

Σχολή Θετικών Επιστημών



ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ»**

“Master of Science in Informatics and Telecommunications”

Κατεύθυνση: Ψηφιακές Δεξιότητες

«Ουρές Αναμονής και Μέθοδοι Προσομοίωσης τους»

Φίλιπ Παύλος του Γιαν

Οκτώβριος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Σχολή Θετικών Επιστημών

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ»

“Master of Science in Informatics and Telecommunications”

Κατεύθυνση: Ψηφιακές Δεξιότητες

«Ουρές Αναμονής και Μέθοδοι Προσομοίωσης τους»

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου
Θεσσαλίας

ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση

Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Πληροφορική και Τηλεπικοινωνίες
από τον ή την

Φίλιπ Παύλο του Γιαν

Δήλωση Αυθεντικότητας, ζητήματα Copyright

«Ο μεταπτυχιακός Μ.Φ. που εκπόνησε την παρούσα διπλωματική εργασία φέρει ολόκληρη την ευθύνη προσδιορισμού της δίκαιης χρήσης του υλικού, η οποία ορίζεται στη βάση των εξής παραγόντων: του σκοπού και χαρακτήρα της χρήσης (μη-εμπορικός, μη-κερδοσκοπικός, αλλά εκπαιδευτικός-ερευνητικός), της φύσης του υλικού που χρησιμοποιεί (τμήμα του κειμένου, πίνακες, σχήματα, εικόνες κ.λπ.), του ποσοστού και της σημαντικότητας του τμήματος που χρησιμοποιεί σε σχέση με το όλο κείμενο υπό Copyright, και των πιθανών συνεπειών της χρήσης αυτής στην αγορά ή την γενικότερη αξία του υπό Copyright κειμένου».

Ο Μεταπτυχιακός φοιτητής
Φίλιπ Παύλος

Ο επιβλέπων Καθηγητής
Βαρζάκας Παναγιώτης

Οκτώβριος 2023

Η παρούσα Μ.Δ.Ε. εγκρίθηκε ομόφωνα από την τριμελή εξεταστική επιτροπή η οποία ορίστηκε από την Συνέλευση του Τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, σύμφωνα με το νόμο και τον εγκεκριμένο Οδηγό Σπουδών του Π.Μ.Σ. «Πληροφορική και Τηλεπικοινωνίες». Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Βαρζάκας Παναγιώτης (Επιβλέπων)
- Μπαζιάνα Περιστέρα (Μέλος)
- Τζιρίτας Νικόλαος (Μέλος)

Η έγκριση της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το θέμα της παρούσας εργασίας αναφέρεται στο κόστος που επιφέρει το πρόβλημα της αναμονής, ενόσω στην καθημερινή ζωή για οποιουσδήποτε αναζητούν να εκπληρώσουν κάποια επιθυμία τους, τις περισσότερες φορές δημιουργείται μία ουρά αναμονής στην οποία και παρευρίσκονται. Για τη λύση αυτού του προβλήματος, έχουν αναλυθεί με μαθηματικά μοντέλα οι καταστάσεις που παρατηρούνται ότι βρίσκεται ένα σύστημα, που περιλαμβάνει ουρά αναμονής. Ο αναγνώστης θα δει σε πλήρη ανάλυση, πώς ένα τέτοιο σύστημα συμπεριφέρεται, δηλαδή το πόσο χρόνο κάνουν οι πελάτες για να εξυπηρετηθούν ή το πόσο μήκος ουράς μπορεί να αναπτυχθεί, καθώς και πώς μπορούμε να καταλήξουμε σε μαθηματικές σχέσεις που χαρακτηρίζουν την κατάσταση αυτή του συστήματος. Από τον τύπο του Kendall, έχουν διεξαχθεί μερικές από τις πιο σημαντικές περιπτώσεις ουρών αναμονής, οι $M/M/1$, $M/M/N$, $M/M/1/k$, $M/M/c/K$, $M/G/1$ και $M/M/N/N$. Το κάθε ένα από αυτά τα συστήματα αναμονής, έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στοιχεία που αποσκοπούν στον τρόπο με τον οποίο το καθένα λειτουργεί.

Σε επόμενο στάδιο, η εργασία αυτή αναφέρεται στην τεχνική της προσομοίωσης, στα οφέλη που παράγονται από την τεχνική αυτή, όπως επίσης και τις μεθόδους με τις οποίες μπορεί να υλοποιηθεί η προσομοίωση για τα συστήματα ουρών αναμονής. Οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι Monte-Carlo, Petri nets, Arena και Extend. Αρχικά, δίνεται μία θεωρητική αναφορά για τις μεθόδους αυτές, το πώς λειτουργούν και που χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα. Στη συνέχεια, υλοποιούνται οι μοντελοποιήσεις και γίνονται οι προσομοιώσεις με την χρήση της κάθε μιας από αυτές τις μεθόδους, για ορισμένα από τα συστήματα αναμονής που παρατηρούνται περισσότερο στην καθημερινότητα μας.

Τέλος, γίνονται σχετικές συγκρίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την προσομοίωση κάθε μιας από τις μεθόδους προσομοίωσης για κάποια συγκεκριμένη ουρά αναμονής με τις μαθηματικές σχέσεις των αντίστοιχων συστημάτων αναμονής. Περιλαμβάνονται και τα τελικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την χρήση των δύο αυτών μεθοδικοτήτων για τη διερεύνηση νέων και καλύτερων στόχων για την αντιμετώπιση της αναμονής.

Λέξεις κλειδιά: Ουρά αναμονής, τύπος του Kendall, προσομοίωση, Monte-Carlo, Petri nets, Arena, Extend.

SUMMARY

The topic of this paper refers to the cost that the problem of waiting brings, while in everyday life for anyone looking to fulfill a desire, most of the time a waiting queue is created in which they attend. For the solution of this problem, the situations in which a system is observed, which includes a waiting queue, have been analyzed with mathematical models. The reader will see in full analysis how such a system behaves, i.e. how long customers take to be served or how long a queue can develop, as well as how we can arrive at mathematical relationships that characterize this state of the system. Since Kendall's formula, some of the most important queuing cases have been conducted, $M/M/1$, $M/M/N$, $M/M/1/k$, $M/M/c/K$, $M/G/1$ and $M/M/N/N$. Each of these waiting systems has specific characteristics that are intended for how each one works.

At a later stage, this work refers to the simulation technique, the benefits produced by this technique, as well as the methods by which simulation can be implemented for queuing systems. The methods that will be used are Monte-Carlo, Petri nets, Arena and Extend. First, a theoretical report is given on these methods, how they work and which are used until today. Then, the modeling and simulations are carried out using each of these methods, for some of the waiting systems that are most often observed in our everyday life.

Finally, relative comparisons are made between the results obtained from the simulation of each of the simulation methods for a specific waiting queue with the mathematical relationships of the corresponding waiting systems. The final conclusions resulting from the use of these two methodologies for the investigation of new and better targets for dealing with waiting are also included.

Keywords: Waiting queue, Kendall's formula, simulation, Monte-Carlo, Petri nets, Arena, Extend.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ανθρωπότητα εξελίσσεται καθημερινά, ολοένα και με γρηγορότερους ρυθμούς. Οι άνθρωποι (ή και οποιοδήποτε στοιχείο), εναποθέτουν στόχους, και περνούν μέσα από διαδικασίες για την επίτευξή τους. Για πολλά χρόνια, ωστόσο, αρκετοί επιστήμονες απασχολήθηκαν σημαντικά από το γεγονός ότι, μέσα από τους στόχους ή τις επιλογές που έχουν λάβει οι άνθρωποι, θα υπάρξουν ορισμένες φορές οι περιπτώσεις όπου θα χρειαστεί να προβούν σε φάση αδράνειας, λόγω αναμονής τους για περαιτέρω ζητήματα. Η αναμονή, γενικώς, θεωρείται ως ένα δυσχερές φαινόμενο για τον άνθρωπο, και για αυτό μάλιστα με τα χρόνια, έχουν διεξαχθεί έρευνες και λύσεις για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος.

Θα αναφερθούμε με μαθηματική ανάλυση και ακρίβεια στα στοιχεία που καθορίζουν την θεωρία της αναμονής, και με βάση αυτά τα στοιχεία, θα δούμε μέσα από κατάλληλα προγράμματα και μεθόδους τον ρυθμό με τον οποίο μπορεί να λειτουργεί ένα οποιοδήποτε πραγματικό σύστημα, και σε τελική ανάλυση, να μπορέσουμε να βγάλουμε σωστά συμπεράσματα για καλύτερες επιλογές που θα ωφελήσουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος της αναμονής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	1
1. Έννοια της ουράς αναμονής και τα χαρακτηριστικά της	3
1.1. Βασικές θεωρίες των Πιθανοτήτων και Στατιστικής	8
1.1.1. Θεωρία Πιθανοτήτων	8
1.1.2. Τυχαίες Μεταβλητές	11
1.1.3. Βασικές Κατανομές	13
1.1.4. Η διαδικασία Poisson	14
1.1.5. Εκθετική Κατανομή	15
1.2. Στατική Ισορροπία	16
1.3. Η Μαρκοβιανή διαδικασία	18
1.4. Η διαδικασία γέννησης-θανάτου	19
2. Συστήματα αναμονής τύπου A/B/c	22
2.1. Το σύστημα αναμονής M/M/1	24
2.1.1. Ο νόμος του Little	27
2.2. Το σύστημα αναμονής M/M/1/k	28
2.3. Το σύστημα αναμονής M/M/N	32
2.4. Το σύστημα αναμονής M/M/c/K	36
2.5. Το σύστημα αναμονής M/G/1	39
2.6. Συστήματα αναμονής με απώλειες	43
3. Περιγραφή των μεθόδων προσομοίωσης	50
3.1. Η έννοια της προσομοίωσης	50
3.2. Η μέθοδος προσομοίωσης Monte-Carlo	55
3.3. Η μέθοδος προσομοίωσης με δίκτυα Petri	59
3.4. Η μέθοδος προσομοίωσης Arena	61
3.5. Η μέθοδος προσομοίωσης με Extend	63

4.Προσομοίωση σημαντικότερων ουρών αναμονής	71
4.1.Προσομοίωση ουράς αναμονής με μέθοδο Monte-Carlo	71
4.2.Προσομοίωση ουρών αναμονής με δίκτυα Petri	77
4.3.Προσομοίωση ουρών αναμονής με τη μέθοδο Arena	92
4.4.Προσομοίωση ουρών αναμονής με τη χρήση ExtendSim	102
5.Αποτελέσματα προσομοίωσης ουρών αναμονής	120
Συμπεράσματα	122
Βιβλιογραφία	124

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1.1. Αναπαράσταση της διαδικασίας ενός απλού συστήματος ουράς αναμονής. . .	4
Σχήμα 1.2. Αναπαράσταση της διαδικασίας ενός συστήματος ουράς αναμονής με περισσότερα από ένα σημεία εξυπηρέτησης.	4
Σχήμα 1.3. Σύστημα ουράς αναμονής με δύο στάδια εξυπηρέτησης.	5
Σχήμα 1.1.1. Συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X	11
Σχήμα 1.1.2. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X	12
Σχήμα 1.4. Αναπαράσταση της διαδικασίας γεννήσεως – θανάτου.	20
Σχήμα 2.6.1. Ο ρυθμός γεννήσεων – θανάτων του συστήματος $M/M/N/N$	44
Σχήμα 2.6.2. Ο ρυθμός γεννήσεων – θανάτων του συστήματος Erlang-C, με $c \rightarrow \infty$	46
Σχήμα 2.6.3. Ο ρυθμός γεννήσεων – θανάτων του συστήματος Erlang-C, με $c < \infty$	48
Σχήμα 3.1.1. Ρυθμός απόδοσης των επιχειρήσεων μιας χώρας κατά ποσοστό %.	52
Σχήμα 3.1.2. Κατάσταση της οικονομίας των τομέων κατά ποσοστό %.	52
Σχήμα 3.1.3. Σχεδιάγραμμα του ρυθμού απόδοσης της οικονομίας της χώρας.	53
Σχήμα 3.2.1. Εύρεση πιθανής ακτίνας που καταλήγει στο μαρκαρισμένο σημείο του δωματίου.	57
Σχήμα 3.2.2. Εύρεση σημείου με την επιλογή μίας τυχαίας ακτίνας φωτός.	58
Σχήμα 3.2.3. Εύρεση σημείου μέσα από ένα υποσύνολο τυχαίων κατευθύνσεων των ακτινών.	58
Σχήμα 3.3.1. Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας πλυσίματος ρούχων με δίκτυα Petri, πριν την εφαρμογή της.	60
Σχήμα 3.3. Απλή γραφική αναπαράσταση της μοντελοποίησης της διαδικασίας με τη χρήση του Arena.	63
Σχήμα 4.2.1. Το γραφικό περιβάλλον μοντελοποίησης ενός συστήματος με απλό δίκτυο Petri.	79
Σχήμα 4.2.2. Οι σημάνσεις των θέσεων πριν και μετά την πυροδότηση της μεταβίβασης. .	80

Σχήμα 4.2.3. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_0 = 0$	82
Σχήμα 4.2.4. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_1 = 1$	83
Σχήμα 4.2.6. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_4 = 4$	83
Σχήμα 4.2.7. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_{16} = 16$	84
Σχήμα 4.2.8. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ λεπτά.	88
Σχήμα 4.2.9. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_1 = 1$ λεπτά.	89
Σχήμα 4.2.10. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_2 = 4$ λεπτά.	90

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 2.5.1. Ο πίνακας πιθανοτήτων των μεταβάσεων των δεδομένων στο σύστημα.	39
Πίνακας 4.1.1. Χαρακτηριστικά στοιχεία γνωματεύσεων.	73
Πίνακας 4.1.2. Πίνακας τυχαίων αριθμών.	74
Πίνακας 4.1.3. Χαρακτηριστικά του συστήματος αναμονής.	75

ΕΙΚΟΝΕΣ

Εικόνα 3.5.1. Απεικόνιση της αναπαράστασης της φόρτισης της μπαταρίας.	65
Εικόνα 4.3.1. Γραφική απεικόνιση της μοντελοποίησης του συστήματος.	94
Εικόνα 4.3.2. Αποτελέσματα της προσομοίωσης του συστήματος.	99
Εικόνα 4.4.1. Η απεικόνιση της μοντελοποίησης του συστήματος.	105
Εικόνα 4.4.2. Η τελική ανάλυση του συστήματος, ύστερα από μία ώρα.	109
Εικόνα 4.4.3. Αποτελέσματα της προσομοίωσης σε χρονική διάρκεια 10 λεπτών. . .	116

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην καθημερινότητα μας, είναι πολλές φορές που οι άνθρωποι ερχόμαστε αντιμέτωποι με το να βρισκόμαστε σε μία κατάσταση “αναμονής”, ώστε να θέλουμε να πραγματοποιήσουμε κάποιον συγκεκριμένο σκοπό μας. Τέτοιες καταστάσεις βλέπουμε για παράδειγμα σε μία τράπεζα, όπου πολλοί άνθρωποι έχουν παρευρεθεί σε αυτήν (συνήθως σε ΑΤΜ) για να κάνουν μία οποιαδήποτε συναλλαγή που επιθυμεί ο καθένας. Παρόμοια, σε ένα Κέντρο Εξυπηρέτησης Πελατών (Κ.Ε.Π.), όπου οι άνθρωποι περιμένουν ο ένας πίσω από τον άλλον για να εξυπηρετηθούν από τον/την υπάλληλο που εργάζεται μέσα, είτε σε ένα σούπερ μάρκετ, όπου οι πελάτες περιμένουν στο ταμείο, μέχρις ότου εξυπηρετηθεί ο πρώτος που βρίσκεται εκεί και μετά ένας – ένας, οι επιβάτες σε ένα μεταφορικό μέσο (π.χ. πλοίο), οι οποίοι περνούν ο ένας μετά τον άλλον από τον ελεγκτή εισιτηρίων, η προσέλευση των φοιτητών στην φοιτητική εστία για το γεύμα τους κ.α. Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι όχι μόνο οι άνθρωποι, αλλά και αντικείμενα διαφόρων ειδών μπορούν να θεωρηθούν ότι βρίσκονται σε στάδιο αναμονής, όπως για παράδειγμα τα προσωπικά αντικείμενα τους που τοποθετούν οι άνθρωποι σε έναν αεροδιάδρομο, τα οποία περνούν ένα προς ένα από τον μηχανικό ελεγκτή κι έπειτα, αν δεν υπάρξει κάποιο πρόβλημα, τοποθετούνται στις αποθήκες αποσκευών του αεροπλάνου, είτε σε προγραμματιστικό περιβάλλον, τα bits που εισέρχονται σε μία μονάδα μνήμης (σκληρό δίσκο ή Κεντρική Μονάδα Επεξεργαστή), τα οποία θα εισέρχονται με βάση την πληροφορία που δίνει ο χρήστης το ένα μετά το άλλο ή και σε κλάδους δικτύων, όπως είναι οι τηλεφωνικές κλήσεις σε μια εταιρία για εξυπηρέτηση πελατών. Αυτού του είδους οι περιπτώσεις δημιουργούν την λεγόμενη “**ουρά αναμονής**”. Οι ουρές αναμονής παρατηρούνται μέχρι και σήμερα σε πολλούς κλάδους επιστήμης και επιχειρήσεων, όπως στην Επιχειρησιακή Έρευνα, στην πληροφορική, σε ιδιωτικά και δημόσια ινστιτούτα, σε δίκτυα κυκλοφορίας και μεταφορών και σε μηχανικές και τεχνολογικές επιστήμες.

Για το ζήτημα της λύσης αυτού του φαινομένου, έχουν υλοποιηθεί σημαντικές μαθηματικές έρευνες και μαθηματικά μοντέλα, με στόχο την λιγότερη (ή καθόλου) χρονική και οικονομική διαδικασία, Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε:

- Στο 1^ο κεφάλαιο, θα ορίσουμε το φαινόμενο της αναμονής, και θα δούμε πώς μέσα από την Θεωρία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής μπορούμε να συσχετίσουμε τα χαρακτηριστικά του συστήματος αναμονής. Για σχετικές πληροφορίες, ο αναγνώστης μπορεί να αποφανθεί στα [1],[3],[4],[5],[8],[10],[21],[29].
- Στο 2^ο κεφάλαιο, θα δούμε και θα αναλύσουμε με τους κατάλληλους ορισμούς και παραδείγματα τα χαρακτηριστικά αυτά με μαθηματικές εκφράσεις, μέσα από τις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις συστημάτων ουρών αναμονής. Περισσότερες πληροφορίες αναφέρονται και στα [6],[9],[15],[16],[18],[19],[20],[22],[24],[26].
- Στο 3^ο κεφάλαιο, θα αναφερθούμε στον ορισμό της προσομοίωσης και στο πώς αυτή υλοποιείται σε καθημερινή βάση, καθώς θα αναφερθούμε και στις πιο διαδεδομένες μεθόδους προσομοίωσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση των συστημάτων ουρών αναμονής. Περαιτέρω πληροφορίες αναφέρονται στα [2],[11],[12],[14],[17],[23],[30],[31],[32],[33].
- Στο 4^ο κεφάλαιο, θα δοθούν κάποια παραδείγματα για την προσομοίωση των σημαντικότερων ουρών αναμονής, μέσα από τις μεθόδους προσομοίωσης που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3. Περαιτέρω πληροφορίες δίνονται στα [7],[13],[25],[27],[28].
- Στο 5^ο κεφάλαιο, θα δώσουμε τα αποτελέσματα για τα χαρακτηριστικά κάθε ουράς αναμονής που θα προκύψουν από τις προσομοιώσεις, αλλά και από τις μαθηματικές σχέσεις του κεφαλαίου 2, ώστε να διαπιστώσουμε ποια διαδικασία μπορούμε να εφαρμόζουμε πιο αξιόπιστα.
- Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα καταλήξουμε σε συμπεράσματα που αφορούν τα συστήματα των ουρών αναμονής, την προσομοίωση και τις μεθόδους της και το πώς με αυτούς τους παράγοντες μπορούμε και να αναγνωρίσουμε και να εφαρμόσουμε διεξοδικές πτυχές για το παρόν και το μέλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ

Μία ουρά αναμονής ορίζεται ως ένα σύστημα εξυπηρέτησης για τους πελάτες, οι οποίοι αποτελούν την άφιξή τους μέσα σε αυτό. Το σύστημα αυτό θα διαθέτει έναν χώρο εξυπηρέτησης για τους πελάτες που θέλουν να εξυπηρετηθούν και έναν χώρο αναμονής για τους υπόλοιπους που περιμένουν να εξυπηρετηθούν. Η έννοια της ουράς αναμονής στηρίχθηκε το 1909 από τον Agner Krarup Erlang, ο οποίος αναζήτησε έρευνες για την διεξαγωγή παραγόντων που καθορίζουν το σύστημα της και το επηρεάζουν. Η ιδέα του προήλθε από το φαινόμενο των εισερχόμενων κλήσεων που γίνονταν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο.

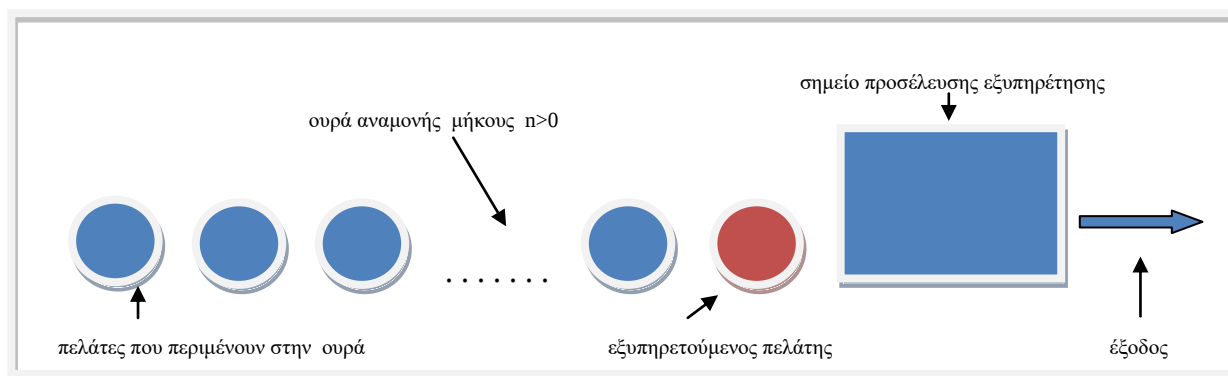
Σε μια ουρά αναμονής, οι πελάτες προσέρχονται σε αυτήν είτε κάθε άτομο μεμονωμένα, είτε κατά ομαδικές ζεύξεις μεταξύ τους και κάτω υπό δύο περιπτώσεις άφιξης:

- 1) είτε με έναν σταθερό προκαθορισμένο ρυθμό άφιξης
- 2) είτε με τυχαίο ρυθμό

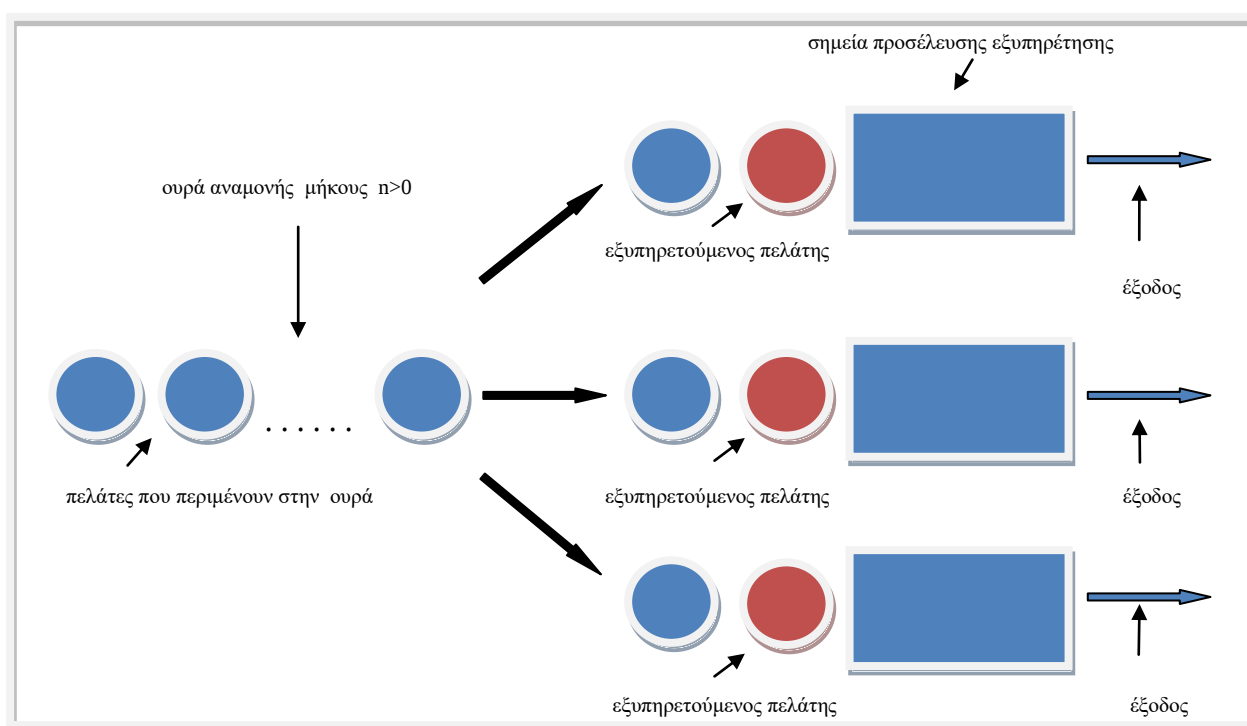
Το πρόβλημα που συνήθως προκύπτει από την διαδικασία των ουρών αναμονής τίθεται κυρίως ως προς το χρόνο, όπου για τον κάθε πελάτη που βρίσκεται στην ουρά, δημιουργείται ένα χρονοβόρο κόστος για τον ίδιο, τόσο ως προς τον χρόνο αναμονής να περιμένει στην ουρά, όσο και ως προς την χρονική διάρκεια που θα κάνει για να εξυπηρετηθεί μόλις έρθει η σειρά του και να αποχωρήσει από το σύστημα. Σημαντικό ρόλο σε αυτό το πρόβλημα, παίζει και το πλήθος των πελατών που προσέρχονται στη ουρά, και με βάση αυτό, θεωρούμε ότι το μήκος της ουράς που δημιουργείται μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο, είτε άπειρο.

Για να επιτύχουμε στην επίλυση αυτού του προβλήματος, μπορούμε να θεωρήσουμε για το σύστημα, η εξυπηρέτηση των πελατών να γίνεται με πιο γρήγορο ρυθμό. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε περισσότερα, από ένα, σημεία άφιξης για την εξυπηρέτηση των πελατών, ώστε η μία ουρά αναμονής να διασπαστεί σε περισσότερες, με στόχο έτσι λιγότερο χρόνο αναμονής για τους πελάτες. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε να το σκεφτούμε και με βάση τα προηγούμενα που αναφέρθηκαν στην αρχή, δηλαδή π.χ. βλέπουμε σε ένα σούπερ μάρκετ περισσότερα από ένα ταμεία για την προσέλευση των αγοραστών, σε ένα Κ.Ε.Π. περισσότεροι υπάλληλοι για εξυπηρέτηση (όμοια και σε

τράπεζες). Το φαινόμενο αυτό ωστόσο, αν και έχει όντως εφαρμοστεί σε πολλούς κλάδους στην καθημερινή μας ζωή, επιφέρει εξίσου το πρόβλημα για το κόστος παραγωγής, όσον αφορά την οικονομία (κυρίως σε περιπτώσεις επιχειρήσεων).



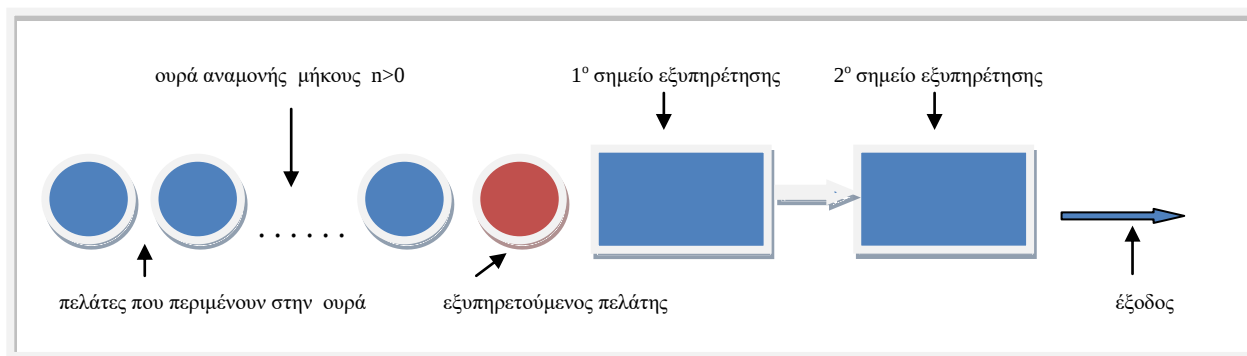
(Σχήμα 1.1. Αναπαράσταση της διαδικασίας ενός απλού συστήματος ουράς αναμονής)



(Σχήμα 1.2. Αναπαράσταση της διαδικασίας ενός συστήματος ουράς αναμονής με περισσότερα από ένα σημεία εξυπηρέτησης)

Σε αρκετές περιπτώσεις, είναι δυνατόν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης να χρειαστούν περισσότερες από μία εξυπηρετήσεις για τους πελάτες, που θα πρέπει να περάσουν από

την μία μετά την άλλη. Τέτοιες περιπτώσεις περισσότερων διαδικασιών εξυπηρέτησεων σε κάποιο σύστημα αποκαλούνται **στάδια εξυπηρέτησης**. Έτσι, ο πελάτης, αφού εξυπηρετηθεί από το πρώτο σημείο εξυπηρέτησης, αμέσως μετά θα πάει στο επόμενο - κάθε φορά - σημείο εξυπηρέτησης που χρειάζεται για την ολική εξυπηρέτηση του.



(Σχήμα 1.3 Σύστημα ουράς αναμονής με δύο στάδια εξυπηρέτησης)

Μία επιστημονική ορολογία που μπορούμε να δώσουμε για την ουρά αναμονής είναι: Ως ουρά αναμονής θεωρείται η μαθηματική μοντελοποίηση των δεδομένων (πελατών) που εισέρχονται με τυχαίο ρυθμό σε ένα οποιοδήποτε σύστημα, το οποίο περιλαμβάνει μία είσοδο και μία έξοδο.

Με βάση αυτόν τον ορισμό, σε ένα τέτοιο σύστημα δίνουμε βάση σε ορισμένα χαρακτηριστικά της ουράς αναμονής που παρατηρούνται, τα οποία θεωρούνται σημαντικοί παράγοντες για την τυποποίηση του συστήματος αυτού και για τα οποία θα χρησιμοποιηθούν μαθηματικοί τύποι για την ανάλυση και μοντελοποίηση τους. Έτσι λοιπόν, ξεκινάμε με τα εξής:

1) Στα συστήματα αυτά, οι αφίξεις των πελατών στην ουρά αναμονής πραγματοποιούνται μέσα σε κάποια χρονικά διαστήματα. Για παράδειγμα, ο πρώτος πελάτης θα εισέλθει στην γραμμή σε χρόνο T_1 , ο δεύτερος θα φτάσει σε χρόνο T_2 , κ.ο.κ.

2) Με όμοιο τρόπο, καθορίζεται και ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών (S_1 για τον πρώτο, S_2 για τον δεύτερο κ.ο.κ.).

Ενδέχεται να μην γνωρίζουμε για τους χρόνους $T_1, T_2, \dots$ και $S_1, S_2, \dots$ αντίστοιχα αν είναι ίσοι ή όχι μεταξύ τους.

3) Επίσης, λαμβάνεται υπόψη το πλήθος των σημείων εξυπηρέτησης που υπάρχουν στο σύστημα, με στόχο να εξυπηρετούνται περισσότεροι πελάτες ταυτόχρονα. Το πλήθος αυτό θεωρείται ότι είναι πεπερασμένο.

4) Μαζί με το πλήθος των εξυπηρετητών, λαμβάνεται υπόψη και το πλήθος των πελατών που εισέρχονται στην ουρά. Ο αριθμός αυτός μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

5) Ένας ακόμη παράγοντας που συμπεριλαμβάνεται στα συστήματα ουράς αναμονής είναι η χωρητικότητα που περιλαμβάνεται σε αυτό, η οποία διακρίνεται και στην γραμμή αναμονής και στον χώρο εξυπηρέτησης των πελατών.

6) Γενικά, σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης των πελατών υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον τρόπο που αυτοί προσέρχονται σε αυτό. Οι περισσότερο διαδεδομένες από αυτές είναι οι εξής:

- FIFO (First In First Out). Είναι ίσως η πιο κλασσική μέθοδος που διακρίνεται σε ένα σύστημα αναμονής, όπου ο πρώτος που θα βρεθεί στην θέση εξυπηρέτησης, θα είναι και ο πρώτος που εξυπηρετηθεί και μετά θα εξέλθει από το σύστημα αυτό. Στο κέντρο υγείας, για παράδειγμα, έχουμε ένα τέτοιο φαινόμενο, όπου οι πελάτες διαθέτουν ένα ειδικό χαρτάκι στα χέρια τους με έναν συγκεκριμένο αριθμό πάνω, ώστε να εξυπηρετούνται ένας-ένας αριθμητικά.

- LIFO (Last In First Out). Με βάση αυτήν την μέθοδο, ο τελευταίος που εισέρχεται στην ουρά αναμονής, θα είναι και ο πρώτος που θα εξυπηρετηθεί. Ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε να το δούμε σε προγράμματα ή στο λογισμικό Η/Υ, όπου τα δεδομένα που εξάγονται από έναν πίνακα ή μία μνήμη δεδομένων, υπάρχουν περιπτώσεις που απαιτείται να ληφθούν οι πιο πρόσφατες πληροφορίες που εισάγονται σε αυτό.

- Επιλογή με τυχαιότητα, RSS (Random Selection for Service). Οι πελάτες σε αυτήν την περίπτωση, εφόσον βρίσκονται σε μία γραμμή, επιλέγονται τυχαία ώστε να επιτευχθεί η εξυπηρέτηση. Σε έναν αγώνα ποδοσφαίρου π.χ., ο προπονητής στοιβάζει τους παίκτες σε μια ουρά κι έπειτα επιλέγει έναν έναν από αυτούς ώστε να δημιουργήσει την ενδεκάδα που χρειάζεται για το παιχνίδι.

· Επιλογή με προτεραιότητα, PRI (Priority Service). Σε αυτήν την περίπτωση, οι πελάτες επιλέγονται με βάση ορισμένες προτεραιότητες που μπορεί να έχει ο καθένας. Ως παράδειγμα μπορούμε να σκεφτούμε έναν διαγωνισμό προκήρυξης που διοργανώνεται από κάποιο ίδρυμα για θέσεις εργασίας ενός συγκεκριμένου τομέα, και τα άτομα που έχουν στείλει την αίτηση για τον διαγωνισμό αυτόν, καταγράφονται σε μία λίστα. Παρ' όλα αυτά, θα επιλεγθούν προτιμότερο τα άτομα που κατέχουν περισσότερα και καλύτερα διπλώματα/έγγραφα, σε σύγκριση με αυτούς που έχουν μιας πιο χαμηλής βαθμίδας - ή και λιγότερα από τα επιθυμητά - έγγραφα που ζητούνται.

Υπάρχει μία εξίσου κατηγορία για την επιλογή εξυπηρέτησης με προτεραιότητα, μέσω της οποίας όταν υπάρχει ήδη ένας πελάτης που εξυπηρετείται και εισέλθει στην ουρά ένας νέος πελάτης, ο νέος αυτός πελάτης παίρνει την θέση του εξυπηρετούντος πελάτη, λόγω βάσιμης προτεραιότητας του, και αρχίζει την δική του διαδικασία εξυπηρέτησης. Αυτό φέρει ως αποτέλεσμα στον πελάτη που εξυπηρετούνταν πριν, όταν αναχωρήσει αυτός που του πήρε τη θέση από το σύστημα, είτε να ξαναρχίσει την διαδικασία από την αρχή, είτε να συνεχίσει από εκεί που είχε μείνει.

Αυτές οι τέσσερις μέθοδοι είναι και οι κύριες που χαρακτηρίζουν την "πειθαρχία της ουράς" του συστήματος.

Υπάρχουν αρκετές ακόμα μέθοδοι εξυπηρέτησης για τους πελάτες, τις οποίες θα δώσουμε μια απλή αναφορά. Μία τέτοια μέθοδος εξυπηρέτησης θεωρείται και η SSTF (Shortest Service Time First), όπου εξυπηρετείται πρώτος αυτός που γνωρίζεται ότι θα αξιοποιήσει τον λιγότερο χρόνο εξυπηρέτησης από τους άλλους. Στην ουσία, υπάρχει και μία ακόμα περίπτωση μεθόδου εξυπηρέτησης, η επονομαζόμενη Round-Robin (RR), στην οποία οι εξυπηρετήσεις των πελατών γίνονται μέσα σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα T. Αν ο πελάτης προλάβει να εξυπηρετηθεί μέσα σε αυτόν τον χρόνο, μπορεί να αποχωρήσει από το σύστημα. Αν όμως φτάσει στο τέλος της χρονικής αυτής περιόδου, χωρίς να έχει εξυπηρετηθεί πλήρως, είτε θα αποχωρήσει από το σύστημα και θα έρθει κάποια άλλη στιγμή ξανά, είτε θα γυρίσει στο τέλος της ουράς έως ότου ξαναέρθει η σειρά του.

Οι παράμετροι αυτοί (διαδικασία άφιξης, χρόνος εξυπηρέτησης, αριθμός εξυπηρετών, χωρητικότητα ουράς, μέγεθος του πληθυσμού στο σύστημα, πειθαρχία της ουράς) αποτελούν βάσιμα στατιστικά στοιχεία που χρειαζόμαστε για τα συστήματα ουρών

αναμονής τύπου A/B/c, ούτως ώστε, κάτω από ορισμένες προδιαγραφές που καθορίζουν το σύστημα, να αξιολογηθεί η καλύτερη δυνατή λειτουργία και μεθοδικότητα του. Στο εξής, θα χαρακτηρίζουμε ως **δεδομένα** τους πελάτες και τα σημεία εξυπηρέτησης ως **εξυπηρετητές** (servers).

1.1.ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα αναλύσουμε τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στατιστικής Ανάλυσης που είναι χρήσιμες για την πλήρη εξήγηση και μαθηματική ανάλυση των ουρών αναμονής.

1.1.1.ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων ασχολούμαστε με πειράματα τύχης, φαινόμενα τα οποία δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα που προκύπτει, αλλά μπορούμε να καταγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν.

Ως **δειγματικός χώρος** Ω ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων, τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε μια εκτέλεση του. Τα σύνολα που περιέχουν μερικά (ή όλα) στοιχεία του δειγματικού χώρου ονομάζονται **ενδεχόμενα** και τα στοιχεία του χώρου **δειγματικά σημεία**.

Το ενδεχόμενο που περιέχει ένα μόνο δειγματικό σημείο λέγεται **απλό**, διαφορετικά καλείται **σύνθετο**.

Ένα κλασσικό παράδειγμα που μπορούμε να δώσουμε είναι η ρίψη ενός νομίσματος. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Τα δειγματικά του σημεία είναι τα "Κ" για κεφαλή και "Γ" για γράμματα, ενώ τα πιθανά ενδεχόμενα που μπορούν να προκύψουν είναι {ΚΚ}, {ΚΓ}, {ΓΚ}, {ΓΓ} και έτσι ο δειγματικός χώρος θα είναι $\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$. Το ενδεχόμενο να πετύχουμε τουλάχιστον μία φορά γράμματα περιγράφεται από το σύνολο $A = \{ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$.

Στις περιπτώσεις των πειραμάτων τύχης, ορίζονται και πράξεις μεταξύ δύο ή περισσότερων συνόλων. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε και συμβολίζουμε τα εξής:

- $a \in A$: το δειγματικό σημείο ανήκει στο ενδεχόμενο A (και αντίστοιχα $a \notin A$ ότι το a δεν ανήκει στο σύνολο A).
- $A=B$: το σύνολο A είναι **ισοδύναμο** με το σύνολο B (κάθε δειγματικό σημείο του A ανήκει και στο σύνολο B και αντίστροφα).
- $A \subseteq B$: το A είναι **υποσύνολο** του B , δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου A περιέχεται και στο σύνολο B ($A \subset B$: το A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του B , δηλαδή $A \subseteq B$, αλλά όχι $A=B$).
- $A \cap B$: χαρακτηρίζεται ως η **τομή** των συνόλων A και B , και δηλώνει τα κοινά στοιχεία που περιέχονται και στο A και στο B μαζί. Συμβολίζεται και ως $A \cap B$.
- $A \cup B$: χαρακτηρίζεται ως η **ένωση** των συνόλων A και B , και είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα αυτά.
- $\bar{A}$: είναι το **συμπλήρωμα** του συνόλου A , το οποίο πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A ($\bar{A} = \Omega \setminus A$).
- $A - B$: ορίζεται ως η **διαφορά** των ενδεχομένων του B από το A και λέγεται το ενδεχόμενο εκείνο που περιέχει ως στοιχεία τα δειγματικά σημεία του A και όχι του B .
- $\emptyset$: θεωρείται το **κενό** σύνολο, το οποίο δεν περιέχει κανένα δειγματικό σημείο. Πολλές φορές δηλώνεται και ως **αδύνατο** σύνολο. Αντίθετα, το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία που προκύπτουν από το πείραμα, ονομάζεται **βέβαιο** ενδεχόμενο. Ο δειγματικός χώρος είναι αυτός που χαρακτηρίζεται ως βέβαιο ενδεχόμενο.

Στα πειράματα τύχης λοιπόν, ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του πειράματος είναι βασικά χαρακτηριστικά, διότι αποτελούν την έννοια της πιθανότητας η οποία εμφανίζεται στα πειράματα αυτά.

Ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω ορίζεται το όριο

$$P(A) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v_A}{v}$$

όπου v_A είναι ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου A και v οι επαναλήψεις του πειράματος, με $0 \leq v_A \leq v$. Ο λόγος $\frac{v_A}{v}$ δίνει την συχνότητα εμφάνισης f_A του ενδεχομένου A .

Για την πιθανότητα $P(A_i)$ ενδεχομένων A_i με $0 \leq i \leq v$ ισχύουν τρεις βασικές ιδιότητες:

$$1) P(A_i) \geq 0, \forall A_i$$

$$2) P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$$

3) Αν η τομή είναι $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, τότε $P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j)$. Τα ενδεχόμενα A_i και A_j σε αυτήν την περίπτωση καλούνται **ξένα** μεταξύ τους.

Αν ο δειγματικός χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης $v \in \mathbb{N}$, ισχύει επίσης ότι:

$$\sum_{i=0}^v P(A_i) = 1.$$

Η **δεσμευμένη πιθανότητα** $P(A|B)$ δοθέντων δύο ενδεχομένων A και B ορίζεται ως προς την πραγματοποίηση του ενδεχομένου A , όταν πρωτίστως έχει συμβεί το ενδεχόμενο B , και δίνεται από τον τύπο:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Για παράδειγμα, σε ένα κιβώτιο με 10 μπάλες, 6 λευκές και 4 μαύρες, επιλέγουμε μία από αυτές. Το ενδεχόμενο A_i ορίζεται ως το ενδεχόμενο να εμφανιστεί λευκή, ενώ το B_i ως το ενδεχόμενο να εμφανιστεί μαύρη. Καταγράφοντας την πιθανότητα που εμφανίστηκε η πρώτη μπάλα ($P(A) = \frac{6}{10}$ και $P(B) = \frac{4}{10}$), την δεύτερη φορά που θα επιλεγεί η επόμενη μπάλα, θα προκύψει ότι

$$P(A_2|A_1) = \frac{5}{9} \quad P(A_2|B_1) = \frac{6}{9},$$

$$P(B_2|A_1) = \frac{4}{9} \quad P(B_2|B_1) = \frac{3}{9}$$

εφόσον το πλήθος των μπαλών μειώθηκε κατά 1.

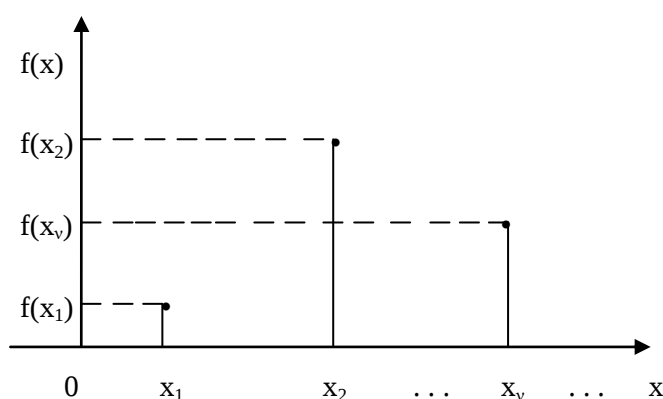
1.1.2. ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Με βάση τον ορισμό της πιθανότητας του δειγματικού χώρου Ω , θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία σε κάθε δειγματικό σημείο ω του χώρου Ω να αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Έτσι, αν για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω , η συνάρτηση αυτή λέγεται **τυχαία μεταβλητή** και η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου γράφεται ως $P(X \in I)$.

Η τυχαία μεταβλητή X λέγεται **διακριτή**, αν το σύνολο τιμών της $R_X = \{X_1, X_2, \dots, X_v, \dots\}$ είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο. Από την διακριτή μεταβλητή, αντιστοιχούμε μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = P(X=x)$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία λέγεται **συνάρτηση πιθανότητας**.

Η συνάρτηση πιθανότητας ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- $f(x)=0$, για κάθε $x \neq x_1, x_2, \dots$
- $f(x_i) \geq 0$ για όλα τα $i=1, 2, \dots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)=1$



(Σχήμα 1.1.1. Συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X)

Η μέση τιμή μιας διακριτής μεταβλητής δίνεται από την σχέση:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xP(X=x)$$

και η διασπορά της:

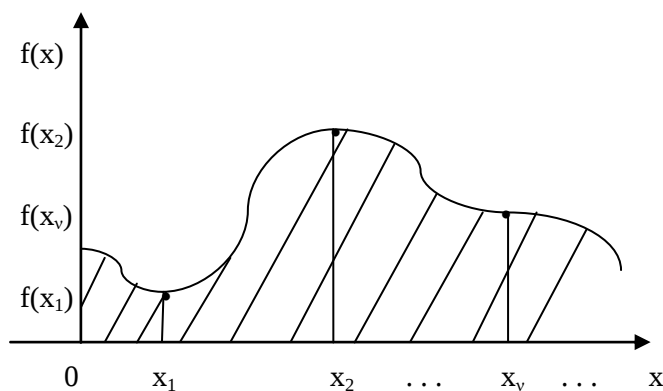
$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

Η τυχαία μεταβλητή X λέγεται **συνεχής** όταν υπάρχει μία μη-πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ τέτοια ώστε, για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ που μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει:

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

Η συνάρτηση f λέγεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της X .

Σε σύγκριση με την συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής μεταβλητής X , η οποία είχε μη μηδενικές τιμές $f(x)$ μόνο στα αριθμήσιμα σημεία x_i , $i=1,2,\dots$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι μία συνεχής συνάρτηση, η οποία παίρνει μη μηδενικές τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in [0,1]$.



(Σχήμα 1.1.2. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X)

Η μέση τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής δίνεται από την σχέση:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

και η διασπορά της ίδια με της διακριτής:

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

1.1.3.ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Οι κατανομές που διέπουν μία διακριτή τυχαία μεταβλητή είναι οι:

- διωνυμική κατανομή
- γεωμετρική κατανομή
- αρνητική διωνυμική κατανομή
- υπεργεωμετρική κατανομή
- κατανομή Poisson

ενώ για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή:

- ομοιόμορφη κατανομή
- κανονική κατανομή
- εκθετική κατανομή
- κατανομές Γάμμα και Βήτα

Για τα συστήματα αναμονής που θα περιγράψουμε, μας ενδιαφέρει η κατανομή Poisson και η εκθετική.

Η κατανομή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X λέγεται **κατανομή Poisson**, αν η συνάρτηση πιθανότητας της με σύνολο τιμών $R_x = \{0,1,2,\dots\}$ είναι της μορφής:

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad \lambda > 0, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Η κατανομή αυτή προέκυψε από το γεγονός, ότι για μία τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $b(n,p)$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

όπου p και q είναι τα δύο πιθανά αποτελέσματα (επιτυχία και αποτυχία αντίστοιχα) του πειράματος Bernoulli, αν το $n \rightarrow +\infty$, τότε η πιθανότητα επιτυχίας p συγκλίνει στο 0 ($p \rightarrow 0$) έτσι ώστε το γινόμενο $n \cdot p$ να συγκλίνει προς μια θετική σταθερά λ , και προκύπτει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Η μέση τιμή της κατανομής Poisson δίνεται ως: $E(X) = \lambda$

και η διασπορά της: $V(X) = \lambda$

1.1.4. Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ POISSON

Στην κατανομή Poisson, συναντάμε τις περιπτώσεις όπου τα ενδεχόμενα εμφανίζονται σε διάφορες χρονικές στιγμές. Ξεκινώντας από μία αρχική χρονική στιγμή, όπου θεωρείται η $t = 0$, παρατηρούμε τις εμφανίσεις ενός ενδεχομένου A που συμβαίνουν σε ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα μεταξύ τους. Το ενδεχόμενο αυτό θα εμφανιστεί $N(t)$ το πλήθος φορές (σημειώνουμε ότι το πλήθος των εμφανίσεων του ενδεχομένου γράφεται $N(t)$, επειδή εξαρτάται από τον χρόνο, επομένως εμφανίζεται με παράμετρο τον χρόνο) μέσα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, για κάθε $t > 0$ και επειδή το ενδεχόμενο εμφανίζεται τυχαία, το $N(t)$ θα αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $\{0, 1, 2, \dots\}$. Έτσι, μπορούμε να διεξάγουμε τις εξής υποθέσεις:

1) Για δύο ισαπέχοντα διαστήματα Δ_1, Δ_2 η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο στο διάστημα Δ_1 k φορές είναι ίση με την πιθανότητα να εμφανιστεί k φορές και στο διάστημα Δ_2 , όπου $k \in \mathbb{N}^+$.

2) Για κάθε χρονικό διάστημα $(t, t+s)$, $s > 0$, το ενδεχόμενο να συμβεί το A k φορές σε αυτό το διάστημα, είναι ανεξάρτητο από το πλήθος φορών που εμφανίστηκε στα προηγούμενα διαστήματα. Αν $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ και A_i η περίπτωση να εμφανιστεί το A n_i φορές στο χρονικό διάστημα $[t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, τότε τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ θα είναι ανεξάρτητα.

3) Η πιθανότητα να εμφανιστεί το A δύο ή περισσότερες φορές σε ένα διάστημα μικρού πλάτους ισούται με μηδέν.

Έτσι λοιπόν, για ένα ενδεχόμενο A το οποίο εμφανίζεται κατά τη διάρκεια του χρόνου έτσι ώστε να πληρούνται οι τρεις αυτές συνθήκες, υπάρχει ένας θετικός αριθμός λ τέτοιος ώστε, η κατανομή του αριθμού $N(t)$ των εμφανίσεων του A σε ένα χρονικό διάστημα πλάτους t να δίνεται από τον τύπο:

$$P(N(t) = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

Η παράμετρος $N(t)$ χαρακτηρίζεται και ως οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{N(t), t \geq 0\}$. Οι οικογένειες αυτές ονομάζονται **στοχαστικές διαδικασίες**.

Οι διαδικασίες μάλιστα που πληρούν τις τρεις προηγούμενες συνθήκες και ισχύει και ο τύπος (*) λέγονται **στοχαστικές διαδικασίες Poisson** με παράμετρο λ .

1.1.5.ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω, τώρα, ότι για την στοχαστική διαδικασία Poisson $\{N(t), t > 0\}$ με ρυθμό λ , θέλουμε να εξετάσουμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες εμφανίζεται το ενδεχόμενο A. Συμβολίζουμε με X_1 την χρονική διάρκεια μέχρι την πρώτη εμφάνιση του A. Όμοια με X_2 την χρονική διάρκεια μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης εμφάνισης του A, με X_3 την χρονική διάρκεια μεταξύ της δεύτερης και τρίτης εμφάνισης του A κ.ο.κ. Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \dots$ ονομάζονται ενδιάμεσοι χρόνοι της διαδικασίας Poisson και η συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής X_1 δίνεται ως:

$$F_{X_1}(t) = P(X_1 < t) = 1 - P(X_1 > t) = 1 - P(N(t)=0) = 1 - \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!}$$

Επειδή η διαδικασία $\{N(t), t > 0\}$ είναι χρονικά στάσιμη με ανεξάρτητες προσauξήσεις, κάθε φορά που θα εμφανίζεται το ενδεχόμενο A θα συμπεριφέρεται σαν να ξεκινά πάλι από την αρχή μέτρησης του χρόνου, όπως προέκυψε την χρονική στιγμή της πρώτης εμφάνισης. Συνεπώς, για τις συναρτήσεις κατανομής F_{X_n} θα ισχύει:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

η οποία μας οδηγεί στην συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Η κατανομή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με την συνάρτηση πυκνότητας αυτήν και παράμετρο $\lambda > 0$, ονομάζεται **εκθετική κατανομή**. Η μέση τιμή και διασπορά της μεταβλητής X δίνονται από τους τύπους:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Από την θεωρία πιθανοτήτων, λοιπόν, μπορούμε να καθορίσουμε τον τρόπο διαδικασίας λειτουργίας ενός συστήματος αναμονής. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι ο ρυθμός με τον οποίο τα δεδομένα εισέρχονται στο σύστημα και ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτησή τους και την αναχώρησή τους, δείχνουν να ακολουθούν κάποια κατανομή. Επομένως, θεωρούμε ότι, μέσα από την κατανομή που κυμαίνεται για την διαδικασία της κατάστασης του συστήματος, προκαθορίζεται για κάθε χρονική στιγμή μία πιθανότητα για τα δεδομένα και αντίστοιχα, τον ρόλο των τυχαίων μεταβλητών (διακριτές ή συνεχείς) παίζουν οι χρονικές στιγμές t που εκλαμβάνονται στο σύστημα.

1.2.ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Μερικές φορές παρατηρείται ότι σε ένα σύστημα, οι μεταβλητές που καθορίζουν την “νοοτροπία” της συμπεριφοράς του συστήματος, μπορούν να παραμένουν αμετάβλητες

ως προς το χρόνο. Από μαθηματική άποψη, αυτό συνεπάγεται το γεγονός ότι για συνεχή χρόνο, η μερική παράγωγος ως προς τον χρόνο για τις ιδιότητες p που χαρακτηρίζουν το σύστημα θα είναι μηδέν:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \text{ για κάθε } t.$$

Αντίστοιχα για διακριτό χρόνο, θα ισχύει για τις ιδιότητες του συστήματος ότι:

$$p_i - p_{i-1} = 0, \text{ για κάθε } t$$

Σε περιπτώσεις συστημάτων ουρών αναμονής λοιπόν, αυτό σημαίνει ότι, η πιθανότητα του συστήματος που βρίσκεται σε μια δεδομένη κατάσταση δεν εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή: $P_n(t) = P_n$, και ότι η συμπεριφορά του συστήματος δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που προσδιορίζονται από την αρχή εκκίνησης της λειτουργίας του. Οι πιθανότητες τότε θα είναι πάντα πραγματικές τιμές $P_k(t) > 0$ η καθεμιά τους για οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος $n(t)$ που συμβαίνει στο σύστημα, με την πάροδο του χρόνου. Αυτό δίνει ως αποτέλεσμα, η κατανομή που ακολουθεί το σύστημα να μην τείνει στο άπειρο.

Το φαινόμενο αυτό με αυτές τις συνθήκες για το σύστημα, εκφράζεται ως **στατική ισορροπία** ή αλλιώς λέγεται ότι το σύστημα παραμένει σε σταθερή κατάσταση. Το σύστημα θα διατηρήσει την συμπεριφορά του αυτή και σε μελλοντικούς χρόνους, καθώς και οι πιθανότητες να συμβούν διάφορες καταστάσεις μέσα σε αυτό, θα έχουν σταθερή τιμή. Οι πιθανότητες του συστήματος, όταν αυτό θα βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση, ονομάζονται πιθανότητες ισορροπίας.

Η προσδοκία της σταθερής κατάστασης καθορίζεται ύστερα από ένα χρονικό διάστημα της εκκίνησης διαδικασίας του συστήματος. Αυτή η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται ως παροδική κατάσταση και το χρονικό αυτό διάστημα ως παροδική περίοδος. Σημειώνεται επίσης ότι μια σταθερή κατάσταση προσεγγίζεται ασυμπτωτικά. Ένα ασταθές σύστημα είναι αυτό που αποκλίνει από τη σταθερή κατάσταση.

1.3.Η ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου σε μια στοχαστική διαδικασία με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, το σύστημα δύναται να μεταβάλλεται από μία κατάσταση σε μία άλλη, χωρίς αυτές να επηρεάζονται μεταξύ τους. Δηλαδή όταν στο σύστημα βρεθούμε στην κατάσταση i την χρονική στιγμή t , και ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα s η κατάσταση αυτή ολοκληρωθεί (συνολικά $t+s$), αμέσως μετά από αυτήν θα βρεθούμε στην κατάσταση $i+1$, από την οποία θα διατηρήσουμε τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν αυτήν, και όχι τα χαρακτηριστικά της προηγούμενης. Αυτή η ανεξαρτησία των καταστάσεων, καθιστά το σύστημα να προχωράει σε επόμενες καταστάσεις ανά χρονικά διαστήματα, χωρίς να υπάρχουν επιπλοκές μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό ονομάζεται μαρκοβιανή ιδιότητα.

Μία στοχαστική διαδικασία με την ιδιότητα αυτή ονομάζεται μαρκοβιανή αλυσίδα και χαρακτηρίζεται από την αλυσίδα των καταστάσεων, οι οποίες καθορίζονται από τις μεταβάσεις που συμβαίνουν σε μια τέτοια διαδικασία. Στην ουσία, η ιδιότητα της μαρκοβιανής αλυσίδας αναφέρεται στο γεγονός ότι η διαδικασία επικεντρώνεται στην παρούσα κατάσταση που διέπει το σύστημα, έτσι ώστε να μην μας ενδιαφέρει τι συνέβη στις προηγούμενες, γι αυτό και πολλές φορές χαρακτηρίζεται ότι είναι διαδικασία χωρίς μνήμη (memoryless). Η μαρκοβιανή αλυσίδα ορίζεται από οικογένειες διακριτών ή και συνεχών τυχαίων μεταβλητών, επομένως ο χρόνος μεταβάσεων και ο χώρος καταστάσεων θα είναι είτε διακριτοί είτε συνεχείς.

Το σύστημα κινείται με τυχαίο ρυθμό, γεγονός το οποίο καθιστά την αβεβαιότητα πρόβλεψης της κατάστασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας σε κάποιο χρονικό διάστημα, μπορούμε ωστόσο να προβλέψουμε τις στατιστικές ιδιότητες του συστήματος. Οι μεταβάσεις των καταστάσεων ορίζονται από μια πιθανότητα, η οποία θα λέγεται πιθανότητα μετάβασης. Έτσι λοιπόν, μία διαδικασία χαρακτηρίζεται από τον χώρο καταστάσεων της, από την πιθανότητα μίας οποιασδήποτε μετάβασης και μία αρχική συνθήκη για τον χώρο καταστάσεων.

Η πιθανότητα να βρεθεί από την κατάσταση i στην κατάσταση j σε δοσμένα χρονικά διαστήματα n είναι:

$$P_{ij} = P(X_n=j / X_0=i)$$

Αυτό σημαίνει ότι για μία κατάσταση, η πιθανότητα της εξαρτάται από την πιθανότητα της ακριβώς προηγούμενης κατάστασης που συνέβη στο σύστημα.

1.4. Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ – ΘΑΝΑΤΟΥ

Σε ένα μαρκοβιανό σύστημα, είναι εφικτό τα δεδομένα να μπορούν να μεταβαίνουν μεταξύ δύο κατευθύνσεων από την κατάσταση που βρίσκονται: είτε στην επόμενη, είτε στην προηγούμενη της. Το γεγονός αυτό καθιστά στο σύστημα είτε να αυξάνεται η μεταβλητή μίας κατάστασης i κατά ένα, είτε να μειώνεται κατά ένα, αντίστοιχα. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται διαδικασία της γέννησης–θανάτου και θεωρείται ότι είναι μια γενίκευση της διαδικασίας Poisson. Στην ουσία, είναι μια εκθετική κατανομή που εξαρτάται από το πλήθος των πελατών στο σύστημα. Οι μεταβάσεις αυτές καθορίζονται είτε με έναν σταθερό ρυθμό, είτε με τυχειότητα (εξαρτάται σε τι κατάσταση βρίσκεται το σύστημα). Η διαδικασία γέννησης–θανάτου ισχύει μόνο σε περιπτώσεις, όπου η μαρκοβιανή διαδικασία είναι συνεχούς χρόνου.

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία στοχαστική διαδικασία και S το σύνολο καταστάσεων της. Τότε, η πιθανότητα μετάβασης της διαδικασίας δίνεται από την σχέση:

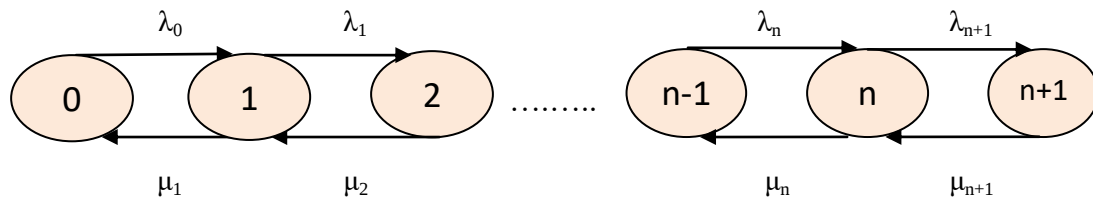
$$P_{ij}(t) = P\{N(t+s) = j / X(s)=i\} \quad , \quad i, j \in S, s > 0$$

Αν συμβολίσουμε με λ_n και μ_n τους ρυθμούς μεταβάσεις γεννήσεως και θανάτου μίας κατάστασης n αντίστοιχα, τότε για την διαδικασία γεννήσεως–θανάτου και για δοσμένο μικρό χρονικό διάστημα Δt θα ισχύουν τα εξής:

- $P_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \quad , \quad i \geq 0$
- $P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t) \quad , \quad i=1, 2, \dots$
- $P_{ii}(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) \quad , \quad i=1, 2, \dots$
- $P_{ii}(0) = 1$
- $\mu_0 = 0 \quad , \quad \lambda_0 > 0 \quad , \quad \mu_i > 0 \quad , \quad \lambda_i > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots$

Η συνάρτηση $o(\Delta t)$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$



(Σχήμα1.4. Αναπαράσταση της διαδικασίας γεννήσεως – θανάτου)

Ισχύουν ακόμα ότι:

Όταν το σύστημα θα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, τότε:

- $\mu_1 P_1(t) = \lambda_0 P_0(t)$ για την κατάσταση 0
- $\lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) = (\lambda_n + \mu_n) P_n(t)$ για την κατάσταση n

Έτσι προκύπτει και για την πιθανότητα ότι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_0 \mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} + \dots \right) = 1$$

Υπό αυτές τις συνθήκες, διεξάγονται και οι εξισώσεις μετάβασης Chapman–Kolmogorov:

$$P_k(t) = \lambda_{k-1} \Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1} \Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t] P_k(t - \Delta t)$$

$$P_0(t) = (1 - \lambda_0 \Delta t) P_0(t - \Delta t) + \mu_1 \Delta t P_1(t - \Delta t), \text{ όπου } \sum_n P_n(t) = 1, \forall t > 0$$

που δηλώνουν ότι:

Εάν για κάποια χρονική στιγμή t η κατάσταση του συστήματος είναι n(t) στην οποία βρίσκονται k πελάτες συνολικά σε αυτό, τότε την χρονική στιγμή t-Δt με Δt→0 διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

. η πιθανότητα να συνέβη μία αναχώρηση από το σύστημα την χρονική περίοδο t-Δt ισούται με $\mu_{k+1} \Delta t$

. η πιθανότητα να συνέβη μία άφιξη στο σύστημα την χρονική περίοδο $t-\Delta t$ ισούται με $\lambda_{k-1}\Delta t$

. η πιθανότητα να μην συνέβη καμία αναχώρηση και καμία άφιξη την χρονική περίοδο $t-\Delta t$ ισούται με $1-(\lambda_k + \mu_k)\Delta t$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΤΥΠΟΥ A/B/c

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του 1^{ου} κεφαλαίου, σε ένα σύστημα ουράς αναμονής καθορίζονται κατάλληλοι παράγοντες που διέπουν την λειτουργία του, και με βάση το πώς αυτοί εξελίσσονται με το πέρασμα του χρόνου μέσω των διαδικασιών τους, θέλουμε να γνωρίζουμε ποια μπορεί να είναι η βέλτιστη αξιοποίηση τους, ώστε να καθιστήσουμε στο σύστημα αυτό τις κατάλληλες προδιαγραφές που θα χρειαστούν για την καλύτερη δυνατή λειτουργικότητα του. Για την υλοποίηση αυτού του φαινομένου και για την διευκόλυνση για την μαθηματική ανάλυση τέτοιων συστημάτων, ασχολήθηκε το 1953 ο Άγγλος μαθηματικός David George Kendal, ο οποίος περιέγραψε τα συστήματα ουρών με τον συμβολισμό A/B/c. Ο συμβολισμός αυτός ονομάστηκε συμβολισμός του Kendall, όπου:

- . το A δηλώνει τον χρόνο άφιξης των πελατών στο σύστημα,
- . το B δηλώνει την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των πελατών και
- . το c δηλώνει τον αριθμό των σημείων εξυπηρέτησης.

Για τα συστήματα αναμονής, διακρίνονται επίσης και οι τρεις ακόμα παράγοντες για την λειτουργία διαδικασίας τους που είναι:

- . η χωρητικότητα της ουράς
- . το μέγεθος πληθυσμού των θέσεων εργασίας που πρέπει να εξυπηρετηθούν
- . η πειθαρχία της ουράς.

Έτσι, ο τύπος του Kendall θα έχει την νέα μορφή A/B/c/D/E/F, με τους περαιτέρω συμβολισμούς D, E, F να δηλώνουν:

- . το D την χωρητικότητα της ουράς
- . το E το μέγεθος πληθυσμού των θέσεων εργασίας
- . το F την πειθαρχία της ουράς.

Με βάση τα παραπάνω, θα δώσουμε τις πιο συχνές μεθόδους που επικρατούν σε τέτοιο σύστημα για τον κάθε έναν από τους συμβολισμούς αυτούς. Έχουμε:

1) Για τον συμβολισμό A, οι χρόνοι αφίξεων των πελατών στην ουρά ακολουθούν συγκεκριμένες κατανομές. Οι πιο πολυσύχναστες από αυτές είναι οι:

- . M κατανομή Poisson
- . D κανονική κατανομή

- . G γενική κατανομή
- . GI γενική ανεξάρτητη κατανομή
- . E_k κατανομή Erlang.
- . H υπερεκθετική κατανομή

2) Για τον συμβολισμό B, οι χρονικές περίοδοι των εξυπηρετήσεων των πελατών ακολουθούν και αυτές κάποια κατανομή, όμοια με τις κατανομές των χρόνων άφιξης των πελατών στο σύστημα που δόθηκαν πριν.

3) Το πλήθος των εξυπηρετητών c, τις περισσότερες φορές είναι πάντα πεπερασμένος αριθμός, μπορεί όμως και να υπάρχει άπειρο τέτοιο πλήθος.

4) Ομοίως και για την χωρητικότητα D, τις περισσότερες φορές είναι πεπερασμένη διάσταση, παρ'όλα αυτά δύναται και να απειρίζεται.

5) Το μέγεθος πληθυσμού των πελατών στο σύστημα είναι είτε πεπερασμένος αριθμός ή άπειρο.

6) Οι μέθοδοι για την πειθαρχία της ουράς αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

Στις διαδικασίες των ουρών αναμονής, θα ασχοληθούμε με τα συστήματα ουρών αναμονής της μορφής M/M/m. Στα συστήματα αυτά, ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα και θεωρείται ότι η χωρητικότητα του συστήματος είναι απεριόριστη, το πλήθος των πελατών άπειρο και η πειθαρχία της ουράς που προσδιορίζεται είναι μόνο η FIFO.

Το 1^ο M σημαίνει ότι τα δεδομένα που εισάγονται στο σύστημα, ακολουθούν εκθετική κατανομή με διαδικασία Poisson. Τα δεδομένα καταφθάνουν στο σύστημα τις χρονικές στιγμές $0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, με $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots$. Επομένως οι χρόνοι $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή η καθεμία από αυτές:

$$P\{T_{i+1} - T_i \geq t\} = e^{-\lambda t}, \lambda > 0, t \geq 0.$$

Έτσι λοιπόν, τα $\{T_n\}$ προσδιορίζουν μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ .

Το 2^ο M, σημαίνει πως τα δεδομένα (πελάτες) ακολουθούν εκθετική κατανομή ως προς τον χρόνο, μέσα από τον οποίο αυτά εξυπηρετούνται. Με βάση την πειθαρχία της ουράς

που είναι η FIFO, τα δεδομένα φθάνουν στον εξυπηρετητή τους χρόνους

$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ το ένα μετά το άλλο. Οι χρόνοι αυτοί είναι επίσης ανεξάρτητοι με εκθετική κατανομή ρυθμού μ , με τύπο:

$$P\{S_n \geq t\} = e^{-\mu t}, \quad \mu > 0, t \geq 0.$$

Το m δηλώνει τον αριθμό θέσεων εξυπηρέτησης που παρέχονται για την εξυπηρέτηση των πελατών.

2.1.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ M/M/1

Το σύστημα ουράς αναμονής M/M/1 χαρακτηρίζεται από την κατανομή Poisson του χρόνου αφίξεων των δεδομένων, την εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης και έναν εξυπηρετητή.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι λ είναι ο ρυθμός αφίξεων και μ ο ρυθμός εξυπηρέτησης. Και οι δύο αυτές παράμετροι αναφέρονται στο σύστημα ανά χρονικά περιθώρια μεταξύ των καταστάσεων i και $i+1$. Το $\frac{1}{\lambda}$ εκφράζει το μέσο χρόνο που καταφθάνουν τα δεδομένα στο σύστημα και το $\frac{1}{\mu}$ εκφράζει τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης του συστήματος.

Όταν ισχύει $\lambda < \mu$, τότε θεωρείται ότι το σύστημα είναι σε στατική ισορροπία. Η σταθερή κατανομή είναι η οριακή κατανομή για μεγάλες τιμές T . Αντίθετα, αν $\lambda \geq \mu$, στο σύστημα θα υπάρξει ασταθής διανομή, επειδή ο ρυθμός των αφίξεων θα γίνεται ολοένα και γρηγορότερος με την πάροδο του χρόνου, με αποτέλεσμα το μήκος της ουράς να επεκτείνεται απείρως. Επομένως, εφόσον στο σύστημα δεν τηρείται η συνθήκη ευστάθειας, προκύπτει ότι:

$$P_n = 0, \quad \forall n < \infty \quad \text{και} \quad P_\infty = 1$$

Για τους μαθηματικούς τύπους και τα στατιστικά στοιχεία που θα αναλυθούν, θα θεωρήσουμε ότι το σύστημα τύπου A/B/c θα πρέπει να είναι ευσταθές. Αναλύοντας το σύστημα λοιπόν, μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας τα εξής:

Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε ευστάθεια, θα ισχύουν οι εξισώσεις της στατικής ισορροπίας:

$$P_{n-1} \lambda \Delta t + o(\Delta t) = P_n \mu \Delta t + o(\Delta t) \Rightarrow P_n = \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}$$

Επομένως, αναδρομικά προκύπτει ότι:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Θεωρούμε την πιθανότητα η ουρά να βρίσκεται στην κατάσταση n τον χρόνο t . Τότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

Αλλά από μαθηματικό τύπο ισχύει ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Επομένως:

. Η πιθανότητα η ουρά να είναι άδεια (δεν υπάρχουν δεδομένα) δίνεται ως:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

. Η πιθανότητα η ουρά να είναι μήκους n (n δεδομένα) θα είναι:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

. Οι εξισώσεις των γεννήσεων–θανάτων θα είναι:

$$\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu, n=0,1,2,\dots$$

. Ο μέσος αριθμός των δεδομένων που βρίσκονται γενικά στο σύστημα (στην ουρά και στον χώρο εξυπηρέτησης) είναι:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \sum_{n=0}^{\infty} n (\frac{\lambda}{\mu})^n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

. ενώ ο μέσος αριθμός των δεδομένων που βρίσκονται στην ουρά είναι:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

. ενώ ο μέσος χρόνος αναμονής του συστήματος είναι :

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Ο λόγος $\frac{\lambda}{\mu}$ χαρακτηρίζεται ως η μέση αναλογία του χρόνου που απασχολεί ο διακομιστής.

Πλέον θα συμβολίζεται ως $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Παράδειγμα: Σε ένα ιατρείο παρατηρείται να καταφθάνουν κατά μέσο όρο 5 πελάτες την ώρα για κάποια συγκεκριμένη εξέταση. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη είναι 10 λεπτά. Βρείτε τα χαρακτηριστικά του συστήματος.

Λύση: Από τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη που είναι 10 λεπτά παίρνουμε ότι εξυπηρετούνται μέχρι και 6 πελάτες ανά ώρα. Άρα ο ρυθμός αφίξεων των πελατών στο ιατρείο είναι $\lambda = 5$ πελάτες/ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησεών τους είναι $\mu = 6$ πελάτες/ώρα. Επομένως $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1$, άρα το σύστημα και η ουρά αναμονής δεν θα υπερκαλυφθούν από πάρα πολλούς πελάτες. Οπότε με βάση τα χαρακτηριστικά του συστήματος M/M/1 παίρνουμε ότι:

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5^2}{6(6-5)} = \frac{25}{6} = 4 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{5}{6-5} = 5 \text{ πελάτες}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{5}{6(6-5)} = \frac{5}{6} \text{ ώρες} = 50 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1 \text{ ώρα} = 60 \text{ λεπτά}$$

Εάν ο μέσος ρυθμός αφίξεων των πελατών στο σύστημα ήταν 10 πελάτες ανά ώρα, παρατηρούμε τότε ότι $\lambda = 10$ πελάτες/ώρα και $\mu = 6$ πελάτες/ώρα, επομένως η αναλογία του διακομιστή θα ήταν $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{6} > 1$. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα να συγκεντρωνόταν ολοένα και περισσότερο κόσμος με λιγότερες αναχωρήσεις πελατών ανά ώρα, και έτσι, σε πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, να υπερχειλίσει το σύστημα (κατάσταση αστάθειας).

2.1.1. Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ LITTLE

Στα συστήματα ουρών, πολύ συχνά επικρατεί ένας βασικός και χρήσιμος μαθηματικός τύπος, ο οποίος χαρακτηρίζεται ως ο νόμος του Little. Πιο συγκεκριμένα, ο νόμος αυτός μας αναφέρει ότι ο μέσος αριθμός L των πελατών στο σύστημα θα είναι ίσος με το

γινόμενο του μέσου χρόνου W που περνάνε οι πελάτες στο σύστημα επί του μέσου όρου λ αφίξεων των πελατών σε αυτό, ανά μονάδα χρόνου. Επομένως:

$$L = \lambda W.$$

Ο τύπος αυτός δεν επηρεάζεται από τον ρυθμό αφίξεων των πελατών, ούτε από τον χρόνο εξυπηρέτησης τους. Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει ο τύπος του Little είναι το σύστημα να είναι ευσταθές ($\lambda < \mu$). Αυτό καθιστά στο σύστημα, να μην υπάρχουν καταστάσεις μετάβασης, όπως η αρχή ή το τέλος λειτουργίας του.

Η σχέση αυτή δημιουργήθηκε το 1954 από τον John Little και δημοσιεύθηκε το 1961 και αναγνωρίστηκε για το έργο του αυτό στην επιχειρησιακή έρευνα.

Παράδειγμα: Έστω ότι σε ένα εστιατόριο, παρατηρείται ότι οι πελάτες εισέρχονται ανά 30 άτομα την ώρα. Οι πελάτες που βρίσκονται εντός του εστιατορίου, περνούν την ώρα τους ο καθένας τους για 40 λεπτά. Επομένως, καταγράφεται ότι στο εστιατόριο προσέρχονται κατά μέσο όρο 30 πελάτες ($\lambda = \frac{30}{1h}$) και μένουν για 40 λεπτά ($W = 40min = \frac{2}{3} h$). Άρα:

$$L = \lambda W = 30/h \cdot 2/3 h = 20.$$

Άρα ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα του χρόνου αναμονής τους θα είναι 20.

Για τον τύπο του Little απαιτείται να υπάρχουν ίσες τιμές άφιξης στο σύστημα ή αποχώρησης από αυτό ή και τα δύο, ώστε να γνωρίζεται για το σύστημα η λειτουργία του κάθε χαρακτηριστικού του, με το οποίο μπορούμε να βρεθούμε ακριβώς ή οριακά κοντά στην επίλυση του προβλήματος αναμονής.

2.2.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ M/M/1/k

Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα της ουράς μας δηλώνει ότι:

Το πρώτο M υποδεικνύει τον ρυθμό αφίξεων των δεδομένων στο σύστημα με την άφιξη τους να αποτελεί μία διαδικασία Poisson.

Το δεύτερο M υποδεικνύει τον χρόνο εξυπηρέτησης των δεδομένων στο σύστημα, με το να ακολουθεί εκθετική κατανομή.

Υπάρχει μία μόνο θέση εξυπηρέτησης για τα δεδομένα.

Στην τέταρτη θέση όπου δηλώνεται το k , αναφερόμαστε στην χωρητικότητα του συστήματος, όπου μπορούν να προσέλθουν σε αυτό μέχρι και k δεδομένα. Επειδή στο σύστημα υπάρχει μόνο ένας εξυπηρετητής, την στιγμή που θα προσέλθει στην θέση εξυπηρέτησης ο πρώτος πελάτης, θα παραμείνουν σε αναμονή οι υπόλοιποι $k-1$. Αξιοσημείωτο, επίσης, γεγονός για αυτό το μαρκοβιανό σύστημα, είναι ότι εφόσον η χωρητικότητα του συστήματος περιλαμβάνει μέχρι και k πελάτες, αν για κάποια κατάσταση n του συστήματος σε κάποιο χρόνο t προκύψει ότι η χωρητικότητα είναι πλήρης (δηλαδή υπάρχουν ακριβώς k πελάτες σε αυτό), οποιοσδήποτε νέος πελάτης που θα φθάσει στο σύστημα και θα αποτελέσει την άφιξη του σε αυτό, δεν θα μπορέσει να εισέλθει στην ουρά. Αυτό συνεπάγεται πως ο ρυθμός αφίξεων λ των πελατών στο σύστημα δεν δύναται να παίρνει πολύ μεγάλη τιμή, ώστε και να απειρίζεται. Συνεπώς το σύστημα θα βρίσκεται πάντα σε σταθερή κατάσταση, όσο ελάχιστος και αν είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ των πελατών.

Για το σύστημα $M/M/1/k$ περιορισμένου μήκους ουράς k , με $n \leq k$, θα προκύψουν οι συμβολισμοί:

. οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{για } n \leq k \\ 0, & \text{για } n > k \end{cases}, \quad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{για } n \leq k \\ 0, & \text{για } n > k \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης δεδομένων στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n δεδομένων στο σύστημα:

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \quad \text{με } n \leq k$$

. πιθανότητα ότι ένα δεδομένο δεν θα εισέλθει στο σύστημα λόγω του περιορισμού του μήκους ουράς:

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k$$

. μέσος όρος δεδομένων στην ουρά:

$$L_q = L - \frac{\lambda(1-P_k)}{\mu}$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{(k+1) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k+1}}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_k)}$$

Παράδειγμα: Έστω ένα μίνι μάρκετ με έναν υπάλληλο για την εξυπηρέτηση των πελατών. Ο χώρος είναι αρκετά μικρός, με αποτέλεσμα να μπορούν να εισέλθουν μέσα μέχρι 5 άτομα. Οι πελάτες φτάνουν στο μίνι μάρκετ κάθε 2 λεπτά και ο χρόνος που κάνουν στο ταμείο για την αξιολόγηση των προϊόντων είναι 3 λεπτά. Βρείτε τα χαρακτηριστικά του συστήματος.

Λύση: Ο μέσος χρόνος αφίξεων των πελατών στο μίνι μάρκετ είναι 2 λεπτά, επομένως, ο ρυθμός αφίξεων των πελατών στο σύστημα, δίνεται ως $\lambda = 30$ πελάτες/ώρα. Επιπλέον, ο

μέσος χρόνος της εξυπηρέτησης των πελατών είναι 3 λεπτά, άρα ο ρυθμός εξυπηρέτησεων είναι $\mu = 20$ πελάτες/ώρα. Οπότε,

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2} > 1$$

Όμως, η χωρητικότητα του μίνι μάρκετ περιλαμβάνει μέχρι και $k=5$ άτομα, επομένως η κατάσταση του συστήματος δεν θα γίνει ποτέ ασταθής. Παίρνουμε τα εξής:

. οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \begin{cases} 30 \text{ πελάτες/ώρα} , & \text{για } n \leq k \\ 0 , & \text{για } n > k \end{cases} , \quad \mu_n = \begin{cases} 20 \text{ πελάτες/ώρα} , & \text{για } n \leq k \\ 0 , & \text{για } n > k \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^6} \approx 0.048$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \text{με } n \leq 5$$

$$= 0.048 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

. πιθανότητα ότι ένας πελάτης δεν θα εισέλθει στο σύστημα λόγω του περιορισμού του μήκους ουράς:

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 0.048 \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 0.3645$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{(k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}} - \frac{6\left(\frac{3}{2}\right)^6}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^6}$$

$$\approx 6.577 - 3 = 4 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = L - \frac{\lambda(1-P_k)}{\mu} = 3 - \frac{3(1-0.3645)}{2} = 2 \text{ πελάτες}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = \frac{L}{\lambda(1-P_k)} = \frac{3}{3(1-0.3645)} \approx 1.6 \text{ ώρες} = 96 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 1.6 - \frac{1}{20} = 1.55 \text{ ώρες} = 93 \text{ λεπτά}$$

2.3.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ M/M/N

Το σύστημα αναμονής M/M/N διατυπώνει τα ίδια χαρακτηριστικά με το σύστημα ουράς M/M/1, μόνο που σε αυτήν την περίπτωση ο αριθμός των θέσεων εξυπηρέτησης είναι N το πλήθος τους. Οι θέσεις αυτές θα είναι πανομοιότυπες μεταξύ τους. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης της κάθε μίας από τις N θέσεις εξυπηρέτησης λαμβάνει n πελάτες ανά μονάδα χρόνου, άρα συνολικά για το σύστημα, ο ρυθμός εξυπηρέτησης των πελατών μέσα από N εξυπηρετητές θα είναι N·μ και η αναλογία του χρόνου του διακομιστή σε αυτήν την περίπτωση θα είναι: $\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$.

Όταν στο σύστημα οι πελάτες (πλήθους n) που εισέρχονται είναι λιγότερου πλήθους από αυτόν των εξυπηρετητών, τότε η μέση τιμή αναχωρήσεων είναι n·μ. Διαφορετικά αν οι πελάτες είναι περισσότεροι από τις θέσεις εξυπηρέτησης, τότε η μέση τιμή αναχωρήσεων θα είναι N·μ. Έτσι προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

. οι ρυθμοί γεννήσεων-θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \lambda, \forall n, \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{για } n < N \\ N\mu, & \text{για } n \geq N \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης δεδομένων στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N\rho)^n}{n!} + \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)}}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n δεδομένων στο σύστημα:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(N\rho)^n}{n!}, & \text{για } n \leq N \\ P_0 \frac{N^N \rho^n}{N!}, & \text{για } n > N \end{cases}$$

. πιθανότητα ένα δεδομένο να εισέλθει στο σύστημα και να περιμένει στην ουρά:

$$P_k = \frac{\frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)}}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N\rho)^n}{n!} + \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)}} = \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)} P_0$$

. μέσος όρος δεδομένων στην ουρά:

$$L_q = \frac{\rho^N \lambda \cdot \mu}{(N-1)!(N\mu - \lambda)^2} P_0$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\rho^N \mu}{(N-1)!(N\mu - \lambda)^2} P_0$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Παράδειγμα: Σε ένα σούπερ μάρκετ, υπάρχουν τρία ταμεία για την εξυπηρέτηση των πελατών. Στο σούπερ μάρκετ εισέρχονται στο χώρο κατά μέσο όρο 15 πελάτες την ώρα, ενώ ο κάθε πελάτης εξυπηρετείται κατά μέσο όρο για 4 λεπτά. Βρείτε τα χαρακτηριστικά του συστήματος.

Λύση: Ο ρυθμός αφίξεων των πελατών στο σύστημα είναι $\lambda = 15$ πελάτες/ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησών τους, $\mu = 15$ πελάτες/ώρα. Οπότε, $\rho = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{1}{3}$.

. οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = 15 \text{ πελάτες/ώρα} \quad \mu_n = \begin{cases} 15n \text{ πελάτες/ώρα} , n < N \\ 45 \text{ πελάτες/ώρα} , n \geq N \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N\rho)^n}{n!} + \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)}} \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^n}{n!} + \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^3}{3!(1-\frac{1}{3})}} \\ &= \frac{1}{\frac{(1)^0}{0!} + \frac{(1)^1}{1!} + \frac{(1)^2}{2!} + \frac{1}{6 \left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(N\rho)^n}{n!}, & \text{για } n \leq N \\ P_0 \frac{N^N \rho^n}{N!}, & \text{για } n > N \end{cases}$$

$$\text{Για } n \leq N: P_n = \frac{4}{11} \frac{1^n}{n!}$$

$$\text{Για } n > N: P_n = \frac{4}{11} \frac{3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^n}{6} = \frac{18}{11} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

. πιθανότητα ένας πελάτης να εισέλθει στο σύστημα και να περιμένει στην ουρά:

$$P_k = \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)} P_0 = \frac{4}{11} \cdot \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^3}{3! \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{11}$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{\rho^N \lambda \mu}{(N-1)!(N\mu - \lambda)^2} P_0 = \frac{4}{11} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 15 \cdot 15}{(3-1)!(3 \cdot 15 - 15)^2} = 0 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0 + \frac{15}{15} = 1 \text{ πελάτης}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\rho^N \mu}{(N-1)!(N\mu - \lambda)^2} P_0 = \frac{4}{11} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 15}{(3-1)!(3 \cdot 15 - 15)^2}$$

$$\approx 0.11 \text{ ώρες} = 6.6 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.11 + \frac{1}{15} \approx 0.18 \text{ ώρες} = 10.8 \text{ λεπτά}$$

2.4.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ M/M/c/K

Το σύστημα αναμονής M/M/c/K αναφέρεται στην εκθετική κατανομή με την οποία εισέρχονται τα δεδομένα στο σύστημα, στην εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης τους, στο c το πλήθος θέσεις εξυπηρέτησης και στην χωρητικότητα πεπερασμένης διάστασης K του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, όταν καινούριοι πελάτες φθάνουν στο σύστημα, αν η χωρητικότητα K του συστήματος έχει καλυφθεί πλήρως, δεν δύναται να εισέλθουν σε αυτό. Το σύστημα τότε θα βρίσκεται συνέχεια σε κατάσταση ισορροπίας.

Η αναλογία του διακομιστή δίνεται ως $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$. Το σύστημα M/M/c/K έχει λογική, μόνο για την περίπτωση όπου $c \leq K$. Επομένως, θα προκύψουν οι σχέσεις:

. οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{για } 0 \leq n \leq K \\ 0, & \text{για } n > K \end{cases}, \quad \mu_n = \begin{cases} c\mu, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & \text{για } n > K \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης δεδομένων στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^c \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{n=c+1}^K \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c}}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n δεδομένων στο σύστημα:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & \text{για } 1 \leq n \leq c \\ P_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{c^{n-c}}, & \text{για } c < n \leq K \end{cases}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{(c\rho)^c}{c\mu(1-\rho)^2 c!} P_0$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

. μέσος όρος δεδομένων στην ουρά:

$$L_q = \lambda (1 - P_n) W_q$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = \frac{\rho(c\rho)^c}{(1-\rho)^2 c!} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε ότι σε ένα Κ.Ε.Π. υπάρχουν 3 υπάλληλοι για την εξυπηρέτηση πελατών. Το Κ.Ε.Π. δέχεται μέσα στο χώρο του έως και 5 άτομα. Για την ένταξη των πελατών, παρατηρήθηκε ότι έρχονται κατά μέσο όρο 20 πελάτες ανά ώρα, ενώ για την εξυπηρέτησή τους, παρατηρήθηκε ότι εξυπηρετούνται κατά μέσο όρο 8 πελάτες την ώρα. Βρείτε τα χαρακτηριστικά του συστήματος.

Λύση: Από την εκφώνηση, έχουμε $\lambda = 20$ πελάτες/ώρα και $\mu = 8$ πελάτες/ώρα. Η αναλογία του διακομιστή δίνεται ως $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{20}{3 \cdot 8} = \frac{5}{6} < 1$.

. οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \begin{cases} 20, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{για } n > 5 \end{cases}, \quad \mu_n = \begin{cases} 24, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{για } n > 5 \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^c \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{n=c+1}^K \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c}} \\
&= \frac{1}{\sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!} \left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{1}{3!} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \sum_{n=4}^5 \frac{1}{3^{n-3}} \left(\frac{5}{2}\right)^{n-3}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{0!} \left(\frac{5}{2}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{3!} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left[\frac{1}{3^{4-3}} \left(\frac{5}{2}\right)^{4-3} + \frac{1}{3^{5-3}} \left(\frac{5}{2}\right)^{5-3} \right]} \\
&= 0.00946 \approx 0.01
\end{aligned}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & \text{για } 1 \leq n \leq c \\ P_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c^{n-c}}, & \text{για } c < n \leq K \end{cases}$$

$$\text{Για } n \leq 3: P_n = 0.01 \cdot \frac{1}{n!} \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$\text{Για } 3 < n \leq 5: P_n = 0.01 \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \frac{1}{3^{n-3}} = 0.0017 \left(\frac{5}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n-3}}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{(c\rho)^c}{c\mu(1-\rho)^2 c!} P_0 = 0.01 \cdot \frac{\left(3 \cdot \frac{5}{2}\right)^3}{3 \cdot 8 \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 3!} \approx 0.117 \text{ ώρες} = 7.02 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.117 + \frac{1}{8} = 0.242 \text{ ώρες} = 14.52 \text{ λεπτά.}$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \lambda (1 - P_n) W_q = 2.34 \cdot (1 - 0.01 \frac{1}{n!} (\frac{5}{2})^n), \text{ για } 1 \leq n \leq 3$$

και

$$L_q = 2.34 \cdot (1 - 0.0017 (\frac{5}{2})^n \frac{1}{3^{n-3}}), \text{ για } 3 < n \leq 5$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = \frac{\rho(c\rho)^c}{(1-\rho)^2 c!} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{5}{6} (3 \cdot \frac{5}{6})^3}{(1 - \frac{5}{6})^2 3!} \cdot 0.01 + \frac{5}{2} = 3 \text{ πελάτες}$$

2.5.ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ M/G/1

Σε ορισμένες περιπτώσεις, τα δεδομένα αποτελούν την άφιξή τους με εκθετικά κατανομημένους χρόνους, δηλαδή ακολουθούν την διαδικασία Poisson, όμως οι χρόνοι της εξυπηρέτησης δύναται να ακολουθούν διαφορετική κατανομή, όπως τη γενική κατανομή. Ένα τέτοιο σύστημα είναι του τύπου M/G/1. Για το σύστημα αυτό, οι χρόνοι εξυπηρέτησης για το κάθε δεδομένο θα είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, με αποτέλεσμα για την χρονική διάρκεια εξυπηρέτησης κάποιου δεδομένου, να επεκταθεί περισσότερο η ουρά αναμονής. Για τους χρόνους εξυπηρέτησης, ο μέσος όρος είναι $1/\mu$ και η δίνεται και η διακύμανση του σ^2 . Όμοια με το σύστημα M/M/1, το σύστημα M/G/1 πρέπει να βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση. Οι σχέσεις που χαρακτηρίζουν το σύστημα αυτό είναι οι εξής:

. Η αναλογία του διακομιστή είναι $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

. Οι μεταβάσεις που γίνονται μέσα στο σύστημα, στηρίζονται από τις πιθανότητες που εκφράζονται από τη διαδικασία των αφίξεων των πελατών, τη στιγμή που θα γίνεται κάποια εξυπηρέτηση κάποιου διαφορετικού πελάτη. Οι πιθανότητες αυτές δίνονται από τη σχέση:

$$a_n = \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} f_G(t) dt$$

όπου $f_G(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της γενικής κατανομής. Επομένως, για τις πιθανότητες μεταβάσεων $p_{i,j}$ των πελατών, έχουμε ότι:

- για $j < i-1$, το $p_{i,j} = 0$ και
- για $j \geq i-1$, το $p_{i,j}$ δίνει την πιθανότητα ότι έχουν φτάσει στο σύστημα $j-i+1$ πελάτες, για όσο εξυπηρετείται κάποιος πελάτης.

Έτσι, δημιουργείται ο πίνακας πιθανοτήτων των μεταβάσεων P , ο οποίος είναι της μορφής:

(Πίνακας 2.5.1. Ο πίνακας πιθανοτήτων των μεταβάσεων των δεδομένων στο σύστημα)

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης δεδομένων στο σύστημα:

$$P_0 = 1 - \rho$$

. πιθανότητα ύπαρξης n δεδομένων στο σύστημα:

$$P_n = \rho^n P_0, \text{ για } n \leq N$$

. πιθανότητα ένα δεδομένο να χρειαστεί να περιμένει στην ουρά:

$$P_w = 1 - P_0$$

. μέσος όρος δεδομένων στην ουρά:

$$L_q = \frac{\rho^2(1 + \sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = \rho + \frac{\rho^2(1 + \sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2 \right)}{2(1-\rho)}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2 \right)}{2(1-\rho)}$$

. μέσος αριθμός πελατών που βρίσκονται εν ώρα εξυπηρέτησης:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε ότι σε ένα Κέντρο Εξυπηρέτησης Πελατών, οι πελάτες έρχονται για την πιστοποίηση εγγράφων Υπεύθυνων δηλώσεων για προσωπικό τους σκοπό. Η διαδικασία της εξυπηρέτησης έχει παρατηρηθεί διαφέρει κατά τα συμφέροντα του κάθε πελάτη. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι κατά μέσο όρο, ο λιγότερος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 5 λεπτά, ενώ ο μεγαλύτερος είναι 10 λεπτά. Οι πελάτες φτάνουν στο Κ.Ε.Π. κάθε 12 λεπτά. Βρείτε τα χαρακτηριστικά στοιχεία του συστήματος.

Λύση: Ο ρυθμός αφίξεων των πελατών είναι $\lambda = 5$ πελάτες/ώρα. Οι χρόνοι των εξυπηρετήσεων των πελατών κατανέμονται ομοιόμορφα και ο μέσος ρυθμός εξυπηρετήσεων δίνεται ως $\mu = \frac{\text{minimum time} + \text{maximum time}}{2} = \frac{5+10}{2} = 8$ πελάτες/ώρα.

Άρα:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{8}$$

Η διακύμανση των χρόνων εξυπηρέτησης των πελατών είναι:

$$\sigma^2 = \frac{(\max - \min)^2}{12} = \frac{(10 - 5)^2}{12} = \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^2}{12} = \frac{1}{1728} \text{ (σε ώρες)}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$P_0 = 1 - \rho = \frac{3}{8}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = \rho^n P_0 = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{8}\right)^n$$

. πιθανότητα ένας πελάτης χρειαστεί να περιμένει στην ουρά:

$$P_w = 1 - P_0 = \frac{5}{8}$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{\rho^2 (1 + \sigma^2 \mu^2)}{2(1 - \rho)} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{1728} \cdot 8^2\right)}{2\left(1 - \frac{5}{8}\right)} = \frac{875}{1296} = 0 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = \rho + \frac{\rho^2 (1 + \sigma^2 \mu^2)}{2(1 - \rho)} = \frac{1685}{1296} = 1 \text{ πελάτης}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2\right)}{2(1 - \rho)} = \frac{5 \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{1728}\right)}{2\left(1 - \frac{5}{8}\right)} = \frac{\frac{140}{1728}}{\frac{6}{8}} = \frac{140}{1296} \approx 0.108 \text{ ώρες} = 6.48 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2\right)}{2(1 - \rho)} = 0.233 \text{ ώρες} = 13.89 \text{ λεπτά}$$

. μέσος αριθμός πελατών που βρίσκονται εν ώρα εξυπηρέτησης:

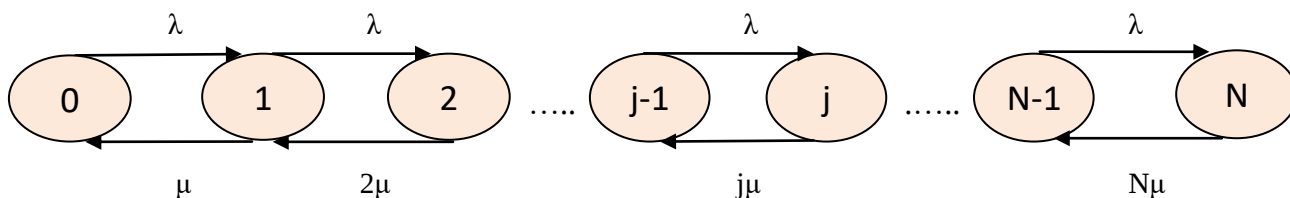
$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{8}$$

Σύμφωνα με τους τύπους των L_q , W_q , L και W , παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η διακύμανση του χρόνου εξυπηρέτησης σ^2 , τόσο θα αυξάνονται και οι μέσοι όροι και χρόνοι των δεδομένων στο σύστημα και στην ουρά. Με άλλα λόγια, όσο η μεταβλητότητα των χρόνων εξυπηρέτησης ελαττώνεται, η απόδοση του συστήματος αναμονής θα βελτιώνεται. Το σύστημα M/G/1 δεν έχει την μαρκοβιανή ιδιότητα, ούτε και είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου, καθώς ο χρόνος που έχει απομείνει για την επόμενη εξυπηρέτηση, δεν ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Ωστόσο, η πειθαρχία της ουράς είναι η ίδια χαρακτηριστική FIFO όπως και στα μαρκοβιανά συστήματα.

2.6.ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΕΣ

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου, όταν προσέρχεται ένα δεδομένο στο σύστημα αναμονής, το μήκος της ουράς είναι αρκετά μικρό ή μπορεί και να μην υπάρχει καθόλου ουρά, ωστόσο βρίσκει όλες τις θέσεις εξυπηρέτησης κατειλημμένες. Οι συνθήκες αυτές αναφέρονται σε μία ειδικευση των συστημάτων M/.../N/N, όπου τα δεδομένα εισέρχονται στο σύστημα με μια διαδικασία Poisson και οι N εξυπηρετητές είναι όλοι απασχολημένοι ή αδρανείς, με αποτέλεσμα το δεδομένο που φθάνει στο σύστημα να μην μπορεί να προβεί στην εξυπηρέτηση του και να αποχωρήσει. Όσον αφορά τον χρόνο εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη, η κατανομή που θα ακολουθεί δεν παίζει σημαντικό ρόλο για το σύστημα, επειδή κύριο στόχο για το σύστημα εκτελούν οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις των πελατών. Αυτό το φαινόμενο αναφέρεται και ως ιδιότητα μη-ευαισθησίας και ισχύει το ίδιο για τα συστήματα με κάθε είδους κατανομή των χρόνων (M,G,D,...). Θα θεωρήσουμε το σύστημα M/M/N/N χωρίς βλάβη της γενικότητας. Επίσης, εφόσον δεν αναμένει στο σύστημα το νέο δεδομένο που καταφθάνει σε αυτό, δεν αναπτύσσεται ουρά αναμονής. Σε αυτή την περίπτωση, υπαγορεύεται ότι το σύστημα θα βρίσκεται πάντα σε κατάσταση ισορροπίας και οι εξισώσεις ισορροπίας θα είναι:

$$\lambda P_{j-1} = j\mu P_j$$



(Σχήμα 2.6.1. Ο ρυθμός γεννήσεων–θανάτων του συστήματος M/M/N/N)

Επαγωγικά, έχουμε ότι:

$$P_j = \frac{\rho^j}{j!} P_0 \text{ με } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Οι εξισώσεις γεννήσεων – θανάτων θα είναι:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & \text{για } k \leq N \\ 0, & \text{για } k > N \end{cases}, \quad \mu_k = k\mu \text{ για } 1 \leq k \leq N$$

και τα χαρακτηριστικά στοιχεία του συστήματος θα είναι:

. πιθανότητα μη ύπαρξης δεδομένων στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n δεδομένων στο σύστημα:

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!}}, & \text{για } n \leq N \\ 0, & \text{για } n > N \end{cases}$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = \sum_{i=0}^N i P_i = \sum_{i=0}^N i \frac{\rho^i}{i!} P_0 = \rho \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\rho^i}{i!} P_0 = \rho(1 - P_N)$$

. μέσος όρος δεδομένων στην ουρά:

$$L_q = 0 \text{ (δεν υπάρχει ουρά αναμονής)}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα με απασχολημένους εξυπηρετητές:

$$W_w = 1 - P_0 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N \frac{\rho^i}{i!}}{\lambda(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\rho^i}{i!})} \right) / \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\rho^i}{i!}}{\lambda(1 + \sum_{i=1}^N \frac{\rho^i}{i!})} \right)$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = 0$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα με αδρανείς εξυπηρετητές:

$$W_r = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{N}{\lambda(1-P_N)}} = \frac{\rho}{N} (1 - P_N)$$

Αυτό το σύστημα αναμονής με τον τύπο της πιθανότητας P_N , η δεδομένων, λέγεται και ως ο τύπος του Erlang-B ή αλλιώς τύπος απώλειας, καθώς διατυπώνεται και η σχέση:

$$E(n, \rho) = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!}}$$

Η πιθανότητα P_N μας δείχνει την πιθανότητα ενός δεδομένου που χάνεται από το σύστημα.

Για μεγάλο N και μικρό ρ , προκύπτει ότι: $P_0 \approx e^{-\rho}$, και έτσι $P_k \approx \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$, η οποία είναι η

κατανομή Poisson, ενώ για μεγάλο N και μεγάλο ρ , έχουμε ότι: $\sum_{i=0}^N \frac{\rho^i}{i!} \neq e^{\rho}$. Ο ρυθμός

εξυπηρέτησης του κάθε διακομιστή είναι $\frac{\rho}{N} \cdot (1 - P_N)$. Η αναλογία του διακομιστή αναφέρεται επίσης και ως ένταση κυκλοφορίας και μετριέται με την μονάδα μέτρησης erlang (erl).

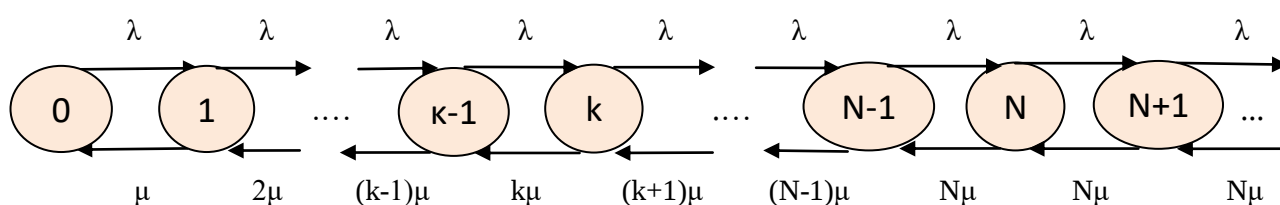
Το σύστημα Erlang αναπτύχθηκε από τον Agner Krarup Erlang, και μάλιστα μέσα από την περίπτωση όπου σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, οι τηλεφωνικές κλήσεις γίνονταν με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και οι χρόνοι ομιλίας ακολουθούν την εκθετική κατανομή, μέσα από N το πλήθος ανοιχτές, τηλεφωνικές γραμμές.

Για το σύστημα αναμονής του Erlang, υπάρχει μία περαιτέρω περίπτωση, όπου όταν ένα δεδομένο που εισέρχεται στο σύστημα βρει τις θέσεις εξυπηρέτησης όλες κατειλημμένες, τότε αντί να αποχωρήσει από το σύστημα, τοποθετείται και αναμένει στην ουρά, μέχρι να βρεθεί έστω και ένας εξυπηρετητής. Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίστηκε από τον ίδιο τον Erlang και δηλώνεται ως ο τύπος Erlang-C. Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα είναι της μορφής $M/M/N/c$, όπου το c δηλώνει τις εισερχόμενες κλήσεις προς τους εξυπηρετητές, όσο αυτοί είναι κατειλημμένοι και χωρίζεται σε δύο κατηγορίες:

- το $c \rightarrow \infty$, δηλαδή το τηλεφωνικό κέντρο δέχεται αριθμήσιμα άπειρες κλήσεις
- το c είναι πεπερασμένο, άρα το τηλεφωνικό κέντρο δέχεται πολλές, αλλά πεπερασμένο το πλήθος, κλήσεις.

Ο τύπος Erlang-C δίνει την πιθανότητα ένα δεδομένο να μπει σε ουρά, καθώς δεν υπάρχει ελεύθερος εξυπηρετητής. Τέτοια κατάσταση συναντάμε και σε μια περίπτωση τηλεφωνικού κέντρου, όταν κάποιος άνθρωπος βρίσκει κατειλημμένη την γραμμή που έχει πάρει τηλέφωνο και περιμένει σε αναμονή, χωρίς να θέλει να το κλείσει, μέχρις ότου να απαντήσουν στο αίτημά του. Αυτή η εκδοχή προϋποθέτει για το τηλεφωνικό κέντρο, να προστεθούν παραπάνω διακομιστές, ώστε να υπάρχει η πιθανότητα αυτή, δηλαδή ο πελάτης να αναγκαστεί να περιμένει σε αναμονή, χωρίς να αποχωρήσει από το σύστημα. Έτσι:

- Για την περίπτωση που το c είναι άπειρο, λαμβάνουμε τα εξής:



(Σχήμα 2.6.2. Ο ρυθμός γεννήσεων-θανάτων του συστήματος Erlang-C, με $c \rightarrow \infty$)

Οι ρυθμοί γεννήσεων-θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \lambda, \text{ για κάθε } n, \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq N \\ N\mu, & n > N \end{cases}$$

Η πιθανότητα αυτής της αναμονής δίνεται από τον τύπο:

$$P_w = \frac{\frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}}{(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{E^i}{i!}) + \frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}}$$

όπου E είναι ο τύπος του Erlang. Η πιθανότητα P_0 δίνεται από την σχέση:

$$P_0 = \frac{1}{(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{E^i}{i!}) + \frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}}$$

και η πιθανότητα που ορίζει την περίπτωση στο σύστημα να γίνονται k κλήσεις δίνεται ως:

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0, & \text{για } 0 \leq k \leq N \\ \frac{\rho^k}{k!} \left(\frac{\rho}{N}\right)^{k-N} P_0, & \text{για } k > N \end{cases}$$

Ο μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά δίνεται ως:

$$L_q = \sum_{k=N}^{\infty} (k - N) P_k = P_N \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^{N+1}}{N!(1-\rho)^2} P_0$$

ενώ ο μέσος αριθμός κλήσεων γενικά στο τηλεφωνικό κέντρο είναι:

$$L = \sum_{k=0}^{N-1} k P_k + \sum_{k=N}^{\infty} N P_k = E$$

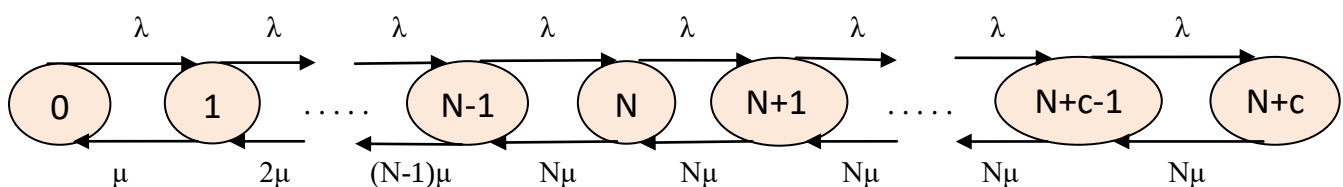
Ενώ ο μέσος χρόνος που μετράται από τις κλήσεις που δεν βρήκαν έγκαιρα κάποιον εξυπηρετητή είναι:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda P_w}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής που δαπανάται συνολικά από όλες τις κλήσεις που γίνονται είναι:

$$W = \frac{L_q}{\lambda}$$

▪ Για την περίπτωση που το $c < \infty$, λαμβάνουμε τα εξής:



(Σχήμα 2.6.3. Ο ρυθμός γεννήσεων-θανάτων του συστήματος Erlang-C, με $c < \infty$)

Αν το πλήθος $c=0$, τότε το σύστημα γίνεται του τύπου Erlang-B. Επομένως για $c \neq 0$:

· οι ρυθμοί γεννήσεων-θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \lambda, \text{ για } 0 \leq n \leq N+c, \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq N \\ N\mu, & N < n \leq N+c \end{cases}$$

· Η πιθανότητα να συμβαίνουν k κλήσεις στο σύστημα δίνεται από τη σχέση:

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} P_0, & \text{για } 0 \leq k \leq N \\ \frac{\rho^k}{k!} \left(\frac{\rho}{N}\right)^{k-N} P_0, & \text{για } N+1 \leq k \leq N+c \end{cases}$$

· Η πιθανότητα να μην υπάρχει καμία κλήση είναι η:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{E^i}{i!} + \sum_{i=N+1}^{N+c} \frac{E^i}{N!} \frac{1}{N^i - N}}$$

· Ο μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά αναμονής κλήσεων είναι:

$$L_q = \sum_{i=N+1}^{N+c} (k - N) P_k$$

· Ο μέσος αριθμός κλήσεων στο σύστημα είναι:

$$L = \sum_{k=1}^N k P_k + \sum_{k=N+1}^{N+c} N P_k = E(1 - P_{N+c})$$

· Ο μέσος χρόνος αναμονής των εναπομεινάντων κλήσεων που παραμένουν στην ουρά σε αναμονή είναι:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda P_w}, \quad \text{με} \quad P_w = \frac{\frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}}{(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{E^i}{i!}) + \frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}}$$

· Ο μέσος χρόνος αναμονής για όλες τις κλήσεις θα είναι:

$$W = \frac{L_q}{\lambda}$$

Μέχρι τώρα, είδαμε πως μία ουρά αναμονής μπορεί να χαρακτηριστεί μέσα από μαθηματικούς τύπους, για την σωστή διατύπωση των αποτελεσμάτων που αυτό λειτουργεί. Στα επόμενα κεφάλαια θα αναφερθούμε στην προσομοίωση συστημάτων, μία διαισθητικά χρήσιμη μέθοδο με την οποία οδηγούμαστε ταχύτερα, ευκολότερα και ακριβέστερα στα αποτελέσματα της λειτουργικής διαδικασίας των συστημάτων αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Στην σύγχρονη εποχή, στηριζόμαστε στην εφευρετικότητα και την μοντελοποίηση της τεχνολογίας, που μέσω αυτής πληρούνται απαραίτητα εργαλεία και τεχνικές στον τομέα των περισσότερων επιχειρήσεων και συστημάτων για την βελτιστοποίηση της απόδοσης κύριων ευρημάτων που αφορούν τους ευ φόρους ζωής μας. Η προσομοίωση είναι η πηγή που καθιστά απαραίτητη αυτήν την μεθοδικότητα της τεχνολογίας, ώστε να πετύχουμε αυτό μας τον σκοπό.

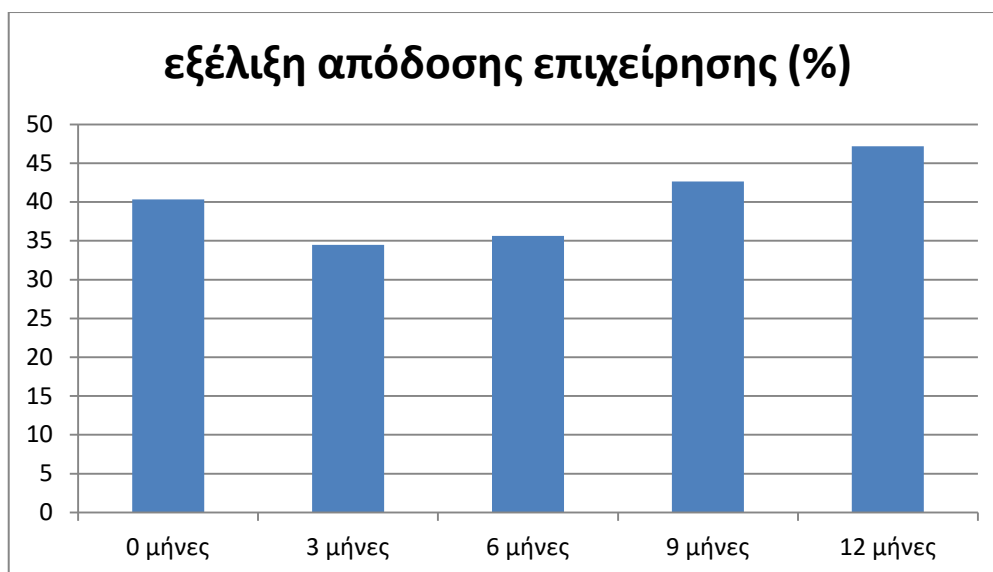
3.1. Η ΈΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Σύμφωνα με τον ορισμό της, **η τεχνική της προσομοίωσης** μας δίνει την αναπαράσταση της εξέλιξης ενός συστήματος, από την οποία παρατηρούμε τον ρυθμό με τον οποίο αυτό λειτουργεί, για όσο αυτή η λειτουργία του εκτελείται με την πάροδο του χρόνου. Αυτή η διαδικασία μας διευκολύνει στο να μπορούμε να αναγνωρίζουμε καλύτερα τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν ένα τέτοιο σύστημα (ή μία διαδικασία), καθώς και τον τρόπο με τον οποίο αυτό συμπεριφέρεται, ώστε να μπορούμε να κατανοήσουμε σε τι κατάσταση βρίσκεται κάθε φορά, για όσο το σύστημα εξελίσσεται μέσα στο χρόνο, σύμφωνα με τις προδιαγραφές που το διέπουν. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούνται διάφορα μοντέλα προσομοίωσης, μέσω των οποίων χάρη στο λογισμικό τους, οδηγούμαστε στην πλήρη ανάλυση της λειτουργίας του συστήματος. Η δημιουργία μοντέλων, τα οποία τις περισσότερες φορές παρουσιάζονται σαν ένα σύνολο υποθέσεων που αφορούν το σύστημα, είναι απαραίτητη για την τεχνική της προσομοίωσης, επειδή εφαρμόζουν την μοντελοποίηση των πειραμάτων που καθιστούμε στους παράγοντες του συστήματος, ώστε να μπορούμε να λαμβάνουμε σημαντικές πληροφορίες μέσα από την ανάλυση τους. Η τεχνική της προσομοίωσης, γενικά παρατηρείται σε πολλούς τομείς και κλάδους εφαρμογών ή επιχειρήσεων, όπως είναι η οικονομία, τεχνολογικές εφαρμογές, βιομηχανικές ενέργειες, κοινωνικά δίκτυα, φυσικά συστήματα, εκπαίδευση κ.α.

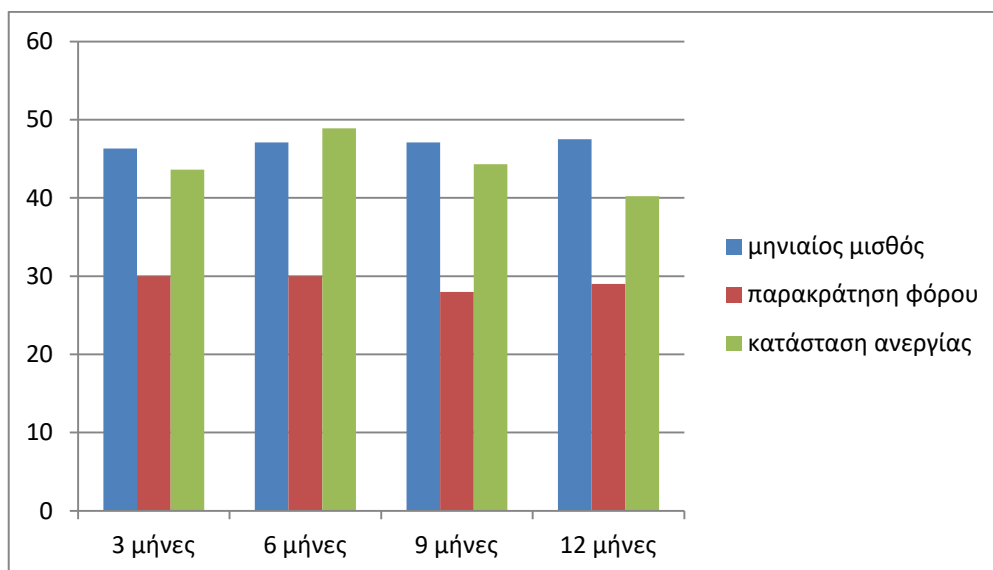
Σε οποιουδήποτε τομείς, είναι δυνατόν τα χαρακτηριστικά που διέπουν την διαδικασία του συστήματος να τροποποιούνται με την πάροδο του χρόνου, ώστε αυτό να έχει ως

αποτέλεσμα την διευθέτηση φαινομένων που προκαλούν αβεβαιότητα για το σύστημα. Η προσομοίωση αποτελεί ένα εργαλείο για την ανάγνωση της κατάστασης του συστήματος, ώστε να μπορεί να αναλυθεί, όταν σε αυτό υπάρχει και αβεβαιότητα. Διαθέτει στην ύπαρξή της μαθηματικούς αλγορίθμους μέσα από την διαδικασία των πειραμάτων για την μοντελοποίηση της, που βοηθούν στην πρόβλεψη αυτών των τροποποιήσεων, με στόχο την ανάλυση σχεδιασμού της κατάστασης του συστήματος που προκύπτει μέσα από τις αλλαγές του. Αυτό φέρει ως αποτέλεσμα να επιτύχει στην αναγνώριση των προβλημάτων που υπάρχουν στο σύστημα και το επηρεάζουν και στην προσαρμογή νέων προοπτικών αποφάσεων για την αποτελεσματικότερη απόδοση, αλλά και ασφάλεια του.

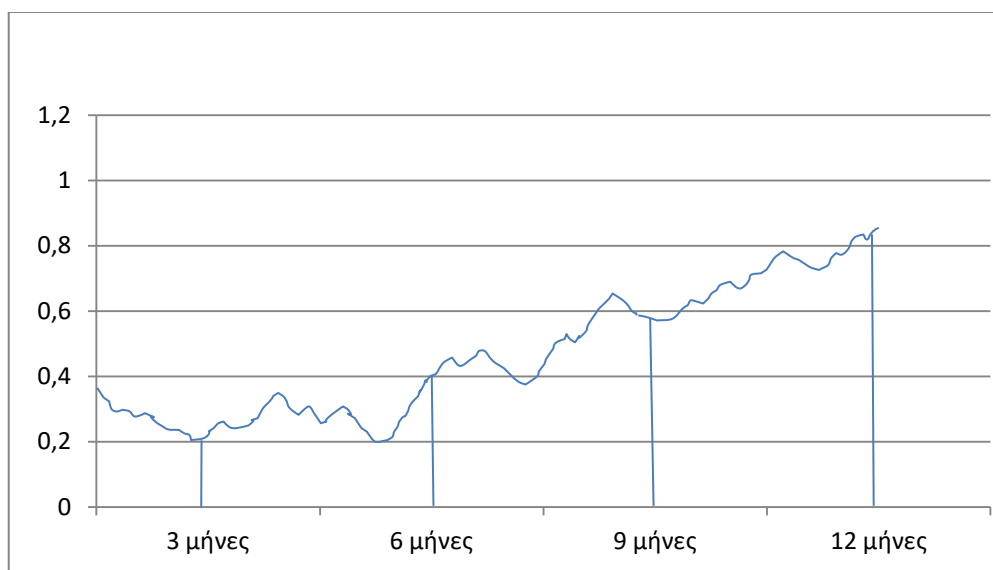
Μπορούμε να σκεφτούμε, ως παράδειγμα, μία μέθοδο προσομοίωσης στον κλάδο της οικονομίας, όπου σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούνται πάντοτε τα κέρδη και τα χρέη, και γενικά η οικονομική κατάσταση που διεξάγεται από το κυβερνητικό προσωπείο μίας χώρας εντός κάθε έτους. Η τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση αυτού του γεγονότος γίνονται, κυρίως, μέσα από προγράμματα Η/Υ και παράγουν στην συγκεκριμένη περίπτωση ένα διάγραμμα, όπου μέσα από την μοντελοποίηση των παραγόντων που χαρακτηρίζουν την οικονομία της χώρας, φαίνεται η πορεία του καθ' όλη την διάρκεια του χρόνου. Οι παράγοντες αυτοί μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι όλες οι επιχειρήσεις της χώρας, όλες οι θέσεις εργασίας, οι φορολογικές δηλώσεις των εργαζομένων, η κατάσταση ανεργίας. Μέσα από αυτούς τους παράγοντες, λαμβάνονται υπόψη τα στοιχεία για τον έλεγχο λειτουργικότητας και απόδοσής τους, δηλαδή το πόσο μπορεί να ανέδωσε μία (ή περισσότερες) επιχειρήσεις συνολικά μέσα στον χρόνο, τι ποσό δόθηκε στον κάθε εργαζόμενο για μηνιαίος μισθός, τι ποσό παρακρατήθηκε ως φόρος μέσα από την θέση εργασίας τους. Αυτά τα φαινόμενα καθορίζουν και την μοντελοποίηση της οικονομίας. Ύστερα από την μοντελοποίηση του κάθε παράγοντα λοιπόν, συγκεντρωτικά όλοι μαζί αποτελούν πλήρως ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων, που δεν μας δείχνει τίποτα άλλο πέρα από τον τρόπο λειτουργίας του συνολικού συστήματος. Για αυτό και στο διάγραμμα που σχεδιάζεται για την προσομοίωση του, παρατηρούνται αυξομειώσεις με την πάροδο του χρόνου, εξαιτίας των επιδράσεων που συμβαίνουν στον κάθε παράγοντα του συστήματος.



(Σχήμα 3.1.1. Ρυθμός απόδοσης των επιχειρήσεων μιας χώρας κατά ποσοστό %)



(Σχήμα 3.1.2. Κατάσταση της οικονομίας των τομέων κατά ποσοστό %)



(Σχήμα 3.1.3. Σχεδιάγραμμα του ρυθμού απόδοσης της οικονομίας της χώρας)

Σύμφωνα και με το παραπάνω παράδειγμα, πολλές φορές σε ένα σύστημα ενδέχεται τα χαρακτηριστικά του και οι αποφάσεις που έχουν γίνει για την αξιοπιστία του να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, πράγμα το οποίο μπορεί να μεταβεί σε πολυπλοκότητα του συστήματος. Χάρη στην τεχνική της προσομοίωσης λοιπόν, οι διαδικασίες που αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο ένα πραγματικό σύστημα λειτουργεί και εξελίσσεται, γίνονται όλο και περισσότερο συμβατές για την καλύτερη δυνατή αξιολόγηση του συστήματος. Μέσα από την μεθοδολογία της, διακρίνονται αρκετά πλεονεκτήματα για την μοντελοποίηση που απαιτείται για τα πραγματικά συστήματα. Τέτοια πλεονεκτήματα αναφέρονται ως:

- Σημαντική μείωση του κινδύνου αξιοπιστίας και οικονομίας: Πριν την ανακάλυψη και δημιουργία προγραμμάτων μέσω Η/Υ, η προσομοίωση γινόταν σύμφωνα με φυσικές μεθόδους για την μοντελοποίηση μιας πραγματικής διαδικασίας. Αυτό επέφερε ως πρόβλημα να υπάρχει κόστος στους πειραματισμούς των διαδικασιών του πραγματικού κόσμου, τόσο στις αλλαγές που μπορούν να καθοριστούν στο δοθέν σύστημα, με αποτέλεσμα να γίνονται λάθος προβλέψεις για τις αποφάσεις που θα ωφελήσουν στην απόδοση του, όσο και στις χρονικές και χρηματοοικονομικές συμβάσεις. Μέσα από την πολυπλοκότητα της διαδικασίας που χαρακτήριζε ένα πραγματικό σύστημα, ήταν σχεδόν αδύνατον για τον άνθρωπο να καταφέρει να βγάλει σωστά συμπεράσματα από τους

πειραματισμούς που διεξάγονταν, ώστε να το μοντελοποιήσει. Έπειτα από την ανάπτυξη λογισμικού των προγραμμάτων των Η/Υ που χρησιμοποιούνται στη σύγχρονη εποχή, η προσομοίωση γίνεται συνετά πιο εύκολη και πρακτικά προσβάσιμη για την μελέτη τους, ώστε να αποφεύγονται τέτοια κόστη. Με άλλα λόγια, η μεθοδολογία της συμβαίνει σε ένα νοητό, τεχνητό πλαίσιο, έτσι ώστε να μην υπάρχουν επιπλοκές των πειραματισμών για το σύστημα στην πραγματικότητα.

- Επαναληπτικότητα των θεωριών της: Η τεχνική της προσομοίωσης μας επιτρέπει να μπορούμε να πειραματιστούμε σε ένα πραγματικό σύστημα ξανά και ξανά, χωρίς οι νέες αποφάσεις που παίρνουμε για το σύστημα να επηρεάζονται από τις παρελθοντικές που αξιοποιήθηκαν πριν. Δηλαδή οι αλλαγές που προσαρμόζουμε κάθε φορά στο σύστημα για την καλύτερη αξιοποίησή της λειτουργίας του, συμβαίνουν πάντα κάτω από τις προδιαγραφές που το διέπουν, μαζί με τις αποφάσεις που έχουν ήδη διεξαχθεί. Επομένως, για κάθε διαδικασία που έχουμε υλοποιήσει αντίστοιχα και κάποιον πειραματισμό για κάθε μία από αυτές, δημιουργείται ένα ευρύ φάσμα αποφάσεων οι οποίες, αν και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, δηλώνουν την νέα - κάθε φορά - κατάσταση του συστήματος, έως ότου παρθούν οι τελικές κατάλληλες αποφάσεις που χρειάζονται για το σύστημα.

- Διευθέτηση μελλοντικών επιπτώσεων: Δίνεται η δυνατότητα στους προσομοιωτές να μπορούν να δουν την πορεία, και άρα την λειτουργικότητα/μεθοδικότητα του συστήματος ύστερα από μεγάλη χρονική διάρκεια. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να μπορούμε να μοντελοποιήσουμε επί παρόντος όλο το σύστημα υπό τέτοιες συνθήκες, ώστε να διατηρήσουμε και στο μέλλον την αξιοπιστία των αποφάσεων που μπορούμε να πάρουμε για αυτό.

- Πρόληψη τυχαίων γεγονότων: Στην διαδικασία της προσομοίωσης, λαμβάνονται υπόψη και περιπτώσεις όπου δύναται να συμβούν απρόσμενα γεγονότα στο σύστημα, που μπορούν να προκαλέσουν τροποποιήσεις, ανά πάσα στιγμή, σε όλη την “φιλοσοφία” ενός συστήματος. Η τεχνική της προσομοίωσης είναι χρήσιμη για την πρόληψη διαπίστωσης τέτοιων φαινομένων, ώστε να μην επέλθουν αργότερα λάθος αποφάσεις για το σύστημα. Για αυτό και μπορεί και διατηρεί σαν σε “μνήμη” του στο λογισμικό της κάθε πειραματισμό που χρησιμοποιήθηκε για την μοντελοποίηση του, όταν είτε σε αυτό επικρατεί μια φυσική ροή, είτε συμβούν τυχαίες εξελίξεις.

Η προσομοίωση υλοποιείται σύμφωνα με δύο περιπτώσεις γεγονότων που συμβαίνουν στο σύστημα: σε διακριτά και σε συνεχή γεγονότα. Στα διακριτά γεγονότα, οι τροποποιήσεις που λαμβάνουν τόπο και χρόνο στη λειτουργία του συστήματος, γίνονται μέσα από έναν πεπερασμένο αριθμό συμβάντων και ανά διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Τέτοια συμβάντα παρατηρούνται στην οδική κυκλοφορία, σε συστήματα παραγωγής, στις ηλεκτρονικές επικοινωνίες, γραμμές παραγωγής κ.α. Από την άλλη, στα συνεχή γεγονότα, η κατάσταση του συστήματος αλλάζει συνεχώς για κάθε χρονική στιγμή. Η μηχανική των ρευστών αποτελεί ένα τέτοιο συνεχές συμβάν.

Για την μέθοδο της προσομοίωσης σε επιχειρησιακούς τομείς, υφίστανται περισσότερο προγράμματα και τεχνολογίες πληροφορικής, λόγω της πολυπλοκότητας των συστημάτων τους. Η χρήση προγραμμάτων για την προσομοίωση πραγματικών διαδικασιών έχει ωφελήσει σε πολλούς κλάδους φυσικών συστημάτων για την μοντελοποίηση τους, όπως στη χημεία, την βιολογία, την οικονομία και την μηχανική, άλλα και σε ψηφιακούς πόρους, όπως τα δίκτυα. Στην ουσία, χρησιμοποιούμε την προσομοίωση μέσω προγραμμάτων Η/Υ ως υποκατάστατο για την πλήρη προσομοίωση μοντελοποίησης ενός συστήματος, που δεν δύναται να αναλυθούν εύκολα με άλλες μεθόδους προσομοίωσης.

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι προσομοίωσης μέσω προγραμμάτων που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση πραγματικών συστημάτων. Παραθέτουμε τις κυριότερες που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την προσομοίωση σε συστήματα με ουρές αναμονής και είναι οι εξής:

- 1) Monte-Carlo
- 2) Petri-Nets
- 3) Arena
- 4) ExtendSim

3.2.Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE-CARLO

Σε γενικές γραμμές, η προσομοίωση ενός συστήματος υλοποιείται για τις αποφάσεις που επιλέγονται για την λειτουργικότητα και μεθοδικότητα του. Είναι θετικό στοιχείο για την

προσομοίωση λοιπόν να υπάρχει η διαδικασία της επαναληπτικότητας της, εφόσον οι αποφάσεις αυτές καθιστούν καινούριες επιπτώσεις στο σύστημα που μοντελοποιείται, επομένως οι συνεχείς λήψεις διαφορετικών - κάθε φορά - αποφάσεων, οδηγεί στην επιλογή της καταλληλότερης. Ωστόσο, για συστήματα που περιγράφονται κάτω από προδιαγραφές πολυπλοκότητας, προκύπτουν περισσότεροι περιορισμοί και προκαταλήψεις για την υλοποίηση της μοντελοποίησης τους. Για αυτές τις περιπτώσεις, έχουν δημιουργηθεί κατάλληλα μοντέλα, τα οποία εμπίπτουν σε βασικές ιδιότητες που ωφελούν στην λήψη σωστών αποφάσεων για το σύστημα.

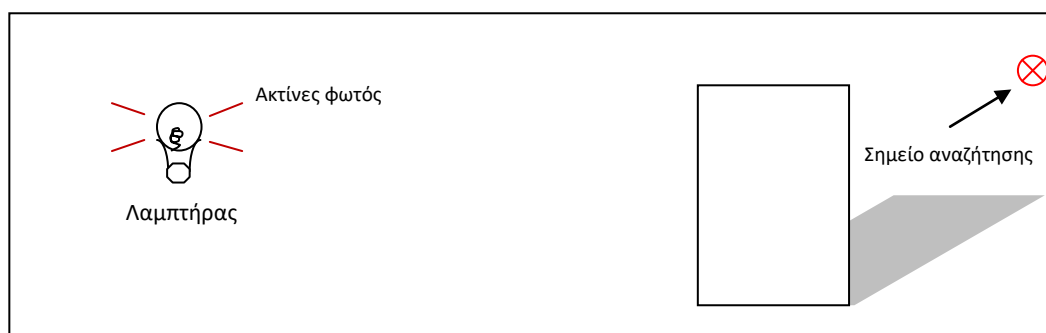
Η προσομοίωση **Monte-Carlo** χρησιμοποιείται κυρίως σε συστήματα ή διαδικασίες, τα οποία καθορίζονται κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας. Είναι μία μαθηματική τακτική που διερευνά τα πιθανά σενάρια που μπορούν να προκύψουν κατά την μοντελοποίηση του συστήματος και καθορίζει σε μία ευρεία εμβέλεια τις πιθανότητες τους, με στόχο την λήψη καλύτερων αποφάσεων ή την αξιοπιστία ακρίβειας της πρόβλεψής τους, μέσα από αυτές τις αβέβαιες συνθήκες. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να αποφανθούμε σε προβλέψεις της διαδικασίας που θα χαρακτηρίζουν το σύστημα και στο μέλλον.

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte-Carlo χρησιμοποιείται μέσω προγραμμάτων Η/Υ, όπως είναι για παράδειγμα το MATLAB. Η χρήση της μεθόδου Monte-Carlo έχει συνεισφέρει μεγάλη αξιοπιστία για τους χρήστες, καθώς έχουν την δυνατότητα να παρατηρούν όλα τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει κατά την μοντελοποίηση της διαδικασίας που τους ενδιαφέρει, με το πλεονέκτημα να έχει αξιολογηθεί σημαντικά και ο αντίκτυπος του κινδύνου για λανθασμένες προβλέψεις και αποφάσεις. Η υλοποίηση της μεθόδου αυτής έχει διαμορφωθεί σε πολλές έρευνες – στην τεχνητή νοημοσύνη, την πρόβλεψη και διαχείριση μετοχών, βιομηχανικές παραγωγές, οικονομικές αναφορές κ.α.

Παράδειγμα 3.2.1.: Διαθέτουμε ένα κέρμα και το ρίχνουμε μία φορά. Η πιθανότητα να προκύψει "κορώνα" είναι $P_1 = \frac{1}{2}$ και αντίστοιχα να προκύψει "γράμματα", $P_2 = \frac{1}{2}$. Θέλουμε να πετύχουμε την πλευρά του νομίσματος με τα "γράμματα". Το γεγονός αυτό μπορεί να συμβεί με την πρώτη φορά, μπορεί και με την δεύτερη, μπορεί και με την 100^η. Ρίχνουμε ύστερα το κέρμα πολλές φορές, με στόχο να πετύχουμε 20 φορές συνεχόμενα "γράμματα". Είναι πρακτικά πολύ δαπανηρή και δυσεύρετη η διαδικασία αυτού του πειράματος στην πραγματική ζωή, να ρίχνουμε συνεχόμενα το κέρμα ώστε να

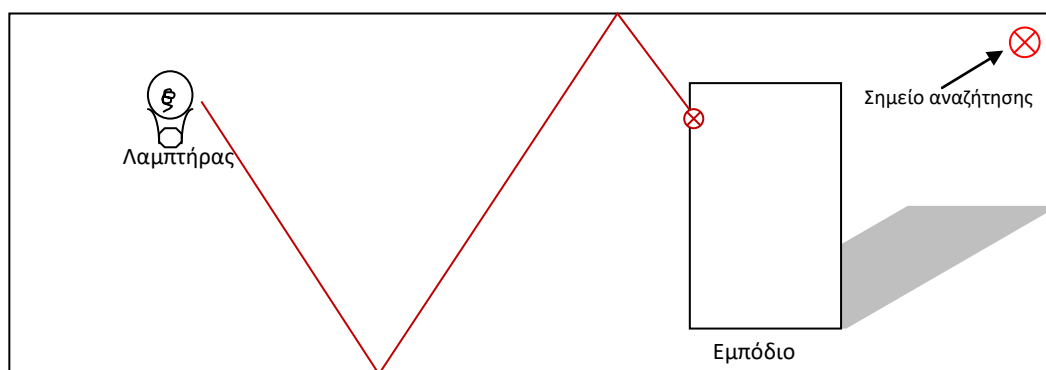
επιτεύξουμε κάτι τέτοιο. Με την υλοποίηση της προσομοίωσης Monte-Carlo λοιπόν, η πιθανότητα να συμβεί αυτό το ενδεχόμενο διευρύνεται σε ένα πολύ μεγάλο φάσμα αριθμών, οι οποίοι δηλώνουν τις ρίψεις του κέρματος. Μπορούν να γίνουν ακόμα και 1.000.000 ρίψεις του κέρματος, γεγονός που καθιστά περισσότερο εφικτό να πετύχουμε την πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου.

Παράδειγμα 3.2.2.: Θεωρούμε ότι σε ένα σκοτεινό δωμάτιο, μέσα στο οποίο βρίσκεται ένα μόνο εμπόδιο, ανάβουμε μία λάμπα, με αποτέλεσμα οι ακτίνες φωτός που διαχέονται, να χτυπούν σε κάθε τοίχο του δωματίου, φωτίζοντας το. Το εμπόδιο που υπάρχει στο δωμάτιο, καθιστά στο σημείο που βρίσκεται να εκπέμπεται λιγότερο φως στον τοίχο από πίσω του. Θέλουμε να βρούμε την ακτίνα φωτός που χτυπάει σε ένα συγκεκριμένο σημείο του δωματίου.

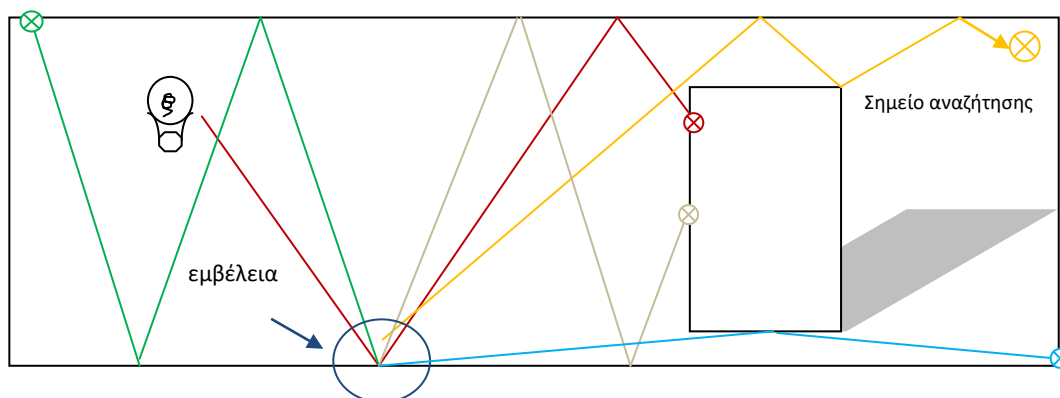


(Σχήμα.3.2.1. Εύρεση πιθανής ακτίνας που καταλήγει στο μαρκαρισμένο σημείο του δωματίου)

Για να το πετύχουμε αυτό, θα πρέπει να βρούμε όλες τις πιθανές κατευθύνσεις των ακτινών που θα μας οδηγήσουν στο σημείο που ψάχνουμε, ή έστω προσεγγιστικά κοντά σε αυτό. Η ενέργεια αυτή, ωστόσο, είναι πρακτικά χρονοβόρα και αδύνατη. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο δειγματοληπτικών κατευθύνσεων, το οποίο καθορίζεται μέσα από μια συγκεκριμένη εμβέλεια που προκαθορίζεται για την πιθανότητα τους.



(Σχήμα.3.2.2. Εύρεση σημείου με την επιλογή μίας τυχαίας ακτίνας φωτός)



(Σχήμα.3.2.3. Εύρεση σημείου μέσα από ένα υποσύνολο τυχαίων κατευθύνσεων των ακτίνων)

Από τα σχήματα 3.2.2 και 3.2.3 καταλαβαίνουμε ότι η επιλογή μίας ευρείας εμβέλειας κατευθύνσεων των ακτίνων, η οποία επιλέγεται από το σημείο που μία ακτίνα χτυπά στον τοίχο και το φως ύστερα διαχέεται σε διάφορες κατευθύνσεις, είναι πιθανολογικά πιο προσιτή για την λύση του προβλήματος από την επιλογή μίας οποιασδήποτε μόνο ακτίνας φωτός. Έτσι, πειραματικά, έχουμε μία καλύτερη εικόνα για το ποιές ακτίνες φωτός στοχεύουν κοντά ή ακριβώς στο σημείο που ψάχνουμε.

Η μέθοδος Monte-Carlo εκφράζει περισσότερο την πιθανότητα του κάθε αποτελέσματος, ώστε να είναι πιο έγκυρη και η λήψη αποφάσεων για το σύστημα. Παρ' όλα αυτά, η διαδικασία της επαναληπτικότητας επιφέρει χρονοβόρο κόστος, καθώς και οι μεταβλητές εισόδου του μπορεί να μην είναι πλήρως ακριβείς. Έτσι, είναι συνετό να γνωρίζουμε ποιες είναι οι μεταβλητές που δηλώνονται στην αρχή του πειράματος, καθώς και οι τυχαίες μεταβλητές που υπάρχουν ήδη στο σύστημα και με τις οποίες υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους, για την διεξαγωγή των πιθανοτήτων που μπορούν να καθοριστούν για τις

σωστές προβλέψεις που θέλουμε.

Θα πρέπει να τονίσουμε, ότι η μέθοδος προσομοίωσης Monte-Carlo δεν αποδίδει επακριβώς τα πραγματικά αποτελέσματα που αναζητούμε, αλλά μας συνεισφέρει ένα οπτικό πεδίο με αριθμούς, οι οποίοι αναφέρονται στις πιθανότητες των αποτελεσμάτων, που μας φέρνει προσεγγιστικά πιο κοντά στο αποτέλεσμα της προσομοίωσης.

3.3.Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΜΕ ΔΙΚΤΥΑ PETRI

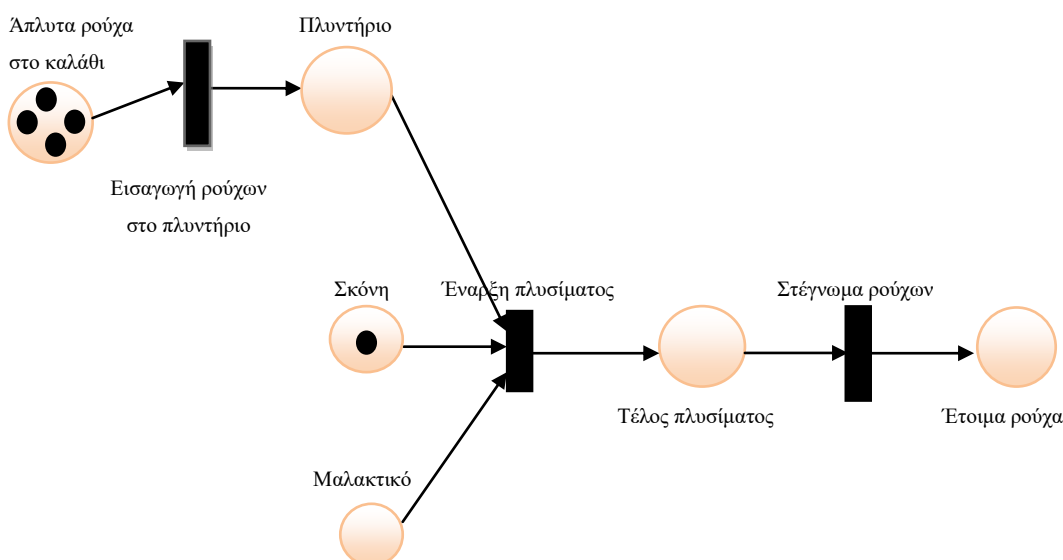
Τα δίκτυα Petri (Petri Nets) χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση διακριτών γεγονότων ενός πραγματικού συστήματος, στο οποίο οι καταστάσεις που περιγράφονται στο σύνολο του, μπορούν και μετακινούνται (ή αλλιώς τροποποιούνται) μεταξύ τους, με την πάροδο του χρόνου ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος. Η ιδέα των δικτύων Petri προήλθε και αναπτύχθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό επιστήμονα Carl Adam Petri το 1962. Είναι ένα μαθηματικό εργαλείο προσομοίωσης, του οποίου το γραφικό τους περιβάλλον δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να ελέγχει την κατάσταση του συστήματος, και σε τελική ανάλυση, μέσω της διορατικότητας που του παρέχεται μέσα από το πρόγραμμα, να μπορεί να προβεί στον σχεδιασμό του, και ύστερα στην προσομοίωση του. Η χρήση των δικτύων Petri είναι αρκετά αξιόπιστη, επειδή ο χρήστης μπορεί και εντοπίζει με περισσότερη ευκολία και ακρίβεια τυχόν σφάλματα κατά τον σχεδιασμό του συστήματος, που οδηγούν σε εσφαλμένη προσομοίωση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο χρήστης μπορεί και παρατηρεί την πορεία της λειτουργίας της μοντελοποίησης του συστήματος, χωρίς να χρειάζεται να προβαίνει επαναλαμβανόμενα σε πειραματισμούς.

Τα δίκτυα Petri χωρίζονται σε αρκετές κατηγορίες μοντελοποίησης, όπως είναι τα σημαδεμένα, τα γενικευμένα, τα χρωματισμένα δίκτυα Petri, τα στοχαστικά δίκτυα, τα χρονομετρημένα κ.α. Η χρήση της μοντελοποίησης ενός συστήματος με δίκτυα Petri γίνεται σε περιπτώσεις που τα γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα, επομένως υπάρχουν περαιτέρω περιορισμοί όσον αφορά την σύμπτωση αυτών.

Παράδειγμα: Σε ένα στεγνοκαθαριστήριο, μία νοικοκυρά βάζει τα άπλυτα ρούχα στο πλυντήριο για την καθαριότητά τους. Ο αλγόριθμος της διαδικασίας που λαμβάνει η νοικοκυρά για αυτήν την πράξη είναι:

- 1) Τοποθετεί τα άπλυτα ρούχα μέσα στο πλυντήριο
- 2) Ρίχνει σε θήκη του πλυντηρίου κατάλληλη σκόνη για την ασφάλεια του πλυντηρίου
- 3) Τοποθετεί μαζί με τα ρούχα μία κούπα μαλακτικό για αρωματισμό τους
- 4) Βάζει σε λειτουργία το πλυντήριο
- 5) Βγάζει τα ρούχα απ το πλυντήριο όταν τελειώσει και τα στεγνώνει σε πρόγραμμα στέγνωσης
- 6) Τα ρούχα είναι έτοιμα και καθαρά.

Η διαδικασία πλύσης των ρούχων μπορεί να σχεδιαστεί μέσω των δικτύων Petri, όπως φαίνεται και στο σχήμα.3.3.1.



(Σχήμα 3.3.1. Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας πλυσίματος ρούχων με δίκτυα Petri, πριν την εφαρμογή της)

Τα δίκτυα Petri που χρησιμοποιούνται από Η/Υ αξιοποιούν μέσα από τα μοντέλα τους καλύτερη διορατικότητα και ευελιξία της λειτουργίας του πραγματικού συστήματος. Ο σχεδιασμός του συστήματος που γίνεται στο πλαίσιο της γραφικής ανάλυσης του, παρέχει στους χρήστες μία καλά ποιοτική εικόνα για το πώς αυτό λειτουργεί. Συγκεκριμένα, ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να ρυθμίζει ένα πολύπλοκο δίκτυο Petri μέσα από απλούστερα, μικρότερα δίκτυα Petri και βήμα-βήμα καταλήγει ιεραρχικά στο

αρχικό. Σε κάθε ένα από τα δίκτυα Petri αξιοποιούνται τροποποιήσεις ώστε να δοθεί η σωστή λειτουργία του πραγματικού συστήματος και να αποφευχθούν τυχόν σφάλματα. Έτσι, τα τελικά αποτελέσματα του συστήματος που παράγονται στο τέλος της προσομοίωσης, παρουσιάζονται στον χρήστη με καλύτερη ακρίβεια και σε αρκετά γρήγορο χρονικό διάστημα.

Τα δίκτυα Petri έχουν υλοποιηθεί σε πολύπλοκα συστήματα κοινωνικής και οικονομικής εφαρμογής, καθώς και σε περιπτώσεις επιχειρησιακής έρευνας και κατασκευών και μαθηματικής μοντελοποίησης τέτοιων συστημάτων, όπως την μηχανική δικτύου, συστήματα μεταφορών, την θεωρία ουρών κ.α.

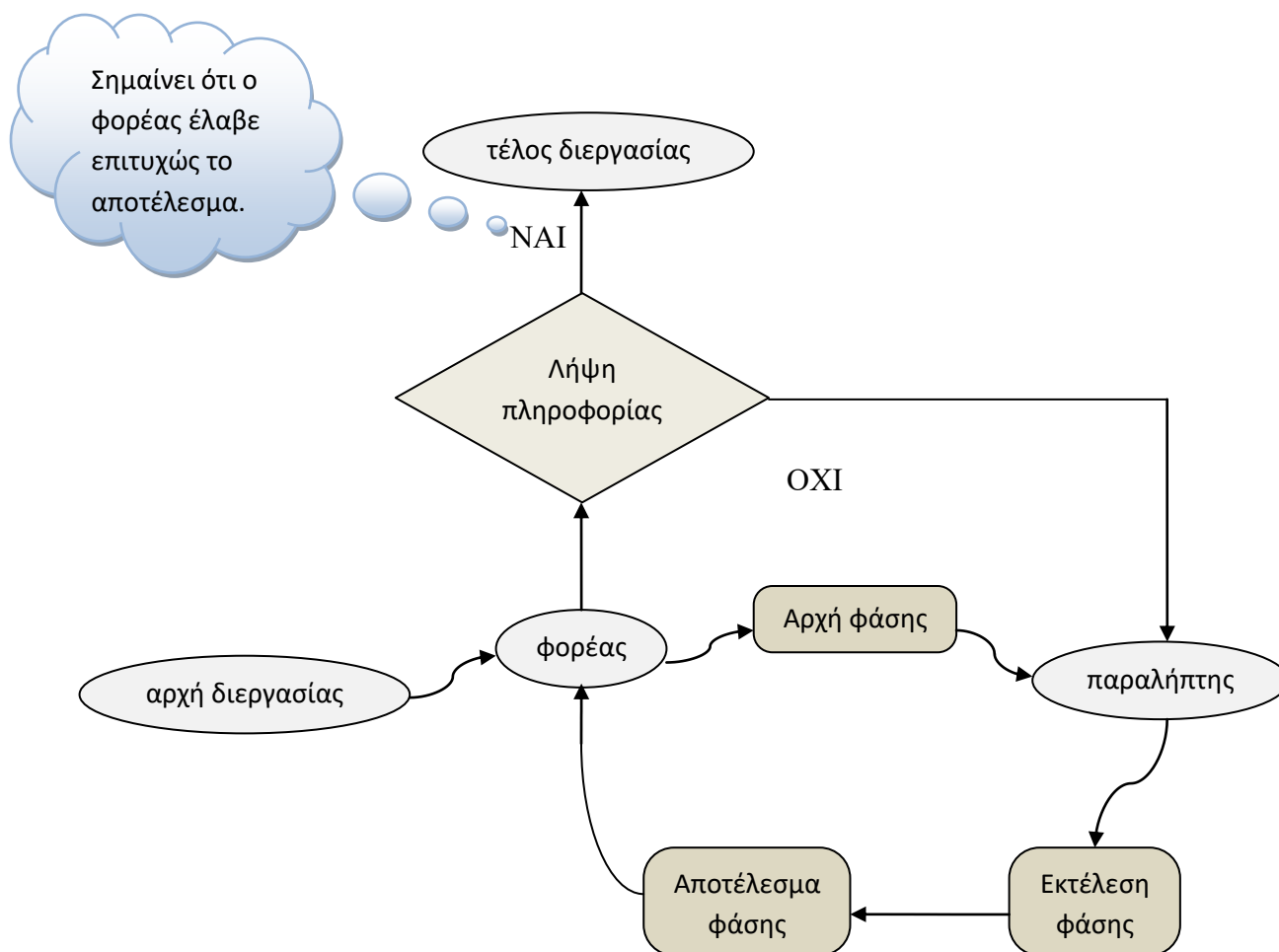
3.4.Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ARENA

Το **Arena** είναι μία μέθοδος προσομοίωσης, που χρησιμοποιείται, όπως και τα δίκτυα Petri, ως ένα γραφικό περιβάλλον κυρίως για διακριτά γεγονότα. Θεωρείται ως ένα δυναμικό εργαλείο προγράμματος προσομοίωσης που έχει αναπτυχθεί από την Systems Modeling, μέσα από την αναζήτηση της για χρήσεις μοντέλων για την προσομοίωση συστημάτων, και χορηγείται από την εταιρεία Rockwell Automation. Το λογισμικό του αποτελεί ειδικές μεθόδους μοντελοποίησης που βοηθούν τους χρήστες να παρατηρούν με πιο βέβαιο τρόπο την ροή του πραγματικού συστήματος που καθίσταται για την προσομοίωση του, καθώς μπορούν να πειραματίζονται σύμφωνα με την μοντελοποίηση του συστήματος που απαιτείται, μέσα από το πλαίσιο των κατασκευαστικών μοντέλων που τους παρέχει το λογισμικό του Arena. Το γεγονός αυτό, καθιστά τους χρήστες να επεξεργάζονται τα δεδομένα του συστήματος ξανά και ξανά, έως ότου καταλήξουν σε μια τελική μορφή της μοντελοποίησης του συστήματος, για όσο αυτό θα βρίσκεται κάτω υπό τις περιοριστικές (ή όχι) συνθήκες που το διέπουν. Με αυτόν τον τρόπο, η χρήση της μεθόδου προσομοίωσης Arena, οδηγεί τους χρήστες στην καλύτερη δυνατή επιλογή των αποφάσεων που πρέπει να διεξαχθούν για το τελικό αποτέλεσμα της μοντελοποίησης του συστήματος, με το λιγότερο δυνατό δαπανηρό κόστος. Η εφαρμογή του Arena εμφανίζεται σε βιομηχανικούς και ακαδημαϊκούς κλάδους, καθώς και σε περιπτώσεις επιχειρησιακών διαδικασιών, όπως αστικές μεταφορές, επικοινωνιακά συστήματα,

ιατρικές διαδικασίες κ.α. Για την υλοποίησή της χρησιμοποιείται η γλώσσα προσομοίωσης SIMAN.

Παράδειγμα: Έστω ότι σε ένα κατάστημα με ρούχα, πρέπει να παραλαβή μίας ποικιλίας ρούχων από ένα συγκεκριμένο εργοστάσιο υλοποίησης ρούχων. Ο υπεύθυνος του καταστήματος θα πρέπει να ενημερώσει τον υπεύθυνο του εργοστασίου, ώστε να έρθει σε πέρας αυτή η διαδικασία. Η συναλλαγή της παραλαβής της ποικιλίας ικανοποιείται από δύο χαρακτηριστικά της εφαρμογής της: τον φορέα που ξεκινά την συναλλαγή και τον παραλήπτη που εκτελεί την συναλλαγή. Η συναλλαγή θα γίνει μέσα από τρεις φάσεις: την μέθοδο της φάσης, την εκτέλεση της φάσης και το αποτέλεσμα της φάσης. Σύμφωνα με τις τρεις αυτές φάσεις, στην πρώτη φάση η συναλλαγή που γίνεται από τον φορέα στον παραλήπτη αποτελεί μία αλληλεπίδραση μεταξύ τους, λόγω της ενημέρωσης του φορέα στον παραλήπτη για την παραλαβή των ρούχων. Ύστερα, στην φάση της εκτέλεσης της πληροφορίας, γίνεται η λήψη της συναλλαγής στον παραλήπτη, ο οποίος αμέσως μετά προβαίνει στην εκτέλεση της υλοποίησης της. Τέλος, στην τελευταία φάση, υπάρχει ξανά μια αλληλεπίδραση μεταξύ του παραλήπτη και του φορέα, για το γεγονός ότι ο παραλήπτης ενημερώνει τον φορέα για το αποτέλεσμα που προέκυψε μετά την εκτέλεση της συναλλαγής.

Σύμφωνα με την υλοποίηση της μοντελοποίησης της διαδικασίας με το Arena, η διαδικασία περνά γενικά από τρία στάδια: την άφιξη, την εξυπηρέτηση και την αναχώρηση. Έτσι, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, ως άφιξη θεωρείται η μετάδοση της συναλλαγής από τον φορέα στον παραλήπτη, ως εξυπηρέτηση η διαδικασία εκτέλεσης της συναλλαγής και ως αναχώρηση το τελικό αποτέλεσμα της συναλλαγής. Επομένως, θέτεται εύκολα σε εφαρμογή η υλοποίηση της διαδικασίας της συναλλαγής μέσα από αυτά τα τρία στάδια σε γραφικό περιβάλλον, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



(Σχήμα 3.3. Απλή γραφική αναπαράσταση της μοντελοποίησης της διαδικασίας με τη χρήση του Arena)

3.5.Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΕ EXTEND

Το **ExtendSim** αποτελεί μέχρι και σήμερα ένα αξιόπιστο και δυναμικό εργαλείο για την διακριτή, αλλά και συνεχή προσομοίωση πραγματικών συστημάτων. Δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να αναλύει την πολυπλοκότητα του συστήματος με γρήγορο ρυθμό, εφόσον από την αρχή της μοντελοποίησης του, προσδιορίζονται οι μεταβλητές και επιλύονται τα σφάλματα που προκαλούν σημαντικές επιπτώσεις στο σύστημα. Χάρη στο γραφικό του περιβάλλον (το οποίο μοιάζει αρκετά με το περιβάλλον του Arena), ο χρήστης μπορεί και παρακολουθεί την πορεία της μοντελοποίησης του συστήματος, για όσο αυτό εξελίσσεται,

με απώτερο στόχο την διεξαγωγή σωστών αποτελεσμάτων.

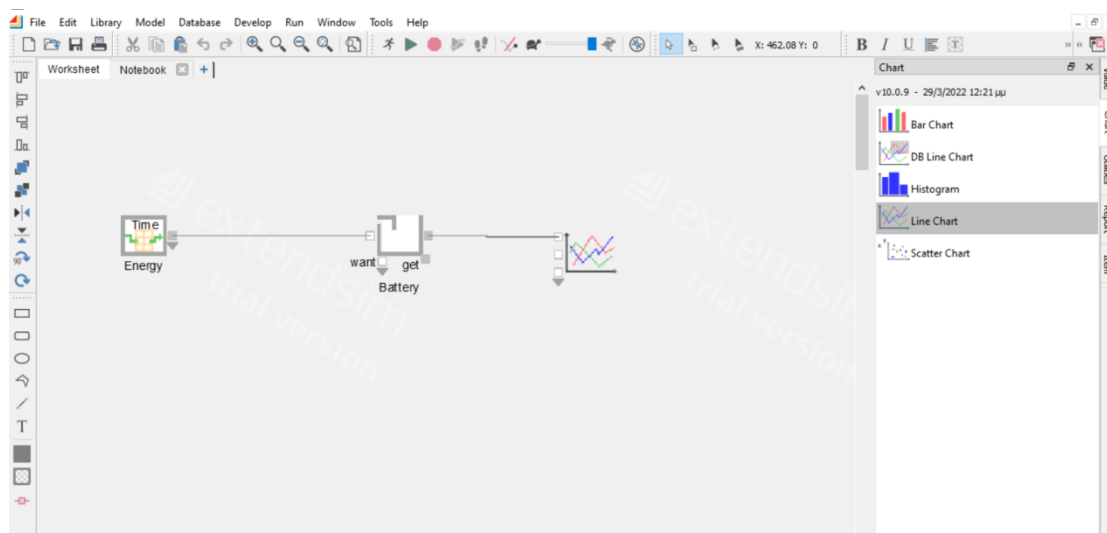
Η αξιοπιστία της χρήσης του ExtendSim οφείλεται στο γεγονός ότι το λογισμικό του παρέχει στον χρήστη κατάλληλες πομπές για την μοντελοποίηση του συστήματος. Τα κατασκευαστικά μοντέλα που παρέχει στο λογισμικό του, επιλέγονται και ρυθμίζονται κατάλληλα από τον χρήστη, ώστε βήμα-βήμα δημιουργείται ιεραρχικά στο Front-End η πλήρης μοντελοποίηση που θα χαρακτηρίζει την λειτουργία του πραγματικού συστήματος. Με άλλα λόγια, συνεισφέρει την καθοριστική εξέλιξη του συστήματος, καθώς και την ανάλυση ευαισθησίας. Με την χρήση του ExtendSim αξιολογούνται και οι δυνατότητες κοστολόγησης για την ανάλυση των συντελεστών κόστους. Επιπλέον, παρέχεται στον χρήστη η συνδεσιμότητα και διαδραστικότητα και με άλλα προγράμματα ή πλατφόρμες. Η διαδικασία της μοντελοποίησης γίνεται μέσα από κινούμενα σχέδια και υλοποιείται είτε σε ένα δισδιάστατο, είτε και σε ένα τρισδιάστατο πλαίσιο του γραφικού περιβάλλοντος του.

Μέχρι σήμερα, το ExtendSim διαθέτει τρία υλικά πακέτα:

- 1) το ExtendSim CP, που χρησιμοποιείται για συνεχείς περιπτώσεις συμβάντων
- 2) το ExtendSim DE, που χρησιμοποιείται για διακριτές περιπτώσεις συμβάντων και
- 3) το ExtendSim Pro, που προσθέτει επιπλέον διαγράμματα μοντέλων, βασιζόμενα σε διακριτούς ρυθμούς και block.

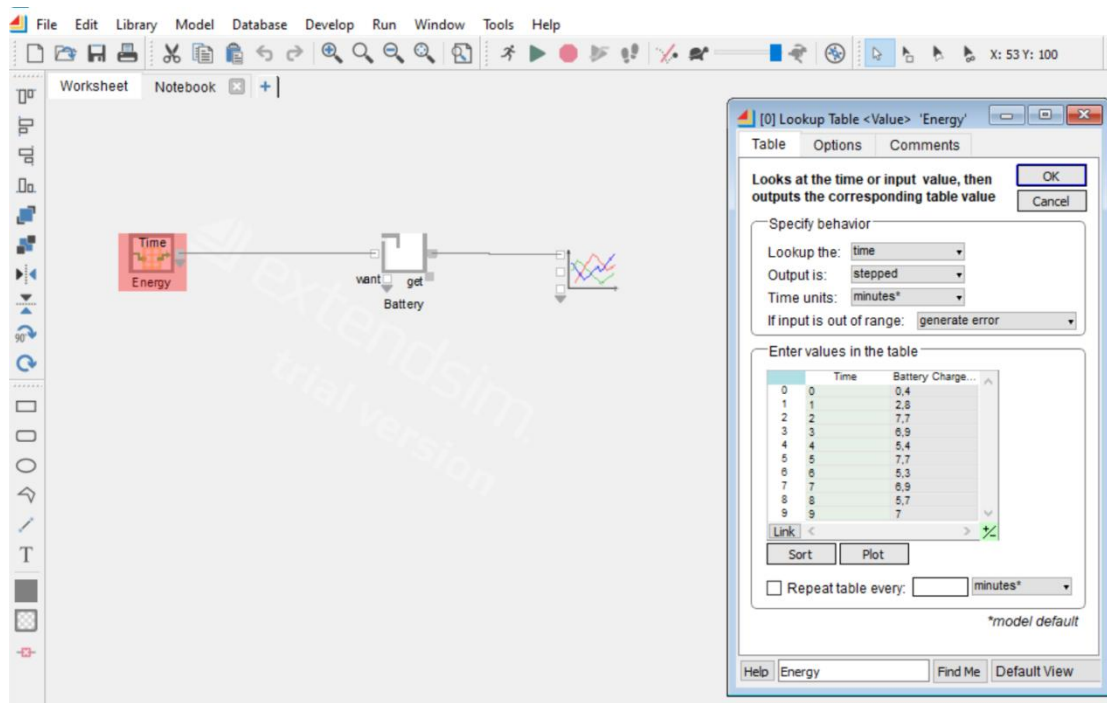
Η εφαρμογή του εμφανίζεται κυρίως σε επιχειρηματικούς και βιομηχανικούς τομείς.

Παράδειγμα: Θα δώσουμε ένα παράδειγμα για την προσομοίωση μίας διαδικασίας συνεχών γεγονότων με τη μέθοδο του ExtendSim CP. Θεωρούμε την διαδικασία φόρτισης μίας μπαταρίας. Ένας άνθρωπος τοποθετεί σε πρίζα το καλώδιο του φορτιστή και έπειτα το βύσμα στην άλλη άκρη του στην είσοδο εκχώρησης της μπαταρίας. Η μεθοδολογία της διαδικασίας με το ExtendSim, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

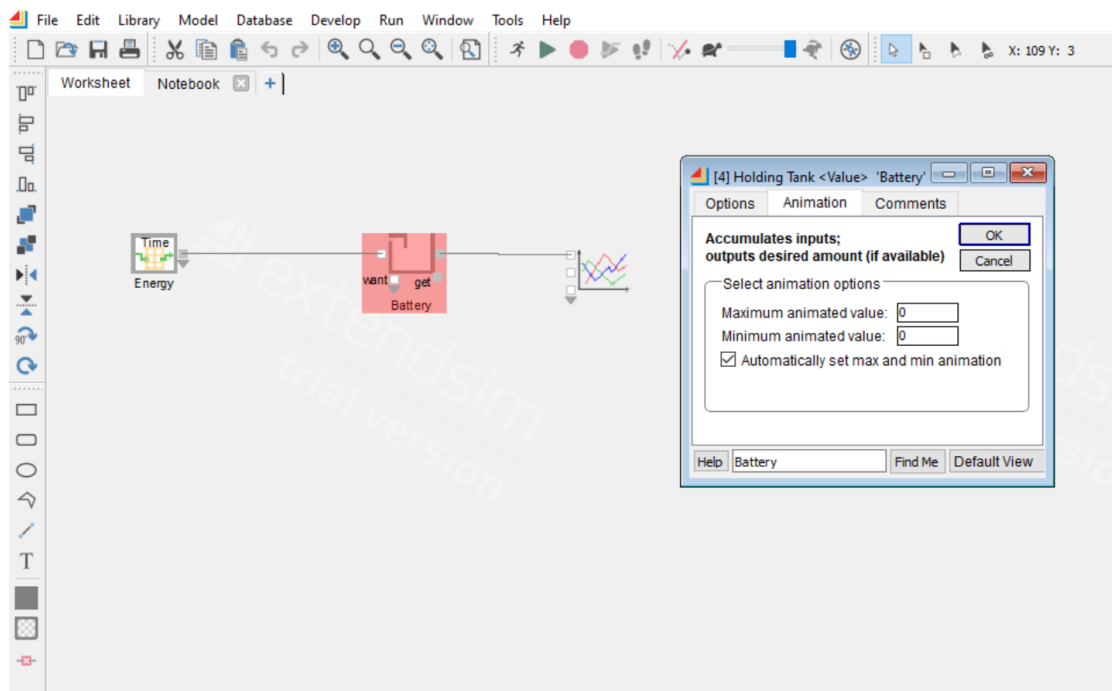


(Εικόνα 3.5.1. Απεικόνιση της αναπαράστασης της φόρτισης της μπαταρίας)

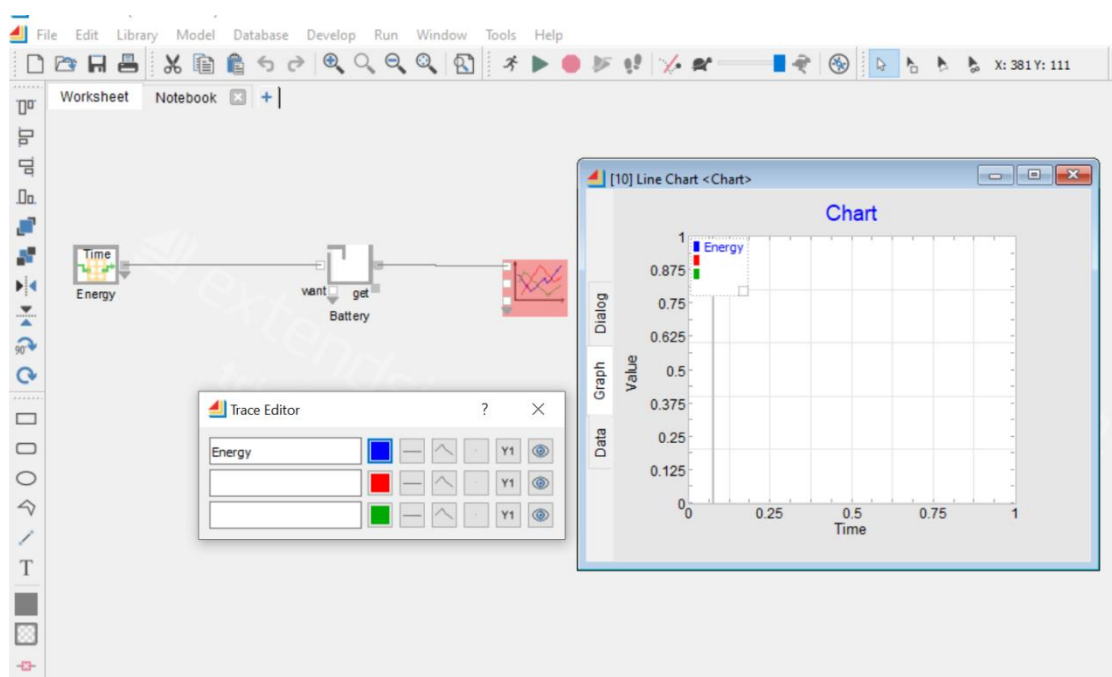
Ελέγχουμε τα στατιστικά στοιχεία του κάθε μοντέλου:



Το επιλεγμένο μοντέλο που φαίνεται και στην εικόνα, δηλώνει τον ρυθμό της ροής της ενέργειας που περνά από τον φορτιστή στην μπαταρία, με την πάροδο του χρόνου. Όπως

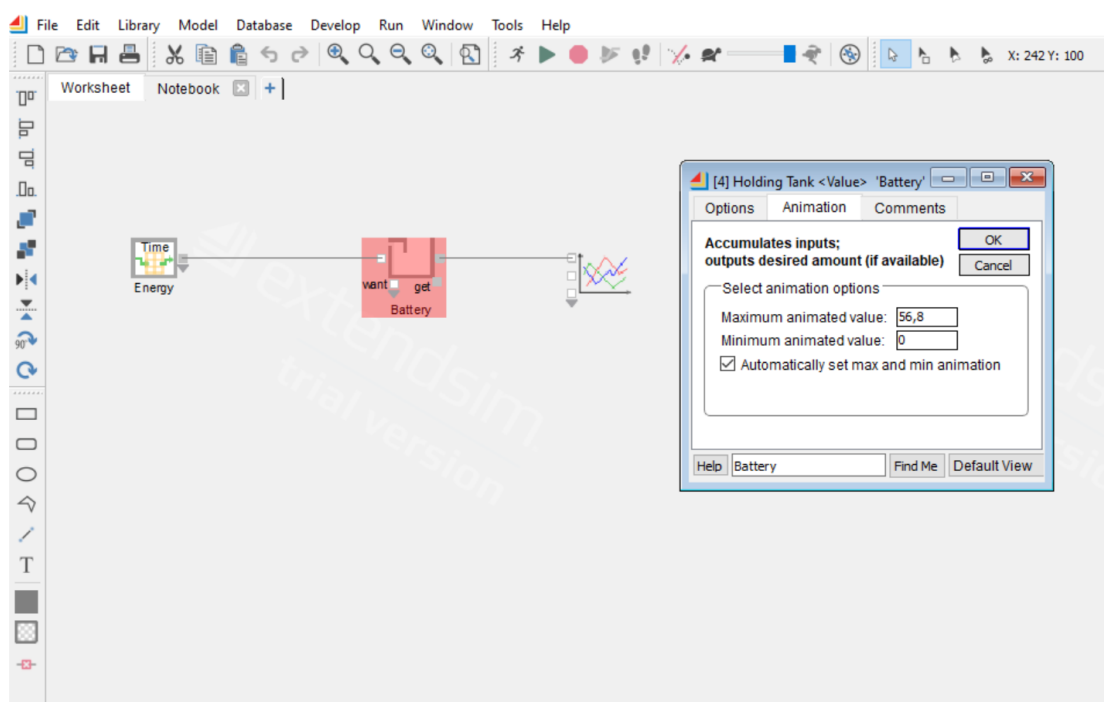
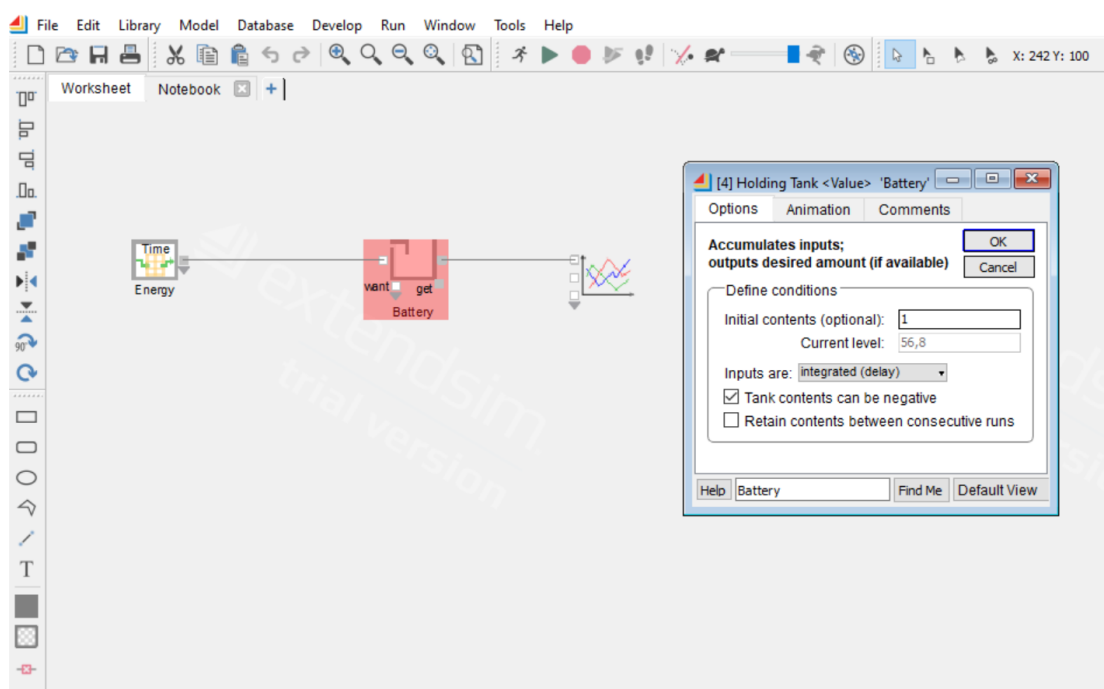


Στο πλαίσιο Animation, θα διεξαχθεί η συνολική ενέργεια που φόρτισε η μπαταρία σε διάρκεια 10 λεπτών, ύστερα από την προσομοίωση του συστήματος.



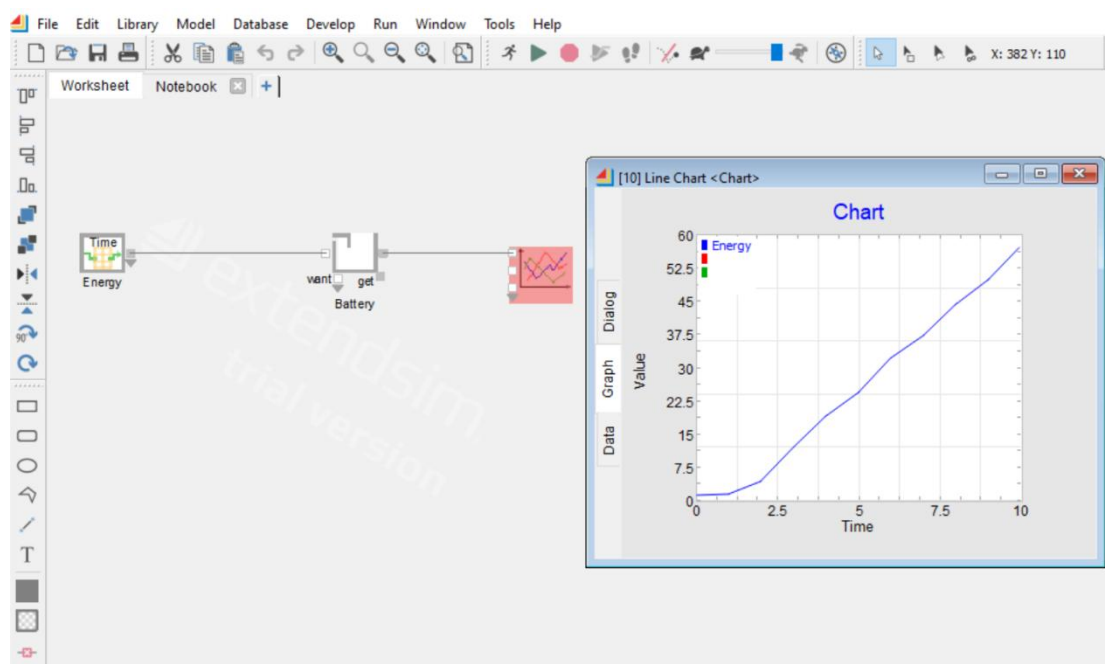
Το εικονίδιο αυτό αναπαριστά σε γραφική παράσταση την τελική προσομοίωση της φόρτισης της μπαταρίας.

Όταν τρέξουμε το σύστημα, λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

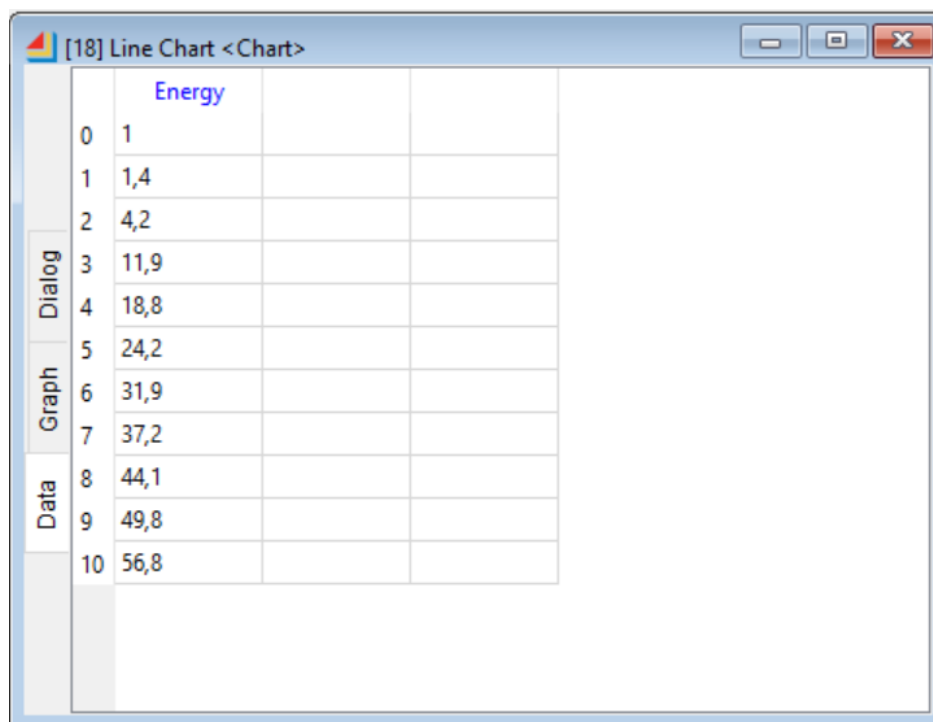


Η νέα αναφορά του Current level και Maximum animated value είναι η συνολική ενέργεια που φόρτισε η μπαταρία στην χρονική διάρκεια 10 λεπτών. Το 56.8 είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των τιμών του πίνακα Battery Charger για κάθε λεπτό.

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η μπαταρία φόρτισε στο 56.8% της ενέργειας της σε 10 λεπτά.



Από το μοντέλο διαγράμματος, προκύπτει και το σχεδιάγραμμα της ροής της ενέργειας της μπαταρίας.



Υποσημείωση: Για την προσομοίωση του συστήματος συνεχών γεγονότων, τα μοντέλα επιλέγονται από την βιβλιοθήκη που διαθέτει τις τιμές (Values).

Στο επόμενο κεφάλαιο, για τα συστήματα ουρών αναμονής, θα χρησιμοποιήσουμε την έκδοση του ExtendSim DE, που γίνεται για την προσομοίωση διακριτών γεγονότων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΩΝ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Στο κεφάλαιο 3, αναφερθήκαμε σε μεθόδους που υλοποιούνται για την προσομοίωση πραγματικών συστημάτων σε μία ευρεία και ενιαία κλίμακα. Είναι συνετό, ωστόσο, να πρέπει να αποφανθούμε με μεγαλύτερη σαφήνεια στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διαδικασία της μοντελοποίησης των μεθόδων αυτών, που μας συνεισφέρουν την τελική προσομοίωση του συστήματος που μας ενδιαφέρει. Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναλύσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια τον τρόπο λειτουργίας κάθε μεθόδου προσομοίωσης, μέσα από τα συστήματα των ουρών αναμονής που παρατηρούνται πιο πολύ στην καθημερινότητα μας.

4.1. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ MONTE-CARLO

Η μέθοδος Monte-Carlo χρησιμοποιείται για την διεξαγωγή κατάλληλων αποφάσεων για την τελική προσομοίωση του πραγματικού συστήματος. Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται μέσα από τα αποτελέσματα που έχουν παραχθεί από τους πειραματισμούς της προσομοίωσης, και μάλιστα δηλώνουν μία "εικονική" απομίμηση των αποτελεσμάτων του πραγματικού συστήματος.

Κύριο προτέρημα για τις αποφάσεις αυτές, παίζουν οι μεταβλητές του συστήματος, οι οποίες δηλώνονται από την αρχή της μοντελοποίησης. Οι μεταβλητές αυτές καθορίζουν και τις πιθανότητες που προκύπτουν μέσα από τους πειραματισμούς που γίνονται για την μοντελοποίηση του συστήματος και το σύνολό των πιθανοτήτων παράγει μία συγκεκριμένη κατανομή πιθανοτήτων. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατανομή (κανονική, εκθετική κ.α.), αλλά συνήθως η μορφή της είναι η ομοιόμορφη. Από την κατανομή αυτή, επιλέγονται τυχαία οι αρχικές μεταβλητές του συστήματος, επομένως και οι πιθανότητες τους. Για αυτό το λόγο, χρησιμοποιείται μία γεννήτρια "τυχαίων αριθμών", οι οποίοι αναφέρονται στις αρχικές αυτές μεταβλητές. Η γεννήτρια των αριθμών αυτών είναι κατανομή ομοιόμορφων αριθμών από το 0 ως το 1 ($U(0,1)$) (οι αριθμοί γενικά είναι k-ψήφιοι, ανάλογα με το πώς επωφελείται ο χρήστης). Οι τυχαίοι αυτοί αριθμοί είναι

ανεξάρτητοι μεταξύ τους και επιλέγονται τυχαία μέσα από την κατανομή πιθανοτήτων, ώστε να μοντελοποιηθεί το δοθέν μας σύστημα.

Στην ουσία, η προσομοίωση Monte-Carlo χρησιμοποιείται για την δειγματοληψία των τυχαίων αποτελεσμάτων της, που οι πιθανότητες τους δίνονται από ένα σύνολο κατανομής πιθανοτήτων. Μοντελοποιεί τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την διαδικασία, τα οποία δεν είναι εύκολο να προβλεφθούν με ένα απλό μοντέλο προσομοίωσης, λόγω της παρέμβασης τυχαίων μεταβλητών που εμπλέκονται στην διαδικασία αυτή. Οι τυχαίοι αριθμοί μιας τυχαίας μεταβλητής X παίζουν σημαντικό ρόλο για την προσομοίωση Monte-Carlo, εφόσον μέσα από αυτούς, μία συνεχής κατανομή προσεγγίζεται από μία διακριτή.

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα ιατρικό κέντρο, στο οποίο εργάζονται ένας μόνο γιατρός, καθώς και η γραμματέας του που βρίσκεται στην είσοδο για την εξυπηρέτηση των πελατών. Στο ιατρικό αυτό κέντρο, υπάρχουν συνολικά 5 διαφορετικοί κλάδοι ιατρικής γνωμάτευσης, στους οποίους αφομοιώνεται για την διάγνωση των ασθενών μόνο ο συγκεκριμένος αυτός γιατρός, και είναι οι εξής:

- Οφθαλμιατρικός τομέας, όπου ο μέσος χρόνος που προσμετρήθηκε για την εξέταση του κάθε πελάτη είναι 20 λεπτά.
- Τομέας ωτορινολαρυγγολογίας, όπου η διαδικασία γνωμάτευσης του κάθε πελάτη είναι, κατά μέσο όρο χρονικού διαστήματος, 25 λεπτά.
- Παθολογικός τομέας, όπου ο μέσος χρόνος της γνωμάτευσης είναι 5 λεπτά.
- Ψυχιατρικός τομέας, όπου η γνωμάτευση του κάθε πελάτη γίνεται κατά μέσο όρο σε 15 λεπτά.
- Καρδιολογικός τομέας, στον οποίο ο μέσος χρόνος γνωμάτευσης κάθε πελάτη είναι 30 λεπτά.

Ο μέσος χρόνος που παρατηρήθηκε για την ένταξη των πελατών στο ιατρικό κέντρο είναι ανά 20 λεπτά. Το ιατρικό κέντρο ανοίγει στις 08:00 το πρωί ακριβώς.

Βρείτε τα χαρακτηριστικά στοιχεία που διέπουν το συνολικό σύστημα.

Εφόσον οι πελάτες έρχονται στο ιατρικό κέντρο ατομικά ο ένας μετά τον άλλον, ανά σταθερό χρονικό διάστημα κάθε 20 λεπτά και υπάρχει μόνο ένας γιατρός (δηλαδή ένα σημείο εξυπηρέτησης), ωστόσο οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οδηγούμαστε στο ότι το σύστημα είναι μια ουρά αναμονής τύπου M/G/1, με τους χρόνους άφιξης να είναι εκθετικά κατανομημένοι, τους χρόνους εξυπηρέτησης κάθε πελάτη να ακολουθούν την γενική κατανομή, υπάρχει ένα σημείο εξυπηρέτησης, απεριόριστη χωρητικότητα στο ιατρείο και πειθαρχία ουράς την FIFO. Ξεκινάμε, λοιπόν, ως εξής:

Εφόσον το ιατρικό κέντρο ανοίγει στις 08:00, ο πρώτος πελάτης θα εισέλθει στο ιατρείο εκείνη την στιγμή. Όπως είναι εμφανές, κάθε πελάτης που φτάνει στο ιατρικό κέντρο, έρχεται και για διαφορετική γνωμάτευση της θέλησής του. Συγκεκριμένα, ύστερα από πολλές εξετάσεις, έχουν καταγραφεί κατά μέσο όρο οι πιθανότητες για την κάθε γνωμάτευση που απαιτεί κάθε ασθενής στο ιατρικό κέντρο και είναι οι εξής:

- η πιθανότητα κάποιος πελάτης να έρθει στο ιατρικό κέντρο για εξέταση των ματιών είναι 30%
- η πιθανότητα ένας πελάτης να έρθει για την Ω.Π.ΛΑ. εξέταση είναι 25%
- η πιθανότητα ένας πελάτης να έρθει για παθολογική γνωμάτευση είναι 15%
- η πιθανότητα ένας πελάτης να έρθει για ψυχιατρική γνωμάτευση είναι 10%
- η πιθανότητα ένας πελάτης να έρθει για καρδιολογική γνωμάτευση είναι 20%

(Πίνακας 4.1.1. Χαρακτηριστικά στοιχεία γνωματεύσεων)

Γνωμάτευση	Χρόνος εξυπηρέτησης	Πιθανότητα γνωμάτευσης	Αθροιστική πιθανότητα
Οφθαλμών	20'	0.30	0.30
Ω.Π.ΛΑ.	25'	0.25	0.55
Παθολογική	5'	0.15	0.70
Ψυχιατρική	15'	0.10	0.80
Καρδιολογική	30'	0.20	1

Η αθροιστική πιθανότητα μας βοηθά στο να διεξάγουμε τους τυχαίους αριθμούς που θα χαρακτηρίζουν τις περιπτώσεις γνωματεύσεων. Έτσι, δημιουργείται ο επόμενος πίνακας:

(Πίνακας 4.1.2. Πίνακας τυχαίων αριθμών)

Γνωμάτευση	Χρόνος εξυπηρέτησης	Πιθανότητα γνωμάτευσης	Αθροιστική πιθανότητα	Τυχαίοι Αριθμοί
Οφθαλμών	20΄	0.30	0.30	00 – 29
Ω.ΠΙ.ΛΑ.	25΄	0.25	0.55	30 – 54
Παθολογική	5΄	0.15	0.70	55 – 69
Ψυχιατρική	15΄	0.10	0.80	70 – 79
Καρδιολογική	30΄	0.20	1	80 – 99

Από τον πίνακα 4.1.2 καταλαβαίνουμε ότι οι τυχαίοι αριθμοί ακολουθούν μία σειρά αριθμών που χαρακτηρίζουν τις 5 διαφορετικές γνωματεύσεις, επεξεργαζόμενοι ανάλογα με την αθροιστική πιθανότητα. Για παράδειγμα, για την αρχική αθροιστική πιθανότητα που είναι 0.30, οι τυχαίοι αριθμοί παίρνουν το σύνολο αριθμών από 0 έως 29 (30 συνολικοί αριθμοί), η επόμενη αθροιστική πιθανότητα είναι 0.55, άρα οι τυχαίοι αριθμοί παίρνουν το σύνολο αριθμών 30 έως 54 (15 συνολικοί αριθμοί), κ.ο.κ. Έτσι, με την επιλογή διάφορων τυχαίων αριθμών, προσδιορίζεται στην ουσία ο κάθε πελάτης για την μία από τις 5 διαφορετικές γνωματεύσεις που επιθυμεί. Δηλαδή, εάν πετύχουμε, για παράδειγμα, τον αριθμό 35, αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης έρχεται στο ιατρικό κέντρο για την περίπτωση Ω.ΠΙ.ΛΑ. γνωμάτευσης, εφόσον ο αριθμός 35 ανήκει στο σύνολο 30 – 54.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι για μία συγκεκριμένη ημέρα παρατηρείται η λειτουργία του ιατρικού κέντρου από τις 08:00 – 11:00, όπου έχουν επιλεγθεί για γνωμάτευση των ασθενών οι τυχαίοι αριθμοί με την εξής σειρά:

15,81,32,94,70,58,43,65,52,17.

Οι παραπάνω αριθμοί αντιπροσωπεύουν τον έναν πελάτη μετά τον άλλον αντίστοιχα, με τις προκείμενες, αντίστοιχα, γνωματεύσεις που ενδιαφέρονται. Έτσι, ο πρώτος πελάτης με τον τυχαίο αριθμό 15 φτάνει στο ιατρικό κέντρο, στις 08:00, για εξέταση ματιών. Έπειτα, ο δεύτερος πελάτης με τον τυχαίο αριθμό 81, έρχεται στις 08:20 για την καρδιολογική γνωμάτευση. Στη συνέχεια, ο τρίτος πελάτης με τον τυχαίο αριθμό 32, έρχεται στο κέντρο στις 08:40 για Ω.ΠΙ.ΛΑ. γνωμάτευση κ.ο.κ. Για καλύτερη και πλήρη αξιολόγηση των

χαρακτηριστικών που εκφράζουν το σύστημα μας, επερχόμαστε στον εξής πίνακα:

(Πίνακας 4.1.3. Χαρακτηριστικά του συστήματος αναμονής)

Πελάτης	Τυχαίος αριθμός	Γνωμάτευση	Χρονική διάρκεια γνωμάτευσης	Ωρα άφιξης πελάτη	Ωρα αρχής γνωμάτευσης πελάτη	Ωρα αποχώρησης πελάτη	Χρόνος αναμονής πελατών
1 ^{ος}	15	Οφθαλμών	20΄	08:00	08:00	08:20	0΄
2 ^{ος}	81	Καρδιολογική	30΄	08:20	08:20	08:50	0΄
3 ^{ος}	32	Ω.ΠΙ.ΛΑ.	25΄	08:40	08:50	09:15	10΄
4 ^{ος}	94	Καρδιολογική	30΄	09:00	09:15	09:45	15΄
5 ^{ος}	70	Ψυχιατρική	15΄	09:20	09:45	10:00	25΄
6 ^{ος}	58	Παθολογική	5΄	09:40	10:00	10:05	20΄
7 ^{ος}	43	Ω.ΠΙ.ΛΑ.	25΄	10:00	10:05	10:30	5΄
8 ^{ος}	65	Παθολογική	5΄	10:20	10:30	10:35	10΄
9 ^{ος}	52	Ω.ΠΙ.ΛΑ.	25΄	10:40	10:40	11:05	0΄
10 ^{ος}	17	Οφθαλμών	20΄	11:00	11:05	11:25	5΄

Μέσα από τον πίνακα 4.1.3. συμπεραίνουμε τα εξής:

Ο 1^{ος} πελάτης εισήλθε στο ιατρείο στις 08:00 και η εξέταση του ξεκίνησε εκείνη ακριβώς την ώρα. Επειδή είναι και ο πρώτος πελάτης, ο χρόνος που έκανε για να περιμένει μέχρι την ώρα της εξέτασης είναι μηδέν λεπτά, ενώ ο χρόνος που χρειάστηκε για την διάρκεια της εξέτασής του είναι 20 λεπτά. Επομένως, θα φύγει από το ιατρείο στις 08:20. Αντίστοιχα, ο 2^{ος} πελάτης φθάνει στο ιατρικό κέντρο στις 08:20, την ώρα ακριβώς που έφυγε ο πρώτος πελάτης. Επομένως, για τον δεύτερο πελάτη δεν υπάρχει καθόλου ουρά αναμονής, και άρα ο χρόνος αναμονής του θα είναι επίσης μηδέν λεπτά. Η χρονική διάρκεια που κάνει για την εξέταση του είναι 30 λεπτά, και άρα θα φύγει από το ιατρείο στις 08:50. Ο 3^{ος} πελάτης, ωστόσο, έφτασε στο ιατρικό κέντρο στις 08:40, επομένως μέχρι να τελειώσει η εξέταση του 2^{ου} πελάτη στις 08:50, ο χρόνος που περίμενε μέχρι να έρθει η σειρά του είναι 10 λεπτά. Επομένως, η αρχή εκκίνησης της δικής του εξέτασης έγινε στις 08:50 και διήρκεσε για 25 λεπτά, άρα θα φύγει στις 09:15. Παρόμοια και ο 4^{ος} πελάτης, έφτασε στις 09:00 και ο χρόνος αναμονής του είναι 15 λεπτά. Η εξέταση του άρχισε στις 09:15 και ο χρόνος εξέτασης του διήρκεσε 30 λεπτά, άρα θα φύγει στις 09:45. Στη συνέχεια ο 5^{ος} πελάτης φτάνει στις 09:20 και ο 6^{ος} πελάτης στις 09:40, γεγονός που μας δείχνει ότι ο 6^{ος} πελάτης θα περιμένει σε "ουρά αναμονής" με δύο άτομα, κ.ο.κ.

Μπορούμε να βρούμε ότι ο συνολικός χρόνος αναμονής των πελατών στο σύστημα είναι:
 $0+0+10+15+25+20+5+10+0+5=90$ λεπτά και ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα
 μπορεί να βρεθεί ως:

$$W_1 = \frac{90 \text{ λεπτά}}{10 \text{ πελάτες}} = 9 \text{ λεπτά.}$$

Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά του συστήματος, προκύπτουν οι σχέσεις:

Η αναλογία του διακομιστή είναι $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Το λ είναι ο ρυθμός αφίξεων των πελατών στο σύστημα, δηλαδή

$$\lambda = \frac{1}{20} \text{ πελάτες/λεπτό} = 3 \text{ πελάτες/ώρα}$$

Για το ρυθμό εξυπηρέτησεων, ο λιγότερος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 5 λεπτά, ενώ ο
 μεγαλύτερος είναι 30 λεπτά, επομένως: $\frac{\max+\min}{2} = 17.5$, άρα

$$\mu = \frac{2}{35} \text{ πελάτες/λεπτό} = \frac{24}{7} \text{ πελάτες/ώρα}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$$

· Η διακύμανση των χρόνων εξυπηρέτησης των πελατών είναι:

$$\sigma^2 = \frac{(\max-\min)^2}{12} = \frac{(30-5)^2}{12} = \frac{625}{12} = \frac{25}{1728} \text{ (σε ώρες)}$$

· πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$P_0 = 1 - \rho = \frac{1}{8}$$

· πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = \rho^n P_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^n$$

· πιθανότητα ένας πελάτης χρειαστεί να περιμένει στην ουρά:

$$P_w = 1 - P_0 = \frac{7}{8}$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{\rho^2(1 + \sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(1 + \frac{625}{12} \cdot \left(\frac{2}{35}\right)^2\right)}{2\left(1 - \frac{7}{8}\right)} = \frac{43}{12} = 3 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = \rho + \frac{\rho^2(1 + \sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)} = \frac{107}{24} = 4 \text{ πελάτες}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2\right)}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{1}{20} \left(\left(\frac{2}{35}\right)^2 + \frac{625}{12}\right)}{2\left(1 - \frac{7}{8}\right)} \approx 10.41 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W_2 = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda \left(\frac{1}{\mu^2} + \sigma^2\right)}{2(1-\rho)} \approx 10.47 \text{ λεπτά}$$

. μέσος αριθμός πελατών που βρίσκονται εν ώρα εξυπηρέτησης:

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{8}$$

4.2.ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΜΕ ΔΙΚΤΥΑ PETRI

Η εκτέλεση της προσομοίωσης ενός πραγματικού συστήματος με δίκτυα Petri, εφαρμόζεται από τους χειριστές που μοντελοποιούν το σύστημα αυτό, μέσα από προγράμματα H/Y. Αυτό σημαίνει ότι τα δίκτυα Petri δίνουν την αναπαράσταση του συστήματος σε ένα γραφικό πλαίσιο, στο οποίο περιγράφονται οι καταστάσεις και η λειτουργία του συστήματος. Το γραφικό περιβάλλον τους εμπεριέχει και απεικονίζει

ορισμένα σημαντικά στοιχεία για την μοντελοποίηση του αρχικού μας, πραγματικού συστήματος. Τα στοιχεία αυτά είναι:

- **Οι τιμές.** Οι τιμές χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του συστήματος και σχεδιάζονται στο γραφικό περιβάλλον ως κουκίδες. Οι τιμές που δίνονται για το πλαίσιο της προσομοίωσης, παίρνουν η καθεμιά τους και από μία συγκεκριμένη θέση. Έτσι, από την αρχή υλοποίησης της μοντελοποίησης, είναι εμφανείς οι προκαθορισμένες θέσεις που λαμβάνουν. Με την πάροδο του χρόνου και την εξέλιξη της μοντελοποίησης, οι τιμές δύνανται να αλλάζουν θέσεις μεταξύ τους.

- **Οι θέσεις.** Για τις θέσεις δίνονται ονομαστικές ενότητες, που χαρακτηρίζουν το είδος των τιμών που περιέχουν καθεμιά από αυτές, δηλαδή αν οι τιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί ή εγγραφές, στις οποίες ένα πεδίο αποτελείται από δεδομένα πραγματικών αριθμών ή, αντίστοιχα, από δεδομένα γραμματοσειρών. Τα είδη των τιμών πρέπει να ανήκουν στην ίδια κατηγορία, τόσο για την θέση που λαμβάνουν από την αρχή, όσο και για τις μεταβάσεις που μπορούν να προκύψουν μεταξύ των θέσεων. Οι θέσεις παίρνουν την μορφή κύκλου για το γραφικό περιβάλλον της μοντελοποίησης.

- **Οι μεταβάσεις.** Οι μεταβάσεις καθιερώνουν την μετακίνηση δύο ή περισσότερων τιμών στις μεταξύ τους θέσεις και αναφέρονται στην αλλαγή των συνθηκών. Οι μεταβάσεις για τις τιμές συνδέονται με τόξα και ενδείκνυνται με το σύμβολο του ορθογωνίου.

- **Τα τόξα.** Τα τόξα αφομοιώνονται στην ένδειξη κατευθύνσεων των θέσεων ή των μεταβάσεων. Τα τόξα δέχονται και αυτά ονομαστικές ενότητες, οι οποίες δηλώνουν το είδος των τιμών για τις οποίες γίνεται η διαδικασία της μετάβασης. Τα τόξα στο γραφικό περιβάλλον των δικτύων Petri σχεδιάζονται με βάση δύο εκδοχές:

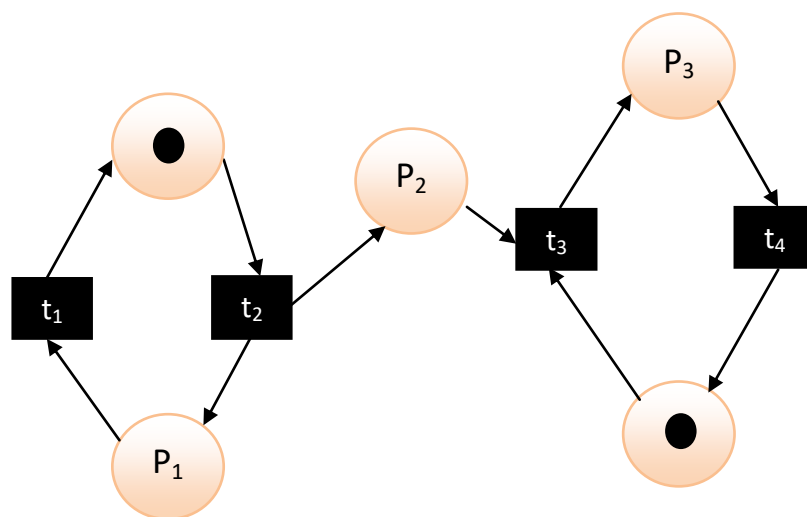
- 1) είτε το τόξο περνά από μία θέση σε μία μετάβαση

- 2) είτε περνά από μία μετάβαση σε μία θέση

Στην πρώτη περίπτωση, η τιμή που υπάρχει μετακινείται από την θέση που βρίσκεται, σύμφωνα με την λειτουργία της μετάβασης που της ζητείται, ενώ στην δεύτερη περίπτωση, η τιμή καταλήγει στην ζητούμενη νέα θέση, ύστερα από την εκτέλεση της λειτουργίας της μετάβασης.

Επιπλέον, τα τόξα μπορούν να χαρακτηρίζονται με βάρη, που προκαθορίζουν την μέγιστη χωρητικότητα των τιμών που δέχεται το τόξο για την μετάβαση που πρέπει να γίνει. Αν

στο γράφημα δεν αναφέρονται βάρη, οι μεταβιβάσεις γίνονται με μία μόνο τιμή και το δίκτυο Petri στην συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται απλό.



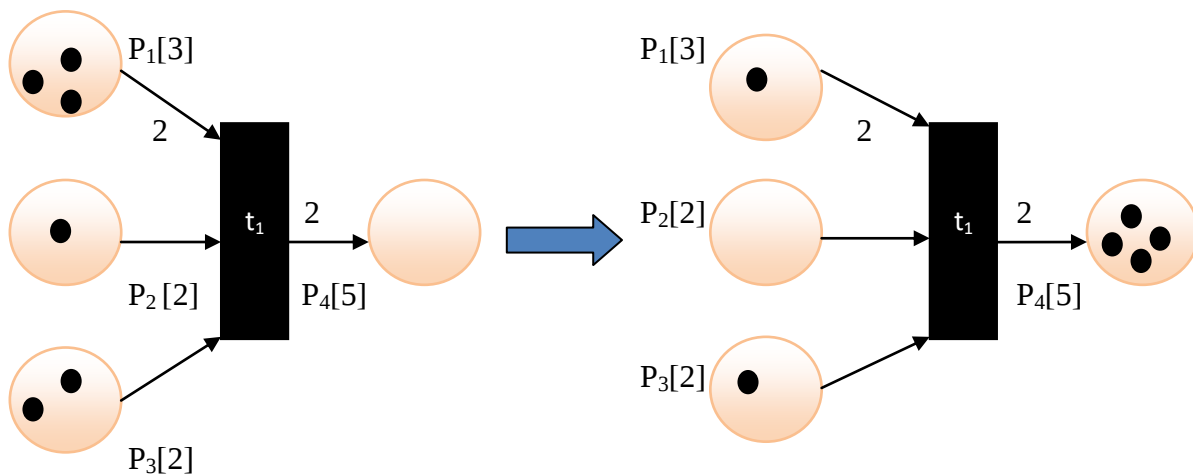
(Σχήμα 4.2.1. Το γραφικό περιβάλλον μοντελοποίησης ενός συστήματος με απλό δίκτυο Petri)

Οι θέσεις και οι μεταβάσεις αποτελούν τα δύο κύρια σύνολα που περιέχει ένα δίκτυο Petri. Επίσης, συμπεριλαμβάνονται δύο λειτουργίες που αφορούν αυτά τα δύο στοιχεία: η **είσοδος In** και η **έξοδος Out**. Η είσοδος αναφέρεται σε ένα σύνολο θέσεων που οι τιμές τους μεταδίδονται σε μια μετάβαση και αντίστοιχα η έξοδος αναφέρεται σε ένα σύνολο θέσεων που οι τιμές εκλαμβάνονται από μια μετάβαση. Με κίνητρο τις θέσεις και τις μεταβάσεις καθορίζεται και η κατάσταση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή. Τα δίκτυα Petri δείχνουν την κατάσταση του συστήματος, για κάποια χρονική στιγμή, με την εναπόθεση των τιμών σε θέσεις του γραφήματος:

- εάν υπάρχουν τιμές, η συνθήκη ισχύει
- εάν δεν υπάρχουν τιμές, η συνθήκη δεν ισχύει.

Τότε, η κατάσταση της κάθε θέσης αναφέρεται ως **σήμανση της θέσης** και ανάλογα με τον αριθμό των τιμών της, δηλώνεται η κατάσταση του συστήματος. Οι καταστάσεις αλλάζουν σύμφωνα με τις μεταβάσεις που συμβαίνουν στο γράφημα. Οι μεταβάσεις γίνονται μέσω των θέσεων που διαθέτουν τιμές, από την είσοδο τους, σε θέσεις που δεν διαθέτουν καμία τιμή, στην έξοδο τους. Αυτή η διαδικασία καθιστά τις μεταβάσεις ενεργές και χαρακτηρίζεται ως **πυροδότηση των μεταβάσεων**. Όσο θα υπάρχει έστω και μία

μετάβαση ενεργή, η πυροδότηση θα εξακολουθεί να εκτελείται, αλλιώς η διαδικασία σταματά.



(Σχήμα 4.2.2. Οι σημάνσεις των θέσεων πριν και μετά την πυροδότηση της μεταβίβασης)

Η σήμανση των θέσεων μας δίνει την απαραίτητη πληροφορία για το σύνολο των τιμών που διαθέτει η κάθε θέση, καθώς και την χωρητικότητα που χρειάζεται για τις τιμές η κάθε θέση και συμβολίζονται m_n και k αντίστοιχα. Τα m_n αντιστοιχούν στην κάθε κατάσταση n του συστήματος (π.χ. το m_0 δηλώνει το πλήθος των τιμών της κάθε θέσης στην αρχική του κατάσταση, το m_1 το πλήθος των τιμών κάθε θέσης μετά την πρώτη πυροδότηση κ.ο.κ.) Τα m_n , k παίρνουν την μορφή πινάκων. Για παράδειγμα, από το σχήμα 4.2.2 έχουμε:

$$m_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 4.2.1.: Υποθέτουμε για κάποια μέρα την πρεμιέρα μίας θεατρικής παράστασης. Στο σημείο εισόδου πριν την αυλαία, βρίσκεται ένας μόνο υπάλληλος για την παραλαβή εισιτηρίων των πελατών. Οι πελάτες φτάνουν στο θέατρο κάθε 2 λεπτά, και αντίστοιχα, ο χρόνος διάρκειας του κάθε πελάτη για την παραλαβή εισιτηρίου είναι 1 λεπτό. Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά του συστήματος, καθώς και να μοντελοποιηθεί με βάση την μέθοδο δικτύων Petri.

Λύση: Το σύστημα αυτό είναι ουρά αναμονής, τύπου M/M/1, με ρυθμό αφίξεων $\lambda = 1$ πελάτη/2 λεπτά = 30 πελάτες/ώρα, ρυθμό εξυπηρέτησης τους $\mu = 60$ πελάτες/ώρα και μία θέση εξυπηρέτησης, άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς FIFO.

Έχουμε:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} < 1.$$

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Για n=2 πελάτες: $P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{30^2}{60(60-30)} = 0.5 = 0 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος πελατών στο σύστημα:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = 1 \text{ πελάτης}$$

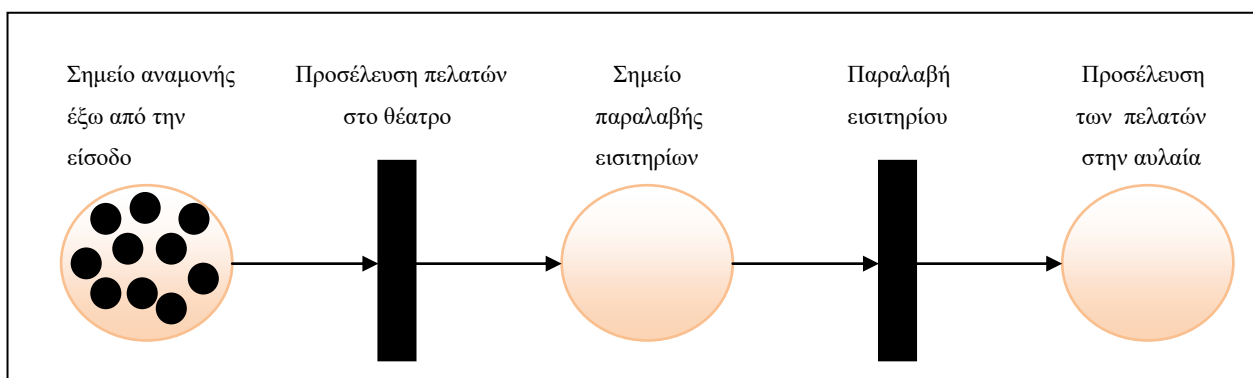
. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{60} \text{ ώρες} = 1 \text{ λεπτό}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = 2 \text{ λεπτά}$$

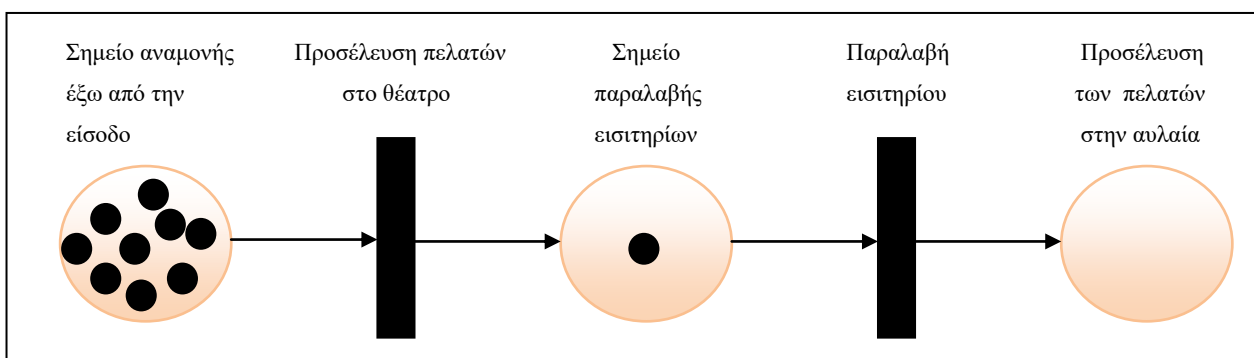
Ο σχεδιασμός της μοντελοποίησης του συστήματος, καθώς και η διαδικασία της κίνησης των πελατών στον θεατρικό χώρο, δίνεται από τα εξής σχήματα:



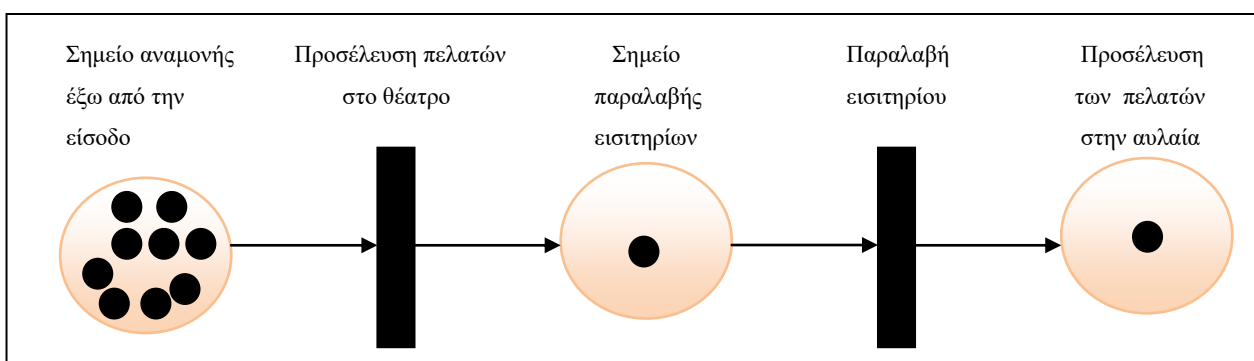
(Σχήμα 4.2.3. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_0 = 0$)

Την χρονική στιγμή $t_0=0$, θεωρούμε ότι έχουν παρευρεθεί αρκετοί άνθρωποι σε ουρά έξω από την είσοδο του θεάτρου, ακριβώς λίγο πριν ανοίξει για την έναρξη της παράστασης. Την χρονική στιγμή $t_1=1$, δηλαδή 1 λεπτό αργότερα από την χρονική στιγμή $t_0=0$, ο 1^{ος} πελάτης που εισέρχεται στον χώρο, λαμβάνει το εισιτήριο από τον υπάλληλο, ενώ οι υπόλοιποι πελάτες περιμένουν μέχρι να εξυπηρετηθεί. Την χρονική στιγμή $t_2=2$, ο 1^{ος} πελάτης έχει εισέλθει στην αυλαία και βρίσκει θέση για να κάτσει, ο 2^{ος} πελάτης εξυπηρετείται για να λάβει το εισιτήριό του, ενώ παράλληλα έφτασε στην ουρά ένας νέος πελάτης. Την χρονική στιγμή $t_4=4$, έχουν βρει θέση οι πρώτοι τρεις πελάτες, ο 4^{ος} πελάτης λαμβάνει το εισιτήριό του και έχει φτάσει στην ουρά άλλος ένας νέος πελάτης. Τέλος (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η κατάσταση του συστήματος σταματάει εδώ), την χρονική στιγμή $t_{16}=16$ έχουν εισέλθει στον χώρο της αυλαίας 16 πελάτες, ο 17^{ος} εξυπηρετείται για

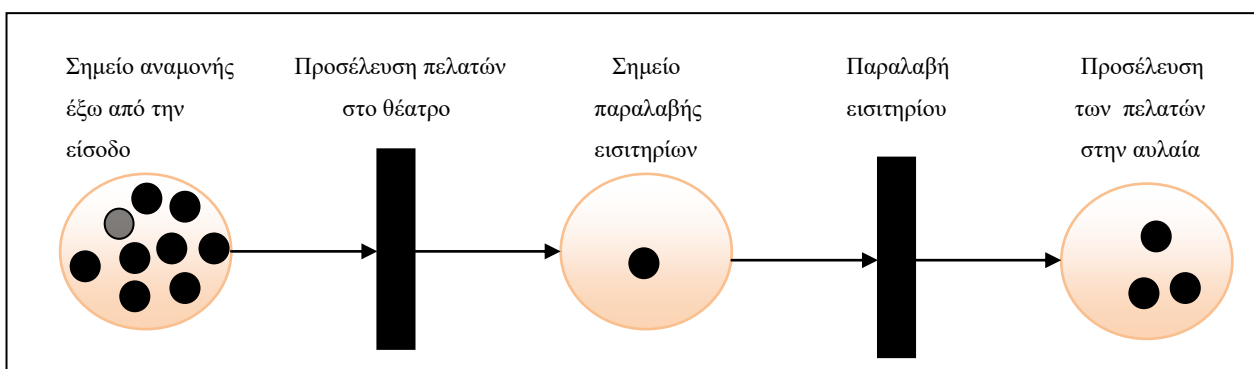
να λάβει το εισιτήριο και καταφθάνει στην ουρά νέος πελάτης. Αν θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι την χρονική στιγμή $t_0=0$ υπήρχαν 10 άτομα στην ουρά, τότε την χρονική στιγμή $t_{16}=16$, ο νέος πελάτης που φτάνει στο θέατρο βρίσκει σε ουρά αναμονής 1 μόνο άτομο, καθώς και τον πρώτο από αυτόν που εξυπηρετείται.



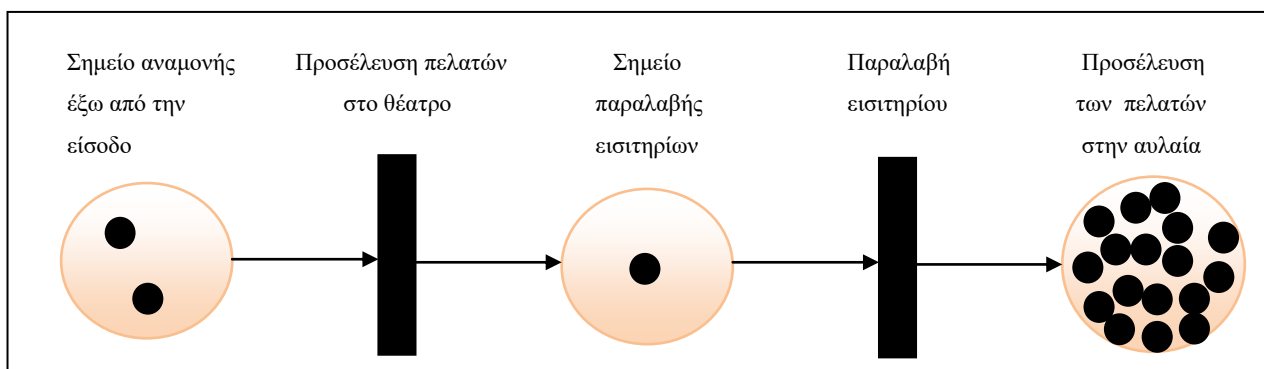
(Σχήμα 4.2.4. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_1 = 1$)



(Σχήμα 4.2.5. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_2 = 2$)



(Σχήμα 4.2.6. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_4 = 4$)



(Σχήμα 4.2.7. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_{16} = 16$)

Ο κώδικας που υλοποιείται για την εκτέλεση της προσομοίωσης της ουράς M/M/1 του παραδείγματος, είναι ο εξής:

```

import queueing_tool as qt

def rate(t) :

    return 2

def arr_f(t) :

    return qt.poisson_random_measure(t, rate, 2)

def serv_f(t) :

    return t + np.random.exponential(1.0)

q_classes = { 1: qt.QueueServer }

q_args = {

    1: {

        'num_servers': 1,

        'arrival_f': arr_f,

        'service_f': serv_f

    }

}

adja_list = { 0: {1} }

edge_list = {0: {1: 1}}

g = qt.adjacency2graph(adjacency=adja_list, edge_type=edge_list)

qn = qt.QueueNetwork( g=g, q_classes=q_classes, q_args=q_args )

```

Παράδειγμα 4.2.2.: Έστω ότι σε έναν κινηματογράφο, δίνονται δύο σημεία για την πώληση εισιτηρίων στους πελάτες, πριν από την κύρια είσοδο. Οι πελάτες φτάνουν στον κινηματογράφο κατά μέσο όρο κάθε 2 λεπτά, και ο χρόνος που κάνει ο καθένας για να αγοράσει εισιτήριο είναι κατά μέσο όρο 1 λεπτό. Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά του συστήματος και να μοντελοποιηθεί με την χρήση δικτύων Petri.

Λύση: Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, οι χρόνοι αφίξεων των πελατών στο σύστημα και οι χρόνοι εξυπηρέτησής τους ακολουθούν την εκθετική κατανομή, με $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\mu = \frac{1}{1} = 1$. Οι θέσεις εξυπηρέτησης σε αυτή την περίπτωση είναι $N=2$, επομένως το σύστημα εκφράζεται ως ουρά αναμονής τύπου M/M/N. Άρα

$$\rho = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{1}{4}$$

. οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \text{ πελάτες/λεπτό, } \forall n, \quad \mu_n = \begin{cases} n \text{ πελάτες/λεπτό, για } n < N \\ 2 \text{ πελάτες/λεπτό, για } n \geq N \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης πελατών στο σύστημα:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(N\rho)^n}{(n)!} + \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\left(2 \cdot \frac{1}{4}\right)^0}{0!} + \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{4}\right)^1}{1!} + \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{4}\right)^2}{2!(1-\frac{1}{4})}} = 0.6$$

. πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα:

$$P_n = P_0 \frac{(N\rho)^n}{(n)!} = 0.6 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(n)!}, \text{ για } n \leq 2$$

$$P_n = P_0 \frac{N^N \rho^n}{N!} = 0.6 \frac{2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2!} = 1.2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ για } n > 2$$

. πιθανότητα ένας πελάτης να εισέλθει στο σύστημα και να περιμένει στην ουρά:

$$P_k = \frac{(N\rho)^N}{N!(1-\rho)} P_0 = 0.6 \frac{\left(2\frac{1}{4}\right)^2}{2!(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{10}$$

. μέσος όρος πελατών στην ουρά:

$$L_q = \frac{\rho^N \lambda \mu}{(N-1)!(N\mu-\lambda)^2} P_0 = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2}}{(2-1)!\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} 0.6 = \frac{1}{120} = 0 \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{61}{120} \approx 0.51 = 1 \text{ πελάτης}$$

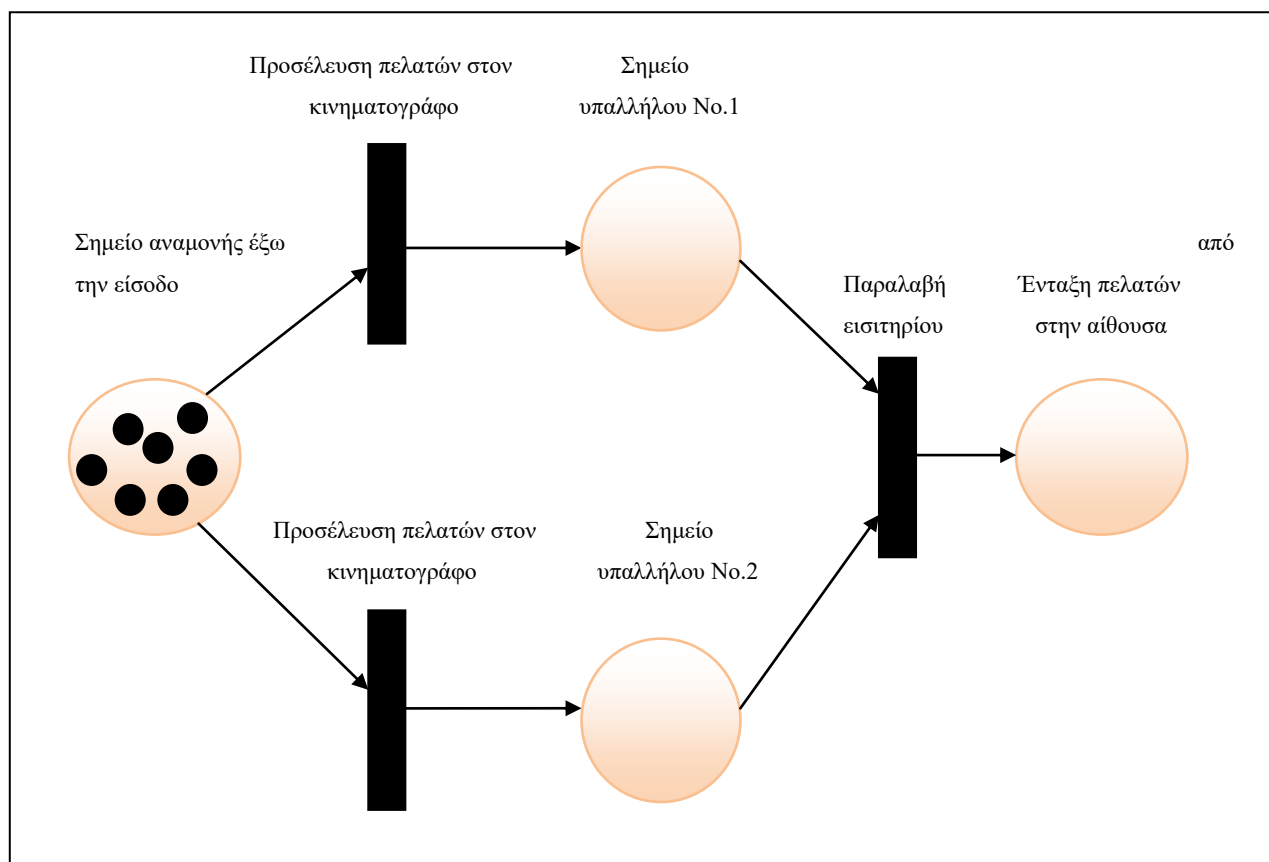
. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{\rho^N \mu}{(N-1)!(N\mu-\lambda)^2} P_0 = \frac{1}{60} \approx 0.017 \text{ λεπτά}$$

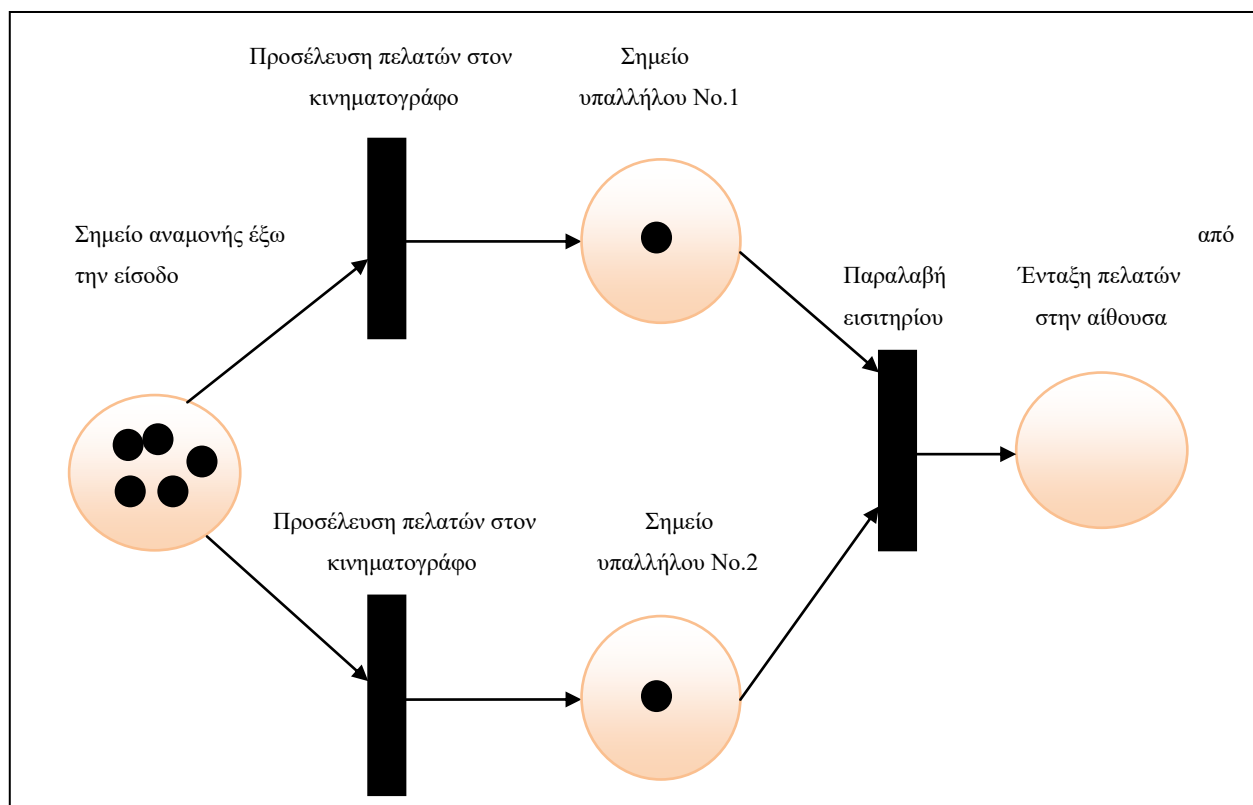
. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 1.017 \text{ λεπτά}$$

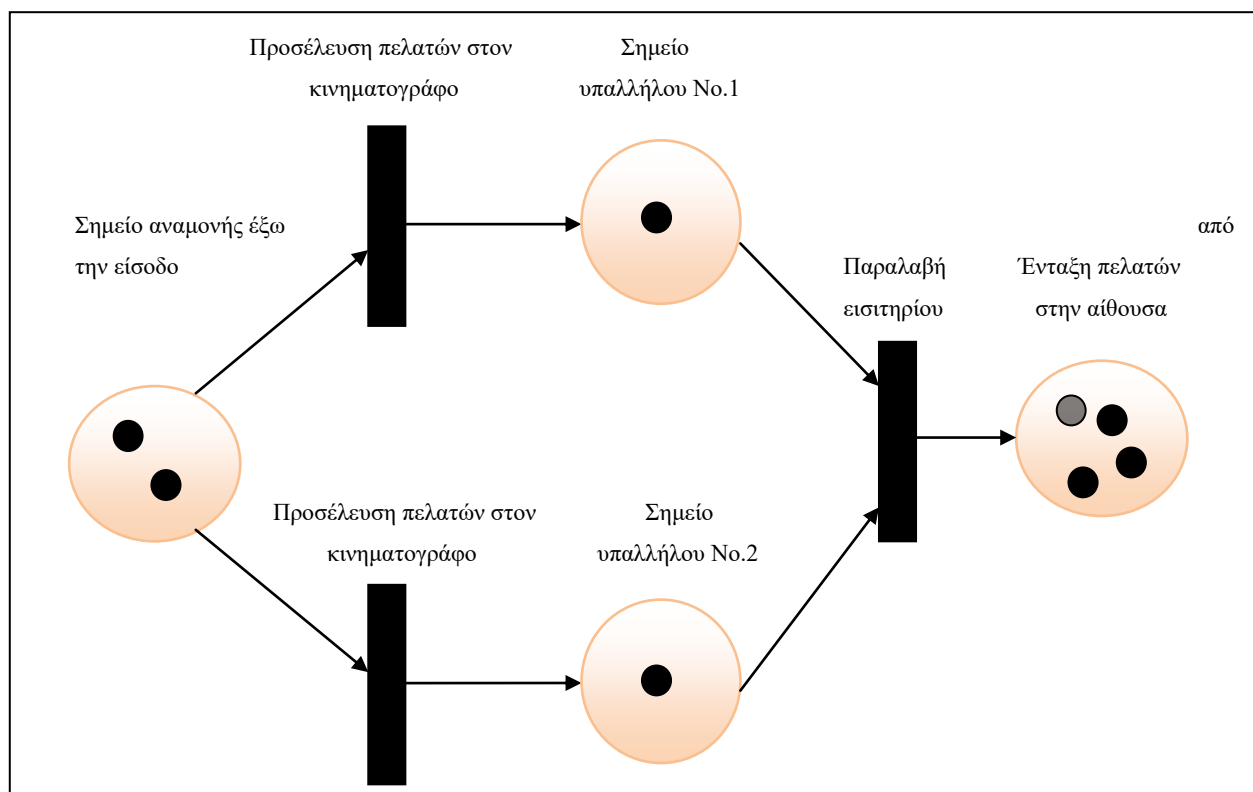
Η διαδικασία της ροής του συστήματος, φαίνεται με την χρήση δικτύων Petri στα επόμενα σχήματα.



(Σχήμα 4.2.8. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ λεπτά)



(Σχήμα 4.2.9. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_1 = 1$ λεπτά)



(Σχήμα 4.2.10. Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_2 = 4$ λεπτά)

Ο κώδικας που υλοποιείται για την εκτέλεση της προσομοίωσης της ουράς M/M/2 του παραδείγματος, είναι ο εξής:

```

import queueing_tool as qt

def rate(t) :

    return 2

def arr_f(t) :

    return qt.poisson_random_measure(t, rate, 2)

def serv_f(t) :

    return t + np.random.exponential(1.0)

q_classes = { 1: qt.QueueServer }

q_args = {

    1: {

        'num_servers': 2,

        'arrival_f': arr_f,

        'service_f': serv_f

    }

}

adja_list = { 0: {1} }

edge_list = {0: {1: 1}}

g = qt.adjacency2graph(adjacency=adja_list, edge_type=edge_list)

qn = qt.QueueNetwork( g=g, q_classes=q_classes, q_args=q_args )

```

4.3.ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΜΕ ARENA

Σύμφωνα με την μέθοδο προσομοίωσης του Arena, όταν μοντελοποιείται ένα πείραμα μιας πραγματικής διαδικασίας, στα χαρακτηριστικά της δίνονται ονομαστικά ετικέτες που δηλώνουν επεξηγηματικά το ρόλο τους στη διαδικασία. Εφόσον η προσομοίωση γίνεται σε γραφικό περιβάλλον, τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας συνδέονται με γραμμές, οι οποίες μας δείχνουν τον ρυθμό ροής της διαδικασίας.

Το περιβάλλον του Arena περιλαμβάνει τον γραφικό χώρο που κατασκευάζεται η μοντελοποίηση του συστήματος και μία εργαλειοθήκη με τα απαραίτητα μοντέλα για την υλοποίηση του. Τα κύρια μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση ενός συστήματος είναι τα Create, Process και Dispose. Θα δούμε το πρόγραμμα Arena και τις μεθόδους λειτουργίας του, σύμφωνα με το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα μικρό κατάστημα που παρέχει γκάμα ηλεκτρονικών ειδών. Το κατάστημα δέχεται στον χώρο του μέχρι και 4 άτομα, για προληπτικούς λόγους, λόγω κάποιας ασθένειας που υπάρχει και κυκλοφορεί στην πολιτεία. Στο κατάστημα βρίσκονται ο υπεύθυνος του καταστήματος και μία βοηθός υπάλληλος του – και οι δύο είναι διαθέσιμοι για την εξυπηρέτηση των πελατών. Ο κάθε πελάτης εισέρχεται στο κατάστημα κάθε 15 λεπτά, ενώ ο μέσος χρόνος για την εξυπηρέτηση του καθενός είναι 20 λεπτά. Να γίνει η προσομοίωση του συστήματος με την μέθοδο του Arena.

Λύση: Για αρχή, θα προσδιορίσουμε τα χαρακτηριστικά που διέπουν το σύστημα. Έχουμε:

· Το σύστημα είναι η ουρά αναμονής τύπου M/M/c/K, με δύο εξυπηρετητές, χωρητικότητα 4 και εκθετικά κατανομημένους χρόνους αφίξεων και εξυπηρετήσεων. Η αναλογία του διακομιστή είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{\frac{1}{10}}{2 \frac{1}{15}} = \frac{2}{3}$$

· οι ρυθμοί γεννήσεων–θανάτων είναι:

$$\lambda_n = \begin{cases} 4 \text{ πελάτες/ώρα} , \text{ για } 0 \leq n < 4 \\ 0 , \text{ για } n \geq 4 \end{cases} , \quad \mu_n = \begin{cases} 6 \text{ πελάτες/ώρα} , \text{ } 0 \leq n < 4 \\ 0 , \text{ για } n \geq 4 \end{cases}$$

. πιθανότητα μη ύπαρξης δεδομένων στο σύστημα:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^c \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{n=c+1}^K \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c}} \\ &= \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!} \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{4}{3}\right)^2 \sum_{n=3}^4 \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{0!} \left(\frac{4}{3}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left[\frac{1}{2^{3-2}} \left(\frac{4}{3}\right)^{3-2} + \frac{1}{2^{4-2}} \left(\frac{4}{3}\right)^{4-2} \right]} \\ &= 0.2375 \approx 0.24 \end{aligned}$$

. πιθανότητα ύπαρξης n δεδομένων στο σύστημα:

$$\text{Για } 1 \leq n \leq 2: P_n = P_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 0.24 \frac{1}{n!} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\text{Για } 2 < n \leq 4: P_n = P_0 \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{c^{n-c}} = 0.12 \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

. μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά:

$$W_q = \frac{(c\rho)^c}{c\mu(1-\rho)^2 c!} P_0 = 0.24 \frac{\left(2 \cdot \frac{2}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{20} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 2!} = 19.2 \text{ λεπτά}$$

. μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 19.2 + \frac{1}{\frac{1}{20}} = 39.2 \text{ λεπτά}$$

. μέσος όρος δεδομένων στην ουρά:

$$L_q = \lambda (1 - P_n) W_q = \frac{1}{15} (1 - P_n) \frac{192}{10}$$

$$\text{Για } 1 \leq n \leq 2: L_q = 12.8 \left[1 - 0.24 \frac{1}{n!} \left(\frac{4}{3} \right)^n \right] \text{ πελάτες}$$

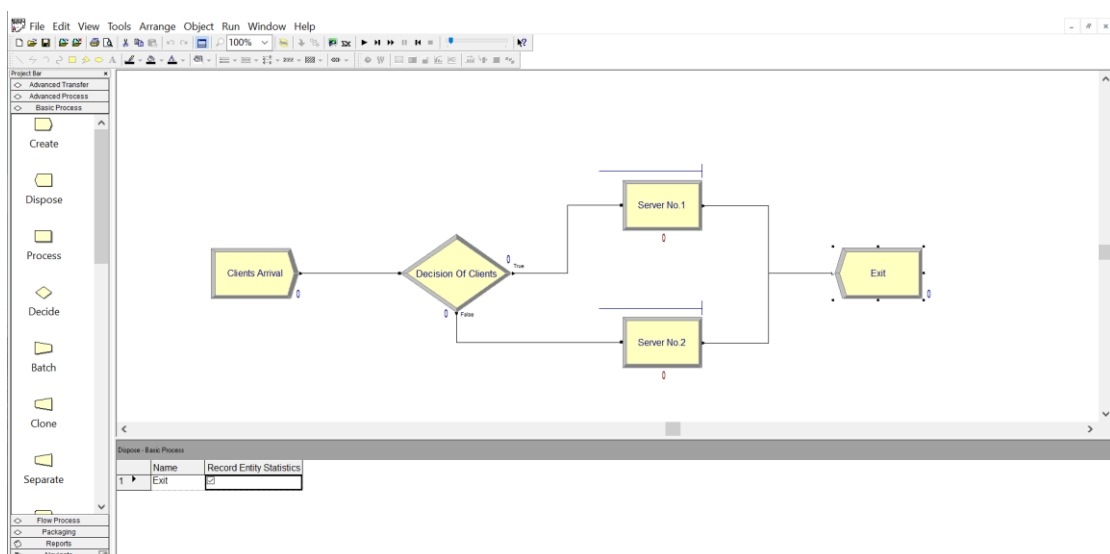
$$\text{Για } 2 < n \leq 4: L_q = 12.8 \left[1 - 0.12 \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{4}{3} \right)^n \right] \text{ πελάτες}$$

. μέσος όρος δεδομένων στο σύστημα:

$$L = \frac{\rho(c\rho)^c}{(1-\rho)^2 c!} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{3} \left(2 \cdot \frac{1}{3} \right)^2}{\left(1 - \frac{1}{3} \right)^2 2!} 0.24 + \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{20}} \approx 1.37 = 1 \text{ πελάτης}$$

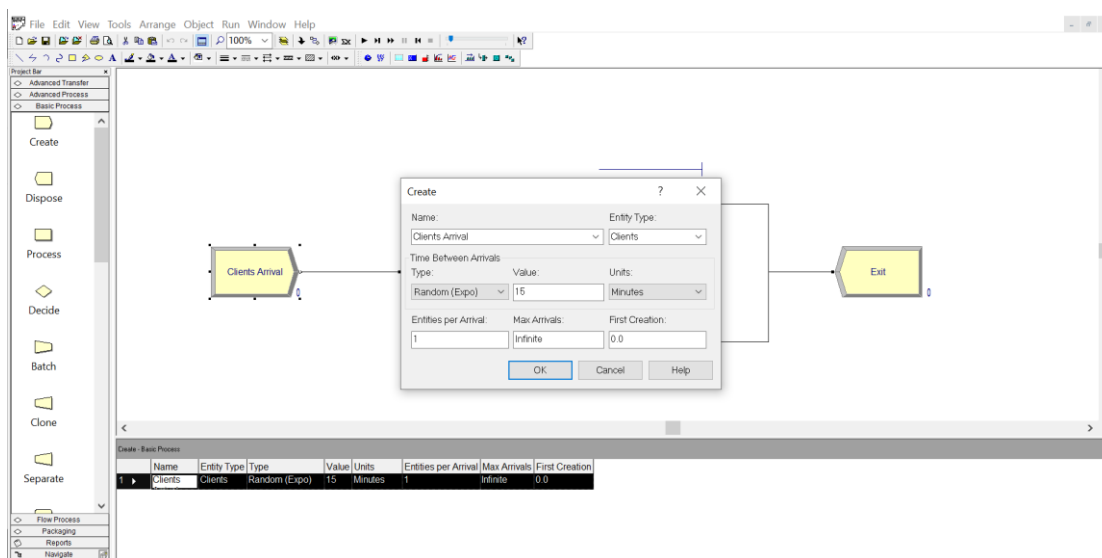
Με την προσομοίωση αυτού του συστήματος, έχουμε:

Η κατασκευή της μοντελοποίησης του συστήματος είναι αυτή της εικόνας 4.3.1.

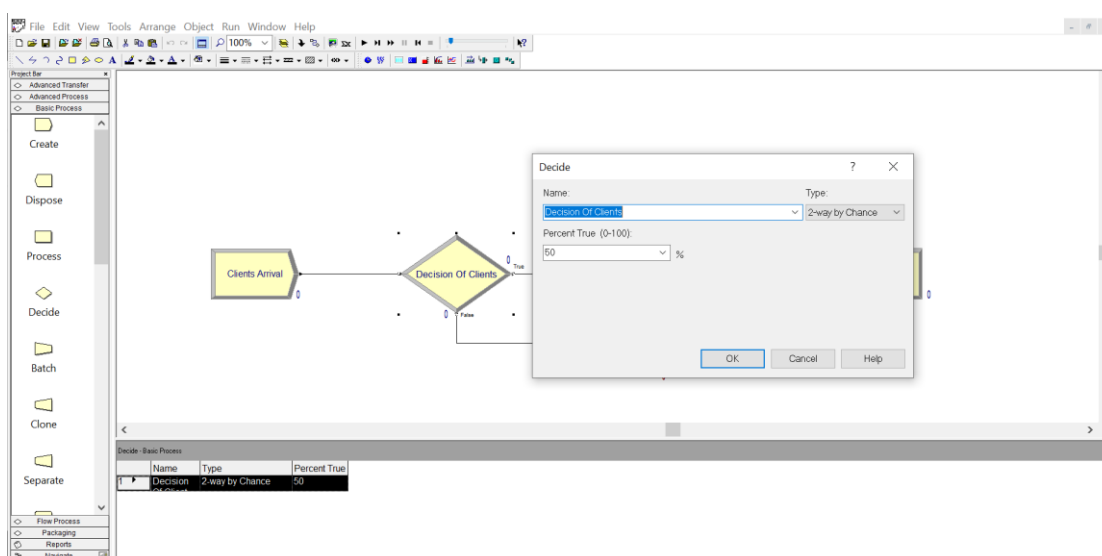


(Εικόνα 4.3.1. Γραφική απεικόνιση της μοντελοποίησης του συστήματος)

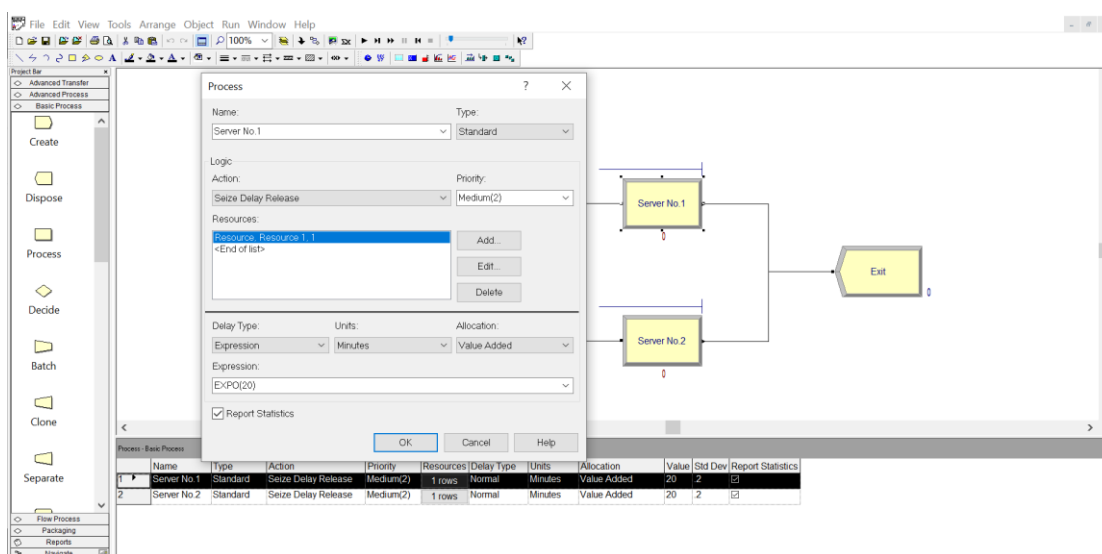
Για το δοθέν σύστημα, χρησιμοποιήσαμε τα μοντέλα Create, Decide, Process και Dispose. Το μοντέλο Create χρησιμοποιείται για τις αφίξεις των πελατών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, επιλέγουμε τους χρόνους των αφίξεων των πελατών να γίνονται σύμφωνα με την εκθετική κατανομή, και κάθε 15 λεπτά, όπως δίνεται στην εκφώνηση.



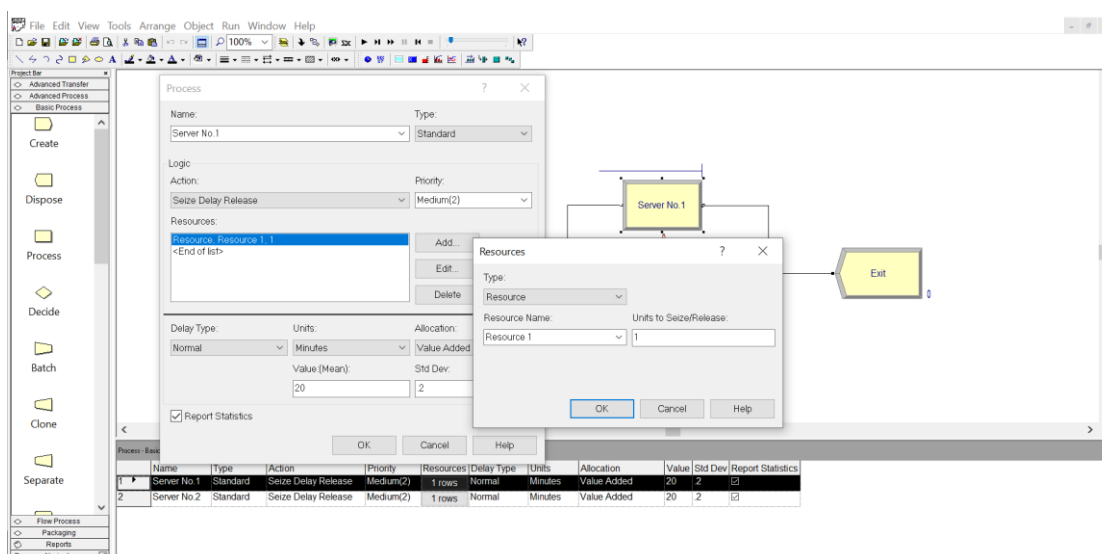
Το μοντέλο Decide χρησιμεύει στην επιλογή των πελατών να προσέλθουν σε έναν από τους δύο εξυπηρετητές για την εξυπηρέτησή τους. Επιλέγουμε για τις επιλογές αυτές να γίνονται κατά πιθανότητα 50% για τον καθένα.



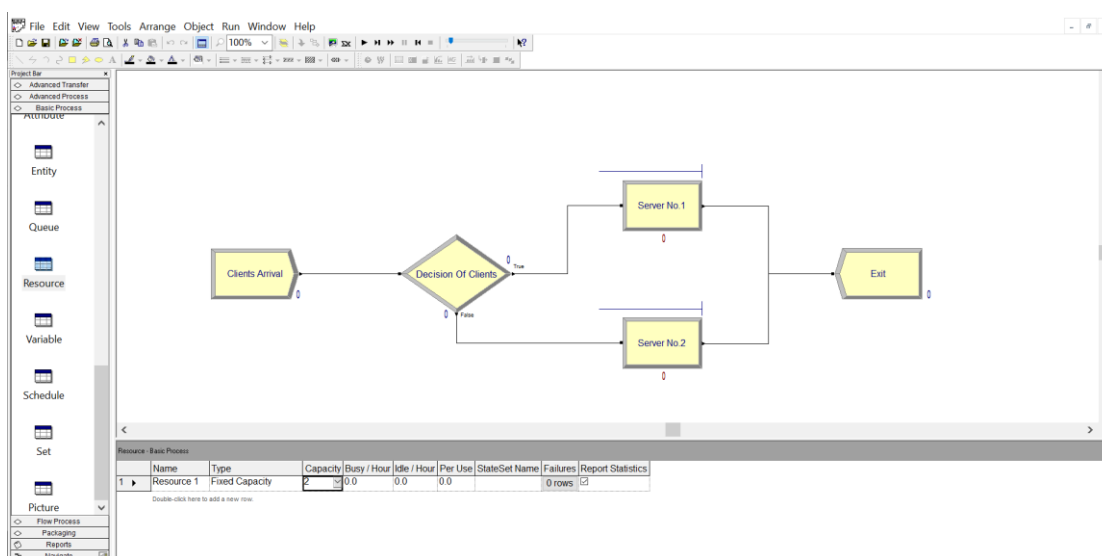
Το μοντέλο Process αναφέρεται στον τρόπο και στον χρόνο εξυπηρέτησης του κάθε πελάτη. Στην επιλογή Action επιλέγουμε το Seize Delay Release, που σημαίνει ότι ο κάθε πελάτης θα περιμένει σε ουρά και θα εξυπηρετηθεί, μόνο στην περίπτωση που τελειώσει την εξυπηρέτηση του ο πρώτος που βρίσκεται πριν από αυτόν. Για τους χρόνους εξυπηρέτησης, επιλέγουμε το Expression και ύστερα γράφουμε στο πλαίσιο που ανοίγει EXPO(20) (δηλαδή Exponential με μέσο όρο χρόνων 20 λεπτά).



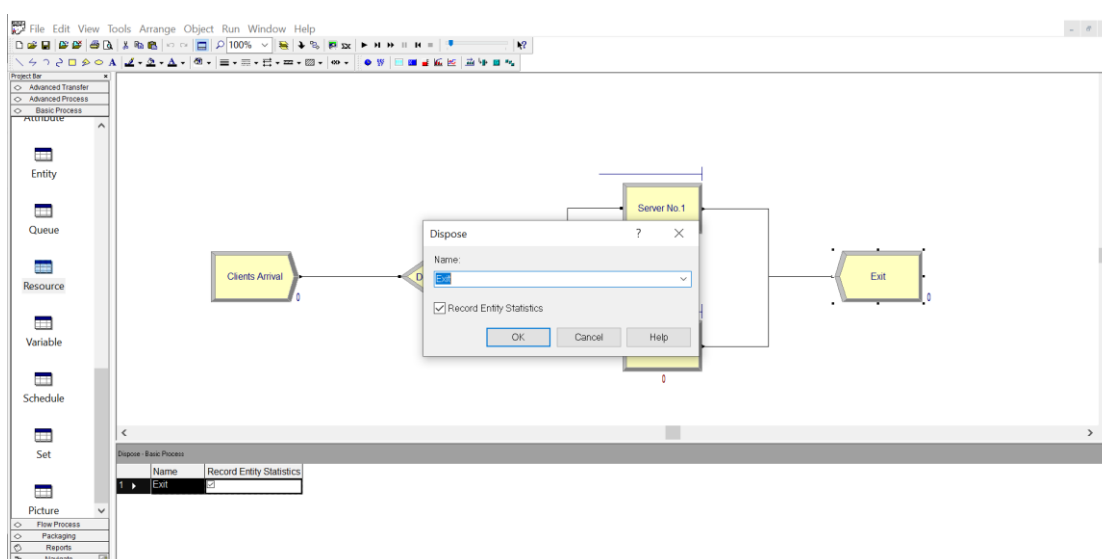
Από την επιλογή Resource, κάνουμε Add μία νέα πηγή, η οποία εμφανίζεται προεπιλεγμένα ως Resource 1 (μπορούμε να το κάνουμε μετονομασία). Βάζουμε ακριβώς τα ίδια στοιχεία και για το μοντέλο Process Server No.2.



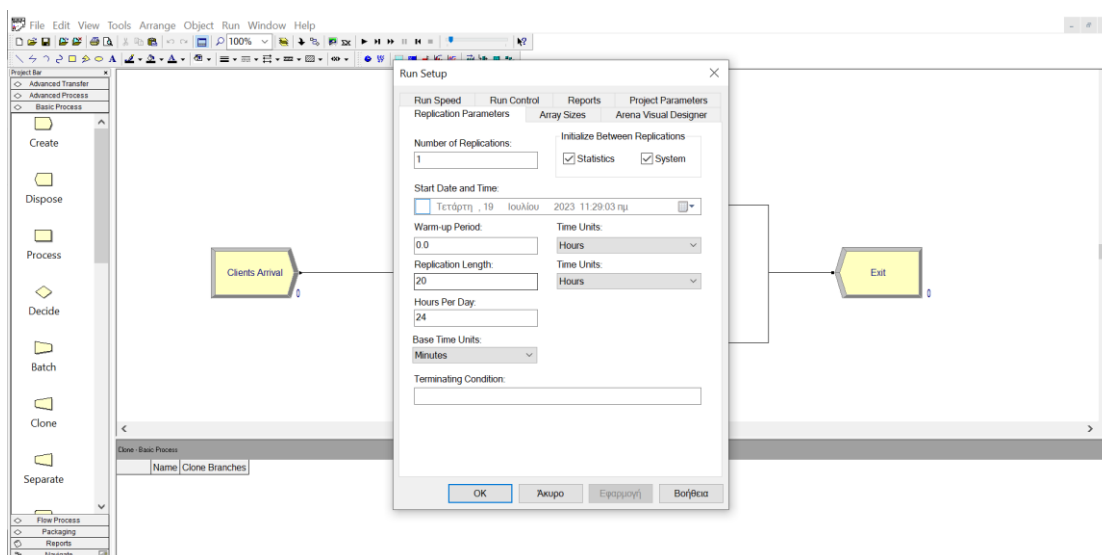
Το Resource δίνεται ως επιλογή DATA από την εργαλειοθήκη που επιλέγονται και τα μοντέλα για την κατασκευή του συστήματος. Με την επιλογή του, εμφανίζεται το πλαίσιο κάτω από το μοντελοποιημένο σύστημα με την επιλογή για την χωρητικότητα του συστήματος. Η χωρητικότητα επιλέγεται ως Fixed Capacity με αριθμό 2 (βάζουμε 2, επειδή έχουμε δύο μοντέλα Process, δηλαδή χωρητικότητα 2 για το καθένα και συνολικά $2+2=4$).



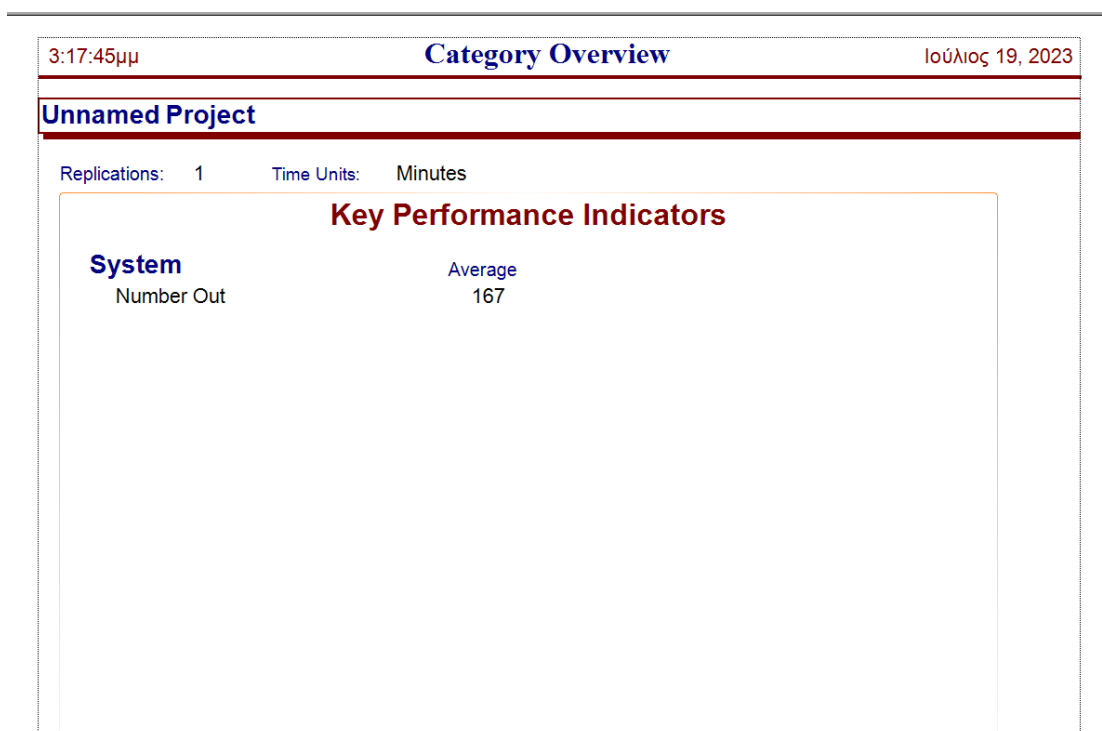
Το μοντέλο Dispose δηλώνει απλά την έξοδο των πελατών από το σύστημα.



Τα μοντέλα έχουν συνδεθεί κατάλληλα με γραμμές σύνδεσης για την προσομοίωση του συστήματος. Θα τρέξουμε το πρόγραμμα για 48 ώρες και θα λάβουμε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν.



Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι τα εξής:



3:18:11μμ

Category by Replication

Ιούλιος 19, 2023

Unnamed Project

Replications: 1

Replication 1

Start Time: 0,00

Stop Time: 2.880,00

Time Units: Minutes

Entity

Time

VA Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	19.7386	(Insufficient)	0.06983940	102.96
NVA Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0
Wait Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	15.7191	(Insufficient)	0	119.45
Transfer Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0

(Εικόνα 4.3.2. Αποτελέσματα της προσομοίωσης του συστήματος)

Other Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0
Total Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	35.4577	(Insufficient)	0.06983940	146.11
Other				
Number In	Value			
Clients	178			
Number Out	Value			
Clients	167			
WIP	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	2.2579	0,981240940	0	11.0000
Queue				
Time				
Waiting Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Server No.1.Queue	17.4102	(Insufficient)	0	115.10
Server No.2.Queue	15.2267	(Insufficient)	0	119.45

3:19:34μμ

Queues

Ιούλιος 19, 2023

Unnamed Project

Replications: 1

Replication 1

Start Time: 0,00

Stop Time: 2.880,00

Time Units: Minutes

Queue Detail Summary

Time

Waiting Time

Server No.1.Queue17.41

Server No.2.Queue15.23

Other

Number Waiting

Server No.1.Queue0.64

Server No.2.Queue0.46

Εάν στα μοντέλα Create και Process, αντί για Expo επιλέξουμε Constant, δηλαδή τα λ, μ είναι ακριβώς 15 και 20 λεπτά αντίστοιχα, και όχι κατά μέσο όρο αυτών, θα βρούμε τα εξής αποτελέσματα:

9:12:19μμ

Entities

Ιούλιος 22, 2023

Unnamed Project

Replications: 1

Replication 1

Start Time: 0,00

Stop Time: 2.880,00

Time Units: Minutes

Entity Detail Summary

Time

	NVA Time	Other Time	Total Time	Transfer Time	VA Time
Clients	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00
Total	0.00	0.00	20.00	0.00	20.00

Other

	Number In	Number Out
Clients	193	191
Total	193	191

9:11:39πμ

Category by Replication

Ιούλιος 22, 2023

Unnamed Project

Replications: 1

Replication 1

Start Time: 0,00 Stop Time: 2.880,00 Time Units: Minutes

Entity

Time

VA Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	20.0000	(Insufficient)	20.0000	20.0000
NVA Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0
Wait Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0
Transfer Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0

Other Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	0	(Insufficient)	0	0
Total Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	20.0000	(Insufficient)	20.0000	20.0000
Other				
Number In	Value			
Clients	193			
Number Out	Value			
Clients	191			
WIP	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Clients	1.3316	(Correlated)	0	2.0000
Queue				
Time				
Waiting Time	Average	Half Width	Minimum	Maximum
Server No.1.Queue	0	(Insufficient)	0	0
Server No.2.Queue	0	(Insufficient)	0	0

4.4.ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΜΕ ΤΟ EXTENDSIM

Το ExtendSim είναι ένα πρόγραμμα προσομοίωσης για την μοντελοποίηση διακριτών και συνεχών συμβάντων, που περιλαμβάνει στο περιβάλλον του χρήσιμες βιβλιοθήκες για την ανάπτυξη της. Η χρήση του είναι αξιόπιστη για την δημιουργία κατάλληλων μοντέλων, τα οποία μοντέλα δηλώνονται από χαρακτηριστικά στοιχεία μέσα από τις βιβλιοθήκες που διαθέτονται, τα οποία ονομάζονται **blocks**. Αυτά τα στοιχεία αναφέρονται σε μία ή περισσότερες λειτουργίες που συμβαίνουν στο αρχικό σύστημα. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνουν στο λογισμικό τους εικονίδια, διαλόγους και διαδραστικές ρουτίνες. Τα block μένουν πάντα αποθηκευμένα στις βιβλιοθήκες, ώστε να χρειαστεί να χρησιμοποιηθούν στα ίδια ή και σε άλλα μοντέλα για την εκτέλεση των λειτουργιών τους. Στο γραφικό περιβάλλον του ExtendSim, τα block συνδέονται μεταξύ τους το ένα μετά το άλλο με γραμμή σύνδεσης με τέτοιο τρόπο, που βήμα προς βήμα αναπαριστούν την διαδικασία που ακολουθεί το σύστημα, καθώς αυτό αλλάζει, σύμφωνα με τις ενέργειες του. Η δημιουργία και η τροποποίηση των block κατά την μοντελοποίηση του συστήματος είναι εφικτή, ωστόσο μπορεί να προκαλέσει επιπλοκές για τα μοντέλα που δημιουργούνται. Για αυτό το λόγο, ο χρήστης παίρνει σωστά και ένα ένα τα βήματα που χρειάζονται για την υλοποίηση της προσομοίωσης του συστήματος. Τα block στηρίζονται σε μία γλώσσα προγραμματισμού, την ModL, η οποία μοιάζει αρκετά με την γλώσσα προγραμματισμού C.

Εκτός από τα block, το ExtendSim διαθέτει στις βιβλιοθήκες του προσαρμόσιμες αναφορές και plotters που βοηθούν σε πλήρη ανάλυση του συστήματος, καθώς και μια κατάλληλη βάση δεδομένων, με την οποία ο χρήστης δύναται να κάνει τροποποιήσεις στις τιμές των μοντέλων, ώστε να γίνονται οι υποθέσεις που απαιτούνται για την μοντελοποίηση του συστήματος, σύμφωνα με τις πληροφορίες που χαρακτηρίζουν τον τρόπο λειτουργίας του.

Ας παρατηρήσουμε τα στοιχεία αυτά blocks του ExtendSim και ποια είναι η λειτουργία τους:

▪  : Αυτό είναι το εκτελεστικό στοιχείο block (Executive block), το οποίο δηλώνει το συνολικό χρόνο διάρκειας του συστήματος.

▪  : Αυτό είναι το block δημιουργίας (Create block), το οποίο δηλώνει την είσοδο των δεδομένων στο σύστημα.

▪  : Αυτό είναι το block ουράς (Queue block), το οποίο δηλώνει την παραλαβή και την εισαγωγή των δεδομένων στο σύστημα, καθώς μπορούν να δημιουργούν και μία ουρά μέσα από την αναμονή τους. Η πειθαρχία της ουράς στην προκειμένη περίπτωση καθίσταται, ως προαιρετική, με την μέθοδο FIFO.

▪  : Αυτό είναι το block δραστηριότητας (Activity block), το οποίο χρησιμοποιείται για τις ενέργειες που καθορίζονται εντός του συστήματος, όπως η εξυπηρέτηση του πελάτη. Το χρονόμετρο μέσα στο πλαίσιο δείχνει την χρονική διάρκεια που απαιτήθηκε για την ενέργεια που υλοποιήθηκε.

▪  : Αυτό είναι το block τυχαίων αριθμών (Random number), το οποίο χρησιμοποιείται για την δειγματοληψία που γίνεται από την κατανομή των πιθανοτήτων των ενεργειών.

▪  : Αυτό είναι το block εξόδου, το οποίο δηλώνει την έξοδο των δεδομένων από το σύστημα.

Η διαδικασία της προσομοίωσης με το ExtendSim λοιπόν, επιτρέπει στον χρήστη να βλέπει την αναπαράσταση των μοντέλων του συστήματος σε ένα εικονικό πλαίσιο.

Μέσω αυτής της διεργασίας, ο χρήστης ελέγχει ποια είναι τα προβλήματα που υπάρχουν στο σύστημα πριν ξεκινήσει η διαδικασία της μοντελοποίησης και ύστερα καθορίζονται οι ρόλοι των μεταβλητών που διέπουν τα χαρακτηριστικά του συστήματος. Μέσα από την λειτουργία του, προβλέπονται τα πιθανά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν μέσα από την εξέλιξη της μοντελοποίησης του συστήματος, καθώς και οι επιπτώσεις που

μπορούν να συμβούν σε αυτό, για αυτό και προχωρά συνεχώς σε καινούριες αποφάσεις που είναι περισσότερο εύχρηστες σε σχέση με προηγούμενες που φαίνονταν αναξιόπιστες.

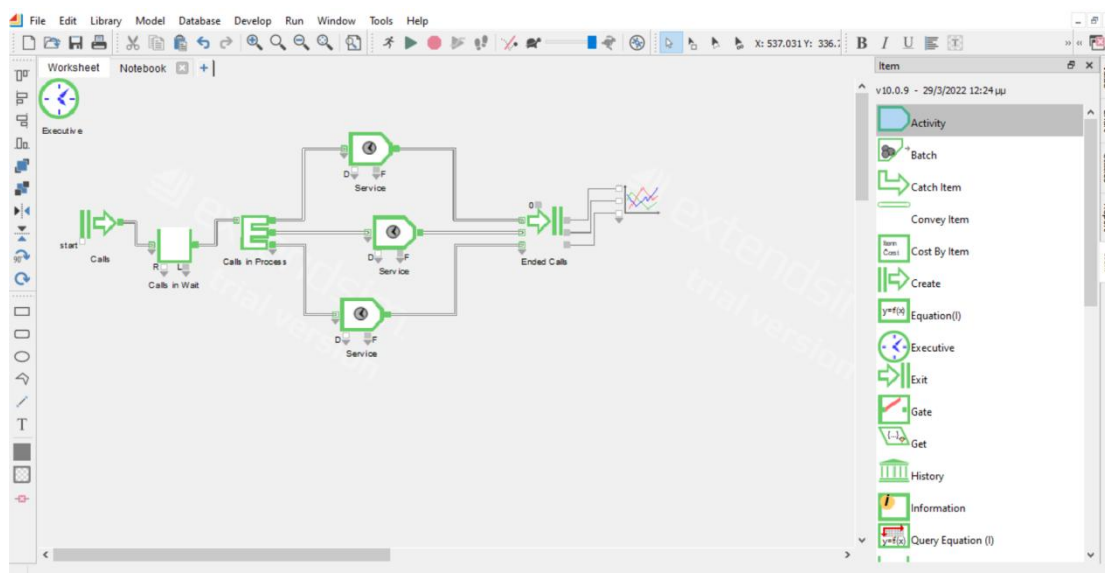
Το ExtendSim περιλαμβάνει επίσης ορισμένα χαρακτηριστικά:

- Στοιχεία: Τα στοιχεία είναι τα διακριτά δεδομένα που παρατηρούνται κατά τις μεταβάσεις από το ένα block στο άλλο, όταν συμβαίνει κάποιο γεγονός.
- Τιμές: Οι τιμές είναι οι προκαθορισμένες αριθμητικές τιμές που δίνονται στα μοντέλα, ανάλογα με τις ενέργειες που γίνονται καθώς το σύστημα εξελίσσεται. Τα χαρακτηριστικά μοντέλα διαθέτουν κατάλληλους πόρους για την υποδοχή εισόδων και εξόδων των τιμών και των στοιχείων. Μέσα από αυτούς τους πόρους, διασυνδέονται τα block και μεταβιβάζονται τα στοιχεία και καταγράφονται οι τιμές. Η διαδικασία της μεταβίβασης απεικονίζει την τιμή (ή αντίστοιχα το στοιχείο) που εξέρχεται από την έξοδο του προηγούμενου block, να καταλήγει στην είσοδο της τιμής (ή αντίστοιχα του στοιχείου) του επόμενου block.

Παράδειγμα: Έχουμε μία μικρή εταιρεία τηλεφωνικού κέντρου εξυπηρέτησης πελατών για την επαναλειτουργία ηλεκτρονικών προϊόντων. Στην εταιρεία υπάρχουν 3 άτομα για την εξυπηρέτηση των πελατών (μέσω τηλεφωνικής κλήσης), για την χειραγώγηση τυχόν προβλημάτων που αντιμετωπίζει το δοθέν προϊόν του κάθε εξυπηρετούμενου. Όταν ένας νέος πελάτης καλεί στην εταιρεία, αλλά βρίσκει όλους τους εξυπηρετητές κατειλημμένους, θα περιμένει σε γραμμή αναμονής. Οι υπάλληλοι δέχονται κλήσεις κάθε 4 λεπτά και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών είναι 9 λεπτά. Επιπλέον, το ωράριο πρόγραμμα για την υποδοχή των κλήσεων των πελατών είναι από τις 09:00–13:00. Να μοντελοποιηθεί και να γίνει η προσομοίωση του συστήματος με τη χρήση του ExtendSim.

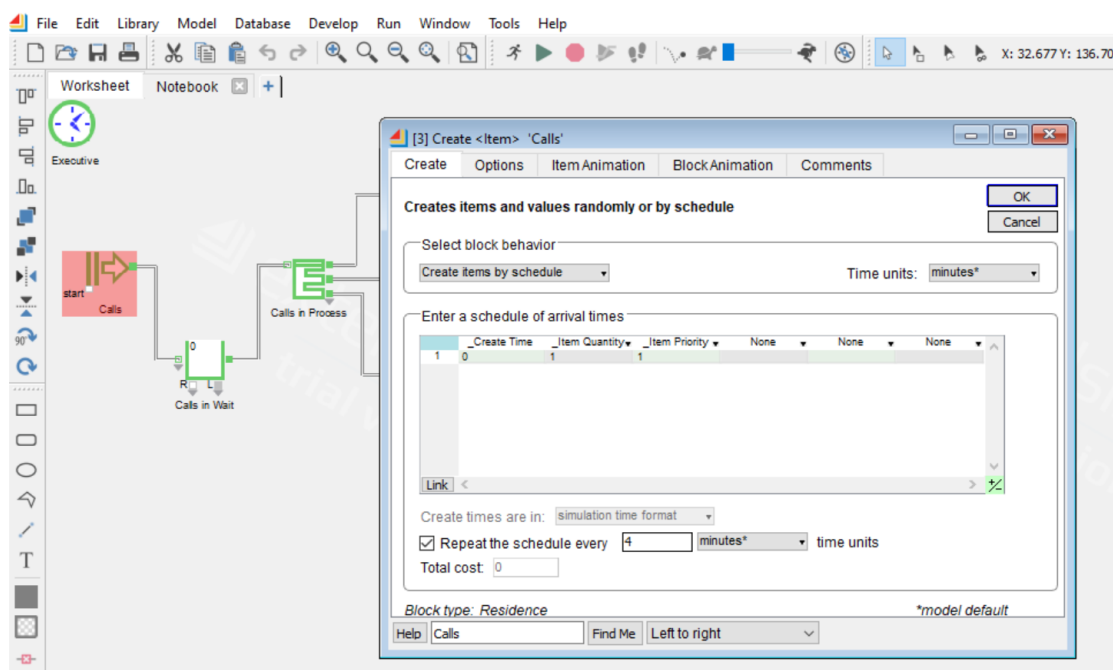
Λύση: Το σύστημα είναι του τύπου M/M/N/N Erlang-C, εφόσον οι πελάτες που καλούν και βρίσκουν κατειλημμένο κάθε εξυπηρετητή, περιμένουν σε αναμονή έως ότου βρεθεί ελεύθερος εξυπηρετητής. Θα θεωρήσουμε, επίσης, ότι εφόσον η εταιρεία λειτουργεί για το συγκεκριμένο ωράριο, οι κλήσεις που δέχεται η εταιρεία δεν δύναται να είναι άπειρες,

επομένως $c \neq \infty$. Για την μοντελοποίηση, κατασκευάζουμε το σύστημα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4.1.

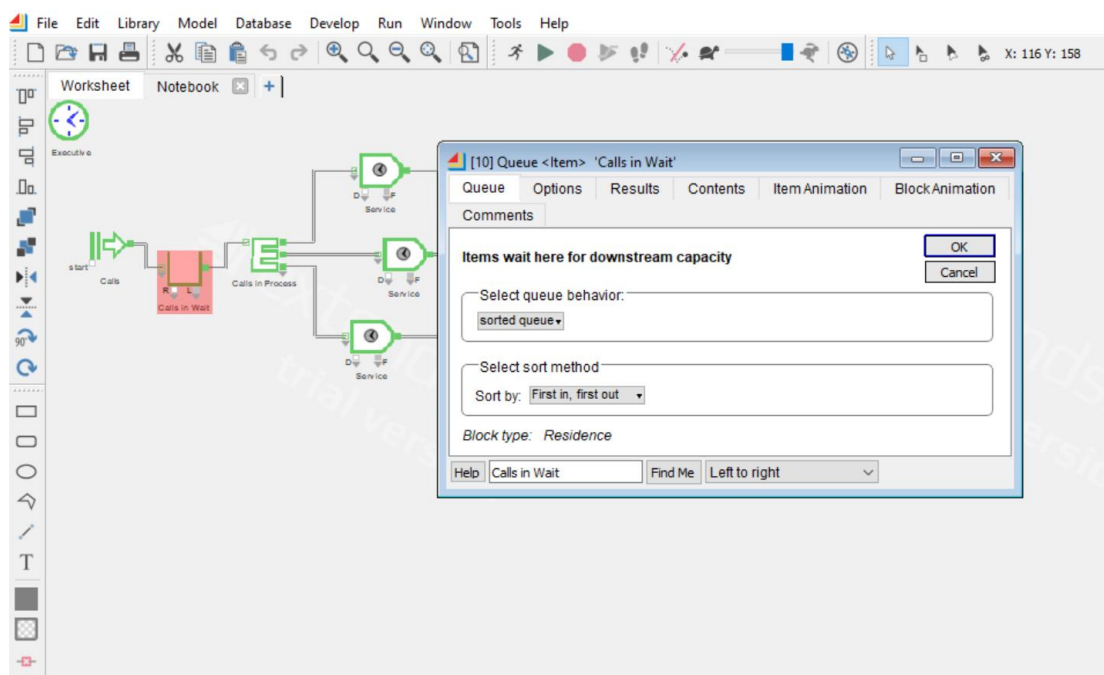


(Εικόνα 4.4.1. Η απεικόνιση της μοντελοποίησης του συστήματος)

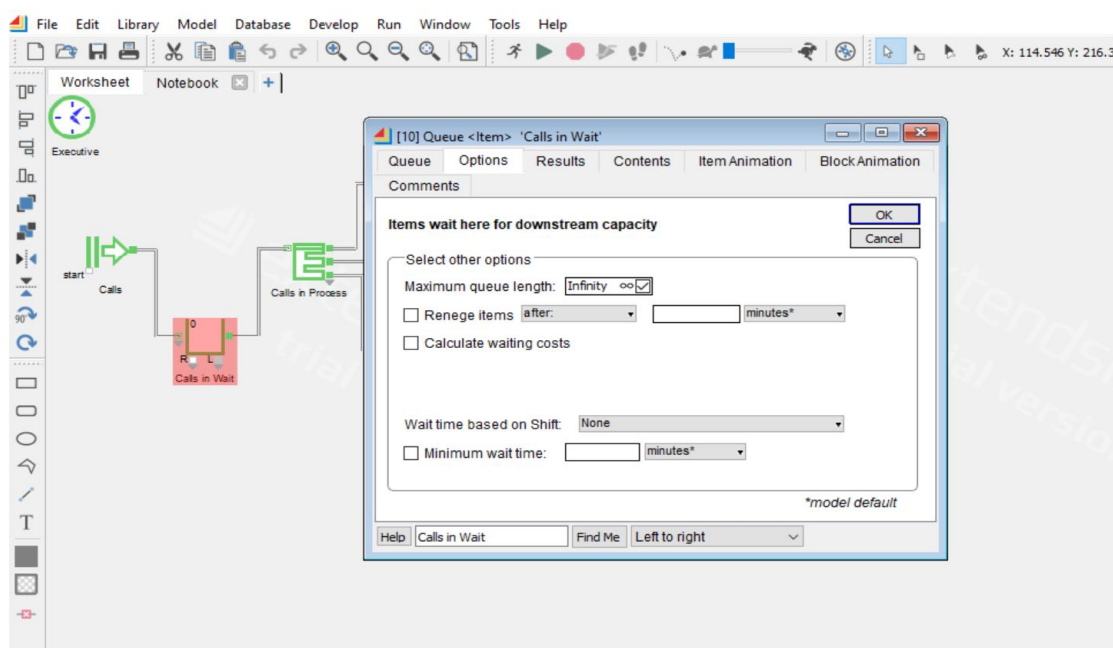
Επιλέγουμε τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος ως εξής:



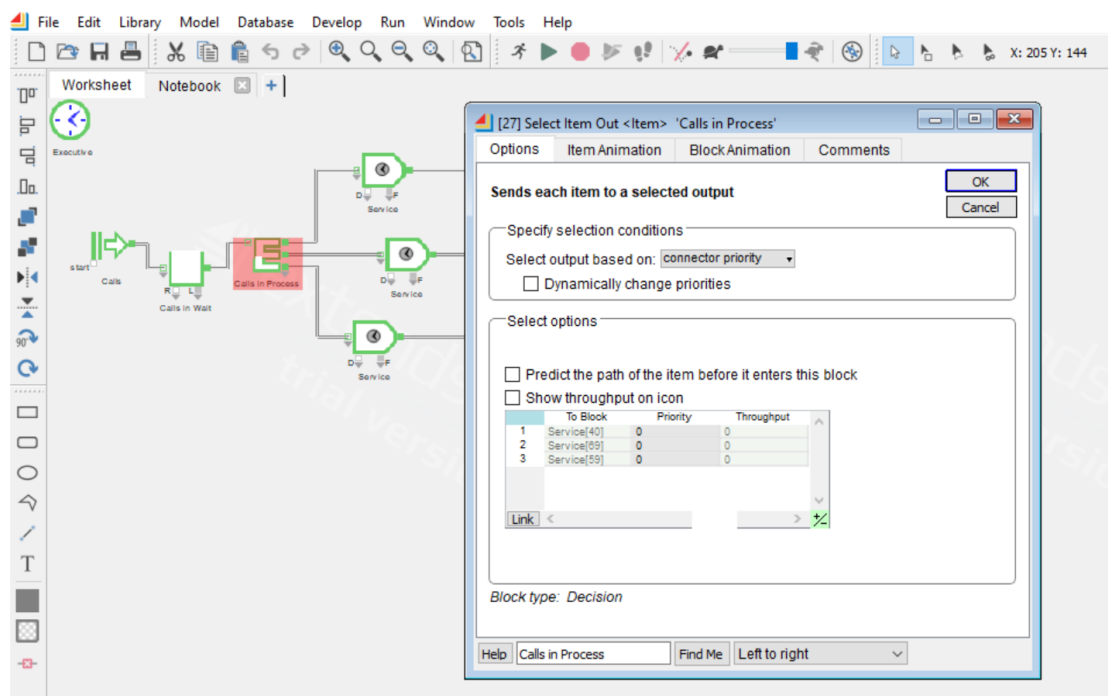
Επιλέγουμε από το μοντέλο Create τον χρόνο εισαγωγής των κλήσεων να γίνεται κάθε 4 λεπτά, όπως αναφέρεται και στην εκφώνηση.



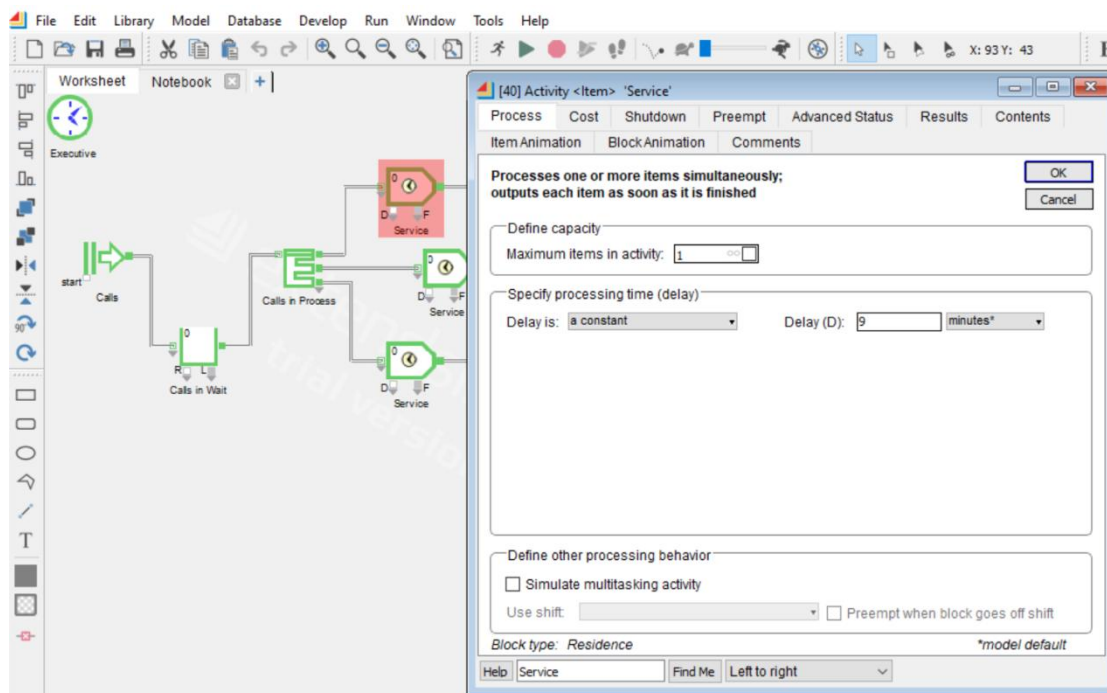
Από το μοντέλο Queue, οι κλήσεις ακολουθούν την πειθαρχία της ουράς FIFO.



Οι κλήσεις που εισέρχονται μπορούν να είναι και απείρως αριθμήσιμες (όχι όμως άπειρες), πράγμα το οποίο σημαίνει ότι μπορούν να υπάρχουν οσοδήποτε κλήσεις σε αναμονή, επομένως για την ουρά των κλήσεων βάζουμε άπειρο(∞).

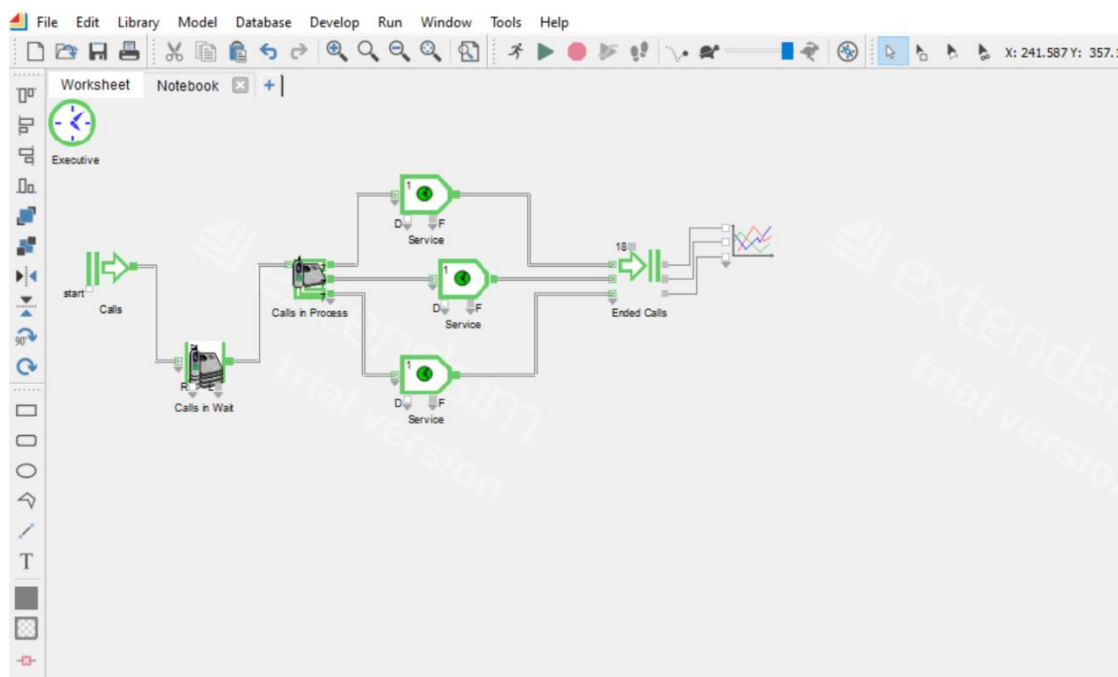


Το μοντέλο Select Item Out χρησιμεύει στον τρόπο με τον οποίο εντάσσεται κάθε δεδομένο για την εξυπηρέτηση του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επιλέγουμε οι κλήσεις να απαντώνται από τους εξυπηρετητές με βάση την προτεραιότητά τους, δηλαδή για μία κατειλημμένη θέση, η νέα κλήση να προβεί σε μία άλλη θέση εξυπηρέτησης.

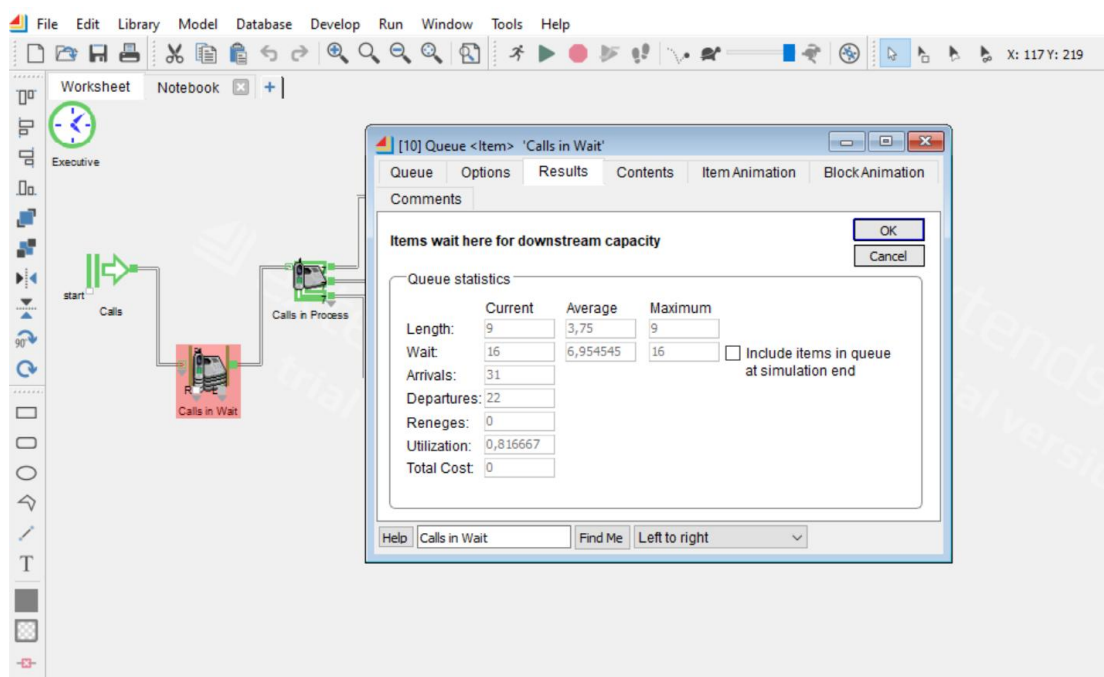


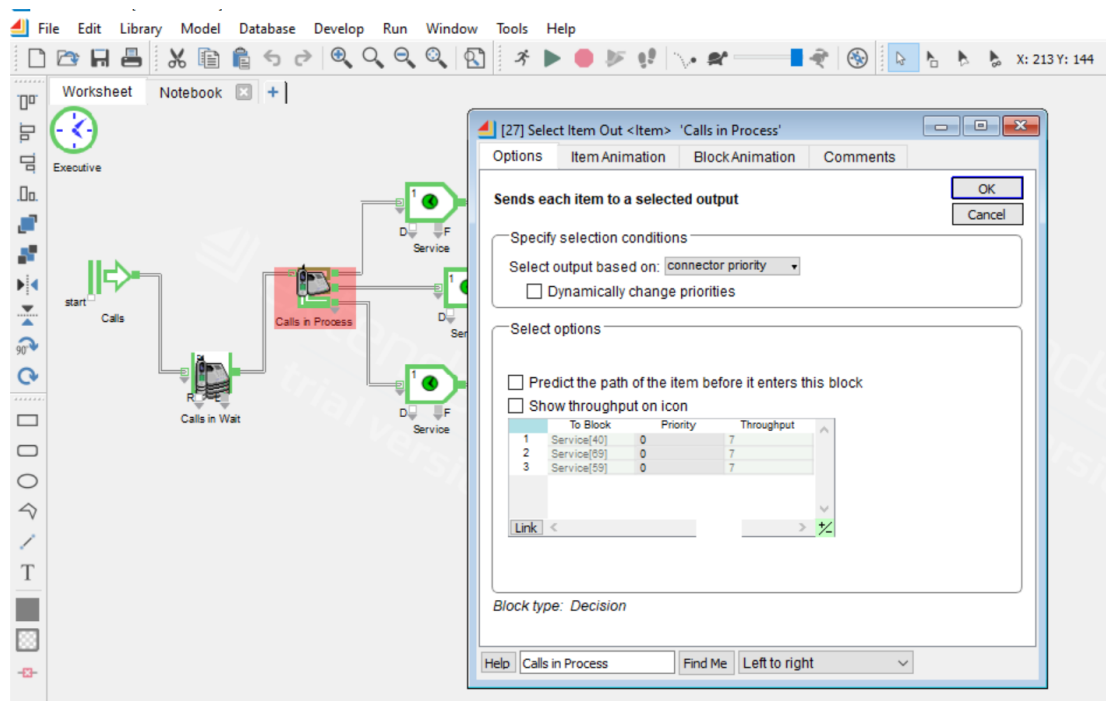
Στο μοντέλο Activity, ο κάθε εξυπηρετητής δέχεται από μία μόνο κλήση, επομένως για το Maximum items in capacity βάζουμε 1. Επίσης, δηλώνεται και η χρονική διάρκεια που κάνει κάθε πελάτης για να εξυπηρετηθεί, που είναι 9 λεπτά. Με τον ίδιο τρόπο, εισάγουμε τα ίδια στοιχεία και για τα υπόλοιπα μοντέλα Activity.

Θα τρέξουμε το πρόγραμμα για 60 λεπτά, δηλαδή θα παρατηρήσουμε την κατάσταση των κλήσεων μέσα σε μία ώρα. Θεωρούμε την αρχική χρονική στιγμή $t_0=0$, όπου και εισέρχεται η πρώτη κλήση. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει μετά την προσομοίωση του συστήματος θα είναι το εξής:



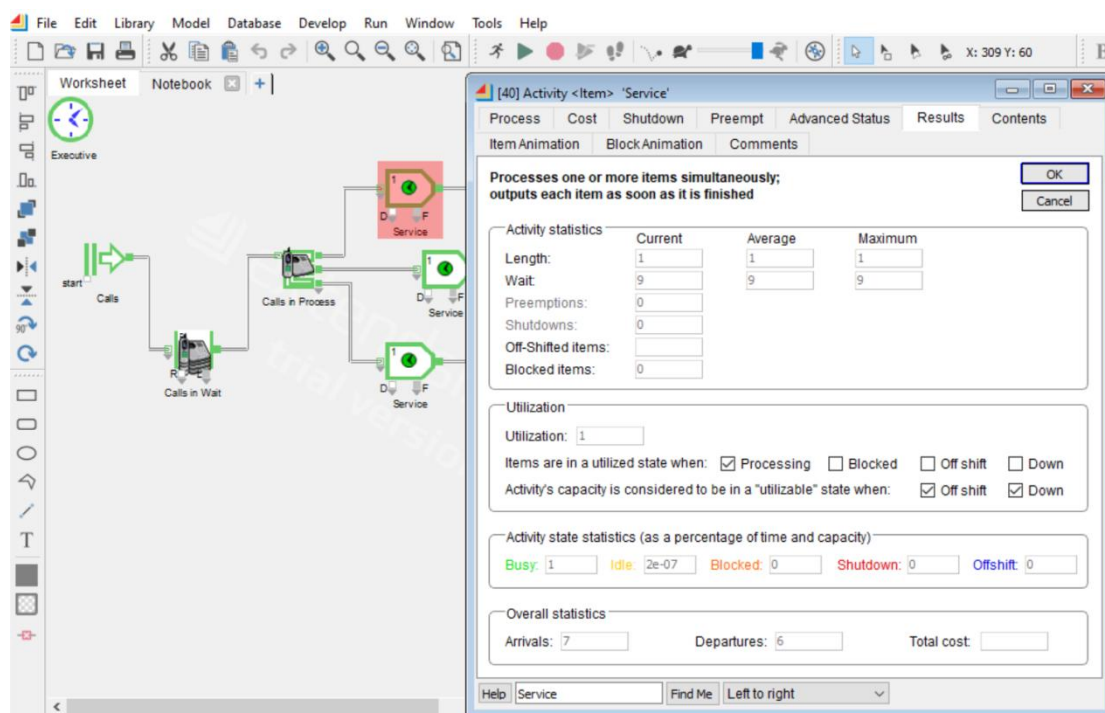
(Εικόνα 4.4.2. Η τελική ανάλυση του συστήματος, ύστερα από μία ώρα)



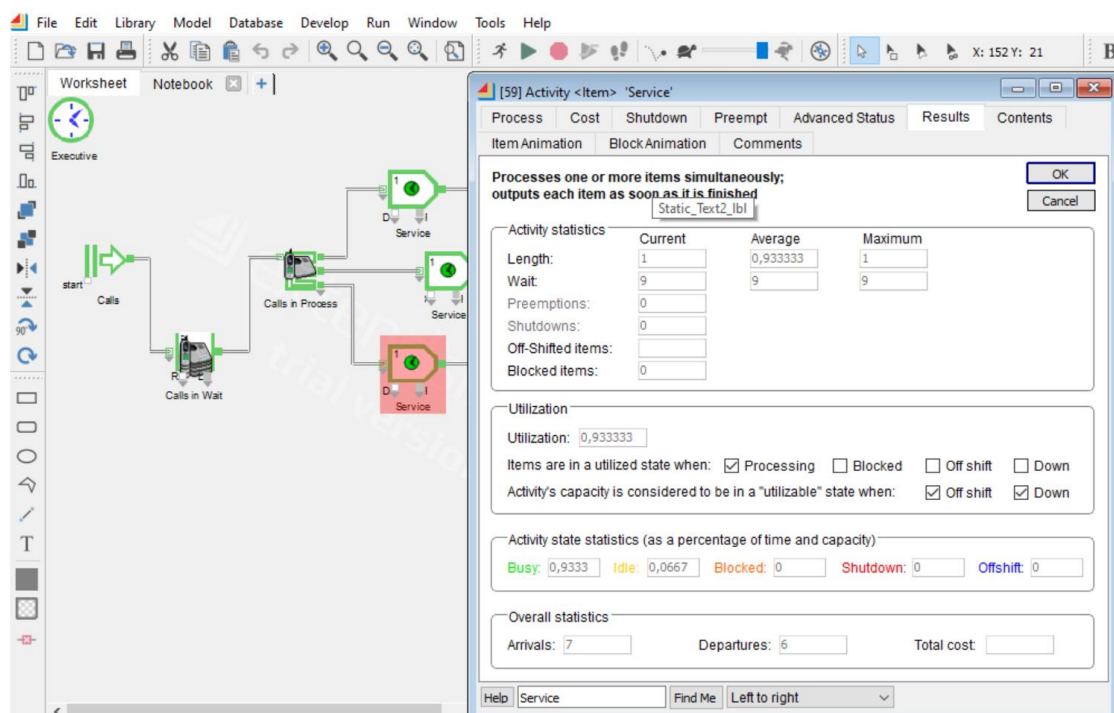
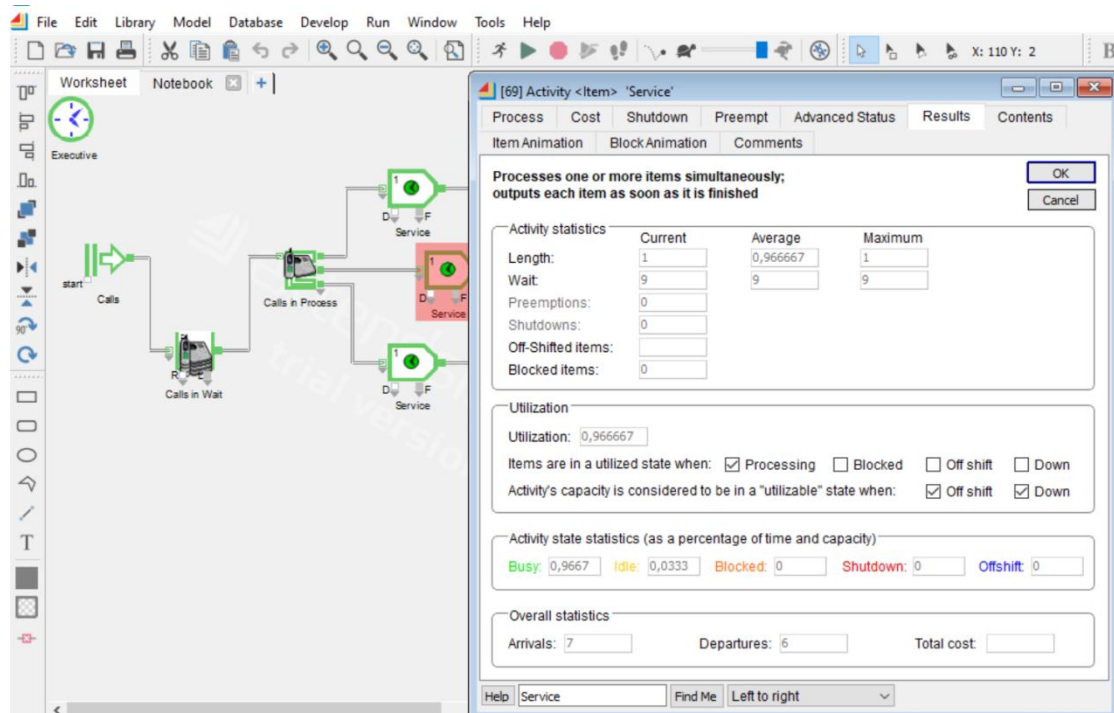


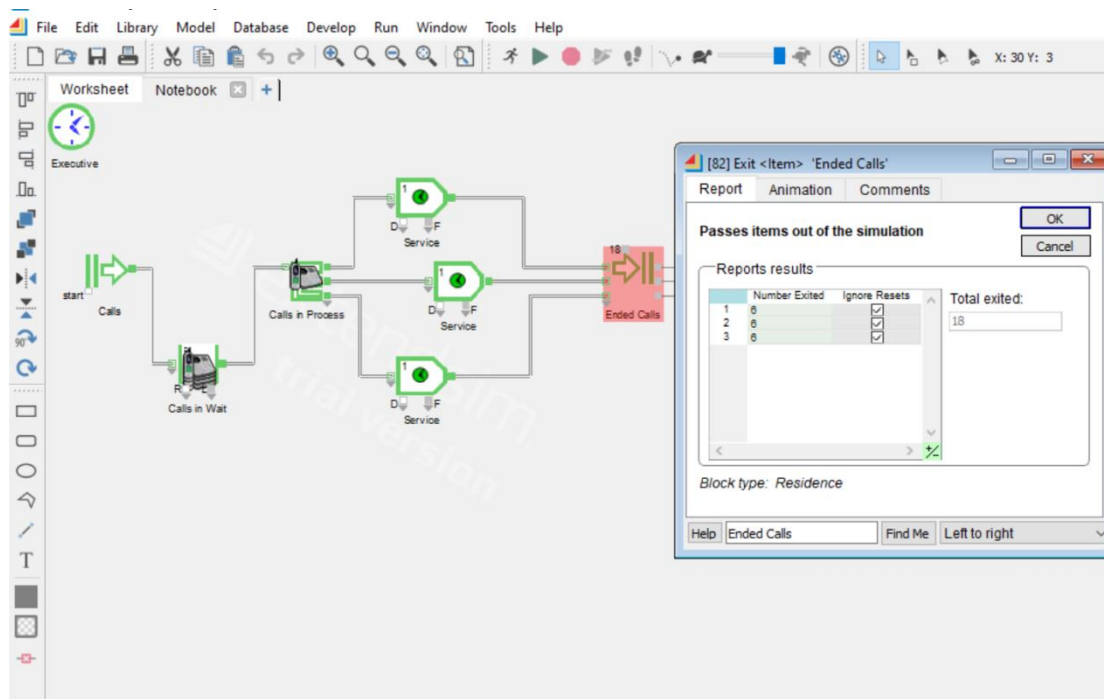
Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα της ουράς αναμονής, το μεγαλύτερο μήκος που προέκυψε στην ουρά μέσα σε μία ώρα είναι 10 κλήσεις (9 συν μία που βρίσκεται στο μοντέλο Calls in Process) και ο μέσος όρος των κλήσεων στην ουρά είναι 3,75. Την χρονική στιγμή που τελειώνει και η προσομοίωση $t=60$ και αναφέρεται ως current, το μήκος της ουράς είναι 9 συν την μία που έχει προωθηθεί στο μοντέλο Calls in Process για την εξυπηρέτησή του, άρα 10 κλήσεις (δηλαδή την χρονική στιγμή $t=60$ υπήρξε και το μεγαλύτερο μήκος ουράς). Αντίστοιχα, Ο μέγιστος χρόνος αναμονής που υπήρξε μεταξύ των κλήσεων είναι 16 λεπτά, όπως και στον current χρόνο και ο μέσος χρόνος αναμονής είναι $6.954545 \approx 6.9$ λεπτά. Οι κλήσεις πραγματοποιούνταν κάθε δύο λεπτά, επομένως όντως σε μία ώρα έγιναν συνολικά 30 κλήσεις, συν την μία που έγινε την χρονική στιγμή $t_0=0$ και από την ουρά αναμονής έφυγαν συνολικά 22 κλήσεις.

Από το μοντέλο Select Item Out, βλέπουμε και την επιλογή των κλήσεων να προβεί στον κάθε εξυπηρετητή (π.χ. σε μία ώρα και οι τρεις εξυπηρετητές δέχθηκαν 7 κλήσεις).

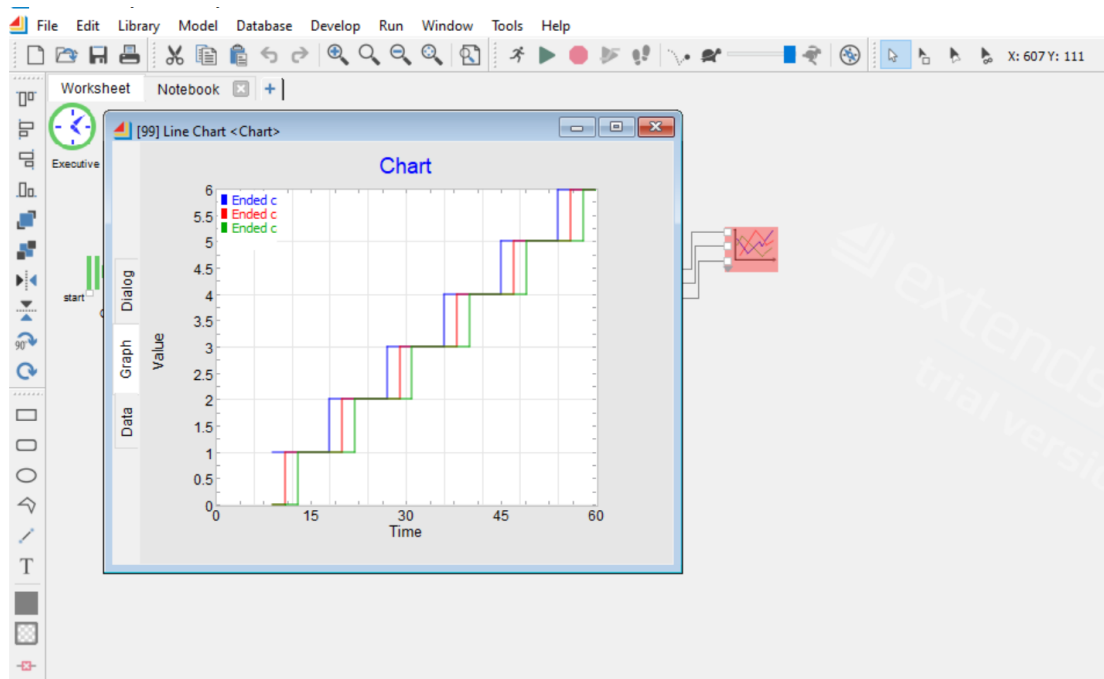


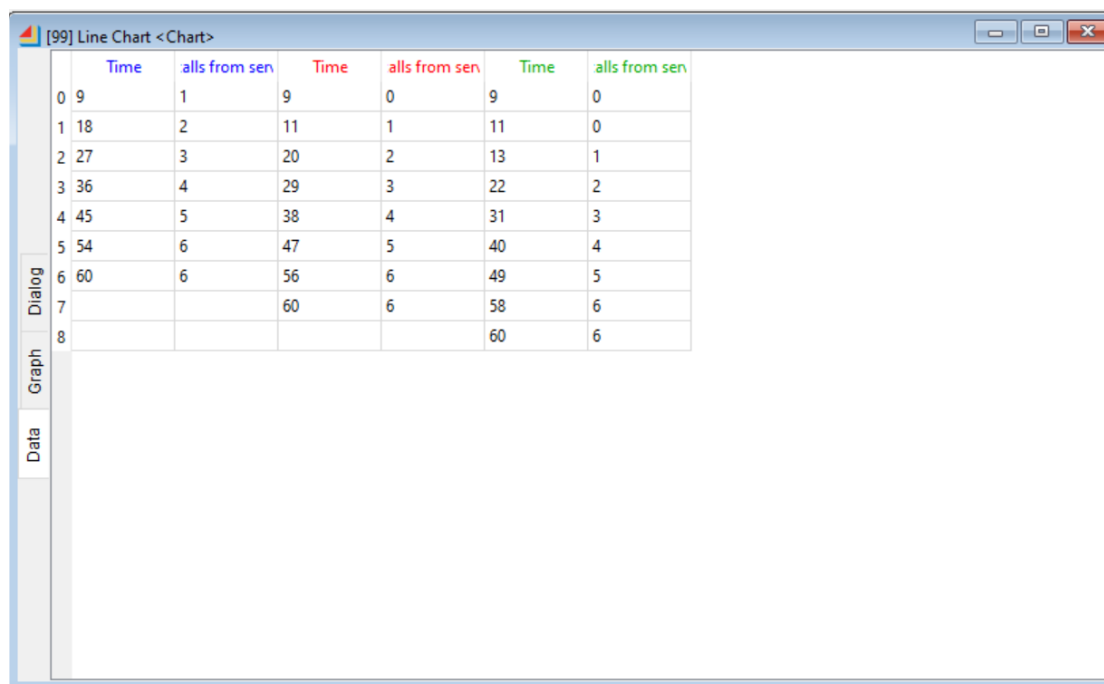
Στα μοντέλα Service, παρατηρούμε τα χαρακτηριστικά κάθε εξυπηρετητή, ύστερα από μία ώρα. Την χρονική στιγμή $t=60$, ο πρώτος εξυπηρετητής εξυπηρετεί τον 7^ο πελάτη του. Τα χαρακτηριστικά Busy και Idle αναφέρονται κατά ποσοστό χρόνου και χωρητικότητας για την εξυπηρέτηση που έχει κάνει μέσα στην διάρκεια των 60 λεπτών. Για τον κάθε εξυπηρετητή, παρατηρούνται και διαφορετικά, τέτοια, χαρακτηριστικά.



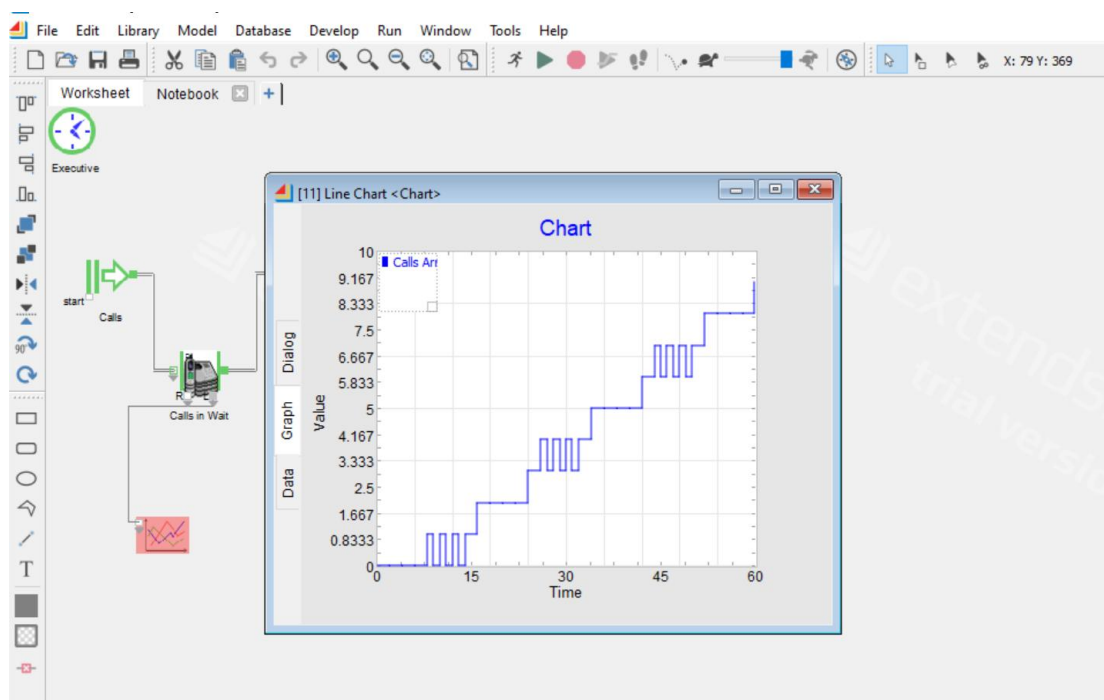


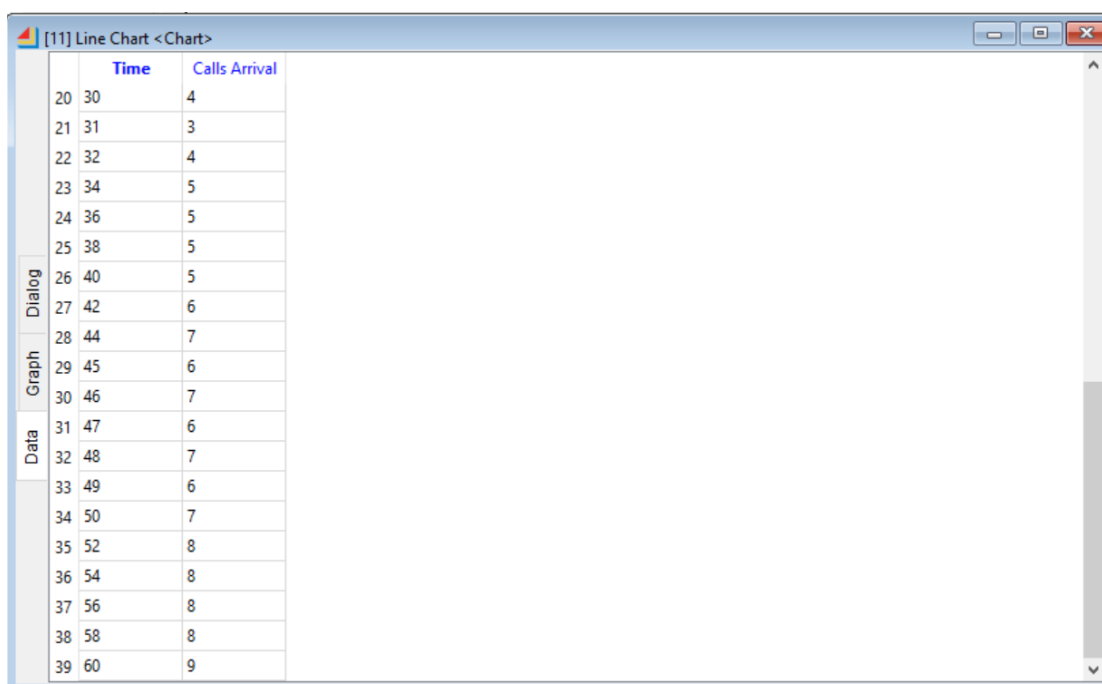
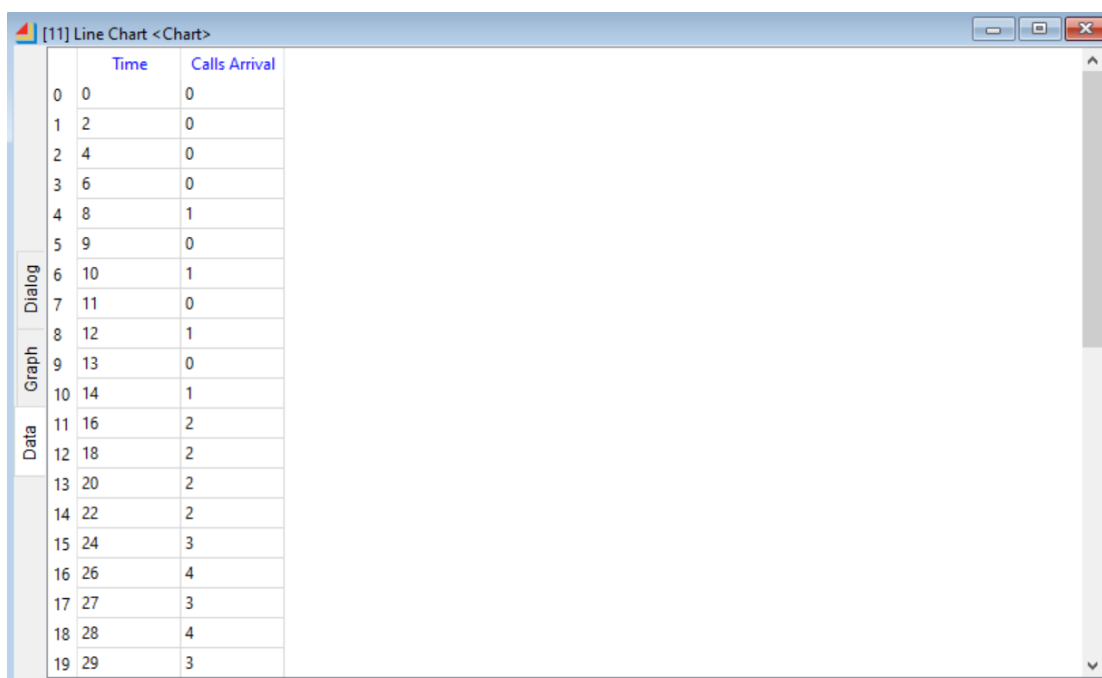
Εδώ φαίνονται οι συνολικές κλήσεις που έλαβαν τέλος για την εξυπηρέτησή τους (συνολικά 18 κλήσεις). Από τον κάθε έναν εξυπηρετητή, έφυγαν 6 πελάτες.





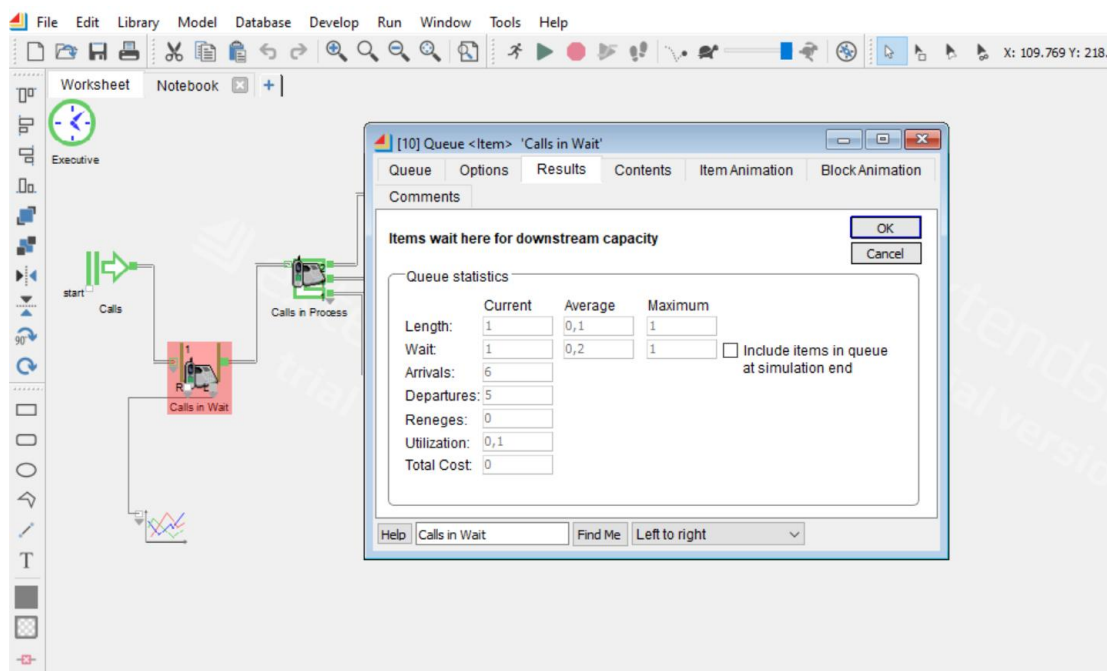
Από το διάγραμμα και τον πίνακα του διαγράμματος, βλέπουμε τις χρονικές στιγμές που τελείωσε η κάθε κλήση.





Από το διάγραμμα αυτό, βλέπουμε τις χρονικές στιγμές που εισήλθαν στην ουρά οι κλήσεις, καθώς μέσα από αυτές, ορισμένες προωθήθηκαν για την εξυπηρέτησή τους, μέσω του μοντέλου Calls in Process.

Θα θεωρήσουμε το σύστημα για το χρονικό διάστημα των 10 λεπτών, όπου πραγματοποιήθηκαν 6 κλήσεις και τελείωσαν 5, άρα $n=6$. Τα αποτελέσματα του συστήματος μετά την προσομοίωση είναι:



(Εικόνα 4.4.3. Αποτελέσματα της προσομοίωσης σε χρονική διάρκεια 10 λεπτών)

Ας παρατηρήσουμε το σύστημα με βάση τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ουράς αναμονής M/M/N/N Erlang-C.

· Η αναλογία του διακομιστή είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{3}{2}$$

· ο τύπος απώλειας του Erlang είναι:

$$E(n, \rho) = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!}} = \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)^n}{\sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)^n}{\frac{1}{0!} \left(\frac{3}{2}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{16}{67} \frac{1}{n!} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\text{Για } n=6: E(n, \rho) = \frac{\frac{1}{6!} \left(\frac{3}{2}\right)^6}{1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{9}{16}} \approx 0.0038$$

· οι ρυθμοί γεννήσεων-θανάτων είναι:

$$\lambda_n = 30 \text{ πελάτες/ώρα για κάθε } n, \quad \mu_n = \begin{cases} \frac{1}{9} n \text{ πελάτες/λεπτά}, & 1 \leq n \leq 5 \\ \frac{1}{3} \text{ πελάτες/λεπτά}, & 5 < n \leq 5+c \end{cases}$$

· Η πιθανότητα να μην υπάρξει καμία κλήση είναι η:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{E^i}{i!} + \sum_{i=N+1}^{N+c} \frac{E^i}{N!} \frac{1}{N^i - N}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} \left(\frac{38}{10000}\right)^i + \sum_{i=4}^{3+3} \frac{\left(\frac{38}{10000}\right)^i}{3!} \frac{1}{3^i - 3}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{38}{10000} + \frac{1}{2} \left(\frac{38}{10000}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{38}{10000}\right)^3 + \frac{\left(\frac{38}{10000}\right)^4}{6} \frac{1}{3^4 - 3} + \frac{\left(\frac{38}{10000}\right)^5}{6} \frac{1}{3^5 - 3} + \frac{\left(\frac{38}{10000}\right)^6}{6} \frac{1}{3^6 - 3}}$$

$$\approx 0.99$$

· Η πιθανότητα να συμβαίνουν k κλήσεις στο σύστημα δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Για } 0 \leq k \leq 3: P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 = 0.99 \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$\text{Για } 4 \leq k \leq 3+c: P_k = \frac{\rho^k}{k!} \left(\frac{\rho}{k}\right)^{k-N} P_0 = 0.99 \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{2}\right)^k \left(\frac{3}{2k}\right)^{k-3}$$

· Ο μέσος αριθμός των κλήσεων στην ουρά αναμονής είναι:

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{k=N+1}^{N+c} (k-N) P_k = \sum_{k=3+1}^{3+3} (k-3) P_k \\
&= 0.99 \left[\frac{1}{4!} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{3}{2 \cdot 4}\right)^{4-3} (4-3) + \frac{1}{5!} \left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{3}{2 \cdot 5}\right)^{5-3} (5-3) + \frac{1}{6!} \left(\frac{3}{2}\right)^6 \left(\frac{3}{2 \cdot 6}\right)^{6-3} (6-3) \right] \\
&\approx 0.09 \text{ κλήσεις}
\end{aligned}$$

· Ο μέσος αριθμός κλήσεων στο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{k=1}^N k P_k + \sum_{k=N+1}^{N+c} N P_k \\
&= \sum_{k=1}^3 k \cdot 0.99 \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{2}\right)^k + \sum_{k=3+1}^{3+5} 3 \cdot 0.99 \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{2}\right)^k \left(\frac{3}{2k}\right)^{k-3} \\
&= 0.99 \left[\frac{1}{1!} \left(\frac{3}{2}\right)^1 + 2 \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \left(\frac{1}{4!} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{3}{2 \cdot 4}\right)^{4-3} + \frac{1}{5!} \left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{3}{2 \cdot 5}\right)^{5-3} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{6!} \left(\frac{3}{2}\right)^6 \left(\frac{3}{2 \cdot 6}\right)^{6-3} + \frac{1}{7!} \left(\frac{3}{2}\right)^7 \left(\frac{3}{2 \cdot 7}\right)^{7-3} + \frac{1}{8!} \left(\frac{3}{2}\right)^8 \left(\frac{3}{2 \cdot 8}\right)^{8-3} \right] \right] \\
&\approx 3.4 = 3 \text{ κλήσεις}
\end{aligned}$$

· Ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων που παραμένουν στην ουρά σε αναμονή είναι:

$$\begin{aligned}
W_q &= \frac{L_q}{\lambda P_w}, \quad \text{με} \quad P_w = \frac{\frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{E^i}{i!} + \frac{E^N}{N!} \frac{N}{N-E}} \\
P_w &= \frac{\frac{1}{3!} \left(\frac{38}{10000}\right)^3 \frac{3}{3 - \frac{38}{10000}}}{\sum_{i=0}^{3-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{38}{10000}\right)^i + \frac{1}{3!} \left(\frac{38}{10000}\right)^3 \frac{3}{3 - \frac{38}{10000}}} \approx \frac{9}{10^9} = 0.000000009 \\
\text{Άρα: } W_q &= \frac{L_q}{\lambda P_w} = \frac{\frac{9}{10^2}}{\frac{1}{2} \frac{9}{10^9}} \approx 20000000 \text{ λεπτά}
\end{aligned}$$

· Ο μέσος χρόνος αναμονής για όλες τις κλήσεις θα είναι:

$$W = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{1}{2}} = 0.18 \text{ λεπτά}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Μέσα από τις ενέργειες που δόθηκαν για την προσομοίωση των συστημάτων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι με τη χρήση των κατάλληλων μεθόδων (όπως χρησιμοποιήσαμε και τις συγκεκριμένες τέσσερις αυτές μεθόδους), η προσομοίωση των ουρών αναμονής γίνεται με πιο εύχρηστο τρόπο, η εικόνα που παρατηρούμε για την μοντελοποίηση του συστήματος, μας οδηγεί με περισσότερη βεβαιότητα στην ακριβή λειτουργία του και τα αποτελέσματα που θέλουμε, διεξάγονται με γρήγορο ρυθμό και ακριβείς τιμές. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι, τόσο με την βοήθεια των προγραμμάτων, όσο και με την χρήση των σχέσεων που χαρακτηρίζουν ένα σύστημα ουράς αναμονής, καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα:

- Όπως είδαμε στο παράδειγμα του κεφαλαίου 4.1 για την προσομοίωση της ουράς M/G/1 με την μέθοδο Monte-Carlo, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για τρεις ώρες ο χρόνος αναμονής των πελατών στο σύστημα, βρέθηκε ως $W_1 = 9$ λεπτά. Αντίστοιχα, από τις σχέσεις που διέπουν τα χαρακτηριστικά της ουράς M/G/1, βρήκαμε ότι $W_2 = 10.47$ λεπτά. Βλέπουμε λοιπόν, ότι οι δύο αυτές μέθοδοι εύρεσης του μέσου χρόνου αναμονής στο σύστημα, έχουν ελάχιστη διαφορά μεταξύ τους. Το γεγονός ότι βγήκαν διαφορετικοί, οφείλεται στο ότι στην περίπτωση της προσομοίωσης προσμετρήθηκαν και οι ενδιάμεσοι χρόνοι εξυπηρέτησης μεταξύ του μικρότερου $\min=5$ λεπτά και μεγαλύτερου $\max=30$ λεπτά χρόνων εξυπηρέτησης, ενώ στην περίπτωση της σχέσης W που δηλώνει το μέσο χρόνο των πελατών στο σύστημα, δεν γνωρίζουμε τους ενδιάμεσους αυτούς χρόνους.

- Σύμφωνα με το 1^ο παράδειγμα του κεφαλαίου 4.2 για την προσομοίωση της ουράς M/M/1, εύκολα καταλαβαίνουμε ότι στην ουρά δεν θα υπάρχει κανένας πελάτης (εφόσον οι αφίξεις γίνονται κάθε 2 λεπτά, ενώ οι εξυπηρετήσεις κάθε 1 λεπτό), άρα και ο μέσος όρος των πελατών στην ουρά θα ισούται με 0, ενώ γενικά στο σύστημα θα υπάρχει κατά μέσο όρο σίγουρα ένας πελάτης για την εξυπηρέτηση του. Όσον αφορά τους μέσους χρόνους στην ουρά και στο σύστημα, πράγματι για την εξυπηρέτηση απαιτείται η διαδικασία 1 λεπτού, ενώ κατά μέσο όρο χρόνου οι πελάτες αποτελούν τις αφίξεις τους στο σύστημα κάθε 2 λεπτά. Σύμφωνα και με τα στοιχεία της ουράς αναμονής M/M/1, καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα.

Ομοίως για το 2^ο παράδειγμα με τα ίδια στοιχεία με το 1^ο παράδειγμα, αλλά με δύο εξυπηρετητές, δεν δύναται να υπάρξει ουρά αναμονής, καθώς και στο σύστημα θα βρίσκεται πάντα κατά μέσο όρο ένας πελάτης. Ο μέσος χρόνος των πελατών στην ουρά θα προσεγγίζει το μηδέν (εφόσον δεν υπάρχει ουρά) και ο μέσος χρόνος τους στο σύστημα θα αποτελεί περίπου 1 λεπτό για την εξυπηρέτηση τους.

- Από το παράδειγμα του κεφαλαίου 4.3 με τη χρήση του Arena για την ουρά αναμονής M/M/c/K, σύμφωνα με την προσομοίωση του συστήματος εντός 48 ωρών, στο σύστημα εισήλθαν 178 άτομα και αποχώρησαν 167. Ο μέσος χρόνος αναμονής των πελατών στην ουρά είναι $W_q = 15.7191$ και ο συνολικός χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι $W = 35.4577$. Για τον μέσο όρο των πελατών στο σύστημα, προέκυψε $L = 2.2579$ (αν παρατηρήσουμε, με την επιλογή Constant για την προσομοίωση της ουράς, βλέπουμε ότι ο μέσος χρόνος στην ουρά είναι $W_q = 20$ και ο μέσος όρος των πελατών στο σύστημα είναι $L = 1.33$).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των χαρακτηριστικών του συστήματος, βρήκαμε ότι:

$$W_q = 19.2 \quad , \quad W = 39.2 \quad \text{και} \quad L = 1.37$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι βρίσκουμε (αρκετά προσεγγιστικά) τα ίδια περίπου αποτελέσματα.

- Για την ουρά αναμονής τύπου M/M/N/N Erlang-C, χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο προσομοίωσης με τη χρήση του Extendsim DE. Από το παράδειγμα του κεφαλαίου 4.4, καταλήξαμε στα αποτελέσματα της προσομοίωσης της ουράς αυτής, που φαίνονται από την εικόνα 4.4.1. Βρήκαμε δηλαδή ότι ο μέσος όρος των κλήσεων στην ουρά είναι 0.1 και ο μέσος χρόνος των κλήσεων στο σύστημα είναι 0.2. Αντίστοιχα, από τις σχέσεις της ουράς M/M/N/N του Erlang-C, βρήκαμε ότι το L_q ισούται με 0.09 και ο μέσος χρόνος κλήσεων στο σύστημα είναι $W = 0.18$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι, κατά πολύ προσεγγιστικά, καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα για τον ρυθμό λειτουργίας του συστήματος.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως αναφέρθηκε, η κατάσταση της αναμονής αποτελεί ένα μη – προσοδοφόρο φαινόμενο για τους ανθρώπους, για το οποίο, για αρκετά χρόνια, πολλοί επιστήμονες αναζήτησαν μεθόδους για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού. Μέσα από τις έρευνες που αναπτύχθηκαν, έχουμε καταλήξει στις μαθηματικές σχέσεις που αναφέρονται στα χαρακτηριστικά του τύπου του Kendall. Οι μαθηματικές αυτές σχέσεις, μας βοηθούν να υπολογίζουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα, τα οποία καθορίζουν τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος αναμονής που μας ενδιαφέρει. Επομένως, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που έχουμε βρει, μπορούμε να καταλάβουμε και εάν χρειαστεί να προβούμε σε αλλαγές που θα βελτιώσουν την λειτουργία του συστήματος, που φυσικά θα ελαττώσουν την χρονική διάρκεια της αναμονής.

Ύστερα και από περαιτέρω επιστημονικές έρευνες, έχουμε καταλήξει και στην χρησιμότητα της προσομοίωσης, όχι μόνο για περιπτώσεις ουρών αναμονής, αλλά για οποιαδήποτε πραγματικά συστήματα αφορούν την καθημερινότητα μας. Από τις τέσσερις μεθόδους/προγράμματα που είδαμε για την προσομοίωση των ουρών αναμονής (Monte-Carlo, Petri nets, Arena, ExtendSim), ο χρήστης κατανοεί την λειτουργία του συστήματος μέσα από πιο εύχρηστες μεθόδους, όσον αφορά την μέθοδο Monte-Carlo, και μέσα από το εικονικό περιβάλλον, όσον αφορά τις υπόλοιπες τρεις μεθόδους προσομοίωσης. Μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι είναι πιο συνετό να χρησιμοποιεί κανείς την προσομοίωση τέτοιων συστημάτων, κυρίως μέσα από προγράμματα που χρησιμοποιούνται στην σημερινή εποχή, λόγω της διευκόλυνσης, άνεσης και καλύτερης παρατηρητικότητας που προσφέρουν στον χρήστη, καθώς και για πιο σίγουρα αποτελέσματα. Ωστόσο, όπως είδαμε και μέσα από τα συμπεράσματα που προέκυψαν για τις συγκρίσεις μεταξύ της προσομοίωσης και των μαθηματικών σχέσεων για τα συστήματα αναμονής, και οι δύο τρόποι εύρεσης των αποτελεσμάτων είναι αξιόπιστοι.

Μέχρι σήμερα (και κυρίως μέσα από την χρήση προγραμμάτων για την προσομοίωση συστημάτων), έχουν προσαρμοστεί κατάλληλες νέες τακτικές, που ωφέλησαν σημαντικά στη μείωση του κόστους που επιφέρει το φαινόμενο της αναμονής. Η διαδικασία που λαμβάνει ο κάθε άνθρωπος για το στόχο που επιθυμεί, αποτελεί πλέον λιγότερο χρονοβόρα δραστηριότητα, καθώς και οι νέες τακτικές, από τις οποίες εξαρτάται η

εξυπηρέτηση του κάθε ανθρώπου (ή γενικά οποιουδήποτε στοιχείου αφορά κάποια εξυπηρέτηση), αποδείχτηκαν αποτελεσματικά περισσότερο έγκυρες και με ελάχιστο οικονομικό κόστος.

Το προσωπικό που παρατηρούμε σε ορισμένες περιπτώσεις εξυπηρέτησης πελατών, όπως για παράδειγμα σε ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών, με το να υπάρχουν αρκετά άτομα για την βέλτιστα ταχεία εξυπηρέτηση των πελατών. Ασφαλώς και το προσωπικό που παρατηρείται δεν καλύπτεται από πάρα πολλά άτομα, λόγω του κινδύνου οικονομικού κόστους, ωστόσο ο πληθυσμός του αρκεί για την ικανοποιητική εξυπηρέτηση των περισσότερων πελατών.

Η ρομποτική μπορεί να αποτελεί κατάλληλο καθεστώς, η οποία στην εποχή μας έχει υλοποιηθεί σε πάρα πολλούς τομείς για την εξασφάλιση ζητημάτων που μας αφορούν, όπως για παράδειγμα φαίνεται σε ένα εργοστάσιο, όπου κατάλληλα μηχανήματα λειτουργούν με σταθερό ρυθμό για την παρασκευή αντικειμένων ή τεχνημάτων, σε σχέση με τον χρονικό ρυθμό που μπορούν να καλύπτουν οι εργαζόμενοι. Τα μηχανήματα αυτά λειτουργούν με βάση την εντολή που δόθηκε από τον εργαζόμενο/χρήστη μέσω κατάλληλου προγράμματος χειρισμού τους.

Τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα καθίστανται επίσης ως παράγοντες αντιμετώπισης του φαινομένου της αναμονής. Μέσω ειδοποιήσεων, κάποιος άνθρωπος που βρίσκεται σε φάση αναμονής για την εξυπηρέτηση του, μπορεί να ενημερωθεί για τα αποτελέσματα που εξελίσσονται για την επιτυχή και ολοκληρωμένη διαδικασία του σκοπού του. Μία τέτοια περίπτωση μπορούμε να σκεφτούμε για κάποιον πελάτη που θα χρειαστεί να εκπληρώσει κάποιου είδους συναλλαγή σε ένα ΑΤΜ μίας τράπεζας. Με την αποστολή μηνύματος στο τηλέφωνο του, ο συγκεκριμένος πελάτης θα γνωρίζει εάν θα πρέπει να βρεθεί στο σημείο της μηχανής ΑΤΜ ή όχι. Η μέθοδος αυτή, αν και δεν θεωρείται ότι μπορεί να μειώσει τον χρόνο που περιμένουν οι πελάτες για την ολική εξυπηρέτησή τους, παρ' όλα αυτά έχει ωφελήσει στο να μην χρειάζεται να παραμένουν σε αναμονή για το συγκεκριμένο θέμα που τους αφορά, δίνοντας τους την "ελευθερία" για τις περαιτέρω επιθυμίες τους.

Έτσι λοιπόν, με τον καιρό, η τεχνολογία εξελίσσεται ραγδαίως και η επιστήμη μπορεί να αναζητά νέες λύσεις ή μεθόδους, σε θέματα που αφορούν την βέλτιστα ικανοποιητική χορήγηση για τον κόσμο μας.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Αθανασόπουλος, Δ.Α. Θεωρία Πιθανοτήτων I, II. Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα, 1989, 1991.
- [2]. Alexopoulos, C. and A.F. Seila (1998), "Output Data Analysis," Chapter 7 in Handbook of Simulation, John Wiley and Sons, New York.
- [3]. Δ. Φακίνου, Ουρές Αναμονής, 2 η έκδ./2008, Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 45392, ISBN: 978-960-266-206-9.
- [4]. Λουκάκης, Μιχάλης (2015). [Στοχαστικές διαδικασίες](#). Αθήνα: ΣΕΑΒ. [ISBN 978-960-603-169-4](#)
- [5]. "Στοχαστικές ανελίξεις", Δάρας Τρύφων Ι., Σύψας Παναγιώτης Θ., Εκδόσεις Ζήτη Πελαγία & Σια Ο.Ε.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [6]. Adan, Ivo. ["Course QUE: Queueing Theory, Fall 2003: The M/M/1 system"](#) (PDF). Retrieved 2012-08-06
- [7]. Banks, j. (1998). Handbook of Simulation: Principles, Methodology, Advances, Applications and Practice. New York: Wiley
- [8]. Basset, E. E., Bremner, J. M. Jolliffe, I. T. Jones, B., Morgan, B. J. T. and North P. M. Statistics: Problems & Solutions. World Scientific, Singapore 2000.
- [9]. Braband, J. (1994). "Waiting time distributions for M/M/N processor sharing queues". [Communications in Statistics. Stochastic Models](#). **10** (3): 533–548. [doi:10.1080/15326349408807309](#).
- [10]. G. Bolch, S. M. Ross, Introduction to Probability Models, Academic Press, (10th ed.), 2009

- [11]. C. A. Petri. "Kommunikation mit Automaten", Schriften des Rheinisch-Westfälischen Institutes für instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, (1962) – "Invention" of Petri Nets
- [12]. Chandrasekaran, U., and S. Sheppard: Discrete Event Distributed Simulation-A Survey, Proc. Conference on Methodology and Validation, Orlando, Fla., pp. 32-37 (1987).
- [13]. David R, Alla H. Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets. 2nd ed 2010. pp. 1-550
- [14]. Dietz, J.L.G. (1999). Understanding and modeling business processes with DEMO, in: Proc. ER'99, Annual International Conference on Conceptual Modeling, Paris, November.
- [15]. Fuhrmann, S.W. (19984), A note on the M/G/1 queue with server vacations, Operations Research, 32, 1368-1373.
- [16]. J. Abate and H. Dubner (1968), A new method of generating power series expansions of functions, SIAM J. Numer. Anal., 5, 102–112.
- J. Abate, H. Dubner, and S. B. Weinberg (1968), Queueing analysis for the BIM 2314 disk storage facility, J. Assoc. Comput. Mach., 15, 577–589.
- [17]. J. Banks · J. Carson (2001). [Discrete-Event System Simulation](#). Prentice Hall. σελ. 3. ISBN 978-0-13-088702-3.
- [18]. [Gittins, John C.](#) (1989). Multi-armed Bandit Allocation Indices. John Wiley & Sons. p. 77. [ISBN 0471920592](#).
- [19]. Guoping Zeng (June 2003), "Two common properties of the erlang-B function, erlang-C function, and Engset blocking function", Mathematical and Computer Modelling, Elsevier Science, 37 (12–13): 1287–1296, [doi:10.1016/S0895-7177\(03\)90040-9](#)
- [20]. V. Gupta, M. Harchol-Balter, J.G. Dai and B. Zwart. On the inapproximability of M/G/K: why two moments of job size distribution are not enough. Queueing Systems, 64(1): 5–48, 2010.
- [21]. [Karlin, Samuel](#); McGregor, James (1957). "[The classification of birth and death processes](#)" (PDF). Transactions of the American Mathematical Society. 86 (2): 366–400. [doi:10.1090/S0002-9947-1957-0094854-8](#)

- [22]. [Kendall, D. G.](#) (1953). "[Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain](#)". The Annals of Mathematical Statistics. **24** (3): 338–354. [doi:10.1214/aoms/1177728975](#). [JSTOR 2236285](#)
- [23]. Kroese, D. P.; Brereton, T.; Taimre, T.; Botev, Z. I. (2014). "[Why the Monte Carlo method is so important today](#)". WIREs Comput Stat. 6 (6): 386 – 392. [doi:10.1002/wics.1314](#). [S2CID 18521840](#).
- [24]. Ramesh Nagarajan, Jim F. Kurose, and Don F. Towsley. 1991. Approximation Techniques for Computing Packet Loss in Finite-Buffered Voice Multiplexers. IEEE Journal on Selected Areas in Communications 9, 3 (April 1991), 368–377. <https://doi.org/10.1109/49.76635>
- [25]. Silva M. Introducing Petri nets. In: Di Cesare F, editor. Practice of Petri Nets in Manufacturing. Chapman Hall; 1993. pp. 1-62
- [26]. Simchi-Levi, D.; [Trick, M. A.](#) (2013). "Introduction to "Little's Law as Viewed on Its 50th Anniversary"". Operations Research. **59** (3): 535. [doi:10.1287/opre.1110.0941](#).
- [27]. T. Murata Petri Nets: Properties, Analysis and Applications
- [28]. Tadao Murata, “Petri nets: properties, analysis and applications”, Proc. IEEE, Vol. 77, no. 4, April, 1989, pp. 541 – 580.
- [29]. Wadhwa, Raoul R.; Cascella, Marco (2021), "[Steady State Concentration](#)", StatPearls, Treasure Island (FL): StatPearls Publishing, [PMID 31985925](#), retrieved 2021-06-.
- [30]. ARENA User's Guide, Sewickley: Systems Modeling Co., 1996.
- [31]. <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/> - everything about Petri Nets
- [32]. "[Rockwell - Arena Simulation](#)". Archived from [the original](#) on 2009-04-20. Retrieved 2009-03-26.
- [33]. "[Updating ExtendSim](#)". [extendsim.com](#). Retrieved 2021-04-05.