικά αποτελέσματα. Μένει να δούμε ποιους κβαντικούς αλγόριθμους θα ενσωματώσουμε στα κβαντικά μας κυκλώματα και ποια προβλήματα θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε με αυτούς.

3 Βασικοί κβαντικοί αλγόριθμοι

Όπως για τους κλασικούς υπολογισμούς έχουμε μια σειρά από θεμελιώδεις αλγόριθμους, πχ για την ταξινόμηση, την αναζήτηση, την διαπέραση γράφων, κ.α., έτσι και η κβαντική υπολογιστική, έχει αναπτύξει το δικό της σύνολο βασικών κβαντικών αλγορίθμων, που κεφαλαιοποιούν τις κβαντικές ιδιότητες της υπέρθεσης και της διεμπλοκής.

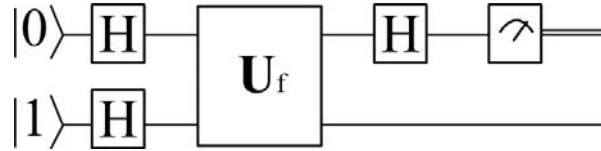
Το σύνολο αυτό άρχισε να δημιουργείται αρκετά πριν εμφανιστούν οι πρώτοι κβαντικοί υπολογιστές και συνεχίζει να εμπλουτίζεται με νέους αλγόριθμους, καθώς η ανάπτυξη ενός κβαντικού αλγορίθμου δεν απαιτεί την ενεργή παρουσία του κβαντικού υπολογιστή. Παραμένει βέβαια ζητούμενο, να δούμε σε ποιον βαθμό οι πραγματικοί κβαντικοί υπολογιστές θα υποστηρίξουν την αξιόπιστη εφαρμογή όλων αυτών των αλγορίθμων στο μέλλον.

Στο πρακτικό μέρος αυτής της εργασίας, όπου γίνεται πειραματική εισαγωγή της κβαντικής υπολογιστικής σε μία τάξη Γενικού Λυκείου, θα χρησιμοποιηθεί, με έναν κεκαλυμμένο, παιγνιώδη τρόπο, ο κβαντικός αλγόριθμος Deutsch-Jozsa. Για τον λόγο αυτό, γίνεται παρακάτω ιδιαίτερη μνεία και ανάπτυξη της λογικής του, ώστε ο εκπαιδευτικός, που θα μπει στη διαδικασία να εφαρμόσει την ίδια ή ανάλογη πρακτική, να έχει ένα πληρέστερο υπόβαθρο για τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω από την διδακτική προσέγγιση. Για λόγους σχετικής πληρότητας, δίνονται τα κύρια χαρακτηριστικά και ενός ακόμη κβαντικού αλγορίθμου, του αλγορίθμου του Grover, αλλά η μαθηματική του θεμελίωση και η αντίστοιχη διερεύνηση και άλλων αλγορίθμων ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσης.

3.1 Ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa

Ο αλγόριθμος Deutsch-Jozsa είναι ένας από τους πρώτους κβαντικούς αλγόριθμους, που σχεδιάστηκε από τους David Deutsch και Richard Jozsa το 1992. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο αλγόριθμος είναι το εξής: Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση $f(x)$ που είναι δυαδική, δηλαδή το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της μπορεί να είναι μόνο το $\{0,1\}$. Για μία τέτοια συνάρτηση μπορεί να ισχύει είτε $f(0) = f(1)$, οπότε η f είναι σταθερή, είτε $f(0) \neq f(1)$, οπότε θεωρείται ισορροπημένη. Τι από τα δύο είναι μια δοθείσα συνάρτηση;

Την απάντηση μπορεί να μας τη δώσει κι ένας κλασικός αλγόριθμος που θα υπολογίσει πρώτα το $f(0)$, έπειτα το $f(1)$ και θα τα συγκρίνει. Ο κλασικός αλγόριθμος λοιπόν μας δίνει την απάντηση, σταθερή ή ισορροπημένη, κάνοντας αναγκαστικά δύο φορές τον υπολογισμό της $f(x)$. Το εντυπωσιακό στον αλγόριθμο Deutsch-Jozsa είναι ότι μπορεί να μας δώσει την απάντηση κάνοντας μόνο έναν υπολογισμό της $f(x)$. Το κβαντικό κύκλωμα του αλγορίθμου δίνεται στην Εικόνα 5.



Εικόνα 5: Το κβαντικό κύκλωμα του αλγορίθμου Deutsch-Jozsa

Οι πύλες H είναι οι γνωστές πύλες Hadamard, ενώ ο U_f είναι ένας συνδυασμός κβαντικών πυλών, που εξαρτάται κάθε φορά από την f . Σε κάθε περίπτωση, αν τα εισερχόμενα qubits στο U_f είναι $|x\rangle|q\rangle$, η έξοδος του U_f θα είναι:

$$U_f|x\rangle|q\rangle = |x\rangle|q \oplus f(x)\rangle \quad (39)$$

όπου $\oplus$ το σύμβολο της δυαδικής πρόσθεσης³. Ας δούμε τι μας δίνει η μαθηματική ανάλυση του κυκλώματος της Εικόνα 5. Πρόκειται για έναν καταχωρητή $|q_r\rangle$ των 2 qubits με αρχική κατάσταση $|01\rangle$, δηλαδή:

$$|q_r\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Οι δύο πύλες Hadamard δρουν αρχικά με έναν τελεστή:

$$H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

και ο καταχωρητής μεταφέρεται στην κατάσταση:

$$|q_r\rangle = H \otimes H|01\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

ή

$$|q_r\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \quad (43)$$

³ Τα δυνατά αποτελέσματα της δυαδικής πρόσθεσης είναι: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$ και $1 \oplus 1 = 0$

Στο επόμενο βήμα δρα ο συνδυασμός πυλών U_f , όπως ορίζει η σχέση 39, και μεταφέρει τον καταχωρητή στην κατάσταση:

$$|q_r\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0 \oplus f(0)\rangle - |0\rangle|1 \oplus f(0)\rangle + |1\rangle|0 \oplus f(1)\rangle - |1\rangle|1 \oplus f(1)\rangle) \quad (44)$$

Υπάρχουν τώρα 4 διαφορετικές πιθανότητες για τη σχέση 44 ανάλογα με τις τιμές των $f(0)$ και $f(1)$, που είναι οι εξής:

1. Αν $f(0)=f(1)=0$, τότε έχουμε:

$$|q_r\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (44\alpha)$$

2. Αν $f(0)=f(1)=1$, τότε έχουμε:

$$|q_r\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|1\rangle - |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44\beta)$$

3. Αν $f(0)=0$ & $f(1)=1$, τότε έχουμε:

$$|q_r\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44\gamma)$$

4. Αν $f(0)=1$ & $f(1)=0$, τότε έχουμε:

$$|q_r\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|1\rangle - |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (44\delta)$$

Για να υπολογίσουμε λοιπόν τις τελικές πιθανές μετρήσεις του κυκλώματος, θα πρέπει σε κάθε μία πιθανή κατάσταση του καταχωρητή (σχέσεις 44α - 44δ) να εφαρμόσουμε τον τελεστή που προκύπτει από το τελευταίο βήμα:

$$H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Για την πρώτη περίπτωση οι πράξεις δίνουν:

$$H \otimes I |q_r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle \quad (46)$$

Η τελική κατάσταση του καταχωρητή, σε αυτή την περίπτωση, μπορεί επίσης να γραφεί:

$$|q_r\rangle = |0\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (47\alpha)$$

Με παρόμοιες πράξεις για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$|q_r\rangle = |0\rangle\left(\frac{|1\rangle-|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (47\beta)$$

$$|q_r\rangle = |1\rangle\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (47\gamma)$$

$$|q_r\rangle = |1\rangle\left(\frac{|1\rangle-|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) \quad (47\delta)$$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο πρώτες περιπτώσεις, όπου η συνάρτηση είναι σταθερή, το δεύτερο qubit είναι $|0\rangle$, ενώ στις δύο επόμενες περιπτώσεις, όπου η συνάρτηση είναι ισορροπημένη, το δεύτερο qubit είναι $|1\rangle$. Συνεπώς μπορούμε, εξετάζοντας απλά την κατάσταση του $2^{\text{ου}}$ qubit και κάνοντας μόνον έναν υπολογισμό της $f(x)$, να δώσουμε με ασφάλεια απάντηση στο ερώτημα.

3.2 Ο αλγόριθμος Grover

Φανταστείτε ότι θέλετε να βρείτε τον φύλλο $Q\spadesuit$ ανάμεσα στα 52 φύλλα μιας τράπουλας, που είναι ανακατεμένα και αναποδογυρισμένα. Αν είστε πολύ τυχεροί θα χρειαστείτε μία προσπάθεια. Αν είστε απολύτως άτυχοι θα χρειαστείτε 52 προσπάθειες για να το επιλέξετε. Κατά μέσο όρο, θα χρειαστείτε $\frac{52}{2} = 26$ προσπάθειες. Γενικά, σε μία μη δομημένη βάση δεδομένων που περιέχει N στοιχεία, χρειαζόμαστε κατά μέσο όρο $\frac{N}{2}$ επαναλήψεις μιας σειράς ενεργειών για να εντοπίσουμε το στοιχείο που αναζητούμε.

Ο κβαντικός αλγόριθμος του Lov Grover είναι εξαιρετικά σημαντικός, γιατί μας βοηθά να επιταχύνουμε κατά πολύ την εύρεση του στοιχείου. Μπορούμε να το εντοπίσουμε με έναν αρκετά μικρότερο αριθμό επαναλήψεων, που είναι της τάξης του $\sqrt{N}$, αντί του $\frac{N}{2}$ (Grover, 1997). Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση της τράπουλας θα εντοπίσουμε το φύλλο $Q\spadesuit$ με περίπου 7 επαναλήψεις αντί για 26 (3,5 φορές λιγότερες), ενώ σε μία βάση δεδομένων με 10^6 στοιχεία θα χρειαστούμε για να εντοπίσουμε ένα στοιχείο, περίπου 10^3 αντί για $5 \cdot 10^5$ επαναλήψεις, που χρειάζεται κατά μέσο όρο ο κλασικός αλγόριθμος (500 φορές λιγότερες). Για να πετύχει αυτή την τετραγωνική επιτάχυνση ο αλγόριθμος του Grover χρησιμοποιεί τον κβαντικό παραλληλισμό και προκαλεί, με κατάλληλο συνδυασμό πυλών, ενίσχυση του πλάτους πιθανότητας του ζητούμενου στοιχείου.

Αρχικά, αντιστοιχούμε τα N στοιχεία της βάσης δεδομένων σε κάθε μία από τις καταστάσεις ενός κβαντικού καταχωρητή με n qubits, όπου n κατάλληλος φυσικός αριθμός⁴ ώστε $N \leq 2^n - 1$. Θέτουμε έπειτα όλα τα qubits του καταχωρητή σε υπέρθεση, ώστε ο καταχωρητής να περιέχει όλες τις δυνατές καταστάσεις (στοιχεία της βάσης δεδομένων) με ίσο πλάτος πιθανότητας για κάθε μία από αυτές $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ⁵.

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια έναν συνδυασμό πυλών U_f , ένα oracle (μάντης) όπως συνηθίζεται να αναφέρεται στη βιβλιογραφία, που θα ανιχνεύει αν ένα στοιχείο που ελέγχεται ικανοποιεί τους όρους της αναζήτησής μας⁶. Όταν ανιχνευτεί ένα τέτοιο στοιχείο, μία τέτοια κβαντική κατάσταση δηλαδή, ο τελεστής, που αντιπροσωπεύει το oracle, αντιστρέφει το πρόσημο του πλάτους πιθανότητας αυτής της κατάστασης, χωρίς να επηρεάζει τις άλλες καταστάσεις.

Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος του Grover ενισχύει το πλάτος πιθανότητας της κατάστασης που ανιχνεύτηκε και μειώνει το πλάτος των καταστάσεων που δεν έχουν επισημανθεί. Για την ενίσχυση του πλάτους της συγκεκριμένης κατάστασης γίνεται πρώτα ο υπολογισμός της μέσης τιμής των πλατών όλων των καταστάσεων. Έπειτα, κάθε πλάτος παίρνει μία νέα τιμή που είναι η διαφορά της μέσης τιμής από την απόσταση του πλάτους από τη μέση τιμή. Είναι προφανές ότι το πλάτος που άλλαξε πρόσημο απέχει πολύ περισσότερο από τη μέση τιμή, ενώ όλα τα άλλα πλάτη έχουν ίδιες τιμές, πολύ πιο κοντά στη μέση τιμή.

Η παραπάνω διαδικασία αντιστροφής του προσήμου, νέος υπολογισμός μέσης τιμής και ενίσχυσης του πλάτους επαναλαμβάνεται για περίπου $\frac{\pi}{4} \sqrt{N}$ επαναλήψεις. Ο αριθμός αυτός των επαναλήψεων αυξάνει σε τέτοιο βαθμό το πλάτος πιθανότητας της ζητούμενης κατάστασης και μειώνει αντίστοιχα τα πλάτη όλων των άλλων καταστάσεων, ώστε αν στη συνέχεια γίνει μέτρηση, θα πάρουμε πρακτικά με βεβαιότητα την ζητούμενη κατάσταση, άρα θα ανακαλύψουμε και το ζητούμενο στοιχείο.

⁴ Ένας καταχωρητής με n qubits μπορεί να αντιπροσωπεύει $N=2^n-1$ καταστάσεις με $n=1,2,3,\dots$

⁵ Θυμηθείτε πως το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών πιθανότητας πρέπει να ισούται με τη μονάδα.

Πράγματι $(\frac{1}{\sqrt{N}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{N}})^2 + \dots + (\frac{1}{\sqrt{N}})^2 = N \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2 = 1$

⁶ Στους αντίστοιχους κλασικούς αλγόριθμους θα μπορούσε να είναι μια συνάρτηση boolean που να αναγνωρίζει αν το στοιχείο είναι το ζητούμενο ή όχι και να επιστρέφει αντίστοιχα 1 ή 0.

3.3 Άλλοι κβαντικοί αλγόριθμοι

Παρακάτω, γίνονται αναφορές σε μερικούς ακόμη κβαντικούς αλγόριθμους,, που δεν θα αποτελέσουν όμως αντικείμενο της πρακτικής εφαρμογής της παρούσης. Δίνεται μία βασική περιγραφή τους για να κεντρίσουν μόνο το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών που θα θελήσουν να επεκτείνουν τη γνώση τους στο αντικείμενο.

Αλγόριθμος του Shor: Ο αλγόριθμος Shor, που αναπτύχθηκε από τον Peter Shor το 1994, είναι ένας πρωτοποριακός κβαντικός αλγόριθμος που μπορεί να αναλύσει αποτελεσματικά μεγάλους ακέραιους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις για την κρυπτογραφία, καθώς πολλά σχήματα κρυπτογράφησης βασίζονται στη δυσκολία παραγοντοποίησης μεγάλων αριθμών. Ο αλγόριθμος Shor έχει τη δυνατότητα να θέτει σε κίνδυνο την ασφάλεια των ευρέως χρησιμοποιούμενων μεθόδων κρυπτογράφησης δημόσιου κλειδιού, καθιστώντας τον έναν κρίσιμο αλγόριθμο για το μέλλον της κρυπτογραφίας και της ασφάλειας στη μετάδοση πληροφοριών.

Κβαντικός Μετασχηματισμός Fourier (QFT): Ο Κβαντικός Μετασχηματισμός Fourier (QFT) είναι μια θεμελιώδης λειτουργία στον κβαντικό υπολογισμό που παίζει κεντρικό ρόλο σε διάφορους κβαντικούς αλγόριθμους. Μετατρέπει αποτελεσματικά τις κβαντικές καταστάσεις σε αντίστοιχες περιοχές συχνοτήτων, επιτρέποντας την επεξεργασία κβαντικού σήματος, την εκτίμηση κβαντικής φάσης και άλλους κβαντικούς υπολογισμούς (Nielsen & Chuang, 2010). Η ικανότητά του να παραλληλίζει τους υπολογισμούς του δίνει ένα μοναδικό πλεονέκτημα έναντι των κλασικών ομολόγων.

Αλγόριθμος Simon: Ο αλγόριθμος του Simon, που εισήχθη από τον Daniel Simon το 1997, είναι ένας λιγότερο γνωστός αλλά σημαντικός κβαντικός αλγόριθμος. Επιλύει αποτελεσματικά το πρόβλημα Simon, επιδεικνύοντας το πλεονέκτημα του κβαντικού υπολογισμού σε συγκεκριμένους τομείς προβλημάτων. Το πρόβλημα περιλαμβάνει την εύρεση μιας κρυφής συμβολοσειράς σε δυαδική μορφή που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη και ο αλγόριθμος του Simon μπορεί να το επιτύχει αυτό με σημαντική επιτάχυνση σε σύγκριση με τις κλασσικές μεθόδους.

Quantum Walks: Ο αλγόριθμος λειτουργεί δημιουργώντας ένα κβαντικό κύμα που εξαπλώνεται σε ένα δίκτυο (Childs, 2004). Το κύμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρει πληροφορίες που είναι κρυμμένες στο δίκτυο, όπως η τοποθεσία ενός στόχου ή η σύνδεση μεταξύ δύο κόμβων. Για παράδειγμα, ένας κλασικός αλγόριθμος: για να βρει την τοποθεσία ενός στόχου σε ένα δίκτυο 100 κόμβων, θα χρειαστεί να ελέγξει πολλούς

κόμβους, έναν προς έναν. Κατά μέσο όρο θα χρειαστεί 50 βήματα. Ο αλγόριθμος Quantum Walks μπορεί να βρει την τοποθεσία του στόχου σε μόλις 2 βήματα. Αυτό συμβαίνει επειδή το κβαντικό κύμα μπορεί να εξαπλωθεί σε όλο το δίκτυο ταυτόχρονα. Ο αλγόριθμος Quantum Walks είναι ακόμα υπό ανάπτυξη, αλλά έχει τη δυνατότητα να έχει σημαντικό αντίκτυπο σε διάφορους τομείς, όπως η τεχνητή νοημοσύνη, η βιοπληροφορική και η ασφαλής επικοινωνία.

Φυσικά, έχουν αναπτυχθεί πολλοί ακόμη αλγόριθμοι και η ανάπτυξη νέων είναι διαρκής καθώς οι κβαντικοί υπολογιστές θα βελτιώνουν την αξιόπιστη και αποτελεσματική λειτουργία τους.

Μέρος Β΄

Διδακτική κβαντικής υπολογιστικής

Στο Β΄ μέρος της παρούσης αναπτύσσεται η διδακτική προσέγγιση της κβαντικής υπολογιστικής στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τόσο σε θεωρητικό επίπεδο, όσο και στην πράξη, με την εφαρμογή διδακτικής μεθόδου για την εισαγωγή της κβαντικής υπολογιστικής σε παιδιά Β΄ Λυκείου ενός ελληνικού σχολείου.

4 Η διδακτική προσέγγιση

Για την διδακτική προσέγγιση αυτού του σύγχρονου θέματος, στη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα, με το περιορισμένο επιστημονικό υπόβαθρο, θα πρέπει να ανατρέξουμε σίγουρα στις βασικές αρχές της διδακτικής, να μελετήσουμε διδακτικές πρακτικές που εφαρμόστηκαν σε άλλες εκπαιδευτικές μονάδες του κόσμου και φυσικά να ανιχνεύσουμε το εκπαιδευτικό περιβάλλον στο οποίο θα γίνει η εφαρμογή με μια συζήτηση για τις ιδιαιτερότητές του.

4.1 Διδακτική σύγχρονων θεμάτων στο Ελλην. Σχολείο

Τα σύγχρονα θέματα επιστήμης και τεχνολογίας, όπως οι κβαντικοί υπολογιστές, είναι αλήθεια ότι δεν αποτελούν μέρος του εκπαιδευτικού προγράμματος στα ελληνικά σχολεία. Η ύλη των παιδιών δεν αγγίζει ουσιαστικά τις επιστημονικές εξελίξεις των τελευταίων δεκαετιών. Είναι χαρακτηριστικό ότι στα σχολικά εγχειρίδια φυσικής, μαθηματικών, πληροφορικής, κλπ, δεν θα βρείτε την φωτογραφία κανενός εν ζωή επιστήμονα των κλάδων αυτών.

Η συζήτηση για την εισαγωγή σύγχρονων επιστημονικών θεμάτων στις σχολικές αίθουσες γίνεται για αρκετό καιρό στους εκπαιδευτικούς κύκλους, επισήμως μέσω των δράσεων ενημέρωσης και διαβούλευσης του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ), αλλά και ανεπίσημα στην καθημερινή πρακτική των εκπαιδευτικών. Και μπορεί να μην υπάρχουν ενταγμένα στην ύλη σύγχρονα θέματα αλλά το νομοθετικό πλαίσιο, που έχει διαμορφωθεί και με προτάσεις του ΙΕΠ, δίνει κατά καιρούς τη δυνατότητα της

θεσμικής ενασχόλησης των παιδιών με τέτοια θέματα πέρα από την ύλη του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών (ΑΠΣ). Είτε μέσω των Εκπαιδευτικών Ομίλων, που έχουν θεσμοθετηθεί για την τρέχουσα περίοδο, είτε μέσω του Project Based Learning που είχε ενταχθεί στο αναλυτικό πρόγραμμα στο παρελθόν. Με βάση το τρέχον θεσμικό πλαίσιο και στα πλαίσια έρευνας της παρούσας εργασίας, λειτούργησε φέτος πιλοτικά σε σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην περιοχή της Θεσσαλίας, Εκπαιδευτικός Όμιλος Κβαντικής Υπολογιστικής, τα αποτελέσματα των δράσεων του οποίου αναλύονται σε επόμενο κεφάλαιο. Η συζήτηση εδώ συνεχίζεται με το «πώς» θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τους κβαντικούς υπολογιστές ή ανάλογα σύγχρονα θέματα στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η προσέγγιση της κβαντικής υπολογιστικής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση από φοιτητές, που έχουν το απαιτούμενο υπόβαθρο της φυσικής, των μαθηματικών και της πληροφορικής, μπορεί να θεωρηθεί ένα σχετικά βατό βήμα, που αναμένεται να γίνει με σταθερότητα πάνω στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους. Αυτός είναι και ο συνήθης λόγος που το μάθημα εισάγεται σε πανεπιστημιακά τμήματα, προπτυχιακά σε «ώριμα» εξάμηνα ή σε μεταπτυχιακές σπουδές. Αν και για τους φοιτητές και τις φοιτήτριες μοιάζει ακόμη και σε αυτό το στάδιο δύσκολο, σε κάποιες περιπτώσεις.

Για τους νέους όμως μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ή και για ενηλίκους) που δεν γνωρίζουν κβαντική μηχανική, ή γραμμική άλγεβρα, την κβαντική υπολογιστική μοιάζει αρχικά σχεδόν αδύνατο να την προσεγγίσουν. Κάτι ανάλογο συμβαίνει όμως και με μια ασπρόμαυρη τηλεόραση της δεκαετίας του '60. Για να μάθει κανείς πώς λειτουργεί θα πρέπει να γνωρίζει ηλεκτρομαγνητισμό και να μπορεί μαθηματικά να επιλύει προβλήματα σύνθετων κινήσεων ηλεκτρονίων στο H/M πεδίο πίσω από την οθόνη της τηλεόρασης. Ακόμη και για την ατμομηχανή του «Πτάμενου Σκοτσέζου» (The Flying Scotsman), που άλλαξε τη ζωή των Άγγλων στα τέλη του 19ου αιώνα, για να καταλάβει κανείς πώς ακριβώς λειτουργούσε θα πρέπει να γνωρίζει θερμοδυναμική και μηχανική στερεών σωμάτων τουλάχιστον. Και μπορούμε να σκεφτούμε πραγματικά αμέτρητα ανάλογα παραδείγματα στην εξέλιξη της τεχνολογίας. Πώς απαντά η εκπαίδευση απέναντι σε αυτό το χάσμα; Το χάσμα ερώτησης – απάντησης που δημιουργούν οι προαπαιτούμενες γνώσεις για την κατανόηση ενός τεχνολογικού επιτεύγματος;

Μια πρακτική που ακολουθήθηκε και ακολουθείται σε ένα σημαντικό βαθμό στην εκπαίδευση είναι η παραγκώνιση των τεχνολογικών αυτών «θαυμάτων» από τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια και το ΑΠΣ, θεωρώντας πως λείπει το υπόβαθρο για να γίνει

παρουσίασή τους στους μαθητές και καλό θα ήταν να μην ενταχθούν σε αυτά. Και στις πιθανές ερωτήσεις παιδιών για τον Ιπτάμενο Σκοτσέζο, για την οθόνη της τηλεόρασης και για τους κβαντικούς υπολογιστές, μία συνηθισμένη απάντηση είναι «Για να ασχοληθείς με αυτά, πρέπει πρώτα να μάθεις γραμμική άλγεβρα, διαφορικές εξισώσεις, μηχανική, θερμοδυναμική, κβαντομηχανική,...» και πολλά άλλα μάλλον. Επομένως, θα πρέπει να περιμένεις αρκετά.

Υψώνεται έτσι ένα τείχος από σύμβολα, νόμους, κανόνες και εξισώσεις που αρχικά ο/η μαθητής/τρια δεν μπορεί να αντιστοιχίσει στα πραγματικά του ερωτήματα, αλλά πρέπει να τα μάθει, απλά γιατί κάποιος τον/την ενημέρωσε ότι είναι προαπαιτούμενα. Αφού ολοκληρώσει τα μαθηματικά και την φυσική του σχολείου, πρέπει να μάθει τον πολλαπλασιασμό δισδιάστατων πινάκων (τι μπορεί να παριστάνει ένας δισδιάστατος πίνακας και τι άραγε το γινόμενο δύο ή τριών πινάκων), να μάθει τις ιδιότητες φανταστικών (!) και μιγαδικών αριθμών, να μάθει να πολλαπλασιάζει διανύσματα με εσωτερικό και εξωτερικό (?) γινόμενο και να λύνει διαφορικές εξισώσεις με αφηρημένες μεταβλητές, ρυθμούς μεταβολής μεταβλητών και ρυθμούς ρυθμών, αναμένοντας να δει πώς μπορεί αυτά να έχουν σχέση με τα ερωτήματά του.

Φυσικά, μπορεί ο δάσκαλός του, κάθε τόσο στην μακρόχρονη διαδρομή, να εξηγεί ότι αυτά θα βρουν κάποτε μια εφαρμογή, στην περιγραφή της συμπεριφοράς των στοιχειωδών σωματιδίων του μικρόκοσμου και των κβαντικών bits, ή σε οτιδήποτε άλλο μπορεί να τα έχει ως προαπαιτούμενα. Είναι μία διαρκής *υπόσχεση* προς τον μαθητή που αναρωτήθηκε κάποτε «πώς λειτουργούν οι κβαντικοί υπολογιστές;». Αυτή η υπόσχεση μπορεί να είναι ειλικρινής, αλλά παιδαγωγικά, για την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, είναι μάλλον προβληματική. Κυρίως επειδή αποθαρρύνει τα περισσότερα παιδιά να κρατήσουν «ζωντανή» την ερώτησή τους και να κυνηγήσουν την καλύτερη δυνατή απάντηση άμεσα.

Με τι θα μπορούσαμε όμως να αντικαταστήσουμε αυτήν την «υπόσχεση»; Ας στραφούμε στα θεμελιώδη. Γνωρίζουμε ότι η μάθηση εν γένει και ειδικά στο χώρο της επιστήμης είναι μια εννοιολογική αλλαγή (Russell & Martin, 2023). Ο εγκέφαλος θα σχηματίσει σίγουρα μία απάντηση (κατά πάσα πιθανότητα αρχικά προβληματική) για την εκάστοτε ερώτηση από τις προσλαμβανουσες που έχει ήδη για το θέμα. Κι όταν λέμε ότι «μαθαίνει», αυτό σημαίνει ότι αναθεωρεί, λόγω μιας πειστικής ανατροπής της προϋπάρχουσας άποψης και ότι η αρχική έννοια ανασκευάζεται. Για να είναι πραγματική η ανατροπή, θα πρέπει να έχει ένα βασικό χαρακτηριστικό. Η σύγκρουση με την

προϋπάρχουσα γνώση, να επέλθει με μία προσωπική ανακάλυψη κι όχι από απλή εξωτερική πληροφόρηση ή δήλωση.

Ο ρόλος του σχολείου, του εκπαιδευτικού δηλαδή, δεν είναι σίγουρα να βάζει στο ντουλάπι τις ερωτήσεις και να παραπέμπει συνεχώς στο απώτερο μέλλον, γιατί ο εγκέφαλος των παιδιών θα δημιουργήσει απαντήσεις έτσι κι αλλιώς, από οποιεσδήποτε (έγκυρες ή άκυρες) προσλαμβάνουσες. Αντιθέτως, το σχολείο πρέπει να κρατά ζωντανά αυτά τα ερωτήματα στο επίκεντρο, ως μεγάλα puzzles που όλοι μαζί μπορούμε να συνθέσουμε και να σχηματίσουμε την πιστότερη εικόνα. Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν ευδοκιμεί ο συμπεριφορισμός και η μέθοδος της διάλεξης, όπως (μάλλον κατά κόρον) στην τριτοβάθμια. Οι σύγχρονες αντιλήψεις μας οδηγούν στις μεθόδους του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού. Από τους πολλούς εκφραστές (Vygotsky, 1978) θα σταθούμε στην μέθοδο με την οποία τον εισήγαγε, σε ακόμα μικρότερες ηλικίες, ο μαθηματικός Guy Brousseau (Brousseau, 1997). Ακολουθώντας τα βήματα του Brousseau, μπορούμε να αποπειραθούμε, να δημιουργήσουμε μια διδακτική κατάσταση, που θα μετατρέπει αυτή την «υπόσχεση» σε προσωπική «ανάγκη» του μαθητή. Ποια μπορεί να είναι αυτή η διδακτική κατάσταση;

Ο Brousseau, σε ένα παράδειγμα ανάδειξης της τεχνική του, βάζει τα παιδιά του δημοτικού σχολείου, ανά δύο να παίζουν το παιχνίδι «Αγώνας μέχρι το 20» (Race to 20). Οι δύο μαθητές ξεκινώντας από το 0, πρέπει να φτάσουν στο 20 προσθέτοντας εναλλάξ (ο ένας μετά τον άλλο) είτε το 1 είτε το 2. Κερδίζει αυτός που θα κάνει την τελευταία πρόσθεση και θα φτάσει στο 20. Οι μαθητές ξεκινούν να παίζουν χωρίς εκ των προτέρων να τους έχει εξηγηθεί κάποια μέθοδος που θα τους βοηθήσει να κερδίσουν. Σύντομα ανακαλύπτουν ότι ένας βασικός κανόνας για να κερδίσουν είναι να φτάσουν πρώτοι στο 17, ώστε είτε ο αντίπαλος προσθέσει το 1 είτε το 2, θα έχουν την ευκαιρία με τη σειρά τους να φτάσουν πρώτοι στο 20. Συνεχίζοντας να παίζουν, ανακαλύπτουν ότι για να φτάσουν στο 17 θα πρέπει να φτάσουν πρώτοι στο 14, στο 11, κ.ο.κ., και κάποιοι, θέλοντας πολύ να κερδίσουν, ανακαλύπτουν σε πολύ μικρή ηλικία μία μαθηματική επαγωγική μέθοδο σκέψης, η οποία είναι προαπαιτούμενη για να κερδίσεις στο παιχνίδι, αλλά δεν την διδάχθηκαν επισήμως ποτέ. Οι μαθητές αυτοί δεν άκουσαν ποτέ την πρόταση «Για να κερδίσεις στο παιχνίδι “Race to 20” πρέπει πρώτα να διδαχθείς την μαθηματική επαγωγή». Δεν έλαβαν ποτέ την «υπόσχεση» ότι αν διδαχθούν την μαθηματική επαγωγή θα μπορέσουν να κερδίσουν. Την ανακάλυψαν μόνοι τους, γιατί η

διδασκτική κατάσταση που δημιουργήσε ο εκπαιδευτικός δημιούργησε την «ανάγκη» να την ανακαλύψουν.

Δεν ξεκινάμε λοιπόν από τα προαπαιτούμενα, αλλά από τον ίδιο τον κβαντικό υπολογιστή (ή τον εκάστοτε Ιπτάμενο Σκωτσέζο), σχεδιασμένο με την κατάλληλη μορφή και εμπλέκοντας τα παιδιά στην κατάλληλη διδασκτική κατάσταση, ανάλογα με το εκπαιδευτικό τους προφίλ και υπόβαθρο. Θα πρέπει να ανακαλύψουμε τι κρύβεται πίσω από αυτόν και ποιες λειτουργίες λαμβάνουν μέρος. Αν κρύβεται ένα ηλεκτρόνιο ή ένα φωτόνιο, ήρθε η ώρα να ανακαλύψουμε τι είναι τα σωματίδια αυτά και πως συμπεριφέρονται. Να εξελίξουμε τις προϋπάρχουσες ιδέες των παιδιών και να επέλθει η εννοιολογική αλλαγή (μάθηση) μέσα από την αποκωδικοποίηση της συμπεριφοράς των νέων (ή εν μέρει γνωστών) σωματιδίων. Στη συνέχεια, να δούμε πώς μπορούμε να παραστήσουμε τα σωματίδια, τις καταστάσεις τους και τις αλληλεπιδράσεις τους. Θα ξεκινήσουμε με μια διαδικασία, στην οποία θα συμμετέχουν διαισθητικά οι μαθητές, λύνοντας παιγνιώδεις γρίφους στα πρότυπα του Brousseau και η διαδικασία αυτή θα δημιουργήσει το έδαφος για την εμφάνιση.

Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν νέο γρίφο-παιχνίδι, που θα δημιουργήσει την κατάλληλη διδασκτική κατάσταση για να μπούμε με τα παιδιά στο πνεύμα της κβαντικής υπολογιστικής, χωρίς να απαιτούμε προηγουμένως να αποκτήσουν την αναλυτική μαθηματική γλώσσα, με την οποία ο επιστημονικός κόσμος περιγράφει τις κβαντικές καταστάσεις των qubits. Θα τους δώσουμε μια εικονογραφημένη απλοϊκή μορφή της γλώσσας σε ένα πλαίσιο παιχνιδιού, χωρίς όμως να κάνουμε εκπτώσεις στις αρχές της κβαντικής υπολογιστικής.

4.2 Διδασκτική με κβαντικά παιχνίδια

Η βιβλιογραφία αποκαλύπτει ένα εύρος προσπαθειών να προσεγγιστεί η διδασκτική της κβαντικής μηχανικής και της κβαντικής υπολογιστικής μέσα από παιγνιώδεις διαδικασίες που έχουν διττό στόχο, να δοθούν οι κανόνες περισσότερο παραστατικά από ότι κάνουν τα αφηρημένα μαθηματικά, αλλά και να δημιουργήσουν καταστάσεις πρόκλησης για τον εκπαιδευόμενο με τη μορφή γρίφου ή ανταγωνιστικής δράσης.

Η επιλογή της δημιουργίας κβαντικών παιχνιδιών για την εισαγωγή του θέματος στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση έχει μια ρεαλιστική βάση. Το παιχνίδι κάνει την διαδικασία της μάθησης εν γένει πιο ελκυστική, γιατί εισάγει ένα στοιχείο πρόκλησης για τους μαθητές και τις μαθήτριες (Deterding et al., 2011; Landers et al., 2018). Επιτρέπει ακόμη

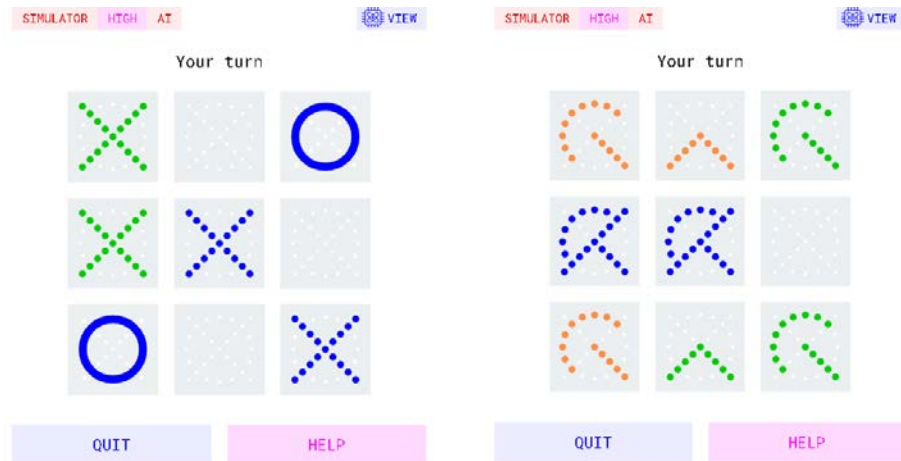
στα παιδιά να αποτύχουν όταν μαθαίνουν, χωρίς την ίδια φόρτιση και τον φόβο της αποτυχίας που συναντάμε σε άλλες μορφές αξιολόγησης (Lee & Hamer, 2011). Η παιχνιδοποίηση βέβαια προϋποθέτει μια μετάβαση του εκπαιδευτικού, από τον ρόλο του λέκτορα στον ρόλο του απλού οδηγού (Rose, 2015), ενώ για τα παιδιά επιφυλάσσει έναν πιο ενεργό ρόλο, που θα τα ωθήσει να αποκτήσουν περισσότερες γνώσεις και δεξιότητες μέσω της εμπλοκής τους και των κινήτρων που εισάγει το παιχνίδι (Huang & Soman, 2013). Η έρευνα γενικά έχει δείξει ότι οι μηχανισμοί παιχνιδοποίησης βοηθούν στη διδασκαλία των θεμάτων S.T.E.A.M., καθιστώντας τα περισσότερο ελκυστικά για τους μαθητές (Lynch et al., 2018). Υπάρχουν όμως και έρευνες που στέκονται περισσότερο κριτικά, με ευρήματα που δεν δείχνουν μεγάλη στατιστική διαφοροποίηση από την αξιοποίηση παιχνιδιών μάθησης (Kusuma et al. 2018).

Ένα παράδειγμα κβαντικού παιχνιδιού που μπορεί να αξιοποιηθεί στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι το Quantum Odyssey. Πρόκειται για ένα εκπαιδευτικό βιντεοπαιχνίδι (<https://www.quarksinteractive.com/>) που αναπτύχθηκε από την Quarks Interactive και στοχεύει να διδάξει τα βασικά της κβαντικής υπολογιστικής με διαδραστικό και ελκυστικό τρόπο. Το παιχνίδι έχει σχεδιαστεί για παίκτες όλων των ηλικιών και επιπέδων εμπειρίας και δεν απαιτεί προηγούμενη γνώση μαθηματικών ή φυσικής. Το Quantum Odyssey ταξιδεύει τους παίκτες στον κόσμο της κβαντικής μηχανικής, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία γρίφων, προκλήσεων και διαδραστικών εμπειριών για να εισαγάγει τις βασικές έννοιες της κβαντικής υπολογιστικής, σε ένα πολύχρωμο και ελκυστικό εικονικό περιβάλλον. Οι παίκτες μαθαίνουν για την υπέρθεση, την εμπλοκή, τους κβαντικούς αλγόριθμους και άλλες θεμελιώδεις αρχές της κβαντικής υπολογιστικής.

Ένα άλλο παράδειγμα κβαντικού παιχνιδιού είναι η κβαντική τρίλιζα (Quantum Tic-Tac-Toe). Δεν είναι μια ολοκληρωμένη εφαρμογή που θα μπορούσε να εισάγει τον χρήστη στη χρήση κβαντικών πυλών και στην δημιουργία κβαντικών προγραμμάτων για να δώσει λύσεις σε προβλήματα. Όμως με τη βοήθεια ενός τόσο απλού και οικείου παιχνιδιού, όπως η τρίλιζα, ο παίκτης προσεγγίζει βιωματικά την έννοια της υπέρθεσης και της κβαντικής διεμπλοκής. Με αυτό τον ρόλο θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στην διδακτική της κβαντικής υπολογιστικής, βάζοντας τα παιδιά να παίξουν αυτή την ιδιόμορφη τρίλιζα (<https://tiqtaqtoe.com/>).

Ο κάθε παίκτης μπορεί να παίζει είτε κλασικά, σημειώνοντας με X ή O ένα κουτάκι, είτε κβαντικά (!) επιλέγοντας δύο κουτάκια. Τα δύο αυτά κουτιά μπορούν να βρίσκονται

σε μια superposition X (ή O) για την οποία θα αποφασιστεί πιθανοκρατικά, στο επόμενο βήμα, σε ποιο από τα δύο κουτιά θα βρεθεί το X (ή το O). Αντίστοιχα, σε ένα υψηλότερο level του παιχνιδιού μπορεί να προκαλέσει διεμπλοκή μεταξύ δύο κουτιών, ώστε όταν στο επόμενο βήμα αποφασιστεί πιθανοκρατικά αν το ένα είναι X (ή O), αυτό θα καθορίσει και την μορφή του άλλου κουτιού το οποίο θα γίνει υποχρεωτικά O (ή X) (Εικόνα 6). Παίζοντας ο χρήστης αντιλαμβάνεται την πολυπλοκότητα και ότι το πλήθος των πιθανών μορφών που μπορεί να πάρει η τρίλιζα είναι μεγάλο.



Εικόνα 6: Στιγμιότυπα του παιχνιδιού Quantum Tic-Tac-Toe

Υπάρχουν ακόμη περισσότερα κβαντικά παιχνίδια με ανάλογη λογική για την οικειοποίηση της υπέρθεσης και την έννοια της μέτρησης στον κβαντικό κόσμο, όπως το κβαντικό σκάκι (quantum chess) που αναπτύχθηκε από την Google και διατίθεται σήμερα από την STEAM (https://store.steampowered.com/app/453870/Quantum_Chess/).



Εικόνα 7: Quantum chess

Στο κβαντικό σκάκι (Εικόνα 7), ο παίκτης αποφασίζει αν θα ενεργοποιήσει οποιοδήποτε μέλος του στρατού, π.χ. ένα άλογο, κι αυτό μεταφέρεται σε μία *superposition* καταλαμβάνοντας δυνητικά τις πιθανές θέσεις, στις οποίες θα επιτρεπόταν από τους κλασικούς κανόνες να βρεθεί. Την ίδια δυνατότητα έχει φυσικά και ο αντίπαλος παίκτης. Έπειτα, έρχεται η στιγμή της «μέτρησης». Η στιγμή που τα δύο μέρη παίρνουν με βάση τις πιθανότητες τις οριστικές τους θέσεις και με όποιες συνέπειες έχουν οι θέσεις αυτές για τον καθένα. Το κβαντικό σκάκι συνοδεύεται από αναλυτικές οδηγίες για τους κανόνες που το διέπουν, τον μαθηματικό φορμαλισμό και τους κβαντικούς αλγορίθμους που κρύβουν οι κανόνες αυτοί (<https://cantwellc.github.io/QuantumChessDocs/>).

Έχουν γίνει και άλλες διδακτικές προσεγγίσεις των κβαντικών καταστάσεων στις οποίες μπορούν να βρεθούν τα qubits, με έναν περισσότερο φιλικό τρόπο για τα άτομα που δεν έχουν το απαιτούμενο υπόβαθρο φυσικής και μαθηματικών. Είτε με τη μορφή puzzle όπως το “Hello Quantum” (<https://youtu.be/JUi5juOqHb4>), χωρίς ιδιαίτερη επιτυχία αφού έχει πάψει πλέον να είναι διαθέσιμο, είτε περισσότερο βιωματικά, όπως το παιχνίδι “Entangle me!” που περιλαμβάνει σωματικές δραστηριότητες για να βοηθήσει τα παιδιά να αποκτήσουν μια διαίσθηση σχετικά με τις κβαντικές έννοιες (López-Incera & Dür, 2019).

Από τις διάφορες προσεγγίσεις που περιγράφονται στη βιβλιογραφία, για την εφαρμογή στο σχολικό project, επιλέχθηκε η προσέγγιση που χρησιμοποιεί ο Terry Rudolph (2017) στο “Q is for Quantum” (qisforquantum.org), με την εξελιγμένη της, πληρέστερη μορφή των Economou, Rudolph & Barnes (2020) η οποία και περιγράφεται στην πράξη.

5 Διδακτική της Κβ.Υπ. στην πράξη

*“When it is obvious that the goals cannot be reached,
don't adjust the goals, adjust the action steps.”*

Confucius

Ο T. Rudolph επινόησε έναν απλό μηχανισμό το 2015, όταν του ζητήθηκε να διδάξει κάποια μαθήματα κβαντικής υπολογιστικής σε μια κατασκήνωση μαθηματικών για παιδιά ηλικίας 12-14 ετών στο Ηνωμένο Βασίλειο και αργότερα τον βελτίωσε για μια εβδομαδιαία σειρά διαλέξεων στο Αφρικανικό Ινστιτούτο Μαθηματικών Επιστημών στη Ρουάντα στις αρχές του 2017. Οι Economou, Rudolph & Barnes (2020) εξέλιξαν και εμπλούτισαν την μέθοδο δημιουργώντας και εφαρμόζοντας στην πράξη, ένα πιο ολοκληρωμένο πρόγραμμα για την διδακτική της κβαντικής υπολογιστικής σε νέους και νέες που δεν είχαν το σχετικό υπόβαθρο της φυσικής και των μαθηματικών.

Αυτό ήταν ένα από τα βασικά κίνητρα επιλογής της μεθόδου, δηλαδή η καταλληλότητά της να εφαρμοστεί σε εφήβους με το δεδομένο επιστημονικό υπόβαθρο. Ένα άλλο κίνητρο επιλογής ήταν η πληρότητα του προγράμματος, σε σχέση με άλλες εφαρμογές και παιχνίδια, καθώς οδηγεί από το βάπτισμα στα θεωρητικά της κβαντικής μηχανικής, σε επίλυση προβλημάτων με κατασκευή ολοκληρωμένων κβαντικών αλγορίθμων, σε πρακτική εφαρμογή στον εξομοιωτή της IBM, όπως και στην εφαρμογή ενός κβαντικού κυκλώματος σε πραγματικό κβαντικό υπολογιστή. Το πιο σημαντικό όμως κίνητρο επιλογής ήταν η μορφή προσέγγισης των δύσκολων εννοιών της υπέρθεσης και της διεμπλοκής που εφάρμοσε ο T. Rudolph, χρησιμοποιώντας πολύ απλές αναπαραστάσεις, όπως κουτιά για τις κβαντικές πύλες και μπάλες για τα qubits.

Με αυτά τα τρία βασικά κριτήρια δοκιμάστηκε η μέθοδος διδακτικής της κβαντικής υπολογιστικής “Q is for Quantum” για πρώτη φορά σε ελληνικό σχολείο.

5.1 Ταυτότητα του εγχειρήματος

Η εφαρμογή του προγράμματος έγινε σε ένα επαρχιακό σχολείο της Θεσσαλίας (Γυμνάσιο με Λυκειακές Τάξεις) κατά το σχολικό έτος 2023-2024. Για την εφαρμογή

αξιοποιήθηκε το θεσμικό πλαίσιο λειτουργίας των Εκπαιδευτικών Ομίλων (Υ.Α. 102939/ΓΔ4/2022 – ΦΕΚ 4509/Β/25-8-2022). Με την συμμετοχή 12 μαθητών/τριών της Β' Λυκείου δημιουργήθηκε ένας εκπαιδευτικός όμιλος Κβαντικής Υπολογιστικής που ολοκλήρωσε τις εργασίες του σε 36 συνεδρίες. Για τις συνεδρίες αυτές αξιοποιήθηκαν αίθουσες διδασκαλίας με οθόνη προβολής, αλλά και το εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου για τις πρακτικές εργασίες που απαιτούσαν σύνδεση με το περιβάλλον προσομοίωσης IBM Q Experience.

Στην έναρξη λειτουργίας του ομίλου και κατά την ολοκλήρωση των εργασιών, δόθηκαν στα παιδιά ερωτηματολόγια για την ανίχνευση των προσδοκιών, των εντυπώσεων και τον αναστοχασμό τους πάνω σε όσα έγιναν (Παράρτημα Α & Β).

Το πρόγραμμα περιλάμβανε τέσσερις ενότητες:

1. Θεωρητική εισαγωγή στον κόσμο της κβαντικής μηχανικής & υπολογιστικής
2. Εξοικείωση και πρακτική εξάσκηση με τον φορμαλισμό “Q is for Quantum”
3. Δημιουργία κβαντικών κυκλωμάτων στον IBM Q Experience
4. Επίλυση του γρίφου “Money or Tiger” με χρήση κβαντικού αλγορίθμου

Κάθε μία από τις ενότητες αυτές σχεδιάστηκε ώστε να καταλάβει τον ίδιο περίπου χρόνο στο πρόγραμμα.

5.2 Θεωρητική εισαγωγή στον κβαντικό κόσμο

Για την θεωρητική εισαγωγή των μαθητών/τριών στον κβαντικό κόσμο, όπως και για κάθε νέα γνώση, έπρεπε να γίνει μια ανίχνευση των υφιστάμενων ιδεών. Οι 16χρονοι μαθητές και μαθήτριες που πήραν μέρος στο πρόγραμμα γνώριζαν επισήμως την έννοια του quantum, από όσα περιλαμβάνει το ΑΠΣ και είχαν διδαχθεί στη φυσική για την κβάντωση του φορτίου. Γνώριζαν δηλαδή μόνο την κβάντωση, ως την ιδιότητα που έχει το φορτίο, να παίρνει απολύτως διακριτές τιμές, όλες πολλαπλάσιες μιας στοιχειώδους ποσότητας, αυτής του φορτίου του ηλεκτρονίου ή του πρωτονίου. Γνώριζαν επίσης και τον αριθμό n από την χημεία, με το όνομα «κύριος κβαντικός αριθμός», που καθόριζε τις τροχιές των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες των ατόμων και τον αριθμό των ηλεκτρονίων σε αυτές. Αργότερα, κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, στο μάθημα της φυσικής γενικής παιδείας της Β' Λυκείου, γνώρισαν και τη διττή φύση του φωτός ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα και ως κβάντα ενέργειας (φωτόνια). Δεν γνώριζαν όμως τίποτα για τις κβαντικές καταστάσεις των σωματιδίων, την υπέρθεση, την διεμπλοκή, την έννοια

της μέτρησης στον κβαντικό κόσμο και την επικράτηση της πιθανοκρατίας έναντι του ντετερμινισμού.

Η εισαγωγή, επιλέχθηκε να γίνει μέσω μιας ιστορικής αναδρομής στην εξέλιξη των ιδεών, αρχικά για το φως και στην συνέχεια για την φύση των στοιχειωδών σωματιδίων του μικρόκοσμου. Οι πρωταρχικές απόψεις των ανθρώπων, που βρίσκουμε ανατρέχοντας στην ιστορική εξέλιξη των ιδεών, πολλές φορές ομοιάζουν ή και ταυτίζονται με ιδέες των παιδιών για τον μικρόκοσμο. Η αφήγηση λοιπόν της ανατροπής των ιδεών αυτών, μέσω των ιστορικών πειραμάτων, κάνει πιο βατή για τα παιδιά την εννοιολογική αλλαγή που θα πρέπει να κάνουν στο μυαλό τους, υιοθετώντας μια νέα γνώση που δεν είναι και πολύ συμβατή με τις προσλαμβάνουσες που έχουν από τις μακροσκοπικές τους παρατηρήσεις στον κόσμο γύρω τους. Επιδιώξαμε, τα αδιέξοδα στα οποία βρέθηκαν οι επιστήμονες αντικρίζοντας τα αποτελέσματα των πειραμάτων και έχοντας ως βάση τον ντετερμινισμό της κλασικής φυσικής, να μεταφερθούν στην τάξη και να προβληματίσουν τα παιδιά. Τους δώσαμε χρόνο να σκεφτούν και να κάνουν τις δικές τους υποθέσεις για την αναπάντεχη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων, πριν τους δώσουμε την λύση που προτάθηκε από τη Σχολή της Κοπεγχάγης και λειτουργεί εξαιρετικά μέχρι σήμερα.

Στόχος ήταν αρχικά, να αναδείξουμε την αβεβαιότητα που προέκυψε πειραματικά για ορισμένα μεγέθη, όπως τη θέση, την ταχύτητα, τον προσανατολισμό κ.α., μια αβεβαιότητα που δεν υπάρχει στους νόμους που διδάχθηκαν στην κλασική μηχανική και να συμφιλιώσουμε τα παιδιά με την ιδέα ότι η φύση είναι θεμελιωδώς πιθανολογική. Απώτερος στόχος ήταν η εδραίωση στο μυαλό τους μιας πιθανολογικής κατάστασης της ύλης, που θα την ονομάσουμε υπέρθεση (superposition) και θα παίζει φυσικά καθοριστικό ρόλο στην κβαντική υπολογιστική που θα ακολουθήσει. Παράλληλα, έπρεπε να αναδείξουμε στην κβαντική αυτή εισαγωγή τον ρόλο της μέτρησης (παρατήρησης), χωρίς φυσικά να μιλήσουμε στα παιδιά για κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης του Schrödinger, και να δούμε επίσης κάποιο παράδειγμα συμπεριφοράς των σωματιδίων που θα μας παραπέμπει στην κατάσταση της διεμπλοκής.

Μετά από μια ιστορική διαδρομή για τη φύση του φωτός, που ξεκίνησε από τον Αριστοτέλη (σωματιδιακή φύση), προχώρησε στον Newton (ανάκλαση – διάθλαση), στους Huygens & Young (συμβολή – περίθλαση), στον Maxwell (ηλεκτρομαγνητικό κύμα), στον Einstein (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο), στον Plank (μέλαν σώμα – κβάντα ενέργειας) και μετά από την διαρκή ταλάντωση μεταξύ σωματιδιακής και κυματικής φύσης του φωτός, που περιέχει αυτή η ιστορία, καταλήξαμε στις σημερινές παραδοχές

για τα κυματοσωματίδια (φωτόνια), χωρίς να αναφέρουμε ούτε μία εξίσωση. Η ιστορική αυτή αναδρομή με τις τελικές της παραδοχές, είχε ως βασικό στόχο την εδραίωση της αντίληψης ότι ο μικρόκοσμος δεν διέπεται από τους ίδιους κανόνες με αυτούς που αντιλαμβάνονται τα παιδιά παρατηρώντας μακροσκοπικά τον κόσμο, αλλά θα πρέπει να αναθεωρήσουν σχετικά με την βεβαιότητα που τους δημιουργούν οι αισθήσεις τους.

Στη συνέχεια στραφήκαμε σε ένα, σχετικά γνώριμο πρότυπο για τα παιδιά, αυτό του ατόμου με τις στοιβάδες των ηλεκτρονίων. Επιλέχθηκε ξανά τα παιδιά να μουν στα παπούτσια των επιστημόνων που οδήγησαν τελικά σε αυτό το πρότυπο. Ξεκινώντας από την εκπληκτική έμπνευση του Δημόκριτου, με το μικρότερο κομμάτι ύλης στο σύμπαν, το άτομο στον μικρόκοσμο να μοιάζει με τον τότε γνωστό μέγαςκοσμο, περάσαμε στο πρότυπο του Tomson (σταφιδόσωμο), που καταρρίφθηκε από το πείραμα του Rutherford και καταλήξαμε στο ατομικό πρότυπο του Bohr και τα προβλήματα που είχε να συμφωνήσει με την κλασική φυσική. Είδαμε πώς τα άτομα εκπέμπουν φως μόνο σε συγκεκριμένες συχνότητες. Στη συνέχεια μιλήσαμε για την προσπάθεια του Bohr να το μοντελοποιήσει αυτό, λέγοντας ότι τα ηλεκτρόνια περιστρέφονται γύρω από τον πυρήνα μόνο σε ορισμένες τροχιές, και ότι η διακριτή εκπομπή φωτός συμβαίνει όταν τα ηλεκτρόνια μεταπηδούν από τη μια τροχιά στην άλλη.

Και σε αυτό το σημείο δόθηκε χρόνος στα παιδιά για να σκεφτούν και να συζητήσουμε τι δεν πάει καλά με αυτό το μοντέλο και τις μεταπτώσεις των ηλεκτρονίων με βάση πάντα όσα γνώριζαν από την κλασική φυσική. Η σωματιδιακή φύση των ηλεκτρονίων δεν ήταν και πολύ συμβατή με την συμπεριφορά των ατόμων. Σε αυτό το σημείο, εισάγουμε την ιδέα ότι τα ηλεκτρόνια είναι στάσιμα κύματα που περιβάλλουν τον πυρήνα αντί για σημειακά σωματίδια που περιστρέφονται γύρω του. Οι μαθητές είναι γενικά σε θέση να κατανοήσουν την ιδέα ότι αυτά τα κύματα μπορούν να είναι στατικά (όπως το εγκλωβισμένο κύμα στην ταλαντευόμενη χορδή μιας κιθάρας) και έτσι να αποφύγουν το ζήτημα της αστάθειας ακτινοβολίας που μαστίζει το μοντέλο του Bohr. Φυσικά, οντότητες όπως τα ηλεκτρόνια εξακολουθούν να έχουν σωματιδιακές ιδιότητες λόγω της συμπεριφοράς τους στις διαδικασίες σκέδασης. Άλλωστε έτσι ανακαλύφθηκαν για πρώτη φορά. Το συμπέρασμα είναι ότι όχι μόνο το φως αλλά και τα σωματίδια, που έχουν μάζα, μπορούν να συμπεριφέρονται ως κύματα ανάλογα με την κατάσταση.

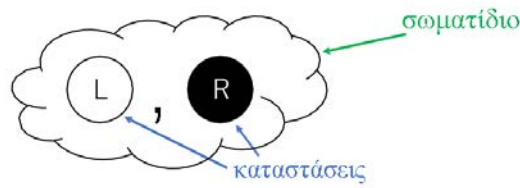
Υπάρχει όμως κι ένας άλλος προβληματισμός που αναδεικνύεται εδώ. Γιατί ενώ έχουμε μεταβάσεις στα ηλεκτρόνια από τη μια ενεργειακή κατάσταση στην άλλη, όταν τα παρατηρούμε, δεν τα βρίσκουμε ποτέ σε μία κατάσταση μετάβασης, αλλά πάντα σε

μία από τις προκαθορισμένες καταστάσεις; Έτσι ανοίγουμε το θέμα της μέτρησης και τον ρόλο του παρατηρητή που αναγκάζει το ηλεκτρόνιο να εμφανιστεί σε μία από τις καθορισμένες καταστάσεις. Εδώ θα μπορούσε να πλατειάσει η συζήτηση για το πόσο σημαντική είναι αυτή η κβαντική συμπεριφορά, για την σταθερότητα των ατόμων και για την ίδια μας την ύπαρξη τελικά, σε αντίθεση με την χαοτική αστάθεια που θα μπορούσε να φέρει η εφαρμογή της κλασικής φυσικής στον μικρόκοσμο. Δεν ενδείκνυται να βγούμε από τον στόχο μας, αν και εν μέρει η συζήτηση αυτή τον υπηρετεί, καθώς εδραιώνει την πεποίθηση των παιδιών για την βασιμότητα των νέων νόμων.

Το επόμενο στάδιο είναι να διερωτηθούμε τι είδους κύμα μπορεί να είναι ένα στοιχειώδες σωματίδιο που «απλώνεται» στον χώρο και σε τι είδους κατάσταση βρίσκεται το σωματίδιο όταν δεν είναι εντοπισμένο. Το πείραμα της διπλής σχισμής είναι κατάλληλο για να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση. Από τις πολλές μορφές παρουσίασης που υπάρχουν διαθέσιμες επιλέχθηκε ένα πεντάλεπτο απόσπασμα από μία σειρά βίντεο (<https://www.youtube.com/watch?v=Q1YqgPAtzho>), που ονομάζεται "Dr. Quantum". Το απόσπασμα αυτό, που παρουσιάζει ένα φανταστικό εργαστήριο κινούμενων σχεδίων, παρέχει μια πολύ σαφή εξήγηση του πειράματος, συμπεριλαμβανομένης της επίδρασης των παρατηρήσεων (τα υπόλοιπα αποσπάσματα της σειράς δεν προτείνονται από τον γράφοντα ως κατάλληλα για την προσέγγιση της κβαντικής μηχανικής στο σχολείο). Μόλις ολοκληρώθηκε το βίντεο, επαναλάβουμε το μέρος σχετικά με το τι συμβαίνει όταν τα ηλεκτρόνια εκτοξεύονται ένα, ένα για να επικεντρωθούμε σε αυτό. Στη συνέχεια με τη συζήτηση οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι τα ηλεκτρόνια (και όλα τα άλλα στοιχειώδη σωματίδια) δεν είναι παρά κύματα πιθανότητας. Δηλαδή αυτές οι οντότητες δεν χάνουν την σωματιδιακή τους φύση, αλλά δεν έχουν καθορισμένες θέσεις μέχρι να παρατηρηθούν. Μέχρι τότε, βρίσκονται σε μία κατάσταση που είναι η υπέρθεση δύο ή περισσότερων θέσεων και κρύβει μια πιθανότητα εντοπισμού για κάθε θέση, εφόσον το παρατηρήσουμε. Η αλήθεια είναι ότι σε αυτό το σημείο ανέκυψαν από τα παιδιά πολλές ερωτήσεις για το είδος αυτό της κατάστασης των σωματιδίων και χρειάστηκε αρκετή συζήτηση πάνω στο θέμα.

Αναφέρθηκε επίσης στα παιδιά, το γεγονός ότι και άλλες ιδιότητες όπως η ορμή και η στροφορμή είναι επίσης πιθανοτικές και υπόκεινται σε υπέρθεση. Ωστόσο, εστίασαμε κυρίως στη θέση, επειδή αυτό αποτελεί το πιο συγκεκριμένο και διαισθητικό παράδειγμα για τους μαθητές. Για να οπτικοποιήσουμε αυτή την κατάσταση της υπέρθεσης και να

τη συνδέσουμε με την αναπαράσταση των qubits που θα δούμε στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε μια μορφή όπως αυτή που φαίνεται στην Εικόνα 8.



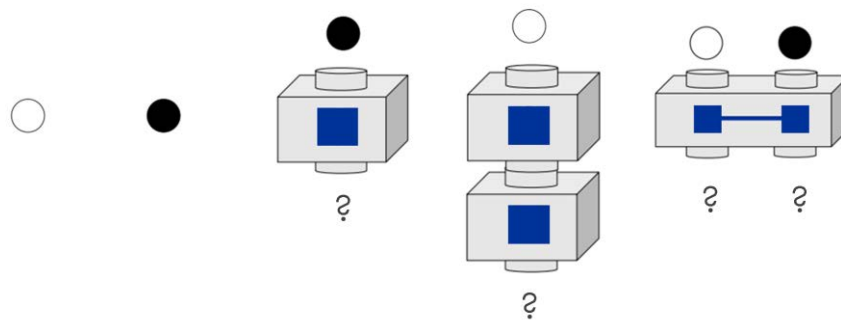
Εικόνα 8. Σωματίδιο σε υπέρθεση καταστάσεων

Τέλος για την εισαγωγή των παιδιών στην κβαντική διεμπλοκή δύο σωματιδίων επιλέχθηκε το εντυπωσιακό φαινόμενο της δίδυμης γένεσης (pair production). Παρουσιάστηκε η περίπτωση στην οποία ένα φωτόνιο υψηλής ενέργειας μετατρέπεται σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο, με το ενδεχόμενο τα δύο σωματίδια να μην εξαϋλωθούν και πάλι σε φωτόνιο, αλλά να απομακρυνθούν σε αντίθετες πορείες. Η αρχή διατήρησης της στροφορμής εξασφαλίζει ότι τα δύο σωματίδια θα έχουν αντίθετη ιδιοστροφορμή (spin), χωρίς να ξέρουμε ποιο από τα δύο έχει την μία από τις δύο τιμές. Η μέτρηση, δηλαδή η κατάρρευση του κύματος πιθανότητας για το ένα σωματίδιο, θα καθορίσει ακαριαία και την τιμή της ιδιοστροφορμής του άλλου σωματιδίου, όσο μακριά κι αν βρίσκεται. Όσο όμως δεν γίνεται καμία μέτρηση τα δύο σωματίδια παραμένουν σε μία κατάσταση ετεροκαθορισμού που ονομάσαμε κβαντική διεμπλοκή.

Η θεωρητική εισαγωγή του προγράμματος ολοκληρώθηκε με μια ανασκόπηση σε γνώσεις των παιδιών, που αφορούν στην κλασική πληροφορική. Επικεντρωθήκαμε στη μονάδα πληροφορίας, το bit, στον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται στους κλασικούς υπολογιστές και στα όρια των δυνατοτήτων των κλασικών επεξεργαστών, αποδεχόμενοι τον νόμο του Moore. Τα θέματα αυτά επιλέχθηκαν για να αντιπαραβάλλουμε την εναλλακτική των κβαντικών υπολογιστών, όπου η μονάδα πληροφορίας θα είναι ένα κβαντικό σωματίδιο (qubit), που θα έχει τη δυνατότητα να βρεθεί σε κατάσταση υπέρθεσης και να περιέχει διπλάσια πληροφορία από το κλασικό bit, δίνοντας στον δυνητικό κβαντικό υπολογιστή, που θα αξιοποιήσει πολλά qubits, τρομακτικές δυνατότητες επεξεργασίας σύνθετων, πολυπαραγοντικών προβλημάτων, που για τους κλασικούς υπολογιστές φαντάζουν πρακτικά αδύνατα. Η συζήτηση στο θεωρητικό μέρος έκλεισε με τις προκλήσεις που φέρουν οι κβαντικοί υπολογιστές σε ότι αφορά στην κρυπτογραφία και το πλήθος των προβλημάτων που μπορούν να αντιμετωπιστούν, εφόσον καταφέρουμε να αξιοποιήσουμε τις δυνατότητές τους και να παράγουμε αξιόπιστα αποτελέσματα.

5.3 Εξοικείωση με τον φορμαλισμό “Q is 4 Quantum”

Σε αυτή τη δεύτερη φάση του προγράμματος εξηγήθηκε στα παιδιά πως δεν θα χρειαστεί να εργαστούν με ηλεκτρόνια, φωτόνια και άλλα κβαντικά σωματίδια, αλλά θα απλοποιήσουμε αρκετά τα πράγματα παίζοντας με μπάλες και κουτιά (Εικόνα 9). Προφανώς οι μπάλες αναπαριστούν κβαντικές καταστάσεις στοιχειωδών σωματιδίων και τα κουτιά κβαντικές πύλες που επιδρούν στις καταστάσεις αυτές αλλά αυτό τον συσχετισμό δεν τον αναφέρουμε σε αυτή τη φάση στα παιδιά.

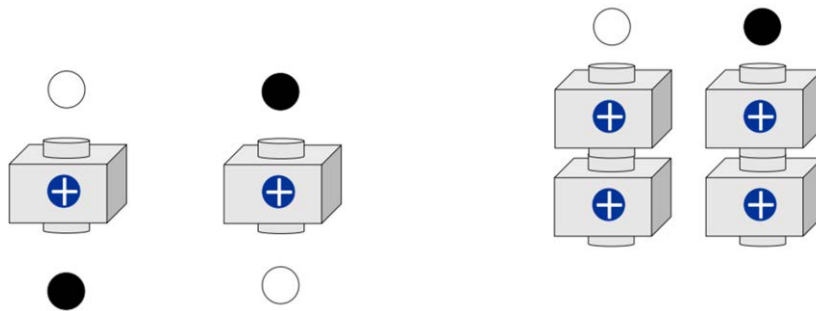


Εικόνα 9. Κβαντικές μπάλες και κουτιά

Όπως φαίνεται στην εικόνα, οι μπάλες μπορεί να είναι άσπρες ή μαύρες και θα περνούν μέσα από κουτιά, που έχουν ένα άνοιγμα στο πάνω και στο κάτω μέρος. Οι μπάλες μπορούν να περνούν από ένα ή περισσότερα διαδοχικά κουτιά και επιπλέον υπάρχουν κουτιά με δύο οπές, από τις οποίες μπορούν να περάσουν δύο μπάλες. Το αρχικό ζητούμενο είναι να παρατηρήσουμε το χρώμα της μπάλας που βγαίνει σε κάθε περίπτωση από το κάτω άνοιγμα των κουτιών και να το συσχετίσουμε με το χρώμα της μπάλας που μπήκε, ώστε να αντιληφθούμε τον ρόλο που έχει κάθε κουτί στην διαμόρφωση του χρώματος της εξερχόμενης μπάλας.

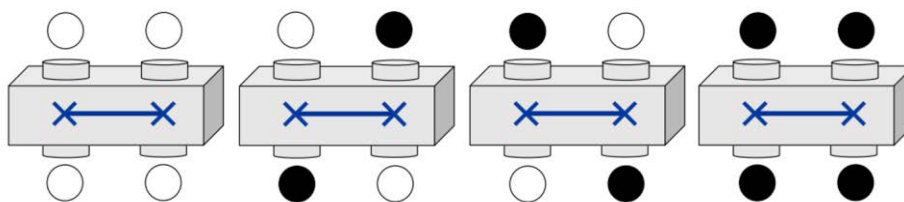
Το πρώτο κουτί που παρατηρήσαμε ήταν το κουτί NOT. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 10, δόθηκε στα παιδιά το αποτέλεσμα στην έξοδο του κουτιού όταν η εισερχόμενη μπάλα είναι άσπρη ή μαύρη αντίστοιχα και αυτά εύκολα διαπίστωσαν πως το κουτί αυτό αντιστρέφει απλά το χρώμα της εισερχόμενης μπάλας. Το ίδιο εύκολα ανταποκρίθηκαν και στο ζητούμενο να προβλέψουν το χρώμα της εξερχόμενης μπάλας όταν αυτή περνάει από δύο διαδοχικά κουτιά NOT. Είπαν ομόφωνα πως το χρώμα της εξερχόμενης σε αυτή την περίπτωση θα είναι ίδιο με αυτό της εισερχόμενης γιατί έχουμε μια διπλή αντιστροφή. Φυσικά είχαν δίκιο. Να αναφερθεί εδώ πως η φιλικότητα των εικόνων και η απλότητα της διαδικασίας ενεργοποίησε όλους τους μαθητές και τις μαθήτριες,

αναμένοντας το σημείο που θα εμφανιστεί κάτι ως μεγαλύτερη πρόκληση για την κατανόησή του.



Εικόνα 10. Το κουτί NOT

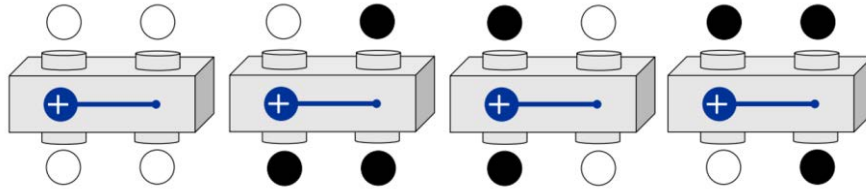
Το επόμενο ήταν το κουτί SWAP (Εικόνα 11). Ένα κουτί που υποδέχεται δύο μπάλες και οι εξερχόμενες διαμορφώνονται, για κάθε δυνατή είσοδο, όπως φαίνονται στην εικόνα. Η εικόνα δόθηκε στα παιδιά χωρίς καμία πρόσθετη πληροφορία και ζητήθηκε να ανακαλύψουν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί το κουτί αυτό. Χρειάστηκαν λίγο περισσότερο χρόνο από το κουτί NOT για να απαντήσει ένα μαθητής αρχικά «Αν οι μπάλες έχουν το ίδιο χρώμα δεν αλλάζει κάτι, αλλά αν έχουν διαφορετικό αλλάζουν χρώμα και οι δύο». Στη συνέχεια διαπιστώθηκε πως μπορούμε να διατυπώσουμε έναν πιο απλό κανόνα για την λειτουργία του (χωρίς ο πρώτος να είναι λάθος), που να λέει πως απλά «το κουτί εναλλάσσει τη θέση των μπαλών», ανεξάρτητα από το χρώμα τους στην είσοδο.



Εικόνα 11. Το κουτί SWAP

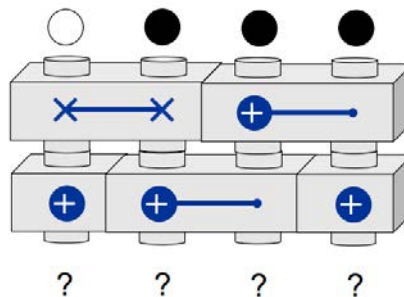
Το επόμενο ήταν ένα ακόμη κουτί με δύο υποδοχές, το κουτί CNOT (Εικόνα 12). Δόθηκαν και πάλι στα παιδιά με την εικόνα τα αποτελέσματα που έχουμε στην έξοδο για όλες τις δυνατές επιλογές εισόδου και ζητήθηκε να ανακαλύψουν τον αλγόριθμο με τον οποίο λειτουργεί το κουτί αυτό. Ο χρόνος που χρειάστηκαν εδώ ήταν λίγο μεγαλύτερος, σε σύγκριση με τα προηγούμενα κουτιά και μερικά παιδιά υποβοηθήθηκαν από προτάσεις της μορφής: «Τι συμβαίνει στην δεξιά μπάλα;», «Πότε αλλάζει χρώμα η αριστερή μπάλα;» και «Το όνομα CNOT είναι σύντμηση του Controlled NOT, γιατί

άραγε;». Έτσι σύντομα κάποια μαθήτρια αποκαλύπτει τον ρόλο του κουτιού που «αλλάζει το χρώμα της αριστερής μπάλας όταν η δεξιά είναι μαύρη!».



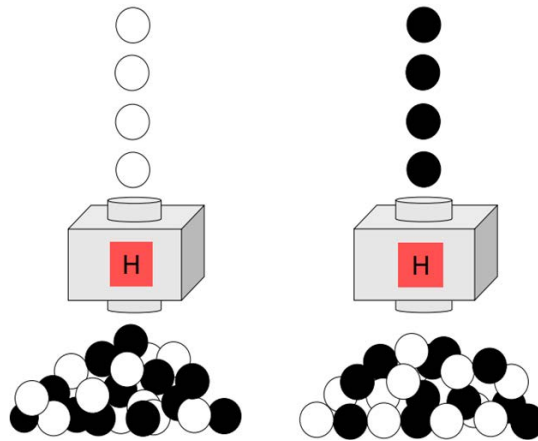
Εικόνα 12. Το κουτί CNOT

Τα κουτιά που είδαν μέχρι εδώ τα παιδιά, μαζί με το κουτί I, για το οποίο τους αναφέρθηκε απλά ότι δεν επιδρά καθόλου στην μπάλα που εισέρχεται και βγάζει μία ταυτόσημη, ήταν όλα ντετερμινιστικά κουτιά και δεν εμφάνισαν κάποια ιδιαίτερη δυσκολία στην αναγνώριση του αλγορίθμου που υλοποιούν. Παρόλα αυτά, για να εξοικειωθούν τα παιδιά με τον συγκεκριμένο φορμαλισμό και με την μορφή πολυπλοκότερων κβαντικών κυκλωμάτων δόθηκαν για εξάσκηση κάποια κυκλώματα, με NOT, SWAP και CNOT πύλες, όπως το παρακάτω (Εικόνα 13).



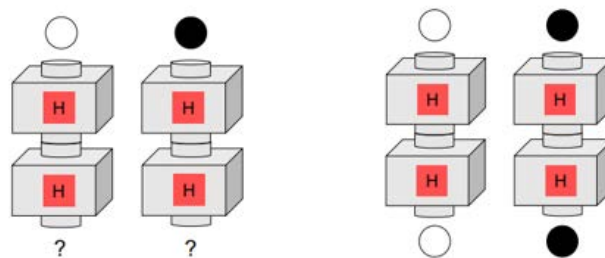
Εικόνα 13. Εξάσκηση με NOT, SWAP και CNOT πύλες

Τα παιδιά έπρεπε να προβλέψουν και πάλι τις εξερχόμενες μπάλες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έπρεπε να διαπιστώσουν ότι οι εξερχόμενες μπάλες, με βάση τους κανόνες που έμαθαν για τα κουτιά, θα είναι όλες άσπρες. Χρησιμοποιώντας χαρτί και μολύβι, το ανακάλυψαν σχετικά εύκολα, σε διαφορετικό χρόνο ο καθένας. Πέρα από την εξάσκηση στην χρήση των κουτιών, αξίζει να σημειώσουμε εδώ, ότι σε αυτές τις ασκήσεις τα παιδιά υποθέτουν πάντα το χρώμα της μη ορατής μπάλας, κατά την μετάβαση από το ένα κουτί στο άλλο και οι υπολογισμοί τους βγαίνουν σωστοί, χωρίς να έχουν εκπλήξεις στο τελικό αποτέλεσμα. Οι εκπλήξεις όμως ήρθαν με την παρουσίαση του επόμενου κουτιού H (Εικόνα 14) το οποίο είναι κβαντικό και δεν έχει κλασικό ανάλογο.



Εικόνα 14. Το κουτί της πύλης Hadamard

Εξηγήθηκε στα παιδιά, ότι αφού περάσουμε αρκετές μπάλες από το κουτί αυτό, παρατηρούμε πως το χρώμα στην έξοδο μπορεί να είναι άσπρο ή μαύρο, με μια πιθανότητα 0.5 ανεξάρτητα από το χρώμα της μπάλας στην είσοδο. Ζητήθηκε και πάλι να ερμηνεύσουν με κάποιον τρόπο τον αλγόριθμό του κουτιού H και καταλήξαμε πως η επιλογή του χρώματος στην έξοδο προσομοιάζει την τυχαιότητα που έχει η ρίψη ενός κέρματος. Στη συνέχεια όμως, είπαμε πως θα ελέγξουμε την υπόθεσή μας αυτή βάζοντας μπάλες να περάσουν από δύο κουτιά H, στοιβαγμένα το ένα πάνω στο άλλο και να δούμε ξανά το χρώμα στις εξαγόμενες μπάλες (Εικόνα 15).



Εικόνα 15. Η τυχαιότητα χάνεται με δύο κουτιά H

Ζητήθηκε από τα παιδιά, να προβλέψουν το χρώμα της εξερχόμενης μπάλας στην περίπτωση αυτή και όλα είχαν την ίδια απάντηση: «Θα βγαίνουν τυχαία άσπρες ή μαύρες μπάλες ανεξάρτητα από το χρώμα της μπάλας στην είσοδο.» Τα παιδιά εξήγησαν, ότι σκέφτηκαν όπως και στην περίπτωση της προηγούμενης άσκησης (Εικόνα 13). Η μπάλα κατά το πέρασμά της από το πρώτο στο δεύτερο κουτί θα μπορούσε να είναι είτε άσπρη, είτε μαύρη, οπότε σε κάθε περίπτωση και στο δεύτερο κουτί θα ισχύει ο κανόνας της τυχαιότητας για την έξοδο. Όταν αποκαλύφθηκε ότι η μπάλα, περνώντας από τα δύο κουτιά H, εξέρχεται πάντα με το αρχικό της χρώμα, η υπόθεση ότι το κουτί δίνει στην

μπάλα ένα τυχαίο χρώμα με την τυχειότητα που έχουμε στη ρίψη ενός κέρματος, κατέρρευσε. Το κουτί Η έκρυβε περισσότερα μυστικά από όσα περιμέναμε.

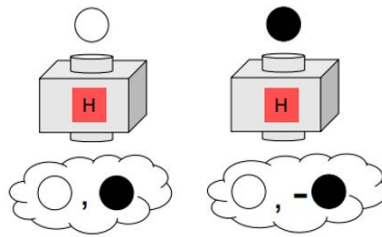
Ζητήθηκε στη συνέχεια από τα παιδιά να σκεφτούν έναν μηχανισμό (έναν αλγόριθμο) με τον οποίο θα μπορούσε να λειτουργεί πραγματικά το κουτί Η, ώστε να έχουμε τα δεδομένα αποτελέσματα. Δεν ήταν αναμενόμενο ότι κάποιος/α θα μπορούσε να σκεφτεί, άμεσα τουλάχιστον, έναν τέτοιο μηχανισμό, όπως και δεν έγινε. Τα παιδιά επέστρεφαν στον ντετερμινιστικό τρόπο σκέψης και εστίαζαν επανειλημμένα στο χρώμα της μπάλας την στιγμή που διέρχεται από το πρώτο κουτί στο δεύτερο. Στο σημείο αυτό τους αποκαλύφθηκε, πως αν θελήσουμε να απομακρύνουμε για λίγο τα δύο κουτιά, ώστε να παρατηρήσουμε το χρώμα της μπάλας που περνάει από το πρώτο στο δεύτερο, το αποτέλεσμα θα είναι αυτό ακριβώς που προέβλεψαν αρχικά. Δηλαδή από το πρώτο κουτί θα βγαίνουν με τυχειότητα άσπρες και μαύρες μπάλες και το ίδιο θα συμβαίνει και από το δεύτερο.

Αντιλαμβάνονται εδώ, ότι η παρατήρηση ή μη της ενδιάμεσης κατάστασης παίζει έναν καθοριστικό ρόλο για το αποτέλεσμα. Κάτι που είναι απολύτως ξένο προς τον κλασικό κόσμο και τις εμπειρίες τους. Αυτές οι κβαντικές μπάλες μπορούν να βρίσκονται σε διαφορετική κατάσταση ανάλογα με το αν τις παρατηρείς ή όχι! Επίσης ενώ η παρατηρήσιμη κατάσταση είναι σαφής (άσπρο ή μαύρο), ποια μπορεί να είναι η κατάστασή τους όταν δεν τις παρατηρούμε; Πρέπει να ανακαλύψουμε τι είδους κατάσταση είναι αυτή που δικαιολογεί και την τελική μορφή που έχουν οι μπάλες όταν περνούν από ένα, αλλά και από δύο συνεχόμενα κουτιά Η.

Επειδή ακριβώς είναι δύσκολο να γίνει αυτό από τα παιδιά, τους προτάθηκε μία λύση, που όπως θα δούμε «δουλεύει». Η κατάσταση αυτή της ασάφειας, μοιάζει πολύ με όσα περιεγράφηκαν στο πρώτο μέρος, της εισαγωγής στην κβαντική μηχανική, όπου μιλούσαμε για την ανάλογη συμπεριφορά των ηλεκτρονίων, που δεν παρατηρούνται ποτέ σε κατάσταση μετάβασης, παρά μόνο σε συγκεκριμένες ενεργειακές καταστάσεις και θέσεις. Θυμίσαμε στα παιδιά την Εικόνα 8 και εξηγήσαμε ότι ανάλογα νεφελώδης, είναι και η κατάσταση στην οποία φέρνει μία μπάλα το κουτί Η, πριν την παρατηρήσουμε.

Είναι μία κατάσταση που εμπεριέχει και τις δύο καταστάσεις (άσπρη – μαύρη), με την ίδια πιθανότητα να βρεθεί στην μία ή στην άλλη κατάσταση, αν και μόνο αν παρατηρηθεί. Η νεφελώδης αυτή κατάσταση, που δεν είναι άλλη από την κατάσταση υπέρθεσης, περιέχει διπλάσια πληροφορία σε σχέση με την παρατηρήσιμη (μετρήσιμη) κατάσταση που είναι μονοσήμαντη. Και να πως εξηγείται, με βάση αυτή τη θεώρηση, η

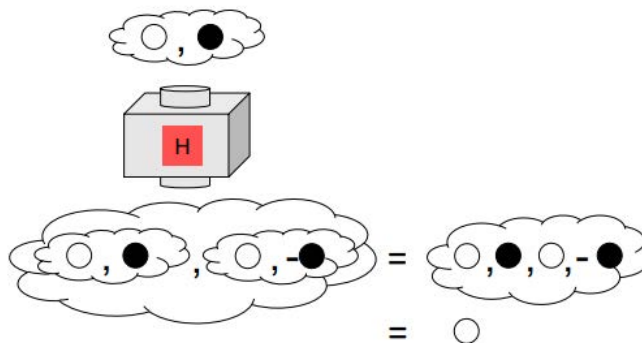
συμπεριφορά των μπαλών, να βγαίνουν από τα δύο στοιβαγμένα κουτιά H, πάντα με το αρχικό τους χρώμα (Εικόνα 16 – Εικόνα 17).



Εικόνα 16. Οι μη παρατηρήσιμες καταστάσεις που προκαλούν τα κουτιά H

Στην Εικόνα 16 τα παιδιά οπτικοποίησαν την ομιχλώδη κατάσταση στην οποία βάζει τις μπάλες το κουτί H. Ένα συννεφάκι που περιέχει και τις δύο καταστάσεις με μια μικρή διαφοροποίηση σε αυτό που προέρχεται από την είσοδο μαύρης μπάλας στο κουτί, όπου παρατηρούμε ένα «-». Εξηγήθηκε στα παιδιά ότι ο ρόλος αυτού του «-» θα είναι ίδιος με τον γνωστό ρόλο του προσήμου, δηλαδή οι «αντίθετες» μπάλες θα εξαφανίζονται όπως και οι αντίθετοι αριθμοί. Να σημειωθεί εδώ, ότι για την αναπαράσταση αυτή της ομιχλώδους κατάστασης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και πιο κωδικοποιημένες μορφές, όπως για παράδειγμα [A,M] ή [A,-M] κ.α., αλλά προφανώς στην διδακτική η οπτικοποίηση βοηθά πολύ τους μαθητές να χειριστούν την πρωτόγνωρη για αυτούς κατάσταση. Θα μπορούσαν βέβαια, οι κωδικοποιημένες αυτές μορφές, να χρησιμοποιηθούν μετά την εξοικείωση από τους μαθητές, για την πιο σύντομη επεξεργασία των αποτελεσμάτων.

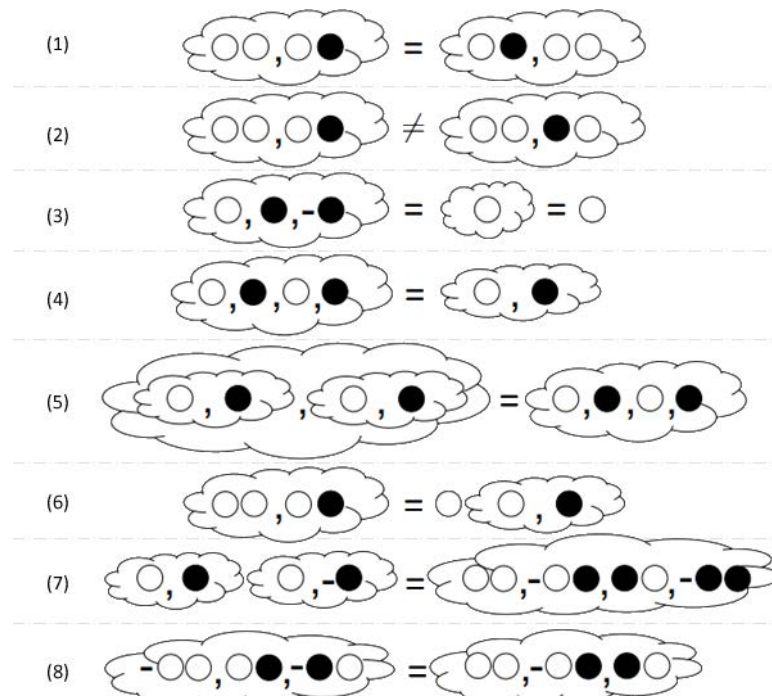
Τι γίνεται λοιπόν όταν η νεφελώδης αυτή κατάσταση περάσει στο 2^ο κουτί H. Εξηγήθηκε στα παιδιά η πορεία μιας αρχικά άσπρης μπάλας που εξέρχεται από το 2^ο κουτί και πάλι ως άσπρη και στη συνέχεια τους ζητήθηκε να επαναλάβουν τη διαδικασία ακολουθώντας τα αντίστοιχα βήματα για μια μαύρη μπάλα.



Εικόνα 17. Η νεφελώδης κατάσταση στο πέρασμα από το δεύτερο κουτί H

Στην Εικόνα 17 βλέπουμε την πορεία αυτή. Το 2^ο κουτί Η θα δημιουργήσει μία νέα νεφελώδη κατάσταση για κάθε μία από τις καταστάσεις που περιέχονται στο εισερχόμενο νέφος. Έτσι, οδηγούμαστε σε ένα μεγαλύτερο νέφος με 4 πιθανές καταστάσεις, από τις οποίες όμως οι δύο είναι «αντίθετες» (μαύρη , - μαύρη) και αλληλοαναιρούνται, ενώ οι δύο άλλες είναι ίδιες (άσπρες), οπότε η μπάλα που θα παρατηρηθεί στην έξοδο θα είναι 100% άσπρη. Τα περισσότερα παιδιά κατάφεραν να επαναλάβουν την διαδικασία για την μαύρη μπάλα και να δείξουν χωρίς βοήθεια πως η εξαγόμενη από τα δύο κουτιά θα είναι 100% μαύρη. Τα υπόλοιπα παιδιά επίσης το κατάφεραν με λίγη βοήθεια, αντιπαραβάλλοντας ένα – ένα τα βήματα που ακολουθήσαμε στην πρώτη περίπτωση. Η συζήτηση σε αυτό το σημείο επέστρεψε στον ρόλο της παρατήρησης (μέτρησης) και οδήγησε στο συμπέρασμα πως κάθε φορά που παρατηρούμε τις κβαντικές αυτές μπάλες, αν βρίσκονται μέσα στο νέφος τους, τις αναγκάζουμε να γίνουν ορατές παίρνοντας μία από τις πιθανές μορφές τους.

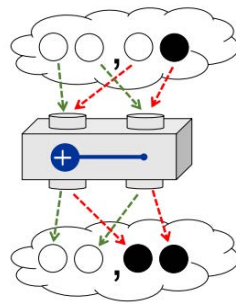
Γενικότερα, με την ολοκλήρωση της παρουσίασης της λειτουργίας κάθε κουτιού, έπρεπε να συνοψίσουμε και να δώσουμε ένα ολοκληρωμένο σύστημα κανόνων για τον χειρισμό αυτών των νεφελωδών καταστάσεων. Οι βασικοί κανόνες που δόθηκαν και εξηγήθηκαν στα παιδιά δίνονται, εικονογραφημένα και πάλι, στην Εικόνα 18.



Εικόνα 18. Κανόνες για νεφελώδεις καταστάσεις

Οι κανόνες αυτοί αφορούν κυρίως στις πράξεις απλοποίησης σε ισοδύναμες εναλλακτικές μορφές των νεφελωδών καταστάσεων και βοηθούν στον υπολογισμό των

πιθανοτήτων για κάθε τελική παρατήρηση (μέτρηση). Οι κανόνες έγιναν σχετικά εύκολα κατανοητοί από τα παιδιά και επόμενος στόχος τέθηκε να εξηγηθεί πως οι νεφελώδεις αυτές καταστάσεις περνούν μέσα από διάφορα κουτιά. Επιλέχθηκε εδώ το CNOT (Εικόνα 19), γιατί εκτός της υπέρθεσης, μας βοηθά να εισάγουμε και την έννοια της διεμπλοκής. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, μία νεφελώδης κατάσταση που περιέχει δύο ζεύγη πιθανών καταστάσεων, περνάει από ένα κουτί με δύο οπές. Για να βρούμε τις πιθανές καταστάσεις που θα προκύψουν στο νέφος μετά από το πέρασμα, εξηγούμε στα παιδιά πως θα ελέγξουμε διαδοχικά ποια πιθανή κατάσταση δημιουργεί το πέρασμα του 1^{ου} ζεύγους (πράσινα βέλη) και ποια πιθανή κατάσταση δημιουργεί το πέρασμα του 2^{ου} ζεύγους (κόκκινα βέλη).



Εικόνα 19. Πέρασμα μιας νεφελώδους κατάστασης των 2-qubit από CNOT

Τονίζουμε επίσης, πως οι μπάλες εισάγονται στις εισόδους του κουτιού με τη σειρά που εμφανίζονται στο νέφος. Δηλαδή η αριστερή μπάλα εισάγεται στην αριστερή είσοδο και η δεξιά μπάλα στην δεξιά είσοδο. Έτσι, με βάση την λειτουργία του CNOT (η δεξιά μπάλα δεν αλλάζει χρώμα, ενώ η αριστερή αλλάζει μόνο όταν η δεξιά είναι μαύρη) προκύπτει ένα νέφος δύο διπλών καταστάσεων η οποία αποτελεί παράδειγμα διεμπλοκής. Παρατηρείται εδώ, πως αν γίνει τελικά παρατήρηση (μέτρηση) των δύο μπαλών (qubits), το χρώμα της μιας θα καθορίσει και την το χρώμα της άλλης. Γνωρίζουμε δηλαδή από τις πιθανές καταστάσεις του τελικού νέφους, πως αν παρατηρήσουμε την μία μόνο από τις εξερχόμενες μπάλες, θα είμαστε βέβαιοι ότι και η άλλη μπάλα θα έχει το ίδιο χρώμα με αυτήν που παρατηρήσαμε.

Στο σημείο αυτό, ζητήθηκε από τα παιδιά να ανακαλέσουν στη μνήμη τους όσα είπαμε για την κατάσταση διεμπλοκής που βρίσκονται ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο μετά από την δίδυμη γένεσή τους και πως η κατάσταση του ενός καθορίζει την κατάσταση του άλλου, όσο μακριά κι αν βρίσκονται. Αυτή η δεύτερη φάση του προγράμματος, της εξοικείωσης με τον φορμαλισμό του “Q is for Quantum”, ολοκληρώθηκε με αρκετή εξάσκηση στη χρήση των κουτιών και στην εφαρμογή των

κανόνων, ενώ προσπαθήσαμε παράλληλα να κάνουμε κάποιες αντιστοιχίες με τα κβαντικά φαινόμενα που περιεγράφηκαν στο πρώτο εισαγωγικό μέρος.

5.4 Δημιουργία κυκλωμάτων στον IBM Q Experience

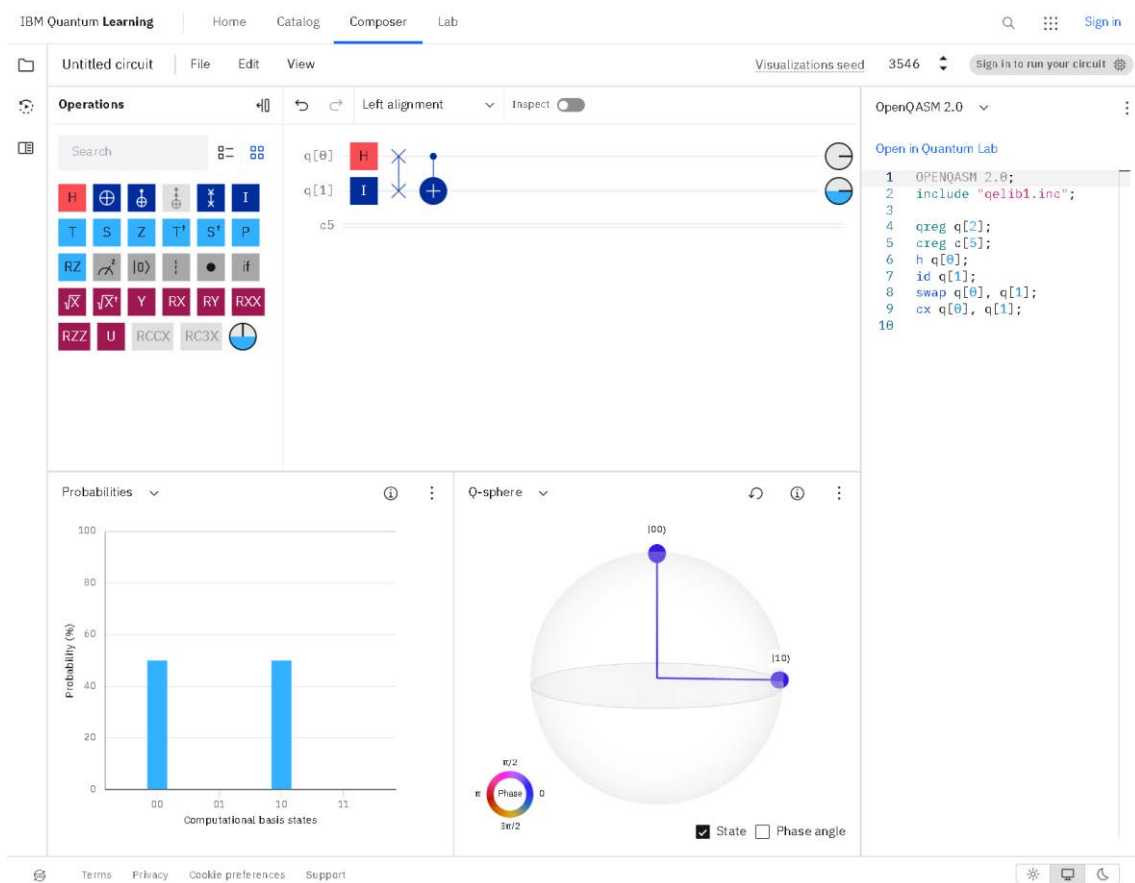
Ο νέος στόχος που τέθηκε στο 3^ο μέρος του προγράμματος ήταν το πέραςμα από την εικονογραφημένη προσέγγιση με μπάλες, κουτιά και σύννεφα, σε ένα ψηφιακό περιβάλλον δημιουργίας και δοκιμής κβαντικών κυκλωμάτων όπως αυτό που προσφέρει η IBM (<https://quantum.ibm.com/composer/>). Το μέρος αυτό υλοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, όπου παρότι υπήρχε η δυνατότητα να χρησιμοποιήσει κάθε μαθητής το δικό του υπολογιστή, τους ζητήθηκε να εργαστούν ανά δύο σε κάθε οθόνη, προκειμένου να αυξηθεί η αλληλεπίδρασή τους. Παράλληλα, σε μία μεγάλη οθόνη προβολής μπορούσαν να βλέπουν τους χειρισμούς του εκπαιδευτικού.

Αρχικά, επιχειρήθηκε μια μετάβαση στην ορολογία των κβαντικών κυκλωμάτων. Κάθε μπάλα θα είναι πλέον ένα qubit, που μπορεί να βρεθεί στην κατάσταση 0 αντί να λέμε πως είναι άσπρη, στην κατάσταση 1 αντί να λέμε πως είναι μαύρη και σε μία κατάσταση υπέρθεσης (0 & 1) με πιθανότητα 0.5 να μετρηθεί 0 ή 1 αντίστοιχα, χωρίς να λέμε ότι είναι σε ένα σύννεφο. Αντίστοιχα τα κουτιά θα τα ονομάζουμε κβαντικές πύλες, αλλά θα έχουν τα ίδια σύμβολα και ονόματα όπως πριν, με εξαίρεση το κουτί H που το ονομάζουμε πλέον πύλη Hadamard. Επίσης, τα στοιβαγμένα κουτιά μέσα από τα οποία περνούσαν οι μπάλες θα αποτελούν πλέον ένα κβαντικό κύκλωμα και δεν θα τα σχεδιάζουμε στο χαρτί και στον πίνακα, αλλά θα τα σύρουμε εύκολα (με drag & drop) από την αριστερή συλλογή της οθόνης (Εικόνα 20), σε μία οριζόντια διάταξη στο μέσο της οθόνης.

Εντοπίσαμε στη συλλογή αυτή, τις πύλες που είχαν τα γνωστά σύμβολα των κουτιών (NOT, CNOT, SWAP, H, I) και παρατηρήσαμε πως υπάρχουν και αρκετές άλλες κβαντικές πύλες εκεί (κουτιά που δεν δοκιμάσαμε στο προηγούμενο στάδιο). Είδαμε πως στον μεσαίο χώρο μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε qubits στο κύκλωμά μας και πως οι τελικές μετρήσεις μπορούν να μας δώσουν τιμές σε κλασικά bits. Δεν ασχοληθήκαμε (επισήμως) με τις περιοχές της σφαίρας Bloch και του κώδικα, αλλά μόνο με το ραβδόγραμμα των πιθανοτήτων.

Δόθηκε αρκετός χρόνος στα παιδιά προκειμένου να πειραματιστούν με τα εργαλεία και να εξοικειωθούν με το περιβάλλον και διαπιστώθηκε ότι αυτός ήταν ένας εξαιρετικά παραγωγικός χρόνος. Τα παιδιά θέλησαν να «πειράξουν» σχεδόν τα πάντα, μαθαίνοντας

πολύ γρήγορα το περιβάλλον, χωρίς παρεμβάσεις από τον εκπαιδευτικό, αλλά μόνο με την μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Πέρα από το ραβδόγραμμα, κάποια παιδιά προσπάθησαν να συσχετίσουν τις πύλες που έσυραν στο κύκλωμα με τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονταν η σφαίρα και τον τρόπο που διαμορφώνονταν αυτόματα η μορφή του κώδικα στο δεξί μέρος της οθόνης. Κάποια μαθήτρια, χωρίς να έχει ποτέ της διδαχθεί τη γλώσσα προγραμματισμού της οθόνης, προσπάθησε να πειράζει τον κώδικα προκειμένου να διαμορφώσει από εκεί το κύκλωμα και έκανε κάποιες εύστοχες παρατηρήσεις σχετικά με αυτό. Άλλα παιδιά όμως δυσκολεύτηκαν αρκετά να εξοικειωθούν με το περιβάλλον και έλαβαν βοήθεια, τόσο από τον εκπαιδευτικό όσο και από τους συμμαθητές τους.



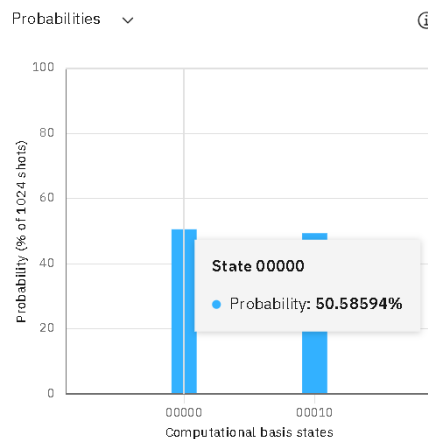
Εικόνα 20. Το περιβάλλον του IBM Q Experience

Στο πλάνο εξοικείωσης τα παιδιά έπρεπε να ξεκινήσουν με πολύ απλά κυκλώματα για να επαληθεύσουν την δράση των πυλών που είχαν δει πριν με τη μορφή κουτιών. Συγκεκριμένα, δημιούργησαν και έτρεξαν τα ακόλουθα κυκλώματα :

1. Πύλη NOT σε ένα qubit
2. Πύλη Hadamard σε ένα qubit (Παρατηρούμε την τυχαιότητα στο αποτέλεσμα)

3. Δύο Hadamards σε ένα qubit (εδώ βλέπουν πώς δύο Hadamards επιστρέφουν το qubit πίσω στην αρχική του κατάσταση και ότι το αποτέλεσμα είναι ντετερμινιστικό)
4. Επανάληψη, αλλά με εφαρμογή μιας πύλης NOT πριν από τα Hadamards για να δούμε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο για την κατάσταση 1 (μαύρη μπάλα)
5. Δύο qubits σε CNOT, για καθεμία από τις τέσσερις δυνατές καταστάσεις εισόδου, έτσι ώστε να επαληθεύουν όσα αποτελέσματα είδαμε στην Εικόνα 12.
6. Το κύκλωμα που δοκιμάσαμε ως άσκηση με κουτιά (Εικόνα 13), ώστε να επαληθεύσουν τα παιδιά το αποτέλεσμα που βρήκαν με υπολογισμούς στο χαρτί.
7. Hadamard στο πρώτο qubit που ακολουθείται από ένα CNOT με το πρώτο qubit ως έλεγχο. Το κύκλωμα αυτό δημιουργεί μια κατάσταση διεμπλοκής. Οι μαθητές κλήθηκαν να παρατηρήσουν ότι, ενώ μια μέτρηση ενός qubit δίνει μόνο ένα τυχαίο αποτέλεσμα, τα αποτελέσματα όταν μετρώνται και τα δύο qubits συσχετίζονται πάντα.

Μετά την ολοκλήρωση των ασκήσεων αυτών και μετά από πολλές επιπλέον δοκιμές των παιδιών, σταθήκαμε στα ποσοστά των πιθανοτήτων που αναγράφονται στο ραβδόγραμμα. Παρατηρήσαμε στις ράβδους, ότι η θεωρητική τιμή πιθανότητας που δείχνουν με μια Hadamard είναι ακριβώς 50% για κάθε κατάσταση. Όταν όμως γίνει μία μέτρηση για τις πιθανότητες αυτές, δεν είναι σχεδόν ποτέ ακριβώς 50% (Εικόνα 21).



Εικόνα 21. Αποτελέσματα μετρήσεων μετά από μία Hadamard

Στάθηκε αφορμή για να μιλήσουμε για τις πραγματικές προκλήσεις που έχουν μπροστά τους οι κβαντικοί υπολογιστές, καθώς ο θόρυβος και τα σφάλματα στα οποία υπόκειται το κβαντικό hardware και οι πύλες είναι σημαντικά και μειώνουν την αξιοπιστία των πραγματικών μετρήσεων. Στο τέλος αυτής της φάσης του προγράμματος φτιάξαμε ένα απλό κύκλωμα και το στείλαμε, μέσω του λογαριασμού του εκπαιδευτικού

στην IBM Quantum, για να τρέξει σε έναν από τους πραγματικούς κβαντικούς υπολογιστές που διατηρεί η IBM σε ένα από τα data center της. Το κβαντικό μας κύκλωμα πήρε σειρά προτεραιότητας και αναμέναμε αρκετές ημέρες μέχρι να μας σταλούν τα αποτελέσματα. Τα παιδιά χάρηκαν ιδιαίτερα όταν τα αποτελέσματα ήρθαν, γιατί ένιωσαν πιο άμεσα συνδεδεμένοι με αυτή την επανάσταση που επιχειρείται να γίνει με την κβαντική υπολογιστική. Παρατήρησαν βέβαια και τις μικρές αποκλίσεις που είχαν τα αποτελέσματα σε σχέση με τις θεωρητικές τιμές που είχαμε προϋπολογίσει.

5.5 Money or Tiger

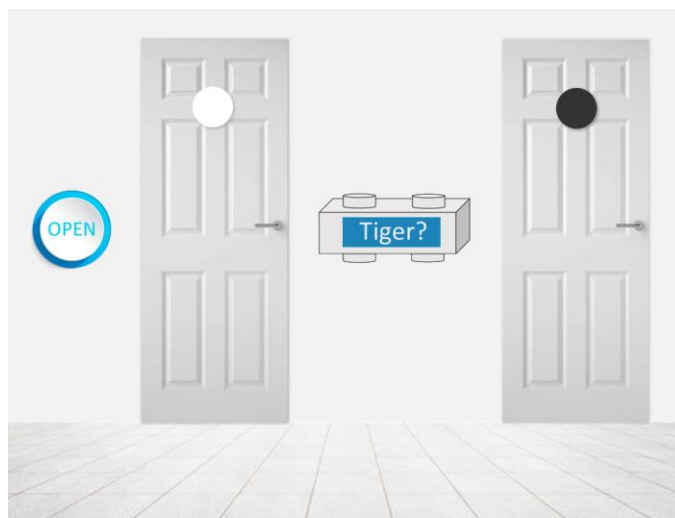
Το 4^ο και τελευταίο μέρος του προγράμματος ήταν μια πραγματική πρόκληση για τους μαθητές και τις μαθήτριες του ομίλου. Σκοπός ήταν να λύσουν έναν γρίφο με το όνομα “Money or Tiger” με την χρήση ενός κβαντικού αλγορίθμου. Πρόκειται ουσιαστικά για τον αλγόριθμο του Deutsch, που είδαμε στο πρώτο μέρος, μεταμφιεσμένο σε παιχνίδι.

Η ένταξη αυτής της ενότητας στο πρόγραμμα έγινε με ιδιαίτερο προβληματισμό για τον βαθμό στον οποίο θα μπορούσαν τα παιδιά να φτάσουν στην επίλυση και να την κατανοήσουν ή να απογοητευτούν από την δυσκολία του εγχειρήματος. Η επιλογή να ενταχθεί στο πρόγραμμα έγινε με βασικούς στόχους:

1. Να πάρουν μία γεύση από τα πλεονεκτήματα που μπορεί να έχει ένας κβαντικός αλγόριθμος στην επεξεργασία πληροφοριών. Δείχνει ότι ένας απλός αλγόριθμος (συνδυασμός κουτιών) που χρησιμοποιεί κβαντικές πύλες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ενός προβλήματος δύο φορές πιο γρήγορα από ό,τι μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μόνο την κλασική επεξεργασία πληροφοριών.
2. Να λειτουργήσει ως ένα προπαρασκευαστικό στάδιο για την χρήση της γραμμικής άλγεβρας που θα βρουν μπροστά τους, καθώς όλα τα παιδιά του ομίλου βρίσκονται στην ομάδα προσανατολισμού θετικών σπουδών. Τα παιδιά δεν θα έκαναν πράξεις με Πίνακες, αλλά η χρήση του φορμαλισμού “Q is for Quantum” με χαρτί και μολύβι, είναι μια προσομοίωση των πράξεων που γίνονται στην γραμμική άλγεβρα για την εξαγωγή της τελικής κατάστασης.

Παράλληλα η ιδέα ενός γρίφου με μία τίγρη και πολλά χρήματα, ήταν αρκετά παιγνιώδης και διευκόλυνε την διδακτική χρήση.

Τα δεδομένα του γρίφου είναι τα εξής: Υπάρχουν δύο πόρτες, η μία με έναν λευκό κύκλο και η άλλη με έναν μαύρο κύκλο και ένα κουτί ανάμεσά τους με τη λέξη Tiger (Εικόνα 22). Έχουμε ένα κουμπί στον τοίχο (open), που αν το πατήσει κάποιος ανοίγουν και οι δύο πόρτες ταυτόχρονα και είναι αδύνατον να ανοίξει κάποιος μόνο την μία πόρτα. Πίσω από μια τουλάχιστον πόρτα (μπορεί και από τις δύο) υπάρχουν πολλά χρήματα. Επίσης, πίσω από τις δύο πόρτες μπορεί να υπάρχει μία τίγρη ή και να μην υπάρχει. Εάν δεν υπάρχει τίγρη, τότε θέλουμε να πατήσουμε το κουμπί, ώστε να ανοίξουν οι πόρτες και να πάρουμε τα χρήματα. Ωστόσο, εάν υπάρχει μια τίγρη, δεν θέλουμε να πατήσουμε το κουμπί, αλλά προτιμούμε να φύγουμε χωρίς τα χρήματα και αρκετά χαρούμενοι που είμαστε ακόμα ζωντανοί.



Εικόνα 22. Κανόνες του παιχνιδιού Money or Tiger

Ας δούμε όμως πως λειτουργεί το κουτί Tiger. Μας βοηθά να ελέγξουμε αν πίσω από μία πόρτα υπάρχει τίγρη ή όχι, αλλά το μεγάλο του μειονέκτημα είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία (και μόνο μία) φορά. Έχει δύο εισόδους και δύο εξόδους. Στην αριστερή είσοδο τοποθετούμε πάντα μία μαύρη μπάλα που μπορούμε να τη λέμε μπάλα δοκιμής. Στην δεξιά είσοδο τοποθετούμε την μπάλα με το χρώμα της πόρτας που θέλουμε να ελέγξουμε και μπορούμε να την λέμε μπάλα πόρτας. Για να ελέγξουμε αν υπάρχει τίγρη στην αριστερή πόρτα θα εισάγουμε μία άσπρη μπάλα στην δεξιά είσοδο. Για να δούμε αν υπάρχει τίγρη στην δεξιά πόρτα, θα εισάγουμε μία μαύρη μπάλα στην δεξιά είσοδο. Η μπάλα πόρτας βγαίνει από το κουτί χωρίς να αλλάζει χρώμα. Η μπάλα δοκιμής θα μας δείξει αν υπάρχει ή όχι τίγρη πίσω από την επιλεγμένη πόρτα. Αν η μπάλα δοκιμής παραμείνει μαύρη, τότε δεν υπάρχει τίγρη πίσω από την συγκεκριμένη πόρτα, ενώ αν γίνει άσπρη υπάρχει.

Καταλαβαίνουμε εδώ, ότι με τη χρήση μόνο κλασικών αλγορίθμων, απαιτούνται δύο δοκιμές, για να είμαστε σίγουροι ότι δεν κρύβεται τίγρη πίσω από τις δύο πόρτες. Αν το κουτί χρησιμοποιηθεί μία φορά και δείξει ότι πίσω από την μία πόρτα δεν υπάρχει τίγρη, δεν είμαστε καθόλου βέβαιοι ότι δεν υπάρχει πίσω από την άλλη και όπως προαναφέραμε δεν υπάρχει δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε για δεύτερη φορά το κουτί. Συνεπώς, η κλασική υπολογιστική εδώ αδυνατεί να λύσει το πρόβλημα και το ερώτημα προς τα παιδιά ήταν αν μπορεί η κβαντική υπολογιστική να μας δώσει την ευκαιρία να πάρουμε τα χρήματα χωρίς να βάζουμε σε κίνδυνο τη ζωή μας.

Η λύση του γρίφου ολοκληρώνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο τα παιδιά κλήθηκαν να ανακαλύψουν ποιες πύλες κρύβονται μέσα στο κουτί Tiger σε κάθε μία από τις δυνατές περιπτώσεις. Οι δυνατές περιπτώσεις, με βάση την περιγραφή του γρίφου είναι τρεις (Εικόνα 23).



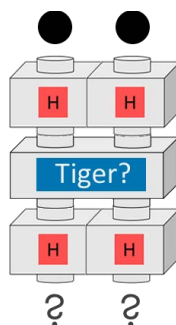
Εικόνα 23. Οι τρεις πιθανές καταστάσεις πίσω από τις δύο πόρτες

Δόθηκε χρόνος στα παιδιά, ώστε όλοι σχεδόν να επιτύχουν αυτό τον πρώτο στόχο, έστω και με μικρή βοήθεια (τους προτάθηκε να χρησιμοποιούν πύλες NOT και CNOT). Είχαν ήδη εργαστεί αρκετά με το στοίβαγμα των πυλών και είχαν την απαιτούμενη εξοικείωση. Η διαφορά ήταν ότι ενώ μέχρι τώρα υπολόγιζαν το αποτέλεσμα που θα είχαν οι κβαντικές πύλες τώρα το ερώτημα ήταν ανάστροφο. Γνώριζαν το αποτέλεσμα που ήθελαν να πετύχουν και έπρεπε να επιλέξουν τις πύλες για να έχουν το ζητούμενο αποτέλεσμα. Επειδή όμως η κάθε περίπτωση από τις τρεις ήταν απλή δεν υπήρξε ιδιαίτερη δυσκολία σε αυτό.

Στην (α) περίπτωση η αριστερή πόρτα κρύβει μια τίγρη και η δεξιά χρήματα, επομένως θα πρέπει όταν η μπάλα πόρτας είναι άσπρη, η μπάλα δοκιμής να βγαίνει άσπρη, ενώ όταν η μπάλα πόρτας είναι μαύρη, η μπάλα δοκιμής να βγαίνει μαύρη. Στην περίπτωση αυτή το περιεχόμενο του κουτιού Tiger είναι ένα CNOT με μια πύλη NOT

που προστίθεται πριν από την αριστερή έξοδο. Στην (β) περίπτωση και οι δύο πόρτες κρύβουν χρήματα οπότε θα πρέπει σε κάθε περίπτωση η μπάλα δοκιμής να βγαίνει μαύρη. Επομένως αρκεί το κουτί Tiger να είναι μία πύλη ταυτότητας και οι μπάλες να βγουν όπως ακριβώς μπήκαν. Στην (γ) περίπτωση όπου η αριστερή κρύβει χρήματα και η δεξιά μια τίγρη, θα πρέπει αν η μπάλα πόρτας είναι άσπρη, η μπάλα δοκιμής να είναι μαύρη, ενώ αν η μπάλα πόρτας είναι μαύρη, η μπάλα δοκιμής να είναι άσπρη. Στην περίπτωση αυτή το κουτί Tiger υλοποιείται με μία μόνο πύλη CNOT.

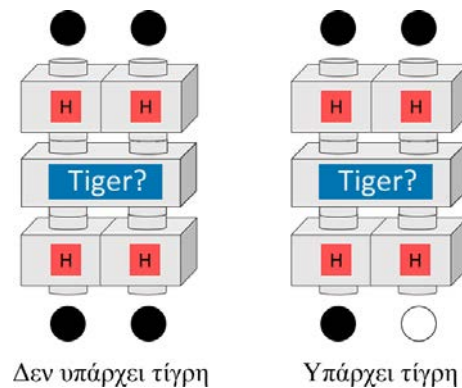
Στο δεύτερο στάδιο ο στόχος είναι να δείξουμε ότι προσθέτοντας επιπλέον κουτιά πάνω και κάτω από το κουτί Tiger, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε εάν υπάρχει τίγρη πίσω από τις πόρτες με μία και μόνο μέτρηση. Όπως σε κάθε δύσκολο θέμα στη διδακτική τροφοδοτούμε σταδιακά τα παιδιά με πληροφορίες που θα οδηγήσουν στη λύση, δίνοντας χρόνο κάθε φορά μετά από μία νέα πληροφορία. Αρχικά ζητήθηκε από τα παιδιά να προσπαθήσουν να σκεφτούν μόνα τους το είδος των κουτιών που θα έπρεπε να προσθέσουμε, κάτι αρκετά δύσκολο για να το κάνουν στο στάδιο που βρίσκονται. Ένας μαθητής είπε πως «σίγουρα θα χρειαστούν κουτιά H γιατί τα υπόλοιπα είναι απλά κουτιά». Επιβεβαιώθηκε η ιδέα, χωρίς να αναφερθεί που θα τοποθετηθούν και πόσα, και δόθηκε στα παιδιά και πάλι χρόνος να δοκιμάσουν, με ποιον τρόπο θα τοποθετηθούν και τι αποτέλεσμα θα είχε. Έγιναν κάποιες δοκιμές, χωρίς να καταφέρουν τα παιδιά να βρουν την λύση. Στο τέλος δόθηκε στα παιδιά το κύκλωμα που φαίνεται στην Εικόνα 24, με δύο πύλες Hadamard στην είσοδο και στην έξοδο του κουτιού Tiger και ζητήθηκε από αυτά να υπολογίσουν την έξοδο στην περίπτωση που υπήρχε η τίγρη σε μία από τις δύο πόρτες και στην περίπτωση που δεν υπήρχε.



Εικόνα 24. Το κύκλωμα που λύνει τον γρίφο Money or Tiger

Είναι στην πραγματικότητα μία άσκηση με τρία ερωτήματα, ένα για κάθε μία από τις περιπτώσεις (α), (β) και (γ) που είδαμε στο πρώτο μέρος. Με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, όπου χρειάστηκε στις πράξεις με τις νεφελώδεις καταστάσεις, τα παιδιά διαπίστωσαν ότι αν δεν υπάρχει τίγρη πίσω από τις πόρτες οι εξερχόμενες μπάλες είναι

και οι δύο μαύρες, ενώ αν υπάρχει τίγρη σε οποιαδήποτε από τις δύο πόρτες η δεξιά μπάλα βγαίνει άσπρη (Εικόνα 25).



Εικόνα 25. Η άσπρη μπάλα φανερώνει την ύπαρξη μιας τίγρης

Συνεπώς μπορούμε με μία μόνο χρήση του κουτιού Tiger και με τη χρήση των κβαντικών πυλών H να γνωρίζουμε με βεβαιότητα, αν θα πρέπει να πατήσουμε το κουμπί για να πάρουμε τα χρήματα ή όχι. Αυτό είναι το εξαιρετικό πλεονέκτημα της κβαντικής υπολογιστικής έναντι της κλασικής. Αξίζει βέβαια να σημειώσουμε εδώ, ότι ενώ διαπιστώνουμε την ύπαρξη της τίγρης πίσω από τις πόρτες, δεν γνωρίζουμε πίσω από ποια πόρτα βρίσκεται. Αυτό είναι ανάλογο με τον αλγόριθμο Deutsch, όπου ανακαλύπτουμε χρησιμοποιώντας το κβαντικό κύκλωμα αν μια συνάρτηση είναι ισορροπημένη ή σταθερή, αλλά όχι ποια συγκεκριμένη συνάρτηση είναι. Στο δεδομένο πρόβλημα, αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία για το ζητούμενο, αλλά σε κάποιο άλλο μπορεί να έχει. Η κλασική υπολογιστική μπορεί να χρειαστεί δύο χρήσεις του κουτιού Tiger, αλλά ταυτόχρονα αποκαλύπτει μία επιπλέον πληροφορία, την πόρτα πίσω από την οποία βρίσκεται η τίγρη.

Αυτό είναι ένα καλό σημείο για να κατανοήσουν τα παιδιά την διαφορά μεταξύ κβαντικής και κλασικής υπολογιστικής. Στο βιβλίο “Q is for Quantum” του T. Rudolf, μια μεγαλύτερη παραλλαγή του παιχνιδιού Money or Tiger δείχνει ότι είναι δυνατό με την κβαντική υπολογιστική να απαιτείται μόνο μία χρήση ενός κουτιού όταν η κλασική περίπτωση απαιτεί πολύ μεγάλο αριθμό χρήσεων. Εστιάσαμε σε αυτό, για να δουν τα παιδιά πως η διάκριση μεταξύ κβαντικού και κλασικού υπολογισμού αφορά τον αριθμό των αλγοριθμικών βημάτων και όχι μικρότερο και ταχύτερο υλικό ή άλλες παρόμοιες παρανοήσεις.

5.6 Αποτελέσματα – Παρατηρήσεις - Ανατροφοδότηση

Σε κάθε βήμα εφαρμογής του προγράμματος φροντίσαμε να υπάρχει ανατροφοδότηση από την πλευρά των παιδιών. Καταγράφηκαν δεδομένα, τόσο για αυτά που κατάφεραν να κατακτήσουν νοηματικά και να υλοποιήσουν στην πράξη, όσο και για τις σκέψεις και τα συναισθήματα από την συμμετοχή τους σε κάθε μέρος του προγράμματος. Πέρα από τα δύο ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν στην αρχή και στο τέλος του προγράμματος (Παράρτημα Α & Β), σε κάθε συνεδρία αξιολογήθηκε ο βαθμός συμμετοχής, ο βαθμός επίτευξης των πρακτικών στόχων, ο βαθμός δυσκολίας που δήλωσαν ότι είχε η συνεδρία και μέσα από την συζήτηση με την οποία κλείναμε κάθε φορά, οι σκέψεις και οι εντυπώσεις τους για το τρέχον ζητούμενο.

Με βάση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, διαπιστώθηκαν τα παρακάτω:

- Τα μισά μόνο παιδιά είχαν ακούσει τον όρο Κβαντική Μηχανική (ή κβαντομηχανική) πριν από την ένταξή τους στο πρόγραμμα, ενώ μόνο το 1/3 είχε ακούσει τον όρο Κβαντική Υπολογιστική (ή κβαντικός υπολογιστής).
- Τα περισσότερα είχαν ασχοληθεί με κάποιο είδος κλασικού προγραμματισμού με βάση το πρόγραμμα πληροφορικής του σχολείου, αλλά και έξω από αυτό και τα $\frac{3}{4}$ δήλωσαν πως τους ενδιαφέρει στο μέλλον να ασχοληθούν με την επιστήμη των υπολογιστών ως κύριο αντικείμενο εργασίας. Η πρόσκληση συμμετοχής στον όμιλο ήταν εθελοντική και ήταν αναμενόμενο, το θέμα να προσελκύσει τα συγκεκριμένα παιδιά.
- Δύο στα τρία παιδιά που πήραν μέρος δήλωσαν πως τους αρέσουν οι γρίφοι και οι σπαζοκεφαλίες και ήταν αυτά που πραγματικά έδειξαν την μεγαλύτερη επιμονή για την εύρεση της λύσης στο Money or Tiger.
- Πριν ξεκινήσει το πρόγραμμα, τα $\frac{3}{4}$ των παιδιών που πήραν μέρος, πίστευαν πως ένα πρόγραμμα με τίτλο «Quantum Computing» θα είναι αρκετά δύσκολο - απαιτητικό για αυτά.
- Για τους λόγους που συμμετείχαν στο πρόγραμμα τα παιδιά δήλωσαν:

Συμμετέχω στο πρόγραμμα γιατί:

- | | |
|---|-------|
| - με ενδιαφέρουν τα θέματα σύγχρονης τεχνολογίας γενικά | 9/12 |
| - με ενδιαφέρει ειδικά η επιστήμη των υπολογιστών | 8/12 |
| - μου αρέσουν οι προκλήσεις | 11/12 |
| - πιστεύω πως η συμμετοχή μου θα είναι χρήσιμη στο βιογραφικό μου | 10/12 |

Ένα παιδί δήλωσε πως ακολούθησε απλά τους φίλους του.

- Τα περισσότερα παιδιά μετά το πρόγραμμα δήλωσαν πως το ενδιαφέρον τους για την κβαντική μηχανική και υπολογιστική έχει αυξηθεί. Το ίδιο και το ενδιαφέρον τους για την επιστήμη των υπολογιστών.
- Περισσότερο δυσκολεύτηκαν στο θεωρητικό μέρος της κβαντομηχανικής και στην τελική φάση του παιχνιδιού “Money or Tiger”, ενώ λιγότερο τους δυσκόλεψαν οι κβαντικές μπάλες, τα κουτιά και οι εργασίες στον IBM Q Experience.
- Τα 8 από τα 12 παιδιά που συμμετείχαν βρήκαν συνολικά το πρόγραμμα πιο βατό από αυτό που περίμεναν αρχικά και θεωρούν πως θα μπορούσαν να εξηγήσουν αρκετά από όσα έμαθαν σε κάποιο/α συμμαθητή/τρια που δεν συμμετείχε.

Τα παιδιά που συμμετείχαν στο πρόγραμμα βρίσκονται σε ένα πρώιμο στάδιο επαφής με τον κλασικό προγραμματισμό. Σε αυτό το στάδιο ο ενθουσιασμός τους εγείρεται από τις δυνατότητες που τους δίνει ο κλασικός προγραμματισμός στο να φτιάξουν τις δικές τους εφαρμογές και προγράμματα, γιατί τώρα το ανακαλύπτουν στην πράξη. Κάποια από τα παιδιά στην αρχή του προγράμματος, είχαν την αίσθηση πως η κβαντική υπολογιστική θα τους έκανε καλύτερους σε αυτό. Δυσκολεύτηκαν αρχικά να δουν πως θα μπορούσε να τους είναι χρήσιμη η κβαντική υπολογιστική και ποιες θα ήταν οι πιθανές εφαρμογές. Με το παιχνίδι Money or Tiger και τη συζήτηση που κάναμε στο τέλος για τις δυνατότητες και άλλων αλγορίθμων (ευρετικοί, μαθηματικοί κ.α.) αναγνώρισαν στην κβαντική υπολογιστική ένα εξαιρετικό εργαλείο για το μέλλον τους στον προγραμματισμό, εφόσον βέβαια υλοποιηθούν στον βαθμό που θα ήθελαν οι κβαντικοί υπολογιστές.

6 Συμπεράσματα

Η εργασία αυτή αποσκοπούσε στην πειραματική εισαγωγή της κβαντικής υπολογιστικής στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, με την εφαρμογή μιας ολοκληρωμένης διδακτικής μεθόδου. Στόχος ήταν να αποτελέσει έναν οδηγό για τον σύγχρονο εκπαιδευτικό, που κινείται στον χώρο του STEAM και θέλει να βρει ένα μονοπάτι, που θα συνδέσει αποτελεσματικά τους μαθητές και τις μαθήτρίες του με θέματα που βρίσκονται στην αιχμή της τεχνολογίας σήμερα, όπως η κβαντική υπολογιστική.

Η θεωρητική προσέγγιση που αναπτύχθηκε στο 1^ο μέρος, θέλησε να δώσει στον εκπαιδευτικό το απολύτως απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο, με μαθηματικούς όρους, που πρέπει να έχει στην κβαντική μηχανική και υπολογιστική, ώστε να αναπτύξει με επάρκεια την ίδια ή μια ανάλογη μέθοδο στα παιδιά. Βεβαίως, η κβαντική μηχανική και υπολογιστική έχει τέτοιο εύρος και ενδιαφέρον, ώστε προτείνεται ανεπιφύλακτα η αναζήτηση όλων των σπουδαίων και πληρέστερων συγγραμμάτων που έχουν γραφτεί για τον τομέα.

Φυσικά, το γνωστικό υπόβαθρο είναι ο ένας απαραίτητος πυλώνας για την επιτυχή υλοποίηση, ο άλλος όμως εξίσου (αν όχι περισσότερο) αναγκαίος είναι αυτός της διδακτικής. Στον τομέα αυτό, θεωρούμε πως η συγκεκριμένη προσέγγιση, με μια κονστρουκτιβιστική λογική, κατάφερε πραγματικά να εισάγει τα παιδιά στην κβαντική υπολογιστική, χωρίς να έχουν καμία από τις προαπαιτούμενες γνώσεις (γραμμική άλγεβρα, μιγαδικοί, κλπ). Με βάση την ανατροφοδότηση, τα μέρη της θεωρητικής εισαγωγής στο πεδίο της κβαντικής μηχανικής και υπολογιστικής και του τελικού γρίφου, που στην πραγματικότητα είναι η υλοποίηση ενός κβαντικού αλγορίθμου, ήταν αυτά που δυσκόλεψαν περισσότερο τα παιδιά. Στα δύο αυτά μέρη, αυτό που φαίνεται να διευκόλυνε τα παιδιά ήταν η οπτικοποίηση των θεμάτων και πάλι ο κοινωνικός εποικοδομητισμός που αναπτύχθηκε μεταξύ τους, όταν βρέθηκαν αντιμέτωπα με δύσκολες ή παράξενες έννοιες, ή κλήθηκαν να δώσουν λύσεις στον τελευταίο γρίφο. Σε τέτοιες στιγμές στη διδασκαλία, όπου ο εκπαιδευτικός αποσύρεται σε μία άκρη, αφήνοντας τα επιχειρήματα και τις ιδέες να διασταυρώνονται στον αέρα της τάξης, προχωρώντας τόσο δημιουργικά προς την κατανόηση ή τη λύση, θυμόμαστε τον Sugata Mitra, τα πειράματά του στην Ινδία (Mitra & Rana 2001) και το Σχολείο στο Σύννεφο.

Το μέρος της εκπαίδευσης στο φορμαλισμό “Q is for Quantum”, ήταν για τα παιδιά αναπάντεχα εύκολο και συνέχισαν να προχωρούν ακόμη κι όταν το κουτί Η εμφάνισε τον παράξενο χαρακτήρα του. Ιδιαίτερη ικανοποίηση φαίνεται πως πήραν και όταν είδαν για πρώτη φορά ότι μπορούν όσα έμαθαν για τα κουτιά να τα μεταφράζουν σε όρους κβαντικής υπολογιστικής και να στήνουν μόνα τους κβαντικά κυκλώματα στον IBM Q Experience.

Το γενικό συμπέρασμα από την εφαρμογή είναι ότι ο γραμματισμός της κβαντικής υπολογιστικής στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με την μέθοδο που επιλέχθηκε, είναι κάτι παραπάνω από εφικτός. Δεν υπάρχουν τα μαθηματικά προαπαιτούμενα, αλλά είναι απαραίτητο να δοθεί χρόνος στα παιδιά, για να εκφραστούν και να συζητήσουν για τα πρωτόγνωρα για αυτά φαινόμενα και για να συνεργαστούν όσο περισσότερο γίνεται στις ζητούμενες εργασίες. Μένει η πειραματική αυτή εκπαιδευτική διαδικασία, που γίνεται για πρώτη φορά σε ελληνικό σχολείο, να αποκτήσει ένα μεγαλύτερο δείγμα εφαρμογών για να βγουν ασφαλέστερα συμπεράσματα και να βελτιστοποιηθεί κατά το δυνατόν.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- Karafyllidis, I. (2015). Quantum Computing [Undergraduate textbook]. Kallipos, Open Academic Editions. <https://hdl.handle.net/11419/216>
- Σάββας, Η., & Σαμπάνη, Μ. (2002). ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ: Από τη Θεωρία στην Πράξη. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Τραχανάς, Σ. (2014). Κβαντομηχανική Ι (2η έκδ.). Αθήνα: ΣΕΑΒ.

Αγγλική

- Brousseau, G.(1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Childs, A. M. (2004). Quantum information processing in continuous time (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- Cybenko, G. (2001). Reducing quantum computations to elementary unitary operations. Computing in science & engineering, 3(2), 27-32.
- Das, A., & Ferbel, T. (2003). Introduction to nuclear and particle physics. World Scientific.
- Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011, September). From game design elements to gamefulness: defining" gamification". In Proceedings of the 15th international academic MindTrek conference: Envisioning future media environments (pp. 9-15).
- Deutsch, D., & Jozsa, R. (1992). Rapid solution of problems by quantum computation. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 439(1907), 553-558.
- Dür, W., & Heusler, S. (2016). The qubit as key to quantum physics part II: Physical realizations and applications. The Physics Teacher, 54(3), 156-159.

- Economou, S. E., Rudolph, T., & Barnes, E. (2020). Teaching quantum information science to high-school and early undergraduate students. arXiv preprint arXiv:2005.07874.
- Einstein, A., B. Podolsky, and N. Rosen, 1935, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Phys. Rev.* 47, 777-780.
- Fano, G., & Blinder, S. M. (2017). *Twenty-first century quantum mechanics: Hilbert space to quantum computers*. Springer International Publishing.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (1963-65). *The Feynman lectures on physics* (Vol. 3). Reading, MA: Addison-Wesley.
- Grover, L. K. (1997). A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 212-219.
- Hayward, M. (2008). *Quantum computing and Shor's algorithm*. Sydney: Macquarie University Mathematics Department, 1.
- Hidary, J. D., & Hidary, J. D. (2021). Dirac notation. *Quantum Computing: An Applied Approach*, 377-381.
- Hirvensalo, M. (2013). *Quantum computing*. Springer Science & Business Media.
- Huang, W. H. Y., & Soman, D. (2013). Gamification of education. *Report Series: Behavioral Economics in Action*, 29(4), 37.
- Jones, J. A., & Mosca, M. (1998). Implementation of a Quantum Algorithm to Solve Deutsch's Problem on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Computer. University of Oxford, UK. arXiv:quant-ph/9801027.
- Khang, A. (Ed.). (2024). *Applications and Principles of Quantum Computing*. IGI Global.
- Kusuma, G. P., Wigati, E. K., Utomo, Y., & Suryapranata, L. K. P. (2018). Analysis of gamification models in education using MDA framework. *Procedia Computer Science*, 135, 385-392.
- Landers, R. N., Auer, E. M., Collmus, A. B., & Armstrong, M. B. (2018). Gamification science, its history and future: Definitions and a research agenda. *Simulation & Gaming*, 49(3), 315-337.
- Lee, J. J., & Hammer, J. (2011). Gamification in education: What, how, why bother?. *Academic exchange quarterly*, 15(2), 146.

- López-Incera, A., & Dür, W. (2019). Entangle me! A game to demonstrate the principles of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 87(2), 95-101.
- Lynch, T., Playfoot, J., De Nicola, C., Guarino, G., Di Salvatore, F., & Ghergulescu, I. (2018). Gamification elements in STEM subjects—Lessons learned from NEWTON Project. In Ireland International Conference on Education, IPeTEL workshop, Dublin.
- Mitra, S., & Rana, V. (2001). Children and the Internet: Experiments with minimally invasive education in India. *British journal of educational technology*.
- Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press.
- Preskill, J. (2023). Quantum computing 40 years later. In *Feynman Lectures on Computation* (pp. 193-244). CRC Press.
- Rieffel, E. G., & Polak, W. H. (2014). *Quantum computing: A gentle introduction (scientific and engineering computation)*. The MIT Press, 10, 1973124.
- Rieffel, E., & Polak, W. (2000). An introduction to quantum computing for non-physicists. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 32(3), 300-335.
- Rose, J. (2015). *The Gamification of Physics Education: A Controlled Study of the Effect on Motivation on First Year Life Sciences Students* (Doctoral dissertation, University of Guelph).
- Rudolph, T. (2017). Q is for Quantum. <https://shepherd.com/book/q-is-for-quantum>
- Russell, T., & Martin, A. K. (2023). Learning to teach science. In *Handbook of research on science education* (pp. 1162-1196). Routledge.
- Schlosshauer, M. (2019). Quantum decoherence. *Physics Reports*, 831, 1-57.
- Shankar, R. (2012). *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media.
- Shor, P. W. (1994). Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 124-134.
- Simon, D. R. (1997). On the power of quantum computation. *SIAM journal on computing*, 26(5), 1474-1483.
- Theis, T. N., & Wong, H. S. P. (2017). The end of Moore's law: A new beginning for information technology. *Computing in science & engineering*, 19(2), 41-50.

- Vygotsky, L. S., & Cole, M. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard university press.
- Weigert, S. (2009). No-Cloning Theorem. In: Greenberger, D., Hentschel, K., Weinert, F. (eds) *Compendium of Quantum Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7_124
- Williams, C. P., & Clearwater, S. H. (1999). *Ultimate zero and one: computing at the quantum frontier*. Springer Science & Business Media.
- Williams, C. P. (2010). *Explorations in quantum computing*. Springer Science & Business Media.
- Williams, C. P., & Williams, C. P. (2011). Quantum gates. *Explorations in Quantum Computing*, 51-122.

Παράρτημα Α

Γυμνάσιο Λυκειακές Τάξεις ----- Νοέμβριος 2023

Εκπαιδευτικός Όμιλος “Quantum Computing”

-- Ερωτηματολόγιο έναρξης --

Προσωπικός κωδικός:

Ερώτηση	ΝΑΙ/ΟΧΙ
Είχες ακούσει τον όρο Κβαντική Μηχανική (ή κβαντομηχανική) πριν από την ένταξή σου στο πρόγραμμα;	
Είχες ακούσει τον όρο Κβαντική Υπολογιστική (ή κβαντικός υπολογιστής) πριν από την ένταξή σου στο πρόγραμμα;	
Έχεις κάνει ποτέ κάποιο είδος προγραμματισμού σε υπολογιστή;	
Σε ενδιαφέρει στο μέλλον να ασχοληθείς με την επιστήμη των υπολογιστών ως κύριο αντικείμενο;	
Σου αρέσουν οι γρίφοι και οι σπαζοκεφαλίες;	
Πιστεύεις πως ένα πρόγραμμα με τίτλο «Quantum Computing» θα είναι αρκετά δύσκολο - απαιτητικό για σένα;	

Συμμετέχω στο πρόγραμμα γιατί	✓
με ενδιαφέρουν τα θέματα σύγχρονης τεχνολογίας γενικά	
με ενδιαφέρει ειδικά η επιστήμη των υπολογιστών	
μου αρέσουν οι προκλήσεις	
πιστεύω πως η βεβαίωση συμμετοχής μου στο πρόγραμμα θα είναι χρήσιμη στο βιογραφικό μου	
υπάρχει κι άλλος λόγος (εξηγήστε από κάτω)	

Παράρτημα Β

Γυμνάσιο Λυκειακές Τάξεις ----- Απρίλιος 2024

Εκπαιδευτικός Όμιλος “Quantum Computing”

-- Ερωτηματολόγιο ολοκλήρωσης του προγράμματος --

Προσωπικός κωδικός:

1: Καθόλου 2: Λίγο 3: Αρκετά 4: Πολύ 5: Πάρα πολύ

Μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος ...	1	2	3	4	5
Το ενδιαφέρον μου για την κβαντική μηχανική έχει αυξηθεί .					
Το ενδιαφέρον μου για την κβαντική υπολογιστική έχει αυξηθεί .					
Το ενδιαφέρον μου να ασχοληθώ στο μέλλον με την επιστήμη των υπολογιστών έχει αυξηθεί.					
Πόσο δύσκολο ήταν να παρακολουθήσω τις εργασίες του προγράμματος γενικά;					
Πόσο δύσκολο ήταν το θεωρητικό μέρος της κβαντομηχανικής;					
Πόσο δύσκολο ήταν να χειριστώ τις κβαντικές μπάλες και τα κουτιά;					
Πόσο δύσκολο ήταν να φτιάξω τα κβαντικά κυκλώματα στον IBM Experience;					
Πόσο δύσκολο ήταν να κατανοήσω το παιχνίδι Money or Tiger;					
Μπορώ να εξηγήσω σε έναν/μία συμμαθητή/τρια που δεν συμμετείχε στον όμιλο όσα έμαθα.					

	ΝΑΙ/ΟΧΙ
Το πρόγραμμα ήταν πιο δύσκολο από αυτό που περίμενα αρχικά.	
Γενικές παρατηρήσεις για το πρόγραμμα (αν έχετε αναφέρετε παρακάτω)	