

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

**«Σχεδιασμός Μαθήματος και Ανάπτυξη Διδακτικού Υλικού σε Σύγχρονα
Περιβάλλοντα Μάθησης»**

Τίτλος Μεταπτυχιακής Διατριβής:

Μαθηματικά και Εικαστικά: Δύο κόσμοι συναντώνται
Εκπαιδευτικό σενάριο για τη σύνδεση των Αναλογιών και της Προοπτικής στην Στ΄
τάξη του Δημοτικού Σχολείου

Επιβλέπων Α΄: Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος

Επιβλέπων Β΄: Χατζηκυριάκος Κωνσταντίνος

Επιβλέπων Γ΄: Βλειώρας Γεώργιος

Μεταπτυχιακή Φοιτήτρια: Μοδέα Στεφανία

Βόλος, 2024

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση του παρόντος πονήματος, θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου, την οικογένειά μου που αποτέλεσε στήριγμα και αρωγό σε όλη την ακαδημαϊκή προσπάθειά μου.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στους επιβλέποντες καθηγητές μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους και την βοήθειά τους κατά τη διάρκεια της πραγματοποίησης της παρούσας εργασίας.

Η μέγιστη ευχαριστία μου αποδίδεται στον Τριαδικό Θεό για όλες τις ευεργεσίες και την αγάπη Του.

Όπως τονίζει ο Tutte:

«Τι είναι λοιπόν τα Μαθηματικά; Φαίνεται ότι έχουμε τρεις επιλογές:

- *Τα Μαθηματικά είναι η ανθρωπιστική επιστήμη που υμνεί την αιώνια λογική.*
- *Είναι η φυσική επιστήμη που μελετά το φαινόμενο λογική.*
- *Είναι η τέχνη που πλάθει μορφές αιθέριας ομορφιάς από πρώτη ύλη που ονομάζεται λογική.*

Είναι όλα αυτά και άλλα. Πάνω απ'όλα, όμως, μπορώ να σας διαβεβαιώσω ότι τα Μαθηματικά είναι ευχαρίστηση».

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ερευνά τη συσχέτιση δύο επιστημονικών κλάδων φαινομενικά ασύνδετων μεταξύ τους οι οποίοι όμως με μία πιο προσεκτική ματιά γίνεται αντιληπτό πως μοιράζονται μια κοινή πορεία. Οι κλάδοι αυτοί είναι τα Μαθηματικά και τα Εικαστικά. Ειδικότερα, το θέμα στο οποίο επικεντρώνεται η συγκεκριμένη μελέτη είναι η σύνδεση των Αναλογιών και της Γραμμικής Προοπτικής. Η επιλογή διερεύνησης της σύνδεσης αυτής προέκυψε αφενός από την προσπάθεια ενημέρωσης του μαθητικού δυναμικού που επιλέχθηκε για την έρευνα σχετικά με ένα θέμα άγνωστο για αυτούς, όπως ήταν η γραμμική προοπτική. Αφετέρου, από τη διαπίστωση πλήθους ερευνών πως ένα σημαντικό ποσοστό του μαθητικού πληθυσμού παρά τη συχνή επαφή του με τις Αναλογίες αποτυγχάνει να κατανοήσει και να εφαρμόσει την αναλογική συλλογιστική στην καθημερινότητά του. Ο συνδυασμός των Αναλογιών με την Γραμμική Προοπτική θεωρήθηκε ένα μέσο που θα κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών να αξιοποιήσουν τις Αναλογίες που είχαν διδαχθεί ώστε να έρθουν σε επαφή με τη μέθοδο της Γραμμικής Προοπτικής με ένα Σημείο Φυγής.

Για τη συγκεκριμένη έρευνα εφαρμόστηκε η μέθοδος της μελέτης περίπτωσης σε ένα τμήμα Στ' τάξης σε Δημοτικό Σχολείο του Νομού Μαγνησίας. Όπως προέκυψε από την έρευνα οι μαθητές κατάφεραν να βρίσκουν τις διαστάσεις ενός σχήματος υπό κλίμακα και αξιοποίησαν τις Αναλογίες και την έννοια της κλίμακας για τη διαμόρφωση ενός γραμμικού σχεδίου προοπτικής με ένα σημείο φυγής.

Λέξεις-κλειδιά: Μαθηματικά, Εικαστικά, Αναλογίες, γραμμική προοπτική, σημείο φυγής

Abstract

The present thesis investigates the correlation of two seemingly unrelated scientific fields, but with a closer look it becomes apparent that they share a common path. These disciplines are Mathematics and Visual Arts. In particular, the subject on which this particular study focuses is the connection of Proportions and Linear Perspective. The choice to investigate this connection arose on the one hand from the effort to inform the student body selected for the research about a topic unknown to them, which was linear perspective. On the other hand, the findings of numerous studies point out that a significant percentage of the student population, despite their frequent contact with Proportions, fails to understand and apply analogical reasoning in their daily life. The combination of Proportions with Linear Perspective was seen as a means of motivating students to use the Proportions they had been taught in order to come into contact with the method of Linear Perspective with one Vanishing Point.

For this specific research, the case study method was applied to a 6th grade section of a Primary School in the Prefecture of Magnesia. As it emerged from the research, the students were able to find the dimensions of a figure to scale and utilized Proportions the concept of scale to construct a linear perspective drawing with one vanishing point.

Keywords: Mathematics, Visual arts, Proportions, linear perspective, vanishing point

Κατάλογος Εικόνων

<i>Εικόνα 1: Τα 10 βήματα του Alberti για το σχεδιασμό ενός δωματίου με προοπτική ενός σημείου φυγής</i>	<i>51</i>
<i>Εικόνα 2: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 1 του Pre-test</i>	<i>66</i>
<i>Εικόνα 3: Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 1 του Pre- test.....</i>	<i>67</i>
<i>Εικόνα 4: Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 1 του Pre-test.....</i>	<i>67</i>
<i>Εικόνα 5: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test</i>	<i>68</i>
<i>Εικόνα 6: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test</i>	<i>68</i>
<i>Εικόνα 7: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test</i>	<i>68</i>
<i>Εικόνα 8: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test</i>	<i>68</i>
<i>Εικόνα 9: Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 2 του Pre-test.....</i>	<i>69</i>
<i>Εικόνα 10: Λανθασμένη απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 3 του Pre-test</i>	<i>69</i>
<i>Εικόνα 11: Σωστή απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 3 του Pre-test</i>	<i>70</i>
<i>Εικόνα 12: Σωστή, αλλά χωρίς αιτιολόγηση απάντηση μαθητή στην άσκηση 3 του Pre-test ...</i>	<i>71</i>
<i>Εικόνα 13: Λανθασμένη απάντηση μαθητή στην άσκηση Α1 του Φύλλου εργασίας 1</i>	<i>72</i>
<i>Εικόνα 14: Λανθασμένη απάντηση μαθήτριας στην άσκηση Β1 του Φύλλου εργασίας 1</i>	<i>72</i>
<i>Εικόνα 16: Σωστή απάντηση μαθήτριας στην άσκηση Β1 του Φύλλου εργασίας 1.....</i>	<i>73</i>
<i>Εικόνα 15: Σωστή απάντηση μαθήτριας στην άσκηση Α1 του Φύλλου εργασίας 1.....</i>	<i>73</i>
<i>Εικόνα 17: Απάντηση μαθητή στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1</i>	<i>74</i>
<i>Εικόνα 19: Απάντηση μαθήτριας στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1.....</i>	<i>74</i>
<i>Εικόνα 18: Απάντηση μαθητή στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1</i>	<i>74</i>
<i>Εικόνα 20: Απάντηση μαθήτριας στο ερώτημα Β2 του Φύλλου εργασίας 1.....</i>	<i>75</i>
<i>Εικόνα 21: Απάντηση μαθήτριας στο 1α ερώτημα του Φύλλου εργασίας 2</i>	<i>76</i>
<i>Εικόνα 22: Απάντηση μαθήτριας στο 1α ερώτημα του Φύλλου εργασίας 2</i>	<i>76</i>
<i>Εικόνα 23: Απάντηση μαθητή στον πίνακα τιμών 1α ερωτήματος του Φύλλου εργασίας 2.....</i>	<i>77</i>
<i>Εικόνα 24: Απάντηση μαθητή στον πίνακα τιμών του 1α ερωτήματος του Φύλλου εργασίας 2</i>	<i>77</i>
<i>Εικόνα 25: Σωστός σχεδιασμός για τη σμίκρυνση του γηπέδου από μαθήτρια</i>	<i>77</i>
<i>Εικόνα 26: Λανθασμένος σχεδιασμός των διαστάσεων του γηπέδου από μαθήτρια.....</i>	<i>78</i>
<i>Εικόνα 27: Απάντηση μαθήτριας σχετικά με τα βήματα που ακολούθησε για τη σμίκρυνση.....</i>	<i>78</i>
<i>Εικόνα 28: Απάντηση μαθητή σχετικά με τα βήματα που ακολούθησε για τη σμίκρυνση</i>	<i>79</i>
<i>Εικόνα 29: Λανθασμένη απάντηση μαθητή λόγω ανακριβούς μετατροπής των μέτρων σε εκατοστά</i>	<i>80</i>
<i>Εικόνα 30: Σωστή απάντηση μαθητή στο Α ερώτημα του Φύλλου εργασίας</i>	<i>81</i>
<i>Εικόνα 31: Σωστή απάντηση μαθητή στο Α ερώτημα του Φύλλου εργασίας, αλλά λανθασμένη εύρεση του σημείου φυγής</i>	<i>81</i>
<i>Εικόνα 32: Σωστή εύρεση του σημείου φυγής, αλλά ελλιπής τεκμηρίωση της διαδικασίας εντοπισμού του</i>	<i>82</i>
<i>Εικόνα 33: Σωστή απάντηση μαθήτριας στο Α ερώτημα του 4ου Φύλλου Εργασίας.....</i>	<i>83</i>
<i>Εικόνα 34: Σωστή απάντηση μαθητή στο Β ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4</i>	<i>84</i>
<i>Εικόνα 35: Σωστή απάντηση μαθήτριας στο Β ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4, αλλά λανθασμένη αποτύπωση του σχήματος.....</i>	<i>85</i>
<i>Εικόνα 36: Σωστή απάντηση μαθητή στο Β ερώτημα, αλλά λανθασμένη εύρεση του Σ.Φ. στο σχήμα</i>	<i>85</i>
<i>Εικόνα 37: Σωστή απάντηση μαθητή στο Γ ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4</i>	<i>86</i>

<i>Εικόνα 38: Σωστή απάντηση μαθητή στο Γ ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4 με εύρεση του Σ.Φ. μέσω ενός ξεχωριστού σχήματος από αυτό του δωματίου.....</i>	<i>87</i>
<i>Εικόνα 39: Σωστή απάντηση μαθητή στο Γ ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4 με εύρεση του Σ.Φ. μέσω ενός επεξηγηματικού και τεκμηριωμένου σχήματος.....</i>	<i>87</i>
<i>Εικόνα 40: Λανθασμένη απάντηση μαθήτριας στο Γ ερώτημα, λόγω εσφαλμένης εύρεσης του Σ.Φ.....</i>	<i>88</i>

Πίνακας περιεχομένων

Ευχαριστίες.....	2
Περίληψη.....	3
Abstract	4
Εισαγωγή.....	9
Κεφάλαιο 1^ο: Η Ιστορία της Προοπτικής	12
1.1 Η Τέχνη στην Αρχαιότητα.....	12
1.1.1 Η τέχνη στην Παλαιολιθική και στη Νεολιθική εποχή.....	12
1.1.2 Η τέχνη στη Μεσοποταμία.....	13
1.1.3 Η τέχνη στην Αρχαία Αίγυπτο	15
1.1.4 Η τέχνη στην Αρχαία Ελλάδα	17
1.1.4.1 Κυκλαδικός Πολιτισμός.....	17
1.1.4.2 Μινωικός Πολιτισμός.....	18
1.1.4.3 Μυκηναϊκός πολιτισμός.....	19
1.1.4.4 Η τέχνη κατά τη Γεωμετρική Περίοδο	20
1.1.4.5 Η τέχνη στα πλαίσια της Αρχαϊκής Περιόδου.....	21
1.1.4.6 Η τέχνη στην Κλασική περίοδο.....	22
1.1.4.7 Ελληνιστική περίοδος και τέχνη.....	23
1.1.4.8 Η τέχνη στην Ρωμαϊκή αυτοκρατορία.....	24
1.1.4.9 Η τέχνη στο Βυζάντιο.....	25
1.2 Η αφετηρία της Προοπτικής.....	29
1.2.1 Η συμβολή της Αρχαίας Ελλάδας στην Ανάπτυξη της Προοπτικής	29
1.2.2 Η ανάδυση της Γραμμικής Προοπτικής κατά την Αναγέννηση.....	32
1.3 Η Σημασία του Σημείου Φυγής.....	34
1.4 Οι αλλαγές που έφερε η Γραμμική Προοπτική στην Τέχνη.....	35
1.5 Η έννοια της Προοπτικής στα σχολικά εγχειρίδια της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης	36
Κεφάλαιο 2ο : Αναλογίες	40
2.1 Ιστορία των Αναλογιών-Αναλογικός συλλογισμός	40
2.2 Οι Αναλογίες στα σχολικά εγχειρίδια της Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου	43
2.3 Τι δυσκολεύει τους μαθητές με τις αναλογίες;	45
Κεφάλαιο 3ο : Μαθηματικά και Τέχνη	46
3.1 Η Σύνδεση της Τέχνης με τα Μαθηματικά	46

3.2 Σύνδεση της Προοπτικής με τα Μαθηματικά και τις Αναλογίες.....	48
3.3 Τα οφέλη της σύνδεσης της Τέχνης και των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία	52
ΜΕΡΟΣ Β΄: Η ΕΡΕΥΝΑ	57
Κεφάλαιο 4ο: Μεθοδολογία της έρευνας.....	57
4.1 Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα	57
4.2 Δείγμα της έρευνας.....	57
4.3 Μεθοδολογική προσέγγιση	58
4.4 Διαδικασία συλλογής δεδομένων	59
4.5 Διδακτική διαδικασία	60
Κεφάλαιο 5ο : Αποτελέσματα.....	66
5.1 Pre-test	66
5.2 Φύλλο εργασίας 1 ^ο	71
5.3 Φύλλο εργασίας 2 ^ο	75
5.4 Φύλλο εργασίας 3 ^ο	80
5.5 Φύλλο εργασίας 4 ^ο	82
5.6 Τελικό ερωτηματολόγιο.....	89
Κεφάλαιο 6ο : Συζήτηση	92
Κεφάλαιο 7ο: Περιορισμοί και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	93
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	94
ΕΛΛΗΝΙΚΗ.....	94
ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ	103
ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΕΙΣ ΠΗΓΕΣ:	107
Παρουσίαση σε μορφή power point εικόνων σχετικά με την ιστορία της τέχνης (Προϊστορία- Αναγέννηση)	112
Φύλλο Εργασίας 1: Το Σημείο Φυγής.....	119
Φύλλο εργασίας 2: Δημιουργία σχημάτων με βάση τις κλίμακες	126
Φύλλο εργασίας 3: Εύρεση του Σημείου Φυγής με βάση τη ματιά του ανθρώπου	132
Φύλλο εργασίας 4: Σχεδιάζοντας ένα δωμάτιο με προοπτική ενός σημείου φυγής.....	135
Τελικό ερωτηματολόγιο	138

Εισαγωγή

Η μαθηματική σκέψη αποτελεί ένα από τα βασικότερα θεμέλια διαμόρφωσης του κοινωνικού και πολιτισμικού γίνεσθαι καθώς ήδη από την αρχαιότητα συμβαδίζει και εντάσσεται στις επιστήμες της λογικής και της σκέψης και επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό το ρου της ιστορίας. Ο όρος «μαθηματικά» έχει τις ρίζες του στην αρχαία ελληνική λέξη μάθημα<μανθάνω και αφορά τη γνώση και εμπειρία που αποκτάται μέσω ενός δομημένου πεδίου. Όπως τονίζει και η Σαπλαούρα (2021:30), *«τα μαθηματικά συνδέονται άμεσα με τον ανθρώπινο πολιτισμό, καθώς υφίστανται μια λογική συνέχεια και αλληλουχία μεταξύ των σκέψεων και των δράσεων των ανθρώπων».*

Στο μαθηματικό πλαίσιο περιλαμβάνονται τόσο συνθήκες παρατήρησης, μέτρησης και υπολογισμού όσο και στοιχεία που σχετίζονται με ορισμούς, κανόνες, τύπους και αξιώματα. Τα μαθηματικά αποτελούν ένα καθημερινό βίωμα για τον άνθρωπο, χρησιμεύουν στην επίλυση προβλημάτων που ανακύπτουν στην καθημερινή ζωή και περιλαμβάνονται στη φαρέτρα του ατόμου ως ένα αξιοσημείωτο βοηθητικό εργαλείο. Ακόμη, τα μαθηματικά αποτελούν ένα διεθνή κώδικα που αναγνωρίζεται σε κάθε σημείο της γης και επιτρέπει την επικοινωνία των ατόμων ακόμη και διαφορετικής γλωσσικής “καταγωγής”. Όπως επισημαίνει και ο Freudendahl (1983, όπως βρέθηκε σε Πανάγου, Νανά & Αναμουρλόγλου, 2018) τα νοητά μαθηματικά προϊόντα, όπως οι αριθμοί και οι πράξεις αν και προσεγγίζονται αρχικά μέσω απλών πρακτικών διαδικασιών, κρίνεται αναγκαία η μετατροπή τους σε νοητικά αντικείμενα, με σκοπό την βέλτιστη αντίληψή τους.

Κομβικό σημείο στην ιστορία των μαθηματικών αποτέλεσε το έργο του αρχαίου Έλληνα Ευκλείδη «Στοιχεία» που επηρέασαν τη μαθηματική σκέψη και κυριάρχησαν στον χώρο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας για περίπου 2 χιλιάδες χρόνια. Από τον 19ο αιώνα και έπειτα συναντώνται και μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, μία από τις οποίες είναι και η Προβολική γεωμετρία. Αφορμή της εμφάνισης του συγκεκριμένου είδους αποτέλεσε η ανάγκη του ανθρώπου να απεικονίσει αντικείμενα του χώρου σε δισδιάστατο ζωγραφικό πίνακα, με στόχο την αίσθηση του βάθους. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο οι Αναγεννησιακοί ζωγράφοι στράφηκαν στο πεδίο των μαθηματικών και ειδικότερα στον τομέα της προοπτικής, μέσω της οποίας δινόταν η

δυνατότητα για τη «δημιουργία της αίσθησης τριών διαστάσεων στο επίπεδο» (Μαυρίδου, 2021:5).

Εάν θέλαμε να προσδιορίσουμε την έννοια της προοπτικής θα λέγαμε ότι πρόκειται για την προσπάθεια του ανθρώπου να αποτυπώσει το βάθος και την τρίτη διάσταση. Ήδη από την αρχαιότητα υπήρξε έντονο το ενδιαφέρον για την απεικόνιση του βάθους σε εικαστικά και θεατρικά έργα με αποκορύφωμα την εξέλιξη του προοπτικού συστήματος κατά την Αναγεννησιακή περίοδο. Όσον αφορά τη σύνδεση της προοπτικής με τις αναλογίες θα πρέπει να λεχθεί πως ανάγεται στην αρχαία ελληνική εποχή. Ειδικότερα, η αναλογία συνδέθηκε με την μαθηματική έννοια του λόγου, της τάξης και της ομορφιάς και μέχρι την Αναγέννηση οι καλλιτέχνες βασίζονταν στις σχέσεις των αριθμών και τη γεωμετρία για την επιτυχία του έργου τους.

Η σύνδεση της τέχνης και των μαθηματικών αποτέλεσε το εναρκτήριο έναυσμα για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας. Το θέμα που πραγματεύεται είναι πρωτότυπο και ενδιαφέρον καθώς αφορά τη συσχέτιση των Εικαστικών με τα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η σύνδεση της Προοπτικής με τις Αναλογίες στα πλαίσια ενός εκπαιδευτικού σεναρίου, όπου οι μαθητές μιας Στ' τάξης θα κληθούν να εφαρμόσουν τις γνώσεις που έχουν για τις Αναλογίες, έτσι ώστε να δημιουργήσουν σχήματα υπό κλίμακα καθώς και γραμμικό προοπτικό σχέδιο με ένα σημείο φυγής.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας που θα διερευνηθούν κατά τη διάρκεια της διατριβής είναι τα εξής:

- A) Δύνανται οι μαθητές να εντοπίζουν το σημείο φυγής και τις συγκλίνουσες γραμμές σε έργα τέχνης και φωτογραφίες που τους δίνονται;
- B) Είναι σε θέση οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις γνώσεις που έχουν για τις Αναλογίες, ώστε να βρίσκουν τις διαστάσεις ενός σχήματος που τους ζητείται υπό κλίμακα;
- Γ) Είναι σε θέση οι μαθητές να δημιουργήσουν ένα γραμμικό σχέδιο προοπτικής με ένα σημείο φυγής αξιοποιώντας τις Αναλογίες και την έννοια της κλίμακας;

Η διάρθρωση της εργασίας ακολουθεί την κάτωθι μορφή:

Το Α' Μέρος αποτελεί το θεωρητικό τμήμα της εργασίας, στο οποίο περιλαμβάνονται βασικοί ορισμοί, επιστημονικές θέσεις και απόψεις για τα υπό μελέτη ζητήματα. Πιο αναλυτικά, στο 1^ο Κεφάλαιο (Η Ιστορία της Προοπτικής) γίνεται λόγος για την εμφάνιση της προοπτικής και την εξέλιξη της εικαστικής τέχνης στον χρόνο. Μέσα από μια σύντομη περιήγηση στη διαδρομή της τέχνης, ο αναγνώστης θα έρθει σε επαφή με ποικίλες ιστορικές περιόδους και θα γνωρίσει το εκάστοτε καλλιτεχνικό πλαίσιο. Το 2^ο Κεφάλαιο (Ιστορία των Αναλογιών-Αναλογικός συλλογισμός) πραγματεύεται την πορεία των αναλογιών στη διάρκεια των χρόνων και την αξία του αναλογικού συλλογισμού για την αναπτυξιακή εξέλιξη του ατόμου. Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται και η παρουσία των αναλογιών στα σχολικά εγχειρίδια της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και οι παράγοντες που αποτυπώνουν τη δυσκολία των μαθητών να ασχοληθούν με αναλογικές δραστηριότητες. Στο 3^ο Κεφάλαιο (Μαθηματικά και Τέχνη) παρουσιάζονται τα σημεία σύγκλισης των μαθηματικών με την τέχνη όπως και της προοπτικής με τις αναλογίες και καταδεικνύονται τα οφέλη της σύνδεσής τους στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Το Β' Μέρος της εργασίας αφορά την έρευνα που διεξήχθη στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος από την ερευνήτρια σε μια ΣΤ' τάξη ενός Δημοτικού σχολείου με την μορφή ενός εκπαιδευτικού σεναρίου. Στο 4^ο Κεφάλαιο (Μεθοδολογία της έρευνας) τονίζεται ο σκοπός, η μεθοδολογία και η διαδικασία ανάλυσης των αποτελεσμάτων της έρευνας και στο 5^ο Κεφάλαιο (Αποτελέσματα) προβάλλονται τα αποτελέσματα της άτυπης και τυπικής αξιολόγησης που πραγματοποιήθηκε για τη διερεύνηση της σχέσης των μαθητών με τις έννοιες των αναλογιών και της προοπτικής. Στο 6^ο Κεφάλαιο (Συζήτηση) προβάλλονται τα συμπεράσματα και η αποτίμηση της ερευνητικής διαδικασίας και ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΜΕΡΟΣ Α΄: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 1^ο: Η Ιστορία της Προοπτικής

1.1 Η Τέχνη στην Αρχαιότητα

1.1.1 Η τέχνη στην Παλαιολιθική και στη Νεολιθική εποχή

Η Τέχνη συνοδεύει τον άνθρωπο για περισσότερα από 45.000 χρόνια στην πορεία του επάνω στη Γη. Τα πρώτα δείγματα ζωγραφικής απεικόνισης εντοπίζονται σε σπήλαια με χαρακτήρα κυρίως επικουρικό στην επιβίωση των ανθρώπων εκείνης της εποχής. Οι πρώτες βραχογραφίες που έχουν τεκμηριωθεί έως σήμερα είναι αυτές της Ινδονησίας καθώς και της Ιβηρικής Χερσονήσου, ενώ χρονολογικά ακολουθούν της Γαλλίας και της Ιταλίας. Η θεματολογία των βραχογραφιών σχετίζονται στενά με την επιβίωση των ανθρώπων και τα ζώα και οι σκηνές κυνηγιού είναι οι επικρατέστερες αναπαραστάσεις κατά την Ανώτερη Παλαιολιθική Εποχή (32.000 π. Χ. ~ 10.000 π. Χ.). Η σχεδιάσή τους επιχειρεί να ομοιάσει στην πραγματική μορφή των αντικειμένων, ενώ οι ανθρώπινες φιγούρες εμφανίζονται πιο σπάνια και με πιο απλοϊκά σχέδια (Δημόπουλος, 2019). Ιστορικά απομεινάρια αυτής της περιόδου είναι και κόκκαλα μαμούθ και άλλων ζώων όπως και πέτρες που φέρουν ίχνη ζωγραφικής (Ζιρώ, Μερτζάνη, Πετρίδου & Σιγάλας, 2003).

Με την πάροδο του χρόνου και τη μετάβαση στην Μεσολιθική Εποχή (10.000 π. Χ. ~ 7.000 π. Χ.) σημειώνεται μείωση στον αριθμό των βραχογραφιών, ενώ διαφοροποιείται και ο χώρος που αυτές πραγματοποιούνται. Τα βαθύτερα μέρη των σπηλαίων που επικρατούσαν στην Ανώτερη Παλαιολιθική εποχή αντικαθίστανται από πιο ανοιχτά μέρη, όπως μικρότερα σπήλαια και βραχοσκεπές. Σε αυτή την χρονική περίοδο οι βραχογραφίες απομακρύνονται από την αναπαράσταση της φύσης και προσανατολίζονται σε θέματα γεωμετρικά, γραμμικά και συμβολικά (Δημόπουλος, 2019).

Η ακόλουθη Νεολιθική εποχή (7.000 π. Χ. ~ 3.500 π. Χ.) χαρακτηρίζεται από την επαναφορά των βραχογραφιών σε σημαντικό στοιχείο της τέχνης εκείνης της περιόδου με την απεικόνισή τους να πραγματοποιείται τόσο σε αίθριους χώρους,

όπως σε κεντρικά περάσματα δρόμων όσο και σε σπηλιές, βραχοσκεπές και μνημεία δημιουργημένα από μεγάλους λίθους. Τα σχέδια των βραχογραφιών χαρακτηρίζονται από τις γραμμές και τις καμπύλες, ενώ δεν λείπουν και οι ζωικές μορφές καθώς και οι ανθρώπινες φιγούρες. Ειδικότερα, οι τελευταίες εμφανίζουν πιο σύνθετες αναπαραστάσεις με τις βραχογραφίες να διαθέτουν σκηνές κυνηγιού, πολεμικές συρράξεις, πολεμικά εργαλεία, συναθροίσεις καθώς και δραστηριότητες του καθημερινού βίου, όπως το μάζεμα του μελιού και η αναρρίχηση.

Οι ζωγραφικές απεικονίσεις φαίνεται πως σε κάποιες περιπτώσεις διακρίνονται από ένα συμβολικό χαρακτήρα με τις σκηνές κυνηγιού, κυρίως μεγάλων θηραμάτων να προσδίδουν στους άνδρες εκείνης της εποχής κύρος και αναγνώριση από την κοινότητα. Την ίδια χρονική περίοδο σε βραχογραφίες της Βόρειας Ιταλίας συναντώνται δραστηριότητες, όπως η γεωργία και η κτηνοτροφία, ενώ εμφανίζονται και φιγούρες σε στάση προσευχής (Δημόπουλος, 2019). Δημιουργούνται πιο συστηματικά οργανωμένοι οικισμοί, ενώ αναπτύσσεται και η κεραμική τέχνη με χαρακτηριστικό παράδειγμα στον Ελλαδικό χώρο να αποτελούν οι νεολιθικοί οικισμοί του Σέσκλου και του Διμηνίου (Ζιρώ κ.ά., 2003).

Τα κεραμικά αντικείμενα, όπως μικρά αγγαλματίδια που εμφανίζονται κατά τη Νεολιθική Εποχή προσδίδουν μια τρισδιάστατη άποψη των δραστηριοτήτων και των πεποιθήσεων των ανθρώπων εκείνης της εποχής. Όμως, η τρισδιάστατη απεικόνιση και η έννοια του βάθους φαίνεται πως δεν απαντάται συχνά στις βραχογραφίες, με ελάχιστες εξαιρέσεις όπως οι βραχογραφίες της περιοχής Βαθύ της Αστυπάλαιας, όπου απεικονίζονται πλοία παράλληλα μεταξύ τους και σε διάταξη κάθετη (Δημόπουλος, 2019).

1.1.2 Η τέχνη στη Μεσοποταμία

Κατά τη διάρκεια της Νεολιθικής εποχής, περίπου το 5.000 π. Χ., εμφανίζονται οι πρώτοι κάτοικοι στην Μεσοποταμία, οι οποίοι ήταν Σουμέριοι αγρότες (Ζιρώ κ.ά., 2003). Την περίοδο αυτή εμφανίζονται στην ίδια περιοχή και για πρώτη φορά, σχέδια ζωγραφικής επάνω στα αγγεία. Πρόκειται για ένα χαρακτηριστικό που συμβάλλει στη διάκριση των ομάδων που έζησαν ή μετακινήθηκαν στην περιοχή αυτή σε σχέση με άλλες. Τα μοτίβα αποτελούνται

κυρίως από γεωμετρικά σχέδια που μοιάζουν με την σύγχρονη υφαντική τέχνη, ενώ υπάρχουν και αγγεία που απεικονίζουν μορφές ζώων και ανθρώπων (Lloyd, 1999).

Η συγκεκριμένη φυλή φαίνεται πως διακρινόταν αρκετά για την ευφυΐα της, με αποκορύφωμα την ίδρυση των πρώτων πόλεων και την ανακάλυψη της γραφής, το 3100 π. Χ. . Χαρακτηριστικό παράδειγμα της ίδιας περιόδου αποτελούν τα μνημειακά αρχιτεκτονικά οικοδομήματα που κατασκεύασαν οι Σουμερίοι, τα οποία χρησιμοποιούνταν για θρησκευτικούς λόγους. Τα κτήρια αυτά στο εσωτερικό τους εμπεριείχαν φιγούρες ζώων από χαλκό καθώς και ξύλινες στήλες με σχέδια είτε από χρωματιστές πέτρες είτε από κοχύλια. Στους τοίχους των ιερών τους τοποθετούσαν πέτρινες πλάκες στις οποίες απεικονίζονταν, σε οριζόντιες σειρές, γεγονότα σημαντικής βαρύτητας, όπως εορτές ή δραστηριότητες ανοικοδόμησης κτηρίων.

Εξέχουσας σημασίας αποτελεί μία στήλη που εντοπίστηκε στο σημερινό Ιράκ που ονομάζεται «Στήλη των Γυπών» στην οποία η απεικόνιση των προσώπων εξαρτάται από την βαρύτητα που έδιναν οι καλλιτέχνες στο κάθε πρόσωπο. Για το λόγο αυτό ο προστάτης θεός αποδίδεται σε μεγαλύτερο μέγεθος από ότι ο βασιλιάς, ενώ οι στρατιώτες εμφανίζονται όλοι με τα ίδια χαρακτηριστικά. Οι ανθρώπινες μορφές απεικονίζονται με πλάγια οπτική γωνία στο πρόσωπο και τα πόδια και με μετωπική στο υπόλοιπο σώμα (Lloyd, 1999).

Ένα σημαντικό ιστορικό στοιχείο για τη ζωή, αλλά και τον τρόπο ζωγραφικής των αρχαίων Σουμερίων αποτελεί και η στήλη «Πρότυπο της Ουρ» που βρέθηκε στο νεκροταφείο της αρχαίας πόλης Ουρ. Η στήλη μεταξύ άλλων εμπεριέχει δύο ένθετες πλάκες από όστρακα στις οποίες είναι αποτυπωμένες σκηνές πολέμου στη μία και ειρήνης στην άλλη. Σε κάθε πλάκα υπάρχουν τρεις οριζόντιες ζωγραφικές απεικονίσεις στις οποίες η σπουδαιότητα των εικονιζόμενων προσώπων τοποθετείται με φθίνουσα σειρά, δηλαδή τα σημαντικότερα πρόσωπα τοποθετούνται στην πρώτη σειρά και στις επόμενες δύο στήλες οι υπηρέτες ή οι αιχμάλωτοι. Μια ακόμα πρωτοποριακή χρήση των Σουμερίων είναι εκείνη των κυλινδρικών σφραγιδολίθων, δηλαδή πέτρινων σφραγίδων με εγχάρακτες απεικονίσεις άγριων ζώων, ημίθεων και υβριδικών πλασμάτων, οι οποίες κυλιούνταν σε πηλό με στόχο να αποτυπωθεί το σχέδιο (Lloyd, 1999).

Έπειτα από την περίοδο των Σουμερίων ακολούθησε η εποχή των Ασσύριων, η οποία γνώρισε άνθηση ως προς την Τέχνη περίπου τον 9^ο αιώνα π. Χ. Τα ανάκτορα

των Ασσύριων βασιλιάδων διακατέχονται από την τάση επίδειξης των κατόχων τους καθώς οι πύλες τους διακοσμούνται με τεράστια γλυπτά, ενώ οι εσωτερικές αίθουσες του παλατιού με πλάκες από πέτρα διακοσμημένες με ανάγλυφες παραστάσεις. Εξάιρεση στους θαλάμους του παλατιού αποτελούσε η αίθουσα του θρόνου, όπου οι τοίχοι ήταν διακοσμημένοι με την τεχνική της τοιχογραφίας. Ένα συχνό θέμα σε εικονογραφικές εγχάρακτες παραστάσεις αποτελούσε η απεικόνιση των κατορθωμάτων του βασιλιά σε μάχες έχοντας ως στόχο την εξύμνησή του. Σε αυτές τις αναπαραστάσεις οι άνδρες και τα ζώα είναι χαραγμένα με λεπτομέρεια και παραστατικότητα και παρόλο που οι Ασσύριοι δεν είχαν υπόψιν τους τις αρχές της προοπτικής που πρότειναν αργότερα οι Αρχαίοι Έλληνες, στις αναπαραστάσεις τους έδειξαν προσοχή σχετικά με τις μορφές στον χώρο και χρησιμοποίησαν τεχνάσματα για να υποδείξουν την απόσταση (Lloyd,1999).

1.1.3 Η τέχνη στην Αρχαία Αίγυπτο

Οι πρώτοι κάτοικοι της Αιγύπτου, οι οποίοι ήταν γεωργοί, εγκαταστάθηκαν το 5000 π. Χ. στην περιοχή κοντά στον ποταμό Νείλο και ιδρύθηκαν δύο βασιλεία, της Άνω και της Κάτω Αιγύπτου. Η ένωση των βασιλείων κάτω από την κυριαρχία ενός ηγεμόνα επήλθε το 3100 π. Χ., με την αιγυπτιακή τέχνη να φτάνει στον ύψιστο βαθμό της 400 χρόνια αργότερα με την δημιουργία των πυραμίδων της Γκίζας (Ζιρώ κ.ά., 2003).

Η τέχνη της Αιγύπτου περιλαμβάνει πλήθος εντυπωσιακών κατασκευών σε διάφορους τομείς, όπως στην αρχιτεκτονική, στη ζωγραφική, στη γλυπτική, στην υφαντική και στην δημιουργία κοσμημάτων και αγγείων. Καθοριστικό ρόλο στην τέχνη διαδραμάτισαν οι Φαραώ καθώς για αυτούς δημιουργήθηκαν και διακοσμήθηκαν τα τεραστίων διαστάσεων αιγυπτιακά έργα, όπως οι πυραμίδες. Μέσα στις πυραμίδες, όπου τοποθετούνταν το νεκρό σώμα του Φαραώ, υπήρχαν ανάγλυφες και εικαστικές αναπαραστάσεις με σκοπό να τον βοηθήσουν να μεταβεί στην άλλη ζωή. Η ζωγραφική χαρακτηριζόταν από συγκεκριμένους κανόνες απεικόνισης των μορφών και των τοπίων. Τα περιγράμματα ήταν σαφή και ξεκάθαρα και τα δημιουργήματα τελειοποιούνταν με την προσθήκη χρωμάτων (Ζιρώ κ.ά.,

2003). Αν και κυριαρχούσαν τα σαφή περιγράμματα, τα έργα δεν στερούνταν της φυσικότητας και της ζωντάνιας (Μάλαμα, 2011).

Ένα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της αιγυπτιακής ζωγραφικής αποτέλεσε το μεγάλο ενδιαφέρον των καλλιτεχνών για την αναπαράσταση των ανθρώπινων μορφών και των τοπίων. Η ζωγραφική απεικόνιση δεν τελούνταν με βάση την οπτική γωνία του καλλιτέχνη, αλλά με βάση τη γνώση που είχε για τα εικονιζόμενα στοιχεία. Για το λόγο αυτό το ανθρώπινο σώμα απεικονίζονταν από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Το μάτι και το στέρνο απεικονίζονταν μετωπικά, ενώ το πρόσωπο και το υπόλοιπο σώμα από τα πλάγια (Ζιρώ κ.ά., 2003). Όσον αφορά τα τοπία ακολουθούσαν ο ίδιος τρόπος απεικόνισης, δηλαδή για κάθε στοιχείο επιλέγονταν η οπτική γωνία που ήταν η πιο χαρακτηριστική για αυτό. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί και μία ζωγραφική αναπαράσταση σε τοίχους ενός τάφου στις Θήβες, όπου η λίμνη απεικονίζεται σε κάτοψη, τα δέντρα πλάγια, τα ψάρια μετωπικά και σε μεγαλύτερη κλίμακα από την κανονική τους μορφή και ο άνθρωπος σε μικρότερη κλίμακα από ότι θα έπρεπε (Μάλαμα, 2011). Για την επεξήγηση των πληροφοριών που ήταν απαραίτητες για το έργο χρησιμοποιούνταν τα ιερογλυφικά (Ζιρώ κ.ά., 2003), ενώ χρησιμοποιούνταν και συγκεκριμένοι κανόνες για την απεικόνιση του βασιλιά, των γυναικείων και ανδρικών μορφών και των μελών των χαμηλότερων κοινωνικών στρωμάτων (Μάλαμα, 2011).

Ο καλλιτέχνης της Αιγύπτου όφειλε να ακολουθεί τους κανόνες που είχαν θεσπισθεί για την απεικόνιση των μορφών και της νεκρής φύσης και δεν καλούνταν να δημιουργήσει κάτι πρωτότυπο. Καταξιωμένος στη δουλειά του ήταν ο καλλιτέχνης εκείνος που ακολουθούσε την πορεία και τον τρόπο απεικόνισης που είχαν ακολουθήσει και οι προκάτοχοί του. Επακόλουθο ήταν η αιγυπτιακή τέχνη να παραμείνει σταθερή στην εικαστική απόδοσή της για περίπου χίλια χρόνια. Εξαίρεση αποτέλεσαν τα χρόνια βασιλείας δύο Φαραώ, του Αμένωφι του Δ' και του Τουταγχαμών. Από τη μία πλευρά ο Αμένωφι Δ' θέλησε να καταργήσει τη λατρεία όλων των θεοτήτων εκτός από μία, του Ατόν. Από την άλλη πλευρά ο Τουταγχαμών θέσπισε ζωγραφικές αναπαραστάσεις που επιδεικνύουν το βασιλικό ζεύγος σε πιο καθημερινές απεικονίσεις και που επιτρέπουν την περίπου ισότιμη παρουσίαση του Φαραώ και της βασίλισσας (Μάλαμα, 2011). Συμπερασματικά, γίνεται αντιληπτό πως στην Αρχαία Αίγυπτο σημασία δεν είχε η ρεαλιστική απεικόνιση και η οπτική γωνία

από την οποία ήταν ορατά τα αντικείμενα, αλλά η απεικόνιση πραγματοποιούνταν με βάση τη γνώση και τη σημασία που απέδιδαν σε αυτά.

1.1.4 Η τέχνη στην Αρχαία Ελλάδα

Η αρχαία ελληνική τέχνη διήλθε πολλά και διαφορετικά στάδια στη τριςχιλιετή διάρκειά της. Έχοντας ως αφετηρία την τέχνη που αναπτύχθηκε στα νησιά των Κυκλάδων κατά το 3200 π. Χ. η αρχαία ελληνική τέχνη ολοκληρώθηκε το 31 π. Χ. με την Ελληνιστική Τέχνη (Ζιρώ κ.ά., 2003· Esaak, 2019). Αρκετοί καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες εφύρσαν κάποιες εξελιγμένες για την εποχή τεχνικές, ώστε να δείχνουν τέλεια οπτικά τα δημιουργήματά τους. Όσον αφορά την αρχιτεκτονική των κτιρίων και των ναών κατασκεύαζαν οριζόντια επίπεδα με ανοδικό σχήμα σε μορφή U και στήλες που ήταν πιο ογκώδεις στη μέση παρά στις άκρες. Χωρίς αυτές τις καινοτομίες τα κτίρια θα έμοιαζαν να πέφτουν και θα υστερούσαν σε μεγαλοπρέπεια. Με βάση τη Μαυρέλλη (2010: 16), *«τα καλύτερα έργα τέχνης είναι αυτά που προσεγγίζουν την εξωτερική πραγματικότητα σε βαθμό που η διαχωριστική γραμμή μεταξύ τέχνης και πραγματικής ζωής ελαχιστοποιείται ή και απαλείφεται. Πιο επιτυχημένοι καλλιτέχνες θεωρούνταν στην αρχαιότητα εκείνοι που κατασκεύαζαν έργα τέχνης που ήταν εξαιρετικά αληθοφανή»*.

1.1.4.1 Κυκλαδικός Πολιτισμός

Τα νησιά των Κυκλάδων ξεκίνησαν να κατοικούνται προς το τέλος της πέμπτης χιλιετίας π. Χ. και λίγα χρόνια αργότερα εμφανίζονται τα πρώτα δείγματα τέχνης του νέου αυτού πολιτισμού, ο οποίος ονομάστηκε κυκλαδικός. Η πρώτη φάση του κυκλαδικού πολιτισμού ονομάστηκε πρωτοκυκλαδική περίοδος και διήρκεσε από το 3200 έως το 2000 π. Χ.. Σε αυτή τη φάση υπάρχει ανάπτυξη των πρώτων εργαλείων, όπως βέλη, δρεπάνια και γουδιά, με την χρήση υλικών από τα ηφαίστεια των νησιών, ενώ σημειώνεται και ανάπτυξη της γλυπτικής εξαιτίας της πληθώρας του μαρμάρου σε νησιά, όπως η Πάρος και η Νάξος (Ζιρώ κ.ά., 2003).

Η μεγάλη άνθηση του Κυκλαδικού πολιτισμού, ωστόσο, επήλθε κατά την μεσοκυκλαδική περίοδο (2000-1600 π. Χ.) με την δημιουργία ισχυρών πόλεων, όπως το Ακρωτήρι στη Σαντορίνη και η Φυλακωπή στη Μήλο. Σε αυτή την περίοδο όπως και την υστεροκυκλαδική (1600-1100 π. Χ.) που ακολούθησε, το είδος τέχνης που αναπτύχθηκε πιο πολύ είναι εκείνη της ζωγραφικής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι τοιχογραφίες που βρέθηκαν στο Ακρωτήρι της Θήρας, οι οποίες απεικονίζουν τόσο δραστηριότητες της καθημερινής ζωής των κατοίκων όσο και εξωτικά τοπία από τα ταξίδια των Κυκλαδιτών (Ζιρώ κ.ά., 2003).

Η απεικόνιση των ανθρώπινων μορφών φαίνεται πως ακολουθεί τόσο τα πρότυπα απεικόνισης των Αιγυπτίων με το μάτι και τα πόδια σε πλάγια απεικόνιση και το υπόλοιπο σώμα κατά μέτωπον, όσο και πιο ελεύθερες απεικονίσεις στις οποίες ολόκληρο το σώμα και το πρόσωπο αποδίδεται πλάγια. Σύμφωνα με την Αγγέλη (2018), ο καλλιτέχνης της τοιχογραφίας «Κροκοσυλλέκτριες» προσπαθεί να αποδώσει προοπτική στις μορφές και ειδικότερα στις στάσεις του κορμού και του χεριού. Όπως επισημαίνει η ίδια, οι καλλιτέχνες της Θήρας ζωγραφίζουν τόσο αφηρημένα όσο και γεωμετρικά σχέδια καθώς και έμβια όντα, θέματα τα οποία δανείζονται από τους Μινωίτες καλλιτέχνες.

Με την έκρηξη του ηφαιστείου της Θήρας περίπου το 1600 π. Χ. ολοκληρώνεται η μεσοκυκλαδική περίοδος και ξεκινάει η υστεροκυκλαδική. Σε αυτή την περίοδο όπως και στην προηγούμενη υπάρχει σημαντική ανάπτυξη της ζωγραφικής. Το κέντρο βάρους του κυκλαδικού πολιτισμού μετατοπίζεται από τη Θήρα στα άλλα νησιά των Κυκλάδων, όπως η Πάρος, η Μήλος και η Νάξος. Η ανάπτυξη του πολιτισμού των Μυκηνών επηρέασε τον κυκλαδικό πολιτισμό, χωρίς ωστόσο ο δεύτερος να χάσει το δημιουργικό χαρακτήρα του (Ζιρώ κ.ά., 2003).

1.1.4.2 Μινωικός Πολιτισμός

Ο μινωικός πολιτισμός αποτέλεσε τον πολιτισμό της Κρήτης για περίπου δύο χιλιετίες (3000-1100 π. Χ.). Το όνομά του πολιτισμού αυτού προήλθε από τον αρχαιολόγο Έβανς, ο οποίος και τον ανακάλυψε και συνδέεται άμεσα με τον μυθικό βασιλιά Μίνωα. Η Κρήτη αποτελούσε την μεγαλύτερη θαλάσσια δύναμη της εποχής

εκείνης, κυριαρχώντας τόσο στο Αιγαίο όσο και στη Μεσόγειο θάλασσα (Ζιρώ κ.ά., 2003). Η ανεπτυγμένη ναυτιλιακή δραστηριότητα των Μινωιτών ήταν αυτή που τους έφερε σε επαφή και με τους Αιγυπτίους με τους οποίους αντάλλαξαν πολιτισμικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα τις ζωγραφικές τεχνολογίες (Μάλαμα, 2011).

Η μινωική τέχνη αν και έχει αρκετά κοινά σημεία με άλλους πολιτισμούς, όπως τον αιγυπτιακό, τον κυκλαδίτικο και της ηπειρωτικής Ελλάδας, ξεχωρίζει από αυτούς. Στις τέχνες της Μινωικής Κρήτης απαντώνται δραστηριότητες που δεν ήταν συχνές σε άλλες περιοχές εκείνης της περιόδου, όπως η ελεφαντουργία, η λιθοτεχνία, η κεραμική και η χρυσοχοΐα. Επιπλέον η μινωική ζωγραφική παρόλο που ομοιάζε με την αιγυπτιακή και την τέχνη της Μεσοποταμίας διέφερε από αυτές τόσο στην κατασκευή όσο και στην αποτύπωση των μορφών. Σε σχέση με τον τρόπο κατασκευής, οι καλλιτέχνες της Αιγύπτου ζωγράφιζαν τις εικαστικές τους αναπαραστάσεις πάνω σε στεγνή επιφάνεια, ενώ οι Μινωίτες σε υγρή επιφάνεια γεγονός που απαιτούσε μεγαλύτερη επιδεξιότητα από πλευράς των καλλιτεχνών.

Σχετικά με την αποτύπωση των μορφών ο μινωικός πολιτισμός παρέπεμπε στον αιγυπτιακό και τον πολιτισμό της Μεσοποταμίας, καθώς οι ανθρώπινες φιγούρες απεικονίζονταν με τα μάτια σε μετωπική θέση ως προς τον θεατή σε αντίθεση με το πρόσωπο που ήταν σε πλάγια μορφή. Ωστόσο, οι καλλιτέχνες της Κρήτης πρόσθεταν σε κάποιες γυναικείες μορφές στοιχεία όπως μακριές μπούκλες, χαμογελαστό πρόσωπο και περήφανο παράστημα που τις έκαναν να διαφέρουν από τις αιγυπτιακές φιγούρες. Η γεωμετρικότητα και οι γωνίες που χαρακτήριζαν τις ανθρώπινες μορφές της Αιγύπτου στην μινωική τέχνη αντικαθίστανται από την πλαστικότητα και την ζωντάνια (Ζιρώ κ. ά., 2003).

1.1.4.3 Μυκηναϊκός πολιτισμός

Στην ηπειρωτική Ελλάδα ο πολιτισμός που κυριάρχησε ήταν ο μυκηναϊκός, ο οποίος πήρε το όνομά του από την πόλη των Μυκηνών. Η εξάπλωση του μυκηναϊκού πολιτισμού πέρα από τα όρια της ηπειρωτικής Ελλάδας τοποθετείται περίπου στο 1500 π. Χ. με τον πολιτισμό να διαδίδεται τόσο στο Αιγαίο όσο και στη Μεσόγειο και

τη Μέση Ανατολή. Μετά την έκρηξη του ηφαιστείου της Θήρας οι Αχαιοί, εγκαθίστανται στην μινωική Κρήτη.

Ο μυκηναϊκός πολιτισμός ανέπτυξε πλούσια πολιτισμική ιστορία με διάφορες μορφές τέχνης να επηρεάζουν και άλλους λαούς της Μεσογείου. Η μυκηναϊκή τέχνη επηρεάστηκε από την μινωική, χωρίς ωστόσο η πρώτη να αποτελέσει αντίγραφο της δεύτερης. Ζωγραφικές αναπαραστάσεις που έχουν ανακαλυφθεί από τον μυκηναϊκό πολιτισμό αποκαλύπτουν την επίδραση που είχε ο μινωικός πολιτισμός σε αυτόν, καθώς οι ανθρώπινες μορφές απεικονίζονται μετωπικά ως προς το μάτι και πλάγια ως προς το πρόσωπο. Ωστόσο, οι μυκηναϊκές ζωγραφιές διακρίνονται από μεγάλη παραστατικότητα και ζωντάνια, ενώ είναι αξιοσημείωτο και το πλήθος των λεπτομερειών που τις χαρακτηρίζει (Ζιρώ κ. ά., 2003).

Ένα ακόμα παράδειγμα της μυκηναϊκής τέχνης αποτελούν ορισμένες μεταλλικές λεπίδες οι οποίες έχουν ανευρεθεί και φέρουν αναπαραστάσεις ζώων, φυτών και κυνηγητικές σκηνές. Τα σχέδια των λεπίδων αυτών παρουσιάζουν φυσικότητα και ζωντάνια, ενώ είναι αξιοπρόσεκτο πως οι φιγούρες που απεικονίζονται ακολουθούν το σχήμα της λεπίδας και τα μεγέθη τους προσαρμόζονται ανάλογα με το πλάτος της (Ζιρώ κ.ά., 2003).

Ο πολιτισμός των Μυκηνών έφτασε στο ναδίρ το 1100 π. Χ. με την κάθοδο των Δωριέων (Ζιρώ κ.ά., 2003). Με την εισβολή αυτή η ελληνική επικράτεια εισέρχεται στους λεγόμενους «Σκοτεινούς Αιώνες» καθώς απομονώνεται από την υπόλοιπη Μεσόγειο και ο πλούτος της πολιτισμικής παράδοσης των προηγούμενων αιώνων εξαφανίζεται (Gondek, 2016).

1.1.4.4 Η τέχνη κατά τη Γεωμετρική Περίοδο

Οι χρόνοι που ακολούθησαν την καταστροφή του Μυκηναϊκού πολιτισμού εκτός από «Σκοτεινοί Αιώνες» ονομάστηκαν και «Γεωμετρικοί Χρόνοι», λόγω των γεωμετρικών σχημάτων που βρέθηκαν αποτυπωμένα επάνω σε αγγεία της εποχής εκείνης. Οι αμφορείς αποτελούν τα πιο χαρακτηριστικά δείγματα της περιόδου αυτής, και συναντώνται κυρίως ως «σημάδι» αναγνώρισης τάφων. Ακολουθούν τα ειδώλια τα οποία όπως και οι αμφορείς απεικονίζουν τις ανθρώπινες μορφές με πιο

γεωμετρικά σχήματα. Συγκεκριμένα, τα μέλη του σώματος διαφαίνονται σαν τρίγωνα ή ράβδοι, το κεφάλι σαν ένας κύκλος και οι κνήμες και οι μηροί ως ευθείες γραμμές (Boardman, 1980 όπως βρέθηκε σε Κακκαβά, 2019).

Γεωμετρική αναπαράσταση εμφανίζουν και τα ειδώλια που αναπαριστούν ζώα, με το σώμα των ζώων να έχει κυλινδρικό σχήμα, ο λαιμός να είναι επίπεδος και τα άκρα να έχουν τριγωνικό σχήμα. Γίνεται επομένως αντιληπτό πως οι καλλιτέχνες της Γεωμετρικής Περιόδου δεν επιδιώκουν τη ρεαλιστική απόδοση των μορφών, αλλά στοχεύουν σε πιο σχηματικές αναπαραστάσεις. Οι φιγούρες, όπως και σε προηγούμενες περιόδους της Αρχαίας Ελληνικής Τέχνης, απεικονίζονται με διαφορετικές οπτικές γωνίες για τα επιμέρους τμήματα του σώματος. Η περίοδος αυτή ολοκληρώνεται περί το 800 π. Χ., ενώ σύντομα αρχίζουν να εμφανίζονται νέες τεχνολογίες στην Τέχνη εξαιτίας και των επιρροών από άλλους πολιτισμούς της εποχής εκείνης («Η Τέχνη των Ιστορικών Χρόνων», χ.χ.).

1.1.4.5 Η τέχνη στα πλαίσια της Αρχαϊκής Περιόδου

Στον ελλαδικό χώρο, η Αρχαϊκή εποχή (800 - 479 π. Χ.) συνδέεται με αλλαγές στην τέχνη, καθώς τα γεωμετρικά μοτίβα αντικαθίστανται σιγά-σιγά από τα ανατολίτικα σχέδια και έπειτα από τα μελανόμορφα αγγεία (Lloyd, 2012). Αξιοσημείωτη είναι και η εμφάνιση των αγαλμάτων του κούρου και της κόρης αυτήν την περίοδο. Τα δύο αυτά είδη αγαλμάτων φέρουν χαρακτηριστικά γνωρίσματα της αιγυπτιακής τέχνης τόσο στη στάση όσο και στις αναλογίες του σώματος (Department of Greek and Roman Art, 2003· Gondek, 2016). Από αυτή την χρονική περίοδο έχουν διασωθεί κατά κύριο λόγο κεραμικά έργα, ενώ για τις υπόλοιπες τέχνες, όπως η ζωγραφική, η γλυπτική, η τοιχογραφία και τα ψηφιδωτά έχουμε πληροφορίες σε μεγαλύτερο βαθμό από τα αντίγραφα Ρωμαίων καλλιτεχνών, διότι τα περισσότερα πρωτότυπα έργα έχουν καταστραφεί (Collins, χ.χ.).

Όσον αφορά την Αρχαϊκή ελληνική κεραμική, τα γραμμικά και τα γεωμετρικά σχέδια τα οποία αποτυπώνονταν με συγκεκριμένες αναλογίες στην πρωτογεωμετρική και στην γεωμετρική εποχή αντίστοιχα αντικαθίστανται πλέον από καμπύλες γραμμές και περίπλοκα μυθολογικά πλάσματα, ζώα και ανθρώπινες φιγούρες. Οι πρώτοι που

υιοθέτησαν αυτή τη νέα ανατολίτικη επιρροή στην τέχνη τους ήταν οι Κορίνθιοι, ενώ μια ακόμη καινοτομία τους ήταν και η δημιουργία των μελανόμορφων αγγείων (Collins, χ.χ.). Στην Αττική η συγκεκριμένη τεχνοτροπία έφτασε δια μέσου των Κορίνθιων καλλιτεχνών και ονομάστηκε Πρωτοαττική. Η Πρωτοαττική τεχνοτροπία διακόσμησης αγγείων διακρίνεται σε τρεις περιόδους. Μέσω αυτών των περιόδων [Πρώιμη (700-675 π. Χ.), Μέση (675-650 π. Χ.) και Ύστερη (650-600 π. Χ.) εποχή] έγινε η μετάβαση από τη Γεωμετρική περίοδο στα ανατολίτικα σχέδια (Mannack, 2018).

Στην Πρώιμη Πρωτοαττική περίοδο αρχίζει πλέον να μειώνεται η αυστηρότητα της γεωμετρικής εποχής με τις φιγούρες να αποκτούν μέγεθος ανάλογο με τα υπόλοιπα σχήματα των αγγείων, για παράδειγμα οι ηνίοχοι έχουν πλέον μέγεθος ανάλογο με τα άρματά τους. Στη διάρκεια του 7^{ου} αι. π. Χ., η Μέση Πρωτοαττική περίοδος χαρακτηρίζεται από νέα μοτίβα και κυρίαρχο ρόλο έχουν πλέον οι καμπύλες και η τεχνική του περιγράμματος (Πλατή και Μάρκου, 2018). Κατά την ύστερη Πρωτοαττική περίοδο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις λεπτομέρειες των σκηνών που προβάλλονται στα αγγεία και υπάρχει πληθώρα μοτίβων και επαναλαμβανόμενων γεωμετρικών σχημάτων (Καλογερόπουλος, 2019).

1.1.4.6 Η τέχνη στην Κλασική περίοδο

Η κλασική τέχνη, δηλαδή η τέχνη που εμφανίστηκε κατά την κλασική περίοδο (5^{ος}-4^{ος} π. Χ. αιώνας), διακρίνεται από απλότητα, συμμετρία, αρμονία και τρισδιάστατη αναπαράσταση των μορφών. Πρόκειται για το είδος της τέχνης που επηρέασε διαχρονικά το ευρωπαϊκό και παγκόσμιο πολιτισμικό γίνεσθαι με την εξιδανίκευση των έργων και την έλλειψη κάθε υπερβολικού στοιχείου. Έξοχο παράδειγμα της αρχιτεκτονικής της συγκεκριμένης περιόδου αποτελεί ο Παρθενώνας, έργο των Ικτίνου και Καλλικράτη. Αν και φαινομενικά οι κίονες του κτιρίου σχηματίζουν οριζόντιες ευθείες γραμμές εντούτοις έχουν μια ελαφριά καμπυλότητα που λειτουργεί ως οπτική διόρθωση στις αλλοιώσεις που δημιουργεί το φως της ημέρας. Στον τομέα της κλασικής γλυπτικής, τα αγάλματα απεικονίζονται με την αίσθηση της ελευθερίας των κινήσεων, τη φυσικότητα του προσώπου και της τρισδιάστατης κάλυψης του χώρου. Οι καλλιτέχνες κατέβαλλαν προσπάθεια ώστε να

συνδυάσουν «τη μαθηματική ομοιομορφία των αναλογιών με την πραγματικότητα» (Παππάς, 2007:26). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το άγαλμα Ηνίοχος που διασώζεται στον αρχαιολογικό χώρο των Δελφών και χρονολογείται στο 480-460 π. Χ..

Η κλασική τέχνη διαχωρίζεται σε τρεις περιόδους: α) την πρώιμη κλασική τέχνη (480-450 π. Χ.), β) την ώριμη κλασική τέχνη (450-390 π. Χ.) και γ) την ύστερη κλασική τέχνη (390-323 π. Χ.). Ειδικότερα, κατά την πρώιμη κλασική τέχνη οι μορφές έχουν αυστηρό και σοβαρό ύφος και ελαφριά κίνηση των άκρων τους. Στην περίοδο της ώριμης κλασικής τέχνης η κίνηση των αγαλμάτων γίνεται πιο έντονη και τα ενδύματά τους είναι ανάλαφρα. Κατά την ύστερη κλασική τέχνη τα αγάλματα έχουν ελεύθερη κίνηση, το πρόσωπό τους εκφράζει συναισθήματα και τα ενδύματά τους είναι περίτεχνα (Κατσουλάκος, Κοκκορού-Αλευρά και Σκουλάτος, 2013).

Αναφορικά με τη ζωγραφική στην κλασική περίοδο, θα πρέπει να επισημανθεί πως η σκιαγραφία αποτέλεσε μια καινοτομία στο πεδίο της τέχνης. Η σκιαγραφία που εισήχθη από το ζωγράφο Απολλόδωρο τον Αθηναίο (425-400 π.Χ.) αφορά την ρύθμιση του φωτός και της σκιάς για την επίτευξη ρεαλιστικού αποτελέσματος. Έτσι, διαμορφώθηκε η ψευδαίσθηση του βάθους από τη μία και της συσχέτισης του φωτός και της σκιάς από την άλλη. Όπως υποστήριξε ο Πλίνιος για τον Απολλόδωρο, ήταν ο πρώτος ζωγράφος που επιχείρησε την αναπαράσταση των αντικειμένων όπως τα έβλεπε (Plantzos, 2018).

1.1.4.7 Ελληνιστική περίοδος και τέχνη

Το τέλος της κλασικής εποχής και η έναρξη της ελληνιστικής περιόδου συντελέστηκε με τον θάνατο του Μ. Αλεξάνδρου (323 π. Χ.). Η ελληνιστική τέχνη αναπτύχθηκε κυρίως στις περιοχές και τα βασίλεια που δημιουργήθηκαν από τους διαδόχους του μετά το θάνατο του Μ. Αλεξάνδρου. Ο όρος «ελληνιστική» αφορά την πολιτισμική επιρροή των Ελλήνων προς την ανατολή και τη διάδοση του ελληνικού στοιχείου σε μεγάλη γεωγραφική κλίμακα. Πιο συγκεκριμένα, οι εικαστικές τέχνες της εποχής αυτής σηματοδοτούνται από το ενδιαφέρον για το άτομο και τα συναισθήματά του αλλά και την ρεαλιστική απεικόνιση κάθε στοιχείου. Όπως τονίζει και ο Θεοχαρόπουλος (2007:26), «η ελληνιστική τέχνη έχουσα ως βασικό της στόχο να

εντυπωσιάσει... δε δίστασε να προχωρήσει σε υπερβολές και να δημιουργήσει έργα εξεζητημένου μεγέθους, υπερβολικά μεγάλα αλλά και απρόσμενα μικρά».

Ιδιαίτερη σημασία για την απεικόνιση των μορφών αντλείται την εποχή αυτή από την επιστήμη της οπτικής. Πιο αναλυτικά, το ενδιαφέρον των φιλοσόφων και μετέπειτα των καλλιτεχνών αυξήθηκε σχετικά με τη μελέτη των αισθήσεων και ειδικότερα της όρασης, με σκοπό να εξακριβωθεί αν η αίσθηση αυτή μπορεί να οδηγήσει σε ασφαλείς πληροφορίες για τον κόσμο που μας περιβάλλει (Onians, 1979). Η αντανάκλαση του φωτός και η συμμετρία αποτελούν κομβικά σημεία για την ελληνιστική αισθητική. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστεί πως ένα έργο τέχνης θεωρούνταν όμορφο με βάση τις αναλογίες του ανεξάρτητα από το μέγεθός του. Τέλος, κύριο χαρακτηριστικό της ελληνιστικής τέχνης αποτέλεσε η εξωτερίκευση του συναισθήματος και η προσπάθεια για νοητική διεργασία από μέρους του θεατή σχετικά με την προσέγγιση ενός έργου, ώστε εκτός από το «φαίνεσθαι» να αντιληφθεί και το μήνυμα που εκπέμπει ο καλλιτέχνης.

1.1.4.8 Η τέχνη στην Ρωμαϊκή αυτοκρατορία

Η αρχαία ρωμαϊκή τέχνη έχει την αφετηρία της στην ίδρυση της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας το 509 π. Χ. και εντοπίζεται σε ένα ευρύ φάσμα περιοχών από την Ευρώπη ως την Ασία και την Αφρική. Η ευρύνοια των Ρωμαίων να εμποτίζουν στον πολιτισμό τους στοιχεία των κατακτημένων λαών διαμόρφωσε ένα κράμα καλλιτεχνικών επιδράσεων και ιδεών στο πεδίο της τέχνης. Αρχικά η προσωπογραφία δηλαδή η απεικόνιση μορφών που είχαν αξία για την κοινότητα και έπειτα η προβολή της αυτοκρατορικής κυριαρχίας αποτέλεσαν τα βασικά σημεία της ρωμαϊκής εικαστικής τέχνης. Πορτρέτα επιφανών ατόμων, τοιχογραφίες σχετικές με τη μυθολογία, ψηφιδωτά, γλυπτά και διακοσμημένα ταφικά μνημεία δηλώνουν την προσπάθεια των Ρωμαίων να αναδείξουν την πολυμάθεια και την φιλοτεχνία τους (Zanker, 2010).

Μνεία θα πρέπει να γίνει και στο γεγονός του έντονου θαυμασμού των Ρωμαίων και της ζήτησης που επέδειξαν για ελληνιστικά δημιουργήματα, καθώς προσελάμβαναν Έλληνες καλλιτέχνες ώστε να δημιουργήσουν έργα τέχνης ελληνιστικής χροιάς (Τσιουμέλα, 2021). Επίσης, μεγάλη σημασία για την

συναισθηματική και ψυχική αναζωογόνηση των πολιτών της ρωμαϊκής αυτοκρατορίας είχαν οι κήποι και οι υπαίθριοι χώροι. Για αυτό το λόγο επιμελούνταν με προσοχή και επιδεξιότητα κάθε λεπτομέρειά τους. Ήδη από την ελληνιστική εποχή, ο κήπος θεωρούνταν ως χώρος αγαλλίασης, ηρεμίας και περισυλλογής. Η αρμονία της υπαίθρου με την οικιστική δόμηση αποτέλεσε θεμέλιο της ρωμαϊκής αρχιτεκτονικής. Έτσι, η προσεκτική τοποθέτηση των φυτών και των γλυπτών και η εικαστική απεικόνιση της εξωτερικής τοιχοποιίας αποτέλεσαν ένα έξοχο παράδειγμα σύζευξης της αρχιτεκτονικής και της ζωγραφικής με την βοτανική.

Ειδικότερα, όπως μας πληροφορεί η Piscitelli (2019), μεγάλη καινοτομία αποτέλεσε η εικαστική δημιουργία και ειδικότερα η αίσθηση της προοπτικής απεικόνισης σε τοίχους που υπήρχαν σε υπαίθριες τοποθεσίες. Οι απεικονίσεις στους εξωτερικούς τοίχους δίνουν την αίσθηση της ψευδαίσθησης ενός πραγματικού κήπου που αποτελεί συνέχεια του υπάρχοντος μέσω των σχημάτων, της κλίμακας και του μεγέθους των μορφών. Επιπλέον, η έλλειψη κολώνων και πυλώνων και η επιλογή οριζόντιων στοιχείων όπως φράχτες από κλαδιά ιτιάς που παρουσιάζονταν σε πρώτο πλάνο στον κήπο αναδεικνύουν την πρωτότυπη δόμηση του χώρου. Συνοψίζοντας, η ρωμαϊκή τέχνη αποτέλεσε απότοκο πολιτισμικών ωσμώσεων και συνδέθηκε με τις έννοιες της ηθικής και της πολιτικής, που ήταν θεμελιώδεις για τη μορφοποίησή της.

1.1.4.9 Η τέχνη στο Βυζάντιο

Η βυζαντινή τέχνη στη χιλιετή διαδρομή της διήλθε από διάφορες φάσεις οι οποίες συνέβαλαν στη διαμόρφωση της ταυτότητας και της πορείας της. Με βάση τον Παπαϊωάννου (2007) μερικοί από τους τρόπους έκφρασης και τέχνης, όπως η ζωγραφική, βρήκαν μια καινούρια πατρίδα και μετατράπηκαν σε τεχνοτροπίες στα πλαίσια της Βυζαντινής αυτοκρατορίας. Ειδικότερα, τα πιο σημαντικά στάδια της βυζαντινής τέχνης ταξινομούνται σε τρία ή τέσσερα ανάλογα με την διάκριση του κάθε ερευνητή και κάποια από αυτά σχετίζονται με ιστορικά γεγονότα που επηρέασαν την Βυζαντινή Αυτοκρατορία.

Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την τέχνη των πρώτων χριστιανικών χρόνων. Η τέχνη αυτή εμπεριέχει την Πρωτοχριστιανική (1^ο- 3^ο αιώνα μ.Χ.) και την Παλαιοχριστιανική περίοδο (3^ο- 6^ο αιώνα μ.Χ.). Όπως επισημαίνει ο Κόντος (2019),

τα πρώτα δείγματα χριστιανικής ζωγραφικής συναντώνται στις κατακόμβες και τους τάφους των Μαρτύρων. Η Πρωτοχριστιανική τέχνη αναπτύχθηκε αρχικά σε αυτές τις τοποθεσίες και έπειτα σε σπίτια πλούσιων Χριστιανών, τις γνωστές «κατ' οίκον εκκλησίες». Οι τοιχογραφίες στις κατακόμβες και τις κατ' οίκον εκκλησίες είχαν επηρεαστεί τόσο από την Ελληνιστική και τη Ρωμαϊκή περίοδο όσο και από τον χριστιανισμό. Θέματα του ζωικού βασιλείου (ελάφι, παγώνι, το πτηνό φοίνικας, ιχθύς) και του φυτικού (αμπέλι, σταφύλι, ελιά) καθώς και οι αναπαραστάσεις των ανθρώπινων μορφών είχαν ως αφετηρία τους την ελληνιστική τέχνη. Όπως μας πληροφορεί η Τσιούτσου (2023), σε έρευνα που διεξήχθη στην Θεσσαλονίκη σε ταφικό συγκρότημα του 3^{ου} μ. Χ. αιώνα, τα θέματα αυτά συνυπήρχαν με βιβλικές απεικονίσεις τόσο της Παλαιάς όσο και της Καινής Διαθήκης, ενώ μία από τις κυρίαρχες επιλογές για τις τοιχογραφίες ήταν αυτή της απεικόνισης του Χριστού ως Καλού Ποιμένα.

Η τέχνη της Πρωτοχριστιανικής περιόδου στηρίζεται κυρίως στα σύμβολα. Κάτι τέτοιο συμβαίνει για τη μεταφορά του μηνύματος της σωτηρίας της ψυχής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η απεικόνιση της ιστορίας του Ιωνά που συμβολίζει την τριήμερη Ταφή και Ανάσταση του Χριστού. *«Στις συμβολικές παραστάσεις των πρώτων αλλά και μετέπειτα αιώνων η εκκλησία θέλησε να διδάξει στους χριστιανούς τις αλήθειες της πίστεως και να εκφράσει τη μακαριότητα του «καινού» ανθρώπου»* (Καλοκύρης, 1970:119, όπως βρέθηκε στον Κόντο, 2019). Η τέχνη των κατακομβών αυτής της εποχής μπορεί να χαρακτηριστεί ως απλή, με τις μορφές να διαθέτουν ως ένα βαθμό παραστατικότητα και ζωντάνια χωρίς όμως να τηρούνται οι ακριβείς αναλογίες για την απεικόνισή τους (Παλιούρας, 1979).

Στην Παλαιοχριστιανική περίοδο αρχίζουν να δημιουργούνται οι πρώτοι ναοί με τη σημερινή έννοια του όρου και για το λόγο αυτό οι κυρίαρχες μορφές στη ζωγραφική είναι οι τοιχογραφίες και τα ψηφιδωτά. Τα ψηφιδωτά στα δάπεδα των ναών διατηρούν την ίδια θεματολογία με την πρωτοχριστιανική περίοδο με την προσθήκη και γεωμετρικών μοτίβων. Η ζωγραφική πλέον χωρίς να εγκαταλείπει τελείως το συμβολικό χαρακτήρα που είχε τα προηγούμενα χρόνια περνάει και σε μια προσπάθεια «αφήγησης» της ζωής του Χριστού (Βούτουνος, 2017). Οι αλλαγές στην τέχνη αυτής της περιόδου εντοπίζονται τόσο στο φόντο των ζωγραφικών αναπαραστάσεων όσο και στις φιγούρες. Το τοπίο αντικαθίστανται από χρυσό φόντο με το βάθος και την τρισδιάστατη απεικόνιση να εκλείπουν. Από την άλλη πλευρά, οι

μορφές απεικονίζονται πλέον μετωπικά χωρίς όγκο με έμφαση στην απόδοση των ματιών, έτσι ώστε να δίνεται έμφαση στην πνευματική διάσταση (Παλιούρας, 1979).

Το δεύτερο στάδιο της Βυζαντινής τέχνης αποτελεί η Βυζαντινή περίοδος (7ος αιώνας μ.Χ.- 1204), η οποία διακρίνεται στην Πρωτοβυζαντινή (6ο ή 8ο αιώνα έως το 843 μ.Χ.) και στην κυρίως Βυζαντινή (843- 1204 μ.Χ.). Η Πρωτοβυζαντινή τέχνη αρχίζει τον 6ο αιώνα (Παλιούρας, 1979) ή τον 8ο αιώνα με βάση άλλους συγγραφείς (Ζιρώ κ.ά., 2003) και ολοκληρώνεται το 843 μ.Χ. με το τέλος της Εικονομαχίας. Κατά τη διάρκεια των χρόνων αυτών εμφανίστηκε και η καταστροφική για τη βυζαντινή τέχνη διαμάχη της Εικονομαχίας εξαιτίας της οποίας καταστράφηκαν πολλά έργα τέχνης και Εικόνες. Τα περισσότερα έργα που έχουν διασωθεί βρίσκονται στην Ιερά Μονή Αγίας Αικατερίνης Σινά, με χαρακτηριστικότερη την πρώτη σωζόμενη φορητή εικόνα στην βυζαντινή ιστορία, τον Χριστό Παντοκράτορα. Στην συγκεκριμένη εικόνα η έμφαση αποδίδεται στο πρόσωπο και ειδικότερα στα μάτια του Χριστού, ενώ η αίσθηση της τρίτης διάστασης μειώνεται ώστε να τονιστεί ο υπεραισθητικός κόσμος (Παπαδοπούλου, 2016).

Η κυρίως Βυζαντινή τέχνη (843-1204 μ.Χ.) έχει την αφετηρία της στην χρονική λήξη της Εικονομαχίας και ανάγεται ως την άλωση της Κωνσταντινούπολης από τους Σταυροφόρους. Η περίοδος αυτή διέπεται από άνθιση της τέχνης τόσο κατά την Μακεδονική Αναγέννηση (867-1081 μ.Χ.) όσο και κατά την περίοδο των Κομνηνών (1081-1185 μ.Χ.). Κατά τη Μακεδονική Αναγέννηση επικράτησαν δύο καλλιτεχνικά ρεύματα σχεδόν αντίθετα μεταξύ τους όσον αφορά την απεικόνιση των μορφών. Από τη μία πλευρά, επικρατούσε η προσπάθεια προβολής των μορφών με νατουραλιστικό τρόπο τηρώντας τις αναλογίες του σώματος σύμφωνα με τα κλασικά πρότυπα της αρχαιότητας. Από την άλλη πλευρά, παρατηρήθηκε η στροφή του ενδιαφέροντος των καλλιτεχνών στη λιτότητα, στην επικέντρωση στον πνευματικό κόσμο και την εξαύλωση των μορφών. Στη ζωγραφική τέχνη της Μακεδονικής Αναγέννησης δεν παρατηρείται χρήση της γραμμικής προοπτικής όπως κατά τη διάρκεια της Ιταλικής Αναγέννησης. Σημειώνεται όμως η χρήση της ιερατικής προοπτικής, (δηλαδή η απεικόνιση των σημαντικότερων προσώπων σε μεγαλύτερο μέγεθος από τις δευτερεύουσες μορφές), η αντίστροφη προοπτική, (στην οποία το σημείο φυγής βρίσκεται εκτός της εικόνας ή του πίνακα ζωγραφικής) καθώς και η απεικόνιση των αρχιτεκτονικών οικοδομημάτων σαν να μπορούσαν να ειπωθούν από όλες τις πλευρές τους (Σταγκόπουλος, 2020).

Κατά την εποχή των Κομνηνών (1081-1185 μ.Χ.) στο προσκήνιο της τέχνης επανέρχονται τα κλασικά πρότυπα της αρχαιότητας με τις μορφές να αποκτούν την αίσθηση του όγκου στην εικονογραφία. Αρκετές φορές οι φιγούρες απεικονίζονται με βάση τα πρότυπα των αρχαίων ελληνικών αγαλμάτων με το ένα πόδι να προτείνεται πιο μπροστά από το άλλο και να είναι ελαφρώς λυγισμένο. Τον 12^ο αιώνα οι μορφές των Αγίων γίνονται πιο ρεαλιστικές και επιμήκεις, ενώ και τα ενδύματά τους παρουσιάζονται με περισσότερες λεπτομέρειες (Παπαδοπούλου, 2016).

Με το πέρας της περιόδου των Κομνηνών, ξεκινά το τρίτο στάδιο της βυζαντινής τέχνης που είναι η Υστεροβυζαντινή περίοδος. Η εποχή αυτή άρχεται με την κατοχή από τους Λατίνους (1204) και λήγει με την άλωση της Κωνσταντινουπόλεως από τους Τούρκους (1453) (Ζιρώ κ.ά., 2003). Στην Υστεροβυζαντινή περίοδο εντάσσεται τόσο η περίοδος της Λατινικής κατοχής (1204-1261) όσο και η περίοδος βασιλείας των Παλαιολόγων (1261-1453). Κατά τη διάρκεια της Λατινοκρατίας η τέχνη γνωρίζει στασιμότητα και αρκετοί καλλιτέχνες μεταναστεύουν σε βαλκανικές χώρες ή στη Ρωσία. Τα περισσότερα έργα τους είναι παρόμοια με αυτά της περιόδου των Κομνηνών, ενώ υπάρχουν και δείγματα αλλαγής που θα οδηγήσουν στην μετέπειτα Παλαιολόγεια Αναγέννηση (Ξυγγόπουλος, 1958).

Κατά την περίοδο της βασιλείας των Παλαιολόγων η τέχνη γνωρίζει άνθιση με τις αγιογραφίες να αποκτούν όγκο και διάθεση αφήγησης των τεκταινόμενων γεγονότων. (Παπαδοπούλου, 2016· Todorovic, 2015). Μετά το 2^ο μισό του 14^{ου} αιώνα οι σημαντικότερες αγιογραφίες διασώζονται στον Μυστρά (Κάτσου, 2021), ενώ υπάρχουν και αξιόλογα έργα στην Ήπειρο (Fundić, 2013). Σε αυτή την περίοδο οι μορφές μοιάζουν αβαρείς και τα αρχιτεκτονικά στοιχεία αποκτούν την αίσθηση του βάθους και της προοπτικής (Fundić, 2013· Κάτσου, 2021). Η προοπτική όμως αυτής της περιόδου δεν είναι σαν τη γραμμική προοπτική, αλλά θυμίζει την αντίστροφη προοπτική, δηλαδή το σημείο φυγής φαίνεται να είναι εκτός της τοιχογραφίας ή της εικόνας (Todorovic, 2015).

Το τέταρτο μέρος της Βυζαντινής τέχνης είναι η Μεταβυζαντινή περίοδος, που αρχίζει με την πτώση του Βυζαντίου (1453) και λήγει με την ίδρυση του ελληνικού κράτους (1830) όπως επισημαίνουν κάποιοι συγγραφείς (Ζιρώ κ.ά., 2015) ή με τη Μικρασιατική Καταστροφή (1922) με βάση άλλους (Τριανταφυλλόπουλος, 2014). Η μεταβυζαντινή ζωγραφική χαρακτηρίζεται από πλουραλισμό καθώς πλέον

δεν υπάρχει ένα κυρίαρχο κέντρο παραγωγής της τέχνης, όπως γίνονταν τους προηγούμενους αιώνες με την Κωνσταντινούπολη. Η εικονογραφία αυτής της περιόδου εμπεριέχει χαρακτηριστικά γνωρίσματα τόσο της παλαιολόγιας περιόδου όσο και της δυτικής τέχνης και του οθωμανικού μπαρόκ. Όσον αφορά την απεικόνιση του βάθους αυτή φαίνεται πως επιτυγχάνεται από ορισμένους καλλιτέχνες που έχουν επηρεαστεί κυρίως από τη δυτική ζωγραφική (Βιταλιώτης, 2006).

1.2 Η αφετηρία της Προοπτικής

1.2.1 Η συμβολή της Αρχαίας Ελλάδας στην Ανάπτυξη της Προοπτικής

Η προσπάθεια των ανθρώπων για απεικόνιση του βάθους και της τρίτης διάστασης ανάγεται στα αρχαία χρόνια. Αν και η Προοπτική θεωρείται από πολλούς πως ήταν αποτέλεσμα μόνο της Αναγέννησης, ερευνητές (Andersen, 2007) υποστηρίζουν πως μπορεί να υπάρχει σύνδεση μεταξύ των Αρχαίων ελληνικών και ρωμαϊκών επιτευγμάτων με την ανάπτυξη της έννοιας της προοπτικής τους επόμενους αιώνες. Ειδικότερα, οι αρχαίοι Έλληνες καλλιτέχνες λάμβαναν υπόψιν τους όχι μόνο τη φύση του κόσμου αλλά και τον τρόπο που προσλαμβάνει ο άνθρωπος τις οπτικές εικόνες. Τα θεμέλια της Γεωμετρικής Οπτικής έθεσε ο Ευκλείδης, υποστηρίζοντας πως κάθε φωτεινή ακτίνα αναπαριστάνεται γεωμετρικά ως ευθεία γραμμή και ότι η όραση είναι μια σύνθεση των αντικειμένων που βρίσκονται μέσα σε ένα κώνο ακτίνων φωτός, του οποίου η κορυφή είναι το κέντρο του ματιού του παρατηρητή. Έτσι, εξήγησε το φαινόμενο της ανάκλασης του φωτός (Howard & Wade, 1996; Smith, 1998, όπως βρέθηκαν σε Μήτσου, 2017).

Σύμφωνα με την Andersen (2007), οι αρχαίες ελληνικές επιστήμες καθώς και οι τεχνικές της αρχαιότητας, όπως η θεωρία της Οπτικής, η σκηνογραφία και ο τρόπος κατασκευής χαρτών για τον ουρανό και τη Γη, φαίνεται να επηρέασαν τη δημιουργία του σχεδίου στα αρχαία χρόνια και κατά συνέπεια την προοπτική κατά την Αναγέννηση. Για τη συγκεκριμένη τεχνική αντλούνται πληροφορίες από αγγειογραφίες που χρονολογούνται πριν το δεύτερο μισό του 5^{ου} αιώνα π. Χ., με πρώιμα δείγματα της προοπτικής να αποτελούν ανθρώπινες φιγούρες σε διαφορετικά επίπεδα για να δηλωθεί η μεταξύ τους απόσταση. Τα πρόσωπα της Αρχαιότητας που

διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στα παραπάνω με χρονολογική σειρά ήταν οι εξής: ο Πλάτωνας, ο Ευκλείδης, ο Βιτρούβιος, ο Πτολεμαίος και ο Πρόκλος.

Ξετυλίγοντας την ετυμολογία του όρου “προοπτική” καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως προέρχεται από την ελληνική λέξη «οπτική». Πιο συγκεκριμένα, η προοπτική σαν επιστήμη σχετίζεται με την οπτική, δηλαδή τη μελέτη των ιδιοτήτων του φωτός και της αλληλεπίδρασής του με την ύλη. Αποτελεί ένα σύστημα κανόνων που δίνει τη δυνατότητα απεικόνισης της τρίτης διάστασης ενός χώρου (βάθος) ή τις τρεις διαστάσεις ενός αντικειμένου σε μια επιφάνεια δύο διαστάσεων. Η προοπτική εισήχθη ως τεχνική κατά την εποχή του Πλάτωνα με την ονομασία της “σκιαγραφίας ή σκηνογραφίας” (Μαυρέλλη, 2009: 69). Η ονομασία «σκηνογραφία» προήλθε από τη διαμόρφωση εικονιζόμενων μορφών για τη δημιουργία σκηνικών στο θέατρο. Αν ο καλλιτέχνης ήθελε να παρουσιάσει κάποιες μορφές πιο μακριά από τον θεατή συγκριτικά με άλλες μορφές, τις αναπαριστούσε σε μικρότερο μέγεθος και σε υψηλότερο επίπεδο. Επομένως, γίνεται αντιληπτό πως η προοπτική αποτέλεσε σημαντική καινοτομία της εποχής εκείνης, καθώς εξασφάλιζε στους καλλιτέχνες τη δυνατότητα να αποτυπώνουν την τρίτη διάσταση μιας εικόνας, δηλαδή το βάθος της (Βουτυράς & Γουλάκη-Βουτυρά, 2011).

Οι απαρχές της έναρξης της προοπτικής στην αρχαιότητα συνδέονται με τον Πλάτωνα μέσα από το έργο του «Σοφιστής». Στο έργο του αυτό τονίζει πως οι διαστάσεις καλλιτεχνικών έργων μεγάλου μεγέθους, όπως σε πίνακες ή αγάλματα, που εντοπίζονται στο άνω μέρος διαφέρουν από το κάτω. Ο Πλάτωνας πιθανώς εννοούσε ότι τα επάνω τμήματα ενός έργου απεικονίζονται σε μεγαλύτερη κλίμακα από τα αντίστοιχα κάτω τμήματα του έργου, ώστε ο θεατής που τα παρατηρεί από κάτω (αφού προφανώς το καλλιτεχνικό έργο είναι πιο πάνω από το επίπεδο το ματιού του θεατή) να τα βλέπει σαν να ήταν ίσα σε μέγεθος αυτά τα δύο τμήματα (Andersen, 2007).

Όσον αφορά τον Ευκλείδη, πιστεύεται πως ορισμένα έργα του συνδέονται με την ανάπτυξη της προοπτικής στην Αναγέννηση. Η Andersen (2007) παρουσιάζει στην έρευνά της τα θεωρήματα και τις ιδέες του Ευκλείδη που πιθανόν να συνέβαλαν σε αυτή την κατεύθυνση. Σε ορισμένες ιδέες μάλιστα του Ευκλείδη έχει δώσει η ίδια ονόματα με βάση τις έννοιες που πραγματεύονται. Αρχικά, παρουσιάζεται η σύνδεση της προοπτικής με την οπτική μέσω της θεωρίας της όρασης. Ο Ευκλείδης στην

θεωρία αυτή, όπως τονίστηκε, υποστηρίζει πως η όραση ενός ανθρώπου επιτυγχάνεται μέσω ενός οπτικού κώνου, *“ο οποίος έχει την κορυφή του στο παρατηρησιακό σημείο και τη βάση του στο περίγραμμα, δηλαδή στα όρια του παρατηρούμενου αντικειμένου”* (Μπατσούλη, 2008:78).

Στους Μεσαιωνικούς χρόνους η προοπτική θεωρήθηκε ως το απόσταγμα τριών κλάδων της οπτικής: του γεωμετρικού, του φυσικού και του ανατομικού τομέα. Την εποχή αυτή η προοπτική συνδέεται με την «σκηνογραφία», μια έννοια που όπως προαναφέρθηκε αφορά τόσο την σχεδίαση αντικειμένων σε μια δισδιάστατη επιφάνεια (με αυτή την έννοια χρησιμοποιήθηκε από το Βιτρούβιο) όσο και την δημιουργία σκηνικών σε θέατρο με βάση την προοπτική. Πιο συγκεκριμένα, *“ο Βιτρούβιος υποστήριζε πως η σκηνογραφία είναι η προοπτική ζωγραφική απόδοση των πλευρών και της πρόσοψης ενός κτίσματος και ότι η αρχιτεκτονική εικόνα σε επίπεδη επιφάνεια αποκτά βάθος, δηλαδή αποδίδεται με τις τρεις διαστάσεις της”* (Γώγος, 2005:114, όπως βρέθηκε σε Καραγιάννη, 2022:42).

Το προοπτικό σύστημα εξελίχθηκε σε μεγάλο βαθμό από τους Filippo Brunelleschi (1377-1446) και Leon Battista Alberti (1406-1472), οι οποίοι θεωρούνται επινοητές της προοπτικής. Όπως τονίστηκε, οι αρχαίοι Έλληνες και οι Ρωμαίοι είχαν καταφέρει να αποδώσουν στα έργα τους την τρίτη διάσταση του χώρου με διαφορετικές μεθόδους, οι οποίες όμως εξέλειψαν κατά τη διάρκεια των αιώνων. Με βάση τις παρατηρήσεις του ο Brunelleschi οδηγήθηκε στο συμπέρασμα πως αν κάποιος παρατηρεί ένα κτίριο ή ένα αντικείμενο από μια συγκεκριμένη οπτική γωνία, οι παράλληλες γραμμές του δεν μοιάζουν σαν παράλληλες αλλά φαίνονται σαν να συγκλίνουν σε κάποιο μακρινό σημείο. *“Τοποθετεί καλά και με λογική τις μειώσεις και τις αυξήσεις που φαίνονται στα μάτια των ανθρώπων, πράγματα μακρινά και κοντά, κτίρια, πεδιάδες και βουνά και τοπία”* (Edgerton, 1973:172).

Σχεδιάζοντας αυτές τις παρατηρήσεις του ο Ιταλός επιστήμονας ανακάλυψε μια νέα μέθοδο για να υπολογίσει την τρίτη διάσταση. Ζωγράφισε σε έναν πίνακα το Βαπτιστήριο της Φλωρεντίας ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα: έστησε το καβαλέτο του και κάθισε έχοντας γυρισμένη την πλάτη του στο κτίριο που θα ζωγράφιζε, παρατηρώντας το όχι απευθείας αλλά μέσω ενός καθρέφτη. Όταν το ζωγράφιζε έκανε μια τρύπα σε ένα σημείο του πίνακα, έτσι ώστε όταν κάποιος παρατηρούσε το κτίριο μέσα από την τρύπα του πίνακα και μετά το έβλεπε σε έναν

καθρέφτη, το έργο να ταυτίζεται με το κτίριο. Μέσω του συγκεκριμένου πειράματος, ο Brunelleschi κατάφερε να υπολογίσει τις διαστάσεις των αντικειμένων και να τα αποτυπώσει έτσι ώστε να δείχνουν ρεαλιστικά. Η ανακάλυψη αυτή επηρέασε πλήθος καλλιτεχνών, οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη μέθοδο προοπτικής του συγκεκριμένου επιστήμονα κατά τη δημιουργία των έργων τους (Andersen, 2007).

Η γεωμετρική βάση της προοπτικής οφείλει την εμφάνισή της στον Leon Alberti, ο οποίος υιοθέτησε την θεωρία του Ευκλείδη σχετικά με τη σύνδεση της οπτικής με την προοπτική και εισήγαγε την έννοια της οπτικής πυραμίδας. Ο ίδιος αφού χρησιμοποίησε ως σύστημα το ύψος του ανθρώπου και το όρισε στους 3 πήχεις (~1,80 μέτρα) καθόρισε απέναντί του μια κατακόρυφη επιφάνεια προβολής και χώρισε τη γραμμή του εδάφους σε μέρη ανάλογα με τους πήχεις. Έπειτα, όρισε ένα σημείο σύγκλισης στη μεσοκάθετο της γραμμής εδάφους και σε ύψος 3 πήχεων. Τέλος, ένωσε κάθε τμήμα ενός πήχη με το σημείο φυγής, διαμορφώνοντας έναν τρισδιάστατο προοπτικό κάναβο, στον οποίο να μπορούν να απεικονιστούν προοπτικά τα σχήματα του χώρου (Λιανός και Ανδριοπούλου, 2007). Όπως τονίζει η Μπελεμέζη (2020), το προοπτικό σχέδιο δίνει την ευκαιρία στον θεατή να αντιληφθεί την οπτική αντίληψη του καλλιτέχνη, καθώς αυτή σχηματοποιείται, όπως επίσης και να επεξεργαστεί το νοητικό προϊόν της σύλληψης του δημιουργού που εντοπίζεται στο δισδιάστατο καμβά του σχεδίου.

Καταληκτικά, θα μπορούσε να λεχθεί πως η προοπτική στα χρόνια της Αναγέννησης προβάλλεται ως μια συνθήκη ελέγχου του χώρου, ο οποίος είναι απόλυτα γεωμετρικός και μετρήσιμος, με την προϋπόθεση μιας νοητικής αφαίρεσης και σύλληψης των σχέσεων με βάση τη λογική.

1.2.2 Η ανάδυση της Γραμμικής Προοπτικής κατά την Αναγέννηση

Από την Αναγέννηση και έπειτα, η προοπτική διαχωρίστηκε σε επιμέρους κλάδους. Όπως επισημαίνει η Andersen (2007), η μελέτη της αναπαράστασης ευθειών καθώς και διάφορων μηκών ονομάστηκε «γραμμική προοπτική». Ειδικότερα, με τον όρο γραμμική προοπτική γίνεται λόγος για ένα σύστημα αναπαράστασης του τρισδιάστατου χώρου σε επιφάνεια δύο διαστάσεων. Απόπειρες δημιουργίας χωρικού

βάθους στην τέχνη είναι γνωστές ήδη από την αρχαία ελληνική εποχή. Ο αρχιτέκτονας της Αναγέννησης Filippo Brunelleschi ήταν αυτός που για πρώτη φορά το 1415 χρησιμοποίησε το σύστημα της γραμμικής προοπτικής για τη δημιουργία της ψευδαίσθησης ενός κτιρίου που υποχωρεί προς τη γραμμή του ορίζοντα. Παρατήρησε πως μέσω αυτού του είδους προοπτικής, οι μορφές και τα αντικείμενα φαινόταν μικρότερα όταν ήταν μακριά από το μάτι του θεατή. Αυτή την θεωρία χρησιμοποίησε και ο αναγεννησιακός αρχιτέκτονας και συγγραφέας Battista Alberti, ο οποίος κατέγραψε στην πραγματεία του (Περί Ζωγραφικής) το 1435 την αλληλεπίδραση της τέχνης με τα μαθηματικά. Χαρακτηριστικά τονίζει πως η αληθοφάνεια κάθε σημείου σε ένα εικαστικό έργο εξαρτάται από την απόσταση που έχει από το μάτι του θεατή (Lesso, 2022).

Αναλυτικότερα, η γραμμική προοπτική σχετίζεται με τον τρόπο που ο άνθρωπος προσεγγίζει τον χώρο και τα αντικείμενα που βρίσκονται σε αυτόν. Όσο πιο μακριά βρίσκεται μια μορφή από το οπτικό πεδίο του θεατή τόσο πιο μικρό το αντιλαμβάνεται. Τα βασικά στοιχεία που διαμορφώνουν το συγκεκριμένο είδος προοπτικής είναι η γραμμή του ορίζοντα ή αλλιώς το ύψος των ματιών, που χωρίζει νοητά την εικόνα σε δύο μέρη. Το ένα τμήμα περιλαμβάνει τα αντικείμενα που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο των ματιών και το άλλο αυτά που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο των ματιών. Επίσης, οι καλλιτέχνες για να καθορίσουν με ακρίβεια το στοιχείο της προοπτικής σχεδιάζουν ευθείες γραμμές, σχεδιασμένες υπό γωνία από τις άκρες των αντικειμένων, έως ότου συγκλίνουν σε ένα σημείο της γραμμής του ορίζοντα. Αυτές οι γραμμές είναι καθοριστικές για τη σχεδίαση των αντικειμένων σε προοπτικό σχέδιο. Ακόμη, βασικής σημασίας είναι και το σημείο φυγής, το σημείο εκείνο δηλαδή στη γραμμή του ορίζοντα όπου συναντώνται οι γραμμές ενός αντικειμένου αν προεκταθούν. Όσο πιο κοντά βρίσκονται τα αντικείμενα στο σημείο φυγής τόσο πιο μικρά φαίνονται (Okabayashi, 2009).

Οι Ιταλοί αναγεννησιακοί καλλιτέχνες άρχισαν να χρησιμοποιούν τη γραμμική προοπτική από το 1420 και έπειτα. Ένα από τα έργα του Ραφαήλ “Η Σχολή των Αθηνών” αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα παραδείγματα γραμμικής προοπτικής όπου η αίσθηση του βάθους καταπλήσσει τον θεατή. Λίγες δεκαετίες αργότερα, ο συγγραφέας Jean Pélerin (1445-1524) συγκεντρώνει τις μεθόδους προοπτικής της βόρειας Αλπικής περιοχής και παρουσιάζει τις τεχνικές που χρησιμοποιούσαν οι Ιταλοί καλλιτέχνες για τη δημιουργία βάθους στο έργο τους

(Pélerin, 1505). Επίσης, παρουσίασε καινοτόμες προσεγγίσεις σχετικά με την απεικόνιση κτιρίων μέσω λοξών γωνιών και την χρήση δύο ή και τριών σημείων φυγής για το προοπτικό σχέδιο.

Μέχρι το 1600 οι καλλιτέχνες όφειλαν να κατανοούν την αξία της προοπτικής και να την χρησιμοποιούν στα δημιουργήματά τους, ώστε να τυγχάνουν της επιδοκimasίας των θεατών. Επιπλέον, την ίδια περίοδο αρκετοί εικαστικοί ξεκίνησαν να προσθέτουν πολλαπλά σημεία προοπτικής στα οπτικά πειράματα που διεξήγαγαν, με αποτέλεσμα να δώσουν το έναυσμα της προοπτικής εξέλιξης στην ύστερη αρχιτεκτονική και ζωγραφική τέχνη.

1.3 Η Σημασία του Σημείου Φυγής

Όπως επισημαίνει η Τσέτικα (2020), η απόδοση του βάθους στα εικαστικά έργα κατά την αναγεννησιακή περίοδο και η ανάγκη για τεκμηρίωση των μεθόδων που χρησιμοποιούνταν οδήγησε τους καλλιτέχνες στην επαφή με το μαθηματικό χώρο. Σε αυτή την προσπάθειά τους, διαμόρφωσαν ένα νέο είδος γεωμετρίας, διαφορετικής από την ευκλείδεια, την προβολική γεωμετρία, στην οποία οι ευθείες που είναι παράλληλες συγκλίνουν σε ένα σημείο στο άπειρο. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο φυγής και χαρακτηριστικότερο παράδειγμα για την εμφάνισή του θεωρείται *“ο τρόπος που το ανθρώπινο μάτι βλέπει τις ράγες του τρένου να συγκλίνουν σε ένα κοινό σημείο στο άπειρο και η αίσθηση του βάθους στα έργα τέχνης”* (Τσολακίδης, 2021:9).

Πολλοί καλλιτέχνες της εποχής εκείνης, οι οποίοι ασχολούνταν με τη μηχανική και τη μαθηματική επιστήμη θεμελίωσαν την προβολική γεωμετρία και βασίστηκαν στις εξής ιδέες για τη διαμόρφωσή της: α) οι παράλληλες ευθείες συναντώνται σε ένα σημείο στον ορίζοντα, β) οι ευθείες γραμμές αναπαρίστανται από ευθείες γραμμές και γ) η εικόνα μιας κωνικής τομής στο επίπεδο είναι κωνική τομή. Συνοπτικά, η προβολική γεωμετρία είναι το είδος της γεωμετρίας που αναπαριστά τις μορφές του τρισδιάστατου χώρου σε ένα δισδιάστατο επίπεδο. Με βάση τη Μαυρίδου (2021), οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης διαμόρφωσαν νέα πεδία στη ζωγραφική και από την πλευρά τους οι μαθηματικοί αφού τα επεξεργάστηκαν, συγκρότησαν την προβολική γεωμετρία. Έτσι, η προβολική γεωμετρία αποτελεί πλέον ένα μαθηματικό αντικείμενο που έχει την αφετηρία του στον χώρο των τεχνών.

Ειδική μνεία θα πρέπει να γίνει στη σημασία της έννοιας του άπειρου που ήταν καθοριστική στην αναγεννησιακή σκέψη. Ο Panofsky κατέληξε στην άποψη πως αν μια ομάδα παράλληλων γραμμών συγκλίνει και τέμνεται σε ένα σημείο φυγής, τότε οι παράλληλες συναντώνται. Ωστόσο, το άπειρο θεωρήθηκε πεπερασμένο, καθώς το σημείο φυγής τίθεται στο δισδιάστατο χώρο του πίνακα όπου περιλαμβάνεται το πεπερασμένο οπτικό πεδίο του θεατή. Επομένως, *“οι παράλληλες γραμμές συγκλίνουν για την όρασή μας, επειδή ο οπτικά ελέγξιμος και ορατός χώρος είναι εξ ορισμού πεπερασμένος...άλλωστε ο Alberti αναφερόμενος στην οπτική αντίληψη που δημιουργούν οι συγκλίνουσες παράλληλες εντός του πίνακα γράφει ότι μοιάζουν να εκτείνονται σχεδόν μέχρι το άπειρο”* (Μεταξόπουλος, 1988:32).

Ιδιαίτερη αξία λοιπόν για την αίσθηση του βάθους σε ένα αναγεννησιακό καλλιτεχνικό έργο έχουν τα σημεία φυγής και η σμίκρυνση των μορφών που βρίσκονται πιο μακριά από το βλέμμα του θεατή. Αρχικά, ο καλλιτέχνης της Αναγέννησης σχεδίαζε τη γραμμή του ορίζοντα, έπειτα προσδιόριζε τα σημεία φυγής τυχόν ευθειών που εμφανίζονταν στο έργο και κατά τη δημιουργία του έργου σχεδίαζε μικρότερα τα αντικείμενα που βρίσκονταν μακριά από το προσκήνιο ώστε να αποδοθεί η αίσθηση του βάθους (Pyke, 2019). Έτσι, το σημείο φυγής αποτέλεσε μια καινοτόμα τεχνική στο καλλιτεχνικό πεδίο και χρήσιμο εργαλείο στη φαρέτρα των καλλιτεχνών για την ανάδειξη του προοπτικού στοιχείου.

1.4 Οι αλλαγές που έφερε η Γραμμική Προοπτική στην Τέχνη

Η προοπτική εμφανίζεται ως βασικό χαρακτηριστικό της καλλιτεχνικής ζωής την περίοδο της Αναγέννησης από τον Masaccio (1401-1428). Ο συγκεκριμένος καλλιτέχνης θεωρείται ένας από τους κορυφαίους ζωγράφους της ιταλικής Αναγέννησης λόγω της ικανότητάς του να αναδημιουργεί αληθοφανή στοιχεία και κινήσεις όπως επίσης και να δίνει την αίσθηση των τριών διαστάσεων στα έργα του. Συν τοις άλλοις, αποτέλεσε τον πρώτο ζωγράφο που εφάρμοσε τις θεωρίες του Brunelleschi και του Alberti περί προοπτικής στα έργα του. Φιλοτεχνούσε σε επίπεδη επιφάνεια τρισδιάστατα έργα, τα οποία απέδιδαν έξοχα την πραγματικότητα. Χαρακτηριστική είναι στα έργα του «Θεοτόκος Ένθρονη» και «Σκηνές από τον βίο του Αποστόλου Πέτρου», η χρήση της προοπτικής αλλά και των φωτοσκιάσεων που

παρέχουν ένταση και μεγαλείο στα πρόσωπα και την αίσθηση πως ο θεατής μπορεί να εισέλθει στη σκηνή.

Ένα από τα αριστουργηματικά έργα του θεωρείται η τοιχογραφία «Αγία Τριάδα» στην οποία χρησιμοποιήθηκε έντονα το στοιχείο της προοπτικής ως εξής: ο τοίχος μοιάζει να είναι λαξευμένος και πίσω του φαίνεται να υπάρχει ένα εντάφιο παρεκκλήσιο. Οι μορφές παραπέμπουν σε αγάλματα, κάτι που οφείλεται στο προοπτικό πλαίσιο που έχουν τοποθετηθεί και δίνεται η αίσθηση πως ο θεατής μπορεί να τις αγγίξει. Αξίζει να τονιστεί στο παρόν σημείο πως οι αναγεννησιακοί καλλιτέχνες δεν χρησιμοποιούσαν τις νέες καινοτομίες στα έργα τους ως αυτοσκοπό αλλά για να προσδώσουν στα δημιουργήματά τους αληθοφάνεια και αποτύπωση της πραγματικότητας. (Ρουμπέκα, 2011).

Μεγάλη σημασία έχει για το εικαστικό πεδίο του 15ου και 16ου αιώνα μ.Χ., η παρουσίαση του τοπίου ως αποτύπωση της χωρικής αντίληψης. Ο σχεδιασμός του βασίστηκε στις αρχές της Ευκλείδειας γεωμετρίας και θεωρήθηκε ως ο κατάλληλος τρόπος για να προβληθεί με ακρίβεια ένας εξωτερικός χώρος. Ο καλλιτέχνης μέσω της προοπτικής αποδίδει ρεαλιστικά τις μορφές και τα αντικείμενα και κατευθύνει το άτομο ώστε να έρθει σε επαφή με ένα τοπίο και να το αποκωδικοποιήσει. Ειδικότερα, η δημιουργία ενός τοπίου αφορούσε κυρίως την αποτύπωση σημείων της πόλης, όχι απαραίτητα την ακριβή παρουσίαση των πολεοδομικών και κτιριακών εγκαταστάσεων της αλλά την εντύπωση που άφηνε στον πεζό-καλλιτέχνη ο αστικός τρόπος ζωής. Τελικά, θα μπορούσε να ειπωθεί πως η απεικόνιση ενός τοπίου *“αποτελεί τη σύνθεση ενός κόσμου, ώστε να μπορεί να οικειοποιηθεί από ένα μεμονωμένο θεατή...και μπορεί να προσφέρει τη ψευδαίσθηση συμμετοχής σε αυτόν μπαίνοντας στο πλαίσιο της εικόνας κατά μήκος του άξονα προοπτικής”* (Cosgrove, 1984:11).

1.5 Η έννοια της Προοπτικής στα σχολικά εγχειρίδια της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Η Γεωμετρία σχετίζεται με τον κόσμο του παιδιού και το παρακινεί να μάθει και να διερευνήσει τον κόσμο γύρω του (Vinner & Hersckowitz, 1980, όπως βρέθηκε σε Παυλίδου, Κατσακιώρη & Τσόλκα, 2017). Με βάση τον Van de Walle (2005), τα παιδιά έρχονται σε επαφή με τη Γεωμετρία ήδη από τη νηπιακή ηλικία, καθώς

συναντούν γεωμετρικά στοιχεία στο πλαίσιο της φύσης και των ανθρώπινων κατασκευών. Επίσης, στην καθημερινότητά τους τα παιδιά έρχονται σε επαφή με γεωμετρικά σχήματα, ανακαλύπτουν τις ιδιότητές τους και επεξεργάζονται τα χαρακτηριστικά τους. Οι γνώσεις αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν ως βάση του αναλυτικού προγράμματος της Γεωμετρίας με σκοπό να αναπτυχθεί η γεωμετρική σκέψη του μαθητή μέσω της επαφής του με το γεωμετρικό περιβάλλον (Φιλίππου & Χρίστου, 1995, όπως βρέθηκε σε Σαλονικιό, 2008).

Όπως επισημαίνουν οι ίδιοι ερευνητές, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με τη γεωμετρική σκέψη μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, δηλαδή να σχεδιάζουν και να κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα με διάφορα υλικά. Ακολούθως και στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι εξίσου βασικής αξίας η διδασκαλία της Γεωμετρίας. Ο Τουμάσης (1994), τονίζει πως η Γεωμετρία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να συνδέουν τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο, να αντιλαμβάνονται τον χώρο και να κατανοούν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, ερμηνεύοντας αυτές μέσω γεωμετρικών μοντέλων.

Ιδιαίτερη μνεία θα πρέπει να γίνει στο γεγονός της θέσης της τέχνης στην εκπαιδευτική διαδικασία. Όπως επισημαίνει η Σκέμπερη (2010), *“η τέχνη αποτελεί το συνδετικό κρίκο ανάμεσα στην αντικειμενική γνώση που επιχειρεί το εκπαιδευτικό σύστημα να μεταβιβάσει στο παιδί και στην προσωπική αντίληψη του μαθητή για τον κόσμο”*. Η σύνδεση επομένως του αναλυτικού προγράμματος με το πεδίο των τεχνών θα αναδείξει τον εξέχοντα ρόλο τους και θα συντελέσει στην πολύπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας των παιδιών καλύπτοντας την ανάγκη έκφρασής τους.

Όσον αφορά την έννοια της προοπτικής, εμφανίζεται για πρώτη φορά στο σχολικό εγχειρίδιο των Εικαστικών Ε' και Στ' Δημοτικού και πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο «Εικαστικά Επαγγέλματα», στην 4^η ενότητα με θέμα «Μακέτα-Αρχιτέκτονας-Μακετίστας». Ειδικότερα στην υποενότητα δ, «Μακέτες- Σκηνικά», με βάση τις εικόνες που παρουσιάζονται σχετικά με μια μακέτα και την πραγματική άποψη της αίθουσας που απεικονίζεται στην μακέτα, εισάγονται οι έννοιες του βάθους και της προοπτικής. Οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν με ποιο τρόπο ο μακετίστας έχει αποδώσει στο έργο του το πάτωμα και το ταβάνι του δωματίου, μια ερώτηση η οποία θα οδηγήσει στην εισαγωγή τους στην έννοια της προοπτικής.

Επίσης στην ίδια υποενότητα παρουσιάζονται έργα δισδιάστατα και τρισδιάστατα, Βυζαντινής και Αναγεννησιακής τεχνοτροπίας. Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τις αρχές της προοπτικής μέσω της σύγκρισης των έργων, καθώς περιλαμβάνονται έργα Βυζαντινής Αγιογραφίας και Αναγεννησιακής Τέχνης.

Οι μαθητές λοιπόν έχουν τη δυνατότητα να εξασκηθούν στην προοπτική στο τετράδιο εργασιών στην ίδια ενότητα, χωρίς να γίνεται ρητή αναφορά πως πρόκειται για τη συγκεκριμένη έννοια. Από τα παιδιά ζητείται να σχεδιάσουν είτε από μνήμης είτε με παρατήρηση μία όψη ενός εξωτερικού τοίχου του σπιτιού τους, ενώ τους δίνεται η δυνατότητα να σχεδιάσουν σε τετραγωνισμένο χαρτί την κάτοψη του σπιτιού τους. Η μελέτη της έννοιας της προοπτικής, ωστόσο, δεν ολοκληρώνεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά διερευνάται και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η έννοια της προοπτικής εμφανίζεται στα σχολικά εγχειρίδια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και ειδικότερα στα Εικαστικά της Α΄ Γυμνασίου. Συναντάται στο 4ο Κεφάλαιο «ΣΧΕΔΙΟ ΓΙΑ ΟΛΟΥΣ Μορφικά στοιχεία. Μορφοποίηση» και κυρίως στις ενότητες δ, ε και στ. Στην ενότητα δ΄ «Το βάθος: Προοπτική» γίνεται εισαγωγή στην έννοια του βάθους και στους τρόπους με τους οποίους αυτό μπορεί να αποδοθεί μέσα σε έναν πίνακα ζωγραφικής. Έπειτα, στην ενότητα ε΄ με τίτλο «Το τρισδιάστατο: Γεωμετρική προοπτική» γίνεται αναφορά στο προοπτικό σχέδιο και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να το αποδώσουν σε χαρτί. Τέλος, στη στ΄ ενότητα «Η απόδοση του χώρου: Συγκριτικά παραδείγματα» γίνεται μια σύντομη παρουσίαση του τρόπου αναπαράστασης του βάθους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές μέσα στην Ιστορία της Τέχνης.

Στη συνέχεια, στο σχολικό εγχειρίδιο των Εικαστικών της Β΄ Γυμνασίου παρουσιάζονται τόσο έννοιες που σχετίζονται με την προοπτική όπως οι αναλογίες και οι κλίμακες, όσο και η έννοια της γραμμικής προοπτικής. Σχετικά με την πρώτη κατηγορία, στην υποενότητα δ΄ της ενότητας «1.1.1. Το ελεύθερο σχέδιο» του σχολικού βιβλίου, παρουσιάζεται η σύνδεση μεταξύ των μεγεθών, των αναλογιών και της κλίμακας, ενώ στην υποενότητα δ΄ της ενότητας «1.2.3. Γραμμικά σχέδια» δίνονται οδηγίες για το πώς μπορεί να σχεδιαστεί τρισδιάστατο ένα αντικείμενο. Ακόμη, στην ενότητα 2.5. με τίτλο «Πώς οι μορφές διαμορφώνουν τον ζωγραφικό χώρο» παρουσιάζονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να αλλάξει η αίσθησή μας

για το βάθος μίας μορφής σε έναν πίνακα ανάλογα με το χρώμα, με το μέγεθος και την αλληλοεπικάλυψη με άλλες φιγούρες. Έπειτα, οι ενότητες 2.6. και 2.7. αναφέρονται αποκλειστικά στην προοπτική, με την ενότητα 2.6. να ασχολείται με την ανάπτυξη της προοπτικής κατά την Αναγέννηση, ενώ η ενότητα 2.7. να παρουσιάζει με σύντομο τρόπο τα τρία είδη προοπτικής (με 1 σημείο φυγής, με 2 σημεία φυγής και την ατμοσφαιρική προοπτική).

Σε σχέση με την έννοια της προοπτικής στο σχολικό εγχειρίδιο των Εικαστικών της Γ' Γυμνασίου αυτή εμφανίζεται στην 1^η Διδακτική Ενότητα με τίτλο: «Μορφικά Στοιχεία». Σε αυτή την ενότητα και ειδικότερα στο Θέμα 1, που ασχολείται με το φως και τις φωτοσκιάσεις, γίνεται αναφορά στην ατμοσφαιρική προοπτική. Έπειτα, στο Θέμα 2 της ίδιας ενότητας παρουσιάζονται ο τρόπος που μπορεί να αναπαρασταθεί ο όγκος ενός αντικειμένου πάνω σε μια δισδιάστατη επιφάνεια καθώς και η αναπαράσταση της τρίτης διάστασης κατά την πορεία της Ιστορίας της Τέχνης. Στο Θέμα 3, γίνεται λόγος για τον πραγματικό και ζωγραφικό χώρο στην αρχιτεκτονική, την γλυπτική και τη ζωγραφική. Στη ζωγραφική, όπως επισημαίνεται, επειδή η αναπαράσταση γίνεται σε δύο διαστάσεις το έργο δίνει ψευδή εντύπωση πως πρόκειται για πραγματικό χώρο, ενώ στην πραγματικότητα είναι ένας φανταστικός κόσμος. Τέλος, στο Θέμα 5 της ίδιας ενότητας, γίνεται μνεία στις έννοιες της κλίμακας και της αναλογίας, δύο έννοιες θεμελιώδεις για την προοπτική.

Στο Λύκειο εμφανίζεται ξανά η έννοια της Προοπτικής τόσο στο Γενικό Λύκειο όσο και σε κάποια μαθήματα των ΕΠΑΛ. Στο Γενικό Λύκειο η έννοια παρουσιάζεται στα σχολικά εγχειρίδια των Εικαστικών της Α' Λυκείου και στην Γ' Λυκείου, ενώ στα ΕΠΑΛ προβάλλεται στα εγχειρίδια του Ελεύθερου Σχεδίου, του Γραμμικού Σχεδίου και των Αρχών Σύνθεσης. Στα παραπάνω εγχειρίδια γίνονται τόσο ιστορικές αναφορές για την Ιστορία της προοπτικής, όσο και αναφορές που σχετίζονται με την προοπτική όπως είναι οι κλίμακες.

Γίνεται επομένως φανερό πως η έννοια της προοπτικής είναι απαραίτητη τόσο για τους μαθητές της Πρωτοβάθμιας όσο και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης καθώς είναι μια έννοια που τους συντροφεύει καθ' όλη τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής.

Κεφάλαιο 2ο : Αναλογίες

2.1 Ιστορία των Αναλογιών-Αναλογικός συλλογισμός

Η μαθηματική φαρέτρα διαθέτει αρκετούς ορισμούς σχετικά με τους λόγους και τις αναλογίες. Όπως επισημαίνουν οι Philippou & Christou (2002), ο λόγος αφορά μια κλασματική σχέση α/β δύο μεγεθών. Με βάση τους Livy & Vale (2011) ο λόγος είναι η σύγκριση δύο ποσοτήτων και κατά τους Ben-Chaim, Keret & Illany (2012), ο λόγος είναι η ποσοτικοποίηση μιας πολλαπλασιαστικής σχέσης που προκύπτει από τη διαίρεση ή τον πολλαπλασιασμό μιας ποσότητας από μια άλλη (Δεληγιαννίδης, 2017). Ο όρος «λόγος» προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη «λέγω» που σημαίνει ισχυρίζομαι, αναφέρω και αριθμώ. Ήδη από την αρχαιότητα, ο Ευκλείδης με τον όρο «λόγος» αναφερόταν σε μια σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων (Αναστασάκη, 2018). Ο Εύδοξος από την Κνίδα (400-350 π.Χ.) πρότεινε μια θεωρία των αναλογιών για να ερμηνεύσει την χρησιμότητα των ασύμμετρων μεγεθών στη γεωμετρία και ο Γαλιλαίος με βάση τη γνώση του για την τροχιά του φεγγαριού διατύπωσε την άποψη ότι η Γη κινείται.

Όπως τονίζει ο Alvarez (2023), ο λόγος στο μαθηματικό πλαίσιο είναι ο ρυθμός μεταβολής μιας εξαρτημένης μεταβλητής σε σχέση με μια ανεξάρτητη μεταβλητή και τονίζει πως αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της λογικής σκέψης. Ειδικότερα, λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης είναι το πηλίκο των μέτρων τους. Δηλαδή, λόγος (λ) ενός αριθμού α προς τον αριθμό β είναι το κλάσμα $\alpha/\beta = \lambda$, όπου $\alpha = \lambda \cdot \beta$. Η ισότητα επομένως δύο ή περισσότερων λόγων ονομάζεται αναλογία. Για παράδειγμα $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, όπου $\alpha \cdot \delta = \gamma \cdot \beta$. “Δύο ποσά λέγονται ανάλογα αν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό (Swan, 2001, όπως βρέθηκε σε Καραγεώργο, Ντιντάκη & Ράπτη, 2015:14).

Όσον αφορά την αναλογία πρόκειται για την ισότητα μεταξύ δύο λόγων $\alpha/\beta = \gamma/\delta$. Όπως εντοπίζεται στο Collins Dictionary of Mathematics, “αναλογία είναι η γραμμική σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων ή των αντιστρόφων τους και τα στοιχεία δύο συνόλων που βρίσκονται σε αναλογία βρίσκονται και σε συνεχή λόγο” (Borowski & Borwein, 2012, όπως βρέθηκε σε Δεληγιαννίδη, 2017:13). Πιο

αναλυτικά, σχέση αναλογίας προκύπτει όταν τέσσερις μεταβλητές σχηματίσουν κάποια από τις ακόλουθες περιπτώσεις: α) όταν $\alpha/\beta = \gamma/\delta$, όπου το πηλίκο των μερών των δύο λόγων α και β είναι ίσο με αυτό των γ και δ , β) όταν $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta$, όπου το γινόμενο των δύο μερών του λόγου α/β είναι ίσο με αυτό των γ/δ (Ben-Chaim et al., 2012, όπως βρέθηκε σε Δεληγιαννίδη, 2017).

Στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία, η αναλογία συνδέθηκε με την μαθηματική έννοια του λόγου, της τάξης και της ομορφιάς και μέχρι την Αναγέννηση οι καλλιτέχνες βασίζονταν στις σχέσεις των αριθμών και τη γεωμετρία ως οδηγούς για την επίτευξη του έργου τους. Με βάση την Παπαϊωάννου (2013:36), *“το απόλυτα ωραίο προκύπτει μέσα από λογική ανάλυση, πηγάζει από τον αριθμό και τη μετατροπή του σε γεωμετρικές ή αρμονικές αναλογίες”*. Κατά την Μπατάλια (2017), στη βυζαντινή τέχνη παρατηρείται μια οπτική τάξη που αλλάζει τις φυσικές αναλογίες και οι μορφές εμφανίζονται με διαφορετικά μεγέθη ως προς τη σύγκριση μεταξύ τους. Ωστόσο, η σχέση μορφής-φόντου παραμένει σταθερή. Κατά τη δημιουργία ενός έργου βυζαντινής τεχνοτροπίας απουσιάζει ένα μοναδικό σημείο θέασης. Τα σημεία που υπάρχουν στο δημιούργημα αποτελούν διαφορετικές όψεις της πραγματικότητας όπως την εκλαμβάνει και την αποτυπώνει με βάση τα βιώματά του ο καλλιτέχνης.

Από τις αρχές του 20ου αιώνα, ο τρόπος έκφρασης των καλλιτεχνών διαφοροποιείται. Ο Mondrian (1872-1944), Ολλανδός ζωγράφος και ένας από τους σημαντικότερους εκπροσώπους της μοντέρνας τέχνης, υπογραμμίζει πως *“οι σωστές αναλογίες των διαστάσεων μπορούν να οδηγήσουν σε κίνηση...η αρμονία είναι η ισορροπία των αντιθέσεων”* (Παπαϊωάννου, 2013:48). Τα έργα του αποτελούνται κυρίως από απλά γεωμετρικά σχήματα, κυρίως ορθογώνια και παρόλο που δεν είναι ξεκάθαρο αν ο καλλιτέχνης ήθελε να προβάλλει το στοιχείο της αναλογίας στους πίνακές του, έπειτα από ερευνητικές μελέτες προέκυψε πως σε ποσοστό 99,5% τα σχήματα είχαν διαμορφωθεί με απόλυτη ακρίβεια (Murphy, 2017).

Όσον αφορά τον αναλογικό συλλογισμό πρόκειται για μια βασική ικανότητα κατά την οποία *“οι άνθρωποι χτίζουν εννοιολογικές γέφυρες μεταξύ αντικειμένων και ιδεών που αλλιώς θα παρέμεναν στην εμπειρία ή στη σκέψη ως ξεχωριστές, διαχωρισμένες οντότητες”* (Ταξίδης, 2008:13). Αποτελεί μια μακρόχρονη διαδικασία, κατά την οποία η κατανόηση του ενός σταδίου δημιουργεί τη βάση για

την κατανόηση του ανώτερου επιπέδου (Lamon, 2007 όπως βρέθηκε σε Δεληγιαννίδη, 2017). Διακρίνεται σε τρία στάδια: α) το διαισθητικό, κατά το οποίο τα παιδιά (3-7 ετών) δεν μπορούν να συνδυάσουν δύο μεταβλητές αλλά μόνο αντιλαμβάνονται διαισθητικά τη συλλογιστική διαδικασία, β) το συμπαγές στάδιο, όπου τα παιδιά (8-12 ετών) δύνανται να συνδυάζουν δύο μεταβλητές που οδηγούν σε πολλαπλασιαστική σχέση και να επιλύουν απλά αναλογικά προβλήματα και γ) το τυπικό στάδιο, στο οποίο τα παιδιά (12-15 ετών) έχουν διαμορφώσει αναλογική σκέψη, την οποία χρησιμοποιούν ως *“αποτελεσματικό πνευματικό εργαλείο για την επίλυση αναλογικών προβλημάτων”* (Piaget & Inhelder, 1958, όπως βρέθηκε σε Δεληγιαννίδη, 2017:16).

Οι ανωτέρω ερευνητές υποστηρίζουν ότι κατά τον αναλογικό συλλογισμό αναπτύσσονται δύο είδη σχέσεων. Οι κατώτερης-πρώτης τάξης σχέσεις, οι οποίες είναι συσχετισμοί που διατηρούνται στην ίδια εννοιολογική κατηγορία και οι ανώτερης-δεύτερης τάξης σχέσεις που απαιτούν από το άτομο να συσχετίσει εννοιολογικά δύο κατηγορίες. Για παράδειγμα αν δοθεί στο παιδί η παρακάτω λεκτική αναλογία (φωλιά-πουλί-σπίτι), το παιδί θα πρέπει αρχικά να αντιληφθεί τη σχέση μεταξύ της φωλιάς και του πουλιού (κατώτερης τάξης) και έπειτα ότι η φωλιά αποτελεί ένα είδος “σπιτιού” για τα πτηνά, όπως και το γεγονός ότι οι άνθρωποι διαβιούν σε κατοικίες (ανώτερης τάξης).

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στη διαδικασία που ακολουθεί ένας άνθρωπος όταν σκέφτεται αναλογικά για την επίλυση ενός προβλήματος. Οι έρευνες απέδειξαν πως ο αναλογικός συλλογισμός είναι αποτέλεσμα της αναπτυξιακής εξέλιξης και η διαμόρφωσή του μπορεί να εκτυλιχθεί σε πέντε φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά την ερμηνεία του προβλήματος και ορισμένων δεδομένων διαμορφώνοντας κάποιες αρχικές αντιλήψεις για το πρόβλημα. Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει τον ποιοτικό συλλογισμό κατά τον οποίο το άτομο επεξεργάζεται το πρόβλημα χρησιμοποιώντας στοιχεία και παραμέτρους της καθημερινής ζωής. Στην τρίτη φάση διεξάγεται η ποσοτικοποίηση του ποιοτικού συλλογισμού μέσω της εφαρμογής κανόνων, της σύγκρισης, της αύξησης και της μείωσης και στην τέταρτη φάση οργανώνεται η παρεχόμενη πληροφορία έτσι ώστε να καθοριστεί το κατάλληλο πλαίσιο για την επίλυση του έργου. Τέλος, στην πέμπτη φάση συλλαμβάνεται η έννοια του πολλαπλασιαστικού αναλογικού συλλογισμού που βασίζεται στην επεξεργασία των σχέσεων για τη μοναδικότητα κάθε ποσότητας που συγκρίνεται και

το συνδυασμό σχέσης λόγου μεταξύ δύο ή περισσότερων ποσοτήτων (Koellner-Clark & Lesh, 2003, όπως βρέθηκε σε Ταξίδη, 2008).

2.2 Οι Αναλογίες στα σχολικά εγχειρίδια της Ε' και Στ' Δημοτικού και της Α' Γυμνασίου

Το σύνολο των παιδιών που βρίσκονται στην ηλικία των 5 ή 6 ετών, δηλαδή τότε που αρχίζουν να φοιτούν στο σχολείο, αντιλαμβάνονται ένα πλήθος μαθηματικών εννοιών προτού ακόμη έρθουν σε επαφή με τα μαθηματικά ως διδακτικό αντικείμενο στο σχολείο. Πιο συγκεκριμένα, περιτριγυρίζονται από παιχνίδια που αποτελούν μικρογραφίες της πραγματικότητας (αυτοκινητάκια, λούτρινα ζώακια), επισκέπτονται με τους συγγενείς τους καταστήματα τροφίμων όπου πραγματοποιούνται συναλλαγές και ταξιδεύουν με μέσα μεταφοράς διανύοντας αποστάσεις (Λιάκου, 2009).

Σχετικά με το πεδίο των αναλογιών αν και θεωρείται ως μια απλή θεματική ενότητα που καλύπτει ένα μέρος του αναλυτικού προγράμματος του σχολείου εντούτοις αποτελεί βασικό στοιχείο της γνωστικής ανάπτυξης και της συλλογιστικής σκέψης. Σύμφωνα με τους Piaget & Inhelder (1975, όπως βρέθηκε σε Ταξίδη, 2008), τα παιδιά πριν από την ηλικία που αντιστοιχεί στο στάδιο των τυπικών λογικών ενεργειών (μικρότερα των 12 ετών) εφαρμόζουν υπολογιστικές τακτικές που στηρίζονται στην προσθετική και όχι την πολλαπλασιαστική αντίληψη σχετικά με τους όρους ενός λόγου. Έστω λοιπόν ότι ζητείται από ένα παιδί επτά ετών να μεγεθύνει ένα ορθογώνιο διατηρώντας το λόγο ανάμεσα στο μήκος και στο πλάτος. Τότε με βάση την άποψη των Piaget & Inhelder (1967), το παιδί θα μετρήσει τη διαφορά ανάμεσα στο μήκος και το πλάτος και θα τη μεταφέρει στη πλευρά του ορθογώνιου που θα δημιουργηθεί. Για παράδειγμα, θα προσθέσει 2 εκ. στο ορθογώνιο 4• 6 εκ., επειδή $6 - 4 = 2$. Επομένως, η σχέση ανάμεσα στο μήκος και το πλάτος του ορθογώνιου θα ληφθεί ως προσθετική και όχι ως πολλαπλασιαστική, όπου το 4 θα γινόταν αντιληπτό ως τα $\frac{2}{3}$ του 6 (Ταξίδης, 2008).

Πλήθος ερευνητών (Ricco, 1982, όπως βρέθηκε σε Tourniaire, F. & Pulos, 1985· Spinillo & Bryant, 1991, όπως βρέθηκε σε Boyer, Levine & Huttenlocher (2008)) μελέτησαν την ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν στρατηγικές αναλογικού προσανατολισμού για τη λύση ενός προβλήματος και κατέληξαν στο

συμπέρασμα ότι ακόμα και πολύ μικρής ηλικίας παιδιά μπορούν να κάνουν ορθούς συλλογισμούς σε αναλογικά προβλήματα όταν βασίζονται σε συγκεκριμένες στρατηγικές, όπως η επιλογή ισοδύναμων λόγων, τα σχέδια σε κλίμακες και ασκήσεις κατασκευής και μέτρησης. Στην αναλογική συλλογιστική περιλαμβάνεται όχι μόνο η κατανόηση των λόγων αλλά και η ικανότητα να γίνονται συγκρίσεις ανάμεσα στις ποσότητες και τις σχέσεις των ποσοτήτων. (Van de Walle, 2005). Ωστόσο, όπως επισημαίνει ο ίδιος, *“αυτή η μορφή συλλογιστικής ενδέχεται να μην αναπτυχθεί σε άτομα που δεν δόθηκαν ευκαιρίες να προβληματιστούν πάνω στις αναλογικές καταστάσεις”* (Van de Walle, 2005: 380).

Οι αναλογίες εμφανίζονται αρχικά έμμεσα στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα στο δεύτερο τεύχος των μαθηματικών, στην Ενότητα 7, στο Κεφάλαιο 36: «Μετράω και σχεδιάζω σε κλίμακες» γίνεται μία πρώτη έμμεση αναφορά στους Λόγους και τις Αναλογίες.

Στη συνέχεια, στο σχολικό εγχειρίδιο της Στ΄ Δημοτικού γίνεται η πρώτη άμεση και εκτεταμένη αναφορά σε αυτές τις δύο έννοιες. Ειδικότερα, ολόκληρη η Θεματική ενότητα 3 είναι αφιερωμένη στους Λόγους και τις Αναλογίες με το κεφάλαιο να πραγματεύεται έννοιες όπως οι λόγοι, οι αναλογίες, τα ανάλογα ποσά, τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, τα σταθερά και μεταβλητά ποσά, την απλή μέθοδο των τριών καθώς και τα ποσοστά. Μία έμμεση αναφορά στις αναλογίες πραγματοποιείται και στη Θεματική ενότητα 7, στο κεφάλαιο 59, το οποίο ασχολείται με τη σμίκρυνση και μεγέθυνση σχημάτων.

Οι Αναλογίες και οι Λόγοι όμως είναι μαθηματικές έννοιες που δεν απασχολούν τους μαθητές μόνο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αλλά καθ' όλη την μετέπειτα σχολική και ακαδημαϊκή πορεία τους. Στην παρούσα εργασία θα γίνει αναφορά μόνο στην Α΄ Γυμνασίου καθώς είναι η επόμενη τάξη στην οποία θα φοιτήσουν οι μαθητές της Στ΄ Δημοτικού που συμμετείχαν στην έρευνα.

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ τάξης του Γυμνασίου όπως και της Στ΄ τάξης του Δημοτικού αφιερώνεται μία ολόκληρη θεματική ενότητα, το Κεφάλαιο 6, για τους Λόγους και τις Αναλογίες. Όπως και στη Στ΄ τάξη γίνεται αναφορά στους λόγους, τις αναλογίες, τα ανάλογα ποσά, τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, όμως στην Α΄ Γυμνασίου προστίθεται και μία νέα μαθηματική έννοια, αυτή της γραφικής παράστασης των σχέσεων Αναλογίας.

Στην παρούσα έρευνα σημαντική θέση κατέχει η γνώση που οφείλουν να έχουν κατακτήσει οι μαθητές από την Ε΄ τάξη του Δημοτικού σχετικά με τις κλίμακες καθώς οι Αναλογίες και η Προοπτική συνδέονται μέσω της έννοιας της κλίμακας. Από τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται στη Στ΄ τάξη του Δημοτικού για την παρούσα έρευνα θα αξιοποιηθούν οι έννοιες της Αναλογίας και των Ανάλογων Ποσών. Με τη βελτίωση των γνώσεων των μαθητών σχετικά με τις Αναλογίες μέσω της παρούσας έρευνας κατά τη διάρκεια της φοίτησης στη Στ΄ τάξη του Δημοτικού αναμένεται οι μαθητές να αντιμετωπίσουν μικρότερες ή και καθόλου δυσκολίες όταν θα συναντήσουν ξανά τις έννοιες στην Α΄ Γυμνασίου.

2.3 Τι δυσκολεύει τους μαθητές με τις αναλογίες;

Ένα κρίσιμο ερώτημα που προβληματίζει μεγάλο μέρος του ερευνητικού και εκπαιδευτικού δυναμικού αφορά τη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην αναλογική συλλογιστική. Μέσω της έρευνας που διεξήχθη από τους Lo και Watanabe (1997) προέκυψε πως τα παιδιά δυσκολεύονται καταρχάς με τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση, τα κλάσματα και τις δεκαδικές έννοιες. Πιο συγκεκριμένα, τα αναλυτικά προγράμματα που σχετίζονται με το λόγο και την αναλογία από τη ΣΤ΄ δημοτικού μέχρι τη Β΄ Γυμνασίου εστιάζουν κυρίως στη διαδικαστική γνώση, όπως η λήψη απόφασης για το αν δύο λόγοι είναι ίσοι ή άνισοι. Ωστόσο, η επικέντρωση στις διαδικασίες δυσχεραίνει τη σφαιρική αντίληψη και την ανάπτυξη του προβληματισμού από μέρους των παιδιών. Για αυτό το λόγο, σε αρκετές έρευνες έχει αποτυπωθεί η χαμηλή επίδοση των μαθητών των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου σε αναλογικές δραστηριότητες (Van de Walle, 2005).

Από μελέτες που έχουν διενεργηθεί διαπιστώνεται πως οι μαθητές παρά την καθημερινή επαφή τους με τις αναλογίες δεν καταφέρνουν να συσχετίσουν την αναλογική σκέψη με μαθηματικές δραστηριότητες. (Leech, Marreschal & Cooper, 2008; Lobato, Ellis & Munoz, 2003, όπως βρέθηκαν σε Χρυσοστόμου, 2014). Επομένως, με βάση τους Lee και Shriraman (2011, όπως βρέθηκε σε Χρυσοστόμου, 2014: 92), *“η μαθηματική εκπαίδευση θα επωφεληθεί εξαιρετικά από μελέτες για την χρήση του αναλογικού συλλογισμού ως ένα διδακτικό μέσο στις τάξεις των μαθηματικών”*. Επίσης, τα αποτελέσματα της έρευνας των Buehl και Alexander

(2004) οδηγούν στο συμπέρασμα πως οι ικανότητες αναλογικού συλλογισμού των παιδιών φαίνεται πως συνεισφέρουν στις μελλοντικές τους ικανότητες μαθηματικού συλλογισμού και αντίστροφα οι μαθηματικές τους ικανότητες επηρεάζουν το μελλοντικό αναλογικό τους συλλογισμό (Χρυσοστόμου, 2014).

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με την έννοια της αναλογίας διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες: α) δυσκολίες σχετικά με την κατανόηση της ποιοτικής σχέσης της έννοιας μεταξύ των συνισταμένων της, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αγνοούν τα αριθμητικά δεδομένα και να χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως “περισσότερο” ή “λιγότερο”, β) δυσκολίες αναφορικά με την αντίληψη της αναλογίας ως μερικής ποσοτικής σχέσης και εστίαση των παιδιών σε ορισμένες ποσοτικές σχέσεις (Παπαγεωργίου και Χρίστου (1999), όπως βρέθηκε σε Κυρατζούλη, 2017), γ) δυσκολίες λόγω της ύπαρξης μιας ποσοτικής προσθετικής σχέσης στη δομή της αναλογίας που οδηγούν στην χρήση της προσθετικής στρατηγικής στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων (Μοδέστου, (2004), όπως βρέθηκε σε Κυρατζούλη, 2017).

Καταληκτικά θα μπορούσε να ειπωθεί πως οι μαθητές έρχονται από τη νηπιακή ηλικία σε επαφή με τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας μέσω των εικόνων από την καθημερινή τους ζωή. Κατά τη σχολική ηλικία αξιοποιούν προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων αναλογίας. Άρα, με βάση τα αποτελέσματα ερευνητικών μελετών προκύπτει το συμπέρασμα πως η επαφή με προβλήματα της καθημερινότητας, η συζήτηση, οι κατασκευές και οι δραστηριότητες μέτρησης συνιστούν χρήσιμα εκπαιδευτικά υλικά εμβάθυνσης στον αναλογικό συλλογισμό.

Κεφάλαιο 3ο : Μαθηματικά και Τέχνη

3.1 Η Σύνδεση της Τέχνης με τα Μαθηματικά

Η Τέχνη και τα Μαθηματικά θεωρούνται από πολλούς ανθρώπους ως δυο ξεχωριστοί και ασύνδετοι κλάδοι, όμως η ιστορία έχει αποδείξει πως αυτοί οι δύο τομείς έχουν αρκετά κοινά σημεία και η γνώση του ενός μπορεί να ωφελήσει στην κατανόηση του άλλου. Ξεκινώντας από τα Μαθηματικά μπορούμε να αναφέρουμε

πως πρόκειται για μια επιστήμη που βασίζεται στη λογική και αναζητά τρόπους κατανόησης της αρμονίας του σύμπαντος. Η ζωγραφική από την άλλη πλευρά χαρακτηρίζεται ως μια «*άναρχος τάξη*» (Κούμouρος, 2000: 363), μέσω της οποίας ο άνθρωπος προσπαθεί να εξωτερικεύσει τα συναισθήματά του και τον εσωτερικό του κόσμο.

Ένα κοινό σημείο σε αυτούς τους δυο κλάδους, το οποίο κάθε άνθρωπος μπορεί να αναγνωρίσει, είναι η παρουσία των γεωμετρικών σχημάτων. Παρόλο που τα γεωμετρικά σχήματα εμφανίζονται και στους δύο τομείς η ερμηνεία που αποδίδει ο κάθε κλάδος σε αυτά είναι ξεχωριστή. Για παράδειγμα, το τρίγωνο στη ζωγραφική αποτελεί ένα σχήμα που δείχνει δυναμική και ρυθμό και ειδικότερα το ισοσκελές τρίγωνο αποπνέει την αίσθηση της συμμετρίας. Τα τρίγωνα όπως και τα ορθογώνια, λόγω των υψών που έχουν προς τις απέναντι πλευρές τους, δημιουργούν στους πίνακες ζωγραφικής την αίσθηση πως ταυτίζονται με τον θεατή. Ο κύκλος από την άλλη πλευρά χαρακτηρίζεται στη ζωγραφική ως ένα σχήμα που περικλείει μέσα του τα πάντα. Εξαιτίας της ιδιότητάς του να μην έχει αρχή και τέλος ταυτίζεται με την έννοια του άπειρου (Κούμouρος, 2000).

Μια ακόμη σύνδεση μεταξύ των Μαθηματικών και της Τέχνης η οποία σύμφωνα με τον Κούμouρο (2000) είναι δυσδιάκριτη με την πρώτη ματιά είναι η επιθυμία και των δύο κλάδων να προσδιορίσουν τον χώρο. Τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Ζωγραφική ο δημιουργός ορίζει τον χώρο του και προσπαθεί να βρει εργαλεία για να δημιουργήσει το έργο του σε αυτόν τον χώρο.

Η προσπάθεια των δύο αυτών κλάδων για τον προσδιορισμό του χώρου είναι αρχέγονη, όμως μόλις τον 15^ο και 16^ο αιώνα μ.Χ. η Τέχνη ενώθηκε με τα Μαθηματικά κάτω από την ομπρέλα της επιστήμης για να λύσει αυτό το πρόβλημα. Η λύση για τη ζωγραφική ήταν η Γραμμική Προοπτική. Καλλιτέχνες όπως ο Piero della Francesca, ο Leonardo da Vinci, ο Dürer και πολλοί άλλοι ακόμα οι οποίοι είχαν γνώση Μαθηματικών και άλλων επιστημών βασιζόμενοι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δημιούργησαν κανόνες ζωγραφικής έτσι ώστε να μπορεί να απεικονιστεί η τρίτη διάσταση σε έναν δυσδιάστατο πίνακα (Κούμouρος, 2000). Η ανάγκη των Τεχνών για απεικόνιση της τρίτης διάστασης απασχόλησε τόσο τους αρχαίους Έλληνες όσο και τους Βυζαντινούς όμως μόνο κατά την Αναγέννηση έλαβε επιστημονικό υπόβαθρο και τεκμηρίωση. Αυτή η ανάγκη των τεχνών και ειδικότερα η έννοια της Προοπτικής

συνέβαλλε στη δημιουργία μίας νέας γεωμετρίας, της Προβολικής Γεωμετρίας (Βασιλείου, 2015).

Όμως, η τεχνική της Γραμμικής Προοπτικής που αποτέλεσε την τέλεια μέθοδο απεικόνισης του βάθους άρχισε με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή από τα τέλη του 16^{ου} αιώνα, να εγκαταλείπεται με τους καλλιτέχνες να προσπαθούν να αποδεσμευτούν από την τρίτη διάσταση του χώρου. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της προσπάθειας αποτελούν ο Κυβισμός, ο Σουρεαλισμός και η Αφηρημένη τέχνη. Μια παρόμοια αποδέσμευση από τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις για τον χώρο επιχείρησαν και τα Μαθηματικά στην εποχή που ακολούθησε (Κούμouρος, 2000).

Ο Gauss πρότεινε την ύπαρξη μη Ευκλείδειας γεωμετρίας χωρίς ωστόσο να δημοσιεύσει ποτέ τις απόψεις του για το θέμα αυτό. Στη συνέχεια, ο János Bolyai καθώς και ο Nikolai Ivanovich Lobachevsky εξέφρασαν ξεχωριστά ο ένας από τον άλλον την αντίρρησή τους στο 5^ο Αξίωμα του Ευκλείδη δημιουργώντας έτσι μια νέα γεωμετρία, την Υπερβολική Γεωμετρία (Κούμouρος, 2000). Αν και οι δυο που προαναφέρθηκαν θεωρούνται οι πατέρες της Υπερβολικής Γεωμετρίας υπήρχαν και άλλοι επιστήμονες που είχαν φτάσει κοντά στην ανακάλυψη αυτής της νέας γεωμετρίας και μάλιστα αρκετά χρόνια πριν από αυτούς. Δύο από αυτούς ήταν ο Gerolamo Saccheri (1667–1773) και Johann Lambert (1728–1777), οι οποίοι απέρριψαν τα αποτελέσματα των μελετών τους τα οποία τους οδηγούσαν στην Υπερβολική Γεωμετρία λόγω της αντίφασής τους με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Έπειτα ακολούθησε ο Georg Riemann ο οποίος αλλάζοντας το 5^ο και το 2^ο Αξίωμα του Ευκλείδη δημιούργησε την Ελλειπτική Γεωμετρία (Βασιλείου, 2015).

Πέρα από τις συγκλίσεις ή αποκλίσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των Μαθηματικών και της Τέχνης και οι δύο τομείς συναντώνται ενίοτε πέρα από τον από κόσμο μας, στην σφαίρα του νοητού- ιδεατού κόσμου. Άλλωστε και οι δυο αναζητούν την ομορφιά του σύμπαντος με τον δικό τους μοναδικό τρόπο (Κούμouρος, 2000).

3.2 Σύνδεση της Προοπτικής με τα Μαθηματικά και τις Αναλογίες

Όπως διαπιστώθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η Προοπτική βασίστηκε σε μαθηματικούς κανόνες και ειδικότερα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (Κούμouρος, 2000· Βασιλείου, 2015). Η πρώτη άμεση σύνδεση της Προοπτικής με τα Μαθηματικά

έγινε από τον αρχιτέκτονα Fillipo Brunelleschi το διάστημα 1413-1425 (Καμπάνη, 2000· Janson, χ.χ· Ο' Connor και Robertson, 2003· Lienau, 2013). Ο ίδιος βασιζόμενος στην θεωρία του Ευκλείδη για την «Οπτική», κατέληξε στο συμπέρασμα πως αν το μάτι ενός παρατηρητή και το αντικείμενο που παρατηρείται σχηματίζουν μία ευκλείδεια πυραμίδα, τότε σε μία επιφάνεια που τέμνει τη νοητή πυραμίδα θα απεικονίζεται το αντικείμενο που παρατηρείται.

Αυτή η ιδέα του Brunelleschi μετέτρεψε το εικαστικό πρόβλημα της απεικόνισης του βάθους σε έναν δισδιάστατο πίνακα σε μαθηματικό πρόβλημα μέσω της κάθετης τομής μίας πυραμίδας (Καμπάνη, 2000). Ο Brunelleschi φαίνεται πως είχε γνώση ότι: α) πρέπει να υπάρχει ένα σημείο φυγής, β) πως το αντικείμενο προς απεικόνιση θα πρέπει να σχεδιαστεί υπό κλίμακα και γ) πόσο θα είναι το μήκος του αντικειμένου επάνω στον καμβά ανάλογα με την απόστασή του από τον παρατηρητή (Ο' Connor και Robertson, 2003). Ο ίδιος απέδειξε με μαθηματικό τρόπο πως όσο πιο μακριά βρίσκεται ένα αντικείμενο από το μάτι του παρατηρητή τόσο πιο μικρό φαίνεται σε μέγεθος (Lienau, 2013).

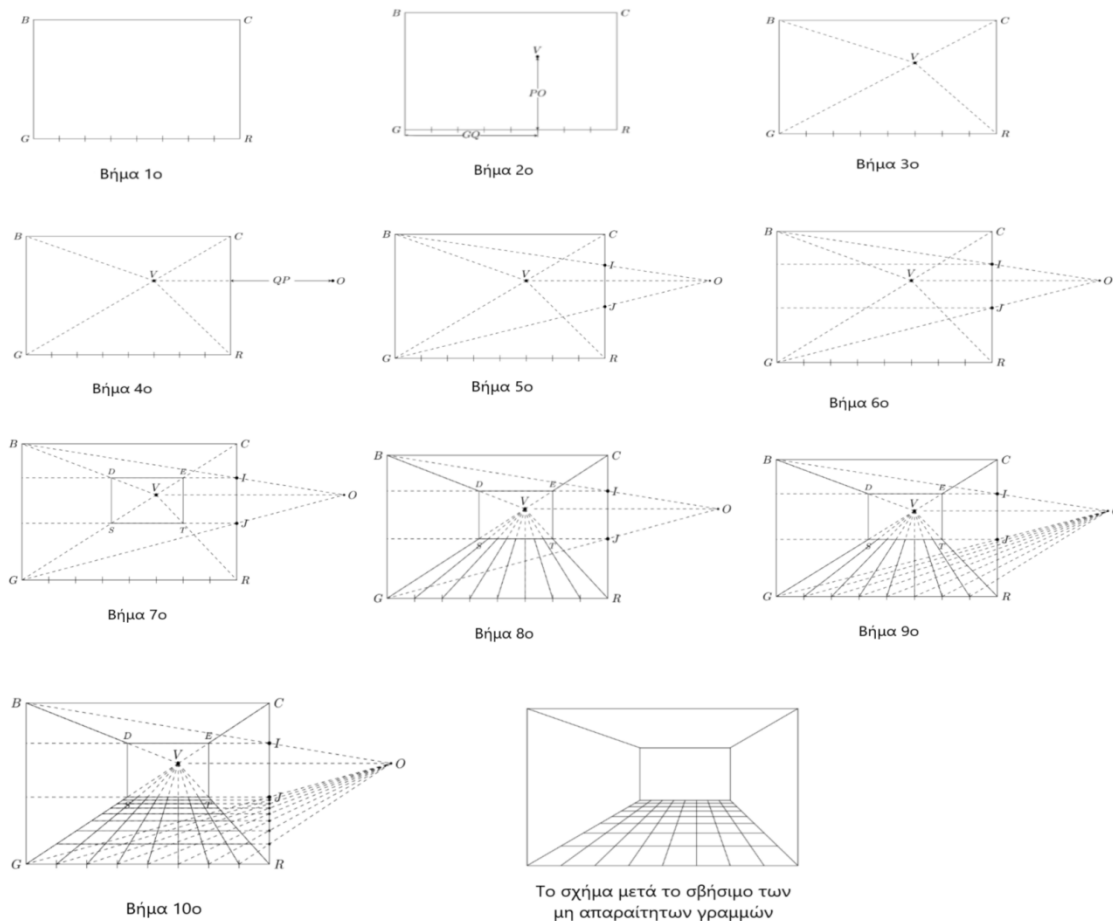
Εκείνος, όμως που ερμήνευσε πρώτος τους κανόνες για τη Γραμμική Προοπτική ήταν ο Leon Battista Alberti περί το 1435 στο έργο του Della Pittura (Ο' Connor και Robertson, 2003· Lienau, 2013). Ο ίδιος θεωρούσε πως ο καμβάς αποτελούσε ένα ανοιχτό παράθυρο μέσα από το οποίο έβλεπε αυτό που ήθελε να ζωγραφίσει. Με άλλα λόγια *“η εικόνα στο κάδρο θα πρέπει να δίνει τη ψευδαίσθηση ότι είναι ένα παράθυρο μέσα από το οποίο ο θεατής κοιτάζει έναν εξωτερικό τρισδιάστατο κόσμο”* (Phillips, 2001:1).

Πρώτος ο Alberti παρουσίασε έναν αλγόριθμο για το σχεδιασμό της εικόνας ενός δαπέδου με προοπτική, κάτι που αποτέλεσε καινοτομία για την απεικόνιση των μορφών σε τρισδιάστατο χώρο. Η συγκεκριμένη μέθοδός του έχει ως βάση το σημείο φυγής, το σημείο εκείνο δηλαδή που εντοπίζεται απέναντι από το μάτι του καλλιτέχνη. Όταν κάποιος κοιτάζει το έργο αισθάνεται πως η εικόνα συνεχίζεται και πίσω από τον πίνακα.

Σύμφωνα με τον Hammack (1994), ο Alberti ακολούθησε 10 βήματα για να σχεδιάσει ένα δωμάτιο σε σμίκρυνση. Αρχικά, ο καλλιτέχνης σχεδιάζει σε σμίκρυνση τις τέσσερις πλευρές του δωματίου (σχηματίζεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) και εντοπίζει το σημείο φυγής. Έπειτα, ενώνει το σημείο φυγής με τις τέσσερις

κορυφές του ορθογωνίου. Εντοπίζει ένα σημείο στον ορίζοντα που να βρίσκεται στο ύψος των ματιών του, δηλαδή στην ίδια ευθεία με το σημείο φυγής. Το σημείο αυτό πρέπει να απέχει από τις πλευρές του ορθογωνίου απόσταση ίση με αυτή που έχει ο θεατής-καλλιτέχνης από το σημείο φυγής. Αν ενώσουμε το σημείο αυτό με το σημείο φυγής η γραμμή που σχηματίζεται ονομάζεται γραμμή του ορίζοντα. Από το σημείο αυτό (ή αλλιώς εξωτερικό σημείο) σχεδιάζει δύο ευθείες γραμμές προς τις δύο απέναντι εσωτερικές γωνίες του ορθογωνίου. Από τα σημεία που οι ευθείες τέμνουν την δεξιά πλευρά του δωματίου φέρνει οριζόντιες γραμμές, οι οποίες είναι παράλληλες προς την πάνω και κάτω πλευρά του δωματίου. Στα σημεία όπου οι αυτές οι νέες οριζόντιες γραμμές τέμνουν τις αρχικές τέσσερις γραμμές που έχουν αρχή τους το σημείο φυγής διαμορφώνεται ένα ορθογώνιο που θα αποτελέσει τον πίσω τοίχο του δωματίου.

Στη συνέχεια, ο ζωγράφος σχεδιάζει γραμμές από το σημείο φυγής προς το ευθύγραμμο τμήμα του ορθογωνίου (πίσω τοίχου) και τις προεκτείνει προς το ευθύγραμμο τμήμα που αποτελεί τη βάση του δωματίου. Από το εξωτερικό σημείο φέρνει ευθείες προς τα σημεία της βάσης του δωματίου και από κάθε τμήμα της δεξιάς πλευράς που διαπερνά η ευθεία σχηματίζει οριζόντιες γραμμές ανάμεσα στους δύο τοίχους (εξωτερικό δεξιό και εξωτερικό αριστερό τοίχο). Τέλος, σβήνει τα σημεία τομής και τις ευθείες (εκτός από τις τέσσερις οριζόντιες και αυτές που διαμορφώνουν το πάτωμα) και διατηρεί το ορθογώνιο (πίσω τοίχο) (Hammack, 1994).



Εικόνα 1: Τα 10 βήματα του Alberti για το σχεδιασμό ενός δωματίου με προοπτική ενός σημείου φυγής (Πηγή: Hammack, 1994)

Μνεία πρέπει να γίνει και στο γεγονός πως ο Alberti προώθησε τον κανόνα της ιδανικής ανθρώπινης μορφής, μία από τις θεωρίες των καλών τεχνών που πηγάζει από τον αρχαίο γλύπτη Πολύκλειτο και την αντίληψή του για το ιδανικό ανθρώπινο σώμα. Ειδικότερα, διαμόρφωσε ένα σύστημα και ένα όργανο μέτρησης του ανθρώπινου σώματος. Το όργανο αυτό ήταν ένας ξύλινος χάρακας που είχε μήκος ίσο με το μέσο ύψος των ανθρώπων της εποχής (~1,77) και πιο συγκεκριμένα χωριζόταν σε έξι τμήματα και κάθε τμήμα του σε δέκα υποτμήματα. Με αυτό τον τρόπο κατάφερε να υπολογίσει το μήκος και το πλάτος διαφόρων μελών του ανθρώπινου σώματος και να συνδέσει την χρήση των μαθηματικών με την καθημερινή ζωή (Phillips, 1997).

Με βάση τον Nakamura (2017), η θεωρία της ανθρώπινης αναλογίας μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των μαθηματικών και της τέχνης. Όπως καταγράφει ο ίδιος ερευνητής, οι μέθοδοι που αποτέλεσαν τη βάση και προηγήθηκαν της αναγεννησιακής προβολής της ανθρώπινης μορφής είναι οι ακόλουθες: α) η κλασματική μέθοδος, κατά την οποία το σώμα εκφράζεται ως ένας

ακέραιος λόγος προς το ύψος του ανθρώπου και βασίζεται στη γεωμετρική αρμονία της αρχαίας ελληνικής τέχνης, β) η μέθοδος της τυπικής μονάδας, όπου ένα μέρος του σώματος χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης για τον υπολογισμό της ανθρώπινης μορφής και συναντάται κυρίως στα μεσαιωνικά χρόνια, γ) η μέθοδος της γεωμετρικής κατασκευής, η οποία αφορά τη διαμόρφωση του ανθρώπινου σώματος και των χαρακτηριστικών του μέσω της γεωμετρίας.

Κλείνοντας με τη συνεισφορά του Alberti στη σύνδεση της τέχνης με το πεδίο των μαθηματικών θα γίνει αναφορά σε ένα από τα ρητά του που φανερώνει τη μέριμνά του για την εξέλιξη της πορείας των καλλιτεχνών που θα έπρεπε κατά τη γνώμη του να είναι συνυφασμένη με τον κλάδο των επιστημών και των καλών τεχνών.

“Θέλω ο ζωγράφος να εντρυφήσει, όσο δύναται, σε όλες τις καλές τέχνες, αλλά τού εύχομαι πάνω από όλα να γνωρίζει καλά τη γεωμετρία” και “Μένει τώρα πια να μάθει ο ζωγράφος πώς να ζωγραφίζει με το χέρι του αυτό που έχει μάθει με το μυαλό του”. [Alberti 1435/1972, §52, 53]

3.3 Τα οφέλη της σύνδεσης της Τέχνης και των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία

Το παραπάνω ρητό του Alberti θα μπορούσε να προκαλέσει ερωτηματικά αλλά και να αποτελέσει αφορμή για τη μελέτη της σύνδεσης τέχνης και μαθηματικών. Μια έννοια που συσχετίζεται τόσο με τα μαθηματικά όσο και με τις τέχνες είναι ο καθορισμός και η διεύρυνση του χώρου, δηλαδή η αντίληψη της διάστασης. Το ζήτημα της διεύρυνσης του χώρου απασχολούσε ανέκαθεν και τη ζωγραφική. Το 15ο-16ο αιώνα αναπτύχθηκε η τέχνη-επιστήμη της προοπτικής, την οποία μελέτησαν και κάποιοι ζωγράφοι που είχαν εντρυφήσει στα μαθηματικά. Κάποιοι από αυτούς ήταν ο Pierro della Franesca, ο Ραφαήλ και ο Ντύρερ που *“δημιούργησαν κανόνες σχεδίου βασιζόμενοι στην ευκλείδεια γεωμετρία και οδήγησαν τη ζωγραφική σε εκπληκτικά αποτελέσματα όσον αφορά τη διεύρυνση του χώρου, τη δημιουργία δηλαδή της τρίτης διάστασης στο δισδιάστατο έργο”*. (Κούμouρος, 2000: 368). Ένα κοινό σημείο που υπάρχει μεταξύ των κλάδων των μαθηματικών και της τέχνης είναι το

γεγονός πως τόσο ο μαθηματικός όσο και ο ζωγράφος ορίζουν τον χώρο που θα εργαστούν και κατασκευάζουν τους κανόνες και τα μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουν ώστε να καταλήξουν σε ένα αποτέλεσμα.

Αξίζει να τονιστεί πως ένας από τους κορυφαίους εικαστικούς δημιουργούς που συνέδεσε τα μαθηματικά με την τέχνη και αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο της σύγχρονης καλλιτεχνικής φαρέτρας είναι ο Escher (1898-1972). Πρόκειται για έναν Ολλανδό εικαστικό που αποτύπωσε την πρωτοτυπία του μέσω μαθηματικών εννοιών στα έργα του και θεωρείται ένας από τους πιο καταξιωμένους εικαστικούς και ερευνητές μαθηματικούς. Για την ακρίβεια, ανέπτυξε μέσω των μαθηματικών μια θεωρία για την έκφραση της συμμετρίας στην τέχνη και ένα σύστημα κατηγοριοποίησης των ιδιοτήτων των σχημάτων, του χρώματος και της συμμετρίας. Εξάλλου, όπως αναφέρει και ο ίδιος *“παρόλο που δεν είμαι σχετικός με τις θετικές επιστήμες εντούτοις συχνά φαίνεται πως έχω περισσότερα κοινά με τους μαθηματικούς απ’ ότι έχω με τους συναδέλφους εικαστικούς”* (Escher, 2001:6).

Αξίζει όμως να σημειωθεί πως στη σημερινή εποχή, η τέχνη έχει απολέσει την αξία και τον εκφραστικό χαρακτήρα που διατηρούσε στο παρελθόν και απευθύνεται πλέον σε ένα μικρό κοινό ανθρώπων. Αν σκεφτεί κανείς την τέχνη στην αρχαία Ελλάδα, την Αίγυπτο, το Βυζάντιο και την Αναγέννηση, θα αντιληφθεί την εξέχουσα θέση που κατείχε τότε στην κοινωνία και τον καθοριστικό της ρόλο στο πολιτισμικό γίνεσθαι κάθε εποχής. Η τέχνη και η παιδεία αποτελούσαν κρίκο στην αλυσίδα της κοινωνικής ζωής που αποκόπηκε με την έκρηξη της επιστημονικής έρευνας. Μέσα στο πέρασμα των αιώνων ένα πλήθος αλλαγών όπως η εξέλιξη των επιστημονικών κλάδων, της τεχνολογίας και της οικονομίας έχουν επηρεάσει τον εσωτερικό κόσμο του ατόμου και την ψυχική του υγεία (Παυλίδου, 2019). Συνεπώς, η τέχνη έχασε την αρχική αποστολή της να εμπνέει, να ψυχαγωγεί και να απελευθερώνει τον άνθρωπο από τις βιοτικές δυσκολίες και απέκτησε ένα διακοσμητικό χαρακτήρα. Όσον αφορά το σύγχρονο σχολείο είναι αλήθεια πως εξακολουθεί να είναι σε μεγάλο ποσοστό ένα σχολείο αποστήθισης γνώσεων παραγκωνίζοντας τον παράγοντα της έκφρασης και της δημιουργίας (Μουζάκης, 1984).

Μία από τις διεξόδους στο πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να είναι η σύνδεση της τέχνης με τα υπόλοιπα γνωστικά αντικείμενα και η ένταξή της σε ένα ευρύτερο πλαίσιο μάθησης, ώστε εκπαιδευτικοί και μαθητές να αντιληφθούν την αξία της στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και την απόκτηση αισθητικών εμπειριών. Όπως είναι γνωστό, η τέχνη αποτελεί σημείο τομής για ένα βασικό αριθμό μαθημάτων της Πρωτοβάθμιας

εκπαίδευσης όπως τα Εικαστικά, την Θεατρική Αγωγή, τη Μουσική και την Αισθητική Αγωγή. Αν και η αξιοποίησή της στη διαθεματική διαδικασία αποτελεί καινοτομία στη μαθησιακή εμπειρία εντούτοις οι αισθητικές ασχολίες θεωρούνται συχνά δευτερεύουσας σημασίας (Γκούτενσβαγκερ & Μαγουλιώτης, 2022).

Όπως επισημαίνουν οι ανωτέρω ερευνητές, η υποβάθμιση της τέχνης και η έλλειψη κατάρτισης των εκπαιδευτικών γενικής εκπαίδευσης στον τομέα των καλλιτεχνικών πεδίων αποτελούν τροχοπέδη για την ανάδειξη των τεχνών στο σχολείο. Αδιαμφισβήτητα, μέσω των τεχνών δίνεται έμφαση στην κοινωνικο-συναισθηματική ανάπτυξη του παιδιού, στη διαδικασία μάθησης και την ενθάρρυνση της αυτογνωσίας. Με βάση την θεωρία του Erickson (1950) μια επιτυχημένη εκπαιδευτική διαδικασία περιλαμβάνει εικαστικές και καλλιτεχνικές δράσεις (Σιδηροπούλου, 2019). Έτσι, επιτυγχάνεται η καλλιέργεια της έκφρασης των συναισθημάτων και των ιδεών των μαθητών και ενισχύεται η συμμετοχή τους στη γνωστική πορεία καθώς υπάρχει ποικιλία εκδοχών και προσεγγίσεων για ένα θέμα.

Στο παρόν σημείο να τονιστεί πως η σύνδεση της τέχνης με τα υπόλοιπα γνωστικά αντικείμενα εντάσσεται στο πλαίσιο της διαθεματικότητας. Διαθεματικότητα σημαίνει να αντιμετωπίζουμε τα μαθήματα σαν μια ενότητα και να υπάρχει μία σύνδεση μεταξύ τους. Με τον όρο διαθεματικότητα σήμερα εννοούμε την *“οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος με τέτοιο τρόπο ώστε το περιεχόμενο μάθησης να ενιαιοποιείται, δηλαδή δεν κατακερματίζεται η γνώση στα επιμέρους διακριτά γνωστικά αντικείμενα, τα οποία συνεισφέρουν ολιστικά στη διερεύνηση ενός θέματος”* (Καλδή & Κόνσολας, 2016:35). Ένα παράδειγμα της διαθεματικής προσέγγισης θα μπορούσε να θεωρηθεί και η έννοια της κλίμακας που εμφανίζεται στη διδακτέα ύλη των Μαθηματικών της Ε΄ και Στ΄ δημοτικού. Η ιδέα της προοπτικής, η οποία βασίζεται στην κλίμακα παρουσιάζεται στο γνωστικό πεδίο των Εικαστικών των ίδιων τάξεων. Επομένως, υπάρχει η δυνατότητα να αξιοποιηθούν και οι δύο κλάδοι για την επεξεργασία του συγκεκριμένου θέματος μέσω δραστηριοτήτων που αντλούνται από διακριτούς γνωστικούς τομείς.

Όπως επισημαίνει η Brezovnik (2015), σε έρευνα που διεξήγαγε σχετικά με τη σύνδεση των καλών τεχνών και των μαθηματικών στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οδηγήθηκε στο συμπέρασμα πως η μακροπρόθεσμη συμμετοχή σε δραστηριότητες που σχετίζονται με τις τέχνες προσφέρει πλεονεκτήματα αναφορικά με την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής. Κάποια από αυτά τα θετικά στοιχεία είναι η δημιουργία εσωτερικού κινήτρου, η οπτική φαντασία και ο προβληματισμός. Τα

μαθηματικά αποτελούν τη βάση για την κατασκευή έργων τέχνης μέσω της προοπτικής, της αναλογίας και της διαίρεσης και η τέχνη λειτουργεί ως αρωγός για την ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης και της πρακτικής εφαρμογής του μαθηματικού πεδίου. Με βάση την ανωτέρω ερευνήτρια, τα μαθηματικά μπορεί να εξελιχθούν σε ένα πολύ δημιουργικό τομέα αν υπάρξει αλληλεπίδραση με τις τέχνες.

Πιο συγκεκριμένα, η συσχέτιση των κλάδων της τέχνης και των μαθηματικών στο εκπαιδευτικό πεδίο θα διαμορφώσουν ένα ενεργητικό κλίμα στην τάξη όπου οι μαθητές θα συμμετέχουν με ενθουσιασμό στη μαθησιακή διαδικασία, θα συνεργάζονται, θα έχουν δημιουργική σκέψη και θα είναι απαλλαγμένοι από τον φόβο της αποτυχίας. Επίσης, πρέπει να τονιστεί πως τα μαθηματικά που συναντώνται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση αποτελούν τη μαθηματική πυξίδα για ένα άτομο καθώς περιλαμβάνουν θεμελιώδεις γνώσεις, χρήσιμες για την πορεία της ζωής του. Επιπροσθέτως, η πρόκληση θετικών συναισθημάτων αναφορικά με τα μαθηματικά, στα πρώτα βήματα της μαθησιακής πορείας ενός παιδιού θα το βοηθήσουν σε μελλοντικό χρόνο να εντρυφήσει περισσότερο σε έννοιες και ορισμούς που νοηματοδοτούνται με σύμβολα. Ίσως ακόμη, ορισμένα παιδιά να επιλέξουν για την επαγγελματική σταδιοδρομία τους κλάδους που συνδυάζουν τα μαθηματικά με την τέχνη όπως η μηχανική και η αρχιτεκτονική. Έτσι, αυτή η σύνδεση οδηγεί σε εμπάθυνση της γνώσης και αναμόρφωση της μαθησιακής εμπειρίας (Brezonnik, 2015).

Με βάση τον Eisner (2002), η εκπαίδευση είναι απαραίτητο να διδαχθεί από την τέχνη τον τρόπο με τον οποίο θα βελτιώσει την ποιότητα της διδασκαλίας. Πιο αναλυτικά, η τέχνη προωθεί την παρατήρηση, την εξερεύνηση και την πρόκληση ευχάριστων συναισθημάτων. Το πρόγραμμα του Eisner βασίζεται σε αισθητικούς τρόπους προσέγγισης της γνώσης. Η διάσταση αυτή εισήχθη από το Dewey και αφορά την αίσθηση που αποκομίζει ένας άνθρωπος από τη σχέση του με κάποιο πεδίο, πρόσωπο ή κατάσταση. Με το όρο «αισθητική της γνώσης» ο Dewey αναφέρεται στο βίωμα που αποκομίζει κανείς όταν μαθαίνει ή έρχεται σε επαφή με κάποιο γνωστικό αντικείμενο και η εμπειρία του αυτή καθορίζει την μεταγενέστερη σχέση του με αυτό το αντικείμενο. Σχετικά με το μαθηματικό πεδίο έχει αποδειχθεί μέσω πλήθους ερευνητικών δεδομένων πως η οικοδόμηση μαθηματικών γνώσεων δεν υλοποιείται τις περισσότερες φορές αποτελεσματικά στη σχολική τάξη. Ο στείρος τρόπος παρουσίασης των δεδομένων, η μονοτονία και η αυστηρή ορθολογική τακτική θεωρούνται μερικά μόνο από εκείνα τα σημεία που προκαλούν απωθητικά κριτήρια

για την εμπλοκή στο συναρπαστικό κόσμο των μαθηματικών (Leron, 1985, Hofstadter, 1992).

Η αισθητική της γνώσης μπορεί να αποτελέσει κομβική τεχνική για την απομάκρυνση αυτού του εμποδίου. Συγκεκριμένα, η λύση που προωθείται είναι η διαμόρφωση ενός μαθησιακού περιβάλλοντος με βιώματα που προωθούν τις αισθητηριακές εμπειρίες, τη φαντασία και την ανάληψη πρωτοβουλιών. Κατάλληλο σημείο εκκίνησης κατά την Dietiker (2015) είναι η αναζήτηση εναλλακτικών πεδίων που μπορούν να συνδεθούν με τα μαθηματικά και να ανασύρουν από τον εκπληκτικό μα συνάμα ανεξερεύνητο για πολλούς μαθηματικό κόσμο την αφθονία ιδεών και στοχασμών. Ειδικότερα, η ίδια ερευνήτρια τονίζει πως η εικαστική ή παραστατική μορφή τέχνης μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για την αισθητική προσέγγιση των μαθηματικών, αφού λειτουργούν ως μεταφορικό μέσο προσδιορισμού των εννοιών και των συλλογισμών.

Μια έρευνα που διεξήχθη από την Nuton (2019) στα πλαίσια της μελέτης της ενσωμάτωσης της εικαστικής τέχνης στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών ανέδειξε το γεγονός πως η ενασχόληση με την τέχνη συσχετίζεται θετικά με τα επιτεύγματα σε μαθηματικές δραστηριότητες. Επίσης, προέκυψε πως η παρουσία της τέχνης στο σχολικό πεδίο προωθεί τα κίνητρα και κινητοποιεί τους μαθητές να αναλάβουν πρωτοβουλία. Η τέχνη και τα μαθηματικά είναι δύο βαθιά συνδεδεμένοι τομείς αφού έχουν ως σκοπό τη διερεύνηση φυσικών δεδομένων μέσω κοινών εργαλείων (μοτίβα, αναλογίες, συμμετρία). Επομένως, η ενσωμάτωση της τέχνης στο μαθηματικό πεδίο *“ενθαρρύνει τους μαθητές να σκέφτονται κριτικά, να αναζητούν πολλαπλές λύσεις, να εκφράζονται και να ανακαλύπτουν τη γνώση”* (Nuton, 2020:1-2).

Καταλήγοντας, ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στο γεγονός πως το κυριότερο σημείο συνάντησης των μαθηματικών και της τέχνης είναι το ανθρώπινο δυναμικό που συνθέτει τους δύο κλάδους. *«Τόσο ο στοχαστής μαθηματικός όσο και ο στοχαστής ζωγράφος θα συναντηθούν στον ίδιο νοητό χώρο πέραν του πραγματικού. Ο πρώτος μέσω της διανοητικής του προσπάθειας και των επιστημονικών του εργαλείων και ο δεύτερος μέσω των καλλιτεχνικών μεθόδων και της δημιουργικότητάς του»* (Κούμouρος, 2000:11). Επομένως, και στο σχολικό πεδίο η αλληλεπίδραση της τέχνης και των μαθηματικών μπορεί να συντελεστεί μέσω της βιωματικής και διαθεματικής προσέγγισης των διδακτικών αντικειμένων και της συνεργασίας των εκπαιδευτικών με τους συναδέλφους τους και με το μαθητικό δυναμικό.

ΜΕΡΟΣ Β': Η ΕΡΕΥΝΑ

Κεφάλαιο 4ο: Μεθοδολογία της έρευνας

4.1 Σκοπός της έρευνας και ερευνητικά ερωτήματα

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η σύνδεση της Προοπτικής με τις Αναλογίες σε μία τάξη Στ' τάξη Δημοτικού Σχολείου. Ειδικότερα, οι μαθητές θα κληθούν να εφαρμόσουν τις γνώσεις που έχουν για τις Αναλογίες, έτσι ώστε να δημιουργήσουν σχήματα υπό κλίμακα καθώς και γραμμικό προοπτικό σχέδιο με ένα σημείο φυγής. Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας είναι τα εξής:

- 1) Είναι σε θέση οι μαθητές να εντοπίζουν το σημείο φυγής και τις συγκλίνουσες γραμμές σε έργα τέχνης και φωτογραφίες που τους δίνονται;
- 2) Δύνανται οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις Αναλογίες, ώστε να βρουν τις διαστάσεις ενός σχήματος που τους ζητείται υπό κλίμακα;
- 3) Είναι σε θέση οι μαθητές να δημιουργήσουν ένα γραμμικό σχέδιο προοπτικής με ένα σημείο φυγής αξιοποιώντας τις Αναλογίες και την έννοια της κλίμακας;

4.2 Δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 16 μαθητές της Στ' τάξης ενός Γενικού Δημοτικού Σχολείου στην περιοχή της Μαγνησίας. Ο τύπος δειγματοληψίας που επιλέχθηκε ήταν η δειγματοληψία ευκολίας, καθώς το συγκεκριμένο σχολείο αποδέχθηκε την πρόταση της ερευνήτριας για πραγματοποίηση της έρευνας σε ένα από τα τμήματά του.

Ο τύπος αυτός δειγματοληψίας επιλέχθηκε διότι όπως επισημαίνει και ο Bryman (2017) στη δειγματοληψία ευκολίας ο ερευνητής έχει εύκολη πρόσβαση στο συγκεκριμένο δείγμα. Η δειγματοληψία ευκολίας αποτελεί έναν τύπο μη πιθανοτικής δειγματοληψίας, δηλαδή το δείγμα της έρευνας δεν επιλέγεται με τυχαίο τρόπο και γι' αυτό τα αποτελέσματά της δεν αποτελούν στοιχεία που μπορούν να γενικευτούν σε όλο το γενικό πληθυσμό. Ωστόσο, τα στοιχεία που προκύπτουν από μια έρευνα που

έχει διενεργηθεί με μία δειγματοληψία ευκολίας μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για τη διενέργεια μιας νέας έρευνας (Bryman, 2017).

Οι μαθητές είχαν διδαχθεί την Θεματική Ενότητα 3 του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Στ' τάξης, η οποία αφορά τους Λόγους και τις Αναλογίες κάτι το οποίο ήταν προϋπόθεση για τη διενέργεια της παρούσας έρευνας.

4.3 Μεθοδολογική προσέγγιση

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο έρευνας της μελέτης περίπτωσης. Η μελέτη περίπτωσης είναι η ερευνητική μέθοδος που διερευνά ένα φαινόμενο μέσα σε ένα ειδικό πλαίσιο και τις σχέσεις που δημιουργούνται ανάμεσα σε αυτά τα δύο. Το πλαίσιο αυτό μπορεί να είναι ένα συγκεκριμένο γεωγραφικό σημείο ή ένα μικρό δείγμα ατόμων. Με τη μελέτη περίπτωσης υπάρχει η δυνατότητα παρατήρησης και διερεύνησης λεπτομερώς ενός φαινομένου της καθημερινότητας μέσα στο πλαίσιο στο οποίο αυτό διαδραματίζεται (Zainal, 2017).

Οι μελέτες περίπτωσης μπορούν με βάση το είδος τους να χρησιμοποιήσουν είτε ποσοτικά είτε ποιοτικά δεδομένα είτε και τα δύο για τη διεξαγωγή των συμπερασμάτων τους. Μια μελέτη περίπτωσης μπορεί να δομηθεί εξ ολοκλήρου βασιζόμενη μόνο σε ποσοτικά δεδομένα (Zainal, 2017), όμως σύμφωνα με τους Schwandt & Gates (2018) η μελέτη περίπτωσης έρχεται σε αντίθεση με τις ποσοτικές έρευνες που χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές επιστήμες. Σύμφωνα με τον Yin (1984, όπως βρέθηκε σε Zainal, 2017) η μελέτη περίπτωσης δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ποιοτική έρευνα. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που παράγονται όταν μία μελέτη περίπτωσης έχει βασιστεί σε ποιοτικά μέσα συλλογής δεδομένων, όπως η παρατήρηση και η συνέντευξη, μπορεί να διερευνήσει περίπλοκα θέματα της πραγματικής ζωής όπως οι ανθρώπινες αντιλήψεις, σχέσεις και δράσεις κάτι το οποίο είναι ανέφικτο σε ποσοτικές μεθόδους έρευνας (Zainal, 2017).

Η μελέτη περίπτωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για τον έλεγχο μίας προϋπάρχουσας θεωρίας όσο και για την ανάδειξη και δημιουργία μίας νέας θεωρίας (Yin, 1994, όπως βρέθηκε σε Schwandt & Gates, 2018). Η μελέτη περίπτωσης καλείται να απαντήσει σε ερωτήματα, όπως «τι», «πώς», και «γιατί» (Crowe, Cresswell, Robertson, Hubby, Avery και Sheikh, 2011· Schwandt & Gates, 2018). Μια

λανθασμένη αντίληψη σχετικά με τη μελέτη περίπτωσης σύμφωνα με τον Yin (1981, όπως βρέθηκε σε Dooley, 2002) είναι το γεγονός πως θεωρείται ως έρευνα που στηρίζεται αποκλειστικά στην εθνογραφία ή στην παρατήρηση. Σε αντίθεση με αυτή την άποψη η μελέτη περίπτωσης χρησιμοποιεί πολλά και διαφορετικά ερευνητικά εργαλεία, όπως είναι τα ερωτηματολόγια, οι συνεντεύξεις, η παρατήρηση των συμμετεχόντων, η ανάλυση εντύπων και εγγράφων και η ερευνητική μέθοδος Delphi (Dooley, 2002).

Ορισμένοι ερευνητές έχουν διακρίνει διάφορες κατηγορίες σχετικά με τη μελέτη περίπτωσης. Ο Stake (1995, όπως βρέθηκε σε Schwandt & Gates, 2018) διακρίνει τρεις κατηγορίες: α) τις ενδογενείς (intrinsic), β) τις εργαλειακές (instrumental) και γ) τις συλλογικές (collective) μελέτες περίπτωσης. Σε μια ενδογενή μελέτη περίπτωσης μελετάται ένα σπάνιο και μοναδικό φαινόμενο ή ένα γεγονός που κινεί το ενδιαφέρον του ερευνητή και πρέπει να διευκρινιστεί από την αρχή, γιατί είναι τόσο ιδιαίτερο αυτό το φαινόμενο. Στην εργαλειακή μελέτη περίπτωσης διερευνάται ένα θέμα με πιο γενική προσέγγιση από ότι στην ενδογενή με σκοπό την κατανόηση ενός φαινομένου. Στην συλλογική μελέτη περίπτωσης διερευνώνται πολλές περιπτώσεις ή δημιουργούνται ταυτόχρονες ή διαδοχικές μελέτες για το υπό διερεύνηση θέμα (Crowe et al., 2011· Kekeya, 2021· Schwandt & Gates, 2018). Σύμφωνα με τους Schwandt & Gates (2018) οι εργαλειακές και οι συλλογικές μελέτες περίπτωσης παρέχουν τη δυνατότητα να υπάρξει γενίκευση των αποτελεσμάτων και σε μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού.

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια ενδογενή μελέτη περίπτωσης καθώς διερευνάται μια Στ' τάξη ενός Δημοτικού Σχολείου της Μαγνησίας σχετικά με την ανταπόκριση των μαθητών σε εκπαιδευτικό πρόγραμμα για τις Αναλογίες και την Προοπτική.

4.4 Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Σχετικά με τη συγκεκριμένη διατριβή, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν είναι το διαγνωστικό τεστ αξιολόγησης στην αρχή της μαθησιακής διαδικασίας για τον προσδιορισμό των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών, τα φύλλα εργασίας κατά τη διάρκεια των συναντήσεων και το τελικό ερωτηματολόγιο για την αποτίμηση του έργου. Με βάση τον Κωνσταντίνου (2002), η διαγνωστική αξιολόγηση στοχεύει

στην αναγνώριση αφενός του γνωστικού επιπέδου των μαθητών και αφετέρου των ανασταλτικών παραγόντων της μάθησης και η υλοποίηση της θα πρέπει να αποτελεί βασική ψηφίδα της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν επίσης η συμμετοχική παρατήρηση κατά την οποία η ερευνήτρια παρατηρούσε συμμετέχοντας στην εκπαιδευτική διαδικασία και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων σχετικά με την εφαρμογή των γνώσεων από μέρους των μαθητών στο πεδίο των Αναλογιών. Με βάση τους Ίσαρη & Πουρκό (2015:43,112), «η παρατήρηση θεωρείται ζωτικής σημασίας λόγω του βιωματικού χαρακτήρα της και η ερμηνεία των δεδομένων αποτελεί τη βάση της ποιοτικής έρευνας».

4.5 Διδακτική διαδικασία

1^η Διδακτική Ώρα

Στην πρώτη διδακτική ώρα πραγματοποιήθηκε γνωριμία με τους μαθητές, ενημέρωση σχετικά με το θέμα της έρευνας και διενεργήθηκε μία αρχική διαγνωστική αξιολόγηση για να διαπιστωθεί τι θυμούνται οι μαθητές σε σχέση με τις αναλογίες, την κλίμακα και την σμίκρυνση.

Η αρχική διαγνωστική αξιολόγηση (pre-test) περιελάμβανε τρία ερωτήματα διαβαθμισμένης δυσκολίας σχετικά με τις αναλογίες. Το πρώτο ερώτημα αφορούσε την εύρεση των περιπτώσεων στις οποίες υπήρχε αναλογία μεταξύ δύο λόγων. Το δεύτερο ερώτημα ήταν ένα πρόβλημα για την επίλυση του οποίου έπρεπε να χρησιμοποιηθούν αναλογίες, ενώ το τρίτο ερώτημα αφορούσε τη σμίκρυνση του τοίχου ενός δωματίου με βάση δοθείσα κλίμακα. Για τη διενέργεια του pre-test δόθηκε στους μαθητές ο χρόνος των 25 λεπτών. Μόλις ολοκλήρωσαν όλοι οι μαθητές την αρχική διαγνωστική αξιολόγηση, έγινε παρουσίαση στο πρόγραμμα power point της εξέλιξης της απεικόνισης του βάθους μέσα από την Ιστορία της Τέχνης.

Οι μαθητές παρατήρησαν πως στην Αρχαία Ελληνική τέχνη οι μορφές άρχισαν να διαφοροποιούνται από την Αρχαία Αιγυπτιακή τέχνη, ενώ τους φάνηκε ενδιαφέρων ένας πίνακας της Αρχαίας Ρώμης στον οποίο απεικονίζεται η ψευδαίσθηση του βάθους. Στο τέλος της παρουσίασης τονίστηκε στους μαθητές πως κατά την Αναγέννηση άρχισε να απεικονίζεται ξεκάθαρα το βάθος στα έργα τέχνης με βάση τη γραμμική προοπτική. Τονίστηκε πως αυτή η μέθοδος δημιουργήθηκε από τους ζωγράφους με βάση τον τρόπο όρασης του ανθρώπου και για να γίνει πιο

κατανοητό στους μαθητές αναφέρθηκε το παράδειγμα ενός δρόμου που παρόλο που οι πλευρές του είναι παράλληλες εμείς τις βλέπουμε σαν να συγκλίνουν. Τέλος οι μαθητές εξέφρασαν απορίες που είχαν σε σχέση με το θέμα («πόσα χρόνια χρειάζονταν για τη δημιουργία ενός πίνακα;» , «με ποιό τρόπο μπορεί να δημιουργηθεί το βάθος σε έναν πίνακα;») οι οποίες απαντήθηκαν από την εκπαιδευτικό-ερευνήτρια.

2^η διδακτική ώρα

Στη δεύτερη διδακτική ώρα μοιράστηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας που εμπεριείχε πληροφορίες σχετικά με το σημείο φυγής και τις συγκλίνουσες γραμμές (βλ. παράρτημα). Το φύλλο εργασίας αναγνώσθηκε στην ολομέλεια της τάξης από μια μαθήτρια και οι μαθητές κλήθηκαν από την εκπαιδευτικό-ερευνήτρια να εκφράσουν τις απορίες τους. Οι μαθητές δεν πραγματοποίησαν καμία ερώτηση στην εκπαιδευτικό και για το λόγο αυτό μοιράστηκε στους μαθητές το Φύλλο εργασίας 1 (βλ. παράρτημα). Διαπιστώθηκε πως σχεδόν όλοι οι μαθητές χρειάστηκαν βοήθεια στις πρώτες δύο εικόνες που απεικόνιζαν πίνακες ζωγραφικής καθώς ήταν και η πρώτη επαφή τους με την προσπάθεια εύρεσης του σημείου φυγής.

Όταν οι μαθητές ολοκλήρωσαν το Φύλλο εργασίας 1, πραγματοποιήθηκε στην ολομέλεια της τάξης συζήτηση σχετικά με το pre-test.

3^η διδακτική ώρα

Στην 3^η διδακτική ώρα πραγματοποιήθηκε αρχικά συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης σχετικά με την κλίμακα και τη σμίκρυνση. Οι μαθητές ερωτήθηκαν αν γνωρίζουν τι είναι η κλίμακα. Ορισμένοι μαθητές επεσήμαναν πως η κλίμακα χρησιμοποιείται στους χάρτες. Η εκπαιδευτικός-ερευνήτρια με αφορμή την απάντηση των μαθητών χρησιμοποίησε την κλίμακα του χάρτη της τάξης που ήταν 1:600.000 και ρώτησε τους μαθητές τι αντιπροσωπεύει ο αριθμητής και τι ο παρονομαστής στη συγκεκριμένη κλίμακα. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να απαντήσουν και για αυτό η εκπαιδευτικός-ερευνήτρια τους υπενθύμισε πως ο αριθμητής, δηλαδή ο αριθμός 1 μας δείχνει τα εκατοστά στο χαρτί, ενώ ο παρονομαστής δηλαδή ο αριθμός 600.000 τα εκατοστά στην πραγματικότητα.

Στη συνέχεια για να διαπιστωθεί εάν οι μαθητές κατανόησαν την έννοια της κλίμακας δόθηκε ένα καινούριο παράδειγμα που ήταν το 1:100 και ερωτήθηκαν ξανά

τι αντιπροσωπεύει ο αριθμητής και τι ο παρονομαστής στο λόγο αυτό της κλίμακας. Αυτή τη φορά συμμετείχαν αρκετοί μαθητές και μάλιστα μαθητές που σε προηγούμενες ερωτήσεις δεν είχαν ενεργή συμμετοχή. Έπειτα, η εκπαιδευτικός έδωσε το λόγο σε ένα από τα παιδιά και της δόθηκε η σωστή απάντηση σχετικά με την επεξήγηση των όρων της κλίμακας 1:100. Ακόμη, παρουσιάστηκαν στους μαθητές δύο κλίμακες με διαφορετικούς παρονομαστές που ήταν η 1:100 και η 1:1000 και ρωτήθηκαν σε ποια από τις δύο περιπτώσεις θα βλέπουμε τα αντικείμενα με περισσότερες λεπτομέρειες. Ορισμένοι μαθητές αποκρίθηκαν ορθώς πως με την πρώτη κλίμακα που έχει τον μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή την 1:100, θα βλέπουμε τις περισσότερες λεπτομέρειες. Για να γίνει αυτό κατανοητό από όλους τους μαθητές η εκπαιδευτικός χρησιμοποίησε ένα απτό παράδειγμα με ένα φύλλο Α4. Η εκπαιδευτικός επεσήμανε πως όταν διπλώσουμε το χαρτί στα δύο, δηλαδή το σμικρύνουμε με κλίμακα 1:2 τότε θα μπορούμε να βλέπουμε περισσότερες λεπτομέρειες από ότι όταν το διπλώσουμε στα τέσσερα δηλαδή το σμικρύνουμε με κλίμακα 1:4.

Έπειτα, πραγματοποιήθηκε από την εκπαιδευτικό επεξήγηση της έννοιας της σμίκρυνσης (βλ. παράρτημα). Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκε ένα παράδειγμα με ένα ορθογώνιο για το οποίο γνωρίζουμε τις αρχικές διαστάσεις του και την κλίμακα με την οποία πρέπει να το σμικρύνουμε και το ζητούμενο ήταν οι νέες του διαστάσεις. Επισημάνθηκε στους μαθητές πως για τη σμίκρυνση μπορούν να χρησιμοποιούν τον τύπο: $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$. Τονίστηκε στους μαθητές πως αν πραγματοποιήσουμε αντικατάσταση στον τύπο με τους αριθμούς που έχουμε στο πρόβλημα θα προκύψει αναλογία. Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε στον πίνακα η εκπαιδευτικός-ερευνήτρια έδειξε στους μαθητές τον τρόπο εύρεσης της μίας πλευράς του νέου σχήματος (δηλαδή του σχήματος που έχει υποστεί σμίκρυνση) και ζητήθηκε από τους μαθητές να σηκωθούν στον πίνακα για να εντοπίσουν πόσο θα είναι η άλλη διάσταση του νέου σχήματος. Τρεις μαθητές εκδήλωσαν ενδιαφέρον να σηκωθούν στον πίνακα. Ένας από αυτούς σηκώθηκε στον πίνακα και χρησιμοποιώντας τον τύπο της κλίμακας εντόπισε σωστά την άλλη πλευρά του νέου σχήματος.

Όταν ρωτήθηκαν οι μαθητές αν έχουν κάποια απορία σχετικά με την κλίμακα και την σμίκρυνση δεν εκφράστηκε κάποια ερώτηση. Για το λόγο αυτό μοιράστηκε

το Φύλλο εργασίας 2 (βλ. παράρτημα). Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής ώρας και τη συλλογή των φύλλων εργασίας διαπιστώθηκε πως κάποιοι μαθητές δεν είχαν ολοκληρώσει πλήρως την τρίτη άσκηση, ενώ μόνο ένας μαθητής δεν είχε συμπληρώσει κάτι σε αυτή. Στο επόμενο μάθημα όταν ρωτήθηκαν για ποιο λόγο δεν την ολοκλήρωσαν, οι μαθητές αποκρίθηκαν πως δεν τους έφτασε ο χρόνος.

4^η διδακτική ώρα

Στη 4^η διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε στην τάξη απουσίαζαν τρεις μαθητές λόγω άλλων δράσεων που πραγματοποιούνταν στο σχολείο. Αρχικά η εκπαιδευτικός ρώτησε τους μαθητές αν έχουν συναντήσει μέχρι εκείνη τη στιγμή στα μαθήματα που έκαναν μαζί Αναλογίες. Οι μαθητές εντόπισαν πως έχουν συναντήσει αναλογίες στο Pre-test, δυσκολεύτηκαν όμως να εντοπίσουν πως συναντήσανε αναλογίες και στο Φύλλο εργασίας 2 για τη σμίκρυνση σχημάτων. Για το λόγο αυτό το επεσήμανε η εκπαιδευτικός.

Έπειτα, με βάση το παράδειγμα που είχε λυθεί στην τάξη σχετικά με τη σμίκρυνση, παρουσιάστηκε στους μαθητές η αναλογία $\frac{1}{2} = \frac{x}{6}$ (που είναι οι αριθμητικές τιμές για τον τύπο: $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$) και τους ζητήθηκε να θυμηθούν ποια είναι η γενική και λεκτική μορφή αυτής της αναλογίας. Κανένας μαθητής δεν μπόρεσε να αναγνωρίσει ότι πίσω από την αναλογία ήταν ο τύπος για την κλίμακα και γι' αυτό η εκπαιδευτικός τους υπενθύμισε πως πρόκειται για σμίκρυνση και πως το πρώτο μέρος της αναλογίας, δηλαδή το $\frac{1}{2}$ είναι η κλίμακα. Τότε οι μαθητές είπαν πως ο τύπος θα είναι: $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$.

Στο σημείο αυτό η εκπαιδευτικός ενημέρωσε τους μαθητές πως ο τύπος: $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$ ισχύει όταν και τα δύο σχήματα είναι στο χαρτί μας, ενώ όταν το ένα σχήμα είναι σε πραγματικές διαστάσεις ενώ το άλλο σχήμα στο χαρτί χρησιμοποιούμε τον τύπο: $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά στο χαρτί}}{\text{εκατοστά στην πραγματικότητα}}$.

Στη συνέχεια, η εκπαιδευτικός σχεδίασε ένα σημείο-κουκίδα στον πίνακα και ρώτησε τους μαθητές με ποιο τρόπο μπορεί να σχεδιάσει το σημείο στο ίδιο ακριβώς σημείο του πίνακα ένας μαθητής του άλλου τμήματος της Στ τάξης αν δεν το βλέπει.

Οι μαθητές έδωσαν ποικίλες απαντήσεις όπως «θα τον πάρουμε τηλέφωνο να του πούμε που να το σχεδιάσει», «θα βγάλουμε φωτογραφία τον πίνακα και θα του τη στείλουμε» με την εκπαιδευτικό να απαντάει πως πρέπει να είναι ακριβώς στο ίδιο σημείο του πίνακα και «πώς θα ξέρει πού να το σχεδιάσει;». Έτσι δύο μαθητές κατέληξαν στη σωστή απάντηση. Μια μαθήτρια είπε πως πρέπει βρούμε πόσο απέχει το σημείο από την επάνω, κάτω, δεξιά και αριστερή πλευρά του πίνακα με τον άλλον μαθητή να επισημαίνει πως δεν χρειάζεται να βρούμε και τις τέσσερις αποστάσεις, δηλαδή την επάνω και τη δεξιά. Τότε η εκπαιδευτικός σχεδίασε την κάθετη και οριζόντια γραμμή που καταλήγουν στο σημείο-κουκκίδα του πίνακα και έτσι εντοπίζουμε και το σημείο φυγής. Η οριζόντια γραμμή αντιπροσωπεύει το ύψος-βλέμμα του ανθρώπου και η κάθετη γραμμή την απόσταση του ανθρώπου από τον αριστερό τοίχο του δωματίου. Έγινε επίσης ένα παράδειγμα για το πώς μπορούμε να εντοπίσουμε το σημείο φυγής σε έναν τοίχο δωματίου που έχει υποστεί σμίκρυνση, αν γνωρίζουμε το ύψος-βλέμμα του ανθρώπου και την απόστασή του από τον αριστερό τοίχο του δωματίου.

Στη συνέχεια μοιράστηκε στους μαθητές το Φύλλο εργασίας 3 που αφορούσε την εύρεση του Σημείου Φυγής αν μας δίνονται το ύψος-βλέμμα του ανθρώπου και η απόστασή του από τον αριστερό τοίχο (βλ. παράρτημα). Περίπου τέσσερις μαθητές δυσκολεύτηκαν στα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν για τον εντοπισμό του Σημείου Φυγής και σε αυτούς επεξήγησε η εκπαιδευτικός ατομικά τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουν. Οι υπόλοιποι μαθητές καθώς και οι τέσσερις μαθητές μετά την επεξήγηση έλυσαν τα υπόλοιπα παραδείγματα του φύλλου εργασίας 3 χωρίς κάποια δυσκολία.

5^η και 6^η διδακτική ώρα

Οι δυο αυτές διδακτικές ώρες υλοποιήθηκαν σε ένα ενιαίο μάθημα των 90 λεπτών. Αρχικά η εκπαιδευτικός παρουσίασε στα παιδιά τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα δωμάτιο με τη γραμμική προοπτική ενός σημείου φυγής. Έπειτα η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός υπενθύμισε στους μαθητές τους δυο τρόπους με τους οποίους μπορούν να πραγματοποιήσουν σμίκρυνση, δηλαδή είτε να εφαρμόσουν τον τύπο $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά στο χαρτί}}{\text{εκατοστά στην πραγματικότητα}}$ είτε να δημιουργήσουν πίνακα τιμών. Έπειτα μοιράστηκε στους μαθητές το Φύλλο εργασίας 4 (βλ.

παράρτημα) στο οποίο οι μαθητές είχαν απορίες και κάποιες δυσκολίες όσον αφορά το ερωτήματα 2, 3, 4α, 5β και 6.

Κεφάλαιο 5ο : Αποτελέσματα

5.1 Pre-test

Η άτυπη διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών (pre-test) είχε ως στόχο να ενημερωθεί η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός για τις γνώσεις των μαθητών σχετικά με τους λόγους και τις Αναλογίες, έννοιες που έχουν διδαχθεί στη Στ' δημοτικού καθώς και την κλίμακα με την οποία έχουν έρθει σε επαφή στην Ε' δημοτικού.

Η διαγνωστική αξιολόγηση των μαθητών (pre-test) πραγματοποιήθηκε στην 1^η διδακτική ώρα της έρευνας και διήρκεσε 25 λεπτά. Όλοι οι μαθητές συμπλήρωσαν τα δύο πρώτα ερωτήματα του φυλλαδίου, ενώ το τρίτο ερώτημα 14 από τους 16 μαθητές. Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα του pre-test, που αφορούσε την εύρεση των περιπτώσεων στις οποίες υπάρχει Αναλογία μεταξύ τριών παραδειγμάτων, οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν τις περιπτώσεις στις οποίες υπήρχε Αναλογία. Ελάχιστες ήταν οι εξαιρέσεις που εκτιμήθηκε λανθασμένα πως κάποιοι λόγοι δεν σχηματίζουν αναλογία.

Όταν πραγματοποιήθηκε συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης σχετικά με το pre-test, η ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές να διατυπώσουν τον τρόπο με τον οποίο κατέληξαν στην εύρεση των περιπτώσεων που υπήρχε Αναλογία. Οι μαθητές ερωτήθηκαν σχετικά με τον τρόπο που έλυσαν την πρώτη άσκηση και από τις απαντήσεις τους διαπιστώθηκε πως για να βρουν αν δυο λόγοι ή κλάσματα είναι ανάλογα προσπαθούσαν να εντοπίσουν αν το ένα είναι διπλάσιο ή τριπλάσιο του άλλου. Όταν ερωτήθηκαν για το αν μπορούσαν με κάποιο άλλο τρόπο να διαπιστώσουν αν υπάρχει Αναλογία δεν έδωσε κανένας μαθητής κάποια απάντηση.

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{20} & \frac{4}{40} & \frac{5}{9} & \frac{10}{18} & \frac{7}{9} & \frac{11}{10} \\ \hline 2 \cdot 2 = 4 & 20 \cdot 2 = 40 & 5 \cdot 2 = 10 & 9 \cdot 2 = 18 & 7 \cdot 2 = 14 & 9 \cdot 2 = 18 \end{array}$$

Εικόνα 2: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 1 του Pre-test

Διαπιστώθηκε επίσης πως κάποιοι μαθητές είτε δεν εντόπισαν τις Αναλογίες σε κάποια από τα τρία ζεύγη λόγων είτε χρησιμοποίησαν λανθασμένα τα σύμβολα «>» και «<» στα ζεύγη των λόγων. Όταν η εκπαιδευτικός- ερευνήτρια ρώτησε μια μαθήτρια για τον τρόπο με το οποίο αποφάσισε να χρησιμοποιήσει το συγκεκριμένο σύμβολο (το σύμβολο «<» μεταξύ του πρώτου ζεύγους λόγων) η μαθήτρια δεν μπόρεσε να δώσει κάποια απάντηση, ενώ άλλη μαθήτρια ανέφερε πως χρησιμοποίησε τα σύμβολα στην τύχη. Για το λόγο αυτό η εκπαιδευτικός-ερευνήτρια πρότεινε στους μαθητές να ελέγχουν αν τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα.

$\frac{2}{20} < \frac{4}{40}$	$\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$	$\frac{7}{9} < \frac{11}{10}$
.....		
.....		
.....		

Εικόνα 3: Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 1 του Pre- test

$\frac{2}{20} = \frac{4}{40}$	$\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$	$\frac{7}{9} > \frac{11}{10}$
.....		
.....		
.....		

Εικόνα 4: Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 1 του Pre-test

Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα της διαγνωστικής αξιολόγησης, διαπιστώθηκαν τρεις διαφορετικοί τρόποι επίλυσης του προβλήματος. Εννέα μαθητές δημιούργησαν πίνακα τιμών ή ανάλογα κλάσματα, δύο μαθητές έκαναν αναγωγή στη μονάδα και έπειτα πολλαπλασίασαν με τον αριθμό τέσσερα, ενώ τέσσερις μαθητές έκαναν αναγωγή στη μονάδα και από το συνολικό αριθμό γραμμαρίων ζάχαρης πραγματοποίησαν αφαίρεση των γραμμαρίων του ενός μήλου.

$$\begin{array}{r} 150 \overline{) 30} \\ 30 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$150 - 30 = 120$$

2. Για να φτιάξουμε μια μηλόπιτα χρειαζόμαστε 5 μήλα και 150 γραμμάρια ζάχαρη. Αν διαθέτουμε 4 μήλα πόση ζάχαρη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



θα χρησιμοποιήσουμε 120 γραμμάρια ζάχαρη.

Εικόνα 5: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test

2. Για να φτιάξουμε μια μηλόπιτα χρειαζόμαστε 5 μήλα και 150 γραμμάρια ζάχαρη. Αν διαθέτουμε 4 μήλα πόση ζάχαρη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



$150 : 5 = 30$ $150 - 30 = 120$ γραμμάρια
 2 Βράκκ - 7054 γραμμάρια - 2151 70
 7 μήλα 141 μετά αφαίρεση 150-30
 141 0911 ποση ζάχαρη πρέπει να χρησιμοποιήσουμε

Εικόνα 6: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test

2. Για να φτιάξουμε μια μηλόπιτα χρειαζόμαστε 5 μήλα και 150 γραμμάρια ζάχαρη. Αν διαθέτουμε 4 μήλα πόση ζάχαρη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



$\frac{150}{5} = 30$ $\frac{120}{5} = 24$ 120 gr θα χρειαστεί

Εικόνα 7: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test

2. Για να φτιάξουμε μια μηλόπιτα χρειαζόμαστε 5 μήλα και 150 γραμμάρια ζάχαρη. Αν διαθέτουμε 4 μήλα πόση ζάχαρη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



$\frac{5}{150} = \frac{4}{x}$ $x \cdot 5 = 4 \cdot 150$ 120 gr
 $x \cdot 5 = 600$
 $x = 600 : 5$
 $x = 120$

Εικόνα 8: Απάντηση μαθητή στην άσκηση 2 του Pre-test

2. Για να φτιάξουμε μια μηλόπιτα χρειαζόμαστε 5 μήλα και 150 γραμμάρια ζάχαρη. Αν διαθέτουμε 4 μήλα πόση ζάχαρη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



μήλα	5	4	$5 \cdot x = 150 \cdot 4$	Απάντηση: Για 4 μήλα θα χρησιμοποιήσουμε 120 γραμμάρια ζάχαρη.
ζάχαρη	150·x	x	$5 \cdot x = 600$	
			$600 : 5 = 120$ $x = 120$	

Εικόνα 9: Απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 2 του Pre-test

Την τρίτη άσκηση του pre-test συμπλήρωσαν 14 από τους 16 μαθητές, ενώ 2 μαθητές δεν έγραψαν κάτι σε αυτό το ερώτημα. Από τους 14 μαθητές που απάντησαν στο ερώτημα αυτό, ο αριθμός των μαθητών που έδωσαν σωστή απάντηση ήταν 8.

3. Οι γονείς της Μαρίας αποφάσισαν να κάνουν μία ανανέωση στο παιδικό δωμάτιο και γι' αυτό επικοινωνήσαν με έναν διακοσμητή. Ο διακοσμητής τους ζήτησε να σχεδιάσουν ένα σκίτσο του δωματίου σε κλίμακα 1:100, δηλαδή 1 εκατοστό στο σκίτσο να αντιστοιχεί σε 100 εκατοστά στην πραγματικότητα.

Αν ένας τοίχος του δωματίου έχει πλάτος 500 εκατοστά (δηλαδή 5 μέτρα) και ύψος 300 εκατοστά (3 μέτρα) πόσα εκατοστά πρέπει να είναι οι δυο διαστάσεις στο σκίτσο;



$$15 + 15 = 30 \text{ εκ} = 3000 \text{ εκ}$$

Εικόνα 10: Λανθασμένη απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 3 του Pre-test

3. Οι γονείς της Μαρίας αποφάσισαν να κάνουν μία ανανέωση στο παιδικό δωμάτιο και γι' αυτό επικοινωνήσαν με έναν διακοσμητή. Ο διακοσμητής τους ζήτησε να σχεδιάσουν ένα σκίτσο του δωματίου σε κλίμακα 1:100, δηλαδή 1 εκατοστό στο σκίτσο να αντιστοιχεί σε 100 εκατοστά στην πραγματικότητα.

Αν ένας τοίχος του δωματίου έχει πλάτος 500 εκατοστά (δηλαδή 5 μέτρα) και ύψος 300 εκατοστά (3 μέτρα) πόσα εκατοστά πρέπει να είναι οι δυο διαστάσεις στο σκίτσο;



500 εκ:100 = 5 εκατοστά
 300 εκ:100 = 3 εκατοστά
 Οι δυο διαστάσεις στο σκίτσο είναι τα 5 εκ και τα 3 εκ.

Εικόνα 11: Σωστή απάντηση μαθήτριας στην άσκηση 3 του Pre-test

Από τους 8 μαθητές που απάντησαν σωστά, 4 μαθητές έγραψαν το αποτέλεσμα χωρίς να αιτιολογήσουν τον τρόπο που σκέφτηκαν. Η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός στη συζήτηση που πραγματοποιήθηκε στην τάξη επεσήμανε στους μαθητές πως παρόλο που είχαν καταλήξει σε σωστά αποτελέσματα θα έπρεπε να αιτιολογούν και να καταγράφουν στο χαρτί τις σκέψεις και τις πράξεις που χρησιμοποίησαν. Για το λόγο αυτό ερωτήθηκαν οι μαθητές για τον τρόπο με το οποίον σκέφτηκαν για να επιλύσουν το πρόβλημα. Ένας μαθητής είπε ότι βρήκε το αποτέλεσμα διαιρώντας 5:500, τότε επισημάνθηκε στους μαθητές πως αυτό ήταν ένα πρόβλημα σμίκρυνσης και για να βρουν το αποτέλεσμα έπρεπε να υπολογίσουν πόσο θα είναι η κάθε διάσταση του δωματίου με βάση την κλίμακα. Κάποιοι άλλοι μαθητές ανέφεραν πως έλυσαν το πρόβλημα με το μυαλό τους πραγματοποιώντας τη διαίρεση 500:100.

Αν ένας τοίχος του δωματίου έχει πλάτος 500 εκατοστά (δηλαδή 5 μέτρα) και ύψος 300 εκατοστά (3 μέτρα) πόσα εκατοστά πρέπει να είναι οι δυο διαστάσεις στο σκίτσο;



5 εκ. πλάτος και 3 εκ. ύψος

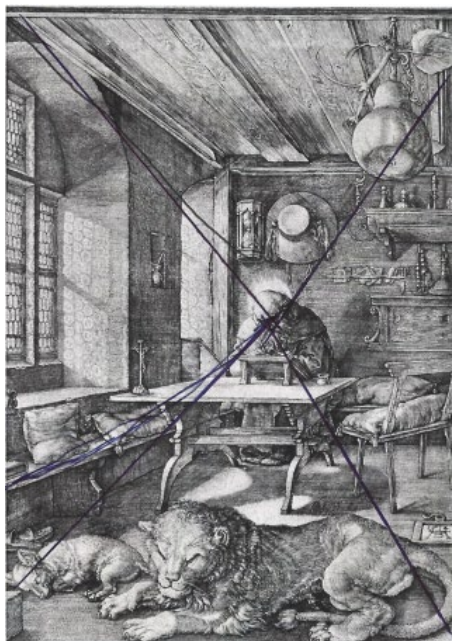
Εικόνα 12: Σωστή, αλλά χωρίς αιτιολόγηση απάντηση μαθητή στην άσκηση 3 του Pre-test

Στο pre-test το οποίο τους επιστράφηκε με διορθώσεις είχε χρησιμοποιηθεί ο τρόπος επίλυσης: «διάσταση στην πραγματικότητα δια τον παρονομαστή του λόγου τις κλίμακας», καθώς αυτός ήταν ο τρόπος επίλυσης που είχαν χρησιμοποιήσει ορισμένοι μαθητές που είχαν επιλύσει σωστά το ερώτημα αυτό και θεωρήθηκε ο πιο γνωστός τρόπος επίλυσης για τους μαθητές. Όμως στην τάξη επισημάνθηκε πως υπάρχει και άλλος τρόπος επίλυσης που είναι η δημιουργία πίνακα τιμών που θα περιλαμβάνει τις διαστάσεις στο χαρτί και τις διαστάσεις στην πραγματικότητα.

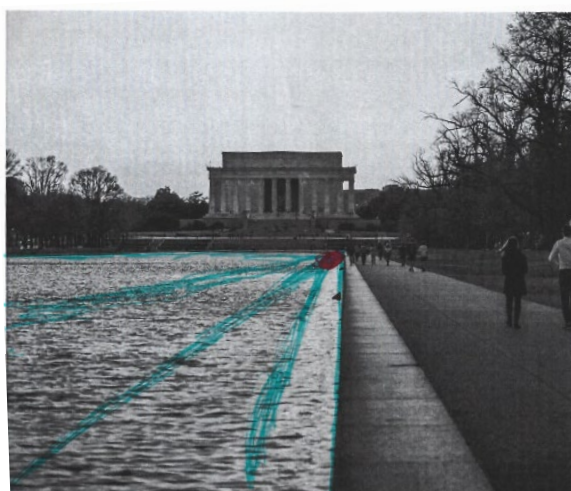
5.2 Φύλλο εργασίας 1^ο

Το Φύλλο εργασίας 1 που ασχολείται με το Σημείο Φυγής και τις Συγκλίνουσες Γραμμές βασίζεται στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα και επιδιώκει να φέρει σε επαφή τους μαθητές με τις παραπάνω έννοιες.

Στο πρώτο φύλλο εργασίας διαπιστώθηκε πως αρκετοί μαθητές χρειάστηκαν τη βοήθεια της εκπαιδευτικού- ερευνήτριας στις πρώτες δύο εικόνες που απεικόνιζαν πίνακες ζωγραφικής σχετικά με το πώς να εντοπίσουν τις συγκλίνουσες γραμμές και το σημείο φυγής. Το σημείο το οποίο φαίνεται να δυσκόλεψε τους μαθητές ήταν η κατανόηση πως οι συγκλίνουσες γραμμές σε έναν πίνακα ή μία φωτογραφία που αποδίδουν το βάθος υπάρχουν ήδη στα έργα. Αρκετοί ήταν οι μαθητές που δημιούργησαν συγκλίνουσες γραμμές δικές τους, οι οποίες δεν υπήρχαν στα έργα για να αποδίδουν το βάθος.



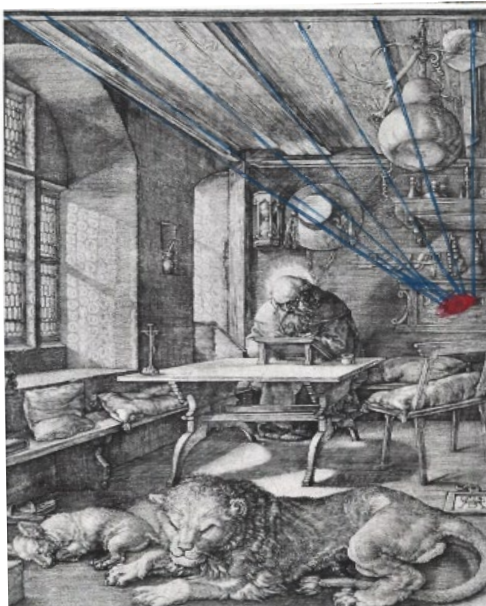
Εικόνα 13: Λανθασμένη απάντηση μαθητή στην άσκηση Α1 του Φύλλου εργασίας 1



Εικόνα 14: Λανθασμένη απάντηση μαθήτριας στην άσκηση Β1 του Φύλλου εργασίας 1

Όπως φαίνεται στα παραπάνω έργα οι μαθητές προσπάθησαν να εντοπίσουν το σημείο φυγής και τις συγκλίνουσες γραμμές χωρίς να λάβουν υπόψη τους τα στοιχεία των εικαστικών έργων που μας δείχνουν το βάθος, όπως οι γραμμές στο ταβάνι για το πρώτο έργο και οι γραμμές του πεζοδρομίου για το δεύτερο έργο. Η δυσκολία αυτή των μαθητών μπορεί να ερμηνευθεί λόγω του γεγονότος πως δεν υπάρχει εκτεταμένη εντρύφηση στο Δημοτικό Σχολείο σχετικά με τη Γραμμική Προοπτική και την έννοια του βάθους.

Υπήρχαν όμως αρκετοί μαθητές που εντόπισαν σωστά το σημείο φυγής με βάση τις συγκλίνουσες γραμμές.



Εικόνα 15: Σωστή απάντηση μαθήτριας στην άσκηση Α1 του Φύλλου εργασίας 1



Εικόνα 16: Σωστή απάντηση μαθήτριας στην άσκηση Β1 του Φύλλου εργασίας 1

Στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1, το οποίο ζητούσε από τους μαθητές να περιγράψουν με ποιο τρόπο εντόπισαν το σημείο φυγής, οι περισσότεροι μαθητές ανέφεραν ότι εντόπισαν το σημείο φυγής με βάση τις συγκλίνουσες γραμμές ή κάποιες γραμμές όπως έγραψαν μερικοί μαθητές. Μόνο δύο μαθήτριες έδωσαν

διαφορετική απάντηση αναφέροντας πως εντόπισαν το σημείο φυγής κοιτώντας τα έργα που τους είχαν δοθεί.

Β. Με ποιο τρόπο βρήκες το σημείο φυγής στους πίνακες ζωγραφικής;

Το σημείο φυγής το βρήκα
το βρήκα από τις γραμμές
που έχει ήδη, η εικόνα που
από της ενώσεις καταλήγουν στο
σημείο φυγής.

Εικόνα 17: Απάντηση μαθητή στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1

Με ποιο τρόπο βρήκες το σημείο φυγής στους πίνακες ζωγραφικής;

βρήκα που συναντούνται οι
συγκλίνουσες γραμμές και εκεί
είναι το σημείο φυγής

Εικόνα 18: Απάντηση μαθητή στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1

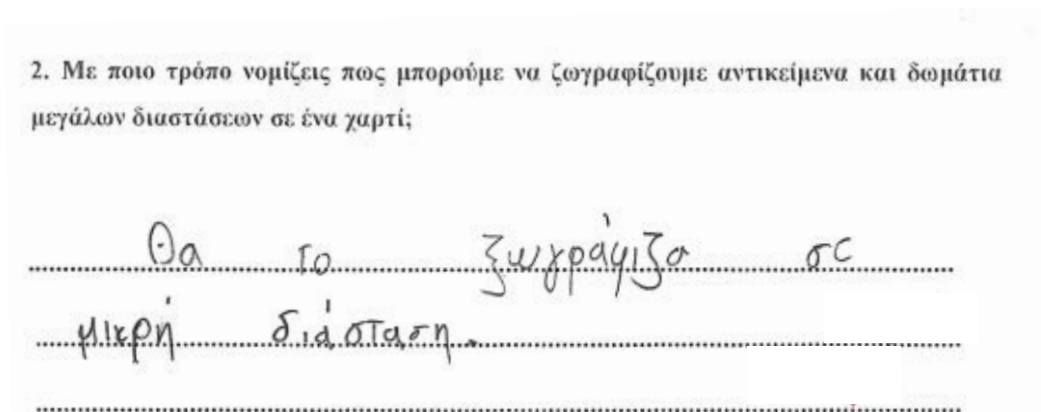
. Με ποιο τρόπο βρήκες το σημείο φυγής στους πίνακες ζωγραφικής;

Λοιπόν θα συνεισέω και το βρήκα

Εικόνα 19: Απάντηση μαθήτριας στο ερώτημα Α2 του Φύλλου εργασίας 1

Όσον αφορά το ερώτημα Β2 του συγκεκριμένου Φύλλου εργασίας, οι μαθητές καλούνταν να σκεφτούν και να απαντήσουν με ποιο τρόπο μπορούμε να ζωγραφίσουμε αντικείμενα και δωμάτια μεγάλων διαστάσεων σε ένα χαρτί. Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν πως πρέπει να δημιουργήσουμε συγκλίνουσες

γραμμές και σημείο φυγής, ενώ μόνο 5 μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση πως δηλαδή πρέπει πρώτα να σμικρύνουμε ένα δωμάτιο για να χωρέσει στο χαρτί.

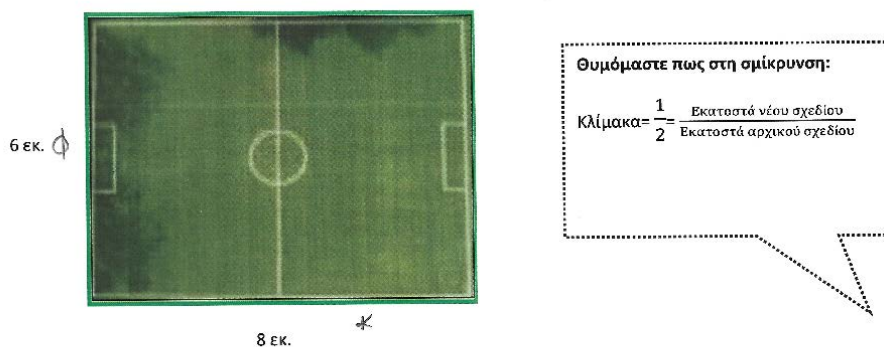


Εικόνα 20: Απάντηση μαθήτριας στο ερώτημα Β2 του Φύλλου εργασίας 1

5.3 Φύλλο εργασίας 2^ο

Το Φύλλο εργασίας 2 βασίζεται στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και στοχεύει στην ανάδειξη και αξιοποίηση των γνώσεων των μαθητών σχετικά με τις αναλογίες και τη σμίκρυνση. Οι μαθητές της Στ' τάξης έχουν διδαχθεί ήδη από την Ε' τάξη την έννοια της κλίμακας και της σμίκρυνσης, ενώ στη Στ' τάξη έρχονται σε επαφή με τις αναλογίες.

Παρόλο που οι μαθητές είχαν διδαχθεί τις αναλογίες, στο συγκεκριμένο φύλλο εργασίας διαπιστώθηκε πως κάποιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν με την επίλυση των ασκήσεων και γι' αυτό η εκπαιδευτικός επεξήγησε ξανά ατομικά στους συγκεκριμένους μαθητές πώς μπορεί να γίνει η σμίκρυνση και πώς να χρησιμοποιήσουν τον τύπο της κλίμακας. Έπειτα από την επεξήγηση οι μαθητές πραγματοποίησαν το 1α υποερώτημα του φύλλου εργασίας 2.



Επομένως, αν υπολογίσεις τις διαστάσεις του γηπέδου κάνοντας σμίκρυνση, θα βρεις:

$\frac{1}{2} = \frac{\phi}{6}$ $2 \cdot \phi = 6 \cdot 1$ $2 \cdot \phi = 6$ $\phi = \frac{6}{2}$ $\phi = 3 \text{ εκ.}$	$\frac{1}{2} = \frac{\kappa}{8}$ $2 \cdot \kappa = 8 \cdot 1$ $2 \cdot \kappa = 8$ $\kappa = \frac{8}{2}$ $\kappa = 4 \text{ εκ.}$
--	--

Εικόνα 21: Απάντηση μαθήτριας στο 1ο ερώτημα του Φύλλου εργασίας 2

Στο συγκεκριμένο ερώτημα μόνο μία μαθήτρια χρησιμοποίησε λανθασμένα το σύμβολο του πολλαπλασιασμού «επί» ($\cdot$) μεταξύ των αναλογιών αντί του «ίσον»(=), πιθανόν λόγω βιασύνης καθώς οι πράξεις που έκανε στη συνέχεια και το αποτέλεσμα ήταν σωστά.

$\frac{1 \cdot \alpha}{2 \cdot 6}$ $2 \cdot \alpha = 6 \cdot 1$ $2 \cdot \alpha = 6$ $\alpha = \frac{6}{2}$ $\alpha = 3$	$\frac{1 \cdot \alpha}{2 \cdot 8}$ $2 \cdot \alpha = 1 \cdot 8$ $2 \cdot \alpha = 8$ $\alpha = \frac{8}{2}$ $\alpha = 4$
--	--

Εικόνα 22: Απάντηση μαθήτριας στο 1ο ερώτημα του Φύλλου εργασίας 2

Όλοι οι μαθητές εκτός από έναν συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών με τις τιμές που βρήκαν.

(εκατοστά)	Κλίμακα	Μήκος	Πλάτος
Νέο σχέδιο	1	3	4
Αρχικό σχέδιο	2	6	8

Εικόνα 23: Απάντηση μαθητή στον πίνακα τιμών 1α ερωτήματος του Φύλλου εργασίας 2

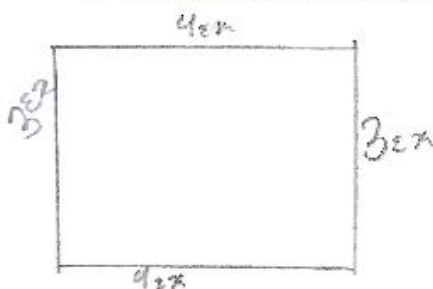
Αξιοσημείωτη είναι και η απάντηση ενός μαθητή στον πίνακα τιμών ο οποίος απέδωσε με σχηματικό τρόπο το πώς σκέφτηκε για να τον συμπληρώσει.

(εκατοστά)	Κλίμακα	Μήκος	Πλάτος
Νέο σχέδιο	$\begin{matrix} 1 \times 3 \\ 2 \times 4 \end{matrix}$	3	4
Αρχικό σχέδιο	$\begin{matrix} 2 \times 3 \\ 4 \times 4 \end{matrix}$	6	8

Εικόνα 24: Απάντηση μαθητή στον πίνακα τιμών του 1α ερωτήματος του Φύλλου εργασίας 2

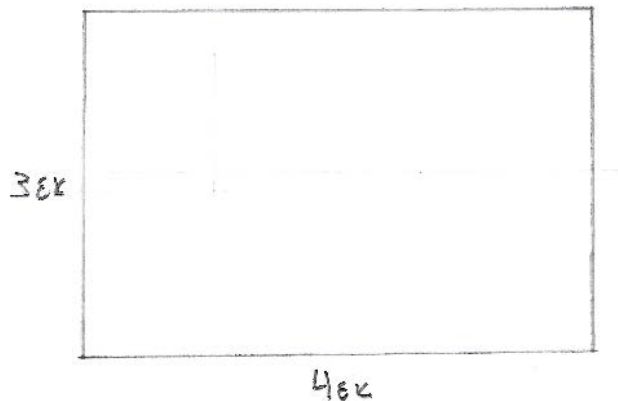
Στο ίδιο ερώτημα ζητούνταν από τους μαθητές να σχεδιάσουν και το γήπεδο ποδοσφαίρου σε σμίκρυνση με βάση τις τιμές που βρήκαν προηγουμένως. Σε αυτό το υποερώτημα μόνο μία μαθήτρια δε δημιούργησε κάποιο σχήμα.

Σχεδιασμός γηπέδου μετά τη σμίκρυνση:



Εικόνα 25: Σωστός σχεδιασμός για τη σμίκρυνση του γηπέδου από μαθήτρια

Σχεδιασμός γηπέδου μετά τη σμίκρυνση:



Εικόνα 26: Λανθασμένος σχεδιασμός των διαστάσεων του γηπέδου από μαθήτρια

Στο παραπάνω παράδειγμα της εικόνας 26, η μαθήτρια παρόλο που έχει εντοπίσει σωστά τις τιμές για το γήπεδο σε σμίκρυνση ο σχεδιασμός του έγινε με τιμές μεγαλύτερες από τις σωστές, δηλαδή όταν έγινε έλεγχος από την εκπαιδευτικό των διαστάσεων αυτές βρέθηκαν 5 και 7,5 εκ. αντίστοιχα.

Στη συνέχεια του φύλλου εργασίας οι μαθητές καλούνταν να περιγράψουν τα βήματα που ακολούθησαν για να σμικρύνουν το σχήμα του γηπέδου. Οι μαθητές ανέφεραν κυρίως την χρήση της κλίμακας και των σταυρωτών γινομένων για να εντοπίσουν τα εκατοστά του σχήματος σε σμίκρυνση. Σε αυτό το υποερώτημα διαπιστώθηκε πως δύο μαθητές δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Ποια βήματα ακολούθησες για να σμικρύνεις το σχέδιο για το γήπεδο;

Για να σμικρύνω το σχέδιο του γηπέδου, δημιούργησα για αναλογία όπου το ένα κλάσμα είναι η κλίμακα και το άλλο είναι τα εκατοστά του νέου σχεδίου προς τα εκατοστά του αρχικού σχεδίου.

Εικόνα 27: Απάντηση μαθήτριας σχετικά με τα βήματα που ακολούθησε για τη σμίκρυνση

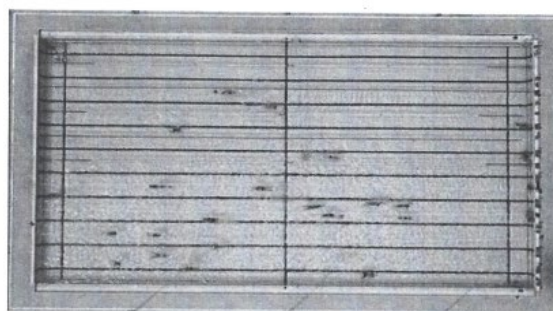
Ποια βήματα ακολούθησες για να σμικρύνεις το σχέδιο για το γήπεδο;

$\frac{1 \times}{2} = \frac{6}{6}$
 Πανα βρω τον πλῆθος γ' εἰς κλίμακα
 Εκατοστά νεοῦ σχεδίου
 και πολλαπλασιασῶ το χῆστος.
 Για να βρω τὰ ἑκατοστά τῆς
 πλῆθος γ' κλίμακα
 Εκατοστά νεοῦ σχεδίου
 Εκατοστά ἀρχικοῦ σχεδίου
 $\frac{1}{2} = \frac{γ}{8}$

Εικόνα 28: Απάντηση μαθητή σχετικά με τα βήματα που ακολούθησε για τη σμίκρυνση

Εξαιτίας του περιορισμένου χρόνου η εκπαιδευτικός-ερευνήτρια ζήτησε από τους μαθητές να πραγματοποιήσουν πρώτα την ερώτηση 2 του φύλλου εργασίας 2 καθώς ήταν πιο απαιτητική και μόνο αν είχαν χρόνο να υλοποιήσουν το 1β ερώτημα. Το δεύτερο ερώτημα του φύλλου εργασίας 2 ήταν παρόμοιο με το πρώτο ερώτημα, όμως οι μαθητές θα έπρεπε επιπλέον να μετατρέψουν τις διαστάσεις που τους δίνονταν από μέτρα σε εκατοστά. Το συγκεκριμένο ερώτημα το ολοκλήρωσαν δώδεκα μαθητές, ένα μέρος της ερώτησης τρεις μαθητές, ενώ ένας μαθητής δεν έδωσε κάποια απάντηση. Από το σύνολο των μαθητών που απάντησαν, έξι μαθητές δεν μετέτρεψαν σωστά τα μέτρα σε εκατοστά και γι' αυτό το λόγο οδηγήθηκαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

$$\begin{aligned}
 &250 \text{ εκ.} \\
 &25 \text{ μέτρα} \\
 &\frac{1}{100} = \frac{x}{250} \\
 &100 \cdot x = 1 \cdot 250 \\
 &100 \cdot x = 250 \\
 &x = \frac{250}{100} \\
 &x = 2,5
 \end{aligned}$$



50 μέτρα 500 εκ.

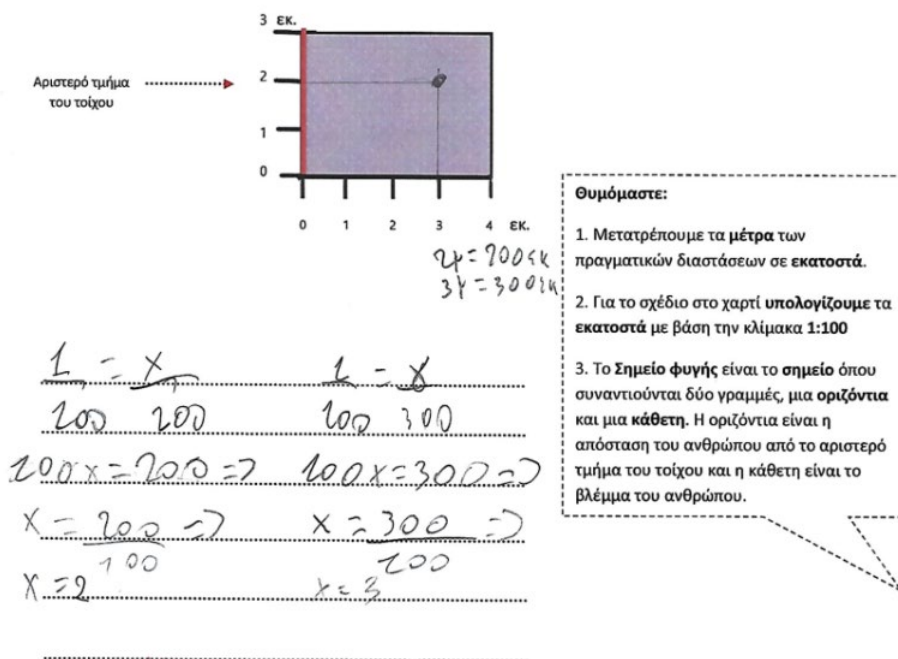
Επομένως, αν υπολογίσεις τις διαστάσεις του κολυμβητήριου κάνοντας σμίκρυνση, θα βρεις:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{100} = \frac{x}{500} \\
 &100 \cdot x = 1 \cdot 500 \\
 &100 \cdot x = 500 \\
 &x = \frac{500}{100} \\
 &x = 5
 \end{aligned}$$

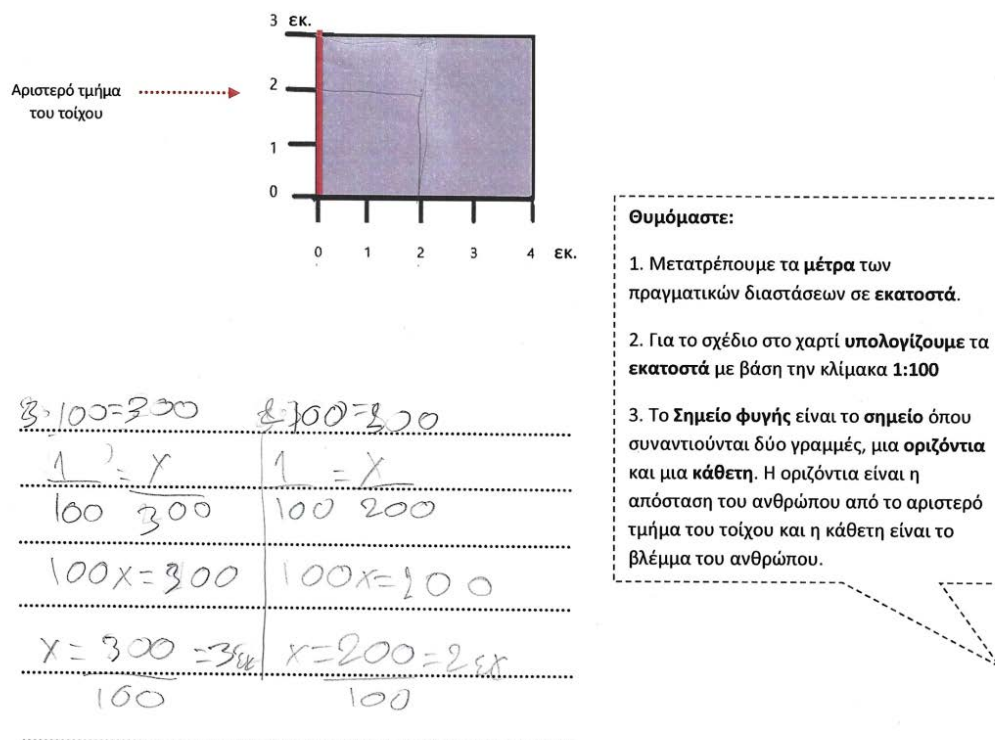
Εικόνα 29: Λανθασμένη απάντηση μαθητή λόγω ανακριβούς μετατροπής των μέτρων σε εκατοστά

5.4 Φύλλο εργασίας 3^ο

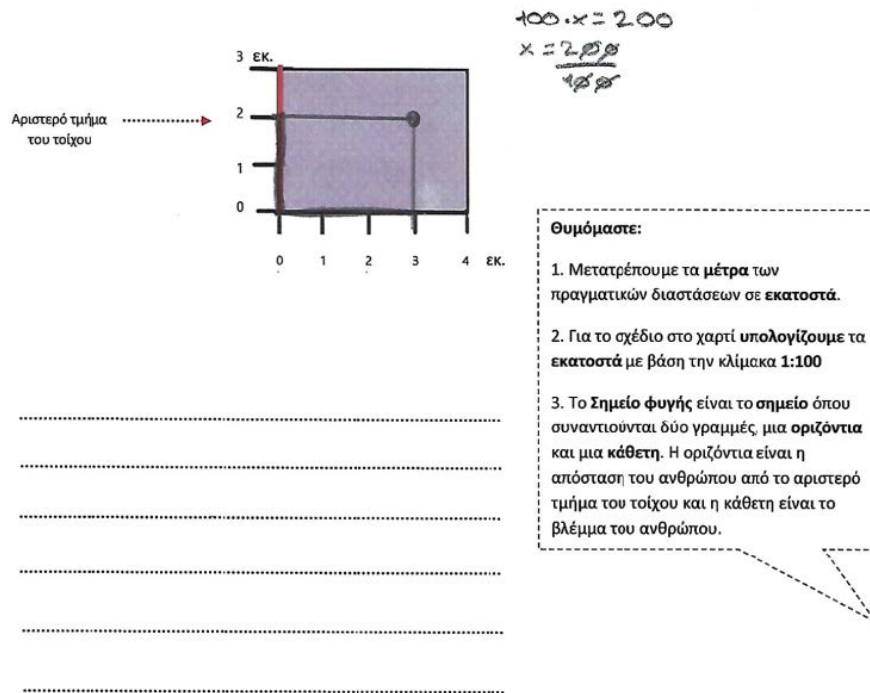
Το φύλλο εργασίας 3 δημιουργήθηκε ώστε να διευκολύνει τους μαθητές στη διαμόρφωση ενός δωματίου με προοπτική. Εξυπηρετεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και αποτελεί πρόδρομο για το 3^ο ερευνητικό ερώτημα που αφορά τον εντοπισμό του Σημείου Φυγής. Ειδικότερα, ζητήθηκε από τα παιδιά να υπολογίσουν και να σχεδιάσουν το σημείο εκείνο στο δωμάτιο που βρίσκεται το σημείο φυγής. Οι περισσότεροι μαθητές εντόπισαν το σημείο φυγής στο σχέδιο αλλά τέσσερα παιδιά δυσκολεύτηκαν στα βήματα που έπρεπε να ακολουθήσουν για τον εντοπισμό του. Για αυτό το λόγο η εκπαιδευτικός επεξήγησε ατομικά στα συγκεκριμένα παιδιά τα βήματα που μπορούσαν να ακολουθήσουν ώστε να βρουν το ζητούμενο του έργου. Οι υπόλοιποι μαθητές καθώς και οι τέσσερις μαθητές μετά την επεξήγηση έλυσαν τα υπόλοιπα παραδείγματα του φύλλου εργασίας 3 χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.



Εικόνα 30: Σωστή απάντηση μαθητή στο Α ερώτημα του Φύλλου εργασίας



Εικόνα 31: Σωστή απάντηση μαθητή στο Α ερώτημα του Φύλλου εργασίας, αλλά λανθασμένη εύρεση του σημείου φυγής



Εικόνα 32: Σωστή εύρεση του σημείου φυγής, αλλά ελλιπής τεκμηρίωση της διαδικασίας εντοπισμού του

Συμπερασματικά θα μπορούσε να τονιστεί πως τα παιδιά δυσκολεύτηκαν κυρίως στον εντοπισμό του σημείου φυγής στο μωβ πλαίσιο-τμήμα του τοίχου. Ωστόσο, με την καθοδήγηση και ενθάρρυνση της εκπαιδευτικού-ερευνήτριας κατάφεραν να ακολουθήσουν τα βήματα και να συνειδητοποιήσουν πως το σημείο φυγής είναι εκείνο το σημείο όπου συναντάται το βλέμμα του ανθρώπου και η απόστασή του από τον τοίχο.

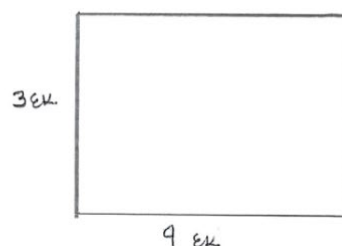
5.5 Φύλλο εργασίας 4^ο

Έπειτα η ερευνήτρια-εκπαιδευτικός υπενθύμισε στους μαθητές τους δυο τρόπους με τους οποίους μπορούν να πραγματοποιήσουν σμίκρυνση, δηλαδή είτε να εφαρμόσουν τον τύπο $\text{Κλίμακα} = \frac{\text{εκατοστά στο χαρτί}}{\text{εκατοστά στην πραγματικότητα}}$ είτε να δημιουργήσουν έναν πίνακα τιμών. Κατόπιν, μοιράστηκε στους μαθητές το Φύλλο εργασίας 4 (βλ. παράρτημα) το οποίο σχετίζεται με το 3^ο ερευνητικό ερώτημα και αφορά τη δημιουργία από μέρους των μαθητών ενός γραμμικού σχεδίου προοπτικής με ένα

σημείο φυγής αξιοποιώντας τις Αναλογίες και την έννοια της κλίμακας. Παράλληλα δόθηκε και ένα βοηθητικό φύλλο εργασίας με τα βήματα που ακολουθεί κάποιος αν θέλει να σχεδιάσει ένα δωμάτιο με τη μέθοδο της γραμμικής προοπτικής με ένα σημείο φυγής. Αρχικά, οι μαθητές εξέφρασαν ορισμένες απορίες όσον αφορά τα ερωτήματα 2, 3, 4α, 5β και 6. Αφού δόθηκαν ορισμένες διευκρινίσεις από την ερευνήτρια- εκπαιδευτικό σχετικά με τα έργα, οι μαθητές συνέχισαν να επεξεργάζονται τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας.

A) Σχεδιάστε αυτόν τον τοίχο σε κλίμακα 1: 100

$$\begin{aligned} \text{συν ηραγ. 3 γ.} &= 300 \text{ εκ.} : 100 = 3 \text{ εκ στο χαρτί} \\ \text{συν ηραγ. 4 γ.} &= 400 \text{ εκ.} : 100 = 4 \text{ εκ στο χαρτί} \\ \frac{1}{100} \cdot \phi &= \frac{1}{300} \text{ εκ. (3 γ.)} & \frac{1}{100} \cdot \kappa &= \frac{1}{400} \text{ εκ (4 γ.)} \\ 100 \cdot \phi &= 1 \cdot 300 = & 100 \cdot \kappa &= 1 \cdot 400 = \\ 100 \cdot \phi &= 300 = & 100 \cdot \kappa &= 400 = \\ \phi &= \frac{300}{100} = & \kappa &= \frac{400}{100} = \\ \phi &= 3 \text{ εκ.} & \kappa &= 4 \text{ εκ.} \end{aligned}$$



Εικόνα 33: Σωστή απάντηση μαθήτριας στο Α ερώτημα του 4ου Φύλλου Εργασίας

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημανθεί πως όλοι οι μαθητές κατάφεραν να σχεδιάσουν τον τοίχο στην κλίμακα που ζητείται και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους εκτός από ένα μαθητή που δεν αιτιολόγησε με πράξεις τη λύση της δραστηριότητας και μια μαθήτρια που δεν ασχολήθηκε με το φύλλο εργασίας. Η συγκεκριμένη μαθήτρια πρόβαλλε την αιτιολογία πως δεν είχε την απαιτούμενη νοητική διαύγεια τη συγκεκριμένη στιγμή εξαιτίας προσωπικών της λόγων.

B) Αν γνωρίζουμε ότι το βλέμμα ενός ανθρώπου που βρίσκεται μέσα στο δωμάτιο είναι 1,80 μέτρα και στέκεται 2 μέτρα μακριά από τον αριστερή πλευρά του τοίχου του δωματίου να εντοπίσετε το σημείο φυγής στο σχέδιο που κάνατε παραπάνω.

$$1,80 \text{ μ.} = 180 \text{ εκ.}$$

$$2 \text{ μ.} = 200 \text{ εκ.}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{180}$$

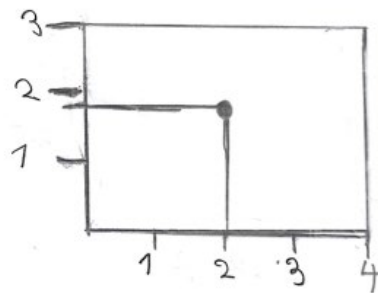
$$x \cdot 100 = 180$$

$$x = \frac{180}{100} = 1,8 \text{ εκ.}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{200}$$

$$x \cdot 100 = 200$$

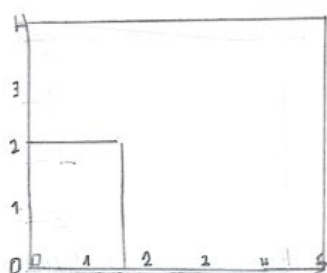
$$x = \frac{200}{100} = 2 \text{ εκ.}$$



Εικόνα 34: Σωστή απάντηση μαθητή στο B ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4

B) Αν γνωρίζουμε ότι το βλέμμα ενός ανθρώπου που βρίσκεται μέσα στο δωμάτιο είναι 1,80 μέτρα και στέκεται 2 μέτρα μακριά από τον αριστερή πλευρά του τοίχου του δωματίου να εντοπίσετε το σημείο φυγής στο σχέδιο που κάνατε παραπάνω.

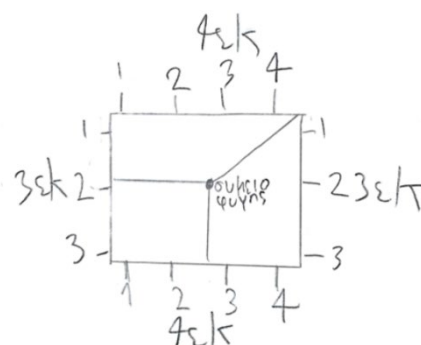
$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{100} = \frac{x}{180} & \frac{1}{100} = \frac{x}{200} \\ \hline 1 \cdot 180 = 100 \cdot x & 1 \cdot 200 = 100 \cdot x \\ 180 = 100x & 200 = 100x \\ \frac{180}{100} = 1,8 & \frac{200}{100} = 2 \end{array}$$



Εικόνα 35: Σωστή απάντηση μαθήτριας στο B ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4, αλλά λανθασμένη αποτύπωση του σχήματος

B) Αν γνωρίζουμε ότι το βλέμμα ενός ανθρώπου που βρίσκεται μέσα στο δωμάτιο είναι 1,80 μέτρα και στέκεται 2 μέτρα μακριά από τον αριστερή πλευρά του τοίχου του δωματίου να εντοπίσετε το σημείο φυγής στο σχέδιο που κάνατε παραπάνω.

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{100} = \frac{x}{180} & \frac{1}{100} = \frac{x}{2} \\ \hline 100 \cdot x = 1 \cdot 180 & 100 \cdot x = 100 \cdot 2 \\ 100 \cdot x = 180 & 100 \cdot x = 200 \\ x = \frac{180}{100} & x = \frac{200}{100} \\ x = 1,8 \text{ εκ} & x = 2 \text{ εκ} \end{array}$$

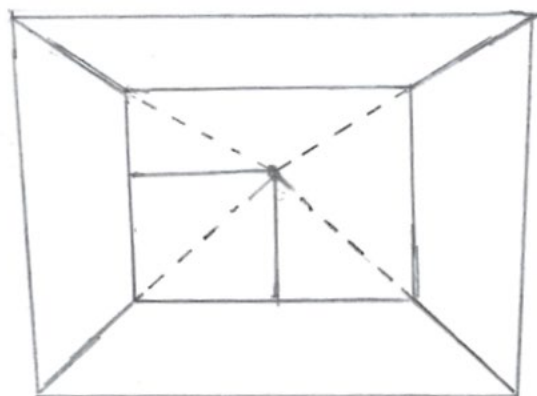


Εικόνα 36: Σωστή απάντηση μαθητή στο B ερώτημα, αλλά λανθασμένη εύρεση του Σ.Φ. στο σχήμα

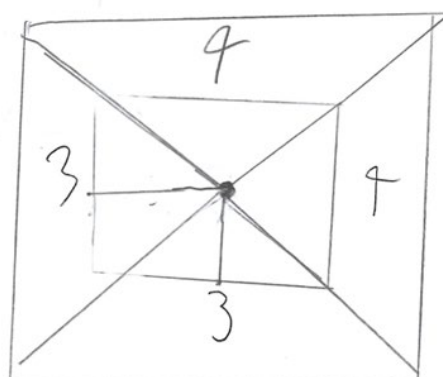
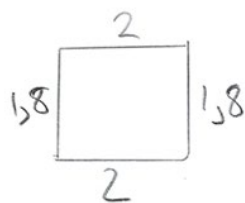
Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα, το σύνολο των παιδιών υπολόγισε σωστά το ύψος του ανθρώπου σε εκατοστά και την απόστασή του από την αριστερή πλευρά του τοίχου. Επιπλέον σχεδίασαν το σύστημα αξόνων όπου συναντώνται οι δύο συντεταγμένες του έργου και εντόπισαν το σημείο φυγής. Τέσσερα παιδιά παρόλο που μετέτρεψαν σωστά το ύψος του ανθρώπου από μέτρα σε εκατοστά και βρήκαν την απόστασή του από τον τοίχο σημείωσαν στον κάθετο άξονα την απόσταση του ανθρώπου από τον τοίχο και στον οριζόντιο άξονα το ύψος του. Κάτι τέτοιο οδήγησε και σε διαφορετικό εντοπισμό του σημείου φυγής.

Γ) Μεταφέρετε σε αυτή τη σελίδα τον τοίχο και το σημείο φυγής που σχεδιάσατε παραπάνω.

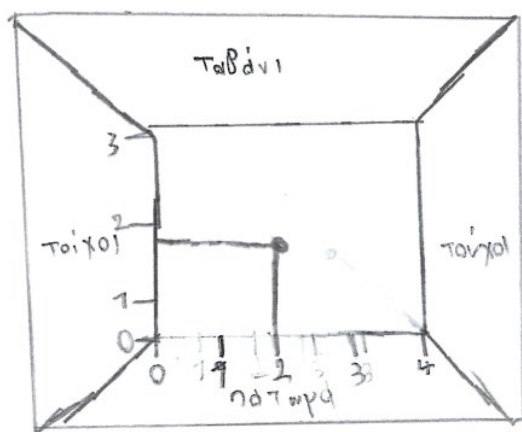
Με βάση αυτά να σχεδιάσετε ένα δωμάτιο με προοπτική ενός σημείου φυγής.



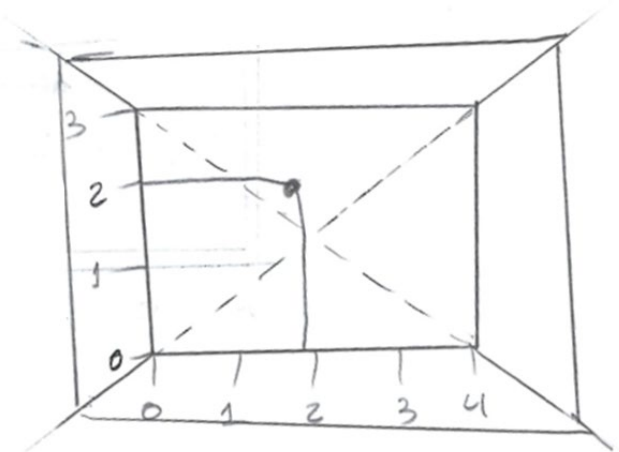
Εικόνα 37: Σωστή απάντηση μαθητή στο Γ ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4



Εικόνα 38: Σωστή απάντηση μαθητή στο Γ ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4 με εύρεση του Σ.Φ. μέσω ενός ξεχωριστού σχήματος από αυτό του δωματίου



Εικόνα 39: Σωστή απάντηση μαθητή στο Γ ερώτημα του Φύλλου εργασίας 4 με εύρεση του Σ.Φ. μέσω ενός επεξηγηματικού και τεκμηριωμένου σχήματος



Εικόνα 40: Λανθασμένη απάντηση μαθήτριας στο Γ ερώτημα, λόγω εσφαλμένης εύρεσης του Σ.Φ.

Όσον αφορά το τρίτο ερώτημα του συγκεκριμένου φύλλου εργασίας θα πρέπει να τονιστεί πως ένα μεγάλο μέρος των παιδιών (10 από τα 14 παιδιά) κατάφεραν να αποδώσουν σωστά το σημείο φυγής που αποτελεί βασικό στοιχείο για το σχεδιασμό του δωματίου με προοπτική ενός σημείου φυγής. Δύο από αυτούς τους μαθητές παρουσίασαν σε ξεχωριστό πλαίσιο τον τοίχο και το σημείο φυγής σχεδιάζοντας ένα σχήμα με πλευρές των 1,8 και 2 εκατοστών. Αυτή η προσέγγιση αποτέλεσε μια πρωτότυπη απεικόνιση των ζητούμενων του έργου και μια ταχύτερη λύση για τη διαμόρφωση του δωματίου. Καταληκτικά θα μπορούσε να λεχθεί πως το σύνολο των παιδιών ήταν σε θέση να διαμορφώσει ένα δωμάτιο με προοπτική με ένα σημείο φυγής αξιοποιώντας τις αναλογίες και την έννοια της κλίμακας σε ικανοποιητικό βαθμό.

5.6 Τελικό ερωτηματολόγιο

Κατά την ολοκλήρωση του εκπαιδευτικού σεναρίου και με στόχο την αποτίμηση του έργου δόθηκε στα παιδιά ένα ερωτηματολόγιο. Το συγκεκριμένο ερωτηματολόγιο ήταν ανώνυμο και περιελάμβανε επτά ερωτήσεις ανοιχτού τύπου που αφορούσαν την προβολή των ιδεών που διαμόρφωσαν οι μαθητές από τη δράση, τις δυσκολίες που συνάντησαν κατά τη διάρκειά της και αν θα ήθελαν να υπάρχει μελλοντικά κάποια σύνδεση των μαθηματικών με τα εικαστικά ή με κάποιο άλλο γνωστικό αντικείμενο. Μέσω του συγκεκριμένου ερωτηματολογίου επιχειρήθηκε η ανάδειξη και επεξεργασία των απόψεων των μαθητών σχετικά με το σενάριο, τις δραστηριότητες που κέντρισαν το ενδιαφέρον τους ή τους προβλημάτισαν και τα σημεία που θα ήθελαν να πραγματοποιηθούν μέσω διαφορετικής προσέγγισης.

Όπως προέκυψε από τα ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν τα παιδιά, το αγαπημένο τους στοιχείο κατά τη διάρκεια του έργου αποτέλεσε η ενασχόληση με την τέχνη και κυρίως τα εικαστικά. Ειδικότερα, τόνισαν πως η ενασχόληση με το σημείο φυγής, την κλίμακα και τη σμίκρυνση κινητοποίησαν την περιέργειά τους και αποτέλεσαν ένα κίνητρο για την ενασχόλησή τους με τη δράση. Όσον αφορά τις δυσκολίες που συνάντησαν τα παιδιά προέκυψε από τα ερωτηματολόγια πως η πλειοψηφία δε συνάντησε κάποια ιδιαίτερη δυσκολία. Ωστόσο, ορισμένοι μαθητές ανέφεραν πως η εύρεση του σημείου φυγής και των συγκλινουσών γραμμών αποτέλεσε το βασικό πρόβλημα κατά τη διάρκεια της δράσης. Σχετικά με το ερώτημα που αφορούσε ενδεχόμενη τροποποίηση και αλλαγή κάποιας δραστηριότητας, οι μαθητές χαρακτήρισαν «τέλειες και υπέροχες» τις δραστηριότητες αν και ένα παιδί απάντησε πως θα ήθελε να υπάρξει σύνδεση του μαθήματος της Γλώσσας και όχι των Μαθηματικών με τα Εικαστικά.

Σχετικά με τις ερωτήσεις που αφορούσαν τις καινούριες έννοιες και ιδέες με τις οποίες ήρθαν σε επαφή τα παιδιά, οι περισσότεροι ανέφεραν ως απάντηση το σημείο φυγής, τις συγκλινουσες γραμμές και τη σμίκρυνση. Αν και τα παιδιά απάντησαν πως θα ήταν ευχάριστη και διασκεδαστική μια πιθανή μελλοντική διδακτική εμπειρία σχετική με τα μαθηματικά και τα εικαστικά εντούτοις ένα μεγάλο ποσοστό των ερωτηθέντων δεν θα επιθυμούσε τη σύνδεση των μαθηματικών με κάποιο άλλο μάθημα, όπως τη φυσική, καθώς όπως επισημαίνεται θα συναντούσαν

μεγάλη δυσκολία και δεν θα κατάφερναν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του έργου. Καταληκτικά, θα μπορούσε να λεχθεί πως το ερωτηματολόγιο αποτίμησης της δράσης αποτέλεσε ένα χρήσιμο ανατροφοδοτικό εργαλείο και παρείχε πλούσιο πληροφοριακό υλικό σχετικά με τη μαθητική οπτική για τη σύνδεση των μαθηματικών με την τέχνη στο εκπαιδευτικό πεδίο. Ακολουθούν ενδεικτικά κάποια ερωτηματολόγια με απαντήσεις των παιδιών για την αποτίμηση της δράσης.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1. Τι μου άρεσε στα μαθήματα που κάναμε:

Μου άρεσε το σημείο φυγής επειδή μου άρεσει να ζωγραφίζω έτσι.

2. Τι με δυσκόλεψε στα μαθήματα που κάναμε:

Αυτό που με δυσκόλεψε λίγο ήταν αυτό που κάναμε με τον άξονα το σημείο φυγής.

3. Υπάρχει κάτι στα μαθήματα που θα ήθελες να έχει γίνει διαφορετικά; Αν ναι, τι είναι αυτό;

Όχι επειδή όλα αυτά που κάναμε συνδέονταν πολύ ωραία.

4. Έμαθες κάτι καινούριο σε σχέση με τα μαθηματικά; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Ξαθά για την σύγκριση και γιατί συγκρίνευσε γραμμές.

5. Έμαθες κάτι καινούριο για τα Εικαστικά; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Ξαθά για το σημείο φυγής και για τις συγκρίνευσε γραμμές.

6. Θα ήθελες τα μαθηματικά να συνδυάζονται με άλλα μαθήματα (πχ φυσική, γεωγραφία κ.α.) ; Αν ναι γιατί; Αν όχι γιατί;

Όχι επειδή δεν θα τα είχαμε καταλάβει και θα τα είχαμε μπερδέψει στο μυαλό μας.

7. Θα ήθελες κάποιες φορές να διδάσκονται τα Μαθηματικά μαζί με τα Εικαστικά; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;

Ναι γιατί συνδέονται πολύ ωραία τα μαθηματικά με τα εικαστικά.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1. Τι μου άρεσε στα μαθήματα που κάναμε:

Μου άρεσε γιατί μαθαίναμε καινούργια πράγματα όπως το σημείο ευθείας (δεν ήξερα καν ότι υπήρχει).

2. Τι με δυσκόλεψε στα μαθήματα που κάναμε:

Πως να κάνουμε ένα 3d βωμότριο που είχε ταβάνι, τοίχο και πάτωμα χρησιμοποιώντας μαθηματικά.

3. Υπάρχει κάτι στα μαθήματα που θα ήθελες να έχει γίνει διαφορετικά; Αν ναι, τι είναι αυτό;

Όχι, μια φορά ήταν, τη μαθηματική και δεν θα γαίλα να αλλάξει, γιατί,

4. Έμαθες κάτι καινούριο σε σχέση με τα μαθηματικά; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Ναι, ότι μπορούμε να βεβαιώσουμε ένα βωμότριο και πως να βρίσκω το σημείο ευθείας.

5. Έμαθες κάτι καινούριο για τα Εικαστικά; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

Ναι, πως αλλάζει η ζωγραφική με τη χρήση από τοίχο-χαρτί να ζωγραφίζουμε σε χαρτί.

6. Θα ήθελες τα μαθηματικά να συνδυάζονται με άλλα μαθήματα (πχ φυσική, γεωγραφία κ.α.); Αν ναι γιατί; Αν όχι γιατί;

Όχι, γιατί δεν θα ήταν διδακτικό και θα ήταν πολύ βαρετό.

7. Θα ήθελες κάποιες φορές να διδάσκονται τα Μαθηματικά μαζί με τα Εικαστικά; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;

Ναι, επειδή έτσι θα μάθαιναν πιο εύκολα και θα μάθαιναν επίσης την ιστορία της ζωγραφικής πιο εύκολα από το να καθίσουν στο σπίτι και να βεβαιώσουμε 3 ώρες.

Κεφάλαιο 6ο : Συζήτηση

Συνοψίζοντας μπορεί να λεχθεί πως οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να βρίσκουν τις διαστάσεις ενός σχήματος υπό κλίμακα αφού προηγουμένως είχαν επεξεργαστεί δραστηριότητες που ήταν σχετικές με την αναλογία δυο λόγων ή κλασμάτων. Σχετικά με τον εντοπισμό του σημείου φυγής σε μια πληθώρα καλλιτεχνικών έργων οι μαθητές προσπάθησαν αρχικά να εντοπίσουν το σημείο φυγής και τις συγκλίνουσες γραμμές χωρίς να λάβουν υπόψη τους τα στοιχεία που δείχνουν το βάθος, όπως οι γραμμές στο ταβάνι και οι γραμμές του δαπέδου. Η δυσκολία αυτή οφείλεται κατά ένα μεγάλο ποσοστό στο γεγονός της απουσίας εννοιών σχετικών με τη Γραμμική Προοπτική και την έννοια του βάθους στο δημοτικό σχολείο. Υπήρξαν όμως αρκετοί μαθητές που εντόπισαν σωστά το σημείο φυγής με βάση τις συγκλίνουσες γραμμές. Όσον αφορά τη δημιουργία ενός γραμμικού σχεδίου προοπτικής με ένα σημείο φυγής αξιοποιώντας τις Αναλογίες και την έννοια της κλίμακας αρκεί να τονιστεί πως η πλειοψηφία των παιδιών δημιούργησαν ένα δωμάτιο έχοντας ως βάση την απόσταση ενός ανθρώπου από τον τοίχο, το βλέμμα του από τον τοίχο και το σημείο φυγής.

Αν φυσικά υπήρχε περισσότερος διδακτικός χρόνος θα διοργανώνονταν και ομαδικές δράσεις για την αλληλεπίδραση και ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των παιδιών σχετικά με την παρουσία των αναλογιών στην καθημερινή ζωή και τη σύνδεσή τους με την προοπτική και θα διεξάγονταν εκτενέστερες συζητήσεις για τη συσχέτιση των μαθηματικών και των εικαστικών εντός και εκτός σχολικής αίθουσας.

Κεφάλαιο 7ο: Περιορισμοί και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Καθώς η έρευνα διεξήχθη σε μια Στ' τάξη ενός δημοτικού σχολείου της Μαγνησίας, το μέγεθος του δείγματος ήταν αρκετά μικρό ώστε να υπάρξει αξιοπιστία στην ανάλυση των δεδομένων και τη γενίκευση των αποτελεσμάτων στο σύνολο των μαθητών που φοιτούν στην ίδια τάξη. Επιπρόσθετα, λόγω του περιορισμένου διδακτικού χρόνου δεν ήταν εφικτό να διεξάγονται εκτενείς συζητήσεις και να υπάρχει ανταλλαγή ιδεών μεταξύ των συμμετεχόντων. Κάτι που θα παρακινούσε και θα ενθουσίαζε περισσότερο τους μαθητές θα ήταν επίσης και η επαφή με επαγγελματίες που ασχολούνται καθημερινά με τις αναλογίες και την προοπτική, όπως αρχιτέκτονες και εικαστικούς. Τέλος, η παρούσα διπλωματική εργασία θα μπορούσε να αποτελέσει το θεμέλιο για τη διεξαγωγή μιας ερευνητικής μελέτης σε μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού που θα αφορούσε τη συσχέτιση των μαθηματικών και των εικαστικών στο πεδίο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- Αγγέλη, Ε.- Α. (2018). *Η συνεισφορά της Αρχαίας Τέχνης στη Νεώτερη και Σύγχρονη: Από την αρχαιολογική έρευνα και ανάλυση του εικονογραφικού προγράμματος της Ξέστης 3 του Ακρωτηρίου Θήρας, στην τέχνη και τους καλλιτέχνες του σήμερα* (Μεταπτυχιακή Εργασία). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.
- Αναστασάκη, Χ.-Μ. (2018). *Η Θεωρία Αριθμών του Ευκλείδη και μια Ενδεχόμενη Αξιοποίησή της για την Εισαγωγή των Μαθητών στις Αποδεικτικές Διαδικασίες* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <https://nemertes.library.upatras.gr/server/api/core/bitstreams/174487fc-ef1e-4c45-9d00-31592414b255/content>
- Βασιλείου, Ε. (2015). *Θέματα Γεωμετρίας: Σημειώσεις για το ΠΜΣ Διδακτικής*. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα. Διαθέσιμο στο: <http://users.uoa.gr/~evassil/LECTURE-NOTES/dida.pdf>
- Βιταλιώτης, Ι. (2006). Μεταβυζαντινή τέχνη: Ζωγραφική – Γενικά χαρακτηριστικά της μεταβυζαντινής Τέχνης. Στο *Ιστορία των Ελλήνων*, τόμος 8, σσ. 216-267. Αθήνα: Δομή.
- Βούτουνο, Χ. (2017). *Η σημειοισθητική προσέγγιση της βυζαντινής τέχνης ως εικονική κληρονομιά* (Διδακτορική διατριβή). Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λεμεσός. Διαθέσιμο στο: https://ktisis.cut.ac.cy/bitstream/20.500.14279/10741/3/ChysanthosVoutounos_PhD_Thesis_june_7_new_version.pdf
- Βουτυράς Μ. & Γουλάκη-Βουτυρά, Α. (2011). *Η Αρχαία Ελληνική Τέχνη και η ακτινοβολία της*. Θεσσαλονίκη: Ίδρυμα Τριανταφυλλίδη. Διαθέσιμο στο: https://www.greek-language.gr/digitalResources/ancient_greek/history/art/page_083.html?prev=true

- Γκούτενσβαγκερ Ε. & Μαγουλιώτης, Α. (2022). Η σημασία της Εικαστικής Αγωγής ως εργαλείο διδασκαλίας: Το παράδειγμα του 'Arts Integration'. Στο Κανταρτζή, Ε. & Φουργκατσιώτης, Θ. (Επιμ.), *7ο Πανελλήνιο Συνέδριο Εκπαίδευση και Πολιτισμός στον 21^ο αιώνα* (σσ. 530-538). Αθήνα: Μουσείο Σχολικής Ζωής και Εκπαίδευσης του ΕΚΕΔΙΣΥ, Α' τόμος. Διαθέσιμο στο: <https://ekedis.gr/praktika-7oy-panellinioy-synedrioy-ekpaideysi-kai-politismos-ston-21o-aiona/>
- Γώτη, Σ. (2012). *Γεωμετρία και τέχνη στην εποχή της Αναγέννησης: ιστορική ανάλυση και μια πρόταση για τη διδασκαλία της συμμετρίας* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Πατρών: Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/10889/5776>
- Δελγιαννίδης, Τ. (2017). *Η διδασκαλία του Λόγου και της Αναλογίας σε μαθητές Στ' Δημοτικού με τη χρήση ενός Ιστορικού Εργαλείου* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα. Διαθέσιμο στο: <https://dspace.uowm.gr/xmlui/handle/123456789/1923>.
- Δημόπουλος, Φ. (2019). *Η βραχογραφία στο Αιγαίο και τη Μεσόγειο κατά την Τελική Νεολιθική Εποχή και την Πρώιμη Εποχή του Χαλκού* (Μεταπτυχιακή Διατριβή). Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα.
- Ζιρώ, Ο., Μερτζάνη, Ε., Πετρίδου, Β. & Σιγάλας, Γ. (2003). *Ιστορία της Τέχνης: Γ' τάξη Γενικού Λυκείου, βιβλίο του μαθητή*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
- Η Τέχνη των Ιστορικών χρόνων. (χ.χ.). Διαθέσιμο στο: <https://cycladic.gr/page/i-techni-ton-istorikon-chronon>
- Θεοχαρόπουλος, Γ. (2007). *Η Ελληνιστική Αισθητική* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στο: <https://ikee.lib.auth.gr/record/106495/files/gri-2008-1563.pdf>
- Ίσαρη, Φ., & Πουρκός, Μ. (2016). *Ποιοτική μεθοδολογία έρευνας. Εφαρμογές στη Ψυχολογία και στην Εκπαίδευση*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Ανακτήθηκε από: <https://kastoria.teiwm.gr/>

- Κακκαβά, Μ. (2019). *Η Γεωμετρία στην τέχνη της Αρχαίας Ελλάδας* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <https://nemertes.library.upatras.gr/server/api/core/bitstreams/a5c73f34-1545-495f-9c4d-99f8dc24a7a2/content>
- Καλδή, Σ. & Κόνσολας, Μ. (2016). *Διδακτική μέθοδος project και διαθεματικότητα: Θεωρία, έρευνα και πράξη*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.
- Καλογερόπουλος, Κ. (2019). Ο ζωγράφος του Πειραιά. *Archive*, 15 (07 Δεκ), 39–45. Διαθέσιμο στο: <https://doi.org/10.5281/zenodo.4475656>
- Καμπάνη, Ε. (2000). Αλληλεπιδράσεις των Μαθηματικών με τη Ζωγραφική κατά την περίοδο της Αναγέννησης. *Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*. σσ:508-524. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Διαθέσιμο στο: <http://eudml.org/doc/236016>
- Καραγεώργος, Α., Ντιντάκης, Ι., & Ράπτη, Έ. (2015). Κλάσματα, Ποσοστά και Αναλογίες [Κεφάλαιο]. Στο Καραγεώργος, Α., Ντιντάκης, Ι., & Ράπτη, Έ. 2015. *Στοιχεία Μαθηματικών με εφαρμογές στην Επιπλοποιία* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. Διαθέσιμο στο: <https://hdl.handle.net/11419/90>
- Καραγιάννη, Ε. (2012). Ο παρεμβατικός χαρακτήρας της Εικαστικής Αγωγής στην ολόπλευρη ανάπτυξη του παιδιού. *Εικαστική παιδεία*, 28, 85-90.
- Καραγιάννη, Τ. (2022). *Η πρόσληψη του αρχαίου θεάτρου μέσα από τις παραστάσεις των αγγείων* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος Διαθέσιμο στο: <https://hellanicus.lib.aegean.gr/handle/11610/24733>
- Καραμπάτος Η. Π. (2022). Ηθικές και αισθητικές ποιότητες στη ρωμαϊκή τέχνη. *Ηθική. Περιοδικό φιλοσοφίας*, (15), 94–102. <https://doi.org/10.12681/ethiki.30738>
- Κάτσου, Ε. (2021). *Ο βυζαντινός πολιτισμός ως πηγή δημιουργικής έμπνευσης στο design των ρούχων* (Πτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σύρος. Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/11610/24079>

- Κατσουλάκος, Θ., Κοκκορού-Αλευρά Γ. και Σκουλάτος, Β. (2013). *Αρχαία Ιστορία: Α' Γυμνασίου*. Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Κόντος, Θ. (2019). *Βυζαντινή τέχνη και επικοινωνία: Οι επικοινωνιακές διαστάσεις της βυζαντινής ζωγραφικής στη σύγχρονη εποχή* (Μεταπτυχιακή Διατριβή). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <https://apothesis.eap.gr/archive/item/157814>
- Κούμouρος, Γ. (2000). Υπάρχει σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και τη ζωγραφική; *17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας* (σσ. 362-376). Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Διαθέσιμο στο: <http://www.hms.gr/apothema/?s=se&i=636>.
- Κυρατζούλη, Π. (2017). *Οι έννοιες του λόγου και της αναλογίας σε μαθητές Δημοτικού* (Πτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας: Φλώρινα. Διαθέσιμο στο: <http://dspace.uowm.gr/xmlui/handle/123456789/588>
- Κωνσταντίνου Χ. (2002). Η αξιολόγηση της επίδοσης του μαθητή σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 7: 37-51. Διαθέσιμο στο: http://www.pi-schools.gr/download/publications/epitheorisi/teyxos7/epitheor_7.pdf
- Λιάκου, Ε. (2009). Αυτοαντίληψη, στόχοι επίτευξης, εκφοβισμός και συστηματική θυματοποίηση (bullying) στη Φυσική Αγωγή (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τρίκαλα. Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/11615/1737>
- Λιανός, Ν. και Ανδριοπούλου, Ε. (2009). *Εφαρμοσμένη Γεωμετρία, Προοπτική, Σκιαγραφία* (Σημειώσεις Για Πανεπιστημιακό μάθημα). Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Ξάνθη. Διαθέσιμο στο: http://morfologia.arch.duth.gr/lo_etos/pdf/prooptiki.pdf
- Μάλαμα, Α. (2011). *Ιστορία της Τέχνης: πολιτισμός- τέχνες- διαχείριση ελεύθερου χρόνου*. Ινστιτούτο Διαρκούς Εκπαίδευσης Ενηλίκων. Ανακτήθηκε από: <http://hdl.handle.net/10795/1012>

- Μαυρέλλη, Α. (2010). *Η Αισθητική της Αρχαίας Ελληνικής Τέχνης: Αρχαία σημασία, Αισθητική Εμπειρία και Θεωρητική Προσέγγιση των οπτικών τεχνών* (Μεταπτυχιακή Διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης: Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στο: <https://ikee.lib.auth.gr/record/128536/files/GRI-2012-8056.pdf>
- Μαυρίδου, Α. (2021). Η προοπτική στην περίοδο της Αναγέννησης και η συμβολή της στην ανάπτυξη των μαθηματικών (Μεταπτυχιακή διατριβή). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <https://apothesis.eap.gr/archive/item/75349>
- Μεταξόπουλος Α. (1988). Η ενότητα επιστήμης-τέχνης κατά την Αναγέννηση: αναθεώρηση μίας παραδοσιακής ιστοριογραφικής προοπτικής. *The Greek Review of Social Research*, 69, 177–224. Διαθέσιμο στο: <https://doi.org/10.12681/grsr.872>
- Μήτσου, Γ. (2017). Η Οπτική από την άποψη της ιστορικής της εξέλιξης. *Electronic Journal of Science and Technology UNIWA*, 12(1), 39-57. DOI: 10.26265/e-jst.v12i1.3124
- Μπατάλια, Π. (2017). *Αναγνώσεις στην Ορθόδοξη Εικόνα: Μηχανισμοί και διευρύνσεις* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο: Αθήνα. Διαθέσιμο στο: <https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/45362/%CE%B4%CE%B9%CF%80%CE%BB%CF%89%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B7%202017%20%CE%9C%CF%80%CE%B1%CF%84%CE%B1%CE%BB%CE%B9%CE%B1%20%CE%A0%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%B3%CE%B9%CF%89%CF%84%CE%B1.pdf>
- Μπατσούλη, Π. (2008). *Τα οπτικά του Ευκλείδη* (Διδακτορική διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα. Διαθέσιμο στο: <https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/22833>
- Μπελεμέζη, Λ.-Μ. (2020). *Η διττή φύση του σχήματος: αντίληψη και συνθετική διαδικασία* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα. Διαθέσιμο στο: <https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/handle/123456789/52612>

- Μουζάκης, Τ. (1984). Πρωταρχικός μας σκοπός η ψυχαγωγία και η δημιουργική έκφραση του παιδιού. *Εικαστική παιδεία*, 1, 24-26. Διαθέσιμο στο: <https://www.slideshare.net/enekem17/1-1984>
- Μωραΐτης, Κ. (2015). *Η ανάπτυξη των θεωρήσεων του τοπίου κατά την Ιταλική Αναγέννηση και τον Μανιερισμό* [Κεφάλαιο]. Στο Μωραΐτης, Κ. 2015. *Η τέχνη του τοπίου* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. Διαθέσιμο στο: <https://hdl.handle.net/11419/2624>
- Ξυγγόπουλος, Α. (1958). Alberto M. Ammann S.J., La pittura sacra bizantina. Saggi. Roma, 1957 (Pontificium Institutum Orientalium Studiorum), σελ. 216 μετά 41 εικόνων εκτός κείμενον (Βιβλιοκρισία). *Επετηρίς Εταιρείας Βυζαντινών Σπουδών*, Έτος ΚΗ', 475-478. Διαθέσιμο στο: <https://ir.lib.uth.gr/xmlui/handle/11615/18464>
- Παλιούρας, Α. (1979). *Παλαιοχριστιανική Τέχνη: Διάγραμμα πανεπιστημιακών παραδόσεων*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα.
- Παπαγεωργίου, Γ. (2014). *Ποσοτική έρευνα*. Ανακτήθηκε από: https://sociology.soc.uoc.gr/pegasoc/wp-content/uploads/2014/10/Microsoft-Word-Papageorgiou_DEIGMATOLHPTIKH1.pdf
- Παπαδοπούλου, Δ.-Π. (2016). *Η τοιχογραφία και η φορητή εικόνα κατά την βυζαντινή εποχή: τεχνικές, τεχνοτροπίες και υλικά* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Αριστοτέλεια Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στο: <https://ikee.lib.auth.gr/record/287739/files/GRI-2017-18559.pdf>
- Παπαϊωάννου, Β. (2013). *Αρχιτεκτονική και μαθηματικά*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα. Διαθέσιμο στο: <http://dx.doi.org/10.26240/heal.ntua.490>
- Παπαϊωάννου, Κ. (2007). *Βυζαντινή και Ρωσική Ζωγραφική*, (Μτφρ. Νάκου Ελένη, Επιμ. Σταματοπούλου Χριστίνα). Αθήνα: Εναλλακτικές Εκδόσεις.
- Παππάς, Α. (2007). *Γλυπτά σε αρχαία ναύαγια* (Πτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας: Βόλος. Διαθέσιμο στο: <https://ir.lib.uth.gr/xmlui/bitstream/handle/11615/13738/P0013738.pdf?sequence=1>

Παυλίδου, Μ. (2019, Σεπτέμβριος 22). *Η αναγκαιότητα της Τέχνης στο σχολείο: Η ενότητα της καλλιτεχνικής έκφρασης, ως αντίβαρο στον κατακερματισμό των γνωστικών αντικειμένων*. Διαθέσιμο στο: <https://www.art22.gr/%CE%B7-%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%B3%CE%BA%CE%B1%CE%B9%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1-%CF%84%CE%B7%CF%82-%CF%84%CE%AD%CF%87%CE%BD%CE%B7%CF%82-%CF%83%CF%84%CE%BF-%CF%83%CF%87%CE%BF%CE%BB%CE%B5%CE%AF%CE%BF/>

Παυλίδου, Μ., Κατσακιώρη Χ. και Τσόλκα, Ε. (2017). Γεωμετρικά μοτίβα και Τέχνη στο Δημοτικό σχολείο. Στο Α, Δημητρίου, Χ. Σακονίδης, ε. Μαλκοπούλου, Χ. Μπουτζιλούδη & Α.-Ε. Τεμπρίδου (Επιμ.). *10^ο Συνέδριο Ο.Μ.Ε.Ρ. – Δ.Π.Θ: Εκπαιδεύοντας πολίτες για ένα αειφόρο μέλλον - Ο ρόλος της προσχολικής και πρώτης σχολικής, τόμος Β΄* (95-104). Αλεξανδρούπολη: Παγκόσμια Οργάνωση Προσχολικής Αγωγής, Ελληνική Επιτροπή, Organisation Mondiale pour l' Education Préscolaire, World Organization for Early Childhood Education, Organizacion Mundial para la Educacion Preescolar, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης. Διαθέσιμο στο: https://www.researchgate.net/profile/Georgia-Kosma/publication/328602144_E_diaphoropoesis_os_kainotoma_didaktike_praktike_ste_didaskalia_tes_Anglikes_glossas/links/5dac982792851c577eb93580/E-diaphoropoesis-os-kainotoma-didaktike-praktike-ste-didaskalia-tes-Anglikes-glossas.pdf

Πλατή, Μ. και Μάρκου, Ε. (2018). *Αρχαία Ελληνική Κεραμική*. Αθήνα: Μουσείο Κυκλαδικής Τέχνης. Διαθέσιμο στο: <https://repository-mca.ekt.gr/mca/bitstream/20.500.12040/50/1/%ce%91%ce%a1%ce%a7%ce%91%ce%99%ce%91%20%ce%95%ce%9b%ce%9b%ce%97%ce%9d%ce%99%ce%9a%ce%97%20%ce%9a%ce%95%ce%a1%ce%91%ce%9c%ce%99%ce%9a%ce%97%20%ce%9c%ce%9a%ce%a4.pdf>

Ρουμπέκα, Κ. (2009, Οκτώβριος 25). *Κυβισμός*. Ανακτήθηκε από: <https://www.artmag.gr/art-history/art-history/item/886-cubism>

Ρουμπέκα, Κ. (2011, Νοέμβριος 27). *Μαζάτσιο Τζιοβάννι - Masaccio Tommaso di ser Giovanni Guidi*. Ανακτήθηκε από: <http://www.artmag.gr/art-history/artists-faces/item/3156-masaccio-tommaso-di-ser-giovanni-guidi-cassai>

Σαλονικιός, Δ. (2008). *Τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και οι ιδιότητές τους στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου. Ανάλυση με βάση τη θεωρία van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στο: https://ikee.lib.auth.gr/record/112908/files/%CE%A3%CE%B1%CE%BB%CE%BF%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CE%B9%CF%8C%CF%82%20%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%AE%CF%84%CF%81%CE%B9%CE%BF%CF%82_%CE%94%CE%B9%CF%80%CE%BB%CF%89%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%95%CF%81%CE%B3%CE%B1%CF%83%CE%AF%CE%B1.pdf

Σαπλαούρα, Ε.-Β. (2021). *Διερεύνηση συνδέσεων ανάμεσα στο εκπαιδευτικό υλικό των μαθηματικών και των εικαστικών στην προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Αιγαίου: Ρόδος. Διαθέσιμο στο: <https://hellanicus.lib.aegean.gr/handle/11610/22179>

Σιδηροπούλου, Α. (2019). *Η αξιοποίηση των εικαστικών τεχνών για την καλλιέργεια της συναισθηματικής νοημοσύνης των παιδιών της προσχολικής ηλικίας* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής, Αιγάλεω. Διαθέσιμο στο: <https://edutech-thesis.uniwa.gr/wp-content/uploads/sites/207/2019/12/%CE%97-%CE%B1%CE%BE%CE%B9%CE%BF%CF%80%CE%BF%CE%AF%CE%B7%CF%83%CE%B7-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%B5%CE%B9%CE%BA%CE%B1%CF%83%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD-%CF%84%CE%B5%CF%87%CE%BD%CF%8E%CE%BD-%CE%B3%CE%B9%CE%B1-%CF%84%CE%B7%CE%BD-%CE%BA%CE%B1%CE%BB%CE%BB%CE%B9%CE%AD%CF%81%CE%B3%CE%B5%CE%B9%CE%B1-%CF%84%CE%B7%CF%82-%CF%83%CF%85%CE%BD%CE%B1%CE%B9%CF%83%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%CF%82-%>

%CE%BD%CE%BF%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CF%83%CF%8D%CE
%BD%CE%B7%CF%82-%CF%84%CF%89%CE%BD-
%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B9%CF%8E%CE%BD-
%CF%84%CE%B7%CF%82-
%CF%80%CF%81%CE%BF%CF%83%CF%87%CE%BF%CE%BB%CE%
B9%CE%BA%CE%AE%CF%82-
%CE%B7%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AF%CE%B1%CF%82.pdf

Σκέμπερη, Λ. (2010). Τέχνη και εκπαίδευση: η συμβολή της τέχνης στο εκπαιδευτικό έργο ή για μια 1 εκπαίδευση του μέλλοντος, *Συνεργασία*, αρ. 2 (Σεπτέμβριος 2010). Διαθέσιμο στο: <http://hdl.handle.net/10797/12461>

Σταγκόπουλος, Α.- Α. (2020). Όψεις της Μακεδονικής Αναγέννησης – Ιστορία, Τεχνοτροπία, Θεολογία (Μεταπτυχιακή διατριβή). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <https://apothesis.eap.gr/archive/item/95958>

Ταξίδης, Χ. (2008). *Η έννοια της αναλογίας στην Στ' τάξη του δημοτικού σχολείου: μια διδακτική πρόταση μέσα από την επίλυση προβλήματος* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στο: <https://ikee.lib.auth.gr/record/110736/files/gri-2009-2239.pdf>

Todorovic, U. (2015). Πανσέληνος, Μανουήλ και η παλαιολόγεια ζωγραφική. *Μεγάλη ορθόδοξη Χριστιανική εγκυκλοπαίδεια*, τόμος 12, σσ. 138- 147. Αθήνα: Στρατηγικές Εκδόσεις.

Τριανταφυλλόπουλος Δ. Δ. (2014). Ανιχνεύοντας τὸ Μεταβυζάντιο στὸν ἑλληνικὸ χῶρο. Μιὰ ἐπισκόπηση τῶν προβλημάτων τῆς ἀρχαιολογικῆς ἔρευνας. *Δελτίον της Χριστιανικῆς Αρχαιολογικῆς Εταιρείας*, 33, 349–356. <https://doi.org/10.12681/dchae.1265>

Τσέτικα, Α. (2020). *Η προοπτική στην ζωγραφική στην περίοδο της Αναγέννησης: Η συμβολή της στην ανάπτυξη της προβολικής γεωμετρίας και διδακτικές προεκτάσεις* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, Πάτρα. Διαθέσιμο στο: <https://apothesis.eap.gr/archive/item/75282>

- Τσιουμέλα, Γ. (2021). *Οι πολιτισμικές σχέσεις και αλληλεπιδράσεις μεταξύ του ελληνιστικού κόσμου και της ρωμαϊκής δημοκρατίας (3ος -1ος αιώνας π. Χ.)* (Μεταπτυχιακή διατριβή). Πανεπιστήμιο Αιγαίου: Ρόδος. Διαθέσιμη στο: https://hellanicus.lib.aegean.gr/bitstream/handle/11610/22727/%CE%9C%CE%94%CE%95_%CE%A4%CE%A3%CE%99%CE%9F%CE%A5%CE%9C%CE%95%CE%9B%CE%91.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Τσιούτσιου, Σ. (2023). *Η ταφική τέχνη στην Ελλάδα κατά την πρώιμη χριστιανική περίοδο* (Μεταπτυχιακή διατριβή). ΑΠΘ και ΕΚΠΑ: Θεσσαλονίκη. Διαθέσιμο στο: <https://ikee.lib.auth.gr/record/346477/files/GRI-2023-38594.pdf>
- Τσολακίδης, Δ. (2021). Μία Εισαγωγή στην Προβολική Γεωμετρία (Πτυχιακή εργασία). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος. Διαθέσιμο στο: <https://hellanicus.lib.aegean.gr/>
- Fundić, L. (2013). *Η μνημειακή τέχνη του Δεσποτάτου της Ηπείρου την περίοδο της Δυναστείας των Κομνηνών Αγγέλων (1204-1318)* (Διδακτορική διατριβή). Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη. DOI: 10.26262/heal.auth.ir.132992
- Χρυσοστόμου, Μ.-Β. (2014). *Η δομή και η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης* (Διδακτορική διατριβή). Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία. Διαθέσιμο στο: <https://gnosis.library.ucy.ac.cy/handle/7/39217>

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

- Alberti, Leon Battista. *On Painting*. [First appeared 1435-36] Translated with Introduction and Notes by John R. Spencer. New Haven: Yale University Press. 1970 [First printed 1956].
- Alvarez, S. (2023, May 1). *A Brief History of Ratios*. Διαθέσιμο στο: <https://www.linkedin.com/pulse/brief-history-ratios-saul-alvarez/>
- Andersen, K. (2007). *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.

- Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, 44(5), 1478–1490. <https://doi.org/10.1037/a0013110>.
- Brezovnik, A. (2015). The benefits of fine art integration into mathematics in primary school. *CEPS Journal*, 5(3), 11-32. DOI: 10.25656/01:11402
- Bryman, A. (2017). *Μέθοδοι Κοινωνικής Έρευνας*. (Μτφρ. Π. Σακελλαρίου, Επιμ. Α. Αϊδίνης). Αθήνα: Gutenberg.
- Collins, N. (χ.χ.). *Greek Painting: Archaic Period (c.600-480 BCE)*. Διαθέσιμο στο: <http://www.visual-arts-cork.com/antiquity/greek-painting-archaic-period.htm>
- Cosgrove, D. (1985). Prospect, Perspective and the Evolution of the Landscape Idea. *Transactions of the Institute of British Geographers*, 10(1), 45–62. <https://doi.org/10.2307/622249>
- Crowe, S., Cresswell, K., Robertson, A., Huby, G., Avery, A. and Sheikh A. (2011). The case study approach. *BMC Med Res Methodol*, 11 (100). Doi: <https://doi.org/10.1186/1471-2288-11-100>
- Department of Greek and Roman Art (2003). Greek Art in the Archaic Period. In *Heilbrunn Timeline of Art History*. New York: The Metropolitan Museum of Art. Διαθέσιμο στο: http://www.metmuseum.org/toah/hd/argk/hd_argk.htm
- Dietiker, Leslie. (2015). What Mathematics Education Can Learn from Art: The Assumptions, Values, and Vision of Mathematics Education. *Journal of Education*, 195, 1-10. DOI: 10.1177/002205741519500102.
- Dooley, L. M. (2002). Case Study Research and Theory Building. *Advances in Developing Human Resources*, 4(3), 335-354. <https://doi.org/10.1177/1523422302043007>
- Edgerton, S. Y. (1973). Brunelleschi's First Perspective Picture. *Arte Lombarda*, 18(38/39), 172–195. <http://www.jstor.org/stable/43133328>
- Escher, M. –C. (2001). *M. C. Escher: The Graphic Work*. Germany: Taschen.
- Esaak, S. (2019). *The Different Periods of Ancient Greek Art*. Διαθέσιμο στο: <https://www.thoughtco.com/greek-art-an-overview-182924>

- Janson, J. (χ.χ.). *The History of Perspective*. Ανακτήθηκε από:
<http://www.essentialvermeer.com/technique/perspective/history.html>
- Hammack, R. (1994). *Alberti's Method for Perspective Drawing (Lecture notes for MATH 121)*. Virginia Commonwealth University, Richmond Virginia.
 Διαθέσιμο στο:
<https://www.people.vcu.edu/~rhammack/Math121/Handouts/Alberti.pdf>
- Howe, C., Nunes, T. & Bryant, P. (2010). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 391-417. DOI: 10.1007/s10763-010-9249-9.
- Gondek, M. R. (2016). Introduction to ancient Greek art. In *Smarthistory*. Διαθέσιμο στο: https://smarthistory.org/greek_intro/
- Kekeya, J. (2021). Qualitative case study research design: The commonalities and differences between collective, intrinsic and instrumental case studies. *Contemporary PNG Studies*, 36, pp. 28–37. Διαθέσιμο στο: <https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.356219476950585>
- Lesso, Rosie. (2022, October 11). *Who Discovered Linear Perspective?* Retrieved from <https://www.thecollector.com/who-discovered-linear-perspective/>
- Lienau, L. (2013). *A Brief History of Perspective*. Ανακτήθηκε από:
<https://www.classicalart.org/blog/a-brief-history-of-perspective>
- Lloyd, H. F. S. (1999). Mesopotamian art and architecture. *Encyclopedia Britannica*. Διαθέσιμο στο: <https://www.britannica.com/art/Mesopotamian-art>
- Lo, J.-J., & Watanabe, T. (1997). Developing Ratio and Proportion Schemes: A Story of a Fifth Grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 216–236. <https://doi.org/10.2307/749762>
- Murphy, J. (2017). *Math and Mondrian (Math 210:Final project)*. University of Pennsylvania, Philadelphia. Διαθέσιμο στο:
<https://www2.math.upenn.edu/~ted/210S17/Projects/Sample/Paper4.pdf>

- Nakamura, T. (2017). An Aspect of Renaissance Mathematics revealed in a Study of the Theory of Human Proportion. *Bunmei* (文明), 21, 23-28. Tokai University Civilization Research Institute. Διαθέσιμο στο: <https://www.u-tokai.ac.jp/uploads/2021/03/04-1.pdf>
- Nutov, L. (2021). Integrating visual arts into the mathematics curriculum: The case of pre-service teachers. *Teaching and Teacher Education*, 97. Διαθέσιμο στο: <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103218>.
- Mannack, T. (2018). Greek Decorated Pottery I: Athenian Vase-painting. Στο T. J. Smith and D. Plantzos (Ed.), *A companion to Greek Art* (pp. 39-61). USA: Wiley Blackwell. Doi: <https://doi.org/10.1002/9781118273289.ch3>
- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2003). *Mathematics and Art- Perspective*. Διαθέσιμο στο: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Art/>
- Onians, J. (1979). *Art and Thought in The Hellenistic Age: THE GREEK WORLD VIEW 350-50 BC*. London: Thames and Hudson. Ανακτήθηκε από: <https://archive.org/details/artthoughtinhe00onia/page/n5/mode/2up?view=theater>
- Okabayashi, K. (2009). *Figure Drawing For Dummies*. Indiana: Wiley Publishing.
- Pélerin, J. (1505). De artificiali perspectiva. Toul: Pierre Jacobi. Διαθέσιμο στο: https://www.robinhalwas.com/index.php?controller=attachment&id_attachment=220&name=016003-Pelerin.pdf
- Phillips, A. (2000). The Invention of Infinity: Mathematics and Art in the Renaissance (Book review). *Notices of the American Mathematical Society*, 47 (1), 46-50. Διαθέσιμο στο: <https://www.ams.org/notices/200001/rev-phillips.pdf>
- Piscitelli, M. (2019). Perspective and Geometry in the Roman Painted Gardens. *Open Access Journal of Archeology and Anthropology*, 2(1). DOI: 10.33552/OAJAA.2019.02.000527
- Pyke, R. (2019). *The Mathematics of Perspective Drawing: From Vanishing Points to Projective Geometry*. Simon Fraser University, Canada. Διαθέσιμο στο: <https://www.sfu.ca/~rpyke/perspective.pdf>

- Schwandt, T. A., & Gates, E. F. (2018). Case Study Methodology. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (5 ed.). Thousand Oaks (CA): SAGE Publishing, pp 600–630.
- Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educ Stud Math*, 16, 181–204. <https://doi.org/10.1007/PL00020739>
- Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half." *Child Development*, 62(3), 427–440. <https://doi.org/10.2307/1131121>
- Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία*. (Μτφρ. Α. Αλεξανδροπούλου, Επιμ. Τ. Τριανταφυλλίδης). Αθήνα: Τυπωθήτω/Δάρδανος.
- Zainal, Z. (2017). Case Study As a Research Method. *Jurnal Kemanusiaan*, 5(1). Ανακτήθηκε από: <https://jurnalkemanusiaan.utm.my/index.php/kemanusiaan/article/view/165>
- Zanker, P. (2010). *Roman Art*. USA: Getty Publications.

ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΕΙΣ ΠΗΓΕΣ:

- Ben-Chaim, D., Keret, Y., Illany, B-S. (2012). *Ratio and Proportion*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Boardman, J. (1980). *Αρχαία Ελληνική Τέχνη* (Μτφ. Α. Παππάς). Αθήνα: Υποδομή.
- Borowski, E. J., & Borwein, J. M. (2002). Collins dictionary of mathematics. Collins.
- Buehl, M. M., & Alexander, P. A. (2004). Longitudinal and cross-cultural trends in young children's analogical and mathematical reasoning abilities. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 47-73). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Γώγος Σ. (2005), *Το Αρχαίο Θέατρο Διονύσου: Αρχιτεκτονική Μορφή και Λειτουργία*. Αθήνα: Εκδόσεις Μίλητος.
- Δεσλή, Δ. (2006). Εισαγωγή στην ελληνική έκδοση. Στο T. Nunes, & P. Bryant, *Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά*, (σελ. 19-38). (Σ. Λειβαδοπούλου, & Γ. Σαρηγιαννίδου, Μετάφραση). Αθήνα: Gutenberg. (πρωτότυπη έκδοση, 1996).
- Glense, C. (2018). Η Ποιοτική Έρευνα. *Οδηγός για Νέους Επιστήμονες*. (Μτφ. Γ. Καλαουζίδης). Αθήνα: METAIXMIO.
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1980). *Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts*. 177-184. Paper presented at Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.
- Howard, I. P., & Wade, N. J. (1996). Ptolemy's contributions to the geometry of binocular vision. *Perception*, 25(10), 1189-1201.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking From Childhood to Adolescence: An Essay on the Construction of Formal Operational Structures* (Developmental Psychology). London: Routledge.
- Καλοκύρης, Κ. (1970). *Εισαγωγή εις την Χριστιανικήν και Βυζαντινήν Αρχαιολογίαν (Η Τέχνη Ανατολής και Δύσεως)*. Αθήνα: Πουρνάρα.
- Koellner-Clark, K. & Lesh, R., (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics*, 103(2), 92-98
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1, 629-667.
- Lee, K., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, 76 (2), 123-140.
- Leech, R., Mareschal, D., & Cooper, R. P. (2008). Analogy as relational priming: A developmental and computational perspective on the origins of a complex cognitive skill. *The Behavioral and Brain Sciences*, 31, 357–378.

- Livy, S & Vale, C. (2011). First Year Pre-service Teachers' Mathematical Content Knowledge: Methods of Solution for a Ratio Question. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(2), 22-43.
- Lobato, J., Ellis, A. B., & Muñoz, R. (2003). How “focusing phenomena” in the instructional environment afford students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 1–36.
- Μοδέστου Μ.(2004). Η αναλογία ($f(x)=ax$) ως επιστημολογικό εμπόδιο; Στο Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία, Α. Κουσιάππας, Μ. Μοδέστου, Ν. Μουσουλίδης, & Μ. Πιττάλης (Επιμ.), *Σύγχρονη Έρευνα στη Μαθηματική Παιδεία* (σσ. 215-225). Λευκωσία: Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Παπαγεωργίου Ε. & Χρίστου Κ.(1999). Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας. Στο Α. Κόλλιας, Α. Μαργετουσάκη και Π. Μιχαηλίδης (Επιμ.), *4^ο Πανελλήνιο Συνέδριο με διεθνή συμμετοχή- Διδακτική των Μαθηματικών: Πληροφορική στην εκπαίδευση* (522-528). Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης.
- Philippou, G. N. & Christou, C. (2002). A Study of Mathematics Teaching Efficacy Beliefs of Primary Teachers. In Leder, G., Pehkonen, E., & Toerner, G. (Eds), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 211-232). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Piaget J.,& Inhelder, B., (1967). *The Child's Conception of Space*. New York: Norton.
- Piaget J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton.
- Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics*, 13(3), 289–327. <http://www.jstor.org/stable/3482253>
- Smith, A. M. (1998). Ptolemy, Alhazen, and Kepler and the problem of optical images. *Arabic Sciences and Philosophy*, 8(01), 9-44
- Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of “Half.” *Child Development*, 62(3), 427–440. <https://doi.org/10.2307/1131121>

- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Swan, M. (2001). Dealing with Misconceptions in Mathematics. In P. Gates (Ed.). *Issues in Mathematics Teaching*. London: Routledge Falmer (pp. 147-165).
- Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (1995). *Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γιώργος Δαρδανός.
- Yin, R. K. (1981). The case study crisis: Some answers. *Administrative Science Quarterly*, 26, 58-65.
- Yin, R. K. (1984). *Case Study Research: Design and Methods*. Beverly Hills, Calif: Sage Publications.
- Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study method in evaluation research. *Evaluation Practice*, 15, 283–290.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ονοματεπώνυμο:

Pre-test

1. Παρατήρησε τα παρακάτω κλάσματα και έλεγξε αν υπάρχει αναλογία ανάμεσα τους.

Χρησιμοποίησε το σύμβολο (=) για τις περιπτώσεις που υπάρχει αναλογία.

$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{11}{10}$
----------------	----------------	---------------	-----------------	---------------	-----------------

.....		
.....		
.....		

2. Για να φτιάξουμε μια μηλόπιτα χρειαζόμαστε 5 μήλα και 150 γραμμάρια ζάχαρη. Αν διαθέτουμε 4 μήλα πόση ζάχαρη θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



.....

.....

.....

3. Οι γονείς της Μαρίας αποφάσισαν να κάνουν μία ανανέωση στο παιδικό δωμάτιο και γι' αυτό επικοινωνήσαν με έναν διακοσμητή. Ο διακοσμητής τους ζήτησε να σχεδιάσουν ένα σκίτσο του δωματίου σε κλίμακα 1:100, δηλαδή 1 εκατοστό στο σκίτσο να αντιστοιχεί σε 100 εκατοστά στην πραγματικότητα.

Αν ένας τοίχος του δωματίου έχει πλάτος 500 εκατοστά (δηλαδή 5 μέτρα) και ύψος 300 εκατοστά (3 μέτρα) πόσα εκατοστά πρέπει να είναι οι δυο διαστάσεις στο σκίτσο;



.....

.....

Παρουσίαση σε μορφή power point εικόνων σχετικά με την ιστορία της τέχνης (Προϊστορία- Αναγέννηση)



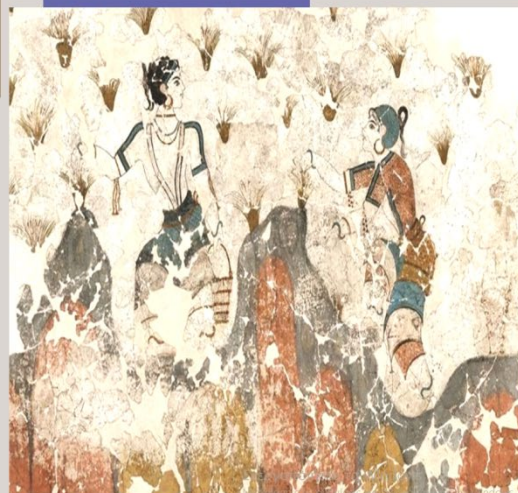
Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΑΙΓΥΠΤΟ

- Βασικό ρόλο στην τέχνη διαδραμάτισαν οι Φαραώ
- Η κοινωνική θέση καθόριζε το μέγεθος αναπαράστασης της φιγούρας
- Οι ανθρώπινες μορφές απεικονίζονται με το μάτι και τα πόδια πλάγια και το υπόλοιπο σώμα σε κατά μέτωπον θέση

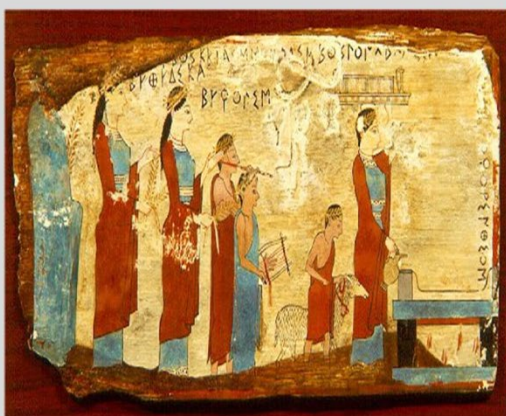


Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ (1/2)

- Επίδραση από τα πρότυπα απεικόνισης των Αιγυπτίων στις ανθρώπινες μορφές
- Απεικόνιση της καθημερινής ζωής και εξωτικών τοπίων που γνώριζαν μέσω των ταξιδιών
- Παραστατικότητα, ζωντάνια, ενώ είναι αξιοσημείωτο και το πλήθος των λεπτομερειών



Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ (2/2)



Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΡΩΜΗ (1/2)

- Σκηνές εμπνευσμένες από την ελληνική μυθολογία και την καθημερινή ζωή
- Οι τοιχογραφίες μοιάζουν με εικόνες θεατρικών σκηνών



Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΡΩΜΗ (2/2)

- Αρκετές τοιχογραφίες έχουν φιλοτεχνηθεί με την ψευδαισθητική τεχνική (*trompe l'oeil*), προκειμένου να δημιουργήσουν στους τοίχους προοπτικούς χώρους.

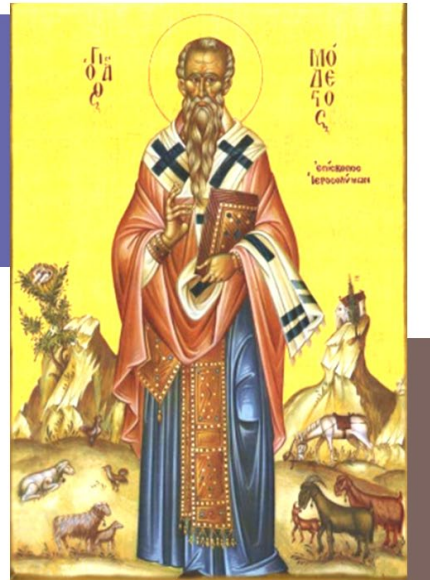
- Ο καλλιτέχνης, προκειμένου να "εξαφανίσει" τον τοίχο, προσπαθεί να δημιουργήσει την οπτική απάτη ενός κήπου. Η απεικόνιση είναι λεπτομερής, με ιδιαίτερη έμφαση στο προοπτικό βάθος.



Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ (1/2)

- Η βυζαντινή εικόνα βασίζεται στην πρωταρχικότητα του πνεύματος

- Χαρακτηριστικό της βυζαντινής εικόνας είναι η ιερατική προοπτική (μια αυξομείωση των ανθρώπινων διαστάσεων ανάλογα με τη σπουδαιότητά τους)



Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΟ ΒΥΖΑΝΤΙΟ (2/2)

- Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην απόδοση του προσώπου και ιδίως των ματιών, που υποβάλλουν την πνευματικότητα της μορφής
- Χαρακτηριστικά της εικόνας είναι η ισοκεφαλία και η αξονική συμμετρία



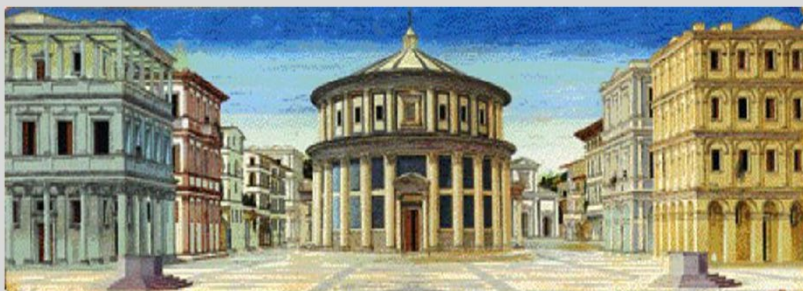
Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ (1/3)

- Ελληνορωμαϊκές επιδράσεις
- Ανακάλυψη ενός νέου συστήματος απεικόνισης του βάθους

↓
Γραμμική προοπτική



Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ (2/3)



Η Γραμμική Προοπτική βασίζεται στο «σημείο φυγής» και στις συγκλίνουσες γραμμές.

Το σημείο φυγής αντιστοιχεί στο ύψος των ματιών του θεατή προς το οποίο συγκλίνουν όλες οι παράλληλες ευθείες (συγκλίνουσες γραμμές).

Πατήστε τα Windows
κοντινά για ενεργοποίηση των Windows.

Η ΤΕΧΝΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ (3/3)

- Προσπάθεια αναπαράστασης των ανθρώπινων μορφών με ρεαλιστικό τρόπο
- Η θεματολογία των έργων βασίζεται τόσο στην θρησκευτική ζωή όσο και στη φύση



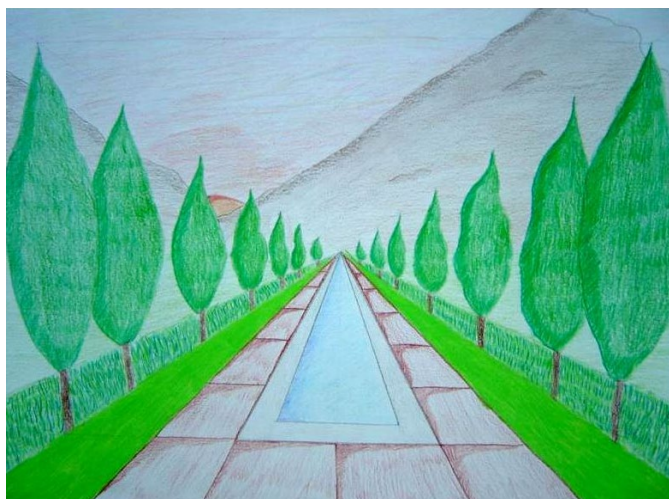
Το Σημείο Φυγής και οι Συγκλίνουσες Γραμμές

Το **Σημείο Φυγής** είναι δύο πράγματα.

Πρώτον, είναι το σημείο εκείνο στο οποίο ‘πέφτει’ **η ματιά του ανθρώπου**, δηλαδή το σημείο το οποίο βλέπουμε αν κοιτάμε απέναντί μας.

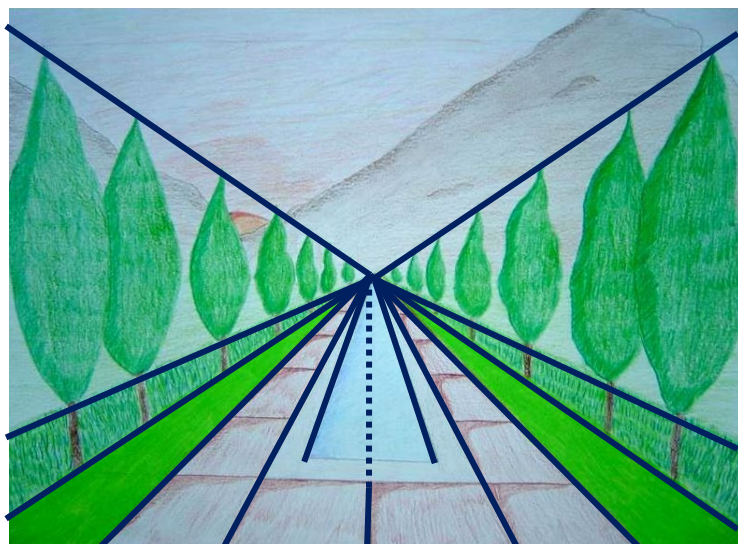
Δεύτερον, σε ένα **σκίτσο** είναι το **σημείο** εκείνο στο οποίο **ενώνονται** κάποιες **νοητές γραμμές** που δημιουργούν την εντύπωση του βάθους σε ένα χαρτί ή πίνακα δύο διαστάσεων για να φαίνεται πιο πραγματική η ζωγραφική μας.

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε ένα σκίτσο με προοπτική ενός σημείου φυγής.



Οι **συγκλίνουσες γραμμές** είναι εκείνες οι **νοητές γραμμές** που συγκλίνουν-συναντιούνται σε ένα σημείο και δημιουργούν την εντύπωση πως υπάρχει **βάθος** σε έναν πίνακα ζωγραφικής. Το σημείο στο οποίο συναντώνται ονομάζεται **σημείο φυγής**.

Στις παρακάτω εικόνες φαίνονται οι συγκλίνουσες γραμμές είναι οι μπλε γραμμές και το σημείο φυγής με κόκκινο χρώμα.



Φύλλο Εργασίας 1: Το Σημείο Φυγής

Α) Το Σημείο Φυγής σε πίνακες ζωγραφικής

1. Στους παρακάτω πίνακες ζωγραφικής να σχεδιάσεις με μπλε χρώμα τις συγκλίνουσες γραμμές και με κόκκινο χρώμα το σημείο φυγής.



2. Με ποιο τρόπο βρήκες το σημείο φυγής στους πίνακες ζωγραφικής;

Β. Το Σημείο Φυγής σε φωτογραφίες

1. Στις παρακάτω φωτογραφίες να χρωματίσεις με μπλε χρώμα τις συγκλίνουσες γραμμές και με κόκκινο χρώμα το σημείο φυγής.





2. Με ποιο τρόπο νομίζεις πως μπορούμε να ζωγραφίζουμε αντικείμενα και δωμάτια μεγάλων διαστάσεων σε ένα χαρτί;

Κλίμακα και Σμίκρυνση

Κλίμακα

Η **Κλίμακα** είναι ένας **λόγος** (κλάσμα) που μας πληροφορεί για το **πόσες φορές μικρότερο** είναι ένα ζωγραφισμένο αντικείμενο σε σχέση με την πραγματικότητα.

Η κλίμακα γράφεται με δύο τρόπους:

$$1:100 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{100}$$

Όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος τόσο μικρότερο βλέπουμε το αντικείμενο. Δηλαδή η κλίμακα 1:1000 μας δείχνει μικρότερο ένα αντικείμενο από την κλίμακα 1:100.

Για παράδειγμα, ο χαρτογράφος για να μπορέσει να τοποθετήσει μια περιοχή της Γης πάνω σε ένα χάρτη, τη σχεδιάζει πολύ μικρότερη από το μέγεθος που έχει στην πραγματικότητα. Τη σχεδιάζει δηλαδή υπό κλίμακα. Η κλίμακα 1:100 δηλώνει ότι απόσταση ενός εκατοστού επάνω στο χάρτη αντιστοιχεί με απόσταση 100 εκατοστών στο έδαφος. Παρακάτω φαίνεται η Ελλάδα σε δύο διαφορετικές κλίμακες.



Η Ελλάδα σε κλίμακα 1: 100.000

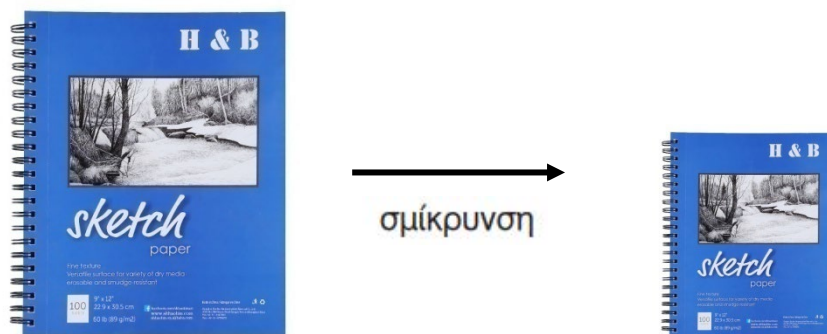


Η Ελλάδα σε κλίμακα 1: 1.000.000

Σμίκρυνση

- Για να **σμικρύνουμε** ένα σχέδιο ή μια εικόνα, **δημιουργούμε μια αναλογία** που το ένα κλάσμα είναι η κλίμακα και το άλλο κλάσμα είναι τα εκατοστά του νέου σχεδίου προς τα εκατοστά του αρχικού σχεδίου.
- Στην σμίκρυνση ισχύει πως:

$$\text{Κλίμακα} = \frac{\text{Εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{Εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$$



Στο παραπάνω παράδειγμα με το τετράδιο μετράμε τις διαστάσεις του αρχικού τετραδίου. Δηλαδή:

6 εκ.



4 εκ.

Αν για τη σμίκρυνση η κλίμακα που μας δίνεται είναι **1:2**, τότε θα δημιουργήσουμε τις πιο κάτω αναλογίες:

6 εκ.



4 εκ.

Κλίμακα 1:2



σμίκρυνση

x



y

- Για να βρω τα εκατοστά της πλευράς x:

$$\text{Κλίμακα} = \frac{\text{Εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{Εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$$

(αντικαθιστούμε στον τύπο τα αριθμητικά δεδομένα που έχουμε)

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{6} \quad (\text{πολλαπλασιάζουμε «χιαστί»})$$

$$2 \cdot x = 6 \cdot 1$$

$$2 \cdot x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3 \text{ εκατοστά}$$

Άρα, στο σχήμα που έχει σμικρυνθεί η αντίστοιχη πλευρά είναι 3 εκατοστά.

- Για να βρω τα εκατοστά της πλευράς y:

$$\text{Κλίμακα} = \frac{\text{Εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{Εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$$

(αντικαθιστούμε στον τύπο τα αριθμητικά δεδομένα που έχουμε)

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{4} \quad (\text{πολλαπλασιάζουμε «χιαστί»})$$

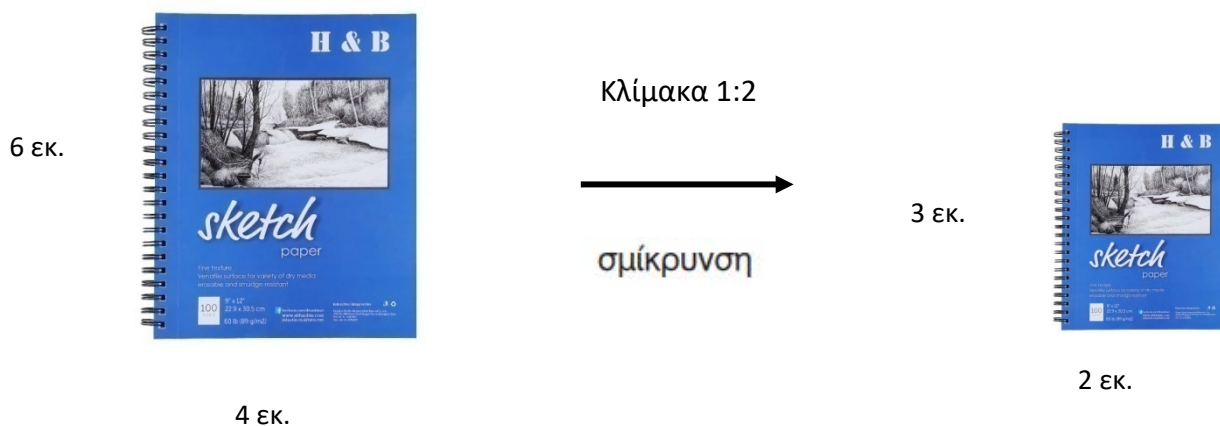
$$2 \cdot y = 4 \cdot 1$$

$$2 \cdot y = 4$$

$$y = \frac{4}{2}$$

$$y = 2 \text{ εκατοστά}$$

Επομένως στο **νέο σχήμα** οι πλευρές του θα είναι **3** και **2** εκατοστά αντίστοιχα.



Τρόπος Επαλήθευσης:

Για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα μας μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα εκατοστά των πλευρών του αρχικού σχεδίου με την κλίμακα για να βρούμε τα εκατοστά των πλευρών του νέου σχεδίου, δηλαδή:

$$6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ εκατοστά}$$

και

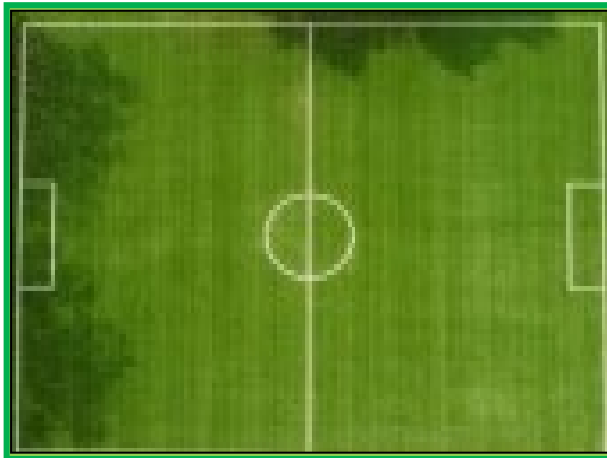
$$4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ εκατοστά}$$

Φύλλο εργασίας 2: Δημιουργία σχημάτων με βάση τις κλίμακες

1. Στο χωριό Αργιθέα της Θεσσαλίας το Δημοτικό Συμβούλιο αποφάσισε πως κάποιοι χώροι που ανήκουν στο Δήμο πρέπει να γίνουν μικρότεροι. Ο θείος σου που είναι μέλος του Δημοτικού Συμβουλίου (Δ.Σ.) ζητάει τη βοήθειά σου για το σχεδιασμό των χώρων που θα αναδιαμορφωθούν. Τα σχήματα είναι σε κάτοψη, δηλαδή έτσι όπως θα τα βλέπαμε αν τα κοιτούσαμε από ψηλά.

α) Το Δ.Σ. θεωρεί πως είναι απαραίτητη η **σμίκρυνση** του ποδοσφαιρικού γηπέδου λόγω της ανάγκης εξασφάλισης χώρου για την κατασκευή ενός πάρκου. Ο θείος σου ζητάει την βοήθειά σου για το σχεδιασμό του γηπέδου σε χαρτί και αναφέρει πως η κλίμακα του σχεδίου θα είναι **1:2** (Το αρχικό σχέδιο του γηπέδου στο χαρτί είναι ορθογώνιο με πλευρές 6 και 8 εκατοστά).

6 εκ.



8 εκ.

Θυμόμαστε πως στη σμίκρυνση:

$$\text{Κλίμακα} = \frac{1}{2} = \frac{\text{Εκατοστά νέου σχεδίου}}{\text{Εκατοστά αρχικού σχεδίου}}$$

Επομένως, αν υπολογίσεις τις διαστάσεις του γηπέδου κάνοντας σμίκρυνση, θα βρεις:

(εκατοστά)	Κλίμακα	Μήκος	Πλάτος
Νέο σχέδιο	1		
Αρχικό σχέδιο	2	6	8

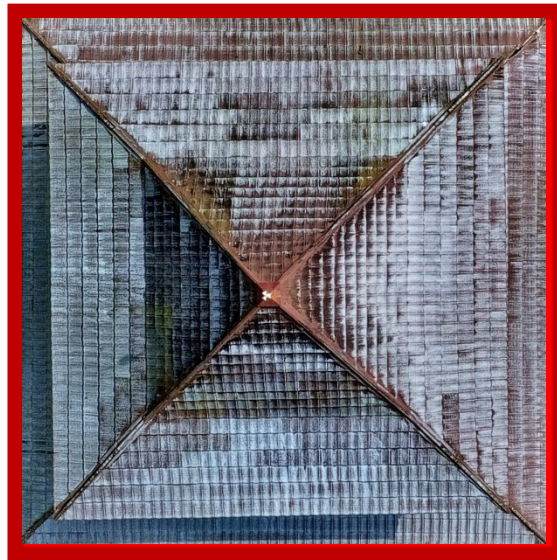
Σχεδιασμός γηπέδου μετά τη σμίκρυνση:

Ποια βήματα ακολούθησες για να σμικρύνεις το σχέδιο για το γήπεδο;

β) Το Δ.Σ. αποφάσισε πως ένα κτήριο του Δήμου θα γίνει πιο μικρό από ότι ήταν για να δημιουργηθεί μια παιδική χαρά.

Ο θεός σου αναφέρει πως θα γίνει σμίκρυνση του κτηρίου σε κλίμακα **1:10** (Το αρχικό σχέδιο του κτηρίου έχει τετράγωνο σχήμα και η κάθε του πλευρά είναι 10 εκατοστά).

10 εκ.



10 εκ.

Επομένως, αν υπολογίσεις τις διαστάσεις του κτηρίου κάνοντας σμίκρυνση, θα βρεις:

--

(εκατοστά)	Κλίμακα	Μήκος	Πλάτος
Νέο σχέδιο	1		
Αρχικό σχέδιο	10	10	10

Σχεδιασμός κτηρίου μετά τη σμίκρυνση:

Ποια βήματα ακολούθησες για να σμικρύνεις το σχέδιο για το κτήριο;

2. Ο Δήμος Βόλου αποφάσισε να χτίσει ένα νέο κολυμβητήριο λόγω της αύξησης του αριθμού των νέων αθλητών.

Το κολυμβητήριο θα έχει σχήμα ορθογωνίου και διαστάσεις **25** μέτρα μήκος επί **50** μέτρα πλάτος. Αν ο εργολάβος το σχεδιάσει σε κλίμακα **1:100** ποιες θα είναι οι διαστάσεις του κολυμβητηρίου στο σχέδιο που θα κάνει στο χαρτί;

25 μέτρα



50 μέτρα

Επομένως, αν υπολογίσεις τις διαστάσεις του κολυμβητηρίου κάνοντας σμίκρυνση, θα βρεις:

(εκατοστία)	Κλίμακα	Μήκος	Πλάτος
Νέο σχέδιο	1		
Αρχικό σχέδιο	100		

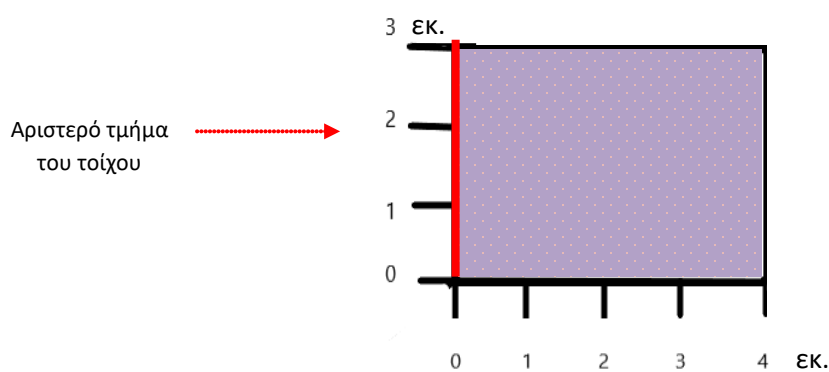
Το σχέδιο του εργολάβου:

Ποια βήματα ακολούθησες για να σμικρύνεις το σχέδιο για το κολυμβητήριο;

Φύλλο εργασίας 3: Εύρεση του Σημείου Φυγής με βάση τη ματιά του ανθρώπου

1. Παρακάτω θα δείτε τους τοίχους κάποιων δωματίων. Τα δωμάτια έχουν ζωγραφιστεί σε κλίμακα **1:100**, δηλαδή 1 εκατοστό στο χαρτί αντιστοιχεί με 100 εκατοστά στην πραγματικότητα. Να υπολογίσετε και να ζωγραφίσετε σε ποιο σημείο του δωματίου βρίσκεται το σημείο φυγής με βάση τα στοιχεία που σας δίνονται.

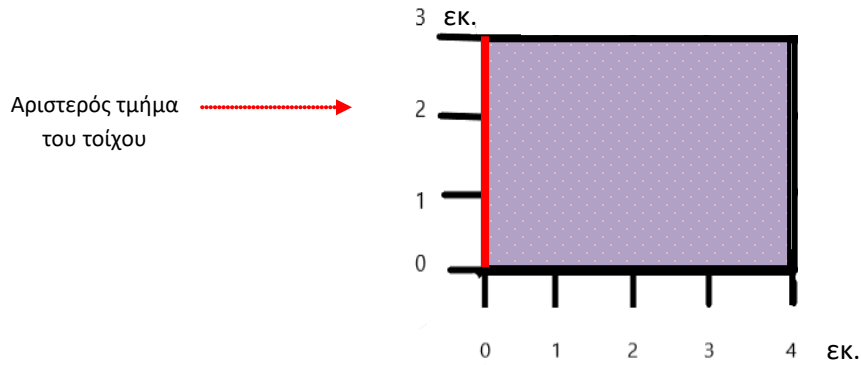
A) Το **βλέμμα** του ανθρώπου είναι στα **2 μέτρα** ύψος και ο άνθρωπος στέκεται **3 μέτρα** μακριά από το αριστερό τμήμα του τοίχου του δωματίου.



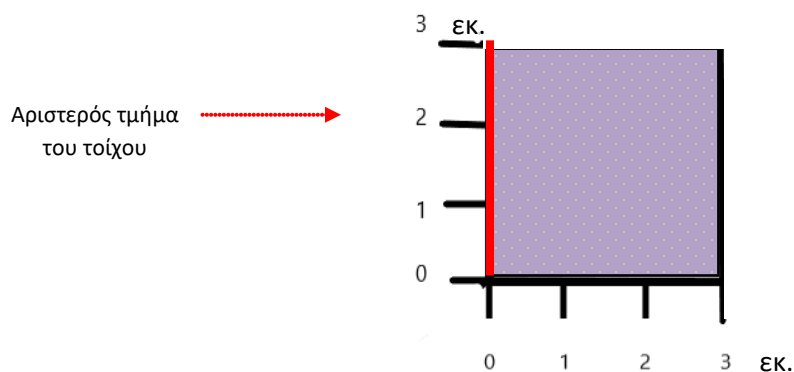
Θυμόμαστε:

1. Μετατρέπουμε τα **μέτρα** των πραγματικών διαστάσεων σε **εκατοστά**.
2. Για το σχέδιο στο χαρτί **υπολογίζουμε τα εκατοστά** με βάση την κλίμακα **1:100**
3. Το **Σημείο φυγής** είναι το **σημείο** όπου συναντιούνται δύο γραμμές, μια **οριζόντια** και μια **κάθετη**. Η οριζόντια είναι η απόσταση του ανθρώπου από το αριστερό τμήμα του τοίχου και η κάθετη είναι το βλέμμα του ανθρώπου.

Β) Το βλέμμα του ανθρώπου είναι **1,5 μέτρο** ύψος και ο άνθρωπος στέκεται **2 μέτρα** μακριά από το αριστερό τμήμα του τοίχου.



Γ) Το βλέμμα του ανθρώπου είναι στα **2 μέτρα** ύψος και ο άνθρωπος στέκεται **2 μέτρα** μακριά από το αριστερό τμήμα του τοίχου.



Κανόνες για τη ζωγραφική ενός δωματίου με τη μέθοδο της Γραμμικής Προοπτικής με ένα Σημείο Φυγής

- 1) Σχεδιάζουμε τον τοίχο που βρίσκεται απέναντι από τον άνθρωπο με βάση τις διαστάσεις και την κλίμακα που μας δίνεται.
- 2) Ζωγραφίζουμε το Σημείο Φυγής, δηλαδή το βλέμμα του ανθρώπου επάνω στον τοίχο. Το Σημείο Φυγής είναι το σημείο που συναντιούνται δύο γραμμές. Η κάθετη γραμμή ορίζει τη θέση του ανθρώπου μέσα στο δωμάτιο και η οριζόντια γραμμή σε ποιο ύψος βρίσκεται το βλέμμα του.
- 3) Ενώνουμε το Σημείο Φυγής με τις τέσσερις άκρες του τοίχου και προεκτείνουμε την κάθε γραμμή ξεχωριστά.
- 4) Φέρνουμε γραμμές παράλληλες προς τις πλευρές του τοίχου με κυκλική φορά.

Φύλλο εργασίας 4: Σχεδιάζοντας ένα δωμάτιο με προοπτική ενός σημείου φυγής

Ο τοίχος ενός δωματίου έχει διαστάσεις: 3 μέτρα ύψος και 4 μέτρα πλάτος.

1) Σχεδιάστε αυτόν τον τοίχο σε κλίμακα **1: 100**

2) Αν γνωρίζουμε ότι το βλέμμα ενός ανθρώπου που βρίσκεται μέσα στο δωμάτιο είναι 1,80 μέτρα και στέκεται 2 μέτρα μακριά από τον αριστερή πλευρά του τοίχου του δωματίου να εντοπίσετε το σημείο φυγής στο σχέδιο που κάνατε παραπάνω.

3) Μεταφέρετε σε αυτή τη σελίδα τον τοίχο και το σημείο φυγής που σχεδιάσατε παραπάνω.

Με βάση αυτά να σχεδιάσετε ένα δωμάτιο με προοπτική ενός σημείου φυγής.

4α. Ποιό τύπο χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να κάνουμε σμίκρυνση;

.....

.....

.....

4β. Όταν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε τα γράμματα με αριθμούς τα κλάσματα που προκύπτουν τι είναι μεταξύ τους;

.....

.....

5. Το σημείο φυγής μπορούμε να το βρούμε με δύο τρόπους.

α) Όταν μας δίνεται μια φωτογραφία ή ένας πίνακας με προοπτική ενός σημείου φυγής το βρίσκουμε :

.....

.....

β) Όταν έχουμε έναν τοίχο σε σμίκρυνση το σημείο φυγής μπορούμε να το βρούμε αν γνωρίζουμε δύο πράγματα, τα οποία είναι:

.....

.....

6. Όταν θέλουμε να ζωγραφίσουμε έναν δωμάτιο της πραγματικότητας σε ένα χαρτί με γραμμική προοπτική ενός σημείου φυγής ποια πράγματα χρειάζεται να γνωρίζουμε για να το σχεδιάσουμε:

1.

2.

3.

Τελικό ερωτηματολόγιο

1. Τι μου άρεσε στα μαθήματα που κάναμε:

2. Τι με δυσκόλεψε στα μαθήματα που κάναμε:

3. Υπάρχει κάτι στα μαθήματα που θα ήθελες να έχει γίνει διαφορετικά; Αν ναι, τι είναι αυτό;

4. Έμαθες κάτι καινούριο σε σχέση με τα μαθηματικά; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

5. Έμαθες κάτι καινούριο για τα Εικαστικά; Αν ναι, ποιο είναι αυτό;

6. Θα ήθελες τα μαθηματικά να συνδυάζονται με άλλα μαθήματα (πχ φυσική, γεωγραφία κ.α.) ; Αν ναι γιατί; Αν όχι γιατί;

7. Θα ήθελες κάποιες φορές να διδάσκονται τα Μαθηματικά μαζί με τα Εικαστικά; Αν ναι, γιατί; Αν όχι, γιατί;
